

29182

II 29. 182

1917

Professor Kalkbrenner

Oliver bei Danzig

4540/2/G/57m

für

Separatabdruck aus
 „Annalen der Physik“, IV. Folge,
 Bd. 52, Heft 8.
 Verlag von Johann Ambrosius Barth.

2. Zur Theorie der Opaleszenzstrahlung; von Eberhard Buchwald.

Einleitung.

Die Art, wie in v. Laues Untersuchung über die „Beugungserscheinungen an vielen unregelmäßig verteilten Teilchen“¹⁾ das bekannte Phänomen der Lykopodiumringe behandelt wird, ist ein bezeichnendes Beispiel für die Vertiefung eines Problems der klassischen Physik durch die moderne. Eine früher gar nicht oder wenig beachtete Seite der Erscheinung wird betont und nach einer durch die atomistische Anschauungsweise bestimmten Richtung ausgebaut: nicht die Ringe als solche interessieren, sondern die Granulation innerhalb der Ringe, nicht eine Intensität also, sondern eine Intensitätsschwankung.

Derartige Schwankungserscheinungen sind mit dem Übergang von der makroskopischen zur mikroskopischen Behandlungsweise der Naturvorgänge mehr und mehr in den Interessenkreis getreten und haben bei der Lösung des zentralen Problems der modernen Physik, des Atomproblems, mehr als einmal eine entscheidende Rolle gespielt. Es genügt, an die Brownsche Molekularbewegung und an die radioaktiven Schwankungen zu erinnern. Auch die Theorie der von einem Resonatorenhaufen zerstreuten Strahlungsenergie, der Opaleszenzstrahlung, führt auf die Physik der Schwankungen. Mit einer eigentümlichen Variante: zwar handelt es sich sowohl bei der Opaleszenzstrahlung (soweit sie von bewegten Resonatoren ausgeht) wie z. B. in der Radioaktivität um eine bestimmte Größe und deren Schwankung; aber bei der Opaleszenzstrahlung kommt hinzu, daß diese Größe überhaupt

1) M. v. Laue, Berl. Ber. 47. p. 1144. 1914. Dazu auch Verh. d. D. Physik. Ges. 19. p. 19. 1917.



erst ihr Dasein einer (nicht direkt beobachtbaren) Schwingungserscheinung verdankt.

Daß Schwingungen im strahlenden Medium die conditione qua non für die Opaleszenz sind, wird allerdings in der Literatur teilweise nicht betont, teilweise sogar bestritten. Das Folgende — bis auf § 2, der die Schwingungen der Opaleszenzstrahlung selbst behandelt — soll zu dieser Frage einen Beitrag liefern; ist sie doch durch die Oseenschen¹⁾ Arbeiten mit ihrer Einteilung der seitlichen Ausstrahlung in eine „Rayleigh-Plancksche“, von dem Einzelresonator herführende, und eine „Keesom-Einstein“-sche, von der Resonatorenkonfiguration abhängige, neuerdings wieder brennend geworden.

§ 1.

Wir gehen aus von einer Arbeit von Reiche²⁾, in der die Formeln der Dispersionstheorie für den Fall einer dünnen Lagerung der Resonatoren — wenig Resonatoren im Kubus der Wellenlänge — abgeleitet werden, und nehmen mit Reiche einen Würfel von der Kantenlänge L an, in dem sich N Resonatoren 1, 2, ... s ... N befinden, zunächst an Gleichgewichtslagen x_s, y_s, z_s gebunden, wobei wir, im Gegensatz zu Reiche, den Koordinatenanfangspunkt in den Würfelmittelpunkt legen. Auf den Würfel falle eine seitlich unbegrenzte ebene Welle

$$(1) \quad \mathfrak{E}_0 = \mathfrak{A} e^{i\omega t} e^{-ik_0(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

[$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_x \mathfrak{A}_y \mathfrak{A}_z)$ der Amplitudenvektor; ω die Frequenz;

$$k_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0},$$

wo c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und λ_0 die Wellenlänge; α, β, γ die Richtungskosinusse der Wellennormalen].

Das Feld in einem beliebigen Aufpunkt $x_0 y_0 z_0$ setzt sich zusammen aus dem Feld der einfallenden Welle und den Feldern aller Resonatoren:

$$(2) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \sum_s^{1 \dots N} \mathfrak{E}_s.$$

1) C. W. Oseen, Physik. Zeitschr. 17. p. 233. 1916 und 17. p. 341. 1916.

2) F. Reiche, Ann. 50. p. 1 u. 121. 1916.

In der üblichen Weise drücken wir \mathfrak{E}_s durch den Hertz-schen Vektor \mathfrak{Z}_s aus:

$$(3) \quad \mathfrak{Z}_s = \mathfrak{P}_s \frac{e^{-ik_0 r_{0s}}}{r_{0s}},$$

(\mathfrak{P}_s das Moment des s ten Resonators,

$$r_{0s} = \{(x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2 + (z_0 - z_s)^2\}^{1/2},$$

die Entfernung des Aufpunktes vom Resonator s)

$$(4) \quad \mathfrak{E}_s = \text{grad div } \mathfrak{Z}_s - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_s}{\partial t^2}.$$

Die \mathfrak{P}_s bestimmen sich aus der Schwingungsgleichung des Resonators

$$(5) \quad (\omega_0^2 - \omega^2) \mathfrak{P}_s = \frac{\varepsilon^2}{m} \left\{ \mathfrak{E}_0 + \sum_{s'}^{1 \dots N} \mathfrak{E}_{s'} \right\},$$

wo als neue Bezeichnungen die Eigenfrequenz ω_0 des schwingenden Elektrons, dessen Ladung ε und dessen Masse m hinzukommen. Von der Reibungsdämpfung ist hierbei abgesehen, weil sich alles Folgende auf ein Spektralgebiet fern vom Absorptionsstreifen bezieht; über die Vernachlässigung der Strahlungsdämpfung vgl. § 4.

Die letzte Summe trägt der Tatsache Rechnung, daß auf ein Elektron alle übrigen wirken; sie ist also über alle Elektronen mit Ausnahme des gerade betrachteten zu erstrecken, was durch den Strich am Summenzeichen ausgedrückt ist.

In die in Komponenten zerlegte Gleichung (5) führen wir \mathfrak{E}_0 aus (1) und

$$\sum_{s'}^{1 \dots N} \mathfrak{E}_{s'}$$

ein; $\mathfrak{E}_{s'}$ ist dabei, \mathfrak{E}_s entsprechend, durch die Gleichungen

$$(4') \quad \mathfrak{E}_{s'} = \text{grad div } \mathfrak{Z}_{s'} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_{s'}}{\partial t^2},$$

$$(3') \quad \mathfrak{Z}_{s'} = \mathfrak{P}_{s'} \frac{e^{-ik_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}}$$

bestimmt, wo $r_{ss'}$ der Abstand des Resonators s vom Resonator s' ist. Wir finden nach einigen Umrechnungen für \mathfrak{P}_s oder bequemer für die damit in einfacher Weise zusammenhängende Größe q_s ($q_{sx} q_{sy} q_{sz}$)

$$(6) \quad q_s = \mathfrak{P}_s e^{i\omega t} e^{ik_0(\alpha x_s + \beta y_s + \gamma z_s)}$$

folgendes Gleichungstriplet:

$$(7) \quad \begin{cases} q_{sx} = \sigma \mathfrak{A}_x + \sigma \sum_{s'}^{1..N} \{ A_{ss'} q_{s'x} + G_{ss'} q_{s'y} + F_{ss'} q_{s'z} \}, \\ q_{sy} = \sigma \mathfrak{A}_y + \sigma \sum_{s'}^{1..N} \{ G_{ss'} q_{s'x} + B_{ss'} q_{s'y} + E_{ss'} q_{s'z} \}, \\ q_{sz} = \sigma \mathfrak{A}_z + \sigma \sum_{s'}^{1..N} \{ F_{ss'} q_{s'x} + E_{ss'} q_{s'y} + C_{ss'} q_{s'z} \}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung

$$(8) \quad \sigma = \frac{\varepsilon^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

gesetzt ist und die A_{ss} , $G_{ss'}$ usw. bestimmte, im wesentlichen von $r_{ss'}$ abhängige, Koeffizienten sind:

$$(9) \quad \begin{cases} A_{ss'} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x_s^2} \left(\frac{e^{-ik_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right) + k_0^2 \frac{e^{-ik_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right] e^{-ik_0 \{ \alpha(x_{s'} - x_s) + \beta(y_{s'} - y_s) + \gamma(z_{s'} - z_s) \}}, \\ B_{ss'} = \left[\frac{\partial^2}{\partial y_s^2} \left(\frac{e^{-ik_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right) + k_0^2 \frac{e^{-ik_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right] e^{-ik_0 \{ \alpha(x_{s'} - x_s) + \beta(y_{s'} - y_s) + \gamma(z_{s'} - z_s) \}}, \\ C_{ss'} = \left[\frac{\partial^2}{\partial z_s^2} \left(\frac{e^{-ik_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right) + k_0^2 \frac{e^{-ik_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right] e^{-ik_0 \{ \alpha(x_{s'} - x_s) + \beta(y_{s'} - y_s) + \gamma(z_{s'} - z_s) \}}, \\ E_{ss'} = \frac{\partial^2}{\partial y_s \partial x_s} \left(\frac{e^{-ik_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right) e^{-ik_0 \{ \alpha(x_{s'} - x_s) + \beta(y_{s'} - y_s) + \gamma(z_{s'} - z_s) \}}, \\ F_{ss'} = \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_s} \left(\frac{e^{-ik_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right) e^{-ik_0 \{ \alpha(x_{s'} - x_s) + \beta(y_{s'} - y_s) + \gamma(z_{s'} - z_s) \}}, \\ G_{ss'} = \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial y_s} \left(\frac{e^{-ik_0 r_{ss'}}}{r_{ss'}} \right) e^{-ik_0 \{ \alpha(x_{s'} - x_s) + \beta(y_{s'} - y_s) + \gamma(z_{s'} - z_s) \}}. \end{cases}$$

Nunmehr entwickelt Reiche nach einem Parameter

$$(10) \quad \varkappa = \frac{\lambda_0}{L} \sqrt{N}:$$

$$(11) \quad q_s = q_{0s} + \varkappa q_{1s} + \varkappa^2 q_{2s} + \dots,$$

setzt diesen Wert in (7) ein, ordnet nach Potenzen von \varkappa und findet, indem er die Koeffizienten dieser Potenzen gleich Null setzt, Gleichungssysteme, die nach den q aufgelöst so aussehen:

$$(12) \quad \begin{cases} q_{0sx} = \sigma \mathfrak{A}_x, \\ q_{0sy} = \sigma \mathfrak{A}_y, \\ q_{0sz} = \sigma \mathfrak{A}_z. \end{cases}$$

$$(13) \quad \begin{cases} q_{1sx} = \sigma^2 \left\{ \mathfrak{A}_x \sum_{s'}^{1..N} \bar{A}_{ss'} + \mathfrak{A}_y \sum_{s'}^{1..N} \bar{G}_{ss'} + \mathfrak{A}_z \sum_{s'}^{1..N} \bar{F}_{ss'} \right\}, \\ q_{1sy} = \sigma^2 \left\{ \mathfrak{A}_x \sum_{s'}^{1..N} \bar{G}_{ss'} + \mathfrak{A}_y \sum_{s'}^{1..N} \bar{B}_{ss'} + \mathfrak{A}_z \sum_{s'}^{1..N} \bar{E}_{ss'} \right\}, \\ q_{1sz} = \sigma^2 \left\{ \mathfrak{A}_x \sum_{s'}^{1..N} \bar{F}_{ss'} + \mathfrak{A}_y \sum_{s'}^{1..N} \bar{E}_{ss'} + \mathfrak{A}_z \sum_{s'}^{1..N} \bar{C}_{ss'} \right\}. \end{cases}$$

$$(14) \quad \begin{cases} q_{2sx} = \sigma^3 \left\{ \mathfrak{A}_x \sum_{s'} \sum_{s''} [\bar{A}_{ss'} \bar{A}_{s's''} + \bar{G}_{ss'} \bar{G}_{s's''} + \bar{F}_{ss'} \bar{F}_{s's''}] \right. \\ \quad + \mathfrak{A}_y \sum_{s'} \sum_{s''} [\bar{A}_{ss'} \bar{G}_{s's''} + \bar{G}_{ss'} \bar{B}_{s's''} + \bar{F}_{ss'} \bar{E}_{s's''}] \\ \quad \left. + \mathfrak{A}_z \sum_{s'} \sum_{s''} [\bar{A}_{ss'} \bar{F}_{s's''} + \bar{G}_{ss'} \bar{E}_{s's''} + \bar{F}_{ss'} \bar{C}_{s's''}] \right\}, \\ q_{2sy} = \dots \\ q_{2sz} = \dots \quad \text{usw.} \end{cases}$$

Hierin ist

$$(15) \quad \bar{A}_{ss'} = \varkappa A_{ss'} \quad \text{usw.}$$

gesetzt, wobei, wie Reiche zeigt, die überstrichenen Größen bei $\varkappa = 0$ endlich bleiben; und der Strich an der Summe $\sum_{s''}$ bedeutet, daß über alle s'' von 1 bis N außer s' zu summieren ist.

Der Zweck dieses Vorgehens ist folgender: Denkt man sich den Würfel mit seinem Inhalte allmählich vergrößert, so daß er sich dauernd ähnlich bleibt, so wird \varkappa immer kleiner und die Lagerung der Resonatoren dünner und dünner. Im Grenzfall ganz dünner Lagerung ist \varkappa eine sehr kleine Zahl, man kann die Potenzreihe (11) mit dem ersten Gliede abbrechen und hat das System (12) als Lösung unseres Problems in erster Näherung: allein der Einfluß der äußeren Welle bleibt bestehen. Bei etwas dichter Lagerung berücksichtigen wir in der Potenzreihe (11) noch das zweite Glied und finden die Lösung des Problems in zweiter Näherung durch Zusammenfassen von (12) und (13). In dieser Näherung wird

außer der äußeren Welle der Einfluß der Resonatoren berücksichtigt, dabei aber so gerechnet, als ob diese allein von der äußeren Welle beeinflusst wären. Und so fort: in dritter Näherung werden drei Glieder der Potenzreihe (11) mitgenommen und damit zu den Systemen (12) und (13) das Gleichungstripel (14) hinzugefügt. In diesem Falle wird nicht nur der Einwirkung der anderen Molekeln, sondern auch dem Umstände Rechnung getragen, daß diese neben der äußeren Welle auch durch die Zustrahlungen der übrigen Molekeln erregt werden, die aber ihrerseits als nur durch die äußere Welle erregt angesehen werden.

Führen wir die Lösung q_s in (6), dann \mathfrak{P}_s in (3), darauf \mathfrak{B}_s in (4) und endlich \mathfrak{E}_s in (2) ein, so finden wir einen Ausdruck für das elektrische Feld in einem beliebigen Aufpunkte $x_0 y_0 z_0$. Wir schreiben ihn gleich für den im folgenden allein behandelten Spezialfall hin, daß die äußere Welle in Richtung der positiven x -Achse fortschreitet ($\alpha = 1, \beta = \gamma = 0$) und linear polarisiert ist ($\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_z = 0$).

$$(16) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \left\{ \sigma \kappa \sum_s^{1..N} D_{12}^{0s} + \sigma^2 \kappa^2 \sum_s \sum_{s'}' D_{12}^{0ss'} + \dots \right\}, \\ \mathfrak{E}_y = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \left\{ 1 + \sigma \kappa \sum_s D_{22}^{0s} + \sigma^2 \kappa^2 \sum_s \sum_{s'}' D_{22}^{0ss'} + \dots \right\}, \\ \mathfrak{E}_z = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \left\{ \sigma \kappa \sum_s D_{32}^{0s} + \sigma^2 \kappa^2 \sum_s \sum_{s'}' D_{32}^{0ss'} + \dots \right\}. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen, die wir zum Ausgangspunkte der folgenden Rechnung nehmen, sind die D gewisse Ausdrücke, gebildet aus den in (9) aufgeführten Koeffizienten $A_{ss'}$ usw. und aus Koeffizienten, die aus diesen hervorgehen, wenn man die Koordinaten von s durch die des Aufpunktes und die Koordinaten von s' durch die von s ersetzt, A_{0s} usw.:

$$(17) \quad \begin{cases} \kappa D_{12}^{0s} = G_{0s} = -k_0^2 \frac{(y_0 - y_s)(x_0 - x_s)}{r_{0s}^3} \frac{e^{-ik_0 r_{0s}}}{r_{0s}} e^{-ik_0(x_s - x_0)}, \\ \kappa D_{22}^{0s} = B_{0s} = k_0^2 \left[1 - \frac{(y_0 - y_s)^2}{r_{0s}^2} \right] \frac{e^{-ik_0 r_{0s}}}{r_{0s}} e^{-ik_0(x_s - x_0)}, \\ \kappa D_{32}^{0s} = E_{0s} = -k_0^2 \frac{(y_0 - y_s)(x_0 - x_s)}{r_{0s}^3} \frac{e^{-ik_0 r_{0s}}}{r_{0s}} e^{-ik_0(x_s - x_0)}, \\ \kappa^2 D_{12}^{0ss'} = A_{0s} G_{ss'} + G_{0s} B_{ss'} + F_{0s} E_{ss'}, \\ \kappa^2 D_{22}^{0ss'} = G_{0s} G_{ss'} + B_{0s} B_{ss'} + E_{0s} E_{ss'}, \\ \kappa^2 D_{32}^{0ss'} = F_{0s} G_{ss'} + E_{0s} B_{ss'} + C_{0s} E_{ss'}. \end{cases}$$

Die ersten drei dieser Gleichungen sind die Reicheschen Gleichungen (226), p. 129, für den Fall, daß der Aufpunkt in großer Entfernung vom Würfel liegt, was im folgenden angenommen wird.

Da uns lediglich die von den Elektronen zerstreute Energie, das Opaleszenzfeld, beschäftigen wird, lassen wir in der zweiten der Ausgangsgleichungen (16) den Summanden 1 in der geschweiften Klammer und damit die äußere Welle fort. Die äußere Welle hat gewissermaßen ihre Schuldigkeit getan, wenn sie die Resonatoren zum Mitschwingen angeregt hat. Wir vereinfachen die Ausgangsgleichungen zunächst (für §§ 1 und 2) noch weiter: wir nehmen so dünne Lagerung an, daß wir die doppelten und höheren Summen, die der gegenseitigen Beeinflussung der Elektronen ihr Dasein verdanken, fortlassen und nur die ersten Summen beibehalten. Dadurch geht (16), unter Berücksichtigung von (17), über in

$$(18) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \sigma \kappa \sum_s D_{12}^{0s} = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \sigma \sum_s G_{0s}, \\ \mathfrak{E}_y = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \sigma \kappa \sum_s D_{22}^{0s} = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \sigma \sum_s B_{0s}, \\ \mathfrak{E}_z = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \sigma \kappa \sum_s D_{32}^{0s} = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \sigma \sum_s E_{0s}. \end{cases}$$

Hierin führen wir G_{0s} , B_{0s} , E_{0s} aus (17) ein, gestalten diese Ausdrücke aber vorher durch eine aus der Beugungstheorie bekannte Vereinfachung um, indem wir r_{0s} im Nenner durch die konstante Entfernung R des Aufpunktes vom Koordinatenanfangspunkt und im Exponenten $-i k_0 r_{0s}$ auf Grund der Gleichungsfolge

$$\begin{aligned} r_{0s}^2 &= (x_0 - x_s)^2 + (y_0 - y_s)^2 + (z_0 - z_s)^2 \\ &= R^2 - 2(x_0 x_s + y_0 y_s + z_0 z_s) \\ &= R^2 \left\{ 1 - 2 \frac{x_0 x_s + y_0 y_s + z_0 z_s}{R^2} \right\}, \\ (19) \quad r_{0s} &= R \left(1 - \frac{x_0 x_s + y_0 y_s + z_0 z_s}{R^2} \right), \end{aligned}$$

durch diesen letzteren Wert ersetzen. Schreiben wir ferner in der Amplitude $x_0 y_0$ usw. für $(x_0 - x_s)(y_0 - y_s)$ usw., so wird

$$(20) \quad \begin{cases} G_{0s} = -k_0^2 \frac{x_0 y_0}{R^2} \frac{e^{-ik_0 R}}{R} e^{i k_0 \frac{x_0 x_s + y_0 y_s + z_0 z_s}{R}} e^{-ik_0(x_s - x_0)}, \\ B_{0s} = k_0^2 \left[1 - \frac{y_0^2}{R^2}\right] \frac{e^{-ik_0 R}}{R} e^{i k_0 \frac{x_0 x_s + y_0 y_s + z_0 z_s}{R}} e^{-ik_0(x_s - x_0)}, \\ E_{0s} = -k_0^2 \frac{y_0 z_0}{R^2} \frac{e^{-ik_0 R}}{R} e^{i k_0 \frac{x_0 x_s + y_0 y_s + z_0 z_s}{R}} e^{-ik_0(x_s - x_0)}, \end{cases}$$

und damit (18) zu

$$(21) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_x = -e^{i\omega t} \mathfrak{Y}_y \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \sigma k_0^2 \frac{x_0 y_0}{R^2} \sum_s e^{\frac{ik_0}{R} \{(x_0 - R)x_s + y_0 y_s + z_0 z_s\}}, \\ \mathfrak{E}_y = +e^{i\omega t} \mathfrak{Y}_y \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \sigma k_0^2 \left[1 - \frac{y_0^2}{R^2}\right] \sum_s e^{\frac{ik_0}{R} \{(x_0 - R)x_s + y_0 y_s + z_0 z_s\}}, \\ \mathfrak{E}_z = -e^{i\omega t} \mathfrak{Y}_y \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \sigma k_0^2 \frac{y_0 z_0}{R^2} \sum_s e^{\frac{ik_0}{R} \{(x_0 - R)x_s + y_0 y_s + z_0 z_s\}}, \end{cases}$$

woraus

$$(22) \quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \sqrt{\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_z^2} \\ = e^{i\omega t} \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \mathfrak{Y}_y \left(\frac{\varrho}{R}\right) \sigma k_0^2 \sum_s e^{\frac{ik_0}{R} \{(x_0 - R)x_s + y_0 y_s + z_0 z_s\}}, \end{cases}$$

wo

$$\varrho = \sqrt{R^2 - y_0^2}$$

den Abstand des Aufpunktes von der Y-Achse bezeichnet.

Nur nebenbei sei daran erinnert, daß — genau wie bei einem Resonator — der Feldvektor im Aufpunkt wegen

$$(23) \quad \mathfrak{E}_x \cdot x_0 + \mathfrak{E}_y \cdot y_0 + \mathfrak{E}_z \cdot z_0 = 0$$

auf R senkrecht steht und für die auf der Y-Achse, d. i. in der Schwingungsrichtung der Resonatoren, gelegenen Aufpunkte verschwindet, da für sie $\varrho = 0$ ist.

Um von diesem \mathfrak{E} zu einem experimentell verwertbaren Ausdrucke zu gelangen, haben wir zwei Mittelwertbildungen auszuführen, die (und deren Reihenfolge) eine wesentliche Rolle spielen werden. Wir haben zunächst bei festgehaltenen Atomlagen den zeitlichen Mittelwert von \mathfrak{E}^2 , \mathfrak{E}^2 über eine oder mehrere Perioden zu bilden. Physikalisch ist dieses Verfahren auch bei einem Gase zulässig; denn die Resonatoren bewegen sich im Vergleich zu den Lichtschwingungen so langsam, daß sie für eine Reihe von Perioden als festliegend an-

gesehen werden können. Das so gefundene $\overline{\mathfrak{E}^2}$ ist aber nochmals zu mitteln; denn im Laufe der Beobachtungszeit ändern die Molekeln ihre Konstellation, und jeder Konstellation entspricht ein anderes $\overline{\mathfrak{E}^2}$. Nicht das berechnete $\overline{\mathfrak{E}^2}$ also, sondern der „Konstellationsmittelwert“ $\mathfrak{M}(\overline{\mathfrak{E}^2})$ gelangt zur Beobachtung.

$\overline{\mathfrak{E}^2}$ folgt aus \mathfrak{E} in bekannter Weise dadurch, daß der Faktor von $e^{i\omega t}$ mit seinem konjugierten Werte multipliziert und das Produkt halbiert wird:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}^2} &= \frac{\mathfrak{N}_y^2}{2} \cdot \frac{1}{R} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^2 \sigma^2 k_0^4 \\ &\sum_s e^{\frac{ik_0}{R} \{ (x_0 - R)x_s + y_0 y_s + z_0 z_s \}} \sum_s e^{-\frac{ik_0}{R} \{ (x_0 - R)x_s + y_0 y_s + z_0 z_s \}} \end{aligned} \right. \quad 1)$$

1) P. Debye findet in seiner Arbeit über die Zerstreuung von Röntgenstrahlen (Ann. 46. p. 809. 1915) die entsprechende Gleichung; nur daß Debye Elektronen betrachtet, deren Eigenfrequenz im Vergleich mit der der Röntgenwellen zu vernachlässigen ist; dadurch geht unser

$$\sigma^2 k_0^4 = \frac{\varepsilon^4}{m^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \frac{\omega^4}{c^4}$$

in das Debyesche

$$\frac{\varepsilon^4}{m^2 c^4}$$

über.

Genau der gleiche Ausdruck wie für $\overline{\mathfrak{E}^2}$ ergibt sich für $\overline{\mathfrak{H}^2}$, wenn man statt von (2) und (4) von

$$(2') \quad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 + \sum_s \mathfrak{H}_s,$$

und

$$(4') \quad \mathfrak{H}_s = \text{rot} \frac{\partial \mathfrak{B}_s}{\partial c t},$$

(vgl. Abraham-Föppl, Theorie der Elektrizität II, p. 54) ausgeht. Man findet schließlich für die Komponenten des magnetischen Opaleszenzfeldes:

$$(21') \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H}_x &= -e^{i\omega t} \mathfrak{N}_y \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \sigma k_0^2 \frac{x_0}{R} \sum_s e^{\frac{ik_0}{R} \{ (x_0 - R)x_s + y_0 y_s + z_0 z_s \}}, \\ \mathfrak{H}_y &= 0, \\ \mathfrak{H}_z &= +e^{i\omega t} \mathfrak{N}_y \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \sigma k_0^2 \frac{x_0}{R} \sum_s e^{\frac{ik_0}{R} \{ (x_0 - R)x_s + y_0 y_s + z_0 z_s \}}, \end{aligned} \right.$$

woraus $\mathfrak{H} = \mathfrak{E}$. \mathfrak{H} steht auf \mathfrak{E} und R senkrecht.

Aus dem Produkte der Summen müssen wir für die folgende Rechnung zunächst die Glieder, die gleichem s entsprechen, herausziehen. Jedes derartige Glied hat den Wert 1, und da N davon vorhanden sind, ist ihre Summe N , und es folgt nach Einführung neuer Summationsbuchstaben:

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathfrak{E}^2} &= \frac{\mathfrak{U}_y^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \left(\frac{\varrho}{R} \right) \sigma^2 k_0^4 \\ &\left\{ N + \sum_p \sum_q e^{\frac{ik_0}{R} \{ (x_p - x_q)(x_0 - R) + (y_p - y_q)y_0 + (z_p - z_q)z_0 \}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Konstellationsmittelung vollzieht sich nunmehr so: Wir bilden den Mittelwert jedes einzelnen Summengliedes, indem wir es mit der Wahrscheinlichkeit multiplizieren, daß die Koordinaten des Gliedes gerade die Werte $x_p y_p z_p, x_q y_q z_q$ haben, und dann über $x_p y_p z_p, x_q y_q z_q$ von $-L/2$ bis $+L/2$ integrieren. Die fragliche Wahrscheinlichkeit ist

$$(26) \quad \frac{dx_p dy_p dz_p}{L^3} \cdot \frac{dx_q dy_q dz_q}{L^3}$$

der Mittelwert eines jeden Summengliedes also

$$(27) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{L^6} \iiint_{-L/2}^{+L/2} \iiint_{-L/2}^{+L/2} \int e^{\frac{ik_0}{R} \{ (x_p - x_q)(x_0 - R) + (y_p - y_q)y_0 + (z_p - z_q)z_0 \}} \\ &\quad dx_p dy_p dz_p dx_q dy_q dz_q \\ &= \left[\frac{\sin k_0 \frac{x_0 - R}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{x_0 - R}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \frac{y_0}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{y_0}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \frac{z_0}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{z_0}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2 \end{aligned}$$

und da $N(N-1)$ derartige Glieder vorhanden sind, ist der $N(N-1)$ -fache Betrag von (27) als Konstellationsmittelwert der Summe in (25) einzusetzen. Damit finden wir endgültig:

$$(28) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}(\overline{\mathfrak{E}^2}) &= \frac{\mathfrak{U}_y^2}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^2 \sigma^2 k_0^4 \\ &\left\{ N + N(N-1) \left[\frac{\sin k_0 \frac{x_0 - R}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{x_0 - R}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \frac{y_0}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{y_0}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \frac{z_0}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{z_0}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hätten wir Licht angenommen, das nicht nach der Y-Achse, sondern nach der Z-Achse schwingt, so wäre \mathfrak{U}_z statt \mathfrak{U}_y und ϱ' statt ϱ aufgetreten, wo ϱ' der Abstand des Aufpunktes

von der Z-Achse ist. Im Falle von unpolarisiertem Lichte steht statt q'^2 oder q^2 der Mittelwert

$$\frac{q'^2 + q^2}{2}.$$

Betrachten wir von den beiden Summanden, aus denen sich die zerstreute Intensität zusammensetzt, zuerst den zweiten. Er stellt eine Beugungserscheinung dar, hervorgerufen durch den Würfel, in dem die Resonatoren eingeschlossen sind.¹⁾ Denken wir uns in der Entfernung x_0 eine zur X-Achse senkrechte Ebene gelegt und beschränken wir die Betrachtung in dieser Ebene auf Punkte in der Nähe der X-Achse, so steht, wenn wir vorläufig von der ersten eckigen Klammer absehen, zur Diskussion der Ausdruck

$$(29) \quad \left[\frac{\sin \frac{\mu L}{2}}{\frac{\mu L}{2}} \right]^2 \cdot \left[\frac{\sin \frac{\nu L}{2}}{\frac{\nu L}{2}} \right]^2,$$

wo

$$\mu = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{x_0}{R}, \quad \nu = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{x_0}{R},$$

der aus der klassischen Beugungstheorie als Fraunhofer'sche Beugungserscheinung einer quadratischen Öffnung wohlbekannt ist.²⁾ Er liefert als Minima dunkle Streifen annähernd parallel zur Y- und Z-Richtung, Streifen, die im Falle $L \gg \lambda_0$ sehr eng liegen. Da es sich bei uns nicht um eine beugende Öffnung, sondern um einen beugenden Körper handelt, steht neben den beiden Faktoren als dritter der „Tiefenfaktor“

$$\left[\frac{\sin k_0 \frac{x_0 - R}{R} \frac{L}{2}}{k_0 \frac{x_0 - R}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2,$$

der auf der X-Achse gleich 1 ist und auf den Kreisen um die X-Achse verschwindet, für deren Winkelabstand von der X-Achse

1) Im Gegensatz hierzu entsteht die Interferenzerscheinung bei P. Debye, l. c. dadurch, daß viele gleichgebaute Elektronenkomplexe, nach den verschiedensten Richtungen orientiert, vorhanden sind.

2) Vgl. etwa F. Neumann, Vorlesungen über theoretische Optik, p. 78, oder Winkelmanns Handbuch, Bd. Optik, p. 1070.

$$k_0 \frac{x_0 - R}{R} \frac{L}{2} = -k_0 (1 - \cos \varphi) \frac{L}{2} = n\pi,$$

(n eine ganze Zahl), d. h.

$$(30) \quad 1 - \cos \varphi = n \frac{\lambda_0}{L}$$

gilt. Es tritt also hier eine ganz ähnliche Überlagerung von „Quetelet“-schen Ringen über eine der bekannten Beugungserscheinungen auf, wie sie Laue¹⁾ in seiner grundlegenden Arbeit über die Röntgenstrahlbeugung gefunden oder wie sie Verf.²⁾ beim Hintereinandersetzen zweier Kreuzgitter photographiert hat.

Auf der X-Achse hat der Tiefenfaktor den Wert 1, sein absolutes Maximum. Der erste dunkle Ring folgt, wie man leicht berechnet, in einem Winkelabstand, der mit einem Streifen verhältnismäßig hoher Ordnungszahl der primären Beugungserscheinung zusammenfällt, so daß sich also diese Erscheinung anfänglich ziemlich ungestört auf langsam dunkler werdendem Grunde ausbilden kann. Man findet, daß der erste dunkle Queteletsche Ring für

$$\frac{L}{\lambda_0} = 1000$$

erst zwischen dem 44. und 45. dunklen Streifen, für

$$\frac{L}{\lambda_0} = 100$$

beim 14. dunklen Streifen liegt.

Für eine Ebene senkrecht zur Z-Achse lautet der zweidimensionale Beugungsdruck:

$$(29') \quad \left[\frac{\sin k_0 \frac{x_0 - R}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{x_0 - R}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \frac{y_0}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{y_0}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2.$$

Daß im ersten Term nicht der übliche Sinus

$$\left(\frac{x_0}{R}, \frac{y_0}{R}, \frac{z_0}{R} \right)$$

1) M. Laue, Münch. Ber. p. 303. 1912; Ann. 41. p. 971. 1913.

2) E. Buchwald, Physik. Zeitschr. 15. p. 331. 1914. Dort weitere Literatur.

auftritt, sondern Sinus minus 1, rührt einfach daher, daß die Punkte der beugenden quadratischen „Öffnung“, L^2 , als die der Würfel von der Z-Achse gesehen erscheint, nicht in gleicher Phase schwingen, weil das Licht seitlich einfällt. Der Gangunterschied der in einer Richtung ψ abgelenkten Randstrahlen beträgt dann nicht wie in der geläufigen Theorie $L \sin \psi$, sondern

$$L \sin \psi - L = L(\sin \psi - 1).$$

Diese veränderte Form des Faktors hat überdies zur Folge, daß in der Mitte der Beugungserscheinung, auf der Z-Achse, ein Minimum liegen kann, wenn nämlich L ein gerades Vielfaches von $\lambda_0/2$ ist. Aber auch im günstigen Falle (L ein ungerades Vielfaches von $\lambda_0/2$) ist das Maximum infolge des großen Nenners nur sehr schwach im Verhältnis zu dem auf der X-Achse. Dazu kommt, daß der Tiefenfaktor

$$\left[\frac{\sin k_0 \frac{\kappa_0}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{\kappa_0}{R} \frac{L}{2}} \right]^2$$

in dem gleichen Sinne wirkt. Auch hier ergeben sich Ringe; aber die Ringe haben, je nachdem L ein ungerades oder gerades Vielfaches von $\lambda_0/2$ ist, auf der Z-Achse ein Maximum oder ein Minimum. Im ersten Falle kann sich die primäre Beugungserscheinung in Achsennähe ausbilden; denn man berechnet, daß der erste dunkle Ring für

$$\frac{L}{\lambda_0} = 100,5$$

erst bei ihrem 10., für

$$\frac{L}{\lambda_0} = 1000,5$$

erst zwischen ihrem 31. und 32. dunklen Streifen liegt. Freilich sorgt der Nenner des Tiefenfaktors auch hier für weitere Schwächung der Erscheinung.

Genau so liegen die Verhältnisse in einer Ebene senkrecht zur Y-Achse, wenn das einfallende Licht unpolarisiert ist. Schwingt das Licht in der Y-Richtung, so steht vor der geschweiften Klammer in (28) das Null bzw. sehr klein werdende q^2 , das ein fast völliges Verschwinden des ganzen Phänomens bewirkt. Auch in einer beliebigen anderen Richtung tritt nur eine außerordentlich lichtschwache Erscheinung auf.

Von größerem Interesse als das Beugungsglied ist für das Folgende das erste Glied des Opaleszenzfeldes (28); denn dieses Glied ist nicht abhängig von der speziellen Begrenzung des Resonatorenhaufens. Wir schreiben es, indem wir den Winkel ϑ zwischen Schwingungsrichtung der primären Welle und λ einführen:

$$(31) \quad \frac{1}{2} \mathfrak{N}_y^2 \frac{1}{R^2} \sin^2 \vartheta \sigma^2 k_0^4 N.$$

Zunächst erhebt sich die Frage, ob dieses mit dem Faktor N behaftete Glied praktisch gegen das des Beugungseffektes, das durch den Faktor N^2 von vornherein im Vorteil ist, überhaupt ins Gewicht fallen kann; wir präzisieren sie dahin: in welchem Abstände von der X-Achse (bei den anderen Achsen muß er weit geringer sein) wird das Produkt der drei schwächenden Faktoren

$$\left[\frac{\sin k_0 \frac{x_0 - R}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{x_0 - R}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \frac{y_0}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{y_0}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \frac{z_0}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{z_0}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2$$

den Wert $1/N$ annehmen? Dann würden beide Glieder des Opaleszenzfeldes annähernd gleich; weiter draußen nimmt der Einfluß des Beugungsgliedes schnell ab. Es zeigt sich, daß dieser Punkt ziemlich bald erreicht ist. Am meisten Intensität finden wir in den Beugungsmaximis noch, wenn wir auf dem Schirm senkrecht zur X-Achse, auf dem wir die Beugungserscheinung aufgefangen haben, längs der Y- oder Z-Achse fortschreiten; denn in den Winkelfeldern nimmt die Intensität bekanntlich sehr rasch ab. Aber auch auf einer Achse ist nach wenigen Winkelgraden die gewünschte Schwächung da. Da wir dünne Lagerung angenommen haben, wollen wir $\mathfrak{N}_{\lambda_0^3}$ den experimentell möglichen Wert von der Größenordnung 1 geben, N also von der Größenordnung

$$\left(\frac{L}{\lambda_0} \right)^3$$

wählen. Bei dünner Lagerung im mathematischen Sinne, d. i.

$$N \ll \left(\frac{L}{\lambda_0} \right)^3,$$

läge die Sache für das Beugungsglied natürlich noch viel ungünstiger. Bleiben wir bei dem vorhin angenommenen Werte

$$\frac{L}{\lambda_0} = 1000,$$

wählen wir somit $N = 10^9$, so berechnet man, daß die quadratischen Faktoren im Winkelabstand von ca. 7° , wo in diesem Falle das 14. Ringmaximum mit dem 244. Beugungsmaximum koinzidiert, den Wert $1/N$ erreicht haben; innerhalb dieses Kegels fällt das Beugungsglied von $N^2 - N$ auf die Größenordnung N . Bei größerem L/λ_0 beschränkt sich — obgleich damit auch N entsprechend größer anzunehmen ist — die Beugungserscheinung noch mehr auf die Umgebung der X -Achse.

Wir integrieren den Ausdruck (31) über die Vollkugel und finden damit, wenn wir den ersten Bestandteil des Opaleszenzfeldes (28) als eigentliche „Opaleszenzstrahlung“ bezeichnen, für deren Gesamtwert

$$\begin{aligned} h &= \pi \mathfrak{V}_y^2 \sigma^2 k_0^4 N \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta, \\ (32) \quad &= \frac{4\pi}{3} \mathfrak{V}_y^2 \sigma^2 k_0^4 N. \end{aligned}$$

Hier setzen wir

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

und führen für

$$\sigma = \frac{\varepsilon^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

auf Grund der Drude-Voigtschen Dispersionsformel den Wert

$$(33) \quad \sigma = \frac{\varepsilon^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{n^2 - 1}{4\pi \mathfrak{N}}$$

ein, wo n der Brechungsquotient des betrachteten Gases ist. Damit wird

$$h = \frac{4\pi^3}{3} L^3 \frac{(n^2 - 1)^2}{\mathfrak{N} \lambda_0^4} \mathfrak{V}_y^2.$$

Nehmen wir schließlich an, daß die einfallende Intensität nicht $\mathfrak{V}_y^2/2$, sondern 1 ist, und fassen wir nicht den ganzen Würfel, sondern die Volumeinheit ins Auge, so haben wir durch $\mathfrak{V}_y^2/2$ und L^3 zu dividieren und bekommen:

$$(34) \quad h = \frac{8\pi^3}{3} \frac{(n^2 - 1)^2}{\mathfrak{N} \lambda_0^4}.$$

Das ist der bekannte, von Lord Rayleigh auf anderem Wege hergeleitete Ausdruck für die vom Volumen 1 zerstreute Energie.

§ 2.

Die Intensität des Opaleszenzfeldes, gegeben durch (28), schwankt um diesen ihren Mittelwert entsprechend der sich dauernd ändernden Konstellation der Resonatoren. Wir fragen nach der Größe der Schwankungen des Feldvektors.

Zu ihrer Berechnung benutzen wir den von Markoff¹⁾ abgeleiteten Satz über die wahrscheinliche Summe von einander unabhängiger in einer Ebene liegender Vektoren und halten uns dabei an die von Laue²⁾ angegebene Bezeichnungsweise. Die N Vektoren, für deren Summe wir uns interessieren, sind die von den N Molekeln im Aufpunkt erregten Feldstärken, die wir nach (22) mit den Abkürzungen

$$(35) \quad \frac{x_0 - R}{R} = \alpha_0', \quad \frac{y_0}{R} = \beta_0, \quad \frac{z_0}{R} = \gamma_0$$

und indem wir den allen gemeinsamen, vor der Summe stehenden Faktor zunächst weglassen, um ihn am Schlusse wieder hinzuzufügen, so schreiben können:

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{A}_1 = e^{ik_0\{\alpha_0'x_1 + \beta_0y_1 + \gamma_0z_1\}} \\ \mathfrak{A}_2 = e^{ik_0\{\alpha_0'x_2 + \beta_0y_2 + \gamma_0z_2\}} \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

oder

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}_1 = \cos k_0\{\alpha_0'x_1 + \beta_0y_1 + \gamma_0z_1\} \\ \quad \quad \quad + i \sin k_0\{\alpha_0'x_1 + \beta_0y_1 + \gamma_0z_1\}, \\ \mathfrak{A}_2 = X_2 + i Y_2, \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_N = X_N + i Y_N. \end{array} \right.$$

Die Wahrscheinlichkeit $d\varrho_m$ des Wertepaares $X_m Y_m$ ist gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß die m -te Molekel

1) A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig und Berlin. 1912.

2) M. v. Laue, Berl. Ber. 47. p. 1144. 1914.

Koordinaten zwischen x_m und $x_m + dx_m$, y_m und $y_m + dy_m$, z_m und $z_m + dz_m$ hat, also nach (26)

$$d\rho_m = \frac{dx_m dy_m dz_m}{L^3}.$$

Wir haben nach Markoff zunächst zu bilden:

$$(38) \quad \int X_m d\rho_m = a_m$$

und

$$(39) \quad \int Y_m d\rho_m = b_m.$$

Es wird

$$\begin{aligned} a_m &= \iiint_{-L/2}^{+L/2} \cos k_0 \{ \alpha_0' x_m + \beta_0 y_m + \gamma_0 z_m \} \frac{dx_m dy_m dz_m}{L^3} \\ a_m &= \frac{1}{k_0^3 \alpha_0' \beta_0 \gamma_0 L^3} \left[\begin{aligned} &\sin k_0 \alpha_0' x_m \sin k_0 \beta_0 y_m \sin k_0 \gamma_0 z_m \\ &- \sin k_0 \alpha_0' x_m \cos k_0 \beta_0 y_m \cos k_0 \gamma_0 z_m \\ &- \cos k_0 \alpha_0' x_m \sin k_0 \beta_0 y_m \cos k_0 \gamma_0 z_m \\ &- \cos k_0 \alpha_0' x_m \cos k_0 \beta_0 y_m \sin k_0 \gamma_0 z_m \end{aligned} \right] + \frac{L}{2} \dots - \frac{L}{2} \dots \\ a_m &= \frac{1}{k_0^3 \alpha_0' \beta_0 \gamma_0 L^3} \cdot 2 \sin k_0 \alpha_0' \frac{L}{2} \cdot 2 \sin k_0 \beta_0 \frac{L}{2} \cdot 2 \sin k_0 \gamma_0 \frac{L}{2} \\ (40) \quad a_m &= \frac{\sin k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}}{k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}} \frac{\sin k_0 \beta_0 \frac{L}{2}}{k_0 \beta_0 \frac{L}{2}} \frac{\sin k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}}{k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}}. \end{aligned}$$

Entsprechend wird

$$\begin{aligned} b_m &= \iiint_{-L/2}^{+L/2} \sin k_0 \{ \alpha_0' x_m + \beta_0 y_m + \gamma_0 z_m \} \frac{dx_m dy_m dz_m}{L^3}, \\ &= \frac{1}{k_0^3 \alpha_0' \beta_0 \gamma_0 L^3} \left[\begin{aligned} &\cos k_0 \alpha_0' x_m \cos k_0 \beta_0 y_m \cos k_0 \gamma_0 z_m \\ &- \cos k_0 \alpha_0' x_m \sin k_0 \beta_0 y_m \sin k_0 \gamma_0 z_m \\ &- \sin k_0 \alpha_0' x_m \cos k_0 \beta_0 y_m \sin k_0 \gamma_0 z_m \\ &- \sin k_0 \alpha_0' x_m \sin k_0 \beta_0 y_m \cos k_0 \gamma_0 z_m \end{aligned} \right] + \frac{L}{2} \dots - \frac{L}{2} \dots \\ (41) \quad b_m &= 0. \end{aligned}$$

Weiter haben wir zu bilden

$$(42) \quad \begin{cases} \int (X_m - a_m)^2 d\varrho_m = a_m' \\ \int (Y_m - b_m)^2 d\varrho_m = b_m' \\ \int (X_m - a_m)(Y_m - b_m) d\varrho_m = c_m'. \end{cases} \quad \text{und}$$

Es wird

$$\begin{aligned} a_m' &= \int (X_m - a_m)^2 d\varrho_m = \int (X_m^2 + a_m^2) d\varrho_m - 2a_m \int X_m d\varrho \\ &= \int X_m^2 d\varrho_m + a_m^2 - 2a_m^2 \\ &= \int X_m^2 d\varrho_m - a_m^2. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \int X_m^2 d\varrho_m &= \frac{1}{L^3} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} dx_m dy_m dz_m \cos^2 k_0 \{ \alpha_0' x_m + \beta_0 y_m + \gamma_0 z_m \} \\ &= \frac{1}{L^3} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} \int_{-L/2}^{+L/2} dx_m dy_m dz_m \\ &\quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2k_0 \{ \alpha_0' x_m + \beta_0 y_m + \gamma_0 z_m \} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin k_0 \alpha_0' L}{k_0 \alpha_0' L} \frac{\sin k_0 \beta_0 L}{k_0 \beta_0 L} \frac{\sin k_0 \gamma_0 L}{k_0 \gamma_0 L}, \end{aligned}$$

so daß

$$(43) \quad \begin{aligned} a_m' &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sin k_0 \alpha_0' L}{k_0 \alpha_0' L} \frac{\sin k_0 \beta_0 L}{k_0 \beta_0 L} \frac{\sin k_0 \gamma_0 L}{k_0 \gamma_0 L} \\ &\quad - \left[\frac{\sin k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}}{k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \beta_0 \frac{L}{2}}{k_0 \beta_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}}{k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

Für b_m' finden wir

$$\begin{aligned} b_m' &= \int (Y_m - b_m)^2 d\varrho_m = \int Y_m^2 d\varrho_m \\ &= \int d\varrho_m \sin^2 k_0 \{ \alpha_0' x_m + \beta_0 y_m + \gamma_0 z_m \} \\ &= \frac{1}{L^3} \int dx_m dy_m dz_m \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2k_0 \{ \alpha_0' x_m + \beta_0 y_m + \gamma_0 z_m \} \right], \end{aligned}$$

$$(44) \quad b_m' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sin k_0 \alpha_0' L}{k_0 \alpha_0' L} \frac{\sin k_0 \beta_0 L}{k_0 \beta_0 L} \frac{\sin k_0 \gamma_0 L}{k_0 \gamma_0 L}.$$

Endlich wird

$$c_m' = \int (X_m - a_m)(Y_m - b_m) d\varrho_m = \int (X_m Y_m - Y_m a_m) d\varrho_m$$

$$\text{nach (39) und (41)} \quad = \int X_m Y_m d\varrho_m,$$

nach (37)

$$= \int d\varrho_m \cos k_0 \{ \alpha_0' x_m + \beta_0 y_m + \gamma_0 z_m \} \sin k_0 \{ \alpha_0' x_m + \beta_0 y_m + \gamma_0 z_m \},$$

$$(45) \quad c_m' = 0$$

(vgl. die Berechnung von b_m').

Nunmehr bilden wir die Summen

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_m^{1..N} a_m' &= A = \frac{N}{2} \left(1 + \frac{\sin k_0 \alpha_0' L}{k_0 \alpha_0' L} \frac{\sin k_0 \beta_0 L}{k_0 \beta_0 L} \frac{\sin k_0 \gamma_0 L}{k_0 \gamma_0 L} \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[\frac{\sin k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}}{k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \beta_0 \frac{L}{2}}{k_0 \beta_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}}{k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \right), \\ \sum_m^{1..N} b_m' &= B = \frac{N}{2} \left(1 - \frac{\sin k_0 \alpha_0' L}{k_0 \alpha_0' L} \frac{\sin k_0 \beta_0 L}{k_0 \beta_0 L} \frac{\sin k_0 \gamma_0 L}{k_0 \gamma_0 L} \right), \\ \sum_m^{1..N} c_m' &= C = 0. \end{aligned} \right.$$

Dann wird nach Markoff die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Endpunkt des Vektors

$$\mathfrak{A} = \sum_m \mathfrak{A}_m$$

von seinem Mittelwerte aus gerechnet, die Koordinaten $X \dots X + dX$, $Y \dots Y + dY$ hat,

$$(47) \quad w dX dY = \frac{1}{2\pi \sqrt{AB - C^2}} e^{-\frac{B^2 X + A Y^2 - 2 C X Y}{2(AB - C^2)}} dX dY,$$

also im Falle $C = 0$

$$(48) \quad w dX dY = \frac{1}{2\pi \sqrt{AB}} e^{-\frac{X^2}{2A} - \frac{Y^2}{2B}} dX dY$$

und die mittlere quadratische Abweichung, d. i. das mittlere Schwankungsquadrat des Feldes, ergibt sich bis auf den weggelassenen Faktor zu

$$(49) \quad \mathfrak{M}(\overline{\varepsilon^2}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{AB}} \int_{-\infty}^{+\infty} (X^2 + Y^2) e^{-\frac{X^2}{2A} - \frac{Y^2}{2B}} dX dY.$$

Mit Hilfe der bekannten Beziehungen

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ \text{und} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi} \end{array} \right.$$

findet man

$$(51) \quad \mathfrak{M}(\overline{\varepsilon^2}) = A + B, \\ \mathfrak{M}(\overline{\varepsilon^2}) = N - N \left[\frac{\sin k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}}{k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \beta_0 \frac{L}{2}}{k_0 \beta_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}}{k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}} \right]^2,$$

oder, wenn der weggelassene Faktor hinzugefügt wird,

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}(\overline{\varepsilon^2}) = \frac{\mathfrak{M}_y^2}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{q}{R} \right)^2 \sigma^2 k_0^4 \\ \left\{ N - N \left[\frac{\sin k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}}{k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \beta_0 \frac{L}{2}}{k_0 \beta_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}}{k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \right\} \end{array} \right.$$

Wir können das Markoffsche Schema nach Gleichung (41) abbrechen und das gleiche Ziel auf anderem Wege erreichen. (40) stellt nämlich, unter Berücksichtigung von (41), mit N multipliziert, den Konstellationsmittelwert des Feldes dar: unter Hinzufügung des dort fortgelassenen Faktors

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{E}) = e^{i\omega t} \mathfrak{V}_y \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \frac{q}{R}$$

$$\sigma k_0^2 N \frac{\sin k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}}{k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}} \frac{\sin k_0 \beta_0 \frac{L}{2}}{k_0 \beta_0 \frac{L}{2}} \frac{\sin k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}}{k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}},$$

woraus

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} [\mathfrak{M}(\mathfrak{E})]^2 &= \frac{\mathfrak{M}_v^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \left(\frac{q}{R} \right)^2 \\ \sigma^2 k_0^4 N^2 &\left[\frac{\sin k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}}{k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \beta_0 \frac{L}{2}}{k_0 \beta_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}}{\sin k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \end{aligned} \right.$$

Nun ist die augenblickliche Feldstärke gleich dem Konstellationsmittelwert plus der Schwankung:

$$(54) \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{M}(\mathfrak{E}) + \varepsilon,$$

quadriert und zeitlich gemittelt:

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = [\overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{E})}]^2 + 2 \overline{\varepsilon \mathfrak{M}(\mathfrak{E})} + \overline{\varepsilon^2}.$$

Vollziehen wir hieran die Konstellationsmittelung, so wird das erste Glied rechts nicht beeinflußt, während das zweite verschwindet. Es folgt das gesuchte

$$\mathfrak{M}(\overline{\varepsilon^2}) = \mathfrak{M}(\overline{\mathfrak{E}^2}) - [\overline{\mathfrak{M}(\mathfrak{E})}]^2.$$

Der erste Summand rechts ist aus (28), der zweite aus (53) bekannt, so daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(\overline{\varepsilon^2}) &= \frac{\mathfrak{M}_v^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \left(\frac{q}{R} \right)^2 \sigma^2 k_0^4 \\ &\left\{ N + N(N-1) \left[\frac{\sin k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}}{k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \beta_0 \frac{L}{2}}{k_0 \beta_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}}{k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - N^2 \left[\frac{\sin k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}}{k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \beta_0 \frac{L}{2}}{k_0 \beta_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}}{k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \right\} \\ &= \frac{\mathfrak{M}_v^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \left(\frac{q}{R} \right)^2 \sigma^2 k_0^2 \\ &\left\{ N - N \left[\frac{\sin k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}}{k_0 \alpha_0' \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \beta_0 \frac{L}{2}}{k_0 \beta_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \left[\frac{\sin k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}}{k_0 \gamma_0 \frac{L}{2}} \right]^2 \right\}, \end{aligned}$$

wie oben in (52).

Ein Vergleich dieses Ausdruckes mit dem für die mittlere Intensität des Opaleszenzfeldes, (28), lehrt, daß für die Größe

des Schwankungsquadrates genau die bei der Fraunhofer'schen Beugungserscheinung am Würfel erörterten Verhältnisse maßgebend sind, so daß man geradezu sagen kann, durch diese Beugungserscheinung werde uns selbsttätig ein räumliches graphisches Bild für die Größe des Schwankungsquadrates aufgezeichnet. Wo die Beugungsminima liegen, ist der zweite Term in der Klammer von (52) gleich Null, das Schwankungsquadrat also bis auf den Faktor vor der Klammer gleich N ; in diesen Aufpunkten hat es seinen absolut größten Wert, und das Verhältnis von mittlerem Schwankungsquadrat und $\mathfrak{M}(\overline{\epsilon^2})$ wird nach (28) und (52) hier einfach

$$(55) \quad \frac{\mathfrak{M}(\overline{\epsilon^2})}{\mathfrak{M}(\overline{\epsilon^2})} = \frac{\frac{\mathfrak{M}_y^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \left(\frac{q}{R}\right)^2 \sigma^2 k_0^4 N}{\frac{\mathfrak{M}_y^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \left(\frac{q}{R}\right)^2 \sigma^2 k_0^4 N} = 1.$$

Es ist mithin unabhängig von der Teilchenzahl.

Wo keine Beugungsminima liegen, tritt zu N ein stets negativer Korrektionsfaktor hinzu; dann ist die Schwankung kleiner, und zwar um so kleiner, je größer die Intensität der Beugungserscheinung in dem betreffenden Punkte ist. Am kleinsten ist sie demnach im hellsten Maximum, auf der X -Achse: hier wird sie gleich Null.

Das war zu erwarten. Für Punkte der X -Achse ist es ganz gleichgültig, an welcher Stelle im Würfel sich der Resonator gerade befindet. Je weiter er vom Aufpunkte entfernt ist, desto eher wird er zwar von der primären Welle getroffen, entsprechend längere Zeit braucht aber seine sekundäre Welle bis zum Aufpunkte. Die Bewegung der Resonatoren ist also ohne Einfluß auf die Intensität; das Schwankungsquadrat ist Null.¹⁾

Sonst aber ist die Schwankung, entsprechend der geringen Intensität des Beugungsbildes recht erheblich. Für Punkte der Z -Achse wird $\mathfrak{M}(\overline{\epsilon^2})$ (vgl. p. 790) gleich N oder ein wenig kleiner, je nachdem L ein gerades oder ungerades

1) Da die gleichen Gründe dahin wirken, daß die Intensität ihren größtmöglichen Wert annimmt, läßt sich wenigstens in dieser Richtung der enge Zusammenhang zwischen Schwankungsquadrat und Intensität übersehen.

Vielfaches von $\lambda_0/2$ ist.¹⁾ Für Punkte der Y -Achse verschwindet das mittlere Schwankungsquadrat ebenso wie die Intensität selbst.

Anders gestaltet sich das Ergebnis bei der Berechnung der *Intensitätsschwankungen*. Wir gehen, (54) entsprechend, aus von

$$(56) \quad J = \mathfrak{M}(J) + \iota,$$

wo J die zu einer bestimmten Konstellation gehörige Intensität und ι die Intensitätsschwankung ist. Das gesuchte mittlere Schwankungsquadrat der Intensität ergibt sich hieraus zu

1) Vielleicht läßt sich auch hier einigermaßen klar machen, daß ein Zusammenhang zwischen $\mathfrak{M}(\xi^2)$ und $\mathfrak{M}(\epsilon^2)$ bestehen muß. Denkt man sich (unter Beschränkung auf den Einfluß des Tiefenfaktors) den Würfel durch Schnitte senkrecht zur Z -Achse in Schichten von der Dicke $\lambda_0/2$ geteilt, so gilt für die Intensität, daß bei gerader Schichtenzahl zu jeder Schicht eine andere gehört, deren Schwingungen sich im Durchschnitt gegen die der ersten aufheben, während bei ungerader Schichtenzahl eine Schicht wirksam bleibt. Ihre Wirksamkeit ist um so geringer, je größer die Schichtenzahl ist.

Diese eine Sonderrolle spielende Schicht ist auch für die Größe der Schwankung maßgebend. Wir stellen uns vor, daß wir die N -Molekeln beliebig in den Würfel hineinsetzen, einerseits die in den Schichten 1, 3, 5 ... befindlichen, andererseits die entgegengesetzt wirkenden in den Schichten 2, 4, 6 ... zusammenzählen, den zweiten Wert vom ersten abziehen und das viele Male wiederholen. Für die mittlere absolute Abweichung vom Durchschnitt ergibt dann eine bekannte Formel der Wahrscheinlichkeitsrechnung

$$\epsilon = \pm \sqrt{Npq},$$

wo p und q die Wahrscheinlichkeiten dafür sind, daß eine Molekel in die erste oder in die zweite Schichtengruppe fällt. Ist die Schichtenzahl gerade, so ist, gleichgültig, wie groß sie ist, $p = q = \frac{1}{2}$ und

$$\epsilon = \pm \sqrt{\frac{N}{4}}.$$

Ist aber die Schichtenzahl ungerade, so ist pq und damit die Schwankung *kleiner*; z. B. ist bei 3 Schichten $pq = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$, bei (5 Schichten $pq = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$) usw. Die Wirksamkeit der entscheidenden Schicht, die einer der Schichtengruppen das Übergewicht gibt, ist also auch hier um so geringer, d. h. ϵ nähert sich dem bei gerader Schichtenzahl gültigen Werte um so mehr, je mehr Schichten vorhanden sind, wie das auch in (52) aus dem im Nenner stehenden Faktor $(L/\lambda_0)^6$ folgt.

Diese Überlegungen lassen sich auf eine beliebige Lage des Aufpunktes übertragen.

$$(57) \quad \mathfrak{M}(\iota^2) = \mathfrak{M}(J^2) - [\mathfrak{M}(J)]^2.$$

Das zweite Glied rechts ist aus (28) bekannt; zu berechnen bleibt das Konstellationsmittel des Intensitätsquadrats. Nun haben wir beim Markoffschen Schema dem Feldvektor, von seinem Mittelpunkte aus gerechnet, die Koordinaten X und Y zugeschrieben; der Mittelwert selbst aber war im Anschluß an (40) und (41) durch $N a_m$ und O bestimmt. \mathfrak{E} hat demnach die Koordinaten $(N a_m + X)$ und Y , und es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}^2 &= J = X^2 + Y^2 + (N a_m)^2 + 2 N a_m X, \\ J^2 &= [X^2 + Y^2 + (N a_m)^2 + 2 N a_m X]^2. \end{aligned}$$

Der Konstellationsmittelwert wird durch Multiplikation dieses Ausdruckes mit der Wahrscheinlichkeit

$$w dX dY = \frac{1}{2\pi \sqrt{AB}} e^{-\frac{X^2}{2A} - \frac{Y^2}{2B}} dX dY$$

und darauf folgende Integration gebildet. Bei der Auswertung der Integrale braucht man außer bereits benutzten Beziehungen noch die folgenden leicht nachzuprüfenden:

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} \iint X^4 w dX dY &= 3 A^2, \\ \iint Y^4 w dX dY &= 3 B^2, \\ \iint X^2 Y^2 w dX dY &= A B, \\ \iint X^3 w dX dY &= \iint X w dX dY = 0. \end{aligned} \right.$$

Man findet nach einfachen Rechnungen (bis auf einen Faktor)

$$(59) \quad \mathfrak{M}(\iota^2) = 2(A^2 + B^2) + 4 A (N a_m)^2,$$

wo die Werte aus (40) und (46) einzusetzen sind.

Für Punkte der X -Achse ist

$$A = B = 0.$$

Die Intensitätsschwankung verschwindet also hier ebenso wie die Feldschwankung. Im übrigen wird auch $(\mathfrak{M} \iota^2)$ durch die Intensität des Beugungsbildes charakterisiert, wenn auch in eigentümlichem Gegensatze zu $\mathfrak{M}(\epsilon^2)$. In allen Beugungsminimis wird

$$a_m = 0,$$

$$A = B = \frac{N^2}{4},$$

so daß in den Beugungsminimis, vollständig geschrieben,

$$\mathfrak{M}(\iota^2) = \left[\frac{\mathfrak{N}_v^2}{2} \cdot \frac{1}{R^2} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^2 \sigma^2 k_0^4 \right]^2 \cdot N^2$$

wird, d. h. das mittlere Schwankungsquadrat der Intensität gleich dem Quadrate der mittleren Intensität, das nämliche, was Gleichung (55) fürs Feld ausdrückt.

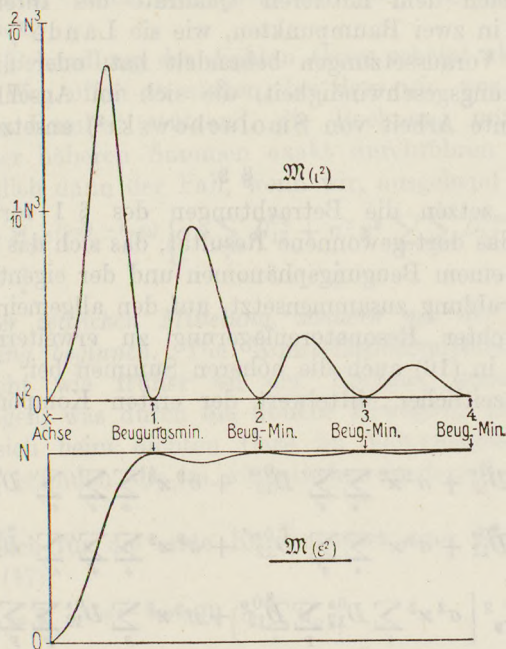


Fig. 1.

Während aber beim Felde in allen übrigen Punkten das Schwankungsquadrat kleiner war, ist es bei der Intensität — was keinen Widerspruch bedeutet — überall größer. Bestimmend dafür ist der zweite Summand in (59) mit dem Faktor N^2 , während der erste, für sich allein genommen, in entgegengesetztem Sinne wirkt. Je lichtschwächer die Beugungsmaxima sind, desto weniger steigt das mittlere Schwankungsquadrat über den in den Minimis geltenden Wert. Sein

Maximum hat es neben seinem Nullwert in unmittelbarer Nähe der X-Achse.

In Fig. 1 ist der Wert von $\mathfrak{M}(\epsilon^2)$ für die X-Achse und die ersten Seitenmaxima und -minima angedeutet. Zum Vergleich ist der Wert von $\mathfrak{M}(\epsilon^2)$ daruntergesetzt, d. i. die Intensitätskurve des Fraunhoferschen Beugungsbildes einer quadratischen Öffnung, gegen die übliche Darstellung um 180° gedreht.

Auf weitere naheliegende Schwankungsprobleme führt die Frage nach dem mittleren Quadrate des Intensitätsunterschiedes in zwei Raumpunkten, wie sie Landé¹⁾ unter etwas anderen Voraussetzungen behandelt hat, oder die nach der Schwankungsgeschwindigkeit, die sich im Anschluß an eine interessante Arbeit von Smoluchowski²⁾ ansetzen ließe.

§ 3.

Wir setzen die Betrachtungen des § 1 fort und versuchen, das dort gewonnene Resultat, das sich das Opaleszenzfeld aus einem Beugungsphänomen und der eigentlichen Opaleszenzstrahlung zusammensetzt, auf den allgemeinen Fall beliebig dichter Resonatorenlagerung zu erweitern, behalten demnach in (16) auch die höheren Summen bei.

Als zeitlicher Mittelwert der ersten Komponente folgt:

$$\begin{aligned}
 \overline{\mathfrak{G}_x^2} &= \frac{1}{2} \mathfrak{V}_y^2 \\
 &\cdot \left\{ \sigma \kappa \sum_s D_{12}^{0s} + \sigma^2 \kappa^2 \sum_s \sum_{s'} D_{12}^{0ss'} + \sigma^3 \kappa^3 \sum_s \sum_{s'} \sum_{s''} D_{12}^{0ss's''} + \dots \right\} \\
 &\cdot \left\{ \sigma \kappa \sum_s \check{D}_{12}^{0s} + \sigma^2 \kappa^2 \sum_s \sum_{s'} \check{D}_{12}^{0ss'} + \sigma^3 \kappa^3 \sum_s \sum_{s'} \sum_{s''} \check{D}_{12}^{0ss's''} + \dots \right\} \\
 (60) \quad &\left\{ \begin{aligned} &= \frac{1}{2} \mathfrak{V}_y^2 \left[\sigma^2 \kappa^2 \sum_s D_{12}^{0s} \sum_p \check{D}_{12}^{0p} + \sigma^3 \kappa^3 \sum_s D_{12}^{0s} \sum_p \sum_{p'} \check{D}_{12}^{0pp'} \right. \\ &\quad \left. + \sigma^4 \kappa^4 \sum_s D_{12}^{0s} \sum_p \sum_{p'} \sum_{p''} \check{D}_{12}^{0pp'p''} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sigma^3 \kappa^3 \sum_p \check{D}_{12}^{0p} \sum_s \sum_{s'} D_{12}^{0ss'} + \sigma^4 \kappa^4 \sum_s \sum_{s'} D_{12}^{0ss'} \sum_p \sum_{p'} \check{D}_{12}^{0pp'} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \sigma^4 \kappa^4 \sum_s \sum_{s'} \sum_{s''} D_{12}^{0ss's''} \sum_p \check{D}_{12}^{0p} + \dots \right], \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

wo die konjugierten Werte durch darübergesetzte Sterne bezeichnet sind.

1) A. Landé, Physik. Zeitschr. 15. p. 946. 1914.

2) v. Smoluchowski, Physik. Zeitschr. 17. p. 557. 1916.

Das erste Glied ergibt bei der Konstellationsmittelung, mit den entsprechenden Gliedern der anderen Komponenten zusammengefaßt, zwei Summanden, von denen der eine zur Rayleighschen Formel führt. Bei den höheren Summen kann man zwar die Ausdrücke, über die man bei der Konstellationsmittelung zu integrieren hat, in aller Exaktheit hinschreiben; denn alle D sind bekannt — die einfachsten sind in (17) angeführt — und die D setzen sich ihrerseits wieder im wesentlichen aus den in (9) gegebenen Koeffizienten A, B, C usw. zusammen. Aber die Integrationsschwierigkeiten sind unüberwindlich.

Für die Behandlung des dichten Gases scheint aber noch ein anderer Weg offen zu stehen, bei dem wir, uns auf ein Reichesches Resultat stützend, die Rechnung unter Beibehaltung der höheren Summen exakt durchführen können. Das ist nämlich dann der Fall, wenn wir, ausgehend von

$$(16) \quad \mathfrak{E}_x = \mathfrak{N}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \left\{ \sigma \kappa \sum_s D_{12}^{0s} + \sigma^2 \kappa^2 \sum_s \sum_{s'} D_{12}^{0ss'} + \dots \right\},$$

$$\vdots$$

nicht mit der zeitlichen Mittelung, sondern mit der Konstellationsmittelung beginnen. Die Konstellationsmittelung wird dadurch nicht wie früher an der Energie, sondern am Felde vollzogen, was durch die übliche Erwägung nahegelegt wird, daß sich beim dichten Gase im Volumelement viele Resonatoren befinden, die im wesentlichen in derselben Phase schwingen.

Wir finden für die erste Komponente unter Berücksichtigung von (17):

$$(61) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}(\mathfrak{E}_x) &= \mathfrak{N}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \mathfrak{M} \left(\sigma \sum_s G_{0s} \right) \\ &+ \mathfrak{M} \left(\sigma^2 \sum_s \sum_{s'} (A_{0s} G_{0ss'} + G_{0s} B_{0ss'} + F_{0s} E_{0ss'}) \right) + \dots \end{aligned} \right.$$

Man kann zeigen, daß ein großer Teil der Konstellationsmittelwerte über die s' -Summen verschwindet. So sind [vgl. die Gleichungen (253) und (270) bei Reiche] schon in der Doppelsumme die Mittelwerte

$$(62) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M} \left(\sum_{s'} G_{ss'} \right) &= 0, \\ \mathfrak{M} \left(\sum_{s'} E_{ss'} \right) &= 0, \end{aligned} \right.$$

so daß von der Doppelsumme nur der Term

$$\sigma^2 \mathfrak{M} \left(\sum_s \sum_{s'} G_{0s} B_{ss'} \right)$$

übrigbleibt. Ebenso verschwinden in den höheren Summen und bei den beiden anderen Komponenten alle Glieder, die die Mittelwerte (62) oder $\mathfrak{M} \left(\sum_{s'} A_{ss'} \right)$ oder $\mathfrak{M} \left(\sum_{s'} F_{ss'} \right)$ enthalten, die gleichfalls beide gleich Null sind. Es bleibt schließlich für (61) nur stehen

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}(\mathfrak{E}_x) = \mathfrak{A}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \sigma \mathfrak{M} \left(\sum_s G_{0s} \left\{ 1 + \sigma \mathfrak{M} \left(\sum_{s'} B_{ss'} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \sigma^2 \mathfrak{M} \left(\sum_{s'} \sum_{s''} B_{ss'} B_{s's''} \right) + \dots \right\} \right). \end{aligned} \right.$$

Den Wert der geschweiften Klammer hat Reiche berechnet und in den Gleichungen (117) und (154) seiner Arbeit folgendermaßen ausgedrückt:

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} &1 + \sigma \mathfrak{M} \left(\sum_{s'} B_{ss'} \right) + \sigma^2 \mathfrak{M} \left(\sum_{s'} \sum_{s''} B_{ss'} B_{s's''} \right) + \dots \\ &= S(x_s) \\ &= \frac{2 e^{i k_0 x_s}}{(n+1) \left[1 - \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 e^{-2 i k L} \right]} \left\{ e^{-i k x_s} + \frac{n-1}{n+1} e^{-i k (2L - x_s)} \right\}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$n = \sqrt{1 + 4 \pi \mathfrak{N} \sigma}$$

(von Reiche zuerst P genannt) der Brechungsquotient des Gases und

$$(65) \quad k = k_0 n = \frac{2 \pi}{\lambda}$$

(λ die Wellenlänge im Gase) ist.

Wir schreiben zur Abkürzung

$$(66) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{(n+1) \left[1 - \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 e^{-2 i k L} \right]} = \Psi, \\ &\frac{n-1}{n+1} e^{-2 i k L} = \frac{\Omega}{\Psi}, \end{aligned} \right.$$

wodurch (64) die Form

$$(67) \quad S(x_s) = \Psi e^{i(k_0 - k) x_s} + \Omega e^{i(k_0 + k) x_s}$$

annimmt. Diesen Wert setzen wir in (63) ein und finden:

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{E}_x) = \mathfrak{V}_y e^{i(\omega t - k_0 x_0)} \sigma \mathfrak{M} \left(\sum_s G_{0s} \mathcal{S}(x_s) \right)$$

nach (17) und (67) gleich

$$(68) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}(\mathfrak{E}_x) = - e^{i\omega t} \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \mathfrak{V}_y \frac{x_0 y_0}{R^2} \sigma k_0^2 \\ \mathfrak{M} \left[\sum_s e^{\frac{ik_0}{R} \{ (x_0 - R)x_s + y_0 y_s + z_0 z_s \}} \{ \Psi e^{i(k_0 - k)x_s} + \Omega e^{i(k_0 + k)x_s} \} \right] \end{array} \right\}.$$

Die Mittelwertsbildung an diesem Ausdrucke ist etwas einfacher wie in § 1, da es sich nicht wie dort um eine Doppelsumme handelt. Sie kommt darauf hinaus, daß wir mit

$$\mathfrak{N} dx_s dy_s dz_s$$

multiplizieren und über den Würfel integrieren. Die Integrale nach y_s und z_s sind die von früher her bekannten (vgl. (27)); das Integral nach x_s dagegen zerfällt jetzt in zwei Teile. Im ganzen ergibt die Auswertung

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{M}(\mathfrak{E}_x) = - e^{i\omega t} \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \mathfrak{V}_y \frac{x_0 y_0}{R^2} \sigma k_0^2 \\ \quad N \left[\frac{\sin \frac{k_0 y_0 L}{2R}}{\frac{k_0 y_0 L}{2R}} \right] \left[\frac{\sin \frac{k_0 z_0 L}{2R}}{\frac{k_0 z_0 L}{2R}} \right] \\ \quad \cdot \left[\Psi \frac{\sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}}{\left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}} + \Omega \frac{\sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} + k \right) \frac{L}{2}}{\left(\frac{k_0 x_0}{R} + k \right) \frac{L}{2}} \right] \end{array} \right\}.$$

Entsprechende Gleichungen findet man für $\mathfrak{M}(\mathfrak{E}_y)$ und für $\mathfrak{M}(\mathfrak{E}_z)$. In ihnen steht

$$- \left[1 - \frac{y_0^2}{R^2} \right] \quad \text{bzw.} \quad \frac{x_0 z_0}{R^2}$$

an Stelle von

$$\frac{x_0 y_0}{R^2}.$$

Aus allen dreien folgt für

$$\mathfrak{M}(\mathfrak{E}) = ([\mathfrak{M}(\mathfrak{E}_x)]^2 + [\mathfrak{M}(\mathfrak{E}_y)]^2 + [\mathfrak{M}(\mathfrak{E}_z)]^2)^{1/2},$$

wenn wir wieder berücksichtigen, daß

$$\left[\frac{x_0^2 y_0^2}{R^4} + \left(1 - \frac{y_0^2}{R^2} \right)^2 + \frac{y_0^2 z_0^2}{R^4} \right]^{1/2} = \frac{\varrho}{R}$$

ist,

$$(70) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{M}(\mathfrak{G}) &= e^{i\omega t} \frac{e^{i k_0 R}}{R} \mathfrak{N}_y \cdot \frac{q}{R} \sigma k_0^2 N \left[\frac{\sin \frac{k_0 y_0 L}{2R}}{\frac{k_0 y_0 L}{2R}} \right] \left[\frac{\sin \frac{k_0 x_0 L}{2R}}{\frac{k_0 x_0 L}{2R}} \right] \\ &\quad \left[\psi \frac{\sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}}{\left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}} + \Omega \frac{\sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} + k \right) \frac{L}{2}}{\left(\frac{k_0 x_0}{R} + k \right) \frac{L}{2}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Von diesem Ausdrucke wird nunmehr der zeitliche Mittelwert gebildet:

$$(71) \quad \left\{ \begin{aligned} [\mathfrak{M}(\mathfrak{G})]^2 &= J = \frac{1}{2} \mathfrak{N}_y^2 \frac{1}{R^2} \left(\frac{q}{R} \right)^2 \sigma^2 k_0^4 N^2 \left[\frac{\sin \frac{k_0 y_0 L}{2R}}{\frac{k_0 y_0 L}{2R}} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{k_0 x_0 L}{2R}}{\frac{k_0 x_0 L}{2R}} \right]^2 \\ &\quad \left[\psi \frac{\sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}}{\left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}} + \Omega \frac{\sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} + k \right) \frac{L}{2}}{\left(\frac{k_0 x_0}{R} + k \right) \frac{L}{2}} \right] \\ &\quad \left[\psi^* \frac{\sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}}{\left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}} + \Omega^* \frac{\sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} + k \right) \frac{L}{2}}{\left(\frac{k_0 x_0}{R} + k \right) \frac{L}{2}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Nach (66) ist

$$(72) \quad \psi \psi^* = \frac{4}{(n+1)^2 \left[1 + \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^4 - 2 \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \cos 2kL \right]},$$

was wir mit der Abkürzung

$$(73) \quad (n+1)^2 \left[1 + \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^4 - 2 \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2 \cos 2kL \right] = \Phi$$

schreiben

$$(74) \quad \psi \psi^* = \frac{4}{\Phi}.$$

Führen wir die weitere Abkürzung

$$(75) \quad \frac{n-1}{n+1} = \Pi$$

ein, so wird

$$(76) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega \dot{\Omega}^* = \frac{4 \Pi^2}{\Phi}, \\ \Psi \dot{\Omega}^* = \frac{4 \Pi}{\Phi} e^{2 i k L}, \\ \Omega \dot{\Psi}^* = \frac{4 \Pi}{\Phi} e^{-2 i k L}, \\ \Psi \dot{\Omega}^* + \Omega \dot{\Psi}^* = \frac{8 \Pi}{\Phi} \cos 2 k L \end{array} \right.$$

und (71) geht über in

$$(77) \quad \left\{ \begin{array}{l} J = \frac{1}{2} \mathfrak{V}_y^2 \frac{1}{k^2} \left(\frac{q}{R} \right)^2 \sigma^2 k_0^4 N^2 \left[\frac{\sin \frac{k_0 y_0 L}{2 R}}{\frac{k_0 y_0 L}{2 R}} \right]^2 \left[\frac{\sin \frac{k_0 x_0 L}{2 R}}{\frac{k_0 x_0 L}{2 R}} \right]^2 \\ \cdot \frac{4}{\Phi} \left\{ \left[\frac{\sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}}{\left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}} \right]^2 + \Pi^2 \left[\frac{\sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} + k \right) \frac{L}{2}}{\left(\frac{k_0 x_0}{R} + k \right) \frac{L}{2}} \right]^2 \right. \\ \left. + 2 \Pi \cos 2 k L \frac{\sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} + k \right) \frac{L}{2} \sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}}{\left(\frac{k_0 x_0}{R} + k \right) \frac{L}{2} \left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}} \right\}. \end{array} \right.$$

In der Klammer verschwindet der Einfluß des zweiten und dritten Gliedes gegen das erste, weil Π bei einem Gase ein gegen die Einheit kleiner Wert ist. Besonders das dritte Glied, bei dem überdies noch der Kosinusfaktor steht, der bei geeignetem Verhältnis von Würfelkante zu Wellenlänge im Gase von vornherein Null wird, hat dieselben Nullstellen wie das erste und kann dessen Interferenzerscheinung nur unerheblich beeinflussen. Dagegen hat das zweite Glied im allgemeinen andere Nullstellen als das erste, wird also dessen Minima im allgemeinen aufhellen, allerdings nur schwach wegen des Faktors Π^2 . Sehen wir von diesen Feinheiten ab und berücksichtigen wir ferner, daß Φ annähernd gleich 4 ist, weil in (73) die eckige Klammer sich im wesentlichen auf die 1 reduziert, so ergibt (77) den Ausdruck, der uns in § 1, Gleichung (28) als Ausdruck der Beugungserscheinung am Würfel entgegengetreten ist, mit der einzigen Änderung, daß der damalige Faktor

$$\left[\frac{\sin k_0 \frac{x_0 - R}{R} \cdot \frac{L}{2}}{k_0 \frac{x_0 - R}{R} \cdot \frac{L}{2}} \right]^2$$

sich in

$$\left[\frac{\sin \left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}}{\left(\frac{k_0 x_0}{R} - k \right) \frac{L}{2}} \right]^2$$

verwandelt hat, d. h.

$$\left(\frac{x_0}{R} - 1 \right) \frac{k_0 L}{2} \quad \text{in} \quad \left(\frac{x_0}{R} - k \right) \frac{k_0 L}{2}.$$

Es ist also nur an einer Stelle statt der Einheit der der Einheit sehr nahe Wert

$$\frac{k}{k_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = n$$

getreten.

Die Änderung des Beugungsbildes, z. B. der Radien der Queteletschen Ringe, ist unschwer zu diskutieren, aber für das Folgende, ohne Interesse. Es sei lediglich erwähnt, daß sich für folgenden Idealfall das Wesen der Änderung physikalisch leicht deuten läßt. Denken wir uns den Würfel von einem fernen Punkte auf der Z-Achse aus gesehen wieder als beugende quadratische Öffnung, auf die das Licht seitlich auffällt, so war früher der Gangunterschied der Randstrahlen $L \sin \psi - L$; jetzt ist er

$$L \sin \psi - L \frac{\lambda_0}{\lambda} = L \sin \psi - n L.$$

Für den die Öffnung durchsetzenden Randstrahl ist also nicht mehr wie beim dünnen Medium die einfache Strecke, sondern die optische Länge maßgebend, der Brechungsquotient nicht mehr 1, sondern n zu setzen.

Was die Beugungserscheinung am Würfel betrifft, steht unsere neue Berechnungsweise mit ihrer vertauschten Reihenfolge der Mittelungen also im Einklang mit der des § 1. Dagegen findet sich in (27) kein dem Rayleighgliede von (28) entsprechendes vor. Der Ausdruck der Opaleszenzstrahlung fällt überraschenderweise fort.

§ 4.

Wie ist das zu erklären? Zweifellos spielt es nur eine untergeordnete Rolle, daß sich § 1 auf ein dünnes, § 3 auf ein dichtes Gas bezieht. Denn einerseits würde sich sehr wahrscheinlich auch beim dichten Gase Opaleszenz ergeben, wenn sich die Rechenmethode des § 1, wie am Anfang von § 3 angedeutet, für diesen Fall durchführen ließe. Und andererseits zeigt das dünne Gas, nach der Methode von § 3 behandelt, offenbar keine Opaleszenz: bei der Konstellationsmittelung von \mathfrak{C} , Gleichung (22), kommt N und der dreifache Quotient von Sinus durch Argument hinein, und die zeitliche Mittelung führt dann zum Quadrat dieses Ausdruckes, also dem Beugungsphänomen ohne Opaleszenz.

Wir glauben den grundsätzlichen Unterschied der beiden Verfahren in folgendem zu sehen: In § 1 haben wir zunächst eine bestimmte Konstellation herausgegriffen und durch Bildung des zeitlichen Mittelwertes ihren Beitrag zur Opaleszenzstrahlung berechnet. Dieser Beitrag hat irgend einen positiven Wert, über den sich, solange die gerade diese spezielle Konstellation bestimmenden Molekelkoordinaten nicht einzeln gegeben werden, keine genaue, sondern nur eine Wahrscheinlichkeitsangabe machen läßt.¹⁾ Der zweite Schritt war dann der, daß wir, die Bewegung der Resonatoren berücksichtigend, über alle den verschiedenen Konstellationen entsprechende Einzelbeiträge summierten und so den in (28) hingeschriebenen Wert der seitlichen Ausstrahlung fanden, der die Opaleszenzstrahlung enthält.

Ebenso kommt, wenn auch auf ganz anderem Wege, Planck²⁾ in seiner bekannten Arbeit über die Extinktion des Lichtes in einem homogenen Medium, ebenso Schaefer und Stallwitz³⁾ bei der Behandlung eines aus vielen gleichgerichteten Zylindern bestehenden Körpers zur Opaleszenzstrahlung gemäß der Rayleighschen Formel. In beiden Fällen wird eine beliebige Konstellation der festliegenden

1) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 10. p. 116. 1880 und Papers I. 491.
Vgl. auch M. v. Laue, Enzyklopädie 24. p. 393 ff.

2) M. Planck, Berl. Ber. 1904, p. 740.

3) Cl. Schaefer u. H. Stallwitz, Ann. 50. p. 199. 1916.

Resonatoren herausgegriffen und durch Entfernung der für die summarische Betrachtung unwesentlichen Glieder, durch eine Mittelwertbetrachtung, künstlich das besorgt, was bei uns die Bewegung der Teilchen bewirkt: Ausmerzung der Eigentümlichkeiten der gerade gewählten Konfiguration, über deren speziellen Strahlungswert sich ohne Angabe der Einzelkoordinaten gar nichts Bestimmtes aussagen ließe. Er könnte sehr wohl einmal Null sein.

Bei dem zweiten Verfahren vollzogen wir zuerst die Konstellationsmittelung (§ 3), verzichteten also von vornherein auf die Berücksichtigung der einzelnen Konfigurationen, gingen vielmehr von der gleichmäßigen Verteilung als dem Mittelwert sämtlicher Konfigurationen aus. Wenn die Rechnung in diesem Falle keine Opaleszenz ergibt, so heißt das, daß die Eigenschaft für die Opaleszenz wesentlich ist, die die Einzelkonstellationen vor der gemittelten Konstellation voraus haben. *Das sind die Dichteschwankungen.*

Dichteschwankungen sind in jedem Medium vorhanden, auch im „optisch homogenen“, wo sie eben nur eine Stufe tiefer — innerhalb des Volumelementes — zu suchen sind. Jeder Körper sendet also Opaleszenzstrahlung aus, ist „trüb“, mit einer Ausnahme: ohne Schwankungen und damit ohne Opaleszenzstrahlung ist der Kristall, genauer gesagt der unendliche absorptionsfreie Kristall, auf den eine seitlich unbegrenzte Welle fällt.¹⁾ Bei ihm kann eine seitliche Ausstrahlung lediglich in Gestalt scharfer Maxima auftreten.

Wenn wir bei der zweiten Berechnungsweise keine Opaleszenzstrahlung fanden, so liegt das daran, daß wir dem Gase dabei gewissermaßen eine kristallinische Struktur beigelegt

1) In (25) scheint das zur Opaleszenzstrahlung führende Glied aufzutreten, ohne daß von Schwankungen die Rede ist. Das Glied herauszuziehen ist aber nur dann zweckmäßig, wenn das eingeschlagene Mittelungsverfahren folgt, das implizite Schwankungen voraussetzt. Bei kristallinischer Molekellagerung lassen sich die Summen in (24) direkt auswerten und führen zu dem von M. v. Laue (Münch. Ber. p. 303. 1912; Ann. d. Phys. 41. p. 971. 1913) behandelten Ausdrücke der Röntgenstrahlinterferenz. Natürlich steht der Umweg frei, auch in diesem Falle erst das Opaleszenzglied herauszuziehen. Dann ergibt die Doppelsumme in (25) den Laueschen Ausdruck minus Opaleszenzglied, so daß dieses sich weghebt

haben, indem wir der konstant gehaltenen Zahl von $N dv$ Resonatoren im Volumelement den gleichen Schwingungszustand zuschrieben und deren Strahlung dadurch bestimmten, daß wir die eines Resonators mit $N dv$ multiplizierten. Wir haben damit gleichsam die Resonatoren in dv zu einem Haufen oder einem Riesenresonator zusammengezogen, und indem wir das mit jedem Volumelement machten, das Gas als einen rhombischen Kristall mit den elementaren Kantenlängen dx, dy, dz aufgefaßt. Eine seitliche Ausstrahlung vom Opaleszenzcharakter ergab sich dann nicht. Wir bestätigen damit das Resultat, das Lorentz¹⁾ in die Worte kleidet: «Un cristal parfait resterait rigoureusement invisible de quelque manière qu'on l'éclairât». (Wobei wieder von den bekannten scharfen Beugungsmaximis bei genügend kleiner Wellenlänge [Röntgenstrahlung] abzusehen ist.)

Die Oseensche²⁾ Gegenbehauptung lehnen wir ab. Wir sehen keinen Raum für die Oseensche Einführung einer „Rayleigh-Planck“-schen seitlichen Ausstrahlung, die von den Molekeln selbst hervorgerufen sein soll, neben einer „Keesom-Einstein“-schen, die durch Dichteschwankungen bedingt ist. Wir glauben vielmehr, daß die „Rayleigh-Planck“-schen Einzelstrahlungen im Falle von Dichteschwankungen als unsere Opaleszenz- oder als Oseens „Keesom-Einstein“-sche Strahlung zur Wirksamkeit kommen, im Falle regelmäßiger Molekellagerung aber garnicht oder als scharfe Maxima.³⁾ Wenn Oseen dann in seiner zweiten Notiz auf die Rayleigh-Plancksche Strahlung mit dem Augenblicke verzichtet, wo man das Plancksche dreieipunktete Dämpfungsglied der Strahlung fallen läßt, so verweisen wir auf dessen Rechtfertigung durch die von Oseen nicht zitierte Diskussion zwischen Mandelstam und Planck⁴⁾, in der Gans und Happel⁵⁾ das Schluß-

1) H. A. Lorentz, Les théories statistiques en thermodynamique. Leipzig und Berlin 1916. p. 42.

2) C. W. Oseen, Physik. Zeitschr. 17. p. 233 u. 341. 1916.

3) P. P. Ewald, Ann. d. Phys. 49. p. 1 u. 117. 1916. M. v. Laue, Ann. d. Phys. 50. p. 473. 1916.

4) L. Mandelstam, Ann. 23. p. 626. 1907; Physik. Zeitschr. 8. p. 608. 1907. M. Planck, Physik. Zeitschr. 8. p. 906. 1907. L. Mandelstam, Physik. Zeitschr. 9. p. 309. 1908. M. Planck, Physik. Zeitschr. 9. p. 354. 1908. L. Mandelstam, Physik. Zeitschr. 9. p. 641. 1908.

5) R. Gans u. H. Happel, Ann. d. Phys. 29. p. 277. 1909.

wort gesprochen haben. Im Sinne Oseens bleiben danach beide Ausstrahlungen nebeneinander bestehen.

Die Frage: Haben wir die Rayleigh-Plancksche Strahlung dadurch unterdrückt, daß wir in der Schwingungsgleichung (5) des Resonators das Glied der Strahlungsdämpfung, die „dissipative Kraft“, fortgelassen haben, ist zu verneinen. Hätten wir dieses Glied beibehalten, so wäre der in (8) gegebene Wert von σ imaginär geworden, gleich σ' ; aber σ'^* , das jetzt an Stelle von unserem σ^2 in den zur Rayleighschen Formel führenden Ausdruck (32) eingeht, unterscheidet sich von σ^2 nur um eine Größe, die vernachlässigt werden kann, wenn es sich nicht um abnorm hohe Frequenzen handelt und wenn man weit von der Eigenfrequenz abbleibt. Jedenfalls wird das Resultat prinzipiell gar nicht verändert.

Wenn Planck zur Rayleighschen Formel gelangen will, muß auch er die entsprechende Vernachlässigung an einer nebensächlichen Stelle einführen (l. c. p. 748: „... wenn man die Ausdrücke für ν^2 und κ^2 in Reihen nach aufsteigenden Potenzen von β^2 ,

$$\beta = \frac{n^3}{6\pi c^3 N}$$

entwickelt und bei den niedrigsten Potenzen stehen bleibt“).¹⁾ Von vornherein aber ist die dissipative Kraft für Planck wesentlich. Daß sie bei uns nur eine untergeordnete Rolle spielt, liegt lediglich in der Rechnungsweise. Planck braucht die dissipative Kraft als „Rückwirkung der Strahlung auf das bewegte Elektron“²⁾; denn er verfolgt die primäre Welle, sieht zu, wie sie durch die schwingenden Elektronen geschwächt wird und berechnet erst aus dieser Schwächung, dem Primäreffekt, die seitliche Ausstrahlung. Dabei müssen die Elektronen irgendwie das Kennzeichen der Ausstrahlung in ihrer Schwingungsgleichung tragen. Blicke dieses Kennzeichen, das Dämpfungsglied, weg, so ergäbe sich ein reeller Brechungsquotient und keine Ausstrahlung.

Wir dagegen brauchen die dissipative Kraft nicht un-

1) Dasselbe vielleicht noch augenfälliger bei L. Natanson, Crac. Ac. 1909. p. 915.

2) Abraham-Föppl, l. c. p. 69.

bedingt, weil wir direkt durch Summation der Einzelwirkungen die Ausstrahlung berechnen und ihre „Rückwirkung auf das bewegte Elektron“ für uns nur ein sekundärer Effekt ist — denn die Ausstrahlung ist auch ohne diese Rückwirkung da —, der weiter keine Rolle spielt.

Der Kristall hat nur dann keine Opaleszenzstrahlung, wenn die Forderung der Schwankungsfreiheit in Strenge erfüllt ist. Sobald auch beim Kristall Schwankungserscheinungen hineinspielen, ist Opaleszenzstrahlung da. Berücksichtigt man z. B. die durch die Wärmebewegung bedingten Schwankungen, so findet man¹⁾, daß ein kontinuierlicher Grund sich über die scharfen Maxima der Röntgenstrahlung lagert, der um so mehr in Erscheinung tritt, je stärker die Wärmebewegung ist, je mehr also die reguläre Lagerung gegen die Schwankungsmöglichkeit zurücktritt.

Wir fassen noch Schwankungen anderer Art beim Kristall ins Auge. Wir haben die Rechnungsweise des vorigen Paragraphen dahin charakterisiert, daß wir das Gas als rhombischen Kristall behandelten mit einem Haufen von $N dv$ Elektronen in jedem Gitterpunkt. Wir stellen uns vor, daß die Anzahl der Elektronen im Haufen nach dem Zufall um ihren Mittelwert schwankt. Wir denken uns also einen rhombischen Kristall, der in jedem Gitterpunkt

$$(78) \quad \begin{cases} x_s = h_1 a_1, \\ y_s = h_2 a_2, \\ z_s = h_3 a_3 \end{cases}$$

($h_1 h_2 h_3$ ganze Zahlen, $a_1 a_2 a_3$ Kantenlängen des Elementarparallelepipeds) einen Haufen von im Mittel n Resonatoren trägt; doch soll diese Anzahl durch fortwährendes regelloses und momentanes Überspringen der Elektronen von einem Haufen zu einem anderen schwanken. Wir zeigen, daß ein derartiger hypothetischer Kristall Opaleszenzstrahlung ausstrahlt.

Wir gehen von (22) aus und führen die Werte (78) darin ein (unter Beachtung von (35)):

1) P. P. Debye, Verh. d. D. Physik. Ges. 15. p. 678 u. 738. 1913; Ann. d. Phys. 43. p. 49. 1914.

$$(79) \quad \mathfrak{E} = e^{i\omega t} \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \mathfrak{A}_y \left(\frac{q}{R} \right) \sigma k_0^2 \sum_s e^{ik_0(h_1 a_1 \alpha_0' + h_2 a_2 \beta_0 + h_3 a_3 \gamma_0)}.$$

Diese Gleichung bezieht sich auf den Fall *eines* Resonators im Gitterpunkt. Nun sitzen in einem Gitterpunkt im Mittel n Resonatoren, wo n der Quotient aus Gesamtelektronenzahl N und der Punktzahl

$$\frac{L^3}{a_1 a_2 a_3}$$

ist:

$$(80) \quad n = \frac{N a_1 a_2 a_3}{L^3};$$

in einem bestimmten Augenblicke aber sind im Punkte $h_1 h_2 h_3$

$$n + \nu_{h_1 h_2 h_3}$$

Elektronen; dabei ist

$$(81) \quad \sum \nu_{h_1 h_2 h_3} = 0.$$

Unser bisheriges

$$\sigma = \frac{\varepsilon^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

das sich auf *ein* Elektron bezog, muß nunmehr durch ein von Punkt zu Punkt variierendes, sich auf $n + \nu_{h_1 h_2 h_3}$ Elektronen beziehendes ersetzt werden, dem offenbar — wir haben einfach ε und m durch ihren $n + \nu_{h_1 h_2 h_3}$ -fachen Wert zu ersetzen — der Wert

$$(82) \quad \sigma_{h_1 h_2 h_3} = (n + \nu_{h_1 h_2 h_3}) \sigma$$

zukommt. Gleichung (79) nimmt daher die Form an:

$$(83) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{E} &= e^{i\omega t} \frac{e^{-ik_0 R}}{R} \mathfrak{A}_y \left(\frac{q}{R} \right) \\ &\sigma k_0^2 \sum (n + \nu_{h_1 h_2 h_3}) e^{ik_0(h_1 a_1 \alpha_0' + h_2 a_2 \beta_0 + h_3 a_3 \gamma_0)}, \end{aligned} \right.$$

woraus

$$(84) \left\{ \begin{aligned} \overline{\mathfrak{G}}^2 &= \frac{\mathfrak{V}_v^2}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^2 \\ &\quad \sigma^2 k_0^4 \sum (\mathfrak{n} + v_{h_1 h_2 h_3}) e^{i k_0 (\dots)} \sum (\mathfrak{n} + v_{h_1 h_2 h_3}) e^{-i k_0 (\dots)}, \\ \overline{\mathfrak{G}}^2 &= \frac{\mathfrak{V}_v^2}{2} \frac{1}{R^2} \left(\frac{\varrho}{R} \right)^2 \sigma^2 k_0^4 \left\{ \mathfrak{n}^2 \sum e^{i k_0 (\dots)} \sum e^{-i k_0 (\dots)} \right. \\ &\quad + \sum v_{h_1 h_2 h_3} e^{i k_0 (\dots)} \sum v_{h_1 h_2 h_3} e^{-i k_0 (\dots)} \\ &\quad + \mathfrak{n} \sum e^{i k_0 (\dots)} \sum v_{h_1 h_2 h_3} e^{-i k_0 (\dots)} \\ &\quad \left. + \mathfrak{n} \sum e^{-i k_0 (\dots)} \sum v_{h_1 h_2 h_3} e^{i k_0 (\dots)} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Über diesen Ausdruck haben wir den Konstellationsmittelwert zu bilden. Das erste Glied der geschweiften Klammer wird durch die Mittelwerthsbildung nicht berührt: es ist das die Interferenzerscheinung ergebende „Laueglied“¹⁾, berechnet unter der Annahme, daß in jedem Gitterpunkte \mathfrak{n} Elektronen gleichphasig schwingen.

Das letzte und das vorletzte Glied fallen fort; denn jedes stellt ein Produkt aus einer Konstanten

$$(\mathfrak{n} \sum e^{i \dots} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{n} \sum e^{-i \dots})$$

mit einem Ausdruck der Art

$$\mathfrak{M}(\sum v_{h_1 h_2 h_3} e^{\dots})$$

dar, und der Mittelwert jedes dieser Glieder verschwindet nach der Bedeutung der v .

Bleibt der Mittelwert des zweiten Gliedes in der Klammer von (84):

$$\mathfrak{M}[(v_{111} e^{+i \dots} + v_{112} e^{+i \dots} + \dots)(v_{111} e^{-i \dots} + v_{112} e^{-i \dots} + \dots)].$$

Dieser Mittelwert ist gleich

$$\mathfrak{M}(\sum v^2);$$

denn die Mittelwerte über alle Produkte zweier sich auf verschiedene Punkte beziehender v sind Null. Für

$$\mathfrak{M}(\sum v^2)$$

aber kann man schreiben

$$\sum \mathfrak{M}(v^2),$$

1) M. Laue, Münch. Ber. p. 303. 1912; Ann. d. Phys. 41. p. 971. 1913.

was nach einer bekannten statistischen Formel¹⁾ gleich

$$\sum n = N$$

ist, so daß neben dem Laueglied dasselbe Glied wie in § 1 auftritt,

$$\frac{\mathfrak{A}_0^2}{2} \sigma^2 k_0^4 \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \frac{1}{R^2} N,$$

[vgl. (28)], das die Opaleszenzstrahlung darstellt. Damit ist die aufgestellte Behauptung erwiesen.

Noch ein Punkt sei hervorgehoben: Lorentz (l. c. p. 42ff.) kommt zur Opaleszenzstrahlung, indem er annimmt, daß die Dielektrizitätskonstante in einem Volumelement nicht den Mittelwert ε , sondern den Wert $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ habe²⁾, daß also die Materie innerhalb dieses Volumelementes gleichmäßig verteilt sei, die Verteilung aber von Element zu Element plötzlich wechsele. Er fügt die Bemerkung hinzu, daß sich die Opaleszenzstrahlung dann als Reflexion an den einzelnen Scheidewänden der Volumelemente darstelle, und fordert den Nachweis der Opaleszenzstrahlung auch für andere Verteilung der Materie im Volumelement. Die Annahme über die Verteilung der Materie, die wir soeben gemacht haben, ist denkbar anders: nicht gleichmäßige Verteilung der Resonatoren im Element, sondern Zusammenfassung in einem Punkte. Trotzdem kommen wir zum gleichen Ergebnis.

Zusammenfassung.

§ 1. Das Opaleszenzfeld eines in einem Würfel eingeschlossenen Gases setzt sich zusammen aus der Beugungserscheinung am Würfel und der eigentlichen Opaleszenzstrahlung.

§ 2. Die durch die Bewegung der Resonatoren bedingten Schwankungen des Opaleszenzfeldes und der Opaleszenzintensität werden berechnet.

§ 3. Vertauscht man, um die Rechnung für den Fall dichter Resonatorenlagerung (gegenseitiger Beeinflussung der

1) Vgl. z. B. A. H. Lorentz, l. c. p. 38.

2) Dasselbe bei A. Einstein, Ann. d. Phys. **33**, p. 1275. 1910.

Resonatoren) exakt durchführen zu können, die Reihenfolge von zeitlicher und Konstellationsmittelung, so ergibt sich nur die Beugungserscheinung am Würfel, aber keine Opaleszenzstrahlung.

§ 4. Das Auftreten oder Fortfallen der Opaleszenzstrahlung, je nach der Reihenfolge der Mittelungen, wird damit begründet, daß im letzteren Falle den Schwankungen im Gase nicht genügend Rechnung getragen wird. Schwankungserscheinungen werden als wesentlich für das Auftreten der Opaleszenzstrahlung bei unregelmäßiger wie bei regelmäßiger Lagerung der Resonatoren erkannt.

Zum Schluß sei mein Dank Herrn Dr. Reiche, Privatdozenten an der Universität Berlin, ausgesprochen, der den Fortgang der Arbeit mit regem Interesse verfolgt und durch wertvolle Ratschläge gefördert hat.

Flugplatz Döberitz, April 1917.

(Eingegangen 12. Juni 1917.)



BIBLIOTEKA GŁÓWNA

II

29182

Politechniki Gdańskiej