

O interpolacji funkcji danej tabelarycznie

Mgr. K. MOSINGIEWICZ M. I. T.

Każde mierzenie jest obarczone błędem, którego przyczyną jest wiele czynników, jak niedokładność przyrządów, odczytywanie „na oko” w wypadku, gdy strzałka przyrządu znajdzie się między kreskami podziałki itp. To zmusza eksperymentatora do kilkakrotnego powtarzania pomiaru dla dalszego opracowania tego materiału doświadczalnego. Zakładając, że w grę wchodzi tylko błąd przypadkowy, można w oparciu o rachunek prawdopodobieństwa, statystykę i rachunek wyrównawczy wypośredkować wynik najbardziej prawdopodobny i ocenić dokładność wyniku. Tą drogą otrzymuje się pewną skończoną ilość par współrzędnych, ujętych w tabelkę pomiarów, zastępującą szukane prawo rządzące zjawiskiem.

Czynność polegająca na poszukiwaniu tego prawa czy też wzoru empirycznego (będzie to bowiem tylko wzór przybliżony), nazywamy interpolacją. Istnieją dwa główne typy interpolacji:

1. poszukiwanie funkcji przybliżonej, która by przechodziła przez wszystkie punkty uwidocznione w tabeli pomiarów,

2. poszukiwanie funkcji przybliżonej, przewijającej się między danymi punktami i odchylającej się możliwie nieznacznie od nich wszystkich w taki sposób, by była najlepszym przybliżeniem ścisłego prawa.

Pewne szczególne przypadki tego drugiego rodzaju interpolacji poruszone będą na przykładzie w niniejszym artykule. Ograniczenie ogólności spowodowane jest koniecznością istnienia kilku metod, które trudno przedstawić w ramach jednego artykułu, gdyż mogłyby one stanowić treść poważniejszego rozdziału podręcznika matematyki stosowanej.

Zagadnienie: Znaleźć wzór przybliżony, podający zależność mocy holowania N_0 w koniach mechanicznych od szybkości statku v w węzłach na podstawie tabelki pomiarów badań modelowych:

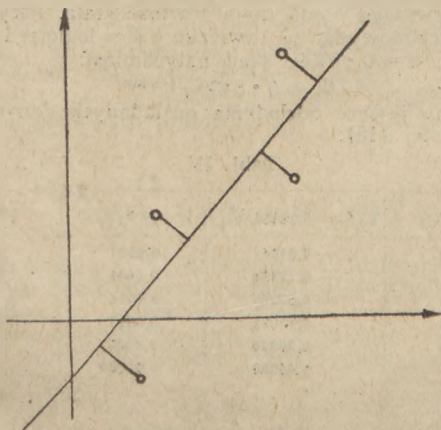
Tabl. I

v	10	12	14	16	18	20
N_0	1066	1912	3216	4951	7361	10355

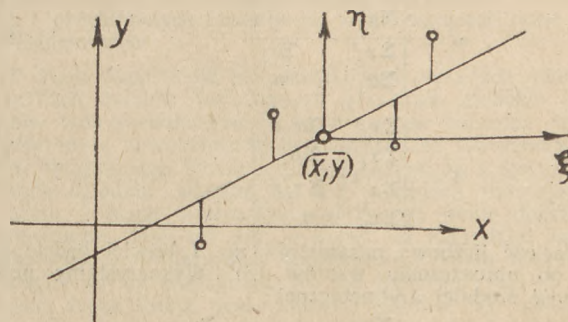
Zagadnienie to rozwiążemy w założeniu, że bądź na podstawie teoretycznych rozważań, bądź z wykresu, na którym naniesione są te dane, zorientować się można co do charakteru funkcji, jak to ma miejsce w tym przykładzie. Przyjmując postać

$$N_0 = a \cdot v^m \quad (1)$$

mamy do wyznaczenia dwa parametry a , m tak dobrane, by



Rys. 1



Rys. 2

postać (1) stała się funkcją czyniącą zadość tym wymaganiom, jakie stawia się przy interpolacji drugiego typu.

Stosowanie metody najmniejszych kwadratów bezpośrednio do funkcji postaci (1) dałoby oczywiście wynik zadowalający, lecz nastęrczyłoby wiele dość żmudnego liczenia, które można znacznie zredukować przez zastosowanie skali logarytmicznej na obu osiach układu współrzędnych. Logarytmując obie strony równania (1) logarytmem dziesiętnym

$$\log N_0 = \log a + m \log v \quad (2)$$

i oznaczając

$$\begin{aligned} \log a &= A \\ \log v &= x \\ \log N_0 &= y \end{aligned} \quad (3)$$

przy czym dwa ostatnie związki układu (3) uważając za określenie zmiany układu współrzędnych, mamy równanie prostej

$$y = mx + A \quad (4)$$

w miejsce dawnej postaci (1). W związku z tym dane ujęte w tabl. I przejdą w inne, uwidocznione w tabl. II:

Tabl. II

$x = \log v$	1	1,0792	1,1461	1,2041	1,2553	1,3010
$y = \log N_0$	3,0277	3,2814	3,5073	3,6947	3,8670	4,0151

Gdyby pomiary pierwotne zmiennych v , N_0 nie były obarczone błędem i gdyby zjawiskiem rządziło prawo wyrażone wzorem (1), to dane z tabl. II, naniesione na płaszczyźnie w układzie prostokątnym x , y , a więc punkty (x_i, y_i) , ułożyłyby się ściśle wzdłuż pewnej prostej (4), którą obierzemy możliwie najdokładniej, mając do dyspozycji parametry a , m . Byłoby błędem pochopne kierowanie się ciągiem pierwszych różnic:

$\Delta (\log N_0) \dots 0,2537, 0,2259, 0,1874, 0,1723, 0,1481$ (5)
w ocenie, czy te punkty (x_i, y_i) dość blisko leżą wzdłuż pewnej prostej, gdyż wypisany ciąg liczb (5) nie jest ciągiem pierwszych różnic, ze względu na nierówne odstępstwa zmiennej x w tabl. II, mimo że zmienna niezależna v posiada w tabl. I stały skok $h = 2$.

Poszukiwanej prostej można stawiać różne wymagania. Można np. żądać, żeby odległości punktów (x_i, y_i) od tej prostej, mierzone prostopadle, dawały minimalną sumę kwadratów (rys. 1). Takie jednak ujęcie zagadnienia nie jest brane pod uwagę w statystyce i rachunku wyrównawczym ze względu na dość uciążliwe rachunki przy badaniu minimum. Od prostej (4) zażądamy, żeby suma kwadratów

odchylen $\delta_i = y_i - mx_i - A$ punktów (x_i, y_i) od prostej była minimalna (rys. 2), czyli:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - A)^2 = f(A, m) = \min.$$

Postępując jak przy szukaniu ekstremów, tworzymy układ równań:

$$\frac{\partial f}{\partial A} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial m} = 0 \quad (6)$$

który w postaci uporządkowanej:

$$\begin{aligned} m \sum x_i^2 + A \sum x_i &= \sum x_i y_i \\ m \sum x_i + A n &= \sum y_i \end{aligned} \quad (7)$$

rozwiązany metodą wyznaczników, daje szukane parametry:

$$m = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum y_i & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{vmatrix}} \quad (8)$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i & \sum y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i \\ \sum x_i & n \end{vmatrix}}$$

Wartość liczbowa parametrów m, A łatwiej będzie znaleźć po uproszczeniu wzorów (8). Wykorzystamy pewną własność średniej arytmetycznej

$$x = \frac{\sum x_i}{n} \quad y = \frac{\sum y_i}{n} \quad (9)$$

że algebraiczna suma wszystkich odchyleń od średniej arytmetycznej jest równa zeru, lub, co na jedno wychodzi, że suma odchyleń dodatnich i suma odchyleń ujemnych od średniej arytmetycznej są równe. Jest bowiem

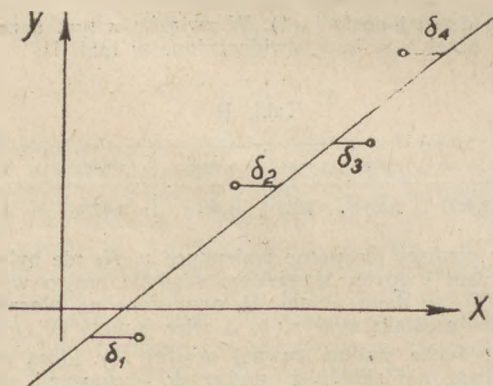
$$\begin{aligned} \sum (x_i - \bar{x}) &= (x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = \\ &= x_1 + x_2 + \dots + x_n - n\bar{x} = \sum x_i - n\bar{x} = 0 \end{aligned}$$

w myśl definicji (9) średniej arytmetycznej $\bar{x}$. Wprowadzając oznaczenia:

$$\xi_i = x_i - \bar{x} \quad \eta_i = y_i - \bar{y} \quad (10)$$

mamy $\sum_{i=1}^n \xi_i = 0$ i $\sum_{i=1}^n \eta_i = 0$

z czego widać bezpośrednio, że wzory (8), napisane w zmiennych ξ_i, η_i otrzymają postać:



Rys. 3

$$m = \frac{\sum \xi_i \eta_i}{\sum \xi_i^2} \quad \text{oraz} \quad A = 0 \quad (11)$$

gdyż licznik wyznacznika A we wzorze (8) posiada w drugim wierszu tylko zera. Wprowadzenie danych ξ_i, η_i w miejsce dawnych często stosowane jest w statystyce, a geometrycznie oznacza przesunięcie układu współrzędnych do punktu $(\bar{x}, \bar{y})$, tak, że prosta (4) przechodzi przez początek układu i wymaga znalezienia parametru m , będącego niezmiennikiem przesunięcia.

Po znalezieniu $x = 1.1643$ $y = 3.5655$ (12) zbudujemy tabl. III:

Tabl. III

$\xi_i = x_i - x$	$\eta_i = y_i - y$	ξ_i^2	η_i^2	$\xi_i \eta_i$
-0,1643	-0,5378	0,026994	0,289229	0,088360
-0,0851	-0,2841	0,007242	0,080713	0,024177
-0,0182	-0,0582	0,000331	0,003387	0,001059
0,0398	0,1292	0,001584	0,016693	0,005142
0,0910	0,3015	0,008281	0,090902	0,027436
0,1367	0,4496	0,018687	0,202140	0,061460
suma		0,063119	0,683064	0,207634

Zsumowane kolumny tej tabeli dają natychmiast parametr

$$m = \frac{207 \ 634}{63 \ 119} = 3,28956 \quad (13)$$

występujący w równaniu prostej:

$$\eta = 3,28956 \xi \quad (14)$$

Powracając do zmiennych x, y poprzez wzory (10) mamy: $y = 3.5655 = 3,28956 (x - 1,1643) = 3,28956 x - 3,830 \ 035$ czyli:

$$y = 3,28956 x - 0,264 \ 535 \quad (15)$$

Jest to prosta o tej własności, że punkty z tabl. II dają w stosunku do niej minimalną sumę kwadratów odchyleń. Nazywamy ją prostą regresji zmiennej y względem zmiennej x , a jej współczynnik kierunkowy (13) współczynnikiem regresji.

Prócz tej prostej istnieje jeszcze prosta regresji zmiennej x względem zmiennej y , na ogół różna od prostej (15), obliczana w sposób zupełnie analogiczny z tą różnicą, że odchylenia od niej liczone są w kierunku poziomym (rys. 3). Wychodząc z warunku analogicznego do warunku (5) łatwo wyprowadza się jej równanie, które po dokonanych już przesunięciach układu do punktu $(\bar{x}, \bar{y})$ ma postać: $\xi = \mu \eta$,

$$\text{gdzie podobnie } \mu = \frac{\sum \xi_i \eta_i}{\sum \eta_i^2} \quad (16)$$

$$\text{Współczynnik } \mu = \frac{207 \ 634}{683 \ 064} = 0,30397 \quad (17)$$

nazywamy współczynnikiem regresji zmiennej x względem zmiennej y . Ze statystyki wiadomo, iż w wypadku, gdy dane x, y pozostają w ścisłej zależności liniowej, to ich tzw. współczynnik korelacji r , będący średnią geometryczną obu współczynników m, μ

$$r = \frac{\sum \xi_i \eta_i}{\sqrt{\sum \xi_i^2 \cdot \sum \eta_i^2}} \quad (18)$$

(wahający się w granicach od -1 do $+1$) ma wartość graniczną $+1$ lub -1 , a obie proste regresji pokrywają się ze sobą. Mając już efektywnie znalezione oba parametry m, μ otrzymamy:

$$r = \sqrt{3,28956 \cdot 0,30397} = \sqrt{0,99992755} \approx 1$$

gdyż znak wielkości r winien być zgodny ze znakiem m (a także ze znakiem μ , która w wypadku ścisłej korelacji jest odwrotnością m). Otrzymana wielkość na r , bardzo bliska 1, dowodzi, że postać funkcji (1) trafnie była przyjęta, a przeliczenie współczynnika korelacji jest sposobem tego stwierdzenia szybciej do celu wiodącym aniżeli badanie, czy różnice pierwszego rzędu mają wartość stałą. Przy pomocy tabel logarytmowych ze związku $A = \log a = i \cdot 735 \ 465$ znajdziemy: $a = 0.5459$, skąd natychmiast:

$$N_0 = 0.5439 \cdot 3,28956$$

Zbadajmy jeszcze odchylenia posiadanych danych (tabl. II) od prostej (15):

Tabl. IV

η_i (tabl. III)	$\eta'_i = 3,28956 \cdot \xi_i$	$ \delta_i $	$10^{-8} \cdot \delta_i^2$
-0,1643	-0,54047	0,0027	729
-0,0851	-0,27994	0,0042	1764
-0,0182	-0,59869	0,0014	196
+0,0398	0,13092	0,0017	289
+0,0910	0,29935	0,0022	484
+0,1367	0,44960	0,0008	2

$$\sum \delta_i^2 = 3464 \cdot 10^{-8}$$

Jak widać z powyższej tabelki, prosta (15) przewija się między wszystkimi punktami dość równomiernie, z wyjątkiem

kciem ostatniego punktu, do którego jest najbardziej zbliżona, żadnego z nich nie dotycząc.

Poszukując linii prostej jakimś innym, krótszym sposobem aniżeli metodą najmniejszych kwadratów, żądając np., by ta prosta miała nachylenie będące średnią arytmetyczną nachyleń w poszczególnych odstępach:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{2537}{792} = 3,20328 \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{2259}{669} = 3,37668 \\ \operatorname{tg} \alpha_3 &= \frac{1874}{580} = 3,23103 \\ \operatorname{tg} \alpha_4 &= \frac{1723}{512} = 3,36523 \\ \operatorname{tg} \alpha_5 &= \frac{1481}{457} = 3,24070 \end{aligned}$$

tj. by miała odchylenie:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{16,41692}{5} = 3,283385$$

otrzymamy równanie prostej:

$$y = 3,2834x - 0,2557 \quad (19)$$

Obliczona dla niej tabela odchyleń:

$ \delta_i $	$10^{-8} \cdot \delta_i^2$
0	0
0,0068	4624
0,0001	1
0,0031	961
0,0011	121
0,0009	81

$$\sum \delta_i^2 = 5788 \cdot 10^{-8}$$

Widać z niej w sposób oczywisty, że prosta (19) przechodzi dokładnie przez punkt 1, który został użyty do znalezienia wyrazu wolnego $-0,2557$ i przechodzi nierównomiernie obok innych punktów, dając sumę kwadratów odchyleń większą niż dawała prosta (15).

Przed zastosowaniem jakiegokolwiek uproszczonego sposobu znajdowania prostej nie spełniającej warunku dotyczącego minimum sumy kwadratów odchyleń należy najpierw wykreślić w układzie prostokątnym posiadane punkty i wykreślić wypośrodkować możliwie najlepszą prostą dla orientacji, czy punkty zbyt nie rozpraszają i który punkt, jako najbliższy, ma posłużyć do ustalenia wyrazu wolnego równania prostej. W wypadku ścisłej korelacji, jak to zachodziło w powyższym przykładzie, prosta (19) w zastosowaniu praktycznym zastępować może prostą (15) w sposób zupełnie zadowalający.

Pozostaje jeszcze do omówienia kwestia samego wyboru funkcji (1) oraz zagadnienie, czy inne funkcje, np. funkcja wykładnicza, nadawałyby się do tego samego celu co prosta (1). Te jednakże zagadnienia, jak również sprawa omówienia innych specjalnych typów funkcji, dających się w łatwy sposób przetransformować do równania liniowego, ze względu na szczerpe ramy jednego artykułu nie mogą tu być poruszone. Będą one tematem rozdziału „Matematyki stosowanej“, jaki się ukaże odrębnie w najbliższym czasie w ramach planowych prac MIT.

Nowa komórka MIT

Na przełomie r. 1951/52 powstała w Instytucie Pracownia Matematyki Stosowanej w ramach Sekcji Ogólnotechnicznej. Zadania jej, w pierwszej chwili z grubsza jedynie naznaczone, należało gruntownie przemyśleć i sprecyzować, by nowa ta komórka służyć mogła skutecznie innym działom.

Początkowa faza rozwojowa jest niezmiernie trudna w Instytucie, nie posiadającym tradycji i wciąż jeszcze szukającym nowych, własnych metod. Ten stan pogarsza jesz-

cze fakt, że matematyka stosowana była nieśmiertelna, dziedziną w Polsce przedwzrętnie niedocenianą, słabo rozpowszechnioną i uprawianą, a w wyższym szkolnictwie technicznym wykładaną w minimalnym zakresie, bezwarunkowo nie wystarczającym. Zupełny brak literatury i w dalszym ciągu dotkliwy brak wykwalifikowanych sił jest wynikiem tego, że matematyka nasza nie powiązała dotychczas swych zainteresowań z problemami, jakie przynosi postęp techniki i przemysłu, że nie zetknęła się bezpośrednio z racjonalizatorami i z szerokim wachlarzem zagadnień życia społecznego.

To wieloletnie zaniedbanie nie da się odrobić jakimś jednym zabiegiem. Pracownia Matematyki Stosowanej, na równi z działami technicznymi MIT, postanowiła nieść pomoc racjonalizatorom w matematycznym ujmowaniu ich pomysłów, a także pomoc majstrom i wykonawcom robót w uprzedniowaniu im wzorów wymagających znajomości analizy, czy innych gałęzi matematyki, przez dostarczanie empirycznych i przybliżonych formuł, nie wykraczających poza funkcje elementarne.

Z wielu wypowiedzi na początkowych naradach roboczych wszystkich działów technicznych przebiegało głębokie zrozumienie tych niedomagań i bezwzględna potrzeba trwałej współpracy z nowozałożoną pracownią oraz stworzenia platformy wzajemnego zrozumienia się fachowców i specjalistów różnych dziedzin. Uznano na tych naradach roboczych, że w wielu działach matematyki należy być wcale dobrze zorientowanym, jeśli ma się je obrać za narzędzie badania naukowego, i to narzędzie najprostsze z wielu możliwych; z drugiej strony rozumiano, że nie wszystko, co jest matematyką, może służyć przemysłowi i technice. Po wnikliwym przeanalizowaniu i przedyskutowaniu trudności uchwalono, dla zdobycia wspólnego języka, wprowadzić zwyczaj konsultacji, których celem ma być wzajemne poznawanie swych potrzeb i zagadnień. Postanowiono zapoczątkować wykład (2 godz. tyg.) matematyki stosowanej na tematy w pierwszym rzędzie aktualne, prowadzony ściśle pod kątem lokalnych, bieżących potrzeb pracowników naukowych, wykład, w którym teoria byłaby poparta dobranymi przykładami z budownictwa okrętowego, portowego, morskiego i z żeglugi.

Mając na względzie zaawansowane badania laboratoryjne nad wodowaniem bocznym statku, przynoszące narastający z dnia na dzień materiał pomiarowy, wysunięto jako początkowy temat wykładu podstawowe wiadomości z rachunku prawdopodobieństwa, statystyki, teorii błędów itp., celem przygotowania się do matematycznego opracowania wyników wielomiesięcznych doświadczeń. Jako drugi temat wysuwający się na czoło wskazano rachunek operatorowy, będący nowoczesną metodą rozwiązywania równań różniczkowych liniowych zwyczajnych i cząstkowych; uczyniono to z uwagi na będącą w toku pracę planową naukowo-badawczą pt. „Drgania kutrów“ w przewidywaniu, że praca ta wyłoni potrzebę rozwiązania wielu równań różniczkowych rządzących zjawiskami drgań.

Włączenie tych spraw do porządku dziennego narad roboczych ma tę dobrą stronę, że wykład jest elastyczny i ściśle dostosowany do bieżących prac wszystkich działów technicznych. Tak np. okazało się w marcu, że trwający od miesiąca cykl wykładów statystyki winien ustąpić miejsca tematowi bardziej w tej chwili pożądanemu z dziedziny do bierania odpowiednich funkcji do tabeli odczytów empirycznych, co też już w następnym wykładzie zostało zapoczątkowane.

Biorąc pod uwagę wspomniany wyżej brak literatury, Pracownia Matematyki Stosowanej przystępuje do opracowania dwóch podręczników:

1. „Rachunek operatorowy w zastosowaniu do zagadnień MIT“ ma składać się z 2 części. Cz. I. będzie zawierała podstawowe własności całki Laplace'a, jej zastosowanie do rozwiązywania równań różniczkowych nie wymagających znajomości funkcji specjalnych (f. Bessela, f. Gaussa, f. analitycznych), które znajdują się w cz. II w zakresie wymagającym dla poznania dalszych, trudniejszych działów rachunku operatorowego.

Przypuszczalny termin wydania podręcznika — 1 września dla części I i 1. 6. 1953 dla cz. II.

2. „Wybrane działy matematyki stosowanej“, zakreślony na okres co najmniej 2-letni, będzie się ukazywał w 30 — 50-stronicowych zeszytach, zawierających poszczególne rozdziały, przy czym rozdziały te chronologicznie związane będą z pracami naukowo-badawczymi MIT.