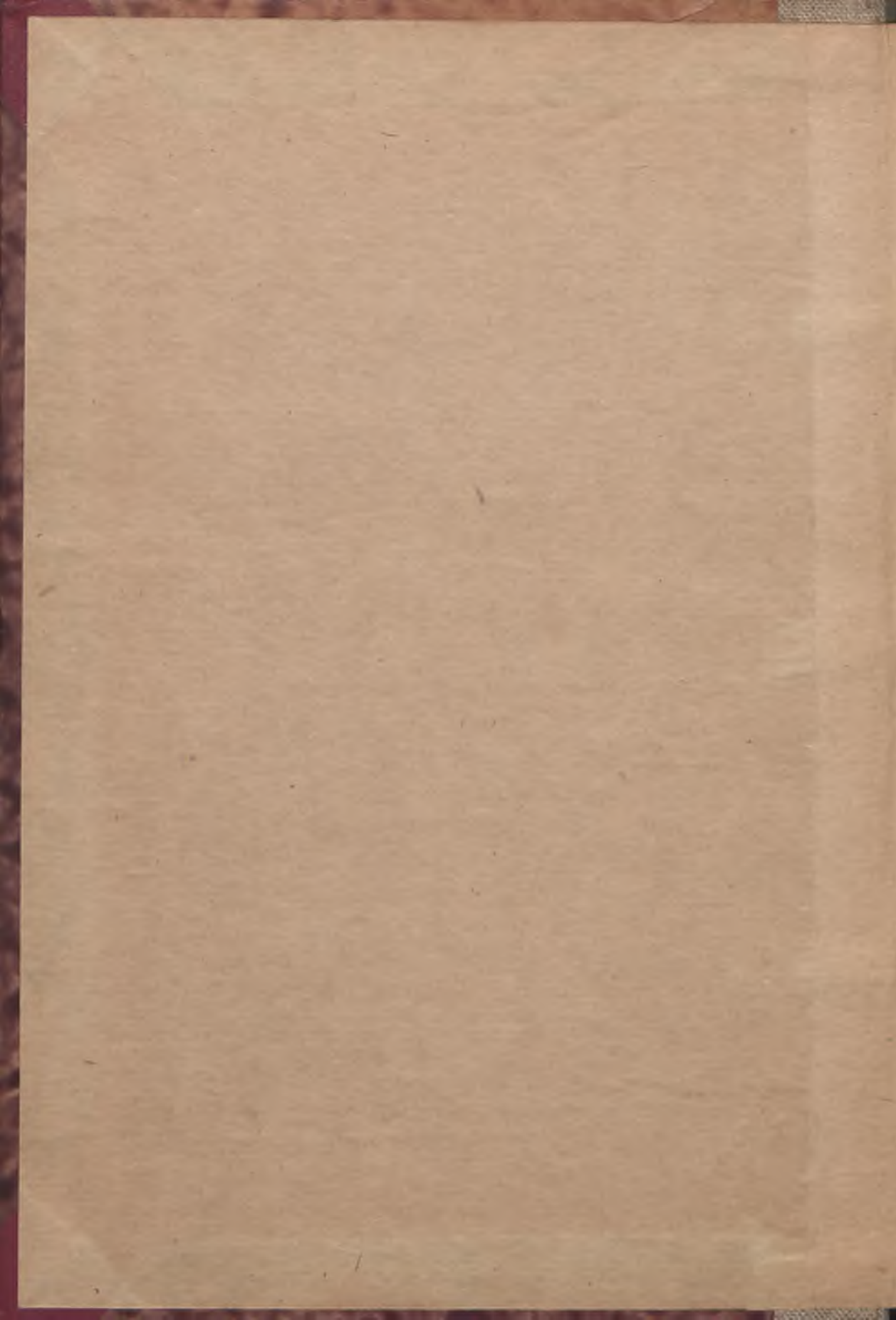


PEDAGOGICZNA  
BIBLIOTEKA  
WOJEWODZKA  
Gdańsk-Wrzeszcz  
K. Marksa 14

*T. II*  
**4250**







POLSKA AKADEMIA UMIEJĘTNOŚCI

M. T. HUBER

# TEORIA SPREŻYSTOŚCI

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

TOM II

NAKŁADEM POLSKIEJ AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI  
Z ZASIĘKU WYDZIAŁU NAUKI MINISTERSTWA OŚWIATY

---

KRAKÓW 1950

3456



# TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI





POLSKA AKADEMIA UMIEJĘTNOŚCI

M. T. HUBER

# TEORIA SPREŻYSTOŚCI

THEORIE DE L'ÉLASTICITÉ

TOM II



NAKŁADEM POLSKIEJ AKADEMII UMIEJĘTNOŚCI  
Z ZASIĘKU WYDZIAŁU NAUKI MINISTERSTWA OŚWIATY

KRAKÓW 1950

ODZIAŁ BIBLIOTEKI MIASTA GDAŃSKA

TEORIA SPRĘŻYSTOŚCI

R. K. „Dawn Kniechi”  
13. VI. 50n



Inw. 4250  
Dz. 53

P. A. U. — 1.000 egz. — B 5. papier druk. sat. bdrzewny 70×100 cm. 80 gr.  
II. 1950. — Zam. 78.

Drukarnia Uniwersytetu Jagiellońskiego pod zarządem P. Z. W. S.  
M-17515

## PRZEDMOWA AUTORA

Druk tomu II przeciągnął się znacznie z powodu obciążenia wyjątkowego i przebudowy Drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego. Ta okoliczność posłużyła do rewizji treści tomu I, co spowodowało opracowanie paru uzupełnień umieszczonych na końcu tomu II. Nie zdołałem jednak opracować na nowo rozdziału o stateczności układów sprężystych, zajmującego sporą część rękopisu wojennego „Stereomechaniki”, który uległ zniszczeniu i nie mógł być zrekonstruowanym w całości, gdyż zajęcia związane z moją katedrą i Instytutem Wytrzymałościowym w Politechnice Gdańskiej nie pozwalały na to w warunkach mego wieku i zdrowia. Trudno było także usunąć z tekstu powoływanie się na inne moje książki, których wydania spodziewałem się znacznie wcześniej niż ukończenia druku książki niniejszej. Mimowolne wprowadzenie w błąd niektórych moich Czytelników wynikło zatem nie z mojej winy. Stwierdzam nadto z niemalą przykrością, że utrata w Powstaniu Warszawskim przeszło 100 referatów prac publikowanych w latach 1934 do 1942 w Związku Radzieckim, które to referaty ogłaszałem za granicą, nie pozwoliła mi na uwzględnienie cennych wyników tych prac w odpowiednich miejscach książki, lub przynajmniej na ich zacytowanie. Tutaj zaznaczę tylko, że działy mechaniki wyrosły na podłożu klasycznej teorii sprężystości rozwija się nader pięknie w piśmiennictwie naukowym rosyjskim, łatwo nam teraz dostępnym, stojąc na poziomie naukowym co najmniej dorównującym pracom w językach zachodnioeuropejskich. Miło mi stwierdzić nadto, że i u nas w Polsce, po letargu wojennym, obudził się do życia poważny ruch naukowy w tej dziedzinie. Świadczy o tym zwłaszcza wydawane od roku w Politechnice Gdańskiej „Archiwum Mechaniki Stosowanej” pod redakcją prof. W. Nowackiego. Zarazem wyrażam nadzieję, że książka moja pobudzi młode kadry polskich naukowców do badań samodzielnych. Olbrzymie nasze straty wojenne niech będą bodźcem ich usilnej pracy.

Na koniec powtórzę prośbę z przedmowy do tomu I, a skierowanej do fizyków i inżynierów badaczy, aby podzielili się ze mną

## VI

spostrzeżeniami i uwagami krytycznymi, jakie się mogą nasunąć przy dokładnej lekturze mojej książki.

Rysunki w rozdziałach końcowych wykonali pp. A. Block i inż. J. Walczak za co Im składam szczerze podziękowanie. Wzorowy skład matematyczny w książce jest zasługą Drukarni Uniwersytetu Jagiellońskiego i jej Pracowników, którym również wyrażam podziękę.

Kraków, w grudniu 1949 r.

*M. T. Huber*

## SPIS RZECZY

	Str
Przedmowa autora . . . . .	V
Spis rzeczy . . . . .	VII
XII. Zagadnienia równowagi i ruchu w ciele sprężystym nieograniczonym . . . . .	1
§ 141. Zagadnienia równowagi. . . . .	1
§ 142. Rozwiązanie ogólne równań równowagi ośrodka sprężystego . . . . .	3
§ 143. Zagadnienie struny . . . . .	6
§ 144. Drgania poprzeczne struny . . . . .	13
§ 145. Drgania skrętne cięgna . . . . .	15
§ 146. Rozwiązania klasyczne zagadnienia struny . . . . .	16
§ 147. Równanie falowe . . . . .	20
§ 148. Całki szczególne równania falowego . . . . .	22
§ 149. Rozwiązanie ogólne równania falowego . . . . .	25
§ 150. Wyznaczenie przemieszczeń . . . . .	32
§ 151. Fale podłużne i poprzeczne. . . . .	34
§ 152. Fale powierzchniowe Rayleigh'a . . . . .	36
XIII. Stany równowagi osiowo-symetrycznej ciał obrotowych . . . . .	39
§ 153. Wzory ogólne . . . . .	39
§ 154. Funkcja naprężeń Love'a. . . . .	44
§ 155. Rozwiązanie przez wielomiany . . . . .	46
§ 155. Zastosowanie w przypadkach kołowo-symetrycznego zginania plyt . . . . .	48
§ 157. Przemieszczenia wyrażone przez funkcję naprężeń Love'a . . . . .	50
§ 158. Skręcanie pręta prostoosiowego o przekroju kołowym zmiennym . . . . .	52
§ 159. Przemieszczeniowe równania różniczkowe równowagi . . . . .	56
§ 160. Rozwiązanie Filon'a dla walca obrotowego . . . . .	58
§ 161. Odkształcenie podłoża sprężystego poziomego pod ciężarem walca sztywnego o osi pionowej . . . . .	64
§ 162. Zgięcie grubej płyty okrągłej pod siłą skupioną w środku . . . . .	69
XIV. Zagadnienia H. Neuber'a . . . . .	75
§ 163. Funkcja naprężeń złożona . . . . .	75
§ 164. Przejście do współrzędnych krzywoliniowych . . . . .	78
§ 165. Przykład zastosowania funkcji Neuber'a . . . . .	82

	Str.
§ 166. Rozwiązanie równania $\nabla^2 \Phi = 0$ we współrzędnych elipsoidalnych. . . . .	87
§ 167. Rozwiązanie jednego z zagadnień szczegółowych Neuber'a . . . . .	91
 XV. Teoria prętów smukłych i strun . . . . .	 95
§ 168. Granice ścisłości rozwiązań rozdziału X. Przejście do prętów smukłych prostych. . . . .	95
§ 169. Przejście do prętów smukłych zakrzywionych . . . . .	98
§ 170. Pręty proste obciążone tylko na końcach . . . . .	100
§ 171. Analogia kinetyczna Kirchhoff'a . . . . .	104
§ 172. Dziewięć typów „elastyk“ Euler'a . . . . .	105
§ 173. Równanie różniczkowe drgań własnych podłużnych prętów prostych . . . . .	108
§ 174. Drgania własne pręta o końcach swobodnych . . . . .	112
§ 175. Drgania wymuszone struny . . . . .	116
§ 176. Równania różniczkowe drgań giętnych . . . . .	121
§ 177. Drgania giętne własne pręta prostego . . . . .	124
§ 178. Przenoszenie się fal giętnych w pręcie nieskończenie długim. Szybkość grupowa. . . . .	127
 XVI. Teoria płyt . . . . .	 130
§ 179. Rozważania wstępne . . . . .	130
§ 180. Własności krzywiznowe powierzchni ugięcia płyty. . . . .	131
§ 181. Równanie różniczkowe teorii płyt cienkich . . . . .	135
§ 182. Warunki brzegowe w najogólniejszym przypadku obciążenia płyty . . . . .	140
§ 183. Inny wywód równania różniczkowego równowagi płyty cienkiej. . . . .	145
§ 184. Metoda Rayleigh'a-Ritz'a . . . . .	148
§ 185. Nowsze rozwiązania przypadku Navier'a płyty prostokątnej . . . . .	152
§ 186. Metoda Galerkin'a . . . . .	157
§ 187. Drgania giętne płyt. Płyta prostokątna . . . . .	160
§ 188. Drgania płyty okrągłej o brzegu swobodnym . . . . .	162
§ 189. Uogólnienie teorii płyt cienkich, gdy ugięcia nie są małe w porównaniu do grubości . . . . .	166
§ 190. Wielkie ugięcia kołowo-symetryczne płyt cienkich. . . . .	171
§ 191. Przykłady rozwiązań zagadnienia odwróconego płyt cienkich przy ugięciach wielkich . . . . .	173
§ 192. Zagadnienie płyty wiotkiej . . . . .	178
§ 193. Sposób J. Prescott'a szukania rozwiązań przybliżonych w przypadkach zgięcia kołowo-symetrycznego płyt cienkich przy ugięciach wielkich . . . . .	183
§ 194. Płyta prostokątna o konturze ustalonym . . . . .	186
§ 195. Płyta okrągła zginana siłą skupioną mimośrodkową . . . . .	190
§ 196. Płyta nieskończona pływająca . . . . .	192
§ 197. Zgięcie kołowo-symetryczne płyty pływającej niezmiernie wielkiej. . . . .	194
§ 198. Zgięcie kołowo-symetryczne płyty pływającej okrągłej . . . . .	198

	Str.
§ 199. Wyznaczenie stałych całkowania w zagadnieniu płyty pływającej . . . . .	201
§ 200. Teoria ścisła płyt grubych . . . . .	204
<b>XVII. Teoria powłok . . . . .</b>	<b>209</b>
§ 201. Rozważania wstępne . . . . .	209
§ 202. Powłoki narażone na same tylko napięcia błonowe . . . . .	211
§ 203. Przykład obciążenia kołowo-symetrycznego powłoki obrotowej . . . . .	216
§ 204. Powłoka o stałych napięciach błonowych pod ciśnieniem hydrostatycznym . . . . .	219
§ 205. Napięcia błonowe przy obciążeniu niesymetrycznym . . . . .	222
§ 206. Odkształcenia powłok obrotowych . . . . .	225
§ 207. Odkształcenia powłoki obrotowej przy stanie napięcia błonowym i obrotowo-symetrycznym . . . . .	234
§ 208. Teoria błonowa powłok walcowych . . . . .	236
§ 209. Teoria zgięciowa powłoki o postaci walca obrotowego . . . . .	240
§ 210. Ciąg dalszy teorii zgięciowej powłoki walcowej . . . . .	249
§ 211. Powłoka obrotowo-walcowa obciążona tylko na brzegach zakrzywionych . . . . .	251
§ 212. Rura w stanie odkształcenia obrotowo-symetrycznym . . . . .	255
§ 213. Powłoka walcowa o brzegach podłużnych prostych, a poprzecznych kołowych . . . . .	262
§ 214. Teoria ogólna powłoki obrotowej niewiotkiej . . . . .	266
§ 215. Teoria zgięciowa powłoki w stanie napięcia i odkształcenia obrotowo-symetrycznym . . . . .	269
§ 216. Ciąg dalszy. Wyprowadzenie równań różniczkowych . . . . .	271
§ 217. Powłoka kulista o grubości stałej . . . . .	275
§ 218. Powłoka stożkowa o grubości stałej . . . . .	281
§ 219. Teoria zgięciowa ścisła w zastosowaniu do powłok o dowolnej postaci południka i zmiennej grubości ściany . . . . .	285
§ 220. Teoria przybliżona powłok obrotowych o postaci południka dowolnej i grubości ściany zmiennej . . . . .	289
<b>XVIa. Płyty anizotropowe . . . . .</b>	<b>293</b>
§ 200 a. Wstęp . . . . .	293
§ 200 b. Tarcza (płyta) ortotropowa w płaskim stanie napięcia . . . . .	295
§ 200 c. Równanie funkcji naprężeń tarczy ortotropowej . . . . .	297
§ 200 d. Energia zginania płyty ortotropowej i równanie różniczkowe jej powierzchni ugięcia . . . . .	298
§ 200 e. Rozwiązywanie zagadnień płyty ortotropowej . . . . .	302
§ 200 f. Płyta bardzo długa na brzegach równoległych swobodnie podparta . . . . .	303
§ 200 g. Przypadek obciążenia równomiernie rozłożonego . . . . .	307
§ 200 h. Przypadek obciążenia liniowego płyty prostokątnej brzegami swobodnie podpartej . . . . .	308
§ 200 i. Przypadek płyty prostokątnej o brzegach $a$ swobodnie podpartych i brzegach $b$ doskonale utwierdzonych . . . . .	309

	Str.
XVIII. Podstawy teorii plastyczności . . . . .	313
§ 201. Rozważania ogólne . . . . .	313
§ 222. Uzupełnienia do § 41. . . . .	319
§ 223. Analiza ogólnego stanu odkształcenia . . . . .	326
§ 224. Teoria plastyczności . . . . .	329
§ 225. „Samowzmocnienie“ lufy działowej . . . . .	333
Uzupełnienia i dostrzeżone braki lub usterki tomu I	341
§ 58 a. Uogólnienie prawa Hooke'a dla ciał izotropowych we współ- rzednych krzywoliniowych prostokątnych . . . . .	341
§ 64 a. Energia sprężysta ciała izotropowego odniesionego do współ- rzednych krzywoliniowych prostokątnych . . . . .	342
Uzupełnienia do §§ 68 i 143 . . . . .	342
Skorowidz . . . . .	345



## POMYŁKI DRUKARSKIE TOMU I.

- str. 20 wiersz 12 od dołu zamiast  $l' \frac{ds'}{ds}$  ma być  $l_1 \frac{ds}{ds'}$
- 21 wiersz 2 od dołu zamiast *terminologii* ma być *terminologii*
- 24 wiersz 3 od dołu zamiast  $(1+k_{11})z$  ma być  $(1+k_{11})x$
- 29 wiersz 19 od dołu zamiast stworzona ma być utworzona
- 30 rys. 4 punkt okręgu leżący powyżej  $P$  należy oznaczyć przez  $P'$
- 39 wiersz 5 od góry zamiast  $a_{ij}$  ma być  $c_{ij}$
- 49 w środku zamiast  $u_\alpha$  ma być  $u_\alpha$
- 53 wiersz 15 od dołu zamiast leżnye ma być leżnych
- 69 rys. 18 brak oznaczenia  $p$  na naprężeniu o składowych  $p_x, p_y, p_z$
- 71 wiersz 19 od dołu zamiast wydłużenie ma być wydłużenia
- 71 w tytule § 41 zamiast normalnego ma być normalnego
- 73 wiersz 8 od góry zamiast  $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$  ma być  $\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$
- 87 wzory (48.1) zamiast znaku = ma być +, a na końcu brak = 0
- 88 wzory (48.3) zamiast znaku = ma być +, a na końcu brak = 0
- 93 w mianowniku wzoru (52.2) zamiast środkowego  $h$  ma być  $h_\beta$
- 123 wiersz 14 od dołu zamiast  $c_{11}\epsilon_y + c_{12}(\epsilon_z + \epsilon_x)$  ma być  $c_{11}\epsilon_x + c_{12}(\epsilon_y + \epsilon_z)$
- 125 wiersz 15 od góry zamiast  $\Phi_y$  ma być  $\Phi_j$
- 129 wiersz 13 od dołu zamiast niewielkich ma być nie zbyt wielkich
- 129 wiersz 3 od dołu zamiast  $\tau_{uz}$  ma być  $\tau_{yz}$
- 131 wiersz 4 od dołu zamiast Obliczywszy ma być obliczymy
- 132 wiersz 4 od góry zamiast  $X, Y, Z$  ma być  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$
- 133 wiersz 6 od góry zamiast wytrwarzają ma być wytwarzają
- 134 wiersz 2 od dołu zamiast zapewne ma być prawdopodobnie
- 135 Termin *metale plastyczne* należy zastąpić przez *metale elastoplastyczne*, albo *metale wiekruche*
- 136 odsyłacz uzupełnić zdaniem: ... i w monografii pt. Kryteria wytrzymałościowe w Stereomechanice technicznej — SIMP Warszawa 1948
- 137 wiersz 23 od góry; brak nazwiska B. F. Haigh po nazwisku R. v. Mises (1913)
- 142 wiersz 1 od dołu zamiast która ma być którą
- 143 wiersz 11 od dołu zamiast symetrii ma być symetrii tarczy
- 145 wiersz 6 i 8 od góry zamiast  $-(2c_2 + a_3)$  ma być  $2c_2 - a_3$
- 146 wiersz 3 od góry zamiast  $-2(c_3 + 3a_3)$  ma być  $2c_3 - 3a_3$   
 $-\frac{1}{3}(b_3 + 2d_3)$  ma być  $\frac{1}{3}(2d_3 - b_3)$
- 151 we wzorze (72.6) zamiast  $G$  ma być  $E$
- 163 wiersz 5 od dołu zamiast  $\sigma_y$  ma być  $\sigma_t$
- 164 wiersz 11 od góry zamiast  $\frac{x}{r} \cos \varphi$  i  $\frac{y}{r} \sin \varphi$  ma być  $\frac{x}{r} = \cos \varphi$  i  $\frac{y}{r} = \sin \varphi$

str.

- „ 165 wiersz 5 od dołu zamiast należy ma być można
- „ 165 wiersz 14 od góry zamiast zwyczajnych ma być zwyczajnym
- „ 166 wiersz 19 od góry  $C=0$  i skreślić
- „ 172 wiersz 6 od góry zamiast obliczywszy ma być Obliczymy
- „ 173 wiersz 3 od dołu zamiast *przypadkowa* ma być *wypadkowa*
- „ 176 wiersz 2 od dołu zamiast *techniczne* ma być *technicznie*
- „ 179 wiersz 10 od góry w drugim równaniu zamiast  $\left(\frac{dy}{dx}\right)$  ma być  $\left(\frac{dy}{dx}\right)_s$
- „ 181 w równaniu (a) po stronie prawej znaku  $\equiv$  ma być  $\nabla_1^2 \nabla_1^2 F \equiv \nabla_1^4 F = 0$
- „ 181 wiersz 7 od dołu zamiast  $\nabla_1 \equiv \partial/\partial x + \partial/\partial y$  ma być  $\nabla_1^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$
- „ 181 wiersz 6 od dołu zamiast  $\nabla \equiv \partial/\partial x + \partial/\partial y + \partial/\partial z$  ma być  $\nabla^2 \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$
- „ 187 wiersz 11 od góry zamiast wiec ma być więc
- „ 191 w równaniu (82.7) winno być  $f(z) = \varphi^* + i\psi$  w celu wyraźnego odróżnienia funkcji  $\varphi(x, y)$  od współrzędnej kątowej  $\varphi$  na rys. 43
- „ 193 wzór (87.9) ma mieć postać  $AG = P/2\pi$
- „ 197 w tytule § 90 zamiast *nieograniczonej* ma być *nieograniczonej*
- „ 200 w pierwszym z wzorów (91.2) zamiast  $\frac{A}{r}$  ma być  $\frac{A}{2}$
- „ 201 w trzecim z wz. (a) brak na końcu nawiasa)
- „ 206 wiersz 8 od góry zamiast okupione ma być skupione
- „ 212 wiersz 11 od góry zamiast *znależlibyśmy* ma być *znależliśmy*
- „ 216 wiersz 14 od dołu zamiast  $\rho$  ma być  $\rho^2$
- „ 225 wiersz 1 od góry zamiast *dzdydz* ma być *dx dy dz*
- „ 227 wiersz 3 i 4 od dołu w wyrażeniu { } wszystkie  $\epsilon$  i  $\gamma$  winny mieć u góry akcenty (kreski pionowe)
- „ 246 Rys. 58 obrócić o  $180^\circ$
- „ 269 wiersz 13 od góry zamiast „elastycznym“ ma być *plastycznym*
- „ 273 wiersz 1 od dołu zamiast „wykazał“ ma być *wykonał*
- „ 284 wiersz 1 od dołu po prawej stronie znaku = zamiast  $J$  ma być  $J_y$
- „ 301 wiersz 6 od dołu zamiast: Warunki te... ma być Warunki (119.1)
- „ 315 wiersz 18 od dołu zamiast może, zachodzić ma być może zachodzić
- „ 344 we wzorze (130.3) zamiast  $M_x^2$  ma być  $\overline{M}_x^2$
- „ 378 zamiast rys. 82 ma być rys. 83

## XII. ZAGADNIENIA RÓWNOWAGI I RUCHU W CIELE SPRĘŻYSTYM NIEOGRANICZONYM

§ 141. **Zagadnienia równowagi.** Wyobrażając sobie ciało sprężyste rozciągające się we wszystkich kierunkach w nieskończoność tworzymy oczywiście fikcję matematyczną zwaną zwykle ośrodkiem sprężystym. Atoli ta fikcja oddaje usługi znakomite w przypadkach, gdy badamy skutek sił zewnętrznych działających na obszar wewnętrzny ciała, jeżeli ten obszar jest bardzo mały wobec wymiarów całego ciała. Wtedy bowiem odpadają warunki krańcowe, których uwzględnienie ściśle sprawia największe trudności przy rozwiązywaniu zagadnień konkretnych. Ułatwione przez to całkowanie równań różniczkowych teorii sprężystości pozwoliło znaleźć liczne ważne wyniki ogólne, które tutaj rozpatrzemy ograniczając się do ciał izotropowych.

W tym celu bierzemy pod uwagę przemieszczeniowe równania różniczkowe równowagi wyprowadzone w § 59, tj.:

$$(141.1) \quad (59.2) \quad \begin{cases} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0, \end{cases}$$

gdzie  $X, Y, Z$  oznaczają składowe siły masowej odniesione do jednostki objętości. Gdy po ich kolejnym zróżniczkowaniu względem  $x, y, z$  te równania dodamy, to otrzymamy

$$(a) \quad \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \nabla^2 \theta + \frac{1}{G} \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) = 0.$$

To zaś równanie zawiera tylko jedną niewiadomą funkcję  $\theta$ . Możemy je napisać w postaci

$$(b) \quad \nabla^2 \theta = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{1}{G} \operatorname{div} \vec{P} = -4\pi f_0(x, y, z),$$

jeżeli  $\vec{P}$  oznacza wektor siły masowej o rzutach  $X, Y, Z$ , które traktujemy jako dane funkcje współrzędnych  $x, y, z$  określające funkcję  $f_0$  równaniem

$$(c) \quad f_0(x, y, z) = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\operatorname{div} \vec{P}}{8\pi G}.$$

Z różniczkowawszy teraz trzecie z równań (141.1) względem  $y$ , a drugie względem  $z$ , otrzymamy po ich odjęciu pierwsze z równań

$$(141.2) \quad \begin{cases} \nabla^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{G} \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = 0 \\ \nabla^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{G} \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = 0 \\ \nabla^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{G} \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0. \end{cases}$$

Dwa następne wynikają z działań analogicznych. Można je zastąpić jednym równaniem wektorowym

$$(141.3) \quad \nabla^2 \operatorname{rot} \vec{W} + \frac{1}{G} \operatorname{rot} \vec{P} = 0,$$

gdzie  $\vec{W}$  oznacza wektor przemieszczenia. Oznaczywszy składowe wektora  $\vec{P}$  jako funkcje miejsca  $f_1, f_2, f_3$  napiszemy równania (141.2) w postaci

$$(141.4) \quad \begin{aligned} \nabla^2 \tilde{\omega}_x &= -4\pi f_1(x, y, z); & \nabla^2 \tilde{\omega}_y &= -4\pi f_2(x, y, z); \\ \nabla^2 \tilde{\omega}_z &= -4\pi f_3(x, y, z). \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy tedy do wyznaczenia rozszerzenia objętościowego właściwego i składowych obrotu  $\vec{\tilde{\omega}}$  równania różniczkowe tego samego typu co

$$(141.5) \quad \nabla^2 \Phi = 4\pi k\mu$$

w teorii potencjału grawitacyjnego  $\Phi$  w punktach wewnętrznych ciała, przy czym  $\mu$  oznacza gęstość, a  $k$  stałą grawitacji.

To równanie nosi tam nazwę *równania różniczkowego Poisson'a*. W ciągu dalszym nadamy mu dla wygody postać identyczną z równaniem potencjału elektrycznego

$$(141.6) \quad \nabla^2 \Phi = -4\pi\varepsilon,$$

gdzie  $\varepsilon$  zastępuje  $-k\mu$ .

Dajmy na to, że znamy dwa rozwiązania równania Poisson'a, tj.  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$ . Wówczas

$$\nabla^2 \Phi_1 = -4\pi\varepsilon \quad \text{i} \quad \nabla^2 \Phi_2 = -4\pi\varepsilon,$$

z czego po odjęciu wynika

$$\nabla^2(\Phi_1 - \Phi_2) = 0.$$

Oznaczmy  $\Phi_1 - \Phi_2 \equiv \Psi$ , to funkcja  $\Psi$  czyni zadość równaniu

$$\nabla^2 \Psi = 0,$$

czyli równaniu różniczkowemu Laplace'a, które spełnia potencjał grawitacji w punktach zewnątrz mas ciężących. Z tego wynika

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Psi,$$

co wyraża, że gdy do całki  $\Phi_2$  równania Poisson'a dodamy jakąkolwiek całkę równania Laplace'a, to suma przedstawi nową całkę równania Poisson'a.

Całką szczególną równania Laplace'a, czyli funkcją harmoniczną, jest między innymi (jak już zaznaczono w § 102) funkcja  $r^{-1}$ , jeżeli  $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$  oznacza odległość od punktu stałego  $(x_0, y_0, z_0)$ . Atoli funkcja ta spełnia równanie Laplace'a w całej przestrzeni z wyjątkiem punktu wymienionego, który przeto należy wyłączyć przy całkowaniu.

### § 142. Rozwiązanie ogólne równań równowagi ośrodka sprężystego.

To rozwiązanie jest, jak wynika z § poprzedniego, równoważne z całkowaniem ogólnym równania Poisson'a. Wykonamy je stosując wzór Green'a, który przy obiorze normalnej wewnętrznej  $n$  do powierzchni  $\sigma$  otaczającej objętość  $\tau$  ma postać

$$(a) \quad \int (U \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 U) d\tau = - \int \left( U \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma,$$

gdzie  $U$  i  $\Phi$  oznaczają funkcje  $x, y, z$  ciągłe i jednoznaczne wraz z pochodnymi pierwszymi i drugimi. Przyjąwszy  $\Phi$  jako szukane rozwiązanie równania Poisson'a (141.6), obierzemy

$$U = r^{-1} = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{-1/2}.$$

Przy całkowaniu w obszarze otaczającym punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  należy ten punkt jako osobliwy wyłączyć przez otoczenie go kulą o promieniu  $r_0$ , co uwydatnimy oznaczając przez  $d\tau^*$  element objętości pozostałej po wyłączeniu punktu osobliwego i wykonywując całkowanie po powierzchni z prawej strony równania nie tylko po

powierzchni wydzielającej cały obszar rozpatrywany, ale także po powierzchni wydrążenia kulistego, po czym zmniejszymy promień kuli do zera. Element powierzchni kuli oznaczmy przez  $dk$ . Mamy więc według (a)

$$(142.1) \quad \int \left[ \frac{1}{r} \nabla^2 \Phi - \Phi \cdot \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\tau^* = - \int \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\sigma - \\ - \int \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dk.$$

Teraz z powodu wyłączenia punktu osobliwego można po stronie lewej podstawić  $\nabla^2(1/r) = 0$ , a ponieważ  $\nabla^2 \Phi = -4\pi\varepsilon$ , więc strona lewa przyjmie postać

$$-4\pi \int \frac{\varepsilon}{r} d\tau^*.$$

W całce drugiej po prawej stronie równania (142.1) jest  $\partial \Phi / \partial n = \partial \Phi / \partial r$ , ponieważ kierunek normalnej do powierzchni kuli jest zarazem kierunkiem promienia  $r$ . Nadto jest tutaj

$$\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}.$$

co na powierzchni kuli ma wartość  $-r_0^{-2}$ . Oznaczywszy przez  $d\omega$  kąt bryłowy o wierzchołku w środku kuli, który na jej powierzchni wyznacza element pola  $dk$ , napiszemy  $dk = r_0^2 d\omega$ . Po wstawieniu tych wartości w całkę wymienioną znajdujemy

$$(142.2) \quad - \int \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dk = -\frac{1}{r_0} \int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r_0} r_0^2 d\omega - \frac{1}{r_0^2} \int \Phi \cdot r_0^2 d\omega = \\ = -r_0 \int \left( \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)_{r_0} d\omega - \int \Phi d\omega.$$

Zmniejszając teraz aż do zera promień kuli otrzymujemy 0 jako wartość graniczną pierwszej całki po stronie prawej, a wartość  $\Phi$  w całce drugiej zdąża widocznie do  $\Phi(x_0, y_0, z_0)$ , tj. do wartości tej funkcji w środku kuli. A zatem:

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} \int \Phi d\omega = \Phi(x_0, y_0, z_0) \int d\omega = 4\pi \Phi(x_0, y_0, z_0).$$

Wstawiając to wszystko w (142.1) otrzymamy

$$4\pi \int \frac{\varepsilon}{r} d\tau = \int \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\sigma + 4\pi \Phi(x_0, y_0, z_0),$$

a stąd wartość funkcji  $\Phi$  w dowolnym punkcie  $(x_0, y_0, z_0)$ :

$$(142.3) \quad \Phi(x_0, y_0, z_0) = \int \frac{\varepsilon d\tau}{r} - \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial n} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\sigma.$$

Rozwiązanie ogólne równania Poisson'a polega według tego wzoru na wyznaczeniu wartości  $\Phi$  w każdym punkcie obszaru całkowania z danych wartości  $\varepsilon$  w tym obszarze, oraz wartości jakie przybiera  $\Phi$  i  $\partial\Phi/\partial n$  na powierzchni ograniczającej. Trzy całki po stronie prawej równania (142.3) oznaczają jak uczy teoria potencjału:

$\int \frac{\varepsilon d\tau}{r}$  potencjał masy rozmieszczonej w objętości  $\tau$  o gęstości  $\varepsilon$ ;

$\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial n} d\sigma$  potencjał masy rozmieszczonej na powierzchni  $\sigma$  o gęstości powierzchniowej  $\eta = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\Phi}{\partial n}$ ; wreszcie

$\frac{1}{4\pi} \int \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) d\sigma$  potencjał warstwy podwójnej o momencie  $\frac{1}{4\pi} \Phi$  rozmieszczonej na tejże powierzchni.

Widać z tego, że znalezione „rozwiązanie ogólne” nie załatwia jeszcze sprawy, gdyż w ogóle wartości  $\Phi$  i  $\partial\Phi/\partial n$  na powierzchni obszaru całkowania nie są dane, a nie można ich także obliczyć jakąś metodą ogólną. Jedynie w przypadkach, gdy druga i trzecia całka po prawej zdąża do zera dla obszaru zwiększającego się bez granic, możemy napisać po prostu:

$$(142.4) \quad \Phi(x_0, y_0, z_0) = \int \frac{\varepsilon d\tau}{r},$$

a wzór ten umożliwi wyznaczenie  $\Phi$ , a zarazem wielkości  $\theta$ ,  $\tilde{\omega}_x$ ,  $\tilde{\omega}_y$ ,  $\tilde{\omega}_z$  w ośrodku sprężystym nieograniczonym. Znajomość zaś tych wielkości jako funkcji miejsca pozwoli, jak zobaczymy poniżej wyznaczyć przemieszczenia  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Przechodząc teraz do zagadnienia ruchu wyobraźmy sobie, że jakiś element znajdujący się we wnętrzu ciała sprężystego będącego w równowadze został wytracony ze swego położenia siłami zewnętrznymi chwilowymi i wskutek tego rozpoczął ruch. Ruch ten od chwili wyłączenia sił zewnętrznych odbywa się pod wpływem więzi sprężystych łączących element z warstwą otaczającą materii ciała, a więc ma charakter drgań. Drgania te przenoszą się w ciągu dalszym na coraz odleglejsze warstwy otaczające źródło zaburzenia. Nazywamy je drganiami *swobodnymi* lub *własnymi* w odróżnieniu od drgań *wymuszonych* siłami zewnętrznymi ciągłymi okresowo zmiennymi. Ujęcie teoretyczne ruchu takiego, jako rozchodzenia się miejscowego zaburzenia równowagi staje się szczególnie proste, gdy ograniczymy się do obszaru bardzo małego wobec wymiarów

ciała, albo, co wychodzi na jedno, gdy przyjmiemy, że ściany ograniczające ciało oddalają się do nieskończoności. Wtedy zaburzenie rozchodzi się podobnie jak odkształcenie zwierciadła wody w stawie po wrzuceniu doń kamyka w postaci „fal”, jest więc jak się wyrażamy „ruchem falowym” materii ciała. Ogromne znaczenie i rozpowszechnienie ruchów falowych domaga się możliwie prostego i jasnego przedstawienia ich głównych własności, do czego z wielu względów nadaje się bardzo dobrze klasyczne zagadnienie szczegółowe struny, jako najprostszego układu sprężystego ciągłego.

**§ 143. Zagadnienie struny.** Struną nazywamy krótko każde ciągnie<sup>1)</sup> jednorodne i sprężyste, rozpięte ciągnięciem stałym między dwoma punktami nieruchomymi, którego sztywność zginania można pominąć. Pomiemy także i ciężar własny ciągnia, przyjmując, że jego postać równowagi w stanie napiętym określa w każdym położeniu punktów końcowych  $A$  i  $B$  prosta  $AB$  obrana za oś  $X$  prostokątnego układu współrzędnych<sup>2)</sup>. Wtedy ciągnie można traktować jako kontinuum liniowe punktów  $(x, 0, 0)$ , których przemieszczenia  $u, v, w$  są funkcjami odciętej  $x$  i czasu  $t$ . Zakładając zastosowanie zasady superpozycji rozpatrzmy oddzielnie każdą z trzech składowych ruchu elementu struny o masie  $\mu F dz$  ( $\mu$  gęstość,  $F$  pole przekroju), a mianowicie:

1<sup>o</sup>. Przyspieszeniem ruchu elementu wzdłuż osi  $X$  jest  $\partial^2 u / \partial t^2$ . W kierunku ujemnym osi  $X$  działa na element napięcie

$$N + EF \frac{\partial u}{\partial x};$$

w kierunku dodatnim napięcie

$$N + EF \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + EF \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx,$$

a więc różnica tych napięć

$$EF \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

<sup>1)</sup> Wyraz „ciągnie” na oznaczenie elementów materialnych o wybitnej sztywności rozciągania a także i skręcania przy znikającej sztywności ściskania i zginania, jest bardzo udatnym nowotworem Komitetu Redakcyjnego I wydania podręcznika „Technik” (Warszawa 1905).

<sup>2)</sup> Uwzględnienie ciężaru własnego nie zmienia w niczym równań ruchu jeżeli składowe pionowe przemieszczeń oznaczone np. przez  $v$  dla ciągnia rozpiętego poziomo mierzymy od położenia równowagi, które bardzo nieznacznie zwisa od prostej  $AB$ .

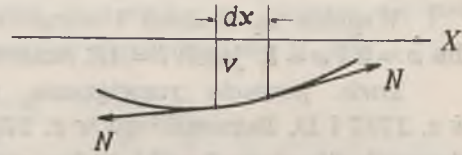


musi być równa iloczynowi masy  $\mu F dx$  przez przyspieszenie, czyli

$$(143.1) \quad \boxed{\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}.$$

(To równanie jest zarazem równaniem różniczkowym drgań podłużnych pręta sprężystego z pominięciem nieznacznego wpływu odkształceń poprzecznych tworzących przemieszczenie podłużnym  $u$ ).

2<sup>o</sup>. Gdy elementy struny poruszają się tylko w płaszczyźnie  $XY$ , to  $\partial^2 v / \partial t^2$  jest przyspieszeniem ich ruchu w kierunku  $Y$ . Jako siły poruszające występują (rys. 84): składowa napięcia



Rys. 84.

$$-N \frac{\partial v}{\partial x} \text{ w przekroju } x,$$

oraz składowa

$$N \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \right)$$

w przekroju  $x + dx$ , ponieważ  $\partial v / \partial x$  jest miarą bardzo małego kąta nachylenia stycznej do krzywej jaką tworzy podczas ruchu oś struny. Wypadkową tych sił jest

$$N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx.$$

A więc równaniem ruchu elementu jest

$$\mu F' \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx = N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx,$$

czyli

$$(143.2) \quad \boxed{\mu F' \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = N \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}.$$

3<sup>o</sup>. Równanie tej samej postaci otrzymamy oczywiście dla ruchu elementów struny w płaszczyźnie  $XZ$ , a mianowicie

$$(143.2 \text{ a}) \quad \boxed{\mu F' \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}.$$

Wszystkie trzy równania można sprowadzić do wspólnej postaci

$$(143.3) \quad \boxed{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}},$$

gdzie

$$a = \sqrt{\frac{E}{\mu}} \text{ dla drgań podłużnych, tj. równoległych do } X,$$

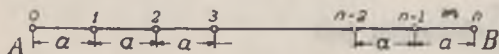
zaś

$$a = \sqrt{\frac{N}{\mu E}} \text{ dla drgań poprzecznych, tj. prostopadłych do osi } X.$$

Wspólne są również i warunki krańcowe, tj.  $\zeta = 0$ , i  $\partial\zeta/\partial t = 0$  dla  $x = 0$  i  $x = l$ , jeżeli  $l = AB$  oznacza długość napiętej części struny.

Dwie postacie rozwiązania znalezione przez d'Alembert'a w r. 1747 i D. Bernoulli'ego w r. 1753 rozpatrzono już w § 251 i następnych Stereomechaniki techn. autora. Tutaj obierzemy najpierw inną drogę prowadzącą wprawdzie pośrednio do celu, ale ogromnie pouczającą jako zastosowanie równań Lagrange'a drugiego rodzaju. Przytoczymy je poniżej z krótkim komentarzem, nie powtarzając uzasadnienia szczegółowego, gdyż można je znaleźć np. w rozdz. XI *Mechaniki Ogólnej* autora, albo w innych podręcznikach mechaniki teoretycznej.

Podzielmy długość rozpiętej struny na  $n$  równych części o długości  $a = l/n$  i pomyślmy sobie w każdym z punktów podziału skupioną  $1/n$ -tą część masy całej struny, pozostawiając resztę własności struny, tj. jej napięcie i odkształcalność sprężystą bez zmiany. Mamy więc do czynienia z modelem nieciągłym struny, który jest układem  $n-1$  punktów materialnych o skończonej liczbie stopni



Rys. 85.

swobody w odróżnieniu od struny ciągłej jako układu o liczbie stopni swobody nieskończenie wielkiej (mocy kontinuum) (rys. 85). Rozwiązawszy zagadnienie ruchu modelu wykonamy następnie przejście do  $n \rightarrow \infty$ , aby znaleźć rozwiązanie dla struny ciągłej.

W spoczynku określają położenia punktów materialnych modelu odcięte  $a, 2a, 3a, \dots, (n-1)a$ . Ich przemieszczenia przy drganiach podłużnych oznaczymy odpowiednio przez

$$u_1, u_2, \dots, u_l, \dots, u_{n-1}.$$

Wydłużenia właściwe więzów sprężystych łączących początek  $A$  z punktem  $m_1$ , punkt  $m_1$  z punktem  $m_2$  itd. są

$$\frac{u_1}{a}, \frac{u_2 - u_1}{a}, \dots, \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{a}, \frac{-u_{n-1}}{a},$$

co napiszemy w postaci

$$\frac{u_1 - u_0}{a}, \frac{u_2 - u_1}{a}, \dots, \frac{u_i - u_{i-1}}{a}, \frac{u_{i+1} - u_i}{a}, \dots, \frac{u_{n-1} - u_{n-2}}{a}, \frac{u_n - u_{n-1}}{a}$$

jeżeli  $u_0 = 0$  i  $u_n = 0$  oznaczają przemieszczenia początku  $A$  i końca  $B$  rozpiętej struny. Mnożąc te wydłużenia przez sztywność podłużną więzi sprężystej  $A = EF$  znajdziemy przyrosty napięcia w częściach kolejnych modelu. A zatem punkt materialny  $m_i$  porusza się pod działaniem siły wypadkowej z napięć obustronnych, tj. siły

$$X_i = A \left( \frac{u_{i+1} - u_i}{a} - \frac{u_i - u_{i-1}}{a} \right).$$

Ponieważ ta siła jest równa  $-\partial U / \partial u_i$ , jeżeli  $U$  oznacza energię potencjalną układu, przeto tę energię przedstawi wyrażenie

$$(143.4) \quad U = \frac{A}{2a} [(u_1 - u_0)^2 + (u_2 - u_1)^2 + \dots + (u_n - u_{n-1})^2]$$

jako równe zarazem pracy odkształcenia sprężystego wszystkich odcinków cięgna. Dla energii kinetycznej układu napiszemy wyrażenie

$$(143.5) \quad E = \frac{1}{2} m (\dot{u}_0^2 + \dot{u}_1^2 + \dots + \dot{u}_{n-1}^2 + \dot{u}_n^2),$$

gdzie  $m = \mu Fa$  oznacza masę każdego z punktów układu.

Równania różniczkowe Lagrange'a, tj.

$$\frac{\partial(E - U)}{\partial u_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{u}_i} \right)$$

dają teraz równania różniczkowe ruchu:

$$(143.6) \quad \begin{cases} \frac{A}{a} (u_1 - u_0 + u_1 - u_2) + m \frac{d^2 u_1}{dt^2} = 0 \\ \frac{A}{a} (u_2 - u_1 + u_2 - u_3) + m \frac{d^2 u_2}{dt^2} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \frac{A}{a} (u_{n-1} - u_{n-2} + u_{n-1} - u_n) + m \frac{d^2 u_{n-1}}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Całką szczególną tego układu równań jest jak łatwo sprawdzić

$$(143.7) \quad u_i = \lambda_i \cos(\omega t + \alpha), \quad i = 0, 1, 2, \dots, (n-1), n,$$

przy czym parametry  $\lambda_i$  muszą czynić zadość równaniom wynikłym z podstawienia rozwiązania w równania (143.6), a więc równaniom

$$(143.8) \quad \begin{cases} -\frac{A}{a} \lambda_0 + \left(\frac{2A}{a} - m\omega^2\right) \lambda_1 - \frac{A}{a} \lambda_2 = 0 \\ -\frac{A}{a} \lambda_1 + \left(\frac{2A}{a} - m\omega^2\right) \lambda_2 - \frac{A}{a} \lambda_3 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ -\frac{A}{a} \lambda_{n-1} + \left(\frac{2A}{a} - m\omega^2\right) \lambda_{n-1} - \frac{A}{a} \lambda_n = 0. \end{cases}$$

Tych  $(n-1)$  równań zawiera  $(n-1)$  niewiadomych  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ , gdyż oczywiście  $\lambda_0 = \lambda_n = 0$ . Oznaczywszy dla skrócenia

$$2 - \frac{am\omega^2}{A} = C,$$

napiżemy powyższe równania w postaci

$$(143.8 a) \quad \begin{cases} C\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -\lambda_1 + C\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + C\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ -\lambda_{n-2} + C\lambda_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Ten układ  $(n-1)$  równań liniowych jednorodnych o  $(n-1)$  niewiadomych  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$  ma jak wiadomo tylko wtedy rozwiązania różne od zera, gdy jego wyznacznik

$$D_{n-1} = \begin{vmatrix} C, & -1, & 0, & 0, & \dots \\ -1, & C, & -1, & 0, & 0, & \dots \\ 0, & -1, & C, & -1, & 0, & \dots \\ \dots\dots\dots \\ 0, & 0, & 0, \dots, & 0, & -1, & C, & -1 \\ 0, & 0, & 0, \dots, & 0, & 0, & -1, & C \end{vmatrix} = 0.$$

Rozwinięcie według wyrazów pierwszej kolumny daje

$$D_{n-1} = CD_{n-2} - D_{n-3}, \quad \text{czyli} \quad D_{n-1} + D_{n-3} = CD_{n-2}.$$

Porównywując to równanie ze związkami goniometrycznymi

$$\sin n\varphi + \sin (n-2)\varphi = 2 \cos \varphi \sin (n-1)\varphi$$

napiżemy

$$C = 2 \cos \varphi \quad \text{i} \quad D_{n-1} = W \sin n\varphi,$$

gdzie  $W$  oznacza współczynnik, który wyznaczymy z warunku, że dla  $n=2$ ,  $D_{n-1}=D_1=C$ , czyli

$$W \sin 2\varphi = 2 \cos \varphi$$

stąd

$$W = \frac{1}{\sin \varphi}; \quad D_{n-1} = \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}.$$

Ponieważ  $D_{n-1}$  jako wyznacznik określający wartości  $C$  musi być równy zeru, przeto temu warunkowi uczynimy zadość przyjmując

$$n\varphi = k\pi,$$

gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą różną od wielokrotności  $n$ . A zatem

$$C = 2 \frac{am \omega^2}{A} = 2 \cos \varphi = 2 \cos \frac{k\pi}{n}.$$

Stąd wartość częstotści kątowej drgań

$$(143.9) \quad \omega = 2 \sqrt{\frac{A}{am}} \cdot \sin \frac{k\pi}{2n}.$$

Wzór ten daje  $(n-1)$  różnych częstotści kątowych  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ , gdy podstawimy w nim  $k=1, 2, \dots, (n-1)$ .

Równania (143.8 a) przyjmą teraz postać

$$-\lambda_{i-1} + 2\lambda_i \cdot \cos \frac{k\pi}{n} - \lambda_{i+1} = 0 \quad [i=1, 2, \dots, (n-1)] \\ (\lambda_0 = \lambda_n = 0).$$

Jak łatwo się przekonać czynią im zadość wartości

$$\lambda_i = B_k \sin i \cdot \frac{k\pi}{n},$$

gdzie  $B_k$  oznacza stałe dowolne. Wobec tego napiszemy całkę szczególną (143.7) w postaci

$$(143.10) \quad u_i = B_k \sin i \frac{k\pi}{n} \cos(\omega_k t + a_k).$$

Takich całek szczególnych określających możliwe drgania punktu  $m_i$  (o okresach  $2\pi/\omega_k$ ) jest tylko  $(n-1)$ , albowiem większe od  $(n-1)$  wartości liczby całkowitej  $k$  prowadzą do okresów tych samych. Dodając wszystkie te całki otrzymujemy rozwiązanie ogólne w postaci

$$(143.11) \quad u_i = \sum_{k=1}^{k=n-1} B_k \sin i \frac{k\pi}{n} \cos(\omega_k t + a_k) \dots \quad [i=1, 2, \dots, (n-1)]$$

zawierającej  $2(n-1)$  stałych dowolnych  $B_k$  i  $a_k$ . Możemy je wyznaczyć z odchyień i prędkości początkowych punktów materialnych naszego modelu struny.

Przejście od modelu do struny ciągłej wykonamy teraz podstawiając w (143.11)

$$ia = x, \text{ a więc } i = \frac{x}{a}$$

i przyjmując  $\lim_{a \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} an = \lim_{a \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} a(n-1) = l$ . Równanie przekształci się zatem na

$$(143.12) \quad u = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos(\omega_k t + a_k).$$

Częstość kątowna

$$\omega_k = 2 \sqrt{\frac{A}{am}} \cdot \sin \frac{k\pi}{2n}$$

staje się teraz z uwagi na  $a = l/n$ ,  $m = \mu Fl/n$ , a więc

$$am = \mu F \frac{l^2}{n^2}$$

równą

$$\omega_k = \lim 2 \sqrt{\frac{n^2 A}{l^2 \mu F}} \cdot \sin \frac{k\pi}{2n} = \lim \left( 2 \frac{n}{l} \sqrt{\frac{E}{\mu}} \cdot \frac{k\pi}{2n} \right),$$

czyli

$$(143.13) \quad \boxed{\omega_k = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\mu}}}, \quad (k=1, 2, 3, \dots)$$

zaś okres drgania

$$(143.14) \quad \boxed{T_k = \frac{2l}{k} \sqrt{\frac{\mu}{E}}}$$

Najdłuższym okresem odpowiadającym najniższej częstości drgań jest

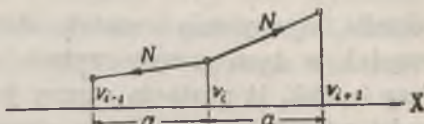
$$(143.15) \quad T_1 = 2l \sqrt{\frac{\mu}{E}}$$

tj. okres *drzania głównego* (podstawowego). W akustyce odpowiada mu *ton zasadniczy*, czyli *główny*. Wszelkie inne częstości tworzące zbiór przeliczalny są całkowitymi wielokrotnościami częstości podstawowej. Drganie podłużne struny (a jak zobaczymy i drgania poprzeczne) jest więc ruchem okresowym, podczas gdy drgania mas  $m_i$  rozważane poprzednio są ruchami nieokresowymi, gdyż

częstości przedstawione wzorem (143.9) nie są wielokrotnościami jakiegokolwiek liczby.

W wynikach powyższych jest godne uwagi jeszcze to, że z wzorów znikło zupełnie napięcie cięga. Drgania podłużne są przeto *niezależne od wielkości napięcia początkowego struny*, a tylko zależne od *rozpiętości  $l$ , modułu sprężystości  $E$  i gęstości materiału  $\mu$* .

**§ 144. Drgania poprzeczne struny.** Zastąpiwszy jak poprzednio masę struny układem p. m.-ych w odstępach  $a = l/n$ , o masach  $m = \mu Fl/n$  i przyjąwszy, że ich ruchy zachodzą w płaszczyźnie  $YX$  pomyślanej pionowo (rys. 86), znajdujemy składową  $Y$  siły poruszającej punkt  $m_i$  jako sumę składowej pionowej napięcia  $N$  ze strony lewej, tj.  $-N \frac{v_{i-1} - v_{i-1}}$  i ze strony prawej  $+N \frac{v_{i+1} - v_i}{a}$ .



Rys. 86.

A zatem

$$Y = \frac{N}{a} [(v_{i-1} - v_i) + (v_{i+1} - v_i)].$$

Dla energii potencjalnej i kinetycznej układu otrzymamy wyrażenia

$$U = \frac{N}{2a} [(v_1 - v_0)^2 + (v_2 - v_1)^2 + \dots + (v_n - v_{n-1})^2],$$

$$E = \frac{1}{2} m (\dot{v}_0^2 + \dot{v}_1^2 + \dots + \dot{v}_n^2),$$

które różnią się od analogicznych w przypadku drgań podłużnych jedynie tym, że zamiast sztywności podłużnej  $A$  występuje tutaj napięcie cięga  $N$  jako parametr. Wobec tego wystarczy tylko wprowadzić ten parametr we wzory poprzednio wyprowadzone i napisać

$$(144.1) \quad \begin{cases} v_i = \sum_{k=1}^{k=n-1} B_k \sin i \frac{k\pi}{n} \cos (\omega_k t + \alpha_k), \\ \omega_k = 2 \sqrt{\frac{N}{am}} \cdot \sin \frac{k\pi}{2n}, \end{cases}$$

a po przejściu do struny ciągłej

$$(144.2) \quad \boxed{\begin{aligned} v &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos (\omega_k t + \alpha_k) \\ \omega_k &= \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{N}{\mu F}}, \quad T_k = \frac{2l}{k} \sqrt{\frac{\mu F}{N}} \end{aligned}}$$

Wzory te pouczają, że drgania poprzeczne zależą od *rozpiętości struny, jej napięcia, przekroju i ciężaru właściwego, a nie zależą od modułu sprężystości materiału* (jak to zachodziło w drganiach podłużnych). Każdy oddzielny wyraz szeregu nieskończonego (144.2) przedstawiającego najogólniejsze drganie płaskie struny, np.

$$B_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos(\omega_k t + a_k)$$

określa wychylenia cząstek struny odbywające się u wszystkich cząstek w tym samym rytmie określonym częstością  $\omega_k$  i kątem fazy  $a_k$  tak, iż postacią struny jest w każdej chwili sinusoida o długości półfali  $l/k$ . Przekroje struny  $x=l/k, 2l/k, 3l/k, \dots$  nie doznają zatem wychyleń, czyli tworzą *węzły*. Węzły te dzielą rozpiętość struny na 1, 2, 3, ... półfale. Drgania takie, o ile nie są zbyt powolne lub zbyt szybkie dają wrażenie słuchowe tonu muzycznego i dlatego w akustyce noszą nazwę tonów własnych struny. Przyjmując  $k=1, 2, 3, \dots$  otrzymujemy kolejno najniższy ton główny, czyli podstawowy i wyższe tony *harmoniczne* o częstości podwójnej, potrójnej itd.

Struna może oczywiście wykonywać i drgania złożone z ilu-kolwiek prostych drgań harmonicznych przedstawionych wyrazami szeregu (144.2). Cały szereg przedstawia najogólniejszy możliwy ruch struny z położenia początkowego określonego wyrażeniem dla  $v$  otrzymanym przez podstawienie  $t=0$ , czyli wyrażeniem

$$v_0 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos a_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

które według twierdzenia Fourier'a wyznacza dowolną funkcję ciągłą w przedziale  $0 \leq x \leq l$ , przyjmującą wartości zerowe na obu granicach tego przedziału.

Gdy teraz przyjmimy, że drgania poprzeczne cząstek struny zachodzą w płaszczyźnie  $ZX$ , to otrzymamy drogą identyczną rozwiązanie ogólne różniące się jedynie wartościami stałych dowolnych  $B_k$  i  $a_k$ . W przypadku najogólniejszym drgań przestrzennych cząstek struny określonych trzema składowymi  $u, v, w$ , wyznaczają trzy rozwiązania powyższe trzy rzuty przemieszczenia całkowitego na osie prostokątnego układu współrzędnych. Przy tym należy pamiętać, że ścisłość wyników teorii w zastosowaniu do ciągłych rzeczywistych jest tym większa, im mniejsza jest sztywność zginania cięgna, a wychylenia tak małe, że wywołane nimi zmiany odległości przekrojów nie powodują godnych uwagi zmian napięcia



podłużnego  $N$ . Pomiędzy drganiami podłużnymi a poprzecznymi struny zachodzi wreszcie ta ważna różnica, że pierwszym towarzyszą wyraźne wydłużenia i skrócenia elementów struny, podczas gdy tego rodzaju odkształcenia nie grają żadnej roli godnej uwagi przy drganiach poprzecznych o amplitudach dostatecznie małych, jakie zakładamy w teorii. Jakkolwiek drgania poprzeczne cięga rozpiętego rozpatrujemy zwykle z pominięciem sztywności zginania, to jednak zgięcie elementów cięga występuje przy tym wyraźnie, wobec czego drgania takie można zaliczyć do *drzań giętnych*, które w odniesieniu do prętów o znacznej sztywności zginania zbadamy poniżej.

**§ 145. Drgania skrętne cięga.** Gdy rozmieszczonymi wzdłuż osi  $X$  cięga (lub pręta) momentami skręcającymi obrócimy względem siebie około tej osi elementy pręta, a po tym usuniemy momenty, to energia potencjalna wewnętrznych sił sprężystości zamieni się na energię kinetyczną obrotu elementów pręta i powstaną drgania skrętne. Ich teoria jest, jak zobaczymy, analogiczna do teorii drzań podłużnych i giętnych.

Zastosowawszy znowu model przybliżony przez podział cięga  $AB=l=na$  na  $n$  części równych  $m_1, m_2, \dots$  o masach skupionych w punktach podziału i przypisując im moment bezwładności, który jest odpowiednią częścią momentu bezwładności  $\Theta$  całego cięga względem osi  $X$ , oznaczymy kolejno przez  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$  kąty obrotu mas  $m_1, m_2, \dots$  względem pierwotnego położenia równowagi. Na masę  $m_i$  działa z lewej strony moment odpowiadający skręceniu odcinka  $a$  o kąt  $\varphi_i - \varphi_{i-1}$ , a więc moment  $-C \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{a}$ , jeżeli  $C$  oznacza sztywność skręcenia. Z prawej zaś strony moment  $C \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{a}$ . Równanie ruchu obrotowego masy punktu  $m_i$  o momencie bezwładności  $a\Theta/l$  ma zatem postać

$$\frac{C}{a} [(\varphi_i - \varphi_{i-1}) + (\varphi_i - \varphi_{i+1})] + \frac{a\Theta}{l} \ddot{\varphi}_i = 0.$$

Mamy więc do czynienia z układem równań różniczkowych o tej samej postaci co rów. (143.6) i tych samych warunkach krańcowych. Wobec tego możemy od razu napisać rozwiązanie ogólne na wzór równania (143.11), tj.

$$(145.1) \quad \varphi_i = \sum_{k=1}^{k=n-1} B_k \sin i \frac{k\pi}{n} \cos(\omega_k t + \beta_k),$$

zastępując nadto w wyrażeniu dla  $\omega_k$  parametr  $A/am$  przez  $Cl/a^2\Theta$ , czyli pisząc

$$(145.2) \quad \omega_k = 2 \sqrt{\frac{Cl}{\Theta a^2}} \cdot \sin \frac{k\pi}{2n}.$$

Stąd przejdziemy podobnie do układu ciągłego otrzymując

$$(145.3) \quad \varphi = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos(\omega_k t + \beta_k)$$

$$145.4) \quad \omega_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2 \sqrt{\frac{Cln^2}{\Theta l^2}} \cdot \sin \frac{k\pi}{2n} \right] = k\pi \sqrt{\frac{C}{\Theta l}} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Przy okrągłym przekroju cięgna jest sztywność skręcania  $C = GI_p$ , zaś  $\Theta = \mu I_p l$ , gdzie  $I_p$  jest biegunowym momentem bezwładności przekroju kołowego, a  $\mu$  gęstością materiału. A zatem dla takiego przekroju jest

$$(145.5) \quad \boxed{\omega_k = \frac{k\pi}{l} \sqrt{\frac{G}{\mu}}}$$

§ 146. Rozwiązania klasyczne zagadnienia struny. Jedno rozwiązanie klasyczne podane najpierw przez D. Bernouilli'ego prowadzi do równań identycznych ze znalezionymi powyżej w §§ 143—145. Dlatego przejdziemy od razu do rozwiązania d'Alembert'a, które jakkolwiek odnosi się do wszystkich rozpatrzonych powyżej drgań cięgna, zastosujemy przede wszystkim do przypadku drgań poprzecznych struny ze względu na wybitną łatwość uzmysłwienia takich drgań. Oznaczywszy teraz przez  $y$  odchylenie elementu struny o odciętej  $x$ , i przyjąwszy  $N/\mu F = a^2$ , mamy

$$(146.1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Całka tego równania wyznaczy przy stałej wartości  $t$  słabo powyginaną postać struny, zaś przy stałym  $x$  określi ruch jej przekroju odpowiedniego. Lewa strona równania różniczkowego przedstawia wielkość proporcjonalną do siły poruszającej element w kierunku  $y$ , prawa zaś jest proporcjonalna do przybliżonej wartości krzywizny odkształconej osi struny w miejscu elementu. Każdy więc element struny jest pod działaniem siły proporcjonalnej do jego krzywizny i skierowanej ku jego położeniu równowagi.

Jak łatwo się przekonać, każda różniczkowalna dwukrotnie funkcja  $y=f(x\pm at)$  argumentu  $x\pm at$  czyni zadość równaniu różniczkowemu (146.1). Jakoż

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x\pm at); \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x\pm at)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \pm a f'(x\pm at); \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 f''(x\pm at) = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Jako całość ogólną napiszemy więc

$$(146.2) \quad y = f_1(x-at) + f_2(x+at).$$

Przyjmąwszy na razie, że  $f_2=0$ , że więc ruch struny jest określony równaniem  $y=f_1(x-at)$ , widzimy że w przekrojach  $x$  dla których  $x-at=\text{stała}$  jest także  $y=\text{stała}$ . Obraz ruchu uchwycony w chwili  $t=0$  jest przeto wyznaczony krzywą  $y=f_1(x)$ , która w ciągu dalszym przynosi się w kierunku dodatnim osi  $X$  z prędkością  $a$ , albowiem różniczkowanie równania  $x-at=\text{stała}$  daje  $dx/dt=a$ . Chociaż więc elementy struny nie mają prędkości składowych wzdłuż osi  $X$ , lecz tylko prędkości prostopadłe do tej osi, to jednak widok takiego ruchu daje chwilowo złudzenie prędkości podłużnych, które pierzcha dopiero przy obserwacji dokładniejszej. Z prędkością  $a$  przynosi się w kierunku  $x$  tylko stan ruchu, a nie materia. Podobnie  $y=f_2(x+at)$  wyznacza ruch krzywej  $y=f_2(x)$  w kierunku  $-x$ . W przypadku ogólnym istnieją jednocześnie obadwa stany ruchu posuwające się w kierunkach przeciwnych ze stałą prędkością  $a$ . Ruchy tego rodzaju nazywamy ruchami falowymi, przy czym  $a$  określa prędkość rozchodzenia się fali. Dla fal poprzecznych struny mamy

$$(146.3) \quad a = \sqrt{\frac{N}{\mu F}},$$

albo ponieważ  $\mu \cdot F = \mu_1 = g$  oznacza masę jednostki długości struny wyrażoną przez ciężar tejże jednostki  $g$ , przeto-

$$(146.3 \text{ a}) \quad a = \sqrt{\frac{N}{g}}.$$

W przypadku wyidealizowanym struny o rozpiętości nieskończonej (co powyżej już przyjęto) jest ruch określony zupełnie warunkami początkowymi, tzn. w chwili  $t=0$  jest

$$y_0 = F(x), \quad \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_0 = G(x).$$



Z rów. (146.2) wynika teraz

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x); \quad G(x) = -\alpha f_1'(x) + \alpha f_2'(x).$$

Całkując to równanie względem  $x$  otrzymujemy

$$-f_1(x) + f_2(x) = \frac{1}{\alpha} \int G(x) dx,$$

z czego wynika

$$(146.4) \quad \begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2} F(x) - \frac{1}{2\alpha} \int G(x) dx \\ f_2(x) = \frac{1}{2} F(x) + \frac{1}{2\alpha} \int G(x) dx. \end{cases}$$

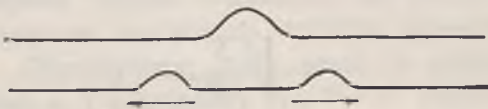
Zastąpiwszy w pierwszym z równań powyższych  $x$  przez  $x - at$ , a w drugim przez  $x + at$  i wstawiwszy otrzymane wartości funkcji  $f_1$  i  $f_2$  w rów. (146.2) znajdziemy postać rozwiązania ogólnego:

$$y = \frac{1}{2} F(x + at) + \frac{1}{2} F(x - at) + \frac{1}{2\alpha} \left[ \int_{z=x+at} G(z) dz - \int_{z=x-at} G(z) dz \right],$$

gdzie dla uniknięcia nieporozumienia oznaczono przez  $z$  argument funkcji  $G$ . To równanie da się widocznie napisać w postaci

$$(146.5) \quad \boxed{y = \frac{1}{2} F(x + at) + \frac{1}{2} F(x - at) + \frac{1}{2\alpha} \int_{x-at}^{x+at} G(z) dz}.$$

Dajmy na to, że pewien odcinek rozpiętej struny nieograniczonej w równowadze zakrzywiono lekko (rys. 87) siłami stosownie



Rys. 87.

dobranymi i usunięto te siły jednocześnie bez udzielenia elementom odcinka prędkości początkowej. Wtedy wprowadzona powyżej funkcja  $G(x)$  jest równa zero, a postać początkową odcinka przedstawi rów. (146.5) dla  $t=0$ , czyli

$$y = F(x).$$

Ruch powstający po tym w strunie określi równanie

$$y = \frac{1}{2} F(x + at) + \frac{1}{2} F(x - at),$$

które wyraża, że utworzony na początku „garb” dzieli się na dwa

o połowę niższe, które się przenoszą z prędkością  $a$  od miejsca rozpatrywanego w obu kierunkach przeciwnych. Ruch elementów struny nie jest przeto okresowy, każdy z nich bowiem doszedłszy do położenia równowagi zatrzymuje się.

Rozpatrzmy teraz drugi skrajny przypadek zaburzenia równowagi struny przez udzielenie pewnemu odcinkowi prędkości początkowych  $(\partial y/\partial t)_0$ . Wtedy  $F(x)=0$ , a wprowadziwszy oznaczenie

$$\int G(x) dz = H(z),$$

otrzymany równanie ruchu

$$(146.6) \quad y = \frac{1}{2a} [H(x+at) - H(x-at)],$$

z którego czytamy, że od chwili początkowej  $t=0$  wytwarzają się dwa garby o równaniach

$$y = \frac{H(x)}{2a} \quad \text{i} \quad y = -\frac{H(x)}{2a},$$

a więc jeden dodatni a drugi ujemny (rys. 87a). Garby te posuwają się od miejsca zaburzenia w kierunkach przeciwnych wzdłuż osi  $X$ .



Rys. 87 a.

W obu przypadkach nazywamy przenoszącą się wzdłuż struny postać zakrzywioną jej części *falą*.

Przechodząc do struny skończonej między końcami ustalonymi  $x=0$  i  $x=l$  napiszemy odpowiednie warunki krańcowe dla obu funkcji  $f_1(x-at)$  i  $f_2(x+at)$  spełniających równanie ruchu, a więc

$$(146.7) \quad f_1(-at) + f_2(+at) = 0 = f_1(l-at) + f_2(l+at).$$

Stosownie do (146.4) można te funkcje wyrazić w postaciach

$$(146.8) \quad \begin{cases} f_1(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2a} \int_0^x G(z) dz \\ f_2(x) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2a} \int_0^x G(z) dz. \end{cases}$$

Dowiedziemy teraz, że ruch falowy, który w strunie nieskończonej był nieokresowym, staje się okresowym w strunie skończonej.

O ile bowiem w rozwiązaniu powyższym mamy dla  $x$  na oku obszar zmienności od 0 do  $l$ , to dla  $t$  obszar ten jest nieograniczony. Z tego wynika, że i argument  $x \pm at$ , który oznaczymy przez  $z$ , może przyjąć wartości dowolnie wielkie. A zatem warunki (146.7) prowadzą do równań

$$(146.9) \quad \begin{cases} f_1(-z) + f_2(z) = 0, \\ f_1(l-z) + f_2(l+z) = 0, \end{cases}$$

ważnych dla wszelkich wartości  $z$ . Podstawivszy w drugim równaniu  $l+z$  zamiast  $z$  napiszemy

$$f_1(-z) + f_2(2l+z) = 0,$$

a odejmując od pierwszego otrzymamy

$$f_2(2l+z) = f_2(z).$$

W podobny sposób znajdziemy

$$f_1(2l+z) = f_1(z),$$

co dowodzi, że obie funkcje są okresowe ze względu na zmienne  $x$  i  $t$ . Odpowiednimi okresami są  $2l$  i  $2l/a$ .

Sledząc na podstawie równań ruch falowy wywołany jakimkolwiek zaburzeniem równowagi w pewnym miejscu struny, stwierdzamy zgodnie z doświadczeniem, że stan określony funkcją  $f_1$  postępuje ku końcowi  $x=l$ , a stąd cofa się przy zmianie znaku funkcji aż do początku  $x=0$ , po czym znów postępuje ku końcowi itd.

Tak samo ma się rzecz ze stanem określonym funkcją  $f_2$ . Zjawisko odwrócenia kierunku ruchu fali i zmiany znaku jej rzędnych przy przejściu przez punkt końcowy nosi nazwę *odbicia się* fali. Przedział czasu między dwoma kolejnymi odbiciami fali jest oczywiście połową jej okresu.

**§ 147. Równanie falowe.** Równania różniczkowe ruchu wewnętrznego w ciele sprężystym izotropowym (59.2) mają w przypadku wyłączenia sił masowych postać

$$(147.1) \quad \begin{cases} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases}$$

Gdy po zróżniczkowaniu kolejnym tych równań względem  $x$ ,  $y$  i  $z$  dodamy je do siebie, to otrzymamy

$$\nabla^2 \theta + \frac{1}{1-2\nu} \nabla^2 \theta = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2},$$

czyli

$$(147.2) \quad \nabla^2 \theta = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)G} \cdot \mu \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}.$$

Różniczkując trzecie z rów. (147.1) względem  $y$ , a drugie względem  $z$  i odejmując znajdujemy

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

czyli

$$(147.3) \quad \begin{cases} \nabla^2 \tilde{\omega}_x = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_x}{\partial t^2} & \text{i podobnie} \\ \nabla^2 \tilde{\omega}_y = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \tilde{\omega}_z = \frac{\mu}{G} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial t^2}. \end{cases}$$

W przypadku gdy  $\theta = 0$  równania ruchu (147.1) przybierają postać

$$(147.4) \quad \nabla^2 u = \frac{\mu}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 v = \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 w = \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Jeżeli zaś znikają składowe obroty  $\tilde{\omega}_x$ ,  $\tilde{\omega}_y$ ,  $\tilde{\omega}_z$ , to pole przemieszczeń jest potencjalne i można napisać

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

a więc

$$\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi; \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \nabla^2 u \text{ itd.},$$

wobec czego równania (147.1) sprowadzają się do

$$(147.5) \quad \nabla^2 u = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ itd.}$$

Równania (147.2 do 5) są tego samego typu:

$$(147.6) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \Phi.$$

Jest to równanie różniczkowe ruchu falowego przestrzennego, zwane krótko *równaniem falowym*. Stała  $a$  określająca prędkość przenoszenia się ruchu falowego, czyli szybkość przewodzenia fal ma wartość

$$(147.7) \quad a = \sqrt{\frac{1-\nu}{1-2\nu} \cdot \frac{2G}{\mu}} \quad \text{w równaniach (147.2 i 5),}$$

zaś

$$(147.8) \quad a = \sqrt{\frac{G}{\mu}} \quad \text{„ „ (147.3 i 4).}$$

Te dwa wzory odróżniają dwa rodzaje szczególne ruchu falowego. Gdy zaburzenie dokonane w pewnym miejscu wnętrza ciała sprężystego, które nazywamy w tej teorii *ośrodkiem sprężystym*, polega na odkształceniu objętościowym, to takie zaburzenie rozchodzi się z prędkością (147.7) tworząc falę „dylatacyjną”, zwaną także „bezobrotową”, albo *nicwirową*. Natomiast zaburzenie polegające na czystym odkształceniu postaciowym, a więc w ogóle połączonym z obrotem elementu, rozchodzi się z prędkością (147.8), znacznie mniejszą, tworząc falę, którą nazwiemy *falą skrętną*. (M. P. Rudzki w swej „Fizyce Ziemi” nazywa ją „torsjonalną”; Lord Kelvin stosuje do niej przymiotnik „equivoluminal”; Francuzi piszą „onde de rotation”, Niemcy „Schiebungswelle”). Jeżeli zaburzenie jest dane przez odkształcenie złożone z objętościowego i postaciowego, to powstają jednocześnie obie fale. Podlegając zasadzie superpozycji fale te z powodu różnych szybkości rozchodzenia się ulegają wkrótce rozłączeniu i przenoszą się niezależnie od siebie.

**§ 148. Całki szczególne równania falowego.** Rozpatrzmy najpierw przypadek gdy funkcja  $\Phi$  w równaniu falowym jest zależna tylko od jednej współrzędnej np.  $x$ . Wtedy mamy do czynienia z równaniem

$$(148.1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2},$$

którego rozwiązanie ogólne zbadaliśmy w §§ 143—146.

To rozwiązanie, tj.

$$(148.2) \quad \Phi = f_1(x - at) + f_2(x + at)$$

stanowi teraz całkę szczególną równania falowego i określa tzw. *falę płaską*, albowiem w każdym punkcie jakiejkolwiek danej płaszczyzny prostopadłej do  $X$  ma  $\Phi$  w danej chwili  $t$  wartość tę samą,



zależną tylko od argumentów  $(x - at)$  i  $(x + at)$ . Jak już widzieliśmy w zagadnieniu struny rozwiązanie (148.2) przedstawia dwie fale

$$\Phi_1 = f_1(x - at) \quad \text{i} \quad \Phi_2 = f_2(x + at)$$

przenoszące się z prędkością  $a$  w kierunku dodatnim i ujemnym osi  $X$ . W teorii struny było funkcją falową  $\Phi$  bądź to wychylenie elementu struny prostopadle do osi  $X$  (fala poprzeczna), bądź też przemieszczenie przekroju struny równoległe do  $X$  (fala podłużna), bądź wreszcie, kąt obrotu przekroju (fala skrętna). Tutaj funkcja  $\Phi$  może przedstawiać dylatację  $\theta$ , przemieszczenie, lub obrót cząstek ośrodka sprężystego. Argument każdej z obu funkcji falowych  $\Phi$  i  $\Phi_2$ , tj.  $(x - at)$  i  $(x + at)$  nazywają w czasach nowszych *fazą* w chwili  $t_1$  a prędkość rozchodzenia się fali *prędkością fazową*. Nazwy te są w ścisłym związku z założeniem, że zaburzenie wywołujące fale ma charakter okresowy. Rozpoczynając od przypadku najprostszego napiszemy

$$(148.3) \quad \Phi = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - at),$$

gdzie  $A$  i  $\lambda$  są stałymi.  $A$  określa największą wartość osiąganą przez  $\Phi$  przy zmianie okresowej, czyli *amplitudę*. Znaczenie stałej  $\lambda$  znajdujemy ustalając chwilę  $t$ , wyznaczając wartość  $\Phi$  dla  $x = x_1$ , tj.

$$\Phi = A \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 - at)$$

i otrzymując tę samą wartość dla  $x = x_1 + n\lambda$ , gdzie  $n$  jest liczbą całkowitą dowolną. Albowiem

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 + n\lambda - at) = \cos \left[ \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 - at) + 2n\pi \right] = \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 - at).$$

A zatem fazy punktów leżących w odstępach  $\lambda, 2\lambda, \dots$  czyli różniące się o  $2\pi, 4\pi, \dots$  są równoważne, a wartości funkcji  $\Phi$  zmieniają się tylko na długości  $\lambda$ , po czym wartości te powtarzają się identycznie na każdym następnym odcinku  $\lambda$ . Długość  $\lambda$  nazywa się *długością fali*. Między długością fali a okresem  $T$  drgania harmonicznego wartości  $\Phi$  zachodzi związek, który znajdujemy z warunku, że przy każdej wartości  $x$  winno być

$$\cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - at) = \cos \frac{2\pi}{\lambda} [x - a(t + T)].$$

To spełni się oczywiście gdy

$$\frac{2\pi aT}{\lambda} = 2\pi, \quad \text{czyli} \quad \boxed{T = \frac{\lambda}{a}}.$$

Z tego powodu równanie (148.3) można napisać w postaci

$$(184.4) \quad \Phi = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Równanie  $t/T = x/\lambda = \text{stałej}$  określa w każdej chwili punkty o tej samej fazie drgania, czyli *powierzchnię falową*, która w przypadku rozpatrywanym właśnie fali płaskiej jest płaszczyzną. Tę płaszczyznę obraliśmy powyżej jako prostopadłą do osi  $X$ . Jednakże łatwo przewidzieć, że może nią być jakakolwiek płaszczyzna przedstawiona równaniem

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = p,$$

w którym  $p$  jest odległością płaszczyzny od początku współrzędnych, a  $\alpha, \beta, \gamma$  kąty utworzone przez  $p$  z osiami. Wtedy

$$\Phi = A \cos 2\pi \left\{ \frac{t}{T} - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\lambda} \right\}$$

spełnia równanie różniczkowe (147.6), albowiem

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Phi \cos^2 \alpha; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Phi \cos^2 \beta; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\frac{4\pi^2}{\lambda^2} \Phi \cos^2 \gamma,$$

a więc

$$a^2 \nabla^2 \Phi = -\frac{4\pi^2 a^2}{\lambda^2} \Phi,$$

co staje się równym

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{T^2} \Phi$$

pod warunkiem

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{1}{T}, \quad \text{czyli} \quad T = \frac{\lambda}{a},$$

któremu uczyniliśmy zadość powyżej.

Przechodząc teraz do przypadku nieco ogólniejszego, w którym zaburzenie rozchodzi się z początku współrzędnych równomiernie we wszystkich kierunkach, przyjmiemy, że funkcja  $\Phi$  zależy tylko od promienia-wektora  $R$  (oprócz czasu  $t$ ), że więc jej pochodnymi względem  $x, y, z$  są

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial R} \cdot \frac{x}{R} \quad \text{itd.} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \cdot \frac{x^2}{R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \cdot \frac{x^2}{R^3} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \cdot \frac{y^2}{R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \cdot \frac{y^2}{R^3} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} \cdot \frac{z^2}{R^2} + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial R} - \frac{\partial \Phi}{\partial R} \cdot \frac{z^2}{R^3}. \end{aligned}$$

Dodawszy te trzy równania otrzymujemy

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial R},$$

wobec czego równanie falowe przyjmie postać

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial R} \right) = a^2 \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 (R\Phi)}{\partial R^2},$$

albo

$$\frac{\partial^2 (R\Phi)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 (R\Phi)}{\partial R^2},$$

tzn. postać identyczną z pierwotną, gdy funkcję  $\Phi$  zastąpimy przez  $R\Phi$ . Rozwiązaniem równania falowego będzie więc teraz

$$\Phi = \frac{1}{R} f_1(R - at) + \frac{1}{R} f_2(R + ct)$$

z dwiema funkcjami dowolnymi  $f_1$  i  $f_2$  określającymi skutek zaburzenia równowagi w elemencie otaczającym punkt początkowy. Poprzestając w przypadku najprostszym na funkcji  $f_1$  jako okresowej harmonicznej

$$f_1(R, t) = A \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{R}{\lambda} \right),$$

otrzymujemy

$$\Phi = \frac{A}{R} \cos 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{R}{\lambda} \right), \text{ gdzie } R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Odpowiednie powierzchnie falowe są kuliste. Cząstki znajdujące się na każdej z kul drgają w tej samej fazie z amplitudą  $A/R$ , a więc malejącą ze wzrostem promienia kuli  $R$ .

**§ 149. Rozwiązanie ogólne równania falowego.** Pierwsze rozwiązanie dał w r. 1820 Poisson. Obecnie traktuje się je jako zawarte w ogólniejszym rozwiązaniu Kirchhoff'a z r. 1883, które tu uzasadnimy drogą uproszczoną przez Beltrami'ego w r. 1895. W tym celu obierzemy funkcję  $\Phi(x, y, z, \tau)$  czyniącą zadość równaniu falowemu

$$(149.1) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} = a^2 \nabla^2 \Phi,$$

przy czym jako zmienną  $\tau$  przyjmiemy z powodów, które wyjdą poniżej na jaw,

$$(149.2) \quad \tau = t - r/a, \text{ gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Z powodu tego podstawienia  $\Phi$  jako funkcja  $x, y, z$  i  $t$  nie może spełniać równania falowego, gdyż zmienne  $x, y, z$  występują także w  $r$ . Należy więc znaleźć taką postać równania różniczkowego, której czyni zadość funkcja

$$(149.3) \quad \Phi(x, y, z, \tau) = \Phi\left(x, y, z, t - \frac{r}{a}\right) = \psi(x, y, z, t).$$

Utwórzmy więc wyrażenia

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \dots, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \dots, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}, \dots$$

znajdując najpierw

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x},$$

a ponieważ według (149.2) jest

$$(149.4) \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = -\frac{1}{a} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{a} \frac{x}{r},$$

przeto

$$(149.5) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{x}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}.$$

Powtórne różniczkowanie względem  $x$  z uwzględnieniem, że  $x$  występuje nadto w  $r$  daje:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} - \frac{1}{ar} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{a} \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{1}{a} \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \tau} - \frac{1}{a} \frac{x}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x},$$

albo po zastosowaniu związku (149.4):

$$(149.6) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{2}{a} \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \tau} - \frac{1}{ar} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{a} \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{a^2} \frac{x^2}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}.$$

Pisząc wyrażenia analogiczne dla  $\partial^2 \psi / \partial y^2$ ,  $\partial^2 \psi / \partial z^2$  i dodając wszystkie trzy otrzymamy

$$(149.7) \quad \nabla^2 \psi = \nabla^2 \Phi - \frac{2}{ar} \left( x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \tau} + y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial \tau} + z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \tau} \right) - \frac{2}{ar} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}.$$

Z uwzględnieniem rów. (149.1) napiszemy prościej

$$(149.8) \quad \nabla^2 \psi = -\frac{2}{ar} \left( x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \tau} + y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial \tau} + z \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial \tau} \right) - \frac{2}{ar} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + \frac{2}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}.$$

Stosownie do równań (149.2 i 3) jest nadto

$$(149.9) \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2}.$$

Wobec tego możemy w (149.8) zastąpić  $\partial\Phi/\partial\tau$  i  $\partial^2\Phi/\partial\tau^2$  przez  $\partial\psi/\partial t$  i  $\partial^2\psi/\partial t^2$  otrzymując w ten sposób szukane równanie różniczkowe:

$$(149.10) \quad \nabla^2\psi + \frac{2}{ar} \left( x \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial t} + y \frac{\partial^2\psi}{\partial y \partial t} + z \frac{\partial^2\psi}{\partial z \partial t} \right) + \frac{2}{ar} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{2}{a^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0.$$

To równanie przekształcimy jeszcze na postać prostszą pisząc je najpierw po podzieleniu przez  $r$ :

$$(149.11) \quad \frac{1}{r} \nabla^2\psi + \frac{2}{a} \left( \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial t} + \frac{y}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial y \partial t} + \frac{z}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial z \partial t} \right) + \frac{2}{ar^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{2}{a^2 r} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

i uwzględniając nasuwające się wyrażenia dla pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} \right], \quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{y}{r^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} \right], \quad \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{z}{r^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} \right].$$

Pierwsze daje po wykonaniu różniczkowania

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{2x^2}{r^4} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right).$$

Ale

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\psi}{\partial x} \right),$$

a ze względu na (149.5)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial x} - \frac{1}{a} \cdot \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} \right].$$

Zastąpiwszy tutaj stosownie do (149.9)  $\partial\Phi/\partial\tau$  przez  $\partial\psi/\partial t$  napiszemy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) - \frac{x}{ar} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Wreszcie uwzględniając, że

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} \cdot \frac{\partial\tau}{\partial t} = \frac{\partial\Phi}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

otrzymamy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial t} - \frac{x}{ar} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

A zatem

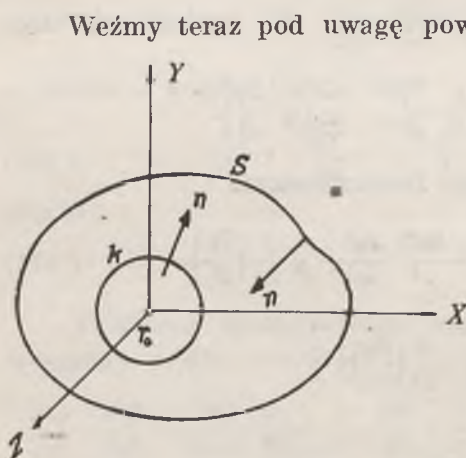
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{2x^2}{r^4} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial t} - \frac{x^2}{ar^3} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}.$$

Dodawszy to równanie do dwu analogicznych! dla współrzędnych  $y$  i  $z$  i pomnożywszy wszystko przez  $2/a$ , znajdziemy

$$\frac{2}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right] = \frac{2}{a} \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{ar} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) + \frac{2}{a} \left( \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + \frac{y}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial t} + \frac{z}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial t} \right),$$

co w zestawieniu z rów. (149.11) daje szukane równanie różniczkowe funkcji  $\psi$  w postaci

$$(149.12) \quad \boxed{\frac{1}{r} \nabla^2 \psi + \frac{2}{a} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right]} = 0.$$



Rys. 88.

otaczającą początek współrzędnych, a pomnożywszy lewą stronę (149.12) przez element objętości  $d\tau$  wykonajmy całkowanie w obszarze  $S$ , wyłączając oczywiście z całej objętości  $\tau$ , jak to się czyni w teorii potencjału, przy pomocy małej kuli o promieniu  $r_0$  początek układu, gdzie  $1/r$  staje się nieskończonością. Zaznaczmy to przez odróżnienie gwiazdką objętości  $\tau^*$  obszaru pozostałego. Obszar ten jest więc ograniczony od

zewnątrz powierzchnią  $S$ , od wewnątrz kulą  $k$ , a całkowanie określimy wyrażeniem

$$(149.13) \quad \int \frac{1}{r} \nabla^2 \psi \cdot d\tau^* + \frac{2}{a} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right] d\tau^* = 0.$$

Stosując do każdego z trzech wyrazów całki drugiej przekształcenie Green'a (przy obiorze kierunku dodatniego normalnej wewnętrznej, a nie jak poprzednio zewnętrznej) napiszemy:

$$\int \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) d\tau^* = - \int \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \cos(n, x) dS - \int \frac{x}{r_0^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \cos(r, x) dk,$$

gdzie  $dk$  oznacza element powierzchni kuli  $k$ . Razem tedy otrzymamy

$$\frac{2}{a} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \&\dots \right] d\tau^* = - \frac{2}{a} \int \left[ \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \cos(n, x) + \&\dots \right] dS - \frac{2}{a} \int \left[ \frac{x}{r_0^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \cos(r, x) + \&\dots \right] dk,$$

a ponieważ  $x/r = \cos(r, x), \dots$  przeto napiszemy

$$\begin{aligned} & \frac{2}{a} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \& \dots \right] d\tau^* = \\ & - \frac{2}{a} \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} [\cos(r, x) \cos(n, x) + \cos(r, y) \cos(n, y) + \cos(r, z) \cos(n, z)] dS - \\ & - \frac{2}{a} \int \frac{1}{r_0^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} [\cos^2(r, x) + \cos^2(r, y) + \cos^2(r, z)] dk. \end{aligned}$$

Ale wyrażenie w klamrach pod całką pierwszą po stronie prawej jest równe  $\cos(r, n) = \partial r / \partial n$ , w drugiej całce zaś jest równe 1, wobec czego

$$(149.14) \quad \frac{2}{a} \int \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \& \dots \right] d\tau^* = - \frac{2}{a} \int \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} dS - \frac{2}{ar_0} \int \frac{\partial \psi}{\partial t} dk,$$

a rów. (149.13) przybierze postać

$$(149.15) \quad \int \frac{1}{r} \nabla^2 \psi d\tau^* - \frac{2}{a} \int \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} dS - \frac{2}{ar_0} \int \frac{\partial \psi}{\partial t} dk = 0.$$

Stosując do pierwszej całki ogólny wzór Green'a

$$\int (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\tau = - \int \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

w którym podstawiamy  $u = 1/r$ ,  $v = \psi$  i uwzględniając, że w objętości  $\tau^*$  jest  $\nabla^2(1/r) = 0$ , znajdujemy

$$(149.16) \quad \int \frac{1}{r} \nabla^2 \psi \cdot d\tau^* = - \int \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS - \int \left[ \frac{1}{r_0} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dk.$$

Z wzorów (149.15 i 16) wynika teraz po prostych przekształceniach:

$$\begin{aligned} & \int \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS + \frac{1}{r_0} \int \frac{\partial \psi}{\partial r} dk + \int \frac{\psi}{r_0^2} dk + \\ & + \frac{2}{a} \int \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} dS + \frac{2}{ar_0} \int \frac{\partial \psi}{\partial t} dk = 0. \end{aligned}$$

Oznaczywszy przez  $d\omega$  kąt bryłowy o wierzchołku w początku układu wyznaczający na kuli pole elementarne  $dk = r_0^2 d\omega$ , otrzymamy

$$\begin{aligned} & \int \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) \right] dS + r_0 \int \frac{\partial \psi}{\partial r} d\omega + \int \psi d\omega + \\ & + \frac{2}{a} \int \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} dS + \frac{2r_0}{a} \int \frac{\partial \psi}{\partial t} d\omega = 0. \end{aligned}$$

Tutaj dla  $r_0 \rightarrow 0$  znika wyraz drugi i ostatni, a trzeci staje się równym  $4\pi\psi(0,0,0)$ . Pozostaje więc po podzieleniu przez  $4\pi$ :

$$(149.17) \quad \psi(0,0,0) = \frac{1}{4\pi} \int \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS - \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} dS - \frac{1}{2\pi a} \int \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} dS.$$

Powracając teraz do pierwotnej funkcji falowej  $\Phi$  związanej z  $\psi$  równaniem (149.3), zastąpimy po stronie lewej  $\psi(0,0,0)$  przez  $\Phi(0,0,0,t)$ , ponieważ w początku układu jest  $r=0$ , a więc  $t-r/a=t$ . Po prawej zaś mamy wszędzie

$$\psi(x,y,z,t) \equiv \Phi\left(x,y,z,t - \frac{r}{a}\right).$$

Dla uproszczenia napiszemy argument czasowy jako wskaźnik otrzymując:

$$(149.18) \quad \begin{aligned} \Phi_t(0,0,0) &= \frac{1}{4\pi} \int \Phi_{t-r/a} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS - \\ &- \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n} (\Phi_{t-r/a}) dS - \frac{1}{2\pi a} \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{t-r/a}) dS. \end{aligned}$$

Drugi wyraz po prawej przekształcimy jeszcze ze względu na to, że  $\partial/\partial n(\Phi_{t-r/a})$  znaczy, iż należy najpierw we funkcji  $\Phi$  położyć zamiast  $t$  wartość  $t-r/a$ , a po tym różniczkować względem normalnej pamiętając, że i  $r$  zależy od  $n$ . Różniczkując przeto z uwzględnieniem związku (149.3) między  $\Phi$  a  $\psi$  napiszemy przy zrozumiałym znaczeniu wskaźników

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_t = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_t + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial n} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_t - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial r}{\partial n},$$

albo ponieważ  $\partial\Phi/\partial\tau = \partial\psi/\partial t$ :

$$(a) \quad \left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_t + \frac{1}{a} \frac{\partial r}{\partial n} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_t.$$

Powrócivszy do symboliki równania (149.18) napiszemy

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial n} \right)_t \equiv \frac{\partial}{\partial n} (\Phi_{t-r/a}); \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_t \equiv \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{t-r/a},$$

przy czym symbol ostatni wyraża, że  $\Phi(x,y,z,\tau)$  trzeba najpierw zróżniczkować względem  $n$ , a po tym dopiero w  $\partial\Phi/\partial n$  zastąpić argument  $\tau$  przez  $t-r/a$ . Związek (a) przyjmie więc postać

$$(b) \quad \frac{\partial}{\partial n} (\Phi_{t-r/a}) + \frac{1}{a} \frac{\partial r}{\partial n} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{t-r/a},$$

gdzie

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{t-r/a}).$$



Po wstawieniu w (149.18) otrzymamy ostateczną postać rozwiązania, którą napiszemy wprowadziwszy dla przejrzystości znak  $[\Phi]$  zamiast  $\Phi(x, y, z, t - r/a)$ . Ujęcie  $\Phi$  w klamry wskazywać będzie zatem niejako na wcześniejszą datę wartości funkcji falowej, tzn. cofniętą od chwili rozpatrywanej  $t$  o przedział czasu  $r/a$ . Ażeby wreszcie uogólnić jeszcze rozwiązanie, przeniesiemy miejsce rozpatrywane z początku układu do punktu  $x_0, y_0, z_0$ , i kładąc zarazem

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Wtedy rozwiązanie równania falowego napiszemy w postaci

$$(149.19) \quad \Phi_t(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ [\Phi] \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] - \frac{1}{ar} \frac{\partial r}{\partial n} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \right\} dS.$$

To równanie wyznacza w dowolnie obranej chwili  $t$  wartość funkcji falowej  $\Phi$  w dowolnym punkcie obszaru ograniczonego dowolną powierzchnią zamkniętą  $S$  z danych wartości  $\Phi$  i  $\partial\Phi/\partial n$  na tej powierzchni. Całki po stronie prawej przedstawiają potencjały mas rozmieszczonych w sposób określony jednoznacznie tymi danymi. Gdyby  $a$  było nieskończenie wielkie, to  $t - r/a$  byłoby równe  $t$  i można by skasować klamry w oznaczeniach powyższych. Wtedy funkcja  $\Phi_t(x_0, y_0, z_0)$  byłaby w każdej chwili  $t$  wyrażona wartościami potencjałów jednoczesnych po stronie prawej równania. Skończona szybkość  $a$  rozchodzenia się fal sprawia, że potencjały po stronie prawej muszą być odniesione do chwili wcześniejszej od  $t$  o  $r/a$ . Dlatego nazywają je *potencjalami opóźnionymi*. Znaczenie istotne rozwiązania Kirchhoff'a tkwi w tym, że z danego rozkładu zaburzeń na powierzchni zamkniętej  $S$  można wyznaczyć ruch każdego dowolnego punktu wewnątrz tej powierzchni obliczywszy wartość funkcji falowej dla tego punktu  $(x_0, y_0, z_0)$ . Ruch ten jest superpozycją ruchów udzielonych punktowi przez wszystkie fale wychodzące z punktów powierzchni  $S$  według znanej zasady Huyghens'a i Fresnel'a, której ścisłym ujęciem matematycznym jest dopiero równanie (149.19).

Wspomniane powyżej rozwiązanie Poisson'a jest przypadkiem szczególnym rozwiązania Kirchhoff'a; otrzymujemy je przy założeniu, że powierzchnia  $S$  jest kulą o promieniu  $at$  opisaną dokoła punktu  $(x_0, y_0, z_0)$  jako środka, a na tej kuli są dane średnie wartości  $\Phi$  i  $\partial\Phi/\partial t$  dla  $t=0$ . Szczególnie doniosłą rolę gra rozwiązanie Kirchhoff'a w optyce.

§ 150. Wyznaczenie przemieszczeń. Gdy powiedzie się wyznaczyć rozszerzenie objętościowe  $\theta$  i składowe obrotu  $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z$ , z równań §§ 142, 148 i 149, to dla znalezienia przemieszczeń  $\vec{W}$  o składowych  $u, v, w$  mamy równania

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\tilde{\omega}_x; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\tilde{\omega}_y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\tilde{\omega}_z, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta,$$

albo w postaci wektorowej

$$(a) \quad 2\vec{\Omega} = \text{rot } \vec{W}; \quad \theta = \text{div } \vec{W}.$$

Te równania całkuje się po wyrażeniu przemieszczeń przez dwie funkcje miejsca, skalową  $\Psi$  i wektorową  $\vec{\mathfrak{A}}$  o składowych  $A_x, A_y, A_z$  wzorami

$$(b) \quad \left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial \Psi}{\partial z} + \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \text{ albo } \vec{W} = \text{grad } \Psi + \text{rot } \vec{\mathfrak{A}}.$$

W tym celu wstawiamy wartość  $\vec{W}$  z (b) w pierwsze z rów. (a) otrzymując

$$(150.1) \quad 2\vec{\Omega} = \text{rot grad } \Psi + \text{rot rot } \vec{\mathfrak{A}}.$$

Ale jak łatwo sprawdzić jest  $\text{rot grad } \Psi = 0$ , zaś

$$\text{rot rot } \vec{\mathfrak{A}} = -\nabla^2 \vec{\mathfrak{A}} + \text{grad div } \vec{\mathfrak{A}}^1).$$

<sup>1)</sup> Ponieważ

$$\text{rot } \vec{\mathfrak{A}} = \vec{i} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right),$$

przeto

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{\mathfrak{A}} &= \vec{i} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial x} \right) \right] + \\ &+ \vec{j} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \right] + \\ &+ \vec{k} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \right]. \end{aligned}$$

Po wykonaniu różniczkowań i zastąpieniu  $\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}$  przez  $\nabla^2 A_x - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$  itd. otrzymujemy

$$\begin{aligned} \text{rot rot } \vec{\mathfrak{A}} &= \vec{i} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \nabla^2 A_x \right] + \vec{j} \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \nabla^2 A_y \right] + \\ &+ \vec{k} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \nabla^2 A_z \right] = \\ &= \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \vec{\mathfrak{A}} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} \text{div } \vec{\mathfrak{A}} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \text{div } \vec{\mathfrak{A}} - \vec{i} \nabla^2 A_x - \vec{j} \nabla^2 A_y - \vec{k} \nabla^2 A_z = \\ &= -\nabla^2 (\vec{i} A_x + \vec{j} A_y + \vec{k} A_z) + \text{grad div } \vec{\mathfrak{A}} = -\nabla^2 \vec{\mathfrak{A}} + \text{grad div } \vec{\mathfrak{A}}. \end{aligned}$$

Obrawszy teraz funkcję wektorową  $\vec{\mathfrak{U}}$  tak, aby było

$$(150.2) \quad \operatorname{div} \vec{\mathfrak{U}} = 0,$$

napiszemy zamiast rów (150.1)

$$(150.3) \quad \nabla \vec{\mathfrak{U}} = -2\vec{\Omega},$$

albo we współrzędnych prostokątnych

$$(150.4) \quad \nabla^2 A_x = -2\tilde{\omega}_x; \quad \nabla^2 A_y = -2\tilde{\omega}_y; \quad \nabla^2 A_z = -2\tilde{\omega}_z.$$

Biorąc na razie pod uwagę przypadki równowagi, traktujemy  $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z$  jako już wyznaczone funkcje miejsca (niezależne od czasu), a więc do wyznaczenia funkcji  $\vec{\mathfrak{U}}$  rozporządzamy równaniami (150.4) jako równaniami Poisson'a, których całki ogólne dla przestrzeni nieskończonej napiszemy według (142.4) w postaci

$$(150.5) \quad A_x = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\tilde{\omega}_x d\tau}{r}; \quad A_y = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\tilde{\omega}_y d\tau}{r}; \quad A_z = \frac{1}{2\pi} \int \frac{\tilde{\omega}_z d\tau}{r},$$

gdzie  $r$  oznacza odległość dowolnego elementu objętości od punktu rozpatrywanego. Podobnie otrzymamy z rów. (b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial z}, \end{aligned}$$

a po dodaniu

$$(150.6) \quad \theta = \nabla^2 \Psi = \operatorname{div} \vec{W},$$

z czego znajdujemy

$$(150.7) \quad \Psi = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\theta d\tau}{r}.$$

Obie funkcje  $\vec{\mathfrak{U}}$  i  $\Psi$  są więc wyznaczone potencjalami, ale  $\vec{\mathfrak{U}}$  jest wektorem, podczas gdy  $\Psi$  skalarem. Dlatego funkcję  $\vec{\mathfrak{U}}$  nazywają *potencjałem wektorowym*, a  $\Psi$  *potencjałem skalarowym*.

Szukając teraz przemieszczeń w przypadku ruchu nie możemy równań (150.6 i 7) traktować jako równań potencjału, gdyż zawierają nadto czas  $t$  jako argument. Wtedy jednakże obowiązuje, jak wiadomo z § 149 dla  $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z$  i  $\theta$  równanie falowe, tj.

$$(150.8) \quad (147.6) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \Phi,$$

gdzie  $\Phi$  oznacza którąkolwiek z czterech wielkości  $\tilde{\omega}_x, \tilde{\omega}_y, \tilde{\omega}_z$  i  $\theta$ . Uwzględniając równania (150.4) otrzymamy więc z powyższego

$$(150.9) \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 A) = a^2 \nabla^2 \nabla^2 A_x$$

i podobne równania dla  $A_y$  i  $A_z$ . Zmieniwszy porządek operacji  $\partial^2/\partial t^2$  i  $\nabla^2$  napiszemy zamiast tego:

$$(150.10) \quad \nabla \left\{ \frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 A_x \right\} = 0 \text{ itd.}$$

Tym zaś równaniom uczynimy zadość przez wartości  $A_x, A_y, A_z$  spełniające równania falowe:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 A_x \text{ itd.}$$

Całkujemy je ogólnie według § 149 przez potencjały opóźnione.

Tak samo ma się rzecz przy szukaniu funkcji  $\Psi$ . Zważywszy bowiem, że  $\theta$  spełnia równania falowe, otrzymujemy po wstawieniu weń wartości  $\theta$  z (150.6):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 \Psi) = a^2 \nabla^2 \nabla^2 \Psi,$$

a stąd

$$\nabla \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 \Psi \right) = 0.$$

A więc i  $\Psi$  spełnia równanie falowe, wobec czego da się wyznaczyć przez potencjały opóźnione. Po wyznaczeniu tą drogą funkcji  $\vec{\mathfrak{A}}$  i  $\Psi$ , znajdujemy  $u, v, w$  przez proste różniczkowanie stosownie do wz. (b).

**§ 151. Fale podłużne i poprzeczne.** Pierwszą klasyfikację rodzajów fal podaliśmy już w § 147 odróżniając falowanie, któremu ulega tylko wartość  $\theta$  od falowania przy którym  $\theta$  pozostaje stałe, a zmienia się tylko postać i orientacja elementów ośrodka sprężystego. Teraz możemy odróżnić dwa rodzaje główne fal rozchodzących się wzdłuż „promieni” prostopadłych do powierzchni falowej według tego, czy przemieszczenia punktów materii ciągłej są równoległe, czy też prostopadłe do tych promieni. W pierwszym przypadku nazywamy fale *podłużnymi*, w drugim zaś *poprzecznymi*. Wykażemy je na prostym przypadku fali płaskiej, jaka powstaje przy założeniu, że  $\vec{\mathfrak{A}}$  i  $\Psi$  są zależne tylko od współrzędnej  $x$ . Wtedy równanie (b) z § 150 sprowadzają się do postaci

$$(151.1) \quad u = \frac{\partial \Psi}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad w = \frac{\partial A_y}{\partial x}.$$

Następnie w kombinacji z wzorami (150.4 i 6) znajdujemy

$$(151.2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \theta; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2\tilde{\omega}_z; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = -2\tilde{\omega}_y.$$

Ale stosownie do równań różniczkowych (147.2 i 3) napiszemy

$$(151.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_y}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial x^2} = \frac{\mu}{G} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}_z}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Całki szczególne tych równań otrzymujemy łatwo w postaci

$$(151.4) \quad \begin{cases} \theta = -a_0 a \sin a \left( x - \sqrt{\frac{2(1-\nu)G}{(1-2\nu)\mu}} \cdot t \right), \\ \tilde{\omega}_y = -b_0 a \sin a \left( x - \sqrt{\frac{G}{\mu}} \cdot t \right), \\ \tilde{\omega}_z = -c_0 a \sin a \left( x - \sqrt{\frac{G}{\mu}} \cdot t \right), \end{cases}$$

ze stałymi dowolnymi  $a_0, b_0, c_0$  o wymiarze długości. Po wyrażeniu lewych stron przez pochodne  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial v/\partial x$ ,  $\partial w/\partial x$  stosownie do wzorów (151.2) i zcałkowaniu znajdujemy

$$(151.5) \quad \begin{cases} u = a_0 \cos a \left( x - t \sqrt{\frac{2(1-\nu)G}{(1-2\nu)\mu}} \right) \\ v = 2b_0 \cos a \left( x - t \sqrt{\frac{G}{\mu}} \right) \\ w = 2c_0 \cos a \left( x - t \sqrt{\frac{G}{\mu}} \right). \end{cases}$$

Równania te przedstawiają fale płaskie, których płaszczyzny prostopadłe do osi  $X$  poruszają się w kierunku tejże osi z dwiema różnymi prędkościami identycznymi ze znalezionymi w § 147 prędkościami rozchodzenia się fal *bezobrotowych* i *skrętnych*. Pierwszym odpowiadają drgania przemieszczeń składowych  $u$  równoległych do  $X$ , drugim zaś drgania  $v$  i  $w$  do tej osi prostopadłe. Widzimy więc, że fale podłużne rozchodzą się tak samo jak fale bezobrotowe, a fale poprzeczne tak jak fale skrętne, a więc z prędkością znacznie mniejszą. W płynach pozbawionych sprężystości postaciowej jest  $G=0$ , a więc możliwe są tylko fale sprężyste podłużne. Takimi są np. fale głosowe w powietrzu, w wodzie itd.

§ 152. Fale powierzchniowe Rayleigh'a. Pod płaszczyznę np. poziomą ograniczającą ciało sprężyste rozciągające się w dół nieograniczenie mogą jak dowiódł Lord Rayleigh (Th. of Sound, t. II § 276) rozebrać się w kierunkach poziomych fale płaskie drgań harmoniczych zanikających asymptotycznie w coraz głębszych warstwach ciała. Przyjawszy dla przemieszczeń wyrażenia

$$(152.1) \quad u = A\psi, \quad v = B\psi, \quad w = C\psi,$$

przy czym

$$\psi = C^{-rz+i(fx+gy+pt)} \dots i = \sqrt{-1}^1,$$

zaś  $A, B, C, f, g, p, r$  oznaczają pewne stałe, wstawmy je w równania różniczkowe (147.1), a przekonamy się, że te funkcje spełniają je, gdy stałe czynią jednocześnie zadość równaniom warunkowym

$$(152.2) \quad \begin{cases} A\left(r^2 - f^2 - g^2 + \frac{\mu}{G}p^2\right) - \frac{1}{1-2\nu}f(Af + Bg + iCr) = 0, \\ B\left(r^2 - f^2 - g^2 + \frac{\mu}{G}p^2\right) - \frac{1}{1-2\nu}g(Af + Bg + iCr) = 0, \\ C\left(r^2 - f^2 - g^2 + \frac{\mu}{G}p^2\right) - \frac{1}{1-2\nu}r(Af + Bg - Cr) = 0. \end{cases}$$

Te warunki można spełnić w sposób dwojaki:

1° Przyjmując

$$(152.3) \quad A = ifc, \quad B = igc, \quad C = -rc,$$

gdyż wtedy każde z trzech równań (152.2) sprowadza się do tej samej postaci

$$r^2 - f^2 - g^2 + \frac{\mu}{G}p^2 + \frac{1}{1-2\nu}(r^2 - f^2 - g^2) = 0,$$

czyli

$$(152.4) \quad f^2 + g^2 - r^2 = \frac{\mu}{G} \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} p^2.$$

2° Przyjmując

$$(152.5) \quad f^2 + g^2 - r^2 = \frac{\mu}{G} p^2,$$

a zarazem

$$(152.6) \quad i(Af + Bg) - Cr = 0.$$

<sup>1)</sup> Zastosowanie tutaj funkcji o argumentie urojonym prowadzi oczywiście do rozwiązań zespolonych, które wprowadzić nie mogą mieć bezpośrednio znaczenia mechanicznego (fizykalnego), ale pośrednio dostarczają dwu rozwiązań konkretnych, z których pierwsze jest wyznaczone częścią rzeczywistą, a drugie częścią urojoną podobnie jak w zagadnieniach rozdziału VI.

Stosownie do tego odróżniamy wskaźnikami 1 i 2 całki pierwszego i drugiego rodzaju pisząc

$$(152.7) \quad u = A_1\psi_1 + A_2\psi_2, \quad r = B_1\psi_1 + B_2\psi_2, \quad w = C_1\psi_1 + C_2\psi_2.$$

Jako warunki brzegowe otrzymamy z założenia braku sił powierzchniowych na płaszczyźnie ściany  $z=0$ , że

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0,$$

a po wstawieniu wyrażeń z (59.1)

$$(152.8) \quad 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu\theta}{1-2\nu}\right) = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0.$$

Gdy tu podstawimy wartości wzięte z (152.7), to się okazuje, że  $f$ ,  $g$  i  $\nu$  muszą być w obu całkach jednakowe, a tylko wartości  $r$ , tj.  $r_1$  i  $r_2$  mogą być różne. Nadto otrzymujemy

$$(152.9) \quad \frac{A_2}{f} = \frac{B_2}{g} = H,$$

gdzie  $H$  oznacza nową stałą. Teraz równania (152.8) sprowadzają się do dwu następujących:

$$(152.10) \quad \begin{cases} \frac{\nu}{1-\nu} \mu c p^2 + 2G(C_2 r_2 - c r_1^2) = 0 \\ i C_2 = H r_2 + 2i C r_1. \end{cases}$$

Ale z rów. (152.6 i 9) wynika

$$H = -\frac{i C^2 r_2}{f^2 + g^2}.$$

Wprowadziwszy oznaczenia skracające

$$(152.11) \quad h^2 = \mu \cdot \frac{(1-2\nu)}{2G(1-\nu)}; \quad k^2 = \frac{\mu}{G}; \quad m^2 = f^2 + g^2$$

i wyrugowawszy  $C_2$  z obu równań (152.10) pozbywamy się jednocześnie stałej  $c$  i otrzymujemy równanie

$$(152.12) \quad (k^2 - 2h^2)p^2 + 2\left(\frac{2m^2 r_1 r_2}{m^2 + r_2^2} - r_1^2\right) = 0.$$

Z uwzględnieniem (152.11) napiszemy równania (152.4 i 5) w postaci

$$(152.13) \quad r_1^2 = m^2 - h^2 p^2; \quad r_2^2 = m^2 - k^2 p^2.$$

Podstawiawszy te wartości w (152.12) znajdziemy po prostych przekształceniach równanie

$$(152.14) \quad \left(\frac{p}{m}\right)^2 \left[ k^8 \left(\frac{p}{m}\right)^6 - 8k^6 \left(\frac{p}{m}\right)^4 + 8k^2(3k^2 - 2h^2) \left(\frac{p}{m}\right)^2 + 16(h^2 - k^2) \right] = 0,$$

które względem  $(p/m)^2$  jest stopnia czwartego. Pierwszy pierwiastek  $(p/m)^2 = 0$  nie nadaje się do warunków naszego zagadnienia. Pozostaje równanie sześcienne do wyznaczenia trzech jeszcze wartości  $(p/m)^2$ .

W przypadku skrajnym nieściśliwości ośrodka, tj.  $\mu = 1/2$  byłoby  $h^2 = 0$ . Wtedy równanie (152.14) ma dwa pierwiastki zespolone, a jeden rzeczywisty, który daje związek

$$(152.15) \quad \frac{p}{m} = \frac{p}{\sqrt{f^2 + g^2}} = (0,9554 \dots) \sqrt{\frac{G}{\mu}}$$

określający prędkość przenoszenia drgań w kierunkach  $x$  i  $y$ , tj. równoległe do płaszczyzny ograniczającej ośrodek. Ta prędkość jest zatem tylko o  $\sim 4,5\%$  mniejsza od  $\sqrt{G/\mu}$ , czyli od prędkości zwykłych fal skrętnych (poprzecznych). W przypadku gdy liczba Poisson'a  $\nu = 1/4$  ma rów. (152.14) trzy pierwiastki rzeczywiste, ale tylko jeden z nich daje  $\nu^2 > 0$ , a więc odpowiada warunkom zadania. Jego wartością jest

$$(152.16) \quad \frac{p}{m} = \sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{\frac{G}{\mu}} = (0,9194 \dots) \sqrt{\frac{G}{\mu}},$$

czyli i w takim bardziej realnym przypadku jest szybkość przerozdzenia fal powierzchniowych mniejsza (o  $\sim 8\%$ ) od szybkości zwykłych fal skrętnych.

Ponieważ stałe  $c$  i  $m$  pozostały dowolne, przeto traktując je jako parametry zmienne można z wyrażen (152.1) na podstawie metod znanych skonstruować całki przedstawiające rozchodzenie się zaburzenia dowolnego o kierunkach przemieszczeń leżących w płaszczyźnie  $XY$ . Pożądane uogólnienie do wszelkich kierunków zawdzięczamy pracy H. Lamb'a (Phil. Trans. R. S. London. Ser A, t. 203, r. 1904, str. 1—12).

Fale Rayleigh'a i Lamb'a grają w sejsmologii rolę ważną oświetloną wnikliwie w „Fizyce Ziemi” M. P. Rudzkiego (str. 149).



### XIII. STANY RÓWNOWAGI OSIOWO SYMETRYCZNE CIAŁ OBROTOWYCH

§ 153. **Wzory ogólne.** Do traktowania zagadnień typu wymienionego w tytule rozdziału nadają się szczególnie współrzędne walcowe. Wyrażone nimi składowe stanu odkształcenia przedstawiają wzory (32.1), zaś składowe stanu napięcia wzory (53.1). Niektóre zagadnienia szczególnie proste tego typu załatwiliśmy już w §§ 77, 78, 110, 111 i 118. Do nich można też dołączyć zagadnienie Boussinesq'a traktowane w § 1.03. Tutaj rozpatrzymy przede wszystkim ogólne wzory i metody rozwiązywania, wychodząc z równań już wymienionych, które powtórzymy stosując oznaczenia nieco odmienne dla ułatwienia czytelnikowi porównania z rozwiązaniami zawartymi w Stereom. Techn. autora. Oznaczmy więc:

1) przez  $u$  zamiast  $u_r$  składową przemieszczenia w kierunku promienia  $r$  (rys. 8);

2) przez  $v$  zamiast  $u_\varphi$  składową przemieszczenia w kierunku obwodu koła o promieniu  $r$  (a więc w kierunku oznaczonym na rys. 8 przez  $\varphi$ );

3) przez  $w$  zamiast  $u_z$  składową przemieszczenia w kierunku współrzędnych  $z$ .

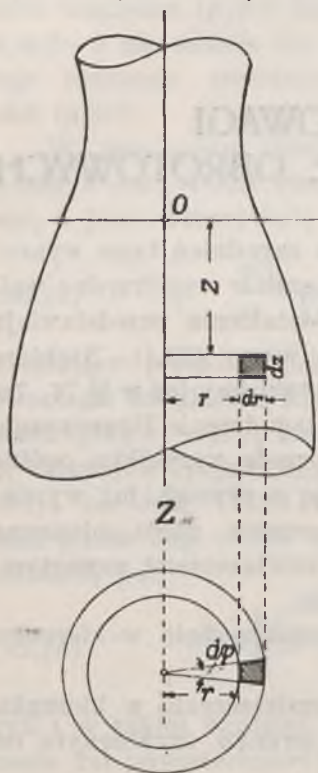
Analogicznie wprowadzimy oznaczenia dla składowych tensora odkształcenia określone równaniami:

$$(153.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_r = \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_t = \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}; \\ \gamma_{r\varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{array} \right.$$

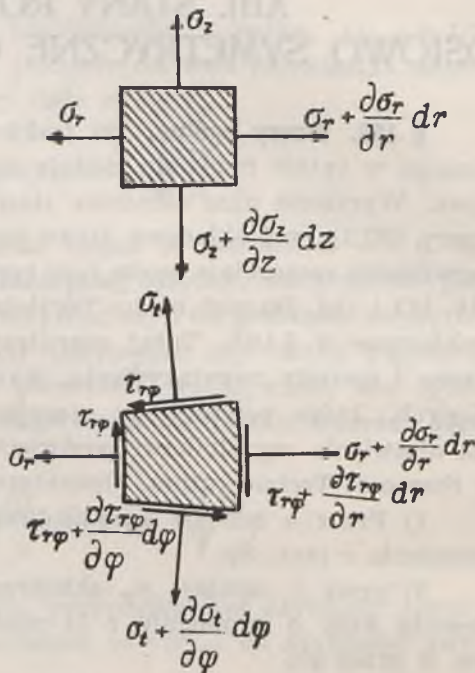
Odpowiednie wzory dla rozszerzenia objętościowego właściwego i składowych obrotu w kierunkach powyżej ustalonych są

według (32.1):

$$(153.2) \quad \begin{cases} \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} \\ 2\tilde{\omega}_r = \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad 2\tilde{\omega}_\varphi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}; \quad 2\tilde{\omega}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{cases}$$



Rys. 89 a.



Rys. 89 b.

Równania różniczkowe równowagi (53.1) z pominięciem sił masowych przyjmą postać

$$(153.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_t}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \end{cases}$$

Można je także wyprowadzić posługując się rysunkiem 89 a i b.

Te równania upraszczają się jeszcze w przypadkach symetrii kołowej odkształceń względem osi Z, gdyż wtedy wszystkie skła-

dowe stanu odkształcenia i napięcia (przy założeniu izotropii lub odpowiednio dobranej anizotropii) są niezależnie od argumentu  $\varphi$ . Nadto znikają naprężenia styczne  $\tau_{r\varphi}$ ,  $\tau_{\varphi z}$ , oraz odpowiednie kąty odkształcenia postaciowego  $\gamma_{r\varphi}$ ,  $\gamma_{\varphi z}$  i obroty składowe  $\tilde{\omega}_r$  i  $\tilde{\omega}_z$ . Mamy więc wtedy

$$(153.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (a) \\ \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z}; \quad 2\tilde{\omega}_\varphi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \quad (b) \\ \left. \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \end{array} \right\} \quad (c).$$

Oprócz tych wzorów będziemy w ciągu dalszym potrzebowali warunków nierozdzielności, albo równoważnych im równań naprężeniowych Beltrami'ego:

$$(60.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+\nu)\nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = 0, \quad (1+\nu)\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} = 0, \\ (1+\nu)\nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} = 0, \quad (1+\nu)\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial x} = 0, \\ (1+\nu)\nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0, \quad (1+\nu)\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = 0, \end{array} \right.$$

które przerobimy na współrzędne walcowe przy pomocy równań wynikających z wzorów §§ 36 i 37, a mianowicie

$$\sigma_x = \sigma_r \cos^2 \varphi + \sigma_t \sin^2 \varphi; \quad \sigma_y = \sigma_r \sin^2 \varphi + \sigma_t \cos^2 \varphi,$$

gdzie  $\varphi = \angle(r, x)$ . Nadto wiemy, że operator Laplace'a  $\nabla^2$  jest określony we współrzędnych walcowych równaniem symbolicznym

$$(76.8) \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

A zatem

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_x &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\sigma_r \cos^2 \varphi + \sigma_t \sin^2 \varphi) + \\ &+ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\sigma_r \cos^2 \varphi + \sigma_t \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Ponieważ  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  są teraz niezależne od  $\varphi$ , przeto część druga wyrażenia powyższego przyjmie postać

$$-\frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_t) \cos 2\varphi.$$

Z tego samego powodu znajdziemy z łatwością

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial \Theta}{\partial r} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{r},$$

a podstawivszy oba wyrażenia w pierwsze z równań (60.3) otrzymamy

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_t) + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \right] \cos^2 \varphi + \\ & + \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_t + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_t) + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right] \sin^2 \varphi = 0. \end{aligned}$$

Niezależność od  $\varphi$  wymaga, aby każde z wyrażeń w klamrach było równe zeru. Do tego samego wyniku dochodzimy przerabiając drugie z równań (60.3). Trzecie zaś pozostaje oczywiście bez zmiany. Co się tyczy pozostałych trzech równań, to zważywszy, że z powodu założenia symetrii kołowej znikają składowe styczne  $\tau_{\varphi r}$  i  $\tau_{\varphi z}$ , a pozostaje tylko  $\tau_{rz}$ , rozłożymy  $\tau_{rz}$  na dwie składowe w kierunkach  $x$  i  $y$ , a mianowicie

$$\tau_{xz} = \tau_{rz} \cos \varphi, \quad \tau_{yz} = \tau_{rz} \sin \varphi.$$

Różniczkowanie  $\partial \Theta / \partial z$  daje

$$(a) \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} \cos \varphi,$$

zaś

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tau_{xz} &= \nabla^2 (\tau_{rz} \cos \varphi) = \cos \varphi \cdot \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tau_{rz} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\tau_{rz} \cos \varphi) = \\ &= \cos \varphi \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \tau_{rz} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 \tau_{rz}}{\partial \varphi^2} \cos \varphi - 2 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \varphi} \sin \varphi - \tau_{rz} \cos \varphi \right) = \\ &= \cos \varphi \nabla^2 \tau_{rz} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\tau_{rz}}{r^2} \cos \varphi, \end{aligned}$$

a ponieważ  $\partial \tau_{rz} / \partial \varphi = 0$  z powodu symetrii kołowej, więc

$$(b) \quad \nabla^2 \tau_{xz} = \left( \nabla^2 \tau_{rz} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} \right) \cos \varphi.$$

Wstawivszy (a) i (b) w piąte z równań (60.3) otrzymamy

$$\nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \tau_{rz} + \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} = 0$$

i ten sam wynik znajdujemy z czwartego z równań (60.3). Ostatnie wreszcie równanie przekształcimy podstawivjąc

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_t) \sin 2\varphi$$

oraz

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial r} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2},$$

wobec czego otrzymamy

$$(1 + \nu) \nabla^2 \left[ \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_t) \sin 2\varphi \right] + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \left( \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) = 0.$$

Ten sam związek wynika jednakże z odjęcia przekształconych pierwszych dwu równań (60.3). Mamy przeto ostatecznie cztery niezależne nawzajem naprężeniowe równania równowagi:

$$(153.5) \quad \begin{cases} \nabla^2 \sigma_r - \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_t) + \frac{1}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} = 0, \\ \nabla^2 \sigma_t + \frac{2}{r^2} (\sigma_r - \sigma_t) + \frac{1}{1 + \nu} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0, \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = 0, \\ \nabla^2 \tau_{rz} - \frac{1}{r^2} \cdot \tau_{rz} + \frac{1}{1 + \nu} \cdot \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} = 0, \end{cases}$$

które są równoważne równaniom równowagi (153.4 (c)) i warunkom nierozdzielności w przypadku odkształceń kołowo-symetrycznych względem osi  $Z$ .

**§ 154. Funkcja naprężeń Love'a.** Całkowanie równań (153.5) ułatwia znacznie funkcja naprężeń  $\chi$  znaleziona długim wywodem przez Love'a (Elasticity, str. 274, wyd. 4, z r. 1927) po wprowadzeniu zrazu innych dwu funkcji pomocniczych. Funkcja ta czyni zadość równaniu różniczkowemu

$$(a) \quad \nabla^2 \nabla^2 \chi = \nabla^4 \chi = 0,$$

gdzie

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

i określa rozwiązanie równań (153.5) wzorami

$$(154.1) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right); & \sigma_t = \frac{\partial}{\partial z} \left( \nu \nabla^2 \chi - \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right), \\ \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (2 - \nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right]; & \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1 - \nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right]. \end{cases}$$

Podstawiawszy te wyrażenia w (153.5) przekonujemy się istotnie, że się spełniają tożsamościowo, jeżeli  $\chi$  czyni zadość warunkowi (a)

Albowiem stosownie do (154.1) znajdujemy

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left( \nu \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right); \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left[ (1-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right],$$

$$\frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^2 \partial z}.$$

A zatem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} &= \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left( \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^2 \partial z} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^2 \partial z} = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^3 \chi}{\partial r^2 \partial z} = 0. \end{aligned}$$

Podobnie otrzymamy

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[ (1-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right], \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[ (2-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right],$$

$$\frac{\tau_{rz}}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ (1-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right].$$

a stąd:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (1-\nu) \nabla^2 \chi - \frac{\partial^4 \chi}{\partial r^2 \partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\nabla^2 \chi) - \frac{\partial^4 \chi}{\partial z^4} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \chi}{\partial r \partial z^2} = \\ &= (1-\nu) \nabla^2 \nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} - \nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) = (1-\nu) \nabla^2 \nabla^2 \chi = 0. \end{aligned}$$

Niekiedy okazuje się korzystnym wyrażenie równania różniczkowego funkcji naprężeń  $\chi$  we współrzędnych biegunowych (§ 32, II) zamiast walcowych  $r, \varphi, z$ . Oznaczmy je tutaj dla uniknięcia nieporozumień przez  $\rho, \vartheta, \varphi$ , zamiast uwidocznionych na rys. 9  $r, \vartheta, \varphi$ . Wtedy jest w ogóle

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\operatorname{ctg} \vartheta}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \vartheta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

jak można znaleźć dość długim rachunkiem różniczkując wzory

$$x = \rho \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \vartheta$$

(ob. np. § 126, t. I przytoczonego powyżej „Rach. różn. i całkowego” A. Łomnickiego).

W naszym przypadku symetrii kołowej odpada oczywiście wyraz ostatni z powodu niezależności od  $\varphi$ , a równanie określające funkcję Love'a  $\chi$  przyjmie postać

$$(154.2) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \operatorname{ctg} \vartheta \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \chi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \operatorname{ctg} \vartheta \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} \right) = 0.$$

Ważną klasę rozwiązań tego równania znajdujemy szukając całek równania

$$(154.3) \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial \chi}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \operatorname{cotg} \vartheta \cdot \frac{\partial \chi}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial \vartheta^2} = 0,$$

w postaci

$$(154.4) \quad \chi_n = \varrho^n \vartheta_n,$$

gdzie  $\vartheta_n$  jest funkcją samego kąta  $\vartheta$ <sup>1)</sup>. Podstawivszy to wyrażenie w (154.3) otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne dla funkcji  $\vartheta_n$ :

$$(154.5) \quad \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d\vartheta_n}{d\vartheta} \right) + n(n+1)\vartheta_n = 0.$$

Po wprowadzeniu nowej zmiernej niezależnej  $x$  przez podstawienie  $x = \cos \vartheta$ , a więc

$$(154.6) \quad \frac{d\vartheta_n}{d\vartheta} = -\frac{d\vartheta_n}{dx} \sin \vartheta; \quad \frac{d^2\vartheta_n}{d\vartheta^2} = \frac{d^2\vartheta_n}{dx^2} \cdot \sin^2 \vartheta - x \frac{d\vartheta_n}{dx},$$

przekształcimy rów. (154.5) na następujące:

$$(154.7) \quad (1-x^2) \frac{d^2\vartheta_n}{dx^2} - 2x \frac{d\vartheta_n}{dx} + n(n+1)\vartheta_n = 0.$$

**§ 155. Rozwiązanie przez wielomiany.** Rów. różn. (154.7) znane pod nazwą równania Legendre'a rozwiązuje się najprościej przez szeregi. W tym celu założymy, że

$$(155.1) \quad \vartheta_n = a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + a_3 x^{m_3} + \dots,$$

a podstawivszy w (154.7) znajdziemy

$$(155.2) \quad n(n+1)(a_1 x^{m_1} + a_2 x^{m_2} + \dots) = m_1(m_1+1)a_1 x^{m_1} - m_1(m_1-1)a_1 x^{m_1-2} + \\ + m_2(m_2+1)a_2 x^{m_2} - m_2(m_2-1)a_2 x^{m_2-2} + \dots$$

Ażeby to równanie było spełnione przy każdej wartości  $x$ , winny wykładniki  $m_1, m_2, m_3, \dots$  czynić zadość warunkom

$$m_2 = m_1 - 2, \quad m_3 = m_2 - 2, \dots$$

Z tego wynika, że wykładniki wyrazów szeregu (155.1) maleją. Pierwszy z nich, tj.  $m_1$  znajdziemy z porównania współczynników przy  $x^{m_1}$  po obu stronach równania (155.2). A więc

$$n(n+1) = m_1(m_1+1), \quad \text{czyli} \quad (n-m_1)(m_1+n+1) = 0,$$

co daje

$$(a) \quad m_1 = n, \quad \text{albo} \quad m_1 = -(n+1).$$

<sup>1)</sup> Por. S. Timoshenko, Th. of Elasticity, 1934, str. 313.

Dla pierwszego z tych rozwiązań otrzymujemy

$$m_1 = n, \quad m_2 = n - 2, \quad m_3 = n - 4, \dots$$

Wartości współczynników  $a_2, a_3, \dots$  znajdziemy przyrównując do zera wyrażenia współczynników każdej potęgi  $x$  w rów. (155.2) Czyniąc to dla wyrazu zawierającego  $x^{m_1 - 2r + 2}$  znajdujemy równanie  $n(n+1)a_r = (m_1 - 2r + 2)(m_1 - 2r + 3)a_r - (m_1 - 2r + 4)(m_1 - 2r + 3)a_{r-1}$ , z którego wynika wzór rekurencyjny

$$a_r = -\frac{(n - 2r + 4)(n - 2r + 3)}{2(r - 1)(2n - 2r + 3)} a_{r-1}.$$

Z tymi współczynnikami przyjmie wzór (155.1) postać

$$(155.3) \quad \vartheta_n = a_1 \left[ x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots \right],$$

która jest rozwiązaniem rów. (154.7).

Podstawiając je w (154.4) z uwzględnieniem, że

$$x = \cos \vartheta, \quad \varrho x = z, \quad \varrho = \sqrt{r^2 + z^2},$$

otrzymamy dla  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  całki szczególne równania (154.3) w postaci wielomianów:

$$(155.4) \quad \begin{cases} \chi_0 = A_0, & \chi_1 = A_1 z, & \chi_2 = A_2 \left[ z^2 - \frac{1}{3}(r^2 + z^2) \right], \\ \chi_3 = A_3 \left[ z^3 - \frac{3}{5} z(r^2 + z^2) \right], \\ \chi_4 = A_4 \left[ z^4 - \frac{6}{7} z^2(r^2 + z^2) + \frac{3}{35}(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \chi_5 = A_5 \left[ z^5 - \frac{10}{9} z^3(r^2 + z^2) + \frac{5}{21} z(r^2 + z^2)^2 \right], \\ \dots \end{cases}$$

Te wielomiany ze stałymi dowolnymi  $A_0, A_1, \dots$  są zarazem rozwiązaniami szczególnymi równania (154.2). Można z nich wyprowadzić nowe rozwiązania tegoż równania, które nie będą całkami równania (154.3). Przekonamy się bowiem, że operator ujęty w nawiasy w rów. (154.2), zastosowany do funkcji  $\varrho^{n+2} \vartheta_n$  zamienia ją na funkcję  $\varrho^n \vartheta_n$  ze stałym współczynnikiem<sup>1)</sup>, a ponieważ ta funkcja

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left( \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \cotg \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \varrho^{n+2} \vartheta_n = \\ & = (n+2)(n+1) \varrho^n \vartheta_n + 2(n+2) \varrho^n \vartheta_n + \varrho^n \cotg \vartheta \frac{\partial \vartheta_n}{\partial \vartheta} + \varrho^n \frac{\partial^2 \vartheta_n}{\partial \vartheta^2} = \\ & = [(n+1)(n+2) + 2(n+2) - n(n+1)] \varrho^n \vartheta_n = 2(2n+3) \varrho^n \vartheta_n. \end{aligned}$$

z uwzględnieniem związków (154.6) i równania (154.7).



rozwiązuje rów. (154.3), przeto  $\varrho^{n+2} \partial_n$  jest postacią całek szczególnych równania (154.2). Napiszemy je mnożąc rozwiązania (155.4) kolejno przez  $\varrho^2 = r^2 + z^2$ . A zatem

$$(155.5) \quad \begin{cases} \chi_2 = B_2(r^2 + z^2), \quad \chi_3 = B_3 z(r^2 + z^2), \\ \chi_4 = B_4(2z^2 - r^2)(r^2 + z^2), \quad \chi_5 = B_5(2z^3 - 3r^2 z)(r^2 + z^2), \dots \\ \dots \end{cases}$$

**§ 156. Zastosowanie w przypadkach kołowo-symetrycznego zginania płyt.** Podobnie jak w § 70, gdzie traktowano zadania dwuwymiarowe we współrzędnych prostokątnych za pomocą wielomianów czyniących zadość równaniu biharmonicznemu funkcji naprężeń, tak i tutaj można składając całki szczególne (155.4 i 5) dojść do rozwiązań konkretnych zagadnień szczegółowych. Obrawszy np. wielomiany stopnia 3-go napiszemy

$$\chi = a_3(2z^3 - 3r^2 z) + b_3(r^2 z + z^3).$$

Podstawivszy to we wzory na naprężenia (154.1), mamy

$$(156.1) \quad \begin{cases} \sigma_r = 6a_3 + (10\nu - 2)b_3, & \sigma_t = 6a_3 + (10\nu - 2)b_3 \\ \sigma_z = -12a_3 + (14 - 10\nu)b_3, & \tau_{rz} = 0, \end{cases}$$

co odpowiada trójwymiarowi równomiernemu stanowi napięcia w płycie. Gdy wartości  $\sigma_r$  i  $\sigma_z$  na obu ścianach płyty okrągłej pomysłanych poziomo i na walcowej ścianie bocznej są dane, to łatwo dobrać odpowiednie im wartości stałych  $a_3$  i  $b_3$ .

Przechodząc od tego przypadku trywialnego do innych, weźmy z (155.4 i 5) całki w postaci wielomianów stopnia 4-go, tj.

$$\chi = a_4(8z^4 - 24r^2 z^2 + 3r^4) + b_4(2z^4 + r^2 z^2 - r^4).$$

Wzory (154.1) dają teraz

$$(156.2) \quad \begin{cases} \sigma_r = 96a_4 z + 4b_4(14\nu - 1)z = \sigma_t \\ \sigma_z = -192a_4 z + 4b_4(16 - 14\nu)z \\ \tau_{rz} = 96a_4 r - 2b_4(16 - 14\nu)r. \end{cases}$$

Przyjawszy  $96a_4 - 2b_4(16 - 14\nu) = 0$ , otrzymamy

$$\sigma_r = \sigma_t = 28(1 + \nu)b_4 z, \quad \sigma_z = 0, \quad \tau_{rz} = 0.$$

Przy obiorze początku współrzędnych w środku płyty znaleziony stan napięcia przedstawia czyste zgięcie płyty momentami rozłożonymi równomiernie dookoła brzegu walcowego. Aby znaleźć rozwiązanie dla płyty obciążonej równomiernie, weźmiemy wielomian stopnia 6-go opatrując nieoznaczone na razie współczynniki  $a_6$  i  $b_6$  mianownikami liczbowymi w celu uniknięcia wielkich

liczb w wyrażeniach dla naprężeń. Tą samą drogą co powyżej znajdziemy przy pomocy wzorów (155.4 i 5):

$$\chi = \frac{a_6}{2} (16z^6 - 120r^2z^4 + 90r^4z^2 - 5r^6) + \frac{b_6}{8} (8z^6 - 16r^2z^4 - 21r^4z^2 + 3r^6).$$

Podstawienie we wzorach (154.1) daje:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= a_6(40z^3 - 90r^2z) + b_6[8(2 + 11\nu)z^3 + 3(21 - 44\nu)r^2z], \\ \sigma_t &= a_6(40z^3 - 30r^2z) + b_6[8(2 + 11\nu)z^3 + 3(7 - 44\nu)r^2z], \\ \sigma_z &= a_6(-80z^3 + 120r^2z) + b_6[8(7 - 11\nu)z^3 + 12(-18 + 11\nu)r^2z], \\ \tau_{rz} &= a_6(120rz^2 - 30r^3) + b_6[4(-21 + 33\nu)r^2z + 3(18 - 11\nu)r^3]. \end{aligned}$$

Tymi wzorami nie można jednakże uczynić zadość warunkom na powierzchni płyty, jakimi są:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \sigma_z &= 0 \quad \text{dla } z=h \quad \text{i} \quad \sigma_z = -q \quad \text{dla } z=-h, \\ \text{(b)} \quad \tau_{rz} &= 0 \quad \text{dla } z=h \quad \text{i} \quad \text{dla } z=-h. \end{aligned}$$

Dlatego do powyższego układu naprężeń dodamy układ (156.2) położwszy  $b_4=0$ , tzn.

$$\sigma_r = 12a_4z = \sigma_t; \quad \sigma_z = -24a_4z; \quad \tau_{rz} = 12a_4r,$$

oraz jednoosiowy stan napięcia  $\sigma_z = b$  odpowiadający rozwiązaniu (156.1).

Z warunków (a) wynika teraz:

$$(156.3) \quad \begin{cases} a_6(-80h^3 + 120hr^2) + \\ + b_6[(56 - 88\nu)h^3 + (-216 + 132\nu)hr^2] - 24a_4h + b = 0 \\ a_6(80h^3 - 120hr^2) + \\ + b_6[(-56 + 88\nu)h^3 + (216 - 132\nu)hr^2] + 24a_4h + b = -q \end{cases}$$

stąd

$$b = -\frac{1}{2}q.$$

Z warunków (b) zaś, które winny być spełnione przy każdej wartości  $r$ , otrzymujemy w połączeniu z jednym z rów. (156.3):

$$a_4 = -11h^2b_6, \quad a_6 = \frac{1}{10}(18 - 11\nu)b_6, \quad b_6 = \frac{q}{352h^3}.$$

Z tymi wartościami znajdujemy w płycie stan napięcia następujący:

$$(156.4) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{q}{8} \left[ (2 + \nu) \frac{z^3}{h^3} - \frac{3(3 + \nu)}{4} \frac{r^2z}{h^3} - \frac{3z}{h} \right], \\ \sigma_t = \frac{q}{8} \left[ (2 + \nu) \frac{z^3}{h^3} - \frac{3(1 + 3\nu)}{4} \frac{r^2z}{h^3} - \frac{3z}{h} \right], \\ \sigma_z = q \left[ -\frac{1}{4} \frac{z^3}{h^3} + \frac{3}{4} \frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right], \\ \tau_{rz} = \frac{3}{8} \frac{qr}{h^3} (a^2 - z^2). \end{cases}$$

Stan ten odpowiada płycie okrągłej o dowolnym promieniu  $a$ , której obciążenie równomierne o wielkości całkowitej  $qa^2\pi$  jest zrównoważone momentami  $m_r$  i siłami poprzecznymi  $t_{rz}$  działającymi na walcowy brzeg płyty. Ich wartościami są:

$$(156.5) \quad \left. \begin{aligned} m_r &= \int_{-h}^h \sigma_r z dz = -\frac{q}{8} \left( \frac{6-2\nu}{5} h^2 + \frac{3+\nu}{2} r^2 \right), \\ t_{rz} &= \int_{-h}^h \tau_{rz} dz = \frac{qr}{2} \end{aligned} \right\} \text{ dla } r=a.$$

Gdy na stan napięcia (156.4) nałożymy stan odpowiadający zgięciu kulistemu tak, aby znikły momenty brzegowe, to otrzymamy rozwiązanie dla przypadku „swobodnego podparcia” brzegu płyty. Odnośne naprężenia  $(\sigma_r)_{r=a}$  określi wzór

$$(156.6) \quad \sigma'_r = -\frac{3}{2} \frac{m_r}{h^2} z \Big|_{r=a} = \frac{3}{2} \frac{z}{h^2} \frac{q}{8} \left( \frac{6-2\nu}{5} h^2 + \frac{3+\nu}{2} a^2 \right) = \sigma'_t.$$

Dodawszy je do pierwszego i drugiego z wyrażen (156.4) otrzymamy dla stanu napięcia w przypadku swobodnego podparcia brzegu płyty okrągłej wzory:

$$(156.7) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{q}{8} \left[ (2+\nu) \frac{z^2}{h^2} - \frac{3(2+\nu)}{5} + \frac{3(3+\nu)}{4} \frac{a^2-r^2}{h^2} \right] \frac{z}{h} \\ \sigma_t &= \frac{q}{8} \left[ (2+\nu) \frac{z^2}{h^2} - \frac{3(2+\nu)}{5} + \frac{3}{4} (3+\nu) \frac{a^2}{h^2} - \frac{3}{4} (1+3\nu) \frac{z^2}{h^2} \right] \frac{z}{h} \\ \sigma_z &= \frac{q}{8} \left( -2 \frac{z^3}{h^3} + 6 \frac{z}{h} - 4 \right) \\ \tau_{rz} &= \frac{q}{8} \frac{3r(h^2-z^2)}{h^3}. \end{aligned} \right.$$

To rozwiązanie nie jest zupełnie ścisłe, gdyż naprężenia  $\sigma_r$  nie znikają na brzegu płyty ( $r=a$ ), przyjmując tam wartości

$$\sigma_r \Big|_{r=0} = \frac{2+\nu}{8} q \left( \frac{z^3}{h^3} - \frac{3z}{5h} \right).$$

Gdy jednakże grubość płyty  $2h$  jest znacznie mniejsza od jej średnicy  $2a$ , to wynikające stąd różnice ścisłych wartości naprężeń zanikają szybko w miarę oddalenia od brzegu, stosownie do zasady de Saint-Venant'a, ponieważ wypadkowa naprężeń w każdym elemencie prostopadłym do  $r$  o wysokości  $2h$  jest równa zero, a zarazem ogólny moment jest równy zero.

Porównyując rozwiązanie powyższe z rozwiązaniem klasycznej teorii płyt cienkich, która dla  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  daje wzory

$$\sigma_r = \frac{q}{8} \frac{z}{h} \frac{3(3+\nu)}{4} \cdot \frac{a^2 - r^2}{h^2},$$

$$\sigma_t = \frac{q}{8} \frac{z}{h} \left[ \frac{3}{4} (3+\nu) \frac{a^2}{h^2} - \frac{3}{4} (1+3\nu) \frac{r^2}{h^2} \right],$$

znajdujemy jako względną różnicę obu wartości  $\sigma_r$ :

$$\frac{(2+\nu) \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right)}{\frac{3}{4} (3+\nu) \frac{a^2 - r^2}{h^2} + (2+\nu) \left( \frac{z^2}{h^2} - \frac{3}{5} \right)}.$$

W warstwach skrajnych, tj. dla  $z = \pm h$  staje się ta różnica np. przy  $\nu = 0,3$  równą

$$\frac{h^2}{2,7a^2 + h^2} = \delta,$$

a więc

dla	$a/h = 2$	$3$	$4$	$5$	$10$
jest	$\delta = 0,085$	$0,055$	$0,023$	$0,015$	$0,0037$ .

### § 157. Przemieszczenia wyrażone przez funkcje naprężeń Love'a.

Gdy we wzory

$$(a) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_r - \nu\Theta] = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_t + \sigma_z)], \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_z - \nu\Theta] = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_t)], \end{cases}$$

wstawimy wyrażenia z rów. (154.1), to otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= -\frac{1+\nu}{E} \cdot \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2 \partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial}{\partial z} \left[ 2(1-\nu)\nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right] = \\ &= \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1-2\nu)\nabla^2 \chi + \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right]. \end{aligned}$$

Całkowanie tych równań daje wzory

$$(157.1) \quad \begin{cases} u = -\frac{1+\nu}{E} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial z}, \\ w = \frac{1+\nu}{E} \left[ 2(1-\nu)\nabla^2 \chi - \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right], \end{cases}$$

do których nie dołączono dowolnych funkcji całkowania, gdyż są już zawarte we funkcji  $\chi$ .

W zagadnieniu rozważanym w § 156 zastosujemy z korzyścią zamiast wzorów (157.1) znalezione już wyrażenia dla składowych stanu napięcia (156.7), podstawiając je we wzory (a) uzupełnione wzorem

$$(b) \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\tau_{rz}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{rz}.$$

Tą drogą znajdujemy kolejno

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{q}{8E} \left[ -2 \frac{z^3}{h^3} + 6 \frac{z}{h} - 4 - \right. \\ \left. - \nu \left\{ 2(2+\nu) \frac{z^3}{h^3} - \frac{6}{5} (2+\nu) \frac{z}{h} + \frac{3}{2} (3+\nu) \frac{a^2 z}{h^3} - 3(1+\nu) \frac{r^2 z}{h^3} \right\} \right].$$

Całkowanie daje

$$(157.2) \quad w = \frac{q}{8E} \left[ -\frac{z^4}{2h^3} + \frac{3z^2}{h} - 4z - \right. \\ \left. - \nu \left\{ \frac{2+\nu}{2} \cdot \frac{z^4}{h^3} - \frac{3}{5} (2+\nu) \frac{z^2}{h} + \frac{3}{4} (3+\nu) \frac{a^2 z^2}{h^3} - \frac{3}{2} (1+\nu) \frac{r^2 z^2}{h^3} \right\} \right] + f_1(r),$$

gdzie  $f_1(r)$  jest nieoznaczoną na razie funkcją samego  $r$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{q}{8E} \left[ (2+\nu) \frac{z^3}{h^3} - \frac{3}{5} (2+\nu) \frac{z}{h} + \frac{3}{4} (3+\nu) \frac{a^2 - r^2}{h^2} \cdot \frac{z}{h} - \nu \left( -2 \frac{z^3}{h^3} + 6 \frac{z}{h} - 4 \right) - \right. \\ \left. - \nu \left\{ (2+\nu) \frac{z^3}{h^3} - \frac{3}{5} (2+\nu) \frac{z}{h} + \frac{3}{4} (3+\nu) \frac{a^2}{h^2} \cdot \frac{z}{h} - \frac{3}{4} (1+3\nu) \frac{r^2 z}{h^3} \right\} \right].$$

Z całkowania wynika:

$$(157.3) \quad u = \frac{q}{8E} \left[ \left\{ (2+\nu) \frac{z^3}{h^3} - \frac{3}{5} (2+\nu) \frac{z}{h} + \frac{3}{4} (3+\nu) \frac{a^2 z}{h^3} \right\} (1-\nu)r + \right. \\ \left. + \left( 2 \frac{z^3}{h^3} - 6 \frac{z}{h} + 4 \right) \nu r - \frac{3}{4} (1-\nu^2) \frac{r^3 z}{h^3} \right] + f_2(z).$$

Z powodu symetrii kołowej jest  $u=0$  dla  $r=0$ , a więc  $f_2(z)=0$ . Podstawivszy wyrażenia (157.2 i 3), oraz wyrażenie na  $\tau_{rz}$  w rów. (b) otrzymamy

$$(157.4) \quad \frac{1+\nu}{E} \frac{q}{4} \frac{3r(h^2-z^2)}{h^3} = \frac{q}{8E} \left[ 3\nu(1+\nu) \frac{r z^2}{h^3} + \right. \\ \left. + 3(1-\nu) (2+\nu) \frac{r z^2}{h^3} - \frac{3}{5} (1-\nu) (2+\nu) \frac{r}{h} + \frac{3}{4} (1-\nu) (3+\nu) \frac{a^2 r}{h^3} + \right. \\ \left. + 6\nu \frac{r z^2}{h^3} - 6\nu \frac{r}{h} - \frac{3}{4} (1-\nu^2) \frac{r^3}{h^3} \right] + f_1'(r),$$

z czego wyznaczymy funkcję  $f_1(r)$  podstawiając  $z = \pm h$  i całkując względem  $r$ . Mamy więc

$$(157.5) \quad f_1(r) = -\frac{q}{8E} \left[ \frac{3}{5}(8+\nu-4r^2) + \frac{3}{4}(1-\nu)(3+\nu) \frac{a^2}{h^2} \right] \frac{r^2}{2h} - \frac{3}{16}(1-\nu^2) \frac{r^4}{h^2} + C.$$

Stałą całkowania  $C$  znajdziemy z warunku

$$w=0 \quad \text{dla} \quad z=0 \quad \text{i} \quad r=a,$$

który wynika z przyjęcia, że okrąg podparcia płyty o promieniu  $a$  połowi jej grubość  $2h$ , a płaszczyzną tego okręgu jest  $z=0$ . Wtedy wz. (157.2) daje  $f_1(a)=0$ , a zatem z (157.5) otrzymamy:

$$(157.6) \quad C = \frac{q}{8E} \left[ \frac{3}{10}(8+\nu-4r^2) \frac{a^2}{h} + \frac{3}{16}(1-\nu)(5+\nu) \frac{a^4}{h^3} \right] = w_{0,0}.$$

Stała  $C$  określa zarazem wartość  $f_1(0)$ , a więc stosownie do wz. (157.2) wartość „strzałki ugięcia” płyty. Wartość ta różni się od obliczonej z teorii przybliżonej płyt „cienkich”, która daje tylko drugi wyraz w klamrach, tj.

$$w'_{0,0} = \frac{3q}{128E} (1-\nu)(5+\nu) \frac{a^4}{h^3}.$$

Względna różnica  $\delta$  jest  $1/(1+a)$  częścią wartości dokładniejszej, przy czym

$$\alpha = \frac{5}{8} \frac{(1-\nu)(5+\nu)}{8+\nu-4r^2} \cdot \frac{a^2}{h^2}.$$

Przyjawszy  $\nu=0,3$  otrzymamy

dla	$a/h =$	2	3	5	10
wartość	$\delta =$	0,16	0,275	0,137	0,033.

Na zwiększenie ugięcia składają się widocznie wpływy naprężeń tnących  $\tau_{rz}$  i naprężeń normalnych  $\sigma_z$  pominięte w teorii elementarnej.

**§ 158. Skręcanie pręta prostoosiowego o przekroju kołowym zmiennym.** Ten przypadek kołowo-symetrycznych naprężeń i odkształceń różni się od poprzednich rozpatrywanych w rozdziale niniejszym tym, że składowe przemieszczenia  $v$  o kierunku stycznym do okręgów o promieniach  $r$  w przekrojach poprzecznych nie znikają będąc jednakże niezależnymi od współrzędnej  $\varphi$ . Natomiast możemy przyjąć podobnie jak w teorii skręcania walca obrotowego, że  $u=w=0$ , gdzie  $u$  oznacza przemieszczenie radialne, a  $w$  prze-

mieszczanie w kierunku osi  $z$  pręta dla jakiegokolwiek punktu  $(r, \varphi, z)$  w jego wnętrzu. Te założenia spełniają jak zobaczymy równania różniczkowe równowagi (153.3) pod warunkiem, że pobocznica pręta nie jest obciążona, że nie ma sił masowych, a tylko na przekroje końcowe działają styczne naprężenia obwodowe sprowadzające się do par skręcających, które się znoszą nawzajem. Przemieszczenie  $v$  nie będzie teraz w ogóle proporcjonalne względem  $r$ , jak to było w przypadku stałego przekroju kołowego, wobec czego punkty przekroju leżące pierwotnie na promieniu  $r$  znajdują się wskutek skręcenia na linii krzywej. Równania (153.1) przyjmą teraz postać uproszczoną:

$$(158.1) \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_z = \gamma_{rz} = 0; \quad \gamma_{r\varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{\partial v}{\partial z}.$$

Wobec tego winno być także

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad \text{a tylko } \tau_{r\varphi} \neq 0 \quad \text{i} \quad \tau_{\varphi z} \neq 0.$$

Pierwsze dwa z równań (153.3) spełniają się tożsamościowo, a trzecie daje

$$(158.2) \quad \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{\partial r} = 0,$$

co można napisać w postaci

$$(158.3) \quad \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\varphi}) + \frac{\partial}{\partial z} (r^2 \tau_{\varphi z}) = 0.$$

Temu równaniu czyni zadość funkcja naprężeń  $\Phi$ , jeżeli

$$(158.4) \quad r^2 \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad r^2 \tau_{\varphi z} = \frac{\partial \Phi}{\partial r}.$$

Że warunki nierozdzielności są również spełnione przekonywamy się pisząc je w postaci

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial r \partial \varphi} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_t}{\partial r^2} \quad \text{itd.},$$

gdzie zastąpiono  $dx$  i  $dy$  przez  $dr$  i  $r d\varphi$ , co jest uzasadnione wzajemną prostopadłością kierunków  $u, v, w$ . Ponieważ  $\gamma_{r\varphi}$  jest niezależne od  $\varphi$ , zaś  $\varepsilon_r = \varepsilon_t = 0$ , przeto równanie powyższe spełnia się tożsamościowo.

Równania (158.1 i 4) dają teraz

$$(158.5) \quad \begin{cases} \tau_{r\varphi} = G \gamma_{r\varphi} = G \left( \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) = Gr \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \tau_{\varphi z} = G \gamma_{\varphi z} = G \frac{\partial v}{\partial z} = Gr \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{cases}$$

Stąd łatwo znaleźć związek

$$(158.6) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r^3} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = 0$$

$$(158.7) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0.$$

Funkcja naprężeń  $\Phi$  winna nadto czynić zadość warunkowi brzegowemu, który wyraża, że w punktach konturu przekroju osiowego pręta ma całkowite naprężenie styczne kierunku normalnej do elementu konturu  $ds$ , a więc

$$\tau_{r\varphi} \frac{dz}{ds} - \tau_{\varphi z} \frac{dr}{ds} = 0.$$

Wstawiając tutaj wartości z (158.4) otrzymamy

$$(158.8) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{dr}{ds} = 0,$$

co znaczy, że wzdłuż konturu przekroju osiowego jest

$$\Phi = \text{stała}.$$

Równania (158.7 i 8) wyprowadzone w r. 1900 przez I. H. Michell'a określają jednoznacznie funkcję naprężeń  $\Phi$ , która wyznacza wartości naprężeń i odkształceń w pręcie naszego zagadnienia. Inną drogą doszedł do rozwiązania analogicznego A. Föppl<sup>1)</sup>.

Wartość momentu skręcającego  $M_s$  określi równanie

$$(158.9) \quad M_s = \int_0^{\bar{r}} 2\pi r^2 \tau_{\varphi z} dr = 2\pi \int_0^{\bar{r}} \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr = 2\pi \Big|_0^{\bar{r}} \Phi,$$

gdzie  $\bar{r}$  oznacza promień konturu przekroju poprzecznego. To równanie wyraża, że moment skręcenia jest wyznaczony różnicą wartości funkcji naprężeń na konturze i w środku przekroju.

Rozpatrując przemieszczenia  $v$  stwierdzamy przede wszystkim, że mają wspólną wartość w punktach przekroju poprzecznego leżących na pierścieniu elementarnym o danym promieniu  $r$  i szerokości  $dr$ . Taki pierścień można uważać za przekrój poprzeczny jednej z rur cienkościennych na które można w myśli rozłożyć cały pręt. A zatem  $\psi = v/r$  przedstawia kąt skręcenia takiej rury zależny w danym przekroju pręta od promienia  $r$ , wobec czego każda z rur elementarnych ulega innemu kątowi skręcenia. Z równań (158.5) wynika teraz

$$Gr^3 \frac{\partial \psi}{\partial r} = - \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad Gr^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial r},$$

<sup>1)</sup> Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. München, 1905, t. 35, str. 249 i 504. Późniejsze prace na ten temat omawia Th. Pöschl w Z. f. ang. Math. u. Mech. z r. 1922, str. 137.



a stąd otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^3 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( r^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0,$$

albo też

$$(158.10) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

Kładąc dla kąta skręcenia rury elementarnej spełniającego równanie powyższe

$$(158.11) \quad \psi(r, z) = \text{stała}$$

mamy równanie powierzchni obrotowej na której wszystkie punkty ulegają przemieszczeniom  $v$  odpowiadającym temu samemu kątowi skręcenia. Takie powierzchnie grają tę samą rolę, co kołowe przekroje płaskie pręta walcowego, tj. obracają się przy skręcaniu bez spaczenia. Powierzchnie sąsiednie różniące się wartością stałej o  $d\psi$  wyznaczają na konturze przekroju osiowego pręta element o długości pierwotnej  $ds$ . W płaszczyźnie przechodzącej przez  $ds$  i prostopadłej do przekroju osiowego zachodzi zatem proste odkształcenie postaciowe, a kąt tego odkształcenia

$$\gamma = \frac{r d\psi}{ds}.$$

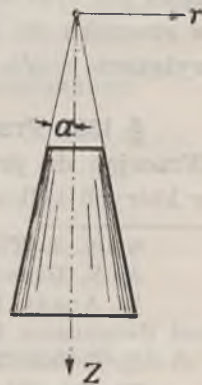
Odpowiednie naprężenie styczne, którego składowymi są  $\tau_{r\varphi}$  i  $\tau_{\varphi z}$  określi przeto wzór

$$(158.12) \quad \tau = \tau_{r\varphi} \frac{dr}{ds} + \tau_{\varphi z} \frac{dz}{ds} = Gr \cdot \frac{d\psi}{ds}.$$

Wzór ten może posłużyć do wyznaczenia naprężeń stycznych na pobocznicę pręta skręcanego o kołowym przekroju zmiennym z pomiaru doświadczalnego gradientu kąta skręcenia  $d\psi/ds$ .

Jako prosty przykład rozwiązania szczegółowego podany przez A. Föppl'a rozpatrzmy skręcanie pręta stożkowego (rys. 90). Jego pobocznicą jest określona równaniem

$$\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \cos \alpha = \text{stała}.$$



Rys. 90.

Każda funkcja tego ułamka spełnia warunek brzegowy (158.10). Równaniu różniczkowemu (158.7) funkcji naprężeń uczynimy zadość kładąc

$$(158.13) \quad \phi = c \left[ \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{3} \left( \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)^3 \right],$$

gdzie  $c$  oznacza stałą. Stąd znajdujemy

$$(158.14) \quad \tau_{\varphi z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = - \frac{c r z}{(r^2 + z^2)^{5/2}}.$$

Podstawivszy to w rów. (158.9) otrzymamy

$$c = - \frac{M_s}{2\pi \left( \frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right)}.$$

Kąt skręcenia  $\psi$  obliczymy przy pomocy równań (158.5) i związków między  $\psi$  a  $\Phi$ , znajdując

$$(158.15) \quad \psi = \frac{c}{3G(r^2 + z^2)^{3/2}}.$$

To równanie wyraża, że powierzchniami równego kąta skręcenia są kule o środku w wierzchołku stożka  $O$ .

Znaleziono takie rozwiązania dla prętów o postaci obrotowych elipsoid, hiperboloid i paraboloid<sup>1)</sup>.

Doniosłe znaczenie techniczne ma przypadek w którym kontur przekroju osiowego pręta posiada załomy, jak np. w wałach maszynowych z „odsadzką” lub wytoczonym żłobkiem. Ponieważ rozwiązanie ściśle napotyka na wielkie trudności, przeto A. Föppl w pracy powyżej przytoczonej zadowolili się pierwszym przybliżeniem stwierdzając przy tym, że spiętrzenie wyteżenia na dnie wklęsłości jest tym większe im promień krzywizny wytoczki jest mniejszy w stosunku do promienia przekroju wału<sup>2)</sup>. Jak łatwo przewidzieć wyteżenie rośnie bez granic, gdy promień krzywizny zdąży do zera.

**§ 159. Przemieszczeniowe równania różniczkowe równowagi<sup>3)</sup>.** Wracając do przypadków kołowej symetrii odkształceń i naprężeń w których tylko składowa radialna  $u$  i osiowa  $w$  są funkcjami  $r$  i  $z$ ,

<sup>1)</sup> Ob. A. Timpe, Math. Ann. 1911, str. 480.

A. N. Dinnik, Izv. Donsk. Pol. Inst. Nowoczerkask 1912.

W. Arndt, Die Torsion von Wellen mit achsensymmetrischen Bohrungen und Holzräumen. Diss. Göttingen, 1916.

E. Molan, Techn. Blätter, Praga 1920.

Th. Pöschl, Z. f. ang. Math. u. Mech. 2, 1922, str. 137.

<sup>2)</sup> Bardziej szczegółowo zbadal tę kwestię F. A. Willers w r. 1907 (Z. f. Math. u. Ph. t. 55, str. 225) posługując się metodą rozwiązania przybliżonego podaną przez C. Runge'go. Inną metodę zastosował L. Föppl w r. 1921 (Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., München, t. 51, str. 61) i R. Sonntag (Z. f. ang. Math. u. Mech., 1929, t. 9, str. 1). Ob. także: L. S. Jacobson, Trans. Am. Soc. Mech. Eng. 1925, t. 47, str. 619.

<sup>3)</sup> L. N. G. Filon, Phil. Trans. (A), t. 198, str. 147, r. 1902.

A. i L. Föppl, „Drang u. Zwang“, wyd. II, r. 1928, t. 2, § 80.

a składowa  $v=0$ , napiszmy według § 153 równania

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r},$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z}; \quad 2\tilde{\omega}_\varphi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - c_t}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0.$$

Uwzględniając związki teorii sprężystości

$$\sigma_r = 2G \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v\theta}{1-2\nu} \right),$$

$$\sigma_t = 2G \left( \frac{u}{r} + \frac{v\theta}{1-2\nu} \right),$$

$$\sigma_z = 2G \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{v\theta}{1-2\nu} \right),$$

otrzymamy z równań równowagi następujące:

$$(159.1) \quad \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} D u + \frac{1-2\nu}{(21-\nu)} D \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$$

$$(159.2) \quad \frac{\partial}{\partial r} D u + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = 0.$$

Tutaj  $D$  jest symbolem operatora określonego równaniem

$$D = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}.$$

Wprowadzwszy nadto operator

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial r} D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2},$$

zróżniczkujmy (159.1) względem  $r$  i  $z$ , a wstawiwszy wartość  $\partial^2 w / \partial r \partial z$  wyrażoną z (159.2), otrzymamy równanie różniczkowe dla samego  $u$ :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2D_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + D_1 D_1 u = 0,$$

które można napisać w uproszczonej postaci symbolicznej

$$(159.3) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + D_1 \right)^2 u = 0.$$

Podobnie znajdziemy równanie różniczkowe rzędu czwartego dla samego  $w$  poddając rów. (159.2) działaniu  $\frac{\partial}{\partial z} D$  i wstawiając następnie  $\frac{\partial}{\partial z} (Du)$  z rów. (159.1). Po odpowiednich przekształceniach otrzymamy

$$(159.4) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} D \frac{\partial w}{\partial r} + \left( D \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w = 0.$$

To równanie, jak łatwo sprawdzić, jest równoważne z następującym:

$$(159.5) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 w = 0,$$

czyli

$$\nabla \nabla' u = 0,$$

co było do przewidzenia już na podstawie wyników § 59-go (wz. 59.7).

Przy całkowaniu równań (159.3 i 4) trzeba nadto uczynić zadość warunkom na powierzchni (obrotowej) ciała. Określa je zwykle dane kołowo-symetryczne rozmieszczenie sił powierzchniowych. Oznaczmy przez  $\bar{\sigma}$  składową normalną a  $\bar{\tau}$  składową styczną naprężenia siły powierzchniowej. Ponieważ  $\bar{\tau}$  musi z powodu założonej symetrii leżeć w płaszczyźnie południka zawierającej zarazem naprężenia wewnętrzne  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$  i  $\tau_{rz}$ , a czwarta składowa  $\sigma_t$  jest do tej płaszczyzny prostopadła, przeto oznaczywszy przez  $\alpha$  kąt, jaki normalna zewnętrzna południka tworzy z dodatnim kierunkiem osi  $Z$ , znajdujemy związki między  $\bar{\sigma}$  i  $\bar{\tau}$  a  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$  i  $\tau_{rz}$  w ten sam sposób co w płaskim stanie napięcia, a mianowicie:

$$(159.6) \quad \begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) - \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z) \cos 2\alpha + \tau_{rz} \sin 2\alpha \\ \bar{\tau} = \tau_{rz} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z) \sin 2\alpha. \end{cases}$$

W zadaniach konkretnych mamy często do czynienia z ciałami obrotowymi o dwu podstawach obciążonych i pobocznicę wolnej od obciążeń. Wtedy na pobocznicę jest

$$\bar{\sigma} = \bar{\tau} = 0,$$

a na podstawach płaskich

$$\bar{\sigma} = \sigma_z, \quad \bar{\tau} = \tau_{rz}.$$

**§ 160. Rozwiązanie Filon'a dla walca obrotowego.** Różniczkując rów. (159.1) względem  $r$ , a rów. (159.2) względem  $z$  otrzymujemy

$$(160.1) \quad \begin{cases} \left[ \frac{1}{2(1-\nu)} D_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \\ \left( D_1 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0. \end{cases}$$

Z odjęcia pierwszego z tych równań od drugiego wynika po uproszczeniu przez współczynnik stały:

$$\left(D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{\partial u}{\partial z} - \left(D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{\partial w}{\partial r} = 0,$$

co ze względu na to, że  $\partial u/\partial z - \partial w/\partial r = 2\tilde{\omega}$ , gdzie  $\tilde{\omega}$  oznacza obrót około osi prostopadłej do  $r$  i do  $z$ , daje równanie

$$(160.2) \quad \left(D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) 2\tilde{\omega} = 0.$$

Wprowadzwszy  $\theta = \partial u/\partial r + u/r + \partial w/\partial z$  możemy równania (159.1 i 2) napisać w postaci

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (2r\tilde{\omega}) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (2r\tilde{\omega}) = 0,$$

co przy oznaczeniach

$$\theta = \varphi(r, z); \quad \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} 2r\tilde{\omega} = \psi(r, z)$$

przekształca się na

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

To zaś wyraża znane z hydrodynamiki równania przepływu potencjalnego osiowo-symetrycznego o potencjale prędkości  $\varphi$  i funkcji prądu  $\psi$ . Albowiem z obu związków powyższych wynika

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

Otóż pierwsze z tych równań wyraża warunek ciągłości płynu doskonałego, drugie zaś warunek niewirowości przepływu.

Przy pomocy potencjału  $\varphi$  i funkcji prądu  $\psi$  wyrazimy teraz przemieszczenia sprężyste osiowo symetryczne wzorami

$$(160.3) \quad \begin{cases} u = c \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\psi}{r}, \\ w = c \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{cases}$$

co łatwo sprawdzić przez podstawienie w rów. (159.1 i 2) naszego zagadnienia z uwzględnieniem związków różniczkowych między  $\varphi$  i  $\psi$ . Stała  $c$  uwzględnia różnicę wymiarów  $\varphi$  i  $\psi$ . A zatem:

Podobnie znajdziemy równanie różniczkowe rzędu czwartego dla samego  $w$  poddając rów. (159.2) działaniu  $\frac{\partial}{\partial z} D$  i wstawiając następnie  $\frac{\partial}{\partial z} (Du)$  z rów. (159.1). Po odpowiednich przekształceniach otrzymamy

$$(159.4) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} D \frac{\partial w}{\partial r} + \left( D \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 w = 0.$$

To równanie, jak łatwo sprawdzić, jest równoważne z następującym:

$$(159.5) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 w = 0,$$

czyli

$$\nabla \nabla' w = 0,$$

co było do przewidzenia już na podstawie wyników § 59-go (wz. 59.7).

Przy całkowaniu równań (159.3 i 4) trzeba nadto uczynić zadość warunkom na powierzchni (obrotowej) ciała. Określa je zwykle dane kołowo-symetryczne rozmieszczenie sił powierzchniowych. Oznaczmy przez  $\bar{\sigma}$  składową normalną a  $\bar{\tau}$  składową styczną naprężenia siły powierzchniowej. Ponieważ  $\bar{\tau}$  musi z powodu założonej symetrii leżeć w płaszczyźnie południka zawierającej zarazem naprężenia wewnętrzne  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$  i  $\tau_{rz}$ , a czwarta składowa  $\sigma_t$  jest do tej płaszczyzny prostopadła, przeto oznaczywszy przez  $\alpha$  kąt, jaki normalna zewnętrzna południka tworzy z dodatnim kierunkiem osi  $Z$ , znajdujemy związki między  $\bar{\sigma}$  i  $\bar{\tau}$  a  $\sigma_r$ ,  $\sigma_z$  i  $\tau_{rz}$  w ten sam sposób co w płaskim stanie napięcia, a mianowicie:

$$(159.6) \quad \begin{cases} \bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) - \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z) \cos 2\alpha + \tau_{rz} \sin 2\alpha \\ \bar{\tau} = \tau_{rz} \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z) \sin 2\alpha. \end{cases}$$

W zadaniach konkretnych mamy często do czynienia z ciałami obrotowymi o dwu podstawach obciążonych i poboczniczy wolnej od obciążeń. Wtedy na poboczniczy jest

$$\bar{\sigma} = \bar{\tau} = 0,$$

a na podstawach płaskich

$$\bar{\sigma} = \sigma_z, \quad \bar{\tau} = \tau_{rz}.$$

**§ 160. Rozwiązanie Filon'a dla walca obrotowego.** Różniczkując rów. (159.1) względem  $r$ , a rów. (159.2) względem  $z$  otrzymujemy

$$(160.1) \quad \begin{cases} \frac{1}{2(1-\nu)} D_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \left( \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \\ \left( D_1 + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0. \end{cases}$$

Z odjęcia pierwszego z tych równań od drugiego wynika po uproszczeniu przez współczynnik stały:

$$\left(D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{\partial u}{\partial z} - \left(D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \frac{\partial w}{\partial r} = 0,$$

co ze względu na to, że  $\partial u / \partial z - \partial w / \partial r = 2\tilde{\omega}$ , gdzie  $\tilde{\omega}$  oznacza obrót około osi prostopadłej do  $r$  i do  $z$ , daje równanie

$$(160.2) \quad \left(D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) 2\tilde{\omega} = 0.$$

Wprowadziwszy  $\theta = \partial u / \partial r + u / r + \partial w / \partial z$  możemy równania (159.1 i 2) napisać w postaci

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (2r\tilde{\omega}) = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (2r\tilde{\omega}) = 0,$$

co przy oznaczeniach

$$\theta = \varphi(r, z); \quad \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} 2r\tilde{\omega} = \psi(r, z)$$

przekształca się na

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

To zaś wyraża znane z hydrodynamiki równania przepływu potencjalnego osiowo-symetrycznego o potencjale prędkości  $\varphi$  i funkcji prądu  $\psi$ . Albowiem z obu związków powyższych wynika

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

Otóż pierwsze z tych równań wyraża warunek ciągłości płynu doskonałego, drugie zaś warunek niewirowości przepływu.

Przy pomocy potencjału  $\varphi$  i funkcji prądu  $\psi$  wyrazimy teraz przemieszczenia sprężyste osiowo symetryczne wzorami

$$(160.3) \quad \begin{cases} u = c \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\psi}{r}, \\ w = c \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{cases}$$

co łatwo sprawdzić przez podstawienie w rów. (159.1 i 2) naszego zagadnienia z uwzględnieniem związków różniczkowych między  $\varphi$  i  $\psi$ . Stała  $c$  uwzględnia różnicę wymiarów  $\varphi$  i  $\psi$ . A zatem:

Każde znane rozwiązanie zagadnienia hydrodynamicznego przepływu potencjalnego osiowo symetrycznego pozwala wyznaczyć pewien stan odkształcenia osiowo-symetrycznego w ciele sprężystym na podstawie wzorów powyższych.

Obierając drogę bezpośrednią do rozwiązania, napiszemy równania (160.1) w postaci

$$\frac{1}{2(1-\nu)} D_1 \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \left( D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial w}{\partial r} = 0$$

$$\frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \left( D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Zastosowanie operatora  $D_1 + \partial^2/\partial z^2$  do obu równań z uwzględnieniem rów. (160.2) daje

$$(160.4) \quad \left( D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial r} = 0; \quad \left( D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

przy czym drugie z tych równań wynika wprost z różniczkowania rów. (159.3) względem  $z$ .

W ten sposób sprowadza się rozwiązanie obu równań różniczkowych zagadnienia do szukania jednej funkcji  $y(r, z)$  spełniającej równanie różniczkowe

$$(160.5) \quad \left( D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^2 y = 0.$$

Rozwiązaniami szczególnymi tego równania rzędu 4-go będą oczywiście rozwiązania równania rzędu 2-go o postaci

$$(160.6) \quad \left( D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) y = 0.$$

Przyjawszy, że można mu uczynić zadość wartością

$$(160.7) \quad y = y_1 = R_1(r) Z_1(z)$$

przedstawiającą iloczyn funkcji  $R_1$  samego  $r$  i funkcji  $Z_1$  samego  $z$ , otrzymamy po wstawieniu w (160.6)

$$\frac{D_1 R_1}{R_1} = - \frac{1}{Z_1} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial z^2} = -k^2$$

jeżeli  $-k^2$  oznacza stałą wartość obu wyrażeń równych, gdyż równość funkcji samego  $r$  i funkcji samego  $z$  jest możliwa tylko wtedy, gdy każda z nich jest równa stałej. Mamy tedy do czynienia z dwoma równaniami różniczkowymi zwyczajnymi:

$$(160.8) \quad D_1 R_1 = -k^2 R_1 \quad \text{i} \quad \frac{d^2 Z_1}{dz^2} = k^2 Z_1.$$



Drugie z nich ma całkę złożoną z  $e^{kz}$  i  $e^{-kz}$ , którą można wyrazić przez  $Ch(kz + a)$ , tj. cosinus hiperboliczny ze stałym parametrem  $a$ .

Pierwsze z równań (160.8), tj.

$$(160.9) \quad (D_1 + k^2)R_1 \equiv \frac{d^2 R_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_1}{dr} + \left(k^2 - \frac{1}{r^2}\right)R_1 = 0$$

jest równaniem różniczkowym funkcji Bessel'a rzędu pierwszego  $J_1(kr)$  i  $K_1(kr)$ <sup>1)</sup>. Funkcja  $J_1(kr)$  znika w punkcie  $r=0$ , a posiada miejsce osobliwe dla  $r \rightarrow \infty$ . Funkcja  $K_1$  zdąża do nieskończoności dla  $r \rightarrow 0$ , a dla  $r \rightarrow \infty$  zdąża do zera.

Załatwiwszy się z rów. różniczkowym rzędu 2-go (160.6), weźmy pod uwagę równanie rzędu 4-go (160.5). Temu równaniu jednorodnemu uczyni zadość każda całka równania niejednorodnego rzędu 2-go:

$$(160.10) \quad \left(D_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)y = y_1.$$

Przypuściwszy, że i funkcja  $y$  jest iloczynem funkcji  $R_2(r)$  przez  $Z_2(z)$  podobnie jak  $y_1$ , otrzymamy po wstawieniu w równanie powyższe:

$$(160.11) \quad \frac{D_1 R_2}{R_2} + \frac{1}{Z_2} \frac{d^2 Z_2}{dz^2} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{Z_1}{Z_2}.$$

Lewa strona tego równania jest sumą funkcji samego  $r$  i funkcji samego  $z$ ; prawa zaś jest iloczynem funkcji tegoż typu. Taka równość jest możebna tylko wtedy, gdy iloczyn po prawej jest albo tylko funkcją  $r$ , albo też tylko funkcją  $z$ .

W przypadku pierwszym musi być

$$Z_2 = a Z_1,$$

gdzie  $a$  oznacza stałą, wobec czego rów. (160.11) przyjmie postać

$$D_1 R_2 + \frac{R_2}{Z_1} \frac{d^2 Z_1}{dz^2} = \frac{1}{a} R_1,$$

1) Podstawiając  $kr = x$ , zastępując  $R_1$  przez  $y$  i pomnożywszy całe równanie przez  $x^2$  otrzymamy

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - 1)y = 0,$$

podczas gdy równaniem ogólnym funkcji Bessel'a jest

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \mu^2)y = 0,$$

gdzie liczba  $\mu$  jest rzędem funkcji.

albo z uwzględnieniem (160.8)

$$(D_1 + k^2)R_2 = \frac{1}{a} R_1.$$

Zastosowanie do tego równania operacji  $D_1 + k^2$  daje

$$(160.12) \quad (D_1 + k^2)^2 R_2 = 0.$$

Rozwiązania tego równania różniczkowego rzędu 4-go składają się z dwu par rozwiązań. Parę pierwszą stanowią  $J_1(kr)$  i  $K_1(kr)$  jako całki równania (160.9), które oczywiście są tym samym niezależnymi nawzajem rozwiązaniami równania (160.12). Drugą parą rozwiązań są

$$rJ_0(kr) \quad \text{i} \quad rK_0(kr),$$

gdzie  $J_0$  i  $K_0$  oznaczają funkcje Bessel'a rzędu zerowego, wyznaczone podanym powyżej (w odsyłaczu) równaniem różniczkowym z wartością liczby  $\mu = 0$ .

Tego dowiedziemy przez podstawienie w rów. (160.12), z czego otrzymamy

$$(D_1 + k^2) (rJ_0(kr)) = 2 \frac{d}{dr} (J_0(kr)).$$

Uwzględniając zaś związek

$$\frac{d}{dr} (J_0(kr)) = -kJ_1(kr)^1$$

między funkcjami Besselowskimi rzędu 0 i rzędu 1, znajdziemy

$$(D_1 + k^2)^2 (rJ_0(kr)) = 0$$

i toż samo dla  $rK_0(kr)$ .

W przypadku drugim, tj. gdy prawa strona równania (160.11) jest funkcją samego  $z$ , musi być

$$R_2 = b R_1$$

ze stałą  $b$ . Rów. (160.11) z uwzględnieniem (160.9) przekształca się na

$$(160.13) \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) Z_2 = \frac{1}{b} Z_1, \quad \text{albo} \quad \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right)^2 Z_2 = 0.$$

Całkami tego równania różniczkowego rzędu 4-go są

$$Ch(kz + \lambda) \quad \text{i} \quad zCh(kz + \mu),$$

co łatwo sprawdzić przez podstawienie.

<sup>1)</sup> Związek ten wynika bezpośrednio z rozwinięć tych funkcji na szereg potęgowe:

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2 \cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{(2 \cdot 4)^2 \cdot 6} - \frac{x^7}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2 \cdot 8} + \dots$$

Rozwiązania równania (160.5) będą złożone z rozwiązań powyższych i stałych dowolnych w sposób następujący:

$$(160.14) \quad \begin{cases} y = A \operatorname{Ch}(kz + \alpha) J_1(kr) + B \operatorname{Ch}(kz + \beta) K_1(kr) + \\ + C \operatorname{Ch}(kz + \gamma) r J_0(kr) + D \operatorname{Ch}(kz + \delta) r K_0(kr) + \\ + E z \operatorname{Ch}(kz + \lambda) J_1(kr) + F z \operatorname{Ch}(kz + \mu) K_1(kr). \end{cases}$$

$A, B, \dots, F, \alpha, \beta, \dots, \mu$  oznaczają tutaj stałe. Taka postać rozwiązania posłuży do znalezienia  $\partial u / \partial z$ ,  $\partial w / \partial r$  i  $u$  (na podstawie rów. (159.3)) przez sumowanie podanych wyrażeń w liczbie dowolnej i ze stałymi dowolnymi, co pozwala dopasować rozwiązanie do danych warunków brzegowych każdego zadania konkretnego.

Zaznaczyć wypada, że rozwiązanie (160.14) z oboma rodzajami funkcji Bessela  $J$  i  $K$  nadaje się w przypadkach gdy walec jest wydrążony. Dla walca pełnego bowiem odpadają funkcje  $K$ , ponieważ dla  $r=0$  stają się nieskończenie wielkie. W zagadnieniach szczegółowych przyjmuje się często dla uproszczenia, że walec jest nieskończenie długi. Wtedy nie nadają się funkcje hiperboliczne jako rosnące bez granic i zastępujemy je goniometrycznymi podstawiając  $k = i \frac{k'}{a}$ , i  $\alpha = i \alpha'$  itd., przy czym  $a$  oznacza promień walca wprowadzony dla uczynienia parametru  $k$  bezwymiarowym. Rozwiązanie (160.14) przyjmie postać

$$(160.15) \quad \begin{aligned} y = A \cos \left( k \frac{z}{a} + \alpha \right) J_1 \left( i k \frac{r}{a} \right) + B \cos \left( k \frac{z}{a} + \beta \right) r J_0 \left( i k \frac{r}{a} \right) + \\ + C z \cos \left( k \frac{z}{a} + \gamma \right) \cdot J_1 \left( i k \frac{r}{a} \right), \end{aligned}$$

gdzie nowe parametry oznaczono w ten sam sposób co dawne. Przez podstawienie łatwo się przekonać, że to rozwiązanie spełnia rów. (160.5). Ażeby zaś określało wartości rzeczywiste także dla argumentu urojonego, trzeba tylko stałe  $A$  i  $C$  zastąpić przez  $Ai$  i  $Ci$ , albowiem funkcja  $J_0$  ma wartości rzeczywiste także dla argumentu urojonego, a tylko funkcja  $J_1$  wymaga pomnożenia przez  $i$ , aby otrzymać wartości rzeczywiste. To wynika z rozwinięć powyżej podanych.

Rozwiązanie ogólne zastosował Filon do paru zagadnień o doniosłości praktycznej:

1) Wał, którego pobocznica jest obciążona ciśnieniami radialnymi i osiowymi naprężeniami stycznymi.

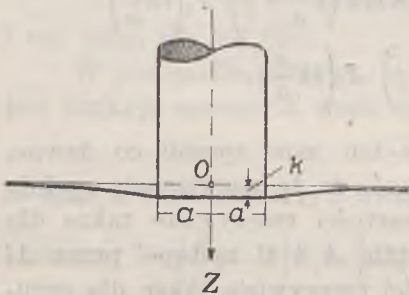
2) Wał na który działają naprężenia skręcające styczne do pobocznic.

3) Walec pełny ściskany osiowo między dwiema płytami sztywnymi.

Wyczerpujące opracowanie dwu pierwszych zagadnień przez A. i L. Föppl'a, znajdzie czytelnik w tomie 2 „Drang u. Zwang” (§ 83 i 84). Rozwiązanie zagadnienia 3-go opracował Filon szczegółowo przy założeniu, że tarcie między podstawami walca a płytami uważanymi za doskonale sztywne jest wystarczające, aby uniemożliwić rozszerzenie poprzeczne tych podstaw przy ściskaniu osiowym walca.

R. Girtler (Wien. Ber. 116, 509, 1907) znalazł odnośne rozwiązanie szczegółowe przy założeniu, że nacisk płyt niesztynnych przenosi się równomiernie na podstawy walca wywołując oczywiście ich zakrzywienie. Założenia obu autorów odpowiadają krańcowym przypadkom abstrakcyjnym, między którymi leżeć musi rzeczywisty stan odkształcenia walca zależny nie tylko od jego własności sprężystych i stosunku średnicy do wysokości, ale także od wymiarów i własności sprężystych płyt ściskających, oraz od tarcia na obu podstawach. E. Mysz (rozpr. dokt. Darmstadt 1909) wywodzi, że założenie równomiernego nacisku na podstawy walca pociąga za sobą ich zakrzywienie paraboloidalne (por. § 117).

**§ 161. Odkształcenie podłoża sprężystego poziomego pod ciężarem walca sztywnego o osi pionowej.** Zagadnienie pokrewne traktowane już w § 104 było łatwiejsze o tyle, że nacisk wywarty na powierzchnię



Rys. 91.

koła na podłożu sprężystym przyjęto z góry jako równomiernie rozłożony, podczas gdy tutaj należy wyznaczyć rozkład nacisku z warunku, że kołowe pole przenoszące nacisk jest płaskie i poziome (rys. 91). Dla uproszczenia wyłączamy przeto, jak w zagadnieniu Hertz'a tarcie między podstawą walca a podłożem. Zastosowawszy współrzędne prostokątne  $x, y, z$  i powróciwszy do daw-

nych oznaczeń dla odpowiednich przemieszczeń składowych  $u, v, w$ , mamy na powierzchni podłoża  $z=0$  następujące warunki brzegowe:

$$\text{zewnątrz walca } (r > a): \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_z = 0$$

$$\text{wewnątrz walca } (r < a): \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0, \quad w = k.$$

Jak zauważył już J. Boussinesq, zagadnienie niniejsze da się sprowadzić do złożonego zadania wartości brzegowych zwykłej teorii

potencjału identycznego ze znanym dawniej zadaniem elektrostatycznym.

Niechaj  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi$  oznaczają funkcje potencjalne, a więc spełniające równanie Laplace'a  $\nabla^2 \varphi = 0$ . Spróbujmy uczynić zadość przemieszczeniowym równaniom różniczkowym elastostatyki, tj.

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \text{ itd.},$$

przez wyrażenia

$$(161.1) \quad u = \varphi_1 + z \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v = \varphi_2 + z \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad w = \varphi_3 + z \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Po podstawieniu okazuje się, że te równania będą spełnione, gdy zachodzi związek

$$(161.2) \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{3-4\nu} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right).$$

Tym samym jest  $\psi$  wyznaczone, albowiem musi zniknąć dla  $z = +\infty$ . Pozostaje wyznaczyć funkcje  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  tak, aby warunki brzegowe były spełnione.

Wyraziwszy naprężenia styczne  $\tau_{zx}$  i  $\tau_{zy}$  przez wprowadzone funkcje potencjalne, otrzymamy:

$$(161.3) \quad \begin{cases} \tau_{zx} = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = G \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + 2z \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \\ \tau_{zy} = G \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = G \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + 2z \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right). \end{cases}$$

Ażeby te naprężenia znikły dla  $z=0$ , musi być na powierzchni podłoża

$$(161.4) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_3 + \psi) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_3 + \psi) = 0.$$

Z teorii potencjału wiadomo, że skoro te równania spełniają się na powierzchni półprzestrzeni zajętej przez podłoże, to muszą się spełniać w całym obszarze tej półprzestrzeni. Zrózniczkujemy je względem  $x$  i  $y$ , a po dodaniu otrzymamy

$$(161.5) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varphi_3 + \psi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\varphi_3 + \psi) = 0.$$

Stąd uwzględnivszy równania  $\nabla^2 \varphi_3 = 0$  i  $\nabla^2 \psi = 0$  znajdujemy

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} (\varphi_3 + \psi) \right] = 0.$$

Całkowanie daje

$$(161.6) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi_3 + \psi)}{\partial z},$$

przy czym stałe całkowania odpadają, ponieważ przemieszczenia i ich pochodne cząstkowe muszą zniknąć w nieskończoności. Podstawmy (161.6) w równ. (161.2), a otrzymamy

$$(3-4\nu) \frac{\partial \psi}{\partial z} = - \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right) = - \left( 2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right).$$

Stąd przez całkowanie i proste przekształcenie wynika

$$(161.7) \quad \psi = - \frac{\varphi_3}{2(1-\nu)},$$

a zatem

$$(161.8) \quad \theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial z}.$$

W ten sposób uczyniliśmy zadość warunkowi brzegowemu znikania naprężeń stycznych. Pozostaje do osiągnięcia  $\sigma_z=0$  na powierzchni podłoża poza walcem. Otóż

$$(161.9) \quad \sigma_z = 2G \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{1-2\nu} \theta \right) = G \left( \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + 2z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right).$$

Ażeby dla  $z=0$  było  $\sigma_z=0$ , winno być

$$(161.10) \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0.$$

Na podstawie walca jest

$$(161.11) \quad w = \varphi_3 = k.$$

Należy więc znaleźć funkcję potencjalną  $\varphi_3$ , dla której na powierzchni jest

$$(161.12) \quad \begin{cases} \varphi_3 = k & \text{wewnątrz koła podstawowego o promieniu } a, \text{ zaś} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 & \text{zewnątrz tego koła, tj. dla } x^2 + y^2 > a^2. \end{cases}$$

Wyobraźmy sobie nieskończenie cienki krążek o promieniu  $a$  leżący w płaszczyźnie  $z=0$  i umieśćmy na nim nabój elektryczny o potencjale stałym  $k$ . Wtedy potencjał elektrostatyczny na krążku ( $z=0, x^2 + y^2 \leq a^2$ ) jest  $\varphi = k$ , a zewnątrz krążka w płaszczyźnie  $z=0$  jest z powodu symetrii  $\partial \varphi / \partial z = 0$ . A zatem potencjał elektrostatyczny czyni zadość warunkom brzegowym naszego zadania elastostatycznego, wobec czego wykorzystamy znane rozwiązanie

elektrostatyki. Wprowadziwszy ze względu na symetrię kołową względem osi  $z$  współrzędne walcowe  $z$  i  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , położmy

$$(161.13) \quad \varphi_3 = \int_0^{\infty} f(a) J_0(ar) e^{-az} da,$$

gdzie  $f(a)$  jest funkcją parametru  $a$ , którą należy wyznaczyć tak, aby spełniała warunki brzegowe. Przyjęta wartość  $\varphi_3$  spełnia równanie różniczkowe Laplace'a

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = 0,$$

gdą  $J_0(ar)$  czyni zadość równaniu różniczkowemu

$$\frac{\partial^2 J_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_0}{\partial r} + a^2 J_0 = 0,$$

określającemu funkcję Bessel'a  $J_0(ar)$  rzędu zerowego.

Warunki brzegowe dla  $z=0$

$$\varphi_3 = k, \text{ dla } r \leq a; \quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0 \text{ dla } r > a$$

wymagają zatem, aby było

$$(161.14) \quad \begin{cases} \int_0^{\infty} f(a) J_0(ar) da = k & \text{dla } r \leq a \\ \int_0^{\infty} f(a) J_0(ar) da = 0 & \text{dla } r > a. \end{cases}$$

Do ich spełnienia należy przyjąć

$$(161.15) \quad f(a) = \frac{2k}{\pi} \frac{\sin(aa)}{a},$$

albowiem teoria funkcji Besselowskich dostarcza następujące wzory całkowe <sup>1)</sup>

$$(161.16) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin aa}{a} J_0(ar) da = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{dla } r \leq a \\ \arcsin \frac{a}{r} & \text{dla } r \geq a \end{cases}$$

$$(161.17) \quad \int_0^{\infty} \sin aa J_0(ar) da = \begin{cases} 0 & \text{dla } r > a \\ \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} & \text{dla } r < a. \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Ob. np. Frank & v. Mises, Differential- u. Integralgleichungen der Mechanik u. Physik, t. 1, VIII, § 3, str. 337.

Szukaną funkcją potencjalną jest więc

$$(161.18) \quad \varphi_3 = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin aa}{a} J_0(ar) e^{-az} da.$$

Stosownie do równań (161.4 i 7) znajdziemy teraz

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x} (\varphi_3 + \psi) = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial y} (\varphi_3 + \psi) = -\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}. \end{aligned}$$

A zatem

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= -\frac{k}{\pi} \cdot \frac{1-2\nu}{1-\nu} \int_0^{\infty} \frac{\sin aa}{a} J_0'(ar) \frac{ax}{r} \cdot e^{-az} da, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= -\frac{k}{\pi} \cdot \frac{1-2\nu}{1-\nu} \int_0^{\infty} \frac{\sin aa}{a} J_0'(ar) \frac{ay}{r} \cdot e^{-az} da. \end{aligned}$$

Ale jak wiadomo (por. § 160) jest

$$J_0'(ar) = \frac{dJ_0(ar)}{d(ar)} = -J_1(ar),$$

gdzie  $J_1$  oznacza funkcję Besselowską rzędu 1-go. Całkując wyrażenia powyższe względem  $z$  z uwzględnieniem tego związku otrzymamy

$$(161.19) \quad \begin{cases} \varphi_1 = -\frac{k}{\pi} \cdot \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{x}{r} \int_0^{\infty} \frac{\sin aa}{a} J_1(ar) e^{-az} da, \\ \varphi_2 = -\frac{k}{\pi} \cdot \frac{1-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{y}{r} \int_0^{\infty} \frac{\sin aa}{a} J_1(ar) e^{-az} da. \end{cases}$$

Te funkcje stosownie do rów. (161.1) określają dla  $z=0$  składowe przemieszczenia  $u_0$  i  $v_0$ , którymi wyrazimy przemieszczenie radialne

$$\varrho = u_0 \frac{x}{r} + v_0 \frac{y}{r},$$

a więc

$$(161.20) \quad \varrho = -\frac{k}{\pi} \cdot \frac{1-2\nu}{1-\nu} \int_0^{\infty} \frac{\sin aa}{a} J_1(ar) da.$$



To przemieszczenie jest ujemne, co wskazuje na ściskanie materiału także w kierunkach prostopadłych do kierunku  $Z$  nacisku walca, podobnie jak to zachodziło w zagadnieniu Hertz'a.

Obliczmy teraz

$$\bar{\sigma}_z = \sigma_z \Big|_{z=0} = G \frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = -\frac{G}{1-\nu} \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \sin aa J_0(ar) da.$$

Uwzględniając wz. (161.17) otrzymamy w polu nacisku  $P$ :

$$(161.21) \quad \bar{\sigma}_z = -\frac{G}{1-\nu} \cdot \frac{2k}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2-r^2}},$$

co wyraża, że ciśnienie pod podstawą walca jest liczbowo najmniejsze w środku i rośnie z odległością  $r$ , przyjmując na samym obwodzie podstawy wartość nieskończenie wielką. To się tłumaczy jasno założeniem abstrakcyjnym doskonałej sztywności walca i ostrości jego krawędzi. Gdybyśmy potrafili rozwiązać zadanie w przypadku walca sprężyste odkształcalnego, to ciśnienie na całej podstawie wypadłoby skończone, a nierównomierność rozkładu ciśnienia byłaby bez porównania mniejsza.

Ażeby znaleźć wielkość  $k$  zagłębienia walca w podłoże, obliczmy nacisk  $P$  równaniem

$$(161.22) \quad P = -2\pi \int_0^a \bar{\sigma}_z r dr = \frac{4Gk}{1-\nu} \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{a^2-r^2}} = \frac{4Gak}{1-\nu},$$

z czego znajdziemy dla zagłębienia  $k$  wywołanego danym naciskiem  $P$  wzór:

$$(161.23) \quad k = \frac{(1-\nu)P}{4Ga} = \frac{(1-\nu^2)P}{2Ea}.$$

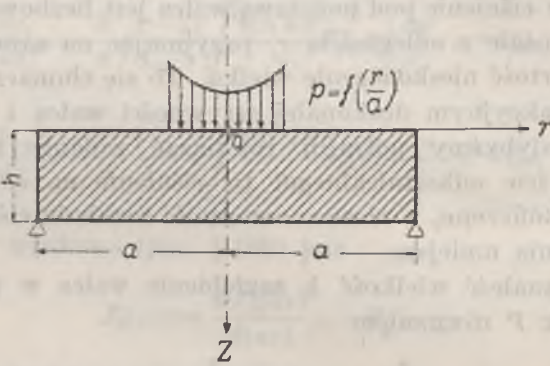
**§ 162. Zgięcie grubej płyty okrągłej pod siłą skupioną w środku.** Przypadek obciążenia równomiernego takiej płyty rozwiązano przez wielomiany w § 156 za pośrednictwem funkcji naprężeń Love'a. Ta metoda nie wystarcza jednakże do zbudowania rozwiązań w przypadku dowolnych sił powierzchniowych, jak np. siła skupiona w środku. Wtedy trzeba się uciec do zastosowania funkcji Besselowskich, jak to np. uczynił A. Nádai<sup>1)</sup> przy pomocy funkcji potencjalnej o postaci  $\varphi_3$  (wz. 161.13) z zagadnienia poprzedniego.

<sup>1)</sup> Schweiz. Bauz. 76, 257, 1920.

Niechaj  $p=f(r/a)$  przedstawia rozmieszczenie obciążeń na małym kole środkowym górnej powierzchni płyty ( $z=0$ , rys. 92). Przemieszczenie radialne  $\varrho'$  i osiowe  $w'$  wyrażą ogólnie wzory

$$(162.1) \quad \begin{cases} \varrho' = \sum_{\lambda} K_{\lambda} \left[ (1-2\nu) - \frac{\lambda}{a} z \right] e^{-\frac{\lambda}{a} z} J_1 \left( \frac{\lambda}{a} r \right) \\ w' = - \sum_{\lambda} K_{\lambda} \left[ 2(1-\nu) + \frac{\lambda}{a} z \right] e^{-\frac{\lambda}{a} z} J_0 \left( \frac{\lambda}{a} r \right). \end{cases}$$

Tutaj sumowanie odnosi się do parametrów liczbowych  $\lambda$ , których ciąg należy dobrać tak, aby wzdłuż okręgu  $z=0$ ,  $r=a$



Rys. 92.

znikało przemieszczenie osiowe  $w$ . Temu warunkowi uczynimy zażość przyjmując jako parametry  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  pierwiastki funkcji Bessel'a rzędu zerowego  $J_0(\lambda)$ , tj.

$$(162.2) \quad \lambda_1 = 2,4048 \dots, \quad \lambda_2 = 5,5201 \dots, \quad \lambda_3 = 8,6537 \dots$$

Wyrażenia (162.1) nie tylko spełniają równania różniczkowe równowagi, ale są już dobrane tak, aby naprężenia styczne na powierzchni znikają, co nie trudno sprawdzić. Trzeba jednak jeszcze, aby naprężenia normalne  $\sigma_z$  na powierzchni  $z=0$  przybrały wartości przepisane  $\sigma_z = -p = f(r/a)$ .

Podstawivszy we wzór

$$\theta = \frac{\partial \varrho}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\varrho}{r}$$

wartości (162.1), otrzymamy

$$(162.3) \quad \theta = 2(1-\nu) \sum_{\lambda} \frac{\lambda}{a} K_{\lambda} e^{-\lambda z/a} J_0 \left( \frac{\lambda r}{a} \right).$$

A zatem

$$(162.4) \quad \sigma_z = 2G \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{v}{1-2\nu} \theta \right) = 2G \sum_{\lambda} K_{\lambda} \frac{\lambda}{a} \left( 1 + \frac{\lambda z}{a} \right) e^{-\lambda z/a} J_0 \left( \frac{\lambda r}{a} \right),$$

a dla  $z=0$ :

$$(162.5) \quad \sigma_z \Big|_{z=0} \equiv \bar{\sigma}_z = \frac{2G}{a} \sum_{\lambda} K_{\lambda} \lambda J_0 \left( \frac{\lambda r}{a} \right) = -p = f \left( \frac{r}{a} \right).$$

Wartości współczynników  $K_{\lambda}$  w tej sumie obliczymy korzystając z własności funkcji Bessela i całkując powyższe równanie pomnożone przez  $(r/a) I_0(r/a) d(r/a)$  między granicami 0 i  $a$ . Wprowadzwszy dla uproszczenia oznaczenie  $r/a = x$ , znajdujemy w ten sposób

$$(162.6) \quad K_{\lambda} = \frac{a \int_0^1 f(x) x J_0(\lambda x) dx}{2G \lambda \int_0^1 x J_0^2(\lambda x) dx}.$$

Całka w mianowniku jest równa  $\frac{1}{2} I_1^2(\lambda)$ .

Obliczymy tutaj wartości  $K_{\lambda}$  w przypadku obciążenia  $p_0$  rozłożonego równomiernie na małym kole  $r=c$ . Wtedy

$$f(x) = -p_0 \quad \text{dla} \quad 0 < r < c,$$

zaś

$$f(x) = 0 \quad \text{dla} \quad c < r < \infty,$$

a całka w liczniku wzoru (162.6)

$$\int_0^1 f(x) x J_0(\lambda x) dx = -p_0 \int_0^{c/a} x J_0(\lambda x) dx = -\frac{p_0}{\lambda} [x J_1(\lambda x)]_0^{c/a}.$$

Otrzymujemy więc

$$(162.7) \quad K_{\lambda} = -\frac{p_0 c}{G} \frac{J_1 \left( \frac{\lambda c}{a} \right)}{\lambda^2 J_1^2(\lambda)}.$$

Przejdźcie do obciążenia skupionego w punkcie środkowym

$$P = \lim_{c \rightarrow 0} (\pi c^2 p_0)$$

prowadzi ze względu na to, że

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{J_1(u)}{u} = \frac{1}{2}$$

do wartości współczynników  $K_{\lambda}$  wyrażonej wzorem

$$(162.8) \quad K_{\lambda}^0 = -\frac{P}{2\pi a G} \frac{1}{\lambda J_1^2(\lambda)}.$$

Ale rozwiązanie (162.1) nie spełnia jeszcze warunku brzegowego na dolnej powierzchni płyty  $z=h$ , gdzie naprężenia winny być równe 0. Stan odkształcenia wyznaczony przemieszczeniami  $\varrho'$  i  $w'$  według (162.1) prowadzi do różnych od zera naprężeń  $\sigma'_z$  i  $\tau'$  na tej powierzchni. Ażeby je znieść trzeba nałożyć nowy stan odkształcenia  $\varrho''$  i  $w''$  stosownie do rozwiązania ogólnego (160.13), a mianowicie:

$$(162.9) \quad \varrho'' = \sum_z \left\{ A C h \frac{\lambda z}{a} + B \frac{\lambda z}{a} C h \frac{\lambda z}{a} + C S h \frac{\lambda z}{a} + D \frac{\lambda z}{a} S h \frac{\lambda z}{a} \right\} J_1 \left( \frac{\lambda r}{a} \right)$$

$$(162.10) \quad w'' = \sum_z \left\{ -A S h \frac{\lambda z}{a} + B \left[ (3-4\nu) C h \frac{\lambda z}{a} - \frac{\lambda z}{a} S h \frac{\lambda z}{a} \right] - C C h \frac{\lambda z}{a} + \right. \\ \left. + D \left[ (3-4\nu) S h \frac{\lambda z}{a} - \frac{\lambda z}{a} C h \frac{\lambda z}{a} \right] \right\} J_0 \left( \frac{\lambda r}{a} \right).$$

Stale  $A, B, C, D$  należy obliczyć z warunków brzegowych:

$$(162.11) \quad \begin{cases} \text{dla } z=0 \text{ jest } \sigma''_z = 0 \text{ i } \tau'' = 0, \\ \text{dla } z=h \text{ jest } \sigma'_z + \sigma''_z = 0 \text{ i } \tau' + \tau'' = 0, \end{cases}$$

co daje

$$(162.12) \quad \begin{cases} A = 2(1-\nu)D = 2(1-\nu)K_\lambda \frac{\omega^2}{S h^2 \omega - \omega^2}, \\ C = (1-2\nu)B = -\frac{1-2\nu}{2} K_\lambda \frac{1-e^{-2\omega} + 2\omega(1+\omega)}{S h^2 \omega - \omega^2}, \end{cases}$$

gdzie oznacza  $\omega = \lambda h/a$ . Zarazem jest na poboczniczy walca spełniony warunek  $w''=0$ , jak wynika z (162.1, 2 i 6).

Przemieszczenia wypadkowe

$$(162.13) \quad \varrho = \varrho' + \varrho'', \quad w = w' + w''$$

wyznaczają więc stan odkształcenia i napięcia naszej płyty w warunkach następujących:

1<sup>o</sup> Powierzchnia górna  $z=0$  jest obciążona wewnątrz koła o promieniu  $c$  stałym ciśnieniem  $p_0$ .

2<sup>o</sup> Powierzchnia dolna  $z=h$  jest wolna od obciążeń.

3<sup>o</sup> Przemieszczenia  $w$  na brzegu  $r=a$  są równe 0.

Natomiast nie znikają na tym brzegu przemieszczenia  $\varrho$ , wobec czego powstają tam naprężenia styczne  $\tau_{zr}$  i normalne  $\sigma_r$ . Pierwsze warunkują reakcje brzegu płyty równoważące się z obciążeniem danym i odpowiadające stosownemu ustaleniu tego brzegu. Drugie zaś tworzą momenty zginające (pary sił) rozmieszczone równomiernie wzdłuż brzegu i odpowiadające jego „utwierdzeniu”. Można je unicestwić przez nałożenie stosownego zgięcia kulistego, aby uzyskać warunki swobodnego podparcia brzegu.

Praca Nádai'a wyjaśnia nadto szczegółowo związek między powyższym rozwiązaniem ścisłym a rozwiązaniem wynikającym z klasycznej teorii płyt „cienkich”, podawanym w podręcznikach mechaniki technicznej. Związek ten polega na tym, że stan odkształcenia płyty grubej jest dla malejących wartości stosunku  $h/a$  określony rozwiązaniem „asymptotycznym”. Otrzymamy je szukając wartości granicznych współczynników  $A, B, C, D$  i  $Sh \frac{\lambda z}{a}, Ch \frac{\lambda z}{a}$  dla malejących wartości  $h/a$  i  $z/a$ , czyli poprzestając na uwzględnieniu stanu  $\varrho'', w''$  z pominięciem stanu  $\varrho', w'$ . Przy zgięciu pod siłą skupioną  $P$  znajdujemy przejściem do granicy przy zastosowaniu wartości  $K_\lambda^0$  z rów. (162.8)

$$(162.14) \quad w'' = \frac{6(1-\nu)Pa^2}{\pi Gh^3} \sum_{\lambda} \frac{J_0\left(\frac{\lambda r}{a}\right)}{\lambda^4 J_1^2(\lambda)}$$

Otóż ze względu na to, że wartości  $\lambda$  są według (162.2) pierwiastkami równania  $I_0(x) = 0$ , kolejno wzrastającymi, że więc

$$\sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda^4 J_1^2(\lambda)} = \frac{1}{8}, \quad \text{zaś} \quad \sum_{\lambda} \frac{J_0(\lambda x)}{\lambda^4 J_1^2(\lambda)} = \frac{1}{8} (x^2 \ln x + 1 - x^2),$$

otrzymamy z (162.14)

$$(162.15) \quad w'' = \frac{3(1-\nu)Pa^2}{4\pi Gh^3} \left( \frac{r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} + 1 - \frac{r^2}{a^2} \right),$$

co jest istotnie zgodne z wzorem na ugięcie obciążonego przez  $P$  środka płyty cienkiej otrzymanym przez całkowanie równania różniczkowego  $\nabla^2 \nabla^2 w'' = 0$ , przy warunkach brzegowych  $r = a, w'' = 0, \nabla^2 w'' = 0$ .

Rozwiązanie (162.13) dla płyty grubej przechodzi przeto asymptotycznie przy malejącej grubości  $h$  w rozwiązanie (162.15) dla płyty cienkiej o naprężeniach radialnych na brzegu  $r = a$  określonych równaniem

$$(162.16) \quad \sigma_r^0 = -\frac{4(1-\nu)P}{2\pi h^2} \left( \frac{h}{2} - z \right).$$

Te naprężenia odpowiadają utwierdzeniu zupełnemu brzegu płyty.

Przemieszczenia pionowe, a zarazem ugięcia  $w$  płyty grubej określają równania (162.1, 10 i 13). Punkty leżące pierwotnie na górnej powierzchni płyty  $z = 0$  doznają przemieszczeń

$$(162.17) \quad w = -(1-\nu) \sum_{\lambda} K_\lambda J_0\left(\frac{\lambda r}{a}\right) \left[ 2 + \frac{1 - e^{-2\omega} + 2\omega(1+\omega)}{Sh^2 \omega - \omega^2} \right],$$

gdzie  $\omega = \lambda h/a$ . Wzór ten daje dla obciążenia koła o promieniu  $c$  ciśnieniem  $p_0$ :

$$w \Big|_{z=0, r=0} = \frac{(1-\nu)p_0 c}{G} \sum_{\lambda} \frac{J_1\left(\frac{\lambda c}{a}\right)}{\lambda^2 J_1^2(\lambda)} \left[ 2 + \frac{1 - e^{-2\omega} + 2\omega(1+\omega)}{Sh^2 \omega - \omega^2} \right].$$

Ugięcie środka dolnej powierzchni płyty ( $z=h, r=0$ ) przy skupieniu obciążenia  $\pi c^2 p_0 = P$  do punktu przybiera wartość

$$w_0 = \frac{(1-\nu)P}{\pi a G} \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda^2 J_1^2(\lambda)} \cdot \frac{Sh\omega + \omega Ch\omega}{Sh^2 \omega - \omega^2},$$

która jest większa od wartości wynikającej z wz. (162.15) dla płyty cienkiej, tj.

$$(162.18) \quad w_0^* = \frac{6(1-\nu)Pa^2}{\pi G h^3} \sum_{\lambda} \frac{1}{\lambda^4 J_1^2(\lambda)} = \frac{3(1-\nu)Pa^2}{4\pi G h^3}.$$

Różnica  $w - w^*$  ugięć staje się stosunkowo tym większą, im płyta jest grubsza, maleje zaś w miarę oddalania się punktu od środka płyty. To tłumaczy się jasno wpływem naprężeń stycznych nie uwzględnionych w teorii płyt cienkich, gdyż naprężenia te są największe w bliskości bezpośredniej obciążenia  $P$ . Ten wynik teorii potwierdziły pomiary doświadczalne A. Föppl'a i Nádai'a.

#### XIV. ZAGADNIENIA H. NEUBER'A

§ 163. **Funkcja naprężeń złożona.** Jak już wspomniano w § 50 H. Neuber obmyślił funkcję naprężeń złożoną z trzech funkcji harmonicznych<sup>1)</sup> za pomocą której rozwiązał obszerną grupę zagadnień szczegółowych elastostatyki szczególnie ważną w zastosowaniach praktycznych, gdzie można zwykle pominąć siły masowe. W poświęconej tym zagadnieniom cennej monografii tegoż autora noszącej tytuł „Kerbspannungslehre” (nie nadający się do bezpośredniego spolszczenia), chodzi przede wszystkim o ścisłe wyznaczenie rozmieszczenia naprężeń tuż pod wolną od obciążeń powierzchnią ciała, gdy dane obciążenia działają nań zdala od miejsca rozpatrywanego, a miejsce to tworzy tzw. „*kerb*”. Pod względem geometrycznym stanowi *kerb* powierzchnię wyjątkowo silnie zakrzywioną, jaka np. powstaje na ścianie pręta przyrządkowego, gdy na niej wyźłobić rowek poprzeczny, albo na poboczniczy pręta walcowatego, gdy na niej wytoczyć taki rowek dokoła. Przy obciążeniu pręta z *kerbem*, bądź to siłami podłużnymi, bądź też momentami zginającymi lub skręcającymi, powstają w częściach dość odległych od *kerbu* proste i łatwe do obliczenia stany napięcia i odkształcenia, podczas gdy w samym *kerbie* i jego najbliższym otoczeniu, zachodzi stan wielce złożony nie dający się wyznaczyć sposobami elementarnymi, lecz wymagający wyższych narzędzi matematycznej teorii sprężystości. Zespół tych narzędzi wzbogacił się funkcją naprężeń  $F(x, y, z)$  Neuber'a, złożoną z trzech funkcji harmonicznych  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , wprowadzoną przez tego badacza w sposób następujący:

Niechaj przemieszczenia składowe  $u, v, w$  punktów ciała izotropowego wywołane jego obciążeniem w stanie równowagi będą określone równaniami:

$$(163.1) \quad \begin{cases} u = \frac{1}{2G} \left( -\frac{\partial F}{\partial x} + 2\lambda \Phi_1 \right), \\ v = \frac{1}{2G} \left( -\frac{\partial F}{\partial y} + 2\lambda \Phi_2 \right), \\ w = \frac{1}{2G} \left( -\frac{\partial F}{\partial z} + 2\lambda \Phi_3 \right). \end{cases}$$

<sup>1)</sup> Zeitschr. f. ang. Math. t. 14, 1934, str. 203.

Tutaj oznacza  $\lambda$  stałą (u Neuber'a  $\alpha$ ), a funkcje  $\Phi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) czynią zadość równaniom Laplace'a:

$$(163.2) \quad \nabla^2 \Phi_1 = \nabla^2 \Phi_2 = \nabla^2 \Phi_3.$$

Wstawiając wyrażenia (163.1) w przemieszczeniowe równania równowagi i uwzględniając wz. (163.2) otrzymamy

$$(163.3) \quad \begin{cases} -\nabla^2 \frac{\partial F}{\partial x} + 2G \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\nabla^2 F + 2G \cdot \frac{1}{1-2\nu} \theta \right) = 0 \\ -\nabla^2 \frac{\partial F}{\partial y} + 2G \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\nabla^2 F + 2G \cdot \frac{1}{1-2\nu} \theta \right) = 0 \\ -\nabla^2 \frac{\partial F}{\partial z} + 2G \cdot \frac{1}{1-2\nu} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( -\nabla^2 F + 2G \cdot \frac{1}{1-2\nu} \theta \right) = 0. \end{cases}$$

Z tego wynika, że

$$(163.4) \quad -\nabla^2 F + \frac{2G\theta}{1-2\nu} = \text{stałej}.$$

Ponieważ wartość tej stałej jest obojętna, przeto uczynimy ją równą 0, a zatem

$$(163.5) \quad 2G\theta = (1-2\nu)\nabla^2 F.$$

Wyraziwszy teraz  $\theta$  przez  $u, v, w$  z wartościami (163.1) znajdziemy

$$(163.6) \quad 2G\theta = -\nabla^2 F + 2\lambda \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right).$$

Z podstawienia w (163.5) wynika związek

$$(163.7) \quad 2(1-\nu)\nabla^2 F = 2\lambda \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right)$$

określający w prosty sposób zależność funkcji naprężeń  $F$  od trzech funkcji harmoniczych. Przyjmąwszy nadto, że

$$(163.8) \quad F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3,$$

gdzie  $\Phi_0$  jest znowu funkcją harmoniczną i zastosowawszy do tego równania operator Laplace'a  $\nabla^2$ , otrzymamy

$$(163.9) \quad \nabla^2 F = 2 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right).$$



Z porównania z wzorem (163.7) wynika, że stała  $\lambda$  ma wartość

$$(163.10) \quad \lambda = 2(1 - \nu).$$

Dla naprężeń otrzymujemy teraz wyrażenia:

$$(163.11) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \lambda \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right), \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \lambda \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right), \\ \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \lambda \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right); \end{cases}$$

$$(163.12) \quad \begin{cases} \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \lambda \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right) \\ \tau_{yz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \lambda \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} = -\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} + \lambda \left( \frac{\partial \Phi_3}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Wyrażenia te, jak łatwo sprawdzić, spełniają naprężeniowe równania różniczkowe równowagi Beltrami'ego.

Spośród czterech funkcji harmonicznych, przez które wyraża się funkcję  $F$  według (163.8) okazuje się jedna zupełnie zbędna nawet w przypadku najogólniejszego trójwymiarowego stanu napięcia, tak iż zagadnienie rozwiązuje tylko trzy funkcje. Neuber dowodzi to w sposób następujący:

Niechaj  $\Phi'_0, \Phi'_1, \Phi'_2, \Phi'_3$  oznaczają cztery nowe funkcje harmoniczne, przez które można wyrazić dawne w postaci

$$(163.13) \quad \begin{cases} \Phi_3 = \frac{\partial \Phi'_3}{\partial z}, \quad \Phi_2 = \frac{\partial \Phi'_3}{\partial y} + \Phi'_2, \quad \Phi_1 = \frac{\partial \Phi'_3}{\partial x} + \Phi'_1 \\ \Phi_0 = 2\lambda \Phi'_3 - \left( x \frac{\partial \Phi'_3}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi'_3}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi'_3}{\partial z} \right) + \Phi'_0. \end{cases}$$

Skoro określiliśmy jakiś stan napięcia stosownie dobranymi funkcjami  $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ , to równania powyższe wyznaczają także i funkcje nowo wprowadzone, albowiem  $\Phi'_3$  otrzymuje się bezpośrednio z pierwszego równania grupy (163.13), a potem kolejno z równań dalszych  $\Phi'_2$  itd. Różniczkując funkcje kreskowane przekonywamy się łatwo, że czynią zadość równaniu Laplace'a.

Dla funkcji  $F$  otrzymamy teraz

$$(163.14) \quad F = \Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3 = 2\lambda\Phi'_3 + \Phi'_0 + x\Phi'_1 + y\Phi'_2,$$

a po wstawieniu w (163.1):

$$(163.15) \quad \begin{cases} 2Gu = -\frac{\partial}{\partial x}(\Phi'_0 + x\Phi'_1 + y\Phi'_2) + 2\lambda\Phi'_1 \\ 2Gv = -\frac{\partial}{\partial y}(\Phi'_0 + x\Phi'_1 + y\Phi'_2) + 2\lambda\Phi'_2 \\ 2Gw = -\frac{\partial}{\partial z}(\Phi'_0 + x\Phi'_1 + y\Phi'_2). \end{cases}$$

Okazuje się, że przemieszczenia są całkiem niezależne od  $\Phi_3$ . Ta funkcja weszła niejako w trzy pozostałe, którymi zastąpiono,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_1$  i  $\Phi_0$ . Wobec tego  $u, v, w$  dają się w ogóle wyrazić przez tylko 3 funkcje. Czwartą można przyjąć równą zeru, jak to okazemy na funkcji  $\Phi_0$ .

Podstawmy w tym celu

$$(163.16) \quad \begin{cases} \Phi_0 = 2\lambda\Phi'_0 - x\frac{\partial\Phi'_0}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi'_0}{\partial y} - z\frac{\partial\Phi'_0}{\partial z} \\ \Phi_1 = \frac{\partial\Phi'_0}{\partial x} + \Phi'_1; \quad \Phi_2 = \frac{\partial\Phi'_0}{\partial y} + \Phi'_2; \quad \Phi_3 = \frac{\partial\Phi'_0}{\partial z} + \Phi'_3, \end{cases}$$

a równania dla przemieszczeń przyjmą postać

$$(163.17) \quad \begin{cases} 2Gu = -\frac{\partial}{\partial x}(x\Phi'_1 + y\Phi'_2 + z\Phi'_3) + 2\lambda\Phi'_1, \\ 2Gv = -\frac{\partial}{\partial y}(x\Phi'_1 + y\Phi'_2 + z\Phi'_3) + 2\lambda\Phi'_2, \\ 2Gw = -\frac{\partial}{\partial z}(x\Phi'_1 + y\Phi'_2 + z\Phi'_3) + 2\lambda\Phi'_3. \end{cases}$$

Jak widzimy funkcja  $\Phi_0$  odpadła, a zważywszy że rolę funkcji  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  objęły funkcje  $\Phi'_1, \Phi'_2, \Phi'_3$ , przekonamy się, że bez ujmy dla ogólności można przyjąć z góry, że  $\Phi_0 = 0$ .

**§ 164. Przejście do współrzędnych krzywoliniowych.** Szukanie rozwiązań ścisłych przy użyciu współrzędnych prostokątnych napotyka często na wielkie trudności z powodu bardzo złożonych wyrażeń warunków brzegowych na powierzchni karbu. Te warunki upraszczają się najbardziej przy użyciu współrzędnych krzywoliniowych, co ułatwia szukanie rozwiązań ścisłych, jak wykazała dobitnie praca Neuber'a.

Oznaczywszy jak w § 29 przez  $\alpha, \beta, \gamma$  parametry współrzędnych krzywoliniowych Lané'go, przez  $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$  odpowiednie składowe przemieszczeń, przez  $\varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\beta\beta}, \varepsilon_{\gamma\gamma}, \varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\beta\gamma}, \varepsilon_{\gamma\alpha}$  składowe tensora od-

kształcenia, a przez  $\sigma_\alpha \equiv \widehat{a\alpha}$ ,  $\sigma_\beta \equiv \widehat{\beta\beta}$ ,  $\sigma_\gamma \equiv \widehat{\gamma\gamma}$ ;  $\tau_{\alpha\beta} \equiv \widehat{a\beta}$ ,  $\tau_{\beta\gamma} \equiv \widehat{\beta\gamma}$ ,  $\tau_{\gamma\alpha} \equiv \widehat{\gamma\alpha}$  składowe tensora napięcia (ob. § 52), wyrazimy warunek na nieobciążonej powierzchni ciała o równaniu  $u_\alpha = u_{\alpha_0}$  w postaci

$$(164.1) \quad \sigma_\alpha = 0, \quad \tau_{\alpha\beta} = 0, \quad \tau_{\alpha\gamma} = 0 \quad \text{dla} \quad u_\alpha = u_{\alpha_0}.$$

Aby teraz od równań (163.1) przejść do odpowiednich równań we współrzędnych Lamé'go wyjdziemy z wzorów

$$(164.2) \quad (29.5) \quad u_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \left( u \frac{\partial x}{\partial \alpha} + v \frac{\partial y}{\partial \alpha} + w \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) \text{ itd.},$$

i podstawimy tutaj wyrażenia dla  $u, v, w$  z (163.1) otrzymując

$$2Gu_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \left[ \left( -\frac{\partial F}{\partial x} + 2\lambda\Phi_1 \right) \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \left( -\frac{\partial F}{\partial y} + 2\lambda\Phi_1 \right) \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \left( -\frac{\partial F}{\partial z} + 2\lambda\Phi_3 \right) \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right] \text{ itd.}$$

Ale jak wiadomo jest

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} \quad \text{itd.}$$

A zatem

$$(164.3) \quad 2Gu_\alpha = \frac{1}{h_\alpha} \left[ -\frac{\partial F}{\partial \alpha} + 2\lambda \left( \Phi_1 \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \Phi_2 \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \Phi_3 \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) \right] \text{ itd.}$$

Do tego dołączymy wyprowadzone w § 29 wzory dla składowych stanu odkształcenia

$$(164.4) \quad (29.8) \quad \begin{cases} \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{h_\alpha} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_\beta}{h_\beta} \cdot \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} + \frac{u_\gamma}{h_\gamma} \cdot \frac{\partial h_\alpha}{\partial \gamma} \right), \\ \varepsilon_{\beta\beta} = \dots \quad \varepsilon_{\gamma\gamma} = \dots, \\ \varepsilon_{\beta\gamma} = \frac{h_\gamma}{h_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_\gamma}{h_\gamma} \right) + \frac{h_\beta}{h_\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u_\beta}{h_\beta} \right), \\ \varepsilon_{\gamma\alpha} = \dots \quad \tau_{\alpha\beta} = \dots \end{cases}$$

dalej wzór dla rozszerzenia objętościowego

$$(164.5) \quad (31.3) \quad \theta = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta} + \varepsilon_{\gamma\gamma},$$

oraz wzory dla składowych stanu napięcia, które dla współrzędnych, krzywoliniowych Lamé'go jako prostokątnych muszą mieć postać analogiczną do wzoru dla  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$ , a więc

$$(164.6) \quad \begin{cases} \sigma_\alpha = 2G \left( \varepsilon_{\alpha\alpha} + \frac{\nu}{1-2\nu} \theta \right) = 2G \left( \varepsilon_{\alpha\alpha} + \frac{2-\lambda}{2\lambda-2} \theta \right), \\ \sigma_\beta = 2G \left( \varepsilon_{\beta\beta} + \frac{2-\lambda}{2\lambda-2} \theta \right), \quad \sigma_\gamma = 2G \left( \varepsilon_{\gamma\gamma} + \frac{2-\lambda}{2\lambda-2} \theta \right), \end{cases}$$

$$(164.7) \quad \tau_{\alpha\beta} = G\varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \tau_{\beta\gamma} = G\varepsilon_{\beta\gamma}, \quad \tau_{\gamma\alpha} = G\varepsilon_{\gamma\alpha}.$$

Obliczenie naprężeń na podstawie wzorów powyższych wymaga uprzedniego wyznaczenia przemieszczeń. Jednakże najczęściej prowadzi do tego droga krótsza obliczenia bezpośredniego z funkcji naprężeń.

W tym celu wstawimy przemieszczenia z wz. (164.3) we wzory (164.4 i 7), wprowadziwszy dla uproszczenia operatory:

$$(164.8) \quad \frac{\partial^2}{\partial n_\alpha^2} \equiv \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{h_\alpha h_\beta^2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{h_\alpha h_\gamma^2} \frac{\partial h_\alpha}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \quad \text{itd.}$$

$$(164.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial n_\alpha \partial n_\beta} = \frac{\partial^2}{\partial n_\beta \partial n_\alpha} \equiv \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{h_\alpha^2 h_\beta} \cdot \frac{\partial h_\alpha}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} = \\ = \frac{1}{h_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{h_\alpha h_\beta^2} \frac{\partial h_\beta}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} = \frac{h_\beta}{2 h_\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{h_\beta^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{h_\alpha}{2 h_\beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{h_\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \end{cases}$$

z przemianą kołową względem  $\alpha, \beta, \gamma$ . Wtedy otrzymamy wyrażenia dające się jeszcze znacznie uprościć. Weźmy np. pod uwagę przypadek szczególny

$$(164.10) \quad \Phi_0 = -x C, \quad \Phi_1 = C = \text{stałej}, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0, \quad F = 0.$$

Okazuje się, że w tym przypadku zachodzi tylko w kierunku osi  $x$  stałe przemieszczenie

$$(164.11) \quad u = \frac{\lambda}{G} C,$$

co odpowiada ruchowi całego ciała bez odkształcenia, czyli jako ciała sztywnego. To samo winno oczywiście wypaść przy użyciu współrzędnych Lamé'go, a więc muszą zniknąć wyrażenia zawierające  $\Phi_1, \Phi_2$ , albo  $\Phi_3$ . Stąd wynika

$$(164.12) \quad \frac{\partial^2 x}{\partial n_\alpha^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial n_\alpha \partial n_\beta} = 0 \quad \text{itd.}$$

z przemianą kołową według  $\alpha, \beta, \gamma$  i  $x, y, z$ .

W celu ustawienia wzorów ostatecznych dla naprężeń normalnych wyrazimy  $\theta$  przez funkcję naprężeń otrzymując z (163.5) z uwzględnieniem (163.10):

$$(164.13) \quad 2G \frac{2-\lambda}{2\lambda-2} \theta = \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \nabla^2 F.$$

Teraz z (164.6) znajdziemy

$$(164.14) \quad \sigma_\alpha = - \frac{\partial^2 F}{\partial n_\alpha^2} + \frac{2\lambda}{h_\alpha^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) + \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \nabla^2 F \quad \text{itd.,}$$

zaś z (164.7)

$$(164.15) \quad \tau_{\alpha\beta} = -\frac{\partial^2 F}{\partial n_\alpha \partial n_\beta} + \frac{\lambda}{h_\alpha h_\beta} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) \text{ itd.}$$

Porównawszy te wyrażenia z odpowiednimi we współrzędnych kartezjańskich, tj. (163.11 i 12), widzimy, że operatory  $\frac{\partial^2}{\partial n_\alpha^2}$ ,  $\frac{\partial^2}{\partial n_\alpha \partial n_\beta}$  itd. odpowiadają zupełnie drugim pochodnym w układzie kartezjańskim, którego kierunki osi zlewają się z kierunkami  $\alpha, \beta, \gamma$  układu Lamé'go. To wyjaśnia nadto związki (164.12).

Pomnąc na znaczenie ogólne wskaźników  $\mu, \nu$  w równaniach równowagi z § 42 a napiszemy następujące związki między operatorami różniczkowymi względem kierunków współrzędnych  $x, y, z$ , a takimiż operatorami względem kierunków dowolnych  $\kappa, \lambda$ :

$$(164.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial n_\kappa \partial n_\lambda} = \sum_\mu \sum_\nu \cos(\kappa, \mu) \cos(\lambda, \nu) \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \nu} \\ \frac{\partial}{\partial n_\kappa} \cdot \frac{\partial}{\partial n_\lambda} = \sum_\mu \sum_\nu \cos(\kappa, \mu) \cos(\lambda, \nu) \frac{\partial}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \mu \\ \nu \end{array} \right\} = x, y, z$$

(oznaczenia w tych wzorach tj.  $\kappa, \lambda, \mu, \nu$  nie mają nic wspólnego ze znaczeniami  $\lambda$  i  $\nu$  we wzorach poprzednich).

Wreszcie można wykazać ogólnie, że naprężenie o kierunku  $\kappa$  działające w przekroju elementarnym o normalnej  $\lambda$  wyraża się przez funkcję naprężeń wzorem:

$$(164.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{\lambda\kappa} = -\frac{\partial^2 F}{\partial n_\kappa \partial n_\lambda} + \lambda^* \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_\kappa} \cdot \frac{\partial x}{\partial n_\lambda} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial n_\lambda} \cdot \frac{\partial x}{\partial n_\kappa} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_\kappa} \cdot \frac{\partial y}{\partial n_\lambda} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial n_\lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial n_\kappa} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial n_\kappa} \cdot \frac{\partial z}{\partial n_\lambda} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial n_\lambda} \cdot \frac{\partial z}{\partial n_\kappa} \right) + \left( 1 - \frac{1}{2} \lambda^* \right) \cos(\kappa, \lambda) \nabla^2 F, \end{array} \right.$$

gdzie  $\partial/\partial n_\kappa$  i  $\partial/\partial n_\lambda$  oznaczają różniczkowania wzdłuż prostych, które w miejscu rozpatrywanym mają odpowiednio kierunki  $\kappa$  i  $\lambda$ . Dla odróżnienia oznaczono tutaj przez  $\lambda^*$  stałą określoną równaniem (163.10), w którym  $\nu$  ma również znaczenie odmienne od użytego we wzorach (164.16 i 17), gdyż oznacza liczbę Poisson'a.

Do zbudowania samej funkcji naprężeń potrzeba stosownych funkcji harmonicznnych, które spełniają równanie Laplace'a. Należy przeto wyrazić laplasjan we współrzędnych Lamé'go. W tym celu

weźmy pod uwagę wyrażenie dla  $\theta$  we współrzędnych kartezjańskich (163.6), tj.

$$(164.18) \quad 2G\theta = -\nabla^2 F + 2\lambda^* \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right).$$

Z wzorów (164.3) przy uwzględnieniu (164.8, 9 i 12) wynika

$$(164.19) \quad \left\{ \begin{aligned} 2G\theta = & - \left( \frac{\partial^2 F}{\partial n_\alpha^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial n_\beta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial n_\gamma^2} \right) + \frac{2\lambda^*}{h_\alpha^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) + \\ & + \frac{2\lambda^*}{h_\beta^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} \right) + \\ & + \frac{2\lambda^*}{h_\gamma^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} \right). \end{aligned} \right.$$

Porównanie w obu wzorach (164.18 i 19) części nie zawierających  $\lambda^*$  daje

$$(164.20) \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial n_\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial n_\beta^2} + \frac{\partial^2}{\partial n_\gamma^2}.$$

Podstawiawszy wyrażenia szczegółowe (164.8) dla  $\partial^2/\partial n_\alpha^2$ ,  $\partial^2/\partial n_\beta^2$  i  $\partial^2/\partial n_\gamma^2$ , znajdujemy po uproszczeniu

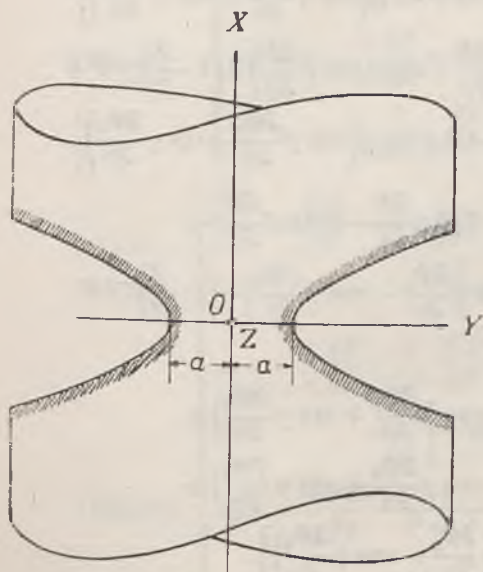
$$(164.21) \quad \nabla^2 = \frac{1}{h_\alpha h_\beta h_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{h_\beta h_\gamma}{h_\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{h_\gamma h_\alpha}{h_\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{h_\alpha h_\beta}{h_\gamma} \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) \right\}.$$

Z porównania wyrażen z czynnikiem  $2\lambda^*$  z uwzględnieniem (163.9) otrzymamy jeszcze drugi związek dla  $\nabla^2 F$  pożyteczny przy wyznaczaniu naprężeń, a mianowicie

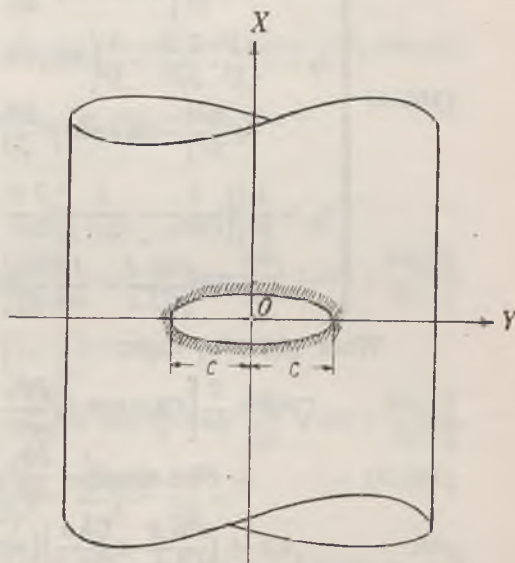
$$(164.22) \quad \nabla^2 F = 2 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial z} \right) = \frac{2}{h_\alpha^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial z}{\partial \alpha} \right) + \\ + \frac{2}{h_\beta^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \beta} \right) + \frac{2}{h_\gamma^2} \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial x}{\partial \gamma} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial y}{\partial \gamma} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial z}{\partial \gamma} \right).$$

**§ 165. Przykład zastosowania funkcji Neuber'a.** Autor „Kerbspannungslehre” rozwiązuje w rozdz IV swej pracy (str 27—68) cały szereg zagadnień płaskich po stwierdzeniu, że jego funkcja naprężeń sprowadza się w tych przypadkach do funkcji Airy'ego, wobec czego znaczenie naukowe nowej funkcji wychodzi na jaw przy rozwiązywaniu zagadnień przestrzennych, którym Neuber poświęca najobszerniejszy rozdział V (str 69—130). Z tego więc rozdziału zaczerpnijemy przykład zastosowania odsyłając czytelnika zainteresowanego całą dziedziną do książki wymienionej (dostępnej teraz także w przekładzie rosyjskim).

Dajmy na to, że długi pręt o przekroju kołowym jest w pewnym miejscu opatrzone głębokim żłobkiem o postaci hiperboloidy obrotowej (zadanie A), w innym zaś o znacznej odległości posiada w środku miejsce puste kształtu elipsoidy obrotowej (zadanie B). Ob.



Rys. 93 a



Rys. 93 b

rys. 93 a i b. Wtedy stosując współrzędne elipsoidalne napiszemy

$$(165.1) \quad x = Sha \cos \beta, \quad y = Cha \sin \beta \cos \gamma, \quad z = Cha \sin \beta \sin \gamma.$$

Powierzchnie  $\alpha = \text{stałej}$  są elipsoidami, powierzchnie  $\beta = \text{stałej}$  hiperboloidami, zaś  $\gamma = \text{stałej}$  płaszczyznami przechodzącymi przez oś  $x$ , tj. oś pręta.

Według równań (29.4) otrzymujemy

$$(165.2) \quad h_\alpha = h_\beta = h = \sqrt{Sh^2a + \cos^2 \beta}, \quad h_\gamma = Cha \sin \beta,$$

a więc stosownie do równania (164.3) jest

$$(165.3) \quad \begin{cases} 2Gu_\alpha = \\ \quad = \frac{1}{h} \left\{ -\frac{\partial F}{\partial \alpha} + 2\lambda[\Phi_1 Cha \cos \beta + Sha \sin \beta(\Phi_3 \cos \gamma + \Phi_3 \sin \gamma)] \right\} \\ 2Gu_\beta = \\ \quad = \frac{1}{h} \left\{ -\frac{\partial F}{\partial \beta} + 2\lambda[-\Phi_1 Sha \sin \beta + Cha \cos \beta(\Phi_2 \cos \gamma + \Phi_3 \sin \gamma)] \right\} \\ 2Gu_\gamma = -\frac{1}{Cha \sin \beta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \gamma} + 2\lambda(-\Phi_2 \sin \gamma + \Phi_2 \cos \gamma). \end{cases}$$

Napężenia normalne są według wz. (164.14): ( $\lambda = \lambda^*$ )

$$(165.4) \left\{ \begin{aligned} \sigma_\alpha &= -\frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \frac{1}{h^4} \left( Sh a Ch a \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \sin \beta \cos \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) + \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \nabla^2 F + \\ &\quad + \frac{2\lambda}{h^2} \left[ Ch a \cos \beta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + Sh a \sin \beta \left( \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \right) \right], \\ \sigma_\beta &= -\frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - \frac{1}{h^4} \left( Sh a Ch a \frac{\partial F}{\partial \alpha} + \sin \beta \cos \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) + \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \nabla^2 F + \\ &\quad + \frac{2\lambda}{h^2} \left[ -Sh a \sin \beta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + Ch a \cos \beta \left( \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \right) \right], \\ \sigma_\gamma &= \frac{1}{h^2} \left[ \left( \frac{1}{Ch^2 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \beta} \right) \frac{\partial F}{\partial \gamma^2} - Tgh a \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \cotg \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} \right] + \\ &\quad + 2\lambda \left( \frac{\sin \beta}{Ch a} - \frac{Ch a}{\sin \beta} \right) \left( \sin \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \gamma} - \cos \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \gamma} \right) + \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \nabla^2 F. \end{aligned} \right.$$

Wzór (164.22) daje:

$$(165.5) \quad \nabla^2 F = \frac{2}{h^2} \left[ Ch a \cos \beta \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \right) + \right. \\ \left. + Sh a \sin \beta \left( -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\sin \beta}{Ch a} - \frac{Ch a}{\sin \beta} \right) \left( \sin \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \gamma} - \cos \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \gamma} \right) \right].$$

Napężenia styczne są według (164.15):

$$(165.6) \left\{ \begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{h^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{h^4} \left( Sh a Ch a \frac{\partial F}{\partial \beta} - \sin \beta \cos \beta \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) + \\ &\quad + \frac{\lambda}{h^2} \left[ Ch a \cos \beta \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \right) + \right. \\ &\quad \left. + Sh a \sin \beta \left( -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \right) \right], \\ \tau_{\beta\gamma} &= -\frac{1}{h Ch a} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\sin \beta} \cdot \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right) + \frac{\lambda}{h} \left[ -Tgh a \frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma} + \right. \\ &\quad \left. + \cotg \beta \left( \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \gamma} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \gamma} \right) - \sin \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \cos \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \right], \\ \tau_{\gamma\alpha} &= -\frac{1}{h \sin \beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( Ch a \cdot \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right) + \frac{\lambda}{h} \left[ \cotg \beta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma} + \right. \\ &\quad \left. + Tgh a \left( \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \gamma} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \gamma} \right) - \sin \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} + \cos \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ażeby zadaniem B objąć i wyrażenie kuliste, trzeba przygotować równania analogiczne we współrzędnych kulistych określonych wzorami:

$$(165.7) \quad x = a \cos \beta, \quad y = a \sin \beta \cos \gamma, \quad z = a \sin \beta \sin \gamma,$$



gdzie  $\alpha =$  stałej przedstawia kule,  $\beta =$  stałej stożki obrotowe, a  $\gamma =$  stałej płaszczyzny przechodzące przez oś  $X$ . Znajdujemy kolejno

$$(165.8) \quad h_\alpha = 1, \quad h_\beta = \alpha, \quad h_\gamma = \alpha \sin \beta$$

$$(165.9) \quad \begin{cases} 2Gu_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial \alpha} + 2\lambda[\Phi_1 \cos \beta + \sin \beta(\Phi_2 \cos \gamma + \Phi_3 \sin \gamma)], \\ 2Gu_\beta = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta} + 2\lambda[-\Phi_1 \sin \beta + \cos \beta(\Phi_2 \cos \gamma + \Phi_3 \sin \gamma)], \\ 2Gu_\gamma = -\frac{1}{\alpha \sin \beta} \frac{\partial F}{\partial \gamma} + 2\lambda(-\Phi_2 \sin \gamma + \Phi_3 \cos \gamma) \end{cases}$$

$$(165.10) \quad \begin{cases} \sigma_\alpha = -\frac{\partial F}{\partial \alpha^2} + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \nabla^2 F + \\ \quad + 2\lambda \left[ \cos \beta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \sin \beta \left( \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \right) \right], \\ \sigma_\beta = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial F}{\partial \beta^2} + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \nabla^2 F + \\ \quad + \frac{2\lambda}{\alpha} \left[ -\sin \beta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + \cos \beta \left( \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \right) \right], \\ \sigma_\gamma = -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \beta} \frac{\partial F}{\partial \gamma^2} - \frac{\cotg \beta}{\alpha^2} \frac{\partial F}{\partial \beta} + \\ \quad + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \nabla^2 F + \frac{2\lambda}{\alpha \sin \beta} \left( -\sin \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \gamma} + \cos \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \gamma} \right) \\ \nabla^2 F = 2 \cos \beta \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\alpha} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \frac{\sin \gamma}{\alpha} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \right) + \\ \quad + 2 \sin \beta \left( -\frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \right) - \\ \quad - \frac{2}{\alpha \sin \beta} \left( \sin \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \gamma} - \cos \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \gamma} \right), \end{cases}$$

$$(165.11) \quad \begin{cases} \tau_{\alpha\beta} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) + \lambda \cos \beta \left( \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \beta} + \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \right) + \\ \quad + \lambda \sin \beta \left( -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \alpha} + \frac{\cos \gamma}{\alpha} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \frac{\sin \gamma}{\alpha} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \right), \\ \tau_{\beta\gamma} = -\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right) + \frac{\lambda}{\alpha} \left[ -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma} + \right. \\ \quad \left. + \cotg \beta \left( \cos \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \gamma} + \sin \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \gamma} \right) - \sin \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \beta} + \cos \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \beta} \right] \\ \tau_{\gamma\alpha} = -\frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{\alpha} \frac{\partial F}{\partial \gamma} \right) + \lambda \left[ \frac{\cotg \beta}{\alpha} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \gamma} + \right. \\ \quad \left. + \frac{\cos \gamma}{\alpha} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \gamma} + \frac{\sin \gamma}{\alpha} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \gamma} - \sin \gamma \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha} + \cos \gamma \frac{\partial \Phi_3}{\partial \alpha} \right]. \end{cases}$$

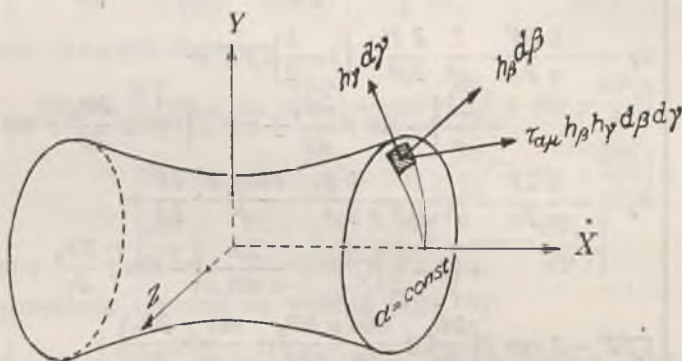
W zadaniu A niech powierzchnią żłóbka będzie hiperboloida  $\beta_0$ . Wtedy wszystkie naprężenia składowe na powierzchni  $\beta = \beta_0$  znikają i mamy do czynienia z warunkami brzegowymi

$$(165.12) \quad \sigma_\beta = 0, \quad \tau_{\alpha\beta} = 0, \quad \tau_{\beta\gamma} = 0 \quad \text{dla} \quad \beta = \beta_0.$$

W zadaniu B niechaj elipsoida  $\alpha_0$  tworzy powierzchnię wklęsłą, to warunkami brzegowymi są:

$$(165.13) \quad \sigma_\alpha = 0, \quad \tau_{\alpha\beta} = 0, \quad \tau_{\alpha\gamma} = 0 \quad \text{dla} \quad \alpha = \alpha_0.$$

Odpowiednio do rodzaju obciążenia pręta wypada jeszcze przygotować wyrażenia całkowite wynikające z równowagi sił obciążających pręt z jednej strony sił zewnętrznymi z siłami wewnętrznymi w przekroju dowolnym. Siły zewnętrzne można określić w ogóle



Rys. 94

trzema składowymi  $P_x, P_y, P_z$  w kierunku odpowiednich osi i trzema momentami  $M_x, M_y, M_z$  około tychże osi. W zadaniu A poprowadzimy przekrój powierzchnią  $\alpha = \text{stała}$  (rys. 94).] Naprężenie całkowite  $\tau_{\alpha\mu}$  w elemencie tej powierzchni o bokach  $h_\beta d\beta$  i  $h_\gamma d\gamma$  daje napięcie

$$\tau_{\alpha\mu} h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma.$$

Aby otrzymać wypadkową  $P_x$  trzeba scałkować rzut napięcia na oś  $x$ , albo też zastępując kolejno wskaźnik  $\mu$  przez  $\alpha, \beta, \gamma$  zesumować rzuty każdego z napięć składowych pisząc

$$(165.14) \quad P_x = \int_F \sum_{\mu=\alpha,\beta,\gamma} \tau_{\alpha\mu} \cos(x, \mu) h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma,$$

gdzie całkowanie rozciąga się na całe pole  $F$  przekroju rozpatrywanego. Wyrażenia na  $P_y$  i  $P_z$  otrzymujemy przez przemianę kołową

$x, y, z$ . Podobnie dochodzimy do równań momentów, z których pierwsze względem  $x$  ma postać

$$(165.15) \quad M_x = \iint_F \sum_{\mu=\alpha, \beta, \gamma} \tau_{\alpha\mu} [y \cos(z, \mu) - z \cos(y, \mu)] h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma \quad \text{itd.}$$

W zadaniu B obieramy najdogodniej przekrój płaski  $x = \text{stałej}$ . Oznaczywszy składowe naprężenia na elementach  $dy dz$  przez  $\tau_{xx} (\equiv \sigma_x), \tau_{xy}, \tau_{xz}$ , znajdziemy

$$(165.16) \quad \begin{cases} P_x = \iint_F \tau_{xx} dy dz, & P_y = \iint_F \tau_{xy} dy dz, & P_z = \iint_F \tau_{xz} dy dz \\ M_x = \iint_F (y \tau_{xz} - z \tau_{xy}) dy dz, & M_y = \iint_F (z \tau_{xx} - x \tau_{xz}) dy dz, \\ & M_z = \iint_F (x \tau_{xy} - y \tau_{xx}) dy dz. \end{cases}$$

Rozwiązanie rozłożymy z korzyścią na 6 rozwiązań szczegółowych, przyjmąwszy dla każdego z nich, że tylko jedna z całek powyższych jest różna od zera. Wobec symetrii obrotowej w naszym zagadnieniu będą stany napięcia wywołane siłami  $P_y$  i  $P_z$  jednakowe. To samo odnosi się do momentów  $M_y$  i  $M_z$ . Liczba rozwiązań szczegółowych sprowadza się przeto do czterech (siła osiowa, siła poprzeczna, zgięcie i skręcenie).

Przed przystąpieniem do rozwiązań należy się zająć wyznaczeniem funkcji harmonicznych od których zależy funkcja naprężeń. Neuber wykonał tę pracę w sposób przedstawiony w paragrafie następnym.

**§ 166. Rozwiązanie równania  $\nabla^2 \Phi = 0$  we współrzędnych elipsoidalnych.** Wstawiwszy w rów. (164.21) wartości parametrów  $h$  z (165.2) napiszemy

$$(166.1) \quad \nabla^2 \Phi = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{1}{Ch a} \frac{\partial}{\partial a} \left( Ch a \frac{\partial \Phi}{\partial a} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sin \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) + \left( \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{1}{Ch^2 a} \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \gamma^2} \right] = 0.$$

Przyjmąwszy że funkcja  $\Phi$  da się wyrazić jako iloczyn trzech funkcji, z których każda jest zależna tylko od jednej ze zmiennych  $a, \beta, \gamma$ , czyli że

$$(166.2) \quad \Phi = f_1(a) f_2(\beta) f_3(\gamma),$$

utwórzmy równanie  $h^2 \nabla^2 \Phi / \Phi = 0$ , które daje

$$(166.3) \quad \frac{1}{f_1 Ch a} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left( Ch a \frac{\partial f_1}{\partial a} \right) + \frac{1}{f_2 \sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sin \beta \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \right) + \\ + \frac{1}{f_3} \left( \frac{1}{\sin^2 \beta} - \frac{1}{Ch^2 a} \right) \frac{\partial^2 f_3}{\partial \gamma^2} = 0.$$

Pierwszy wyraz zależy tylko od  $a$ , drugi zaś tylko od  $\beta$ . Aby równanie było spełnione, winien wyraz trzeci dać się rozłożyć na dwa dodajniki z których jeden jest funkcją samego  $a$ , a drugi samego  $\beta$ . To jest możliwe gdy

$$\frac{1}{f_3} \frac{\partial^2 f_3}{\partial \gamma^2} = \text{stałej} = -n^2.$$

Wtedy każdy z dodajników można przyrównać do stałej, z których jedna będzie dodatnia, a druga ujemna, obok stałej oznaczonej już przez  $-n^2$ . Rów. (166.3) rozpadnie się więc na trzy równania następujące, w których wymieniona stała została oznaczona przez  $\nu(\nu+1)$ , co na razie niekoliduje ze znaczeniami poprzednimi  $\nu$ :

$$(161.4) \quad \begin{cases} \frac{1}{Ch a} \frac{\partial}{\partial a} \left( Ch a \frac{\partial f_1}{\partial a} \right) + \left[ \frac{n^2}{Ch^2 a} - \nu(\nu+1) \right] f_1 = 0 \\ \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sin \beta \frac{\partial f_2}{\partial \beta} \right) + \left[ -\frac{n^2}{\sin^2 \beta} + \nu(\nu+1) \right] f_2 = 0 \\ \frac{\partial^2 f_3}{\partial \gamma^2} + n^2 f_3 = 0. \end{cases}$$

Równanie różniczkowe funkcji  $f_3$  ma znane rozwiązanie

$$f_3 = c_n \sin n\gamma + d_n \cos n\gamma.$$

Równania dla  $f_1$  i  $f_2$  dają się podstawieniem  $Ch a = \lambda$  oraz  $\sin \beta = \nu$  sprowadzić do postaci wspólnej:

$$(166.5) \quad (\lambda^2 - 1) \frac{\partial^2 f(\lambda)}{\partial \lambda^2} + \left( 2\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} + \left[ \frac{n^2}{\lambda^2} - \nu(\nu+1) \right] f(\lambda) = 0,$$

albowiem podstawienie powyższe prowadzi do związków

$$(166.6) \quad \frac{\partial}{\partial a} = Sh a \frac{\partial}{\partial \lambda} = \sqrt{\lambda^2 - 1} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} = \cos \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} = \sqrt{1 - \lambda^2} \frac{\partial}{\partial \lambda}.$$

Całkowanie przez szeregi osiągamy przyjmując dla szukanej całki szczególnej  $\nu$ -go stopnia postać

$$(166.7) \quad N_{n,\nu}(\lambda) = \lambda^\nu + a_2 \lambda^{\nu-2} + a_4 \lambda^{\nu-4} + a_6 \lambda^{\nu-6} + \dots$$

Po wstawieniu w (166.5) otrzymujemy

$$(166.8) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda^2 - 1)[\nu(\nu - 1)\lambda^{\nu-2} + a_2(\nu - 2)(\nu - 3)\lambda^{\nu-4} + a_4(\nu - 4)(\nu - 5)\lambda^{\nu-6} + \dots] + \\ &+ \left(2\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)[\nu\lambda^{\nu-1} + a_2(\nu - 2)\lambda^{\nu-3} + a_4(\nu - 4)\lambda^{\nu-5} + \dots] + \\ &+ \left[\frac{n^2}{\lambda^2} - \nu(\nu + 1)\right](\lambda^\nu + a_2\lambda^{\nu-2} + a_4\lambda^{\nu-4} + \dots) = 0. \end{aligned} \right.$$

Przyrównawszy współczynniki przy każdej potęgze  $\lambda$  do zera mamy równania warunkowe:

$$(166.9) \quad \left\{ \begin{aligned} &[\nu(\nu - 1) + 2\nu - \nu(\nu + 1)]\lambda^\nu = 0 \\ &\{-\nu(\nu - 1) - \nu + n^2 + a_2[(\nu - 2)(\nu - 3) + 2(\nu - 2) - \nu(\nu + 1)]\}\lambda^{\nu-2} = 0 \\ &\{a_2[-(\nu - 2)(\nu - 3) - (\nu - 2) + n^2] + \\ &\quad + a_4[(\nu - 4)(\nu - 5) + 2(\nu - 4) - \nu(\nu + 1)]\}\lambda^{\nu-4} = 0, \text{ itd.} \end{aligned} \right.$$

Obliczywszy kolejno z tych równań  $a_2, a_4, \dots$  i wstawiwszy w rów. (166.7) otrzymujemy całkę szczególną  $n$ -tego i  $\nu$ -tego stopnia najpierw w postaci ( $\alpha$ ):

$$(166.10) \quad (\alpha) \quad N_{n,\nu}(\lambda) = \lambda^\nu - \frac{\nu^2 - n^2}{2(2\nu - 1)} \lambda^{\nu-2} + \frac{(\nu^2 - n^2)[(\nu - 2)^2 - n^2]}{2 \cdot 4(2\nu - 1)(2\nu - 3)} \lambda^{\nu-4} - \dots$$

Gdy  $\nu + |n| = 0, 2, 4, 6, \dots$  to postać ( $\alpha$ ) daje zawsze szereg skończony.

Dla  $\nu + |n|$  dodatniego i nieparzystego przedstawiałaby postać ( $\alpha$ ) szereg nieskończony. Jednakże dzieląc szereg ( $\alpha$ ) przez

$$(166.11) \quad N_{0,1}(\lambda) = \lambda - \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{8} \frac{1}{\lambda^3} - \dots = \sqrt{\lambda^2 - 1}$$

otrzymamy znowu szereg skończony. W ten sposób dochodzimy do postaci ( $\beta$ ):

$$(166.12) \quad (\beta) \quad N_{n,\nu}(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[ \lambda^{\nu-1} - \frac{(\nu - 1)^2 - n^2}{2(2\nu - 1)} \lambda^{\nu-3} + \frac{[(\nu - 1)^2 - n^2][(\nu - 3)^2 - n^2]}{2 \cdot 4 \cdot (2\nu - 1)(2\nu - 3)} \lambda^{\nu-5} - \dots \right],$$

która dla  $\nu + |n| = 1, 3, 5, \dots$  jest istotnie skończoną. Gdy  $\nu + |n|$  jest ujemne, to bierzemy do pomocy funkcję

$$(166.13) \quad \left\{ \begin{aligned} &N_{0,-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{6} \frac{1}{\lambda^3} + \frac{3}{40} \frac{1}{\lambda^5} + \dots = \text{arc cotg } \sqrt{\lambda^2 - 1} = \\ &= -i \ln \frac{\lambda}{1 + \sqrt{1 - \lambda^2}} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \right.$$

Identyczność szeregu powyższego z  $\text{arc cotg } \sqrt{\lambda^2 - 1}$  dowodzi się najłatwiej przez różniczkowanie, które daje

$$(166.14) \quad \frac{d}{d\lambda} (N_{0,-1}(\lambda)) = -\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^4} - \frac{3}{9\lambda^6} - \dots$$

oraz

$$(166.15) \quad \frac{d}{d\lambda} (\text{arc cotg } \sqrt{\lambda^2 - 1}) = -\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda^2 - 1}} = -\frac{1}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)^{-1/2} \text{ itd.}$$

Ta funkcja umożliwia przy ujemnym  $\nu + |n|$  wyrażenie funkcji ogólnej  $N_{n,\nu}(\lambda)$  w postaci skończonej następującej:

$$(166.16) \quad N_{n,\nu}(\lambda) = C[N_{n,-\nu-1}(\lambda) \text{arc cotg } \sqrt{\lambda^2 - 1} + M(\lambda)].$$

Tutaj jest  $C$  stałą, a  $M(\lambda)$  szeregiem potęgowym, który dla parzystego ujemnego  $\nu + |n|$  staje się skończonym bezpośrednio, a dla nieparzystego  $\nu + |n|$  przy pomocy wz. (166.11). W ten sposób dochodzimy do dwu nowych postaci rozwiązania:

Postać ( $\gamma$ ) dla  $\nu + |n| = -2, -4, -6, \dots$ :

$$(166.17) \quad (\gamma) \quad \left\{ \begin{aligned} N_{n,\nu}(\lambda) = & -\frac{1}{a_{-2\nu}} \left\{ \sqrt{\lambda^2 - 1} \left[ \lambda^{-\nu-2} + \frac{(\nu+2)^2 - n^2}{2(2\nu+3)} \lambda^{-\nu-4} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{[(\nu+2)^2 - n^2][(\nu+4)^2 - n^2]}{2 \cdot 4 \cdot (2\nu+3)(2\nu+5)} \lambda^{-\nu-6} + \dots \right] \text{arc cotg } \sqrt{\lambda^2 - 1} + \right. \\ & \left. + a_2 \lambda^{-\nu-2} + a_4 \lambda^{-\nu-4} + \dots + a_{-2\nu-2} \lambda^{\nu+2} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Tutaj jest

$$(166.18) \quad \left\{ \begin{aligned} a_2 = & -1; \quad a_4 = \frac{1}{3} \frac{(\nu+2)^2 - n^2}{2(2\nu+3)}; \\ a_6 = & \frac{2}{15} + \frac{1}{3} \frac{(\nu+2)^2 - n^2}{2(2\nu+3)} - \frac{[(\nu+2)^2 - n^2][(\nu+4)^2 - n^2]}{2 \cdot 4 \cdot (2\nu+3)(2\nu+5)} \text{ itd.} \end{aligned} \right.$$

Na koniec postacią ( $\delta$ ) dla  $\nu + |n| = -1, -3, -5, \dots$  jest

$$(166.19) \quad \left\{ \begin{aligned} N_{n,\nu}(\lambda) = & -\frac{1}{a_{-2\nu+1}} \left\{ \left[ \lambda^{-\nu-1} + \frac{(\nu+1)^2 - n^2}{2(2\nu+3)} \lambda^{-\nu-3} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{[(\nu+1)^2 - n^2][(\nu+3)^2 - n^2]}{2 \cdot 4 \cdot (2\nu+3)(2\nu+5)} \lambda^{-\nu-5} + \dots \right] \text{arc cotg } \sqrt{\lambda^2 - 1} + \right. \\ & \left. + [a_3 \lambda^{-\nu-3} + a_5 \lambda^{-\nu-5} + \dots + a_{-2\nu-1} \lambda^{\nu+1}] \sqrt{\lambda^2 - 1} \right\}, \end{aligned} \right.$$

gdzie

$$(166.20) \quad \left\{ \begin{aligned} a_3 = & -1; \quad a_5 = -\frac{2}{3} \frac{(\nu+1)^2 - n^2}{2(2\nu+3)}; \\ a_7 = & -\frac{8}{15} - \frac{2}{3} \frac{(\nu+1)^2 - n^2}{2(2\nu+3)} - \frac{[(\nu+1)^2 - n^2][(\nu+3)^2 - n^2]}{2 \cdot 4 \cdot (2\nu+3)(2\nu+5)} \text{ itd.} \end{aligned} \right.$$

Tak np. znajdujemy

$$(166.21) \quad \begin{cases} N_{0,-2}(\lambda) = -3\left[\sqrt{\lambda^2-1} \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\lambda^2-1} - 1\right] \\ N_{0,-3}(\lambda) = \frac{45}{+} \left[ \left(\lambda^2 - \frac{2}{3}\right) \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\lambda^2-1} - \sqrt{\lambda^2-1} \right]. \end{cases}$$

Przy zestawieniu ogólnego rozwiązania równania  $\nabla^2\Phi = 0$  należy jeszcze mieć na uwadze, że zamiana  $\nu$  przez  $-\nu-1$ , która widocznie nie zmienia stałej  $\nu(\nu+1)$  prowadzi do nowej kombinacji. Nadto należy zauważyć, że tak znalezione rozwiązanie jest jeszcze nie zupełne, gdyż nie obejmuje jeszcze przypadku  $n=0$ ,  $\nu=0$ . Dołączmy przeto jako odpowiednią całkę szczególną  $\ln(y^2+z^2)$ , otrzymując na koniec

$$(166.22) \quad \begin{cases} \Phi = \sum_0^{\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} N_{n,\nu}(Ch a) [a_{n,\nu} N_{n,\nu}(\sin \beta) + b_{n,\nu} N_{n,-\nu-1}(\sin \beta)] \times \\ \times [c_n \sin(n\gamma) + d_n \cos(n\gamma)] + a_{0,0}(\ln Ch a - \ln \sin \beta). \end{cases}$$

Powtarzając się poniżej funkcję  $N_{0,-1}(Ch a) = \operatorname{arc\,ctg}(Sh a)$  oznaczmy krótko literą  $T$ .

Zę względu na zadanie B należy jeszcze wyrazić funkcje harmoniczne we współrzędnych biegunowych. Tą samą drogą, co w paragrafie poprzednim znajdujemy:

$$(166.23) \quad \nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( a^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \sin \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma^2} \right] = 0$$

jako postać równania Laplace'a, a rozwiązanie ogólne:

$$\begin{aligned} \Phi = \sum_0^{\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^\nu [a_{n,\nu} N_{n,\nu}(\sin \beta) + b_{n,\nu} N_{n,-\nu-1}(\sin \beta)] \times \\ \times [c_n \sin(n\gamma) + d_n \cos(n\gamma)] + a_{0,0} (\ln a + \ln \sin \beta). \end{aligned}$$

### § 167. Rozwiązanie jednego z zagadnień szczególnych Neuber'a.

Spośród ośmiu przypadków opracowanych wyczerpująco w przytoczonym rozdziale „Kerbspennungslehre” przedstawimy tutaj jeden, który wystarczy do wykazania jak cennym narzędziem teorii sprężystości jest funkcja naprężeń Neuber'a.

Niechaj pręt walcowy przykładu z § 165 będzie rozciągany lub ściskany siłą osiową  $P_x = P$ . Wtedy rów. (165.14) daje z uwzględnieniem związków

$$(167.1) \quad \begin{aligned} \cos(x, \alpha) = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial x}{\partial \alpha}, \quad \cos(y, \alpha) = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \cos(z, \alpha) = \frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial z}{\partial \alpha} \quad \text{itd.} \\ P = \int_F \int \left[ \frac{\sigma_\alpha}{h_\alpha} \frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\tau_{\alpha\beta}}{h_\beta} \frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\tau_{\alpha\gamma}}{h_\gamma} \frac{\partial x}{\partial \gamma} \right] h_\beta h_\gamma d\beta d\gamma, \end{aligned}$$

a z uwzględnieniem (165.1 i 2)

$$(167.2) \quad P = \int_F \int_0^{\beta_0} \int_0^{2\pi} [\sigma_x Ch a \cos \beta - \tau_{\alpha\beta} Sh a \sin \beta] Ch a \sin \beta \, d\beta \, d\gamma.$$

Wartość współrzędnej  $a$  cechującej przekrój  $a = \text{stałej}$ , na którego obszarze mamy całkować naprężenia, może być obrana dowolnie. Wartość całki musi być niezależna od  $a$ . Gdy np. przyjmiemy  $a \rightarrow \infty$ , to staje się  $Sh a = Ch a = \frac{1}{2} e^a = h$ , a całka przeistacza się na

$$(167.3) \quad P = \int_0^{\beta_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} e^{2a} (\sigma_\alpha \cos \beta - \tau_{\alpha\beta} \sin \beta) \sin \beta \, d\beta \, d\gamma.$$

Tutaj współrzędna  $a$  występuje tylko w postaci czynnika  $e^{2a}$ . Całka byłaby więc niezależna od  $a$  tylko pod warunkiem, że dla wielkich wartości  $a$  są naprężenia proporcjonalne do  $e^{-2a}$ . To zaś zajdzie, gdy funkcje zastosowane do zbudowania wyrażen dla naprężeń posiadają następujące najwyższe wartości  $\nu$ :

$$\nu = 0 \text{ we funkcji } \Phi_0 \quad \text{ i } \quad \nu = -1 \text{ we funkcji } \Phi_1.$$

Z symetrii obrotowej naszego zadania wynika niezależność od współrzędnej  $\gamma$ . Z tego wynika dalej, że funkcje  $\Phi_2$  i  $\Phi_3$  nie wchodzi w grę. We funkcjach  $\Phi_0$  i  $\Phi_1$  trzeba przy tym przyjąć  $n = 0$ .

W częściach składowych funkcji zależnych od  $\beta$  należy przyjąć albo  $a_{n,\nu}$ , albo też  $b_{n,\nu}$  równe zeru. Rozstrzygającym jest przy tym, że wewnątrz ciała, a w szczególności dla  $\beta = 0$  nie powinny występować żadne miejsca nieskończonościowe. Gdy ani w jednym, ani też w drugim przypadku nie da się uniknąć miejsca nieskończonościowego, to odpowiednia superpozycja obu przypadków prowadzi zawsze do celu.

Tutaj okazuje się dla  $n = 0$ ,  $\nu = 0$  przy uwzględnieniu (166.10) (postać  $a$ ) i (166.13) jako wyrażenie części odpowiednich

$$(167.4) \quad \left[ a_{0,0} + b_{0,0} \left( -i \ln \frac{\sin \nu}{1 + \cos \nu} + \frac{\pi}{2} \right) \right] d_0 + a_{0,0} (\ln Ch a + \ln \sin \beta).$$

Przy stosownym obiorze stałych  $\left( b_{0,0} = -\frac{2}{\pi} a_{0,0}, \quad d_0 = i \frac{\pi}{2} \right)$  można uzyskać funkcję

$$(167.5) \quad a_{00} [\ln Ch a + \ln (1 + \cos \beta)],$$

która dla  $\beta = 0$  nie ma już wcale miejsca nieskończonościowego.



Dla  $\nu = -2$  i  $\nu = -1$  unikamy miejsca nieskończonościowego przyjmując w każdym z tych przypadków  $a_{n,\nu} = 0$ . W ten sposób dochodzimy do zespołu funkcji

$$(167.6) \quad \begin{cases} \Phi_0 = A[\ln Ch a + \ln(1 + \cos \beta)] + B(Sh a \cdot T - 1) \cos \beta, \\ \Phi_1 = CT, \quad \Phi_2 = 0, \quad \Phi_3 = 0, \quad T = \text{arc ctg}(Sh a), \end{cases}$$

umożliwiającego ściśle rozwiązanie naszego zadania.

Funkcją naprężeń jest stosownie do (163.8):

$$(167.7) \quad F = A[\ln Ch a + \ln(1 + \cos \beta)] + B(Sh a \cdot T - 1) \cos \beta + C Sh a \cdot T \cos \beta.$$

W celu obliczenia naprężeń ustawimy najpierw wyrażenie dla  $\nabla^2 F$  według wz. (165.5) otrzymując

$$(167.8) \quad \nabla^2 F = -\frac{2C \cos \beta}{h^2}.$$

Przygotowując następnie wyrażenia z (165.4 i 6) opatrzone współczynnikiem  $1/h^2$ , które dają się skracać przez

$$Sh^2 a + \cos^2 \beta = Ch^2 a - \sin^2 \beta = h^2,$$

znajdujemy:

$$(167.9) \quad \begin{cases} \frac{1}{h^2} \left( Sh a Ch a \frac{\partial F}{\partial a} + \sin \beta \cos \beta \frac{\partial F}{\partial \beta} \right) = \\ = \frac{1}{h^2} [A + (B + C)(Sh a \cdot T - 1) \cos \beta] + \frac{\cos \beta}{h^2} (-A + B + C \cos^2 \beta), \\ \frac{1}{h^2} \left( Sh a Ch a \frac{\partial F}{\partial \beta} - \sin \beta \cos \beta \frac{\partial F}{\partial a} \right) = \\ = \frac{\sin \beta}{h^2} \left[ -A \frac{Tgh a}{1 + \cos \beta} + B(-Ch a \cdot T + Tgh a) - C Ch a \cdot T \right] + \\ + \frac{\sin \beta}{h^2} Tgh a (-A + B + C \cos^2 \beta). \end{cases}$$

Stąd uzyskujemy wzory dla naprężeń:

$$(167.10) \quad \begin{cases} \sigma_\alpha = \frac{1}{h^2} \left\{ A Tgh^2 a + B \frac{\cos \beta}{Ch^2 a} + C \left[ -2 - \lambda + \frac{1}{Ch^2 a} \right] \cos \beta \right\} + \\ + \frac{\cos \beta}{h^2} (-A + B + C \cos^2 \beta), \\ \sigma_\beta = \frac{1}{h^2} \left\{ -A \frac{\cos \beta}{1 + \cos \beta} + (\lambda - 1) C \cos \beta \right\} + \frac{\cos \beta}{h^2} (A - B - C \cos^2 \beta), \\ \sigma_\gamma = \frac{1}{h^2} \left\{ A \left( -Tgh^2 a + \frac{\cos \beta}{1 + \cos \beta} \right) - B \frac{\cos \beta}{Ch^2 a} + C \left( \lambda - 1 - \frac{1}{Ch^2 a} \right) \cos \beta \right\} \end{cases}$$

$$(167.11) \left\{ \begin{array}{l} \tau_{\alpha\beta} = \frac{Tgh \alpha \sin \beta}{h^2} \left\{ -\frac{A}{1 + \cos \beta} + (\lambda - 1)C + \right. \\ \left. + \frac{1}{h^2} (-A + B + C \cos^2 \beta) \right\} \\ \tau_{\beta\gamma} = \tau_{\gamma\alpha} = 0. \end{array} \right.$$

Pozostaje obliczyć stałe  $A, B, C$  z warunków brzegowych (165.12). Otrzymujemy łatwo

$$(167.12) \quad A = (\lambda - 1)(1 - \cos \beta_0)C, \quad B = A - C \cos^2 \beta_0.$$

Trzeciego warunku dostarczy całka (167.2), którą obliczymy najprościej dla przekroju  $\alpha = 0$ , gdzie  $h = \cos \beta$ , a zatem

$$(167.13) \left\{ \begin{array}{l} P = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\sigma_\alpha)_{\alpha=0} \sin \beta \cos \beta d\beta d\gamma = \\ = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{B - \lambda C}{\cos \beta} + \frac{B - A}{\cos^3 \beta} \right] \sin \beta \cos \beta d\beta d\gamma = \\ = 2\pi \left[ (B - \lambda C)(1 - \cos \beta_0) + (B - A) \left( \frac{1}{\cos \beta_0} - 1 \right) \right]. \end{array} \right.$$

Z uwzględnieniem zaś (167.12) znajdujemy:

$$(167.14) \quad P = 2\pi C(1 - \cos \beta_0)[-1 + (\lambda - 2) \cos \beta_0 - \cos^2 \beta_0].$$

Z powodu bezwymiarowości obranego układu współrzędnych trzeba tutaj zastąpić  $P$  wartością sprowadzoną do wymiaru naprężenia. Do tego nadaje się dobrze

$$(167.15) \quad \frac{P}{\pi a^2} = p,$$

tj. średnia wartość naprężenia w przekroju najwęższym o promieniu  $a$ , nazwana w badaniach wytrzymałościowych doświadczalnych przez A. Thum'a *naprężeniem nominalnym* (Nennspannung). Uwzględniając, że stosownie do (165.1) jest

$$(167.16) \quad a = \left( \sqrt{y^2 + z^2} \right)_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=\beta_0}} = \sin \beta_0,$$

napiszemy

$$(167.17) \quad P = p\pi \sin^2 \beta_0 = p\pi(1 - \cos \beta_0)(1 + \cos \beta_0),$$

a zatem z (167.14) otrzymujemy

$$(167.18) \quad C = -\frac{p}{2} \frac{1 + \cos \beta_0}{1 + (2 - \lambda) \cos \beta_0 + \cos^2 \beta_0}.$$

Z tymi wartościami stałych jest całkowity stan napięcia jednoznacznie określony.

W książce Neuber'a znajdzie czytelnik szczegółową dyskusję tego przypadku i wielu innych objaśnioną rysunkami i wykresami.

## XV. TEORIA PRĘTÓW SMUKŁYCH

§ 168. **Granice ścisłości rozwiązań rozdziału X. Przejście do prętów smukłych prostych.** W § 121 i następnych dowiedziono, że przy skręcaniu pręta prostego momentami działającymi na jego przekroje końcowe w sposób tam określony przedstawia energię sprężystą jednostki długości pręta o przekroju dowolnym wzór

$$(121.10) \quad V = \frac{1}{2} C \beta^2,$$

gdzie  $C$  oznacza sztywność skręcania określona wzorem (121.7), a  $\beta$  kąt skręcenia jednostki długości pręta. Odkształcenie pręta skręcanego jest wyznaczone wartością  $\beta$  podającą zarazem kąt względnego obrotu przekrojów odległych od siebie o 1, a nadto osią tego obrotu, czyli osią skręcenia, która nie schodzi się z linią środkową (zwaną także często *osią*, co może prowadzić do nieporozumień) tylko w przypadkach środkowej asymetrii postaci przekroju. W przypadkach przekroju symetrycznego skręcenie *nie wywołuje żadnego odkształcenia* linii środkowej. Natomiast zgięcie równomierne (§ 130) wywołuje *zakrzywienie* linii środkowej pręta czyli *zgięcie* tej linii (bez jej odkształcenia podłużnego), a energią sprężystą zginania określa wtedy ściśle wzór (130.3), z którego łatwo wywnioskować, że zgięcie momentem  $M$  działającym w płaszczyźnie głównej pręta powoduje zakrzywienie linii środkowej promieniem

$$(a) \quad \varrho = \frac{EJ}{M},$$

gdzie  $EJ \equiv B$  oznacza odpowiednią sztywność zginania.

W § 131 znaleziono w przypadku zgięcia nierównomiernego wzór (131.10), który określa analogicznie do (a) zakrzywienie linii środkowej pręta (również bez odkształcenia podłużnego) przy zgięciu w płaszczyźnie głównej. Napiszemy go tutaj w postaci

$$(b) \quad M = EJ \frac{d^2 y}{dx^2},$$

gdzie  $y$  oznacza rzędną punktu  $(x, 0, 0)$  osi pręta po zgięciu. Ponieważ  $d^2y/dx^2$  jest tutaj niczym innym jak tylko dozwolonym w teorii sprężystości przybliżeniem krzywizny  $1/\rho$ , przeto wnosimy, że i przy zgięciu nierównomiernym jest zakrzywienie linii środkowej określone ze ścisłością wystarczającą wzorem (a). Różnica zgięcia nierównomiernego polega jedynie na tym, że obok zakrzywienia linii środkowej zachodzi nadto jej pochylenie uwydatniające się wyrazem  $x(\partial\Phi_1/\partial y)_0$  w równaniu zgiętej osi (131.8) lub (131.8 a). Wpływ tego pochylenia na wartości rzędnych linii ugięcia jest, jak wynika z obliczeń w § 135-tym mniejszy im mniejsze są wymiary poprzeczne pręta w porównaniu do jego długości. W zagadnieniach konkretnych jest zatem ten wpływ godny uwzględnienia tylko przy obliczaniu ugięć prętów bardzo krępych. W prętach dostatecznie smukłych można go pominąć zupełnie.

Przechodząc teraz do zgięcia prętów pod obciążeniem rozmieszczonym dowolnie na długości pręta, można stwierdzić już na podstawie przypadków rozwiązanych ściśle, wymienionych na końcu § 135, że rów. (a) przestaje być ścisłym, a staje się tylko wzorem bardzo dobrego przybliżenia. Poza tym linia środkowa pręta, która przy zgięciu równomiernym i nierównomiernym leżała w jego *warstwie obojętnej*, nie doznawała więc odkształceń podłużnych, w innych przypadkach traci biorąc ściśle tę własność i np. przy zgięciu belki w obu końcach podpartej pod obciążeniem równomiernym powierzchni górnej wydłuża się nieco. Warstwa obojętna podnosi się w tym przypadku, co stwierdzono także badaniami elasto-optycznymi <sup>1)</sup>. Skoro więc w elementarnej teorii prętów (belek) stosowanej przez inżynierów od epoki poprzedzającej narodziny matematycznej teorii sprężystości przyjmuje się ważność równania (a) niezależnie od sposobu obciążenia i pomija się odchyłki powyżej wymienione, to popełnia się błędy mniejsze lub większe w zależności od rodzaju obciążenia i podparcia. Błędy te muszą jednakże być tym mniejsze, im cieńszy jest pręt w stosunku do odległości punktów podparcia lub obciążeń skupionych. Z tego wynika, że odkształcenie pręta niezmiernie cienkiego w równowadze da się ująć bardzo dokładnie we wzory teoretyczne przy założeniu, że do jego elementów długości stosują się wyniki teorii sprężystości z rozdz. X, przy czym przekroje końcowe elementu są obciążone siłami i momentami otrzymanymi przez redukcję obciążenia oddzielonej reszty pręta w jego położeniu równowagi.

<sup>1)</sup> I. H. Michell, Quart. J. of Math. t. 31 (1900).

L. N. G. Filon, Phil. Trans. Roy. Soc. (A), t. 201 (1903).

E. G. Coker, Edinb. Roy. Soc. Trans. t. 41 (1904).

Ten wniosek podyktowany przez intuicję kierowaną założeniem równań klasycznej teorii sprężystości, że przemieszczenia są tak małe iż podlegają zasadzie superpozycji, poparli ścisłymi wywodami analitycznymi de Saint-Venant, Boussinesq, Kirchhoff i Clebsch. A zatem chociaż przemieszczenia przy odkształceniu sprężystym prętów smukłych (cienkich) mogą być w granicach wymiaru ich długości dowolnie wielkie, to jednak w każdym elemencie pręta o długości tego samego rzędu co najmniejszy z jego wymiarów poprzecznych są względne przemieszczenia punktów materii pręta bardzo małe i spełniają bardzo dokładnie równania różniczkowe klasycznej teorii sprężystości w całym obszarze takiego elementu.

Gdy oprócz momentu zginającego i skręcającego jest przekrój obciążony siłą osiową i poprzeczną wynikającą z redukcji obciążeń po jednej stronie tego przekroju do jego środka, to odpowiedni element pręta doznaje odkształcenia podłużnego równomiernego określonego zupełnie wydłużeniem lub skróceniem  $\varepsilon$  linii środkowej, oraz nierównomiernego odkształcenia postaciowego uwarunkowanego siłą poprzeczną.

Energię sprężystą elementu o długości  $ds$  przy samym zginaniu ogólnym momentem  $M$ , którego składowymi prostopadłymi do płaszczyzn głównych pręta  $XY$  i  $XZ$  są  $M_y$  i  $M_z$ , wyrazi według wz. (130.3) równanie

$$dV = \left( \frac{1}{2} \frac{M_y^2}{B_y} + \frac{1}{2} \frac{M_z^2}{B_z} \right) ds,$$

gdzie  $B_y$  i  $B_z$  oznaczają odpowiednie sztywności zginania. Przy jednoczesnym działaniu siły osiowej  $N$  powstaje energia sprężysta

$$\frac{1}{2} \frac{N^2}{A} ds,$$

gdzie  $A = EF$  oznacza sztywność rozciągania lub ściskania pręta, a energia całkowita jest po prostu sumą obu powyższych, jak łatwo się przekonać obliczając

$$dV = ds \int \frac{\sigma^2}{2E} dF$$

po wyrażeniu  $\sigma$  przez momenty zginające i siłę osiową. Gdy nadto przybywa moment skręcający, to odpowiednią mu energię sprężystą określi stosownie do wz. (121.10) i związku

$$\beta = \frac{M_s}{C}$$

wzór

$$dV = \frac{1}{2} \frac{M_s^2}{C} ds.$$

To wyrażenie występuje jako nowy dodatek w przypadku złożonym, gdyż praca naprężeń stycznych przy odkształceniach podłużnych „włókien” pręta jest równa zero, a tylko przy odkształceniach postaciowych jest różna od zera. Możemy więc napisać, jak to uczynił najpierw de Saint-Venant

$$(168.1) \quad dV = \frac{1}{2} \left( \frac{M_s^2}{C} + \frac{M_y^2}{B_y} + \frac{M_z^2}{B_z} + \frac{N^2}{A} \right) ds,$$

jako wyrażenie energii sprężystej elementu pręta narażonego na skręcenie, zginanie i siłę osiową z pominięciem wpływu siły poprzecznej. Uwzględnienie siły poprzecznej skomplikowałoby bardzo sprawę obliczenia  $dV$ , albowiem naprężenia styczne od momentu skręcającego i siły poprzecznej sumują się w ten sposób, że oddzielnie obliczone energie sprężyste nie dają w sumie energii całkowitej. Drugą trudność stanowi w przypadku przekrojów niesymetrycznych to, że środek sztywności nie schodzi się ze środkiem przekroju do którego śprowadzamy siły zewnętrzne. Ta trudność odpada gdy przekrój jest symetryczny. Wtedy korzystamy z doświadczenia teoretycznego przy obliczeniach dokładnych w prostych przypadkach obciążenia, które wskazują, że na odkształcenie linii środkowej pręta smukłego mają wpływ największy momenty zgięcia i skręcenia a najczęściej bardzo nieznaczny siły osiowe i siły poprzeczne, wobec czego pominiemy je w teorii prętów smukłych.

Nie należy jednak zapominać, że w zastosowaniach technicznych napotykamy ważne zagadnienia prętów smukłych w których energia sprężysta odpowiadająca siłom osiowym gra rolę poważną i musi być uwzględniona, np. w teorii odkształcenia łuków, tj. prętów krzywych o bardzo małej strzałce. Ale to już wkracza w dziedzinę paragrafu następnego.

**§ 169. Przejście do prętów smukłych zakrzywionych.** Gdy linia środkowa pręta (o przekroju stałym) jest już w stanie pierwotnym nieobciążonym krzywą „gładką”, której promienie krzywizny są bardzo wielkie w porównaniu do wymiarów poprzecznych przekroju, to można oczywiście przyjąć w przybliżeniu, że elementy pręta o długości pierwotnej  $ds$  odkształcają się według tych samych praw

co elementy pręta prostego, a więc stosować bez zmiany wzór (168.1). Dla abstrakcyjnego pręta „nieskończenie cienkiego” (według nomenklatury Kirchoff’a) będzie to nawet wystarczająco ściśle także w przypadkach, gdy linia środkowa posiada skończoną ilość załomów między którymi jest krzywą gładką. W prętach pierwotnie zakrzywionych zmienia się tylko zależność krzywizny linii środkowej po odkształceniu od momentu zginającego przedstawiona dla pręta pierwotnie prostego wzorem

$$(a) \quad \varrho = \frac{EJ}{M}.$$

Ta zależność komplikuje się znacznie w przypadku ogólnym krzywej przestrzennej jako pierwotnej linii środkowej pręta. Kiedy jednakże płaszczyzna ściśle styczna tej krzywej jest zarazem płaszczyzną główną zginania, a para zginająca działa w tej płaszczyźnie, to zamiast równania (a) napisanego w postaci

$$(169.1) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ}$$

otrzymujemy

$$(169.2) \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ} = \Delta\kappa,$$

gdzie  $r$  jest pierwotnym promieniem krzywizny linii środkowej,  $\varrho$  promieniem krzywizny po jej odkształceniu, a  $\Delta\kappa$  zmianą krzywizny.

Kiedy natomiast para zginająca o momencie  $M'$  działa w płaszczyźnie prostopadłej do ściśle stycznej, to odróżniwszy kreskami drugi promień krzywizny napiszemy

$$(169.3) \quad \frac{1}{r'} - \frac{1}{\varrho'} = \frac{M'}{EJ'} = \Delta\kappa'.$$

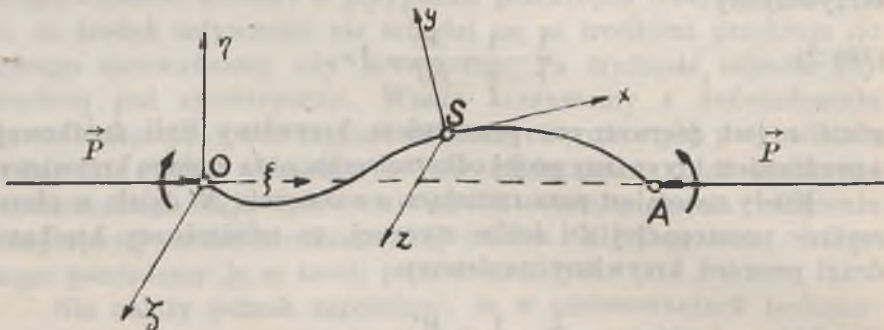
A zatem przy powyższym założeniu upraszczającym zmienia moment  $M$  tylko krzywiznę główną, a moment  $M'$  tylko krzywiznę drugą (torsję) na którą ma nadto wpływ moment skręcający.

Nie mogąc w ramach niniejszej książki pomieścić przypadku najogólniejszego rozpatrywanego najpierw przez de Saint-Venant’a (C. R. t. 17, 1843) zaznaczymy, że ten przypadek traktuje w sposób ściśle rozdz. XVIII podręcznika Love’a.

Proste uzasadnienie wzoru (169.2) stosowne i do wzoru (169.3) znajdzie czytelnik w § 188 „Stereom. Techn.” autora, gdzie w ciągu dalszym znajdują się rozwiązania ważnych przypadków szczególnych.

Na koniec zauważymy, że wzory teorii prętów cienkich wyprowadzone przy założeniu ich przekroju stałego stosuje się w praktyce także do prętów o przekroju zmiennym, oczywiście jako pierwsze przybliżenie. Wtedy sztywność zginania staje się funkcją miejsca na linii środkowej pręta, co komplikuje mocno rozwiązanie. Przybliżenie jakie osiągamy w ten sposób będzie oczywiście tym większe im łagodniejsze są zmiany przekroju pręta.

**§ 170. Pręty proste obciążone tylko na końcach.** Odnieśmy pręt w odkształconym położeniu równowagi (rys. 95) do nieruchomego układu współrzędnych  $\xi, \eta, \zeta$ , którego początkiem  $O$  jest jeden koniec linii środkowej pręta, a oś  $\xi$  ma kierunek wypadkowej  $\vec{P}$  obciążeń działających na koniec drugi  $A$ , a sprowadzających się do siły  $\vec{P}$  i pary o momencie  $\vec{M}$ . Położenie dowolnego przekroju poprzecznego pręta niech określa długość  $s$  łuku zakrzywionej linii środkowej od  $O$  do tego przekroju bez uwzględnienia wydłużeń lub skróceń sprężystych tej długości, jako mających bardzo nieznaczny wpływ na



Rys. 95.

postać równowagi pręta smukłego. Do zupełnego określenia położenia przekroju w punkcie  $S$  linii środkowej trzeba nadto podać kierunki  $y$  i  $z$  głównych osi bezwładności przekroju, tworzące wraz ze styczną  $x$  do linii środkowej w tymże punkcie układ prostokątny tego samego rodzaju co  $\xi, \eta, \zeta$  lecz poruszający się w przestrzeni ze zmianą położenia punktu  $S$ . Na część  $SA$  pręta odciętą przekrojem  $S$  działa nie zależnie od położenia  $S$  (przy założeniu wymienionym w nagłówku) ta sama siła wypadkowa  $\vec{P}$  i ten sam moment  $\vec{M}$ . Atoli przy reduckji do punktu  $S$  otrzymamy momenty zależne od położenia tego punktu. Niechaj  $M_x, M_y, M_z$  oznaczają składowe we-



która  $\vec{M}$  w kierunkach osi ruchomych  $x, y, z$ , których położenie względem układu  $\xi, \eta, \zeta$  określają dostawy kierunkowe według schematu

	$x$	$y$	$z$
$\xi$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$\eta$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
$\zeta$	$c_1$	$c_2$	$c_3$

Wtedy momentowe warunki równowagi dla przekroju w punkcie  $S(\xi, \eta, \zeta)$  prowadzą do równań

$$(170.1) \quad \begin{cases} a_1 M_x + a_2 M_y + a_3 M_z = \text{stałej } M_a \\ b_1 M_x + b_2 M_y + b_3 M_z + \zeta P = \text{stałej } M_b \\ c_1 M_x + c_2 M_y + c_3 M_z - \eta P = \text{stałej } M_c. \end{cases}$$

Różniczkowanie tych równań względem  $s$  daje

$$(170.2) \quad \begin{cases} a_1 \frac{dM_x}{ds} + a_2 \frac{dM_y}{ds} + a_3 \frac{dM_z}{ds} + \frac{da_1}{ds} M_x + \frac{da_2}{ds} M_y + \frac{da_3}{ds} M_z = 0 \\ b_1 \frac{dM_x}{ds} + b_2 \frac{dM_y}{ds} + b_3 \frac{dM_z}{ds} + \frac{db_1}{ds} M_x + \frac{db_2}{ds} M_y + \frac{db_3}{ds} M_z + \frac{d\zeta}{ds} P = 0 \\ c_1 \frac{dM_x}{ds} + c_2 \frac{dM_y}{ds} + c_3 \frac{dM_z}{ds} + \frac{dc_1}{ds} M_x + \frac{dc_2}{ds} M_y + \frac{dc_3}{ds} M_z - \frac{d\eta}{ds} P = 0. \end{cases}$$

Z równań tych otrzymujemy po pomnożeniu kolejno przez  $a_1, b_1, c_1$ , potem przez  $a_2, b_2, c_2$ , a wreszcie przez  $a_3, b_3, c_3$  i dodaniu za każdym razem wszystkich trzech, równania, które z uwzględnieniem, że różniczkowanie związku  $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1$  daje  $a_i da_i + b_i db_i + c_i dc_i = 0$ , mają postać:

$$(170.3) \quad \begin{cases} \frac{dM_x}{ds} + M_y \left( a_1 \frac{da_2}{ds} + b_1 \frac{db_2}{ds} + c_1 \frac{dc_2}{ds} \right) + \\ \quad + M_z \left( a_1 \frac{da_3}{ds} + b_1 \frac{db_3}{ds} + c_1 \frac{dc_3}{ds} \right) + \left( b_1 \frac{d\zeta}{ds} - c_1 \frac{d\eta}{ds} \right) P = 0 \\ \frac{dM_y}{ds} + M_x \left( a_2 \frac{da_1}{ds} + b_2 \frac{db_1}{ds} + c_2 \frac{dc_1}{ds} \right) + \\ \quad + M_z \left( a_2 \frac{da_3}{ds} + b_2 \frac{db_3}{ds} + c_2 \frac{dc_3}{ds} \right) + \left( b_2 \frac{d\zeta}{ds} - c_2 \frac{d\eta}{ds} \right) P = 0 \\ \frac{dM_z}{ds} + M_x \left( a_3 \frac{da_1}{ds} + b_3 \frac{db_1}{ds} + c_3 \frac{dc_1}{ds} \right) + \\ \quad + M_y \left( a_3 \frac{da_2}{ds} + b_3 \frac{db_2}{ds} + c_3 \frac{dc_2}{ds} \right) + \left( b_3 \frac{d\zeta}{ds} - c_3 \frac{d\eta}{ds} \right) P = 0. \end{cases}$$

Ale

$$\frac{d\zeta}{ds} = c_1, \quad \frac{d\eta}{ds} = b_1, \quad \text{a zatem} \quad b_1 \frac{d\zeta}{ds} - c_1 \frac{d\eta}{ds} = 0.$$

Dalej jest

$$b_2 \frac{d\zeta}{ds} - c_2 \frac{d\eta}{ds} = b_2 c_1 - b_1 c_2 = -a_3$$

$$b_3 \frac{d\zeta}{ds} - c_3 \frac{d\eta}{ds} = b_3 c_1 - b_1 c_3 = a_2,$$

co wynika ze związków między wektorami jednostkowymi na jednej z osi  $x, y, z$  przedstawionymi przez wektory jednostkowe  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  na osiach  $\xi, \eta, \zeta$  a takimiż wektorami na dwu innych osiach. Związki te wyrażają po prostu, że wektor na osi  $x$  np. jest iloczynem wektorowym wektorów leżących na osiach  $y$  i  $z$  itd. czyli:

$$a_1 \vec{i} + b_1 \vec{j} + c_1 \vec{k} = (b_2 c_3 - b_3 c_2) \vec{i} + (c_2 a_3 - a_2 c_3) \vec{j} + (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{k}$$

$$a_2 \vec{i} + b_2 \vec{j} + c_2 \vec{k} = (b_3 c_1 - b_1 c_3) \vec{i} + (c_3 a_1 - a_3 c_1) \vec{j} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{k}$$

$$a_3 \vec{i} + b_3 \vec{j} + c_3 \vec{k} = (b_1 c_2 - b_2 c_1) \vec{i} + (c_1 a_2 - a_1 c_2) \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}.$$

Wreszcie wyrażenia różniczkowe występujące jako współczynniki przy  $M_x, M_y$  i  $M_z$  dają się przekształcić w sposób następujący:  $a_1 da_2 + b_1 db_2 + c_1 dc_2 = a_1(a_2 + da_2) + b_1(b_2 + db_2) + c_1(c_2 + dc_2)$ .

To przedstawia widocznie cosinus kąta zawartego między kierunkiem osi  $x$  w punkcie  $S$  o współrzędnej  $s$  i  $u$ kowej  $s$ , a kierunkiem osi  $y$  w punkcie  $S'$  o współrzędnej  $s + ds$ . Ten kąt jest o  $d\vartheta_z$  mniejszy od  $\pi/2$ , przy czym  $d\vartheta_z$  jest z pominięciem małych rzędu wyższego równe kątowi obrotu płaszczyzny przekroju  $YZ$  około osi  $z$ . Jego cosinus staje się przeto równe  $-\sin d\vartheta_z$ , czyli z pominięciem małych rzędu wyższego  $-d\vartheta_z$ , co napiszemy w postaci  $-d\vartheta_z = \kappa_z ds$ . Podobnie

$$a_1 \frac{da_3}{ds} + b_1 \frac{db_3}{ds} + c_1 \frac{dc_3}{ds} = + \frac{d\vartheta_y}{ds} = \kappa_y$$

określa kąt obrotu płaszczyzny przekroju  $yz$  względem osi  $y$ . Dalej znajdujemy:

$$(170.4) \quad \begin{cases} a_2 \frac{da_1}{ds} + b_2 \frac{db_1}{ds} + c_2 \frac{dc_1}{ds} = +\kappa_z \\ a_2 \frac{da_3}{ds} + b_2 \frac{db_3}{ds} + c_2 \frac{dc_3}{ds} = -\frac{d\vartheta_x}{ds} = -\beta \\ a_3 \frac{da_1}{ds} + b_3 \frac{db_1}{ds} + c_3 \frac{dc_1}{ds} = -\kappa_y \\ a_3 \frac{dc_2}{ds} + b_3 \frac{db_2}{ds} + c_3 \frac{dc_2}{ds} = \beta. \end{cases}$$

Znaczenie parametrów  $\kappa_y, \kappa_z$  i  $\beta$  wychodzi na jaw z rozważania następującego: Wyobraźmy sobie, że kolejne położenia trójkątności  $x, y, z$  powstają przez jego ruch taki, że wierzchołek opisuje łuk  $s$  linii środkowej pręta odkształconego z prędkością równą 1. Wtedy ten trójkąt posiadać będzie oprócz tej prędkości jako prędkości ruchu postępowego także prędkość kątową obrotu, której wektor rozłożymy na trzy składowe o kierunkach osi  $x, y, z$ , jako osi chwilowych. Składowe obroty około osi  $y$  i  $z$  wyznaczają krzywizny rzutów odkształconej linii środkowej na płaszczyzny  $xy$  i  $xz$  wyznaczone według teorii zgięcia wartościami  $M_y/B_y = 1/\varrho_y = \kappa_y$  i  $M_z/B_z = 1/\varrho_z = \kappa_z$ . Obrót składowy około osi  $x$  wyznacza *kąt skręcenia* na jednostkę długości, (ang. „twist”) oznaczony w rozdz. X przez  $\beta$ , przy czym  $\beta = M_x/C$ . Wobec tego wyrażenie energii sprężystej można napisać w postaci

$$(170.5) \quad dV = \frac{1}{2}(B_y \kappa_y^2 + B_z \kappa_z^2 + C\beta^2 + A\varepsilon^2)ds,$$

gdyż  $\varepsilon = N/A$ . Ale z geometrii różniczkowej wiadomo, że krzywizna główna  $\kappa = 1/\varrho$  da się przedstawić wzorem

$$(170.6) \quad \kappa^2 = \left(\frac{da_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{da_2}{ds}\right)^2 + \left(\frac{da_3}{ds}\right)^2,$$

ponieważ  $a_1, a_2, a_3$  są dostawami kierunkowymi stycznej do krzywej względem osi stałych  $\xi, \eta, \zeta$ . Zarazem jest

$$\kappa^2 = \kappa_y^2 + \kappa_z^2, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_y^2} + \frac{1}{\varrho_z^2}.$$

Po wstawieniu obliczonych powyżej wartości w rów. (170.3) otrzymamy

$$(170.7) \quad \begin{cases} \frac{dM_x}{ds} - \kappa_z M_y + \kappa_y M_z = 0 \\ \frac{dM_y}{ds} + \kappa_z M_x - \beta M_z - a_3 P = 0 \\ \frac{dM_z}{ds} - \kappa_y M_x + \beta M_y + a_2 P = 0. \end{cases}$$

Z rów. (170.5) napisanego w postaci

$$\Phi = \frac{dV}{ds} = \frac{1}{2}(B_y \kappa_y^2 + B_z \kappa_z^2 + C\beta^2)$$

z pominięciem bardzo małego wyrazu  $A\varepsilon^2$  znajdujemy

$$(170.8) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_y} = B_y \kappa_y = M_y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_z} = M_z, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = M_x = M_x,$$

wobec czego równania różniczkowe równowagi pręta smukłego pierwotnie prostego i obciążonego tylko na końcach przyjmą postać

$$(170.9) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \right) = \kappa_z \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_y} - \kappa_y \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_z} \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_y} \right) = \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_z} - \kappa_z \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + a_3 P \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_z} \right) = \kappa_y \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} - \beta \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa_y} - a_2 P. \end{cases}$$

§ 171. Analogia kinetyczna Kirchhoff'a <sup>1)</sup>. Gdy w wyprowadzonych powyżej równaniach różniczkowych zastąpimy zmienną niezależną  $s$  przez czas  $t$ , energię potencjalną  $\Phi$  przez energię kinetyczną ciała sztywnego poruszającego się dokoła punktu stałego (bąk), zaś siłę  $P$  przez iloczyn ciężaru ciała  $G$  i odległości  $h$  jego środka ciężkości  $C$  od punktu  $O$ , przy czym oś  $x$  układu ruchomego leży na prostej  $CO$ , to otrzymamy Eulerowskie równania ruchu tego ciała <sup>2)</sup>. Styczna, normalna główna i binormalna odkształconej linii

<sup>1)</sup> Crelle's Jour. f. Math. t. 56 (r. 1859).

<sup>2)</sup> Ob. w Mechanice Ogólnej i Technicznej autora wzory (207.4), które w przypadku powyższym przy uzgodnieniu umowy co do zwrotu dodatniego wektorów  $\vec{\omega}_i$  i  $\vec{M}_i$  z przyjętą powyżej mają postać

$$\begin{aligned} \frac{d(J_1 \omega_1)}{dt} &= -\omega_2 (J_3 \omega_3) + \omega_3 (J_2 \omega_2) \\ \frac{d(J_2 \omega_2)}{dt} &= -\omega_3 (J_1 \omega_1) + \omega_1 (J_3 \omega_3) + a_3 Gh \\ \frac{d(J_3 \omega_3)}{dt} &= -\omega_1 (J_2 \omega_2) + \omega_2 (J_1 \omega_1) - a_2 Gh. \end{aligned}$$

Tutaj oznaczają  $J_1, J_2, J_3$  główne momenty bezwładności względem osi  $x, y, z$  układu współrzędnych związanego z ciałem o początku w środku kręcenia się  $O$ , przy czym oś  $x$  przechodzi przez środek ciężkości  $C$ . Ponieważ energię kinetyczną ciała przedstawia wzór

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega_3^2,$$

przeto

$$I_1 \omega_1 = \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \quad \text{itd.},$$

a równania ruchu można napisać w postaci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_1} \right) &= \omega_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} - \omega_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_3}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_2} \right) &= \omega_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_3} - \omega_3 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} + a_3 Gh, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \omega_3} \right) &= \omega_2 \frac{\partial T}{\partial \omega_1} - \omega_1 \frac{\partial T}{\partial \omega_2} - a_2 Gh, \end{aligned}$$

która uwydatnia najwyraźniej analogię Kirchhoff'a.

środkowej pręta odpowiadają głównym osiom bezwładności ciała kręcącego się. Kątem skreślenia i zginania około wymienionych osi odpowiadają prędkości kątowe.

Dzięki temu, że wymienione zagadnienie kinetyczne było traktowane i w przypadkach prostszych zupełnie rozwiązane, zanim się wyłoniła potrzeba rozwiązania zadania elastostatycznego z § 169, można przy pomocy analogii Kirchhoffa napisać od razu odpowiednie rozwiązania tego zadania. Gdy bowiem znamy równania ruchu ciała ciężkiego kręcącego się dokoła punktu stałego w postaci skończonej, to zastępując w rozwiązaniu  $t$  przez  $s$  itd. napiszemy wyrażenia dla współrzędnych punktów odkształconej linii środkowej pręta — zwanej w tych przypadkach tradycyjnie „elastyką” — w postaci

$$\xi = \int a_1 ds, \quad \eta = \int b_1 ds, \quad \zeta = \int c_1 ds.$$

Oto niektóre przypadki najprostsze:

a) Pręt obciążony tylko parami sił na obu końcach. Odpowiada mu bezwładnościowy ruch ciała około swego środka masy. Gdy w szczególności jest elipsa bezwładności przekroju pręta kołem, to postacią równowagi jest krzywa o krzywiznie stałej, tj. linia śrubowa o osi równoległej do wektorów momentu par obciążających końce. Jako przypadek szczególny, gdy siły obu par leżą w jednej płaszczyźnie, otrzymujemy łuk koła jako postać równowagi, co jest oczywistością.

b) Gdy centralna elipsoida bezwładności ciała jest obrotowa, a na tej osi obrotu leży punkt stały w odległości  $a$  od środka masy, przy czym ciało otrzymało początkową prędkość kątową około osi poziomej z położenia równowagi w polu siły ciężkości, to mamy do czynienia z ruchem „wahadła fizycznego”. Temu odpowiada zgięcie pręta bez skreślenia w jednej z jego płaszczyzn głównych, tej mianowicie, w której sztywność zginania jest najmniejsza. Równowaga jest matematycznie możebna i w płaszczyźnie sztywności największej, ale jej stateczność jest zapewniona tylko w przypadku poprzednim. To zadanie rozwiązali już Lagrange i Euler. Ten ostatni poddał je dyskusji szczegółowej znajdując 9 typów „elastyk”. Jeden z nich praktycznie najważniejszy traktują wyczerpująco §§ 277 i 278 „Stereomechaniki Technicznej” autora, posługując się analogią z wahadłem. Unikając powtarzań ograniczymy się tutaj do objaśnień i rozważań uzupełniających.

**§ 172. Dziewięć typów elastyk Eulera.** Przy rozwiązywaniu zadania Lagrange’a i Eulera w przytoczonych miejscach Stereomechaniki Technicznej przyjęto ze względu na związek z teorią wy-

boczenia, że jeden koniec  $O$  pręta jest utwierdzony pionowo, a drugi swobodny obciążony środkowo siłą  $P$ . To rozwiązanie załatwia zarazem przypadek obciążenia obu swobodnych końców siłami ściskającymi  $P, -P$ , przy czym obok prostej postaci równowagi możliwej statycznie przy każdej wartości  $P$  (w granicach sprężystości) otrzymujemy nieskończenie wiele postaci zakrzywionych, których równania zawierają funkcje lub całki eliptyczne dające się tylko przy małych krzywiznach, a zarazem małych wartościach  $P$  (praktycznie najważniejszych) zastąpić w przybliżeniu wystarczającym funkcjami goniometrycznymi.

Ponieważ w tym przypadku postać równowagi musi być krzywą płaską leżącą w płaszczyźnie głównej zginania np.  $XY$ , przeto,  $M_y = 0$ ,  $M_x = \partial\Phi/\partial\beta = 0$ ,  $a_3 = 0$ ,  $z_y = 0$ ,  $\beta = 0$ , a więc z równań ogólnych pozostaje tylko trzecie w postaci

$$(172.1) \quad \frac{dM_x}{ds} = P \sin \varphi,$$

albowiem  $a_2 = \cos(y, \xi) = -\sin(x, \xi) = -\sin \varphi$ .

Ze względu, że

$$M_x = \frac{B_x}{q_x} = -B_x \frac{d\varphi}{ds}$$

(znak — dlatego, ponieważ moment rośnie, gdy  $\varphi$  maleje), napiszemy

$$(172.2) \quad B \frac{d^2\varphi}{ds^2} + P \sin \varphi = 0,$$

jako równanie różniczkowe odkształconej linii środkowej, całkowne jak wiadomo *funkcjami eliptycznymi*.

Tę samą postać ma równanie ruchu wahadła

$$(172.3) \quad L \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \sin \varphi = 0,$$

gdzie  $L$  jest długością sprowadzoną wahadła fizycznego.

Pierwszą całką jest

$$(172.4) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \frac{P}{B} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) = 0.$$

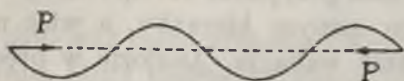
Tutaj  $\varphi_0$  jest kątem między styczną do wygiętej linii środkowej, a osią  $\xi$  równoległą do prostej łączącej oba końce pręta. Temu odpowiada w wahadle amplituda kąta odchylenia. Z dyskusji rozwiązania, którego tutaj nie wyprowadzamy, gdyż otrzymuje się tą samą drogą co wspomniane powyżej, wynika że różne typy krzywych zależą od wartości  $\varphi_0$  i tak:

1.  $\varphi_0 = 0$  odpowiada prostej postaci równowagi.

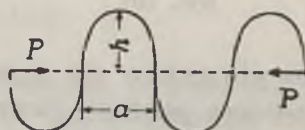
2.  $\varphi_0 < 90^\circ$  (rys. 96 a). Krzywa złożona z dowolnej liczby półfal przypominających sinusoidę, w którą przechodzi dla bardzo małych wartości  $\varphi_0$ .

3.  $\varphi_0 = 90^\circ$ . Przypadek szczególny, gdy styczne w punktach przegięcia są prostopadłe do kierunku sił (rys. 96 b), wtedy jest  $h = 0,8348 a$ , a długość łuku półfali

$$s = \frac{h^2}{a} \pi = 2,18121 a.$$

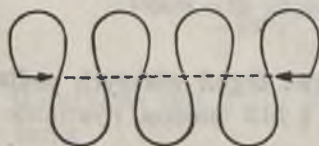


Rys. 96 a.

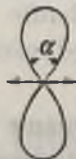


Rys. 96 b.

4.  $90^\circ < \varphi_0 < 130^\circ 41'$  (rys. 97). Krzywa składa się z jednakowych pętli, które zbliżają się do siebie, dotykają i przecinają w miarę wzrostu  $P$ . Przypadek przecinania jest oczywiście abstrakcją mate-



Rys. 97.

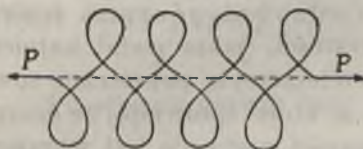


$$\alpha = 81^\circ 22'$$

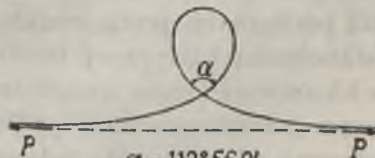
Rys. 98.

matyczną zrozumiałą przy znikających wymiarach poprzecznych pręta przy zachowaniu sztywności zgięcia sprężystego;

5.  $\varphi_0 = 130^\circ 41'$ . Oba końce pręta schodzą się tworząc kąt krzyżowania  $\alpha = 81^\circ 22'$  (rys. 98);



Rys. 99.



$$\alpha = 112^\circ 56,8'$$

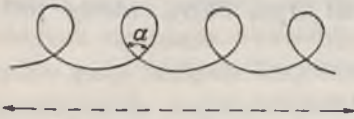
Rys. 100.

6.  $130^\circ 41' < \varphi_0 < 180^\circ$  (rys. 99). Z wzrostem  $P$  końce się oddalają, a kąty skrzyżowania pętli mają wartości leżące między  $81^\circ 22'$  a  $112^\circ 56,8'$ ;

7.  $\varphi_0 = 180^\circ$  (rys. 100). Krzywa tworzy jedną pętlę o gałęziach rozciągających się w obie strony do nieskończoności i zbliżających się asymptotycznie do jednej prostej.

Odpowiednie wahadło wykonywa tylko jeden pełny obrót ze stanu spoczynku w położeniu najwyższym środka ciężkości, osiągnąjąc to położenie na powrót po czasie  $T = \infty$ .

8. (Rys. 101). Szereg dowolnej liczby pętli jednostronnych wymagający na każdym z końców siły i pary sił równoważnych statycznie siły działającej wzdłuż osi  $\zeta$  nie przecinającej nigdzie pręta, a tylko równoległej do wspólnej stycznej wszystkich pętli. Kąty w miejscach skrzyżowania  $> 112^\circ 56,8'$ .



Rys. 101.

Temu przypadkowi odpowiada wahadło obracające się stale w tym samym kierunku, a więc nie wykazujące punktów zwrotu jak przy wahaniu. Analogię w pręcie stanowi brak punktów przegięcia w krzywej postaci równowagi.

9. Kąt  $\alpha$  w miejscach skrzyżowania postaci (8) zdąża do  $180^\circ$ , a pętle zdążają do nakrycia się nawzajem, gdy siły  $P$  oddalają się wraz z osią  $\zeta$  do nieskończoności zdążając zarazem do zera tak, że powstają tylko pary sił. Każda pętla staje się kolem ( $d\varphi/ds = \text{stałe}$ ). Analogiczne wahadło ma środek ciężkości na osi obrotu, a więc obraca się z prędkością kątową  $d\varphi/dt = \text{stałe}$ .

§ 173. Równanie różniczkowe drgań własnych podłużnych prętów prostych. Jak zaznaczono w § 143 można równanie różniczkowe

$$(173.1) \quad (143.1) \quad \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

( $u$  przemieszczenie podłużne,  $\mu$  gęstość,  $E$  moduł sprężystości), wyprowadzone dla drgań podłużnych cięga traktowanego jako kontinuum liniowe, uważać za dostatecznie przybliżone równanie drgań podłużnych pręta smukłego. Do ustawienia równania ścisłego ze stanowiska klasycznej teorii sprężystości, jakie podał najpierw Pochhammer trzeba uwzględnić przemieszczenia poprzeczne towarzyszące przemieszczeniom podłużnym  $u$ , które sprawiają, że energia kinetyczna odniesiona do jednostki długości pręta nie jest wyrażona ściśle przez  $\frac{1}{2} \mu F \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$ , lecz winna być obliczona z uwzględnieniem przemieszczeń  $v$  i  $w$  w kierunkach osi  $Y$  i  $Z$  o początku w środku przekroju  $C$ , a więc prostopadłych do  $u$ . Te przemieszczenia są określone wyrażeniami

$$v = -\nu y \frac{\partial u}{\partial x}, \quad w = -\nu z \frac{\partial u}{\partial x}.$$



Odpowiednimi składowymi prędkości są

$$-vy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad -vz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t},$$

kwadratem prędkości wypadkowej jest  $v^2(y^2 + z^2) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2$ .

Mnożąc przez element pola przekroju  $dF$ , przez gęstość  $\mu$ , jednostkę długości i całkując na cały przekrój otrzymujemy dla energii kinetycznej dodatkowej wyrażenie

$$\frac{1}{2} \mu v^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 \int (y^2 + z^2) dF,$$

a ponieważ całka przedstawia biegunowy moment bezwładności przekroju, który można wyrazić iloczynem  $F \rho^2$ , przeto całkowita energia kinetyczna odniesiona do jednostki długości pręta jest równa

$$(173.2) \quad \frac{1}{2} \mu F \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + v^2 \rho^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 \right].$$

Energia potencjalną jest energia sprężysta, która jest widocznie równa

$$(173.3) \quad \frac{1}{2} EF \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Zasada Hamiltona (ob. § 216 Mechaniki Ogólnej i Technicznej autora) daje teraz

$$(173.4) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \mu F \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + v^2 \rho^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 \right\} - \frac{1}{2} EF \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0,$$

z czego wyprowadzimy równanie ruchu, pisząc najpierw

$$(173.5) \quad \frac{1}{2} \mu F \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + v^2 \rho^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx - \frac{1}{2} EF \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Po stronie prawej tego równania mamy

$$\delta \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = 2 \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \delta \frac{du}{dx} dx = 2 \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx.$$

Wykonawszy całkowanie przez części wyrażenia ostatniego znajdujemy

$$2 \int_0^l \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x} dx = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \Big|_{x=0}^{x=l} - 2 \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \delta u \cdot dx.$$

Tutaj znika pierwszy wyraz po prawej albowiem w przypadku ustalenia końca pręta jest  $\delta u = 0$ , a w przypadku końca swobodnego (nie obciążonego) jest  $\partial u / \partial x = 0$ . A zatem

$$\frac{1}{2} E F \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta \int_0^l \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = - E F \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \delta u dx.$$

Biorąc teraz wariację lewej strony równania (173.5) otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mu F \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta \int_0^l \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + v^2 \rho^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx = & \frac{1}{2} \mu F \left[ 2 \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial t} dx + \right. \\ & \left. + 2 \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l v^2 \rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t} dx \right] = \mu F \int_0^l dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial t} dt + \\ & + \mu F v^2 \rho^2 \int_0^l dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t} dt. \end{aligned}$$

Całkując przez części względem  $t$  znajdujemy w ciągu dalszym z wyrazu pierwszego

$$\mu F \int_0^l dx \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \delta u \right]_{t_0}^{t_1} - \mu F \int_0^l dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u \cdot dt = A - B,$$

gdzie  $A$  jest równe zeru w myśl zasady Hamiltona, a zostaje tylko  $-B$ . Wyraz drugi przekształcimy korzystając z łatwej do sprawdzenia tożsamości

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t} = & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t^2} \delta u + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t^2} \delta u \right) + \\ (173.6) \quad & + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t} \delta u \right). \end{aligned}$$

Napiszemy więc

$$\begin{aligned} (173.7) \quad \int_0^l dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x \partial t} dt = & \int_0^l dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t^2} \delta u dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t^2} \delta u \right]_{x=0}^{x=l} + \frac{1}{2} \int_0^l dx \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \cdot \frac{\partial \delta u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial t} \delta u \right]_{t_0}^{t_1}. \end{aligned}$$

Ostatnie dwie całki znikają z powodów wyżej wymienionych, wobec czego równanie Hamiltona przybiera postać

$$(173.8) \quad \mu F v^2 \rho^2 \int_0^l dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \cdot \delta u \cdot dt - \mu F \int_0^l dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u dt + \\ + EF \int_0^l dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \delta u \cdot dt = 0,$$

czyli

$$(173.9) \quad \int_0^l dx \int_{t_0}^{t_1} \left( \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu v^2 \rho^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \delta u \cdot dt = 0.$$

Aby to równanie było spełnione przy każdej wartości  $\delta u$  musi być

$$(173.10) \quad \boxed{\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \rho^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right) = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}},$$

co przedstawia szukane równanie różniczkowe drgań podłużnych własnych pręta, które się różni od wyprowadzonego w § 145 wyrazem  $v^2 \rho^2 \partial^4 u / \partial x^2 \partial t^2$ . Wyraz ten ma wartość tym mniejszą wobec  $\partial^2 u / \partial t^2$  im pręt jest cieńszy<sup>1)</sup>.

Zaznaczymy jeszcze, że w wywodzie równania różniczkowego przyjęto takie obciążenie względnie ustalenie pręta, które nie zmienia jego postaci geometrycznej przed powstaniem drgań. Warunki odpowiednie zachodzą z wielkim przybliżeniem, gdy pręt wisi pionowo w polu ciężkości lub pływa na cieczy. Ale i w przypadkach innych położen pręta można stosować to równanie jeżeli tylko ciężar własny pręta nie powoduje jego ugięć godnych uwagi. Drgania pręta smukłego ujmuje ze ścisłością wystarczającą równanie przybliżone, którego rozwiązanie podaje wz. (143.12) w przypadku ustalenia obu końców pręta. Gdy jednakże jeden lub oba końce są swobodne, to rozwiązanie będzie miało postać inną z powodu odmiennych warunków brzegowych.

<sup>1)</sup> W przekładzie niemieckim dzieła Love'a jest w tym równaniu wydrukowane błędnie  $\sigma \kappa^2$  zamiast  $\sigma^2 \kappa^2$ , przy czym tam oznacza  $\sigma$  liczbę Poissona, a  $\kappa$  promień bezwładności przekroju względem osi  $x$  (nasze  $\nu$  i  $\rho$ ). C. Schaefer, który w II wyd. tomu 1, „Einführung in die theor. Physik“ opiera wywód równania różniczkowego drgań podłużnych pręta na zasadzie Hamiltona, otrzymuje tylko równanie przybliżone, gdyż nie uwzględnia przemieszczeń poprzecznych.

§ 174. Drgania własne pręta o końcach swobodnych. Zanim przejdziemy do rozpatrywania tego przypadku, powrócimy jeszcze do rozwiązania poprzedniego, aby je oświetlić poniżej ze stanowiska nowszego matematycznego. Pomnąc że równanie różniczkowe

$$(143.3) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

zachowuje swą postać zarówno dla drgań podłużnych i skrętnych prętów, jakoteż dla takichże drgań napiętych cięgien (strun), a nadto dla drgań poprzecznych strun, przy czym każdemu z tych zagadnień odpowiada stosowna wartość parametru  $a$  określającego prędkość przenoszenia się drgań od przekroju do przekroju, czyli prędkość rozchodzenia się fali wzdłuż pręta lub cięgna, weźmy pod uwagę rozwiązanie ogólne z § 143, tj.

$$\zeta = \sum_{k=1}^{k=\infty} B_k \sin \frac{k\pi x}{l} \cos (\omega_k t + a_k),$$

gdzie

$$\omega_k = a \frac{k\pi}{l}.$$

To rozwiązanie znalezione najpierw przez Daniela Bernoulli'ego w r. 1753 zawiera parametry nieoznaczone  $B_k$  i  $a_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$ ) w ilości nieskończenie wielkiej, co przy założeniu zbieżności, która dopiero zapewnia istnienie funkcji  $\zeta(x, t)$  mogącej uczynić zadość warunkom brzegowym zagadnienia, odpowiada dwom funkcjom dowolnym  $F$  i  $G$  w rozwiązaniu (§ 146)

$$\zeta = \frac{1}{2} F(x + at) + \frac{1}{2} F(x - at) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} G(z) dz$$

podanym już w r. 1747 przez d'Alembert'a. Ta równoważność obu rozwiązań, której dowód znajdzie czytelnik w odsyłaczu do § 253 Stereomechaniki Techn. autora, jest w ścisłym związku z zagadnieniem rozwijalności funkcji dowolnej spełniającej dane równanie różniczkowe według tzw. funkcj *własnych* (swoistych) zagadnienia odnośnego wartości brzegowych.

Szukajmy ponownie rozwiązania ogólnego równania (143.3) postawiwszy sobie pytanie, czy to rozwiązanie może mieć postać iloczynową z funkcji samej  $t$  i funkcji samej  $x$ :

$$(174.1) \quad \zeta(x, t) = \varphi(t)\psi(x).$$

Po wstawieniu w rów. różniczkowe (143.3) otrzymujemy

$$(174.2) \quad \psi(x) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = a^2 \varphi(t) \frac{d^2 \psi}{dx^2},$$

co się da wyrazić jako iloczyn równań następujących:

$$(174.3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \varphi(t)}{dt^2} = -a^2 c^2 \varphi(t) \\ \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = -c^2 \psi(x), \end{cases}$$

gdzie  $c$  jest parametrem na razie nieoznaczonym.

Warunki brzegowe są w naszym przypadku końców swobodnych pręta (jeżeli wprowadzimy napowrót  $u$  jako przemieszczenie podłużne):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{dla } x = 0 \quad \text{i} \quad x = l \quad (\text{długość pręta}).$$

Podstawiawszy znane całki ogólne równań powyższych (174.3) w rów. (174.1), znajdziemy jako całkę szczególną

$$(174.4) \quad u = (A \sin act + B \cos act) (C \cos cx + D \sin cx),$$

gdzie  $A, B, C, D$  są stałymi całkowania.

Z warunków brzegowych wynika

$$D = 0 \quad \text{i} \quad Cc \sin cl = 0.$$

Ten drugi warunek spełnia się przy różnej od zera wartości stałej  $C$  tylko dla

$$c = 0, \quad \frac{\pi}{l}, \quad \frac{2\pi}{l}, \quad \frac{3\pi}{l}, \dots, \quad \frac{m\pi}{l}, \dots$$

tj. dla tzw. „wartości własnych” zagadnienia brzegowego. Każdej wartości własnej odpowiada całka szczególna o postaci

$$u = \left( A_m \sin a \frac{m\pi}{l} t + B_m \cos a \frac{m\pi}{l} t \right) C \cos \frac{m\pi}{l} x,$$

a całka ogólna powstanie przez sumowanie według wskaźnika  $m$  od  $m = 0$  do  $m = \infty$ .

Funkcjami własnymi są teraz

$$C \cos \frac{m\pi}{l} x \quad \text{dla } m = 0, 1, 2, \dots, \infty.$$

W obu przypadkach trzeba jeszcze wyznaczyć wartości stałych  $A_m$  i  $B_m$  z warunków początkowych określających dla  $t=0$  przemieszczenia  $u=F(x)$  i prędkości  $\partial u/\partial t=G(x)$ , jeżeli  $F$  i  $G$  są dowolnymi funkcjami ciągłymi i różniczkowalnymi ( $F$  dwukrotnie,  $G$  jednokrotnie). Te warunki dają

$$(174.5) \quad u \Big|_{t=0} = \sum_{m=0}^{\infty} C B_m \cos \frac{m\pi x}{l} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m \varphi_m(x) = F(x)$$

$$(174.6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{a\pi}{l} \sum_{m=0}^{\infty} C m A_m \cos \frac{m\pi x}{l} = \frac{a\pi}{l} \sum_{m=0}^{\infty} m A_m \varphi_m(x) = G(x).$$

Mamy więc tutaj do czynienia z wymienionym powyżej zagadnieniem rozwijalności funkcji dowolnej według funkcji własnych, którymi w przypadkach rozważanych są funkcje goniometryczne  $\sin$  albo  $\cos$ . Wtedy rozwinięcie stanowi szereg Fouriera nie obcy zapewne czytelnikowi. Mimo to przedstawimy tutaj sposób formalnego obliczenia współczynników, aby wprowadzić pojęcia stosowane w ciągu dalszym.

Weźmy pod uwagę dwie różne funkcje własne

$$(174.7) \quad \varphi_m(x) = C \cos \frac{m\pi}{l} x; \quad \varphi_n(x) = C \cos \frac{n\pi}{l} x$$

i obliczmy całkę

$$I_{m,n} = \int_0^l \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = C^2 \int_0^l \cos \frac{m\pi}{l} x \cos \frac{n\pi}{l} x dx,$$

to dla  $m \neq n$  otrzymamy  $I_{m,n} = 0$ . Wyrażona tym własność funkcji własnych nosi nazwę *własności ortogonalności*. Gdy jednakże  $m = n$ , to otrzymujemy  $I_{m,n} = \frac{1}{2} C^2 l$ . Ponieważ  $C$  może być obrane dowolnie, przeto ustaliliśmy  $C = \sqrt{\frac{2}{l}}$  dla  $m > 0$  sprawimy, że  $I_{m,n} = 1$ .

Dla  $m = 0$  trzeba jednakże przyjąć  $C = \frac{1}{\sqrt{l}}$ , ażeby było także  $I_{0,0} = 1$ .

Takie ustalenie  $C$  nazywa się *unormowaniem* funkcji własnych. Stosując nadal oznaczenie funkcji własnej wzorem

$$\varphi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{m\pi x}{l},$$

wyrazimy podstawowe własności funkcji własnych unormowanych przez równania

$$(174.8) \quad \begin{cases} I_{m,n} = \int_0^l \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 0 & (m \neq n) \\ I_{m,m} = \int_0^l \varphi_m^2(x) dx = 1. \end{cases}$$

Zespół tak określonych funkcji własnych zagadnienia wartości brzegowej nazywamy *układem unormowanym* tego zagadnienia.

Przy pomocy równań (174.8) łatwo teraz wykonać obliczenie formalne współczynników  $B_m$  w rozwinięciu funkcji

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_m \varphi_m(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} B_m \cos \frac{m\pi x}{l} = \\ &= B_0 \sqrt{\frac{2}{l}} + B_1 \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi x}{l} + B_2 \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{2\pi x}{l} + \dots + B_r \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{r\pi x}{l} + \dots \end{aligned}$$

Do obliczenia współczynnika  $B_r$  mnożymy całe równanie przez  $\sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{r\pi x}{l} dx$  i całkujemy obustronnie między granicami 0 a  $l$ , otrzymując

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l F(x) \cos \frac{r\pi x}{l} dx &= \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \frac{\cos \frac{r\pi x}{l}}{l} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} B_m \cos \frac{m\pi x}{l} \right] dx = \\ &= \frac{2}{l} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^l B_m \cos \frac{r\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \frac{2}{l} B_0 \int_0^l \cos \frac{r\pi x}{l} dx + \\ &+ \frac{2}{l} B_1 \int_0^l \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{r\pi x}{l} dx + \dots + \frac{2}{l} B_r \int_0^l \cos^2 \frac{r\pi x}{l} dx + \dots \end{aligned}$$

W tym obliczeniu założyliśmy milcząco, że szereg w klamrach posiada zbieżność tego rodzaju, iż całkowanie wyraz po wyrazie jest dopuszczalne. Ponieważ wszystkie całki po stronie prawej z wyjątkiem opatrzonej czynnikiem  $2/lB_r$  znikają według (174.8), przeto

$$(174.9) \quad B_r = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l F(x) \cos \frac{r\pi x}{l} dx = \int_0^l F(x) \varphi_r(x) dx$$

dla  $r > 0$ , a tylko

$$B_0 = \frac{1}{2} \int_0^l F(x) \varphi_0(x) dx.$$

Tak samo otrzymamy dla funkcji  $G(x)$

$$A_r = \frac{l}{r a \pi} \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l G(x) \cos \frac{r \pi x}{l} dx = \frac{l}{r a \pi} \int_0^l G(x) \varphi_r(x) dx,$$

dla  $r > 0$ , a tylko  $A_0 = 0$ .

Dla uproszczenia wprowadzimy w ciąg dalszym  $l$  jako jednostkę długości, którą mierzymy  $x$ . Wtedy ogólne rozwiązanie przyjmie postać

$$(174.10) \quad u = \sqrt{2} \sum_{m=0}^{\infty} \cos m \pi x (A_m \cos v_m t + B_m \sin v_m t),$$

gdzie wyraz zerowy ma czynnik normujący 1 zamiast  $\sqrt{2}$ , a  $v_m = m a \pi$ , przy czym  $a$  jest szybkością przewodzenia drgań, którą wyraża wzór  $a = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$  z § 143 dla drgań podłużnych. Szczegółową dyskusję rozwiązania znajdzie czytelnik w § 253 Stereom. Techn. autora.

**§ 175. Drgania wymuszone struny.** Niechaj na strunę rozpiętą wzdłuż osi  $X$ , a drgającą w płaszczyźnie  $XZ$  działają siły masowe w tejże płaszczyźnie prostopadłe do osi  $X$  i określone funkcją  $X(x, t)$ . Wtedy równanie różniczkowe drgań poprzecznych typu (143.3) zamieni się na:

$$(175.1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = X(x, t)$$

z warunkami krańcowymi  $w(0, t) = 0$  i  $w(l, t) = 0$ .

Przyjawszy, że funkcja określająca siły zewnętrzne da się rozwinąć na szereg Fouriera:

$$(175.2) \quad X(x, t) = f_0(x) + f_1(x) \cos \omega t + f_2(x) \cos 2\omega t + \dots + \\ + g_1(x) \sin \omega t + g_2(x) \sin 2\omega t + \dots,$$

możemy złożyć rozwiązanie równania (175.1) z rozwiązań równań typu

$$(175.3) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x) \cos \omega t,$$



które przewidujemy znowu w postaci

$$(175.4) \quad w = \psi(x) \cos \omega t.$$

Po podstawieniu w (175.3) znajdujemy

$$(175.5) \quad -\omega^2 \psi(x) - a^2 \psi''(x) = f(x),$$

albo po wprowadzeniu stałej  $\lambda = \omega^2/a^2$ ,

$$(175.6) \quad \psi''(x) + \lambda \psi(x) = -\frac{1}{a^2} f(x) \equiv F(x),$$

jeżeli dla uproszczenia zastąpimy  $f(x)$  przez  $-a^2 F(x)$ .

Warunkami brzegowymi dla tego równania różniczkowego funkcji  $\psi$  są stosownie do (175.4)

$$(175.7) \quad \psi(0) = \psi(l) = 0.$$

Stoimy więc przed zagadnieniem wartości brzegowych ujętym w równania (175.6 i 7). Otóż nasuwa się myśl rozwinięcia danej funkcji  $F(x)$  na szereg Fouriera podług funkcyj własnych

$$\varphi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{m\pi x}{l},$$

co jest możliwe dzięki ortogonalności tych funkcyj. Założywszy zbieżność tego szeregu napiszemy więc

$$(175.8) \quad F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \varphi_m(x),$$

a  $C_m$  przedstawimy według (174.9) wzorem

$$(175.9) \quad C_m = \int_0^l F(x) \varphi_m'(x) dx.$$

Takie samo rozwinięcie podług funkcyj własnych  $\varphi_m(x)$  zastosujemy do szukanej funkcji  $\psi(x)$  równania (175.6), kładąc

$$(175.10) \quad \psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \varphi_m(x).$$

Tutaj jednakże są  $D_m$  nieznanne i trzeba je wyznaczyć. Przyjawszy, że szereg powyższy jest dwukrotnie różniczkowalny, otrzymamy że

$$(175.11) \quad \psi''(x) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \varphi_m''(x).$$

Po wstawieniu (175.8, 10 i 11) w rów. (175.6) znajdziemy

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_m \varphi_m''(x) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} D_m \varphi_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \varphi_m(x),$$

albo też

$$(175.12) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \{D_m \varphi_m''(x) + \lambda D_m \varphi_m(x) - C_m \varphi_m(x)\} = 0.$$

Ale  $\varphi_m''(x)$  jest drugą pochodną funkcji własnej  $\varphi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{m\pi x}{l}$ , która jest jak wiadomo rozwiązaniem równania różniczkowego *jednorodnego* drgania swobodnego

$$\varphi'' + \lambda \varphi = 0, \quad \lambda = \frac{\omega^2}{a^2}.$$

Dla  $m$ -tej funkcji własnej mamy więc tożsamościowo

$$\varphi_m'' + \lambda_m \varphi_m(x) = 0, \quad \text{czyli} \quad \varphi_m'' = -\lambda_m \varphi_m(x) \quad \text{przy} \quad \lambda_m = \frac{\omega^2}{a^2},$$

a po wstawieniu wartości w (175.12) otrzymujemy:

$$(175.13) \quad \sum_{m=1}^{\infty} (-D_m \lambda_m + D_m \lambda - C_m) \varphi_m(x) = 0.$$

To równanie spełni się dla wszelkich wartości  $x$  tylko wtedy, gdy wyrażenie w nawiasach jest równe 0. Z tego warunku wynika dla niewiadomych  $D_m$  wzór

$$(175.14) \quad D_m = \frac{C_m}{\lambda - \lambda_m}.$$

Wstawiając tę wartość w rów. (175.10) napiszemy rozwiązanie równania (175.5) w postaci

$$(175.15) \quad \psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{\lambda - \lambda_m} \varphi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{\lambda - \lambda_m} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Stosownie do rów. (175.4) znajdujemy więc jako rozwiązanie równania niejednorodnego (175.3)

$$w = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{\lambda - \lambda_m} \sin \frac{m\pi x}{l}.$$

Wyraziwszy tutaj  $\lambda$  i  $\lambda_m$  przez częstotliwości kątowe  $\omega$  i  $\omega_m$  oraz szybkość przewodzenia fal  $a$ , napiszemy powyższe rozwiązanie w postaci:

$$(175.16) \quad w = \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^2 C_m}{\omega^2 - \omega_m^2} \sin \frac{m \pi x}{l}.$$

To wyraża, że częstotliwość kąтова drgania wymuszonego jest taka sama jak częstotliwość kąтова siły  $f(x) \cos \omega t$  wzbudzającej drgania wymuszone według rów. (175.3). Amplitudę tych drgań przedstawia wyrażenie

$$\sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m a^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \sin \frac{m \pi x}{l},$$

z którego widać, że gdy przypadkowo częstotliwość  $\omega$  siły harmonicznej wywołującej drgania wymuszone jest równa którejkolwiek z częstotliwości drgań własnych  $\omega_m$ , to amplituda rośnie bez granic.

Mamy więc do czynienia ze zjawiskiem znanym dobrze z teorii drgań sprężystych układu o jednym stopniu swobody zwanym zjawiskiem *rezonansu* (*współbrzmienia*). Rozwiązanie traci wtedy właściwie znaczenie ściśle wskazując jednak dobitnie na możliwość tak wielkiego przyrostu amplitud, iż przestają się spełniać założenia całej teorii, tj. przede wszystkim pominięcie zmian długości elementów struny podczas jej drgań. Ale znalezione rozwiązanie nie jest przy tym ogólne, gdyż nie zawiera stałych nieoznaczonych, które by pozwoliły na uczynienie zadość warunkom początkowym, stanowi zatem tylko całkę szczególną. Całkę ogólną znajdziemy, jak wiadomo z teorii równań różniczkowych liniowych, dodając znaną całkę szczególną do rozwiązania ogólnego równania jednorodnego powstającego z danego równania różniczkowego przez usunięcie wyrazu  $f(x) \cos \omega t$ . To rozwiązanie zaś otrzymaliśmy w § 174. A zatem rozwiązaniem ogólnym równania różniczkowego (175.3) jest

$$(175.17) \quad w = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m \pi x}{l} (A_m \sin \omega_m t + B_m \cos \omega_m t) + \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \omega t \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m a^2}{\omega^2 - \omega_m^2} \sin \frac{m \pi x}{l}.$$

Teraz rozporządzamy nieskończenie wielą stałym  $A_m$  i  $B_m$ , które dają się wyznaczyć przy jakimkolwiek danym stanie początkowym. Jako prosty przykład rozpatrzmy przypadek, w któryu

dla  $t=0$  jest struna w położeniu równowagi spoczynkowej bez prędkości jej elementów. Wtedy jest

$$(175.18) \quad w|_{t=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = 0,$$

a więc z rów. (175.17) otrzymamy

$$(175.19) \quad B_m = -\frac{C_m a^2}{\omega^2 - \omega_m^2}.$$

Z tą wartością  $B_m$  przyjmie (175.17) postać

$$w = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \omega_m t + \\ + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot \frac{C_m a^2}{\omega^2 - \omega_m^2} (\cos \omega t - \cos \omega_m t).$$

Ale drugi z warunków (175.18) wymaga, aby znikły stałe  $A_m$ , wobec czego ogólnym rozwiązaniem dla drgań wymuszonych przy warunkach początkowych (175.18) jest

$$(175.20) \quad w = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot \frac{C_m a^2}{\omega^2 - \omega_m^2} (\cos \omega t - \cos \omega_m t).$$

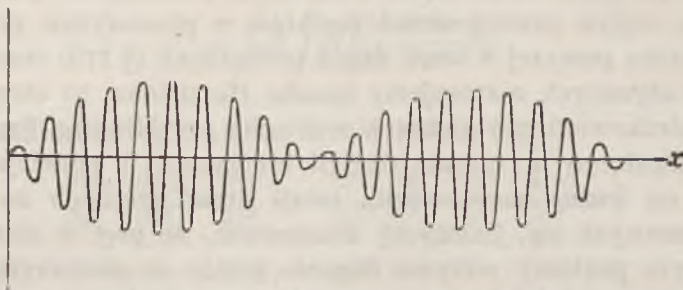
Zbadajmy teraz typ drgań wymuszonych jaki wyniknie gdy, w tym rozwiązaniu przyjmiemy, że  $\omega$  zbliża się coraz bardziej do jednej z wartości  $\omega_m$ , np do  $\omega_k$ . Wtedy mianownik wyrazu  $k$ -ego szeregu maleje, tak iż wyraz ten przewyższa coraz bardziej wszystkie inne i w końcu określa ruch równanie

$$(175.21) \quad w = \sim \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l} \frac{C_k a^2}{\omega^2 - \omega_k^2} (\cos \omega t - \cos \omega_k t) = \\ = 2 \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \frac{C_k a^2}{\omega^2 - \omega_k^2} \cdot \sin \frac{\omega + \omega_k}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_k - \omega}{2} t.$$

Można je interpretować jako proste drganie harmoniczne  $\sin \frac{1}{2}(\omega + \omega_k)t$ , którego amplituda zmienia się z czasem proporcjonalnie do  $\sin \frac{1}{2}(\omega_k - \omega)t$ . Ta amplituda zanika więc zupełnie w odstępach czasowych  $t_0$  wyznaczonych warunkiem

$$\frac{1}{2}(\omega_k - \omega)t_0 = \pi$$

i w takich samych odstępach czasowych osiąga maximum (rys. 102). To ważne w akustyce zjawisko nazywają „dudnieniem”, gdyż od-



Rys. 102.

powiadają mu kolejne wzmocnienia i zaciechania tonu wydawanego przez strunę. Odstęp czasu  $t_0$  jest oczywiście tym dłuższy im mniejszą jest różnica  $\omega_k - \omega$ . Gdy  $\omega \rightarrow \omega_k$ , to proste przejście do granicy daje

$$w = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \frac{t}{\omega_k} C_k a^2 \sin \omega_k t \cdot \sin \frac{k\pi x}{l},$$

co wyraża ciągle wzrost amplitudy.

**§ 176. Równania różniczkowe drgań giętych.** W drganiach takich zachodzi przede wszystkim ruch postępowy elementów długości pręta w kierunku prostopadłym do pierwotnej linii środkowej obranej za oś  $x$ . Jeżeli  $w$  oznacza rzędne tej linii w jej stanie odkształconym podczas ruchu, to prędkością tego ruchu postępowego jest  $\partial w / \partial t$ , a przyspieszeniem  $\partial^2 w / \partial t^2$ . Przemieszczenia równoległe do osi jako małe rzędu wyższego od  $w$  pomijamy oczywiście wyłączając tym samym z badania teoretycznego drgania o amplitudzie nie bardzo małej wobec wymiarów pręta. Ale przy zginaniu zachodzi nadto obrót elementów z prędkością kątową  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}$  i przyspieszeniem kątowym  $\partial^2 w / \partial x \partial t^2$ . Odpowiednią energię kinetyczną elementu wyrazi przeto

$$(176.1) \quad \frac{\mu F'}{2} dx \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{\mu J}{2} dx \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 = \frac{\mu F'}{2} dx \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + k^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right].$$

Tutaj oznacza  $F'$  pole przekroju, a  $J = F'k^2$  moment bezwładności przekroju względem osi obojętnej zginania, przy czym przyjmujemy że ta oś leży w płaszczyźnie głównej pręta.

Energia potencjalną jest energia sprężysta zginania  $\frac{1}{2} E J \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dz$ , a w przypadku drgań pionowych w położeniu poziomym pręta

przybywa nadto energia potencjalna ciężaru własnego  $\mu F g dx$ . tj.  $\mu F g w dx$  (jeżeli dodatni kierunek osi  $Z$  wskazuje do góry). Gdy pomijając wpływ przemieszczeń punktów w płaszczyźnie przekroju uwzględniony powyżej w teorii drgań podłużnych (§ 173) oraz wpływ naprężeń stycznych zastosujemy zasadę Hamiltona, to otrzymamy rów. różniczkowe drgań giętnych w drugim przybliżeniu. Przed tym jednak uogólnimy wyrażenia energii kinetycznej i potencjalnej ze względu na ważne zastosowania teorii drgań giętnych do wałów turbin parowych itp. Założymy mianowicie, że pręt w stanie nie-obciążonym poziomy odbywa drgania giętne w płaszczyźnie pionowej, a więc pod działaniem masowej siły ciężkości i że nadto pręt ten jest równomiernie obciążony masą  $m$  (na jednostkę długości), która nie wpływa na sztywność zginania pręta. Tę masę obciążającą może np. tworzyć szereg cienkich a sztywnych krążków o masach  $M$  osadzonych w małych równych odstępach  $d$  na przecie, a więc  $m = M/d$ . Wtedy uwzględniając bezwładność obrotową tak elementów pręta, jak i osadzonych na nim mas, napiszemy dla energii kinetycznej wyrażenie

$$(176.2) \quad \left[ \frac{1}{2} (\mu F + m) \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} (\mu J + \Theta/d) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 \right] dx,$$

a dla energii potencjalnej:

$$(176.3) \quad \left[ \frac{1}{2} EJ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + (\mu F + m) g w \right] dx, \quad (\text{dodatnia oś } Z \text{ w górę}),$$

gdzie  $\Theta$  oznacza moment bezwładności jednego krążka obciążającego względem poziomej osi obojętnej zginania pręta. Wprowadziwszy oznaczenia

$$(176.4) \quad A \equiv \mu F + m, \quad A_1 \equiv \mu J + \Theta/d, \quad B \equiv EJ, \quad B_1 \equiv (\mu F + m)g,$$

napiszemy według zasady Hamiltona:

$$(176.5) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l \left[ \frac{1}{2} A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} A_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} B \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 - B_1 w \right] dx = 0.$$

Przekształcając kolejno wariację każdej z czterech całek podwójnych, otrzymujemy dla całki pierwszej i drugiej z współczynnikami  $A$  i  $A_1$  jak w § 173:

$$(176.6) \quad -A \int_0^l dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dt + A_1 \int_0^l dx \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} \delta w dt.$$

Dla wariacji całki trzeciej mamy

$$(176.7) \quad - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx.$$

Stosując łatwą do sprawdzenia tożsamość

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right),$$

napiszemy wyrażenie (176.7) w postaci

$$- \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l B \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right) dx,$$

a wykonawszy całkowanie w drugim wyrazie względem  $x$ , napiszemy zamiast tego

$$- \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx - \int_{t_0}^{t_1} dt \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \delta w \right]_{x=0}^{x=l}.$$

Otóż wyraz w klamrach całki ostatniej znika, ponieważ na obu granicach jest według założenia zasady Hamiltona  $\delta w = 0$ . Wreszcie wariacja czwartej całki daje od razu

$$B_1 \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^l \delta w dx.$$

Po wstawieniu tych wartości w równanie Hamilton'a i zmianie znaków otrzymujemy

$$(176.8) \quad \int_0^l dz \int_{t_0}^{t_1} \left( A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + B_1 \right) \delta w \cdot dt = 0.$$

Z warunku aby to równanie się spełniło dla wszelkich wartości  $\delta w$  wynika

$$(176.9) \quad A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - A_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} + B_1 = 0$$

jako szukane równanie różniczkowe drgań giętych przy założeniach powyżej wyszczególnionych. Bez uwzględnienia mas obciążających i działania ciężkości przyjmie to równanie postać

$$(176.10) \quad \mu F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \mu J \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + EJ \frac{\partial^2 w}{\partial x^4} = 0,$$

którą (przy znakowaniu odmiennym) podaje Love jako wzór (6) w § 280 swego dzieła, wyprowadziwszy go z równań równowagi pręta smukłego odkształconego przy obciążeniu ogólnym, które to równania nie weszły w zakres książki niniejszej.

Badania Rayleigh'a wykazały, że wyraz

$$\mu J \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2},$$

uwarunkowany bezwładnością obrotową elementów pręta, ma uwagi godny wpływ tylko dla drgań o wielkich częstościach i może być dla mniejszych zupełnie pominięty. Wtedy równanie różniczkowe drgań giętych sprowadza się do postaci pierwszego przybliżenia

$$(176.11) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = - \frac{E k^2}{\mu} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, \quad (\text{gdzie } k^2 = J F),$$

której bezpośrednie uzasadnienie jest bardzo proste. Punktem wyjścia jest równanie różniczkowe linii ugięcia belki dowolnie obciążonej siłami prostopadłymi do osi w płaszczyźnie głównej zginania

$$EJ \frac{d^2 w}{dx^2} = M,$$

gdzie  $M$  oznacza moment zgięcia (dodatni znak momentu odpowiada krzywiznie dodatniej). Ponieważ  $dM/dx = T$  (siła poprzecznej), a przy obciążeniu ciągłym o natężeniu  $p$  jest

$$\frac{dT}{dx} = p, \quad \text{przeto} \quad EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = p.$$

Przy drganiach poprzecznych występuje jako obciążenie  $p$  siła d'Alembert'a, tj.

$$- \mu F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Po podstawieniu i zastąpieniu  $J$  przez  $Fk^2$  otrzymamy rów. (176.11).

W przypadku drgań w płaszczyźnie pionowej pręta poziomego obciążonego przez  $q$  kg/cm, w czym zawarty jest ciężar własny  $\mu F g$  zamieni się rów. (176.11) na następujące:

$$(176.12) \quad EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q = 0.$$

**§ 177 Drgania gięte własne pręta prostego.** Stosując równanie różniczkowe pierwszego przybliżenia zwykle zupełnie wystarczającego szukajmy rozwiązania w prostym przypadku podparcia obu końców



pręta. Niechaj to podparcie będzie określone ściśle warunkami krańcowymi:

$$\text{dla } x=0 \text{ i } x=l=1 \text{ jest } w=0 \text{ i } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0.$$

Warunki te wyrażają, że końce pręta mogą się obracać swobodnie około punktów  $(0,0,0)$  i  $(1,0,0)$ . Wtedy przy wyłączeniu siły ciężkości, a więc zastosowaniu równania (176.11) możemy spróbować rozwiązania w postaci

$$(177.1) \quad w = \varphi(x) \cos \omega t, \quad \text{albo też } w = \varphi(x) \sin \omega t.$$

Po wstawieniu w równanie różniczkowe otrzymamy równanie

$$(177.2) \quad E \frac{k^2}{\mu} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \begin{cases} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{cases} - \omega^2 \varphi(x) \begin{cases} \cos \omega t \\ \sin \omega t \end{cases} = 0,$$

któremu uczynimy zadość, gdy  $\varphi(x)$  będzie rozwiązaniem równania różniczkowego zwyczajnego

$$(177.3) \quad \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \frac{\mu \omega^2}{Ek^2} \varphi(x) = 0,$$

albo po oznaczeniu  $\mu \omega^2 / Ek^2 = \lambda^4$

$$(177.4) \quad \frac{d^4 \varphi}{dx^4} - \lambda^4 \varphi(x) = 0$$

z warunkami krańcowymi  $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$  i  $\varphi''(0) = \varphi''(1) = 0$ .

W sposób znany znajdujemy jako całkę ogólną tego równania

$$(177.5) \quad \varphi(x) = A Ch \lambda x + B Sh \lambda x + C \cos \lambda x + D \sin \lambda x.$$

Z warunków krańcowych wynikają następujące równania dla stałych

$$(177.6) \quad \begin{cases} A + C = 0 \\ A Ch \lambda + B Sh \lambda + C \cos \lambda + D \sin \lambda = 0 \\ A - C = 0 \\ A Ch \lambda + B Sh \lambda - C \cos \lambda - D \sin \lambda = 0. \end{cases}$$

Z pierwszego i trzeciego znajdujemy  $A = C = 0$ . Po tym równanie drugie i czwarte dają

$$B Sh \lambda + D \sin \lambda = 0, \quad B Sh \lambda - D \sin \lambda = 0.$$

Wyłączony nieprzydatne rozwiązanie  $B = D = 0$  możemy uczynić zadość obu równaniom kładąc  $B = 0$ ,  $D \neq 0$ , ale dając para-

metrowi  $l$  wartość  $m\pi$  przy

$$m = 1, 2, 3, \dots, \infty.$$

Są to wartości własne równania różniczkowego zagadnienia. Dla funkcji własnych otrzymujemy przyjmąwszy  $D = \sqrt{2}$  w celu ich unormowania

$$(177.7) \quad \varphi_m(x) = \sqrt{2} \sin m\pi x.$$

A zatem mamy tutaj te same funkcje co dla struny. Natomiast z równania

$$\lambda^4 = \frac{\mu}{E} \frac{\omega^2}{k^2} = m^4 \pi^4$$

wynika

$$(177.8) \quad \omega = m^2 \pi^2 k \sqrt{\frac{E}{\mu}},$$

czyli częstości drgań własnych mają się do siebie jak kwadraty liczb naturalnych.

Wprowadźmy teraz we wzory długość pręta  $l$  uważaną powyżej za jednostkę, to ponieważ znalezione wyrażenia dla funkcji  $\varphi(x)$  spełniają równanie różniczkowe zagadnienia, gdy je opatrzymy dowolnym współczynnikiem stałym, możemy rozwiązanie ogólne w przypadku rozpatrywanym napisać w postaci:

$$(177.9) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{l} (A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t),$$

gdzie  $A_m$  i  $B_m$  oznaczają stałe dające się wyznaczyć z warunków początkowych w ten sam sposób co w zagadnieniu struny.

Uwzględniając obciążenie pręta w położeniu poziomym prowadzące do równania różniczkowego postaci (176.12) możemy przyjąć funkcję rozwiązującą jako sumę rozwiązania powyższego  $w(x, t)$  i funkcji  $w_1(x)$  samego  $x$ . Po podstawieniu w równanie różniczkowe otrzymamy

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{d^4 w_1}{dx^4} + q = 0.$$

Ale suma dwu pierwszych wyrazów jest równa tożsamościowo zeru, gdyż funkcja  $w$  spełnia rów. (176.11), a więc do wyznaczenia  $w_1$  pozostaje równanie

$$(177.10) \quad EI \frac{d^4 w_1}{dx^4} = -q,$$

które jak wiadomo określa statyczną linię ugięcia pręta pod obciążeniem  $q$  przy tych samych warunkach krańcowych. Z tego wynika

(dzięki liniowości odnośnych równań różniczkowych), że do rozwiązania zadania kinetycznego drgań wystarcza całkowanie równania (176.11), a działanie obciążenia  $q$  objawia się tylko tym, że drgania zachodzą około położenia równowagi wygiętego zamiast prostego.

Rozwiązania w kilku innych przypadkach ustalenia końców pręta znajdzie czytelnik w rozdz. XXIII Stereomechaniki Technicznej. Tutaj poruszymy jeszcze sprawę szybkości przenoszenia się fal giętnych ze względu na jej ogólną doniosłość naukową.

**§ 178. Przenoszenie się fal giętnych w pręcie nieskończenie długim. Szybkość grupowa.** Równanie różniczkowe drgań giętnych różni się zasadniczo od równania określającego drgania struny oraz drgania podłużne i skrętne, cięgien i prętów tym; że nie można mu uczynić zadość funkcją dowolną jak temu drugiemu równaniu, lecz tylko funkcjami cosinus lub sinus argumentu  $x \pm at$ . Przekonamy się o tym próbując w równanie drgań giętnych

$$(178.1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Ek^2}{\mu} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

podstawić

$$w = f(x \pm at) = f(\xi) \quad \xi \equiv x \pm at.$$

Mamy tedy

$$a^2 \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \frac{Ek^2}{\mu} \cdot \frac{d^4 f}{d\xi^4} = 0,$$

albo

$$F(\xi) + L^2 F''\xi = 0$$

przy oznaczeniach

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} \equiv F(\xi) \quad \text{i} \quad L^2 \equiv \frac{Ek^2}{a^2 \mu}.$$

Temu zaś równaniu czynią zadość tylko funkcje

$$\cos \frac{\xi}{L} \quad \text{albo} \quad \sin \frac{\xi}{L}$$

z dowolnymi współczynnikami stałymi. A zatem

$$(178.2) \quad \begin{cases} a = \frac{k}{L} \sqrt{\frac{E}{\mu}} & \xi = x \pm \frac{k}{L} \sqrt{\frac{E}{\mu}} \cdot t, \\ w = \begin{cases} A \cos \\ B \sin \end{cases} \left( \frac{x}{L} \pm \frac{k}{L} \sqrt{\frac{E}{\mu}} \cdot t \right), \end{cases}$$

przedstawia jedyną postać rozwiązania równania (178.1).

Oznaczmy przez  $\lambda$  długość fali drgań giętnych, to z warunku, że dla  $x + \lambda$  musi być wartość  $w$  ta sama co dla  $x$  wynika

$$\lambda = 2\pi L, \quad \text{czyli} \quad \frac{1}{L} = \frac{2\pi}{\lambda},$$

a więc *szybkość przenoszenia się fali giętnej*

$$(178.3) \quad a = \frac{2\pi k}{\lambda} \sqrt{\frac{E}{\mu}}$$

jest odwrotnie proporcjonalna do jej długości, podczas gdy dla fal drgań rozpatrywanych poprzednio była niezależna od długości fali. Mamy zatem do czynienia z własnością fal giętnych wspólną z własnością fal świetlnych, która jak wiadomo z optyki wywołuje zjawisko dyspersji, czyli rozpraszania się światła przy przechodzeniu przez ośrodek o gęstości zmiennej.

Gdy w pewnym miejscu pręta nieograniczonego wygniemy go siłami dodatkowymi w sposób dowolny i następnie oswobodzimy nagle, to wywołamy przez to miejscowe zaburzenie równowagi, które według twierdzenia Fouriera da się przedstawić jako suma zaburzeń harmonicznycych o częstościach różnych, a więc i o różnych długościach fal. Ponieważ jak dowiedziono prędkości przenoszenia się fal są różne, przeto zaburzenie nie może się posuwać wzdłuż pręta nie ulegając zniekształceniu.

Ten fakt tłumaczy jeszcze jedno ważne zjawisko, a mianowicie przenoszenie się *grupy fal*. Tak nazywamy zespół fal różniących się bardzo mało długością, a więc np. wszystkie fale których długości leżą między  $\lambda$  a  $\lambda + d\lambda$ . Przyjawszy jednakowe amplitudy  $a$  dla tej grupy napiszemy odchylenie dla fali  $\lambda$

$$w = a \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} (x - at) \right\},$$

zaś dla fali  $\lambda + d\lambda$

$$w' = a \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda + d\lambda} [x - (a + da)t] \right\},$$

co z pominięciem małych rzędu wyższego można napisać w postaci

$$(178.4) \quad \begin{aligned} w' &= a \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda^2} (\lambda - d\lambda) [x - (a + da)t] \right\} = \\ &= a \cos \left\{ \frac{2\pi}{\lambda} \left[ x \left( 1 - \frac{d\lambda}{\lambda} \right) - \left( at + \frac{\lambda da - ad\lambda}{\lambda} t \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Składając teraz obie fale otrzymamy przy zastosowaniu znanego przekształcenia  $\cos \varphi + \cos \psi = 2 \cos \frac{1}{2}(\varphi + \psi) \cos \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$  i z po-

minięciem małych rzędu wyższego

$$(178.5) \quad w + w' = 2a \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - at) \cos \frac{\pi}{\lambda} \left[ (x - at) \frac{d\lambda}{\lambda} + t da \right].$$

Tutaj jest argument drugiej funkcji  $\cos$  bardzo mały wobec argumentu funkcji, pierwszej, wobec czego można całe wyrażenie traktować jako przedstawiające falę drgań

$$w_1 = a_1 \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x - at),$$

których amplituda  $a_1$  nie jest ściśle stała, lecz zmienia się powoli w danym miejscu  $x$  w zależności od czasu  $t$ , a w każdej obranej chwili  $t$  w zależności od miejsca  $x$ . Obraz fali wypadkowej jest widocznie taki sam, jaki przedstawia „dudnienie” rozpatrzone na końcu § 175. Obraz ten przemieszcza się z czasem wzdłuż osi  $x$ , nie zmieniając swego wyglądu geometrycznego (jaki by dało np. zdjęcie „momentalne”) i zachodzi pytanie jaka jest prędkość tego przemieszczenia  $c$ . Otóż gdyby prędkość przewodzenia obu fal  $\lambda$  i  $\lambda + d\lambda$  była taka sama, czyli gdyby  $da$  było równe zero, to we wz. (178.5) należałoby skreślić wyraz  $t da$ , a wtedy prędkość  $c$  byłaby równa  $a$ , gdyż „faza fali”  $(2\pi/\lambda)(x - at)$  i „faza amplitudy”  $(\pi/\lambda)(x - at)d\lambda/\lambda$  zmieniają się z tą samą prędkością  $a$ . To uwydatnia się dobitnie przy szukaniu prędkości przemieszczenia faz zerowych, co w obu wyrażeniach daje  $x - at = 0$ , a więc  $x/t = a$ . Atoli w naszym ogólnym przypadku różnych szybkości przewodzenia fal  $\lambda$  i  $\lambda + d\lambda$  wyraz  $t da$  nie znika, a przyrównawszy do zera

$$(x - at) \frac{d\lambda}{\lambda} + t da$$

i obliczywszy z powstałego równania  $x/t$  otrzymujemy wartość „prędkości grupowej” określoną wzorem Rayleigh’a:

$$(178.6) \quad c = \frac{x}{t} = a - \lambda \frac{da}{d\lambda}.$$

Ta wartość jest więc w ogóle różna od „prędkości fazowej”  $a$ . Obliczmy ją dla drgań giętych wyznaczwszy z wzoru (178.3) iloraz różniczkowy

$$\frac{da}{d\lambda} = -\frac{2\pi k}{\lambda^2} \sqrt{\frac{E}{\mu}} = -\frac{a}{\lambda}.$$

Po wstawieniu tej wartości we wzór Rayleigh’a znajdujemy

$$(178.7) \quad c = 2a.$$

## XVI. TEORIA PŁYT

§ 179. **Rozważania wstępne.** W § 116 znaleźliśmy wzory teorii płyt izotropowych ściśle ze stanowiska ogólnej teorii sprężystości, ale tylko w przypadku, gdy nie ma sił masowych, a obie powierzchnie płyty pierwotnie płaskie i równoległe są nadto wolne od sił powierzchniowych. Siły rozciągające lub ściskające oraz siły zginające i skręcające płytę mogą być wtedy rozmieszczone tylko na brzegu płyty, który przyjmujemy zwykle jako tworzący pobocznicę niskiego graniastosłupa lub walca. Podstawa tego walca wyznacza „kontur” płyty. Dla zupełnej ścisłości trzeba jeszcze, aby obciążenie brzegu było rozmieszczone na grubości płyty  $h$  zgodnie z wzorami znalezionymi dla wnętrza płyty, analogicznie jak się rzecz ma przy zgięciu i skręceniu belek według teorii de Saint-Venant'a. Ale stosownie do zasady de Saint-Venant'a rozmieszczenia inne statycznie równoważne wpływają na zmianę stanu odkształcenia i napięcia tylko na obwodowym skrawku płyty w sposób godny uwagi, a szerokość skrawka zaburzenia jest tym mniejsza im cieńszą jest płyta, znowu zupełnie analogicznie jak w teorii prętów. Należy jeszcze pamiętać, że wspomniane powyżej wzory teorii płyt w zastosowaniu do małych ale skończonych ugięć płyty (mierzonych względną wartością przemieszczeń różnych punktów jej płaszczyzny środkowej) tracą dokładność gdy te ugięcia nie są bardzo małe w porównaniu do wymiarów płyty w jej płaszczyźnie, wyjąwszy oczywiście przypadki szczególne, kiedy płaszczyzna środkowa całej płyty może się zamienić wskutek odkształcenia na powierzchnię rozwijalną. Tego ograniczenia nie było w teorii prętów smukłych (cienkich).

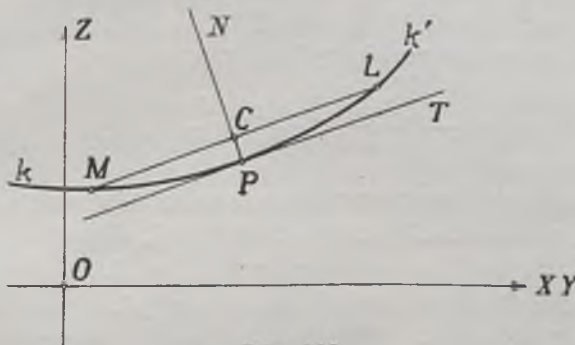
Klasyczna teoria płyt cienkich zapoczątkowana pracą Zofii Germain z r. 1821 nagrodzoną przez Akademię Paryską, a poprawioną następnie przez Lagrange'a, może być obecnie traktowana jako przybliżone uogólnienie wzorów wymienionej teorii scislej do przypadków dowolnego obciążenia płyty, podobnie jak de Saint-Venant'a teorię zgięcia i skręcenia belek stosuje się w przypadkach ich obciążeń dowolnych. Tą drogą otrzymuje się jak wykazała teoria ścisła (por. zagadnienia płyty okrągłej z §§ 156 i 162) stopień dokładności najczęściej zupełnie wystarczający. Ponieważ w Stereo-

mechanice Technicznej autora wyłożono dość obszernie klasyczną teorię płyt cienkich wraz z licznymi rozwiązaniami szczegółowymi, przeto tutaj poprzestaniemy na ściślejszym ze stanowiska matematycznego uzasadnieniu wzorów teorii i uogólnieniu ich do badania drgań. W tym celu rozpatrzmy w § następnym najpierw własności krzywiznowe słabo wygiętej powierzchni środkowej płyty, po czym dopiero wyprowadzimy drogą stosowaną przez Kirchoff'a i Rayleigh'a równanie różniczkowe równowagi i drgań płyty wraz z warunkami brzegowymi.

**§ 180. Własności krzywiznowe powierzchni ugięcia płyty.** Ze względu na charakter ogólny rozważań geometrycznych napiszemy równanie powierzchni ugięcia na razie w postaci

$$(180.1) \quad z = f(x, y)$$

odniesionej do pierwotnej płaszczyzny środkowej płyty jako płaszczyzny  $XY$  pomyślanej poziomo przy osi  $Z$  skierowanej do góry. Ozna-



Rys. 103.

czywszy przez  $x_0, y_0, z_0$  dowolnie obrany punkt powierzchni, a przez  $x_0 + \xi, y_0 + \eta, z_0 + \zeta$  sąsiedni punkt tejże powierzchni napiszemy

$$(180.2) \quad z_0 + \zeta = f(x_0 + \xi, y_0 + \eta).$$

Rozwińmy funkcję  $f$  według wzoru Taylora, to ze ścisłością do nieskończenie małych rzędu drugiego otrzymamy

$$(180.3) \quad \zeta = \frac{\partial z}{\partial x} \xi + \frac{\partial z}{\partial y} \eta + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \xi^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \xi \eta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \eta^2 \right).$$

Wielkości  $\xi, \eta, \zeta$  określają oczywiście punkt powierzchni względem układu osi o początku w  $x_0, y_0, z_0$ . Rów. (180.3) jest więc przybliżonym równaniem powierzchni w tym układzie.

Poprowadźmy w punkcie  $P(x_0, y_0, z_0)$  płaszczyznę styczną do naszej powierzchni. Niech  $K$  (rys. 103) przedstawia ślad powierzchni na płaszczyźnie rysunku przesuniętej przez normalną  $N$  do po-

wierzchni w punkcie  $P$ , zaś  $T$  ślad płaszczyzny stycznej. Równaniem tej płaszczyzny jest

$$(180.4) \quad z_1 - z_0 = \frac{\partial \zeta}{\partial x} (x_1 - x_0) + \frac{\partial \zeta}{\partial y} (y_1 - y_0),$$

gdzie  $x_1, y_1, z_1$  są współrzędnymi bieżącymi. Normalna  $N$  tworzy z osią  $Z$  kąt  $(n, z)$  dla którego jak wiadomo

$$\cos(n, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}}.$$

Otóż przy założeniach teorii płyt są  $\partial \zeta / \partial x, \partial \zeta / \partial y$  ułamkami bardzo małymi, gdyż powierzchnia ugięcia jest tylko bardzo słabo zakrzywiona, wobec czego przyjmiemy, że  $\cos(n, z) = 1$ .

Przetnijmy teraz powierzchnię płaszczyzną równoległą do płaszczyzny stycznej (180.4) w bardzo małym odstępnie  $\delta$ . Ponieważ  $\delta / \cos(n, z)$  przedstawia różnicę rzędnych  $z_1$  obu płaszczyzn, którą stosownie do powyższego zastąpimy przez  $\delta$ , przeto

$$(180.5) \quad z_1 - z_0 - \delta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} (x_1 - x_0) + \frac{\partial \zeta}{\partial y} (y_1 - y_0)$$

jest równaniem tej płaszczyzny, która przecina powierzchnię w krzywej zwanej „wskaznicą Dupin'a” (indicatrix). Współrzędne względne punktów tej krzywej oznaczmy przez  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ , a więc ich współrzędne bezwzględne będą  $x_0 + \xi_0, y_0 + \eta_0, z_0 + \zeta_0$ . Te ostatnie muszą oczywiście czynić zadość równaniu płaszczyzny przecinającej, tj. (180.5), a stąd

$$(180.6) \quad \zeta_0 - \delta = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \xi_0 + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \eta_0.$$

Ponieważ koło przechodzące przez punkty  $M, P, L$  (rys. 102) staje się gdy  $\delta \rightarrow 0$  kołem krzywiznowym krzywej  $kk'$  w punkcie  $P$ , przeto między długością łuku  $s = PL$  tej krzywej a  $\delta$  i promieniem krzywizny  $\rho$ , gdy  $s \rightarrow 0$  i  $\delta \rightarrow 0$  zachodzi związek

$$(180.7) \quad \rho = \frac{s^2}{2\delta}.$$

Ale  $s^2 \rightarrow \xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2$ , a po wstawieniu za  $\zeta_0$  wartości z (180.3) i pominięciu małych rzędu wyższego otrzymamy

$$(180.8) \quad s^2 = \xi_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right)^2 \right] + \eta_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \xi_0 \eta_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$



Tutaj znowu można skreślić wyrazy z czynnikami  $(\partial\zeta/\partial x)^2$ ,  $(\partial\zeta/\partial y)^2$  i  $\partial\zeta/\partial x \cdot \partial\zeta/\partial y$  jako małe rzędu drugiego, wobec czego napiszemy

$$(180.9) \quad s^2 = \xi_0^2 + \eta_0^2.$$

Z równań (180.6 i 3) po zastąpieniu  $\xi, \eta, \zeta$  przez  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$  wynika

$$(180.10) \quad 2\delta = \frac{\partial\zeta}{\partial x^2} \xi_0^2 + 2 \frac{\partial\zeta}{\partial x \partial y} \xi_0 \eta_0 + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \eta_0^2.$$

A więc stosownie do (180.7) znajdujemy dla przekroju normalnego w  $P$  wartość krzywizny

$$(180.11) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \xi_0^2 + 2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x \partial y} \xi_0 \eta_0 + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \eta_0^2}{\xi_0^2 + \eta_0^2},$$

co można napisać w postaci

$$(180.12) \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \cos^2 \vartheta + 2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x \partial y} \cos \vartheta \sin \vartheta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \sin^2 \vartheta,$$

gdź  $\vartheta$  jest kątem jaki przekrój normalny tworzy z osią  $x$ , przy czym jest

$$(180.13) \quad \cos \vartheta = \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{\eta_0}{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}}.$$

Poprowadziwszy drugi przekrój normalny nachylony do  $x$  pod kątem  $\pi/2 + \vartheta$ , tzn. prostopadły do przekroju pierwszego, otrzymamy dla jego krzywizny w  $P$  wzór

$$(180.14) \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \sin^2 \vartheta - 2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial x \partial y} \cos \vartheta \sin \vartheta + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} \cos^2 \vartheta.$$

1) Gdy powierzchnię przedstawiają równania

$$x = x(\alpha, \beta), \quad y = y(\alpha, \beta), \quad z = z(\alpha, \beta).$$

z parametrami zmiennymi  $\alpha$  i  $\beta$ , a współrzędnym punktów wskaźnicy odpowiadają wartości parametrów  $\alpha + d\alpha$ ,  $\beta + d\beta$ , to w teorii powierzchni dowodzi się, że

$$(180.10 a) \quad 2\delta = L d\alpha^2 + 2M d\alpha d\beta + N d\beta^2$$

z pominięciem wyrazów zawierających potęgi wyższe  $d\alpha$  i  $d\beta$ . Tutaj współczynniki  $L, M, N$  dają się wyrazić przez pierwsze i drugie pochodne cząstkowe  $x, y, z$  względem  $\alpha$  i  $\beta$ , a jak można dowieść współczynniki te są niemiennikami ze względu na przekształcenie liniowe współrzędnych o postaci

$$\begin{aligned} x_1 &= a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z \\ y_1 &= b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 z \\ z_1 &= c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z. \end{aligned}$$

Dodając oba ostatnie równania znajdziemy

$$(180.15) \quad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2},$$

co wyraża, że suma krzywizn dwu wzajemnie prostopadłych przekrojów normalnych powierzchni w jej punkcie obranym dowolnie jest stałą niezależną od ich kierunku.

Szukając przekrojów normalnych w punkcie  $P$  powierzchni, którym to przekrojom przynależą ekstremalne wartości krzywizny <sup>1)</sup>,

<sup>1)</sup> W tym celu napiszemy rów. (180.12) w postaci

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \cos 2\vartheta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin 2\vartheta.$$

Przyrównywując pochodną względem  $\vartheta$  do zera otrzymujemy

$$-\left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \sin 2\vartheta + 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \cos 2\vartheta = 0.$$

Stąd

$$\operatorname{tg} 2\vartheta = \frac{2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}},$$

co daje dwie wartości  $\vartheta$  różniące się od siebie o  $\pi/2$ , tak iż można napisać

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \cos 2\vartheta_0 + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin 2\vartheta_0 \\ \frac{1}{\rho_2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \cos 2\vartheta_0 - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin 2\vartheta_0. \end{aligned}$$

Wyraziwszy  $\cos 2\vartheta$  i  $\sin 2\vartheta$  przez  $\operatorname{tg} 2\vartheta$  znajdujemy

$$\begin{aligned} \cos 2\vartheta_0 &= \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)}{\sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2}}, \\ \sin 2\vartheta_0 &= \frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial x}}{\sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2}}. \end{aligned}$$

a stąd wzory (180.16) z których wynika

$$(180.19) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} &= 2 \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2} \\ \sin 2\vartheta_0 &= \frac{2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}}. \end{aligned}$$

znajdujemy łatwo takie dwa przekroje wzajemnie prostopadłe, z których jeden odpowiada maximum a drugi minimum krzywizny i wyrażają się wzorami

$$(180.16) \quad \begin{cases} \frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2} \\ \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2} \end{cases}$$

Stąd wynika po pierwsze

$$(180.17) \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'},$$

powtórę zaś

$$(180.18) \quad \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

To ostatnie wyrażenie  $1/\varrho_1 \varrho_2$  nosi nazwę *Gaussowskiej krzywizny* powierzchni. Jego znak rozstrzyga o tym, czy krzywizna ta jest *synklastyczną* (+), czy też *antiklastyczną* (−), tzn. czy oba promienie główne są skierowane zgodnie, jak np. w elipsoidzie, czy też przeciwnie jak w hiperboloidzie jednopowłokowej.

Wypada zauważyć, że związek  $1/\varrho_1 + 1/\varrho_2 = 1/\varrho + 1/\varrho'$  jest ściśle ważny dla każdej powierzchni o krzywiznie regularnej, a tylko otrzymane powyżej wyrażenia krzywizn przez drugie pochodne  $\partial^2 \zeta / \partial x^2, \dots$  są uproszczonymi wyrażeniami ścisłymi wskutek przyjęcia bardzo słabego zakrzywienia powierzchni. Zważywszy nadto, że  $\partial \zeta / \partial x = \partial z / \partial x$  itd., gdyż  $x_0, y_0, z_0$  przyjęto we wz. (180.2) i następnych za stałe, możemy w najważniejszych z wzorów powyższych zastąpić  $\zeta$  przez  $z$ , a wreszcie przez  $w$ . To oznaczenie stosowane już w niektórych miejscach książki niniejszej, a nadto w *Stereomechanice Techn.* autora odpowiada przyjęciu pierwotnej płaszczyzny środkowej płyty za płaszczyznę  $XY$ , wobec czego współrzędne  $x, y, 0$  dowolnego punktu tej płaszczyzny zamieniają się po ugięciu płyty na  $x, y, w$ , albowiem wyłączyliśmy odkształcenia w samej płaszczyźnie środkowej, a z powodu założenia bardzo słabego zakrzywienia powierzchni ugięcia są poziome składowe przemieszczeń małymi rzędu wyższego od przemieszczenia pionowego  $w$ .

**§ 181. Równanie różniczkowe teorii płyt cienkich.** Przyjmując w przybliżeniu przy dowolnym obciążeniu płyty stosowalność wzoru (116.9) i następnych z § 116 dla energii sprężystej elementu płyty, oraz wzory poprzednie określające zależność naprężeń od momentów

$m_x, m_y, s$  i związki między tymi momentami a krzywizną powierzchni ugięcia, dopełniamy nieściśłości następujące:

1<sup>o</sup> pomijamy wpływ naprężeń  $\sigma_z$ ,

2<sup>o</sup> pomijamy wpływ naprężeń stycznych  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$  wywołanych siłami poprzecznymi (tnącymi).

Wszystkie trzy powyższe naprężenia znikają tylko w przypadkach obciążeń samego brzegu płyty momentami i siłami poprzecznymi. Z wzoru (116.10) otrzymamy teraz z uwzględnieniem (116.6) dla energii sprężystej całej płyty wyrażenie

$$(181.1) \quad V = \frac{1}{2} \bar{B} \iint \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy.$$

Przyjmąwszy, że obciążenie płyty prostopadle do płaszczyzny środkowej przyjętej jako pozioma określa funkcja  $p(x, y)$ , a w przypadku jej drgań poprzecznych uwzględniamy tylko ruch postępowy elementów, mamy dla energii potencjalnej obciążenia przy osi  $Z$  skierowanej w dół wyrażenie

$$(181.1a) \quad V_1 = \iint (-p w) dx dy,$$

zaś dla energii kinetycznej

$$(181.1b) \quad E = \frac{1}{2} \mu h \iint \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dF = \frac{1}{2} \mu h \iint \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy,$$

gdzie jak poprzednio oznacza  $dF = dx dy$ ,  $h$  grubość płyty, a  $\mu$  gęstość jej materiału.

Stosując zasadę Hamiltona napiszemy

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} [E - (V + V_1)] dt = 0.$$

Wariacja pierwszego wyrazu daje, jak to już znaleziono w analogicznym wyrazie z § 176:

$$(181.2) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} E dt = -\mu h \int_{t_0}^{t_1} dt \iint \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w dF.$$

Wyraz drugi

$$\int_{t_0}^{t_1} -\delta V dt$$

jest sumą dwu części uwytłumionych wzorem (181.1), pierwszą z nich jest

$$-\frac{\bar{B}}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta \int (\nabla^2 w)^2 dF.$$

Obliczenie wariacji daje

$$\delta \int (\nabla^2 w)^2 dF = 2 \int \nabla^2 w \cdot \nabla^2 (\delta w) dF.$$

Stosując do całki powierzchniowej wzór Green'a (§ 31) znajdujemy

$$\int \nabla^2 w \nabla^2 (\delta w) dF = \int \nabla^4 w \cdot \delta w dF + \int \left( \nabla^2 w \frac{\partial \delta w}{\partial n} - \delta w \cdot \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial n} \right) ds,$$

gdzie druga całka jest krzywoliniowa (po konturze płyty), przy czym  $ds$  oznacza element łuku, a  $dn$  element normalnej zewnętrznej (uważanej za dodatnią). A zatem:

$$(181.3) \quad \begin{aligned} \delta \int (\nabla^2 w)^2 dF &= 2 \int \nabla^4 w \cdot \delta w dF + \\ &+ 2 \int \nabla^2 w \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds - 2 \int \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial n} \delta w \cdot ds, \end{aligned}$$

gdzie

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}.$$

Część druga, tj.

$$\begin{aligned} &-\bar{B}(1-\nu) \int_{t_0}^{t_1} dt \delta \int \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dF = \\ &= \bar{B}(1-\nu) \int_{t_0}^{t_1} dt \int \left\{ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} dF. \end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasach  $\{ \}$  da się przekształcić na

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \delta w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \delta w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \delta w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y},$$

gdzie  $f_1$  i  $f_2$  są tymczasowymi skrótami. Według wzoru Green'a jest

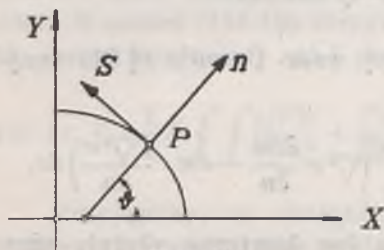
$$\int \left( \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \right) dF = \int [f_1 \cos(n, x) + f_2 \cos(n, y)] ds,$$

a zatem dla części drugiej napiszemy

$$\bar{B}(1-\nu) \int_{t_0}^{t_1} dt \cdot \delta \int (f_1 \cos \vartheta ds + f_2 \sin \vartheta ds),$$

jeżeli podstawimy  $\sphericalangle(n, x) = \vartheta$ , przy czym jest

$$f_1 = \frac{\partial \delta w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \delta w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad f_2 = \frac{\partial \delta w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \delta w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$



Rys. 104.

Te wyrażenia przekształcimy teraz uważając kierunek normalnej  $n$  i stycznej  $s$  (rys. 104) do konturu płyty w punkcie  $P$  za nowe osie współrzędnych o początku w  $P$  i pisząc znane zależności między współrzędnymi dowolnego punktu płaszczyzny  $x$  i  $y$  a  $n$  i  $s$  z pominięciem zmiany początku układu

jako nie mającej wpływu na dalszy tok rachunku. Mamy tedy

$$(181.4) \quad \begin{cases} x = n \cos \vartheta - s \sin \vartheta, & n = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \\ y = n \sin \vartheta + s \cos \vartheta, & s = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta. \end{cases}$$

Przy pomocy tych wzorów wyrazimy pochodne o postaci  $\partial f / \partial x$  i  $\partial f / \partial y$  przez  $\partial f / \partial n$  i  $\partial f / \partial s$ , a mianowicie:

$$(181.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial n} \cos \vartheta - \frac{\partial f}{\partial s} \sin \vartheta \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial n} \cdot \frac{\partial n}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial n} \sin \vartheta + \frac{\partial f}{\partial s} \cos \vartheta. \end{cases}$$

Wstawivszy teraz obliczone tą drogą wartości  $\partial \delta w / \partial x$  i  $\partial \delta w / \partial y$  w części drugiej, otrzymamy

$$(181.6) \quad \begin{aligned} & \bar{B}(1-\nu) \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \int \frac{\partial \delta w}{\partial n} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \vartheta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \vartheta \sin \vartheta \right) ds + \right. \\ & \left. + \int \frac{\partial \delta w}{\partial s} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) \right] ds \right\}. \end{aligned}$$

Ostatnia całka ma postać

$$\int F(x, y) \frac{\partial \delta w}{\partial s} ds,$$

nadającą się do całkowania „przez części”, tj.

$$\int F(x, y) \frac{\partial \delta w}{\partial s} ds = [F(x, y) \delta w] - \int \delta w \cdot \frac{\partial F}{\partial s} ds.$$

Wyraz pierwszy po prawej znika, albowiem całkowanie odbywa się po konturze zamkniętym, a funkcja  $F$  jest jednoznaczna. Zastosowawszy to przekształcenie napiszemy wyrażenie (181.6) w postaci

$$(181.7) \quad \bar{B}(1-\nu) \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \int \frac{\partial \delta w}{\partial n} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \vartheta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \vartheta \sin \vartheta \right) ds - \right. \\ \left. - \int \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) \right] \delta w ds \right\}.$$

Pozostaje jeszcze do wykonania

$$(181.8) \quad -\delta \int_{t_0}^{t_1} V_1 dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \delta \int p u dF = \int_{t_0}^{t_1} dt \int p \delta w dF.$$

Wstawiając wyrażenia (181.2, 7 i 8) w równanie Hamiltona, zmieniając znaki i uporządkowawszy kolejność całek powierzchniowych i liniowych otrzymamy

$$(181.9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mu h \int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \delta w dF + \bar{B} \int_{t_0}^{t_1} dt \int \nabla^4 w \cdot \delta w dF - \int_{t_0}^{t_1} dt \int p \delta w dF + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} dt \int \left[ \bar{B} \nabla^2 w - \bar{B} (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \vartheta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \vartheta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \vartheta \sin \vartheta \right) \right] \frac{\partial \delta w}{\partial n} ds + \int_{t_0}^{t_1} dt \int \left\{ -\bar{B} \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial n} + \right. \\ & \left. + \bar{B}(1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) \right] \right\} \delta w ds = 0. \end{aligned} \right.$$

Tutaj należy mieć na uwadze, że  $\delta w$  w całkach powierzchniowych ma znaczenie wariacji  $w$  w dowolnym punkcie powierzchni płyty; natomiast w całkach krzywoliniowych po konturze ma znaczenie wariacji ugięcia  $w$  tylko w punktach konturu. Ponieważ równanie powyższe musi być spełnione dla każdej wartości  $\delta w$  na powierzchni, dla każdej wartości  $\partial \delta w / \partial n$  na konturze i dla każdej wartości  $\delta w$  na konturze, przeto wylikają zeń trzy równania następujące:

$$(181.10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mu h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \bar{B} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = p \\ & \nabla^2 w = (1-\nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \vartheta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \vartheta \sin \vartheta \right) \\ & \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial n} = (1-\nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cos \vartheta \sin \vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\sin^2 \vartheta - \cos^2 \vartheta) \right]. \end{aligned} \right.$$

Pierwsze z tych równań jest równaniem różniczkowym drgań poprzecznych płyty stając się równaniem równowagi po skreśleniu wyrazu pierwszego. Drugie i trzecie przedstawiają warunki brzegowe zagadnienia. Postać ich wskazuje na ogromne trudności rozwiązania w przypadku *swobodnych brzegów* płyty, to też odpowiednie rozwiązanie ogólne powiodło się jedynie dla płyty okrągłej (Kirchhoff 1850). Znakomite uproszczenie warunków brzegowych występuje w przypadku brzegu *doskonale utwierdzonego*, gdyż wtedy sprowadzają się do postaci

$$(181.11) \quad w = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0.$$

Dla płyty na całym brzegu (obustronnie) „podpartej”, tzn. gdy  $w = 0$ , a  $\partial w / \partial n \neq 0$  musi w równaniu (181.9) z powodu dowolności  $\partial \delta w / \partial n$  znikać wyrażenie podcałkowe w całości tym czynnikiem opatrzonej, a więc warunkami brzegowymi są:

$$(181.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} w = 0 \\ \nu \cdot \nabla^2 w + (1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \vartheta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \vartheta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cos \vartheta \sin \vartheta \right) = 0, \end{array} \right.$$

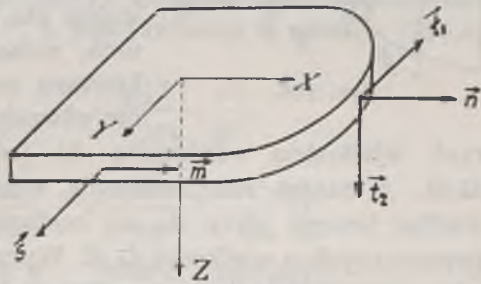
co otrzymuje się także przez łatwe przekształcenie drugiego z równań (181.10).

Czytelnikowi który w Stereomechanice Techn. autora albo w innych książkach znalazł równanie różniczkowe równowagi i drgań płyty wyprowadzone krótszą drogą stosowania warunków równowagi do elementu płyty, może się wydawać droga powyższa wychodząca z zasady Hamilton'a zbyt długą i uciążliwą. Tak jednak nie jest, gdyż tą drogą znaleźliśmy od razu i najogólniejsze warunki brzegowe (przy założonym sposobie obciążenia), których tam nie podano z wyjątkiem prostych przypadków szczególnych, ponieważ wymagałyby rozważań dodatkowych wcale obszernych tak, iż w sumie wyniknęłyby zapewne trud ten sam, a korzyść polegałaby jedynie na uniknięciu rachunku wariacyjnego.

**§ 182. Warunki brzegowe w najogólniejszym przypadku obciążenia płyty.** Przy założeniu stosowalności zasady superpozycji wyłączono powyżej na razie przypadki kiedy na płytę działają siły zewnętrzne mające także składowe równoległe do płaszczyzny płyty, albowiem w tych przypadkach można zadanie rozłożyć na części. Pierwsza załatwiona w § 181 przyjmuje tylko obciążenia prostopadłe do płaszczyzny płyty, druga zaś była traktowana szczegółowo już w rozdz. IV i V, a zwłaszcza w VI-ym, gdzie płytę obciążoną tylko



siłami leżącymi w jej płaszczyźnie nazwano *tarczą*. Obie nie wyczerpują jeszcze możliwości teoretycznych obciążenia do którego można jeszcze zaliczyć zewnętrzne siły styczne do powierzchni płyty, a wreszcie pary sił zewnętrznych działające na tę powierzchnię, chociaż te przypadki są bardzo rzadkie w zagadnieniach konkretnych. Ale nawet w najogólniejszym przypadku obciążenia ilość warunków brzegowych w zagadnieniach statycznych płyt cienkich jest nie większa od 4. W tych bowiem przypadkach mamy w każdym elemencie brzegu płyty o szerokości  $dl$  do czynienia z parą sił i siłą sprowadzoną do środka elementu <sup>1)</sup>. Rozłóżmy siłę na trzy składowe  $\bar{t}_1 dl$  w kierunku stycznej do konturu,  $\bar{t}_2 dl$  w kierunku normalnej do płaszczyzny płyty i  $\bar{n} dl$  w kierunku normalnej do konturu, a moment pary na moment zginający  $\bar{m} dl$  którego wektor jest styczny do konturu i moment skręcający  $\bar{s} dl$  o wektorze prostopadłym do elementu (rys. 105). Trzecia składowa momentu o wektorze prostopadłym do płaszczyzny płyty musi być zawsze równa 0, jak to wynika z warunku momentowego równowagi elementu płyty o podstawie  $dx \cdot dy$ .



Rys. 105.

Oznaczywszy tymi samymi literami bez kresek poziomych wypadkowe z naprężeń wewnętrznych w przylegających do konturu elementach płyty, napiszemy warunki brzegowe w postaci

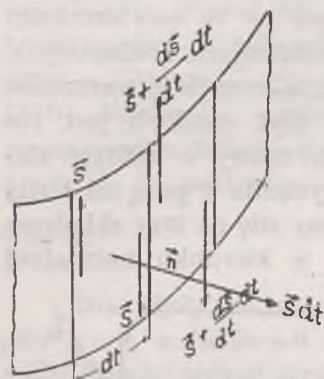
$$(182.1) \quad \bar{t}_1 = t_1, \quad \bar{t}_2 = t_2, \quad \bar{n} = n, \quad \bar{m} = m, \quad \bar{s} = s.$$

Pięć warunków powyższych odnosi się do płyty o grubości dowolnej. Podal je już Poisson w r. 1829. Że dla płyt cienkich można je sprowadzić do czterech wykazano najpierw w słynnej „Natural Philosophy” W. Thomson’a i P. G. Tait’a z r. 1876 w sposób następujący: Weźmy pod uwagę dwa sąsiednie elementy brzegu płyty o szerokości  $dl$ , na które działają momenty skręcające

$$\bar{s} dl \quad \text{i} \quad \left( \bar{s} + \frac{d\bar{s}}{dl} dl \right) dl.$$

<sup>1)</sup> Zamiast  $s$  wprowadzono tutaj oznaczenie  $l$  na długość łuku konturu, ponieważ przez  $s$  oznaczmy teraz moment skręcający odniesiony do jednostki szerokości elementu, którego szerokość była oznaczana powyżej przez  $ds$ .

Moment pierwszy jest statycznie równoważny dwóm siłom o wielkości  $\bar{s}$  działającym wzdłuż równoległych prostych krawędzi elementu w sposób uwidoczniiony na rys. 106. Podobnie moment drugi jest statycznie równoważny dwóm



Rys. 106.

siłom o wielkości  $\bar{s} + \frac{d\bar{s}}{dt} dt$  leżącym na równoległych krawędziach elementu drugiego. W krawędzi wspólnej obu elementów dają teraz obie siły  $\bar{s}$  i  $\bar{s} + \frac{d\bar{s}}{dt} dt$  wypadkową  $\frac{d\bar{s}}{dt} dt$ . To samo zachodzi oczywiście dla każdej pary elementów sąsiednich, wobec czego rozmieszczone wzdłuż konturu momenty skręcające są statycznie równoważne siłom poprzecznym, których

wielkością odniesioną do jednostki długości konturu jest  $\frac{d\bar{s}}{dt}$ . A zatem rozmieszczenie ciągle momentów skręcających  $\bar{s}$  wzdłuż brzegu płyty da się zastąpić rozmieszczeniem ciągłym sił poprzecznych o wielkości  $\frac{d\bar{s}}{dt}$ . Wprawdzie statycznie równoważnym siłom zewnętrznym mogą odpowiadać różne stany napięcia i odkształcenia, ale te stany zdążają szybko do tej samej granicy w odległości od brzegu płyty porównywalnej z jej grubością, jak to wynika z zasady de Saint-Venant'a. Dlatego w płycie nieskończenie cienkiej sięgają różnice stanów odpowiadających obu powyższym statycznie równoważnym układem sił tylko na nieskończenie małą odległość od brzegu, a warunki (182.1) sprowadzają się do czterech następujących:

$$(182.2) \quad \bar{t}_1 = t, \quad \bar{t}_z - \frac{d\bar{s}}{dt} = t_z; \quad \bar{m} = m; \quad \bar{n} = n.$$

W zagadnieniach takich jak np. z § 181 jest  $\bar{n} = 0$ ,  $t_1 = 0$ , wobec czego mieliśmy do czynienia tylko z dwoma warunkami

$$(182.3) \quad \bar{t}_z - \frac{d\bar{s}}{dt} = t_z, \quad \bar{m} = m,$$

którym odpowiadają dwa warunki wyrażone w innej postaci we wzorach (181.10) zwane *warunkami Kirchhoffa*.

Tutaj wypada wyprowadzić wzory wyrażające wielkości statyczne płyty cienkiej w zależności od powierzchni ugięcia określonej równaniem  $w = w(x, y)$ . W tym celu napiszemy najpierw wyrażenia dla krzywizny przekrojów płaszczyznami  $XZ$  i  $YZ$  według wzorów

ogólnych (180.12 i 14), podstawivszy w pierwszym  $\vartheta = 0$ , a w drugim  $\vartheta = \pi/2$ . Otrzymamy więc w przekroju  $XZ$  i  $YZ$ :

$$\frac{1}{\varrho} \equiv \frac{1}{\varrho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \frac{1}{\varrho'} \equiv \frac{1}{\varrho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Zmiana znaku tłumaczy się kierunkiem dodatniej osi  $Z$  przeciwnym kierunkowi obranemu w § 180.

Weźmy następnie wzory (116.7):

$$(182.4) \quad (116.7) \quad \begin{cases} m_x = m_1 \cos^2 \vartheta + m_2 \sin^2 \vartheta; & m_y = m_1 \sin^2 \vartheta + m_2 \cos^2 \vartheta \\ s = (m_1 - m_2) \sin \vartheta \cos \vartheta, \end{cases}$$

gdzie  $\vartheta$  jest kątem jaki ślad przekroju głównego odpowiadającego krzywiznie  $1/\varrho_1$  tworzy z osią  $X$ , a podstawivszy z wzorów (116.6) wartości

$$m_1 = \bar{B} \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{\nu}{\varrho_2} \right), \quad m_2 = \bar{B} \left( \frac{1}{\varrho_2} + \frac{\nu}{\varrho_1} \right),$$

otrzymamy

$$m_x = \bar{B} \left[ \frac{\cos^2 \vartheta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\varrho_2} + \nu \left( \frac{\cos^2 \vartheta}{\varrho_2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\varrho_1} \right) \right]$$

$$m_y = \bar{B} \left[ \frac{\cos^2 \vartheta}{\varrho_2} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\varrho_1} + \nu \left( \frac{\cos^2 \vartheta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\varrho_2} \right) \right].$$

Ale stosownie do wzoru Euler'a jest

$$\frac{1}{\varrho} \equiv \frac{1}{\varrho_x} = \frac{\cos^2 \vartheta}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \vartheta}{\varrho_2}; \quad \frac{1}{\varrho'} \equiv \frac{1}{\varrho_y} = \frac{\sin^2 \vartheta}{\varrho_1} + \frac{\cos^2 \vartheta}{\varrho_2},$$

a zatem

$$m_x = -\bar{B} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \quad m_y = -\bar{B} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right).$$

Wstawivszy teraz te same wyrażenia dla  $m_1$  i  $m_2$  w trzeciej z równań (182.4) znajdujemy

$$s = \bar{B} \frac{(1-\nu)}{2} \left( \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right),$$

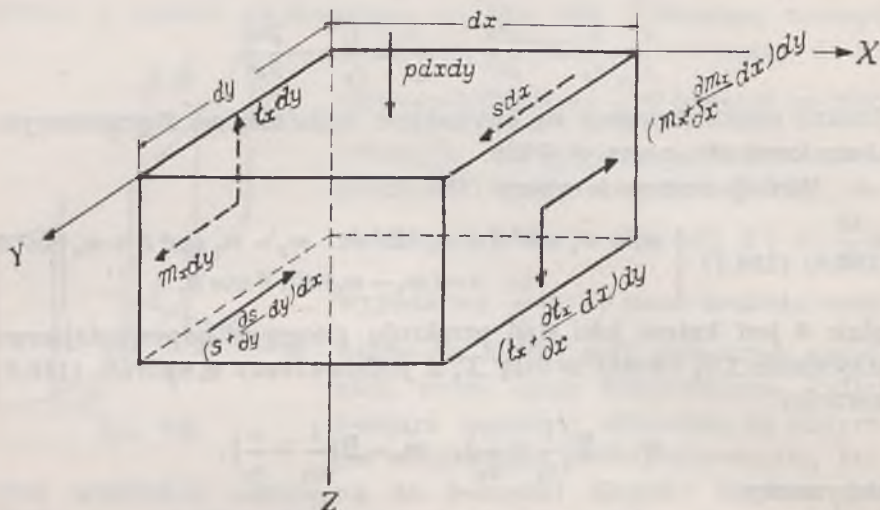
a ponieważ stosownie do (180.19) jest

$$\sin 2\vartheta = -\frac{2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}{\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}},$$

więc

$$(182.5) \quad s = -\bar{B}(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Rozpatrując wreszcie równowagę elementu płyty o polu  $dx dy$  (rys. 107) napiszmy warunek momentów względem osi równoległej



Rys. 107.

do  $Y$  i przechodzącej przez środek elementu. Mamy więc z momentów zginających na ścianie lewej i prawej

$$m_x dy - \left( m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy,$$

z sił tnących

$$t_x dy \cdot \frac{dx}{2} + \left( t_x + \frac{\partial t_x}{\partial x} dx \right) dy \cdot \frac{dx}{2};$$

z momentów skręcających na ścianie tylnej i frontowej

$$s dx - \left( s + \frac{\partial s}{\partial y} dy \right) dx.$$

Momenty innych sił zewnętrznych znikają, a zatem

$$t_x dx dy + \frac{1}{2} \frac{\partial t_x}{\partial x} dx^2 dy - \frac{\partial m_x}{\partial x} dx dy - \frac{\partial s}{\partial y} dx dy = 0,$$

a stąd

$$(182.6) \quad t_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y}.$$

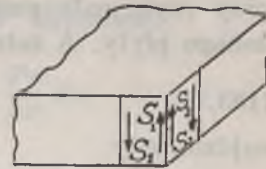
Analogicznie jest z warunku momentowego względem osi równoległej do  $X$ .

$$(182.6a) \quad t_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial x}.$$

Po wstawieniu wyrażeń powyżej znalezionych dla  $m_x$ ,  $m_y$  i  $s$  otrzymamy

$$(182.7) \quad \begin{cases} t_x = -\bar{B} \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x} = -\bar{B} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \\ t_y = -\bar{B} \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y} = -\bar{B} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right). \end{cases}$$

Wracając do warunków brzegowych zwrócimy uwagę na ważną ich osobliwość, jaka zachodzi w miejscach załomu konturu. Gdy w tym miejscu założymy podparcie teoretyczne brzegu, tzn. gdy punkt konturu nie może się przemieszczać prostopadle do płaszczyzny środkowej płyty, a rozwiązanie równania różniczkowego równowagi prowadzi do różnych od zera momentów skręcających po obu stronach załomu, to przy kącie załomu równym  $\pi/2$  muszą być momenty skręcające po obu stronach krawędzi liczbowo równe, a kierunkowo przeciwne. Odpowiadające im statycznie równoważne pary sił (rys. 108) dają więc na krawędzi dwie siły zgodnie skierowane  $S_1$  i  $S_2$  o wypadkowej  $S_1 + S_2$ , przy czym  $S_1 = S_2 = S$ , a więc  $S_1 + S_2 = 2S$ . Przy kącie załomu różnym od  $\pi/2$  otrzymujemy również dwie siły, ale różne o wypadkowej  $S_1 + S_2$ . Ta wypadkowa musi być zrównoważona reakcją linii podparcia, tj. siłą skupioną, podczas gdy po obu stronach załomu występują reakcje  $\bar{t}_z = t_z + ds/dt$  rozmieszczone w sposób ciągły. Wynik ten gra ważną rolę w teorii zgięcia płyt prostokątnych dokoła podpartych.



Rys. 108.

**§ 183. Inny wywód równania różniczkowego równowagi płyty cienkiej.** To równanie można jeszcze otrzymać inną drogą, która jest nadto ważna z powodu opartej na niej nader pożytecznej metody rozwiązywania zagadnień szczegółowych zgięcia płyty. Punktem wyjścia jest twierdzenie mechaniki ogólnej, że *energia potencjalna układu materialnego, na który działają tylko siły pochodzące od potencjału ma w położeniu równowagi wartość krańcową* (extremum). Takim układem jest oczywiście każde ciało sprężyste, pozostające pod działaniem sił zewnętrznych masowych i powierzchniowych wyznaczonych ciężarem własnym ciała i ciężarów na nim spoczywających, a więc i płyta. Gdy sobie ją pomyślimy w położeniu poziomym obciążoną siłami pionowymi stałymi na jednej lub obu powierzchniach to oznaczwszy wypadkową z obciążeń elementu pola płyty  $dF = dx dy$  przez  $p dx dy$  traktujemy  $p$  jako funkcję  $x$  i  $y$  przedstawiającą natężenie obciążenia, czyli obciążenie odniesione do jednostki pola płyty

w miejscu  $(x, y)$ . Wtedy energię potencjalną sił sprężystości  $V$  wyznacza wyrażenie (181.1), a energię potencjalną obciążeń wyrazi ujemna praca  $L$  tych obciążeń przy przejściu z położenia nieobciążonego w położenie równowagi, przy czym każdy punkt płaszczyzny środkowej płyty doznał przemieszczenia pionowego  $w$ , w kierunku dodatnim osi  $z$  wskazującym ku dołowi, a więc

$$L = \int p w dF,$$

a w przypadku sił skupionych

$$L = \sum P_i w_i \quad (i = 1, 2, \dots),$$

przy czym całkowanie (sumowanie) odnosi się do obszaru obciążonego płyty. A zatem ekstremum energii całkowitej

$$(183.1) \quad U = V - L$$

zajdzie, gdy

$$(183.2) \quad \delta(V - L) = 0, \text{ czyli } \delta V - \int p \delta w dF = 0^1)$$

przy założeniu zrozumieliśmy, że odchylenie przygotowane z położenia równowagi nie zmienia wartości obciążeń. Zmieniwszy tutaj znaki otrzymujemy równanie

$$\int p \delta w dF - \delta V = 0,$$

które wyraża po prostu zasadę prac przygotowanych.  $\delta V$  jest wariacją wyrażenia (181.1), którą przekształcimy według zasad rachunku wariacyjnego rozpoczynając od części pierwszej, a więc

$$(183.3) \quad \frac{1}{2} \bar{B} \delta \int \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dF = \bar{B} \int \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) dF.$$

Po wykonaniu mnożenia pod całką otrzymamy cztery wyrazy, z których pierwszy poza współczynnikiem  $\bar{B}$  ma postać

$$\int dy \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx.$$

Za pomocą całkowania przez części zamienia się ten wyraz na

$$\int dy \left\{ \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right] - \int \frac{\partial \delta w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx \right\},$$

<sup>1)</sup> W wyrażenie dla pracy sił zewnętrznych nie wchodzi reakcje punktów i linii podparcia płyty, ale oczywiście tylko wtedy, gdy można je uważać za stałe i wyłączyć tarcie.

czyli na całkę pojedynczą

$$\int \left( \overline{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x}} \right) dy \text{ i całkę podwójną } - \int \int \frac{\partial \delta w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} dx dy.$$

W pierwszej całce tkwią wartości  $\partial \delta w / \partial x$  na konturze płyty, co zaznaczono kreskami poziomymi. Ponieważ wariacji poddajemy funkcję  $w$  tylko na obrzazie płyty z wyłączeniem konturu, przeto tak wariacja  $\delta w$  jak i jej pochodne są na konturze płyty równe zeru, wobec czego mamy

$$\int dy \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx = - \int dy \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x} dx.$$

Stosując znowu całkowanie „przez części” napiszemy

$$\int \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x} dz = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \delta w - \int \delta w \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} dx,$$

a więc

$$\int dy \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx = - \int \overline{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}} \delta w dy + \int \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \delta w dx dy.$$

Tutaj znika znowu całka konturowa po stronie prawej z powodu tego samego co poprzednio, a pozostaje tylko całka powierzchniowa. Analogicznie napiszemy

$$\int dx \int \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} dy = \int \int \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \delta w dx dy.$$

Pozostają do przekształcenia jeszcze dwie całki powierzchniowe z wyrażenia (183.3), tj

$$(183.4) \quad J_1 = \int \int \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} dx dy \quad \text{i} \quad J_2 = \int \int \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} dx dy,$$

dla których tą samą drogą znajdujemy

$$J_1 = J_2 = \int \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dx dy = \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dF.$$

Wariacja części drugiej wyrażenia (181.1) po wyłączeniu stałego współczynnika  $\bar{B}(1-\nu)$  daje:

$$(183.5) \quad \delta \int \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dF = \\ = \int \left[ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] dF.$$

Przekształcając pierwszą z tych całek  $J'$  znajdujemy

$$\begin{aligned} J' &= 2 \int \int \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} dx dy = 2 \int dy \int \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) dx = \\ &= 2 \int dy \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial y} - \int \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial y} dx \right] = \\ &= -2 \int dx \int \frac{\partial \delta w}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} dy = -2 \int dx \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \cdot \delta w - \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dy \right], \end{aligned}$$

co, ponieważ na konturze jest  $\delta w = 0$ , sprowadza się do

$$J' = 2 \int \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \delta w dF.$$

Druga i trzecia z całek po prawej stronie równania (183.5) ma tę samą wartość co  $J_1$  i  $J_2$  ze znakiem  $-$ , czyli daje  $-J'$ .

A zatem cała prawa strona znika, a z równania wyjściowego (183.2) wynika ostatecznie

$$\bar{B} \int \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \delta w \cdot \delta F - \int p \delta w dF = 0,$$

albo też

$$(183.6) \quad \int \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{p}{\bar{B}} \right) \delta w \cdot dF = 0.$$

Ażebym uczynić zadość temu równaniu przy dowolnych wartościach  $\delta w$  na obszarze płyty musi być

$$(183.7) \quad \nabla^2 \nabla^2 w - \frac{p}{B} = 0,$$

co przedstawia równanie różniczkowe równowagi, które można otrzymać z pierwszego z równań (181.1) po podstawieniu  $\partial^2 w / \partial t^2 = 0$ . Wywód poprzedni z zasady Hamiltona miał jak widzimy tę wyższość nad niniejszym, że dostarczył także wyrażen dla warunków brzegowych.

Dla płyt o grubości łagodnie zmiennej stosuje się także powyższe równanie różniczkowe powierzchni ugięcia, aby uzyskać rozwiązanie przybliżone. Wtedy sztywność zginania  $B$  jest funkcją  $x$  i  $y$ .

**§ 184. Metoda Rayleigh'a-Ritz'a.** Ta metoda omija całkowanie równania różniczkowego powierzchni ugięcia wychodząc z założenia, że  $w$  jako funkcja  $x, y$  da się rozwinąć na szereg w ogóle nieskończony

$$(184.1) \quad w = a_1 \varphi_1(x, y) + a_2 \varphi_2(x, y) + \dots + a_n \varphi_n(x, y) \dots (n \rightarrow \infty),$$



gdzie  $\varphi_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) są funkcjami spełniającymi warunki brzegowe, zaś  $a_i$  współczynnikami stałymi. Funkcje  $\varphi_i$  są zresztą dowolne, chociaż od ich postaci zależy bardzo stopień zbieżności szeregu którego współczynniki obliczamy z warunku ekstremum energii całkowitej układu  $U$  w położeniu równowagi, po wstawieniu w wyrażenie dla  $U$  wartości powyższej  $w$ .  $U$  traktujemy przy tym jako funkcję  $n$  parametrów  $a_i$ , a więc warunki ekstremum wyrażamy równaniami

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0.$$

Główną trudność stanowi dobór odpowiedni ciągu funkcji  $\varphi_i$ , natomiast ważną zaletą praktyczną metody jest możliwość uzyskania rozwiązań przybliżonych przy zastosowaniu szeregu o niewielu wyrazach, co pozwala niezbyt uciążliwym rachunkiem znaleźć rozwiązania liczbowe w zadaniach konkretnych.

W. Ritz<sup>1)</sup> dowiódł, że gdy funkcje  $\varphi_i$  dobierzemy tak, aby wyrażenie (184.1) mogło z dokładnością dowolną przedstawiać każdą funkcję  $w$  czyniącą zadość warunkom brzegowym, a jego pochodne określoną liczbę pochodnych tej funkcji, wówczas z rosnącym  $n$  zdążają wyrażenia o postaci (184.1) do szukanego rozwiązania ścisłego.

Metoda R.-R. ma oczywiście znaczenie ogólne i może być stosowana do wszelkich zagadnień teorii sprężystości oraz zagadnień z innych dziedzin fizyki teoretycznej, jednakże, jak się zdaje, świeciła główne sukcesy przy rozwiązywaniu zadań z teorii płyt. Sam Ritz wypróbował ją z powodzeniem przy rozwiązaniu trudnego przypadku zgięcia płyty prostokątnej dokoła doskonale utwierdzonej pod obciążeniem prostopadłym do płaszczyzny płyty.

Jako prosty przykład weźmiemy zagadnienie płyty prostokątnej o podparciu teoretycznym (tj. działającym obustronnie) wszystkich czterech boków i obciążeniu prostopadłym  $p(x,y)$ , którego rozwiązanie znalazł najpierw L. Navier w r. 1820.

Założywszy w tym celu warunki brzegowe  $w=0$ ;  $\partial^2 w/\partial x^2=0$  i  $\partial^2 w/\partial y^2=0$ <sup>2)</sup> przy osiach  $x$  i  $y$  przechodzących przez sąsiednie

1) Crelles Journ. f. Math. t. 135, 1909, str. 1—61.

2) Wielu autorów wymienia tutaj  $w=0$  i  $\nabla^2 w \equiv \partial^2 w/\partial x^2 + \partial^2 w/\partial y^2 = 0$  jako warunki Navier'a dla każdego prostoliniowego brzegu płyty ustalonego tak, aby nie było momentów zginających około linii środkowej tego brzegu. Wtedy w elementach tego brzegu nie ma również momentów zginających około normalnych do linii środkowej. Gdy więc tę linię obierzemy np. za oś  $y$ , to

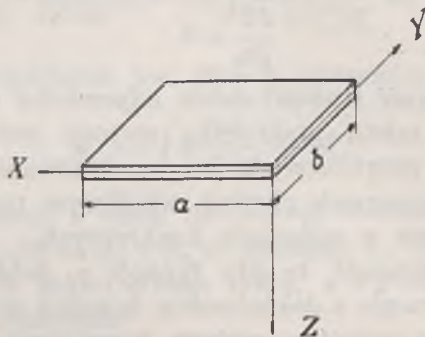
$$m_x = -\bar{B} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad \text{i} \quad m_y = -\bar{B} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0,$$

wobec czego i  $m_x + m_y = 0 = -\bar{B}(1+\nu) (\partial^2 w/\partial x^2 + \partial^2 w/\partial y^2)$ , co jest możebne tylko pod warunkiem  $\nabla^2 w = 0$ . Ten warunek jest zaś równoważny z wymienionymi

podparte boki  $a$  i  $b$  płyty (rys. 109) a oś  $z$  skierowanej w dół, przyjął, że powierzchnię ugięcia przedstawia szereg podwójny

$$(184.2) \quad w = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{rs} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b},$$

którego każdy wyraz czyni zadość wszystkim warunkom brzegowym dla  $x=0$ ,  $x=a$ ,  $y=0$ ,  $y=b$ .



Rys. 109.

Wstawiliśmy to w równanie różniczkowe powierzchni ugięcia otrzymujemy

$$A_{rs} \left( \frac{r^2 \pi^2}{a^2} + \frac{s^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} = \frac{p(x, y)}{B},$$

z czego wynika, że rozwinąwszy obciążenie na szereg Fouriera

$$(184.3) \quad p(x, y) = \sum_r \sum_s C_{rs} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b}$$

porównawszy współczynniki po obu stronach znajdziemy

$$A_{rs} = \frac{C_{rs}}{B\pi^4} \frac{1}{\left( \frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2},$$

a więc rozwiązanie

$$w = \frac{1}{\pi^4 B} \sum_r \sum_s \frac{C_{rs} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b}}{\left( \frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2}.$$

warunkami momentowymi dlatego, ponieważ  $\nabla^2 w$  określa jak wiadomo z § 180 sumę  $1/\rho + 1/\rho'$  krzywizn jakichkolwiek wzajemnie prostopadłych przekrojów normalnych słabo zakrzywionej powierzchni ugięcia. Gdy więc ta suma jest wzdłuż podpartego prostego brzegu  $y$  płyty równa zero, to ponieważ krzywizna  $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ , przeto musi być i  $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ . Z tego wynika, że obadwa sposoby wyrażania warunków brzegowych są równoważne.

Współczynniki  $C_{rs}$  w rozwinięciu  $p(x, y)$  wyznaczamy mnożąc obustronnie rów. (184.3) przez  $\sin r'\pi x/a \sin s'\pi y/b$  i całkując między granicami  $x=0, a$  i  $y=0, b$ . Wtedy znikają całki postaci

$$\int_0^a \int_0^b \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} \sin \frac{r'\pi x}{a} \sin \frac{s'\pi y}{b} dx dy, \quad \text{dla } r \neq r', \quad s \neq s',$$

a otrzymują wartości  $= ab/4$ , dla  $r=r', s=s'$ . Stąd

$$C_{rs} = \frac{4}{ab} \int \int p \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} dx dy.$$

A zatem

$$(184.4) \quad w = \frac{4}{\pi^2 ab \bar{B}} \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} \int \int p(\xi, \eta) \sin \frac{r\pi \xi}{a} \sin \frac{s\pi \eta}{b} d\xi d\eta}{\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right)^2}$$

jest rozwiązaniem ogólnym. Zbieżność powyższego szeregu nie trudno stwierdzić nawet w przypadku najniekorzystniejszym sił skupionych rozpatrzonym szczegółowo w „Teorii płyt...” autora.

Przy zastosowaniu metody R.-R. piszemy

$$U = V - L = \frac{1}{2} \bar{B} \int \int \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy - \int \int p w dx dy^1),$$

a po wstawieniu za  $w$  wyrażenia (184.2) i wykonaniu całkowań otrzymujemy

$$(184.5) \quad \begin{cases} V = \frac{\pi^4}{8} \bar{B} ab \sum_r \sum_s A_{rs}^2 \left( \frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2, \\ L = \sum_r \sum_s A_{rs} \int \int p \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} dx dy. \end{cases}$$

Z warunków  $\partial U / \partial A_{rs} = \partial(V - L) / \partial A_{rs} = 0$  znajdujemy teraz łatwo

$$(184.6) \quad A_{rs} = \frac{4 \int \int p \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} dx dy}{\pi^4 ab \bar{B} \left( \frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2},$$

<sup>1)</sup> Z uwzględnieniem wyniku znalezionej powyżej przy obliczeniu wariacji, że

$$\int \int \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy = 0.$$

zgodnie z rozwiązaniem poprzednim. Jak łatwo się przekonać, druga metoda rozwiązania prowadzi w tym przypadku prędzej do celu. Autor stosował ją i w innych zagadnieniach szczegółowych bardziej złożonych (ob. „Teoria płyt...”), sprawdzając zawsze znalezione wyrażenia dla  $w$  przez podstawienie w równanie różniczkowe powierzchni ugięcia. Takie sprawdzenie pozwala bowiem w niektórych przypadkach ustalenia brzegów płyty przekonać się, że obrona postać funkcji  $\varphi_i$  w rozwinięciu  $w$ , chociaż czyni zadość warunkom brzegowym, to jednak nie prowadzi do rozwiązania ścisłego przy rosnącej liczbie wyrazów szeregu (184.1). Odnośny przykład znajdzie czytelnik w „Teorii płyt” na str. 239.

Tutaj uzupełnimy jeszcze rozwiązanie powyższe przypadku Navier'a podaniem niektórych wzorów dla obciążenia rozłożonego równomiernie  $q$  kg/cm<sup>2</sup> i skupionego  $P$ .

$$p(x,y) = \frac{16q}{\pi^2} \sum_r \sum_s \frac{1}{rs} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b}$$

$$(184.7) \quad w = \frac{16q}{\pi^6 \bar{B}} \sum_r \sum_s \frac{1}{rs} \frac{\sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b}}{\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right)^2} \quad (r, s = 1, 3, 5, \dots).$$

W przypadku siły skupionej  $P$  w punkcie  $(\xi, \eta)$  jest

$$(184.8) \quad w = \frac{4P}{\pi^2 ab \bar{B}} \sum_r \sum_s \frac{\sin \frac{r\pi \xi}{a} \sin \frac{s\pi \eta}{b} \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b}}{\left(\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2}\right)^2} \quad (r, s = 1, 2, 3, \dots).$$

### § 185. Nowsze rozwiązania przypadku Navier'a płyty prostokątnej.

Rozwiązania powyższe jedyne do końca XIX wieku wymagały przy obliczeniach liczbowych zbyt wiele pracy, aby się nimi posługiwać w licznych ważnych zastosowaniach. Dopiero w r. 1899 M. Lévy (C. R. t. 129, str. 535) wskazał na możliwość prostszego rozwiązania za pomocą przyjęcia stosowanego już przez Poisson'a przy całkowaniu równań różniczkowych cząstkowych, a mianowicie

$$(185.1) \quad w = \sum_n X_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

gdzie  $X_n(x)$  jest funkcją samego  $x$ . Tą drogą otrzymuje się w przypadku powyższym, a także w niektórych innych przypadkach ustalenia brzegów, rozwiązanie w postaci szeregu pojedynczego znacznie

dogodniejszego do obliczeń od rozwiązania Navier'a. E. Estanave wykazał w r. 1900<sup>1)</sup>, że rozwiązanie Navier'a da się przekształcić na szereg pojedynczy, co daje to samo, co rozwiązanie Levy'ego. Do tegoż wyniku doszedł A. Nádai w r. 1915<sup>2)</sup> drogą rozłożenia rozwiązania według schematu

$$w = w_1 + w_2,$$

przy czym

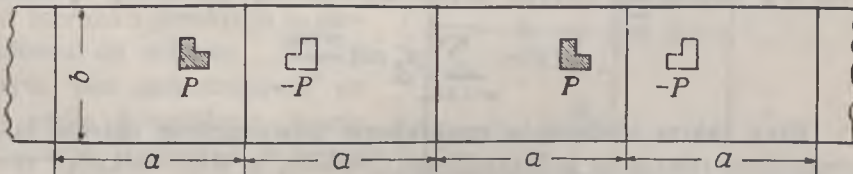
$$(185.2) \quad w_1 = \frac{qb^4}{24B} \left( \frac{y}{b} - 2 \frac{y^3}{b^3} + \frac{y^5}{b^5} \right)$$

jest rozwiązaniem dla zgięcia walcowego płyty nieskończenie długiej o rozpiętości  $b$  między brzegami podpartymi. To wyrażenie różni się od wyrażenia dla linii ugięcia belki o rozpiętości  $b$  obciążonej równomiernie tylko tym, że zamiast sztywności zginania belkowej  $B = EJ$  mamy tutaj sztywność płytową  $\bar{B} = EJ/1 - \nu^2$ .

Druga składowa ugięcia  $w_2$  jest całką równania różniczkowego jednorodnego  $\nabla^2 \nabla^2 w = 0$ , otrzymaną z założenia Levy'ego, które po podstawieniu daje

$$(185.3) \quad X_n'''' - 2 \frac{n^2 \pi^2}{b^2} X_n'' + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} X_n = 0,$$

tj. równanie różniczkowe zwyczajne rzędu czwartego o współczynnikach stałych. Wyznaczywszy stałe całkowania z warunków brzegowych dochodzi się do rozwiązania zupełnego.



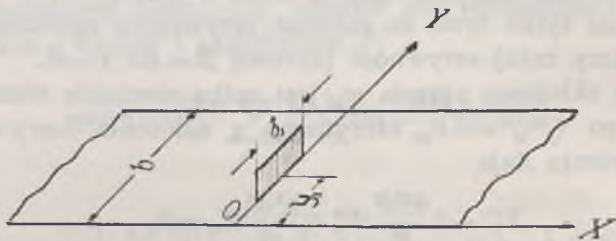
Rys. 110.

Jeszcze inaczej otrzymał autor rozwiązanie równoważne z powyższymi w pracy „Teoria płyt...” wykonanej w latach 1915—1918, a ogłoszonej w r. 1921 (Tow. Naukowe Lwowskie). Uproszczenie jakie ten sposób daje polega na stosunkowo prostej postaci rozwiązania dla płyty nieskończenie długiej pod obciążeniem paska elementarnego prostopadłego do brzegów płyty. Takie, rozwiązanie pozwala dojść szybko przez zwykłe sumowanie do rozwiązania przypadku Navierowskiego. Podzieliwszy w tym celu płytę nieskończenie długą na pola o długości  $a$ , (rys. 110) obciążamy każdą

<sup>1)</sup> E. Estanave, Contribution à l'étude de l'équilibre élastique d'une plaque... (Thèse...).

<sup>2)</sup> A. Nádai, Elastische Platten. Berlin 1925.

parę pól sąsiednich w sposób antisymetryczny względem prostej rozgraniczającej te pola. Znaczy to, że jeżeli lewe pole obciążymy od góry przez  $P$ , to prawe obciążamy od dołu w ten sam sposób przy symetrii obszarów obciążonych względem wymienionej prostej. Obciążymyż identycznie każdą parę pól sąsiednich znajdujemy przez łatwe do wykonania sumowanie rozwiązań powierzchnię ugięcia złożoną z części naprzemian wypukłych i wklęsłych na polach sąsiednich. Części te łączą się wzdłuż prostych rozgraniczających pola, wobec czego momenty  $m_x$  wzdłuż tych prostych znikają, a równowaga dowolnego pola  $ab$  nie będzie naruszona, gdy rozdzielimy płytę nieskończoną przekrojami poprowadzonymi wzdłuż tychże prostych na płyty  $ab$  dokoła podparte.



Rys. 111.

Weźmy np. płytę o rozpiętości  $b$  rozciągającą się po obu stronach osi  $Y$  (rys. 111) w nieskończoność, na którą działa tylko w przekroju  $OY$  obciążenie liniowe dające się rozwinąć na szereg Fouriera

$$p'(y) = \sum_{n=1,2,3\dots} p'_n \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Przy takim obciążeniu znajdujemy powierzchnię ugięcia jako rozwiązanie równania jednorodnego  $\nabla^4 w = 0$ , a więc całkując rów. (185.3). Całka ogólna ma postać

$$(185.4) \quad X_n = (C_1 + C_2 x) e^{\frac{n\pi}{b} x} + (C_3 + C_4 x) e^{-\frac{n\pi}{b} x},$$

co łatwo sprawdzić przez różniczkowanie i podstawienie w (185.3). Warunki brzegowe są:

$$1^0 w \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad 2^0 \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad 3^0 t_x \Big|_{x \rightarrow \infty} = -\bar{B} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w) \Big|_{x \rightarrow \infty} = -\frac{p'}{2}.$$

Oba ostatnie wynikają z symetrii względem płaszczyzny  $YZ$ . A zatem  $C_1 = C_2 = 0$ , a dla  $C_3$  i  $C_4$  otrzymujemy wartości, które po podstawieniu znalezionej całki w (185.1) dają

$$(185.5) \quad w = \frac{b^3}{4\pi^2 \bar{B}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p'_n}{n^2} \left( 1 + \frac{n\pi}{b} x \right) e^{-\frac{n\pi x}{b}} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Gdy np. obciążenie  $p'(y)$  jest rozłożone równomiernie na odcinku  $b_1$ , którego środek ma rzędną  $y_1$  (rys. 111), to rozwinięcie Fouriera daje

$$(185.6) \quad p'_n = \frac{P}{\pi b_1} \cdot \frac{1}{n} \sin \frac{n \pi b_1}{2b} \sin \frac{n \pi y_1}{b},$$

gdzie  $P$  jest obciążeniem całkowitym na odcinku  $b_1$ . Podstawiawszy to w (185.5) mamy

$$(185.7) \quad w = \frac{P b^3}{\pi^2 \bar{B} b_1} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{(n, b_1, y_1)}{n^3} \left( 1 + \frac{n \pi}{b} x \right) e^{-\frac{n \pi}{b} x} \sin \frac{n \pi}{b} y,$$

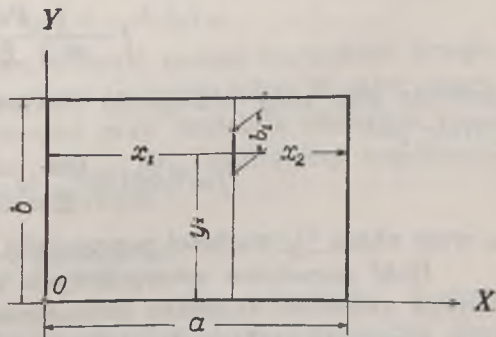
przy skrócie:

$$(185.8) \quad (n, b_1, y_1) \equiv \sin \frac{n \pi b_1}{2} \sin \frac{n \pi}{b} y_1.$$

Zbieżność szeregu we wzorze dla ugięcia (185.7) jest tak silna, że w zastosowaniach praktycznych wystarcza często pierwszy wyraz jako wartość przybliżona.

Zastosowanie sposobu wymienionego powyżej do znalezienia rozwiązania dla płyty prostokątnej  $ab$  obciążonej w ten sam sposób na odcinku  $b_1$  (rys. 112) upraszcza się jeszcze w przypadku ogólniejszym zbadanym przez

autora szczegółowo w „Teorii płyt”, kiedy sztywność zginania płyty jest zależna od kierunku przekroju (a niezależna od miejsca). Wtedy płyta jest anizotropowa, co w ogóle komplikuje teorię znacznie. Jednakże w przypadku ważnym praktycznie ortotropii płyty, tzn. gdy główne osie sprężystości są



Rys. 112.

wzajemnie prostopadłe, a nadto równoległe do  $x$  i  $y$ , jest rozwiązanie ogólne pod pewnym względem prostsze niż w przypadku izotropii. Dlatego podamy tutaj wzór gotowy otrzymany przez przejście do granicy wyniku znalezionego dla płyty ortotropowej, a mianowicie:

$$(185.9) \quad w = \frac{2 P b^3}{\pi \bar{B} b_1} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{(n, b_1, y_1)}{n^3} \left( 1 + \frac{n \pi a}{b} \operatorname{Cth} \frac{n \pi a}{b} - \frac{n \pi x_2}{b} \operatorname{Cth} \frac{n \pi x_2}{b} - \right. \\ \left. - \frac{n \pi x}{b} \operatorname{Cth} \frac{n \pi x}{b} \right) \frac{\operatorname{Sh} \frac{n \pi x_2}{b} \operatorname{Sh} \frac{n \pi x}{b}}{\operatorname{Sh} \frac{n \pi a}{b}} \cdot \sin \frac{n \pi y}{b}.$$

dla  $x \leq x_1 = a - x_2$ , tzn. dla lewej części płyty. Dla części prawej należy zastąpić  $x_2$  przez  $x_1$ , zaś  $x$  przez  $(a - x)$ , aby otrzymać odpowiednie  $w$ .

W prostym przypadku szczególnym płyty obciążonej siłą skupioną  $P$  w środku jest

$$\lim_{\substack{b_1 \rightarrow 0, \\ y_1 = b/2}} (n, b_1, y_1) = \lim \frac{n\pi b_1}{2b} \sin \frac{n\pi}{2},$$

a z równ. (185.9) otrzymujemy dla strzałki ugięcia w środku wzór

$$(185.10) \quad f = \frac{Pb^2}{2\pi^2 \bar{B}} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^3} \frac{Sh \frac{n\pi a}{b} - \frac{n\pi a}{b}}{Ch \frac{n\pi a}{b} + 1},$$

stąd dla płyty kwadratowej ( $b = a$ ):

$$(185.11) \quad f = \frac{Pa^2}{2\pi^2 \bar{B}} \left[ \frac{Sh \pi - \pi}{Ch \pi + 1} + \frac{1}{3^3} \cdot \frac{Sh 3\pi - 3\pi}{Ch 3\pi + 1} + \frac{1}{5^3} \cdot \frac{Sh 5\pi - 5\pi}{Ch 5\pi + 1} + \dots \right].$$

Z tego szeregu wystarczają cztery wyrazy, aby otrzymać wartość liczbową z dokładnością  $10^{-3}$ , a mianowicie

$$f = \frac{1}{86,5} \frac{Pa^2}{\bar{B}},$$

podczas gdy przy obciążeniu równomiernie rozłożonym na całą płycie jest

$$f = 0,00406 \frac{Qa^2}{\bar{B}} = \frac{1}{246,3} \frac{Qa^2}{\bar{B}},$$

a więc około  $1/3$  wartości poprzedniej.

Ilość zagadnień szczególnych płyt prostokątnych, jakie nastęrcza zwłaszcza technika nowoczesna jest bardzo wielka. Szereg tych zagadnień traktował autor szczegółowo w pracach poniżej przytoczonych mając na oku nie tylko zastosowania praktyczne, lecz także porównanie wyników teorii z badaniami doświadczalnymi. Tak np. okazało się, że wpływ nieuchronnego wystawiania płyty poza prostokąt podparcia, który zmniejsza ugięcia i wielkości statyczne płyty obciążonej tylko w obrębie prostokąta podparcia, winien być uwzględniony przy porównaniu pomiarów doświadczalnych z teorią. Podobnie modyfikuje powierzchnię ugięcia rozłożenie obciążenia na sieć kwadratową sił skupionych, jakie zwykle zastępują to obciążenie w badaniach laboratoryjnych, wobec czego nie można poprzestać na stosowaniu wzorów teoretycznych dla obciążenia równomiernego przy interpretacji pomiarów strzałki ugięcia, kątów nachylenia brzegów itd.



**§ 186. Metoda Galerkina.** Z przedstawioną w § 184 metodą R.-R. współzawodniczy z powodzeniem metoda B. G. Galerkin'a, ogłoszona w r. 1915 (Więstnik Inżynierów, Petrograd, zesz. 19). Metoda ta ma tak jak poprzednia znaczenie ogólniejsze, ale ponieważ była podobnie najpierw stosowana do zagadnień płyt, przeto objaśnimy ją na razie na zagadnieniu zgięcia płyty cienkiej obciążonej prostopadle do jej płaszczyzny.

Z rów. (183.6) wynika

$$\bar{B} \iint \nabla^4 w \cdot \delta w \cdot dx dy = \iint p \delta w dx dy,$$

co przy pojmowaniu  $\delta w$  jako przesunięcia przygotowanego wyraża równość wartości liczbowych pracy przygotowanej obciążenia

$$(\delta L)_0 = \iint p \delta w \cdot dx dy$$

i pracy przygotowanej wewnętrznych sił sprężystości, tj.

$$(\delta L)_s = \bar{B} \iint \nabla^4 w \delta w dx dy.$$

Ta równość nie zajdzie jednakże w ogóle ściśle, gdy  $w$  zastąpimy wartością przybliżoną

$$(186.1) \quad \bar{w} = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_n \varphi_n,$$

gdzie każda z funkcji  $\varphi_i$  winna uczynić zadosć warunkom brzegowym zagadnienia, ażeby te warunki spełniało także  $\bar{w}$ . Aby doprowadzić oba wyrażenia do równości przy dowolnie obranych przesunięciach przygotowanych  $\delta w_1, \delta w_2, \dots, \delta w_n$ , poddajemy współczynniki  $a_1, a_2, \dots, a_n$  równaniom warunkowym

$$\iint \bar{B} \nabla^4 w \delta w_i dx dy = \iint p \delta w_i dx dy \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Gdy jako przesunięcia  $\delta w_1, \delta w_2, \dots, \delta w_n$  obierzemy funkcje  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  z wyrażenia przybliżonego (186.1), to otrzymamy równania warunkowe Galerkina

$$(186.2) \quad \iint (\bar{B} \nabla^4 \bar{w} - p) \varphi_i dx dy = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Tych równań jest tyle ile funkcji  $\varphi_i$  obrano dla przedstawienia przybliżonego  $\bar{w}$ , a więc nieskończenie wiele, gdy dążymy do ścisłości zupełnej. Każde z równań (186.2) powstaje przez pomnożenie wprowadzonego do zera równania różniczkowego zagadnienia kolejno przez każdą z funkcji  $\varphi_i$  i pole elementu powierzchni  $dx dy$ , całkowanie tak utworzonego wyrażenia na obszarze płyty i przyrównanie każdej z całek do zera.

Prosty przykład zastosowania metody Galerkina wykazujący jej korzyści praktyczne w porównaniu do metody R.-R. jest przed-

stawiony szczegółowo na str. 139—142 książki: C. B. Biezeno z R. Grammel, Technische Dynamik (Berlin 1939). Idzie tam o przybliżone rozwiązanie wspomnianego już powyżej trudnego przypadku płyty prostokątnej dokoła utwierdzonej i obciążonej równomiernie. Warunkami brzegowymi są wtedy

$$w=0 \quad \text{dla } x=\pm a, \quad y=\pm b,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{dla } x=\pm a, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0 \quad \text{dla } y=\pm b,$$

przy obiorze początku współrzędnych w środku płyty o wymiarach  $2a$  i  $2b$ .

Do zbudowania funkcji  $\bar{w}$  zastosowano najprostsze możliwe funkcje algebraiczne, których iloczyny spełniają warunki brzegowe, tj. funkcje

$$X_1=(x^2-a^2)^2, \quad X_2=x^2(x^2-a^2)^2,$$

$$Y_1=(y^2-b^2)^2, \quad Y_2=y^2(y^2-b^2)^2.$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych  $\bar{x}=x/a$ ,  $\bar{y}=y/b$ ,

$$\bar{X}_1=X_1/a^4; \quad \bar{X}_2=X_2/a^6; \quad \bar{Y}_1=Y_1/b^4; \quad \bar{Y}_2=Y_2/b^6$$

i oznaczeniu współczynników  $a_1, a_2, \dots$  przez  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ , przybiera wyrażenie przybliżone dla  $\bar{w}$  postać

$$\bar{w}=a_{11}\bar{X}_1\bar{Y}_1+a_{12}\bar{X}_1\bar{Y}_2+a_{21}\bar{X}_2\bar{Y}_1+a_{22}\bar{X}_2\bar{Y}_2.$$

Oдноśne równania Galerkin'a przerobione dla współrzędnych  $\bar{x}, \bar{y}$  dają po wprowadzeniu  $\varepsilon^2=b^2/a^2$  i uwzględnieniu, że z powodu symetrii wystarczy całkować tylko na obszarze jednej ćwiartki płyty:

$$(186.3) \quad \bar{B} \int_0^1 \int_0^1 \left[ \sum_{\substack{l=1,2 \\ i=1,2}} a_{ij} \left( \varepsilon^2 \bar{X}_i'''' \bar{Y}_j + 2 \bar{X}_i' \bar{Y}_j' + \frac{1}{\varepsilon^2} \bar{X}_i \bar{Y}_j'''' \right) \right] \bar{X}_k \bar{Y}_l d\bar{x} d\bar{y} =$$

$$= \varepsilon^2 a^4 p \int_0^1 \int_0^1 \bar{X}_k \bar{Y}_l d\bar{x} d\bar{y} \quad \begin{pmatrix} k=1,2 \\ l=1,2 \end{pmatrix}.$$

Mamy więc układ czterech równań liniowych względem  $a_{ij}$ , których współczynniki wymagają obliczenia 52 całek, dających się jednakże wyrazić przez tylko 11 całek różnych, oznaczonych przez

$$a_{ij} = \int_0^1 \bar{X}_i \bar{X}_j d\bar{x} = \int_0^1 \bar{Y}_i \bar{Y}_j d\bar{y}; \quad b_{ij} = \int_0^1 \bar{X}_i \bar{X}_j' d\bar{x} = \int_0^1 \bar{Y}_i \bar{Y}_j' d\bar{y}$$

$$c_{ij} = \int_0^1 \bar{X}_i \bar{X}_j'' d\bar{x} = \int_0^1 \bar{Y}_i \bar{Y}_j'' d\bar{y}$$

$$d_1 = \int_0^1 \bar{X}_1 d\bar{x} = \int_0^1 \bar{Y}_1 d\bar{y}, \quad d_2 = \int_0^1 \bar{X}_2 d\bar{x} = \int_0^1 \bar{Y}_2 d\bar{y}.$$

Ich wartości są:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{128}{3 \cdot 105}, & a_{12} = a_{21} &= \frac{128}{33 \cdot 105}, & a_{22} &= \frac{128}{143 \cdot 105} \\
 b_{11} &= -\frac{128}{105}, & b_{12} = b_{21} &= 0, & b_{22} &= -\frac{128}{11 \cdot 105} \\
 c_{11} &= \frac{64}{5}, & c_{21} = c_{12} &= \frac{64}{35}, & c_{22} &= \frac{3 \cdot 64}{35} \\
 d_1 &= \frac{8}{15}, & d_2 &= \frac{8}{105}.
 \end{aligned}$$

Te stałe wystarczają do obliczenia 52 współczynników zestawionych w tablicy następującej:

$i$	1	1	2	2	
$j$	1	2	1	2	
$k=1$	$\varepsilon^2 a_{11} c_{11}$	$\varepsilon^2 a_{12} c_{11}$	$\varepsilon^2 a_{11} c_{12}$	$\varepsilon^2 a_{12} c_{12}$	$\frac{\varepsilon^2 d_1^2 a^4 p}{B}$
$l=1$	$2 b_{11}^2$	$2 b_{11} b_{12}$	$2 b_{11} b_{12}$	$2 b_{12}^2$	
	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{11} c_{11}$	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{11} c_{12}$	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{12} c_{11}$	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{12} c_{12}$	
$k=1$	$\varepsilon^2 a_{12} c_{11}$	$\varepsilon^2 a_{22} c_{11}$	$\varepsilon^2 a_{12} c_{12}$	$\varepsilon^2 a_{22} c_{12}$	$\frac{\varepsilon^2 d_1 d_2 a^4 p}{B}$
$l=2$	$2 b_{11} b_{12}$	$2 b_{11} b_{22}$	$2 b_{12}^2$	$2 b_{12} b_{22}$	
	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{11} c_{12}$	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{11} c_{22}$	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{12} c_{12}$	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{12} c_{12}$	
$k=2$	$\varepsilon^2 a_{11} c_{12}$	$\varepsilon^2 a_{12} c_{12}$	$\varepsilon^2 a_{11} c_{22}$	$\varepsilon^2 a_{12} c_{22}$	$\frac{\varepsilon^2 d_1 d_2 a^4 p}{B}$
$l=1$	$2 b_{11} b_{12}$	$2 b_{12}^2$	$2 b_{11} b_{22}$	$2 b_{12} b_{22}$	
	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{12} c_{11}$	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{12} c_{12}$	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{22} c_{11}$	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{22} c_{12}$	
$k=2$	$\varepsilon^2 a_{12} c_{12}$	$\varepsilon^2 a_{22} c_{12}$	$\varepsilon^2 a_{12} c_{22}$	$\varepsilon^2 a_{22} c_{22}$	$\frac{\varepsilon^2 d_2^2 a^4 p}{B}$
$l=2$	$2 b_{12}^2$	$2 b_{12} b_{22}$	$2 b_{12} b_{22}$	$2 b_{22}^2$	
	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{12} c_{12}$	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{12} c_{22}$	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{22} c_{12}$	$\frac{1}{\varepsilon^2} a_{22} c_{22}$	

Po obliczeniu współczynników otrzymuje się cztery równania, z których znajduje się nakoniec wartości  $a_{ij}$ , a z nimi równanie przybliżone powierzchni ugięcia płyty.

Aby ocenić stopień przybliżenia wykonano rachunek szczegółowy dla  $\varepsilon=1,5$ , który dał

$$(186.4) \quad \begin{cases} \alpha_{11} = 0,035035 \frac{a^4 p}{B}, & \alpha_{12} = 0,026786 \frac{a^4 p}{B} \\ \alpha_{21} = 0,002648 \frac{a^4 p}{B}, & \alpha_{22} = 0,014031 \frac{a^4 p}{B}. \end{cases}$$

Z tymi wartościami otrzymano np. dla największego naprężenia w środku boku dłuższego ( $x=a$ ,  $y=0$ ) wzór, którego współczynnik jest tylko o 1,5% mniejszy od otrzymanego z obliczenia ścisłego bez porównania uciążliwszego. A dla strzałki ugięcia w środku otrzymano

$$f = 0,035035 \frac{a^4 p}{B},$$

co daje tylko 0,4% błędu.

Oprócz metod powyższych stosują C. B. Biezeno i J. J. Koch<sup>1)</sup> metodę „odwrócenia zagadnienia”, której idea była naszkicowana już w „Teorii płyt” autora. Tę i inną jeszcze metodę znajdzie czytelnik w książce powyżej przytoczonej.

**§ 187. Drgania giętne płyt. Płyta prostokątna.** Własne drgania giętne płyty zachodzą bez udziału sił zewnętrznych (nie licząc samych reakcyj miejsc ustalenia). Stosownie do zasady d'Alembert'a napiszemy odnośne równanie ruchu jako równanie różniczkowe równowagi pod obciążeniem jednostki pola płyty (cienkiej)

$$p = -\mu h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

tj. przez reakcję kinetyczną. Tutaj oznacza  $\mu$  gęstość,  $h$  grubość płyty (jednolitej i izotropowej). A zatem

$$(187.1) \quad \nabla^4 w + \frac{\mu h}{B} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

jest równaniem drgań giętnych płyty. Szukajmy całek tego równania w postaci

$$(187.2) \quad w = \varphi(x, y) \sin \omega t \quad \text{i} \quad w = \varphi(x, y) \cos \omega t.$$

Po wstawieniu w (187.1) otrzymujemy

$$\left( \nabla^4 \varphi - \varphi \cdot \frac{\mu h}{B} \omega^2 \right) \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t} = 0,$$

<sup>1)</sup> Ingenieur, Haag 38, 1923, str. 25.

z czego widać, że obie funkcje (187.2) są rozwiązaniami równania (187.1) jeżeli funkcja  $\varphi(x, y)$  spełnia równanie

$$(187.3) \quad \nabla^4 \varphi = \frac{\mu h v^2}{B} \varphi.$$

Rozpatrzmy tutaj bliżej tylko przypadek płyty prostokątnej  $a \cdot b$  o brzegach przegibnie ustalonych (jak w zagadnieniu Navier'a). Wtedy równaniu powyższemu czyni zadość funkcja

$$\varphi(x, y) = c \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} \quad (r, s = 1, 2, 3, \dots),$$

gdzie  $c$  oznacza stałą, jeżeli

$$\left( \frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right)^2 \pi^4 = \frac{\omega^2 \mu h}{B},$$

czyli gdy

$$(187.4) \quad \omega = \omega_{rs} = \pi^2 \left( \frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{B}{\mu h}}.$$

Rozwiązanie rów. (187.1) można przeto napisać w postaci

$$w = (c_{rs} \sin \omega_{rs} t + c'_{rs} \cos \omega_{rs} t) \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b},$$

albo

$$(187.5) \quad w = a_{rs} \cos (\omega_{rs} t - \vartheta_{rs}) \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b},$$

jeżeli  $a_{rs}$  i  $\vartheta_{rs}$  są stałymi dowolnymi zastępującymi  $c_{rs}$  i  $c'_{rs}$ . Najogólniejszym rozwiązaniem spełniającym przy każdej wartości  $t$  warunki brzegowe jest widocznie

$$(187.6) \quad w = \sum_r \sum_s a_{rs} \cos (\omega_{rs} t - \vartheta_{rs}) \sin \frac{r\pi x}{a} \sin \frac{s\pi y}{b} \quad (r, s = 1, 2, 3, \dots).$$

Najdłuższy okres drgania

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_{11}} = \frac{2a^2 b^2}{\pi h (a^2 + b^2)} \sqrt{\frac{12\mu(1-\nu^2)}{E}}$$

odpowiada drganiu harmonicznemu podstawowemu płyty, którego równaniem jest

$$(187.7) \quad w = a_{11} \cos \omega_{11} t \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Przyjawszy  $r = s = 2, 3, 4, \dots$  otrzymujemy drgania składowe z prostymi liniami węzłowymi równoległymi do brzegów płyty.

Linie te dzielą płytę na pola prostokątne podobne geometrycznie do prostokąta płyty  $a \cdot b$ . W przypadkach  $r \neq s$  zachodzi również podział liniami węzłowymi na prostokąty, ale niepodobne do  $a \cdot b$ .

Drgania złożone nie są w ogóle ruchami okresowymi jak to np. łatwo stwierdzić w prostym stosunkowo przypadku dwu drgań składowych odpowiadających wartościom  $r=r_1$ ,  $s=s_1$  i  $r=r_2$ ,  $s=s_2$ . Wtedy

$$(187.8) \quad w = w_1 \sin \frac{r_1 \pi x}{a} \sin \frac{s_1 \pi y}{b} \sin \omega_1 t + w_2 \sin \frac{r_2 \pi x}{a} \sin \frac{s_2 \pi y}{b} \sin \omega_2 t,$$

gdzie stosownie do (187.4) jest

$$(187.9) \quad \omega_1 = \pi^2 \left( \frac{r_1^2}{a^2} + \frac{s_1^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{B}{\mu h}}; \quad \omega_2 = \pi^2 \left( \frac{r_2^2}{a^2} + \frac{s_2^2}{b^2} \right) \sqrt{\frac{B}{\mu h}},$$

a ruch będzie okresowym tylko pod warunkiem, że

$$(187.10) \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \left( \frac{r_1^2}{a^2} + \frac{s_1^2}{b^2} \right) : \left( \frac{r_2^2}{a^2} + \frac{s_2^2}{b^2} \right)$$

jest liczbą wymierną. To zaś wymaga aby  $a$  i  $b$  było również liczbą wymierną. W drganiu określonym równaniem (187.8) występują w ogóle tylko punkty węzłowe, a linie węzłowe tylko wtedy, gdy  $\omega_1 = \omega_2$ . Zależnie od wartości liczb  $r_1, s_1, r_2, s_2$  otrzymujemy najrozmaitsze kształty linii węzłowych. Te same linie występują także w błonach drgających równomiernie napiętych na stałym konturze prostokątnym i można je znaleźć w podręcznikach akustyki.

**§ 188. Drgania płyty okrągłej o brzegu swobodnym.** Ten przypadek ma ważne znaczenie nie tylko w akustyce, gdzie był najpierw studiowany doświadczalnie zwłaszcza przez E. Chladni'ego (1756—1824), ale także w nowoczesnej konstrukcji turbin parowych (Stodola, Dampfturbinen, VI wyd. 1924). Taka płyta ustalona w środku objawia dwa typy drgań giętych. W pierwszym drgają elementy pierścieniowate wydzielone walcami o wspólnej osi  $Z$  układu mającego początek w środku płyty pomyślanej poziomo i zawierającej w płaszczyźnie środkowej osie  $X$  i  $Y$ . Przekrój osiowy płyty wygina się przy tym falisto podczas drgania. W drugim typie pozostają prostymi elementy o długości równej promieniowi płyty  $R$  wydzielone nieskończenie bliskimi przekrojami osiowymi, a wygięciu fałstemu podczas drgania ulegają wszystkie elementy pierścieniowate.

Równanie różniczkowe drgań własnych, które według (181.10) ma postać

$$(188.1) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\bar{B}}{\mu h} \nabla^4 w = 0,$$

napiżemy we współrzędnych biegunowych  $r, \vartheta$  stosownie do wz. (76.8) w postaci

$$(188.2) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\bar{B}}{\mu h} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right) = 0.$$

Warunki brzegowe (181.10) po podstawieniu wyrażen drugich pochodnych cząstkowych względem  $x$  i  $y$  przez pochodne względem  $r$ , tak jak to uczyniono w § 76, oraz uwzględnieniu że teraz  $\partial/\partial n \equiv \partial/\partial r$ , upraszczają się znacznie do postaci:

$$(188.3) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{r}{r} \frac{\partial w}{\partial r} = 0; \quad (188.4) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = 0.$$

Mamy więc znaleźć całki równania (188.2) czyniące zadość warunkom brzegowym (188.3 i 4). Rezygnując z szukania rozwiązania najogólniejszego przyjmujemy, że  $w$  zależy tylko od  $r$  i  $t$ , czyli poprzestajemy na wyznaczeniu drgań typu pierwszego. Jak w wielu zagadnieniach pokrewnych przyjmujemy według Poisson'a

$$(188.5) \quad w = \psi(r) \cos \omega t \quad \text{albo} \quad w = \psi(r) \sin \omega t.$$

Otrzymujemy tedy z (188.2)

$$-\psi(r) + \frac{\bar{B}}{\mu h \omega^2} \nabla^2 \nabla^2 \psi = 0,$$

albo po wprowadzeniu oznaczenia skracającego

$$(188.6) \quad s^4 = \frac{\mu h \omega^2}{\bar{B}}$$

$$(188.7) \quad \nabla^2 \nabla^2 \psi - s^4 \psi = 0.$$

Warunki brzegowe zaś zamieniają się na

$$(188.8) \quad \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{r}{r} \frac{d\psi}{dr} = 0, \quad \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi}{dr} \right) = 0 \quad \text{dla} \quad r = R,$$

jeżeli  $R$  jest promieniem zewnętrznym płyty.

Rów. (188.7) można łatwo przekształcić na następujące:

$$(188.9) \quad (\nabla^2 - s^2) [(\nabla^2 + s^2)\psi] = 0, \quad \text{albo} \quad (\nabla^2 + s^2) [(\nabla^2 - s^2)\psi] = 0.$$

Łatwo to sprawdzić posługując się symbolem  $\nabla^2$  wyrażonym tutaj przez

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$$

z pominięciem wyrazu ostatniego (ob. wz. (76.7)). Z (188.9) wnosiśmy, że równaniu (188.7) można uczynić zadość w sposób dwojaki: Albo przyrównywuając do zera  $(\nabla^2 + s^2)\psi$ , albo też  $(\nabla^2 - s^2)\psi$ . Stąd wynikają dwa równania różniczkowe rzędu drugiego:

$$(188.10) \quad \begin{cases} \frac{d^2 \psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} + s^2 \psi_1 = 0 \\ \frac{d^2 \psi_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_2}{dr} - s^2 \psi_2 = 0. \end{cases}$$

Obadwa równania są całkowne przez funkcje Besselowskie; pierwsze przez funkcję  $J(sr)$  i  $Y(sr)$ , drugie zaś przez  $J(sri)$  i  $Y(sri)$ . Napiszemy więc

$$(188.11) \quad \psi_1 = A_1 J(sr) + B_1 Y(sr); \quad \psi_2 = A_2 J(sri) + B_2 Y(sri),$$

przy czym funkcje  $J$  i  $Y$  są określone wzorami

$$J(z) = 1 - \frac{(\frac{1}{2}z)^2}{1!^2} + \frac{(\frac{1}{2}z)^4}{2!^2} - \frac{(\frac{1}{2}z)^6}{3!^2} + \dots$$

$$Y(z) = J(z) \ln z + \frac{(\frac{1}{2}z)^2}{1!^2} - \frac{(1 + \frac{1}{2})(\frac{1}{2}z)^4}{2!^2} + \frac{(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})(\frac{1}{2}z)^6}{3!^2} - \dots$$

Ponieważ ta ostatnia funkcja staje się nieskończenie wielką, gdy  $z = sr = 0$ , przeto należy przyjąć  $B_1 = B_2 = 0$ . Składając więc oba rozwiązania, otrzymamy jako rozwiązanie równania (188.7)

$$(188.12) \quad \psi = A J(sr) + B J(sri).$$

Pierwszy z warunków brzegowych (188.8) daje teraz dla  $r = R$ :

$$\frac{d^2}{dr^2} [A J(sr) + B J(isr)] + \frac{\nu}{r} \frac{d}{dr} [A J(sr) + B J(isr)] = 0,$$

a po wykonaniu różniczkowania i prostym przekształceniu;

$$(188.13) \quad A \left[ J''(sR) + \frac{\nu}{sR} J'(sR) \right] - B \left[ J''(isR) + \frac{\nu}{isR} J'(isR) \right] = 0,$$

gdzie kreski oznaczają różniczkowanie względem argumentu. Drugi z warunków brzegowych (188.8) da się bardzo uprościć przez



uwzględnienie równań (188.10), które dają:

$$\nabla^2 \psi_1 = \frac{d^2 \psi_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_1}{dr} = -As^2 J(sr),$$

$$\nabla^2 \psi_2 = \frac{d^2 \psi_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\psi_2}{dr} = Bs^2 J(isr),$$

a stąd

$$\frac{d}{dr} (\nabla^2 \psi) = -\frac{d}{dr} [AJ(sr) - BJ(isr)]s^2 = 0.$$

A zatem warunek brzegowy wyrazi równanie

$$(188.14) \quad \underline{AJ(sr) - BJ(isr)} = 0.$$

Aby równania (188.13 i 14) dały różne od zera wartości  $A$  i  $B$ , musi być ich wyznacznik równy zeru, co prowadzi do następującego równania częstotliwości

$$(188.15) \quad i \left[ J''(sR) + \frac{v}{sR} J'(sR) \right] J'(isR) - \left[ J''(isR) + \frac{v}{isR} J'(isR) \right] J'(sR) = 0,$$

które określa możliwe wartości  $s_m$ , wzgl.  $s_m^4$ , czyli wartości własne. Odpowiadają im wartości  $A_m$  i  $B_m$  w równaniach (188.13 i 14), dla których z ostatniego wynika

$$(188.16) \quad \frac{B_m}{A_m} = -i \frac{J'(sR)}{J'(isR)}.$$

Oznaczywszy przez  $C_m$  stałą dowolną wyznaczymy przy pomocy równania powyższego i (188.12) funkcje własne:

$$(188.17) \quad \psi_m(r) = C_m [J'(is_m R) J(s_m r) - i J'(s_m R) J(is_m r)].$$

Stąd stosownie do równań (188.5) złożymy rozwiązanie szczególne w postaci

$$(188.18) \quad w_m = (C_m \cos \omega_m t + D \sin \omega_m t) \psi_m(r),$$

gdzie  $m$ -tą częstotliwość własną  $\omega_m$  określa według (188.6) wzór:

$$(188.19) \quad \omega_m = s_m^2 \sqrt{\frac{\bar{B}}{\mu h}} = s_m^2 \sqrt{\frac{h^2 E}{12(1-\nu^2)\mu}},$$

w którym  $s_m$  ma wymiar odwrotny długości. Rozwiązanie zaś ogólne jest

$$(188.20) \quad w = \sum_{m=1}^{\infty} (C_m \cos \omega_m t + D_m \sin \omega_m t) [J'(is_m R) J(s_m r) - i J'(s_m R) J(is_m r)].$$

Stałe  $C_m$  i  $D_m$  winny być wyznaczone z warunków początkowych, tj. dla  $t=0$  jest  $w=F(r)$ ;  $\partial w/\partial \tau=G(r)$ , jeżeli  $F$  i  $G$  są funkcjami danymi. Wtedy

$$w\Big|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} C_m [J'(i\varepsilon_m R)J(\varepsilon_m r) - iJ'(\varepsilon_m R)J(i\varepsilon_m r)] = F(r)$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \omega_m [J'(i\varepsilon_m R)J(\varepsilon_m r) - iJ'(\varepsilon_m R)J(i\varepsilon_m r)] = G(r).$$

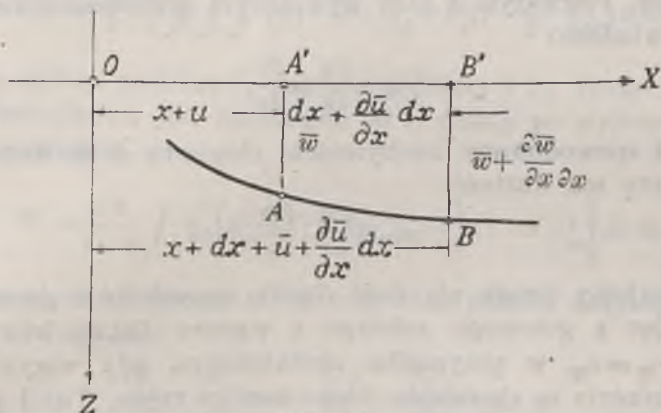
Wyznaczenie stałych wymaga zatem zastosowania rozwinięć funkcji  $F$  i  $G$  na szereg funkcji Besselowskich, na co tutaj nie ma miejsca. Zaznaczymy tylko, że z równania

$$\psi_m(r) = 0 \quad \text{z warunkiem} \quad 0 \leq r \leq R$$

można znaleźć wartości  $r$  odpowiadające punktom płyty, które przy drganiu pozostają w spoczynku, tzw. *węzły drgania*. Punkty te leżą na okręgach kół współśrodkowych jako *liniach węzłowych*. Odnośne obliczenia szczegółowe znajdzie czytelnik w przytoczonym już podręczniku C. Schaefer'a (t. I, wyd. II, str. 753).

**§ 189. Uogólnienie teorii płyt cienkich, gdy ugięcia nie są małe w porównaniu do grubości.** Jak wiadomo z § 179 i następnych klasyczna teoria płyt cienkich prowadząca do biharmonicznego równania różniczkowego powierzchni ugięcia i warunków brzegowych podanych w § 182 opiera się na założeniu, że rzędne powierzchni ugięcia są małe w porównaniu do grubości płyty. To założenie jest konsekwencją przyjęcia, że odkształcenia składowe  $\bar{\varepsilon}_x$ ,  $\bar{\varepsilon}_y$  i  $\bar{\gamma}_{xy}$  w płaszczyźnie środkowej płyty  $xy$  po jej wygięciu nie osiągają wartości godnych uwzględnienia, czyli że elementy powierzchni wygięcia nie zmieniają swoich wymiarów i konturów, co jak wiadomo z geometrii spełnia się ściśle tylko dla powierzchni rozwijalnych na płaszczyźnie. (Wszelkie wielkości odnoszące się do płaszczyzny środkowej płyty, względnie do utworzonej z niej powierzchni ugięcia odróżniamy tutaj kreskami poziomymi od odpowiednich wielkości w innych punktach płyty). Jeżeli więc — jak to zachodzi np. w przypadku gdy powierzchnią ugięcia jest obrotową — odkształcenia powyższe muszą być różne od zera, to teoria może być uważana za ścisłą tylko na granicy, kiedy różnice ugięć punktów płaszczyzny środkowej płyty zdążają do zera. Przy różnicy tych ugięć skończonej lecz małej w porównaniu do grubości płyty daje teoria rozwiązania przybliżone, ale w tym samym stopniu w jakim są przybliżone wszelkie inne rozwiązania zagadnień trójwymiarowych teorii sprężystości.

W przypadkach nader ważnych w zastosowaniach, kiedy różnice ugięć mogą być tego samego rzędu, co grubość płyty, wypada teorię poprawić, względnie uogólnić uwzględniając odkształcenia w płaszczyźnie środkowej płyty powstające przy jej zakrzywieniu. O tym zakrzywieniu założymy wprawdzie, że odpowiada warunkom przyjętym w § 180, tzn. że  $\partial \bar{u}/\partial x$ ,  $\partial \bar{w}/\partial y$  pozostają ułamkami małymi, ale zarazem winniśmy przyjąć, że nie są tak małe, aby ich kwadraty



Rys. 113.

można było pominać wobec  $\partial \bar{u}/\partial x$  i  $\partial \bar{v}/\partial y$  w płaszczyźnie środkowej płyty. Jest to uzasadnione tym, że przemieszczenia  $\bar{u}$  i  $\bar{v}$  mogą być w ogóle bardzo małe, wobec  $\bar{w}$ , a więc  $\partial \bar{u}/\partial x$ ,  $\partial \bar{v}/\partial y$  są liczbami małymi tego samego rzędu co  $(\partial \bar{w}/\partial x)^2$ ,  $(\partial \bar{w}/\partial y)^2$ .

Weźmy teraz pod uwagę dwa punkty A i C przekroju XZ powierzchni środkowej płyty (rys. 113), których współrzędne przed ugięciem były

$$(x, 0), \quad (x + dx, 0)$$

zaś po ugięciu

$$A(x + \bar{u}, \bar{w}), \quad B\left(x + dx + \bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dx, \bar{w} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} dx\right).$$

Element AB, którego długością przed ugięciem było  $dx$ , ma po ugięciu długość  $d\bar{s}$  różniącą się od  $dx$  z dwóch powodów: 1<sup>o</sup> z powodu pochylenia o kąt  $\partial \bar{w}/\partial x$ , 2<sup>o</sup> z powodu różnicy przemieszczeń punktów A i B. Dla pierwszej części znajdujemy

$$\bar{\varepsilon}_{1x} = \frac{d\bar{s} - dx}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)^2} - 1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)^2,$$

z pominięciem małych rzędu wyższego; dla drugiej zaś

$$\bar{\varepsilon}_{2x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}.$$

Suma tych części wyznacza wydłużenie jednostkowe w kierunku  $x$  na płaszczyźnie środkowej, tj

$$(189.1) \quad \bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}; \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y},$$

przy czym drugie z równań powyższych znajduje się analogicznie. Pozostaje jeszcze obliczyć  $\bar{\gamma}_{xy}$ , które będzie podobnie sumą dwu składników. Pierwszym z nich wywołanym przemieszczeniami  $\bar{u}$  i  $\bar{v}$  jest jak wiadomo

$$\bar{\gamma}'_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x},$$

drugi zaś spowodowany nachyleniem elementu  $dx dy$  wskutek wygięcia płyty ma wartość

$$\bar{\gamma}''_{xy} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}.$$

Pomijamy proste ale dość długie uzasadnienie geometryczne korzystając z gotowego szóstego z wzorów (13.5), który przedstawia  $\gamma_{xy} = \varepsilon_{xy}$  w przypadku ogólniejszym, gdy wszystkie trzy przemieszczenia są skończone i tego samego rzędu. Tutaj jest  $\bar{u}$  i  $\bar{v}$  bardzo małe wobec  $\bar{w}$ . Dlatego można skrócić trzeci i czwarty wyraz wskazanego wzoru i napisać

$$(189.2) \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}.$$

Podobnie wynikają i wzory (189.1) z pierwszego i drugiego z wzorów (13.5).

Wstawiając wartości z (189.1 i 2) w znane związki między naprężeniami a odkształceniami otrzymujemy

$$(189.3) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_x = \frac{2G}{1-\nu} (\bar{\varepsilon}_x + \nu \bar{\varepsilon}_y) = \frac{2G}{1-\nu} \left\{ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right] \right\}, \\ \bar{\sigma}_y = \frac{2G}{1-\nu} (\bar{\varepsilon}_y + \nu \bar{\varepsilon}_x) = \frac{2G}{1-\nu} \left\{ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 + \nu \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}, \\ \bar{\tau}_{xy} = G \bar{\gamma}_{xy} = G \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right). \end{cases}$$

Wzory te przedłużają naprężenia rozmieszczone równomiernie na grubości płyty i niezależne od naprężeń zginających i skręcających które dają się wyrazić tak samo jak w teorii klasycznej. Przy tym jest  $w = \bar{w} + \zeta$ , jeżeli  $\zeta$  oznacza odległość warstwy elementarnej płyty od płaszczyzny środkowej, a więc

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}, \quad \delta w = \zeta \bar{w} \text{ itd.}$$

Dlatego wyrażenie dla energii sprężystej płyty składa się teraz z dwóch części: Pierwsza  $V$  przedstawiająca energię zginania i skręcania ma postać (181.1). Drugą zaś wyrazi wzór

$$(189.4) \quad V_1 = \frac{1}{2} \int \int \int (\bar{\varepsilon}_x \bar{\sigma}_x + \bar{\varepsilon}_y \bar{\sigma}_y + \bar{\gamma}_{xy} \bar{\tau}_{xy}) dx dy dz = \\ = \frac{G}{1-\nu} \int \int \int \left( \bar{\varepsilon}_x^2 + 2\nu \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y + \bar{\varepsilon}_y^2 + \frac{1-\nu}{2} \bar{\gamma}_{xy}^2 \right) dx dy dz,$$

w którym należy podstawić wartości z (189.1 i 2). Wobec tego, że funkcja podcałkowa jest niezależna od  $z$ , mamy po wykonaniu całkowania względem  $z$ :

$$(189.5) \quad V_1 = \frac{Gh}{1-\nu} \int \int \left[ \bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{\varepsilon}_y^2 + 2\nu \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y + \frac{1}{2} (1-\nu) \bar{\gamma}_{xy}^2 \right] dx dy.$$

W każdym elemencie płyty zachodzą przede wszystkim dwa równania równowagi

$$(189.6) \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} = 0,$$

ponieważ wyłączono siły masowe, a pominięto naprężenia  $\bar{\sigma}_z, \bar{\tau}_{xz}, \bar{\tau}_{yz}$ . Trzecie równanie odnoszące się do osi  $Z$  zawierać będzie jako jedyną siłę zewnętrzną obciążenie powierzchni płyty  $p$  (kg/cm<sup>2</sup>), które przyjmujemy jako pionowe przy poziomym położeniu płyty. Ustawimy je najprościej przy pomocy zasady prac przygotowanych, którą wyraża równanie

$$(189.7) \quad \int \int p \delta \bar{w} dx dy - (\delta V + \delta V_1) = 0,$$

albo

$$\delta [V + V_1 - \int \int p \bar{w} dx dy] = 0,$$

dla przesunięć przygotowanych  $\delta \bar{w}$  w kierunku  $Z$ . Odpowiednimi wariacjami wielkości  $\bar{\varepsilon}$  i  $\bar{\gamma}$  są stosownie do równań (189.1 i 2):

$$\delta \bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial x}; \quad \delta \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial y}; \quad \delta \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{w}}{\partial y}.$$

A zatem, opuściwszy zbędne już kreski poziome nad  $w$ , napiszemy

$$\delta V_1 = \frac{Gh}{1-\nu} \int \int \left[ 2(\bar{\varepsilon}_x + \nu \bar{\varepsilon}_y) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + 2(\bar{\varepsilon}_y + \nu \bar{\varepsilon}_x) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \right. \\ \left. + (1-\nu) \bar{\gamma}_{xy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right] dx dy.$$

Przy pomocy całkowania „przez części” przekształcimy to równanie na

$$(189.8) \quad \delta V_1 = -\frac{hG}{1-\nu} \iint \delta w \left[ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \bar{\varepsilon}_x + \nu \bar{\varepsilon}_y \right\} \frac{\partial w}{\partial x} \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\bar{\varepsilon}_y + \nu \bar{\varepsilon}_x) \frac{\partial w}{\partial y} \right\} + \\ + (1-\nu) \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\gamma}_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\gamma}_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dx dy.$$

Wyrażenie dla  $\delta V$  znalezione już w § 181 ma postać

$$(189.9) \quad \bar{B} \iint \nabla^4 w \cdot \delta w dx dy = \delta V.$$

Wstawiając te wartości w (189.7) i wyłączając wariację  $\delta w$  jako czynnik wspólny, otrzymamy:

$$\iint \delta w \left[ p - \bar{B} \nabla^4 w + \frac{Gh}{1-\nu} \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\bar{\varepsilon}_x + \nu \bar{\varepsilon}_y) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left[ (\bar{\varepsilon}_y + \nu \bar{\varepsilon}_x) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \right. \right. \\ \left. \left. + (1-\nu) \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\gamma}_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\gamma}_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \right\} \right] dx dy = 0.$$

Przyrównanie wyrażenia podcałkowego do zera daje więc równanie równowagi, które po uwzględnieniu związków (189.3) przyjmie postać

$$(189.10) \quad p - \bar{B} \nabla^4 w + h \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\sigma}_x \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\sigma}_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \bar{\tau}_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \bar{\tau}_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] = 0.$$

Wykonawszy różniczkowania z uwzględnieniem równań (189.6) otrzymamy

$$(189.11) \quad h \left( \bar{\sigma}_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{\sigma}_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \bar{\tau}_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + p - \bar{B} \nabla^4 w = 0.$$

Ale jak wiadomo z § 50 dają się  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  i  $\bar{\tau}_{xy}$  wyrazić funkcją naprężeń Airy'ego, a więc

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \bar{\tau}_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Po wstawieniu tych wartości w (189.11) napiszemy równanie różniczkowe równowagi płyty w postaci

$$(189.12) \quad \boxed{h \left( \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + p - \bar{B} \nabla^4 w = 0}$$

zawierającej już tylko dwie nieznanne funkcje  $F$  i  $w$ . Drugie potrzebne równanie otrzymamy różniczkując (189.2) względem  $x$  i względem  $y$ ,

następnie pierwsze z równań (189.1) dwa razy względem  $y$ , a drugie dwa razy względem  $x$ . Po odjęciu mamy najpierw

$$\frac{\partial^2 \bar{\gamma}_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{\epsilon}_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

Wyraziwszy tutaj  $\bar{\epsilon}$  i  $\bar{\gamma}$  przez  $\bar{\sigma}$  i  $\bar{\tau}$ , a te naprężenia przez funkcję  $F$  dochodzimy na koniec do drugiego równania o postaci

$$(189.13) \quad \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + E \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] = 0.$$

Równania różniczkowe (189.12 i 13) rzędu czwartego względem  $w$  i  $F$  wyznaczają postać powierzchni ugięcia  $w=f(x,y)$  i funkcje naprężeń powstających w tej powierzchni przy ugięciach nie małych wobec grubości płyty. W przypadku krańcowym ugięć bardzo małych znikają naprężenia  $\bar{\sigma}_x$ ,  $\bar{\sigma}_y$  i  $\bar{\tau}_{xy}$ , a więc równanie (189.12) zamienia się na równanie różniczkowe klasycznej teorii płyt cienkich. Równanie (189.13) wskazuje zaś na stosowalność teorii wymienionej także w przypadkach ugięć nie małych wobec grubości płyty, jeżeli

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0,$$

co jak wiadomo z geometrii różniczkowej wyraża, że powierzchnia  $w=f(x,y)$  jest rozwijalna.

W drugim krańcowym przypadku tak małej sztywności zginania płyty, że w równaniu (189.12) można skreślić wyraz  $\bar{B} \nabla^4 w$ , mamy do czynienia z układem uproszczonym równań różniczkowych ugięcia płyty o znikomej sztywności zginania, czyli płyty „wiotkiej” (niem. „elastische Haut”). Zagadnienie płyty wiotkiej jest jednakże bardzo jeszcze złożone w porównaniu do zagadnienia wygięcia równomiernie napiętej błony rozpatrywanego w § 137. Zajmiemy się nim w § 192.

**§ 190. Wielkie ugięcia kołowo-symetryczne płyt cienkich.** Przy obciążeniach i reakcjach rozmieszczonych kołowo-symetrycznie będzie powierzchnia ugięcia powierzchnią obrotową o osi, którą obrzemy za oś  $Z$ . Stosując wtedy współrzędne walcowe napiszemy stosownie do wz. (76.7):

$$(190.1) \quad \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right),$$

gdzie  $r^2 = x^2 + y^2$ . Obróciwszy oś  $X$  tak, aby padła na kierunek promienia  $r$  mamy według (190.1)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{d^2 F}{dr^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}.$$

Teraz równania (189.12 i 13) przybiorą postać

$$(190.2) \quad h \left( \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \cdot \frac{d^2 F}{dr^2} \right) - \bar{B} \nabla^4 w + p = 0$$

$$(190.3) \quad \boxed{\nabla^4 F = -E \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2}}.$$

Pierwsze z rów. powyższych łatwo jeszcze przekształcić na

$$(190.4) \quad \boxed{p = \bar{B} \nabla^4 w - \frac{h}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} \right)}.$$

Oznaczywszy przez  $\bar{u} = u_r$  przemieszczenie radialne punktu płaszczyzny środkowej znajdujemy dla wydłużeń właściwych, radialnego  $\bar{\varepsilon}_r$  i obwodowego  $\bar{\varepsilon}_t$  wyrażenia

$$\bar{\varepsilon}_r = \frac{d\bar{u}}{dr} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{u}}{dr} \right)^2; \quad \bar{\varepsilon}_t = \frac{\bar{u}}{r}.$$

Odpowiednimi naprężeniami głównymi są

$$(190.5) \quad \bar{\sigma}_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}, \quad \bar{\sigma}_t = \frac{d^2 F}{dr^2}.$$

Zważywszy, że

$$\nabla^4 w = \nabla^2 \nabla^2 w = \nabla^2 \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \right] = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \right\}$$

można bez trudności wykonać pierwsze całkowanie równań (190.3 i 4). Równanie (190.4) napiszemy teraz w postaci

$$p = \bar{B} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) \right\} - \frac{h}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} \right).$$

Mnożąc obustronnie przez  $r$  i całkując w granicach 0 do  $r$ , otrzymujemy:

$$(190.6) \quad \int_0^r p r dr = \bar{B} r \frac{d}{dr} (\nabla^2 w) - h \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr}.$$



Stała całkowania jest tutaj równa zero, o ile płyta nie posiada otworu w środku, gdyż dla  $r=0$  musi być  $dw/dr=0$ , a zatem po obu stronach równania wyrazy znikają. Uzyskane równanie posiada treść statyczną, która staje się jasną, gdy pomnożywszy obustronnie przez  $2\pi$  przyjrzymy się nowej postaci równania

$$(190.7) \quad \int_0^r 2\pi r p dr = \bar{B} 2\pi r \frac{d}{dr}(\nabla^2 w) - 2\pi r \cdot \frac{h}{r} \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr}.$$

Otóż lewa strona przedstawia obciążenie  $Q$  koła środkowego płyty o promieniu  $r$ . Po stronie prawej zaś jest

$$-\bar{B} \frac{d}{dr}(\nabla^2 w) = t_r, \quad \text{zaś} \quad \frac{h}{r} \cdot \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} = t'_r,$$

jeżeli  $t_r$  oznacza siłę ścinającą (jednostkową) w przekroju płyty prostopadłym do  $r$  uwarunkowaną samymi momentami zginającymi i skręcającymi w płycie (ob. 182.7), a  $t'_r$  oznacza siłę tnącą dodatkową wynikającą wskutek napięć odkształcających płytę w jej płaszczyźnie, czyli napięć tarczowych.  $t'_r$  jest składową pionową napięcia  $n_r = h/r \frac{dF}{dr}$  (ob. wz. 190.5) nachylonego do poziomu pod kątem  $\beta = dw/dr$ . A zatem równanie (190.7) napisane w postaci

$$(190.8) \quad Q + 2\pi r t_r + 2\pi r n_r \beta = 0$$

wyraża równowagę  $Q$  z wymienionymi siłami zastępującymi połączenie krążka z resztą płyty.

Pomnożywszy przez  $r$  obie strony równania (190.3) w postaci

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} (\nabla^2 F) \right\} = -E \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2}$$

i wykonawszy całkowanie, mamy nadto

$$(190.9) \quad r \frac{d}{dr} (\nabla^2 F) = -\frac{E}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2,$$

przy czym stała całkowania jest widocznie równa zero. Dalsze całkowanie równań (190.6 i 9) napotyka na ogromne trudności. Dlatego odwrócimy zagadnienie szukając obciążenia odpowiadającego danej powierzchni ugięcia. Tą drogą osiąga J. J. Prescott wyniki poniżej podane, które uwydatniają znaczenie teorii uogólnionej.

**§ 191. Przykłady rozwiązań zagadnienia odwróconego płyt cienkich przy ugięciach wielkich.** (a) Zgięcie płyty podług czaszy kulistej. Według teorii klasycznej zgięcie takie zachodzi przy

obciążeniu tylko brzegu płyty momentami zginającymi rozmieszczonymi równomiernie. Zobaczymy, że według teorii ściślej ma się rzecz inaczej.

Przyjawszy równanie powierzchni ugięcia płyty o promieniu  $a$  w postaci

$$(191.1) \quad w = \frac{r^2}{2R}$$

przedstawiającej w znaczym przybliżeniu czaszę kuli o promieniu  $R$  i wierzchołku w początku układu współrzędnych, mamy po wstawieniu w rów. (190.9)

$$(191.2) \quad \frac{d}{dr}(\nabla^2 F) = -\frac{E}{2} \frac{r}{R^2}$$

A zatem

$$(191.3) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right) = \nabla^2 F = -\frac{E}{4R^2} (r^2 - b^2),$$

gdzie  $b$  jest stałą całkowania. Drugie całkowanie daje

$$(191.4) \quad r \frac{dF}{dr} = -\frac{E}{16R^2} (r^4 - 2b^2 r^2),$$

gdyż stała całkowania znika z powodu warunku dla  $r=0$ . Dla naprężeń znajdujemy wzory

$$(a) \quad \bar{\sigma}_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{E}{16R^2} (2b^2 - r^2); \quad \bar{\sigma}_t = \frac{d^2 F}{dr^2} = \frac{E}{16R^2} (2b^2 - 3r^2).$$

Przyjmijmy, że na brzegu płyty działają zewnętrzne napięcia radialne

$$T = (\bar{\sigma}_r h)_{r=a},$$

a więc

$$(191.5) \quad T = \frac{Eh}{16R^2} (2b^2 - a^2).$$

Z (191.3) wynika, że  $\nabla^4 F = 0$ , wobec czego rów. (190.4) daje

$$(191.6) \quad \left\{ \begin{aligned} p &= -\frac{hE}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \cdot \frac{dF}{dr} \right) = -\frac{hE}{r} \frac{d}{dr} \left[ -\frac{1}{16R^2} (r^4 - 2b^2 r^2) \right] = \\ &= \frac{hE}{4R^3} (r^2 - b^2) = \frac{hE}{4R^3} \left( r^2 - \frac{1}{2} a^2 \right) - \frac{2T}{R}. \end{aligned} \right.$$

Ten wynik poucza, że przy  $T=0$ , obciążenie  $p$  wywołujące zgięcie podług czaszy kulistej (a ściślej paraboloidalnej) winno być rozłożone paraboloidalnie (rys. 114), przy czym w części środkowej o promieniu  $r_1 = a/\sqrt{2}$  jest dodatnie, a dla  $r > r_1$  ujemne.

Dla momentów zginających otrzymujemy

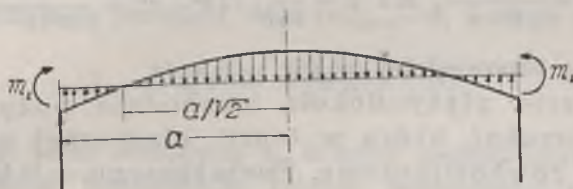
$$m_r = -\bar{B} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = -\bar{B} \frac{1+\nu}{R},$$

$$m_t = -\bar{B} \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) = -\bar{B} \frac{1+\nu}{R},$$

a więc brzeg płyty winien być nadto obciążony momentami zginającymi o natężeniu

$$|m_t| = \frac{\bar{B}(1+\nu)}{R},$$

które według teorii klasycznej same wystarczały do wygięcia powyższego.



Rys. 114.

Obliczmy jeszcze naprężenia w przypadku  $T=0$ . Z wzorów (a) po wstawieniu  $2b^2=a^2$  znajdujemy

$$\bar{\sigma}_r = \frac{E}{16K^2}(a^2-r^2); \quad \bar{\sigma}_t = \frac{E}{16K^2}(a^2-3r^2).$$

Widać z tego, że  $\bar{\sigma}_r$  są na całej płycie ciągnieniami, natomiast  $\bar{\sigma}_t$  są ciągnieniami w części środkowej płyty o promieniu  $r_2 = a/\sqrt{3}$ , a dla  $r > r_2$  stają się ciśnieniami. Przy stosownej wielkości dodatnich napięć obwodowych może i naprężenie  $\sigma_t$  być dodatnie na całej płycie.

Porównanie największych naprężeń podłużnych

$$\bar{\sigma} = \frac{Ea^2}{16K^2}$$

z największymi naprężeniami zginającymi

$$\sigma = \frac{6\bar{B}(1+\nu)}{Rh^2} = \frac{Eh}{2(1-\nu)K},$$

daje

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma} = \frac{(1-\nu)a^2}{8Kh} = \frac{1-\nu}{4} \cdot \frac{f}{h},$$

jeżeli  $f = a^2/2R$  jest strzałką zgięcia.

Z tego widac, że przy  $\nu = \frac{1}{3}$ ,  $\bar{\sigma} = \frac{1}{6} \frac{f}{h}$  jest  $\bar{\sigma}$  drobnym ułamkiem  $\sigma$  gdy  $f$  jest wielokrotnie mniejsze od  $h$ ; natomiast gdy  $f$  przewyższa  $h$  wielokrotnie, to  $\bar{\sigma}$  staje się znacznie większe od  $\sigma$  a płyta jest przeważnie rozciągana. Przyjawszy na koniec, że brzeg płyty jest ustalony przegibnie, tak iż na brzegu musi być  $u = 0$ , znajdujemy

$$\bar{\varepsilon}_t = \frac{\bar{u}}{r} = 0,$$

a więc

$$\bar{\sigma}_t - \nu \bar{\sigma}_r = \frac{1}{16 E h^2} [2b^2(1-\nu) - r^2(3-\nu)]_{r=a} = 0,$$

stąd

$$2b^2 = \frac{a^2(3-\nu)}{1-\nu}, \quad \text{z czego } T = \frac{Eh}{16 E h^2} (2b^2 - a^2) = \frac{Eh a^2}{3 E h^2 (1-\nu)}$$

jest wartością odpowiedniej reakcji ustalenia.

(b) Zgięcie płyty dokoła swobodnie podpartej według powierzchni, która w teorii klasycznej odpowiada obciążeniu równomiernemu. Teoria klasyczna daje jak wiadomo w tym przypadku

$$w = \frac{q(a^2 - r^2)}{16 B} \left( \frac{a^2 - r^2}{3} + \frac{a^2}{1-\nu} \right),$$

jeżeli początek współrzędnych leży w środku koła podparcia, a dodatnia oś  $Z$  jest skierowana w dół (ob. np. w Stereom. techn. autora wz. (210.7)).

Po przemieszczeniu początku do środka ugiętej płyty, i odwróceniu osi  $Z$  do góry przyjmie powyższe równanie postać

$$(191.7) \quad w = \frac{q}{6 \cdot B} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} 2a^2 r^2 - r^4 \right),$$

albo

$$w = A(2b^2 r^2 - r^4)$$

po wprowadzeniu oznaczeń

$$A = \frac{q}{6 \cdot B}, \quad b^2 = a^2 \frac{3+\nu}{1+\nu}.$$

Równanie (190.9) daje teraz

$$r \frac{d}{dr} (\nabla^2 F) = -8 A^2 E (b^2 r - r^3)^2.$$

Po scałkowaniu otrzymujemy

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right) = \nabla^2 F = -8 A^2 E \left( \frac{1}{2} b^4 r^2 - \frac{1}{2} b^2 r^4 + \frac{1}{6} r^6 \right) + C,$$

a stąd przez całkowanie powtórne

$$(191.8) \quad r \frac{dF}{dr} = -4A^2 E \left( \frac{1}{3} b^4 r^4 - \frac{1}{6} b^2 r^6 + \frac{1}{24} r^8 \right) + \frac{1}{2} C r^2.$$

A zatem

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = -A^2 E \left( b^4 r^2 - \frac{2}{3} b^2 r^4 + \frac{1}{6} r^6 \right) + \frac{1}{2} C.$$

Dla  $r=0$  jest  $\bar{\sigma}_{r=0} = \frac{1}{2} C$ , a więc

$$(191.9) \quad \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_0 - A^2 E \left( b^4 r^2 - \frac{2}{3} b^2 r^4 + \frac{1}{6} r^6 \right).$$

Ponieważ założyliśmy możliwość swobodnego ruchu brzegu płyty w kierunkach promieni, więc  $(\sigma_r)_{r=a} = 0$ , z czego wynika

$$(191.10) \quad \bar{\sigma}_0 = A^2 E a^2 \left( b^4 - \frac{2}{3} a^2 b^2 + \frac{1}{6} a^4 \right).$$

Szukając teraz obciążenia  $p$ , któreby według teorii ścisłej dawało założoną powierzchnię ugięcia, zastosujemy rów. (190.4) w postaci

$$p = q - \frac{h}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} \right).$$

Wstawiając wartości z wzorów powyższych i wykonawszy różniczkowania znajdujemy

$$(191.11) \quad p = q + \frac{4}{3} h A^3 E [a^2(b^2 - 2r^2)(6b^4 - 4a^2b^2 + a^4) - r^2(12b^6 - 30b^4r^2 + 20b^2r^4 - 5r^6)].$$

Strzałkę ugięcia  $f$  otrzymamy z rów. (191.7) podstawiając  $r=a$ , a więc

$$(191.12) \quad f = A(2a^2b^2 - a^4).$$

Ale

$$b^2 = a^2 \frac{3 + \nu}{1 + \nu} = \lambda a^2, \quad \text{gdzie} \quad \lambda = \frac{3 + \nu}{1 + \nu},$$

wobec czego

$$f = A a^4 (2\lambda - 1).$$

Zważywszy, że

$$A = \frac{q}{64B} = \frac{q(1-\nu^2)}{64Eh^3/12} = \frac{3}{16} \frac{(1-\nu^2)q}{Eh^3},$$

zaś według (191.12)

$$A^2 = \frac{f^2}{a^4(2\lambda - 1)^2},$$

przekształcimy rów. (191.11) na

$$(191.13) \quad \left\{ \begin{array}{l} p = q \left[ 1 + \frac{1-\nu^2}{4} \left(\frac{f}{h}\right)^2 \frac{1}{(2\lambda-1)^2} \left\{ (\lambda-2\frac{r^2}{a^2}) (6\lambda^2-4\lambda+1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{r^2}{a^2} (12\lambda-30\lambda^2\frac{r^2}{a^2} + 20\lambda\frac{r^4}{a^4} - 5) \right\} \right]. \end{array} \right.$$

Podstawivszy tutaj raz  $r=0$ , drugi raz  $r=a$ , znajdziemy odpowiednie wartości obciążenia jednostkowego  $p_0$  i  $p_a$ , a mianowicie

$$(191.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_0 = q \left[ 1 + \frac{1-\nu^2}{4} \left(\frac{f}{h}\right)^2 \frac{6\lambda^3-4\lambda^2+\lambda}{(2\lambda-1)^2} \right] \\ p_a = q \left[ 1 - \frac{1-\nu^2}{4} \left(\frac{f}{h}\right)^2 \frac{6\lambda^3-14\lambda^2+11\lambda-3}{(2\lambda-1)^2} \right]. \end{array} \right.$$

Dla  $\nu=0,25$  napiszemy te wzory w postaci

$$(191.15) \quad p_0 = q \left[ 1 + 1,08 \left(\frac{f}{h}\right)^2 \right]; \quad p_a = q \left[ 1 - 0,184 \left(\frac{f}{h}\right)^2 \right].$$

Ponieważ  $p_0$  i  $p_a$  są widocznie krańcowymi wartościami obciążenia  $p$  na całej płycie, przeto ich różnica

$$p_0 - p_a = 1,56 \left(\frac{f}{h}\right)^2 q$$

wskazuje wyraźnie, że teoria klasyczna może dać przybliżenie dobre tylko przy małych wartościach  $f/h$ . Atoli gdy np.  $f/h=2$  co odpowiada często warunkom realnym wygięcia cienkich den naczyń pod ciśnieniem, to

$$p_0 = 5,32q, \quad p_a = -0,936q,$$

z czego wynika, że wtedy teoria klasyczna zawodzi zupełnie.

**§ 192. Zagadnienie płyty wiotkiej.** Nawiązując do rozważań na końcu § 189 i przyjmując, że płyta wiotka o konturze kołowym podpartym lub utwierdzonym jest obciążona równomiernie przez  $q$  kg/cm<sup>2</sup>, otrzymujemy z rów. (190.6):

$$(192.1) \quad \frac{1}{2} q r^2 = -h \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr}.$$

Drugie równanie różniczkowe zagadnienia, tj. (190.9) napiszemy uwzględniając, że  $\nabla^2 F = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right)$  (wz. 190.1) w postaci

$$r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right) \right] = -\frac{E}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2.$$

Po wprowadzeniu zmiennych  $\xi$ ,  $\eta$  i  $s$  określonych wzorami

$$(192.2) \quad \xi = r \frac{dF}{dr}, \quad \eta = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}, \quad s = r^2$$

otrzymamy zamiast powyższych równania:

$$(192.3) \quad \xi\eta = -\frac{qs}{2h}; \quad \frac{d^2\xi}{ds^2} = -\frac{E}{8}\eta^2.$$

Po wyrugowaniu  $\eta$  mamy dla  $\xi$  równanie różniczkowe

$$(192.4) \quad \frac{d^2\xi}{ds^2} = -\frac{E}{32} \frac{q^2}{h^2} \frac{s^2}{\xi^2}.$$

Wprowadziwszy teraz nowe zmienne  $\xi_1$  i  $s_1$  wzorami

$$(192.5) \quad \xi = h^2 \xi_1, \quad s^2 = \frac{32h^8}{E q^2} s_1^4,$$

otrzymamy zamiast (192.4)

$$(192.6) \quad \frac{d^2\xi_1}{ds_1^2} = -\frac{s_1^2}{\xi_1^2}.$$

Przez podstawienie

$$(192.7) \quad \xi_1 = c^4 y, \quad s_1 = c^3 x$$

zamieni się rów. (192.6) na

$$(192.8) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{x^2}{y^2},$$

które można scałkować przyjmując, że  $y$  da się rozwiązać na szereg potęgowy zmiennej  $x$  w postaci

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Wstawiwszy to wyrażenie w rów. różniczkowe (192.8) mamy

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)^2 (2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots) = -x^2.$$

Po rozwiązaniu lewej strony przy założeniu zbieżności daje porównanie współczynników obu stron przede wszystkim  $a_0 = 0$ , gdyż po stronie prawej nie ma wyrazu nie zawierającego  $x$ . Najbliższy współczynnik może być obrany dowolnie, po czym wszystkie następne są już oznaczone. Przyjmiemy więc  $a_1 = 1$ , a wyznaczymy kolejno

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = -\frac{13}{144}, \dots$$

otrzymując wyrażenie dla  $y$ :

$$(192.9) \quad y = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{13}{144}x^4 - \frac{17}{288}x^5 - \frac{37}{864}x^6 - \frac{1205}{36288}x^7 - \dots$$

Mamy tutaj funkcję, której pochodna ma dla  $x=0$  wartość 1. Rów. (192.8) wskazuje, że ta pochodna  $dy/dx$  maleje gdy  $x$  rośnie przy wszelkich wartościach  $x$  i  $y$ . Widać nadto, że krzywa określona przez  $x$  i  $y$  nie może mieć asymptoty o nachyleniu różnym od zera, ponieważ na takiej asymptocie musiałoby  $d^2y/dx^2$  zdążyć do zera, a  $y/x$  do wartości skończonej co się nie da pogodzić z równaniem (192.8).

Z rów. (192.9) wynika, że  $y=0$  nie tylko dla  $x=0$ , ale także dla wartości skończonej  $x=x_1 = \text{stokj}$ . W sąsiedztwie odnośnego punktu  $(x_1, 0)$  da się rów. (192.8) zastąpić przez

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{x_1^2}{y^2}.$$

Pierwszą całką tego równania jest

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \frac{x_1^2}{y} + C,$$

z czego czytamy, że dla  $y=0$  jest  $dy/dx = \infty$ , czyli że krzywa przecina normalnie oś  $x$  w punkcie, gdzie  $y=0$ , a  $x$  jest skończone.

Wartość  $x_1$  możnaby znaleźć jako pierwiastek równania

$$1 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{6}x_1^2 - \dots = 0$$

powstałego z (192.9), ale ta zmundna droga da się obejść przez porównanie z szeregami

$$(192.10) \quad y = -(1-x) \ln(1-x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{42}x^6 - \frac{1}{56}x^7 - \dots$$

$$(192.11) \quad y = x \left( 1 - \frac{7}{6}x \right)^{3/7} = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{11}{108}x^4 - \frac{11}{128}x^5 - \frac{55}{86}x^6 - \frac{55}{1134}x^7 - \dots$$

Nie trudno zauważyć, że oba te szeregi przedstawiają krzywe bardzo zbliżone do krzywej określonej równaniem (192.9). Obie krzywe przecinają normalnie oś  $x$ ; pierwsza w punkcie  $x_1=1$ , druga zaś w  $x_1=6/7$ . Ponieważ przybliżenie drugiej jest widocznie lepsze,



przeto wstawiamy  $y = x(1 - 7/6x)^{3/7}$  po prawej stronie równania różniczkowego (192.8) otrzymując

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(1 - 7/6x)^{-6/7}.$$

Całkowanie daje z uwzględnieniem warunku, że dla  $x=0$  winno być  $y=0$  i  $dy/dx=0$ :

$$(192.12) \quad \begin{cases} y = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \left(1 - \frac{7}{6}x\right)^{8/7} - 5x = \\ = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{13}{144}x^4 - \frac{17+1/3}{288}x^5 - \frac{39}{864}x^6 - \frac{1326}{36288}x^7 - \dots \end{cases}$$

Szereg ten różni się tak nieznacznie od (192.9), że można go uważać za bardzo dobre przybliżenie. Przyrównyując tę wartość przybliżoną  $y$  do zera otrzymujemy równanie

$$\frac{9}{2} - \frac{9}{2} \left(1 - \frac{7}{6}x_1\right)^{8/7} - 5x_1 = 0,$$

którego pierwiastkiem jest

$$(192.13) \quad x_1 = 0,889.$$

Naprężenie radialne w płaszczyźnie środkowej

$$\bar{\sigma}_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = \frac{\xi}{r^2} = \frac{\xi}{s} = \frac{h^2 \xi_1}{s_1} \left(\frac{E y^2}{52 h^8}\right)^{1/4} = h^2 \left(\frac{8 E q^2}{256 h^8}\right)^{1/4} c \frac{y}{x} = \frac{1}{4} (8 E q^2)^{1/4} c \frac{y}{x}.$$

Tutaj jest

$$(192.14) \quad \frac{1}{4} (8 E q^2)^{1/4} c = \bar{\sigma}_0,$$

tzn. naprężenie w środku (dla  $r=0$ ), co łatwo stwierdzić po wstawieniu wyrażenia  $y/x$  według (192.9). A zatem

$$(192.15) \quad \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_0 \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{13}{144}x^3 - \frac{17}{288}x^4 - \dots\right).$$

Ponieważ

$$(192.16) \quad \begin{aligned} x = \frac{s_1}{c^2} &= \frac{1}{c^2} \left(\frac{32 h^8}{E q^2}\right)^{-1/4} s = \frac{r^2}{h^2 c^2} \left(\frac{8 E q^2}{256}\right)^{1/4} = \frac{r^2}{h^2 c^2} \cdot \frac{1}{4} (8 E q^2)^{1/4} c = \\ &= \frac{\bar{\sigma}_0 r^2}{h^2 c^2} = \frac{\bar{\sigma}_0 \cdot 8 E q^2}{h^2 (\pm \bar{\sigma}_0)^4} r^2 = \frac{1}{32} \cdot \frac{E q^2}{h^2 \bar{\sigma}_0^3} \cdot r^2, \end{aligned}$$

przeto wprowadziwszy oznaczenie

$$K = \frac{E q^2 a^2}{52 h^2},$$

napiżemy

$$(192.17) \quad \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{K}{\bar{\sigma}_0^3} \frac{r^2}{a^2} - \frac{1}{6} \left( \frac{K}{\bar{\sigma}_0^3} \right)^2 \frac{r^4}{a^4} - \frac{13}{144} \left( \frac{K}{\bar{\sigma}_0^3} \right)^3 \frac{r^6}{a^6} - \dots \right].$$

Niechaj na obwodzie płyty, tj. dla  $r = a$ , działa napięcie równomierne  $T = h \bar{\sigma}_a$ , bez którego nie byłaby możliwa równowaga płyty wiotkiej pod jakimkolwiek obciążeniem prostym do płaszczyzny płyty. Wtedy

$$(192.18) \quad \bar{\sigma}_a = \bar{\sigma}_0 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{K}{\bar{\sigma}_0^3} - \frac{1}{6} \left( \frac{K}{\bar{\sigma}_0^3} \right)^2 - \frac{13}{144} \left( \frac{K}{\bar{\sigma}_0^3} \right)^3 - \dots \right].$$

Zbieżność tego szeregu jest zapewniona dla wszelkich wartości  $\bar{\sigma}_0$  czyniących zadość warunkowi

$$z \bar{\sigma}_0^3 < 1,$$

który da się wyrazić w postaci

$$\bar{\sigma}_0 > \sqrt[3]{\frac{E}{5z} \left( \frac{qa}{n} \right)^2}.$$

W przypadkach konkretnych jest ten warunek najczęściej spełniony, a więc ważność powyższych i dalszych rozwinięć szeregowych zapewniona.

Zamiast (192.17) można także z przybliżeniem zupełnie wystarczającym napisać stosownie do (192.12) wzór:

$$(192.19) \quad \bar{\sigma}_r = \frac{\bar{\sigma}_0^4 a^2}{K r^2} \left[ \frac{9}{2} - \frac{9}{2} \left( 1 - \frac{7 K r^2}{6 \bar{\sigma}_0^3 a^2} \right)^{8/7} - \frac{5 K r^2}{\bar{\sigma}_0^3 a^2} \right].$$

Ponieważ jako dane występuje z reguły  $\bar{\sigma}_a$  a nie  $\bar{\sigma}_0$ , przeto byłby pożądanym wzór wyrażający  $\bar{\sigma}_0$  jako funkcję  $\bar{\sigma}_a$ . Wzór taki podaje J. Prescott w książce „Applied Elasticity” na str. 454 (wz. 15.90) po wywodzie równoważnym powyższemu, jednakże nie zaleca go słusznie do zastosowania przy nieco większych różnicach wartości  $\bar{\sigma}_0$  i  $\bar{\sigma}_a$ .

Przechodząc do obliczenia ugięć napiszemy według (192.2 i 3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} &= \eta = -\frac{qs}{2h} \frac{1}{\xi} = -\frac{q}{2h\bar{\sigma}_r} = \\ &= -\frac{q}{2h\bar{\sigma}_0} \left[ 1 - \frac{1}{2} x - \frac{1}{6} x^2 - \frac{13}{144} x^3 - \frac{17}{288} x^4 - \frac{37}{864} x^5 - \frac{1205}{50208} x^6 - \dots \right]^{-1} = \\ &= -\frac{q}{2h\bar{\sigma}_0} \left[ 1 + \frac{1}{2} x + \frac{5}{12} x^2 + \frac{55}{144} x^3 + \frac{35}{96} x^4 + \dots \right] = \\ &= -\frac{q}{2h\bar{\sigma}_0} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{K r^2}{\bar{\sigma}_0^3 a^2} + \frac{5}{12} \left( \frac{K}{\bar{\sigma}_0^3} \right)^2 \frac{r^4}{a^4} + \frac{55}{144} \left( \frac{K}{\bar{\sigma}_0^3} \right)^3 \frac{r^6}{a^6} + \frac{35}{96} \left( \frac{K}{\bar{\sigma}_0^3} \right)^4 \frac{r^8}{a^8} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Całkowanie po pomnożeniu przez  $r$  daje

$$(192.20) \quad w = -\frac{qr^2}{2h\sigma_0} \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{K}{\sigma_0^3} r^2 + \frac{5}{36} \left( \frac{K}{\sigma_0^3} \right)^2 r^4 + \right. \\ \left. + \frac{55}{576} \left( \frac{K}{\sigma_0^3} \right)^3 r^6 + \frac{7}{96} \left( \frac{K}{\sigma_0^3} \right)^4 r^8 + \dots \right].$$

Dla  $r=a$  znajdujemy z tego wzoru „strzałkę ugięcia”  $f=|w|_{r=a}$ .

§ 193. Sposób J. Prescott'a szukania rozwiązań przybliżonych w przypadkach zgięcia kołowo-symetrycznego płyt cienkich przy zgięciach wielkich. Jako punkt wyjścia oberzemy znowu równania podstawowe z § 190, tj.

$$(190.4) \quad p = \bar{B} \nabla^4 w - \frac{h}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} \right)$$

$$(190.3) \quad \nabla^4 F = -E \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \cdot \frac{d^2 w}{dr^2} = -E \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2.$$

Mnożąc pierwsze równanie przez  $2r\pi dr \cdot w$  i całkując na obszarze krążka o promieniu  $a$ , otrzymujemy

$$(193.1) \quad 2\pi \int_0^a p w r dr = 2\pi \bar{B} \int_0^a w r \nabla^4 w dr - 2\pi h \int_0^a w \frac{d}{dr} \left( \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} \right) dr$$

jako wyrażenie ubytku energii potencjalnej obciążenia, równego energii sprężystej układu. Ale jak wiadomo jest

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right),$$

wobec czego

$$\int_0^a w r \nabla^4 w dr = \int_0^a w \frac{d}{dr} \left( r + \frac{d \nabla^2 w}{dr} \right) dr = \left[ w r \cdot \frac{d \nabla^2 w}{dr} \right]_0^a - \int_0^a r \frac{d \nabla^2 w}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} dr.$$

Gdy płaszczyzna współrzędnych przechodzi przez kontur krążka, to na konturze jest  $w=0$ , a więc pierwszy wyraz scałkowany znika dla obu granic. Napiszemy przeto

$$(193.2) \quad \int_0^a w r \nabla^4 w dr = - \int_0^a r \frac{d \nabla^2 w}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} dr = - \left[ r \nabla^2 w \cdot \frac{dw}{dr} \right]_0^a + \\ + \int_0^a \nabla^2 w \cdot \frac{d}{dr} \left( r \frac{dw}{dr} \right) dr = - \left[ r \nabla^2 w \cdot \frac{dw}{dr} \right]_0^a + \int_0^a (\nabla^2 w)^2 r dr.$$

Tutaj wyraz scałkowany nie znika teraz, chyba w przypadku utwierdzenia brzegu.

Przechodząc do drugiej całki po prawej stronie wzoru (193.1) wykonamy całkowanie „przez części”, które daje

$$(193.3) \quad \int_0^a w \frac{d}{dr} \left( \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} \right) dr = \left[ w \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} \right]_0^a - \int_0^a \frac{dF}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 dr = - \int_0^a \frac{dF}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 dr$$

zważywszy, że dla  $r=0$  jest  $dw/dr=0$ , a dla  $r=a$  jest  $w=0$ . Pomnożywszy teraz przez  $r dr$  równanie (190.3) i scałkowawszy je od 0 do  $r$  otrzymamy

$$(193.4) \quad r \frac{d}{dr} (\nabla^2 F) = - \frac{E}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2.$$

Wobec tego rów. (193.3) można napisać w postaci

$$\begin{aligned} \int_0^a w \frac{d}{dr} \left( \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} \right) dr &= \frac{2}{E} \int_0^a \frac{dF}{dr} \cdot r \frac{d}{dr} (\nabla^2 F) dr = \\ &= \frac{2}{E} \left[ r \frac{dF}{dr} \nabla^2 F \right]_0^a - \frac{2}{E} \int_0^a \nabla^2 F \left( r \frac{dF}{dr} \right) dr. \end{aligned}$$

Gdy założymy, że naprężenie radialne  $\bar{\sigma}_r$

$$(193.5) \quad \bar{\sigma}_r = \frac{1}{r} \frac{dF}{dr}$$

jest na brzegu krążka równe 0, to wyraz scałkowany znika, a

$$(193.6) \quad \int_0^a w \frac{d}{dr} \left( \frac{dF}{dr} \cdot \frac{dw}{dr} \right) dr = - \frac{2}{E} \int_0^a (\nabla^2 F)^2 r dr.$$

Po wstawieniu tego w rów. (193.1) znajdujemy (z uwzględnieniem (193.2 i 3)):

$$(193.7) \quad \int_0^a p w r dr = \bar{B} \int_0^a (\nabla^2 w)^2 r dr + h \int_0^a \frac{dF}{dr} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 dr - \bar{B} \left[ r \cdot \frac{dw}{dr} \nabla^2 w \right]_{r=a},$$

albo też (z uwzględnieniem (193.6)):

$$(193.8) \quad \int_0^a p w r dr = \bar{B} \int_0^a (\nabla^2 w)^2 r dr + \frac{2h}{E} \int_0^a (\nabla^2 F)^2 r dr - \bar{B} \left[ r \frac{dw}{dr} \nabla^2 w \right]_{r=a}.$$

Nadto jest  $\nabla^2 F$  wyrażone przez  $w$  równaniem (193.4). Drugie z tych równań jest stosowne tylko w przypadku, gdy na brzegu jest  $\bar{\sigma}_r = 0$ .

Dla krążka o brzegu swobodnym lub swobodnie podpartym jest jednym z warunków brzegowych

$$(193.9) \quad \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=a} = 0.$$

Ale

$$(193.10) \quad \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \equiv \nabla^2 w,$$

a zatem na brzegu będzie

$$\frac{1-\nu}{r} \frac{dw}{dr} = \nabla^2 w,$$

czyli

$$(193.11) \quad r \frac{dw}{dr} \nabla^2 w = (1-\nu) \left( \frac{dw}{dr} \right)^2.$$

Wyrażenie to wypadnie wtedy zastosować w wyrazach scalkowanych wzorów (193.7 i 8).

Gdy natomiast krążek jest utwierdzony brzegiem, to

$$\frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{dla } r = a,$$

a więc na brzegu jest

$$(193.12) \quad r \frac{dw}{dr} \nabla^2 w = 0.$$

Wobec tego dla płyty o brzegu swobodnym, albo swobodnie podpartym, rów. (193.8) przyjmie postać:

$$(193.13) \quad \int_0^a p w r dr = \bar{B} \int_0^a (\nabla^2 w)^2 r dr + \frac{2h}{E} \int_0^a (\nabla^2 F)^2 r dr - (1-\nu) \bar{B} \left[ \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \right]_{r=a},$$

która jest ważna i w przypadku utwierdzenia brzegu, gdyż wtedy wyraz ostatni znika.

Położmy jeszcze  $r = a\varrho$ , a równanie powyższe, które nazwiemy „energetycznym” da się napisać w postaci prostszej

$$(193.14) \quad \int_0^1 p w \varrho d\varrho = \bar{B} \int_0^1 \left[ \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left( \varrho \frac{dw}{d\varrho} \right) \right]^2 \varrho d\varrho - (1-\nu) \bar{B} \left( \frac{dw}{d\varrho} \right)_{\varrho=1}^2 + \frac{2h}{E} \int_0^1 \left[ \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left( \varrho \frac{dF}{d\varrho} \right) \right]^2 \varrho d\varrho$$

Drugim równaniem zagadnienia jest przekształcone w ten sam sposób rów. (193.4), czyli

$$(193.15) \quad \frac{d}{d\varrho} \left[ \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d\varrho} \left( \varrho \frac{dF}{d\varrho} \right) \right] = -\frac{E}{2} \left( \frac{dw}{d\varrho} \right)^2$$

Przy pomocy równań powyższych wyprowadzonych ze ścisłych równań równowagi (190.3 i 4) znajduje J. Prescott w §§ 280—282 swej książki rozwiązania przybliżone w podobny zupełnie sposób, jaki stosowano już dawniej w zagadnieniach zgięcia prętów, a więc przyjmując przybliżoną postać równowagi z parametrem nieoznaczonym i obliczając ten parametr z równania energetycznego. Te sposoby grają ważną rolę w mechanice technicznej, gdzie im się poświęca więcej miejsca (ob. Stereomech. techn. autora, Rozdz. XVIII). Dlatego tutaj poprzestaniemy na jednym przykładzie płyty prostokątnej odsyłając czytelnika zainteresowanego do źródła wymienionego.

**§ 194. Płyta prostokątna o konturze ustalonym.** Przy znacznych ugięciach płyty brzegami swobodnie podpartej punkty przeciwległe konturu zbliżają się nawzajem. Przyjmijemy teraz, że kontur jest ustalony tak, aby to zbliżenie nie zachodziło. Przy obiorze układu współrzędnych w środku płyty napiszemy równania boków prostokąta konturu w postaci

$$x = \pm a, \quad y = \pm b, \quad z = 0,$$

a warunki brzegowe dla przemieszczeń w płaszczyźnie środkowej

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 0 \quad \text{dla } x = \pm a \\ \bar{v} &= 0 \quad \text{dla } y = \pm b. \end{aligned}$$

Równanie różniczkowe (189.13), w którym funkcję naprężeń  $F(x, y)$ , zastąpimy przez  $E\varphi(x, y)$  dla uproszczenia, przybierze postać

$$(a) \quad \nabla^4 \varphi = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Załóżmy że powierzchnia ugięcia da się przedstawić w przybliżeniu równaniem

$$(194.1) \quad w = f \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}.$$

Podstawienie w rów. (a) daje

$$(194.2) \quad \begin{aligned} \nabla^4 \varphi &= \frac{\pi^4 f^2}{16 a^2 b^2} \left( \sin^2 \frac{\pi x}{2a} \sin^2 \frac{\pi y}{2b} - \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b} \right) = \\ &= -\frac{\pi^4 f^2}{32 a^2 b^2} \left( \cos \frac{\pi x}{a} + \cos \frac{\pi y}{b} \right). \end{aligned}$$

Całką szczególną tego równania jest jak łatwo sprawdzić

$$(194.3) \quad \varphi = Ax^2 + By^2 - \frac{f^2}{32a^2b^2} \left( a^4 \cos \frac{\pi x}{a} + b^4 \cos \frac{\pi y}{b} \right).$$

Odpowiednie wartości naprężeń w warstwie środkowej są

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = E \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\pi^2 f^2 E}{32a^2} \cos \frac{\pi y}{b} + 2E \cdot B$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = E \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\pi^2 f^2 E}{32b^2} \cos \frac{\pi x}{a} + 2E \cdot A$$

$$\bar{\tau}_{xy} = -E \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = 0.$$

Wydłużenia jednostkowe w tejże warstwie mają stosownie do wz. (189.1) wartości

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= \bar{\varepsilon}_x - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_x - \nu \bar{\sigma}_y) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \\ &= \frac{\pi^2 f^2}{32} \left( \frac{1}{a^2} \cos \frac{\pi y}{b} - \frac{\nu}{b^2} \cos \frac{\pi x}{a} \right) + 2(B - \nu A) - \frac{\pi^2 f^2}{8a^2} \sin^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} &= \bar{\varepsilon}_y - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \\ &= \frac{\pi^2 f^2}{32} \left( \frac{1}{b^2} \cos \frac{\pi x}{a} - \frac{\nu}{a^2} \cos \frac{\pi y}{b} \right) + 2(A - \nu B) - \frac{\pi^2 f^2}{8b^2} \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \sin^2 \frac{\pi y}{2b}. \end{aligned}$$

Stałe całkowania  $A$  i  $B$  wyznaczymy z warunków podyktowanych symetrią:

$$\text{dla } x=0 \text{ jest } \bar{u}=0$$

$$\text{dla } y=0 \text{ jest } \bar{v}=0.$$

Po scałkowaniu równań powyższych z uwzględnieniem warunków  $\bar{u}=0$  dla  $x=\pm a$  i  $\bar{v}=0$  dla  $y=\pm b$ , znajdujemy

$$A = \frac{\pi^2 f^2}{64(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right); \quad B = \frac{\pi^2 f^2}{64(1-\nu^2)} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right).$$

W ten sposób równania

$$(194.4) \quad \begin{cases} w = f \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} \\ \varphi = \frac{\pi^2 f^2}{64(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right) x^2 + \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) y^2 \right] - \frac{f^2}{32} \left( \frac{a^2}{b^2} \cos \frac{\pi x}{a} + \frac{b^2}{a^2} \cos \frac{\pi y}{b} \right) \end{cases}$$

są rozwiązaniami równań różniczkowych zagadnienia (189.12 i 13), przy nieznanym jeszcze obciążeniu  $p$ , które to równania, po zastąpieniu  $F$  przez  $\varphi$  mają postać

$$(194.5) \quad \begin{cases} \nabla^4 \varphi = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ p = \bar{B} \nabla^4 w - 2Eh \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right). \end{cases}$$

Wstawiając wyrażenia na  $w$  i  $\varphi$  w równanie ostatnie otrzymamy

$$(194.6) \quad p = \frac{\pi^4 E f h}{64 (1-\nu^2)} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} \left\{ h^2 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + (1+\nu) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu^2}{a^2} \cos \frac{\pi y}{b} + \frac{1-\nu^2}{b^2} \cos \frac{\pi x}{a} \right\}$$

jako obciążenie płyty, któremu odpowiada ściśle rozwiązanie (194.4). Chcąc teraz znaleźć rozwiązanie przybliżone, np. dla obciążenia  $p = q = \text{stałej}$ , zastosujemy równanie energetyczne jak w § 193 pisząc

$$(194.7) \quad \iint p w \, dx \, dy = \bar{B} \iint u \nabla^4 w \cdot dx \, dy - \\ - Eh \iint w \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx \, dy.$$

Dla całek po stronie prawej znajdujemy teraz wartości

$$\iint u \nabla^4 w \, dx \, dy = 4 \int_0^a \int_0^b \frac{\pi^4 f^2}{16} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{2a} \cos^2 \frac{\pi y}{2b} \, dx \, dy = \\ = \frac{\pi^4 f^2 ab}{16} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \iint w \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx \, dy = \\ = \frac{\pi^4 f^2 ab}{256 (1-\nu^2)} \left[ \frac{4\nu}{a^2 b^2} + (3-\nu^2) \left( \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) \right].$$

A zatem po założeniu  $p = q = \text{stałej}$  otrzymamy dla lewej strony równania (194.7):

$$\iint p w \, dx \, dy = 4 q f \int_0^a \int_0^b \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} \, dx \, dy = \frac{16 ab}{\pi^2} q f.$$

Z porównania wartości obu stron równania energetycznego otrzymujemy

$$(194.8) \quad \frac{16 ab f q}{\pi^2} = \pi^4 \frac{\bar{B} ab f^2}{16} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 + \frac{\pi^4 E ab f^4 h}{256 (1-\nu^2)} \left[ \frac{4\nu}{a^2 b^2} + (3-\nu^2) \left( \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} \right) \right]$$



jako równanie wyznaczające przybliżoną wartość parametru  $f$  określającego zarazem strzałkę ugięcia. Po podstawieniu  $\bar{B} = \frac{E h^3}{1-\nu^2} \frac{1}{12}$  i uproszczeniu napiszemy to równanie w postaci

$$(194.9) \quad \frac{4}{3} \frac{f}{h} \left( \frac{h^2}{a^2} + \frac{h^2}{b^2} \right)^2 + \frac{f}{h} \left[ 4\nu \left( \frac{h}{a} \right)^2 \left( \frac{h}{b} \right)^2 + (3-\nu^2) \left( \frac{h^4}{a^4} + \frac{h^4}{b^4} \right) \right] = \frac{4096}{\pi^6} \frac{(1-\nu^2)q}{L}$$

Po obliczeniu z tego równania wartości  $f$  znajdziemy wartości momentów zgięcia i naprężenia w warstwie środkowej z wzorów ogólnych powyżej wyprowadzonych. Otrzymujemy tedy:

$$(194.10) \quad \begin{cases} |m_x| = \frac{\pi^2 \bar{B} f}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}, \\ |m_y| = \frac{\pi^2 \bar{B} f}{4} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right) \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}. \end{cases}$$

Największe momenty w środku płyty są

$$(194.11) \quad |m_1| = \frac{\pi^2 \bar{B} f}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right); \quad |m_2| = \frac{\pi^2 \bar{B} f}{4} \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\nu}{a^2} \right).$$

Dla naprężeń „blonowych” w środku płyty znajdujemy wyrażenia

$$(194.12) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_{x=0} = \frac{\pi^2 E f^2}{52(1-\nu^2)} \left( \frac{2-\nu^2}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right) \\ \bar{\sigma}_{y=0} = \frac{\pi^2 E f^2}{52(1-\nu^2)} \left( \frac{\nu}{a^2} + \frac{2-\nu^2}{b^2} \right). \end{cases}$$

Gdy np.  $a > b$ , to  $|m_1| < |m_2|$  i  $\bar{\sigma}_x < \bar{\sigma}_y$ , a zatem największe wyciężenie w środku płyty zajdzie przy wartościach naprężeń

$$(194.13) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_1 = \bar{\sigma}_{x=0} + \frac{|m_1|}{J} \frac{h}{2} = \frac{\pi^2 E}{52(1-\nu^2)} \left[ \frac{(2-\nu^2)f^2 + 4hf}{a^2} + \frac{\nu(f^2 + 4hf)}{b^2} \right] \\ \bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_{y=0} + \frac{|m_2|}{J} \frac{h}{2} = \frac{\pi^2 E}{52(1-\nu^2)} \left[ \frac{(2-\nu^2)f^2 + 4hf}{b^2} + \frac{\nu(f^2 + 4hf)}{a^2} \right]. \end{cases}$$

Przypatrzwszy się wyrikom powyższym zauważymy, że naprężenia „płytkowe”, tj. uwarunkowane momentami zginającymi są proporcjonalne do  $f$  zaś naprężenia „blonowe” do  $f^2$ .

Równanie (194.9) poucza nadto, że gdy  $f/h$  jest bardzo małe, to wyraz zawierający  $f^3/h^3$  można skreślić wobec pierwszego z  $f/h$  i strzałka ugięcia staje się proporcjonalną do obciążenia  $q$ . Natomiast w drugim skrajnym przypadku wielkiej wartości  $f/h$  (płyta wiotka) przeważa wyraz drugi z  $f^3/h^3$ , a więc  $f$  jest z dużym przybliżeniem proporcjonalne do trzeciego pierwiastka z  $q$ . Doświadczenie potwier-

dza bardzo dobrze te wnioski teoretyczne przy stopniowym powiększaniu obciążenia, co dowodzi niewystarczalności teorii klasycznej przy obliczeniach wytrzymałości płyt cienkich.

Co się tyczy stopnia przybliżenia rozwiązań powyższych, to można się spodziewać, że jest co najmniej taki, jak w analogicznych rozwiązaniach przybliżonych płyt bardzo słabo wygiętych przedyskutowanych szczegółowo w „Teorii płyt” autora.

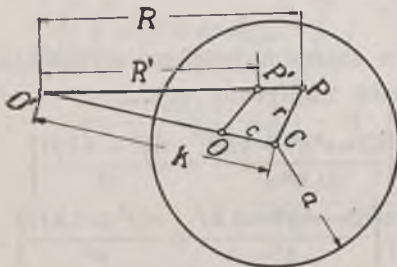
**§ 195. Płyta okrągła zginana siłą skupioną mimośrodkową.** W ramach teorii klasycznej płyt cienkich rozwiązał to zagadnienie najprościej J. H. Michell stosując metodę inwersji przedstawioną już w § 94. Gdy środek płyty o promieniu  $a$  i brzegu utwierdzonym jest obciążony siłą skupioną  $P$ , to powierzchnię ugięcia przedstawia wzór

$$(195.1) \quad w = \frac{8\pi\bar{B}}{P} \left[ r^2 \ln \frac{r}{a} + \frac{1}{2}(a^2 - r^2) \right],$$

którego wyprowadzenie znajdzie czytelnik np. w § 211 „Stereomech. techn.” autora. To rozwiązanie wskazuje, że w obszarze dokoła miejsca obciążonego określa  $w$  funkcja o postaci

$$Cr^2 \ln \frac{r}{a} + F(x, y),$$

gdzie  $F$  oznacza funkcję analityczną nie posiadającą w tym obszarze punktów osobliwych, a  $r$  odległość od miejsca obciążonego. Ponieważ  $w$  czyni zadość równaniu biharmonicznemu  $\nabla^4 w = 0$  we



Rys. 115.

wszystkich punktach nieobciążonych, przeto można zastosować metodę inwersji. Przyjąwszy w tym celu, że płyta jest obciążona w punkcie  $O$  (rys. 115) odległym o  $c = \overline{OC}$  od środka  $C$ , znajdujemy  $O'$  jako odwzorowanie  $O$  przez inwersję. Niech punktowi dowolnemu tej płaszczyzny  $P$  odpowiada punkt  $P'$  o współrzędnych  $x', y'$ , zaś  $w'$  oznacza funkcję  $x', y'$ , otrzymaną z  $w(x, y)$  przez inwersję. Gdy  $R' = \overline{O'P'}$  oznacza odległość punktu  $P'$  od  $O'$ , to jak wiadomo  $R'^2 w'$  czyni zadość równaniu różniczkowemu

$$\nabla'^4 (R'^2 w') \equiv \left( \frac{\partial^4}{\partial x'^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \frac{\partial^4}{\partial y'^4} \right) (R'^2 w') = 0.$$

Przy założeniu utwierdzenia brzegu płyty danej zgiętej według równania  $w = w(x, y)$  jest na konturze tej płyty  $w = 0$  i  $\partial w / \partial n = 0$ .

Tak samo ma się rzecz i na konturze przekształconym przez inwersję, tzn.  $w' = 0$  i  $\partial(R'^2 w')/\partial n' = 0$ , gdzie  $n'$  oznacza kierunek normalnej do tego konturu.

Stałą inwersji jest  $\overline{OC} = k = a^2/c$ , gdzie  $c = \overline{OC}$ . Ponieważ inwersja konturu kołowego daje ten sam kontur, przeto stałą inwersji określi także iloczyn

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = (k-a)(k+a) = k^2 - a^2 = \frac{a^4}{c^2} - a^2.$$

Przy oznaczeniach uwidoczniionych na rys. 115 jest

$$R : r = R' : k,$$

czyli

$$r = \frac{Rk}{R'} = \frac{Ra^2}{R'c}.$$

A zatem rów. (195.1) przekształci się na

$$\begin{aligned} R'^2 w' &= \frac{P}{8\pi B} R'^2 \left[ \frac{a^4 R^2}{c^2 R'^2} \ln \frac{aR}{cR'} + \frac{1}{2} \left( a^2 - \frac{a^4 R^2}{c^2 R'^2} \right) \right] = \\ &= \frac{P}{8\pi B} \cdot \frac{a^4}{c^2} \left[ R^2 \ln \frac{aR}{cR'} + \frac{1}{2} \left( \frac{c^2}{a^2} R'^2 - R^2 \right) \right]. \end{aligned}$$

Z tego wynika, że ugięcie  $w$  płyty okrągłej o brzegu utwierdzonym, obciążonej w punkcie  $O$  odległym o  $c$  od środka płyty siłą skupioną  $Q$  określa równanie

$$(195.2) \quad w = \frac{Q}{8\pi B} \left[ R^2 \ln \frac{aR}{cR'} + \frac{1}{2} \left( \frac{c^2}{a^2} R'^2 - R^2 \right) \right].$$

Przy pomocy wzorów

$$R'^2 = k^2 + r'^2 - 2kr' \cos(k, r'),$$

$$R^2 = c^2 + r'^2 - 2cr' \cos(k, r'),$$

oraz przekształcenia

$$R^2 \ln \frac{aR}{cR'} = -\frac{R^2}{2} \ln \frac{c^2 R'^2}{a^2 R^2}$$

można przedstawić powyższe równanie (195.2) powierzchni ugięcia w postaci

$$(195.3) \quad w = \frac{Q}{16\pi B a^2} \left\{ (a^2 - c^2)(a^2 - r^2) - a^2 R^2 \ln \left[ 1 + \frac{a^2}{R^2} \left( 1 - \frac{c^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \right\},$$

gdzie zamiast  $r' = P'C$  napisano  $r$ . Ta postać wyrażająca  $w$  we współrzędnych dwubiegunowych  $R$  (o początku  $O$ ) i  $r$  (o początku  $C$ ), nadaje się zwłaszcza do składania rozwiązań przy obciążeniach

siłami skupionymi  $Q_i$  w punktach odległych od środka o  $c_i$ . Przy oznaczeniu odległości punktu dowolnego płyty  $P$  od  $Q_i$  przez  $R_i$  napiszemy wtedy

$$(195.4) \quad w = \frac{1}{16\pi B a^2} \sum_i Q_i \left\{ (a^2 - c_i^2)(a^2 - r^2) - a^2 R_i^2 \ln \left[ 1 + \frac{a^2}{R_i^2} \left( 1 - \frac{c_i^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \right] \right\}.$$

Oprócz powyższego bardzo stosunkowo prostego rozwiązania Michell'a znamy nadto znacznie dawniejsze rozwiązanie Clebsch'a (z r. 1862) ulepszone przez A. Föppl'a (w r. 1912), ale wyrażające  $w$  przez zawiły szereg nieskończony. Zaniechamy przeto przedstawienia tutaj tego rozwiązania, odsyłając czytelnika do książki „Drang u. Zwang” (t. I, § 32) i zaznaczając zarazem, że droga obrona przez Clebscha i Föppla prowadzi także do rozwiązania w przypadku podparcia brzegu płyty, kiedy metoda inwersji Michell'a nie da się zastosować.

**§ 196. Płyta nieskończona pływająca.** Gdy płytę o grubości  $h$  i gęstości materiału  $\mu$  położymy na swobodnej powierzchni cieczy o gęstości  $\mu_0 > \mu$ , to będzie pływała w równowadze bez wygięć (jak ciało sztywne) przy zanurzeniu na głębokość  $w_0 = h \cdot \mu / \mu_0 < h$  stosownie do prawa Archimedesasa. Przy obciążeniu płyty np. okrągłej w środku zwiększy się zanurzenie części środkowej, a zmniejszy zanurzenie części zewnętrznych tak, że znowu zajdzie równowaga, o ile obciążenie nie jest zbyt wielkie. Wtedy obciążeniem jednostkowym płyty w jej punkcie dowolnym jest widocznie  $\mu g h - \mu_0 g(w_0 + w) = -\mu_0 g w$ , jeżeli  $w = w(x, y)$  oznacza przyrost zanurzenia odpowiadający wygięciu płyty. Równaniem różniczkowym zgięcia płyty pływającej pod obciążeniem spełniającym pewne łatwo uchwytnie warunki jest więc

$$(196.1) \quad B \nabla^4 w = -\mu_0 g w = -\gamma_0 w,$$

gdzie  $\gamma_0 = \mu_0 g$  jest ciężarem właściwym cieczy.

H. Hertz, który w r. 1884 dał pierwsze ściśle rozwiązanie tego zagadnienia miał na oku zbadanie warunków wytrzymałości jednolitej pokrywy lodowej na dużych obszarach wód stojących. Jak wiadomo lód taki przy dostatecznej grubości utrzymuje np. ciężar człowieka i pojazdów bez załamania się przejawiając tylko łatwo dostrzegalne ugięcia sprężyste (oczywiście pod warunkiem, że w stanie nieobciążonym pływał na wodzie).

Stosunkowo najprościej przedstawia się rozwiązanie dla płyty rozciągającej się w nieskończoność, gdyż wtedy upraszczają się znakomicie warunki brzegowe. Gdy nadto przyjmiemy jako uprosz-

czenie dalsze, że obciążenie płyty jest rozłożone równomiernie na jednej prostej bardzo długiej w płaszczyźnie  $YZ$ , to założywszy abstrakcyjnie długość nieskończoną tej prostej mamy do czynienia z zagadnieniem zgięcia walcowego, a więc z zadaniem płaskim, które prowadzi widocznie do całkowania równania różniczkowego zwyczajnego

$$(196.2) \quad \bar{B} \frac{d^4 w}{dx^4} = -\gamma_0 w.$$

Takie samo równanie było już w r. 1867 stosowane w stereomechanice technicznej przez E. Winkler'a w zagadnieniu belki na podłożu sprężysto podatnym, traktowanym w przybliżeniu tak jakby reakcja podłoża pod pewnym przekrojem belki zależała jedynie od ciśnienia pod tym przekrojem wywartego przez belkę, a nie zależała od ciśnień w przekrojach dalszych. To też w *Stereom. Techn.* autora poświęcono temu zagadnieniu §§ 145 i 186, wobec czego tutaj porzucamy na podaniu całki ogólnej

$$(196.3) \quad w = C_1 e^{ax} \cos ax + C_2 e^{ax} \sin ax + C_3 e^{-ax} \cos ax + C_4 e^{-ax} \sin ax,$$

gdzie

$$a = \sqrt[4]{\frac{\gamma_0}{\bar{B}}}.$$

W całce tej dla  $x > 0$  należy przyjąć  $C_1 = C_2 = 0$ , aby w nieskończoności było  $w = 0$ . Pozostałe dwie stałe wyznaczamy z warunku

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x \rightarrow 0} = 0$$

wynikającego z symetrii, oraz warunku, że siła tnąca dla  $x \rightarrow 0$  zdążać musi do wartości  $-q/2$ , jeżeli  $q$  jest obciążeniem jednostki długości na osi  $Y$ , czyli

$$\bar{B} \left(\frac{d^3 w}{dx^3}\right)_{x \rightarrow 0} = \frac{q}{2}.$$

Z tymi warunkami znajdziemy

$$(196.4) \quad w = \frac{q}{8a^3 \bar{B}} e^{-ax} (\cos ax + \sin ax)$$

dla dodatniej półosi  $X$ . Rozwiązaniem ważnym dla obu półosi jest widocznie

$$(196.5) \quad w = \frac{q}{8a^3 \bar{B}} e^{-a|x|} (\cos a|x| + \sin a|x|).$$

Stąd największe ugięcie w przekroju obciążonym

$$(196.6) \quad w_{max} = f = \frac{q}{2} \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{Eh^3\gamma^3}}.$$

Wszystkie skrawki elementarne płyty równoległe do osi  $X$  zginają się podług linii falistej o amplitudach bardzo silnie malejących w miarę oddalania się od przekroju obciążonego. W przypadkach kilku takich obciążeń na prostych równoległych (albo nierównoległych) znajdujemy ugięcia wypadkowe na zasadzie superpozycji.

Wprawdzie założenie zezwalające na rozwiązanie powyższe jest oderwane od warunków rzeczywistych, jednakże daje niewątpliwie dobre przybliżenie dla części środkowej linii obciążonej o długości skończonej  $l$ , jeżeli są spełnione pewne warunki, jakie wynikają z rozważań następujących:

Długością półfali wygięcia jest

$$(196.7) \quad L = \frac{\pi}{\alpha} = \pi \sqrt[4]{\frac{B}{\gamma_0}} = \pi \sqrt[4]{\frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)\gamma_0}},$$

gdzie  $h$  jest grubością płyty, a  $\gamma_0$  ciężarem właściwym płynu na którym płyta pływa.

Dla największego momentu zginającego (na linii obciążenia) znajdujemy  $\bar{M} = q/4\alpha$ , a zatem naprężenie skrajne

$$(196.8) \quad \bar{\sigma} = \frac{6\bar{M}}{h^2} = \frac{3}{2} q \sqrt[4]{\frac{E}{3(1-\nu^2)\gamma_0 h^5}}.$$

Stąd obliczymy nośność płyty  $\bar{q}$  przy danej wartości wyężenia materiału. Okazuje się, że  $\bar{q}$  rośnie proporcjonalnie do naprężenia dopuszczalnego i do czwartego pierwiastka z  $\gamma_0 h^5$ , a odwrotnie proporcjonalnie do czwartego pierwiastka z  $E$ . Ciężar właściwy materiału płyty  $\gamma$  nie wchodzi w to równanie. Ciężar ten winien być tylko mniejszy od  $\gamma_0$ , aby bardzo odległy od miejsca obciążenia brzeg płyty się nie zanurzył. Zobaczmy poniżej, że ten warunek nie jest konieczny w przypadku płyty okrągłej obciążonej w środku, która obciążona może pływać, chociaż nieobciążona tonie.

**§ 197. Zgięcie kołowo-symetryczne płyty pływającej niezmiernie wielkiej.** Takie wygięcie zachodzi pod obciążeniem skupionym  $P$  w jednym punkcie. Obrawszy ten punkt na osi  $Z$  układu współrzędnych walcowych o płaszczyźnie środkowej płyty jako płaszczyźnie

podstawowej, napiszemy jak w § 196 równanie różniczkowe powierzchni ugięcia

$$(197.1) (=196.1) \quad \bar{B} \nabla^2 w \equiv \bar{B} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 w = -\gamma_0 w.$$

To równanie uprościmy jeszcze wprowadzając parametr  $l$  o wymiarze długości określony równaniem

$$\frac{\bar{B}}{\gamma_0} = l^4 = \frac{1}{4\alpha^4}, \quad \text{gdzie} \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{\gamma_0}{4\bar{B}}},$$

oraz wyrażając promień wodzący  $r$  przez  $\varrho l = r$ , a ugięcie  $w$  przez  $\zeta l = w$ , aby mieć do czynienia tylko z liczbami czystymi. Wtedy otrzymujemy

$$(197.2) \quad \frac{d^4 \zeta}{d\varrho^4} + \frac{2}{\varrho} \frac{d\zeta}{d\varrho} - \frac{1}{\varrho^2} \frac{d^2 \zeta}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^3} \frac{d\zeta}{d\varrho} + \zeta = 0$$

jako równanie różniczkowe zagadnienia z warunkami brzegowymi

$$1^0 \zeta \Big|_{\varrho \rightarrow \infty} = 0, \quad 2^0 \frac{d\zeta}{d\varrho} \Big|_{\varrho \rightarrow \infty} = 0, \quad 3^0 \frac{d\zeta}{d\varrho} \Big|_{\varrho \rightarrow \infty} = 0 \quad \text{i}$$

4<sup>0</sup> Wypadkowa sił tnących na pobocznicę nieskończenie wąskiego walca otaczającego siłę  $P$  musi być równa tejże sile.

Rozwiązanie podane przez H. Hertz'a (Ann. d. Ph. 22, str. 449 z r. 1884, albo „Dziela” 1. 288. 1895) w postaci całki określonej jest

$$\zeta = \frac{P}{4\pi \sqrt[4]{\bar{B}^3 \gamma_0}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin \frac{t}{\sqrt{2}}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt,$$

albo

$$(197.3) \quad w = \frac{P}{4\pi \sqrt{\bar{B} \gamma_0}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{r}{l\sqrt{2}}} \sin \frac{rt}{l\sqrt{2}}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt, \quad l = \sqrt[4]{\frac{\bar{B}}{\gamma_0}}.$$

To wyrażenie czyni zadość równaniu różniczkowemu i wszystkim warunkom powyższym. Ono wskazuje na falistość powierzchni ugięcia, która jeszcze wyraźniej wychodzi na jaw z rozwinięć całki podług funkcji Besselowskich, a następnie podług potęg  $r$ . Pierwsze takie rozwinięcie ma postać

$$(197.4) \quad w = \frac{P}{2\pi \gamma_0 l^2} \left\{ \frac{\varrho^2}{2^2} \ln \varrho - \frac{\varrho^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} \left( \ln \varrho - \frac{5}{6} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{4} \left[ 1 - \frac{\varrho^4}{(2 \cdot 4)^2} + \frac{\varrho^8}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} - \dots \right] - (1 + \ln 2 - 0,57722) \left[ \frac{\varrho^2}{2^2} - \frac{\varrho^6}{(2 \cdot 4 \cdot 6)^2} + \dots \right] \right\},$$

gdzie  $\varrho = r/l$ ,  $l = \sqrt[4]{B/\gamma_0}$  i nadaje się do rachunku liczbowego przy małych wartościach  $\varrho$ .

Drugie wyrażenie dogodniejsze przy wielkich wartościach  $\varrho$  znalazł Hertz, jak pisze, z (197.3) „przez rozwinięcie wyrażenia podcałkowego według potęg  $t$  i scałkowanie”, otrzymując tą drogą szereg *asymptotyczny*<sup>1)</sup>, który podaje w postaci ograniczonej do dwu pierwszych wyrazów. Wyraz drugi jest niestety obciążony fatalnym błędem drukarskim, zakrywającym prawo według którego są zbudowane współczynniki. Błąd ten nie został sprostowany w żadnym ze znanych autorowi podręczników uwzględniających pracę Hertz'a, wobec czego podajemy poprawną formę wzoru znalezionej przy pomocy wskazówek zaczerpniętych z dzieła G. W. Watson'a „A Treatise on the Theory of Bessel Functions” (Cambridge 1922)<sup>2)</sup>

$$(197.5) \quad w = \frac{P}{2\pi\gamma_0 l^2} \sqrt{\frac{\pi}{2\varrho}} \cdot e^{-\varrho/\sqrt{2}} \left[ \sin\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{1^2}{118\varrho} \sin\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{8}\right) + \right. \\ \left. + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!(8\varrho)^2} \sin\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{8}\right) - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3!(8\varrho)^3} \sin\left(\frac{\varrho}{\sqrt{2}} + \frac{7\pi}{8}\right) + \dots \right].$$

<sup>1)</sup> Według nomenklatury Poincaré'go z jego pracy o całkach nieregularnych równań liniowych ogłoszonej w *Acta mathematica* jednocześnie z pracą Stieltjes'a w *Ann. de l'Ecole Norm. Sup.* (t. 3. str. 201—258 z r. 1886), który zbadawszy również podstawowe własności takich szeregów nazywał je „*séries semi-convergentes*”.

<sup>2)</sup> Oto jeden ze sposobów rozwinięcia całki

$$J = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{\varrho}{\sqrt{2}}t} \sin \frac{\varrho}{\sqrt{2}} t}{\sqrt{t^2 - 1}} dt,$$

dostarczony autorowi przez p. J. Wysockiego jako pracownika naukowego Instytutu Aerodynamicznego Politechniki Warszawskiej, a obecnie profesora Politechniki Gdańskiej. Droga ta okazała się znacznie krótsza od obranej pierwotnie przez autora, dla sprawdzenia wyniku Hertza. Całka  $J$  ma, jak łatwo zauważyć wartość części urojonej całki

$$J' = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{\varrho}{\sqrt{2}}t(1-i)}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt,$$

a ponieważ  $(1-i)/\sqrt{2} = \cos \pi/4 - i \sin \pi/4 = e^{-i\pi/4}$ , przeto

$$J' = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\varrho e^{-i\pi/4} t}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt \equiv K_0(\varrho e^{-i\pi/4}),$$



Z wzoru tego widać już całkiem wyraźnie, że dla niezbyt małych wartości  $r$  jest długość  $L$  półfali przekroju radialnego określona równaniem

$$\frac{2L}{\sqrt{2}} = 2\pi,$$

z którego wynika wzór identyczny z (196.7).

gdzie  $K_0(z) = \int_{n=0}^{\infty} K_n(z)$  oznacza funkcję dającą się wyrazić przez funkcje Besselowskie. Funkcja ta czyni bowiem zadość równaniu różniczkowemu

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} - (z^2 + \nu^2)y = 0$$

różniącemu się od równania Bessela tylko tym, że w wyrazie ostatnim jest  $-z^2$  zamiast  $+z^2$ . Funkcja  $K_n(z)$  da się, jak to wykazał już w r. 1886 A. B. Basset rozwinąć asymptotycznie na szereg, który w naszym przypadku ma postać

$$K_0(\rho e^{-\frac{i\pi}{4}}) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} (e^{-\rho} e^{i\frac{\pi}{4}})^{-\frac{i\pi}{4} + \frac{i\pi}{8}} \left[ 1 - \frac{1^2 e^{\frac{i\pi}{4}}}{1!8\rho} + \frac{1^2 \cdot 3^2 e^{\frac{i\pi}{2}}}{2!(8\rho)^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 e^{\frac{i3\pi}{4}}}{3!(8\rho)^3} + \dots \right]$$

Oznaczywszy przez  $A+B i$  wyraz ujęty w nawiasy ( ) zaś przez  $C+D i$  wyrażenie w klamrach [ ], napiszemy

$$(a) \quad J = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} (AD + BC).$$

Po łatwej przeróbce znajdujemy

$$A + Bi = e^{-\frac{\rho}{\sqrt{2}} + i\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)} = \left[ e^{-\frac{\rho}{\sqrt{2}}} \cos\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right] + i \left[ e^{-\frac{\rho}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \right]$$

$$C = 1 - \frac{1^2 \cos \frac{\pi}{4}}{1!8\rho} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cos \frac{\pi}{2}}{2!(8\rho)^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cos \frac{3\pi}{4}}{3!(8\rho)^3} + \dots$$

$$D = -\frac{1^2 \sin \frac{\pi}{4}}{1!8\rho} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \sin \frac{\pi}{2}}{2!(8\rho)^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \sin \frac{3\pi}{4}}{3!(8\rho)^3} + \dots$$

Po wstawieniu wartości  $A, B, C, D$  w rów. (a) znajdujemy dla całki  $J$  rozwinięcie asymptotyczne:

$$\begin{aligned} J &= \int_1^{\infty} \frac{e^{-\frac{\rho}{\sqrt{2}} t} \sin \frac{\rho}{\sqrt{2}} t}{\sqrt{t^2 - 1}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \cdot e^{-\frac{\rho}{\sqrt{2}}} \left\{ \cos\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \left[ -\frac{1^2 \sin \frac{\pi}{4}}{1!8\rho} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \sin \frac{3\pi}{4}}{2!(8\rho)^2} - \dots \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) \left[ 1 - \frac{1^2 \cos \frac{\pi}{4}}{1!8\rho} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cos \frac{2\pi}{4}}{2!(8\rho)^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cos \frac{3\pi}{4}}{3!(8\rho)^3} + \dots \right] \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \cdot e^{-\frac{\rho}{\sqrt{2}}} \left[ \sin\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right) - \frac{1^2}{1!8\rho} \sin\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{8}\right) + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!(8\rho)^2} \sin\left(\frac{\rho}{\sqrt{2}} + \frac{5\pi}{8}\right) - \dots \right], \end{aligned}$$

co prowadzi wprost do podanego powyżej wzoru (197.5).

Wzór (197.4) pozwala także znaleźć największe ugięcie  $f$ , jakie zachodzi pod siłą  $P$ , tj.

$$(197.6) \quad w_{max} = f = \frac{P}{4} \sqrt{\frac{3(1-\nu^2)}{E h^3 \gamma_0}}.$$

Dla momentu zginającego i odpowiednich naprężeń w warstwach skrajnych płyty znajdujemy według wzorów ogólnych

$$m_r = -\bar{B} \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \nu \frac{dw}{r dr} \right); \quad m_t = -\bar{B} \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right),$$

po wstawieniu wyrażenia na  $w$  wartości, które stają się logarytmicznie nieskończone w punkcie obciążonym. To dowodzi, że schemat teoretyczny siły skupionej w punkcie nie odpowiada nawet w przybliżeniu rzeczywistości w otoczeniu miejsca obciążonego. Każde rzeczywiste obciążenie punktowe przenosi się istotnie przez pole skończone, chociaż małe, wywołując ciśnienia, a więc naprężenia  $\sigma_{z\gamma}$ , które pominięto w założeniach teorii płyt cienkich, ponieważ stosownie do zasady de Saint-Venant'a ich skutek sięga tylko w najbliższe otoczenie miejsca obciążonego<sup>1)</sup>, Dlatego Hertz w swej odnośnej pracy zastąpił obciążenie skupione  $P$  obciążeniem równomiernie rozłożonym na kole o promieniu  $r_0 = h/2$ , znajdując dla największego naprężenia zginającego w środku tego koła wzór<sup>2)</sup>

$$(197.7) \quad \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_t = \frac{3}{2\pi} \frac{1-\nu^2}{h^2} P \left[ 1,309 - \ln \left( h \sqrt[4]{\frac{\gamma_0}{\bar{B}}} \right) \right].$$

**§ 198. Zgięcie kołowo-symetryczne płyty pływającej okrągłej.** Takie zgięcie zajdzie przy jakimkolwiek obciążeniu kołowo-symetrycznym i wymaga scałkowania równania różniczkowego (197.2), które da się napisać zwięźle jako

$$(198.1) \quad \nabla^4 \zeta + \zeta = 0.$$

<sup>1)</sup> Szczegółowe rozważania na ten temat znajdzie czytelnik na str. 78 „Teorii płyt“ autora.

<sup>2)</sup> W drugim wzorze podanym przez Hertz'a (z argumentem  $r_0$  zamiast  $h$ ) znajduje się błąd liczbowy powtórzony w Handb. d. Phys. (t. VI, str. 225). Poprawieniu ma ten wzór postać

$$(197.8) \quad \bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_t = \frac{3}{2\pi} \frac{1-\nu^2}{h^2} P \left[ 0,61594 - \ln \left( r_0 \sqrt[4]{\frac{\gamma_0}{\bar{B}}} \right) \right].$$

U Hertz'a mają nadto oba wzory znaki przeciwne, ponieważ ciśnieniom przypisał znak +, a ciągnięniom —.

Wykonamy je idąc drogą uitorowaną przez A. Föppl'a w V tomie jego wykładów (§ 20).

Oznaczywszy przez  $F_i(\varrho)$  ( $i=1,2,3,4$ ) cztery całki szczególne naszego równania różniczkowego liniowego, możemy rozwiązanie ogólne napisać w postaci

$$(a) \quad \zeta = c_1 F_1(\varrho) + \dots + c_4 F_4(\varrho)$$

ze stałymi  $c_i$ .

Dwa pierwsze rozwiązania szczególne wyrazimy przez szeregi potęgowe. W tym celu wykorzystamy operację  $\nabla^4$  na funkcji  $a_n \varrho^n$ , znajdując łatwo

$$(198.2) \quad \nabla^4(a_n \varrho^n) = n^2(n-2)^2 a_n \varrho^{n-4}.$$

Ażeby więc uczynić zadość równaniu (198.1) szeregiem potęgowym  $\sum_n a_n \varrho^n$ , trzeba aby były spełnione równania

$$a_{n-4} \varrho^{n-4} + n^2(n-2)^2 a_n \varrho^{n-4} = 0.$$

To znajdzie zważywszy że  $\nabla^4 a_0 = 0$  i  $\nabla^4(a_2 \varrho^2) = 0$ , dla wszystkich współczynników  $a_n$  ( $n > 2$ ), gdy

$$a_n = -\frac{a_{n-4}}{n^2(n-2)^2}.$$

Stosownie do tego otrzymujemy jako dwie całki szczególne

$$(198.3) \quad \begin{cases} F_1(\varrho) = 1 - \frac{\varrho^4}{(2 \cdot 4)^2} + \frac{\varrho^8}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} - \frac{\varrho^{12}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12)^2} + \dots \\ F_2(\varrho) = \varrho^2 - \frac{\varrho^6}{(4 \cdot 6)^2} + \frac{\varrho^{10}}{(4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)^2} - \frac{\varrho^{14}}{(4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14)^2} + \dots \end{cases}$$

Trzecie rozwiązanie znajdziemy w postaci

$$F_3(\varrho) = F_1(\varrho) \ln \varrho + P_3,$$

gdzie  $P_3$  jest funkcją  $\varrho$  dającą się znowu rozwinąć na szereg potęgowy. Że nowa postać rozwiązania może spełnić równanie (198.1), przekonujemy się poddając funkcję  $F_1(\varrho) \ln \varrho$  działaniu  $\nabla^4$ . Otrzymujemy więc

$$\nabla^4[F_1(\varrho) \ln \varrho] = \frac{4}{\varrho} \frac{d F_1}{d \varrho} + \ln \varrho \nabla^4 F_1(\varrho).$$

Po wstawieniu  $F_3$  w (197.2) mamy

$$\frac{4}{\varrho} \frac{d^3 F_1}{d \varrho^3} + \ln \varrho \cdot \nabla^4 F_1 + \nabla^4 P_3 + \ln \varrho \cdot F_1 + P_3 = 0.$$

Tutaj wyrazy drugi i czwarty dają razem  $\ln \varrho(\nabla^4 F_1 + F_1) = 0$ , ponieważ  $F_1$  jest całką szczególną. A zatem

$$(198.4) \quad \nabla^4 P_3 + P_3 + \frac{4}{\varrho} \frac{d^3 F_1}{d\varrho^3} = 0.$$

Obliczywszy trzecią pochodną  $F_1$  z rów. (198.3), otrzymamy równanie powyższe w postaci

$$(198.5) \quad \nabla^4 P_3 + P_3 + 4 \left[ -\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(2 \cdot 4)^2} + \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \varrho^4}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} - \frac{10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \varrho^8}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12)^2} + \dots \right] = 0.$$

Rozwiązanie tego równania możemy napisać w postaci szeregu potęgowego

$$(198.6) \quad P_3 = b_4 \varrho^4 + b_8 \varrho^8 + b_{12} \varrho^{12} + \dots,$$

którego współczynniki  $b$  dobierzemy tak, aby rów. (198.5) było spełnione. Ponieważ według (198.2) jest

$$\nabla^4 b_4 \varrho^4 = (4 \cdot 2)^2 b_4,$$

przeto na wyznaczenie  $b_4$  mamy równanie

$$(2 \cdot 4)^2 b_4 - 4 \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(2 \cdot 4)^2} = 0,$$

z którego

$$b_4 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{(2 \cdot 4)^4} = \frac{3}{128}.$$

Podobnie znajdujemy przyrównując sumę wyrazów z  $\varrho^4$  w rów. (198.5) do zera:

$$b_8 = -\frac{25}{1769472}.$$

W ogóle otrzymamy dla bezwzględnych wartości współczynników  $b$  wzór rekurencyjny

$$(198.7) \quad b_n = \pm \frac{1}{n^2(n-2)^2} \left[ b_{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n)^2} \right],$$

przy czym znaki  $+$  i  $-$  następują na przemian. Znalezione tą drogą wyrażenie

$$(198.8) \quad F_3(\varrho) = F_1(\varrho) \ln \varrho + \frac{3}{128} \varrho^4 - \frac{25}{1769472} \varrho^8 + \dots$$

jest zbieżne bardzo silnie, wobec czego wystarczy do rachunku liczbowego uwzględnić dwa pierwsze wyrazy. Ale dla  $\varrho=0$  jest

wprawdzie  $F_1(0)=1$ , ale  $F_1(\varrho) \ln \varrho$  staje się logarytmicznie nieskończone. Dlatego w zastosowaniach rozwiązania ogólnego winniśmy położyć  $c_3=0$ , aby powyższy przypadek wyłączyć.

Czwartą całkę szczególną znajdujemy w ten sam sposób, co  $F_3$ , przyjmując

$$(198.9) \quad F_1(\varrho) = F_2(\varrho) \ln \varrho + P_4,$$

a więc zamiast rów. (198.4) mamy

$$(198.10) \quad \nabla^4 P_4 + P_4 + \frac{4}{\varrho} \frac{d^3 F_2}{dx^3} = 0.$$

Stąd po wstawieniu  $F_2$  z (198.3)

$$(198.11) \quad \nabla^4 P_4 + P_4 + 4 \left[ -\frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \varrho^2}{(4 \cdot 6)^2} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \varrho^6}{(4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)^2} - \frac{12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot \varrho^{10}}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14)^2} + \dots \right] = 0.$$

Temu równaniu uczyni zadość

$$(198.12) \quad P_4 = b_6 \varrho^6 + b_{10} \varrho^{10} + b_{14} \varrho^{14} + \dots,$$

co daje

$$b_6 = 4 \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{(4 \cdot 6)^4} = \frac{5}{3456} = 1,447 \cdot 10^{-3}$$

$$b_{10} = -\frac{1054}{4423680000} = -2,382 \cdot 10^{-7}.$$

Odpowiednim wzorem rekurencyjnym dla bezwzględnych wartości współczynników  $b$  jest

$$(198.13) \quad b_n = \pm \frac{1}{n^2(n-2)^2} \left[ b_{n-4} + \frac{n(n-1)(n-2)}{(4 \cdot 6 \dots n)^2} \right].$$

Ostatecznie otrzymamy rozwiązanie ogólne w postaci

$$(198.14) \quad \zeta = c_1 \left[ 1 - \frac{\varrho^4}{(2 \cdot 4)^2} + \frac{\varrho^8}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8)^2} - \dots \right] + c_2 \left[ \varrho^2 - \frac{\varrho^6}{(4 \cdot 6)^2} + \frac{\varrho^{10}}{(4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)^2} - \dots \right] + c_4 \left\{ \ln \varrho \left[ \varrho^2 - \frac{\varrho^6}{(4 \cdot 6)^2} + \frac{\varrho^{10}}{(4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10)^2} - \dots \right] + 1,447 \cdot 10^{-3} \varrho^6 - 2,382 \cdot 10^{-7} \varrho^{10} + \dots \right\}.$$

**§ 199. Wyznaczenie stałych całkowania w zagadnieniu płyty pływającej.** Mając na oku przede wszystkim przypadek konkretny płyty o promieniu skończonym  $A$ . Föppl pozostawił na boku podane w § 197 rozwiązanie ogólne Hertz'a i znalazł drogą stosunkowo elementarną rozwiązanie równoważne (198.14), które teraz uzupełnimy obliczeniem stałych  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_4$ .

Przyjmując brzeg płyty o promieniu  $a$  jako swobodny, napiszemy warunki brzegowe następujące:

1<sup>o</sup> Dla  $r = \rho l = a$  jest  $m_r = 0$ , czyli:

$$\left( \frac{d^2 \zeta}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{d\zeta}{d\rho} \right)_{\rho=a/l} = 0$$

2<sup>o</sup> Dla  $r = a$  jest  $t_r = 0$ , czyli:

$$(199.1) \quad \left[ \frac{d}{d\rho} \left( \frac{d^2 \zeta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\zeta}{d\rho} \right) \right]_{\rho=a/l} = \left( \frac{d}{d\rho} \nabla^2 \zeta \right)_{\rho=a/l} = 0$$

3<sup>o</sup> Wypadkowa sił tnących na pobocznicę walca o promieniu nieskończenie małym  $\delta$  otaczającego siłę  $P$  musi być równa tej sile. To wyraża równanie

$$(199.2) \quad -\gamma_0 l^2 \left[ \frac{d}{d\rho} \left( \frac{d^2 \zeta}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d\zeta}{d\rho} \right) \right]_{\rho=\delta/l} \cdot 2\pi \delta + P = 0.$$

Z warunku 3<sup>o</sup> znajdujemy wartość

$$(199.3) \quad c_4 = \frac{P}{8\pi\gamma_0 l^2} = \frac{P}{8\pi\sqrt{\gamma_0 B}}$$

Warunek 2<sup>o</sup> daje równanie

$$(199.4) \quad \left\{ \begin{aligned} & c_1 \left[ -\frac{1}{2} \frac{a}{l} + \frac{1}{384} \left( \frac{a}{l} \right)^5 - \dots \right] + c_2 \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{a}{l} \right)^3 + \frac{1}{4608} \left( \frac{a}{l} \right)^7 - \dots \right] + \\ & + c_4 \left\{ \ln \frac{a}{l} \left[ -\frac{1}{4} \left( \frac{a}{l} \right)^3 + \frac{1}{4608} \left( \frac{a}{l} \right)^7 - \dots \right] + \right. \\ & \left. + 1 \frac{l}{a} + 0,062 \left( \frac{a}{l} \right)^1 - 12 \cdot 10^{-5} \left( \frac{a}{l} \right)^7 + \dots \right\} = 0. \end{aligned} \right.$$

A wreszcie z warunku 1<sup>o</sup> otrzymamy:

$$(199.5) \quad \left\{ \begin{aligned} & c_1 \left[ -\frac{3}{16} \left( \frac{a}{l} \right)^2 + \frac{7}{18432} \left( \frac{a}{l} \right)^6 - \dots \right] + c_2 \left[ 2 - \frac{5}{96} \left( \frac{a}{l} \right)^4 + \frac{9}{368640} \left( \frac{a}{l} \right)^8 - \dots \right] + \\ & + c_4 \left[ \ln \frac{a}{l} \left( 2 - \frac{5}{96} \frac{a^4}{l^4} + \frac{9}{368640} \frac{a^8}{l^8} - \dots \right) + \right. \\ & \left. + 3 + 0,0243 \left( \frac{a}{l} \right)^4 - 16,28 \cdot 10^{-6} \left( \frac{a}{l} \right)^8 + \dots \right] + \\ & + \nu c_1 \left[ -\frac{1}{16} \left( \frac{a}{l} \right)^2 + \frac{1}{18432} \left( \frac{a}{l} \right)^6 - \dots \right] + \\ & + \nu c_2 \left[ 2 - \frac{1}{96} \frac{a^4}{l^4} + \frac{1}{368640} \frac{a^8}{l^8} - \dots \right] + \\ & + \nu c_4 \left[ \ln \frac{a}{l} \left( 2 - \frac{1}{96} \frac{a^4}{l^4} + \frac{1}{368640} \frac{a^8}{l^8} - \dots \right) + \right. \\ & \left. + 1 + 0,00696 \frac{a^4}{l^4} - 2,11 \cdot 10^{-6} \frac{a^8}{l^8} + \dots \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Z obu ostatnich równań liniowych względem stałych  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_4$  można wyrazić  $c_1$  i  $c_2$  przez znaną już wartość stałej  $c_4$ , a otrzymane wartości wstawić wraz z wyrażeniami  $F_1$ ,  $F_2$  i  $F_4$  w rów. (a) z § 198, aby otrzymać rozwiązanie ogólne, a stąd obliczyć odkształcenia i naprężenia przy danych liczbowych.

Przykład takiego rachunku podaje A. Föppl w § 22 przytoczonej książki zestawiając wyniki teorii ścisłej z obliczeniami przybliżonymi praktyki inżynierskiej (bardzo stosunkowo prostymi) i znajduje np. wartości naprężeń większe o 83% od wynikających z obliczenia przybliżonego. Rachunek Föppla odnosi się do płyty stalowej leżącej na podłożu sprężystym, a więc do przypadku w którym równanie różniczkowe zgięcia płyty pływającej przestaje być równaniem ścisłym, gdyż reakcja podłoża nie jest w tak prosty sposób zależna od ugięcia (wgłębienia), jak to zachodzi w przypadku płyty pływającej. Dlatego jest wielce prawdopodobne, że w tym przypadku obliczenie przybliżone inżynierów nie odbiega tak bardzo od rzeczywistości.

Co się tyczy płyty pływającej obciążonej, to jej równowaga wymaga przede wszystkim spełnienia warunku hydrostatycznego i warunku wytrzymałościowego. Pierwszy określa równowaga wyporu hydrostatycznego z ciężarem własnym płyty i jej obciążeniem; drugi zaś wytrzymałość materiału płyty w miejscach działania obciążeń. Gdy warunek wytrzymałościowy jest spełniony, to przy dostatecznej wielkości kry lodowej np. można jej obciążenie zwiększać do pewnej granicy dowolnie ponieważ wygięcie kry pod ciężarem zwiększa wypór do wielkości potrzebnej do zrównoważenia całości. Kra pierwotnie płaska zamienia się na rodzaj płytkiej lodzi, jak to można zaobserwować kładąc krążek z cienkiego kartonu na wodę i obciążając go w środku. Wtedy chociaż jego wypór pierwotny nie przewyższa paru gramów, to po obciążeniu może dojść do paruset gramów, jeżeli tylko promień krążka jest tak wielki w porównaniu do jego grubości, że faliste wygięcie płyty nie pozwoli na zanurzenie jej brzegu.

W przypadku kry lodowej warunek wytrzymałościowy komplikuje się tym, że lód jest wybitnie materiałem elastoplastycznym o niskiej granicy sprężystości, wobec czego rosnące powoli z czasem odkształcenia plastyczne pojawiają się już przy wyteżeniu niewielkim. Mieszkańcy krain podbiegunowych podróżujący samiami obciążonymi po lodzie zdają sobie z tego dobrze sprawę i na lodzie cienkim nie zatrzymują się nigdzie dłużej. Lód przy temperaturze nie o wiele niższej od 0° doznaje odkształceń plastycznych bez objawów twardnienia przy odkształceniu rosnącym, które jest tak cenną własnością metali.

**§ 200. Teoria ścisła płyt „grubych“.** Ta teoria nie czyni żadnych założeń upraszczających, jakie przyjęto w teorii klasycznej płyt „cienkich” (ob. § 181), ścisłej tylko w przypadku granicznym, gdy grubość płyty jest nieskończenie mała, a ugięcia nieskończenie małe wobec grubości, lecz polega na szukaniu ścisłych rozwiązań ogólnych równań różniczkowych teorii sprężystości dla płyt o grubości dowolnej przy obciążeniu danym. Opracował ją J. H. Michell (London Math. Soc. Proc. 31, 100, 1899), a rozwinął szczegółowo A. F. H. Love w książce wielokrotnie przytaczanej. Teoria Michell'a i Love'a gra w stosunku do teorii klasycznej płyt cienkich tę samą rolę, co teoria zgięcia belek de Saint-Venant'a względem teorii prętów cienkich stosowanej jako teoria belek w mechanice technicznej. Podobnie jak ścisła teoria belek wykazała dla przeważającej liczby przypadków wystarczające przybliżenie teorii technicznej, tak i ścisła teoria płyt dowiodła w przypadkach analogicznych, że teoria klasyczna płyt cienkich daje w ogóle rozwiązania dostatecznie przybliżone.

Wobec tego, a zarazem ze względu na rozmiary książki niniejszej, poprzestaniemy na zwięzłym przedstawieniu zasad teorii ścisłej, odsyłając na razie czytelnika do książki Love'a, która traktuje wyczerpująco teorię płyt „grubych”, jak ją krótko nazywają

Obrawszy płaszczyznę środkową płyty o grubości  $2h$  za płaszczyznę  $XY$  przyjmijmy, że znaleźliśmy rozwiązanie ścisłe przy danym obciążeniu płyty, czyniące zadość warunkom na obu powierzchniach  $z = \pm h$ , ale przy założeniu, że płyta dana jest częścią płyty nieskończenie rozległej. Do tego rozwiązania dołączamy drugie odpowiadające usunięciu obciążeń powyższych i działaniu na brzegi płyty tylko określonych sił przekrojowych i momentów, co jak wynika z § 116 i rozważań uogólniających Love'a sprowadza się do stanu napięcia antisymetrycznego względem płaszczyzny  $XY$ . W tym stanie jest  $\sigma_z = 0$  w każdym punkcie ciała; reszta składowych różna od zera, a tylko na obu powierzchniach  $z = \pm h$  jest  $\tau_{zx}$  i  $\tau_{zy}$  równe zeru. Rozwiązanie drugie uzyskuje się przyjmując

$$(200.1) \quad \sigma_x = 0; \quad \tau_{zx} = \frac{1}{2(1+\nu)} (h^2 - z^2) \frac{\partial \Theta}{\partial x}; \quad \tau_{zy} = \frac{1}{2(1+\nu)} (h^2 - z^2) \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad \text{i}$$

$$(200.2) \quad z\Theta = \sigma_x + \sigma_y.$$

Wartości te czynią zadość równaniu równowagi

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0,$$



oraz równaniom Beltrami'ego zawierającym  $\nabla^2 \tau_{xx}$ ,  $\nabla^2 \tau_{zy}$  i  $\nabla^2 \sigma_z$ . Uwzględniając nadto dwa pozostałe równania równowagi, które teraz przyjmą postać

$$(200.3) \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} - \frac{z}{1+\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{z}{1+\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0,$$

otrzymujemy

$$(200.4) \quad \sigma_x = \frac{z}{1+\nu} \Theta + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}; \quad \sigma_y = \frac{z}{1+\nu} \Theta + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}.$$

Tutaj jest  $\chi$  funkcją  $x, y, z$ , która po uwzględnieniu (200.2) czyni zadość równaniu różniczkowemu

$$(200.5) \quad \nabla^2 \chi = -\frac{1-\nu}{1+\nu} z \Theta.$$

Równania Beltrami'ego wykazują, że  $\frac{\partial \chi^2}{\partial z^2} - \frac{2-\nu}{1+\nu} z \Theta$  musi być liniową funkcją  $x$  i  $y$ . Można ją przyjąć po prostu równą zeru, gdyż to nie wpływa na wartości  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  i  $\tau_{yx}$ . Dlatego  $\chi$  winno mieć postać

$$\chi = z \chi_1 + \frac{2-\nu}{6(1+\nu)} z^3 \Theta,$$

gdzie

$$\nabla^2 \chi_1 = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \Theta.$$

A zatem  $\chi_1$  czyni zadość równaniu

$$(200.6) \quad \nabla^2 \nabla^2 \chi_1 = 0.$$

Oznaczywszy przez  $w_0$  przemieszczenie normalne punktów płaszczyzny środkowej otrzymujemy

$$(200.7) \quad w_0 = \frac{1}{E} [h^2 \Theta + (1+\nu) \chi_1],$$

z czego wynika

$$\nabla^2 \nabla^2 w_0 = 0.$$

W ciągu dalszym dochodzi się do równań

$$(200.8 \text{ i } 9) \quad \Theta = -\frac{E}{1+\nu} \nabla^2 w_0; \quad \chi = \frac{E}{1+\nu} w_0 + \frac{h^2 E}{1-\nu^2} \nabla^2 w_0.$$

Dla sił i momentów przekrojowych otrzymuje się na koniec wzory  $n_x = n_y = 0$ ,  $t_z = 0$

$$(200.10) \quad \begin{cases} t_x = -\bar{B} \frac{\partial \nabla^2 w_0}{\partial x}, & t_y = -\bar{B} \frac{\partial \nabla^2 w_0}{\partial y}, \\ m_x = -\bar{B} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{8+\nu}{10} \bar{B} h^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\nabla^2 w_0), \\ m_y = -\bar{B} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + \frac{8+\nu}{10} \bar{B} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla^2 w_0), \\ -s = (1-\nu) \bar{B} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{8+\nu}{10} \bar{B} h^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\nabla^2 w_0)^1. \end{cases}$$

Wzory powyższe różnią się od wzorów odpowiednich przybliżonej teorii klasycznej płyt cienkich tylko wyrazami podkreślonymi, które jak wykazały badania szczegółowe J. Dougall'a (Edinburgh Roy. Soc. Trans. 41, 129, 1904) są dla wszelkich płyt praktycznych tak małe wobec wyrażen głównych, że przybliżenie jakie daje teoria klasyczna jest niemal zawsze wystarczające, a niekiedy graniczy z ścisłością zupełną. Nie trudno zdać sobie z tego sprawę ogólnie w sposób następujący:

Według założenia obu teoryj jest  $w_0$  małe wobec  $h$ . Ponieważ  $\nabla^2 w_0$  określa podwójną krzywiznę średnią przekrojów powierzchni ugięcia, która to krzywizna przy ustalonej wartości strzałki ugięcia rośnie i maleje z odwrotnością kwadratu rozpiętości płyty, przeto  $h^2 \nabla^2 w_0$  jest zawsze liczbą bardzo małą, a  $w_1 = h^2 \nabla^2 w_0$  przedstawia inną powierzchnię znacznie jeszcze słabiej zakrzywioną od  $w_0$ . Jej krzywiznę w przekrojach  $XZ$  i  $YZ$  określają wielkości

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (h^2 \nabla^2 w_0) \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h^2 \nabla^2 w_0),$$

które zatem muszą być wielokrotnie mniejsze od  $\partial^2 w_0 / \partial x^2$  i  $\partial^2 w_0 / \partial y^2$ . Wobec tego wyrazy podkreślone mają wartości znacznie mniejsze od wyrazów niepodkreślonych.

Gorzej ma się rzecz z ugięciami. Np. w przypadku płyty okrągłej o promieniu  $a$  dokoła swobodnie podpartej i obciążonej równomiernie jest (przy odróżnieniu wskaźnikiem 0 wartości otrzymanych z teorii przybliżonej) strzałka ugięcia

$$(200.11) \quad f = f_0 \left[ 1 + \frac{2(8+\nu+\nu^2)}{5(5+\nu)(1-\nu)} \left( \frac{2h}{a} \right)^2 \right] = f_0 \left[ 1 + 0,845 \left( \frac{2h}{a} \right)^2 \right];$$

<sup>1)</sup> U Love'a jest znak po lewej stronie + z powodu odmiennej umowy co do kierunku dodatniego momentu skręcającego od stosowanej poprzednio w książce niniejszej.

podczas gdy naprężenia w warstwie skrajnej środka są określone wzorem

$$(200.12) \quad \bar{\sigma} = \bar{\sigma}_0 \left[ 1 + \frac{2(2+\nu)}{15(3+\nu)} \left( \frac{2h}{a} \right)^2 \right] = \bar{\sigma}_0 \left[ 1 + 0,0923 \left( \frac{2h}{a} \right)^2 \right]$$

(współczynniki liczbowe odpowiadają tutaj wartości  $\nu=1/4$ ). Widać stąd, że błąd wyznaczenia wyężenia według teorii przybliżonej jest około 9 razy mniejszy od błędu wyznaczenia ugięcia, który podaje w odsetkach tabliczka poniższa

$\frac{a}{2h} =$	3	5	10	20
$100 \cdot \frac{f-f_0}{f} =$	9,2	3,4	0,85	0,21.

Porównanie teorii ścisłej z przybliżoną wykazuje nadto szczegóły następujące: Włókna elementarne płyty  $z$  prostopadłe do płaszczyzny środkowej nie pozostają proste i prostopadłe do powierzchni ugięcia, lecz pochylają się nieco w ogóle i zginają esowato podobnie jak w belce zginanej siłą poprzeczną. Powierzchnia środkowa nie jest „warstwą obojętną”, gdyż doznaje wydłużeń o wielkości  $\nu/2 \cdot q/E$ , gdzie  $q$  oznacza obciążenie jednostkowe pola płyty w przypadku rozpatrywanym. Włókna  $z$  nachylają się w tymże przypadku do powierzchni ugięcia pod kątem

$$(200.13) \quad \frac{\pi}{2} - \frac{3(1+\nu)}{4} \frac{r q}{h E}.$$

Zauważyć trzeba, że tylko ścisła teoria może należycie wyjaśnić sprawę stanu odkształcenia i napięcia w otoczeniu miejsc płyty obciążonych siłą skupioną. Tutaj należy ważny przypadek załatwiony w § 162.

Przytoczymy na koniec wyrażenie ścisłe dla energii sprężystej  $\Phi$  płyty grubej odniesionej do jednostki pola, jakie podaje Love w § 303 swej książki bez wywodu szczegółowego, z zaznaczeniem, że to wyrażenie stosuje się do zgięcia płyty dającego uogólniony płaski stan napięcia, tzn. do przypadków objętych rozwiązaniem drugim powyżej podanym (wz. 200.1 do 10). Przy pomocy tych wzorów można wyrazić składowe stanu odkształcenia i napięcia jako funkcje  $w_0$  (zastąpionego poniżej przez  $w$ ) w całej płycie, aby wstawiwszy je następnie w wyrażenie ogólne na  $\Phi$  z § 64 otrzymać po licznych przekształceniach:

$$(200.14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \Phi = \frac{1}{2} \bar{B} \left[ (\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] + \\ & + \frac{8+\nu}{10} \bar{B} h^2 \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \nabla^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 \nabla^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 \nabla^2 w}{\partial x \partial y} \right] + \\ & + \frac{2}{5} \frac{\bar{B} h^2}{1-\nu} \left[ \left( \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y} \right)^2 \right] - \\ & - \frac{272 + 64\nu + 5\nu^2}{420(1-\nu)} \bar{B} h^4 \left[ \frac{\partial^2 \nabla^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \nabla^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 \nabla^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

Tutaj jest  $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ , a  $w$  jest ugięciem płaszczyzny środkowej płyty oznaczonym poprzednio przez  $w_0$ . Wyrażenie w wierszu pierwszym jest identyczne z podanym we wz. (181.1) wyrażeniem energii sprężystej płyty cienkiej. Dalsze trzy wyrażenia z czynnikami  $h^2$  i  $h^4$  przedstawiają uzupełnienie według teorii ścisłej, malejące widocznie wobec pierwszego wraz z stosunkiem  $h$  do szerokości płyty.

## XVII. TEORIA POWŁOK

§ 201. **Rozważania wstępne.** *Powłoką* nazywamy ciało materialne, którego postać da się określić geometrycznie pewną powierzchnią otwartą lub zamkniętą zwaną *powierzchnią środkową*, leżącą wewnątrz ciała, oraz wymiarem trzecim zwanym *grubością* powłoki ( $g=2h$ ) wyznaczającym obie jej *ściany* i *brzeg* w sposób następujący:

Środek odcinka o długości  $2h$ , normalnego do powierzchni środkowej zajmuje wszelkie możliwe położenia na tej powierzchni. Jego oba końce opisują wtedy obie *ściany* powłoki bądź to *otwartej*, a więc powłoki z brzegiem, bądź też zamkniętej (bez brzegu). Sam zaś odcinek poruszając się po konturze powierzchni środkowej opisuje brzeg powłoki otwartej.

Z określenia powyższego wynika, że *plyta* jest przypadkiem szczególnym *powłoki*, której powierzchnia środkowa jest płaszczyzną. Z drugiej strony można powłokę traktować jako płytę zakrzywioną. Podobnie jak w teorii płyt przyjmiemy najpierw, że grubość powłoki  $2h$  jest stałą, gdyż tylko w tym przypadku można osiągnąć ścisłość badania teoretycznego odpowiadającą rozwiązaniom zagadnień trójwymiarowych klasycznej teorii sprężystości. Gdy znajdziemy równania różniczkowe równowagi i ruchu dla powłok o grubości stałej, to bardzo już łatwo nadać im postać takichże równań *przybliżonych* dla powłok o grubości łagodnie zmiennej.

Początki teorii powłok sprężystych sięgające końca XVIII i początku XIX stulecia były wynikiem prac ówczesnych przodujących matematyków<sup>1)</sup>, które podobnie jak początki teorii płyt zdążyły do rozwiązania zagadnień drgań akustycznych dzwonów itp.

<sup>1)</sup> L. Euler, De Sono Campanarum, Nov. Comm. Petrop., t. 10, 1776.

Jakub Bernoulli młodszy, Nov. Acta Petrop., t. 5, 1789.

S. D. Poisson, Mém. de l'Acad. Paris 1812.

A. L. Cauchy, Exerc. de Math., t. 3, 1828.

narzędzi muzycznych. Dopiero w stuleciu bieżącym zainteresowała się tą teorią także technika konstrukcyjna, co doprowadziło do opracowania wielkiej liczby nowych zagadnień statycznych szczegółowych, przy pokonywaniu poważnych trudności zastosowania ścisłej teorii ogólnej, którą zawdzięczamy głównie pracom A. E. H. Love'a<sup>1)</sup>. O trudnościach tych daje pewne wyobrażenie już podana w § 189 teoria wielkich ugięć płyt cienkich. Wprawdzie teoria powłok przyjmuje również grubość jako bardzo małą w porównaniu do innych wymiarów, ale nowe utrudnienie wynika stąd, że promienie krzywizny nie są w ogóle wielkie wobec tych wymiarów, a tylko wielkie wobec grubości. Z tego powodu przemieszczenia punktów pierwotnej powierzchni środkowej, które określają zmianę jej postaci wyznaczając stan napięcia w każdym elemencie powłoki, nie mogą być jak, w teorii płyt, określone jedną tylko współrzędną  $w$ , lecz w ogóle trzema  $u, v, w$ ; tylko w przypadkach symetrii obrotowej można poprzestać na dwu składowych przemieszczenia, a wyjątkowo na jednej.

Element powłoki wycięty przekrojami normalnymi leżącymi w płaszczyznach głównych krzywizny powierzchni środkowej, jest przeto obok sił zewnętrznych pod działaniem napięć rozciągających lub ściskających i napięć ścinających w płaszczyźnie stycznej do powierzchni środkowej, które noszą krótką nazwę napięć *blonowych*; dalej napięć ścinających poprzecznych (tj. prostopadłych do owej płaszczyzny), które można często pominąć podobnie jak w płytach, a wreszcie momentów zginających i skręcających równoważnych samym momentom zginającym (głównym) w pewnych przekrojach wzajemnie prostopadłych. Otóż w pierwszej obszernej i praktycznie ważnej grupie zagadnień są momenty zginające główne tak małe, że ich działanie można pominąć zupełnie wobec działania napięć blonowych. Od tych najprostszych zagadnień rozpoczniemy poniżej rozważania szczegółowe.

W drugiej nader ważnej zwłaszcza w akustyce grupie zagadnień powłok można odwrotnie pominąć napięcia blonowe, a uwzględnić tylko momenty zginające. To odpowiada założeniu, że elementy

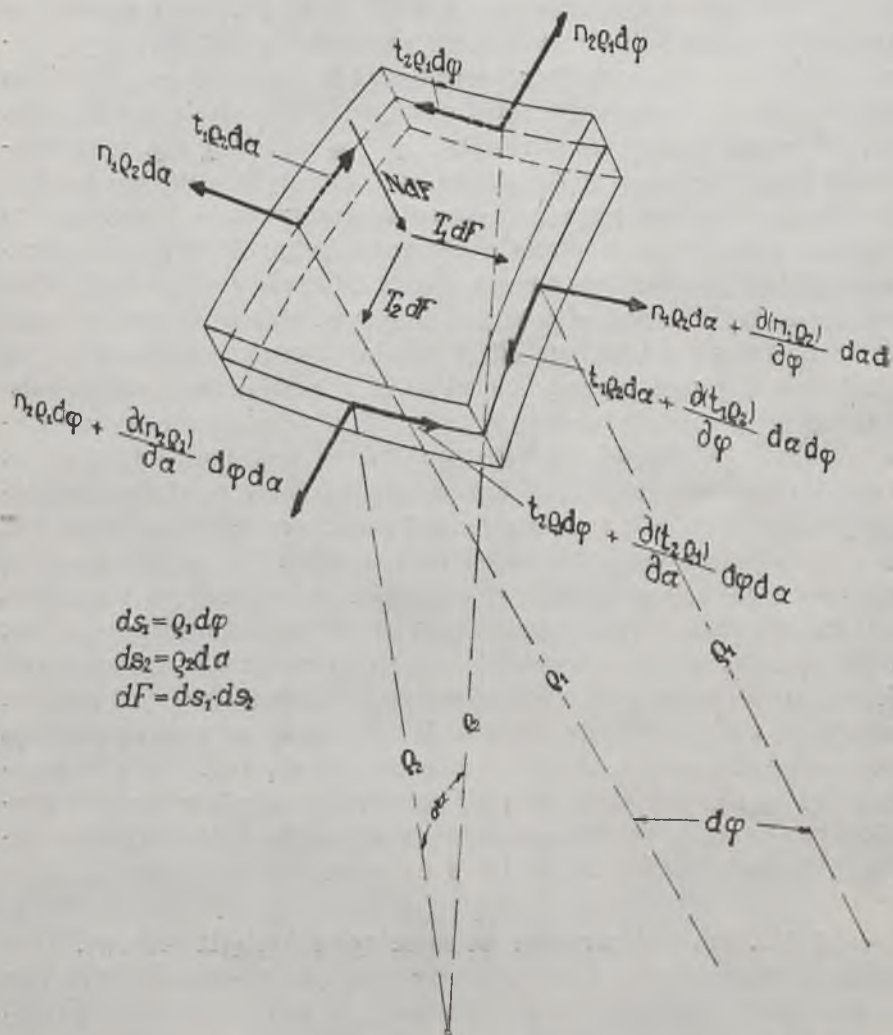
<sup>1)</sup> Phil. Trans. (A) t. 179, 1888, oraz „Elasticity“, rozdz. 24. Poprzednikiem Love'a w tej dziedzinie był wprawdzie H. Aron (Journ. f. reine u. ang. Math. t. 78, str. 136, 1874), ale praca ta nie była wolna od usterek i pozostawiła niektóre ważne kwestie niezalutowane, podczas gdy wyniki Love'a zostały w całości potwierdzone badaniami teoretycznymi dokonanymi na innej drodze przez A. B. Basset'a (Proc. Math. Soc. London, t. 21, 1890; Phil. Trans. (A) t. 181, 1890) i H. Lamb'a (Proc. Math. Soc. London, t. 21, 1890); Doniosłe prace w tej dziedzinie ogłosili także w tym samym ćwierćwieczu E. Mathieu (Journ. de l'École Pol. t. 51, 1882) i Lord Rayleigh (Proc. Math. Soc. London, t. 18, 1881).

liniowe leżące w powierzchni środkowej przed odkształceniem nie zmieniają swej długości przy wygięciu tej powierzchni (zwanym dlatego *izometrycznym*), co jest możliwe pod pewnymi warunkami określonymi ściśle w geometrii różniczkowej. Warunki te są uogólnieniem warunku wymienionego w § 179 dla płyt, który wyraża, że bez udziału napięć błonowych może płaszczyzna środkowa płyty doznać wygięcia skończonego tylko w postaci powierzchni *rozwijalnej* (na płaszczyźnie), a więc powierzchni o krzywiznie Gauss'a równej zeru. Ta krzywizna mierzy się wartością  $1/\rho_1 \cdot 1/\rho_2$ , gdzie  $\rho_1$  i  $\rho_2$  są promieniami krzywizny przekrojów normalnych głównych w danym punkcie powierzchni, a zatem jest równa zeru dla płaszczyzny i dla powierzchni rozwijalnych. Otóż uogólnienie dla powierzchni dowolnych o krzywiznie ciągłej wyraża się twierdzeniem, że dana powierzchnia  $\Pi$  da się bez zmian długości elementów liniowych wygiąć w sposób ciągły tylko na taką powierzchnię  $\Pi'$ , która jest odwzorowaniem wiernym i zarazem równopolewym powierzchni  $\Pi$ , a powierzchnie tak ze sobą nawzajem spokrewnione mają w punktach odpowiednich równą krzywiznę Gauss'a. To twierdzenie stosuje się do powierzchni z brzegiem. Dowiedziono natomiast, że każda powierzchnia zamknięta jednopłonna, wypukła o krzywiznie ciągłej (tzw. owaloida) nie może być w ogóle wygięta bez odkształceń błonowych<sup>1)</sup>. To samo odnosi się do części takich powierzchni o brzegu usztywnionym i na tym polega ogromna korzyść praktyczna zastosowania cienkich powłok tego rodzaju na przykrycia kopulaste przestrzeni obudowanych ścianami pionowymi. Wytrzymałość powłoki obciążonej jest bowiem wyzyskana najlepiej, gdy materiał jest narażony głównie na napięcia błonowe bez uwagi godnych momentów zginających. Tych momentów nie można jednakże pomijać zupełnie w zagadnieniach wymienionych, które przeto należą właściwie do grupy trzeciej domagającej się zastosowania najogólniejszej teorii powłok.

**§ 202. Powłoki narażone na same tylko napięcia błonowe.** Gdy grubość powłoki jest mała w porównaniu do promieni krzywizny powierzchni środkowej, które będziemy nazywali w skrócie promieniami krzywizny powłoki, to napięcia błonowe w przekrojach normalnych można z przybliżeniem wystarczającym traktować jako rozłożone równomiernie. Wtedy napięcia są siłami działającymi

<sup>1)</sup> Według Cauchy'ego był ten fakt naukowy znany już Lagrange'owi. Pierwszy dowód wyczerpujący dał J. H. Jellett (Trans. R. Irish Acad., t. 22, 1854). Prace współczesnych matematyków na ten temat zebrał jeden z nich S. Cohn-Vossen w referacie zamieszczonym w nr 1 wydawnictwa S. S. S. R. pt.: „Uspěchy matematycznych nauk“ (r. 1936).

w płaszczyznach stycznych do powierzchni środkowej. Przyjawszy zatem, że te napięcia równoważące się z obciążeniem elementu powłoki nie wywołują godnej uwzględnienia zmiany postaci i wymiarów powłoki, przekonujemy się łatwo, że napięcia błonowe są



Rys. 116.

statycznie wyznaczalne. W tym celu weźmy pod uwagę element powłoki wycięty przekrojami krzywizn głównych  $1/\varrho_1$  i  $1/\varrho_2$ , a więc wzajemnie prostopadłymi (rys. 116). Kontur tego elementu jest czworokątem krzywoliniowym zbieżającym w granicy do czworokąta prostoliniowego, którego boki przeciwnie nie są wprawdzie w ogóle równoległe, ale tworzą kąty nieskończenie małe  $d\theta_1$  i  $d\theta_2$ .



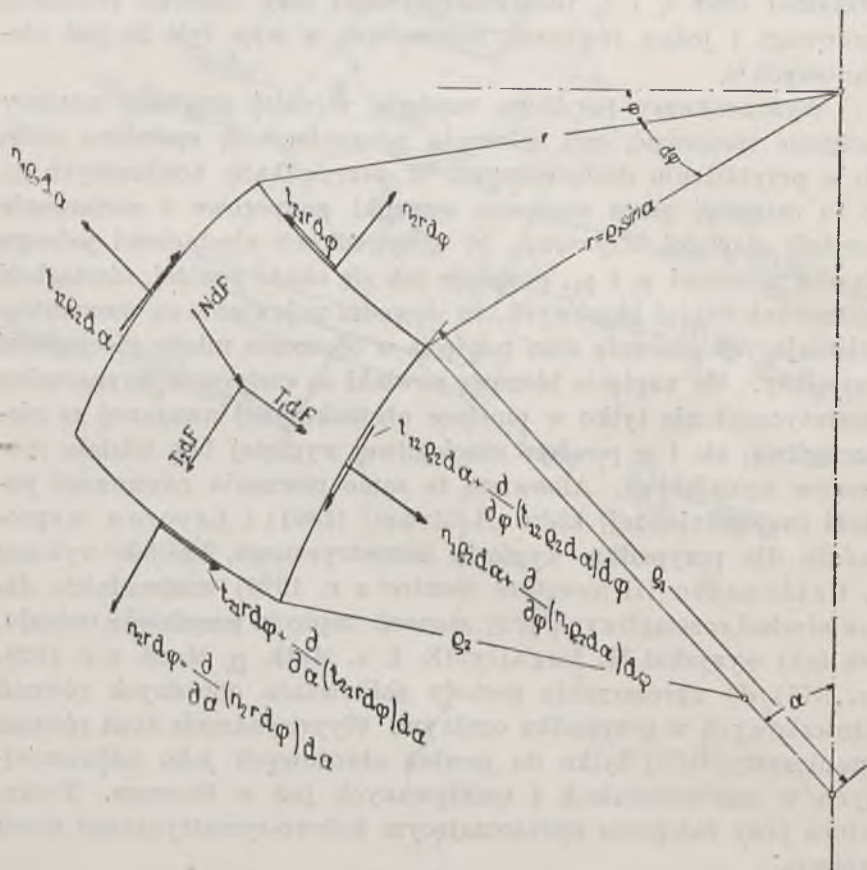
tego samego rzędu co długości boków przyległych  $ds_1$  i  $ds_2$ . Oznaczywszy teraz przez  $N$ ,  $T_1$  i  $T_2$  dane składowe siły zewnętrznej działającej na środek elementu, przy czym  $N$  ma kierunek normalnej, a  $T_1$  i  $T_2$  kierunki styczne do przekrojów krzywizn głównych, otrzymamy dla składowych napięć błonowych odniesionych do jednostki szerokości przekroju, które oznaczymy przez  $n_1$  i  $n_2$  (napięcia normalne) oraz  $t_1$  i  $t_2$  (napięcia styczne) trzy rzutowe równania równowagi i jedno równanie momentów, a więc tyle ile jest niewiadomych<sup>1)</sup>.

Wyznaczywszy tą drogą napięcia w całej powłoce, musimy następnie sprawdzić, czy założenia poczynione są spełnione ściśle lub w przybliżeniu dostatecznym. W przypadkach konkretnych da się to osiągnąć przez stosowne warunki podporowe i zachowanie wszędzie *ciągłości krzywizny*. W przypadkach nieciągłości jednego lub obu promieni  $\rho_1$  i  $\rho_2$ , powstaje jak się okaże poniżej, nieciągłość obliczonych napięć błonowych, co dowodzi pojawienia się momentów zmieniających znacznie stan napięcia w otoczeniu miejsc nieciągłości krzywizny. Ale napięcia błonowe powłoki są statycznie wyznaczalne (izostatyczne) nie tylko w powłoce abstrakcyjnej uważanej za nierozciągliwą, ale i w powłoce rozciągliwej wygiętej bez udziału momentów zginających. Albowiem te same równania równowagi powłoki (najogólniejszej) które Beltrami (1861) i Lecornu wyprowadzili dla przypadku wygięcia izometrycznego, są jak wykazał B. Caldonazzo (Il monitore tecnico z r. 1920) ważne także dla powierzchni rozciągliwych przy stanach napięcia wszelkiego rodzaju. Ten fakt wyzyskał M. Lagally (Z. f. a. Math. u. Mech. z r. 1924, str. 377) do uproszczenia metody całkowania odnośnych równań różniczkowych w przypadku ogólnym. Wyprowadzenie tych równań ograniczymy tutaj tylko do powłok obrotowych jako najważniejszych w zastosowaniach i traktowanych już w Stereom. Techn. autora przy założeniu upraszczającym kołowo-symetrycznego stanu napięcia.

Weźmy więc pod uwagę element takiej powłoki wycięty płaskimi przekrojami osiowymi (południkowymi) nachylonymi do płaszczyzny południka zerowego pod kątami  $\varphi$  i  $\varphi + d\varphi$  (rys. 116), oraz dwoma stożkami współosiowymi z powłoką i przecinającymi ją normalnie pod kątami  $\alpha$  i  $\alpha + d\alpha$ . Śladami tych stożków na powierzchni środkowej są koła równoleżnikowe o promieniach  $r$  i  $r + dr$ . Oznaczmy

<sup>1)</sup> To znakowanie nie pokrywa się całkowicie ze znakowaniem stosowanym poprzednio w teorii płyt, gdzie np.  $t_x$ ,  $t_y$  oznaczało napięcia styczne poprzeczne, a nie podłużne jak tutaj. Napięcia styczne poprzeczne oznaczymy dlatego w ciągu dalszym przez  $q$  z wskaźnikiem odpowiednim.

nadto przez  $\varrho_1$  promień krzywizny przekroju równoleżnikowego równy jak wiadomo długości normalnej odciętej osią  $z$ , a przez  $\varrho_2$  promień krzywizny przekroju południkowego. Długościami boków sąsiednich elementu są uwidocznione na rys. 117  $r d\varphi$  i  $\varrho_2 da$ , a więc pole elementu z pominięciem nieskończenie małych rzędu wyższego nad drugi jest  $dF = r \varrho_2 da d\varphi$ .



Rys. 117.

Na brzeg  $r d\varphi$  działa napięcie normalne  $n_2 r d\varphi$  i styczne  $t_{21} r d\varphi$ . Na brzeg przeciwny działa napięcie normalne  $n_2 r d\varphi + \frac{\partial(n_2 r)}{\partial \alpha} da d\varphi$  i styczne  $t_{21} r d\varphi + \frac{\partial(t_{21} r)}{\partial \alpha} da d\varphi$ . Na brzeg  $\varrho_2 da$  działa napięcie normalne  $n_1 \varrho_2 da$  i styczne  $t_{12} \varrho_2 da$ . Na brzeg przeciwny zaś napięcie normalne  $n_1 \varrho_2 da + \frac{\partial(n_1 \varrho_2)}{\partial \varphi} da d\varphi$  i napięcie styczne  $t_{12} \varrho_2 da + \frac{\partial(t_{12} \varrho_2)}{\partial \varphi} da d\varphi$ .

Składowymi sił zewnętrznymi są:

$N dF$  w kierunku normalnej wewnętrznej,

$T_1 dF$  w kierunku stycznym do równoleżnika,

$T_2 dF$  w kierunku stycznym do południka.

Warunek rzutowy równowagi dla kierunku stycznego do południka daje przeto

$$\frac{\partial t_{12}}{\partial \varphi} \varrho_2 da d\varphi + \frac{\partial}{\partial \alpha} (r n_2) da d\varphi - n_1 \varrho_2 da d\varphi \cos \alpha + T_2 r \varrho_2 da d\varphi = 0,$$

przy czym wyraz trzeci przedstawia rzut na kierunek wymieniony wypadkowej sił  $n_1 \varrho_2 da$  i  $n_1 \varrho_2 da + \frac{\partial (n_1 \varrho_2)}{\partial \varphi} da d\varphi$ , tworzących ze sobą kąt  $d\varphi$ . Ta wypadkowa ma zatem, z pominięciem małych rzędu wyższego, wartość  $n_1 \varrho_2 da d\varphi$  i jest nachylona do kierunku wymienionego pod kątem  $\alpha$ . Podzieliwszy przez  $da d\varphi$  otrzymujemy pierwsze równanie równowagi

$$(202.1) \quad \frac{\partial (r n_2)}{\partial \alpha} + \varrho_2 \frac{\partial t_{12}}{\partial \varphi} - \varrho_2 n_1 \cos \alpha + T_2 r \varrho_2 = 0.$$

Podobnie znajdujemy dla kierunku stycznego do równoleżnika

$$(202.2) \quad \frac{\partial (r t_{21})}{\partial \alpha} + \varrho_2 \frac{\partial n_1}{\partial \varphi} + \varrho_2 t_{12} \cos \alpha + T_1 r \varrho_2 = 0.$$

Z równania momentów względem normalnej w środku elementu wynika jak łatwo przewidzieć  $t_{12} = t_{21} = t$  (oczywiście znowu z powodu uzasadnionego skreślenia małych rzędu wyższego).

Przechodząc wreszcie do warunku rzutów na normalną znajdujemy najpierw rzut obliczonej już powyżej wypadkowej z napięć wzdłuż równoleżnika, tj.  $n_1 \varrho_2 da d\varphi$ , jej rzut

$$n_1 \varrho_2 \sin \alpha da d\varphi.$$

Podobnie dają siły  $n_2 r d\varphi$  i przeciwległa tworzące kąt  $da$  wypadkową o kierunku normalnej i wielkości  $n_2 r da d\varphi$ . A zatem

$$n_1 \varrho_2 \sin \alpha da d\varphi + n_2 r da d\varphi + N r \varrho_2 da d\varphi = 0,$$

a ponieważ  $r = \varrho_1 \sin \alpha$ , przeto

$$(202.3) \quad \frac{n_1}{\varrho_1} + \frac{n_2}{\varrho_2} + N = 0$$

jest trzecim równaniem równowagi ważnym widocznie i w przypadku powłoki ogólnie zakrzywionej, jeżeli  $\varrho_1$  i  $\varrho_2$  oznaczają promienie główne jej krzywizny.

To równanie nie zawiera jak poprzednie pochodnych cząstkowych napięć. Przy jego pomocy można z równań (202.1 i 2) wyrugować jedną z niewiadomych  $n_1$ ,  $n_2$  i  $t$ , aby otrzymać dwa równania różniczkowe do wyznaczenia dwu pozostałych.

**§ 203. Przykład obciążenia kołowo-symetrycznego powłoki obrotowej.** W tym przypadku oraz przy dalszym założeniu upraszczającym  $T_1=0$ , odpowiadającym obciążeniu ciężarem własnym powłoki o osi pionowej, stają się wszystkie pochodne względem  $\varphi$  równe zeru, a równania równowagi sprowadzają się do następujących:

$$(203.1) \quad \frac{\partial(rn_2)}{\partial\alpha} - \varrho_2 n_1 \cos \alpha + T_2 r \varrho_2 = 0$$

$$(203.2) \quad \frac{\partial(rt)}{\partial\alpha} + \varrho_2 t \cos \alpha = 0$$

$$(203.3) \quad \frac{n_1}{\varrho_1} + \frac{n_2}{\varrho_2} + N = 0.$$

Napięcia normalne  $n_1$ , oraz odpowiadające im naprężenia nazywamy zwykle *obwodowymi* lub *równoleżnikowymi*, zaś  $n_2$  *południkowymi*.

Przyjmując  $t=0$  uczynimy widocznie zadość równaniu (203.2). Wstawivszy wartość  $n_1 \varrho_2 = -\varrho_1 n_2 - N \varrho_1 \varrho_2$  otrzymaną z (203.3) w (203.1) i uwzględnivszy, że  $r = \varrho_1 \sin \alpha$ , znajdziemy

$$\frac{d(rn_2)}{d\alpha} + (\varrho_1 n_2 + N \varrho_1 \varrho_2) \cos \alpha + T_2 \varrho_1 \varrho_2 \sin \alpha = 0,$$

albo po pomnożeniu przez  $\sin \alpha$ :

$$\frac{d(rn_2)}{d\alpha} \sin \alpha + rn_2 \cos \alpha = -\varrho_1 \varrho_2 (N \cos \alpha \sin \alpha + T_2 \sin^2 \alpha).$$

Lewa strona jest równa  $d/da(rn_2 \sin \alpha)$ , całkując więc obustronnie względem  $\alpha$  znajdujemy

$$(203.4) \quad n_2 = -\frac{1}{r \sin \alpha} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \varrho_1 \varrho_2 \sin \alpha (N \cos \alpha + T_2 \sin \alpha) d\alpha,$$

gdzie  $\alpha$  odpowiada równoleżnikowi dowolnemu, a  $\alpha_0$  równoleżnikowi tworzącemu górny brzeg powłoki. Gdy powłoka jest w górze zamknięta, to oczywiście  $\alpha_0=0$ .

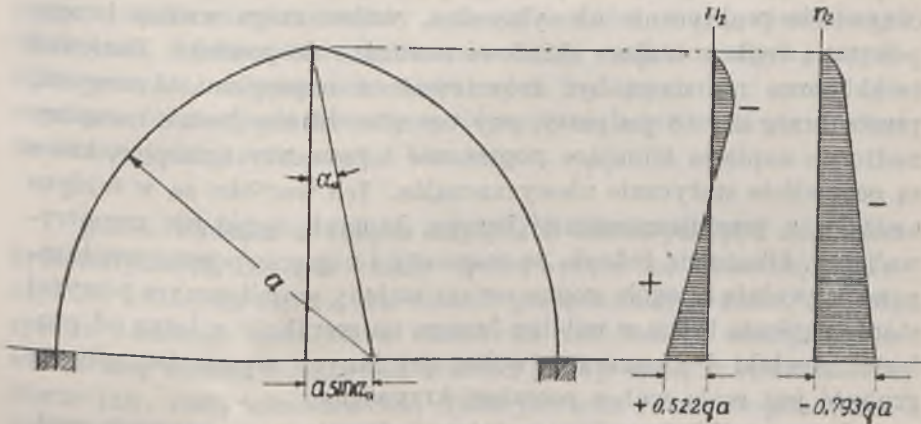
Po wyznaczeniu  $n_2$  obliczamy  $n_1$  z rów. (203.3).

Pomnożywszy rów. (203.4) obustronnie przez  $2\pi r \sin \alpha$  mamy

$$2\pi r n_2 \sin \alpha = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} 2\pi r \varrho_2 (N \cos \alpha + T_2 \sin \alpha) d\alpha.$$

Tutaj lewa strona określa wypadkową napięć południkowych rozmieszczonych na przekroju stożkowym wokół równoleżnika  $\alpha$ ;

zważywszy zaś, że  $\rho_2 da = ds_2$  oznacza element łuku południka, zauważymy łatwo, że całka po stronie prawej przedstawia wypadkową z obciążeń części powłoki leżącej ponad równoleżnikiem  $a$ . To równanie ma więc bardzo proste znaczenie statyczne, gdyż wyraża warunek równowagi, jaki można napisać bez posługiwania się równaniami różniczkowymi.



Rys. 118.

Powyższe obliczenia wykonamy w szczególności dla powłoki kopulastej utworzonej przez obrót łuku kołowego osi około pionowej nie przechodzącej przez środek koła, lecz odległej od tej osi o  $a \sin \alpha_0$ , jeżeli  $a$  jest promieniem łuku południkowego (rys. 118). Niechaj  $q$  oznacza ciężar jednostki pola powłoki. Wtedy  $T_2 = q \sin \alpha$ ,  $N = q \cos \alpha$ . Uwzględniając, że  $\rho_2 = a$ , zaś  $\rho_1 = \frac{r}{\sin \alpha} = a \left(1 - \frac{\sin \alpha_0}{\sin \alpha}\right)$  znajdujemy z (203.4):

$$n_2 = - \frac{qa}{(\sin \alpha - \sin \alpha_0) \sin \alpha} \int_{\alpha_0}^{\alpha} (\sin \alpha - \sin \alpha_0) d\varphi =$$

$$= - qa \frac{(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) - (\alpha - \alpha_0) \sin \alpha_0}{(\sin \alpha - \sin \alpha_0) \sin \alpha},$$

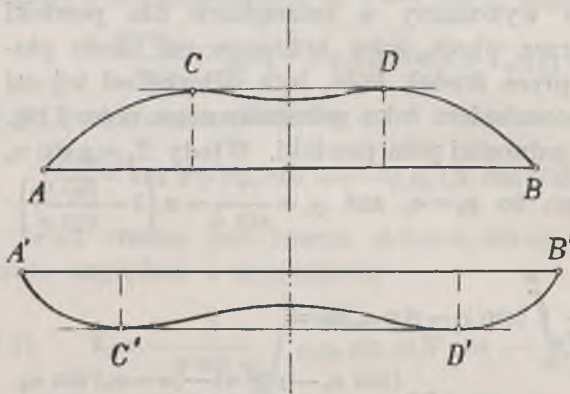
a z rów. (203.3) otrzymamy

$$n_1 = - \frac{qa}{\sin^2 \alpha} [(a - a_0) \sin \alpha_0 - (\cos \alpha_0 - \cos \alpha) + (\sin \alpha - \sin \alpha_0) \cos \alpha \sin \alpha].$$

W wierzchołku kopuły jest  $\alpha = \alpha_0$ , a więc  $n_1 = 0$ , zaś  $n_2$  przedstawia się jako symbol nieoznaczony, którego wartość znalezioną w sposób znany jest  $n_2 = 0$ . Naprężenia południkowe  $\sigma_2$  są wszędzie ciśnieniami, a równoleżnikowe  $\sigma_1$  tylko w górnej części kopuły, podczas gdy u dołu są ciągnieniami.

Ażeby obliczony stan napięcia zachodził w każdej części powłoki, powinny reakcje brzegu dolnego ustalonego równoważyć się z napięciami wzdłuż tego brzegu. Zrealizowanie tego warunku wymagałoby oparcia całego brzegu na podstawie doskonale gładkiej. Ta podstawa przy założeniu brzegu normalnego do powłoki musiałaby należeć do pobocznicy stożka stycznego do brzegu. Jest to oczywiście praktycznie niewykonalne, wobec czego wzdłuż brzegu powstaną reakcje mające składowe normalne do powłoki. Ponieważ te składowe nie mogą być zrównoważone napięciami błonowymi, przeto brzeg czy to podparty, czy też utwierdzony będzie narażony nadto na napięcia ścinające poprzeczne i momenty zginające, które są oczywiście statycznie niewyznaczalne. Ich wartości są w ścisłym związku z przemieszczeniami brzegu, których dotąd nie rozpatrywaliśmy. Okazuje się jednak, że momenty i napięcia poprzeczne brzegowe wywołują w ogóle godne uwagi zmiany w obliczonym powyżej stanie napięcia tylko w pobliżu brzegu na szerokość zależną od grubości powłoki i nieznaczną wobec jej innych wymiarów, gdy ta grubość jest mała wobec promieni krzywizny.

Inny przykład powłoki narażonej głównie na rozciąganie znajduje czytelnik w Stereom. Techn. (§ 71). Powłokę stanowi tam



Rys. 119.

półkulisty zbiornik na wodę zawieszony brzegiem (górnym), co dałoby się zrealizować przy najmniej ze znacznym przybliżeniem za pośrednictwem stosownej blachy cylindrycznej spojonej z brzegiem półkuli. Ale i w tym przypadku zachodzą w powłoce nie tylko napięcia rozciągające, ale i ściskające, których nie znosi oczywiście

powłoka zupełnie wiotka (np. powłoka balonowa) bez pofałdowania, tj. zmiany postaci równowagi. Kwestie te należą do rozdziału o stateczności<sup>1)</sup>, tutaj rozpatrzymy tylko nader ważny przypadek powłok obrotowych o postaci dla której błonowy stan napięcia nie jest możliwy (rys. 119). Niechaj powłoka o przekroju południkowym  $ACDB$  będzie podpartą wzdłuż brzegu  $AB$ , a powłoka  $A'C'D'B'$

<sup>1)</sup> Rozdział ten rozrósł się tak bardzo, że wymaga osobnej książki w rodzaju: S. Timoshenko, — *Theory of elastic stability*, London 1936.

zawieszoną wzdłuż brzegu  $A'B'$ . Gdy obie powłoki są np. obciążone ciśnieniem stałym  $p$ , to równowaga części wyciętych walcami o średnicy  $CD$ , wzgl.  $C'D'$  nie jest możebna przy samych tylko napięciach błonowych. Te napięcia są bowiem w  $C$  i  $D$  poziome, a więc nie mogą równoważyć pionowej wypadkowej z obciążeń. Tylko dzięki sztywności ścinania i zginania powłoki powstaną wzdłuż okręgu  $CD$  napięcia poprzeczne i momenty zginające, które mogą równoważyć obciążenia wymienione. Obliczenie ugięć pofałdowanych współśrodkowo den w puszkach mierniczych manometrów i aneroidów musi przeto uwzględniać sztywność zginania i nie może się opierać na samej tylko teorii napięć błonowych.

**§ 204. Powłoka o stałych napięciach błonowych pod ciśnieniem hydrostatycznym.** Kropla cieczy spoczywająca na poziomej płaszczyźnie, której nie zwilża, ma właśnie postać takiej powłoki. Jej rolę spełnia doskonale zewnętrzna warstewka molekularna cieczy, ponieważ w niej według teorii włoskowatości panuje napięcie równomierne równe tzw. *stałej włoskowatości*. Taka powłoka zwana *kropłą* znalazła już nawet zastosowanie praktyczne jako zbiornik na naftę<sup>1)</sup>. Z pominięciem ciężaru własnego powłoki znajduje się jej postać przy założeniu, że w punkcie szczytowym  $A$  panuje ciśnienie większe od atmosferycznego. Ta nadwyżka mierzy się ciężarem  $\gamma h_0$  słupa cieczy zawartej w zbiorniku (rys. 120). Umieściwszy zatem płaszczyznę  $XY$  na poziomie swobodnego zwierciadła cieczy mamy

$$N = -\gamma z,$$

a ponieważ według założenia jest  $n_1 = n_2 = n$ , przeto rów. (202.3) daje

$$(204.1) \quad n \left( \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} \right) = \gamma z,$$

przy czym

$$\varrho_1 = \frac{x}{\sin \alpha}, \quad \text{zaś} \quad \varrho_2 = \frac{ds}{da} = \frac{dx}{\cos \alpha da} = \frac{dx}{d(\sin \alpha)}.$$

Po wstawieniu tych wartości w (204.1) otrzymujemy równanie różniczkowe

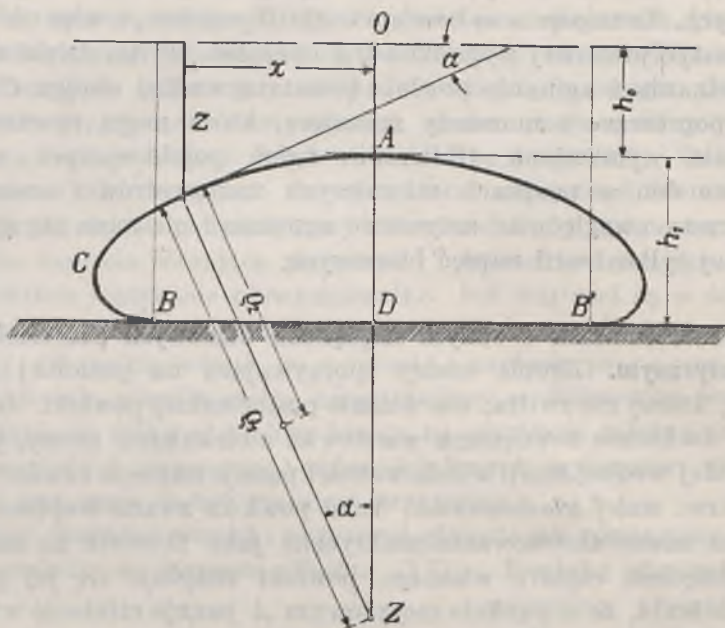
$$(204.2) \quad \frac{\sin \alpha}{x} + \frac{d(\sin \alpha)}{dx} = \frac{\gamma z}{n},$$

które wraz z równaniem

$$(204.3) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dx}$$

<sup>1)</sup> W Longview, Texas, zbudowano taki zbiornik w r. 1929 na 12.700 m<sup>3</sup>.

określa południk powłoki. Otrzymane stąd równanie różniczkowe dla  $z$  jako funkcji  $x$  nie da się niestety scałkować ogólnie. Aby umożliwić całkowanie liczbowe w przypadkach konkretnych zastąpiono



Rys. 120.

to równanie dwoma stosunkowo prostymi <sup>1)</sup>, wprowadziwszy  $\xi = \sin \alpha$  jako niewiadomą pomocniczą. Wtedy rów. (204.2) po wprowadzeniu skrótu  $a^2 = n/\gamma$  przybierze postać

$$(204.4) \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{z}{a^2} - \frac{\xi}{x},$$

zaś rów. (204.3) daje

$$(204.5) \quad \frac{dz}{dx} = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

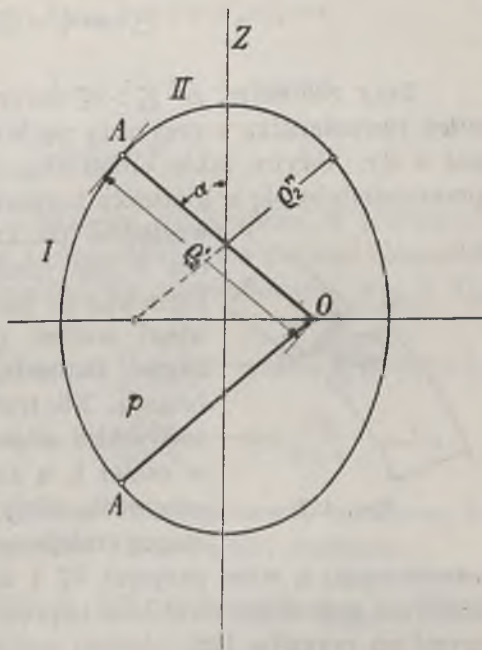
Szczegóły odnośnego rachunku liczbowego, na który tu nie ma miejsca, znajdzie czytelnik w książce C. Runge & H. König, Vorl. ü. numer. Rechnen, str. 320, Berlin 1924.

Znaleziona tą drogą postać południka składa się z części zakrzywionej  $AB$  o największej krzywiznie w  $C$ . Ta krzywizna zmniejsza się aż do zera, które osiąga w  $B$ , po czym od  $B$  zaczyna się prosta  $BD$  stanowiąca promień dna przyciskanego do podstawy ciężarem słupa cieczy o wysokości  $h_0 + h_1$ . Każdemu stosunkowi  $h_0/h_1$

<sup>1)</sup> Ob. W. Flügge, Statik u. Dynamik der Schalen, Berlin 1934, str. 35.



odpowiada inna postać powłoki o stałych napięciach błonowych. Gdy więc z jakiegokolwiek powodu nadwyżka ciśnienia  $h_0$  w punkcie szczytowym ulegnie zmianie, to powłoka nie czyni już zadość warunkowi stałych napięć błonowych i zmieni swoją postać. Przy zwiększeniu  $h_0$  podniesie się zmniejszając podstawę, a przy zmniejszeniu spłaszczy się, przy czym obok napięć błonowych pojawiają się i momenty zginające, jeżeli powłoka nie jest zupełnie wiotka.



Rys. 121.

Nawiązując do uwag w § 202 wykażemy tutaj na prostym przykładzie, że w miejscu nieciągłości krzywizny musi stan napięcia odbiegać od wyznaczonego z teorii błonowej.

Niechaj południk powłoki obrotowej (rys. 121) składa się np. z łuków kołowych o promieniach różnych  $\varrho_1'$ ,  $\varrho_1''$  i wspólnej stycznej w miejscach złączenia  $A$ . Promień krzywizny  $\varrho_1$  jest oczywiście wspólny dla obu części powłoki I i II. Przyjawszy nadto, że powłoka zamknięta jest obciążona tylko stałym ciśnieniem wewnętrznym  $p$ , napiszemy stosownie do jednego z równań równowagi (202.3) w miejscu  $A$ :

dla części I

$$\frac{\sigma_1'}{\varrho_1} + \frac{\sigma_2}{\varrho_2} = p,$$

zaś dla części II

$$\frac{\sigma_1''}{\varrho_1} + \frac{\sigma_2}{\varrho_2} = p,$$

gdyż naprężenia południkowe  $\sigma_2$  muszą być po obu stronach równe, a tylko naprężenia równoleżnikowe  $\sigma_1'$  i  $\sigma_1''$  różne. Z odjęcia tych równań wynika

$$\frac{\sigma_1' - \sigma_1''}{\varrho_1} = \sigma_2 \left( \frac{1}{\varrho_2'} - \frac{1}{\varrho_2''} \right).$$

Obliczonej różnicy naprężeń obwodowych  $\Delta\sigma_1 \equiv \sigma_1' - \sigma_1''$  odpowiada różnica wydłużeń właściwych

$$\Delta\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_1' - \varepsilon_1'' = \frac{\Delta\sigma_1}{E'}.$$

Przy założeniu, że  $\varrho_2' > \varrho_2''$  otrzymujemy  $\varepsilon_1' > \varepsilon_1''$ , a zatem promień równoleżnika  $r$  przyrasta po lewej stronie  $A$  o  $\varepsilon_1'r$ , po prawej zaś o  $\varepsilon_1''r$ . Gdyby takie odkształcenie zaczęło to punkty  $A$  części I przemieścić się w kierunku normalnej na zewnątrz o  $(\varepsilon_1' - \varepsilon_1'') \sin \alpha$  względem punktów  $A$  części II. (Tutaj oznacza  $\alpha$  kąt normalnej w  $A$  z osią powłoki  $Z$ ). Pomieważ to jest niemożliwe bez rozdarcia powłoki wzdłuż równoleżnika  $A$ , przeto muszą istnieć napęcia *niebłonowe*, które temu zapobiegają. Nie trudno dostrzec, że będą to przede wszystkim *momenty*  $m_1$  zwiększające krzywiznę w części I, a zmniejszające ją w części II (lub odwrotnie gdyby było  $\varrho_2' < \varrho_2''$ ). Prócz tego wystąpią miejscowe *zmiany naprężeń błonowych obwodowych*, a więc przyrost  $\sigma_1''$  i ubytek  $\sigma_1'$ . Wreszcie pojawiają się napęcia *poprzeczne* określone naprężeniami stycznymi  $\tau$  uwidocznionymi na rysunku 122.



Rys. 122.

**§ 205. Napęcia błonowe przy obciążeniu niesymetrycznym.** Ograniczając obciążenie ogólne do przypadku przyjętego przez H. Reissner'a (Księga ku czci Müllera-Breslau, Lipsk 1912) i zastosowanego po tym przez innych autorów, a także w cennej monografii W. Flügge'go<sup>1)</sup>, napiszemy dla składowych sił zewnętrznych obranych w § 202 wyrażenia

$$(205.1) \quad T_1 = X_m \sin m\varphi, \quad T_2 = Y_m \cos m\varphi, \quad N = Z_m \cos m\varphi,$$

gdzie  $X_m$ ,  $Y_m$ ,  $Z_m$  są dowolnymi na razie funkcjami samego  $\alpha$ . Równaniom różniczkowym (202.1 i 2) można wtedy uczynić zadość kładąc podobnie

$$n_2 = N_{2m} \cos m\varphi; \quad n_1 = N_{1m} \cos m\varphi; \quad t_{12} = T_m \sin m\varphi,$$

gdzie  $N_{1m}$ ,  $N_{2m}$ ,  $T_m$  są nieznanymi funkcjami samego  $\alpha$ . Podstawiając te wyrażenia w równania równowagi i po wykonaniu róż-

<sup>1)</sup> Ob. odsyłacz w § 204.

niczkowań uprościwszy równania przez wspólny czynnik  $\cos m\varphi$ , wzgl.  $\sin m\varphi$ , otrzymujemy równania następujące:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \alpha}(rN_{2m}) + mT_m \varrho_2 - N_{1m} \varrho_2 \cos \alpha + Y_m r \varrho_2 &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha}(rT_m) - mN_{1m} \varrho_2 + T_m \varrho_2 \cos \alpha + X_m r \varrho_2 &= 0 \\ \frac{N_{1m}}{\varrho_1} + \frac{N_{2m}}{\varrho_2} + Z_m &= 0.\end{aligned}$$

Przy pomocy równania ostatniego wyrugujemy z pierwszych dwu równań  $N_{1m}$ , znajdując w końcu układ dwu równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego dla niewiadomych  $N_{2m}$  i  $T_m$ :

$$(205.2) \quad \begin{cases} \frac{dN_{2m}}{d\alpha} + \left(\frac{1}{r} \frac{ar}{d\alpha} + \cotg \alpha\right) N_{2m} + m \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \frac{T_m}{\sin \alpha} = -\varrho_2 Z_m \cotg \alpha - \varrho_2 Y_m \\ \frac{dT_m}{d\alpha} + \left(\frac{1}{r} \frac{ar}{d\alpha} + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cotg \alpha\right) T_m + m \frac{N_{2m}}{\sin \alpha} = -m \varrho_2 \frac{Z_m}{\sin \alpha} - \varrho_2 X_m. \end{cases}$$

Rozwiązanie tego układu równań różniczkowych upraszcza się znakomicie w przypadku (A) powłoki kulistej i (B) stożkowej.

A. Dla kuli o promieniu  $a$  jest  $\varrho_1 = \varrho_2 = a$ ,  $\frac{1}{r} \frac{ar}{d\alpha} = \cotg \alpha$ , a zatem równania (205.2) przyjmą postać:

$$(205.3) \quad \begin{cases} \frac{dN_{2m}}{d\alpha} + 2 \cotg \alpha \cdot N_{2m} + \frac{m}{\sin \alpha} T_m = -a(Y_m + Z_m \cotg \alpha) \\ \frac{dT_m}{d\alpha} + 2 \cotg \alpha \cdot T_m + \frac{m}{\sin \alpha} N_{2m} = -a\left(X_m + \frac{m}{\sin \alpha} Z_m\right). \end{cases}$$

Wprowadziwszy nowe zmienne

$$U_1 = N_{2m} + T_m; \quad U_2 = N_{2m} - T_m,$$

otrzymamy po dodaniu i odjęciu równań (205.3) następujące dwa równania różniczkowe niejednorodne o współczynnikach zmiennych:

$$(205.4) \quad \begin{cases} \frac{dU_1}{d\alpha} + \left(2 \cotg \alpha + \frac{m}{\sin \alpha}\right) U_1 = -a\left(X_m + Y_m + \frac{m + \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_m\right) \\ \frac{dU_2}{d\alpha} + \left(2 \cotg \alpha - \frac{m}{\sin \alpha}\right) U_2 = a\left(X_m - Y_m + \frac{m - \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_m\right). \end{cases}$$

Obadwa równania są typu wspólnego:

$$\frac{dU_\mu}{d\alpha} + p_\mu(\alpha) U_\mu + q_\mu(\alpha) = 0,$$

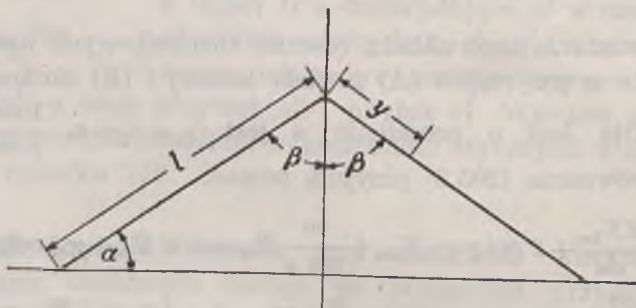
którego całką ogólną jest

$$(205.5) \quad U_\mu = \left[ C_\mu - \int q_\mu e^{\int p_\mu da} \cdot da \right] e^{-\int p_\mu da}.$$

Podstawivszy odpowiednie wyrażenia z rów. (205.4) i wykonawszy potrzebne całkowania dojdziemy po prostych przekształceniach do następujących wyrażen dla  $U_1$  i  $U_2$ :

$$(205.6) \quad \begin{cases} U_1 = \frac{\cotg \frac{m\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha} \left[ C_1 - a \int \left( X_m + Y_m + \frac{m + \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_m \right) \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \frac{m\alpha}{2} da \right] \\ U_2 = \frac{\operatorname{tg} \frac{m\alpha}{2}}{\sin^2 \alpha} \left[ C_2 - a \int \left( -X_m + Y_m - \frac{m - \cos \alpha}{\sin \alpha} Z_m \right) \sin^2 \alpha \cotg \frac{m\alpha}{2} da \right]. \end{cases}$$

Te równania zużytkowano do obliczenia naprężeń w kopułach kulistych obciążonych naporem wiatru. Odnośne wywody szczegółowe znajdzie czytelnik w wymienionej już książce Flügge'go.



Rys. 123.

B. Gdy powłoka tworzy *stożek* obrotowy o kącie wierzchołkowym  $2\beta$  (rys. 123), to  $\varrho_2 = \infty$ ,  $\alpha = \pi/2 - \beta = \text{stała}$ , a więc nie nadaje się jako współrzędna. Zastąpiwszy ją odległością  $y$  od wierzchołka stożka mamy  $\varrho_2 da = dy$  jako element łuku południka. Różniczkowanie względem  $\alpha$  w równaniach (205.2) zastąpimy różniczkowaniem względem  $y$  według schematu

$$\frac{d}{da} = \varrho_2 \frac{d}{dy},$$

pisząc równania (205.2) w postaci

$$(205.7) \quad \begin{cases} \varrho_2 \frac{dN_{2m}}{dy} + \left( \frac{\varrho_2}{r} \frac{dr}{dy} + \cotg \alpha \right) N_{2m} + m \cdot \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cdot \frac{T_m}{\sin \alpha} = -\varrho_2 Z_m \cotg \alpha - \varrho_2 Y_m \\ \varrho_2 \frac{dT_m}{ay} + \left( \frac{\varrho_2}{r} \frac{dr}{dy} + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \cotg \alpha \right) T_m + m \cdot \frac{N_{2m}}{\sin \alpha} = -m \varrho_2 \frac{Z_m}{\sin \alpha} - \varrho_2 X_m \end{cases}$$

Po podzieleniu przez  $\varrho_2$ , zastąpieniu  $a$  przez  $\pi/2 - \beta$ , przejściu do granicy  $\varrho_2 \rightarrow \infty$ , oraz podstawieniu

$$r = y \sin \beta, \quad \frac{dr}{dy} = \sin \beta, \quad \varrho_1 = y \operatorname{tg} \beta,$$

otrzymujemy równania różniczkowe powłoki stożkowej:

$$(205.8 \text{ i } 9) \quad \begin{cases} \frac{dN_{2m}}{dy} + \frac{N_{2m}}{y} + \frac{m T_m}{y \sin \beta} + Z \operatorname{tg} \beta + Y_m = 0 \\ \frac{dT_m}{dy} + \frac{2T_m}{y} + \frac{m Z_m}{\cos \beta} + X_m = 0. \end{cases}$$

Trzecie równanie równowagi przyjmuje postać:

$$(205.10) \quad N_{1m} = -y Z_m \operatorname{tg} \beta$$

i wyznacza bezpośrednio napięcie obwodowe  $N_{1m}$ . Ta niezależność napięcia obwodowego od innych napięć zachodzi u wszystkich powłok z tworzącymi prostoliniowymi.

Całką równania różniczkowego (205.9) jest stosownie do wzoru ogólnego (205.5)

$$T_m = - \left[ \int \left\{ \left( \frac{m}{\cos \beta} Z_m + X_m \right) e^{\int \frac{2dy}{y}} \right\} dy + C_1 \right] e^{-\int \frac{2dy}{y}},$$

a więc

$$(205.11) \quad T_m = - \frac{1}{y^2} \left[ \int \left( \frac{m}{\cos \beta} Z_m + X_m \right) y^2 dy + C_1 \right].$$

Po wstawieniu tego rozwiązania w (205.8) znajdujemy w ten sam sposób:

$$(205.12) \quad N_{2m} = - \frac{1}{y} \left[ \int \left( \frac{m}{\sin \beta} T_m + y Y_m + y Z_m \operatorname{tg} \beta \right) dy + C_2 \right].$$

Nie mogąc tutaj zatrzymywać się na interesujących przykładach szczegółowych odsyłamy czytelników do piśmiennictwa powyżej podanego.

**§ 206. Odształcenia powłok obrotowych.** Do opisanja odształceń posłużymy się przemieszczeniami punktów powierzchni środkowej powłoki. Przemieszczenie dowolnego punktu określimy składowymi:

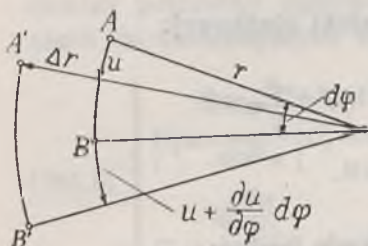
$u$  w kierunku elementu  $ds_1$  równoleżnika,

$v$  „ „ „ „  $ds_2$  południka,

$w$  „ „ „ normalnej  $n$  zwróconej na zewnątrz.

Obliczmy teraz zmiany długości boków  $ds_1$  i  $ds_2$  elementu powłoki uzależnione od tych przemieszczeń (rys. 124a). Bok  $ds_1$  zmienia się najpierw na skutek różnicy przemieszczeń punktu początkowego i końcowego określonej przez

$$AB = ds_1 = r d\varphi$$



$$\Delta r = v \cos \alpha + w \sin \alpha$$

Rys. 124 a.

$\frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi$  w zależności od  $\varphi$ . Jego zmienioną długością jest więc

$$ds_1 + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Ale  $ds_1$  zmienia się nadto z powodu zmiany długości promienia  $r$  wywołanej przemieszczeniami  $v$  i  $w$ . Długość ta z  $r$  staje się równą  $r + v \cos \alpha + w \sin \alpha$ . Razem przeto zamienia się długość  $ds_1$  na

$$\left( ds_1 + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi \right) \left( 1 + \frac{v}{r} \cos \alpha + \frac{w}{r} \sin \alpha \right).$$

Odjęwszy od tego długość pierwotną  $ds_1$ , podzieliwszy przez  $ds_1$  i odrzuciwszy wyrazy małe rzędu wyższego, otrzymamy wyrażenie dla wydłużenia równoleżnikowego (obwodowego):

$$(206.1) \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \cos \alpha + w \sin \alpha \right).$$

Bok  $ds_2$  zamienia się na  $ds_2 + \frac{\partial v}{\partial \alpha} d\alpha$  (rys. 124b) z powodu samego przemieszczenia składowego  $v$ . Składowa  $u$  nie wywołuje zmiany; natomiast składowa  $w$  zmieniająca promień krzywizny  $\varrho_2$  na  $\varrho_2 + w$  wydłuża  $ds_2$  w stosunku  $(\varrho_2 + w) : \varrho_2 = 1 + w/\varrho_2$ . A zatem wydłużenie względne w kierunku południka przedstawi wzór

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{ds_2} \left[ \left( ds_2 + \frac{\partial v}{\partial \alpha} d\alpha \right) \left( 1 + \frac{w}{\varrho_2} \right) - ds_2 \right],$$

co po skreśleniu małych rzędu wyższego daje

$$(206.2) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\varrho_2} \left( \frac{\partial v}{\partial \alpha} + w \right).$$

Ażeby teraz obliczyć zmianę kąta prostego w elemencie  $ds_1 \cdot ds_2$  powłoki wywołaną przemieszczeniami jego wierzchołków, zauważymy najpierw, że składowa  $w$  nie może wpłynąć na tę zmianę. Obliczmy więc zmianę wywołaną przez  $u$  i  $v$  uzmysłowioną na rys. 125, z którego widać, że kąt odkształcenia postaciowego ele-

mentu jest sumą kątów  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$ . Kąt  $\gamma_1$  określa ze ścisłością małych rzędu pierwszego, jak można odczytać z rysunku, wzór:

$$\gamma_1 = \frac{\frac{\partial v}{\partial \varphi} d\varphi}{r d\varphi + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi},$$

czyli  $\gamma_1 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}$ . W celu obliczenia  $\gamma_2$  poprowadźmy południk  $A'F$ , który na boku  $CD$  odcina  $CF = u \frac{r+dr}{r}$ , gdzie  $r+dr$  jest promieniem równoleżnika  $CD$ . Tutaj jest

$$dr = ds_2 \cos \alpha = \varrho_2 da \cdot \cos \alpha.$$

Odjąwszy  $CF$  od przemieszczenia  $u + \frac{\partial u}{\partial \alpha} da$  otrzymujemy długość, która podzielona przez  $\varrho_2 da + \frac{\partial v}{\partial \alpha} da$  przedstawia  $\gamma_2$ . A zatem

$$\gamma_2 = \frac{u + \frac{\partial u}{\partial \alpha} da - u \left(1 + \frac{dr}{r}\right)}{\varrho_2 da + \frac{\partial v}{\partial \alpha} da},$$

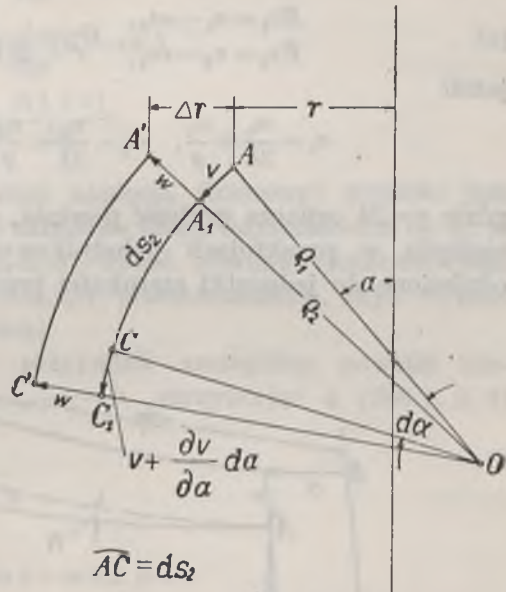
a stąd po wstawieniu powyższej wartości  $dr$ , rozwinięciu i zatrzymaniu małych rzędu pierwszego:

$$\gamma_2 = \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{u}{r} \cos \alpha,$$

oraz

$$(206.3) \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{u}{r} \cos \alpha + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Biorąc ściśle należałoby jeszcze znaleźć wyrażenie dla  $\varepsilon_3$ , tj. wydłużenia jednostkowego w kierunku normalnej, które jednakże nie da się wyrazić przez przemieszczenia punktów powierzchni środkowej tak, jak  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $\gamma$ , albowiem jest zależne od trzeciej współrzędnej nie występującej wcale we wzorach poprzednich. Atoli założenie *cienkości* powłoki pozwala tak samo jak w teorii płyt



$\widehat{AC} = ds_2$   
 $\widehat{A_1C_1} = ds_2 + \frac{\partial v}{\partial \alpha} da$   
 Rys. 124 b.

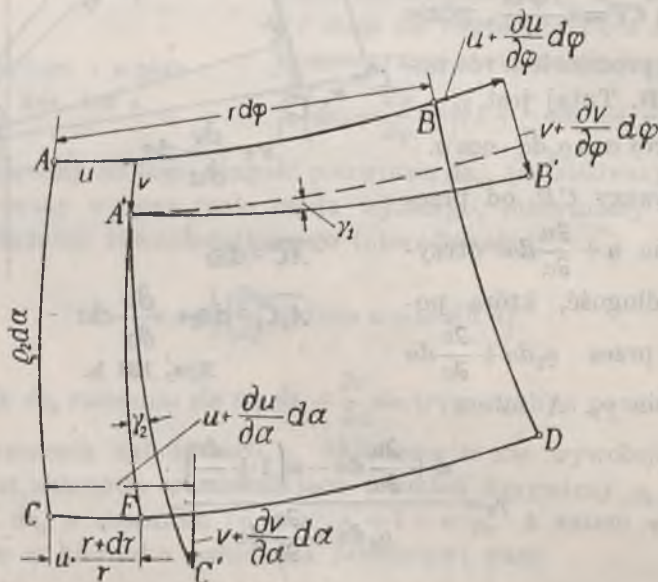
cienkich pominąć  $\varepsilon_3$  zupełnie i traktować elementy powłoki jako będące w dwuwymiarowym stanie napięcia. Wtedy

$$(a) \quad \begin{aligned} E\varepsilon_1 &= \sigma_1 - \nu\sigma_2, & G\gamma &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma = \tau_{12}, \\ E\varepsilon_2 &= \sigma_2 - \nu\sigma_1, \end{aligned}$$

jeżeli

$$\sigma_1 = \frac{n_1}{2h} = \frac{n_1}{g}, \quad \sigma_2 = \frac{n_2}{2h} = \frac{n_2}{g}, \quad \tau_{12} = \frac{t_{12}}{2h} = \frac{t}{g},$$

gdzie  $g=2h$  oznacza grubość powłoki, a  $n_1$ ,  $n_2$  i  $t=t_{12}$ , jak powyżej, napięcia w przekrojach południkowych i do nich prostopadłych odniesione do jednostki szerokości przekroju.



Rys. 125.

Rozwiązawszy równania (a) względem naprężeń i oznaczywszy powłokową sztywność rozciągania

$$\bar{A} = \frac{Eg \cdot 1}{1 - \nu^2},$$

otrzymamy

$$(206.4) \quad \begin{cases} \sigma_1 g = n_1 = \bar{A}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) \\ \sigma_2 g = n_2 = \bar{A}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) \\ \tau g = t = \bar{A} \frac{1-\nu}{2} \gamma \end{cases}$$



i nawzajem

$$(206.5) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{Eg} (n_1 - \nu n_2) \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{Eg} (n_2 - \nu n_1) \\ \gamma = \frac{2(1 + \nu)}{Eg} t. \end{cases}$$

Przyjawszy teraz, że stan napięcia (błonowy) powłoki jest znany, że więc znane są także składowe stanu odkształcenia  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\gamma$ , mamy w równaniach (206.1, 2, 3) układ równań różniczkowych, których całkowanie pozwoli obliczyć przemieszczenia, czyli wyznaczyć odkształcenia całej powłoki.

Najpierw rozpatrzmy przypadek szczególny powłoki nieobciążonej, położymy  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \gamma = 0$ , otrzymując z (206.1, 2, 3) układ równań jednorodnych

$$(206.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + w = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \cos \alpha + w \sin \alpha = 0 \\ \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sin \alpha - u \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0. \end{cases}$$

Równania te określają odkształcenie powłoki możliwe bez napięć wewnętrznych. Ich rozwiązania wskażą na warunki ich istnienia oraz na sposób ustalenia brzegów wyłączający takie odkształcenie. Ponieważ współczynniki równań zależą tylko od  $\alpha$ , przeto spróbujemy rozwiązania przez funkcje o postaci

$$(206.7) \quad u = u_n(\alpha) \sin n\varphi; \quad v = v_n(\alpha) \cos n\varphi; \quad w = w_n(\alpha) \cos n\varphi.$$

W ten sposób przekształcimy równania cząstkowe na zwyczajne:

$$(206.8) \quad \begin{cases} \frac{dv_n}{d\alpha} + w_n = 0 \\ nu_n + v_n \cos \alpha + w_n \sin \alpha = 0 \\ \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{du_n}{d\alpha} \sin \alpha - u_n \cos \alpha - nv_n = 0. \end{cases}$$

Rugując z dwu pierwszych równań  $w_n$  znajdujemy

$$(206.9) \quad nu_n = \frac{dv_n}{d\alpha} \sin \alpha - v_n \cos \alpha,$$

a po zróżniczkowaniu

$$n \frac{dv_n}{d\alpha} = \frac{d^2 v_n}{d\alpha^2} \sin \alpha + v_n \sin \alpha.$$

Wstawiając te wartości w trzecie z równ. (206.8) otrzymamy równanie

$$\frac{d^2 v_n}{d\alpha^2} \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \sin^2 \alpha - \frac{dv_n}{d\alpha} \cos \alpha \sin \alpha + v_n \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - n^2 \right) = 0,$$

które zawiera już tylko  $v_n$ .

Interpretację tego równania różniczkowego przedstawimy tylko na prostym przypadku powłoki kulistej. Wtedy jest  $\varrho_1 = \varrho_2 = \alpha$ , a równanie przyjmie postać

$$(206.10) \quad \frac{d^2 v_n}{d\alpha^2} \sin^2 \alpha - \frac{dv_n}{d\alpha} \cos \alpha \sin \alpha + v_n(1 - n^2) = 0.$$

Funkcja  $v_n$  określona tym równaniem ma w punktach  $\alpha = 0$  i  $\alpha = \pi$  miejsca osobliwe. Wprowadzając nową zmienną  $x$  przez podstawienie  $x = 1 - \cos \alpha$ , znajdujemy łatwo

$$(206.11) \quad x^2(x-2)^2 \frac{d^2 v_n}{dx^2} + (1-n^2)v_n = 0,$$

jako nową postać naszego równania, która się przedstawia jako równanie różniczkowe należące do „klasy Fuchs'a”. Jego rozwiązanie w okolicy punktu osobliwego  $\alpha = 0$ , a więc  $x = 0$  da się przedstawić w postaci

$$(206.12) \quad v_n = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k,$$

gdzie  $k$  jest liczbą naturalną, a  $\lambda$  wykładnikiem cechującym rodzaj osobliwości, którego wartość należy wyznaczyć.

Po wstawieniu tego wyrażenia w równanie różniczkowe (206.11) otrzymujemy

$$x^2(x-2)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k)(\lambda+k-1)b_k x^{k-2} + (1-n^2) \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = 0.$$

Wykonawszy mnożenie pierwszej sumy przez  $x^2(x-2)^2 = x^4 - 4x^3 + 4x^2$  i uporządkowawszy całą stronę lewą podług potęg  $x^k$ , napiszemy

$$(206.13) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=2}^{\infty} (\lambda+k-2)(\lambda+k-3)b_{k-2}x^k - \sum_{k=1}^{\infty} 4(\lambda+k-1)(\lambda+k-2)b_{k-1}x^k + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} 4(\lambda+k)(\lambda+k-1)b_k x^k + (1-n^2) \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = 0. \end{aligned} \right.$$

Z tego wynikają równania dla każdej z wartości  $k=0,1,2,\dots$ . Równanie dla  $k \geq 2$  zawiera trzy współczynniki  $b_{k-2}$ ,  $b_{k-1}$ ,  $b_k$  związane we wzór rekurencyjny

$$b_k = \frac{\lambda + k - 2}{4(\lambda + k)(\lambda + k - 1) + 1 - n^2} [4(\lambda + k - 1)b_{k-1} - (\lambda + k - 3)b_{k-2}].$$

Dla  $k=1$  otrzymujemy

$$b_1 = \frac{4\lambda(\lambda - 1)}{4\lambda(\lambda + 1) + 1 - n^2} b_0.$$

Wobec tego dają się wszystkie współczynniki wyrazić przez  $b_0$ , które pozostaje nieoznaczone, ponieważ równanie różniczkowe jest liniowe. Dla  $k=0$  jest według (206.13) po skreśleniu pierwszych dwu sum:

$$4\lambda(\lambda - 1)b_0 + (1 - n^2)b_0 = b_0[4\lambda(\lambda - 1) + 1 - n^2] = 0.$$

Stąd przy  $b_0 \neq 0$  wynika, że

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(1 \pm n).$$

Temu odpowiadają dwa liniowe niezależne rozwiązania  $v_{n1}$  i  $v_{n2}$ , a z nich składamy rozwiązanie ogólne z dwiema stałymi całkowania  $b_{01}$  i  $b_{02}$  w postaci

$$(206.14) \quad v_n = b_{01}v_{n1} + b_{02}v_{n2}.$$

Z pierwszego z równań (206.8) znajdujemy teraz

$$(206.15) \quad w_n = -\frac{dv_n}{d\alpha} = -\sin \alpha \frac{dv_n}{dx} = -\sin \alpha \cdot x^{2-1} \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda + k)b_k x^k.$$

Wreszcie z drugiego z rów. (206.8) otrzymamy

$$(206.16) \quad u_n = -\frac{1}{n}(v_n \cos \alpha + w_n \sin \alpha).$$

Wzory (206.14 do 16) określają przemieszczenia beznapięciowe powłoki kulistej. Szukając teraz znaczenia mechanicznego wyników powyższych przyjmiemy najpierw  $n=0$ . Wtedy oba rozwiązania sprowadzają się do jednego (gdyż  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ) i są regularne. Obliczenie współczynników  $b_k$  i porównanie z rozwinięciem  $\sin \alpha = \sqrt{1 - (1-x)^2}$  według potęg  $x$  pozwala stwierdzić, że

$$v_0 = c \sin \alpha, \quad w_0 = -c \cos \alpha,$$

gdzie  $c$  jest stałą. To dowodzi, że rozwiązanie określa przesunięcie powłoki w kierunku osi (pionowej) jako ciała sztywnego. Gdyby w równaniach założeniowych (206.7) przemienić  $\sin n\varphi$  i  $\cos n\varphi$ , a po tym powtórzyć rachunek powyższy, to otrzymalibyśmy  $v_0$  i  $w_0$  odpowiadające obrotowi powłoki około tejże osi.

Przyjawszy następnie  $n=1$  mamy  $\lambda_1=1$ ,  $\lambda_2=0$ . Oba rozwiązania okazują się i teraz regularne i wyznaczają, jak można się przekonać, obrót około stycznej w wierzchołku ( $\lambda_1$ ) i przesunięcie poziome ( $\lambda_2$ ). Począwszy od  $n=2$  jest  $\lambda_2 < 0$  prowadząc do rozwiązania które w punkcie szczytowym staje się nieskończonością. To rozwiązanie odpada zatem dla wszelkich powłok kulistych zamkniętych, a dla każdego  $n$  rozporządzamy już tylko jedną stałą całkowania. Odształcenie beznapięciowe czaszy kulistej jest przeto jednoznacznie określone danym na brzegu rozmieszczeniem jednego z przemieszczeń składowych. W przypadku powłoki o postaci pasa kulistego można albo obrać wartości dwu z przemieszczeń składowych  $u$ ,  $v$ ,  $w$  na jednym z brzegów, albo też przyjąć po jednej dla każdego z brzegów. Wyznaczenie przemieszczeń odpowiadających danemu stanowi napięcia i odształcenia określonego przez  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  i  $\gamma$  wymaga jeszcze rozwiązania szczególnego równań niejednorodnych

$$(206.17) \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + w = \varrho_2 \varepsilon_2 \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \cos \alpha + w \sin \alpha = \varrho_1 \varepsilon_1 \sin \alpha \\ \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \alpha} \sin \alpha - u \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \varrho_1 \gamma \sin \alpha. \end{cases}$$

Składając to rozwiązanie z rozwiązaniem powyższym dla powłoki nieobciążonej otrzymamy odształcenie najogólniejsze powłoki kulistej pod obciążeniem danym.

Do rozwiązania szczególnego układu równań (206.17) dojdziemy drogą tą samą co poprzednio. Przede wszystkim rozwinie my wszystkie znajdujące się po stronie prawej funkcje kąta  $\varphi$  na szeregi trygonometryczne, zatrzymując na razie tylko wyraz  $n$ -ty, a więc obok równań (206.7) napiszemy

$$(206.18) \quad \begin{cases} \varepsilon_2 = \varepsilon_{2n}(a) \cos n\varphi \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_{1n}(a) \cos n\varphi \\ \gamma = \gamma_n(a) \sin n\varphi. \end{cases}$$

Równania (206.17) dają więc układ równań zwyczajnych

$$\begin{aligned} \frac{dv_n}{d\alpha} + w_n &= \varrho_2 \varepsilon_{2n} \\ n u_n + v_n \cos \alpha + w_n \sin \alpha &= \varrho_1 \varepsilon_{1n} \sin \alpha \\ \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{du_n}{d\alpha} \sin \alpha - u_n \cos \alpha - n v_n &= \varrho_1 \gamma_n \sin \alpha. \end{aligned}$$

Stąd po wyrugowaniu  $u_n$  i  $w_n$  dochodzimy do równania rzędu drugiego dla  $v_n(\alpha)$ :

$$(206.19) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 v_n}{d\alpha^2} \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \sin^2 \alpha - \frac{dv_n}{d\alpha} \cos \alpha \sin \alpha + v_n \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - n^2 \right) &= \\ = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_2} (\varrho_2 \varepsilon_{2n} - \varrho_1 \varepsilon_{1n}) \cos \alpha \sin \alpha + n \varrho_1 \gamma_n \sin \alpha + \\ + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \sin^2 \alpha \frac{d}{d\alpha} (\varrho_2 \varepsilon_{2n} - \varrho_1 \varepsilon_{1n}). \end{aligned} \right.$$

To równanie przyjmuje dla powłoki kulistej postać

$$(206.20) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 v_n}{d\alpha^2} \sin^2 \alpha - \frac{dv_n}{d\alpha} \cos \alpha \sin \alpha + v_n (1 - n^2) &= \\ = n a \gamma_n \sin \alpha + a \left( \frac{d\varepsilon_{2n}}{d\alpha} - \frac{d\varepsilon_{1n}}{d\alpha} \right) \sin^2 \alpha &\equiv f(\alpha), \end{aligned}$$

która przez podstawienie jak poprzednio

$$x = 1 - \cos \alpha$$

zamieni się na równanie

$$(206.21) \quad x^2(x-2)^2 \frac{d^2 v_n}{dx^2} + (1-n^2)v_n = F(x).$$

Aby je scałkować rozwijamy prawą stronę na szereg o postaci:

$$(206.22) \quad F(x) = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k.$$

Wykładnik  $\lambda$  nie jest w ogóle identyczny z  $\lambda_1$  lub  $\lambda_2$  równania jednorodnego, ale z powodu symetrii musi być tak samo jak  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  wielokrotnością  $\frac{1}{2}$  przy  $n$  parzystym, a liczbą całkowitą przy  $n$  nieparzystym. Po wstawieniu tego wyrażenia dla  $F(x)$  wraz z wyrażeniem (206.12) dla  $v_n$ , w którym jednakże trzeba  $\lambda$  uzgodnić z wartością wynikającą z rozwinięcia  $F(x)$ , znajdziemy w ten sam sposób co poprzednio wartości współczynników. Dodawszy do tego rozwiązanie poprzednie, z którym razem uczynimy zadość warunkom brzegowym, otrzymamy szukane rozwiązanie dla powłoki kulistej.

Zastosowana tutaj metoda ogólna całkowania równań różniczkowych liniowych klasy Fuchsa nadaje się także do innych powłok obrotowych. W przypadku kuli można jednakże, jak wykazał Lord Rayleigh<sup>1)</sup> znaleźć rozwiązanie w postaci zwartej. Dojdziemy doń pisząc równania (206.9) i trzecie z rów. (206.8) w postaci

$$(206.23) \quad \begin{cases} n \frac{u_n}{\sin \alpha} - \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{v_n}{\sin \alpha} \right) \sin \alpha = 0 \\ n \frac{v_n}{\sin \alpha} - \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{u_n}{\sin \alpha} \right) \sin \alpha = 0. \end{cases}$$

Przez rugowanie otrzymujemy dla każdej z niewiadomych  $u_n$  i  $v_n$  równanie różniczkowe rzędu drugiego o tej samej postaci:

$$\sin \alpha \frac{d}{d\alpha} \left[ \sin \alpha \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{v_n}{\sin \alpha} \right) \right] - n^2 v_n = 0.$$

Jego całką ogólną jest

$$\frac{v_n(\alpha)}{\sin \alpha} = A \operatorname{tg} \frac{n\alpha}{2} + B \operatorname{cotg} \frac{n\alpha}{2},$$

co łatwo sprawdzić przez podstawienie w równanie różniczkowe. Pierwsze z rów. (206.23) daje

$$\frac{u_n(\alpha)}{\sin \alpha} = A \operatorname{tg} \frac{n\alpha}{2} - B \operatorname{cotg} \frac{n\alpha}{2},$$

a z pierwszego z rów. (206.8) otrzymamy

$$v_n = -\frac{dv_n}{d\alpha} = -A \operatorname{tg} \frac{n\alpha}{2} (n + \cos \alpha) + B \operatorname{cotg} \frac{n\alpha}{2} (n - \cos \alpha).$$

Obadwa rozwiązania odpowiadają rozwinięciom szeregowym poprzednim z wartościami  $\lambda = \lambda_1$  i  $\lambda = \lambda_2$ .

**§ 207. Odkształcenia powłoki obrotowej przy stanie napięcia błonowym i obrotowo-symetrycznym.** Takie odkształcenia nie muszą być obrotowo symetryczne, jednakże można je rozłożyć na składową niesymetryczną i symetryczną. Ta ostatnia, której równanie różniczkowe jest niezależne od  $\varphi$ , da się stosunkowo łatwo wyrazić wzorami zwartymi. Istotnie równania różniczkowe (206.1 i 2) upraszczają się w tym przypadku do postaci

$$(207.1) \quad \varepsilon_1 = \frac{v}{r_1} \operatorname{cotg} \alpha + \frac{w}{r_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\rho_2} \frac{dv}{d\alpha} + \frac{w}{\rho_2}.$$

<sup>1)</sup> Theory of Sound, rozdz. X A.

Wyrugowawszy z tych równań *w* otrzymujemy dla *v* równanie różniczkowe

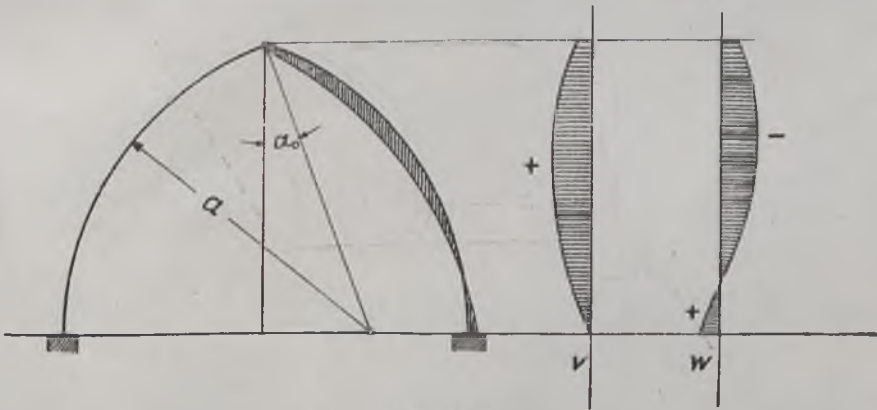
$$\frac{dv}{da} - v \cotg \alpha = \varrho_2 \varepsilon_2 - \varrho_1 \varepsilon_1 \equiv q(\alpha),$$

które ma podane już powyżej rozwiązanie

$$v = e^{\int \cotg \alpha d\alpha} \left[ \int \{q(\alpha) e^{-\int \cotg \alpha d\alpha}\} d\alpha + C \right] = \left[ \int \frac{q(\alpha)}{\sin \alpha} d\alpha + C \right] \sin \alpha.$$

Gdy funkcję *q*( $\alpha$ ) wyrazimy przy pomocy wzorów (206.5) przez napięcia, to otrzymamy

$$(207.2) \quad v = \left[ \int \frac{1}{Eg} \{n_2(\varrho_2 + v\varrho_1) - n_1(\varrho_1 + v\varrho_2)\} \frac{d\alpha}{\sin \alpha} + C \right] \sin \alpha.$$



Rys. 126.

Stałą *C* wyznaczmy z warunku podporowego wyłączającego przemieszczenie całej powłoki w kierunku jej osi.

Znając *v* wyrazimy przez nie *w* przy pomocy rów. (207.1) otrzymując

$$(207.3) \quad w = r_1 \varepsilon_1 - v \cotg \alpha.$$

Stosując te wyniki do przykładu kopuły z § 203, znajdujemy

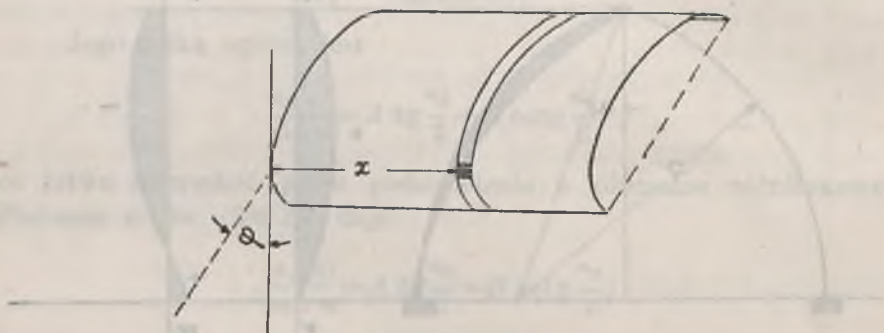
$$v = \frac{a \sin \alpha}{Eg} \int_{\alpha_0}^{\alpha} n_2 \left( 1 + v \frac{\sin \alpha - \sin \alpha_0}{\sin \alpha} \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} - \frac{a \sin \alpha}{Eg} \int_{\alpha_0}^{\alpha} n_1 \left( \frac{\sin \alpha - \sin \alpha_0}{\sin \alpha} + v \right) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} + C \sin \alpha.$$

Przy oparciu brzegu dolnego na płaszczyźnie uważanej za sztywną musi być  $v=0$  dla  $\alpha=\pi/2$ , z czego obliczymy stałą  $C$ . Po podstawieniu tej wartości i uporządkowaniu otrzymamy

$$v = \frac{a(1+\nu)}{Eg} \sin \alpha \int_{\alpha}^{\pi/2} (n_1 - n_2) \frac{d\alpha}{\sin \alpha} - \frac{a \sin \alpha_0}{Eg} \sin \alpha \int_{\alpha}^{\pi/2} (n_1 - \nu n_2) \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Rozmieszczenie  $v$  i  $w$  w przypadku obciążenia powłoki tylko ciężarem własnym podaje rys. 126. zacierpnięty z książki Flügge'go.

**§ 208. Teoria błonowa powłok walcowych.** Ustawimy poziomo oś  $X$  równoległą do tworzących walca obierzmy pewien przekrój poprzeczny (płaszczyzną pionową) jako początkowy, od którego



Rys. 127 a.

mierzymy współrzędną  $x$  odległości przekroju poprzecznego dowolnego. Niechaj  $\varphi$  (rys. 127 a) oznacza kąt, jaki tworzy styczna do konturu przekroju w elemencie powłoki z płaszczyzną poziomą przechodzącą przez jej brzegi równoległe, albo też z inną płaszczyzną poziomą związaną z powłoką, jeżeli ta powłoka tworzy rurę. Wtedy  $x$  i  $\varphi$  można uważać za współrzędne miejsca w powłoce (tj. na powierzchni środkowej powłoki). Element powłoki wydzielony przekrojami normalnymi podłużnymi i poprzecznymi przedstawia rys. 127 b na którym uwidoczniło napięcia i siły zewnętrzne  $X, Y, Z$ , zamiast oznaczeń poprzednich  $T_1, T_2$  i  $N$ .  $\rho$  jest promieniem krzywizny przekroju poprzecznego.

Warunek rzutów na oś  $X$  daje

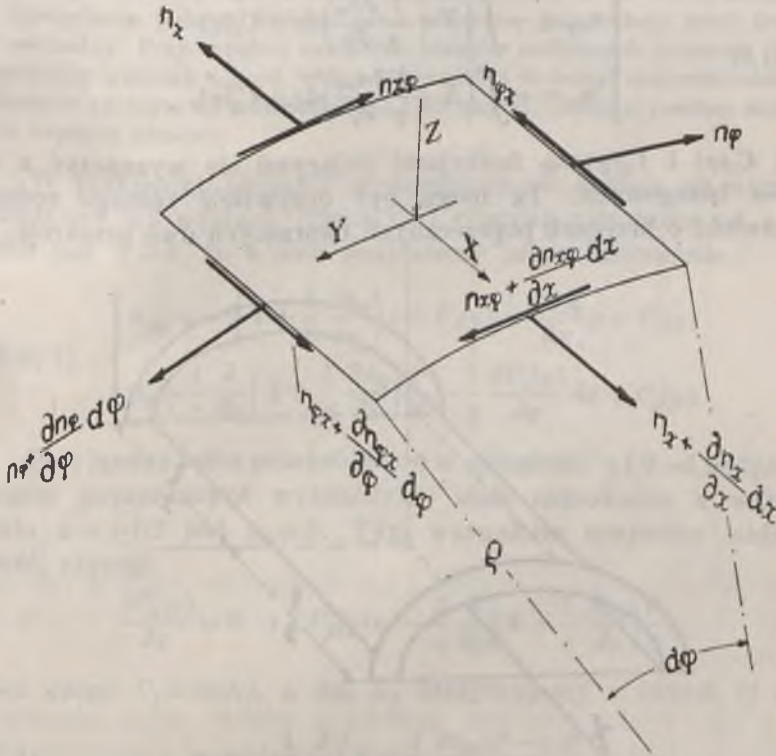
$$\frac{\partial n_x}{\partial x} dx \cdot \rho d\varphi + \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial \varphi} d\varphi \cdot dx + X dx \cdot \rho d\varphi = 0.$$



Drugi warunek równowagi otrzymamy rzutując wszystkie siły na kierunek stycznej do konturu przekroju poprzecznego, tj.

$$\frac{\partial n_{\varphi}}{\partial \varphi} d\varphi dx + \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} dx \cdot \rho d\varphi + Y dx \cdot \rho d\varphi = 0.$$

Warunek trzeci wyraża równowagę składowej obciążenia  $Z dx \cdot \rho d\varphi$  i wypadkowej  $n_{\varphi} dx \cdot d\varphi$  obu sił obwodowych  $n_{\varphi} dx$ , czyli

$$n_{\varphi} dx \cdot d\varphi + Z dx \rho d\varphi = 0.$$


Rys. 127 b.

Podzieliwszy te równania przez  $dx \cdot d\varphi$  otrzymamy następujące równania teorii błonowej powłoki walcowej:

$$(208.1-3) \quad \begin{cases} n_{\varphi} = -Z\rho \\ \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} = -Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial n_{\varphi}}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial n_x}{\partial x} = -X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial \varphi} \end{cases}$$

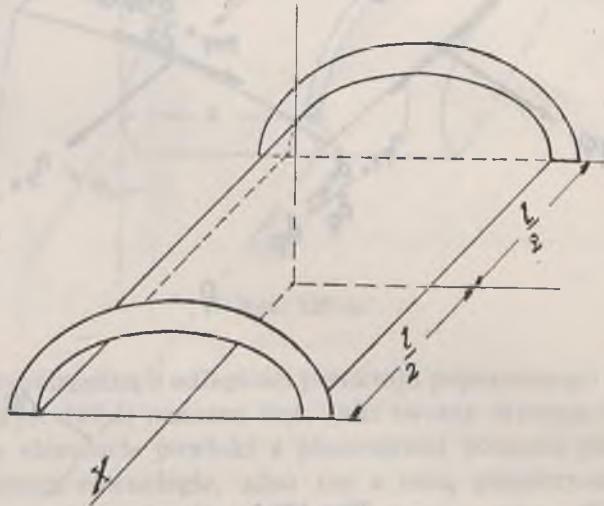
Pierwsze z tych równań określa w sposób nader prosty napięcie obwodowe  $n_{\varphi}$  jako zależne tylko od składowej normalnej obciążenia

zenia i postaci przekroju poprzecznego, a niezależne od warunków brzegowych. To też, gdy te warunki, jak to się zdarza, są niezgodne z tym równaniem, to teoria błonowa nie nadaje się do wyznaczenia stanu napięcia i winna być zastąpiona ogólniejszą uwzględniającą momenty zginające i poprzeczne siły tnące w powłoce.

Mając na razie na oku przypadki kiedy teoria błonowa wystarcza, wykonamy całkowanie równań (208.2 i 3) otrzymując

$$(208.4, 5) \quad \begin{cases} n_{x\varphi} = - \int \left( Y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial n_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) dx + C_1(\varphi) \\ n_x = - \int \left( X + \frac{1}{\rho} \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial \varphi} \right) dx + C_2(\varphi). \end{cases}$$

Tutaj  $C_1(\varphi)$  i  $C_2(\varphi)$  są funkcjami dającymi się wyznaczyć z warunków brzegowych. Te mogą być oczywiście różnego rodzaju. Dla powłoki o brzegach poprzecznych tworzących dwa przekroje, np.



Rys. 128.

$x=0$  i  $x=l$  można np. ustalić  $n_x=0$  i  $n_{x\varphi} \neq 0$ . Wtedy zrealizowanie tego warunku wymaga stosownego podparcia brzegów, które można wykonać rozmaicie. Gdy natomiast zażądamy aby na jednym brzegu poprzecznym było  $n_x=0$  i zarazem  $n_{x\varphi}=0$ , to ten brzeg winien pozostać swobodnym, a należy ustalić stosownie brzeg drugi.

Ważny technicznie przykład obliczenia napięć błonowych w powłoce stanowiącej rurę zamkniętą o przekroju kołowym obciążoną wodą wzupełniającą ją całkowicie znajdzie czytelnik w § 228 Stereom. Techn. autora. Błonowy stan napięcia znajdzie także przy każdym innym przekroju rury o ścianie wiotkiej pod ciśnieniem wewnętrznym, jeżeli postać tego przekroju jest zabezpieczona

od odkształceń wręgami dostatecznie sztywnymi po końcach rury, lub w pewnych odstępach w przypadku jej wielkiej długości.

Innego ważnego przykładu dostarcza powłoka przykrycia budynku, dołem otwarta, która może mieć brzegi podłużne swobodne, a opierać się tylko brzegami poprzecznymi na ścianach czołowych lub innych konstrukcjach stosownych (rys. 128). Wtedy w przypadku samych obciążeń pionowych pozbywamy się częściowo trudności wynikających z warunków na brzegach podłużnych ( $n_\varphi = 0$  i  $n_{x\varphi} = 0$ ) kształtując przekrój poprzeczny tak, aby styczne doń w punktach brzegowych były pionowe, a zatem  $Z = 0$  i  $n_\varphi = 0$ . Taka powłoka działa bardzo podobnie jak belka podparta konstrukcjami czołowymi na obu końcach, albo też utwierdzona jednym końcem przez stosowną konstrukcję jeżeli drugi ma być swobodny. Przy zupełnej swobodzie brzegów podłużnych pozostaje jednakże niespełniony warunek  $n_{x\varphi} = 0$ , wobec czego należy te brzegi usztywnić elementem podłużnym zdolnym do zrównoważenia tych napięć, ażeby w powłoce zachodziły tylko napięcia błonowe.

W przypadku obciążeń niezależnych od  $x$  stają się wyrażenia podcałkowe we wzorach (208.4 i 5) również niezależne od  $x$ . Gdy nadto jest  $X = 0$ , to z nich znajdziemy przez całkowanie

$$(208.6, 7) \quad \begin{cases} n_{x\varphi} = - \left( Y + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} \right) x + C_1(\varphi) = \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} x + C_1(\varphi) \\ n_x = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( Y + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} \right) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial C_1(\varphi)}{\partial \varphi} dx + C_2(\varphi). \end{cases}$$

Przyjawszy teraz przekrój  $x = 0$  w odległości  $\pm l/2$  od podpartych brzegów poprzecznych wyznaczmy stałe całkowania z warunku, że dla  $x = \pm l/2$  jest  $n_x = 0$ . Tym warunkom uczynimy widocznie zadość, czyniąc

$$\frac{\partial C_1(\varphi)}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{i} \quad C_2(\varphi) = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( Y + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} \right) \frac{l^2}{8},$$

wobec czego  $C_1 = \text{stałej}$ , a dla  $n_x$  otrzymujemy z (208.6, 7) wzór:

$$(208.8) \quad n_x = - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( Y + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} \right) \frac{l^2 - 4x^2}{8}.$$

Wielkość  $C_1$  znajdziemy z warunku dla elementu usztywniającego podłużnego, w którym napięcie  $N$  określa wzór:

$$N = \int_{-l/2}^x n_{x\varphi} dx + C,$$

gdzie  $C$  jest wartością  $N$  dla  $x = -l/2$ . Tak ta wartość jak i wartość  $N$  dla  $x = +l/2$  powinna być równa zeru.

Otóż z rów. (208.6), tj.

$$n_{x\varphi} = \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} dx + C_1$$

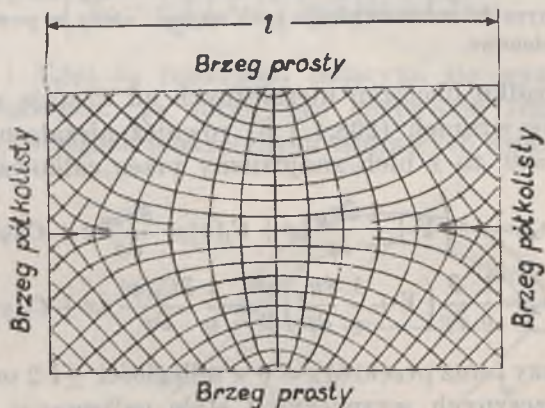
wynika, że

$$\int_{-l/2}^{l/2} n_{xp} dx = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\partial n_{xp}}{\partial x} dx + C_1 l = C_1 l,$$

a więc  $N_{x=l/2} = C_1 l + C$ . Stąd  $C = 0$ ,  $C_1 = 0$  i

$$(208.9) \quad n_{xp} = - \left( Y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial n_{\varphi}}{\partial \varphi} \right) x.$$

Kilka interesujących przykładów dla powłoki walcowej eliptycznej, półkolistej i cykloidalnej obciążonej ciężarem własnym



Rys. 129.

podaje Flügge w swej monografii, z której wzięto rys. 129 przedstawiający linie naprężeń głównych w powłoce półkolistej w rozwinięciu na płaszczyźnie.

### § 209. Teoria zgięciowa powłoki o postaci walca obrotowego.

W powłoce niewiotkiej obok napięć błonowych oznaczonych jak powyżej przez  $n_x$ ,  $n_{\varphi}$  i  $n_{xp}$  mamy do czynienia nadto z momentami zginającymi  $m_x$ ,  $m_{\varphi}$ , skręcającymi  $m_{xp}$ ,  $m_{\varphi x}$  i napięciami poprzecznymi  $q_x$  i  $q_{\varphi}$ . Wszystkie te wielkości statyczne wraz ze składowymi obciążeniami  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  uwidoczono dla przejrzystości na dwu rysunkach 130a i b. Rys. (a) przedstawia tylko siły, zaś (b) tylko wektory momentów.

Warunek rzutów na oś  $X$  nie ulegnie zmianie w porównaniu do (208.3). Ponieważ teraz jest  $\rho = \text{stała} = a$  (promieniowi walca), przeto napiszemy

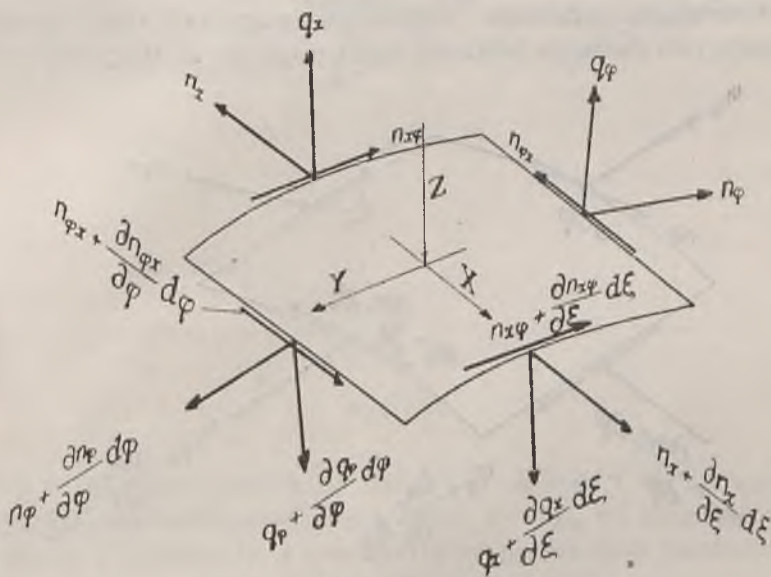
$$(209.1) \quad a \frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial \varphi} + aX = 0.$$

W równaniu rzutów na kierunku stycznej przybývá teraz wypadkowa obu sił poprzecznych  $q_\varphi dx$  zamykająca kąt  $d\varphi$  o wielkości  $-q_\varphi dx \cdot dy$ . Mamy więc:

$$\frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \cdot dz + \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} dx \cdot a d\varphi - q_\varphi dx \cdot d\varphi + Y dx \cdot a d\varphi = 0,$$

z czego wynika

$$(209.2) \quad \frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} + a \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial x} - q_\varphi + a Y = 0.$$



Sity

Rys. 130 a.

Równanie trzecie otrzymuje dwa wyrazy nowe określone przyrostami obu sił poprzecznych dającymi wyrazy

$$\frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \cdot dx \quad \text{i} \quad \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \cdot a d\varphi.$$

Napiszemy więc

$$n_\varphi dx \cdot d\varphi + \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi \cdot dx + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \cdot a d\varphi + Z dx \cdot a d\varphi = 0,$$

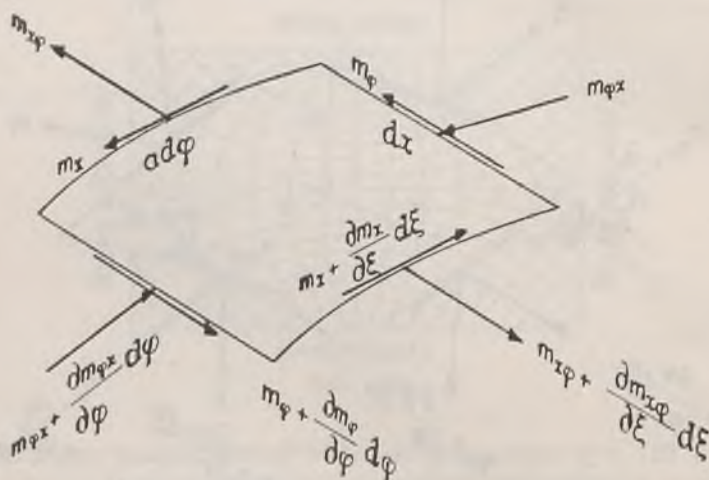
czyli

$$(209.3) \quad \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + a \frac{\partial q_x}{\partial x} + n_\varphi + a Z = 0.$$

Te równania uprościmy jeszcze wprowadzając współrzędną bezwymiarową  $\xi$  przez podstawienie  $x = a\xi$ , a zatem

$$(209.4-6) \quad \begin{cases} \frac{\partial n_x}{\partial \xi} + \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial \varphi} + aX = 0, \\ \frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial \xi} - q_\varphi + aY = 0, \\ \frac{\partial q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial q_x}{\partial \xi} + n_\varphi + aZ = 0. \end{cases}$$

Ustawiając równania momentów względem obu stycznych normalnej do elementu bierzemy pod uwagę, że wektory momentów



#### Momenty

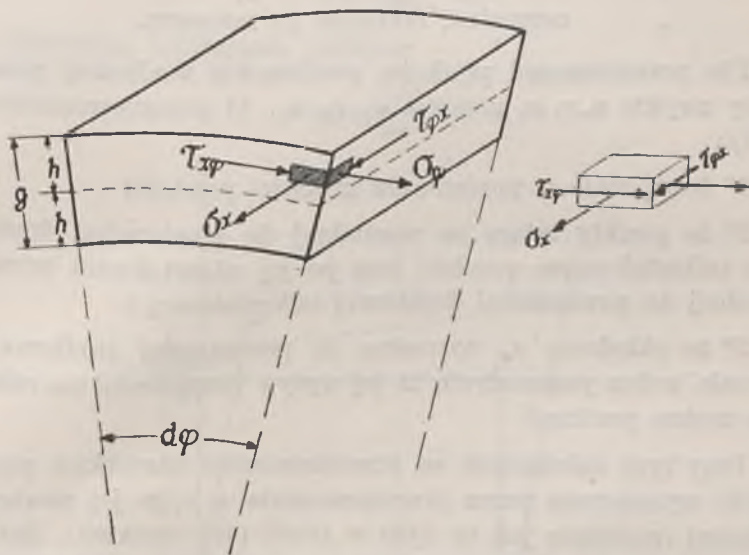
Rys. 130 b.

skręcających na bokach  $dx$  elementu nie są równoległe, lecz mają wypadkową o kierunku  $Z$ . Kolejno otrzymujemy

$$(209.7-9) \quad \begin{cases} \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial m_{x\varphi}}{\partial \xi} - a q_\varphi = 0, \\ \frac{\partial m_x}{\partial \xi} + \frac{\partial m_{\varphi x}}{\partial \varphi} - a q_x = 0, \\ a n_{x\varphi} - a n_{\varphi x} + m_{\varphi x} = 0. \end{cases}$$

Sześć równań między dziesięciema niewiadomymi  $n_x, n_\varphi, n_{x\varphi}, n_{\varphi x}, m_x, m_\varphi, m_{\varphi x}, m_{x\varphi}, q_x, q_\varphi$ , nie wystarcza do ich obliczenia. Niezbędnych jeszcze równań dostarczą związki między siłami a odkształceniami wynikające z teorii sprężystości. Aby je znaleźć wyrazimy najpierw

wszystkie siły wewnętrzne przez naprężenia  $\sigma_x$ ,  $\sigma_\varphi$  i  $\tau_{x\varphi}$ , które traktujemy jako zależne od współrzędnej  $z$  określającej odległość punktu przekroju od powierzchni środkowej powłoki (rys. 131). Pojmując oczywiście  $z$  jako wielkość algebraiczną znajdujemy, że na bocznych



Rys. 131.

ścianach elementu powłoki o bokach  $a \cdot d\varphi = ds$  i  $dx$  są wymiary długości pól elementarnych o szerokości  $dz$  stałe na ścianach równoległych do  $X$  i równe  $dx$ , a zmienne tylko na ścianach poprzecznych, gdzie  $z$  powodu zakrzywienia mają wartość  $ds(1 + z/a)$ .

Z tego powodu napiszemy:

$$(209.10) \quad \left\{ \begin{array}{ll} n_\varphi = \int_{-h}^h \sigma_\varphi dz, & n_x = \int_{-h}^h \sigma_x \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz, \\ n_{\varphi x} = \int_{-h}^h \tau_{x\varphi} dz, & n_{x\varphi} = \int_{-h}^h \tau_{x\varphi} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz, \\ m_\varphi = - \int_{-h}^h \sigma_\varphi z dz, & m_x = - \int_{-h}^h \sigma_x \left(1 + \frac{z}{a}\right) z dz, \\ m_{\varphi x} = - \int_{-h}^h \tau_{x\varphi} z dz, & m_{x\varphi} = - \int_{-h}^h \tau_{x\varphi} \left(1 + \frac{z}{a}\right) z dz. \end{array} \right.$$

Składowe przemieszczenia punktu odległego o  $z$  od powierzchni środkowej oznaczmy teraz według schematu:

$u_z$  przemieszczenie w kierunku rosnących  $x$ ,  
 $v_z$            "                               "                               "                               " $\varphi$ ,  
 $w_z$            "                               normalne, dodatnie za zewnątrz.

Dla przemieszczeń punktów powierzchni środkowej pisać będziemy zwykle  $u, v, w$ , zamiast  $u_0, v_0, w_0$ . O przemieszczeniach założymy:

1° że są małe w porównaniu grubości powłoki;

2° że punkty leżące na normalnej do powierzchni środkowej przed odkształceniem powłoki leżą po jej odkształceniu znowu na normalnej do powierzchni środkowej odkształconej i

3° że składowa  $\sigma_z$  normalna do powierzchni środkowej jest tak mała wobec pozostałych, iż jej wpływ bezpośredni na odkształcenia można pominąć.

Przy tych założeniach są przemieszczenia wszystkich punktów powłoki wyznaczone przez przemieszczenia  $u, v, w$  jej powierzchni środkowej (podobnie jak to było w teorii płyt cienkich). Założenie pierwsze bywa nie zawsze spełnione w powłokach cienkościennych, ale jego usunięcie skomplikowałoby teorię jeszcze bardziej niż to zaszło w teorii nie małych ugięć płyt cienkich. Tylko dzięki temu założeniu prowadzi teoria do równań różniczkowych liniowych pozwalających w niektórych prostych przypadkach znaleźć rozwiązanie ścisłe. Drugie założenie spełnia się zawsze gdy grubość powłoki  $g=2h$  jest mała w porównaniu do wymiarów powierzchni środkowej, a zwłaszcza w stosunku do jej promieni krzywizny i odległości od brzegu najbliższego. Ale nawet na samym brzegu można temu założeniu uczynić zadość przez odpowiednie rozmieszczenie danych napięć zewnętrznych na grubości powłoki. Gdy tego zaniechamy to powstanie znana już z teorii płyt strefa zaburzenia o szerokości porównywalnej z grubością powłoki, co praktycznie nie zmienia stanu odkształcenia i napięcia w całej powłoce.

Oznaczywszy przez  $\varepsilon_x, \varepsilon_\varphi$  i  $\gamma_{x\varphi}$  składowe stanu odkształcenia w warstewkach elementarnych powłoki odpowiadające składowym stanu napięcia oznaczonym powyżej przez  $\sigma_x, \sigma_\varphi$  i  $\tau_{x\varphi}$ , mamy jak wiadomo w przypadkach ciał jednolitych i izotropowych związku

$$(a) \quad \sigma_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_x); \quad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\varphi); \quad \tau_{x\varphi} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{x\varphi}.$$

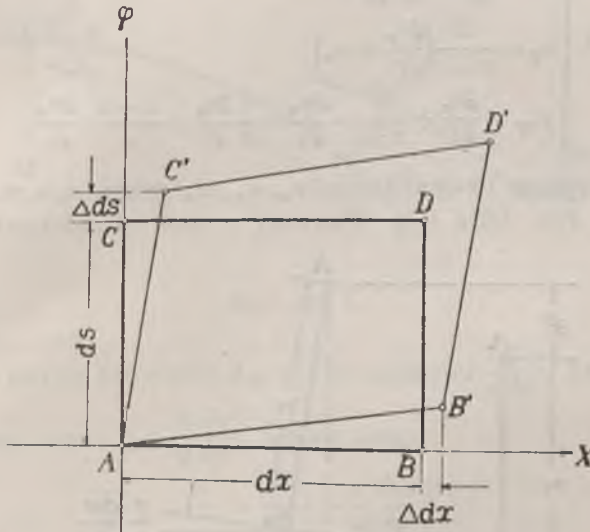


Ażeby teraz wyrazić  $\varepsilon_\varphi$ ,  $\varepsilon_x$  i  $\gamma_{x\varphi}$  przez przemieszczenia zauważymy najpierw, że  $\varepsilon_\varphi$  jest wydłużeniem elementu  $ds$  na okręgu o promieniu  $a$ , wzgl.  $a+z$ , czyli

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta ds}{ds}.$$

Podobnie wydłużenie podłużne

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}.$$



Rys. 132.

Wreszcie kąt odkształcenia postaciowego  $\gamma_{x\varphi}$  znajdujemy porównywując element  $ABCD = dx \cdot ds$  (rys. 132) z elementem  $A'B'C'D'$  po odkształceniu, z czego wynika

$$\gamma_{x\varphi} = \sphericalangle BAC - \sphericalangle B'AC'.$$

Otóż  $\Delta dx = \frac{\partial u}{\partial x} dx$ , a więc

$$(b) \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Natomiast  $\varepsilon_\varphi$  składa się z dwu części, gdyż po pierwsze element  $ds$  zwiększa się z powodu powiększenia promienia  $a$  na  $a+w$  (wzgl. z  $a+z$  na  $a+z+w$ ), a po wtóre z powodu przemieszczeń  $v$  i  $v + \frac{\partial v}{\partial s} ds = v + \frac{\partial v}{a \partial \varphi} ds$ . A zatem

$$(c) \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{a}.$$

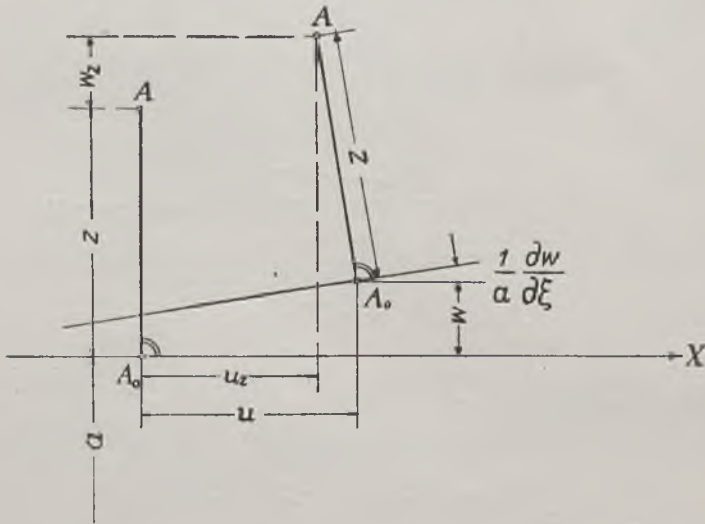
Kąt posunięcia  $\gamma_{x\varphi}$  składa się z kąta obrotu krawędzi  $AB$  równego  $\partial u/a\partial\varphi$  i kąta obrotu  $CA$  równego  $\partial v/\partial x$ . A zatem

$$(d) \quad \gamma_{x\varphi} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Dla elementów warstewki odległej o  $z$  od powierzchni środkowej napiszemy odpowiednie wzory zastępując  $a$  przez  $a+z$  itd., czyli

$$(209.11-13) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_z}{\partial \xi}, \\ \varepsilon_\varphi = \frac{1}{a+z} \left( \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + w_z \right), \\ \gamma_{x\varphi} = \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{1}{a+z} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} = \frac{1}{a} \frac{\partial v_z}{\partial \xi} + \frac{1+z}{a} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

Przystępując do wyrażenia  $u_z, v_z, w_z$  przez  $u, v, w$ , weźmiemy do pomocy rys. 133a i b. Pierwszy z nich przedstawia ślad  $A_0x$

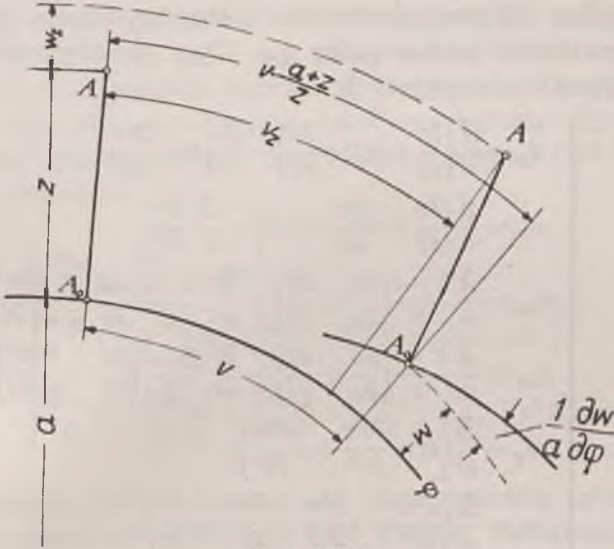


Rys. 133 a.

powierzchni środkowej na płaszczyźnie przechodzącej przez oś walca, drugi zaś ślad  $A_0\varphi$  tejże powierzchni na płaszczyźnie przekroju, prostopadłego do tej osi. Otóż różnica  $u - u_z$  przemieszczeń punktu  $A_0$  i  $A$  (rys. a) jest widocznie równa iloczynowi  $z$  przez *sinus* bardzo małego kąta oznaczonego na rysunku jako  $w'/a = \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi}$ . A zatem

$$(209.14) \quad u_z = u - \frac{z}{a} \frac{\partial w}{\partial \xi}.$$

Podobnie z rys. (b) odczytujemy, że gdy punkt  $A_0$  przesuwa się w powierzchni środkowej o  $v$ , to punkt  $A$  przesunąłby się



Rys. 133 b.

o  $v \cdot \frac{a+z}{z}$ , gdyby nie obrót  $A_0\varphi$  o kąt wielkości  $\frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi}$ , który zmniejsza to przesunięcie o  $z \cdot \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial \varphi}$ , wobec czego

$$(209.15) \quad v_z = v \cdot \frac{a+z}{a} - z \frac{\partial w}{a \partial \varphi}.$$

Na koniec  $w_z$  różni się od  $w$  tylko o wyrazy rzędu kwadratów  $\partial w / \partial \varphi$  i  $\partial w / \partial \xi$ , a więc możemy napisać

$$(209.16) \quad w_z = w.$$

Po wstawieniu tych wyrażeń w (209.11–13) otrzymujemy

$$(209.17) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{z}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}; & \varepsilon_\varphi = \frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{z}{a} \frac{1}{a+z} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{w}{a+z}, \\ \gamma_{x\varphi} = \frac{1}{a+z} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{a+z}{a^2} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{1}{a} \left( \frac{z}{a} + \frac{z}{a+z} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \xi}. \end{cases}$$

Wstawiając to w równania (a), a następnie w rów. (209.10) możemy wykonać całkowania i otrzymać np. dla  $n_\varphi$ :

$$(209.18) \quad n_\varphi = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h}^h (\varepsilon + \nu \varepsilon_x) dz = \\ = \frac{E}{a(1-\nu^2)} \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) g + w \left( g + \frac{g^3}{12a^2} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{g^3}{12a^2} \right].$$

Podobnie znajdujemy dla dalszych wielkości przekrojowych wyrażenia przez  $u, v, w$ . Niektóre całki dają przy tym logarytm, którego jednakże nie pozostawimy lecz zastąpimy trzema pierwszymi członami rozwinięcia podług potęg  $g/a$ . Tym sposobem dochodzimy do ośmiu równań następujących:

$$(209.19-26) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_{\varphi} = \frac{\bar{A}}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + v \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\bar{B}}{a^3} \left( w + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2} \right), \\ n_x = \frac{\bar{A}}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + v \frac{\partial v}{\partial \varphi} + vw \right) - \frac{\bar{B}}{a^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \\ n_{\varphi x} = \frac{\bar{A}}{a} \frac{1-v}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\bar{B}}{a^3} \cdot \frac{1-v}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \xi} \right), \\ n_{x\varphi} = \frac{\bar{A}}{a} \frac{1-v}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\bar{B}}{a^3} \frac{1-v}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \xi} \right), \\ m_{\varphi} = \frac{\bar{B}}{a^2} \left( w + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right), \\ m_x = \frac{\bar{B}}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial q^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} - v \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \\ m_{\varphi x} = \frac{\bar{B}}{a^2} (1-v) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial \xi} \right), \\ m_{x\varphi} = \frac{\bar{B}}{a^2} (1-v) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right). \end{array} \right.$$

Tutaj jak poprzednio  $\bar{A} = Eg/1 - v^2$  oznacza sztywność rozciągania lub ściskania, a  $\bar{B} = Eq^3/12(1 - v^2)$  sztywność zginania,  $g = 2h$  grubość powłoki.

Przypatrzwszy się równaniom powyższym zauważymy, że w przypadku  $\bar{B} \rightarrow 0$  tzn. powłoki niezmiernie wiotkiej sprowadzają się do czterech równań teorii błonowej. Z tych dwa ostatnie dają równość  $n_{\varphi x} = n_{x\varphi}$ , jaka nie zachodzi w przypadku gdy wchodzi w grę sztywność zginania.

W wyrażeniach momentów łatwo dostrzec znaczenie poszczególnych wielkości.  $\frac{1}{a^2} \left( w + \frac{\partial^2 w}{\partial q^2} \right)$  i  $\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$  przedstawiają zmianę krzywizny (w teorii płyt było tylko  $\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} + v \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}$ ).  $\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \xi}$  określa skęcenie powierzchni środkowej. Wyrazy dodatkowe w  $m_x$ , tj.  $\frac{\partial u}{\partial \xi}$  i  $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$  znaczą, że napięcia błonowe rozmieszczone równomiernie na ścianie bocznej elementu o postaci trapezoidalnej dają względem śladu elementu powierzchni środkowej moment, ponieważ środek ciężkości tej ściany leży po stronie zewnętrznej (wypukłej), a znak momentu ustalono jako dodatni gdy powoduje ciągnięcia na ścianie wewnętrznej.

**§ 210. Ciąg dalszy teorii zgięciowej powłoki walcowej.** Równania teorii sprężystości (a) (z § 209) przy pomocy których wyprowadziliśmy równania (209.19—26) teorii powłoki walcowej nie zawierały naprężeń  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ , i  $\tau_{\varphi z}$ , albowiem pominięto z góry wpływ naprężeń  $\sigma_z$  i sił tnących poprzecznych tak jak w teorii płyt cienkich. Z tego powodu wypada teraz wyrugować siły poprzeczne  $q_\varphi$  i  $q_x$  przy pomocy równań (209.7 i 8) z równań (209.1, 2, 3), aby otrzymać równania

$$(210.1-3) \quad \begin{cases} \frac{\partial n_x}{\partial \xi} + \frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial \varphi} + aX = 0 \\ a \frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} + a \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial \xi} - \frac{\partial m_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\partial m_{x\varphi}}{\partial \xi} + a^2 Y = 0 \\ \frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 m_{x\varphi}}{\partial \varphi \partial \xi} + \frac{\partial^2 m_{\varphi x}}{\partial \varphi \partial \xi} + \frac{\partial^2 m_x}{\partial \xi^2} + a n_\varphi + a^2 Z = 0. \end{cases}$$

Równanie (209.9) okazuje się identycznością, gdy wyrazimy siły przez przemieszczenia, jest więc zbędne. Otrzymane trzy równania zawierają już tylko osiem niewiadomych  $n$  i  $m$ , które według wz. (209.19—26) można wyrazić przez  $u$ ,  $v$ ,  $w$  i ich pochodne. W ten sposób dochodzimy do następujących podstawowych trzech równań różniczkowych określających przemieszczenia, które odpowiadają danym obciążeniom powłoki walcowej obrotowej:

$$(210.4-6) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial \xi} + \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} + \\ \quad + \frac{\bar{B}}{Aa^2} \left( \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^2 \partial \xi} \right) + \frac{Xa^2}{A} = 0 \\ \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi \partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \\ \quad + \frac{\bar{B}}{Aa^2} \left[ \frac{3}{2} (1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{3-\nu}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi \partial \xi^2} \right] + \frac{Ya^2}{A} = 0 \\ \nu \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + \frac{\bar{B}}{Aa^2} \left( \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi \partial \xi^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \frac{3-\nu}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi \partial \xi^2} + \right. \\ \quad \left. + \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^2 \partial \xi^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + w \right) + \frac{Za^2}{A} = 0. \end{cases}$$

Te równania różniczkowe mają współczynniki stałe, a więc ich rozwiązanie ogólne składa się z funkcyj wykładniczych argumentu zespolonego. Nie trudno przewidzieć, że przy stosownych

warunkach brzegowych można znaleźć proste rozwiązania funkcjami  $\sin$  i  $\cos$ . W tym celu przyjmiemy obciążenie w postaci

$$(210.7) \quad \begin{cases} X = X_{mn} \cos m\varphi \cdot \cos \lambda \frac{x}{a}, \\ Y = Y_{mn} \sin m\varphi \cdot \sin \lambda \frac{x}{a}, \\ Z = Z_{mn} \cos m\varphi \cdot \sin \lambda \frac{x}{a}. \end{cases} \quad \left( \lambda = n\pi \frac{a}{l} \right)$$

Postać ta czyni zadość równaniom (210.4—6), gdy szukamy rozwiązania szczególnego funkcjami

$$(210.8) \quad \begin{cases} u = u_{mn} \cos m\varphi \cdot \cos \lambda \frac{x}{a} \\ v = v_{mn} \sin m\varphi \cdot \sin \lambda \frac{x}{a} \\ w = w_{mn} \cos m\varphi \cdot \sin \lambda \frac{x}{a}. \end{cases}$$

Do tego rozwiązania należałoby dodać ogólne rozwiązanie równań jednorodnych, które poznamy poniżej, aby otrzymać rozwiązanie ogólne układu (210.4—6), ale już rozwiązanie szczegółowe (210.8) odpowiada warunkom brzegowym dającym się urzeczywistnić przynajmniej w znacznym przybliżeniu.

Albowiem np. dla brzegu  $x=0$  mamy  $v=w=0$  i  $\partial u/\partial \xi=0$ , ale  $u \neq 0$ . Ten brzeg jest zatem ustalony w swej płaszczyźnie, ale może się przesuwać w kierunku  $x$ . Z rów. (209.19—26) wynika, że na brzegu jest  $n_x=0$  i  $m_x=0$ . To odpowiada podparciu obustronnemu całego brzegu. Obrawszy  $\lambda = n\pi \frac{a}{l}$  (przy całkowitych  $m$  i  $n$ ) można te same warunki brzegowe uzyskać i dla drugiego brzegu  $x=l$ .

Ażeby teraz wyznaczyć wartości parametrów  $u_{mn}, v_{mn}, w_{mn}$  wstawiamy (210.8) w równania różniczkowe i otrzymujemy układ zwyżających równań liniowych, które można napisać w postaci:

$$\begin{aligned} a_{11}u_{mn} + a_{12}v_{mn} + a_{13}w_{mn} &= \frac{a^2}{A} X_{mn} \\ a_{12}u_{mn} + a_{22}v_{mn} + a_{23}w_{mn} &= \frac{a^2}{A} Y_{mn} \\ a_{13}u_{mn} + a_{23}v_{mn} + a_{33}w_{mn} &= -\frac{a^2}{A} Z_{mn}. \end{aligned}$$

Współczynniki  $\alpha_{ik}$  mają tutaj wartości:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} m^2(1+k), & \alpha_{22} &= m^2 + \frac{1-\nu}{2} \lambda^2(1+3k), \\ \alpha_{12} &= -\frac{1+\nu}{2} \lambda m, & \alpha_{33} &= 1+k+k[(\lambda^2+m^2)^2-2m^2], \\ \alpha_{13} &= -\lambda\nu - k\left(\lambda^3 - \frac{1-\nu}{2} \lambda m^2\right), \end{aligned}$$

gdzie  $k = \bar{B}/\bar{A}a^2 = g^2/12a^2$ .

Gdy rozwiązawszy te równania wstawimy wartości  $u_{mn}$ ,  $v_{mn}$  i  $w_{mn}$  w (210.8), a następnie  $u$ ,  $v$ ,  $w$  wstawimy w (209.19–26), to z uwzględnieniem (209.1–9) i z pominięciem wyrazów bardzo małych otrzymamy

$$(210.9) \quad \begin{cases} n_\varphi = \frac{\bar{A}}{a} (m v_{mn} + w_{mn} - \lambda \nu u_{mn}) \cos m\varphi \cdot \sin \lambda \frac{x}{a}, \\ m_\varphi = \frac{\bar{B}}{a^2} (1 - m^2 - \lambda^2 \nu) w_{mn} \cdot \cos m\varphi \cdot \sin \lambda \frac{x}{a}, \\ m_{x\varphi} = -\frac{\bar{B}}{a^2} (1 - \nu) \lambda (v_{mn} + m w_{mn}) \sin m\varphi \cdot \cos \lambda \frac{x}{a}, \\ q_\varphi = \frac{\bar{B}}{a^3} [(1 - \nu) \lambda^2 v_{mn} + m(\lambda^2 + m^2 - 1) w_{mn}] \sin m\varphi \cdot \sin \lambda \frac{x}{a}. \end{cases}$$

To rozwiązanie ma znaczenie ogólne o tyle, że obciążenie dowolne da się rozłożyć na obciążenia typu (210.7) przez rozwinięcie na podwójny szereg trygonometryczny

$$\begin{aligned} X &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{mn} \cos m\varphi \cdot \cos \lambda \frac{x}{a}, \\ Y &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin m\varphi \cdot \sin \lambda \frac{x}{a}, \\ Z &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Z_{mn} \cos m\varphi \cdot \sin \lambda \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

Natomiast ważność rozwiązania jest ograniczona do warunków brzegowych powyżej ustalonych.

**§ 211. Powłoka obrotowo-walcowa obciążona tylko na brzegach zakrzywionych.** Już z wzorów ogólnych dla sił wewnętrznych (209.19–26) można wywnioskować, że teoria błonowa daje przybliżenie tym większe, im grubość powłoki  $g$  jest mniejsza wobec promienia  $a$ .

Albowiem współczynniki wyrażeń uwzględniających sztywność zginania są równe  $\bar{B}/a^3$ , podczas gdy współczynniki wyrażeń teorii błonowej mają wartość  $A/a$ . Ich stosunek  $k = \bar{B}/\bar{A}a^2 = g^2/12a^2$  jest więc liczbą bardzo małą, wobec czego w pierwszych czterech równaniach układu (209.19—26) stanowią wyrazy drugie tylko drobną poprawkę, zwykle zbędną. Natomiast współczynniki czterech następujących wzorów dla momentów są równe  $\bar{B}/a^2$  a więc momenty nie zmieniając praktycznie wartości napięć błonowych mogą jednakże wywołać godne uwagi zmiany wyteżenia materiału.

Wnioski te popiera przykład przerechowany przez Flügge'go na str. 119 jego książki. Ale słaba strona teorii błonowej tkwi w niemożności uczynienia zadość jakimkolwiek danym warunkom brzegowym. Można temu zaradzić dołączając do rozwiązania błonowego stosowne rozwiązanie równań jednorodnych teorii ogólnej powstających z (210.4—6) przez przyjęcie  $X=Y=Z=0$ . Ten zabieg matematyczny na proste znaczenie mechaniczne. Gdy bowiem rozwiązanie równań teorii błonowej nie czyni zadość warunkom brzegowym, to zawsze można te warunki spełnić przez odpowiednio dobrane obciążenia brzegu. Te obciążenia zaś muszą wywołać zgięcia ujęte tylko teorią ogólną.

Szukając teraz wymienionego rozwiązania winniśmy przede wszystkim wyrugować pochodne cząstkowe względem  $\varphi$  albo też pochodne względem  $\xi = x/a$ , aby otrzymać równania zwyczajne. Zastosujemy obie drogi, gdyż każda z nich może dać wyniki pożyteczne przy rozwiązaniach szczegółowych.

Gdy walec tworzy rurę o brzegach  $x=0$  i  $x=l$ , to wszelkie wielkości określające napięcia i odkształcenia muszą być funkcjami okresowymi zmiennej  $\varphi$  o okresie  $2\pi$ . Możemy więc przyjąć z góry, że przemieszczenia składowe dają się wyrazić szeregiem Fouriera o postaci

$$(211.1) \quad u = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \cos m\varphi; \quad v = \sum_{m=1}^{\infty} v_m \sin m\varphi; \quad w = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \cos m\varphi,$$

gdzie  $u_m, v_m, w_m$  zależą tylko od  $x$ . Wstawiwszy to w równania różniczkowe (210.4—6) i wykonawszy różniczkowania względem  $\varphi$  otrzymamy lewą stronę każdego równania jako rozwinięcie Fourierskie strony prawej równej zero. Z tego wynika, że wszystkie współczynniki wyrazów  $\sin m\varphi$  i  $\cos m\varphi$  muszą być równe zero. Ten warunek daje dla każdego  $m$  następujące trzy równania różniczkowe zwyczajne:



$$(211.2) \left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 u_m}{d\xi^2} - \frac{1-\nu}{2} m^2 u_m + \frac{1+\nu}{2} m \frac{d v_m}{d\xi} + \\ & \quad + \nu \frac{d v_m}{d\xi} - k \left( \frac{1-\nu}{2} m^2 u_m + \frac{d^3 w_m}{d\xi^3} + \frac{1-\nu}{2} m^2 \frac{d w_m}{d\xi} \right) = 0 \\ & - \frac{1+\nu}{2} m \frac{d u_m}{d\xi} - m^2 v_m + \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2 v_m}{d\xi^2} - m w_m + \\ & \quad + k \left[ \frac{3}{2} (1-\nu) \frac{d^2 v_m}{d\xi^2} + \frac{1}{2} (3-\nu) m \frac{d^2 w_m}{d\xi^2} \right] = 0 \\ & \nu \frac{d u_m}{d\xi} + m v_m + w_m + k \left[ -\frac{1}{2} (1-\nu) m^2 \frac{d u_m}{d\xi} - \frac{d' u_m}{d\xi} - \frac{1}{2} (3-\nu) m \frac{d^2 v_m}{d\xi^2} + \right. \\ & \quad \left. + \frac{d^4 w}{d\xi^4} - 2 m^2 \frac{d^2 w_m}{d\xi^2} + m^4 w_m - 2 m^2 w_m + w_m \right] = 0, \end{aligned} \right.$$

gdzie  $k \equiv \bar{B} / \bar{A} a^2 = g^2 / 12 a^2$  jak w § 210.

Rozwiązaniami tych równań są:

$$(211.3) \quad u_m = A e^{\lambda \xi}, \quad v_m = B e^{\lambda \xi}, \quad w_m = C e^{\lambda \xi}.$$

Po podstawieniu w (211.2) otrzymujemy na wyznaczenie stałych  $A, B, C$  równania liniowe postaci:

$$(211.4) \quad \begin{cases} \beta_{11} A + \beta_{12} B + \beta_{13} C = 0, \\ -\beta_{12} A + \beta_{22} B + \beta_{23} C = 0, \\ \beta_{13} A - \beta_{23} B + \beta_{33} C = 0, \end{cases}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \beta_{11} & \equiv \lambda^2 - \frac{1}{2} (1-\nu) m^2 (1+k), & \beta_{23} & \equiv -m + \frac{1}{2} (3-\nu) k \lambda^2 m \\ \beta_{12} & \equiv \frac{1}{2} (1+\nu) \lambda m, & \beta_{33} & \equiv 1 + k (\lambda^4 - 2 \lambda^2 m^2 + m^4 - 2 m^2 + 1) \\ \beta_{13} & \equiv \lambda \nu - k \left( \lambda^3 + \frac{1-\nu}{2} \lambda m^2 \right). \end{aligned}$$

Ten układ równań jednorodnych o niewiadomych  $A, B, C$  ma jak wiadomo rozwiązania różne od zera tylko wtedy gdy wyznacznik układu jest równy zeru. Rozwinąwszy ten wyznacznik według potęg  $\lambda$  otrzymamy równanie stopnia czwartego względem  $\lambda^2$ . Zważwszy, że  $k$  jest małym ułamkiem napiszemy to równanie w postaci:

$$(211.5) \quad \lambda^8 - 2(2m^2 - \nu)\lambda^6 + \left[ (1-\nu^2) \frac{1}{k} + 6m^2(m^2 - 1) \right] \lambda^4 - \\ - 2m^2[2m^4 - (4-\nu)m^2 + 2-\nu] \lambda^2 + m^4(m^2 - 1)^2 = 0.$$

Cztery pary pierwiastków tego równania mają wartości liczbowo równe, a co do znaku przeciwne. Metodami algebry można się przekonać że wszystkie są zespolone, dają się więc wyrazić w postaci:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = -\kappa_1 + i\mu_1 \quad \lambda_3 = -\kappa_2 + i\mu_2 \quad \lambda_5 = \kappa_1 + i\mu_1 \quad \lambda_7 = \kappa_2 + i\mu_2 \\ \lambda_2 = -\kappa_1 - i\mu_1 \quad \lambda_4 = -\kappa_2 - i\mu_2 \quad \lambda_6 = \kappa_1 - i\mu_1 \quad \lambda_8 = \kappa_2 - i\mu_2 \end{array}$$

Z danych liczbowych można obliczyć liczby  $\kappa_1, \kappa_2, \mu_1, \mu_2$  rozwiązując równanie (211.5). Każdemu  $\lambda_j$  odpowiada rozwiązanie szczególne równań różniczkowych (211.2) ze stałymi  $A_j, B_j, C_j$  zależnymi od siebie nawzajem stosownie do równań (211.4) w ten sposób, że tylko jedna może być obrana dowolnie.

Rozwiązaniem ogólnym, np. dla  $u_n$  jest przeto (przy oznaczeniu poprzednim  $\xi = x/a$ ):

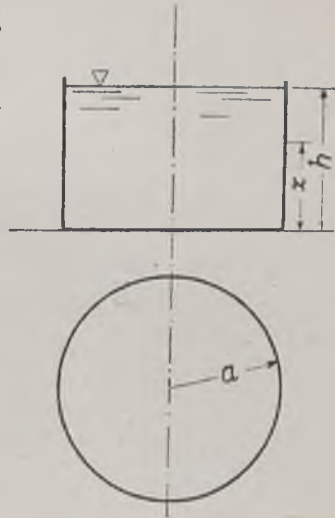
$$(211.6) \quad \begin{aligned} u_m = & e^{-\kappa_1 \xi} (A_1 e^{i\mu_1 \xi} + A_2 e^{-i\mu_1 \xi}) + e^{-\kappa_2 \xi} (A_3 e^{i\mu_2 \xi} + A_4 e^{-i\mu_2 \xi}) + \\ & + e^{\kappa_1 \xi} \cdot e^{-\kappa_1 \frac{l}{a}} (A_5 e^{i\mu_1 \xi} + A_6 e^{-i\mu_1 \xi}) + e^{\kappa_2 \xi} \cdot e^{-\kappa_2 \frac{l}{a}} (A_7 e^{i\mu_2 \xi} + A_8 e^{-i\mu_2 \xi}). \end{aligned}$$

Dla  $v_m$  i  $w_m$  otrzymamy wyrażenia analogiczne ze stałymi  $B$  i  $C$  zamiast  $A$ . Wyrażenia w nawiasach można oczywiście zastąpić przez funkcje goniometryczne argumentu rzeczywistego.

W rozwiązaniu powyższym dają się odróżnić dwie części: Pierwsza złożona z dwu pierwszych wyrażenń maleje szybko od brzegu  $x=0$  ku brzegowi  $x=1$ ; druga zaś złożona z dwu wyrażenń następnych zmienia się odwrotnie. A zatem od brzegu obciążonego gdzie amplituda zmian przemieszczenia jest największa, ku środkowi rury zmniejsza się ta amplituda bardzo silnie, podobnie jak amplituda drgań własnych układu sprężystego z tłumieniem maleje szybko z czasem. Dlatego nazywają często liczby  $\kappa$  współczynnikami tłumienia. Gdy ten współczynnik  $\kappa$ , jak to często bywa, jest wielki, to obciążenie brzegu rury reakcyjnymi siłami poprzecznymi lub momentami powoduje odkształcenia godne uwagi tylko w pobliżu brzegów. To potwierdzają przykłady szczegółowe traktowane w §§ 229 i 230 Stereomech. Techn. autora. Atoli w przypadkach ogólnych mogą liczby  $\kappa$  nie być tak wielkie, gdyż zależą w sposób nader złożony nie tylko od  $k$ , ale także od  $m$ , a więc od sposobu obciążenia brzegów reakcjami.

Dyskusję bardziej szczegółową tej kwestii znajdzie czytelnik w książce Flügge'go na str. 126 i 127, oraz w pracach K. Miesel'a (Ing. Arch. 1, str. 22) i E. Gruber'a (w rozprawach wydanych w r. 1934 przez „Assoc. Intern. d. Ponts et Charpentes”, str. 196).

§ 212. Rura w stanie odkształcenia obrotowo-symetrycznym. Taką rurę tworzy ściana wielkich zbiorników na wodę lub inne płyny o dnie okrągłym i grubości ściany  $g$  albo stałej albo też zależnej od współrzędnej  $x$  określającej wysokość przekroju poziomego (rys. 134). Ogólne równania równowagi upraszczają się znacznie wskutek symetrii obrotowej, a mianowicie: Siły poprzeczne  $n_{\varphi x}$ ,  $n_{x\varphi}$ ,  $q_{\varphi}$  i momenty skracające  $m_{x\varphi}$ ,  $m_{\varphi x}$  są równe 0. Nadto jest przy obciążeniu tylko naporem hydrostatycznym  $X=Y=0$ , a tylko  $Z=-\gamma(h-x)$ , jeżeli  $h$  oznacza odległość zwierciadła cieczy, a  $x$  odległość przekroju dowolnego od dna. Wreszcie jest  $\partial n_{\varphi}/\partial \varphi=0$ ,  $\partial m_{\varphi}/\partial \varphi=0$ .



Rys. 134.

Wobec tego równania równowagi sprowadzają się do następujących:

$$\frac{\partial q_x}{\partial \xi} + n_{\varphi} + aZ = 0; \quad \frac{\partial m_x}{\partial \xi} - a q_x = 0.$$

Wyrugowawszy siłę poprzeczną  $q_x$  otrzymujemy

$$(212.1) \quad \frac{d^2 m_x}{d\xi^2} + a n_{\varphi} = -a^2 Z = c^2 \gamma (h-x)$$

$m_x$  i  $n_{\varphi}$  wyrazimy teraz przez przemieszczenia przy pomocy wzorów (209.19—26), które w tym przypadku znacznie się upraszczają. Przede wszystkim jest z powodu symetrii wszędzie  $v=0$ . Zważywszy zaś że z powodu małej wartości stosunku  $g:a$  można we wzorach dla  $n$  pominąć wyraz z współczynnikiem  $\bar{B}/a^3$ , napiszemy

$$n_{\varphi} = \frac{\bar{A}}{a} \left( w + v \frac{du}{d\xi} \right)$$

$$n_x = \frac{\bar{A}}{a} \left( \frac{du}{d\xi} + v w \right) = 0,$$

gdyż różne od zera napięcie  $n_x$  może powstać tylko przy obciążeniach pionowych, którymi teraz się nie zajmujemy.

Wstawiając wartość  $du/d\xi$  z drugiego równania w pierwsze znajdujemy

$$n_{\varphi} = \frac{\bar{A}}{a} (1 - v^2) w.$$

Wzór (209.24) na  $m_x$  przyjmie postać

$$(212.2) \quad m_x = \frac{\bar{B}}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right),$$

którą uprościmy jeszcze na

$$m_x = \frac{\bar{B}}{a^2} \frac{d^2 w}{d\xi^2},$$

ponieważ jak wykazały studia porównawcze wyraz  $\partial u / \partial \xi$  jest tak samo mały wobec  $\partial^2 w / \partial \xi^2$  jak pominięty powyżej wyraz we wzorze na  $n_\varphi$  wobec pozostałego.

Uważając  $\bar{B}$  jako zależne od  $x$  wstawiamy powyższe wartości  $n_\varphi$  i  $m_x$  w rów. (212.1) i otrzymujemy ogólne równanie różniczkowe dla ściany zbiornika

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left( \bar{B} \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) + \bar{A} a^2 (1 - \nu^2) w = -Z a^4 = a^4 \gamma (h - x),$$

gdzie  $x = a\xi$ . Rozwiążemy je w dwu przypadkach szczególnych: (A) przy grubości stałej; (B) przy grubości liniowo zmiennej.

A. Przy  $g = \text{stałej}$  równanie nasze przyjmie postać

$$(212.3) \quad \bar{B} \frac{d^4 w}{d\xi^4} + \bar{A} a^2 (1 - \nu^2) w = a^4 \gamma (h - x).$$

Gdybyśmy szukając tylko napięć błonowych pominęli zgięcie, czyli skreślili wyraz pierwszy, to otrzymalibyśmy

$$(212.4) \quad w = \frac{a^2 \gamma}{\bar{A} (1 - \nu^2)} (h - x),$$

co jest widocznie rozwiązaniem szczególnym równania pełnego. Rozwiązanie ogólne znajdziemy dodając do powyższego całkę ogólną równania

$$(212.5) \quad \bar{B} \frac{d^4 w}{d\xi^4} + \bar{A} a^2 (1 - \nu^2) w = 0.$$

Jest nią

$$(212.6) \quad w = e^{-\kappa \frac{x}{a}} \left( C_1 \cos \kappa \frac{x}{a} + C_2 \sin \kappa \frac{x}{a} \right) + e^{\kappa \frac{x}{a}} \left( C_3 \cos \kappa \frac{x}{a} + C_4 \sin \kappa \frac{x}{a} \right),$$

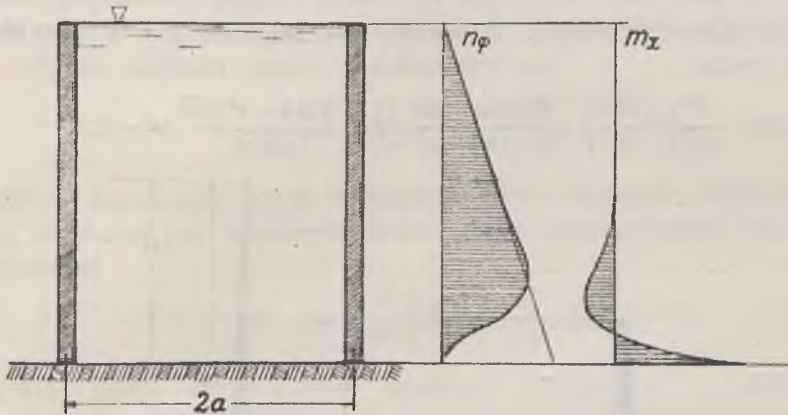
gdzie

$$\kappa = \sqrt[4]{3 \frac{a^2}{\bar{B}} (1 - \nu^2)}.$$

Do wyznaczenia stałych  $C_i$  posłużą w ogóle warunki brzegowe następujące:

a) Dla brzegu górnego np. swobodnego jest  $m_x=0$  i  $q_x=0$ ,  
a więc  $w''=0$  i  $w'''=0$  dla  $x=h$ .

b) Dla brzegu dolnego np. w przypadku jego utwierdzenia w bardzo sztywnej podstawie zbiornika jest  $w=0$  i  $w'=0$  dla  $x=0$ .



Rys. 135.

Przy wysokości  $h$  niezbyt małej wobec  $a$  wypadają stałe  $C_3$  i  $C_4$ , tak małe, że można je z przybliżeniem dostatecznym przyjąć równe zeru. Wtedy z dwu warunków następujących znajdujemy

$$C_1 = -\frac{a^2 \gamma}{A(1-\nu^2)} h, \quad C_2 = \frac{a^2 \gamma}{A(1-\nu^2)} \left( \frac{a}{\alpha} - h \right),$$

a stąd przemieszczenia

$$(212.7) \quad w = \frac{a^2 \gamma}{Eg} \left\{ h - x - e^{-\alpha \frac{x}{a}} \left[ h \cos \alpha \frac{x}{a} - \left( \frac{a}{\alpha} - h \right) \sin \alpha \frac{x}{a} \right] \right\},$$

napięcia obwodowe

$$(212.8) \quad n_\varphi = a \gamma \left\{ h - x + e^{-\alpha \frac{x}{a}} \left[ -h \cos \alpha \frac{x}{a} + \left( \frac{a}{\alpha} - h \right) \sin \alpha \frac{x}{a} \right] \right\},$$

momenty zginające

$$(212.9) \quad m_x = -\frac{a \gamma g}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} e^{-\alpha \frac{x}{a}} \left[ \left( \frac{a}{\alpha} - h \right) \cos \alpha \frac{x}{a} + h \sin \alpha \frac{x}{a} \right].$$

Rys. 135 przedstawia wykresy dla  $n_\varphi$  i  $m_x$  uwidaczniające rozmieszczenie napięć w przypadku konkretnym.

B. Niechaj grubość ściany zbiornika  $g$  maleje ku górze tak że w odległości  $x_0$  od zwierciadła cieczy byłaby równa 0 (Rys. 136). Umieściwszy tam początek współrzędnych  $x$  napiszemy

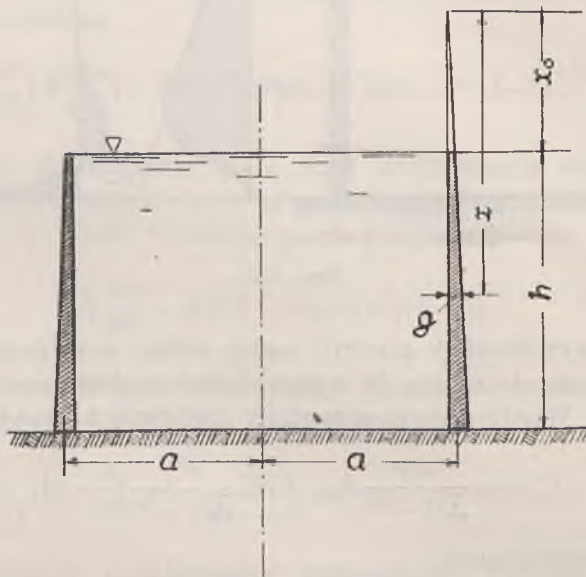
$$g = ax,$$

a wyrażenia

$$\bar{A} = \frac{Eax}{1-\nu^2}, \quad \bar{B} = \frac{Ea^3x^3}{12(1-\nu^2)}$$

określą obie sztywności. Równanie różniczkowe dla  $w$  przybierze teraz postać

$$(212.10) \quad \frac{d^2}{d\xi^2} \left( x^3 \frac{d^2w}{d\xi^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)a^2}{a^2} xw = \frac{12(1-\nu^2)\gamma a^4}{Ea^3} (x-x_0),$$



Rys. 136.

gdy przyjmiemy całkowite napełnienie zbiornika.

Tutaj znowu znajdujemy łatwo rozwiązanie szczególne:

$$(212.11) \quad w = \frac{a^2 \gamma}{Ea} \frac{x-x_0}{x}.$$

Odpowiednimi napięciami błonowymi są  $n_\varphi = a\gamma(x-x_0)$ . Moment  $m_x$  nie znika teraz jak poprzednio gdy  $w$  było liniowo zależne od  $x$ , ale stosownie do wzoru 212.2 ma wartość

$$(212.12) \quad m_x = -\frac{a^2 \gamma a^2}{6(1-\nu^2)} \nu_0,$$

widocznie bardzo małą.

Równanie jednorodne, którego rozwiązanie ogólne wraz z powyższym szczególnym (212.11) pozwoli spełnić warunki brzegowe, można napisać w postaci:

$$\frac{1}{x} \frac{d^2}{dx^2} \left( x^3 \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 a^2} w = 0.$$

Równanie tego samego typu otrzymał G. Kirchhoff badając drgania poprzeczne pręta o przekroju zmiennym (Ges. Abh. str. 339, Lipsk 1882) i wykonał jego całkowanie w sposób następujący:

Wyraz pierwszy można przekształcić na

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left\{ x^2 \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dw}{dx} \right) \right] \right\},$$

co łatwo sprawdzić przez wykonanie różniczkowań. Naznaczone tutaj działanie jest widocznie równoważne dwukrotnemu działaniu operatorem

$$L(\dots) \equiv \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \left[ x^2 \frac{d}{dx} (\dots) \right].$$

Gdy nadto wprowadzimy parametr pomocniczy  $\rho$  określony równaniem

$$\rho'' \equiv \frac{12(1-\nu^2)}{a^2 a^2},$$

to równanie różniczkowe naszego zagadnienia przepiszemy w prostej postaci

$$(212.13) \quad LL(w) + \rho^4 w = 0$$

przypominającej rów. (188.7) drgania płyty okrągłej. To też całkowanie odbywa się również przez funkcję Besselowskie. Rów. (212.13) da się przekształcić w sposób dwojaki, dając:

$$L[L(w) + i\rho^2 w] - i\rho^2[L(w) + i\rho^2 w] = 0,$$

albo też

$$L[L(w) - i\rho^2 w] + i\rho^2[L(w) - i\rho^2 w] = 0.$$

Stąd wynika, że równanie nasze jest równoważne dwom równaniom różniczkowym rzędu drugiego:

$$(212.14) \quad L(w) \pm i\rho^2 w = 0,$$

a rozwiązanie jednego z nich jest jako liczba zespolona sprzężone z rozwiązaniem drugiego. Z tego wynika dalej, że oba rozwiązania są liniowo niezależne, stanowią więc rozwiązanie zupełne równania (212.13), a nadto, że tak części rzeczywiste jak i urojone obu rozwiązań w połączeniach liniowych ze stałymi całkowania tworzą

układy rozwiązań. Wystarczy przeto zająć się jednym równaniem, które napisane szczegółowo ma postać

$$x \frac{d^2 w}{dx^2} + 2 \frac{dw}{dx} + i \rho^2 w = 0.$$

Wprowadziwszy nowe zmienne  $\eta$  i  $\zeta$  przez podstawienie

$$\eta = y\sqrt{i} = 2\rho\sqrt{ix}, \quad w = \frac{\zeta}{\sqrt{x}},$$

przekształcimy to równanie na znane równanie Bessel'a

$$(212.15) \quad \eta^2 \frac{d^2 \zeta}{d\eta^2} + \eta \frac{d\zeta}{d\eta} + (\eta^2 - 1)\zeta = 0.$$

Jego całką ogólną jest, jak poucza teoria funkcji Besselowskich

$$\zeta = A \cdot J_1(\eta) + B H_1^{(1)}(\eta),$$

gdzie  $J_1$  i  $H_1^{(1)}$  są funkcjami Besselowskimi rzędu pierwszego o argumentie zespolonym  $\eta = y\sqrt{i}$ . Funkcje te dają się wyrazić przez funkcje rzędu zerowego za pomocą związków

$$J_1(\eta) = -\frac{dJ_0(\eta)}{d\eta}, \quad H_1^{(1)}(\eta) = -\frac{dH_0^{(1)}(\eta)}{d\eta},$$

których uzasadnienie znajdzie czytelnik w podstawowym podręczniku funkcji Besselowskich G. N. Watsona (Cambridge 1922), albo w zwięzłym ujęciu np. w książce: Riemann-Weber, Diff. u. Integralgleichungen der Mechanik u. Physik (wyd. 8 z r. 1930, t. I, str. 403 i nast.). F. Schleicher, który napotkał te same funkcje w badaniach ugięcia płyt na podłożu sprężystym (Berlin 1926) i opracował dla nich potrzebne tablice liczbowe, wprowadził następujące oznaczenia części rzeczywistych i urojonych:

$$J_0(\eta) = J_0(y\sqrt{i}) = Z_1(y) + i Z_2(y) \\ H_0^{(1)}(\eta) = H_0^{(1)}(y\sqrt{i}) = Z_3(y) + i Z_4(y).$$

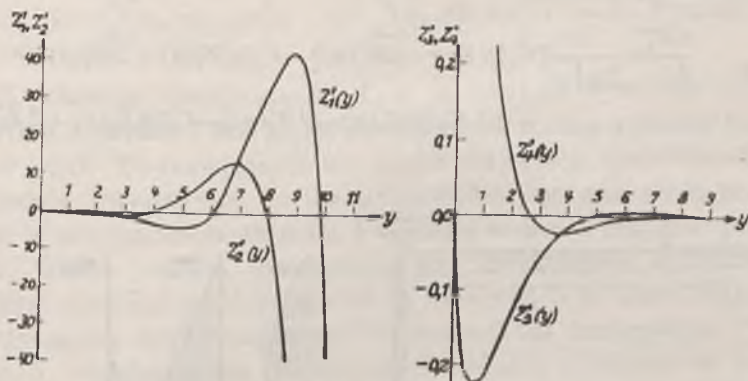
Z tymi oznaczeniami można rozwiązanie równania (212.13) napisać w postaci

$$(212.16) \quad \zeta = w\sqrt{x} = C_1 Z_1'(y) + C_2 Z_2'(y) + C_3 Z_3'(y) + C_4 Z_4'(y),$$

gdzie  $C_1, \dots, C_4$  są nowymi stałymi całkowania a kreski nad  $Z$  oznaczają różniczkowanie względem argumentu  $y$ . Z podanych na rys. 137 wykresów funkcji  $Z'$  widać, że funkcje  $Z_3'$  i  $Z_4'$  zanikają ze wzrostem argumentu podobnie jak drgania tłumione z czasem.



Funkcje te wyznaczają zaburzenie, jakie wychodzi z brzegu górnego ściany i powstaje wtedy, gdy tam zachodzą warunki brzegowe nie dające się spełnić przez rozwiązanie szczególne równania nie-



Rys. 137.

jednorodnego. Natomiast funkcje  $Z'_1$  i  $Z'_2$  zachowują się odwrotnie zanikając w kierunku ubywania argumentu i odzwierciedlając wpływ dna.

Przy pomocy równania różniczkowego funkcji Besselowskich można ich drugą pochodną wyrazić przez pierwszą i funkcję samą. Ze związków tych podawanych w książkach wymienionych powyżej wypływają dla argumentu zespolonego  $y\sqrt{i}$  po rozdzieleniu części rzeczywistej i urojonej wzory następujące:

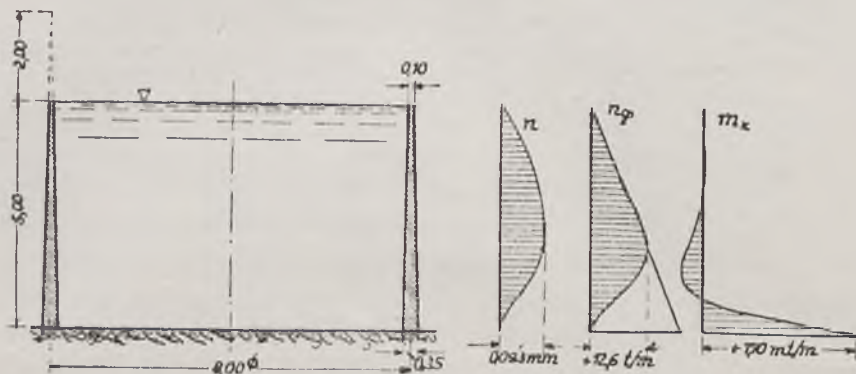
$$\begin{aligned} Z_1''(y) &= Z_2'(y) - \frac{1}{y} Z_1'(y); & Z_2''(y) &= -Z_1(y) - \frac{1}{y} Z_2'(y) \\ Z_3''(y) &= Z_4(y) - \frac{1}{y} Z_3'(y); & Z_4''(y) &= -Z_3(y) - \frac{1}{y} Z_4'(y). \end{aligned}$$

Te wzory można zastosować do obliczenia napięć odpowiadających rozwiązaniu znalezionemu powyżej. Tą drogą otrzymano

$$(212.17) \quad \left\{ \begin{aligned} n_y &= \frac{\bar{A}(1-\nu^2)}{a} w = \frac{Ea}{a} \sqrt{x} [C_1 Z_1'(y) + C_2 Z_2'(y) + C_3 Z_3'(y) + C_4 Z_4'(y)] \\ m_x &= \bar{B} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{Ea^3}{48(1-\nu^2)} \sqrt{x} [C_1 \{y^2 Z_2'(y) - 4y Z_2(y) + 8Z_1'(y)\} - \\ &\quad - C_2 \{y^2 Z_1'(y) - 4y Z_1(y) - 8Z_2'(y)\} + \\ &\quad + C_3 \{y^2 Z_4'(y) - 4y Z_4(y) + 8Z_3'(y)\} - \\ &\quad - C_4 \{y^2 Z_3'(y) - 4y Z_3(y) - 8Z_4'(y)\}] \\ q_x &= \frac{dm_x}{dx} = \frac{Ea^3 a^2}{24(1-\nu^2)} \sqrt{x} [C_1 \{y Z_1(y) + 2Z_2'(y)\} + \\ &\quad + C_2 \{y Z_2(y) - 2Z_1'(y)\} + C_3 \{y Z_3(y) + 2Z_4'(y)\} + \\ &\quad + C_4 \{y Z_4(y) - 2Z_3'(y)\}]. \end{aligned} \right.$$

Dolny brzeg zbiornika uważa się zwykle za utwierdzony w dnie traktowanym jako ciało sztywne. Wtedy do wyznaczenia stałych jest potrzebna wartość

$$(212.18) \quad \frac{dw}{dx} = \frac{1}{2x\sqrt{x}} [C_1\{yZ_2y - 2Z_1'(y)\} - C_2\{yZ_1(y) + 2Z_2'(y)\} + \\ + C_3\{yZ_4(y) - 2Z_3'(y)\} - C_4\{yZ_3(y) + 2Z_4'(y)\}].$$



Rys. 138.

Rys. 138 przedstawia przekrój pionowy zbiornika, dla którego wykonano (Flügge l. c.) obliczenie szczegółowe dające uwidocznione tam wykresy według programu następującego:

„Najpierw oblicza się według rozwiązania szczególnego (212.11) przemieszczenie  $w$  i kąt obrotu  $dw/dx$  z równań

$$w = \frac{\alpha^2 \gamma}{E a} \cdot \frac{h}{x_0 + h}, \quad \frac{dw}{dx} = \frac{\alpha^2 \gamma}{E a} \frac{x_0}{(x_0 + h)^2}.$$

W rozwiązaniu równania jednorodnego (212.16) kładzie się  $C_3 = C_4 = 0$ , ponieważ warunki brzości nieobciążonego są spełnione już przez rozwiązania szczególne (212.11), gdy pomijamy mały moment dodatkowy (212.12). Dla obliczenia  $C_1$  i  $C_2$  żąda się, aby wartości  $w$  i  $dw/dx$ , które mają być obliczone z (212.16 i 18) dla  $x = x_0 + h$  były liczbowo równe, a co do znaku przeciwne podanym właśnie wartościom brzegowym rozwiązania równania niejednorodnego. Po wstawieniu wartości liczbowych przykładu z obliczonymi stałymi całkowania we wzory (212.16 i 17), otrzymuje się napięcia przedstawione wykresami. Widać z nich, że momenty wytworzone przez utwierdzenie brzości dolnego nie rozciągają się aż do brzości górnej, tak że nie zakłócają warunków brzegowych spełnionych tam przez rozwiązanie równania jednorodnego (212.11)“.

**§ 213. Powłoka walcowa o brzegach podłużnych prostych a poprzecznych kołowych.** Przyjąwszy że brzości poprzeczne leżą w prze-

krojach  $x=0$  i  $x=l$ , uczynimy zadość równaniom różniczkowym (210.4 do 6) przez funkcje

$$(213.1) \quad u = \sum_0^{\infty} u_n \cos n\pi \frac{x}{l}; \quad v = \sum_1^{\infty} v_n \sin n\pi \frac{x}{l}; \quad w = \sum_1^{\infty} w_n \sin n\pi \frac{x}{l},$$

jeżeli składowe obciążenia  $X, Y, Z$  są również wyrażone szeregami Fouriera o okresie  $l$  lub  $2l$ . Dalszy rachunek można wykonać tak samo jak w § 211. To rozwiązanie nie spełni oczywiście dowolnie obranych warunków brzegowych, co nie przeszkadza jego znaczeniu praktycznemu w przypadkach długości  $l$  wielkiej wobec wymiarów poprzecznych. Wtedy bowiem rozwiązanie jest dostatecznie dokładne poza wąskimi strefami przylegającymi do brzegów, a w wielu wypadkach praktycznych czyni nawet zadość warunkom brzegowym. W niektórych zagadnieniach technicznych (dachy) można w dobrym przybliżeniu w równaniach równowagi (209.4 do 9) pominąć momenty zginające  $m_x$ , momenty skręcające  $m_{xy}$ ,  $m_{yx}$  i siły poprzeczne  $q_x$ . Wtedy rów. (209.7) sprowadza się do

$$(213.2) \quad q_y = \frac{1}{a} \frac{\partial m_y}{\partial \varphi},$$

a równania (209.4 do 6) dają po podstawieniu tej wartości i podstawieniu  $X=Y=Z=0$ :

$$(213.3 \text{ do } 5) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_y = -\frac{\partial q_y}{\partial \varphi} = -\frac{1}{a} \frac{\partial^2 m_y}{\partial \varphi^2} \dots \quad (\text{z } 209.6) \\ \frac{\partial n_{xy}}{\partial \xi} = q_y - \frac{\partial n_y}{\partial \varphi} = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial m_y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^3 m_y}{\partial \varphi^3} \right) \dots \quad (\text{z } 209.5) \\ \frac{\partial^2 n_x}{\partial \xi^2} = -\frac{\partial^2 n_{yx}}{\partial \xi \partial \varphi} = -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial^2 m_y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 m_y}{\partial \varphi^4} \right) \dots \quad (\text{z } 209.4). \end{array} \right.$$

Sięgając teraz do równań przemieszczeniowych (209.19 do 26) możemy w czterech pierwszych skreślić wyrazy z współczynnikiem  $\bar{B}$  wobec czego staje się  $n_{yx} = n_{xy}$ , a ponieważ z momentów uwzględniamy tylko  $m_x$ , przeto napiszemy:

$$(213.6) \quad (209^*) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_y = \frac{\bar{A}}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w + r \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \\ n_x = \frac{\bar{A}}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + r \frac{\partial v}{\partial \varphi} + r w \right) \\ n_{yx} = n_{xy} = \frac{\bar{A}}{a} \frac{1-r}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \\ m_y = \frac{\bar{B}}{a^2} \left( w + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + r \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right). \end{array} \right.$$

Z pierwszych dwu równań znajdujemy

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{a}{\bar{A}(1-\nu^2)} (n_x - \nu n_\varphi),$$

a więc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} = \frac{a}{\bar{A}(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial n_x}{\partial \varphi} - \nu \frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} \right).$$

Różniczkowanie wyrażenia na  $n_{\varphi x}$  daje:

$$\frac{\partial n_{\varphi x}}{\partial \xi} = \frac{\bar{A}}{a} \frac{1-\nu}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right).$$

Z obu równań ostatnich wynika

$$(a) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} = \frac{a}{\bar{A}(1-\nu^2)} \left[ 2(1+\nu) \frac{\partial n_{x\varphi}}{\partial \xi} - \frac{\partial n_x}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial n_\varphi}{\partial \varphi} \right].$$

Z pierwszego i drugiego z równań (213.6) otrzymujemy

$$(b) \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w = \frac{a}{\bar{A}(1-\nu^2)} (n_\varphi - \nu n_x),$$

a stąd po zróżniczkowaniu dwukrotnym względem  $\xi = x$  a:

$$(c) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2 \partial \varphi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{a}{\bar{A}(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 n_\varphi}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 n_x}{\partial \xi^2} \right).$$

Ale z (a) wynika przez różniczkowanie względem  $\varphi$ :

$$(d) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2 \partial \varphi} = \frac{a}{\bar{A}(1-\nu^2)} \left[ 2(1+\nu) \frac{\partial^2 n_{x\varphi}}{\partial \xi \partial \varphi} - \frac{\partial^2 n}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 n_\varphi}{\partial \varphi^2} \right].$$

Odjęcie (d) od (c) daje

$$(e) \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} = \frac{a}{\bar{A}(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 n_\varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 n_x}{\partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial^2 n_\varphi}{\partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial^2 n_x}{\partial \xi^2} - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 n_{x\varphi}}{\partial \xi \partial \varphi} \right].$$

Różniczkując teraz czwarte z równań (213.6) dwukrotnie względem  $\xi$  mamy

$$\frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \xi^2} = \frac{\bar{B}}{a^2} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + \nu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \right],$$

a po wstawieniu tutaj wartości (e):

$$(f) \quad \frac{\partial^2 m_\varphi}{\partial \xi^2} = \frac{\bar{B}}{\bar{A}a(1-\nu^2)} \left[ \frac{\partial^2 n_\varphi}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 n_\varphi}{\partial \varphi^2} + (1-\nu^2) \frac{\partial^4 n_\varphi}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial^4 n_\varphi}{\partial \varphi^4} + \nu \frac{\partial^4 n_\varphi}{\partial \xi^4} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 n_x}{\partial \varphi^2} - \nu \frac{\partial^2 n_x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^4 n_x}{\partial \varphi^4} - \nu^2 \frac{\partial^4 n_x}{\partial \xi^4} - 2(1+\nu) \left( \frac{\partial^2 n_x}{\partial \xi \partial \varphi} + \frac{\partial^4 n_{x\varphi}}{\partial \xi \partial \varphi^3} \right) - 2\nu(1+\nu) \frac{\partial^4 n_{x\varphi}}{\partial \xi^3 \partial \varphi} \right].$$

Zrózniczkowawszy to jeszcze dwukrotnie względem  $\xi$  wyrazimy przy pomocy równań (213.3 do 5) napięcia podłużne i poprzeczne przez  $m_\varphi$  otrzymując w ten sposób jedno równanie różniczkowe rzędu ósmego dla  $m_\varphi$ . Po wprowadzeniu skrótu  $k \equiv \bar{B}/\bar{A}a^2$  i uporządkowaniu równanie to przyjmuje postać

$$(213.7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^8 m_\varphi}{\partial \varphi^8} + (2 + \nu) \frac{\partial^8 m_\varphi}{\partial \xi^2 \partial \varphi^6} + 2 \frac{\partial^6 m_\varphi}{\partial \varphi^6} + (1 + 2\nu) \frac{\partial^8 m_\varphi}{\partial \xi^4 \partial \varphi^4} + \\ & + 2(2 + \nu) \frac{\partial^6 m_\varphi}{\partial \xi^2 \partial \varphi^4} + \frac{\partial^4 m_\varphi}{\partial \varphi^4} + \nu \frac{\partial^8 m_\varphi}{\partial \xi^6 \partial \varphi^2} + \\ & + (1 + \nu)^2 \frac{\partial^6 m_\varphi}{\partial \xi^4 \partial \varphi^2} + (2 + \nu) \frac{\partial^4 m_\varphi}{\partial \xi^2 \partial \varphi^2} + \frac{1 - \nu^2}{k} \frac{\partial^4 m_\varphi}{\partial \varphi^4} = 0. \end{aligned} \right.$$

Rozwiązujemy je ogólnie wyrażeniami o postaci podobnej do (213.1). Przyjmując jako wyraz ogólny rozwinięcia Fourirowskiego

$$m_\varphi = C e^{m\varphi} \sin \lambda \frac{x}{a}, \quad \lambda = \frac{n\pi a}{l},$$

otrzymujemy po wstawieniu w równanie różniczkowe (213.7) równanie warunkowe do wyznaczenia parametru  $m$  następujące:

$$(213.8) \quad \begin{aligned} & m^8 + [2 - (2 + \nu)\lambda^2]m^6 + [(1 + 2\nu)\lambda^4 - 2(2 + \nu)\lambda^2 + 1]m^4 + \\ & + [-\nu\lambda^6 + (1 + \nu)^2\lambda^4 - (2 + \nu)\lambda^2]m^2 + \frac{1 - \nu^2}{k}\lambda^4 = 0. \end{aligned}$$

Pierwiastki tego równania są tak samo jak równania (211.5) parami liczbowo równe, a co do znaku przeciwne. Przy tym są wszystkie zespolone. Można je przeto wyrazić w postaci

$$\begin{aligned} m_1 &= r + qi, & m_2 &= -r - qi, & m_3 &= r - qi, & m_4 &= -r + qi, \\ m_5 &= s + ti, & m_6 &= -s - ti, & m_7 &= s - ti, & m_8 &= -s + ti. \end{aligned}$$

Dalszy tok obliczenia, dający się uprościć w przypadkach szczególnych, zabrałby tutaj zbyt wiele miejsca. Czytelnik zainteresowany znajdzie w piśmiennictwie polskim jedyny wprowadzie, ale starannie i oryginalnie opracowany przykład w piśmie „Cement“ z r. 1933, str. 44—59<sup>1)</sup>, a liczne w piśmiennictwie niemieckim<sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> W. Żenczykowski, „Dźwigiary sklepieniowe“.

<sup>2)</sup> Ob. N. Flügge, „Statik u. Dynamik der Schalen“, Berlin 1934, str. 137—144.

§ 214. **Teoria ogólna powłoki obrotowej niewiotkiej.** Przy oznaczeniach stosowanych już powyżej i uzupełnionych na rys. 139 a i b <sup>1)</sup> napiszemy najpierw warunek rzutów na kierunek stycznej do południka, a zarazem kierunek składowej  $Y$  siły obciążającej odniesionej do jednostki pola powłoki. Mamy więc (z pominięciem nieskończenie małych rzędu wyższego):

$$\frac{\partial}{\partial a}(n_2 r) da d\varphi + \varrho_2 \frac{\partial t_{12}}{\partial \varphi} da d\varphi - \varrho_2 n_1 \cos a da d\varphi - q_2 r da d\varphi + Y r \varrho_2 da d\varphi = 0.$$

Wyraz trzeci zawiera czynnik  $\cos a$  ponieważ wypadkowe napięcie  $n_1 \varrho_2 da$  i  $\left(n_1 + \frac{\partial n_1}{\partial \varphi} d\varphi\right) \varrho_2 da$  zamykających kąt  $d\varphi$  leży w płaszczyźnie równoleżnika. Po uproszczeniu przez  $da \cdot d\varphi$  otrzymujemy pierwsze równanie różniczkowe równowagi:

$$(214.1) \quad \frac{\partial(n_2 r)}{\partial a} + \varrho_2 \frac{\partial t_{12}}{\partial \varphi} - n_1 \varrho_2 \cos a - q_2 r + r \varrho_2 Y = 0.$$

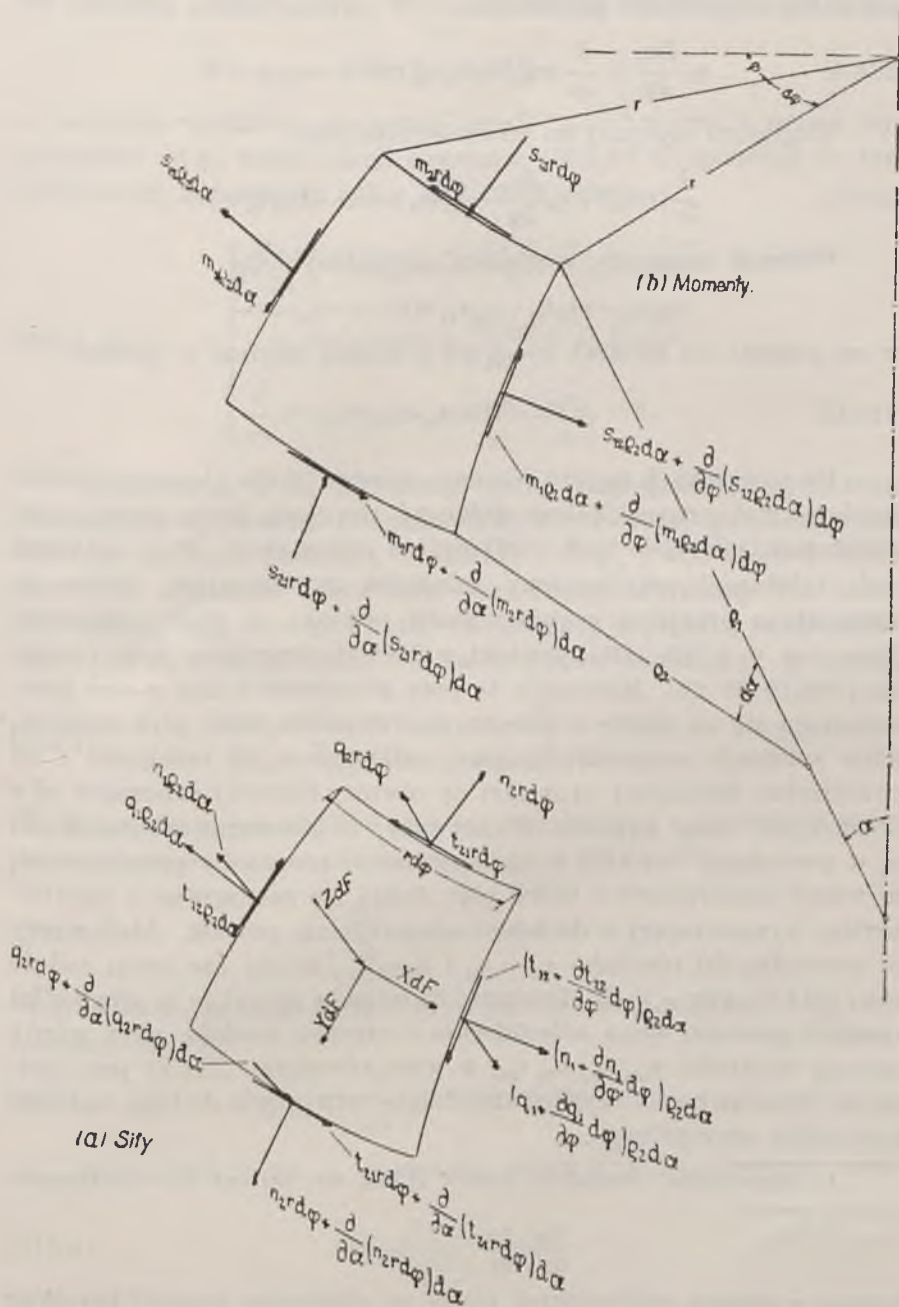
Ustawiając równanie rzutów na styczną do równoleżnika, uwzględnimy, że obie siły  $q_1 \varrho_2 da$  dają składowe poziome  $\varrho_1 q_2 da \sin a$  skierowane przeciwnie i zamykające kąt  $d\varphi$ , po czym znajdujemy

$$(214.2) \quad \frac{\partial(t_{21} r)}{\partial a} + \varrho_2 \frac{\partial n_1}{\partial \varphi} + \varrho_2 t_{12} \cos a - q_1 \varrho_2 \sin a + r \varrho_2 X = 0.$$

Równanie rzutów na normalną daje:

$$(214.3) \quad \varrho_2 n_1 \sin a + r n_2 + \varrho_2 \frac{\partial q_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial a}(r q_2) + r \varrho_2 Z = 0.$$

<sup>1)</sup> Podkreślimy tutaj szczegół dotyczący obioru kierunku dodatniego na normalnej  $n$  do powierzchni określającej powłokę. Kierunek ten ustalamy według krzywej przekroju powierzchni płaszczyzną przechodzącą przez  $n$  jako wskazującą ku środkowi krzywizny tego przekroju. Gdy obrawszy ten przekrój w danym punkcie powierzchni poprowadzimy przeczeń wszelkie inne przekroje normalne, to jak wiadomo z teorii powierzchni mogą zajść dwa przypadki ogólne: albo wszystkie środki krzywizny przekrojów leżą po tej samej stronie powierzchni, którą wtedy nazywają „synklastyczną“, albo też dwa przekroje rozdziłają element powierzchni na części takie, że przekroje należące do jednej części mają środki krzywizny po jednej stronie powierzchni, a przekroje w części sąsiedniej mają te środki po stronie drugiej. Wtedy powierzchnię nazywają „antyklastyczną“, a krzywiznom przekrojów obranych za dodatnie w części pierwszej odpowiadają krzywizny ujemne w części drugiej. Przeciwny płaszczyzną prostopadłą do normalnej  $n$ , która na tej normalnej wyznacza od punktu powierzchni odcinek  $\delta n$  nieskończenie mały, otrzymujemy jako (nieskończenie mały) krzywą przekroju tzw. „wskaźnicę“ (indicatrix Dupin'a). Jest to krzywa rzędu drugiego, która w obszarze synklastycznym powierzchni jest w ogóle elipsą, a w obszarze antyklastycznym hiperbolą.



Rys. 139 a, b

Przechodząc do równań momentów (rys. 139 a, b), otrzymamy względem stycznej do południka:

$$(214.4) \quad \varrho_2 \frac{\partial m_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial}{\partial a} (r s_{21}) + \varrho_2 s_{12} \cos a - r \varrho_2 q_1 = 0.$$

Względem stycznej do równoleżnika zaś:

$$(214.5) \quad \frac{\partial}{\partial a} (r m_2) + \varrho_2 \frac{\partial s_{12}}{\partial \varphi} - \varrho_2 m_1 \cos a - r \varrho_2 q_2 = 0.$$

Wreszcie momenty względem normalnej dają

$$r \varrho_2 t_{12} - r \varrho_2 t_{21} - \varrho_2 s_{12} \sin \varphi + r s_{21} = 0,$$

co ze względu na związek  $r = \varrho_1 \sin a$  można napisać w postaci:

$$(214.6) \quad \frac{s_{12}}{\varrho_1} - \frac{s_{21}}{\varrho_2} = t_{12} - t_{21} \text{ } ^1).$$

Do powyższych sześciu równań, między 10-ciu nieznanymi wielkościami statycznymi należy dołączyć równania teorii sprężystości wyrażające zależność tych wielkości od odkształceń. Przy szukaniu tych zależności przyjmujemy założenia upraszczające, które się narzucają z przyjęcia grubości małej powłoki, a które rozpatrzyliśmy już w § 209. Dla powłoki walcowej otrzymano tam równania (209.19 do 26). Równania te przy promieniu walca  $a \rightarrow \infty$  przekształcają się na proste i przejrzyste równania teorii płyt cienkich, gdzie założenie zależności liniowej odkształceń od odległości  $z$  od powierzchni środkowej prowadzi do również liniowej zależności od  $z$  składowych stanu napięcia. Zważywszy, że zboczenia od liniowości są w powłokach cienkich wcale nieznaczne można by przypuszczać, że wzory zaczerpnięte z teorii płyt dadzą się zastosować z przybliżeniem wystarczającym do teorii odkształcenia powłok. Atoli wzory te prowadzą do równości  $s_{12} = s_{21}$  i  $t_{12} = t_{21}$ , której nie czyni zadość rów. (214.6), gdy  $\varrho_1 \neq \varrho_2$ . Trudność ta odpada jednakże w przypadku *symetrii obrotowej stanu odkształcenia i napięcia powłoki*, gdyż wtedy znikają wielkości  $s_{12}$ ,  $s_{21}$ ,  $t_{12}$ ,  $t_{21}$ , a więc równanie (214.6) jest spełnione. Dlatego ograniczymy tutaj dalsze rozwinięcia do tego ważnego przypadku szczególnego.

<sup>1)</sup> Odpowiednie równanie u Love'a (§ 333, wz. 48) ma przy znakowaniu naszym postać

$$\frac{s_{12}}{\varrho_1} + \frac{s_{21}}{\varrho_2} + t_{12} + t_{21} = 0.$$

Różnica w znakach algebraicznych polega na odmiennym ustaleniu kierunków dodatnich  $s$  i  $t$  uwidocznionym na rys. 137 a, b przez wektory wykresowane, co wyrażają także równania

$$s_{21} = -(s_{21})_{\text{Love}}; \quad t_{12} = -(t_{12})_{\text{Love}}.$$



§ 215. Teoria zgięciowa powłoki w stanie napięcia i odkształcenia obrotowo symetrycznym. W stanie takim musi być (rys. 139a)

$$X=0, \quad q_1=0,$$

a wszystkie wielkości statyczne (czyli „przekrojowe”) muszą być niezależne od  $\varphi$ , wobec czego równania (214.2 i 4) spełniają się tożsamościowo, a powstają tylko trzy następujące:

$$(215.1 \text{ do } 3) \quad \begin{cases} \frac{\partial(n_2 r)}{\partial a} - n_1 \varrho_2 \cos \alpha - q_2 r + r \varrho_2 Y = 0 \\ \varrho_2 n_1 \sin \alpha + r n_2 + \frac{\partial(r q_2)}{\partial a} + r \varrho_2 Z = 0 \\ \frac{\partial}{\partial a}(r m_\varphi) - \varrho_2 m_1 \cos \alpha - r \varrho_2 q_2 = 0. \end{cases}$$

Napięcia  $n_1$  i  $n_2$  wyrazimy przez odpowiednie wydłużenia jednostkowe  $\varepsilon_1$  (wzdłuż równoleżnika) i  $\varepsilon_2$  (wzdłuż południka) tak samo jak w teorii błonowej. Momenty zaś  $m_1$  i  $m_2$ , które w teorii płyt były wyrażone przez obie krzywizny, wyrazimy tak samo przez ubytki krzywizn głównych. Oznaczmy je przez  $\varkappa_1$  (w kierunku stycznym do równoleżnika) i  $\varkappa_2$  (w kierunku południka). A zatem:

$$(215.4) \quad \begin{cases} n_1 = \bar{A}(\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2); & m_1 = \bar{B}(\varkappa_1 + \nu \varkappa_2) \\ n_2 = \bar{A}(\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1); & m_2 = \bar{B}(\varkappa_2 + \nu \varkappa_1) \end{cases}$$

$\bar{A}$  i  $\bar{B}$  oznaczają jak w § 209 obie sztywności.  $\varepsilon_1$  i  $\varepsilon_2$  wyrazimy przez przemieszczenia  $u, v, w$  tak samo jak w § 206, a więc:

$$(206.1) \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \varphi} + v \cos \alpha + w \sin \alpha \right),$$

co ze względu, że teraz  $\partial u / \partial \varphi = 0$ , po podstawieniu wartości  $r = \varrho_1 \sin \alpha$  zamienia się na

$$(215.5) \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{\varrho_1} \cdot (v \cotg \alpha + w).$$

Wzór (206.2) na  $\varepsilon_2$  pozostaje oczywiście bez zmiany, czyli

$$(215.6) \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{\varrho_2} \left( \frac{\partial v}{\partial a} + w \right).$$

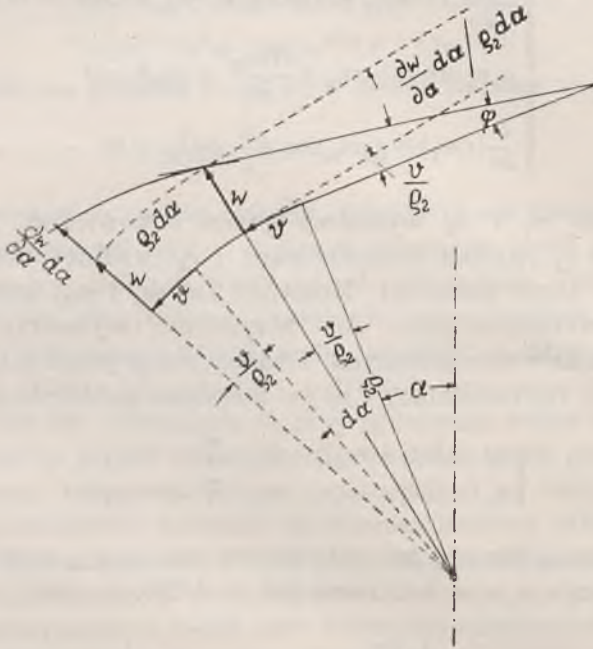
Ażeby teraz znaleźć wyrażenia odpowiednie dla zmian krzywizny  $\varkappa_1$  i  $\varkappa_2$  wprowadzimy jako wielkość pomocniczą kąt obrotu  $\psi$  stycznej do południka spowodowany obu przemieszczeniami  $v$  i  $w$  w płaszczy-

źnie przekroju południkowego, która jest zarazem płaszczyzną rysunku 140.

Przemieszczenie  $v$  zmienia kąt nachylenia  $\alpha$  stycznej do południka o  $v/\rho_2$ . Przemieszczenie  $w$  zaś pochyla tę styczną w stronę przeciwną o kąt

$$\frac{\partial w}{\partial a} da / \rho_2 da = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial w}{\partial a},$$

z pominięciem małych rzędu wyższego nad pierwszy.



Rys. 140

Kąt wypadkowy obrotu  $\psi$  określi przeto równanie

$$(215.7) \quad \psi = \frac{1}{\rho_2} \left( \frac{\partial w}{\partial a} - v \right).$$

Na skutek tego obrotu punkt przecięcia normalnej z osią powłoki przesuwa się w dół o  $\rho_1 \psi / \sin \alpha$ , wobec czego promień krzywizny „poprzecznej”  $\rho_1$  zamienia się na  $\rho_1 (1 + \psi \cotg \alpha)$ . A zatem krzywizna odpowiednia ubywa o

$$\kappa_1 = \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1 (1 + \psi \cotg \alpha)} = \sim \frac{\psi}{\rho_1} \cotg \alpha,$$

czyli po wstawieniu wartości z (215.7):

$$(215.8) \quad z_1 = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \left( \frac{\partial w}{\partial a} - v \right) \operatorname{ctg} a.$$

Ubytek krzywizny południka równa się stosunkowi  $d\psi/\varrho_2 da$ , a zatem:

$$(215.9) \quad z_2 = \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial w}{\partial a} - v \right).$$

Wstawiawszy wyrażenia znalezione w (215.4) otrzymujemy wzory przedstawiające wielkości statyczne w zależności od przemieszczeń:

$$(215.10 \text{ do } 13) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_1 = \bar{A} \left[ \frac{v \operatorname{ctg} a + w}{\varrho_1} + \frac{v}{\varrho_2} \left( \frac{\partial v}{\partial a} + w \right) \right] \\ n_2 = \bar{A} \left[ \frac{1}{\varrho_2} \left( \frac{\partial v}{\partial a} + w \right) + \frac{v}{\varrho_1} (v \operatorname{ctg} a + w) \right] \\ m_1 = \bar{B} \left[ \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \left( \frac{\partial w}{\partial a} - v \right) \operatorname{ctg} a + \frac{v}{\varrho_2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial w}{\partial a} - v \right) \right] = \\ \qquad \qquad \qquad = \bar{B} \left( \frac{\psi}{\varrho_1} \operatorname{ctg} a + \frac{v}{\varrho_2} \frac{\partial \psi}{\partial a} \right) \\ m_2 = \bar{B} \left[ \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial w}{\partial a} - v \right) + \frac{v}{\varrho_1} \cdot \frac{1}{\varrho_2} \left( \frac{\partial v}{\partial a} - v \right) \operatorname{ctg} a \right] = \\ \qquad \qquad \qquad = \bar{B} \left( \frac{1}{\varrho_2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial a} + \frac{r \psi}{\varrho_1} \operatorname{ctg} a \right). \end{array} \right.$$

Jak poprzednio jest tutaj

$$\bar{A} = \frac{Eg}{1-\nu^2}; \quad \bar{B} = \frac{Eg^3}{12(1-\nu^2)}; \quad g = \text{grubość powłoki.}$$

**§ 216. Ciąg dalszy. Wyprowadzenie równań różniczkowych.** Wyniki powyższe można też otrzymać z równań ogólniejszych jakie np. podaje Love w rozdz. XXIV „Elasticity“. Jednakże droga bezpośrednia obrana tutaj za przykładem Flügge’go ma zaletę pogłębienia i prostoty. Równania równowagi (215.1 do 3) i równania odkształceniowe (215.10 do 13) stanowią układ siedmiu równań różniczkowych do wyznaczenia tyłuż niewiadomych funkcji współrzędnych  $n_1, n_2, m_1, m_2, q_2, v, w$ . Jako droga naturalna rozwiązania nasuwa się rugowanie kolejne  $q_2, n_1, n_2, m_1$  i  $m_2$ , które prowadzi do układu dwu równań różniczkowych dla  $v$  i  $w$ , dających się całkować przez szeregi. W ten sposób rozwiązywano najpierw zagadnienia szczegółowe obrotowo-symetrycznego stanu napięcia i odkształcenia powłok obrotowych, zanim E. Meissner w r. 1913 wskazał na możli-

wość wielkiego uproszczenia w szukaniu rozwiązań przez wprowadzenie innych zmiennych zamiast  $v$  i  $w$ <sup>1)</sup>. Tymi zmiennymi są

$$\psi \text{ oraz } U = \varrho_1 \varrho_2.$$

Ponieważ podstawienie Meissnera prowadzi do celu także w przypadkach gdy grubość powłoki  $g$  jest zmienna wzdłuż południka, przeto założymy że  $g$ , a więc i  $\bar{B}$  jest funkcją  $\alpha$ , wobec czego

$$\frac{1}{\bar{B}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \alpha} = 3 \cdot \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \alpha}.$$

Gdy uwzględniając to wstawimy wyrażenia  $m_1$  i  $m_2$  w zależności od  $\psi$  z równań (215.12 i 13) w rów. (215.3), to po wykonaniu różniczkowań i uproszczeniu otrzymamy

$$(216.1) \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha^2} + \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right) + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \operatorname{ctg} \alpha + 3 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right] \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \\ - \left[ \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \operatorname{ctg}^2 \alpha + v - \frac{3v}{g} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \operatorname{ctg} \alpha \right] \frac{\psi}{\varrho_2} = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\bar{B}} = \frac{U}{\bar{B}}$$

ako równanie różniczkowe dla  $\psi$ . Z niewyzyskanych jeszcze równań warunkowych dojdziemy do drugiego równania dla  $U$ . W tym celu wstawimy najpierw w rów. (215.7) wyrażenia  $v$  i  $w$  otrzymane z rozwiązania równań (215.10 i 11)<sup>2)</sup> znajdując:

$$(216.2) \quad \varrho_2 \psi = \frac{\partial w}{\partial \alpha} - v = \frac{1}{1-v^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{n_1 \varrho_1}{A} \right) + \frac{n_1}{A} (\varrho_1 + v \varrho_2) \operatorname{ctg} \alpha - v \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{n_2 \varrho_1}{A} \right) - \right. \\ \left. - \frac{n_2}{A} (\varrho_2 + v \varrho_1) \operatorname{ctg} \alpha \right].$$

<sup>1)</sup> E. Meissner, Physik. Zeitschr. 14, 343, 1913; Vierteljahrsschr. d. Naturforsch. Gesellschaft. Zürich, Ročník 60, str. 23, r. 1915.

Geckeler wprowadził  $-Uh^2$  zamiast  $U$  zastosowanego przez Flügge'go ( $h = g/2$ )  
Znak — dlatego, ponieważ przyjął dodatnie  $p$  od wewnątrz.

<sup>2)</sup> To rozwiązanie daje najpierw

$$v \operatorname{ctg} \alpha + w = \frac{(n_1 - v n_2) \varrho_1}{A(1-v^2)}; \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha} + w = \frac{(n_2 - v n_1) \varrho_2}{A(1-v^2)},$$

a stąd

$$(a) \quad v \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{n_1(\varrho_1 + v \varrho_2) - n_2(\varrho_2 + v \varrho_1)}{A(1-v^2)}.$$

Różniczkując pierwsze z równań powyższych otrzymujemy

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{v}{\sin^2 \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \alpha} = \frac{1}{1-v^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\varrho_1 n_1}{A} \right) - v \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\varrho_1 n_2}{A} \right) \right].$$

Lewa strona tego równania przekształca się łatwo na

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} - v - \left( v \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\partial v}{\partial \alpha} \right) \operatorname{ctg} \alpha,$$

a wstawivszy tutaj wartość wyrazu w nawiasach z (a) znajdziemy (216.2).

To równanie wyraża  $\psi$  w zależności od  $n_1$  i  $n_2$ . Aby dojść do zależności od  $U = \varrho_1 q_2$ , trzeba z równań (215.1 i 2) wyrazić  $n_1$  i  $n_2$  przez  $q_2$ , co wykonamy najprościej zastępując jedno z tych równań warunkiem równowagi górnej części powłoki wyciętej stożkiem obrotowym o tworzących nachylonych do osi powłoki pod kątem  $\alpha$ . Gdy przy tym założymy, że  $Y = Z = 0$ , czyli że obciążenie działa tylko na brzegi powłoki, to suma składowych napięć  $n_2$  i  $q_2$  równoległych do osi obrotu, tj. napięcie

$$n_2 \sin \alpha \quad \text{ i } \quad q_2 \cos \alpha$$

musi być równa zero, z czego wynika

$$(216.3) \quad n_2 = -q_2 \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{U}{\varrho_1} \operatorname{ctg} \alpha^1).$$

<sup>1)</sup> Przy założeniu ogólniejszym obciążen  $Y$  i  $Z$  różnych od zera, otrzymamy jako warunek równowagi górnej części powłoki w przypadku istnienia także brzegu górnego o promieniu  $r_0$ :

$$2r\pi n_2 \sin \alpha + 2r\pi q_2 \cos \alpha - 2r_0\pi(n_{20} \sin \alpha_0 + q_{20} \cos \alpha_0) + \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha_0} (Y \sin \alpha + Z \cos \alpha) \varrho_2 d\alpha \cdot r d\varphi = 0,$$

czyli

$$(216.a) \quad \varrho_1 \sin \alpha (n_2 \sin \alpha + q_2 \cos \alpha) = F(\alpha) \equiv \int_{\alpha_0}^{\alpha} (Y \sin \alpha + Z \cos \alpha) \varrho_1 \varrho_2 \sin \alpha d\alpha + C,$$

gdzie stała  $C = 2r_0\pi(n_{20} \sin \alpha_0 + q_{20} \cos \alpha_0)$

$$n_{20} \equiv (n_2)_{\alpha=\alpha_0}; \quad q_{20} \equiv (q_2)_{\alpha=\alpha_0}.$$

Zamiast rów. (216.3) napiszemy teraz

$$(216.3 a) \quad n_2 = -q_2 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{F(\alpha)}{\varrho_1 \sin^2 \alpha},$$

a zamiast (216.4)

$$(216.4 a) \quad n_1 = -\frac{1}{\varrho_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \frac{F(\alpha)}{\varrho_2 \sin^2 \alpha} - \varrho_1 Z.$$

Wreszcie zamiast rów. (216.5) znajdziemy

$$(216.5 a) \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right) + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right] \frac{1}{\varrho_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \left[ \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \operatorname{ctg}^2 \alpha - \nu \left( 1 + \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \operatorname{ctg} \alpha \right) \right] \frac{1}{\varrho_2} U = -\bar{A}(1-\nu^2)\psi - \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{F(\alpha)}{\sin^2 \alpha} \right\} + \frac{1}{\varrho_2} \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{F(\alpha)}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \alpha} - \frac{g}{\varrho_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\varrho_1^2 Z}{g} \right) - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} (\varrho_1 + \nu \varrho_2) Z \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\nu}{\varrho_2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left\{ \frac{F(\alpha)}{\sin^2 \alpha} \right\} + \frac{\nu}{\varrho_2} \cdot \frac{F(\alpha)}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \alpha} - \frac{1}{\varrho_2} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} + \frac{\varrho_2}{\varrho_1} + 2\nu \right) \frac{F(\alpha) \operatorname{ctg} \alpha}{\sin^2 \alpha}.$$

Jak widać zmieniła się tutaj tylko prawa strona równania, która poprzednio zawierała tylko wyraz pierwszy  $-\bar{A}(1-\nu^2)\psi = -Rg\psi$ .

Podstawiawszy to w rów. (215.2) otrzymujemy

$$\varrho_2 n_1 \sin \alpha = -\varrho_1 n_2 \sin \alpha - \frac{\partial}{\partial a} (\varrho_1 \varrho_2) \sin \alpha - \varrho_1 \varrho_2 \cos \alpha = -\frac{\partial}{\partial a} (\varrho_1 \varrho_2) \sin \alpha,$$

a stąd

$$(216.4) \quad n_1 = -\frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial}{\partial a} (\varrho_1 \varrho_2) = -\frac{1}{\varrho_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial a}.$$

Po wstawieniu wyrażen  $n_1$  i  $n_2$  (216.3 i 4) w rów. (216.2) i uporządkowaniu znajdujemy drugie równanie różniczkowe dla  $U$  i  $\psi$ :

$$(216.5) \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right) + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial a} \right] \frac{1}{\varrho_2} \cdot \frac{\partial U}{\partial a} - \left[ \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \operatorname{ctg}^2 \alpha - r - \frac{r}{g} \frac{\partial g}{\partial a} \operatorname{ctg} \alpha \right] \frac{U}{\varrho_2} = -\bar{A}(1-r^2)\psi.$$

Rozpatrując przede wszystkim przypadek stałej grubości powłoki  $g$  i wprowadzając symbol operacyjny Meissnera:

$$(216.6) \quad L(\dots) = \frac{\varrho_1}{\varrho_2^2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} (\dots) + \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right) + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \operatorname{ctg} \alpha \right] \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial}{\partial a} (\dots) - \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \operatorname{ctg}^2 \alpha \frac{(\dots)}{\varrho_2},$$

otrzymamy oba równania w postaci symetrycznej

$$(216.7, 8) \quad \begin{cases} L(\psi) - r \frac{\psi}{\varrho_2} = \frac{U}{\bar{B}} \\ L(U) + r \frac{U}{\varrho_2} = -\bar{A}(1-r^2)\psi. \end{cases}$$

Rugowanie przy pomocy operatora  $L$  daje

$$(216.9, 10) \quad \begin{cases} LL(\psi) - rL\left(\frac{\psi}{\varrho_2}\right) + r \frac{1}{\varrho_2} L(\psi) - r^2 \frac{\psi}{\varrho_2^2} = -\frac{\bar{A}}{\bar{B}}(1-r^2)\psi \\ LL(U) + rL\left(\frac{U}{\varrho_2}\right) - r \frac{1}{\varrho_2} L(U) - r^2 \frac{U}{\varrho_2^2} = -\frac{\bar{A}}{\bar{B}}(1-r^2)U. \end{cases}$$

Te równania liniowe rzędu czwartego upraszczają się znacznie, gdy  $\varrho_2 = \text{stałej}$ , a więc dla powierzchni kulistej, stożkowej, walcowej i pierścieniowej o przekroju południkowym okrągłym. Wtedy bowiem wyrazy drugi i trzeci znoszą się nawzajem, a oba równania mają tę samą postać

$$LL(\zeta) - \frac{r^2}{\varrho_2^2} \zeta = -\frac{\bar{A}}{\bar{B}}(1-r^2)\zeta,$$

która po podstawieniu

$$(216.3) \quad \mu^4 = \frac{\bar{A}}{B} (1 - \nu^2) - \frac{\nu^2}{\epsilon_2^2}$$

zamienia się na

$$LL(\zeta) + \mu^4 \zeta = 0.$$

Mozna ją jeszcze przekształcić na

$$L[L(\zeta) + i\mu^2 \zeta] - i\mu^2 [L(\zeta) + i\mu^2 \zeta] = 0,$$

albo

$$L[L(\zeta) - i\mu^2 \zeta] + i\mu^2 [L(\zeta) - i\mu^2 \zeta] = 0.$$

Rozwiązanie obu równań rzędu drugiego

$$(216.11) \quad L(\zeta) \pm i\mu^2 \zeta = 0$$

są przeto także rozwiązaniami równań (216.9, 10) przy  $\epsilon_2 = \text{stałej}$ . Te rozwiązania są zespolone i sprzężone, a jak łatwo się przekonać nawzajem liniowo niezależne i ważne zarówno dla  $\psi$  jak i  $U$ . Ich części rzeczywiste i urojone uzyskane przez stosowne zespoły liniowe rozwiązań, prowadzą do układu zupełnego rozwiązań w liczbach rzeczywistych. W ten sposób w przypadkach ograniczonych powyżej sprowadziliśmy zagadnienie do rozwiązania równania różniczkowego rzędu drugiego o współczynnikach zmiennych, którym zajmujemy się bliżej w paragrafach następnych dla powłoki kulistej i stożkowej.

Możliwość redukcji równań ogólnych rzędu czwartego do par równań rzędu drugiego zachodzi nie tylko przy stałej krzywiznie południka, ale także w innych przypadkach interesujących, wykrytych już przez Meissnera, o czym poniżej (§ 219). Na razie zaznaczamy tylko, że w przypadku małej liczby Poisson'a można poprzestając na rozwiązaniu przybliżonym położyć  $\nu = 0$ , po czym otrzymujemy również równania rzędu drugiego typu (216.11).

**§ 217. Powłoka kulista o grubości stałej.** Przy  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = a$  (promieniowi kuli) operator Meissnera upraszcza się do postaci

$$L(\dots) = \frac{1}{a} \frac{\partial^2}{\partial a^2} (\dots) + \frac{\partial}{\partial a} (\dots) \operatorname{ctg} a - (\dots) \operatorname{ctg}^2 a.$$

Zamiast  $U = a q_2$  wprowadzimy jako funkcję niewiadomą samo napięcie poprzeczne  $q_2$ . Wprowadziwszy nadto zamiast parametru  $\mu$  określonego wzorem (216 b), parametr  $\kappa$  przez podstawienie  $2\kappa^2 = a\mu^2$ ,

a więc  $\kappa^4 = 3(1-\gamma^2) \frac{a^2}{g^2} - \frac{\gamma^4}{4}$ , otrzymamy z pierwszego z równań (216.11)

$$(217.1) \quad \frac{d^2 q_2}{d a^2} + \operatorname{ctg} a \frac{d q_2}{d a} - \operatorname{ctg}^2 a \cdot q_2 + 2i\kappa^2 q_2 = 0.$$

Przez podstawienie

$$\sin^2 a = x, \quad q_2 = z \sin a$$

przekształca się równanie powyższe na

$$(217.2) \quad \frac{d^2 z}{d x^2} + \frac{4-5x}{2x(1-x)} \cdot \frac{d z}{d x} - \frac{1-2i\kappa^2}{4x(1-x)} z = 0.$$

To równanie ma postać równania różniczkowego hipergeometrycznego

$$(217.3) \quad \frac{d^2 z}{d x^2} + \frac{\gamma - (1 + \alpha + \beta)x}{x(1-x)} \cdot \frac{d z}{d x} - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} z = 0$$

o punktach osobliwych dla  $x=0, 1$  i  $\infty$ , z których ostatni nie ma znaczenia dla naszego zagadnienia. Funkcję rozwijalną na szereg hipergeometryczny i czyniącą zadość powyższemu równaniu różniczkowemu określa wzór Gauss'a<sup>1)</sup>:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1! \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2! \gamma(\gamma+1)} x^2 + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{3! \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

Z porównania równania ogólnego z naszym, tj. (217.2) wynika

$$\alpha = \frac{1}{4}(3 \pm \sqrt{5+8i\kappa^2}), \quad \beta = \frac{1}{4}(3 \mp \sqrt{5+8i\kappa^2}), \quad \gamma = 2.$$

W teorii równania ogólnego wyprowadza się 24 całek szczególnych, z których dwie określają równania

$$z_1 = F(\alpha, \beta, \gamma; x), \\ z_{11} = x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; x),$$

Drugie nie nadaje się widocznie do naszego przypadku; pierwsze zaś jest określone szeregiem zbieżnym w przedziale  $0 \leq x < 1$  i przyjmuje postać

$$(217.4) \quad z_1 = 1 + \frac{1}{8}(1-2i\kappa^2)x + \frac{1}{192}(11-14i\kappa^2-4\kappa^4)x^2 + \\ + \frac{1}{9216}(319-718i\kappa^2-164\kappa^4+8i\kappa^6)x^3 + \dots$$

<sup>1)</sup> Dzieła, t. III, str. 123—163 i 207—230. Wiadomości potrzebne tutaj o równaniu hipergeometrycznym znajdzie czytelnik np. w książce: A. R. Forsyth, A Treatise on Differential Equations.



Tutaj  $x = \sin^2 a = 0$  odpowiada punktowi szczytowemu powłoki o pionowej osi obrotu (skierowanej w tym miejscu wypukłością do góry).

Drugie z równań (216.11) daje również całkę szczególną w postaci

$$\bar{z}_1 = F\left(\frac{3 + \sqrt{5 - 8i\kappa^2}}{4}, \frac{3 - \sqrt{5 - 8i\kappa^2}}{4}, 2; \sin^2 a\right)$$

sprzężonej jako zespolona z poprzednią. Oznaczmy ją przez  $\bar{F}(a, \beta, \gamma; x)$ . Rozwiązanie ogólne dla powłoki z jednym brzegiem napiszemy przeto w postaci

$$q_2 = z \sin a = [C_1 F(a, \beta, \gamma; x) + C_2 \bar{F}(a, \beta, \gamma; x)] \sin a$$

ze stałymi całkowania  $C_1$  i  $C_2$ .

Aby teraz wyznaczyć napięcia i odkształcenia obliczymy najpierw

$$L(q_2) = \frac{2i\kappa^2}{a} (-C_1 F + C_2 \bar{F}) \sin a,$$

a według rów. (216.8):

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{1}{A(1-\nu^2)} [aL(q_2) + \nu q_2] = \\ (217.5) \quad &= \frac{1}{A(1-\nu^2)} [C_1(2i\kappa^2 - \nu)F - C_2(2i\kappa^2 + \nu)\bar{F}] \sin a. \end{aligned}$$

Stąd przy pomocy równań (216.3 i 4) oraz (215.12 i 13) obliczymy:

$$(217.6-9) \quad \left\{ \begin{aligned} n_1 &= -C_1 \left( F + 2 \frac{dF}{dx} \sin^2 a \right) \cos a - C_2 \left( \bar{F} + 2 \frac{d\bar{F}}{dx} \sin^2 a \right) \cos a, \\ n_2 &= -q_2 \cotg a = -(C_1 F + C_2 \bar{F}) \cos a, \\ m_1 &= -a \left[ \frac{C_1}{2i\kappa^2 + \nu} \left\{ (1 + \nu)F + 2\nu \frac{dF}{dx} \sin^2 a \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_2}{2i\kappa^2 - \nu} \left\{ (1 + \nu)\bar{F} + 2\nu \frac{d\bar{F}}{dx} \sin^2 a \right\} \right] \cos a, \\ m_2 &= -a \left[ \frac{C_1}{2i\kappa^2 + \nu} \left\{ (1 + \nu)F + 2 \frac{dF}{dx} \sin^2 a \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_2}{2i\kappa^2 - \nu} \left\{ (1 + \nu)\bar{F} + 2 \frac{d\bar{F}}{dx} \sin^2 a \right\} \right] \cos a. \end{aligned} \right.$$

Stale  $C_1$  i  $C_2$  winny otrzymać takie wartości zespolone, aby wyrażenia powyższe stały się rzeczywiste, a warunki brzegowe były spełnione. Jako te warunki występują najczęściej dane przemiesz-

czenia brzegu i wartość brzegowa kąta  $\psi$  która np. w przypadku doskonałego utwierdzenia jest równa 0.

Ciąg dalszy uciążliwych obliczeń znajdzie czytelnik zainteresowany w pracach:

L. Bolle, Festigkeitsberechnung von Kugelschalen. Zürich 1916 (rozpr. dokt.).

I. E. Ekström, Studien über dünne Schalen... Wyd. Akad. Nauk Techn. nr 21, Stockholm 1933.

W zastosowaniu do obliczeń liczbowych wymagają wyniki powyższe teorii „ścisłej“ ogromnej pracy rachunkowej, która jak widać z rozwinięcia (217.4) rośnie bez granicy praktycznej z wartością parametru  $\kappa$  proporcjonalnego w dobrym przybliżeniu do  $\sqrt{a/g}$ , a więc dużego, gdy grubość powłoki  $g$  jest mała w porównaniu do jej promienia  $a$ . Dlatego obmyślano metody przybliżone omijające tę trudność, o których szczegółowiej pisze Flügge w monografii już parokrotnie przytoczonej. Tutaj poprzestaniemy na przedstawieniu metody przybliżonej opracowanej najpierw przez J. W. Geckeler'a w r. 1926 (Über die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen. Forsch. Arb. Ingwes. Nr 276, a nadto: Zur Theorie der Elastizität flacher rotationssymmetrischer Schalen. Ing.-Arch. T. 1, 1930, str. 255).

Punktem wyjścia teorii przybliżenia I-go jest poparty przez doświadczenia wynik obliczenia ścisłego według teorii zgięciowej dla powłoki o postaci cienkościennej rury okrągłej obciążonej tylko wzdłuż obrzeży symetrycznie. Jak wiadomo z § 212 odkształcenia i napięcia powstające przy tym w rurze zmieniają się z odległością  $x$  od obrzeża obciążonego według tego samego prawa co drgania zanikające punktów układu sprężystego z czasem  $t$ . Dzięki temu amplituda zmian maleje według funkcji wykładniczej  $e^{-k\frac{x}{a}}$  tym silniej im większy jest „współczynnik tłumienia“

$$k = \sqrt[4]{3(1-\nu^2) \frac{a^2}{g^2}} \approx 1,285 \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (\text{dla } \nu = 0,3).$$

A zatem w rurze niezbyt krótkiej zaburzenia stanu odkształcenia wywołane obciążeniem samego obrzeża zanikają praktycznie już w odległości niewielkiej od tegoż obrzeża. Ponieważ pierwsza pochodna odnośnej funkcji rozwiązującej o postaci

$$w = C e^{-\kappa \frac{x}{a}} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \kappa \frac{x}{a}$$

jest przy dość wielkim  $z$  liczbowo wielokrotnie większa od samej funkcji, a zarazem wartość drugiej pochodnej jest w tymże stosunku większa od wartości pierwszej, przeto przewidując warunki podobne dla każdej powłoki obrotowo-symetrycznej przy wymiarach odpowiednich, można w operatorze  $L$  równania (216.11) pominąć  $\zeta$  i  $d\zeta/da$  wobec  $d^2\zeta/da^2$ . To sprowadzi równanie różniczkowe zagadnienia w przypadku powłoki kulistej do postaci

$$(217.10) \quad \frac{d^2 q_2}{da^2} \pm 2i z^2 q_2 = 0,$$

gdzie

$$z = \sqrt[4]{3(1-\nu^2) \frac{a^* - \nu^*}{g^2} - \frac{\nu^*}{4}}.$$

To równanie rozwiązuje się jak wiadomo przez podstawienie

$$q_2 = e^{\lambda a},$$

które daje dla parametru  $\lambda$  równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 \pm 2i z^2 = 0.$$

Cztery pierwiastki tego równania mają postać

$$\lambda = \pm(1 \pm i)z$$

odpowiadają czterem całkom szczególnym, z których da się złożyć rozwiązanie ogólne. To rozwiązanie przybiera postać najprostszą po wprowadzeniu kątów

$$\omega_1 = a_1 - a \quad \text{i} \quad \omega_2 = a - a_2$$

przy założeniu dwu brzegów, którym odpowiadają kąty  $a_1$  i  $a_2$  (np. brzeg górny pasa kulistego). Wtedy znajdujemy

$$q_2 = e^{-z\omega_1}(C_1' \cos z\omega_1 + C_2' \sin z\omega_1) + e^{-z\omega_2}(C_1'' \cos z\omega_2 + C_2'' \sin z\omega_2).$$

Przy warunkach brzegowych napotykanym najczęściej okazało się korzystnym wprowadzenie zamiast stałych  $C_1', \dots, C_2''$ , stałych  $C_1, C_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ , z którymi rozwiązanie ogólne ma postać

$$(217.11) \quad q_2 = C_1 e^{-z\omega_1} \sin(z\omega_1 + \vartheta_1) + C_2 e^{-z\omega_2} \sin(z\omega_2 + \vartheta_2).$$

Teraz znajdujemy na podstawie równań (216.3 i 4)

$$(217.12) \quad n_2 = -q_2 \operatorname{ctg} a$$

$$(217.13) \quad n_1 = -\frac{dq_2}{da} = z\sqrt{2} \left[ -C_1 e^{-z\omega_1} \sin\left(z\omega_1 + \vartheta_1 - \frac{\pi}{4}\right) + C_2 e^{-z\omega_2} \sin\left(z\omega_2 + \vartheta_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$\psi$  - obliczymy z wz. (216.2) uproszczonego z powodu  $\varrho_1 = \varrho_2 = a$  i  $\bar{A} = \frac{Eg}{1-\nu^2}$  do postaci

$$(216.2 \text{ a}) \quad \psi = \frac{1}{Eg} \left[ \frac{\partial n_1}{\partial x} - \nu \frac{\partial n_2}{\partial a} + (n_1 - n_2) (1 + \nu) \operatorname{ctg} \alpha \right],$$

z czego poprzestając na przybliżeniu pierwszym można otrzymać:

$$(217.14) \quad \psi = \frac{2z^2}{Eg} [C_1 e^{-z\omega_1} \cos(z\omega_1 + \vartheta_1) + C_2 e^{-z\omega_2} \cos(z\omega_2 + \vartheta_2)].$$

Dla momentów wyrażonych ściślej wzorami (215.12 i 13) otrzymamy wreszcie z przybliżeniem takim samym:

$$m_2 = \bar{B} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial \psi}{\partial a} + \nu \frac{\psi}{a} \operatorname{ctg} \alpha \right) = \sim \frac{\bar{B}}{a} \frac{\partial \psi}{\partial a},$$

$$m = \bar{B} \left( \frac{\psi}{a} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\nu}{a} \frac{\partial \psi}{\partial a} \right) = \sim \frac{\bar{B}}{a} \cdot \nu \frac{\partial \psi}{\partial a},$$

a więc

$$(217.15) \quad \begin{cases} m_2 = \frac{a}{z\sqrt{2}} \left[ C_1 e^{-z\omega_1} \sin\left(z\omega_1 + \vartheta_1 + \frac{\pi}{4}\right) - C_2 e^{-z\omega_2} \sin\left(z\omega_2 + \vartheta_2 + \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ m_1 = \nu m_2. \end{cases}$$

Stale  $C_1, \vartheta_1$  wyznaczamy przy tym z warunków brzegu  $a = a_1$ , zaś stale  $C_2, \vartheta_2$  z warunków brzegu  $a = a_2$ .

Powyższe przybliżenie I może się stać iluzorycznym, gdy  $\operatorname{ctg} \alpha$  jest zbyt wielkie. Wtedy bowiem nie podobna pomijać wyrazu  $\frac{\partial q_2}{\partial a} \operatorname{ctg} \alpha = \lambda q_2 \operatorname{ctg} \alpha$  wobec wyrazu  $\frac{\partial^2 q_2}{\partial a^2} = \lambda^2 q_2$ . Ponieważ  $\lambda = (1+i)z$ , przeto przybliżenie I można tolerować dopóki  $\operatorname{ctg} \alpha$  jest małe wobec  $z$ . Tymczasem w pobliżu szczytu powłoki jest  $\operatorname{ctg} \alpha$  bardzo wielkie, a stosując teorię zgięciową w przypadku obciążenia szczytu siłą skupioną, tj. dla  $a=0$  jest  $\operatorname{ctg} \alpha = \infty$ . W tym przypadku nie można już pomijać wyrazów opatrzonych czynnikiem  $\operatorname{ctg} \alpha$  i  $\operatorname{ctg}^2 \alpha$  w równaniu różniczkowym (217.1), ale aby uzyskać przybliżenie dobre należy zastąpić  $\operatorname{ctg} \alpha$  wartością przybliżoną  $1/a$  otrzymując równanie różniczkowe przybliżone:

$$\frac{d^2 q_2}{da^2} + \frac{1}{a} \frac{dq_2}{da} - \frac{1}{a^2} q_2 + 2iz^2 q_2 = 0.$$

Równanie to przez podstawienie  $\xi = z\sqrt{2i} \cdot a$  przechodzi w postać normalną Besselowską:

$$\frac{d^2 q_2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dq_2}{d\xi} + \left(1 - \frac{1}{\xi^2}\right) q_2 = 0.$$

Rozwiązaniami są funkcje Bessel'a rzędu pierwszego. Wybierzemy z nich oczywiście tę, która zanika przy wzroście  $a$ . Jest nią pierwsza funkcja zwana Hankelowską  $H_1^{(1)}(\xi)$ , która ma wartości zespolone dla argumentu zespolonego. Stosując funkcje  $Z$  (Schleichera) rozpatrzone już bliżej w § 212, można  $H_1^{(1)}(\xi)$  rozłożyć na część rzeczywistą i urojoną według wzoru:

$$H_1^{(1)}(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2}} [Z_3'(z\sqrt{2} \cdot a) + Z_4'(z\sqrt{2} \cdot a)] + \frac{i}{\sqrt{2}} [Z_3'(z\sqrt{2} \cdot a) - Z_4'(z\sqrt{2} \cdot a)],$$

gdzie kreski u góry oznaczają różniczkowanie względem argumentu. Każda z obu części jest rozwiązaniem pierwotnego równania różniczkowego rzędu 4-go. Takim rozwiązaniem jest zatem każde wyrażenie liniowe złożone z nich, wobec czego napiszemy

$$q_2 = C_1 Z_3'(z\sqrt{2} \cdot a) + C_2 Z_4'(z\sqrt{2} \cdot a).$$

Stąd łatwo podobnie jak wyżej wyprowadzić dalsze wzory dla napięcia i kąta  $\psi$ .

**§ 218. Powłoka stożkowa o grubości stałej.** Tak samo jak w teorii błonowej rozwiniętej w § 205 (ust. B) wprowadzamy zamiast  $a$  jako współrzędną  $y$ , tj. odległość punktu powłoki od wierzchołka stożka (rys. 121) i zastępujemy różniczkowanie względem  $a$  różniczkowaniem względem  $y$  według schematu

$$\frac{d}{da} = \varrho_2 \frac{d}{dy}, \quad \frac{d^2}{da^2} = \varrho_2^2 \frac{d^2}{dy^2} + \varrho_2 \frac{d\varrho_2}{dy} \cdot \frac{d}{dy}.$$

Stosownie do tego przerobimy operator  $L$  określony wzorem (216.6) na następujący

$$(218.1) \quad L(\dots) = \varrho_1 \frac{d^2(\dots)}{dy^2} + \left( \frac{d\varrho_1}{dy} + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \operatorname{ctg} a \right) \frac{d(\dots)}{dy} - \frac{1}{\varrho_1} \operatorname{cotg}^2 a \cdot (\dots).$$

Dla stożka jest  $\varrho_1 = y \operatorname{tg} \beta$ ,  $\operatorname{ctg} a = \operatorname{tg} \beta$ ,  $\varrho_2 = \infty$ , a więc

$$L(\dots) = \left( y \frac{d^2(\dots)}{dy^2} + \frac{d(\dots)}{dy} - \frac{1}{y} (\dots) \right) \operatorname{tg} \beta.$$

Nowym operatorem będzie przeto

$$(218.2) \quad L(\dots) \equiv y \frac{d^2(\dots)}{dy^2} + \frac{d(\dots)}{dy} - \frac{1}{y} (\dots).$$

Ogólne równania różn. (216.11) przyjmą teraz dla powłoki stożkowej postać

$$L(\zeta) \operatorname{tg} \beta \pm i \mu^2 \zeta = 0.$$

Przy  $\zeta = U = y \operatorname{tg} \beta \cdot q_2$  można je uprościć przez  $\operatorname{tg}^2 \beta$  aby otrzymać

$$(218.3 \text{ i } 4) \quad \mathcal{L}(y q_2) \pm i \lambda^2 y q_2 = 0$$

z oznaczeniem

$$\lambda^4 = \frac{\bar{A}(1-\nu^2)}{\bar{B}} \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{12(1-\nu^2)}{g^2} \operatorname{ctg}^2 \beta.$$

Temu samemu równaniu czyni także zadość  $\psi$  zamiast  $y q_2$ .

Do całkowania przekształcimy je na równanie Bessela wprowadzwszy jako zmienną niezależną

$$\eta = x\sqrt{i} = 2\lambda\sqrt{i} \cdot \sqrt{y}.$$

Biorąc rów. (218.3) (tj. ze znakiem  $+$  wyrazu drugiego) otrzymamy

$$(218.5) \quad \frac{d^2(y q_2)}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{d(y q_2)}{d\eta} + \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right)(y q_2) = 0.$$

To równanie rozwiązują obie funkcje Besselowskie rzędu drugiego  $I_2(\eta)$  i  $H_2^{(1)}(\eta)$  o wartościach także zespolonych. Można je wyrazić przez odpowiednie funkcje rzędu zerowego i ich pierwsze pochodne względem argumentu  $\eta$ :

$$I_2(\eta) = -I_0(\eta) - \frac{2}{\eta} \frac{dI_0(\eta)}{d\eta},$$

$$H_2^{(1)}(\eta) = -H_0^{(1)}(\eta) - \frac{2}{\eta} \frac{dH_0^{(1)}(\eta)}{d\eta}.$$

Ich częściami rzeczywistymi i urojonymi są omawiane już powyżej funkcje  $Z$ . Po ich wstawieniu i oznaczeniu pochodnych względem  $x$  przez kreski u góry otrzymujemy

$$I_2(\eta) = - \left[ Z_1(x) + \frac{2}{x} Z_2'(x) \right] - i \left[ Z_2(x) - \frac{2}{x} Z_1'(x) \right],$$

$$H_2^{(1)}(\eta) = - \left[ Z_3(x) + \frac{2}{x} Z_4'(x) \right] - i \left[ Z_4(x) - \frac{2}{x} Z_3'(x) \right].$$

Części rzeczywiste i urojone tych funkcji stanowią cztery rozwiązania elementarne naszego zagadnienia, które dają rozwiązanie ogólne w postaci:

$$(218.6) \quad \begin{cases} y q_2 = C_1 \left[ Z_1(x) + \frac{2}{x} Z_2'(x) \right] + C_2 \left[ Z_2(x) - \frac{2}{x} Z_1'(x) \right] + \\ + C_3 \left[ Z_3(x) + \frac{2}{x} Z_4'(x) \right] + C_4 \left[ Z_4(x) - \frac{2}{x} Z_3'(x) \right]. \end{cases}$$

Jak wiadomo z § 212, B funkcje  $Z_1$  i  $Z_2$  wraz z ich pochodnymi oscylując zanikają z ubywaniem argumentu. One więc odpowiadają zakłóceniom równowagi błonowej mającym siedzibę na brzegu dolnym powłoki stożkowej (czy to zupełnej, czy też ściętej). Natomiast  $Z_3$  i  $Z_4$  zanikając z wzrostem argumentu odpowiadają zakłóceniom brzegu górnego. Gdy powłoka jest dostatecznie cienka, to zanikanie wartości rozwiązań poszczególnych między obu brzegami jest tak silne, że każde z nich wchodzi w rachubę tylko dla jednego brzegu. Wtedy stałe  $C_1$  i  $C_2$  oraz  $C_3$  i  $C_4$  można wyznaczyć niezależnie z dwu równań liniowych.

Po znalezieniu z (218.6) napięcia poprzecznego  $q_2$  jako funkcji  $y$  (wzgl.  $x = 2\lambda\sqrt{y}$ ) obliczymy z (216.3 i 4) napięcia południkowe i obwodowe:

$$(218.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} n_2 = -q_2 \operatorname{tg} \beta \\ n_1 = -\frac{d}{dy}(y q_2) \operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{2y} \operatorname{tg} \beta \left\{ C_1 \left[ x Z_2'(x) - 2 Z_1(x) - \frac{4}{x} Z_2'(x) \right] + \right. \\ \left. + C_2 \left[ x Z_2'(x) - 2 Z_2(x) + \frac{4}{x} Z_1(x) \right] + \right. \\ \left. + C_3 \left[ x Z_3'(x) - 2 Z_3(x) - \frac{4}{x} Z_4(x) \right] + \right. \\ \left. + C_4 \left[ x Z_4'(x) - 2 Z_4(x) + \frac{4}{x} Z_3'(x) \right] \right\}. \end{array} \right.$$

Dalej znajdziemy kąt obrotu stycznej do południka

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{\bar{A}(1-\nu^2)} L(y q_2) = \\ &= \frac{1}{\bar{B} \lambda^2} \left[ C_1 \left\{ -Z_2(x) + \frac{2}{x} Z_1'(x) \right\} + C_2 \left\{ Z_1(x) + \frac{2}{x} Z_2'(x) \right\} + \right. \\ &\quad \left. + C_3 \left\{ -Z_4(x) + \frac{2}{x} Z_3'(x) \right\} + C_4 \left\{ Z_3(x) + \frac{2}{x} Z_4'(x) \right\} \right], \end{aligned}$$

a podstawivszy tę wartość w rów. (215.12 i 13) otrzymamy

$$(218.9) \quad \begin{aligned} m_1 &= \bar{B} \left( \frac{\psi}{y} + \nu \frac{d\psi}{dy} \right) = \\ &= \frac{2}{x^2} \left[ C_1 \left\{ -\nu x Z_2'(x) - 2(1-\nu) Z_2(x) + \frac{4(1-\nu)}{x} Z_1'(x) \right\} + \right. \\ &\quad + C_2 \left\{ \nu x Z_1'(x) + 2(1-\nu) Z_1(x) + \frac{4(1-\nu)}{x} Z_2'(x) \right\} + \\ &\quad + C_3 \left\{ -\nu x Z_4'(x) - 2(1-\nu) Z_4(x) + \frac{4(1-\nu)}{x} Z_3'(x) \right\} + \\ &\quad \left. + C_4 \left\{ \nu x Z_3'(x) + 2(1-\nu) Z_3(x) + \frac{4(1-\nu)}{x} Z_4'(x) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_2 &= \bar{E} \left( \frac{d\psi}{dy} + \nu \frac{\psi}{y} \right) = \\
 &= \frac{2}{x^2} \left[ C_1 \left\{ -x Z_2'(x) + 2(1-\nu) Z_2(x) - \frac{4(1-\nu)}{x} Z_1'(x) \right\} + \right. \\
 (218.10) \quad &+ C_2 \left\{ x Z_1'(x) - 2(1-\nu) Z_1(x) - \frac{4(1-\nu)}{x} Z_2(x) \right\} + \\
 &+ C_3 \left\{ -x Z_4'(x) + 2(1-\nu) Z_4(x) - \frac{4(1-\nu)}{x} Z_3'(x) \right\} + \\
 &\left. + C_4 \left\{ x Z_3'(x) - 2(1-\nu) Z_3(x) - \frac{4(1-\nu)}{x} Z_4(x) \right\} \right].
 \end{aligned}$$

W przypadku powłoki stożkowej z wierzchołkiem nieściętym jest stosownie do rozważań poprzednich  $C_3 = C_4 = 0$ .

Ponieważ w zastosowaniach praktycznych nie można często korzystać z tablic funkcyj Besselowskich z powodu zbyt wielkich wartości argumentu  $x$ , przeto w przypadkach odnośnych stosujemy z korzyścią wyrażenia asymptotyczne następujące:

$$(218.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_1(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \cos \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right); \quad Z_2(x) \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \sin \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right), \\ Z_1'(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \cos \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right); \quad Z_2'(x) \approx -\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \sin \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right), \\ Z_3(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \sin \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right); \quad Z_4(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \cos \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right), \\ Z_3'(x) \approx -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \sin \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right); \quad Z_4'(x) \approx +\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \cdot \cos \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right). \end{array} \right.$$

Te wzory przybliżone dają, jak pisze Flügge (str. 164), dla  $x=6$  wartości z dokładnością suwaka logarytmicznego; nadają się więc do obliczeń praktycznych gdy  $x > 6$ , ponieważ tablice sięgają tylko do  $x \leq 6$ .

Jeżeli, co często się zdarza, trzeba liczyć przy wartościach  $x$  przewyższających znacznie 6, to można jeszcze uprościć wzory przybliżone zatrzymując w rozwiązaniach tylko najwyższe potęgi  $x$ . W tych warunkach otrzymano wzory przybliżone następujące:



$$\begin{aligned}
 n_1 &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda^2}{x\sqrt{x}} \operatorname{tg} \beta \left[ e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left\{ C_1 \cos \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) - C_2 \sin \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - 2 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left\{ C_3 \sin \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) - C_4 \cos \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right\} \right] \\
 q_2 &= -n_2 \operatorname{ctg} \beta = \\
 &= 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda^2}{x^2\sqrt{x}} \left[ e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left\{ C_1 \cos \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) - C_2 \sin \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right\} + \right. \\
 &\quad \left. + 2 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left\{ C_3 \sin \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) - C_4 \cos \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right\} \right] \\
 m_2 &= \frac{1}{r} m_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} \left[ e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left\{ C_1 \sin \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) + C_2 \cos \left( \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} \right) \right\} - \right. \\
 &\quad \left. - 2 e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left\{ C_3 \cos \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) + C_4 \sin \left( \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} \right) \right\} \right].
 \end{aligned}
 \tag{218.12}$$

§ 219. Teoria zgięciowa ścisła w zastosowaniu do powłok o dowolnej postaci południka i zmiennej grubości ściany. Równania różniczkowe (216.1) i (216.5) ogólnej teorii zgięciowej, które tutaj powtórzymy

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha^2} + \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{ctg} \alpha + 3 \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right] \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} - \\
 - \left[ \frac{\rho_2}{\rho_1} \operatorname{ctg}^2 \alpha + r - \frac{3r}{g} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \operatorname{ctg} \alpha \right] \frac{\psi}{\rho_2} = \frac{q_2 \rho_1}{B} = \frac{U}{B},
 \end{aligned}
 \tag{216.1}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial^2 U}{\partial \alpha^2} + \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right) + \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{ctg} \alpha - \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \right] \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U}{\partial \alpha} - \\
 - \left[ \frac{\rho_2}{\rho_1} \operatorname{ctg}^2 \alpha - r - \frac{r}{g} \frac{\partial g}{\partial \alpha} \operatorname{ctg} \alpha \right] \frac{U}{\rho_2} = -\bar{A}(1-r^2)\psi,
 \end{aligned}
 \tag{216.5}$$

sprowadzono w przypadku  $g = \text{stałej}$  do postaci (216.7, 8), która przy  $\rho_2 = \text{stałej}$  doprowadziła w końcu do równań (216.11) zastosowanych do powłoki kulistej i stożkowej w § 217 i 218. Nasuwa się tedy pytanie, czy nie daloby się i dla innych kształtów uzyskać podobnego uproszczenia przez wprowadzenie zamiast operatora  $L$  innego stosownego. W tym celu należy przede wszystkim dążyć do zrównania współczynników przy  $\partial \psi / \partial \alpha$  i  $\partial U / \partial \alpha$  w obu równaniach. To da się osiągnąć przez wprowadzenie nowej funkcji  $V$  podstawieniem

$$\psi = \frac{V}{g^2}.$$

Wtedy z rów. (216.1) otrzymamy

$$(219.1) \quad \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{1}{\varrho_2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial a^2} + \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right) + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \operatorname{ctg} a - \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial a} \right] \frac{1}{\varrho_2} \cdot \frac{\partial V}{\partial a} - \\ - \left[ \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \operatorname{ctg}^2 a + r - \frac{3r}{g} \frac{\partial g}{\partial a} \operatorname{ctg} a + 2 \left\{ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right) + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \operatorname{ctg} a \right\} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial a} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial a^2} \right] \frac{V}{\varrho_2} = \frac{Ug^2}{\bar{B}},$$

gdzie istotnie wyraz  $\partial V / \partial a$  jest opatrzony tym samym współczynnikiem, co wyraz  $\partial U / \partial a$  w rów. (216.5).

Ponieważ  $\bar{A}(1-r^2)\psi = Eg\psi = EV/g$ , zaś

$$\frac{Ug^2}{\bar{B}} = \frac{12(1-r^2)U}{Eg},$$

przeto po pomnożeniu obu równań przez  $g$  uzyskamy po stronach prawych współczynniki stałe przy  $U$  i  $V$ , co jest pożądane ze względu na uproszczenie przy rugowaniu przez różniczkowanie. A zatem nowy operator określimy równaniem:

$$L^*(\dots) = \frac{\varrho_1 g}{\varrho_2^2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} (\dots) + \left[ \frac{g}{\varrho_2} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right) + \frac{\varrho_1 g}{\varrho_2^2} \operatorname{ctg} a - \frac{\varrho_1}{\varrho_2^2} \frac{\partial g}{\partial a} \right] \frac{\partial}{\partial a} (\dots) - \\ - \left[ \frac{g}{\varrho_1} \operatorname{ctg}^2 a - r \frac{g}{\varrho_2} - \frac{r}{\varrho_2} \frac{\partial g}{\partial a} \operatorname{ctg} a \right] (\dots).$$

Ten operator nie przechodzi przy  $g = \text{stałej}$  w operator  $L$ , różniąc się wtedy odeń nie tylko czynnikiem  $g$ , ale także wyrażeniem w kłanrach ostatnich, którym nie jest  $\frac{g}{g_1} \operatorname{ctg}^2 a$ , lecz  $\frac{g}{\varrho_1} \operatorname{ctg}^2 a - r \frac{g}{\varrho_2}$ .

Wprowadziwszy nadto skrót:

$$f(a) = 2r \frac{g}{\varrho_2} - \frac{2r}{\varrho_2} \frac{\partial g}{\partial a} \operatorname{ctg} a + 2 \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right) + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \operatorname{ctg} a \right] \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial g}{\partial a} + 2 \frac{\varrho_1}{\varrho_2^2} \frac{\partial g}{\partial a^2},$$

napiszemy równania (216.5) i (219.1) w postaci:

$$(219.2 \text{ i } 3) \quad \begin{cases} L^*(V) - f(a)V = \frac{12(1-r^2)}{E} \cdot U \\ L^*(U) = -EV. \end{cases}$$

Rugowanie daje równania

$$(219.4 \text{ i } 5) \quad \begin{cases} L^*L^*(V) - L^*(f \cdot V) + 12(1-r^2)V = 0 \\ L^*L^*(U) - f \cdot L^*(U) + 12(1-r^2)U = 0. \end{cases}$$

Aby te równania dały się rozszczepić na dwa równania różniczkowe rzędu drugiego o postaci

$$(219.6) \quad L^*(U) + cU = 0,$$

muszą być spełnione pewne warunki. Znajdziemy je rugując z (219.5) i (219.6) operator  $L^*$ . To rugowanie prowadzi do równania

$$[c^2 + cf + 12(1 - \nu^2)]U = 0,$$

z którego wynika, że wyrażenie w klamrach winno być równe 0. Do tego potrzeba po pierwsze, aby było

$$f(a) = \text{stała},$$

a po wtóre, aby stała  $c$  była jednym z dwu pierwiastków równania kwadratowego, tj. aby

$$\left. \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}[-f \pm f\sqrt{f^2 - 48(1 - \nu^2)}].$$

Każdej z wartości  $c$  odpowiada równanie typu (219.6). Zważywszy, że w zadaniach konkretnych jest zawsze  $f^2 < 48(1 - \nu^2)$ , a więc  $c_1 \neq c_2$ , otrzymujemy zawsze dwa układy rozwiązań liniowo od siebie niezależne, tzn. istotnie równoważne równaniu rzędu czwartego (219.5). Dla drugiej niewiadomej  $V$  znajdziemy według (219.3) i (219.6):

$$(219.7) \quad V = -\frac{L^*(U)}{E} = \frac{c}{E} U,$$

gdzie za  $c$  należy wstawić  $c_1$  lub  $c_2$  zależnie od tego, czy  $U$  jest rozwiązaniem jednego czy też drugiego z równań otrzymanych przez rozszczepienie.

Warunek rozszczepienia  $f(a) = \text{stała}$  stanowi przy danej postaci południka równanie różniczkowe, określające grubość jako funkcję  $g(a)$ . Gdy  $\varrho_2 = \text{stała}$ , to równaniu temu czyni zadość  $g = \text{stała}$ , co już zastosowano w §§ 217 i 218. Nie jest to jednakże rozwiązanie jedyne, gdyż rozwiązanie zupełne dla każdej powłoki winno zawierać trzy parametry, tj. dwie stałe całkowania i dowolnie obraną wartość stałej  $f$ . Jej obliczenie może napotkać na wielkie trudności, ponieważ w równaniu różniczkowym (219.6) są współczynniki zależne od funkcji  $g(a)$ .

Interesujący przypadek wyjątkowy stanowi rozwiązanie znalezione najpierw przez Meissnera dla powłoki stożkowej o grubości proporcjonalnej względem odległości  $y$  od wierzchołka, albowiem to rozwiązanie jest prostsze od rozwiązania przy grubości stałej. Aby

je znaleźć wprowadzimy tak samo jak w § 218 zamiast  $a$  współrzędną  $y$  i otrzymamy najpierw wyrażenie operatora  $L^*$  w postaci

$$L^*(\dots) \equiv \left[ g y (\dots)'' + (g - g' y) (\dots)' - \left( \frac{g}{y} - \nu g' \right) (\dots) \right] \operatorname{tg} \beta,$$

gdzie akcenty oznaczają różniczkowanie względem  $y$ .

Warunek rozszczepienia równania różniczkowego pierwotnego przyjmuje postać

$$2[(1-\nu)g' + g'y] \operatorname{tg} \beta = f = \text{stałej}.$$

To równanie różniczkowe ma istotnie obok  $g = \text{stałej}$  jeszcze rozwiązanie

$$g = g' y$$

z wartością stałą  $g' = dg/dy$ . A zatem  $f = 2(1-\nu)g' \operatorname{tg} \beta$ , oraz

$$\left. \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} \right\} = -(1-\nu)g' \operatorname{tg} \beta \pm i \sqrt{12(1-\nu^2) - (1-\nu)^2 g'^2 \operatorname{tg}^2 \beta}$$

$$L^*(\dots) \equiv [y^2(\dots)'' - (1-\nu)(\dots)'] g' \operatorname{tg} \beta.$$

Po wstawieniu tego w (219.6) otrzymujemy oba równania podstawowe

$$(219.8 \text{ i } 9) \quad y^2 U'' - \left[ 2(1-\nu) \mp i \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{g'^2 \operatorname{tg}^2 \beta} - (1-\nu)^2} \right] U = 0,$$

których rozwiązania mają postać

$$U = y^n.$$

Po podstawieniu w równanie różniczkowe znajdujemy dwa równania kwadratowe wyznaczające dwie zespolone i sprzężone wartości wykładnika  $n$ . Wprowadziwszy dla uproszczenia skrót:

$$\xi = \frac{9}{4} - 2\nu, \quad \eta = \sqrt{\frac{55}{16} - 7\nu + 3\nu^2 + \frac{12(1-\nu)}{g'^2 \operatorname{tg}^2 \beta}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{2}(\eta + \xi)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{2}(\eta - \xi)},$$

otrzymamy dla rów. (219.8) wykładniki

$$\left. \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \pm (\lambda - i\mu),$$

a dla (219.9):

$$\left. \begin{matrix} n_3 \\ n_4 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \pm (\lambda + i\mu).$$

Rozwiązaniem ogólnym zagadnienia jest przeto:

$$(219.10) \quad U = C_1 y^{1/2+\lambda-i\mu} + C_2 y^{1/2-\lambda+i\mu} + C_3 y^{1/2+\lambda+i\mu} + C_4 y^{1/2-\lambda-i\mu}$$

i według (219.7):

$$(219.11) \quad V = \frac{c_1}{E} (C_1 y^{1/2+\lambda-i\mu} + C_2 y^{1/2-\lambda+i\mu}) + \frac{c_2}{E} (C_3 y^{1/2+\lambda+i\mu} + C_4 y^{1/2-\lambda-i\mu}).$$

Uwzględniając, że np.

$$y^{1/2+\lambda+i\mu} = y^{1/2+\lambda} e^{i\mu \ln y}$$

i przekształciwszy w ten sposób resztę wyrazów, łączymy odpowiednio całki szczególne, aby przedstawić rozwiązania w liczbach rzeczywistych, otrzymując:

$$U = y q_2 \operatorname{tg} \beta = y^{\lambda+1/2} [A_1 \cos(\mu \ln y) + B_1 \sin(\mu \ln y)] + y^{-\lambda+1/2} [A_2 \cos(\mu \ln y) + B_2 \sin(\mu \ln y)],$$

gdzie

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 + C_3, & A_2 &= C_2 + C_4 \\ B_1 &= i(C_3 - C_1), & B_2 &= i(C_2 - C_4). \end{aligned}$$

Dla otrzymania  $V$  w postaci rzeczywistej oznaczymy w skrócie

$$c_1 = a + ib, \quad c_2 = a - ib,$$

a wstawiwszy to w (219.11) i rozłożywszy potęgi jak powyżej znajdujemy:

$$\begin{aligned} EV &= E y g^2 = y^{\lambda+1/2} [(aA_1 - bB_1) \cos(\mu \ln y) + (aB_1 + bA_1) \sin(\mu \ln y)] + \\ &+ y^{-\lambda+1/2} [(aA_2 + bB_2) \cos(\mu \ln y) + (aB_2 - bA_2) \sin(\mu \ln y)]. \end{aligned}$$

Stąd łatwo już obliczyć napięcia i przemieszczenia przy pomocy wzorów ogólnych z uwzględnieniem zmienności  $g$ .

**§ 220. Teoria przybliżona powłok obrotowych o postaci południka dowolnej i grubości ściany zmiennej.** Jak wynika z §§ 217 i 218 zastosowanie teorii „ściślej” prowadzi nawet w przypadkach najprostszych do rachunków bardzo uciążliwych. Jeszcze gorzej przedstawia się sprawa przy zmiennej krzywiznie południka, nawet w przypadkach gdy przez dobór stosowny grubości można spełnić warunek rozszczepienia równania różniczkowego. Albowiem i wtedy są równania podstawowe (219.6) najczęściej bardzo złożone, a gdy ich całkowanie da się w ogóle wykonać, to otrzymujemy podobnie jak dla powłoki kulistej szeregi o współczynnikach złożonych z potęg rosnących ułamków o liczniku stałym, a mianowniku  $g$ . Ich zbieżność pogarsza się zatem ze zmniejszeniem grubości. Zważywszy zaś,

że wielka dokładność obliczenia jest w zastosowaniach zwykle zbędna i nie leży w naturze zagadnień odnośnych, należy uznać rozszerzenie metody przybliżonej przedstawionej w § 217 dla przypadku powłoki kulistej o grubości stałej za dalszy ważny wynik wymienionych tam prac I. W. Geckeler'a. Ze względu na większą zwięzłość ujęcia przedstawimy jednakże rzecz przeważnie według odnośnego artykułu w monografii W. Flügge'go.

W kilku paragrafach poprzednich wykazano na przykładach konkretnych, że odkształcenia wywołane w powłoce tylko takimi obciążeniami samego brzegu, które by się równoważyły nawzajem na ciele sztywnym, ograniczają się do niewielkiego stosunkowo obszaru powłoki i w pewnej odległości od brzegu praktycznie zanikają. Nasuwa się przeto przypuszczenie, że w tym tkwi ogólna własność wszelkich powłok obrotowych. Warunki słuszności tego przypuszczenia są jednakże nieustalone, a powoływanie się niektórych autorów na zasadę de Saint-Venant'a nie wytrzymuje krytyki wobec tego, że np. płyta okrągła w ten sposób obciążona odkształca się równomiernie na całym swoim obszarze (co prawda z zastrzeżeniem, że ugięcia są małe wobec grubości płyty). To też należy się liczyć z odstępstwem od własności powyższej przy dość małych wartościach kąta nachylenia południka  $a$ .

Założywszy przeto, podobnie jak w § 217, że wyrazy z funkcjami niewiadomymi i pochodnymi rzędu niższego można jako małe pominąć wobec wyrazu z pochodną najwyższą, znajdziemy, że operator  $L^*$  upraszcza się do

$$L^*(\dots) = \frac{\varrho_1 g}{\varrho_2^2} \frac{d^2}{da^2}(\dots),$$

a rów. (219.5), w którym można teraz skreślić  $fL^*(U)$  przekształca się na

$$\frac{\varrho_1 g}{\varrho_2^2} \frac{d^2}{da^2} \left( \frac{\varrho_1^2 g}{\varrho_2^2} \frac{d^2 q_2}{da^2} \right) = -12(1-\nu^2) \varrho_2 q_2.$$

Po wykonaniu różniczkowań możemy nadto skreślić wyrazy zawierające drugą i trzecią pochodną  $q_2$ , ażeby wprowadziwszy skrót

$$\varkappa^4 = \frac{\bar{A}(1-\nu^2)\varrho_2^4}{4\bar{B}\varrho_1^2} = 3(1-\nu^2) \frac{\varrho_2^4}{g^2 \varrho_1^2},$$

otrzywać równanie

$$\frac{d^4 q_2}{da^4} + \varkappa^4 q_2 = 0,$$

równoważne parze równań:

$$(220.1) \quad \frac{d^2 q_2}{da^2} \pm 2i\kappa^2 q_2 = 0.$$

W tych równaniach teorii przybliżonej jest parametr  $\kappa$  w ogóle zależny od  $a$  i winien być liczbą wielką, aby wyniki teorii miały widoki zastosowania prawidłowego.

Każdej postaci powłoki odpowiada, jak widać z równania określającego  $\kappa$ , zupełnie oznaczona zmiana grubości wzdłuż południka, dla której jest  $\kappa = \text{stałej}$ . Wtedy równania (220.1) rozwiązują się funkcjami wykładniczymi, a rachunek dalszy ma przebieg ten sam, co wykonany na końcu § 217. Zważywszy zaś, że napięcia wywołane obciążeniem brzegu mają tylko w pasie przybrzeżnym wartości godne uwagi, można także przy zmiennym  $\kappa$  zastosować jego wartość średnią jako parametr stały, aby otrzymać przybliżenie niezłe rozwiązania teorii przybliżonej.

Spośród powłok o silnie zmiennym  $\kappa$  otrzymuje rozwiązanie proste przypadek

$$(220.2) \quad \kappa = \frac{a_0}{a + \beta}, \text{ ze stałymi } a_0 \text{ i } \beta.$$

Ponieważ  $\kappa$  ma być wielkie, przeto musi być także  $|a_0| \geq 1$ . Poza tym mogą  $a_0$  i  $\beta$  mieć wartości dowolne dodatnie lub ujemne i nie trudno dobrać je tak, aby w strefie przybrzeżnej, dla której rachunek wykonywamy ująć zmienność  $\kappa$  z dokładnością wystarczającą. Wstawiając wartość  $\kappa$  z (220.2) w (220.1) mamy

$$\frac{d^2 q_2}{da^2} \pm \frac{2ia_0^2}{(a + \beta)^2} q_2 = 0.$$

Temu równaniu można uczynić zadość funkcją

$$q_2 = (a + \beta)^r.$$

Po wstawieniu w równania różniczkowe znajdujemy do wyznaczenia  $r$  równania kwadratowe

$$r(r-1) \pm ia_0^2 = 0$$

z rozwiązaniami

$$r = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \pm 2ia_0^2}.$$

Ponieważ  $2ia_0^2$  ma wartość bardzo wielką wobec  $1/4$ , przeto można z wielkim przybliżeniem położyć

$$r = \frac{1}{2} \pm (1 \pm i)a,$$

gdź  $[(1 \pm i)\alpha]^2 = \pm 2i\alpha^2$ . W ten sposób dochodzimy do rozwiązania ogólnego układu (220.1) w postaci

$$q_2 = (a + \beta)^{\alpha_0 + 1/2} [C_1(a + \beta)^{i\alpha_0} + C_2(a + \beta)^{-i\alpha_0}] + \\ + (a + \beta)^{-\alpha_0 + 1/2} [C_3(a + \beta)^{i\alpha_0} + C_4(a + \beta)^{-i\alpha_0}].$$

Przekształcenie wyrażen w klamrach daje kolejno:

$$C_1(a + \beta)^{i\alpha_0} + C_2(a + \beta)^{-i\alpha_0} = C_1 e^{i\alpha_0 \ln(a + \beta)} + C_2 e^{-i\alpha_0 \ln(a + \beta)} = \\ = (C_1 + C_2) \cos[\alpha_0 \ln(a + \beta)] + i(C_1 - C_2) \sin[\alpha_0 \ln(a + \beta)] = \\ = A \cos[\alpha_0 \ln(a + \beta) + \gamma_1] = A \cos\left[\alpha_0 \ln \frac{a + \beta}{a_1 + \beta} - \vartheta_1\right].$$

Tak samo znajdujemy

$$C_3(a + \beta)^{i\alpha_0} + C_4(a + \beta)^{-i\alpha_0} = B \cos\left[\alpha_0 \ln \frac{a + \beta}{a_2 + \beta} - \vartheta_2\right],$$

przy czym  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  są wartościami  $\alpha$  na obu brzegach. Ostatecznie otrzymamy

$$(220.3) \quad q_2 = A(a + \beta)^{\alpha_0 + 1/2} \cos\left[\alpha_0 \ln \frac{a + \beta}{a_1 + \beta} - \vartheta_1\right] + \\ + B(a + \beta)^{-\alpha_0 + 1/2} \cos\left[\alpha_0 \ln \frac{a + \beta}{a_2 + \beta} - \vartheta_2\right].$$

Stąd obliczymy napięcia  $n_1$  i  $n_2$  według wz. (216.3 i 4), kąt  $\psi$  według (219.3) a w końcu momenty  $m_1$  i  $m_2$  według (215.12 i 13), przy czym można wszędzie pominąć pochodne niższego rzędu wobec wyższych a także dodajniki do  $\alpha_0$  we współczynnikach (a nie w wykładnikach) jeżeli nie przewyższają  $5/2$ . Tą drogą znaleziono np. wzory

$$(220.4) \quad \left\{ \begin{aligned} n_1 &= \sqrt{2} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} a_0 \left[ -A(a + \beta)^{\alpha_0 - 1/2} \cdot \cos\left(\alpha_0 \ln \frac{a + \beta}{a_1 + \beta} - \vartheta_1 + \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ &\quad \left. + B(a + \beta)^{-\alpha_0 - 1/2} \cdot \cos\left(\alpha_0 \ln \frac{a + \beta}{a_2 + \beta} - \vartheta_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ \psi &= -\frac{2 a_0^2}{Eg} \cdot \frac{\rho_1^2}{\rho_2^2} \left[ A(a + \beta)^{\alpha_0 - 3/2} \cdot \cos\left(\alpha_0 \ln \frac{a + \beta}{a_1 + \beta} - \vartheta_1 + \frac{\pi}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + B(a + \beta)^{-\alpha_0 - 3/2} \cdot \cos\left(\alpha_0 \ln \frac{a + \beta}{a_2 + \beta} - \vartheta_2 - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ m_2 &= -\frac{\rho_2}{a_0 \sqrt{2}} \left[ A(a + \beta)^{\alpha_0 + 3/2} \cdot \cos\left(\alpha_0 \ln \frac{a + \beta}{a_1 + \beta} - \vartheta_1 + \frac{3\pi}{4}\right) - \right. \\ &\quad \left. - B(a + \beta)^{-\alpha_0 + 3/2} \cdot \cos\left(\alpha_0 \ln \frac{a + \beta}{a_2 + \beta} - \vartheta_2 - \frac{3\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned} \right.$$

Przykład liczbowy zastosowania w obliczeniu wytrzymałościowym kopuły już przytoczonej w § 203 znajdzie czytelnik na str. 173 książki Flügge'go.



## XVI a. PŁYTY ANIZOTROPOWE <sup>1)</sup>

§ 200 a. Wstęp. Wyciąwszy np. z kryształu kwarcu bliskimi przekrojami równoległymi płytkę możemy wyznaczyć jej własności sprężyste w zależności od położenia przekroju względem osi krystalicznych i stałych sprężystości kryształu. Taka płytka jest typem płyt anizotropowych. Teoria ogólna odkształceń sprężystych takich płyt była już traktowana w dwu pracach <sup>2)</sup> z drugiej połowy wieku XIX, które nie obudziły zainteresowania i poszły w niepamięć. Dopiero technika budownictwa żelbetonowego powołała do życia z początkiem bieżącego stulecia potrzebę teorii płyt betonowych uzbrojonych gęstą siecią prętów stalowych tak, że sztywność zginania takiej płyty w dwu kierunkach najczęściej wzajemnie prostopadłych (długości i szerokości) jest różna. Kiedy w r. 1914 autor ogłosił taką teorię w Lwowskim Czasopiśmie Technicznym i w Wiedeńskim Czasopiśmie inżynierów i architektów austriackich, to oka-

---

<sup>1)</sup> Rozdział ten nie leżał początkowo w programie książki jako zawarty niejako w szeregu prac autora ogłaszanych w latach 1914—1929, dostępnych, jak się wówczas zdawało, czytelnikom polskim, zwłaszcza w monografiach:

1. *Teoria płyt prostokątne różnokierunkowych*, Lwów 1921, Archiwum Tow. Naukowego.

2. *Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten*, Warszawa 1929, Akad. Nauk Techn.

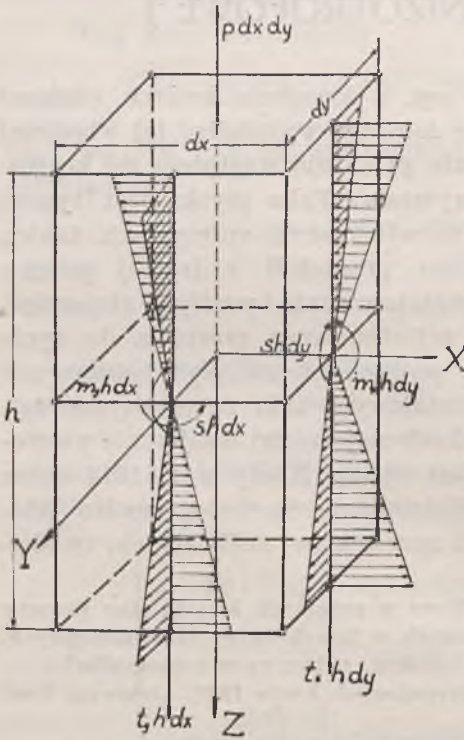
Atoli z końcem wojny okazało się, że reszta nakładów obu tych prac uległa wyczerpaniu lub zniszczeniu, wobec czego należało objąć programem książki i rozdział niniejszy, zwłaszcza ze względu na potrzeby współczesnej techniki naukowej i jej młodych adeptów. Było to tym bardziej wskazane, że w wydaniu II, z r. 1948 dzieła wiedeńskiego profesora K. Girkmann'a pt. „Flächentragwerke“ poświęcono rozdział końcowy zagadnieniom płyt ortotropowych według tych tylko prac autora, które były ogłaszane w języku niemieckim w latach 1916—1926.

<sup>2)</sup> F. Gehring, „De aequationibus differentialibus, quibus aequilibrium et motus laminae crystallinae definiuntur“, Berlin 1860.

J. Boussinesq, „Équations d'équilibre d'une plaque“, Journ. de Math. 1879.

zało się, że teoria ta pokrywa się z teorią takich płyt anizotropowych, których osie sprężystości są wzajemnie prostopadłe. Teoria ta okazała się oczywiście doskonalsza od proponowanych przedtem we Francji i w Niemczech metod obliczenia statycznego takich płyt, nazwanych przez autora *ortotropowymi*, co jest wygodnym skrótem nazwy racjonalnej: *ortogonalnie-anizotropowe*.

Obierzmy kierunki osi sprężystości takiej płyty za osie  $X, Y$  prostokątnego układu współrzędnych o początku leżącym wewnątrz grubości płyty  $h$  i osi  $Z$  skierowanej w dół przy pomyślanym położeniu poziomym płyty. Element płyty (rys. 141) o przekroju poziomym  $dx \cdot dy$  obciążony pionowo przez  $p \cdot dx \cdot dy$  jest oczywiście tak samo jak w płycie izotropowej narażony na ścianach bocznych na moment  $m_x h \cdot dy$  zginający go jako element skrawka o osi równoległej do  $X$ ; moment  $m_y h \cdot dx$  zginający go jako element skrawka o osi równoległej do  $Y$ ; momenty skręcające  $s_x h \cdot dy$  na ścianie prostopadłej do  $X$  i  $s_y h \cdot dx$  na ścianie prostopadłej do  $Y$ , (przy czym  $s_x = s_y = s$  z powodu równości  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ); wreszcie na siły tnące  $t_x h \cdot dy$  i  $t_y h \cdot dx$ , jeżeli wylączymy przypadek sił rozciągających lub ściskających w płaszczyźnie  $XY$ , rozpatrzony w paragrafie następnym. Wielkości  $m_x, m_y$  i  $s$  oznaczają tutaj momenty odniesione do jednostki długości odpowiedniego przekroju płyty, mają więc wymiar siły; zaś  $t_x, t_y$  siły tnące odniesione do jednostki długości przekroju, a więc o wymiarze siła/długość.



Rys. 141.

Zadaniem naszym jest teraz wyrażenie wielkości  $m_x, m_y, \dots$  przez funkcję „ugięcia” w warstwy płyty pełniące rolę warstwy „obojętnej” (przy dostatecznie małych przemieszczeniach  $w$ , a znikających wartościach  $u, v$  w tej warstwie) analogicznie jak to uczyniono w § 182 dla płyt izotropowych. Następnie znajdziemy równanie

różniczkowe dla ugięcia  $w$  odpowiadające równaniu (183.7) dla płyty izotropowej, które przepiszemy tutaj w postaci

$$(200 a 1) \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{B}, \quad \left( B = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{h^3}{12} \right),$$

a wreszcie wzór dla energii sprężystej zgiętej płyty ortotropowej odpowiadający wzorowi (181.1) płyty izotropowej.

**§ 200 b. Tarcza (plyta) ortotropowa w płaskim stanie napięcia.**

Stan taki odpowiada obciążeniom symetrycznym względem płaszczyzny  $s$  środkowej tarczy silami równoległymi do tej płaszczyzny. Przy założeniu, że osie  $X, Y$  są zarazem głównymi osiami sprężystości materiału jedolitego tarczy napiszemy w przypadku prostego rozciągania naprężeniem  $\sigma_x$  dla wydłużenia jednostkowego w tym kierunku

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1},$$

gdzie  $E_1$  ma znaczenie modułu sprężystości dla kierunku  $X$ .

Nadto musimy przyjąć, że jednocześnie powstanie odkształcenie w kierunku poprzecznym, którego wartością będzie w myśl prawa Hooke'a

$$-\nu_1 \frac{\varepsilon_x}{E_1}.$$

Tak samo odpowiada naprężeniu  $\sigma_y$  działającemu w drugim kierunku głównym

wydłużenie  $\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_2}$  w kierunku  $Y$ , oraz

wydłużenie  $-\nu_2 \frac{\sigma_y}{E_2}$  w kierunku  $X$ .

Przy jednoczesnym działaniu  $\sigma_x$  i  $\sigma_y$  jest przeto

$$(200 b 1) \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_y}{E_2}; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_2} - \nu_1 \frac{\sigma_x}{E_1}.$$

W ogólnym dwuwymiarowym stanie napięcia mamy jeszcze do czynienia z naprężeniem stycznym  $\tau$ , które powoduje kąt odkształcenia postaciowego (kąt posunięcia) elementem tarczy  $\gamma$  zależny jedynie od  $\tau$ , a więc

$$(200 b 2) \quad \gamma = \frac{\tau}{G_0},$$

gdzie  $G_0$  oznacza stałą materiału analogiczną do modułu  $G$  materiału izotropowego. Jak wiadomo z § 63, potencjał  $\Phi$  wewnętrznych

sił sprężystości (krócej: potencjał sprężystości) jest kwadratową jednorodną funkcją składowych stanu odkształcenia, albo takąż funkcją składowych stanu napięcia. W naszym przypadku napiszemy przeto

$$\begin{aligned}\Phi = & \frac{1}{2} a_{11} \sigma_x^2 + a_{12} \sigma_x \sigma_y + a_{13} \sigma_x \tau + \\ & + \frac{1}{2} a_{22} \sigma_y^2 + a_{23} \sigma_y \tau + \\ & + \frac{1}{2} a_{33} \tau^2.\end{aligned}$$

Z tego wynika

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{13} \tau \\ \varepsilon_y &= a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{23} \tau \\ \gamma &= a_{13} \sigma_x + a_{23} \sigma_y + a_{33} \tau.\end{aligned}$$

Ale w naszym przypadku  $\varepsilon_x$  i  $\varepsilon_y$  są niezależne od  $\gamma$  i na odwrót. A zatem

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y & \gamma &= a_{33} \tau. \\ \varepsilon_y &= a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y\end{aligned}$$

Porównawszy te równania z równaniami (200b 1 i 2), otrzymujemy

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_1}{E_1} = -\frac{\nu_2}{E_2}, \quad a_{33} = \frac{1}{G_0},$$

z czego wynika po zastąpieniu  $\nu_1/E_1 = \nu_2/E_2 = 1/E_3$ , że związki między odkształceniami a naprężeniami mają w przypadku ortotropii postać

$$(200b\ 3) \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_1} - \frac{\sigma_y}{E_3}; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_2} - \frac{\sigma_x}{E_3}; \quad \gamma = \frac{\tau}{G_0}$$

z 4 niezależnymi od siebie stałymi  $E_1, E_2, E_3$  i  $G_0$ . Po wstawieniu tych wyrażeń we wzór dla potencjału

$$\frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau \gamma)$$

otrzymamy wyrażenie dla energii sprężystej tarczy ortotropowej, której brzegi tworzą dowolny walec o tworzących prostopadłych do płaszczyzny tarczy:

$$(200b\ 4) \quad V = \frac{1}{2} \int \int h \left( \frac{\sigma_x^2}{E_1} + \frac{\sigma_y^2}{E_2} - 2 \frac{\sigma_x \sigma_y}{E_3} + \frac{\tau^2}{G_0} \right) dx \cdot dy.$$

**§ 200c. Równanie funkcji naprężeń tarczy ortotropowej.** Równania równowagi elementu tarczy mają znaną postać niezależną od własności sprężystych:

$$(200c) \quad \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} = 0,$$

jeżeli nie ma sił masowych. Tym równaniom czynią zadość tożsamościowo wyrażenia naprężeń przez pochodne cząstkowe funkcji  $\varphi$  zwanej funkcją naprężeń, a mianowicie:

$$(200c1) \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \tau = -\frac{\partial \varphi}{\partial x \partial y},$$

jak łatwo sprawdzić przez podstawienie w (200c).

Potrzebne równanie różniczkowe dla  $\varphi$  znajdujemy wstawivszy we wzory (200b3) wyrażenia

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

i wyrugowawszy pochodne cząstkowe  $u$  i  $v$  po dwukrotnym różniczkowaniu  $\varepsilon_x$  względem  $y$ ;  $\varepsilon_y$  względem  $x$ , oraz  $\gamma$  względem  $x$  i  $y$ , z czego wynika równanie

$$(200c2) \quad \frac{1}{E_1} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \frac{1}{E_3} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{1}{E_2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{1}{E_3} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{1}{G_0} \cdot \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} = 0.$$

Po podstawieniu tutaj wartości (200c1) otrzymamy ostatecznie

$$(200c3) \quad E_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2K \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + E_1 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

przy oznaczeniu skracającym

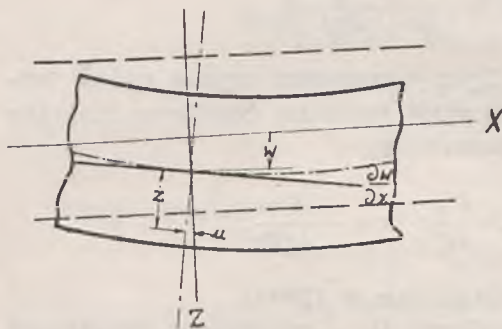
$$K = E_1 E_2 \left( \frac{1}{2G_0} - \frac{1}{E_3} \right).$$

W przypadku izotropii przekształca się to równanie na

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0.$$

Co się tyczy warunków brzegowych, to w przypadkach konkretnych warunki te określają wartości naprężeń na brzegach tarczy jako wielkości dane. Rzadziej mamy do czynienia z warunkami ustalającymi przemieszczenia na tych brzegach (częściowo lub na całym obwodzie).

§ 200 d. Energia zginania płyty ortotropowej i równanie różniczkowe powierzchni ugięcia. Rys. 142 przedstawia w przesadzie przekrój  $XZ$  zgiętej płyty i uzmysławia założenia przybliżone teorii płyt „cienkich”. 1<sup>o</sup> że elementy prostopadłościennie o wymiarach



Rys. 142.

$dx$ ,  $dy$ ,  $h$ , które przed obciążeniem płyty miały krawędzie  $h$  pionowe, pochyłają się wskutek jej ugięcia tak, że te krawędzie pozostają normalnymi do powierzchni zgięcia płyty; 2<sup>o</sup> każdy punkt płyty  $(x, y, 0)$  leżący pierwotnie na płaszczyźnie obojętnej  $z=0$ , doznaje wskutek zgięcia płyty tylko małego przemieszczenia  $w$ . Dwie pozostałe składowe przemieszczenia są bowiem tylko małymi rzędu drugiego wobec  $w$ . Atoli inne punkty płyty o pierwotnych współrzędnych  $x, y, z$  zajmują miejsca  $x+u$ ,  $y+v$ ,  $z+w$ , przy czym można napisać

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x}; \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}.$$

A zatem

$$(200 d) \quad \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

z czego w połączeniu z równaniami (200 b 3) wynika, że tak składowe stanu odkształcenia, jak i składowe stanu napięcia są proporcjonalne do  $z$ . Z obu układów równań znajdujemy łatwo

$$(200 d 1) \quad \begin{cases} \sigma_x = -\frac{1}{1-\nu_1\nu_2} E_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z \\ \sigma_y = -\frac{1}{1-\nu_1\nu_2} E_2 \left( \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z \\ \tau = -2 G_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z. \end{cases}$$

Sily wewnętrzne określone tymi naprężeniami działają na ściany  $h \cdot dx$  i  $h \cdot dy$  elementu płyty i dają pary wypadkowe, które odnie-

sione do jednostki szerokości ściany bocznej oznaczamy przez  $m_1$ ,  $m_2$  i  $s$ . Otrzymujemy dla nich wyrażenia

$$m_1 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x z dz; \quad m_2 = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz; \quad s = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau z dz.$$

Wykonawszy całkowania i wprowadziwszy oznaczenia skrócone

$$B_1 = \frac{1}{1 - \nu_1 \nu_2} E_1 \frac{h^3}{12}; \quad B_2 = \frac{1}{1 - \nu_1 \nu_2} E_2 \frac{h^3}{12}; \quad C = G_0 \frac{h^3}{12},$$

dochodzimy do wzorów następujących dla płyt ortotropowych

$$(200d \ 2) \quad \begin{cases} m_1 = -B_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ m_2 = -B_2 \left( \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ s = -2C \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Wielkości  $B_1$ ,  $B_2$  i  $C$  są głównymi stałymi płyty ortotropowej: pierwsze dwie mają znaczenie *głównych sztywności zginania*, a trzecie *sztywności skręcania* i odnoszą się do skrawków o szerokości 1. Należy przy tym pamiętać o związku

$$\frac{\nu_1}{E_1} = \frac{\nu_2}{E_2} = \frac{1}{E_3}.$$

Ważną okolicznością w zastosowaniach jest to, że wyrażenia dla momentów  $m_1$ ,  $m_2$  i  $s$  są odpowiednio proporcjonalne do  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau$  w rozpatrywanym punkcie płyty. To się stosuje widocznie do innych kierunków przekrojów obróconych względem kierunków głównych, dzięki czemu różne twierdzenia o składowych płaskiego stanu napięcia dają się przenieść bezpośrednio na momenty  $m_1$ ,  $m_2$  i  $s$  (pojmowanych jako wektory).

Tutaj trzeba wymienić jeszcze dwa założenia przybliżone w teorii płyt cienkich, a mianowicie:

a) zupełne pominięcie naprężeń  $\sigma_2$ , które w rzeczywistości są ściśle równe zero tylko w nieobciążonych bezpośrednio obszarach płyty;

b) pominięcie skutków sił tnących, które wywołują naprężenia  $\tau_{xz}$  i  $\tau_{yz}$  oprócz uwzględnionych już naprężeń  $\tau_{xy}$  oznaczonych przez  $\tau$ .

Albowiem te założenia przyjmujemy i w ciągu dalszym, przy szukaniu wyrażenia dla *energii sprężystej* płyty i *równania różniczkowego jej powierzchni ugięcia*.

Energię sprężystą płyty wyrazimy więc wzorem ogólnym

$$V = \frac{1}{2} \int \int \int (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \gamma \tau) dx dy dz,$$

gdzie całkowanie odnosi się do całej objętości płyty. Po wstawieniu wartości z (200 b 3), (200 d 1) i wykonaniu całkowania otrzymaliśmy ważny wzór, do którego jednak dojdziemy prościej mnożąc połowy momentów przez odpowiednie kąty obrotu ścian i dodając wyniki. Obie ściany  $h \cdot dy$  elementu płyty  $h \cdot dx \cdot dy$  narażone na momenty zginające  $m_1 dy$  tworzą po odkształceniu kąt  $-\partial^2 w / \partial x^2 \cdot dx$ . Odpowiednią wielkością energii potencjalnej jest

$$-\frac{1}{2} m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy.$$

Podobnie dają dwa drugie momenty zginające

$$-\frac{1}{2} m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy.$$

Kąty skręcenia przeciwległych ścian elementu płyty mają wartości

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \quad \text{i} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot dy,$$

a przynależne momenty skręcające

$$s \cdot dy \quad \text{i} \quad s \cdot dx.$$

Razem przeto mamy

$$V = -\frac{1}{2} \int \int \left( m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2s \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy,$$

a po wprowadzeniu wyrażeń na momenty (200 d 2), znajdziemy

$$(200 d 3) \quad V = \frac{1}{2} \int \int \left[ B_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + B_2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + (B_1 \nu_2 + B_2 \nu_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 4C \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

przy rozpostarcie całkowania na całą powierzchnię (pierwotną) płyty.

Do ustawienia równania różniczkowego powierzchni ugięcia płyty potrzeba jeszcze obliczenia sił tnących  $t_1$  i  $t_2$  na ścianach  $h \cdot dy$  i  $h \cdot dx$  elementu płyty, odniesionych również do jednostki szerokości ściany. Siły te są z momentami zginającymi i skręcającymi zwią-



zane warunkami równowagi. Aby obliczyć  $t_1$ , trzeba tylko posłużyć się równaniem momentów względem osi równoległej do  $Y$ . Poprowadzimy ją najdogodniej przez środek elementu płyty, otrzymując:

$$m_1 dy - \left( m_1 + \frac{\partial m_1}{\partial x} dx \right) dy + s dx - \left( s + \frac{\partial s}{\partial y} \cdot dy \right) dx + \\ + t_1 dy \cdot \frac{dx}{2} + \left( t_1 + \frac{\partial t_1}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} = 0.$$

Stąd pierwsze z równań

$$(200 d 4) \quad \begin{cases} t_1 = \frac{\partial m_1}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} \\ t_2 = \frac{\partial m_2}{\partial y} + \frac{\partial s}{\partial x} \end{cases}$$

Drugie wynika z drugiego warunku momentów. Po wstawieniu tutaj wartości (200 d 2) znajdujemy dla sił tnących płyty ortotropowej wzory:

$$(200 d 5) \quad \begin{cases} t_1 = -B_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (B_1 \nu_2 + 2C) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}; \\ t_2 = -B_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - (B_2 \nu_1 + 2C) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}. \end{cases}$$

Jako jedyna jeszcze niewiadoma w uzyskanych wzorach występuje ugięcie  $w$ . Równania dla niej dostarcza nie wykorzystany warunek równowagi, a mianowicie warunek rzutów na oś  $Z$ . Oznaczwszy przez  $p(x, y)$  obciążenie powierzchniowe płyty jako daną funkcję  $x, y$ , napiszemy warunek wymieniony w postaci

$$p \cdot dx \cdot dy - t_2 dx + \left( t_2 + \frac{\partial t_2}{\partial y} \cdot dy \right) dx - t_1 dy + \left( t_1 + \frac{\partial t_1}{\partial x} \cdot dx \right) dy = 0,$$

czyli

$$p + \frac{\partial t_1}{\partial x} + \frac{\partial t_2}{\partial y} = 0.$$

Stąd po wstawieniu wyrażeń (200 d 5) i użyciu skrótu

$$(200 d 6) \quad \begin{cases} 2H \equiv B_1 \nu_2 + B_2 \nu_1 + 4C \quad \text{znajdujemy} \\ B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \end{cases}$$

jako równanie różniczkowe powierzchni ugięcia płyty ortotropowej. W przypadku izotropii, tj. gdy

$$B_1 = B_2 = \bar{B} = \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{h^3}{12}, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu, \quad C = \frac{1}{2} (1 - \nu) \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{h^3}{12}$$

równanie powyższe przekształca się na znane z §§ 181 i 183 równanie ugięcia płyty ortotropowej

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \cdot p(x, y).$$

§ 200 e. Rozwiązywanie zagadnień płyty ortotropowej odbywa się w ogóle tymi samymi metodami, które stosowano do płyt izotropowych. Warunki brzegowe nie ulegają żadnej zmianie, a tylko postać analityczna rozwiązania zależy od wartości względnych stałych  $B_1$ ,  $B_2$  i  $H$ . Te stałe są oczywiście dodatnie, przy czym wartość  $H$  leży pomiędzy  $B_1$  a  $B_2$  gdyż przy  $B_1 = B_2 = \bar{B}$  staje się  $H = \bar{B}$ . Nasuwa się przeto pytanie pod jakimi warunkami rozwiązanie znalezione dla płyty izotropowej może być przeniesione bezpośrednio na płytę ortotropową. Odpowiedź ograniczymy do przypadku gdy  $H = \sqrt{B_1 B_2}$ , a obciążenie płyty ortotropowej jest ciśnieniem  $p$  stałym na całej jego powierzchni. Wtedy zmieniawszy skalę współrzędnych przez podstawienie w rów. (200 d 6)

$$x = x' \sqrt[4]{\frac{B_1}{B_2}} = x' \sqrt[4]{\frac{B_1}{\bar{B}}}; \quad y = y' \sqrt[4]{\frac{B_2}{B_1}} = y' \sqrt[4]{\frac{B_2}{\bar{B}}}, \quad \text{gdzie } \bar{B} = \sqrt{B_1 B_2} = H$$

otrzymujemy

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} = p / \bar{B},$$

a zatem równanie płyty izotropowej tak samo obciążonej.

Gdy np. mamy do czynienia z płytą prostokątną o wymiarach  $a$  i  $b$  dokoła podpartą, to z rozwiązań dla płyty izotropowej znalezionych w §§ 184 i 185 otrzymamy rozwiązania dla płyty ortotropowej zastępując we wzorach długość  $a$  przez  $a' = a \cdot \sqrt[4]{\bar{B}/B_1}$ , szerokość  $b$  przez  $b' = b \cdot \sqrt[4]{\bar{B}/B_2}$ , oraz podstawiając

$$x' = x \sqrt[4]{\frac{\bar{B}}{B_1}}, \quad y' = y \sqrt[4]{\frac{\bar{B}}{B_2}}$$

oczywiście przy tych samych warunkach brzegowych.

W przypadku ogólnym, tj. gdy

$$H \geq \sqrt{B_1 B_2},$$

postać zgięcia płyty ortotropowej, wygląda jak zobaczymy inaczej, kiedy  $H > \sqrt{B_1 B_2}$ , aniżeli w przypadku  $H < \sqrt{B_1 B_2}$ . Z tego powodu wprowadzimy stosunek

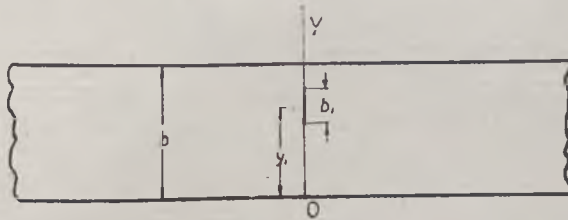
$$H / \sqrt{B_1 B_2} = \eta$$

jako cechę sztywności płyty. Charakter powierzchni ugięcia jest różny, zależnie od tego

$$\text{czy } \eta > 1, \text{ albo } \eta < 1$$

jak zobaczymy na przykładzie poniższym.

§ 200f. Płyta bardzo długa na brzegach równoległych swobodnie podparta. Przyjąwszy obciążenie rozłożone na przekroju poprzecz-



Rys. 143.

nym płyty w osi  $Y$  (rys. 143) według prawa  $p' = f(y)$ , założymy, że  $f(y)$  da się rozwinąć na szereg Fouriera. Wtedy każdy z wyrazów szeregu ma postać

$$c_n \sin \frac{n\pi y}{b}, \text{ albo } g_n \cos \frac{n\pi y}{b}.$$

( $n=1,2,3,\dots$ )

Wobec liniowości równania różniczkowego

$$(200f) \quad B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0$$

ważnego na całej nieobciążonej powierzchni od  $0A$  na prawo i lewo, wystarczy znaleźć rozwiązanie dla obciążenia  $p_r$  jednym wyrazem szeregu tj.

$$p_r = c_r \sin \frac{r\pi y}{b},$$

gdzie  $r$  jest liczbą naturalną. Przewidując całkę szczególną w postaci

$$w = X \sin \frac{r\pi y}{b},$$

gdzie  $X$  jest nieznaną funkcją samego  $x$ , stwierdzamy łatwo, że warunki brzegowe są spełnione, gdyż  $w = 0$  dla  $y = 0$  i  $y = b$  jest  $w = 0$ , a zarazem  $\partial w / \partial y^2 = 0$ .

Po podstawieniu w (200f) otrzymujemy

$$B_1 \frac{d^4 X}{dx^4} \sin \frac{r\pi y}{b} - 2H \frac{d^2 X}{dx^2} \cdot \frac{r^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{r\pi y}{b} + B_2 X \frac{r^4 \pi^4}{b^4} \cdot \sin \frac{r\pi y}{b} = 0.$$

To równanie spełnia się dla każdej wartości  $y$ , gdy

$$B_1 \frac{d^4 X}{dx^4} - 2H \left( \frac{r\pi}{b} \right)^2 \frac{d^2 X}{dx^2} + B_2 \left( \frac{r\pi}{b} \right)^4 = 0.$$

Całka ogólna tego równania liniowego o stałych współczynnikach jest, jak wiadomo

$$X = C_1 e^{\beta_1 x} + C_2 e^{\beta_2 x} + C_3 e^{\beta_3 x} + C_4 e^{\beta_4 x}$$

jeżeli

$$\left. \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{matrix} \right\} = \frac{r\pi}{b} \sqrt{\frac{H}{B_1} \pm \frac{1}{B_1} \sqrt{H^2 - B_1 B_2}}; \quad \left. \begin{matrix} \beta_3 \\ \beta_4 \end{matrix} \right\} = -\frac{r\pi}{b} \sqrt{\frac{H}{B_1} \pm \frac{1}{B_1} \sqrt{H^2 - B_1 B_2}}$$

są pierwiastkami równania charakterystycznego

$$\beta^4 - 2 \left( \frac{r\pi}{b} \right)^2 \frac{H}{B_1} \beta^2 + \left( \frac{r\pi}{b} \right)^4 \frac{B_2}{B_1} = 0.$$

Ażeby dla  $x = \infty$  było  $w = 0$ , muszą dwie pierwsze stałe  $C_1$  i  $C_2$  być równe zero. Do wyznaczenia  $C_3$  i  $C_4$  mamy dwa warunki krańcowe:

Dla  $x = 0$  jest z powodu symetrii  $\partial w / \partial x = 0$ , a siła tnąca  $t_1 = -p_r/2$ .

Stosownie do tego, czy

$$H \gtrless B_1 B_2,$$

czyli  $\eta \gtrless 1$ , przybiera rozwiązanie jedną z trzech postaci następujących

$$(I) \quad w = (c_3 e^{\beta_3 x} + c_4 e^{\beta_4 x}) \sin \frac{r\pi y}{b}, \quad \text{przy } \eta > 1$$

$$(II) \quad w = (c' + c''x) e^{-\beta_0 x} \sin \frac{r\pi y}{b}, \quad \text{przy } \eta = 1$$

z wartością

$$\beta_0 = \frac{r\pi}{b} \sqrt{\frac{H}{B_1}} = \frac{r\pi}{b} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}};$$

$$(III) \quad w = (A_3 \cos q x + A_4 \sin q x) e^{-\beta x} \sin \frac{r\pi y}{b}, \quad \text{przy } \eta < 1$$

z wartościami

$$\beta = \frac{r\pi}{b} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_2}{B_1} + \frac{1}{2} \frac{H}{B_1}}}, \quad q = \frac{r\pi}{b} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_2}{B_1} - \frac{1}{2} \frac{H}{B_1}}}.$$

Z wymienionych powyżej warunków krańcowych znajdujemy w przypadku I:

$$C_3 = -\frac{\beta_4}{\beta_3} C_4 = \frac{c_r}{2B_1 \beta_3 (\beta_3^2 - \beta_4^2)},$$

a zatem

$$w = \frac{c_r}{2B_1(\beta_3^2 - \beta_4^2)} \left( \frac{e^{\beta_3 x}}{\beta_3} - \frac{e^{\beta_4 x}}{\beta_4} \right) \sin \frac{r \pi y}{b},$$

albo też

$$(200f I) \quad w = \frac{1}{4r^3} \cdot \frac{b^2}{\pi^2} \cdot \frac{c_r}{\sqrt{H^2 - B_1 B_2}} (\beta e^{-r \frac{x}{\beta}} - a e^{-r \frac{x}{a}}) \sin \frac{r \pi y}{b},$$

z oznaczeniami

$$-\frac{r}{\beta_3} = a = \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{H}{B_2} - \sqrt{\left(\frac{H}{B_2}\right)^2 - \frac{B_1}{B_2}}}, \quad -\frac{r}{\beta_4} = \beta = \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{H}{B_2} + \sqrt{\left(\frac{H}{B_2}\right)^2 - \frac{B_1}{B_2}}}.$$

Z tych równań wynikają jeszcze wzory przydatne w obliczeniach:

$$(200f I) \quad \begin{cases} a + \beta = \frac{2b}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{H}{B_2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}}; & \beta - a = \frac{2b}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{H}{B_2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}}; \\ a\beta = \frac{b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}; & \beta^2 - a^2 = \frac{2b^2}{\pi^2} \sqrt{\left(\frac{H}{B_2}\right)^2 - \frac{B_1}{B_2}}. \end{cases}$$

W przypadku II znajdujemy:

$$(200f II) \quad w = \frac{c_r}{4B_1} \frac{\gamma^2}{r^3} \left( 1 + \frac{r x}{\gamma} \right) e^{-r x / \gamma} \sin \frac{r \pi y}{b}, \quad \text{przy } \gamma = \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{4}{B_2}}.$$

Na koniec w przypadku III mamy:

$$(200f III) \quad w = \frac{c_r}{4\pi^2} \cdot \frac{b^2}{\sqrt{B_1 B_2}} \cdot \frac{1}{r} \left( a' \cos \frac{r x}{\beta'} + \beta' \sin \frac{r x}{\beta'} \right) e^{-r x / a'} \sin \frac{r \pi y}{b}$$

przy oznaczeniach

$$(200f 2) \quad a' = \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} + \frac{1}{2} \frac{H}{B_1}}, \quad \beta' = \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{B_2}{B_1}} - \frac{1}{2} \frac{H}{B_1}}.$$

Przejsie od wypadku I do III można także wykonać przez podstawienie

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a'} + i \frac{1}{\beta'}, \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{a'} - i \frac{1}{\beta'}.$$

Wyniki powyższe zastosujemy teraz do przykładu szczególnego, w którym obciążeniem nad przekrojem 0A (rys. 143) jest  $q'b$ , a  $y_1$  jest rzędną środka obciążenia.

Rozwinięcie tego obciążenia na szereg Fouriera daje

$$p'(y) = \frac{4q'}{\pi} \sum_r \frac{(r, b_1, y_1)}{r} \sin \frac{r \pi y}{b}, \quad (r=1, 2, 3, \dots),$$

gdzie dla skrócenia położono

$$(r, b_1, y_1) = \sin \frac{r\pi b_1}{2b} \sin \frac{r\pi y_1}{b}.$$

Wtedy z rozwiązań (200f I, II, III) otrzymamy natychmiast

$$(200f I, a) \quad w = \frac{2q'b^4}{\pi^5 B_2} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{(r, b_1, y_1)}{n^2} \cdot \frac{\beta e^{-rx/\beta} - \alpha e^{-rx/\alpha}}{\beta - \alpha} \cdot \sin \frac{r\pi y}{b}$$

jako równanie powierzchni ugięcia dla dodatnich  $x$ . Dla wartości ujemnych  $x$  trzeba tylko wstawić zamiast  $x$  wartość bezwzględną  $|x|$ .

Przechodząc w granicy do ciężaru skupionego  $P = \lim_{b_1 \rightarrow 0} q'b_1$  znajdziemy z (200f I a) równanie powierzchni ugięcia w postaci

$$(200f I b) \quad w = \frac{Pb^3}{\pi^4 B_2} \cdot \frac{1}{\alpha + \beta} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^3} \sin \frac{r\pi y_1}{b} \cdot \frac{\beta e^{-r|x|/\beta} - \alpha e^{-r|x|/\alpha}}{\beta - \alpha} \cdot \sin \frac{r\pi y}{b}.$$

Powyższe równania przeistaczają się w przypadku  $\eta = 1$  na:

$$(200f II a) \quad w = \frac{q'\gamma^3}{\pi B_1} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^4} (r, b_1, y_1) \left(1 + \frac{rx}{\gamma}\right) e^{-rx/\gamma} \sin \frac{r\pi y}{b}$$

$$(200f II b) \quad w = \frac{P\gamma^3}{2bB_1} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^5} \sin \frac{r\pi y_1}{b} \left(1 + \frac{rx}{\gamma}\right) e^{-rx/\gamma} \sin \frac{r\pi y}{b}.$$

Podstawiawszy wreszcie

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha'} + i \frac{1}{\beta'}; \quad \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha'} - i \frac{1}{\beta'}, \quad (\text{ob. 200f 2})$$

w odpowiednie równania dla przypadku I znajdziemy dla przypadku III:

$$(200f III a) \quad w = \frac{q'b^2}{\pi^2 \sqrt{B_1 B_2}} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^4} (r, b_1, y_1) \left( \alpha' \cos \frac{rx}{\beta'} + \beta' \sin \frac{rx}{\beta'} \right) e^{-rx/\alpha'} \sin \frac{r\pi y}{b}$$

$$(200f III b) \quad w = \frac{Pb}{2\pi^2 \sqrt{B_1 B_2}} \sum_{r=1,2,3,\dots} \frac{1}{r^5} \sin \frac{r\pi y_1}{b} \left( \alpha' \cos \frac{rx}{\beta'} + \beta' \sin \frac{rx}{\beta'} \right) e^{-rx/\alpha'} \sin \frac{r\pi y}{b}.$$

Na podstawie znalezionych równań powierzchni ugięcia można obliczyć następnie momenty zginające, siły tnące i reakcje brzegów podpartych z wzorów poprzednio podanych. Tego rodzaju obliczenia tu i ówdzie doprowadzone do bezpośrednich zastosowań technicznych zawiera przytaczana już „Teoria płyt“ autora<sup>1)</sup>.

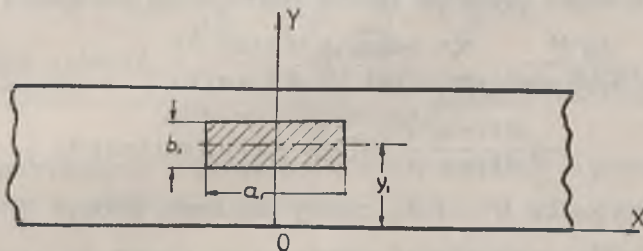
**§ 200 g. Przypadek obciążenia równomiernie rozłożonego** na polu prostokątnym równoległym do brzegów podpartych płyty bardzo długiej (rys. 144). Stosując metodę podaną w § 185 otrzymujemy w przypadku I, gdy  $\eta > 1$

a) dla  $\frac{a_1}{2} < x < \infty$

$$(Ia) \quad w = \frac{2qb^4}{\pi^5 B_2} \sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n^5} \left[ \frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} (e^{-n \frac{2x-a_1}{2\beta}} - e^{-n \frac{2x+a_1}{2\beta}}) - \frac{\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} (e^{-n \frac{2x-a_1}{2\alpha}} - e^{-n \frac{2x+a_1}{2\alpha}}) \right] \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

b) dla  $-\frac{a_1}{2} < x < \frac{a_1}{2}$

$$(Ib) \quad w = \frac{2qb^4}{\pi^5 B_2} \sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n^5} \left[ 2 - \frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} (e^{-n \frac{2x+a_1}{2\beta}} + e^{n \frac{2x-a_1}{2\beta}}) + \frac{\alpha^2}{\beta^2 - \alpha^2} (e^{-n \frac{2x+a_1}{2\alpha}} + e^{n \frac{2x-a_1}{2\alpha}}) \right] \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$



Rys. 144.

Na pozostałym obszarze płyty, tj. dla  $-\infty < x < -\frac{a_1}{2}$ , obowiązuje wyrażenie utworzone z (Ia) przez podstawienie  $-x$  zamiast  $x$ . W przypadku II, gdy  $\eta = 1$ , czyli  $H^2 = B_1 B_2$ , równania powyższe przekształcają się na następujące:

<sup>1)</sup> Z nowszych badań z tej dziedziny wyróżnia się ogólnością i metodą praca prof. W. Nowackiego: „Zginanie płyt ciągłych nieskończenie długich“, Arch. Mech. Stos. 1, Gdańsk 1949.

$$(II a) \quad w = \frac{2qb^4}{\pi^5 B_2} \sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n^5} \left[ \left( 1 + \frac{n}{2} \frac{2x - a_1}{2\gamma} \right) e^{-n \frac{2x - a_1}{2\gamma}} - \right. \\ \left. - \left( 1 + \frac{n}{2} \frac{2x + a_1}{2\gamma} \right) e^{-n \frac{2x + a_1}{2\gamma}} \right] \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(II b) \quad w = \frac{2qb^4}{\pi^5 B_2} \sum_n \frac{(n, b_1, y_1)}{n^5} \left[ 2 - \left( 1 + \frac{n}{2} \frac{a_1 - 2x}{2\gamma} \right) e^{-n \frac{a_1 - 2x}{2\gamma}} - \right. \\ \left. - \left( 1 + \frac{n}{2} \frac{a_1 + 2x}{2\gamma} \right) e^{-n \frac{a_1 + 2x}{2\gamma}} \right] \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Wartości  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $\gamma$  podają wzory (200f 1) i (200f 2). We wszystkich wzorach dla  $w$  znikają wyrazy szeregu odpowiadające parzystym  $n$ , jeżeli  $y_1 = b/2$ , tzn. gdy obciążenie znajduje się w środku szerokości płyty. Wówczas należy przyjąć  $n = 1, 3, 5, \dots$

§ 200 h. Przypadek obciążenia liniowego płyty prostokątnej brzegami swobodnie podpartej (dwustronnie). Tą samą metodą co w § 185 znajdujemy (ob. rys. 112) przy obciążeniu  $q$  kG/cm<sup>2</sup>:

a) kiedy  $H^2 > B_1 B_2$ , dla części płyty po lewej stronie linii obciążenia:

$$(I a) \quad w = \frac{\pi^5 B_2 (\beta^2 - \alpha^2)}{4q'b^4} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{(nb_1 y_1)}{n^4} \left\{ \beta \frac{Sh(n x_2 / \beta)}{Sh(n a / \beta)} Sh(n x / \beta) - \right. \\ \left. - \alpha \frac{Sh(n x_2 / \alpha)}{Sh(n a / \alpha)} Sh(n x / \alpha) \right\} \sin(n\pi y / b);$$

b) dla części płyty po stronie prawej linii obciążenia

$$(I b) \quad w = \frac{4q'b^4}{\pi^5 B_2 (\beta^2 - \alpha^2)} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{(nb_1 y_1)}{n^4} \left\{ \beta \frac{Sh(n x_1 / \beta)}{Sh(n a / \beta)} \cdot Sh[n(a - x) / \beta] - \right. \\ \left. - \alpha \frac{Sh(n x_1 / \alpha)}{Sh(n a / \alpha)} Sh[n(a - x) / \alpha] \right\} \sin(n\pi y / b).$$

W przypadku  $H^2 = B_1 B_2$ , mamy dla lewej strony

$$(II a) \quad w = \frac{2q'b^4}{\pi^5 B_2 \gamma} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{(nb_1 y_1)}{n^4} \left[ 1 + \frac{n\alpha}{\gamma} Cth(n a / \gamma) - \frac{n x_2}{\gamma} Cth(n x_2 / \gamma) - \right. \\ \left. - \frac{n x}{\gamma} Cth(n x / \gamma) \right] \frac{Sh(n x_2 / \gamma)}{Sh(n a / \gamma)} Sh(n x / \gamma) \cdot \sin(n\pi y / b),$$

zaś dla strony prawej ( $x > x_1$ ):

$$(II b) \quad w = \frac{2q'b^4}{\pi^5 B_2 \gamma} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{(nb_1 y_1)}{n^4} \left\{ 1 + \frac{n\alpha}{\gamma} Cth(n a / \gamma) - \frac{n x_1}{\gamma} Cth(n x_1 / \gamma) - \right. \\ \left. - \frac{n(a - x)}{\gamma} Cth[n(a - x) / \gamma] \right\} \frac{Sh(n x_1 / \gamma)}{Sh(n a / \gamma)} Sh[n(a - x) / \gamma] \sin(n\pi y / b).$$



Stąd otrzymujemy w przypadku siły skupionej  $P$  w środku płyty wzór stosunkowo prosty dla „strzałki” ugięcia:

$$(200h) \quad j = \frac{Pb^3}{2\pi^4 B_2 \gamma} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^3} \frac{Sh(na/\gamma) - na/\gamma}{Ch(na/\gamma) + 1}.$$

Przypominamy, że  $\gamma = \frac{b}{\pi} \sqrt{B_1/B_2}$ .

W przypadku  $H^2 < B_1 B_2$  wprowadzimy wielkości pomocnicze  $\alpha'$ ,  $\beta'$  określone w § 200f, oraz nowe:

$$\begin{aligned} L_n = & Ch(na/\alpha') \sin(na/\beta') \left[ \frac{1}{\alpha'} Sh(nx_2/\alpha') \cos(nx_2/\beta') + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\beta'} Ch(nx_2/\alpha') \sin(nx_2/\beta') \right] - \\ - & Sh(na/\alpha') \cos(na/\beta') \left[ \frac{1}{\alpha'} Ch(nx_2/\alpha') \sin(nx_2/\beta') - \frac{1}{\beta'} Sh(nx_2/\alpha') \cos(nx_2/\beta') \right]; \\ M_n = & Sh(na/\alpha') \cos(na/\beta') \left[ \frac{1}{\alpha'} Sh(nx_2/\alpha') \cos(nx_2/\beta') - \right. \\ & \left. - \frac{1}{\beta'} Ch(nx_2/\alpha') \sin(nx_2/\beta') \right] + \\ + & Ch(na/\alpha') \sin(na/\beta') \left[ \frac{1}{\alpha'} Ch(nx_2/\alpha') \sin(nx_2/\beta') + \frac{1}{\beta'} Sh(nx_2/\alpha') \cos(nx_2/\beta') \right]. \end{aligned}$$

Z tymi wielkościami ma równanie lewej części powierzchni ugięcia postać

$$(IIIa) \quad w = \frac{2q'b^4}{\pi^5 B_2} \cdot \frac{\alpha'^2 \beta'^2}{\alpha' \beta'} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{(n, b_1, y_1)}{n^4} \cdot \frac{L_n Sh(nx/\alpha') \cos(nx/\beta') - M_n Ch(nx/\alpha') \sin(nx/\beta')}{Sh^2(na/\alpha') + \sin^2(na/\beta')} \cdot \sin(n\pi y/b).$$

Odpowiadający wzór IIIb dla  $x = x_1$  powstaje z powyższego po zastąpieniu  $x_2$  przez  $x_1$  i  $x$  przez  $(a-x)$ .

§ 200i. Przypadek płyty prostokątnej o brzegach  $a$  swobodnie podpartych i brzegach  $b$  doskonale utwierdzonych. Założywszy obciążenie  $p(y)$  niezależne od  $x$  rozpatrujemy ugięcie płyty nieskończenie długiej o szerokości  $b$  i tak samo obciążonej, ale sztywnie podpartej poprzecznie w odstępach  $a$ , jako zagadnienie widocznie równoważne z danym. Przy obiorze początku współrzędnych w rogu płyty przedstawi powierzchnię ugięcia płyty pomocniczej równanie

$$(200i) \quad w_1 = \frac{b^4}{\pi^4 B_2} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{c_n}{n^4} \sin(n\pi y/b),$$

jeżeli oznaczymy przez

$$(200i 1) \quad c_n = \frac{2}{b} \int_0^b p(y) \sin(n\pi y/b) dy$$

uważane za dane współczynniki Fourierskiego rozwinięcia funkcji

$$(200i 2) \quad p(y) = \sum_n c_n \sin(n\pi y/b).$$

Skoro teraz wyrazimy nieznaną reakcję  $p'(y) = \sum_n c'_n \sin(n\pi y/b)$  i obliczymy analogicznie jak w § 200f ugięcie punktu  $(x, y)$  płyty pochodzące od  $p'$ , to przy działaniu tylko sił reakcyjnych leżących w płaszczyźnie  $YZ$  byłoby tym ugięciem

$$(200i 3) \quad -w = \frac{b^4}{2\pi^4 B_2} \sum_n \frac{c'_n}{n^3} \frac{\beta e^{-nx/\beta} - \alpha e^{-nx/\alpha}}{\beta^2 - \alpha^2} \sin(n\pi y/b) = F(x, y),$$

a zatem przy działaniu wszystkich reakcyj płyty nieskończenie długiej powstałoby ugięcie:

$$(200i 4) \quad -w_2 = \sum_{r=1,2,3,\dots} F(ra+x, y) + \sum_{r=1,2,3,\dots} F(ra-x, y)$$

dla  $0 \leq x \leq a$ .

Zważywszy, że

$$\sum_{r=1,2,3,\dots} e^{-n(ra+x)/\beta}$$

jako suma szeregu geometrycznego o ilorazie  $e^{-na/\beta} < 1$  ma wartość

$$e^{-nx/\beta} / (e^{na/\beta} - 1)$$

i podobnie

$$\sum_{r=1,2,3,\dots} e^{-n(ra-x)/\beta} = e^{nx/\beta} / (e^{na/\beta} - 1),$$

mamy

$$(200i 5) \quad -w_2 = \frac{b^4}{2\pi^4 B_2} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{c'_n}{n^3} \left( \frac{\beta e^{-nx/\beta} - \alpha e^{-nx/\alpha}}{\beta - \alpha} + \frac{2\beta}{\beta^2 - \alpha^2} \cdot \frac{Ch(nx/\beta)}{e^{na/\beta} - 1} - \frac{2\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} \cdot \frac{Ch(nx/\alpha)}{e^{na/\alpha} - 1} \right) \sin(n\pi y/b).$$

Warunek

$$(200i 6) \quad (w_1 + w_2)_{x=0} = 0$$

dostarcza wartości nieznanych współczynników

$$(200i 7) \quad c'_n = \frac{1}{n} \frac{2(\alpha + \beta)c_n}{1 + \frac{2\beta}{\beta - \alpha} (e^{na/\beta} - 1)^{-1} - \frac{2\alpha}{\beta - \alpha} (e^{na/\alpha} - 1)^{-1}}.$$

Po wstawieniu wartości  $c_n$  i  $c'_n$  w wyrażeniu dla  $w_1$  i  $w_2$ , otrzymujemy szukane równanie powierzchni ugięcia  $w = w_1 + w_2$  w ogólnej postaci (dla przypadku  $H^2 > B_1 B_2$ ):

$$(I) \quad w = \frac{b^4}{\pi^4 B_2} \sum_n \frac{c_n}{n^4} \left[ 1 - \frac{1}{\beta_{an} - \alpha_{an}} \{ \alpha Sh(nax/a) - \beta Sh(nx/\beta) - \right. \\ \left. - \alpha_{an} Ch(nx/a) + \beta_{an} Ch(nx/\beta) \} \right] \sin(n\pi y/b).$$

Przy czym oznaczono dla skrótienia

$$c_n = \frac{2}{b} \int_0^b p(y) \sin(n\pi y/b) dy,$$

$$(200i 8) \quad \alpha_{an} = a \frac{e^{na/\alpha} + 1}{e^{na/\alpha} - 1} = a Cth(na/2\alpha); \quad \beta_{an} = \beta \frac{e^{na/\beta} + 1}{e^{na/\beta} - 1} = \beta Cth(na/2\beta).$$

W przypadku II ( $H^2 = B_1 B_2$ ,  $a = \beta = \gamma = (b/\pi) \sqrt[4]{B_1/B_2}$ ) przeistacza się rów. I na

$$(II) \quad w = \frac{b^4}{\pi^4 B_2} \sum_n \frac{c_n}{n^4} [1 - (1 + A'_n n x/\gamma) Ch(nx/\gamma) + \\ + (A'_n + A''_n) Sh(nx/\gamma)] \sin(n\pi y/b).$$

Stałe  $A'$  i  $A''$  określają tutaj wzory:

$$(200i 9) \quad A'_n = \frac{Ch(na/\gamma) - 1}{Sh(na/\gamma) + na/\gamma}; \quad A''_n = A'_n Cth(na/2\gamma) = \frac{Sh(na/\gamma)}{Sh(na/\gamma) + na/\gamma}.$$

Na koniec w przypadku III ( $H^2 < B_1 B_2$ ) znajdujemy:

$$(III) \quad w = \frac{b^4}{\pi^4 B_2} \sum_n \frac{c_n}{n^4} [1 - \{ \cos(nx/\beta') + K'_n \sin(nx/\beta') \} Ch(nx/a') + \\ + \{ K''_n \cos(nx/\beta') + K'''_n \sin(nx/\beta') \} Sh(nx/a')] \sin(n\pi y/b)$$

z oznaczeniami skracającymi

$$(200i 10) \quad \left\{ \begin{array}{l} K'_n = \frac{\beta' [Ch(na/a') - \cos(na/\beta')]}{a' Sh(na/a') + \beta' \sin(na/\beta')}; \quad K''_n = \frac{a'}{\beta'} K'_n; \\ K'''_n = \frac{\beta' Sh(na/a') - a' \sin(na/\beta')}{a' Sh(na/a') + \beta' \sin(na/\beta')} \end{array} \right.$$

Stałe  $a'$ ,  $\beta'$  mają tutaj znaczenie poprzednie.

Gdy np. płyta jest obciążona całkowicie równomiernie przez  $q$ , to w przypadku II otrzymujemy

$$(200i 11) \quad w = \frac{4qb^4}{\pi^5 B_2} \sum_{n=1,2,3,\dots} \frac{1}{n^5} \left[ 1 - (1 + A'_n n x / \gamma) Ch(n x / \gamma) + \right. \\ \left. + A'_n \left\{ 1 + \frac{n x}{\gamma} \cdot Ch(n a / 2 \gamma) Sh(n x / \gamma) \right\} \right] \cdot \sin(n \pi y / b).$$

Po wstawieniu w powyższym wzorze  $x = a/2$ ,  $y = b/2$  znajdziemy dla strzałki ugięcia w środku płyty wyrażenie

$$(200i 12) \quad f = \frac{8qb^4}{\pi^5 B_2} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^5} \frac{[Ch(n a / 2 \gamma) - 1][Sh(n a / 2 \gamma) - n a / 2 \gamma]}{Sh(n a / \gamma) + n a / \gamma}.$$

Stąd np. dla płyty kwadratowej izotropowej o boku  $a$  wynika

$$(200i 13) \quad f = \frac{8qb^4}{\pi^5 B} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{(-1)^{(n-1)/2} (Ch n \pi - 1) (Sh n \pi - n \pi)}{n^5 (Sh n \pi + n \pi)}, \\ f = \frac{8qb^4}{\pi^5 B} \left[ \frac{(Ch \pi - 1) (Sh \pi - \pi)}{Sh \pi + \pi} - \frac{1}{3^5} \frac{(Ch 3 \pi - 1) (Sh 5 \pi - 5 \pi)}{Sh 3 \pi + 3 \pi} + \right. \\ \left. + \frac{1}{5^5} \frac{(Ch 5 \pi - 1) (Sh 5 \pi - 5 \pi)}{Sh 5 \pi + 5 \pi} - \dots \right].$$

To daje

$$(200i 14) \quad f = 0,000291 qb^4 / B,$$

podczas gdy przy podparciu wszystkich czterech brzegów otrzymaliśmy w § 185

$$f = 0,00406 qb^4 / B$$

a więc około 14 razy więcej.

## XVII. PODSTAWY TEORII PLASTYCZNOŚCI

§ 221. **Rozważania ogólne.** Teoria sprężystości stanowi tylko część mechaniki teoretycznej ciał stałych przyrody, aczkolwiek część ze stanowiska naukowego najważniejszą. Ale wśród ciał stałych spotykamy wiele zdolnych nie tylko do odkształceń sprężystych, ale także do odkształceń częściowo sprężystych, a zresztą *trwałych*, czyli *plastycznych*. Takie ciała stale, do których zaliczają się przeważnie wszelkie metale, nazywamy *elasto-plastycznymi*. Zachodzi więc potrzeba uzupełnienia teorii sprężystości *teorią plastyczności*.

Ponieważ sprężystość jest istotną cechą ciał stałych zapewniającą wszelkim przedmiotom użytkowym (np. częściom konstrukcyjnym budowli i maszyn) niezmienność ich postaci geometrycznej po usunięciu obciążeń, dopóki przy ich obciążeniu nie przekroczono granicy sprężystości, przeto plastyczność jest cechą dodatkową, nie konieczną dla ciała stałego, ale praktycznie bardzo ważną. Ciała będące w stanie odkształceń plastycznych czyli w stanie plastycznym stanowią przejście teoretyczne od ciał stałych do płynów.

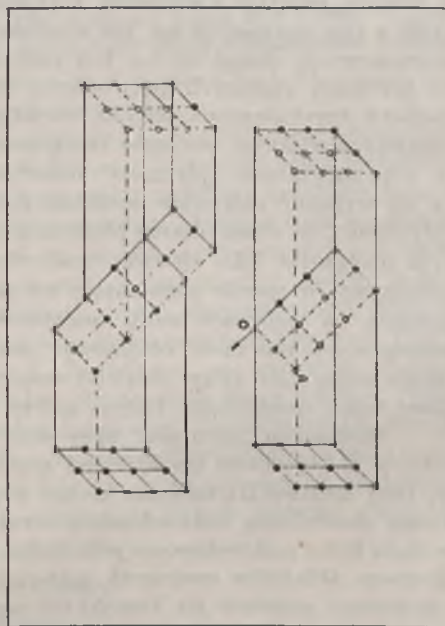
Ograniczając nasze rozważania do ciał stałych, należy podkreślić, że mówiąc o odkształceniach plastycznych mamy w ogóle na myśli takie, które nie naruszają spójności, a zatem takie, którym nie towarzyszą pęknięcia, szczeliny, rozwarstwienia itp. uszkodzenia ciała, chociaż zmieniają jego postać geometryczną bardzo silnie jak np. przy przeciąganiu drutu przez drutownicę, przy walcowaniu lub kuciu metali. Albowiem przy pojawieniu się choćby bardzo drobnych szczelin o szerokości przewyższającej zasięg sił molekularnych, mamy do czynienia praktycznie z groźbą uszkodzenia ciała stałego, tj. uczynienia przedmiotu, jakim jest to ciało, mniej lub więcej nieużytecznym. Warunki powstania takich uszkodzeń nazwiemy w ogóle *warunkami wytrzymałości*, podobnie jak warunki pojawienia się w ciałach elastoplastycznych, do jakich zalicza się większość metali czystych i ich stopów, małych zrazu odkształceń plastycznych, nazwano *warunkami plastyczności*.

Znajomość obu warunków lub, co na jedno wychodzi, znajomość kryteriów ilościowych pojawienia się odkształceń niesprężystych, czyli kryteriów *granicy sprężystości* (pojmwanej identycznie jak granica [dolna] *plastyczności*), oraz *kryteriów wytrzymałości*, jest praktycznie niezmiernie ważna. Nic dziwnego, że już od dawna usiłowano znaleźć takie kryteria na podstawie badań doświadczalnych, o czym wspomniano pokrótce w § 68. Inżynierowie, jako najbardziej w tej sprawie zainteresowani, pragnęli mieć obadwa kryteria możliwie proste i uniwersalne, tj. stosowalne do wszelkich materiałów konstrukcyjnych. Stąd entuzjazm techników dla „teorii wytrzymałościowej” O. Mohr’a z r. 1900, który ostyga bardzo powoli, chociaż już w r. 1904 wnikliwi badacze stwierdzili podstawowe błędy i sprzeczności w koncepcji Mohr’a. Jego założenie, że kryteria plastyczności i kryteria wytrzymałości dają się objąć jednym schematem teoretycznym jest a priori nieprawdopodobne, jeśli się zważy, że odkształcenia plastyczne — zgodnie z doświadczeniami — zmieniają z reguły własności mechaniczne materiału. Drugim błędem zasadniczym Mohr’a było przyjęcie, że wyężenie materiału w ogólnym stanie napięcia zależy tylko od naprężenia w jednym przekroju, który ma być zarazem przekrojem *niebezpiecznym*. W tym przekroju zachodzi według Mohr’a „pęknięcie” polegające na przesunięciu (poślizgu) po sobie warstw materiału leżących po obu stronach przekroju. Swoją hipotezę przeznaczał Mohr’a dla materiałów quasi-izotropowych. Do nich zaliczał i techniczne metale walcowane, chociaż ich anizotropia w zwykłym stanie użytkowym nie podlega wątpliwości. Tymczasem według założeń hipotezy Mohr’a zachowują się tylko pojedyncze kryształy, które można wyhodować dostatecznie wielkie, aby na nich wykonywać doświadczenia np. z rozciąganiem jednoosiowym.

Doświadczenia takie wykazały istotnie ślizganie po sobie warstw molekularnych zorientowanych pierwotnie w ściśle określony sposób względem osi krystalicznych. Te poślizgi odbywają się skokami o jeden lub więcej odstępów rozmieszczenia atomów w siatce krystalicznej warstw ślizgających się po sobie, jak to uzmysławia przesadnie rys. 145 (Burgers). Natomiast pękanie ciał izotropowych lub quasi-izotropowych zachodzi z reguły przez rozdarcie w przekroju prostopadłym do kierunku naprężeń rozciągających, albo równoległe do kierunku naprężeń ściskających (oczywiście przy równomiernym stanie napięcia)<sup>1)</sup>. Ślizganie w płaszczyźnie najwięk-

<sup>1)</sup> W. Voigt i jego uczniowie w pracach wykonanych w latach 1894—1903. Ann. d. Physik.

szego naprężenia stycznego z reguły nie zachodzi i w modelu ciała jako bryły wypełnionej w sposób ciągly materią zajść nie może tak, jak zachodzi w kryształach dzięki nieciągłości siatki krystalicznej. To co w pracach teoretyków plastyczności nosi nazwę *Gleitlinien*, albo *Gleitflächen* (dosłownie *linie* lub *powierzchnie poślizgu*) ma zawsze niemal znaczenie linii lub powierzchni, na których leżą kierunki największych naprężeń stycznych (por. § 38) powstałych w materiale na skutek obciążenia, czy to w stanie równowagi, czy też w stanie ruchu powolnego zwanego „plynięciem“ np. metali w stanie plastycznym. Takie „plynięcie“ ciała elastoplastycznego staje się przy rosnących obciążeniach powodem naruszenia jego spójności kończącego się pęknięciem, którego położenie nie da się wyznaczyć z góry, jak mniemał Mohr, gdyż zależy od nieuniknionych miejscowych, chociaż by bardzo nieznacznych niejednorodności. Tak z tych powodów, jako też i wskutek wymuszonej niejako przez odkształcenia plastyczne anizotropii materiału (pierwotnie quasi-izotropowego), widoki na znalezienie praw pęknięcia, czyli kryteriów wytrzymałościowych ogólnych dla ciał elastoplastycznych obciążonych w sposób ogólny są znikome<sup>1)</sup>.



Rys. 145.

Na razie musimy poprzestać na kryterium plastyczności ujętym na str. 137 tomu I w zdaniu, które zmodyfikujemy z powodu nowszych doświadczeń w sposób następujący:

*W metalach elastoplastycznych i praktycznie izotropowych jest najdokładniejszą ogólną miarą wyężenia wartość energii sprężystej czystego odkształcenia postaciowego.*

<sup>1)</sup> Wymieniona terminologia świadczy raczej o przyjęciu apriorycznym razem z Mohr'em, że kierunek największego naprężenia stycznego wskazuje kierunek poślizgu, prowadzącego do pęknięcia w płaszczyźnie tego poślizgu, co w ogóle nie odpowiada rzeczywistości. Geneza tego przyjęcia tkwi w obserwacji tzw. prążków (linij) Lüdersa-Hartmanna, które ukazują się na polerowanej powierzchni próbki rozciąganej metalowej, gdy odkształcenia przy zwiększaniu

Wynikająca z hipotezy Mohr'a, oraz z dawnego poglądu Coulomb'a miara wyteżenia *największym naprężeniem stycznym* daje nieco większe wartości, z czego konstruktorzy wysnuwają często

obciążenia zaczynają być elasto-plastycznymi. Prążki takie pojawiają się także na wygładzonej powierzchni walca z marmuru przy jego osiowym ścisnieniu poza granicą sprężystości. Pod mikroskopem przedstawiają się jako dwa układy drobnych zmarszczek na powierzchni przedtem gładkiej. Kierunki zmarszczek są w każdym z układów nachylone do kierunku siły rozciągającej pod kątem, który na próbkach stalowych znaleziono równym  $45^\circ$ . Z tego wywnioskowano, że są w ścisłym związku z wartością krytyczną największego naprężenia stycznego, które w tym przypadku ma, jak wiadomo, właśnie to nachylenie. Ale w próbkach marmurowych okazał się ten kąt znacznie różnym od  $45^\circ$ . Nadto dostrzeżono na próbkach stalowych przy silnym powiększeniu zmarszczki równoległe na ziarnach krystalicznych ferrytu, co zdaje się dowodzić, że prążki Lüdersa są zjawiskiem wtórnym poślizgów rzeczywistych zaszłych w ziarnach krystalicznych, że więc mechanizm „płynięcia“ materiału przy odkształceniu plastycznym nie da się wyjaśnić całkowicie modelem jednolitej materii ciągłej. Mimo to, samo „płynięcie“, tj. odkształcenie plastyczne rosnące z czasem przy danym niezmiennym obciążeniu jako zjawisko makroskopowe, daje się ująć teoretycznie, jak zobaczymy, w sposób pozwalający na pewne obliczenia, podobnie jak je wykonujemy na podstawie teorii sprężystości, ale teoria plastyczności ciał quasi-izotropowych nie może obejmować warunków wytrzymałościowych. Jej obliczenia mogą mieć tylko niewielki stopień dokładności w porównaniu z obliczeniami teorii sprężystości. O tym należy zawsze pamiętać.

Mechanizm „płynięcia“ przy stanie napięcia odpowiadającym osiągnięciu granicy plastyczności (praktycznej granicy sprężystości) łącznie z pojawieniem się linii Lüdersa-Hartmanna, można najprawdopodobniej wyjaśnić biorąc pod uwagę stwierdzoną doświadczalnie strukturę wszelkich metali użytkowych. Są to ciała tylko makroskopowo jednorodne, a mikroskopowo złożone z kryształków głównego składnika spojonych materiałem utworzonym z innych składników i domieszek podobnie jak kamyczki lub cegły w murze spojone zaprawą. Zachodzi przy tym, jak wiadomo, ogromna rozmaitość tak co do wymiarów „kryształitów“ jak i składu chemicznego oraz własności mechanicznych „lepischeza“. Gdy np. lepischez jest „słabsze“, to pod wpływem rosnącego stanu napięcia przechodzi w stan plastyczny najpierw, wskutek czego mogą powstać ruchy względne kryształków sąsiadujących, podobnie jak poślizgi dwu ciał stałych przedzielonych warstwą smaru, co również wyjaśnia pojawienie się linii Lüdersa. A ponieważ główny opór względnego przesuwania po sobie przylegających cegiełek krystalicznych sztywniejszych od lepischeza musi mieć kierunek ruchu względnego, przeto należy się spodziewać poślizgu tam gdzie warstwy lepischeza są równoległe do kierunku naprężeń stycznych. Ten zaś kierunek nie będzie zbytnio różnić się od kierunku największych naprężeń stycznych wyznaczonych przy zastąpieniu metalu rzeczywistego modelem materii ciągłej jednorodnej i izotropowej. Podobne rozumowanie prowadzi do analogicznych wniosków przy założeniu, że lepischez jest sztywniejsze od ziarn krystalicznych.

Wszystko zaś wskazuje na to, że naprężenia styczne grają wprawdzie rolę dominującą w kryteriach pojawienia się odkształceń plastycznych, czyli przekroczenia praktycznej granicy sprężystości, ale nie w sformułowaniu Mohr'a,



wniosek, że miara ta nadaje się do obliczeń praktycznych, gdyż błąd leży „po stronie pewności” i nie przewyższa 14<sup>0</sup>/<sub>0</sub> w przypadku najniekorzystniejszym. Nie jest to oczywiście argument naukowy

który upatrywał płaszczyznę pęknięcia w przekroju, gdzie naprężenie styczne ma wartość wyróżnioną zależną od wartości naprężenia normalnego w tymże przekroju. Mohr wywnioskował bowiem z wyników ówczesnych badań doświadczalnych Guest'a, że w ogólnym stanie napięcia pojawiają się pierwsze odkształcenia plastyczne przy charakterystycznej dla materiału (stali) wartości największego  $\tau$ , a więc niezależnie od wartości  $\sigma$  w tym samym przekroju. A ponieważ przy prostym rozciąganiu jest dla każdego materiału  $\tau_{\max} = \sigma/2$  przeto wyznaczona doświadczalnie wartość  $\sigma = \sigma_{pl}$  na granicy plastyczności winna być 2 razy większa od  $\tau_{pl}$ . Tymczasem jak zaznaczamy poniżej nowsze coraz dokładniejsze badania wykazały, że stosunek  $\sigma_{pl} : \tau_{pl}$  jest znacznie bliższy liczbie  $\sqrt{3} = 1,73\dots$  która wynika z hipotezy energii odkształcenia postaciowego.

Ale ta hipoteza, jako rezygnująca świadomie z przepowiadania płaszczyzny pęknięcia, które było zawarte w hipotezie Mohr'a, nie zadowalała zrazu techników, zwłaszcza tej kategorii, dla której ułatwienie, jakie wynika z mnożenia przez 2 zamiast przez 2,73, wydaje się ważniejszym od kwestii, który z tych współczynników odpowiada lepiej rzeczywistości. W ten sposób nie rozumowali oczywiście poważni badacze, ale będąc widocznie pod urokiem uniwersalnej „teorii” Mohr'a szukali takiej interpretacji wzorów hipotezy nowej (energetycznej), któraby niejako pogodziła obadwa stanowiska. Tak więc wielce zasłużony kierownik EMPA prof. M. Roš i jego współpracownik A. Eichinger we wspaniale wydanej i zawierającej bogatą treść monografii „Die Bruchgefahr fester Körper“ (1949, Bericht Nr. 172 des Eidgen. Materialprüfungs- und Versuchsanstalt Zürich) nawiązują do pracy własnej z r. 1934. W pracy tej wyprowadzają związki teoretyczne, podane poniżej w § 215, z których wynika, że na ścianach elementarnego ośmiościanu umiarowego o przekątnych leżących na liniach naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  panują jednakowe naprężenia normalne

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3),$$

oraz jednakowej wartości naprężenia styczne

$$\tau_0 = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}.$$

Zauważywszy identyczność funkcji naprężeń głównych tutaj występującej z funkcją określającą naprężenie zastępcze według hipotezy energetycznej

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1},$$

wskazują następnie na analogiczne wzory dla odpowiednich składowych stanu odkształcenia i wykazawszy współzależności obu grup wzorów, dowodzą przy pomocy wzorów teorii plastyczności (podanych poniżej w § 217), że uzyskane wyniki stanowią „uogólnienie hipotezy Coulomb'a-Mohr'a”. Tymczasem cechą zasadniczą koncepcji Coulomb'a-Mohr'a jest szukanie połączenia przekroju niebezpiecznego jako zależnego tylko od naprężenia całkowitego w tym przekroju, podczas gdy koncepcja energetyczna szuka tylko miejsca elementu niebezpiecznego w zależności od energii odkształcenia postaciowego tego elementu, która jest funkcją wszystkich składowych stanu napięcia (pozostawiając na boku sprawę polo-

i nie daje się umotywić nawet większą prostotą wzorów obliczeniowych, jak to wykazały prace autora.

Mimo to warto rozpatrzeć genezę powstania hipotezy największego naprężenia stycznego, oraz hipotezy Mohr'a.

Liczne badania doświadczalne wykazały, że tak ciała jednorodne i izotropowe, jak i kryształy prawidłowe zachowują się pod wpływem wszechstronnego ściskania ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ ) jako doskonale sprężyste przy wszelkich osiągalnych wartościach ciśnienia. Wtedy nie ma oczywiście naprężeń stycznych, które pojawiają się wówczas, gdy przynajmniej jedno z naprężeń głównych ma wartość różną od pozostałych. Z tego wynika, że w każdym razie niebezpieczeństwo pojawienia się odkształceń plastycznych musi zależeć od wartości krańcowych naprężeń stycznych mierzonych, jak wiadomo połową różnicy naprężeń głównych tj.  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ ,  $\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$ ,  $\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1)$ . Intuicja podyktowała, że chyba największe z nich, tj. największe  $\tau$  ze wszystkich, jakie odpowiadają płaszczyznom przechodzącym przez dany punkt ciała, będzie miarą wyężenia. Czyżby jednak wartość obu pozostałych naprężeń stycznych nie miała wpływu na wyężenie? Odpowiedzią na to pytanie była wymieniona na str. 137 tomu I hipoteza energetyczna ogłoszona w r. 1904 przez autora, która nie mając pretensji do uniwersalności daje współczesną miarę wyężenia metali elasto-plastycznych w granicach sprężystości<sup>1)</sup>.

Wynikające z powyższego pokrewieństwo obu hipotez zniewała do zwrócenia uwagi na zasadniczą różnicę między nimi.

Dawna hipoteza opierała się na założeniu, że niebezpieczeństwo pojawienia się odkształceń plastycznych zależy od wartości naprężenia stycznego w tym jednym przekroju, w którym wartość ta jest największa spośród wartości w przekrojach inaczej zorientowa-

żenia przekroju). Dlatego, chociaż można polecić moim Czytelnikom jak najlepiej studium wymienionej monografii, jedynej w swoim rodzaju, ze względu na obfitość zebranego materiału doświadczalnego znakomicie ilustrowanego, to jednak należy zaznaczyć, że zdaniem autora książki niniejszej wyniki powyżej przytoczone mają bardzo mało wspólnego z hipotezą Coulomb'a-Mohr'a i mogą być raczej pojmovane i nazwane *uzupełnieniem i rozwinięciem hipotezy energetycznej*.

<sup>1)</sup> Pierwsze badania doświadczalne nad granicą sprężystości przy trójwymiarowym stanie napięcia w metalach quasi-izotropowych zdawały się popierać hipotezę najw. naprężenia stycznego. Dopiero od prac Roşa i Eichingera wykonanych w Zakładzie Szwajcarskim Badania Materiałów w Zurychu i zreferowanych tamże w r. 1926 na II Kongresie Międzynarodowym Mechaniki Technicznej, które to prace zawierały zarazem słuszną krytykę metod badania przedtem stosowanych, nastąpił wyraźny przełom na korzyść hipotezy energetycznej. Poparły ją liczne badania z których wymienimy tylko najnowsze A. E. Johnson'a zreferowane w r. 1948 na VII Kongresie Międzynar. Mechaniki Stosowanej w Londynie.

nych; podczas gdy hipoteza energetyczna wskazuje racjonalniej na zależność od tensora naprężeń albo zależnego odeń tensora odkształceń. Wszystko to przy założeniu zupełnej izotropii i jednorodności materialu.

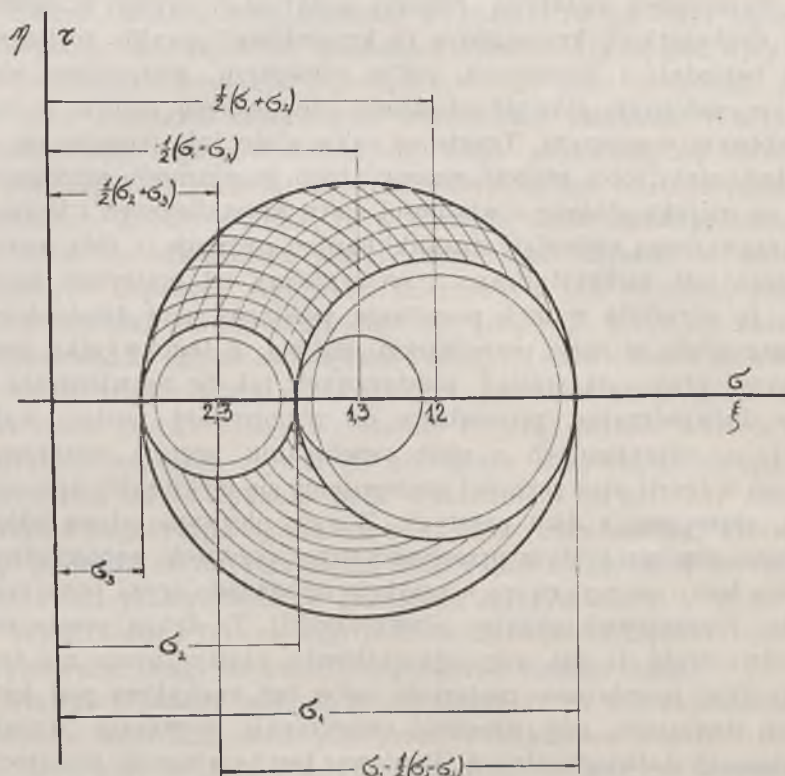
Tymczasem metale są „ciałami polikrystalicznymi“ tj. składają się z drobnitkłych kryształków (z krystalitów) zwykle zorientowanych bezładnie i zlepionych, jakby cementem, materiałem różnorodnym, zależnym głównie od składu chemicznego metalu w stanie pierwotnym stopionym. Traktując takie ciało jako kontinuum materialne należy sobie zdawać sprawę z tego, że własności mechaniczne ciała są niejako złożone z własności ziarn krystalicznych i lepiszcza, przy czym mogą zachodzić stosunki bardzo rozmaite<sup>1)</sup>. Gdy materiał lepiszcza jest niekrystaliczny i sztywniejszy od materiału krystalitów, to utrudnia w nich powstanie poślizgów pod działaniem sił zewnętrznych; w razie przeciwnym ułatwia. Z tego wynika wielka złożoność praw odkształceń plastycznych jak to potwierdzają badania doświadczalne, prowadzące do różnorodnej postaci wykresów  $(\varepsilon, \sigma)$  otrzymanych z prób rozciągania prętów metalowych. Dlatego w teorii plastyczności posługujemy się wykresami uproszczonymi, złożonymi z dwu prostych. Z nich pierwsza odpowiadająca wydłużeniom sprężystym przechodzi przez początek współrzędnych, a druga łączy się z pierwszą w punkcie odpowiadającym praktycznej granicy sprężystości (granicy plastyczności). Ta druga prosta może być równoległą do osi, gdy odkształceniu plastycznemu nie towarzyszy tzw. *twardnienie* materialu, albo też nachylona pod kątem ostrym dodatnim, gdy własność twardnienia występuje wyraźnie w badaniach doświadczalnych. Ponieważ jest to własność powszechna kryształów, przeto w doświadczeniach wyjdzie na jaw tym wyraźniej im lepiszcze jest mniej sztywne od materiału samych krystalitów. Sprawa komplikuje się nadto wskutek wyraźnej zmiany postaci przy wielkich odkształceniach. Dlatego w teorii plastyczności przyjmujemy, że odkształcenia plastyczne są wprawdzie dość duże wobec sprężystych, ale małe wobec wymiarów elementów.

§ 222. Uzupełnienia do § 41. Wzory (41,6) ze str. 73 tomu I napisane w postaci

$$(222) \quad \begin{cases} \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_3 + \sigma_1)\sigma = \mu^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) - \sigma_3\sigma_1 \\ \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\sigma = \nu^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) - \sigma_1\sigma_2 \\ \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\sigma = \lambda^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_2\sigma_3 \end{cases}$$

<sup>1)</sup> W. G. Burgers, „Rekristalisation, verformter Zustand und Erholung. Handbuch der Metallphysik, t. III, część II, Lipsk 1941, §§ 128—170.

pozwalają dla każdego danego kierunku  $(\lambda, \mu, \nu)$  naprężenia całkowitego w przekroju rozpatrywanego elementu ciała odniesionego do układu prostokątnego o osiach leżących na kierunkach naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — znaleźć składową normalną  $\sigma$  i styczną  $\tau$  tego naprężenia.



Rys. 146.

Gdy podstawimy  $\sigma = \xi$ ,  $\tau = \eta$ , przy obiorze pomocniczego układu prostokątnego współrzędnych  $\xi$  i  $\eta$ , to równania powyższe określają 3 gromady kół współśrodkowych. Środki wszystkich trzech gromad leżą na osi  $\xi$  (rys. 146). Ich odcięte mają kolejne wartości:

dla gromady z parametrem $\lambda^2$	$\xi = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$ ,
„ „ „ „ „ „ $\mu^2$	$\xi = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)$ ,
„ „ „ „ „ „ $\nu^2$	$\xi = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ .

Ich promienie zaś znajdujemy rozwiązując te równania względem  $\xi$  po podstawieniu  $\eta = 0$ , czyli szukając odciętych końców średnicy każdego z kół. Otrzymujemy tedy kolejno wartości

$$(222.1) \quad \begin{cases} \left. \begin{matrix} \xi'_\lambda \\ \xi''_\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_2 + \sigma_3)^2 + \lambda^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_2\sigma_3}, \\ \left. \begin{matrix} \xi'_\mu \\ \xi''_\mu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_3 + \sigma_1)^2 + \mu^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) - \sigma_3\sigma_1}, \\ \left. \begin{matrix} \xi'_\nu \\ \xi''_\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \nu^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) - \sigma_1\sigma_2}. \end{cases}$$

A zatem promieniami kół przynależnych określonym wartościom parametrów  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  są

$$(222.2) \quad \begin{cases} r_\lambda = \frac{1}{2}(\xi''_\lambda - \xi'_\lambda) = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_2 + \sigma_3)^2 + \lambda^2(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_2\sigma_3}, \\ r_\mu = \frac{1}{2}(\xi'_\mu - \xi''_\mu) = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_3 + \sigma_1)^2 + \mu^2(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) - \sigma_3\sigma_1}, \\ r_\nu = \frac{1}{2}(\xi'_\nu - \xi''_\nu) = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + \nu^2(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) - \sigma_1\sigma_2}. \end{cases}$$

Krańcowe wartości tych promieni odpowiadają widocznie krańcowym wartościom parametrów, którymi są 0 i 1. Przy tym największe promienie  $r_\lambda = \sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$ ,  $r_\nu = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3$  przynależą  $\lambda^2 = 1$ ,  $\nu^2 = 1$ , najmniejsze zaś  $r_\lambda = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$ ,  $r_\nu = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$  odpowiadają  $\lambda^2 = 0$ ,  $\nu^2 = 0$ . Natomiast dla  $r_\mu$  tj. dla promienia odpowiadającego skrajnym wartościom  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$  naprężeń głównych ma się rzecz przeciwnie. Wartościom  $\mu^2 = 0$  przynależą największe  $r_\mu = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ , a  $\mu^2 = 1$  najmniejsze  $r_\mu = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_2$ .

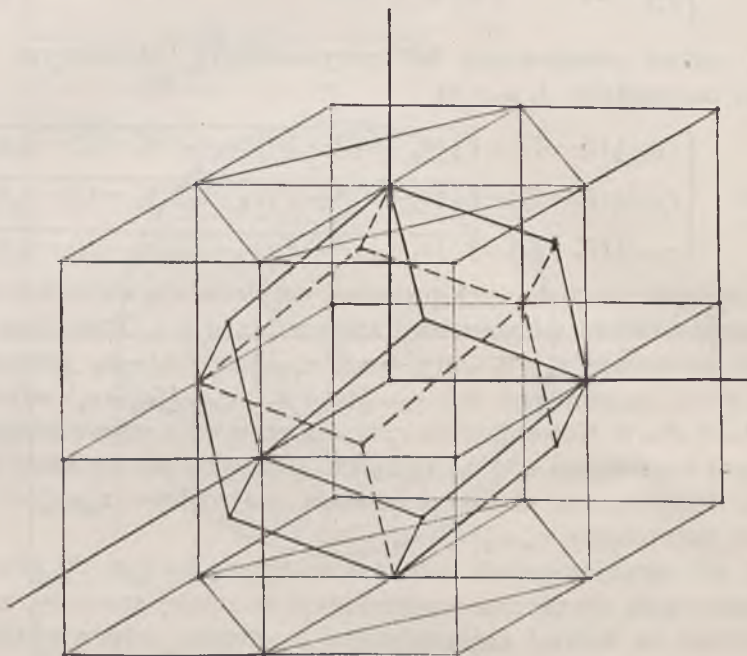
Z kół ograniczających pole zakreskowane na rys. 20 albo 146 jest przeto koło zewnętrzne największym ze swojej gromady, a koła wewnętrzne są kołami najmniejszymi z gromad odpowiadających parametrom  $\lambda^2$  i  $\nu^2$ .

Z tego wynika dalej, że przez każdy punkt na obszarze płaszczyzny  $\xi\eta$ , ograniczonym trzema okręgami kół o promieniach  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ ,  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ ,  $\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$  i środkach leżących na osi  $\xi$ , przechodzą trzy okręgi należące do oznaczonego układu wartości  $\lambda^2$ ,  $\mu^2$ ,  $\nu^2$ , które określają położenie przekroju względem osi głównych.

Jeżeli przeto weźmiemy pod uwagę kierunki określone przez  $\lambda^2 = 0$  przy dowolnych  $\mu^2$  i  $\nu^2$ , to te kierunki leżą w płaszczyźnie osi  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ , a więc odpowiednie im przekroje przechodzą przez oś  $\sigma_1$ , tworząc z osiami  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ , jako ramionami kąta prostego, kąty o wielkości między 0 a  $\pi/2$ . Odpowiadają im wartości  $\sigma = \sigma_2$ ,  $\tau = 0$  i  $\sigma = \sigma_3$ ,  $\tau = 0$ , zaś kątowi  $45^\circ$  odpowiada  $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)$  i  $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$ , co widać na rys. 19. Jest to widocznie największa wartość liczbową  $\tau$  w obranym pęku przekrojów. Podobnie dla punktów leżących na drugim okręgu ograniczającym pole (zakreskowane na rys. 20), którego promieniem jest  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ , mamy przy  $\mu^2 = 0$ ,  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$  w płaszczyźnie przechodzącej przez  $\sigma_2$  i nachylonej pod kątem  $45^\circ$

do  $\sigma_1$  i  $\sigma_3$ . Wreszcie dla punktów na okręgu o promieniu  $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$  jest  $\tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$  w przekrojach przechodzących przez oś  $\sigma_3$  i nachylonych do  $\sigma_1$  i  $\sigma_2$  pod kątem  $45^\circ$ .

Z tych trzech względnie największych wartości liczbowych  $\tau$  jest przy założeniu  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , bezwzględnie największą oczywiście  $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ , co daje nader ważne twierdzenie:

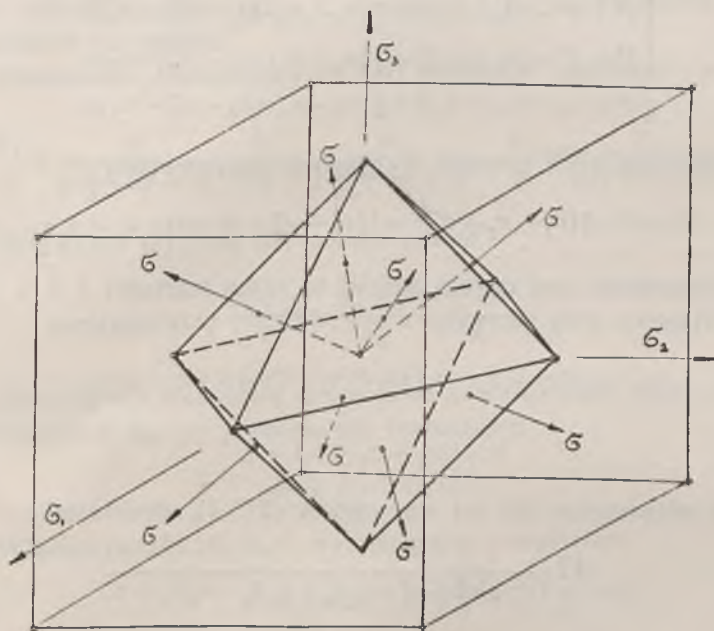


Rys. 147.

W ogólnym stanie napięcia elementu materii ciągłej, określonym trzema osiami i naprężeniami głównymi  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , wartości liczbowe naprężeń stycznych w przekrojach nachylonych do osi osiągają maxima w płaszczyznach tworzących z przekrojami głównymi kąty  $\pm 45^\circ$ . Bezwzględne maximum (tj. maximum maximorum) osiąga naprężenie styczne  $\tau$  w przekrojach przechodzących przez oś średniego naprężenia głównego i tworzących z osiami pozostałymi kąty  $\pm 45^\circ$ . Przy tym wartością  $\tau_{\max}$  jest połowa największej różnicy naprężeń głównych.

Z obrazu kół Mohr'a widać od razu, że przekrojów, w których zachodzą ekstremalne wartości  $\tau$  jest 6. Albowiem warunek jednako-owego nachylenia pod kątem  $\pm 45^\circ$  do każdej pary z trzech osi głównych daje 6 różnych położenia przekrojów. Płaszczyzny do nich równoległe i dotykające kuli elementarnej opisanej z początku współrzędnych jako środka ograniczają bryłę symetryczną mającą  $2 \cdot 6 = 12$  ścian, która jest oczywiście dwunastościanem rombowym (rys. 147).

Przedstawiony obraz geometryczny rozkładu naprężeń w przekrojach elementarnych danego miejsca w materii ciągłej jako nadzwyczaj przejrzysty i łatwy w zastosowaniu, odsunął na drugi plan obrazy dawniejsze, powstałe w pierwszej połowie wieku XIX, a posługujące się powierzchniami rzędu drugiego (elipsoida naprężeń itd.). Jakkolwiek C. Culmann (profesor Politechniki zurychskiej) już około połowy tegoż stulecia oceniał należycie znaczenie kół naprężeń



Rys. 148.

w szczególnym przypadku dwuwymiarowego (płaskiego) stanu naprężenia, określonego dwoma naprężeniami głównymi  $\sigma_1, \sigma_2$ , to jednak dopiero w r. 1882 O. Mohr (profesor Politechniki drezdeńskiej) obmyślił podaną tutaj konstrukcję geometryczną dla ogólnego trójwymiarowego stanu naprężenia, która mu przyniosła zasłużoną sławę nie zaćmioną przez bankructwo jego „teorii wytrzymałości“ z r. 1900.

Powróciwszy jeszcze do równań (222) zauważymy, że te równania zawierają  $\sigma = \xi$  także w pierwszej potęgce, podczas gdy  $\tau = \eta$  tylko w drugiej. Rozwiązując zaś je względem  $\lambda, \mu, \nu$  przy danych wartościach  $\xi$  i  $\eta^2$  otrzymujemy po dwa pierwiastki różniące się znakiem  $\pm \lambda_1, \pm \mu_1, \pm \nu_1$ . Kombinując je znajdujemy w ogóle 8 kierunków określających położenie przekrojów którym odpowiadają te same wartości algebraiczne  $\sigma$  i liczbowe  $\tau$ .

Jeżeli 8 odpowiednich przekrojów rozsuniemy tak, aby tworzyły ośmiościan umiarowy (rys. 148), którego przekątnymi są osie  $x, y, z$ , jako osie główne, to

$$\lambda^2 = \mu^2 = \nu^2 = \frac{1}{3},$$

a równania (6) przyjmą postać

$$(222.3) \quad \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\xi = \frac{1}{3}(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_2\sigma_3 \\ \xi^2 + \eta^2 - (\sigma_3 + \sigma_1)\xi = \frac{1}{3}(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) - \sigma_3\sigma_1 \\ \xi^2 + \eta^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\xi = \frac{1}{3}(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2) - \sigma_1\sigma_2. \end{cases}$$

Z dodania tych równań wynika po uproszczeniu

$$(222.4) \quad \xi^2 + \eta^2 - \frac{2}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\xi = \frac{1}{3}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 3(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)].$$

Równaniom tym czynią zadość te same wartości  $\xi$  i  $\eta$ . Albowiem odjawszy dwa pierwsze z rów. (222.3) otrzymujemy

$$(\sigma_1 - \sigma_2)\xi = \frac{1}{3}(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3) + (\sigma_1 - \sigma_2)\sigma_3,$$

a stąd

$$(222.5) \quad \xi = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma.$$

Po wstawieniu zaś tej wartości w (215.4), znajdujemy

$$(222.6) \quad \eta = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \tau.$$

Znaczy to, że w przekrojach zorientowanych względem osi głównych stanu napięcia tak jak ściany ośmiościanu umiarowego, którego przekątne leżą na tych osiach, zachodzą równe wartości naprężeń normalnych i równe wartości naprężeń stycznych, wyrażone wzorami (222.5 i 6).

W tym wyniku łatwo dostrzec nowy dowód twierdzenia z § 42a, że ogólny stan napięcia da się zawsze rozłożyć na dwa stany składowe; jednym z nich jest wszechstronne równomierne rozciąganie lub ściskanie naprężeniem równym  $\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ , a drugim czyste ścinanie określone w ogóle naprężeniami stycznymi  $\tau'_{xy}$ ,  $\tau'_{yz}$ ,  $\tau'_{zx}$  w przekrojach wzajemnie prostopadłych nie będących przekrojami głównymi.

Kierunki równych naprężeń normalnych  $\sigma$  na ścianach ośmiościanu powyższego są jako prostopadłe do tych ścian określone dostawami kierunkowymi równymi sobie liczbowo, które stanowią 8 kombinacji 3 klasy z elementów  $+1/\sqrt{3}$  i  $-1/\sqrt{3}$ . Natomiast kierunki naprężeń  $\tau$  na tychże ścianach, chociaż liczbowo równych



są zależne od  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  i  $\sigma_3$ . Kierunki te wyznaczymy znajdując wartości współrzędnych ich punktów przecięcia się z krawędzią odpowiednią ośmiościanu, przy czym długość krawędzi obierzemy za jednostkę. O liniach działania naprężeń  $\sigma$ ,  $\tau$  i  $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$  możemy przyjąć, że wychodzą ze środka ściany ośmiościanu jako trójkąta równobocznego o boku  $= 1$ . Współrzędne tego środka na ścianie 1, 2, 3 tj.  $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ , a równaniem odcinkowym płaszczyzny tej ściany jest  $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + z\sqrt{2} = 1$ , albowiem  $1/\sqrt{2}$  jest długością każdego z odcinków na osiach.

Dostawami kierunkowymi linii działania naprężenia  $p$  są

$$\frac{p_x}{p} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}; \quad \frac{p_y}{p} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}}; \quad \frac{p_z}{p} = \frac{\sigma_3}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}} \quad ^1)$$

Równanie tej linii ma przeto postać

$$\frac{x_0 - x}{\sigma_1} = \frac{y_0 - y}{\sigma_2} = \frac{z_0 - z}{\sigma_3}.$$

Płaszczyzna wektorów  $\vec{p}$  i  $\vec{\sigma}$  jako przechodząca przez początek współrzędnych da się przedstawić równaniem

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Współczynniki  $A, B, C$  wyznaczymy z warunku

$$A\sigma_1 + B\sigma_2 + C\sigma_3 = 0,$$

wyrażającego, że na tej płaszczyźnie leży wektor  $\vec{p}$ , oraz z warunku

$$\frac{A}{\sqrt{3}} + \frac{B}{\sqrt{3}} + \frac{C}{\sqrt{3}} = 0, \quad \text{czyli} \quad A + B + C = 0,$$

który wyraża, że i wektor  $\vec{\sigma}$  leży na tej płaszczyźnie.

Z obu tych warunków wynika, że

$$A : B : C = (\sigma_2 - \sigma_3) : (\sigma_3 - \sigma_1) : (\sigma_1 - \sigma_2),$$

<sup>1)</sup> To wynika z warunków rzutowych równowagi oktantu ośmiościanu. Ponieważ każde z pól bocznych tego oktantu jest równe polu ściany zewnętrznej pomnożonemu przez  $1/\sqrt{3}$ , przeto warunki równowagi są

$$p_x = \sigma_1/\sqrt{3}, \quad p_y = \sigma_2/\sqrt{3}, \quad p_z = \sigma_3/\sqrt{3}.$$

A zatem

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 1/3(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \text{ itd.}$$

a więc równanie płaszczyzny przyjmie postać oznaczoną

$$(222.7) \quad (\sigma_2 - \sigma_3)x + (\sigma_3 - \sigma_1)y + (\sigma_1 - \sigma_2)z = 0.$$

Jej przecięcie się z płaszczyzną współrzędnych np.  $xy$  zachodzi w prostej

$$(\sigma_2 - \sigma_3)x + (\sigma_3 - \sigma_1)y = 0.$$

Leżąca na płaszczyźnie  $xy$  krawędź ośmiościanu ma równanie

$$x + y = 1/\sqrt{2}.$$

Z rozwiązania obu tych równań znajdujemy

$$(222.8) \quad x_1 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_1 + \sigma_2 - 2\sigma_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

jako współrzędne punktu na krawędzi przez który przechodzi zarazem linia działania naprężenia  $\tau$ . Ta linia działania jest jak widać w ogóle nachylona do krawędzi ośmiościanu. Tylko np. gdy w przypadku szczególnym jest  $\sigma_1 = \sigma_2$ , to przy dowolnym  $\sigma_3$  jest  $x_1 = y_1 = 1/2\sqrt{2}$  a więc linia działania  $\tau$  trafia środek krawędzi i jest do niej prostopadła. W przypadkach różnych wartości wszystkich trzech naprężeń głównych są naprężenia styczne  $\tau$  na ścianach ośmiościanu umiarkowanego nachylone rozmaicie do jego krawędzi.

**§ 223. Analiza ogólnego stanu odkształcenia** materii ciągłej podana w §§ 13 i 14 tomu I dała wzory, które tutaj powtórzemy, oznaczwszy dla uproszczenia  $\cos \alpha = l$ ,  $\cos \beta = m$ ,  $\cos \gamma = n$ :

$$(13.4) \quad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = 1 + 2(\varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + \varepsilon_{yz}mn + \varepsilon_{zx}nl + \varepsilon_{xy}lm),$$

gdzie  $ds_1$  jest długością elementu liniowego po odkształceniu, który przed odkształceniem miał długość  $ds$ .

$$(13.6) \quad e_{xx} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}} - 1; \quad e_{yy} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}} - 1; \quad e_{zz} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{zz}} - 1$$

$e_{xx}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{zz}$  przedstawiają wydłużenia jednostkowe krawędzi elementu o długościach pierwotnych  $dx, dy, dz$

$$(14.3) \quad \begin{cases} \sin \gamma_{xy} = \varepsilon_{xy} / \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx})(1 + 2\varepsilon_{yy})}, \\ \sin \gamma_{yz} = \varepsilon_{yz} / \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{yy})(1 + 2\varepsilon_{zz})}, \\ \sin \gamma_{zx} = \varepsilon_{zx} / \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{zz})(1 + 2\varepsilon_{xx})}. \end{cases}$$

Kąt  $\gamma_{xy}$  przedstawia różnicę kąta prostego krawędzi  $x$  i  $y$  elementu prostopadłościennego przed odkształceniem i kąta  $\vartheta_{xy}$  jaki te elementy tworzą po odkształceniu.

Znaczenie liczb  $\varepsilon$  z podwójnymi wskaźnikami podają wzory (13.5) których tu nie powtarzamy, gdyż w paragrafie niniejszym zastosujemy wszystkie wzory powyższe do odkształceń *małych*. Wtedy wzory (13.6) i (14.3) sprowadzają się do:

$$(a) \quad \begin{aligned} e_{xx} &= \varepsilon_{xx}, & e_{yy} &= \varepsilon_{yy}, & e_{zz} &= \varepsilon_{zz}, \\ \gamma_{zy} &= \varepsilon_{xy}, & \gamma_{yz} &= \varepsilon_{yz}, & \gamma_{zx} &= \varepsilon_{zx}, \end{aligned}$$

a ze znaczenia geometrycznego wielkości  $\gamma$  wynika, że porządek obu wskaźników może być dowolny, tj.  $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}, \dots$

Obrawszy teraz początek układu współrzędnych prostokątnych w narożu elementu  $dx, dy, dz$  i przyjąwszy  $ds = r$ , oznaczymy wydłużenie jednostkowe w kierunku  $r$ , tj.  $(ds_1 - ds)/ds$  przez  $\varepsilon_r$ ; a więc

$$\frac{ds_1}{ds} = 1 + \varepsilon, \quad \text{a} \quad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2.$$

Zamiast tego napiszemy z pominięciem małych rzędu drugiego

$$\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = 1 + 2\varepsilon_r,$$

a z rów. (13.4) wyniknie

$$(223.1) \quad \varepsilon_r = \underline{l^2 \varepsilon_{xx} + m^2 \varepsilon_{yy} + n^2 \varepsilon_{zz} + mn \varepsilon_{yz} + nl \varepsilon_{zx} + lm \varepsilon_{xy}}.$$

To wyraża, że małe odkształcenie elementu materii ciąglej jest określone sześciu parametrami  $\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{xy}$ , ponieważ wydłużenie jednostkowe w każdym kierunku wyraża kwadratowa jednorodna funkcja dostaw kierunkowych, której współczynnikami są te parametry.

Gdy to zestawimy z wzorem §-u 39, tj.

$$(39.2) \quad \sigma = l^2 \sigma_x + m^2 \sigma_y + n^2 \sigma_z + 2mn \tau_{yz} + 2nl \tau_{zx} + 2lm \tau_{xy} = F(l, m, n)$$

określającym naprężenie normalne w przekroju elementu prostopadłym do promienia o dostawach kierunkowych  $l, m, n$ , to widzimy pokrewieństwo matematyczne obu wzorów. Aby uwydatnić różnicę formalną napiszemy wzór (223.1) w postaci

$$(223.2) \quad \varepsilon_r = l^2 \varepsilon_{xx} + m^2 \varepsilon_{yy} + n^2 \varepsilon_{zz} + 2mn \frac{\varepsilon_{yz}}{2} + 2nl \frac{\varepsilon_{zx}}{2} + 2lm \frac{\varepsilon_{xy}}{2} = F(l, m, n).$$

Teraz widać jasno, że zależność wydłużenia właściwego  $\varepsilon_r$  w kierunku  $(l, m, n)$  od parametrów odkształcenia

$$\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz} \quad \text{i} \quad \frac{1}{2} \varepsilon_{yz}, \frac{1}{2} \varepsilon_{zx}, \frac{1}{2} \varepsilon_{xy}$$

jest identyczna z zależnością naprężenia normalnego  $\sigma$  na przekroju określonym kierunkiem normalnej  $(l, m, n)$  od parametrów stanu napięcia, tj.

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}.$$

Stosownie do założeń są tak wartości  $\sigma$ , jak i  $\varepsilon_r$  skończone, można więc szukać ich wartości ekstremalnych uważając za zmienne  $l, m, n$  z warunkiem pobocznym

$$(b) \quad l^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0.$$

Wprowadziwszy przeto nieznaną współczynnik Lagrange'a  $\lambda$  napiszemy

$$F(l, m, n) - \lambda(l^2 + m^2 + n^2 - 1) = 0.$$

Różniczkując cząstkowo kolejno względem  $l, m$  i  $n$ , otrzymujemy

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial l} = 2l \varepsilon_{xx} + n \varepsilon_{zx} + m \varepsilon_{xy} - 2\lambda l = 0,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial m} = 2m \varepsilon_{yy} + n \varepsilon_{yz} + l \varepsilon_{xy} - 2\lambda m = 0,$$

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial n} = 2n \varepsilon_{zz} + m \varepsilon_{yz} + l \varepsilon_{zx} - 2\lambda n = 0,$$

czyli

$$(223.3) \quad \begin{cases} 2(\varepsilon_{xx} - \lambda)l + \varepsilon_{yx}m + \varepsilon_{xx}n = 0 \\ \varepsilon_{xy}l + 2(\varepsilon_{yy} - \lambda)m + \varepsilon_{zy}n = 0 \\ \varepsilon_{xz}l + \varepsilon_{yz}m + 2(\varepsilon_{zz} - \lambda)n = 0. \end{cases}$$

Ten układ równań ma rozwiązanie różne od zera tylko, gdy spełnia się warunek

$$(223.4) \quad \begin{vmatrix} 2(\varepsilon_{xx} - \lambda) & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & 2(\varepsilon_{yy} - \lambda) & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & 2(\varepsilon_{zz} - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Pierwiastki  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  tego równania stopnia trzeciego względem są (jak można dowieść) rzeczywiste, a podstawivszy je w (223.3) znajdziemy wartość

$$l_i, m_i, n_i \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, 3.$$

Pomnożywszy równania (223.3) kolejno przez  $l, m, n$  i dodawszy je do siebie, znajdujemy ze względu na związek (b):

$$2(\varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + \varepsilon_{xy}lm + \varepsilon_{yz}mn + \varepsilon_{zx}nl) = 2\lambda(l^2 + m^2 + n^2) = 2\lambda.$$

Z tego widać, że współczynnik  $\lambda$  ma wartość wydłużenia właściwego  $\varepsilon_r$ . Należy zwrócić uwagę na to, że wszystkie wywody §§ 222 i 223 można stosować do wszelkich ciał przyrody tak sprężystych jak i elastoplastycznych, izotropowych i anizotropowych, we wszystkich nader licznych przypadkach, kiedy założenie teoretyczne ciągłości materii nie stoi w wyraźnej sprzeczności z ich ustrojem molekularnym.

**§ 224. Teoria plastyczności** zdąża do ujęcia teoretycznego zależności wzajemnej odkształceń od naprężeń ciała izotropowego poza granicami sprężystości, tj. w stanie *elasto-plastycznym* materiału. Wykres  $(\varepsilon, \sigma)$  prostego rozciągania takiego materiału, który do granicy sprężystości (praktycznej) można uważać za prostoliniowy, zagina się w tym miejscu, tworząc linię dla niektórych metali tak słabo nachyloną do osi  $\varepsilon$  (pomyślanej poziomo), że można ją w przybliżeniu zastąpić prostą równoległą do tej osi. Dla wielu innych metali i innych materiałów elasto-plastycznych ta część wykresu zbliża się raczej do prostej nachylonej do osi  $\varepsilon$  pod kątem znacznie mniejszym od kąta nachylenia prostej Hooke'a w obszarze czysto sprężystym. Ograniczając się do odkształceń plastycznych większych wprawdzie od sprężystych (nawet wielokrotnie) a jednak takich, które się wyrażają stosunkami znacznie mniejszymi od 1, M. Lévy i de Saint-Venant zbudowali w r. 1871 teorię plastyczności przy dodatkowym założeniu upraszczającym, że składowe odkształceń plastycznych są tak wielkie w porównaniu do składowych odkształceń sprężystych, że te ostatnie można zupełnie pominąć. Poza tym przyjęto jako postulat, że kierunki wydłużeń głównych są zarazem kierunkami naprężeń głównych także w stanie plastycznym. De Saint-Venant ograniczył się przy tym do zagadnienia dwuwymiarowego, a Lévy uogólnił je do trzech wymiarów. W sposób oryginalny doszedł do wyników identycznych R. v. Mises w pracy z r. 1913<sup>1)</sup>. Jeszcze jedna zasadnicza różnica między stanem sprężystym a plastycznym tkwi w tym, że w stanie sprężystym zmiana naprężenia pociąga za sobą niemal natychmiast zmianę odkształcenia, podczas gdy odkształcenie plastyczne wytwarza się powoli, tak, iż prędkość

1) R. v. Mises, *Mechanik der festen Körper in plastisch deformablem Zustand* 1913. Göttinger Nachrichten, str. 582.

odkształcenia plastycznego jest w ogóle bardzo mała w porównaniu do prędkości odkształcenia sprężystego. De Saint-Venant założył nadto, że prędkości plastycznych odkształceń składowych zależą w ten sam sposób od prędkości składowych przemieszczeń punktu  $(x, y, z)$  ciała jak w teorii sprężystości składowe odkształceń  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ , od pochodnych cząstkowych przemieszczeń  $u, v, w$ .

Oznaczywszy więc przez  $U, V, W$  składowe prędkości przemieszczeń jako funkcje  $x, y, z, t$ , napiszemy dla składowych prędkości odkształceń wyrażenia

$$(224.1) \quad \begin{cases} \frac{d\varepsilon_x}{dt} = \dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial U}{\partial x}; & \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial V}{\partial y}; & \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial W}{\partial z}, \\ \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = \dot{\gamma}_{xy} = \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}, & \dot{\gamma}_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}, & \dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}. \end{cases}$$

Stosownie do tego istnieć będą 3 wzajemnie prostopadłe główne prędkości odkształcenia  $\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3$ .

Ich suma jako niezmiennik daje równanie

$$(224.2) \quad \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = \dot{\theta} = 3\dot{\bar{\varepsilon}},$$

gdzie  $\dot{\theta}$  oznacza prędkość zmiany objętości, a  $\dot{\bar{\varepsilon}}$  średnią prędkość odkształcenia liniowego.

Analiza stanu odkształcenia materii ciąglej prowadzi dalej do analogicznych związków między trzema głównymi prędkościami odkształceń postaciowych  $\dot{\gamma}_1, \dot{\gamma}_2, \dot{\gamma}_3$ , a głównymi prędkościami odkształceń liniowych  $\dot{\varepsilon}_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3$ , a mianowicie

$$(224.3) \quad \dot{\gamma}_1 = \dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3; \quad \dot{\gamma}_2 = \dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1; \quad \dot{\gamma}_3 = \dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2,$$

przy czym jak łatwo dowieść jest

$$(224.4) \quad \dot{\gamma}_1 + \dot{\gamma}_2 + \dot{\gamma}_3 = 0,$$

oraz suma algebraiczna trzech głównych naprężeń stycznych

$$(224.5) \quad \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 0.$$

Przy oznaczeniu jeszcze naprężeń głównych przez  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , a ich wartości średniej przez  $\bar{\sigma}$ , napiszemy

$$(224.6) \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

Wymienione analogie z teorią sprężystości prowadzą teraz po zastąpieniu podwójnej stałej Lamé'go  $2\mu$  przez  $M$  do równań następujących:

$$(224.7) \quad \sigma_x - \bar{\sigma} = M(\dot{\varepsilon}_x - \bar{\varepsilon}); \quad \sigma_y - \bar{\sigma} = M(\dot{\varepsilon}_y - \bar{\varepsilon}); \quad \sigma_z - \bar{\sigma} = M(\dot{\varepsilon}_z - \bar{\varepsilon})$$

$$(224.8) \quad \tau_{xy} = M \cdot \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{xy}; \quad \tau_{yz} = M \cdot \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{yz}; \quad \tau_{zx} = M \cdot \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{zx}.$$

Moduł  $M$  nazywamy *modułem odkształcenia plastycznego*. Jest on jednakże wielkością zmienną, którą należy wyznaczyć.

Przy odkształceniu plastycznym zachodzi wprawdzie, jak wykazały liczne ścisłe pomiary metaloznawców, bardzo małe zwiększenie objętości, czyli zmniejszenie gęstości metali, ale w teorii pomijamy je dla uproszczenia, zwłaszcza, że to źródło błędów schodzi na drugi plan wobec innych, wynikających z założeń teorii. Dlatego przyjmujemy, że

$$(224.9) \quad \theta = \dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y + \dot{\varepsilon}_z = 3\bar{\dot{\varepsilon}} = 0.$$

Dzięki temu upraszczają się równania (217.7) do postaci

$$(224.10) \quad \sigma_x - \bar{\sigma} = M\dot{\varepsilon}; \quad \sigma_y - \bar{\sigma} = M\dot{\varepsilon}; \quad \sigma_z - \bar{\sigma} = M\dot{\varepsilon}.$$

Z równań (224.10) i (224.8) przy uwzględnieniu (224.6) znajdujemy

$$(224.11) \quad \begin{cases} \dot{\varepsilon}_x = \frac{2}{3} \frac{1}{M} \left[ \sigma_x - \frac{1}{2} (\sigma_y + \sigma_z) \right], & \dot{\gamma}_{yz} = \frac{2}{M} \cdot \tau_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_y = \frac{2}{3} \frac{1}{M} \left[ \sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_z + \sigma_x) \right], & \dot{\gamma}_{zx} = \frac{2}{M} \cdot \tau_{zx} \\ \dot{\varepsilon}_z = \frac{2}{3} \frac{1}{M} \left[ \sigma_z - \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \right], & \dot{\gamma}_{xy} = \frac{2}{M} \cdot \tau_{xy}. \end{cases}$$

Związki te mają tę samą postać co znane z teorii sprężystości zależności składowych stanu odkształcenia od składowych stanu napięcia, z tą jednak różnicą, że po stronie prawej moduł  $E$  jest zastąpiony przez  $\frac{2}{3}M$ , a liczba Poissona  $\nu$  przez  $\frac{1}{2}$ , co zresztą odpowiada warunkowi nieściśliwości.

Z uwzględnieniem wzorów (224.1) dają (224.8, 9, 10) związki:

$$(224.12) \quad \begin{cases} \sigma_x - \bar{\sigma} = M \frac{\partial U}{\partial x}; & \tau_{yz} = \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right), \\ \sigma_y - \bar{\sigma} = M \frac{\partial V}{\partial y}; & \tau_{zx} = \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), \\ \sigma_z - \bar{\sigma} = M \frac{\partial W}{\partial z}; & \tau_{xy} = \frac{1}{2} M \left( \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right), \end{cases}$$

$$(224.13) \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Do tych równań przybývają jeszcze równania ruchu materii ciąglej znane z hydrodynamiki cieczy lepkiej w postaci

$$(224.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho \left( X' - \frac{DU}{Dt} \right) = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho \left( Y' - \frac{DV}{Dt} \right) = 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho \left( Z' - \frac{DW}{Dt} \right) = 0, \end{cases}$$

gdzie symbol

$$\frac{D}{Dt} ( ) \equiv \frac{\partial}{\partial t} ( ) + U \frac{\partial}{\partial x} ( ) + V \frac{\partial}{\partial y} ( ) + W \frac{\partial}{\partial z} ( ).$$

Wstawiwszy wyrażenia dla składowych stanu napięcia znalezione z równań (224.12) w równania (224.14) otrzymamy razem (z rów. 224.13) cztery równania z 5-ciu niewiadomymi  $\bar{\sigma}$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $W$  i  $M$ . Potrzebnego jeszcze równania dostarcza tzw. warunek plastyczności.

*Warunek plastyczności* stanowi zarazem kryterium odróżniające dla danego materiału stany napięcia sprężyste od elastoplastycznych. De Saint-Venant przyjmował w swej pracy jako kryterium wartość graniczną największego naprężenia stycznego, co jednak prowadzi do wielkiego utrudnienia matematycznego. Dlatego v. Mises zmodyfikował kryterium na takie, które dawało znaczne uproszczenie w rozwinięciu teorii. H. Hencky dowiódł, że to kryterium pokrywa się z ogłoszoną najpierw w r. 1904 hipotezą energii sprężystej samego odkształcenia postaciowego<sup>1)</sup>, którą niezależnie, jak się zdaje od poprzedników (bo podczas I wojny światowej) sformułował w Anglii także Haigh<sup>2)</sup>.

Na tych podstawach kilku współczesnych badaczy<sup>3)</sup> zbudowało teorie plastyczności różniące się od siebie niektórymi szczegółami

<sup>1)</sup> M. T. Huber, Właściwa praca odkształcenia jako miara wyężenia materiału 1904. Czas, Techn. Lwów.

Z książki „Plasticity in Engineering“ hoienderskiego profesora Th. van Iterson'a wydanej w Londynie w r. 1947 dowiadujemy się, że hipotezę tę sformułował już w r. 1856 J. Clark Maxwell w korespondencji z Williamem Thomsonem (późniejszym lordem Kelvinem) wydanej drukiem w r. 1937 przez J. Larmor'a w Cambridge (dopisek przy korekcie).

<sup>2)</sup> B. P. Haigh, The strain-energy function and the elastic limit. 1919. Rpt. Brit. Association, p. 486.

<sup>3)</sup> Najświeższe informacje znajdują czytelnicy w pracach A. I. Gubanowa (Żurnal technicznej fizyki, tom. XIX, r. 1949, nr 1). Nadto w książkach i pracach następujących:



zależnie od własności powyżej nie wymienionych, które cechują różne materiały elasto-plastyczne. Teorie te stanowią pomost między teorią sprężystości i hydromechaniką klasyczną. Obie te dziedziny mechaniki teoretycznej są związane schematem materii ciągłej (kontinuum materialnego) stanowiąc skrajne ogniwa całego łańcucha działów, które objęto ogólną nazwą *reologii* (ang. Rheology, od greckiego „rheo“ = płynę, tj. nauki badającej prawa płynięcia wszelkiej materii<sup>1)</sup>).

**§ 225. „Samowzmocnienie“ lufy działowej.** Tak nazywają konstruktorzy broni palnej operację wykonywaną na stalowej lufie surowej, która polega na poddaniu jej ciśnieniu wewnętrznemu o wielkości powodującej odkształcenia plastyczne warstw wewnętrznych lufy przy odkształceniach czysto sprężystych warstw zewnętrznych. Po obniżeniu do zera nadciśnienia operacyjnego wytworzy się w lufie stan napięcia „sztuczny” podobny do tego jaki powstaje gdy lufę złożymy z dwóch rur i nasuniemy rurę zewnętrzną trochę za ciasną po jej ogrzaniu odpowiednim na rurę wewnętrzną. W części zewnętrznej powstaną napięcia obwodowe rozciągające, a w wewnętrznej ściskające. Dzięki temu lufa po operacji staje się znacznie wytrzymałszą, jak łatwo wywnioskować już na podstawie rozwiązania w § 77. Poza tym mamy tutaj do czynienia z prostym przykładem wyznaczenia naprężeń i odkształceń w stanie napięcia materiału lufy, który dla części zewnętrznej o grubości nieznannej jest czysto sprężysty, a dla części wewnętrznej elasto-plastyczny. Grubość ta będzie oczywiście przede wszystkim zależna od wielkości ciśnienia operacyjnego. Można przewidywać, że wyteżenie materiału przy danej wartości ciśnienia operacyjnego maleje od wnętrza rury z ro-

---

Hilda Geiringer, *Fondaments mathématiques de la theorie des corps plastiques isotropes*. 1937. Paris. Gauthier-Villars.

H. Hencky, *The new theory of plasticity...*, 1933. *Appl. Mechanics*, t. 1.

L. S. Lejbenzon, *Elementy matematycznej teorii plastyczności*, 1943.

A. Nádai, *Plasticity*, 1931. Mc. Graw-Hill, New York and London.

W. Prager, *Mécanique des solides isotropes au dela du domaine élastique*, 1937. Paris. G-V.

A. Reuss, *Berücksichtigung der elastischen Formänderungen in der Plastizitätstheorie*, 1930, *Z. f. ang. Math. u. Mech.*

<sup>1)</sup> Ta wygodna nazwa powstała, jak się zdaje w r. 1929, kiedy w U. S. A. założono Stowarzyszenie badań reologicznych. Ona odpowiada dobrze terminowi użytemu przez wydawców wykładów H. Helmholtza jako tytuł jednego z tomów wydawanych kolejno w Lipsku od r. 1898, a mianowicie: „Dynamik kontinuierlich verbreiteter Massen“.

snącym promieniem  $r$ . Należy więc wyznaczyć jako pierwszą wartość krytyczną tego ciśnienia  $p_0$  tę wartość, która odpowiada osiągnięciu granicy sprężystości na powierzchni wewnętrznej lufy, a jako drugą  $p_1$  tę, która odpowiada początkowi uplastycznienia całej lufy.

Z powodu symetrii względem osi rury są  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$  naprężeniami głównymi a więc  $\tau=0$  (§ 76). Równania równowagi elementu (76.1) przy braku sił masowych sprowadzają się do jednego

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0,$$

albo

$$(215.1) \quad \frac{d}{dr}(\sigma_r r) = \sigma_t.$$

Stosownie do warunków rzeczywistych przyjmujemy, że rura jest zamknięta na końcach i dość długa, aby na znacznej długości części środkowej można było uważać stan odkształcenia za płaski. Wtedy zachodzą wprawdzie obok naprężeń radialnych  $\sigma_r$  i obwodowych  $\sigma_t$ , nadto naprężenia wzdłużne, ale one nie zmieniają napisanego równania równowagi i mogą być obliczone niezależnie od  $\sigma_r$  i  $\sigma_t$ .

Z wzorów (77.6) otrzymujemy po podstawieniu  $p_a = p$  i  $p_b = 0$

$$\sigma_r = p \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2} (1 - b^2/r^2),$$

$$\sigma_t = p \cdot \frac{a^2}{b^2 - a^2} (1 + b^2/r^2),$$

co dowodzi, że  $\sigma_r + \sigma_t = \text{stała} = pa^2/(b^2 - a^2) = \sigma_l$ , albowiem nacisk na dno  $p(b^2 - a^2) \cdot \pi = \sigma_l \cdot a^2 \cdot \pi$ , z warunku równowagi w jakimkolwiek przekroju poprzecznym rury.

Z tego wynika, że

$$(225.2) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{p}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[ 1 - 2\nu - (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right], \\ \varepsilon_t = \frac{p}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[ 1 - 2\nu + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right], \\ \varepsilon_l = \frac{p}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2} (1 - 2\nu). \end{cases}$$

A zatem

$$(225.3) \quad \varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_l = 3\varepsilon_l \quad \text{czyli} \quad \varepsilon_r + \varepsilon_t = 2\varepsilon_l.$$

Gdy  $Q$  oznacza naprężenie na praktycznej granicy sprężystości, czyli granicy plastyczności, to z warunku plastyczności

$$2Q^2 = (\sigma_r - \sigma_t)^2 + (\sigma_t - \sigma_l)^2 + (\sigma_l - \sigma_r)^2$$

otrzymamy po wstawieniu wartości powyższych dla  $r=a$  i rozwiązaniu względem  $p$ , pierwszą wartość krytyczną

$$(225.4) \quad p_0 = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) Q \sqrt{3}.$$

Przy tej wartości ciśnienia wewnętrznego osiąga wyężenie materiału w wewnętrznej warstewce skrajnej granicę plastyczności. Gdy ciśnienie  $p > p_0$ , to w miarę zwiększania  $p$ , coraz grubsza warstwa rury przejdzie w stan plastyczny.

Przy założeniu nieściśliwości w stanie plastycznym napiszemy dla warstwy uplastycznionej (gdy zachodzi płyniecie przy stałym wyężeniu)

$$\varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_l = 0,$$

a więc

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_l = 0.$$

Całką ogólną tego równania różniczkowego (przy stałym  $\varepsilon_l$ ) jest

$$u = \frac{C_1}{r} - \frac{\varepsilon_l}{2} r.$$

A zatem

$$(225.5) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{u}{r} = -\frac{C_1}{r^2} - \frac{1}{2} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t = \frac{du}{dr} = \frac{C_1}{r^2} - \frac{1}{2} \varepsilon_l \end{cases}$$

Przy obiorze stosownej jednostki czasu i zmianie wymiaru współczynnika  $M$  można wzory (224.11) napisać w postaci

$$(225.6) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{2}{3} \frac{1}{M} \left[ \sigma_r - \frac{1}{2} (\sigma_t + \sigma_l) \right] \\ \varepsilon_t = \frac{2}{3} \frac{1}{M} \left[ \sigma_t - \frac{1}{2} (\sigma_l + \sigma_r) \right] \\ \varepsilon_l = \frac{2}{3} \frac{1}{M} \left[ \sigma_l - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_t) \right]. \end{cases}$$

Stąd znajdujemy łatwo

$$(225.7) \quad \varepsilon_l - \varepsilon_t = \frac{1}{M} (\sigma_l - \sigma_t); \quad \varepsilon_r - \varepsilon_l = \frac{1}{M} (\sigma_r - \sigma_l); \quad \varepsilon_t - \varepsilon_r = \frac{1}{M} (\sigma_t - \sigma_r),$$

i z uwzględnieniem (218.5)

$$(225.8) \quad \begin{cases} \sigma_l - \sigma_t = M \left( \frac{3}{2} \varepsilon_l - c_1/r^2 \right) \\ \sigma_r - \sigma_l = M \left( \frac{3}{2} \varepsilon_l + c_1/r^2 \right) \\ \sigma_t - \sigma_r = M \left( \frac{2 c_1}{r^2} \right). \end{cases}$$

Po wstawieniu w warunek plastyczności otrzymamy

$$Q^2 = M^2 \left[ \left( \frac{3}{2} \varepsilon_l \right)^2 + \frac{3 c_1^2}{r^4} \right].$$

Ponieważ  $\varepsilon_l$  jest stosownie do założeń stałe, a więc niezależne od  $r$ , przeto równanie powyższe określa współczynnik

$$(225.9) \quad M = \frac{Q}{\sqrt{\left( \frac{3}{2} \varepsilon_l \right)^2 + 3 c_1^2 / r^4}}.$$

Wstawiliśmy to w trzeciej z równ. (225.8) i połączywszy z równaniem różniczkowym (225.1) znajdziemy

$$(225.10) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{4 c_1 Q}{r \sqrt{3} \sqrt{3 \varepsilon_l^2 r^4 + 4 c_1^2}}.$$

Po wprowadzeniu nowej zmiennej

$$x = \frac{\sqrt{3} \varepsilon_l}{2 c_1} \cdot r^2$$

przyjmie równanie różniczkowe postać

$$d\sigma_r = \frac{Q}{\sqrt{3} x \sqrt{1+x^2}},$$

której całką ogólną jest

$$\sigma_r = -\frac{Q}{\sqrt{3}} [\ln(1 + \sqrt{1+x^2}) - \ln x] + C_2$$

Wprowadziwszy jeszcze dla skrócenia wielkość pomocniczą

$$(225.11) \quad h^2 = \frac{2 c_1}{\sqrt{3} \varepsilon_l}, \quad \text{a więc} \quad x = r^2/h^2,$$

znajdziemy przy pomocy równań (225.5) wzory:

$$(225.12) \quad \begin{cases} \sigma_r = -\frac{Q}{\sqrt{3}} \ln(h^2/r^2 + \sqrt{1+h^4/r^4}) + C_2 \\ \sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} Q(1+r^4/h^4)^{-1/2} + \sigma_r \\ \sigma_l = (r^2/h^2 + 1/\sqrt{3})Q(1+r^4/h^4)^{-1/2} + \sigma_r. \end{cases}$$

Do wyznaczenia stałych  $C_1$ ,  $C_2$  i  $\varepsilon_l$ , posłużą warunki brzegowe. Niech  $R$  oznacza promień walca rozdzielającego warstwę uplastycznioną od warstwy zewnętrznej odkształconej tylko sprężystości, zaś  $\bar{\sigma}_r$  wartość algebraiczną  $\sigma_r$  na powierzchni tego walca. Wówczas pierwsze z równań (225.12) daje równanie warunkowe do wyznaczenia

$$(225.13) \quad C_2 = \bar{\sigma}_r + \frac{Q}{\sqrt{3}} \ln(h^2/r^2 + \sqrt{1+h^4/r^4}).$$

Po wstawieniu tej wartości w (225.12) otrzymamy wyrażenia dla składowych stanu napięcia w strefie plastycznej rury o grubości  $(R-a)$ . Ale te równania zawierają jeszcze parametry  $R$ ,  $\sigma_r$  i  $h$ , w których tkwią nieznane  $C_1$  i  $\varepsilon_l$ . Do ich wyznaczenia rozporządzamy jeszcze warunkami następującymi:

Na powierzchni walca o promieniu  $R$  muszą naprężenia (225.12), oraz z wzorów odpowiednich dla strefy sprężystej o grubości  $(b-R)$ , mieć wartości równe. Podobnie winny być tutaj równe wartości  $u$  obliczone z wzoru

$$(225.14) \quad u = \frac{1}{E} \frac{\bar{\sigma}_r R^2}{b^2 - R^2} \left[ (1-2\nu)r + (1+\nu) \frac{b^2}{r} \right]$$

ważnego dla strefy sprężystej, wartościom obliczonym z odpowiedniego wzoru dla strefy elasto-plastycznej. Naprężenia w strefie sprężystej wyrażają znane już wzory:

$$(225.15) \quad \begin{cases} \sigma_r = \bar{\sigma}_r \frac{R^2}{b^2 - R^2} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \\ \sigma_t = -\bar{\sigma}_r \frac{R^2}{b^2 - R^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \\ \sigma_l = -\bar{\sigma}_r \frac{R^2}{b^2 - R^2}. \end{cases}$$

Warunek równości naprężeń radialnych daje równanie tożsamościowe, co było do przewidzenia. Z warunków równości naprężeń obwodowych i wzdłużnych znajdujemy

$$(225.16) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_r + \frac{2Q}{\sqrt{3}} (1 + R^4/h^4)^{-1/2} = -\bar{\sigma}_r \cdot \frac{R^2}{b^2 - R^2} \left(1 + \frac{b^2}{R^2}\right) \\ \bar{\sigma}_r + \left(\frac{R^2}{h^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) Q \left(1 + \frac{R^4}{h^4}\right)^{-1/2} = -\bar{\sigma}_r \frac{R^2}{b_1^2 - R^2}, \end{cases}$$

Po dodaniu do pierwszego z tych równań drugiego pomnożonego przez  $-2$  otrzymujemy

$$(225.17) \quad \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{2Q}{\sqrt{1 + R^4/h^4}} = 0$$

jako warunek, którego spełnienie wymaga  $h = \infty$ , a więc stosownie do wzoru (225.11)  $\varepsilon_l = 0$ .

Wynik ten budzi wątpliwości. Jednakże przy jego interpretacji trzeba mieć na oku pewne uproszczenie, na jakie pozwoliliśmy sobie przy ustawieniu równania różniczkowego

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_l = 0.$$

To równanie było punktem wyjścia wywodów matematycznych i odpowiadało ściśle równaniu

$$\varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_l = 0.$$

Tutaj jednak oznaczają  $\varepsilon_r, \varepsilon_t, \varepsilon_l$ , wydłużenia całkowite, złożone z sprężystych  $\varepsilon'$  i plastycznych  $\varepsilon''$ . A zatem suma  $\varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_l$  nie jest równa zeru, lecz jest równa  $\varepsilon'_t + \varepsilon'_r + \varepsilon'_l = 3\varepsilon'_l$ , stosownie do wzoru (225.3) albowiem tylko  $\varepsilon''_t + \varepsilon''_r + \varepsilon''_l = 0$  jako zmiana objętości przy odkształceniu plastycznym. Z tego powodu równanie różniczkowe winno mieć właściwie postać

$$(225.18) \quad \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + (\varepsilon_l - 3\varepsilon'_l) = 0,$$

a wynik otrzymany z (225.17) należy interpretować w ten sposób, że wielkość niezależna od  $r$ :

$$\varepsilon_l - 3\varepsilon'_l = 0,$$

czyli

$$\varepsilon'_l + \varepsilon''_l - 3\varepsilon'_l = 0.$$

Stąd

$$\varepsilon''_l = 2\varepsilon'_l,$$

co wprawdzie ogranicza ważność rozwiązania, ale wyjaśnia wątpliwości.

A zatem w strefie plastycznej napiszemy

$$(225.19) \quad u = C_1/r.$$

Po podstawieniu  $h = \infty$ , otrzymujemy z obu równań (225.16) zgodnie

$$\bar{\sigma}_r = - \left( 1 - \frac{R^2}{b^2} \right) \frac{Q}{\sqrt{3}},$$

a więc to samo, co można było napisać od razu na podstawie równania dla strefy sprężystej obciążonej od wewnątrz.

W strefie plastycznej otrzymujemy z wzorów (225.12) po podstawieniu  $h = \infty$

$$(225.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \bar{\sigma}_r - \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ln R/r \\ \sigma_t = \frac{2Q}{\sqrt{3}} (1 - \ln R/r) + \bar{\sigma}_r \\ \sigma_l = \frac{2Q}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{2} - \ln R/r \right) + \bar{\sigma}_r \end{array} \right. \quad \text{dla } a \leq r \leq R.$$

Wreszcie z warunku równości przesunięć  $u$  na granicy obu stref znajdujemy z rów. (227.14 i 19)

$$(225.21) \quad C_1 = - \frac{\bar{\sigma}_r}{E} \cdot \frac{R^4}{b^2 - R^2} \left[ 1 - 2\nu + (1 + \nu) \frac{b^2}{R^2} \right].$$

Zestawiając główne wyniki napiszemy teraz:

1<sup>o</sup> Dla strefy plastycznej ( $a \leq r \leq R$ )

$$(225.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = - \frac{Q}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{R^2}{b^2} + 2 \ln \frac{R}{r} \right), \\ \sigma_t = \frac{Q}{\sqrt{3}} \left( 1 + \frac{R^2}{b^2} - 2 \ln \frac{R}{r} \right), \\ \sigma_l = \frac{Q}{\sqrt{3}} \left( \frac{R^2}{b^2} - 2 \ln \frac{R}{r} \right), \end{array} \right.$$

$$(225.23) \quad u = \frac{Q}{E\sqrt{3}} \left[ (1 - 2\nu) \frac{R^2}{b^2} + 1 + \nu \right] \frac{R^2}{r}.$$

2° Dla strefy sprężystej ( $R \leq r \leq b$ )

$$(225.24) \quad \begin{cases} \sigma_r = -\frac{Q}{\sqrt{3}} \cdot \frac{R^2}{b^2} \left( \frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \\ \sigma_t = \frac{Q}{\sqrt{3}} \cdot \frac{R^2}{r^2} \left( \frac{b^2}{r^2} + 1 \right), \\ \sigma_l = \frac{Q}{\sqrt{3}} \cdot \frac{R^2}{b^2}, \end{cases}$$

$$(225.25) \quad u = \frac{Q}{E\sqrt{3}} \cdot \frac{R^2}{b^2} \left[ (1-2\nu)r + (1+\nu) \frac{b^2}{r^2} \right].$$

Ponieważ w obu powyższych grupach wzorów jest promień  $R$  warstewki rozgraniczającej obie strefy zależny od wielkości ciśnienia wewnętrznego  $p$ , przeto potrzeba jeszcze równania wyrażającego zależność  $p$  od  $R$ .

Ona wynika z pierwszego z wzorów (225.22) po podstawieniu  $r=a$  i  $\sigma_r = -p$ :

$$(225.26) \quad p = \frac{Q}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{R^2}{b^2} + 2 \ln \frac{R}{a} \right).$$

Wartość liczbowa ciśnienia krytycznego  $p_1$  odpowiadającą rozszerzeniu strefy plastycznej na całą grubość ściany rury znajdujemy podstawiając w równaniu powyższym  $R=b$ , czyli

$$(225.27) \quad p_1 = \frac{2Q}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}.$$

Na tym zakończymy odsyłając Czytelnika zainteresowanego szczególnie zagadnieniem samowzmocnienia do pracy autora ogłoszonej w r. 1931 w Wiadomościach techniczno-artyleryjskich.



## UZUPEŁNIENIA I DOSTRZEŻONE BRAKI LUB USTERKI TOMU I

**§ 58a. Uogólnienie prawa Hooke'a dla ciał izotropowych we współrzędnych krzywoliniowych prostokątnych.**

Wydłużenia jednostkowe trzech krawędzi elementu wyciętego współrzędnymi Lamé'go wyrażają się jak wiadomo z § 29 liczbami

$$\varepsilon_{\alpha\alpha}, \varepsilon_{\beta\beta}, \varepsilon_{\gamma\gamma}$$

zaś kąty odkształcenia postaciowego liczbami

$$\varepsilon_{\beta\gamma}, \varepsilon_{\gamma\alpha}, \varepsilon_{\alpha\beta}.$$

W § 52 oznaczono naprężenia normalne i styczne na odpowiednich ścianach tego elementu przez

$$\widehat{aa}, \widehat{\beta\beta}, \widehat{\gamma\gamma}; \widehat{\beta\gamma}, \widehat{\gamma\alpha}, \widehat{\alpha\beta}.$$

Ponieważ w stanie pierwotnym krawędzie elementu schodzące się w jednym narożu były wzajemnie prostopadłe, przeto obrawszy je za osie  $x, y, z$  układu prostokątnego widzimy, że powyższym składowym tensorów odkształcenia i napięcia odpowiadają

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z; \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$$

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}.$$

Wobec tego wzory § 58 wyrażające uogólnione prawo Hooke'a przy zastosowaniu współrzędnych prostokątnych i stałych Lamé'go, dają bezpośrednio wzory następujące we współrzędnych krzywoliniowych prostokątnych

$$(58 \text{ a}) \quad \begin{aligned} \widehat{aa} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\alpha\alpha} & \widehat{\beta\gamma} &= \mu\varepsilon_{\beta\gamma} \\ \widehat{\beta\beta} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\beta\beta} & \widehat{\gamma\alpha} &= \mu\varepsilon_{\gamma\alpha} \\ \widehat{\gamma\gamma} &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{\gamma\gamma} & \widehat{\alpha\beta} &= \mu\varepsilon_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

§ 64a. Energia sprężysta ciała izotropowego odniesionego do współrzędnych krzywoliniowych prostokątnych.

Stosownie do § 58a napiszemy dla energii odniesionej do jednostki objętości ciała

$$(64.1 \text{ a}) \quad \Phi = G \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \theta^2 + \varepsilon_{\alpha\alpha}^2 + \varepsilon_{\beta\beta}^2 + \varepsilon_{\gamma\gamma}^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon_{\beta\gamma}^2 + \varepsilon_{\gamma\alpha}^2 + \varepsilon_{\alpha\beta}^2) \right]$$

$$(64.2 \text{ a}) \quad \Phi = \frac{1}{E} \left[ \frac{1}{2} \Theta^2 + (1+\nu) (\widehat{\alpha\beta}^2 + \widehat{\beta\gamma}^2 + \widehat{\gamma\alpha}^2 - \widehat{\alpha\alpha} \cdot \widehat{\beta\beta} - \widehat{\beta\beta} \cdot \widehat{\gamma\gamma} - \widehat{\gamma\gamma} \cdot \widehat{\alpha\alpha}) \right]$$

przy oznaczeniach

$$\theta = \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta} + \varepsilon_{\gamma\gamma} \quad \Theta = \widehat{\alpha\alpha} + \widehat{\beta\beta} + \widehat{\gamma\gamma}.$$

Nadto jest

$$(64.3 \text{ a}) \quad \Phi_v = \frac{1-2\nu}{6E} \cdot \Theta^2 = \frac{E}{6(1-2\nu)} \cdot (\varepsilon_{\alpha\alpha} + \varepsilon_{\beta\beta} + \varepsilon_{\gamma\gamma})^2 = \frac{1}{2} K \theta^2 = \frac{1}{2} \frac{\Theta}{K}$$

$$(64.4 \text{ a}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_f = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\widehat{\alpha\alpha} - \widehat{\beta\beta})^2 + (\widehat{\beta\beta} - \widehat{\gamma\gamma})^2 + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + (\widehat{\gamma\gamma} - \widehat{\alpha\alpha})^2 + 6(\widehat{\alpha\beta}^2 + \widehat{\beta\gamma}^2 + \widehat{\gamma\alpha}^2) \right], \\ \text{albo} \\ \Phi_f = G \left[ \frac{1}{3} \{ (\varepsilon_{\alpha\alpha} - \varepsilon_{\beta\beta})^2 + (\varepsilon_{\beta\beta} - \varepsilon_{\gamma\gamma})^2 + (\varepsilon_{\gamma\gamma} - \varepsilon_{\alpha\alpha})^2 \} + \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + \frac{1}{2} (\varepsilon_{\alpha\beta}^2 + \varepsilon_{\beta\gamma}^2 + \varepsilon_{\gamma\alpha}^2) \right]. \end{array} \right.$$

a) W § 68 traktującym o *granicy sprężystości i kryteriach jej osiągnięcia* pominięto zupełnie te kryteria, które chociaż bardzo rozpowszechnione w piśmiennictwie technicznym XIX wieku w wielu krajach, okazały się w stuleciu bieżącym zupełnie niezgodne z badaniami doświadczalnymi, a do tego pozbawione zdrowych podstaw naukowych. Z nich najbardziej głośną i propagowaną w ciągu pierwszej ćwierci wieku XX, zwłaszcza w piśmiennictwie techniczno-naukowym niemieckim, była tzw. teoria wytrzymałości O. Mohr'a twórcy geometrycznego przedstawienia ogólnego stanu napięcia przy pomocy kół naprężeń (ob. § 41). Ale wobec dowiedzionej już dawno bezpodstawności teoretycznej koncepcji Mohr'a w sprawie tych kryteriów nie uważałem za stosowne obciążać książkę balastem krytyki pomysłu chybnego, chociaż jego autorem był badacz cieszący się sławą zasłużoną innymi pracami. Jednakże wobec tego, że profesor jednej z naszych powojennych uczelni akademickich spróbował w r. 1947 na łamach poważnego pisma techniczno-naukowego bronić hipotezy Mohr'a, przypisując jej nawet walory wyższe

od innych hipotez stosowanych już od dwu dziesiątków lat przez świat techniczny, okazało się koniecznym wykazanie dobitnie błędów podstawowych koncepcji Mohr'a, które częściowo wytknął już z samego początku bieżącego stulecia W. Voigt, a przed wybuchem II wojny światowej H. Hencky. Uczyniłem to w kilku artykułach a zwłaszcza w monografii pt. „Kryteria wytrzymałościowe w stereomechanice technicznej“ (Warszawa Inst. Wyd. SIMP 1948). Studiujących książkę niniejszą odsyłam przeto do tej publikacji.

b) Twierdzenie o nieściśłości poglądów na związek między środkiem ścinania a środkiem skręcania spotykanych w piśmiennictwie naukowym międzywojennym, wypowiedziane i uzasadnione przez autora w § 143, było już w r. 1939 dowiedzione w inny sposób w pracach A. Grzędzielskiego i J. Nowińskiego. Jedna z nich ukazała się w nr. 1 pisma „Technika lotnicza“, które wkrótce padło ofiarą II wojny światowej. Tytuł brzmiał: „Środek sił poprzecznych i środek skręcania przekrojów belek cienkościennych osadzonych swobodnie“. Pisząc Teorię Sprężystości podczas okupacji musiałem odłożyć przytoczenie obu prac, aż do zbadania źródeł, co stało się możliwym dopiero teraz dzięki uprzejmości drugiego z autorów.



## SKOROWIDZ

obejmujący nazwiska autorów przytaczane w tekście (drukem rozstrzelonym), nazwy polskie głównych pojęć i przedmiotów uwzględnionych w książce (drukem tłustym), numery paragrafów (wzgl. rozdziałów), gdzie znajduje się wymienione nazwisko lub nazwa; wreszcie tłumaczenie nazw podstawowych na języki obce w porządku następującym: angielski, francuski, niemiecki, rosyjski i włoski. W przypadkach braku odpowiedników w kilku językach odróżniono terminy podane skrótami: ang., fr., niem., ros., wł. Brak jednego lub dwu terminów obcych uwypatniono wykropkowaniem w miejscu kolejnym języka. Wyrazy rosyjskie podano w transkrypcji polskiej stosowanej w „Słowniku polskich wyrazów technicznych“ wydawanym przed wojną przez Akademię Nauk Technicznych w Warszawie.

- Airy G. B. 50, 69. Alembert ob. d'Alembert.  
*Amplituda wahanja lub drgania* 148 — amplitude of the oscillation (vibration) — amplitude d'oscillation (vibration) — Amplitude der Schwingung — amplituda kolebanja (wibracji) — ampiezza dell'oscillazione (vibrazione).  
*Analogia błonowa* (w teorii skręcania) 137, 138 — membrane analogy in torsion — analogie de membrane — Seifenhautgleichnis — membrannaja analogja — .....
- Analogia hydrodynamiczna* (w teorii skręcania) 136, 138 — hydrodynamical analogy in torsion — analogie hydrodynamique — das hydrodynamische Gleichnis (hydrodynamische Analogie) — gidrodinamiczeskaja analogija — analogia idrodinamica.
- Analogia kinetyczna Kirchhoffa* 171.  
*Anizotropia* (nierównozwrotność) 57, 68 — anisotropy — anisotropic — Anisotropie — anizotropja — anisotropia.
- Arndt W. 158. Aron H. 201. Auerbach F. 108. Baes L. 68.  
Basset A. B. 197, 201. Batysfera 111.  
*Belka* (pręt) X — beam — poutre — Balken — bałka — trave.  
*Belka zginana parami sił* 112.  
Beltrami E. 60, 68, 69, 149, 202.  
*Beltrami'ego i Michell'a równania różniczkowe naprężeń* 60.  
Bernoulli Daniel 112, 143, 146, 174. Bernoulli Jakub (młodszy) 201.  
*Betti'ego zasada wzajemności przemieszczeń* 99 — reciprocal theorem — théorème de la réciprocité des déformations élastiques — Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Verschiebungen — teorema o wzaimnosti peremieszczenij — teorema di reciprocità.
- Bieguny funkcji zm. zespolonej* 82.  
Bielajew N. M. 108, 109. Biezeno C. B. 186. Biezeno & Grammel 186. Biezeno & Koch J. J. 186.  
*Błona* 137 — membrane — membrane — Membrane — membrana — membrana.

- Bolle L. 217. Born M. 57. Boussinesq J. 51, 102, 103, 104, 126, 136, 153, 161, 168, 200a. Burgers W. G. 214. Burzyński W. 68.
- Caldonazzo B. 202.
- Castigliano A. 101.
- Castigliano'a zasada* 101. — Castigliano's theorem — théorème de Castigliano — der Satz von Castigliano — teorema Kastiliano — teorema di Castigliano.
- Cauchy A. L. 33, 82, 201.
- Centralne główne osie bezwładności* (przekroju belki) 132. — principal axes of inertia — axes principaux d'inertie — Hauptträgheitsachsen — głównyja centralnyja osi inercji — assi principali d'inerzia.
- Chladni E. 188.
- Ciało elastoplastyczne* 221.
- Ciało jednolite (jednorodne)* 1.
- Ciało quasi-izotropowe* 68.
- Ciało stałe* 57 — solid body — corps solide — fester Körper — twiordoje tielo — corpo solido.
- Ciągnięcie* (jako naprężenie normalne) 33 — tensile stress — tension (contrainte) positive — Zugspannung — napriaženje raztiazženja — tensione positiva.
- Ciężno* 143 — (niem.) Zugorgan.
- Ciężar skupiony* ob. *obciążenie skupione*.
- Ciężar właściwy materiału* tj. ciężar jednostki objętości 43.
- Cisnienie* jako naprężenie normalne przyjęte za ujemne 33 — compressive stress — pression (tension negative) — Druckspannung — napriaženje szatja — pressione.
- Clapeyron 96, 101.
- Clapeyron'a twierdzenie* 96, 97, 98.
- Clebsch A. 84, 168, 195. Cohn S. — Vossen 201. Coker E. G. 168.
- Cornu A. 114. Coulomb Ch. A. 68, 118, 221.
- Cząsteczka* ob. *drobina* lub *molekuła*.
- Częstość drgania* XII, 143 — frequency of the vibration (oscillation) — fréquence de l'oscillation — Schwingungsfrequenz — czastota kolebanja — frequenza dell'oscillazione.
- Częstość drgania kątowna* 143. — frequency — pulsation — Kreisfrequenz — czastota — frequenza.
- Czyste odkształcenie postaciowe płaskie* 7.
- Czyste zgięcie (zginanie)* 112 — pure bending — flexion simple et pure — reine Biegung — czystyj izgib — flessione pura.
- D'Alembert J. 143, 146, 174.
- Deformacja* ob. *odkształcenie*.
- De Saint-Venant ob. Saint-Venant. Dinnik A. 125, 158.
- Diwergencja* 25.
- Długość fali* 148.
- Dougall J. 200
- Drgania* ob. także *drganie*.
- Drgania giętkne prętów (belek)* 144, 177.
- Drgania giętkne płyt* 187, 188.
- Drgania główne (normalne)* 143 — principal (normal) vibrations — vibrations principales (normales) — Hauptschwingungen (normale Schwingungen) — głównyja (normalnyja) kolebanja — oscillazioni principali.
- Drgania okres* ob. *okres drgania*.

- Drgania poprzeczne* 143 — transverse (lateral) oscillations — oscillations transversales — Querschwingungen — popierecznyje kolebanja — oscillazioni trasversali.
- Drgania poprzeczne strun (ciągien napiętych)* 144, 146.
- Drgania poprzeczne prętów* 176, 177, 178.
- Drgania skrętne cięgna lub pręta* 145.
- Drgania sprężyste* XII — vibrations of elastic systems — vibrations élastiques — elastische Schwingungen — kolebanja uprugich sistem — oscillazioni (moti vibratori) dei corpi elastici.
- Drgania własne* ob. *drżanie własne*.
- Drgania wymuszone struny* 175.
- Drganie* (jako ruch ciągły) XII — oscillating motion (vibration) — mouvement oscillatoire — schwingende Bewegung (Schwingung) — kolebanje — movimento oscillante (oscilazione).
- Drganie harmoniczne* XII — harmonic — harmonique simple — harmonische (Sinus-) Schwingung — garmoniczeskoje kolebanje — oscillazione sinusoidale.
- Drganie harmoniczne wyższe* 144.
- Drgania podłużne (prętów)* 143, 173, 174 — longitudinal vibrations — vibrations longitudinales — Längsschwingungen — prodolnyje kolebanja — oscillazioni longitudinalinali.
- Drganie (główne) podstawowe* 143 — fundamental vibration — vibration fondamentale — Grundschiwingung — osnowoj tip kolebanja — oscillazione fondamentale.
- Drganie swobodne* 142 i nast. — free vibration (oscillation) — vibration libre — freie Schwingung — swobodnoje kolebanje — oscillazione libera.
- Drganie swobodne* lub *własne* 142 — natural oscillation (vibration) — oscillation (vibration) propre — Eigenschwingung — sobstwiennnoje kolebanje — oscillazione propria.
- Drganie wymuszone* 142 — forced vibration — vibration forcée — erzwungene Schwingung — wunuźdionnoje kolebanje — oscillazione sforzata.
- Drobina* 1, ob. *molekuła* 1.
- Dwuosiowy stan napięcia* ob. *plaski stan napięcia*.
- Dziwiński P. 82.
- Eichinger A. 221. Ekström I. E. 217.
- Elastyczność* ob. *sprężystość*.
- Elastyki Eulera* 172.
- Elipsa naprężen* 47 — ellipse of stress — ellipse des tensions — Spannungsellipse — ellips naprjaženij — ellisse delle tensioni.
- Elipsoida naprężen* 47 — ellipsoid of stress — ellipsoide des tensions — Spannungsellipsoid — ellipsoid naprjaženij — ellissoide di Lamé.
- Elipsoida odkształcenia* 16 — strain ellipsoid — ellipsoide de la déformation — Formänderungsellipsoid — ellipsoid deformacii — ellissoide delle dilatazioni.
- Eliptyczna płyta* ob. *płyta eliptyczna*.
- Energetyczne kryterium stateczności* ob. *kryterium energetyczne* ...
- Energetyczne metody stereostatyki* ob. *metody energetyczne* ...
- Energia kinetyczna* (układu sprężystego) 143 — kinetic energy — énergie cinétique (force vive) — kinetische Energie (lebendige Kraft) — kineticeskaja energja (żiwaja sila) — energia cinetica (forza viva).

- Energia sprężysta albo energia sprężystości* (układu) 63, 96 — potential energy of deformation — potentiel interne — potentielle Energie der Formänderung (Formänderungsarbeit) — potencialnaja energija deformacii — potenziale interno (potenziale della elasticità).
- Energia sprężysta właściwa (potencjal sprężystości)* 63, 64 — (wł.) potenziale unitario della elasticità.
- Energia sprężysta* (właściwa czystego) *odkształcenia postaciowego* 64.
- Energia sprężysta* (właściwa czystego) *odkształcenia objętościowego* 64.
- Energia sprężysta płyty cienkiej* 116, 181.
- Entropia* 65.
- Estanave E. 185. Euler L. 171, 201.
- Fala dylatacyjna (bezobrotowa, niewirowa)* 147, 151.
- Fala płaska* 148.
- Fala podłużna, poprzeczna i skrętna w przecie lub cieżnie* 146, 148, 151.
- Fala skrętna* 147.
- Fale drgań* (prętów i ciężien napiętych) 146 — wawe motion — mouvement ondulatoire — Wellenbewegung — wolnoobraznoje dwizenje — movimento ondulatorio (ondulazione).
- Fale podłużne i poprzeczne* 151.
- Fale powierzchniowe Rayleigh'a* 152.
- Faza drgania, kąt fazy* 148 — phase angle — angle de phase — Phasenwinkel — ugot fazy — angolo della fase.
- Filon L. N. G. 126, 159, 160, 168. Flamant A. 92. Flügge W. 204, 205, 207, 208, 211, 212, 213, 217, 218, 220.
- Föppl A. 68, 87, 104, 108, 134, 136, 140, 158, 159, 160, 162, 195, 198, 199.
- Föppl L. 68, 87, 104, 108, 134, 136, 140, 158, 159, 160.
- Fourier Ch. 75, 125, 213. Frank & v. Mises 125, 161. Fresnel A. I. 149.
- Fryzendorf T. 106. Fuchs Z. 109.
- Funkcja Hankel'a* 217.
- Funkcja harmoniczna płaska* 82.
- Funkcja skręcania* 121, 122.
- Funkcja naprężeń Love'a* 154, 157.
- Funkcja zginania* 131, 134, 135.
- Funkcja  $\Omega$*  (w zag. de Saint-Venant'a) 120.
- Funkcje Bessel'a* 125, 160, 161, 162, 188, 197, 218.
- Funkcje eliptyczne* 172.
- Funkcje harmoniczne* 59, 83.
- Funkcje hiperboliczne* *Sh, Ch, Tgh, Cth, Sch, Csch*, 93.
- Funkcje naprężeń* 50, 69, 122, 154, 157, 164, 165.
- Funkcje sprzężone* 82.
- Funkcje własne (swoiste)* 174.
- Galörkin B. G. 186. Galileusz 57, 68.
- Gauss K. F. 31, 201, 217, 180. Geckeler J. 216, 217. Germain Sophie 179.
- Gehring F. 200a. Geiringer Hilda 224.
- Gęstość* 1, 43 — density — densité — Dichte — plotnost' — densità.
- Gięcie ob. zgięcie*.
- Girkmann K. 200a.
- Girtler R. 160.
- Główne momenty bezwładności ob. momenty główne...*
- Główne naprężenia ob. naprężenie główne.*

*Główne osie bezwładności* ob. *osie główne*...

*Główne wydłużenie* ob. *wydłużenie główne*.

Gołowin Ch. 80.

*Granica Hooke'a* ob. *granica proporcjonalności*.

*Granica plastyczności* (płynności, ciastowatości) 68 — yield (ing) point — limite d'écoulement (limite apparente d'élasticité) — Fließgrenze — prediel tiekuczności (plastyczności) — limite di (duttilità) plasticità.

*Granica proporcjonalności*, czyli *granica Hooke'a* 58 — limit of proportionality — limite de proportionalité — Proportionalitätsgrenze — prediel proporcjonalności — limite di proporzionalità.

*Granica sprężystości* 68 — elastic limit (limit of elasticity) — limite élastique (limite de l'élasticité) — Elastizitätsgrenze — prediel uprugosti — limite di elasticità.

Green G. 31, 49, 63, 131, 142, 181. Greenhill A. G. 125.

Gruber E. 211.

*Grupa fal* 178.

Grzędzielski A. 90, uzup. t. II, Gubanow A. I. 224. Guest J. J. 68. Hamilton W. R. 181. Haigh B. P. 224.

Hartman 221. Helmholtz H. 64, 224. Hencky H. 68, 224. Hertz H. 95, 102, 105, 106, 109, 117, 161, 196, 197.

*Hiperstatyczne* czyli *statycznie niewyznaczalne* (wielkości) 43 — statically undetermined — hyperstatiques — statisch unbestimmt — statyczny nieopredielimyje — staticamente indeterminati.

*Hipoteza wytrzymałościowa energii czystego odkształcenia postaciowego* 68 — pure form strain energy hypothesis (theory) — hypothèse (théorie) de la constance du travail spécifique élastique de changement de forme par glissement — Hypothese der grössten Gestaltänderungsarbeit — hipoteza wielkości energii sdwiga — ipotesi dello potenziale unitario delle deformazioni elastici trasversali.

Hooke R. 57, 68. Huyghens Chr. 149.

Inglis C. E. 93. Iterson Th. van 224.

*Inwersja* ob. *metoda inwersji*.

*Izotropia* czyli *równozwrotność* 57, 58, 63.

*Izotropowy* czyli *równozwrotny* (materiał, ciało fizyczne) 57, 58, 63 — isotropic — isotrope — isotrop — izotropnyj — isotropo.

Jacobsen L. S. 158.

*Jednolity* czyli *jednorodny* (materiał) 1 — homogeneous — homogène — homogen — odnorodnyj — omogeneo.

*Jednorodny (równomierny) stan napięcia* 34.

*Jednostójny (obszar)* 60, 61.

*Jednoznaczność rozwiązań teorii sprężystości* 61.

Jellet J. H. 201. Johnson A. E. 221.

*Karb* 163 — notch — entaille — Kerbe — nadriez — incisione (intaglio).

*Kąt fazowy* ob. *faza drgania*.

*Kąt skręcania* 118, 121 — angle of torsion — angle de torsion — Drillungswinkel (Torsionswinkel) — ugiel kruczenia — angolo di torsione.

Kelvin (W. Thomson) 65, 102. Kelvin & Tait 136.

*Kierunki główne odkształcenia* 20.

Kirchhoff G. R. 61, 97, 149, 168, 171, 179, 181, 212. Koch J. J. 186.

*Kolo Mohra* albo *kolo naprężeń* 36, 37. — Mohr's circle — cercle de Mohr — Spannungskreis — krug Mora — circolo di Mohr.



- Kołosow G. 93.  
*Kontinuum dwuwymiarowe płaskie* 4.  
*Kontinuum liniowe* 3.  
*Kontinuum trójwymiarowe* 13.  
*Kontinuum materialne* ob. *materia ciągła* 1.  
*Krażek wirujący* 78 — rotating disc — plateau tournant — umlaufende Scheibe —  
 wraszczajuszczijisa disk — disco rotante.  
*Kryształity* 1.  
*Kryteria wytrzymałościowe* ob. *hipotezy wytrzymałościowe*.  
*Krzywa sprężysta* ob. *linia ugięcia*.  
*Krzywizna linii ugięcia (zgiętej osi belki)* 112.  
*Krzywizna (powierzchni) Gaussa* 180.  
*Krzywizna powierzchni synklastyczna i antyklastyczna* 180, 214.  
*Kwadryka naprężeń* 46.  
*Kwadryka wydłużeń* 18.  
 Lagally M. 202. Lagrange J. L. 143, 171, 179, 201.  
 Lamb H. 152, 201. Lamé G. 29, 30, 52, 56, 58, 63.  
*Laplace'a operator różniczkowy (laplasjan)* 59.  
 Lecornu 202. Legendre A. M. 106, 155. Lejeune-Dirichlet G. 106.  
 Lévy M. 74, 185, 224.  
*Liczba (stosunek) Poisson'a* 58 — Poisson's ratio — coefficient de Poisson —  
 Quersahl (Poissonse Konstante) — Puassonowo odnoszenie — modulo  
 (raporto) di Poisson.  
*Linia środkowa* albo *oś pręta (belki)* 112, 119 — centre line of rod (beam) — axe  
 de la poutre (barre) (fibre moyenne de la barre) — Stabmittellinie (Stab-  
 achse, Balkenachse) — oś balki (brusa) — asse del trave.  
*Linia ugięcia belki (pręta)* czyli *linia sprężysta* lub *odkształcona* 72 — bending  
 line (curve of deflection) (elastic curve) — ligne (élastique) de flexion  
 (ligne déformée) — Biegungslinie — izognutaja oś balki (brusa) — curva  
 elastica.  
*Linie największych naprężeń stycznych* (w stanie płaskim napięcia) 38 — lines of  
 maximal shearing stresses — lignes des tensions tangentielles maximales —  
 Schubspannungslinien — linji najbolszich kasatielnych napriaženij — ...  
*Linie naprężeń* 126.  
*Linie (trajektorie) naprężeń głównych* 38 — trajectories of principal stresses —  
 trajectoires des tensions principales — Hauptspannungslinien (Spannungs-  
 trajektorien) — trajektorji głównych napriaženij — traiettorie degli ten-  
 sioni principali.  
*Linie (trajektorie) odkształceń głównych* 32. — trajectories of principal extensions —  
 trajectoires des dilatations principales — Hauptdehnungstrajektorien  
 (Hauptdehnungslinien) — trajektorji głównych udlinienij — traiettorie degli  
 dilatazioni prinzipali.  
*Linie poślizgu* 221.  
*Linie węzłowe* (plyt drgających) 188.  
 Love A. E. H. 29, 55, 84, 95, 97, 99, 106, 122, 131, 135, 154, 157, 162, 169, 173,  
 200, 201, 214. Lüders 221.  
 Lomnicki A. 31.  
 Mariotte 57, 68.  
*Materia* 1 — matter — matière — Materie — matieria — materia.  
*Materia ciągła* czyli *kontinuum materialne* 1.

- Material* 1 — material — matériel — Werkstoff (Material) — materjal — materiale.
- Material anizotropowy* ob. *anizotropia*.
- Material izotropowy* ob. *izotropia*.
- Material jednolity* lub *jednorodny* 1 ob. *jednolity* ...
- Material niejednolity* lub *niejednorodny* 1 — heterogeneous material — matériel non-homogène — ungleichartiger (inhomogener) Werkstoff — nieodnorodnyj materjal — materiale non omogeneo.
- Mathieu E. 201.
- Maxwell'a zasada* ob. *zasada Maxwell'a*.
- Maxwell J. C. 50. Melan E. 158. Meissner E. 216, 219.
- Menabrea'i zasada* 101 ob. *zasada najm. energii sprężystej*.
- Mesnager A. 41.
- Metoda Galerkina* 186.
- Metoda inwersji* 94.
- Metoda Rayleigh'a i Ritz'a* 184.
- Metody energetyczne (stereostatyki)* VII.
- Michell J. H. 53, 60, 69, 94, 95, 104, 158, 168, 195, 200.
- Miejsce niebezpieczne (przekrój niebezpieczny)* 68.
- Miesel K. 211. Mises R. V. 68, 224.
- Moduł odkształcenia objętościowego* ob. *moduł ściśliwości*.
- Moduł odkształcenia plastycznego* 224.
- Moduł sprężystości* czyli *moduł wydłużenia sprężystego*, albo *moduł Young'a* E. 58 — modulus of elasticity (Young's modulus) — module d'élasticité (coefficient d'élasticité) — Elastizitätsmodul (Elastizitätsmass, Elastizitätszahl) — moduł uprugosti (pri rastiaženji) ili moduł Junga — modulo di Young (modulo di elasticità longitudinale).
- Moduł sztywności* = *moduł ścinania* = *moduł skręcania* = *moduł sprężystości postaciowej* G. 58 — modulus of rigidity (modulus of elasticity in shear) — module de rigidité (de glissement) — Gleitmodul (Schubmodul) — moduł uprugosti pri sdwigu (moduł sdwiga) — modulo di rigidezza elastica (modulo di elasticità trasversale).
- Moduł ściśliwości* 58.
- Mohr O. 36, 37, 47, 68.
- Molekula (drobina, cząsteczka)* 1 — molecule — molécule — Molekel — molekula — molecola.
- Moment gnący* ob. *moment zgięcia* 44.
- Moment skręcania (mom. skręcający)* pręta lub belki 118. — torsional moment (twisting moment) — moment de torsion — Verdrehungsmoment (Drillungsmoment) (Torsionsmoment) — skruciwajuszczij momient — momento di torsione (momento torcente).
- Moment zgięcia (zginający, gnący)* M. 44 — bending moment — moment fléchissant — Biegunungsmoment — izgibajuszczij momient — momento flettente (momento di flessione).
- Morera G. 50. Muscheliszwili N. 93. Mysz E. 160.
- Naciąg* = *napięcie rozciągające*.
- Nacisk* = *napięcie ściskające*.
- Nádai A. 162, 185.
- Napięcie blonowe i sklepieniowe* 201.

- Napięcia* (jako siły wewnętrzne między obiema stronami przekroju) 33 — total stress (internal force) — force intérieure (force de tension) — Spannkraft (innere Kraft) — usilje — forza interna (forza di tensione).
- Napężenia* ob. także *napężenie*.
- Napężenia* kołowo-symetryczne 77.
- Napężenia* radialne 45, 76, obwodowe 45, 76.
- Napężenia* składowe 34 — components of stress — composantes de la tension — Spannungskomponenten — sostawlajuszczija naprażenja — componenti delle tensioni.
- Napężenia* termiczne (cieplne) 66 — thermal stresses — ... — Temperatur — (Wärme-) Spannungen — naprażenja ot izmienenija temperatury — tensioni dell'equilibrio termo-elastico.
- Napężenia* własne 67 — initial stresses — tensions propres — Eigenspannungen — ostatecznyja naprażenja — tensioni proprie.
- Napężenia* w ścianach zbiorników 74.
- Napężenie* bezwzględne = *napięcie*.
- Napężenie* (względne, tj. odmiesione do jednostki pola przekroju) 33 — stress — tension — Spannung — naprażenje — tensione.
- Napężenie* główne 37, 40, 47 — principal stress — tension principale — Hauptspannung — gławnoje naprażenje — tensione principale.
- Napężenie* normalne 33 — normal stress — tension normale — Normalspannung — normalnoje naprażenje — tensione normale.
- Napężenie* obwodowe (równoleżnikowe) 45, 76, 203 — circumferential stress (hoop stress) — tension circonferentielle — Ringspannung — kołewyje naprażenje — tensione circonferenziale.
- Napężenie* podłużne 43 — longitudinal stress — tension longitudinale — Längspannung — prodolnoje naprażenje — tensione longitudinale.
- Napężenie* południkowe 203 — meridional stress — tension normale méridienne — Meridianspannung — meridionalnoje naprażenje — tensione meridionale.
- Napężenie* radialne 45, 76 — radial stress — tension radiale — radiale Spannung — radialnoje naprażenje — tensione radiale.
- Napężenie* sprowadzone (porównawcze lub zastępcze) 68 — reduced stress — tension de comparaison — reduzierte Spannung (Ersatzspannung) — zamieniajuszczije naprażenje — tensione ridotta (tensione di comparazione).
- Napężenie* styczne 33 — tangential stress — tension tangentielle — Schubspannung — kasatielnoje (tangencjalnoje) naprażenje — tensione tangenziale.
- Napężenie* ścinające (*tnące*) 33 ob. *napężenie* styczne.
- Navier L. 118, 184.
- Navier'a przypadek zgięcia płyty prostokątnej 184, 185.
- Navier-Stokes 136. Neuber H. 29, 30, 50, XIV, 163. Newton I. 57, 114.
- Niezmienniki odkształcenia jednorodnego 24.
- Niezmienniki odkształcenia nieskończenie małego 26.
- Nowacki W. 200f. Nowiński J. Uzup. w t. II.
- Obciążenie* 33 — loading (load) — chargement (charge) — Belastung (Last) — nagruzka — carico.
- Obciążenie* niszczące 68 — rupturing (breaking) load — charge de rupture — Bruchbelastung (Bruchlast) — razruszajuszczaja nagruzka — carico di rottura.
- Obciążenie* użytkowe 68 — useful load — charge utile — Nutzlast — poleznaja nagruzka — carico utile.

- Obrót elementu* 31.
- Odbicie się fali* 146.
- Oddziaływanie ob. reakcja.*
- Odkształcenia ob. także odkształcenie.*
- Odkształcenia jednorodne* 17.
- Odkształcenia powłok obrotowych* 206, 207.
- Odkształcenie (deformacja) 2* — strain (deformation) — déformation — Formänderung (Deformation) (Verformung) — deformacja — deformazione.
- Odkształcenie błonowe (powłok)* 201.
- Odkształcenie czyste* 19.
- Odkształcenie izometryczne* 201.
- Odkształcenie jednorodne* 16, 20.
- Odkształcenie liniowe* 3.
- Odkształcenie liniowe właściwe* 3.
- Odkształcenie nieskończone male* 25, 32.
- Odkształcenie objętościowe 2* — pure dilatational strain — changement de volume — reine Volumänderung — iskluczitelno objomnaja deformacja — variazione di volume.
- Odkształcenie płaskie jednorodne* 11.
- Odkształcenie postaciowe 2, 7, 12* — non dilatational strain — changement de forme — reine Gestaltsänderung — deformacja biez izmienienija objoma (z sochranieniem objoma) — cambiamento di forma.
- Odkształcenie sprężyste* 57 — elastic strain (deformation) — déformation élastique — elastische Formänderung — uprugaja deformacja — deformazione elastica.
- Odkształcona (linia) ob. linia ugięcia.*
- Opór ob. reakcja.*
- Odwzorowanie stanu napięcia przez kola Mohr'a* 41.
- Ogólne równania różniczkowe równowagi wewnętrznej* 43, 49, 52, 53.
- Ogólny czyli trójwymiarowy (przestrzenny) stan napięcia* 34, 39 — general case of stresses — état général de la contrainte (des tensions) — räumlicher (dreiachsiger) Spannungszustand — prostranstwiennoje napriaznonnoje sostojanje — stato generale di tensione.
- Ogólny czyli trójwymiarowy (przestrzenny) stan odkształcenia* 15 do 32 — general case of strain — état général de la déformation — räumlicher (dreiachsiger) Formänderungszustand — prostranstwiennaja deformacja — stato generale di deformazione.
- Okres drgania T.* 143 — period of the oscillation (vibration) — période d'oscillation) — Schwingungsdauer — period kolebanja — periodo dell'oscillazione.
- Olszak W.* 94, 94a.
- Operator Meissner'a* 216, 217.
- Operator różniczkowy Laplace'a* 59.
- Opór bezwładności ob. reakcja bezwładności lub siła d'Alembert'a.*
- Ortogonalność funkcji własnych* 174.
- Ortotropowe płyty ob. płyty ortotropowe.*
- Osie bezwładności główne centralne* 112, 113.
- Osie główne bezwładności* 112, 113 — principal axes of inertia — axes principaux d'inertie — Hauptträgheitsachsen — głównyja osi inercji — assi principali di inerzia.

- Osie główne* (stanu odkształcenia lub stanu napięcia) 18, 40 — principal axes (of strain or of stress) — axes de l'ellipsoïde de déformations ou des tensions — Hauptachsen des Formänderungs- oder Spannungszustandes — głównyja osi (naprawlenija) deformacji ili napriazonnawo sostojanja — assi principali di deformazione o di tensione.
- Osiowa siła* ob. *siła osiowa*.
- Oś belki (pręta)* ob. *linia środkowa*.
- Oś obojętna (zgięcia)* 113 — neutral axis — axe neutrale — neutrale Achse (Linie) — neutralnaja oś — asse neutrale.
- Órodek sprężysty* 147.
- Palmgren A. 108.
- Pewność* (współczynnik pewności lub bezpieczeństwa) 68 — safety factor — coefficient de sécurité — Sicherheitszahl (Sicherheitsgrad) — koefficient bezopasnosti — coefficiente di sicurezza.
- Plastyczność* 1, 221, 224 — plasticity — plasticité — Plastizität (Bildsamkeit) — plasticznost' — plasticità.
- Plaza* czyli *tarcza* 84 — (niem.) Scheibe.
- Plaski* czyli *dwuwymiarowy stan napięcia* 36, 37, 69 — plane stress — état double de tension — ebener (zweiachsiger) Spannungszustand — płoskoje napriazonnoje sostojanje — stato doppio (piano) di tensione.
- Plaski stan odkształcenia* 69.
- Płaszczyzna główna belki* 113 — principal plane (of flexure) — plan principal de flexion — Hauptebene des Balkens — głównaja płoskost' bałki — piano principale di trave.
- Płaszczyzna obciążenia* 113 — plane of loading — plan de charge — Belastungsebene — płoskost' nagruzki — piano di carico.
- Płaszczyzna zgięcia* 113 — plane of bending line — plan de la ligne déformée — Biegungsebene — płoskost' izgiba — piano di curva elastica.
- Płynięcie* (ciała elastoplastycznego) 221.
- Płyta* XVI, 179.
- Płyta cienka* 181 — thin plate — plaque mince — dünne Platte — tonkaja płastinka — piastra (lastra) sottile.
- Płyta gruba* 200.
- Płyta okrągła* 195 — circular plate — plaque circulaire — Kreisplatte — krugłaja płastinka — piastra (lastra) circolare.
- Płyta okrągła pod siłą skupioną mimośrodkową* 195.
- Płyta pływająca* 196, 197.
- Płyta pływająca okrągła* 198, 199.
- Płyta prostokątna* 194 — rectangular plate — plaque rectangulaire — rechteckige Platte — priamougolnaja płastinka — piastra (lastra) rettangolare.
- Płyta wiotka* 189, 192.
- Płytowa sztywność zginania* ob. *sztywność płytowa zginania*.
- Płyty cienkie o ugięciach wielkich* 189, 190, 193.
- Płyty ortotropowe* 200a—200f.
- Pochhammer 173.
- Podobieństwo ...* ob. *analogia ...*
- Podstawowe drganie* ob. *drganie podstawowe*.
- Pogorzelski W. 31. Poincaré H. 197. Poisson S. D. 58, 141, 149, 182, 185, 201.
- Pole zeknięcia* 105.
- Poncelet J. V. 68. Pöschl Th. 93, 158.

- Posunięcie proste* 12.  
*Potencjał skalarowy i wektorowy* 150.  
*Potencjał sprężystości ob. energia sprężysta właściwa.*  
*Potencjał sprężystości adiabatyczny i izotermiczny* 65.  
*Potencjały opóźnione* 149.  
*Powierzchnia falowa* 148.  
*Powierzchnia izostatyczna* 51, 53.  
*Powierzchnia poślizgu* 221.  
*Powierzchnia rozwijalna* 201.  
*Powierzchnia synklastyczna i antyklastyczna* 214.  
*Powierzchnia środkowa powłoki* 201.  
*Powierzchnia ugięcia (plyty)* 180 — deflection surface — surface élastique —  
 Biegungsfläche — izognutaja powierzchnost' — superficie elastica.  
*Powłoka* 201 — shell — enveloppe — Schale — obołoczka — volta sottile.  
*Powłoka kropłowa* 204  
*Powłoka kulista* 217.  
*Powłoka obrotowa* 203.  
*Powłoka stożkowa* 218.  
*Powłoka walcowa* 208, 209, 210, 211, 213.  
*Powłoka w stanie napięcia i odkształcenia obrotowo-symetrycznym* 215, 216.  
*Praca odkształcenia* 96 — work of deformation — travail de déformation —  
 Formänderungsarbeit — rabota deformacji — lavoro di deformazione —  
*Praca przygotowana (wirtualna) (odkształcenia)* 62 — virtual work — travail  
 virtuel — virtuelle Arbeit — rabota na vozmożnom peremieszczenji —  
 lavoro virtuale.  
*Prager W.* 224. Prandtl L. 80, 137.  
*Prawo Hooke'a* 57 — Hooke's law — loi de Hooke — das Hookesche Gesetz —  
 zakon Huka — legge di Hooke.  
*Prescott J.* 126, 128, 190, 192, 193.  
*Prędkość (szybkość) fazowa* 148.  
*Prędkość (szybkość) grupowa* 178.  
*Pręt (belka) X* — bar; member; rod — barre; membre — Stab — stierzeń;  
 brus — asta; barra.  
*Pręt nieskończenie cienki* 169.  
*Pręty smukłe XV*, 168.  
*Przemieszczenia jednorodne* 6.  
*Przemieszczenia liniowe* 17, 19.  
*Przemieszczenia nieskończenie małe* 25.  
*Przemieszczenie I* — displacement — déplacement — Verrückung (Verschie-  
 bung — pieremieszczenje — spostamento.  
*Przemieszczenie przygotowane ob. przesunięcie przygotowane.*  
*Przemieszczenie ogólne* 15, 16.  
*Przemieszczenie uogólnione* 101.  
*Punkt Bielajewa* 108, 109.  
*Punkt Hertz'a* 108.  
*Rayleigh J. W.* 139, 152, 176, 178, 179, 201, 206.  
*Rayleigh'a i Ritz'a metoda* 184.  
*Reakcja izostatyczna i hiperstatyczna* 101.  
*Reissner H.* 205. Reuss A. 224.

- Reologia* 224.
- Resonans (współbrzmienie)* 175 — resonance — résonance — Resonanz — rezonans — risonanza.
- Ribiére C.* 80. *Riemann-Weber* 212. *Ritz W.* 139. *Roš M.* 221.
- Rozchodzenie się siły* VIII.
- Rozciąganie* 33, 43, 44 — tension — traction — Zug — rastiaženje — trazione.
- Rozciąganie jednoosiowe* 44.
- Rozszerzenie objętościowe właściwe* 22, 25, 31 — ratio of expansion of volum — dilatation cubique — kubische Ausdehnung — (otnositelnoje) objumnoje rasszirenje — dilatazione cubica (unitaria).
- Rozszerzenie powierzchniowe właściwe* 10.
- Rozszerzenie równomierne dwuwymiarowe* 8.
- Równania naprężeniowe teorii sprężystości* 60.
- Równania nierozdzielności (zwartości wewnętrznej)* 27.
- Równania przemieszczeniowe teorii sprężystości* 59, 159.
- Równania różniczkowe równowagi wewnętrznej* 43.
- Równania różniczkowe Lagrange'a* 143.
- Równania różniczkowe ruchu materii ciągłej* 48.
- Równanie biharmoniczne* 69, 70, 76.
- Równanie ciągłości* 22.
- Równanie częstości* 188.
- Równanie falowe* 147.
- Równanie Hamiltona* 181.
- Równanie różniczkowe Bessel'a* 217.
- Równanie różniczkowe drgań podłużnych i skrętnych prętów* 173.
- Równanie różniczkowe drgań poprzecznych cięgien napiętych (struny)* 146.
- Równanie różniczkowe drgań giętnych (poprzecznych) prętów* 176.
- Równanie różniczkowe Laplace'a* 59, 141, 161.
- Równanie różniczkowe Legendre'a* 155.
- Równanie różniczkowe Poisson'a* 141.
- Równanie różniczkowe ugięcia płyty we współrzędnych biegunowych* 188.
- Równanie różniczkowe zgięcia płyt „cienkich“* 181, 183.
- Równanie różniczkowe zwartości wewnętrznej ob. warunek nierozdzielności.*
- Równomierny stan napięcia* 34.
- Ruch drobinowy (molekularny)* 1.
- Ruch falowy* 142.
- Ruch masowy (molarny)* 1.
- Ruch nieuporządkowany* 1.
- Ruch uporządkowany czyli molarny* 1.
- Rudzki M. P.* 111, 147, 152. *Runge C.* 158. & *Köning H.* 204.
- Rura w stanie odkształcenia obrotowo symetrycznym* 212.
- de Saint-Venant (Barre) A.* 60, 68, 112, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 128, 130, 135, 140, 168, 169, 179, 220, 224.
- Samonaprężenia ob. naprężenia własne.*
- Samowzmocnienie* 225.
- Schaefer C.* 114, 173, 188. *Schleicher F.* 68, 212, 217.
- Schwinnig* 108.
- Siła osiowa albo podłużna* 44.
- Siła skupiona* 87.

- Siła tnąca* lub *ściągająca* (*poprzeczna*) 131 — shearing force — effort tranchant; effort de cisaillement — Schubkraft; Querkraft — pereriezywajuszczaja siła — forza di taglio.
- Sily bezwładności* ob. *sily d'Alembert'a*.
- Sily d'Alembert'a* 59.
- Sily drobinowe* (*molekularne*) 33 — molecular forces — forces moleculaires — Molekularkräfte — molekuliarnyje (mieżduczasticznyje) *sily* — sforzi *moleculari*.
- Sily powierzchniowe* 33.
- Sily przyciągające* i *odpychające* 33.
- Sily sprężystości* 33.
- Sily uogólnione* 101.
- Sily wewnętrzne* (*napięcia*) 33 — stresses — efforts; forces intérieures — innere Kräfte; Spannungen — wnutriennije *sily* — forze interne.
- Sily zewnętrzne* 33 — external forces — forces extérieures — äussere Kräfte — wniesznije *sily* — forze esterne.
- Skladowe stanu napięcia* (*tensora napięcia*) 39 — components of stress: stresses — composantes des tensions — Spannungskomponenten; Komponenten des Spannungstensors — sostawliajuszczije napriaženja — componenti della tensione (tensioni fondamentali).
- Skladowe stanu odkształcenia* (*tensora odkształcenia*) 25 — components of strain — coefficients de la déformation — Formänderungskomponenten; Komponenten des Verzerrungstensors — sostawliajuszczije deformacji — componenti della deformazione.
- Skrećanie prętów prostych* X — torsion — torsion — Verdrehung (Torsion) — kruczenie — torsione.
- Skrećanie pręta okrągłego* 118.
- Skrećanie pręta prostopadłościennego* 124.
- Skrećanie prętów o przekroju zmiennym* 158.
- Skrećanie prętów o przekroju nieokrągłym przy utrudnieniu paczenia się przekrojów* 140.
- Skrećanie rur* 127.
- Skrećanie rury rozciętej wzdłuż* 128, 129.
- Skrećanie wycinka osiowego z walca kołowego* 125.
- Skrócenie* (*proste*) 3 — simple squeeze — contraction simple — einfache Verkürzung — (otnositelnoje) ukoroczenie — contrazione semplice.
- Skrócenie równomierne* 3.
- Skurczenie czyste jednokierunkowe* 6.
- Skurczenie* (*objętościowe właściwe*) 22 — ratio of contraction of volum — contraction cubique — kubische Zusammenziehung — (otnositelnoje) objomnoje szatje — contrazione cubica (unitaria).
- Skurczenie równomierne dwuwymiarowe* 8.
- Slup jako pręt ścisany podłużnie* 117 — column; compression member — pièce comprimée — Säule; Pfosten; Druckstab — stołp; kolonna; szatyj stierzeń — pilastro (colonna); asta compressa.
- Sonntag R. 158.
- Sprężystość* (dawniej „elastyczność“) 1, 57 — elasticity — élasticité — Elastizität — uprugost' — elasticità.
- Sprężystość doskonała* (zupelna) 57 — perfect elasticity — élasticité parfaite — vollkommene Elastizität — sowierszennaja uprugost' — elasticità perfetta.
- Sprężystość objętościowa* i *postaciowa* 57.



- Stale Lame'go* 58.
- Stale sprężystości* 58 — the constants of elasticity — les constantes élastiques — Elastizitätskonstanten (Elastizitätsmasse) — modulia uprugosti — costanti di elasticità.
- Stan napięcia II* — stress — état de tension — Spannungszustand — napriaožnoje sostojanje — stato di tensione.
- Stan napięcia dwuosiowy (plaski)* ob. *plaski stan n.* 36, 37.
- Stan napięcia kolowo-symetryczny* 45.
- Stan napięcia jednoosiowy (jednokierunkowy)* 35 — uniaxal stress — (simple traction or pressure) — état simple de tension (traction ou compression simple) — linearer (einachsiger) Spannungszustand — liniejnoje napriaožnoje sostojanje — ...
- Stan napięcia i odkształcenia obrotowo-symetryczny powłok* 215, 216.
- Stan napięcia jednorodny* ob. *jednorodny stan napięcia* 34.
- Stan napięcia liniowy* ob. *stan napięcia jednoosiowy*.
- Stan napięcia ogólny* ob. *ogólny stan napięcia* 34, 39.
- Stan napięcia plaski (dwuosiowy)* 45, 69.
- Stan napięcia równomierny* ob. *jednorodny stan napięcia*.
- Stan naturalny i sztuczny* 61.
- Stan odkształcenia I*, 25 — strain — déformation (état de la déformation) — Formänderungszustand — deformacja — stato di deformazione.
- Stan odkształcenia ogólny* ob. *ogólny stan odkształcenia*.
- Stan odkształcenia plaski* 69, 72.
- Stacycznie niewyznaczalne i wyznaczalne (zadania, reakcje itp)* 43. ob. *hiperstatyczne i izostatyczne...*
- Stieltjes* 197 *Stodola A.* 188. *Stokes G.* 31, 64.
- Stopień bezpieczeństwa* ob. *pewność*.
- Stosunek Poisson'a* ob. *liczba Poisson'a*.
- Stribeck R.* 108.
- Struna* 143.
- Strzałka ugięcia (statyczna)* 131 — maximum deflection — la flèche — Biegunbspfeil — striela progiba — saetta di flessione (freccia di flessione).
- Superpozycji zasada* ob. *zasada superpozycji*.
- Swobodne drgania* ob. *drgania swobodne*.
- Szereg asymptotyczny* 197.
- Szereg Fourier'a* 75.
- Szywność skręcania (pręta)* 121, 123 — torsional rigidity — rigidité en torsion — Verdrehungssteifigkeit ('Torsionssteifigkeit) — żostkost' kruczenja — rigidizza a torsione.
- Szywność zginania pręta* 115, *plyty* 115 — flexural rigidity — rigidité en flexion — Biegungssteifigkeit — żostkost' izgiba — flessio rigidizza (rigidezza a flessione).
- Szybkość grupowa* 178.
- Ściskanie jednoosiowe* 44 — compression — compression — Druck — szatje — compressione.
- Ściskanie wszechstronne równmierne* 44.
- Środek skręcania (pręta)* 121, 123, 134 — centre of twist — centre de torsion — Drillmittelpunkt (Drehmittelpunkt) — centr kruczenja — centro di torsione.
- Środek ścinania* 132, 133, 134 — Flexural centre — ... — Schubmittelpunkt — centr izgiba (centr żostkosti) — centro di flessione.

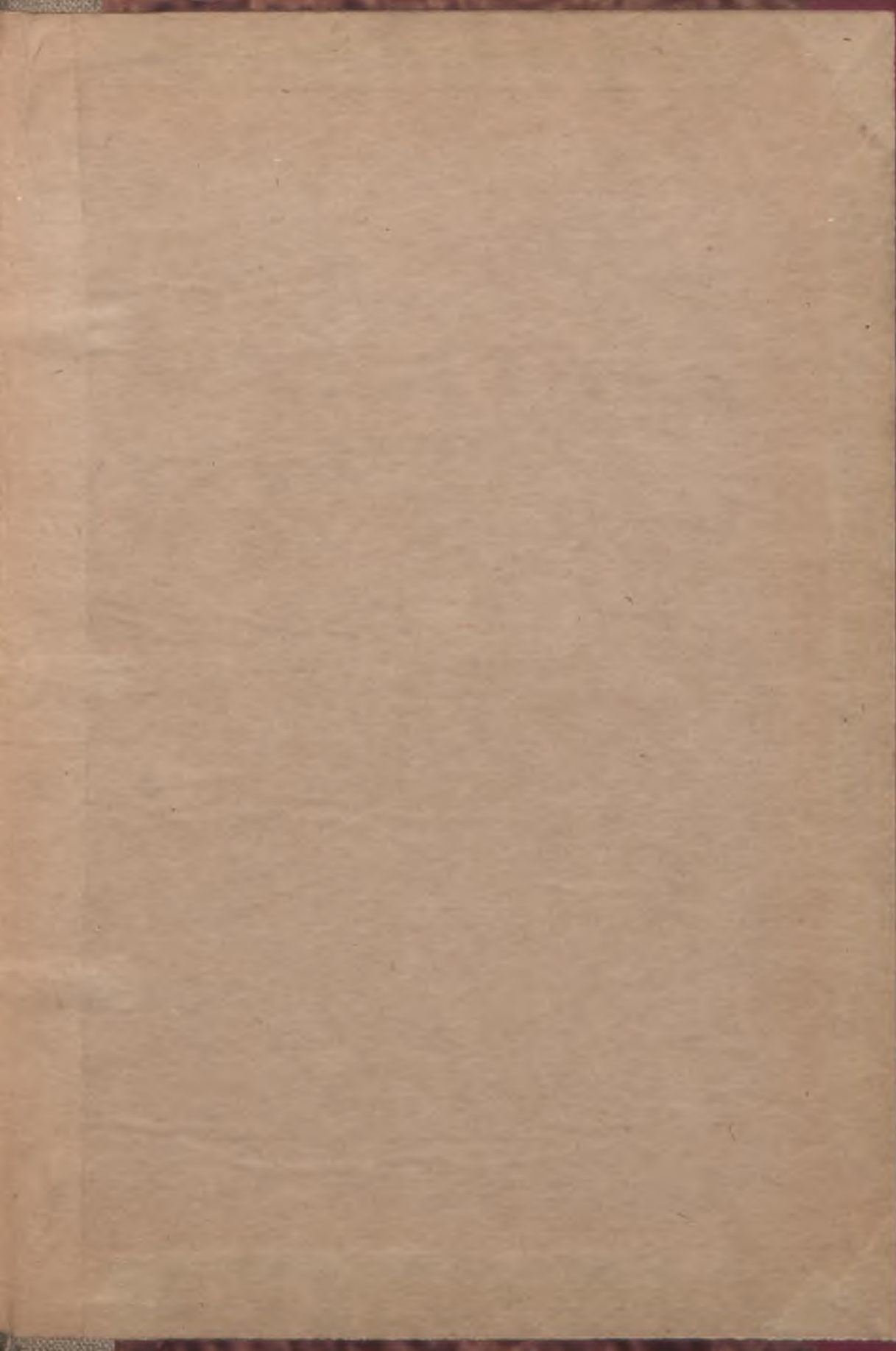
- Środek sztywności (pręta)* 123, 134 ob. *środek skręcania i środek ścinania*.  
*Tarcza (sprężysta)* 69, 84.  
*Tarcza okrągła* 95.  
*Tarcza z otworem eliptycznym* 93.  
*Tedone* 0. 61.  
*Tensor odkształcenia i tensor napięcia* 25 i 39.  
*Teoria blonowa powłok* 202, 203, 204, 205, 206, 207.  
*Teoria blonowa powłok walcowych* 208.  
*Teoria osi ruchomych* 54.  
*Teoria płyt XVI i XVIa*.  
*Teoria płyt grubych* 200.  
*Teoria uogólniona płyt cienkich* 189.  
*Teoria powłok XVII*.  
*Teoria ogólna powłoki obrotowej niewiotkiej* 214.  
*Teoria prętów smukłych XV*.  
*Teoria skręcenia de Saint-Venant'a* 121, 129.  
*Teoria twardości* 108.  
*Teoria zgięciowa powłoki walcowej* 209, 210, 211.  
*Teoria zgięciowa powłok obrotowo-symetrycznych o grubości zmiennej, ścisła* 219, przybliżona 220.  
 Thomson W. ob. Lord Kelvin. Thomson i Tait 182. Thum A. 167.  
 Timoszenko (Timoshenko) S. P. 74, 93, 94, 135, 138, 139, 140, 154, 203.  
 Timpe A. 106, 109, 158.  
*Trajektorie naprężeń głównych* 38 ob. *linie naprężeń głównych*.  
*Trajektorie odkształceń głównych* ob. *linie odkształceń głównych*.  
*Trójwymiarowy stan napięcia* ob. *ogólny stan napięcia*.  
*Twardość* 108 — hardness — dureté — Härte — twiordost' — durezza.  
*Twardość Auerbacha* 108.  
*Twardość Hertza* 108.  
*Twierdzenie Clapeyron'a* 96.  
*Twierdzenie o minimum energii sprężystej* 97, 98.  
*Tworzywo* 1, ob. *materiał*.  
*Układy sprężyste Clapeyron'a* 96, 97, 98.  
*Unormowanie funkcji własnych* 174.  
*Uogólnione prawo Hooke'a* 57.  
*Utwierdzenie (stale i przesuwne)* 131 — fixing; built in or encastré mounting — encastrement — Einspannung — zadiełka — incastro.  
 Voigt W. 68, 108, 221. Volterra V. 61.  
*Warstwa obojętna* 113 — neutral surface (layer) — surface des fibres neutres — neutrale Faserschichte — neutralnyj słoj — superficie delle fibre neutrali.  
*Warunek plastyczności* 224.  
*Warunki brzegowe (krawcowe)* 59 — boundary conditions — conditions aux limites — Randbedingungen — usłowja na konturie — condizioni ai limiti.  
*Warunki brzegowe płyty Kirchoff'a* 182.  
*Warunki nierozdzielności (zwarłości wewnętrznej)* 27 — compatibility conditions — equations de compatibilité — Verträglichkeitsgleichungen (Kompatibilitätsbedingungen) — differencjalnyja zawisimosti mieźdu sostawlajuszczimi de formacji — condizioni di compatibilità o di congruenza.  
 Watson G. N. 212. Weber C. 134. Webb R. R. 56. Weingarten 51.  
*Wektor przemieszczenia* 1.

- Wezeł drgania* 144, 188 — oscillation node — noeud d'oscillation — Schwingungsknoten — uziel kolebanja — nodo dell' oscillazione.
- Willers F. A. 158. Winkler E. 196.
- Włókno* (elementarne belki lub pręta) 113 — fiber (fibre) — fibre — Faser — wolokno — fibra.
- Wskaźnica Dupin'a* 180, 214.
- Współbrzmienie (współdrżanie)* ob. *resonans*.
- Współrzedne* ob. *przemieszczenia i siły uogólnione*.
- Współrzedne krzywoliniowe* 29 *Lamé'go* 29, 164.
- Współrzedne biegunowe* czyli *kuliste i walcowe* 32.
- Współrzedne elipsoidalne* 166.
- Wydłużenie elementu liniowego* 13.
- Wydłużenie główne* 9, 19 — principal extension — dilatation principale — Hauptdehnung — glawnoje udlinjenje — dilatazione principale.
- Wydłużenie równomierne* 6.
- Wydłużenie właściwe (jednostkowe)* 3, 6 — unit elongation — dilatation linéaire — (spezifische oder bezogene) Dehnung; Dehnungszahl — (otnositielnoje) udlinjenje — coefficiente di dilatazione lineare od allungamento specifico.
- Wygięcie izometryczne powierzchni* 201.
- Wymuszone drżania* ob. *drżania wymuszone*.
- Wyteżenie (wysilek) materiału* 68 — fatigue — fatigue — Anstrengung — ... —...
- Wyznacznik przemieszczenia ogólnego* 23.
- Wzór Gauss'a-Green'a* 31.
- Wzór Rayleigh'a* 178.
- Wzór Stokes'a* 31.
- Young T. 58.
- Zagadnienia Neuber'a* XIV.
- Zagadnienia płaskie (dwuwymiarowe) teorii sprężystości* IV, V, VI, 69.
- Zagadnienia statycznie niewyznaczalne* 43.
- Zagadnienia trójwymiarowe elastostatyki* IX.
- Zagadnienie Hertz'a* 105, 106, do 109.
- Zagadnienie de Saint-Venant'a* 119, 120, 121, 122.
- Zagadnienie struny* 143.
- Zamocowanie* = *utwierdzenie*.
- Zanaboni O. 71.
- Zasada Castigliano'a* ob. *Castigliano'a zasada* 101.
- Zasada de Saint-Venant'a* 71, 197.
- Zasada Hamilton'a* 181.
- Zasada Maxwell'a* ob. *zasada wzajemności przemieszczeń*.
- Zasada Menabrea'i* 101.
- Zasada najmniejszej energii sprężystej* 101 — principle of least work — théorème de Menabrea (principe du travail minimum) — Prinzip der kleinsten Formänderungsarbeit (der Satz von Menabrea) — naczało najmniejszej raboty — teorema di Menabrea.
- Zasada przyczynowości* 57.
- Zasada superpozycji (skutków)* 57 — principle of superposition — principe de la superposition (des effets) — Superpositionsprinzip — princip složenja diejstwija sil — principio della sovrapposizione (degli effetti).
- Zasada wzajemności przemieszczeń* czyli *zasada Betti'ego* 99 ob. *Betti'ego zasada* ...

- Zasada zesztynienia* 33 — principle of solidification — principe de solidification — Erstarrungsprinzip — princip otwierdienia — principio di solidificazione.
- Zgięcie (zginanie) belek (prętów)* 73, 80, 112, 113, 114, X, 130, 131, 132, 133 — bending of beams — flexion des poutres — Balkenbiegung — izgib bałok — flessione delle travi.
- Zgięcie belki prostokątnej* 73.
- Zgięcie czyste ob. czyste zgięcie* 112.
- Zgięcie nierównomierne* 131, 132.
- Zgięcie nierównomierne ze skręceniem* 133.
- Zgięcie proste* 113.
- Zgięcie poprzeczne* 114.
- Zgięcie równomierne (czyste)* 112, 130.
- Zgięcie ukośne* 113.
- Zginanie czyste belki pryzmatycznej* 112.
- Zginanie czyste pręta zakrzywionego kołowo* 80.
- Zginanie płyty kołowo-symetryczne* 156, 162.
- Zginanie płyty grubej kołowo-symetryczne* 162.
- Zginanie płyty ogólne* 116.
- Zginanie płyty walcowe* 115.
- Zginanie prętów prostych* X.
- Zginanie z skręcaniem* 133.
- Zmiana adiabatyczna lub izotermiczna stanu napięcia* 65.
- Zmiana kąta dwu elementów liniowych* 14.
- Zmiana objętości* 22.
- Żenczykowski W.* 213. *Żmurko W.* 82.







PEDAGOGICZNA  
BIBLIOTEKA  
WOJEWÓDZKA

Gdańsk-Wrzeszcz  
Al. Gen. J. Hallera 14



4250