

PEDAGOGICZNA
BIBLIOTEKA
WOJEWÓDZKA

Gdańsk-Wrzeszcz
Al. Gen. J. Hallera 14

37776
T.3

J. T. HUBER

PISMA

TOM III

P I S M A

Tom III

PISMA
MAKSYMILIANA TYTUSA HUBERA

wydane staraniem

POLSKIEJ AKADEMII NAUK

przygotowane do druku
przez Komisję dla opracowania monografii i wydania dzieł M. T. Hubera
w składzie:

Przewodniczący: *Witold Nowacki*

Zastępca przewodniczącego: *Wacław Olszak*

Członkowie: *Zbigniew Brzoska, Włodzimierz Burzyński, Janina
Huberowa, Marian Janusz, Zenobiusz Kłębowski, † Wacław
Moszyński, Jarosław Naleszkiewicz, Jerzy Nechay, Jerzy
Nowiński, Robert Szewalski, Adam Tadeusz Trokoleński,
Zbigniew Wasiutyński, Witold Wierzbicki, Stefan Ziemia
i Stefan Żukowski*

Sekretarz: *Jerzy Pietrzykowski*

Redaktor naczelny: *Adam Tadeusz Trokoleński*

Asystent redakcji i redaktor techniczny: *Irena Stabrowska*

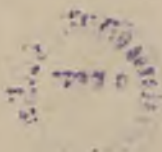
P O L S K A A K A D E M I A N A U K

M. T. HUBER

PISMA

TOM III

ZAGADNIENIA: MECHANIKI OGÓLNEJ, KONSTRUKCYJ
INŻYNIERSKICH, KONSTRUKCYJ ŻELBETOWYCH, KO-
LEJOWE, KONSTRUKCYJ MASZYNOWYCH, KONSTRUK-
CYJ LOTNICZYCH, UZBROJENIOWE I SŁOWNICTWA
TECHNICZNEGO



PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

WARSZAWA 1957

PISMA M. T. HUBERA

Tom III

DZIAŁ V. ZAGADNIENIA MECHANIKI OGÓLNEJ
DZIAŁ VI. KONSTRUKCJE INŻYNIERSKIE
DZIAŁ VII. KONSTRUKCJE ŻELBETOWE
DZIAŁ VIII. ZAGADNIENIA KOLEJOWE
DZIAŁ IX. KONSTRUKCJE MASZYNOWE
DZIAŁ X. KONSTRUKCJE LOTNICZE
DZIAŁ XI. ZAGADNIENIA UZBROJENIOWE
DZIAŁ XII. SŁOWNICTWO TECHNICZNE

WSZELKIE PRAWA ZASTRZEŻONE



37776

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — WARSZAWA 1957

Wyd. drugie. Nakł. 5000 + 145. Ark. wyd. 36,0, ark. druk. 32 1/2 + 1 wklejka. Pap. ilustrac. kl. V 70g 70 × 100
Oddano do składania 30. I. 1956. Podpisano do druku 6. II. 1957. Druk ukończono w marcu 1957
Krakowska Drukarnia Naukowa — Kraków, Czapskich 4 Zamówienie nr 75/56 M-7-16253

Cena zł 82.—

SPIS RZECZY

DZIAŁ V. ZAGADNIENIA MECHANIKI OGÓLNEJ

W sprawie prędkości krytycznej giętkich wałów	3
O drganiach wymuszonych uderzeniami rytmicznymi	9
Zagadnienia drgań w budowie maszyn	
§ 1. Rozważania ogólne	17
§ 2. Obliczenie głównych drgań własnych w kilku prostych przypadkach	21
§ 3. Podstawy teorii drgań prętów	24
§ 4. Najważniejsze rozwiązania równań drgających prętów	26
§ 5. Drgania giętne wałów z ciężkimi masami skupionymi	31
§ 6. Drgania skrętne wałów z ciężkimi masami skupionymi	33
§ 7. Techniczne sposoby wyznaczania częstotliwości drgań skrętnych wałów z licznymi masami skupionymi	37
§ 8. Sposoby zmniejszenia drgań niebezpiecznych	40
§ 9. Drganie fundamentów maszyn	42
§ 10. Pomiaru odnoszące się do drgań	46
§ 11. Techniczne wyzyskanie zjawiska współbrzmienia	50
Kilka słów o istocie i tzw. „prawach” tarcia	53
Opory tarcia i ich rola w niektórych zagadnieniach kolejnictwa	
§ 1. Rozważania wstępne	56
§ 2. Źródła tarcia	57
§ 3. Tarcie szepne (statyczne) a tarcie suwne (czyli kinetyczne)	60
§ 4. Tarcie szepne w przypadku ogólniejszym	63
§ 5. Kierunek tarcia ślizgowego. Kąt i stożek tarcia	64
§ 6. Próba teorii zależności tarcia od prędkości ślizgania	66
§ 7. Klasyfikacja ogólna oporów tarcia	67
§ 8. Ważny przypadek złożony tarcia suwnego	70
§ 9. Inny ważny przypadek tarcia w ruchu złożonym ze ślizgania po płaszczynie i toczenia się po niej	71
§ 10. Badania holenderskie	74
§ 11. Teoria tarcia ortotropowego	76
§ 12. Złożone przypadki tarcia w mechanice ruchu kolejowego	78
§ 13. Stopień stateczności ustalonego ruchu zestawu kołowego o obręczach stożkowych po torze prostym	79
§ 14. Dowód stateczności zestawu kołowego o obręczach stożkowatych	82
§ 15. Zakończenie	84

VI

DZIAŁ VI. KONSTRUKCJE INŻYNIERSKIE

Z teorii belki ciągłej	89
Równanie pięciu momentów	94
Wytrzymałość na czyste zginanie prętów z materiału elastoplastycznego	109
Niebezpieczeństwo uszkodzeń długich kształtowników i szyn kolejowych	113
Sztwywność skręcania ramy prostokątnej	118
O naprężeniach dopuszczalnych wałków łożyskowych dźwigarów mostowych	124
O naprężeniach w zaporach ciężkich	130
O wzorach ogólnych dotyczących zgięcia belek prostych	138

DZIAŁ VII. KONSTRUKCJE ŻELBETOWE

Działanie zbrojenia w betonie	149
Projekt przepisów żelbetowych	
§ 1. Określenie żelbetu	161
§ 2. Zawartość projektu	161
§ 3. Podstawy obliczenia	161
§ 4. Wyznaczenie sił zewnętrznych	163
§ 5. Wyznaczenie sił wewnętrznych	166
§ 6. Naprężenia dopuszczalne	169
§ 7. Próby obciążenia	170
Nowsze badania własności wytrzymałościowych żelbetu	
§ 1. Beton	172
§ 2. Stal zbrojenia	176
§ 3. Beton zbrojony w zwykły sposób	177
§ 4. Słupy owijane	180
§ 5. Belki zginane	182

DZIAŁ VIII. ZAGADNIENIA KOLEJOWE

Zagadnienie stateczności prostego toru o szynach spawanych pod wpływem naprężeń cieplnych	
§ 1. Wstęp	187
§ 2. Ujemne wyniki prac dotychczasowych	189
§ 3. Ulepszone założenia teorii	192
§ 4. Zachowanie się odcinka toru prostego przy równomiernym wzroście temperatury	197
§ 5. Doświadczalne sprawdzenie teorii wybożenia prostego toru	201
Z rozważań nad niebezpieczeństwem zniekształcenia toru kolejowego o szynach spawanych wskutek napięć cieplnych	209
W sprawie niestateczności długiego prostego toru kolejowego o szynach spawanych pod wpływem ogrzania	
§ 1. Wstęp	214
§ 2. Warunki konieczne do istnienia wygiętej w górę postaci równowagi	216
§ 3. Obliczenie u_1	218
§ 4. Obliczenie u_2	221
§ 5. Równanie przedstawiające warunek konieczny wybożenia w płaszczyźnie pionowej	222

§ 6. Bilans energetyczny wygiętej postaci równowagi	224
§ 7. Rachunek liczbowy w założeniu nawierzchni PKP	226
O teorii wyboczenia termicznego spawanych torów kolejowych i badaniach doświadczalnych dla jej sprawdzenia	228
Właściwe przyczyny niebezpieczeństwa wyboczenia termicznego nawierzchni ciągłej prostego toru kolejowego	234
Podstawy teoretyczne badań doświadczalnych nad zniekształceniem torów kolejowych	
§ 1. Wstęp	247
§ 2. Teoria zniekształcenia toru wskutek wygięć pionowych	249
O sile pociągowej parowozu przy rozpędzie pociągu	258
W sprawie działania poruszającego się pociągu na tor i budowie podtorowe	262
Drgania nawierzchni kolejowej	266
O prędkościach krytycznych obciążenia poruszającego się po belce mostowej i po nawierzchni kolejowej na podłożu ziemnym	275

DZIAŁ IX. KONSTRUKCJE MASZYNOWE

Wzór wytrzymałościowy dla rur stalowych narażonych na ciśnienie zewnątrzne	295
Osobliwe zgięcie pierścienia	309
Obliczenie odkształceń ramy walcarki (streszczenie)	319

DZIAŁ X. KONSTRUKCJE LOTNICZE

Zginanie belek prostych o przekrojach wiotkich	
§ 1. Wstęp	325
§ 2. Teoria zgięcia poprzecznego	327
§ 3. Przekrój skrzynkowy i dwuteowy	329
§ 4. Przekrój rurowy okrągły	333
W sprawie tzw. współdziałania podłużnic w skrzydłach jednopłatów	336
O wytrzymałości podłużnic w skrzydłach wspornikowych jednopłatów	
§ 1. Wstęp	344
§ 2. Rozwiązanie z pominięciem sztywności skręcania żeber	345
§ 3. Uproszczenie równania przy stałym stosunku sztywności zginania podłużnic	352
§ 4. Uwzględnienie sztywności skręcania żeber	353
Wymiarowanie prętów osiowo ściskanych o stałym przekroju w konstrukcjach lekkich (streszczenie)	356

DZIAŁ XI. ZAGADNIENIA UZBROJENIOWE

Z teorii samowzmacniania luf działowych	
§ 1. Wstęp	363
§ 2. Odkształcenia i naprężenia sprężyste	369
§ 3. Odkształcenia plastyczne i odpowiadające im naprężenia	374
§ 4. Przypadek a. Rura zamknięta pod ciśnieniem wewnętrznym w stanie częściowo plastycznym, a częściowo sprężystym	378
§ 5. Drugie ciśnienie krytyczne w przypadku (a) i stan napięcia po operacji samowzmocnienia	381

VIII

§ 6. Wyteżenie materiału w rurze samowzmocnionej sposobem powyższym przy nowym obciążeniu ciśnieniem wewnętrznym $p < p_{kr}^e$	383
§ 7. Porównanie wzorów teorii samowzmocnienia z wynikami badań doświadczalnych	385

Teoria kołowo-symetrycznych odkształceń sprężystych rur grubościennych w zastosowaniu do zagadnień wytrzymałościowych luf działowych	390
§ 1. Wstęp	393
§ 2. Równanie różniczkowe odkształcenia rury i wzory dla naprężeń	395
§ 3. Dopuszczalne uproszczenie podstawowego równania różniczkowego	401
§ 4. Działanie nacisku obrączkowego w środkowych częściach długiej rury.	402
§ 5. Zakres stosowności i rozwiązań przy upraszczającym założeniu bardzo długiej rury	406
§ 6. Odkształcenia lufy wywołane tarciem pierścienia wiodącego pocisku	406
§ 7. Wpływ ciśnienia gazów prochowych na części lufy za pociskiem przy założeniu wielkiej długości obu części lufy	408
§ 8. Odkształcenie lufy wywołane naciskiem pierścienia i ciśnieniem gazów, gdy pocisk znajduje się w bliskości wylotu.	410
§ 9. Odkształcenia lufy przy położeniach początkowych pocisku	413
§ 10. Odkształcenie tylnej zamkniętej części lufy, gdy pocisk znajduje się dość daleko od zamka i od wylotu.	417
§ 11. Odkształcenie lufy w pobliżu zamka z dokładniejszym uwzględnieniem sztywności grubej płyty zamykającej	419
§ 12. Odkształcenie walcowej skorupy pocisku z uwzględnieniem sztywności den	421
§ 13. Zależność nacisku pierścienia od jego grubości oraz odkształcalności lufy i pocisku	425
§ 14. Kołowo symetryczne drgania rury.	429
§ 15. Czyste drgania promieniowe rury według teorii ścisłej.	433
§ 16. Wyniki rozwiązań przybliżonych. Wnioski ogólne	436

DZIAŁ XII. SŁOWNICTWO TECHNICZNE

A. Podstawowe pojęcia naukowe	
Nauka, wiedza i umiejętność	439
O kilku wyrazach oznaczających pojęcia matematyczne stosowane często przez techników	440
Prawo, twierdzenie, zasada	441
Materiał czy tworzywo	443
Określanie, wyznaczanie, ustalanie	445
Własność, właściwość	446
Fizyczny, fizyczny	446
B. W sprawie polskiego słownictwa technicznego	447
C. Mechanika ogólna	
Mechanika	451
Stołość, stateczność, sztywność i trwałość	455
Pond i kilopond	456
Skalarowy czy skalarny	458
D. Stereomechanika	460
W sprawie ustalenia nazw dla własności wytrzymałościowych	461
Natężenie, naprężenie i napięcie	471

Wytrzymałość i wyężenie	472
Granica płynności czy granica plastyczności	476
Równokierunkowość, równozwrotność, bezkierunkowość czy izotropia	478
Smukłość, wiotkość	479
E. Hydromechanika	
Refleksje na temat hydrauliki	480
SKOROWIDZ NAZWISK	487
SKOROWIDZ RZECZOWY	491

DZIAŁ V

ZAGADNIENIA MECHANIKI OGÓLNEJ

Redaktor naukowy: STEFAN ZIEMBA

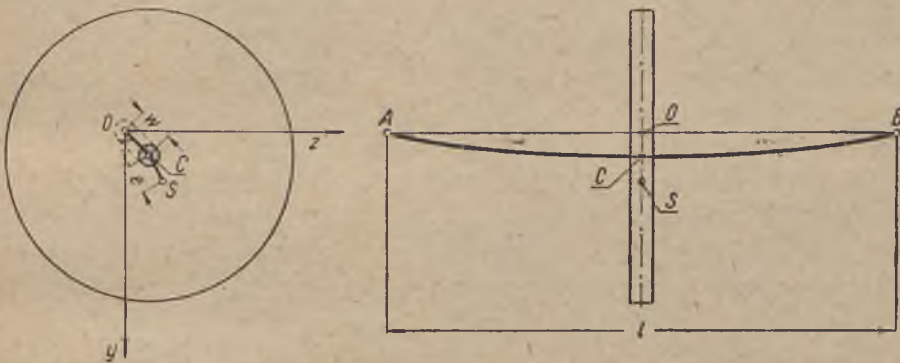
Asystent naukowy: ZBIGNIEW ORŁÓŚ

W SPRAWIE PRĘDKOŚCI KRYTYCZNEJ GIĘTKICH WAŁÓW

(Przegląd Techniczny, tom LXIII, 1925 r.)

Niniejszą notatkę naukową wywołało dostrzeżenie przez autora błędu, jaki ze źródeł angielskich wśliznął się do przyswojonego naszej literaturze „Kursu wytrzymałości materiałów“ prof. S. P. TIMOSZENKI. Na str. 320 tego dzieła czytamy, „że przy poziomym położeniu osi wału zmniejsza się wartość ω_{kr} (wartość krytyczna prędkości kątowej) w stosunku $1:\sqrt{2}$ w porównaniu z wartością dla położenia pionowego“. Atoli nie trudno dowieść, że położenie osi wału nie ma w ogóle wpływu godnego uwagi na wartość ω_{kr} (pierwszego rzędu), co stwierdza również A. STODOLA w VI wydaniu swego klasycznego dzieła o turbinach parowych (str. 927).

1. Wskutek ciężaru i sił bezwładności krążka, wał AB pierwotnie prosty, wygnie się nieco tak, że środek C przekroju środkowego, na któ-



Rys. 1

rym osadzono krążek odchyli się od osi AB o strzałkę $w = \overline{OC}$ (rys. 1). Punkt O obrany za początek nieruchomego układu współrzędnych (y, z) jest śladem prostej AB na płaszczyźnie obrotu krążka. Dla uproszczenia przyjmiemy, że to jest zarazem główna płaszczyzna bezwładności krążka, (w przeciwnym razie musielibyśmy uwzględnić zgięcie wału pod wpływem momentu girostatycznego). Natomiast założymy, że środek masy krążka S nie pokrywa się ze środkiem przekroju wału C , lecz zbacza od niego o (bardzo mały) mimośród e . Przyjmujemy nadto, że masa wału gra tak małą rolę

wobec masy krążka M , że można pierwszą przyjąć równą zeru. Na koniec co do innych sił zewnętrznych, podtrzymujących prędkość kątową obrotu ω , która by inaczej wskutek oporów stale malała — uczynimy założenie, że ich moment względem osi obrotu jest stale równy momentowi oporów.

W dowolnej chwili wystarczy tedy rozważać działanie następujących sił zewnętrznych na wirujący krążek:

1) *Siła sprężystości* zgiętego wału, działająca na punkt C i skierowana ku O . Jej wielkość P jest w granicach ważności prawa HOOKE'A i przy dość małych wygięciach proporcjonalna względem wartości tychże ugięć w , czyli

$$(1) \quad P = aw.$$

Wartość współczynnika a zależy od sztywności zginania EJ wału, jego rozpiętości l i warunków podporowych. Gdyby np. łożyska działały jako przeguby kuliste, to

$$(2) \quad a = 48 \frac{EJ}{l^3},$$

w drugim zaś skrajnym przypadku — panewek osadzonych nieruchomo i szczelnie obejmujących czopy — byłoby

$$(3) \quad a = 192 \frac{EJ}{l^3} \text{ itd.}$$

W każdym razie teoria zgięcia prętów umożliwia wyznaczenie wartości a z wielką dokładnością.

Zakładamy w dalszym ciągu, że elipsa bezwładności przekroju wału jest wszędzie kołem, że zatem sztywność zginania jest we wszystkich kierunkach jednakowa.

2) *Cieężar własny* Mg działający na punkt S w kierunku dodatniej osi y (przy poziomym położeniu osi).

3) *Wypadkowa oporów tłumiących drgania* (opór powietrza, tarcie wewnętrzne materiału przy szybkich odkształceniach itd.), którą możemy ocenić sumarycznie jako siłę R działającą na środek masy krążka S w kierunku przeciwnym prędkości tego środka v . Przy tym dla uproszczenia rachunku przyjmiemy (jak się to czyni w teorii drgań)

$$(4) \quad R = -\beta v,$$

czyli składowe

$$(5) \quad R_y = -\beta \frac{dy}{dt}, \quad R_z = -\beta \frac{dz}{dt},$$

jeżeli y, z są współrzędnymi środka masy krążka, a β stałym współczynnikiem oporu całkowitego.

Siła sprężystości ma składowe

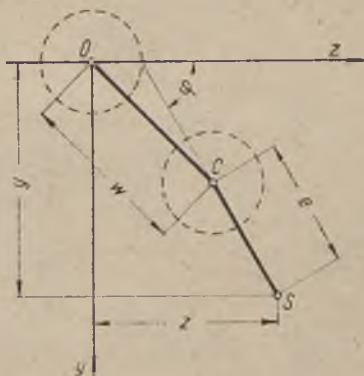
$$(6) \quad \begin{aligned} Y &= -aw \sin(w, z) = -\alpha(y - e \sin \varphi), \\ Z &= -aw \cos(w, y) = -\alpha(z - e \cos \varphi), \end{aligned}$$

przy czym φ jest kątem obrotu prostej CS , mierzonym od osi z (rys. 2). Dołączamy do tego składowe ciężaru i oporu R , napiszemy dynamiczne równania ruchu środka masy krążka w postaci

$$(7) \quad \begin{aligned} M \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\alpha(y - e \sin \varphi) + Mg - \beta \frac{dy}{dt}, \\ M \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\alpha(z - e \cos \varphi) - \beta \frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Atoli te równania zawierają kąt obrotu φ , którego zależność od czasu określa dynamiczne równanie ruchu obrotowego

$$(8) \quad \Theta \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_0,$$



Rys. 2

jeżeli Θ oznacza moment bezwładności krążka względem osi S , a M_0 moment sił zewnętrznych względem tejże osi. Ten moment zmienia znak przy każdym obrocie i wywołuje drobne okresowe zmiany prędkości kątowej $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, które można pominąć w pierwszym przybliżeniu, jeżeli mimośród e jest bardzo mały wobec ramienia bezwładności krążka. To odpowiada przyjęciu $M_0 = 0$, czyli $\omega = \text{Const}$ i $\varphi = \omega t$.

A zatem równania ruchu środka masy krążka będą:

$$(9) \quad M \frac{d^2 y}{dt^2} + \beta \frac{dy}{dt} + \alpha(y - e \sin \omega t) - Mg = 0,$$

$$(9a) \quad M \frac{d^2 z}{dt^2} + \beta \frac{dz}{dt} + \alpha(z - e \cos \omega t) = 0.$$

Podstawmy w równaniu (9a)

$$(10) \quad \alpha y - Mg = \alpha y_1,$$

to przybierze ono postać:

$$(11) \quad M \frac{d^2 y_1}{dt^2} + \beta \frac{dy_1}{dt} + \alpha(y_1 - e \sin \omega t) = 0.$$

Tak zaś wyglądałoby równanie (9), gdyby nie było siły ciężkości. Obydwa równania różniczkowe mają tę samą postać, co równanie drgań wymuszonych układu o jednym stopniu swobody. Z pominięciem

oporów byłyby to proste drgania harmoniczne około pewnego środka drgań. Wpływ siły ciężkości objawia się tylko tym, że środek drgań obniżył się według równania

$$y - \frac{Mg}{a} = y_1$$

o wielkość $f = \frac{Mg}{a}$, która jest niczym innym jak statyczną strzałką ugięcia pod wpływem ciężaru Mg krążka. Charakter ruchu nie doznał zresztą żadnej zmiany.

Po podzieleniu obu równań ruchu przez M i oznaczeniu

$$\frac{\beta}{M} = 2n, \quad \frac{a}{M} = k^2, \quad \frac{ae}{M} = q$$

otrzymamy

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 y_1}{dt^2} + 2n \frac{dy_1}{dt} + k^2 y_1 &= q \sin \omega t, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + 2n \frac{dz}{dt} + k^2 z &= q \cos \omega t. \end{aligned}$$

2. Całki ogólne powyższych równań są znane. Każdą z nich można rozłożyć na dwie części według schematu

$$\begin{aligned} y_1 &= \eta_1 + \eta_2, \\ z &= \zeta_1 + \zeta_2. \end{aligned}$$

Dla pierwszych części mamy:

$$(13) \quad \begin{aligned} \eta_1 &= e^{-nt} [A \sin(t \sqrt{k^2 - n^2}) + B \cos(t \sqrt{k^2 - n^2})], \\ \zeta_1 &= e^{-nt} [C \sin(t \sqrt{k^2 - n^2}) + D \cos(t \sqrt{k^2 - n^2})], \end{aligned}$$

przy czym A, B, C, D są stałymi całkowania. Ich wartości są określone położeniem i prędkością poruszającego się środka S w chwili $t=0$. Ruch przedstawiony powyższymi równaniami odbywa się po elipsie, której rozmiary maleją szybko z czasem dzięki czynnikowi e^{-nt} . Okres tego ruchu T znajdziemy z równania

$$\frac{2\pi}{T} t = t \sqrt{k^2 - n^2},$$

a zatem

$$(14) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k^2 - n^2}}$$

albo po wstawieniu $\frac{1}{k^2} = \frac{M}{\alpha} = \frac{1}{g} \frac{Mg}{\alpha}$, zważywszy, że $\frac{Mg}{\alpha} = f$ jest statyczną strzałką ugięcia wału w położeniu poziomym:

$$(15) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{f} \frac{1}{1 - \frac{n^2}{k^2}}}$$

Opory ruchu są w naszym przypadku zwykle bardzo małe, a więc $\frac{n^2}{k^2}$ zanika wobec 1 i z dostatecznym przybliżeniem okresem rozpatrywanego ruchu jest

$$(16) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

a jego częstotliwość

$$(17) \quad \frac{2\pi}{T} = k.$$

Jest to zarazem, jak wiadomo z teorii drgań, *okres własnych drgań giętkich* naszego układu, równy okresowi wahadła matematycznego, którego długością jest strzałka statyczna wału, wywołana ciężarem krążka w położeniu poziomym.

3. Dla drugiej części rozwiązania znajdujemy:

$$(18) \quad \begin{aligned} \eta_2 &= H \sin \omega t + L \cos \omega t, \\ \zeta_2 &= H \cos \omega t - L \sin \omega t, \end{aligned}$$

gdzie

$$H = \frac{q(k^2 - \omega^2)}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}, \quad L = \frac{2nq\omega}{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}.$$

Te równania określają ruch po okręgu koła o środku w początku układu (tj. w punkcie, $y=f$, $z=0$). Promieniem tego koła jest

$$(19) \quad \rho = \sqrt{H^2 + L^2} = \frac{q}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}} = \frac{k^2 e}{\sqrt{(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2}}.$$

Ruch przedstawiony poprzednio pierwszą częścią rozwiązań zanika szybko dzięki oporom, a pozostaje trwale tylko ten drugi. Środek masy krążka porusza się teraz po okręgu dookoła stałego punktu wyznaczonego strzałką statyczną. Promień tego okręgu zależy, jak widać z powyższego wyrażenia, od mimośrodu e , rosnąc i malejąc z nim proporcjonalnie; nadto od częstotliwości własnych drgań giętkich układu i od prędkości kątowej ω (czyli częstotliwości) obrotu głównego, a wreszcie od współczynnika oporu n .

Szukając maximum promienia ϱ znajdujemy je dla $\omega = \sqrt{k^2 - 2n^2}$, a mianowicie

$$(20) \quad \varrho_{max} = \frac{k^2 e}{2n \sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{(\omega^2 + 2n^2) e}{2n \sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Przy dostatecznie małym współczynniku oporu n może przeto ϱ osiągnąć wartości bardzo wielkie w porównaniu do e , skoro prędkość kątowna ω zbliża się do częstotliwości k własnych drgań giętnych układu. Przy tej prędkości kątowej, zwanej *krytyczną* ($\omega_{kr} = k$), pojawiają się bardzo wielkie siły odśrodkowe niebezpieczne dla maszyny. Gdy ω jest znacznie mniejsze od $\omega_{kr} = k$, to ϱ jest małe i przy $n = 0$ tylko nieznacznie przekracza e . Wtedy punkty C i S są po tej samej stronie O , tj. środka przekroju środkowego wału w stanie spoczynku. Skoro zaś ω jest znacznie większe od ω_{kr} , to ϱ maleje nawet tak, że staje się mniejszym od e . Wówczas C i S leżą po przeciwnych stronach O , a przy wzrastającej prędkości kątowej lub giętkości wału (czyli malejącej sztywności wału) środek masy krążka zdąża do zajęcia miejsca w O . To zjawisko zaobserwował DE LAVAL zanim je objaśniono ilościowo na drodze teoretycznej.

W swoich znanych „Vorlesungen über technische Mechanik“ (tom IV, Dynamik § 43) przedstawia A. FÖPPL teorię giętkich wałów z pomięciem ciężaru własnego krążka i oporów tłumiących drgania. Uwzględnienie tych wpływów nie wywołuje, jak widać z powyższego, uciążliwych komplikacji, zapewniając jasną interpretację w przypadku ogólnym. Jak wykazały nowsze badania, położenie wału ma tylko pewien wpływ na prędkości krytyczne wyższego rzędu, mniej niebezpieczne, których rozpatrywanie przekracza ramy niniejszego artykułu.

O DRGANIACH WYMUSZONYCH UDERZENIAMI RYTMICZNYMI

(Hutnik Nr 4, 1945 r.)

Niechaj układ sprężysty o jednym stopniu swobody symbolizuje ciężar Q zawieszony na sprężynie śrubowej, której wychylenie z położenia równowagi oznacza x , przy czym napięcie odpowiednie $S=kx$, gdzie k jest współczynnikiem siły, dającym się wyznaczyć doświadczalnie lub teoretycznie z wymiarów sprężyny i stałych jej materiału. Przyjawszy, że masa sprężyny jest tak mała w porównaniu do masy ciężaru Q , że jej bezwładność można pominąć i że ten ciężar może wykonywać tylko pionowe ruchy postępowe, założymy, że układ nasz jest pobudzony do drgań siłą P , która jest okresową funkcją czasu $P(t)$. Jeżeli $2T_0$ oznacza okres działania siły, to $P(t)=P(t+2nT_0)$, a równaniem różniczkowym drgań wymuszonych jest w przypadku gdy opór ruchu można uważać za proporcjonalny względem prędkości dx/dt :

$$(1) \quad \frac{Q}{g} \frac{d^2x}{dt^2} + r \frac{dx}{dt} + kx = P(t),$$

gdzie r jest doświadczalnym współczynnikiem oporu. Po podzieleniu przez masę Q/g napiszemy to równanie w postaci

$$(2) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\varrho \frac{dx}{dt} + c^2x = \frac{g}{Q}P(t),$$

gdzie $2\varrho = \frac{r}{Q}g$, $c^2 = \frac{k}{Q}g$.

Przyrównując lewą stronę tego równania do zera mamy jak wiadomo równanie drgań swobodnych układu, którego całką ogólną jest

$$(3) \quad x = e^{-\varrho t} [A \sin(t\sqrt{c^2 - \varrho^2}) + B \cos(t\sqrt{c^2 - \varrho^2})]$$

pod warunkiem, że $c > \varrho$. Stała c określa bez oporów (tj. gdy $\varrho = 0$) częstotliwość kątową drgań własnych. Ta częstotliwość z uwzględnieniem oporu staje się równa

$$(4) \quad \omega = c \sqrt{1 - \left(\frac{\varrho}{c}\right)^2},$$

jest więc nieco mniejsza od częstotliwości bez oporu.

Założmy teraz, że zależność siły okresowej P od czasu t przedstawia na osi t wykres złożony z prostokątów o odległości wzajemnej $2T_0$, długości 2τ i wysokości P_0 i rozwińmy funkcję $P(t)$ w przedziale $0 < t < 2T_0$ na szereg trygonometryczny

$$(5) \quad P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi t}{T_0} + a_2 \cos \frac{2\pi t}{T_0} + a_3 \cos \frac{3\pi t}{T_0} + \\ + \dots + b_1 \sin \frac{\pi t}{T_0} + b_2 \sin \frac{2\pi t}{T_0} + b_3 \sin \frac{3\pi t}{T_0} + \dots$$

Wprowadziwszy dla wygody zmienną bezwymiarową $z = \frac{\pi}{T_0} t$ napiszemy rozwinięcie powyższe w postaci:

$$(5a) \quad f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nz + b_n \sin nz).$$

Wtedy przedziałem odpowiednim jest $0 < z < 2\pi$, a współczynniki a_n i b_n są dla $n = 0, 1, 2, \dots$ określone wzorami znanymi z teorii szeregów FOURIERA:

$$(6) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \cos nz dz, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z) \sin nz dz$$

przy założeniu, że szereg po stronie prawej jest równomiernie zbieżny, a $f(z)$ jest wartością jego sumy. Ponieważ $f(z)$ jest różne od zera tylko w przedziale środkowym między

$$z = \pi - \frac{\pi\tau}{T_0}, \quad \text{a} \quad z = \pi + \frac{\pi\tau}{T_0}, \quad \text{przeto}$$

$$(6a) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi - \frac{\pi\tau}{T_0}}^{\pi + \frac{\pi\tau}{T_0}} P_0 \cos nz dz, \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi - \frac{\pi\tau}{T_0}}^{\pi + \frac{\pi\tau}{T_0}} P_0 \sin nz dz.$$

A zatem

$$(7) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{2P_0\tau}{T_0}, & a_n = \frac{P_0}{\pi} \frac{2}{n} (-1)^n \sin \frac{n\pi\tau}{T_0}, & b_n = 0, \\ P(t) = \frac{P_0\tau}{T_0} + \frac{2P_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi\tau}{T_0} \cos \frac{n\pi t}{T_0} \end{cases}$$

albo przy oznaczeniu $\frac{\pi}{T_0} = \omega_0$ jako częstotliwości kątowej (pulsacji) pierwszej składowej harmoniczej siły wymuszającej drganie

$$(7a) \quad P(t) = \frac{P_0 \tau \omega_0}{\pi} + \frac{2P_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin n \omega_0 \tau \cos n \omega_0 t.$$

Nie trudno dowieść, że to rozwinięcie czyni zadość założeniom wymienionym powyżej; jest więc wyrażeniem analitycznym ścisłym dla określonej poprzednio siły okresowej.

Przejdźmy teraz do granicy, w której ta siła staje się siłą chwilową uderzenia o impulsie Π . Wtedy

$$(8) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} 2P_0 \tau = \Pi, \quad \text{a więc} \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} P_0 \tau = \frac{1}{2} \Pi$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \sin \frac{n\pi\tau}{T_0} = \frac{n\pi\tau}{T_0},$$

a zatem

$$(9) \quad P(t) = \frac{1}{2} \frac{\Pi}{T_0} + \frac{\Pi}{T_0} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi t}{T_0} =$$

$$= \frac{\Pi}{T_0} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi t}{T_0} \right] =$$

$$= P_{sr} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi t}{T_0} \right],$$

gdzie $P_{sr} = \frac{\Pi}{T_0}$.

Otrzymany szereg jest wprawdzie rozbieżny, ale należy do kategorii szeregów sumowalnych przez średnią arytmetyczną sum częściowych i według twierdzenia matematyka węgierskiego L. FEJÉRA może być uważany za wyrażenie analityczne ścisłe dla $P(t)$ także i w tym przypadku granicznym. Nie wchodząc tutaj w dowody ogólne, jakie np. znaleźć można w cennej książce K. KNOPPA „Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen“, wyd. III, Berlin 1931, poprzestaniemy na sprawdzeniu w paru punktach. Np. dla $t=0$ i $t=2T_0$ otrzymujemy jako wyrażenie dla $P(t)$

$$(10) \quad P(t) = P_{sr} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \right],$$

a ponieważ sumowalność przez średnią arytmetyczną sum częściowych daje

$$(10a) \quad \sum (-1)^n = \frac{1}{n} [-1 + (-1+1) + (-1+1-1) + (-1+1-1+1) + \dots] = \\ = \frac{1}{n} [-1 + 0 - 1 + 0 - 1 + 0 - \dots] = \frac{1}{n} \left(-\frac{n}{2} \right) = -\frac{1}{2};$$

więc jest istotnie w tych punktach $P(t) = 0$. Natomiast dla $t = T_0$ otrzymujemy

$$(11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos n\pi = \frac{1}{n} [1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + \dots] = \frac{1}{2},$$

czyli dla $P(t)$ znajdujemy wartość P_{sr} , jak być powinno.

Równanie różniczkowe drgań wymuszonych (2) przyjmie zatem w przypadku rozpatrywanym uderzeń o impulsach równych $\Pi = P_{sr} T_0$ w odstępach czasu $2T_0$ postać:

$$(12) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\varrho \frac{dx}{dt} + c^2x = \frac{P_{sr}}{M} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{n\pi t}{T_0} \right],$$

gdzie $M = Q/g$ oznacza masę ciężaru drgającego.

Rozwiązanie ogólne tego równania liniowego o współczynnikach stałych jest jak wiadomo złożone z rozwiązania ogólnego równania otrzymanego przez zastąpienie prawej strony zerem, czyli równania drgań własnych układu i z rozwiązań szczególnych odpowiadających równaniom, które po stronie prawej mają jeden z wyrazów szeregu przedstawiającego siłę okresową. Wyrazowi $\frac{1}{2} \frac{P_{sr}}{M}$ odpowiada jak łatwo zauważyć $\frac{1}{2} \frac{P_{sr}}{Mc^2}$, a wyrazom $(-1)^n \cos \frac{n\pi t}{T_0}$ odpowiadają stosownie do teorii drgania wymuszonego siłą harmoniczną wyrazy

$$(13) \quad (-1)^n \frac{P_{sr}}{M} \frac{c^2 - n^2 \omega_0^2}{(c^2 - n^2 \omega_0^2)^2 + 4\varrho^2 n^2 \omega_0^2} \cos (n\omega_0 t + \vartheta_n).$$

A zatem rozwiązaniem ogólnym równania powyższego jest

$$(I) \quad x = e^{-\varrho t} \left[A \sin (t \sqrt{c^2 - \varrho^2}) + B \cos (t \sqrt{c^2 - \varrho^2}) \right] + \\ + \frac{P_{sr}}{Mc^2} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{c^2 (c^2 - n^2 \omega_0^2)}{(c^2 - n^2 \omega_0^2)^2 + (2\varrho n \omega_0)^2} \cos (n\omega_0 t + \vartheta_n) \right].$$

Tutaj oznaczają A i B stałe całkowania wyznaczone warunkami początkowymi, P_{sr} siłę zastępczą określoną ilorazem danego impulsu uderze-

nia Π przez również dany półokres uderzeń T_0 ; M masę układu drgającego, $c = \sqrt{\frac{k}{M}}$ częstotliwość kątową drgań własnych bez oporu, k współczynnik siły sprężystości; $\varrho = \frac{1}{2} \frac{r}{M}$, gdzie r jest współczynnikiem oporu całkowitego określonego przez $r \frac{dx}{dt}$; wreszcie $\omega_0 = \frac{\pi}{T_0}$ częstotliwość kątową uderzeń.

Część pierwsza wyrażenia na odchylenie x dzięki współczynnikowi $e^{-\varrho t}$ staje się po pewnym czasie znikomo mała. Pozostałe po tym drgania wymuszone przedstawia część druga, w której kąt fazy ϑ_n składowych harmonicznych jest wyznaczony równaniem

$$(14) \quad \operatorname{tg} \vartheta_n = \frac{2\varrho n \omega_0}{c^2 - n^2 \omega_0^2}.$$

Współczynniki składowych harmonicznych określające amplitudę każdego n drgań składowych są zależne od stosunku $n\omega_0:c$ i współczynnika oporu ϱ . Przedstawimy je w postaci

$$(15) \quad \frac{1 - (n\omega_0/c)^2}{[1 - (n\omega_0/c)^2]^2 + \left(\frac{2\varrho}{c} \frac{n\omega_0}{c}\right)^2}$$

znajdujemy, że maximum tego wyrażenia zachodzi dla

$$(16) \quad \frac{n\omega_0}{c} = \sqrt{1 - \frac{2\varrho}{c}}$$

i ma wartość

$$\frac{c^2}{4\varrho(c - \varrho)},$$

która przy oporze znikającym ($\varrho \rightarrow 0$) rośnie nieograniczenie. Możliwość rezonansu n -tej harmonicznej jest więc uwarunkowana równaniem

$$(17) \quad \omega_{0kr} = \frac{1}{n} c \sqrt{1 - \frac{n\varrho}{c}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

co wyraża, że rezonans zajdzie, gdy wielokrotność całkowita częstotliwości ω_0 siły wymuszającej drgania zbliża się do częstotliwości c drgań własnych układu i staje się równa

$$c \sqrt{1 - \frac{n\varrho}{c}}.$$

Jak nie trudno przewidzieć, drgania rezonansowe będą tym większe (przy oporze danym) im mniejsze jest n , a więc najniebezpieczniejsze dla $n=1$. Dla zbadania ilościowego porównamy wyrażenia współczynników kolejnych trzech wyrazów szeregu nieskończonego w równaniu (I), tj.

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{1 - \left[(n-1) \frac{\omega}{c} \right]^2}{\left[1 - \left[(n-1) \frac{\omega}{c} \right]^2 \right]^2 + \left[\frac{2\varrho}{c} (n-1) \frac{\omega}{c} \right]^2} \\ a_n = (-1)^n \frac{1 - \left(n \frac{\omega}{c} \right)^2}{\left[1 - \left(n \frac{\omega}{c} \right)^2 \right]^2 + \left[\frac{2\varrho}{c} n \frac{\omega}{c} \right]^2} \\ a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{1 - \left[(n+1) \frac{\omega}{c} \right]^2}{\left[1 - \left[(n+1) \frac{\omega}{c} \right]^2 \right]^2 + \left[\frac{2\varrho}{c} (n+1) \frac{\omega}{c} \right]^2} \end{array} \right.$$

w przypadku gdy $\omega = \omega_0$, czyli gdy istnieją warunki rezonansu n -tej harmonicznej. Wtedy jak wiemy jest

$$(19) \quad a_n = (-1)^n \frac{c^2}{4\varrho(c-\varrho)} = (-1)^n \frac{1}{4\frac{\varrho}{c} \left(1 - \frac{\varrho}{c} \right)},$$

wobec czego napiszemy

$$(20) \quad \frac{a_{n \mp 1}}{a_n} = \frac{1 - \left(\frac{n \mp 1}{n} \right)^2 \left(\frac{n\omega_0}{c} \right)^2}{\left[1 - \left(\frac{n \mp 1}{n} \right)^2 \left(\frac{n\omega_0}{c} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{n \mp 1}{n} \right)^2 \left(\frac{2\varrho}{c} \frac{n\omega_0}{c} \right)^2} \frac{4\frac{\varrho}{c} \left(1 - \frac{\varrho}{c} \right)}{1}.$$

Po wstawieniu wartości $n\omega_0/c = \sqrt{1-2\varrho/c}$ i stosownych przekształceniach znajdujemy

$$(20a) \quad \frac{a_{n \mp 1}}{a_n} = \frac{n^2 \left[\pm (2n \mp 1) + (2n^2 \mp 6n + 3) \frac{\varrho}{c} - (n \mp 1)^2 \frac{2\varrho^2}{c^2} \right] \frac{4\varrho}{c}}{(2n \mp 1)^2 + (n \mp 1)^2 \left[\pm (2n \mp 1) + (2n^2 \mp 2n + 1) \frac{\varrho}{c} - n^2 \frac{2\varrho^2}{c^2} \right] \frac{4\varrho}{c}}.$$

Obrawszy $n=2,3,4\dots$ znajdujemy kolejno

$$(21) \quad \frac{a_1}{a_2} = - \frac{4 \left[3 - \frac{\rho}{c} - \frac{2\rho^2}{c^2} \right] \frac{4\rho}{c}}{9 + \left[3 + \frac{5\rho}{c} - 4 \frac{2\rho^2}{c^2} \right] \frac{4\rho}{c}} \approx - \frac{4}{3} \frac{4\rho}{c}$$

(dla $\frac{4\rho}{c} \rightarrow 0$)

$n=2$

$$\frac{a_3}{a_2} = - \frac{4 \left[-5 + 23 \frac{\rho}{c} - 9 \frac{2\rho^2}{c^2} \right] \frac{4\rho}{c}}{25 + 9 \left[-5 + 13 \frac{\rho}{c} - 4 \frac{2\rho^2}{c^2} \right] \frac{4\rho}{c}} \approx \frac{4}{5} \frac{4\rho}{c}$$

(dla $\frac{4\rho}{c} \rightarrow 0$)

i podobnie dla $n=3$

$$\frac{a_2}{a_3} \approx - \frac{4}{5} \frac{4\rho}{c}; \quad \frac{a_4}{a_3} \approx \frac{9}{7} \frac{4\rho}{c};$$

dla $n=4$;

$$\frac{a_3}{a_4} \approx - \frac{16}{7} \frac{4\rho}{c}; \quad \frac{a_5}{a_4} \approx \frac{16}{9} \frac{4\rho}{c};$$

dla $n=10$;

$$\frac{a_9}{a_{10}} \approx - \frac{100}{19} \frac{4\rho}{c}; \quad \frac{a_{11}}{a_{10}} \approx \frac{100}{21} \frac{4\rho}{c}.$$

Na tych przykładach liczbowych widać, że przy tłumieniu słabym (tj. przy bardzo małych wartościach ρ/c są wartości współczynników sąsiadujących z wyrazem $a_n \cos(n\omega_0 t + \vartheta_n)$ dającym rezonans dla n niezbyt wielkiego również małe, tak iż amplituda drgania wymuszonego jest wtedy dość dokładnie wyznaczona wartością współczynnika a_n .

Natomiast dla n dostatecznie wielkiego otrzymujemy z przekształcenia

$$(22) \quad \frac{a_{n \mp 1}}{a_n} = - \left(\frac{n}{n \mp 1} \right)^2 \frac{\left[\pm (2n \mp 1) + (2n^2 \mp 6n + 3) \frac{\rho}{c} - (n \mp 1)^2 \frac{2\rho^2}{c^2} \right] \frac{4\rho}{c}}{\left(\frac{2n \mp 1}{n \mp 1} \right)^2 + \left[\pm (2n \mp 1) + (2n^2 \mp 2n + 1) \frac{\rho}{c} - n^2 \frac{2\rho^2}{c^2} \right] \frac{4\rho}{c}}$$

wzór przybliżony

$$(23) \quad \frac{a_{n \mp 1}}{a_n} = - \frac{2 \left(\pm n + n^2 \frac{\rho}{c} - n^2 \frac{\rho^2}{c^2} \right)}{\frac{c}{\rho} + 2 \left(\pm n + n^2 \frac{\rho}{c} - n^2 \frac{\rho^2}{c^2} \right)} = - \frac{1}{1 + \frac{1}{2 \frac{\rho}{c} \left(\pm n + n^2 \frac{\rho}{c} - n^2 \frac{\rho^2}{c^2} \right)}}$$

który poucza, że przy każdej wartości ρ/c można znaleźć n dostatecznie wielkie, aby wartości sąsiednich współczynników około współczynnika a_n wyrazu warunkującego rezonans różniły się (bezwzględnie biorąc) tylko nieznacznie od a_n . Ponieważ te współczynniki są na przemian dodatnie i ujemne, przeto odpowiednia amplituda drgania rezonansowego musi być mniejsza od amplitudy drgania takiego przynależnego małej wartości n . Jest to w zgodzie zupełnej z doświadczeniem, chociaż na redukcję amplitud mogą się niekiedy składać jeszcze inne wpływy nie uwzględnione w powyższej teorii.

Niechaj np. układem drgającym będzie ciężkie kowadło połączone ze stropem budynku fabrycznego, który oczywiście działa jako więź sprężysta o znanym współczynniku siły k . Rzecz jasna, że masa tej więzi nie jest już pomijalna wobec masy kowadła i trzeba ją uwzględnić przy wyznaczeniu okresu własnych drgań układu. Ale to zagadnienie dodatkowe rozwiązuje się niezależnie metodami już opracowanymi wielostronnie. Tutaj zwrócimy przeto uwagę tylko na pozostałe możliwości zasadnicze zastosowania powyższego rozwiązania teoretycznego do badania drgań wymuszonych naszego układu. Otóż przy kuciu przedmiotu leżącego na kowadłe zachodzą istotnie powtarzające się rytmicznie impulsy młota, które mogą rozkołysać układ sprężysty złożony ze stropu i kowadła, jeżeli trwają dostatecznie długo, ażeby drgania własne układu wygasły. Ale impulsy te nie mogą być najczęściej dokładnie równe, co oczywiście schemat teoretyczny pomija. Jako przykład drugi weźmy młot parowy ustawiony na fundamencie spoczywającym na gruncie. I tutaj uderzenia nie będą w ogóle dokładnie rytmiczne i równe z powodów zrozumiałych. Mimo to teoria powyższa daje cenną wskazówkę, z której technika może skorzystać wyznaczając przy projektowaniu częstość drgań własnych układu.

ZAGADNIENIA DRGAŃ W BUDOWIE MASZYN¹⁾

(Przegląd Techniczny, Nr 17-18, 1932 r.)

§ 1. Rozważania ogólne

Przez *drżania* rozumiemy w życiu potocznym wszelkie drobne ruchy okresowe, jakie dostrzegamy w ogóle na rzeczach materialnych, a także na zjawiskach fizycznych, leżących poza właściwą dziedziną mechaniki. Skoro jednakże przyjmiemy, że główną cechą drgań jest ruch okresowy, to dochodzimy do przekonania, że w teorii drgań nie może być różnicy istotnej między drganiami drobnymi, tj. o małej amplitudzie i krótkim okresie a drganiami o wielkiej amplitudzie i długim okresie. Dlatego olbrzymia większość maszyn w ruchu stanowi ze stanowiska mechaniki układy drgające. Atoli w technice wyodrębniamy spośród drgań w ogóle takie drżania, które zachodzą dzięki *sprężystej odkształcalności* części konstrukcyjnych, a których by nie było wcale, gdyby te części były doskonale sztywne. Drganiami tymi rządzą przede wszystkim *siły sprężystości*, wzbudzają je zaś bezpośrednio *siły bezwładności*. Ponieważ siły te rosną zwykle z kwadratem prędkości odnośnych części maszyn, przeto jasną jest rzeczą, że zagadnienie drgań sprężystych wysunęło się na widownię techniczną dopiero w związku z nowoczesnym ogromnym wzrostem szybkości tak silników, jak i maszyn roboczych. Pojmując tedy tę kategorię drgań maszyn jako drżania układów sprężystych, korzystamy z gotowych pojęć i wyników teorii takich drgań, opracowanej już dawno w celu ilościowego ujęcia i naukowego wyjaśnienia zjawisk akustycznych. Te bowiem zjawiska nie są niczym innym jak drganiami ciał i układów sprężystych o częstotliwości leżącej mniej więcej między 20 a 30 000 okresów na sekundę (rys. 1). Ze studium drgań maszynowych wyłoniło nowe swoiste zagadnienia specjalne jest rzeczą jasną, ale ogólne metody teoretyczne i doświadczalne czerpiemy wciąż jeszcze przeważnie z akustyki. Świadczy o tym już sama terminologia teorii drgań. Ale i druga kategoria drgań,

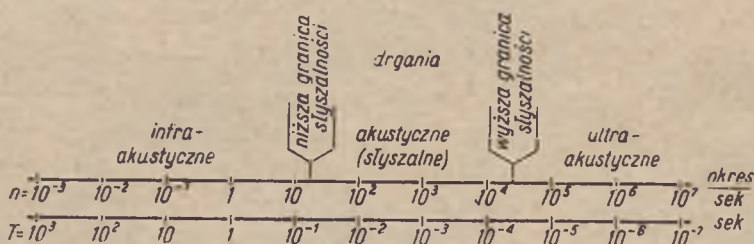
¹⁾ Wykład wygłoszony na zorganizowanych w 1932 r. przez SIMP Kursach uzupełniających dla inżynierów.



jako ruchów okresowych, które zachodzą bez uwagi godnych odkształceń części maszyn, ma ważne znaczenie techniczne. Np. przy powolnym nawet obrocie ciężkiego wirnika osadzonego na osi poziomej zachodzi okresowa zmiana wielkości naprężeń zginających we włóknach skrajnych osi. Zmiana ta odbywa się według tego samego prawa co odchylenie s punktu poruszającego się po danym odcinku $2a$ prostym ruchem harmonicznym

$$s = a \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Oznaczywszy przez σ_0 największą wartość naprężenia we włóknie skrajnym i mierząc czas od chwili położenia rozpatrywanego włókna w osi obojętnej, napiszemy wyrażenie na naprężenie tegoż włókna w chwili t



Rys. 1

w postaci: $\sigma = \sigma_0 \sin \omega t$, jeżeli $\omega = \frac{2\pi}{T}$ określa prędkość kątową osi, a za-razem tzw. częstotliwość kołową wahań wartości naprężenia (w granicach od $-\sigma_0$ do $+\sigma_0$). W tych warunkach *pewność* (bezpieczeństwo) przeciwko pęknięciu przy danej wartości σ_0 jest, jak wiadomo, znacznie mniejsza od pewności przy obciążeniu stałym naprężeniem σ_0 . Podobne warunki zachodzą w trzonach korbowych silników tłokowych itp. częściach maszyn. Obniżenie bezpieczeństwa przeciw pęknięciu przy wahaniu, czyli drganiu wartości naprężenia jest znane pod ogólną nazwą zjawiska *zmęczenia* materiału i stanowi od czasów WÖHLERA (1872) przedmiot badań w laboratoriach wytrzymałościowych. Nie potrzeba tutaj dowodzić wielkiej doniosłości praktycznej tych badań. Tutaj idzie nam o odkształcenia i naprężenia wywołane drganiami sprężystymi całych części maszyn. Są to w ogóle *drgania wymuszone*, tj. wzbudzone drganiami drugiej kategorii, czyli, jak można by je nazwać, *drganiami stereomechanicznymi*.

Zagadnienie drgań wymuszonych jest oczywiście bardziej złożone od zagadnienia *drgań własnych*, tj. drgań, jakie zachodzą w układzie sprężystym po jego wytrąceniu z położenia równowagi stosownie dobranymi siłami krótkotrwałymi i pozostawieniu następnie samemu sobie. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że i drganiami własnymi układu sprężystego będą

w ogóle niezmiernie skomplikowane, gdyż położenie układu odkształcalnego odchylone od położenia równowagi określa się nieskończenie wielu parametrami (współrzędnymi). Weźmy np. tak prosty układ, jakim jest rozpięte *ciężno* (struna) lub *pręt* jednym końcem zamocowany. Nawet gdy rozpatrujemy tylko drgania zachodzące w płaszczyźnie pionowej, przechodzącej przez oś pręta, to i tak dochodzimy do nieskończonej różnaitości drgań możliwych. Możemy bowiem udzielić osi pręta odchylenia początkowego, które w pewnych granicach ma postać dowolnej krzywej matematycznej „gładkiej“ i zależnie od tej postaci otrzymamy nieskończoną różnaitość drgań własnych. Na szczęście odkształcenia układów sprężystych podlegają w pewnych granicach zasadzie superpozycji (przynajmniej z wielkim przybliżeniem), a wtedy można zastosować *zasadę rozkładu drgań złożonych* każdego elementu pręta na proste *drgania harmoniczne* (sinusowe) o okresach różnych. Drganie harmoniczne o najdłuższym okresie T nazywamy *drganie podstawowym, zasadniczym* lub *głównym*; w akustyce odpowiada mu *ton* lub *dźwięk główny*, a zarazem najniższy. Mówi się także: *drganie (ton) harmoniczne pierwsze*. Drgania harmoniczne o okresach krótszych nazywamy *drganiami (tonami) harmonicznymi wyższymi*. Okresy te tworzą ciąg malejący nieskończony. Stosownie do tego mówimy o drganiu harmonicznym drugim, trzecim... W zastosowaniach technicznych wysuwa się zwykle na pierwszy plan *drganie zasadnicze*. Obliczanie okresu drgań głównych stanowi zatem jedno z najważniejszych zadań technicznej nauki o drganiach.

Wypada tutaj zestawić pokrótce najważniejsze podstawowe pojęcia i niektóre wzory teorii drgań harmonicznych, jakkolwiek znane dobrze z normalnych kursów mechaniki na politechnikach.

Jeżeli x oznacza odchylenie od położenia równowagi drgającego prostoliniowo punktu materialnego o masie M , jako modelu układu o jednym stopniu swobody, to

a) *Silę sprężystości* przedstawia wyrażenie — kx .

b) *Opór ruchu* przy założeniu najprostszym: $-a \frac{dx}{dt}$.

c) *Sila okresowa* wymuszająca drgania w najprostszym przypadku $S \sin \omega t$, przy czym $\omega = \frac{2\pi}{T}$ oznacza częstotliwość kolową wahań siły, zaś S stałą, przedstawiającą jej największą wartość.

Równanie różniczkowe drgań wymuszonych ma postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} + c^2x = q \sin \omega t,$$

przy czym

$$2n = \frac{a}{M}, \quad c^2 = \frac{k}{M}, \quad q = \frac{S}{M}.$$

Jego rozwiązanie ogólne jest sumą dwu wyrażeń. Pierwsze z nich

$$e^{-nt} [A \sin (t \sqrt{c^2 - n^2}) + B \cos (t \sqrt{c^2 - n^2})]$$

staje się w przypadku idealnym braku oporów ($n=0$) wyrażeniem dla drgań własnych; natomiast w przypadku gdy zachodzi opór ($n \neq 0$) wyrażenie to maleje szybko z czasem, dzięki czynnikowi e^{-nt} .

Drugie wyrażenie ma postać

$$x = q \frac{\sin \vartheta}{2n\omega} \sin (\omega t - \vartheta), \quad \text{jeżeli} \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{2n\omega}{c^2 - \omega^2}$$

i określa *drżania wymuszone* o amplitudzie

$$a = \frac{q \sin \vartheta}{2n\omega} = \frac{q}{\sqrt{(c^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}$$

częstotliwości takiej samej, jak częstotliwość zmiany siły wymuszającej, lecz o fazie opóźnionej o kąt ϑ .

Wprowadziwszy oznaczenia $\frac{q}{c^2} = \frac{S}{k} = a_s$ (amplituda drgań wzbudzących), $\frac{\omega}{c} = \beta$, $\frac{2a}{c} = \gamma$, otrzymujemy dla amplitudy drgań wymuszonych wyrażenie

$$a = a_s \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + \beta^2 \gamma^2}}.$$

Stąd wyprowadza się wniosek, że przy określonej wartości γ powstanie największa amplituda a , gdy $\beta^2 = 1 - \frac{\gamma^2}{2}$, czyli gdy częstotliwość ω siły wymuszającej drżania jest bliska częstotliwości c drgań własnych. Mówimy tedy, że zachodzi *współbrzmienie*, czyli *rezonans*.

W przypadku ogólniejszym, gdy siła wymuszająca jest dowolnie daną funkcją okresową czasu t , można ją przedstawić rozwinięciem FOURIERA w postaci

$$S_1 \sin \omega t + S'_1 \cos \omega t + S_2 \sin 2\omega t + S'_2 \cos 2\omega t + S_3 \sin 3\omega t + S'_3 \cos 3\omega t + \dots$$

Wtedy wyrażenie w rozwiązaniu odpowiedniego równania drgań wymuszonych, które określa te drżania po stłumieniu drgań własnych przez opory, ma postać

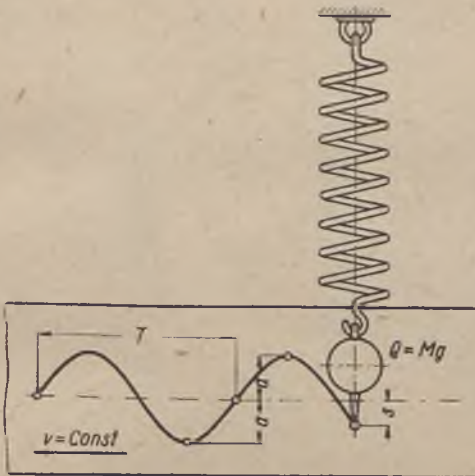
$$x = a_1 \sin (\omega t - \vartheta_1) + a_2 \sin (2\omega t - \vartheta_2) + a_3 \sin (3\omega t - \vartheta_3) + \dots,$$

czyli wyraża drżanie złożone z prostych drgań harmoniczných o częstotliwościach $\omega, 2\omega, 3\omega$

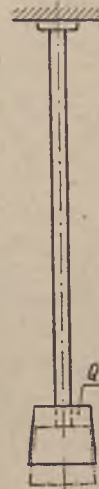
Współbrzmienie zachodzi w tym przypadku w ogóle, gdy którakolwiek z tych częstotliwości jest bliska częstotliwości drgań własnych rozpatrywanego układu o jednym stopniu swobody. W przypadkach technicznie ważnych wchodzi zwykle w rachubę tylko składowe harmoniczne kilku pierwszych rzędów.

§ 2. Obliczenie głównych drgań własnych w kilku prostych przypadkach

Zadanie upraszcza się znakomicie, gdy *układ drgający* możemy traktować z dostatecznym przybliżeniem, jako układ o jednym stopniu swobody. Taki przypadek zachodzi np. w zadaniach przedstawionych na rys. 2 do 4. Mamy tu do czynienia z *drżaniem podłużnym* sprężyny lub pręta sprężystego z zawieszonym nań ciężarem Q (rys. 2a i b); następnie



Rys. 2a



Rys. 2b

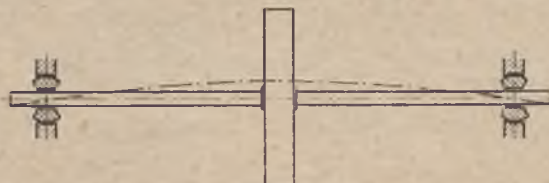
z *drżaniem giętnym* wału obciążonego w środku ciężkim kołem (rys. 3a i b), wreszcie z *drżaniem skrętnym* wału z ciężkim kołem na końcu swobodnym, a zamocowanego drugim końcem.

Jeżeli we wszystkich tych przypadkach masa części sprężystej odkształcanej jest dość mała wobec masy z nią połączonej i poruszającej się jako ciało sztywne, ażeby można pominąć siły bezwładności masy pierwszej, to małe odchylenie x ciężaru Q od położenia równowagi wzbudza *siłę sprężystości* (w przyp. 3b i 4 moment) proporcjonalną do x , przy czym współczynnik proporcjonalności k da się łatwo obliczyć z wymiarów i stałych sprężystości materiału sprężyny, pręta lub wału. Wtedy ruch Q jest prostym ruchem harmonicznym postępowym w przypadkach 2a, 2b

i 3a, zaś obrotowym w przypadkach 3b i 4. Okres drgań da się zatem zawsze przedstawić wzorem

$$(1) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}},$$

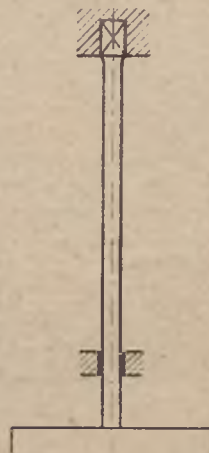
znanym z teorii prostego drgania harmonicznego punktu materialnego o masie M . W przypadkach 2a, 2b i 3a należy w tym wzorze podstawić masę ciężaru Q , zaś w przypadkach 3b i 4 moment bezwładności tej masy



Rys. 3a



Rys. 3b



Rys. 4

względem odpowiedniej osi obrotu. Na współczynnik k , który określa siłę (moment), potrzebną do odchylenia o jednostkę długości (jednostkę kąta), otrzymujemy w przypadku 2b wartość

$$k = \frac{EF}{l}$$

(F pole przekroju, l długość pręta).

W przypadku 2a:

$$k = \frac{C}{2\pi n R^3},$$

jeżeli C oznacza sztywność skręcania drutu, z którego zrobiono sprężynę, n liczbę zwojów, zaś R promień walca linii śrubowej.

W przypadku 3a:

$$k = \frac{48B}{l^3},$$

jeżeli $B = EJ$ oznacza sztywność zginania wału (przy założeniu przekroju stałego), a l rozpiętość.

W przypadku 3b łatwo znaleźć

$$k = \frac{12B}{l},$$

jeżeli zamiast M wstawimy moment bezwładności Θ masy koła względem średnicy.

Wreszcie w przypadku 4 jest

$$k = \frac{C}{l},$$

jeżeli C oznacza sztywność skręcania wału, zaś rolę M gra moment bezwładności koła Θ względem osi pręta.

Chcąc uwzględnić masę sprężyny, pręta lub wału, stosujemy z korzyścią prostą metodę przybliżoną RAYLEIGHA. Metoda ta polega na przyjęciu, że obraz geometryczny ruchu przy uwzględnieniu masy pręta nie ulega zmianie, a tylko zajdzie pewne zwolnienie ruchu, czyli zwiększenie okresu T . Pisząc równanie, wyrażające zasadę zachowania energii w dowolnym położeniu drgającego układu, otrzymujemy z łatwością wartość, o którą należy powiększyć masę M , lub moment bezwładności w równaniu na T , ażeby znaleźć dokładniejszą wartość okresu²⁾.

Sposobem RAYLEIGHA otrzymano wyniki następujące:

W przypadku 1a i b należy do masy głównej dodać $1/3$ masy sprężyny lub pręta; w przypadku 3a dodać $17/35$ masy wału; w przypadku 4 do momentu bezwładności koła obciążającego trzeba dodać $1/3$ momentu bezwładności wału (w odpowiednich wzorach).

²⁾ Szczegóły rachunku znaleźć można na str. 304 w „Kursie Wytrzymałości Materiałów“ S. TIMOSZENKI. Drugie polskie wydanie wyszło nakładem „Książnicy“ i zawiera niezmienny od pierwszego wydania rozdział o drganiach, dający podstawowe wiadomości teoretyczne, które mogą stanowić po części wstęp do naszych rozważań. Obszerniejsza monografia tegoż autora, którą wypada polecić przede wszystkim do pogłębienia wiadomości teoretycznych inżynierów-mechaników ukazała się po angielsku w r. 1928 pt. „Vibration Problems in Engineering“.

§ 3. Podstawy teorii drgań prętów

Ścisłejsze rozwiązanie tych zadań wymaga całkowania cząstkowych równań różniczkowych drgań pręta. Wyprowadzimy takie równanie dla przypadku 2b, przyjmując, że cząsteczki leżące w jakimkolwiek przekroju poprzecznym pręta poruszają się tylko równoległe do jego osi. Biorąc ściśle, zachodzi to tylko u cząsteczek leżących na osi, inne bowiem z powodu zwężenia poprzecznego przy rozciąganiu pręta ulegają także przesunięciom prostopadłym do osi, które dla uproszczenia teorii pomijamy. Obrawszy początek układu na górnym końcu osi pręta, jako osi x (rys. 5), i oznaczywszy przesunięcie dowolnego przekroju wywołane drganiem podłużnym przez u , pojmujemy u jako funkcję x i t i rozpatrujemy ruch postępowy elementu pręta o masie $\frac{\gamma}{g}F dx$. Przyspieszeniem tego ruchu jest $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, siłą poruszającą zaś — wypadkowa z sił $-\sigma F$ i $(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx)F$, działających na obie ściany elementu.

A zatem

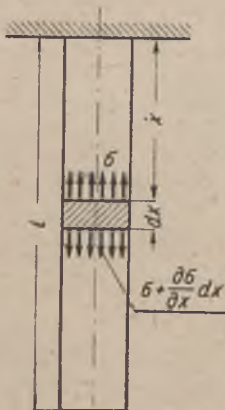
$$\frac{\gamma}{g}F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$$

czyli

$$\frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}$$

Ale $\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}$, a więc równanie

$$(a) \quad \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$



Rys. 5

jest szukanym równaniem różniczkowym drgań podłużnych pręta pryzmatycznego.

Taką samą postać ma równanie drgań skrętnych, określające zależność kąta skręcenia φ od x i t . Wtedy bowiem otrzymują elementy pręta ruch obrotowy z przyspieszeniem kątowym $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ pod wpływem różnicy mo-

²⁾ Na pozór wydaje się, że przy wyprowadzeniu tego równania dla pręta w położeniu pionowym należy uwzględnić działanie siły ciężkości, dodając do prawej stronie równania ciężar elementu $\gamma F dx$. Wtedy jednakże należałoby wprowadzić zamiast σ sumę $\sigma_0 + \sigma$, tj. sumę naprężenia statycznego $\sigma_0 = (l-x)\gamma$ i naprężenia σ określonego odchyleniem u z położenia równowagi. Po prawej stronie będzie w takim razie $F \left(\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) dx + F \gamma dx$, ponieważ zaś $\frac{\partial \sigma_0}{\partial x} = -\gamma$, więc po redukcji pozostanie $F \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx$.

mentów sił $-C \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ i $C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx \right)$, jeżeli C oznacza sztywność skręcania. To prowadzi do równania

$$(b) \quad \frac{\gamma}{g} J_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

różniącego się od poprzedniego tylko znaczeniem stałych parametrów.

Równanie (a) piszemy zwykle w postaci

$$(a') \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ przy czym } a = \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}$$

ma wymiar prędkości liniowej. Podobnie piszemy równanie (b), tj.

$$(b') \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \text{ jeżeli } a = \sqrt{\frac{Cg}{J_0 \gamma}}.$$

W najważniejszym technicznie przypadku drgań skrętnych wałów mamy do czynienia zwykle z przekrojem kołowym, dla którego

$$C = J_0 G. \text{ Wówczas } a = \sqrt{\frac{Gg}{\gamma}}.$$

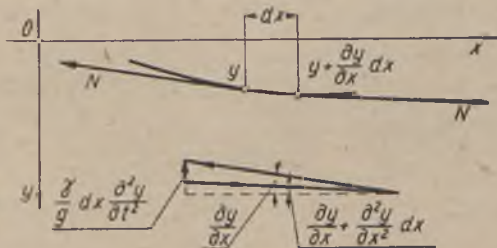
Tego samego typu jest wreszcie równanie drgań poprzecznych silnie napiętego cięgna, o ile wolno pominąć jego sztywność zginania. Niechaj y (rys. 6) oznacza odchylenie elementu cięgna o masie $\frac{\gamma}{g} dx$, napię-

tego siłą N . Na przekrój x wydzielonego elementu działa siła zewnętrzna N o składowej

$$-N \frac{\partial y}{\partial x}$$

w kierunku ruchu; na przekrój $x + dx$ działa również N o skła-

dowej $N \left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \right)$.



Rys. 6

Wypadkowa tych sił udziela elementowi przyspieszenia $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, a zatem

$$\frac{\gamma}{g} dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = N \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Stąd

$$(c) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ przy czym } a = \sqrt{\frac{Ng}{\gamma}}.$$

Dla *drgań giętnych* (poprzecznych) prętów (belek) sprężystych otrzymujemy równanie innego typu, a mianowicie:

$$(d) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \quad \text{przy czym} \quad a = \sqrt{\frac{EJg}{F\gamma}}$$

(a ma wymiar prędkości liniowej pomnożonej przez długość). Wyprowadzenie tego równania opiera się na znanym z teorii zginania prętów równaniu różniczkowym

$$EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M.$$

Dwukrotne różniczkowanie daje

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = p,$$

jeżeli p oznacza obciążenie jednostkowe pręta (prostopadłe do jego osi). W naszym zadaniu jest to obciążenie siłami bezwładności, wziętymi przeciwnie, stosownie do zasady D'ALEMBERTA. Jeżeli pominiemy nieuniknione przy zgięciu ruch obrotowy elementów i wpływ sił tnących na krzywiznę osi pręta, to możemy napisać:

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{F\gamma}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

co daje równanie (a).

We wszystkich powyższych wywodach pominięto świadomie wpływ siły ciężkości, gdyż w przypadkach konkretnych łatwo go uwzględnić dodatkowo.

§ 4. Najważniejsze rozwiązania równań drgających prętów

Wracając teraz do równania (a) albo (b) i (c) podamy najpierw ogólne rozwiązanie znalezione już przez D'ALEMBERTA dla struny drgającej poprzecznie lub pręta o nieograniczonej długości drgającego podłużnie lub skrętnie. Jeżeli stan początkowy układu (w chwili $t=0$) określają funkcje

$$F(x) = (u)_{t=0}; \quad G(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t=0},$$

to rozwiązanie ogólne ma postać

$$(2) \quad u = \frac{1}{2} [F(x+at) + F(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} G(z) dz.$$

Łatwo sprawdzić, że to rozwiązanie czyni zadość naszemu równaniu różniczkowemu, a ponieważ zawiera dwie funkcje dowolne, jest rozwią-

zaniem ogólnym. Rozwiązanie to wyraża, że jakiegokolwiek miejscowe wytrącenie z położenia równowagi pręta lub struny przenosi się w obu kierunkach wzdłuż osi x z prędkością a . Mamy przeto do czynienia z *ruchem falowym*, przy czym a jest *prędkością przenoszenia fali*. Prędkość ta przy oznaczeniu gęstości $\frac{\gamma}{g} = \mu$ jest dla fal podłużnych w pręcie równa $\sqrt{\frac{E}{\mu}}$, (co wynosi np. dla stali 5180 m/sek), dla fal skrętnych w pręcie okrągłym $\sqrt{\frac{G}{\mu}}$ (dla stali 3260 m/sek), zaś dla fal poprzecznych napiętego cięgna $\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$ (gdyż $q = F\gamma$, $\frac{N}{F} = \sigma$), jeżeli σ oznacza naprężenie w przekroju cięgna. (Dla drutu stalowego np., napiętego naprężeniem 2000 kG/cm², prędkość przewodzenia drgań poprzecznych wynosi 158 m/sek).

Drugie rozwiązanie (D. BERNOULLI, J. LAGRANGE, J. RAYLEIGH) przedstawia ogólnie *drżania ustalone* (stojące), które dają się rozłożyć na tzw. *drżania normalne*. W przypadku pręta o długości l i końcach swobodnych, drgającego podłużnie lub skrętnie, odchylenie przekroju (względnie kąt obrotu) określa wzór:

$$(3) \quad u = \sum_{m=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(A_m \cos \frac{m\pi a}{l} t + B_m \sin \frac{m\pi a}{l} t \right) \cos \frac{m\pi x}{l}.$$

Jak łatwo się przekonać przez różniczkowanie, funkcja ta czyni zadość równaniu różniczkowemu i warunkom krańcowym

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{dla} \quad x=0 \quad \text{i} \quad x=l.$$

Przy końcach ustalonych ($u=0$ dla $x=0$ i $x=l$) jest

$$(4) \quad u = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cos \frac{m\pi a}{l} t + B_m \sin \frac{m\pi a}{l} t \right) \sin \frac{m\pi x}{l},$$

skoro zaś jeden koniec $x=0$ jest ustalony, a drugi swobodny, to

$$(5) \quad u = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cos \frac{m\pi a}{2l} t + B_m \sin \frac{m\pi a}{2l} t \right) \sin \frac{m\pi}{2l} x.$$

A_m i B_m są to stałe dowolne, określające amplitudę i fazę każdego z drgań normalnych. Przez *drżania normalne* (także główne) rozumiemy w ogólnej teorii drgań takie drżania proste harmoniczne, przy których wszystkie punkty układu drgającego znajdują się w jednej i tej samej fazie drżania.

Wszystkie zajmują jednocześnie położenie środkowe i jednocześnie największe odchylenia.

Z powyższego rozwiązania wynika zatem np. w przypadku drgań skrętnych wału okrągłego o końcach swobodnych, liczba okresów na sekundę drgania podstawowego (tonu głównego)

$$(6) \quad n = \frac{1}{T} = \frac{a}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{G}{\mu}}$$

$$\left(\text{albowiem przy } m=1 \text{ jest } \frac{\pi a}{l} = \frac{2\pi}{T_1} \right).$$

$$\text{Przy długości } l=10 \text{ m wypada } n = \frac{3260}{20} = 163 \text{ sek}^{-1} = 9760 \text{ min}^{-1}.$$

Zauważyć wypada, że okres drgań skrętnych samego wału jest zupełnie niezależny od jego grubości, a tylko od długości oraz sprężystości i gęstości materiału. (Inaczej ma się rzecz, gdy w drganiu bierze udział masa osadzona na wale o momencie bezwładności wielkim wobec momentu bezwładności samego wału).

Drgania giętne belki pryzmatycznej podlegają najprostszemu prawom w przypadku swobodnego (przegubowego) podparcia obu końców. Wtedy bowiem są ustalone dwa węzły drgań normalnych, a równaniu (d) i warunkom końcowym czyni zadość *równanie drgań ustalonych* w postaci:

$$(7) \quad y = \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \left(a \frac{m^2 \pi^2}{l^2} t \right)$$

przy

$$a = \sqrt{\frac{EJg}{F\gamma}}.$$

Okresy T_m drgań normalnych (dla $m=1$) wypadają z równania

$$\frac{am^2\pi^2}{l^2} = \frac{2\pi}{T_m},$$

czyli

$$T_m = \frac{2}{\pi} \left(\frac{l}{m} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu F}{EJ}}.$$

A więc *drganie podstawowe* ma okres

$$(8) \quad T_1 = 0,636 l^2 \sqrt{\frac{\gamma}{g} \frac{F}{EJ}},$$

$$\text{zaś } T_1 : T_2 : T_3 \dots = 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{9} : \dots$$

Wzór (8) pozwala ocenić największy błąd, jaki popełniamy, stosując przybliżoną metodę RAYLEIGHA w przypadku 2a, czyli zastępując pręt o masie własnej $\frac{\gamma}{g}Fl$ prętem pozbawionym masy, ale niosącym w środku rozpiętości masę skupioną, równą $\frac{1}{35}$ masy pręta. Wtedy otrzymujemy

$$(8a) \quad T_1 = 0,632l^2 \sqrt{\frac{\gamma}{g} \frac{F}{EJ}},$$

a więc około 0,7% mniej.

W innych przypadkach ustalenia końców pręta szukamy rozwiązania w sposób następujący:

Przyjmujemy, że ruch pręta jest jednym z drgań głównych (normalnych) o częstotliwości ω i piszemy

$$(e) \quad y = X \cos \omega t.$$

Nieznana funkcja X samej zmiennej x określa kształt krzywej, którą przedstawia oś pręta podczas drgania. Wstawiwszy to wyrażenie w równanie różniczkowe (d) mamy na wyznaczenie funkcji X równanie różniczkowe zwyczajne

$$(f) \quad \frac{d^4 X}{dx^4} = \frac{\omega^2 X}{a^2}.$$

Całką ogólną tego równania, zawierającą 4 stałe dowolne C_1, C_2, C_3 i C_4 jest

$$(g) \quad \begin{aligned} X = & C_1 \left[\cos \left(x \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) + \operatorname{ch} \left(x \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) \right] + \\ & + C_2 \left[\cos \left(x \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) - \operatorname{ch} \left(x \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) \right] + \\ & + C_3 \left[\sin \left(x \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) + \operatorname{sh} \left(x \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) \right] + \\ & + C_4 \left[\sin \left(x \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) - \operatorname{sh} \left(x \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Warunki krańcowe dostarczają czterech równań, z których można wyznaczyć stosunki $C_1:C_2:C_3:C_4$ i otrzymać równanie przestępne do obliczenia częstotliwości ω . Równanie to określa ciąg nieskończony częstotliwości $\omega_1 < \omega_2 < \omega_3 < \dots$. Każdej częstotliwości ω_i przynależy swoisty typ funkcji X i odpowiedni typ drgania. Stosując zasadę superpozycji, otrzymujemy przeto rozwiązanie najogólniejsze w postaci

$$(h) \quad y = \sum_{i=1}^{i=\infty} X_i (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)$$

czyniącej zadość wszelkim warunkom początkowym.

Np. w przypadku utwierdzenia obu końców ($x=0$ i $x=l$) pręta mamy warunki krańcowe:

$$\begin{aligned} 1) \quad (X)_{x=0} &= 0; & 2) \quad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=0} &= 0; \\ 3) \quad (X)_{x=l} &= 0; & 4) \quad \left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=l} &= 0. \end{aligned}$$

Z 1) i 2) wynika, że w równaniu (g) należy podstawić

$$C_1 = C_3 = 0.$$

Z 3) i 4) wypada równanie:

$$\begin{aligned} C_2 \left[\cos \left(l \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) - \operatorname{ch} \left(l \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) \right] + C_4 \left[\sin \left(l \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) - \operatorname{sh} \left(l \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) \right] &= 0, \\ C_2 \left[\sin \left(l \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) + \operatorname{sh} \left(l \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) \right] + C_4 \left[-\cos \left(l \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) + \operatorname{ch} \left(l \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Różne od zera wartości C_2 i C_4 czynią tym równaniom zadość tylko wtedy, gdy wyznacznik ich współczynników równa się zero, co prowadzi do warunku

$$\cos \left(l \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) \cdot \operatorname{ch} \left(l \sqrt{\frac{\omega}{a}} \right) = 1.$$

Rozwiązując to równanie przestępne względem $\beta = l \sqrt{\frac{\omega}{a}}$ znajdujemy wartości ⁴⁾

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5
4,73	7,853	10,996	14,137	17,279

przy pomocy których obliczamy częstotliwości ω_i wzorem

$$\omega_i = \frac{\beta_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{F\gamma}}.$$

W przypadku utwierdzenia tylko jednego końca pręta znajdujemy podobnie równanie na wyznaczenie β_i

$$\cos \beta_i \operatorname{ch} \beta_i = -1.$$

Oto 6 pierwszych pierwiastków tego równania:

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
1,875	4,694	7,855	10,996	14,137	17,279

⁴⁾ Te same wartości wypadają dla pręta o końcach swobodnych.

§ 5. Drgania giętne wałów z ciężkimi masami skupionymi

Jeden prosty przypadek (rys. 3a) rozpatrzyliśmy już powyżej. Odpowiedni okres drgania podstawowego wypada (z pominięciem małej masy wału):

$$(9) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{K}} = 2\pi \sqrt{\frac{Q}{g} \frac{l^3}{48B}},$$

czyli

$$(9a) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{f_0}{g}}, \quad \text{jeżeli} \quad f_0 = \frac{1}{48} \frac{Ql^3}{B}$$

oznacza strzałkę ugięcia wału pod ciężarem Q masy M . Nie trudno się przekonać, że ta nowa postać wzoru obowiązuje ze znacznym przybliżeniem we wszelkich przypadkach jednej dużej masy osadzonej na wale w jakimkolwiek przekroju czy to między łożyskami, czy też zewnątrz nich. Nadto wał może być podparty trzema i więcej łożyskami. W każdym z tych przypadków jest okres drgania podstawowego równy okresowi wahadła matematycznego o długości równej strzałce ugięcia statycznego miejsca wału, obciążonego ciężarem Q . Pewien, zwykle nieznaczny błąd, powoduje nieuwzględnienie tej okoliczności, że wskutek ugięcia wału ciężar Q ulega nie tylko ruchowi postępowemu, lecz także obrotowemu.

Przypadek *drgań giętnych* wału z dwiema masami o ciężarach Q_1 i Q_2 , wielkich w porównaniu do ciężaru własnego wału, rozwiązuje się dość łatwo ogólnie, dłuższym co prawda rachunkiem, przez całkowanie układu dwu równań różniczkowych ruchu dla każdego z ciężarów.

Mamy tutaj do czynienia z układem o 2 stopniach swobody. Mówimy także, że drgania obu mas są sprzężone. Okazuje się, że każdy z ciężarów wykonywa drgania złożone z dwu drgań harmonicznym o okresach różnych T_1 i T_2 , przedstawionych wzorem:

$$(10) \quad \left. \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix} \right\} = 2\pi \sqrt{\frac{2(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21})}{g[f_{11} + f_{22} \pm \sqrt{(f_{11} - f_{22})^2 + 4f_{12}f_{21}}]}}$$

Tutaj oznacza f_{11} ugięcie statyczne przekroju obciążonego przez Q_1 pod wpływem samego Q_1 ; f_{12} ugięcie statyczne tegoż przekroju pod wpływem samego Q_2 itd. ⁵⁾

⁵⁾ Tok rachunku przedstawia się w sposób następujący: Niechaj y_1 i y_2 oznaczają ugięcia kinetyczne obu ciężarów, mierzone od ich położenia równowagi. Wtedy stosownie do zasady D'ALEMBERTA, są opory bezwładności

$$-\frac{Q_1}{g} \frac{d^2 y_1}{dt^2} \quad ; \quad -\frac{Q_2}{g} \frac{d^2 y_2}{dt^2}$$

w równowadze z siłami sprężystości P_1 i P_2 , którymi wygięty wał działa na obie masy. Siły te są związane z ugięciami y_1 i y_2 za pomocą równań liniowych o postaci

$$y_1 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2; \quad y_2 = a_{21}P_1 + a_{22}P_2$$

W przypadku 3 lub więcej mas skupionych na pręcie sprężystym bez masy staje się rachunek bardziej uciążliwy i dlatego w praktyce posługiwano się często wzorem empirycznym DUNKERLEYA (Phil. Trans. R. S. London, 185 z r. 1895), dostatecznie przybliżonym w przypadkach 3 lub 4 mas osadzonych na wale między końcami swobodnie podpartymi. Jeżeli T_0 oznacza okres drgania głównego samego wału, zaś T_1, T_2, \dots okresy takichż drgań przy obciążeniu samą tylko masą M_1 lub M_2 itd.,

w których a_{11} i a_{12} oznaczają znane ze statyki belek sprężystych *liczby wpływe*. Rozwiązawszy te równania względem P_1 i P_2 , mamy po wprowadzeniu oznaczeń skracających β_0, β_1 i β_2 :

$$P_1 = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} y_2 = \beta_1 y_1 - \beta_0 y_2,$$

$$P_2 = \frac{a_{31}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} y_2 - \frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} y_1 = \beta_2 y_2 - \beta_0 y_1.$$

A zatem równania ruchu napiszemy w postaci:

$$M_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -(\beta_1 y_1 - \beta_0 y_2),$$

$$M_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -(\beta_2 y_2 - \beta_0 y_1);$$

rozwiązując pierwsze z tych równań względem y_2 i wstawiając w drugie, znajdujemy

$$M_1 M_2 \frac{d^4 y_1}{dt^4} + (M_1 \beta_2 + M_2 \beta_1) \frac{d^2 y_1}{dt^2} + (\beta_1 \beta_2 - \beta_0^2) y_1 = 0$$

jako równanie do wyznaczenia y_1 w zależności od t . Takie samo równanie otrzymujemy dla y_2 po wyrugowaniu z obu poprzednich y_1 .

Ogólną całką ostatniego równania jest:

$$y_1 = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t + C_1 \cos \omega_2 t + D_1 \sin \omega_2 t$$

ze stałymi całkowania A_1, B_1, C_1, D_1 . Równanie dla y_2 ma postać tę samą, z innymi jednakże stałymi A_2, B_2, C_2, D_2 . Parametry ω_1 i ω_2 wyznaczamy z równania charakterystycznego, które otrzymujemy, podstawivszy jeden z wyrazów całki ogólnej w równanie różniczkowe. Tą drogą znajdujemy

$$M_1 M_2 \omega^4 - (M_1 \beta_2 + M_2 \beta_1) \omega^2 + \beta_1 \beta_2 - \beta_0^2 = 0,$$

a stąd

$$\omega^2 = \frac{1}{2M_1 M_2} [(M_1 \beta_2 + M_2 \beta_1) \pm \sqrt{(M_1 \beta_2 - M_2 \beta_1)^2 + 4M_1 M_2 \beta_0^2}].$$

Po wyrażeniu β_1 i β_2 na powrót przez liczby wpływe a_{11}, a_{12}, \dots oraz uwzględnieniu, że ugięcia statyczne określają wzory

$$f_{11} = M_1 g a_{11}, \quad f_{12} = M_2 g a_{12}, \quad f_{21} = M_1 g a_{21}, \quad f_{22} = M_2 g a_{22}$$

otrzymamy w końcu wzory na $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ i $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$, a stąd powyżej podany wzór na T_1 i T_2 .

z pominięciem masy wału, to *okres drgania podstawowego* całego układu daje wzór

$$(11) \quad T^2 = T_0^2 + T_1^2 + \dots$$

Wprowadziwszy częstości drgań zwykle $n_i = \frac{1}{T_i}$ albo częstotliwości kołowe $\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}$ piszemy równanie DUNKERLEYA w postaciach

$$(11a) \quad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_0^2} + \frac{1}{n_1^2} + \dots \quad \text{albo} \quad \frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \dots$$

Prof. HAHN z Nancy wyjaśnił w roku 1918 na drodze teoretycznej stopień przybliżenia wzoru DUNKERLEYA (Schweiz. Bauz. 1918, t. 72, str. 191. Patrz także A. STODOLA „Dampfturbinen...” 6 wyd. z r. 1924, str. 918). Niemal jednocześnie ukazał się w Z. d. VDI (r. 1918, str. 249) przybliżony wzór KULLA:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \frac{Q_1 f_1^2 + Q_2 f_2^2 + \dots + Q_n f_n^2}{Q_1 f_1 + Q_2 f_2 + \dots + Q_n f_n}}$$

Nowe teoretyczne uzasadnienie tego wzoru dał O. FÖPPL w Zeitschr. f. ang. Math. u. Mechanik z r. 1927 (str. 72 do 77). We wzorze tym oznaczają f_1, f_2, \dots ugięcia statyczne przy obciążeniu wału ciężarami Q_1, Q_2, \dots

Dr ZIPPERER, który porównywał oba wzory z wynikami teorii ścisłej („Technische Schwingungslehre“. Samml. Gösschen. Nr 961 r. 1927, str. 105) stwierdza większą dokładność wzoru KULLA. Nie podobna tutaj nawet pobieżnie traktować ważnych trudniejszych przypadków wałów podpartych trzema i więcej łożyskami, ale wypada przynajmniej wspomnieć, że profesor Politechniki Lwowskiej, W. BOROWICZ dał już w swojej pracy doktorskiej w Politechnice Monachijskiej z r. 1915 pierwszą praktyczną metodę wykreślną dla tych przypadków, stosowaną i zalecaną przez prof. STODOLĘ, z powołaniem się na pracę BOROWICZA. Przytaczany dopiero co niemiecki autor nazywa tę metodę – rzecz znamieną – sposobem STODOLI.

§ 6. Drgania skrętne wałów z ciężkimi masami skupionymi

Od przypadku najprostszego, rozpatrzonego powyżej, przejdziemy łatwo do przypadku dwu mas o wzajemnej odległości l (rys. 7). Liczba i położenie łożysk jest dla drgań skrętnych zupełnie obojętne. Przy drganiach zachodzi ruch obu mas w strony przeciwne, a wtedy pomiędzy masami znajduje się *przekrój węzłowy*, tj. pozostający w spoczynku (względny). Części wału po obu stronach przekroju węzłowego drgają zatem tak, jakby były utwierdzone w tym przekroju. Z warunku równości okresów T_1 i T_2 obu drgań znajdujemy wartość stosunku $l_1:l_2$, w jakim węzeł dzieli długość skręcaną wału l . Części wystające obracają się razem

z odpowiednimi masami, jak ciała sztywne o momentach bezwładności Θ_1 i Θ_2 . A zatem:

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_1 l_1}{C}}; \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_2 l_2}{C}}, \quad C = GJ_0,$$

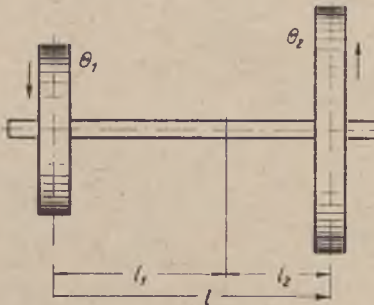
$T_1 = T_2$, z czego wynika $l_1 : l_2 = \Theta_2 : \Theta_1$ oraz

$$l_1 = \frac{\Theta_2 l}{\Theta_1 + \Theta_2}, \quad l_2 = \frac{\Theta_1 l}{\Theta_1 + \Theta_2}.$$

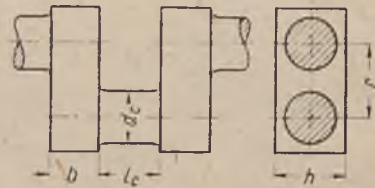
Okres drgań podstawowych układu określi przeto wzór:

$$(12) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_1 \Theta_2}{\Theta_1 + \Theta_2} \frac{l}{C}}.$$

Wpływ bezwładności skrecającej części wału uwzględniamy w przybliżeniu dostatecznym, zwiększając Θ_1 i Θ_2 o $\frac{1}{3}$ momentu bezwładności



Rys. 7



Rys. 8

części wału o długości l_1 i l_2 . Oznaczywszy przez Θ_0 moment bezwładności całej skrecającej części wału napiszemy poprawiony wzór na T , zastępując Θ_1 i Θ_2 przez

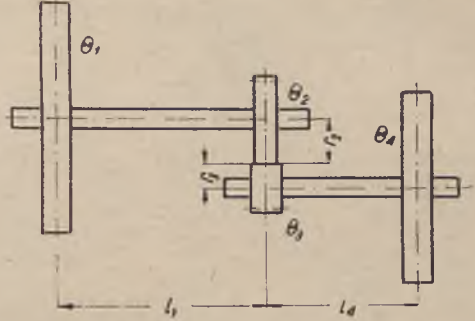
$$\Theta_1 + \frac{\Theta_0}{3} \frac{\Theta_2}{\Theta_1 + \Theta_2} \quad \text{i} \quad \Theta_2 + \frac{\Theta_0}{3} \frac{\Theta_1}{\Theta_1 + \Theta_2}.$$

W razie gdy na długości l ma wał przekrój zmienny, to wprowadzamy zamiast tego w rachunek powyższy inną długość l_{red} sprowadzoną do wału cylindrycznego o obranej (zresztą dowolnie) średnicy d . Część wału o długości a i średnicy D zastępujemy wtedy częścią o długości $a_{red} = a \left(\frac{d}{D}\right)^4$ i średnicy d , jako dającej taki sam kąt skrecaenia.

Dla części wykorbionej wykonywa się również redukcję, zastępując ją kawałkiem wału o obranej grubości d_c i długości

$$(13) \quad l_{red} = 2r \frac{G}{E} \frac{J_0}{J_s} + l_c \frac{J_0}{J_c} \quad (\text{rys. 8}).$$

Tutaj oznacza r promień korby, $J_0 = \frac{d^4 \pi}{32}$, l_c długość czopa, J_c biegunowy moment bezwładności przekroju czopa, $J_s = \frac{bh^3}{12}$ moment bezwładności przekroju ramienia korby.



Rys. 9

W przypadku trzech mas o momentach bezwładności $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, osadzonych na wale w odstępach l_{12} i l_{23} , przy czym sztywności skręcenia odpowiednich części wału są C_{12} i C_{23} , otrzymujemy z pominięciem bezwładności samego wału następujące równanie do obliczenia częstotliwości kolowej $\omega = \frac{2\pi}{T}$ drgań podstawowych, oznaczywszy dla skrócenia

$$(14) \quad \omega^4 - \left[\gamma_1 \left(\frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{\theta_2} \right) + \gamma_2 \left(\frac{1}{\theta_2} + \frac{1}{\theta_3} \right) \right] \omega^2 + \gamma_1 \gamma_2 \left(\frac{1}{\theta_1 \theta_2} + \frac{1}{\theta_2 \theta_3} + \frac{1}{\theta_3 \theta_1} \right) = 0.$$

Rozwiązanie daje po stosownej dyskusji dwie różne częstotliwości, podobnie jak w przypadku drgania giętnego wału z dwiema masami ⁶⁾.

Wielką doniosłość techniczną ma przypadek dwóch wałów, połączonych przekładnią zębatą i obciążonych masami wirującymi, np. turbiny i śruby okrętowej (rys. 9).

⁶⁾ Do wyniku powyższego dochodzimy, ustawiając równania różniczkowe ruchu wszystkich mas osadzonych na wale. Oznaczywszy przez M_i bezwzględną wartość momentu skręcającego, przeniesionego wskutek sprężystości części wału leżącej pomiędzy masą i -tą a $(i+1)$ -szą, mamy

$$M_i = \frac{C_{i,i+1}}{l_{i,i+1}} (\varphi_i - \varphi_{i+1}) = \gamma_i (\varphi_i - \varphi_{i+1}),$$

jeżeli φ , oznacza kąt obrotu masy i -tej. A zatem równania różniczkowe ruchu będą:

$$\begin{aligned} \theta_1 \varphi_1'' &= -M_1 = -\gamma_1 (\varphi_1 - \varphi_2), \\ \theta_2 \varphi_2'' &= M_1 - M_2 = \gamma_1 (\varphi_1 - \varphi_2) - \gamma_2 (\varphi_2 - \varphi_3), \\ &\dots \dots \dots \\ \theta_{n-1} \varphi_{n-1}'' &= M_{n-2} - M_{n-1} = \gamma_{n-2} (\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) - \gamma_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n), \\ \theta_n \varphi_n'' &= M_{n-1} = \gamma_{n-1} (\varphi_{n-1} - \varphi_n). \end{aligned}$$

Z pominięciem bezwładności wałów, a uwzględnieniem momentów bezwładności Θ_2 i Θ_3 obu kół zębatych, zmniejszających liczbę obrotów lewej masy w stosunku 1:n, jeżeli $n = \frac{r_2}{r_3}$, otrzymujemy na wyznaczenie częstotliwości kolowej drgań własnych równanie

$$(17) \quad \omega^4 - \left(\frac{\gamma_1}{\Theta_1} + \frac{\gamma_1 + n^2 \gamma_4}{\Theta_2 + n^2 \Theta_3} + \frac{\gamma_4}{\Theta_4} \right) \omega^2 + \frac{\gamma_1 \gamma_4}{\Theta_1 \Theta_4} \left(1 + \frac{\Theta_1 + n^2 \Theta_4}{\Theta_2 + n^2 \Theta_3} \right) = 0.$$

Tutaj oznaczają, jak poprzednio $\gamma_1 = \frac{C_1}{I_1}$, $\gamma_4 = \frac{C_4}{I_4}$ współczynniki skręcenia obu wałów.

Mamy zatem znowu do czynienia z dwiema częstotliwościami drgań własnych ⁷⁾.

W interesującym nas przypadku trzech mas mamy trzy równania, z których drogą rugowania otrzymujemy równania różniczkowe 6-go rzędu, zawierające każde tylko jedną z szukanych funkcji $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Wszystkie trzy równania mają tę samą postać i pozwalają od razu na obniżenie rzędu o 2. Otrzymujemy w końcu:

$$(15) \quad \frac{d^4 \varphi}{dt^4} + \left[\gamma_1 \left(\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{\Theta_2} \right) + \gamma_2 \left(\frac{1}{\Theta_3} + \frac{1}{\Theta_3} \right) \right] \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \gamma_1 \gamma_2 \left[\frac{1}{\Theta_1 \Theta_2} + \frac{1}{\Theta_2 \Theta_3} + \frac{1}{\Theta_3 \Theta_1} \right] \varphi = 0.$$

Całką ogólną jest (przy $i = 1, 2, 3$):

$$(16) \quad \varphi_i = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t + C_i \cos \omega_i t + D_i \sin \omega_i t,$$

jeżeli wartości ω_1 i ω_2 obliczymy z równania charakterystycznego, napisanego już powyżej.

⁷⁾ Tok rachunku jest następujący: Oznaczywszy przez Z siłę styczną, przeniesioną przez przekładnię w kole podziałowym, piszemy równania ruchu wszystkich czterech mas wirujących w postaci:

$$\begin{aligned} \Theta_1 \varphi_1'' &= -\gamma_1 (\varphi_1 - \varphi_2) \\ \Theta_2 \varphi_2'' &= \gamma_1 (\varphi_1 - \varphi_2) - Z r_2 \\ \Theta_3 \varphi_3'' &= -\gamma_4 (\varphi_3 - \varphi_4) + Z r_3 \\ \Theta_4 \varphi_4'' &= \gamma_4 (\varphi_3 - \varphi_4). \end{aligned}$$

Ponieważ nadto jest φ_2 zależne od φ_3 na podstawie związku $r_2 \varphi_2 = r_3 \varphi_3$ albo $\varphi_3 = n \varphi_2$, przeto liczba równań zgadza się z liczbą niewiadomych $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, Z$. Rugując je kolejno, dochodzimy w końcu do równania różniczkowego czwartego rzędu, którego całka ogólna ma postać (16), a którego równaniem charakterystycznym jest (17). Jeżeli Θ_2 i Θ_3 można pominąć wobec Θ_1 i Θ_4 , to mnożąc całe równanie (17) przez $\Theta_2 + n^2 \Theta_3$ i zmniejszając ten wyraz aż do zera otrzymujemy kwadratowe równanie uproszczone, z którego wynika wzór na częstotliwość kolową:

$$(18) \quad \omega = \sqrt{\frac{\frac{1}{\Theta_1} + \frac{1}{n^2 \Theta_4}}{\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{n^2 \gamma_4}}}.$$

§ 7. Techniczne sposoby wyznaczenia częstotliwości drgań skrętnych wałów z licznymi masami skupionymi

Przy większej liczbie mas staje się droga całkowania równań różniczkowych ruchu, w celu otrzymania wartości częstotliwości drgań, bardzo nieążliwa i dlatego obmyślono metody uproszczone, omijające całkowanie. Punkt wyjścia stanowią rozważania następujące.

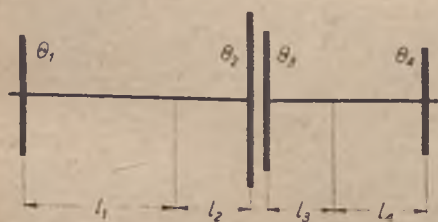
Okres drgania jednej masy, osadzonej na końcu wału, którego drugi koniec jest utwierdzony, określa stosownie do równania (1) w § 2 wzór:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta l}{C}}$$

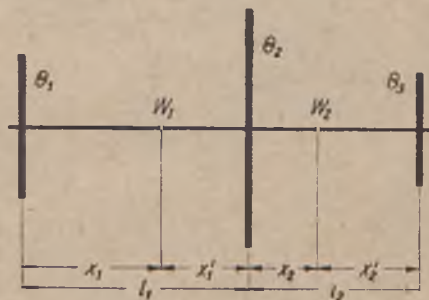
Jeżeli zmieniając momenty bezwładności Θ i długości l przy tej samej sztywności skręcania C sporządzimy szereg układów tegoż rodzaju o wspólnym okresie T , to musimy spełnić warunek

$$\Theta_1 l_1 = \Theta_2 l_2 = \dots$$

Łącząc jakiegokolwiek dwa z tych układów końcami utwierdzonymi, przy założeniu, że masy obracają się w kierunkach przeciwnych, otrzymujemy drgający układ podwójny z węzłem w przekroju złączenia.



Rys. 10



Rys. 11

Pomyślmy sobie drugi podobny układ $\Theta_3, l_3, l_4, \Theta_4$ drgający z tym samym okresem obok pierwszego tak, aby ruchy Θ_2 i Θ_3 były zgodne (rys. 10). Nic się oczywiście nie zmieni w warunkach ruchu, jeżeli sobie pomyślimy masy Θ_2 i Θ_3 złączone w jedną. Otrzymaliśmy przeto układ potrójny z dwoma węzłami i okresem T . Podobnie łatwo zbudować układ poczwórny z trzema węzłami i układ n -krotny z $(n-1)$ węzłami.

Mając teraz odwrotnie dany np. układ potrójny (rys. 11) i szukając okresu T jego drgań własnych, wiemy, że okres ten byłby znany, gdybyśmy znali położenie węzła W_1 określone długością x_1 lub x_1' , przy czym

$x_1 + x_1' = l_1$. Wtedy bowiem $T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_1 x_1}{C}}$. Do obliczania x_1 dzielimy so-

bie w myśli $\Theta_2 = X_2 + X'_2$ i $l_2 = x_2 - x'_2$, przy czym x'_2 jest odległością węzła W_2 od Θ_3 . Możemy teraz napisać następujące równania warunkowe:

$$(19) \quad \begin{cases} \Theta_1 x_1 = x'_1 X_2 = X'_2 x_2 = x'_2 \Theta_3 \\ x_1 + x'_1 = l_1; \quad x_2 + x'_2 = l_2; \quad X_2 + X'_2 = \Theta_2. \end{cases}$$

Mamy zatem 6 równań o sześciu niewiadomych. Rugowanie prowadzi do następującego równania kwadratowego, wyznaczającego szukaną wartość $z = \Theta_1 x_1 = \dots$

$$(20) \quad (\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) z^2 - [\Theta_1 l_1 (\Theta_2 + \Theta_3) + \Theta_3 l_2 (\Theta_1 + \Theta_2)] z + \Theta_1 \Theta_2 \Theta_3 l_1 l_2 = 0.$$

To równanie jest, jak łatwo się przekonać, całkiem równoważne równaniu (14) i daje w ogóle dwie rzeczywiste dodatnie wartości odciętej węzła W_1 , a więc dwa okresy podstawowych drgań harmoniczných.

W przypadku n mas i odpowiednich odległości w kolejności:

$$\Theta_1, l_1, \Theta_2, l_2, \dots, l_{n-1}, \Theta_{n-2}, l_{n-1}, \Theta_n$$

mamy do czynienia z równaniami:

$$(21) \quad \begin{cases} x_1 + x'_1 = l_1; \quad x_2 + x'_2 = l_2; \quad \dots; \quad x_{n-1} + x'_{n-1} = l_{n-1}; \\ X_2 + X'_2 = \Theta_2; \quad X_3 + X'_3 = \Theta_3; \quad \dots; \quad X_{n-1} + X'_{n-1} = \Theta_{n-1}; \\ \Theta_1 x_1 = x'_1 X_2 = x_2 X'_2 = x'_2 X_3 = x_3 X'_3 = \dots = x_{n-1} X'_{n-1} = x'_{n-1} \Theta_n. \end{cases}$$

Rugając połowę niewiadomych („kreskowane“ x i X) otrzymujemy układ

$$(21a) \quad \begin{cases} \Theta_1 x_1 = (l_1 - x_1) X_2 = x_2 (\Theta_2 - X_2) = (l_2 - x_2) X_3 = x_3 (\Theta_3 - X_3) = \\ = \dots = x_{n-2} (\Theta_{n-2} - X_{n-2}) = (l_{n-2} - x_{n-2}) X_{n-1} = \\ = x_{n-1} (\Theta_{n-1} - X_{n-1}) = (l_{n-1} - x_{n-1}) \Theta_n, \end{cases}$$

o niewiadomych $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}; X_2, X_3, \dots, X_{n-1}$.

Obrawszy teraz jakąkolwiek wartość przybliżoną x_1 , np. $x_1 = a$, rozwiązujemy bardzo łatwo po kolei równania układu aż do przedostatniego według schematu:

$$\begin{aligned} X_2 &= \frac{\Theta_2 a}{l_1 - a}, \quad x_2 = \frac{(l_1 - a) X_2}{\Theta_2 - X_2}, \quad X_3 = \frac{x_2}{l_2 - x_2} (\Theta_2 - X_2), \\ x_3 &= \frac{(l_2 - x_2) X_3}{\Theta_3 - X_3} \dots X_{n-1} = \frac{x_{n-2} (\Theta_{n-2} - X_{n-2})}{l_{n-2} - x_{n-2}}, \\ x_{n-1} &= \frac{(l_{n-2} - x_{n-2}) X_{n-2}}{\Theta_{n-1} - X_{n-1}}. \end{aligned}$$

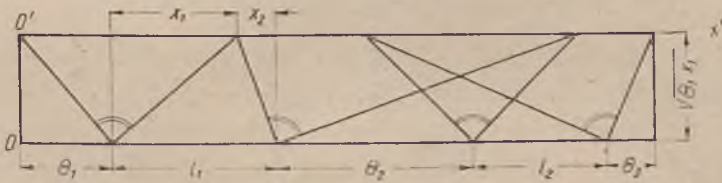
Gdyby a było prawdziwą wartością x_1 , to i ostatnie równanie

$$x_{n-1} (\Theta_{n-1} - X_{n-1}) = (l_{n-1} - x_{n-1}) \Theta_n$$

po wstawieniu już obliczonych wartości x_{n-1} i X_{n-1} , byłyby spełnione. Θ_n wyrażone z tego równania przez obliczone już wielkości x_{n-1} , X_{n-1} byłyby rzeczywistą wartością momentu bezwładności n -tej masy. Jeżeli $a \neq x$, to i

$$\Theta'_n = \frac{x_{n-1}(\Theta_{n-1} - X_{n-1})}{l_{n-1} - x_{n-1}} \neq \Theta_n.$$

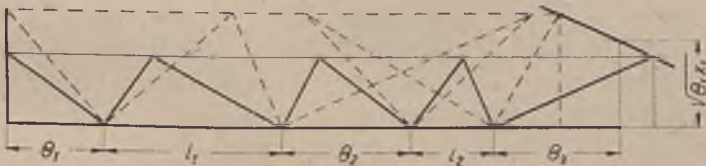
Dajmy na to, że przyjęcie $x_1 = a$ doprowadziło tą drogą do $\Theta'_n < \Theta_n$. Niechaj drugie przyjęcie $x_1 = b$ prowadzi do nowej wartości $\Theta''_n > \Theta_n$. Wtedy prawdziwa wartość leży pomiędzy a i b ; łatwo ją znaleźć z dostatecznym



Rys. 12

przybliżeniem za pomocą interpolacji rachunkowej lub wykresłej. W razie potrzeby można powtórzyć rachunek, zamykając szukaną wartość w granicach ciśniejszych.

Pierwsze przybliżenie znajduje się najszybciej wykreslnie sposobem podanym w r. 1926 w piśmie „Maschinenbau“ (Nr 5, str. 220) przez P. KOHNA. Na prostej Ox (rys. 12) odmierzamy kolejno w dowolnej skali $\theta_1, l_1, \theta_2, l_2, \dots, l_{n-1}, \theta_n$. W początku odcinka przedstawiającego θ_1 wystawiamy odcinek doń prostopadły o długości $\sqrt{\theta_1 a}$, przy czym a jest przybliżoną wartością x_1 . Przez drugi koniec tego odcinka prowadzimy



Rys. 13

równoległą $O'x'$ do Ox i w sposób widoczny na rysunku wykreślamy linię łamaną, tworzącą szereg trójkątów prostokątnych, których przeciwprostokątne leżą na prostej $O'x'$. Według znanego twierdzenia z geometrii, iloczyn rzutów przyprostokątnych na przeciwprostokątną jest równy kwadratowi wysokości na nią spuszczonej, a zatem równania (21a) są spełnione. Jeżeli przypadkowo utrafiliśmy dokładną wartość x_1 przy obliczeniu odległości obu prostych Ox i $O'x'$, to ostatnia przyprostokątna przetnie $O'x'$ w punkcie, którego rzut na Ox trafia w koniec odcinka,

przedstawiającego Θ_n . W przeciwnym razie otrzymamy punkt przesunięty np. na lewo. Wtedy wykonywamy taką samą konstrukcję, przyjąwszy $x_1 = b \approx a$ i jeżeli otrzymamy nowy punkt przesunięty na prawo, to uwidoczniła na rysunku 13 interpolacja wykreślna daje w przybliżeniu prawdziwą wartość $|\Theta_1 x_1|$, a więc zarazem wartość x_1 i okresu drgania

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta_1 x_1}{C}}.$$

§ 8. Sposoby zmniejszenia drgań niebezpiecznych

Omówione sposoby znalezienia okresu lub częstotliwości sprężystych drgań głównych maszyn w przypadkach najprostszych mają ważne znaczenie przy projektowaniu wielu urządzeń maszynowych, ponieważ pozwalają z reguły zapewnić spokojny bieg maszyny. Mówiąc ściślej, pozwalają zapobiec z góry, aby amplitudy nieuniknionych drgań sprężystych wzbudzonych przez drgania stereomechaniczne były dostatecznie małe i praktycznie nieszkodliwe. Przy projektowaniu maszyny ustalamy bowiem normalną i największą dopuszczalną ilość obrotów na minutę, a tym samym okresy jej drgań stereomechanicznych T_s . (Drgania te pojmujemy w najogólniejszym znaczeniu, zaliczając do nich także ruch obrotowy np. turbiny, ponieważ ruch jednostajny po okręgu koła o promieniu a jest ruchem wypadkowym z dwu prostych drgań harmonicznymi $x = a \sin \frac{2\pi}{T} t$ i $y = a \cos \frac{2\pi}{T} t$, których okresem jest T , a faza różni się o $\frac{\pi}{2}$). Nazwijmy przez T_{wl}^D okresy własnych drgań sprężystych wzbudzonych (wymuszonych) przez drgania stereomechaniczne. Okres T_s może być określony nie tylko kinematycznie, lecz często także okresem zmienności siły wzbudzającej drgania (np. w maszynach tłokowych). Otóż wiemy, że amplitudy drgań wymuszonych osiągają tylko wtedy wartości zbyt wielkie, gdy T_{wl} zbliża się do T_s . Dlatego konstruując maszynę winniśmy baczyć, ażeby zawsze T_{wl} różniło się wyraźnie od T_s . Na pytanie — o ile, trudno odpowiedzieć ogólnie. W pewnym konkretnym wypadku maszyny okrętowej wystarczyło zmniejszyć lub zwiększyć T_s o 7% w stosunku do T_{wl} drgań skrętnych wału głównego, ażeby drgania stały się praktycznie niewyczuwalne.

W ogóle nasuwają się następujące główne sposoby zabezpieczenia się od niepożądanych drgań sprężystych.

1. Zapewnienie, ażeby zawsze T_{wl} było znacznie mniejsze od T_s , czyli n_{wl} zawsze większe od n_s . To wymagać może w ogóle bardzo sztywnych wałów, a więc zwiększenia kosztów maszyny.

2. Zapewnienie, ażeby przynajmniej przy normalnej i maksymalnej liczbie obrotów maszyny było n_{wl} dostatecznie różne od n_s . W przypadku $n_{wl} < n_s$ otrzymamy wały lżejsze. Wtedy przy rozruchu maszyny może ona przechodzić przez stadium, w którym n_s zrówna się z n_{wl} , może więc być pobudzona do współbrzmienia. Skoro jednakże przestrzegać będziemy, ażeby przez to stadium maszyna przechodziła dość szybko, o ile się to da osiągnąć, to niebezpieczne amplitudy drgań nie wytworzą się, mówiąc po prostu, „z powodu braku czasu“. Jeżeli maszyna jest zaopatrzona w tachometr, to należy czerwonym znakiem uwydatnić liczbę obrotów, odpowiadającą temu stadium.

2a. W przypadkach, kiedy zespół maszyny roboczej z silnikiem trudno połączyć wałem dość długim, ażeby $\frac{C}{l}$ miało wartość, jaka jest potrzebna do wykluczenia rezonansu, stosujemy z korzyścią włączenie do krótkiego wału sprzęgła sprężystego. Przy pomocy takiego sprzęgła można krótkiemu walowi nadać stosownie zmniejszoną wartość współczynnika siły sprężystości, ażeby uniknąć wielkich drgań.

3. Zmniejszenie amplitud drgań wymuszonych przez urządzenia tłumiące energicznie drgania. Zastosowanie tego sposobu zaleca się zwłaszcza przy silnikach uruchamiających pojazdy i samoloty, które muszą pracować przez długie przedziały czasu przy różnych n , a dla lekkości nie mogą mieć bardzo sztywnych wałów.

Doniosłe znaczenie wielkości współczynnika tłumienia drgań uwydatnia dobrze wykres (rys. 14), otrzymany z teorii drgań wymuszonych z tłumieniem proporcjonalnym do prędkości w przypadku układu o jednym stopniu swobody. Oś pozioma przedstawia wartości

$$\beta = \frac{\omega_s \text{ (częstotliwość drgań wzbudzających)}}{\omega_{wl} \text{ (częstotliwość drgań własnych)}}$$

Na osi pionowej odmierzone wartości stosunku

$$a = \frac{a \text{ (amplituda drgań wymuszonych)}}{a_s \text{ (amplituda drgań wzbudzających)}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + \beta^2 \gamma^2}}$$

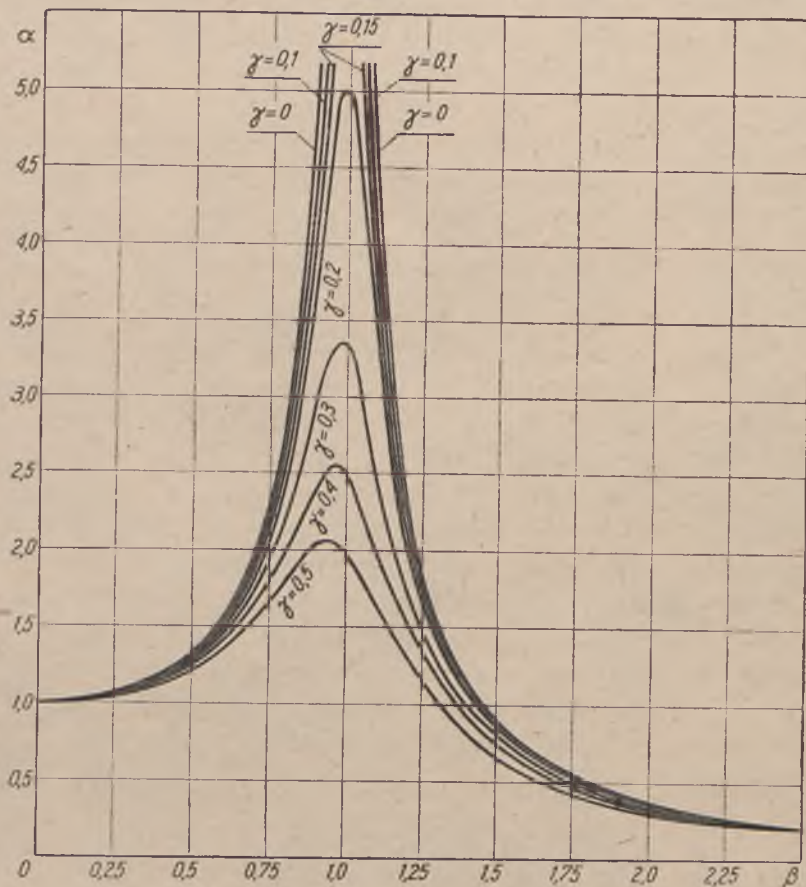
Parametr bezwymiarowy

$$\gamma = \frac{\text{współczynnik tłumienia}}{\omega_{wl}}$$

Różnym wartościom tego parametru od $\gamma=0$ do $\gamma=0,5$ odpowiadają krzywe zależności a od β . Punkty szczytowe tych krzywych odpowiadają zjawisku współbrzmienia. Przy małych wartościach współczynnika tłumienia mogą amplitudy wzrastać do wartości przewyższającej dziesięć i setki razy amplitudy drgań wzbudzających; przy dużych war-

tościach tego współczynnika, np. przy $\gamma=0,5$, jest ten wzrost zaledwie dwukrotny.

Duże drgania sprężyste, jakie powstają w maszynach przez wzbudzenie, są szkodliwe nie tylko ze względów wytrzymałościowych, lecz



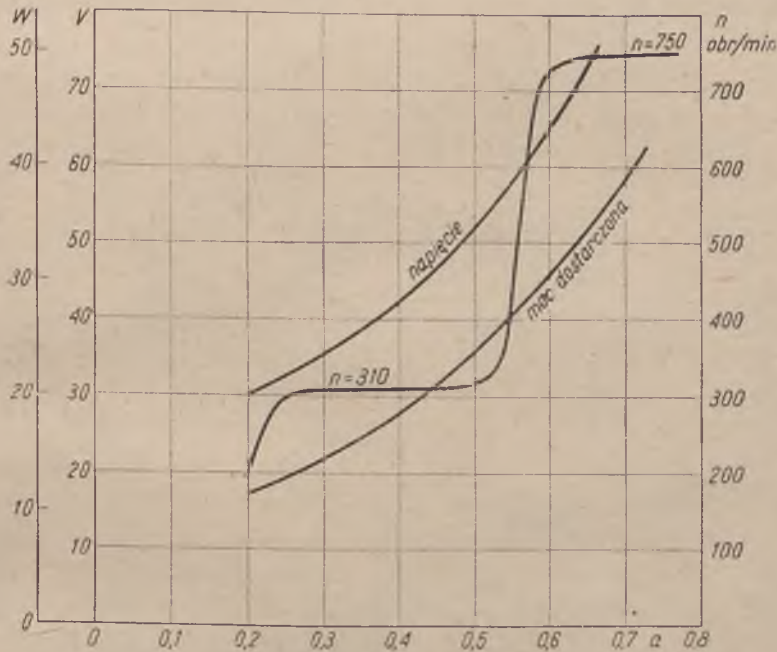
Rys. 14

także energetycznych, albowiem drgania przenoszą się na podstawę lub fundament maszyny i rozpraszają bezpożytecznie część energii dostarczonej maszynie lub wytworzonej przez nią, jeżeli jest silnikiem. Łatwo to pokazać na doświadczeniu opisanym poniżej.

§ 9. Drganie fundamentów maszyn

Osadziwszy mały silnik elektryczny na ciężkiej podstawie i zamocowawszy na osi niewielką masę mimośrodowo, włączamy prąd mierzony woltomierzem i amperomierzem z możliwością regulowania napięcia i na-

teżenia. Siła odśrodkowa masy wirującej działa za pośrednictwem łożysk na podstawę, pobudzając ją do drgań o składowych poziomych i pionowych. W przypadku demonstrowanym w r. 1912 w Monachium przez prof. A. SOMMERFELDA pojawiły się bardzo silne drgania poziome podstawy, odpowiadające drganiom giętkim jej pionowych filarów, przy liczbie obrotów $n=310$ na minutę. Ta liczba bowiem zgadza się z liczbą drgań własnych poziomych podstawy. Gdy teraz zwiększono dalej szybkość dopływu energii elektrycznej, czyli moc, ażeby wywołać szybszy



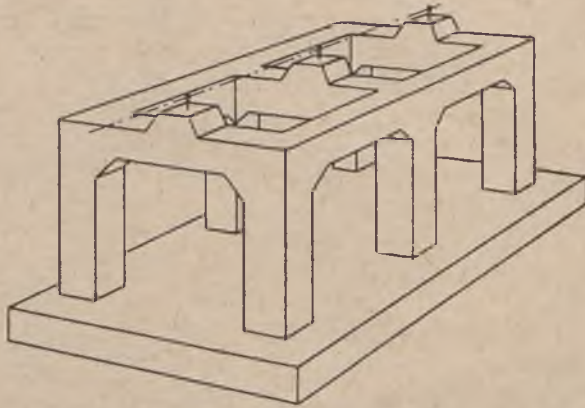
Rys. 15

obrót wirnika, to stwierdzono, że obrót ten zrazu prawie nie ulega zmianie, a cały przyrost energii (względnie mocy) zostaje zużyty na podtrzymanie drgań podstawy. Dopiero przy dalszym zwiększeniu mocy zaczynała się podstawa uspokajać, a liczba obrotów silnika wzrastała bardzo silnie, aż do chwili, gdy przy $n=750$ nastąpiło zrównanie okresu obrotu z okresem pionowych drgań giętkich podstawy. Wtedy zaczęły się znowu silne drgania pionowe, które podobnie przeszkadzały zwiększeniu liczby obrotów ponad 750 przy dalszym wzroście mocy elektrycznej. Otrzymany przy tym wykres przedstawia rys. 15.

Podobnie jak ta podstawa drgają żelbetowe fundamenty turbin i dlatego wypada również przy projektowaniu tego rodzaju urządzeń maszynowych poznać okresy drgań własnych fundamentów. Drgania te posiadają oczywiście charakter odmienny, gdy fundament stanowi bryła

(blok) muru, spoczywająca na podłożu podatnym. Bryła taka jest zdolna przede wszystkim do drgań postępowych i obrotowych o trzech składowych kierunkach osi głównych bezwładności. Ale schemat fundamentów wielkich silników ma najczęściej postać konstrukcji ramowej (rys. 16), której słupy są utwierdzone w ciężkiej i sztywnej płycie dolnej. Belki poziome ram podpierają główne łoża maszyny, wskutek czego każda z ram może być pobudzona do drgań giętnych różnego rodzaju. Na podstawie teorii odkształceń sprężystych, przy równoważnym obciążeniu statycznym takiej ramy można obliczyć w przybliżeniu okresy jej drgań własnych⁸⁾.

Jednakże w ostatnich latach zwrócono słusznie uwagę na to, że belki poziome oddzielnych ram są połączone płytą „stołową“ i tworzą razem



Rys. 16

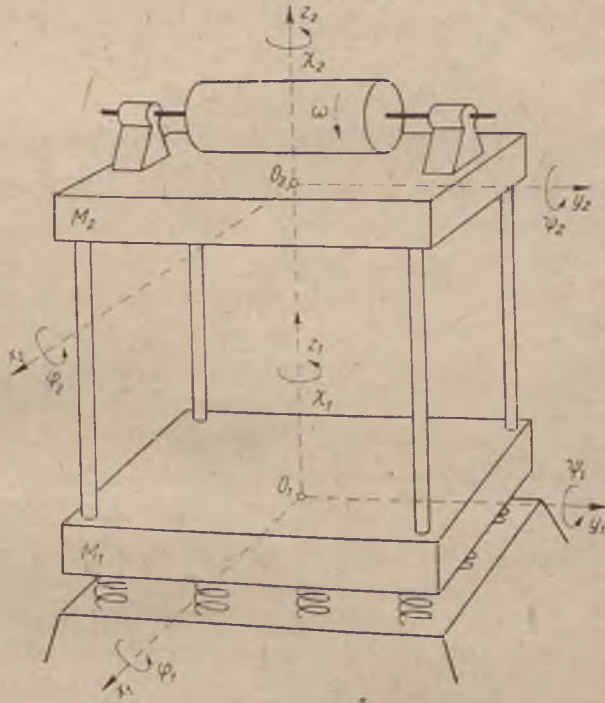
z nieruchomymi częściami maszyny bardzo sztywną całość, tak iż schemat teoretyczny fundamentu jako układu drgającego zbliża się raczej do dwóch ciężkich i sztywnych mas (płyty stołowej i fundamentowej), połączonych sprężystymi słupami. Całość spoczywa przy tym na sprężystym podłożu (rys. 17). Badaniem drgań takiego układu zajął się A. STEINBACH w rozprawie doktorskiej Politechniki Darmstadtckiej z r. 1930⁹⁾.

Obliczenia drgań fundamentów są jeszcze bardzo dalekie od tej dokładności, z jaką wyznaczamy teoretycznie drgania głównych części samych maszyn. Powód tkwi po części w zbyt wielkich uproszczeniach modelu teoretycznego, jakim się posługujemy w rachunku, po wtóre zaś w bardzo jeszcze niedokładnej znajomości stałych sprężystości i tarcia

⁸⁾ Patrz np. artykuł A. MYSTKOWSKIEGO w Przeglądzie Technicznym z r. 1930, zes. 21.

⁹⁾ Bauingenieur z r. 1931 nr 17, str. 295.

wewnętrzny gruntu, stanowiącego podatne podłoże fundamentu. Odnośne badania są aktualnym tematem specjalnych pracowni zagranicą. W krajach bardzo uprzemysłowionych, gdzie liczne silniki pracują w dzielnicach miast szczelnie zabudowanych, zdarzają się często przypadki skarg sądowych z powodu drgań odczuwanych nieraz przykro nawet przez dalszych sąsiadów. Drgania te rozchodzą się oczywiście od fundamentu



Rys. 17

silnika przez grunt jako drgania, względnie fale mikrosejsmiczne. Takie same drgania odczuwamy przy odległych trzęsieniach ziemi lub ruchu ciężkich pojazdów w pobliżu. Skoro jednakże ich źródłem jest silnik, to stają się bardzo dokuczliwymi przez swoją nieustanność. Z tego powodu wykonano niedawno badania wrażliwości człowieka na proste drgania harmoniczne o określonej częstotliwości n leżącej między 3 a 70 Hz i amplitudach a od 10^{-4} do 1 cm¹⁰⁾.

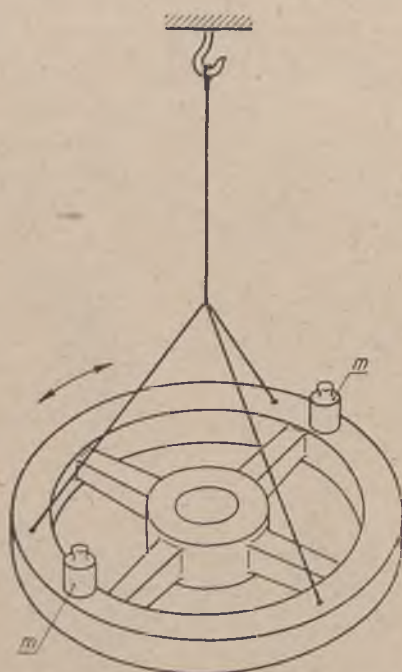
Na platformie pobudzonej do takich drgań umieszczono osobę badaną w pozycji stojącej i leżącej kolejno przy drganiach w każdym z trzech kierunków prostokątnego układu o jednej osi pionowej. Ponieważ przy obliczeniach wytrzymałościowych budowli narażonych na drgania sejsmi-

¹⁰⁾ H. REIHER i F. I. MEISTER, VDI. Forschung, tom 2, 1931, nr 11.

czne wysuwa się z natury rzeczy na pierwszy plan przyśpieszenie drgania, którego wielkość decyduje o niebezpieczeństwie, przeto przypuszczano, że i wrażliwość organizmu żywego będzie zależna od przyśpieszenia. Tymczasem okazało się z licznych badań, że odczuwanie drgań jest zależne od iloczynu z amplitudy i częstości, a zatem od prędkości. Np. przykre, ale nie zagrażające zdrowiu drgania pionowe zaczynają się od iloczynu $na = 45 \cdot 10^{-3}$; natomiast powyżej $na = 70 \cdot 10^{-3}$ są drgania już szkodliwe i dla zdrowia niebezpieczne.

§ 10. Pomiary odnoszące się do drgań

Nawet przy stosowaniu wzorów teoretycznych nie zawsze można obliczyć wartość wielkości stałych, występujących jako główne parametry zagadnienia. Obliczenie np. momentu bezwładności koła zamachowego lub wirnika może być niekiedy tak żmudne, a przy tym mało dokładne,



Rys. 18

że korzystnie je zastąpić wyznaczeniem doświadczalnym. Do tego nadaje się wybornie sposób GAUSSA, polegający na zawieszeniu koła na drucie lub linie drucianej (rys. 18) i dwukrotnym pomiarze okresu drgań skrętnych, raz samego koła (okres T_1), drugi raz koła wraz z umocowanymi na wieńcu po końcach średnicy $2R$ dwoma równymi masami m (okres T_2). Jeżeli Θ oznacza szukany moment bezwładności samego koła, a k współczynnik skręcenia, to

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{k}};$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta + 2mR^2 + 2\Theta_0}{k}},$$

przy czym Θ_0 oznacza środkowy moment bezwładności masek dodatkowej masy względem osi równoległej do osi obrotu układu (wielkość tę można zwykle pominąć). Rugując z tych równań k , znajdujemy

$$\Theta = 2m \frac{R^2 T_1^2}{T_2^2 - T_1^2}.$$

W celu otrzymania wyników możliwie dokładnych, należy dobrać zawieszenie tak, aby układ wykonywał 0 do 120 drgań na minutę i liczyć okresy przez 5 do 10 minut. Dodatkowa masa m może wynosić 5 do 10% masy głównej. Ważny jest oczywiście dokładny pomiar R .

Inne sposoby wyznaczenia doświadczalnego momentu bezwładności polegają na znanych własnościach wahadła fizycznego. Przy ich stosowaniu nie należy zapominać, że o ile drgania utrzymywane siłami sprężystości są *izochroniczne*, bez względu na amplitudę w granicach dość obszernych, to drgania, czyli wahnienia, zależne tylko od siły ciężkości, można traktować jako izochroniczne z dostatecznym przybliżeniem, jeżeli amplitudy odchyłeń nie przewyższają około 8°.

Podobnie trzeba często wyznaczyć doświadczalnie wartość *współczynnika siły sprężystości*, kiedy dokładne obliczenie teoretyczne staje się niemożliwe, np. dla drgań skrętnych wału wykorbionego silnika wielocylindrowego. Wtedy zaopatrujemy wał na końcach w dwa dość długie i sztywne ramiona równoległe i przeciwnie skierowane. Koniec jednego ramienia opiera się na platformie wagi dziesiętnej, na koniec drugiego ramienia wywieramy nacisk prasą hydrauliczną. W ten sposób realizujemy moment skręcający o znanej wielkości. Przy pomocy zwierciadełek umieszczonych na końcach wału mierzymy jednocześnie kąt skręcenia φ . Z tych danych łatwo obliczyć równoważną (zastępczą) długość gładkiego wału o danej długości d ze wzoru:

$$I_{red} = \frac{d^4 \pi}{32} \frac{G}{M} \varphi,$$

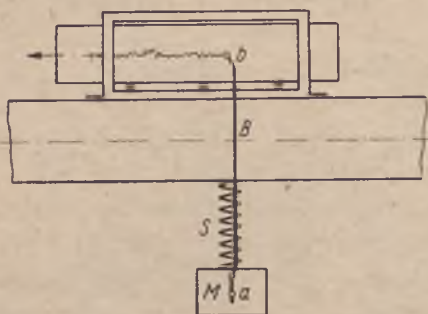
czyli wykonać redukcję analogiczną do prostego przypadku, podanego już wyżej w § 6.

Niemniej ważne, a nawet niekiedy niezbędne są przyrządy do bezpośredniego pomiaru drgań. Zależnie od rodzaju drgań w maszynach stosuje się przyrządy specjalne, zwykle samopiszące, zwane *torsjografami* i *wibrografami*. Pierwszymi mierzy się amplitudy i okres drgań skrętnych wałów; drugie służą do pomiaru drgań giętnych, a także składowych określonego kierunku wszelkich drgań fundamentów, gruntu i budowli, wzbudzonych drganiami maszyny. Ważne znaczenie techniczne mają *sejsmografy*, stosowane od dawna w badaniach trzęsień ziemi i *pallografy*, obmyślane do mierzenia drgań korpusów statków. Te ostatnie bywają budowane także w ten sposób, że notują wszystkie trzy składowe przeszerzennego drgania badanego miejsca.

Prócz tych przyrządów, polegających na zasadzie czysto mechanicznej, o której zaraz będzie mowa, stosują inżynierowie-badacze różne urządzenia optyczne, kinofotograficzne i elektryczne do mierzenia i zapisywania drgań mechanicznych, na których wymienienie nawet nie ma tutaj

miejsca. Czytelnikom interesującym się szczególnie tą sprawą można polecić obszerny referat H. STEUDINGA w 2 części IV tomu „Handbuch der Physik und technischen Mechanik“ pod redakcją AUERBACHA i HORTA (Lipsk 1931).

Wymienione przyrządy mechaniczne składają się z masy bezwładnej stosownie dobranej, połączonej więzią sprężystą z miejscem układu, którego drgania chcemy zbadać. Prosty schemat takiego urządzenia przed-



Rys. 19

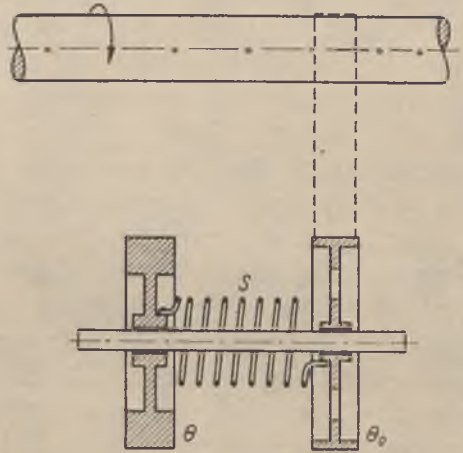
stawia rys. 19, przy założeniu, że chodzi o pomiar pionowych drgań przekroju B belki poziomej. Na miękkiej sprężynie S wisi masa M , do której przytwierdzono z boku sztywny a lekki pręcik ab . Koniec pręcika b kreśli linię na papierze nawiniętym na bębenku, który się obraca jednostajnie około osi pionowej, ustalonej na belce. Sporządzony w ten sposób wykres przedstawia właściwie ruch względny rozpatrywanego

przekroju B względem masy M , która również musi drgać. Skoro jednakże częstość drgania własnego masy M jest wskutek miękkości sprężyny bardzo mała wobec częstości drgań wymuszonych, wiemy, że amplituda drgań masy M będzie znikomo mała w porównaniu do amplitudy drgań punktu zawieszenia. Z tego powodu można z dostatecznym przybliżeniem traktować masę M jako nieruchomą. Ze wzoru na stosunek a amplitud drgań wymuszonych do wzbudzających, przytoczonego wyżej (w § 8), wynika istotnie, z pominięciem korzystnego wpływu współczynnika tłumienia γ :

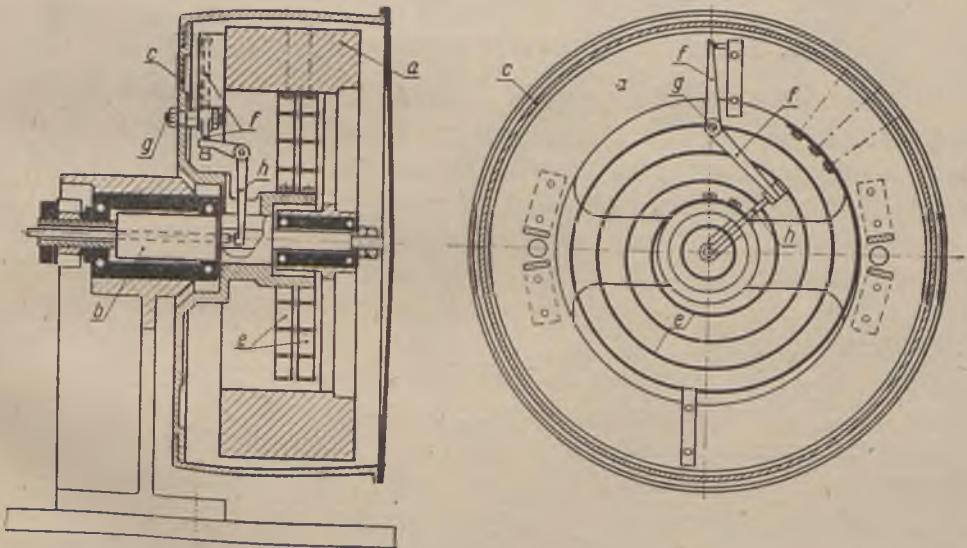
$$a = \frac{1}{\beta^2 - 1}, \text{ przy czym } \beta = \frac{\omega_s}{\omega_{wl}} = \frac{\text{częstotliwość drgań belki}}{\text{częstotliwość drgań masy } M}.$$

Jeżeli np. $\beta = 10$ do 100 , to a leży między $\frac{1}{99}$ a $\frac{1}{9999}$, czyli amplituda drgań masy M zmieści się w granicach dokładności pomiaru amplitudy drgań, którą mierzyć chcemy. Zarazem widzimy, że przyrządy oparte na tej zasadzie winny mieć określoną najmniejszą częstość drgań, do których pomiaru się nadają. Tę swoistą granicę częstości można w niektórych przyrządach obniżyć w miarę potrzeby, wymieniając masę M na większą. Nadto należy przestrzegać, ażeby masa samego przyrządu nie miała wielkiego wpływu na okres i charakter drgań, które mierzyć chcemy, chyba że ten wpływ łatwo uwzględnić rachunkiem.

W *torsjografie*, którego schemat widzimy na rys. 20, jest masa bezwładna masą wirującą o momencie bezwładności Θ , osadzoną luźno na wale i połączoną sprężyną S z lekką tarczą, na tymże wale zaklinowaną, o znacznie mniejszym momencie bezwładności Θ_0 . Gdy tarcza podlega drganiom obrotowym o amplitudzie ϑ_0 , to koło Θ doznaje drgań wzbudzonych o amplitudzie tym mniejszej, im większe jest Θ i im miększa jest sprężyna, przenosząca ruch na Θ . Możemy zatem znowu uzyskać łatwo warunki, wśród których wolno traktować masę Θ jako spoczywającą i mierzyć względem niej kąt odchylenia φ drgającej tarczy Θ_0 . Z walem, którego drgania skrętne badamy, jest tarcza ta połączona pasem możliwie nierozciągliwym, tak iż otrzymujemy od wału ruch obrotowy wraz z nałożonym nań drganiem. Obrót przenosi się za pośrednictwem



Rys. 20



Rys. 21

tarczy i sprężyny na koło Θ jako prawie jednostajny; drganie zaś przenosi się tylko na tarczę i jest określone jej kątem odchylenia φ względem koła. Do wykonania pomiaru i zapisania go jak powyżej na taśmie pa-

pierowej potrzebne jest urządzenie dodatkowe, które GEIGER rozwiązał konstrukcyjnie w sposób uwidoczniiony na rys. 21.

Koło „bezwładne“ a jest umieszczone wewnątrz tarczy pasowej c i połączone z nią sprężyną spiralną e . Ruch zaś względny obu tych ciał określony kątem φ przenosi się za pośrednictwem układu dźwigni kątowych f i h na pręcik przesuwalny w wydrążonej osi, dokoła której obie masy się obracają. Przesunięcie pręcika jest z dostateczną dokładnością proporcjonalne do kąta φ , a zatem koniec pręcika może zapisywać drgania na pasku papieru, przesuwanym jednostajnie obok.

Torsjograf przekształca się na *wibrograf* przez zamianę koła bezwładnego na masę mimośrodowo osadzoną i ustalenie tarczy pasowej względem podstawy przyrządu. Skoro przymocujemy przyrząd do części drgającej, to pręcik piszący odtwarza odpowiednią składową drgania na poruszonym papierze. Szczegóły konstrukcji tego i innych przyrządów, powstałych w minionym dziesięcioleciu, można znaleźć np. w przytoczonej już monografii STEUDINGA. Tutaj wypada zaznaczyć, że w niektórych wypadkach brak kosztownego przyrządu może zastąpić pomysłowość inżyniera, który odbył stosowną praktykę laboratoryjną w pracowniach fizycznych i wytrzymałościowych, przy należytych przygotowaniu teoretycznym.

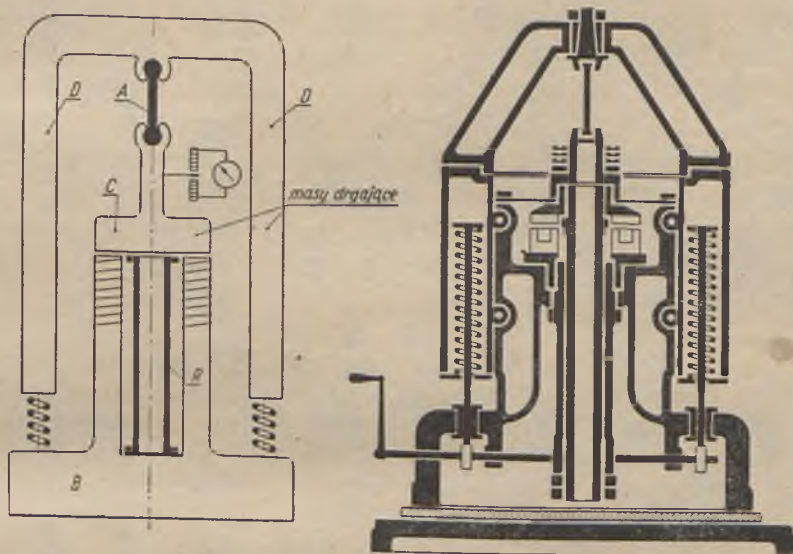
§ 11. Techniczne wyzyskanie zjawiska współbrzmienia

W konstrukcji silników występuje zjawisko współbrzmienia z reguły jako czynnik szkodliwy, z którym walczymy usilnie przy pomocy omówionych obliczeń teoretycznych i badań doświadczalnych. Ale pomysłowość techniczna potrafiła zaprząć siły przyrody tkwiące w tym zjawisku, także do wykonania celowej pracy użytecznej. Tutaj musimy poprzestać na krótkim przedstawieniu trzech przykładów zastosowania. Jednym z nich są nowoczesne *sita rezonansowe*, np. patentu inżyniera niemieckiego H. SCHIEFERSTEINA ¹¹⁾.

Wobec dawnych urządzeń do przesiewu mają one tę zaletę, że nie przenoszą drgań na podstawę maszyny, wskutek czego nie szkodzą budynkowi fabrycznemu i zużywają znacznie mniej energii. Ich zasadą dynamiczną jest sprzężenie dwu układów drgających podobnie jak w drugim przykładzie, którym jest maszyna wytrzymałościowa konstrukcji SCHENKA do piób na zmęczenie obustronne (rys. 22), przy częstości zmian naprężenia 30 000 na minutę. Dlatego objaśnimy tę zasadę na ma zynie SCHENKA. Schemat układu drgającego jest taki: bardzo sztywna masa C , pobudzona do drgań pionowych elektromagnetycznie, jest

¹¹⁾ „Maschinenbau“ t. 7 (1928), str. 749, 809, 1175. — VDI 1932, nr 4, str. 81 — 86.

połączona więzami sprężystymi A i R z dwiema masami B i D , znacznie od niej większymi. Każda z tych mas jest sprężysto podparta. Stosunek mas i stosunek współczynników sztywności więzów jest tak dobrany, że częstość drgań własnych układu równa się 30 000 na min, czyli 500 na sek. Wtedy amplituda drgań mas B i D jest znikomo mała wobec amplitudy



Rys. 22

drgań masy C . Elektromagnesy pobudzające do drgań masę C są zasilane prądem zmiennym o 500 okresach na sek, wobec czego zachodzi współbrzmienie i bardzo nieznaczny dopływ energii elektrycznej jest potrzebny do utrzymania stosunkowo znacznych drgań mechanicznych masy C . Masy zaś B i D przenoszą na podstawę tylko znikomo małe drgania. Więż sprężystą A stanowi próbka badanego metalu, drugą więź sprężystą R — rura stalowa, widoczna w środku na obu rysunkach. Jej współczynnik sztywności EF jest wielokrotnie większy od takiego współczynnika próbki.

Obok tego urządzenia napędowego posiada maszyna oczywiście urządzenie pomiarowe, które jednakże nie określa bezpośrednio siły, jak to zwykle bywa w maszynach wytrzymałościowych, lecz ustala i mierzy amplitudę wahań wydłużenia próbki. Naprężenie otrzymujemy przy pomocy znanego wzoru teorii sprężystości $\sigma = E\varepsilon$, co wymaga znajomości modułu E (niektórzy badacze uważają to za słabą stronę maszyny). Ustalenie i pomiar wielkości amplitudy odbywa się również elektromagnetycznie, jak wskazuje schematyczny rysunek pod uchwytem próbki. Ten elektromagnetyczny układ pomiarowy stanowi również sprzężony układ

drgający elektryczny z działaniem odwróconym. Drganie mechaniczne masy C wzbudza prądy przemienne w obwodzie elektrycznym, stosownie dostrojonym, które służą do pomiaru amplitudy. Stosowane tutaj amplitudy nie przewyższają 0,3 mm. Badane próbki miały, jak dotychczas, od 5 do 12 mm grubości przy stosunku 1:10, zależnie od jakości materiału¹²⁾.

Jako trzeci i ostatni przykład technicznego spożytkowania współbrzmienia przytoczymy znany już od dość dawna *tachometr rezonansowy FRAHMA*. Przyrząd ten służy do pomiaru liczby obrotów maszyn i składa się z rodzaju grzebienia, którego zęby są pręcikami o znanej częstotliwości drgań własnych, rosnącej w kolejności pręcików. Skoro ten przyrząd umocujemy na maszynie w ruchu, to zgodność jej liczby obrotów z częstotliwością drgań własnych jednego z pręcików poznajemy po bardzo znacznych drganiach tego jedynego pręcika spośród innych, nie objawiających drgań dostrzegalnych.

¹²⁾ Bliższe szczegóły zawiera praca doktorska E. LEHRA z Politechniki Stuttgardskiej z r. 1925 i zesz. 329 prac badawczych, wydawanych przez VDI, w którym K. MEMMLER i K. LAUTE referują wyczerpująco badania dokonane przy pomocy maszyny SCHENKA w Instytucie: Berlin-Dahlem.

KILKA SŁÓW O ISTOCIE I TZW. „PRAWACH” TARCIA

(Czasopismo Techniczne, 1926 r.)

Niniejsza garść uwag nasunęła mi się przy lekturze kilku prac młodych dyplomantów naszej Politechniki. Prace te przypomniały mi fakt już od dawna dostrzeżony w literaturze technicznej, że istota *tarcia* jest tłumaczona z reguły jednostronnie lub niewłaściwie i to nawet przez uznanych autorów. Zapewne przyczyniły się do tego podręczniki fizyki elementarnej pielęgnujące bezkrytycznie od stulecia tzw. „prawa” tarcia znalezione przez C. A. COULOMBA i A. MORINA, a mianowicie:

- 1) proporcjonalność tarcia względem nacisku normalnego i
- 2) niezależność od wielkości powierzchni stykania się ciał trących.

Jeżeli zgodzimy się na to, ażeby przez „prawo” rozumieć tylko bardzo dokładne ilościowo ujęcie pewnej kategorii zjawisk przyrody, a mniej dokładne „prawa” nazwać raczej prawidłami, to powyższe „prawa tarcia”, mimo całą ich doniosłość praktyczną, nie zasługują nawet na to drugie miano; są to właściwie reguły praktyczne odpowiadające w grubym przybliżeniu rzeczywistości w pewnych dość nieuchwytnych granicach. Liczbowy *współczynnik proporcjonalności* z pierwszej reguły COULOMBA, czyli tzw. „*współczynnik tarcia*” nie ma zupełnie charakteru stałej fizycznej, jak np. współczynnik sprężystości, lepkości, przewodnictwa cieplnego lub elektrycznego itp. Jest to raczej liczba praktyczna (dla zastosowań technicznych bardzo cenna, podobnie jak współczynnik strat ciepła przez ściany itp.), która ujmuje sumarycznie wpływ całej grupy zjawisk zachodzących przy ruchu względnym dwu ciał stałych z wywarciem wzajemnego nacisku. Stąd napotykanne tu i ówdzie próby wyznaczenia ściśle rzekomego „czystego” współczynnika tarcia są mrzonką, dowodzącą, że autorowie nie zdają sobie dobrze sprawy ze wszystkich zjawisk elementarnych składających się na wytworzenie tarcia. Błędem szczególnie rozpowszechnionym wśród techników jest ślepa wiara w tradycyjny model ciał „chropowatych” jako ciał sztywnych, opatrzonych geometrycznymi nierównościami. Atoli model ten jest zbyt uproszczonym i jednostronnym, by mógł przyczynić się do wyjaśnienia złożonego zjawiska tarcia. W dzi-

siejszym stanie nauki można stwierdzić następujące *fakty fizyczne*, jakie zachodzą przy przesuwaniu z naciskiem jednego rzeczywistego ciała stałego po drugim:

1) najistotniejszym i najłatwiej uchwytym objawem jest *strata energii* rosnąca w przybliżeniu proporcjonalnie względem drogi, a w dość ciasnych granicach wartości nacisku normalnego N , proporcjonalna w takimże przybliżeniu względem N ,

2) jednym ze źródeł strat energii jest *ścieranie* dostrzegalnych lub niedostrzegalnych nierówności powierzchni obu ciał, ale

3) strata energii zachodzi nawet wówczas, gdy powierzchnie są tak *wygładzone*, że nie ma dostrzegalnego ścierania,

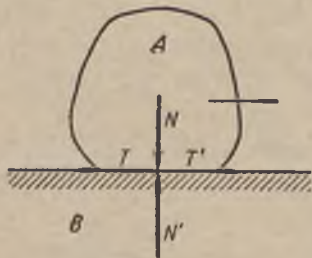
4) pewna część straty energii powstaje dzięki zjawiskom akustycznym, czyli *drżaniom sprężystym* obu ciał. Drżania te występują z rozmaitym natężeniem zależnie od stopnia chropowatości powierzchni,

5) źródłem straty energii w przypadku powierzchni bardzo gładkich jest po części *przyleganie* („adhezja“), czyli siły molekularne stykających się cząstek obu ciał; po części zaś

6) *lepkość*, czyli *tarcie wewnętrzne* powietrza, wody lub innego płynnego ośrodka tworzącego warstwę, która prawie zawsze oddziela obie powierzchnie ciał i podczas ruchu względnego tychże jest zmuszona do płynięcia, wreszcie

7) *histereza* stanu odkształcenia i napięcia obu stykających się ciał. Stan ten bowiem zmienia się ustawicznie podczas ruchu, łagodne nierówności spłaszczają się i odspłaszczają kolejno, a tarcie wewnętrzne ciał stałych staje się źródłem histerezy, czyli nieodwracalnej straty energii.

Wszystko to razem daje efekt wypadkowy taki, że potrzeba wykonywać ciągle pracę, rosnącą proporcjonalnie względem drogi, ażeby



Rys. 1

utrzymać ciało w ruchu postępowym jednostajnym względem drugiego, do którego jest przyciskane. Ogólna strata energii da się przeto zastąpić pracą pewnej pomyślanej siły zwanej *tarcie* na drodze ruchu względnego obu ciał. Siłę tę możemy sobie widocznie ze znaczną dokładnością wyobrazić jako działającą w powierzchniach stykania się obu ciał. Załączony rysunek uzmysławia wypadkową siłę tarcia T , z którą nieruchoma podstawa (ciało B) działa na ciało A , poruszające się w kierunku strzałki. Równa i wprost przeciwna T' siła przedstawia siłę, z jaką ciało A działa nawzajem na ciało B . W przypadku ruchu o kierunku przeciwnym odwracają się kierunki T i T' . O punkcie działania (zaczepienia) siły T lub T' nie możemy oczywiście powiedzieć nic pewnego bez założeń co do rozmieszczenia

nacisku w powierzchni stykania się itd. Tylko w szczególnie prostych przypadkach można ten punkt z dostateczną dokładnością przyjąć w miejscu, gdzie całkowity nacisk N trafia powierzchnię stykania się.

Beznadziejność szukania „ścisłych praw“ tarcia nie może naturalnie czynić ujmę doniosłości technicznej uproszczonych schematów myślenia ilościowego, jakimi są: *współczynnik tarcia*, *kąt tarcia* itd. Ona tłumaczy tylko niechęć przedstawicieli nauki czystej do badań nad tarcie i co za tym idzie, pewne zaniedbanie tej dziedziny w nauczaniu fizyki. Skutki tego zaniedbania mszczą się na szarej rzeszy techników poprzestającej na nauce szkolnej. Niektóre jednostki z tej rzeszy nie rezygnują mimo to z aspiracji do pracy twórczej, do jakiej praktyka dostarcza wciąż tematu, i błędzą po manowcach traktując uproszczone schematy jako prawa elementarne na równi z takimi np. prawami mechaniki ogólnej lub termodynamiki klasycznej. Tylko należyte zdanie sobie sprawy ze splotu zjawisk składających się na pozornie prosty schemat, jakim jest „siła tarcia“, może prowadzić do poprawnej interpretacji odnośnych doświadczeń technicznych.

OPORY TARCIA I ICH ROLA W NIEKTÓRYCH ZAGADNIENIACH KOLEJNICTWA

(Archiwum Mechaniki Stosowanej, tom 1, zesz. 4, 1949 r. i tom 3, zesz. 1, 1951 r.)

§ 1. Rozważania wstępne

Kategoria sił przyrody rozpraszających energię mechaniczną, znana pod nazwą *oporów tarcia*, *sił tarcia* lub krótko *tarcia*, jest tradycyjnie upośledzona w nauczaniu początków mechaniki w fizyce. Skutki tego bywają groźne dla naukowego, racjonalnego podłoża techniki, jak świadczą pojawiające się od czasu do czasu prace nawet wybitnych inżynierów, które dowodzą ich niejasnego, a nawet zgoła błędnego wyobrażenia o własnościach tarcia. ¹⁾ Traktują oni niekiedy znalezione doświadczalnie w warunkach najprostszych przybliżone prawidła tarcia jako ilościowo ściśle prawa przyrody. Tymczasem na wielkość i kierunek tarcia ma wpływ tyle czynników po części nieuchwytnych ilościowo, a nie dających się wyodrębnić, iż trudno się dziwić, że fizycy nie objawiali w nowszych czasach zapału do badań tarcia, pozostawiając inżynierom troskę o tę tak powikłaną, a jednak technicznie nader ważną dziedzinę mechaniki.²⁾

Stwierdzam to na podstawie niemal półwiekowego doświadczenia przy studiowaniu piśmiennictwa techniczno-naukowego w kraju i zagranicą. Wobec katastrofy wojennej, jaka dotknęła niedawno, po raz nie wiem który, naszą kulturę, niszcząc dorobek dwudziestolecia między dwiema wojnami światowymi, zachodzi paląca potrzeba szybkiego działania w kierunku podwyższenia poziomu naukowego młodego pokolenia polskich techników. W tej intencji nawiązuję do moich dawnych i nowszych arty-

¹⁾ Przypomnę tylko słynny spór z r. 1920 między wybitnymi profesorami niemieckimi na temat pojmowania tarcia w pracy habilitacyjnej St. LÖFFLERA.

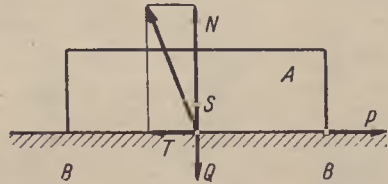
²⁾ Różnica zasadnicza w doświadczalnej pracy badawczej fizyka i inżyniera polega na tym, że chociaż obaj zadają określone pytania przyrodzie, to jednak fizyk dąży usilnie do wyodrębnienia konkretnego zjawiska oraz do ścisłości pomiaru i wyzwolenia go z więzów zależności od wielu zmiennych, podczas gdy inżynier bada często efekt zbiorowy zjawisk bardzo złożonych na konkretnych obiektach techniki lub uproszczonych modelach, aby zdobyć wartości liczbowe niezbędne przy projektowaniu z przybliżeniem zwykle niewielkim, lecz praktycznie zazwyczaj wystarczającym.

kułów naukowych o tarcie³⁾ oraz do odpowiednich rozdziałów w publikacjach moich wykładów w trzech politechnikach, aby możliwie jasno a ściśle ująć i przedstawić to, co wiemy obecnie o tarcie, a zarazem dać wskazówki do nauczania tej ważnej dziedziny mechaniki technicznej w naszych nowych szkołach.

Przy tej sposobności spróbowałem rzucić pewne, jak się zdaje, nowe światło na interpretację teoretyczną niektórych wyników badań doświadczalnych nad tarcie.

§ 2. Źródła tarcia

Patrząc na otaczające nas przedmioty, odrywamy zwykle myśl od ich rzeczywistej odkształcalności i traktujemy je w pierwszym przybliżeniu abstrakcyjnie, jak gdyby były niezmiennymi bryłami geometrycznymi wypełnionymi materią ciągłą i praktycznie sztywną. Zachodzi więc pytanie, czy taki uproszczony model ciała może posłużyć do zrozumienia i ujęcia teoretycznego zjawisk tarcia danych przez doświadczenie. Takie podstawowe zjawisko tarcia dostrzegamy, jak wiadomo, w najprostszym przypadku *ślizgania*⁴⁾, np. płytki, którą przesuujemy ręką po poziomej powierzchni stołu. Płytkę tą lub w ogóle ciało *A* spoczywające podstawą praktycznie płaską na obszernej płaskiej ścianie poziomej ustalonego ciała *B* (rys. 1), pozostaje oczywiście w spoczynku pod działaniem ciężaru własnego *Q*, zrównoważonego reakcją *N* ciała *B* jako nieruchomej podstawy. Gdyby więc reakcja pozostała prostopadła do powierzchni stołu (ciała *B*) także podczas przesuwania płytki (ciała *A*), to do wprowadzenia jej w ruch ze stanu spoczynku wystarczyłaby dowolnie mała siła *P*, która działając przez odpowiedni przedział czasu udzieliłaby płytce prędkości określonej *v*. Po usunięciu zaś tej siły płytka zatrzymałaby tę wartość prędkości trwale (oczywiście dopóki nie zajdzie zmiana warunków zewnętrznych). Tymczasem doświadczenie poucza po pierwsze, że płytka



Rys. 1. Stan równowagi z tarcie w przypadku gdy siła zewnętrzna *P* leży w płaszczyźnie pionowej ciężaru *Q*. Składowa pionowa *N* całkowitej reakcji podstawy *B* jest liczbowo równa *Q*. Składowa pozioma tej reakcji *T* (tarcie statyczne) jest liczbowo równa sile *P*.

³⁾ 1. Kilka słów o istocie i tzw. prawach tarcia. Czasopismo Techniczne. Lwów 1926; 2. Refleksje na temat tarcia między ciałami stałymi. Przegląd Mechaniczny. Warszawa 1947, str. 345; 3. Tarcie statyczne a kinetyczne. Przegląd Mechaniczny. Warszawa 1948.

⁴⁾ Tym wyrazem oznaczamy ruch postępowy prostoliniowy, zwłaszcza gdy występuje on przy stykaniu się płaskiej ściany ciała z płaską podstawą.

nie poruszy się, dopóki siła na nią działająca jest mniejsza od pewnej wartości granicznej P_0 , a po wtóre do utrzymania jednostajnego ślizgania płytki już wprowadzonej w ruch z prędkością daną v potrzeba stałej wartości siły działającej P_1 , która różni się w ogóle nieznacznie od P_0 .

Otóż zjawisko pierwsze da się objaśnić łagodnymi nierównościami obu ciał, które niejako ząbując się sprawiają, że przesunięcie ciała A po ciele B wymaga po pierwsze siły P (działającej w kierunku zamierzonego ślizgania), która by spowodowała rozsunięcie się powierzchni obu ciał na odległość taką, aby dalszy ruch względny stał się możliwy; po wtóre zaś, po wytworzeniu takiej siły oscylującej co do wartości w bardzo małych przedziałach czasu, potrzeba siły, której wartość średnia P_1 utrzymuje ciało A w ruchu jednostajnym. Ale ta wartość średnia P_1 musiałaby widocznie w takim modelu być prawie równa P_0 , podczas gdy w rzeczywistości jest mniejsza i to tym mniejsza, im większa jest prędkość ślizgania. Model ten nie tłumaczy nadto zależności siły od pola powierzchni przylegania stwierdzonej również doświadczalnie. A wreszcie nie zgadza się z faktem ścierania materiału z powierzchni obu ciał⁵⁾.

Okazuje się więc, że model ciał sztywnych trących tłumaczy w sposób dość zadowalający tylko zjawisko oporu tarcia zwanego *spoczynkowym* albo *statycznym* a najstosowniej *szepnym*.

Z tego wynika, że do zrozumienia zjawisk tarcia należy uwzględnić *odkształcalność sprężystą i plastyczną* ciał stałych, ich *spójność* (lub wytrzymałość), a poza tym te czynniki, które z reguły mają wpływ na przebieg zjawisk fizycznych, tj. naturę i jakość materiałów, temperaturę, ciśnienie otaczającego powietrza lub innego ośrodka płynnego. Wyłączamy tutaj z naszych rozważań płyny służące jako smary, czyli rozpatrujemy tylko *tarcie na sucho*. Tarcie w smarowanych częściach maszyn podlega prawidłom odmiennym i stanowi w znacznej części zagadnienie hydrodynamiczne.

Rozpatrując też *tarcie ślizgowe* z uwzględnieniem wymienionych własności ciał stałych, wyjdziemy z doświadczeń najdawniejszych, które wykazywały zależność tarcia od stopnia chropowatości powierzchni ciał stykających się ścianami płaskimi, a nadto stwierdzaty, że przy tej samej

⁵⁾ O powierzchniach ciał trących, a w szczególności o powierzchniach ciał płaskich, które się dotykają, czyniono zwykle założenie najprostsze, że ich chropowatość jako źródło tarcia jest jednorodna i izotropowa. Znaczenie tych przymiotników staje się jasne, gdy sobie wyobrazimy różne przekroje płaskie prostopadłe do ściany chropowatej. Jeśli przekroje równoległe o kierunku wspólnym mają postać praktycznie tę samą, to stwierdzamy jednorodność chropowatości, chociaż przekroje nachylone do siebie mogą się różnić. Jeżeli zaś i te przekroje się nie różnią, to chropowatość jest nie tylko jednorodną, ale niezależną od kierunku, czyli izotropową. Gdy wreszcie chropowatość jest zależna od kierunku, a niezależna od miejsca elementu ściany, to jest wprawdzie jednorodna, ale anizotropowa.

chropowatości opór tarcia rośnie i maleje z wielkością wzajemnego nacisku N obu ciał, normalnego do płaszczyzny stykania. Ponieważ ta zależność empiryczna w różnych warunkach ważnych w technice (wówczas) różniła się niezbyt znacznie od zwykłej proporcjonalności, przeto przyjęto jako regułę praktyczną, że *tarcie przy ślizganiu*, czyli *tarcie suwne*

$$T = \mu N,$$

a współczynnik proporcjonalności tarcia do nacisku normalnego, tj. μ nazwano *współczynnikiem tarcia* (między materiałami ciała A i B). Jakkolwiek przekonano się doświadczalnie (COULOMB, MORIN i inni), że wartość liczby μ jest różna w wypadkach, gdy zmienimy materiał jednego lub obu badanych ciał, pozostawiając inne warunki te same, (tzn. taki sam stopień chropowatości, taką samą prędkość ślizgania, takie same ciśnienie, tj. nacisk na jednostkę pola figury stykania się itd.), to jednak rozległe badania MORINA, stwierdzające praktyczną niezależność μ od ciśnienia, sprawiły, że na kontynencie europejskim jeszcze prawie do końca wieku XIX w kołach fizyków i inżynierów podzielano poglądy MORINA, że μ przy takiej samej chropowatości ma charakter stałej materiałowej prawie niezależnej od ciśnienia i prędkości względnej. Nie pomogło nawet to, że pracujący w Anglii równocześnie prawie z MORINEM G. RENNIE (Trans. Soc. London 1829, t. 119, str. 143; Zeitschr. f. Arch. u. Ing. Wiss. Hannover 1861, t. 7, str. 315)⁶⁾ stwierdził wyraźną zależność μ od ciśnienia a w r. 1852 H. BOCHET we Francji stwierdził, jak się zdaje, najpierw zależność μ od prędkości. Obie zależności można było poniekąd przewidzieć teoretycznie, zważywszy, że oba ciała już w stanie spoczynku pod wpływem nacisku wzajemnego doznają odkształceń, tworząc przez to niejako przeszkodę dla siły dążącej do wprawienia w ruch ciała A po ciele B (niezależnie od oporu bezwładności, który z chwilą ustalenia prędkości ślizgania zanika). Po pokonaniu tej przeszkody i ustaleniu prędkości ślizgania ciała A po ciele B , strata energii na wytworzenie coraz to nowych odkształceń nie znika oczywiście, lecz staje się mniejsza przy większej prędkości ślizgania, ponieważ jest niejako coraz mniej czasu na wytworzenie odkształcenia.

Rozważania powyższe wyjaśniają, dlaczego już COULOMB stwierdził doświadczalnie, że *współczynnik tarcia szcpego* μ_0 bywa większy od

⁶⁾ Zależność μ od ciśnienia została ok. r. 1915 użytkowa technicznie w konstrukcji broni samoczynnych. Specjaliści w tej dziedzinie nazywają to „efektem BLISHA“, co dowodzi również aktualności motywów pracy niniejszej, podobnie jak praca P. WILNIEWCZYCA: Zasady działania broni samoczynnych (Nr 1 Biuletynu Główn. Inst. Mechaniki, Min. Przem. i Handlu z r. 1948). Na str. 84 tej pracy czytamy: „Konstrukcja opiera się na zjawisku często niedostatecznie uwzględnianym w podręcznikach mechaniki, że współczynnik tarcia μ jest funkcją ciśnienia...“.

współczynnika μ tarcia kinetycznego, zwłaszcza gdy ciało A spoczywało przez czas dłuższy na cieple B , zanim przystąpiono do poruszenia go z miejsca. Ponadto COULOMB przewidywał, że gdyby dało się usunąć *chropowatości* na ścianach obu ciał, to i tak istniałby opór tarcia wynikający z sił molekularnych drobin leżących w obu ścianach. Takie *tarcie molekularne* stwierdzamy obecnie bez trudności na płytkach wzorcowych JOHANSSONA przy ich przesuwaniu wzdłuż powierzchni przylegania. Dlatego COULOMB twierdził, że tarcie składa się z części zależnej od nacisku, którą by dziś nazwać można *tarcie makroskopowym* lub *molarnym* i z *tarcia molekularnego* niezależnego od tego nacisku. Ale J. V. PONCELET (*Mécanique industrielle*, wyd. 3, Paryż 1870, str. 505), który to przytacza, odrzuca tę drugą część słusznie jako nie mogącą występować w olbrzymiej większości zagadnień technicznych, gdzie bezpośrednie stykanie się molekuł może zachodzić tylko w rzadko rozsianych miejscach powierzchni przylegających obu ciał, wobec czego stanowi tylko znikomą część tarcia całkowitego.

Zjawisko tarcia jest skomplikowane wreszcie przez to, że z ścian ciała niepodobna w zwykłych warunkach usunąć cieniutkiej warstewki adsorbowanej⁷⁾ otaczającego ośrodka (zwykle powietrza). W przypadku najczęstszym, gdy obie stykające się ściany ciał mają obróbkowe nierówności mniejsze lub większe, nacisk wzajemny wywołuje ich odkształcenia, które w wielu miejscach przekraczają granicę sprężystości, a nawet wytrzymałości, co jest połączone ze stratą energii. Tej stracie odpowiada również pomyślana składowa nacisku, a więc zarazem opór tarcia. Nacisk całkowity bowiem jest wypadkową z nacisku normalnego N i siły stycznej P równoważącej tarcie T .

§ 3. Tarcie szepne (statyczne) a tarcie suwne (czyli kinetyczne)

Mając na myśli prosty schemat doświadczenia, stosowany powyżej, przypominamy pokrótce, jak go zrealizował MORIN w swoich badaniach. Ciało A miało postać skrzynki, której dno można było zmieniać zależnie od materiału badanego, a wewnątrz obciążać stosownie do zamierzonego nacisku normalnego N . Ciało B miało postać długiego wąskiego stołu, którego płytę zmieniano w zależności od badanego materiału. Do dna skrzynki był przyczepiony możliwie blisko spodu cienki sznur przewieszony na końcu stołu przez krążek i zakończony szalką stanowiącą wraz z umieszczonymi na niej ciężarkami, ciężar napinający sznur, który wywierał siłę P ciągnącą ciało A . Przy dowolnej wartości siły P , leżącej

⁷⁾ Wyraz *adsorpcja* oznacza co innego niż absorpcja, czyli pochłanianie gazów przez ciała stałe. Adsorpcja jest niejako przyczepnością gazów do powierzchni ciał stałych.

pomiędzy zerem a wartością krańcową P_0 , ciało A pozostaje w spoczynku. Dopiero przy wartości P bardzo bliskiej P_0 wystarcza najdrobniejsze wstrząśnienie (wywołane np. ruchem ulicznym pojazdów), aby ciało A rozpoczęło ruch, którego prędkość nie łatwo jednak ustalić w wielkości żądanej. To było prawdopodobnie przyczyną, że MORIN nie uchwycił zmniejszania się μ z wzrostem prędkości, stwierdzonego przez kilku późniejszych badaczy; podobnie jak nie znalazł zależności μ od ciśnienia, odgrywającej niekiedy rolę nader ważną.

Że znane prawidła COULOMBA-MORINA, a raczej zalecane przez nich reguły praktyczne do obliczeń tarcia, utrzymywały się tak długo w piśmiennictwie dydaktycznym, można wytłumaczyć tylko potęgą autorytetu sławnego COULOMBA, który oddziaływał zapewne już na MORINA. Podobnych wypadków w dziejach nauki jest wiele. Przeciż do początku bieżącego stulecia uczono według NEWTONA, że cienka płyta zanurzona w jednorodnym strumieniu płynu doznaje naporu proporcjonalnego do $\sin^2 \alpha$, jeżeli α oznacza (mały) kąt nachylenia płyty do kierunku płynięcia, gdy tymczasem napór ten jest w przybliżeniu proporcjonalny do $\sin \alpha$.

Ale jak zaznaczono powyżej, doświadczenia innych badaczy nawet współczesnych MORINOWI stwierdzały zbyt wielkie niezgodności głoszonych przezeń „praw tarcia“ i wykazały uzasadniony powyżej teoretycznie wzrost μ z ciśnieniem.

Badania tarcia przy różnych prędkościach ślizgania v wykazały dalej, że μ maleje ze wzrostem v , co było nader ważnym w teorii hamowania pociągów kolejowych⁸⁾. W tym celu ujęto zależność μ od v we wzory empiryczne, z których przytoczymy dwa następujące:

1) Wzór J. N. FRANKEGO wybitnego profesora Politechniki Lwowskiej z końca ubiegłego stulecia

$$\mu = \mu_1 e^{-av},$$

gdzie μ_1 i a są stałymi. Wzór ten pokrywał się wprawdzie dość dobrze z danymi doświadczalnymi w ich zakresie, ale ze stanowiska teoretycznego można mu zarzucić, że prowadził do asymptotycznego zanikania μ przy $v \rightarrow \infty$, co nie może odpowiadać rzeczywistości stosownie do rozważań w § 2.

2) Wzór BOCHETA zwany w Niemczech wzorem WICHERTA, gdyż ten badacz obliczył na nowo współczynniki wzoru z doświadczeń własnych:

$$\mu = \mu_1 \frac{1 + av}{1 + \beta v}$$

ze stałymi (odmiennymi od poprzednich) μ_1 , a i β (przy $a < \beta$). W przypadku tarcia szeregów hamulcowych ze staliwa o stalowe obręcze kół wagonowych zalecają podręczniki techniczne obierać: $\mu_1 = 0,25$ w stanie mo-

⁸⁾ H. BOCHET, *Mém. de la Soc. des Ing. Civ.* 1852. — S. POIRÉE, *Ann. des Mines*, t. 13; C. R. t. 46, str. 802, 1858. — D. GALTON, *Engineering*, t. 25, 26, 27; *Proc. Inst. Mech. Eng.* 1878/9.

krym do 0,45 w stanie suchym; $\alpha=0,0112$, $\beta=0,06$, jeżeli prędkość v jest wyrażona w km/h.

Wracając do tarcia szepnego zaznaczymy przede wszystkim, że zgodnie z przewidywaniem teoretycznym uwzględniającym odkształcenia ciał pod wpływem sił tarcia wytworzonych w przyległych warstwach obu ścian stykających się, stwierdzono doświadczalnie, iż w przypadku ciała A leżącego na poziomej ścianie ciała B w kierunku możliwego ślizgania, zachodzi bardzo małe, ale dające się zmierzyć odkształcenie obu warstw przylegających tak, iż górne części ciała A doznają bardzo małego przesunięcia względem B . To przesunięcie (gołym okiem oczywiście niedostrzegalne) wzrasta z wielkością siły P , dopóki wartość P nie osiągnie wielkości granicznej \bar{P} , równoważącej tarcie przy względnym spoczynku obu ciał. Stąd nazwa tarcie szepne. Dopiero po osiągnięciu tej wartości przez siłę P zachodzi ślizganie ciała A po ciele B , z reguły jako ruch zrazu przyspieszony, którego ujednostajnienie osiąga się przez nieznaczne zmniejszenie wartości siły w porównaniu do \bar{P} .

FLEMING JENKIN i I. A. EWING wykonali doświadczenia (Phil. Trans. 1877), przy których przejście z tarcia statycznego do dynamicznego nie odbywało się nagle. Zdołali oni mierzyć siłę tarcia przy prędkościach 3 do 6 mm/sek. W tych granicach współczynnik tarcia malał powoli ze zwiększeniem prędkości od wartości statycznej do kinetycznej.

Tarcie szepne jest przeto siłą równoważącą jakąkolwiek siłę P , która spełniając warunek $0 < P < \bar{P}$ działa w płaszczyźnie podstawy ciała A przyciskanego do ciała B , przy czym nie wywołuje trwałego ruchu względnego obu ciał, poza niewidocznymi przemieszczeniami ich środków ciężkości spowodowanymi ich odkształcalnością. Wartość \bar{P} określa zatem górną granicę wielkości tarcia statycznego, znaną doświadczalnie. Oznaczmy ją przez T_0 . Gdy $P=T_0$, to równowaga względna obu ciał jest niestateczna (chwiejna), gdyż najmniejsze wstrząśnienie zapoczątkowuje ruch ciała A po ciele B .

Mając na uwadze znowu warunki najprostsze, jakie zachodziły np. w doświadczeniach MORINA, dochodzimy do wniosku, że:

Tarcie szepne (statyczne) nie ma wartości określonej jak *tarcie suwne (kinetyczne)*, lecz może przyjąć wszelką wartość większą od zera, a mniejszą od granicy T_0 , którą analogicznie do tarcia kinetycznego przyjmujemy za proporcjonalną do nacisku normalnego N pisząc:

$$T_0 = \mu_0 N,$$

a współczynnik proporcjonalności μ_0 nazywamy *współczynnikiem tarcia szepnego*. Chcąc przedstawić równaniem wielkość tarcia szepnego w ogóle, możemy napisać:

$$T = \beta \mu_0 N, \quad \text{gdzie } 0 < \beta \leq 1.$$

W przypadkach spotykanych w różnych dziedzinach techniki jest $\mu_0 > \mu$ (przy wyłączeniu jakiegokolwiek smarowania). Nie ma więc teorii ciągłego przejścia od tarcia szepnego do suwnego, jak skłonni są mniemac niektórzy autorowie prawdopodobnie przez analogię do ruchu i spoczynku pojmowanego jako szczególny przypadek ruchu. Atoli ta analogia tutaj zawodzi z powodu odmiennych cech tarcia szepnego (statycznego) i suwnego (kinetycznego). Ogólne prawo, któremu podlega tarcie szepne wyraża się nierównością, podczas gdy prawo tarcia kinetycznego równaniem. (E. J. ROUTH: Rigid Dynamics. I. § 158 traktujący o „nieciągłości tarcia“).

Dlatego nie może być mowy o jednoczesnym występowaniu obu rodzajów tarcia, jeżeli ruch względny ciał trących jest ślizganiem.

Atoli gdy mamy do czynienia z ogólnymi przypadkami ruchu względnego ciał trących, to jak zobaczymy poniżej istnieje jeden przypadek szczególny, który można interpretować w ten sposób, że obydwa rodzaje tarcia zachodzą jednocześnie obok siebie.

§ 4. Tarcie szepne w przypadku ogólniejszym

Gdy na podstawie ciała A spoczywającego na płaskiej powierzchni ciała B działa płaski układ sił statycznie równoważny sile P już rozpatrywanej i parze sił o momencie M , to tarcie szepne sprowadza się do takiego układu sił o kierunkach wprost przeciwnych.

Zadanie znalezienia rozmieszczenia sił tarcia na podstawie ciała A z danych sił zewnętrznych jest w ogóle nieoznaczone, czyli „statycznie niewyznaczalne“; natomiast zadanie odwrotne da się często rozwiązać na podstawie mniej lub więcej uzasadnionych założeń przybliżonych o rozmieszczeniu nacisku na ścianę trąca. Przyjawszy np. nacisk rozłożony równomiernie i wyobrazivszy sobie początek ruchu postępowego ciała, otrzymujemy siły tarcia o wypadkowej $\mu_0 N$, przechodzącej przez środek masy podstawy. Z tego wynika, że każda siła dążąca do wywołania ruchu posuwistego ciała A po ciele B , której kierunek przecina normalną do podstawy w jej środku masy, może być zrównoważona tarcie szepnym, jeżeli jest mniejsza od $\mu_0 N$. Zarazem widać, że zwiększenie tej siły prowadzi do ślizgania w jej kierunku. Ten wynik jest oczywiście tym dokładniejszy, im bardziej sztywne są oba ciała.

Przyjmując teraz, że ruch przygotowany ciała jest obrotem około środka masy podstawy, otrzymujemy przy założeniach poprzednich, że sumy algebraiczne rzutów sił tarcia są równe zeru na każdą z dwu prostych wzajemnie prostopadłych poprowadzonych na podstawie, a suma algebraiczna momentów względem normalnej do podstawy ma wartość różną od zera, która określa moment pary mogącej zrównoważyć tarcie. Przykład szczególnie prosty i znany z teorii maszyn stanowi moment tarcia czopa stopowego o podstawie pierścieniowatej i promieniach R , r ; znajdujemy kolejno:

$$\text{nacisk (na element pola } dF \text{ podstawy)} \quad dN = \frac{Q}{\pi(R^2 - r^2)} dF,$$

tarcie (elementu dF) $dT = \mu_0 dN = \mu_0 \frac{Q}{\pi(R^2 - r^2)} dF$,

moment tarcia (elementu odległego o ϱ od środka) $dM = \mu_0 \frac{Q\varrho}{\pi(R^2 - r^2)} dF$,

całkowity moment sił tarcia

$$M = \frac{\mu_0 Q}{\pi(R^2 - r^2)} \int_0^R \varrho 2\pi\varrho d\varrho = \frac{2}{3} \mu_0 Q \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} = \frac{2}{3} \mu_0 Q \left(R + \frac{r^2}{R+r} \right).$$

W przypadku ważnym w praktyce, gdy ciało A dotyka ciała B podpórkami przenosząc przez nie naciski N_1, N_2, \dots oraz tarcia $\mu_0 N_1, \mu_0 N_2, \dots$, można znaleźć najmniejszy moment pary potrzebny do pokonania tarcia przyjmując obrót około nieznanego środka x_0, y_0 na płaszczyźnie i wyrażając odpowiednie składowe siły tarcia w kierunkach obu osi oraz moment tych sił względem punktu (x_0, y_0) . Przyjąwszy wielkości N_1, N_2, \dots jako znane, co biorąc ściśle jest możliwe tylko w przypadku trzech punktów podparcia, można z otrzymanych równań równowagi obliczyć szukany moment obrotu i współrzędne jego środka.

Gdy mamy do czynienia tylko z trzema punktami podparcia A_1, A_2, A_3 , to szukamy punktu obrotu z warunku, że trójkąt sił tarcia $T_1 = \mu_0 N_1$, $T_2 = \mu_0 N_2$, $T_3 = \mu_0 N_3$ (prostopadłych do promieni obrotu) musi się zamykać, aby siły tarcia tworzyły parę. Jeżeli więc pomyślimy sobie trójkąt, którego boki przechodzą odpowiednio przez A_1, A_2, A_3 mając kierunki prostopadłe do promieni obrotu, to boki tego trójkąta są proporcjonalne do N_1, N_2, N_3 i można te boki wykreślić w stosownej podziałce oraz obliczyć pole trójkąta F utworzonego z nich. Oznaczywszy kąty wierzchołkowe tego trójkąta przez $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, a promień koła opisanego na nim przez R (mierzony tą samą podziałką co N_1, N_2, N_3), stosujemy znane z geometrii elementarnej związki:

$$R = \frac{N_1 N_2 N_3}{4F}, \quad \sin \beta_1 = \frac{N_1}{2R}, \quad \sin \beta_2 = \frac{N_2}{2R}, \quad \sin \beta_3 = \frac{N_3}{2R}.$$

Kąty między promieniami r_1, r_2, r_3 , łączącymi szukany punkt obrotu O z punktami podparcia A_1, A_2, A_3 są oczywiście równe odpowiednio $\pi - \beta_1$, $\pi - \beta_2$, $\pi - \beta_3$. Mając ich wartości, znajdujemy najłatwiej środek O , kreśląc okręgi jako miejsca geometryczne wierzchołków danych kątów obwodowych opierających się na bokach trójkąta A_1, A_2, A_3 jako cięciwach. Wystarczy oczywiście dwa okręgi, trzeci służy do kontroli dokładności rysunku.

Ostatnie przykłady o charakterze raczej formalnym wskazują na osobliwe trudności zagadnień mechaniki z uwzględnieniem tarcia, jeżeli wyłączymy jakiegokolwiek smarowanie, które często ułatwia bardzo rozwiązanie, o ile nie wysuwa nowych trudności innego rodzaju.

§ 5. Kierunek tarcia ślizgowego. Kąt i stożek tarcia

Jakkolwiek już dawni badacze, jak COULOMB i MORIN, znajdowali z swych doświadczeń np. z drewnem, że wartości współczynnika tarcia są różne, zależnie od tego czy ślizganie ściany drewnianej ciała odbywa się równoległe, czy też prostopadłe do kierunku włókien, to jednak nie spotkałem się w piśmiennictwie z próbą ogólnego traktowania zależności

współczynnika tarcia od kierunku ślizgania. Jest to poniekąd zrozumiałe, ponieważ badanie tarcia przy ślizganiu metali i innych materiałów konstrukcyjnych dość gładko obrobionych odbywało się przy założeniu, że chropowatość ich powierzchni stykających się jest tego rodzaju, iż sterujące nad projektowaną płaską ścianą drobnutkie pagórki są równomiernie rozsiane po całej płaszczyźnie. Taką chropowatość nazwiemy *izotropową*, gdyż opór tarcia, jaki powoduje, może być uważany za niezależny od kierunku ślizgania⁹⁾.

W rzeczywistości zwykle rodzaje obróbki, jak struganie i toczenie prowadzą do *chropowatości*, która nie jest izotropowa, ponieważ jest inna w kierunku strugania, a inna w kierunku poprzecznym. Taką chropowatość można ogólnie nazwać *anizotropową*, a w rozpatrywanym tutaj przypadku anizotropii prostokątnej (ortogonalnej) będzie nazwą odpowiednią: *chropowatość ortotropowa*.

Jako ważną cechę *tarcia ortotropowego* należy podnieść to, że przy *tarcu izotropowym* kierunek tarcia jest wprost przeciwny kierunkowi ślizgania, podczas gdy przy *tarcu ortotropowym* zależność ta zachodzi tylko w dwu kierunkach głównych wzajemnie prostopadłych. W innych przypadkach pośrednich kierunek tarcia zbacza nieco od kierunku przeciwnego kierunkowi ślizgania. Wtedy siła P równoważąca tarcie T zbacza również od kierunku ślizgania.

W *tarcu ortotropowym* współczynnik tarcia jest oczywiście zależny od kierunku ślizgania i można przyjąć, że przybiera wartości krańcowe μ' i μ'' w dwu kierunkach głównych chropowatości. Wartości te nie mogą różnić się zbyt w przypadkach konkretnych; nadto różnica ta z reguły maleje z czasem na skutek tzw. docierania się powierzchni trących w maszynach, które pracują dość długo. Co prawda w maszynach mamy do czynienia nie z tarciami „na sucho“, o jakim była mowa dotychczas, lecz z tarciami powierzchni smarowanych, którego własności różnią się znacznie od tarcia na sucho, przede wszystkim wielkością współczynnika tarcia.

Współczynnik tarcia jako stosunek oporu tarcia T przy ślizganiu do nacisku normalnego N wywieranego przez ciało A na ciało B stanowi tangens kąta nachylenia φ wypadkowej z N i T do kierunku normalnej. Kąt ten nosi nazwę *kąta tarcia*.

Stosownie do tego reakcja ciała B , po którym ślizga się jednostajnie ciało A , zbacza od normalnej zetknięcia wstecz o kąt tarcia φ , który ma wartość stałą niezależnie od kierunku ślizgania, jeżeli tarcie jest izotropowe.

⁹⁾ W minionym ćwierćwieczu opracowano sposoby pomiaru chropowatości, ale nie wiadomo mi, czy odnośne badania zostały wykorzystane w teorii tarcia do badania związku między stopniem chropowatości, a współczynnikiem tarcia.

W przypadku równowagi w spoczynku zachodzić może również zboczenie reakcji od normalnej, ale tylko graniczna wartość kąta tego zboczenia φ_0 nazywa się *kątem tarcia statycznego*. Przy izotropii tarcia wartość kąta φ_0 jest niezależna od kierunku, w jakim działa siła P dążąca do wywołania ślizgania. Obracając więc kąt tarcia około ramienia, które schodzi się z normalną w miejscu stykania się ciał trących, otrzymamy *stożek tarcia*, który określa miejsce geometryczne wszystkich reakcyj, jakie mogą wystąpić przy tarciu statycznym. Reakcje te muszą znajdować się wewnątrz stożka tarcia, który jest stożkiem obrotowym. W przypadkach *anizotropii ortogonalnej*, czyli *ortotropii tarcia*, stożek jego staje się nieobrotowy, ale symetryczny względem kierunków głównych wzajemnie prostopadłych. Dowiedzimy poniżej, że można go uważać za prosty stożek eliptyczny.

§ 6. Próba teorii zależności tarcia od prędkości ślizgania

Przy dużych ciśnieniach w powierzchniach trących, jakie np. stosuje technika przy hamowaniu za pomocą tarcia, jest rzeczą jasną, zwłaszcza w przypadku małych ciał A przyciskanych do ściany wielkiego ciała B , że w stanie spoczynku względne ciało A wgniata się w ścianę ciała B , odkształcając się jednocześnie, wskutek czego powierzchnia stykania staje się wklęsła na ciełe B . Od chwili położenia ciała A na ciełe B potrzeba pewnego czasu, aby ta wklęsłość osiągnęła stan równowagi. Podczas ślizgania ciała A na ciełe B powstają również podobne wklęsłości dzięki odkształcalności ciał, ale są one płytsze, gdyż brak dostatecznego czasu na wytworzenie równie wielkich odkształceń, jak w stanie dłuższego spoczynku. Tym się tłumaczy po pierwsze fakt doświadczalny, stwierdzony już przez COULOMBA, że po dłuższym spoczynku ciał wywierających na siebie nacisk stały zwiększa się *współczynnik tarcia statycznego*. Potrzeba więc większej siły do przejścia ze stanu *tarcia statycznego* w stan *tarcia kinetycznego*, gdy zachodzi spoczynek długotrwały, niż w przypadku spoczynku krótkotrwałego. Po wtóre główny powód zmniejszenia współczynnika tarcia przy zwiększającej się *prędkości ślizgania* pochodzi stąd, że nieodwracalna część energii odkształcenia jest tym mniejsza, im krócej trwa nacisk na pole stykania się obu ciał. Ograniczając się znowu do tarcia na sucho, jak we wszystkich rozważaniach niniejszej pracy, można przyjąć, że *tarcie kinetyczne* (przy ślizganiu) jest sumą dwóch części:

Jedną stanowi „*tarcie molekularne*“, które może występować na szczytach tych nierówności, które się stykają bezpośrednio, drugą zaś *tarcie makroskopowe* albo *molarne* (jak je można nazwać), które polega na odkształceniach coraz nowych części powierzchniowych ciała B , gdy po nim się ślizgało ciało A .

Najprostszy związek, jaki się tutaj nasuwa, miałby postać

$$(6.1) \quad \mu = a + \frac{b}{v+c},$$

którą łatwo przekształcić na przytoczony powyżej wzór BOCHETA

$$(6.2) \quad \mu = \mu_1 \frac{1 + \alpha v}{1 + \beta v}.$$

Zaznaczyć jednak wypada, że nie wzięto tutaj pod uwagę zależności od temperatury, która podnosi się w ciele A na skutek długotrwałego tarcia, jeżeli ciało B jest np. szyną kolejową, a A kołem ślizgającym się z powodu odpowiedniego zahamowania obrotu po tej szynie. W przypadku ślizgania szczepek hamulcowych po obręczy koła rozgrzewają się oczywiście oba ciała w stopniu dość znacznym.

Na koniec nie brano w rachubę tak ważnego technicznie skutku jakim jest *ścieranie*, tj. odrywanie drobnych cząstek materiału z powierzchni trących¹⁰). Temu ścieraniu zapobiega w znacznym stopniu tylko odpowiednie smarowanie, które tutaj wyłączamy z naszych rozważań.

§ 7. Klasyfikacja ogólna oporów tarcia

Ponieważ opory tarcia ciał stałych występują tylko przy ich stykaniu się, przeto rozpatrywane już *tarcie suwne* (ślizgowe) jest jednym z rodzajów oporów tarcia, ale rodzajem najważniejszym teoretycznie, gdyż jak to uwydatniliśmy już w § 4 można prawidła tarcia suwnego zastosować w przypadku *tarcia obrotowego*, które nazwiemy krócej *tarciem krętym*.

Tarcie krętne zachodzi, gdy ruch względny dwu ciał, przyciskanych wzajemnie powierzchniami regularnie zakrzywionymi, siłą skierowaną wzdłuż normalnej zetknięcia, jest obrotem około tej normalnej. *Opór tarcia* mierzy się przy tym momentem pary sił równoważącym tarcie w obrocie jednostajnym.

Trzecim wreszcie z głównych rodzajów oporów tarcia traktowanym dawniej oddzielnie jako „opór toczenia się“, który obecnie nazwiemy krótko (termin wprowadzony przez prof. W. MOSZYŃSKIEGO) *tarciem tocycznym*, jest opór przy toczeniu się ciała A po ciele B .

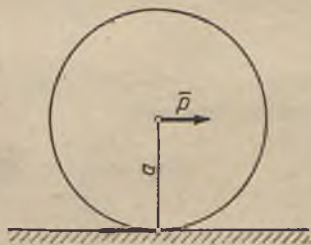
Niektórzy inżynierowie ograniczają w myśli termin tarcia tylko do tarcia suwnego (ślizgowego) domagając się tym samym w przypadkach,

¹⁰) W przypadkach ścierania dostrzegalnego materiału jednego lub obu ciał, zachodzi zmiana współczynnika tarcia μ w zależności od długości drogi ślizgania opisanej od początku doświadczenia. O ile ciśnienia nie są zbyt wielkie, to μ maleje z czasem, dążąc do wartości stałej. Na tym polega „docieranie“ tłoków cylindrów itp. w nowych maszynach, chociaż odbywa się ono z udziałem smaru, zmniejszającego niezależnie μ .

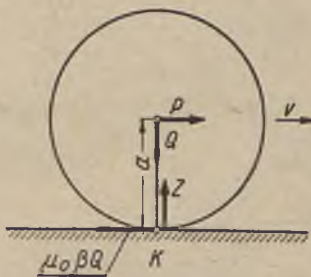
gdy ruch ciała A po powierzchni ciała B jest obrotem około wspólnej normalnej w miejscu ich stykania się albo toczeniem, raczej nazwy „opór“, a więc opór przeciw „wwiercaniu się“ i opór przeciw toczeniu się. Miałoby to uzasadnienie, gdyby po pierwsze, obydwa rodzaje oporów nie dały się sprowadzić do tarcia suwnego elementów powierzchni stykania obu ciał powstałej wskutek ich wzajemnego nacisku; po wtóre zaś, gdyby w fizyce nie rozpowszechniła się nazwa tarcia na wszelkie opory tego rodzaju. Dlatego zalecam obecnie w moich wykładach nazwy podane tutaj. Trudności pojęciowe, jakie tu występują, są następujące: Toczenie się ciał sztywnych przy ich stykaniu się ścianami regularnie zakrzywionymi, bez jednoczesnego ślizgania, jest, jak wiadomo z kinematyki, ciągiem obrotów chwilowych około osi stycznych do obu powierzchni. Takie toczenie nie powinno na pozór powodować straty energii. Ale ciała rzeczywiste są odkształcalne, wobec czego stykają się zależnie od nacisku wzajemnego N mniejszym lub większym polem skończonym, przez które przenoszą się naprężenia odpowiednio wielkie. Skutkiem tych odkształceń (najczęściej elastoplastycznych) jest, jak na to zwrócił uwagę najpierw O. REYNOLDS, niemożliwość czystego toczenia się ciał stałych, bez ich jednoczesnego, chociaż bardzo małego ślizgania się wzdłuż toru. Źródłem oporu jest bowiem po pierwsze tarcie suwne elementów powierzchni stykających się kolejno, a po wtóre praca odkształceń plastycznych towarzyszących odkształceniom sprężystym po obu stronach miejsca zetknięcia. Jeszcze jedno źródło oporu przeciw toczeniu się tkwi w nierównościach powierzchni ciał. Toczenie się np. walca po płaszczyźnie poziomej powoduje nieustanne następstwo drobnych podniesień i opadań środka ciężkości walca. Do podniesienia jest potrzebna praca, której nie można odzyskać w całości przy opadaniu, ponieważ wywołuje uderzenie. Te uderzenia wraz z kolejnymi odkształceniami powyżej wymienionymi zdradzają się zjawiskami akustycznymi charakterystycznymi dla toczenia się. Wyjaśnimy to najlepiej na przykładzie walca toczącego się na płaskiej płycie. Wgniatanie walca w płytę wywołuje w części środkowej skrócenia materiału w kierunku jego obwodu, a wydłużenia w stykających się elementach płyty w tymże kierunku. Z tego powodu w miarę ruchu następuje poślizg dotykających się elementów obu ciał na skutek ich sprężystości i dążenia do pierwotnej postaci. Miarą tego poślizgu jest ubytek drogi środka walca wywołany tym, że promień toczenia został zmniejszony wskutek odkształcenia sprężystego. Poślizg ten jest oczywiście wsteczny. Ponadto odkształcenia części stykających się nie są symetryczne względem płaszczyzny pionowej przechodzącej przez oś walca. Siła P działająca na walec w miejscu stykania się i siła P działająca na jego oś tworzą parę obracającą walec około tworzącej styczności jako osi chwilowej. Ta asymetria sprawia, że i składowe pionowe reakcyj powierzchni stykania

się walca z płytą nie są rozmieszczone symetrycznie względem wymienio-
nej płaszczyzny pionowej i mają wypadkową leżącą po stronie przedniej
walca w jego ruchu. Ta wypadkowa i ciężar walca tworzą parę sił zrówno-
ważoną momentem pary sił zewnętrznych P i $-P$ (w przypadku toczenia
się jednostajnego). Wartość tego momentu najłatwiej wyznaczyć doświad-
czalnie urządzając płytę, po której walec się toczy tak, aby ją można
było nachylać do poziomu pod kątem α . Przy dostatecznie małej wartości α
moment $Qa \sin \alpha$ (Q — ciężar, a — promień walca) będzie zrównoważony
momentem tarcia toczonego statycznego, a walec nie poruszy się. Zwiększa-
jąc ostrożnie kąt α znajdziemy granicę równowagi chwiejnej np. przy
 $\alpha = \bar{\alpha}$, po czym staje się możliwy tylko ruch jednostajny przy momencie
 $Q\bar{a} \sin \alpha_1$, jeżeli α_1 jest tylko nieco mniejsze od $\bar{\alpha}$. Pomiar momentu
tarcia można wykonać także przy poziomym położeniu płyty w sposób
przedstawiony na rysunku 2. Wtedy moment tarcia toczonego mierzy się
iloczynem $\bar{P}a$, jeżeli \bar{P} oznacza krańcową wartość siły nie wywołującą
ruchu lub iloczynem P_1a , gdy siła P_1 wywołuje jednostajne toczenie się
walca.

Nasuwa się teraz pytanie postawione już w § 3, jaka jest rola tarcia
szepnego zachodzącego przy czystym toczeniu się ciała A po ciele B ,



Rys. 2



Rys. 3

np. koła pojazdu kolejowego po szynie, skoro praca tego tarcia przy
czystym toczeniu się, co prawda abstrakcyjnych ciał sztywnych, musi
być uważana za równą zero, a tylko w razie dodatkowego ślizgania ma
wartość skończoną. Otóż nie trudno uzasadnić, że i z uwzględnieniem
odkształcalności obu ciał można przyjąć z dokładnością dostateczną istnie-
nie tarcia szepnego jako siły nie wykonującej pracy, ale pod warunkiem,
że mamy do czynienia tylko z czystym toczeniem się np. koła po szynie
w warunkach zupełnie ustalonych. Wtedy bowiem tworząca koła toczonego
przechodząca przez najniższy punkt K jest siedliskiem tarcia szepnego,
a promień w tym miejscu z powodu odkształcenia nieco krótszy od pro-
mienia w kole nieobciążonym, to jednak pracą potrzebną do utrzymania
koła w ruchu jednostajnym jest praca sił równoważących opór toczy.

W przypadku najczęstszym są to siły następujące: 1) siła P działająca na środek koła w kierunku toczenia się, 2) reakcje szyny w miejscu przylegania do niej obręczy koła. Reakcje te tworzą płaski układ sił złożony z sił mniejszych leżących z tyłu punktu K i większych leżących z przodu, ponieważ część tylna jest odciążana, a przednia obciążana w kolejnych chwilach toczenia się. Ten układ jest równoważny z siłą pionową Z równą i wprost przeciwną obciążeniu koła Q ; dalej z siłą poziomą skierowaną wstecz i dającą się dołączyć do tarcia szepnego $\mu_0\beta Q$ (gdzie $0 < \beta < 1$). Razem przeto mamy do czynienia z równowagą dwu par. Jedna z nich, czynna, przyjęta za dodatnią, składa się z siły P działającej na środek koła O i z siły określonej tarcie szepnym $\mu\beta Q$, działającym na punkt K . Ramieniem tej pary jest promień a . Drugą parę bierną (ujemną) tworzy obciążenie Q działające na O i tej samej wielkości reakcja pionowa wysunięta ku przodowi o bardzo małe ramie f tarcia tocznego.

A zatem tarcie szepne może istnieć razem z tarcie tocznym. Natomiast z wyjątkiem jednego przypadku szczególnego rozpatrzonego w § 9 niemożliwa jest kombinacja tarcia szepnego z tarcie kinetycznym ślizgowym na jednym i tym samym polu stykania się ciał, gdyż tarcie ma wtedy kierunek wprost przeciwny do kierunku ślizgania, a jego wartością nie jest $\mu\beta Q$, lecz μQ , gdzie μ oznacza współczynnik tarcia kinetycznego.

§ 8. Ważny przypadek złożony tarcia suwnego

Przypadek ten zachodzi, gdy jedno z ciał C_1 przesuwa się w kierunku x z prędkością bezwzględną v_1 , a drugie C_2 w kierunku y , np. prostopadłym do x z prędkością bezwzględną v_2 .

Wtedy prędkością względną wyznaczającą tarcie jest

$$(8.1) \quad v_w = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Ta prędkość tworzy z osią x kąt α , przy czym

$$(8.2) \quad \sin \alpha = \frac{v_2}{v_w} = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Pod tym samym kątem jest nachylona siła tarcia $T = \mu N$, a więc jego składową działającą na ciało C_1 jest

$$(8.3) \quad T_1 = T \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}},$$

zaś na ciało C_2

$$(8.4) \quad T_2 = T \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}.$$

Stosunek obu składowych jest przeto równy

$$(8.5) \quad T_1 : T_2 = v_1 : v_2.$$

Widzimy stąd, że przy v_2 bardzo małym wobec v_1 jest T_2 bardzo małe wobec T_1 . Z tego korzystamy w technice maszynowej, aby uczynić tarcie ciała C_2 przy prędkości v_2 dowolnie małym, stosując odpowiednio wielką prędkość v_1 ciała C_1 .

O zjawisku tym piszą w książkach jako o „tarcu w poprzek ruchu“, co oczywiście zaciemnia sprawę. Ma ono ważne zastosowanie techniczne, gdy chodzi o to, aby pewien ruch części mechanizmu w danym kierunku z daną prędkością v_2 odbywał się z tarcie tak małym, aby można je było zupełnie pominąć. Wtedy udzielamy tej części nadto ruchu w kierunku prostopadłym z prędkością v_1 wielokrotnie przewyższającą v_2 , co powoduje zmniejszenie się tarcia w kierunku ruchu v_2 w stosunku $v_2 : v_1$, który możemy uczynić dowolnie małym.

Nie jest to jednak, jakby się na pozór zdawało, obejście zasadniczej własności tarcia, które powoduje nieodwracalną zamianę pracy tarcia na energię rozproszoną, gdyż, jak łatwo sprawdzić, strata energii mechanicznej staje się przy tym większą niżby była, gdyby zachodził tylko ruch pierwszy z prędkością v_1 . W tym bowiem przypadku byłaby przy nacisku normalnym N strata w jednostce czasu $\mu N v_2$, podczas gdy w przypadku złożonym $\mu N \sqrt{v_2^2 + v_1^2}$, co jest zawsze większe. A zatem pożądane z jednego powodu zmniejszenie składowej tarcia w kierunku oznaczonym musi być okupione tym większym wydatkiem mocy, im bardziej chcemy zmniejszyć wymienioną składową tarcia¹¹⁾.

§ 9. Inny ważny przypadek tarcia w ruchu złożonym ze ślizgania po płaszczyźnie i toczenia się po niej¹²⁾

Jak łatwo zauważyć, założenie, że toczenie odbywa się z wystarczającym przybliżeniem tak, jakby oba ciała były sztywne, nie może prowadzić do zależności znalezionej doświadczalnie. Albowiem tarcie w miejscu stykania się walca z podłożem, niezbędne do istnienia momentu obracającego walec w przypadku najczęstszym, gdy siła znosząca opór toczenia

¹¹⁾ Na tę ważną okoliczność zwrócił, jak się zdaje najpierw uwagę w naszym piśmiennictwie dr inż. K. WOLSKI w „Wiad. Inst. Techn. Lotnictwa“ z początkiem roku 1948.

¹²⁾ Rozważania i wzory tego paragrafu stanowią treść opublikowanej przez Autora pracy pt. „Teoria tarcia walca toczącego się po płaszczyźnie poziomej i ślizgającego się jednocześnie po niej w kierunku poprzecznym“, Archiwum Mechaniki Stosowanej tom III, zeszyt 1, 1951 r. (przyp. red.).

się obok oporu wynikającego z łożyskowania osi walca działa na tę oś, nie wykonywałaby pracy przy założeniu sztywności. Wiadomo bowiem z kinematyki ciała sztywnego, że prędkość punktów walca dotykających podłoża, na które tarcie działa, jest w każdej chwili równe 0¹³⁾.

Z tego zaś wynikałoby, że kierunek i wielkość oporu tarcia walca przy jego ślizganiu się byłyby zawsze te same przy każdej wartości prędkości v , ślizgania się poprzecznego bez względu na prędkość v , toczenia się walca. Ponieważ doświadczenie wykazuje niewątpliwą zależność od stosunku $v_s : v_r$, przeto musimy przyjąć, że obok ślizgania w kierunku y (osi walca) musi zachodzić ślizganie w kierunku x toczenia się. Istnienie takiego ślizgania zależnego od odkształcalności obu ciał, jak to wykazał już O. REYNOLDS, nie podlega przeto żadnej wątpliwości.

Przypadek ślizgania wzdłuż tworzących walca toczącego się jednocześnie był przedmiotem licznych badań doświadczalnych w kolejnictwie. Zebrano je w nader interesującym sprawozdaniu ogłoszonym w r. 1931 w „Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens“ — BAUMANN: Die Reibungszahl μ' der quergleitenden Bewegung rollender Räder an Eisenbahnfahrzeugen (str. 391—410). W badaniach tych rolę walca spełniało koło wagonu doświadczalnego opatrzone zrazu celowo obręczą cylindryczną, a nie normalnie stosowaną stożkową. Zamiast po szynie koło toczyło się po krążku obracającym silnikiem koło osi poziomej dotykając go z naciskiem dającym się mierzyć, przy czym powierzchnia toczenia się na obwodzie krążka była bądź to cylindryczna bądź to profilowana jak główka szyny. Stal szynowa była w obu przypadkach materiałem części obwodowej krążka. W doświadczeniach mierzono wielkość siły P , (oznaczonej tam przez K) potrzebnej do przesuwania koła w kierunku poprzecznym z daną prędkością v_s , przy danej prędkości obwodowej krążka v_r , jako prędkości toczenia się koła po szynie. Z pomiarów jednoczesnych K i Q obliczano współczynnik μ' (nazwany przez autorów „współczynnikiem tarcia przy ślizganiu poprzecznym toczących się kół“) tak, jak gdyby prędkość względna ślizgania miała kierunek siły K , a więc stosownie do wzoru

$$(9.1) \quad K = Q\mu'.$$

Możemy więc przyjąć, że tarcie ślizgowe w ruchu ogólnym ma jednak obok składowej w kierunku tworzących składową równoległą do kierunku toczenia się. Wielkość tej składowej jest określona prędkością ślizgania, która będzie tylko drobną częścią prędkości v_s . Oznaczmy zatem jej wartość przez φv_s , gdzie φ jest liczbą małą, ale wystarczającą, aby wywołać efekt wykazany doświadczeniami.

¹³⁾ Wtedy tarcie ma charakter tarcia szepnego, czyli statycznego.

Wypadkowa prędkość ślizgania

$$(9.2) \quad V = \sqrt{v_s^2 + (\varphi v_r)^2}.$$

Stosownie do tego odpowiadającymi składowymi oporu tarcia są w kierunku poprzecznym

$$(9.3) \quad T_y = \mu Q \frac{v_s}{V},$$

w kierunku podłużnym

$$(9.4) \quad T_x = \mu Q \frac{\varphi v_r}{V},$$

gdzie μ jest zwykłym współczynnikiem tarcia ślizgowego między obu ciałami, a Q obciążeniem. Oznaczywszy zgodnie z przytoczoną pracą doświadczalną przez μ' współczynnik tarcia przy ślizganiu poprzecznym toczących się kół, a przez K mierzoną doświadczalnie siłę działającą w kierunku osi walca (zestawu kołowego) napiszemy

$$(9.5) \quad T_y = K = Q\mu.$$

A zatem

$$(9.6) \quad \mu' = \mu \frac{v_s}{\sqrt{v_s^2 + (\varphi v_r)^2}} = \mu \frac{1}{\sqrt{1 + (\varphi v_r/v_s)^2}}.$$

Dla drugiej składowej tarcia znajdujemy współczynnik analogiczny

$$(9.7) \quad \mu'' = \mu \frac{\varphi v_r}{\sqrt{v_s^2 + (\varphi v_r)^2}} = \mu \frac{1}{\sqrt{1 + (v_s/\varphi v_r)^2}}.$$

Z wzoru na μ' wynika, że μ' maleje, gdy przy stałym v_s zwiększamy v_r . Przy $v_r = 0$ jest $\mu' = \mu$, a $\mu'' = 0$.

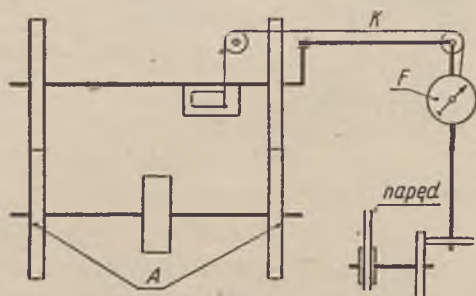
Uzyskany wynik wskazuje, że współczynnik redukcji φ (jak go można nazwać) dla prędkości toczenia się jest parametrem niezależnym od v_r i v_s (w granicach przytoczonych doświadczeń), a więc zależy jedynie od stopnia odkształcalności walca i podłoża, wyrażonego parametrem φ . Zmieniając obciążenie Q zmieniamy zarazem φ , przy czym należy się spodziewać zwiększenia φ wskutek zwiększenia Q . Wzór dla μ' prowadzi do wniosku, że to zwiększenie wpływa zmniejszająco na μ' , co potwierdzają holenderskie badania doświadczalne.

Wynik ten, że poślizg REYNOLDSA (jak go krótko nazwiemy) odniesiony do jednostki prędkości toczenia się v_r jest przy stałym Q niezależny od tej prędkości, wypada uważać za ważny rezultat uboczny uzyskany z doświadczeń holenderskich przy pomocy wyprowadzonego tutaj prostego wzoru teoretycznego.

Wyniki liczbowe tych doświadczeń mogą posłużyć do znalezienia wartości φ , co na drodze teorii odkształceń wydaje się nieosiągalne.

§ 10. Badania holenderskie

Badania holenderskie były zrazu wykonywane w sposób następujący: rolę powierzchni toczenia się kół po szynach grały odpowiednie powierzchnie obręczy ze stali szynowej zestawu kołowego A (rys. 4) obracalnego



Rys. 4

około osi poziomej ustalonej w łożyskach nieruchomych, które jednakże pozwalały na przesuwanie się osiowe zestawu o kilka milimetrów. Nad tym zestawem umieszczono zestaw kołowy o obręczach najpierw cylindrycznych i bez obręczy. Oś tego zestawu, równoległa do osi zestawu dolnego, była urządzona tak, że jego ciężar własny wraz z obciążeniem dodat-

kowym przyciskał go do zestawu dolnego zastępującego szyny z daną siłą Q , przypadającą na koło. Zestaw górny można było nadto przesuwać w kierunku osi i mierzyć siłę K do tego potrzebną dynamometrem sprężynowym F oraz prędkość przesuwania v_s . Zestaw dolny był opatrzony w środku kołem pasowym, obracającym przez silnik elektryczny, ustawiony w pewnej odległości. Obrót ten przenosił się z praktycznie niezmienną prędkością obwodową v , na koła zestawu górnego, jak wiadomo, na skutek tarcia szepnego w miejscach stykania się kół. To tarcie traci na pozór charakter statyczny z chwilą rozpoczęcia przesuwania poprzecznego zestawu górnego po dolnym, jak to wykazaliśmy powyżej, gdyż wtedy elementy powierzchni kół stykających się ślizgają się po sobie w kierunku określonym wzorami podanymi powyżej. Z tej pierwszej serii badań wysnuto z pewnymi zastrzeżeniami wniosek, że „współczynnik tarcia μ' zmniejsza się ze wzrostem Q przy tych samych prędkościach v_s “. To było oczywiście niespodzianką dla kierownictwa naukowego doświadczeń, które pragnąc uniknąć ewentualnego wpływu sił bezwładności (przy ocenie wartości v_s) zdecydowało zrealizować określone wartości v_s bez pomiaru osobnego odpowiedniej siły tarcia przez nachylenie osi zestawu górnego względem dolnego pod małym kątem ϑ . Wtedy bowiem toczeniu się górnego koła z prędkością v , po kole dolnym musi towarzyszyć ślizganie poprzeczne z prędkością $v_s = v \cdot \operatorname{tg} \vartheta$.

W ten sposób bada się zarazem zachowanie zestawu nie poruszającego się po torze prawidłowo, lecz tworzącego tzw. *kąt nabiegu* ϑ między płaszczyzną pionową szyny, a płaszczyzną koła. W pomiarach stosowano wartości kątów ϑ od $3'$ do $2^\circ 15'$ i znowu otrzymano niespodziankę w postaci wartości μ' rosnących szybko z wartością ϑ przy niezmiennych v_s .

Wartości te mierzono przy kątach przewyższających 1° i jak brzmią słowa referatu:

„Tarcie przy ruchu poprzecznym toczącego się koła, albo, co na jedno wychodzi, przy toczeniu się koła stojącego ukośnie względem szyny może być bardzo wielkie przy dostatecznie wielkiej prędkości przesuwania v_s . Stwierdzono tarcie tak wielkie, że małe cząsteczki metalu odrywały się od jego powierzchni, która stawała się przez to bardziej chropowata niż przedtem“.

Porównanie serii doświadczeń wykonanych na zestawach o osiach równoległych z doświadczeniami wykonanymi na zestawach o osiach skośnych dały te same wartości μ' . Dalej okazało się, że wartość liczbową μ' przy danym obciążeniu Q zależy tylko od stosunku prędkości $v_r:v_s$, (jak tego wymaga teoria powyżej wywiedziona).

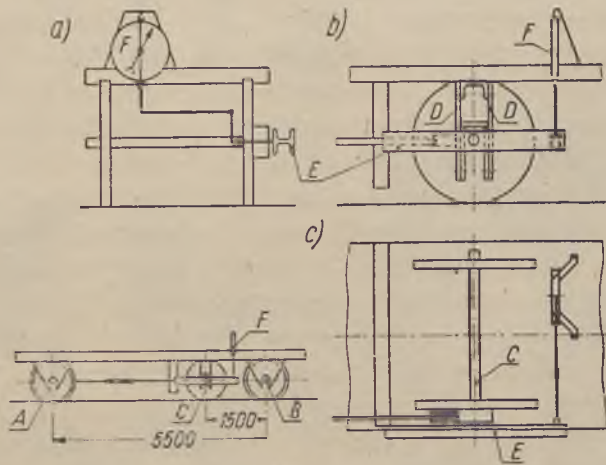
Wyniki te skłoniły inżynierów holenderskich do ograniczenia dalszych badań tylko do pomiarów przy różnych kątach ϑ i obranej stałej wartości v_r , co uwalniało od uciążliwego i niepewnego pomiaru siły poprzecznej.

Pomiary te wykonano już na zbudowanym *ad hoc* wagonie doświadczalnym trzyosiowym przedstawionym schematycznie na rys. 5, wyrażając w referacie nadzieję, że przy stosowanych prędkościach toczenia nie będzie miała wpływu godnego uwagi zależności współczynnika tarcia od prędkości. Pogląd ten wypada jednak uważać za zbyt optymistyczny,

a nawet prawie lekkomyślny, gdyż według podanego wyżej wzoru BOCHETA-WICHERTA współczynnik tarcia μ przy 5 km/godz. ma wartość $0,815 \mu_1$, a przy 50 km/godz. już tylko $0,265 \mu_1$, czyli zmniejsza się do $\frac{1}{3}$ wartości poprzedniej. W naszym wzorze teoretycznym na μ' nie trudno uwzględnić tę zależność podstawiając $v = \sqrt{v_r^2 - v_s^2}$. Otrzymamy więc

$$\mu' = \mu \frac{v_s}{\sqrt{v_r^2 + v_s^2}} = \mu_1 \frac{1 + 0,0112 \sqrt{v_r^2 + v_s^2}}{1 + 0,06 \sqrt{v_r^2 + v_s^2}} \frac{v_s}{\sqrt{v_r^2 + v_s^2}},$$

co było niezupełnie zgodne z wnioskiem LABRIJNA (kierownika doświad-



Rys. 5

ceń holenderskich), stwierdzającym że μ' zależy wyłącznie od stosunku $v_1:v_2$.

Wracając do pomiarów na wagonie trójosiowym, należy zaznaczyć, że jego obciążenia przenosiły się na szynę tylko za pośrednictwem osi *A* i *C*. Oś *B* służyła tylko do prowadzenia wagonu w torze przy możliwości przesuwania poprzecznego osi pomiarowej *C*. Oś *B* była więc obciążona tylko ciężarem własnym swego zestawu kołowego, nie obciążała zaś platformy wagonu z powodu pionowej przesuwalności obu jej łożysk.

Nie wchodząc w szczegóły urządzeń pomiarowych, przedstawionych schematycznie na rysunku 5, zaznaczamy tylko, że oś pomiarowa *C* dawała się ustawiać ukośnie w granicach tych samych kątów od 3' do 2°15' tak samo jak w urządzeniu pierwszym. Wyniki liczbowe dały (przy obrotach cylindrycznych) znacznie mniejsze wartości μ' , ale potwierdziły poprzednią zależność od *Q*, chociaż mniej jaskrawą.

Badania Dyrekcji Kolei Państwowych w Karlsruhe wykonywano na podobnym wagonie trzyosiowym, ale modelowym, jadącym po bardzo starannie wykonanym torze o rozstawie szyn 300 mm. Ciężar własny wagonu (bez obciążenia) wynosił 160,9 kG.

Pomiary μ' , wykonywane z nie mniejszą starannością jak holenderskie, dały wyniki potwierdzające naszą postać teoretyczną krzywej zależności od stosunku $v_1:v_2$; natomiast nie potwierdziły zależności μ' od obciążenia *Q*, co jak się zdaje dowodzi, że były wolne od tego źródła błędu, który tkwił ukryty w urządzeniach badawczych holenderskich.

Badania niemieckie, których doniosłość osłabia być może w oczach inżynierów kolejowych ta okoliczność, że były to tylko badania modelowe, wykazały praktyczną niezależność μ' od *Q*, zgodnie z ustalonymi prawidłami tarcia w przypadkach dotychczasowych (przy niezbyt małych i niezbyt wielkich wartościach *Q*).

W obu wymienionych badaniach wykonywano także pomiary przy zastosowaniu obręczy stożkowatych według norm środkowo europejskich oraz w przypadkach, gdy promienie tóczne kół jednego zestawu wykazują różnice od 1 do 2,5 mm. Poniżej wrócimy do tego szczegółu.

§ 11. Teoria tarcia ortotropowego

Omówiwszy w § 5 pojęcie tarcia anizotropowego oraz najważniejszego jego rodzaju, tj. *tarcia ortotropowego*, zajmiemy się ustawieniem teorii tego tarcia, która być może przyczyni się do wyjaśnienia wyników doświadczeń zwłaszcza tego rodzaju, jak opisane powyżej. Trzeba bowiem stwierdzić, że w nader licznych doświadczeniach nad tarcie, jakie wykonano w celach techniki kolejowej, przyjmowano mileząco izotropię tarcia między szyną a kołem. Zdaje się, że nie przyszło nikomu do głowy,

że z powodu struktury walcowniczej szyny współczynnik tarcia poprzecznego μ_2 może być różny od współczynnika μ_1 tarcia podłużnego.

Niechaj μ_1 oznacza współczynnik tarcia suwnego wzdłuż osi x równoległej do włókien, a μ_2 także współczynnik wzdłuż osi y prostopadłej do włókien (np. stali walcowanej).

Oznaczywszy przez μ_a współczynnik tarcia przynależny ślizganiu w kierunku nachylnym do x pod kątem α przyjmujemy, jako najprostszą zależność μ_a od μ_1, μ_2 i α :

$$(11.1) \quad \mu_a = \mu_1 \cos^2 \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha$$

Jest to ta sama postać zależności, która występuje między naprężeniami normalnymi w płaskim stanie napięcia. Odnośną analogię wyzyskamy jeszcze do obliczenia teoretycznego kąta β , o który musi zbaczać kierunek oporu tarcia od kierunku ślizgania przy kątach pośrednich zawartych pomiędzy 0 a $\pi/2$, przy czym winno być oczywiście $\beta=0$ przy $\alpha=0$ i $\alpha=\pi/2$. Przyjmiemy mianowicie, że kąt β jest zarazem kątem, o który zbacza naprężenie całkowite w płaskim stanie napięcia, tj.

$$(11.2) \quad p_a = \sqrt{\sigma_a^2 + \tau_a^2}$$

od kierunku naprężenia normalnego σ_a . Kąt ten jest wyznaczony przez znane równanie

$$(11.3) \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_a}{\sigma_a} = \frac{\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha}{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha},$$

z którego po zastąpieniu σ_1, σ_2 przez μ_1, μ_2 oraz przekształceniu wynikają wzory:

$$(11.4) \quad \begin{aligned} \frac{\mu_2}{\mu_1} \operatorname{tg} \alpha &= \operatorname{tg}(\alpha - \beta), & \operatorname{tg} \beta &= \frac{(\mu_1 - \mu_2) \operatorname{tg} \alpha}{\mu_1 + \mu_2 \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \sin(\alpha - \beta) &= \frac{\mu_2 \sin \alpha}{\sqrt{\mu_1^2 \cos^2 \alpha + \mu_2^2 \sin^2 \alpha}}, & \cos(\alpha - \beta) &= \frac{\mu_1 \cos \alpha}{\sqrt{\mu_1^2 \cos^2 \alpha + \mu_2^2 \sin^2 \alpha}}. \end{aligned}$$

Stosownie do powyższego napiszemy następujące wyrażenia na składowe dP_x, dP_y oporu tarcia spowodowanego naciskiem dQ na element pola dF powierzchni trących, przy ślizganiu w kierunku α :

$$(11.5) \quad \begin{aligned} dP_x &= \mu_a dQ \cos(\alpha - \beta) = \frac{\mu_1 \cos^2 \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2}} \mu_1 \cos \alpha dQ, \\ dP_y &= \mu_a dQ \sin(\alpha - \beta) = \frac{\mu_1 \cos^2 \alpha + \mu_2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{(\mu_1 \cos \alpha)^2 + (\mu_2 \sin \alpha)^2}} \mu_2 \sin \alpha dQ. \end{aligned}$$

W przypadku, gdy nacisk normalny na płaską ścianę trącą jest rozłożony równomiernie, można w tych warunkach zastąpić dP_x, dP_y i dQ przez skończone wartości odniesione do całej ściany trącej P_x, P_y i Q .

Uwzględniając jeszcze niewątpliwą zależność μ od prędkości, można napisać jako uogólnienie wzoru BOCHETA-WICHERTA

$$(11.6) \quad \mu_1 = \mu_{01} \frac{1 + \alpha_1 v_x}{1 + \beta_1 v_x}, \quad \mu_2 = \mu_{02} \frac{1 + \alpha_2 v_y}{1 + \beta_2 v_y}$$

ze stałymi μ_{01} , μ_{02} , α_1 , β_1 , α_2 , β_2 wyznaczalnymi doświadczalnie.

Biorąc pod uwagę, że $v_x = v \cos \alpha$; $v_y = v \sin \alpha$, otrzymamy po podstawieniu wyrażen na μ_1 i μ_2 w równania poprzednie

$$(11.7) \quad dP_x = \frac{\mu_{01} \frac{1 + \alpha_1 v \cos \alpha}{1 + \beta_1 v \cos \alpha} \cos^2 \alpha + \mu_{02} \frac{1 + \alpha_2 v \sin \alpha}{1 + \beta_2 v \sin \alpha} \sin^2 \alpha}{\sqrt{\left(\mu_{01} \frac{1 + \alpha_1 v \cos \alpha}{1 + \beta_1 v \cos \alpha} \cos \alpha\right)^2 + \left(\mu_{02} \frac{1 + \alpha_2 v \sin \alpha}{1 + \beta_2 v \sin \alpha} \sin \alpha\right)^2}} \cdot \mu_{01} \frac{1 + \alpha_1 v \cos \alpha}{1 + \beta_1 v \cos \alpha} \cos \alpha \cdot dQ,$$

$$dP_y = \frac{\mu_{01} \frac{1 + \alpha_1 v \cos \alpha}{1 + \beta_1 v \cos \alpha} \cos^2 \alpha + \mu_{02} \frac{1 + \alpha_2 v \sin \alpha}{1 + \beta_2 v \sin \alpha} \sin^2 \alpha}{\sqrt{\left(\mu_{01} \frac{1 + \alpha_1 v \cos \alpha}{1 + \beta_1 v \cos \alpha} \cos \alpha\right)^2 + \left(\mu_{02} \frac{1 + \alpha_2 v \sin \alpha}{1 + \beta_2 v \sin \alpha} \sin \alpha\right)^2}} \cdot \mu_{02} \frac{1 + \alpha_2 v \sin \alpha}{1 + \beta_2 v \sin \alpha} \sin \alpha \cdot dQ.$$

Oto najogólniejsze zależności tarcia od nacisku, kierunku i wielkości prędkości ślizgania przy tarcu ortotropowym, które mogą posłużyć do konfrontacji wyników doświadczalnych z teorią.

W przypadku rozpatrywanego powyżej zagadnienia tarcia kół pojazdów kolejowych o szyny będzie to możliwe dopiero po wyznaczeniu doświadczalnym wartości μ_{01} , μ_{02} , a biorąc ściśle także wartości α_1 , β_1 , α_2 , β_2 .

Pomiar μ_{01} i μ_{02} na szynach da się wykonać stosunkowo łatwo. Wystarczy sporządzić płytę stalową $200 \times 50 \times 2$ cm i położywszy ją na obu szynach toru prostego ciągnąć ją dynamometrem sprężynowym powoli raz w kierunku szyn, drugi raz w kierunku poprzecznym.

§ 12. Złożone przypadki tarcia w mechanice ruchu kolejowego

Inżynierowie zajmujący się badaniami ruchu kolejowego studiując warunki bezpieczeństwa przeciw wykolejeniu pojazdu pojedynczego, uzależniali te warunki od tarcia między kołem a szyną, po której koło się toczy, przyjmując przy tym działanie sił poziomych na zestawy kołowe skierowanych poprzecznie do kierunku jazdy.

W tym głównie celu wykonano pomiary doświadczalne wymienione powyżej. Siły takie pojawiają się nie tylko jako siły odsrodkowe na łukach, ale także na każdym odcinku toru z powodu nieuniknionych zbożeń ruchu od schematu wyidealizowanego jako ruch postępowy pojazdu i obrotowy toczny kół¹⁴⁾, do czego w łukach przybywa nadto ruch obrotowy całości pojazdu około środka koła odpowiadającego łukowi¹⁵⁾. Obliczeniem teoretycznym miary niebezpieczeństwa zejścia pojazdu z szyn jako wartości krytycznej stosunku $Y:Q$, gdzie Y jest siłą poziomą przyciskającą koło do szyny, a Q obciążeniem tego koła, zajmowały się prace wybitnych niemieckich inżynierów kolejowych. W pracach tych traktowano koło wraz z jego obciążeniem jako jedno ciało sztywne o ciężarze Q , pomijając jego połączenie bardzo, jak wiadomo, sztywne z drugim kołem zestawu, a nadto z całym pojazdem. Tak uproszczony model teoretyczny jest zbyt prymitywny, chociaż dostarczył tematu do kunsztownych obliczeń BÖDECKERA¹⁶⁾ i HEUMANNA¹⁷⁾ z uwzględnieniem tzw. „kąta nabiegu“ mierzącego nachylenie płaszczyzny toczącego się koła do kierunku osi szyny.

Albowiem z powodu stożkowatości obręczy siła Y , która by działając na zastaw z obręczami cylindrycznymi wywoływała (ze stanu spoczynku) tylko jego przesuwanie poziome wykonując jedynie pracę równą liczbowo pracy tarcia kół o główki szyn — teraz powoduje ruch zestawu złożony z przesunięcia i obrotu, ponieważ, gdy jedno koło ślizgając się w poprzek szyny jednocześnie się podnosi, to drugie się obniża. Dlatego obok pracy na pokonanie tarcia siła Y wykonywa nadto pracę potrzebną do podniesienia środka obciążenia zestawu, względnie pracę ujemną, gdy ten środek się obniża. Na pozór wydaje się, że praca ta jest praktycznie równa 0, ale zobaczymy, że rzecz ma się nieco inaczej.

§ 13. Stopień stateczności ustalonego ruchu zestawu kołowego o obręczach stożkowatych po torze prostym

Rozumiejąc przez ruch ustalony jednostajne toczenie się prostoliniowe w kierunku wskazanym osią toru przyjmiemy kryterium jego stateczności analogicznie do kryterium stateczności równowagi. Ruch nazwiemy

¹⁴⁾ Tu należy tzw. „węzowaty“ ruch pojazdu i całego pociągu, którego amplitudy są ograniczone tolerowanym luzem między szyną a obrzeżem kół, niedokładnościami ułożenia toru i sztywnością boczną szyn.

¹⁵⁾ Pomijamy tutaj komplikację wywołaną siłami przeniesionymi przez sprzęgła łączące pojedyncze pojazdy, oświetloną gruntownie w rozprawie doktorskiej inż. H. SOBOLEWSKIEGO (Przegląd Mechaniczny Nr 7—8 z r. 1948).

¹⁶⁾ „Die Wirkung zwischen Rad und Schiene“. 1887.

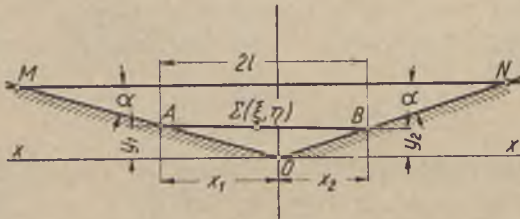
¹⁷⁾ Organ f. die Fortschritte des Eisenbahnwesens 89, r. 1934, str. 366 i n. Obaj wymienieni autorzy traktują bez zarzutu zagadnienie równowagi na wspomnianym modelu teoretycznym.

statecznym, jeżeli wywołując małe chwilowe zaburzenie tego ruchu nie zmieniamy jego charakteru trwale, lecz wywołujemy tylko drobne odchylenia malejące z czasem. Niestatecznym zaś jest ruch, który tej własności nie posiada. Przy badaniu stateczności ruchu pomijamy stabilizujące działanie tarcia wywołanego zaburzeniem, jako siły mogącej niekiedy zawieść (np. gdy przypadkiem smar dostanie się między powierzchnie trące).

Dlatego zestaw kołowy o obręczach cylindrycznych (jako układ sztywny) jest w płaszczyźnie pionowej swojej osi niestateczny, oczywiście teoretycznie, bo praktycznie zapewniają jego stateczność obrzeża kół, które ograniczają ślizganie się zestawu pod wpływem siły zaburzającej Y skierowanej wzdłuż tej osi. Natomiast przy zastosowaniu obręczy stożkowatych i odpowiedniego nachylenia powierzchni tocznych szyn staje się powyższy układ statecznym, dzięki skończonej szerokości paska przylegania obręczy do powierzchni tocznej szyny. Dowód polega na rozwiązaniu zadań następujących:

a) Na płaskich ścianach MO i NO przecinających się w krawędzi poziomej, której śladem na płaszczyźnie rysunku jest O , spoczywa końcami A i B cieniki lecz sztywny pręt jednorodny, mogący się poruszać tylko w płaszczyźnie rysunku (pionowej). Znaleźć położenie równowagi i jej rodzaj z pominięciem tarcia, jeżeli obie ściany są nachylone do poziomu pod kątem α .

Rozwiązanie. Oznaczmy w obranym według rys. 6 układzie współrzędnych końce, krótkimi pręt opiera się na obu ścianach przez (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , a środek pręta przez $\Sigma(\xi, \eta)$ mamy



Rys. 6

$$\xi = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad \eta = \frac{1}{2}(y_1 + y_2),$$

$$y_1 = m x_1, \quad y_2 = m x_2,$$

gdzie $m = \operatorname{tg} \alpha$. Po wyrażeniu z tych równań x_1, y_1, x_2, y_2 , przez ξ i η oraz wstawieniu tych wyrażań do równania

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = 4l^2,$$

w którym $2l$ oznacza długość pręta, otrzymujemy równanie miejsca geometrycznego środków $\Sigma(\xi, \eta)$ w postaci

$$(a) \quad m^4 \xi^2 + \eta^2 = m^2 l^2.$$

Jest to elipsa o półosiach $a = l/m$, $b = lm$ i środku w O . Stosownie do zasady prac przygotowanych pręt jest w równowadze tylko w położeniu poziomym, kiedy jego środek ciężkości znajduje się na końcu półosi b w wysokości lm nad O . To położenie zaś jako odpowiadające maximum energii potencjalnej pręta jest widocznie niestateczne. (Stateczne staje się oczywiście z uwzględnieniem tarcia w miejscach stykania się końców pręta ze ścianą).

Podobnie niestateczna jest równowaga jakiegokolwiek ciała opierającego się dwoma punktami na obu ścianach, jeżeli te punkty A, B i środek ciężkości ciała $S(x_0, y_0)$ leżą

w płaszczyźnie obranej za płaszczyznę rysunku. Przyjawszy np., że S jest odległe od AB o h i że $AS = SB$, znajdujemy przy oznaczeniu przez φ kąta nachylenia AB do osi x :

$$x_0 = \xi - h \sin \varphi, \quad y_0 = \eta + h \cos \varphi.$$

Ponieważ $\sin \varphi = \frac{m\xi}{l}$, $\cos \varphi = \frac{\eta}{ml}$, przeto

$$x_0 = \xi - m \frac{h}{l} \xi, \quad y_0 = \eta + \frac{1}{m} \frac{h}{l} \eta.$$

Rozwiązawszy to równanie względem ξ i η i wstawiwszy następnie do (a), otrzymujemy jako równanie miejsca geometrycznego środka $S(x_0, y_0)$

$$(b) \quad \left[m^2 \left(1 - m \frac{h}{l} \right) \right]^2 x_0^2 + \left[1 + \frac{1}{m} \frac{h}{l} \right]^2 y_0^2 = m^2 l^2,$$

a więc znowu elipsę o środku w O i o półosiach

$$a_0 = \frac{l}{m} - h, \quad b_0 = ml + h.$$

b) Weźmy teraz pod uwagę przypadek ogólniejszy, kiedy środek ciężkości S o współrzędnych u, v nie leży na symetralnej odcinka AB , lecz zbacza od niej o $e < l$. Przy zboczeniu na prawo (rys. 7) znajdujemy łatwo związki

$$u = \left(1 - m \frac{h}{l} \right) \xi + \frac{e}{ml} \eta, \quad v = e \frac{m}{l} \xi + \left(1 + \frac{1}{m} \frac{h}{l} \right) \eta.$$

Rozwiązawszy te równania względem ξ i η oraz wstawiwszy w (a) znajdujemy po zastąpieniu u, v przez x, y

$$(c) \quad \left[\frac{e^2}{l^2} + \left(m + \frac{h}{l} \right)^2 \right] x^2 - 2 \frac{e}{l} \left(\frac{1}{m} + m \right) xy + \left[\frac{e^2}{l^2} + \left(\frac{1}{m} - \frac{h}{l} \right)^2 \right] y^2 = \\ = l^2 \left[1 + \left(\frac{1}{m} - m \right) \frac{h}{l} - \frac{e^2 + h^2}{l^2} \right]^2.$$

Jest to równanie środkowe elipsy, której osie są nachylone do osi współrzędnych pod kątem β dającym się obliczyć według wzorów geometrii analitycznej przecięć stożkowych. Pisząc równanie powyższe elipsy w skrócie

$$(d) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = k$$

mamy na β równanie

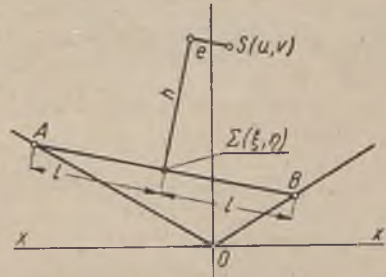
$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{e}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - m \right) l - h}.$$

Półosie elipsy znajdujemy obracając osie x, y o kąt β , co spowoduje przekształcenie równania (d) na równanie

$$(e) \quad g_1x^2 + g_2y^2 = k,$$

w którym g_1, g_2 są pierwiastkami równania

$$(f) \quad g^2 - g(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$



Przy oznaczeniu skracającym

$$H = \frac{e^2 + h^2}{l^2} - \left(\frac{1}{m} - m\right) \frac{h}{l} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{m^2} + m^2\right) - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{l^2} + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} - m\right) - \frac{h}{l}\right]^2,$$

znajdujemy po wielu przekształceniach

$$(g) \quad g_1 \cdot g_2 = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + m\right) \mp \sqrt{H}\right]^2,$$

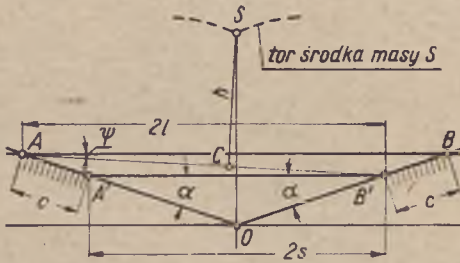
a stąd wzory na pólisie

$$a^2 = \frac{k}{g_1} = \left| \frac{l \left[1 + \left(\frac{1}{m} - m\right) \frac{h}{l} - \frac{e^2 + h^2}{l^2} \right]}{-\sqrt{H} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + m\right)} \right|^2, \quad b^2 = \frac{k}{g_2} = \left| \frac{l \left[1 + \left(\frac{1}{m} - m\right) \frac{h}{l} - \frac{e^2 + h^2}{l^2} \right]}{\sqrt{H} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m} + m\right)} \right|^2.$$

Wzory te przy $e=0$ dają, jak łatwo sprawdzić, wartości a_0 i b_0 otrzymane w ust. (a).

§ 14. Dowód stateczności zestawu kołowego o obręczach stożkowatych

Przechodząc teraz do zastosowania powyższych rozwiązań, zauważymy przede wszystkim, że przy najczęściej zachodzącym spłaszczeniu główki szyny o szerokości c obręcze stożkowe przylegają na tej szerokości teoretycznie tylko w jednym położeniu zestawu. To położenie jest w warunkach normalnych symetryczne względem toru. Schematycznie przedstawia je rys. 8, z przesadną wielkością c i pominięciem obrzeży, przy założeniu istnienia luzów normalnych między obrzeżem a szyną. W obrębie tych luzów mogą zachodzić przemieszczenia zestawu w płaszczyźnie odpowiedniego przekroju poprzecznego toru.



Rys. 8

Gdy z położenia normalnego (w którym zachodzi przyleganie tworzących obu stożków do szyn) zestaw przemieści się na prawo jako układ sztywny, to zamiast przylegania znajdzie tylko podparcie w dwu punktach skrajnych lewych A i B' . Nawzajem przy przemieszczeniu na lewo powstanie podparcie w dwu punktach skrajnych prawych A' i B . Ruch przygotowany zestawu będzie więc określony przesunięciami końców odcinka stałego AB' po prostych OA i OB na prawo, albo końców $A'B$ na lewo, oraz obrotem tych odcinków o stosowny kąt.

Gdy z położenia normalnego (w którym zachodzi przyleganie tworzących obu stożków do szyn) zestaw przemieści się na prawo jako układ sztywny, to zamiast przylegania znajdzie tylko podparcie w dwu punktach skrajnych lewych A i B' . Nawzajem przy przemieszczeniu na lewo powstanie podparcie w dwu punktach skrajnych prawych A' i B . Ruch przygotowany zestawu będzie więc określony przesunięciami końców odcinka stałego AB' po prostych OA i OB na prawo, albo końców $A'B$ na lewo, oraz obrotem tych odcinków o stosowny kąt.

Tor środka obciążenia S zestawu przedstawi przeto inne równanie wyznaczające przemieszczenia na prawo, a inne na lewo. Aby takie równanie napisać, zastosujemy rozwiązanie powyżej znalezione, obliczywszy

położenie środka obciążenia S względem położenia normalnego odcinka AB' (rys. 8), którego długość oznaczymy przez $2l$. Niech nadto $2s$ oznacza długość $A'B'$, a więc

$$AB = 2s + 2c \cos \alpha, \quad AB' = \frac{2s + c \cos \alpha}{\cos \psi},$$

a ponieważ $AC = (s + c \cos \alpha - h \sin \psi) \cos \psi$, jeżeli C jest spodkiem prostopadłej spuszczonej z S na AB' , a $h = SC$, przeto mimośród punktu C na odcinku AB'

$$e = AC - \frac{1}{2} AB' = s + c \cos \alpha - h \sin \psi - \frac{1}{2} \frac{2s + c \cos \alpha}{\cos \psi}.$$

Ale $\sin \psi = \frac{e \sin \alpha}{2l}$, a w naszym celu można w przybliżeniu zupełnie wystarczającym (z powodu małości kąta α) zastąpić $\cos \psi$ przez 1, a zatem

$$e \approx \frac{c}{2} \left(\cos \alpha - \frac{h}{l} \sin \alpha \right) \approx \frac{c}{2} \left(1 - \frac{h}{l} \sin \alpha \right),$$

$$l = \left(s + \frac{c}{2} \cos \alpha \right) : \cos \psi \approx s + \frac{c}{2} \cos \alpha \approx s + \frac{c}{2}.$$

Nie rozporządzamy dość dokładną znajomością wysokości S nad poziomem linii toczenia się kół na szynach. W rachunku przyjmiemy, że ta wysokość jest równa h .

Torem punktu S przy przemieszczeniu układu na prawo będzie przeto łuk elipsy opisany na lewo, której równanie otrzymamy z równania (c) podstawivszy

$$e = \frac{c}{2} \left(1 - \frac{h}{l} \sin \alpha \right), \quad l = s + \frac{c}{2}.$$

Szukana postać toru rzeczywistego punktu S wynikającego z ruchu na prawo i na lewo będzie miała ostrze (rys. 8) skierowane w dół, jak wynika z obliczenia następującego, w którym dla wygody nie podstawiono znalezionych wyrażeń na e i l .

Z równania (d) elipsy toru wynika, że rzędna y_0 punktu leżącego na osi y ma wartość

$$y_0 = \sqrt{\frac{k}{a_{22}}} = \frac{\left(l + \frac{1}{m} h \right) (l - mh) - c^2}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} l - h \right)^2 + c^2}}.$$

Różniczkując równanie elipsy znajdujemy

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{a_{11}x + a_{12}y}{a_{12}x + a_{22}y}.$$

Oznaczywszy współrzędne najwyższego punktu elipsy $x = x_1$, $y = y_1$ otrzymujemy związek $a_{11}x_1 + a_{12}y_1 = 0$, który wraz z równaniem elipsy daje

$$x_1 = \pm \frac{a_{12}}{a_{11}} \sqrt{\frac{a_{11}k}{a_{12}a_{22} - a_{12}^2}}, \quad y_1 = \mp \frac{a_{11}}{a_{12}} x_1.$$

Ale

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \left[\left(1 + \frac{1}{m} \frac{h}{l} \right) \left(1 - m \frac{h}{l} \right) - \frac{e^2}{l^2} \right]^2,$$

a po stosownych przekształceniach znajdujemy

$$x_1 = \pm \frac{el \left(m + \frac{1}{m} \right)}{\sqrt{e^2 + (ml + h)^2}}, \quad y_1 = \mp \sqrt{e^2 + (ml + h)^2}.$$

Przyjmąwszy np. $s = 75$ cm, $c = 4$ cm, $h = 60$ cm, $m = 1/20$, a więc $l = s + c/2 = 77$ cm, $e = 1,922$ cm, otrzymujemy wartości liczbowe: $y_0 = 63,85$ cm, $y_1 = 63,91$ cm, $x_1 = 42,2$ cm, $y_1 - y_0 = 0,06$ cm.

Obszar stateczności sięga przeto dość daleko, gdyż położenie środka ciężkości S może zbaczać na obie strony o 42,2 cm.

Wprawdzie głębokość „dolinki potencjalnej“ (jak ją nazywają w studiach nad siłami molekularnymi) jest niewielka, bo wynosi zaledwie 0,06 cm, ale wystarcza do zapewnienia stateczności dynamicznej bez oglądania się na tarcie. Ta głębokość ulegnie w rzeczywistości pewnemu zwiększeniu, albowiem z chwilą przemieszczenia zestawu z położenia normalnego w sposób powyżej opisany, przenosi się całkowita reakcja powierzchni tocznej szyny ku krawędzi obręczy stożkowej, co musi wywołać rosnące odkształcenie, a więc i dodatkowe obniżenie środka S . Zmiana ugięć obu szyn wywołana przemieszczeniem jest widocznie skompensowana zmianą nacisków kół tak, iż nie obniża stateczności.

Dowiedziona „stateczność poprzeczna“ pojazdu wynikająca ze stożkowatości obręczy kół pociąga za sobą oczywiście zmniejszenie uderzeń obrzeży o szynę (w porównaniu z kołami cylindrycznymi o takim samym luzie normalnym między szyną a obrzeżem).

§ 15. Zakończenie

Rozpatrując teraz jazdę po łuku przyjmijmy, że zestaw kołowy jest urządzony tak, aby oś nastawiała się normalnie do toru podczas jazdy w łuku o promieniu ρ (mierzonym od środka toru). Z powodu sztywności zestawu koła nie mogą toczyć się bez ślizgania. Założywszy bowiem, że środek zestawu porusza się po łuku koła o promieniu R i kącie środkowym β z prędkością liniową v , widzimy, że koła zewnętrzne opisują drogę dłuższą od toru wymienionego środka. Samo toczenie dałoby tylko

drogę $\varrho\beta$ zamiast $(\varrho+b)\beta$, a więc prędkość ruchu postępowego koła zewnętrznego musi być większa od v o $\Delta v = \frac{b}{R}v$. Jest to zarazem nieunikniona prędkość dodatkowa ślizgania tego koła. Towarzyszy jej tarcie ślizgowe działające na koło w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu pojazdu. Podobnie zajść musi ślizganie dodatkowe koła wewnętrznego z tą samą prędkością w kierunku przeciwnym, a więc tarcie ślizgowe działające na koło w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu pojazdu. Odpowiednie siły tarcia pochodzące od szyn tworzą więc w płaszczyźnie poziomej parę o momencie $Q \cdot \mu \cdot 2b$ dążącą do obrotu zestawu około osi pionowej w kierunku przeciwnym obrotowi wskazówek zegara. Obrót ten jest częściowo zniesiony reakcjami poziomymi części konstrukcyjnych podwozia oraz szyn tak, iż pozostaje tylko obrót odpowiadający promieniowi ϱ opisywanego łuku przez środek zestawu. Wypada zaznaczyć, że obraz powyższy nie uwzględnia odkształcalności skrętnej osi zestawu kołowego, której skutkiem jest względny obrót obu kół pod wpływem przeciwnie skierowanych momentów tarcia względem osi geometrycznej. To prowadzi najprawdopodobniej do drgań skrętnych zestawu kołowego oraz wywołanych nimi drgań podłużnych w szynach, słyszalnych wyraźnie przy jeździe w łuku np. wagonów tramwajowych po suchych szynach.

Co się zaś tyczy samych warunków bezpieczeństwa przeciw zejściu koła z szyny, to próby dotychczasowe ujęcia teoretycznego polegają, jak się zdaje, wyłącznie na schematach statycznych, podczas gdy zjawisko jest natury dynamicznej. Czy jednak teoria dynamiczna jest osiągalna bez uwzględnienia wpływu nieuniknionych zbieżeń od schematu geometrycznego układu złożonego z szyn i zestawów kołowych wraz z pojazdami?

Na podstawie doświadczenia osobistego przy opracowywaniu teoretycznym wybożenia termicznego torów spawanych w latach 1936 do 1941¹⁸⁾ sądzę, że nie. Okazało się bowiem, że zgodność z pomiarami doświadczałnymi prof. RAABA w Karlsruhe można było osiągnąć tylko przez wprowadzenie do rachunku zbieżeń od prostego schematu teoretycznego i to ilościowo takich, jakie są w praktyce nieuniknione.

¹⁸⁾ M. T. HUBER: Über die Anwendung der Theorie zur Deutung der Versuchsforschung im Gleisverwerfungsproblem. Gleistechnik u. Fahrbahnbau, 1941. Nr 15/16. Jest to ostatnia z cyklu publikacji autora na ten temat.

DZIAŁ VI

KONSTRUKCJE INŻYNIERSKIE

Redaktor naukowy: **MARIAN JANUSZ**
Asystenci naukowi: **ADAM TUROWSKI**
JERZY WIANECKI

Z TEORII BELKI CIĄGŁEJ

(Czasopismo Techniczne, 1925 r.)

Przy wyprowadzaniu równania trzech momentów belki ciągłej o stałym przekroju, posługiwano się dotychczas warunkiem:

$$\beta_r + \alpha_r = 0$$

(rys. 1), przy czym β_r jest algebraiczną wartością kąta obrotu końcowego przekroju przęśła $\overline{A_{r-1}A_r} = l_r$, zaś α_r taką wartość kąta obrotu początkowego przekroju przęśła następnego $\overline{A_rA_{r+1}} = l_{r+1}$. Jakkolwiek ta najdawniejsza metoda wyróżnia się poglądownością i prostotą, to jednak wydaje się celowe wypróbowanie w tym przypadku nowszej metody, ujmującej w łatwy sposób takie wpływy, które przy dawnej metodzie wymagają znaczniejszego nakładu rachunkowej pracy.

1. Wpływ obciążeń przęślowych

Energia potencjalna (praca odkształcenia) belki ciągłej, obciążonej dowolnymi siłami prostopadłymi do osi belki i leżącymi w jej płaszczyźnie głównej da się wyrazić wzorem:

$$(1) \quad U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{EJ} + \frac{1}{2} \kappa \int \frac{Q^2 dx}{FG}.$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie znaku równości przedstawia *energię zginania* momentami M , a drugi *energię ścinania* siłami poprzecznymi Q . Nadto oznacza κ współczynnik liczbowy zależny od geometrycznej postaci przekroju F o momencie bezwładności J , E moduł sprężystości, zaś G moduł odkształcenia postaciowego.

Ponieważ w zwykłej teorii belki ciągłej nie uwzględnia się wpływu sił poprzecznych na ugięcie, przeto na razie pominiemy energię ścinania, czyli zatrzymamy tylko pierwszą całkę w wyrażeniu dla U . Przyjmiemy przy tym, że wszystkie podpory są doskonale sztywne i leżą w równej

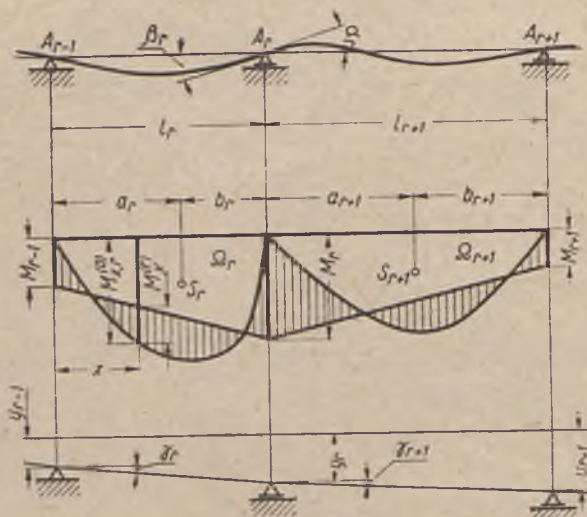
wysokości. Obrawszy teraz momenty podporowe M_r ($r=0,1,2,\dots,n$) jako wielkości hyperstatyczne, otrzymujemy według metody MENABREA-

CASTIGLIANO równania warunkowe w postaci:

$$(2) \quad \frac{1}{EJ} \int M \frac{\partial M}{\partial M_r} dx = 0.$$

Moment zginający M w przekroju x r -go przęsła (rys. 1), wyciętego w myśli z belki przekrojami na podporach A_{r-1} i A_r da się wyrazić w następujący sposób:

$$(3) \quad M_x^{(r)} = M_{x,r}^{(0)} + M_{r-1} \frac{l_r - x}{l_r} + M_r \frac{x}{l_r}.$$



Rys. 1

Tutaj oznacza $M_{x,r}^{(0)}$ wartość, jaką by miał moment zginający w dowolnym przekroju przęsła, gdyby nie było momentów podporowych, czyli gdyby to przęsło było belką w obu końcach swobodnie podpartą (odciętą x mierzymy od lewego końca przęsła). $M_{x,r}^{(0)}$ jest zatem funkcją samego x , niezależną od momentów podporowych. Podobnie mamy dla momentu zginającego w przekroju x , mierzonym od lewego końca $(r+1)$ -go przęsła:

$$(4) \quad M_x^{(r+1)} = M_{x,r+1}^{(0)} + M_r \frac{l_{r+1} - x}{l_{r+1}} + M_{r+1} \frac{x}{l_{r+1}},$$

stąd:

$$\frac{\partial M_x^{(r)}}{\partial M_r} = \frac{x}{l_r}, \quad \frac{\partial M_x^{(r+1)}}{\partial M_r} = \frac{l_{r+1} - x}{l_{r+1}}.$$

Dla wszystkich pozostałych przęseł jest: $\frac{\partial M}{\partial M_r} = 0$, albowiem momenty zginające w tych przęsłach są niezależne od M_r . Wobec tego wystarczy wykonać całkowania naznaczone równaniem (2) tylko dla przęsła r -go i $(r+1)$ -go. Otrzymamy wówczas:

$$(5) \quad \frac{1}{EJ} \int_0^{l_r} \left(M_{x,r}^{(0)} + M_{r-1} \frac{l_r - x}{l_r} + M_r \frac{x}{l_r} \right) \frac{x}{l_r} dx + \\ + \frac{1}{EJ} \int_0^{l_{r+1}} \left(M_{x,r+1}^{(0)} + M_r \frac{l_{r+1} - x}{l_{r+1}} + M_{r+1} \frac{x}{l_{r+1}} \right) \frac{l_{r+1} - x}{l_{r+1}} dx = 0$$

albo po skreśleniu czynnika EJ i rozłożeniu obu całek:

$$\begin{aligned}
 M_{r-1} \int_0^{l_r} \frac{(l_r - x)x}{l_r^2} dx + M_r \left[\int_0^{l_r} \frac{x^2}{l_r^2} dx + \int_0^{l_{r+1}} \frac{(l_{r+1} - x)^2}{l_{r+1}^2} dx \right] + \\
 + M_{r+1} \int_0^{l_{r+1}} \frac{(l_{r+1} - x)x}{l_{r+1}^2} dx + \frac{1}{l_{r0}} \int_0^{l_r} M_{x,r}^{(0)} x dx + \\
 + \frac{1}{l_{r+10}} \int_0^{l_{r+1}} M_{x,r+1}^{(0)} (l_{r+1} - x) dx = 0.
 \end{aligned}$$

Ostatnie dwie całki mają proste znaczenie geometryczne. Oznaczmy przez Ω_r i Ω_{r+1} pola wykresów momentów $M_{x,r}^{(0)}$ i $M_{x,r+1}^{(0)}$ na przęsłach l_r i l_{r+1} , zaś a_r i a_{r+1} odcięte środków ciężkości tych pól. Wtedy jedna z tych całek, przedstawiająca moment statyczny odpowiadającego pola momentów $M_x^{(0)}$ względem osi y wystawionej w lewym końcu przęsła jest równa $\Omega_r \cdot a_r$, druga zaś równa $\Omega_{r+1}(l_{r+1} - a_{r+1})$. Wykonawszy naznaczone proste całkowanie, uwolniwszy pierwsze trzy wyrazy od mianowników i podstawivszy $l_{r+1} - a_{r+1} = b_{r+1}$, otrzymamy znane *równanie trzech momentów* w postaci:

$$(6) \quad M_{r-1}l_r + 2M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}l_{r+1} + 6\frac{\Omega_r a_r}{l_r} + 6\frac{\Omega_{r+1} b_{r+1}}{l_{r+1}} = 0.$$

2. Wpływ nierównej wysokości położenia podpór

Wskutek nierównej wysokości położenia podpór obraca się prosta l_r łącząca podpory A_{r-1} i A_r o kąt $\gamma_r = \frac{y_r - y_{r-1}}{l_r}$, zaś prosta $l_{r+1} = \overline{A_r A_{r+1}}$ o kąt $\gamma_{r+1} = \frac{y_{r+1} - y_r}{l_{r+1}}$, czyli prosta l_{r+1} obraca się względem prostej l_r o kąt $\gamma_r - \gamma_{r+1}$. Ten kąt będzie „uogólnionym przesunięciem“ odpowiadającym momentowi podporowemu M_r jako „uogólnionej sile“. Równanie warunkowe (2) przybierze przeto w myśl zasady CASTIGLIANO postać:

$$(7) \quad \frac{1}{EJ} \int M \frac{\partial M}{\partial M_r} dx = \gamma_r - \gamma_{r+1},$$

różniącą się od poprzedniej tylko tym, że po prawej stronie zamiast 0 jest $\gamma_r - \gamma_{r+1}$. Podobnie będzie z *równaniem trzech momentów*, które z uwzględnieniem poprzednich uproszczeń napiszemy w postaci:

$$(8) \quad M_{r-1}l_r + 2M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}l_{r+1} + \\
 + \frac{6\Omega_r a_r}{l_r} + \frac{6\Omega_{r+1} b_{r+1}}{l_{r+1}} = 6EJ(\gamma_r - \gamma_{r+1}).$$

3. Wpływ sił poprzecznych

Cheąc uwzględnić wpływ sił poprzecznych musimy wyjść z równania warunkowego, otrzymanego przez różniczkowanie zupełnego wyrażenia dla energii potencjalnej (wzór 1) względem M_r . Mamy wówczas:

$$(9) \quad \frac{1}{EJ} \int M \frac{\partial M}{\partial M_r} dx + \frac{\kappa}{FG} \int Q \frac{\partial Q}{\partial M_r} dx = 0,$$

albo

$$\frac{1}{EJ} \int M \frac{\partial M}{\partial M_r} dx + \frac{\kappa}{FG} \int Q \frac{\partial Q}{\partial M_r} dx = \gamma_r - \gamma_{r+1},$$

zależnie od tego, czy podpory są w równej wysokości czy też nie. Wyrażenie dla siły poprzecznej $Q_x^{(r)}$ w r -tym przęśle znajdziemy najprościej różniczkując wyrażenie dla $M_x^{(r)}$ względem x , czyli:

$$Q_x^{(r)} = \frac{dM_x^{(r)}}{dx} = \frac{dM_{x,r}^{(0)}}{dx} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} = Q_{x,r}^{(0)} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r},$$

gdzie $Q_{x,r}^{(0)}$ oznacza siłę poprzeczną, jaka by powstała w dowolnym przekroju przęśla, gdyby ono było belką na obu końcach swobodnie podpartą. Podobnie mamy dla siły poprzecznej $(r+1)$ -ego przęśla:

$$Q_x^{(r+1)} = Q_{x,r+1}^{(0)} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}}.$$

Stąd przez różniczkowanie znajdujemy:

$$\frac{\partial Q_x^{(r)}}{\partial M_r} = \frac{1}{l_r}, \quad \frac{\partial Q_x^{(r+1)}}{\partial M_r} = -\frac{1}{l_{r+1}}.$$

Po wstawieniu powyższych wartości w równanie warunkowe (9), w którym wartość pierwszej całki pozostaje taka sama, jak lewej strony równania (5), otrzymamy:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6EJ} [M_{r-1}l_r + 2M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}l_{r+1}] + \\ & + \frac{\kappa}{FG} \left[\int_0^{l_r} \left(Q_{x,r}^{(0)} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} \right) \frac{dx}{l_r} - \right. \\ & \left. - \int_0^{l_{r+1}} \left(Q_{x,r+1}^{(0)} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} \right) \frac{dx}{l_{r+1}} \right] = \gamma_r - \gamma_{r+1}. \end{aligned}$$

Zważywszy, że:

$$\int_0^{l_r} Q_{x,r}^{(0)} dx = \int_0^{l_r} \frac{\partial M_{x,r}^{(0)}}{\partial x} dx = \left[M_{x,r}^0 \right]_0^{l_r} = 0,$$

ponieważ $M_{x,r}^{(0)}$ znika dla $x=0$ i dla $x=l_r$, to i podobnie

$$\int_0^{l_{r+1}} Q_{x,r+1}^{(0)} dx = 0.$$

Wobec tego powyższe równanie napiszemy w postaci:

$$M_{r-1}l_r + 2M_r(l_r + l_{r+1}) + M_{r+1}l_{r+1} + \\ + \frac{6zEJ}{FG} \left(\frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} - \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} \right) = 6EJ(\gamma_r - \gamma_{r+1})$$

albo po podstawieniu $J = Fi^2$ oraz $\frac{E}{G} = 2(1 + \nu)$ i po uporządkowaniu według momentów podporowych:

$$(10) \quad M_{r-1}l_r \left[1 - 12z(1 + \nu) \frac{i^2}{l_r^2} \right] + 2M_r(l_r + l_{r+1}) \left[1 + 6z(1 + \nu) \frac{i^2}{l_r l_{r+1}} \right] + \\ + M_{r+1}l_{r+1} \left[1 - 12z(1 + \nu) \frac{i^2}{l_{r+1}^2} \right] + \frac{6Q_r a_r}{l_r} + \frac{6Q_{r+1} b_{r+1}}{l_{r+1}} = 6EJ(\gamma_r - \gamma_{r+1}).$$

Z równania trzech momentów w uogólnionej postaci możemy ocenić błąd, jaki popełniamy przez pominięcie wpływu sił poprzecznych na ugięcie belki.

Weźmy np. belkę dwuprzęsłową obciążoną równomiernie na całej długości $2l$ (przy czym $l_1 = l_2$). Wtedy $M_0 = M_2 = 0$, zaś dla M_1 znajdujemy:

$$M_1 = -\frac{ql^2}{8} \frac{1}{1 + 6z(1 + \nu)(i/l)^2},$$

podczas gdy z pominięciem wpływu sił poprzecznych jest, jak wiadomo,

$$M_1 = -\frac{ql^2}{8}.$$

Wyraz

$$6z(1 + \nu)(i/l)^2 = \alpha,$$

określający wpływ sił poprzecznych jest zwykle bardzo mały wobec jedności. Stosunkowo dużą wartość osiąga α w dwuteówkach o szerokiej półce, ale i tutaj trzeba ze stosunkiem wysokości przekroju do rozpiętości ($h:l$) iść powyżej 1:8, aby osiągnąć wartość 0,1, czyli aby bezwzględna wartość momentu podporowego M_1 obniżyła się o 10%. Jak się zdaje, trudno napotkać w praktyce przypadek, w którym należałoby się liczyć z powyższym wpływem.

RÓWNANIE PIĘCIU MOMENTÓW

(Czasopismo Techniczne, 1927 r.)

Podczas gdy teoria prostej belki ciągłej na niepoddających się podporach prowadzi do powszechnie znanego równania trzech momentów, to w przypadku podpór sprężyste podatnych analogiczne równanie zawierać musi w ogóle pięć kolejnych momentów podporowych M_{r-2} , M_{r-1} , M_r , M_{r+1} , M_{r+2} .

Niemal na pewno można twierdzić, że francuski inżynier BERTOT był pierwszy, który w r. 1855 wyprowadził *równanie trzech momentów* (M_{r-1} , M_r , M_{r+1}), niesłusznie zatem zwane równaniem CLAPEYRONA.

Równanie pięciu momentów ustawili niezależnie od siebie w Anglii K. PEARSON ¹⁾ i w Polsce H. CZOPOWSKI ²⁾.

Nader liczne zastosowania tego równania w statyce konstrukcji budowlanych opracował potem H. MÜLLER-BRESLAU ³⁾ w 2 tomie swego podręcznika, nie używając zresztą nazwy powyżej podanej. Jeżeli dziś wracam do tego tematu, to po części dlatego, ażeby na wyprowadzeniu równania trzech momentów uwydatnić korzyści zastosowania metody MENABREA-CASTIGLIANO w teorii belki ciągłej na poddających się sprężyste podporach przy możliwie najogólniejszych założeniach, a nadto, ażeby pokazać na dwu przykładach jakimi drogami dochodzi się do praktycznego rozwiązania zadania.

Przyjmujemy (rys. 1):

a) nierówną wysokość podpór w stanie nieobciążonym i oznaczmy przez y_r ($r=1,2,3,\dots,n$) rzędną r -tej podpory mierzoną dodatnio w dół od pewnej stałej poziomej osi x :

b) sprężystą podatność podpór określoną współczynnikami podatności a_r o wymiarze cm/kG ; a więc skutek dodatniej reakcji A_r obniża się podpora o $A_r a_r$;

c) zmienną sztywność zginania belki EJ , w każdym przęśle o rozpiętości l_r i tak samo zmienną (w zależności od odciętej x) sztywność ścinania GF_r/α .

¹⁾ Przypuszczalnie w rozprawie ogłoszonej w 1890 r. na łamach czasopisma „Messenger of Mathematics“ Vol. 19 (*przyp. red.*).

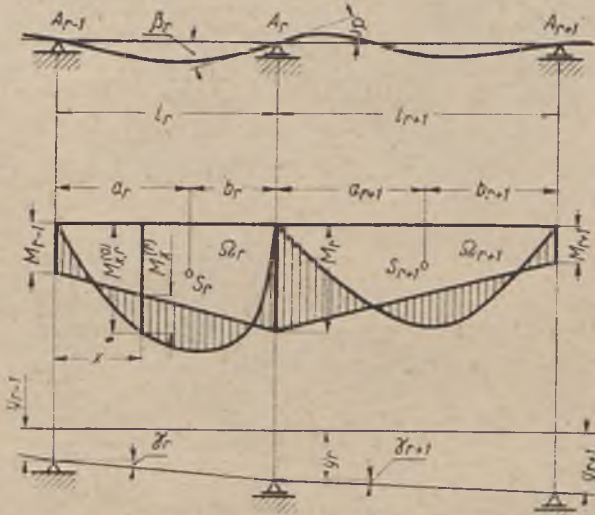
²⁾ H. CZOPOWSKI: Belka wieloprzęsłowa na sprężystych podporach. „Przegląd Techniczny“ 1897 r.

³⁾ H. MÜLLER-BRESLAU: Die graphische Statik der Baukonstruktionen.

Wówczas mamy jako wyrażenie całkowitej energii odkształcenia układu:

$$(1) \quad U = \frac{1}{2} \int \frac{M^2 dx}{EJ} + \frac{1}{2} \int \frac{\alpha Q^2 dx}{GF} + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{i=n} A_i^2 a_i,$$

przy czym granice całkowania rozciągają się na całą długość belki. Tutaj oznacza α współczynnik liczbowy zależny od postaci przekroju o polu F ,



Rys. 1

zaś G moduł sprężystości postaciowej. Stąd w myśl metody MENABREA-CASTIGLIANO:

$$(2) \quad \frac{\partial U}{\partial M_r} = \int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial M_r} dx + \int \frac{\alpha Q}{GF} \frac{\partial Q}{\partial M_r} dx + \sum A_i \frac{\partial A_i}{\partial M_r}, \quad a_i = \gamma_r - \gamma_{r+1},$$

gdyż $\gamma_r - \gamma_{r+1} = \frac{y_r - y_{r-1}}{l_r} - \frac{y_{r+1} - y_r}{l_{r+1}}$ jest wartością uogólnionego przesunięcia odpowiadającego momentowi podporowemu M_r jako uogólnionej sile.

Nie trudno teraz zauważyć, że wielkości pod całkami zawierają M_r , tylko w dwu przęsłach l_r i l_{r+1} ; pod znakiem sumy zaś tylko w A_{r-1} , A_r i A_{r+1} . Momenty podporowe M_{r-1} , M_r , M_{r+1} tkwią przeto we wszystkich trzech częściach wyrażenia dla $\frac{\partial U}{\partial M_r}$, a tylko trzecia część zawiera nadto momenty M_{r-2} i M_{r+2} . Oznaczywszy jeszcze przez $M_{x,r}^{(0)}$, $Q_{x,r}^{(0)}$ pomysłany moment zginający i siłę poprzeczną w dowolnym przekroju przęsła l_r , gdyby ono działało jak belka swobodnie podparta, a przez $A_r^{(0)}$

pomyślaną reakcję r -tej podpory w tychże samych warunkach, otrzymamy z (2) równanie warunkowe dla r -tej podpory:

$$(3) \quad \int_0^{l_r} \left(M_{x,r}^{(0)} + M_{r-1} \frac{l_r - x}{l_r} + M_r \frac{x}{l_r} \right) \frac{x dx}{EJ_r l_r} + \int_0^{l_{r+1}} \left(M_{x,r+1}^{(0)} + M_r \frac{l_{r+1} - x}{l_{r+1}} + M_{r+1} \frac{x}{l_{r+1}} \right) \frac{(l_{r+1} - x) dx}{EJ_{r+1} l_{r+1}} + \int_0^{l_r} \left(Q_{x,r}^{(0)} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} x \right) \frac{x dx}{GF_r l_r} - \int_0^{l_{r+1}} \left(Q_{x,r+1}^{(0)} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} x \right) \frac{x dx}{GF_{r+1} l_{r+1}} + \left(A_{r-1}^{(0)} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} - \frac{M_{r-1} - M_{r-2}}{l_{r-1}} \right) \frac{a_{r-1}}{l_r} - \left(A_r^{(0)} + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} - \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} \right) \left(\frac{a_r}{l_r} + \frac{a_{r+1}}{l_{r+1}} \right) + \left(A_{r+1}^{(0)} + \frac{M_{r+2} - M_{r+1}}{l_{r+2}} - \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} \right) \frac{a_{r+1}}{l_{r+1}} = \gamma_r - \gamma_{r+1}.$$

Po uporządkowaniu tego równania według niewiadomych pięciu momentów podporowych i przeniesieniu wielkości danych na prawą stronę, znajdujemy:

$$(4) \quad \lambda_{r-2} M_{r-2} + \mu_r M_{r-1} + \nu_r M_r + \mu_{r+1} M_{r+1} + \lambda_{r+1} M_{r+2} = L_r,$$

przy czym λ , μ , ν są współczynnikami liczbowymi, a L_r wielkością o wymiarze momentu. Do przedstawienia wyrażeń dla λ , μ , ν wprowadzimy następujące wielkości pomocnicze:

$B_0 = \frac{EJ_0}{l_0}$ — pewną dogodnie obraną (o jakiegokolwiek zresztą wartości) wielkość stałą o wymiarze kGcm.

$B_r = \frac{EJ_r}{l_r}$ — iloraz sztywności zginania w przekroju x przęśla r -tego przez długość l_r -tego przęśla.

$C_r = \frac{GF_r l_r}{z_r}$ — wielkość porównywalną z B_r (o tym samym wymiarze).

$\xi = \frac{x}{l_r}$ — w każdym z przęśł (bez wskaźnika przy ξ).

Przy tych oznaczeniach mamy:

$$\lambda_{r-1} = \frac{B_0 a_{r-1}}{l_{r-1} l_r}$$

$$\lambda_{r+1} = \frac{B_0 a_{r+1}}{l_{r+1} l_{r+2}}$$

$$\begin{aligned} \mu_r &= \int_0^1 \frac{B_0}{B_r} (\xi - \xi^2) d\xi - \int_0^1 \frac{B_0}{C_r} d\xi - B_0 \cdot \left(\frac{a_{r-1}}{l_{r-1}l_r} + \frac{a_{r-1} + a_r}{l_r^2} + \frac{a_r}{l_r l_{r+1}} \right); \\ \mu_{r+1} &= \int_0^1 \frac{B_0}{B_{r+1}} (\xi - \xi^2) d\xi - \int_0^1 \frac{B_0}{C_{r+1}} d\xi - B_0 \left(\frac{a_r}{l_r l_{r+1}} + \frac{a_r + a_{r+1}}{l_{r+1}^2} + \frac{a_{r+1}}{l_{r+1} l_{r+2}} \right); \\ \nu_r &= \int_0^1 \frac{B_0}{B_r} \xi^2 d\xi + \int_0^1 \frac{B_0}{B_{r+1}} (1 - \xi)^2 d\xi + \int_0^1 \frac{B_0}{C_r} d\xi + \int_0^1 \frac{B_0}{C_{r+1}} d\xi + \\ &\quad + B_0 \left(\frac{a_{r-1} + a_r}{l_r^2} + \frac{2a_r}{l_r l_{r+1}} + \frac{a_r + a_{r+1}}{l_{r+1}^2} \right); \\ L_r &= B_0 \left[-A_{r-1}^{(0)} \frac{a_{r-1}}{l_r} + A_r^{(0)} a_r \left(\frac{1}{l_r} + \frac{1}{l_{r+1}} \right) - A_{r+1}^{(0)} \frac{a_{r+1}}{l_{r+1}} + \gamma_r - \gamma_{r-1} \right] - \\ &\quad - \int_0^1 \frac{B_0}{B_r} M_{x,r}^{(0)} \xi d\xi - \int_0^1 \frac{B_0}{B_{r+1}} M_{x,r+1}^{(0)} (1 - \xi) d\xi - \left[\int_0^1 \frac{B_0}{C_r} Q_{x,r}^{(0)} l_r d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 \frac{B_0}{C_{r+1}} Q_{x,r+1}^{(0)} l_{r+1} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Pierwszą z ostatnich czterech całek, pomnożoną przez l_r^2 , można pojmować jako moment sprowadzonej powierzchni momentów $M_{x,r}^{(0)}$ o polu Ω_r względem pionowej lewej podpory r -tego przęsła, czyli:

$$\int_0^1 \frac{B_0}{B_r} M_{x,r}^{(0)} \xi d\xi = \frac{\Omega_r a_r}{l_r^2},$$

przy czym:

$$\Omega_r = \int_{x=0}^{x=l_r} \frac{B_0}{B_r} M_{x,r}^{(0)} dx,$$

zaś a_r oznacza odległość środka sprowadzonej (zredukowanej) powierzchni momentów od wymienionej pionowej. Podobnie jest:

$$\int_0^1 \frac{B_0}{B_{r+1}} M_{x,r+1}^{(0)} (1 - \xi) d\xi = \frac{\Omega_{r+1} b_{r+1}}{l_{r+1}^2},$$

jeżeli b_{r+1} oznacza odległość środka sprowadzonej powierzchni momentów od pionowej prawej podpory przęsła $(r+1)$ -go.

Jeżeli końce belki nie są utwierdzone, to M_0 i M_n są równe zero, a pierwsze, drugie, trzecie... z równań (4) przybiorą postać:

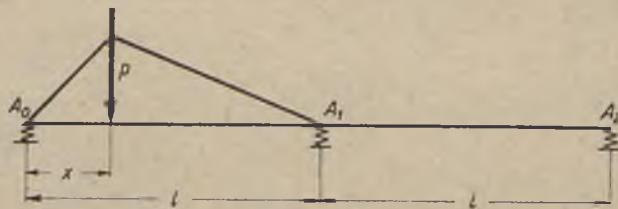
$$\begin{aligned}
 \nu_1 M_1 + \mu_2 M_2 + \lambda_2 M_3 &= &= L_1 \\
 \mu_2 M_1 + \nu_2 M_2 + \mu_3 M_3 + \lambda_3 M_4 &= &= L_2 \\
 \lambda_2 M_1 + \mu_3 M_2 + \nu_3 M_3 + \mu_4 M_4 + \lambda_4 M_5 &= &= L_3 \\
 \lambda_3 M_2 + \mu_4 M_3 + \nu_4 M_4 + \mu_5 M_5 + \lambda_5 M_6 &= &= L_4 \\
 \dots & & \\
 \dots & & \\
 \dots & & \\
 \lambda_{n-5} M_{n-6} + \mu_{n-4} M_{n-5} + \nu_{n-4} M_{n-4} + \mu_{n-3} M_{n-3} + \lambda_{n-3} M_{n-2} &= &= L_{n-1} \\
 \lambda_{n-4} M_{n-5} + \mu_{n-3} M_{n-4} + \nu_{n-3} M_{n-3} + \mu_{n-2} M_{n-2} + \lambda_{n-2} M_{n-1} &= &= L_{n-3} \\
 \lambda_{n-3} M_{n-4} + \mu_{n-2} M_{n-3} + \nu_{n-2} M_{n-2} + \mu_{n-1} M_{n-1} &= &= L_{n-2} \\
 \lambda_{n-2} M_{n-3} + \mu_{n-1} M_{n-2} + \nu_{n-1} M_{n-1} &= &= L_{n-1}
 \end{aligned}$$

Na podstawie układu $(n-1)$ równań można obliczyć niewiadome momenty podporowe przy jakichkolwiek obciążeniach belki tkwiących w wielkościach L_i . Oczywiście nie może być mowy o dalszym ogólnym traktowaniu tych równań. Jednakże w najróżnorodniejszych prostych przypadkach, jakie zachodzą w praktyce, otrzymujemy z łatwością znaczne uproszczenia i dochodzimy szybko i wygodnie do rozwiązania, podobnie jak przy zastosowaniu równania trzech momentów dla belek o niepodających się podporach.

Jeżeli przekrój na całej długości belki jest stały, to $B_0 = B_r = \frac{EJ}{l}$, a całki w wyrażeniach dla współczynników μ_r, ν_r, μ_{r+1} przybierają wartości:

$$\int_0^1 (\xi - \xi^2) d\xi = \frac{1}{6}, \quad \int_0^1 \xi^2 d\xi = \frac{1}{3} = \int_0^1 (1 - \xi)^2 d\xi.$$

Przykład 1. Pod wpływem siły skupionej P (rys. 2) powstaje w belce dwuprzęsłowej tylko moment podporowy M_1 , gdyż pozostałe są równe



Rys. 2

zeru. Równanie pięciu momentów sprowadza się w tym przypadku do szczególnie prostej postaci: $\nu_1 M_1 = L_1$, z której znajdujemy wprost M_1 .

Zakładając przypadek najprostsz y równych pręseł i równej podatności podpór mamy przy danym obciążeniu:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{EJ}{l} \left[-\frac{P(l-x_1)}{l} \frac{a}{l} + 2 \frac{Px_1}{l} \frac{a}{l} \right] - \frac{1}{6} \frac{Px_1(l^2-x_1^2)}{l^2} = \\ &= -\frac{Px_1}{6} \left(1 - \frac{x_1^2}{l^2} \right) - \frac{EJa}{l^3} P(l-3x_1); \\ v_1 &= \frac{2}{3} + \frac{6EJ}{l} \frac{a}{l^2}. \end{aligned}$$

Stąd:

$$(6) \quad M_1 = Pl \frac{-\frac{1}{6} \frac{x_1}{l} \left(1 - \frac{x_1^2}{l^2} \right) - \frac{EJa}{l^3} \left(1 - 3 \frac{x_1}{l} \right)}{\frac{2}{3} + \frac{6EJa}{l^3}}.$$

Dla $x_1=0$, tj., gdy ciężar P znajduje się nad podporą A_0 , będzie:

$$M_1 = -Pl \frac{\frac{EJa}{l^3}}{\frac{2}{3} + \frac{6EJa}{l^3}}.$$

Dla $x_1=l$, tj., gdy P znajduje się nad podporą środkową A_1 :

$$M_1 = +Pl \frac{\frac{2EJa}{l^3}}{\frac{2}{3} + \frac{6EJa}{l^3}}.$$

W obu tych przypadkach byłyby oczywiście te momenty równe zeru, gdyby podpory były zupełnie niepodatne ($a=0$).

Mając wzór (6) dla M_1 przy obciążeniu siłą skupioną w dowolnym przekroju x_1 znajdziemy łatwo linię wpływową dla momentów w przekroju o odciętej u , albowiem moment ten określa równanie:

$$M_u = M_u^{(0)} + M_1 \frac{u}{l},$$

przy czym $M_u^{(0)}$ oznacza moment jaki by powstał, gdyby pręseło działało jak belka swobodnie podparta.

Gdy siła P znajduje się po lewej stronie przekroju u , to $M_u^{(0)} = \frac{Px_1(l-u)}{l}$,

gdy zaś po prawej, to $M_u^{(0)} = \frac{P(l-x_1)u}{l}$.

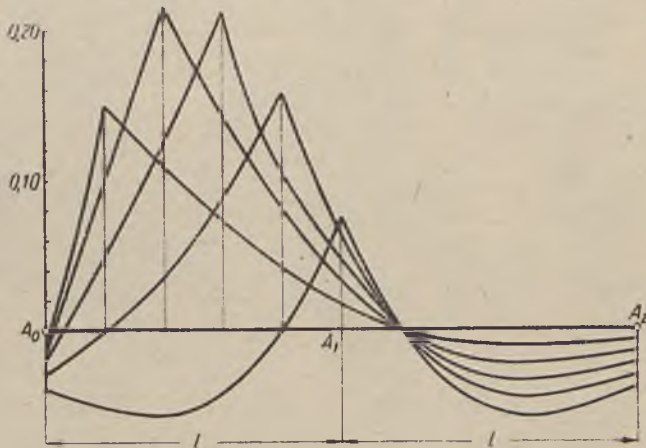
Przyjmijmy np. $\frac{EJ\alpha}{i^3} = \frac{1}{30}$ i szukajmy najpierw linii wpływowej dla momentu podporowego M_1 , a raczej dla bezwymiarowego czynnika $f\left(\frac{x_1}{l}\right)$ w wyrażeniu $M_1 = Pl f\left(\frac{x_1}{l}\right)$. Kładąc $x_1/l = \xi$ znajdujemy ze wzoru (6):

$$f(\xi) = -\frac{1}{26}(1 + 2\xi - 5\xi^2).$$

Przy sztywnych podporach byłoby najwidoczniej:

$$f(\xi) = -\frac{1}{4}(\xi - \xi^3).$$

Podzieliwszy rozpiętość l każdego przęsła na 5 równych części, obliczono przy pomocy powyższych wzorów dla każdego z odpowiadających przekrojów (tj. dla $\frac{u}{l} = \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{5}{5}$) rzędne przynależnej mu linii wpływowej momentu zginającego. Te linie wpływowe dla przęsła lewego przed-



Rys. 3. Linie wpływowe dla momentów przy podporach sprężystych

stawia rys. 3. Ich odbicie zwierciadlane będzie oczywiście ważne dla przęsła prawego. Wartość np. momentu zginającego M_u w przekroju $u = 0,4l$, wywołanego siłą P działającą w punkcie $x_1 = 0,8l$ znajdujemy mnożąc Pl przez rzędną odpowiadającej linii wpływowej równą $0,0794$.

Rysunek 4 umożliwia porównanie linii wpływowych momentów przy podporach sprężystych z liniami wpływowymi tych momentów przy podporach stałych.

Przykład 2. Belka o stałym przekroju na bardzo wielu równoodległych podporach o równej podatności i wysokości, przy obciążeniu jednego przęsła leżącego w środkowej części belki.

Niech pręśło obciążone leży między podporami A_{r-1} i A_r . Idąc od tego pręśła na prawo napotykamy kolejno podpory $A_{r+1}, A_{r+2}, \dots, A_{r+m}$; zaś na lewo — podpory $A_{r-2}, A_{r-3}, \dots, A_{r-m-1}$. Stosownie do założenia jest m bardzo wielkie, a więc przyjmujemy, że $m \rightarrow \infty$. Ponieważ tylko pręśło $A_{r-1}A_r$ jest obciążone, przeto z wyjątkiem $A_{r-1}^{(0)}, A_r^{(0)}$ oraz $M_{x,r}^{(0)}$ wszystkie inne $A^{(0)}$ i $M_x^{(0)}$ są równe zeru. Z tego wynika zarazem, że tylko wielkości

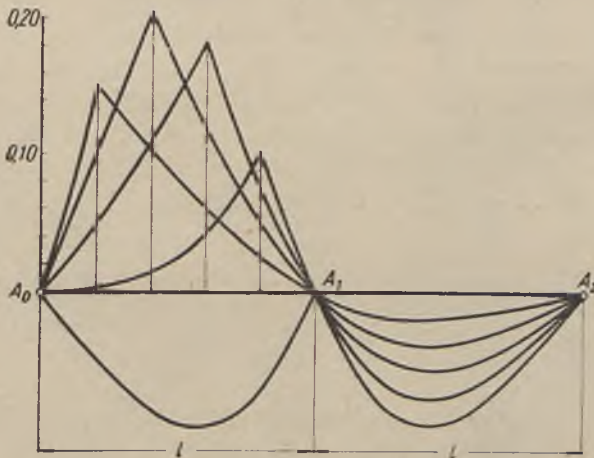
$$L_{r-2} = -\frac{EJ\alpha}{l^2} A_{r-1}^{(0)},$$

$$L_{r-1} = \frac{EJ\alpha}{l^2} (2A_{r-1}^{(0)} - A_r^{(0)}) - \int_0^1 M_{x,r}^{(0)} (1-\xi) d\xi,$$

$$L_r = \frac{EJ\alpha}{l^2} (2A_r^{(0)} - A_{r-1}^{(0)}) - \int_0^1 M_{x,r}^{(0)} \xi d\xi,$$

$$L_{r+1} = -\frac{EJ\alpha}{l^2} A_r^{(0)}$$

nie są zerami, a wszystkie pozostałe L znikają.



Rys. 4. Linie wpływowe dla momentów przy podporach stałych

Układ równań pięciu momentów upraszcza się teraz bardzo znacznie, gdyż współczynniki λ, μ, ν stają się stałymi dla wszystkich pręśł i przybierają wartości:

$$\lambda = \frac{EJ\alpha}{l^3}, \quad \mu = \frac{1}{6} - \frac{4EJ\alpha}{l^3}, \quad \nu = \frac{2}{3} + \frac{6EJ\alpha}{l^3}.$$

Przyjmując podobnie dla pierwszej grupy równań wartość M_{r-n-1} w postaci:

$$(8a) \quad M_{r-n-1} = e^{-n\psi'}(U' \sin n\varphi' + V' \cos n\varphi')$$

mamy po wstawieniu z którychkolwiek z tych równań:

$$(9a) \quad e^{-n\psi'}(U' \sin n\varphi' + V' \cos n\varphi')(\operatorname{ch} 2\psi' \cos 2\varphi' + \beta \operatorname{ch} \psi' \cos \varphi' + \delta) - e^{-n\psi'}(U' \cos n\varphi' - V' \sin n\varphi')(\operatorname{sh} 2\psi' \sin 2\varphi' + \beta \operatorname{sh} \psi' \sin \varphi') = 0$$

dla $n=2, 3, 4, \dots \infty$.

Z równań (9) i (9a) widać, że wyrażenia (8) i (8a) dla momentów podporowych czynią zadość obu skrajnym grupom równań (7), przy wartościach $\varphi = \varphi'$ i $\psi = \psi'$, które są pierwiastkami równań przestępnych:

$$(10) \quad \begin{cases} \operatorname{ch} 2\psi \cos 2\varphi + \beta \operatorname{ch} \psi \cos \varphi + \delta = 0 \\ \operatorname{sh} 2\psi \sin 2\varphi + \beta \operatorname{sh} \psi \sin \varphi = 0. \end{cases}$$

Pozostaje jeszcze wyznaczyć wartości czterech stałych U, V, U', V' tak, ażeby uczynić zadość czterem równaniom grupy środkowej, przy czym wyrażenie (8) stosujemy także do M_r i M_{r+1} (tj. dla $n=0, 1$), a wyrażenie (8a) do M_{r-1} , M_{r-2} (tj. dla $n=0, 1$). Po wstawieniu tych wyrażeń i uporządkowaniu czterech równań podług niewiadomych U, V, U' i V' , otrzymujemy:

$$(11) \quad \begin{cases} A_3 U' + B_3 V' + V = K_{r-2} \equiv 48L_{r-2} \varepsilon \\ A_2 U' + B_2 V' + A_1 U + B_1 V = K_{r-1} \equiv 48L_{r-1} \varepsilon \\ A_1 U' + B_1 V' + A_2 U + B_2 V = K_r \equiv 48L_r \varepsilon \\ V' + A_3 U + B_3 V = K_{r+1} \equiv 48L_{r+1} \varepsilon. \end{cases}$$

Współczynniki A, B przedstawiają przy tym wyrażenia:

$$(11a) \quad \begin{cases} A_1 = e^{-\psi} \sin \varphi, & B_1 = e^{-\psi} \cos \varphi + \beta \\ A_2 = e^{-2\psi} \sin 2\varphi + \beta e^{-\psi} \sin \varphi \\ B_2 = e^{-2\psi} \cos 2\varphi + \beta e^{-\psi} \cos \varphi + 2\delta \\ A_3 = e^{-3\psi} \sin 3\varphi + \beta e^{-2\psi} \sin 2\varphi + 2\delta e^{-\psi} \sin \varphi \\ B_3 = e^{-3\psi} \cos 3\varphi + \beta e^{-2\psi} \cos 2\varphi + 2\delta e^{-\psi} \cos \varphi + \beta. \end{cases}$$

Ale równania (10) umożliwiają wyrażenie β i δ przez φ i ψ wzorami:

$$(12) \quad \beta = -4 \operatorname{ch} \psi \cos \varphi, \quad \delta = \operatorname{ch} 2\psi + \cos 2\varphi + 1.$$

Przy pomocy tych związków oraz wzorów dla funkcji hyperbolicznych możemy wzory (11a) napisać w uproszczonej postaci:

$$(11b) \quad \begin{cases} A_1 = (\operatorname{ch} \psi - \operatorname{sh} \psi) \sin \varphi, & B_1 = (\operatorname{ch} \psi - \operatorname{sh} \psi) \cos \varphi + \beta, \\ A_2 = -\sin 2\varphi, & B_2 = \operatorname{sh} 2\psi + \delta \\ A_3 = (\operatorname{ch} \psi + \operatorname{sh} \psi) \sin \varphi, & B_3 = -(\operatorname{ch} \psi + \operatorname{sh} \psi) \cos \varphi. \end{cases}$$

Przez dodawanie i odejmowanie równań układu (11) otrzymujemy z łatwością dwie pary nowych równań o niewiadomych $U + U'$, $V + V'$, $U - U'$, $V - V'$. Z ich rozwiązań wypada w końcu:

$$(13) \quad \begin{cases} M_r = V = \frac{1}{8 \operatorname{sh} \psi} \left(\frac{K_{r-2} + K_{r-1} + K_r + K_{r+1}}{\operatorname{ch} \psi - \cos \varphi} - \frac{K_{r-2} + K_{r-1} - K_r - K_{r+1}}{\operatorname{ch} \psi + \cos \varphi} - 4e^{-\nu} K_{r+1} \right) \\ M_{r-1} = V' = \frac{1}{8 \operatorname{sh} \psi} \left(\frac{K_{r-2} + K_{r-1} + K_r + K_{r+1}}{\operatorname{ch} \psi - \cos \varphi} + \frac{K_{r-2} + K_{r-1} - K_r - K_{r+1}}{\operatorname{ch} \psi + \cos \varphi} - 4e^{-\nu} K_{r-2} \right) \\ U = \frac{1}{\sin \varphi} (e^{-\nu} K_{r+1} + M_r \cos \varphi - M_{r-1} e^{-\nu}) \\ U' = \frac{1}{\sin \varphi} (e^{-\nu} K_{r-2} - M_r e^{-\nu} + M_{r-1} \cos \varphi). \end{cases}$$

Pozostaje jeszcze wyrazić niewiadome stałe parametry φ i ψ przez $\beta = 8\varepsilon - 4$ oraz $\delta = 16\varepsilon + 3$, czyli ostatecznie przez jedyną stałą $\varepsilon = \frac{l^3}{48EJ_a}$, zależną od sztywności zginania belki i podatności jej podpór. W tym celu musimy rozwiązać układ równań (10).

Przyjawszy jako niewiadome $\sin \varphi$ i $\operatorname{sh} \psi$, znajdujemy bez trudności po cztery wartości, które czynią zadość tym równaniom. Przedstawiają je wzory:

$$(14) \quad \begin{aligned} \sin \varphi &= \pm \sqrt{-4\varepsilon \pm 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}} \\ \operatorname{sh} \psi &= \pm \sqrt{4\varepsilon \pm 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}}. \end{aligned}$$

Tutaj nie można twierdzić, że tylko jedna jedyna para wartości odpowiada rozwiązaniu naszego zadania, które winno być oczywiście jednoznaczne. Podstawivszy bowiem w równania (10) wartości:

$$(14a) \quad \begin{aligned} \sin \varphi &= \sqrt{-4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}} \\ \operatorname{sh} \psi &= \sqrt{4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}} \end{aligned}$$

oraz odpowiadające im wartości:

$$(14a') \quad \begin{aligned} \cos \varphi &= \sqrt{1 + 4\varepsilon - 2\sqrt{3\varepsilon(1 + \varepsilon)}} \\ \operatorname{ch} \psi &= \sqrt{1 + 4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1 + \varepsilon)}} \end{aligned}$$

przekonywujemy się, że te równania spełniają się tożsamościowo pod warunkiem (koniecznym i wystarczającym), że z dwu postaci wyrażenia:

$$\sqrt{1 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2} = \sqrt{(1 - 2\varepsilon)^2} = \sqrt{(2\varepsilon - 1)^2}$$

uzwzględniemy tylko pierwszą, tj. $(1 - 2\varepsilon)$. To zaś jest prawdziwe tylko wtedy, gdy:

$$\varepsilon \leq 0,5.$$

Natomiast przyjąwszy wartości:

$$(14b) \quad \begin{aligned} \sin \varphi &= \sqrt{-4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1 + \varepsilon)}} \\ \operatorname{sh} \psi &= -\sqrt{4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1 + \varepsilon)}} \\ \cos \varphi &= \sqrt{1 + 4\varepsilon - 2\sqrt{3\varepsilon(1 + \varepsilon)}} \\ \operatorname{ch} \psi &= -\sqrt{1 + 4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1 + \varepsilon)}} \end{aligned}$$

i podstawiawszy je w równania (10), uczynimy im zadość tylko pod warunkiem, że wyrażeniu $\sqrt{1 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2}$ przypiszemy wartość $2\varepsilon - 1$ odpowiadającą tylko:

$$\varepsilon \geq 0,5^4).$$

⁴⁾ Oto krótki rachunek uzasadniający powyższe twierdzenia:

I. Przy wartościach (14a) i (14a') jest:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} 2\psi &= \operatorname{ch}^2 \psi + \operatorname{sh}^2 \psi = 1 + 8\varepsilon + 4\sqrt{3\varepsilon(1 + \varepsilon)} \\ \cos 2\varphi &= \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 1 + 8\varepsilon - 4\sqrt{3\varepsilon(1 + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

A zatem:

$$\operatorname{ch} 2\psi \cos 2\varphi = 1 - 32\varepsilon + 16\varepsilon^2.$$

Nadto jest:

$$\operatorname{ch} \psi \cos \varphi = \sqrt{1 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2}.$$

Równania warunkowe (10), po wstawieniu wartości $\beta = 8\varepsilon - 4$, $\delta = 16\varepsilon + 3$ i prostym przekształceniu, przybierają postać:

$$(10a) \quad \begin{aligned} \operatorname{ch} 2\psi \cos 2\varphi + (8\varepsilon - 4) \operatorname{ch} \psi \cos \varphi + 16\varepsilon + 3 &= 0 \\ \operatorname{sh} \psi \sin \varphi (4 \operatorname{ch} \psi \cos \varphi + 8\varepsilon - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Po wstawieniu powyższych wartości i skreśleniu w drugim z równań (10a) czynnika $\operatorname{sh} \psi \sin \varphi$ jako różnego od zera, gdy $\varepsilon \neq 0$, otrzymujemy jako lewe strony obu równań:

$$\begin{aligned} [1 - 32\varepsilon + 16\varepsilon^2 + (8\varepsilon - 4)\sqrt{1 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2} + 16\varepsilon + 3] \\ [4\sqrt{1 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2} + 8\varepsilon - 4]. \end{aligned}$$

Ale nie koniec na tym. Wyrażenia dla $\sin \varphi$ we wzorach (14a) i (14b) mają wartości rzeczywiste, dopóki:

$$\varepsilon \leq 3.$$

Teoretycznie biorąc parametr ε może przybierać wszelkie wartości dodatnie w granicach od 0 do ∞ . Istotnie $\varepsilon = \frac{f_1}{\alpha}$, jeżeli oznaczymy krótko przez:

$$f_1 = \frac{P}{48 EJ}.$$

Wielkość f_1 o wymiarze długości określa strzałkę ugięcia belki prostej utworzonej z jednego przęsła pod obciążeniem jednostką siły w środku rozpiętości l . Wielkość zaś α (tego samego wymiaru, co f_1) ma znaczenie ugięcia podpory pod naciskiem jednostką siły. Parametr ε jest przeto wartością stosunku ugiętności przęsła do ugiętności podpory. W idealnym przypadku podpór niepodatnych (sztywnych) jest $\alpha = 0$, $f_1 \neq 0$, a więc $\varepsilon = \infty$; w przypadku zaś sztywnej belki, a podatnych podpór jest $f_1 = 0$, $\alpha \neq 0$, a zatem $\varepsilon = 0$.

Z tych równań wynika, że dla ogólnych zastosowań rozwiązania (13) należy przewidzieć także przypadek:

$$\varepsilon > 3,$$

w którym wartości $\sin \varphi$ z wzorów (14b), (gdyż tylko te są ważne dla $\varepsilon > 3$) wypadają urojone.

Wtedy napiszemy te wzory w postaci:

$$(14c) \quad \begin{aligned} \sin \varphi &= i \sqrt{4\varepsilon - 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}} = i \operatorname{sh} \varphi', \\ \cos \varphi &= \sqrt{1 + 4\varepsilon - 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}} = \operatorname{ch} \varphi', \\ \operatorname{sh} \psi &= -\sqrt{4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}}, \\ \operatorname{ch} \psi &= -\sqrt{1 + 4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}}, \end{aligned}$$

Te zaś znikają tylko wtedy, gdy pierwiastkowi przypiszemy wartość $1 - 2\varepsilon$ odpowiadającą $\varepsilon \leq 0,5$.

II. Przy wartościach (14b) znajdujemy w ten sam sposób dla lewych stron równań (10a) wyrażenia:

$$\begin{aligned} [1 - 32\varepsilon + 16\varepsilon^2 - (8\varepsilon - 4)\sqrt{1 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2 + 16\varepsilon + 3}] \\ [-4\sqrt{1 - 4\varepsilon + \varepsilon^2} + 8\varepsilon - 4], \end{aligned}$$

które widocznie stają się tożsamościowo równe zero, jeżeli wartością pierwiastka jest $2\varepsilon - 1$, co jest prawdziwe tylko pod warunkiem: $\varepsilon \geq 0,5$.

a uwzględniając, że w następstwie musi być:

$$\sin n\varphi = i \operatorname{sh} n\varphi',$$

przekonamy się z łatwością, iż rozwiązanie (13) przedstawi się znowu w liczbach rzeczywistych. To rozwiązanie przybierze tedy postać trojaka, a mianowicie:

1) Dla $\varepsilon \leq 0,5$, czyli gdy:

$$\operatorname{ch} \psi - \cos \varphi = 2\sqrt{3\varepsilon}$$

$$\operatorname{ch} \psi + \cos \varphi = 2\sqrt{1+\varepsilon}$$

mamy przy oznaczeniach upraszczających

$$(Ia) \quad \begin{cases} \sin \varphi = \sqrt{-4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}}, \\ \omega = \sqrt{3\varepsilon} + \sqrt{1+\varepsilon} + \sqrt{4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}} \end{cases}$$

następujące wyrażenia dla momentów podporowych:

$$(I) \quad \begin{cases} M_r = \frac{3\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}}} \left[\frac{1}{3\varepsilon} (L_{r-2} + L_{r-1} + L_r + L_{r+1}) - \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} (L_{r-2} + L_{r-1} - L_r - L_{r+1}) - \frac{8L_{r+1}}{\omega} \right] \\ M_{r-1} = \frac{3\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}}} \left[\frac{1}{3\varepsilon} (L_{r-2} + L_{r-1} + L_r + L_{r+1}) + \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} (L_{r-2} + L_{r-1} - L_r - L_{r+1}) - \frac{8L_{r-2}}{\omega} \right] \\ M_{r+s} = \frac{1}{\omega^n \sin \varphi} \left[M_r \sin (n+1)\varphi + (48L_{r+1}\varepsilon - M_{r-1}) \frac{\sin n\varphi}{\omega} \right] \\ M_{r-n-1} = \frac{1}{\omega^n \sin \varphi} \left[M_{r-1} \sin (n+1)\varphi + (48L_{r-2}\varepsilon - M_r) \frac{\sin n\varphi}{\omega} \right]. \end{cases}$$

2) Dla $3 \geq \varepsilon > 0,5$, czyli gdy:

$$\operatorname{ch} \psi - \cos \varphi = -2\sqrt{1+\varepsilon},$$

$$\operatorname{ch} \psi + \cos \varphi = -2\sqrt{3\varepsilon},$$

znajdujemy przy tych samych oznaczeniach upraszczających (Ia), co powyżej:

$$(II) \quad \left\{ \begin{aligned} M_r &= \frac{3\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}}} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} (L_{r-2} + L_{r-1} + L_r + L_{r+1}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{3\varepsilon}} (L_{r-2} + L_{r-1} - L_r - L_{r+1}) - \frac{8L_{r+1}}{\omega} \right] \\ M_{r-1} &= \frac{3\varepsilon}{\sqrt{4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}}} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} (L_{r-2} + L_{r-1} + L_r + L_{r+1}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3\varepsilon}} (L_{r-2} + L_{r-1} - L_r - L_{r+1}) - \frac{8L_{r-2}}{\omega} \right] \\ M_{r+n} &= \frac{1}{(-\omega)^n \sin \varphi} \left[M_r \sin(n+1)\varphi - (48L_{r+1}\varepsilon - M_{r-1}) \frac{\sin n\varphi}{\omega} \right] \\ M_{r-n-1} &= \frac{1}{(-\omega)^n \sin \varphi} \left[M_{r-1} \sin(n+1)\varphi - (48L_{r-2}\varepsilon - M_r) \frac{\sin n\varphi}{\omega} \right]. \end{aligned} \right.$$

3) Dla $\varepsilon > 3$, przy oznaczeniach:

$$(IIIa) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{sh} \varphi' &= \sqrt{4\varepsilon - 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}} \\ \operatorname{ch} \varphi' &= \sqrt{1 + 4\varepsilon - 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}} \\ \omega &= \sqrt{1 + 4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}} + \sqrt{4\varepsilon + 2\sqrt{3\varepsilon(1+\varepsilon)}}^5 \end{aligned} \right.$$

otrzymujemy na M_r i M_{r-1} wzory te same co w (II), a nadto:

$$(III) \quad \left\{ \begin{aligned} M_{r+n} &= \frac{1}{(-\omega)^n \operatorname{sh} \varphi'} \left[M_r \operatorname{sh}(n+1)\varphi' - (48L_{r+1}\varepsilon - M_{r-1}) \frac{\operatorname{sh} n\varphi'}{\omega} \right] \\ M_{r-n-1} &= \frac{1}{(-\omega)^n \operatorname{sh} \varphi'} \left[M_{r-1} \operatorname{sh}(n+1)\varphi' - (48L_{r-2}\varepsilon - M_r) \frac{\operatorname{sh} n\varphi'}{\omega} \right]. \end{aligned} \right.$$

Do kontroli ostatnich wyników może posłużyć graniczny przypadek podpór sztywnych, tj. gdy $\varepsilon \rightarrow \infty$. Wówczas otrzymujemy istotnie z równań (III) przy pomocy znanych metod rachunku granic:

$$(15) \quad M_{r-n-1} = \left(-\frac{1}{2+\sqrt{3}} \right)^n M_{r-1}; \quad M_{r+n} = \left(-\frac{1}{2+\sqrt{3}} \right)^n M_r,$$

zgodnie z wynikiem bezpośrednim teorii belki ciągłej na nieskończenie wielu równoległych podporach sztywnych.

⁵⁾ To wyrażenie dla ω jest zresztą równoważne wyrażeniu w (Ia).

WYTRZYMAŁOŚĆ NA CZYSTE ZGINANIE PRĘTÓW Z MATERIAŁU ELASTOPLASTYCZNEGO

(Przegląd Techniczny, Nr 7, 1934 r.)

Wiadomo od dawna, że tradycyjne obliczanie naprężeń we włóknach skrajnych prętów zginanych według wzorów teorii sprężystości prowadzi tylko do przybliżonej oceny wytrzymałości na zginanie tych prętów. Tę wytrzymałość mierzy bowiem wyższa granica tych wartości momentu zginającego, które odpowiadają stanom trwałej równowagi sił wewnętrznych i zewnętrznych, czyli trwałej równowagi zgiętego pręta, jeżeli jego materiałem jest stal konstrukcyjna lub inny materiał elastoplastyczny.

Wzór

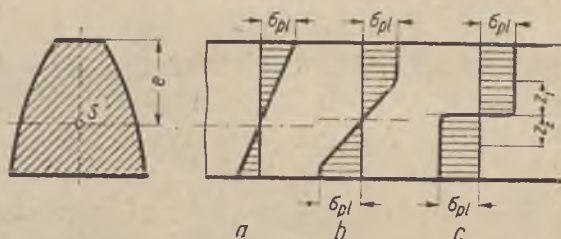
$$(1) \quad \sigma = \frac{M}{W}$$

określający naprężenie σ we włóknie skrajnym pręta w zależności od momentu zginającego M i wskaźnika zginania W , może określić ściśle tylko tę wartość M , przy której pojawiają się odchylenia od prawa HOOKE'A. W przypadku metali elastoplastycznych, jak np. stal, dural itp., wzór ten może także posłużyć do weale dokładnego obliczenia wartości M , przy której pojawiają się pierwsze odkształcenia plastyczne w warstwie skrajnej. Ale to bynajmniej nie zapowiada jeszcze bliskości niebezpieczeństwa złamania. Zwykle dopiero znacznie większa wartość momentu okazuje się wartością niszczącą (niebezpieczną). Z tego to powodu wybitni inżynierowie—badacze (jak np. C. BACH) wprowadzili do wzoru teoretycznego współczynniki poprawkowe, znalezione doświadczalnie dla prostych kształtów przekroju prętów. Jednakże nie trudno rozwiązać to zagadnienie w sposób doskonalszy i korzystniejszy.

Wykres (ε, σ) metali elastoplastycznych składa się w pierwszym przybliżeniu z prostej nachylonej do osi wydłużeń ε pod kątem, którego tangens mierzy moduł sprężystości E i prostej równoległej do osi ε w odległości równej naprężeniu na granicy plastyczności σ_{pl} . Wprawdzie przy większych odkształceniach plastycznych linia wykresu idzie znowu w górę dzięki zjawisku twardnienia, ale wobec trudności ujęcia teoretycznego

wpływu tego zjawiska można poprzestać na prostej równoległej do osi ε , zwłaszcza, że przez to popełniamy tylko błąd na korzyść pewności.

Jeżeli nadto przyjmiemy zgodnie z doświadczeniem, że przy czystym zginaniu zachodzi liniowy rozkład wydłużeń we „włóknach“ pręta, to widzimy, że rozkład naprężeń zginających przedstawiony dwoma trójkątami na wykresie odpowiadającym odkształceniom sprężystym (rys. 1a)



Rys. 1

zamieni się w miarę dalszego wzrostu M na wykres bardzo mało różniący się od dwóch prostokątów (rys. 1c), tak że końcową wartość momentu M można obliczyć z równań równowagi:

$$\begin{aligned}\bar{M} &= \sigma_{pl}(F_1 z_1 + F_2 z_2), \\ \sigma_{pl} F_1 &= \sigma_{pl} F_2,\end{aligned}$$

gdzie z_1 i z_2 oznaczają odległości środków pól F_1 i F_2 od osi obojętnej, jako liczby bezwzględne.

Równania te wyznaczają zarazem położenie osi obojętnej zgięcia elastoplastycznego w przypadku symetrii przekroju, przy czym zakładamy, że — jak to zwykle bywa — płaszczyzna zgięcia pokrywa się z płaszczyzną symetrii. Wtedy jest oczywiście

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{2} F,$$

jeżeli F_1, F_2 oznaczają odpowiednie pola części przekroju, leżące powyżej i poniżej osi obojętnej zgięcia elastoplastycznego.

Przy tym sposobie obliczenia traci rację bytu pojęcie naprężenia dopuszczalnego. Albowiem współczynnik pewności n jest określony stosunkiem momentu końcowego \bar{M} do momentu użytkowego $M = \sigma W$.

Obrana wartość tego stosunku przy oznaczeniu

$$\begin{aligned}\bar{W} &= F_1 z_1 + F_2 z_2 = \frac{F}{2} (z_1 + z_2) \\ n &= \frac{\bar{M}}{M} = \frac{\sigma_{pl} \bar{W}}{\sigma W}\end{aligned}$$

proceedzi do następującego wyrażenia dla naprężenia we włóknie skrajnym przy obciążeniu użytkowym:

$$\sigma = \frac{\sigma_{pl} \bar{W}}{n W}.$$

Otóż σ_{pl} i n są stałe, ale stosunek $\bar{W}:W$ zmienia się z postacią przekroju w granicach dość obszernych. Np. dla koła jest równy $\sim 1,7$, a dla przekroju dwuteowego o cienkim średniku przewyższa tylko nieznacznie wartość równą jedności. Oczywiście przy tym samym bezpieczeństwie przeciw złamaniu wypadnie naprężenie skrajne pod obciążeniem użytkowym znacznie większe w przypadku przekroju zwartego (koło, prostokąt itp.), aniżeli dla przekroju rozłożystego, jak np. dwuteowego, pozwalającego lepiej wyzyskać materiał.

Wytrzymałość na czyste zginanie pręta z metalu elastoplastycznego określa więc (przy powyższych zastrzeżeniach) krańcowa wartość momentu \bar{M} , obliczona ze wzoru

$$(2) \quad \bar{M} = \sigma_{pl} \bar{W}.$$

Weźmy np. przekrój kwadratowy o boku h . Przy zgięciu w płaszczyźnie równoległej do boków jest

$$W = \frac{h^3}{6}; \quad \bar{W} = \frac{h^3}{4}.$$

Przy zgięciu zaś w płaszczyźnie przekątnej jest

$$W' = \frac{\sqrt{2}}{12} h^3 = 0,11785 h^3, \quad \bar{W}' = \frac{\sqrt{2}}{6} h^3 = 0,2357 h^3.$$

Ponieważ $\frac{W - W'}{W} = 0,293$, więc według tradycyjnego sposobu obliczenia wskaźnik zginania po przekątnej jest mniejszy od wskaźnika zginania „na płask” o $\sim 29\%$. Tymczasem według nowego sposobu znajdujemy

$$\frac{\bar{W} - \bar{W}'}{\bar{W}} = \frac{0,25 - 0,2357}{0,25} = 0,057,$$

czyli zmniejszenie wynosi niespełna 6% . Szereg doświadczeń wykonanych w roku 1933 przez R. KUROWSKIEGO w Laboratorium Wytrzymałości Materiałów Politechniki Warszawskiej wykazał zmniejszenie rzeczywiste od 4 do 6% , co świadczy bardzo dobitnie na korzyść nowego sposobu.

Względną różnicę między momentem niszczącym, obliczonym według wzoru (2), a momentem określonym wzorem (1), podaje wyrażenie

$$\frac{\bar{W} - W}{W}.$$

Wyrażenie to przy zgięciu na płask daje 0,5, czyli przyrost 50%, przy zgięciu zaś po przekątnej 1, czyli przyrost 100%.

Podana tabela zawiera (obok wartości J i W dla szeregu przekrojów technicznie ważnych) także obliczone teraz wartości \bar{W} i $\frac{\bar{W}-W}{W}$.

Przez e oznaczono w tabeli odległość włókna skrajnego od osi obojętnej zgięcia sprężystego, a przez e' — takąż odległość przy zgięciu elastoplastycznym.

Wartości \bar{W} umożliwiają bardziej racjonalne obliczenie wytrzymałościowe przy czystym zginaniu niż na podstawie wzoru (1), co prowadzi do lepszego wyzyskania materiału, a więc do konstrukcji lżejszej.

Ważniejsze cechy powyższej prostej teorii zginania elastoplastycznego dają się ująć w twierdzenia następujące.

Gdy przekrój (symetryczny względem płaszczyzny zginania) nie posiada drugiej osi symetrii, to oś obojętnej zgięcia elastoplastycznego jest przesunięta równolegle względem osi obojętnej zgięcia sprężystego.

W przekroju o podwójnej osi symetrii obie osie obojętne wpadają w siebie.

Oś obojętnej zgięcia elastoplastycznego dzieli pole przekroju na części równe bez względu na to czy przekrój posiada dwie osie symetrii, czy też tylko jedną.

Stosowalność nowego obliczenia podlega jeszcze pewnym ograniczeniom, pokrewnym zresztą tym, które występują przy zastosowaniu obliczenia tradycyjnego. W przypadku bowiem przekrojów niezwartych tego rodzaju jak nr 4, 5, 6, 12, 13, 15 i 18, o ile grubości pewnych części przekroju są bardzo małe w porównaniu do innych wymiarów, może krańcowa wartość momentu ulec znacznemu zmniejszeniu w porównaniu do podanych wartości teoretycznych z powodu niebezpieczeństwa miejscowego wyboczenia. W tych przypadkach wypadałoby uciec się raczej do wzorów podanych w pracy: „Zginanie belek prostych o przekrojach wiotkich“ (IBTL. Spraw. Kwart. 1930, nr 3).

Nr	Przekrój	Moment bezwładności	Wskaźnik oporu gięcia sprężystego	Wskaźnik oporu gięcia elastoplastycznego	Różnica względna
1		$J = \frac{bh^3}{12}$	$W = \frac{bh^2}{6}$	$\bar{W} = \frac{bh^2}{4}$	$\frac{\bar{W}-W}{W} = 0,5$ (50%)
2		$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{h^3}{6}$	$\bar{W} = \frac{h^3}{4}$	$\frac{\bar{W}-W}{W} = 0,5$ (50%)
3		$J = \frac{h^4}{12}$	$W = \frac{\sqrt{2} h^3}{12} = 0,117851 h^3$	$\bar{W} = \frac{\sqrt{2}}{6} h^3 = 0,2357 h^3$	$\frac{\bar{W}-W}{W} = 1$ (100%)
4		$J = \frac{b}{12} (H^3 - h^3)$	$W = \frac{b}{6} \frac{H^3 - h^3}{H}$ ($h = \beta H$)	$\bar{W} = \frac{H^3 - h^3}{4} b$	$\frac{\bar{W}-W}{W} = \frac{1}{2} \frac{1 - 3\beta^3 + 2\beta^4}{1 - \beta^3}$ (0 do 50%)
5		$J = \frac{H^4 - h^4}{12}$	$W = \frac{1}{6} \frac{H^4 - h^4}{H}$ ($h = \beta H$)	$\bar{W} = \frac{H^4 - h^4}{4}$	$\frac{\bar{W}-W}{W} = \frac{1}{2} \frac{1 - 3\beta^3 + 2\beta^4}{1 - \beta^4}$ (12,5% do 50%)
6		$J = \frac{H^4 - h^4}{12}$ ($h = \beta H$)	$W = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{H^4 - h^4}{H} = 0,1179 \frac{H^4 - h^4}{H}$	$\bar{W} = \frac{\sqrt{2}}{6} (H^3 - h^3) = 0,2357 (H^3 - h^3)$	$\frac{\bar{W}-W}{W} = \frac{1 - 2\beta^3 + \beta^4}{1 - \beta^4}$ (50% do 100%)
7		$J = \frac{bh^3}{36}$	$W_1 = \frac{bh^2}{24}$ $e_1 = \frac{2}{3} h$ $W_2 = \frac{bh^2}{12}$	$\bar{W} = \frac{2 - \sqrt{2}}{6} bh^2 = 0,09758 bh^2$ $e'_1 = \frac{h}{\sqrt{2}}$	$\frac{\bar{W}-W_1}{W_1} = 1,342$ (~134%)
8		$J = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413 R^4$	$W = \frac{5}{8} R^3$	$\bar{W} = R^3$	$\frac{\bar{W}-W}{W} = 0,6$ (60%)
9		$J = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413 R^4$	$W = 0,5413 R^3$	$W = 1,0104 R^3$	$\frac{\bar{W}-W}{W} = 0,869$ (~87%)
10		$J = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} R^4 = 0,6381 R^4 = 0,8758 r^4$	$W = 0,6306 R^3 = 0,8758 r^3$	$\bar{W} = 1,1424 R^3$	$\frac{\bar{W}-W}{W} = 0,654$ (~65,5%)
11		$J = \frac{6b^3 + 66bb_1 + b_1^3}{36(2b + b_1)} h^3$ $e = \frac{1}{3} \frac{3b + 2b_1}{2b + b_1} h$	$W_1 = \frac{6b^3 + 66bb_1 + b_1^3}{12(3b + 2b_1)} h^2$ $W_2 = \frac{6b^3 + 66bb_1 + b_1^3}{12(3b + b_1)} h^2$	$e' = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{b_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{b_1}{b}\right)^2}} \frac{1}{b_1 + \frac{1}{2} \frac{b_1}{b} + \frac{1}{2} \frac{1}{b_1}}$ $= h \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + \frac{b_1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{b_1}}}{b_1 + \frac{1}{2} \frac{b_1}{b} + \frac{1}{2} \frac{1}{b_1}}$	$\frac{\bar{W}-W}{W} = 0,5$ do $1,342$ (50% do 134%)

$$\bar{W} = \left(3b + b_1 \frac{e'}{h} \right) \frac{e'^3}{6} + \left(3b + 2b_1 + b_1 \frac{e'}{h} \right) \frac{(h - e')^2}{6}$$

$$W = \frac{bh^3}{6} \left\{ \left(3 + \frac{b_1}{b} \frac{e'}{h} \right) \left[\left(\frac{e'}{h} \right)^2 + \left(1 - \frac{e'}{h} \right)^2 \right] + 2 \frac{b_1}{b} \left(1 - \frac{e'}{h} \right) \right\} - \frac{b_1 h^3}{6} \left\{ \left(3 \frac{b}{b_1} + \frac{e'}{h} \right) \left[\left(\frac{e'}{h} \right)^2 + \left(1 - \frac{e'}{h} \right)^2 \right] + 2 \left(1 - \frac{e'}{h} \right) \right\}$$

Nr	Przekrój	Moment bezwładności	Wskaźnik oporu gięcia sprężystego	Wskaźnik oporu gięcia elastoplastycznego	Różnica względna
12		$J = \frac{BH^3 + bH^3}{12}$	$W = \frac{BH^3 + bH^3}{6H}$	$\bar{W} = \frac{BH^3 + bH^3}{4}$	$\frac{\bar{W} - W}{W} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{H}{b} \frac{BH^3}{bH^3} - 1$ ($> 50\%$)
13		$J = \frac{BH^3 - bH^3}{12}$	$W = \frac{BH^3 - bH^3}{6H}$	$\bar{W} = \frac{BH^3 - bH^3}{4}$	$\frac{\bar{W} - W}{W} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \frac{H}{b} \frac{BH^3}{bH^3} - 1$ ($< 50\%$)
14		$J = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$ $= 0,0491 d^4 =$ $= 0,7854 r^4 =$ $= F \left(\frac{r}{2} \right)^2 = \frac{F r^2}{4}$ $J \sim 0,05 d^4$	$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$ $= 0,0982 d^3 =$ $= 0,7854 r^3 = \frac{F r}{4}$ $W \sim 0,1 d^3$	$\bar{W} = \frac{d^3}{6} = 0,1667 d^3$	$\frac{\bar{W} - W}{W} = 0,6976 = \left(\frac{16}{3\pi} - 1 \right)$ ($\sim 70\%$)
15		$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) =$ $= \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4) =$ $= \frac{1}{4} F (R^2 + r^2)$ $J \sim 0,05 (D^4 - d^4)$	$W = \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D} =$ $= \frac{\pi}{4} \frac{R^4 - r^4}{R}$ $W \sim 0,8 d_m^2 \cdot \delta$ gdz d_m bardzo małe	$\bar{W} = \frac{1}{6} (D^3 - d^3)$	$\frac{\bar{W} - W}{W} = \left(\frac{16}{3\pi} - 1 \right) - \frac{d^3}{D^3} \frac{D^3}{D^3} - \frac{16}{3\pi} \frac{D^3 - d^3}{D^3} \frac{D^3}{D^3} - 1$ od 27% gdz $\frac{d}{D} \rightarrow 1$ do 70% gdz $\frac{d}{D} \rightarrow 0$
16		$J = F^2 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) =$ $= 0,1098 F^2$	$W_2 = 0,1908 F^2$ $W_1 = 0,2687 F^2$ $e_1 = 0,5756 r$ $e_2 = 0,4244 r$	$\bar{W} = 0,35796 F^2$ $e_1' = 0,404 r$ $e_2' = 0,596 r$	$\frac{\bar{W} - W}{W} = 0,876$ (87,6%)
17		$J = \frac{\pi a^3 b}{4} =$ $= 0,7854 a^3 b$	$W = \frac{\pi a^3 b}{4} =$ $= 0,7854 a^3 b$	$W' = \frac{4a^3 b}{3}$	$\frac{\bar{W} - W}{W} = \frac{16}{3\pi} - 1 = 0,6976$ ($\sim 70\%$)
18		$J = \frac{\pi}{4} (a^3 b - a^2 b^2)$ przy bardzo małej wartości delta $J \sim \frac{\pi}{4} a^2 (a + 3b) \delta$	$W = \frac{\pi}{4} \frac{a^3 b - a^2 b^2}{a}$ $W \sim \frac{\pi}{4} a (a + 3b) \delta$	$W = \frac{4}{3} (a^3 b - a^2 b^2)$	$\frac{\bar{W} - W}{W} = \left(\frac{16}{3\pi} - 1 \right) - \frac{16}{3\pi} \frac{a^3 b - a^2 b^2}{a^3 b} - 1$

NIEBEZPIECZEŃSTWO USZKODZEŃ DŁUGICH KSZTAŁTOWNIKÓW LUB SZYN KOLEJOWYCH PRZY DOSTAWIE NA PLAC BUDOWY

(Inżynieria i Budownictwo Nr 2, 1951 r.)

Praktykowane często zrzucanie smukłych belek stalowych, tak, że uderzają o dwie lub więcej podpór dość sztywnych, może w pewnych warunkach spowodować ich uszkodzenie przez wygięcie plastyczne (a więc trwałe) naprężeniami przewyższającymi dostatecznie praktyczną granicę sprężystości, czyli granicę plastyczności. Te naprężenia można ocenić dość dokładnie uwzględniając ugięcia statyczne i dynamiczne przy założeniu niekorzystnej możliwości zginania „na płask”, tj. w płaszczyźnie najmniejszej sztywności. Przy obliczaniu naprężeń dynamicznych przyjmiemy z przybliżeniem dostatecznym, że skrajna postać linii wygięcia jest taka, jaka odpowiada drganiu własnemu belki na podporach w miejscach uderzenia. Nadto przyjmiemy, że energia uderzenia mierzona iloczynem ciężaru własnego belki przez wysokość spadku H zamienia się w znacznej części na energię sprężystą krańcowego wygięcia dynamicznego.



Rys. 1

1. **Ugięcie statyczne.** Moment zgięcia między podporami w przekroju odległym o x od jednej z podpór wyraża wzór

$$M_x = \frac{q(l+2a)}{2} x - \frac{q(a+x)^2}{2}$$

z wartościami krańcowymi:

$$\bar{M}_{(x=0)} = -q \frac{a^2}{2} \quad \text{i} \quad \bar{M}_{(x=l/2)} = \frac{q}{2} \left(\frac{l^2}{4} - a^2 \right).$$

2. **Ugięcie dynamiczne.** Równanie różniczkowe drgań giętych belki o przekroju stałym ma postać:

$$(1) \quad B \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\gamma \frac{A}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

(Uzasadnienie znajdzie Czytelnik w IV części Stereomechaniki).

Tutaj oznacza:

y — rzędna linii ugięcia,

x — odcięta mierzona w naszym zadaniu od podpory lewej na prawo,

γ/g — gęstość materiału belki,

A — pole przekroju,

$B = EJ$ — sztywność zginania.

Ugięcie y jest przy drganiach własnych harmoniczną funkcją czasu i da się wyrazić równaniem

$$(2) \quad y = X(A \cos \omega t + C \sin \omega t),$$

gdzie X jest funkcją samego x określającą postać linii ugięcia. Wstawiając (2) w (1) po podstawieniu

$$\frac{EJ}{A} \frac{g}{\gamma} = a^2$$

otrzymamy równanie różniczkowe zwyczajne dla X

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = \frac{\omega^2}{a^2} X$$

albo po podstawieniu

$$\frac{\omega^2}{a^2} = k^4$$

$$(3) \quad \frac{d^4 X}{dx^4} = k^4 X.$$

Temu równaniu czynią zadość funkcje $\sin kx$, $\cos kx$, $\text{sh } kx$ i $\text{ch } kx$, a rozwiązanie ogólne ma postać:

$$(4) \quad X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx + C_3 \text{sh } kx + C_4 \text{ch } kx$$

z czterema stałymi dowolnymi C_1, C_2, C_3, C_4 . Ich wartości dają się wyznaczyć z warunków krańcowych.

Niekiedy jest dogodniejsza postać rozwiązania

$$X = C_1(\cos kx + \text{ch } kx) + C_2(\cos kx - \text{ch } kx) + C_3(\sin kx + \text{sh } kx) + C_4(\sin kx - \text{sh } kx),$$

gdzie stałe mają oczywiście inne wartości od poprzednich. Warunkami krańcowymi są w naszym zadaniu

$$X = 0 \quad \text{dla } x = 0 \quad \text{i } x = l \quad (\text{stałe podpory})$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = 0 \quad \text{dla } x = -a \quad \text{i } x = l + a \quad (\text{brak momentów zginających}).$$

Razem cztery warunki wystarczające do obliczenia stosunku względniego stałych. Ale potrzebne obliczenia są bardzo zawile i nieprzejrzyste,

wobec czego poprzestaniemy na rozwiązaniu szczegółowym przypadku uproszczonego, gdy belka nie wystaje za podpory. Wtedy otrzymujemy $C_1=C_2=0$, $C_3=C_4$ oraz

$$(5) \quad \sin kl = 0.$$

Temu warunkowi czynią zadość

$$(6) \quad kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Częstotliwości kątowe kolejnych drgań harmoniczných są stosownie do znaczenia $k^2 = \omega/a$ następujące:

$$\omega_1 = ak_1^2 = \frac{a\pi^2}{l^2}, \quad \omega_2 = \frac{4a\pi^2}{l^2}, \quad \omega_3 = \frac{9a\pi^2}{l^2}.$$

Na podstawie równania (2) napiszemy tedy rozwiązanie ogólne

$$(7) \quad y = \sum_{j=1,2,3,\dots}^{\infty} \sin \gamma \frac{\pi x}{l} (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t).$$

Do naszego celu wystarczy linia ugięcia odpowiadająca drganiu o okresie najdłuższym, czyli najmniejszej częstotliwości. Przyjawszy nadto warunek początkowy $y=0$ dla $t=0$ znajdujemy

$$(8) \quad y = b \sin \omega_1 t \sin \frac{\pi x}{l}.$$

A zatem największe wychylenia od położenia równowagi są

$$(9) \quad y = b \sin \frac{\pi x}{l}.$$

3. Obliczenie amplitudy drgania b . Wykonamy je korzystając ze znanego warunku, iż w drganiach harmoniczných (bez oporu) największa energia kinetyczna układu przy przejściu przez położenie równowagi jest równa energii sprężystej w położeniu skrajnym, w którym energia kinetyczna jest równa 0. Różniczkując przeto (8) względem czasu otrzymujemy:

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = b\omega_1 \cos \omega_1 t \cdot \sin \frac{\pi x}{l}.$$

A więc energią kinetyczną masy elementu belki jest dla $t=0$

$$dE_k = \frac{A}{2} \frac{\gamma}{g} b^2 \omega_1^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx.$$

Całkowanie od $x=0$ do $x=l$ daje

$$E_k = A \frac{\gamma}{g} \frac{l}{4} b^2 \omega_1^2.$$

Przyrównawszy E_k do części energii uderzenia równej $Al\gamma H$, jeżeli H oznacza wysokość, z której belka spada, a $v = \sqrt{2gH}$ prędkość uderzenia, napiszemy

$$A \frac{\gamma}{g} \frac{l}{4} b^2 \omega_1^2 = \lambda Al\gamma \frac{v^2}{2g},$$

gdzie λ oznacza ułamek właściwy. Stąd

$$(10) \quad b = \sqrt{2} \frac{v}{\omega_1} = v \frac{l^2}{\pi^2} \sqrt{2\gamma \frac{A}{EJ} \frac{\gamma}{g}}.$$

Dla momentu zginającego znajdujemy według (9)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} = -\frac{M}{EJ}.$$

A zatem największy moment w środku rozpiętości ($x=l/2$)

$$(11) \quad M_{max} = b \frac{\pi^2 EJ}{l^2} = v \sqrt{2\lambda A EJ \frac{\gamma}{g}}.$$

Odpowiednie naprężenie we włóknie skrajnym

$$(12) \quad \bar{\sigma}_{dyn} = \frac{M}{J} h_1 = v h_1 \sqrt{2\lambda \frac{AE}{J} \frac{\gamma}{g}},$$

podczas gdy naprężenie pod ciężarem własnym

$$(13) \quad \bar{\sigma}_{stat} = \frac{1}{8} \frac{ql^2}{J} h_1 = \frac{A\gamma l^2}{8J} h_1.$$

Naprężenie dynamiczne jest więc (w pierwszym przybliżeniu) niezależne od rozpiętości l , proporcjonalne do prędkości uderzenia i do pierwiastka kwadratowego z modułu sprężystości E . Natomiast naprężenie statyczne jest proporcjonalne do l^2 , a niezależne od E .

Wzór (12) przybierze jeszcze prostszą postać po podstawieniu $v = \sqrt{2gH}$, gdzie H jest wysokością spadania belki, a mianowicie:

$$(12a) \quad \bar{\sigma}_{dyn} = 2h_1 \sqrt{\lambda \frac{A\gamma}{J} EH}.$$

4. Przykład liczbowy. Szyna kolejowa obu końcami podparta tak, że się zgina pod ciężarem własnym w płaszczyźnie najmniejszej sztywności.

Dane: wysokość przekroju $h = 14$ cm,

$$\text{ciężar jednostkowy } q = A = 45 \frac{\text{kG}}{\text{m}} = 0,45 \frac{\text{kG}}{\text{cm}},$$

najmniejszy moment bezwładności przekroju $J = 260$ cm⁴.

Odległość włókna skrajnego od osi obojętnej $h_1 = 5,5$ cm.

Moduł sprężystości $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm².

A zatem:

$$A\gamma/J = 0,45:260 = 0,0773.$$

$$\bar{\sigma}_{dyn} = 663 \sqrt{\lambda H},$$

$$\bar{\sigma}_{stat} = 11,9l^2,$$

gdzie H oznacza wysokość spadania w cm, l długość w metrach, $\bar{\sigma}_{dyn}$ i $\bar{\sigma}_{stat}$ naprężenia dynamiczne i statyczne w kG/cm².

Okazuje się, że przy $l = 18$ m jest

$$\bar{\sigma}_{stat} = 3856 \text{ kG/cm}^2,$$

a przy $\lambda H = 34,5$ cm

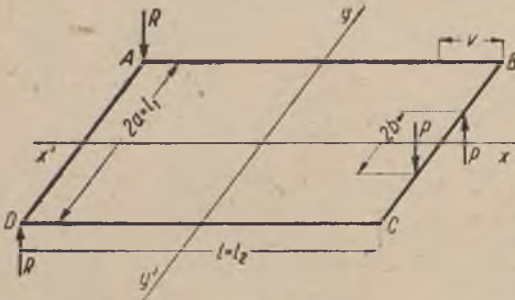
$$\bar{\sigma}_{dyn} = 3752 \text{ kG/cm}^2.$$

Jest rzeczą jasną, że te wartości wypadłyby znacznie mniejsze, gdyby punkty podparcia, a zarazem uderzenia nie leżały na krańcach szyny, ale zważywszy że naprężenie dynamiczne sumuje się ze statycznym, widzimy że przy wyładowywaniu długich szyn należy zastosować szczególne środki ostrożności, aby zapobiec trwałym wygięciom bardzo niepożądanym przy ułożeniu na nawierzchni.

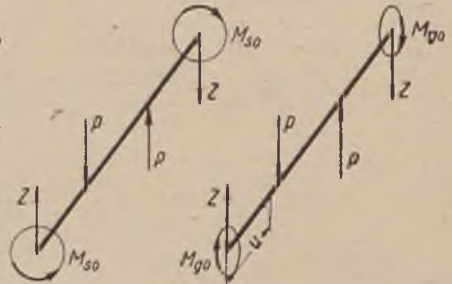
SZTYWNOŚĆ SKRĘCANIA RAMY PROSTOKĄTNEJ

(Czasopismo Techniczne Nr 7, 1930 r.)

1. Przyjmijmy dla uproszczenia trafiającą się najczęściej w praktyce symetrię budowy ramy względem osi xy prostokątnego układu współrzędnych (rys. 1) i założmy, że dana para sił P, P o ramieniu $2b$ działająca na pręt ramy $BC=2a=l_1$, równoważy się z reakcjami R, R podpór umieszczonych na końcach pręta przeciwnego AD . Wszystkie te siły są przy tym prostopadłe do płaszczyzny ramy. Wtedy pręt BC obróci się względem pręta równoległego AD o pewien kąt φ_s , który przy niewielkich



Rys. 1



Rys. 2

odkształceniach będzie wprost proporcjonalny do danego momentu (skręcającego) $M_s = 2Pb = 2Ra$ i do długości ramy $AB = 2c = l$, zaś odwrotnie proporcjonalny do sztywności skręcania D . Możemy przeto napisać

$$\varphi_s = \frac{M_s l}{D}$$

Zadaniem naszym jest obliczenie wartości D z danych wymiarów i stałych materiału ramy.

2. W tym celu musimy przede wszystkim znaleźć wielkości statycznie niewyznaczalne w stosownie wybranym przekroju ramy. Jeżeli wytniemy z ramy pręt BC przekrojami nieskończenie bliskimi końców B i C (rys. 2), to dla przywrócenia równowagi na końcu np. B potrzebna jest siła po-

przeczną Z , moment zginający M_{go} i moment skręcający M_{so} . Dla wyrazistości powtórzono rysunek wyciętego pręta BC zaznaczając na pierwszym tylko momenty skręcające, a na drugim zginające.

Z powodu przyjętej symetrii muszą odpowiadające wielkości na drugim końcu wyciętego pręta mieć te same wartości, ale przeciwnego kierunku (zwrotu) Z i M_{so} .

Nadto warunek momentów około osi x daje

$$2M_{go} + 2Za - 2Pb = 0,$$

a stąd

$$M_{go} = Pb - Za$$

i

$$\frac{\partial M_{go}}{\partial Z} = -a.$$

Mamy więc do czynienia tylko z dwiema wielkościami statycznie niewyznaczalnymi: Z i M_{so} .

Skoro przetniemy pręty AB i CD nieskończenie blisko końców B i C , to oczywiście mamy znowu do czynienia z siłami poprzecznymi o tej samej wielkości Z , tudzież z momentami zginającymi M_{go} i skręcającymi M_{so} . Moment skręcający koniec B pręta BC staje się momentem zginającym dla końca B pręta AB i nawzajem.

Oznaczywszy teraz przez:

B_1 — sztywność zginania prętów BC i AD w płaszczyźnie działania danych sił zewnętrznych;

D_1 — sztywność skręcania tychże prętów;

B_2 — sztywność zginania prętów AB i CD w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny ramy;

D_2 — sztywność skręcania tychże prętów,

napiszemy wyrażenia na energię odkształcenia U_1 pręta BC , U_2 prętów AB i CD , U_3 pręta AD (przy pominięciu energii ścinania) w postaci następującej:

$$U_1 = \frac{M_{so}^2 a}{D_1} + \frac{1}{B_1} \int_0^{(a-b)} (M_{go} + Zv)^2 dv + \frac{1}{B_1} \int_{a-b}^a [M_{so} + Zv - P(v - a + b)]^2 dv,$$

$$U_2 = \frac{M_{go}^2 l}{D_2} + \frac{1}{B_2} \int_0^l (Zu - M_{so})^2 du,$$

$$U_3 = \frac{(Zl - M_{so})^2 a}{D_1} + \frac{1}{B_1} \int_0^a (M_{go} + Zv - Rv)^2 dv.$$

Różniczkowanie $U = U_1 + U_2 + U_3$ daje:

$$\frac{\partial U}{\partial M_{so}} = \frac{2M_{so}a}{D_1} + \frac{2}{B_2} \int_0^l (-M_{so} + Zu) du + \frac{2}{D_1} (-M_{so} + Zl)a = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{2}{B_1} \int_0^{a-b} (M_{go} + Zv)(-a + v) dv + \frac{2}{B_1} \int_{a-b}^a [M_{go} + Zv -$$

$$- P(v - a + b)](-a + v) dv + \frac{2M_{go}(-a)l}{D_2} + \frac{2}{B_2} \int_0^l (-M_{so} + Zu) u du +$$

$$+ \frac{2(-M_{so} + Zl)al}{D_1} + \frac{2}{B_1} \int_0^a (M_{go} + Zv - Rv)(-a + v) dv = 0.$$

Pierwszy z powyższych warunków daje:

$$M_{so} = \frac{Zl}{2}.$$

Z drugiego po wykonaniu całkowań i licznych przekształceń znajdujemy:

$$Z \frac{l}{2} = M_{so} = Pbl \frac{5a^2 - b^2 + b \frac{B_1}{D_2} al}{8a^2 + \frac{B_1}{B_2} l^3 + 6 \frac{B_1}{D_1} al^2 + 12 \frac{B_1}{D_2} a^2 l}.$$

3. Dążąc do celu wymienionego na wstępie przyjmiemy teraz, że siły P pary obciążającej działają w narożnikach B i C , czyli że $2b = 2a = l_1$, a więc $R = P$. Wtedy z powyższego rozwiązania otrzymamy z łatwością wzory:

$$M_{so} = \frac{1}{2} \frac{Pl_1^2 l_2 \left(l_1 + 3 \frac{B_1}{D_2} l_2 \right)}{l_1^3 + \frac{B_1}{B_2} l_2^3 + 3B_1 l_1 l_2 \left(\frac{l_2}{D_1} + \frac{l_1}{D_2} \right)},$$

$$M_{go} = \frac{1}{2} \frac{Pl_1 l_2^2 \left(\frac{B_1}{B_2} l_2 + 3 \frac{B_1}{D_1} l_1 \right)}{l_1^3 + \frac{B_1}{B_2} l_2^3 + 3B_1 l_1 l_2 \left(\frac{l_2}{D_1} + \frac{l_1}{D_2} \right)}.$$

Możemy je sprowadzić z korzyścią do postaci następującej:

$$M_{so} = \frac{1}{2} \frac{Pl_2}{1 + \alpha}; \quad M_{go} = \frac{Pl_1}{1 + \frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{2} Pl_1 \frac{\alpha}{1 + \alpha},$$

przy czym:

$$\alpha = \frac{B_1}{B_2} \frac{D_2}{D_1} \left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \frac{3 \frac{B_2}{l_2} + \frac{D_1}{l_1}}{3 \frac{B_1}{l_1} + \frac{D_2}{l_2}}$$

Stąd znajdujemy jeszcze:

$$Z = \frac{2M_{so}}{l_2} = \frac{P}{1+\alpha}; \quad P - Z = \frac{2M_{go}}{l_1} = P \frac{\alpha}{1+\alpha}$$

Odpowiednie wyrażenia na energię odkształcenia ramy będą miały teraz postać:

$$U_1 = U_3 = \frac{1}{2} \frac{M_{so}^2 l_1}{D_1} + 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{l_1/2} \frac{[M_{go} + (Z - P)v]^2}{B_1} dv,$$

$$U_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{M_{go}^2 l_2}{D_2} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{l_2/2} \frac{(Zu - M_{so})^2}{B_2} du.$$

A zatem:

$$U = \frac{M_{so}^2 l_1}{D_1} + \frac{M_{go}^2 l_2}{D_2} + 2 \int_0^{l_1/2} \frac{[M_{go} + (Z - P)v]^2}{B_1} dv + 2 \int_0^{l_2/2} \frac{(Zu - M_{so})^2}{B_2} du.$$

Różniczkując to wyrażenie względem momentu $M_s = Pl_1$, jako zmiennej niezależnej, której funkcjami liniowymi są M_{so} , M_{go} , Z i P , znajdujemy:

$$\varphi_s = \frac{\partial U}{\partial M_s}$$

jako wartość kąta, o jaki obróci się pręt BC względem pręta AD . Wykonując najpierw całkowanie otrzymujemy:

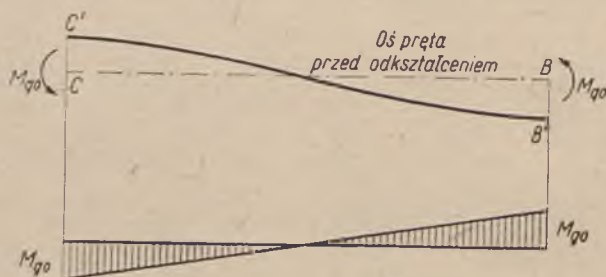
$$U = \frac{1}{12} \frac{M_s^2}{(1+\alpha)^2} \left[\left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \frac{3 \frac{B_2}{l_2} + \frac{D_1}{l_1}}{\frac{B_2}{l_2} \frac{D_1}{l_1}} + \alpha^2 \frac{3 \frac{B_1}{l_1} + \frac{D_2}{l_2}}{\frac{B_1}{l_1} \frac{D_2}{l_2}} \right],$$

$$\frac{\partial U}{\partial M_s} = \varphi_s = \frac{M_s l_2}{D} = \frac{M_s}{6(1+\alpha)^2} \left[\left(\frac{l_2}{l_1} \right)^2 \frac{3 \frac{B_2}{l_2} + \frac{D_1}{l_1}}{\frac{B_2}{l_2} \frac{D_1}{l_1}} + \alpha^2 \frac{3 \frac{B_1}{l_1} + \frac{D_2}{l_2}}{\frac{B_1}{l_1} \frac{D_2}{l_2}} \right],$$

a rozłożywszy tutaj a^2 na czynniki $a \cdot a$ i zastąpiwszy jeden wyrażeniem wyżej podanym, dochodzimy do najprostszej postaci wyrażen na D :

$$\frac{D}{l_2} = 6(1 + \alpha) \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 \frac{B_2}{l_2} \frac{D_1}{l_1} = \frac{6(1 + \alpha)}{\alpha} \frac{B_1}{l_1} \frac{D_2}{l_2} \cdot 3 \frac{B_1}{l_1} + \frac{D_2}{l_2}$$

4. Rozpatrzmy jeszcze kilka przypadków szczególnych tak ze względu na zastosowania, jak i pożądane sprawdzenie wyników, do których dochodzi się dość długim rachunkiem.



Rys. 3

a) Dajmy na to, że w ramie kwadratowej ($l_1 = l_2 = l$) jest zarazem $B_1 = B_2 = D_1 = D_2 = A$.

Wówczas znajdujemy z wzorów ogólnych

$$M_{go} = M_{so} = \frac{1}{4} Pl; \quad D = 3A.$$

b) Niechaj pręty l_1 mają sztywność zginania i skręcania B_1 i D_1 równą i bardzo wielką w porównaniu do prętów l_2 . Wtedy otrzymujemy

$$\alpha = \frac{1}{3} \frac{D_2}{B_2} \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^2, \quad D = 6(1 + \alpha) \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 B_2,$$

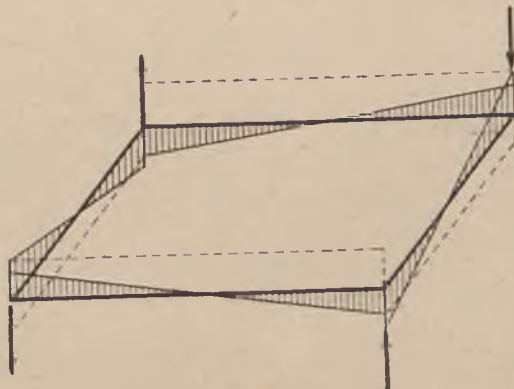
a zatem

$$D = 6 B_2 \left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 + 2D_2,$$

$$M_{so} = Pl_2 \frac{3B_2 l_1^2}{6B_2 l_1^2 + 2D_2 l_2^2},$$

$$M_{go} = Pl_1 \frac{D_2 l_2^2}{6B_2 l_1^2 + 2D_2 l_2^2}.$$

Rzut linii ugięcia każdego z prętów na płaszczyznę prostopadłą do płaszczyzny ramy, tudzież odpowiedni wykres *momentów zginających* przedstawia rys. 3, ważny w przypadku ogólniejszym omówionym w ustępie 3. Pręt ramy jest skręcany stałym momentem, a nadto zginany tak.



Rys. 4

jak belka obu końcami obustronnie podparta pod wpływem działających zgodnie na końce dwu równych par sił.

Rozmieszczenie momentów zginających w całej ramie przedstawia rys. 4. Linie przerywane ograniczają wykres *momentów skręcających*.

Na koniec wypada zaznaczyć, że otwierając ramę dużego okna wystawowego przez pociągnięcie za klamkę umieszczoną na dole narażamy tę ramę w podobny sposób, jeżeli, jak to często bywa, stawia opór klamka górna nienależycie otwarta lub inna miejscowa przyczyna.

O NAPRĘŻENIACH DOPUSZCZALNYCH WAŁKÓW ŁOŻYSKOWYCH DŹWIGARÓW MOSTOWYCH

(Przegląd Techniczny 1931 r.)

W dyskusjach nad oceną nowych projektów mostów wylania się niejednokrotnie zagadnienie wielkości naprężeń dopuszczalnych w obliczeniu wytrzymałościowym wałków (przyciskanych do płyty łożyskowej) na podstawie wzorów wynikających z rozwiązania HERTZA. Zgodnie z poglądem teoretycznym, zapoczątkowanym w moich pracach już przed 25 laty i potwierdzonym później bardzo dobrze doświadczeniami w wielu laboratoriach zagranicznych, musiałem zakwestionować zbytnią ostrożność, praktykowaną w tym przypadku przy obiorze naprężenia dopuszczalnego. Atoli natrafiłem na zwartą opozycję konstruktorów przeciwko podwyższeniu ciśnienia dopuszczalnego na linii geometrycznego stykania się wałka z płytą. Dopóki zwiększenie średnicy wałków (zbędne ze względów wytrzymałościowych) tłumaczono argumentami konstrukcyjnymi można było oczywiście zgodzić się na to. Skoro jednakże padło twierdzenie, że przy bronionych przeze mnie dużych wartościach naprężeń miano jakoby stwierdzić w praktyce szkodliwe odkształcenia wałków, to muszę w imię prawdy naukowej wyjaśnić sprawę dokładnie. Uczynię to tutaj na tle rozwoju historycznego odnośnego zagadnienia wytrzymałościowego, zajmującego stanowisko wyjątkowe i dlatego zasługujące na szczególną uwagę inżynierów.

Do roku 1882, kiedy się ukazała praca H. HERTZA „Über die Berührung fester elastischer Körper“ (Verhandl. d. Ver. f. d. Beförderung d. Gewerbebl. 1882, str. 449), posługiwano się obliczeniem największego ciśnienia w miejscu styku wałka z płytą, opartym na pewnych założeniach co do rozmieszczenia odkształceń, które się wydawały prawdopodobne inżynierom-teoretykom, jak np. GRASHOF i WINKLER w Niemczech. Jakkolwiek już wówczas zdawano sobie sprawę z tego, że sama wartość naprężenia głównego nie decyduje o niebezpieczeństwie pojawienia się odkształceń plastycznych (trwałych) przy złożonym stanie napięcia, to jednak nie można było stosować nawet wszechwładnie wówczas panującej hipotezy największego wydłużenia,

ponieważ obliczenie „przybliżone“ dawało tylko wartości jednego z naprężeń głównych. Gdy potem zastosowano teorię HERTZA, to zrazu uderzyły inżynierów teoretyczne wartości największego ciśnienia, które wypadły kilkakrotnie większe od obliczonych sposobem przybliżonym. Nawet obliczenie naprężenia sprowadzonego (zastępczego) na podstawie wymienionej hipotezy wytrzymałościowej prowadziło do wielkości, które przewyższały tak znacznie zwykłe wartości naprężenia dopuszczalnego, że musiały pobudzić inżynierów-badaczy do wyjaśnienia tych sprzeczności. Wąłki bowiem działały doskonale, chociaż według tego rachunku wypadło, że są znacznie przeciążone. Nasuwały się przeto dwie alternatywy: albo przyjęta hipoteza wytrzymałościowa jest błędna, albo też teoria HERTZA zawodzi przy stosunkowo znacznych spłaszczeniach (choć sprężystych), jakie zachodzą wskutek obciążeń w praktyce stosowanych. Zdawałoby się, że przede wszystkim będzie uwzględniona alternatywa pierwsza, ponieważ i badania BAUSCHINGERA w Monachium wykazały dobitnie niezgodność doświadczenia z hipotezą największego wydłużenia. Według tej hipotezy należało się bowiem spodziewać, że naprężenie ścinające (np. przy skręcaniu) na granicy plastyczności stali będzie równe około 77% odpowiedniej wartości naprężenia normalnego. Tymczasem doświadczenia BAUSCHINGERA i innych dały wartość tego stosunku mniejszą o przeszło 25%. (Według licznych nowszych badań wypada średnio $\tau_{pl} = 0,58 \sigma_{pl}$). Niestety, C. BACH podjął w znanym dziele „Elastizität und Festigkeit“ alternatywę drugą i wysnuł wniosek, że należy zaniechać stosowania wzorów HERTZA i wrócić do dawnego przybliżonego sposobu obliczenia. Błędność tego wniosku podkreślałem niejednokrotnie w moich odczytach i pracach polskich z r. 1904 i 1905, jednakże zasłużony na wielu innych polach autorytet BACHA zaciążył na długo nad tą dziedziną. Inżynierowie typu BACHA przeszli zrazu do porządku nad faktem, że sam HERTZ, a potem F. AUERBACH, sprawdzili doświadczalnie dokładność wyników teorii co do odkształceń w granicach nadspodziewanie obszernych. Potrzeba było dopiero doświadczeń w laboratoriach technicznych R. STRIBECKA w Niemczech (r. 1907) i A. DUMASA w Szwajcarii (r. 1924) domagających się umieszczenia wzorów HERTZA w książkach pisanych przez konstruktorów. Na podstawie doświadczeń pogodzono się powoli z faktem, że naprężenia rzeczywiste mogą w tym przypadku osiągać bardzo wielkie wartości przy dostatecznym bezpieczeństwie przeciwko powstaniu odkształceń plastycznych lub pęknięć. Toteż, śledząc uważnie piśmiennictwo techniczne z ostatniego dwudziestolecia, napotykamy coraz większe wartości naprężeń dopuszczalnych przy obliczaniu według wzoru HERTZA.

Tak np. WEYBRAUCH zaleca w r. 1904 (Luegers Lexikon, wyd. I, tom 1, str. 357):

Dla wałków żeliwnych $\sigma_{bezp} = 3000$ do 4000 kG/cm²,
 „ „ stalowych $\sigma_{bezp} = 5000$ do 7000 „ .

Natomiast przepisy niemieckich kolei państwowych z r. 1925 idą już dalej, ustalając dla wałków (lub innych części łożysk przenoszących nacisk, jeżeli te części w stanie nieobciążonym dotykają się tylko liniowo albo punktowo) następujące wartości ciśnień dopuszczalnych:

Dla żeliwa $\sigma_{bezp} = 5000$ kG/cm²
 „ stali zlewnej (St. 37) . $\sigma_{bezp} = 6500$ „
 „ staliwa $\sigma_{bezp} = 8500$ „
 „ stali kutej $\sigma_{bezp} = 9500$ „

Ale oparta na wynikach doświadczeń praktycznych tendencja do wzrostu naprężeń dopuszczalnych w naszym przypadku domaga się nadto naukowego wyjaśnienia, dlaczego te olbrzymie wartości naprężeń, jakie istotnie zachodzą w środku paska zetknięcia wałka z płytą, można mimo to uważać za bezpieczne. Tego wyjaśnienia nie dał sam HERTZ ani też wymienieni wyżej badacze doświadczalni; tkwi ono jednakże częścią w ogólnej teorii HERTZA, częścią zaś w hipotezie wytrzymałościowej, odpowiadającej lepiej faktom doświadczalnym od hipotezy największego wydłużenia. HERTZ stojąc (jak się wydaje przy studiowaniu jego odnośnych prac) na gruncie hipotezy największego naprężenia (panującej niemal do końca ubiegłego stulecia w Anglii), poprzestał na wyszukaniu wzoru na naprężenie największe w środku paska zetknięcia i na udowodnieniu, że rozkład ciśnień w poprzek paska jest eliptyczny. Natomiast nie wyprowadził wzorów obliczeniowych na trzy naprężenia główne w jakimkolwiek punkcie wewnątrz ciała. Wzory te ukazały się później w innych pracach¹⁾ i pozwoliły na obliczenie wyteżenia materiału w każdym punkcie oraz określenie ściśle miejsc niebezpiecznych. Stosując w naszym przypadku hipotezę energii odkształcenia postaciowego albo hipotezę naprężenia stycznego, otrzymujemy dla obu hipotez zgodnie następujący wzór na naprężenie spowodowane²⁾:

$$(1) \quad \sigma_{red} = (1 - 2\nu) \sigma_{max} ,$$

¹⁾ M. T. HUBER: Zur Theorie der Berührung fester elastischer Körper. Ann. d. Physik 1904, 14, str. 153–163.

T. FRYZENDORF: Teoria szatja soprikasajuszczichsia twiordych tjeł. Petersburg 1905.

S. FUCHS: Hauptspannungstrajektorien bei der Berührung einer Kugel mit einer Platte. Phys. Zeitschr. 1913, str. 1282–1285.

M. T. HUBER u. S. FUCHS: Spannungsverteilung bei der Berührung zweier elastischer Zylinder. Phys. Zeitschr. 1914, str. 298–303.

²⁾ M. T. HUBER: Nowoczesne wzory wytrzymałości złożonej. Spraw. Kwart. Nr 4 Instytutu Badań Technicznych Lotnictwa. Warszawa 1930.

jeżeli według znanego wzoru HERTZA jest:

$$(2) \quad \sigma_{max} = \sqrt{\frac{P}{2\pi lr} \frac{E}{1-\nu^2}}$$

(l — długość wałka, r — promień, P — obciążenie, E — moduł sprężystości, ν — liczba POISSONA).

Przyjmując dla stali $\nu = \frac{1}{3}$ otrzymujemy $\sigma_{red} = \frac{1}{3} \sigma_{max}$, z czego by wynikało, że ciśnienie bezpieczne w środku paska zetknięcia, określone wzorem HERTZA, może być trzy razy większe od ciśnienia bezpiecznego w przypadku jednoosiowego ściskania.

Już w tym tkwi znaczna część szukanego wyjaśnienia naukowego, ale jeszcze nie wszystko. Rozwiązawszy wzór (2) względem siły obciążającej wałek P i podstawivszy we wzorze (1) zamiast σ_{red} wartość dopuszczalną naprężenia k otrzymujemy:

$$(3) \quad P = 2lr \frac{\pi(1-\nu^2)}{(1-2\nu)^2} \frac{k^2}{E}$$

Ponieważ różne gatunki stali, różniące się znacznie wartością k , nie różnią się praktycznie wartościami stałych sprężystości E i ν , przeto wzór powyższy poucza, że obciążenie dopuszczalne wałka stalowego jest proporcjonalne do kwadratu naprężenia dopuszczalnego materiału wałka.

Oto drugi moment, wyjaśniający dlaczego można z wartością naprężenia dopuszczalnego iść dalej, aniżeli w zwykłych normalnych przypadkach ściskania.

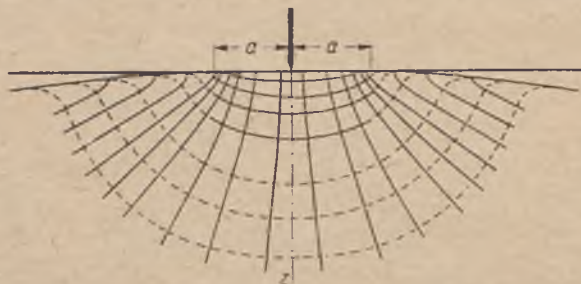
Weźmy np. zwykłą stal konstrukcyjną o granicy plastyczności ~ 2500 kG/cm². Dopuszczając w zwykłej części ściskanej np. 1800 kG/cm², mieliśmy pewność $\frac{2500}{1800} = 1,33$ -krotną przeciw odkształceniom plastycznym. Natomiast w wałku łożyskowym, w tych samych warunkach, zachodziłaby pewność $1,33^2 = 1,78$ -krotna, czyli — odwrotnie — chcąc stosować tę samą pewność, możemy naprężenie dopuszczalne podwyższyć do wartości $\frac{2500}{\sqrt{1,33}} = 2165$ kG/cm². Tej zaś wartości odpowiadałoby w środku paska zetknięcia rzeczywiste ciśnienie bezpieczne $3 \cdot 2165 \approx 6500$ kG/cm, a więc dokładnie tyle, ile dopuszczają nowsze przepisy kolei niemieckich.

Pozostaje jeszcze moment trzeci, uzasadniający dlaczego w przykładzie powyższym pewność 1,33-krotną ze względu na granicę plastyczności można uważać za zupełnie bezpieczną i równoważną znacznie większej pewności w przypadku obliczenia prętów narażonych tylko na proste ściskanie lub rozciąganie.

Otóż przeciążenie konstrukcji w tym ostatnim przypadku ma daleko poważniejsze skutki, aniżeli przeciążenie wałka. Jeżeli bowiem przeciążymy wałek nieco powyżej granicy plastyczności, to odkształcenie pla-

styczne zajdzie tylko w nader szczupłym obszarze, otaczającym linię zetknięcia, a reszta wałka dozna tylko odkształceń sprężystych. W rezultacie odkształcenie trwale całego wałka będzie znikomo małe w porównaniu do jego średnicy, podczas gdy w przypadku zwykłego ściskania pręta zachodzi odkształcenie plastyczne w całej masie pręta i wywołuje bez porównania większą trwałą zmianę wymiarów pręta.

To wszystko wystarczy, jak sądzę, w zupełności, ażeby uzasadnić słuszność żądania takich wartości naprężeń dopuszczalnych przy projektowaniu wałków łożyskowych stalowych, które są tylko niewiele niższe od granicy plastyczności materiału, podzielonej przez $1 - 2\nu = \frac{1}{3}$, stosownie do wzoru (1) (oczywiście, jeżeli do obliczenia wytrzymałościowego stosujemy wzór (2), kładąc w nim wartość tego zwiększonego na-



Rys. 1

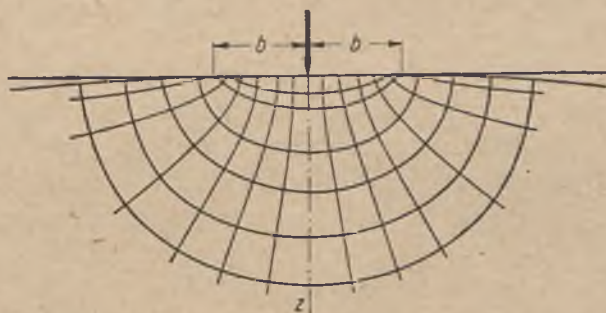
prężenia dopuszczalnego w miejsce σ_{max}). Temu odpowiadają bardzo dobrze przytoczone powyżej normy niemieckie z r. 1925.

Co się tyczy wałków żeliwnych, to wobec braku granicy plastyczności u tego materiału nie stosuje się doń żadna z wymienionych hipotez wytrzymałościowych. Wobec tego nie pozostaje nic innego, jak ustalić wartość naprężenia dopuszczalnego przy obliczaniu wzorem (2) na podstawie bezpośrednich doświadczeń. Tą drogą bez wątpienia powstało $\sigma_{bezp} = 5000 \text{ kG/cm}^2$, zalecane przez normy niemieckie. Normy te bowiem ukazały się już po ogłoszeniu doświadczeń prof. A. DUMASA z Lozanny przez Komisję Techniczną Kolei Szwajcarskich („Sur la charge limite admissible de rouleaux en contact avec des chemins de roulement plans“ Bull. Techn. de la Suisse Romande, Nr 12, a. 1924).

Nie rozporządzając obecnie tą cenną publikacją nie mogę stwierdzić, czy DUMAS znalazł doświadczalnie ważną różnicę w odkształcaniu się ściskanych wałków i kul, która uszła uwagi HERTZA, jak dowodzi jego rysunek linii naprężeń głównych. Rysunek ten, powtarzany w wielu książkach, między innymi na str. 562 dzieła FR. BLEICHA: „Theorie und Berechnung der eisernen Brücken“, Berlin 1924, sporządził HERTZ kie-

rując się intuicją, gdyż — jak wspomniałem wyżej — nie podał wzorów obliczeniowych dla naprężeń w dowolnym punkcie. Wzory takie wyprowadziłem w r. 1904 i przy ich pomocy ówczesny mój asystent dr Z. FUCHS sporządził później dokładne rysunki linii naprężeń głównych (rys. 1 i 2). Okazało się przy tym, że wzory teoretyczne przewidują naprężenia rozciągające w niektórych miejscach przy ściskaniu kul, natomiast nie przewidują żadnych ciągnięć w materiale przy ściskaniu wałków. Ten ostatni szczegół wypada uważać za ważny, gdyż tłumaczy on wysokie wartości naprężeń dopuszczalnych dla wałków żeliwnych³⁾.

Przy tej sposobności wypada na koniec uwypuklić korzyści, jakie można uzyskać przez zastosowanie materiału wyborowego na wałki.



Rys. 2

Ze wzoru (3) wynika, że przy danych wartościach P , l , E , ν jest potrzebna wielkość promienia wałka r odwrotnie proporcjonalna do kwadratu z naprężenia dopuszczalnego, a zatem ciężar wałka jest odwrotnie proporcjonalny do czwartej potęgi tego naprężenia. Zastosowanie np. materiału o dwa razy wyższej granicy plastyczności prowadzi do wałków 16 razy lżejszych. Nie trudno stąd przewidzieć, że dla dużych mostów będą łożyska najtańsze przy zastosowaniu na płyty i wałki hartowanej stali, chociażby cena jednostkowa materiału była wielokrotnie wyższa od ceny miękkich gatunków stali lub żeliwa.

Z powyższych rozważań wynika, że przytoczone na wstępie twierdzenie, jakoby wałki obciążone silnie wykazały w praktyce zbyt wielkie odkształcenia trwałe, mogło się chyba odnosić do jakiegoś sporadycznego przypadku zastosowania na wałki materiału całkiem nieodpowiedniego. Z takiego zaś przypadku nie podobna wysnuwać wniosków ogólnych.

³⁾ Na rysunkach przedstawiono linie ciśnień głównych liniami ciągłymi, zaś linie ciągnięć głównych — liniami przerywanymi.

O NAPRĘŻENIACH W ZAPORACH CIĘŻKICH

(Czasopismo Techniczne, 1931 r.)

Dyskusja na temat rzeczywistego stanu naprężenia w *zaporach ciężkich*, trwająca od początku bieżącego stulecia, jest wciąż jeszcze żywotna. Świadczy o tym między innymi interesujący referat prof. dr K. POMIANSKIEGO i dr K. WÓYCICKIEGO ogłoszony w nr 7 „Czasopisma Technicznego“ z 1931 r. Główne tło dyskusji stanowi niezgodność pomiarów doświadczalnych naprężeń u podstawy zapory z wynikami obliczenia teoretycznego, opartego na klasycznym rozwiązaniu matematycznej teorii sprężystości, znalezionym, jak się zdaje, najpierw przez inżyniera francuskiego M. LÉVY'EGO ¹⁾.

W artykule niniejszym radbym wyjaśnić powody tej niezgodności, albowiem zdaje mi się, że większość inżynierów-budowniczych nie docenia ścisłych rozwiązań teorii sprężystości, a zarazem przecenia rozwiązania przybliżone, skoro one zgadzają się na pozór lepiej z pomiarami doświadczalnymi w przekroju podstawowym.

Na wytworzenie naprężeń we wnętrzu bloku betonowego, jakim jest zwykle zapora ciężka, składają się:

- 1) ciężar własny określony ciężarem właściwym muru γ_m ,
- 2) napór wody o ciężarze właściwym γ_w ,
- 3) wypór uwarunkowany przesączaniem się wody przez pory betonu,
- 4) wykonanie zapory w związku z tężeniem betonu i
- 5) zmiany temperatury.

Stosownie do tego można rozróżniać w zaporach naprężenia ciężarowe, naporowe, wyporowe, budowlane i termiczne. Rzeczywisty stan naprężenia w zaporze jest w każdej chwili wypadkowym z powyższych pięciu stanów.

Wina tej komplikacji tkwi w wyjątkowo wielkich rozmiarach i masowności budowli. Najtrudniej uchwytne są oczywiście naprężenia budo-

¹⁾ C. R. 1898.

Patrz także: N. HAPONOWICZ: „Naprężenia w trójkątnych murach oporowych“. Czasopismo Techniczne z r. 1913 i St. BELZECKI: „Primienienie metodow teorii uprugosti k'razszczotu plotin“. Politech. Inst. Leningrad 1918.

wlane, jednakże łatwo wykazać, że ich wielkości mogą być porównywalne z naprężeniami ciężarowymi lub naporowymi, na których opiera się głównie obliczenie stałości zapory.

Wyobraźmy sobie następujące różne wyidealizowane schematy sposobu wykonywania zapory. 1) Odlanie całej zapory od razu w stosownej formie. 2) Odlewanie lub ubijanie betonu w warstwach poziomych, przy czym każda warstwa wykonuje się po stężeniu warstw spodnich. 3) Wykonanie w warstwach pionowych podłużnych i połączenie ich po stężeniu zaprawą cementową. Rzecz jasna, że wykonanie rzeczywiste zbliża się najwięcej do schematu 2, a schematy 1 i 3 są tylko teoretyczną fikcją dla uwydatnienia tego, o co nam idzie.

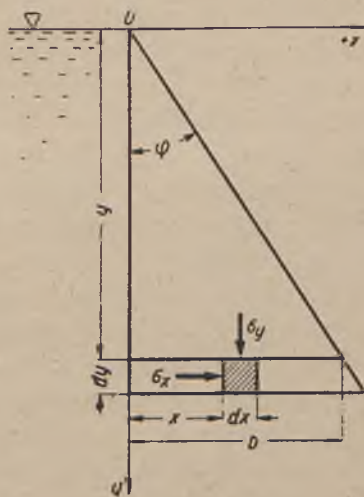
Nawet gdyby proces tężenia odbywał się zupełnie bez zmian objętości, to jest rzeczą jasną, że rozkład naprężeń w każdym z powyższych trzech schematów wykonania musi się różnić bardzo znacznie.

Gdybyśmy w jakiś sposób potrafili po wykonaniu zapory znieść siłę ciężkości, to i tak zależnie od schematu wykonania i od skurczu betonu pozostałby stan naprężenia.

Naprężenia tym stanem określone są właśnie naprężeniami budowlanymi. (Odpowiadają one naprężeniom zestawczym, czyli montażowym w konstrukcjach metalowych). Ponieważ siły ciężkości usunąć nie można, przeto obraz naprężeń ciężarowych musi być zawsze zakłócony naprężeniami budowlanymi.

Nie wchodząc w kwestię obliczenia naprężeń waporowych i termicznych wracamy do naszego tematu głównego, tj. do rozkładu naprężeń ciężarowych i naporowych. Gdy zapora ma postać klina o ostrzu dotykającym zwierciadła wody (rys. 1), to teoria sprężystości daje następujące wzory dla naprężeń:

$$(1) \begin{cases} \sigma_x = \gamma_w y, \\ \sigma_y = (-\gamma_m \operatorname{ctg} \varphi + 2\gamma_w \operatorname{ctg}^3 \varphi)x + \\ \quad + (\gamma_m - \gamma_w \operatorname{ctg}^2 \varphi)y, \\ \tau = \gamma_w \operatorname{ctg}^2 \varphi x. \end{cases}$$

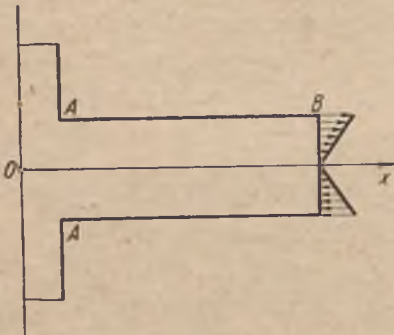


Rys. 1

Uzasadnienie tych wzorów znajdzie Czytelnik w wymienionym na początku referacie prof. K. POMIANOWSKIEGO i dr K. WÓJCICKIEGO (ust. II) albo w artykule HAPONOWICZA z r. 1913. Tutaj zaznaczyć wypada, że rozwiązanie (1) zakłada nieograniczone wymiary ścian klina w prze-

kroju uwidocznionym na rysunku. W zastosowaniu do zapory o wysokości skończonej spoczywającej na fundamencie będzie to rozwiązanie ściśle ważne tylko pod warunkiem, że rozmieszczenie naprężeń na podstawie stosuje się również do drugiego i trzeciego z równań (1).

Podobnie ma się rzecz np. z belką przyzmatyczną AB (rys. 2) jednym końcem utwierdzoną, a obciążoną na drugim końcu naprężeniami roz-



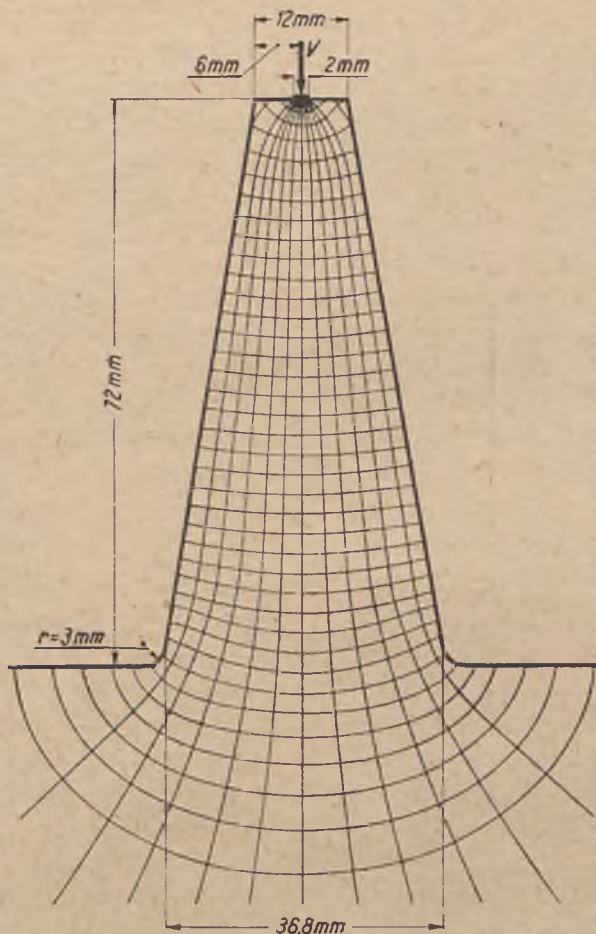
Rys. 2

łożonymi liniowo na podstawie tak, że się sprowadzają do pary sił o momencie M . Jak dowiódł już DE SAINT-VE-NANT, równania teorii sprężystości prowadzą wtedy do ściśle takiego samego rozkładu naprężeń σ_x w każdym przekroju poprzecznym belki o długości nieograniczonej. Gdy zaś belka ma długość skończoną, to do ważności tego rozkładu na całej długości potrzeba nadto, ażeby i utwierdzenie w przekroju $A - A$ zapewniało liniowy rozkład naprężeń w tym przekroju. W przeciwnym

razie może rozkład naprężeń w pobliżu A różnić się nawet bardzo znacznie od rozkładu przekroju B . Nic tedy dziwnego, że także u podstawy zapory może rozkład naprężeń znacznie zbczyć od schematu określonego wzorami (1), przy czym jednakże wypadkowe naprężeń bezwzględnych muszą pozostać niezmienione jako równoważące dane sity zewnętrzne naporu wody i ciężaru własnego muru.

Szczególnie wielkie zbczenia o charakterze miejscowej nadwyżki naprężeń przewiduje teoria sprężystości w przypadku, gdy zaporą z potężnym fundamentem tworzą monolit, a nie ma prawie zaokrąglenia kąta wklęsłego między ścianą zapory a płaską górną powierzchnią fundamentu. Badania fotoelastyczne potwierdzają ten wniosek teorii, jak widzimy np. na rys. 3—5 zaczerpniętych z prac doktorskich H. FAVRE'A i J. MÜLLERA wykonanych w laboratorium fotoelastycznym Politechniki Zurychskiej pod kierownictwem prof. dr F. TANKA r. 1929 i 1930.

Przy tej sposobności wypada też sprostować twierdzenie zaczerpnięte z piśmiennictwa amerykańskiego, że wynik teoretyczny wyrażony równaniem dla σ_y jako liniowej funkcji x „jest równoznaczny z założeniem, że poziome płaszczyzny (przekroju) pozostają płaskie oraz że odkształcenie spowodowane siłami tnącymi jest pominięte“. Odkształcenia bowiem przekrojów płaskich są określone przesunięciami u, v traktowanymi w teorii sprężystości jako nieskończenie małe w porównaniu do wymiarów ciała; a przesunięcia te są związane w naszym zadaniu dwuwymiarowym z naprężeniami relacjami:



Rys. 3. Linie naprężeń głównych przy obciążeniu siłą skupioną na środku podstawy górnej. Podstawa dolna rozszerza się w wielki fundament z tego samego materiału

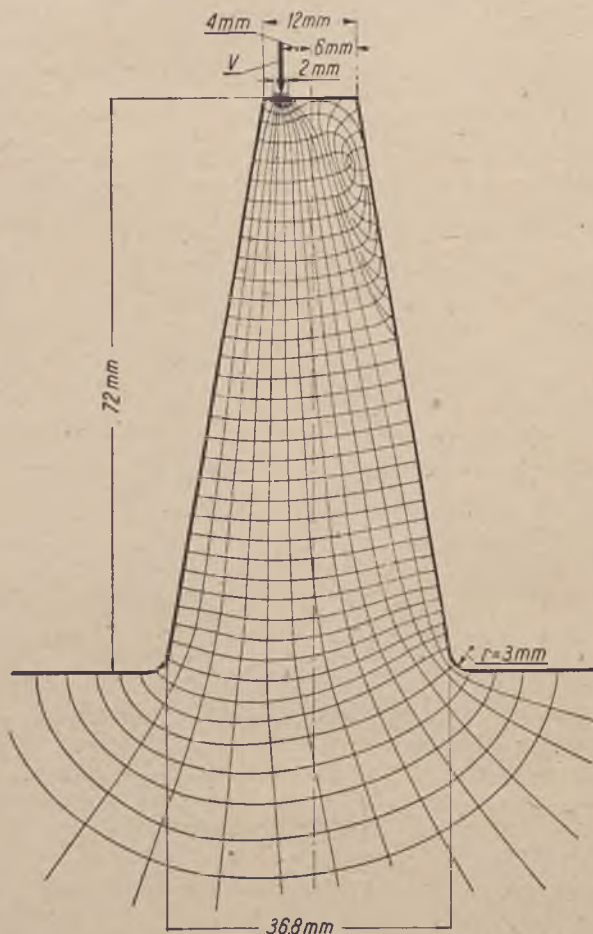
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y),$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_z),$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau}{G}.$$

Skoro więc pochodne przesunięć względem x i y są liniowymi funkcjami tych zmiennych, to same przesunięcia muszą być funkcjami kwadratowymi. To dowodzi konieczności zakrzywienia przekrojów płaskich, co prawda nie podług litery S , gdyż krzywe rzędu drugiego nie posiadają punktów przegięcia.

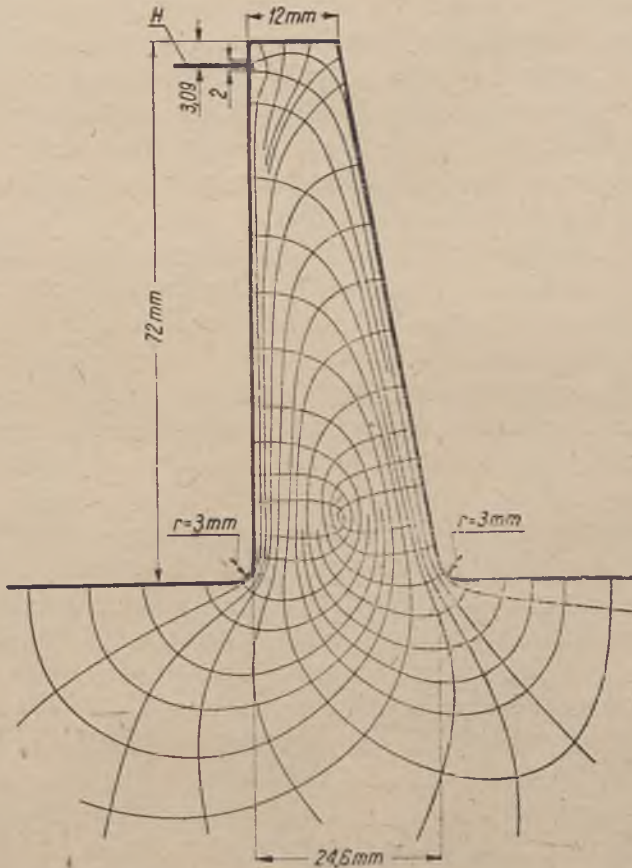
Jeżeli przeto na modelu zapory „Stevenson Creek“ stwierdzono esowate wygięcia przekrojów w pobliżu fundamentu, to fakt ten świadczy tylko o wpływie fundamentu na rozkład naprężeń w jego bliskości, ale nie przeczy i nie może przeczyć temu, że w górnej części zapory jest ten rozkład bardzo bliski teoretycznemu określonego wzorami (1).



Rys. 4. Linie naprężeń głównych przy mimośrodowym obciążeniu zapory siłą skupioną

To by bowiem było w sprzeczności z zasadą DE SAINT-VENANTA, iż statycznie równoważne siły zewnętrzne obciążające pole ściany o największym wymiarze a wywołują praktycznie jednakowe stany naprężeń w punktach ciała, których odległość od tego pola wynosi przynajmniej a . Jakkolwiek zboczenia rozkładu naprężeń od schematu (1) wyjaśniają się teoretycznie wpływem połączenia z fundamentem, niełatwym oczywiście do ścisłego ujęcia ilościowego, to jednak zrozumiałe jest, że praktyka

dąży do posunięcia dalej dokładności obliczenia naprężeń w tych właśnie przekrojach jako zwykle niebezpiecznych. Tym się tłumaczy przychylnie przyjęcie metody B. JAKOBSENA, przedstawionej szczegółowo w Nr 7 „Czasopisma Technicznego“. Otrzymane przez JAKOBSENA wzory na rozkład naprężeń w poziomym najniższym przekroju zapory dają wartości bardziej zbliżone do znalezionych z pomiarów na modelach, aniżeli wzory z teorii klasycznej. Wydawałoby się zatem, że nowa metoda obli-



Rys. 5. Linie naprężeń głównych przy obciążeniu zapory siłą zginającą

czenia stanowi postęp naukowy w stosunku do dawnej. Niestety tak nie jest i postaram się tego dowieść.

Przedewszystkim metoda JAKOBSENA posiada słabą stronę tego samego rodzaju, co metoda LÉVY'EGO. Rachunek JAKOBSENA polega bowiem na założeniu, że płaszczyzna podstawy zapory przylega do fundamentu jako ciała doskonale sztywnego. Jeżeli założeniu LÉVY'EGO zarzuca się słusznie, że rozkład naprężeń w podstawie nie może być nie-

zależny od fundamentu, to na taki sam zarzut zasługuje i założenie JAKOBSENA. Ale metoda JAKOBSENA ma jeszcze drugą słabą stronę, od której wolna jest metoda LÉVY'EGO. Przy poczynionych założeniach daje LÉVY rozwiązanie ściśle równań różniczkowych teorii sprężystości, natomiast JAKOBSEN tylko rozwiązanie przybliżone. Co gorsze stopień przybliżenia nie da się ocenić. Jest to znana niedogodność metody RITZA (skądinąd nader cennej) stosowanej w rachunku JAKOBSENA.

To chyba wystarczy, ażeby uznać teorię JAKOBSENA za ustępującą teorii LÉVY'EGO pod względem naukowym, a w żadnym razie nie przewyższającą jej. Podniesiona powyżej lepsza zgodność z doświadczeniem jakobsenowskiego rozkładu naprężeń w pobliżu podstawy może być raczej dziełem przypadku. Obliczywszy wypadkowe naprężeń ciężarowych i naporowych w tym przekroju podług LÉVY'EGO otrzymamy istotnie na ścianach wartości za małe, ale faktyczne zwiększenie naprężeń zależeć musi od promienia zaokrąglenia kąta wklęsłego między ścianą a fundamentem. O tej zależności nie ma oczywiście mowy w rachunku JAKOBSENA. W warunkach przytoczonych powyżej badań doświadczalnych J. MÜLLERA wypada nadwyżka rzeczywistego naprężenia skrajnego w stosunku do obliczonego teorią klasyczną około 75%. Jestem przekonany, że w warunkach normalnie wykonanej zapory można mniej więcej tę samą nadwyżkę przyjąć obliczając naprężenia według teorii LÉVY'EGO. Wszak idzie tylko o możliwie zbliżoną do rzeczywistości wielkość naprężeń w warstwach skrajnych, a środkowa część wykresu naprężeń w przekroju jako mniej niebezpieczna jest dla obliczenia stałości obojętna. Zresztą dążenie do wielkiej dokładności obliczenia nie ma praktycznej racji bytu wobec znacznych wahań wartości stałych sprężystości w różnych miejscach zapory i wobec trudno uchwytnych wielkości naprężeń waporowych, budowlanych i termicznych.

Mimo to, ze stanowiska naukowego byłoby bardzo pożądane ściśle rozwiązanie teorii sprężystości dla zapory trójkątnej wraz z fundamentem traktowanej jako monolit, chociażby przyjęto dla ułatwienia, że fundament zajmuje połowę nieograniczonej przestrzeni.

Na takich przesłankach oparto słusznie zarzut uczyniony teorii JAKOBSENA w dyskusji ogłoszonej w „Proceedings of ASCE“ (Sept. 1930), zarzut podkreślany również w referacie K. POMIANOWSKIEGO i K. WÓYCICKIEHO („Czasopismo Techniczne“ Nr 7, str. 115).

Na zakończenie przytoczę *równania teorii sprężystości* w postaci BELTRAMIEGO i MICHELLA ¹⁾, które pozwolą Czytelnikom łatwiej sprawdzić

¹⁾ Tylko tę bowiem postać równań umieściłem w znanym Podręczniku Inżynierskim prof. BRYŁY, w rozdziale pt. „Sprężystość i wytrzymałość“ na str. 1087. W dziełach z ubiegłego stulecia również tę tylko postać można znaleźć, jak np. w „Mechanice Teore-

rozwiązanie LÉVY'EGO, niż to się da wykonać na podstawie klasycznej formy również dla przesunięć u, v, w .

Równań tych jest sześć stosownie do sześciu składowych stanu naprężenia $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z; \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$. Oznaczając przez X, Y, Z składowe siły masowej odniesionej do jednostki masy i uwzględniając warunki brzegowe otrzymamy szukane równania:

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \mu \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial X}{\partial x} = 0,$$

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \mu \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial Y}{\partial y} = 0,$$

$$\nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} + \frac{\nu}{1-\nu} \mu \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} + \mu \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z} \right) = 0,$$

$$\nabla^2 \tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z \partial x} + \mu \left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x} \right) = 0,$$

$$\nabla^2 \tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} + \mu \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y} \right) = 0,$$

gdzie $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

W naszym zagadnieniu zapory przyjmuje się jak wiadomo:

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0, \quad \tau_{xy} = \tau,$$

$$X = 0, \quad Z = 0, \quad Y = g = \text{Const},$$

wobec czego równania sprowadzają się do trzech następujących:

$$\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

$$\nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

$$\nabla^2 \tau + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Na pierwszy rzut oka widać, że naprężenia określone jako liniowe funkcji x, y czynią tym równaniom zadość.

tycznej" J. N. FRANKEGO lub w „Teorii sprężystości“ H. JEWNIEWICZA, albowiem równania BELTRAMIEGO i MICHELLA pojawiły się dopiero w latach 1892 (Acc. d. Lincei, Ser. 5, t. 1) i 1899 (Proc. of Lond. Math. Soc. 31).

O WZORACH OGÓLNYCH DOTYCZĄCYCH ZGIĘCIA BELEK PROSTYCH

(Czasopismo Techniczne, 1932 r.)

Celem niniejszego artykułu jest przejrzyste uzasadnienie wzorów od dawna znanych, lecz jak się zdaje niedocenianych w wielu książkach i pracach poświęconych zagadnieniom belek zginanych. Do wyznaczania kątów nachylenia i rzędnych linii ugięcia stosują bowiem najczęściej jedną z dróg następujących skombinowanych w razie potrzeby z równaniami momentów podporowych belki ciągłej:

1. Całkowanie równania różniczkowego (przybliżonego) linii ugięcia w szczególnych warunkach danego zadania.

2. Analogia MOHRA, tj. sposób polegający na traktowaniu linii ugięcia jako krzywej sznurowej dla obciążenia belki powierzchnią momentów zgięcia.

3. Metoda CASTIGLIANO, tj. odpowiednie różniczkowanie energii odkształcenia sprężystego jako funkcji kwadratowej i jednorodnej sił zewnętrznych (uogólnionych).

Tymczasem zadanie nasze rozwiązuje się także przy pomocy wzorów ogólnych otrzymanych przez całkowanie przybliżonego równania różniczkowego linii ugięcia w połączeniu z tzw. wzorami BRESSE'A. Wprowadzimy je przy założeniach następujących:

1. Belka o przekroju łagodnie zmiennym (czy to w sposób ciągły, czy też nie) posiada płaszczyznę główną, w której leżą wszystkie siły zewnętrzne (tj. obciążenia i równoważące je reakcje podporowe).

2. Składowe siły zewnętrznych skierowane wzdłuż osi belki w stanie nieobciążonym, obranej za oś x , są tak małe, że ich wpływ na zgięcie osi można pominąć w porównaniu do wpływu składowych prostopadłych do tejże osi.

3. Obciążenia składają się z sił skupionych P i momentów (czyli par sił) skupionych również w dowolnej skończonej liczbie przekrojów belki oraz sił rozłożonych o natężeniu q kG/cm, które jest dowolnie daną całkowalną funkcją x . Reakcje dowolnej skończonej liczby punktów podparcia osi belki są zależnie od konstrukcji podpory siłami lub momen-

tami skupionymi (momentami utwierdzającymi). Wtedy momenty zginające M będą całkowalnymi funkcjami odciętej x przekroju belki, a równanie różniczkowe bardzo słabo zgiętej osi $\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = \frac{M}{EJ}$ ma pierwszą i drugą całkę ogólną w postaci:

$$y' = \int \frac{M dx}{EJ} + C,$$

$$y = \int dx \int \frac{M dx}{EJ} + Cx + C',$$

jeżeli dodatkowo M wygina belkę wklęsłością ku dodatniemu kierunkowi y .

Warunki:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad y &= y_0 \quad \text{dla} \quad x = x_0, \\ \text{b)} \quad y' &= \vartheta_0 \quad \text{dla} \quad x = x_0 \end{aligned}$$

pozwalają wyznaczyć (względnie wyrugować) obie stałe całkowania C i C' , a mianowicie:

$$(1) \quad y' - \vartheta_0 = \int_{x_0}^x \frac{M dx}{EJ},$$

czyli $C = \vartheta_0$, a więc:

$$y = \int dx \int_{x_0}^x \frac{M dx}{EJ} + \vartheta_0 x + C'.$$

Całkując przez części napiszemy to równanie w postaci

$$y = x \int_{x_0}^x \frac{M dx}{EJ} - \int \frac{M x dx}{EJ} + \vartheta_0 x + C',$$

a stosując warunek a)

$$y_0 = x_0 \left(\int_{x_0}^x \frac{M dx}{EJ} \right)_{x=x_0} - \left(\int \frac{M x dx}{EJ} \right)_{x=x_0} + \vartheta_0 x_0 + C'.$$

Odjęwszy oba ostatnie równania otrzymamy

$$(2) \quad y - y_0 = x \int_{x_0}^x \frac{M dx}{EJ} - \int_{x_0}^x \frac{M x dx}{EJ} + \vartheta_0 (x - x_0).$$

Stąd po wyrugowaniu ϑ_0 z (1) i (2) znajdziemy

$$(3) \quad y' = \frac{y - y_0}{x - x_0} + \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x \frac{M(x - x_0) dx}{EJ}.$$

Należy pamiętać, że w tym równaniu x przed znakiem całki i jako górna granica całkowania oznacza koniec rozpatrywanego odcinka $(x-x_0)$, zaś w funkcji podcałkowej rozumiemy przez x wielkość zmieniającą się od x_0 do x . Dla uniknięcia nieporozumień oznaczymy tę zmienną przez ξ , wobec czego równanie (3) napiszemy w postaci

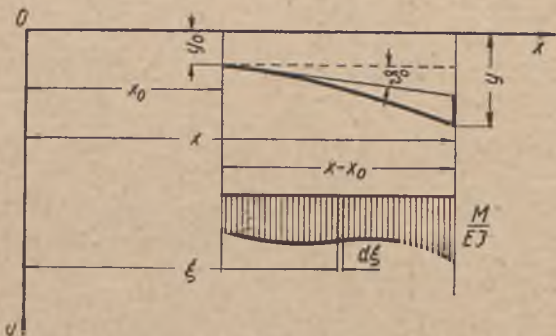
$$(3a) \quad y' - \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x \frac{M}{EJ} (\xi-x_0) d\xi.$$

Nazwijmy $\frac{M}{EJ}$ momentem sprowadzonym (do sztywności zginania równej 1), to

$$\int_{x_0}^x \frac{M dx}{EJ}$$

określa pole takich momentów sprowadzonych na odcinku belki $(x-x_0)$. Równanie (1) wyraża zatem prawo następujące:

Przekrój poprzeczny belki w miejscu x obraca się względem przekroju w miejscu x_0 o kąt $(\vartheta-\vartheta_0)$ równy polu momentów sprowadzonych na odcinku $(x-x_0)$.



Rys. 1

Podobnie można odczytać z równania (3a) prawo:

Kąt obrotu stycznej do linii ugięcia w końcu x odcinka $(x-x_0)$ względem cięciwy łączącej punkt (x_0, y_0) z punktem (x, y) jest równy polu momentów sprowadzonych na odcinku $(x-x_0)$ zmniejszonym w stosunku $(\xi-x_0):(x-x_0)$.

Do odpowiedniej interpretacji geometrycznej równania (2) napiszemy je w formie:

$$(2a) \quad y - y_0 - \vartheta_0(x-x_0) = \int_{x_0}^x \frac{M(x-\xi) d\xi}{EJ}.$$

A zatem (rys. 1): Część rzędnej linii ugięcia w przekroju x , odcięta styczną w miejscu x_0 , równa się momentowi pola momentów sprowadzonych na odcinku $(x-x_0)$ względem rzędnej końcowej y .

Przykład 1. Dla belki obu końcami doskonale utwierdzonej i obciążonej równomiernie (rys. 2) otrzymujemy przy $x_0=0$, $x=l$ z równania (1)

$$0 = \int_0^l \frac{M dx}{EJ},$$

albowiem oba przekroje odnośnie nie obracają się wcale. Z równania tego, które przybierze postać

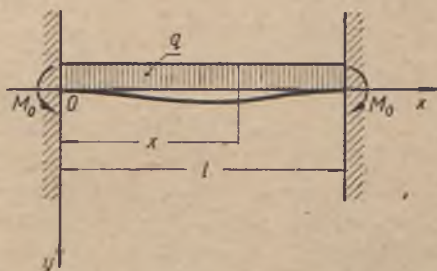
$$\int_0^l \frac{1}{EJ} \left[M_0 - q \frac{l}{2}(l-x) + q \frac{(l-x)^2}{2} \right] dx = 0,$$

można obliczyć moment utwierdzenia M_0 . Rachunek wykonamy przy założeniu $EJ = \text{Const.}$ Wtedy mamy

$$\int_0^l \left(M_0 - \frac{qlx}{2} + \frac{qx^2}{2} \right) dx = 0,$$

a stąd po wykonaniu całkowania

$$M_0 = \frac{ql^2}{12}.$$



Rys. 2

Do obliczenia strzałki ugięcia f (w środku) posłużymy równanie (2a) przy podstawieniu $x_0=0$, $x=l/2$. Ponieważ $y_0=0$ i $\vartheta_0=0$, więc

$$f = \int_0^{l/2} \frac{M \left(\frac{l}{2} - \xi \right) d\xi}{EJ}.$$

Po wstawieniu jak wyżej wartości M (jako funkcji ξ) i wykonaniu całkowania przy stałym EJ otrzymujemy

$$f = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EJ}.$$

Przykład 2. Ażeby w belce przedstawionej na rysunku 3 znaleźć wartość ϑ_2 kąta nachylenia stycznej na podporze B , stosujemy wzór (3a) przy wartościach $x=l$, $y=0$; $x_0=0$, $y_0=0$.

A zatem

$$\vartheta_2 = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{M}{EJ} \xi d\xi.$$

Ponieważ $M = A\xi$, zaś reakcja $A = \frac{Pa}{l}$, więc

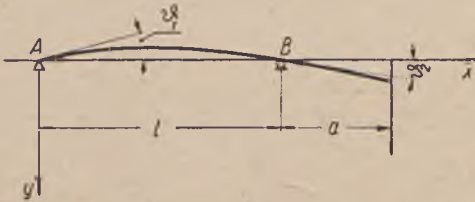
$$\vartheta_2 = \frac{Al^2}{3EJ} = \frac{Pal}{3EJ}.$$

Podobnie znajdujemy kąt ϑ_1 podstawiając w równaniu (3a) $x = 0, y = 0$; $x_0 = l, y_0 = 0$, a więc:

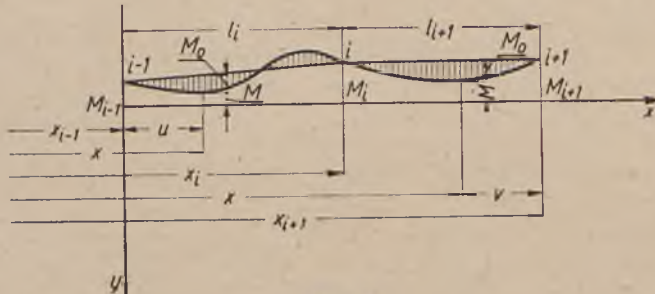
$$\vartheta_1 = - \int_l^0 \frac{M}{EJ} (\xi - l) d\xi = - \frac{Pal}{6EJ}.$$

Ze wzorów całkowych (1), (2) i (3) można przy pomocy tzw. równań BRESSE'A wyprowadzić inne wzory, ogłoszone jak się zdaje po raz pierwszy przez wybitnego inżyniera angielskiego EDWINA CLARKA (brata sławniejszego odeń LATIMERA CLARKA, elektryka) autora dzieła „The Britannia and Conway Tubular Bridges with general inquiries on Beams...” (2 t. Londyn, 1850).

Równanie BRESSE'A zaś wyraża związek między momentami zginającymi M_{i-1} i M_i w dwu dowolnie obranych przekrojach belki (rys. 4) a momentem zginającym M w przekroju x leżącym między tamtymi. Połączmy końce rzędnych M_{i-1} i M_i wykresu momentów prostą. Wtedy



Rys. 3



Rys. 4

rzędne wykresu zakreskowanego określają widocznie momenty M_0 , jakie by zachodziły, gdyby rozpatrywany odcinek belki wydzielić jako belkę prostą i uwolnić od momentów działających na przekroje końcowe. Rzeczywisty moment M w przekroju x będzie sumą algebraiczną postaci następującej:

$$M = M_{i-1} + (M_i - M_{i-1}) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + M_0.$$

Oznaczywszy $x_i - x_{i-1} = l_i$, zaś $x - x_{i-1} = u$, napiszemy równanie BRESSE'A w formie

$$(4) \quad M = M_{i-1} + (M_i - M_{i-1}) \frac{u}{l_i} + M_0.$$

Dla odcinka $l_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ będzie analogicznie

$$M = M_i + (M_{i+1} - M_i) \frac{x - x_i}{l_{i+1}} + M_0.$$

Po wprowadzeniu długości $v = x_{i+1} - x$, czyli $x - x_i = x_{i+1} - x_i - v = l_{i+1} - v$, napiszemy zamiast tego

$$M = M_i + (M_{i+1} - M_i) \left(1 - \frac{v}{l_{i+1}}\right) + M_0$$

albo wreszcie

$$(5) \quad M = M_{i+1} + (M_i - M_{i+1}) \frac{v}{l_{i+1}} + M_0.$$

Aby podkreślić, że wzór (4) stosuje się do przekrojów leżących w odcinku $x_i - x_{i-1} = l_i$, zaś wzór (5) do odcinka $x_{i+1} - x_i = l_{i+1}$, opatrzymy momenty M i M_0 stosownymi wskaźnikami u góry. Mamy więc wzory BRESSE'A w postaci:

$$(4a) \quad M^i = M_{i-1} + (M_i - M_{i-1}) \frac{u}{l_i} + M_0^i,$$

$$(5a) \quad M^{i+1} = M_{i+1} + (M_i - M_{i+1}) \frac{v}{l_{i+1}} + M_0^{i+1}.$$

Napiszemy teraz równanie (3a) dla odcinka l_i

$$(y')_{x=x_i} = \vartheta_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i} + \frac{1}{l_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{M}{EJ} (\xi - x_{i-1}) d\xi.$$

Ponieważ $\xi - x_{i-1} = u$, $d\xi = du$, więc

$$\vartheta_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i} + \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} \frac{M}{EJ} u du,$$

a po wstawieniu wartości M z (4a)

$$(6) \quad \vartheta_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i} + \frac{M_{i-1}}{l_i} \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{u}{l_i}\right) \frac{u du}{EJ} + \frac{M_i}{l_i^2} \int_0^{l_i} \frac{u^2 du}{EJ} + \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} \frac{M_0^i u du}{EJ}.$$

Podobnie napiszemy równanie (3a) dla odcinka l_{i+1}

$$(y')_{x=x_i} = \vartheta_i = -\frac{y_i - y_{i+1}}{l_{i+1}} - \frac{1}{l_{i+1}} \int_{x_{i+1}}^{x_i} \frac{M}{EJ} (\xi - x_{i+1}) d\xi,$$

ze względu zaś że $\xi - x_{i+1} = -v$, $d\xi = -dv$ otrzymamy stąd

$$\vartheta_i = -\frac{y_i - y_{i+1}}{l_{i+1}} - \frac{1}{l_{i+1}} \int_0^{l_{i+1}} \frac{M}{EJ} v dv.$$

Wstawiając teraz wartości M z (5a) znajdziemy

$$(7) \quad \vartheta_i = -\frac{y_i - y_{i+1}}{l_{i+1}} - \frac{M_{i+1}}{l_{i+1}} \int_0^{l_{i+1}} \left(1 - \frac{v}{l_{i+1}}\right) \frac{v dv}{EJ} - \frac{M_i}{l_{i+1}^2} \int_0^{l_{i+1}} \frac{v^2 dv}{EJ} - \frac{1}{l_{i+1}} \int_0^{l_{i+1}} \frac{M_0^{i+1} v dv}{EJ}.$$

Napiszemy teraz drugi z wzorów CLARKA (6) i (7) dla odcinka l_i , podstawiając oczywiście $\frac{l_i - u}{l_i}$ zamiast $\frac{v}{l_{i+1}}$, $-du$ zamiast dv i zmieniając stosownie granice, a otrzymamy

$$\vartheta_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i} - \frac{M_i}{l_i} \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{u}{l_i}\right) \frac{u du}{EJ} - M_{i-1} \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{u}{l_i}\right)^2 \frac{du}{EJ} - \int_0^{l_i} \frac{M_0^i}{EJ} \left(1 - \frac{u}{l_i}\right) du.$$

Odjęwszy to równanie od równania (6) znajdujemy

$$(8) \quad \vartheta_i - \vartheta_{i-1} = M_{i-1} \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{u}{l_i}\right) \frac{du}{EJ} + \frac{M_i}{l_i} \int_0^{l_i} \frac{u du}{EJ} + \int_0^{l_i} \frac{M_0^i du}{EJ}.$$

Odjęwszy zaś równanie (7) od (6) mamy

$$(9) \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i} = \frac{M_{i-1}}{l_i} \int_0^{l_i} \left(1 - \frac{u}{l_i}\right) \frac{u du}{EJ} + M_i \left[\frac{1}{l_i^2} \int_0^{l_i} \frac{u^2 du}{EJ} + \frac{1}{l_{i+1}^2} \int_0^{l_{i+1}} \frac{v^2 dv}{EJ} \right] + \frac{M_{i+1}}{l_{i+1}} \int_0^{l_{i+1}} \left(1 - \frac{v}{l_{i+1}}\right) \frac{v dv}{EJ} + \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} \frac{M_0^i u du}{EJ} + \frac{1}{l_{i+1}} \int_0^{l_{i+1}} \frac{M_0^{i+1} v dv}{EJ}.$$

Równanie to określa w najogólniejszej postaci związek między trzema momentami M_{i-1} , M_i , M_{i+1} w dowolnie obranych trzech przekrojach

belki. Najważniejsze zastosowanie ma w teorii belki ciągłej, dając bezpośrednio równanie trzech momentów podporowych w dwu po sobie następujących przęsłach takiej belki nawet z uwzględnieniem nierównej wysokości i podatności podpór. W tym ostatnim przypadku są y_{i-1} , y_i i y_{i+1} zależne nie tylko od momentów podporowych M_{i-1} , M_i , M_{i+1} , lecz także w ogóle od momentów podporowych M_{i-2} i M_{i+2} . Z tego powodu mamy wówczas właściwie do czynienia z *równaniem pięciu momentów*. Obadwa równania (8) i (9) nazywają także równaniami CLAPEYRONA, jakkolwiek francuski inżynier BERTOT ogłosił równanie trzech momentów parę lat wcześniej od CLAPEYRONA.

DZIAŁ VII

KONSTRUKCJE ŻELBETOWE

Redaktor naukowy: JERZY NECHAY

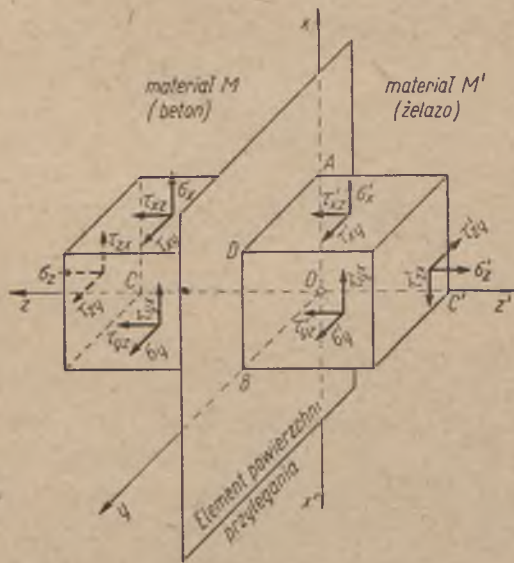
Asystent naukowy: LEONARD BARANOWSKI

DZIAŁANIE ZBROJENIA W BETONIE

(Czasopismo Techniczne Nr 11, 1920 r.)

W artykule tym pragnę podać te najważniejsze wskazówki do wyjaśnienia działania każdego rodzaju zbrojenia w betonie, które można wydebyć ze ścisłej teorii stanu odkształcenia i napięcia ciał stałych przy uwzględnieniu znanych właściwości betonu i żelaza, te bowiem wskazówki bądź to uszły uwagi licznych nowoczesnych badaczy żelbetu, bądź też nie zostały przez nich, a nawet przez teoretyków należycie uwzględnione i oświetlone. W szczególności posłużą te wskazówki do należytego wyjaśnienia działania strzemion.

Rozpatrzmy powierzchnię przylegania dwu ciał, które jak beton i żelazo odkształcają się razem tak, że do pewnej granicy można wykluczyć możliwość skończonych względnych ruchów w powierzchni przylegania. Uwzględniając tylko najważniejsze praktycznie kształty tej powierzchni przy zbrojeniu prętami pryzmatycznymi lub walcowymi, wyobrażamy sobie płaszczyznę styczną do powierzchni przylegania i dwie płaszczyzny normalne, jedną o kierunku poprzecznych przekrojów walca, drugą zaś równoległą do jego osi. Te trzy płaszczyzny tworzą prostokątny układ współrzędnych o osi x , dajmy na to w kierunku tworzących walca (kierunku zbrojenia), osi y w kierunku stycznej do przekroju poprzecznego i osi z w kierunku normalnej do powierzchni przylegania (rys. 1). W elemencie prostopadłościennym $dx dy dz$ każdego z obu ciał, przylegającym do owej powierzchni, mamy w naj-



Rys. 1

ogólniejszym przypadku do czynienia z sześciu wielkościami określającymi stan napięcia. Są nimi trzy naprężenia normalne

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$$

oraz trzy naprężenia styczne

$$\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$$

dla pierwszego ciała, np. betonu i podobnie

$$\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z \quad \text{i} \quad \tau'_{xy}, \tau'_{yz}, \tau'_{zx}$$

dla ciała drugiego, w naszym przypadku żelaza. Trzy pozostałe naprężenia styczne są, jak wiadomo, gwoli warunkom równowagi, tamtym równe:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

Ze względu na prawo wzajemności działania muszą składowe naprężenia odpowiadające płaszczyźnie przylegania xy dla obu ciał być odpowiednio równe:

$$(1) \quad \sigma_z = \sigma'_z, \quad \tau_{xz} = \tau'_{xz}, \quad \tau_{yz} = \tau'_{yz}.$$

Natomiast będzie w ogóle

$$\sigma_x \neq \sigma'_x, \quad \sigma_y \neq \sigma'_y, \quad \tau_{xy} \neq \tau'_{xy}.$$

W przypadku dwuwymiarowego stanu napięcia w płaszczyźnie równoległej do kierunku zbrojenia, określonego naprężeniami

$$\sigma_x, \sigma_z \quad \text{i} \quad \tau; \quad \sigma'_x, \sigma'_z \quad \text{i} \quad \tau'$$

mamy w ogóle

$$(2) \quad \sigma_x \neq \sigma'_x, \quad \sigma_z = \sigma'_z, \quad \tau = \tau'.$$

Pamiętać należy przy tym, że te wyniki są zupełnie ściśle i niezależne od sprężystych własności obu materiałów; w szczególności np. niezależne od wielkich zbroczeń betonu od prawa HOOKE'A. Wyrazimy je w następujący sposób:

Ciągnienia lub ciśnienia w kierunku prostopadłym do powierzchni przylegania są dla obu materiałów zawsze równe; w każdym zaś innym kierunku w ogóle różne.

Naprężenia styczne leżące w elemencie powierzchni przylegania są dla obu materiałów zawsze równe; tak samo muszą być równe odpowiadające im składowe naprężeń stycznych w przekrojach normalnych do powierzchni przylegania (o kierunku prostopadłym do tej powierzchni);

różnymi zaś są w ogóle tylko te składowe naprężeń stycznych w przekrojach normalnych do tej powierzchni, które są do niej równoległe.

Pierwsze z powyższych twierdzeń jest zbyt oczywiste, aby w dotychczasowych rozważaniach teorii żelbetu go nie uznawano, ale, jak się zdaje, inaczej miała się rzecz z twierdzeniem drugim (o naprężeniach stycznych).

Rozpatrzmy teraz stan odkształcenia i przyjmijmy na razie obok poprzedniego założenia (wykluczenie ruchu względnego po obu stronach powierzchni przylegania), że oba materiały podlegają prawu HOOKE'A odkładając na później uwzględnienie zbieżności od tego prawa. Przy tym samym co poprzednio układzie współrzędnych stan odkształcenia określają trzy wydłużenia właściwe

$$\varepsilon_x, \quad \varepsilon_y, \quad \varepsilon_z \quad \text{dla pierwszego ciała}$$

$$\varepsilon'_x, \quad \varepsilon'_y, \quad \varepsilon'_z \quad \text{dla drugiego ciała}$$

i trzy kąty odkształcenia postaciowego, albo ich tangensy, czyli posunięcia względne

$$\gamma_{xy}, \quad \gamma_{yz}, \quad \gamma_{zx}; \quad \gamma'_{xy}, \quad \gamma'_{yz}, \quad \gamma'_{zx}.$$

Z poprzedniego założenia wynika przede wszystkim

$$(3) \quad \varepsilon_x = \varepsilon'_x, \quad \varepsilon_y = \varepsilon'_y,$$

natomiast w ogóle

$$\varepsilon_z \neq \varepsilon'_z.$$

Te wyniki są oczywiście niezależne od przyjęcia ważności prawa HOOKE'A, a pierwszy z nich, tj. $\varepsilon_x = \varepsilon'_x$, stanowi od dawna punkt wyjścia dla teorii żelbetu. Skoro pominiemy wszystkie inne składowe odkształcenia i napięcia prócz $\varepsilon_x, \varepsilon'_x$ i σ_x, σ'_x , jak to wolno uczynić bez wielkiego błędu w licznych najprostszych i najważniejszych praktycznych przypadkach, to ponieważ wtedy

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}, \quad \varepsilon'_x = \frac{\sigma'_x}{E'},$$

przeto

$$(4) \quad \sigma_x : \sigma'_x = E : E',$$

czyli podłużne naprężenia normalne obu materiałów są w pierwszym przybliżeniu proporcjonalne względem odpowiadających modułów wydłużenia (współczynników sprężystości). Ten wynik pozostaje ściśle ważny i w razie zbieżności od prawa HOOKE'A, jeżeli przez (oczywiście zmienny) moduł wydłużenia rozumiemy wartość stosunku $\sigma : \varepsilon$, a nie $d\sigma/d\varepsilon$.

W ogóle jest, jak wiadomo:

$$(5) \quad \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \varepsilon'_x = \frac{1}{E'} [\sigma'_x - \nu'(\sigma'_y + \sigma'_z)], \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], & \varepsilon'_y = \frac{1}{E'} [\sigma'_y - \nu'(\sigma'_x + \sigma'_z)], \end{cases}$$

jeżeli ν i ν' oznaczają odpowiednie liczby POISSONA dla pierwszego i drugiego ciała. Uwzględnwszy związek

$$\sigma_z = \sigma'_z$$

i oznaczywszy

$$E' : E = n$$

otrzymany z podzielenia dwu pierwszych z równań (5) i dwu drugich

$$n = \frac{\sigma'_x - \nu'(\sigma'_y + \sigma_z)}{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)} = \frac{\sigma'_y - \nu'(\sigma'_x + \sigma_z)}{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)},$$

a stąd

$$(6) \quad \frac{\sigma'_x - \sigma'_y}{\sigma_x - \sigma_y} \frac{1 + \nu'}{1 + \nu} = n = \frac{E'}{E}.$$

Zapytajmy się teraz, pod jakimi warunkami jest możliwy liniowy stan napięcia w obu ciałach, określony wartościami σ_x i σ'_x , czyli kiedy jednocześnie ze skończonymi wartościami σ_x i σ'_x może być

$$\sigma_y = 0, \quad \sigma'_y = 0; \quad \sigma_z = 0 \quad \text{i} \quad \sigma'_z = 0.$$

Otóż dwa pierwsze z równań (5) dają przy tych założeniach

$$\sigma'_x = n\sigma_x,$$

dwa drugie zaś

$$\frac{E'}{E} = \frac{\nu'}{\nu} \frac{\sigma'_x}{\sigma_x}, \quad \text{czyli} \quad \sigma'_x = n \frac{\nu}{\nu'} \sigma_x.$$

Te wyniki nie prowadzą do sprzeczności tylko wówczas, gdy

$$\nu = \nu'.$$

A zatem: Ścisłe liniowy stan napięcia w kierunku zwykłego podłużnego zbrojenia byłby możliwy, gdyby liczba POISSONA dla obu materiałów miała tę samą wartość. Wówczas byłoby dokładnie

$$\sigma'_x = n\sigma_x.$$

Ponieważ w przypadku żelaza i betonu rzecz się ma inaczej, przeto po pierwsze: naprężeniom normalnym σ_x, σ'_x o kierunku równoległym do zbrojenia muszą towarzyszyć naprężenia normalne σ_y, σ'_y i σ_z, σ'_z nawet

wtedy, gdy nie ma składowych sił zewnętrznych o kierunkach prostopadłych do osi, a zarazem do kierunku zbrojenia (np. prostych słupów lub belek żelbetowych). Po wtóre zaś: stosunek $\sigma'_x : \sigma_x$ nie jest nigdy dokładnie równy stosunkowi $E' : E = n$.

Ażeby się zorientować jak wielkie może być zboczenie wartości $\sigma'_x : \sigma_x$ od n , przyjmijmy np., że

$$\sigma'_x : \sigma'_y = \sigma_x : \sigma_y.$$

Wtedy równanie (6) daje

$$\frac{\sigma'_x}{\sigma_x} = n \frac{1 + \nu}{1 + \nu'},$$

co przy wartości ν , leżącej między 0,10 dla bardzo małych, a 0,33 dla bardzo wielkich naprężeń i $\nu' = \frac{3}{10}$, daje

$$\sigma'_x : \sigma_x = 0,85n \text{ do } 1,02n.$$

Inny ważniejszy jeszcze wpływ różnicy stosunku POISSONA dla betonu i żelaza omówimy poniżej.

Tutaj wypada zwrócić uwagę na pewne rozpowszechnione nadużycie nazwy liczba POISSONA. Czytamy np. często, że w doświadczeniach z betonowymi słupami owijanymi znaleziono większą wartość liczby POISSONA, niż dla takich samych zresztą słupów bez zbrojenia. Jeżeli autorzy mają na myśli wartość tej stałej dla betonu, to takie zdanie nie ma po prostu naukowego sensu, bo w betonie owiniętym rozszerzenie poprzeczne, wywołane podłużnym ściskaniem, natrafia na wielki opór zbrojenia, który sprawia, że zamiast liniowego powstaje w betonie trójwymiarowy stan napięcia, o niezna-nej do tego wielkości naprężeń poprzecznych. Gdybyśmy je mogli zmierzyć, tak jak odkształcenia, to można by i w tym przypadku z danych doświadczalnych liczbę POISSONA obliczyć i jej wartość okazałaby się z pewnością praktycznie równą wartości wyznaczonej z pomiaru podłużnego skrócenia i poprzecznego rozszerzenia słupa z czystego betonu. Gdyby zaś owi autorzy mieli na myśli liczbę POISSONA dla żelbetu, to tym gorzej, gdyż jest to materiał całkiem niejednorodny, a liczba POISSONA określa stałe odkształcenia materiału jednorodnego i równokierunkowego. To co mierzą na słupach zbrojonych jest tylko stosunkiem właściwego odkształcenia poprzecznego do takiego odkształcenia podłużnego betonu słupa, który z liczbą POISSONA jest w mniej lub więcej złożonym związku. Być może, iż niektórzy badacze uważają liczbę POISSONA za skróconą nazwę powyższej wielkości, ale tego czynić nie wolno choćby tylko ze względów dydaktycznych.

Co się tyczy kątów odkształcenia postaciowego, to związki między wartościami odpowiadającymi obu ciałom są określone równaniami statycznymi:

$$\tau_{xz} = \tau'_{xz} \quad \text{i} \quad \tau_{yz} = \tau'_{yz}.$$

Ponieważ przy założeniu ważności prawa HOOKE'A jest

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}, \quad \text{przy czym} \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

przeto

$$(7) \quad G\gamma_{xz} = G' \gamma'_{xz} \quad \text{i} \quad G\gamma_{yz} = G' \gamma'_{yz},$$

czyli dwa kąty odkształcenia postaciowego np. żelaza, są

$$\frac{G'}{G} = \frac{E'}{E} = \frac{1+\nu}{1+\nu'} = n \frac{1+\nu}{1+\nu'}$$

razy mniejsze od odpowiadających kątów betonu.

Korzyści ze zbrojenia betonu polegają głównie na przybliżonym równaniu

$$\sigma'_x : \sigma_x = n.$$

Pręty zbrojenia o stosunkowo wielkiej wytrzymałości odciażają znacznie słabszy beton i pozwalają zmniejszyć całkowity przekrój żelbetowy w stosunku do przekroju betonu niezbrojonego. Najskuteczniej działa oczywiście zbrojenie wzdłuż linii naprężeń głównych, które to zbrojenie redukuje wartość naprężenia σ_b w betonie przekroju zbrojonego w stosunku do wartości σ w pełnym przekroju niezbrojonym według wzoru:

$$(8) \quad \sigma_b : \sigma = 1 : [1 + (\xi - 1)\varphi].$$

Ten wzór różni się od wyprowadzonego uprzednio tylko tym, że liczbę n zastąpiono przez ξ jako dokładną wartość stosunku $\sigma'_x : \sigma_x$. Liczba zaś $\varphi = F_z : F$ określa stosunek zbrojenia (100 φ jest „procentem zbrojenia“), tj. stosunek pola przekroju żelaza do przekroju całkowitego.

W tym miejscu należy zwrócić uwagę na dającą się teoretycznie przewidzieć i uzasadnić wybitną różnicę w działaniu zbrojenia rozciąganego od ściskanego na niekorzyść tego ostatniego. Ta różnica polega po pierwsze na możliwości wyboczenia ściskanych cienkich prętów zbrojenia pogrążonych w sprężystej, a więc podatnej masie betonu. Tej kwestii nie rozpatrywano, o ile mi wiadomo, bliżej teoretycznie, a i dane doświadczalne są dość skąpe. To zresztą wyboczenie, jakie obserwowano po odłupaniu się betonowej skorupy zbrojenia słupów, nie ma z poprzednim nic wspólnego.

Po wtóre polega owa różnica na rozsadzającym działaniu ściskanych prętów zbrojenia, które jest nieuniknioną konsekwencją znacznie większej liczby Poissona dla żelaza ($\nu = \frac{3}{10}$) niż dla betonu. Teoretycznie rozpatrywałem tę rzecz w ustępie 2 pracy pt. „Obliczenie wymiarów belek betonowych obustronnie zbrojonych“ Czas. Techn. z r. 1906, gdzie znaleźć można liczbowe wyniki.

Toteż łatwo było przewidzieć, że bez porównania korzystniej będzie działać zbrojenie owijane elementów ściskanych. Wszak dostatecznie

gęste i szczelne owinięcie może nawet materiałowi sypkiemu lub płynnemu, a więc pozbawionemu właściwej wytrzymałości, udzielić zdolności znoszenia obciążeń dzięki temu, że przy wszechstronnym równomiernym ścisaniu materiału dostatecznie jednorodnego staje się jego wytrzymałość właściwa praktycznie nieograniczona. Przecież nawet całkiem słabe skały w łonie ziemi, które obnażamy przy wierceniu sztolni głębokich kopalń lub wielkich tuneli, nie wykazują zmiążdżenia olbrzymim ciężarem wierzchnich pokładów, a tylko odłupują się łatwo lub zupełnie samoczynnie w tzw. przedsobiu, tam bowiem przez usunięcie materiału znieśliśmy trzecie główne ciśnienie ogólnego stanu napięcia, jaki panuje w głębi skalnych pokładów.

Przy ścisaniu betonowego słupa naprężeniem σ_b musiałyby wystąpić rozszerzenie poprzeczne o względnej wartości $\nu \frac{\sigma_b}{E}$, gdyby nie było owinięcia, które temu rozszerzeniu przeszkadza. Ale owinięcie jest również sprężyste, wskutek czego poddaje się nieco, a rozszerzenie poprzeczne betonu pojawi się w warstwie zmniejszonej tym bardziej, im mniej podatne jest owinięcie. Dlatego owinięcie na rdzeniu prostokątnym musi działać bez żadnego porównania słabiej od owinięcia na rdzeniu okrągłym. Wewnątrz owinięcia panuje w betonie trójwymiarowy stan napięcia, zbliżający się w miarę wzrostu obciążenia coraz więcej do idealnej granicy wszechstronnego równomiernego ścisania, na które wytrzymałość materiału (mierzona graniczną wartością ciśnienia) jest praktycznie nieograniczona. W pewnym przybliżeniu, niewątpliwie znacznym dla osiowej części słupa, ale wcale niewystarczającym dla części przylegających do owinięcia, da się zagadnienie rozwiązać z łatwością teoretycznie, zważywszy jednak na zaznaczoną słabą stronę poprzestaną na odesłaniu Czytelnika na razie do § 51 „Teorii żelbetu“ M. THULLIEGO lub do cytowanych tamże prac SALIGERA.

Zmniejszenie rozszerzenia poprzecznego przez obecność owinięcia stwierdzono też niejednokrotnie doświadczeniem, przy czym jednakże często określano błędnie stosunek tego zmierzonego rozszerzenia do podłużnego skurczenia jako liczbę POISSONA.

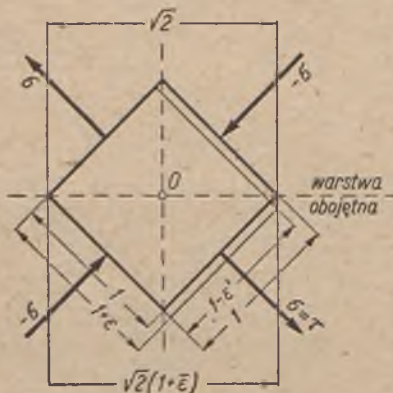
Godna uwagi jest rola zbrojenia podłużnego, jakie dajemy obok owinięcia w słupach. To zbrojenie ma nie tylko znaczenie konstrukcyjne, ale teoretycznie jest potrzebnym uzupełnieniem owinięcia. Rola zbrojenia podłużnego jest podwójna. Po pierwsze pręty tego zbrojenia tworzą wraz ze zwojami owinięcia kratę o otworach tak małych, aby „wypłynięcie“ przez nie betonu pod wielkim ciśnieniem nie było możliwe przed osiągnięciem granicy plastyczności owinięcia. Po wtóre samo owinięcie nie stawiałoby prawie zupełnie oporu przeciw zginaniu. Do tego są potrzebne pręty podłużne, które zwiększają w znacznym stopniu sztywność zginania słu-

ów, zmniejszając jednocześnie w tym samym stopniu niebezpieczeństwo wyboczenia.

Powyższymi działaniami da się wytłumaczyć doskonale wyprowadzona z licznych doświadczeń konieczność stosowanego doboru zbrojenia podłużnego przy danym owinięciu i rozmiarach słupa.

Na podstawie poprzednich ogólnych wyników spróbujemy teraz wyświetlić działanie strzemion w belce żelbetowej jako zbrojenia przeciwko siłom poprzecznym. Te siły warunkują, jak wiadomo, naprężenie styczne pionowe w prostokątnych przekrojach poprzecznych belki pomyślanej poziomo, oraz odpowiadające im naprężenia styczne w poziomych przekrojach o tej samej wielkości, w kierunku równoległym do osi belki.

O ile rozpatrywany przekrój leży niezbyt blisko miejsca obciążonego bezpośrednio siłą skupioną tego samego rzędu co siła poprzeczna, to przy założeniu jednorodności materiału otrzymalibyśmy z wielkim przy-



Rys. 2

bliżeniem znany paraboliczny rozkład naprężeń stycznych o maksymalnym naprężeniu w osi obojętnej, a więc tam, gdzie nie ma naprężeń normalnych przy jakiegokolwiek wartości momentu zginającego. Przez obecność w betonie zbrojenia w postaci cienkich strzemion nie ulegną kierunki naprężeń głównych godnej uwagi zmianie, skoro więc pomyślimy sobie w warstwie obojętnej element prostopadłościenny zorientowany równoległe do krawędzi belki, to na ściany tego elementu działają naprężenia styczne τ i tej samej wielkości naprężenia styczne działają na ściany boczne pionowych strzemion, jak poprzednio ogólnie wykazano. (Ewentualne drugorzędne ciśnienia pionowe, przeniesione od bezpośrednio obciążonych skrajnych warstw belki możemy w pierwszym przybliżeniu pominąć). O tym, ażeby naprężenia ścinające w strzemieniu miały n -krotną wartość takichże naprężeń w betonie, jak to czasami przypuszczają, nie może być oczywiście mowy.

Działanie strzemion w warstwie obojętnej wychodzi jeszcze jaśniej na jaw z rozpatrywania odkształcenia elementu zorientowanego względem tamtego pod kątem 45° (rys. 2). Na ściany boczne takiego elementu działają ciągnienia i ciśnienia o tej samej bezwzględnej wartości co naprężenia ścinające w przekrojach przekątnych. Przy założeniu ważności prawa HOOKE'A wydłużenie właściwe elementu w kierunku ciągnień musi być równe skróceniu w kierunku ciśnień, wobec czego długość przekątnych nie ulegnie zmianie. Nie byłoby zatem powodu do podłużnych naprężeń

normalnych w pręcie strzemienia, mającym kierunek pionowej przekątnej elementu. Zważywszy jednak że beton objawia znaczne zboczenie od prawa HOOKE'A możemy się spodziewać już na podstawie doświadczeń z prostym rozciąganiem i prostym ściskaniem, że wydłużenie elementu w kierunku ciągnięć będzie nieco większe od skrócenia w kierunku ciśnień poprzecznych, co wywołać musi zwiększenie długości przekątnej pionowej i, co za tym idzie, ciągnięcie w strzemieniu. Strzemię oddziaływając nawzajem na beton zmniejsza w nim naprężenie. Tak tedy obecność strzemion działa obniżająco na naprężenia scinające w betonie dzięki zboczeniom betonu od prawa HOOKE'A. Jest rzeczą jasną, że z chwilą powstania pęknięcia w płaszczyźnie prostopadłej do głównego ciągnięcia przenosi się cała miejscowa siła scinająca na przekrój strzemienia; tylko ten krańcowy przypadek był dotychczas uwzględniany w teoretycznych rozważaniach, służących za podstawę obliczenia strzemion.

Oznaczmy przez ε wartość wydłużenia właściwego w kierunku głównego ciągnięcia $+\sigma$, a przez ε' wartość właściwego skrócenia w kierunku głównego ciśnienia $-\sigma$, to wydłużenie właściwe $\bar{\varepsilon}$ przekątnej kwadratu o bokach l , zarejestrowanych w kierunkach głównych, obliczymy z równania wyrażającego, że kwadrat przekątnej po odkształceniu równa się sumie kwadratów obu boków, czyli:

$$[\sqrt{2}(1 + \bar{\varepsilon})]^2 = (1 + \varepsilon)^2 + (1 - \varepsilon')^2.$$

Po rozwinięciu i opuszczeniu wielkości rzędu ε^2 otrzymujemy:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon')$$

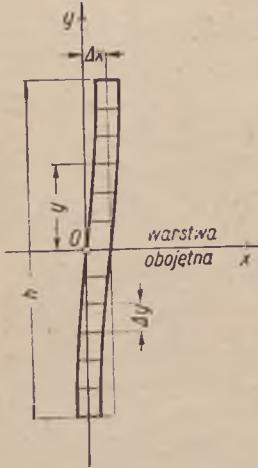
jako wyrażenie na wielkość właściwego wydłużenia przekątnej.

Przy małej wartości naprężeń będzie różnica $\varepsilon - \varepsilon'$, a więc i $\bar{\varepsilon}$ niewątpliwie bardzo małe, wobec czego odciażające beton działanie strzemion będzie również znikome; dopiero gdy naprężenia betonu zbliżają się do granicy wytrzymałości staje się ε znacznie większe od ε' , a ciągnięcie w strzemionach może osiągnąć poważną wielkość, odciażając przez to beton i opóźniając znacznie przy dalszym wzroście sił zewnętrznych powstanie pęknięć.

Rozpatrywany sposób działania strzemion nie jest jednakże jedynym powodem ich skuteczności w kierunku wzmocnienia belki. Drugi polega na zakrzywieniu pierwotnie płaskich przekrojów poprzecznych belki pod wpływem naprężeń scinających. To zakrzywienie nie trudno obliczyć w przypadku prostokątnego przekroju belki z materiału jednorodnego i podlegającego prawu HOOKE'A. Wtedy, jak wiadomo, zależność wielkości naprężenia scinającego τ odległości y od warstwy obojętnej określa równanie:

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right),$$

przy czym Q oznacza siłę poprzeczną, b — podstawę, h — wysokość prostokąta. Podzielmy warstwę elementarną, wydzieloną dwoma przekrojami poprzecznymi w odległości wzajemnej Δx , poziomymi płaszczyznami w odstępach Δy na elementarne pryzmaty o długości b prostopadłej do płaszczyzny rysunku 3. Wskutek odkształcenia postaciowego towarzy-



szącego naprężeniom ścinającym τ zamieniają się kąty proste między ścianami pierwotnymi $b \Delta x$ i $b \Delta y$ na kąty $90^\circ + \gamma$, przy czym $\gamma = \tau : G$. Jeżeli styczną do osi belki po odkształceniu obierzemy za oś x , a prostopadłą do niej leżącą w płaszczyźnie obciążenia za oś y , to ponieważ

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = -\frac{dx}{dy},$$

przeto pominiawszy znikomo drobną zmianę rzędnych y wskutek zakrzywienia przekroju, napiszemy:

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{6Q}{Gbh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)$$

Rys. 3 jako równanie różniczkowe śladu odkształcenia przekroju na płaszczyźnie x, y . Sam przekrój staje się powierzchnią walcową o tworzących prostopadłych do tej płaszczyzny. Zrózniczkowawszy to równanie otrzymamy

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{12Q}{Gbh^3} y$$

jako dostatecznie przybliżone wyrażenie dla krzywizny przekroju. Ta krzywizna rośnie od wartości 0 w osi obojętnej ($y=0$) do wartości

$$\left(\frac{1}{\rho} \right)_{y=h/2} = \frac{6Q}{Gbh^2}.$$

(Moment $Q \frac{h}{2}$ wywołuje mianowicie krzywiznę osi belki o tej samej wielkości co największa krzywizna przekroju wywołana siłą poprzeczną Q). Pomyślmy sobie teraz, że w rozpatrywanej warstwie znajduje się strzemie zbrojenia. Gdyby ono brało całkowicie udział w opisanym odkształceniu, to musiałoby się skrzywić u góry i u dołu promieniem $Gbh^2 : 6Q$. Ale sztywność strzemienia sprzeciwia się temu; u strzemion z żelaza płaskiego oczywiście silniej, niż u strzemion z żelaza okrągłego, przy tym samym polu przekroju, wobec czego przekrój poprzeczny belki zakrzywi się pod wpływem siły ścinającej słabiej, aniżeli wypada z powyższego rachunku, a naprężenia ścinające beton zmniejszają się tym bardziej, im sztywniejsze

są strzemioma i im gęściej rozmieszczone. Jakkolwiek trudno obliczyć dokładnie w jakim stopniu odciąża przy tym strzemię naprężenia ścinające betonu, to jednak pod tym względem skuteczniej działać będą strzemioma sięgające przez całą wysokość belki od krótszych. Łatwo zresztą przedstawić sobie przybliżony schemat działania strzemioma jako belki końcami utwierdzonej i obciążonej równocześnie w połowie długości z jednej, a w połowie z drugiej strony. Moment utwierdzający będzie w każdym razie mniejszy od momentu, który by wywołał zgięcie strzemioma do krzywizny $6Q:Gbh^2$, czyli mniejszy od $E_s J_s \frac{6Q}{Gbh^2}$, a zatem naprężenie zginające w strzemiomiu będzie mniejsze od

$$\frac{6Q E_s e_s}{Gbh^2} = \frac{3Q E_s s}{Gbh^2} = \frac{3Q E_s s}{2(1+\nu) E b h^2} = \frac{3}{2} \frac{Q}{1+\nu} \frac{n s}{b h^2}.$$

We wzorze tym e_s oznacza odległość włókien skrajnych od osi obojętnej zginanego strzemioma, a s — szerokość strzemioma (w widoku belki). Ponieważ

$$\frac{3}{2} \frac{Q}{b h} = \tau_{max}$$

jest wartością naprężenia ścinającego w warstwie obojętnej, przeto naprężenie zginające w strzemiomiu σ' musi być mniejsze od

$$\frac{n}{1+\nu} \tau_{max} \frac{s}{h}.$$

Przyjąwszy np. $1+\nu=15$, a $s=\frac{h}{15}$, otrzymalibyśmy $\sigma' < \tau_{max}$, z czego możemy wnosić, że rozpatrywane drugie działanie strzemiom będzie zapewne znacznie słabsze od pierwszego. W każdym razie i to działanie okaże się silniejsze w miarę wzrostu obciążenia z powodu zbroczeń betonu od prawa HOOKE'A, a ponieważ obydwa rozpatrzone działania nawzajem się wspierają, przeto widzimy, że skuteczność strzemiom ze względu na działanie siły poprzecznej, wykazane licznymi doświadczeniami, dała się przewidzieć i wyjaśnić teoretycznie w sposób wcale zadowalający. Natomiast teoria nie potrafi wskazać żadnego wpływu strzemiom na działanie momentu zginającego i dlatego napotykanne czasami interpretacje doświadczeń, rzekomo ten wpływ stwierdzające, należy uważać stanowczo za błędne.

Pisząc niniejszy artykuł nie miałem pierwotnie zamiaru praktycznego zużytkowania zawartych w nim rozważań teoretycznych, gdyż byłem zdania, że w tych przypadkach, w których zachodzi potrzeba obliczania strzemiom, prawie każdy z używanych dotąd sposobów obliczenia prowadzi,

praktycznie biorąc, do celu. Chodziłoby raczej o to, aby na razie przygotować naukową podstawę do ustawienia racjonalnego wzoru na obliczanie strzemion, w chwili gdy będziemy rozporządzać dostatecznym materiałem doświadczalnym. Mam przy tym na myśli doświadczenia dokonywane w warunkach przynajmniej zbliżonych do rzeczywistych warunków obciążenia belek żelbetowych. Nie mogłem zaś do nich zaliczyć praktykowanego bardzo często w laboratoriach obciążenia jedną lub dwiema siłami skupionymi. Taki sposób obciążenia jest po pierwsze zbyt niekorzystny w porównaniu do obciążeń praktycznych, po wtóre zaś wywołuje bardzo wielkie naprężenia drugorzędne, które zakłócają do niepoznania rozkład „głównych“ odkształceń i naprężeń. Wystarczy on zresztą, jeżeli chodzi o badanie działania samych momentów zginających, lecz żadną miarą, jeżeli, jak w rozpatrywanym przypadku, wchodzi w grę siły poprzeczne.

PROJEKT PRZEPISÓW ŻELBETOWYCH OPRACOWANY PRZEZ M. T. HUBERA I M. THULLIEGO

(Czasopismo Techniczne, 1919 r.)

§ 1. Określenie żelbetu

Za konstrukcje (zeskłady) żelbetowe uważa się konstrukcje, w których żelazo jest tak połączone z betonem, że obydwa materiały tworzą pod względem statycznym jedną całość.

§ 2. Zawartość projektu

Projekt ma zawierać ogólne plany budowli i szczegółowe plany części żelbetowych, nadto założenia co do obciążeń, obliczenie statyczne części żelbetowych. Dla konstrukcji ustroju niezwyklego i niewypróbowanego albo przy użyciu materiałów o szczególnych własnościach, uzależnia się zezwolenie na wykonanie od należytego obliczenia i ewentualnie badań doświadczalnych. Prócz tego należy podać w projekcie jakość i stosunek ilościowy materiałów przeznaczonych do sporządzania betonu oraz zapewnioną kostkową wytrzymałość betonu o tychże samych składnikach po 28 i 42 dniach, a wreszcie granicę plastyczności żelaza przeznaczonego na zbrojenie.

Do oznaczania wytrzymałości betonu należy używać kostek o długości krawędzi 20 cm, przy czym znaleziona wartość wytrzymałości ma być średnią przynajmniej z trzech doświadczeń.

§ 3. Podstawy obliczenia

1. Przy obliczeniu należy w ogóle stosować ustalone naukowe zasady statyki oraz nauki o sprężystości i wytrzymałości materiałów, ewentualnie innych działów technicznej fizyki. Reguł czysto praktycznych wolno używać o tyle, o ile nie są one w sprzeczności z wymienionymi zasadami i z innymi artykułami niniejszych przepisów.

2. W obliczeniu każdej części dźwigającej należy uwzględnić:

A. Następujące obciążenia:

a) *obciążenie stałe*, tzn. ciężar własny tej części wraz z innymi niezmiennymi częściami konstrukcyjnymi, które na nią stale działają;

b) *obciążenie zmienne*, określone przeznaczeniem budowli, a nadto napór wiatru, ziemi lub wody, obciążenie śniegiem itd.

B. Następujące działania fizyczne:

a) wpływ zmian temperatury,

b) wpływ kurczenia się lub też pęcznienia betonu.

3. Ciężar własny betonu ubijanego należy w obliczeniach przyjąć przynajmniej 2200 kG/m^3 , żelbetu 2400 kG/m^3 , o ile nie uwzględnia się dokładniej ciężaru zbrojenia.

Ciężary innych materiałów należy przyjmować według ustalonych norm; w razie odstępstwa od tych norm należy należycie uzasadnić wartość przyjętą ciężaru właściwego.

4. *Obciążenie zmienne* mostów drogowych i kolejowych należy przyjąć według ogólnych przepisów dla obliczenia mostów.

5. Dla innych budowli należy przyjąć *najniebezpieczniejsze obciążenia*, możliwe przy ich użyciu, o ile co do niektórych nie wydano osobnych norm obliczenia (wysokie kominy).

6. W budowlach narażonych dzięki swemu przeznaczeniu na wielkie wahania temperatury, jak np. suszarnie, kominy, chłodnie itd. należy je uwzględnić, o ile te wahania warunkują powstanie naprężeń dodatkowych, w innych zaś budowlach tylko wtedy, gdy obliczana konstrukcja jest zarazem wystawiona na zmiany temperatury powietrza zewnętrznego. Przy tym, jeżeli się betonuje przy średniej rocznej temperaturze, należy przyjąć wahania $\pm 15^\circ\text{C}$ (od tejże temperatury). Jeżeli zaś betonuje się przy innej temperaturze, należy stosownie zmienić odchylenia od tej temperatury tak, aby zakres wahań był znowu równy 30°C . Dla części, których najmniejszy wymiar ma 70 cm lub więcej oraz takich, które są dostatecznie chronione nadsypką, lub w inny sposób, można przyjąć mniejsze wahania temperatury, a mianowicie $\pm 10^\circ\text{C}$ (od średniej rocznej).

Wpływ kurczenia się betonu na powietrzu należy uważać za równoważny obniżeniu się temperatury o 20°C , przy czym przyjmuje się współczynnik sprężystości $E_b = 210000 \text{ kG/cm}^2$, a współczynnik wydłużenia cieplnego $\alpha = 0,00001$ na 1°C . To zastępcze obniżenie temperatury można zmniejszyć do 10°C , jeżeli się betonuje częściami, a szczeliny zamyka się najwcześniej po 14 dniach od ukończenia ostatniej części.

Dla stropów i słupów wewnątrz budynków można nie uwzględniać w obliczeniu powyższych wpływów, jeżeli w budynkach dłuższych niż 40 m urządzi się przerwy dylatacyjne w odstępach co najwyżej 30 m.

§ 4. Wyznaczenie sił zewnętrznych

1. Przy obliczeniu wielkości statycznie niewyznaczalnych i przy wyznaczaniu odkształceń wszelkich konstrukcji należy pola i momenty bezwładności przekrojów złożonych z betonu i żelaza zastąpić przekrojami „sprowadzonymi“ (idealnymi) w ten sposób, że każdemu elementowi pola przekroju żelaza przypisuje się 10-krotną wartość takiegoż elementu pola przekroju betonu. Przy tym należy przyjąć współczynnik sprężystości betonu tak dla ciągnięć, jak i ciśnień $E_b = 210000 \text{ kG/cm}^2$. Dla wyznaczenia samych sił zewnętrznych można brać w rachubę momenty bezwładności bez uwzględnienia przekroju żelaza.

2. Jeżeli sposób podparcia nie ustala dokładnie punktów, względnie prostych podporowych, należy jako rozpiętość teoretyczną przyjmować:

a) dla płyt o podpartych brzegach równoległych rozpiętość w świetle zwiększoną o grubość płyty w środku;

b) dla belek w obu końcach podpartych odstęp środków powierzchni łożyskowych, w każdym jednak razie co najmniej 1,05 rozpiętości w świetle ¹⁾).

3. Dla płyt i belek ciągłych należy za teoretyczną rozpiętość uważać w przęsłach środkowych odstęp środków podpór, a w przęsłach skrajnych zastosować odpowiednio przepis z ust. 2. Jeżeli jednak w budynkach szerokość podpór dochodzi lub przekracza jedną piątą odstepu środków podpór, a belki są ze słupami odpowiednio połączone lub też nad podporami wystarczająco obciążone, to nie potrzeba ich obliczać jako belki ciągłe, lecz jako poziome utwierdzone, o rozpiętości równej 1,05 rozpiętości w świetle.

4. Płyte o silnych żebrach równoległych należy obliczać jako belkę ciągłą na stałych podporach, atoli przy słabszych żebrach albo znacznym ich odstepie trzeba uwzględnić ugięcie żeber jako podpór.

5. *Belki ciągłe* należy obliczać dla najkorzystniejszych obciążeń. W razie ich stałego połączenia z podporami należy to na żądanie urzędu budowlanego uwzględnić przy obliczeniu słupów podpierających.

6. Przy obliczeniu momentu zginającego w środku przęsła można uwzględnić utwierdzenie na końcach belki lub płyty tylko o tyle, o ile odpowiedni ustrój je zapewnia, co należy poprzeć rachunkiem. Przy wmurowaniu końców w mur ceglany nie można liczyć na utwierdzenie.

¹⁾ Z powodu odkształcalności podpór musi rozpiętość teoretyczna takich płyt i belek być większa od rozpiętości w świetle, atoli doświadczenie i statyczne rozważania pouczają, że przewyżka teoretycznej wartości rośnie tylko do pewnej granicy z powiększeniem długości podpartych części belki. Przepisane reguły praktyczne zamykają rozpiętość, którą należy brać w rachubę przy statycznych obliczeniach, w granicach, których rzeczywista rozpiętość teoretyczna zapewne nigdy nie przekracza.

Gdy w obliczeniu przyjmuje się podparcie końców, to jednak należy przez odgięcie prętów zbrojenia i odpowiedni przekrój betonu uwzględnić możliwe częściowe utwierdzenie.

7. Szerokość użyteczną płyty c po każdej stronie żebra dźwigarów teowych należy przyjmować zależnie od odstępów żeber w świetle a i ich rozpiętości l według następujące tabelki:

Dla $a:l =$ od 0 do	0,25	0,50	0,75	1
$c:a =$	0,5	0,45	0,40	1/3

Dla pośrednich wartości należy interpolować liniowo.

Dla $a:l > 1$ należy przyjąć $c \leq l/3^2$.

8. Płyty prostokątne zbrojone w kierunkach obu rozpiętości a i b , o wszystkich czterech brzegach podpartych lub utwierdzonych, należy obliczać według największych momentów zgięcia M_1 i sił poprzecznych Q_1 , w przekrojach prostopadłych do wymiaru a , oraz największych momentów zgięcia M_2 i sił poprzecznych Q_2 , w przekrojach prostopadłych do wymiaru b . Te wielkości statyczne odniesione do jednostki szerokości przekroju można obliczyć jak dla belek o odpowiadających rozpiętościach, rozdzielwszy całkowite obciążenie płyty P na dwie odpowiadające części P_a i P_b w stosunku:

$$P_a : P_b = \frac{\alpha J_1}{a^4} : \frac{\beta J_2}{b^4},$$

jeżeli J_1 i J_2 oznaczają odpowiednio odniesione do jednostki szerokości momenty bezwładności przekroju prostopadłego do a i do b , obliczone według ust. 1, zaś liczby α i β^3) mają wartości zależne od sposobu ustalenia brzegów według następującej tabelki:

Rodzaj ustalenia brzegów	α	β
I. Cztery brzegi podparte albo: dwa brzegi sąsiednie a i b podparte, a dwa pozostałe utwierdzone lub też: cztery brzegi utwierdzone	1	1
II. A) Oba brzegi równoległe a podparte, zaś b utwierdzone	5	1
B) Oba brzegi równoległe b podparte, zaś a utwierdzone	1	5

²⁾ Powyższe reguły, zbaczające znacznie od wszelkich dotychczasowych przepisów, wynikają z teoretycznych rozważań zawartych w pracy: M. T. HUBER „Teoria płyt prostokątne różnokierunkowych...” potwierdzonych należycie interpretowanymi doświadczeniami C. BACHA i MELANA.

³⁾ Wartości dla α i β otrzymujemy łatwo, przyjmąwszy w przybliżeniu, że płyty można zastąpić dwoma krzyżującymi się skrawkami, które działają jako belki połączone w miejscu skrzyżowania. Z warunku równego ugięcia w tym miejscu wypadają podane w tabelce liczby.

Rodzaj ustalenia brzegów	α	β
III. A) Jeden brzeg a utwierdzony, reszta podparta	1	2
B) Jeden brzeg b utwierdzony, reszta podparta	2	1
IV. A) Jeden brzeg a podparty, reszta utwierdzona	5	2
B) Jeden brzeg b podparty, reszta utwierdzona	2	5

Obok przybliżonego sposobu obliczania można używać dokładnych wzorów teoretycznych, uwzględniających różnicę w zbrojeniu podłużnym i poprzecznym, a także dokładnych wzorów teoretycznych i tablic dla zwykłych płyt z materiału równokierunkowego, jeżeli w tych ostatnich długość a będzie zastąpiona „sprowadzoną“ długością płyty $a \sqrt[4]{\frac{J_2}{J_1}}$.

9. Ciężary skupione⁵⁾ działające przez warstwę nadsypki należy przyjąć jako rozłożone równomiernie na szerokość powierzchni działania ciężaru, podwójnej grubości nadsypki i pojedynczej grubości obliczonej płyty.

Jeżeli w przypadku działania kilku ciężarów skupionych szerokość b , na którą się ciężar rozkłada, jest większa od odstępów ciężarów, to należy przyjąć jako całkowitą szerokość, na którą się rozkładają wszystkie ciężary, sumę odpowiadających odstępów ciężarów zwiększoną o powyższą szerokość b .

10. Jeżeli dźwigary jednej konstrukcji są połączone silnie poprzecznicami, to można uwzględnić rozkład obciążenia jednego dźwigara na sąsiednie i dalsze nawet dźwigary na podstawie ugięcia sprężystego.

11. O ile grubość płyty i części płytowej dźwigara teowego wypada z obliczenia mniejsza niż 8 cm, należy ją zaokrąglić przynajmniej do 8 cm. Wyjęte spod tego przepisu są płyty dachowe i zawieszane stropy, które służą tylko do zamknięcia przestrzeni i po których się chodzi tylko dla czyszczenia itd., jako też wykonane fabrycznie, gotowe do układania, płyty żelbetowe.

Płyty ściśkane stropów żebrowanych aż do 0,6 m odstępów żeber mogą otrzymać grubość mniejszą niż 8 cm, jednak nie mniej jak 5 cm, jeżeli takie stropy posiadają dla rozkładu obciążeń poprzeczne żebra, a to przy rozpiętościach od 4 do 6 m przynajmniej dwa.

Mniejsze grubości płyt są dopuszczalne pod warunkiem przedłożenia dokładnego obliczenia ze względu na ciągnięcie poprzeczne „włókien“

⁴⁾ Takie wzory i tablice ukażą się w powyżej przytoczonej pracy, która także uzasadnia podane wyrażenia dla „sprowadzonej długości płyty“.

⁵⁾ Ten punkt i następane odnoszą się do obliczania płyt traktowanych jako belki.

betonu (ściskanych podłużnie) należących jednocześnie do płyty i do żebra.

12. Obliczenie statyczne powinno obejmować także filary, przyczółki i fundamenty z uwzględnieniem ewentualnego wyporu hydrostatycznego i wyznaczeniem ciśnienia na grunt.

13. W pełnych płytach żelbetowych nie powinien odstęp pretów zbrojenia w miejscu największego momentu przekraczać 15 cm.

§ 5. Wyznaczenie sił wewnętrznych

1. Przy obliczaniu naprężeń w częściach konstrukcyj żelbetowych o postaci pręta, czyli belki należy przyjąć:

a) liniowy rozkład wydłużeń w kierunku prostopadłym do przekroju poprzecznego (czyli proporcjonalność wydłużeń lub skróceń względem odpowiadających odległości włókien podłużnych do osi obojętnej⁶⁾);

b) stosunek współczynnika sprężystości żelaza do współczynnika sprężystości betonu $E_z:E_b=n=15$, przy czym należy obliczać naprężenia w żelazie i ciśnienia w betonie z zupełnym pominięciem w betonie ciągnięć⁷⁾.

2. Dla mostów i takich części budowli, które są wystawione na działanie dymu, lub inne wpływy szkodliwe dla żelaza w razie powstania szczelin w ciągniętej części betonu, należy wykazać, że ciągnięcia w betonie nie przekraczają dopuszczalnej wartości. Te ciągnięcia należy wówczas obliczyć przy założeniu $n=10$ dla całego przekroju⁸⁾);

3. Dla słupów nie narażonych na wyboczenie oblicza się dopuszczalne obciążenie przy zapewnionym środkowym działaniu według wzoru:

$$P = \sigma_b(F_b + 15F_z),$$

przy czym σ_b oznacza dopuszczalne ciśnienie w betonie, F_b pole przekroju betonu, F_z pole przekroju podłużnych prętów zbrojenia. Atoli użycie tego wzoru jest dopuszczalne pod warunkiem, że pole przekroju żelaza F_z wynosi co najmniej 0,8%, a najwyżej 3% pola przekroju betonu i że pręty zbrojenia są połączone strzemionami w odstępach równych połowie najmniejszego wymiaru przekroju słupa. Jeżeli zbrojenie podłużne jest silniejsze niż 3%, to z nadwyżki ponad 3% wolno uwzględnić tylko trzecią część.

Dla sklepień uważa się za minimum zbrojenie 0,4%.

⁶⁾ To przyjęcie potwierdzają bezspornie doświadczenia z belkami żelbetowymi, narażonymi na czyste zginanie lub zgięcia z siłą podłużną, oczywiście w obrębie faz I i II.

⁷⁾ To odpowiada, jak pouczają liczne doświadczenia, najlepiej tzw. fazie IIb, przyjętej powszechnie za podstawę obliczenia.

⁸⁾ Zmniejszenie wartości n na 10 odpowiada zwiększeniu wartości współczynnika sprężystości betonu przy zmniejszeniu naprężeń zgodnie z wynikami doświadczeń.

4. W częściach konstrukcji narażonych tylko na ciągnięcie nie uwzględnia się wcale betonu przy obliczaniu przekroju żelaza, w przypadkach *ad* (2) należy jednak obliczać ciągnięcia, które nie powinny przekraczać dopuszczalnej wartości.

5. Dla prętów ściskanych (czy to środkowo czy też mimośrodkowo) należy uwzględnić niebezpieczeństwo wyboczenia, jeżeli *smukłość*, tj. stosunek swobodnej długości pręta l do najmniejszego promienia bezwładności przekroju i , przekracza:

60 — w wypadku zbrojenia podłużnego,

40 — w wypadku zbrojenia owijanego,

20 — w wypadku betonu bez zbrojenia.

W razie użycia wzoru teoretycznego EULERA należy uwzględnić zmienność współczynnika sprężystości.

6. Dla prętów ściskanych ze zbrojeniem owiniętym (słupy owijane) należy przy wyznaczeniu ciśnienia w betonie przyjąć sprowadzone (idealne) pole przekroju F_i . W przypadku rdzenia okrągłego jest ⁹⁾

$$F_i = 1,25 F_r + 15 F_z + 30 F'_z,$$

przy czym oznacza:

F'_r — pole przekroju rdzenia, tj. betonu wewnątrz zbrojenia owiniętego;

F_z — pole przekroju zbrojenia podłużnego;

F'_z — pole przekroju otrzymanego przez podzielenie objętości zbrojenia owiniętego przez długość słupa.

W przypadku prostokątnego rdzenia o stosunku boków leżącym między 1 a 1,1 należy użyć wzoru:

$$F_i = a F_r + 15 F_z,$$

przy czym

$$\text{dla } x_a = \frac{100 F_z}{F_b} = 0,8 \quad 2,0 \quad 4,0,$$

$$a = 1,3 \quad 1,7 \quad 1,9.$$

Owinięcie można uwzględnić przy pomocy powyższych wzorów, jeżeli są spełnione następujące warunki:

a) Zbrojenie poprzeczne jest utworzone z jednego pręta zawiniętego śrubowo lub z szeregu pierścieni spawanych.

⁹⁾ M. THULLIE i A. KURYŁO: Berechnung der umschnürten Eisenbetonsäulen. "Beton u. Eisen". 1918, str. 214.

b) Skok śruby względnie odstęp pierścieni jest mniejszy od $1/5$ średnicy rdzenia przy $\sigma_b = 50 \text{ kG/cm}^2$, zaś mniejszy od $1/8$ średnicy rdzenia przy $\sigma_b = 100 \text{ kG/cm}^2$, a nadto mniejszy od 8 cm.

c) Zbrojenie podłużne jest (co do objętości) przynajmniej jedną trzecią zbrojenia poprzecznego.

d) $F_i \leq 2F_b$.

7. Jeżeli obciążenie pręta ściskanego działa mimośrodowo, albo gdy obciążeniu środkowemu P towarzyszą momenty zginające lub siły prostopadłe do osi, to należy wyznaczyć naprężenie według wzoru

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{M}{W},$$

a przy długości pręta l większej niż 20-krotny najmniejszy wymiar przekroju poprzecznego należy nadto moment M zwiększyć o $\frac{Pl}{200}$ ze względu na powiększenie ramienia momentu wskutek wygięcia.

8. Słupy żelbetowe owijane z rdzeniem z żelaza lanego można obliczać przy założeniu, że udźwig całego słupa jest sumą udźwigów zewnętrznej części żelbetowej i wewnętrznej z żelaza lanego, jeżeli skok owinięcia będzie równy lub mniejszy, niż podwójny odstęp owinięcia od wkładki z żelaza lanego. Przy uwzględnieniu wyboczenia należy wziąć w rachubę przekrój sprowadzony (idealny)

$$F_i = F_1 + \frac{1}{2}F_2 + \frac{1}{30}F_b.$$

Tutaj oznacza:

F_1 — pole przekroju żelaza lanego,

F_2 — pole przekroju zbrojenia podłużnego, a

F_b — pole przekroju betonu.

9. Słupów żelaznych otulonych samym betonem nie można traktować jako słupy zbrojone, lecz należy liczyć tylko na wytrzymałość przekroju żelaza. Można jednakże uwzględnić usztywniające działanie betonu w przypadku, gdy przekrój składa się z oddzielnych części i traktować ten przekrój jako całość.

10. Najmniejsza grubość warstwy betonu otulającej zbrojenie nie powinna w płytach być mniejsza od 1 cm, a w innych konstrukcjach 2 cm.

W celu zabezpieczenia głównych prętów zbrojenia od rdzy z powodu pęknięć betonu zaleca się zwiększyć powyższą grubość do 4 cm w belkach mostów i innych konstrukcjach, o ile są narażone na działanie szkodliwych gazów.

Najmniejszy odstęp w świetle prętów zbrojenia powinien być równy 2 cm, ewentualnie grubości prętów, jeżeli ta grubość przekracza 2 cm.

11. Najmniejsza grubość wszelkich części zbrojenia powinna wynosić 5 mm.

12. Dla zapewnienia współdziałania betonu i żelaza należy dawać strzemiona w dostatecznej ilości, a końce prętów odginać hakowato lub w inny sposób zakotwić, aby utrudnić przesunięcie się prętów. Naprężeń przy przesuwaniu prętów w betonie nie potrzeba brać w rachubę, jeżeli grubość prętów nie przekracza 26 mm.

13. Kąt wklęsły między płytą a żebrzem należy zaokrąglić lub ściać dla zmniejszenia miejscowych naprężeń.

§ 6. Naprężenia dopuszczalne ¹⁰⁾

1. Wartość naprężeń dopuszczalnych dla betonu normuje się pewnym ułamkiem wytrzymałości kostkowej po 42 dniach, określonej w § 2. Ta wartość zależy w ogóle:

a) od rodzaju naprężenia (np. proste ciśnienie, ciągnienie, ściskanie, ciśnienie w dwu kierunkach wzajemnie prostopadłych itd.);

b) od zmienności naprężenia (im silniejsza zmienność, tym mniejsza wartość naprężeń bezpiecznych);

c) od dokładności obliczenia (im dokładniejsze obliczenie, tym większe naprężenie dopuszczalne).

2. Ułamek określający wartość stosunku naprężeń dopuszczalnych dla betonu do jego wytrzymałości kostkowej po 42 dniach podaje następująca tablica:

Ciśnienie	Ciągnienie	Ścinanie
przy zginaniu i mimośrodowym ścisaniu 0,30	przy zginaniu i mimośrodowym ścisaniu w warstwie skrajnej 0,15	w warstwie obojętnej belki zginanych przy skręcaniu i przesuwaniu prętów zbrojenia 0,03
przy środkowym ścisaniu ¹¹⁾ , a przy mimośrodowym w osi 0,25	przy prostym rozciąganiu, a przy mimośrodowym w osi 0,12	

¹⁰⁾ Przy normowaniu naprężeń dopuszczalnych dokonano radykalnej reformy, ustalając dla wszelkiego rodzaju budowli jednakowe wartości naprężeń dopuszczalnych. Zamiast zmniejszać te wartości dla mostów drogowych, kolejowych itd., zależnie od stopnia wstrząśnięć, zaproponowano mnożenie obciążeń statycznych odpowiednimi współczynnikami dynamicznymi. Jest to bardziej naukowe, a zarazem nader praktyczne, bo np. dla mostów zwiększają się niejako automatycznie naprężenia z rozpiętością dążąc do granicy odpowiadającej stałemu statycznemu obciążeniu. W ten sposób przepisy upraszczają się znakomicie, aczkolwiek uwzględniają i wpływ zmiany naprężeń i wstrząśnienia.

¹¹⁾ Tę wartość można podwyższyć do 0,28, jeżeli zachodzi zupełna pewność, że siła ścisająca działa środkowo.

Dopuszczalne ciśnienie (ciągnięcie) przy dwustronnym ściskaniu (rozciąganiu) betonu należy przyjąć równe dopuszczalnemu przy prostym ściskaniu (rozciąganiu)¹²⁾.

3. Dla zbrojenia z żelaza zlewnego lub stali normuje się wartość dopuszczalnego ciągnięcia lub ciśnienia na 0,45 na granicy plastyczności, które należy przyjąć dla żelaza zlewnego równe 2400 kG/cm², o ile nie udowodniono wyższej granicy.

4. Powyższe wartości można jeszcze podwyższyć o 15%, jeżeli w obliczeniu będzie uwzględniony wpływ kurczenia się betonu, a o 25%, jeżeli nadto i napór wiatru będzie wzięty w rachubę.

Natomiast zaleca się uwzględnienie wpływu zmienności naprężenia przez stosowne obniżenie wartości naprężeń dopuszczalnych według reguł używanych zwłaszcza w budowie mostów.

Wpływ wstrząśnień należy uwzględnić przez pomnożenie obciążenia ruchomego współczynnikiem dynamicznym, którego wartością jest:

1,7 dla mostów kolejowych,

1,4 dla mostów drogowych, kładek, bulwarów, stropów i słupów je podpierających pod salami balowymi, głównych schodów itd.

Atoli można przyjąć w każdym oddzielnym przypadku odmienną wartość współczynnika dynamicznego, byleby ta wartość była należycie naukowo uzasadniona.

5. Dla wyznaczenia wymiarów słupów w budynkach należy w najwyższym pięttrze przyjąć pełną wartość najniekorzystniejszego obciążenia, ale w następnym niższym można ją obniżyć o 10%, w dalszym o 20% itd., aż do największego obniżenia o 50%¹³⁾.

6. Gdy naprężenie ścinające w belkach przekracza wartość dopuszczalną, należy całą siłę ścinającą przenieść na żelazne zbrojenie i to częściowo na strzemiąca, a częściowo na odgięte pręty. Mimo to powinien beton być w stanie przenieść przynajmniej 30% sił ścinających bez przekroczenia dopuszczalnego naprężenia.

§ 7. Próby obciążenia

1. Dla mostów i konstrukcyj o większej rozpiętości, a na żądanie organu kontrolującego także i dla zwykłych konstrukcyj budowlanych, należy oprócz prób betonu przedsięwziąć próby obciążenia lub wyrwykowe próby złamania poszczególnych jego części.

2. Próby powyższe należy wykonywać dla większych mostów dopiero po 90 dniach, mniejszych po 45 dniach, a dla stropów po 35 dniach.

¹²⁾ Na podstawie wyników doświadczeń A. FÖPPLA i innych.

¹³⁾ Im bowiem więcej pięter znajduje się nad rozpatrywanym tym mniejsze jest prawdopodobieństwo najniekorzystniejszego obciążenia.

3. Przy próbach obciążenia mostów należy się stosować do ogólnych przepisów wydanych dla mostów.

Budowle narażone na wpływy atmosferyczne, dym itd., należy obciążać ciężarem p , przyjętym w obliczeniu; inne budowle lub ich części należy obciążać ciężarem $1,2 p$, jeżeli ta część budowli może się odkształcić samoistnie bez współdziałania innych części budowli. W razie takiego współdziałania należy albo obciążyć wszystkie współdziałające dźwigary albo przynajmniej pięć, tzn. oprócz danego po dwa z obu stron. Można jednakże zastosować obciążenie p' jednego tylko dźwigara, jeżeli ono da się wyznaczyć teoretycznie na podstawie pomiarów ugięcia pod ciężarem p , z warunku, aby ugięcie pod ciężarem p' jednego tylko dźwigara było równe ugięciu pod obciążeniem p całej konstrukcji.

4. Obciążenie równomiernie rozłożone należy przy próbach obciążenia składać tak, aby się całkowicie i o ile możności jednostajnie przenosiło na badany dźwigar, a nie nosło częściowo samo siebie (jak np. cegły ułożone w suchym murze). Jeżeli w obliczeniu przyjęto ciężar śniegu, to należy to uwzględnić i przy próbie.

5. Obciążenie próbne należy pozostawić tak długo na konstrukcji, dopóki zwiększają się odkształcenia, jednak co najmniej 12 godzin. Wtedy dopiero należy mierzyć ugięcie. Ugięcie trwałe należy mierzyć dopiero 12 godzin później. Z uwzględnieniem ewentualnego zniżenia podpór może ugięcie trwałe wynosić najwyżej $\frac{1}{2}$ ugięcia sprężystego (czyli $\frac{1}{4}$ ugięcia całkowitego).

6. Przy próbach obciążenia nie powinny się pojawiać niebezpieczne pęknięcia, wyboczenia oddzielnych części lub inne groźne oznaki. Ugięcia mierzone nie powinny przekraczać obliczonych więcej niż 20%.

NOWSZE BADANIA WŁASNOŚCI WYTRZYMAŁOŚCIOWYCH ŻELBETU

(I Polski Zjazd Żelbetników, Warszawa 1931 r.)

Wyteżona praca badawcza nad urządzeniami żelbetowymi, dokonywana w instytutach i laboratoriach wielu państw, idzie w ślad za nader bujnym rozwojem budownictwa żelbetowego, jako sztuki inżynierskiej, tworząc rozległy i ważny dział wiedzy technicznej. Badania te dotyczą nie tylko obu głównych materiałów urzędu, tj. betonu i stali zbrojenia zwanej do niedawna „żelazem“, lecz zajmują się głównie wzajemnym stosunkiem ich własności mechanicznych, a zwłaszcza ich współpracą przy stawianiu oporu obciążeniami typowych części konstrukcyjnych, tj. słupów, belek, płyt lub ścian płaskich i zakrzywionych itd. W badaniach oddzielnych materiałów wysuwa się na pierwszy plan beton, jako materiał bardziej niejednorodny i różniący się od materiału zbrojenia, którym jest z reguły stal konstrukcyjna, stosowana w niewielu odmianach o własnościach dobrze znanych.

§ 1. Beton

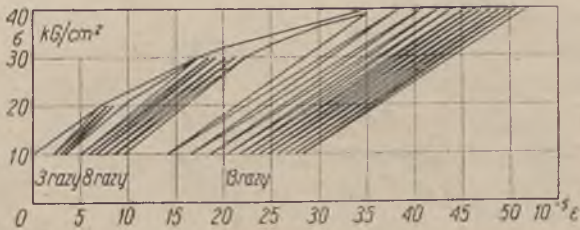
Badania nad odkształcalnością betonu pod wpływem ciągnień lub ciśnien wykonane w minionym dziesięcioleciu pogrzebały nareszcie raz na zawsze niefortunny ze stanowiska naukowego pomysł zasłużonych inżynierów-badaczy z ubiegłego stulecia C. BACHA i F. SCHÜLEGO, którzy uznali interpolacyjną formułę potęgową $\varepsilon = a\sigma^m$ z empirycznymi stałymi a i m za „prawo“ odkształcenia betonu¹⁾.

¹⁾ Stosując ją jeszcze w roku 1903 do „teorii zginania belki prostokątnej“ w pracy ogłoszonej w „Wiadomościach Matematycznych“ i w „Zeitschr. d. Öster. Ing. u. Arch. V.“ przeszedłem zaraz potem do obozu przeciwników „prawa potęgowego“. Skromna ich liczba aż do wojny światowej ginęła w tłumie tych, którzy uznawali „prawo potęgowe“ za zdobycz naukową pracowni technicznych niemieckich i szwajcarskich. Teraz jednakże przedstawia się sprawa odwrotnie dzięki licznym pracom naukowo-doświadczalnym.

E. PROBST: Untersuchungen über den Einfluss wiederholter Belastungen auf Elastizität und Festigkeit von Beton und Eisenbeton 1925.

M. ROß: Die Druckelastizität des Mörtels und Betons. Zürich 1925.

Badania nowsze odróżniają „dziewiczą“ linię wykresu $\sigma = f(\epsilon)$ (ϵ — wydłużenia jednostkowe, σ naprężenia) od linii obciążeń powtórzonych. Linia dziewicza jest zakrzywiona wypukłością ku osi σ i obejmuje odkształcenia sprężyste razem z trwałymi, czyli plastycznymi. Przy powtórzeniu obciążenia otrzymuje się linie prawie proste, a dla odkształceń sprężystych dość daleko sięgająca ważność prawa HOOKE'A (rys. 1). Po



Rys. 1

każdym powtórzeniu obciążenia stwierdzono (przy bardzo wielkiej dokładności pomiaru) nowe odkształcenie plastyczne, jakkolwiek coraz mniejsze, co prawda przy dość krótkich okresach obciążenia między 20 a 180 na minutę w doświadczeniach PROBSTA i YOSHIDY. Dłuższe okresy obciążenia stosowane przez EISENMANN i jego uczniów, pozwoliły znaleźć doświadczalnie naprężenia między 20 a 30 kG/cm² jako granicę „ustalenia“ odkształceń sprężystych, do której te odkształcenia podlegają bardzo dokładnie prawu HOOKE'A i pozwalają wyznaczyć moduł sprężystości (DREVES otrzymał dla betonu 1:2:2, $E = 223\ 000$ do 224 000 kG/cm²). Z tych i innych doświadczeń można wnosić, że dostrzeżone odkształcenia trwale nie są w całości plastyczne, lecz składają się z części leniwosprężystej, tj. wymagającej dłuższego czasu do zniknięcia po zdjęciu obciążenia z części plastycznej.

DREVES stwierdził nadto, że w dość znacznym przedziale naprężeń powyżej granicy ustalenia obowiązuje również prawo HOOKE'A dla od-

A. MEHMEI: Untersuchungen über den Einfluss häufig wiederholter Druckbeanspruchungen von Beton. Berlin 1926.

E. KNOOP: Feinmessungen für Zug und Druck an Betonbalken mit Mikrokomparator. Braunschweig 1926.

K. EISENMANN: Druck und Zugversuche an Beton mit Mikrokomparator. Beton und Eisen. Nr 14, 1926.

O. DREVES: Über das elastische Verhalten von Beton infolge Biegungs- und Druckbeanspruchungen. Braunschweig 1929.

H. YOSHIDA: Über das elastische Verhalten von Beton. Berlin 1930.

W. A. S. SLATER i J. LYSE; F. E. RICHART i G. C. STAEBLE. „Journal of the American Concrete Institute“. Kwiecień 1930, luty i marzec 1931.

kształceń sprężystych, ale z nieco mniejszą wartością współczynnika E . Ten niespodziewany wynik nie został jeszcze potwierdzony przez innych badaczy, nie rozporządzających dotąd tak dokładnym narzędziem pomiaru jakim jest mikrokomparator ZEISSA.

Badania nowsze wykazały dalej zgodnie, że skoro po pierwszym obciążeniu rosnącym stopniowo aż do naprężenia krańcowego, oczywiście mniejszego od wytrzymałości słupowej K_{st} pozostawimy obciążenie przez czas dłuższy, to odkształcenie plastyczne rośnie dalej bardzo długo, jednakże w tempie coraz wolniejszym. Czas dojścia do równowagi wewnętrznej może być bardzo długi i nie jest jeszcze znany. W doświadczeniach amerykańskich śledzono wzrost odkształcenia do końca 5 miesiąca obciążenia, a postanowiono pozostawić obciążenie i mierzyć odkształcenia aż do terminu rocznego.

Te wyniki przypominają żywo dawne obserwacje płyt kamiennych, np. marmurowych, które podparte końcami wyginają się trwale pod ciężarem własnym w ciągu kilku lat, a prawdopodobnie odginają się z powrotem przewrócone na drugą stronę i pozostawione tak znowu przez długie lata.

Przy jednym cyklu obciążenia: stopniowy wzrost naprężenia od 0 do pewnej wartości $\sigma_1 < K_{st}$; pozostawienie obciążenia σ_1 przez pewien czas i stopniowe odciążenie aż do zera, otrzymano wykres $OBCD$ (rys. 2). Styczna w O do gałęzi OB i styczna w C do gałęzi CD są równoległe. Wielu badaczy przyjmuje, że styczne te określają właściwie moduł sprężystości betonu. M. Roš otrzymał w ten sposób wartości:

$$E = 250\,000 \div 360\,000 \text{ kG/cm}^2$$

zależnie od składu betonu.

Ponieważ ta stała nie określa jeszcze związku między naprężeniem a całkowitym odkształceniem, przeto spróbowano zależność tę ustalić na podstawie otrzymanych wykresów. Przytoczę tu dwie propozycje M. Roša i F. EMPERGERA.

Pierwszy zaleca wzór hyperboliczny:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0} + k \frac{\sigma}{K_{st} - \sigma},$$

przy czym współczynnik liczbowy k ustala na razie na 0,1, drugi zaś wzór paraboliczny:

$$\sigma = E_0 \varepsilon \left(1 - \frac{4}{10} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} \right).$$

Tutaj oznacza ε_1 krańcowe odkształcenie jednostkowe, odpowiadające naprężeniu na granicy wytrzymałości słupowej.

Tak zwana wytrzymałość słupowa K_{st} jest prawdziwą wytrzymałością betonu na proste ściskanie, która jest mniejsza nieco od wytrzymałości kostkowej K_k normowanej dotychczas przepisami ze względów praktycznych. Przy przeliczaniu przyjmuje się na podstawie doświadczeń $K_{st} = 0,8 K_k$. Badania dawniejsze VAN ORNUMA²⁾ i nowsze PROBSTA i MEHMELA na zmęczenie jednostronne przy ścisaniu wykazały, że granica ciśnienia K_{zm} wynosi dla betonu od 0,47 do 0,60 K_{st} . Jako reguła praktyczna wynika stąd $K_{zm} = \frac{1}{2} K_{st}$.

Wielkość K_{zm} jako stała wytrzymałościowa betonu ma nadto znaczenie następujące:

Gdy wartość krańcowa ciśnienia przy jednostronnie zmiennym (pulsującym) obciążeniu jest $> K_{zm}$, to beton wytrzyma jeszcze bardzo wielką liczbę zmian, ale jego wytrzymałość doraźna maleje, dążąc w granicy do wielkości równej K_{zm} .

W licznych badaniach usiłowano znaleźć empiryczną zależność (średniego) modułu sprężystości betonu od jego wytrzymałości. Wyniki 650 prób wykonanych w Stuttgarcie i ogłoszonych w roku 1920 (C. BACH i O. GRAF, Forschungsarb. des VDI Heft 227) dają się przedstawić wzorem interpolacyjnym:

$$E_{sr} = \frac{587\,000 K_{st}}{K_{st} + 220} \text{ kG/cm}^2.$$

Podobnie wyniki 400 prób w laboratorium szwajcarskim w Zurychu, ogłoszone w roku 1925 w przytoczonej już publikacji M. ROŠA, dają wzór:

$$E_{sr} = \frac{550\,000 K_{st}}{K_{st} + 150}$$

przy granicy naprężeń $\leq 0,3 K_{st}$.

Może to mieć ważne zastosowanie praktyczne. Na podstawie pomiaru odkształceń na wykonanej budowlu da się bowiem obliczyć odpowiadająca wartość E_{sr} . Rozwiązując zaś wzór powyższy względem K_{st} , stwierdzamy, czy stosowany beton miał wytrzymałość należyłą. Roš wypróbował ten sposób na dziewięciu budowlach żelbetowych³⁾.

W jednym przypadku (most na rzece Aar) znaleziono tą drogą $K = 227 \text{ kG/cm}^2$, podczas gdy średnia z prób laboratoryjnych dała 220 kG/cm^2 .

²⁾ „The Fatigue of Concrete“. Trans. ASCE. 1907.

³⁾ M. Roš: Das elastische Verhalten von ausgeführten Beton- u. Eisenbeton-Bauwerken. Zürich 1925.

Druga stała sprężystości betonu, jakkolwiek niezbędna do zupełnego określenia jego odkształceń z danych naprężeń była do pierwszego Międzynarodowego Kongresu Mechaniki Technicznej w r. 1924 w Delft traktowana po macoszemu przez badaczy betonu. Jest nią oczywiście liczba POISSONA ν . Przy sposobności dyskusji na tym Kongresie zwróciłem uwagę na brak pomiarów liczby POISSONA w bardzo zresztą cennych badaniach przedwojennych BACHA i GRAFA nad płytami żelbetowymi. Jak na zawołanie posypały się zaraz pomiary liczby POISSONA w laboratoriach niemieckich, wykonywane z wielką gruntownością przez ... samych prawie profesorów japońskich. H. TANABE z Kobe w r. 1924 i Y. KONDOW z Kioto w r. 1927 wykonywali badania w doświadczalni Politechniki Drezdeńskiej kierowanej przez prof. W. GEHLERA, wymieniony zaś już poprzednio H. YOSHIDA z Fukui pracował w doświadczalni prof. E. PROBSTA w Karlsruhe.

Według tych badań okazało się, że liczba ν wzrasta, gdy wartość naprężeń rośnie. Dla odkształceń całkowitych (sprężystych + plastycznych) jest początkowa wartość $\nu=1/5,5$ (przy małych naprężeniach), zaś dla odkształceń sprężystych $\nu=1/6$ do $1/7$. Przy naprężeniach bliskich wytrzymałości słupowej wzrasta ν od wartości 0,25 do 0,42. Przyrost wartości ν z przyrostem σ jest tym większy, im beton jest młodszy, im większy jest współczynnik wodo-cementowy (ABRAMSA), im mniejsza jest wytrzymałość słupowa.

§ 2. Stal zbrojenia

Stosowane u nas głównie okrągłe pręty zbrojenia z miękkiej stali konstrukcyjnej odznaczają się zwykle wyższymi własnościami wytrzymałościowymi od kształtowników z tego samego materiału, jakkolwiek wykres rozciągania posiada taki sam charakter z punktami wybitnymi następującymi:

- 1) Granica proporcjonalności ($\sim 2150 \text{ kG/cm}^2$).
- 2) Granica plastyczności, czyli według dawnej terminologii francuskiej (praktyczna) granica sprężystości ($\sim 2700 \text{ kG/cm}^2$).
- 3) Wytrzymałość doraźna ($\sim 4000 \text{ kG/cm}^2$).

Przy tym osiągnięciu granicy plastyczności odpowiada wydłużenie jednostkowe $0,2\%$, które wzrasta bez zmiany wielkości naprężenia do 2% . Dalsze odkształcenie plastyczne odbywa się już przy wzroście naprężenia aż do wytworzenia się szyjki, po czym przy wydłużeniu plastycznym $\sim 25\%$ pręt pęka.

Tylko wyjątkowo stosuje się materiał twardszy, jak np. w Niemczech tzw. stal 52 (tj. o wytrzymałości doraźnej nie mniejszej od 52 kG/cm^2 i granicy plastyczności przynajmniej 36 kG/mm^2). Jednakże nie ulega

wątpliwości, że ten materiał na zbrojenie może niekiedy dać korzyści gospodarcze. Moduł sprężystości stali jest, jak wiadomo, praktycznie niezależny od wytrzymałości i przyjmuje się go $E=2\ 100\ 000\ \text{kG/cm}^2$. Liczba POISSONA $\nu_z=3/10$, a zatem ν_b (ν betonu) jest znacznie mniejsze od ν_z (ν stali).

Z przytoczonych wielkości charakterystycznych dla stali zbrojenia najważniejszymi dla żelbetu są: granica plastyczności (σ_{pl}) i odpowiadające jej wydłużenie plastyczne od 0,2 do 2%. Ponieważ wydłużenie całkowite betonu ściskanego naprężeniem równym K_{st} jest równe 1%, przeto z góry da się przewidzieć fakt stwierdzony doświadczeniami, że np. obciążenie słupa zbrojonego w zwykły sposób, przy którym ciśnienie podłużne w prętach zbrojenia osiąga wartość σ_{pl} musi być obciążeniem niszczącym słup. Te wiadomości o materiale zbrojenia zawdzięczamy już dawniejszym badaniom. Przypominam je tylko w celu ułatwienia, potem wysnucia wniosków praktycznych z nowszych badań nad betonem, przytoczonych powyżej. Przechodząc do nich, wypada odróżnić części zbrojone w zwykły sposób od części owijanych, nadto wyodrębnić części osiowo ściskane od obciążonych mimoosiowo lub zginanych.

§ 3. Beton zbrojony w zwykły sposób

Racjonalne zbrojenie powinno, jak wiadomo, iść o ile możności wzdłuż linii naprężeń głównych przy najniekorzystniejszym obciążeniu odpowiedniej części budowli. Zadanie rozwiązuje się w prosty i ścisły sposób dla słupów osiowo ściskanych. Pręty idą równolegle i symetrycznie do osi słupa w odległości od jego powierzchni zewnętrznej dostatecznie wielkiej, ażeby uniknąć niebezpieczeństwa działania rozpychającego prętów zbrojenia na beton. Działanie rozpychające jest skutkiem różnicy liczb POISSONA stali i betonu. W granicach przybliżonej ważności prawa HOOKE'A ciągnięcie obwodowe σ_t w betonie (dokola przekroju pręta okrągłego) jest zawarte w granicach:

$$\frac{\nu_z - \nu_b}{1 + \nu_b} \frac{P}{F_b + nF_z} < \sigma_t < \frac{\nu_z - \nu_b}{1 - \nu_b^2} \frac{P}{F_b + nF_z} \quad ^4)$$

Po wstawieniu

$$\nu_z = 0,3, \quad \nu_b = \frac{1}{4} \approx 0,17$$

otrzymamy

$$0,111 \frac{P}{F_b + nF_z} < \sigma_t < 0,133 \frac{P}{F_b + nF_z},$$

⁴⁾ Wykazałem to już w r. 1904 w pracy „Obliczenie wymiarów belek betonowych obustronnie uzbrojonych“ Czasopismo Techniczne.

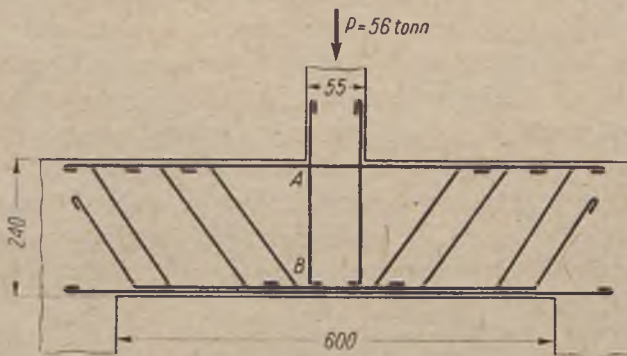
przy czym

$$n = \frac{E_z}{E_b}$$

A zatem poprzeczne ciągnięcia w betonie przylegającym do prętów zbrojenia mogą snadnie osiągać wartości około 12% ciśnienia podłużnego. Element betonu przylegający do pręta zbrojenia jest przy tym w trójwymiarowym stanie napięcia, którego dwa naprężenia główne σ_l (podłużne) i σ_r (promieniowe) są zawsze ciśnieniami. Obecność ciągnięcia σ_l przyczynia się niewątpliwie do zwiększania wysiłku (wyteżenia) materiału, czyli zwiększa niebezpieczeństwo pęknięcia bez względu na nieznaną jeszcze postać ogólnego warunku wytrzymałościowego dla betonu itp. materiałów kruchych⁵⁾.

Ponieważ ciągnięcia σ_l maleją szybko w miarę odległości od pręta zbrojenia, przeto wywołane nimi niebezpieczeństwo znika praktycznie przy dostatecznie grubej warstwie betonu, otulającej pręt.

⁵⁾ Jedna z ekspertyz dostarczyła mi dobrego przykładu skutków rozpychającego działania ścisanych prętów zbrojenia. W naszkicowanej na rys. 3 belce żelbetowej o rozpiętości 6 m podtrzymującej w środku słup obciążony prawie 56 tonnami, ukazały się w półtora roku po wykonaniu i oddaniu budowli do użytku rysy biegnące wzdłuż prętów zbrojenia AB . Rysy te nie kończyły się w pobliżu osi obojętnej zginania belki, zaczynając się od włókien rozciąganych na dole, jak to bardzo często bywa, lecz szły



Rys. 3

od samej góry A przez całą wysokość belki. Nie można było przeto objaśnić ich samym skurczem i ciągnięciami podłużnymi od zgięcia belki, gdyż w górnej części zgięcie wywołuje ciśnienia poziome. Skoro jednakże zważymy, że podłużne ściskanie pionowego pręta zbrojenia słupa ma największą wartość w miejscu A i maleje ku B aż do zera, to możemy dojść do wniosku, że uwarunkowane działaniem rozpychającym ciągnięcia poziome w betonie osiągnęły z czasem na znacznej części wysokości belki wartości, które przewyższały owe ciśnienia poziome. To w połączeniu z wielkimi ciśnieniami pionowymi doprowadziło do pęknięcia cienkiej stosunkowo warstwy, dzielącej pręt od zewnętrznej ściany belki.

Ale i obliczenie powyższe staje się niepewne przy obciążeniach zbliżonych do wytrzymałości słupa P . Obciążenia te stanowią jak wiadomo punkt wyjścia do racjonalnego wymiarowania przekrojów.

Przytoczona poniżej mała odkształcalność betonu jest powodem, że przy wzroście obciążenia słupa zachodzi jednocześnie z osiągnięciem granicy plastyczności prętów zbrojenia także zgniecenie betonu, czyli osiągnięcie jego granicy wytrzymałości słupowej. Stąd bardzo proste prawidło dodawania wytrzymałości

$$P_w = P_w^{(b)} + P_{pl}^{(z)} = K_{st}^{(b)} (F_b + \xi F_z),$$

jeżeli

$$\xi = \sigma_{pl}^{(z)} : K_{st}^{(b)}.$$

Przyjmąwszy m -krotną pewność przy obciążeniu użytkowym P mamy przeto

$$P = \sigma_{dop}^{(b)} (F_b + \xi F_z'),$$

przy czym

$$\sigma_{dop}^{(b)} = \frac{1}{m} K_{st}^{(b)}, \quad \text{jeżeli } m \text{ oznacza pewność.}$$

Ten wzór ma wprawdzie taką samą postać jak tradycyjny, w którym współczynnik przy F_z był $n = \frac{E_z}{E_b}$, ale teraz ten współczynnik ξ ma zupełnie odmienne znaczenie mechaniczne. Toteż zupełnie słuszne jest żądanie FR. EMPERGERA, nestora austriackich żelbetników, ażeby zerwać z zakrzepłą tradycją, która ustalała w przepisach różnych państw niezmienną wartość ξ równą np. 15, bez względu na jakość betonu i stali. (W stadium bliskim zgniecenia słupa, jak wiemy z § 1, zwiększa się ν betonu, wskutek czego działanie rozpychające prętów zbrojenia schodzi na drugi plan).

Omówiona w § 1 zdolność betonu do odkształceń plastycznych, rosnących z czasem i mających wielkości tego samego rzędu co odkształcenia sprężyste, jest wbrew powierzchownemu mniemaniu własnością bardzo korzystną. Albowiem zgodnie z bezpośrednimi pomiarami w przytoczonych najnowszych doświadczeniach amerykańskich prowadzi ta własność do coraz lepszego rozkładu obciążenia słupa na przekrój betonu i przekrój zbrojenia podłużnego. Przy pierwszym obciążeniu po wykonaniu słupa jest zrazu

$$\sigma_b = \frac{P}{F_b + nF_z}, \quad \sigma_z = n\sigma_b,$$

jeżeli $n = E_z : E_b$, przy czym E_b odpowiada określeniu podanemu poprzednio. Od tej chwili odkształcenie jednostkowe całego słupa rośnie z czasem dzięki plastyczności samego betonu. Ponieważ skrócenie jedno-

stkowe ε jest z jednej strony sumą skrócenia sprężystego betonu ε_{spr} i skrócenia plastycznego ε_{pl} , a z drugiej strony równa się skróceniu tylko sprężystemu pręta zbrojenia (dopóki nie dojdziemy do granicy plastyczności), przeto mamy równanie

$$\varepsilon = \frac{\sigma_b}{E_b} + \varepsilon_{pl}^{(b)} + \frac{\sigma_z}{E_z},$$

a stąd znajdujemy wzory

$$\sigma_b = \frac{E_b \sigma_z}{E_z} - E_b \varepsilon_{pl}^{(b)},$$

$$\sigma_z = \frac{E_z}{E_b} \sigma_b + E_z \varepsilon_{pl}^{(b)}.$$

Wzory te wyrażają, że ciśnienie w betonie maleje z czasem, zaś ciśnienie w zbrojeniu rośnie. Tak samo ma się rzecz i w słupach owijanych, o których jeszcze będzie mowa. Zauważyć wypada, że osiowe obciążenie słupów żelbetowych jest, ściśle biorąc, dość rzadkie. Najczęściej działaniu siły osiowej towarzyszą momenty przeniesione na końce słupa przez inne części konstrukcyjne i mamy do czynienia z przypadkiem statycznie równoważnym obciążeniu mimośrodowemu. Obliczenie na obciążenie osiowe wykonywa się bardzo często tylko dlatego, że momenty końcowe są trudne do teoretycznego ujęcia, a przy tym niewielkie.

§ 4. Słupy owijane

Podczas gdy w słupie zwykłym beton jest ściskany niemal wyłącznie tylko jednokierunkowo, to beton wewnątrz zbrojenia poprzecznego w słupie owiniętym jest narażony na ściskanie we wszystkich trzech kierunkach głównych. Ideałem owinięcia byłoby takie, przy którym wszystkie trzy ciśnienia główne w betonie jądra byłyby prawie równe, bo wtedy wartość ciśnienia mogłaby być dowolnie wielka, a o wytrzymałości słupa decydowałaby granica plastyczności stali owinięcia oraz jego przekrój sprawdzony, czyli ilość stali bez względu na jakość betonu, byleby tenże nie był zbyt ściśliwy. Im odstęp zwojów (w świetle) jest większy w stosunku do grubości drutów owinięcia, tym bardziej oddalamy się od ideału, a zbrojenie staje się mniej skuteczne. A. CONSIDÈRE i inni badacze żelazobetonu doszli do tego wyniku na podstawie doświadczeń i dlatego unormowano gęstość owinięcia, poniżej której nie należy uwzględniać jego działania wzmacniającego.

Doświadczenia ze słupami owijanymi wykazały, jak wiadomo, że przy stopniowym wzroście obciążenia najpierw kruszy się i odpada beton zewnętrzny, a nienaruszony przy tym rdzeń wraz ze zbrojeniem wytrzy-

muje jeszcze znacznie większe obciążenie. Jest to zupełnie zgodne z przewidywaniami teoretycznymi. Podobnie jest teoretycznie jasne, że działanie wzmacniające owinięcia znika praktycznie, gdy przekrój owiniętego rdzenia różni się znacznie od koła ⁶⁾.

Skutek dobrego owinięcia objawia się zwiększeniem wartości niebezpiecznego ciśnienia na przekrój betonu przy jednoczesnym sprowadzeniu przekroju skutecznego do przekroju rdzenia $F_b^{(0)}$. Obciążenie niszczące P_w da się zatem wyrazić przy uwzględnieniu wyników badań z § 1 jako suma z obciążenia przypadającego na pręty zbrojenia podłużnego przy jego granicy plastyczności, tj. $F_z \sigma_{pl}$ i obciążenia przypadającego na pole rdzenia przy zwiększonej o ΔK wytrzymałości słupowej betonu na podłużne ściskanie, tj.

$$F_b^{(0)}(K_{sl} + \Delta K).$$

Na podstawie znanych doświadczeń Th. KÁRMÁNA z marmurem i piaskowcem ściskanym naprężeniami $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$ można z pewnym przybliżeniem przyjąć, że ΔK jest proporcjonalne do wielkości ciśnienia

⁶⁾ Pomijając zupełnie sztywność na zginanie drutu owinięcia i zastępując ją w myśli równoważną cienką ścianką obejmującą beton rdzenia, widzimy od razu, że tylko ścianka o przekroju okrągłym stawia skuteczny opór tendencji betonu rdzenia do zwiększenia swego przekroju. Każdy inny kształt wygina się pod naciskiem dążąc do przyjęcia postaci koła. Ponieważ koło ma najmniejszą powierzchnię przy danym obwodzie, przeto wygięciu np. obwodu wielokąta pod naciskiem wewnętrznym musi towarzyszyć zwiększenie przekroju rdzenia i co za tym idzie, skrócenie słupa. Pewną orientację daje rachunek następujący: Pole wieloboku umiarowego o długości obwodu u i n bokach określa wzór

$$F = \frac{1}{4} \frac{u^2}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

Pole zaś koła o tym samym obwodzie u jest:

$$F_0 = \frac{1}{4} \frac{u^2}{\pi}.$$

A zatem względna różnica tych pól

$$\varphi = \frac{F_0 - F}{F_0} = 1 - \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n},$$

przy czym

n	3	4	5	8	10
100φ	39,5%	21,5%	13,5%	5,2%	3,3%

Znalezione wartości określają zarazem skrócenie słupa, jakie by zaszło przy jego ściśnięciu, wywołującym zupełne zaokrąglenie fikcyjnego owinięcia wielokątnego przy założeniu upraszczającym nieściśliwości rdzenia. W rzeczywistości granica całkowitego skrócenia słupa będzie podwyższona jeszcze ściśliwością betonu i rozciągliwością drutu owinięcia, ale z drugiej strony obniżona ograniczoną wytrzymałością obu materiałów.

poprzecznego, wywartego na owinięcie. Przy osiągnięciu granicy plastyczności σ_{pl} , która może być różna od σ_{pl} zbrojenia podłużnego, średnie ciśnienie owinięcia na pobocznicy rdzenia jest równe $2 \frac{F'_z}{F_b^{(0)}} \sigma'_{pl}$. A zatem oznaczywszy doświadczalny współczynnik proporcjonalności przez $\frac{\alpha}{2}$ otrzymujemy:

$$\Delta K = \alpha \frac{F'_z}{F_b^{(0)}} \sigma'_{pl},$$

zaś

$$P_w = F_b^{(0)} \left(K_{sl} + \alpha \frac{F'_z}{F_b^{(0)}} \sigma'_{pl} \right) + F_z \sigma_{pl},$$

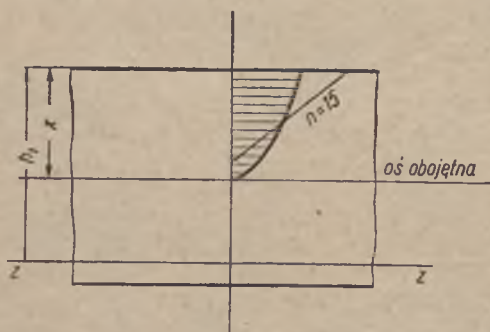
czyli

$$P_w = K_{sl} F_b^{(0)} + \sigma_{pl} F_z + \alpha \sigma'_{pl} F_z.$$

Z doświadczeń wykonanych w Stuttgarcie i w Dahlem z inicjatywy prof. E. MÖRSCHA znaleziono $\alpha = 2$ do 3. Dlatego MÖRSCH przyjmuje $\alpha = 2,5$. Współczynnik ten określa, ile razy dana ilość stali w formie owinięcia jest skuteczniejsza od tej samej ilości w postaci zbrojenia podłużnego. Odnosi się to, rzecz jasna, tylko do słupów krępych, nie narażonych na wyboczenie. Przy wyboczeniu bowiem „pracują“ tylko pręty zbrojenia podłużnego.

§ 5. Belki zginane

Nowsze badania zdążają do znalezienia rzeczywistego momentu łamiącego w zależności od własności wytrzymałościowych betonu i zbrojenia oraz do zbadania możliwych korzyści z zastosowania nowych „wyższych“ gatunków cementu i stali.



Rys. 4

Pierwsze zagadnienie porusza-
no już dawno (u nas w pracach
M. THULLIEGO), toteż najnowsze
badania doświadczalne dają tylko
potwierdzenie wniosków teoretycz-
nych o różnicach rzeczywistych
wartości naprężeń od wartości
otrzymywanych ze znanego bar-
dzo rozpowszechnionego oblicze-
nia na zginanie.

Wiadomo, że odległość x osi obojętnej (rys. 4) od ściskanego skrajnego włókna belki o wysokości teoretycznej h_1 (o przekroju prostokątnym)

wypada ze zwykłego obliczenia (przy $n=15$), w zależności od procentu zbrojenia.

Np.

$$x \approx \frac{2}{3} h_1 \text{ przy } 3,3\%$$

$$x \approx \frac{1}{4} h_1 \text{ przy } 0,31\%$$

Oś znaleziona doświadczalnie leży w pierwszym przypadku około 11% dalej, w drugim zaś 25% bliżej warstwy skrajnej ściskanej. Objaw ten tłumaczy się jasno tym, że rozkład ciśnień nie jest w rzeczywistości liniowy, lecz zbliża się raczej do parabolicznego, a nadto, że beton przenosi także ciągnięcia, co pomijamy w uproszczonej teorii praktycznej. Z tego powodu są końcowe ciśnienia w betonie w pierwszym przypadku faktycznie znacznie mniejsze od rachunkowych, w drugim zaś nieco większe.

Co się tyczy drugiego zagadnienia, to ilość badań nie jest jeszcze wystarczająca do wysnucia dość pewnych wniosków. Przytoczę tutaj dane z referatu W. GEHLERA z doświadczeń wykonanych w Dreźnie na belkach teowych (płyta z żebrami).

Materiały	Wytrzymałość cementu po 28 dniach	Wytrzymałość kostkowa betonu po 28 dniach	Wytrzymałość na ciągnięcie po 5 m-cach	Granica plastyczności stali zbrojenia	Dopuszczalne naprężenia stali	Naprężenia w stali przy pierwszych rysach	Stosunek $\frac{\sigma_s}{\sigma_{s dop}}$
Cement zwykły i stal 37	450	139 do 234	13 do 14	2950	1200	500	42%
Cement wysokow. i stal 48	545	245	15,5	3770	1500 do 1800	425 do 520	28 do 29%
Cement specjalny i stal 52	775	374	23,6	3680	2400	1195	50%

Dorobek naukowy prof. M. T. HUBERA w dziedzinie teorii płyt żelbetowych został zamieszczony w dziale Teoria płyt, w II tomie Pism (*przyp. red.*).

DZIAŁ VIII

ZAGADNIENIA KOLEJOWE

Redaktor naukowy: ZBIGNIEW WASIUTYŃSKI

ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI PROSTEGO TORU O SZYNACH SPAWANYCH POD WPLYWEM NAPRĘŻEŃ CIEPLNYCH¹⁾

(Inżynier Kolejowy Nr 3, 1936 r.)

§ 1. Wstęp

Stosowanie coraz dłuższych szyn bądź to walcowanych w jednej sztuce, bądź też spawanych po ułożeniu w torze, ma na celu wyrugowanie styków, które, jak wiadomo, stanowią niepożądane słabe miejsca toru, dając nadto powód do uderzeń przez toczące się koła taboru kolejowego. Jednakże zupełne wyrugowanie styków pociąga za sobą powstanie naprężeń cieplnych przy każdej zmianie temperatury w odniesieniu do temperatury ułożenia toru. Dla średnich wartości współczynnika wydłużenia cieplnego stali szynowej $\alpha = 0,000115$ i modułu sprężystości $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$ wypada jako górna granica naprężenia cieplnego $\alpha E \Delta t^\circ$ odpowiadającego zmianie temperatury o $+\Delta t^\circ \text{ C}$

$$(1) \quad \sigma = \mp 24,15 \cdot \Delta t^\circ \text{ kG/cm}^2.$$

Podwyższeniu temperatury odpowiada ciśnienie, a obniżeniu ciągnienie. Określona powyższym wzorem wartość jest oczywiście słuszna pod warunkiem, że naprężenia wypadkowe wskutek obciążenia taborem i zmiany temperatury pozostaną w granicach ważności prawa HOOKE'A.

Biorąc ściśle należałoby w powyższym rachunku uwzględnić rozszerzalność samego podłoża, którego temperatura t_1° , podnosi się i obniża razem z temperaturą szyn t° , chociaż niewątpliwie w stopniu znacznie mniejszym. Dajmy na to, że przez pomiary na samym podłożu (tj. po zdjęciu toru) znaleźliśmy jego wydłużenie odpowiadające podwyższeniu

¹⁾ Referat z pracy niniejszej miał być wygłoszony 12 września 1935 r. w Budapeszcie na III Międzynarodowym Kongresie Szynowym. Z powodu udaremnienia uczestnictwa autora w Kongresie, krótkie niemieckie streszczenie referatu ukazało się w piśmie „Gleistechnik und Bahnbau“ w Berlinie (Nr 18 z 15 września 1935 r.), a nieco skrócony tekst niemiecki pracy — w Księdze Kongresu Szynowego.

temperatury o t_1° i obliczyliśmy stąd średnią wartość współczynnika tego wydłużenia a_1 . Nie będzie to wprawdzie rzeczywisty współczynnik wydłużenia cieplnego materiału podłoża, lecz tylko rodzaj współczynnika sprężonego z uwzględnieniem zmiany temperatury z głębokością i odkształcalności materiału podłoża; jednakowoż nie byłoby słuszne przyjmować w ogóle, że $a_1 = 0$. Ponieważ wartość naprężenia cieplnego σ w szynie jest wyznaczona przez względne wydłużenie szyny w odniesieniu do podłoża, tj. przez $at^\circ - a_1t_1^\circ = \left(a - a_1 \frac{t_1^\circ}{t^\circ}\right)t^\circ = a't^\circ$, przeto σ wypada obliczać ze wzoru

$$(1a) \quad \sigma = a'Et^\circ.$$

Tutaj $a' = a - a_1 \frac{t_1^\circ}{t^\circ}$ oznacza względny współczynnik wydłużenia cieplnego szyny, nieco mniejszy od a . Najprawdopodobniej można zwykle przyjmować z dostatecznym przybliżeniem a zamiast a' .

Na tym kończy się rozpatrzenie przypadku rozciągania szyn przez naprężenia cieplne, natomiast przypadek ściskania nasuwa interesujący, chociaż niełatwy temat do badania teoretycznego i doświadczalnego. Jest to zarazem przypadek niebezpieczniejszy w ogóle dla toru, gdyż w pewnych warunkach prowadzi do jego odkształcenia trwałego, objawiającego się powyginaniem w planie, a nawet w profilu. Odkształcenie takie nazywają także „wyboczeniem“, oczywiście w szerszym znaczeniu tego wyrazu, jako w ogóle wygięcia pręta prostego wskutek osiowych sił ściskających. Nasuwało się przeto przede wszystkim pytanie, czy *wyboczenie „poziome“* lub „pionowe“ toru, jakie stwierdzono doświadczalnie, da się ująć w schemat teoretyczny zjawiska niestałości prostej prostaci równowagi sprężystej przy tzw. *krytycznej wartości siły ściskającej S* ?

W piśmiennictwie techniczno-naukowym niemieckim, po dłuższej dyskusji odpowiedziano na to pytanie przecząco²⁾, w jednej zaś polskiej pracy, jaka się na ten temat ukazała — twierdząco³⁾.

W pracy niniejszej rozpoczętej z wiosną 1934 r. postaram się wyjaśnić tę sprzeczność i dać zadowalające rozwiązanie teoretyczne, poparte doświadczeniami laboratoryjnymi⁴⁾.

²⁾ F. RAAB: Die Stabilität des Schienenweges unter neuen Gesichtspunkten. VDI. 1934. S. 405.

H. MEIER: Die Stabilität des lückenlosen Vollbahngleises. VDI 1934. S. 1153.

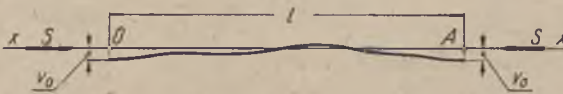
³⁾ F. SZELAĞOWSKI: O wyboczeniu spawanych szyn kolejowych. „Czasopismo Techniczne“ 1934.

⁴⁾ Rozważania teoretyczne (§ 2—4) były opracowane do druku już w kwietniu 1934 r., jednakże z ogłoszeniem wstrzymałem się aż do ukończenia badań doświadczalnych, opisanych § 5.

§ 2. Ujemne wyniki prac dotychczasowych

W dotychczasowych próbach teoretycznego ujęcia zagadnienia *wybożenia* toru prostego posługiwano się teoretycznym modelem ważkiego pręta sprężystego spoczywającego na podłożu poziomym, które stawia opór tarcia przy jakimkolwiek przesunięciu względnym elementarnych odcinków pręta po podłożu. Zakładano przy tym, że opór tarcia T określa prawo COULOMBA $T = \mu N$, jeżeli N oznacza nacisk normalny, a μ współczynnik tarcia. Poza tym uwzględniając oczywiście odkształcenia sprężyste osi pręta, pomijano jednakże odkształcenia podłoża, czyli traktowano podłoże tak, jakby było ciałem sztywnym. Zobaczmy jakie z tego wynikają konsekwencje przy studiowaniu warunków wybożenia a) poziomego i b) pionowego.

a. Przyjawszy, że prętowi o długości bardzo wielkiej udzieliliśmy wygięcia w płaszczyźnie poziomej w znacznym stopniu dowolnego co do postaci, ale takiego, iż wszystkie punkty osi odchylają się tylko nieskoń-



Rys. 1

czenie małe od położenia pierwotnego na prostej xx (wzdłuż której działają siły ściskające) możemy wygięcie skończonego odcinka OA pręta o długości l (rys. 1) przedstawić za pomocą wyrażenia

$$(2) \quad v = \sum_m \left(a_m \sin \frac{2m\pi x}{l} + b_m \cos \frac{2m\pi x}{l} \right),$$

w którym a_m i b_m oznaczają nieskończenie małe parametry na razie nieznane. Dwukrotne różniczkowanie daje kolejno:

$$(2a) \quad v' = \frac{dv}{dx} = \sum \left(\frac{2m\pi a_m}{l} \cos \frac{2m\pi x}{l} - \frac{2m\pi b_m}{l} \sin \frac{2m\pi x}{l} \right),$$

$$(2b) \quad v'' = \frac{d^2v}{dx^2} = - \sum \left(\frac{2m\pi}{l} \right)^2 \left(a_m \sin \frac{2m\pi x}{l} + b_m \cos \frac{2m\pi x}{l} \right).$$

Równania (2a) i (2b) pozwalają ustalić niezbędne warunki krańcowe wydzielonego odcinka. Warunki te wynikają z konieczności, aby przy równych wartościach rzędnych wygięcia v na obu końcach odcinka zachodziły także równe momenty zginające, a zatem:

$$(3a) \quad v_{x=0} = v_{x=l} = v_0$$

$$(3b) \quad Sv_0 = -EJ(v'')_{x=0} = -EJ(v'')_{x=l}.$$

S oznacza tu siłę ściskającą.

Warunek (3a) jest spełniony przy wszelkich wartościach parametrów, a warunek (3b) daje

$$(4) \quad S \sum b_m = \sum J \cdot \sum \left(\frac{2m\pi}{l} \right)^2 b_m.$$

Wskutek określonego równaniem (2) wygięcia rozpatrywanego odcinka pręta następuje zbliżenie jego końców, którego wielkość określa, jak wiadomo, wyrażenie

$$\frac{1}{2} \int_0^l (v')^2 dx$$

z pominięciem małych rzędu wyższego nad 2. Odpowiednia praca sił S działających na koniec odcinka

$$(5) \quad L_s = S \frac{1}{2} \int_0^l (v')^2 dx = \frac{\pi^2 S}{l} \sum m^2 (a_m^2 + b_m^2).$$

Praca ta winna w przypadku wyboczenia „właściwego“ (tj. w znaczeniu ściślejszym) pokryć nie tylko pracę zginania pręta L_g , lecz także pracę tarcia L_t , czyli powinno być:

$$(6) \quad L_s = L_g + L_t.$$

Obliczenie L_g daje:

$$(7) \quad L_g = \frac{1}{2} EJ \int_0^l (v'')^2 dx = \frac{4\pi^2 EJ}{l^3} \sum m^4 (a_m^2 + b_m^2).$$

Oznaczywszy przez q ciężar jednostki długości pręta, a przez μ współczynnik tarcia, napiszemy na pracę sił tarcia wyrażenie:

$$(8) \quad L_t = \int_0^l v \mu q dx = \mu q \int_0^l v dx,$$

które określa wielkość nieskończenie małą tego samego rzędu, co parametry a_m i b_m . Ponieważ z wyrażeń na L_s i L_g widać, że obydwie te wielkości są rzędu wyższego od L_t , więc warunek (6) nie może być spełniony przez żadną skończoną wartość siły S , czyli wyboczenie właściwe przy założeniach powyższych zajść nie może.

b. Udzielmy teraz naszemu prętowi wygięcia w w płaszczyźnie pionowej. Włączywszy stosownie do założeń zagłębienie pręta w podłoże, co odpowiada tylko dodatnim wartościom w , możemy w przedstawić przez wyrażenie

$$(9a) \quad w = \sum c_m \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{l} \right),$$

a więc

$$(9b) \quad w' = \frac{dw}{dx} = \sum c_m \frac{2m\pi}{l} \sin \frac{2m\pi x}{l},$$

$$(9c) \quad w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = \sum c_m \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 \cos \frac{2m\pi x}{l}.$$

Na L_s otrzymamy teraz wyrażenie:

$$(10) \quad L_s = \frac{1}{2} S \int_0^l (w')^2 dx = \frac{1}{4} S l \sum \left(\frac{2m\pi}{l}\right)^2 c_m^2,$$

a warunek konieczny, aby wyboczenie zaszło, ma postać:

$$(11) \quad L_s \geq L_g + L_q,$$

w której L_q oznacza pracę potrzebną do podniesienia pręta określoną równaniem:

$$(12) \quad L_q = \int_0^l w q dx = ql \sum c_m.$$

Jak widzimy, praca ta jest liniową jednorodną funkcją parametrów c_m , podczas gdy L_s i L_g są ich funkcjami kwadratowymi i jednorodnymi. Warunkowi wyboczenia właściwego (11) nie czyni przeto zadość żadna skończona wartość siły S , a zatem i wyboczenie pionowe nie jest możliwe przy założeniach powyżej poczynionych.

Z tego wywnioskowano przedwcześnie, że tylko pierwotne zakrzywienie osi może się stać powodem większych wygięć przy dostatecznie wielkiej skończonej wartości S , czyli że zająć może tylko wyboczenie w znaczeniu szerszym. W zastosowaniu do prostego toru kolejowego zawyrokowano, że niebezpieczna wartość siły ściskającej S rośnie bez ograniczenia, gdy zboczenia od prostoliniowości maleją.

Zobaczmy teraz, co na to powiada doświadczenie. Gdyby powyższe przypuszczenie było słuszne, to zważywszy, że początkowe zakrzywienie osi pręta (o wielkości szkodliwej) nie powtarza się w ogóle regularnie na jego długości, ale pojawia się z reguły gdzieś w jednym miejscu, należałoby się spodziewać, że i wygięcie pod wpływem siły ściskającej S weźmie początek w tym miejscu i wytworzy jedną falę. Tymczasem badania wykonane przez F. RAABA na doświadczalnym torze kolejowym⁵⁾ i opisane poniżej moje badania doświadczalne na modelowych prętach stalowych spoczywających na podłożu sprężystym z miękkiej gumy wykazały pojawienie się większej liczby fal zgodnie z teorią ulepszoną, do której teraz przejdziemy.

⁵⁾ Ob. pracę powyżej przytoczoną.

§ 3. Ulepszone założenia teorii

Niewątpliwie bardziej zbliżonym do rzeczywistości modelem teoretycznym prostego toru kolejowego o szynach spawanych jest belka sprężysta spoczywająca na *podłożu sprężystości podatnym*. Ta sprężysta podatność podłoża przejawia się nie tylko oddziaływaniami na naciski normalne, które wywołują przemieszczenia pionowe w , ale także oddziaływaniami na styczne siły tarcia statycznego (przyczepnego), które powodują przemieszczenia poziome u lub v . Na takim podłożu może oczywiście zajść małe poziome wygięcie belki bez ślizgania się po podłożu, a więc bez pracy tarcia. Wygięciu takiemu towarzyszy zato *praca odkształcenia podłoża*.

Podobnie jest możliwe pionowe wygięcie belki bez pracy wbrew sile ciężkości, a tylko ze stosowną pracą odkształcenia podłoża, oczywiście dopóki w żadnym miejscu nie zajdzie oderwanie belki od podłoża (rys. 2).



Rys. 2. $A'A$ — wierzch podłoża sprężystego nieobciążonego
 $x'x$ — spód pręta wgniecionego w podłoże ciężarem własnym
 --- — spód pręta wyboconego siłami podłużnymi

toru q kG/cm (szyn wraz z podkładami i częściami łączącymi) lub w ogóle naciskiem p kG/cm proporcjonalnym do wgłębienia w , czyli $p=Cw$, jeżeli C oznacza *moduł sprężystej podatności podłoża*.

2) *Reakcje styczne* przyczepności toru do podłoża, a więc siły styczne p_1 kG/cm, które można też przyjąć jako proporcjonalne do małych przemieszczeń podłużnych u względnie poprzecznych v , czyli napisać $p_1=C_1u$, względnie $p_2=C_2v$. Reakcje te podlegają warunkom ograniczającym, a mianowicie $p_1 < T'$ i $p_2 < T''$, jeżeli T' i T'' oznaczają odpowiednio siły tarcia posuwistego toru o podłoże przy przesunięciach podłużnych i poprzecznych, odniesione do 1 cm długości toru.

3) *Reakcje tarcia posuwistego* toru o podłoże określone wielkościami T' lub T'' niezależnie od wielkości przemieszczenia, gdy p_1 i p_2 przestają być zależne od u i v , a więc spełniają warunki

$$p_1 = T'; \quad p_2 = T''$$

(przez tarcie rozumiemy tutaj w ogóle opór przeciw przesunięciu, składający się z tarcia i z oporu żwirówki otulającej podkłady).

Nie trudno teraz przewidzieć, jaki będzie przebieg zjawiska wybożenia poziomego lub pionowego przy wzrastającej sile ściskającej wskutek

podwyższenia temperatury. Najpierw przy odpowiedniej krytycznej wartości siły zajdzie faliste wygięcie o bardzo małych strzałkach i długości fali zależnej od podatności podłoża. Zwiększenie strzałek wymaga jednakże bez porównania większego przyrostu siły, aniżeli w przypadku wybożenia pręta swobodnego na całej długości. Gdy przy wzroście siły strzałki wygięcia w planie osiągną taką wielkość, że tarcie statyczne (przyczepne) nie wystarcza do utrzymania równowagi, wtedy następuje miejscowe, dość nagle przejście do nowego stanu równowagi o znacznie zwiększonej strzałce w tym miejscu.

Przy wybożeniu w płaszczyźnie pionowej zajdzie też szybko wzrost siły, jeszcze zanim nacisk belki na podłoże w punktach szczytowych wygięcia spadnie do zera, po czym nastąpi dalszy wzrost siły, aż do odłączenia się belki od podłoża na całej długości jednej fali i zwykle dalej jeszcze.

Krytyczna wartość siły S , która daje początek nieskończonej małemu wygięciu sprężystemu, będzie teraz czynić zadość warunkowi

$$(13) \quad L_s = L_g + L_0,$$

jeżeli L_0 oznacza pracę odkształceń sprężystych podłoża.

a) W przypadku wybożenia poziomego możemy oczywiście przyjmując to samo wyrażenie analityczne na wychylenie v , co poprzednio, a więc i równania (2) do (5) i (7). Uwzględniając, że $p_2 = C_2 v$, napiszemy na L_0 równanie

$$(14) \quad L_0 = \frac{1}{2} \int_0^l v p_2 dx = \frac{1}{2} C_2 \int_0^l v^2 dx = \frac{1}{2} C_2 l \sum_m (a_m^2 + b_m^2).$$

Warunek (13) przybierze zaś postać:

$$\frac{\pi^2 S}{l} \sum m^2 (a_m^2 + b_m^2) = \frac{4\pi^4 EJ}{l^3} \sum m^4 (a_m^2 + b_m^2) + \frac{1}{4} C_2 l (a_m^2 + b_m^2).$$

Stąd

$$(15) \quad S = \frac{\frac{4\pi^2 EJ}{l^2} \sum m^4 (a_m^2 + b_m^2) + \frac{C_2 l^2}{4\pi^2} \sum (a_m^2 + b_m^2)}{\sum m^2 (a_m^2 + b_m^2)}.$$

Nieoznaczone dotąd parametry a_m i b_m ($m = 1, 2, 3, \dots$) powinny otrzymać takie wartości, ażeby S wypadło możliwie najmniejsze. Uważając przeto S jako funkcję ciągłą i różniczkowalną $2m$ parametrów a_m i b_m , znajdujemy jej ekstremum z warunków

$$(16) \quad \frac{dS}{da_r} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{dS}{db_r} = 0 \quad (r = 1, 2, 3, \dots, m).$$

W tym celu napiszemy równanie (15) w następującej prostszej postaci:

$$(15a) \quad S = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} \frac{\sum_{r=1}^m \left[\left(r^4 + \frac{C_2 l^4}{16\pi^4 EJ} \right) (a_r^2 + b_r^2) \right]}{\sum_{r=1}^m r^2 (a_r^2 + b_r^2)}.$$

Pierwszy z warunków (16) daje przy oznaczeniu skracającym $\frac{C_2 l^4}{16\pi^4 EJ} = \gamma$ równanie

$$2a_r(r^4 + \gamma) \sum_{r=1}^m r^2 (a_r^2 + b_r^2) - 2a_r r^2 \sum_{r=1}^m (r^4 + \gamma) (a_r^2 + b_r^2) = 0.$$

Drugi zaś równanie tej samej formy, tylko z zamianą a_r na b_r i nawzajem. Z obu zatem warunków otrzymujemy związki o postaci:

$$(17) \quad \frac{\sum (r^4 + \gamma) (a_r^2 + b_r^2)}{\sum r^2 (a_r^2 + b_r^2)} = \frac{r^4 + \gamma}{r^2} = r^2 + \frac{C_2 l^4}{16\pi^4 EJ} \frac{1}{r^2}.$$

Wstawivszy to do równania (15) znajdujemy m różnych wartości S czyniących zadość warunkom (16), a mianowicie:

$$(17a) \quad S_{kr} = \frac{4\pi^2 EJ}{l^2} r^2 + \frac{C_2 l^2}{4\pi^2} \frac{1}{r^2}.$$

Zważywszy, że $\frac{l}{2r} = \lambda$ określa długość półfali sinusoidy $v = a_r \sin \frac{2r\pi x}{l}$, zaś równaniu (4) określającemu warunki na końcach odcinka l czynimy zadość przyjmując wszystkie parametry $b_r = 0$, dochodzimy do wniosku, że krytycznej wartości siły S odpowiadać będzie jako wygięta postać równowagi sinusoida o takiej długości półfali λ , która czyni wrażenie (17a) najmniejszym.

Napisawszy przeto (17a) w postaci:

$$(17b) \quad S_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{\lambda^2} + \frac{C_2}{\pi^2} \lambda^2$$

znajdujemy z analitycznego warunku minimum

$$(18a) \quad \lambda = \pi \sqrt[4]{\frac{EJ}{C_2}}; \quad S'_{kr} = 2\sqrt{C_2 EJ}.$$

b) W przypadku wyboczenia pionowego wystarczy we wzorach powyższych wstawić odpowiednie wartości modułu podatności podłoża C i sztywności zginania (EJ) , a więc:

$$(18b) \quad \lambda = \pi \sqrt[4]{\frac{(EJ)'}{C}}; \quad S'_{kr} = 2\sqrt{C(EJ)'}$$

Otrzymane wyrażenia siły krytycznej można przedstawić w formie jednolitej, oznaczywszy w ogóle sztywność zginania pręta, tj. EJ przez B , a odpowiedni współczynnik podłoża przez C .

Przy tym wypada zauważyć, że C maleje, gdy podatność podłoża rośnie, a więc C można także nazwać sztywnością podłoża. Doskonale sztywnemu podłożu przynależałoby $C = \infty$. A zatem w obu przypadkach mamy:

$$(19) \quad S_{kr} = 2\sqrt{BC},$$

czyli krytyczna wartość siły ściskającej jest wprost proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z sztywności zginania pręta i sztywności podłoża.

W naszym zagadnieniu siła ściskająca wywołana podniesieniem temperatury o Δt° i przy założeniu bardzo wielkiej długości pręta (toru) jest równa $\alpha EF \Delta t^\circ$. Z porównania tego wyrażenia ze wzorem (19) otrzymujemy zależność

$$(20) \quad \Delta t_{kr}^\circ = 2 \frac{\sqrt{BC}}{A\alpha} = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\frac{C}{E} \frac{J}{F^2}},$$

jeżeli $A = EF$ oznacza sztywność pręta przy rozciąganiu lub ściskaniu. Równanie (20) wyraża, że wartość krytyczna przyrostu temperatury ponad temperaturę początkową jest wprost proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z sztywności zginania i odpowiedniej sztywności podłoża sprężystego, a odwrotnie proporcjonalna do sztywności podłużnej pręta i współczynnika wydłużenia termicznego.

Nie będzie może zbyt ciekawe dowieść, że znaleziony w powyższy sposób kształt osi przy nieskończonej małym wyboczeniu można wyznaczyć też przez całkowanie równania różniczkowego zgiętej osi, które w naszym przypadku napiszemy w postaci

$$(21) \quad EJ \frac{d^2v}{dx^2} = -M - Sy.$$

Tutaj M oznacza moment zginający reakcyj podłoża jako rozmieszczonych w sposób ciągły obciążeń $p = C_2y$ odniesionych do jednostki długości pręta. Jak wiadomo jest $\frac{d^2M}{dx^2} = p = C_2y$, a zatem dwukrotne różniczkowanie równania (21) daje

$$(22) \quad EJ \frac{d^4v}{dx^4} + S \frac{d^2v}{dx^2} + C_2y = 0.$$

Temu równaniu uczyni zadość funkcja

$$v = f \sin \frac{\pi x}{\lambda},$$

albowiem po wstawieniu jej otrzymujemy równanie

$$\left[\left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^4 EJ - \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 S + C_2 \right] f \sin \frac{\pi x}{\lambda} = 0,$$

które spełni każde x , gdy dobierzemy λ tak, aby czyniło zadość warunkowi

$$\left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^4 EJ - \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 S + C_2 = 0.$$

Rozwiązawszy względem $\frac{\pi}{\lambda}$ znajdujemy:

$$\left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 = \frac{S}{2EJ} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2EJ} \right)^2 - \frac{C_2}{EJ}}.$$

Wzór ten poucza, że wyboczenie jest możliwe tylko przy wartości S spełniającej warunek

$$(23) \quad \frac{S}{2EJ} > \sqrt{\frac{C_2}{EJ}}.$$

Stąd najmniejsza wartość S , która zapoczątkowuje wyboczenie, tj. wartość krytyczna, a więc i λ wypada zgodnie z wzorem (18a). Godny uwagi jest przy tym fakt, że w rachunkach powyższych strzałka ugięcia (o której założyliśmy tylko, że jest bardzo mała) pozostaje nieoznaczona. Nie jest to jednakże niespodzianką, albowiem teoria wyboczenia Eulrowskiego oparta na równaniu różniczkowym wygięć nieskończenie małych prowadzi również do tego wyniku. Wartości strzałek, odpowiadające siłom osiowym większym od wartości krytycznej, dają się obliczyć dopiero przez całkowanie równania różniczkowego skończonych wygięć osi. Wykonano to jak wiadomo w zadaniu EULERA przy pomocy całek eliptycznych lub odpowiednich rozwinięć szeregowych. W naszym zagadnieniu tego rodzaju badanie teoretycznie nie ma widoków powodzenia, albowiem już przy niewielkich strzałkach zmieni się prawo reakcji podłoża (przy wyboczeniu poziomym). W częściach najbardziej odchylnych wystąpi zamiast Cy tarcie posuwiste T'' jako reakcja niezależna od wychylenia. Podobnie ma się rzecz i przy wyboczeniu pionowym, gdzie po oderwaniu się od podłoża wystąpi stała reakcja ciężaru własnego pręta.

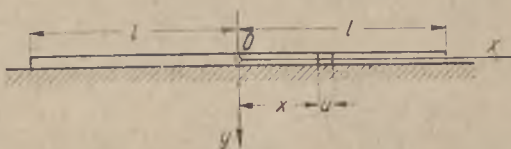
W obu przypadkach da się tylko przewidzieć bez rachunku, że opór przeciw wygięciu siłą S po przekroczeniu przez nią obliczonej wartości krytycznej wzrastać musi bardzo silnie ze wzrostem strzałki.

We wszystkich dotychczasowych rozważaniach przyjmowaliśmy nieograniczoną długość prostego toru poddanego sile podłużnej wytworzonej przez zmianę temperatury. Przejdziemy teraz do przypadku skończonej długości prostego odcinka toru, którego końce uważamy za swobodne o tyle, że nie przenoszą się na nie siły podłużne od sąsiednich odcinków toru.

§ 4. Zachowanie się odcinka toru prostego przy równomiernym wzroście temperatury

Gdyby podłoże nie stawiało żadnego oporu przeciw przesuwaniu toru, to wskutek podwyższenia temperatury początkowej o t° otrzymałaby każda połowa toru o długości całkowitej $2l$ przyrost długości

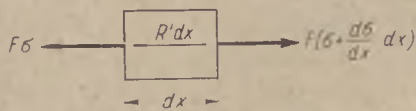
$$\Delta l = \alpha l t^\circ.$$



Rys. 3

Pomyślmy sobie przekrój środkowy toru związany z ustalonym względem ziemi (jako

układu odniesienia) układem współrzędnych prostokątnych (rys. 3). Dowlony przekrój o odciętej x doznałby wskutek zmiany temperatury przemieszczenia (małego) u o wielkości $\alpha x t^\circ$. Dzięki oporowi podłoża będzie to przemieszczenie mniejsze i będzie zależne od x w sposób dość zawily. Ażeby znaleźć prawo zależności u od x , pominiemy najpierw całkowicie mimoosiowość działania oporu podłoża względem osi szyny. Działanie to objawi się więc wystąpieniem naprężeń ściskających szynę osiowo. Niechaj R' oznacza opór odniesiony do jednostki długości szyny (lub toru). Warunek równowagi elementu o (pierwotnej) długości dx (rys. 4) i przekroju F daje:



Rys. 4

$$F \frac{d\sigma}{dx} dx - R' dx = 0.$$

Stąd

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{R'}{F}.$$

Ale w granicach ważności prawa Hooke'a wydłużenie jednostkowe wynosi

$$(24) \quad \frac{du}{dx} = \frac{\sigma}{E} + \alpha t^\circ.$$

⁹⁾ Przy założeniu najprostszym, a wystarczająco przybliżonym, że E nie zmienia się z temperaturą, a więc oba odkształcenia podlegają zasadzie superpozycji.

A zatem

$$(25) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{R'}{EF}.$$

W częściach toru o dostatecznie małych wartościach przemieszczeń u można przyjąć

$$R' = C_1 u.$$

Przy większych przemieszczeniach wypadaloby przyjąć $R' = T'' =$ stałej, proporcjonalnej do ciężaru jednostki długości toru. Rozpatrzmy najpierw przypadek ⁷⁾ szczególny, gdy na całej długości toru wystarcza przyjęcie $R' = C_1 u$. Wtedy równanie różniczkowe wynikające z zależności (24)

$$(26) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{C_1}{EF}$$

po podstawieniu $\frac{1}{k^2} = \frac{C_1}{EF}$ ma całkę ogólną w postaci

$$u = A_1 e^{x/k} + A_2 e^{-x/k}.$$

Z warunku $u = 0$ przy $x = 0$ wynika

$$A_1 = -A_2 = A,$$

czyli

$$u = A(e^{x/k} - e^{-x/k}).$$

Na wyznaczenie wartości drugiej stałej całkowania mamy jeszcze warunek, że naprężenie

$$\sigma_{x=\pm l} = 0,$$

przy czym korzystamy ze związku (26). Otrzymujemy łatwo

$$A = \frac{\alpha E t^\circ}{\frac{E}{k} (e^{l/k} + e^{-l/k})}.$$

A zatem wprowadzając znakowanie funkcji hyperbolicznych:

$$(27) \quad u = \alpha k t^\circ \frac{e^{x/k} - e^{-x/k}}{e^{l/k} + e^{-l/k}} = \alpha t^\circ \sqrt{\frac{EF}{C_1}} \frac{\text{sh} \left(x \sqrt{\frac{C_1}{EF}} \right)}{\text{ch} \left(l \sqrt{\frac{C_1}{EF}} \right)},$$

$$(28) \quad \sigma = -\alpha E t^\circ \left[l - \frac{\text{ch} \left(x \sqrt{\frac{C_1}{EF}} \right)}{\text{ch} \left(l \sqrt{\frac{C_1}{EF}} \right)} \right].$$

⁷⁾ Ten przypadek opracował także L. KARASIŃSKI (Przegląd Techniczny Nr 74 r. 1935, str. 202).

Znak minus po prawej stronie równania (28) wskazuje, że σ jest ciśnieniem przy dodatnich wartościach przyrostu temperatury t° , ponieważ wyrażenie w nawiasach jest na całej długości toru dodatnie.

Równania (27) i (28) są ważne przy $-l < x < l$ pod warunkiem ograniczającym, że wartości u obliczone z (27) nie wypadają większe od

$$u = \frac{T'}{C_1},$$

co by zajęć mogło przy dostatecznej wielkim t° . Rozkład naprężeń odpowiadający równaniu (28) przedstawia linia łańcuchowa (katenoida) (rys. 5) o wierzchołku leżącym w środkowym przekroju.



Rys. 5

Przy bardzo wielkiej długości toru można oczywiście środkową dość znaczną jego część uważać za ściskaną naprężeniem stałym o wielkości aEt° .

Weźmy teraz pod uwagę przypadek ogólniejszy, kiedy przy pewnej wartości $x = x_1$ staje się $u = \frac{T'}{C_1} = u_1$. Wtedy przy $x > x_1$ wypadaloby według teorii powyższej $u_1 > u$, co być nie może. Musimy przeto złożyć rozwiązanie z dwu części, tj. z całki równania różniczkowego (26), ważnej od $x=0$ do $x=x_1$ i z całki równania

$$(29) \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{T'}{EF} = \text{Const} = \frac{1}{k_1}.$$

Z uwzględnieniem warunków krańcowych znajdujemy po pierwsze przy $0 \leq x \leq x_1$

$$(30) \quad u = \frac{T'}{C_1} \frac{\text{sh} \left(x \sqrt{\frac{C_1}{EF}} \right)}{\text{sh} \left(x_1 \sqrt{\frac{C_1}{EF}} \right)},$$

$$(31) \quad \sigma = -aEt^\circ \left[1 - \frac{T'}{C_1 a t^\circ} \sqrt{\frac{C_1}{EF}} \frac{\text{ch} \left(x \sqrt{\frac{C_1}{EF}} \right)}{\text{sh} \left(x_1 \sqrt{\frac{C_1}{EF}} \right)} \right];$$

po wtóre zaś przy $l \geq x \geq x_1$

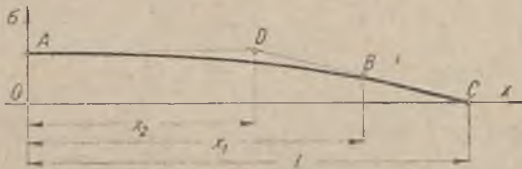
$$(32) \quad u = \frac{x^2 - x_1^2}{2k_1} + \left(a t^\circ - \frac{l}{k} \right) (x - x_1) + \frac{T'}{C_1},$$

$$(33) \quad \sigma = \frac{E}{k_1} (l - x) = -\frac{T'}{F} (l - x).$$

Wartość x_1 wyznaczy się przy tym z równania przestępnego:

$$(34) \quad \sqrt{\frac{EF}{C_1}} \cdot \operatorname{ctgh} \left(x_1 \sqrt{\frac{C_1}{EF}} \right) = \frac{\alpha E F t^\circ}{T'} - (l - x_1).$$

Odpowiadający temu rozwiązaniu rozkład naprężeń przedstawia wykres (rys. 6) złożony z katenoidy AB określonej równaniem (31) i prostej BC według równania (33). W grubym przybliżeniu można powyższy wykres zastąpić prostymi AD i DC . Musimy się tym zadowolić w przypadkach nieznannej wartości C_1 . W ten sposób dochodzimy do wykresu trapezowego spotykanego już w piśmiennictwie zagranicznym i naszym⁸⁾.



Rys. 6

Odciętą x_2 punktu D określa wzór:

$$(35) \quad x_2 = l - \frac{\alpha E F t^\circ}{T'}$$

Przybliżoną ocenę tego rodzaju usprawiedliwia także dość małe prawdopodobieństwo, że pewne założenie teorii, którego dotąd nie wymieniono wyraźnie, będzie w rzeczywistości spełnione. Tylko wyjątkowo trafi się równomierne podwyższenie na całej długości rozpatrywanego odcinka, a taki właśnie przypadek przyjęliśmy milcząco. Tkwi on w założeniu, że przekrój środkowy toru jest nieruchomy i stanowi płaszczyznę symetrii jego odkształceń.

W każdym razie w torze prostym (spawanym) o dostatecznie wielkiej długości, równomierne podwyższenie temperatury o t° wywoła ściskanie, przy czym bezwzględną wartość największego naprężenia osiowego w szynach określa prosty wzór:

$$\sigma = \alpha E t^\circ.$$

Ta wartość zachodzi w środkowej części toru pomiędzy odcinkami końcowymi, których długość

$$l_2 = \frac{\alpha E F t^\circ}{T'}$$

Z badań doświadczalnych niemieckich i węgierskich znamy wartość T' . Zależnie od konstrukcji nawierzchni otrzymano od 600 do 1200 kG/m w całym torze. Na jedną szynę przypada więc $T' = 3$ do 6 kG/cm. A zatem np. w szynie o przekroju $F = 54,5 \text{ cm}^2$ wypada przy $t^\circ = 40^\circ$.

$$l_2 = 87 \div 147 \text{ m.}$$

⁸⁾ B. HUMMEL: Stateczność torów spawanych wobec niebezpieczeństwa wybożenia, Warszawa, 1935.

Z tego wynika, że dopiero przy długości prostego toru $2l$ przewyższającej 170 m znajdzie w środkowej jego części naprężenie $\alpha Et^{\circ} = 960 \text{ kG/cm}^2$. Przy mniejszych długościach (w warunkach naszego przykładu) naprężenie to musi być odpowiednio mniejsze.

§ 5. Doświadczalne sprawdzenie teorii wyboczenia prostego toru

Wyprowadzony w § 3 wzór (19) od dawna zresztą znany, określa teoretycznie wartość krytyczną siły ściskającej w przypadku nieograniczonej długości toru, jako pręta sprężystego na sprężystym podłożu. Ponieważ badaniu doświadczalnemu podlegają tylko pręty o długości skończonej, których końce nie są zwykle swobodne, gdyż przy ich obciążeniu siłami ściskającymi nie mogą się przesuwac prostopadle do osi podłużnej, przeto do interpretacji takich doświadczeń wypada stosować ogólniejszy wzór

$$(36) \quad S = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} r^2 + \frac{C_2 l^2}{\pi^2 r^2},$$

w którym l oznacza długość pręta, zaś r liczbę półfal sinusoidy, według której zachodzi wyboczenie. Liczbę tę należy dobrać tak, aby S wypadło jak najmniejsze. Wyprowadzenie tego wzoru znajduje się między innymi na str. 338 polskiego przekładu „Kursu Wytrzymałości Materiałów“ prof. TIMOSZENKI. Dostatecznie małym wartościom l odpowiada oczywiście $r=l$. Począwszy od pewnej wartości l_1 , aż do l_2 jest $r=2$ itd. W ogóle znajdziemy graniczną wartość l z warunku

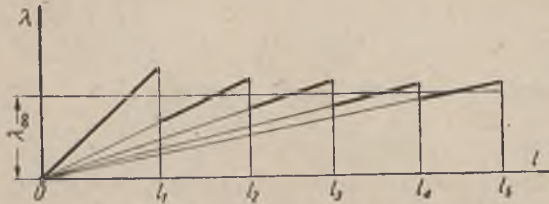
$$\frac{\pi^2 EJ}{l_r^2} r^2 + \frac{C_2 l_r^2}{\pi^2 r^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l_r^2} (r+1)^2 + \frac{C_2 l_r^2}{\pi^2 (r+1)^2},$$

który daje

$$(37) \quad \lambda_r = \frac{l_r}{r} = \pi \sqrt[4]{\frac{EJ}{C_2}} \sqrt{1 + \frac{1}{r}}.$$

Wzór ten przechodzi przy bardzo wielkich wartościach r , a zarazem i l w pierwszy z wzorów (18a). Zależność długości półfali wyboczenia λ od długości pręta l nie wyraża się przeto funkcją ciągłą, lecz funkcją, która posiada skoki przy wartościach $l=l_1, l_2, \dots$. Skoki te są coraz mniejsze, jak widać na wykresie (rys. 7), ale przy niewielkiej liczbie półfal osiągnają wcale poważne wartości w stosunku do λ_{∞} , tj. do długości półfali w przecie nieskończenie długim. Z tego powodu w badaniu doświadczalnym należy się spodziewać długości λ bądź to większych, bądź też mniejszych od λ_{∞} .

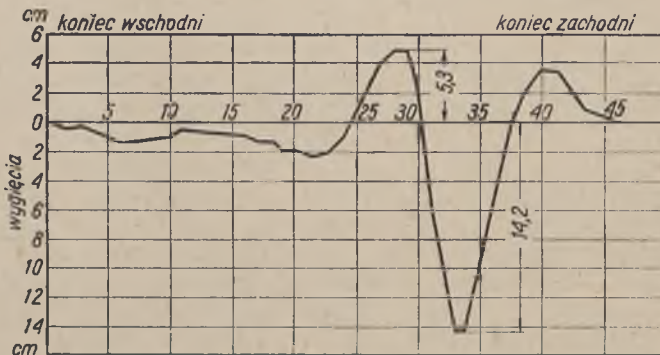
Jak zaznaczyłem na końcu § 2 sam fakt pojawienia się w doświadczeniach większej liczby fal wybożenia zamiast przypadkowej jednej budzi zaufanie do teorii przedstawionej w § 3. Można go uważać do pewnego stopnia za „experimentum crucis“ między tą teorią a innymi, wyłączającymi z góry jej stosowalność.



Rys. 7. Zależność długości półfal λ wybożenia sprężystego pręta w środowisku sprężyste podanym od długości l pręta

Toteż poznawszy w kwietniu 1934 r. wyniki wspomnianych już badań prof. RAABA w Karlsruhe ujrzałem w nich od razu zjawisko wybożenia toru w poziomie, jako pręta

sprężystego, otoczonego środowiskiem sprężystym. RAAB ogrzewał elektrycznie szyny spawane odcinka toru doświadczalnego o długości 46,17 m na podkładach drewnianych. Przy początkowej temperaturze 17° końce szyn przylegały dokładnie, bez nacisku, do stalowych płyt klinowych, podwójnych, wspartych pionowo na potężnych bryłach betonowych ma-



Rys. 8

jących stanowić nieruchome przyczółki. Przy ogrzaniu szyn do temperatury 122° , czyli podwyższeniu temperatury początkowej o 105° nastąpiło nagłe pofałdowanie toru w planie, po czym po ostygnięciu zdjęto rzut poziomy odkształconej trwale osi podłużnej. Obraz wybożenia (rys. 8) przedstawiał wcale wyraźnie 6 półfal o średniej długości 7,70 m i strzałkach wzrastających od wschodniego przyczółka ku zachodniemu. Największa strzałka w odległości 1,5 półfali od zachodniego przyczółka wynosiła 14,2 cm. Ciśnienie krytyczne w szynie miałoby według wzoru (1) wartość 2536 kg/cm^2 , gdyby punkty oparcia na przyczółkach można uważać za bezwzględnie stałe. Z powodu nieuniknionego poddania się

przyczółków rzeczywiste ciśnienie krytyczne było nieco mniejsze, a zmniejszenie da się ocenić w sposób następujący. Swobodne wydłużenie każdej z szyn wynosiłoby $0,0000115 \cdot 4617 \cdot 105 = 5,58$ cm. Bez przesady można przyjąć, że wskutek sprężystych odkształceń przyczółków około 10% tego odkształcenia nie zostało zniesione przez ciśnienie podłużne, tak, iż jego rzeczywista wartość krytyczna nie przewyższała 2280 kG/cm². Ponieważ pole przekroju szyny wynosiło $61,9$ cm², więc siła krytyczna jednej szyny wynosiła najwyżej $61,9 \cdot 2280 = 141100$ kG. Moment bezwładności przekroju szyny względem osi pionowej $J = 319$ cm⁴. Ze względu na połączenia szyn z podkładami sztywność poziomego zginania toru była w każdym razie większa od $2EJ = 2 \cdot 2,2 \cdot 10^6 \cdot 319 = 1304 \cdot 10^6$ kG/cm². Ocenimy ją na $1500 \cdot 10^6$ kG/cm². Po wstawieniu tych wartości oraz $r = 6$ we wzór (36) i rozwiązaniu względem niewiadomej C_2 otrzymujemy

$$C_2 = 4,3 \text{ kG/cm}^2$$

jako wartość liczbową sztywności podłoża przy przesunięciu poprzecznym całego toru. Jest to wartość zupełnie prawdopodobna zważywszy, że opór przeciw trwałemu przesunięciu poprzecznemu toru mierzony bezpośrednio waha się między 600 a 800 kG/m, czyli od 6 do 8 kG/cm, a mechaniczne znaczenie stałej C_2 wyływa z równania

$$p = C_2 y.$$

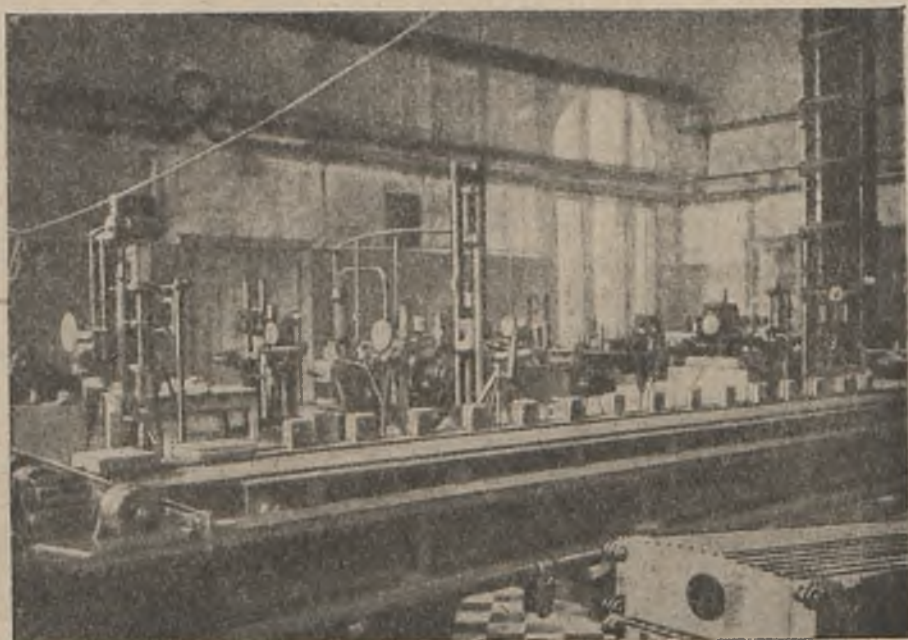
To równanie wyraża w naszym przypadku, że przy wzroście obciążenia bocznego toru od zera o każde $0,43$ kG/cm przypada zrazu przyrost przemieszczenia sprężystego o 1 mm. Przyrost ten maleje zapewne ze wzrostem obciążenia tak, że przy przesunięciu kilku milimetrów nie ma już prostej proporcjonalności, a p może wzrosnąć do wartości oporu, podanych powyżej.

Przewidywany zarzut, że fale wyboczenia od strony wschodniego przyczółka były znacznie gorzej wykształcone aniżeli od strony zachodniej, łatwo odeprzeć, wyjaśniając ten objaw wielce prawdopodobną różnicą wartości reakcyj obu przyczółków. Różnica ta uwarunkowana tarciem statycznym toru o podłoże może powstać wskutek nierównego poddania się obu przyczółków.

Przechodząc teraz do opisu własnych badań doświadczalnych, jakie wykonano w roku 1935 w Laboratorium Wytrzymałości Materiałów Politechniki Warszawskiej, pragnę zaznaczyć, że lwią część pracy laboratoryjnej przy tym zaprojektował i wykonał inż. R. KUROWSKI, adiunkt mojej katedry, przy dorywczej pomocy innych młodszych sił naukowych.

Celem doświadczeń było sprawdzenie założeń i wyników teorii przedstawionej w § 3 przez pomiary na prostym i tanim modelu. Jako pręt sprężysty obrano stalowy teownik Nr 20 o wymiarach następujących:

dlugość $l=6$ m, pole przekroju $F=1,12$ cm², ciężar własny 0,88 kG/m, odległość środka ciężkości od podstawy półki $y_0=0,58$ cm, moment bezwładności względem osi symetrii $J=0,20$ cm⁴. Jako podłoże sprężyste służyła warstwa gumy o grubości 2 cm i szerokości ~ 10 cm przyklejona do deski spoczywającej na poziomej wyheblowanej powierzchni łoża wielkiej maszyny wytrzymałościowej, która służyła zarazem do wywarcia nacisku na końce pręta położonego na podłożu i przyciskanego do podłoża specjalnymi ciężarkami rozmieszczonymi w równych odstępach (rys. 9).



Rys. 9

Końce teówki były obrobione w ten sposób, ażeby płyty wywierające nacisk stykały się końcami wzdłuż linii pionowych przechodzących przez środek ciężkości przekroju. Teówkę wyprostowano bardzo starannie i sprawdzono, że odchylenia od prostoliniowości w płaszczyznach pionowej i poziomej były mniejsze od 0,05 cm. Podobnie wyrównano do poziomu wierzch podłoża gumowego nadając mu przez raszpłowanie równomierną szorstkość.

Dodatkowe równomierne obciążenia poprzeczne teówki przewyższające jej ciężar własny wielokrotnie (stosowano obciążenia do 28 kG/m) okazały się konieczne, aby zrealizować równomierny nacisk na podłoże z jakim takim przybliżeniem. Bez obciążenia dodatkowego przeniósł się

ciężar własny pręta na podłoże na kilku stosunkowo krótkich odcinkach długości przeplatanych z przedziałami nie przenoszącymi wcale nacisku. Rzecz jasna, że w tych warunkach nie mogło być mowy nawet o grubym przybliżeniu do założeń teorii. Na tę trudność nie zwracałem uwagi przy omawianiu doświadczeń prof. RAABA wykonanych na torze rzeczywistym, gdyż nie mogła wystąpić tam tak jaskrawo z powodu obciążenia szyn podkładami; nie ulega jednak wątpliwości, że w pewnym stopniu zachodziła też nierównomierność przylegania toru do podłoża, co mogło przyczynić się do łatwiejszego powstawania fal wyboczeniowych. Wstępne próby z inną teówką nieco cięższą, bez obciążenia dodatkowego, ujawniły wskazaną trudność całkiem wyraźnie.

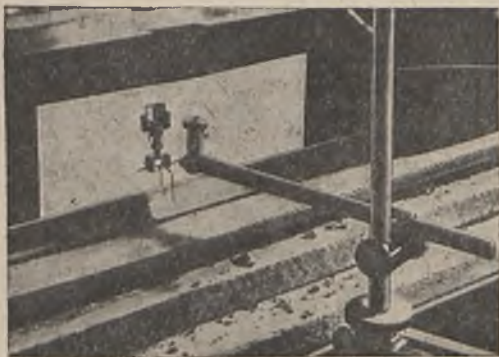
Druga trudność wystąpiła na jaw przy wywieraniu nacisku osiowego na koniec pręta. Jeden koniec teówki opierał się o nieruchomą część łoża maszyny, a drugi naciskano za pomocą wózka uruchomianego wzdłuż przekładnią ślimakową. Otóż w pierwszych próbach pomiaru ujawniły się dość znaczne poprzeczne przemieszczenia końca, na który wywierano nacisk. Ażeby im zapobiec, między wałek znajdujący się naprzeciw końca teówki wstawiono belkę prostopadłą do osi teówki i obracalną około osi pionowej dość odległej od owego końca. Dla kontroli, czy w czasie doświadczenia koniec teówki nie ma ruchów poprzecznych, ustawiono na stałe czujnik z podziałką 0,01 mm dotykający bocznej ściany teówki u jej końca.

Na koniec zrezygnowano z realizacji przegibnego podparcia końców pręta i zabezpieczono je od ruchów bocznych przez rodzaj częściowego utwierdzenia. W tym celu na długości 25 cm od każdego końca nałożono na środniki teówki mocne deski z odpowiednim wyżłobieniem i przymocowano je śrubami do deski, do której przyklejono gumowe podłoże. W ten sposób skrócono swobodną długość pręta, ale jak się pokazało i tak wytworzyły się 4 pełne fale wyboczenia sprężystego, co dowodzi, że ta długość była ze stanowiska teorii wielka.

Nacisku wywartego na koniec pręta nie można było mierzyć bezpośrednio, wobec czego mierzono tensometrami ustawionymi przy obu końcach ciśnienia podłużne w odpowiednich przekrojach. Przy wszystkich próbach tensometry na końcu unieruchomionym wskazywały $\sim 0,75$ do $0,80$ wskazań tensometrów ustawionych na drugim końcu bezpośrednio naciskanym. To dowodziło, że siła ściskająca pręt wzdłużnie zmniejszała się „po drodze“, oczywiście wskutek tarcia statycznego o podłoże. Około 20 do 25% siły wprowadzonej w pręt równoważyło się z tarcie. Że to tarcie było czysto statyczne, przekonano się po odciążeniu. Tensometry wracały do zera.

Ponieważ przy sposobności pomiarów przy wyboczeniu cienkościennych kątówek w naszym laboratorium stwierdzono, że nacisk czujników

zwykłych (tzw. zegarowych) może niekiedy zakłócić poważnie badane zjawisko mechaniczne, przeto do pomiarów wygięć teówki stosowano



Rys. 10

przrządy zwierciadłowe ze sprężynkami naciskającymi z obu stron na pionowy śródnik (rys. 10). Czujniki te przy wychyleniach teówki obracały się dokoła osi przytwierdzonych do ciężkich dźwigarów ustawionych na osobnych podstawkach obok podłoża teówki. Obrót zwierciadełek mierzone lunetą ze skalą, której podziałka odpowiadała przesunięciu badanego przekroju teówki o 0,01 mm. Ponadto wykonywano pomiary za pomocą zwykłych

czujników Zeissa, ustawiając jednakże po dwa jednocześnie naprzeciw siebie, aby nie było nacisku jednostronnego. Wyniki otrzymane przy pomiarach jednym i drugim typem przrządów zgadzały się ze sobą.

Spostrzeżenia i pomiary wykonano przy następujących średnich wartościach naprężenia ściskającego σ i siły ściskającej S :

	1	2	3	4
$\sigma =$	200	400	600	800 kG/cm ²
$S =$	225	450	670	900 kG

1) Przy sile $S=225$ kG pojawiły się wprawdzie drobne wygięcia, ale przeważnie jednostronne i nie przewyższające 0,035 mm w żadnym przekroju pręta, ich źródłem mogły zatem być tylko nieuniknione małe niejednorodności i zboczenia od postaci geometrycznej, a nie stałość kształtu równowagi.

2) Przy sile $S_1=448$ kG wygięcia nieco wzrosły osiągając w kilku miejscach $\sim 0,04$ mm i tworząc dość nieregularną linię falistą (rys. 11) zaznaczającą niewyraźnie długość całej fali około 1,5 m.

3) Przy $S_2=672$ kG odchylenia doszły w jednym miejscu do 0,07 mm nie przestając być sprężystymi, gdyż po odciążeniu wszystkie przemieszczenia znikły. Jak wynika z rysunku 11, można się już dopatrzeć nieco regularniejszej falistości przy wartościach 2λ od 110 do 150 cm, jednakże nie było tendencji do powiększenia wygięć przy niezminionej wartości siły S .

4) Tendencja taka pojawiła się najwyraźniej dopiero przy zwiększeniu siły do 900 kG, przy której wygięta falista postać równowagi nie dała się już zmierzyć, gdyż pręt nagle się wyboczył bliżej końca bez-

pośrednio obciążonego. Naprężenia (wzdłużne) spadły przy tym z 800 do 400 kG/cm² i powyżej tej wartości już się podnieść nie dały.

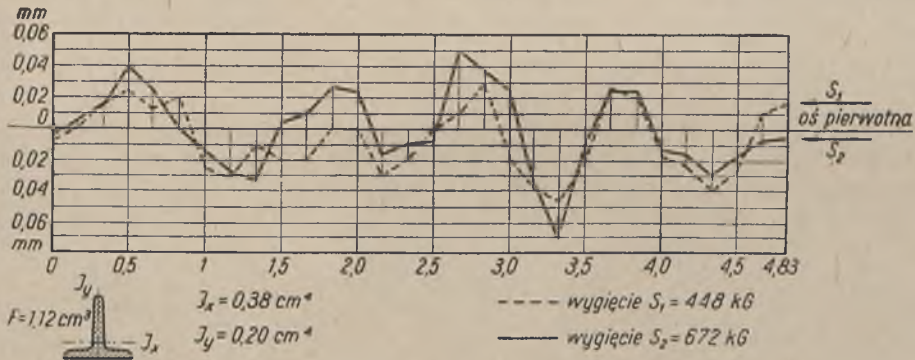
Przyjmując $S_{kr} = 900$ kG obliczono z wzoru teoretycznego

$$S_{kr} = 2 \sqrt{C_2 E J_y},$$

po wstawieniu $E J_y = 2,1 \cdot 10^6 \cdot 0,20 = 4,2 \cdot 10^5$ na C_2 wypadła wartość 0,5 kG/cm², co wygląda dość prawdopodobnie. Ale skoro tę wartość wstawiono w drugi wzór teoretyczny (co prawda dla pręta bardzo długiego)

$$\lambda = \pi \sqrt[4]{\frac{E J_y}{C_2}},$$

to wypadło $2\lambda = 190$ cm, a więc znacznie więcej od wartości obserwowanej przy sile $S = 672$ kG. Da się to objaśnić okolicznością, że wskutek



Rys. 11. Wygięcia belki na sprężystym podłożu pod wpływem siły osiowej S (mierzone w płaszczyźnie poziomej)

opisanego wyżej sposobu ustalenia końców pręta jego długość przestała być „bardzo wielka“ i fala teoretyczna uległa skróceniu. Dalsze badania w zmienionych warunkach byłyby przeto bardzo pożądane.

W razie ich podjęcia należałoby zrobić próbę z kilku długościami prętów, a także z prętami o różnych przekrojach i z różnego materiału. Byłoby pożądane także doprowadzenie do wyboczenia przez ogrzanie elektryczne przy ustaleniu końców, podobnie jak to uczynił prof. RAAB. Wtedy jednakże lepiej nie ustalać przekrojów końcowych przez oparcie o prawie sztywne ściany, ale oprzeć je o przyrządy mierzące siłę.

Na zakończenie streszczę wywody niniejszej pracy w tezach i wnioskach następujących:

1) Najważniejsze kryteria niebezpieczeństwa wyboczenia (pofałdowania) długiego prostego toru o szynach spawanych bez przerw dają się

ująć we wzory matematyczne na podstawie teorii stałości równowagi sprężystego pręta ściśkanego osiowo w ośrodku sprężystości podatnym.

2) Mniemanie przeciwnie współczesnych badaczy zagranicznych w dziedzinie kolejnictwa powstało na skutek negatywnych wyników teorii opartej na założeniach w tym zagadnieniu niewystarczających i fizykalnie niedopuszczalnych.

3) Prawidłowo stosowana teoria stałości równowagi może prowadzić tylko do wzorów w tekście przytoczonych i uzasadnionych ⁹⁾.

4) Opisane w tekście doświadczenia potwierdzają dość dobrze wywody teoretyczne pracy, jakkolwiek są jeszcze zbyt nieliczne i posiadają braki, tak że nie są jeszcze wystarczające do wzbudzenia zupełnego zaufania do odnośnej teorii (nie wątpię jednakże, że uczynią to dalsze badania doświadczalne).

5) Stosowany schemat teoretyczny dotyczy tylko jednego ogniwa z dużego łańcucha zagadnień stateczności toru kolejowego bez styków.

Do innych zagadnień wypadnie stosować inne metody już używane przez inżynierów badaczy kolejnictwa.

⁹⁾ Spór o stosowalność teorii stałości równowagi do naszego zagadnienia przypomina walkę o wzór EULERA, zakończoną jak wiadomo jego zwycięstwem, oczywiście w granicach ważności wzoru przewidzianych przez teorię.

Z ROZWAŻAŃ NAD NIEBEZPIECZEŃSTWEM ZNIEKSZTAŁCENIA TORU KOLEJOWEGO O SZYNACH SPAWANYCH WSKUTEK NAPIĘĆ CIEPLNYCH

(Przegląd Techniczny Nr 23, 1936 r.)

W pracy mojej pod tytułem „Zagadnienie stateczności prostego toru o szynach spawanych pod wpływem naprężeń cieplnych“ uzasadniłem między innymi niemożliwość teoretycznego znalezienia skończonej wartości krytycznej napięcia cieplnego ściskającego osiowo szyny przy założeniach podłoża sztywnego z tarcie Coulomba. Na takim (abstrakcyjnym) podłożu nie zaszłaby niestalość równowagi prostej postaci toru nawet przy największej wartości siły osiowej oczywiście przy założeniu nieprzekroczenia granicy plastyczności (płynności) w materiale szyn. Wiadomo jednak, że zniekształcenie toru wskutek napięć cieplnych obserwowano niejednokrotnie, chociaż ściskanie szyn nie było nawet tak wielkie, aby powodowało naprężenia powyżej granicy plastyczności. To było powodem, że wielu inżynierów-badaczy porzuciło myśl stosowania teorii niestalości równowagi i pojęcia siły krytycznej do szukania takiej wartości siły ściskającej, która grozi zniekształceniem toru, a zwróciło się do rozważań teoretycznych opartych na założeniu początkowego zakrzywienia osi toru uwarunkowanego niedokładnością wykonania lub niestaranym utrzymaniem. Rachunki takie mają bez wątpienia znaczenie praktyczne, jednakże zawierając element dowolności mało się przyczyniają do gruntownego wyjaśnienia sprawy. Otóż na Kongresie Szynowym w Budapeszcie wystąpiłem z tezą (dyskutowaną przedtem listownie z prof. RAABEM w Karlsruhe), że jednak można teoretycznie znaleźć skończoną wartość krytyczną siły ściskającej (która stanowi niższą granicę niebezpiecznej wartości tej siły), przyjmując zgodnie z doświadczeniem, że podłoże toru jest sprężyste podatne. Uzasadnieniu tej tezy, wykonaniu odpowiednich obliczeń i porównaniu z doświadczeniami własnymi na modelach oraz doświadczeniami na torze oryginalnym Niemieckich Kolei Państwowych, wykonanymi przez prof. RAABA, były poświęcone inne części wymienionej pracy.

Przewidując, że dalsze badania doświadczalne przyczynią się do poparcia tej tezy, uczyniłem zadość zaproszeniu dr BASELERA, kierownika

instytutu badawczego niemieckich kolei państwowych w Monachium i odbyłem z okazji Międzynarodowego Kongresu Mostownictwa i Budowy Inżynierskich w Berlinie szereg konferencji w Monachium, w Karlsruhe (z prof. RAABEM) i w Berlinie (z dr H. MEIEREM).

Otóż idzie tutaj o zjawisko zaobserwowane w doświadczeniach niemieckich i węgierskich na torze oryginalnym, który ściskano podłużnie przy pomocy prasy hydraulicznej, zwiększając nacisk tak długo, aż nastąpiło podniesienie faliste toru. Po usunięciu prasy tor wracał do położenia poziomego prawie tak, jak sprężyna wygięta siłami zewnętrznymi wraca do pierwotnej postaci po zniesieniu tych sił. Stosowana w piśmiennictwie naszym i obcym do powyższego zjawiska nazwa *wyboczenie* mogła jednakże prowadzić do nieporozumień i dlatego zastąpiłem ją tutaj wyrazem *zniekształcenie* toru. Dla wyjaśnienia zaznaczę, że *zniekształceniem* nazywać będę w ogóle zmianę zamierzonej prostej osi toru na wygiętą, bez względu na przyczyny tę zmianę wywołujące. Dzięki temu będę mógł w dalszym ciągu stosować wyraz *wyboczenie* tylko w znaczeniu ciśnieńszym, tj. na oznaczenie zjawiska *niestałości* (niestateczności) *równowagi* prostej postaci toru ściskanego osiowo przy wartości siły ściskającej większej od pewnej określonej wartości zwanej krytyczną (P_{kr}). Przy tej umowie co do nazwy staje się np. jasno zrozumiałe twierdzenie następujące: Teoria wyboczenia dowodzi, że wyboczenie sprężyste ciężkiego prostego pręta spoczywającego na podłożu traktowanym jako sztywne z tarcie Coulomba nie jest możliwe przy żadnej skończonej wartości siły ściskającej. Nie ma zatem mowy o P_{kr} . Natomiast *zniekształcenie* takiego pręta wskutek innego działania sił zewnętrznych zająć może, a *zniekształcona* np. wygięta w górę postać pręta może być utrzymywana w równowadze siłami osiowymi ($P, -P$), przeniesionymi przez sąsiednie poziome części pręta. Nie należy jednak mówić o krytycznej wartości tych sił (w znaczeniu powyższym) gdyż, jak zobaczymy, jest ich nieskończenie wiele, a tylko spośród nich wyróżnia się jedna najmniejsza P_{min} , odpowiadająca zresztą jednej z postaci równowagi niestałej.

W wymienionych doświadczeniach z nawierzchnią kolejową zachodzić musiało *ściskanie mimośrodowe*. Każdemu bowiem, kto miał do czynienia z doświadczeniami nad wyboczeniem prętów (pionowych) wiadomo, jak trudno jest zmniejszyć mimośród działania siły do wartości takiej, ażeby przebieg zjawiska odpowiadał ilościowo przewidywaniom teorii wyboczenia. (Pod tym względem bardzo interesujących spostrzeżeń i wyników należy się spodziewać po pracy doświadczalnej, którą wykonywa od paru lat prof. M. BROSKO). Badania toru oryginalnego są tak kosztowne, że trudno myśleć o ich wielokrotnym powtarzaniu. Tylko zaś wtedy doświadczenie potwierdziłoby niewątpliwie przewidywanie teoretyczne, wykazując, że odcinki toru o konstrukcji identycznej można do-

prowadzić do wybrzuszenia siłami ściskającymi o bardzo różnej wielkości. Rozsyпка wartości sił zniekształcających tor byłaby olbrzymia w porównaniu do rozsyпки wartości sił krytycznych przy badaniu wybočenja prętów pionowych.

Że wywołane ściskaniem prasą hydrauliczną wybrzuszenie toru nie jest wybočeniem w znaczeniu ściślejszym, dowodzi nadto następujące rozważanie zbioru postaci równowagi ciężkiego pręta nieograniczenie doskonale sprężystego prostego w stanie nieobciążonym. Pręt taki może być oczywiście w równowadze w postaci silnie wygiętej w górę w sposób przedstawiony na rysunku 1, jeżeli na jego końce działają dostatecznie wielkie siły ściskające ($P, -P$). Zakładamy przy tym, że końce A i B są pod-



Rys. 1

parte i prowadzone tak, że nie mogą się obracać (około osi prostopadłej do rysunku), ale są swobodnie przesuwalne wzdłuż cięciwy AB . Gdy zmniejszymy nieco wielkość P , to pręt przyjmie nową postać równowagi o mniejszej strzałce, a większym odstępnie AB . Dalsze kolejne postaci równowagi odpowiadać będą coraz mniejszym strzałkom i siłom P , ale tylko do pewnej granicy P_{gr} odpowiadającej jednakże dość dużej strzałce f_{gr} . Strzałkom f mniejszym od f_{gr} odpowiadają teraz wartości $P > P_{gr}$ i rosnące do ∞ gdy $f \rightarrow 0$. Wszystkie postaci równowagi o strzałkach $0 < f < f_{gr}$ są niestateczne, a postaci o strzałkach $f > f_{gr}$ stateczne. P_{gr} jest zatem najmniejszą wartością siły (P_{min}), która wystarcza do utrzymania wybrzuszonej postaci pręta w równowadze. To wszystko można śledzić matematycznie, co prawda z olbrzymim nakładem pracy, jeżeli nie rezygnujemy z dokładności obliczeń, ale to byłoby do naszego celu zbędne. Najważniejszy jest fakt, że niektórzy autorowie nazwali wartość P_{gr} „wartością krytyczną“, przypisując jej błędnie to samo znaczenie co wartości krytycznej powyżej określonej w teorii wybočenja. W naszym zadaniu przy założeniu, że cięciwa AB ogranicza sztywno możliwość wygięcia w dół, istnieje matematycznie jedna wartość krytyczna $P_{kr} \rightarrow \infty$, co wskazuje mechanicznie na niemożliwość wybočenja pręta z postaci prostej poziomej siłami ściskającymi. Wybrzuszenie naszego pręta leżącego poziomo i ściskanego siłami P czy to mniejszymi, czy też nawet większymi od P_{gr} jest oczywiście możliwe wskutek udzielenia mu z ze-

wnątrz stosunkowo wielkiej nadwyżki energii, np. przez szarpnięcie do góry, ale to ze zjawiskiem wybożenia nie ma nic wspólnego. Atoli szukanie P_{gr} powyższą drogą nie ma żadnego praktycznego znaczenia w zagadnieniu zniekształcenia toru kolejowego jeszcze dlatego, ponieważ teoretyczna wartość P_{gr} odpowiada zbyt wielkim strzałkom, ażeby wygięcie mogło zajść w granicach sprężystości.

Nicość techniczna omawianej koncepcji wychodzi na jaw może najdobitniej przy ocenie bilansu energetycznego.

Rozpatrzmy fałę wybrzuszenia toru o długości $2z=10$ m, a wysokości $f=1$ m i obliczmy nadwyżkę jej energii potencjalnej wywołaną zgięciem i podniesieniem. Ciężar własny szyn wraz z podkładami normalnego toru PKP wynosi, jak wiadomo 160 do 200 kG/m, a więc praca potrzebna do podniesienia środka ciężkości naszego odcinka o $\frac{1}{2}f=0,5$ m jest równa ~ 800 do 1000 kGm. Energia zginania da się obliczyć w przybliżeniu przy założeniu, że wygięcie ma postać jednej fali sinusoidy według znanego wzoru:

$$L_g = \frac{\pi^4 E J f^2}{(2z)^3}.$$

Wstawiwszy wartość momentu bezwładności przekroju obu szyn $J = 3200 \text{ cm}^4$ i $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/m}^2$ otrzymany

$$L_g = \frac{97,4 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 3200 \cdot 50^2}{1000^3} = 1\,630\,000 \text{ kGcm} = 16\,300 \text{ kGm},$$

a zatem 16 do 20 razy więcej od pracy siły ciężkości. Razem około 17000 kGm.

Obliczmy jeszcze energię ściskania prostego odcinka toru długości 10 m i o przekroju obu szyn 117 cm^2 przy naprężeniu $\sigma = 2000 \text{ kG/cm}^2$, a więc bardzo znacznym.

$$L_{sc} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} 117 \cdot 1000 = \frac{2 \cdot 10^6}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^6} 117\,000 \approx 56\,000 \text{ kGcm} = 560 \text{ kGm}.$$

Jest to ~ 330 razy mniej niż potrzeba do zrealizowania wybrzuszenia, a przecież przy wygięciu wyzwala się tylko część energii ściskania, gdyż siła ściskająca nie spada do zera. Zdaje się, że te proste rozważania przekonają każdego inżyniera kolejowego o bezwartościowości obliczania P_{kr} dla oceny niebezpieczeństwa wygięcia w górę nawierzchni pod wpływem naprężeń cieplnych.

Podobnie druzgocącej krytyce podlega także wartość obliczenia P_{gr} przy wygięciu na poziomie¹⁾.

¹⁾ Szczegółowa analiza tego zagadnienia znajduje się w pracy pt. „W sprawie niestateczności długiego prostego toru kolejowego o szynach spawanych pod wpływem ogrzania“.

W SPRAWIE NIESTATECZNOŚCI DŁUGIEGO PROSTEGO TORU KOLEJOWEGO O SZYNACH SPAWANYCH POD WPLYWEM OGRZANIA

(Czasopismo Techniczne Nr 7, 1937 r.)

§ 1. Wstęp

Wiadomo, że podwyższenie temperatury szyn o t° ponad temperaturę, przy której ułożono nawierzchnię (zwaną niekiedy temperaturą obojętną), musi wywołać w szynie o przekroju F siłę osiową ściskającą S o wielkości $EFat^\circ$ (E — oznacza moduł sprężystości materiału szyny wynoszący około $2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², a $a = 0,0000115$ współczynnik wydłużenia termicznego). Pamiętać należy, że tak proste warunki zachodzą tylko w dostatecznej odległości od końców rozpatrywanego odcinka toru, a więc od luków i miejsc zaokrąglonych załomów spadku. Tylko do tego prostego przypadku odnoszą się przedstawione w dalszym ciągu rozważania teoretyczne.

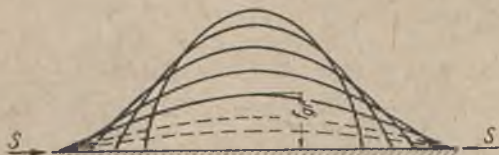
Pojawienie się sił ściskających S wywołuje niebezpieczeństwo *zniekształcenia* prostej praktycznie osi toru tak w płaszczyźnie poziomej, jak i pionowej, czyli jak zwykle mówią, niebezpieczeństwo *wyboczenia* toru. Dwa są mechaniczne powody tego niebezpieczeństwa:

1) Nieuniknione początkowe *zbożenia od zamierzonej prostoliniowości osi* toru. Te zbożenia sprawiają, że siły ściskające wyginają szyny coraz więcej w miarę ich wzrostu, czyli w miarę podwyższenia temperatury, grożąc wyraźnym i niebezpiecznym zniekształceniem toru.

2) Teoretyczne *zjawisko niestalości (niestateczności)* równowagi prostej postaci toru, która zachodzi przy pewnej *granicy wyższej* siły ściskającej zwanej *wartością krytyczną* (S_{kr}). Powyżej wartości krytycznej, tj. przy $S > S_{kr}$, prosta postać równowagi toru jako układu sprężystego jest *niestala*, a stałą staje się postać zakrzywiona.

Jest rzeczą jasną, że przy siłach ściskających o wielkości zbliżonej do wartości krytycznej staje się wpływ zbożeń pierwotnych od prostoliniowości osi itp. na jej zakrzywienie szczególnie silny. Dlatego to znajomość S_{kr} jest praktycznie nader ważna, chociaż jej obliczenie odnosi

się do abstrakcyjnego modelu toru, jako ciężkiego doskonale prostego pręta sprężystego doznającego równomiernych oddziaływań sprężystego podłoża. Teoria wyboczenia takiego pręta była opracowana w różnych celach przez szereg autorów (ENGESSEK, TIMOSZENKO i inni). Pewną nową formę nadałem jej w pracy ogłoszonej po niemiecku w skrócie w księdze III Międzynarodowego Kongresu Szynowego w Budapeszcie (wrzesień 1935), a w całości w Nr 3 czasopisma „Inżynier Kolejowy“ z r. 1936 pt. „Zagadnienie stateczności prostego toru o szynach spawanych pod wpływem naprężeń cieplnych“. Przy tej sposobności podkreśliłem ważny wynik teorii, że przy założeniu doskonałej sztywności podłoża nie ma skończonej wartości S_{kr} , co dowodzi, że teoria może ująć nalezycie interesujące nas zjawisko tylko wtedy, gdy uwzględni sprężystą podatność podłoża. Tymczasem w umysłach niektórych poważnych inżynierów tkwi wciąż jeszcze koncepcja szukania skończonej wartości krytycznej przy założeniu sztywnego podłoża, oparta widocznie na rozumowaniu następującym:

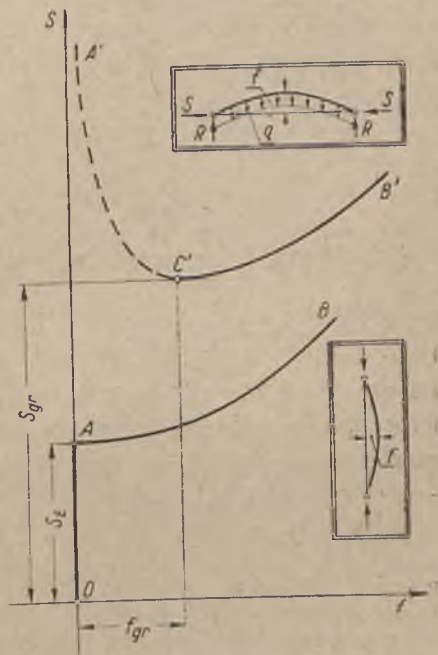


Rys. 1

mi na końce) utrzymać w stosownej wygiętej postaci równowagi siłami (S, S) działającymi na końce, podobnie jak to realizujemy sporządzając z prostego pręta łuk przez związanie jego obu końców cięciwą. Napięcie tej cięciwy zależy od strzałki wygięcia i rozpatrując równowagę pręta położonego w płaszczyźnie pionowej (wygiętego wypukłością ku górze), kiedy ciężar własny gra ważną rolę (rys. 1), znajdziemy co następuje: strzałkom bardzo małym odpowiadają bardzo wielkie wartości S utrzymujące łuk w równowadze. Coraz większym strzałkom odpowiadają zrazu malejące wartości S aż do pewnej granicy S_{gr} , po czym z dalszym wzrostem strzałki znajdujemy rosnące wartości $S > S_{gr}$. Postacie równowagi odpowiadające $S < S_{gr}$ są niestale (niestateczne), zaś odpowiadające $S > S_{gr}$ stale (stateczne), co można stwierdzić przy pomocy kryterium energetycznego. Wielkość S_{gr} ma zatem cechy podobne do wartości krytycznej w zagadnieniu EULERA¹⁾. Wartość ta

¹⁾ Ogromną różnicę między zagadnieniem wyboczenia pręta ustawionego pionowo a leżącego poziomo na podłożu sztywnym ilustrują dobitnie wykresy związku między wartością siły ściskającej S a strzałką wygięcia f (rys. 2). W przypadku pierwszym ciężar własny pręta niezbyt wielkiego gra rolę zupełnie znikomą. Strzałka $f=0$ przy wszelkich wartościach $0 \leq S \leq S_E$, po czym strzałka szybko wzrasta ze wzrostem siły ponad wartość EULERA S_E . Wykres ma postać OAB . W drugim przypadku ciężar własny pręta gra rolę dominującą, sprawiając, że pręt może w równowadze stałej pozostać

rozgranicza bowiem wartości siły odpowiadające niestałym postaciom równowagi od wartości odpowiadających postaciom stałym. Mamy więc niejako drugą „wartość krytyczną“ i to skończoną w przypadku naszego zagadnienia. Taka koncepcja była już wygłoszona i jak się zdaje matematycznie opracowana przez St. BÉLZECKIEGO. W koncepcji tej tkwi przypuszczenie, że w rozpatrywanym zagadnieniu energia odkształceń sprężystych ogrzanych szyn wyzwolona przez zmniejszanie się siły podłużnej może mieć wartość przynajmniej równą sumie energii zginania postaci wygiętej i pracy podniesienia wygiętych części pręta. Gdyby bowiem tak było, to mogłaby zajść zmiana postaci równowagi z prostej na wygiętą dzięki jakiemukolwiek najdrobniejszemu impulsowi zewnętrznemu. Tymczasem w ogóle tak nie jest. To twierdzenie postaram się uzasadnić ściślej, niż to uczyniłem w artykule umieszczonym w nr 23 „Przeglądu Technicznego“ z r. 1936 pt. „Z rozważań nad niebezpieczeństwem zniekształcenia toru kolejowego...“ (W tym artykule bowiem przyjąłem dowolnie zbyt wielką strzałkę wygięcia).



Rys. 2

Koncepcja BÉLZECKIEGO jest w odniesieniu do naszego zagadnienia niefortunna i prowadzi do obliczania wartości nie mogących w żaden sposób służyć za miarę niebezpieczeństwa wyboczenia²⁾. Powoływanie się zaś na prymi-

prostym (czyli $f=0$) przy wszelkich wartościach $0 \leq S < \infty$. Wygięte postacie równowagi są również statycznie możliwe przy wartościach $S_{gr} \leq S < \infty$. Wykres ma postać $OAA_\infty A'C'B'$. Część $A'C'$ krzywej wykresu odpowiada postaciom równowagi niestałej, zaś $C'B'$ postaciom równowagi stałej. S_{gr} jest najmniejszą wartością sił ściskających wystarczającą do utrzymania w równowadze pręta w postaci wygiętej.

²⁾ Poza tym koncepcja powyższa zamąca ustalone pojęcie siły krytycznej w schemacie teoretycznym wyboczenia. Jak niebezpieczne jest stosowanie tej samej nazwy do różnych pojęć, dowodzą dyskusje toczone u nas w ostatnich kilkunastu latach na temat „wyboczenia“. W zagadnieniach stałości równowagi układów sprężystych olbrzymia większość autorów nazywa obciążeniem krytycznym (siłą krytyczną) tę pierwszą z kolejno rosnących wartości obciążenia, przy której zamierzona postać równowagi układu przestaje być stała. Prof. BÉLZECKI zaś pojmował obciążenie krytyczne jako wartość obciążenia, przy której jakakolwiek statycznie możliwa postać równowagi

tywny eksperyment z paskiem płaskiej sprężyny leżącym na stole polega na niedopatrzaniu zasadniczej ilościowej różnicy między ścisaniem siłami zewnętrznymi a ścisaniem naprężeniami termicznymi. Operując zewnętrznymi siłami ścisającymi o wielkości S możemy uważać za rzecz naturalną, że nie zmieniają swojej wartości wykonując pracę przy zbliżeniu końców pręta uwarunkowanym jego wygięciem. Natomiast naprężenia termiczne już przy nieznacznym wygięciu pręta silnie maleją. To wszystko wyjdzie dobitnie na jaw z rachunku opartego na realnych podstawach i uwzględniającego wszystkie wpływy jakie tu zachodzą.

§ 2. Warunki konieczne do istnienia wygiętej w górę postaci równowagi

Gdyby istotnie zaszło wyboczenie pionowe toru traktowanego jako bardzo długi ciężki pręt spoczywający na podłożu sztywnym (ze względu na naciski pionowe), to postacią równowagi byłaby albo jedna fala wytworzona gdziekolwiek w dostatecznej odległości od końców, albo też szereg identycznych fal o skrajnych wartościach krzywizny w punktach szczytowych i najniższych (które pozostały w poziomie pierwotnym)³.

przechodzi ze stałej w niestałą lub odwrotnie. Nasze zagadnienie jest doskonałym przykładem ilustrującym ważną różnicę obu powyższych pojęć.

Ciężki pręt AB nieograniczenie sprężysty, leżący na poziomym sztywnym podłożu i tak podparty, że może się wygiąć tylko w płaszczyźnie pionowej pod wpływem sił (P, P) ścisających go osiowo, jest według pierwszego określenia w równowadze stałej w prostej postaci, przy każdej dowolnie wielkiej wartości siły P , czyli $P_{kr} = \infty$.

Stosując drugie określenie przy rozpatrywaniu wszelkich statycznie możliwych zakrzywionych postaci równowagi i stwierdziwszy, że postaci o małych strzałkach są *niestałe*, a o wielkich strzałkach *stałe*, szukamy postaci rozgraniczającej stałe od niestałych. Odpowiadająca tej postaci skończona wartość P będzie teraz „wartością krytyczną“ według drugiego określenia. Wartość ta jest zgoła różna od poprzedniej. Oczywiście z matematycznego punktu widzenia nie może być tutaj sporu o to, która z tych wartości jest prawdziwa. Obie mają teoretyczno-mechaniczną rację bytu. Atoli każda z nich określa coś innego. Skoro jednakże postawimy pytanie, która z nich charakteryzuje lepiej (tj. zgodniej z rzeczywistością) niebezpieczeństwo wyboczenia toru kolejowego, to odpowiedź ścisła powinna brzmieć: żadna. W ogóle bowiem tylko przy uwzględnieniu *sprężystej podatności podłoża* możemy się spodziewać jako tako przybliżonego odzwierciedlenia matematycznego rzeczywistości. Fizykalna możliwość wyboczenia przy drugiej „wartości krytycznej“ nie jest a priori wyłączona, dzięki możliwości oderwania się od podłoża, ale podlega ciężkiemu warunkowi ograniczającemu. Warunek ten wyraża, że praca potrzebna do wygięcia i podniesienia pręta musi być nie większa od jednoczesnego ubytku energii sprężystej jego ścisania. Otóż warunek ten w ogóle się nie spełnia.

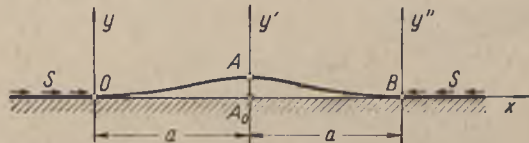
³) To drugie założenie było podstawą obliczeń F. SZELAĞOWSKIEGO, ogłoszonych w „Czasopiśmie Technicznym“ z r. 1934.

Próbne obliczenia wykazały, zgodnie z przewidywaniem, że mniejszego nakładu pracy potrzeba do wytworzenia jednej tylko fali (rys. 3) o krzywiznie po końcach równej 0, a więc przechodzącej łagodnie w części proste⁴). Fala taka winna czynić zadość koniecznym warunkom następującym:

1) Jej postać musi być określona warunkami równowagi. Nie wystarczy tutaj przyjęcie przybliżone $y = f\left(1 - \cos \frac{\pi x}{a}\right)$, albowiem ono posiada za sobą równość liczbową momentów zginających na szczycie i po końcach fali, gdy tymczasem te ostatnie momenty mają być równe zeru.

2) Zbliżenie wzajemne $2u_0$ przekrojów pręta ograniczających długość fali wybożenia odpowiada z jednej strony zmniejszeniu siły ściskającej w sąsiednich prostych częściach pręta z wartości $S = EF\alpha t^\circ$ w przekrojach bardzo odległych od miejsca wygięcia do wartości H w obu przekrojach granicznych.

3) Z drugiej strony jednocześnie zakrzywienie i zmniejszenie sił ściskających w części OA lub AB powoduje przemieszczenie przekrojów O i B ku środkowi. To przemieszczenie jest różnicą przemieszczenia u_1 (zależnego tylko od zakrzywienia bez zmiany długości) i u_2 powstałego wskutek zmniejszenia sił ściskających.



Rys. 3

Mamy więc warunek

$$(1) \quad u_0 = u_1 - u_2.$$

Rachunek jest praktycznie wykonalny przy założeniu, że strzałka wygięcia jest mała w porównaniu do długości fali, co okaże się zupełnie wystarczające. Nie trzeba dodawać, że u_0 , u_1 i u_2 traktujemy jako wielkości bardzo małe w stosunku do a .

Najprostsze jest obliczenie u_0 . Znajdziemy je rozpatrując nieograniczoną prostą część pręta na lewo od O , spoczywającą na podłożu, które oddziałuje na przesunięcie siłą R' odniesioną do jednostki długości, proporcjonalną do przesunięcia u . Jest to wprawdzie założenie odpowiadające podłożu oddziaływanemu sprężystości na przesunięcia poziome, a więc niesztynnemu, ale odzwierciedla wcale dobrze rzeczywistość, jak to wykazały badania wykonane pod kierunkiem prof. AL. WASIUTYŃSKIEGO na posterunku doświadczalnym PKP Włochy⁵).

⁴) Krzywizna większa od zera wymaga większej pracy odkształcenia, jak to będzie dowiedzione poniżej.

⁵) Badania nad odkształceniami sprężystymi nawierzchni kolejowej. Warszawa 1937.

A więc $R' = C_1 u$.

Wychodząc z równania różniczkowego

$$(2) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{C_1 u}{EF} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dx}$$

(wyprowadzonego w nr 3 „Inżyniera Kolejowego“ z r. 1936) znajdujemy łatwo (jeżeli dodatni kierunek osi x przyjmujemy tutaj od O w lewo) przy założeniu działania w przekroju O siły X

$$(3) \quad u = -\frac{X}{\sqrt{C_1 EF}} e^{-x/c}, \quad \text{przy czym} \quad c = \sqrt{\frac{EF}{C_1}}.$$

Ponieważ w naszym przypadku jest:

$$X = EF at^\circ - H,$$

przeto

$$(4) \quad u_0 = |u|_{x=0} = \frac{EF at^\circ - H}{\sqrt{C_1 EF}}.$$

§ 3. Obliczenie u_1

Przystępując teraz do obliczenia u_1 rozwiążemy najpierw zadanie pomocnicze następujące: Ciężki pręt OB (rys. 3), pierwotnie prosty, został słabo wygięty w górę. Znaleźć postać równowagi przy założeniu sił poziomych H, H działających na końce pręta i momentów M_0 . Otóż całkując równanie różniczkowe równowagi pręta w postaci przybliżonej

$$(5) \quad EJ y'' = M_0 + qax - \frac{1}{2} qx^2 - Hy^6$$

przy oznaczeniu

$$(5a) \quad k = \sqrt{\frac{EJ}{H}}$$

znajdujemy

$$(6) \quad y = \frac{qa^2}{H} \left(\frac{1 - \cos \frac{x}{k}}{\frac{a}{k} \operatorname{tg} \frac{a}{k}} - \frac{\sin \frac{x}{k}}{\frac{a}{k}} + \frac{x}{a} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2} \right),$$

⁶⁾ Na pozór wydaje się, że należałoby wyjść z „dokładnego“ równania odkształconej osi pręta, tj. $\frac{EJ}{\rho} = -M$, gdzie ρ oznacza promień krzywizny. Byłoby to istotnie potrzebne, gdyby chodziło o postacie równowagi odpowiadające strzałkom tego samego rzędu, co rozpiętość wygiętej w górę części pręta. Tymczasem okaże się, że strzałki, jakie tutaj wchodzi w rachubę, nie przewyższają 1,5% rozpiętości. Wobec tego równanie przybliżone zapewnia dokładność sięgającą niewątpliwie do czwartego miejsca dziesiętnego, a więc do naszego celu aż nadto wystarczającą.

$$(6a) \quad y' = \frac{qa}{H} \left(\frac{\sin \frac{x}{k}}{\operatorname{tg} \frac{a}{k}} - \cos \frac{x}{k} + 1 - \frac{x}{a} \right).$$

A stąd wyrażenia na momenty zginające:

$$(7) \quad M = -qak \left(\frac{\cos \frac{x}{k}}{\operatorname{tg} \frac{a}{k}} + \sin \frac{x}{k} - \frac{k}{a} \right),$$

$$(7a) \quad M_0 = (M)_{x=0} = qk^2 \left(\frac{\frac{a}{k}}{\operatorname{tg} \frac{a}{k}} - 1 \right),$$

$$(7b) \quad M_A = (M)_{x=a} = qk^2 \left(1 - \frac{\frac{a}{k}}{\sin \frac{a}{k}} \right).$$

Podstawivszy $x=a$ do równania (6) otrzymujemy na strzałkę $2f$ wzór:

$$(8) \quad 2f = \frac{qak}{H} \left[\frac{1}{2} \frac{a}{k} + \operatorname{ctg} \left(\frac{1}{2} \frac{a}{k} - \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Ponieważ M_0 jest według założenia dodatnie, przeto we wzorze (7a) jest $0 < \operatorname{tg} \frac{a}{k} < \frac{a}{k}$, co pociąga za sobą oczywiście warunek:

$$(9) \quad 2\pi > \frac{a}{k} > \pi.$$

Oznaczywszy nadto przez $H_E = \frac{\pi^2 EJ}{a^2}$ „wartość Eulerowską“ siły osiowej napiszemy wzór (8) w postaci

$$(8a) \quad \frac{\pi f}{a} = \frac{qa}{2H} \left[\frac{\pi}{2} + \sqrt{\frac{H_E}{H}} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{H}{H_E}} - 1 \right) \right]$$

albo też

$$(8b) \quad \frac{4fH}{qa^2} = 1 + \frac{\operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{H}{H_E}} - \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{H}{H_E}}}.$$

Przechodząc teraz do naszego przypadku, gdy $M_0 = 0$, widzimy, że warunek ten określa zarazem wartość H , o której dotąd można było tylko powiedzieć, że winna przewyższać znacznie H_E . Wtedy bowiem z (7a) wynika bezpośrednio

$$(10) \quad \operatorname{tg} \frac{a}{k} = \frac{a}{k}.$$

Rozwiązanie tego równania przestępnego daje

$$(11) \quad a = 4,4934 k, \quad \text{czyli} \quad H = 2,0455 H_E^7)$$

albo też

$$(11a) \quad H = 20,19 \frac{EJ}{a^2}.$$

Po wstawieniu tych wartości we wzór (8b) otrzymujemy

$$(12) \quad f = \frac{1}{51,91} \frac{qa^3}{EJ} = \frac{1}{830,6} \frac{q(2a)^4}{EJ}.$$

Teraz dopiero możemy przystąpić do obliczenia u_1 na podstawie znanego przybliżonego wzoru na różnicę między długością łuku a cięciwą

$$(13) \quad u_1 = \frac{1}{2} \int_0^a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx.$$

Przenosząc początek układu do A_0 otrzymamy zamiast równania (6):

$$(14) \quad y = \frac{q}{H} \left[ak \frac{\cos\left(\frac{a}{k} - \pi\right) + \cos\frac{x}{k}}{\sin\left(\frac{a}{k} - \pi\right)} + \frac{1}{2}(a^2 - x^2) \right],$$

$$(15) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{qa}{H} \left[\frac{\sin\frac{x}{k}}{\sin\left(\frac{a}{k} - \pi\right)} + \frac{x}{a} \right].$$

Po wstawieniu tej wartości w (13) i wykonaniu całkowania znajdziemy

$$(16) \quad u_1 = 0,8204a \left(\frac{qa}{H} \right)^2 = 2,756a \left(\frac{l}{a} \right)^2.$$

Gdybyśmy naszą postać równowagi zastąpili w przybliżeniu funkcją

$$y = f \left(1 - \cos \frac{\pi x}{a} \right),$$

⁷⁾ Wynik ten dowodzi trafności pewnych założeń w przybliżonym obliczeniu K. F. VETULANIEGO. „Czasopismo Techniczne“ 1937, nr 2.

to jak wiadomo otrzymalibyśmy

$$u_1 = \frac{\pi^2}{4} a \left(\frac{f}{a}\right)^2 = 2,467a \left(\frac{f}{a}\right)^2,$$

czyli $\sim 10\%$ mniej od powyższej wartości dokładniejszej.

§ 4. Obliczenie u_2

Teraz na koniec znajdziemy u_2 , tj. zmianę długości spowodowaną zmniejszeniem sił podłużnych w każdym przekroju x o wielkość

$$EFat^\circ - N,$$

jeżeli N oznacza siłę osiową odpowiadającą położeniu równowagi, określoną ciężarem własnym, reakcjami poziomymi H i pionowymi qa .

Otóż

$$(17) \quad u_2 = \int \frac{EFat^\circ - N}{EF} ds = aat^\circ - \int \frac{N}{EF} ds,$$

gdyż $\int ds = a$. Oznaczywszy przez β kąt, jaki styczna do linii ugięcia tworzy z osią x (przy obiorze początku w A_0) mamy

$$N = H \cos \beta + qx \sin \beta = H \frac{dx}{ds} + qx \frac{dy}{ds}.$$

A zatem:

$$\begin{aligned} \int \frac{N}{EF} ds &= \frac{1}{EF} \int (H dx + qx dy) = \frac{Ha}{EF} + \frac{q}{EF} \int_0^a xy' dx = \\ &= \frac{Ha}{EF} - \frac{q^2}{EFH} \int_0^a \left(x^2 - ax \frac{\sin \frac{x}{k}}{\sin \frac{k}{k}} \right) dx = \frac{Ha}{EF} - \frac{1}{3} \frac{q^2 a^3}{EFH}, \end{aligned}$$

co za pomocą wzorów (11) i (12) da się wyrazić w postaci:

$$(18) \quad \int \frac{N}{EF} ds = \frac{Ha}{EF} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{51,91}{23,19} \right)^2 \left(\frac{f}{a} \right)^2 \right] = \frac{Ha}{EF} \left(1 - 2,204 \frac{f^2}{a^2} \right).$$

Przy małych strzałkach można oczywiście drugi wyraz pominąć i napisać po prostu

$$(18a) \quad \int \frac{N ds}{EF} = \frac{Ha}{EF}.$$

§ 5. Równanie przedstawiające warunek konieczny wyboczenia w płaszczyźnie pionowej

Warunek (1) $u_0 = u_1 - u_2$ przybiera postać

$$\frac{EFat^\circ - H}{\sqrt{C_1 EF}} = 2,756 \left(\frac{f}{a}\right)^2 a - aat^\circ + \frac{Ha}{EF} \left(1 - 2,2 \frac{f^2}{a^2}\right),$$

która po wyrażeniu f i H przez a według równania (11a) i (12a) przekształca się na równanie

$$(19) \quad at^\circ \left(1 + \frac{1}{a} \sqrt{\frac{EF}{C_1}}\right) = \frac{1}{978} \left(\frac{q}{EJ}\right)^2 a^6 + \frac{20,19 EJ}{\sqrt{C_1 EF}} a^{-3} + \\ + 20,19 i^2 \left[1 - \frac{1}{1223} \left(\frac{q}{EJ}\right)^2 a^6\right] a^{-2}.$$

To równanie określa związek, jaki zachodzić musi między podwyżką temperatury t° a nieoznaczoną jeszcze długością a półfali postaci równowagi pręta. Nie trudno zauważyć, że bardzo wielkim i bardzo małym wartościom a odpowiadają silnie rosnące wartości t° . Należy zatem wyszukać taką wartość a , której odpowiada najmniejsza podwyżka temperatury t° . Tylko tej wartości odpowiada możliwość „wyboczenia“ w znaczeniu ogólniejszym. Nie ma oczywiście mowy o rozwiązaniu ogólnym naszego równania, ale przy liczbowych danych można odpowiednią wartość a znaleźć z wszelkim żądanym przybliżeniem. Oznaczywszy w tym celu niewiadomą wartość a przez z napiszemy równanie (19) w postaci:

$$(19a) \quad at^\circ = \frac{1}{z+h} (h_1 z^7 - h_2 z^5 + h_3 z^{-1} + h_4 z^{-2}),$$

przy oznaczeniach:

$$h = \sqrt{\frac{EF}{C_1}}, \quad h_1 = \frac{1}{978} \left(\frac{q}{EJ}\right)^2, \quad h_2 = \frac{20,19}{1223} \left(\frac{qi}{EJ}\right)^2, \\ h_3 = 20,19 i^2, \quad h_4 = \frac{20,19 EJ}{\sqrt{C_1 EF}}.$$

Warunek minimum at° jako funkcji z daje:

$$(20) \quad 6h_1 z^{10} + 7hh_1 z^9 - 4h_2 z^8 - 5hh_2 z^7 - 2h_3 z^2 - (hh_3 + 3h_4)z - 2hh_4 = 0.$$

Przyjawszy E i a jak na początku oraz stałe wytrzymałościowe nawierzchni PKP na liniach głównych:

J moment bezwładności przekroju obu szyn = 3200 cm⁴,

F pole przekroju obu szyn = 117 cm²,

$i = \sqrt{\frac{J}{F}} = 5,23$ cm, ciężar własny obu szyn wraz z podkładami

$q = 2$ kG/cm, wreszcie $C_1 = 185$ kG/cm²

na podstawie wymienionych powyżej badań doświadczalnych prof. AL. WA-SIUTYŃSKIEGO (str. 122) otrzymamy

$$h = \sqrt{\frac{EF}{C_1}} = 1152,3 = \text{Num lg } [3,0616] \text{ w cm,}$$

$$h_1 = \frac{1}{978} \left(\frac{q}{EJ} \right)^2 = \text{Num lg } [0,9571 - 23] \text{ w cm}^{-6},$$

$$h_2 = \frac{20,19}{1223} \left(\frac{qi}{EJ} \right)^2 = \text{Num lg } [0,6020 - 20] \text{ w cm}^{-4},$$

$$h_3 = 20,19 i^2 = \text{Num lg } [2,7419] \text{ w cm}^2,$$

$$h_4 = \frac{20,19 EJ}{C_1 EF} = \text{Num lg } [5,8036] \text{ w cm}^3.$$

Równanie (20) napiszemy teraz w postaci

$$(20a) \quad z^{10} + [3,1285]z^9 - [2,4688]z^8 - [5,6273]z^7 - [24,3076]z^2 - \\ - [27,6703]z - [30,2214] = 0.$$

Tutaj liczby ujęte w klamry są logarytmami dziesiętnymi współczynników. Jako szukany (jedyne rzeczywisty dodatni) pierwiastek tego równania znajdujemy łatwo z dokładnością 1⁰/₀₀

$$z = 1168 \text{ cm,}$$

a po wstawieniu w równanie (19a) otrzymujemy

$$t = 45,3^\circ.$$

Z wzorów (11a) i (12) obliczymy nadto •

$$H = 99450 \text{ kG,} \quad 2f = 21,33 \text{ cm} \approx 1 \frac{1}{10} 2a.$$

Znaleziona postać równowagi jest zatem możliwa statycznie przy stosunkowo znacznym podniesieniu temperatury. Z tego jednakże nie wynika, aby ta postać wytworzyła się przez samorzutne wyboczenie, tj. kosztem ubytku energii ściskania ΔL wyzwolonej np. przez drobne wstrząśnięcie lub początkowe zakrzywienie osi. O tym rozstrzygnie obliczenie bilansu energetycznego, a więc wielkości ΔL pracy zginania L_g i pracy podniesienia środka ciężkości L_q .

§ 6. Bilans energetyczny wygiętej postaci równowagi

Wielkości powyższe odniesione do połowy fali wygięcia wyrazimy wzorami:

$$(21) \quad L_g = \frac{1}{2} EJ \int_0^a \frac{ds}{\rho^2} \approx \frac{1}{2} EJ \int_0^a (y'')^2 dx,$$

$$(22) \quad L_g = q \int_0^a y dx,$$

$$(23) \quad \Delta L = \frac{1}{2} \int \frac{S^2}{EF} ds - \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EF} ds.$$

Tutaj $S = EF at^\circ$ oznacza siłę ściskającą przed wyboczeniem, a N takąż siłę po wyboczeniu.

A więc:

$$(23a) \quad \Delta L = \frac{1}{2} \int \left[EF(at^\circ)^2 - \frac{N^2}{EF} \right] ds.$$

W prostych częściach pręta określi siłę osiową N wzór:

$$(24) \quad N = EF at^\circ - (EF at^\circ - H) e^{-x/c}$$

(przy czym x oznacza bezwzględną wartość odległości przekroju od początku fali wyboczenia).

Napiszemy $\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$, gdzie ΔL_1 oznacza ubytek energii ściskania części prostej, a ΔL_2 w części wygiętej o długości a . Otrzymamy więc:

$$(25) \quad \Delta L_1 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left[EF(at^\circ)^2 - \frac{N^2}{EF} \right] dx = \frac{EF}{2} \int_0^\infty \left[(at^\circ)^2 - \left(\frac{N}{EF} \right)^2 \right] dx.$$

Po wstawieniu wyrażenia na N z wzoru (24) i wykonaniu całkowania znajdujemy:

$$(25a) \quad \Delta L_1 = \frac{EF}{2} \left[\frac{EF}{C_1} \left[\frac{3}{2} (at^\circ)^2 - at^\circ \frac{H}{EF} - \frac{1}{2} \left(\frac{H}{EF} \right)^2 \right] \right].$$

W części wygiętej o długości a jest

$$(26) \quad \Delta L_2 = \frac{1}{2} EF (at^\circ)^2 a - \frac{1}{2} EF \int_0^a \left(\frac{N}{EF} \right)^2 ds.$$

Ponieważ już podczas wyprowadzenia wzoru (18) okazało się, że przy spodziewanych małych strzałkach wygięcia w stosunku do długości fali wyboczenia można z bardzo małym błędem zastąpić zmienne N przez stałą wartość H , przeto napiszemy:

$$(26a) \quad \Delta L_2 = \frac{1}{2} a EF \left[(at^\circ)^2 - \left(\frac{H}{EF} \right)^2 \right].$$

Następnie obliczymy L_q wstawiając w równanie (22) wyrażenie (14) na y z uwzględnieniem (11a).

Mamy więc:

$$(27) \quad L_q = \frac{1}{3} \frac{q^2 a^3}{H} = \frac{1}{60,57} \frac{q^2 a^5}{EJ}.$$

Wzór ten można także napisać w postaci:

$$L_q = 0,857 q a f,$$

z której wynika, że praca podniesienia do postaci statycznie możliwej jest o $\sim 14\%$ mniejsza od wartości $q a f$ odpowiadającej przybliżonemu zastąpieniu tej postaci zwykłą sinusoidą.

Obliczając wreszcie L_g według równania (21) znajdziemy najpierw z (6a) przez różniczkowanie:

$$y'' = \frac{q a}{H} \left(\frac{1}{k} \frac{\cos \frac{x}{k}}{\operatorname{tg} \frac{a}{k}} + \frac{1}{k} \sin \frac{x}{k} - \frac{1}{a} \right)$$

albo

$$y'' = \frac{q a}{H} \left[\frac{\cos \left(\frac{x}{k} - \frac{a}{k} \right)}{\sin \frac{a}{k}} - \frac{k}{a} \right].$$

Po wstawieniu w (21) i wykonaniu całkowania otrzymujemy najpierw

$$(28) \quad L_g = \frac{1}{2} E J a \left(\frac{q}{H} \right)^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{k} \right)^2 \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{a}{k} + 1 \right) + \frac{1}{2} \frac{a}{k} \operatorname{ctg} \frac{a}{k} - 1 \right]^2,$$

a z uwzględnieniem związków (10) i (11), czyli

$$\frac{a}{k} = \operatorname{tg} \frac{a}{k} = 4,4934,$$

$$(29) \quad L_g = 9,845 E J a \left(\frac{q}{H} \right)^2 = \frac{9,845}{20,19^2} \frac{q^2 a^5}{EJ} = \frac{1}{41,40} \frac{q^2 a^5}{EJ}.$$

Praca zginania jest zatem około 50% większa od pracy podnoszenia. Można ją przedstawić także przez równanie

$$(29a) \quad L_g = 1,254 q a f.$$

⁸⁾ Wystarczy rzut oka na wyrażenie w klamrach, aby zauważyć, że jego wartość wzrasta, gdy $\frac{a}{k}$ staje się większe od $\operatorname{tg} \frac{a}{k}$, co odpowiada momentowi zginającemu na początku fali $M_0 > 0$. Najmniejszej pracy zginania odpowiada więc $M_0 = 0$, jak to powyżej przyjęto.

§ 7. Rachunek liczbowy w założeniu nawierzchni PKP

Przy tych samych co powyżej wartościach liczbowych znajdujemy teraz

$$\begin{array}{rcl} \Delta L_1 = 16110 \text{ kGcm} & L_q = 21350 \text{ kGcm} & \\ \Delta L_2 = 15350 \text{ „} & L_g = 32030 \text{ „} & \\ \hline \Delta L = 31460 \text{ kGcm} & \text{razem } 53380 \text{ kGcm,} & \end{array}$$

a więc o 21920 kGcm więcej niż można uzyskać z ubytku ΔL energii ściskania. Deficyt energetyczny wynosi zatem $\sim 41\%$, a zarazem wynosi prawie dokładnie tyle, ile praca podniesienia L_q . Deficyt ten odnosi się do podniesienia odpowiedniego odcinka toru na wysokość prawie 7 cm. Drgania wywołane przejazdem najcięższych parowozów nie wywołują miejscowych podniesień większych od kilku milimetrów. Większe podniesienia mogłyby zajść tylko przy katastrofalnym trzęsieniu ziemi, a więc w warunkach nie spotykanych w całej środkowej i północnej Europie. Nie ma zatem mowy o zastosowaniu technicznym koncepcji wyboczenia według BELZECKIEGO. Gdyby podłoże było dostatecznie sztywne (czego jak wiadomo z ważnych powodów unikamy), to wyboczenie nawierzchni (z szyn spawanych) w płaszczyźnie pionowej nie mogłoby zajść na odcinku prostym nawet przy największych upałach.

Dajmy na to, że spawano szyny przy 0° i że w czasie silnej insolacji w lecie temperatura szyn (która może być wyższa od temperatury powietrza) podniosła się właśnie do $\sim 45^\circ$. Wtedy według powyższych rozważań teoretycznych można by na upartego wywołać wyboczenie sztucznie podnosząc ostrożnie stosownymi dźwigniami odcinek nawierzchni o długości mniejszej od 23 m tak, aby powstała strzałka $2f$ przewyższająca nieco wartość powyżej obliczoną, tj. 21,3 cm. W chwili realizacji takiej strzałki okaże się, że nawierzchnia przestaje obciążać dźwignie, można je zatem usunąć zupełnie, a wybrzuszona postać toru zawiśnie w równowadze w powietrzu dzięki zrównoważeniu ciężaru własnego i momentów zginających przez reakcje sił podłużnych w sąsiadujących prostych częściach nawierzchni. Ta równowaga byłaby według teorii powyższej stałą przy podwyższeniu temperatury, ale niestałą przy jej obniżeniu lub jakimkolwiek dodatkowym obciążeniu wygiętej części nawierzchni. W tych ostatnich przypadkach zaszedłby nagły przeskok do pierwotnej prostej postaci. Jeszcze gorzej przedstawia się sprawa, gdy założymy, że wyboczona postać równowagi składa się z szeregu identycznych fal. Wtedy bowiem warunek (1) przyjmuje oczywiście postać:

$$(1a) \quad u_1 - u_2 = 0,$$

po wstawieniu wartości (16) i (18) otrzymamy związek:

$$(30) \quad at^0 = \frac{1}{978} \left(\frac{q}{EJ} \right)^2 a^6 + 20,19 \frac{i^2}{a^2} \left[1 - \frac{1}{1223} \left(\frac{q}{EJ} \right)^2 a^6 \right].$$

Warunek minimum prawej strony tego równania jako funkcji długości półfali a daje przy poprzednich wartościach liczbowych równanie:

$$(31) \quad a^3 - [2,4688]a^6 = [24,3077].$$

(Klamry wskazują, że podano logarytmy współczynników).

Rozwiązanie z pominięciem wyrazu drugiego, którego wpływ jest widocznie mały, dało $a=1093$. Uwzględnivszy ten wyraz znajdujemy:

$$a = 1092 \text{ cm}; \quad t = 41,6^{\circ}; \quad 2f = 16,30 \text{ cm},$$

a dalej (ponieważ $\Delta L_1 = 0$):

$$\begin{array}{r} \Delta L = \Delta L_2 = 1925 \text{ kGcm} \\ \underline{L_q = 15260 \text{ kGcm}} \\ \underline{L_g = 22325 \text{ kGcm}} \\ \text{razem} \quad 37585 \text{ kGcm}, \end{array}$$

tj. $\sim 19,5$ razy więcej niż wynosi ubytek energii ściskania, którym rozporządzamy. Tego rodzaju „wyboczenie“ byłoby więc możliwe, gdybyśmy dołożyli wstrząśnienie o energii odpowiadającej podniesieniu nawierzchni o 16 cm.

Jak widać z powyższego, omawiana koncepcja „pseudowyboczenia“ zawodzi zupełnie w odniesieniu do naszego zagadnienia, dając wartości „krytyczne“, które ze zjawiskiem wyboczenia mają bardzo mało wspólnego.

Na zakończenie wypada jeszcze rozważyć wpływ zmiany spadku toru na rozpatrywanym odcinku prostym w planie. W miejscach zmiany spadku stosuje się jak wiadomo zaokrąglenie osi o promieniu R , wynoszącym przynajmniej 5000 m. Gdy oba spadki tworzą kąt wklęsły, to naprężenia cieplne wywołują zwiększenie nacisku na podłoże, co jeszcze bardziej utrudnia wyboczenie pionowe. Efekt odwrotny zachodzi w przypadku kąta wypukłego. Wtedy siła wzdłużna N wywoła oczywiście zmniejszenie pionowej reakcji podłoża o wielkość $p = \frac{N}{R}$. Podstawiając tutaj zaokrągloną wartość $N = 100\,000 \text{ kG}$, otrzymamy $p = 20 \text{ kG/m} = 0,2 \text{ kG/cm}$.

Jest to 10% z $q = 2 \text{ kG/cm}$. Stąd wniosek, że część toru położona na tzw. załomie spadku (której długość może wynosić 125 m i więcej) można w przybliżeniu traktować jako prostą zmniejszając ciężar własny nawierzchni o 10%. Wtedy równanie (19a) da tylko nieznacznie zmniejszoną wartość temperatury sprzyjającej wyboczeniu, nie zmieniając praktycznie wniosków poprzednich.

O TEORII WYBOCZENIA TERMICZNEGO SPAWANYCH TORÓW KOLEJOWYCH I BADANIACH DOŚWIADCZALNYCH DLA JEJ SPRAWDZENIA ¹⁾

(Nakładem Autora, 1937 r.)

Wiadomo od dawna, że uniemożliwienie lub choćby znaczne utrudnienie termicznego wydłużania się szyn przy podwyższeniu ich temperatury ponad temperaturę ułożenia toru wywołuje siły ściskające szyny wzdłużnie. Siły te są proporcjonalne do przyrostu temperatury i przy pewnej wartości tej podwyżki osiągają wielkości *niebezpieczne* czyli *krytyczne*. Wartości te prowadzą do niebezpieczeństwa falistego wygięcia osi toru i jego trwałego zniekształcenia, czyli krócej: *wyboczenia toru*. Takie wyboczenie zdarzało się już niejednokrotnie w czasie upałów letnich nawet przed stosowaniem spawania szyn, kiedy wskutek zaniedbania w konserwacji szpary stykowe uległy zamknięciu na dość długim odcinku prostym toru jeszcze przed nastaniem upałów. Wyłoniło się przeto doniosłe zagadnienie techniczne, jak uniknąć tego niebezpieczeństwa zwłaszcza przy nowoczesnej dążności do stosowania szyn spawanych bardzo długich lub nawet „ciągłych“.

Kwestia techniczna prowadzi do zagadnienia naukowego, które da się sformułować w sposób następujący:

Jaka jest zależność temperatury krytycznej od wielkości charakterystycznych wymiary i własności wytrzymałościowe toru i podłoża?

Odpowiedź może dać tylko doświadczenie kierowane przez teorię ujmującą główne rysy zagadnienia mechanicznego, z którym tu mamy do czynienia. Tymi rysami są przede wszystkim odkształcalność sprężysta tak toru, jak i podłoża. Ściskany wzdłużnie tor zachowuje się ze znacznym przybliżeniem jak pręt sprężysty zagłębiony pod ciężarem własnym w sprężystym podłożu. Normalne podłoże toru kolejowego oddziaływa sprężystość w dość obszernych granicach nie tylko na naciski

¹⁾ Z publikacji tej podajemy jedynie ustępy wyjaśniające stanowisko Autora w odniesieniu do badań doświadczalnych i teoretycznych nad wybozeniem termicznym spawanych torów kolejowych (*przyp. red.*).

panionowe, ale także i na siły styyczne przeniesione nań przez tor za pośrednictwem tarcia adhezyjnego. To wynika między innymi z bardzo starannych i obszernych badań AL. WASIUTYŃSKIEGO²⁾).

Dlatego zagadnienie wyboczenia toru pod wpływem sił termicznych prowadzi do uproszczonego schematu teoretycznego wyboczenia bardzo długiego pręta sprężystego pogrążonego w ośrodku oddziaływającym sprężyscie. Ten schemat ogólny nie był jednakże zachowany w pracach różnych autorów dążących do rozwiązania zagadnienia. Wśród nich wyróżniają się trzy grupy. Do pierwszej zaliczam tych, którzy ulegli złudzeniu, że można znaleźć rozwiązanie teoretyczne z pominięciem odkształcalności podłoża, czyli przy traktowaniu go jako sztywne. Te usiłowania były nie tylko bezplodne, ale wywołały szkodliwy zamęt w piśmiennictwie techniczno-naukowym. Mam nadzieję, że przyczyniłem się do wyjaśnienia tej sprawy w kilku artykułach zakończonych pracą pt. „W sprawie niestateczności długiego prostego toru kolejowego o szynach spawanych pod wpływem ogrzania“. (Czasopismo Techniczne Nr 7 z r. 1937).

Przedstawicielem drugiej grupy jest obecnie w Niemczech H. MEIER, który w pracy „Die Stabilität des lückenlosen Vollbahngleises“ (VDI, t. 78 Nr 40 1934)³⁾ wyszedł z założenia początkowego wygięcia toru i szukał wartości siły wzdłużnej potrzebnej do wywołania odkształceń niedopuszczalnych.

Droga ta może prowadzić do rozwiązania praktycznego, ale dopiero po nagromadzeniu długotrwałych i licznych doświadczeń praktycznych; jest więc mało zadowalająca pod względem techniczno-naukowym.

Przechodząc do grupy trzeciej, która przyjmuje wymieniony powyżej schemat teoretyczny, zaznaczę, że przyłączyłem się do tej grupy już dawno pod wpływem jednej z prac doświadczalnych ENGESSERA⁴⁾ i pracy teoretycznej TIMOSZENKI, jednakże głos w tej sprawie zabrałem dopiero na skutek listownej dyskusji z prof. RAABEM przeprowadzonej przed trzema laty.

Wtedy to zająłem się opracowaniem teoretycznym naszego zagadnienia i próbą doświadczalnego sprawdzenia wniosków teoretycznych na prostym modelu. Referat szczegółowy z tych prac ogłosiłem w skrócie

²⁾ AL. WASIUTYŃSKI: Badania nad odkształceniami sprężystymi nawierzchni kolejowej i naprężeniami w szynach na posterunku doświadczalnym Włochy PKP – Warszawa 1937. Nakł. Min. Komunikacji. To samo po francusku jako praca ogłoszona przez Akademię Nauk Technicznych w Warszawie Tom IV r. 1937.

³⁾ Porównaj także B. HUMMEL: Stateczność torów spawanych wobec niebezpieczeństwa wyboczenia. Warszawa 1935.

⁴⁾ FR. ENGESSER: Versuche und Untersuchungen über den Knickwiderstand des seitlich (elastisch) gestützten Stabes. Der Eisenbau. 1918.

po niemiecku w księdze III Międzynarodowego Kongresu Szynowego w Budapeszcie (8–12 września 1935) pt. „Über die Stabilität gerader lückenloser Gleise“ (str. 149–153), a in extenso w „Inżynierze Kolejowym“ (Nr 3 z r. 1936).

W pracach tych uwzględniłem z całą otwartością niedostatki własnego doświadczenia modelowego, przeciwstawiając mu wyniki doświadczenia prof. RAABA w Karlsruhe na torze rzeczywistym, które postawiłem wyżej. Atoli wskazałem przy tym na pewne niedostatki i tych badań. Nie ma bowiem pracy doświadczalnej, której by nie można było zarzucić takich lub innych braków. Dlatego naukowa krytyka prac doświadczalnych odbywa się z reguły przy sposobności wykonywania własnych badań krytykującego na ten sam temat, wyjąwszy chyba przypadki rażących błędów lub sprzeczności uderzających oczy wytrawnego badacza.

Najistotniejszą cechą zjawiska przewidzianego przez teorię jest wytworzenie regularnych fal wyboczenia po osiągnięciu wartości krytycznej przez siłę ściskającą. Dlatego chodziło mi przede wszystkim o stwierdzenie doświadczalne faktu falistego i mniej więcej regularnego wygięcia pręta modelowego.

Przebieg zjawiska wyboczenia w naszym zagadnieniu różni się zasadniczo od przebiegu wyboczenia EULERA. W wyboczeniu EULERA mała przewyżka siły ponad wartość krytyczną powoduje bardzo wielki wzrost wygięć. Przy wyboczeniu toru lub naszego modelu odpowiadają zrazu niewielkim przyrostom wygięć bardzo znaczne przyrosty siły ponad S_{kr} aż do chwili pokonania tarcia adhezyjnego i rozpoczęcia ślizgania. Wtedy zaczyna się nowy stan niestałości prowadzący do przejścia postaci sinusoidalnej w inną, nieregularną, gdyż w wysokim stopniu zależną od kapryśków tarcia posuwistego. Mamy więc w rzeczywistości do czynienia niejako z dwiema wartościami krytycznymi siły S : niższą oznaczoną już powyżej przez S_{kr} i określoną wzorem

$$(1) \quad S_{kr} = 2\sqrt{CEJ}$$

(E — moduł sprężystości, J — moment bezwładności przekroju toru, C — moduł ośrodka podatnego) oraz wyższą, którą oznaczymy przez \overline{S}_{kr} , a która usuwa się na razie spod obliczeń teoretycznych.

Doświadczenie potwierdziło częściowo to przewidywanie chociaż wyznaczenie wartości S_{kr} napotkało trudności, jak wynika z relacji w mojej pracy.

Prof. RAAB jest zdania, że teoria wyboczenia toru jako pręta w ośrodku sprężystości podatnym nie tłumaczy wyboczenia jego toru próbnego, jakie zaszło przy podwyższeniu temperatury o 105° , natomiast przypisuje właściwą przyczynę tego wyboczenia (nazywa je „Verwerfung“) osiągnięciu *graniczności plastyczności* wskutek kumulacji naprężeń własnych szyn i naprężeń drugorzędnych z głównymi uwarunkowanymi osiową siłą

ściskającą. Zastosowanie przeze mnie wzoru (1) do interpretacji jego wyników doświadczalnych kwestionuje prof. RAAB argumentem bardzo na pozór ważkim, że znalezione bezpośrednio doświadczalnie wartości O i EJ prowadzą przy pomocy wzoru (1) do wartości S_{kr} znacznie większych od obserwowanych w rzeczywistości. Mam niepłonną nadzieję, że uda mi się dostarczyć argumentów przeciwnych na korzyść stosowalności wzorów teoretycznych. Toteż sporu naukowego z prof. RAABEM nie uważam za zakończony, jak mu to niedawno zakomunikowałem.

Eksperymentator powinien nie tylko znać dobrze dokładność i czułość przyrządów pomiarowych, lecz także orientować się w sprawie obioru stopnia dokładności w zależności od warunków wykonywanego badania. Stosowanie zbyt wielkiej dokładności jest tak samo niewłaściwe, jak zbyt małej.

W wypadkach, kiedy dopiero w toku badań daje się ustalić dokładność odpowiednią, można dojść do niej albo zaczynając od małej dokładności, albo też cofając się od zbyt dużej. Droga pierwsza musi być uznana za naturalniejszą i racjonalniejszą, gdyż wykonywanie pomiarów z przesadną dokładnością jest uciążliwe i pochłania bardzo dużo czasu. Nie znaczy to oczywiście, iż nie należy dążyć do pomiarów dokładnych; nie ulega jednakże w oczach naszych wątpliwości, że dokładność pomiarów winna odpowiadać innym warunkom badania.

Przy badaniach doświadczalnych nad statecznością prętów ściskanych osiowo lub krócej — nad wybočeniem, wyjątkowo liczne czynniki odbijają się na uchwyconej doświadczalnie wartości krytycznej. Tylko niektóre z nich dają się usunąć za pomocą stosowanych zabiegów i urządzeń, inne natomiast pozostają. Tak więc pozostaje błąd pomiaru siły we wskazaniach maszyny wytrzymałościowej. Błąd ten nawet w dobrych nowych maszynach waha się około 1% i zmienia swoją wartość nawet dla dwóch kolejnych obciążeń⁵⁾.

Następnie ruchy względne poszczególnych części maszyny zmieniają w czasie obciążenia próbki linię działania siły, a zmiana ta polega nie tylko na równoległym przesunięciu się tej linii, lecz także na jej nachyleniu się. Podobne skutki powoduje nierównomierne zgniatanie końców próbki, niejednorodność jej materiału, początkowe miejscowe naprężenia, błędy w sporządzaniu próbki itp., przy tym jedne wady nie mogą być całkowicie kompensowane przez inne. Tak np. nie można błędu z powodu niejednorodności pręta badanego lub jego zakrzywienia początkowego skompensować mimośrodowością przyłożenia siły, czy też przyłożeniem dodatkowej pary sił na końcu pręta.

⁵⁾ G. SACHS u. G. FIEK: Der Zugversuch. Lipsk 1926. (Eichung von Kontrollstäben).

Dokładność wyników obniża się szczególnie przy badaniu długich prętów, gdy nie ma mowy o zrównaniu bocznej powierzchni próbki na obrabiarkach. Pręty ze stali walcowanej, zwłaszcza o małych przekrojach, są krzywe i przy ich prostowaniu przybývają obok niejednorodności, jaką posiadały przy wyjściu z huty, jeszcze miejscowe naprężenia rozmieszczone nierównomiernie na długości i przekroju.

Z powodów powyższych jest zrozumiałym, że wielu współczesnych badaczy zagranicznych, którzy niewątpliwie przeszli dobrą szkołę laboratoryjną, poprzestawało na mało dokładnych przyrządach i metodach mierniczych w badaniach nad wyboczeniem i pofałdowaniem (np. prace prof. WAGNERA nad wyboczeniem skrętnym kątowników ogłoszone w „Luftfahrtforschung“ t. II, zes. 6). Takie postępowanie jest szczególnie słusne, gdy chodzi o badania mające dać wyniki, które odpowiadają warunkom zbliżonym do napotykanym w konstrukcji praktycznej.

Toteż nie miałyby sensu ani naukowego, ani też praktycznego przesadna dokładność pomiarowa np. przy badaniach kątowników duralowych na stateczność przy ściskaniu osiowym. Takie kątowniki stosowane w konstrukcjach lotniczych sporządza się z blachy. Ich krawędzie są z reguły dość znacznie pofalowane; przy wyprostowywaniu tych krawędzi powstają naprężenia, których nie można usunąć przez wyżarzenie, gdyż zmieniłyby się pierwotne własności materiału.

Oto są powody, dla których Laboratorium Wytrzymałości Materiałów Politechniki Warszawskiej, stosując posiadane przyrządy bardzo czułe tylko w odpowiednich przypadkach, poprzestało przy wstępnych badaniach nad wyboczeniem sześciometrowej teówki na podłożu z gumy oraz przy niektórych innych badaniach pokrewnych na metodach o dokładności niewielkiej, lecz dającej wystarczające na razie wskazówki co do zgodności głównych rysów teorii z doświadczeniem.

WŁAŚCIWE PRZYCZYNY NIEBEZPIECZEŃSTWA WYBOCZENIA TERMICZNEGO NAWIERZCHNI CIĄGŁEJ PROSTEGO TORU KOLEJOWEGO

(Lwów, 1938)

1. Wiadomo, że sporadyczne wypadki silnego zniekształcenia nawierzchni na długich prostych odcinkach toru zdarzały się w dniach wyjątkowo upalnych już dawniej, kiedy stosowano jeszcze szyny niezbyt długie i połączone łubkami za pomocą śrub. Wtedy jednakże przypisywano niepożądane zjawisko głównie niedostatecznemu zabezpieczeniu swobodnego wydłużania się szyn pod wpływem ogrzania, czyli brakowi stosownych przerw między końcami szyn. Wydawało się na pozór, że główna przyczyna zjawiska powyginania szyn silnie ogrzanych tkwi niejako w geometrycznej konieczności pomieszczenia zwiększonej długości szyny między dwoma jej punktami końcowymi, które unieruchomiono. Ale sprawa nie jest oczywiście tak prosta, gdyż po pierwsze nawierzchnia zachowuje się jak pręt sprężysty o znacznej sztywności zginania tak w płaszczyźnie poziomej, jak i pionowej, po wtóre zaś wygięcie osi tego pręta natrafia na opory różnego rodzaju. Do nich należą: reakcja podłoża, ciężar własny nawierzchni i (przy rozważaniach kinetycznych) opory bezwładności. W przypadkach całkowitego otulenia nawierzchni żwirówką lub innym materiałem może wchodzić w grę także ciężar własny i struktura tego materiału. O tym materiale możemy z reguły przyjąć, że jest praktycznie pozbawiony spójności. Stosownie do tego zakładamy, że reakcje normalne podłoża mogą być tylko ciśnieniami. Reakcje styczne, które dzielimy na wzdłużne i poprzeczne (w odniesieniu do osi toru), mogą być szepne albo poślizgowe. Pierwsze zachodzą między elementami powierzchni stykających się ciał, które są we względnym spoczynku, drugie zaś występują przy względnym ruchu tych elementów. Aby umożliwić teoretyczne ujęcie zagadnienia, traktowano podłoże albo jako sztywne i chropowate, co nie mogło obiecywać zadowalającego rozwiązania, albo też jako ciało sprężyste odkształcalne, przy założeniu upraszczającym, że przemieszczenie w miejscu działania reakcji elementu powierzchniowego zależy tylko od wielkości tej reakcji. Gdy

więc np. ciśnienie na podłoże p wywołuje w miejscu swego działania zagłębienie w , to $p=Cw$, przy czym C jest stałą właściwą podłożu. Takie założenie, niewątpliwie tylko z grubsza przybliżone, okazało się wystarczające przy obliczeniach wytrzymałościowych nawierzchni pod działaniem obciążeń pionowych. Z tego powodu przyjęto, że można je stosować do obliczenia stateczności nawierzchni pod wpływem ściskania wzdłużnego wskutek ogrzania.

Obliczenia tego rodzaju stały się szczególnie aktualne od czasu, kiedy spróbowano z powodzeniem spawania szyn zrazu na kolejach miejskich, których nawierzchnia nie podlega tak wielkim zmianom temperatury, jak nawierzchnia otwartych szlaków zamiejskich. Liczne próby badań teoretycznych i doświadczalnych, jakie się pojawiły w tej dziedzinie, zmierzają do odpowiedzi na pytanie: jakie podwyższenie temperatury szyn spawanych prostego toru ponad temperaturę jego ułożenia grozi niebezpieczeństwem jego zniekształcenia przez odpowiadającą temu podwyższeniu siłę S ściskającą szyny wzdłużnie? Z tą kwestią naukową wiąże się ściśle zagadnienie praktyczne: jak budować nawierzchnię, aby tego niebezpieczeństwa uniknąć?

2. Szukanie odpowiedzi na powyższe pytania domaga się szczegółowego zbadania przyczyn sprowadzających niebezpieczeństwo zniekształcenia nawierzchni. Otóż słabą stroną wszystkich licznych dotychczasowych prac na ten temat, nie wyłączając moich własnych, jest zbytne upraszczanie schematu teoretycznego z pominięciem niektórych wpływów mogących mieć znaczenie rozstrzygające. Niewystarczającym okazał się zwłaszcza schemat statyczny, którym się wyłącznie posługiwano, chociaż w literaturze kolejowej zwracano uwagę na okoliczność, że zniekształcenie silnie rozgrzanej nawierzchni ciągłej zachodziło zwykle bezpośrednio po przejściu pociągu. Nie ulega najmniejszej wątpliwości, że główną przyczyną zniekształcenia falistego nawierzchni pod wpływem dostatecznego podniesienia temperatury jest utrata stateczności prostej postaci równowagi nawierzchni, która się zachowuje jako ściskany wzdłużnie pręt spoczywający na sprężystym podłożu. Ta utrata stateczności zajść może dopiero przy dostatecznie wielkiej wartości sił ściskających, czyli przy wartości nie mniejszej od wartości krytycznej S_{kr} .

Otóż teoretyczne obliczenia S_{kr} opierano na uproszczonych modelach mechanicznych następujących:

Model a. Nawierzchnia zachowuje się jak pręt sprężysty spoczywający na podłożu sztywnym, do którego przylega równomiernie, przy czym każdemu względnemu przemieszczeniu elementu pręta względem podłoża towarzyszy tarcie COULOMBA.

Model b. Nawierzchnia stanowi pręt sprężysty przylegający do podłoża sprężysto podatnego, przy czym możliwe są małe przemieszczenia

elementów pręta bez naruszenia szepienia z podłożem, a więc bez reakcji poślizgowych tarcia, właśnie dzięki sprężystej podatności podłoża. Reakcje poślizgowe mogą zajść dopiero wówczas, gdy przemieszczenia elementów podłoża przekroczą pewną granicę.

Nadto przyjmowano milcząco w rozważaniach teoretycznych obu modeli, że składowe reakcje podłoża równoległe do osi pręta są na całej jego długości równe 0. Atoli takie przyjęcie odpowiada rzeczywistości tylko w częściach środkowych pręta bardzo długiego, a przy tym ogrzanego równomiernie na całej długości.

Z rozważań teoretycznych na podstawie modelu pierwszego wynika, że nie ma skończonej wartości S_{kr} , czyli że niebezpieczeństwo utraty stateczności nie zachodzi przy żadnej skończonej wartości siły ściskającej. To dowodzi, że model ten nie jest wystarczający. Wprawdzie istnieje przy pewnej wartości S także wygięta postać równowagi, która odpowiada równowadze obojętnej, ale przeskok do takiej postaci wymagałby wyłożenia dodatkowej dużej pracy z innych źródeł, aniżeli z energii odkształcenia sprężystego przy termicznym ściskaniu. Uzasadniłem to szczegółowo w pracy pt. „W sprawie niestateczności długiego prostego toru kolejowego o szynach spawanych pod wpływem ogrzania“. (Czasopismo Techniczne Nr 7, 1937 r.). Założenie sztywności podłoża nie pozwala przeto objaśnić obserwowanego już niejednokrotnie wybooczenia poziomego, a nawet pionowego nawierzchni o szynach ciągłych.

3. Ale okazuje się, że i doskonalszy model drugi, chociaż prowadzi do skończonych wartości S_{kr} , to jednak nie wystarcza do uzyskania zgodności wartości obliczanych teoretycznie ze znalezionymi doświadczalnie. Stwierdziłem to (w sposób usuwający niemal wszelką wątpliwość) dopiero po ogłoszeniu artykułu „O teorii wybooczenia termicznego spawanych torów kolejowych...“ (Warszawa 1937), gdzie wyraziłem nadzieję, że w interesującej polemice z prof. F. RAABEM z Karlsruhe, redaktorem pisma „Gleistechnik und Bahnbau“, uda mi się dostarczyć argumentów na poparcie tezy postawicnej w referacie na III Międzynarodowym Kongresie Szynowym w Budapeszcie r. 1935¹⁾.

Tymczasem sprawa przedstawia się w sposób następujący: Według wyników teorii wybooczenia pręta bardzo długiego w ośrodku sprężystości podatnym wartość S_{kr} określa równanie²⁾:

$$(1) \quad S_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{\lambda^2} + \frac{C}{\pi^2} \lambda^2.$$

¹⁾ M. T. HUBER: Über die Stabilität gerader lückenloser Gleise. Obszerniej w pracy pt. „Zagadnienie stateczności prostego toru o szynach spawanych...“. „Inżynier Kolejowy“, Nr. 3 Warszawa 1936.

²⁾ Podany tutaj wzór teoretyczny (1) został wyprowadzony przy założeniu końców ustalonych przegubowo. Bardziej złożony wynik otrzymuje się przy założeniu końców

Tutaj oznacza λ długość półfali sinusoidy jako wyboconej sprężyste postaci równowagi osi pręta, przy czym:

$$(2) \quad \lambda = \pi \sqrt[4]{\frac{EJ}{C}}.$$

A zatem:

$$(3) \quad S_{kr} = 2 \sqrt{CEJ}.$$

Należy pamiętać, że w przypadkach prętów stosunkowo krótkich wynikają z teorii w ogóle większe wartości S_{kr} , aniżeli z powyższych wzorów, ale różnice są praktycznie znikome już wtedy, gdy długość pręta jest 4 do 5-krotną długością λ . Przy tej sposobności przypomnę, że w referacie kongresowym opisałem własne doświadczenia modelowe, które miały przede wszystkim na celu sprawdzenie, czy wyboczenie sprężyste zachodzi według linii falistej, zgodnie z przewidywaniem teorii. Tak też było istotnie, ale zmuszony do poprzestania na jednym modelu zaznaczyłem wyraźnie niewystarczalność wyników doświadczalnych do wyprowadzenia wniosków ilościowych.

Z tego powodu spróbowałem porównać wzory teoretyczne z wynikami doświadczenia prof. RAABA na rzeczywistym torze kolejowym o długości 46 m doprowadzonym do wyboczenia (poziomego) przez podniesienie temperatury o 105° . W tym celu podstawilem we wzór (1) wartość $\lambda = 770$ cm ocenioną z obrazu wyboczenia po doświadczeniu RAABA, wartość EJ obliczoną z wymiarów szyn z nieznaczną tylko podwyżką z powodu sztywności połączenia szyn z podkładami, a wreszcie wartość S odpowiadającą podwyższeniu temperatury o 105° przy założeniu, że przekroje szyn nie doznały uwagi godnych przemieszczeń osiowych. Obliczona z tych danych przy pomocy równania (1) wartość C okazała się równą $4,3$ kG/cm², co uznałem wówczas za prawdopodobne, gdyż jak napisałem „opór przeciw trwałemu przesunięciu poprzecznemu toru mierzony bezpośrednio waha się między 600 a 800 kG/m, czyli od 6 do 8 kG/cm“.

Fatalna pomyłka, jaka tu zaszła, wyszła obecnie na jaw przy sposobności użytkowania wyników pracy doświadczalnej AL. WASIUTYŃSKIEGO.

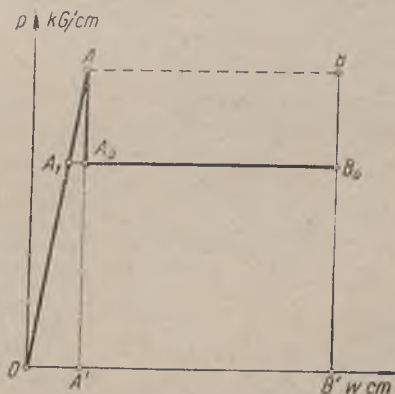
W pracy tej nie wyznaczono wartości C odpowiadającej poziomym odkształceniom poprzecznym toru, ale znaleziono bardzo pewną wartość tego modułu przynależną poziomym odkształceniom wzdłużnym, a mianowicie 370 kG/cm². Ponieważ zaś wiadomo, że wartość C przy odkształ-

utwierdzonych, jednakże przy długościach pręta umożliwiających powstanie 4 lub więcej półfal wyboczenia staje się długość λ praktycznie niezależna od sposobu ustalenia końców. Ten fakt naukowy był widocznie najzupełniej nieznanym autorowi krytyki mojej pracy ogłoszonej w nr 7 Przegl. Techn. z r. 1937.

eniach pionowych wynosi około 300 kG/cm^2 ³⁾, przeto w przypadku tutaj nas interesującym C nie może odbiegać zbytnio od tych wartości, czyli jest kilkadziesiąt razy większe od obliczonych $4,3 \text{ kG/cm}^2$. Wtedy zaś nie można uczynić zadość równaniu (1), albo też co na jedno wychodzi, po wstawieniu po stronie prawej wartości doświadczalnych prof. RAABA otrzymujemy wartość S_{kr} wielokrotnie przewyższającą wartość doświadczalną. Z tego wynika, że prof. RAAB słusznie zaprzeczył zgodności swego doświadczenia z teorią. Nieufność wzbudził we mnie tylko wniosek RAABA, że pofałdowanie toru da się wyjaśnić jedynie przekroczeniem granicy plastyczności materiału szyny, gdyż ta granica leżała bez wątpienia wyżej od naprężenia 2300 kG/cm^2 , jakie zaszło bezpośrednio przed wybozczeniem.

Ale faktem niezbitym jest, że teoria daje znacznie większą wartość S_{kr} , niż doświadczenie RAABA, która to wartość teoretyczna jeszcze bardziej wzrasta, gdy zgodnie ze słusznym wymaganiem tego badacza wstawimy wartość sztywności zginania EJ , uzyskaną z pomiaru ugięcia. Z drugiej strony popierają teorię inne doświadczenia i zastosowania, trzeba więc szukać wyjaśnienia niezgodności w samych założeniach modelu teoretycznego.

4. Otóż doszedłem teraz do przekonania, że znaczne obniżenie wartości rzeczywistej S_{kr} w stosunku do obliczonej z wzoru (1) da się wyjaśnić całkowicie w sposób następujący: Przedstawmy wykresnie zależność poprzecznego przesunięcia toru w jako pręta na sprężystym podłożu od reakcji tego podłoża p zgodnie z założeniami teorii, a otrzymamy rys. 1. Przy bardzo małych przesunięciach $w < OA'$ zachodzi reakcja szczepna proporcjonalna do w o współczynniku C , który można przyjąć równy około 300 kG/cm^2 . Znaczy to, że reakcja $p = 1 \text{ kG/cm}$ powoduje przesunięcie $w = \frac{1}{300} \text{ cm} = 0,033 \text{ mm}$. Skoro zaś reakcja osiąga wartość 6 do 8 kG/cm , to jak poucza doświadczenie, reakcja ze szczepnej staje się poślizgową (punkt A wykresu) i dalsze przemieszczenia zachodzą przy niezmiennej lecz obniżonej wartości reakcji tarcia (na wykresie A_0B_0). Największe zatem przemieszczenie możliwe bez ślizgania a więc takie, jakie przyjmujemy w teorii, jest niewiele większe od $6 \cdot 0,033 = 0,2 \text{ mm}$



Rys. 1

³⁾ Wszystkie dane liczbowe odnoszą się do nawierzchni normalnotorowej typu zbliżonego do tych, jakie były przedmiotem badań prof. AL. WASIUTYŃSKIEGO i prof. RAABA.

do $8 \cdot 0,033 = 0,3$ mm. Ale takie warunki przyjęte w teorii zachodzą przy założeniu poczynionym milcząco, że przy termicznym ściskaniu wzdłużnym pręta nie zachodzą przesunięcia przekrojów wzdłuż osi. Czy to założenie może być spełnione w rzeczywistości? Otóż nie! Nieuniknione różnice temperatur w różnych odcinkach długości toru oraz różnice oporów przeciw przesunięciu osiowemu (a w doświadczeniu RAABA poddania się przyczółków, o które się opierały końce szyn) muszą prowadzić do poślizgów wzdłużnych na długo przed tym, zanim S osiągnie obliczoną teoretycznie wartość S_{kr} . Wtedy zaś, jak wiadomo, ogromnie się zmniejsza opór przesunięcia poprzecznego na odpowiednim odcinku długości. To ma widocznie podobny skutek, jak bardzo silne zmniejszenie C , czyli prowadzi do bardzo wydatnego zmniejszenia rzeczywistej wartości S_{kr} , której wielkość nie daje się wyznaczyć.

5. Oto jest jedna ważna przyczyna uniemożliwiająca uzgodnienie powyższych wzorów teoretycznych z doświadczeniem w naszym zagadnieniu. Ale jest jeszcze druga, kto wie czy nie ważniejsza. Tkwi ona w drganiach poprzecznych nawierzchni wzbudzonych każdym przejściem pociągu. Drgania takie bez uwzględnienia siły ściskającej nawierzchnię osiowo rozpatrywałem w pracy ogłoszonej w „Czasopiśmie technicznym“ z r. 1936, Nr 2. Tutaj wypada uogólnić elementarną teorię tam rozwiniętą przez wprowadzenie do rachunku siły S ściskającej wzdłużnie nawierzchnię o sztywności zginania B w płaszczyźnie pionowej i ciężarze jednostkowym q kG/cm. Równanie różniczkowe zgiętej osi ma postać:

$$(4) \quad B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M - Sy,$$

jeżeli M oznacza moment sił pionowych. Dwukrotne różniczkowanie daje:

$$B \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}.$$

Ponieważ $\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}$ jest równe obciążeniu jednostki długości nawierzchni, które się składa z oporu bezwładności $\frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ i sprężystej reakcji podłoża Cy , więc równanie różniczkowe pionowych drgań poprzecznych nawierzchni przyjmie postać

$$(5) \quad B \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + Cy = 0.$$

Rzecz jasna, że to równanie dotyczy drgań o amplitudach y_0 nie przewyższających wartości skrajnej \bar{y}_0 obliczonej z warunku $C\bar{y}_0 = q$, czyli

$$y_0 < \frac{q}{C}.$$

W naszym zadaniu q zmienia się od 1,6 do 2 kG/cm; $C \approx 300$ kG/cm² (nawierzchnia dość ciężkiego typu PKP normalnotórowych), a więc średnio biorąc

$$y \leq 0,006 \text{ cm} = 0,06 \text{ mm}.$$

Przy amplitudach większych musiałyby zajść miejscowe podniesienie się szczytów fal wygięcia nawierzchni i pojawiłoby się tamże działanie ciężaru własnego, które nie wchodzi bezpośrednio w równanie wyprowadzone, ponieważ przyjęto, że ciężar własny jest zrównoważony częścią reakcji podłoża. To zaś zachodzi tak długo, dopóki nawierzchnia przylega wszędzie do podłoża.

Nie wdając się w rozwiązanie ogólne równania (5) można z łatwością znaleźć nieskończenie wiele typów drgań harmonicznym stojących o długościach fali 2λ i okresach T , podstawivszy:

$$(6) \quad y = y_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{2\lambda} \right),$$

co czyni zadość równaniu różniczkowemu (5) przy jednoczesnym spełnieniu warunku wiążącego T z λ :

$$(7) \quad B \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^4 - S \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 - \frac{q}{g} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 + C = 0.$$

Stąd:

$$(8) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{q}{g} \frac{1}{C + \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^4 B - \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 S}}.$$

Okres drgań staje się, jak widać z wzoru powyższego, przy wielkiej długości fal praktycznie stały i równy

$$(9) \quad T_{(\lambda \rightarrow \infty)} = 2\pi \sqrt{\frac{q}{Cg}}.$$

To odpowiada pionowym drganiom harmonicznym masy $\frac{q}{g}$ pod wpływem siły sprężystości określonej modulem C .

Dzięki obecności siły osiowej S drganie jest nie zawsze możliwe, gdyż przy pewnej wartości S_{kr} , T może zdążyć do ∞ . Odpowiednią wartość znajdujemy z równania

$$C + \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^4 B - \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 S_{kr} = 0,$$

czyli

$$(10) \quad S_{kr} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} B + \frac{\lambda^2}{\pi^2} C.$$

W ten sposób otrzymaliśmy równanie identyczne z równaniem (1) określającym wartość krytyczną siły ściskającej ze względu na niebezpieczeństwo wyboczenia.

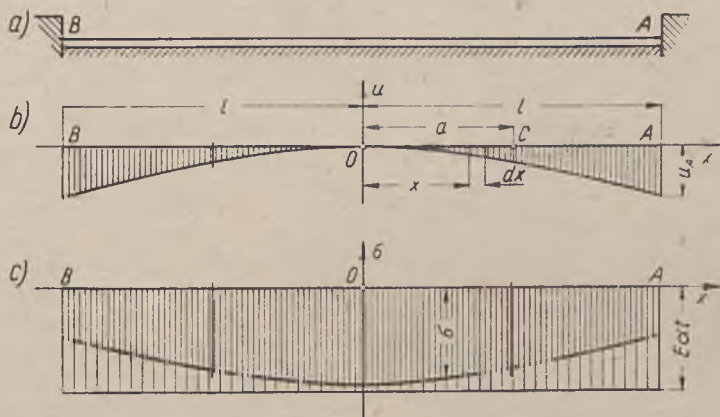
Stosownie do doświadczenia zachodzi wyboczenie łatwiej w płaszczyźnie poziomej i to przy siłach ściskających znacznie mniejszych od obliczonych z wzoru teoretycznego (3). Otóż to zmniejszenie siły da się objaśnić jako efekt drgań pionowych nawierzchni. Wystarczy bowiem, aby amplituda tych drgań przewyższyła nieco 0,06 mm, co może nastąpić już przy drganiach o niewielkiej energii i aby zaszło częściowe zerwanie szepienia nawierzchni z podłożem. Naturalnym skutkiem tego musi być znaczne zredukowanie sprężystej reakcji bocznej utrudniającej wyboczenie w płaszczyźnie poziomej i co za tym idzie odpowiednie zmniejszenie wartości S_{kr} . Przy dostatecznie dużej długości fali drgań wzbudzonych przez przejeżdżający pociąg, zmniejszenie S_{kr} być może bardzo znaczne. Nasuwa się tutaj wiele nowych tematów do badań doświadczalnych i teoretycznych, które by rzuciły więcej jeszcze światła na tę dziedzinę kolejnictwa.

Rozważania pracy niniejszej stwierdzają na razie, że nie tylko teoria oparta na założeniu sztywnego podłoża nie nadaje się do należytego ilościowego objaśnienia zniekształceń torów wywołanych podwyższeniem temperatury, ale i lepsza od niej teoria wyboczenia pręta w ośrodku sprężystym zawodzi prawie zupełnie nie dając nawet przybliżonej wartości krytycznej siły ściskającej. Wyższość tej teorii polega jedynie na tym, że wskazuje na znaczenie dużych wartości sztywności zginania. Rozważania dynamiczne tutaj podane oświetlają nadto wpływ ciężaru własnego nawierzchni.

6. Wracając jeszcze do teoretycznej interpretacji doświadczeń weźmy najpierw pod uwagę badania na torze doświadczalnym w Karlsruhe. Omawiając wyniki tych badań w pracy z roku 1935 podkreśliłem z naciskiem możliwość wpływu poddania się przyczółków mających ustalić końce toru doświadczalnego o długości 46,17 m. W braku danych co do wartości C poprzestałem na ocenie przybliżonej tego wpływu przez obniżenie o 10% wartości naprężenia ściskającego w szynach, które przy danym podwyższeniu temperatury o 105° wynosiłoby 2536 kG/cm^2 (przy $\alpha = 0,0000115$ i $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2$). Wiedząc, że wartość współczynnika oporu szepnego przy wzdłużnych przesunięciach nawierzchni wynosi około 370 kG/cm^2 i przyjmując, że średnia wartość oporu poślizgowego wynosi 7 kG/cm (tj. tyle, wiele znaleziono doświadczalnie przy poprzecznych przesunięciach nawierzchni) otrzymujemy na dolną granicę wielkości poślizgów wzdłużnych nawierzchni względem podłoża wartość przybliżoną

$${}_3\bar{\tau}_0 \approx 0,02 \text{ cm} = 0,2 \text{ mm} .$$

Znaczy to, że poddaniu się przyczółków przewyższającemu 0,2 mm towarzyszyć musiał poślizg końcowych odcinków nawierzchni. Przyjąwszy np. długość tych odcinków równą a , można obliczyć przemieszczenia u_A przekrojów końcowych nawierzchni na podstawie rozważań teoretycznych przytoczonej pracy. Założymy więc (najpierw ogólniej), że przy zachowaniu symetrii względem przekroju środkowego O (rys. 2) zachodzą na długości $OC=a$ tylko reakcje szepne podłoża, a na długości $CA=l-a$ reakcje poślizgowe. Wtedy należy przyjąć, że przesunięcie przekroju C , czyli u_C jest dane i równe 0,02 cm; że nadto $u_0=0$, a stąd obliczyć zmianę wartości naprężenia w szynach przynależną temu przesunięciu.



Rys. 2. a) schemat toru doświadczalnego, b) przesunięcia przekrojów wskutek poddania się przyczółków A i B , c) zmiana naprężeń wskutek poddania się przyczółków

Wydłużenie jednostkowe w miejscu x spowodowane naprężeniem σ (zmiennym wraz z x) i ogrzaniem o t^0 (stałym na całej długości) określi równanie

$$(11) \quad \frac{du}{dx} = \frac{\sigma}{E} + \alpha t^0.$$

Równanie równowagi elementu nawierzchni o długości dx i przekroju F daje

$$(12) \quad F d\sigma = R' dx,$$

jeżeli R' oznacza opór podłoża odniesiony do jednostki długości nawierzchni. Z obu równań wynika

$$(13) \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{R'}{EF}.$$

W części OC możemy przyjąć

$$R' = C_1 u,$$

a zatem u czyni zadość równaniu różniczkowemu

$$(14) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{C_1}{EF} u = \frac{u}{k^2},$$

przy oznaczeniu

$$k = \sqrt{\frac{EF}{C_1}}.$$

Z uwzględnieniem warunków krańcowych $u=0$ przy $x=0$ i $u=u_C$ przy $x=a$ otrzymujemy całkę równania różniczkowego (14) w postaci

$$(15) \quad u = u_C \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{k}}{\operatorname{sh} \frac{a}{k}},$$

a stąd według równania (11)

$$(16) \quad \sigma = -E \alpha t^0 + \frac{E u_C}{k} \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{k}}{\operatorname{sh} \frac{a}{k}}.$$

A zatem

$$(17) \quad \sigma_0 = -E \alpha t^0 + \frac{E u_C}{k} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{a}{k}}, \quad \sigma_C = -E \alpha t^0 + \frac{E u_C}{k} \frac{\operatorname{ch} \frac{a}{k}}{\operatorname{sh} \frac{a}{k}}.$$

Przy powyższych danych, tj. $a = \pm 1500$ cm, $k = 786,5$ cm, w założeniu $C_1 = 370$ kG/cm², $E = 2,1 \cdot 10^6$ kG/cm², $F = 109$ cm², $u_C = 0,02$ cm, znajdujemy

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= -2536 + 16 \text{ kG/cm}^2 \\ \sigma_C &= -2536 + 107 \text{ kG/cm}^2. \end{aligned}$$

W części AC

$$(18) \quad \sigma_A - \sigma_C = \frac{T'(l-a)}{F},$$

przy czym T' w kG/cm oznacza opór tarcia poślizgowego na jednostkę długości nawierzchni, a więc przy $T' = 7$ kG/cm i danych powyższych

$$\begin{aligned} \sigma_A - \sigma_C &= 51 \text{ kG/cm}^2, \quad \text{czyli} \\ \sigma_A &= -2536 + 107 + 51 \text{ kG/cm}^2. \end{aligned}$$

Wreszcie

$$(19) \quad u_A - u_C = l \frac{l-a}{E} \left[E \alpha t^0 + \sigma_C + \frac{T' l}{2F} \right] = 0,05 \text{ cm},$$

przeto

$$u_1 = u_A = 0,07 \text{ cm}.$$

Rachunek powyższy dowodzi, iż poddanie się przyczółków zaledwie o 0,7 mm wystarcza, aby na długości 8,10 m nastąpiło podłużne ślizganie unicestwiające boczny opór tarcia o podłoże, wskutek czego wartość krytyczna siły ściskającej ulega znacznej redukcji. Wyboczenie zajdzie przeto przy znacznie niższej wartości siły od obliczonej z wzoru teoretycznego (3).

7. Podobnie nie trudno uzasadnić teoretycznie, że nierównomierność temperatury nawierzchni, jaka w rzeczywistych warunkach z reguły zachodzi, staje się powodem tym większego obniżenia wartości krytycznej siły ściskającej im ta nierównomierność jest większa. W tym celu obierzemy model bardzo długiego odcinka nawierzchni w postaci nieograniczonego pręta przylegającego do podłoża sprężystego i obliczymy przesunięcia u i naprężenia σ przy ogrzaniu lewej połowy (rys. 3) do temperatury t_2 a prawej do t_1 , przy czym $t_2 > t_1$.

Umieściwszy początek osi x w przekroju pręta rozgraniczającym obie części, otrzymujemy po scałkowaniu równania różniczkowego (14):

$$(20) \quad \begin{cases} u = u_0 e^{x/k} & \text{w lewej części o temperaturze } t_2 \\ u = u_0 e^{-x/k} & \text{w prawej części o temperaturze } t_1. \end{cases}$$

Tutaj u_0 oznacza przesunięcie przekroju 0.

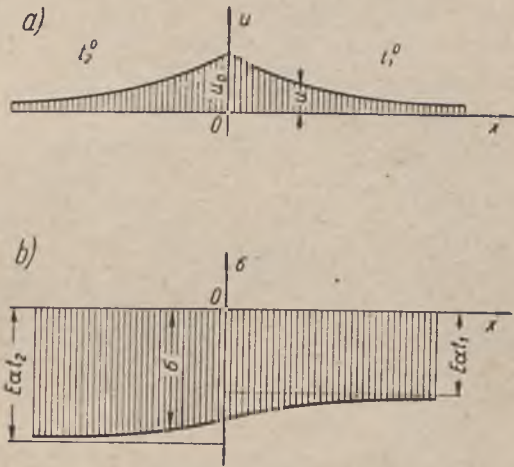
Po wstawieniu powyższych funkcji w równania wydłużeń jednostkowych

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sigma}{E} + \alpha t_2 = \frac{u_0}{k} e^{x/k} \quad (\text{w lewej części})$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sigma}{E} + \alpha t_1 = -\frac{u_0}{k} e^{-x/k} \quad (\text{w prawej części})$$

znajdujemy z warunku $\sigma = \sigma_0$, przy $x = 0$:

$$\frac{u_0}{k} = \frac{\sigma_0}{E} + \alpha t_2, \quad -\frac{u_0}{k} = \frac{\sigma_0}{E} + \alpha t_1,$$



Rys. 3. a) przesunięcia przekrojów nieograniczonego pręta na podłożu sprężystym, ograniczonego w lewej połowie do temperatury t_2 , a w prawej do temperatury $t_1 < t_2$, b) naprężenia osiowe w przekrojach tegoż pręta

a stąd:

$$(21) \quad u_0 = \frac{1}{2} k a (t_2 - t_1).$$

A zatem:

$$(22) \quad \begin{cases} \sigma = \frac{1}{2} E a (t_2 - t_1) e^{x/k} - E a t_2 & (\text{w lewej}) \\ \sigma = -\frac{1}{2} E a (t_2 - t_1) e^{-x/k} - E a t_1 & (\text{w prawej}) \end{cases}$$

$$(23) \quad \sigma_0 = -\frac{1}{2} E a (t_1 + t_2).$$

Zakres ważności równań powyższych określa warunek niezachodzenia poślizgu, tj. $(R')_{max} \leq 7$ kG/cm.

Ponieważ największe $R' = R'_0 = C_1 u_0$, czyli

$$(24) \quad R'_0 = \frac{1}{2} a \sqrt{C_1 E F} (t_2 - t_1).$$

Przy tych samych co powyżej wartościach liczbowych mamy

$$R'_0 = 1,67 (t_2 - t_1) \text{ kG/cm.}$$

Poślizg zajdzie już więc przy $t_2 - t_1 = 5^\circ$, a przy większym skoku temperatury powstanie ślizganie na dłuższym odcinku po obu stronach skoku, co oczywiście prowadzi do zwiększenia niebezpieczeństwa wyboczenia, czyli do zmniejszenia rzeczywistej wartości S_{kr} w stosunku do wartości teoretycznej (3).

8. Rozpatrzywszy stosunek teorii do wyników badań na torze doświadczalnym w Karlsruhe zwrócę się na koniec do własnego doświadczenia modelowego opisanego w przytoczonych w odnośniku 1 publikacjach z r. 1935 i 1936. Jak wynika wyraźnie z tekstu tych prac, ideą przewodnią doświadczenia było przekonanie, że wynik doświadczenia RAABA da się uzgodnić z teorią, której stosowalność w innych przypadkach nie podlegała wątpliwości. Nie mogąc wykonać kosztownego doświadczenia na torze rzeczywistym, obmyśliłem model złożony ze stalowej teówki o smukłości 1420 spoczywającej na podłożu sprężystym z miękkiej gumy. Obciążenie Eulerowskie takiego pręta, obliczone przy założeniu podłoża idealnie gładkiego wynosiłoby 12 kG w przypadku końców przegubowo-przesuwanych, a 47 kG w przypadku doskonałego utwierdzenia tych końców. Dzięki tarcia między prętem a podłożem, jakie zachodziło w rzeczywistości można było siłę ściskającą podnieść do 900 kG, a przy obciążeniu 670 kG zaobserwować dość wyraźnie faliste wygięcie sprężyste o długości półfali 55 do 75 cm. W tym to falistym wygięciu osi pręta przewidywanym teoretycznie upatrywałem słusznie częściowego potwierdzenia teorii, podkreślając jednocześnie sprzeczności ilościowe przy próbach zastosowania wzorów teoretycznych. Dlatego na końcu kongresowego tekstu pracy umieściłem zdania następujące:

„2. Pożądane jest wykonanie nowych doświadczeń w innych warunkach. Doświadczenia te należy wykonać na prętach o różnych długościach i przekrojach. Najwłaściwiej byłoby wywoływać wyboczenie prętów przez nagrzewanie ich podobnie, jak to robił prof. RAAB w swoich doświadczeniach. Przy tym należałoby jednak zaopatrzyć końce prętów w urządzenia do pomiaru sił“.

A dalej:

„3. Opisane tu wyniki doświadczeń autora potwierdzają niektóre wnioski teoretyczne, chociaż doświadczenia te nie wystarczają jeszcze do całkowitego uzasadnienia tych wniosków. Wyniki nowych badań, podobnie jak i badań wykonanych przez prof. RAABA powinny pokrywać się z wynikami badań teoretycznych“.

Jest rzeczą jasną, że teraz, po przekonaniu się, jak małe odchylenia od schematu teoretycznego wystarczają do bardzo znacznego obniżenia wartości S_{kr} w odniesieniu do wartości obliczonej według wzorów (1), (2), (3) oraz im podobnych uwzględniających ustalenia końców, powtórzenie badań doświadczalnych na modelach nie ma już wielkiego znaczenia naukowego. Natomiast bardzo pożądanym byłoby powtórzenie doświadczeń na torze rzeczywistym z uwzględnieniem uwag krytycznych sformułowanych w publikacjach powyżej przytoczonych.

9. Z trzech tez, jakimi zakończyłem referat na Kongresie Budapeszteńskim w r. 1935, ulegnie gruntownej zmianie tylko pierwsza, brzmiąca w sposób następujący:

„Podstawowe kryteria niebezpieczeństwa skrzywienia ciągłego toru prostego dają wyrazić się za pomocą wzorów wynikających z teorii stateczności ściskanego pręta ułożonego na podłożu sprężystym“.

Rozważania niniejszej pracy zmuszają do zastąpienia tezy powyższej następującą:

W prostym torze o szynach spawanych krytyczna wartość wzdużnej siły ściskającej S_{kr} wywołanej podwyższeniem temperatury średnio o t^0 jest w ogóle znacznie mniejsza od wartości obliczonej na podstawie teorii pręta na podłożu sprężystym. Wartość S_{kr} rośnie wprawdzie wraz ze sztywnością zginania i ciężarem własnym nawierzchni, ale na razie nie daje obliczyć się teoretycznie⁴⁾.

Teza 2 pozostaje oczywiście bez zmiany, natomiast w tezie 3 odpada nadzieja, że doświadczenia prof. RAABA dadzą się pogodzić z teorią bez uwzględnienia rozpatrzonych teraz szczegółowo drobnych, lecz nader doniosłych zboczeń od prostego schematu teoretycznego.

⁴⁾ Rola podatności podłoża jest nieokreślona. Z jednej strony bowiem zmniejszenie podatności, tj. zwiększenie C może zwiększyć S_{kr} przy ściskaniu toru bez drgań; z drugiej zaś mniejsza granicę amplitud drgań nawierzchni nie powodujących oderwania części od podłoża, czyli może zmniejszyć S_{kr} bezpośrednio po przejściu pociągu.

W okresie kilkuletnim mego zajmowania się kwestią sporną termicznego wyboczenia torów spawanych wypadło stoczyć kilka polemik. Jedną z nich dotyczyła niedopuszczalności teoretycznego obliczenia S_{kr} opartego na uproszczonym modelu (a) (p. 2). W obronie tej tezy nie pozostałem odosobniony, gdyż w rok po mnie wystąpił z nią prof. RAAB, zwalczając słusznie niektóre prace niemieckie (bez wymienienia autorów). Drugą polemikę podjął prof. RAAB nie mogąc pogodzić się z moją tezą kongresową, a wysuwając za to na pierwszy plan rolę granicy plastyczności stali szynowej, jako stałej materiałowej decydującej przede wszystkim o niebezpieczeństwie wyboczenia termicznego. Trzecią polemikę sprowokował atak na część doświadczalną mojej pracy.

Pominąwszy polemikę pierwszą, wypada stwierdzić, że z dwu następujących tylko druga okazała się płodną, wywołując główne wyniki niniejszej pracy. Jest to zupełnie zrozumiałe, skoro się zważy, że prof. F. RAAB wystąpił z pozytywnymi argumentami zaczerpniętymi z bezpośrednich pomiarów sztywności zginania nawierzchni (nieznanych mi przedtem) i wykazał niezgodność swoich doświadczeń z wzorami teoretycznymi. To mnie musiało skłonić do rewizji moich poglądów i szukania źródeł niezgodności jak to przedstawiłem dokładnie powyżej.

Na zakończenie winienem podkreślić, że wysuwana na pierwszy plan przez prof. F. RAABA rola granicy plastyczności stali szynowej schodzi raczej na plan drugi, gdyż wpływa pośrednio tylko na wartość sztywności zginania, tego głównego parametru wyboczenia.

PODSTAWY TEORETYCZNE BADAŃ DOŚWIADCZALNYCH NAD ZNIKSZTAŁCENIEM TORÓW KOLEJOWYCH

(Gleistechnik und Bahnbau, zesz. 15/16, 1941 r.)

§ 1. Wstęp

Wielu badaczy usiłowało oprzeć teorię zniekształcenia torów kolejowych przez naprężenia termiczne na schemacie zwykłego zagadnienia stateczności pręta na sprężystym podłożu¹⁾.

Jednak, jak wiadomo, wyniki wyliczonych tu prac są sprzeczne z wynikami, zresztą nielicznych doświadczeń²⁾.

W kilku moich pracach, opierając się na dokładnej analizie statycznej, wskazałem, że istotną przyczyną tej sprzeczności jest zastosowanie teorii

¹⁾ Już przed paru dziesiątkami lat wypowiedziano przypuszczenie o możliwości wyjaśnienia za pomocą tej teorii zniekształceń torów kolejowych przez wzdłużne siły ściskające. Jednak doprowadzone do końca opracowania tego zagadnienia są późniejsze. Przytaczamy tutaj niektóre z nich:

a) H. ZIMMERMANN: Die Knickfestigkeit eines Stabes mit elastischer Querstützung, Berlin 1906.

b) E. CHWALLA: Die Stabilität eines elastisch gebetteten Druckstabes. „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“, tom 7, str. 276–284, 1927.

c) M. T. HUBER: Über die Stabilität gerader lückenloser Gleise, III Międzynarodowy Zjazd Szynowy, Budapeszt 1935, str. 149–153.

d) M. T. HUBER: Zagadnienie stateczności prostego toru o szynach spawanych pod wpływem naprężeń cieplnych. „Inżynier Kolejowy“ Nr 3, 1936 r.

e) T. INADA: Theorie der Knickung. „Bautechnik“, str. 458–462, 1936 r.

f) TH. PÖSCHL: Über die Stabilität des Eisenbahngleises. „Gleistechnik und Bahnbau“ Nr 17/18, 1937 r., Nr 1/2, 1938 r.

Prócz tego zagadnienie to jest omawiane w następujących książkach:

g) K. HAYASHI: Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage. Berlin 1921.

h) J. RATZERSDORFER: Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken. Wien 1936.

²⁾ a) F. RAAB: Gleisverwerfungen durch Wärmespannungen. „Gleistechnik u. Bahnbau“, Nr. 9/10, 1937 r.

b) M. T. HUBER: Zur Frage der Deutung der Gleisverwerfungen durch Wärmespannungen. „Gleistechnik u. Bahnbau“, Nr 23/24, 1937 r.

nieprzydatnej w danym przypadku, chociaż dającej dobre rezultaty w wielu pokrewnych zagadnieniach mechaniki technicznej³⁾.

W tej pracy chciałbym rzucić nowe światło na to ważne zagadnienie oraz dać jak najściślejsze podstawy teoretyczne do nowych badań doświadczalnych i do wyprowadzenia z nich wniosków. W niedawno ogłoszonej pracy⁴⁾ przedstawiłem myśli przewodnie takiego ujęcia tego zagadnienia w zastosowaniu do liczbowej oceny podstawowych parametrów znanego doświadczenia F. RAABA. Kontynuując tę myśl rozpocznę od rozpatrzenia próbnego odcinka toru bez złączy. Założmy, że przed nagraniem tego toru pomierzono jak najdokładniej nieuniknione odchylenia obu jego szyn od linii prostych w płaszczyznach poziomych i pionowych. W ten sposób wyznaczone linie środków ciężkości przekrojów szyn mogą być określone z dowolną dokładnością przez następujące równania

$$(1) \quad \begin{cases} y = a_0 + \sum_{r=1,2,3,\dots} \left(a_r \sin \frac{r\pi x}{l} + a'_r \cos \frac{r\pi x}{l} \right) \\ z = b_0 + \sum_{r=1,2,3,\dots} \left(b_r \sin \frac{r\pi x}{l} + b'_r \cos \frac{r\pi x}{l} \right). \end{cases}$$

Za oś odniesienia współrzędnych y i z przyjęto prostą działania siły ściskającej szynę. Jest to oś odciętych x wychodząca ze środka ciężkości końcowego przekroju szyny oznaczonego literą A . Długość rozpatrywanego odcinka szyny oznaczono przez l .

Współrzedne środków ciężkości skrajnych przekrojów szyny A i A' wg równań (1) mają następujące wartości

$$(2) \quad \begin{cases} y_0 = (y)_{x=0} = a_0 + \sum_r a'_r, & y'_0 = (y)_{x=l} = a_0 + \sum_r (-1)^r a'_r, \\ z_0 = (z)_{x=0} = b_0 + \sum_r b'_r, & z'_0 = (z)_{x=l} = b_0 + \sum_r (-1)^r b'_r. \end{cases}$$

³⁾ M. T. HUBER: Właściwe przyczyny niebezpieczeństwa wyboczenia termicznego nawierzchni ciągłej prostego toru kolejowego. „Czasopismo Techniczne“, Lwów 1938 r.

M. T. HUBER: Über den Einfluss der Wärmespannungen auf die Verwerfungsgefahr eines geraden lückenlosen Gleises. Sprawozdanie z IV Międzynarodowego Zjazdu Szynowego, Düsseldorf 1938.

W nowych opracowaniach tego zagadnienia F. CORINI zwrócił uwagę na złożone przyczyny zniekształcenia torów kolejowych. Pracy jego, ogłoszonej po włosku w 1939 r. nie mogłem uzyskać. Cytowano ją w „Zentralblatt für Mechanik“, tom 9, str. 157. Podobno wnioski jej są w zasadzie zgodne z moimi тезami przedstawionymi w sprawozdaniach z Międzynarodowego Kongresu Szynowego w Düsseldorfie. Różnice w ocenie niektórych czynników podane w moim sprawozdaniu i w ocenie tych czynników zawartej w pracy F. CORINI zdają się być nieistotne w odniesieniu do wniosków ostatecznych.

⁴⁾ M. T. HUBER: O niebezpieczeństwie zniekształcenia prostego toru bez złączy i o związku tego zjawiska z teorią stateczności ciężkiego pręta leżącego na podłożu sprężystym. „Gleistechnik u. Fahrbaubau“, Nr. 9/10 i Nr. 11/12, 1941 r.

Dwukrotne różniczkowanie równań (1) daje przybliżone wartości krzywizny pierwotnej osi szyny w płaszczyźnie pionowej xy i w płaszczyźnie poziomej xz

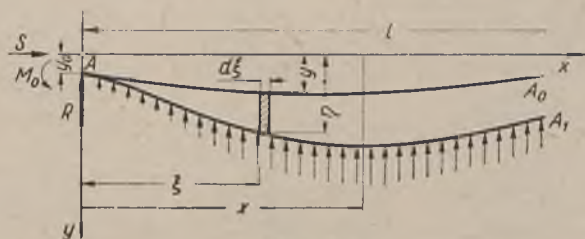
$$(3) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho_1} = \frac{d^2y}{dx^2} = - \sum_r \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 \left(a_r \sin \frac{r\pi x}{l} + a'_r \cos \frac{r\pi x}{l} \right), \\ \frac{1}{\rho_0} = \frac{d^2z}{dx^2} = - \sum_r \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 \left(b_r \sin \frac{r\pi x}{l} + b'_r \cos \frac{r\pi x}{l} \right). \end{cases}$$

§ 2. Teoria zniekształcenia toru wskutek wygięć pionowych

Pomijając wpływ bardzo małych mimośrodków sił ściskających S w skrajnych przekrojach szyny, siły te zwiększają rzędne wklęsłych fal szyny wciskając szynę w podłoże. Początkowe rzędne y tych fal są na ogół większe od końcowych rzędnych η zmierzonych po przyłożeniu sił S . Inaczej zmienia się oddziaływanie podłoża na wypukłe fale szyny. Wzdłuż tych fal reakcja podłoża maleje dopóty, dopóki bezwzględna wartość różnicy $y - \eta$ nie osiągnie wartości $\Delta\eta$ spełniającej równanie

$$C\Delta\eta = q,$$

w którym q oznacza ciężar szyny na jednostkę długości w kG/cm , C oznacza współczynnik podłoża przynależny odkształceniom pionowym. Dla



Rys. 1.

tęgo też równanie odkształconej, które wyprowadzono dalej, jest słuszne tylko w przedziale, w którym siły ściskające S nie przekraczają wartości S_1 doprowadzającej ugięcie szyny chociażby w jednym punkcie fal wypukłych do wartości

$$|y - \eta| = \Delta\eta = \frac{q}{C} \quad ^5)$$

Wprowadzając oznaczenia podane na rys. 1, oraz oddziaływanie podłoża

$$p(\xi) = C[\eta(\xi) - y(\xi)]$$

⁵⁾ Warunek ten dotyczy tylko matematycznego ujęcia zagadnienia, ponieważ wyprowadzone równanie różniczkowe daje tylko przybliżony obraz przebiegu odkształceń.

jako obciążenie poprzeczne szyny o sztywności $B=EJ$, otrzymujemy następujące równanie różniczkowe odkształconej w założeniu, że wygięcia są niewielkie

$$(4) \quad B \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right) = B \left(\frac{d^2 \eta}{dx^2} - \frac{d^2 y}{dx^2} \right) = -S \eta - C \int_0^x (x-\xi) [\eta(\xi) - y(\xi)] d\xi - Rx + M_0.$$

Po dwukrotnym zróżniczkowaniu znajdujemy

$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} - \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{S}{B} \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{C}{B} (\eta - y) = 0.$$

Po wyrażeniu rzędnych za pomocą wzoru (1) równanie to przybiera postać

$$(5) \quad \frac{d^4 \eta}{dx^4} + \frac{S}{B} \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{C}{B} \eta = \sum_r \left[\left(\frac{r\pi}{l} \right)^4 + \frac{C}{B} \right] \left(a_r \sin \frac{r\pi x}{l} + a'_r \cos \frac{r\pi x}{l} \right) + \frac{C}{B} a_0.$$

Jest to liniowe równanie różniczkowe czwartego rzędu, w którym funkcja $\varphi(x)$ jest wydzielona z prawej strony. Ogólne rozwiązanie tego równania składa się z ogólnego rozwiązania równania jednorodnego, bez funkcji $\varphi(x)$ i z dowolnego rozwiązania szczególnego $\eta_1(x)$ równania (5) ⁶⁾.

Zależnie od tego, czy wyróżnik

$$\left(\frac{S}{2B} \right)^2 - \frac{C}{B},$$

równania charakterystycznego

$$(6) \quad v^4 + \frac{S}{B} v^2 + \frac{C}{B} = 0,$$

jest ujemny, dodatni, albo też przybiera wartość zerową, rozwiązanie równania jednorodnego

$$\frac{d^4 \eta}{dx^4} + \frac{S}{B} \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{C}{B} \eta = 0.$$

przybiera różne postaci. Należy przeto odróżnić trzy przypadki wartości S :

$$(7) \quad S \leq 2\sqrt{BC}.$$

Rozwiązanie równania charakterystycznego daje dwie pary pierwiastków

$$(8) \quad \left. \begin{matrix} \alpha^2 \\ \beta^2 \end{matrix} \right\} = \frac{S}{2B} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2B} \right)^2 - \frac{C}{B}}.$$

⁶⁾ W poprzednio cytowanej pracy z roku 1937 Th. PöSCHL daje wyczerpującą dyskusję rozwiązań równania jednorodnego, dlatego też nie ma potrzeby powtarzania jej tutaj.

W pierwszym przypadku, gdy

$$S < 2\sqrt{BC},$$

pierwiastki równania charakterystycznego mają postać

$$t_1, t_2 = \varphi \pm i\psi, \quad t_3, t_4 = -\varphi \pm i\psi,$$

przy

$$(9) \quad \varphi = \sqrt{\sqrt{\frac{C}{4B} - \frac{S}{4B}}}, \quad \psi = \sqrt{\sqrt{\frac{C}{4B} + \frac{S}{4B}}}.$$

Dopisując do ogólnego rozwiązania jednorodnego przynależnego tym pierwiastkom prawdopodobną postać rozwiązania szczególnego równania zupełnego mamy

$$\eta = A_1 \operatorname{ch} \varphi x \cos \psi x + A_2 \operatorname{ch} \varphi x \sin \psi x + A_3 \operatorname{sh} \varphi x \cos \psi x + \\ + A_4 \operatorname{sh} \varphi x \sin \psi x + K_0 + \sum \left(K_r \sin \frac{r\pi x}{l} + K'_r \cos \frac{r\pi x}{l} \right).$$

Podstawiając tę postać rozwiązania do równania (5) znajdujemy, że spełnia ono tożsamościowo to równanie przy następujących wartościach parametrów K_0, K_r, K'_r :

$$K_0 = a_0, \quad K_r = a_r \frac{\left(\frac{r\pi}{l}\right)^4 + \frac{C}{B}}{\left(\frac{r\pi}{l}\right)^4 - \frac{S}{B} \left(\frac{r\pi}{l}\right)^2 + \frac{C}{B}}, \quad K'_r = a'_r \frac{\left(\frac{r\pi}{l}\right)^4 + \frac{C}{B}}{\left(\frac{r\pi}{l}\right)^4 - \frac{S}{B} \left(\frac{r\pi}{l}\right)^2 + \frac{C}{B}}.$$

Ogólne rozwiązanie równania (5) ma w pierwszym przypadku następującą postać

$$(10) \quad \eta = A_1 \operatorname{ch} \varphi x \cos \psi x + A_2 \operatorname{ch} \varphi x \sin \psi x + A_3 \operatorname{sh} \varphi x \cos \psi x + \\ + A_4 \operatorname{sh} \varphi x \sin \psi x + a_0 + \sum \left(a_r \sin \frac{r\pi x}{l} + a'_r \cos \frac{r\pi x}{l} \right) \frac{\left(\frac{r\pi}{l}\right)^4 + \frac{C}{B}}{\left(\frac{r\pi}{l}\right)^4 - \frac{C}{B} - \frac{S}{B} \left(\frac{r\pi}{l}\right)^2}.$$

Znaleziona postać rozwiązania szczególnego równania zupełnego jest ta sama we wszystkich trzech przypadkach wartości wyróżnika.

Stałe całkowania A_1, A_2, A_3, A_4 dają się wyznaczyć w ogólnej postaci tylko w szczególnym przypadku, gdy skrajne przekroje szyny osadzone są przegubowo. Mimo to można wypisać warunki brzegowe w ogólnym

przypadku, gdy w skrajnych przekrojach szyny działają momenty utwierdzenia M_1 i M'_1 . Warunki te mają następującą postać:

- 1) przy $x=0$, mamy $\eta=y_0$;
- 2) przy $x=l$, mamy $\eta=y'_0$;
- 3) przy $x=0$, moment zginający

$$M(x) = -B \left(\frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2} \right) = Sy_0 - M_1 = S(y_0 - y_1),$$

jeżeli

$$y_1 = \frac{M_1}{S};$$

- 4) przy $x=l$, znajdujemy podobnie

$$-B \left(\frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{d^2y}{dx^2} \right) = S(y'_0 - y_1),$$

oznaczając

$$y'_1 = \frac{M'_1}{S}.$$

Do wyznaczenia momentów hyperstatycznych M_1 i M'_1 służą następujące warunki

- 5) przy $x=0$, mamy $\eta' = 0$,
- 6) przy $x=l$, mamy $\eta' = 0$.

Z tych wszystkich warunków otrzymujemy następujące równania, do których dla skrócenia zapisu wprowadzono następujące oznaczenie

$$(11) \quad \left(\frac{r\pi}{l} \right)^4 + \frac{C}{B} - \frac{S}{B} \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 = n_1,$$

$$(11.1) \quad y_0 = A_1 + a_0 + \sum_r a'_r \frac{\left(\frac{r\pi}{l} \right)^4 + \frac{C}{B}}{n_r},$$

$$(11.2) \quad y'_0 = A_1 \operatorname{ch} \varphi l \cos \psi l + A_2 \operatorname{ch} \varphi l \sin \psi l + A_3 \operatorname{sh} \varphi l \cos \psi l +$$

$$+ A_4 \operatorname{sh} \varphi l \sin \psi l + a_0 + \sum_r (-1)^r a'_r \frac{\left(\frac{r\pi}{l} \right)^4 + \frac{C}{B}}{n_r},$$

$$(11.3) \quad S(y_0 - y_1) =$$

$$= B \left[(\psi^2 - \varphi^2) A_1 - 2\varphi\psi A_4 + \sum_r a'_r \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 \frac{\left(\frac{r\pi}{l} \right)^4 + \frac{C}{B}}{n_r} - \sum_r a'_r \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 \right],$$

$$(11.4) \quad S(y'_0 - y'_1) = B \left\{ [(\psi^2 - \varphi^2) \operatorname{ch} \varphi l \cos \psi l + 2\varphi\psi \operatorname{sh} \varphi l \sin \psi l] A_1 + \right. \\ \left. + [(\psi^2 - \varphi^2) \operatorname{ch} \varphi l \sin \psi l - 2\varphi\psi \operatorname{sh} \varphi l \cos \psi l] A_2 + \right. \\ \left. + [(\psi^2 - \varphi^2) \operatorname{sh} \varphi l \cos \psi l + 2\varphi\psi \operatorname{ch} \varphi l \sin \psi l] A_3 + \right. \\ \left. + [(\psi^2 - \varphi^2) \operatorname{sh} \varphi l \sin \psi l + 2\varphi\psi \operatorname{ch} \varphi l \cos \psi l] A_4 + \right. \\ \left. + \sum_r (-1)^r a'_r \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 \frac{\left(\frac{r\pi}{l} \right)^4 + \frac{C}{B}}{n_r} - \sum_r (-1)^r a'_r \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 \right\},$$

$$(11.5) \quad \psi A_2 + \varphi A_3 + \sum_r \frac{a_r r\pi}{n_r l} \left[\left(\frac{r\pi}{l} \right)^4 + \frac{C}{B} \right] = 0,$$

$$(11.6) \quad (\varphi \operatorname{sh} \varphi l \cos \psi l - \psi \operatorname{ch} \varphi l \sin \psi l) A_1 + (\varphi \operatorname{sh} \varphi l \sin \psi l + \\ + \psi \operatorname{ch} \varphi l \cos \psi l) A_2 + (\varphi \operatorname{ch} \varphi l \cos \psi l - \psi \operatorname{sh} \varphi l \sin \psi l) A_3 + \\ + (\varphi \operatorname{ch} \varphi l \sin \psi l + \psi \operatorname{sh} \varphi l \cos \psi l) A_4 + \sum_r (-1)^r \frac{a_r r\pi}{n_r l} \left[\left(\frac{r\pi}{l} \right)^4 + \frac{C}{B} \right] = 0.$$

Z równań (11) znajdujemy wyrażenia na A_1, A_2, A_3, A_4 w zależności od niewiadomych momentów utwierdzenia $M_1 = S y_1, M'_1 = S y'_1$

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1 &= -\frac{S}{B} \sum_r \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 \frac{a'_r}{n_r}, & A_2 &= \frac{A \operatorname{sh} \varphi l \cos \psi l + N \operatorname{ch} \varphi l \sin \psi l}{2\varphi\psi (\operatorname{ch}^2 \varphi l \sin^2 \psi l + \operatorname{sh}^2 \varphi l \cos^2 \psi l)}, \\ A_3 &= \frac{-A \operatorname{ch} \varphi l \sin \psi l + N \operatorname{sh} \varphi l \cos \psi l}{2\varphi\psi (\operatorname{ch}^2 \varphi l \sin^2 \psi l + \operatorname{sh}^2 \varphi l \cos^2 \psi l)}, \\ A_4 &= -\frac{1}{2\varphi\psi} \frac{S}{B} \left[a_0 - y_1 + \sum_r \frac{a'_r}{n_r} \left(\frac{C}{B} - \frac{S}{2B} \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \right) \right]. \end{aligned} \right.$$

W tych wyrażeniach A i N oznaczają następujące wielkości

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{S}{B} \left\{ y'_1 - a_0 - \sum_r (-1)^r a'_r \frac{\frac{C}{B} - \frac{S}{2B} \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2}{n_r} - 2\varphi\psi \operatorname{sh} \varphi l \sin \psi l \sum_r \frac{a'_r \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2}{n_r} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{ch} \varphi l \cos \psi l \left[a_0 - y_1 + \sum_r a'_r \frac{\frac{C}{B} - \frac{S}{2B} \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2}{n_r} \right] \right\}, \\ N &= \frac{S}{B} \left\{ \operatorname{sh} \varphi l \sin \psi l \left[a_0 - y_1 + \sum_r a'_r \frac{\frac{C}{B} - \frac{S}{2B} \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2}{n_r} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2\varphi\psi \left[\operatorname{ch} \varphi l \cos \psi l \sum_r \frac{a'_r \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2}{n_r} - \sum_r (-1)^r a'_r \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Wzory te są bardzo złożone nawet w przypadku przegubowego osadzenia końców szyny, to jest nawet gdy $y_1 = y'_1 = 0$. W tym przypadku wypisana postać wzorów może służyć bezpośrednio za podstawę do wykonania obliczeń, chociaż obliczenia te są bardzo długie i uciążliwe. W ogólnym przypadku natomiast trzeba byłoby rozwiązać równania (11.5) i (11.6) względem y_1 i y'_1 , otrzymując jeszcze bardziej złożone wzory. Należy na to zwrócić uwagę dlatego, że otrzymane równania stanowią podstawę dalszych wniosków.

Na pionowe przesunięcia $\eta - y$ mierzone podczas doświadczeń otrzymujemy następujące wyrażenie

$$(14) \quad \eta - y = \frac{S}{B} \left[A'_1 \operatorname{ch} \varphi x \cos \varphi x + A'_2 \operatorname{ch} \varphi x + \sin \varphi x + A'_3 \operatorname{sh} \varphi x \cos \varphi x + \right. \\ \left. + A'_4 \operatorname{sh} \varphi x \sin \varphi x + \sum_r \left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{n_r} \left(a_r \sin \frac{r\pi x}{l} + a'_r \cos \frac{r\pi x}{l} \right) \right].$$

Nowe stałe A'_i są związane ze stałymi A_i przez następujące zależności

$$A_i = \frac{S}{B} A'_i.$$

Ze wzoru (14) oraz ze wzorów (12) i (13) wynikają następujące wnioski:

- 1) Przesunięcia pionowe znikają wraz z S .
- 2) Przy bardzo małych wartościach S przesunięcia pionowe są w przybliżeniu proporcjonalne do S .
- 3) Jeżeli mimośrodowość sił S w obu skrajnych przekrojach są małe wobec pierwotnych wygięć osi szyny i jeżeli skrajne przekroje szyny są osadzone przegubowo, wówczas $a_0 = 0$, $a'_0 = 0$ oraz $A'_0 = 0$, wskutek czego wzór (14) przybiera postać

$$(14a) \quad \eta - y = \frac{S}{B} \sum_r \frac{a_r \sin \frac{r\pi x}{l}}{\left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 + \frac{C}{B} \left(\frac{l}{r\pi} \right)^2 - \frac{S}{B}}.$$

Dopóki S ma wartości znacznie mniejsze od każdej z wartości S , prowadzącej do zera mianownik

$$\left(\frac{r\pi}{l} \right)^2 + \frac{C}{B} \left(\frac{l}{r\pi} \right)^2 - \frac{S}{B},$$

dopóty rząd przesunięć pionowych i rząd początkowych rzędnych środków ciężkości przekrojów szyny jest taki sam. Jeżeli przy wzroście S wartość tego mianownika dąży do zera, wówczas różnica $\eta - y$ przybiera szczegól-

nie wielkie wartości, nawet gdy rzędne początkowych wygięć są znikomo małe ⁷⁾.

Mianownik wzoru (14a) jest równy zeru przy następujących wartościach S :

$$(15) \quad S_r = B \frac{r^2 \pi^2}{l^2} + C \frac{l^2}{r^2 \pi^2} \quad \text{przy} \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

Są to oczywiście wartości identyczne z wartościami wynikającymi z warunków stateczności. Tworzą one ciąg:

$$S_1 = \frac{\pi^2}{l^2} B + \frac{l^2}{\pi^2} C, \quad S_2 = 4 \frac{\pi^2}{l^2} B + \frac{1}{4} \frac{l^2}{\pi^2} C, \dots$$

W rozpatrywanym zagadnieniu ma znaczenie tylko najmniejsza z tych wartości. Oznaczając

$$\frac{l}{r} = \lambda,$$

znajdujemy z łatwością, że najmniejsza wartość S , przynależy

$$\lambda = \pi \sqrt[4]{\frac{B}{C}};$$

stąd wynika, że

$$(S_r)_{\min} = 2 \sqrt{BC},$$

a odnośna wartość r jest jedną z liczb całkowitych, najbliższych liczbie

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{l}{\pi} \sqrt[4]{\frac{C}{B}}.$$

Jest to ten sam wynik, który został znaleziony w inny sposób przez wielu autorów.

Gdyby podłoże było tak odkształcalne, że kilkumilimetrowe wygięcia nie powodowałyby w żadnym przekroju oderwania szyny od podłoża, wówczas można by porównać doświadczalne wartości sił S z wartościami krytycznymi wynikającymi z powyższych wzorów i przynależnymi regularnemu, falistemu wygięciu szyny. Niestety, nie jest to możliwe w odniesieniu do rzeczywistego toru kolejowego, albowiem graniczna wartość przesunięcia pionowego szyny bez oderwania się toru od podłoża wynosi w założeniu toru o ciężarze 2,6 kG/cm leżącego na podłożu o współczynniku $C = 300$ kG/cm²

$$\Delta \eta = \frac{2,6}{300} = 0,0087 \text{ cm.}$$

⁷⁾ Jednak im większe wartości $\eta - y$ wynikają z równania (14a), tym większy jest błąd zawarty w wartości $\eta - y$, ponieważ przybliżone równanie różniczkowe (5) traci swą dokładność. Dlatego należy zachować tu ostrożność. Można jednak przyjąć, że obliczenie to daje dostatecznie dokładne wyniki, o ile wartość S nie przekracza 80%, a nawet 90% wartości krytycznej.

Obliczenie to wskazuje, że wyprowadzona tu teoria odkształceń toru pod działaniem sił osiowych nie może służyć jako podstawa do wyznaczania sił krytycznych zniekształcających tor, gdyż przyjęte założenia spełniają się w zbyt wąskim przedziale.

Przy stosunkowo małych wartościach sił S występują przesunięcia pionowe szyn o wartościach znacznie większych od wartości granicznej $\Delta\eta$ tak, że dość duży odcinek toru zostaje pozbawiony tarcia i zaczyna przesuwać się w bok ⁸⁾.

Wraz ze wzrostem siły S wzrasta długość uniesionego i przesuwanego się na bok odcinka toru i, chociaż jego stateczność w płaszczyźnie pionowej raczej wzrasta, jednak jednocześnie stateczność w płaszczyźnie poziomej szybko maleje wskutek wzrostu wolnej długości toru i niezależnie od możliwości przekroczenia granicy plastyczności stali. Wskutek tego występuje wreszcie poziome wyboczenie toru. Zwyczajna teoria stateczności nie jest w stanie stwierdzić liczbowo możliwości wystąpienia tego zjawiska, ponieważ jest ono bardzo silnie uzależnione od początkowych krzywizn toru. Natomiast przeprowadzone tu rozważania teoretyczne uzasadniają tę możliwość w sposób przekonywający.

Jakkolwiek mogłoby się zdawać, że dalsza analiza jest zbędna, gdyż zagadnienie już zostało wyjaśnione, jednak trzeba ją zakończyć, aby nie pozostawić żadnych wątpliwości w wydobywaniu z teorii wskazań dla właściwego przeprowadzenia badań doświadczalnych.

Ponieważ drugi z wyróżnionych przypadków, przypadek graniczny, gdy $S = 2\sqrt{BC}$ nie wnosi istotnego do naszego zagadnienia, przeto przechodzimy od razu do rozpatrzenia trzeciego przypadku, gdy $S > 2\sqrt{BC}$.

Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego (5) ma w tym przypadku nieco prostszą postać. Na pierwiastki równania charakterystycznego mamy następujące wzory

$$(17) \quad \alpha^2 = \frac{S}{2B} + \sqrt{\frac{S^2}{4B^2} - \frac{C}{B}}, \quad \beta^2 = \frac{S}{2B} - \sqrt{\frac{S^2}{4B^2} - \frac{C}{B}}.$$

Stąd

$$(18) \quad \eta = C_1 \cos \alpha x + C_2 \sin \alpha x + C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x + \\ + a_0 + \sum_r \frac{1}{n_r} \left[\left(\frac{r\pi}{l} \right)^4 + \frac{C}{B} \right] \left(a_r \sin \frac{r\pi x}{l} + a'_r \cos \frac{r\pi x}{l} \right).$$

⁸⁾ Z początku przesuwa się zapewne tylko jedna szyna, ponieważ pierwotne wygięcia obu szyn nie są równe na tym samym odcinku toru. Komplikuje to nieco przebieg zjawiska, ale wpływa tylko nieznacznie na jego wynik.

Z warunków brzegowych wypisanych w pierwszym przypadku wynikają następujące wyrażenia na stałe C_i

$$(19.1) \quad C_1 = \frac{\beta^2 y_0}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{S}{B} \left[y_0 - y_1 - \sum_r \frac{a'_r}{n_r} \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} - \beta^2 \right) \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \right],$$

$$(19.2) \quad C_2 = \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2) \sin \alpha l} \left\{ \frac{S}{B} \left[y'_0 - y'_1 - \sum_r \frac{(-1)^r a'_r}{n_r} \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} - \beta^2 \right) \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \right] - \right. \\ \left. - \cos \alpha l \left[\beta^2 y_0 + \frac{S}{B} \left(y_0 - y_1 - \sum_r \frac{a'_r}{n_r} \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} - \beta^2 \right) \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \right) \right] \right\},$$

$$(19.3) \quad C_3 = -\frac{\alpha^2 y_0}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \frac{S}{B} \left[y_0 - y_1 - \sum_r \frac{a'_r}{n_r} \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} - \alpha^2 \right) \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \right],$$

$$(19.4) \quad C_4 = \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2) \sin \beta l} \left\{ \frac{S}{B} \left[y'_1 - y'_0 + \sum_r \frac{(-1)^r a'_r}{n_r} \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} - \alpha^2 \right) \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \right] + \right. \\ \left. + \cos \beta l \left[\alpha^2 y_0 + \frac{S}{B} \left(y_0 - y_1 - \sum_r \frac{a'_r}{n_r} \left(\frac{r^2 \pi^2}{l^2} - \alpha^2 \right) \frac{r^2 \pi^2}{l^2} \right) \right] \right\},$$

Do wyznaczenia momentów działających na skrajne przekroje lub też przynależnych im mimośrodków y_1 i y'_1 służą

$$(19.5) \quad \alpha C_2 + \beta C_4 + \sum_r \frac{a_r}{n_r} \frac{r \pi}{l} \left(\frac{r^4 \pi^4}{l^4} + \frac{C}{B} \right) = 0,$$

$$(19.6) \quad -\alpha C_1 \sin \alpha l + \alpha C_2 \cos \alpha l - \beta C_3 \sin \beta l + \beta C_4 \cos \beta l + \\ + \sum_r \frac{(-1)^r a_r}{n_r} \frac{r \pi}{l} \left(\frac{r^4 \pi^4}{l^4} + \frac{C}{B} \right) = 0.$$

Mając dane liczbowe wartości B, C, S, y_0, a_r, \dots można wyznaczyć z tych zależności sześć stałych równania odkształconej, ograniczając się oczywiście do wartości S dostatecznie różnych od wartości $2\sqrt{BC}$.

Na tym kończymy wywody dotyczące zniekształcenia toru wskutek wygięć pionowych. Jest to jedyna teoria wyjaśniająca pozytywnie zjawisko zniekształcenia toru kolejowego. W przeciwstawieniu do niej teoria poziomych wygięć torów, przedstawiona w pracach poprzednich, dawała wynik negatywny, stwierdzając, że tarcie toru o podsypkę uniemożliwia zniekształcenia poziome.

O SIŁE POCIĄGOWEJ PAROWOZU PRZY ROZPĘDZIE POCIĄGU

(Czasopismo Techniczne, Nr 18, 1924 r.)

W obliczeniach technicznych przyjmuje się z wystarczającym przybliżeniem, że (na poziomym prostym torze) ruch pociągu z miejsca spoczynku jest jednostajnie przyspieszony, czyli że prędkość pociągu v wzrasta proporcjonalnie względem czasu t , jaki upływa od chwili ruszenia z miejsca. Iloraz $v/t = p$ określa tedy stałą wartość przyspieszenia w stadium rozpędu, trwającym t_1 sekund, po upływie których osiąga pociąg prędkość v_1 od tej chwili stałą. A zatem:

$$p = \frac{v}{t} = \frac{v_1}{t_1}$$

Siła pociągowa Z parowozu ¹⁾ w stadium rozpędu jest oczywiście sumą siły potrzebnej do pokonania bezwładności i siły znoszącej oporu ruchu. Pierwsza jest iloczynem masy pociągu M i przyspieszenia p , druga zaś jest zależna od prędkości v według wzoru doświadczalnego:

$$W = W_0 + aQv^2.$$

Tutaj oznacza:

Q — ciężar pociągu w tonnach,

v — prędkość w m/sek,

W_0 — opór pociągu przy zanikającej prędkości w kG (przyjmowany jako proporcjonalny względem Q),

a — współczynnik doświadczalny.

Nadto widać, że masa pociągu (w technicznych kilogramowych jednostkach) określa się wzorem $M = 1000Q/g$, jeżeli g w m/sek² oznacza przyspieszenie ciężkości. A zatem równanie

$$(1) \quad Z = 1000 \frac{Q}{g} \frac{v_1}{t_1} + W_0 + aQv^2$$

wyraża siłę pociągową w zależności od prędkości v pociągu.

¹⁾ Może nie będzie zbytecznym podkreślenie, że siła pociągowa Z , rozpatrywana tutaj, nie jest identyczną z napięciem sprzęgła między pierwszym wagonem a parowozem, lecz jest większa od tego napięcia (dającego się mierzyć dynamometrem) o siłę pociągową samego parowozu wraz z tendrem. Ta ostatnia jest siłą rachunkową (sprawdzoną), nie dającą się mierzyć dokładnie bezpośrednio.

Początkową wartością siły pociągowej jest

$$Z_0 = 1000 \frac{Q}{g} \frac{v_1}{t_1} + W_0,$$

końcową zaś (tj. po czasie t_1):

$$Z_1 = 1000 \frac{Q}{g} \frac{v_1}{t_1} + W_0 + aQv_1^2 = Z_0 + aQv_1^2.$$

Wzór (1) można przeto napisać w postaci:

$$(1a) \quad Z = Z_0 + aQv^2.$$

Oznaczmy jeszcze przez s_1 długość drogi przebytej przez pociąg w czasie rozprędu t_1 , wówczas:

$$s_1 = \frac{1}{2} p t_1^2 = \frac{1}{2} v_1 t_1,$$

a praca siły pociągowej parowozu na drodze s_1 w czasie $t_1 = \frac{2s_1}{v_1}$ wyraża się równaniem:

$$L = \int_{s=0}^{s=s_1} Z ds = \int_0^{s_1} (Z_0 + aQv^2) ds = Z_0 s_1 + aQ \int_0^{s_1} v^2 ds.$$

Aby wykonać całkowanie trzeba zmienną v wyrazić przez s za pomocą znanego związku $v^2 = 2ps = 2 \frac{v_1}{t_1} s$.

Wtedy

$$\int_0^{s_1} v^2 ds = 2 \frac{v_1}{t_1} \int_0^{s_1} s ds = \frac{v_1}{t_1} s_1^2,$$

a więc

$$(2) \quad L = Z_0 s_1 + aQ \frac{v_1}{t_1} s_1^2 = Z_0 s_1 + aQ \frac{v_1^2}{2} s_1,$$

jeżeli uwzględnimy związek $v_1^2 = 2p s_1 = 2 \frac{v_1}{t_1} s_1$.

Dzieląc otrzymane wyrażenie pracy L na drogę s_1 przez długość tej drogi, otrzymujemy średnią wartość siły pociągowej w postaci

$$(3) \quad Z_{sr} = Z_0 + aQ \frac{v_1^2}{2} = \frac{1}{2} (Z_0 + Z_1).$$

To równanie wyraża po prostu, że średnia wartość siły pociągowej przy rozruchu równa się średniej arytmetycznej z wartości początkowej Z_0 i końcowej Z_1 .

Ten sam wynik można uzyskać i bez rachunku na podstawie następującego rozumowania.

Całkowita siła pociągowa składa się z oporu bezwładności uważanego za stały na drodze rozpędu i zmiennego oporu wskutek tarcia i innych sił rozpraszających energię. Ten drugi opór rośnie proporcjonalnie względem v^2 , a ponieważ droga s , jako droga ruchu jednostajnie przyspieszonego, wzrasta także proporcjonalnie względem v^2 , przeto opór a z nim razem i siła pociągowa rośnie proporcjonalnie względem s . Wykres siły pociągowej w zależności od drogi jest zatem linią prostą, z czego od razu wynika, że średnia wartość siły jest średnią arytmetyczną z wartości początkowej i końcowej.

Mimo to podręczniki techniczne (jak np. „Hütte“ lub „Technik“) podają od paru dziesiątków lat (podług GROVEGO) inny wzór na średnią siłę pociagową, a mianowicie:

$$(4) \quad Z_{sr} = \frac{2Z_0 + Z_1}{3} = 1000 \frac{Q}{g} \frac{v_1}{t_1} + \frac{2W_0 + W_1}{3}.$$

Zdawałoby się na pozór, że już ze stanowiska matematycznego tylko jeden z obu powyższych wzorów (3 i 4) dla Z_{sr} może być „prawdziwym“. Tymczasem — biorąc rzecz czysto matematycznie — obydwaj wzory są równouprawnione, czyli „prawdziwe“. Albowiem średnia wartość wielkości zmiennej Z , przedstawionej jako funkcja zmiennej niezależnej s jest w ogóle różna od średniej wartości tej samej zmiennej Z , wyrażonej jako funkcja innej zmiennej zależnej od s , np. zmiennej v . Podczas gdy do wartości określonej równaniem (3) doszliśmy obierając s za zmienną niezależną, czyli posługując się ogólnym wzorem

$$Z_{sr} = \frac{1}{s_1} \int_{s=0}^{s=s_1} Z ds,$$

to, jak łatwo się przekonać, otrzymujemy wzór (4) obierając za zmienną niezależną t albo v , czyli kładąc:

$$Z_{sr} = \frac{1}{v_1} \int_{v=0}^{v=v_1} Z dv \quad \text{albo} \quad Z_{sr} = \frac{1}{t_1} \int_{t=0}^{t=t_1} Z dt.$$

Możemy to jeszcze krótko wyrazić zdaniem: Wzór (3) określa średnią wartość siły pociągowej na drodze rozpędu s_1 , wzór (4) zaś średnią wartość tejże siły w czasie rozpędu t_1 .

Inaczej przedstawia się kwestia wartości wzorów ze stanowiska mechanicznego, które w tym przypadku jest oczywiście decydujące. Tutaj bowiem interesuje nas przede wszystkim praca siły pociągowej na drodze

rozpędu, a średnią wartość siły wyznaczamy w tym celu, aby móc wygodnie obliczać pracę. Średnia wartość siły zmiennej ze względu na czas nie ma znaczenia, ani z punktu widzenia mechaniki, ani z punktu widzenia zastosowań, wobec czego wzór (4) musi ustąpić przed (3).

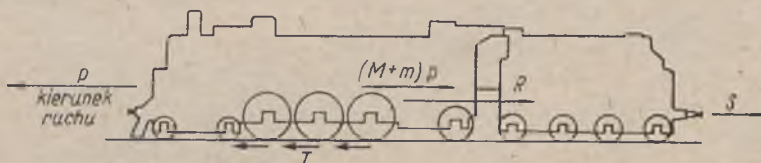
Jest po prostu zdumiewające, jak długo podręczniki techniczne potrafią pielegnować takie zmumifikowane niefortunne pomysły. Widzimy je w wydaniach 17 do 21 podręcznika „Hütte“, a znajdują się zapewne i w nowszych wydaniach, jakie się ukazały po wojnie. Nawet w świeżo wydanym u nas I tomie cennego i na poważne rozmiary zakrojonego dzieła prof. W. MOZERA pt. „Budowa parowozów“, znajdujemy wzór (4) z próbą technicznie-racjonalnego uzasadnienia, która oczywiście powieść się nie mogła. Próba ta dowodzi zresztą, iż Autor wyczuwał dobrze podstawowe niedomagania rozpowszechnionego wzoru.

Wprawdzie czysto praktyczne znaczenie obliczenia Z_{sr} jest, jak się zdaje, niewielkie, jednakże względy dydaktyczne domagały się stanowczo poprawnego wyjaśnienia tej sprawy.

W SPRAWIE DZIAŁANIA PORUSZAJĄCEGO SIĘ POCIĄGU NA TOR I BUDOWLE PODTOROWE

(Inżynier Kolejowy, Nr 4 1930 r.)

Dyskusja, jaka wywiązała się nad interesującym referatem prof. W. WIERZBICKIEGO, wygłoszonym 25 stycznia rb. w Warszawskim Towarzystwie Politechnicznym¹⁾, skłoniła mnie do napisania niniejszego artykułu. Chciałbym w nim przyczynić się do wyjaśnienia kwestii obliczenia sił składowych, które określają działanie pociągu na tor i budowę



Rys. 1

podtorowe w kierunkach równoległych do osi toru. Pionowe składowe tych sił różnią się w normalnym ruchu pociągu (po poziomym torze) tak nieznacznie od sił statycznych, tj. odpowiadających obciążeniu pociągiem w spoczynku, że rozpatrywanie ich można uważać za zbędne.

Jasne jest, że miejsca bezpośredniego działania leżą na szynie, tam gdzie stykają się z nią koła lokomotywy lub wagonów. Szyna przenosi działanie na podkłady, te zaś na żwirówkę itd. Szukając największych, a zarazem najniebezpieczniejszych wartości sił, które dla krótkości nazwiemy „poziomymi“, widzimy od razu, że te wartości wystąpią bądź to przy ruszaniu z miejsca, bądź też przy energicznym hamowaniu. Wartości sił poziomych zależą przeto od wielkości przyspieszenia, jakie udziela masom tworzącym pociąg *siła pociągowa* lokomotywy, albo *siły hamowania*. Pierwsza wytwarza z reguły *przyspieszenie dodatnie*, tj. zgodne z kierunkiem prędkości (wyjąwszy rzadki przypadek hamowania przez „kontrparę“), drugie zaś dają zawsze *przyspieszenie ujemne* („opóźnienie, zwolnienie“).

¹⁾ Patrz nr 2 (66) „Inżyniera Kolejowego“, Kronika krajowa.

Wartość siły hamowania jest ograniczona od góry wartością współczynnika tarcia statycznego μ_0 między kołami a szyną. Jeżeli oznaczymy przez G_i nacisk i -tego koła na szynę, to $\mu_0 G_i$ jest największą wartością siły hamującej przeniesionej przez to koło.

Wartość siły pociągowej lokomotywy jest podobnie ograniczona wartością μ_0 . Różnica polega na tym, że siła pociągowa S (rys. 1) przeniesiona przez sprzęgła pierwszego wagonu jest zawsze mniejsza od $\mu_0 \sum Q_i$ (jeśli $\sum Q_i$ oznacza sumę nacisków kół pędnych lokomotywy) i to mniejsza o sumę całkowitego oporu lokomotywy i tendra R i jej oporu bezwładności (siły D'ALEMBERTA).

Oznaczywszy przez:

M – masę lokomotywy i tendra,

m – tzw. masę sprowadzoną obracających się zestawów kołowych i innych ruchomych części mechanizmu,

p – przyśpieszenie ruchu postępowego lokomotywy,

T – tarcie spoczynkowe (zwane także „adhezją“) kół pędnych,

możemy dynamiczne równanie ruchu napisać w postaci:

$$(1) \quad (M + m)p = T - R - S,$$

przy czym

$$(2) \quad 0 \leq T \leq \mu_0 \sum Q_i.$$

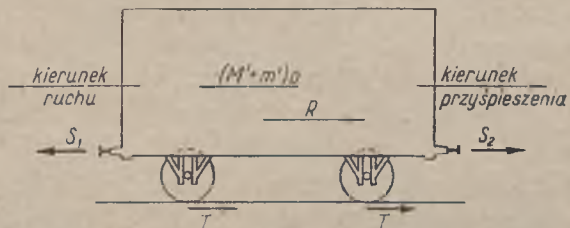
Tutaj interesuje nas przede wszystkim fakt, że koła pędne lokomotywy wywierają na szyny siłę poziomą o wielkości:

$$(3) \quad T = R + S + (M + m)p.$$

Siła ta jest skierowana wstecz, tj. przeciwnie aniżeli uwidocznioma na rys. 1 reakcja szyny na koła pędne (w odniesieniu do kierunku jazdy zgodnego z kierunkiem przyśpieszenia) i może być co najwyżej równa $\mu_0 \sum Q_i$. Od oporu bezwładności jest większa o $(R + S)$.

Tak się przedstawia sprawa w odniesieniu do samej lokomotywy. Biorąc teraz pod uwagę wagon hamowany (rys. 2) należy odróżnić:

- 1) przypadek hamowania normalnego, przy którym koła obracają się i
- 2) przypadek tak silnego nacisku hamulców, że obrót kół jest wstrzymany i koła ślizgają się po szynach.



Rys. 2

Oznaczywszy przez M' i m' masę wagonu zwykłą i sprowadzoną, a przez p bezwzględną wartość ujemnego przyspieszenia ruchu, spowodowanego hamowaniem wagonu, mamy w pierwszym przypadku:

$$(4) \quad (M' + m')p = S_2 - S_1 + R + T,$$

przy czym

$$(5) \quad 0 \leq T \leq \mu_0 \sum G_i,$$

w drugim zaś (przy unieruchomionych kołach)

$$(6) \quad M'p = S_2 - S_1 + R + T',$$

przy czym

$$(7) \quad T' = \mu \sum G_i.$$

Ponieważ μ , tj. współczynnik tarcia przy ślizganiu kół o szynę, jest mniejszy (przy dużych prędkościach nawet znacznie) od μ_0 , przeto:

$$(8) \quad T = \mu_0 \sum G_i$$

jest górną granicą wartości siły poziomej przeniesionej przez wagon na szyny wskutek hamowania. Siła ta jest skierowana przeciwnie, aniżeli uwidoczniona na rysunku 2 reakcja szyny na koła wagonu. Ta więc wartość obok poprzednio obliczonej $T = \mu_0 \sum Q_i$ powinna być uwzględniona przy ocenie stateczności budowli podtorowych itp.

Tutaj nasuwa się uwaga natury teoretycznej z powodu wzmianki prof. St. KUNICKIEGO we wspomnianej na wstępie dyskusji o pewnej pracy rosyjskiej na poruszony temat. Chodzi o to, czy rozpatrując wpływ poruszającego się pociągu na stateczność przyczółka lub filaru mostowego znajdziemy przypadek, w którym wzbudzona tym wpływem siła pozioma działa nie w poziomie szyny, lecz w poziomie np. sprzęgła, przenoszącego siłę pociągową lokomotywy. Taki przypadek jest teoretycznie możliwy przy ruszaniu z miejsca wagonów, znajdujących się za przyczółkiem, przez siłę pociągową lokomotywy, stojącej przed przyczółkiem, ale tak daleko, ażeby działanie kół lokomotywy na szyny nie mogło już przenieść się na nasz przyczółek. Nie wyobrażam sobie, aby to zachodziło kiedy w praktyce, wyjąwszy, że lokomotywa przy jakiejś nadzwyczajnej okazji (np. katastrofie) ciągnęłaby pociąg za pośrednictwem długiej liny. Gdyby jednakże taki przypadek zaszedł, to siła pociągowa, wytworzona przez lokomotywę, w krótkim, ale skończonym przedziale czasu wzrasta od 0 do tej wartości S_0 , jaka jest potrzebna do zrównoważenia spoczynkowych oporów pociągu, po czym dopiero przy dalszym wzroście tej siły rozpoczyna się ruch przyspieszony. Otóż przed rozpoczęciem ruchu pociąg tworzy z przyczółkiem jeden układ niezmienny i pozostający pod wpływem siły S_0 działającej w poziomie sprzęgła.

Natomiast od chwili rozpoczęcia ruchu, przy wartości siły pociągowej S (różnej od S_0), mamy do czynienia z dwoma układami: jadącym pociągiem i spoczywającym przyczółkiem (oczywiście z pominięciem drobnych drgań sprężystych). Na przyczółek działa wówczas tylko bardzo małe stosunkowo tarcie statyczne kół o szyny (koła niezahamowane). Także więc i z tego powodu nie ma ten przypadek znaczenia praktycznego dla stateczności przyczółka; wystarczy przeto zawsze brać pod uwagę tylko przypadki powyżej rozpatrzone, w których na przyczółki, filary itp. przenoszą się siły poziome, działające na wysokości szyny.

Które z tych sił są bardziej niekorzystne dla stateczności budowli podtorowych?

Na to pytanie nie dał zdecydowanej odpowiedzi prof. W. WIERZBICKI w swoim referacie. Jest to zupełnie zrozumiałe, gdyż jak słusznie zauważył w dyskusji prof. A. PSZENICKI, nie łatwo ocenić zasięg wpływu siły podłużnej, działającej na szyny. Sądzę, że na to pytanie mogłyby dać odpowiedź tylko badania doświadczalne, co prawda bardzo trudne i kosztowne. Atoli wątpię, czy te badania należą do najpilniejszych potrzeb budownictwa mostowego i kolejnictwa. Z góry przewidzieć można, że jakkolwiek przy większej liczbie hamowanych wagonów będzie suma sił poziomych $\mu_0 \sum G_i$ znacznie większa od $\mu_0 \sum Q_i$ dla samej lokomotywy, to jednak wskutek większego skupienia sił lokomotywy, będzie jej działanie w naszym zagadnieniu bardziej niekorzystne dla przyczółka lub filaru, aniżeli rozłożone na znacznej długości toru działanie wagonów przy ich hamowaniu. Przy ocenie tego działania trzeba jednakże mieć na uwadze, że pewna jego część zostanie zawsze zmiesiona wytrzymałością samych szyn, a tylko reszta przeniesie się na podtorze.

Na zakończenie winienem jeszcze uprzedzić możliwy zarzut tych czytelników, którzy domagają się zupełnej ścisłości w wypadkach teoretycznych. Otóż przy ruchu przyspieszonym wagonu lub lokomotywy zmieniają się w ogóle także i naciski prostopadle kół na szyny. Jednakże zmiana ta (jak zauważyłem na wstępie) jest bardzo nieznaczna, a co ważniejsze, nie wpływa na sumę tych nacisków, to jest na $\sum G_i$ albo $\sum Q_i$, wchodzące do obliczenia siły podłużnej. Nieścisłość powyższych wywodów jest przeto pozorna.

DRGANIA NAWIERZCHNI KOLEJOWEJ

(Czasopismo Techniczne Nr 2, 1936 r.)

I. Obszerny materiał doświadczalny badań o wysokim stopniu dokładności wykonanych w latach ostatnich przez prof. AL. WASIUTYŃSKIEGO nad odkształceniami nawierzchni pod obciążeniem przez przejeżdżające pociągi, pozwoli niewątpliwie posunąć naprzód kwestię technicznej teorii nawierzchni, jak też rzucić światło na zagadnienia jeszcze bardziej złożone, choć również nader ważne. Do nich należy zagadnienie drgań nawierzchni wzbudzonych ruchem pociągu. W pracy niniejszej pragnę roztrząsnąć tylko jeden rozdział tego zagadnienia i spróbuję obliczyć z wystarczającym przybliżeniem okres *giętych drgań własnych nawierzchni* w płaszczyźnie pionowej.

Przyjmąwszy schemat prostego toru poziomego o nieograniczonej długości, oznaczmy przez

q — ciężar jednostki długości nawierzchni (tj. szyn z podkładami i częściami łączącymi),

B — sztywność zginania równą w przybliżeniu sztywności obu szyn przy zgięciu w płaszczyźnie pionowej.

Zastąpmy teraz nawierzchnię modelem belki sprężystej o tych samych wartościach ciężaru jednostkowego i sztywności, przylegającej do sprężystego podłoża tak, że nacisk wywartny przez belkę na podłoże, odniesiony do jednostki jej długości, tj. p (kG/cm) da się w przybliżeniu określić równaniem

$$p = ky.$$

Tutaj y oznacza ugięcie, a k sprowadzony współczynnik podłoża uważany za stały. Obrawszy dodatni kierunek osi y ku dółowi, napiszemy równanie różniczkowe bardzo małego wygięcia belki w znanej postaci

$$B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -M,$$

przy czym M oznacza moment zgięcia belki. Dwukrotne różniczkowanie daje

$$B \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \bar{p},$$

jeżeli \bar{p} oznacza wypadkową obciążeń pionowych odniesionych do jednostki długości. \bar{p} składa się z oporu bezwładności (siły D'ALEMBERTA)

$$-\frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

i nacisku podłoża $-ky$. (Wpływ bezwładności rotacyjnej elementów belki komplikujący bardzo zadanie pomijamy jako bardzo mały; tak samo oczywiście wpływ sił poprzecznych na ugięcie).

Otrzymujemy więc równanie różniczkowe własnych drgań giętych nawierzchni z pominięciem oporów tłumiących drgania w postaci:

$$(1) \quad B \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = 0.$$

Nie trudno zauważyć, że najprostszą formą ruchu, jaka może czynić zadość temu równaniu jest

$$(2) \quad y = y_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{2\lambda} \right),$$

jeżeli T jest okresem drgania, a λ długością półfali sinusoidy, według której zgina się oś belki. Po wstawieniu bowiem tego wyrażenia za y w lewą stronę równania (1) znajdujemy:

$$\left[B \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^4 - \frac{q}{g} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 + k \right] y_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{2\lambda} \right).$$

To wyrażenie staje się równe zero dla wszelkich wartości t i x , gdy λ i T spełniają warunek:

$$(3) \quad B \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^4 - \frac{q}{g} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 + k = 0.$$

Stąd

$$(4) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{q}{g} \frac{1}{k + \frac{\pi^4 B}{\lambda^4}}}.$$

A zatem okres drgań T rośnie wraz z długością fali 2λ zdążając przy $\lambda \rightarrow \infty$ do wartości

$$(5) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{q}{gk}}.$$

Otrzymane wzory wymagają sprawdzenia doświadczalnego, zwłaszcza że przy ich wyprowadzeniu pominęliśmy opór bezwładności współdrżających cząstek podłoża. Wpływ ten można by uwzględnić w przybliżeniu przez zwiększenie q o ciężar sprowadzony cząstek podłoża, wobec czego

można się spodziewać, że rzeczywisty okres drgania będzie dłuższy od obliczonego z wzoru (5). Wzór ten daje np. przy dość ciężkim typie nawierzchni kolei normalnotorowych

$$T = 0,012 \text{ sek do } 0,018 \text{ sek.}$$

Okresy wynikające z pomiarów AL. WASIUTYŃSKIEGO są wprawdzie nieco dłuższe, ale rzędu setnych części sekundy, co potwierdza nasze rozumowanie.

Liczbowe wartości \bar{T} obliczono z danych następujących:

Moment bezwładności szyny względem osi poziomej $J = 1600 \text{ cm}^4$.

Szttywność zginania obu szyn

$$B = 2EJ = 2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \cdot 1600 = 0,672 \cdot 10^{10} \text{ kG/cm}^2.$$

Przy $\lambda = 200, \quad 500, \quad 1000 \text{ cm}$ wypada

$$\frac{\pi^4 B}{\lambda^4} = 410, \quad 10, \quad 0,65 \text{ kG/cm}^2.$$

Z tego widać, że przy długości półfal $\lambda > 5 \text{ m}$ staje się okres T praktycznie niezależny od λ i da się obliczyć z wzoru (5).

Podkłady o długości 270 cm, szerokości spodniej 26 cm mają powierzchnię przenoszącą nacisk $\sim 7000 \text{ cm}^2$. Przyjąwszy, że są ułożone w odstępach $a = 80 \text{ cm}$, znajdujemy $7000 : 80 = 87,5 \frac{\text{cm}^2}{\text{cm}}$, a więc 1 cm bieżący belki zastępczej przenosi nacisk na $87,5 \text{ cm}^2$.

Mnożąc tę wielkość przez współczynnik (znamienię) podłoża C (o wymiarze kG/cm^3) otrzymujemy wartość k .

Przy $C = 3$ do 5 wypada

$$k = 260 \text{ do } 440 \text{ kG/cm}^2.$$

Ciężar własny obu szyn jest równy $0,9 \text{ kG/cm}$.

Ciężar własny podkładu odniesiony do 1 cm długości toru jest równy od $\frac{55 \text{ kG}}{80 \text{ cm}}$ do $\frac{90}{80}$, czyli $0,7$ do $1,1 \text{ kG/cm}$.

Razem więc ciężar nawierzchni $q = 1,6$ do 2 kG/cm .

Na koniec $g = 981 \text{ cm/sek}^2$.

Wstawiając teraz powyższe wartości we wzór (5) znajdujemy przy $q = 1,6$ i $k = 440$, $T = 0,012$, zaś przy $q = 2$ i $k = 260$, $T = 0,018 \text{ sek}$.

II. Dowiedzimy teraz, że energia całkowita nawierzchni drgającej z amplitudą y_0 jest tym mniejsza, im większa jest długość półfali λ . Ta energia bowiem odniesiona do jednostki długości składa się z

1) energii kinetycznej belki zastępczej

$$\frac{1}{2} q \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2,$$

2) energii kinetycznej podłoża, którą uwzględnić możemy tylko w przybliżeniu zwiększając q ,

3) energii potencjalnej zgięcia belki $\frac{1}{2} B \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2$,

4) energii potencjalnej podłoża $\frac{1}{2}ky^2$.

Wstawiając wartości z równania (2) i uwzględniając warunek (3) znajdujemy wyrażenie na energię całkowitą E_c w postaci

$$(6) \quad E_c = \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \frac{q}{g} y_0^2,$$

a więc niezależnej od fazy drgania. Po wstawieniu za T wartości (4) otrzymujemy wyrażenie

$$(6a) \quad E_c = \frac{1}{2} y_0^2 \left(k + \frac{\pi^4 B}{\lambda^4} \right),$$

które istotnie maleje przy wzroście λ , a przy dość wielkich wartościach λ sprowadza się do

$$(7) \quad E_c = \frac{ky_0^2}{2}.$$

Z tego wynika, że drgania własne będą z reguły długofalowe. Zauważyć trzeba, że mnogość wartości λ o mocy continuum otrzymaliśmy dlatego, że przyjęliśmy belkę zastępczą nieograniczoną w obu kierunkach. Przyjmąwszy skończoną długość l belki znaleźlibyśmy przy każdych danych warunkach ustalenia końców również nieskończoną liczbę wartości λ , ale mnogość tych wartości odpowiada mnogości liczb naturalnych¹⁾.

III. W teorii nawierzchni zakładamy jak wiadomo, że tak współczynnik (znamię) podłoża C , jak i sprowadzony współczynnik k mają charakter stałych wartości stosunku nacisku w pewnym miejscu do obciążenia w tymże miejscu. Takie przyjęcie jest jednakże tylko grubym przybliżeniem, wystarczającym wprawdzie, aby wyprowadzić wzory do obliczenia wytrzymałościowego nawierzchni z dokładnością w praktyce zadowalającą, ale ze stanowiska naukowego błędnym. Łatwo to zrozumieć, zważywszy że obciążenie P działające na punkt A sprężystego podłoża wywołuje nie tylko ugięcie pod punktem A , ale także ugięcie pod każdym innym punktem A_r , w odległości r od A , chociaż to ugięcie zmniejszać się musi ze wzrostem r . Rozwiązanie BOUSSINESQA pozwala nawet obliczyć ugięcie y w punkcie A_r z dużą dokładnością, jeżeli r jest dość wielkie w porównaniu do wymiarów liniowych pola, na które przenosi się obciążenie P w punkcie A . Odpowiedni wzór ma postać

$$(8) \quad y = \frac{1 - \nu^2}{E} \frac{P}{\pi r}$$

ν oznacza tu liczbę POISSONA. Wyobraźmy sobie teraz powierzchnię podłoża, obciążoną w kilku punktach A, A_1, A_2, \dots siłami P, P_1, P_2, \dots o tej samej wielkości P przenoszącymi się na pola stosunkowo małe wobec

¹⁾ M. T. HUBER: Zagadnienia drgań w budowie maszyn. „Przegląd Techniczny“ Warszawa 1932.

wzajemnej odległości punktów. Ugięcie y pod siłą P będzie sumą z ugięcia αP (ze stałą wartością α) jakoby zaszło, gdyby nie było sił P_1, P_2, P_3 i ugięć

$$\frac{1-\nu^2}{E} \frac{P_1}{\pi r_1}, \quad \frac{1-\nu^2}{E} \frac{P_2}{\pi r_2}, \quad \dots$$

wywołanych siłami P_1, P_2 położonymi w odległościach r_1, r_2, \dots od siły P , czyli

$$y_1 = P \left[\alpha + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots \right) \right].$$

Pisząc to równanie w postaci

$$P = K y$$

widzimy, że

$$K = \frac{1}{\alpha + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_{i=1}^n \frac{1}{r_i}},$$

zatem K nie jest stałym współczynnikiem, ale zależy od odległości wszystkich innych obciążeń od miejsca obciążonego A . Współczynnik K maleje, gdy liczba miejsc obciążonych wzrasta, a przyjmuje największą wartość, gdy innych obciążeń nie ma.

Nie więc dziwnego, że np. z pomiarów ugięcia pod jednym obciążonym podkładem otrzymujemy większą wartość współczynnika niż z pomiarów przy obciążeniu odcinka nawierzchni spoczywającego na kilku lub kilkunastu podkładach. Wartość α jest znana w przypadku, gdy obciążenie przenosi się za pośrednictwem bardzo sztywnego walca o średnicy b . Wtedy zagłębienie się tego walca w podłoże sprężyste (nieograniczone od dołu) określa wzór wyprowadzony z teorii sprężystości

$$(9) \quad y = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{P}{b},$$

a zatem

$$\alpha = \frac{1-\nu^2}{Eb},$$

zaś w przypadku układu obciążeń równych, których odległości od rozpatrywanego obciążenia są odpowiednio r_1, r_2, \dots

$$\frac{1}{K} = \frac{1-\nu^2}{Eb} + \frac{1-\nu^2}{\pi E} \sum_i \frac{1}{r_i} = \frac{1-\nu^2}{Eb} \left[1 + \frac{b}{\pi} \sum_i \frac{1}{r_i} \right].$$

Współczynnik K da się przeto w naszym przypadku przedstawić w formie

$$(10) \quad K = \frac{K_0}{1 + \frac{b}{\pi} \sum_i \frac{1}{r_i}},$$

przy czym

$$K_0 = \frac{Eb}{1-\nu^2}$$

Weźmy teraz pod uwagę odcinek nawierzchni na $(2n+1)$ podkładach, obciążony tak, że na każdy podkład przypada siła $2P$. Niechaj $2F$ oznacza pole nacisku jednego podkładu, s osiowy odstęp szyn, a także odstęp podkładów. Wykonując na razie rachunek orientacyjny, możemy zastąpić

każdy podkład dwoma „tłokami“ okrągłymi o średnicy $b = \sqrt{\frac{4F}{\pi}}$

w odstępzie s . A zatem przy nacisku P na jeden tłok izolowany (pół podkładu) ugięcie określa wzór

$$(11) \quad y = \frac{1-\nu^2}{E} \sqrt{\frac{\pi}{4F}} P.$$

Odpowiedni współczynnik

$$K_0 = \frac{2E\sqrt{F}}{(1-\nu^2)\sqrt{\pi}}$$

Obliczenie sumy w mianowniku wzoru (10) daje pod środkowym podkładem:

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{1}{r_i} &= 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{3a} + \dots + \frac{1}{na} \right) + \frac{1}{s} + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \varrho^2}} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\sqrt{(2a)^2 + \varrho^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{(na)^2 + \varrho^2}} \right) = \frac{2}{a} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{s} + \frac{2}{s} \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a\varrho}{s}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Po wstawieniu tej wartości we wzór (10) i zastąpieniu b przez $\sqrt{\frac{4F}{\pi}}$ otrzymamy:

$$(12) \quad K = \frac{K_0}{1 + \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{4F}{\pi}} \left[\frac{1}{s} + \frac{2}{s} \sum_{\varrho=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a\varrho}{s}\right)^2}} + \frac{2}{a} \sum_{\varrho=1}^n \frac{1}{\varrho} \right]}$$

Przy danych liczbowych z punktu I. jest:

$$F = 135 \cdot 26 = 3510 \text{ cm}^2$$

$$a = 80 \text{ cm}, \quad s = 150 \text{ cm}, \quad \frac{a}{s} = 0,5333$$

$$\lg \left(\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{4F}{\pi}} \right) = 1,3280, \quad \text{Num lg} = 21,28, \quad \left(\frac{a}{s} \right)^2 = 0,2845.$$

ϱ	1	2	3	4	5
$1 : \sqrt{1 + \left(\frac{a\varrho}{s}\right)^2}$	0,8822	0,6839	0,5299	0,4244	0,3512
$1 : \varrho$	1	0,5	0,3333	0,25	0,2

Na koniec

$$K = \frac{K_0}{3,171}$$

przy 11 obciążonych podkładach. Natomiast przy obciążeniu tylko jednego podkładu

$$K = \frac{K_0}{1,142}$$

a więc ma prawie trzykrotną wartość.

Temu obliczeniu można poczynić następujące zarzuty:

1) Zastosowane rozwiązanie teorii sprężystości opiera się na założeniu nieskończonej głębokości podłoża jednorodnego, tymczasem rzeczywiste podłoże nawierzchni kolejowej składa się z warstw o różnych własnościach mechanicznych.

2) W znacznej głębokości materiał podłoża jest tak zagęszczony i usztywniony wskutek nacisku warstw nad nim leżących, że należałoby przyjąć w rachunku raczej niezmiennosć płaszczyzny leżącej w tej głębokości bez względu na rozmieszczenie obciążeń na górze.

3) Niekiedy pod dość grubą warstwą górną podłoża zachowującą się sprężysto znajduje się w głębi warstwa wodonośna tak nasiąknięta wodą, że zachowuje się plastycznie, prawie płynnie.

Wszystko to prawda, ale też z góry nie liczyliśmy na wielką dokładność naszego rachunku w zastosowaniu do rozważanego zadania konkretnego. Uwzględnienie zaś warunku wypływającego z zarzutu (2) utrudnia ogromnie rozwiązanie teoretyczne. Ale nawet gdyby się to powiodło, to główny wynik stwierdzający, że wartość K zmniejsza się w miarę zwiększenia liczby miejsc obciążonych, pozostanie niewątpliwie w mocy. Zmniejszenie K nie będzie jednak tak silne, jakby to wynikało z wyprowadzonych wzorów.

IV. Ponieważ okresy drgań własnych nawierzchni według pomiarów prof. AL. WASIUTYŃSKIEGO były często także i dłuższe od obliczonych powyżej, przeto nasuwa się przypuszczenie, że oprócz rozpatrywanych powyżej *drgań giętnych* nawierzchni traktowanej jako jednolita belka na podłożu sprężystym, mogą zachodzić jeszcze drgania innego rodzaju, przejawiające mniejszy zasób energii. Najprawdopodobniej nie mogą przy tym wchodzić w rachubę drgania giętne w płaszczyźnie poziomej, gdyż sztywność zginania w tej płaszczyźnie bywa zwykle znacznie większa od sztywności w płaszczyźnie pionowej, pozostaje więc do rozważenia możli-

wość *drgań skrętnych*. Ich własności łatwo w naszym przypadku ująć bez złożonych wywodów teoretycznych, przyjmując oczywistą możliwość drgania giętnego jednej szyny według wzoru

$$y = y_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{2\lambda} \right),$$

a drugiego według

$$y = -y_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{2\lambda} \right).$$

Założywszy nadto dość wielkie wartości λ , widzimy, że podkłady odbywają przy tym z wielkim przybliżeniem drobne ruchy wahadłowe około osi podłużnej toru, tak jak ciała sztywne, a każda z szyn zgina się w płaszczyźnie pionowej. Towarzyszące tym odkształceniom skreślenia szyn i podkładów można pominąć przy wielkich wartościach λ (które podobnie jak poprzednio dają największe T). Nawierzchnia dzieli się wzdłuż niejako na dwie połowy, z których każda drga według równania różniczkowego (1), ale z innymi wartościami parametrów B , q i k . Zamiast B wystąpi teraz $B/2$, zamiast q suma z ciężaru jednostkowego szyny q_s i sprowadzonego ciężaru jednostkowego połówek podkładów \bar{q}_p ; wreszcie zamiast k — sprowadzona wartość tego współczynnika, którą oznaczymy przez \bar{k} . Ponieważ rozkład ciśnień pod połową podkładu ma teraz wykres trójkątny, zamiast poprzedniego prostokątnego, przeto należy wstawić $\frac{1}{2} \frac{\bar{k}}{2}$ zamiast \bar{k} . Podobnie wypadnie zastąpić \bar{q}_p przez $\frac{1}{2} q_p$. A zatem okres drgań drugiego rodzaju wyznacza wzór

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{q_s + \frac{1}{2} q_p}{\frac{1}{2} g \bar{k}}} = 2\pi \sqrt{\frac{4q_s + \frac{2}{3} q_p}{g \bar{k}}}.$$

Przy wartościach liczbowych z przykładu w p. I, tj.

$$4q_s = 1,8 \text{ kG/cm}, \quad \frac{2}{3} q_p = 0,5 \div 0,7 \text{ kG/cm}, \quad \bar{k} = 260 \div 440 \text{ kG/cm}^2$$

znajdujemy jako granicę wyższą okresu tych drgań:

$$\bar{T} = 2\pi \sqrt{\frac{2,5}{981 \cdot 260}} = 0,020 \text{ sek.}$$

Ta wartość przewyższa wartość znaną zaledwie o 11%, a więc jeszcze nie osiąga wartości mierzonych doświadczalnie. Niezgodność tą można objaśnić trojako. Najpierw wstawieniem we wzór zbyt wielkiej wartości \bar{k} , jako wyprowadzonej z doświadczeń statycznych przy obciążeniu niewielkiej długości toru. W p. III uzasadniono zmniejszenie wartości \bar{k} ze wzrostem długości obciążonej nawierzchni; nadto jest wielce prawdopodobne, że \bar{k} jest jeszcze mniejsze w warunkach dynamicznych.

Po wtóre nie uwzględniono w obliczeniu teoretycznym, że nawierzchnia drga razem z częścią podłoża, gdyż to trudno ująć rachunkiem. Na koniec siły wzdłużne ściskające szyny mogą zwiększyć znacznie okres drgań poprzecznych, jak to wiadomo z teorii drgań prętów sprężystych. Siły te powstać muszą wskutek działania kół napędnych parowozu, a nadto zachodzą przy temperaturze wyższej od tej przy której tor ułożono.

Znając okres drgań własnych nawierzchni możemy zdać sobie sprawę z niebezpieczeństwa powstania silnych drgań wymuszonych przez przejeżdżający pociąg, czyli z warunków rezonansu. Siły zachodzące wskutek uderzeń na stykach mają oczywiście okres zbyt długi, ażeby go brać w rachubę. Drgania przenoszone przez pojazdy wskutek ich resorowania mają też przeważnie okresy przewyższające bardzo okres drgań swobodnych toru. Trzeci rodzaj sił okresowo zmiennych, jak się zdaje najważniejszy, pochodzi od zmiany nacisku kół napędnych przy każdym obrocie. Inne koła mogą również powodować takie zmiany, ale tylko wtedy, gdy z powodu zużycia przestały być dokładnie okrągłe. Przy prędkości v ruchu pociągu okres zmiany nacisku koła o średnicy D jest równy:

$$\frac{D\pi}{v}$$

Wartość prędkości jazdy, przy której zachodziłoby niebezpieczeństwo rezonansu znajdziemy więc z równania

$$T = \frac{D\pi}{v}, \quad \text{czyli} \quad v_{kr} = \frac{D\pi}{T}$$

albo, gdy wstawimy D w cm a T w sek, a chcemy otrzymać v_{kr} w km/h:

$$v_{kr} = 0,113 \frac{D}{T}$$

Np. przy $D = 70$ cm i $T = 0,02$ sek wypada

$$v_{kr} = 395 \text{ km/h.}$$

Współczesne prędkości jazdy po torach kolejowych są jeszcze przeszło 3-krotnie mniejsze od wartości krytycznej i dlatego w badaniach doświadczalnych stwierdzono tylko drgania o bardzo małych amplitudach.

O PRĘDKOŚCIACH KRYTYCZNYCH OBCIĄŻENIA PORUSZAJĄCEGO SIĘ PO BELCE MOSTOWEJ I PO NAWIERZCHNI KOLEJOWEJ NA PODŁOŻU ZIEMNYM

(Inżynier Kolejowy, Nr 7, 1938 r.)

Wobec zainteresowania sprawą działania dynamicznego obciążenia na mosty i nawierzchnię kolejową, staranne naukowe oświetlenie związanych z tym pojęć i złożonych zagadnień mechaniki jest bardzo na czasie, zwłaszcza że w artykułach odnoszących pisanych przez niektórych autorów zdarzają się pewne dość poważne błędy.

Przede wszystkim należy ustalić pojęcie *prędkości krytycznej* w najszybszych przypadkach. Otóż skutek ruchu obciążenia z prędkością postępową v (której może towarzyszyć obrót kół, a zarazem okresowo zmienne ich naciski uwarunkowane siłami bezwładności mas „niezrównoważonych“ itp.) powstać muszą drgania giętne belek głównych mostu lub także drgania nawierzchni¹⁾.

Każdej wartości v odpowiadać będzie caeteris paribus inna wartość krańcowa amplitudy drgań wzbudzonych. *Wartością krytyczną* v_{kr} nazywamy tę wartość, której odpowiadają największe amplitudy drgań wzbudzonych (wymuszonych).

Ogólna *teoria małych drgań* wzbudzonych w układach sprężystych siłami okresowo zmiennymi, oparta na równaniach LAGRANGE'A, prowadzi do wyniku, że amplitudy tych drgań stają się wyjątkowo wielkie, gdy okres zmian którejkolwiek z sił pobudzających do drgań staje się równym któremukolwiek z okresów własnych (swobodnych) drgań układu.

Stosownie do tej teoretycznej *zasady rezonansu* (współbrzmienia) należy w każdym przypadku szukania wartości v_{kr} rozpatrzeć związek między prędkością v a okresem uwarunkowanej przez nią siły pobudzającej do drgania.

¹⁾ Mowa tu oczywiście o drganiach giętnych w płaszczyźnie pionowej, które grają główną rolę obok mniej ważnych drgań poziomych i drgań skrętnych.

Zadanie wyznaczenia v_{kr} przedstawia się inaczej w przypadku samego tylko ruchu postępowego ciężaru jadącego po moście lub nawierzchni, a inaczej w przypadku, gdy temu ruchowi towarzyszy nieodłącznie okresowo—zmienny nacisk jadącego ciężaru.

1. Ruch postępowy ciężaru jadącego po moście

Dla zobrazowania pierwszego przypadku rozpatrzmy most o prostych belkach głównych swobodnie podpartych w obu końcach. W założeniu najprostszym, że jezdnia mostu bez obciążeń ruchomych jest pozioma i że oś belki utworzonej przez most jest prostą do niej równoległą, mamy przed sobą zadanie następujące: po belce o sztywności zginania $B = EJ$ (w płaszczyźnie pionowej) i ciężarze własnym ql kG złożonym z ciężaru dźwigarów głównych wraz z konstrukcjami poprzecznymi i pomostem, czyli stanowiącym całkowity ciężar własny mostu o rozpiętości l , przesuwa się lub toczy ze stałą prędkością v ciężar Q , którego nacisk P na most można uważać z dostatecznym przybliżeniem za siłę skupioną; znaleźć linię ugięcia odpowiadającą każdemu położeniu Q , czyli w każdej dowolnej chwili t (od wyruszenia Q z jednego końcowego przekroju belki ku drugiemu).

O ile mi wiadomo, zadanie to nie posiada dotąd ścisłego teoretycznego rozwiązania przy jakichkolwiek wartościach stosunku $Q:ql$ nawet przy założeniu upraszczającym stałej sztywności zginania i stałego ciężaru jednostkowego na całej długości belki. Natomiast znamy rozwiązania w dwu skrajnych przypadkach: a) gdy ql jest bardzo małe wobec Q i b) gdy Q jest bardzo małe wobec ql .

a. Przypadek znikomej masy belki wobec masy obciążenia

Pomijając masę, a więc i opory bezwładności ugiętej belki wobec działającego na nią ciężaru Q , który podczas ruchu z prędkością v wywiera na belkę nacisk P , w ogóle różny od Q , możemy w każdym chwilowym położeniu ciężaru Q (rys. 1) zastosować znane *równanie ugięcia statycznego* pod siłą P :

$$(1) \quad y = \frac{P}{3Bl} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right)^2.$$

Nacisk P jest wypadkową z ciężaru Q i oporu bezwładności $-\frac{Q}{g} \frac{d^2y}{dt^2}$. Ograniczając się do ugięć, przy których $\frac{dy}{dx}$ jest małym ułamkiem, możemy oczywiście napisać

$$P = Q \left(1 - \frac{1}{g} \frac{d^2y}{dt^2} \right),$$

a ponieważ

$$\frac{dy}{dt} = v \frac{dy}{dx},$$

więc

$$\frac{d^2y}{dt^2} = v^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

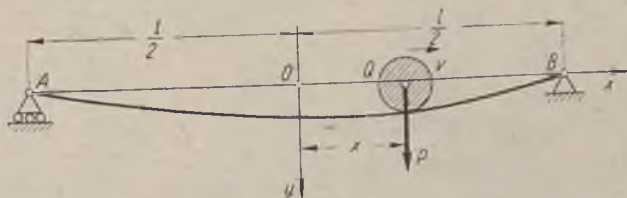
oraz

$$P = Q \left(1 - \frac{v^2}{g} \frac{d^2y}{dx^2} \right).$$

Wstawiawszy tę wartość w równanie (1) otrzymujemy

$$(2) \quad y = Q \left(1 - \frac{v^2}{g} \frac{d^2y}{dx^2} \right) \frac{1}{3Bl} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right)^2$$

jako równanie miejsca geometrycznego punktów zetknięcia ciężaru ruchomego Q z jezdnią na moście.



Rys. 1

Przy prędkościach bardzo małych mamy jako pierwsze przybliżenie

$$(2a) \quad y = \frac{Q}{3Bl} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right)^2,$$

co daje największe ugięcie w środku (strzałkę statyczną).

$$f_{st} = \frac{Ql^3}{48B}$$

z krzywizną

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x=0} = -\frac{Ql}{3B} = -\frac{16f_{st}}{l^2}.$$

Przy większych wartościach v linia wpływowa ugięcia oczywiście nie jest symetryczna, a strzałka ugięcia nie leży w środku belki. Jednakże wystarczy drugie przybliżenie wielkości strzałki „dynamicznej“ znajdujemy wstawiając znalezioną przybliżoną wartość krzywizny w równanie (2), czyli

$$(3) \quad f_d = f_{st} \left(1 + \frac{v^2}{g} \frac{Ql}{3B} \right).$$

Równanie (2) ukazało się najpierw w pracy WILLISA z r. 1849. Niedługo potem podał jego rozwiązanie G. G. STOKES. Nie skorzystano zeń w pi-

śmiennictwie techniczno-naukowym drugiej połowy XIX wieku, aż znalazł je na nowo H. ZIMMERMANN w r. 1896. Z tego rozwiązania okazuje się, że przybliżony wzór (3) jest wystarczający dla celów praktycznych²⁾. STOKES podał wzór dalszego przybliżenia, który jednakże pominię, ponieważ praktyczna wartość całej teorii jest dość mała. Powody przytaczane w literaturze są następujące. Po pierwsze pominięcie masy belki może być dopuszczalne tylko w mostach bardzo lekkich o małej rozpiętości; po wtóre zaś obliczone zwiększenie strzałki statycznej jest stosunkowo małe wobec zwiększenia wywołanego obciążeniami okresowo zmieniającymi np. kół parowozu. Tutaj zwrócić uwagę jeszcze na trzeci powód, który sprawia, że powyższe obliczenie może bardzo odbiegać od rzeczywistości. Wskutek nieuniknionych zboczeń wykonanej konstrukcji od projektu geometrycznie wyidealizowanego oś belki będzie miała przed obciążeniem małą co prawda krzywiznę $1/\rho_0$ dodatnią lub ujemną. Wtedy zamiast równania (3) należy napisać

$$(3a) \quad f_d = f_{st} \left[1 + \frac{v^2}{g} \left(\frac{Ql}{3B} \pm \frac{1}{\rho_0} \right) \right]$$

albo po podstawieniu

$$\frac{Ql}{3B} = \frac{16f_{st}}{l^2}; \quad \frac{1}{\rho_0} \approx \frac{8f_0}{l^2}$$

$$(3b) \quad f_d = f_{st} \left[1 + \frac{8v^2}{gl^2} (2f_{st} \pm f_0) \right].$$

Tutaj znak + odnosi się do przypadku, gdy wypukłość osi jest skierowana w dół, a znak - odpowiada przypadkowi odwrotnemu. Łatwo zauważyć, że wpływ krzywizny początkowej może nie tylko zwiększyć strzałkę dynamiczną ale także zmniejszyć ją, gdy początkowa krzywizna jest ujemna (tj. gdy jezdnia jest wypukła).

b. Przypadek znikomej masy obciążenia wobec masy belki

Pomijając masę ciężaru ruchomego wobec masy belki mamy jako schemat teoretyczny zadanie wyznaczenia ugięć belki pod wpływem stałej siły P poruszającej się z prędkością stałą v . W tym celu należy scałkować równanie różniczkowe drgań giętych belki, które jak wiadomo (przy dopuszczalnym w naszym zadaniu pominięciu ruchu obrotowego i wpływu naprężeń ścinających w elementach belki), ma w przypadku ogólniejszym przekroju zmiennego postać:

$$(4) \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

²⁾ Oczywiście w granicach stosowalności teorii, tj. w przypadkach lekkich mostów o małej rozpiętości przy dużej wartości Q .

zaś w przypadku przekroju stałego, jaki w dalszym ciągu założymy, postać: ³⁾

$$B \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

A. N. KRYŁOW podał w r. 1905 pierwsze zupełne rozwiązanie naszego zadania. Napiszemy je w postaci zaczerpniętej z dzieła S. P. TIMOSZENKI pt. „Schwingungsprobleme der Technik“ (Berlin 1932, str. 266). Przy obiorze początku współrzędnych na lewej podporze belki i oznaczeniu dla skrócenia

$$a^2 = \frac{Bg}{q}$$

mamy na ugięcie y jako funkcję x i t równanie:

$$(5) \quad y = \frac{2}{\pi^2} \frac{Pl^3 g}{q} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^2(n^2\pi^2 a^2 - v^2 l^2)} \sin \frac{n\pi vt}{l} - \\ - \frac{2}{\pi^3} \frac{Pl^4 gv}{qa} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l}}{n^3(n^2\pi^2 a^2 - v^2 l^2)} \sin \frac{n^2\pi^2 at}{l^2}.$$

Pierwszy szereg przedstawia drgania wymuszone, a drugi drgania swobodne belki:

$$y = y_w + y_s.$$

Gdy w celu sprawdzenia podstawimy w równaniu powyższym $vt = \text{Const}$ i $v=0$, czyli przyjmijemy, że siła P jest unieruchomiona, to otrzymamy

$$y = \frac{2}{\pi^4} \frac{Pl^3 g}{qa^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi c}{l} \sin \frac{n\pi x}{l},$$

co jest niczym innym, jak rozwinięciem na szereg trygonometryczny znanego wyrażenia na ugięcie statyczne belki pod siłą P o odciętej c .

Wprowadziwszy oznaczenie

$$a = \frac{vl}{\pi a} = \frac{vl}{\pi} \sqrt{\frac{q}{Bg}}$$

możemy równanie drgań wymuszonych napisać w postaci:

$$(6) \quad y_w = \frac{2}{\pi^4} \frac{Pl^3}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi vt}{l}}{n^2(n^2 - a^2)}.$$

³⁾ M. T. HUBER: Zagadnienia drgań w budowie maszyn. Przegląd Techniczny, 1932 r.

Gdy siła ruchoma P znajduje się na belce w odległości $c = vt$ od lewej podpory, to chwilową postać linii ugięcia określa równanie

$$(7) \quad y = \frac{2}{\pi^4} \frac{Pl^3}{B} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{n\pi c}{l}}{n^2(n^2 - \alpha^2)}.$$

Równanie to określa zarazem statyczną linię ugięcia pod obciążeniem siłą P w przekroju c i siłami S ściskającymi belkę wzdłużnie, przy czym

$$S = \alpha^2 \frac{\pi^2 B}{l^2} = \alpha^2 S_{kr},$$

co można sprawdzić przy pomocy wzoru (a) na str. 227 w „Kursie wytrzymałości materiałów“ TIMOSZENKI (wyd. 2, Książnica Atlas 1931). Po wstawieniu wartości α^2 otrzymujemy

$$S = \frac{v^2 q}{g}.$$

A zatem działanie statyczne siły S ściskającej wzdłużnie belkę obciążoną nadto ciężarem skupionym P w przekroju c daje taką samą postać równowagi osi belki, jaką ta oś przybiera bez sił S podczas drgań wymuszonych przez jadącą ze stałą prędkością v siłę P w chwili, gdy ta siła znajduje się w przekroju $c = vt$, jeżeli jest spełniony warunek $S = \frac{v^2 q}{g}$ albo równoważny warunek $v = \sqrt{\frac{Sg}{q}}$.⁴⁾

Przy dostatecznie wielkiej prędkości v może się zdarzyć, że jeden z mianowników w obu szeregach wzoru (5) staje się równy zero. Wtedy mamy do czynienia z prędkością krytyczną v_{kr} wywołującą *współbrzmienie*. Najmniejsza wartość v_{kr} odpowiada równości $\alpha^2 \pi^2 = v^2 l^2$ (przy $n=1$), a więc $v_{kr} = \frac{a\pi}{l}$. Wtedy okres drgania podstawowego (głównego) jako równy $\frac{2l}{v}$ staje się równy $\frac{2l^2}{a\pi}$. Okres ten jest dwa razy dłuższy od czasu w którym P przebiega długość belki.

⁴⁾ Ten interesujący wynik stał się powodem fatalnego nieporozumienia na skutek błędnego rozumowania przez analogię i oznaczenia tą samą literą x dwu różnych wielkości: odciętej dowolnego przekroju belki i odciętej przekroju obciążonego w chwili t siłą P . Ponieważ dotycząca błędna praca z r. 1927 była cytowana niedawno w dobrej wierze przez drugiego autora, przeto dla ocalenia go przed zejściem na bezdroża wyjaśnię rzecz dokładnie. Autor pierwszy po przytoczeniu równania różniczkowego (4a) przekształca je pisząc zamiast $\frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ wyrażenie $\frac{q}{g} v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Otóż w zadaniu naszym są te dwa wyrażenia równoważne, jeżeli $x = vt$ oznacza odciętą przekroju obciążonego, gdyż

Nie trudno zauważyć, że w tym przypadku współbrzmienia drgania głównego mostu o okresie $T = \frac{2l^2}{\pi} \sqrt{\frac{q}{Bg}}$ wystarczy w rozwiązaniu ogólnym (5) zatrzymać tylko pierwsze wyrazy obu szeregów, czyli napisać z przybliżeniem do naszego celu zupełnie wystarczającym

$$(5a) \quad y = \frac{2Pl^3 g}{\pi^2 q} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{\sin \frac{\pi vt}{l} - \frac{lv}{\pi a} \sin \frac{\pi^2 at}{l^2}}{\pi^2 a^2 - v^2 l^2}.$$

To wyrażenie przybiera formę nieoznaczoną 0:0, którą w znany sposób przekształca się na następującą:

$$(5b) \quad y = -\frac{Pg t}{\pi q v} \cos \frac{\pi vt}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{Pgl}{\pi^2 q v^2} \sin \frac{\pi vt}{l} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Wartości ugięć określone tym równaniem są w każdej chwili t inne. Największe wartości występują, jak łatwo się przekonać, gdy $t = \frac{l}{v}$, tzn., gdy siła P schodzi z belki. Wtedy otrzymujemy

$$(5c) \quad y = \frac{Pgl}{\pi q v^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Odpowiednia strzałka dynamiczna (w rezonansie)

$$(8) \quad f_d = \frac{Pl^3}{\pi^3 B} \approx \frac{1}{31} \frac{Pl^3}{B}$$

wtedy $dx = v dt$, a $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Wtedy jednakże należało w pierwszym wyrazie równania różniczkowego napisać zamiast x np. ξ , a równanie przybrałoby postać

$$(4b) \quad B \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{q}{g} v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Tymczasem pierwszy autor napisał bez skrępowań równanie

$$B \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{q}{g} v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

i przekształcił je następnie na

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(B \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{v^2 q}{g} y \right) = 0.$$

aby stwierdzić „analogię z równaniem belki zginanej i wzdłużnie ściskanej siłami $\frac{q}{g} v^2$ ”. Jest to zniekształcone fatalnie echo wyniku otrzymanego z przytoczonego powyżej rozwiązania poprawnego.

jest większa prawie o 50% od strzałki statycznej odpowiadającej sile P w środku rozpiętości, czyli od

$$f = \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{B}$$

Przynależna tej strzałce pierwsza prędkość krytyczna

$$(9) \quad v_{kr} = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{Bg}{q}}$$

przyjmuje np. przy rozpiętościach 5, 15 i 50 m jednotorowego mostu kolejowego wartości 400, 500 i 550 m/sek, które są przeszło 10 razy większe od największych stosowanych w ruchu kolejowym⁵⁾.

Nie ma zatem mowy o niebezpieczeństwie rezonansu w rozpatrywanym przypadku, chociaż ruch siły P zwiększy nieco strzałkę ugięcia w stosunku do strzałki statycznej. Ogólne rozwiązanie (5) pozwala ocenić to zwiększenie z wystarczającą w praktyce dokładnością, jeżeli zatrzymując tylko przeważające wartości pierwszych wyrazów obu szeregów przyjmiemy, że w przypadku skrajnym zachodzi sumowanie amplitud drgań wymuszonych i swobodnych. Wtedy znajdujemy bez trudności

$$(10) \quad y_{max} = \frac{2}{\pi^2} \frac{Pl^3 g}{q} \left(\frac{1}{\pi^2 a^2 - v^2 l^2} + \frac{vl}{a\pi} \frac{1}{\pi^2 a^2 - v^2 l^2} \right) = \frac{2}{\pi^4} \frac{Pl^3}{B} \frac{1}{1-a}$$

gdy jak powyżej

$$a = \frac{vl}{\pi} \sqrt{\frac{q}{Bg}}$$

Stąd wartość tzw. współczynnika dynamicznego

$$(11) \quad \frac{y_d}{y_{st}} = \frac{2}{\pi^4} \frac{Pl^3}{B} \frac{1}{1-a} : \frac{1}{48} \frac{Pl^3}{B} = \frac{96}{\pi^4} \frac{1}{1-a} \approx \frac{1}{1-a}$$

Stosownie do danych liczbowych zawartych w przytoczonej książce TIMOSZENKI otrzymujemy:

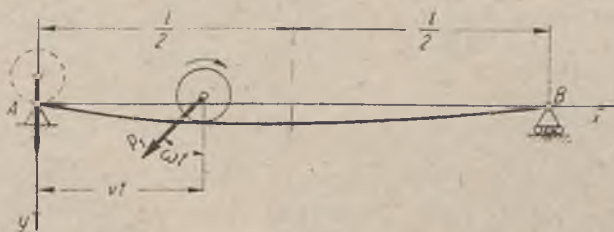
przy	$v = 36 \text{ m/sek} = 130 \text{ km/h.}$		
przy	$l = 18$	36	108 m
	$y_d/y_{st} = 1,125$	$1,11$	$1,09$

Należy jednak pamiętać, że te wartości muszą być większe od rzeczywistych, gdyż w wywodzie teoretycznym nie uwzględniono tłumienia, które, jak doświadczenie poucza, pracuje na korzyść zmniejszenia amplitud drgań wymuszonych.

⁵⁾ Rachunek wykonałem na podstawie wartości liczbowych zaczerpniętych z pracy prof. A. PSZENICKIEGO w „Podręczniku Inżynierskim“.

2. Okresowo zmienny nacisk ciężaru toczącego się jednostajnie po moście

Przechodząc teraz do przypadku okresowo-zmiennego nacisku ciężaru toczącego się jednostajnie po moście, przyjmijmy, że zmiana tego nacisku jest spowodowana niezrównoważonymi siłami bezwładności obracającej się pary kół lokomotywy. Ich wypadkowa P_1 obraca się razem z kołami z prędkością kątową ω i niechaj w chwili $t=0$ (rys. 2) będzie skierowana w dół. Wtedy składowa pionowa określająca wielkość zmiany



Rys. 2

nacisku, którą oddzielamy od nacisku P rozpatrywanego poprzednio, wyrazi się przez $P_1 \cos \omega t$. Wywołane w ten sposób drgania belki określa ściśle rozwiązanie TIMOSZENKI (Phil. Mag. 43, 1018, r. 1922):

$$(12) \quad y = \frac{P_1 l^3}{\pi^4 B} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n \pi x}{l} \left[\frac{\sin \left(\omega + \frac{n \pi v}{l} \right) t}{n^4 - (\beta + n a)^2} + \frac{\sin \left(\frac{n \pi v}{l} - \omega \right) t}{n^4 - (\beta - n a)^2} - \frac{a}{n} \left(\frac{\sin \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2}}{(n^2 - \beta)^2 - n^2 a^2} + \frac{\sin \frac{n^2 \pi^2 a t}{l^2}}{(n^2 + \beta)^2 - n^2 a^2} \right) \right]$$

$a = \frac{vl}{a\pi}$ oznacza tutaj stosunek okresu $T = \frac{2l^2}{\pi a}$ głównego drgania własnego belki (przy czym $a = \sqrt{\frac{Bg}{q}}$) do podwójnej wartości czasu $T_1 = \frac{l}{v}$ w którym tocząca się oś przebedzie całą długość belki l ; $\beta = \frac{T}{T_2}$, tj. stosunek okresu T głównego drgania własnego belki do okresu $T_2 = \frac{2\pi}{\omega}$ zmiany nacisku.

Gdy te dwa okresy są równe, czyli $\beta = 1$, mamy do czynienia z przypadkiem współbrzmienia. Amplituda rośnie w miarę posuwania się siły po belce i podobnie jak w przypadku (1b) osiąga największą wartość w chwili dojścia siły do drugiego końca belki. Wtedy bowiem pierwszy

wyraz szeregu (12), który z dostateczną dokładnością przedstawia linię ugięcia, sprowadza się do postaci

$$\frac{2}{a} \frac{P_1 l^3}{\pi^4 B} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \omega t.$$

A zatem strzałka dynamiczna

$$(13) \quad f_d = \frac{2T_1}{T} \frac{2P_1 l^3}{\pi^4 B} = \frac{\pi a}{v l} \frac{2P_1 l^3}{\pi^4 B},$$

zaś stosunek strzałki dynamicznej do strzałki statycznej jaka by powstała, gdyby siła P_1 obciążała środek belki, jest

$$(14) \quad \frac{f_d}{f_{st}} = \frac{2T_1}{T} = \frac{2n T_2}{T} = 2n,$$

jeżeli n oznacza liczbę obrotów koła potrzebną do przejechania długości l , a T_2 czas jednego obrotu koła. Wzór (14) wyraża, że w przypadku współbrzmienia, (tj. gdy czas obrotu koła równa się okresowi drgań własnych mostu) strzałka wywołana amplitudą P_1 zmiany nacisku osi w stosunku do strzałki statycznej pod ciężarem równym P_1 zwiększa się $2n$ -krotnie, przy czym n oznacza liczbę obrotów koła na długości równej rozpiętości belki l .

Z tego widać o ile niebezpieczniejszy jest wpływ okresowych zmian nacisku od wpływu stałego obciążenia koła. Co prawda przypadek rezonansu może zajść przy obecnych prędkościach pociągów tylko przy rozpiętości około 30 m, jak to wynika z obliczeń szczegółowych i pomiarów doświadczalnych kilku badaczy.

Odpowiadające różnym rozpiętościom prędkości krytyczne określi wzór wynikający z warunku

$$\beta = \frac{T}{T_2} = 1.$$

A zatem

$$(15) \quad v_{kr}^* = \frac{\pi^2 r}{l^2} \sqrt{\frac{B g}{q}}.$$

Tutaj oznacza r promień koła toczącego się.

Oprócz wartości v_{kr}^* odpowiadającej głównym drganiom własnym mostu o najniższej częstotliwości (najdłuższym okresie), teoria wskazuje na istnienie szeregu wartości wyższych odpowiadających drganiom własnym o częstotliwości 4-, 9-, 16-krotnej. Zbiór wszystkich v_{kr} w przypadku jednostajnego ruchu jednej siły okresowo-zmiennej obciążającej belkę jest określony równaniem

$$(16) \quad v_{kr}^* = n^2 v_{kr} \\ (n = 1, 2, 3, \dots).$$

A zatem druga prędkość krytyczna jest 4-krotną pierwszej i odpowiada postaci drgań własnych belki o jednym węźle w środku (dwie półfale sinusoidy). Taki przypadek może mieć znaczenie praktyczne tylko przy wielkiej rozpiętości belki mostowej, kiedy v_{kr} jest znacznie mniejsza od stosowanych dziś prędkości pociągów pośpiesznych. Chociaż więc ilość prędkości krytycznych jest ze stanowiska czysto teoretycznego nieograniczona, to jednak z omawianych tutaj dotąd przypadków wyłaniają się tylko trzy jako technicznie interesujące. Określają je wzory (9), (15) i wzór (16) przy $n=2$. Najdonioślejsze zaś znaczenie praktyczne ma oczywiście wzór (15). Nie należy jednak zapominać o tym, że powyższe schematy teoretyczne odbiegają znacznie od rzeczywistości, ponieważ:

1) Toczące się po moście ciężary posiadają masę, którą pominięto w teoriach przedstawionych w poprzednim ustępie 1b) i w niniejszym.

2) Obciążenie typu rozpatrywanego powyżej występuje zawsze równocześnie z innymi obciążeniami, które utrudniają warunki powstania współbrzmienia. Tak np. fazy okresowych zmian nacisków kół wywołanych ich nieokrągłością nie mogą być nigdy zgodne. Niezrównoważone siły masowe zespołu kół napędnych lokomotywy wywierają skutek dynamiczny mniejszy od sumy oddzielnie obliczonych skutków działania każdej osi, ponieważ każda z osi przechodzi w innej chwili przez dany przekrój belki mostowej.

3) Nieuwzględnione w teorii opory drgań powodują w rzeczywistości dość poważne tłumienie, które zmniejsza amplitudy drgań wymuszonych.

4) Pociąg wjeżdżający na most obciąża go zwiększając przez to okres drgań własnych w miarę zajmowania coraz dłuższej części rozpiętości. Albowiem w znanym wzorze na okres własnych drgań giętnych belki poziomej w obu końcach podpartej

$$T_{wi} = \frac{2l^2}{\pi n^2} \sqrt{\frac{q}{Bg}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

oznacza w ogóle q ciężar własny belki wraz z leżącym na belce obciążeniem równomiernie rozłożonym na całej długości l , oczywiście pod warunkiem, że podczas drgań nie zachodzi odrywanie się obciążenia od belki, co można przyjąć jako spełnione. Resorowanie pojazdów komplikuje wprawdzie wiele sprawę w sposób nielatwy do ujęcia teoretycznego, ale zwiększenie T_{wi} wskutek obciążenia pociągiem nie ulega wątpliwości. Dzięki temu niebezpieczeństwo rezonansu nie zachodzi w ciągu całego trwania przejazdu lokomotywy przez most i zwiększenie amplitudy drgań wynosi zaledwie część obliczonego z teorii powyższej. Stwierdzają to pomiary doświadczenia na kolejach w Indiach⁶⁾, gdzie znaleziono strzałki dynamiczne około 3 razy mniejsze od obliczonych z równania (13).

⁶⁾ Bridge Sub-Committee Rep. 1925, Calcutta; Govern. of India Cetr. Publ. Branch. Techn. Paper 1926, Nr. 247. Źródła przytoczone w wymienionej powyżej książce TIMOSZENKI.

5) Przy wyprowadzeniu wzorów powyższych przyjęto dla uproszczenia stały przekrój belek mostowych. Uwzględnienie zmienności przekroju utrudnia wielce obliczenia teoretyczne nie wprowadzając zasadniczych zmian do formy zależności od innych parametrów ⁷⁾.

Ograniczając się do drgań głównych, można wyznaczyć w przybliżeniu taką średnią wartość sztywności zginania B (wzgl. J), iż wstawivszy ją do wzorów uproszczonych otrzymujemy wyniki liczbowe dość dokładne.

3. Prędkości krytyczne przy ruchu taboru kolejowego po torze położonym na gruncie

Szukając teraz *prędkości krytycznych* ze względu na ruch taboru kolejowego po torze położonym na gruncie wystarczy brać pod uwagę tylko działanie sił okresowo-zmiennych (jak w p. 2). Poruszająca się jednostajnie po nawierzchni siła stała nie może bowiem dostarczyć powodu do zjawiska rezonansu.

Przyjmując warunki najprostsze, tj. tor prosty o stałym module podatności podłoża i zastąpiwszy nawierzchnię belką na podłożu sprężystym, znajdujemy przede wszystkim okresy drgań własnych przez całkowanie równania różniczkowego ⁸⁾

$$(17) \quad B \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = 0,$$

odnoszącego się do nawierzchni wolnej od napięć wzdłużnych wywołanych często przez zmianę temperatury.

W przypadku istnienia siły S ściskającej wzdłużnie nawierzchnię (szyny) otrzymujemy równanie ogólniejsze

$$(18) \quad B \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{q}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ky = 0.$$

W obu równaniach k oznacza zastępczy moduł podatności podłoża, który według badań prof. AL. WASIUTYŃSKIEGO waha się między 260 a 440 kG/cm² w założeniu nawierzchni normalnotorowej PKP na liniach głównych.

Wartość k znaleziono w sposób następujący:

Przyjęto podkłady drewniane o długości 270 cm, szerokości spodniej 26 cm, a więc o powierzchni przenoszącej nacisk na podłoże równy ~ 7000 cm². Przy odstepie podkładów $a=80$ cm obliczamy, że na 1 cm belki ciągłej zastępczej przypada nacisk z pola o wielkości $7000:80=87.5$ cm²/cm. Mnożąc tę wielkość przez współczynnik podłoża $C=3$ do 5 kG/cm² otrzymujemy $k=260$ do 440 kG/cm².

⁷⁾ Dobry przykład uwzględnienia zmienności przekroju zawiera praca F. SZELA-GOWSKIEGO w nr 3 Przeglądu Technicznego z r. 1938.

⁸⁾ M. T. HUBER: Drgania nawierzchni kolejowej. „Czasopismo Techniczne“ LIV, nr 2, r. 1936 (równ. 1). Jak widać równanie to różni się znacznie od równ. (4a) zastosowanego właśnie w tym przypadku przez autora pracy z r. 1927, o której była wzmianka powyżej. W tym tkwi drugi zasadniczy błąd tej pracy.

Całka równania (18) obejmuje oczywiście jako przypadek szczególny ($S=0$) całkę równania (17). Przyjmąwszy, że długość prostego toru jest tak wielka, że można ją uważać za nieograniczoną, uczynimy zadość obu równaniom funkcją

$$(19) \quad y = y_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{2\lambda} \right),$$

określającą zmienną z czasem linię sinusową o długości półfali λ i okresie T pod warunkiem, że zachodzi (odnośnie do równania 18) związek

$$(20) \quad B \frac{\pi^4}{\lambda^4} - S \frac{\pi^2}{\lambda^2} - g \frac{4\pi^2}{T^2} + k = 0,$$

z którego wynika, że okres drgań T jest zależny od długości fali 2λ wygiętej osi według wzoru

$$(21) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{g \left(k + \frac{\pi^4}{\lambda^4} B - \frac{\pi^2}{\lambda^2} S \right)}}.$$

Wzór ten w przypadku $S=0$ (tj. bez siły ściskającej) przybiera postać

$$(21a) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{g \left(k + \frac{\pi^4}{\lambda^4} B \right)}}.$$

Obliczmy jeszcze energię sprężystości nagromadzoną w układzie złożonym z belki i z podłoża przypadającą średnio na jednostkę długości. Energia ta wyraża się wzorem

$$\frac{V}{\lambda} = V' = \frac{1}{2} \frac{B}{\lambda} \int_0^\lambda \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{1}{2} \frac{k}{\lambda} \int_0^\lambda y^2 dx,$$

co daje po wstawieniu za y wyrażenia (19) i wykonaniu całkowania

$$(22) \quad V' = \frac{y_0^2}{4} \left(k + \frac{\pi^4}{\lambda^4} B \right).$$

A zatem przy danej stałej wartości energii włożonej w drgania, zmniejszeniu długości fali odpowiada zmniejszenie amplitudy tak, iż kwadrat amplitudy jest odwrotnie proporcjonalny do sumy

$$k + \frac{\pi^4}{\lambda^4} B.$$

Z rozwiązania ogólnego okazuje się, że okres T może mieć wszelkie wartości leżące między 0 (gdy $\lambda \rightarrow 0$) a

$$(23) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{g}{kg}} \quad (\text{gdy } \lambda \rightarrow \infty).$$

Przeto istnieje nieskończenie wiele okresów drgań własnych nawierzchni o długości nieograniczonej; ich zbiór jest mocy continuum. Pojęcie prędkości krytycznej przesuwania się siły okresowo-zmiennej obciążającej nawierzchnię traci oczywiście swoje znaczenie określone na początku i należy je odpowiednio zmodyfikować. Najprostsza koncepcja wynika ze spostrzeżenia, że przy długościach półfali $\lambda > 5 \text{ m}$ ⁹⁾ drugi wyraz sumy

$$k + \frac{\pi^4}{\lambda^4} B,$$

staje się tak mały wobec k , że drgania, w których $\lambda > 5 \text{ m}$ są praktycznie izochroniczne, a ich okres wyznacza wzór (23). Prędkość ruchu postępowego oscylującego nacisku koła odpowiadająca okresowi oscylacji siły T równemu $2\pi \sqrt{\frac{q}{kg}}$ będzie miała charakter v_{kr} . A zatem

$$(24) \quad v_{kr} = \frac{2\pi r}{T} = r \sqrt{\frac{kg}{q}},$$

jeżeli r oznacza promień toczącego się koła. Za powyższą koncepcją prędkości krytycznej w tym zagadnieniu przemawia jeszcze ta okoliczność, że przy danej amplitudzie drgań y_0 energia układu drgającego (równanie (22)) przy dość wielkich λ jest prawie niezależna od długości fali i staje się możliwie mała.

Uwagi godnym jest porównanie powyższego rozwiązania z rozwiązaniem, które podaje TIMOSZENKO w art. 48 przytoczonej powyżej książki. Założywszy skończoną długość l pręta na sprężystym podłożu i przegubowe ustalenie obu końców znajduje inną metodą długość półfali osi drgającego swobodnie pręta w postaci sinusoidy

$$(25) \quad \lambda = \frac{l}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

oraz na okres drgania wzór identyczny z wzorem (21a). Jest rzeczą jasną, że z powodu związku (25) wzór (21a) określa u TIMOSZENKI tyle różnych okresów drgań własnych, ile jest liczb naturalnych. Najdłuższy odpowiada $\lambda = l$. Tutaj pojęcie prędkości krytycznej odzyskuje znaczenie dynamiczne i można mówić o nieskończeniu wielu prędkościach krytycznych odpowiadających długościom półfal

$$l, \quad \frac{l}{2}, \quad \frac{l}{3}, \quad \dots$$

Jednakże przyjęty model teoretyczny nie odpowiada dobrze rzeczywistości w naszym zadaniu, bo końce dłuższego, czy krótszego odcinka

⁹⁾ W rozpatrywanym konkretnym przypadku toru PKP.

prostego toru nie są bynajmniej ustalone przegubowo. Wprawdzie poprzedni model też nie jest bez zarzutu, gdyż do wytworzenia drgań własnych o małej, lecz skończonej amplitudzie potrzeba przy nieskończonej długości nieskończonej energii. Mimo to przyjąłem (w pracy powyżej przytoczonej), że wzór (24) określa jedyną praktycznie interesującą prędkość krytyczną, która jednakże przy danych liczbowych odnoszących się do warunków na głównych liniach PKP wynosi blisko 400 km/h, nie ma więc znaczenia technicznego.

Teoretyczne możliwości innych jeszcze prędkości krytycznych nasuwają się ze względu na fakt, że siły bezwładności mechanizmu lokomotywy powodują nieustanne drgania jej korpusu głównego podczas jazdy. Drgania te przenoszą za pośrednictwem resorów okresowo-zmienne dodatkowe naciski kół na tor. Okresy tych drgań nie są oczywiście identyczne z okresem obrotu kół, co daje nowe możliwości rezonansu i nowe prędkości krytyczne¹⁰⁾.

Z sześciu rodzajów drgań, odpowiadających 6 stopniom swobody korpusu lokomotywy traktowanego jako ciało sztywne połączone sprężystymi więzami z podwoziem, mogą dawać impuls do pionowych drgań giętnych nawierzchni tylko trzy, tj. drgania postępowe pionowe (przysiadanie), kiwanie i kołysanie. Stosownie do tego mielibyśmy razem cztery prędkości krytyczne pionowych ugięć dynamicznych toru. Atoli wobec tego, że okresy tych trzech nowych impulsów są znacznie dłuższe od okresu drgań własnych nawierzchni wynoszącego parę setnych sekundy, nie podobna odnośnym prędkościom krytycznym przypisywać znaczenia technicznego, pomijając już ogromne trudności teoretycznego ujęcia związków między parametrami zadania.

4. Drganie nawierzchni bardzo długiej pod wpływem siły okresowo-zmiennej działającej w przekroju środkowym

Słabą stroną rozwiązania (19) określającego drgania własne (swobodne) nieograniczonej belki na podłożu sprężystym jest zawartość energii układu rosnącego nieograniczenie z jego długością. Trudno sobie wyobrazić sposób wywołania takich drgań. Dlatego spróbowałem znaleźć całą równania różniczkowego (17) odpowiadającą drganiom utrzymywanym przez obciążenie przekroju środkowego siłą okresowo-zmienną bez wydatku energii, oczywiście poza pewną nadwyżką niezbędną na pokonanie oporów nie wprowadzonych zresztą w rachunek.

¹⁰⁾ Niewątpliwie to miał na myśli wspomniany powyżej autor pracy z r. 1927 powołując się na trzy rodzaje drgań lokomotywy odpowiadające trzem stopniom swobody obrotowej, tj. kiwanie się (obrót około poprzecznej osi poziomej), kołysanie się (obrót około podłużnej osi poziomej) i zataczanie się (wężykowanie) (obrót około osi pionowej).

W tym celu należy — rzecz jasna — wyłączyć z rozwiązania przekrój środkowy, na który działa siła

$$(26) \quad P = P_0 \sin \frac{2\pi t}{T},$$

a w którym umieścimy początek współrzędnych. Wtedy dodatnim x przynależy rozwiązanie

$$(27) \quad y = y_0 e^{-\beta x} \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi x}{\lambda} \right),$$

przy czym

$$(28) \quad \beta = \frac{\pi}{\lambda}; \quad y_0 = \frac{P_0 \lambda}{4\pi^2 B} \leq \frac{q}{k},$$

zaś częstotliwość

$$(29) \quad \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{q} \left(k - \frac{4\pi^4}{\lambda^4} B \right)}.$$

Nadto muszą być spełnione następujące warunki ograniczające:

$$(30) \quad \lambda > \pi \sqrt[4]{\frac{4B}{k}}, \quad P_0 < q \sqrt[4]{\frac{4B}{k}}.$$

Przy ujemnych x rozwiązanie ma postać

$$(27a) \quad y = y_0 e^{\beta x} \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi x}{\lambda} \right),$$

przy tych samych oczywiście wartościach β , T oraz warunkach ograniczających.

O słuszności powyższego rozwiązania można się przekonać najpierw przez wstawienie wyrażenia na y do równania różniczkowego (17). Ponieważ siła poprzeczna w przekroju nieskończenie bliskim przekroju obciążonego musi się równać $\frac{P}{2}$, a wielkość tej siły określa nadto, jak

wiadomo, wyrażenie $B \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, przeto z równania

$$P = 2B \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)_{x \rightarrow 0}$$

otrzymujemy po przekształceniach

$$(31) \quad P = 2B y_0 \frac{2\pi^3}{\lambda^3} \sin \frac{2\pi t}{T},$$

a stąd drugi ze wzorów (28).

Warunki ograniczające ważność rozwiązania wynikają z rozważań następujących:

Najpierw obliczona amplituda drgania y_0 nie powinna przewyższać statycznego zagłębienia nawierzchni w podłożu, tj. $q:k$; inaczej bowiem oddzieliłaby się nawierzchnia od podłoża na pewnej długości i założenia teorii byłyby naruszone. Pierwszy z warunków (30) odpowiada żądaniu, aby obliczony z (29) okres był wielkością rzeczywistą; drugi zaś wynika z drugiego ze związków (28). W przypadku toru PKP obranego w pracach poprzednich znajdujemy $\lambda > 294$ cm, a $P_0 < 187$ kG. Przy λ przewyższającym 5 m staje się okres drgań praktycznie niezależny od λ i prawie równy znalezionemu poprzednio okresowi drgań swobodnych o energii równomiernie rozłożonej na całej długości. Ten interesujący wynik świadczy o tym, że skrupuły co do wartości praktycznej rozwiązania (19) były przesadzone, a znaleziony tam okres pozwala z dostateczną ścisłością obliczyć prędkość krytyczną kół wywierających siły okresowo-zmienne z tym samym co poprzednio wynikiem.

DZIAŁ IX

KONSTRUKCJE MASZYNOWE

Redaktor naukowy: ZENOBIUSZ KLĘBOWSKI

Asystent naukowy: WOJCIECH URBANOWSKI

WZÓR WYTRZYMAŁOŚCIOWY DLA RUR STALOWYCH NARAŻONYCH NA CIŚNIENIE ZEWNĘTRZNE

(Przegląd Techniczny, 1930 r.)

1. W „Przeglądzie Technicznym“ z r. 1926 ukazał się mój krótki artykuł pod tytułem różniącym się od powyższego jedynie tym, że zamiast „stalowych“ było w nim „żelaznych“.

Podany w owym artykule wzór określał tę krańcową wartość zewnętrznego ciśnienia hydrostatycznego p w kG/cm^2 , powyżej której zajść musi zakłębienie (zgniecenie) rury o danej grubości ściany δ i średnicy zewnętrznej D_z , wywalcowanej ze stali o danym module sprężystości E i danej granicy plastyczności (płynności) R_{pl} (w kG/cm^2), jeżeli długość rury jest wielka w porównaniu do jej średnicy.

Wzór ten ma postać

$$(I) \quad \bar{p} = \frac{4728000 \alpha}{x(720\beta + x^2)},$$

przy oznaczeniach

$$\alpha = \frac{E}{2150000}; \quad \beta = \frac{3200}{R_{pl}}; \quad x = \frac{D_z}{\delta}$$

(oczywiście przy jednakowych jednostkach pomiarowych dla D_z i δ).

Stałe materiałowe E i R_{pl} wskazują na pewne podstawy teoretyczne wzoru, zaś wartości liczbowe były dobrane odpowiednio do doświadczeń amerykańskich, ujętych we dwa wzory czysto empiryczne o postaci

$$(I) \quad \bar{p} = \frac{6047}{x} - 97,45 \quad (\text{w } \text{kG/cm}^2) \quad \text{dla } x < 43,5,$$

$$(II) \quad \bar{p} = 70,3 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{1600}{x^2}} \right] \quad \text{dla } x > 43,5.$$

Materiałem rur w doświadczeniach tych (Petroleum Technology, 57, Bulletin 182) była stal bessemerowska o stałych $E = 2150000 \text{ kG/cm}^2$ i $R_{pl} = 3200 \text{ kG/cm}^2$.

Nasz wzór należy przeto do kategorii wzorów półempirycznych, a jego uzasadnienie jest przedmiotem niniejszego artykułu.

2. Na niebezpieczeństwo zakłębnięcia rury pod ciśnieniem zewnętrznym składają się dwie przyczyny: jedna tkwi w *niestateczności* kołowej postaci przekroju rury, gdy ciśnienie przewyższa tzw. *wartość krytyczną*, druga zaś w ograniczonej *wytrzymałości* materiału rury, a w szczególności w jego *granicy plastyczności* na ściskanie. Osiągnięcie granicy plastyczności nie prowadzi wprawdzie bezpośrednio do zakłębnięcia rur grubościennych (tj. przy małych wartościach $D:\delta$), lecz daje początek widocznym odkształceniom trwałym, często tak znacznym, iż musimy je uznawać za niebezpieczne i niedopuszczalne.

W rurach cienkościennych (tj. przy dużych wartościach $D:\delta$) wysuwa się na pierwszy plan kwestia stateczności przy ciśnieniach zewnętrznych nawet mniejszych od tych, jakie by wywołały osiągnięcie granicy plastyczności materiału przy założeniu niezmienności kołowej postaci przekroju. Z tego powodu rozpatrzmy najpierw sprawę stateczności postaci kołowej przekroju rury o ściance tak cienkiej, że zakłębnięcie może być jeszcze sprężyste. Mamy tutaj do czynienia ze zjawiskiem analogicznym do *wybooczenia sprężystego* cienkiego pręta ściskanego osiowo. Szukana wartość ciśnienia krytycznego p_{kr} odpowiada wartości obciążenia krytycznego pręta określonego znanym wzorem EULERA.

Rozwiązanie ściśle ze stanowiska teorii sprężystości może być znalezione przy założeniach następujących¹⁾.

1) Rura jest nieskończenie długa, a więc każdy pierścień elementarny rury wydzielony przekrojami poprzecznymi odkształca się jednakowo.

2) Punkty przekroju poprzecznego pozostają wskutek odkształcenia w płaszczyźnie przekroju, a zatem mamy do czynienia z zagadnieniem dwuwymiarowym.

3) Pierścień elementarny rury zachowuje się przy odkształceniu jak pręt „nieskończenie cienki“ według określenia G. KIRCHHOFFA²⁾.

Zadanie nasze pokrywa się z następującym:

Jednolity cienki pierścień kołowy o sztywności zginania B jest ściskany siłami rozłożonymi równomiernie na obwodzie pierścienia i skierowanymi ku jego środkowi. Przyjawszy, że pierścień jest zabezpieczony od zwichrzenia, tj. wygięcia z jego płaszczyzny, i oznaczywszy przez q (kG/cm) natężenie obciążenia, znaleźć jego wartość krytyczną q_{kr} .

Tak nazywamy wartość graniczną, rozdzielającą te wartości $q < q_{kr}$, przy których okrągła postać równowagi, jako jedynie możliwa, jest *stałą*, czyli *stateczną*, od tych wartości $q > q_{kr}$, przy których są możliwe teoretycznie dwie lub więcej postaci równowagi. Jedna z nich — okrągła —

¹⁾ Oczywiście w granicach ważności uogólnionego prawa HOOKE'A dla elementów materiału o wszystkich trzech wymiarach nieskończenie małych.

²⁾ G. KIRCHHOFF: Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes, Crelle T. 56, r. 1859.

jest teraz *niestałą*, czyli *niestateczną*, druga zaś — spłaszczona — *stałą*, czyli *stateczną*. Przy $q = q_{kr}$ są jednakowo możliwe tak okrągła, jak i nieskończenie mało spłaszczona postać równowagi, która ma zatem charakter równowagi obojętnej.

Jako naturalna droga do rozwiązania zadania nasuwa się przeto całkowanie równania różniczkowego odkształconej osi pierścienia pierwotnie zakrzywionej promieniem stałym R , a potem zmiennym promieniem krzywizny ϱ . Równanie to ma postać ogólną

$$(2) \quad \frac{1}{\varrho} \frac{1}{R} = \frac{M}{B},$$

przy czym M oznacza moment zginający, a B sztywność zginania.

Tą drogą znalazł pierwszy M. LÉVY (C. R. 1883, t. 97, str. 694 i 979)

wzór

$$(3) \quad q_{kr} = 3 \frac{B}{R^3},$$

który wyprowadził z równania różniczkowego wygiętej osi pierścienia bez dokładnego scałkowania tego równania. G. H. HALPHEN (C. R. 1884, t. 98, str. 422) wykonał to całkowanie za pomocą funkcji eliptycznych, zaś A. G. GREENHILL (Math. Ann. 1899, t. 52, str. 465) rozwinął rozwiązanie szczegółowe z dyskusją różnych możliwych postaci krzywej odkształconej. Uproszczony elementarny wywód powyższego wzoru ogłasza J. V. BOUSSINESQ w tym samym tomie C. R. na str. 843. Za nim idą autorowie nowoczesnych kursów „wytrzymałości materiałów“, jak np. A. FÖPPL (Vorl. üb. techn. Mechanik Bd. 3, § 57) i S. P. TIMOSZENKO (Kurs wytrzymałości materiałów 1921, § 181), jakkolwiek ten ostatni autor stosuje z upodobaniem do rozwiązywania wielu innych zagadnień stateczności układów sprężystych metodę energetyczną, zapoczątkowaną w podstawowych pracach G. H. BRYANA (Proc. Cambridge Phil. Soc. 1888, t. 6, str. 199 i 286).

Pójdziemy zatem i tutaj drogą wskazaną przez J. V. BOUSSINESQA, nie poprzestając jednakże na wyprowadzeniu znanego wzoru (3), lecz próbując nadto uwzględnić wpływ pierwotnych zbieżeń osi pierścienia od okręgu koła o promieniu R . Jest bowiem rzeczą pewną, że takie zbieżenia, wywołane nie dającą się usunąć niedokładnością wykonania, muszą prowadzić do obniżenia wartości obciążenia niebezpiecznego w porównaniu do wartości q_{kr} ze wzoru (3). W tym samym kierunku działają wszelkie inne drobne zbieżenia od założeń teorii matematycznej, jak np. niejednorodność materiału itd. Albowiem wszystkie te zbieżenia sprawiają, że nawet przy małych wartościach obciążenia q zachodzą w pierścieniu, obok podłużnych sił ściskających, także momenty zginające. Momenty te

wzrastają nie tylko z powodu wzrostu q , lecz także wskutek wzrostu ramion, powodują więc silny wzrost naprężeń, tak iż niebezpieczne odkształcenia trwale pojawiają się przy wzroście obciążenia znacznie wcześniej niż wypada ze wzoru na naprężenia w przypadku wyidealizowanym

$$(4) \quad \sigma = \frac{qD}{2F},$$

gdzie F oznacza pole przekroju pierścienia.

3. Podobnie jak z równania równowagi pręta prostego zginanego momentem M , danego w postaci

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{B},$$

wyprowadza się równanie przybliżone

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{B},$$

dość dokładne we wszystkich przypadkach, kiedy ugięcia y wypadają dostatecznie małe w porównaniu do długości pręta, tak też z równania równowagi (2) pręta krzywego wyprowadził BOUSSINESQ równanie przybliżone

$$(5) \quad \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{y}{R^2} = -\frac{M}{B},$$

dla zamkniętego pierścienia kołowego o promieniu R . Tutaj oznacza s łukową odciętą, mierzoną od stałego punktu na obwodzie pierścienia, zaś y rzędną, mierzoną od tego obwodu w kierunku promienia, dodatnio na zewnątrz. Dokładność tego równania jest praktycznie wystarczająca dla rzędnych ugięcia dość małych w porównaniu do R .

Uzasadnienie równania BOUSSINESQA znajdują Czytelnicy na str. 254 „Kursu Wytrzymałości Materiałów“ TIMOSZENKI w moim przekładzie. Tutaj przystąpimy od razu do zastosowania tego równania w naszym zagadnieniu.

Przypuśćmy najpierw, że pierścień jest w stanie nieobciążonym doskonale okrągły i że dopiero pod wpływem obciążenia normalnym naciśkiem o stałym natężeniu q kG/cm przyjął słabo spłaszczoną postać równowagi przedstawioną przesadnie na rys. 1. Możemy z góry przyjąć, że postać ta jest symetryczna względem osi wzajemnie prostopadłych OA i OB . Wówczas musi być spełnione równanie równowagi (5), w którym należy wyrazić moment zginający M jako funkcję zmiennych y i s . Skoro przetniemy pierścień w jednej z osi symetrii np. OA , to działanie części odciętej na rozpatrywaną zastąpi w każdym z obu przekrojów

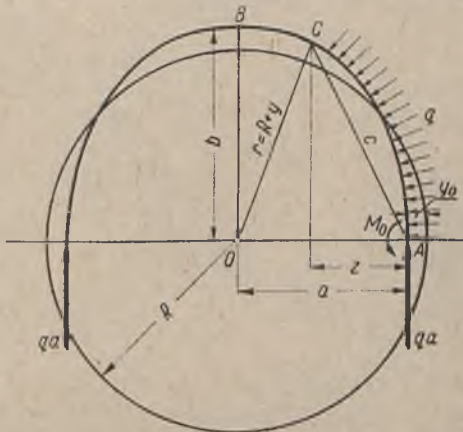
ściskająca siła podłużna o znanej wielkości qa i niewiadomy moment zginający o bezwzględnej wartości M_0 .

Rozpatrując teraz dowolny przekrój pierścienia C , widzimy, że na prawą część CA działa obok momentu $-M_0$, momentu siły qa o wartości algebraicznej qaz , jeszcze moment wypadkowej obciążeń zewnętrznych. Ta wypadkowa ma wielkość qc (jeżeli przez c oznaczymy cięciwę łuku AC) i leży na symetralnej tej cięciwy. Jej moment ma przeto wartość algebraiczną $qc \frac{c}{2}$. A zatem moment M w dowolnym przekroju C wyraża się wzorem

$$M = -M_0 - qaz + \frac{qc^2}{2}$$

albo

$$M = -M_0 + q \left(\frac{c^2}{2} - az \right).$$



Rys. 1

Oznaczywszy teraz przez y_0 algebraiczną wartość przemieszczenia przekroju A względem środka O , napiszemy

$$OA = a = R + y_0.$$

Ze związku

$$OC^2 = r^2 = a^2 + c^2 - 2az,$$

napisanego dla $\triangle OAC$, znajdujemy z łatwością

$$\frac{c^2}{2} - az = \frac{r^2 - a^2}{2} = \frac{(R + y)^2 - (R + y_0)^2}{2} = \frac{2Ry - 2Ry_0 + y^2 - y_0^2}{2}.$$

Stosownie do założenia bardzo małych y wobec R , możemy teraz skreślić dwa ostatnie wyrazy w liczniku i wskutek tego napisać w przybliżeniu zgodnym z charakterem równania (5) po prostu

$$\frac{c^2}{2} - az = R(y - y_0).$$

Równanie różniczkowe linii wygięcia pierścienia przybierze więc postać

$$(6) \quad B \left(\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{y}{R^2} \right) = M_0 + qR(y_0 - y)$$

albo też

$$(6a) \quad \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{M_0 + qRy_0}{B} + \left(\frac{qR}{B} + \frac{1}{R^2} \right) y = 0.$$

Całkowanie w znany sposób tego równania liniowego daje

$$(7) \quad y = \frac{M_0 + qRy_0}{Bk^2} + C \cos ks + C' \sin ks,$$

ze stałymi dowolnymi C i C' oraz oznaczeniem skrótowym

$$k^2 = \frac{qR}{B} + \frac{1}{R^2}.$$

Z warunku, że y osiąga ekstremum w punktach A i B , czyli że $\frac{dy}{ds} = 0$ dla $s=0$ i $s = \frac{R\pi}{2}$, wynika po pierwsze, że $C' = 0$, a po wtóre, że

$$(8) \quad C \sin\left(k \frac{R\pi}{2}\right) = 0.$$

Warunek zaś, że $y = y_0$ dla $s=0$ daje

$$(9) \quad C = y_0 - \frac{M_0 + qRy_0}{Bk^2}.$$

Ponieważ C musi być różne od zera, albowiem inaczej wypadłoby z równ. (7) $y = Const$, więc z (8) wynika

$$\sin\left(k \frac{R\pi}{2}\right) = 0,$$

czyli

$$(10) \quad k \frac{R\pi}{2} = n\pi,$$

jeżeli $n = 1, 2, 3 \dots$

Ten warunek musi spełniać wartość obciążenia q , ażeby pierścień pozostawał w równowadze w postaci spłaszczonej. Rzecz jasna, że zagadnienie nasze rozwiązuje tylko najmniejsza z otrzymanych wartości, odpowiadająca $n = 1$, a więc

$$k = \frac{2}{R}, \quad \text{czyli} \quad \sqrt{\frac{qR}{B} + \frac{1}{R^2}} = \frac{2}{R}.$$

Stąd

$$(3) \quad q_{kr} = \frac{3B}{R^2},$$

zgodnie z wspomnianymi powyżej wywodami, opartymi na traktowaniu dokładniejszego równania (2), ważnego także dla dowolnie wielkich wygięć.

Po wstawieniu znalezionych wartości w równ. (7), napiszemy je w postaci

$$(7a) \quad y = \frac{M_0 + qRy_0}{4B} R^2 + \left(y_0 - \frac{M_0 + qRy_0}{4B} R^2\right) \cos \frac{2s}{R}.$$

Kładąc tutaj $s = \frac{R\pi}{2}$, czyli $\cos \frac{2s}{R} = -1$, otrzymujemy wartość y w przekroju B , tj.

$$y_1 = -y_0 - \frac{R^2}{2B} (M_0 + qRy_0).$$

Ale wartość y_1 jest dopóty nieoznaczona, póki nie znajdziemy wartości M_0 i y_0 . Do tego potrzebne są dwa warunki, dotychczas nie uzyskane.

Jeden z nich wyraża, że po wstawieniu do lewej strony równania (6) wyrażenia na y z (7a) i podstawieniu następnie $s=0$ musimy otrzymać wyrażenie równe M_0 , jako wartości prawej strony.

Drugi warunek wyraża, że długość ćwiartki AB odkształconej krzywej osi pręta musi być równa nieodkształconej długości $\frac{R\pi}{2}$.

Pierwszy warunek daje po uproszczeniu równanie

$$B \left[-\frac{3}{R^2} \left(y_0 - R^2 \frac{M_0 + qRy_0}{4B} \right) + \frac{M_0 + qRy_0}{4B} \right] = M_0,$$

z czego wynika

$$M_0 = -\frac{3B}{R^2} y_0 + M_0 + qRy_0,$$

czyli równanie tożsamościowe, gdyż jak stwierdziliśmy powyżej, nowa postać równowagi może się wytworzyć tylko przy $q = \frac{3B}{R^3}$.

Wobec tego nie zajmujemy się już warunkiem drugim, gdyż on sam nie wystarcza do wyznaczenia niewiadomych parametrów M_0 i y_0 .

Łatwo zauważyć, że rzecz ma się tutaj podobnie jak w wywodzie wzoru EULERA na obciążenie krytyczne prostego pręta podłużnie ścisłanego na podstawie przybliżonego równania linii ugięcia. Wartość krytyczną znajdujemy wprawdzie tę samą, co z rozważania ścisłego, ale nie możemy obliczyć strzałki ugięcia, wchodzącej w równanie linii ugięcia jako parametr. F. JASIŃSKI wyjaśnił, jak wiadomo, ogólnie, dlaczego droga przybliżona prowadzi do ścisłej wartości obciążenia krytycznego (Sobranje soczynienij, tom 1, 1902, str. 145 i nast.). Nie trudno byłoby znaleźć teraz podobne wyjaśnienie dla naszego przypadku, ale oddalilibyśmy się od głównego tematu, jakim jest zbadanie wpływu początkowych małych zagięć pierścienia na jego wytrzymałość przy obciążeniach nieco mniejszych lub równych wartości krytycznej.

4. Przypuśćmy teraz, że pierścień nieobciążony jest już lekko spłaszczony i że to początkowe odkształcenie da się ująć w prosty wzór

$$(11) \quad w = w_0 \left(1 - 2 \sin \frac{s}{R} \right).$$

Tutaj mają w i w_0 to samo znaczenie, co poprzednio y i y_0 . Dla $s=0$ jest $w=w_0$; dla $s=\frac{R\pi}{2}$ jest $w=-w_0$. Znaczy to, że największe zbliżenie przekroju, np. A , do środka pierścienia winno być bezwzględnie biorąc równe największemu oddaleniu przekroju B , odległego od A o ćwiartkę obwodu. Jest to oczywiście przybliżone spełnienie warunku stałej długości obwodu, ale wystarczająco dokładne przy zastosowaniu przybliżonego równania BOUSSINESQA (równ. 5).

Przy dalszym spłaszczaniu pierścienia pod obciążeniem q zajdzie nowe przesunięcie przekroju w kierunku promienia o v , tak iż całkowite przemieszczenie środka przekroju od okręgu koła o promieniu R jest

$$y = v + w.$$

Podobnie przemieszczenie przekroju A będzie teraz równe

$$y_0 = v_0 + w_0.$$

Te wartości należy wstawić w równanie różniczkowe równowagi (6), ażeby otrzymać równanie różniczkowe dla niewiadomej funkcji $v(s)$. Uwzględnivszy przy tym związek wynikający z (11), a mianowicie

$$\frac{d^2w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} = \frac{w_0}{R^2},$$

otrzymujemy łatwo równanie

$$(12) \quad \frac{d^2v}{ds^2} + \left(\frac{qR}{B} + \frac{1}{R^2} \right) v = \frac{M_0 + qRv_0}{B} - \frac{w_0}{R^2} + \frac{2qRw_0}{B} \sin \frac{s}{R}.$$

Jego całkę ogólną ze stałymi nieoznaczonymi C_1 i C_2 znajdujemy w postaci

$$v = \frac{1}{k^2} \left(\frac{M_0 + qRv_0}{B} - \frac{w_0}{R^2} \right) + C_1 \cos ks + C_2 \sin ks + 2w_0 \sin \frac{s}{R}.$$

Dla $y = v + w$ mamy przeto równanie

$$y = \frac{1}{k^2} \left(\frac{M_0 + qRv_0}{B} - \frac{w_0}{R^2} \right) + C_1 \cos ks + C_2 \sin ks + w_0,$$

przy czym, jak poprzednio

$$k^2 = \frac{qR}{B} + \frac{1}{R^2}.$$

Do wyznaczenia stałych C_1 i C_2 posłużą warunki:

$$\text{przy } s=0 \quad \text{jest } y = v_0 + w_0 \quad \text{i} \quad \frac{dy}{ds} = 0.$$

Z pierwszego znajdujemy

$$C_1 = v_0 - \frac{1}{k^2} \left(\frac{M_0 + q R v_0}{B} - \frac{w_0}{R^2} \right),$$

z drugiego zaś

$$C_2 = 0.$$

Wstawiając te wartości w całość ogólną, napiszemy ją w prostej postaci następującej

$$(13) \quad y = u_0 + w_0 + (v_0 - u_0) \cos ks,$$

jeżeli nową wielkość pomocniczą u_0 określimy równaniem

$$(13a) \quad u_0 = \frac{1}{k^2} \left(\frac{M_0 + q R v_0}{B} - \frac{w_0}{R^2} \right).$$

Parametr k znowu nie może być tutaj dowolny, gdyż wartość jego ustala warunek: dla $s = \frac{R\pi}{2}$ jest $\frac{dy}{ds} = 0$, z którego wynika tak samo jak w ustępie poprzednim

$$\sin \left(k \frac{R\pi}{2} \right) = 0,$$

czyli

$$k = \frac{2}{R},$$

a więc

$$(3) \quad q = \frac{3B}{R^3}.$$

Uważając teraz za wielkości dane

$$B, R, q \quad \text{i} \quad w_0,$$

potrzebujemy do obliczenia wytrzymałościowego wyznaczenia

$$v_0 \quad \text{i} \quad M_0.$$

Atoli rozporządzamy już tylko jednym jeszcze warunkiem, który wyraża, że długość łuku między przekrojami A i B nie uległa zmianie i wynosi, jak przed odkształceniem, $\frac{R\pi}{2}$. Nie trudno dowieść, że warunek ten jest, z tym samym stopniem dokładności, co równanie BOUSSINESQA, równoważny z warunkiem, że $b - R = R - a$, czyli że

$$[y]_{s=0} + [y]_{s=R\pi/2} = 0.$$

Mamy więc, ze względu że

$$\cos\left(k\frac{R\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1,$$

$$2u_0 + 2w_0 = 0,$$

czyli

$$\frac{1}{k^2} \left(\frac{M_0 + qRv_0}{B} - \frac{w_0}{R^2} \right) + w_0 = 0,$$

a stąd po podstawieniu wartości $k = \frac{2}{R}$ i $q = \frac{3B}{R^3}$ znajdujemy z łatwością

$$(14) \quad M_0 = -\frac{3B}{R^2} (v_0 + w_0).$$

Ważna wielkość v_0 pozostaje przeto nieoznaczona. Zupełne rozwiązanie zadania jest widocznie możliwe tylko na podstawie całkowania dokładnego równania różniczkowego (2). Znaleziony wzór przybliżony (14) pozwoli jednakże ocenić wielkość momentu M_0 w naszym zagadnieniu wytrzymałościowym.

W przypadku rury ściskanej zewnętrznie otrzymujemy ze wzoru (4), jeżeli rura jest doskonale okrągła i nie zachodzi jeszcze niebezpieczeństwo zakłębnięcia, znany wzór „kotłowy“ na naprężenia obwodowe

$$(15) \quad \sigma = \frac{pD_z}{2\delta}.$$

Tutaj oznacza p w kG/cm^2 ciśnienie zewnętrzne, liczbowo równe obciążeniu q w kG/cm , przypadającemu na pierścieni rury o szerokości 1 cm.

Krytyczną wartość ciśnienia p znajdujemy ze wzoru (3), zastosowanego do takiegoż pierścienia, z uwzględnieniem działania płytowego skutku połączenia pierścieni w jedną całość. Musimy przeto w wyrażeniu $B = EJ$ zastąpić moduł E przez $\frac{E}{1-\nu^2}$, gdzie ν oznacza liczbę POISSONA, wynoszącą, jak wiadomo, dla stali około 0,3.

Mamy więc

$$B = \frac{EJ}{1-\nu^2} = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{l\delta^3}{12},$$

a podstawiawszy nadto $R = \frac{D}{2}$ otrzymujemy

$$(III) \quad p_{kr} = \frac{2E}{1-\nu^2} \left(\frac{\delta}{D} \right)^3.$$

Tutaj oznacza D średnicę koła, połowiącego grubość ściany rury, a więc D jest mniejsze od D_z o grubość tej ściany δ . W stosowanych zwykle

w wiertnictwie rurach jest stosunek $D_2:\delta$ zawsze większy od 10, wobec czego można w rachunkach praktycznych zastępować D_2 przez D i nawzajem.

Jeżeli teraz rura ma początkowo spłaszczenie w_0 , a ciśnienie zewnętrzne równa się p_{kr} , to największy moment zginający pierścień rury o szerokości 1 cm znajdziemy ze wzoru (14) po podstawieniu wartości B , a mianowicie

$$(14a) \quad |M_0| = \frac{E\delta^3}{(1-\nu^2)D^2} (v_0 + w_0).$$

Temu momentowi odpowiada naprężenie we włóknach skrajnych o wartości bezwzględnej

$$\sigma' = \frac{6|M_0|}{\delta^2} = \frac{6E\delta}{1-\nu^2} \cdot \frac{(v_0 + w_0)}{D^2}.$$

Największe naprężenie wywołane ściskaniem i zginaniem w jednej z warstw skrajnych ma przeto wartość

$$(16) \quad \sigma_{max} = \sigma + \sigma' = \frac{pD}{2\delta} + \frac{6E\delta}{(1-\nu^2)D^2} (v_0 + w_0),$$

albo po wstawieniu za p wartości (III)

$$(16a) \quad \sigma_{max} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\delta}{D}\right)^2 + \frac{6E\delta}{1-\nu^2} \frac{v_0 + w_0}{D^2}.$$

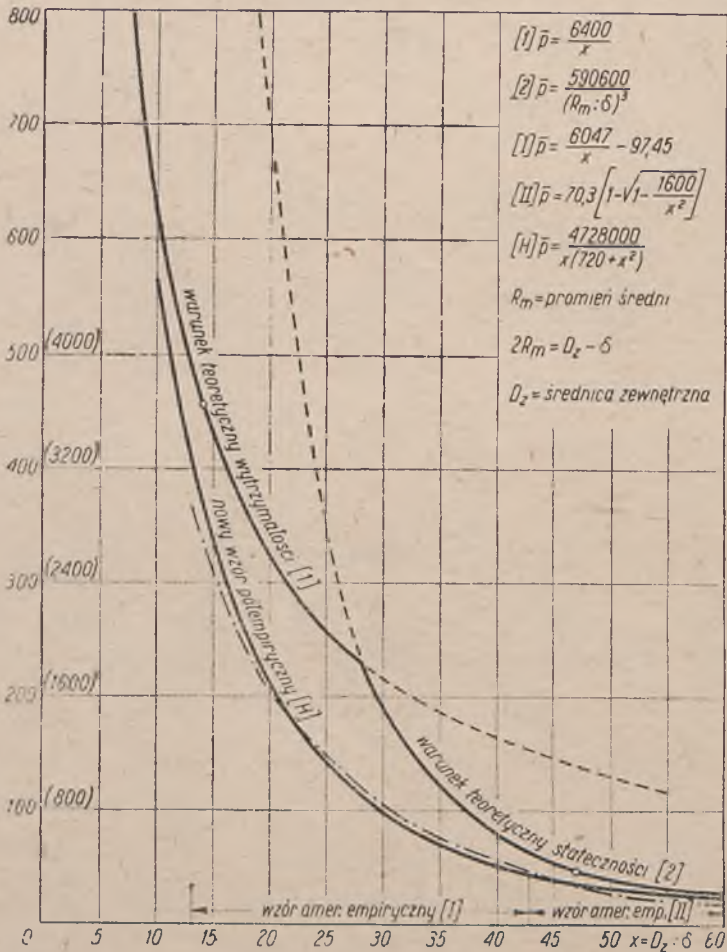
Zwiększenie naprężenia, odpowiadające spłaszczeniu rury przy ciśnieniu krytycznym, wynosi zatem

$$\frac{6(v_0 + w_0)}{\delta},$$

w stosunku do naprężenia obliczonego wzorem „kotłowym“. Gdyby np. $(v_0 + w_0)$ było równe $0,1\delta$, co zdaje się odpowiadać warunkom rzeczywistym, to zwiększenie wynosiłoby 0,6, czyli 60%.

Ten orientacyjny rachunek wyjaśnia dobrze, dlaczego krzywa empiryczna z doświadczeń amerykańskich (rys. 2) przebiega poniżej obu krzywych teoretycznych, tj. krzywej wzoru wytrzymałościowego („kotłowego“) i krzywej wzoru statecznościowego (oznaczonej na rysunku przez 2, a w tekście niniejszej publikacji przez III), które odpowiadają tylko idealnemu schematowi teoretycznemu rury doskonale okrągłej z materiału doskonale jednolitego. Obniżający wartość niebezpiecznego ciśnienia zewnętrznego p wpływ nieuniknionych zбоceń w rurach rzeczywistych od modelu teoretycznego musi być szczególnie wielki w okolicy przecięcia się krzywej wytrzymałościowej ze statecznościową.

Rzecz się ma widocznie podobnie jak dla obciążenia niebezpiecznego prętów podłużnie ściskanych, gdzie również wpływ ten jest największy w okolicy smukłości granicznej, tj. smukłości, przy której prosty wzór wytrzymałościowy $\sigma = P/F$ daje tę samą wartość naprężenia, co wzór statecznościowy EULERA. Tutaj rolę smukłości gra oczywiście stosunek $x = D:\delta$.



Rys. 2

Zważywszy teraz, że zboczenia powyższe zdążają do zera tak dla wartości stosunku $x = D:\delta$ zdążającej do zera, jak i zdążającej do nieskończoności, widzimy, że krzywa rzeczywistych ciśnień niebezpiecznych (zgniatających rurę) musi mieć równanie, które dla bardzo małych x przechodzi we wzór wytrzymałościowy, a dla bardzo wielkich — we wzór statecznościowy. Równanie to winno być nadto dostatecznie proste, i dla materiału,

który był przedmiotem prób amerykańskich, winno oddawać dostatecznie dokładnie wyniki tych prób.

Rzut oka na rys. 2 wystarczy, aby stwierdzić, że ogłoszony w r. 1926 wzór (1) czyni zadość wszystkim powyższym wymaganiom i dlatego zaleciłem go wówczas do zastosowania praktycznego, nie przesądzając, że przedyskutowanie dat doświadczalnych może nieco zmienić w przyszłości współczynniki wzoru z korzyścią dla jego dokładności.

Przy zastosowaniu wzoru (1) do rur wiertniczych, można poprzestać na stopniu pewności znacznie mniejszym od stosowanego w innych częściach konstrukcji maszynowych lub budowlanych, ponieważ siły zewnętrzne są tutaj bardzo dokładnie znane, a wzór określa niższą granicę ciśnień niebezpiecznych.

Część pewności mieści się już w przyjęciu praktykowanym w wiertnictwie, że gęstość płynu otaczającego rurę (tj. wody zanieczyszczonej) $\mu = 1,25 \text{ g/cm}^3$. Wystarczy zatem obliczać wymiary rur wzorem (1) przy stosowaniu współczynnika pewności

$$n = 1,25$$

stosowanego w obliczeniach porównawczych inż. PARASZCZAKA, wykonanych w r. 1927 dla Podkomisji Rur Wiertniczych w PKN, pracującej pod przewodnictwem prof. J. FABIAŃSKIEGO.

Przykład. Rura wiertnicza bez szwu ze stali zlewnej 10-calowa ma $D_s = 267 \text{ mm}$, $\delta = 7 \text{ mm}$, a więc $x = 267:7 = 38,14$. Ciśnienie niebezpieczne wg wzoru (1) wynosi:

$$\bar{p} = \frac{4728000}{38,14(720 + 38,14^2)} = \frac{4728000}{38,14 \cdot 2174,7} = 57,0 \text{ kG/cm}^2.$$

To odpowiada ciśnieniu słupa cieczy o gęstości $\mu = 1,25$ i wysokości:

$$h = \frac{57 \cdot 10}{1,25} = 8 \cdot 57 = 456 \text{ m}.$$

Przy pewności $n = 1,25$ możemy tę rurę stosować do głębokości:

$$456 : 1,25 = 365 \text{ m}.$$

Uwaga. Do bezpośredniego użytku praktycznego w wiertnictwie zaleca się proste przekształcenie wzoru (1) tak, aby podawał od razu wysokość \bar{h} w metrach słupa cieczy o gęstości 1,25, która grozi zakłębnięciem rury. Ze względu na to, że E dla różnych rodzajów stali zmienia się bardzo mało, można przyjąć $a = 1$ i napisać wzór w postaci:

$$\bar{h} = \frac{37824000}{x(720\beta + x^2)},$$

przy czym $\beta = \frac{32}{R_{pl}}$, zaś R_{pl} oznacza granicę plastyczności materiału w kG/mm^2 . Jak poprzednio jest $x = D_z : \delta$.

Dla $\beta=1$ podaje liczbowe wartości \bar{h} tablica podana poniżej, a także wykres na rys. 2, z uwzględnieniem liczb po prawej stronie osi rzędnych.

Tablica wysokości \bar{h} (w metrach słupa cieczy o gęstości 1,25) ciśnień niebezpiecznych (zgniatają cych rurę) w zależności od stosunku D_z : $d=x$ dla rur stalowych bez szwu o granicy plastyczności

$$R_{pl} = 32 \text{ kG mm}.$$

x	\bar{h}	x	\bar{h}	x	\bar{h}	x	\bar{h}	x	\bar{h}
10	4613	20	1689	30	778,3	40	407,6	50	234,9
11	4089	21	1551	31	725,8	41	384,2	51	223,3
12	3648	22	1428	32	677,7	42	362,6	52	212,4
13	3273	23	1317	33	633,6	43	342,4	53	202,2
14	2949	24	1216	34	593,0	44	323,7	54	192,6
15	2668	25	1125	35	555,6	45	306,2	55	183,6
16	2422	26	1042	36	521,2	46	289,9	56	175,2
17	2205	27	966,8	37	489,4	47	274,8	57	167,2
18	2013	28	898,2	38	460,0	48	260,6	58	159,7
19	1842	29	835,6	39	432,8	49	247,3	59	152,6
20	1689	30	778,3	40	407,6	50	234,9	60	145,9

Przykład zastosowania tablicy. Normalna rura $\varnothing 4''$ ma $D_z=102$ mm, $\delta=7$ mm, a więc $x=102:7=14,6$. Z tablicy znajdujemy przez interpolację między wartościami $\bar{h}=2949$ (dla $x=14$) i $\bar{h}=2668$ (dla $x=15$):

$$\bar{h} \text{ (dla } x=14,6) = 2949 - 0,4(2949 - 2668) = 2949 - 0,4 \cdot 281 = 2949 - 112 = 2837 \text{ m.}$$

Przy stopniu bezpieczeństwa $n=1,25=5/4$ można przeto stosować tę rurę do głębokości:

$$h = 4/5 \cdot 2837 = 2207 \text{ metrów.}$$

OSOBLIWE ZGIĘCIE PIERŚCENIA

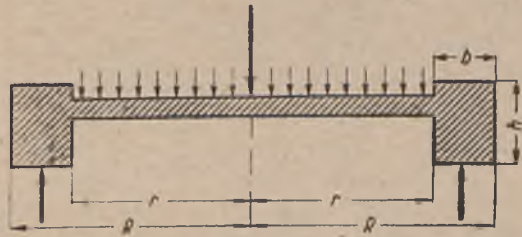
(Przegląd Techniczny, 1930 r.)

1. W zagadnieniu zgięcia kołowo symetrycznego płyty okrągłej rozpatrujemy zwyczajnie dwa wyidealizowane przypadki ustalenia brzegu płyty, mianowicie:

1) *Swobodne podparcie* brzegu, czyli w schemacie teoretycznym *ustalenie* samej tylko *linii środkowej* brzegu płyty.

2) *Doskonale utwierdzenie* (zamocowanie) brzegu, czyli *ustalenie* całej *ściany brzegowej* płyty.

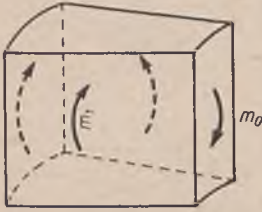
Ale w zastosowaniach technicznych mamy zawsze do czynienia z przypadkami pośrednimi utwierdzenia niedoskonałego lub częściowego (niezupełnego). Zachodzi zatem potrzeba oceny stopnia utwierdzenia przez mniej lub więcej dokładne wyznaczenie zależności momentu brzegowego (utwierdzającego) od kąta obrotu odpowiedniego przekroju. (Moment ten odnośimy, jak zwykle w teorii płyt, do jednostki szerokości przekroju).



Rys. 1

Wykażemy, jak łatwo stosunkowo można uzyskać odpowiednie wzory w przypadku, gdy brzeg płyty jest przymocowany do pierścienia usztywniającego w sposób przedstawiony schematycznie na rys. 1. Przy tym przyjmiemy najpierw dla uproszczenia, że promieniowy przekrój pierścienia posiada płaszczyznę symetrii równoległą do płaszczyzny płyty, a zatem prostopadłą do sił ją obciążających. Na rysunku przedstawiono ten przekrój w postaci prostokąta o podstawie b i wysokości h . Taki pierścień jest zatem obciążony układem ciągłym par sił równomiernie rozłożonym na całym jego obwodzie. Każda para leży w płaszczyźnie promieniowej pierścienia, a więc w płaszczyźnie przekroju; działanie jej zaś ujawnia się obrotem elementu pierścienia w jego płaszczyźnie symetrii. Obrotowi temu muszą towarzyszyć skrócenia górnych „włókien“ (kołowych) pierścienia

i wydłużenia dolnych, dopóki nie zajdzie równowaga napięć na obu ścianach przekrojowych elementu z powyższymi siłami zewnętrznymi. Napięcia te sprowadzają się do pary zginającej pierścieni w każdym przekroju promieniowym. Oznaczmy teraz (rys. 2) przez m_0 moment pary sił zewnętrznych odniesiony do jednostki długości obwodu wewnętrznego pierścienia o promieniu r ; m_1 moment pary sił wewnętrznych odniesionych do jednostki szerokości przekroju pierścienia.



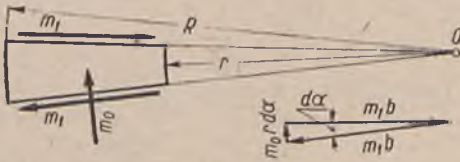
Rys. 2

Wtedy $m_0 r da$ (rys. 3) będzie wartością bezwzględną momentu sił zewnętrznych, a $m_1 b$ taką wartość momentu sił wewnętrznych. Zamknięty trójkąt wektorowy tych par daje

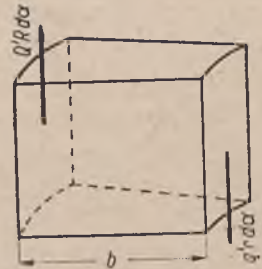
$$m_0 r da = m_1 b \cdot da,$$

a więc

$$(1) \quad m_1 = m_0 \frac{r}{b}.$$



Rys. 3



Rys. 4

Moment $m_0 r da$ możemy także zastąpić układem statycznie równoważnym sił $Q' R da$ i $q' r da$ tworzących parę (rys. 4), a więc czyniących zadość warunkowi

$$Q' R da = q' r da$$

albo

$$(2) \quad Q' R = q' r.$$

A zatem

$$m_0 r da = b \cdot Q' R da = b \cdot q' r \cdot da,$$

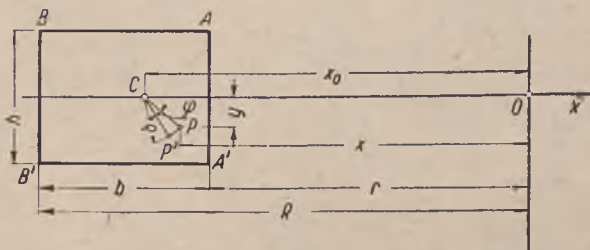
czyli

$$(3) \quad m_0 = Q' \frac{R}{r} b = q' b.$$

Ażeby teraz znaleźć rozmieszczenie i wielkość normalnych naprężeń zginających w przekroju promieniowym pierścienia bez uciekania się do

matematycznej teorii sprężystości, wyjdziemy z założenia, że przekrój pierścienia obraca się tylko nieco w swej płaszczyźnie, bez uwagi godnej zmiany swej postaci i wielkości. Jest to założenie analogiczne do założenia BERNOULLIEGO w teorii zgięcia prętów prostych i zakrzywionych. U tych ostatnich stosujemy je, gdy zginanie zachodzi w płaszczyźnie osi

pręta, pomyślanej jako krzywa płaska. Tutaj zgięcie zachodzi w płaszczyźnie prostopadłej do płaszczyzny osi pręta i stycznej do tejże osi, przy czym jednakże mamy do czynienia z przypadkiem osobliwym, kiedy momenty zginające nie powodują



Rys. 5

wcale zgięcia samej osi pręta. Wyraz „zgięcie“ jest tutaj użyty w znaczeniu *statycznym*, a nie *kinetycznym*, które najsilniej przemawia do wyobraźni geometrycznej technika.

Przyjawszy na rys. 5 punkt C jako ślad osi obrotu przekroju i oznaczwszy przez $\Delta\varphi$ (bardzo mały) kąt obrotu widzimy, że promień x włókna kołowego, odpowiadającego punktowi P przekroju, przyrasta o małą wielkość $u = \rho \cdot \Delta\varphi \cdot \sin \varphi$, czyli

$$u = y \Delta\varphi.$$

A zatem wydłużenie jednostkowe tego włókna określi wzór

$$\varepsilon_t = \frac{u}{x} = \frac{y}{x} \Delta\varphi,$$

zaś odpowiednie naprężenie

$$(4) \quad \sigma_t = E \varepsilon_t = E \frac{y}{x} \Delta\varphi.$$

Warunek momentów względem osi x daje

$$m_1 b = \int_F y \sigma_t \cdot dF.$$

Po podstawieniu wartości (4) z uwzględnieniem związków (1) i (2) otrzymujemy

$$(5) \quad m_1 b = E \Delta\varphi \int_F \frac{y^2}{x} dF = m_0 r = q' b r = Q' b R.$$

Wyrugowawszy z równań (4) i (5) niewiadome $\Delta\varphi$ znajdziemy

$$(6) \quad \sigma_t = q' b r \frac{y}{x} \frac{1}{\int_F \frac{y^2}{x} dF}.$$

A zatem naprężenia normalne w przekroju pierścienia są wprost proporcjonalne do momentu skręcającego, a odwrotnie do „wskaznika przekroju“

$$(6a) \quad W = \int_F \frac{y^2}{x} dF.$$

Te naprężenia zależą nadto liniowo od odległości y od osi obojętnej, a hyperbolicznie od odległości x od osi pierścienia. W obranym szczególnym przypadku prostokątnego przekroju pierścienia obliczymy z łatwością

$$(7) \quad W = \int_r^R \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{y^2 dx dy}{x} = \frac{h^3}{12} \ln \frac{R}{r}.$$

A więc

$$(8) \quad \sigma_t = \frac{12 q' b r y}{h^3 \ln \frac{R}{r} x},$$

$$(9) \quad \Delta \varphi = \frac{12 q' b r}{E h^3 \ln \frac{R}{r}}.$$

Największą wartość osiąga σ_t w punktach A i A' (rys. 5), tj. dla

$$y = \frac{h}{2}, \quad x = r,$$

mianowicie

$$(10) \quad \sigma_{tmax} \equiv \bar{\sigma}_t = \frac{6 q' b}{h^2 \ln \frac{R}{r}}.$$

2. Ażeby teraz dowieść, że otrzymane wzory (8) i następne są dostatecznie dokładne do obliczeń wytrzymałościowych techniki konstrukcyjnej, porównamy wzór (8) z wzorem dokładniejszym, otrzymanym z teorii płyt. Nasz pierścień bowiem zachowuje się jak płyta okrągła z otworem w środku o promieniu r , swobodnie podparta na obwodzie zewnętrznym o promieniu R i obciążona równomiernie wzdłuż obwodu wewnętrznego ciężarem q' kG/cm. Jak uzasadnimy poniżej, ściśle rozwiązanie odnośnego zadania z teorii płyt daje na σ_t wzór następujący

$$(11) \quad \sigma_t = \frac{3 q' r (1 + \nu) y}{h^3} \left(\frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2} \frac{1}{x^2} \ln \frac{R^2}{r^2} + \frac{R^2 \ln R^2 - r^2 \ln r^2}{R^2 - r^2} - \ln x^2 + 2 \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \right).$$

Tutaj oznacza ν liczbę POISSONA.

Dla największego naprężenia w warstwie równoległej do osi obojętnej otrzymujemy stąd przy $x=r$ wzór

$$(12) \quad \bar{\sigma}_t = \frac{6q'r}{h^3} y \left[(1+\nu) \left(\frac{R^2}{R^2-r^2} \ln \frac{R^2}{r^2} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \right] = \Phi \frac{6q'r}{h^3} y$$

zamiast przybliżonego, wynikającego z (8), który ma postać

$$(13) \quad \bar{\sigma}_t = \frac{6q'r}{h^3} y \left[\frac{2(R-r)}{r \ln \frac{R}{r}} \right] = \Psi' \frac{6q'r}{h^3} y,$$

przy czym Φ i Ψ oznaczają współczynniki liczbowe, zależne głównie od stosunku $R:r$.

Podobnie znajdujemy (kładąc $x=R$) wzory na najmniejsze naprężenie w warstwie równoległej do osi obojętnej i odległej od tejże osi o y

$$(14) \quad \sigma_t = \frac{6q'r}{h^3} y \left[(1+\nu) \left(\frac{r^2}{R^2-r^2} \ln \frac{R^2}{r^2} + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \right] = \Phi' \frac{6q'r}{h^3} y,$$

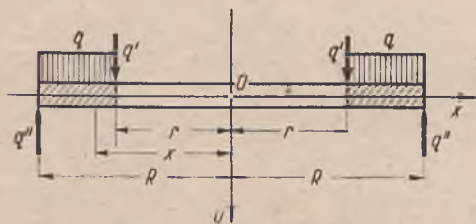
$$(15) \quad \sigma_t \approx \frac{6q'r}{h^3} y \left[\frac{2(R-r)}{R \ln \frac{R}{r}} \right] = \Psi'' \frac{6q'r}{h^3} y.$$

Szereg wartości Φ , Ψ , Φ' i Ψ'' obliczonych dla różnych wartości stosunku $R:r$ przy $\nu = \frac{1}{3}$ zawiera tablica następująca

$\frac{R}{r} = 1,1$	1,2	1,5	1,75	2
$\Phi = 2,131$	2,259	2,613	2,882	3,137
$\Psi = 2,098$	2,194	2,466	2,680	2,885
$100 \frac{\Phi - \Psi}{\Phi} = 1,55\%$	3%	5,5%	7%	8%
$\Phi' = 1,873$	1,771	1,530	1,390	1,282
$\Psi'' = 1,907$	1,832	1,649	1,536	1,440
$100 \frac{\Psi'' - \Phi'}{\Psi''} = 1,8\%$	3,5%	7%	9%	12%

Z liczb powyższych widać, że wzór przybliżony (10) może oddać dobre usługi w obliczeniach wytrzymałościowych przy szerokościach pierścienia nie większych od promienia wewnętrznego. Nadto należy pamiętać, że

przy znacznej grubości pierścienia (tj. wysokości jego przekroju h) w stosunku do szerokości przestaje i wzór teorii płyt być ścisłym. Teoria ta



Rys. 6

bowiem opiera się na założeniu małej grubości płyty w porównaniu do jej innych wymiarów. Ogólniejsza zaś teoria tzw. płyt grubych prowadzi do wzorów jeszcze bardziej zawiłych.

3. Przytoczony powyżej wzór (11) wyprowadzimy tutaj z rozwiązania zadania nieco ogólniej-

sze, a mającego również ważne znaczenie praktyczne. Przyjmiemy mianowicie, że nasza płyta pierścieniowa jest nadto obciążona na całej górnej powierzchni ciśnieniem q kG/cm² (rys. 6). Wtedy równanie powierzchni ugięcia płyty ma znaną postać ogólną¹⁾:

$$(16) \quad w = \frac{qx^4}{64\bar{B}} + \frac{r}{8\bar{B}}(2q' - qr)x^2(\ln x - 1) - \frac{C_1x^2}{4} - C_2 \ln x + C_3,$$

przy czym $\bar{B} = \frac{h^3}{12} \frac{E}{1-\nu^2}$ jest sztywnością zginania płyty, a C_1 , C_2 i C_3 są stałymi całkowania, które wyznaczymy z następujących warunków krańcowych

- 1) przy $x=R$ jest $w=0$,
- 2) przy $x=r$ jest $m_r=0$ (moment promieniowy),
- 3) przy $x=R$ jest $m_r=0$.

Nadto musi być spełniony warunek równowagi

$$(17) \quad 2Rq' = 2rq' + (R^2 - r^2)q.$$

Jeżeli $\varphi = -\frac{dw}{dx}$ oznacza nachylenie względem osi x stycznej do przekroju promieniowego powierzchni ugięcia płyty, to momenty zginające główne m_r (promieniowy) i m_t (równoleżnikowy lub obwodowy) określają w teorii płyt wyrażenia następujące

$$m_r = \bar{B} \left(\frac{d\varphi}{dx} + \nu \frac{\varphi}{x} \right); \quad m_t = \bar{B} \left(\frac{\varphi}{x} + \nu \frac{d\varphi}{dx} \right).$$

Z wymienionych powyżej warunków krańcowych znajdujemy następujące wartości stałych C_1 , C_2 i C_3 :

¹⁾ S. TIMOSZENKO: Kurs Wytrzymałości Materiałów, str. 277 i następne.

$$C_1 = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{q(R^2+r^2)}{8B} + \frac{2q'r-qr^2}{4B} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{R^2 \ln R^2 - r^2 \ln r^2}{R^2 - r^2} \right),$$

$$C_2 = \frac{R^2 r^2}{16B} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} q + 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{2q'r-qr^2}{R^2-r^2} \ln \frac{R^2}{r^2} \right),$$

$$C_3 = -\frac{qR^4}{64B} - \frac{(2q'r-qr^2)R^2}{8B} (\ln R - 1) + \frac{C_1}{4} R^2 + C_2 \ln R.$$

Z uwzględnieniem tych wartości otrzymujemy na interesujący nas głównie moment obwodowy m_t wyrażenie

$$(18) \quad m_t = \frac{q}{16} \left[(3+\nu) \left(R^2 + r^2 + \frac{R^2 r^2}{x^2} \right) - (1+3\nu)x^2 \right] +$$

$$+ \frac{1}{8} (2q'r - qr^2) (1+\nu) \left[\frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2} \frac{1}{x^2} \ln \frac{R^2}{r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{R^2 \ln R^2 - r^2 \ln r^2}{R^2 - r^2} - \ln x^2 + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \right].$$

Kładąc tutaj $q=0$, znajdziemy dla naszego przypadku obciążenia pierścienia

$$(19) \quad m_t = \frac{1+\nu}{4} q'r \left[\frac{R^2 r^2}{R^2 - r^2} \frac{1}{x^2} \ln \frac{R^2}{r^2} + \frac{R^2 \ln R^2 - r^2 \ln r^2}{R^2 - r^2} - \ln x^2 + 2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \right],$$

a stąd na podstawie wzoru

$$(20) \quad \sigma_t = \frac{12 m_t}{h^3} y$$

dochodzimy wprost do wzoru (11).

4. Jeżeli przechodząca przez środek przekroju oś x nie jest jego osią symetrii, to obrót przekroju zajdzie w ogóle około punktu $C(x_0, y_0)$, nie leżącego na tej osi. Odształcenie ε_t , uwarunkowane tym obrotem określi teraz wzór

$$\varepsilon_t = \frac{y - y_0}{x} \Delta\varphi,$$

a naprężenia

$$(21) \quad \sigma_t = E \frac{y - y_0}{x} \Delta\varphi.$$

Ażeby naprężenia bezwzględne tworzyły parę sil, musi się spełniać warunek

$$\int_F \sigma dF = 0,$$

z którego, po wstawieniu powyższej wartości na σ , wynika

$$(22) \quad y_0 = \frac{\int_F \frac{y dF}{x}}{\int_F \frac{dF}{x}}.$$

Wtedy jednakże naprężenia bezwzględne nie sprowadzają się w ogóle do pary sił, leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do x , lecz w płaszczyźnie nachylonej. Skoro tę parę rozłożymy na pary składowe wzajemnie prostopadłe, to otrzymamy dwie pary zginające: jedną w płaszczyźnie prostopadłej, a drugą w płaszczyźnie równoległej do x . Wartość momentu pierwszej, oznaczonej w p. 1 przez $m_1 b$, a teraz przez m_x , znajdujemy z warunku momentów względem osi x , czyli

$$(23) \quad m_x = \int_F y \sigma_1 dF = E \Delta \varphi \int_F \frac{y^2}{x} dF.$$

Wartość drugiej zaś — z warunku

$$(24) \quad m_y = \int_F x \sigma_1 dF,$$

czyli z uwzględnieniem (21)

$$m_y = E \Delta \varphi \int_F (y - y_0) dF.$$

Ponieważ $\int y dF = 0$, więc

$$(25) \quad m_y = -EF y_0 \Delta \varphi,$$

albo, po wstawieniu wartości za y_0 z (22):

$$(25a) \quad m_y = -EF \Delta \varphi \frac{\int_F \frac{y dF}{x}}{\int_F \frac{dF}{x}}.$$

Rugując z równań (23) i (25) wielkość $E \Delta \varphi$ otrzymamy związek

$$(26) \quad \frac{m_y}{m_x} = - \frac{F \int_F \frac{y dF}{x}}{\int_F \frac{y^2}{x} dF \cdot \int_F \frac{dF}{x}}.$$

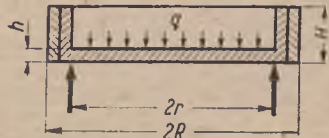
Przyjęte prawo rozkładu naprężeń jest zatem przy ogólniejszym kształcie przekroju statycznie możliwe tylko wtedy, gdy momentowi zginającemu m_x towarzyszy nadto moment m_y , przy czym stosunek

wielkości obu momentów musi czynić zadość równaniu (26). Stąd wynika potrzeba uogólnienia znanej elementarnej teorii zgięcia prętów zakrzywionych parami sił, leżącymi w płaszczyźnie osi pręta, ustalonej dotąd tylko w przypadku symetrii przekroju względem tej płaszczyzny. Przy takim uogólnieniu trzeba oczywiście założyć, że dwa sąsiednie przekroje pręta zakrzywionego, tworzące kąt da , nie tylko zmieniają wzajemne nachylenie o Δda , lecz także obracają się w swych płaszczyznach o $\Delta\varphi$.

Określone w ten sposób prawo odkształceń prowadzi do prawa rozkładu naprężeń, a warunki równowagi pozwolą znaleźć wartość parametrów $\frac{\Delta da}{da}$ i $\Delta\varphi$ oraz innych stałych, potrzebnych do zupełnego określenia naprężeń.

5. *Przykład.* Płyta okrągła, równomiernie obciążona ciśnieniem $q \frac{\text{kG}}{\text{cm}^2}$ i dokoła swobodnie podparta, jest usztywniona na brzegu kołnierzem stojącym, wzmocnionym przez przynitowany pierścień (rys. 7). Gdyby nie było wzmocnienia, to kąt nachylenia powierzchni ugięcia na brzegu podpartym miałby wielkość

$$\frac{qr^3}{8\bar{B}(1+\nu)};$$



Rys. 7

wskutek częściowego utwierdzenia za pośrednictwem pierścienia usztywniającego ma ten kąt wartość mniejszą o wielkość

$$\frac{m_0 r}{\bar{B}(1+\nu)} = \frac{12 m_0 r(1-\nu)}{h^3 E},$$

jeżeli m_0 oznacza moment przeniesiony przez pierścień na jednostkę długości obwodu.

A zatem kąt

$$\Delta\varphi = \frac{12qr^3(1-\nu)}{8Eh^3} - \frac{12m_0r(1-\nu)}{Eh^3} = \frac{3}{2} \frac{1-\nu}{E} \frac{r}{h^3} (qr^2 - 8m_0)$$

musi być równy kątowi obrotu elementów pierścienia, wyznaczonych wzorem (9) z uwzględnieniem (5), czyli

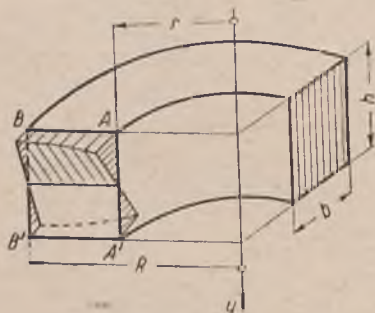
$$\Delta\varphi = \frac{12m_0r}{EH^3 \ln \frac{R}{r}}.$$

²⁾ S. TIMOSZENKO: Kurs wytrzymałości materiałów, str. 279 i następnne.

Z porównania obu tych wartości znajdujemy

$$m_0 = \frac{1}{8} q r^2 \frac{1}{1 + \frac{h^3}{(1-\nu)H^3 \ln \frac{R}{r}}}$$

jako wartość (bezwzględna) momentu podporowego rozpatrywanej płyty.



Rys. 8

Niech np. płyta stalowa o promieniu $r=50$ cm i grubości $h=2$ cm ma brzeg podparty usztywniony pierścieniem o grubości $R-r=4$ cm i wysokości $H=6$ cm. Wtedy wyrażenie

$$\frac{h^3}{(1-\nu)H^3 \ln \frac{R}{r}} = \frac{2^3}{0,7 \cdot 6^3 (\ln 54 - \ln 50)} = 0,6874.$$

A zatem

$$m_0 = 0,59 \frac{1}{8} q r^2,$$

czyli usztywnienie brzegu pierścieniem wywołuje moment podporowy o wielkości równej 59% momentu, odpowiadającego utwierdzeniu doskonałemu.

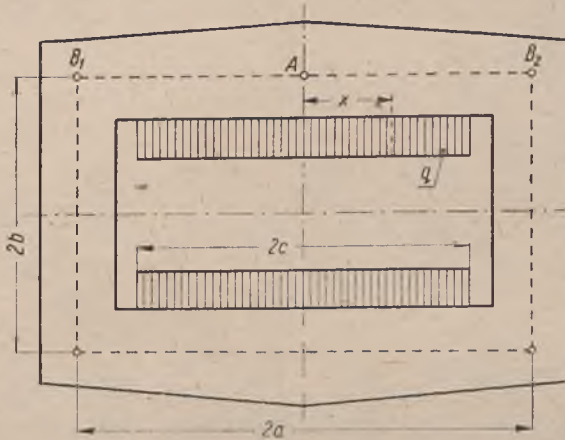
Uwaga. Ważność powyższych wywodów teoretycznych jest ograniczona zastrzeżeniem, ażeby warstwy obojętne zgięcia płyty i pierścienia usztywniającego zlewały się lub różniły tylko bardzo nieznacznie. Jeżeli bowiem, jak w przykładzie powyższym, środek przekroju pierścienia leży w stosunkowo znacznej odległości od płaszczyzny środkowej płyty, to przekroje pierścienia nie mogą się obracać, jak! przyjęto w p. 1. Temu obrotowi stoi bowiem na przeszkodzie opór sprężysty przeciwko rozciąganiu (lub ścisaniu) płyty w jej płaszczyźnie. Dzięki temu na pierścień przenosi się od płyty nie tylko moment m_0 , lecz także siła promieniowa S (kG/cm). W rezultacie będzie usztywniające działanie pierścienia silniejsze, aniżeli w przypadku środkowego złączenia go z płytą.

OBLICZENIE ODKSZTAŁCEŃ RAMY WALCARKI

(Czasopismo Techniczne, 1935 r.)

Streszczenie

Tematem pracy, wylonionym z potrzeb techniki maszynowej, jest obliczenie odkształceń ramy walcarki (rys. 1), której górna i dolna pozioma belka obciążone są na długości $2c$ obciążeniem q .



Rys. 1

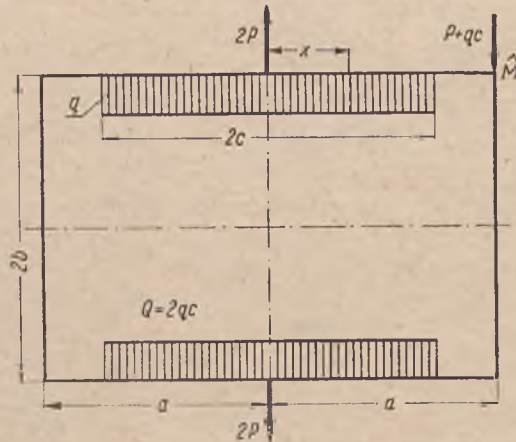
Zakładamy zmienność przekroju obu belek według prawa

$$(1) \quad \frac{1}{F} = \frac{1}{F_0} + \left(\frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_0} \right) \frac{x}{a}, \quad \frac{1}{J} = \frac{1}{J_0} + \left(\frac{1}{J_1} - \frac{1}{J_0} \right) \frac{x}{a}.$$

We wzorach powyższych oznacza:

- a — połowę długości teoretycznej belki $AB_1 = AB_2$,
- F i J — pole przekroju i geometryczny moment bezwładności przekroju dowolnego odległego od środka belki o x ,
- F_0 i J_0 — pole przekroju i geometryczny moment bezwładności przekroju środkowego (największego),
- F_1 i J_1 — pole przekroju i geometryczny moment bezwładności przekroju $x = a$ (najmniejszy).

Zagadnienie sprowadza się do obliczenia schematu przedstawionego na rys. 2, przy czym \hat{M} oznacza moment narożnikowy (dodatni, gdy wygina belkę wypukłością na zewnątrz), a $2P$, $2P$ siły pomocnicze, które we wzorach ostatecznych przyrównane zostają do zera.



Rys. 2

Moment zginający w dowolnym przekroju x belki poziomej i siła poprzeczna określone są przez wzory

$$(2) \quad M = \hat{M} + (P + qc)(a - x) - \frac{q(c - x)^2}{2},$$

$$T = \frac{dM}{dx} = -(P + qc) + q(c - x).$$

W obu wzorach wyrażenia po prawej stronie kreski pionowej są ważne dla części nieobciążonej przez q , zaś w całości dla części obciążonej przez q (tj. dla $0 < x \leq c$).

Czwarta część energii odkształcenia całej ramy wynosi

$$(3) \quad \frac{1}{4}V = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{M^2 dx}{EJ} + \frac{1}{2} \int_0^a k \frac{T^2 dx}{GF} + \frac{1}{2} \frac{\hat{M}^2 b}{EJ'} + \frac{1}{2} \frac{(P + qc)^2 b}{EF'}.$$

Tutaj oznacza

- k — współczynnik liczbowy, zależny od kształtu przekroju i wynoszący np. dla przekroju prostokątnego 1,2;
 F', J' — pole i geometryczny moment bezwładności przekroju w słupach;

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \text{ — moduł sprężystości postaciowej.}$$

Z warunku

$$(4) \quad \frac{\partial V}{\partial \hat{M}} = 0, \quad \text{czyli} \quad \int_0^a \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial \hat{M}} dx + \frac{\hat{M}b}{EJ'} = 0,$$

obliczając $\frac{\partial M}{\partial \hat{M}}$ z (2) znajdujemy

$$(5) \quad \hat{M} = - \frac{(P+qc) \int_0^a \frac{(a-x)dx}{EJ} - \frac{q}{2} \int_0^c \frac{(c-x)^2 dx}{EJ}}{\int_0^a \frac{dx}{EJ} + \frac{b}{EJ'}}$$

co po wykonaniu całkowania i wprowadzeniu oznaczeń skracających

$$a = \frac{J'}{J_0}, \quad \beta = \frac{J'}{J_1} - \frac{J'}{J_0}$$

daje

$$(6) \quad \hat{M} = - \frac{(P+qc) \left(\frac{a}{2} + \frac{\beta}{6} \right) a^2 - \frac{q}{2} \left(\frac{a}{3} + \frac{\beta}{12} \cdot \frac{c}{a} \right) c^3}{\left(a + \frac{\beta}{2} \right) a + b}$$

Podstawiając $2qc=Q$ i $P=0$ znajdujemy

$$(7) \quad \hat{M} = - \frac{Q \cdot 2a}{12} \frac{3 - \frac{c^2}{a^2} + \left(\frac{J_0}{J_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{4} \frac{c^3}{a^3} \right)}{1 + \frac{J_0}{J_1} + 2 \frac{J_0}{J'} \frac{b}{a}}$$

Strzałka ugięcia belki poziomej f zwiększona o wydłużenie Δb połowy słupa o długości b wynosi

$$(8) \quad f + \Delta b = \frac{1}{4} \frac{\partial V}{\partial P} = \int_0^a \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial P} dx + \int_0^a k \frac{T}{GF} \frac{\partial T}{\partial P} dx + \\ + \frac{\hat{M}}{EJ'} \frac{\partial \hat{M}}{\partial P} b + \frac{P+qc}{EF'} b.$$

Ponieważ

$$\Delta b = \frac{P+qc}{EF'} b, \quad a \quad \frac{\partial M}{\partial P} = \frac{\partial \hat{M}}{\partial P} + a - x,$$

to

$$\begin{aligned}
 (9) \quad EF'f = & \hat{M} \int_0^a \left(\alpha + \beta \frac{x}{a} \right) (a-x) dx + (P+qc) \int_0^a \left(\alpha + \beta \frac{x}{a} \right) (a-x)^2 dx + \\
 & - \frac{q}{2} \int_0^c \left(\alpha + \beta \frac{x}{a} \right) (a-x)(c-x)^2 dx + (P+qc) \int_0^a k \frac{EJ}{GF} dx + \\
 & - q \int_0^c k \frac{FJ'}{GF} (c-x) dx + \frac{\partial \hat{M}}{\partial P} \left[\hat{M} \int_0^a \left(\alpha + \beta \frac{x}{a} \right) dx + \right. \\
 & \left. + (P+qc) \int_0^a \left(\alpha + \beta \frac{x}{a} \right) (a-x) dx - \frac{q}{2} \int_0^c \left(\alpha + \beta \frac{x}{a} \right) (c-x)^2 dx + \hat{M}b \right].
 \end{aligned}$$

Obliczając $\frac{\partial \hat{M}}{\partial P}$ z (6), kładąc $E/G = 2(1+\nu) \approx \frac{8}{3}$, $J' = F' r^2$ i wykonując całkowanie znajdujemy ostatecznie

$$\begin{aligned}
 f = \frac{Q(2a)^3}{384 EJ_0} & \left\{ 8 - 4 \frac{c^2}{a^2} + \frac{c^3}{a^3} + \left(\frac{J_0}{J_1} - 1 \right) \left(2 - \frac{c^3}{a^3} + \frac{4}{10} \frac{c^4}{a^4} \right) + \right. \\
 & + 32k \frac{J_0}{F_0 a^2} \left[1 - \frac{c}{a} + \frac{1}{3} \frac{c^2}{a^2} + \frac{F_0}{F_1} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{c^2}{a^2} \right) \right] + \\
 & \left. - \frac{4}{3} \left(2 + \frac{J_0}{J_1} \right) \frac{3 - \frac{c^2}{a^2} + \left(\frac{J_0}{J_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{4} \frac{c^3}{a^3} \right)}{1 + \frac{J_0}{J_1} + 2 \frac{J_0}{J'} \frac{b}{a}} \right\}.
 \end{aligned}$$

Tutaj część wymieniona w klamrach umieszczona w pierwszym wierszu odpowiada strzałce ugięcia belki obliczonej przy swobodnym podparciu jej końców bez uwzględnienia wpływu sił tnących; część w wierszu drugim określa w przybliżeniu wpływ tych sił; część zaś ostatnia przedstawia ubytek strzałki wskutek działania momentów podporowych \hat{M} .

DZIAŁ X

KONSTRUKCJE LOTNICZE

Redaktor naukowy: ZBIGNIEW BRZOSKA

ZGINANIE BELEK PROSTYCH O PRZEKROJACH WIOTKICH

§ 1. Wstęp

Dążność do wyzyskania materiału i lekkości konstrukcji prowadziła już od dawna do stosowania dla belek zginanych przekrojów o coraz większych wartościach stosunku wskaźnika wytrzymałości W do pola przekroju F . Przy założeniu odpowiadającym ustalonej elementarnej teorii zgięcia w granicach ważności prawa HOOKE'A istnieje bowiem *maksymalna dopuszczalna wartość* momentu zginającego M_{dop} , proporcjonalna do W (przy jednym i tym samym materiale belki), ciężar własny zaś jednostki długości jest proporcjonalny do F . A zatem stosunek $F : W$ jest miarą lekkości belki przenoszącej dany moment zginający. Wartość tego stosunku ma wymiar L^{-1} i zmienia się ze zmianą jednostki długości L . Tej niedogodności nie posiada bezwymiarowy stosunek

$$F^{3/2} : W = \beta,$$

Posłużymy się nim przeto przy porównaniu różnych kształtów przekroju ze względu na lekkość. Na przykład dla prostokąta o podstawie b i wysokości h

$$F = bh, \quad W = \frac{bh^2}{6}, \quad \beta = 6 \sqrt{\frac{b}{h}},$$

czyli że przekrój prostokątny da belkę tym lżejszą, im mniejszy jest stosunek $b : h$.

Podobnie dla elipsy o osiach b i h znajdujemy

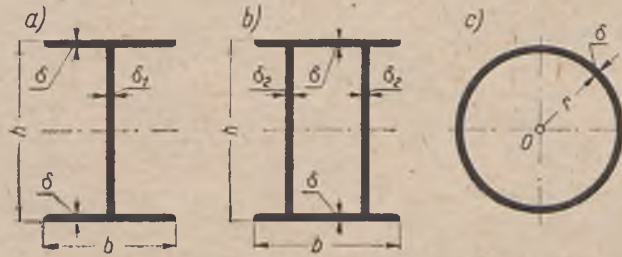
$$\beta = 4\sqrt{\pi} \cdot \sqrt{\frac{b}{h}} = 7,09 \sqrt{\frac{b}{h}},$$

a zatem przy tej samej wartości $b : h$ przekrój eliptyczny daje belkę znacznie cięższą od belki o przekroju prostokątnym.

Te i tym podobne przekroje zaliczymy do kategorii *przekrojów zwartych*, o ile stosunek $b : h$ nie jest zbyt mały, co grozi jak wiadomo niestatecznością postaci belki zgiętej w płaszczyźnie osi h . Dlatego nie mo-

żemy obierać zbyt wysokich wartości stosunku $h : b$. O wielkości M_{dop} decyduje wówczas nie W , lecz inne wielkości przekrojowe obok stałych sprężystości materiału belki i rozmieszczenia sił zewnętrznych. (Patrz § 15 pracy autora pt. „Studia nad belkami o przekroju I”. Warszawa 1923). W tych przypadkach przekrój zaliczamy do kategorii *przekrojów wiotkich* lub *smukłych*.

Najbardziej typowymi i najważniejszymi praktycznie przekrojami wiotkimi są: przekrój dwuteowy, skrzynkowy, rurowy itp. (rys. 1a, b, c).



Rys. 1

Zbadajmy charakterystykę lekkości belek o takich przekrojach, tj. liczbę β przy założeniu upraszczającym, że ścianki tych przekrojów są bardzo cienkie w stosunku do ich wymiarów poprzecznych. Mamy wówczas:

a) *Przekrój dwuteowy* o szerokości b i wysokości h , mierzonej między środkami grubości pasów δ . Ścianka ma grubość δ_1 . A zatem:

$$F = 2b\delta + h\delta_1$$

$$W = b\delta h + \frac{\delta_1 h^2}{6}$$

$$J = 2b\delta \left(\frac{h}{2}\right)^2 + \delta_1 \frac{h^3}{12}$$

Stąd łatwo znaleźć

$$\beta = 6 \sqrt{\frac{b}{h}} \sqrt{\frac{\delta}{h} \left(\frac{\delta_1 h}{\delta b} + 2\right)^{3/2} \frac{1}{\frac{\delta_1 h}{\delta b} + 6}}$$

Wzór ten stosuje się do *przekroju skrzynkowego* po wstawieniu $2\delta_2$ zamiast δ_1 . Uwydatnia on wyraźnie korzyści tych przekrojów w porównaniu do przekroju prostokątnego. Jest rzeczą jasną, że i te przekroje przy zbyt daleko idącym zmniejszaniu δ_1 i b , a więc i β , stają się niestateczne, a wzory zwykłej teorii zgięcia tracą swoją ważność, o ile nie zapewnimy stateczności za pomocą żeber itp.

b) *Przekrój rurowy* okrągły, o promieniu r mierzonym od środka grubości ścianki δ .

$$F = 2r\pi\delta, \quad J = \pi r^3\delta, \quad W = \pi r^2\delta,$$

$$\beta = \sqrt{8\pi} \sqrt{\frac{\delta}{r}} \approx 5 \sqrt{\frac{\delta}{r}} \approx 7,09 \sqrt{\frac{\delta}{2r}}.$$

Charakterystyka lekkości tego przekroju jest wprawdzie mniej korzystna od poprzednich, ponieważ jednak utrata stateczności dla ścianki zakrzywionej zachodzi przy znacznie większych naprężeniach ściskających, aniżeli w przypadku ścianek płaskich, dlatego więc w przekroju rurowym możemy pójść bardzo daleko ze zmniejszeniem δ .

Na pytanie „Jak daleko?” spróbujemy odpowiedzieć w niniejszej pracy.

§ 2. Teoria zgięcia poprzecznego

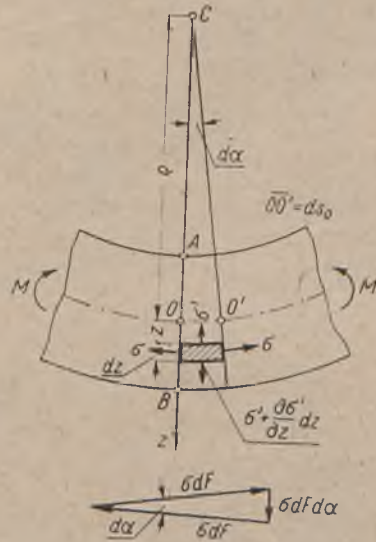
Jak wiadomo, ściśle rozwiązania równań matematycznej teorii sprężystości nie wystarczają jeszcze do wyjaśnienia zachowania się prętów zginanych, gdy przesunięcia ich punktów wywołane odkształceniem sprężystym są tego samego rzędu, co najmniejszy z wymiarów. Dokładniejsze wyniki daje klasyczna teoria zgięcia prętów sprężystych prowadząca do znanego równania:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ},$$

gdzie EJ oznacza sztywność zginania w płaszczyźnie głównej przekroju pręta (pierwotnie pryzmatycznego), M — moment zginający w rozpatrywanym przekroju, zaś ρ — promień krzywizny zgiętej osi pręta¹⁾.

Nie trudno jednak wykazać, że i ta teoria jest tylko przybliżona we wszelkich przypadkach, gdy ρ nie jest bardzo wielkie w porównaniu do wymiarów przekroju pręta.

Wyciąwszy bowiem w myśli ze zgiętego już pręta element „włókna” równoległego do jego osi, o długości ds , pomyślmy sobie w płaszczyźnie



Rys. 2

¹⁾ Bardziej szczegółowe rozważania w tej sprawie znajdzie Czytelnik w pracy autora pt. „Kryteria stałości równowagi”, wydanej przez Akad. Nauk. Techn. w r. 1926, zwłaszcza w ustępach 14, 17 i 19.

przekroju AB (rys. 2) układ współrzędnych o początku O w środku przekroju i osi z , skierowanej w stronę włókien rozciąganych, a leżącej w głównej płaszczyźnie zgięcia obranej na płaszczyźnie rysunku. (Oś y niech będzie skierowana ku patrzącemu na rysunek). Wówczas naprężenia $\sigma = \frac{Mz}{J}$ klasycznej teorii zgięcia działające na oba przekroje $dF = dy dz$ elementu włókna dają dwie siły σdF , nachylone do siebie pod kątem da , nie mogą zatem spełniać ściśle warunków równowagi tego elementu. Dowodzi to, że sąsiednie włókna wywierają nawzajem działania poprzeczne o wypadkowej $\sigma dF da$, prostopadłej do osi włókna i leżącej w płaszczyźnie zginania.

Wypadkowa ta jest widocznie uwarunkowana naprężeniami poprzecznymi σ' , będącymi funkcjami z i y , które pomija klasyczna teoria zginania.

Naprężenia σ' czynią zadość równaniu równowagi

$$\left(\sigma' + \frac{d\sigma'}{dz} dz\right)(\varrho + z + dz) da dy - \sigma'(\varrho + z) da dy = \sigma dy dz da,$$

skąd po uproszczeniach i pominięciu małych wyższego rzędu otrzymujemy równanie

$$\frac{d\sigma'}{dz} \left(1 + \frac{z}{\varrho}\right) + \frac{\sigma'}{\varrho} = \frac{\sigma}{\varrho}.$$

Zważywszy, że istnienie naprężeń poprzecznych σ' modyfikuje działanie naprężeń podłużnych σ przy zginaniu, widzimy, że w otrzymanym równaniu nie można, biorąc ściśle, podstawić

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ},$$

jak każe klasyczna teoria zgięcia. Jednakże, uważając tę ostatnią za pierwsze przybliżenie i szukając przybliżenia drugiego, poprzestaniemy na przyjęciu powyższej wartości dla $\frac{1}{\varrho}$. Ponadto, uwzględniając że $\frac{z}{\varrho}$ jest bardzo małe w stosunku do 1 oraz że sama wartość naprężenia σ' jest mała, można lewą stronę równania uprościć przez opuszczenie w nawiasie składnika $\frac{z}{\varrho}$, jak również opuszczenie składnika $\frac{\sigma'}{\varrho}$. W ten sposób dochodzimy do równania dla naprężeń zginających poprzecznych

$$\frac{d\sigma'}{dz} = \frac{\sigma M}{EJ} = \frac{M^2 z}{EJ^2}.$$

Wskutek obecności naprężeń σ' włókno podłużne o przekroju $dy dz$ doznaje nacisku skierowanego zawsze ku warstwie obojętnej. Nacisk przypadający na jednostkę długości włókna jest równy

$$\frac{d\sigma'}{dz} du dz = \frac{M^2 z}{EJ^2} du dz = \frac{M^2 z}{EJ^2} dF,$$

wypadkowa zaś z nacisków działających wzdłuż cięciwy DD' , określająca nacisk zakreskowanej części pręta o polu F_1 (rys. 3) na resztę pręta, ma wartość

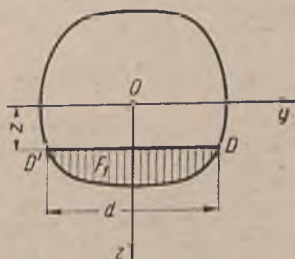
$$P' = \int_{(F_1)} \frac{d\sigma'}{dz} du dz = \frac{M^2}{EJ^2} \int_{(F_1)} z dF = \frac{M^2 S}{EJ^2}.$$

S oznacza tutaj moment statyczny części przekroju odciętej cięciwą d równoległą do osi obojętnej, która oddziela od siebie obie części przekroju. Taką samą zależność od S objawia, jak wiadomo, siła ścinająca T' , odniesiona do jednostki długości pręta w przypadku, gdy zachodzi siła poprzeczna T , mianowicie:

$$T' = \frac{TS}{J}.$$

Wzajemny nacisk poprzeczny P' obu części zginanego pręta, uwarunkowany momentem zginającym M , osiąga zatem największą wartość w osi obojętnej, tak samo jak siła ścinająca T' uwarunkowana obecnością siły poprzecznej T .

Jest rzeczą jasną, że działanie obu rodzajów napięć gra w przypadku przekrojów zwartych rolę podrzędną i może być pominięte. Natomiast w przekrojach wiotkich mogą te działania, jak zobaczymy dalej, wysunąć się na plan pierwszy i muszą być uwzględnione przy dokładniejszej ocenie wytrzymałości dźwigarów lekkich o takich przekrojach.



Rys. 3

§ 3. Przekrój skrzynkowy i dwuteowy

Skoro wyodrębnimy w myśli dwoma przekrojami w odstępnie 1 cm część pręta, to będzie ona działać jako rama obciążona napięciami P' (jeżeli na razie nie uwzględniamy wpływu siły poprzecznej). Półki, jako belki poziome tej ramy, są narażone na zginanie równomiernie rozłożonym obciążeniem o wielkości

$$p_0 = \frac{M^2}{EJ^2} \frac{\delta_0 h_0}{2},$$

środniki zaś są narażone na podłużne ściskanie i zginanie wskutek sztywnego połączenia z półkami.

Na środek przenoszą się siły ścisające od pól o wielkości

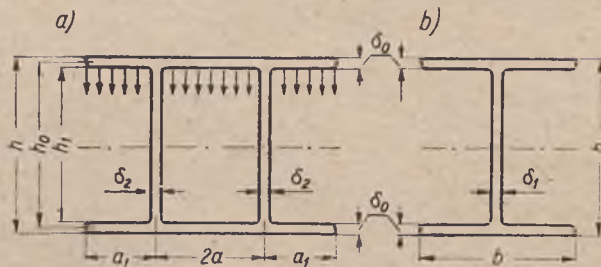
$$(a + a_1)p_0 = \frac{M^2}{EJ^2} \frac{h_0}{2} (a + a_1) \delta_0,$$

a ponadto siły

$$p_z = \frac{M^2}{EJ^2} \delta_2 z,$$

rozmieszczone w sposób ciągły wzdłuż połowy wysokości h_1 , wreszcie zaś stały moment zginający M_1 , który występuje jako wielkość statycznie niewyznaczalna.

Obliczymy ją stosując zasadę najmniejszej energii odkształcenia do całej ramy, przy czym poprzestaniemy na uwzględnieniu tylko energii zginania. W tym celu wprowadzimy następujące oznaczenia:



Rys. 4

$B_0 \frac{\text{kG cm}^2}{\text{cm}}$ — sztywność zginania poprzecznego skrawka każdej z pól o szerokości 1 cm.

$B_1 \frac{\text{kG cm}^2}{\text{cm}}$ — to samo dla skrawka środka, z uwzględnieniem ewentualnego usztywnienia żeberkami.

$M' \frac{\text{kG cm}}{\text{cm}}$ — moment zginający w skrawku półki lub środka o szerokości 1 cm.

Ponieważ momenty zginające w wystających częściach pól są niezależne od szukanej, statycznie niewyznaczalnej wielkości M_1 , wystarczy wyrazić energię zginania tylko dla środkowej części półki oraz środków. Mamy przeto dla półki (rys. 5)

$$M' = M_1 + \frac{1}{2} p_2 \frac{h_0}{2} x - Q' x + p_0 \frac{(x + a_1)^2}{2},$$

przy czym

$$p_2 = (p_z)_{z=\frac{h_0}{2}} = \frac{M^2 \delta_2}{EJ^2} \frac{h_0}{2},$$

$$Q' = \frac{M^2}{EJ^2} \frac{h_0}{2} \left[(a + a_1) \delta_0 + \frac{h_0 \delta_2}{4} \right],$$

dla środka zaś po prostu

$$M' = M_1.$$

Zatem $\frac{\partial M'}{\partial M_1} = 1$ dla obu części, a różniczkowanie energii zginania względem M_1 daje warunek:

$$\int_0^a \frac{M}{B_0} \frac{\partial M}{\partial M_1} dx + \int_0^{\frac{h_0}{2}} \frac{M}{B_1} \frac{\partial M}{\partial M_1} dz = 0,$$

czyli

$$\int_0^a \left[M_1 + \frac{p_2 h_0}{4} x + p_0 \frac{(x + a_1)^2}{2} - Q' x \right] dx + \frac{B_0}{B_1} M_1 \frac{h_0}{2} = 0.$$

Stąd po wstawieniu wartości i rozwiązaniu względem M_1 znajdujemy:

$$M_1 = \frac{M^2 a h_0 \delta_0}{6 EJ^2} \frac{2a^2 - 3a_1^2}{2a + \frac{B_0}{B_1} h_0}.$$

Widzimy, że najkorzystniejsze warunki dla środków zachodzą wówczas, gdy

$$a_1 = a \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,816 a,$$

czyli okrągło

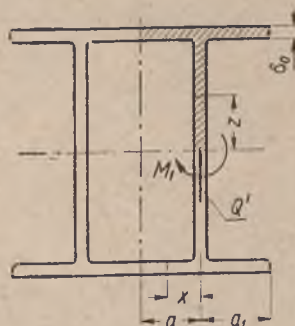
$$a_1 \approx 0,8 a,$$

wtedy bowiem moment M_1 znika, a próżnik jest tylko ściskany, tak że siła podłużna na końcach ma wartość

$$N' = \frac{M^2 h_0}{2 EJ^2} (a + a_1) \delta_0,$$

w środku zaś wartość Q' .

W tych warunkach należy próżnik zabezpieczyć od wybożenia i obliczyć krytyczną wartość sił N' i Q' . Mamy tutaj do czynienia z uogólnieniem zadania JASIŃSKIEGO, prowadzącym do rachunków nader uciążliwych przy rozwiązaniu ścisłym. Ze względu jednak na przybliżony charakter całej teorii, możemy się zadowolić przybliżonym schematem pręta obciążonego tylko w przekrojach końcowych.



Rys. 5

Jako wartość siły obciążającej można przyjąć po prostu

$$\frac{N' + Q'}{2} = \bar{N}'.$$

czyli że

$$\bar{N}' = \frac{M^2 h_0}{2 E J^2} \left[(a + a_1) \delta_0 + \frac{1}{8} h_0 \delta_2 \right].$$

Przy każdej wartości momentu zgięcia głównego M muszą być spełnione dwa warunki:

$$\bar{N}' < \pi^2 \frac{B_1}{h_0^2} \quad \text{oraz} \quad Q' < F_1 \sigma_{\text{dop}},$$

gdzie F_1 oznacza pole przekroju paska środknika o szerokości 1 cm, z uwzględnieniem ewentualnego usztywnienia pionowymi żeberkami. Pierwszy z powyższych warunków sformułowany jest w sposób przybliżony i wyklucza możliwość wybożenia środknika.

W ogólniejszym przypadku, gdy $M_1 \neq 0$, wypadnie obliczać środknik jako pręt, na którego końce działają siły ściskające o wielkości \bar{N}' i momenty M_1 . Potrzebny wskaźnik przekroju W_1 środknika, odniesiony do szerokości 1 cm (z uwzględnieniem żeber usztywniających), da się wówczas obliczyć z dostatecznym przybliżeniem z równania

$$W_1 = \frac{M_1}{\sigma_{\text{dop}} \left(1 - \frac{\bar{N}'}{N'_E} \right)},$$

przy czym N'_E oznacza przybliżoną wartość siły krytycznej dla paska środknika o szerokości równej 1 cm, określoną jako

$$N'_E = \pi^2 \frac{B_1}{h_0^2}.$$

Obecność siły poprzecznej T w rozpatrywanym przekroju nie wpływa oczywiście na charakter zginania poprzecznego, wymaga jednak zmniejszenia przyjętej wartości σ_{dop} w powyższych wzorach według stosownej hipotezy wytrzymałościowej. Miejsce niebezpieczne leży w takim przypadku w połowie wysokości środknika.

W tych wreszcie przypadkach, kiedy dane obciążenie przenosi się w znany sposób na jedną z pól, powstają jeszcze dodatkowe naprężenia normalne w przekrojach podłużnych, które dla cienkich środkników należy również brać w rachubę. W sprawie ich wyznaczenia musimy odesłać do wspomnianej już pracy: „Studia nad belkami o przekroju dwuteowym“ (§§ 4 i 3), zaznaczając jednakże, że praca ta opiera się jeszcze na hipotezie wytrzymałościowej największego naprężenia stycznego, która dopiero w ostatnich latach ustępuje miejsca hipotezie największej energii odkształcenia postaciowego.

§ 4. Przekrój rurowy okrągły

Pierścień wyodrębniony dwoma przekrojami w odstępnie 1 cm jest narażony na zgięcie poprzeczne siłami prostopadłymi do osi obojętnej i ku niej skierowanymi (rys. 6 i 7). Wielkość tych sił w odniesieniu do elementu włókna o przekroju $dF = \delta r d\varphi$ określa wyrażenie znalezione powyżej, a mianowicie:

$$\frac{M^2}{EJ^2} z dF.$$

Dzieląc tę wartość przez $r d\varphi$ otrzymujemy siłę odniesioną do jednostki pola pobocznicy walca o promieniu r , czyli

$$p_z = \frac{M^2}{EJ^2} z \delta = Cz \quad (\text{w kG/cm}^2),$$

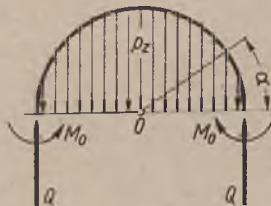
gdzie

$$C = \frac{M^2}{EJ^2} \delta \quad (\text{w kG/cm}^3).$$

Odcinając połowę pierścienia osi obojętną i zastępując połączenia siłami normalnymi Q i statycznie niewyznaczalnymi momentami M_0 , znaj-



Rys. 6



Rys. 7

dujemy z łatwością wyrażenie dla momentu zginającego w przekroju określonym kątem φ :

$$M = M_0 - Qr(1 - \cos \varphi) + \int_0^\varphi Czr d\psi r (\cos \psi - \cos \varphi).$$

Siłę Q wyznaczymy z warunku rzutów

$$2Q = \int_0^\pi p_z r d\varphi = \int_0^\pi Cr \sin \varphi r d\varphi,$$

a więc

$$Q = Cr^2.$$

Po wstawieniu tej wartości we wzór na M i wykonaniu całkowania otrzymujemy

$$M = M_0 - Cr^3(1 - \cos \varphi) + Cr^3\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 2\varphi - \cos \varphi\right).$$

Ponieważ $\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1$, więc warunek na wyznaczenie M_0 ma postać

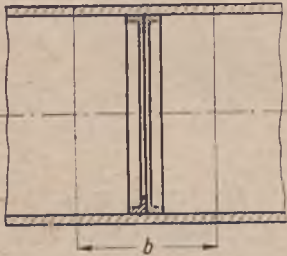
$$\int_0^{\pi/2} M d\varphi = 0.$$

Stąd znajdujemy

$$M_0 = \frac{1}{4} Cr^3 \quad \text{i} \quad M_1 = (M)_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} Cr^3$$

jako obie krańcowe wartości momentu zginającego.

Niebezpiecznym przekrojem jest oczywiście ten, w którym działa M_0 , gdyż występuje tutaj jednocześnie największa siła podłużna Q . Rachunek wykazuje, że przy dostatecznie małej wartości $\delta : r$ naprężenia wywołane tym poprzecznym zgięciem mogą znacznie przewyższać naprężenia zgięcia głównego. W takim przypadku wzmacniamy rurę *wręgami*, tj. pierścieniami przytwierdzonymi do ściany rury w odstępach b (rys. 8). Obecność wręg wpływa na zwiększenie sztywności zginania poprzecznego pierścienia rury o szerokości b .



Rys. 8

W najniekorzystniejszym przypadku całkiem słabego połączenia wręg ze ścianami rury, sztywność zginania pierścienia B_b będzie przynajmniej równa sumie sztywności zginania samej ściany rury, tj. $\frac{E}{1-\nu^2} \frac{b\delta^3}{12}$ (jeżeli ν oznacza liczbę POISSONA) i sztywności zginania samej wręgi $B_w = EJ_w$, czyli

$$B_b = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{b\delta^3}{12} + B_w.$$

Moment zginający $M_0 b$ rozdziela się wówczas na ścianę i na wręgę w stosunku prostym do ich sztywności, a więc na ścianę przypada moment

$$M'_0 = M_0 \frac{1}{1 + \frac{12 B_w (1-\nu^2)}{E b \delta^3}}.$$

Co się tyczy siły ściskającej Q , to wprowadzie i z niej pewna część przeniesie się na wręgi, jednak przy założeniu słabego połączenia będzie ta część bardzo mała. Przyjmijemy przeto w dalszym rachunku, że cała siła Q obciąża przekrój ściany. W tych warunkach obliczymy krańcowe ciśnienie w materiale ścianki ze wzoru:

$$\sigma^* = \frac{Q}{1 \cdot \delta} + \frac{\sigma M'_0}{1 \cdot \delta^2}.$$

Zważywszy, że $J = \pi r^3 \delta$ i oznaczywszy przez F_w i J_w pole przekroju i moment bezwładności jednej wręgi, znajdziemy, po podstawieniu wartości następujący wzór dla krańcowego ciśnienia w ścianie rury wskutek zgięcia poprzecznego, wywołanego momentem M zginania głównego:

$$\sigma^* = \frac{M^2 r^2}{E J^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r}{\delta} \frac{1}{1 + \alpha} \right),$$

$$\alpha = \frac{12(1 - \nu^2) J_w}{b \delta^3},$$

albo

$$\sigma^* = \frac{M^2}{\pi^2 E r^4 \delta^2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{r}{\delta} \frac{1}{1 + \alpha} \right).$$

Gdy nie ma wręg trzeba w powyższym wzorze podstawić oczywiście $\alpha = 0$.

Rozpatrzmy jeszcze przypadek doskonałego połączenia wręg usztywniających ze ścianą rury. Sztywność zginania poprzecznego może być wówczas mierzona podobnie jak sztywność zginania płyty o grubości δ z żebrami w odstępach b . Sztywność ta jest równa sztywności litego przekroju, utworzonego z żebra wraz z płytą, o zmniejszonej, tzw. współdziałającej szerokości b_1 . Szerokość b_1 różni się od b tym bardziej, im mniejsze jest δ w stosunku do r i r^2 w stosunku do b . Na podstawie pewnych teoretycznych rozważań można przyjąć, że

$$b_1 \approx \frac{2}{3} r, \quad \text{jeżeli } b > \frac{2}{3} r,$$

$$\text{zaś } b_1 = b, \quad \text{jeżeli } b < \frac{2}{3} r.$$

Przy tych założeniach otrzymamy inny wzór na σ^* , a mianowicie:

$$\sigma^* = \frac{Q b}{F_2} + \frac{M_0 b}{J_2} e_2.$$

F_2 oznacza tutaj przekrój złożony z przekroju pierścienia rury o szerokości b i przekroju jednej wręgi; J_2 — moment bezwładności przekroju złożonego z przekroju wręgi i przekroju pierścienia rury o szerokości współdziałającej b_1 ; e_2 — odległość włókna skrajnego, leżącego po stronie wewnętrznej od osi obojętnej przekroju przynależnego do J_2 .

Po wstawieniu wartości na Q i M_0 , otrzymamy:

$$\sigma^* = \frac{M^2 r^2}{E J^2} \frac{b \delta}{F_2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{F_2 e r}{J_2} \right)$$

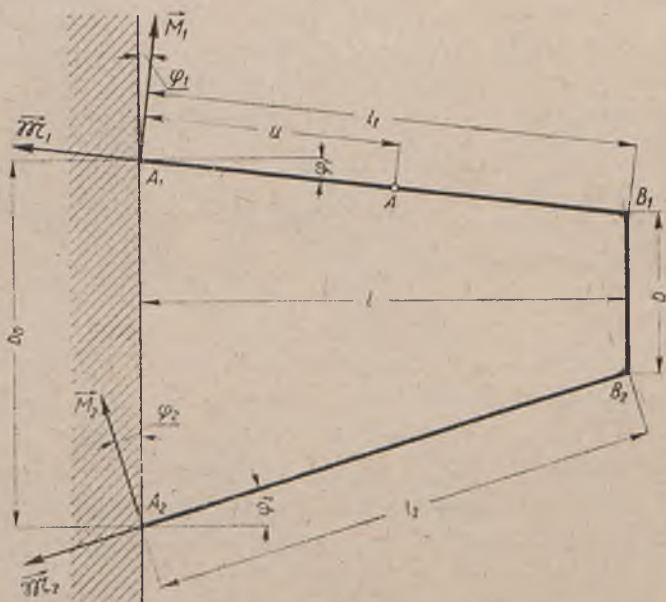
albo

$$\sigma^* = \frac{M^2 b}{\pi^2 E F_2 r^4 \delta} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{F_2 e r}{J_2} \right).$$

W SPRAWIE TZW. WSPÓLDZIAŁANIA PODŁUŻNIC W SKRZYDŁACH JEDNOPLATÓW

(Sprawozdanie Nr 6 IBTL, Warszawa 1931 r.)

§ 1. Genezę poniższej pracy były przeprowadzane w IBTL, doświadczenia ze skrzydłami o dźwigarach zbieżnych. Dla zorientowania się w siłach wewnętrznych, jakie działają w podłużnicach połączonych ze sobą odkształcalnymi żebrami, okazało się konieczne rozwiązanie następującego zadania uproszczonego:



Rys. 1

Dwie podłużnice A_1B_1 i A_2B_2 (rys. 1) stanowią belki główne, utwierdzone doskonale w przekrojach A_1 i A_2 , a na końcach B_1 i B_2 połączone sztywno jednym żebrzem o długości b . Osie wszystkich trzech prętów tworzą trapez $A_1A_2B_2B_1$ w płaszczyźnie pomyślanej jako pozioma. Układ przedstawia się zatem jako rama bezprzegubowa, którą obciążamy w do-

wolnym punkcie A jedną pionową siłą skupioną P działającą do dołu. Przyjmujemy na razie, że obciążenie jest pionowe i szukamy trzech wielkości statycznie niewyznaczalnych w A_2 , a mianowicie:

$V_2 \equiv X$ — odpór pionowego

$M_2 \equiv Y$ — odporowego momentu zgięcia i

$\mathfrak{M}_2 \equiv Z$ — odporowego momentu skręcenia.

Założymy przy tym, że dodatni kierunek X wskazuje ku górze, dodatnie Y wygina pręt A_2B_2 wypukłością w górę, wreszcie dodatnie Z obraca pręt A_2B_2 dla patrzącego od A_2 w kierunku prawoskrętnym.

Oznaczając odpowiednie wielkości odporowe w A_1 przez V_1 , M_1 i \mathfrak{M}_1 , otrzymujemy z warunku rzutów

$$V_1 = P - X.$$

Z warunku momentów względem prostej, przechodzącej przez A_1 o kierunku wektora M_1 oraz względem prostej do niej prostopadłej, wynika

$$(1) \quad \begin{cases} M_1 = Pu - Xb_0 \sin \varphi_1 - Y \cos \varphi + Z \sin \varphi \\ \mathfrak{M}_1 = Xb_0 \cos \varphi_1 - Y \sin \varphi - Z \cos \varphi, \end{cases}$$

przy czym

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Momenty zgięcia M i skręcenia \mathfrak{M} w dowolnym przekroju ramy wyrazimy w następujący sposób:

I) w części A_1A

$$M = M_1 - V_1x; \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1;$$

II) w części AB_1

$$M = M_1 - V_1x + P(x - u); \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1.$$

W obu częściach mamy zatem:

$$\frac{\partial M}{\partial X} = -b_0 \sin \varphi_1 + x; \quad \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial X} = b_0 \cos \varphi_1;$$

$$\frac{\partial M}{\partial Y} = -\cos \varphi; \quad \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial Y} = -\sin \varphi;$$

$$\frac{\partial M}{\partial Z} = \sin \varphi; \quad \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial Z} = -\cos \varphi.$$

III) W części B_1B_2

$$M = Y \sin \varphi_2 + Z \cos \varphi_2 - X(l \operatorname{tg} \varphi_2 + x),$$

$$\mathfrak{M} = Y \cos \varphi_2 - Z \sin \varphi_2 - Xl,$$

a więc

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial X} &= -(l \operatorname{tg} \varphi_2 + x); & \frac{\partial M}{\partial Y} &= \sin \varphi_2; & \frac{\partial M}{\partial Z} &= \cos \varphi_2; \\ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial X} &= -l; & \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial Y} &= \cos \varphi_2; & \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial Z} &= -\sin \varphi_2. \end{aligned}$$

IV) W części A_2B_2

$$M = Y - Xx; \quad \mathfrak{M} = Z,$$

a zatem

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial X} &= -x; & \frac{\partial M}{\partial Y} &= 1; & \frac{\partial M}{\partial Z} &= 0; \\ \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial X} &= 0; & \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial Y} &= 0; & \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial Z} &= 1. \end{aligned}$$

Oznaczając teraz przez B_1 , B_0 i B_2 sztywności zginania części A_1B_1 , B_1B_2 i B_2A_2 , przez D_1 , D_0 i D_2 odpowiednie sztywności skręcania, wreszcie przez S jakąkolwiek z trzech wielkości statycznie niewyznaczalnych X , Y i Z , napiszemy równania warunkowe do ich obliczenia według schematu:

$$(2) \quad \int_{(a_1)} \frac{M}{B_1} \frac{\partial M}{\partial S} dx + \int_{(a_1)} \frac{\mathfrak{M}}{D_1} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial S} dx + \int_{(b)} \frac{M}{B_0} \frac{\partial M}{\partial S} dy + \\ + \int_{(b)} \frac{\mathfrak{M}}{D_0} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial S} dy + \int_{(a_2)} \frac{M}{B_2} \frac{\partial M}{\partial S} dx + \int_{(a_2)} \frac{\mathfrak{M}}{D_2} \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial S} dx = 0.$$

Pominęliśmy przy tym energię ścinania jako mającą niewątpliwie bardzo nieznaczny wpływ w interesującym nas przypadku.

Wprowadzając skrócone oznaczenia dla 12 całek określonych według schematu

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta_1 &= \int_0^{l_1} \frac{x^2 dx}{B_1}, & \beta'_1 &= \int_0^{l_1} \frac{x dx}{B_1}, & \beta''_1 &= \int_0^{l_1} \frac{dx}{B_1}, & \delta_1 &= \int_0^{l_1} \frac{dx}{D_1}, \\ \beta_2 &= \int_0^{l_2} \frac{x^2 dx}{B_2}, & \beta'_2 &= \int_0^{l_2} \frac{x dx}{B_2}, & \beta''_2 &= \int_0^{l_2} \frac{dx}{B_2}, & \delta_2 &= \int_0^{l_2} \frac{dx}{D_2}, \\ \beta_0 &= \int_0^b \frac{y^2 dy}{B_0}, & \beta'_0 &= \int_0^b \frac{y dy}{B_0}, & \beta''_0 &= \int_0^b \frac{dy}{B_0}, & \delta_0 &= \int_0^b \frac{dy}{D_0} \end{aligned} \right.$$

ORAZ

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} C_{11} &= \beta_1 - 2\beta_1' b_0 \sin \varphi_1 + \beta_1'' b_0^2 \sin^2 \varphi_1 + \delta_1 b_0^2 \cos^2 \varphi_1 + \\ &\quad + \beta_2 + \beta_0 + 2\beta_0' l \operatorname{tg} \varphi_2 + \beta_0'' l^2 \operatorname{tg}^2 \varphi_2 + \delta_0 l^2, \\ C_{12} &= -\beta_1' \cos \varphi + \beta_1'' b_0 \cos \varphi \sin \varphi_1 - \delta_1 b_0 \sin \varphi \cos \varphi_1 - \\ &\quad - \beta_2' - \beta_0' \sin \varphi_2 - \beta_0'' l \sin \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta_0 l \cos \varphi_2, \\ C_{13} &= \beta_1' \sin \varphi - \beta_1'' b_0 \sin \varphi \sin \varphi_1 - b_0 \delta_1 \cos \varphi \cos \varphi_1 + \\ &\quad - \beta_0' \cos \varphi_2 - \beta_0'' l \sin \varphi_2 + \delta_0 l \sin \varphi_2, \\ C_I &= - \int_0^u \frac{(u-x)x dx}{B_1} - b_0 \sin \varphi_1 \int_0^u \frac{x dx}{B_1} + b_0 u \sin \varphi \int_0^u \frac{dx}{B_1}, \end{aligned} \right.$$

napiżemy pierwsze z równań warunkowych typu (2), gdy $S=X$, w postaci

$$(5a) \quad C_{11}X + C_{12}Y + C_{13}Z = P C_I.$$

W podobny sposób otrzymamy drugie z równań warunkowych (2), tj. gdy $S=Y$,

$$(5b) \quad C_{21}X + C_{22}Y + C_{23}Z = P C_{II},$$

gdzie

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} C_{21} &= -\beta_1' \cos \varphi + \beta_1'' b_0 \cos \varphi \sin \varphi_1 - \delta_1 b_0 \sin \varphi \cos \varphi_1 + \\ &\quad - \beta_2' - \beta_0' \sin \varphi_2 - \beta_0'' l \sin \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_2 - \delta_0 l \cos \varphi_2, \\ C_{22} &= \beta_1'' \cos^2 \varphi + \delta_1 \sin^2 \varphi + \beta_2'' + \beta_0'' \sin^2 \varphi_2 + \delta_0 \cos^2 \varphi_2, \\ C_{23} &= -(\beta_1'' - \delta_1) \cos \varphi \sin \varphi + (\beta_0'' - \delta_0) \cos \varphi_2 \sin \varphi_2, \\ C_{II} &= \cos \varphi \cdot \int_0^u \frac{(u-x) dx}{B_1}. \end{aligned} \right.$$

Wreszcie trzecie z równań warunkowych (2) dla $S=Z$ ma postać:

$$(5c) \quad C_{31}X + C_{32}Y + C_{33}Z = P C_{III},$$

przy czym

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} C_{31} &= -\beta_1' \sin \varphi + \beta_1'' b_0 \sin \varphi \sin \varphi_1 + \delta_1 b_0 \cos \varphi \cos \varphi_1 + \\ &\quad + \beta_0' \cos \varphi_2 + \beta_0'' l \sin \varphi_2 - \delta_0 l \sin \varphi_2, \\ C_{32} &= (\beta_1'' - \delta_1) \sin \varphi \cos \varphi - (\beta_0'' - \delta_0) \cos \varphi_2 \sin \varphi_2, \\ C_{33} &= -\beta_1'' \sin^2 \varphi - \delta_1 \cos^2 \varphi - \delta_2 - \beta_0'' \cos^2 \varphi_2 - \delta_0 \sin^2 \varphi_2, \\ C_{III} &= \sin \varphi \cdot \int_0^u \frac{(u-x) dx}{B_1}. \end{aligned} \right.$$

Z równań warunkowych (5b) i (5c), po pomnożeniu przez $\sin \varphi$, $\cos \varphi$ i odjęciu, znajdujemy równanie

$$(5c') \quad \begin{cases} (\delta_1 b_0 \cos \varphi_1 + \beta_2'' \sin \varphi + \beta_0' \cos \varphi_1 + \beta_0'' l \cos \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 + \delta_0 l \sin \varphi_1) X = \\ = [\beta_0'' \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \delta_0 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + (\delta_1 + \beta_2'') \sin \varphi] Y + \\ + [\beta_0'' \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \delta_0 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + (\delta_1 + \delta_2) \cos \varphi] Z, \end{cases}$$

które zastępuje z korzyścią równanie trzecie (5c).

§ 2. W ważnym przypadku szczególnym, gdy $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = 0$, układ tworzy ramę prostokątną. Wówczas $b_0 = b$, $l_1 = l_2 = l$, a równanie (5c') sprowadza się do uproszczonej postaci

$$(8) \quad X(\beta_0' + b \delta_1) = Z(\beta_0'' + \delta_1 + \delta_2).$$

Gdyby poza tym wszystkie trzy pręty układu miały sztywności stałe, niezależne od położenia przekrojów, to z ostatniego równania wypadłoby

$$(9) \quad X = Z \frac{\frac{2l}{D} + \frac{b}{B_0}}{\frac{bl}{D} + \frac{b^2}{2B_0}} = \frac{2}{b} Z.$$

Nie trudno zauważyć, że w przypadku zmiennych sztywności wartość stosunku $X:Z$ będzie się różniła tylko bardzo nieznacznie od $\frac{2}{b}$, tak że możemy z dostatecznym przybliżeniem napisać ogólnie dla ramy prostokątnej

$$(9a) \quad X = \frac{2}{b} Z, \quad \text{czyli} \quad Z = \frac{bX}{2}.$$

Podstawiając tę wartość na X w równania (5a) i (5b) znajdziemy

$$(10) \quad \begin{cases} (\beta_1' + \beta_2' + l \delta_0) Y - \left[\frac{2}{b} (\beta_1 + \beta_2) + b \delta_1 + \frac{2l^2}{b} \delta_0 + \frac{2}{b} \beta_0 - \beta_0' \right] Z = \\ = P \int_0^u \frac{(u-x)x dx}{B_1} \\ (\beta_1'' + \beta_2'' + \delta_0) Y - \left[\frac{2}{b} (\beta_1 + \beta_2') + \frac{2l}{b} \delta_0 \right] Z = P \int_0^u \frac{(u-x) dx}{B_1} \end{cases}$$

albo

$$(10a) \left\{ \begin{aligned} \left[\beta_1 + \beta_2 + \frac{b^2}{2} \delta_1 + l^2 \delta_0 + \beta_0 - \frac{b}{2} \beta'_0 \right] X - (\beta'_1 + \beta'_2 + l \delta_0) Y &= -P \int_0^u \frac{(u-x)x dx}{B_1} \\ (\beta'_1 + \beta'_2 + l \delta_0) X - (\beta''_1 + \beta''_2 + \delta_0) Y &= -P \int_0^u \frac{(u-x) dx}{B_1} \end{aligned} \right.$$

W przypadku obciążenia belki A_1B_1 układem sił skupionych P_i w przekrojach o odciętych u_i ($i=1, 2, \dots, n$), należy oczywiście po prawej stronie wstawić:

w pierwszym równaniu (10a)

$$- \sum_{i=1}^{i=n} P_i \int_0^{u_i} \frac{(u_i-x)x dx}{B_1}$$

oraz w drugim

$$- \sum_{i=1}^{i=n} P_i \int_0^{u_i} \frac{(u_i-x) dx}{B_1}$$

Gdyby zamiast belki A_1B_1 obciążyć tylko A_2B_2 , to odpowiednie równania do wyznaczenia V_1 i M_1 miałyby postać:

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \left[\beta_1 + \beta_2 + \frac{b^2}{2} \delta_2 + l^2 \delta_0 + \beta_0 - \frac{b}{2} \beta'_0 \right] V_1 - (\beta'_1 + \beta'_2 + l \delta_0) M_1 &= \\ &= - \sum_i P_i \int_0^{u_i} \frac{(u_i-x)x dx}{B_2} \\ (\beta'_1 + \beta'_2 + l \delta_0) V_1 - (\beta''_1 + \beta''_2 + \delta_0) M_1 &= - \sum_i P_i \int_0^{u_i} \frac{(u_i-x) dx}{B_2} \end{aligned} \right.$$

W przypadku obciążenia ciągłego belki A_1B_1 o natężeniu q kG/cm, po prawej stronie równań (10a) napiszemy odpowiednio wyrazy

$$- \int_0^l q du \int_0^u \frac{(u-x)x dx}{B_1}, \quad - \int_0^l q du \int_0^u \frac{(u-x) dx}{B_1},$$

a po prawej stronie równań (11) wyrażenia różniące się tylko wstawieniem B_2 zamiast B_1 .

§ 3. Szczególnie proste rozwiązanie równań (10a) otrzymamy w przypadku stałej, równej sztywności obu podłużnic ($B_1=B_2=B=Const$; $D_1=D_2=D=Const$) oraz stałej sztywności żebra ($B_0=Const$ i $D_0=Const$).

Otrzymamy wówczas (przy jednej sile P obciążającej podłużnicę A_1B_1):

$$M_2 = \frac{Pu}{2} \frac{u}{l} \frac{8 - 4 \frac{u}{l} \left(1 + \frac{b}{l} \frac{B}{D_0}\right) + 6 \frac{b^2}{l^2} \frac{B}{D} + \frac{b^3}{l^3} \frac{B}{B_0} + 12 \frac{b}{l} \frac{B}{D_0}}{4 + 12 \frac{b^2}{l^2} \frac{B}{D} + 2 \frac{b^3}{l^3} \frac{B}{B_0} + \left(8 + 6 \frac{b^2}{l^2} \frac{B}{D} + \frac{b^3}{l^3} \frac{B}{B_0}\right) \frac{b}{l} \frac{B}{D_0}}$$

albo

$$(12) \quad M_2 = \frac{Pu}{2} \frac{u}{l} \frac{\left(2 + 6 \frac{b^2}{l^2} \frac{B}{D} + \frac{b^3}{l^3} \frac{B}{B_0}\right) + \left(12 - 4 \frac{u}{l}\right) \left(1 + \frac{b}{l} \frac{B}{D_0}\right) - 6}{\left(2 + 6 \frac{b^2}{l^2} \frac{B}{D} + \frac{b^3}{l^3} \frac{B}{B_0}\right) \left(2 + \frac{b}{l} \frac{B}{D_0}\right) + 6 \frac{b}{l} \frac{B}{D_0}},$$

$$(13) \quad \mathfrak{M}_2 = Pb \left(\frac{u}{l}\right)^2 \frac{3 \left(1 + \frac{b}{l} \frac{B}{D_0}\right) - \frac{u}{l} \left(2 + \frac{b}{l} \frac{B}{D_0}\right)}{\left(2 + 6 \frac{b^2}{l^2} \frac{B}{D} + \frac{b^3}{l^3} \frac{B}{B_0}\right) \left(2 + \frac{b}{l} \frac{B}{D_0}\right) + 6 \frac{b}{l} \frac{B}{D_0}}$$

Ponadto

$$M_1 = Pu - M_2; \quad \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2; \quad V_2 = \frac{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}{b}; \quad V_1 = P - V_2.$$

Przy bardzo małej sztywności skręcania żebra D_0 , powyższe wzory jeszcze się upraszczają przybierając postać:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_2 = Pu \frac{2 \left(3 - \frac{u}{l}\right) \frac{u}{l}}{8 + \frac{b^2}{l^2} \left(6 \frac{B}{D} + \frac{b}{l} \frac{B}{B_0}\right)} \\ \mathfrak{M}_2 = Pb \frac{\left(3 - \frac{u}{l}\right) \frac{u^2}{l^2}}{8 + \frac{b^2}{l^2} \left(6 \frac{B}{D} + \frac{b}{l} \frac{B}{B_0}\right)} \end{array} \right.$$

Jako stosowną miarę „współdziałania“ drugiej podłużnicy przy obciążeniu pierwszej, można obrać stosunek $M_2:Pu$. Współdziałanie w tym znaczeniu, wyrażone w odsetkach, określi się następującym wzorem:

$$(15) \quad w^0_{/0} = 100 \frac{2 \left(3 - \frac{u}{l}\right) \frac{u}{l}}{8 + \frac{b^2}{l^2} \left(6 \frac{B}{D} + \frac{b}{l} \frac{B}{B_0}\right)}.$$

Jak widać z powyższego równania współdziałanie jest tym większe im:

1) siły obciążające leżą bliżej końca skrzydła (czyli im większe jest $\frac{u}{l}$);

2) mniejsze jest $\frac{b}{l}$, czyli im bliżej siebie leżą podłużnice;

3) większa jest sztywność skręcania podłużnic D i sztywność zginania żebra B_0 w stosunku do sztywności zginania podłużnic B .

Na przykład dla $\frac{u}{l} = \frac{1}{2}$ i bardzo wielkiego B_0 wypada $w^0/0 = \frac{250}{8 + 6 \frac{l^2}{D} B}$,

co jest mniejsze, a co najwyżej równe $\frac{250}{8} = 31^0/0$.

Jeżeli podłużnica $A_1 B_1$ jest obciążona równomiernie przez q kG/cm, to

$$(16) \quad w^0/0 = 100 \frac{M_2}{\frac{1}{2} q l^2} = 100 \frac{3}{8 + \frac{b^2}{l^2} \left(6 \frac{B}{D} + \frac{b}{l} \frac{B}{B_0} \right)},$$

czyli że w najkorzystniejszych nawet warunkach „współdziałanie“ drugiej podłużnicy nie dochodzi do 37,5⁰/0.

Przy obciążeniu nierównomiernym (np. trapezowym), rosnącym ku utwierdzonym końcom podłużnic, można równie łatwo wyznaczyć w ⁰/0 odpowiednią wartość, która będzie oczywiście nieco mniejsza od powyższej.

O WYTRZYMAŁOŚCI PODŁUŻNIC W SKRZYDŁACH WSPORNIKOWYCH JEDNOPLATÓW

(Przegląd Techniczny, 1930 r.)

§ 1. Wstęp

Obliczenie wytrzymałości podłużnic w skrzydłach wspornikowych z dwiema lub więcej podłużnicami wykonywano zrazu w sposób nader uproszczony. Nie uwzględniano bowiem sztywności wzajemnego połączenia tych podłużnic za pośrednictwem żeber, czyli traktowano je jako belki wspornikowe, uginające się niezależnie od siebie. To założenie prowadziło oczywiście do nienależytego wyzyskania wytrzymałości materiału w podłużnicach na niekorzyść lekkości konstrukcji, jednego z podstawowych warunków ekonomii lotu.

Nie dziwnego, że rychło ukazały się doskonalsze metody obliczenia, pozwalające dokładniej określić tzw. *współdziałanie podłużnic*, które polega na tym, że każde obciążenie, chociażby skupione na jednej podłużnicy, jest zrównoważone *oporem wytrzymałościowym* obu podłużnic, czyli — jak się wyrażają krótko praktycy — każde obciążenie przenosi się na obie podłużnice. To przeniesienie obciążenia jest oczywiście różne od tego, jakie by wynikło z założenia upraszczającego, że żebra są tylko swobodnie podparte podłużnicami. W rzeczywistości łączymy żebra bardzo sztywno z podłużnicami. Dzięki temu, że żebra są bardzo sztywne na zginanie, a podłużnice mają mniejszą lub większą sztywność skręcania, ugięcie przedniej podłużnicy musi powodować także i ugięcie tylnej, w stopniu zależnym w dużej mierze od wzajemnej odległości podłużnic oraz ich sztywności skręcania, mniej zaś od sztywności zginania żeber. Tylna podłużnica zachowuje się przeto w tym przypadku tak, jak gdyby była obciążona pewną częścią siły działającej bezpośrednio na przednią podłużnicę, a tylko reszta siły przenosi się na tę ostatnią (i odwrotnie).

Spośród doskonalszych sposobów obliczenia względną prostotą odznacza się sposób przedstawiony poniżej. Jego ideę przewodnią znajdujemy w pracy: K. FRIEDRICHS u. TH. V. KÁRMÁN: Zur Berechnung freitrag-

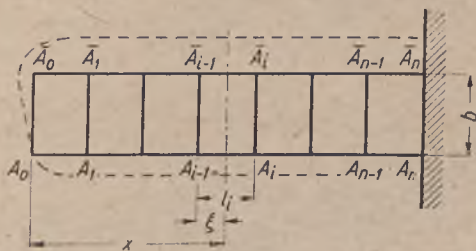
gender Flügel (Z. a. M. M. 1929, H. 4). Sposób ten demonstruje zarazem słuszność spostrzeżenia uczynionego w innych pracach¹⁾, że metoda CASTIGLIANO prowadzi najprościej do celu w rozwiązywaniu tego rodzaju zadań statycznie niewyznaczalnych.

§ 2. Rozwiązanie z pominięciem sztywności skręcania żeber

Niechaj n żeber o liczbach porządkowych $0, 1, 2, \dots, i-1, i, i+1, \dots, n-2, n-1$, łączy dwie równoległe podłużnice, utwierdzone w kadłubie samolotu w punktach A_n i \bar{A}_n (rys. 1).

Wszystkie wielkości odnoszące się do tylnej podłużnicy będziemy odróżniać od odpowiednich wielkości przedniej podłużnicy przez „nakrycie“ kreską poziomą.

Żebra dzielą całą rozpiętość podłużnicy na n „przesł“ o kolejnych długościach $l_1, l_2, \dots, l_{i-1}, l_i, l_{i+1}, \dots, l_{n-1}, l_n$. Położenie przekroju podłużnicy w każdym z przesł oznaczać będziemy albo odciętą x , mierzoną od A_0 , albo też odciętą ξ , mierzoną od początku odpowiedniego przesła. Ponieważ sztywność zginania B i skręcania D podłużnicy jest ogólnie biorąc zmienna, przeto traktować je będziemy, jako funkcje zmiennej x lub ξ . Piszemy więc: $B(x)$, $D(x)$ albo $B(\xi)$, $D(\xi)$.



Rys. 1

Przy założeniu upraszczającym, iż żebra nie stawiają oporu przy ich skręcaniu, lecz zachowują się jako doskonale sztywne przy zginaniu w płaszczyźnie pionowej (prostopadłej do podłużnic), możemy w wyrażeniu dla energii sprężystości układu złożonego z podłużnic i żeber pominąć wyrazy odnoszące się do tych ostatnich. Pomijając nadto energię ścinania w podłużnicach, otrzymujemy całkowitą energię układu w postaci:

$$(1) \quad V = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{1}{2} \int_{A_{i-1}}^{A_i} \left(\frac{M^2(x)}{B(x)} d\xi + \frac{M_s^2(x)}{D(x)} d\xi \right) + \frac{1}{2} \int_{\bar{A}_{i-1}}^{\bar{A}_i} \left(\frac{\bar{M}^2(x)}{B(x)} d\xi + \frac{\bar{M}_s^2(x)}{D(x)} d\xi \right) \right].$$

Tutaj oznacza $M(x)$ i $M_s(x)$ rzeczywisty moment zginający i skręcający w przekroju x podłużnicy. Ponieważ $M_s(x)$ pozostaje stały na długości każdego przesła l_i , przeto zamiast $M_s(x)$ można napisać M_{si} . Wielkości M_{si} , \bar{M}_{si} będą przy tym statycznie niewyznaczalne. Inne wielkości statycznie niewyznaczalne wprowadzimy w sposób następujący:

¹⁾ M. T. HUBER: Z teorii belki ciągłej. Czasopismo Techniczne, Lwów, 1925. Równanie pięciu momentów. Tamże 1927.

Niechaj $\mathfrak{M}(x)$ i $\overline{\mathfrak{M}}(x)$ oznaczają te wartości momentów zginających w podłużnicach, jakie by zachodziły gdyby nie było współdziałania za pośrednictwem żeber. Działanie żeber jest w tym przypadku zupełnie równoważne dodatkowemu sprężystemu podparciu podłużnicy w punktach A_i . Odpowiadają temu dodatkowe momenty zginające μ_i , grające tę samą rolę co momenty odporowe belki ciągłej, jako wielkości statycznie niewyznaczalne. A zatem napiszemy dla i -tego przęsła

$$(2) \quad \begin{aligned} M_i(x) &= \mathfrak{M}_i(x) + \mu_{i-1} \frac{l_i - \xi}{l_i} + \mu_i \frac{\xi}{l_i}, \\ \overline{M}_i(x) &= \overline{\mathfrak{M}}_i(x) + \overline{\mu}_{i-1} \frac{l_i - \xi}{l_i} + \overline{\mu}_i \frac{\xi}{l_i}. \end{aligned}$$

Uważając momenty zginające za dodatnie, jeżeli wyginają podłużnicę wklęsłością do góry, ustalimy znak algebraiczny siły poprzecznej T stosownie do równania

$$\frac{dM}{dx} = -T.$$

Znaczy to, że przy momentach rosnących z odciętą x , istnieje poprzeczna siła, określająca działanie lewej (prawej) odciętej części na prawą (lewą) skierowaną w górę (w dół).

Otrzymamy zatem z równań (2) przez różniczkowanie

$$(3) \quad \begin{aligned} -T_i(x) &= \mathfrak{M}'_i(x) + \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{l_i}, \\ -\overline{T}_i(x) &= \overline{\mathfrak{M}}'_i(x) + \frac{\overline{\mu}_i - \overline{\mu}_{i-1}}{l_i}, \end{aligned}$$

przy czym

$$\mathfrak{M}'(x) = \frac{d\mathfrak{M}(x)}{dx}.$$

Z warunku momentów (względem osi prostopadłej do x , leżącej w płaszczyźnie obu podłużnic) dla części skrzydła odciętej przekrojem x wynika oczywiście

$$(4a) \quad M(x) + \overline{M}(x) = \mathfrak{M}(x) + \overline{\mathfrak{M}}(x),$$

co w połączeniu z równaniem (2) daje:

$$(4b) \quad \mu_i + \overline{\mu}_i = 0.$$

Oznaczywszy teraz przez b osiowy odstęp podłużnic, zaś przez $R(x)$ i $\overline{R}(x)$ obciążenie odciętej części skrzydła, przypadające na podłużnicę

przednią i tylną (rys. 2), napiszemy warunek momentów względem osi przedniej podłużnicy:

$$M_{si} + \bar{M}_{si} - b\bar{R}_i(x) + b \cdot \bar{T}_i(x) = 0.$$

Ustaliliśmy przy tym znak momentów skręcających M_{si} i \bar{M}_{si} w obu podłużnicach w ten sposób, aby obrót spowodowany momentem skręcającym był dla patrzącego z zewnątrz zgodny z ruchem wskazówek zegara.

Ponieważ jednak

$$\bar{R}_i(x) = -\frac{d\bar{\mathfrak{M}}}{dx} = -\bar{\mathfrak{M}}'(x),$$

możemy z uwzględnieniem (3) znaleźć:

$$M_{si} + \bar{M}_{si} + b\bar{\mathfrak{M}}'_i(x) - b\bar{M}'_i(x) - \frac{\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_{i-1}}{l_i} b = 0,$$

czyli

$$(5a) \quad M_{si} + \bar{M}_{si} = -(\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_{i-1}) \frac{b}{l_i}.$$

Podobny wynik otrzymamy z warunku momentów względem osi tylnej podłużnicy:

$$(5b) \quad M_{si} + \bar{M}_{si} = -(\mu_i - \mu_{i-1}) \frac{b}{l_i}.$$

Biorąc teraz pochodne cząstkowe wyrażenia (1) na energię odkształcenia V względem M_{si} , i uwzględniając, że według (5)

$$1 + \frac{\partial \bar{M}_{si}}{\partial M_{si}} = 0$$

otrzymujemy n równań warunkowych postaci

$$\int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{M_{si}}{D(x)} d\xi - \int_{\bar{A}_{i-1}}^{\bar{A}_i} \frac{\bar{M}_{si}}{\bar{D}(x)} d\xi = 0.$$

Podstawiając tutaj

$$\int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{d\xi}{D(x)} = \frac{l_i}{D_i}, \quad \int_{\bar{A}_{i-1}}^{\bar{A}_i} \frac{d\xi}{\bar{D}(x)} = \frac{l_i}{\bar{D}_i},$$

przy czym D_i i \bar{D}_i mają znaczenie średnich wartości sztywności skręcania w i -tym przęśle, napiszemy:

$$(6) \quad \frac{M_{si}}{D_i} = \frac{\bar{M}_{si}}{\bar{D}_i}.$$

Z równań (5) i (6) wynika

$$(7) \quad \begin{cases} M_{si} = -(\mu_i - \mu_{i-1}) \frac{b}{l_i} \frac{D_i}{D_i + \bar{D}_i}, \\ \bar{M}_{si} = -(\mu_i - \mu_{i-1}) \frac{b}{l_i} \frac{\bar{D}_i}{D_i + \bar{D}_i}, \end{cases}$$

a zatem

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{si}}{\partial \mu_i} &= -\frac{b}{l_i} \frac{D_i}{D_i + \bar{D}_i}; \\ \frac{\partial \bar{M}_{si}}{\partial \mu_i} &= -\frac{b}{l_i} \frac{\bar{D}_i}{D_i + \bar{D}_i}. \end{aligned}$$

Teraz już bez trudności wykonamy różniczkowanie V względem μ_i , ażeby otrzymać n równań warunkowych w postaci

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \mu_i} &= \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{M_i(x)}{B_i(x)} \frac{\partial M_i}{\partial \mu_i} d\xi + \frac{M_{si} l_i}{D_i} \frac{\partial M_{si}}{\partial \mu_i} + \\ &+ \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{\bar{M}_i(x)}{\bar{B}_i(x)} \frac{\partial \bar{M}_i}{\partial \mu_i} d\xi + \frac{\bar{M}_{si} l_i}{\bar{D}_i} \frac{\partial \bar{M}_{si}}{\partial \mu_i} + \\ &+ \int_{A_i}^{A_{i+1}} \frac{M_{i+1}(x)}{B_{i+1}(x)} \frac{\partial M_{i+1}}{\partial \mu_i} d\xi + \frac{M_{s(i+1)} l_{i+1}}{D_{i+1}} \frac{\partial M_{s(i+1)}}{\partial \mu_i} + \\ &+ \int_{A_i}^{A_{i+1}} \frac{\bar{M}_{i+1}(x)}{\bar{B}_{i+1}(x)} \frac{\partial \bar{M}_{i+1}}{\partial \mu_i} d\xi + \frac{\bar{M}_{s(i+1)} l_{i+1}}{\bar{D}_{i+1}} \frac{\partial \bar{M}_{s(i+1)}}{\partial \mu_i} = 0. \end{aligned}$$

Uwzględniając teraz, że

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{s(i+1)}}{\partial \mu_i} &= \frac{b}{l_{i+1}} \frac{D_{i+1}}{D_{i+1} + \bar{D}_{i+1}}; \\ \frac{\partial \bar{M}_{s(i+1)}}{\partial \mu_i} &= \frac{b}{l_{i+1}} \frac{\bar{D}_{i+1}}{D_{i+1} + \bar{D}_{i+1}}, \end{aligned}$$

stosownie [do podanych niżej równań (7a) analogicznych do (7), poza tym zaś według równań (2)

$$\frac{\partial M_i(x)}{\partial \mu_i} = \frac{\xi}{l_i}; \quad \frac{\partial M_{i+1}(x)}{\partial \mu_i} = \frac{l_{i+1} - \xi}{l_{i+1}};$$

$$\frac{\partial \bar{M}_i(x)}{\partial \mu_i} = -\frac{\xi}{l_i}; \quad \frac{\partial \bar{M}_{i+1}(x)}{\partial \mu_i} = -\frac{l_{i+1} - \xi}{l_{i+1}},$$

(ponieważ $\frac{\partial \bar{\mu}_i}{\partial \mu_i} + 1 = 0$), napiszemy następujące równania warunkowe w rozwiniętej postaci:

$$\begin{aligned} & \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{M_i(x)}{B_i(x)} \frac{\xi}{l_i} d\xi - \frac{M_{s_i} b}{D_i + \bar{D}_i} + \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{\bar{M}_i(x)}{\bar{B}_i(x)} \frac{\xi}{l_i} d\xi - \frac{\bar{M}_{s_i} b}{D_i + \bar{D}_i} + \\ & + \int_{A_i}^{A_{i+1}} \frac{M_{i+1}(x)}{B_{i+1}(x)} \frac{l_{i+1} - \xi}{l_{i+1}} d\xi + \frac{M_{s(i+1)} b}{D_{i+1} + \bar{D}_{i+1}} + \\ & - \int_{A_i}^{A_{i+1}} \frac{\bar{M}_{i+1}(x)}{\bar{B}_{i+1}(x)} \frac{l_{i+1} - \xi}{l_{i+1}} d\xi + \frac{\bar{M}_{s(i+1)} b}{D_{i+1} + \bar{D}_{i+1}} = 0. \end{aligned}$$

Po wstawieniu wartości M_i, \bar{M}_i z równań (2) oraz wartości M_{i+1}, \bar{M}_{i+1} z analogicznych równań

$$\begin{aligned} 2a) \quad M_{i+1}(x) &= \mathfrak{M}_{i+1}(x) + \mu_i \frac{l_{i+1} - \xi}{l_{i+1}} + \mu_{i+1} \frac{\xi}{l_{i+1}} \\ \bar{M}_{i+1}(x) &= \bar{\mathfrak{M}}_{i+1}(x) + \bar{\mu}_i \frac{l_{i+1} - \xi}{l_{i+1}} + \bar{\mu}_{i+1} \frac{\xi}{l_{i+1}} \end{aligned}$$

oraz wartości $M_{s_i}, \bar{M}_{s_i}, M_{s(i+1)}, \bar{M}_{s(i+1)}$ z równań (7)

$$\begin{aligned} 7a) \quad M_{s(i+1)} &= -(\mu_{i+1} - \mu_i) \frac{b}{l_{i+1}} \frac{D_{i+1}}{D_{i+1} + \bar{D}_{i+1}}, \\ \bar{M}_{s(i+1)} &= -(\bar{\mu}_{i+1} - \bar{\mu}_i) \frac{b}{l_{i+1}} \frac{\bar{D}_{i+1}}{D_{i+1} + \bar{D}_{i+1}}, \end{aligned}$$

otrzymamy n równań na wyznaczenie pozostałych n niewiadomych μ_i . Każde z równań zawiera nie więcej jak trzy niewiadome, podobnie jak znane równanie trzech momentów belki wieloprzęsłowej. Przy podanych poniżej oznaczeniach skracających, równania te przybierają postać:

$$\begin{aligned} 8) \quad (s_i + \bar{s}_i - u_i) \mu_{i-1} + (r_i + \bar{r}_i + t_{i+1} + \bar{t}_{i+1} + u_i + u_{i+1}) \mu_i + \\ + (s_{i+1} + \bar{s}_{i+1} - u_{i+1}) \mu_{i+1} + (p_i - \bar{p}_i + q_{i+1} - \bar{q}_{i+1}) = 0, \end{aligned}$$

$$(8a) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i = \frac{1}{l_i} \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{\mathfrak{M}(x) \xi d\xi}{B(x)}, \quad \bar{p}_i = \frac{1}{l_i} \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{\overline{\mathfrak{M}}(x) \xi d\xi}{\overline{B}(x)}, \\ q_i = \frac{1}{l_i} \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{\mathfrak{M}(x)(l_i - \xi) d\xi}{B(x)}, \quad \bar{q}_i = \frac{1}{l_i} \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{\overline{\mathfrak{M}}(x)(l_i - \xi) d\xi}{\overline{B}(x)}, \\ r_i = \frac{1}{l_i^2} \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{\xi^2 d\xi}{B(x)}, \quad \bar{r}_i = \frac{1}{l_i^2} \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{\xi^2 d\xi}{\overline{B}(x)}, \\ s_i = \frac{1}{l_i^2} \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{\xi(l_i - \xi)}{B(x)} d\xi, \quad \bar{s}_i = \frac{1}{l_i^2} \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{\xi(l_i - \xi)}{\overline{B}(x)} d\xi, \\ t_i = \frac{1}{l_i^2} \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{(l_i - \xi)^2 d\xi}{B(x)}, \quad \bar{t}_i = \frac{1}{l_i^2} \int_{A_{i-1}}^{A_i} \frac{(l_i - \xi)^2 d\xi}{\overline{B}(x)}, \\ u_i = \frac{b^2}{l_i} \frac{1}{D_i + \overline{D}_i}, \quad u_{i+1} = \frac{b^2}{l_{i+1}} \frac{1}{D_{i+1} + \overline{D}_{i+1}} \quad \text{itd.} \end{array} \right.$$

Ponieważ $\mu_0 = 0$, więc pierwsze z równań układu (8) będzie wyglądało w następujący sposób:

$$(8b) \quad (r_1 + \bar{r}_1 + t_2 + \bar{t}_2 + u_1 + u_2) \mu_1 + (s_1 + s_2 - u_2) \mu_2 + p_1 - \bar{p}_1 + q_2 - \bar{q}_2 = 0.$$

Podobnie ostatnie z równań (8) (czyli n -te) przybiera postać:

$$(8c) \quad (s_n + \bar{s}_n - u_n) \mu_{n-1} + (r_n + \bar{r}_n + u_n) \mu_n + p_n - \bar{p}_n = 0,$$

ponieważ $q_{n+1}, s_{n+1}, t_{n+1}, u_{n+1}$ itd. musimy przyjąć równe 0, jako należące do przeszła fikcyjnego ($n+1$)-go, o nieskończenie wielkiej sztywności.

W ten sposób obliczenie wytrzymałościowe podłużnie sprowadza się do rozwiązania układu równań (8) względem wielkości statycznie niewyznaczalnych $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$, przy czym momenty zginające i skręcające obliczamy z równań (2) i (7). Przy obliczaniu wartości p, q, r, s, t , można często poprzestać na zastąpieniu w przybliżeniu wielkości B i \mathfrak{M} wartościami średnimi dla odpowiedniego pręta. Oznaczmy je po prostu przez B_i, \mathfrak{M}_i .

Otrzymamy wówczas:

$$(8d) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_i = q_i = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_i l_i}{B_i}, \quad \bar{p}_i = \bar{q}_i = \frac{1}{2} \frac{\overline{\mathfrak{M}}_i l_i}{\overline{B}_i}, \\ r_i = t_i = \frac{1}{3} \frac{l_i}{B_i}, \quad \bar{r}_i = \bar{t}_i = \frac{1}{3} \frac{l_i}{\overline{B}_i}, \\ s_i = \frac{1}{6} \frac{l_i}{B_i}, \quad \bar{s}_i = \frac{1}{6} \frac{l_i}{\overline{B}_i}, \quad u_i = \frac{b^2}{l_i} \frac{1}{D_i + \overline{D}_i}. \end{array} \right.$$

Obliczywszy w danym konkretnym przypadku wartości liczbowe powyższych współczynników, wyrażamy za pomocą pierwszego z równań (9) niewiadomą μ_1 przez μ_2 i wstawiamy to wyrażenie do równania drugiego. Z kolei z tego równania wyrazimy podobnie μ_2 przez μ_3 itd. aż do przedostatniego równania, które da nam μ_{n-1} wyrażone przez μ_n . Po wstawieniu tej wartości do ostatniego równania znajdziemy oczywiście μ_n , a stąd wstecz wszystkie niewiadome aż do μ_1 .

§ 3. Uproszczenie równania przy stałym stosunku sztywności zginania podłużnic

Jeżeli w każdym przekroju x

$$B(x) : \bar{B}(x) = \text{Const} = \alpha,$$

to współczynniki H i K przybierają postać uproszczoną:

$$(10a) \quad H_i = s_i(1 + \alpha) - u_i,$$

$$K_{i,i+1} = (r_i + t_{i+1})(1 + \alpha) + u_i + u_{i+1}.$$

Uproszczenie trzeciego współczynnika $C_{i,i+1}$ przedstawia się w sposób następujący:

$$(10b) \quad p_i - \bar{p}_i = \int_{\xi=0}^{\xi=l_i} \frac{\xi}{l_i} \left[\frac{\mathfrak{M}_i(x)}{B_i(x)} - \frac{\bar{\mathfrak{M}}_i(x)}{\bar{B}_i(x)} \right] d\xi = \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} \frac{\mathfrak{M}_i(x) - \alpha \bar{\mathfrak{M}}_i(x)}{B(x)} \xi d\xi$$

i podobnie

$$(10c) \quad q_i - \bar{q}_i = \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} \frac{\mathfrak{M}(x) - \alpha \bar{\mathfrak{M}}(x)}{B(x)} (l_i - \xi) d\xi.$$

Łatwo teraz zauważyć, że w przypadku obciążenia rozłożonego w przekrojach poprzecznych tak, aby wszędzie

$$(10d) \quad \mathfrak{M}(x) - \alpha \bar{\mathfrak{M}}(x) = 0,$$

staje się $p_i - \bar{p}_i = 0$, $q_i - \bar{q}_i = 0$, a więc $C_{i,i+1} = 0$ i wszystkie $\mu_i = 0$. Nie ma wówczas również momentów skręcających w podłużnicach, całe zaś skrzydło jest tylko zginane, a nie skręcane. Współdziałanie podłużnic nie zachodzi. Wypadkowa obciążeń skrzydła, zawartych między dwoma sąsiednimi przekrojami poprzecznymi, dzieli w tym przypadku odstęp b podłużnie w stosunku $1:\alpha$, czyli odległość tej wypadkowej od przedniej podłużnicy

$$b_1 = \frac{b}{1 + \alpha}.$$

Mówimy wówczas, że obciążenie działa na osi sprężystości skrzydła, tj. na linii łączącej *środku sprężystości* przekrojów poprzecznych skrzydła.

Środki te dzielą odstęp środków przekroju obu podłużnic w stosunku określonym powyżej, tj. $1:a$.

W ogólnym przypadku zachodzą również momenty skręcające skrzydło. Mierzy je iloczyn obciążenia odciętej w myśli części skrzydła przez odległość wypadkowej od osi sprężystości. Wówczas

$$\mathfrak{M} - a\overline{\mathfrak{M}} \geq 0, \quad \text{a więc} \quad \mu_i \neq 0,$$

współdziałanie zaś podłużnic występuje tym wydatniej, im większe są momenty skręcające skrzydło.

Nie trudno przy tym podać związek między danymi momentami zginającymi obu podłużnic \mathfrak{M} i $\overline{\mathfrak{M}}$ w przekroju x (albo ξ) a momentem skręcającym M_s^* całego skrzydła.

Przy założeniu obciążenia według (10d) momenty \mathfrak{M} i $\overline{\mathfrak{M}}$ można przedstawić w postaci iloczynów wypadkowych R i \overline{R} (rys. 2) przez ich odległość $(x-x')$ od przekroju x (x' jest wspólną wartością odciętej miejsca działania sił R i \overline{R}). Wtedy moment skręcający

$$M_s^* = -Rb_1 + \overline{R}(b-b_1) = -\frac{(R-\overline{R}a)b}{1+a},$$

ponieważ zaś

$$\mathfrak{M} = R(x-x'), \quad \overline{\mathfrak{M}} = \overline{R}(x-x'),$$

a zatem

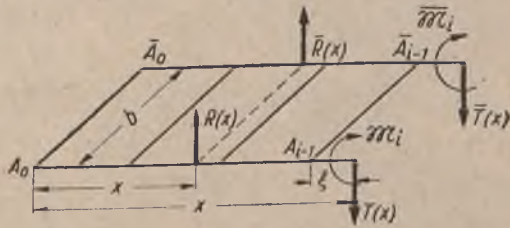
$$M_s^* \frac{x-x'}{b} = -\frac{\mathfrak{M} - a\overline{\mathfrak{M}}}{1+a}.$$

Wartość tę można by wstawić w wyrażenia (10b) i (10c), aby otrzymać współczynnik $C_{i,i+1}$, wyrażony w zależności od M_s^* , jednak przekształcenie to nie ma znaczenia praktycznego.

§ 4. Uwzględnienie sztywności skręcania żeber

Moment skręcający (wewnętrzny) żebra, różny od zera, wywołuje skok wartości momentu zginającego podłużnicy w miejscu połączenia z żebrzem. Skok ten ujawni się oczywiście tylko w wartości momentu dodatkowego μ_i , która po prawej stronie punktu A_1 będzie równa μ_i' , po lewej zaś μ_i'' . Moment skręcający żebro A_i i \overline{A}_i jest więc równy $\mu_i' - \mu_i''$ albo $-(\overline{\mu}_i' - \overline{\mu}_i'')$, ponieważ tak jak w § 2 musi być

$$(11) \quad \mu_i' + \overline{\mu}_i' = 0 \quad \text{i} \quad \mu_i'' + \overline{\mu}_i'' = 0.$$



Oznaczywszy przez C_i sztywność skręcania żebra, pojmowaną w ogóle jako funkcja rzędnej y , mierzonej od osi przedniej podłużnicy wzdłuż żebra, mamy dla energii skręcania żebra wyrażenie

$$\frac{1}{2} \int_0^b \frac{(\mu'_i - \mu''_i)^2}{C_i(y)} dy.$$

Oznaczając $\int_0^b \frac{dy}{C_i(y)} = \beta_i$, napiszemy to wyrażenie w postaci uproszczonej:

$$\frac{1}{2} \beta_i (\mu'_i - \mu''_i)^2.$$

Do wyrażenia (1) na V przybywa zatem jeszcze

$$(12) \quad \sum_{i=0}^{i=n-1} \frac{1}{2} \beta_i (\mu'_i - \mu''_i)^2,$$

przy czym $\mu''_0 = 0$.

Zamiast równań (2) napiszemy teraz:

$$(13) \quad \begin{cases} M_i(x) = \mathfrak{M}_i(x) + \mu'_{i-1} \frac{l_i - \xi}{l_i} + \mu''_i \frac{\xi}{l_i}; \\ \bar{M}_i(x) = \bar{\mathfrak{M}}_i(x) + \bar{\mu}'_{i-1} \frac{l_i - \xi}{l_i} + \bar{\mu}''_i \frac{\xi}{l_i} = \bar{\mathfrak{M}}_i(x) - \mu'_{i-1} \frac{l_i - \xi}{l_i} - \mu''_i \frac{\xi}{l_i}, \end{cases}$$

zamiast (3) zaś:

$$(14) \quad \begin{cases} -T_i(x) = \mathfrak{T}_i(x) + \frac{\mu''_i - \mu'_{i-1}}{l_i} \\ -\bar{T}_i(x) = \bar{\mathfrak{T}}_i(x) + \frac{\bar{\mu}''_i - \bar{\mu}'_{i-1}}{l_i}. \end{cases}$$

Podobnie otrzymamy zamiast równań (5)

$$(15) \quad M_{si} + \bar{M}_{si} = -(\mu''_i - \mu'_{i-1}) \frac{b}{l_i} = (\bar{\mu}''_i - \bar{\mu}'_{i-1}) \frac{b}{l_i},$$

a zamiast (7) i (7a)

$$(17) \quad \begin{cases} M_{si} = -(\mu''_i - \mu'_{i-1}) \frac{b}{l_i} \frac{D_i}{D_i + \bar{D}_i}, \\ \bar{M}_{si} = -(\mu''_i - \mu'_{i-1}) \frac{b}{l_i} \frac{\bar{D}_i}{D_i + \bar{D}_i}. \end{cases}$$

$$(17a) \quad \begin{cases} M_{s(i+1)} = -(\mu''_{i+1} - \mu'_i) \frac{b}{l_{i+1}} \frac{D_{i+1}}{D_{i+1} + \bar{D}_{i+1}}, \\ \bar{M}_{s(i+1)} = -(\mu''_{i+1} - \mu'_i) \frac{b}{l_{i+1}} \frac{\bar{D}_{i+1}}{D_{i+1} + \bar{D}_{i+1}}. \end{cases}$$

WYMIAROWANIE PRĘTÓW OSIOWO ŚCISKANYCH O STAŁYM PRZEKROJU W KONSTRUKCJACH LEKKICH

(ITBL, Warszawa 1933 r.)

Streszczenie

Biorąc jako punkt wyjścia smukły pręt przenoszący obciążenie ściskające o krańcowej wartości P_w , odpowiadającej osiągnięciu naprężeń krytycznych, uzależniono ciężar pręta G od własności fizycznych materiału (ciężar właściwy γ , moduł sprężystości E), wymiarów geometrycznych (długość l , smukłość s) i sposobu ustalenia końców (współczynnik a we wzorze $\sigma_{kr} = \frac{aE}{s^2}$) w sposób następujący:

$$G = \frac{\gamma}{\alpha E} P_w l s^2.$$

Dla prętów o małej smukłości ciężar pręta określa się jako

$$G = \frac{\gamma l P_w}{\sigma_{nieb}},$$

gdzie σ_{nieb} jest naprężeniem krytycznym odpowiadającym danej smukłości s , z założenia mniejszej od smukłości granicznej s_0 .

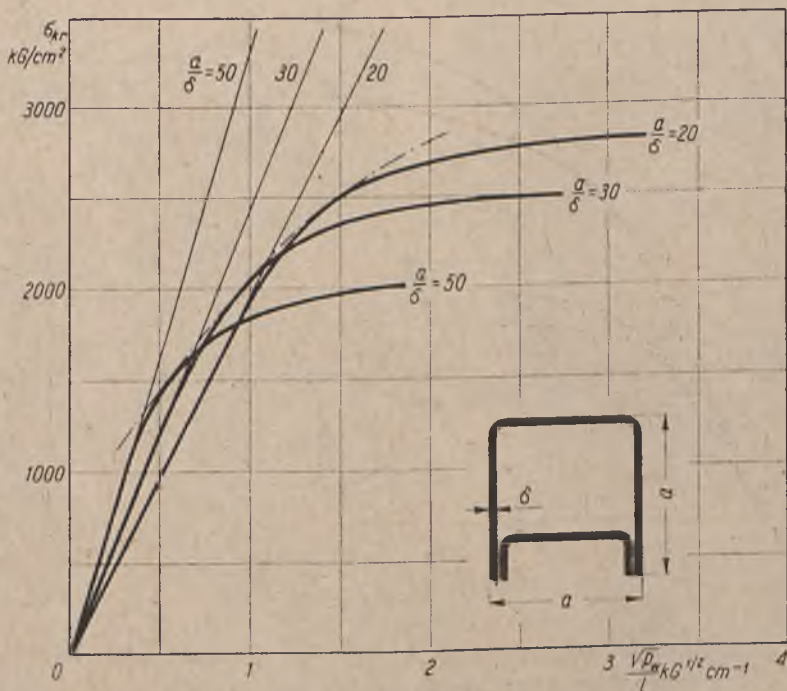
Rozważając następnie pręty geometrycznie podobne uzasadniono, że wyzyskanie materiału ściskającego pręta scharakteryzowane jest przez wielkość C .

$$C = \frac{\sqrt{P_w}}{l} (\text{kG}^{1/2} \text{ cm}^{-1}).$$

Wielkość tę określa się przez podanie wykresu (rys. 1), w którym na osi odciętych odmierza się C , na osi rzędnych zaś wielkość naprężeń krytycznych σ_{kr} . W przedziale dużych smukłości (co odpowiada małym wartościom C) wykres jest linią prostą, co wynika ze wzoru EULERA. Dla smukłości średnich i małych przebieg wykresu zależy od kształtu przekroju, co spowodowane jest możliwością pojawienia się wybożenia miejscowego.

Omawiając następnie konkretny przykład liczbowy udowodniono zaletę tej metody, oczywiście przy założeniu, że istnieją dane doświadczalne pozwalające wykreślić $\sigma_{kr} = f(C)$.

W przypadku gdy danych tych nie ma lub gdy liczba ich jest ograniczona, pożądane jest przeprowadzenie analizy teoretycznej w oparciu o te wielkości, których wyznaczenie nie przedstawia trudności. W pracy rozpatrzono trzy przypadki krańcowe, a mianowicie: przypadek małych,



Rys. 1

dużych i średnich smukłości, przy czym w tym ostatnim przypadku ograniczono się do prętów cienkościennych.

W wyniku otrzymano, że dla prętów o małej smukłości cechą charakteryzującą lekkość konstrukcji jest

$$C_G = \gamma / \sigma_{pl},$$

gdzie σ_{pl} — jest naprężeniem odpowiadającym granicy plastyczności.

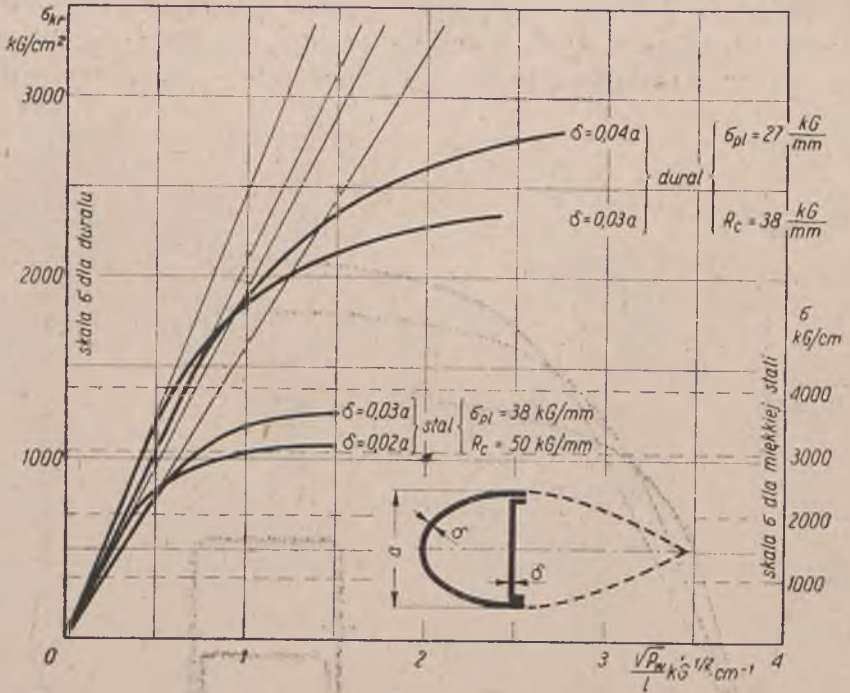
Dla prętów o dużej smukłości cecha lekkości określona jest jako

$$C_G = \gamma E^{-1/2}.$$

Wreszcie w przypadku smukłości średnich rozróżnia się dwie możliwości, a mianowicie: gdy przekrój składa się ze ścianek zakrzywionych

i wtedy, w najkorzystniejszych warunkach, cecha C_G lekkości pręta określona jest jako

$$C_G = \gamma E^{-2/3}$$



Rys. 2

oraz druga możliwość, gdy przekrój składa się ze ścianek płaskich i wtedy, w najbardziej korzystnym przypadku

$$C_G = \gamma E^{-3/5}$$

Zakończenie pracy stanowi porównanie cech lekkości niektórych materiałów stosowanych w lotnictwie (rys. 2 i tablica).

Tabela porównawcza teoretycznych materiałowych cech lekkości prętów osiowo ścisłkanych (lub rozciąganych)

Material	Drewno	Elektron	Dural	Stal zwykłej jakości	Stal wyższej jakości	Wymiar
Cieężar właściwy γ	0,32	1,82	2,7	7,85	7,85	-kG/cm ³
Napężenie niebezpieczne σ_{nie}	2	25	27	38	100-150	kG/mm ²
Wytrzymałość na ścisłkanie R_c	2,5	34	42	50	250	kG/mm ²
Moduł sprężystości E	1000	4300	7000	21000	21000	kG/mm ²
Długość niebezpieczna $\frac{\sigma_{nie}}{\gamma}$	6,25	13,7	10,1	4,8	12,7-19,1	km
Długość zerwania (zgniecenia) R_c/γ	7,8	18,7	15,5	6,4	31,8	km
Materiałowe cechy lekkości	$\frac{10^3 \gamma}{\sigma}$	16	38	9,9	20,7	7,85-5,5
	$\frac{10^2 \gamma}{R_c}$	12,8	30,4	6,45	15,7	3,14
	$\frac{10^4 \gamma}{E}$	3,2	3,8	3,85	3,7	3,7
	$\frac{10^4 \gamma}{E^{1/2}}$	1,0	1,7	3,2	5,4	5,4
	$\frac{10^4 \gamma}{E^{2/3}}$	3,2	6,0	7,4	10,3	10,3
	$\frac{10^4 \gamma}{E^{3/5}}$	5,1	9,8	13,3	20,0	20,0

Wymiar wypływa z wyrażen pierwszej kolumny

DZIAŁ XI

ZAGADNIENIA UZBROJENIOWE

Redaktor naukowy: STEFAN ŻUKOWSKI
Asystent naukowy: CZESŁAW BRONIAREK

Z TEORII SAMOWZMACNIANIA LUF DZIAŁOWYCH

(Wiadomości Techniczno-Artyleryjskie Nr 9, 1931 r.)

§ 1. Wstęp

Praca niniejsza jest próbą zastosowania nowoczesnej teorii odkształceń plastycznych do rozwiązania zagadnienia tzw. *samowzmacniania*¹⁾ w sposób bardziej zadowalający od rozwiązań dotychczasowych. Albowiem znane mi próby rozwiązania teoretycznego posiadają pewne braki i opierają się na założeniach niedostatecznie uzasadnionych. Od wad tych nie jest bynajmniej wolna ceniona i rozpowszechniona w piśmiennictwie techniczno-artyleryjskim francuskim i naszym teoria M. MALAVALA, której to teorii autor przytoczonego właśnie polskiego dzieła poświęca dużo miejsca. Teoria MALAVALA daje pozornie więcej, aniżeli teoretyczny schemat ciała doskonale elastoplastycznego, tj. takiego, dla którego wykres naprężeń σ i wydłużeń jednostkowych ε składa się z prostej OA (rys. 1), wychodzącej z początku współrzędnych i sięgającej do *granicy plastyczności*²⁾ A oraz prostej AB równoległej do osi wydłużeń ε .

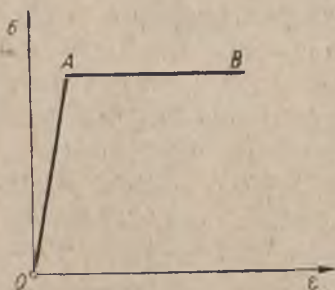
¹⁾ Termin odpowiadający francuskiemu „autofrettage“, wprowadzony w dziele: „Wytrzymałość luf działowych“, opracował inż. KAZIMIERZ JAKOWSKI, Bibl. „Przeglądu Artyleryjskiego“, Nr 5, Warszawa 1929. Powołując się w ciągu dalszym na tę książkę, będziemy używać skrótu: WLD.

²⁾ Termin ten najlepiej oddaje to, co Anglicy nazywają *yield point*, Francuzi *limite d'élasticité apparante*, a Niemcy *Flieessgrenze* albo *Streckgrenze*. U nas co kilka lat proponuje się nową nazwę. W ubiegłym stuleciu dość długo utrzymała się nazwa *granica płynności* lub *granica płynięcia*, potem Komitet Redakcyjny „Technika“ przyjął niezbyt szczęśliwą *granice ciastoratości*. Około 10 lat temu wprowadziłem w moich pracach, za radą prof. H. MIERZEJEWSKIEGO i innych członków Komisji, zwołanej w swoim czasie przez PKN, termin *granica plastyczności*, tak że niedawno zaskoczył mnie po prostu nowy termin „*granica podatności*“, wprowadzony do piśmiennictwa wojskowego. Nie wiem, kto jest autorem tego pomysłu, ale nie podobna uznać go za szczęśliwy, albowiem wyraz *podatność* ma w naszym języku od dawna utarte znaczenie *zdolności ciała do odkształceń w ogóle*, a więc nie tylko plastycznych; wyraz ten nie nadaje się więc na oznaczenie punktu przełomu od odkształceń sprężystych do odkształceń trwałych czyli plastycznych. Wszak mówimy często o sprężynach mniej lub więcej podatnych zależnie od tego, czy się mniej lub więcej uginają (sprężycie) pod danym obciążeniem.

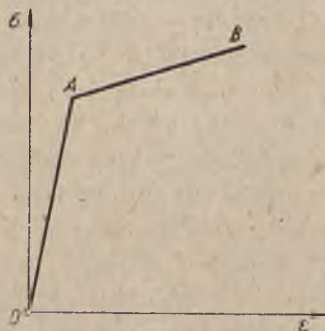
Najpoważniejszy zarzut, jaki można pozostawić teorii MALAVALA, dotyczy zupełnego pominięcia naprężeń podłużnych w rurze poddanej ciśnieniu wewnętrznemu, które zwłaszcza w stadium odkształceń plastycznych, osiągają, jak zobaczymy, wartości bardzo znaczne i muszą grać doniosłą rolę. Francuski inżynier artyleryjski rozpatruje równowagę elementu rury w stanie plastycznym tak, jak gdyby działały tylko naprężenia obwodowe σ_t i promieniowe σ_r (Por. str. 56 i następne w WLD). Na tej podstawie dochodzi do równania

$$E = a + b \frac{c}{r^2},$$

określającego *granice sprężystości* E materiału rury w cylindrycznej warstewce elementarnej jako funkcję promienia r tej warstewki, przy czym a, b, c oznaczają stałe zależne od własności wytrzymałościowych materiału.



Rys. 1. Wykres rozciągania materiału doskonale elastoplastycznego



Rys. 2. Wykres rozciągania według schematu MALAVALA

Stale te wyznacza MALAVAL na podstawie wykresu (σ, ϵ) , uproszczonego do schematu (rys. 2) złożonego również z dwóch prostych, ale różniącego się od poprzedniego wyraźnym nachyleniem prostej stanu plastycznego do osi wydłużeń ϵ .

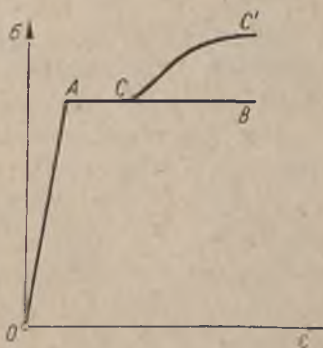
Dlatego to można by mniemać, że schemat ten odpowiada lepiej rzeczywistości od poprzedniego, który będzie stanowił podstawę naszych wywodów teoretycznych. Tymczasem rzecz się ma przeciwnie, jeżeli chodzi o materiały mające wyraźną granicę plastyczności, albowiem wzniesienie się doświadczalnej linii wykresu poza punktem A zachodzi dopiero po dość znacznym odkształceniu plastycznym, większym od tego, jakie wystarcza do samowzmocnienia rury stalowej na początku osiągnięcia stanu plastycznego w całej jej grubości. Krótko mówiąc, korzystamy w teorii samowzmocnienia tylko z krótkiego odcinka linii wykresu w stadium odkształceń plastycznych, a odcinek ten zbliża się raczej do prostej równo-

ległej do osi wydłużeń, aniżeli do prostej nachylonej, jak przyjmuje MALAVAL³⁾.

Inaczej sprawa się przedstawia, gdy idzie o odkształcenia bardzo znaczne. Wówczas zachodzi dwojaka komplikacja: jedna spowodowana zjawiskiem *twardnienia* (zwanego po francusku *écrouissage*, a po niemiecku *Verfestigung*); druga zaś tkwi w trudnościach matematycznych operowania odkształceniami skończonymi.

Zjawisko twardnienia charakteryzuje się podniesieniem linii wykresu (σ, ϵ) począwszy od pewnego punktu *C* na linii poziomej *AB* (rys. 3) odkształceń plastycznych. Temu podniesieniu towarzyszy zmiana własności wytrzymałościowych materiału pręta rozciąganego, objawiająca się przy powtórnym jego obciążeniu podwyższeniem granicy plastyczności, czyli praktycznej granicy sprężystości.

Materiał staje się nieco twardszym (stąd nazwa „twardnienia“⁴⁾) i, co za tym idzie, bardziej kruchy.



Rys. 3. Schemat rzeczywistego wykresu rozciągania

³⁾ W dyskusji, jaka wywiązała się w Warszawskim Towarzystwie Politechnicznym 6 grudnia 1930 r. po referacie z niniejszej pracy, zakwestionowano powyższy zarzut, zaznaczając, że w nowszych pracach MALAVALA jest mowa o naprężeniach podłużnych. MALAVAL dowiódł nawet doświadczalnie, że takie naprężenia zachodzą w warstwie wewnętrznej lufy samowzmacnionej i że mogą osiągnąć znaczne wartości.

Otóż, w celu uniknięcia wszelkich nieporozumień, należy zaznaczyć, że wymieniony zarzut odnosi się jedynie do tych wywodów teoretycznych MALAVALA, które przedstawił szczegółowo inż. JAKOWSKI na str. 56 do 59 WLD. Te wywody polegają na rozpatrywaniu działania samych tylko naprężeń promieniowych i obwodowych.

Ich wnioskiem głównym jest wzór $E = a + b \frac{\sigma}{\sigma_0}$, stosowany następnie na str. 153 i dalszych do teorii samowzmacnienia, co prawda, z zastrzeżeniem uwidocznionym na str. 155, że przy odkształceniach jednostkowych, większych od 0,03 ustaje ważność tego wzoru.

Przy całym szacunku dla ogromnej pracy włożonej w studia i doświadczenia MALAVALA oraz uznaniu jej trwałej wartości techniczno-naukowej, nie można zamykać oczu na słabe strony niektórych wywodów teoretycznych jak powyższe zwłaszcza, gdy można im przeciwstawić teorię pod pewnym względem doskonalszą. Teoria, np. poniżej stosowana prowadzi do wzorów (36) na naprężenia pozostałe w lufie po operacji samowzmacnienia „drugim ciśnieniem krytycznym“. Z trzeciego z tych wzorów, określającego wartość naprężenia podłużnego σ , widać wyraźnie, że przy stosowaniu dużej wartości stosunku $b:a$ stają się te naprężenia ciśnieniami. Ciśnienia te mogą być bardzo znaczne i maleją ze wzrostem promienia warstwy r , podobnie jak ciśnienia promieniowe, zgodnie z przytoczonymi w dyskusji doświadczeniami MALAVALA.

⁴⁾ Terminologia w tej dziedzinie jest, zwłaszcza u nas, jeszcze bardzo chaotyczna. Pochodzi to stąd, że odnośne własności metalu interesują kilka różnych grup specja-

Co się tyczy trudności matematycznego ujęcia dużych odkształceń, to np., MALAVAL w swojej teorii samowzmacniania luf działowych zdawał sobie dobrze z nich sprawę, dążąc do pokonania tych trudności w zakresie tylko jednego zagadnienia. Jednakże dotyczące wywody zawierają pewne niedomówienia lub niejasności, i dlatego zamieszczam nieco uwag poświęconych kwestii dużych odkształceń, jakkolwiek w późniejszych rozważaniach teoretycznych, poświęconych zagadnieniu samowzmacnienia, pozostanie ta kwestia na uboczu.

Przy rozpatrywaniu odkształceń skończonych okazuje się pożyteczne określenie wielkości odkształcenia logarytmem naturalnym stosunku wielkości odkształconej, np. L do wielkości pierwotnej, np. l , czyli $\ln \frac{L}{l}$, zamiast samą wartością liczbową stosunku zmiany wielkości pierwotnej do tejże wielkości, czyli $\frac{L-l}{l}$. Różnica obydwu sposobów określenia jest widoczna z rozwinięcia

$$\ln \frac{L}{l} = \ln \frac{l+L-l}{l} = \ln \left(1 + \frac{L-l}{l} \right) = \frac{L-l}{l} - \frac{1}{2} \left(\frac{L-l}{l} \right)^2 + \dots$$

Przy bardzo małych wartościach stosunku $\frac{L-l}{l}$ staje ta różnica wielkością małą wyższego rzędu, wobec czego stosowanie odkształceń logarytmicznych, jak je krótko nazywać będziemy, jest zbędne. Korzyści ze stosowania odkształceń logarytmicznych wychodzą na jaw dopiero

listów. Technolog-mechanik, np., zajmujący się obróbką metali, zna powyższe zjawisko od dawna jako skutek *zimnej obróbki* i nazywa je przeto w przenośni *zimną obróbką*. Szukając krótszej nazwy, charakteryzującej lepiej zjawisko twardnienia wskutek odkształceń plastycznych metali, wprowadził St. ANCYC do naszego piśmiennictwa wyraz *zgniot*, przyjęty potem w pracach profesorów W. BRONIEWSKIEGO, I. FESZCZENKO-CZOPIWSKIEGO i innych autorów, pracujących w dziedzinie technologii metali. Nie uważam tej nazwy za szczęśliwą, albowiem charakteryzuje rzecz zbyt jednostronnie. Wszak to samo zjawisko występuje równie dobrze przy zgniataniu czyli *ściskaniu*, jak przy *rozciąganiu*, a w ogóle przy każdym odkształceniu plastycznym, czyli trwałym. Inżynier wytrzymałościowy znowu (jeżeli wolno mi tak nazwać pracownika w laboratorium wytrzymałościowym) chętnie nazywa to zjawisko *wzmocnieniem*, gdyż przede wszystkim zwraca uwagę na fakt zwiększenia doraźnej wytrzymałości metalowego pręta próbnego, jeżeli ten pręt był uprzednio rozciągnięty poza granicę plastyczności.

Jeszcze jaśniej tłumaczy pochodzenie tej nazwy wyraz *moc*, którego używał założyciel Mechanicznej Stacji Doświadczalnej we Lwowie, prof. T. FIEDLER w znaczeniu *wytrzymałości*.

Jednakowoż nazwa *wzmocnienie* bywa używana w tylu rozmaitych znaczeniach w technice, że przydawanie jej tutaj jeszcze jednego, nie jest pożądane. Dlatego radbym zalecić stosowanie w tym przypadku tylko nazwy *twardnienie*.

przy rozważaniu odkształceń dowolnie wielkich. Jeżeli bowiem, np. długość pierwotna l dozna przyrostu Δl tak, że $l + \Delta l = l_1$, a potem długość l_1 dozna przyrostu Δl_1 z wynikiem $l_2 = l_1 + \Delta l_1$, to odpowiednie wydłużenia jednostkowe są

$$\frac{\Delta l}{l} \quad \text{i} \quad \frac{\Delta l_1}{l_1}.$$

Jednakże suma tych częściowych wydłużeń jednostkowych $\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta l_1}{l_1}$ nie daje końcowego wydłużenia jednostkowego, albowiem to ostatnie równa się

$$\frac{\Delta l + \Delta l_1}{l}.$$

Różnica obu tych wielkości

$$\frac{\Delta l + \Delta l_1}{l} - \left(\frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta l_1}{l_1} \right) = \frac{\Delta l_1}{l} \left(1 - \frac{l}{l_1} \right),$$

co nie jest równe zeru.

Tymczasem widać od razu, że

$$\frac{l_2}{l} = \frac{l_1}{l} \frac{l_2}{l_1},$$

a więc

$$\ln \frac{l_2}{l} = \ln \frac{l_1}{l} + \ln \frac{l_2}{l_1},$$

czyli że końcowe odkształcenie logarytmiczne jest dokładnie sumą odkształceń logarytmicznych częściowych.

Rozpatrując teraz odkształcenia prostopadłościanu o krawędziach a, b, c , który się zmienił na prostopadłościan o krawędziach

$$a_1 = a(1 + \varepsilon_1), \quad b_1 = b(1 + \varepsilon_2), \quad c_1 = c(1 + \varepsilon_3)$$

otrzymujemy jako ściśle wyrażenie względnej zmiany objętości:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 b_1 c_1 - abc}{abc} &= (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) - 1 = \\ &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \end{aligned}$$

zamiast stosowanego zwykle w teorii sprężystości przybliżenia:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,$$

tymczasem równanie ściśle

$$\frac{a_1 b_1 c_1}{abc} = \frac{V_1}{V}$$

daje po zlogarytmowaniu

$$\ln \frac{V_1}{V} = \ln \frac{a_1}{a} + \ln \frac{b_1}{b} + \ln \frac{c_1}{c},$$

z czego widać, że logarytmiczne względne odkształcenie objętościowe jest ściśle równe sumie odkształceń względnych logarytmicznych w trzech kierunkach wzajemnie prostopadłych⁵⁾.

⁵⁾ Mierzenie odkształcenia za pomocą odkształceń logarytmicznych bywa interpretowane niekiedy w sposób następujący:

„Jeżeli chcemy określić teoretyczną wartość wydłużenia jednostkowego, to musimy w każdej chwili odnosić przyrost elementarny dL do długości rzeczywistej l , którą w tej chwili pręt posiada (a nie do wartości pierwotnej l_0), a w takim razie musimy odmierzać na osi odejętych poszczególne wartości $\frac{dL}{l}$ jedne za drugimi; odejęta całkowiata będzie zatem wynosiła

$$\int_{l_0}^{l_1} \frac{dL}{l} = \ln \frac{l_1}{l_0} = \left(\frac{l_1}{l_0} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{l_1}{l_0} - 1 \right)^2 + \dots$$

Gdy $\left(\frac{l_1}{l_0} - 1 \right)$ jest bardzo małe, to można poprzestać na pierwszym wyrazie powyższego rozwinięcia...“.

Otóż rozumowanie powyższe nie może stanowić dowodu, że „teoretyczną wartością“ wydłużenia jednostkowego jest raczej $\ln \frac{l_1}{l_0}$ niż $\frac{l_1}{l_0} - 1$.

Matematycznie jest, oczywiście, w porządku równanie:

$$(1) \quad \int_{l_0}^{l_1} \frac{dL}{l} = \ln \frac{l_1}{l_0},$$

lecz ono nie wyraża nic więcej, jak tylko stwierdzenie stanu następującego:

Całkowity bezwzględny przyrost $l_1 - l_0$ długości pierwotnej l_0 jest niewątpliwie sumą przyrostów następujących

$$(x_1 - l_0) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \dots + (x_n - x_{n-1}) + (l_1 - x_n),$$

jeżeli

$$l_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < l_1.$$

Tymczasem całkowity względny przyrost długości

$$\frac{l_1 - l_0}{l_0} = \frac{l_1}{l_0} - 1,$$

nie jest widocznie identyczny z sumą względnych przyrostów częściowych, tj.

$$\frac{x_1 - l_0}{l_0} + \frac{x_2 - x_1}{x_1} + \frac{x_3 - x_2}{x_2} + \dots + \frac{l_1 - x_n}{x_n},$$

jak również z granicą tej sumy przy $n \rightarrow \infty$ wyrażoną wzorem (1).

Nic nas nie zmusza do nadawania wyrażeniu $\ln \frac{l_1}{l_0}$ jakiegoś lepiej teoretycznie uzasadnionego znaczenia fizycznego od wyrażenia $\frac{l_1 - l_0}{l_0}$ jako miary wydłużenia jednostkowego. Jedyna racja stosowania miary logarytmicznej ma charakter praktyczno-matematyczny i daje korzyści tylko przy odkształceniach bardzo wielkich. Stosowanie jej przy odkształceniach nie przewyższających paru procent komplikuje ogromnie rachunki, zupełnie bez potrzeby.

Przy odkształceniach trwałych metali plastycznych nie zachodzi jak poucza doświadczenie, godna uwzględnienia zmiana objętości. (Taka zmiana zachodzi przy odkształceniach sprężystych). Dlatego dla odkształceń trwałych określonych głównymi wydłużeniami jednostkowymi zwykłymi $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ lub takimiż wydłużeniami logarytmicznymi $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_3$, możemy napisać w ogóle ściśle:

$$\tilde{\varepsilon}_1 + \tilde{\varepsilon}_2 + \tilde{\varepsilon}_3 = 0$$

albo

$$\ln(1 + \varepsilon_1) + \ln(1 + \varepsilon_2) + \ln(1 + \varepsilon_3) = 0,$$

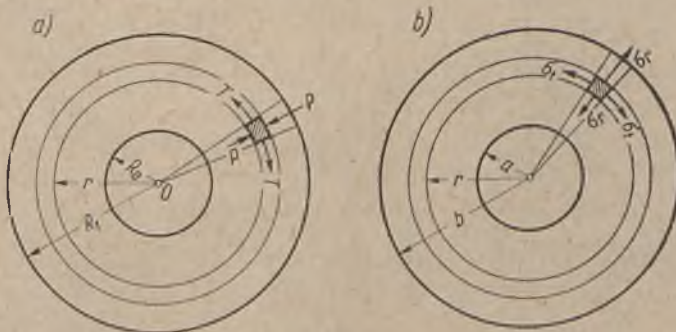
a w przybliżeniu wystarczającym w przypadku odkształceń małych

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0.$$

Po tych uwagach przejdziemy do tematu właściwego pracy niniejszej, rozpoczynając od przytoczenia pewnych wyników od dawna znanych dla ułatwienia czytelnikom orientacji w wywodach następnych i naświetlenia znaczenia tych wyników w teorii wytrzymałości i samowzmożenia rur pod ciśnieniem wewnętrznym.

§ 2. Odkształcenia i naprężenia sprężyste

Przy założeniu ważności prawa HOOKE' A dla odkształceń bardzo małych określają je znane wzory, wynikające z rozwiązania LAMÉGO odnośnego zagadnienia teorii sprężystości^{e)}. Zestawimy je tutaj dla dwóch



Rys. 4

głównych przypadków obciążenia rury grubościenną ciśnieniem wewnętrznym p kG/cm²: a) rura zamknięta, b) rura otwarta.

Przypadek a) odpowiada działaniu gazów prochowych przy strzale, zanim pocisk opuści lufę albo działaniu ciśnienia prasy hydraulicznej

^{e)} Porównaj np. pierwsze ustępy z WLD albo w książkach: S. TIMOSZENKO: Kurs wytrzymałości materiałów, Lwów-Warszawa 1921 r., Książnica-Atlas, str. 247 i następne; H. JEWNIEWICZ: Teoria sprężystości, Warszawa 1910, str. 207 i następne.

przy operacji samowzmocnienia przez zwiększenie ciśnienia wewnętrznego ponad *pierwszą wartość krytyczną* p_{kr} . Tak nazwiemy wartość ciśnienia odpowiadającą zapoczątkowaniu stanu plastycznego na wewnętrznej powierzchni lufy lub rury w ogóle.

Przypadek b) zachodzi w przybliżeniu przy operacji samowzmacniania za pomocą trzpienia rozpychającego.

Dla ułatwienia porównania wyników niniejszej pracy z teorią M. MALAVALA przedstawioną obszernie w WLD inż. K. JAKOWSKIEGO, podajemy oznaczenia stosowane przez Autora w I Tomie Poradnika Technicznego „Mechanik“, wydanie trzecie, IW SIMP, Warszawa 1948 r., notując w nawiasach oznaczenia stosowane przez M. MALAVALA. Oto najważniejsze spośród tych oznaczeń:

- $a(R_0)$ — pierwotny promień wewnętrzny,
- $b(R_1)$ — „ „ zewnętrzny,
- $r(R)$ — „ „ dowolnego punktu przekroju rury,
- u — przesunięcie (promieniowe) tego punktu wskutek odkształcenia sprężystego,
- $\varepsilon_t = \frac{u}{r}$ — wydłużenie jednostkowe w kierunku obwodu (prostopadle do promienia r),
- $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$ — wydłużenie jednostkowe promieniowe (w kierunku promienia r),
- ε_l — wydłużenie jednostkowe w kierunku osi rury (prostopadle do obydwu pierwszych wydłużeń),
- p — ciśnienie wewnętrzne,
- $\sigma_l(T)$ — naprężenie obwodowe,
- $\sigma_r(-P)$ — naprężenie promieniowe (P oznacza, oczywiście, bezwzględną wartość ciśnienia głównego w kierunku promienia r),
- $\sigma_l(S)$ — naprężenie podłużne,
- $E(M)$ — moduł sprężystości podłużnej,
- $\nu\left(\frac{1}{m}\right)$ — liczba POISSONA.

W przypadku (a) mamy:

$$(1a) \quad u = \frac{p}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[(1 - 2\nu)r + (1 + \nu) \frac{b^2}{r} \right].$$

$$(2a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_t = \frac{p}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[1 - 2\nu + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right], \\ \varepsilon_r = \frac{p}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[1 - 2\nu - (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right], \\ \varepsilon_l = \frac{p}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2} (1 - 2\nu). \end{array} \right.$$

(Stąd łatwo znaleźć związek $\varepsilon_t + \varepsilon_r + \varepsilon_l = 3\varepsilon_l$, z którego później skorzystamy).

$$(3a) \quad \begin{cases} \sigma_t = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_r = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_l = p \frac{a^2}{b^2 - a^2}. \end{cases}$$

Wzory powyższe są ważne, biorąc ściśle, do *granicy proporcjonalności*, ze znacznym zaś przybliżeniem do *granicy plastyczności* materiału rury. Przypadek ogólniejszy jednoczesnego działania ciśnienia wewnętrznego p_0 i zewnętrznego p_1 rozwiązuje się najprościej przez superpozycję tego rozwiązania dla $p = p_0 - p_1$ z rozwiązaniem prostego zadania wszechstronnego ściskania materiału rury ciśnieniem p_1 , które wywołuje, oczywiście, stan napięcia

$$\sigma'_t = \sigma'_r = \sigma'_l = -p_1.$$

Odpowiedni stan odkształcenia określają wzory:

$$\varepsilon'_t = \varepsilon'_r = \varepsilon'_l = -\frac{p_1}{E}(1 - 2\nu),$$

$$u_1 = -\frac{p_1}{E}(1 - 2\nu)r.$$

Otrzymane przez sumowanie wzory rozwiązania ogólniejszego są widocznie ważne także w przypadku, gdy $p_0 - p_1$ staje się ujemne, byle grubość ściany była dostatecznie wielka, aby stateczność okrągłej postaci przekroju pod wpływem nadwyżki ciśnienia zewnętrznego była zapewniona.

Jeżeli z próby rozrywania pręta próbnego z materiału rury znajdziemy R_{pl} jako wartość naprężenia na granicy plastyczności, to warunek wyrażający nieprzekroczenie tej granicy w materiale rury ma postać

$$\sigma_{red} \leq R_{pl}.$$

Tutaj σ_{red} oznacza *naprężenie sprowadzone* (zredukowane), także naprężenie „zastępcze“, którego postać jest funkcją wszystkich składowych rozpatrywanego złożonego stanu naprężenia (napięcia). Postać tej funkcji określają, jak wiadomo, hipotezy wytrzymałościowe. Spośród hipotez stosowanych w rozwoju historycznym nauki o wytrzymałości, okazała najlepszą zgodność z wynikami badań doświadczalnych minionego dziesięciolecia, nad metalami niekruhymi, hipoteza *energii postaciowej*, jaką w skrócie nazywać będziemy ⁷⁾.

⁷⁾ M. T. HUBER: Nowoczesne wzory wytrzymałości złożonej. Sprawozdanie Kwartalne Instytutu Badań Technicznych Lotnictwa, Warszawa 1930 r.

Dawna hipoteza COULOMBA stosowana w ostatnich latach oficjalnie w obliczeniach wytrzymałościowych artylerii francuskiej pod wpływem prac M. MALAVALA, ustępuje tamtej tylko niewiele, tak iż w tych przypadkach (bardzo zresztą nielicznych), w których prowadzi do prostych wzorów obliczeniowych, można ją również zalecić.

Natomiast rozpowszechnione do niedawna hipotezy największego naprężenia lub największego wydłużenia jednostkowego mają już tylko znaczenie historyczne, a wzory na nich oparte należy rugować z podręczników praktycznych jako niepotrzebny balast⁸⁾.

Hipoteza energii postaciowej prowadzi w naszym zagadnieniu do wzoru:

$$(4) \quad \sigma_{red}^2 = \sigma_t^2 + \sigma_r^2 + \sigma_l^2 - \sigma_r \sigma_t - \sigma_l \sigma_r - \sigma_t \sigma_l.$$

Po podstawieniu wartości (3) mamy więc:

$$(5a) \quad \sigma_{red} = \sqrt{3} \frac{b^2}{r^2} \frac{a^2 p_l}{b^2 - a^2}.$$

Hipoteza różnicy (algebraicznej) naprężeń głównych, tj. hipoteza COULOMBA, wymaga wyszukania tej różnicy, która ma największą wartość bezwzględną. Ze wzorów (3) widać, że

$$\sigma_r < \sigma_l < \sigma_t,$$

że zatem największą różnicą jest $(\sigma_t - \sigma_r)$. Wobec tego

$$(4, C) \quad \sigma_{red} = \sigma_t - \sigma_r,$$

a po wstawieniu wartości (3),

$$(5a, C) \quad \sigma_{red} = 2 \frac{b^2}{r^2} \frac{a^2 p}{b^2 - a^2}.$$

A zatem mamy tu do czynienia z przypadkiem interesującym i wskazującym na bliskie pokrewieństwo obydwu hipotez; mianowicie, wartości naprężenia spowodowanego z nich obliczone różnią się jedynie czynnikiem stałym. Ten czynnik ma wartość $\sqrt{3} = 1,732$, przy zastosowaniu hipotezy energii odkształcenia postaciowego, zaś 2 na podstawie hipotezy COULOMBA. Różnica względna obu wartości, nie dochodząca 13% większej z nich, jest niemal tego samego rzędu, co niepewność w pomiarze R_{pl} , z doświadczeń na próbkach wyciętych z różnych miejsc rury.

⁸⁾ M. T. HUBER: O wytrzymałości rury walcowej na wewnętrzne ciśnienie hydrostatyczne, Warszawa, „Technika Ciepła“, Nr 2, 1927 r.

—: Jakim wzorem wytrzymałościowym należy obliczać wałki, „Przegląd Techniczny“, Nr 26, 1928 r.

—: Zagadnienia wytrzymałościowe nowoczesnej konstrukcji maszyn, „Przegląd Techniczny“, 1929 r.

Z obu wzorów (5a) i (5a, C) widać nadto, że σ_{red} przyjmuje największą wartość dla $r=a$, czyli na wewnętrznej powierzchni rury. A zatem pierwsze ciśnienie krytyczne p_{kr} obliczymy podstawiając w tych wzorach $r=a$, $\sigma_{red}=R_{pl}$ i rozwiązując je względem p . Mamy więc:

$$(6a) \quad p_{kr} = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}}$$

według hipotezy energii postaciowej, a

$$(6a, C) \quad p_{kr} = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{R_{pl}}{2}$$

według hipotezy COULOMBA.

Jak widzimy, ciśnienie krytyczne według hipotezy energii postaciowej wypada większe w stosunku $\frac{1}{\sqrt{3}} : \frac{1}{2} = 1,155$, czyli o 15,5% od ciśnienia krytycznego odpowiadającego hipotezie COULOMBA.

W przypadku (b) znajdujemy:

$$(1b) \quad u = \frac{p}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[(1 - \nu)r + (1 + \nu) \frac{b^2}{r} \right],$$

$$(2b) \quad \begin{cases} \varepsilon_t = \frac{p}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[1 - \nu + (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right], \\ \varepsilon_r = \frac{p}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left[1 - \nu - (1 + \nu) \frac{b^2}{r^2} \right], \\ \varepsilon_i = -2\nu \frac{p}{E} \frac{a^2}{b^2 - a^2}. \end{cases}$$

$$(3b) \quad \begin{cases} \sigma_t = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_r = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_l = 0. \end{cases}$$

$$(5b) \quad \sigma_{red} = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \sqrt{3 \frac{b^4}{r^4} + 1},$$

$$(5b, C) \quad \sigma_{red} = p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{2b^2}{r^2}.$$

Jak widzimy, różnica wartości wyteżenia⁹⁾ według obu hipotez jest jeszcze mniejsza.

⁹⁾ W ostatnich czasach spotyka się w naszym piśmiennictwie zamiast *wyteżenia* nazwę *wysilek*, która ma duże widoki powodzenia jako krótsza i doskonale charakteryzująca wielkość mechaniczną o którą chodzi.

Nadto widać, że według nowej hipotezy jest wyężenie materiału w przypadku (b) nieco większe niż w przypadku (a), podczas gdy hipoteza COULOMBA prowadzi w obydwu przypadkach do tej samej wartości wyężenia.

Wreszcie dla pierwszego ciśnienia krytycznego otrzymujemy w naszym przypadku zamiast wzorów (6a) i (6a, C) wzory

$$(6b) \quad p_{kr} = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{R_{pl}}{\sqrt{3 + \frac{a^2}{b^2}}},$$

$$(6b, C) \quad p_{kr} = \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) \frac{R_{pl}}{2},$$

z których drugi (bez zmiany) odnosi się do hipotezy COULOMBA.

§ 3. Odształcenia plastyczne i odpowiadające im naprężenia

Przy wzroście ciśnienia ponad p_{kr} będzie coraz grubsza warstwa wewnętrzna poddana odkształceniu plastycznemu przy niezmienniej wartości wyężenia materiału. Zachodzi więc pytanie, jaki będzie rozkład naprężeń i odkształceń w tym stadium.

Ażeby odpowiedzieć na to pytanie, musimy wyjść ze znanego ogólnego warunku równowagi elementu rury, wyrażonego równaniem:

$$(7) \quad \frac{d}{dr} (\sigma_r r) = \sigma_t^{10}.$$

Warunek równowagi bowiem musi się spełniać dla każdego kontinuum materialnego. Można go także napisać w postaci:

$$(7a) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{r}.$$

Ażeby zadanie było matematycznie określone, potrzeba jeszcze dalszych wniosków między szukanymi naprężeniami oraz odpowiednimi odkształceniami. Jeden z tych związków daje warunek plastyczności na podstawie hipotezy energii odkształcenia postaciowego:

$$(8) \quad (\sigma_t - \sigma_r)^2 + (\sigma_l - \sigma_r)^2 + (\sigma_t - \sigma_l)^2 = 2R_{pl}^2 \quad (11).$$

¹⁰⁾ To samo równanie stanowi punkt wyjścia teorii odkształceń sprężystych, oczywiście, w połączeniu ze związkami między odkształceniami ϵ a naprężeniami dostarczonymi przez uogólnione prawo HOOKE' A.

¹¹⁾ Ten warunek plastyczności przy oznaczeniach M. MALAVALA ma postać:

$$(8) \quad (P+T)^2 + (P+S)^2 + (T-S)^2 = 2R_{pl}^2,$$

gdź zgodnie z oznaczeniami MALAVALA P występuje ze znakiem ujemnym.

Następny związek wynika z założenia potwierdzonego wcale dokładnie doświadczeniem, że objętość elementu nie zmienia się wskutek odkształceń plastycznych. A zatem przy założeniu małych odkształceń winno być:

$$(9) \quad \varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_l = 0.$$

Zważywszy zaś, że $\varepsilon_r = \frac{du}{dr}$, $\varepsilon_t = \frac{u}{r}$, jeżeli u oznacza teraz przesunięcie promieniowe wskutek odkształcenia plastycznego, możemy „równanie ciągłości“ (9) napisać w postaci:

$$(9a) \quad \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_l = 0.$$

(Liczba ε_l ma tutaj, oczywiście, charakter stałej niezależnej od r)¹²⁾.

Dalsze potrzebne związki polegają na założeniu analogicznym do założeń teorii sprężystości, że kierunki główne stanu odkształcenia zlewają się z kierunkami głównymi stanu napięcia, a nadto, że stosunek różnicy (algebraicznej) dwóch którychkolwiek naprężeń głównych do odpowiedniej różnicy wydłużeń głównych nie zależy w danym punkcie ciała od wyboru tych naprężeń, a zatem:

$$(10) \quad \frac{\sigma_r - \sigma_t}{\varepsilon_r - \varepsilon_t} = \frac{\sigma_t - \sigma_l}{\varepsilon_t - \varepsilon_l} = \frac{\sigma_l - \sigma_r}{\varepsilon_l - \varepsilon_r}.$$

Atoli wartość powyższego stosunku zmienia się od punktu do punktu i w naszym przypadku będzie określona funkcją r .

Nie trudno zauważyć, że równania (9) i (10) są równoważne trzem następującym:

$$(11) \quad \begin{cases} \varepsilon_l = \frac{1}{\Omega} \left[\sigma_l - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_t) \right], \\ \varepsilon_r = \frac{1}{\Omega} \left[\sigma_r - \frac{1}{2} (\sigma_l + \sigma_t) \right], \\ \varepsilon_t = \frac{1}{\Omega} \left[\sigma_t - \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_l) \right]. \end{cases}$$

Te równania mają na pozór postać zupełnie podobną do równań teorii sprężystości przy wartości liczby POISSONA równej połowie i module Ω . Ale jak już zaznaczono powyżej, nie mamy tutaj do czynienia ze stałą, gdyż Ω jest funkcją promienia r (a w zagadnieniach ogólniejszych będzie funkcją współrzędnych miejsca).

W pięciu równaniach warunkowych zawartych we wzorach (7), (8), (9) i (11) mamy jednakże siedem niewiadomych: $\sigma_t, \sigma_r, \sigma_l, \varepsilon_t, \varepsilon_r, \varepsilon_l$ i Ω . Jednego z brakujących równań dostarczy niewykorzystany jeszcze drugi warunek równowagi. Warunek ten wyraża, że wypadkowa nacisków na

¹²⁾ Por. poniżej komentarz do wyniku z równ. (24).

dno rury (tj. $\pi a^2 p$) musi być równa wypadkowej naprężeń bezwzględnych („napięcie“) w przekroju poprzecznym rury, czyli

$$\pi a^2 p = \int_a^b \sigma_l \cdot 2\pi r dr$$

albo

$$(12) \quad p = \frac{2}{a^2} \int_a^b \sigma_l r dr.$$

Ostatnie brakujące równanie tkwi w warunkach krańcowych i jak zobaczymy, da się sformułować w ogóle tylko wtedy, gdy mamy do czynienia z dwoma obszarami: jeden — stanu plastycznego a drugi — sprężystego. Dlatego rozwiążemy na razie układ równań tylko ze względu na niewiadome

$$\sigma_r, \sigma_l, \sigma_t, \varepsilon_r, \varepsilon_t \quad \text{i} \quad \Omega,$$

pozostawiając nieoznaczone ε_l .

Najpierw znajdujemy z łatwością całkę ogólną równania (9a) w postaci:

$$(13) \quad u = \frac{C_1}{r} - \frac{\varepsilon_l}{2} r,$$

ze stałą całkowania C_1 , którą wyznaczymy potem z warunków krańcowych. A zatem:

$$(14) \quad \begin{cases} \varepsilon_r = \frac{du}{dr} = -\frac{C_1}{r^2} - \frac{1}{2} \varepsilon_l, \\ \varepsilon_t = \frac{u}{r} = +\frac{C_1}{r^2} - \frac{1}{2} \varepsilon_l. \end{cases}$$

Wprowadzając teraz Ω ze wzorów (11) do (10) możemy napisać:

$$(10a) \quad \frac{\sigma_t - \sigma_r}{\varepsilon_t - \varepsilon_r} = \frac{\sigma_l - \sigma_t}{\varepsilon_l - \varepsilon_t} = \frac{\sigma_l - \sigma_r}{\varepsilon_l - \varepsilon_r} = \frac{2}{3} \Omega,$$

stąd przy pomocy związków (14) znajdujemy:

$$(15) \quad \begin{aligned} \sigma_t - \sigma_r &= \frac{4}{3} \frac{C_1 \Omega}{r^2}, \\ \sigma_l - \sigma_t &= \varepsilon_l \Omega - \frac{2}{3} \frac{C_1 \Omega}{r^2}, \\ \sigma_r - \sigma_l &= +\varepsilon_l \Omega + \frac{2}{3} \frac{C_1 \Omega}{r^2}. \end{aligned}$$

Wstawivszy te wartości w warunek plastyczności (8) otrzymamy:

$$(16) \quad \frac{R_{pl}^2}{\Omega^2} = \frac{4}{3} \frac{C_1^2}{r^4} + \varepsilon_l^2.$$

Ponieważ ε_l musi być w każdym przekroju rury (teoretycznie nieskończenie długiej) stałe i niezależne od r , przeto równanie powyższe określa sam współczynnik Ω jako funkcję r w postaci:

$$(16a) \quad \Omega = \frac{\sqrt{3} R_{pl} r^2}{\sqrt{4C_1^2 + 3\varepsilon_l^2 r^4}}.$$

Skoro tę wartość wstawimy w pierwsze z równań (15), to kombinując je z równaniem różniczkowym (7a), znajdujemy równanie:

$$(17) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = + \frac{4C_1 R_{pl}}{\sqrt{3}r} \frac{1}{\sqrt{4C_1^2 + 3\varepsilon_l^2 r^4}},$$

które po scałkowaniu określi wyrażenie σ_r jako funkcję r . Podstawiawszy nową zmienną:

$$\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\varepsilon_l}{C_1} r^2,$$

napiszemy to równanie w postaci

$$d\sigma_r = \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}} \frac{d\xi}{\xi\sqrt{1+\xi^2}},$$

której całką ogólną jest:

$$\sigma_r = - \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 + \xi^2}}{\xi} + C_2.$$

Wprowadziliśmy jeszcze dla skrócenia wielkość

$$(18) \quad h^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C_1}{\varepsilon_l}, \quad \text{a więc} \quad \xi = \frac{r^2}{h^2},$$

znajdujemy przy pomocy równań (15) następujące wzory:

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = - \frac{1}{\sqrt{3}} R_{pl} \ln \left(\frac{h^2}{r^2} + \sqrt{1 + \frac{h^4}{r^4}} \right) + C_2, \\ \sigma_l = \frac{2}{\sqrt{3}} R_{pl} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^4}{h^4}}} + \sigma_r, \\ \sigma_l = \left(\frac{r^2}{h^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) R_{pl} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^4}{h^4}}} + \sigma_r. \end{array} \right.$$

Dalszy rachunek winien doprowadzić do wyznaczenia stałych C_1 , C_2 i ε_l z warunków krańcowych zagadnienia, które będą odmienne w przypadku (a) i w przypadku (b).

§ 4. (Przypadek a). Rura zamknięta pod ciśnieniem wewnętrznym w stanie częściowo plastycznym, a częściowo sprężystym

Oznaczmy przez R promień walca rozdzielającego obie warstwy, a przez $\bar{\sigma}_r$ ciśnienie promieniowe na powierzchni tego walca. Wówczas σ_r , określone pierwszym z równań (19), daje następujące równanie warunkowe do wyznaczenia stałej C_2 :

$$\bar{\sigma}_r = C_2 - \frac{1}{\sqrt{3}} R_{pl} \ln \left(\frac{h^2}{R^2} + \sqrt{1 + \frac{h^4}{R^4}} \right),$$

a zatem równania

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \bar{\sigma}_r - \frac{1}{\sqrt{3}} R_{pl} \ln \frac{\frac{h^2}{r^2} + \sqrt{1 + \frac{h^4}{r^4}}}{\frac{h^2}{R^2} + \sqrt{1 + \frac{h^4}{R^4}}} \\ \sigma_t = \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^4}{h^4}}} + \sigma_r, \\ \sigma_l = \left(\frac{r^2}{h^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) R_{pl} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^4}{h^4}}} + \sigma \end{array} \right.$$

określają stan napięcia w wewnętrznej plastycznej strefie rury o grubości $(R - a)$. Równania te zawierają jeszcze nieznane parametry R , $\bar{\sigma}_r$ i h , w których tkwią C_1 i ε_l . Do ich wyznaczenia rozporządząmy jeszcze następującymi warunkami. Na powierzchni walca o promieniu R naprężenia, obliczone ze wzorów (20) oraz ze wzorów analogicznych do (3a) dla strefy sprężystej, są sobie równe. Również muszą być tu równe wartości u obliczone ze wzoru:

$$(21) \quad u = -\frac{1}{E} \frac{\bar{\sigma}_r R^2}{b^2 - R^2} \left[(1 - 2\nu)r + (1 + \nu) \frac{b^2}{r} \right],$$

ważnego dla strefy sprężystej — wartościom obliczonym z odpowiedniego wzoru dla strefy plastycznej. Naprężenia w strefie sprężystej są określone wzorami:

$$(22) \quad \begin{cases} \sigma_r = \bar{\sigma}_r \frac{R^2}{b^2 - R^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right), \\ \sigma_t = -\bar{\sigma}_r \frac{R^2}{b^2 - R^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \\ \sigma_l = -\bar{\sigma}_r \frac{R^2}{b^2 - R^2}. \end{cases}$$

Warunek równości naprężeń promieniowych daje równanie tożsamościowe, co było zresztą do przewidzenia. Z warunków równości naprężeń obwodowych i podłużnych znajdujemy:

$$(23) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_r + \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^4}{r^4}}} = -\bar{\sigma}_r \frac{R^2}{b^2 - R^2} \left(\frac{b^2}{R^2} + 1 \right), \\ \bar{\sigma}_r + \left(\frac{R^2}{h^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) R_{pl} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^4}{h^4}}} = -\bar{\sigma}_r \frac{R^2}{b^2 - R^2}. \end{cases}$$

Po dodaniu do pierwszego z tych równań — drugiego, pomnożonego przez -2 , otrzymujemy warunek

$$(24) \quad \frac{R^2}{h^2} \frac{2R_{pl}}{\sqrt{1 + \frac{R^4}{h^4}}} = 0,$$

który spełniony jest tylko dla $h = \infty$. Ponieważ według wzoru (18) jest h^2 wprost proporcjonalne do C_1 , a odwrotnie do ε_l , C_1 zaś jest różne od zera, a więc warunek powyższy zmusza nas do przyjęcia $\varepsilon_l = 0$ ¹³⁾.

¹³⁾ Wynik ten wygląda na pozór podejrzanie. Jednakże przy jego interpretacji trzeba mieć na uwadze pewne uproszczenie, na jakie pozwoliliśmy sobie przy układaniu równania różniczkowego (9a). To równanie stanowi punkt wyjścia powyższych wywodów matematycznych i odpowiada ściśle równaniu (9). W tym zaś równaniu oznaczają ε_r , ε_t , ε_l właściwe wydłużenia całkowite, złożone z wydłużeń sprężystych ε_r' i plastycznych ε_r'' . A zatem suma $\varepsilon_r + \varepsilon_t + \varepsilon_l$ nie jest równa zero, lecz jest równa $\varepsilon_r' + \varepsilon_t' + \varepsilon_l' = 3\varepsilon_r'$, albowiem tylko $\varepsilon_r'' + \varepsilon_t'' + \varepsilon_l'' = 0$ jako zmiana objętości przy odkształceniu plastycznym. Z tego powodu równanie (9a) winno mieć właściwie postać:

$$(9b) \quad \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + (\varepsilon_t - 3\varepsilon_r') = 0,$$

a wynik otrzymany z równania (24) należy interpretować w ten sposób, że wielkości niezależne od r :

$$\varepsilon_t - 3\varepsilon_r' = 0,$$

czyli po podstawieniu:

$$\varepsilon_r' + \varepsilon_r'' - 3\varepsilon_r' = 0,$$

co daje

$$\varepsilon_r'' = 2\varepsilon_r',$$

co już zupełnie nie razi. Widzimy przy tym, że u oznacza przesunięcie punktu rury leżącego w odległości r od jej osi, wywołane odkształceniem całkowitym, tj. złożonym z części sprężystej i plastycznej.

A zatem w strefie plastycznej napiszemy:

$$(25) \quad u = \frac{C_1}{r}.$$

Po podstawieniu $h = \infty$, otrzymujemy z obydwu równań układu (23) zgodnie:

$$(26) \quad \bar{\sigma}_r = \left(\frac{R^2}{b^2} - 1 \right) \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}},$$

a więc to samo, co można było napisać od razu na podstawie równania (6a).

Równania (22) i (26) określają stan napięcia w strefie sprężystej tj. dla $b \geq r \geq R$.

W strefie plastycznej otrzymujemy z wzorów (20) po podstawieniu znalezionej wartości $h = \infty$

$$(27) \quad \begin{cases} \sigma_r = \bar{\sigma}_r - \frac{2}{\sqrt{3}} R_{pl} \ln \frac{R}{r}, \\ \sigma_t = \frac{2}{\sqrt{3}} R_{pl} \left(1 - \ln \frac{R}{r} \right) + \bar{\sigma}_r, \\ \sigma_l = \frac{2}{\sqrt{3}} R_{pl} \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{R}{r} \right) + \bar{\sigma}_r. \end{cases}$$

Te wzory wraz z równaniem (26) określają stan napięcia w strefie plastycznej, tj. dla $a \leq r \leq R$.

Wreszcie z warunku równości przesunięć u na granicy obydwu stref otrzymujemy na podstawie równań (21) i (25):

$$(28) \quad C_1 = -\frac{1}{E} \frac{\bar{\sigma}_r R^4}{b^2 - R^2} \left[1 - 2\nu + (1 + \nu) \frac{b^2}{R^2} \right].$$

Reasumując najważniejsze wyniki rachunku napiszemy teraz

1. Dla strefy plastycznej ($a \leq r \leq R$).

$$(29) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}} \left(\frac{R^2}{b^2} - 1 - 2 \ln \frac{R}{r} \right), \\ \sigma_t = \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}} \left(\frac{R^2}{b^2} + 1 - 2 \ln \frac{R}{r} \right), \\ \sigma_l = \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}} \left(\frac{R^2}{b^2} - 2 \ln \frac{R}{r} \right), \end{cases}$$

$$(30) \quad u = \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}E} \left[(1 - 2\nu) \frac{R^2}{b^2} + 1 + \nu \right] \frac{R^2}{r}.$$

2. Dla strefy sprężystej ($R \leq r \leq b$).

$$(31) \quad \begin{cases} \sigma_r = \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}} \frac{R^2}{b^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \\ \sigma_t = \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}} \frac{R^2}{b^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right), \\ \sigma_l = \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}} \frac{R^2}{b^2}. \end{cases}$$

$$(32) \quad u = \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}E} \frac{R^2}{b^2} \left[(1-2\nu)r + (1+\nu) \frac{b^2}{r} \right].$$

Ponieważ w obu powyższych grupach wzorów promień R warstewki rozgraniczającej obie strefy jest zależny oczywiście od ciśnienia wewnętrznego p , więc potrzeba jeszcze równania określającego tę zależność. Otrzymamy je po prostu z pierwszego z wzorów (29), podstawiając po prawej stronie $r=a$, a po lewej $\sigma_r = -p$, czyli:

$$(33) \quad p = \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{R^2}{b^2} + 2 \ln \frac{R}{a} \right).$$

§ 5. Drugie ciśnienie krytyczne w przypadku (a) i stan napięcia po operacji samowzmocnienia

Z równania (33) wynika

$$\frac{dp}{dR} = \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{R} - \frac{R}{b^2} \right) = \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \frac{b^2 - R^2}{b^2 R}.$$

A zatem, gdy $R < b$ rośnie, to $\frac{dp}{dR}$ jest ciągle dodatnie, a więc p wzrasta. Nawzajem przy wzroście ciśnienia wewnętrznego p , rośnie i R , czyli granica między obu strefami przesuwa się ku zewnętrznej ścianie rury. Wartość ciśnienia, odpowiadająca osiągnięciu przez granicę ściany zewnętrznej, określa *drugie ciśnienie krytyczne*, które oznaczamy przez p'_{kr} i obliczymy ze wzoru

$$(34) \quad p'_{kr} = \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}.$$

Stan napięcia w rurze określają wtedy wzory otrzymane z (29) po podstawieniu $R=b$, czyli ¹⁴⁾:

¹⁴⁾ Tej samej postaci wzory otrzymuje A. NÁDAI bezpośrednio, przyjmując z góry $\epsilon_r = 0$ bez bliższego uzasadnienia, na str. 134 dzieła: „Der bildsame Zustand der Werkstoffe“ Springer, Berlin, 1927 r.

$$(35) \quad \begin{cases} \sigma_r = -\frac{R_{pl}}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{r}, \\ \sigma_t = \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \left(1 - \ln \frac{b}{r}\right), \\ \sigma_l = \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{b}{r}\right). \end{cases}$$

Granice ważności wszystkich wzorów wyprowadzonych w § 4 można określić warunkiem

$$p_{kr} \leq p \leq p'_{kr}.$$

Przechodząc teraz do teoretycznego wyznaczenia stanu naprężenia (napięcia) w rurze po operacji samowzmocnienia, nie możemy rozwiązać zadania ogólnie przy pomocy wzorów powyższych, lecz tylko dla takich skrajnych wartości ciśnień wewnętrznych służących do operacji samowzmocnienia, które leżą między pierwszą a drugą wartością krytyczną. Ponieważ efekt operacji będzie tym większy, im większe będzie p , przeto uczynimy p równe p'_{kr} . Chwila osiągnięcia tej wartości ciśnienia samowzmacniającego ujawnia się w doświadczeniu, jak wiadomo, pojawieniem się linii LÜDERSA-HARTMANA na powierzchni zewnętrznej rury, oczywiście należycie wygładzonej. Dzięki zjawisku twardnienia można ciśnienie rozpychające rurę powiększyć jeszcze i wywołać stany odkształcenia i naprężenia (napięcia) nie objęte powyższą teorią. Nie ma tego ograniczenia w teorii MALAVALLA, ale za to jest wielce wątpliwe, czy doświadczenie wykaże równie dobrą zgodność z obliczeniem, jaką stwierdzimy poniżej na wynikach tutaj wyprowadzonych.

Kiedy więc, po osiągnięciu przez p wartości p'_{kr} określonej wzorem (34), będziemy, ciśnienie zmniejszać aż do zera, to ponieważ odkształcenia powrotne odbywają się ze znaczną dokładnością według prawa odkształceń sprężystych (reguła COULOMBA), znajdziemy końcowy stan naprężenia (napięcia) jako superpozycję (nałożenie) stanu według wzorów (35) i stanu określonego wzorami teorii sprężystości (3a) po podstawieniu za p wartości $-p'_{kr}$. A zatem po operacji samowzmocnienia, wykonanej w powyższy sposób, pozostanie w rurze stan naprężenia (napięcia):

$$(36) \quad \begin{cases} \sigma_t = \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \left[-\frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{b}{r} + 1 \right], \\ \sigma_r = \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \left[\frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} - 1 \right) \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{b}{r} \right], \\ \sigma_l = \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \left[-\frac{a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} - \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2} \right]. \end{cases}$$

§ 6. Wyteżenie materiału w rurze samowzmacnionej sposobem powyższym przy nowym obciążeniu ciśnieniem wewnętrznym $p < p'_{kr}$

Wtedy naprężenia będą określone sumami odpowiednich naprężeń z wzorów (3a) i 3b), a więc:

$$(37) \quad \begin{cases} \sigma_t = \left(p - \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a} \right) \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{b^2}{r^2} + 1 \right) - \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{b}{r} - 1 \right), \\ \sigma_r = \left(p - \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a} \right) \frac{a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{r}, \\ \sigma_l = \left(p - \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a} \right) \frac{a^2}{b^2 - a^2} - \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \left(\ln \frac{b}{r} - \frac{1}{2} \right), \end{cases}$$

stąd obliczymy wyteżenie materiału przy pomocy wzoru (4) na σ_{red} podanego w następującej dogodniejszej formie:

$$(4a) \quad \sigma_{red}^2 = \frac{1}{2} (\sigma_t - \sigma_l)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_r - \sigma_l)^2 + \frac{1}{2} (\sigma_t - \sigma_r)^2.$$

Z wzorów (37) otrzymujemy teraz:

$$(38) \quad \sigma_t - \sigma_l = \left(p - \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a} \right) \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} + \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}},$$

a oznaczywszy prawą stronę tego równania przez $F(r)$, mamy dalej:

$$(38a) \quad \sigma_t - \sigma_r = F(r) \quad \text{i} \quad \sigma_t - \sigma_l = 2F(r).$$

Po wstawieniu tych wartości w (4a) i uproszczeniu, mamy:

$$(39) \quad \sigma'_{red} = \sqrt{3} p \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} - 2R_{pl} \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} - \frac{1}{2} \right),$$

albo

$$(39a) \quad \sigma_{red} = \left(\sqrt{3} p - 2R_{pl} \ln \frac{b}{a} \right) \frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} + R_{pl}.$$

Ponieważ pierwszy wyraz po prawej stronie równania (39) jest identyczny z wyrażeniem na σ_{red} w stanie sprężystym rury przed operacją samowzmacnienia, które to wyrażenie określa wzór (5a), przeto, po odroźnieniu symbolem σ'_{red} otrzymanej teraz wartości naprężenia sprowadzonego, czyli wyteżenia materiału, napiszemy wzór (39) w postaci:

$$(39b) \quad \sigma'_{red} = \sigma_{red} - R_{pl} \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \frac{b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a^2} - 1 \right).$$

Największe wyteżenie w stanie sprężystym zachodzi, jak wiadomo, w warstwie wewnętrznej, tj. dla $r = a$. Wtedy będzie

$$(40) \quad \sigma'_{red}(\text{dla } r = a) = \sigma_{red}(\text{dla } r = a) - R_{pl} \left(\frac{b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b^2}{a^2} - 1 \right).$$

Aby zorientować się tu co do znaku i wartości wyrazu w nawiasach przy R_{pl} , wprowadzimy średni promień rury R' i grubość ściany $g < 2R'$. Wtedy

$$b = R' + \frac{1}{2}g, \quad a = R' - \frac{1}{2}g,$$

$$\ln \frac{b}{a} = \ln \frac{1 + \frac{g}{2R'}}{1 - \frac{g}{2R'}} = 2 \left[\frac{g}{2R'} + \frac{1}{3} \left(\frac{g}{2R'} \right)^3 + \dots \right],$$

a zatem

$$\frac{b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b^2}{a^2} = \left(1 + \frac{g}{R'} + \frac{g^2}{4R'^2} \right) \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{g}{2R'} \right)^2 + \dots \right].$$

Z tego widać, że wyrażenie w nawiasach wzoru (40) jest zawsze dodatnie i tym większe, im większa jest grubość ściany w stosunku do średnicy rury.

Zbadajmy jeszcze wyteżenie w warstwie zewnętrznej, tj. dla $r = b$. Określi je wzór:

$$(41) \quad \sigma'_{red} (\text{dla } r = b) = \sigma_{red} (\text{dla } r = b) - R_p \left(\frac{a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b^2}{a^2} - 1 \right).$$

Tutaj znajdujemy podobnie wartości wyrażenia:

$$\frac{a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b^2}{a^2} = \left[1 - \frac{g}{R'} + \left(\frac{g}{2R'} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{g}{2R'} \right)^2 + \dots \right],$$

a zatem

$$(41a) \quad \sigma'_{red} = \sigma_{red} + R_{pl} \left\{ \frac{g}{R'} - \left(\frac{g}{2R'} \right)^2 - \left[1 - \frac{g}{R'} + \left(\frac{g}{2R'} \right)^2 \right] \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{3} \left(\frac{g}{2R'} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{g}{2R'} \right)^4 + \dots \right] \right\}.$$

Z obu wyrażeń (40) i (41) nie trudno odczytać, zwłaszcza przy pomocy przedstawionych rozwinięć, że w krańcowym przypadku bardzo małej grubości ściany rury, jest w przybliżeniu

$$(40b) \quad \sigma'_{red} = \sigma_{red} - \frac{R_{pl}g}{R'}$$

(w warstwie wewnętrznej) oraz

$$\sigma'_{red} = \sigma_{red} + \frac{R_{pl}g}{R'}$$

(w warstwie zewnętrznej).

W ogóle można wzory (40) i (41) napisać w postaci:

$$(40a) \quad \sigma'_{red} = \sigma_{red} - R_{pl} f_0 \left(\frac{b}{a} \right)$$

(w warstwie wewnętrznej) oraz

$$(41b) \quad \sigma'_{red} = \sigma_{red} + R_p f_1 \left(\frac{b}{a} \right)$$

(w warstwie zewnętrznej), jeżeli

$$f_0 \left(\frac{b}{a} \right) = \frac{2b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} - 1,$$

$$f_1 \left(\frac{b}{a} \right) = \frac{-2a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b}{a} + 1.$$

Obie funkcje f_0 i f_1 przyjmują wspólną wartość $2 \frac{b-a}{b+a} = \frac{g}{R'}$ przy bardzo małych wartościach tego stosunku i obie rosną, gdy ten stosunek $\frac{g}{R'}$ rośnie. Skutek operacji samowzmacnienia, objawiający się zmniejszeniem wyężenia w zagrożonej warstwie wewnętrznej kosztem zwiększenia wyężenia w słabo obciążonej warstwie zewnętrznej, będzie przeto tym korzystniejszy, im większy jest stosunek $\frac{g}{R'}$. Szereg liczbowych wartości dla obydwu funkcji podaje tabliczka następująca:

1. Tablica wartości liczbowych funkcji f_0 i f_1

$\frac{b}{a} =$	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3
$\frac{g}{2a} =$	0,125	0,250	0,375	0,5	0,75	1
$f_0 =$	0,2397	0,4596	0,6449	0,8484	1,1817	1,4719
$f_1 =$	0,2066	0,3513	0,4629	0,5379	0,6509	0,7253

§ 7. Porównanie wzorów teorii samowzmacnienia z wynikami badań doświadczalnych

Takie badania z wielką starannością wykonano w Niemczech. Obszerny referat odnośnej publikacji¹⁵⁾ opracował inż. P. NIEWIADOMSKI w naszych „Wiadomościach Techniczno-Artyleryjskich“, Nr 7, skąd zaczerpnięto wartości liczbowe poniżej podane.

Nadto, dla porównania z wzorami teoretycznymi, opartymi na hipotezie największego naprężenia stycznego, wystarczy zauważyć, że wzory

¹⁵⁾ H. KLEIN: Untersuchungen an kaltgereckten dickwandigen Röhren..., Mittl. aus d. Kais. Wilh.-Institut für Eisenforschung. Bd XI, Lief. 20, Düsseldorf 1929.

te różnią się od wyprowadzonych w niniejszej pracy i poniżej zestawionych jedynie współczynnikiem liczbowym, mniejszym w stosunku 1:1,155. Do porównania posłużą wzory następujące:

1) Wzór na *pierwsze ciśnienie krytyczne*:

$$(6a) \quad p_{kr} = \frac{R_{pl}}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right).$$

2) Wzór na *drugie ciśnienie krytyczne*:

$$(34) \quad p'_{kr} = \frac{2R_{pl}}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a}.$$

3) Wzór na *zwiększenie średnicy zewnętrznej* $D=2b$ otrzymany z wzoru (32) po podstawieniu $r=b$, czyli:

$$(42) \quad \Delta D = 2\Delta b = (2u)_{r=b} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{R_{pl}}{E} (2-\nu) \frac{R^2}{b},$$

który w szczególnie ważnym przypadku $R=b$, tj. rozszerzenia strefy plastycznej na całą grubość ściany rury, przybiera postać:

$$(42a) \quad \Delta D = \frac{2-\nu}{\sqrt{3}} \frac{R_{pl}}{E} D.$$

Badane przez H. KLEINA rury zamknięte miały wszystkie średnicę wewnętrzną 72 mm, a zewnętrzną 141 mm. Rura oznaczona numerem 3, była ze stali chromowo-niklowej o granicy plastyczności $R_{pl}=62$ kG/mm², rura Nr 5 – ze stali węglistej o $R_{pl}=48,6$ kG/mm², trzecia zaś rura Nr 7 – ze stali niklowo-wolframowej o $R_{pl}=60,2$ kG/mm². Wielkości ΔD mierzone dla początku granicy plastyczności w warstwie zewnętrznej i odpowiednie ciśnienie wewnętrzne p'_{kr} miały wartości zestawione w następującej tabliczce:

2. Tablica wielkości mierzonych

Nr rury	3	5	7
ΔD	0,38	0,29	0,40 mm
p'_{kr}	od 3900 do 4260	2600 3000	4400 4700 kG/cm ²

Podane tu granice doświadczalnych wartości p'_{kr} wynikają ze spostrzeżeń czynionych w różnych przekrojach rury, której długość wynosiła 3400 mm. Te różnice dowodzą, jak stosunkowo znaczne są niejednołitości wytrzymałościowe w materiałach nawet tak wysokowartościowych

jak powyższe. Obliczone z naszych wzorów (42a) i (34) wartości teoretyczne podaje niżej umieszczone zestawienie, przy założeniu $E = 21500 \text{ kG/mm}^2$. Taką wartość przyjmuje się zwykle dla stali, jeżeli, jak w tym przypadku, nie wyznaczono modułu sprężystości oddzielnie dla każdej badanej sztuki. Zestawienie to zawiera nadto wartości teoretyczne, wynikające z hipotezy wytrzymałościowej COULOMBA oraz procentowe odchylenia wartości obliczonych od mierzonych.

Z powyższego zestawienia widać nadspodziewanie dobrą zgodność naszego wzoru teoretycznego na zmianę średnicy dla wszystkich rur. Hipoteza COULOMBA prowadzi do odchylen przeszło dwa razy większych, a przy tym tego samego znaku. Natomiast wzór teoretyczny na drugie ciśnienie krytyczne daje ze współczynnikiem odpowiadającym hipotezie energii postaciowej wartości zgodną z doświadczeniem, ale tylko dla rury Nr 7, podczas gdy ze współczynnikiem odpowiadającym hipotezie COULOMBA daje dobrą zgodność tylko dla rury Nr 3. Dla rury Nr 5 są wartości z obu wzorów znacznie większe od wartości mierzonych.

3. Tablica wielkości obliczonych i odchylen tych wielkości od mierzonych

Nr rury	3	5	7
ΔD według nowego wzoru teoretycznego (42a), w mm	0,391	0,307	0,380
Odchylenie od wartości mierzonej w %/0/0	+2,9	+5,8	-5,0
ΔD według teorii opartej na hipotezie COULOMBA, w mm	0 339	0,266	0,329
Odchylenie od wartości mierzonej w %/0/0	-10,9	-8,4	-17,7
p'_{kr} według wzoru teoretycznego (34) w kG/cm^2	4807	3770	4670
Odchylenie od wyższej granicy wartości mierzonej w %/0/0	+12,8	+25,7	-0,6
p'_{kr} według teorii opartej na hipotezie COULOMBA, w kG/cm^2	4160	3265	4046
Odchylenie od wyższej granicy wartości mierzonej w %/0/0	-2,1	+8,8	-14,0

Co się tyczy pierwszej wartości krytycznej ciśnienia, która była również obserwowana w doświadczeniach niemieckich, to liczby porównawcze są zestawione w tablicy 4.

4. Tablica wartości p_{kr}

Nr rury	3	5	7
Według wzoru teoretycznego (6a) (hypoteza energii); kG/cm^2	2646	2075	2570
Według wzoru teoretycznego (6a, C) (hypoteza COULOMBA) kG/cm^2	2290	1800	2225
Według pomiarów od	2400	1500	2500
do	2600	1900	2800

Jak widać, nowa hipoteza daje dla rur Nr 3 i 7 o wiele większą zgodność z doświadczeniem od hipotezy COULOMBA, która za to prowadzi do wartości nieco zgodniejszej z doświadczeniem dla rury Nr 5.

Zebrawszy te wszystkie wyniki porównania można stwierdzić:

1) Niewątpliwie lepszą zgodność z pomiarami wzorów opartych na hipotezie energii postaciowej od wzorów wpływających z hipotezy COULOMBA. (Inne hipotezy dają wyniki widocznie znacznie gorsze i szkoda byłoby trudu na przeliczanie wartości podług nich).

2) Nowoczesna teoria odkształceń plastycznych, mimo uproszczenia założeń, prowadzi w naszym zagadnieniu do wzorów wystarczająco dokładnych dla praktyki.

3) Należy się przeto spodziewać, że wzory wyprowadzone w § 5 i 6 oddają dość wiernie stan naprężenia materiału rury, która przeżyła operację samowzmocnienia.

Korzyści z operacji samowzmocnienia przez jednorazowe osiągnięcie granicy plastyczności na zewnętrznej ścianie rury wskutek stosowanego ciśnienia wewnętrznego o wartości p'_{kr} uwydatniają dobrze liczby zestawione poniżej, a obliczone na podstawie wzorów (5a) i (39b) na naprężenie materiału dla rury Nr 3 doświadczeń niemieckich.

5. Tablica wartości σ_{red} w kG/mm^2

r \ p	1000	2000	3000	3178 at
36 mm	19,51	39,02	58,53	62,00 warstwa wewnętrzna
40 „	15,80	31,61	47,41	50,22
50 „	10,11	20,23	30,34	32,14
60 „	7,02	14,05	21,07	22,32
70,5 „	5,09	10,17	15,26	16,17 warstwa zewnętrzna

6. Tablica wartości naprężeń W pozostałych po operacji samowzmocnienia rury

r mm	36	40	50	60	70,5
W kG/mm ²	-50,74	-29,33	3,56	21,42	32,60

Przy tym jest

$$W = -R_{pl} \left(\frac{b^2}{r^2} \frac{a^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{b^2}{a^2} - 1 \right).$$

7. Tablica wartości σ_{red} w kG/mm²

$r \backslash p$	2000	3000	4000	5000	5780 at
36 mm	-11,73	7,78	27,30	46,80	62,03 warstwa wewnętrzna
40 „	2,28	18,08	33,88	49,68	62,01
50 „	23,79 /	33,90	44,01	54,13	62,01
60 „	35,46	42,48	49,51	56,53	62,01
70,5 „	42,77	47,86	52,95	58,04	62,00 warstwa zewnętrzna

A zatem w przypadku rozpatrywanym wytrzymałość rury niewzmocnionej określa wartość ciśnienia wewnętrznego $p=3178$ at, podczas gdy dla rury samowzmocnionej wypada $p=5780$ at, czyli około 82% więcej.

TEORIA KOŁOWO-SYMETRYCZNYCH ODKSZTAŁCENÍ SPRĘŻYSTYCH RUR GRUBOŚCIENNYCH W ZASTOSOWANIU DO ZAGADNIEŃ WYTRZYMAŁOŚCIOWYCH LUF DZIAŁOWYCH

(Wiadomości Techniczne Uzbrojenia, Nr 31, 1935 r.)

Oznaczenia

- a i b — promienie wewnętrznej i zewnętrznej walcowej powierzchni rury lub lufy.
- a' i b' — także promienie walcowej skorupy pocisku.
- c — wyrażenie cechujące odkształcalność rury z dnami, określone wzorem (83c), o wymiarze długości.
- e — podstawa logarytmów naturalnych.
- f i f' — ugięcie ściany lufy i ściany pocisku w przekroju płaszczyzny pierścienia.
- $g = b - a$ — grubość ściany lufy (rury).
- $g' = b' - a'$ — grubość walcowej części skorupy pocisku.
- h — grubość dna zamykającego rurę.
- h_1, h_2 albo h'_1, h'_2 — grubości den zamykających skorupę pocisku.
- k_0 — parametr odkształcenia rury o wymiarze długości w § 9 określony drugim ze wzorów (53a).
- k_{01} — analogiczny parametr wyrażony w § 11 wzorem (69).
- k_{02} albo k'_{02} — analogiczny parametr dla tylnej części rury pocisku określony w § 12 ostatnim ze wzorów (77).
- l — długość części lufy w § 8 od pierścienia pocisku do wylotu, w § 9 od tegoż pierścienia do ściany zamykającej lufę.
- l_1 — długość walcowej tylnej części pocisku od wewnętrznej powierzchni dna do płaszczyzny pierścienia.
- l_2 — analogiczna długość przedniej części pocisku.
- \ln — logarytm naturalny.
- p — ciśnienie względne gazów wewnątrz lufy (w kG/cm^2).
- p_a i p_b — ciśnienie wewnętrzne i zewnętrzne rury (w kG/cm^2).

- dq — obciążenie jednostki długości podłużnego skrawka elementarnej rury, odpowiadającego kątowni środkowemu $d\varphi$ (w kG/cm).
- $q' = \frac{dq}{ds}$ — powyższe obciążenie odniesione do jednostki szerokości mierzonej na okręgu o promieniu ϱ_0 (w kG/cm²).
- $r = \frac{a+b}{2}$ — średni promień przekroju rury.
- $r' = \frac{a'+b'}{2}$ — średni promień przekroju walcowej skorupy pocisku.
- w — rzędna wygięcia płyty okrągłej zamykającej rurę, mierzona dodatnio na zewnątrz od płaszczyzny środkowej płyty przed odkształceniem.
- w_1 i w_2 — analogiczne rzędne tylnej i przedniej płyty tworzącej dno pocisku.
- y — przemieszczenia punktów rury leżących pierwotnie na powierzchni walca o promieniu ϱ_0 .
- z — odległości punktów płyty od jej warstwy obojętnej zginania, liczone dodatnio na zewnątrz.
- $B = \frac{EJ}{1-\nu^2}$ — sztywność zginania podłużnych skrawków elementarnych rury odniesiona do jednostki szerokości przekroju.
- $B_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{h^3}{12}$ — sztywność zginania płyty o grubości h odniesiona do jednostki szerokości przekroju.
- $A_1, A_2, \dots, C_1, C_2, \dots, H_1, H_2, \dots$ — stałe całkowania lub parametry równań odkształcenia rury.
- E — moduł YOUNGA.
- $J = \frac{g^3}{12} \frac{r^2 - g^2/12}{r^2 + g^2/12}$ — moment bezwładności przekroju poprzecznego skrawka elementarnej rury względem osi obojętnej zginania tego skrawka, odniesiony do jednostki jego szerokości (mierzonej w tej osi).
- $J_1 = \frac{h^3}{12}$ — moment bezwładności przekroju płyty o szerokości 1.

- K — parametr w równaniu wygięcia płyty okrągłej określający stopień utwierdzenia sprężystego jej brzegu.
- M — moment zginający skrawka elementarnego rury odniesiony do jednostki jego szerokości (w kGem/cm).
- P — nacisk pierścienia pociskowego odniesiony do jednostki obwodu warstwy ściany lufy o promieniu ρ_0 .
- P_a — (w kG/cm) nacisk pierścienia pociskowego na ścianę lufy odniesiony do jednostki długości okręgu przylegania pierścienia.
- Q — siła poprzeczna w skrawku.
- T — okres drgania rury.

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{(1-\nu^2) \ln b/a}{4\rho_0 J}} = \frac{1}{g} \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2) \ln b/a}{\frac{r}{g} - \frac{1}{12} \frac{g}{r}}}$$

- najważniejszy parametr odkształcenia rury.
- β — parametr liczbowy wprowadzony w § 10 i określony wzorem (58).
- δ' — gęstość materiału rury jako iloraz z ciężaru właściwego w kG/cm³ i przyspieszenia ciężkości w cm/sek².
- ϵ_i — jednostkowe wydłużenie sprężyste w punktach okręgu o promieniu dowolnym ρ wzięte w kierunku stycznym do tego okręgu (wydłużenie obwodowe).
- $\vartheta = \frac{24J\alpha u}{(1+\nu)h^3}$ — parametr odkształcenia rury z dnem.
- ϑ_1 — dokładniejsza wartość parametru ϑ określona wzorem (68).

$$\lambda = \frac{\pi}{\alpha} = \pi \sqrt[4]{\frac{4\rho_0 J}{(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}}} = \pi g \sqrt[4]{\frac{r/g - \frac{1}{12} g/r}{3(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}}}$$

- długość półfali zgięcia skrawków podłużnych rury.
- ν — liczba POISSONA.
- $\rho_0 = \frac{2}{3} \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2}$ — promień okręgu określającego warstwę obojętną zginania skrawków podłużnych rury.
- albo
- $\rho_0 = r + \frac{1}{12} \frac{g^2}{r}$
- ρ — promień dowolnego punktu przekroju rury albo punktu warstwy środkowej okrągłej płyty zamykającej.
- $\bar{\rho}$ — promień warstwy ściany rury, w której określamy naprężenie styczne τ .

- $\sigma_l, \sigma_r, \sigma_t$ — naprężenia normalne w ścianie rury o kierunkach równoległych do osi rury, promieniowych (radialnych) i obwodowych.
 σ_ρ, σ_π — naprężenia normalne w płycie o kierunkach promieniowych (radialnych) (ρ) i obwodowych (π).
 τ — naprężenia styczne w dowolnym punkcie ściany rury, określone w zagadnieniu ogólnym równaniem (13) lub (13a).
 $d\varphi$ — kąt między płaszczyznami osiowymi wydzielającymi elementarny podłużny skrawek rury.
 ω — współczynnik liczbowy odkształcenia rury z dnami, określony wzorem (83) w § 13.

§ 1. Wstęp

Temat niniejszej pracy wyłonił się pierwotnie z próby teoretycznego ujęcia wpływu, jaki wywiera na lufę znaczne najczęściej ciśnienie pierścienia wiodącego pocisku. Wpływ ten wykazał doświadczalnie inż. J. DENK a moje zaznajomienie się z interesującymi wynikami odnośnych badań było pobudką do głębszego teoretycznego wniknięcia w całość zagadnienia wytrzymałościowego lufy. Okazało się przy tym, jak wiele jeszcze pozostaje do zrobienia w teorii odkształceń i naprężeń lufy przy różnych położeniach pocisku podczas strzału, chociażby przy traktowaniu zadania tylko jako „statycznego“. Wszak stosowany dotychczas aparat teoretyczny obliczenia wytrzymałościowego lufy sprowadza się głównie do wzorów opartych na wzorach LAMÉGO, które tracą swą ważność w częściach lufy przylegających do zamka lub otaczających pierścieni pocisku. Ponadto, literatura poświęcona wytrzymałości luf nie może się jeszcze wyzwolić z pęt nałożonych przez dawny błędny pogląd, że o wyteżeniu materiału decyduje wielkość naprężenia. Pogląd ten za czasów LAMÉGO prowadził do rozróżniania „poprzecznej“ i „podłużnej“ wytrzymałości lufy, co traci zupełnie sens ze stanowiska każdej z nowszych hipotez wytrzymałościowych, albowiem hipotezy te uzależniają wyteżenie materiału od wszystkich naprężeń składowych, określających stan naprężenia (napięcia) w badanym miejscu ciała sprężystego, a nie tylko od jednego z naprężeń. Z błędności niezależnego traktowania wytrzymałości „podłużnej“ i „poprzecznej“ zdają sobie wprawdzie dobrze sprawę autorowie dzieł poświęconych wytrzymałości luf, jak np. u nas inż. K. JAKOWSKI („Wytrzymałość luf działowych“, Warszawa 1929, rozważania na str. 187), jednakże upór tradycji jest silniejszy i bezpodstawne nazwy utrzymują się nadal z niewątpliwą szkodą dla naszego zagadnienia pod względem dydaktycznym i naukowym¹⁾.

¹⁾ Zauważone w praktyce przypadki podłużnych i poprzecznych pęknięć lufy nie mogą bynajmniej służyć do usprawiedliwienia nazw „wytrzymałości podłużnej i po-

Idealny cel, jaki przyświeca studiom teoretycznym nad wytrzymałością luf, da się określić (jak dla każdego zresztą badania wytrzymałościowego części konstrukcyjnej) w sposób następujący: Wyznaczenie z możliwą dokładnością stanu odkształcenia i naprężenia (napięcia) w każdym miejscu lufy w zależności od jej wymiarów, stałych sprężystości materiału, ciśnienia gazów prochowych oraz sił wywartych na lufę przez pierścień pocisku w każdym jego położeniu, a następnie wyszukanie na podstawie hipotezy wytrzymałościowej najlepiej potwierdzonej przez doświadczenie²⁾ miejsce największego wyteżenia, czyli niebezpiecznych.

Miejsca te mogą być skupione w pewnych przekrojach lufy lub też rozłożone na większych częściach jej długości. Znając wielkości wyteżeń w tych miejscach, można ustalić warunki trwałości i bezpieczeństwa lufy przy jej projektowaniu albo też usunąć usterki spotykane np. przy rekonstrukcji luf przez rdzeniowanie itp.

W badaniach teoretycznych należy mieć na uwadze, że (w granicach stosowalności prawa Hooke'a) składowe stanu odkształcenia i naprężenia (napięcia) podlegają zasadzie superpozycji, natomiast wielkość wyteżenia nie (z wyjątkiem przypadków szczególnych). Dlatego przy jednoczesnym działaniu kilku przyczyn (obciążeń) wywołujących odkształcenia, jeżeli te przyczyny występują zawsze razem, nie ma potrzeby wyznaczania wyteżeń odpowiadających tylko jednej z nich, wyjąwszy przypadki szczególne, gdy inne przyczyny mają zbyt mały wpływ na stan odkształcenia i naprężenia w miejscu rozpatrywanym³⁾.

Wobec wielkich trudności ścisłego traktowania zadania przez całkowanie równań różniczkowych ogólnej teorii sprężystości — poprzestaniemy na rozważaniach przybliżonych, popartych jednakże silnie wnioskami

przeczej", albowiem płaszczyzna pęknięcia wskazuje najczęściej tylko normalny do niej kierunek jednego z naprężeń głównych tego miejscowego stanu naprężenia (napięcia), który spowodował pęknięcie. Hipoteza energii odkształcenia postaciowego wykazująca najlepszą zgodność ilościową z doświadczeniem dla metali ciągliwych nie rozstrzyga i nie może rozstrzygać o kierunku płaszczyzny pęknięcia; pozwala ona tylko określić dla każdego danego stosunku naprężeń głównych te ich wartości krańcowe, których przekroczenie musi wywołać odkształcenia plastyczne mogące prowadzić przy dalszym wzroście obciążenia do pęknięcia. Wielkość poszczególnych naprężeń głównych nie ma w przypadkach złożonego stanu naprężenia (napięcia) w ogóle żadnego rozstrzygającego znaczenia.

²⁾ Dla metali zdolnych do odkształceń plastycznych wykazały liczne badania laboratoryjne w różnych krajach najlepszą zgodność hipotezy energii odkształcenia postaciowego (M. T. HUBER 1904, R. v. MISES 1913, B. P. HAIGH 1919, H. HENCKY 1923). Ustępuje jej niewiele hipoteza największego naprężenia stycznego (CH. A. COULOMB 1776, J. J. GUEST 1900, O. MOHR 1900 i M. MALAVAL 1922).

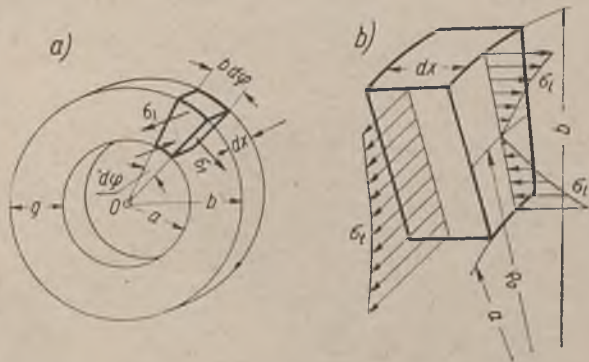
³⁾ Taki przypadek zachodzi niewątpliwie, gdy jedno z naprężeń głównych $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ w badanym miejscu jest znacznie większe od dwu innych, albowiem to wynika ze wzoru

ze znanych wyników badań na podstawie teorii ogólnej. Znaczne ułatwienie stanowi kołowa symetria względem osi lufy przemieszczeń wszystkich jej punktów przy odkształceniu, którą można założyć zaniedbując miejscową nieznaczną asymetrię w pobliżu zamka itp. Mamy bowiem do czynienia z obciążeniami, których rozkład jest również kołowo symetryczny.

§ 2. Równanie różniczkowe odkształcenia rury i wzory dla naprężeń

Rozpatrzmy najpierw stan odkształcenia i naprężenia w elemencie pierścieniowym rury wydzielonym dwoma przekrojami poprzecznymi w miejscu nie obciążonym bezpośrednio naciskiem pierścienia pociskowego P kG/cm. Odkształcenie takiego elementu zachodzi wskutek działania nań części sąsiednich

za pośrednictwem naprężeń stycznych i normalnych. Jedne i drugie są od siebie nawzajem zależne i dzięki założeniu symetrii kołowej są funkcjami samego tylko promienia ρ , określającego pierwotną odległość rozpatrywanego punktu od osi rury. Przy nieobecności zewnętrznych sił podłużnych suma bezwzględnych naprężeń normalnych σ_r w każdym przekroju poprzecznym musi być równa 0. A zatem te naprężenia muszą się składać z ciągnięć i ciśnień rozmieszczonych na polach dwu pierścieni, których sumą jest przekrój rury. Wydzielmy z rury przekrojami osiowymi, zamykającymi kąt $d\varphi$ (rys. 1) skrawek elementarny o szerokości obu podstaw $a d\varphi$ i $b d\varphi$ (a i b oznaczają promień wewnętrzny i zewnętrzny rury). Skrawek taki jest zginany w swej płasz-



Rys. 1

czyźnie wyłączenie materiału określone naprężeniem zredukowanym σ_{red} , który według naszej hipotezy ma postać

$$\sigma_{red}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1.$$

Gdy np.

$$\sigma_2 = 0,2\sigma_1, \quad \sigma_3 = -0,2\sigma_1,$$

to

$$\sigma_{red} \approx 1,02\sigma_1.$$

Skoro jednak

$$\sigma_2 = 0,2\sigma_1, \quad \sigma_3 = 0,2\sigma_1,$$

to

$$\sigma_{red} = 0,8\sigma_1.$$

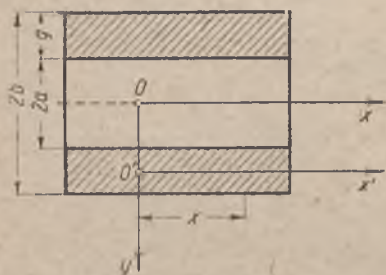
czyźnie symetrii. Naprężenia są zatem po stronie wypukłej ciągnieniami, a po stronie wklęsłej ciśnieniami. Przyjawszy liniowy rozkład tych naprężeń wzdłuż przekrojów promieniowych, podobnie jak w teorii zgięcia belek B. de SAINT-VENANTA, otrzymujemy dla promienia ϱ_0 warstwy obojętnej wyrażenie:

$$(1) \quad \varrho_0 = \frac{\int_a^b \varrho^2 d\varrho d\varphi}{\int_a^b \varrho d\varrho d\varphi} = \frac{2}{3} \frac{b^3 - a^3}{b^2 - a^2} = \frac{1}{2} (a + b) + \frac{1}{6} \frac{(b - a)^2}{(a + b)}$$

albo przy oznaczeniach $\frac{1}{2}(a + b) = r$, $b - a = g$ (grubość ściany)

$$(1a) \quad \varrho_0 = r + \frac{1}{12} \frac{g^2}{r}.$$

Zgięcie skrawków elementarnych rury jest nadto uwarunkowane przemieszczeniem y wszystkich punktów warstwy obojętnej w kierunku promieniowym. To przemieszczenie jest funkcją odciętej przekroju x mierzonej na osi rury od obranego początku 0 (rys. 2).



Rys. 2

Miara słabej krzywizny skrawka (w naszym zadaniu zawsze wystarczająco przybliżoną) jest $y'' \equiv \frac{d^2 y}{dx^2}$. Warstwa obojętna o promieniu ϱ_0 doznaje przeto (w kierunku prostopadłym do osi x) wydłużenia obwodowego

$$\varepsilon_t^{(0)} = \frac{y}{\varrho_0}.$$

Gdyby y było niezależne od ϱ , to można by dla dowolnego punktu rury wyrazić jednostkowe wydłużenie obwodowe równaniem

$$\varepsilon_t = \frac{y}{\varrho}.$$

W ogóle jednak będzie

$$\varepsilon_t = \frac{y + \eta}{\varrho},$$

przy czym η oznacza wielkość zależną także od ϱ , ale bardzo małą w porównaniu do y (podobnie jak y jest małe wobec grubości rury $g = b - a$). Odpowiednie naprężenie obwodowe σ_t jest naprężeniem głównym; inne naprężenia normalne w elemencie rury są: naprężenie podłużne σ_l i promieniowe σ_r .

Według teorii sprężystości jest

$$(2) \quad \varepsilon_l = \frac{y + \eta}{\varrho} = \frac{1}{E} [\sigma_l - \nu(\sigma_l + \sigma_r)],$$

gdzie E oznacza moduł YOUNGA, a ν liczbę POISSONA.

Naprężenie σ_l uwarunkowane zgięciem skrawka określi równanie

$$(3) \quad \sigma_l = \frac{M}{J} (\varrho - \varrho_0),$$

gdzie M oznacza moment zginający przekroju skrawka, J zaś moment bezwładności tego przekroju, oba odniesione do jednostki szerokości w warstwie obojętnej.

Dla J znajdujemy łatwo wyrażenie:

$$(4) \quad J = \frac{g^3}{12} \frac{2(a+b)^2 + 4ab}{3(a+b)^2 + g^2} = \frac{g^3}{12} \frac{r^2 - \frac{g^2}{12}}{r^2 + \frac{g^2}{12}}.$$

W ciągu dalszym napotkamy często iloczyn $J \cdot \varrho_0$, który ma znaczenie momentu bezwładności przekroju skrawka elementarnego podzielonego przez kąt $d\varphi$. Jego wartość określa wzór:

$$(4a) \quad J \varrho_0 = \frac{g^3}{12} \left(r - \frac{g^2}{12r} \right).$$

Gdyby skrawek zginał się swobodnie, to kąt $d\varphi$ nachylenia ścian bocznych uległby zmianie. Uwarunkowana kołową symetrią odkształcenia niezmiennosc tego kąta wywołuje obok naprężeń podłużnych σ_l , dodatkowe naprężenia obwodowe o wielkości $\nu\sigma_l$, tak samo jak przy zgięciu walcowym płyty powstają obok naprężeń zginających podłużnych σ_x jeszcze naprężenia poprzeczne $\sigma_y = \nu\sigma_x$. Z tego powodu sztywność zginania B skrawka (odniesiona do jednostki obwodu warstwy obojętnej) winna być mierzona wyrażeniem

$$B = \frac{E}{1 - \nu^2} J.$$

A zatem moment zginający skrawek:

$$(5) \quad M = - \frac{EJ}{1 - \nu^2} \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

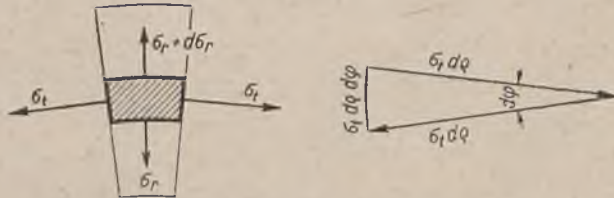
Naprężenia obwodowe σ_r obliczone z równania (2) wyrażają się wzorem

$$(2a) \quad \sigma_r = E \frac{y + \eta}{\varrho} + \nu(\sigma_l + \sigma_r)$$

albo po wstawieniu kolejno wartości z (3) i (5)

$$(2b) \quad \sigma_t = E \frac{y + \eta}{\varrho} + \nu \sigma_r - \frac{\nu E}{1 - \nu^2} \frac{d^2 y}{dx^2} (\varrho - \varrho_0)^4.$$

Naprężenia bezwzględne $\sigma_t \cdot d\varrho$ działające na ściany boczne skrawka (rys. 3) dają wypadkową, która odniesiona do jednostki długości skrawka ma wartość



Rys. 3

$$(6) \quad dq = -d\varphi \int_a^b \sigma_t d\varrho = -\frac{ds}{\varrho_0} \int_a^b \sigma_t d\varrho.$$

(Tutaj $ds = \varrho_0 d\varphi$ jest szerokością skrawka mierzoną w warstwie obojętnej zginania).

A zatem

$$(7) \quad dq = -\frac{E ds}{\varrho_0} \left[y \ln \frac{b}{a} + \int_a^b \frac{\eta}{\varrho} d\varrho + \frac{\nu}{E} \int_a^b \sigma_r d\varrho + \frac{\nu}{1 - \nu^2} y'' \cdot g(\varrho_0 - r) \right].$$

W przypadku siły podłużnej N przybývá tutaj między kłanrami [] jeszcze wyraz $\frac{\nu N}{2Er\pi}$ (por. odsyłacz wzoru 2b).

Dwukrotne różniczkowanie (5) względem x daje:

$$\frac{d^2 M}{dr^2} = -\frac{EJ}{1 - \nu^2} \frac{d^4 y}{dx^4},$$

a ponieważ

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q' = -\frac{dq}{ds},$$

⁴⁾ W przypadku gdy zachodzi siła N rozciągająca rurę podłużnie, należy oczywiście po prawej stronie wzoru (2b) dodać wyraz

$$\nu \frac{N}{(b^2 - a^2)\pi} = \nu \frac{N}{2gr\pi}.$$

tj. obciążeniu jednostkowemu wyrażonemu powyżej, przeto:

$$(8) \quad \frac{EJ}{1-\nu^2} \frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{E}{\varrho_0} \left[y \ln \frac{b}{a} + \int_a^b \frac{\eta d\varrho}{\varrho} + \frac{\nu}{E} \int_a^b \sigma_r d\varrho + \right. \\ \left. + \frac{\nu N}{2Er\pi} + \frac{\nu g}{1-\nu^2} (\varrho_0 - r) \frac{d^2 y}{dx^2} \right].$$

W przypadku gdy rura jest pod ciśnieniem wewnętrznym p_a , wynosi obciążenie jednostkowe skrawka

$$q' = \frac{p_a \cdot a d\varphi}{\varrho_0 d\varphi} = \frac{a}{\varrho_0} p_a,$$

podobnie przy ciśnieniu zewnętrznym p_b jest $q' = -\frac{b}{\varrho_0} p_b$.

Te obciążenia należy dołączyć po prawej stronie powyższego równania. W ogólnym przypadku mamy więc:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{EJ}{1-\nu^2} \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{\nu E g}{1-\nu^2} \left(1 - \frac{r}{\varrho_0} \right) \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{E}{\varrho_0} \ln \frac{b}{a} \right) y = \\ & = \frac{a p_a - b p_b}{\varrho_0} - \frac{E}{\varrho_0} \int_a^b \frac{\eta d\varrho}{\varrho} - \frac{\nu}{\varrho_0} \int_a^b \sigma_r d\varrho - \frac{\nu N}{2\varrho_0 r \pi}. \end{aligned} \right.$$

Rozwiązanie tego równania różniczkowego pozwoliłoby nam, przy znajomości funkcji η i σ_r , obliczyć naprężenia normalne σ_t i σ_r z wzorów:

$$(10) \quad \sigma_t = -\frac{E}{1-\nu^2} (\varrho - \varrho_0) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{N}{2gr\pi} = \frac{M}{J} (\varrho - \varrho_0) + \frac{N}{2gr\pi},$$

$$(11) \quad \sigma_r = E \frac{y + \eta}{\varrho} + \nu (\sigma_t + \sigma_r).$$

Ponieważ w ciągu dalszym pomijać będziemy zwykle η i σ_r , a w obliczeniach szczegółowych przyjmujemy często $N=0$, więc równania (10) i (11) stosować będziemy w postaci uproszczonej:

$$(10a) \quad \sigma_t = -\frac{E}{1-\nu^2} (\varrho - \varrho_0) y'' = \frac{M}{J} (\varrho - \varrho_0),$$

$$(11a) \quad \sigma_r = \frac{E y}{\varrho} + \nu \sigma_t.$$

Pozostają do wyznaczenia naprężenia styczne τ . Te mają kierunki promieniowe i dają się obliczyć ze znanych wartości σ_t , wyrażonych jako funkcja ϱ i x . Potrzebnego równania dostarcza warunek równowagi ele-

mentu wyciętego ze skrawka przekrojem walcowym o promieniu $\bar{\rho}$ i dwoma przekrojami poprzecznymi w odległości dx (rys. 4), a mianowicie

$$\int_a^b \frac{\partial \sigma_l}{\partial x} dx \rho d\varphi d\rho = \tau \bar{\rho} d\varphi dx.$$

Stąd

$$(12) \quad \tau = \frac{1}{\bar{\rho}} \int_a^b \frac{\partial \sigma_l}{\partial x} \rho d\rho \quad \text{albo}$$

$$\tau = -\frac{1}{\bar{\rho}} \int_a^{\bar{\rho}} \frac{\partial \sigma_l}{\partial x} \rho d\rho.$$

Wstawiając tutaj powyższe wyrażenie dla σ_l (równanie 10) otrzymamy wzory:

$$(13) \quad \tau = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\bar{\rho}} \int_a^b \frac{d^3 y}{dx^3} (\rho - \rho_0) \rho d\rho =$$

$$= -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{d^3 y}{dx^3} \cdot \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{b^3 - \bar{\rho}^3}{3} - \frac{\rho_0}{2} (b^2 - \bar{\rho}^2) \right]$$

albo

$$(13a) \quad \tau = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\bar{\rho}} \int_a^{\bar{\rho}} \frac{d^3 y}{dx^3} (\rho - \rho_0) \rho d\rho = \frac{E}{1-\nu^2} \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{1}{\bar{\rho}} \left[\frac{\bar{\rho}^3 - a^3}{3} - \frac{\rho_0}{2} (\bar{\rho}^2 - a^2) \right].$$

Oznaczmy przez Q siłę poprzeczną skrawka elementarnego rury odniesioną do jednostki szerokości w warstwie obojętnej. Do obliczenia Q posłużmy równanie:

$$Q \rho_0 d\varphi = \int_a^b \tau \rho d\varphi d\rho = d\varphi \int_a^b \tau \rho d\rho,$$

czyli

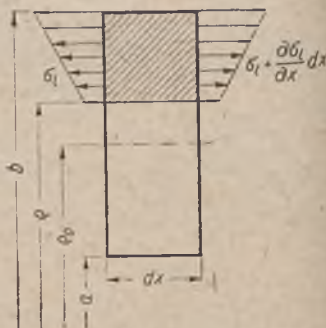
$$Q = \frac{1}{\rho_0} \int_a^b \tau \rho d\rho.$$

Wstawiając tutaj wartość τ z równania (13) lub (13a) otrzymujemy zgodnie po dłuższym rachunku:

$$Q = -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{1}{\rho_0} \frac{g^3}{12} \left(r - \frac{1}{12} \frac{g^2}{r} \right),$$

czyli z uwzględnieniem wzorów (1a) i (4):

$$Q = -\frac{EJ}{1-\nu^2} \frac{d^3 y}{dx^3}.$$



Rys. 4. Schemat rozkładu naprężeń podłużnych σ_l na elemencie wyciętym ze skrawka przekrojem walcowym o promieniu ρ

§ 3. Dopuszczalne uproszczenie podstawowego równania różniczkowego

Ażeby umożliwić rozwiązanie równania różniczkowego (9), skreślmy po prawej stronie obie całki zawierające η i σ_r , co spowoduje błędy bardzo nieznaczne. Błędy te są nadto tym mniejsze, im mniejsze jest g wobec r . Napisawszy teraz równanie różniczkowe naszego zagadnienia w postaci:

$$(9a) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} + 4C_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + 4C_2 y = C,$$

gdzie

$$C_1 = \frac{vg}{4J} \left(1 - \frac{r}{\varrho_0} \right), \quad C_2 = \frac{1 - \nu^2}{4J\varrho_0} \ln \frac{b}{a},$$

$$C = \frac{1 - \nu^2}{EJ} \left(\frac{ap_a - bp_b}{\varrho_0} - \frac{N\nu}{2\varrho_0 r \pi} \right)$$

otrzymujemy w znany sposób wyrażenie dla ogólnego rozwiązania:

$$(14) \quad y = A_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + A_2 e^{\alpha x} \sin \beta x + A_3 e^{-\alpha x} \cos \beta x + A_4 e^{-\alpha x} \sin \beta x + \frac{C}{4C_2}.$$

Tutaj jest

$$\alpha = \sqrt{\sqrt{C_2} - C_1}, \quad \beta = \sqrt{\sqrt{C_2} + C_1},$$

a stałe całkowania są oznaczone przez A_1, \dots, A_4 .

Nie trudno zauważyć, że parametr C_1 jest w porównaniu do $\sqrt{C_2}$ najczęściej bardzo mały, nawet gdy stosunek $g:r$ dochodzi do 1, wartość C_1 wynosi zaledwie $0,05\sqrt{C_2}$. W dość znacznym zatem przybliżeniu można równanie różniczkowe (9) zastąpić następującym

$$(15) \quad \frac{EJ}{1 - \nu^2} \frac{d^4 y}{dx^4} + \left(\frac{E}{\varrho_0} \ln \frac{b}{a} \right) y = \frac{ap_a - bp_b}{\varrho_0} - \frac{\nu N}{2\varrho_0 r \pi}.$$

Ponieważ to równanie ma tę samą postać analityczną co równanie belki na sprężystym podłożu o module podatności k , obciążonej ciężarem jednostkowym q :

$$(16) \quad EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + ky = q,$$

przeto możemy w niektórych przypadkach skorzystać z gotowych wzorów teorii zgięcia takich belek zastępując tylko:

1. moduł k przez $\frac{E}{\varrho_0} \ln \frac{b}{a}$,
2. sztywność zginania EJ przez $\frac{EJ}{1 - \nu^2}$,
3. obciążenie q przez $\frac{1}{\varrho_0} \left(ap_a - bp_b - \frac{\nu}{a} \cdot \frac{N}{r\pi} \right)$.

Jak łatwo stwierdzić przez podstawienie w pierwszym przybliżeniu $\varrho_0 \approx \frac{1}{2}(a+b) = r$; $\ln \frac{b}{a} \approx \frac{g}{r}$ dla rur cienkościennych otrzymujemy równanie różniczkowe spotykane w licznych pracach i podręcznikach, którego stosowanie do rur grubościennych musiałoby jednakże prowadzić do dużych błędów.

§ 4. Działanie nacisku obrączkowego w środkowych częściach długiej rury

Rozpatrzmy teraz schemat rury (lufy) bardzo długiej o stałej grubości ściany, obciążonej tylko w przekroju środkowym naciskiem wewnętrznym o wielkości P kG/cm² bez ciśnienia gazów itp. Zadanie odpowiada ściśle belce bardzo długiej na sprężystym podłożu, obciążonej w środku siłą skupioną P (kG). Wtedy jest jak wiadomo dla dodatnich wartości x ⁵⁾: ugięcie

$$(17) \quad y = \frac{Pa}{2k} e^{-ax} (\cos ax + \sin ax);$$

moment zginający

$$(18) \quad M = \frac{P}{4a} e^{-ax} (\cos ax - \sin ax);$$

siła poprzeczna

$$(19) \quad Q = -\frac{P}{2} e^{-ax} \cos ax,$$

przy czym

$$(20) \quad a = \sqrt[4]{\frac{k}{4EJ}}.$$

Linia ugięcia jest falista o amplitudach szybko malejących ze wzrostem x , a o długości półfali

$$(21) \quad \lambda = \frac{\pi}{a} = \pi \sqrt[4]{\frac{4EJ}{k}}.$$

Stosownie do tego otrzymamy dla naszego zadania:

$$(20a) \quad a = \sqrt[4]{\frac{(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}}{4\varrho_0 J}} = \frac{1}{g} \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}}{\frac{r}{g} - \frac{1}{12} \frac{g}{r}}},$$

⁵⁾ Tutaj i aż do końca pracy oznacza P nacisk odniesiony do jednostki obwodu warstwy obojętnej o promieniu ϱ_0 . Jeżeli więc P_a oznaczać będzie nacisk na jednostkę obwodu wewnętrznego, to

$$P = \frac{a}{\varrho_0} P_a.$$

⁶⁾ Dla ujemnych x trzeba tylko zastąpić we wszystkich wzorach x przez $-x$.

$$(21a) \quad \lambda = \pi \sqrt[4]{\frac{4 \varrho_0 J}{(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}}} = \pi g \sqrt[4]{\frac{\frac{r}{g} - \frac{1}{12} \frac{g}{r}}{3(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}}}$$

$$(17a) \quad y = \frac{P a \varrho_0}{2 E \ln \frac{b}{a}} e^{-ax} (\cos ax + \sin ax),$$

$$(18a) \quad M = \frac{P}{4a} e^{-ax} (\cos ax - \sin ax),$$

$$(19a) \quad Q = -\frac{P}{2} e^{-ax} \cos ax.$$

Łatwo zauważyć, że największe wartości y , M i Q zachodzą dla $x=0$, tj. w miejscu obciążonym. Określają je wzory:

$$(22) \quad \begin{cases} y_{max} = \frac{P}{2} \frac{\varrho_0 a}{E \ln \frac{b}{a}} = \frac{\pi P}{2 E} \frac{\varrho_0}{\lambda \ln \frac{b}{a}}, \\ M_{max} = \frac{P \lambda}{4 \pi}; \quad Q_{max} = -\frac{P}{2}. \end{cases}$$

Stąd obliczymy krańcowe wartości naprężeń w otoczeniu tego miejsca:

a) Naprężenia zginające

$$(23) \quad \sigma_t = -\frac{E}{1-\nu^2} (\varrho - \varrho_0) \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{P \lambda}{4 \pi J} (\varrho - \varrho_0),$$

o wartościach skrajnych

$$(23a, b) \quad (\sigma_t)_{\varrho=a} = -\frac{P \lambda}{4 \pi J} (\varrho_0 - a); \quad (\sigma_t)_{\varrho=b} = \frac{P \lambda}{4 \pi J} (b - \varrho_0).$$

b) Naprężenia obwodowe

$$(24) \quad \sigma_r = \frac{\pi}{2} \frac{P}{\lambda \ln \frac{b}{a}} \frac{\varrho_0}{\varrho} + \nu \frac{P \lambda}{4 \pi J} (\varrho - \varrho_0),$$

o wartościach skrajnych:

$$(24a) \quad (\sigma_r)_{\varrho=a} = \frac{\pi}{2} \frac{P}{\lambda \ln \frac{b}{a}} \frac{\varrho_0}{a} - \nu \frac{P \lambda}{4 \pi J} (\varrho_0 - a),$$

$$(24b) \quad (\sigma_r)_{\varrho=b} = \frac{\pi}{2} \frac{P}{\lambda \ln \frac{b}{a}} \frac{\varrho_0}{b} + \nu \frac{P \lambda}{4 \pi J} (b - \varrho_0).$$

c) Naprężenia styczne według wzoru (13):

$$(25) \quad \tau = -\frac{P}{4J\varrho} \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^2}{2} \varrho_0 - \frac{\varrho^3}{3} + \frac{\varrho^2}{2} \varrho_0 \right)$$

albo

$$(25a) \quad \tau = -\frac{P}{4J\varrho} \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2} \varrho_0 - \frac{\varrho^3}{3} + \frac{\varrho^2}{2} \varrho_0 \right).$$

Największe τ nie występuje w warstwie obojętnej zginania, ale zachodzi tym bliżej tej warstwy, im mniejszy jest stosunek $g:r$.

W przypadkach niewielkiej grubości ściany g w porównaniu do r i a można z nieznacznym błędem poprzestać na wzorach przybliżonych, które wyprowadzimy z powyższych wstawiając w przybliżeniu:

1) r zamiast $\varrho_0 = r + \frac{g^2}{12r}$ z błędem wartości ϱ_0 mniejszym od 2%, jeżeli $g < \frac{r}{2}$.

2) $\frac{g^3}{12}$ zamiast J według wzoru (4) z błędem nie przewyższającym $\sim 4\%$ dla $g < \frac{r}{2}$.

3) $\frac{g}{r}$ zamiast $\ln \frac{b}{a} = \ln \frac{r + \frac{g}{2}}{r - \frac{g}{2}} = \frac{g}{r} + \frac{1}{12} \left(\frac{g}{r} \right)^2 + \dots$ z błędem zbliżonym do poprzedniego.

Przyjmując nadto $\nu = \frac{1}{3}$ otrzymujemy wzory następujące:

Długość półfali

$$(21b) \quad \lambda = 0,783\pi\sqrt{gr} = 2,46\sqrt{gr}.$$

Skrajne wartości naprężeń zginających:

$$(23cd) \quad \sigma_{r|_{\varrho=a}}^{\varrho=b} = \pm 1,17 \frac{P}{g} \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Skrajne wartości naprężeń obwodowych:

$$(24a) \quad \sigma_{r|_{\varrho=a}}^{\varrho=b} = 1,278 \frac{P}{g} \sqrt{\frac{r}{g}} \left(\frac{r}{2r \pm g} \pm 0,306 \right).$$

Największe naprężenia styczne

$$(25b) \quad \tau_{max} = \frac{3}{8} \frac{P}{g} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{g}{r} \right),$$

a towarzyszące im naprężenia obwodowe:

$$(26a) \quad (\sigma_r)_{\varrho=\varrho_0} = \frac{\pi}{2} \frac{P}{\lambda \ln \frac{b}{a}} \approx 0,639 \frac{P}{g} \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Gdyby nie było żadnych innych sił działających na rurę w sąsiedztwie przekroju rozpychanego naciskiem P , to miejsca niebezpiecznego wypadaloby szukać w trzech punktach:

1) Na powierzchni zewnętrznej, gdzie zachodzi dwuwymiarowy stan napięcia określony naprężeniem obwodowym według wzoru (24a) i naprężeniem podłużnym według wzoru (23a).

2) W warstwie obojętnej, gdzie stan napięcia określają wzory (25b) i (26a).

3) Na powierzchni zewnętrznej, gdzie panuje trójwymiarowy stan napięcia, określony naprężeniem obwodowym $(\sigma_t)_{\varrho=a}$ według wzoru (24a), naprężeniem podłużnym $(\sigma_l)_{\varrho=b}$ według wzoru (23a) i naprężeniem promieniowym, które dałoby się obliczyć, gdyby była znana szerokość paska dotyku pierścienia wywierającego nacisk P . Pomijając na razie tę kwestię, porównamy tylko wyężenie materiału w punktach 1 i 2. W punkcie 1 jest według hipotezy energii odkształcenia postaciowego

$$\sigma_{red}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2,$$

czyli

$$\begin{aligned} \sigma_{red}^2 &= \left(\frac{P}{g} \sqrt{\frac{r}{g}}\right)^2 \left[1,17^2 + 1,278^2 \left(\frac{r}{2r+g} + 0,306\right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - 1,17 \cdot 1,278 \left(\frac{r}{2r+g} + 0,306\right) \right] = \\ &= \left(\frac{P}{g} \sqrt{\frac{r}{g}}\right)^2 \left[1,188 - 0,495 \frac{r}{2r+g} + \left(1,278 \cdot \frac{r}{2r+g}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

A zatem

$$(27) \quad \sigma_{red} = \frac{P}{g} \sqrt{\frac{r}{g}} \sqrt{1,188 - \frac{0,495r}{2r+g} + \left(\frac{1,278r}{2r+g}\right)^2}.$$

W punkcie 2 zaś ($\sigma_{red}^2 = \sigma^2 + 3\tau^2$) jest

$$\begin{aligned} \sigma_{red}^2 &= 0,639^2 \left(\frac{P}{g} \sqrt{\frac{r}{g}}\right)^2 + \frac{3 \cdot 9}{64} \left(\frac{P}{g}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{g}{r}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{P}{g}\right)^2 \left[0,639^2 \frac{r}{g} + \frac{27}{64} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{g}{r}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

A zatem

$$(28) \quad \sigma_{red} = \frac{P}{g} \sqrt{0,408 \frac{r}{g} + 0,422 \left(1 + \frac{1}{3} \frac{g}{r}\right)^2}.$$

Obliczywszy ze wzorów (27) i (28) szereg wartości dla różnych stosunków $r:g$ można znaleźć pewną graniczną wartość tego stosunku, powyżej której miejsce niebezpieczne leży na powierzchni zewnętrznej, a poniżej -- w warstwie obojętnej.

§ 5. Zakres stosowności rozwiązań przy upraszczającym założeniu bardzo długiej rury

Nasuwa się teraz pytanie, kiedy wyprowadzone wzory określają dość dokładnie ten stan odkształcenia i naprężenia (napięcia) w lufie działowej, jaki odpowiada rozprężającemu działaniu pocisku za pośrednictwem pierścienia. Albowiem lufa ma długość skończoną, a pierścień rozpychający może się znajdować w różnych przekrojach lufy. Otóż dyskusja wyprowadzonych wzorów ogólnych dla lufy bardzo długiej poucza, że w odległości $\geq 2\lambda$ od przekroju obciążonego zachodzą odkształcenia i naprężenia znikomo małe w porównaniu do tych, jakie panują w najbliższym otoczeniu tego przekroju np. $0 \leq x \leq \frac{\lambda}{4}$. Dla pewnych typów luf okazuje się 2λ równe około 2 do 3 kalibrom lufy, wobec czego ważność naszych wzorów byłaby zapewniona w obszarze 70 do 80% środkowej długości lufy. Ale po wtóre grubość g nie jest stała, lecz zmniejsza się ku wylotowi. Dopóki ta zmiana jest łagodna, możemy śmiało przyjąć, że wzory nasze nie dadzą uwagi godnych błędów, podobnie jak wzory teorii zgięcia belek, wyprowadzone dla przypadku przekroju stałego, są dostatecznie dokładne dla belek o przekroju łagodnie zmiennym albo wzory LAMÉGO, ściśle ważne dla rury bardzo długiej i cylindrycznej, a obciążonej stałym ciśnieniem wewnętrznym na całej długości, są wystarczająco przybliżone dla lufy rzeczywistej z wyłączeniem krótkich kawałków końcowych.

Teoria ogólna, oparta na równaniu różniczkowym ściślejszym (9) albo przybliżonym (15), pozwala w pewnych uproszczonych warunkach znaleźć rozwiązanie ważne w pobliżu zamkniętego lub otwartego końca rury. Przedtem jednakże postaramy się uzupełnić rozwiązanie rozdz. IV obliczeniem tych odkształceń i naprężeń w okolicy pierścienia rozpychającego, które zachodzą wskutek jednostronnego ciśnienia gazów prochowych i tarcia pierścienia o rurę.

§ 6. Odkształcenia lufy wywołane tarciem pierścienia wiodącego pocisku

Niechaj T' oznacza siłę tarcia pierścienia o wewnętrzną powierzchnię lufy, odniesioną do jednostki obwodu $2a\pi$. Odpowiednia siła rozciągająca lufę w części leżącej z tyłu pocisku (aż do pierścienia) $T = 2a\pi T'$ wywołuje przede wszystkim naprężenie podłużne

$$\sigma_l^{(0)} = \frac{2a\pi T'}{(b^2 - a^2)\pi} = \frac{aT'}{gr},$$

a nadto naprężenia zginające w każdym elementarnym skrawku rury z powodu mimośrodowości działania sił $T a d\varphi$. Odpowiedni moment zginający zewnętrzny określa wzór

$$M_0 a d\varphi = T' a d\varphi (r_0 - a),$$

czyli

$$M_0 = T'(\varrho_0 - a).$$

Przy założeniu upraszczającym, że rura rozciąga się po obu stronach przekroju obciążonego bardzo daleko, otrzymujemy rozwiązanie równania różniczkowego (15) w postaci

$$(29) \quad y = \frac{T'(\varrho_0 - a)\alpha^2 \varrho_0}{E \ln \frac{b}{a}} e^{-\alpha x} \sin \alpha x,$$

przy czym jak w § 4

$$a = \sqrt[4]{\frac{(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}}{4\varrho_0 J}} = \frac{1}{g} \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}}{\frac{r}{g} - \frac{1}{12} \frac{g}{r}}}.$$

Rozwiązanie to jest ważne po stronie dodatnich x mierzonych od przekroju obciążonego ku wylotowi rury. Dla ujemnych trzeba tylko zastąpić $e^{-\alpha x} \sin \alpha x$ przez $e^{\alpha x} \sin \alpha x$.

Dwukrotne różniczkowanie daje:

$$y'' = -\frac{2T'(\varrho_0 - a)\alpha^4 \varrho_0}{E \ln \frac{b}{a}} e^{-\alpha x} \cos \alpha x = -\frac{(1-\nu^2)T'(\varrho_0 - a)}{2EJ} e^{-\alpha x} \cos \alpha x.$$

A zatem

$$(30) \quad M = -\frac{EJ}{1-\nu^2} y'' = \frac{T'}{2} (\varrho_0 - a) e^{-\alpha x} \cos \alpha x,$$

$$(31) \quad Q = \frac{dM}{dx} = -\frac{T'}{2} (\varrho_0 - a) \alpha e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x).$$

Według równań (10) i (11) z pominięciem η i σ_r znajdziemy wzory dla naprężeń

$$(32) \quad \sigma_t = \frac{1}{2} \frac{T'(\varrho_0 - a)(\varrho - \varrho_0)}{J} e^{-\alpha x} \cos \alpha x,$$

$$(33) \quad \sigma_t = T' \left[\frac{\alpha^2 \varrho_0 (\varrho_0 - a)}{\varrho \ln \frac{b}{a}} \sin \alpha x + \frac{\nu (\varrho_0 - a)(\varrho - \varrho_0)}{2J} \cos \alpha x \right] e^{-\alpha x}.$$

Oznaczywszy przez ξ bezwzględne wartości ujemnych x , otrzymamy dla przekrojów rury leżących po stronie ujemnych x wzory:

$$(32a) \quad \sigma_t = -\frac{T'(\varrho_0 - a)(\varrho - \varrho_0)}{2J} e^{-\alpha \xi} \cos \alpha \xi + \frac{\alpha T'}{gr},$$

$$(33a) \quad \sigma_t = -T' \left[\frac{\alpha^2 \varrho_0 (\varrho_0 - a)}{\varrho \ln \frac{b}{a}} \sin \alpha \xi + \nu \frac{(\varrho_0 - a)(\varrho - \varrho_0)}{2J} \cos \alpha \xi \right] e^{-\alpha \xi} + \nu \frac{\alpha T'}{gr}.$$

Na podstawie rozważań § 5 można powyższe wzory stosować ze znaczną dokładnością, jeżeli przekrój obciążony jest odległy od końców rury przynajmniej o $2\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}$.

Znając przyspieszenie γ ruchu wstecznego lufy w każdej chwili podczas strzału, możemy nadto obliczyć naprężenie podłużne odpowiednich oporów bezwładności (sił d'ALEMBERTA), mnożąc masę części lufy od przekroju rozpatrywanego do wylotu przez γ i dzieląc iloczyn przez pole przekroju. Z tym naprężeniem sumuje się obliczone powyżej σ_l wskutek tarcia.

§ 7. Wpływ ciśnienia gazów prochowych na części lufy za pociskiem przy założeniu wielkiej długości obu części lufy

Ażeby teraz obliczyć odkształcenia i naprężenia w lufie po obu stronach pierścienia pociskowego, uwarunkowane tym, że z tyłu za pierścieniem panuje ciśnienie gazów prochowych, a z przodu tego ciśnienia nie ma, obierzemy znowu początek osi x w środku przekroju dzielącego oba te obszary i zakładając bardzo wielką długość rury, poszukamy odpowiednich całek równania (15) i równania

$$(15a) \quad \frac{EJ}{1-\nu^2} \frac{d^4 y}{dx^4} + \left(\frac{E}{\rho_0} \ln \frac{b}{a} \right) y = - \frac{\nu N}{2\rho_0 r \pi}$$

oraz równania:

$$(15b) \quad \frac{EJ}{1-\nu^2} \frac{d^4 y}{dx^4} + \left(\frac{E}{\rho_0} \ln \frac{b}{a} \right) y = \frac{ap}{\rho_0} - \frac{\nu N}{2\rho_0 r \pi}$$

ważnego po stronie obciążonej ciśnieniem. Po tej stronie otrzymujemy (z dopuszczalnym pominięciem siły podłużnej N)

$$(34) \quad y = \frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}} (1 - \frac{1}{2} e^{ax} \cos ax) \dots \quad (\text{dla } x \leq 0),$$

a po stronie nie obciążonej

$$(35) \quad y = \frac{1}{2} \frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}} e^{-ax} \cos ax.$$

Oba rozwiązania, jak łatwo sprawdzić, czynią zadość odpowiednim równaniom różniczkowym i warunkom krańcowym. W równaniu (34) jest

$$(34a) \quad y = \frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}} \quad \text{dla } x \rightarrow \infty.$$

Gdyby rozwiązanie nasze było ścisłe, to ta wartość powinna być równa przemieszczeniu warstwy ϱ_0 obliczonemu z teorii LAMÉGO, która jak wiadomo daje:

$$(36) \quad y = \frac{p a^2}{E(b^2 - a^2)} \left[(1 - \nu) \varrho_0 + (1 + \nu) \frac{b^2}{\varrho_0} \right].$$

Porównanie liczbowe obu wartości przy $b = 1,1a$ aż do $b = 2,5a$ wykazało, że nasza wartość przybliżona jest co najwyżej około 4% za mała, wynik wcale zadowalający⁷⁾.

Z rozwiązań (34) i (35) znajdujemy kolejno przy pomocy wzorów (10), (11) i (13).

1) Po stronie obciążonej ciśnieniem, tj. dla ujemnych wartości x :

$$(38) \quad \sigma_t = - \frac{(\varrho - \varrho_0) a p}{(1 - \nu^2) \ln \frac{b}{a}} a^2 e^{ax} \sin ax = - \frac{1}{2} \frac{(\varrho - \varrho_0) a p}{\sqrt{J \varrho_0 (1 - \nu^2) \ln \frac{b}{a}}} e^{ax} \sin ax.$$

Krańcowe wartości tych naprężeń zginających skrawki elementarne rury zachodzą przy

$$x = -\frac{\lambda}{4}, \quad -\frac{5}{4}\lambda, \quad -\frac{9}{4}\lambda, \dots$$

zdzążając oczywiście do zera,

$$(39) \quad \sigma_t = \frac{a p}{\varrho \ln \frac{b}{a}} \left(1 - \frac{1}{2} e^{ax} \cos ax \right) - \frac{\nu}{2\sqrt{1 - \nu^2}} \frac{(\varrho - \varrho_0) a p}{\sqrt{J \varrho_0 \ln \frac{b}{a}}} e^{ax} \sin ax,$$

$$(40) \quad \tau = \frac{a p}{4J \varrho_0 \varrho} \left[\frac{1}{3} (\varrho^3 - a^3) - \frac{\varrho_0}{2} (\varrho^2 - a^2) \right] \frac{e^{ax}}{a} (\cos ax + \sin ax).$$

2) Po stronie nieobciążonej, tj. dla dodatnich wartości x :

$$(41) \quad \sigma_t = - \frac{(\varrho - \varrho_0) a p}{(1 - \nu^2) \ln \frac{b}{a}} a^2 e^{ax} \sin ax = - \frac{1}{2} \frac{(\varrho - \varrho_0) a p}{\sqrt{(1 - \nu^2) J \varrho_0 \ln \frac{b}{a}}} e^{-ax} \sin ax,$$

⁷⁾ Pisząc wzór ścisły (36) i nasz przybliżony (34a) w postaci $y = \nu' \frac{a p}{E}$, gdzie ν' oznacza współczynnik liczbowy, znajdujemy (przy $\nu = \frac{1}{2}$):

Dla	$\frac{b}{a} = 1,1$	1,25	1,5	2	2,5
Dokładne	$\nu' = 10,63$	4,615	2,569	1,489	1,091
Przybliżone	$\nu' = 10,49$	4,481	2,466	1,443	1,091
Błąd w %	~ 1	~ 3	~ 4	~ 3	

o wartościach krańcowych dla

$$x = \frac{\lambda}{4}, \quad \frac{5}{4}\lambda, \quad \frac{9}{4}\lambda, \dots$$

zdążających do zera.

$$(42) \quad \sigma_t = \frac{ap}{2\rho \ln \frac{b}{a}} e^{-ax} \cos ax - \frac{\nu(\rho - \rho_0)ap}{2\sqrt{(1-\nu^2)J\rho \ln \frac{b}{a}}} e^{-ax} \sin ax,$$

$$(43) \quad \tau = \frac{ap}{4J\rho_0\rho} \left[\frac{1}{3}(\rho^3 - a^3) - \frac{\rho_0}{2}(\rho^2 - a^2) \right] \frac{e^{-ax}}{a} (\cos ax - \sin ax).$$

Wszystkie powyższe rozwiązania są stosowalne w częściach rury odległych od końców przynajmniej o 2λ . Zajmiemy się zatem szukaniem rozwiązań w częściach bezpośrednio przyległych do końców.

§ 8. Odształcenie lufy wywołane naciskiem pierścienia i ciśnieniem gazów, gdy pocisk znajduje się w bliskości wylotu

Weźmy pod uwagę rurę obciążoną w przekroju odległym o l od wylotu naciskiem pierścieniowym P , a po lewej stronie od tego przekroju ciśnieniem wewnętrznym p , zakładając, że l jest niewielkie w porównaniu do bardzo znacznej długości rury. Środek tego przekroju obieramy za oś x , której dodatni kierunek wskazuje ku wylotowi.

Przemieszczenie y punktów warstwy ρ_0 jest określone dla $x \geq 0$ równaniem różniczkowym

$$(15c) \quad \frac{EJ}{1-\nu^2} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{E \ln \frac{b}{a}}{\rho_0} y = 0,$$

zaś dla $x < 0$ równaniem

$$(15d) \quad \frac{EJ}{1-\nu^2} \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{E \ln \frac{b}{a}}{\rho_0} y = \frac{ap}{\rho_0}.$$

Ogólna całka równania (15c) jest

$$y = A_1 e^{ax} \cos ax + A_2 e^{ax} \sin ax + A_3 e^{-ax} \cos ax + A_4 e^{-ax} \sin ax,$$

zaś całka równania (15d):

$$(45) \quad y = C_1 e^{ax} \cos ax + C_2 e^{ax} \sin ax + C_3 e^{-ax} \cos ax + C_4 e^{-ax} \sin ax + \frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}}.$$

Z warunku krańcowego, że dla $x \rightarrow \infty$ musi y zbiegać do wartości stałej, wynika, że $C_3 = C_4 = 0$. Do wyznaczenia pozostałych 6 stałych całkowania posłużą warunki:

Po stronie dodatnich x :

$$y''|_{x=l} = 0; \quad y'''|_{x=l} = 0;$$

$$y|_{x \rightarrow 0} = y|_{-x \rightarrow 0}, \quad y'|_{x \rightarrow 0} = y'|_{-x \rightarrow 0}, \quad y''|_{x \rightarrow 0} = y''|_{-x \rightarrow 0},$$

$$\left(-\frac{EJ}{1-\nu^2} y''' \right)_{-x \rightarrow 0} - \left(-\frac{EJ}{1-\nu^2} y''' \right)_{x \rightarrow 0} = P.$$

Pierwsze dwa warunki dają:

$$(46a) \quad A_1 e^{al} \sin al - A_2 e^{al} \cos al - A_3 e^{-al} \sin al + A_4 e^{-al} \cos al = 0,$$

$$(46b) \quad A_1 e^{al} (\cos al + \sin al) - A_2 e^{al} (\cos al - \sin al) + \\ - A_3 e^{-al} (\cos al - \sin al) - A_4 e^{-al} (\cos al + \sin al) = 0.$$

Z trzeciego i czwartego wynika

$$(46c) \quad A_1 + A_3 = C_1 + \frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}},$$

$$(46d) \quad A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = C_1 + C_2.$$

Piąty warunek prowadzi do równania:

$$(46e) \quad A_2 - A_4 = C_2,$$

a szósty:

$$(46f) \quad -A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + C_1 - C_2 = \frac{1-\nu^2}{2EJ\alpha^3} P = \frac{2\alpha \varrho_0}{E \ln \frac{b}{a}} P.$$

Z rozwiązania powyższych równań otrzymujemy:

$$(47) \quad \begin{cases} A_1 = e^{-2al} \left\{ \frac{1}{2} [(P) + (p)] (1 - \sin 2al) + \frac{1}{2} (P) (1 + \cos 2al) \right\}, \\ A_2 = e^{-2al} \left\{ -\frac{1}{2} [(P) + (p)] (1 - \cos al) + \frac{1}{2} (P) (1 + \sin 2al) \right\}, \\ A_3 = \frac{1}{2} [(P) + (p)], \\ A_4 = \frac{1}{2} (P), \\ C_1 = A_1 - A_3 + (P), \\ C_2 = A_2 - \frac{1}{2} (P). \end{cases}$$

przy oznaczeniach skracających:

$$(47a) \quad (P) = \frac{\alpha \varrho_0 P}{E \ln \frac{b}{a}}; \quad (p) = \frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}}.$$

W ciągu dalszym można by wyprowadzić wzory dla naprężeń zbyt wiele jednak złożone, aby można myśleć o ich dyskusji. Poprzestaniemy przeto na zbadaniu krańcowego przypadku, gdy $l \rightarrow 0$, tj. gdy w bardzo długiej lufie pierścień pocisku zbliża się do wylotu. Wtedy współczynniki

$$A_1 \rightarrow \frac{3}{2}(P) + \frac{1}{2}(p); \quad A_2 \rightarrow \frac{1}{2}(P),$$

a po stronie wylotu jest

$$(44a) \quad y = \frac{3(P) + (p)}{2} e^{ax} \cos ax + \frac{(P)}{2} e^{ax} \sin ax + \\ + \frac{(P) + (p)}{2} e^{-ax} \cos ax + \frac{(P)}{2} e^{-ax} \sin ax$$

ważne oczywiście tylko dla bardzo małych x , czyli

$$(48) \quad y|_{x \rightarrow 0} = 2(P) + (p) = \frac{2a \rho_0 P}{E \ln \frac{b}{a}} + \frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}}.$$

W drugim przypadku krańcowym, kiedy $l \rightarrow \infty$, znajdujemy w początku współrzędnych, zgodnie z rozwiązaniami § 4 i 7,

$$(49) \quad y|_{x \rightarrow 0} = \frac{a \rho_0 P}{2E \ln \frac{a}{b}} + \frac{ap}{2E \ln \frac{b}{a}}.$$

A zatem, w miarę zbliżania się pocisku do wylotu, rośnie wpływ ciśnienia na rozszerzenie (sprężyste) lufy dwukrotnie, a wpływ nacisku pierścienia czterokrotnie (oczywiście w przekroju poprzecznym, przechodzącym przez pierścień pocisku).

Tutaj nasuwają się refleksje na temat stosowanego dawniej powszechnie zgrubienia ściany lufy przy wylocie. Otóż wynik powyższy nie popiera bynajmniej tego zgrubienia, jakby się na pozór wydawało. Albowiem nacisk P pierścienia nie jest wielkością stałą niezależną od odkształceń lufy. Nacisk ten musi maleć wraz ze zmniejszeniem odporności lufy na odkształcenia sprężyste (zależność tę zbadamy ilościowo w § 12 i § 13); maleje on nadto ze zbliżeniem się do wylotu (przy założeniu cylindrycznego wnętrza rury), ponieważ grubość pierścienia zmniejsza się wskutek jego rosnących odkształceń plastycznych. Zgrubienie jest zatem zbędne ze stanowiska obliczeń wytrzymałościowych, a nawet może być szkodliwe i niebezpieczne, dławiąc ruch pocisku bezpośrednio przed jego wyleceniem z lufy.

Obliczymy jeszcze naprężenie na końcu lufy bezpośrednio przed wyjściem z niej pierścienia pociskowego. Z pominięciem siły podłużnej N musi tam być oczywiście $\sigma_t = 0$. To samo wypada również ze wzoru (10) po wstawieniu za y'' wartości obliczonej z (44a) przy $x \rightarrow 0$. Wzór (11a) daje dla σ_t przy $x \rightarrow 0$:

$$(48a) \quad \sigma_t = \frac{E}{\varrho} [2(P) + (p)] = \frac{1}{\varrho} \frac{2a \varrho_0 P + ap}{\ln \frac{b}{a}} = \frac{a}{\varrho} \frac{2a P_a + p}{\ln \frac{b}{a}}.$$

Dla siły poprzecznej podłużnych skrawków lufy otrzymujemy z wzoru (37) po wstawieniu wartości $(y''')_{x \rightarrow 0}$ według (44a), $Q = 0$, jak być powinno. Natomiast według (45) dla $-x \rightarrow 0$ znajdujemy $Q = P$. Wartość ta odpowiada przekrojowi, sąsiadującemu z pierścieniem po jego drugiej stronie. A zatem stosownie do wzoru (13)

$$(48b) \quad \tau = \frac{P}{J \varrho} \left[\frac{1}{3} (b^3 - a^3) - \frac{\varrho_0}{2} (b^2 - a^2) \right].$$

Miejsca niebezpiecznego wypadu szukać w pobliżu warstwy ϱ_0 . W samej warstwie jest

$$(48c) \quad \tau_0 = (\tau)_{\varrho = \varrho_0} = \frac{3}{2} \frac{P_a}{g} \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{g}{r}}{1 - \frac{1}{144} \left(\frac{g}{r}\right)^4} \left[1 - \frac{1}{18} \left(\frac{g}{r}\right)^2 + \frac{1}{1296} \left(\frac{g}{r}\right)^4 \right],$$

albo z wielkim przybliżeniem, gdy $g \ll r$

$$(48d) \quad \tau_0 = \frac{3}{2} \frac{a P_a}{g r} \left[1 - \frac{1}{18} \left(\frac{g}{r}\right)^2 + \frac{5}{648} \left(\frac{g}{r}\right)^4 \right].$$

Wyteżenie materiału w tym miejscu określi wzór:

$$\sigma_{red}^2 = \sigma_t^2 + 3\tau_0^2.$$

§ 9. Odkształcenia lufy przy położeniach początkowych pocisku

Poszukamy teraz rozwiązania w przypadku, gdy pocisk znajduje się stosunkowo daleko od wylotu, a blisko zamknięcia lufy. Przyjmiemy przy tym, podobnie jak w rozdz. § 8 po stronie zamka równomierne ciśnienie p kG/cm² na długości l , a nadto równomierny nacisk pierścienia P kG/cm pomijając na razie inne siły dodatkowe.

Całki ogólne równań różniczkowych (15c) i (15d) przybiorą postać

$$(50) \quad y = A_1 e^{-ax} \cos ax + A_2 e^{-ax} \sin ax$$

dla części wylotowej, uważanej za bardzo długą, czyli dla $x > 0$, oraz

$$(51) \quad y = C_1 e^{ax} \cos ax + C_2 e^{ax} \sin ax + C_3 e^{-ax} \cos ax + C_4 e^{-ax} \sin ax + (p) \text{ } ^8)$$

dla $x < 0$, przy czym jak powyżej

$$x = \sqrt[4]{\frac{(1-p^2) \ln \frac{b}{a}}{4 \rho_0 J}}, \quad (p) = \frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}}.$$

Do wyznaczenia stałych całkowania A_i i C_i mamy teraz następujące pierwsze cztery warunki krańcowe:

$$(I) \quad y|_{x \rightarrow 0} = y|_{-x \rightarrow 0}; \quad (II) \quad y'|_{x \rightarrow 0} = y'|_{-x \rightarrow 0};$$

$$(III) \quad y''|_{x \rightarrow 0} = y''|_{-x \rightarrow 0};$$

$$(IV) \quad \left(-\frac{EJ}{1-p^2} y''' \right)_{-x \rightarrow 0} - \left(-\frac{EJ}{1-p^2} y''' \right)_{x \rightarrow 0} = P.$$

Pozostają jeszcze dwa warunki od strony zamkniętej. Jeden z nich można napisać w prostej postaci bez wątpienia dostatecznie przybliżonej

$$(V) \quad y|_{-x=l} = 0,$$

czyli pomijając zwiększenie średnicy masywnej części zamkowej pod wpływem sił rozciągających ją promieniowo, drugi zaś z przybliżeniem nieco mniejszym można by napisać w postaci

$$(VI) \quad y'|_{-x=l} = 0.$$

Ze względu jednak na inne zastosowania wyników przyjmujemy, że lufa jest zamknięta płytą sztywnie z nią połączoną o grubości h . Płyta jest na wolnej powierzchni kołowej w promieniu a obciążona ciśnieniem p , a dokoła utwierdzona sprężystościę wskutek połączenia z rurą. Z teorii płyt

⁸⁾ Dla ułatwienia kontroli dalszych wzorów zestawiamy kolejne 4 pochodne funkcji (51):

$$y' = a[(C_1 e^{ax} + C_4 e^{-ax})(\cos ax - \sin ax) + (C_2 e^{ax} - C_3 e^{-ax})(\cos ax + \sin ax)]$$

$$y'' = 2a^2[-C_1 e^{ax} \sin ax + C_2 e^{ax} \cos ax + C_3 e^{-ax} \sin ax - C_4 e^{-ax} \cos ax]$$

$$y''' = 2a^3[(-C_1 e^{ax} + C_4 e^{-ax})(\cos ax + \sin ax) + (C_2 e^{ax} + C_3 e^{-ax})(\cos ax - \sin ax)]$$

$$y^{IV} = -4a^4[C_1 e^{ax} \cos ax + C_2 e^{ax} \sin ax + C_3 e^{-ax} \cos ax + C_4 e^{-ax} \sin ax].$$

wiadomo, że wygięcie w płyty okrągłej w tych warunkach mierzone dodatnio na zewnątrz określa równanie

$$(52) \quad w = K(a^2 - \varrho^2) - \frac{(a^4 - \varrho^4)p}{64B_1}.$$

Tutaj oznacza B_1 sztywność zginania płyty, odniesioną do jednostki szerokości przekroju, która się wyraża wzorem:

$$(52a) \quad B_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

K zaś jest stałą zależną od stopnia utwierdzenia na obwodzie płyty⁹⁾.

Jest to siódma z rzędu niewiadoma obok sześciu stałych całkowania w równaniach (50) i (51). Zamiast (VI) napiszemy teraz dwa warunki następujące:

$$(VIa) \quad y'|_{-x=l} = \frac{dw}{d\varrho}\Big|_{\varrho=a},$$

$$(VII) \quad \left(\frac{EJ}{1-\nu^2} y''\right)_{-x=1} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2w}{d\varrho^2} + \frac{\nu}{\varrho} \frac{dw}{d\varrho}\right)_{\varrho=a}.$$

Pierwszy z tych warunków (VIa) wyraża, że kąty obrotu elementu obwodowego płyty są równe kątom obrotu elementów przyległego przekroju rury; drugi zaś, że momenty zginające brzeg płyty są równe momentom zginającym w elementach przyległego przekroju rury¹⁰⁾.

Po wstawieniu wartości z (50) i (51) znajdujemy następujące równania do wyznaczenia stałych:

$$(Ia) \quad A_1 = C_1 + C_3 + (p)$$

$$(IIa) \quad -A_1 + A_2 = C_1 + C_2 - C_3 + C_4$$

$$(IIIa) \quad -A_2 = C_2 - C_4$$

$$(IVa) \quad -C_1 + C_2 + C_3 + C_4 - A_1 - A_2 = -2(P)$$

$$(Va) \quad C_1 e^{-al} \cos al - C_2 e^{-al} \sin al + C_3 e^{al} \cos al - C_4 e^{al} \sin al + (p) = 0$$

⁹⁾ Ta stała przybiera następujące wartości szczególne:

$K_0 = \frac{3+\nu}{1+\nu} \frac{a^2 p}{32B_1}$ przy swobodnym podparciu środka brzegu (o promieniu a),

$K_\infty = \frac{a^2 p}{32B_1}$ przy doskonałym utwierdzeniu tegoż brzegu.

¹⁰⁾ Te warunki są widocznie nieściśle, gdyż nie uwzględniają sztywności części pierścieniowatej łączącej rurę z płytą zamykającą. Dokładniejsze badanie w § 11.

$$(VIa) \quad (C_1 e^{-al} + C_4 e^{al})(\cos al + \sin al) + \\ + (C_2 e^{-al} - C_3 e^{al})(\cos al - \sin al) = \frac{a^3 p}{16B_1 \alpha} - \frac{2Ka}{\alpha},$$

$$(VIIa) \quad C_1 e^{-al} \sin al + C_2 e^{-al} \cos al - C_3 e^{al} \sin al - \\ - C_4 e^{al} \cos al = \frac{h^3}{12J \alpha^2} \left[(3 + \nu) \frac{a^2 p}{32B_1} - (1 + \nu) K \right].$$

Z 4 pierwszych równań można wyrazić 4 niewiadome A_1, A_2, C_1, C_2 przez C_3 i C_4 :

$$(53) \quad \begin{cases} A_1 = C_3 + \frac{1}{2} [(P) + (p)] \\ A_2 = C_4 + \frac{1}{2} (P) \\ C_1 = \frac{1}{2} [(P) - (p)] \\ C_2 = -\frac{1}{2} (P). \end{cases}$$

Rugowanie K z VIa i VIIa daje:

$$(VI, VII) \quad k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_3 + k_4 C_4 + k_0 = 0$$

przy oznaczeniach

$$(53a) \quad \begin{cases} \vartheta = \frac{24Jaa}{(1+\nu)h^3}; & k_0 = \frac{1}{1+\nu} \frac{a^3 p}{8B_1 \alpha} = \frac{3}{2} (1-\nu) \frac{a^3 p}{Eh^3 \alpha} \\ k_1 = e^{-al} [\cos al + (1-\vartheta) \sin al] \\ k_2 = e^{-al} [(1-\vartheta) \cos al - \sin al] \\ k_3 = e^{al} [(1+\vartheta) \sin al - \cos al] \\ k_4 = e^{al} [(1+\vartheta) \cos al + \sin al]. \end{cases}$$

Teraz należy równania (Va) i (VI, VII), tj.

$$C_1 e^{-al} \cos al - C_2 e^{-al} \sin al + C_3 e^{al} \cos al - C_4 e^{al} \sin al = -(p) \\ k_1 C_1 + k_2 C_2 + k_3 C_3 + k_4 C_4 = -k_0$$

rozwiązać względem C_3 i C_4 po wstawieniu w nich za C_1 i C_2 wartości z (53).

Po różnych przekształceniach i uproszczeniach otrzymujemy:

$$(54) \quad \begin{cases} C_1' = \frac{1}{2} [(P) - (p)] = \frac{a \varrho_0 P}{2E \ln \frac{b}{a}} - \frac{ap}{2E \ln \frac{b}{a}} \\ C_2' = -\frac{1}{2} (P) = -\frac{a \varrho_0 P}{2E \ln \frac{b}{a}} \end{cases}$$

$$(55) \quad C_3 = C_3' + C_3'', \quad C_4 = C_4' + C_4'',$$

przy czym

$$(55a) \quad \left\{ \begin{aligned} C_3' &= -\frac{(P)}{2} \frac{2 + (1 + \vartheta) \sin 2al - (1 - \vartheta) \cos 2al}{(1 + \vartheta) e^{2al}} \\ C_3'' &= -\frac{2[(1 + \vartheta) \cos al + \sin al] e^{al} (p)}{(1 + \vartheta) e^{2al}} \frac{(p)}{2} + \\ &\quad + \frac{1 + \vartheta \cos 2al + \sin 2al (p)}{(1 + \vartheta) e^{2al}} - \frac{k_0 e^{al} \sin al}{(1 + \vartheta) e^{2al}} \\ C_4' &= -\frac{(P)}{2} \frac{(1 + \vartheta) \cos 2al + (1 - \vartheta) \sin 2al}{(1 + \vartheta) e^{2al}} \\ C_4'' &= \frac{2[(1 + \vartheta) \sin al - \cos al] e^{al} (p)}{(1 + \vartheta) e^{2al}} \frac{(p)}{2} + \\ &\quad + \frac{1 - \vartheta \sin 2al + \cos 2al (p)}{(1 + \vartheta) e^{2al}} - \frac{k_0 e^{al} \cos al}{(1 + \vartheta) e^{2al}} \end{aligned} \right.$$

$$(56) \quad A_1 = C_3 + \frac{1}{2}[(P) + (p)]; \quad A_2 = C_4 + \frac{1}{2}(P).$$

Wreszcie z równania (VIa):

$$(57) \quad K = \frac{3(1 - \nu^2)}{8} \frac{p a^2}{E h^3} - \frac{\alpha}{2a} [(C_1 e^{-al} + C_4 e^{al}) \times \\ \times (\cos al + \sin al) + (C_2 e^{-al} - C_3 e^{al}) (\cos al - \sin al)].$$

Znalezione wartości stałych całkowania pozwalają obliczyć naprężenia i odkształcenia w każdym miejscu rury i płyty zamykającej ją. Niestety wzory są jeszcze bardziej złożone, aniżeli w przypadku rozpatrywanym w § 8. Znacznego uproszczenia można się spodziewać w przypadku bardzo wielkiego l .

§ 10. Odkształcenie tylnej zamkniętej części lufy, gdy pocisk znajduje się dość daleko od zamka i od wylotu

Szukając wartości odkształceń w pobliżu zamknięcia rury, przenosimy tam początek współrzędnych, kładąc

$$x = \xi - l.$$

Wtedy równanie (51) przybierze postać:

$$(51a) \quad y = H_1 e^{a\xi} \cos a\xi + H_2 e^{a\xi} \sin a\xi + H_3 e^{-a\xi} \cos a\xi + H_4 e^{-a\xi} \sin a\xi + (p),$$

przy czym

$$(51b) \quad \left\{ \begin{aligned} H_1 &= C_1 e^{-al} \cos al - C_2 e^{-al} \sin al \\ H_2 &= C_1 e^{-al} \sin al + C_2 e^{-al} \cos al \\ H_3 &= C_3 e^{al} \cos al - C_4 e^{al} \sin al \\ H_4 &= C_3 e^{al} \sin al + C_4 e^{al} \cos al. \end{aligned} \right.$$

Gdy $l \rightarrow \infty$, to H_1 i H_2 stają się zerami, zaś

$$(51e) \quad \begin{cases} H_3 = -(p) = -\frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}}, \\ H_4 = -\frac{1}{1+\vartheta} \left(\frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}} + k_0 \right) = -\frac{1}{1+\vartheta} \frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}} \left[1 + \frac{3(1-\nu)}{2} \frac{a^2}{h^3 \alpha} \ln \frac{b}{a} \right], \end{cases}$$

przy czym, jak powyżej

$$\vartheta = \frac{24Ja\alpha}{(1+\nu)h^3}.$$

A zatem w przypadku długiej rury pod ciśnieniem wewnętrznym p , zamkniętej dnem o grubości h , mamy dla przemieszczenia y punktów ϱ w zależności od odległości x od dna równanie:

$$(58) \quad y = \frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}} (1 - e^{-\alpha x} \cos \alpha x - \beta e^{-\alpha x} \sin \alpha x),$$

przy czym

$$\beta = \frac{1 + k_0 \frac{E \ln \frac{b}{a}}{pa}}{1 + \vartheta}; \quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}}{4\rho_0 J}}.$$

Jeżeli dno jest bardzo sztywne, to β staje się bliskie 1.

Wygięcie dna przedstawia powtórzone poniżej równanie (52) z wartością stałej K , dla której znajdujemy z (57) wyrażenie:

$$(59a) \quad K = \frac{3}{8} (1 - \nu^2) \frac{pa^2}{Eh^3} + \frac{a}{2a} \frac{1}{1+\vartheta} \left(k_0 - \vartheta \frac{pa}{E \ln \frac{b}{a}} \right)$$

albo

$$(59b) \quad K = \frac{3}{8} (1 - \nu^2) \frac{pa^2}{Eh^3} \left[1 - \frac{2}{(1+\nu)(1+\vartheta)} \left[8 \sqrt{\frac{J}{(1-\nu^2)\alpha^2 \rho_0 \ln \frac{b}{a}}} - 1 \right] \right]$$

$$(52) \quad w = K(a^2 - \varrho^2) - \frac{3}{16} \frac{(1-\nu^2)p}{Eh^3} (a^4 - \varrho^4).$$

Naprężenia w ścianie rury określają teraz według (10a) i (11a) wzory:

$$(60) \quad \sigma_l = -\frac{2a^2(\varrho - \varrho_0)p}{(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}} (\beta \cos \alpha x - \sin \alpha x) e^{-\alpha x},$$

$$(61) \quad \sigma_t = \frac{ap}{r \ln \frac{b}{a}} \left\{ \frac{r}{\rho} [1 - e^{-ax}(\cos ax + \beta \sin ax)] + \right. \\ \left. - \frac{2\nu}{(1-\nu^2)} \alpha^2 r (\rho - \rho_0) e^{-ax}(\beta \cos ax - \sin ax) \right\},$$

$$(62) \quad \tau = \frac{ap}{2\alpha \rho_0 \rho J} \left[\frac{1}{3}(b^3 - \rho^3) - \frac{\rho_0}{2}(b^2 - \rho^2) \right] \times \\ \times e^{-ax}[(\beta + 1) \cos ax + (\beta - 1) \sin ax].$$

Należy pamiętać, że wzór (60) nie uwzględnia naprężeń uwarunkowanych silami rozciągającymi rurę wzdłuż.

Naprężenia w płycie dennej obliczymy przy pomocy znanych wzorów teorii płyt okrągłych, a mianowicie:

Naprężenie normalne od zgięcia elementu promieniowego płyty we włóknie odległym o z od warstwy obojętnej:

$$(63 \rho) \quad \sigma_\rho = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 w}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dw}{d\rho} \right),$$

a naprężenie normalne od zgięcia w kierunku obwodowym:

$$(63 \pi) \quad \sigma_\pi = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} + \nu \frac{d^2 w}{d\rho^2} \right).$$

A zatem stosownie do (52) otrzymamy:

$$(64) \quad \begin{cases} \sigma_\rho = \left(\frac{2KE}{1-\nu} - \frac{9+3\nu}{4} \frac{p \rho^2}{h^3} \right) z, \\ \sigma_\pi = \left(\frac{2KE}{1-\nu} - \frac{3+9\nu}{4} \frac{p \rho^2}{h^3} \right) z. \end{cases}$$

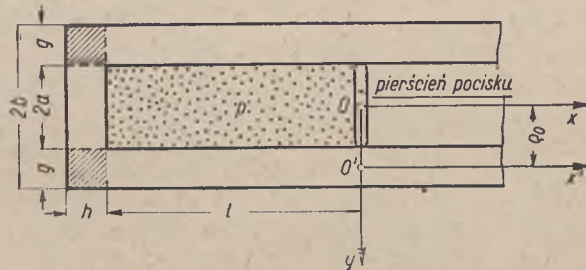
§ 11. Odkształcenie lufy w pobliżu zamka z dokładniejszym uwzględnieniem sztywności grubej płyty zamykającej

Przypadek omawiany w § 9 został tam rozwiązany z pominięciem oporu sztywności w tej części dna, która stanowi przedłużenie rury (zakreskowana na rys. 5). Dlatego w warunku VII przyjęto, że wartość promieniowych momentów zginających płyty dokoła przekroju walcowego o promieniu a , uważanego za jej brzeg, jest równa momentom zgięcia skrawków rury w przekroju przylegającym do dna. W rzeczywistości momenty te nie są w ogóle równe, albowiem zakreskowane przekroje prostokątne części nieuwzględnionej o kształcie pierścienia obracają się o kąt

$$\Delta\psi = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{-x=0} = \left(\frac{dw}{d\rho} \right)_{\rho=a},$$

jeżeli pominiemy stosunkowo bardzo nieznaczne odkształcenia samego przekroju prostokątnego o polu gh . Obrót zaś odpowiednich wycinków elementarnych pierścienia, stanowiących przedłużenia skrawków rury, wymaga stosownych momentów skręcających pierścieni. Ich wielkość jest widocznie równa różnicy wyżej wymienionych momentów zgięcia od strony dna i od strony rury.

Przybliżoną teorię odkształcenia takiego pierścienia pod wpływem momentów skręcających, rozmieszczonych równomiernie dokoła pierście-



Rys. 5. Schemat rury zamkniętej z jednej strony dnem, z drugiej zaś pierścieniem wiódczym i dnem pocisku, poddanej działaniu ciśnienia wewnętrznego p

nia, jak w naszym przypadku, podałem w pracy pt. „Osobliwe zgięcie pierścienia“ (Przegląd Techniczny, 1930 r.). Według tej teorii wyraża się zależność momentu skręcającego od kąta $\Delta\psi$ w naszym przypadku równaniem:

$$(65) \quad \bar{M} = \frac{Eh^3}{12} \ln \frac{b}{a} \Delta\psi.$$

Tutaj oznacza \bar{M} moment działający na element pierścienia wycięty kątem środkowym $d\varphi$, podzielony przez ten kąt (czyli wartość momentu przypadająca na radian). Odpowiedni moment na brzegu rury \bar{M}_1 określi równanie:

$$(66) \quad \bar{M}_1 = -\frac{EJ}{1-\nu^2} \varrho_0(y'')_{-x=l},$$

zaś moment na brzegu rury:

$$(67) \quad \bar{M}_2 = -\frac{Eah^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2w}{d\varrho^2} + \frac{\nu}{\varrho} \frac{dw}{d\varrho} \right)_{\varrho=a}.$$

A zatem warunek (VII) przyjmie postać dokładniejszą

$$\bar{M}_2 - \bar{M}_1 = \bar{M},$$

czyli

$$(VIIb) \quad \frac{EJ \varrho_0}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{-x=l} - \frac{Ea h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2 w}{d\varrho^2} + \frac{\nu}{\varrho} \frac{dw}{d\varrho} \right)_{\varrho=a} =$$

$$= \frac{Eh^3}{12} \ln \frac{b}{a} \left(\frac{dy}{dx} \right)_{-x=l} = \frac{Eh^3}{12} \ln \frac{b}{a} \left(\frac{dw}{d\varrho} \right)_{\varrho=a}.$$

Spośród równań warunkowych (Ia) do (VIIa) w § 9 zmieni się tylko ostatnie, tj. (VIIa), które stosownie do (VIIb) napiszemy w postaci:

$$(VIIc) \quad \frac{Ea h^3}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{(3+\nu)a^2 p}{16B_1} - 2(1+\nu)K \right] + \frac{Eh^3}{12} \ln \frac{b}{a} \left(\frac{a^3 p}{16B_1} - 2Ka \right) =$$

$$= \frac{EJ \varrho_0}{1-\nu^2} 2a^2 (C_1 e^{-al} \sin al + C_2 e^{-al} \cos al - C_3 e^{al} \sin al - C_4 e^{al} \cos al).$$

Wyrugowawszy K z (VIIa) i (VIIc) otrzymamy równanie, różniące się od (VI, VII) tylko wartościami parametrów ϑ i k_0 , które należy zastąpić następującymi:

$$(68) \quad \vartheta_1 = \vartheta \frac{\varrho_0}{a} \frac{1}{1 + (1-\nu) \ln \frac{b}{a}} = \frac{24J a \varrho_0}{h^3 \left[1 + \nu + (1-\nu^2) \ln \frac{b}{a} \right]},$$

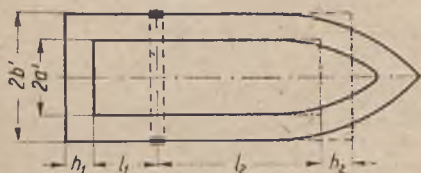
$$(69) \quad k_{01} = \frac{k_0}{1 + (1-\nu) \ln \frac{b}{a}} = \frac{3}{2} (1-\nu) \frac{p a^3}{E h^3 a} \frac{1}{1 + (1-\nu) \ln \frac{b}{a}}.$$

W ten sposób można by od razu napisać według (55), (55a) (56) i (57) nowe wzory jeszcze dokładniejsze. Podobnie we wzorach § 10 wystarczy zastąpić ϑ przez ϑ_1 i k_0 przez k_{01} ażeby otrzymać wzory, uwzględniające sztywność zewnętrznego pierścienia dna. Przy tym ulegną zmianie wzory na H_4 (drugi z (51), (58), (58a), (59a) w pierwszej postaci, (52) wskutek zmiany K , (60) do (62) wskutek zmiany β i (64) z powodu K).

§ 12. Odkształcenie walcowej skorupy pocisku z uwzględnieniem sztywności den

Nacisk pierścienia wiodącego pocisku na wewnętrzną powierzchnię lufy i odpowiednia mu reakcja na zewnętrzną powierzchnię skorupy pocisku mają wartość zależną nie tylko od nadmiaru początkowego zewnętrzej średnicy pierścienia w stosunku do kalibru lufy, ale także od podatności sprężystej lufy i pocisku. Odkształcalność sprężysta lufy pod wpływem nacisku P określiliśmy już szeregiem wzorów teoretycznych w § 4 do § 11. Pozostaje jeszcze zbadać odkształcalność pocisku. Walcowa na znacznej długości skorupa pocisku jest na jednym końcu

zamknięta dnem stanowiącym płaską kołową płytę, a na drugim przechodzi w kopułę szpiczastą, której odkształcalność nader trudno ująć teoretycznie. Tę trudność omiemy, zastępując kopułę płytą pomyślaną



Rys. 6. Schemat ilustrujący zastąpienie ostrołuku (kopuły) pocisku płytą płaską

w stosownym miejscu tak, aby przez to nie zmieniły się momenty zginające odpowiedni brzeg walcowej części skorupy. Tak zmodyfikowany pocisk (rys. 6) pozostaje przed opuszczeniem lufy pod działaniem sił następujących:

1. Ciśnienie p gazów prochowych na część o długości $l_1 + h_1$ poza pierścieniem wiodącym.
2. Nacisk pierścienia P_1 odniesiony do jednostki obwodu warstwy obojętnej ściany pocisku o promieniu ϱ_0 .
3. Siły D'ALEMBERTA określone przyśpieszeniem ruchu postępowego i prędkością kątową pocisku.
4. Tarcie pierścienia o lufę.

Zważywszy, że tak opory bezwładności jak i tarcie mogą mieć tylko stosunkowo mały wpływ na odkształcalność skorupy pocisku w naszych warunkach, porzucimy na uwzględnieniu tylko p i P_1 . Licząc odległości x od płaszczyzny pierścienia dodatnio w kierunku ruchu pocisku¹¹⁾, napiszemy równania zgięcia elementarnych skrawków ściany walcowej w postaci:

$$(70) \quad \frac{EJ}{1-\nu^2} \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{E}{\varrho_0} \ln \frac{b}{a} y = 0 \quad (\text{dla } x > 0),$$

$$(71) \quad \frac{EJ}{1-\nu^2} \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{E}{\varrho_0} \ln \frac{b}{a} y = -\frac{bp}{\varrho_0} \quad (\text{dla } x < 0).$$

Ogólne całki tych równań, tj.

$$(72) \quad y = A_1 e^{ax} \cos ax + A_2 e^{ax} \sin ax + A_3 e^{-ax} \cos ax + A_4 e^{-ax} \sin ax \quad (x > 0)$$

$$(73) \quad y = C_1 e^{ax} \cos ax + C_2 e^{ax} \sin ax + C_3 e^{-ax} \cos ax + C_4 e^{-ax} \sin ax - \frac{bp}{E \ln \frac{b}{a}}, \quad (x < 0)$$

zawierają 8 stałych. Razem z 2 stałymi K_1 i K_2 płyt dennych mamy 10 niewiadomych (patrz § 11), które należy wyznaczyć z następujących 10 warunków krańcowych

$$(I) \quad y|_{x \rightarrow 0} = y|_{-x \rightarrow 0}; \quad (II) \quad y'|_{x \rightarrow 0} = y'|_{-x \rightarrow 0};$$

$$(III) \quad y''|_{x \rightarrow 0} = y''|_{-x \rightarrow 0};$$

¹¹⁾ Dodatkowo y jak powyżej odpowiada oddaleniu warstwy obojętnej skrawków elementarnych od osi geometrycznej pocisku (rury).

$$(IV) \quad \frac{EJ}{1-\nu^2} y''''|_{x=0} - \frac{EJ}{1-\nu^2} y''''|_{x=l_1} = -P_1;$$

$$(V) \quad y|_{x=l_1} = 0; \quad (VI) \quad y|_{x=l_2} = 0;$$

$$(VII) \quad y'|_{x=l_1} = \frac{dw}{d\rho} \Big|_{\rho=a}; \quad (VIII) \quad y'|_{x=l_2} = -\frac{dw_2}{d\rho} \Big|_{\rho=a};$$

$$(IX) \quad \frac{EJ \rho_0}{1-\nu^2} (y'')_{-x=l_1} - \frac{E a h_1^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2 w_1}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dw_1}{d\rho} \right)_{\rho=a} + \frac{E h_1^3}{12} \ln \frac{b}{a} \left(\frac{dw}{d\rho} \right)_{\rho=a} = 0;$$

$$(X) \quad -\frac{EJ \rho_0}{1-\nu^2} (y'')_{x=l_2} - \frac{E a h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{d^2 w_2}{d\rho^2} + \frac{\nu}{\rho} \frac{dw_2}{d\rho} \right)_{\rho=a} + \frac{E h_2^3}{12} \ln \frac{b}{a} \left(\frac{dw_2}{d\rho} \right)_{\rho=a} = 0.$$

Po podstawieniu wartości z (72) i (73), oraz z równań ugięcia obu den w postaci

$$w_1 = -K_1(a^2 - \rho^2) + (a^4 - \rho^4) \frac{P}{64B_1},$$

$$B_1 = \frac{E h_1^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$w_2 = -K_2(a^2 - \rho^2),$$

$$B_2 = \frac{E h_2^3}{12(1-\nu^2)}$$

otrzymujemy następujące równania warunkowe:

$$(I') \quad A_1 + A_3 - C_1 - C_3 + [p] = 0; \quad [p] = \frac{b p}{E \ln \frac{b}{a}}$$

$$(II') \quad A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = C_1 + C_2 - C_3 + C_4,$$

$$(III') \quad A_2 - A_4 = C_2 - C_4,$$

$$(IV') \quad A_1 - A_2 - A_3 - A_4 = C_1 - C_2 - C_3 - C_4 + 2(P),$$

$$(V') \quad C_1 e^{-al_1} \cos al_1 - C_2 e^{-al_1} \sin al_1 + C_3 e^{al_1} \cos al_1 - C_4 e^{al_1} \sin al_1 = [p],$$

$$(VI') \quad A_1 e^{al_2} \cos al_2 + A_2 e^{al_2} \sin al_2 + A_3 e^{-al_2} \cos al_2 + A_4 e^{-al_2} \sin al_2 = 0,$$

$$(VII') \quad C_1 e^{-al_1} (\cos al_1 - \sin al_1) + C_2 e^{-al_1} (\cos al_1 - \sin al_1) + \\ - C_3 e^{al_1} (\cos al_1 - \sin al_1) + C_4 e^{al_1} (\cos al_1 + \sin al_1) = \frac{1}{\alpha} \left(2Ka - \frac{a^3 p}{16B_1} \right),$$

$$(VIII') \quad A_1 e^{al_2} (\cos al_2 - \sin al_2) + A_2 e^{al_2} (\cos al_2 + \sin al_2) + \\ - A_3 e^{-al_2} (\cos al_2 + \sin al_2) + A_4 e^{-al_2} (\cos al_2 - \sin al_2) = -\frac{2K_2 a}{\alpha},$$

$$(IX') \quad \frac{EJ \varrho_0}{1-\nu^2} 2\alpha^2 (C_1 e^{-\alpha l_1} \sin \alpha l_1 + C_2 e^{-\alpha l_1} \cos \alpha l_1 - C_3 e^{\alpha l_1} \sin \alpha l_1 - C_4 e^{\alpha l_1} \cos \alpha l_1) + \\ - \frac{Ea h_1^3}{12(1-\nu^2)} \left[-(3+\nu) \frac{\alpha^2 p}{16B_1} + 2(1+\nu) K_1 \right] = \frac{E h_1^3}{12} \ln \frac{b}{a} \left(2K_1 a - \frac{\alpha^3 p}{16B_1} \right),$$

$$(X') \quad - \frac{EJ \varrho_0}{1-\nu^2} 2\alpha^2 (-A_1 e^{\alpha l_2} \sin \alpha l_2 + A_2 e^{\alpha l_2} \cos \alpha l_2 + \\ + A_3 e^{-\alpha l_2} \sin \alpha l_2 - A_4 e^{-\alpha l_2} \cos \alpha l_2) - \frac{Ea h_2^3}{12(1-\nu^2)} 2(1+\nu) K_2 = \frac{E h_2^3}{12} \ln \frac{b}{a} 2K_2 a.$$

Z pierwszych czterech równań łatwo wyrazić $C_1 \dots C_4$ przez $A_1 \dots A_4$ wzorami:

$$(74) \quad \begin{cases} C_1 = A_1 - \frac{1}{2}(P) + \frac{1}{2}[p]; & C_2 = A_2 + \frac{1}{2}(P); \\ C_3 = A_3 + \frac{1}{2}(P) + \frac{1}{2}[p]; & C_4 = A_4 + \frac{1}{2}(P). \end{cases}$$

Z równań IX' i X' znajdujemy:

$$(75) \quad 2\alpha K_1 = \frac{3+\nu+(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}}{1+\nu+(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}} \frac{\alpha^3 p}{16B_1} + \frac{24\alpha^2 \varrho_0 J}{h_1^3 \left[1+\nu+(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a} \right]} \times \\ \times (C_1 e^{-\alpha l_1} \sin \alpha l_1 + C_2 e^{-\alpha l_1} \cos \alpha l_1 - C_3 e^{\alpha l_1} \sin \alpha l_1 - C_4 e^{\alpha l_1} \cos \alpha l_1),$$

$$(76) \quad 2\alpha K_2 = \frac{24\alpha^2 \varrho_0 J}{h_2^3 \left[1+\nu+(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a} \right]} \times \\ \times (A_1 e^{\alpha l_2} \sin \alpha l_2 - A_2 e^{\alpha l_2} \cos \alpha l_2 - A_3 e^{-\alpha l_2} \sin \alpha l_2 + A_4 e^{-\alpha l_2} \cos \alpha l_2).$$

Po wstawieniu tych wyrażeń w równania VII i VIII otrzymamy:

$$VII'' \quad k'_1 e^{-\alpha l_1} C_1 + k'_2 e^{-\alpha l_1} C_2 + k'_3 e^{\alpha l_1} C_3 + k'_4 e^{\alpha l_1} C_4 = k_{02}.$$

$$VIII'' \quad k''_1 e^{\alpha l_2} A_1 + k''_2 e^{\alpha l_2} A_2 + k''_3 e^{-\alpha l_2} A_3 + k''_4 e^{-\alpha l_2} A_4 = 0$$

przy oznaczeniach skracających:

$$k'_1 = \cos \alpha l_1 + (1 - \vartheta_2) \sin \alpha l_1; \quad k'_1 = \cos \alpha l_2 - (1 - \vartheta_3) \sin \alpha l_2;$$

$$k'_2 = (1 - \vartheta_2) \cos \alpha l_1 - \sin \alpha l_1; \quad k'_2 = (1 - \vartheta_3) \cos \alpha l_2 + \sin \alpha l_2;$$

$$k'_3 = -\cos \alpha l_1 + (1 + \vartheta_2) \sin \alpha l_1; \quad k'_3 = -\cos \alpha l_2 - (1 + \vartheta_3) \sin \alpha l_2;$$

$$k'_4 = (1 + \vartheta_2) \cos \alpha l_1 + \sin \alpha l_1; \quad k'_4 = (1 + \vartheta_3) \cos \alpha l_2 - \sin \alpha l_2;$$

$$k_{02} = \frac{3}{2} \frac{\alpha^3 p}{Ea h_1^3} \frac{1-\nu}{1+(1-\nu) \ln \frac{b}{a}},$$

$$\vartheta_2 h_1^3 = \vartheta_3 h_2^3 = \frac{24J a \varrho_0}{1+\nu+(1-\nu^2) \ln \frac{b}{a}}.$$

Z uwzględnieniem (74) znajdujemy teraz z V', VI', VII'', VIII'' następujące 4 równania do wyznaczenia $A_1 \dots A_4$:

$$(78) \quad \begin{cases} A_1 e^{-a l_1} \cos a l_1 - A_2 e^{-a l_1} \sin a l_1 + A_3 e^{a l_1} \cos a l_1 - A_4 e^{a l_1} \sin a l_1 = F \\ A_1 e^{-a l_1} k'_1 + A_2 e^{-a l_1} k'_2 + A_3 e^{a l_1} k'_3 + A_4 e^{a l_1} k'_4 = F' \\ A_1 e^{a l_2} \cos a l_2 + A_2 e^{a l_2} \sin a l_2 + A_3 e^{-a l_2} \cos a l_2 + A_4 e^{-a l_2} \sin a l_2 = 0 \\ A_1 e^{a l_2} k''_1 + A_2 e^{a l_2} k''_2 + A_3 e^{-a l_2} k''_3 + A_4 e^{-a l_2} k''_4 = 0. \end{cases}$$

Wielkości F i F' określają przy tym równania:

$$F = \frac{1}{2} \{ (P) - [p] \} e^{-a l_1} \cos a l_1 + \frac{1}{2} (P) e^{-a l_1} \sin a l_1 + \\ - \frac{1}{2} \{ (P) + [p] \} e^{a l_1} \cos a l_1 + \frac{1}{2} (P) e^{a l_1} \sin a l_1 + [p].$$

$$F' = \frac{1}{2} \{ (P) - [p] \} e^{-a l_1} k'_1 - \frac{1}{2} (P) e^{-a l_1} k'_2 - \frac{1}{2} \{ (P) + [p] \} e^{a l_1} k'_3 - \frac{1}{2} (P) e^{a l_1} k'_4 + k_{02}.$$

Ogólne rozwiązanie układu równań (78) nie ma widoków powodzenia praktycznego. Wykonamy je przeto tylko przy założeniu uproszczonym, że $l_2 \geq 2\lambda$, wobec czego można w rachunku przyjąć $l_2 \rightarrow \infty$. Wtedy $A_1 = A_2 = 0$, a równania (78) sprowadzają się do dwu pierwszych, z których obliczamy (uwzględniając 74)

$$(79) \quad \begin{cases} C_3 = A_3 + \frac{1}{2} (P) + \frac{1}{2} [p] = \frac{1}{e^{2a l_1} (1 + \vartheta_2)} \times \\ \times \left[\frac{(P) - [p]}{2} (1 + \sin 2a l_1 + \vartheta_2 \cos 2a l_1) + \right. \\ \left. + \frac{(P)}{2} (1 - \cos 2a l_1 + \vartheta_2 \sin 2a l_1) + e^{a l_1} ([p] k'_4 + k_{02} \sin a l_1) \right], \\ C_4 = A_4 + \frac{(P)}{2} = \frac{1}{e^{2a l_1} (1 + \vartheta_2)} \cdot \left[\frac{(P) - [p]}{2} (1 + \cos 2a l_1 - \vartheta_2 \sin 2a l_1) + \right. \\ \left. - \frac{(P)}{2} (1 - \sin 2a l_1 - \vartheta_2 \cos 2a l_1) + e^{a l_1} (k_{02} \cos a l_1 - [p] k'_3) \right]. \end{cases}$$

§ 13. Zależność nacisku pierścienia od jego grubości oraz odkształcalności lufy i pocisku

Powyższe wyniki pozwalają już obliczyć wartość ugięcia skorupy pocisku pod pierścieniem $f' = (y)_{x=0}$. Określa ją widocznie stała A_3 . Mamy więc:

$$(80) \quad f' = - \frac{(P) + [p]}{2} + \frac{1}{e^{2a l_1} (1 + \vartheta_2)} \left[\frac{(P) - [p]}{2} (1 + \sin 2a l_1 + \vartheta_2 \cos 2a l_1) + \right. \\ \left. + \frac{(P)}{2} (1 - \cos 2a l_1 + \vartheta_2 \sin 2a l_1) + e^{a l_1} ([p] k'_4 + k_{02} \sin a l_1) \right].$$

Ze względu na widoki ważnych zastosowań tego wzoru, zestawimy znaczenia wszystkich wchodzących weń wielkości wprowadzając teraz odróżnienie wymiarów części pocisku od odpowiednich wymiarów lufy przez kreskowanie, np.:

a i b wewnętrzny i zewnętrzny promień lufy
 a' i b' " " " " pocisku itd.
 Stosownie do tego jest we wzorze (80)

$$\alpha' = \sqrt[4]{\frac{(1 - \nu'^2) \ln \frac{b'}{a'}}{4 \rho'_0 J'}}$$

$$\rho'_0 = \frac{2 b'^3 - a'^3}{3 b'^2 - a'^2} = r' + \frac{1}{12} \frac{g'^2}{r'}$$

$$g' = b' - a', \quad r' = \frac{1}{2}(a' + b'), \quad J' = \frac{g'^3 r'^2 - \frac{1}{12} g'^2}{12 r'^2 + \frac{1}{12} g'^2}$$

l'_1 — odległością środka pierścienia od wewnętrznej powierzchni dna pocisku;

$$\vartheta'_2 = \frac{24 J' a' \rho'_0}{h_1^3 \left[1 + \nu' + (1 - \nu'^2) \ln \frac{b'}{a'} \right]}$$

$$(P)' = \frac{a' \rho'_0 P'}{E' \ln \frac{b'}{a'}} = \frac{a' b' P_{b'}}{E' \ln \frac{b'}{a'}}, \quad [p]' = \frac{b' p}{E' \ln \frac{b'}{a'}}$$

Ponieważ P' oznacza nacisk pierścienia na skorupę pocisku odniesiony do jednostki obwodu o promieniu ρ'_0 , przeto nacisk odniesiony do jednostki obwodu o promieniu b' , który oznaczymy przez $P_{b'}$ będzie określony równaniem

$$\rho'_0 P' = b' P_{b'}$$

Podobnie napiszemy dla lufy, ze względu na to, że nacisk pierścienia działa bezpośrednio na obwód wewnętrzny o promieniu a :

$$(80a) \quad \rho_0 P = a P_a$$

Oznaczywszy przez g_0 tzw. „zacisk“, tj. przewyżkę grubości pierścienia w stanie ściśniętym ponad pierwotny luz $a - b'$ między wewnętrzną powierzchnią lufy a zewnętrzną powierzchnią pocisku, napiszemy związek między naciskami $P_{b'}$ a P_a w tłumaczącej się jasno postaci:

$$(80b) \quad P_{b'} = P_a \frac{a}{a - g_0}$$

Pozostają jeszcze oznaczenia:

$$k'_4 = (1 + \vartheta'_2) \cos \alpha' l'_1 + \sin \alpha' l'_1,$$

$$k'_{02} = \frac{3}{2} \frac{\alpha'^3 p}{E' \alpha' h_1^3} \frac{1 - \nu'}{1 + (1 - \nu') \ln \frac{b'}{a'}}.$$

Odpowiednią obliczonemu f' wartość f ugięcia lufy znajdziemy (przy założeniu znacznej odległości pierścienia od obu końców lufy), dodając ugięcie określone w § 4 wzorem (17a) dla $x=0$, tj.

$$\frac{P a g_0}{2E \ln \frac{b}{a}},$$

do ugięcia $\frac{p a}{2E \ln \frac{b}{a}}$ obliczonego według wzoru (34) lub (35) dla $x \rightarrow 0$.

A zatem

$$(81) \quad f = \frac{a a P_a + a p}{2E \ln \frac{b}{a}}.$$

Teraz dopiero można przystąpić do wyznaczenia teoretycznego (przy założeniach szczególnych odpowiadających stosowanym wzorom) wartości P_a , wzgl. P_b , z danej wartości g_0 na podstawie oczywistego równania

$$(82) \quad f - f' = g_0.$$

Po wstawieniu wyrażeń dla f i f' , wprowadzeniu nowych oznaczeń skracających i licznych przekształceniach znajdujemy:

$$(83) \quad P_a = P_b \frac{a - g}{a} = \frac{2(c + g_0) E \ln \frac{b}{a} - a p}{a a + \omega \frac{\alpha' a b'}{a - g_0} \frac{E \ln \frac{b}{a}}{E' \ln \frac{b'}{a'}}}.$$

Przy czym

$$(83c) \quad c = \frac{p b' e^{-\alpha' l'_1}}{E' \ln \frac{b'}{a'}} \left[\cos \alpha' l'_1 + \frac{\sin \alpha' l'_1}{1 + \vartheta'_2} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\alpha'^3 \ln \frac{b'}{a'}}{b' \alpha' h_1^3} \times \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \frac{1 - \nu'}{1 + (1 - \nu') \ln \frac{b'}{a'}} \right) - \left(\cos 2\alpha' l'_1 + \frac{1 - \cos 2\alpha' l'_1 + \sin 2\alpha' l'_1}{1 + \vartheta'_2} \right) \frac{e^{-\alpha' l'_1}}{2} \right],$$

$$(83\omega) \quad \omega = 1 - (\cos 2\alpha' l'_1 + \sin 2\alpha' l'_1) e^{-2\alpha' l'_1} - \frac{2(1 - \cos 2\alpha' l'_1) e^{-2\alpha' l'_1}}{1 + \vartheta'_2},$$

Ważność uzyskanego wzoru jest widocznie ograniczona warunkiem, ażeby obliczona zeń wartość P_a była ≥ 0 . Krańcowa wartość $P_a=0$ odpowiada zaciskowi $g_0=\bar{g}_0$ wynikającemu z równania

$$2(c + \bar{g}_0)E \ln \frac{b}{a} - ap = 0.$$

Stąd

$$(84) \quad \bar{g}_0 = \frac{ap}{2E \ln \frac{b}{a}} - c.$$

Działanie rozpychające pierścienia pojawia się wtedy, gdy jego zacisk g_0 jest większy od wartości \bar{g}_0 ¹²⁾. Napisawszy więc

$$g_0 = \bar{g}_0 + \delta$$

otrzymamy nową postać wzoru (83):

$$(83d) \quad P_a = \frac{2\delta E \ln \frac{b}{a}}{\alpha a + \omega \frac{\alpha' a b'}{a - \bar{g}_0 - \delta} \frac{E}{E'} \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b'}{a'}}}.$$

Jak widać, P_a rośnie ze znacznym przybliżeniem proporcjonalnie do δ , a więc wzrasta silniej, aniżeli „caeteris paribus“ zacisk.

Jak już zaznaczono, wzory (83) i (83d) stosuje się w przypadkach, gdy pierścień pocisku znajduje się dość daleko od obu końców lufy. Przy zbliżaniu się pierścienia do wylotu lufy (nie zgrubionej na końcu) musi P_a zmniejszać się. Wynika to istotnie ze wzoru teoretycznego, który wyprowadzimy w ten sam sposób, co powyższy, podstawiając za f wartość obliczoną ze wzoru (48), tj.

$$f_0 = \frac{2a e_0 P}{E \ln \frac{b}{a}} + \frac{ap}{E \ln \frac{b}{a}}.$$

Ta wartość bowiem odpowiada położeniu pierścienia u wylotu lufy. Mamy więc:

$$(85) \quad P_a = P_b' \frac{a - g_0}{a} = \frac{1}{2} \frac{(c + g_0) E \ln \frac{b}{a} - ap}{\alpha a + \omega \frac{\alpha' a b'}{a - g_0} \frac{E}{E'} \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b'}{a}}}$$

z wartościami c i ω według wzoru (83c) i (83ω).

¹²⁾ Skoro np. $a=5$ cm, $b=9$ cm, $p=3000$ kg/cm², $E=2,1 \cdot 10^6$ kg/cm², to $g_0 < 0,07$ mm. Nic dziwnego zatem, że z reguły występuje działanie rozpychające pierścienia.

Do ważności wzoru potrzeba (i wystarcza), ażeby g_0 było większe od

$$\bar{g}_0 = \frac{ap}{E \ln b/a} - c^{13}.$$

Oznaczywszy znowu przez $\delta = g_0 - \bar{g}_0$ przewyżkę zacisku ponad jego dolną granicę \bar{g}_0 (niezbędną do uszczelnienia), napiszemy wzór (85) w postaci

$$(85a) \quad P_a = \frac{1}{2} \frac{\delta \cdot E \ln \frac{b}{a}}{aa + \omega \frac{a'ab'}{a-g_0-\delta} \frac{E}{E'} \cdot \frac{\ln \frac{b}{a}}{\ln \frac{b'}{a'}}}.$$

Ze wzorów (83d) i (85a) wynika, że nacisk pierścienia P_a , odpowiadający danej wartości δ przewyżki zacisku pierścienia g_0 ponad jego wartość \bar{g}_0 niezbędną do uszczelnienia w środkowych częściach lufy (cylindrycznej), jest około 4 razy większy od nacisku tegoż pierścienia tuż przy wylocie.

Jeszcze większą wartość nacisku otrzymalibyśmy na początku lufy. Przy pomocy rozwiązania z § 9 można by wyprowadzić odpowiedni wzór dla P_a , co prawda jeszcze bardziej złożony od poprzednich. Zaniechamy tego na razie, uzyskawszy już we wzorach (83) do (85a) ważne wskazówki dla konstruktora dział i pocisków.

§ 14. Kołowo-symetryczne drgania rury

Drgania rury jako układu sprężystego mogą być różnorodne. Traktowana jako pręt sprężysty (o przekroju stałym) może rura wykonywać *drgania podłużne, giętne i skrętne*. Ujmują je teoretycznie znane równania różniczkowe, które wraz z rozwiązaniami szczegółowymi można znaleźć w licznych książkach i pracach¹⁴⁾.

Tutaj zajmiemy się tylko właściwymi rurze *drganiami kołowo-symetrycznymi*, jakie powstają np. w lufie działowej wskutek ruchu pocisku (niezależnie od drgań innego rodzaju). Drgania takie przejawiają się poprzecznym pofałdowaniem ściany rury. Ich równanie różniczkowe napiszemy łatwo, uzupełniając równanie zgięcia (8) lub (9) podłużnych elementarnych skrawków rury, w myśl zasady D'ALEMBERTA wyrazem od-

¹³⁾ Przy danych liczbowych poprzedniego odsyłacza otrzymalibyśmy teraz \bar{g}_0 około 2 razy większe od \bar{g}_0 .

¹⁴⁾ M. T. HUBER: Zagadnienia drgań w budowie maszyn. Przegl. Techn., 1932.
S. TIMOSZENKO: Schwingungsprobleme der Technik. Berlin, 1932.

powiadającym bezwładności elementu skrawka o długości dx . Taki element ma objętość $gr d\varphi \cdot dx$, a przy gęstości δ' ma masę

$$\delta' gr d\varphi dx.$$

Przy uwzględnieniu samego tylko ruchu postępowego elementu z przyspieszeniem d^2y/dt^2 napiszemy wyrażenie dla siły D'ALEMBERTA w postaci

$$-\delta' gr d\varphi dx \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Dzieląc je przez dx i przez $\varrho_0 d\varphi$ otrzymamy wyraz szukany

$$-\frac{gr}{\varrho_0} \cdot \delta' \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

który należy dołączyć po prawej stronie równania (8) lub (9). Rozpatrując przede wszystkim drgania swobodne i pomijając całki zawierające η i σ_r , otrzymamy równanie różniczkowe tych drgań w postaci:

$$(86) \quad \frac{EJ}{1-\nu^2} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{\nu E g}{1-\nu^2} \left(1 - \frac{r}{\varrho_0} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{E}{\varrho_0} \ln \frac{b}{a} \cdot y + \frac{\delta' gr}{\varrho_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Wszelkie rozwiązania tego równania będą dostatecznie przybliżone pod warunkami następującymi:

1. Krzywizna skrawków elementarnych mierzona wartością $\partial^2 y / \partial x^2$ jest wszędzie dostatecznie mała wobec $1/\varrho_0$.

2. Kąty wygięcia tychże skrawków określone wartością $\partial y / \partial x$ są bardzo małe wobec 1.

3. Grubość ściany rury jest niezbyt wielka w stosunku do promienia wewnętrznego ($g \leq 1,5a$).

Warunki te tkwią już w wyprowadzonych poprzednio równaniach równowagi sprężystej rury; warunek 2 jest nadto zaostrożony zaniedbaniem ruchu obrotowego elementów rury podczas jej falistych drgań kołowo-symetrycznych.

Szczególnie prosty rodzaj drgania zachodzi w przypadku, gdy y jest niezależne od x . Wtedy punkty rury znajdujące się w chwili początkowej na walcach współosiowych pozostają na nich nadal, a same walce doznają okresowej zmiany promienia, określonej oczywiście wielkością y . Ta wielkość spełnia równanie różniczkowe

$$(86a) \quad \frac{E}{\varrho_0} \ln \frac{b}{a} \cdot y + \delta' \cdot \frac{gr}{\varrho_0} \frac{d^2 y}{dt^2} = 0,$$

którego rozwiązaniem jest jak wiadomo:

$$(87) \quad y = y_0 \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi_0 \right),$$

przy czym okres drgania

$$(87a) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta' gr}{E \ln \frac{b}{a}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta' (b^2 - a^2)}{E [\ln (b^2) - \ln (a^2)]}}$$

Nadto oznacza y_0 amplitudę drgania, a φ_0 kąt fazy, którego wielkość jest zależna od obioru chwili początkowej. Nasuwa się przeto przypuszczenie, że w przypadku ogólniejszym ważności równania (86) będą skrawki podłużne rury wykonywać ruch falowy według równania

$$(88) \quad y = y_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{2\lambda} \right),$$

jeżeli długość 2λ oznacza długość fali. Ta funkcja, jak łatwo się przekonać, może czynić istotnie zadość równaniu różniczkowemu (86), jeżeli między okresem T a długością fali 2λ zachodzi związek

$$(89) \quad \frac{EJ}{1-\nu^2} \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^4 - \frac{\nu E g}{1-\nu^2} \left(1 - \frac{r}{\varrho_0} \right) \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 + \frac{E}{\varrho_0} \ln \frac{b}{a} - \frac{\delta' gr}{\varrho_0} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = 0.$$

Lewa strona bowiem tego równania występuje jako współczynnik wyrażenia $y_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{2\lambda} \right)$ po wstawieniu za y wartości (88) w lewą stronę równania (86).

Wyraziwszy ϱ_0 przez g i r , można (89) napisać w postaci:

$$(89a) \quad \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\delta'} \left[\frac{g^2}{12} \left(1 - \frac{g^2}{r^2} \right) \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^4 - \frac{\nu}{12} \frac{g^2}{r^2} \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^2 + \frac{1-\nu^2}{gr} \ln \frac{b}{a} \right] = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2.$$

Z równania tego widać, że częstość drgania maleje gdy długość fali rośnie, czyli okres T wzrasta z długością fali, osiągając wartość przedstawioną wzorem (87a), gdy $\lambda \rightarrow \infty$. Nawzajem, mniejszym wartościom λ odpowiadają większe częstości, czyli krótsze okresy T . Z powodu powyżej podanych warunków przybliżenia, nie wolno oczywiście stosować wzoru (89) do zbyt małych λ . Nie podobna na razie określić niższej granicy wartości λ , które z dostatecznym przybliżeniem spełniają równanie (89a), ale w każdym razie można przypuścić, że leży ona poniżej wartości λ_0 , wynikającej z przyrównania do zera wyrażenia

$$\frac{g^2}{12} \left(1 - \frac{1}{12} \frac{g^2}{r^2} \right) \left(\frac{\pi}{\lambda_0} \right)^4 - \frac{\nu}{12} \frac{g^2}{r^2} \left(\frac{\pi}{\lambda_0} \right)^2$$

znajdującego się między []. Stąd

$$(90) \quad \lambda_0 = \pi r \sqrt{\frac{1}{\nu} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{g}{r} \right)^2 \right]} = 5,44 r \sqrt{1 - \frac{1}{12} \left(\frac{g}{r} \right)^2} \quad (\text{dla } \nu = \frac{1}{2}).$$

Przy tej długości półfali jest okres T taki sam, jak przy $\lambda = \infty$, a więc określa go wzór (87a). Nie trudno dostrzec że dla $\lambda_0 < \lambda < \infty$ wypada okres T nieco dłuższy od wyznaczonego wzorem (87a). Najdłuższy otrzymujemy, jak łatwo sprawdzić, dla $\lambda = \lambda_0 \sqrt{2}$ z równania:

$$(91) \quad \frac{E}{1-\nu^2} \frac{1}{\delta'} \left[\frac{1-\nu^2}{gr} \ln \frac{b}{a} - \frac{\nu^2 g^2}{48 r^4 \left(1 - \frac{1}{12} \frac{g^2}{r^2}\right)} \right] = \left(\frac{2\pi}{T_{max}} \right)^2.$$

A zatem

$$(91a) \quad T_{max} = 2\pi \sqrt{\frac{gr\delta'}{E \left[\ln \frac{b}{a} - \frac{\nu^2}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{g}{r}\right)^3 \frac{1}{12 - g^2/r^2} \right]}}.$$

Obliczmy np. wartość T_{max} przy następujących danych:

$$a = 5 \text{ cm}; \quad b = 10 \text{ cm}, \quad \text{a więc} \quad g = 5, \quad r = 7,5;$$

$$\delta' \text{ (dla stali)} = \frac{7,85}{10^3 \cdot 981} = 8,005 \cdot 10^{-6}, \quad E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ kG/cm}^2,$$

$$\nu = 1/3; \quad \text{a zatem}$$

$$\ln b/a = 0,69315,$$

$$\frac{\nu^2}{4(1-\nu^2)} \left(\frac{g}{r}\right)^3 \frac{1}{12 - g^2/r^2} = 0,00080.$$

Widać z tego, jak mało zmienia się T w przedziale długości półfali między λ_0 a ∞ . W naszym przypadku otrzymujemy:

$$T_{max} = 2\pi \sqrt{\frac{5 \cdot 7,5 \cdot 8,002 \cdot 10^{-6}}{2,1 \cdot 10^6 (0,69315 - 0,00080)}} = 0,0000903 = \frac{1}{11080} \text{ sek.}$$

podczas gdy z wzoru (87a) wypada

$$T = \frac{1}{11085} \text{ sek.}$$

Dla rury tego samego kalibru o ścianie cieńszej staje się T jeszcze mniejsze. Dla większych kalibrów T wzrasta, ale np. dla luf najcięższych dział nie schodzi poniżej kilku dziesięciotysięcznych sekundy.

Wynik ten jest praktycznie nader ważny, gdyż dowodzi, że traktowanie „statyczne“ zagadnienia odkształceń lufy podczas strzału daje wystarczającą dokładność obliczeń, zważywszy, że działanie gazów prochowych na lufę trwa setki razy dłużej od powyższego okresu drgania. Rzecz ma się tutaj podobnie jak z belką mostową, po której jedzie ciężar. Jeżeli, jak to najczęściej bywa, czas jazdy na rozpiętości belki jest długi w porównaniu do okresu jej własnych drgań giętnych, to ugięcia belki obliczone statycznie są bardzo zbliżone do rzeczywistych, co sprawdzono doświadczalnie już niejednokrotnie. Zaznaczyć wypada, że kwestię drgań luf działowych, wzbudzonych podczas strzału, omawia dość obszernie na

podstawie prac francuskich (F. GOSSOT i R. LIOUVILLE w *Mém. de l'Art. de la Marine* z r. 1897) załącznik 4 „Wytrzymałości luf działowych“ K. Jakowskiego, przytoczonej w § 1 niniejszej pracy.

§ 15. Czyste drgania promieniowe rury według teorii ścisłej

Pożądanego sprawdzenia wyników niniejszej pracy, opartych na teorii przybliżonej ze stanowiska matematycznej teorii sprężystości, należy się spodziewać przede wszystkim od badań doświadczalnych. Nie prędko bowiem doczekamy się odpowiednich rozwiązań „ścisłych“ dla rur grubościennych, jakkolwiek dla rur cienkościennych posiadamy już bogaty zasób takich rozwiązań. Dla rury grubościennej poza rozwiązaniem LAMÉGO znane mi jest tylko ścisłe rozwiązanie zadania drgań kołowo-symetrycznych w najprostszym przypadku, określonym powyżej w przybliżeniu równaniem różniczkowym (86a). Można je znaleźć między innymi w cennej rosyjskiej monografii A. N. KRYŁOWA, której tytuł francuski brzmi: *Sur quelques équations différentielles de la physique mathématique ayant des applications dans les questions techniques* (1913, Bull. de l'Académie Navale Nicolas, II fasc.).

Oдноśne równanie różniczkowe wyprowadza się najprościej tą samą drogą, co w zadaniu statycznym rury lub wirującego krążka, rozpatrując siły działające na element o postaci przedstawionej na rys. 2. W przypadku równowagi (przy odkształceniu kołowo-symetrycznym) bez sił masowych dochodzimy do równania ¹⁵⁾

$$\left(\sigma_r + \rho \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} - \sigma_t\right) d\rho d\varphi \cdot 1 = 0.$$

W przypadku ruchu przybędą jeszcze dwa wyrazy po lewej stronie, a mianowicie zewnętrzna siła masowa (o kierunku promienia) określona wyrazem

$$\delta' F(\rho, t) \rho d\rho d\varphi \cdot 1$$

oraz siła D'ALEMBERTA:

$$- \delta' \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \rho d\rho d\varphi \cdot 1.$$

Tutaj ma funkcja $F(\rho, t)$ znaczenie zewnętrznej siły masowej odniesionej do jednostki masy, a $\partial^2 y / \partial t^2$ określa widocznie przyspieszenie ruchu po promieniu. A zatem równanie ruchu któregośkolwiek elementu rury o objętości $\rho d\rho d\varphi \cdot 1$ ma postać

$$\left(\sigma_r + \rho \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} - \sigma_t\right) d\rho d\varphi + F(\rho, t) \delta' \rho d\rho d\varphi - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta' \cdot \rho d\rho d\varphi = 0.$$

¹⁵⁾ „Kurs wytrzymałości materiałów“ prof. S. TIMOSZENKI przełożony i uzupełniony przez prof. HUBERA. Wyd. II, 1931 r. (*przyp. red.*).

Po wstawieniu wartości σ_r i σ_t wyrażonych przez y i ϱ wzorami

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial y}{\partial \varrho} + \nu \frac{y}{\varrho} \right); \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{y}{\varrho} + \nu \frac{\partial y}{\partial \varrho} \right)$$

i skreśleniu czynnika $d\varrho \cdot d\varphi$ mamy równanie:

$$\frac{E}{1-\nu^2} \left(\varrho \frac{\partial^2 y}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial y}{\partial \varrho} - \frac{y}{\varrho} \right) + F(\varrho, t) \delta' \varrho - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta' \varrho = 0.$$

Podzieliwszy przez ϱ możemy je napisać w postaci:

$$(92) \quad \delta' \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial y}{\partial \varrho} - \frac{y}{\varrho^2} \right) = \delta' \cdot F(\varrho, t).$$

W przypadku drgań swobodnych jest oczywiście wyraz po prawej stronie równy zeru, a więc równanie drgań swobodnych ma postać:

$$(93) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{E}{(1-\nu^2)\delta'} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial y}{\partial \varrho} - \frac{y}{\varrho^2} \right) = 0.$$

Możemy teraz zbadać stosunek, jaki zachodzi między odtworzonym teraz równaniem ścisłym promieniowych drgań rury (można by je także nazywać drganiami oddechowymi), a podanym powyżej równaniem przybliżonym (86a). Otóż w naszym równaniu przybliżonym oznacza y nie funkcję ϱ jak w równaniu ścisłym, lecz przesunięcie warstwy ϱ_0 , którego wartość przyjęto niejako za średnią przesunięć wszystkich warstw. W ten sposób zastąpiono układ sprężysty o nieskończenie wielu stopniach swobody układem o jednym stopniu, podobnie jak w metodzie RAYLEIGHA szukania głównego okresu drgań własnych prętów sprężystych.

W konsekwencji przyjęto zatem w równaniu (93) $\frac{\partial^2 y}{\partial \varrho^2} = 0$; $\frac{\partial y}{\partial \varrho} = 0$, a $\frac{1}{\varrho^2}$ zastąpiono wartością średnią, wynikającą z rozważań w § 2, tj. wartością $\frac{\ln b/a}{gr}$ albo $\frac{\ln(b^2) - \ln(a^2)}{b^2 - a^2}$.

Takie uproszczenie przybliżone równania ścisłego (93) dałoby co prawda równanie

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\ln b/a}{gr \delta'} y = 0$$

różniące się od (86a) obecnością mianownika $1-\nu^2$, atoli wobec stwierdzonego w § 7 wysokiego stopnia przybliżenia równania statycznego

dla $\frac{b}{a} < 2,5$ należy się spodziewać, że i równanie dynamiczne (86a) nie

zyskałoby na dokładności przez wprowadzenie $\frac{E}{1-\nu^2}$ zamiast E .

Wracając teraz do ścisłego równania (93) swobodnych drgań promieniowych rury, zaznaczmy, że rozwiązanie ogólne daje drganie złożone z nieskończenie wielu prostych drgań harmonicznym, których częstotliwości określają równania przestępne między funkcjami BESSELA, niewiadomych. Równanie przybliżone (86a) może tylko posłużyć do znalezienia częstotliwości najmniejszej, czyli najdłuższego okresu, co zresztą dla naszego celu wystarcza.

§ 16. Wyniki rozwiązań przybliżonych. Wnioski ogólne

Według rozwiązań przybliżonych § 4 i § 7 (wzory 17a, 34 i 35) sporządzono rysunki 7, 8 i 9 przy danych następujących:

Kaliber rury $2a=10$ cm;

Grubość ściany $g=b-a=4$ cm;

Ciśnienie gazów $p=3000$ kG/cm²;

Moduł sprężystości stali $E=2,1 \cdot 10^6$ kG/cm²;

Odpowiednia długość głównej półfali odkształcenia $\lambda=12,83$ cm;

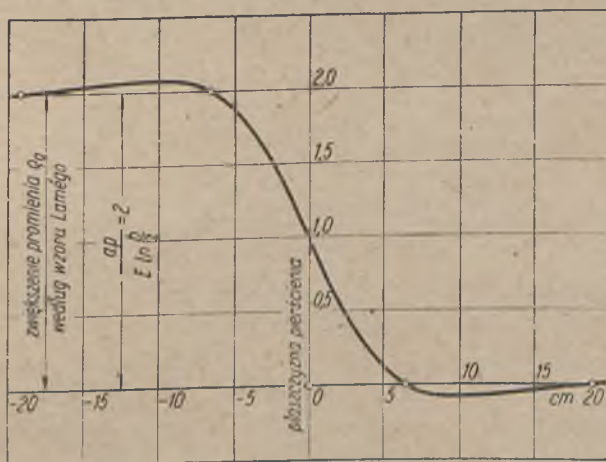
Inne dane umieszczono na rysunkach.

Rysunki te pokazują przebieg odkształcenia w okolicy przekroju dzielącego obie części rury: obciążoną i nieobciążoną oraz zasięg wyraźnych odchyżeń od odkształceń obliczonych wzorem LAMÉGO.

Rozwiązania dokładniejsze według § 7 przyniosłyby tylko całkiem nieznaczne zmiany krzywizny odkształcenia na powyższych rysunkach.

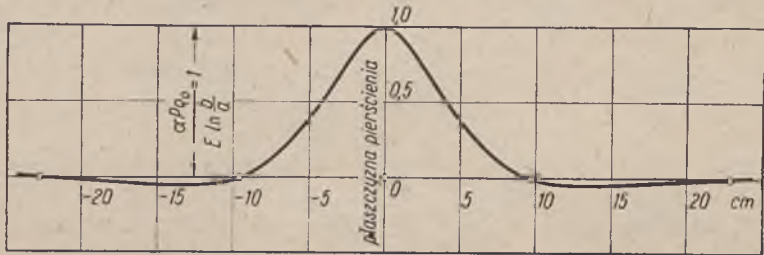
Na zakończenie wypada zaznaczyć, że równania różniczkowe (9), (9a) i (15) mogą stanowić punkt wyjścia wielu jeszcze prac techniczno-naukowych, wyjaśniających kwestie wytrzymałościowe łuf i innych rur

grubościennych pod ciśnieniem. Pominięto tutaj nader ważną sprawę naprężeń termicznych w rurach. Przy kołowo-symetrycznym rozmieszczeniu temperatury nie trudno będzie tą samą drogą zbudować przybliżone równanie różniczkowe dla odkształceń sprężystych wywołanych tym rozmiesz-



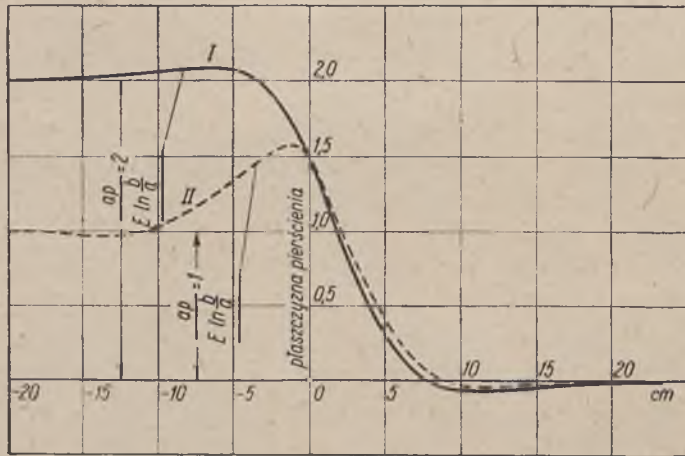
Rys. 7. Wygięcie tworzących rury walcowej pod wpływem samego ciśnienia gazów p z lewej strony pierścienia

czeniu. Szczególny przypadek, gdy temperatura jest funkcją samego tylko promienia ρ w rurze bardzo długiej, da się traktować ściśle podobnie



Rys. 8. Wygięcie tworzących rury walcowej wskutek samego nacisku pierścienia P

jak zadanie LAMÉGO (M. T. HUBER: O naprężeniach wywołanych nierównym ogrzaniem wewnętrznej i zewnętrznej ściany rury. Czas.



Rys. 9. I. Wygięcie tworzących rury walcowej pod wpływem ciśnienia gazów p z lewej strony pierścienia i nacisku tego pierścienia

$$P = \frac{ap}{2a\varrho_0}$$

II. Wygięcie tworzących rury walcowej pod wpływem ciśnienia gazów p z lewej strony pierścienia i nacisku tego pierścienia

$$P = \frac{ap}{a\varrho_0}$$

tzn. przy nacisku dwa razy większym niż w przypadku I.

Tech. Lwów 1906). Powyższą drogę można będzie dojść do rozważań wystarczająco przybliżonych w różnych przypadkach złożonych niedostępnych dla traktowania ścisłego, a więc np. gdy temperatura jest funkcją ρ i x , rura zaś jest krótka lub zamknięta dnem itp.

DZIAŁ XII

SŁOWNICTWO TECHNICZNE

Redaktor naukowy: ADAM TADEUSZ TROSKOLAŃSKI

Asystent naukowy: IRENA STABROWSKA

A. PODSTAWOWE POJĘCIA NAUKOWE

Nauka, wiedza i umiejętność

(Streszczenie, Mechanik 1947 r.)

Czasowniki: *wiedzieć* i *nauczać* są powszechnie zrozumiałe; każdy z nich jest niemal jednoznaczny, a różnica obu pojęć jakie wyrażają jest łatwo uchwytna. Inaczej rzecz się ma z pokrewnymi im rzeczownikami: *wiedza* i *nauka*.

Wyraz *wiedza* używamy w trojakim znaczeniu. Po pierwsze *wiedza* oznacza świadomość lub znajomość rzeczy lub zdarzeń. Po drugie *wiedza* (*L.* cognitio, *ang.* knowledge, *fr.* connaissance, *niem.* Wissen) oznacza indywidualny zasób umysłowy zdobyty nauką lub doświadczeniem (np. człowiek rozległej wiedzy) lub ogół umiejętności znanych społeczeństwu ludzkiemu (np. wiedza ludów pierwotnych). *Wiedza* (*L.* scientia, *ang.* science, *fr.* science, *niem.* Wissenschaft) może oznaczać również pewien zbiór wiadomości uporządkowanych (np. wiedza przyrodnicza, wiedza filozoficzna) i wówczas jest symbolem nauki lub grupy nauk zbliżonych do siebie zakresem treści lub charakterem.

Wyraz *nauka* oznacza w języku polskim nie tylko wiedzę usystematyzowaną, lecz i jej udzielanie. W pierwszym znaczeniu *nauka* (*L.* scientia, *ang.* science, scientific discipline, *fr.* science, discipline scientifique, *niem.* Wissenschaft, wissenschaftliche Disziplin, Lehre) jest zbiorem prawd ogólnych, będących wynikiem poznania, usystematyzowanych i powiązanych z sobą w pewną logiczną całość. W drugim znaczeniu *nauka* jest synonimem *nauczania* (*L.* disciplina, *ang.* teaching, *fr.* enseignement, *niem.* Unterrichten, Lehre).

Gwoli uniknięcia nieporozumień naukę, stanowiącą odrębną gałąź wiedzy, nazywamy również *dyscypliną naukową*.

W pierwszym znaczeniu wyraz *nauka* jest stosowany w nazwach instytucyj, powołanych do pielęgnowania i rozwoju nauk; w tym znaczeniu mówią np. Francuzi „Académie des Sciences“, Niemcy „Akademie der Wissenschaften“, Rosjanie „Akademija Nauk“. U nas wprowadzono nazwę „Akademia Nauk Technicznych“.

Jeżeli jedną z naszych czołowych instytucyj naukowych nazwano „Polską Akademią Umiejętności“¹⁾, to nazwa ta — być może — wyrażała intencje założycieli do objęcia zadaniami PAU obok nauki, także i sztuk. Wyraz *umiejętność* ma bowiem znaczenie obszerniejsze od nauki; obejmuje bowiem nie tylko wytwory umysłu ludzkiego, ale i rąk ludzkich, a więc i rozwój rękodzieł, sztuk plastycznych i całej techniki.

O kilku wyrazach oznaczających pojęcia matematyczne, stosowane często przez techników

(Mechanik Nr 4/5, 1947 r.)

Wynik *mierzenia* jakiegokolwiek wielkości mechanicznej określamy liczbą w połączeniu z *mianem* (nazwą), oznaczającym obraną jednostkę tej wielkości. Mierząc np. masę jakiegoś ciała wyrażamy wynik pomiaru liczbą kilogramów, gramów lub innych umownych jednostek masy. Wielkość pracy mechanicznej zaś wyraża się liczbą jednostek pracy, jednostek złożonych z jednostek siły i jednostek długości, nazwanych w układzie CGS *ergami*, a w układzie technicznym opatrywanych mianem złożonym, np. kilogramometrów. Mówimy wtedy o *określeniu liczbowym* wielkości rozpatrywanej. W czasach ostatnich czyta się lub słyszy często zamiast tego o określeniu „cyfrowym“, co jest bałamucącym czytelnika wyrazem, zapożyczonym bezkrytycznie z nowszego niemieckiego piśmiennictwa technicznego, gdzie zamiast dawnego poprawnego wyrażenia „zahlenmässig“ piszą teraz często „ziffernmässig“, utożsamiając niejako pojęcie liczby (Zahl) z pojęciem cyfry (Ziffer). Jest to błędne tak pod względem etymologicznym, jak i historycznym. Albowiem *liczbą* jest zarówno np. 12, jak 0,356, 11/12, π (ludolfina), e (podstawa logarytmów naturalnych), $\sqrt{3}$ oraz nieskończona mnogość innych; a tymczasem *cyfr* stosowanych powszechnie od wielu stuleci mamy tylko dziesięć. One są wprawdzie zarazem znakami dla dziewięciu początkowych liczb naturalnych (całkowitych) i dla zera, ale wszelkie inne liczby są tylko wyrażone przez odpowiednią ilość cyfr, stanowią więc układy cyfr, nie będąc same cyframi. Takie było od czasów średniowiecza znaczenie wyrazu *cyfra* (*ang.* cipher, *fr.* chiffre, *niem.* Ziffer), pochodzącego od arabskiego sifr, nie ma przeto żadnej podstawy do przypisywania cyfrze także w ogóle znaczenia liczby.

Nieco inaczej ma się rzecz z innym wyrazem stosowanym w znaczeniu liczby, tj. z *ilością*, która powstała podobnie jak liczba z *liczenia* przedmiotów, prowadzącego do odpowiedzi na pytanie: „Ile“? Pojęcie ilości odpo-

¹⁾ Obecnie naczelną instytucją naukową nosi nazwę: Polska Akademia Nauk (*przyp. red.*).

wia dało zrazu pojęciu liczby całkowitej, ale również dobrze można je rozszerzyć na liczby ułamkowe i niewymierne oraz mierzone nimi wielkości tak, jak to w swoim czasie uczynił nasz matematyk WAWRZYŃNIEC ŻMURKO w dziele „Wykład matematyki na podstawie ilości o dowolnych kierunkach“, Lwów 1864. Teraz jednak rozumiemy w matematyce przez „ilość“ raczej tylko liczbę całkowitą, co było zapewne powodem, że dawną niewłaściwą nazwę iloczynu masy i prędkości (mv): „ilość ruchu“, („quantitas motus“ NEWTONA) zastąpiono *pedem*.

Wobec tego można również dobrze mówić o „liczbie“, jak i o „ilości“ sił działających na ciało, zębów w kole zębatym, ogniów w łańcuchu itd., ale raczej należy unikać wyrażen: „ilość masy“, „ilość pracy“ itp., gdyż pomiar tych wielkości przedstawia się w ogóle liczbą niecałkowitą, a mówić zamiast tego o „wielkości“ masy, pracy itp.

Rzeczownik *liczba* pochodzi od czasownika *liczyć* (równoznacznego z przyswojonym od Niemców: „rachować“, które często ma swoisty odcień pod względem znaczenia). Czasownik *liczyć* ma znaczenie ustalone i powszechnie zrozumiałe na całym obszarze ziem naszych, jako wyraz rdzennie polski. Natomiast ważne technicznie czasowniki pochodne *obliczać* i *wyliczać* (pozostawiając na boku „doliczać, odliczać i przeliczać“) są w czasach nowszych niesłusznie traktowane jako synonimy, prawdopodobnie dlatego, że odpowiada im tylko jeden termin w języku francuskim (*calculer*) i rosyjskim (*wyczislat'*). W języku polskim epoki ŚNIADECKICH i dawniejszej *wyliczano* tylko ilość czyichś zalet lub wad, albo... „plag na kobiercu“ itp., *obliczano* natomiast np. wielkość powierzchni figury z jej wymiarów danych, albo np. wielkość (wartość) pracy danej siły na danej drodze, momentu bezwładności ciała o danej postaci i gęstości materiału itp. Zamiast tego mówią także i piszą „wyrachować“, co powstało zapewne pod wpływem niemieckiego „ausrechnen“, podobnie jak „rachunek“ przyswojony w języku polskim od stuleci, tak iż najzawziętsi nasi puryści językowi są bezsilni.

Prawo, twierdzenie, zasada...

(Mechanik, Nr 3, 1951 r.)

W naukach podstawowych dla techniki, jakimi są przede wszystkim nauki matematyczno-przyrodnicze, posługujemy się często nazwami ważnych pojęć ogólnych oderwanych, jak np. teza, twierdzenie, prawo, zasada, hipoteza, postulat, aksjomat, lemmat itd.

Artykuł niniejszy ma na celu ustalenie znaczenia tych pojęć, zwłaszcza, że niektóre z wymienionych terminów są niemal doskonałymi synonimami, a tylko różnią się zakresem stosowności.

Teza jest sąd naukowy, którego prawdziwość staramy się dowieść w toku dalszych rozważań lub też sąd, na którym opieramy dalsze wywody.

Twierdzeniem w naukach matematyczno-fizycznych nazywamy sąd naukowy, oparty na pewnych przesłankach rozumowych lub doświadczalnych; teza staje się twierdzeniem po przeprowadzeniu dowodu bądź to na drodze teoretycznej, bądź to na drodze doświadczalnej.

Twierdzenie odnosi się najczęściej do pewnych konkretnych zagadnień lub zjawisk. Mówimy np. o twierdzeniu PAPPUSA-GULDINA, twierdzeniu PITAGORASA, twierdzeniu CASTIGLIANO, itd.

Natomiast *prawa fizyczne* stanowią twierdzenia o charakterze ogólniejszym, a zatem mogące mieć zastosowanie w wielu dziedzinach fizyki. Powiadamy, iż *prawa przyrody* wyrażają regularne, ogólne cechy w zjawiskach przyrody. Prawo stałego następstwa zjawisk po sobie przeciwstawiamy prawu przyczynowości. Mówimy o prawie EINSTEINA, JOULE'A, KEPLERA, KIRCHHOFFA, OHMA, itd.

W wielu jednakże przypadkach używamy wyrazów *twierdzenie* i *prawo* w odniesieniu do jednych i tych samych sądów naukowych. Mówimy i piszemy o *prawie* OHMA, jakkolwiek wyraz *twierdzenie* byłby może bardziej właściwy na tym miejscu. Mówimy również o *prawie dźwigni*, jakkolwiek wyrażenie *twierdzenie o równowadze momentów na dźwigni* byłoby odpowiedniejsze. Przykładów takich można by przytoczyć sporo.

Podobne zjawisko przenikania zakresu pojęć zachodzi pomiędzy *prawem* i *zasadą*.

Zasadą (*L.* principium) nazywamy prawo stosowalne we wszystkich przypadkach pewnej kategorii zjawisk, tak iż poszczególne prawa wynikają jako wnioski z zasady ogólnej. Tak np. z *zasady prac przygotowanych (wirtualnych)* można wyprowadzić jako wnioski wszelkie szczegółowe *prawa statyki* drogą ścisłego (matematycznego) rozumowania.

W fizyce spotykamy *zasady* rozciągające się na całą przyrodę. Do nich należy *zasada zachowania energii*, nazywana w wielu książkach *prawem zachowania energii*, gdyż obie nazwy są równouprawnione.

Znaczenie równie uniwersalne posiada np. *ogólna zasada względności* fizyki relatywistycznej, sformułowana przez A. EINSTEINA.

Jeszcze jednego prostego przykładu niemal doskonałej równoważności obu terminów dostarcza *prawo* albo *zasada równoległoboku sił* w mechanice klasycznej.

Dawny termin wzięty z łaciny *reguła* (*L.* regula), usuwany teraz na drugi plan, oznaczał zwykle prawo o mniejszym znaczeniu i zakresie. Był używany zwłaszcza w arytmetyce elementarnej stosowanej do zagadnień życia praktycznego, jak np. *reguła spółki* itp. *Reguła* jest przeto przepisem praktycznym (normą praktyczną), mniej lub więcej ściśle

uzasadnionym, na rozwiązanie pewnych prostych zagadnień. Niegdyś nazywano *złotą regułą mechaniki* maszyn to, co teraz traktujemy jako prosty wniosek z zasady pracy i energii, który wyrażony słowami brzmiałby, np. tak: „Gdy siła P uruchamia maszynę dla wykonania pracy polegającej na pokonaniu samego tylko oporu użytkowego Q , to z pominięciem oporów tarcia możemy przy danym Q uczynić P tyle razy mniejszym od Q , ile razy droga punktu maszyny, na której działa P jest większa od drogi punktu zaczepienia oporu użytkowego Q “. Dziś takie wysłowienie trąci nieco anachronizmem i byłoby na miejscu tylko w nauczaniu najbardziej elementarnym.

Inne znaczenie ma spotykane dość często *prawidło*. Mianowicie jest to namiastka prawa stosowana w przypadkach, gdy prawo nie wyraża się twierdzeniem dającym się uzasadnić ściśle, lecz ma charakter przybliżenia.

Zamiast dzisiejszego *twierdzenia* używano, zwłaszcza dawniej (greckiego) *teoremu* lub *teorematu*, co przechowało się np. w języku rosyjskim (teorema) i w głównych językach zachodnio-europejskich.

Lemmat (*L. lemma*) stosowany niemal wyłącznie w matematyce czystej jest twierdzeniem pomocniczym bez znaczenia samoistnego, ale służącym tylko do dowodzenia innych twierdzeń.

Postulat (*L. postulatium*) oznacza najczęściej twierdzenie oczywiste, nie wymagające dowodu; postulat przyjmujemy za podstawę rozumowań, zmierzających do uzasadnienia pewnych twierdzeń. W elementarnym nauczaniu statyki np. można traktować jako postulat znane prawo równowagi dwóch sił działających na jeden punkt. Niekiedy jednak niesłusznie bywają uważane za *postulat* pewne założenia umowne, dogodne w budowie teorii uproszczonych.

Wreszcie *pewnik* stanowi prawdę oczywistą, która sama przez się jest widoczną i nie potrzebuje dowodu. Na tych niewzruszonych prawdach, czyli *pewnikach* wzniesiono wspaniałe gmach matematyki. Z biegiem czasu gdy obok geometrii EUKLIDESA powstały nowe geometrie, oparte na innych założeniach, *pewniki* matematyczne z piedestału niewzruszonych prawd zeszły do roli *założeń podstawowych*, czyli *aksjomatów*, które świetny matematyk francuski HENRI POINCARÉ ochrzcił mianem *umów* (*conventions*).

Materiał czy tworzywo?

(Mechanik Nr 5/6, 1946 r.)

Wiadomo, że *wyrazy* są tylko odpowiednikami fonetycznymi *pojęć*, które zresztą nie zawsze dają się ująć ściśle, zwłaszcza, gdy występują w dwu lub więcej odrębnych gałęziach wiedzy. Dlatego nieraz napotykamy trudności w wysłowieniu definicji, czy to pojęcia rzeczowego (np.

jakiegoś przedmiotu technicznego), czy też pojęcia oderwanego, nazwanego danym wyrazem. Wiadomo nadto, że nazwy zmieniają z biegiem czasu swe znaczenie i nieraz giną, ustępując miejsca nowym, albowiem język jest organizmem żywym i podlega ewolucji pod wpływem warunków bytowania narodu, jego twórców w dziedzinie literatury, nauki i sztuki, oraz pod wpływem języków innych narodów, z którymi utrzymujemy stosunki kulturalne i handlowe. Jest przy tym rzeczą jasną, że dominuje wpływ narodów o kulturze starszej, czym się tłumaczy w językach europejskich wielka ilość terminów, zwłaszcza techniczno-naukowych pochodzenia greckiego i łacińskiego. Do takich należał jeszcze przed ćwierćwieczem termin *material*, *ang.* material, *fr.* matériel, *niem.* Material (a dopiero od I wojny światowej „Werkstoff“); *ros.* материал; *wł.* materiale itd.

Gdy przed paru dziesiątkami lat Komitet Wydawniczy I wydania „Technika“ w Warszawie wprowadził zamiast odwiecznego i w całej Polsce powszechnie zrozumiałego *materiału* termin „tworzywo“, zająłem stanowisko negatywne wobec tej inowacji. Co prawda, nie był to nowotwór, albowiem słyszało się wówczas i czytało często o „tworzywie“ literackim, przez co jednakże rozumiano tylko to, co staje się źródłem powstania dzieła literackiego, a nikomu nie przychodziło do głowy rozszerzenie pojęcia rozumianego pod nazwą „tworzywa“ na materię, z której się wyrabia, sporządza lub buduje części konstrukcyjne wytworów techniki. Zwolennik tworzywa w miejsce „materiału“ rzuci tutaj zapewne uwagę, że zwalczając „tworzywo“ stosuję jednocześnie bez skrupułu wyraz „wytwór“, a więc uznaję wyrazy: „wytwarzać“, „wytwarzanie“, „wytwórnia“ itp. Tak jest! Uznaję je wszystkie, ale zarazem mniemam, że zgodnie z tradycją wiekową naszego języka tworzy np. poeta utwór literacki, architekt tworzy projekt budowli, uczony przyrodnik lub inżynier tworzy teorię..., natomiast wytwórcy wytwarzają *wytwory przemysłowe* z materii, czyli z materiału dostarczonego przez przyrodę, a nie tworzą ich.

A zatem, tworzy się tylko z elementów duchowych, a wytwarza (wyrabia, sporządza, fabrykuje) z elementów materialnych. Przytoczony przykładowo poeta, architekt, inżynier-badacz i uczony należą do *twórców*, podczas gdy *wytwórca* jest udatnym nowotworem oznaczającym dawnego producenta, czyli fabrykanta lub rzemieślnika, wytwarzającego dobra materialne. Jeden i ten sam człowiek może być oczywiście niekiedy wytwórcą i zarazem twórcą, jeżeli opracuje naukowo nową metodę wytwarzania.

Stosowanie wyrazu „tworzywo“ na oznaczenie obu pojęć powyżej określonych jest bezpożytecznym zubożeniem języka, podobnie jak projekt wyrugowania wyrazu „prędkość“ na rzecz „szybkości“ lub odwrotnie.

Określanie, wyznaczanie, ustalanie

(Mechanik Nr 10/11, 1948 r.)

Już niejednokrotnie zwracałem uwagę na przyczyny chwiejności terminologii polskiej, zwłaszcza w naukach technicznych. Jedną z najgłówniejszych jest wpływ języków obcych, który wprawdzie nigdy nie zaniknie zupełnie, ale z którym należy się liczyć we wszystkich dążeniach do ustalenia pojęć kryjących się pod wyrazami polskimi. Trzy wyrazy podane w nagłówku oraz odpowiadające im czasowniki: *określać*, *wyznaczać* i *ustalać*, wyrażają pojęcia pokrewne, a jednak różniące się zasadniczo.

Określanie jest przede wszystkim powszechnie zrozumiałym odpowiednikiem polskim dla terminu filozoficznego łacińskiego *definitio*, spolszczonego już dawno jako *definicja*. W językach obcych odpowiada mu *ang.* definition, *franc.* définition, *niem.* Definition i *ros.* opriedielenje.

Natomiast czasownikowi *wyznaczać* wyrażającemu (między innymi) czynność znalezienia wartości liczbowej pewnej wielkości fizycznej odpowiada *ang.* determine, *franc.* déterminer, *niem.* bestimmen, a tylko w języku rosyjskim znowu opredieliat'. Tu znajdujemy powód, dlaczego polscy inżynierowie lub przyrodnicy znający lepiej pokrewny język rosyjski, niż inne z wymienionych, nie wyznaczają np. niewiadomej z danego równania, lecz „określają“ ją. Ale ci sami autorzy mówią i piszą o *zagadnieniach statycznie wyznaczalnych* lub *niewyznaczalnych*, chociaż w języku rosyjskim czytamy wszędzie „statycznie opredielimyje i nieopredielimyje“.

Z tego wynika, że aby uniknąć niekonsekwencji, należy w polszczyźnie (w tym wypadku) iść raczej za dawną tradycją i odróżniać *określanie* od *wyznaczania*. Tak np. *określamy* pierwiastek równania jako tę wartość niewiadomej, która mu czyni zadość, a *wyznaczamy* ją metodami uzasadnionymi w matematyce; podobnie *określamy* wytrzymałość doraźną materiału jako tę wielkość, którą *wyznaczamy* na podstawie zwykłej próby rozciągania itp.

Innego rodzaju niekonsekwencję znaczeniową spotykamy w zdaniu, pojawiającym się dość często w naszym piśmiennictwie technicznym, jak np. „N... „ustalił“ wzór do obliczenia wielkości... X“ zamiast *podał* albo *znalazł*, *zbudował*, *obmyślił* itp.

Termin *ustalić* (*ang.* establish, *fr.* fixer, *niem.* feststellen, *ros.* ustanowit') ma znaczenie raczej prawodawcze i nadaje się do scharakteryzowania wyniku uchwały lub wyboru, gdy zachodzą różne wypadki możliwe, a nie wyniku myśli badawczej teoretyka-autora. Można więc np. wyrażać się, że ustalono komisyjnie ilość obrabiarek pewnego typu koniecznych do rozpoczęcia produkcji w nowej wytwórni; ustalono potrzebną ilość surowca, paliwa itp.

Własność — właściwość

(Mechanik, Nr 9, 1946 r.)

Wyrazy: *własność* i *właściwość* są prawie synonimami i mają znaczenie bardzo zbliżone do tego co nazywamy także *cechą* (materiału, maszyny lub jakiegokolwiek przedmiotu). Zwyczajowo mówimy o *własności* w pojęciu cechy ogólniejszej lub podstawowej, podczas gdy wyraz *właściwość* stosujemy raczej do cech szczegółowych lub drugorzędnych. Pojęcie *właściwości* możemy zatem uważać za równoznaczne z *własnością szczególną*, *osobliwą* lub *przemijającą*. *Własność* jest nadto terminem o zabarwieniu naukowym, gdy tymczasem *właściwość* ma zabarwienie praktyczne, techniczne. Mówimy więc o takich *własnościach materiałów*, jak gęstość, spójność, sprężystość lub o *własnościach termicznych* (cieplnych), *optycznych*, *elektrycznych* itd. Natomiast połysk metaliczny, chropowatość powierzchni itp. uważamy za przemijające *właściwości* ciał. Podobnie w opisie np. maszyn różnego typu, ale służących temu samemu celowi wymieniamy *właściwości* każdego typu, określając jego cechy dodatnie lub ujemne ze stanowiska technicznego.

Fizyczny — fizykalny

(Mechanik, Nr 9, 1946 r.)

Obydwa przymiotniki przypominają rzeczownik „fizyka“. Jeszcze przed paru dziesiątkami lat mówiło się niemal wyłącznie *fizyczny* w znaczeniu dwojakim. Jedno odpowiadało raczej przymiotnikowi „cielesny“ (np. ćwiczenia cielesne zamiast fizyczne, kultura fizyczna, zamiast kultury cielesnej itp.); drugie zaś odpowiadało przymiotnikowi utworzonemu z rzeczownika „fizyka“ w sposób podobny, w jaki powstał przymiotnik „muzyczny“ z muzyki. Ta dwuznaczność wielce niewygodna skłoniła mnie do propozycji stosowania przymiotnika *fizykalny* zamiast *fizyczny*, jeżeli idzie o samą fizykę. Ideę tę (być może nie nową) poparł gorąco prof. K. TWARDOWSKI, zmarły jeszcze przed wojną wybitny filozof polski i odtąd wprowadziłem ją w moich wykładach i pracach. Przymiotnik *fizykalny* jest zresztą utworzony na wzór innych znanych i uznanych, jak np. kulturalny (kultura), naturalny (natura), strukturalny (struktura) itp. Mówimy zatem *ciało fizyczne*, *własności fizyczne*, lecz *teorie fizykalne*, *równania fizykalne*, *analiza fizykalna zjawisk* itp.

B. W SPRAWIE POLSKIEGO SŁOWNICTWA TECHNICZNEGO

Uwagi w odpowiedzi na artykuł dyskusyjny dra W. KASPEROWICZA „O polskim słownictwie stosowanym“
w nr 1—2 Przeglądu Technicznego z r. 1947)

(Przegląd Techniczny Nr 4, 1947 r.)

Jest rzeczą zrozumiałą, że każdy inżynier o aspiracjach naukowych, podobnie jak każdy tego typu lekarz lub przedstawiciel innych zawodów wymagających przygotowania naukowego, interesuje się żywo słownictwem dziedziny, w której pracuje. Olbrzymi współczesny rozwój nauk przyrodniczych i opartej na nich techniki zmusza do nieustannego wzbogacania słownictwa odnośnego nowymi *terminami* (*nazwami*), które nader rzadko powstają u nas samorzutnie. Najczęściej przyswajamy je z języków narodów przodujących w kulturze, usiłując w miarę możliwości znaleźć odpowiednik rdzennie polski. Że nie jest to rzeczą łatwą, wiedzą wszyscy, którzy brali udział w komitetach redakcyjnych, komisjach słownikowych, a zwłaszcza gdy kształcąc się za granicą próbowali pisać prace naukowe po polsku.

Czyż bowiem warto silić się na spolszczenie terminów takich jak mikroskop, luneta, lupa, telefon, radio, kinematyka, dynamika, histereza, balistyka, energia kinetyczna, potencjał, regulator itp.?

Pojawiali się wprawdzie dawniej ludzie o zamiłowaniach naukowych, którzy w imię miłości języka ojczystego chcieli go wzbogacić (?) „drobnowidzem“, „dalekowidzem“¹⁾ itp., ale ogół zachował się na szczęście odpornie dając tym do zrozumienia purystom takim, że wzięli się do roboty bezpożytecznej, a nawet do pewnego stopnia szkodliwej. Nawet praca słotwórcza naszych uczonych tej miary, co JAN ŚNIADECKI, którego Algebrę i Trygonometrię przetłumaczono w r. 1828 na język niemiecki, nie miała pełnego powodzenia. Przyjął się wprawdzie jego *wyznacznik* zamiast dawniejszego „determinant“, ale jego piękne spolszczenie nazw funkcji goniometrycznych: „wstawa“, „dostawa“, „styczna“, „dotyczna“, „sieczna“, „dosieczna“ zanikają ustępując dawnym łacińskim sinus, cosinus, tangens, cotangens, secans, cosecans.

¹⁾ Zamiast lunety.

Podobnie nie przyjął się umieszczony w I. wydaniu „Technika“ „miarkownik“ zamiast *regulatora*.

W czasach najnowszych można dostrzec pojawienie się mniej lub więcej udanych spolszczeń i tak np. piszą teraz *ciało równokierunkowe* lub *równozwrotne* zamiast „ciało izotropowe“; *ciążenie* zamiast „grawitacja“; *ciągnik* zamiast „traktor“ itd.

Ale i w ogóle mam wątpliwości czy te spolszczenia były naprawdę pożyteczne i potrzebne dla zadowolenia naszej ambicji narodowej, albowiem są to terminy występujące w językach naukowych światowych, mają więc charakter międzynarodowy.

Natomiast bez zastrzeżeń głosuję za usilną dalszą pracą nad zastąpieniem terminów technicznych i rzemieślniczych, wziętych żywcem z języków obcych przez wyrazy rdzennie polskie. Najbardziej zaś razi mnie to, że z powodu snobizmu nawet dobrze piszący autorowie używają wyrazu obcego chociaż znają równoważnik rdzennie polski. Nie ma dnia, żeby się nie czytało o „ekipie“ (sportowej, robotniczej, inżynierskiej itp.) zamiast o *drużynie*. Czyż nikogo nie razi szkaradne brzmienie tego zbędnego barbaryzmu?

Toteż z radością przyjąłem w swoim czasie do wiadomości nazwanie „srubształa“ *imadłem*; „hebla“ (Hobel) *strugiem* itd. Mamy już szereg wcale dobrych opracowań słownictwa polskiego rzemieślniczego, zniszczonego co prawda częściowo w czasie wojny, która na domiar złego zastrzyknęła nam nowe germanizmy — hitlerowskie.

Czeka nas zatem niewątpliwie ciężka praca na tym polu, do której wzywa słusznie artykuł dr K. Jednakże trudno się pogodzić z Jego argumentacją i opinią w paru szczegółach zasadniczych. Już sam tytuł „O polskim słownictwie stosowanym“ może budzić poważne wątpliwości nie tylko u polonistów, których współpracę dr K. wyraźnie odrzuca, ale u każdego inżyniera-naukowca z wyrobionym poczuciem języka.

Przymiotnikowe określenia słownictwa takiego lub innego, jak np. *słownictwo techniczne, matematyczne, chemiczne* itp. są powszechnie zrozumiałe i znane, ale przecież wyraz *słownictwo* nie oznacza gałęzi nauki, którą dzielimy na „czystą“ i „stosowaną“ („pure et appliquée“), przy czym zakres pojęcia przymiotnika „stosowany“ jest szerszy od zakresu pojęcia „techniczny“. A z treści artykułu dr K. wynika, że po prostu użył przymiotnika „stosowany“ zamiast „techniczny“, jak gdyby usiłował za każdą cenę zastąpić wyraz pochodzenia obcego, wyrazem polskim: Niechaj do objaśnienia mojej myśli posłuży znany termin *mechanika stosowana*, która obejmuje według zrozumienia powszechnego w nauce nie tylko *mechanikę techniczną*, ale także *geomechanikę* (jako dział geofizyki) i *mechanikę niebios* (*mécanique céleste*).

Ale to tylko szczegół, co prawda uderzający na wstępie.

Szersze znaczenie ma teza dr K., że „język stosowany nie może liczyć na istotną współpracę polonistów, którzy zresztą dla polonistyki nie znaleźli bardziej polskiego wyrazu“. Tym argumentem przygotowuje Autor wyrażone w artykule poglądy na tworzenie rodzimego słownictwa i jego rozszerzenie zalecając wzorowanie się na językach: „czeskim, jugosłowiańskim, węgierskim i innych“, które „w znacznym stopniu oczyściły nie tylko język literacki i potoczny od zakorzenionych od lat naleciałości obcych“.

Otóż przykłady te są, zdaniem moim (które jak sądzę, nie będzie odosobnione), raczej odstrasżające, albowiem głównym bodźcem do wysiłków w celu dokładnego oczyszczenia języka z wyrazów obcego pochodzenia u narodów powyższych było nie tyle umiłowanie języka ojczystego, ile megalomania narodowa, która w ten naiwny sposób usiłowała zatrzeć ślady wpływu obcych starszych kultur. Pod tym względem daleko mądrzejsi okazali się Rosjanie, którzy nie rugowali i nie rugują obcych wyrazów ze swego przebogatego języka. Wszak np. Niemcy, którzy pod wielu względami prześcignęli na przełomie XIX i XX stulecia starsze kulturą narody romańskie, nie ukryją młodszego wieku swej kultury przez to, że wprowadzili zamiast np. „Diagramm, Dynamik, Kavitation, Material, Kinematik, Viskosität, Volumen...“ nazwy rdzennie niemieckie: „Schaubild, Kraftlehre, Hohlrumbildung, Werkstoff, Bewegungslehre, Zähigkeit, Rauminhalt“ itd.

Nie mówiąc już o szkodach dydaktycznych, jakie często wyrządzają takie zmiany nazw ustalonych wiekowym używaniem na inne zwykle niezupełnie równoznaczne — przesada w oczyszczaniu języka mści się jeszcze tym, że utrudnia młodemu pokoleniu zrozumienie dzieł obcojęzycznych, a więc zacieśnia horyzonty adeptów nauk technicznych.

Toteż nie odurzony megalomanią narodową miłośnik języka ojczystego zachowa roztropny umiar w jego oczyszczaniu, ograniczając się do tępienia wyrazów obcych zbędnych, narzucanych przez dzienniki, powracających emigrantów lub naiwnych snobów, którym wyraz cudzoziemski imponuje. Jakie skutki pociąga za sobą rozmach słowotwórczy i puryfikatorski techników wyłamujących się spod wpływu językoznawców i przedstawicieli nauki czystej, pozwolę sobie przedstawić na dwu przykładach. Pierwszym jest termin określający pracę w jednostce czasu, a więc jeden z podstawowych w teorii maszyn.

Termin ten brzmi w języku angielskim „rate of work“, albo „working power“ w zwykłym skrócie „power“; we francuskim „puissance“; w niemieckim „Arbeitsleistung“ lub w skrócie „Leistung“; w ros. „moszczność“; we włoskim „potenza“. Ale Niemcy w drugiej połowie wieku XIX stosowali wyraz „Arbeitseffekt“, co spolszczono w Politechnice Lwowskiej za czasów J. N. FRANKĘGO na „skutek“ i dopiero A. WITKOWSKI wpro-

wadził w swoich świetnych wykładach fizyki w Krakowie „dzielność“ niewątpliwie znacznie lepszą od „skutku“ mającego znaczenie zbyt ogólne. Termin WITKOWSKIEGO rozpowszechnił się szybko wśród fizyków wszystkich dzielnic polskich. Mimo to inżynierowie, którzy opracowali I. wydanie podręcznika „Technik“ (przekład niemieckiej „Hütte“) nie poszli za fizykami i wprowadzili wyraz *moc*, prawdopodobnie dlatego, ponieważ ma znaczenie ogólne podobne do takich znaczeń w terminach obcych powyżej przytoczonych z wyjątkiem niemieckiego. Chociaż więc trudno nie uznać wyrazu *moc* za trafny i wygodny z powodu krótkości, to jednak nie byłoby pożądane aby więcej terminów naukowych brzmiało w fizyce odmiennie niż w naukach technicznych.

Jakkolwiek niepodobna odmówić słuszności zdaniu dr K., że dla rozwoju słownictwa naszego należy dążyć do „odtworzenia dawnych polskich pni nieraz od wieków zapomnianych“. Pniem nazywa dr K. zapewne to, co nazywamy rdzeniem wyrazów należących do tej samej rodziny. Któż jednak jest bardziej powołany do wyszukiwania tych *rdzeń* z starych języków słowiańskich, jak nie nasi językoznawcy. Tylko oni na podstawie badań przeszłości języka zdobywają obiektywne poczucie językowe i potrafią należycie ocenić znaczenie starego wyrazu oraz wskazać na możliwość jego zastosowania.

(Na odmiennych przesłankach oparła swe prace Komisja Słownictwa Technicznego PKN, wychodząc z założenia, iż twórcami nowych wyrazów i wyrażen technicznych mogą być jedynie ludzie, znający gruntownie istotę pojęć, dla których brak właściwego terminu w języku ojczystym, a zatem w odniesieniu do słownictwa technicznego wybitni technicy, którzy jednocześnie posiadają odpowiednią kulturę lingwistyczną.

Teza o twórczej roli techników w dziedzinie słowotwórstwa technicznego została uznana za słuszną przez naszych językoznawców, którzy w zeszytach 11/52 „Poradnika Językowego“ stwierdzili, iż zadanie specjalisty językoznawcy powinno ograniczać się do sprawdzenia, czy dany wyraz odpowiada duchowi języka polskiego i czy jest poprawny pod względem słowotwórczym i morfologicznym. *Przyp. red.*)

C. MECHANIKA OGÓLNA

Mechanika

(Polska Encyklopedia Mechaniki. IW SIMP, 1946 r.)

Spośród nauk przyrodniczych, które stanowią fundament wszelkich gałęzi techniki współczesnej, a zwłaszcza przemysłu maszynowego i budowlanego, na pierwszy plan wybija się jedna z najstarszych nauk ścisłych, zwana *mechaniką*. Z jej celu zdaje sobie każdy technik dobrze sprawę, ale określenie dokładne czym jest mechanika i jaki jest jej zakres domaga się pewnych wyjaśnień. Wprawdzie podręczniki tej nauce poświęcone noszą zwykle tytuł „Mechanika“, opatrzone często przymiotnikiem, np. elementarna, doświadczalna, teoretyczna, techniczna itp., ale spotykamy także tytuły odmienne, jak np. „Nauka o ruchu“ zmarłego zasłużonego profesora Politechniki Warszawskiej Z. STRASZEWICZA albo „Teoria ruchu i sił“, również ceniona dawniejsza książka profesora niemieckiego W. SCHELLA. To dowodzi, że autorzy ci usiłowali podać zwięzłe określenie mechaniki już w samym tytule. Istotnie bowiem ze stanowiska naukowego da się *mechanika* określić jako nauka o ruchach ciał materialnych, gdyż „równowagę“, określającą stan spoczynku ciała materialnego (mimo działania przyczyn, dążących do wywołania ruchu), można pojmować jako przypadek szczególny ruchu, przy jego opisie matematycznym. Ale w tym określeniu odczuwa się brak jednego z najstarszych i praktycznie najważniejszych pojęć mechaniki, a mianowicie *siły*, figurującej tylko w tytule książki SCHELLA. Toteż mimowoli przypomina się dawna popularna książeczka I. ZAKRZEWSKIEGO, nieżyjącego już profesora Uniwersytetu Lwowskiego, pt. „O sile, pracy i energii“, gdyż tytuł ten zawierał obok siły, jeszcze dwa niezmiernie ważne pojęcia mechaniki klasycznej. Widać z tego, że określenie mechaniki, jako dziedziny naszej wiedzy o przyrodzie, może wyglądać rozmaicie, zależnie od stanowiska, z jakiego śledzimy mechanikę: czy ono jest więcej naukowe, czy też raczej techniczne. Przy tym wypada zaznaczyć, że z obu stanowisk trzeba patrzeć na mechanikę nie jako na naukę doświadczalną, którą była niegdyś, ale na naukę, zawdzięczającą swoje znaczenie i ol-

brzymie rozmiary teorii, opartej na podstawach bardzo prostych, a nadzwyczajnie wydoskonalonej przez metody matematyczne.

Otóż zarówno ze stanowiska naukowego, jak i technicznego teoria w mechanice wysuwa się na plan pierwszy. Ale pojęcia podstawowe, na których można zbudować gmach całkowity teorii nie są identyczne w traktowaniu mechaniki czysto naukowym i technicznym.

W nauce czystej są tymi pojęciami: *czas*, *przestrzeń* i *materia*. Odpowiadają im trzy jednostki podstawowe: *czasu*, *długości* i *masy*. Tymczasem nauka stosowana, jaką jest mechanika techniczna, posługuje się tymi samymi jednostkami podstawowymi czasu i długości, ale zamiast *jednostki masy* wprowadza jako trzecią *jednostkę siły*, od której dopiero wywodzi się jednostka masy. Natomiast w mechanice czystej jest *siła* traktowana jako pojęcie pomocnicze, nader pożyteczne, ale teoretycznie zbędne.

Dlatego będzie może najodpowiedniej określić mechanikę przez ujęcie w słowa zagadnień jakimi się zajmuje. Zagadnienia te są dwojakiego rodzaju. W pierwszych idzie o ujęcie we wzory matematyczne ruchu cząstek i ciał materialnych, traktowanych tylko jako punkty i bryły geometryczne bez względu na materię, jaką zawierają. Jest to dział wstępny mechaniki, zwany *kinematyką*, traktowany często oddzielnie jako pomocniczy i leżący poza mechaniką właściwą, zwaną za wzorem piśmiennictwa angielskiego *dynamiką*. Zadanie dynamiki opiewa: Dany jest układ materialny i jego początkowy stan ruchu lub spoczynku oraz siły nań działające; wyznaczyć jego ruch pod wpływem tych sił.

Objasnimy to jeszcze na przykładzie znanego mechanizmu korbowego maszyny parowej tłokowej. Jest on złożony z trzonu tłokowego, mogącego się poruszać wraz z tłokiem tylko prostoliniowo tam i na powrót; korbowodu połączonego z jednej strony z trzonem tłokowym za pośrednictwem drąga, a z drugiej z korbą wału wykonywującą ruch obrotowy. Jeżeli, przyjąwszy, że znamy prędkość obrotu jednostajnego wału wraz z korbą, zapytamy jaki jest odpowiedni ruch trzona tłokowego i tłoka, to mamy do czynienia z zadaniem *kinematyki*. Gdy natomiast przyjmiemy jako daną siłę, wywartą przez parę na tłok w każdym jego położeniu, a zapytujemy jaki będzie skutek tej siły, przejawiający się w obrocie niejednostajnym wału korbowego, to stoimy przed zadaniem *dynamiki*. W ten sposób każde zagadnienie mechaniki w technice maszynowej posiada stronę kinematyczną i dynamiczną.

Ale zagadnienia *dynamiki* dzielimy od bardzo dawna na dwie grupy. Do pierwszej należą takie, w których idzie tylko o warunki, pod jakimi dany układ materialny spoczywa, chociaż nań działają pewne siły, czyli jak się wyrażamy krótko o *warunki równowagi*. Takie zadania były rozwiązywane teoretycznie już bardzo dawno, jako w ogóle znacznie łatwiej-

sze od zadań wyznaczenia ruchu wywołanego przez siły dane. Wystarczy podkreślić tzw. *prawo dźwigni*, wyrażające warunek równowagi ciała obracalnego na osi stałej, na które działają siły dane P i Q . Jego wysłowienie nowoczesne brzmi: Moment siły P względem osi obrotu musi być w stanie równowagi równy co do wielkości a co do znaku przeciwny momentowi siły (oporu użytkowego) Q .

Ta grupa zadań należy do *statyki* (nauki o równowadze), stanowiącej zatem dział, bardzo zresztą obszerny, dynamiki pojmowanej według określenia powyższego. Wszelkie inne zadania nie statyczne należą do drugiego działu dynamiki, nazwanego (jak się zdaje najpierw w ojczyźnie NEWTONA) *kinetyką*. A zatem *mechanika* dzieli się na *kinematykę* i *dynamikę*, a *dynamika* na *statykę* i *kinetykę*.

Należy jednak zwrócić uwagę na to, że od czasu silnych wpływów w Polsce kultury francuskiej na przełomie wieków XVIII i XIX nazywano samą tylko kinetykę dynamiką, wyodrębniając zupełnie statykę. Temu odpowiadał podział *mechaniki* na trzy działy: *kinematykę*, *statykę* i *dynamikę* — podział utrzymujący się tradycyjnie w wielu książkach polskich i rosyjskich.

Może to oczywiście prowadzić niekiedy do nieporozumień, ale na szczęście mniej szkodliwych od tych, jakie wynikają z nazywania kilogramem zarówno jednostki masy, jak i jednostki praktycznej siły. Zaradzono temu tylko przez stosowanie odrębnego znaku kg dla kilograma masy, a kG dla kilograma siły.

Wracając teraz do przymiotników wymienionych na wstępie, którymi odróżniamy niejako rozmaite kierunki mechaniki jako nauki, niezależnie od powyższego podziału zasadniczego, nie potrzebujemy określać co to jest *mechanika doświadczalna*, która od czasów NEWTONA, założyciela dynamiki ustąpiła miejsca *mechanice teoretycznej*, czyli *matematycznej*.

Francuzi nazywają ją „racjonalną“ (*mécanique rationnelle*), co w swoim czasie uczony emigrant polski HENRYK NIEWĘGŁOWSKI, pozostający pod całkowitym wpływem kultury francuskiej, przetłumaczył niefortunnie w tytule swego cennego zresztą dzieła jako „mechanika rozumowa“.

Otóż *mechanika teoretyczna* zajmuje się opisem matematycznym ruchu ciał materialnych przyrody pod postacią punktu materialnego, ciała sztywnego, układu punktów materialnych w liczbie dowolnej oraz układu materialnego ciągłego, jako myślowo uproszczonych modeli (schematów, obrazów), pozostawiając kwestię dokładności, z jaką te modele odpowiadają warunkom rzeczywistym, do rozstrzygnięcia doświadczeniu. Tak określona mechanika teoretyczna ma na oku głównie tylko podstawy naukowe rozwiązywania zagadnień mechaniki drogą obliczania, podczas gdy *mechanika techniczna*, czyli *stosowana*, zajmuje się głównie zagadnieniami, jakie następują różne gałęzie techniki.

Mechaniką ogólną nazywamy naukę, zajmującą się badaniem ruchu ciał w przestrzeni i w czasie, bez względu na stan skupienia, w jakim ciała te w przyrodzie występują. Mechanika ogólna opierająca się na koncepcji przestrzeni euklidesowej (nie ograniczonej i nieskończonej) i podstawowych prawach NEWTONA nosi nazwę *mechaniki klasycznej* lub *newtonowskiej*, w odróżnieniu od *mechaniki relatywistycznej* EINSTEINA.

Zupełnie odmienną podstawę ma podział *mechaniki* według stanu skupienia materii, której ruch lub równowagę badamy. Jest to podział fizyczny na *mechanikę ciał stałych*, czyli *stereomechanikę*, ciał ciekłych, czyli *hydromechanikę* i *ciał lotnych* (gazów), czyli *aeromechanikę* (mechanika par ze względu na najściślejszy związek z nauką o ciepłe znalazła miejsce w tej właśnie gałęzi fizyki). Każdą z tych gałęzi mechaniki dzielimy znowu na część statyczną i kinetyczną (dynamiczną), a więc mamy *stereostatykę* i *stereokinetykę* (-*dynamikę*), *hydrostatykę* i *hydrokinetykę* (-*dynamikę*), *aerostatykę* i *aerokinetykę* (-*dynamikę*).

W każdym z działów powyższych rozróżniamy jeszcze poddziały odpowiednio do własności mechanicznych, cechujących pewne materiały, co ma doniosłość szczególną zwłaszcza w mechanice technicznej a mianowicie:

1) *stereomechanikę*, czyli *mechanikę ciał stałych*, dzielimy na *mechanikę ciał sprężystych* (*teorię sprężystości*), czyli *elastomechanikę* i *mechanikę ciał elasto-plastycznych* (jakimi są przeważnie metale), zwaną także *plastomechaniką*. Osobną grupą technicznie ważną materiałów sypkich zajmuje się mechanika „ciał sproszkowanych“, nie mająca dotąd nazwy związanejszej.

2) *hydromechanikę* i *aeromechanikę* dzielimy na dwa poddziały, zależnie od tego czy uwzględniamy tarcie wewnętrzne (lepkość), czy też je pomijamy, a nadto czy uwzględniamy ściśliwość płynu, czy też uważamy go w przybliżeniu za nieściśliwy.

Ostatnie wreszcie odgałęzienia mechaniki charakteryzujące różne zastosowania techniczne stanowią np. 1) *mechanika lotu* jako jedna z podstaw lotnictwa współczesnego oparta na aerodynamice, 2) *balistyka*, tj. teoria ruchu pocisku strzelanego lub miotanego, przy czym rozróżnia się *balistykę wewnętrzną*, opisującą ruch pocisku w lufie oraz *balistykę zewnętrzną*, zajmującą się ruchem pocisku po opuszczeniu lufy, 3) *nauka o drganiach* (*wibromechanika*) wyodrębniona w czasach ostatnich jako obszerna gałąź dynamiki technicznej, traktująca o drganiach układów sprężystych, jakimi są wszelkie maszyny i ustroje budowlane.

Do mechaniki zaliczamy również *reologię*, czyli naukę o płynięciu ciał, posiadających jednocześnie (aczkolwiek w różnym stopniu) następujące własności: sprężystość, plastyczność, lepkość i wytrzymałość (*przyp. red.*).

Stalność, stateczność, sztywność i trwałość

(Mechanik Nr 3, 1947 r.)

Wyrazy powyższe oraz odpowiadające im przymiotniki: *staty*, *stateczny*, *sztywny* i *trwały*, są dobrymi przykładami wieloznaczności tak w mowie potocznej, jak i w naukach ścisłych. Mówimy np., że kawałek metalu, szkła, cegły itp. jest *ciałem statym*, ponieważ zmiana jego położenia w zwykłych warunkach ziemskich nie powoduje zmiany dostrzegalnej jego wymiarów i postaci geometrycznej. *Stalność* ma w tym przypadku znaczenie niezmienności postaci.

Natomiast mówiąc o *stalności równowagi* ciała lub w ogóle układu materialnego mamy na myśli coś innego. Albowiem według przyjętego w mechanice ogólnej określenia nazywamy równowagę układu materialnego *stałą* w położeniu danym, jeżeli po dostatecznie małym wytrąceniu go z tego położenia siłami dodatkowymi wykonywa po usunięciu tych sił tylko ruchy bardzo małe nie oddalające go na zawsze od tego położenia.

Nic tedy dziwnego, że np. w „Mechanice teoretycznej“ zasłużonego profesora Politechniki Warszawskiej HENRYKA CZOPOWSKIEGO pojawił się przed laty termin *stateczność równowagi* zamiast rozpowszechnionej przedtem w naszych podręcznikach fizyki i mechaniki *stalności równowagi*.

Mówiąc zatem o *równowadze statecznej* lub *niestatecznej*, zamiast *stałej* i *niestałej*, unikamy dwuznaczności powyżej wymienionej, w czym tkwi niewątpliwie korzyść dydaktyczna. Tutaj jest nadto pouczającym porównanie terminów w odpowiednich językach obcych, a mianowicie: *ciało stałe* = solid body (ang.), corps solide (franc.), fester Körper (niem.), twiordoeje tielo (ros.), corpo solido (wl.).

Równowaga stała lub *stateczna* = stable equilibrium (ang.), equilibre stable (fr.), stables (sicheres) Gleichgewicht (niem.), ustojczywoje rawnowiesje (ros.), equilibrio stabile (wl.).

To wyjaśni czytelnikowi skąd się biorą w prasie dziwolągi takie, jak „ciało twarde“, „równowaga stabilna“, wzięte żywcem z języków obcych zamiast terminów polskich: ciało stałe i równowaga stateczna lub stała.

W innym jeszcze znaczeniu stosujemy wyraz *stalność*, a mianowicie na oznaczenie *niezmienności położenia*, zwłaszcza określonego punktu ciała. Tak np. mówimy o podporze stałej, przegubie stałym, łożysku stałym itd., jeżeli ograniczają w przestrzeni 3, a na płaszczyźnie 2 stopnie swobody, ciała traktowanego jako sztywne.

Wyraz *sztywność* ma znowu dwa znaczenia w mechanice, oznaczając albo niezmienność postaci ciała (zupełną a więc fikcyjną), albo też odporność materiału (a zarazem ciała) na siły, zdążające do wywołania właśnie zmiany postaci lub wymiarów. W pierwszym znaczeniu jest pojęcie *sztywności* oderwane (abstrakcyjne, nierealne), gdyż nie okre-

śła własności rzeczywistej ciał stałych przyrody; natomiast w znaczeniu drugim jest *sztynność* własnością konkretną, fizykalną tych ciał, mającą cechę przeciwieństwa do innej własności zwanej odkształcalnością. Ciała mniej odkształcalne są bardziej sztywne i na odwrót.

Np. wolfram jest sztywniejszy od stali, stal od żeliwa, żeliwo od marmuru, od szkła itd. Toteż często dla uniknięcia nieporozumień stosują termin „sztywność doskonała“, albo „idealna“ na określenie sztywności modelu abstrakcyjnego ciał stałych w mechanice teoretycznej. Odpowiednimi nazwami w językach obcych są rigidity (*ang.*), rigidite (*fr.*), Steifigkeit (*niem.*), żostkost' (*ros.*), rigidezza (*wł.*).

Od pojęcia *sztynności materiału* (mierzonej wielkością E modulu wydłużenia sprężystego) odróżniamy *sztynność ciała* (części konstrukcyjnej) przy określonym sposobie obciążenia, która jest zależna nadto od postaci ciała. Odpowiednimi określeniami szczegółowymi posługujemy się z korzyścią w stereomechanice, zwanej tradycyjnie „wytrzymałością materiałów“.

Na koniec *trwałość*, stosowana przez niektórych autorów zamiast stałości lub stateczności w odniesieniu do równowagi, ma pierwotne znaczenie niezmienności w czasie, wobec czego nie zupełnie się pokrywa z pojęciami, jakie wiążemy z tymi terminami, co wynika jasno z określenia powyżej podanego. Drugie znaczenie *trwałości*, dość rozpowszechnione, da się określić jako własność części konstrukcyjnej lub całego zespołu konstrukcyjnego (maszyny, budowli itp.), polegająca na tym, że spełnia swoje zadanie przez dłuższy lub krótszy przeciąg czasu. Stosownie do tego mówimy o jego większej lub mniejszej trwałości. Dlatego lepiej zaniechać nazywania równowagi statecznej „trwałą“, a zachować przymiotniki: *trwały* i *nietrwały* tylko do określenia długiego lub krótkiego okresu (przedziału czasu), prawidłowej służby maszyny itp.

Synonimem przymiotnika *trwały*, w znaczeniu niezmienny w czasie lub niezależny od czasu, jest przymiotnik *ustalony* (*ang.* steady, *fr.* stationnaire ou permanent, *niem.* stationär).

Pond i kilopond

(Mechanik Nr 9, 1947 r.)

Tylko starsi wiekiem technicy pamiętają, że przodujące do pierwszej połowy wieku XIX francuskie piśmiennictwo techniczno-naukowe nazywało stale wielkość mechaniczną wyrażoną symbolem $1/2mv^2$ — „siłą żywą“ układu (ciała) materialnego. Za Francją poszły nie tylko narody romańskie, ale niemal i wszystkie kraje kontynentu europejskiego. Termin ten utrzymał się przez dwa stulecia, zanim, bez porównania lepszy i odpowiedniejszy, tj. *energia kinetyczna* przeniknął z ojczyzny proroka

mechaniki teoretycznej NEWTONA i wyrugował powoli „siłę żywą“, zupełnie słusznie, gdyż nie była to ani „siła“ w znaczeniu „princypiów“ NEWTONA, ani też „żywa“. Tak wielką jest siła przyzwyczajenia i potęga autorytetu dawnych uczonych, którzy to ważne niezmiernie pojęcie całkiem nieszczęśliwie nazwali.

Ale z tego nie wynika, aby wiele innych nazw pojęć mechanicznych, krytykowanych przez licznych autorów — nadawało się z równie dobrym skutkiem do zmiany dlatego, że są bądź to wieloznaczne i domagają się określeń przymiotnikowych, bądź też nie dają się uzasadnić logicznie itp.

Trzeba bowiem pamiętać zawsze, że przeważająca ilość terminów naukowych z każdej dziedziny wiedzy ma charakter umowny raczej niż logiczny, a wieloznaczność stosowanego wyrazu nie da się w ogóle praktycznie uniknąć. Czyż jednak z tej wieloznaczności dogadzającej zasadzie ekonomii myśli, wygłoszonej przez filozofa E. MACHA, wynikają trudności praktyczne lub nieporozumienia? Chyba nader rzadko.

Toteż tylko wyjątkowo ważne motywy mogą uzasadnić wprowadzenie nowej nazwy dla wyłączenia dwuznaczności. Takie motywy znajdujemy w projekcie wyjątkowo szczęśliwym, a radykalnym, aby główne *techniczne jednostki siły*, którymi operujemy na każdym kroku nie tylko w nauce, w laboratorium i wytwórni, ale w życiu codziennym nazwać *pondem* i *kilopondem* (skrót *p* i *kp*, zamiast dotychczasowych, wprowadzonych przez PKN w celu odróżnienia *G* i *kG*). Wtedy *gram* (*g*) i *kilogram* (*kg*) pozostają wyłącznie na oznaczenie *jednostek masy*, stosownie do znanego podstawowego określenia w fizyce minionego stulecia.

Oprócz wielkiej wygody i prostoty wysłowienia (np. zamiast mówić o sile lub obciążeniu *P* kilogramów ciężarowych, mówimy o sile lub obciążeniu *P* kilopondów) — zyskujemy olbrzymią korzyść dydaktyczną. Jest ona doskonale zrozumiała dla każdego, kto nauczał początków mechaniki. Dla przeciętnego młodocianego umysłu sprawia niemałe trudności zrozumienie, dlaczego dwie tak odmienne a ważne wielkości jak *masę* i *siłę* mierzy się jednostkami, które mają nazwę tę samą, tak że trzeba je odróżniać objaśnieniem dodatkowym, mówiąc np. raz o kilogramie masy, a drugi raz o kilogramie jako sile, tzn. o kilogramie jako technicznej jednostce siły wyrażonej ciężarem jednego kilograma masy w miejscach na ziemi, gdzie przyspieszenie spadania (natężenie siły ciężkości względnej) $g = 980,665 \text{ cm/sek}^2$.

Przy projektowanych nazwach obu jednostek cała niemal trudność znika na podstawie określeń następujących:

Kilogram (*kg*) jest jednostką naukową i praktyczną masy, której wzorzec ze stopu platyny z irydem jest przechowywany w „Pavillon de Breteuil“ tzw. „Bureau International des Poids et Mesures“ pod Paryżem.

Kilopond (*kp*) jest jednostką praktyczną (techniczną) siły, której wzor-

cem jest ciężar powyższego wzorca masy na miejscu jego przechowywania, gdzie $g = 980,665 \text{ cm/sek}^2$.

Jedna tysięczna część kilograma nazywa się *gramem*.

Jedna tysięczna część kiloponda nazywa się *pondem*.

Ponieważ jednostką siły w układzie CGS jest *dyna*, przeto $1 \text{ pond} = 980,665 \text{ dyn}$ (w zaokrągleniu 981 dyn).

Wystarczy jedno pokolenie, aby pojęcia te stały się własnością ogółu, który będzie się dziwił wówczas, że brak nazw osobnych tolerowano tak długo, jak „żywą siłę“ zamiast energii ruchu lub energii kinetycznej.

Jak widać, *pondy* i *kilopondy* trudności praktycznych nie napotykają (teoretyczno-metrologiczne „dekapondy“, „hektopondy“ itd. jako jednostki pochodne są praktycznie zupełnie zbędne).

Bardzo się dziwię, że projekt omówiony napotkał opór zorganizowany w naszym tak zasłużonym PKN i to, jak się zdaje, głównie wśród inżynierów. Nie wątpię, że odegrały tu rolę decydującą głęboko tkwiące w pamięci tradycje nauki szkolnej, która zużytkowała kontrowersje między obu dawnymi „kilogramami“ do pewnego rodzaju gimnastyki umysłowej. Ta gimnastyka była jednakże zabawą luksusową, wobec innych niezbędnych w dalszych etapach studiów mechaniki.

Dlatego chociaż zasadniczo jestem przeciwny zmianie nazw uświęconych długim używaniem, to jednak w tym przypadku popieram najusilniej zastąpienie grama (G) i kilograma (kG) jako jednostek praktycznych siły przez *pond* (p) (*L. pondus*) i *kilopond* (kp).¹⁾ Nie wątpię, że to by się przyczyniło do znakomitego ugruntowania podstaw mechaniki, przede wszystkim u techników, dla których ta nauka jest fundamentem wykształcenia zawodowego, a także w szerokich warstwach społeczeństwa, które, jak świadczą artykuły dziennikarskie, terminem siła obdarzają cały szereg innych pojęć mechanicznych nie odróżniając ich najoczywiściej.

Skalarowy czy skalarny²⁾

(Mechanik Nr 7/9, 1949 r.)

W I tomie trzeciego wydania „Poradnika technicznego Mechanik“, który wyszedł nakładem Instytutu Wydawniczego SIMP, spotykamy nie-

¹⁾ Nazwa *kilopond* coraz bardziej rozpowszechnia się w zagranicznej literaturze naukowej, przybierając charakter międzynarodowy. Nazwę tę m. in. spotykamy w ostatnim wydaniu dzieła źródłowego LANDOLT-BÖRNSTEIN: Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik und Technik. IV Band. Technik. Hrsg. von ERNST SCHMIDT. Springer-Verlag. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955. Pod poz. 403261 jako międzynarodowe jednostki siły figurują: dyna (dyn), newton (N), pond (p), kilopond (kp), i megapond (Mp).

²⁾ Formy przymiotnikowe od rzeczownika *skalar*, oznaczającego każdą wielkość bezkierunkową.

spodzianie obie formy przymiotnikowe, pochodzące od wyrazu skalar: *skalarowy* i *skalarny*. W opracowanych przeze mnie rozdziałach mechaniki występuje tylko pierwsza, gdyż używam jej od lat przynajmniej 25, chociaż przedtem używałem dość długo przymiotnika „skalarny“, zapożyczonego od grupy naszych matematyków kształconych w języku rosyjskim. To mnie popchnęło do zasięgnięcia opinii autorytatywnej Redakcji „Języka Polskiego“, czy słuszne jest moje poczucie językowe, które skłoniło mnie do mówienia i pisania *skalarowy*, a nie *skalarny*. Zdaję sobie wprawdzie sprawę z tego, że w takich kwestiach rozstrzygają niekiedy nie tyle logicznie uzasadnione reguły gramatyczne, co przyzwyczajenie do terminu, który choć nieprawidłowo utworzony, wdzierną się do piśmiennictwa przez prasę i podręczniki.

Porównanie utartych we współczesnej polskiej literaturze form przymiotnikowych wielu rzeczowników kończących się na -ar przemawia, jak sądzę, za słusnością mego poczucia. Oto te wyrazy: bazar — bazarowy, pomiar — pomiarowy itd.

Przy tej sposobności przejrzałem także grupę rzeczowników z końcówką -or lub -ór, oraz drugą grupę z końcówkami -er.

Tylko niektóre z nich, spośród pierwszej grupy, spotyka się w prozie literackiej w formie przymiotnikowej z końcówką odmienną od -owy, jak np. pozór — pozorny, spór — sporny. Wreszcie obok wektorowy spotykamy wektorialny (ale nigdy wektorny) od wektor.

W drugiej grupie znajdujemy końcówkę przymiotnikową -owy jedynie od zacier — zacierowy; nieliczne zaś mają końcówkę -ski, np. inżynierski.

Te przykłady jak i wiele innych dowodzą dominującej przewagi zakończenia na -owy formy przymiotnikowej pochodzącej od rzeczowników z końcówkami -ar, -or, -ór lub -er. Dlatego należałoby raczej używać wyrazu *skalarowy* niż „skalarny“.

W nowym wydaniu „Poradnika Technicznego Mechanik“ przymiotników: *skalarowy* i *wektorowy* używa się w znaczeniu: przynależny do..., mający charakter..., a przymiotników: *skalarny* i *wektorialny* dla określenia cech pośrednich, bardziej odległych; mówimy więc np. iloczyn wektorowy, ale metoda wektorialna, wielkość skalarowa, ale mnożąc skalarnie (*przyp. red.*).

D. STEREOMECHANIKA

Profesor M. T. HUBER w artykule pt. „Mechanika“, stanowiącym zaczątek cyklu artykułów z mechaniki w „Polskiej Encyklopedii Mechaniki“, wprowadził wyraz *stereomechanika* na oznaczenie *mechaniki ciał stałych rzeczywistych*, zwanej tradycyjnie „wytrzymałością materiałów“.

Wprowadzenie nowej nazwy prof. HUBER uzasadniał w sposób następujący ¹⁾:

„*Stereomechanika* jest zwięzłą nazwą mechaniki ciał stałych rzeczywistych, którą do niedawna wykładano na politechnikach jako „wytrzymałość materiałów“. Przymiotnik grecki *στερεός* odpowiada bowiem polskiemu: *stały*, *ang.* solid, *fr.* solide, *n.* fest, *ros.* twiordyj, *wł.* solido. Należy jednak pamiętać o drugim znaczeniu wyrazu *στερεός*, a mianowicie: *sztwywny*, *ang.* rigid, *fr.* rigide, *n.* starr, *wł.* rigido“.

Wprowadzony przez prof. HUBERA termin *stereomechanika* spotkał się z pewnymi zastrzeżeniami, mającymi swe źródło z jednej strony w abstrakcji euklidesowskiej *το στερεόν* = figura przestrzenna, z drugiej zaś strony w oboczności semantycznej wyrazu *στερεός* = *sztwywny*.

Otóż wyraz *στερεός* jest przymiotnikiem bardzo w greczyźnie rozpo-wszechnionym i wieloznacznym; może bowiem oznaczać: stały, ustalony, pewny, wierzysty, tęgi, silny, mocny, trwały, *sztwywny*, gęsty itd. itd. W Odysei przymiotnik *στερεός* związany jest z rzeczownikami: *głaz* i *żelazo*, a więc ciałami stałymi.

Prof. HUBER w artykule pt. „Pond i kilopond“ podkreśla, iż prze-ważająca ilość terminów naukowych z każdej dziedziny ma charakter umowny raczej niż logiczny; taką nazwą umowną jest *stereomechanika*, która ze względu na etymologiczną poprawność, zwartość i podobieństwo morfologiczne do wyrazów tego typu, co *hydromechanika* i *aeromechanika*, została przyjęta przez Komisję Słownictwa Mechaniki Teoretycznej i Hydromechaniki PKN jako nazwa obowiązująca na oznaczenie *mechaniki ciał stałych*.

¹⁾ M. T. HUBER: Kryteria wytrzymałościowe w stereomechanice technicznej. IW. SIMP. Warszawa 1948.

W sprawie ustalenia nazw dla własności wytrzymałościowych

(Wiadomości PKN, Nr 1, 1931 r.)

1. Wstęp. Nie wchodząc na razie w to, jakie przyczyny wywołały fakt, że każdy niemal autor polski piszący w dziedzinie mechaniki technicznej używa innych nazw na najważniejsze *własności wytrzymałościowe* materiałów, spróbuję zaproponować ustalenie tych nazw. Będzie to możliwe jedynie przy starannym określeniu pojęć, którym te nazwy odpowiadają. Inaczej bowiem trudno uniknąć bezpłodnego sporu o wyrazy, jaki obserwowałem często u tych licznych jeszcze inżynierów naszych, którzy się kształcili wyłącznie za granicą, jeżeli np. jeden studiował po francusku, a drugi po niemiecku. Kto zna bodaj trochę oba te języki, to dostrzeże łatwo, że w jednym z nich nie ma zupełnie nazwy na pewne pojęcia, które taką nazwę w drugim posiadają. Często zaś nazwy etymologiczne zupełnie różne służą w obu językach na oznaczenie tego samego pojęcia. Wszak np. Niemcy rozróżniają *Fliessgrenze*, *Streckgrenze* i *Stauchgrenze* przy zupełnym braku odpowiedników w języku francuskim (a także i angielskim). Każda bowiem z tych nazw oznacza wartość naprężenia, przy którym zachodzą pierwsze wyraźne duże odkształcenia trwałe; tylko Niemiec odczuwał potrzebę osobnej nazwy na tę wartość przy prostym rozciąganiu (*Streckgrenze*) i osobnej przy prostym ścisaniu (*Stauchgrenze*), podkreślając tym samym możliwość różnicy liczbowej tych wartości; a nadto wprowadził nazwę ogólną dla obu razem: *Fliessgrenze*. Natomiast Francuz zadowala się zupełnie jednym terminem: *limite d'élasticité apparente*. Anglik mówi: *yield point*, który to termin dla niewtajemniczonego nasuwa myśl o czymś zgoła innym niż powyższe nazwy niemieckie. Tymczasem, gdyby inżynier francuski i niemiecki razem wykonywali próbę rozrywania notując wyniki, to w ich notatkach widniałaby przy powyższych nazwach jedna i ta sama liczbowa wartość naprężenia, rozgraniczająca wartości niższe, przy których dostrzegamy łatwo tylko odkształcenia sprężyste, od wartości wyższych, przy których widać wyraźnie *odkształcenia plastyczne* (czyli *trwałe*).

Można by takich przykładów przytoczyć sporo. Na każdym z nich łatwo zademonstrować pomyłki napotykaną w naszym piśmiennictwie przy przekładach z języków obcych. Niedawno dostrzegłem np. tłumaczenie angielskiego *yield point* przez „granicę proporcjonalności“.

Dobre porozumienie inżynierów z różnych szkół i autorów pracujących w różnych gałęziach nauk technicznych może nastąpić jednakże tylko pod warunkiem ścisłego określenia pojęć, o których piszą. Dlatego takie określenia wysunę na pierwszy plan przy omawianiu słownictwa wytrzymałościowego.

2. Wytrzymałość. Przede wszystkim wyraz *wytrzymałość*, stosunkowo najbardziej rozpowszechniony i rzadko bardzo kwestionowany, jest używany w kilku znaczeniach. Nie ma koniecznego powodu do zmiany tego stanu, ale należy sobie te znaczenia dobrze uprzytomnić.

Otóż przez *wytrzymałość* rozumiemy po pierwsze ogólną własność ciał fizycznych (stosowanych jako części składowe maszyn, budowli itp.), polegającą na tym że przy obciążeniach czyniących zadość pewnym warunkom przyjmują mniej lub więcej odkształconą postać równowagi trwałej, skoro zaś te obciążenia dostatecznie zwiększymy (rozumie się nie zmieniając miejsc i kierunków działania sił), to równowaga staje się niemożliwa, gdyż niepodobna uzyskać takich wartości sił wewnętrznych (międzycząsteczkowych), jakie byłyby niezbędne do zrównoważenia sił zewnętrznych, czyli obciążeń.

Krócej, choć nie tak ściśle i jasno, można powyższe określenie wyrazić zdaniem: *Wytrzymałością* nazywamy w ogóle zdolność ciał (określonych jak wyżej) do stawiania trwałego oporu siłom zewnętrznym (obciążeniom) za pośrednictwem sił wewnętrznych (międzycząsteczkowych).

Mówiąc, że jakaś część konstrukcyjna wytrzymuje obciążenia dane, stwierdzamy, że przy tym obciążeniu zachodzi *trwała równowaga* tej części, jako układu odkształcalnego. Z tego powodu rozumiemy (po wtóre) przez *wytrzymałość* danej części konstrukcyjnej już nie ogólną własność, lecz wielkość mierzącą ją, a mianowicie *wyższą granicę wartości obciążenia* (określonego typu), jakie ta część zdoła unieść bez trwałego uszkodzenia niebezpiecznego, albo zniszczenia.

Zważywszy zaś, że bezpośrednia przyczyna uszkodzeń, trwałych odkształceń, pęknięć itp. tkwi w naturze materiału, z którego dana część konstrukcyjna jest zrobiona, mówimy (po trzecie) o wytrzymałości materiału mając na myśli wyższą granicę naprężeń lub wysiłku (wytężenia), jakie dany materiał znosi bez niepożądanych odkształceń trwałych lub pęknięć itp. uszkodzeń.

Jak widać z powyższego, wyraz *wytrzymałość* jest używany od dawna w trzech znaczeniach bez obawy nieporozumień i bez koniecznej potrzeby odrębnych nazw na trzy odpowiednie pojęcia. Atoli nazwy takie mają pewną rację bytu. Zamiast mówić w znaczeniu powyżej określonym o wytrzymałości części konstrukcyjnej, mówimy także o *obciążeniu krańcowym* albo też *obciążeniu niebezpiecznym* lub wreszcie *obciążeniu niszczącym* (w przypadkach szczególnych łamiącym, rozrywającym, zgniatającym itp.).

Niektórzy stosują tutaj wyrażenie *obciążenie krytyczne*, jednakże to wyrażenie jest może właściwsze do określenia tych wartości obciążenia, które odpowiadają rozdwojeniu postaci równowagi np. w zagadnieniu wyboczenia. Każda z tych nazw, może oczywiście odpowiadać nieco

zmienionej umowie co do właściwego jej znaczenia, ale w głównej treści pojęcia będą równoważne. Objaśni to lepiej przykład następujący:

Stalowa kulka łożyskowa znosi trwale (bez uszkodzeń) obciążenie P dopóki ono jest mniejsze od pewnej wartości P_1 , przy której dokoła miejsca stykania się kulki z panewką zachodzi drobne pęknięcie prowadzące z czasem do odłupania się maleńkiej soczewkowatej części kulki, co oczywiście jest niebezpieczne dla łożyska. Dlatego wartości P_1 przysługuje słusznie nazwa: *obciążenie niebezpieczne*. Jest to zarazem *obciążenie krańcowe* dla szeregu rosnących wartości obciążeń bezpiecznych, lecz nie *krańcowe* dla szeregu wartości obciążeń, które dana kulka w ogóle znieśnie, zanim przy istotnie *krańcowym obciążeniu* P_2 , znacznie większym od P_1 , pęknie na pół, jak to wykazują doświadczenia. Której z obu wartości P_1 i P_2 odpowiada nazwa *obciążenia niszczącego*? Odpowiedź jest rzeczą indywidualnego zapatrywania lub umowy. Dlatego to przytoczone powyżej różne nazwy można praktycznie traktować jako synonimy *wytrzymałości części konstrukcyjnej*.

Podobnie zamiast *wytrzymałości materiału* można stosować z korzyścią terminy: *wysiłek krańcowy* (lub *wyciążenie krańcowe*), bądź to *wysiłek niebezpieczny*, bądź też wreszcie *wysiłek niszczący*, z tymi samymi odcieniami znaczeń co do obciążenia. Mierzac zaś wysiłek jak zwykle *naprężeniem sprowadzonym* albo *zastępczym*, jeżeli mamy do czynienia ze złożonym stanem napięcia, dochodzimy do równoważnych praktycznie nazw: *naprężenie krańcowe*, *naprężenie niebezpieczne* i *naprężenie niszczące*.

Zaznaczyć muszę, że nazwa *wysiłek*, lub jej synonim *wyciążenie*, odpowiada tutaj tylko jednemu znaczeniu francuskiego i angielskiego wyrazu *fatigue*, który określa zarówno wysiłek jak i zmęczenie. Natomiast jest odpowiednikiem zupełnym (doskonałym) wyrazu niemieckiego *die Anstrengung*, stosowanego przez A. FÖPPLA, O. MOHRA i innych.

Pojęcie *wysiłku* lub *wyciążenia* określamy, jako wielkość zależną od stanu napięcia i odkształcenia materiału, która mierzy niebezpieczeństwo osiągnięcia odkształceń trwałych lub pęknięcia. Zależność tę ujmują w formę matematyczną *hypotezy wytrzymałościowe*. One prowadzą do znanych wzorów na naprężenia zastępcze lub sprowadzone.

3. Odkształcalność. Zjawiska wytrzymałości są nieodłącznie związane z własnością *odkształcalności ciała*, czyli ich zdolnością do *odkształceń* uwarunkowanych *stanem napięcia* (naprężeniami). Trzeba jednakże często mieć na oku także odkształcenia mogące zajść bez udziału obciążeń, uwarunkowane, tylko zmianą temperatury. Nazwiemy pierwsze *odkształceniami mechanicznymi* (*dynamicznymi*), drugie zaś *odkształceniami termicznymi* (*cieplnymi*). Zaznaczyć wypada przy tym, że wyraz *odkształ-*

enie jest tutaj zastosowany w najogólniejszym znaczeniu zmiany geometrycznej postaci ciała.

Zmiana położenia, czyli *przemieszczenie* punktów ciała odkształcalnego nie musi jednakże pociągać za sobą jego odkształcenia, albowiem przemieszczenia punktów mogą odpowiadać ruchowi tego ciała bez zmiany jego postaci, czyli ciała zachowującego się jak *układ niezmienny (układ doskonale sztywny)*.

Przechodząc do pomiaru odkształceń, napotykaemy wielką różnorodność ich rodzajów. W każdym z nich rozróżniamy *odkształcenia bezwzględne*, od *odkształceń względnych*, czyli *jednostkowych*. Najważniejsze z rodzajów są:

a) *Odkształcenia liniowe (wydłużenie lub skrócenie)*, mierzone zmianą odległości określonych dwu punktów ciała.

b) *Czyste odkształcenie objętościowe*, tj. takie, przy którym nie zachodzi zmiana postaci, a punkty ciała, leżące (przed odkształceniem) na powierzchni kuli i dowolnym promieniu, znajdują się po odkształceniu również na powierzchni kuli o promieniu większym lub mniejszym.

Czyste odkształcenie postaciowe (bez zmiany objętości), tj. takie, przy którym prostopadłościan, wyodrębniony w myśli z ciała, zamienia się na równoległościan ukośnokątny (a kula na elipsoidę) o tej samej objętości.

Nie rozpatrując licznych jeszcze pojęć i własności geometrycznej teorii odkształceń, przejdźmy do własności fizykalnych. Według tych dzielą się *odkształcenia* na *sprężyste* i *niesprężyste*, a odkształcenia ciał rzeczywistych składają się najczęściej z jednych i drugich. *Odkształcenia sprężyste* spowodowane pośrednio danym *obciążeniem*, czyli bezpośrednio danym *stanem napięcia* ciała, znikają po usunięciu tego obciążenia. Wyrażamy to inaczej zdaniem: *sprężystość materiału* jest to zdolność nagromadzenia w nim energii odkształcenia w postaci odwracalnej. Ponieważ ciała rzeczywiste najczęściej nie oddają całkowitej nagromadzonej w nich energii odkształcenia wskutek stosownego obciążenia, lecz część tej energii się rozprasza, przeto odkształcenie znika tylko częściowo po usunięciu sił obciążających. Część odkształcenia (niesprężysta) pozostaje trwale i dlatego nazywano ją dotychczas zwykle *odkształceniem trwałym*. Ze względu na stosowanie poniżej przymiotnika *trwały* w innym znaczeniu (np. wytrzymałość trwała), zdecydowałem się od dawna popierać nazwę: *odkształcenie plastyczne*, mającą odpowiedniki we wszystkich głównych językach europejskich i wykluczającą wieloznaczność. Albowiem wyraz *plastyczność* nie może w mechanice nic innego oznaczać, jak tylko zdolność do odkształceń niesprężystych.

Mając na oku wyidealizowany model ciała sprężystego, niezdolnego do odkształceń plastycznych, stosujemy nazwę: *ciało doskonale sprężyste*.

Podobnie może być mowa o *ciele doskonale plastycznym*, tj. niezdolnym do odkształceń sprężystych, nawet przy najmniejszych wysiłkach.

4. Sztywność. W nowszych czasach stosuje się z pożytkiem coraz częściej pojęcie *sztywności* ciała lub części konstrukcyjnej, rozumiejąc przez *sztywność* własność ciała lub materiału, polegającą na stawianiu oporu siłom odkształcającym. Sztywność może być najrozmaitszego rodzaju, zależnie od postaci ciała i sposobu jego obciążenia. Mówimy zatem o *sztywności rozciągania*, *ściskania*, *zginania*, *skręcania* itd. Miarą sztywności będzie oczywiście odkształcenie odpowiadające danemu obciążeniu. Im to odkształcenie jest większe, tym sztywność jest mniejsza i nawzajem. Dlatego np. *sztywność rozciągania* pręta sprężystego określimy ilościowo iloczynem EF (E moduł YOUNGA, F pole przekroju), ponieważ wydłużenie jednostkowe ε tego pręta w zależności od obciążenia P przedstawia się wzorem:

$$\varepsilon = \frac{P}{EF}.$$

Podobnie *sztywność zginania sprężystego* belki określa iloczyn EJ , stosownie do wzoru na krzywiznę zgiętej osi:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_g}{EJ}.$$

(Tutaj oznacza J moment bezwładności przekroju belki, a M_g moment zginający sił zewnętrznych). Stąd widać zarazem, że miarą sztywności materiału jest w obu przypadkach moduł E , który z tego powodu fizycy nazywali dawno już „sztywnością prostą“, dla odróżnienia od innych miar sztywności, jak np. G (moduł sprężystości postaciowej), któremu odpowiada nazwa: „sztywność skręcania“ lub „ścianania“.

Jest rzeczą jasną, że pojęcie sztywności odpowiada nie tylko (jak w powyższych przykładach) odkształceniom sprężystym, lecz także *odkształceniom sprężysto-plastycznym* lub *elasto-plastycznym*, jak wypada nazywać odkształcenia wielu materiałów poza granicami sprężystości.

Znana jest dwoistość określenia *granicy sprężystości*. W rozważaniach teoretycznych rozumiemy pod tą nazwą wyższą granicę odkształceń lub też naprężeń albo wreszcie wysiłków (wytężeń) w obszarze doskonałej sprężystości, poza którym pojawiają się odkształcenia częściowo plastyczne (elastoplastyczne).

W badaniach doświadczalnych zwykliśmy pojmować *granice sprężystości* jako wyższą granicę odkształceń sprężystych, przy których odkształcenia plastyczne są znikomo małe.

Ale tak określona *granica sprężystości* jest prawie nieuchwytna, gdyż wartość jej zależy w wysokim stopniu od precyzji przyrządów pomiarowych i metody pomiaru. Z tego powodu stosuje się w praktyce laboratoryjnej i przy próbach odbiorczych trzecie określenie *praktycznej granicy*

sprężystości, jako wartości naprężenia, przy której daje się stwierdzić odkształcenie plastyczne o pewnej umówionej małej wartości (np. 0,02%).

Warto przypomnieć, że ścisłość wyznaczenia doświadczalnego granicy sprężystości cierpi niekiedy wskutek zjawiska *opóźnienia sprężystego*, które polega na tym, że odkształcenie nie osiąga zaraz po zmianie wartości obciążenia stanu równowagi, lecz potrzebuje do tego dłuższego czasu, którym nie rozporządzamy do woli w laboratoriach wytrzymałościowych.

5. Plastyczność. W wykresie (ϵ, σ) przedstawiającym zależność wydłużenia jednostkowego ϵ od naprężenia σ przy próbie rozrywania, wyróżniamy jeszcze dwa punkty cechujące ważne własności materiału. Pierwszy z nich nosi nazwę *granicy proporcjonalności*, tj. granicy ważności prawa HOOKE'A i znajduje się na końcu prostej części wykresu, wychodzącej z początku współrzędnych. Od tego miejsca wykres zakrzywia się lekko. Drugi punkt pojawia się nieco dalej, jako wyraźny załom wykresu, który dla wielu metali przedstawia się za tym załomem w ogólnym zarysie, jako prosta pozioma. Tej części wykresu odpowiadają zatem tylko odkształcenia plastyczne, rosnące przy stałej wartości naprężenia, bez zmiany osiągniętego odkształcenia sprężystego. Ten to punkt nazywają Anglicy *yield point*. U nas niestety co kilka lat pojawia się nowy termin. W ubiegłym stuleciu dość długo trzymała się, zwłaszcza w Politechnice Lwowskiej nazwa: „granica płynności“ lub „granica płynięcia“, potem Komitet Redakcyjny I wydania Technika przyjął brzydko brzmiącą „granicę ciastowatości“. Około 1921 r. wprowadziłem w moich wykładach i pracach, zgodnie z radą prof. H. MIERZEJEWSKIEGO i innych członków Komisji, zwołanej w swoim czasie przez PKN, termin *granica plastyczności*, któremu nie zarzucić nie można prócz tego, że ma charakter międzynarodowy (co uważam w terminologii naukowej za zaletę). W ostatnich czasach wprowadzono znowu nową nazwę: „granica podatności“ do piśmiennictwa wojskowego. Nie wiem kto jest autorem tego pomysłu, ale trudno uznać go za szczęśliwy. Wyraz „podatność“ ma bowiem w naszym języku od dawna utarte znaczenie zdolności ciała do odkształceń w ogóle, a więc nie tylko plastycznych, nie nadaje się przeto do oznaczenia punktu przelomowego, w którym niejako kończą się odkształcenia sprężyste, a zaczynają duże *odkształcenia trwałe*, czyli *plastyczne*. Wszak mówimy często o sprężynach mniej lub więcej podatnych, zależnie od tego, czy się mniej lub więcej uginają (sprężyście) pod danym obciążeniem.

6. Kruchłość, udarność. Materiał niezdolny do odkształceń plastycznych nazywamy kruchym. *Kruchłość* jest zatem także ogólną własnością wytrzymałościową, zależną co prawda w wysokim stopniu od sposobu obciążenia i od temperatury. Szczególnie ważne praktycznie są objawy

kruchości przy uderzeniu, gdyż materiały o znacznym stopniu *plastyczności*, a więc małej *kruchości* przy obciążeniach spokojnych, objawiają niekiedy mniejszą plastyczność, a większą kruchość przy uderzeniach. Odnośną złożoną własność wytrzymałościową materiału mierzy się wielkością energii uderzenia, potrzebnej do złamania próbki z karbem i odniesionej do jednostki pola przekroju. Odpowiednia stała wytrzymałościowa nosi w Niemczech dziwaczną nazwę *Kerbzähigkeit*. U nas usiłowano ją przetłumaczyć mniej lub więcej dosłownie, nie bacząc na zbędność uwzględnienia w nazwie karbu, który nie jest czymś istotnym dla określenia omawianej własności. Nie widzę powodu, ażeby nie przyjąć ogólnie nazwy *udarność* zaproponowanej przez prof. L. KARASIŃSKIEGO.

7. Wytrzymałość trwała. Uporządkowawszy najogólniejsze pojęcia wytrzymałościowe, przejdziemy do pojęć szczegółowych. Określona powyżej *wytrzymałość materiału*, jako granica wyższa naprężeń, które pręt próbny z danego materiału znosi bez niebezpieczeństwa uszkodzenia, jest jak wiadomo zależna:

- 1) od sposobu działania obciążenia (obciążenie stałe lub zmienne),
- 2) od czasu (obciążenie długotrwałe i krótkotrwałe),
- 3) od temperatury.

Wytrzymałość materiału znaleziona za pomocą zwykłej doraźnej próby rozrywania (lub zgniatania), która trwa nie dłużej jak kilka minut, okazuje się prawie niezależna od czasu doświadczenia w jego granicach praktycznych i nazywa się stosownie *doraźną wytrzymałością materiału* (na rozciąganie lub ściskanie).

Ale niezależność wytrzymałości materiału od czasu trwania obciążenia spełnia się u najważniejszych materiałów konstrukcyjnych jedynie w temperaturach nie różniących się znacznie od pokojowej. Natomiast w temperaturach, przy jakich pracują części składowe współczesnych silników parowych i spalinowych, pojawia się wielka zależność wytrzymałości materiału od czasu trwania obciążenia (obok zależności od temperatury). Wtedy wysuwa się na pierwszy plan wytrzymałość przy dowolnie długim działaniu stałego obciążenia, czyli *wytrzymałość trwała*, gdyż ona jest przy wyższych temperaturach u metali konstrukcyjnych znacznie mniejsza od wytrzymałości doraźnej.

Wytrzymałość trwałą nazywają Anglicy *creep limit*, Niemcy *Kriechgrenze* (obok *Standfestigkeit*), co u nas przetłumaczono na „granicę pelzania“ albo co gorzej „granicę pelznięcia“ Technika Ciepła No 10, 11 i 12 z r. 1930). Nazwy obce mają obrazować inną, również istotną, chociaż mniej ważną praktycznie cechę zjawiska. Skoro np. przy temperaturze powyżej 250° C obciążymy pręt ze stali węglowej tak, że naprężenie jest mniejsze znacznie od wytrzymałości doraźnej, to obserwując uważnie

przez czas dość długi, stwierdzimy, że nie ma równowagi; pręt wydłuża się ciągle chociaż bardzo nieznacznie i bardzo powoli, aż nagle pęka, niekiedy po kilku tygodniach lub miesiącach. Otóż ten nader powolny wzrost odkształceń trwałych bez zmiany obciążenia, nazwano „pełzaniem“ dla odróżnienia od stosunkowo szybkiego „płynięcia“ materiału, jakie zachodzi przy próbie doraźnej, gdy naprężenie osiągnie granicę plastyczności (*n. Fließgrenze; a. yield point*). Tak powstała dość niefortunna nazwa „creep limit“ przetłumaczona dosłownie jako „granica pełzania“.

Proponując zamiast tego nazwę *wytrzymałość trwała* przewiduję pewien zarzut, do którego powrócę wkrótce. Teraz zaznaczę jeszcze, że dawno już znano metale np. cynk, które przy zwykłej temperaturze objawiają *wytrzymałość trwałą* przeszło o połowę mniejszą od doraźnej. Ale zjawisko to nie miało większego praktycznego znaczenia i dlatego wspomniano o nim tylko mimochodem w podręcznikach. Teraz bada się je na stalach i innych materiałach konstrukcyjnych przy temperaturach pary wysokoprężnej, ze względu na wielką doniosłość w konstrukcji silników parowych itp.

8. Zmęczenie materiału. W przypadkach *obciążenia okresowo zmiennego* obniża się jak wiadomo *wytrzymałość* materiału w stosunku do *wytrzymałości doraźnej*. Przy badaniu materiału pod obciążeniem okresowo zmiennym szuka się wyższej granicy naprężeń, które pręt próbny wytrzymuje praktycznie przez czas nieograniczony. Na pozór wydaje się, że takie badanie nie da się wykonać praktycznie, nawet przy największym skróceniu okresów obciążenia, jednakże studium doświadczalne zależności powyższej granicy od bezwzględnej liczby zmian obciążenia, doprowadziło licznych badaczy do przekonania, że każdy materiał posiada swoistą wyższą granicę naprężeń zmiennych przy odpowiedniej amplitudzie zmienności, które to naprężenia wytrzymuje bez szkody przy dowolnie wielkiej liczbie zmian po sobie następujących. Taką granicę nazwiemy w ogóle *wytrzymałością na zmęczenie*, rozróżniając przede wszystkim znane powszechnie dwa główne typy *zmęczenia* (lub *znużenia*) *materiału*:

1. Zmęczenie skutek zmian naprężenia o tym samym znaku od zera, aż do wartości krańcowej.

2. Zmęczenie wskutek zmian naprężenia od ciągnienia do ciśnienia o tej samej krańcowej wartości bezwzględnej.

Nie mogąc od dawna już pogodzić się z nazwami „*wytrzymałość pierwotna*“ (z niemieckiego „*Ursprungsfestigkeit*“) i „*wytrzymałość drganna*“ (z niem. „*Schwingungsfestigkeit*“¹⁾) napotykanymi w naszym

¹⁾ Anglicy stosują nazwę bardziej złożoną, ale dobrze charakteryzującą rzecz, a mianowicie: 1) *fatigue stress, pulsating load*, 2) *fatigue stress, alternating load*.

piśmiennictwie na oznaczenie wyróżnionych dwu typów wytrzymałości na zmęczenie, proponuję nazwy:

- 1) *Wytrzymałość na zmęczenie jednokierunkowe (jednostronne).*
- 2) *Wytrzymałość na zmęczenie obukierunkowe (obustronne).*

Otóż zarzut powyżej przewidywany mógłby polegać na twierdzeniu, że wytrzymałość na zmęczenie ma również charakter *wytrzymałości trwałej* i dlatego zarezerwowanie tego przymiotnika tylko dla *wytrzymałości statycznej* przy obciążeniu stałym, działającym przez czas nieograniczony, wydaje się nieuzasadnione. Atoli podkreślanie trwałości co do czasu, w nazwach obu powyższych własności, wywołałoby widocznie potrzebę innych jeszcze przymiotników dodatkowych, co prowadziłoby do dłuższych nazw złożonych (jak np. wytrzymałość trwała statyczna, wytrzymałość trwała na zmęczenie dwukierunkowe). Skrócenie nazw przemawia, jak sądzę, na korzyść poprzednich propozycji.

Wiadomo, że wygląd *powierzchni pęknięcia (złomu, rozłamu)* u metali ciągliwych jest charakterystyczny dla sposobu wywołania pęknięcia, a mianowicie:

a) Przy jednorazowym spokojnie działającym przeciążeniu materiału jest pęknięcie poprzedzone znacznym odkształceniem plastycznym (przy prostym rozciąganiu np. tworzy się znana szyjka).

b) Przy obciążeniu okresowo-zmiennym, nie czyniącym zadość warunkowi wytrzymałości na zmęczenie, zachodzi pęknięcie z reguły bez pojawienia się najpierw wyraźnych odkształceń plastycznych, sygnalizujących niejako niebezpieczeństwo. W tym przypadku rozłam ma wygląd taki sam, jak przy spokojnie działającym przeciążeniu materiału kruchego. Niemcy nazywają takie pęknięcie: *Ermüdungsbruch* albo *Dauerbruch*. Nie wydaje mi się, ażeby szukanie polskiego odpowiednika było konieczne, jakkolwiek napotykanie często wyrażenie: pęknięcie wskutek zmęczenia nie jest szczęśliwe, a dydaktycznie nawet niebezpieczne.

Mimo to zaryzykuję na próbę wprowadzenia nazw następujących:

a) *rozłam zwykły*, tj. pęknięcie, wzgl. jego powierzchnia, powstała wskutek jednorazowego, stopniowego wzrostu obciążenia ponad wytrzymałość doraźną i

b) *rozłam zmęczeniowy*, powstały wskutek naprężeń okresowo zmiennych pierwszego lub drugiego typu.

9. Twardość i hartowność. Odkształceniom plastycznym metali towarzyszą z reguły zmiany ich własności mechanicznych, jakich nie dostrzegamy wcale, gdy odkształcenia były wyłącznie sprężyste. Metal raz odkształcony plastycznie, czy to rozciągany, czy też zgniatany wzdłuż osi pręta próbnego (albo w jakikolwiek inny sposób), traci nieco ze swej zdolności do nowych odkształceń plastycznych, a zyskuje natomiast drobne

zwiększenie zdolności do odkształceń sprężystych. Jego praktyczna granica sprężystości się podwyższa. Jednocześnie wzrasta jego wytrzymałość doraźna; dzięki czemu staje się bardziej twardym, ale zato bardziej kruchym.

Twardość, jako nazwa pewnej własności wytrzymałościowej materiału, jest tak rozpowszechniona, że jej określenie wydaje się zbyt proste. A jednak zastanowiwszy się nieco, dochodzimy do przekonania, że nie tylko w mowie potocznej, ale także w języku techniczno-naukowym używamy wrazu *twardość* w różnych znaczeniach. Świadczy o tym już choćby fakt, że *pomiary twardości różnymi przyrządami i metodami dają dla różnych materiałów liczby dość dalekie od proporcjonalności. Dlatego mówimy np. o twardości BRINELLA (mierzonej przez naciskanie kulki stalowej), twardości LUDWIKA (mierzonej przez wciskanie stożka), twardości sklerometrycznej (mierzonej przez zarysowanie ostrzem diamentowym) itp. W warsztatach nazywają często ten metal bardziej twardym, który się trudniej obrabia, a zatem przez twardość rozumieją przy tym nieco inną własność, niż mierzoną przez wgniatanie kulki lub stożka.*

Pod nasze rozważania podpada tylko *twardość* pojmowana jako szczególny rodzaj wytrzymałości, przejawiający się przy wzajemnym nacisku dwu ciał, które się stykają bardzo małą częścią swych powierzchni.

Tak pojmowana *twardość* staje się określoną wielkością fizykalną dopiero przy ustaleniu kształtu stykających się powierzchni ciał i wzorcowaniu jednego z nich, dającego się odtworzyć zawsze w tych samych wymiarach, kształcie i jakości. Jest rzeczą jasną, że taka twardość musi zależeć od odkształcalności sprężystej i plastycznej badanego ciała i od jego stałych wytrzymałościowych. *Twardość* jest zatem kombinacją własności sprężystościowych i wytrzymałościowych. Jeżeli dla różnych gatunków stali znaleziono doświadczalnie, że *twardość* BRINELLA jest dość dokładnie proporcjonalna do wytrzymałości doraźnej, to fakt ten nie przeczy bynajmniej powyższemu określeniu, lecz tłumaczy się po prostu bardzo małą nieznaczoną różnicą stałych sprężystościowych u tych stali, przy wielkich różnicach stałych wytrzymałościowych.

Zjawisko *twardnienia* metali wskutek odkształceń plastycznych, znane od dawna technologom i metalurgom pod ogólnym mianem skutków zimnej obróbki (*ang.* cold work, *nem.* Kaltbearbeitung), albo skutków zgniotu, nazywają Francuzi *écrouissage*, a Niemcy *die Verfestigung*. Ponieważ doświadczenie poucza, że twardnienie występuje tym silniej, im odkształcenie plastyczne było większe, przeto technologowie mierzą stopień twardnienia wielkością względnych odkształceń plastycznych, czyli jak się wyrażają stopniem *zgniotu*. (Ten stopień zgniotu zaś określają np. przy rozciąganiu pręta o przekroju pierwotnym F_0 , a odkształconym F , przez wartość stosunku $\frac{F_0 - F}{F}$). Z rozpowszechnionym już bardzo wyra-

żeniem *zgniot* nie mogą się pogodzić, gdyż etymologicznie odpowiada to wyrażenie tylko odkształceniu przy ściskaniu (zgniataniu); tymczasem twerdnienie zachodzi równie dobrze przy rozciąganiu i w ogóle przy każdym odkształceniu plastycznym postaci.

Wiadomo, że twerdnienie wielu metali zachodzi także wskutek termicznego procesu hartowania, zdolność tych metali do twerdnienia nazywają trafnie *hartownością*. Nasuwa się przeto propozycja nazywania *hartownością mechaniczną* i *hartownością termiczną* własność wielu metali technicznych, polegającą na twerdnieniu wskutek odkształceń plastycznych przy stałej temperaturze pokojowej lub na twerdnieniu przez odpowiednią obróbkę termiczną. Wyraz *zgniot* zastąpiłbym chętnie *odkształceniem plastycznym*, przynajmniej we wszystkich przypadkach kiedy nie było sił zgniatających.

Natężenie, naprężenie i napięcie

(Mechanik, Nr 4, 1946 r.)

Treść wyrazów stanowiących tytuł niniejszego artykułu ulegała w ciągu ostatniego pięćdziesięciolecia zmianom, które są wynikiem przyrodzonej nam dążności do używania wyrazów, spełniających warunek ściślej zależności pomiędzy terminem, a pojęciem przez nie odtwarzanym.

Ponieważ jestem zasadniczo przeciwny zmianom terminów naukowych, rozpowszechnionych przez wybitnych autorów, przeto poczuwam się do obowiązku przedstawienia tutaj powodów, które skłoniły mnie prawie przed ćwierćwieczem do zmiany zakresu stosowalności obu pierwszych pojęć.

Zacnę od wyrazu *natężenie*, odpowiadającemu najlepiej terminowi łacińskiemu *intensitas* i określającemu w ogóle tylko cechę ilościową różnych wielkości, występujących w mechanice i całej fizyce. W tym znaczeniu mówi się bowiem o natężeniu pola sił, bądź to pola grawitacyjnego, bądź też elektrycznego lub magnetycznego, albo o natężeniu przepływu w hydrodynamice. W przypadku pola grawitacyjnego natężenie tego pola wyraża się stosunkiem siły pola, działającego na umieszczoną w nim niezmiernie małą masę punktu materialnego, do tejże masy, a zatem przedstawia przyspieszenie ciężkości g . W hydrodynamice natężenie przepływu określa masę lub objętość cieczy, przepływającą przez rozpatrywany przekrój w jednostce czasu.

Przed laty jednakże wyraz *natężenie* był również używany w tym znaczeniu, w jakim obecnie używamy wyrazu *naprężenie*.

Mianowicie WŁADYSŁAW KLUGER, autor znakomitej „Wytrzymałości materiałów, pierwszej polskiej książki z tej dziedziny, wydanej w Paryżu w 1870 roku, zastosował termin *natężenie* w znaczeniu *siły wewnętrznej (napięcia)*, odniesionej do jednostki pola. Nie więc dziwnego, iż profesora

rowie Politechniki Lwowskiej z ostatniej ćwierci ubiegłego stulecia przyjęli termin KLUGERA, gdyż język i styl tego autora może służyć niemal po dzień dzisiejszy za wzór prozy naukowej. Nie ulega jednak wątpliwości, że zapożyczenie przez KLUGERA terminu *natężenie* na oznaczenie tego, co w języku angielskim nazywa się *stress*, francuskim — *tension* lub *contrainte*, niemieckim — *Spannung*, a rosyjskim — *napriażenje*, nie było pomysłem szczęśliwym. Toteż kiedy w wychodzącym w Warszawie „Przeglądzie Technicznym“ zauważyłem przed paru dziesiątkami lat termin *naprężenie*, przyswoiłem go sobie rychło, jako wyraz rdzennie polski, mimo etymologii wspólnej z językiem rosyjskim (podobnych pokrewieństw mnóstwo w językach słowiańskich). Od tego czasu zauważyłem coraz większe rozpowszechnienie się tego terminu we wszystkich dziedzinach Polski, tak że obecnie w piśmiennictwie naszym *naprężenie* określa siłę powierzchniową, odniesioną do jednostki pola i wyrażoną w technicznym układzie jednostek miar w kG (kilogramach siły) na cm^2 , a w układzie CGS w dynach na cm^2 . Naprężenie przy tym może być ciągnące lub cisnące, albo wyrażając się zwięźlej może być *ciągnięciem* lub *ciśnieniem*.

Ostatnie z omawianych pojęć, a mianowicie *napięcie* możemy określić jako *siłę wewnętrzną* między obiema stronami przekroju — ang. *total stress* (*internal force*); fr. *force intérieure* (*force de tension*); niem. *Spannkraft* (*innere Kraft*); ros. *usilje*.

Dodam jeszcze, że paru zasłużonych autorów w dawnym Królestwie Kongresowym propagowało termin obmyślony — jak się zdaje — przez fizyka J. J. BOGUSKIEGO, tj. „wysil“, z którym jednakże nie mogłem się oswoić i wprowadziłem w moich wykładach oddawna wyraz *napięcie* na oznaczenie tego, co JAN NEPOMUCEN FRANKE nazywał „natężeniem bezwzględny“, tj. na oznaczenie całkowitej siły wewnętrznej, przeniesionej przez dany przekrój ciała lub wydzieloną część tego przekroju.

Okoliczność, że wyraz *napięcie* ma inne powszechnie znane znaczenie w elektrotechnice (różnicy potencjałów), budzi pewne skrupuły, ale jak wiadomo żaden język nie rozporządza taką ilością wyrazów, która by pozwoliła dać każdemu pojęciu odrębną nazwę jednowyrazową.

Wytrzymałość i wyteżenie

(Mechanik, Nr 5/6, 1946 r.)

W ocalałym skorowidzu do obszernej „Mechaniki technicznej ciał stałych“, noszącej tradycyjny podtytuł „Wytrzymałość materiałów“¹⁾, znajdujemy: *wytrzymałość* — *strength* — *résistance* — *Festigkeit* — *soprotiwlenje*; *procznost'*.

¹⁾ której rękopis wraz z 400 przeszło rysunkami, gotowy do druku w 2 egzemplarzach, padł ofiarą Niemców podczas powstania warszawskiego.

Wyteżenie (wysilek) — fatigue — fatigue — Anstrengung...

Jak widzimy wyraz *wytrzymałość* ma odpowiedniki we wszystkich 5 językach powyższych w kolejności: polski, angielski, francuski, niemiecki, rosyjski; przy tym rosyjski posiada nawet dwa, niezupełnie się pokrywające pod względem znaczenia. Tymczasem *wyteżenie* ma odpowiednik jednoznaczny tylko w terminie niemieckim *Anstrengung*, który przyswoilem przed czterema dziesięcioleciami naszemu piśmiennictwu techniczno-naukowemu, zajmując się wówczas teoriami wytrzymałości.

W innych językach jest to pojęcie używane zwykle w postaci dwu-wyrazowej.

Przy terminie *wytrzymałość* pominąłem rozmyślnie łączone z nim zwykle wyrazy, zmieniające zakres pojęcia, tj. *wytrzymałość materiału* i *wytrzymałość ciała* (części konstrukcyjnej lub całej konstrukcji), mając na myśli następującą definicję najogólniejszą:

Wytrzymałość jest to zdolność ciał stałych o postaci najrozmaitszej do znoszenia obciążeń bez uszczerbku dla działania tych ciał, jako części konstrukcyjnych.

Ta definicja wskazuje, że mamy tu do czynienia z pojęciem na wskroś technicznym, które odbiega bardzo od pojęcia *spójności*, określanej jako własność ciał stałych, polegającą na tym, że ich cząsteczki są utrzymywane w nieziennej odległości wzajemnej przez siły międzycząsteczkowe (molekularne), sprzeciwiające się zarówno usiłowaniu ich oddalenia, jak i ich wzajemnego zbliżenia.

Obie definicje są jednak tylko jakościowe. Bardziej pożądane są określenia ilościowe. Dla *wytrzymałości* mamy je w słowach następujących:

Przez *wytrzymałość ciała* (części konstrukcyjnej), obciążonego w sposób dany siłami, których wartość liczbową możemy zwiększać, rozumiemy granicę górną wartości tych sił, przy której pojawiają się oznaki miejscowego rozluźnienia więzów, łączących cząsteczki ciała, czyli oznaki uszkodzenia lub wreszcie zniszczenia tego ciała.

Nad ilościową definicją *spójności* zatrzymywać się nie będę, gdyż o ile mi wiadomo, podano ją dotychczas tylko w odniesieniu do kryształów, a nie dla materiałów technicznych. Natomiast przejdę do *wytrzymałości materiału*. Jest to znowu pojęcie czysto techniczne, zrodzone z potrzeby praktycznej ujęcia teoretycznego wytrzymałości części konstrukcyjnej w zależności od samego materiału, z którego ją sporządzono, aby obliczenie przy projektowaniu było możliwe.

Biorąc ściśle nie można określić ilościowo *wytrzymałości materiału* przez podanie stałych wartości liczbowych znalezionych doświadczalnie dla tego materiału, gdyż te wartości zależą w ogóle od postaci ciała i rozmieszczenia w nim naprężeń powstałych pod obciążeniem. Atoli zado-

wałając się przybliżeniem wystarczającym praktycznie w bardzo wielu przypadkach możemy powiedzieć że:

Wytrzymałość materiału określają ilościowo doświadczalne wartości krytyczne naprężeń lub odkształceń w stanie napięcia, określonym w ogóle danym stosunkiem naprężeń głównych.

Przez *wartości krytyczne* rozumiemy przy tym takie wartości, przy których pojawiają się albo niepożądane odkształcenia plastyczne (trwale), albo też pęknięcia (w przypadku materiałów kruchych).

Ta definicja ogólna jest z natury rzeczy dość złożona, ale upraszcza się bardzo w przypadkach odpowiednio prostych, a technicznie ważnych, jak np.:

1) *Wytrzymałość na proste rozciąganie* lub *ściskanie* prętów — określona jednym tylko naprężeniem głównym — jest wartością krytyczną tego naprężenia (zwaną także wartością niebezpieczną).

2) *Wytrzymałość na proste ścinanie* (jakie zachodzi w przekrojach pręta narazonego tylko na siłę tnącą albo na moment skręcający), określona samym tylko naprężeniem stycznym τ (lub równoważnymi mu naprężeniami normalnymi σ i $-\sigma$ w przekrojach wzajemnie prostopadłych i obróconych o 45°) jest wartością krytyczną naprężenia tnącego (równą dla metali elastoplastycznych 0,58 wartości krytycznej σ),

3) *Wytrzymałość na zginanie*, która się sprowadza zwykle do wyznaczenia wartości krytycznej naprężeń we włóknach skrajnych, narazonych na proste rozciąganie lub ściskanie.

Określenia powyższe odbiegają nieco od tych, jakie daje zwykła praktyka. Ilustruje ją dobrze np. próba wytrzymałości na osiowe ściskanie pręta. W próbie takiej zwiększamy siłę obciążającą P aż do wartości krańcowej P_w , przy której stany równowagi stałej pręta przechodzą w stan równowagi chwiejnej, po czym (o ile nie zajdzie zupełne zniszczenie pręta) wytwarzają się nowe stany równowagi pręta trwale odkształconego przy sile P mniejszej od P_w . Wtedy P_w bywa uważane za wytrzymałość pręta, jakkolwiek niedopuszczalne w konstrukcji odkształcenia trwale pojawiły się już przed tym przy wartości siły P mniejszej od P_w .

Przechodząc do *wyteżenia*, zaznaczę, że termin ten stosowałem w moich pracach i wykładach w znaczeniu następującym.

Przez *wyteżenie* rozumiemy wielkość mechaniczną (lub zespół takich wielkości), która mierzy niebezpieczeństwo pojawienia się odkształceń trwałych o wartości uznanej w praktyce za szkodliwą i prowadzącą do pęknięcia (przy dalszym zwiększaniu wartości liczbowej obciążeń części konstrukcyjnej, danych co do kierunku i położenia).

Przypuszczam, że mieszanie pojęć *wytrzymałość* i *wyteżenie*, powstaje dlatego, ponieważ najczęstsze i najprostsze obliczenia wytrzymałościowe odnoszą się do zwykłego *rozciągania* lub *ściskania jednoosiowego*. Wtedy

zaś jest rzeczą obojętną, czy wyężenie mierzymy tradycyjnie wielkością naprężenia, czy też wielkością wydłużenia właściwego, czy wreszcie stosowną funkcją tych wielkości, jak np. pracą odkształcenia. Wszystkie bowiem rosną i maleją razem z wartością obciążenia.

Atoli rzecz się ma zgoła inaczej, gdy mamy do czynienia z przypadkami obciążenia, które wywołują w materiale *złożony stan napięcia*, określony w ogóle trzema naprężeniami głównymi $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ o kierunkach wzajemnie prostopadłych. Wtedy zakorzenione u wszystkich techników od lat 150 pojęcie *naprężenia niebezpiecznego* (wzgl. *bezpiecznego*) traci nieraz zupełnie sens i winno być zastąpione ogólniejszym pojęciem *wyężenia*. Określiwszy dla danego materiału miarę wyężenia na podstawie odpowiedniej hipotezy wytrzymałościowej, możemy następnie dla wygody projektującego przerachować *wyężenie* przy danym stosunku naprężeń głównych $\sigma_1 : \sigma_2 : \sigma_3$ na równoważne mu *wyężenie* przy jednoosiowym stanie napięcia, czyli na tzw. *naprężenie sprowadzone*, czyli *zastępcze*. Objaśniają to najlepiej przykłady następujące:

1) Tak zwane *proste ścinanie*, występujące np. przy skręcaniu prętów, jest jak wiadomo dwuwymiarowym stanem napięcia określonym w sposób dwojaki: a) *naprężeniami stycznymi* o wspólnej wartości liczbowej τ , działającymi na 4 ściany kostki elementarnej wyciętej w myśli z materiału albo

b) dwoma naprężeniami głównymi σ i $-\sigma$, działającymi w przekrojach tej kostki, przy czym jest $\sigma = \tau$.

Przyjąwszy dla metali elasto-plastycznych, że miarą wyężenia jest ta część V_f energii sprężystej, która odpowiada samemu tylko odkształceniu postaciowemu, otrzymujemy dla niej przy prostym rozciąganiu naprężeniem wyrażenie

$$V_f = \frac{\nu + 1}{3\nu E} \sigma^2,$$

gdzie ν jest *liczbą POISSONA*, a przy prostym ścinaniu:

$$V_f = \frac{\nu + 1}{\nu E} \tau^2.$$

Ażeby więc w obu przypadkach zachodziło to samo wyężenie, winno być: $\sigma_1^2 = 3\tau^2$, czyli naprężenie zastępcze: $\sigma_1 = 1,732\tau$. Na odwrót niebezpieczna wartość naprężenia przy prostym ścinaniu, tj.

$$\tau_{nieb} = \frac{1}{1,732} \bar{\sigma}_1 = 0,58 \bar{\sigma}_1$$

jeżeli $\bar{\sigma}_1$ oznacza wartość niebezpieczną prostego ciągnięcia²⁾.

²⁾ Wynik ten potwierdzają liczne badania doświadczalne z błędem daleko mniejszym, niż ten, który daje zastosowanie innych teorii wytrzymałościowych.

2) Przy wszechstronnym równomiernym ściskaniu ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$) jest według powyższej hipotezy energetycznej oczywiście $V_f = 0$, podczas gdy przy jednoosiowym stanie napięcia jest, jak powyżej

$$V_f = \frac{\nu + 1}{3\nu E} \sigma_1^2.$$

Z tego wynika, że naprężenie zastępcze jest równe zeru, bez względu na wartość p , czyli że dowolnie wielka wartość p nie jest niebezpieczna dla materiału izotropowego. Także ten wynik można uważać za potwierdzony przez doświadczenia, np. dawniejsze AUGUSTA FÖPPLA a nowsze BRIDGEMANA w Ameryce, który poddawał metale i inne materiały ciśnieniu hydrostatycznemu kilkudziesięciu tysięcy atmosfer bez najmniejszej szkody, podczas gdy kilkadziesiąt albo kilkaset razy mniejsze naprężenie przy jednoosiowym ściskaniu wystarczały do wyraźnych odkształceń trwałych. W tym więc przypadku można sobie pozwolić na naprężenie bezpieczne dowolnie wielkie. Jest to, co prawda przypadek wyjątkowy, ale zbliża się doń wyteżenie materiału w miejscach stykania się kul lub wałków łożysk tocznych z panewkami i to właśnie wyjaśnia dopuszczalność tak wielkich naprężeń w tych miejscach, o jakich się dawniej nie śniło technikom współczesnym, np. C. BACHOWI.

Granica płynności, czy granica plastyczności?

(Mechanik, Nr 7/8, 1948 r.)

Będąc zasadniczym przeciwnikiem zmiany dość rozpowszechnionych terminów naukowych, uznaję jednakże potrzebę wyjątku w przypadkach, kiedy dawną nazwę trafniejszą zastąpiono, choćby przed kilkudziesięciu laty inną, gorszą, przyswojoną z języka obcego. Taką nazwą jest przetłumaczona dosłownie z niemieckiej „Fliessgrenze“ przez dawnych profesorów Politechniki Lwowskiej „granica płynności“.

Używałem tej nazwy przez wiele lat, zanim moja dalsza praca w dziedzinie mechaniki technicznej ciał stałych, czyli stereomechaniki nie wykryła przypadkowości powstania nazwy niemieckiej.

Zastąpiono nią (zapewne dla zamanifestowania samodzielności naukowej Niemców na tym polu, ale niesłusznie) dawną *praktyczną (wyraźną) granicę sprężystości*, francuską „limite apparente de l'élasticité“. Rozumiemy przez to, jak wiadomo, tę wartość naprężenia rozciągającego lub ściskającego podłużnie pręt próbny, której przekroczenie wywołuje pojawienie się pierwszych łatwo dostrzegalnych *odkształceń niesprężystych*, czyli *plastycznych*, albo także *trwałych*. W stanie napięcia pręta odkształceniom takim towarzyszą zawsze i odkształcenia sprężyste; po usunięciu obciążenia znikają odkształcenia sprężyste, a pozostają tylko plastyczne.

Wielkość tych ostatnich w stosunku do odkształceń sprężystych bywa bardzo rozmaita u różnych materiałów, a tylko niektóre rodzaje stali konstrukcyjnej zdradzają zjawisko osobliwe znacznego *wydłużenia plastycznego (trwałego)* rosnącego z prędkością stosunkowo wielką przy zrazu stałej wartości naprężenia. Ponieważ odkształcenie w tych warunkach szczególnych przypominało obserwowanym badaczom niemieckim znane zjawisko płynięcia z prędkością stałą lodowców alpejskich pod działaniem stałej siły ciężkości, przeto inżynierowie niemieccy nazwali granicę wymienioną „Fließgrenze“ uważając ją zbyt pochopnie za ogólną cechę wytrzymałościową materiałów. Inżynierowie brytyjscy kierowani również zmysłem praktycznym, który nakazywał badać przede wszystkim zwykłą stal konstrukcyjną, określili to zjawisko wyjątkowe nieco trafniej wyrazem „yield-point“ oznaczającym punkt wykresu (σ , ϵ) odpowiadający „poddaniu się“ materiału sprężystego siłom zewnętrznym. Z tego zapewne powodu zaproponowano u nas (prof. I. KARASIŃSKI) także nazwę „granica podatności“.

Tymczasem inne rodzaje stali i niemal wszystkie inne metale własności opisaney nie posiadają, objawiając tylko rosnący przyrost odkształcenia plastycznego przy jednoczesnym przyroście obciążenia. Cechą ogólną metali jest więc pojawienie się odkształceń plastycznych po przekroczeniu granicy sprężystości, tj. zgodnie z ideą terminologii francuskiej powstałej na podłożu naukowym, podczas gdy niemiecka „Fließgrenze“ i angielski „yield-point“ powstały na gruncie czysto praktycznym.

Że tak się rzecz miała istotnie, dowodzi wprowadzenie przez inżynierów niemieckich umownej wartości liczbowej dla „granicy płynności“ tych materiałów, które opisaney własności szczególnej nie posiadają, tj. nie „płyną“ przy stałej wartości siły. Cechą istotną zjawiska jest tylko pojawienie się odkształceń trwałych, czyli plastycznych i dlatego lat temu kilkanaście PKN uchwalił na wniosek prof. H. MIERZEJEWSKIEGO przyjęty jednomyślnie przez członków Komisji ad hoc, do której należeli także profesorowie: M. BROSZKO i M. T. HUBER, aby granicę pojawienia się wyraźnych odkształceń trwałych nazywać nie „granica płynności“, lecz *granica plastyczności* zgodnie z terminologią teorii plastyczności, jako nowej ważnej gałęzi mechaniki technicznej.

Dziś głosowałbym nawet za wymienioną już powyżej praktyczną (techniczną) granicą sprężystości, gdyby nie wzgląd na niebezpieczeństwo nieporozumień przy odróżnianiu „teoretycznej“ granicy sprężystości od praktycznej, oraz na wygodę w porozumiewaniu się z fizykami i materiałoznawcami.

Tutaj muszę się zastrzec, że bynajmniej nie oponuję przeciw korzystaniu z obszerniejszego dorobku naukowego techniki niemieckiej, którą po dziś dzień wysoko cenię. Ale sądzę, że należy patrzeć krytycznie na

powódź niemiecką piśmiennictwa techniczno-naukowego, w której obok rzeczy znakomitych, pochodzących od elity inżynierów-badaczy, spotykamy wcale dużo ujmowanych szeroko pod hasłem nowości naukowych wytworów dyletantyzmu, co przypomina modę przemijającą i nie zasługującą na przyswojenie u nas.

Z rozważań powyższych wypływa wniosek, iż w interesie naszych nauk technicznych leży wyrugowanie terminu „granica płynności“ na rzecz *granicy plastyczności*, równouprawnionej zresztą z *techniczną (praktyczną) granicą sprężystości*. Wszak podstawową, a ze stanowiska naukowego najważniejszą własnością ciał stałych jest sprężystość, a nie odkształcalność plastyczna; ta bowiem jest własnością dodatkową niejako, często ledwie dostrzegalną, chociaż praktycznie nader ważną.

Równokierunkowość, równozwrotność, bezkierunkowość czy izotropia?

(Mechanik, Nr 7/8, 1948 r.)

Własności fizyczne, a więc przede wszystkim własności mechaniczne materiału, z którego sporządzono daną część konstrukcyjną, mogą być — przypadek najprostszy — niezależne od kierunku. Znaczy to, jak wiadomo, że np. przewodzenie drgań sprężystych wzbudzonych w pewnym miejscu ciała odbywa się we wszystkich kierunkach z prędkością tą samą. Także wydłużalność prętów próbnych, wyciętych z większej bryły materiału, których osie są zorientowane rozmaicie w tej bryle, jest wtedy jednakowa. W nauce nazwano bardzo dawno materiał o takich własnościach *izotropowym*. Natomiast materiały takie jak kryształy i drewno naturalne, których własności mechaniczne zmieniają się zależnie od kierunku osi wyciętej próbki, nazwano *anizotropowymi*. Obie nazwy utworzono sztucznie z pierwiastków greckich w czasach, kiedy łacina była językiem międzynarodowym świata nauki, a terminologię naukową czerpano z podstaw klasycznych, zbudowanych przez uczonych greckich w starożytności.

Godne uznania umiłowanie języka ojczystego było i u nas bodźcem do spolszczenia wielu terminów naukowych tego rodzaju (przykładem *sprężystość* zamiast „elastyczność“).

Niektórzy fizycy i inżynierowie próbowali więc pisać zamiast izotropowy — „równokierunkowy“, „równozwrotny“, a nawet „bezkierunkowy“. Półwiekowe doświadczenie przekonało mnie, że lepiej tych prób zaniechać. Albowiem po pierwsze żaden z tych przymiotników polskich nie oddaje wiernie pojęcia *izotropii* lub *izotropowości* (która może być nie tylko mechaniczna, ale także optyczna lub termiczna); po wtóre zaś szkoda pozbywać się terminu występującego we wszystkich prawie językach kulturalnych. Rosjanie np. piszą „izotropnyj“, co odróżnia się tylko końcówką właściwą językowi rosyjskiemu.

My skromni pracownicy na polu polskich nauk technicznych bierzmy sobie raczej przykład od wielkich twórców na arenie światowej, którzy nie byli nigdy pochopni do rugowania terminów międzynarodowych, choćby powstałych niedawno. Czyż warto silić się na spolszczenie np. alhidady, energii kinetycznej, entropii, komety, kryterium, nutacji, paralaksy, planety, potencjału, precesji itd.? Zostańmy więc przy *izotropii* i *anizotropii* oraz pochodnych przymiotnikach *izotropowy* i *anizotropowy*.

Smukłość, wiotkość

(Przegląd Techniczny Nr 12, 1934 r.)

Smukłością nazywamy stosunek długości pręta do stosownie dobrego wymiaru poprzecznego. Jako ten wymiar przyjmuje się ramię bezwładności poprzecznego przekroju pręta i , zwykle najmniejsze.

Zamiast nazwy *smukłość*, której używa się na oznaczenie stosunku $l : i$, pojawiła się później *wysmukłość* (zupełnie synonimowa, ale mniej wygodna jako dłuższa), a następnie *wiotkość*. Nie podobna uznać tej nowej nazwy za szczęśliwą. Co gorzej, nazwa ta jest na oznaczenie stosunku $l : i$ zupełnie nieodpowiednia. W mowie potocznej rozumiemy bowiem przez *wiotkość* (np. przedmiotów takich, jak cienkie pręty, druty, blachy, tkaniny itp.) własność, która jest przeciwieństwem sztywności, a zatem własność zależną nie tylko od wymiarów geometrycznych, ale także od stałych materiałowych. W tym znaczeniu jest oczywiście cienki pręt drewniany bardziej wiotki od stalowego przy równych wartościach stosunku $l : i$. Na nazwę *wiotkość* zasługiwałaby np. wartość wyrażenia $\frac{l^2}{EJ}$ lub $\frac{l}{\sqrt{EJ}}$, gdyż im ta wartość jest większa, tym mniejsza jest siła potrzebna do wygięcia pręta przez wyboczenie. Tymczasem stosunek $l : i$ określa tylko wartość geometryczną, która nie ma nic wspólnego z materiałem. Tylko dla prętów z tego samego materiału można *wiotkość* (we właściwym tego słowa znaczeniu) mierzyć wartością $l : i$.

E. HYDROMECHANIKA

Refleksje na temat hydrauliki

(Czasopismo Techniczne, 1926 r.)

Może żadna dziedzina mechaniki nie sprawia tyle kłopotu inżynierom, co dynamika płynów. Najprostsze zjawisko *ustalonego* (*ang.* steady, *fr.* permanent, *niem.* stationär) i *równomiernego przepływu* w rurze lub korycie otwartym nie ma po dziś dzień rozwiązania takiego, które by pozwoliło projektującemu technikowi obliczyć stratę energii przy danym wydatku rury lub natężenie przepływu przy danym spadku koryta z taką dokładnością, jaka jest niekiedy pożądana w praktyce. Jeszcze gorzej przedstawia się sprawa dla *ustalonego przepływu nierównomiernego* jak np. w przypadku zwężenia koryta przez filary mostowe itp. Podczas gdy nauka o wytrzymałości może się w nader wydatny sposób posilkować równaniami matematycznej teorii sprężystości i ich rozwiązaniami, albowiem elementy konstrukcyjne zbudowane z ciał stałych podlegają w pewnych, zwykle dość obszernych granicach, klasycznym prawom sprężystości, to równania ruchu ustawione przez L. NAVIERA i G. G. STOKESA dla płynów rzeczywistych, obdarzonych *tarciem wewnętrznym (lepkością)* dają tylko w bardzo nielicznych prostych przypadkach rozwiązania zgodne z wynikami doświadczeń, pominięcie zaś lepkości, czyli posługiwanie *Eulerowskimi równaniami ruchu* prowadzi wprawdzie do rozwiązań wielu zadań po pokonaniu trudności matematycznych, ale rozwiązania te są tylko mniej lub więcej przybliżone. Stopień przybliżenia da się przy tym ocenić tylko przez porównanie z doświadczeniami. Wykonuje się je przeto od dawna i albo za ich pomocą poprawia się wzory teoretyczne współczynnikami, albo też ustawia się według dat doświadczalnych *wzory czysto empiryczne*. W miarę możliwości dąży się przy tym do powiązania danych empirycznych z rozważaniami teoretycznymi, ażeby otrzymane wzory miały raczej charakter półempiryczny i dzięki temu zyskały szerszy zakres stosowalności. Tak powstała i rozwija się po dziś dzień *hydraulika* jako nauka na wskroś techniczna, praktyczna, obok *hydrodynamiki* jako gałęzi fizyki matematycznej, wzgl. mechaniki teoretycznej,

podobnie jak wytrzymałość materiałów rozwija się obok teorii sprężystości. Nauki techniczne uprawiają od początku XIX stulecia inżynierowie-badacze, między którymi znaleźć można wielu mężów głębokiej wiedzy, świadomych tego, że nauki półempiryczne jak hydraulika lub wytrzymałość muszą być oparte na podłożu odpowiedniej nauki czystej, a więc w pierwszym przypadku hydrodynamiki, w drugim zaś teorii sprężystości. Atoli nierzadko uważają się za powołanych do pracy badawczej, twórczej w dziedzinie np. hydrauliki, inżynierowie, którzy nie opanowują dostatecznie nauki macierzystej tj. *hydrodynamiki teoretycznej*. Nie podobna zaprzeczyć, że i tacy mogą działać z pożytkiem w tej dziedzinie, przy wrodzonym talencie obserwacyjnym, eksperymentatorskim i pracowitości, a przy tym gruntownej i krytycznej znajomości dorobku innych badaczy; niestety jednak trafiają się inni, u których zamiłowanie do badań samodzielnych kojarzy się w dziwny sposób z niezajomością i pewnym nawet lekceważeniem prac cudzych już dokonanych. Ci próbują rozwiązywać z niemałym trudem i mozołem zadania, które są tylko szczególnym przypadkiem zagadnień ogólniejszych, już dawno przez innych traktowanych i nawet niekiedy rozwiązanych. Nie znając odnośnych prac, tworzą swoiste słownictwo i nowe na pozór pojęcia w badanej dziedzinie. Wyobrażają sobie nawet, że nadanie nowych przydomków lub nazw członkom starej rodziny pojęć naukowych jest już samo przez się czynem naukowym.

Mimowoli przychodzi na pamięć, jak jeden z naszych wybitnych hydrotechników ŁUKASZ BODASZEWSKI, który utrwalił swoje nazwisko w nauce pierwszym zaobserwowaniem ruchów BROWNA w gazach (powietrzu) — wywołał długotrwały zamęt w głowach swych młodszych kolegów, nazwawszy „ruchem falowym“ rodzaj ruchu cieczy od dawna znany w hydromechanice pod nazwą ruchu potencjalnego albo niewirowego. Ruch ten nie ma z ruchem falowym mechanicznie nie wspólnego prócz pewnej analogii matematycznej, jaka często zachodzi w formalnym ujęciu różnorodnych zjawisk. Wszak *Newtonowskie prawo grawitacji* i *prawo przyciągania elektrycznego* COULOMBA wyrażają się w tej samej formie; a czy można stąd wnioskować, że grawitacja jest natury elektrycznej lub nawzajem?

Innego rodzaju nadużycie nowych nazw można stwierdzić u wielce zresztą zasłużonego hydrotechnika niemieckiego prof. TH. REHBOCKA w Karlsruhe. Inżynier ten propaguje rozróżnianie następujących rodzajów ustalonego ruchu cieczy: Najpierw rozróżnia „Fliesen“, a więc płyniecie od „Stürzen“, co odpowiada polskiemu „zwalaniu się“ lub „spadaniu“. Pierwszą nazwą określa REHBOCK przepływ w rurach i korytach otwartych „gdy ciecz jest ograniczona ścianami na całym obwodzie przepływu albo jest podtrzymywana łożyskiem przy swobodnym ukształto-

waniu się zwierciadła“. Nazwę zaś „Stürzen“ stosuje w przypadku, gdy „ciecz obywa się bez prowadzenia otaczającymi ścianami, poruszając się swobodnie w przestrzeni próżnej lub napełnionej gazami, przy czym może się poddawać we wszystkich kierunkach siłom zewnętrznym na nią działającym“.

W tym przypadku pisali dotychczas inni autorowie z reguły o *swobodnym wypływie cieczy, o strugach lub strumieniach swobodnych* w odróżnieniu od *plynięcia (przepływu) częściowo lub zupełnie nieswobodnego* w rurach lub korytach, strugę stale ograniczających. Te dawne nazwy i ich odmiany nie dawały nigdy powodu do nieporozumień i jako zaczerpnięte z pojęć mechaniki ogólnej o ruchu swobodnym i nieswobodnym nie pozostawiały nic do życzenia.

Powyższa innowacja REHBOCKA nie daje widocznie żadnych korzyści naukowych lub dydaktycznych, jest więc zupełnie zbędna.

Podobnie, chociaż może mniej niekorzystnie, ale pod względem dydaktycznym niebezpiecznie przedstawia się sprawa podziału *plynięcia* według REHBOCKA na trzy kategorie, zamiast dwu ogólnie przyjmowanych. Pierwsza nazwana przez niego „Gleiten“ (dosłownie: ślizganie) ma oznaczać to samo, co w literaturze ogólnonaukowej nazywa się *ruchem laminarnym* albo *plynięciem uwarstwionym* (ang. laminar flow, fr. mouvement laminaire, mouvement de POISEUILLE, niem. laminare Strömung). Ruch tego rodzaju czyni, jak wiadomo zadość klasycznym równaniom różniczkowym płynów z tarciem wewnętrznym. Nadto *plynięcie uwarstwione* może być ruchem ustalonym — (choć nie musi — w ścisłym tego słowa znaczeniu, tj. geometryczny obraz ruchu może być niezmienny z czasem nawet przy najmniejszych przedziałach czasu oddzielających poszczególne obserwacje. W przeciwieństwie do tego ruch płynów zwany powszechnie *burzliwym* (ang. turbulent flow, fr. mouvement turbulent ou tourbillonnant, niem. turbulente Strömung) — nie jest, biorąc ściśle, nigdy ruchem ustalonym, albowiem prędkości składowe w poszczególnych miejscach nieustannie zmieniają swą wielkość wahając około pewnych wartości średnich. Mówiąc zaś o ustaleniu się ruchu burzliwego albo o przepływie burzliwym i ustalonym mamy zawsze na myśli ustalenie się owych średnich prędkości składowych ¹⁾).

Temu wszystkiemu nowa nazwa REHBOCKA „Gleiten“ zupełnie nie przeszkadza i ujmę nie czyni, jakkolwiek nie widzę korzyści w tym,

¹⁾ W moich wykładach używałem przez dłuższy czas nazw: „ruch (przepływ) spokojny“ i „ruch burzliwy“. Atoli pierwszą nazwę trzeba będzie zapewne porzucić, jako dogodną i stosowną dla innej hydrotechnicznie ważnej kategorii przepływu w korytach otwartych, o czym poniżej. Najpraktyczniej, jak się zdaje, będzie stosować w polskim języku nazwę *ruchu (przepływu) laminarnego (uwarstwionego)* w odróżnieniu od *burzliwego (turbulentnego)*.

aby inżynier nazywał to samo inaczej jak fizyk. Niepotrzebny i dydaktycznie niebezpieczny zamęt wprowadza dopiero rozróżnianie przez niego „dwu rodzajów ruchu burzliwego“, nazwanych „Strömen“ i „Schiessen“ z powodów, które wypada obszerniej omówić. Zaznaczyć przy tym trzeba, że tutaj REHBOCK nie jest odosobniony. Inny także zasłużony hydrotechnik niemiecki A. KOCH założyciel laboratorium hydrotechnicznego Politechniki darmsztatskiej odróżnia również te same dwie kategorie pod innymi i to szczęśliwsiymi nazwami, a mianowicie „ruhiges Fliessen“ i „reissendes Fliessen“.

Otóż obie te kategorie upatrują wymienieni hydrotechnicy tylko w przepływach (praktycznie ustalonych) — przez koryta otwarte, z jakimi mamy do czynienia w kanałach, potokach i rzekach. Jak wprowadzona przez O. REYNOLDSA *prędkość krytyczna* oddziela wartości średniej prędkości przepływu, przy których w długiej rurze lub korycie zachodzi ruch laminarny, od średnich prędkości większych od prędkości krytycznych odpowiadających ruchowi burzliwemu, podobnie sądzi REHBOCK, że szybkość $c = \sqrt{gh}$ przenoszenia się fal w korycie o średniej głębokości h jest zarazem *wartością graniczną* tej średniej prędkości przepływu (Grenzgeschwindigkeit), poniżej której zachodzi „Strömen“ (*przepływ spokojny*) a powyżej „Schiessen“ (*przepływ rwący*). Wzór $c = \sqrt{gh}$ zakomunikował Akademii berlińskiej J. L. LAGRANGE już w r. 1786, zastrzegając jego ważność tylko dla fali o grzbiecie bardzo niskim w porównaniu do głębokości h i bardzo słabo zakrzywionej. J. W. RAYLEIGH i J. V. BOUSSINESQ (1877) znaleźli potem wzór pierwszego przybliżenia uwzględniający wysokość grzbietu h_0 ponad zwierciadło niepofalowane. Wzór ten według BOUSSINESQA ma postać:

$$c = \sqrt{g\left(h + \frac{3}{4}h_0\right)}$$

i został sprawdzony przez H. L. PARTIOTA (1901) na falach przyplływowych, wnikających z oceanu do rzeki Garonne.

Oczywiście powyższa szybkość przenoszenia się fali wzdłuż kanału odnosi się do układu poruszającego się razem z całą masą cieczy z jej prędkością v , czyli jest to szybkość względna. Szybkością bezwzględną (w znaczeniu praktycznym), tj. szybkością względem brzegów koryta będzie:

$$\begin{aligned} c + v & \text{ w dół koryta, zaś} \\ c - v & \text{ w górę koryta.} \end{aligned}$$

Gdy $v \geq c$, to żadne zaburzenie miejscowe przekroju, żadna fala nie może przenieść się w górę koryta, a ponieważ według znanego przybliżonego wzoru A. DE CHÉZY'EGO (przypisywanego także A. TADINLEMU i J. A. EYTELWEINOWI) jest:

$$v = k\sqrt{R_h i},$$

przy czym R_h oznacza promień hydrauliczny, i — spadek, zaś k — „stałą“, której wartość wynosi około $50 \text{ m}^{1/2} \text{ sek}^{-1}$, przeto warunek:

$$c = v, \text{ czyli } \sqrt{gh} = k \sqrt{Ri}$$

pozwała obliczyć wartość spadku i , rozgraniczającą pewne dwie kategorie koryt. Tak np. przyjąwszy w przybliżeniu $R = h$ dla koryt szerokich a płytkich uważanych za prostokątne, znajdujemy spadek graniczny $i_{gr} = \frac{1}{250}$.

Podobne rozważanie ogłosił J. B. DE SAINT-VENANT już w r. 1831 i zaproponował tłumaczący się jasno podział wód bieżących na *potoki* (torrents) i *rzeki* (rivières), zależnie od tego czy ich spadek jest większy, czy też mniejszy od powyższej wartości granicznej (zależnej zresztą widocznie od kształtu i chropowatości koryta. Podana wartość $\frac{1}{250}$ służy jedynie dla orientacji). Średnia prędkość przepływu jest przeto u „potoków“ większa, zaś u „rzek“ mniejsza od bezwzględnej szybkości przenoszenia się fali.

Do tych samych wyników prowadzi *teoria przepływu* (ustalonego, lecz) *nierównomiernego* (mouvement varié) w korytach o stałym przekroju i spadku (*teoria krzywej spiętrzenia*). Taki przepływ jest uwarunkowany budowlą spiętrzającą lub stopniem w korycie itp. Przy spadku koryta większym od wartości granicznej, powstaje w pewnej odległości od jazu po stronie dopływu tzw. *próg wodny* (ang. hydraulic jump, fr. ressaut, niem. Wassersprung, wł. salti di Bidone) opisany na podstawie spostrzeżeń G. BIDONE'A we Włoszech w r. 1820, a uzasadniony teoretycznie przez J. B. BÉLANGERA we Francji w r. 1828. Przy spadku mniejszym od wartości granicznej, spiętrzenie jazem nie może spowodować powstania progu (od strony dopływu), lecz zmniejszając się powoli w miarę odległości przekroju od jazu w górę koryta zdąża asymptotycznie do zera. Uwagi godnym jest fakt, że *teoria przepływu nierównomiernego*, czyli *teoria krzywej spiętrzenia* prowadzi praktycznie do takiej samej wartości granicznej spadku, wzgl. średniej prędkości, co teoria przenoszenia się fali samotnej wzdłuż koryta. Nadto już BOUSSINESQ zwrócił w r. 1877 uwagę na to, że *próg wodny* może się także wytworzyć w korycie o spadku mniejszym od granicznego, jeżeli strumień o grubości h i szerokości koryta wpływa doń, np. przez upust z prędkością większą od $c = \sqrt{gh}$. Poniżej upustu, w pewnej odległości powstaje próg, a poza nim dopiero układa się zwierciadło równoległe do dna, czyli ruch staje się równomierny, o ile oczywiście warunki takiego ruchu są poniżej spełnione. Wówczas na krótkiej zwykle przestrzeni między wypływem z upustu, a miejscem powstania *progu wodnego* („odskoku“) ma przepływ, oczywiście w ogóle nierównomierny, podobny charakter do równomiernego przepływu ze spadkiem większym od granicznego. Atoli dokładniejsze bada-

nia teoretyczne BOUSSINESQA, ogłoszone w jego fundamentalnej pracy z r. 1877 pt. „Essai sur la théorie des eaux courantes“ wykazały zgodnie z doświadczeniami BAZINA istnienie dwu spadków i dwu *prędkości granicznych*, a więc nie dwu, lecz trzech rodzajów przejścia przepływu równomiernego w nierównomierny i nawzajem. BOUSSINESQ rozróżnia przeto „rivières“ o spadkach $i < \frac{1}{300}$ „torrents de pente modérée“ o spadkach $\frac{1}{200} > i > \frac{1}{300}$ i „torrents rapides“ o spadkach $i > \frac{1}{200}$. Jako odpowiadające nazwy polskie mogłyby służyć: *rzeki*, *strumienie* i *potoki*.

Ponieważ te trzy rodzaje przepływu mogą występować także w kanałach sztucznych, przeto byłoby pożądane mieć dla nich odpowiadające nazwy ogólniejsze, jak np.: 1. *przepływ łagodny (spokojny)*, 2. *przepływ umiarkowany* i 3. *przepływ rwący*. Nazwy (1) i (3) odpowiadają, jak widzimy, wcale dobrze niemieckim nazwom KOCHA: „ruhiges u. reissendes Fliesen“.

Teraz dopiero można uzasadnić skrupuły naukowe i dydaktyczne, jakie nasuwa klasyfikacja KOCHA i REHBOCKA, niezależnie od samych nazw wprowadzonych w książkach obu tych inżynierów-badaczy.

Przede wszystkim nie ma żadnego związku między tymi cechami ruchu cieczy, które odróżniają *ruch laminarny* od *burzliwego*, a cechami, które charakteryzują *przepływ łagodny*, *przepływ umiarkowany* i *przepływ rwący*. Przepływ „łagodny“ bowiem może być równie dobrze przepływem laminarnym jak przepływem burzliwym. Jeżeli mamy najczęściej do czynienia z tym ostatnim, to tylko z tego powodu, ponieważ bardzo małe spadki i prędkości nie bywają w praktyce stosowane ze względów gospodarczych.

Po wtóre, jak wynika z prac BOUSSINESQA i BAZINA²⁾, pomiędzy typem przepływu „łagodnego“ lub „rzecznego“ („Strömen“ REHBOCKA), a typem przepływu „rwącego“ („Schiessen“ REHBOCKA nie ma ostrej granicy, lecz cały obszar przepływu „umiarkowanego“ o wyraźnych cechach charakterystycznych. Cechy te można (po przestudiowaniu teorii BOUSSINESQA) śledzić na licznych bardzo pięknych rysunkach i fotografiach monografii TH. REHBOCKA: Betrachtungen über Abfluss, Stau... Springer, Berlin 1917 i w książce A. KOCH — M. CARSTANIEN: Bewegung des Wassers und dabei auftretenden Kräften, Springer, Berlin 1926. Ażeby jednak z obu tych książek odnieść rzetelną korzyść, należy czytać pierwszą ostrożnie i krytycznie w myśl uwag powyższych, a z drugiej pominąć zupełnie część teoretyczną od str. 1—150, przedziwnie mętną i mogącą tylko obalamucić niewytrawnego czytelnika.

²⁾ Prace BOUSSINESQA dość trudno znaleźć w oryginale. Udostępnił je PH. FORCHHEIMER w znakomitym podręczniku pt. „Hydraulik“, Teubner, Lipsk 1924. Jeszcze bardziej wyczerpujące w omawianej dziedzinie jest dzieło włoskie: D. SPATARO „Idraulica teorica esperimentale“, Milano.





Skorowidz nazwisk

(Liczby oznaczają strony)

A

Abrams 176
d'Alembert Jean, Le Rond (1717—1783)
26, 31, 263, 267, 408
Anczyk Stanisław (†1927) 366
Auerbach Felix 48, 124

B

*Bach Carl, von (*1847)* 109, 124, 164, 172,
175—176, 476
Baranowski Leonard 149
Baumann R. 72
Bauschinger J. 125
Bazin Henri Emil (1829—1917) 485
Bäselers 209
Bélangier Jean Baptiste (1789—1874) 484
Beltrami Eugenio (1835—1900) 136—137
Belżęcki Stanisław (1857—1932) 130, 215,
226
Bernoulli Daniel (1700—1782) 27, 311
Bertot 145
Bidone Giorgio (1781—1839) 484
Bleich Fr. 128
Blish 59
Bochet H. 59, 61, 75, 78
Bodaszewski Łukasz (1849—1908) 481
Boguski Józef Jerzy (1853—?) 472
Borowicz Wilhelm (1882—?) 33
Boussinesq Joseph Valentin (1842—1929)
269, 297—298, 302—303, 483—485
Bödecker 79
Börnstein Richard (1851—1913) 458
*Bresse Jacques Antoine Charles (1822—
1883)* 138, 142—143
Bridgeman P. W. 476
Brinell J. A. 470
Broniarek Czesław 361
Broniewski Witold (1880—1939) 366

Brown Robert (1773—1858) 481
Broszko Michał (1880—1954) 210, 477
Bryan G. H. 297
Bryła Stefan (1886—1943) 136
Brzoska Zbigniew 323

C

Carstanien Max 485
Castigliano Alberto (1847—1884) 90—91,
94—95, 138, 345, 442
Chezy Antoine de (1718—1798) 483
*Chwalla Ernst (*1901)* 247
Clapeyron Paul Emil (1799—1864) 94,
145
Clark Edwin 142, 144
Clark Latimer 142
Considère A. 180
Corini F. 248
Coulomb Charles Augustin (1736—1806)
53, 59—61, 64—65, 189, 209—210,
234, 372—374, 382, 387—388, 394,
481
Czopowski Henryk (1878—1935) 94, 455

D

Dreves O. 173
Dumas A. 124, 128
Dunkerley 32—33

E

Einstein Albert (1879—1955) 442
Eisenmann K. 173
Emperger Fritz, von 174, 179
Engesser Fr. 214, 229
Euklides (Euklejdos) (około 300 a. Chr. w.)
443

- Euler Leonhard (1707—1783)* 167, 196, 208, 214, 230, 296
Eytelwein Johann Albert (1764—1848) 483
Ewing James Alfred (1855—1935) 62

F

- Fabiański Julian* 307
Favre H. 132
Fejér Leopold 11
Feszczenko-Czopiowski Iwan (1884—?)
 366
Fiek G. 231
Fiedler Tadeusz 366
Forchheimer Philipp (1852—1933) 485
Fourier François Marie Charles (1772—1837) 10, 20
Föppl August (1854—1924) 8, 170, 297, 463, 476
Föppl Otto 33
Frahm H. 52
Franke Jan Nepomucen (1846—1918) 61, 137, 449, 472
Friedrichs K. 344
Fryzendorj T. 126
Fuchs Zygmunt 126

G

- Galton D.* 61
Gauss Carl Friedrich (1777—1855) 46
Gehler W. 176, 183
Geiger H. 50
Graf Otto 175—176
Grashof Franz (1826—1893) 124
Greenhill A. G. 297
Grove 260
Guest James J. 394
Guldin Paul (1557—1643) 442

H

- Hahn M.* 33
Haigh B. P. 394
Halphen G. H. 297
Haponowicz Norbert (†1915) 130—131
Hartmann L. 382
Hayashi Keiichi 247
Hencky Heinrich (†1751) 394

- Hertz Heinrich (1857—1894)* 124—128
Heumann 79
Hooke Robert (1635—1703) 4, 150—151, 153, 156—157, 159, 173 187, 197, 296, 325, 369, 374, 394, 466
Hort Wilhelm 48
Huber Maksymilian Tytus (1872—1950)
 85, 126, 161, 164, 183, 235, 247—248, 269, 279, 286, 345, 372—373, 394, 460, 477
Hummel Bogumil (1859—1956) 200, 229

I

- Inada T.* 247

J

- Jakobsen B.* 135—136
Jakowski Kazimierz 363, 365, 370, 393
Janusz Marian 97
Jasiński Feliks (1856—1899) 301, 331
Jenkin Fleming 62
Jewniewicz Hipolit (1831—1903) 369
Johansson C. H. 60
Joule James Prescott (1818—1899) 442

K

- Karasiński Leon (1885—1945)* 198, 467, 477
*Kármán Theodor, von (*1881)* 181
Kasperowicz Witold 447
Kepler Johannes (1571—1630) 442
Kirchhoff Gustav Robert (1824—1887)
 296, 442
Klein H. 385—386
Kłębowski Zenobiusz 293
Kluger Władysław (1849—1884) 471—472
Knoop E. 173
Kniopp Konrad 11
Koch Alexander (1852—1923) 483, 485
Kohn P. 39
Kondow Y. 176
Kryłow Aleksiej Nikołajewicz (1863—1945)
 279
Kull G. 33
Kunicki Stanisław (1860—1946) 264
Kurowski Rajnold (1890—1954) 203
Kuryllo Adam 167

L

- Lubrijn 75
 Lagrange Joseph Louis (1736—1813) 27
 275, 483
 Lamé Gabriel (1795—1870) 393, 406, 409
 Landolt Hans Heinrich (1831—1910) 458
 Laute K. 52
 de Laval 8
 Lehr Ernst 52
 Lévy Maurice (1838—1910) 130, 135—
 136, 297
 Löffler St. 56
 Ludwik P. 470
 Lüders W. 382
 Lyse J. 173

M

- Mach Ernst (1838—1916) 457
 Malaval M. 363—366, 370, 372, 374, 382,
 394
 Mehmel A. 173, 175
 Meier H. 188, 210
 Meister F. I. 46
 Melan E. 164
 Memmler K. 52
 Menabrea Luis Frédéric, Comte (1809—
 1896) 90, 94—95
 Michell John Henry (1863—1940) 136—
 137
 Mierzejewski Henryk Konstanty (1881—
 1929) 363, 466, 477
 Mises Richard, von (1883—1953) 394
 Mohr Christian Otto (1835—1918) 138,
 394, 463
 Morin Arthur Jules (1795—1880) 53,
 59—62, 64
 Moszyński Wacław (1892—1953) 67
 Mozer Wilhelm 261
 Mörsch Emil 182
 Müller J. 132, 136
 Müller-Breslau Heinrich (1851—1925) 94
 Mystkowski A. 44

N

- Nadai Arpad (*1883) 381
 Navier Louis Marie Henri (1785—1836) 480
 Nechay Jerzy 147

- Newton Isaac, Sir (1642—1727) 61, 441,
 453, 457
 Nieweglowski G. Henryk (1807—1881) 453
 Niewiadomski P. 385

O

- Ohm Georg Simon (1787—1854) 442
 Orłoś Zbigniew 1
 van Ornum 175

P

- Pappus 442
 Paraszczak Stanisław 307
 Partiot H. L. 483
 Pearson K. 94
 Pitagoras (582—507 a. Chr. n.) 442
 Poincaré Henri (1854—1912) 443
 Poirer S. (†1880) 61
 Poiseuille Jean Louis Marie (1799—1869)
 482
 Poisson Siméon-Denis, Baron (1781—
 1840) 127, 152—155, 176—177, 304,
 312, 370, 375, 392, 397, 475
 Pomianowski Karol (1874—1948) 130—
 131, 136
 Poncelet Jean Victor (1788—1867) 60
 Pöschl Theodor (1882—1955) 247, 250
 Probst Erich 172—173, 175—176
 Pszenicki Andrzej (1869—1940) 265, 282

R

- Raab Friedrich 85, 191, 202, 205, 207—
 209, 230—231, 235—238, 244—248
 Rayleigh John William, Lord (J. W. Strutt)
 (1842—1919) 23, 27, 29, 483
 Ratzersdorfer J. 247
 Rehbock Theodor (1864—1950) 481—483
 485
 Reiher H. 45
 Rennie G. 59
 Reynolds Osborne, Sir (1842—1912) 68,
 72—73, 483
 Richart F. E. 173
 Ritz Walter (1878—1909) 136
 Roš Mirko Gottfried (*1879) 172, 174 175
 Routh Edward John (1831—1907) 63 —

S

- Sachs Georg* 231
Saint-Venant Adhémar Jean Claude, Barré de (1797—1886) 132, 134, 396, 484
Saliger Rudolf 155
Schell W. 451
Schenk 50, 52
Schieferstein H. 50
Schmidt Ernst 458
Schüle F. 172
Slater W. A. S. 173
Sobolewski Hipolit 79
Sommerfeld Arnold (1868—1951) 43
Spataro Donato 485
Staehle G. C. 173
Steinbach A. 44
Steuding H. 48, 50
Stodola Aurel (1859—1942) 3, 33
Stokes George Gabriel, Sir (1819—1903) 277—278, 480
Straszewicz Zygmunt (1860—1927) 451
Stribeck R. 124
*Szlagowski Franciszek (*1898)* 188, 216

Ś

- Śniadecki Jan (1756—1830)* 441, 447
Śniadecki Jędrzej (1768—1838) 441

T

- Tadini Antonio (1754—1830)* 483
Tanabe H. 176
Tank F. 132
Thullie Maksymilian (1853—1938) 155, 161, 167, 182
*Timoszenko Stiepan (Timoshenko Stephen) (*1878)* 3, 23, 201, 214, 229, 279—280, 283, 285, 288, 297, 314, 317, 369
Troskolanński Adam Tadeusz 437
Turowski Adam 97
Twardowski Kazimierz (1866—?) 448

U

- Urbanowski Wojciech* 293

V

- Vetulani Kazimierz* 220

W

- Wagner Karl* 232
Wasiutyński Aleksander (1859—1944) 217, 223, 229, 236—237, 266, 268, 272, 286
Wasiutyński Zbigniew 185
Weyrauch 125
Wianecki Jerzy 97
Wichert A. 61, 75, 78
Wierzbicki Witold 262, 265
Willis 277
Wiłkowski August Wiktor (1854—1913) 449—450
Wilniewczyce P. 59
Winkler Emil (1835—1888) 124
*Wolski Kazimierz (*1887)* 71
Wóycicki Kazimierz (1898—1944) 130—131, 136
Wöhler Friedrich (1800—1882) 18

Y

- Yoshida H.* 173, 176
Young Thomas (1773—1829) 397, 465

Z

- Zakrzewski Ignacy (1860—?)* 451
Ziemia Stefan 1
Zimmermann H. 247, 278
Zipperer L. 33

Ż

- Żmurko Wawrzyniec (1824—1889)* 441
Żukowski Stefan 361

Skorowidz rzeczowy

(Liczby oznaczają strony)

A

absorpcja (pochłanianie) 60
adhezja (przyleganie) 54
adsorpcja 60
aerodynamika 454
aerokinetyka 454
aeromechanika 454
aerostatyka 454
aksjomat 441—3
amplituda drgań 49, 51, 115, 238—239,
285, 288, 291
— — harmonicznych prostych 45
— — rezonansowych 16
— — skrzętnych 47
— — sprężystych 40
— — wymuszonych 15, 20, 41, 282, 285
— — wzbudzających 20, 41
— wahań wydłużenia 51
analiza fizykalna zjawisk 446
analogia *Mohra* 138
anizotropia ortogonalna 66

B

badania tarcia holenderskie 74—76
balistyka 454
— wewnętrzna 454
— zewnętrzna 454
belka bardzo długa na sprężystym pod-
łożu 402
— ciąga 89—93, 163
— dwuprzęsłowa 93
— mostowa 275—291
— na podłożu sprężystym 102, 272, 402
— obu końcami doskonale utwierdzona
i obciążona równomiernie 141
— prosta 138—145
— — o przekroju wiotkim 325—335
— sprężysta 192, 266

— swobodnie podparta 95, 99
— teowa 183
— w obu końcach podparta 90, 163
— wspornikowa 344
— żelbetowa 160, 182
beton 149, 172—176
— zbrojony 177—180
bez kierunkowość 478
bilans energetyczny wygiętej postaciów.
nowagi 224—225

C

cecha lekkości pręta 358
chropowatość powierzchni 54, 60
— — anizotropowa 58, 65
— — izotropowa 58, 65
— — jednorodna 58
— — ortotropowa 65
ciało chropowate 53
— doskonale elastoplastyczne 363
— — plastyczne 464
— — sprężyste 464
— fizyczne 446
— równokierunkowe (równozwrotne) 448
— stałe 455
— sztywne 53
ciągnięcie 187, 472
— proste 475
— w betonie 166—167, 178
ciążenie 448
ciągno 19, 25, 27
ciężar jądący po moście 276—282
— pręta własny 205
— skupiony 165, 280
— własny 4
— zapory własny 130
ciśnienie 187, 472
— hydrostatyczne 295, 476
— krytyczne drugie 381—386

— — pierwsze 386
 — promieniowe 378
 — wewnętrzne 371
 — zewnętrzne 371
 cyfra 440
 czas 452
 częstotliwość 17
 — drgań głównych sprężystych 40
 — — skrętnych 37
 — — własnych 21, 41
 — — wzbudzających 41
 — kątowna drgań harmonicznyc 114
 — — — własnych 9, 13
 — — siły wymuszającej drganie 11
 — — uderzeń 13
 — kołowa drgań 33
 — — — podstawowych 35
 — — — własnych 36, 51
 — — wahań siły 18, 19
 czujnik zwykły (zegarowy) 205

D

definicja 445
 długość 452
 — wału równoważna (zastępcza) 47
 — — sprowadzona 34
 dolinka potencjalna 84
 drganie (ton) harmoniczne pierwsze 19
 — — podstawowe (zasadnicze, własne) 19
 — — wyższe 19
 drgania belki giętne 28, 275
 — — własne (swobodne) 279, 285, 289
 — — wymuszone 279
 — fundamentów maszyn 42—46
 — giętne 26, 43, 272
 — — w płaszczyźnie poziomej 272
 — główne (normalne) 27, 29
 — harmoniczne 31, 114
 — — proste 6, 19—20, 22, 27, 40, 45
 — izochroniczne 47
 — luf działowych 432
 — maszyny wzbudzone 47
 — mechaniczne 47, 51
 — mostu własne 284
 — nawierzchni kolejowej 266—274, 289—291
 — — — giętne 266, 275, 289
 — — niebezpieczne 40—42
 — — normalne 27

— obrotowe 44, 49
 — podłużne 21, 24
 — podstawowe 28
 — postępowe 44
 — — pionowe 289
 — pręta giętne (poprzeczne) 26
 — — normalne 27
 — — ustalone (stojące) 27
 — rezonansowe 14
 — rury giętne 429
 — — kołowo-symetryczne 429—433
 — — podłużne 429
 — — promieniowe 433, 435
 — — skrętne 429
 — — swobodne 430, 434
 — skrętne 49, 273
 — sprężyste 17—18, 40, 42
 — — wzbudzone (wymuszone) 40
 — stereomechaniczne 18, 40
 — układu sprężystego własne 7—8, 17—18
 — wałów giętne 21, 31—33
 — — skrętne 21, 25, 28, 33—37, 40
 — w budowie maszyn 17—52
 — własne 43, 114
 — — główne 21
 — wzbudzone (wymuszone) 5, 9—20, 49, 275
 dyna 458
 dynamika 452—453
 dyscyplina naukowa 439
 działanie pociągu na tor 262—265
 dźwięk główny 19
 dźwigar mostowy 124

E

elastomechanika 454
 elipsa bezwładności 4
 energia całkowita 268
 — kinetyczna 115, 268, 456
 — — odkształcenia 121, 320, 355
 — — odkształceń sprężystych 138, 215
 — postaciowa 371—372
 — potencjalna 89, 268—269
 — rozproszona 71
 — sprężysta 115, 287
 — ścinania 89, 345
 — ściskania 212
 — zginania 89, 212, 215, 330, 332

F

- fale podłużne w pręcie drgającym 27
- skrótnie w pręcie drgającym 27
- wyboczenia 202, 217, 230
- wygięcia 224
- faza drgania 27
- filar mostowy 264
- fizyka matematyczna 480
- fundament 43—45
- funckje *Bessela* 436

G

- geometria *Euklidesa* 443
- gram 457
- granica ciastowatości *vide* granica plastyczności
- pelzania *vide* wytrzymałość trwała
- plastyczności 109, 127—129, 176, 179, 182, 209, 230, 237, 295—296, 357, 363—364, 371, 388, 466—467, 476—477
- płynności (granica płynięcia) *vide* granica plastyczności
- podatności 363
- proporcjonalności 176, 371, 466
- sprężystości 60, 364, 465
- praktyczna 465—466, 470, 476

H

- hamowanie 263
- hartowność 469—471
- mechaniczna 471
- termiczna 471
- histereza 54
- hydraulika 480
- hydrodynamika 454, 480
- hydrodynamika teoretyczna 481
- hydrokinetyka 454
- hydromechanika 454, 480—485
- hydrostatyka 454
- hipoteza 441—443
- *Coulomba* (hipoteza różnicy algebraicznej naprężeń głównych) 372, 374, 387—388
- energii odkształcenia postaciowego 126, 332, 394, 405
- — postaciowej 371—372, 388

- największego naprężenia stycznego 126, 332, 372, 385, 394
- — wydłużenia jednostkowego 124—125, 372
- wytrzymałościowa 125, 393, 463

I

- ilość 440
- ruchu 441
- impuls uderzenia 13
- impulsy rytmiczne 13
- izotropia 478
- tarcia 76
- izotropowość 478

J

- jednostka masy 452, 457
- siły 452
- — techniczna 457

K

- kąt nabiegu 74, 79
- odchylenia 49
- odkształcenia postaciowego 154
- tarcia 55, 64—66
- — statycznego 66
- skręcenia 47
- kierunek ślizgania 77
- zbrojenia 150
- kilogram 457
- kilopond 456—457
- kinematyka 452—453
- ciała sztywnego 72
- kinetyka 453
- kiwanie się (obrót około poprzecznej osi poziomej) 289
- koło bezwładne 50
- zamachowe 46
- kołysanie się (obrót około podłużnej osi poziomej) 289
- konstrukcje lekkie 356
- lotnicze 323—359
- żelbetowe 161
- kruchość 466
- kryterium stateczności równowagi 79
- krzywa wzoru statecznościowego 305—306

— — wytrzymałościowego 305—306
 krzywizna osi belki 158
 — przekroju 158
 kształtowniki 113—117
 kucie się betonu 162, 170

L

lemmat 441—443
 lepkość (tarcie wewnętrzne) 54
 liczba 440
 — *Poissona* 127, 152—153, 155, 176—
 177, 269, 304, 312, 334, 370, 375, 391,
 397, 475
 liczby wpływowe 32
 linia łańcuchowa (katenoidea) 199
 — naprężeń głównych 128—129, 133—
 134, 154
 — obciążeń powtórzonych 173
 — środkowa brzegu płyty 309
 — ugięcia 138, 140, 280, 284, 402
 — — wpływowa 100, 277
 — wygięcia 113—115
 — zetknięcia 128
 linie *Lüdersa-Hartmana* 382
 lufa działowa 363—436

Ł

łoże maszyny 44

M

masa 452, 457
 maszyna wytrzymałościowa 50, 204
 materia 452
 materiał 443—444
 — anizotropowy 478
 — elastoplastyczny 109
 — izotropowy 476, 478
 mechanika 451—459
 — ciał ciekłych, hydromechanika 454
 — — elastoplastycznych 454
 — — lotnych (gazów), aeromechanika 454
 — — sprężystych, teoria sprężystości 454
 — — stałych rzeczywistych, stereome-
 chanika 454, 460, 476
 — doświadczalna 453
 — klasyczna (newtonowska) 451, 454

— lotu 454
 — niebios 448
 — ogólna 454
 — racjonalna 453
 — relatywistyczna (*Einsteina*) 454
 — stosowana 448, 453
 — techniczna 448, 452—453
 — teoretyczna (matematyczna) 453, 457,
 480
 metal elastoplastyczny 111, 475
 — plastyczny 369
 metoda *Castigliano* 138, 345
 — *Jakobsena* 135—136
 — *Lévy'ego* 135—136
 — *Menabrea-Castigliano* 90, 94
 — *Rayleigha* 23, 29, 434
 miano 440
 miara lekkości belki 325
 mierzenie 440
 mikrokompator *Zeissa* 174
 mimośrodowość przyłożenia siły 231
 mimośród wybożenia 210
 moc 366, 450
 moduł odkształcenia postaciowego 89
 — ośrodka podatnego 230
 — sprężystej podatności podłoża 192, 194,
 286
 — sprężystości 89, 109, 116, 127, 173,
 175, 213, 230, 295
 — — postaciowej 320
 — wydłużenia (współczynnik sprężysto-
 ści) 151
 — *Younga* 391, 397, 465
 moment bezwładności 5, 23, 34—37, 39,
 46—47, 89, 397
 — — środkowy 46
 — — geometryczny 230, 319—320
 — hyperstatyczny 252
 — krańcowy 110
 — łamiący rzeczywisty 182
 — narożnikowy 320
 — niszczący 111
 — obwodowy 315
 — odporowy 337, 346
 — podporowy 90, 95, 98, 102, 107, 138,
 322
 — sił zewnętrznych 5
 — skręcający 47, 119, 123, 312, 337, 345,
 347, 350, 353, 420
 — skręcenia odporowy 337

- skupiony (utwierdzający) 139
- sprowadzony 140
- statyczny 329
- tarcia tocznego 69
- utwierdzający 141, 159
- użytkowy 110
- zgięcia odporowy 337
- zginający 95, 102, 109, 113, 116, 119, 123, 138—139, 142, 195, 225, 266, 297, 311, 320, 327, 329—330, 334, 337, 345—346, 350, 353, 397, 402
- — główny (promieniowy) 314
- — — (równoleżnikowy, obwodowy) 314
- — — zewnętrzny 406
- most 276

N

- nacisk ciężaru toczącego się jednostajnie po moście 283—286
- normalny 54, 60, 65
- obrączkowy 402—405
- okresowo-zmienny 283—286
- osiowy 205
- napięcie 471—472
- napięcia cieplne 209
- napór wody 130
- naprężenie 471—472
- bezpieczne 475—476
- bezwzględne 315—316, 376
- budowlane 130—131
- cieplne 187, 212
- ciężarowe 130—131
- dopuszczalne 110, 124, 169—170
- drugorzędne 230
- dynamiczne 113, 116
- główne 126, 154, 396, 475
- krańcowe 463
- krytyczne 356
- na końcu lufy 413
- naporowe 130—131
- niebezpieczne 463, 475
- niszczące 463
- normalne 150
- obwodowe 396—397, 403—405
- podłużne 328, 396, 405
- poprzeczne 328
- promieniowe 405
- sprężyste 369

- sprowadzone, zastępcze (zredukowane) 125—126, 371, 463, 475
- styczne 150, 404, 475
- ścinające 125, 156—159
- ściskające osiowo 197
- termiczne 130—131, 215, 436
- własne 230
- w ścianie rury 418
- wyporowe 130—131
- zastępcze 475—476
- zginające 310, 403—404, 406
- natężenie 471—472
- nauka 439—440
- czysta 452
- o drganiach (wibromechanika) 454
- o sprężystości materiałów, teoria sprężystości 161
- o wytrzymałości materiałów, stereo-mechanika 161
- stosowana 452
- nawierzchnia ciągła prostego toru kolejowego 233—246
- kolejowa 266—291
- niebezpieczeństwo zejścia pojazdu z szyn 79
- zniekształcenia toru kolejowego 209—212, 215
- nierównomierność temperatury nawierzchni 243
- nierówności powierzchni ciała 54, 58, 68
- niestałość (niestateczność) równowagi prostej postaci toru 210
- niestateczność kołowej postaci przekroju rury 296
- postaci belki zgiętej 325
- toru kolejowego długiego prostego 213—227
- niezmiennność położenia 455
- niezmiennność postaci ciała 455
- w czasie 456

O

- obciążenie 464
- boczne 203
- jednostkowe 26
- krańcowe 462
- krytyczne 215, 296, 301, 462
- najniebezpieczniejsze 162
- niebezpieczne 306, 462

- nierównomierne (trapezowe) 343
- niszczące 462
- okresowo-zmienne 468—469
- osiowe 180
- próbne 171
- rozłożone równomiernie 171
- ruchome 170
- siłami bezwładności 26
- stałe 162
- zmienne 162
- obliczenia wytrzymałościowe wałków łozyskowych 124
- obwód cylindryczna 80
 - stożkowata 80
- obróbka zimna metali 366
- obszar stanu plastycznego 376
 - — sprężystego 376
- odkształcalność 456
 - betonu 172, 179
 - ciał 463
 - plastyczna 58, 470
 - sprężysta 17, 58, 470
 - — lufy 421
 - — podłoża 228
 - — toru 228
- odkształcenie bezwzględne 464
 - elasto-plastyczne 465
 - jednostkowe 464
 - — krańcowe 175
 - kołowo-symetryczne 433
 - liniowe 464
 - logarytmiczne 367—368
 - mechaniczne (dynamiczne) 463
 - nawierzchni kolejowej 266
 - niesprężyste 464, 476
 - objętościowe czyste 464
 - plastyczne 109, 124, 128, 173, 175, 364—365, 374—375, 410, 412, 461, 464, 466, 469, 471, 476
 - — postaciowe 151, 153
 - — czyste 464
 - ramy walcarki 319—322
 - rury 395—400
 - skorupy pocisku 421—425
 - sprężyste 110, 128, 189, 369, 464, 466
 - sprężysto-plastyczne 465
 - termiczne (cieplne) 463
 - trwałe 128, 298, 461, 464, 466, 476
 - układu sprężystego 19
 - względne 464
- odporność materiału 455
- odpór pionowy, reakcja pionowa 337
- okres drgań 22, 287
 - — giętych własnych 7, 285
 - — harmonicznych głównych 19
 - — normalnych 28
 - — podstawowych 28, 31, 33—34
 - — skrętnych 28, 46—47
 - — sprężystych głównych 40
 - — — własnych 40
 - — — własnych 274, 288
- wahadła matematycznego 7
- zmienności siły wzbudzającej drgania 40
- określenie 445
 - liczbowe wielkości 440
- opór bezwładności, siła d'Alemberta 263, 267, 408
 - podłoża 197
 - poślizgowy 240
 - przeciw toczeniu się 68
 - — wwiercaniu się 68
 - przesunięcia poprzecznego 238
 - ruchu 7, 9, 19
 - spoczynkowy pociągu 258, 264
 - tarcia 56—85, 189
 - — poślizgowego 242
 - tłumiący drgania 4
 - toczenia 71
 - — wytrzymałościowy podłużnie 344
- opóźnienie sprężyste 466
- ortotropia tarcia 66
- osadzenie przebudowe końców szyny 254
- os obojętna 18, 182, 329
 - — zgięcia elastoplastycznego 112
 - — — sprężystego 112
- sprężystości skrzydła 352
- owinięcie 155, 180—182

P

- pallograf 47
- panewka 4
- pełność (bezpieczeństwo) 18, 179
- peł 441
- pierścień usztywniający 309, 317
- wiodący pocisku 393, 395, 406, 408, 410, 412—413, 421, 425, 428
- plastomechanika 454
- plastyczność 464, 466—467

- płaszczyzna bezwładności główna 3
 — stykania 59
 płynięcie 482
 — nieswobodne częściowo 482
 — — zupełnie 482
 — uwarstwione 482
 płyta 124
 — ciągła 163
 — dachowa 165
 — okrągła 317
 — — z otworem w środku 312
 — o brzegach podpartych równoległych 163
 — o silnych żebrach równoległych 163
 — pierścieniowa 314
 — prostokątna zbrojona 164
 — żelbetowa 166
 płytki wzorcowe *Johanssena* 60
 pocisk 406, 408, 410, 413, 417, 421, 425
 podatność 363
 — podłoża 193, 195
 — — sprężysta 216
 — podpór 94, 104
 podłoże idealnie gładkie 244
 — nawierzchni kolejowej 272
 — podatne 44—45
 — sprężyste 44, 191, 204, 289
 — sprężycie podatne 192, 234
 — sztywne 209
 — toru 187, 189
 — — normalne 228
 — — sprężyste 237
 — ziemne 275—291
 podłużnice 344—355
 podniesienie faliste toru 210
 podparcie brzegu płyty swobodne 309
 podpora sztywna 108, 113
 pomiary drgań 46—50
 — twardości 470
 pond 456—457
 poprzecznicza 165
 postać równowagi niestateczna (niestała) 214
 — — stała (stateczna) 214
 postulat 441—443
 poślizg 68, 244
 — *Reynoldsa* 73
 — wzdłużny 238
 potok 484—485
 powierzchnia momentów sprowadzona (zredukowana) 97
 — momentów zgięcia 138
 — pęknięcia 469
 — przylegania 149—150
 — rozłamu (przełomu, złomu) 469
 — stykania się ciał 53—54, 66, 68
 — trąca 77
 — ugięcia 314
 półka 330—332
 praca odkształcenia 192, 475
 — odkształceń plastycznych 68
 — — sprężystych 193
 — podniesienia środka ciężkości 223, 225
 — siły pociągowej parowozu 259
 — tarcia 71, 190, 192
 — zginania 190, 223, 225
 prasa hydrauliczna 47, 363
 prawidła tarcia 56
 prawo 441—443
 — dźwigni 442, 453
 — fizyczne 442
 — grawitacji newtonowskie 481
 — *Hooke'a* 4, 109, 150—151, 153, 156—157, 159, 173, 177, 187, 197, 296, 325, 369, 374, 394, 466
 — odkształceń sprężystych 382
 — przyciągania elektrycznego *Coulomba* 481
 — przyczynowości 442
 — przyrody (przyrodnicze) 442
 — rozkładu naprężeń 316—317
 — równoległoboku sił 442
 — stałego następstwa zjawisk 442
 — statyki 442
 — tarcia 53—55
 — wzajemności działania 150
 — (zasada) zachowania energii 442
 prędkość kątowna 18
 — — krytyczna 8
 — krytyczna 3, 275—291
 — obrotu kątowna 4
 — przenoszenia fali 27
 — przepływu granicza 485
 — — krytyczna 483
 — ślizgania 61, 66, 73
 — toczenia się 72, 75
 pręt 19
 — drgający podłużnie 26
 — — skrętnie 26
 — — swobodnie 288
 — narażony na proste ściskanie 127

- — — rozciąganie 127
- osiowo-ściskany 356—359
- prosty nieograniczenie sprężysty 214
- rurowy cienkościenny 357
- smukły 356
- sprężysty doskonale prosty 214
- spoczywający na podłożu sztywnym 216
- sprężysty 21, 203
- — na sprężystym podłożu 201—202
- — osiowo (środkowo) ściskany 167, 208
- ściskany mimośrodowo 167
- zginany 109
- pręty zbrojenia 154, 177
- promień krzywizny 218
- — zgiętej osi pręta 327
- prosta podporowa 163
- próba rozrywania 467
- zgniatania 467
- próby obciążenia konstrukcji budowlanych 170
- — mostów 170—171
- próg wodny (*Bidone'a*) 484
- przegub kulisty 4
- przekrój belki dwuteowy 326, 329—332
- — rurowy 326
- — skrzynkowy 326, 329—332
- — smukły 326
- — wiotki 326
- — zwarty 325
- węzłowy 33
- przemieszczenie punktów ciała odkształcalnego 464
- — względne elementu pręta 234
- przepisy żelbetowe 161—171
- przeptyw łagodny (spokojny) 485
- nieswobodny częściowo 482
- — zupełnie 482
- rwący 483, 485
- spokojny 483
- umiarkowany 485
- ustalony nierównomierny 480
- — równomierny 480
- przestrzeń 452
- euklidesowa 454
- przesunięcie powierzchni poprzeczne 238, 240
- — wzdłużne 240
- toru 237
- — poprzeczne 203
- uogólnione 91, 95
- przeszło 97, 101
- przyczółek mostowy 264
- przyczółki toru 202—203, 238, 241
- przyleganie 54
- toru do podłoża 205
- przyspieszenie dodatnie 262
- ujemne, opóźnienie 262
- punkt materialny 22
- podporowy 163

R

- rama bezprzegubowa 336
- kwadratowa 122
- prostokątna 118—123, 340
- walcarki 319—322
- ramię bezwładności 5
- rdzeń 180—182
- reakcje podłoża 195
- tarcia posuwistego toru 192
- toru poślizgowe 233, 237
- — prostopadłe 192
- — szczipne 233—237
- — styczne 192
- — — poprzeczne 233
- — — wzdłużne 233
- regulator 448
- reguła *Coulomba* 53, 382
- reguła mechaniki złota 443
- spółki 442
- reologia 454
- rezonans 15—16, 20, 41, 274, 282, 284—286, 289
- rozciąganie 366
- jednoosiowe 474
- materiału doskonale elastoplastycznego 364
- proste 475
- szyn 188
- rozkład naprężeń 132, 200, 316—317
- — zginających 110
- rozłam (przełom) zmęczeniowy 469
- (przełom) zwykły 469
- rozpęd parowozu 258—261
- rozpiętość belki mostowej 285
- rozwiązanie *Lamégo* 369
- równanie *Boussinesqa* 298, 302—303
- *Bresse'a* 142—143

- ścinająca 329
- ściskająca 213
- — krytyczna 209—210
- — osiowo 230—231
- — podłużna 297
- — wzdłużnie nawierzchnię 238
- tarcia 55—85
- statycznego 192
- termiczna 229
- uderzenia chwilowa 11
- — okresowa 10
- uogólniona 91
- wewnętrzna (międzyzłączestekowa) 462
- — (napięcie) 310, 471—472
- wymuszająca drgania 13, 19—20
- zewnętrzna (obciążenie) 138, 163, 166—169, 216, 310, 462
- siły molekularne 54
- okresowo-zmienne 286, 288—289, 291
- sito rezonansowe 50
- skalar 458
- składowe stanu naprężenia 137
- skorupa nacisku 421
- skrócenie 464
- beton jednostkowe 180
- — plastyczne 180
- — sprężyste 180
- pręta zbrojenia sprężyste 180
- skrzydła jednoplątów 336—343
- — wspornikowe 344—355
- o dźwigarach zbieżnych 336
- stłup betonowy 155
- żelbetowy owijany 167—168, 180—182
- smukłość 167, 356, 479
- graniczna 356
- sposób *Gaussa* (obliczania momentu bezwładności koła zamachowego) 46
- spójność 58, 473
- sprężyna 9, 21
- podatna 363
- spiralna 50
- sprężystość 478
- materiału 464
- sprzęgło sprężyste 41
- stal zbrojenia 176—177
- stałe sprężystości 127
- wytrzymałościowe nawierzchni 222
- stałość 455
- równowagi 455
- stan napięcia 54, 149—150, 378, 463—464
- — dwuwymiarowy 150, 405
- — jednoosiowy (liniowy) 152, 476
- — płaski (dwuwymiarowy) 77
- — trójwymiarowy 155, 178, 405
- — w rurze po samowzmocnieniu 381—385
- — w strefie plastycznej 380
- — — — sprężystej 380
- — złożony 124, 475
- naprężenia (napięcia) 131, 382, 394
- — — — złożony 371
- odkształcenia 54, 149, 371, 394
- skupienia materii 454
- sprężysty 383
- stateczność 455
- pojazdu poprzeczna 84
- pręta na sprężystym podłożu 247
- — ściskanego osiowo 231
- równowagi 455
- ruchu 80
- toru prostego 178—209
- zestawu kołowego 82
- statyka 161, 453
- stereodynamika 454
- stereokinetyka 454
- stereomechanika 454, 456, 460—479
- stereostatyka 454
- stopień chropowatości powierzchni 54
- swobody 9
- stosunek zbrojenia 154
- stożek tarcia 64—66
- strata energii 54, 60, 71
- energii niedowracalna 54
- strefa plastyczna 380
- sprężysta 381
- strzał żebrowany 165
- zawieszony 165
- struga swobodna (strumień) 482, 485
- strumień swobodny 482, 485
- struna drgająca poprzecznie 26
- strzałka ugięcia 6, 141, 196, 214, 277, 282, 321
- — dynamicznego 277—278, 281, 284—285
- — statycznego 7, 31, 282, 284
- strzemię 156, 158—159, 169
- szereg *Fouriera* 10
- szttywność 455, 465
- ciała 456
- doskonała (idealna) 456

- materiału 456
- podłoża 195, 203, 235
- — sprężystego 195
- pręta podłużna 195
- — przy ściskaniu 195
- — — rozciąganiu 195
- rozciągania 465
- skręcania 23, 25, 35—36, 118—119, 122, 338, 342—345, 353—355, 465
- ścinania 94
- ściskania 465
- zginania 4, 23, 94, 104, 114, 119, 122, 194—195, 266, 272, 286, 296, 314, 327, 334, 343, 345, 352, 397, 401, 415, 465
- — poprzecznego 330, 335
- — sprężystego 465
- szyny kolejowe 113—117
- — spawane 187
- — walcowane 187
- ścieranie 54, 67
- ścinięcie proste 475
- ściskanie 188, 366
- jednoosiowe 474
- mimośrodowe 210
- ślizganie (ruch postępowy prostoliniowy) 57, 68, 71—73
- środek drgań 6
- sprężystości przekroju poprzecznego skrzydła 352
- środnik 330—332

T

- tachometr rezonansowy *Frahma* 52
- tarcie 53—85
- anizotropowe 76
- *Coulomba* 234
- izotropowe 65
- kinetyczne 66
- — ślizgowe 70
- krętne 67
- makroskopowe (molarne) 60, 66
- molekularne 60, 66
- na sucho 58, 65
- obrotowe 67
- ortotropowe 65, 78
- przy ślizganiu (tarcie suwne) 59
- szepne 58, 69—70, 74
- — (statyczne) 60—64, 72
- spoczynkowe (statyczne) 58, 66, 193, 203, 263
- suwne (ślizgowe) 58, 60—68, 70, 85
- toczne 67, 70
- wewnętrzne (lepkość) 54, 480
- tarcza pasowa 50
- teorem (teoremat) 443
- teoria belki ciągłej 89—93, 108, 145
- drgań 17, 27
- — harmonicznych 19
- — małych 275
- — prętów 24—26
- — wymuszonych 41
- fizykalna 446
- *Hertza* 125
- *Jakobsena* 136
- krzywej spiętrzenia 484
- *Lamégo* 409
- *Lévy'ego* 136
- *Malavala* 363, 382
- naprężeń lufy 393
- nawierzchni kolejowej 269
- niestałości równowagi 209
- odkształceń lufy 393
- — plastycznych 363, 388
- — sprężystych kołowo-symetrycznych 390—436
- odkształcenia pierścienia wiodącego po cisku 420
- plastyczności 477
- płyt 312, 414—415
- — grubych 314
- przepływu ustalonego nierównomiernego 484
- samowzmacniania luf działowych 363—389
- sprężystości 51, 130, 132, 136, 272, 296, 375, 394, 454
- — matematyczna 311, 327, 480
- stałości równowagi pręta sprężystego ściskanego osiowo 208
- stanu napięcia ciał stałych 149
- — odkształcenia ciał stałych 149
- tarcia ortotropowego 76—78
- wyboczenia 210
- — eulerowskiego 196
- — pręta sprężystego doskonale prostego 214
- — termicznego spawanych torów kolejowych 228—232
- — toru prostego 201—208

- zgięcia belek 396
- — elementarna 325
- — poprzecznego belki 327—329
- — prętów 26, 311
- — — zakrzywionych 317
- — — sprężystych klasyczna 327—328
- zginania elastoplastycznego pręta 112
- zniekształcenia torów kolejowych 247—257
- żelbetu 151
- termin (nazwa) 447
- teza 441—443
- toczenie się 68, 71—73
- — czyste 69
- ton 19
- główny 28
- tor kolejowy 187—246
- — bez złączy 248
- — doświadczalny 191
- — prosty 233—246
- — o szynach spawanych 187—232
- — ściskany osiowo 210
- torsjograf 47—48, 50
- trwałość 455—456
- twardnienie 109, 365, 470
- twardość 469—471
- *Brinella* 470
- *Ludwika* 470
- sklerometryczna 470
- twierdzenie (teoremat) 441—443
- *Castigliano* 442
- o równowadze momentów na dźwigui 442
- *Pappusa-Guldina* 442
- *Pitagorasa* 442
- tworzywo 443—444

U

- udarność 466
- uderzenia rytmiczne 9—16
- ugięcie 89
- dynamiczne 113
- — toru 289
- statyczne 31—32, 113
- — belki 279
- ugiętność podpory 104
- przęsła 104
- układ doskonale sztywny 464
- drgający 13, 16—17, 21

- niezmienny 464
- o dwu stopniach swobody 31
- o jednym stopniu swobody 19, 21, 41
- sprężysty 9
- umiejętność 439—440
- ustalenie 445
- ustalenie linii środkowej brzegu płyty 309
- ściany brzegowej płyty 309
- ustroje żelbetowe 172—176
- utwierdzenie brzegu płyty częściowe (niezupełne) 309
- — — doskonale 309
- — — niedoskonałe 309

W

- wahadło fizyczne 47
- matematyczne 31
- wał giętki 3
- wałki łożyskowe 124; 128—129
- — żeliwne 128—129
- warstwa obojętna 156—157, 329, 336, 400, 404
- skrajna 136
- wodonośna 272
- wartość dopuszczalna naprężenia 127
- eulerowska siły osiowej 219
- graniczna średniej prędkości przepływu 483
- krytyczna ciśnienia 296, 387
- — naprężeń 474
- — obciążenia 296
- — odkształceń 474
- — prędkości 275
- — — katowej 3
- — siły ściskającej 188, 213, 243
- maksymalna dopuszczalna momentu zginającego 325
- warunek momentów 346—347
- plastyczności 376
- równości naprężeń promieniowych 379
- wyboczenia toru w płaszczyźnie pionowej 222—223
- warunki krańcowe 27, 29
- początkowe 12
- podporowe 4
- równowagi 452
- wibrograf 47, 50
- wibromechanika 454
- wiedza 439—440

- wielkości statycznie niewyznaczalne 163·
345—346
- wież sprężysta 16, 48, 51
- wiotkość 479
- wirnik 18
- własność 446
- własności fizyczne 446
- mechaniczne 469
- wytrzymałościowe materiału 364, 461
- — żelbetu 172—183
- właściwość 446
- włókno podłużne 329
- skrajne 18, 109, 111—112, 116, 182
- wręgi 334
- wskaźnik przekroju 312, 332
- wytrzymałości 325
- zginania 109, 111
- współbrzmienie (rezonans) 41, 51—52, 280—281, 283, 285
- współczynnik dynamiczny 170, 282
- oporu 7—8
- — całkowitego 13
- — szepnego 240
- pewności 110
- podatności 94
- (znamię) podłoża 269
- podłoża sprowadzony (zredukowany) 266
- proporcjonalności 53
- skręcenia 36, 46
- siły sprężystości 13, 41, 47
- sprężystości betonu 166
- — żelaza 166
- tarcia 53, 55, 59, 64—65, 74—75, 190
- — kinetycznego 60
- — poprzecznego 77
- — przy ślizganiu poprzecznym 73
- — szepnego 59, 62
- — statycznego 66, 263
- — suwnego 77
- — ślizgowego 73
- tłumienia drgań 41
- wodo-cementowy 176
- wydłużenia cieplnego 187—188, 195, 213
- — — względny 188
- współdziałanie podłużnic 336—344
- wyboczenia *Eulera* 230
- nawierzchni 226
- pręta 211
- — sprężyste 296
- — właściwe 190—191
- — zbrojenia 154
- — termicznie nawierzchni ciągłej prostego toru kolejowego 233—246
- — torów kolejowych 85, 228—232, 246
- toru kolejowego 188—189, 207, 210, 213, 228—229, 240
- — — pionowe 188—189, 194, 216, 222
- — — poziome 188—189, 193, 202, 240, 256
- wybrzuszenie toru kolejowego 211—212
- wydłużanie się szyn termicznie 228
- wydłużenie 464
- jednostkowe 241, 368—369, 465
- plastyczne (trwałe) 477
- właściwe 157
- wygięcie dna 418
- faliste osi toru kolejowego 228
- plastyczne 113
- sprężyste 193
- wymiarowanie prętów osiowo-ściskanych 356—359
- wyływ swobodny cieczy 482
- wypór 130
- wysiłek (wyteżenie) materiału 178, 463, 473
- krańcowy 463
- niebezpieczny 463
- niszczący 463
- wysmukłość 479
- wysokość położenia podpór 91, 94
- wyteżenie 373, 463, 472—476
- materiału 126
- — krańcowe 463
- — w rurze samowzmoconionej 383—385
- wytrzymałość 366, 462, 472—476
- ciała 473
- części konstrukcyjnej 463
- doraźna 176, 468, 470
- — materiału na rozciąganie 467
- — — ściskanie 467
- — — kostkowa betonu 161
- — materiału 456, 460, 463, 467—468, 473
- — na zmęczenie 468—469
- — — jednokierunkowe (jednostronne) 469
- — — obukierunkowe (obustronne) 469
- — — podłużnic 344—355
- — — prętów na proste rozciąganie 474

- — — — ścinanie 474
- — — — ściskanie 474
- — — zginanie 109, 474
- rury niewzmocnionej 389
- słupowa 174—175, 179
- statyczna 469
- trwała 467—469
- żelbetu 172—183
- wytwory przemysłowe 444
- wytwórca 444
- wyznaczanie 445
- wyznacznik 447
- wzbudzenie drgań 42
- wzmocnienie 366
- wzór *Bocheta-Wicherta* 61, 75, 78
- *Eulera* 208, 296, 301, 356
- *J. N. Frankego* 61
- *Hertza* 125, 127
- kotłowy na naprężenia obwodowe 304
- *Lámego* 436
- na drugie ciśnienie krytyczne 386
- — naprężenie spowodowane 126
- — pierwsze ciśnienie krytyczne 386
- — zwiększenie średnicy zewnętrznej 386
- statecznościowy *Eulera* 306
- wytrzymałościowy 306
- wzory *Bresse'a* 138
- *Clarka* 143—144
- empiryczne 480
- ogólne zgięcia belek prostych 138—145
- prac przygotowanych (wirtualnych) 442
- rezonansu (współbrzmienia) 275
- rozkładu drgań złożonych 19
- równoległoboku sił 442
- superpozycji 19, 29, 394
- względności ogólna 442
- zachowania energii 23, 442
- zataczanie się (wężykowanie) 289
- zboczenie od zamierzonej prostoliniowości osi toru kolejowego 213
- zbrojenie betonu 149—160
- owinięte 167
- podłużne 155—156, 165, 168, 182,
- poprzeczne 165, 167, 180
- z żelaza zlewnego 170
- zdolność do odkształceń plastycznych 179, 469
- — — sprężystych 470
- — — w ogóle 363, 463
- zestaw kołowy 74, 80, 82—87
- — o obręczach stożkowatych 82
- zgięcie 311
- belek prostych 138—145
- elastoplastyczne 110—112
- pierścienia 309—318
- płyty okrągłej kołowo-symetryczne 309
- sprężyste 112
- zginanie belek prostych o przekrojach wiotkich 325—335
- poprzeczne 332
- prętów czyste 109—112
- zgniot 366, 470—471
- zjawisko niestałości (niestateczności równowagi) 213
- tarcia 56—85
- twardnienia 109
- współbrzmienia 50—52
- zmęczenie materiału 18, 468
- zmiennosc naprężenia 169—170
- zniekształcenie nawierzchni 234
- toru kolejowego 210, 213, 215, 247—257
- — — trwale 228
- znużenie (zmęczenie) materiału 468
- zwichrzenie pierścienia 296
- zwiększenie średnicy zewnętrznej 386
- żelbet 172—183

Z

- zagadnienie *Eulera* 214
- statycznie wyznaczalne 445
- uzbrojeniowe 361—436
- zakłębienie (zgniecenie) rury 295, 296
- zaporą ciężką 130
- trójkątną 136
- zasada 441—443
- *Castigliano* 91
- *d'Alemberta* 31
- *de Saint-Venanta* 134
- ekonomii myśli 457
- najmniejszej energii odkształcenia 330



$$\overline{\text{XIV}} \mid 2$$

$$\begin{array}{r} 82 - \\ \hline 233 \mid 7 \text{ 2} \end{array}$$

PEDAGOGICZNA
BIBLIOTEKA
WOJEWÓDZKA



Gdańsk-Wrzeszcz
Al. Gen. J. Hallera 14

37776

REZERWA