

BIBLIOTEKA GŁÓWNA

WYD. 0911

Politechniki Gdańskiej



III 0911

DER STAHLBAU

Beilage zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. **K. Klöppel**, Darmstadt, Technische Hochschule

Professor **W. Rein**, Breslau, Technische Hochschule

14. Jahrgang

1941

Mit 259 Textabbildungen

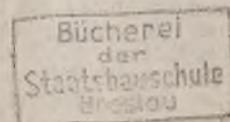
Alle Rechte vorbehalten — Nachdruck verboten
Printed in Germany



Berlin 1941
Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn



3799.



Inhalts-Verzeichnis des 14. Jahrganges, 1941.

Sachverzeichnis.

	Seite		Seite		Seite
Berichtigung zum Aufsatz Hängebrücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers (Jahrg. 1940, Heft 21/22)	32	Schweißung. Die Werkstoff-Fragen beim Schweißen dicker Abmessungen von St 52	41, 57	Statik und Festigkeitslehre. Über das Ausknicken statisch unbestimmt gelagerter Kreisbogenträger von veränderlichem Querschnitt	73
— Einfaches Hilfsmittel zur Bemessung von Rahmenquerschnitten für zahlreiche Lastfälle (Jahrg. 1940, Heft 25/26)	40	— Mitteilungen über einen neuen, nach dem Thomasverfahren erschmolzenen hochwertigen Mangan-Phosphor-Baustahl	69	— Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Hänger	85
Brücken. Entlastung bestehender Brückenwiderlager durch Anordnung einhäufiger Rahmenträger	1	— Prüftechnische Erfassung der Ursachen zum spröden Bruch des Baustahls	97	— Einfluß der nachgiebigen Hängestangen auf die Berechnung der Hängebrücke	88
— Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung	65, 78	Stahleinsparung. Der Hohlsteg-Verbundträger, DRP. a., eine bautechnische Neuheit	10	— Zur Berechnung von vierseitigen Fachwerkmasten auf Verdrehen	89
— Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Hänger	85	— Der R-Träger, eine neue, leichte Trägerform	21	— Allgemeine Kräftebestimmung an Körpern mit vier windschiefen Kräften	103
— Einfluß der nachgiebigen Hängestangen auf die Berechnung der Hängebrücke	88	Statik und Festigkeitslehre. Die Stabilität des Dreigelenkrechteckrahmens	3	— Berechnung des Verhaltens von Hängebrücken unter Windbelastung	106
— Berechnung des Verhaltens von Hängebrücken unter Windbelastung	106	— Die Biegespannungen querschwingender, achsrecht belasteter Stäbe	13	— Berechnung von Biegeträgern mit axialer Zugkraft	113
Dachkonstruktionen. Der R-Träger, eine neue, leichte Trägerform	21	— Zur Windberechnung vielstöckiger, zwei-stieliger, symmetrischer Rahmen	16	— Ein Rechenschema zur Knickberechnung mehrfeldriger beliebig gestützter Druckstäbe und seine Anwendung auf Zahlenbeispiele	117
Deckenkonstruktionen. Der Hohlsteg-Verbundträger, DRP. a., eine bautechnische Neuheit	10	— Beitrag zur praktischen Durchbiegungsermittlung für einfache und durchlaufende Träger	18	Versuche. Amerikanische Dauerversuche mit Nietverbindungen	108
— Der R-Träger, eine neue, leichte Trägerform	21	— Die Stabilität der Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben und mit Fachwerkiegeln	24	— zur Feststellung der Klemmspannungen und der Lochfüllung mit Nieten aus St 44	114
Ergänzung zum Aufsatz Die Festigkeit leicht gekrümmter Druckstäbe aus Stahl bei schwingender Belastung (Jahrg. 1940, Heft 23/24)	32	— Über die Berechnung von Einzelwinkeln auf Biegung	28	— Über Dauerversuche m. Nietverbindungen	115
Hallen. Große Werkhalle für den Zusammenbau von Eisenbahngüterwagen	53	— Die Berechnung durchlaufender Träger unter Berücksichtigung der Plastizität	30	Werkstofffragen. Die Werkstoff-Fragen beim Schweißen dicker Abmessungen von St 52	41, 57
— Stahlkonstruktion für Großschmiedehallen	109	— Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens	33, 47	— Mitteilungen über einen neuen, nach dem Thomasverfahren erschmolzenen hochwertigen Mangan-Phosphor-Baustahl	69
Maste. Zur Berechnung von vierseitigen Fachwerkmasten auf Verdrehen	89	— Bemerkungen zu DINE 4114	37	— Prüftechnische Erfassung der Ursachen zum spröden Bruch des Baustahls	97
Nachtrag zum Aufsatz Die Berechnung der regelmäßig vieleckigen Rahmenkuppeln (Jahrg. 1940, Heft 16/18)	12	— — — — —	96	Zuschrift zum Aufsatz Bemerkungen zu DIN 4114	96
		— Berechnung der Durchbiegung von Krangleisträgern	51		
		— Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung	65, 78		

Verfasserverzeichnis.

	Seite		Seite		Seite
Bischof, W., Dr.-Ing. habil., Dortmund, siehe unter Schulz.		Klöppel, K., Prof., Dr.-Ing., Darmstadt, und Dr.-Ing. K. H. Lie, Darmstadt. Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Hänger	85	Rein, W., Prof., Breslau. Große Werkhalle für den Zusammenbau von Eisenbahngüterwagen	53
Bültmann, W., Dipl.-Ing., Hamburg. Die Stabilität des Dreigelenkrechteckrahmens	3	— Die Stabilität der Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben und mit Fachwerkiegeln	24	Schmidt, G., Dr.-Ing., Berlin. Die Berechnung durchlaufender Träger unter Berücksichtigung der Plastizität	30
— Die Stabilität der Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben und mit Fachwerkiegeln	24	Kraus, R., Prof., Dr.-Ing. habil., Forsbach. Allgemeine Kräftebestimmung an Körpern mit vier windschiefen Kräften	103	Schulz, E., Prof., Dr.-Ing., Dortmund, und Dr.-Ing. habil. W. Bischof, Dortmund. Die Werkstoff-Fragen beim Schweißen dicker Abmessungen von St 52	41, 57
Chwalla, E., Prof., Dr.-Ing., Brünn, und Dipl.-Ing. F. Jokisch, Brünn. Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens	33, 47	Kriso, K., Prof., Dr.-Ing., Brünn. Ein Rechenschema zur Knickberechnung mehrfeldriger beliebig gestützter Druckstäbe und seine Anwendung auf Zahlenbeispiele	117	Selberg, A., Ing., Trondheim. Berechnung des Verhaltens von Hängebrücken unter Windbelastung	106
— Über das Ausknicken statisch unbestimmt gelagerter Kreisbogenträger von veränderlichem Querschnitt	73	Kuntze, W., Prof., Dr.-Ing., Berlin. Prüftechnische Erfassung der Ursachen zum spröden Bruch des Baustahls	97	Steinack, F., Ing., München. Beitrag zur praktischen Durchbiegungsermittlung für einfache und durchlaufende Träger	18
Cichocki, F., Dr. techn., Dortmund. Berechnung von Biegeträgern mit axialer Zugkraft	113	Lie, K. H., Dr.-Ing., Darmstadt. Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung	65, 78	Uhlig, W., Ing., Mannheim. Der Hohlsteg-Verbundträger, DRP. a., eine bautechnische Neuheit	10
Desch, F., Referent, Berlin. Fertigungen und Baudringlichkeitsstufen	62	— Siehe auch unter Klöppel.		Wanke, J., Prof., Dr.-Ing., Prag. Zur Berechnung von vierseitigen Fachwerkmasten auf Verdrehen	89
Fritsche, J., Prof., Dr. techn., Prag. Bemerkungen zu DINE 4114	37	Maelzer, W., Berat. Ing., Berlin. Entlastung bestehender Brückenwiderlager durch Anordnung einhäufiger Rahmenträger	1	Wasmuht, R., Dr.-Ing. habil., Dortmund. Mitteilungen über einen neuen, nach dem Thomasverfahren erschmolzenen hochwertigen Mangan-Phosphor-Baustahl	69
Frobenius, H., Dr.-Ing. Stahlkonstruktion für Großschmiedehallen	109	Neufert, E., Prof., Berlin. Der R-Träger, eine neue, leichte Trägerform	21	Woinowsky-Krieger, S., Dr.-Ing., Berlin. Über die Berechnung von Einzelwinkeln auf Biegung	28
Hertwig, A., Geh. Reg.-Rat, Prof., Dr.-Ing., Berlin. Einfluß der nachgiebigen Hängestangen auf die Berechnung der Hängebrücke	88	Obert, F., Dipl.-Ing., Saarbrücken. Zur Windberechnung vielstöckiger, zwei-stieliger symmetrischer Rahmen	16		
Heyer, H., Ing. Berechnung der Durchbiegung von Krangleisträgern	51	Puwein, M., Dr.-Ing., Wien. Die Biegespannungen querschwingender, achsrecht belasteter Stäbe	13		
Jokisch, F., Dipl.-Ing., Brünn, siehe unter Chwalla.					

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 3. Januar 1941

Heft 1/3

Entlastung bestehender Brückenwiderlager durch Anordnung einhüftiger Rahmenträger.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Wilhelm Maelzer, Beratender Ingenieur VBI, Berlin-Zehlendorf.

Die Einführung schwerer Lokomotiven sowie die Inbetriebnahme der Großgüterwagen bedingte die statische Untersuchung der vorhandenen Brückenbauwerke im Bereiche der Deutschen Reichsbahn. Auf Grund dieser Nachrechnungen mußte insbesondere eine große Anzahl von Bauwerken der Berliner Stadt- und Ringbahn ausgewechselt bzw. verstärkt werden. Bei diesen Untersuchungen wurde in den meisten Fällen festgestellt, daß die vorhandenen, in der Hauptsache gemauerten Brückenwiderlager den neuen Belastungsvorschriften nicht genügen.

Namentlich erwiesen sich die unter den festen Brückenauflegern vorhandenen Widerlager in keiner Weise zur Aufnahme der Bremskräfte in der vorgeschriebenen Größe ausreichend. Eine Ausnahme bildeten diejenigen Brückenwiderlager, an welche sich unmittelbar gewölbte Viadukte anschlossen. Diese zeigten mit Rücksicht auf den einseitig wirkenden Horizontalschub aus dem angrenzenden Gewölbe meistens reichliche Abmessungen. Schließen sich dagegen an das Brückenbauwerk beiderseitige

Luftdruckbremsen üben auf die Widerlager eine besonders ungünstige Wirkung aus. Auch hat die seinerzeit übliche Ausbildung der Brückenaufleger als Flächenlager eine Verteilung der Bremskräfte auf beide Widerlager sehr begünstigt, ein Umstand, der bei den Neubauten nicht mehr zutrifft. Das am weitesten verbreitete Brückensystem bei städtischen Eisenbahnüberführungen stellt sicherlich der durchlaufende Balken auf zwei Mittelstützen mit oder ohne Gelenke in seinen drei Öffnungen dar. Liegt nun die Aufgabe vor, eine derartige Brücke durch einen Neubau zu ersetzen, so hat man auch für die einwandfreie Überleitung der Bremskräfte in den Baugrund Vorsorge zu tragen. Der nächstliegende Vorgang, nämlich eine vollständige Erneuerung der Endwiderlager, kommt aus wirtschaftlichen Gründen meist überhaupt nicht in Frage. Aber auch jegliche Verstärkung der Widerlager, insbesondere eine Verbreiterung der Widerlagersohle, erhöht die Kosten des Neubaus ganz bedeutend, namentlich auch deshalb, weil derartige Arbeiten stets unter Einhaltung

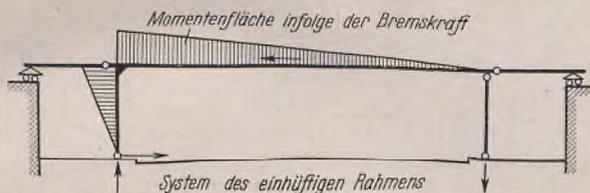


Bild 1.

wirtschaftlichen Gründen meist überhaupt nicht in Frage. Aber auch jegliche Verstärkung der Widerlager, insbesondere eine Verbreiterung der Widerlagersohle, erhöht die Kosten des Neubaus ganz bedeutend, namentlich auch deshalb, weil derartige Arbeiten stets unter Einhaltung

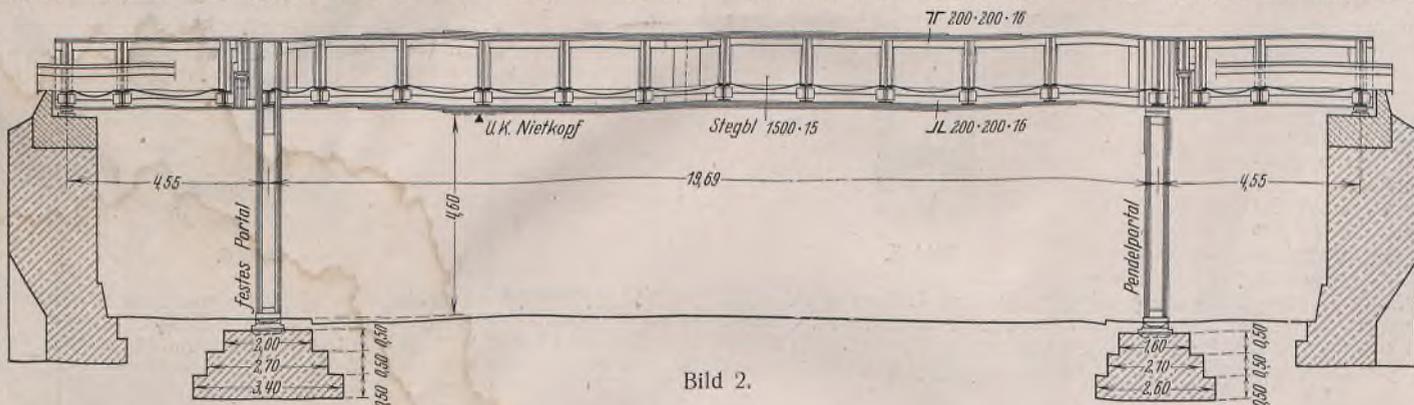


Bild 2.

Erddämme an, so kommt man selbst bei weitgehender Verteilung der Bremskräfte nach der Breitenrichtung des Widerlagers auf überaus hohe Werte der Bodenpressung an der Vorderkante der Widerlagersohle.

Dieses Ergebnis dürfte wohl darin seine Erklärung finden, daß die meist aus den 80er Jahren stammenden Widerlager von Brücken kleiner und mittlerer Stützweite außer für die damaligen verhältnismäßig geringen Verkehrslasten lediglich noch für die auftretenden Erddruckkräfte, nicht aber für die Bremskräfte bemessen worden sind. Wenn man bei der Nachrechnung bestehender Bauwerke vielleicht auch nicht die durch die Vorschriften geforderten Höchstwerte der Bremskräfte einzuführen braucht, so würde eine vollständige Vernachlässigung der zweifellos auftretenden Brems- bzw. Anfahrkräfte doch ein vollkommen falsches Bild der tatsächlich auftretenden Widerlagerbeanspruchungen sowie der Bodenpressung ergeben. Die heutigen, wesentlich höheren Fahrgeschwindigkeiten der Züge sowie die schnell wirkenden

des Eisenbahnbetriebes sowie des Straßenverkehrs durchzuführen sind, tiefe Ausschachtungen erfordern und oft umfangreiche Verlegungen von Straßenleitungen aller Art bedingen.

Es liegt nun der Gedanke nahe, das System des neu einzubauenden Brückenhauptträgers so zu wählen, daß eine vollständige Entlastung der Widerlager von den Bremskräften erzielt und die Widerlagerverstärkung ganz vermieden wird.

Das in Bild 1 veranschaulichte einhüftige Rahmensystem stellt, wie Vergleichsrechnungen zeigen, die wirtschaftlichste Lösung der Aufgabe unter den gegebenen Vorbedingungen dar. Die Gelenke in den Seitenöffnungen sind einmal zur Schonung der Brücke von den Folgen der Auflagersenkungen und dann auch zur Vermeidung der bei den üblichen Stützweitenverhältnissen auftretenden Ankerzüge angezeigt. Als Brückensystem hat der einhüftige Rahmen bisher bei längeren Stahlviadukten, insbesondere bei Förderbrücken, Verwendung gefunden. Als Mittel zur Entlastung vorhandener schwacher Widerlager



Bild 3.

und somit auch zu sparsamer Erneuerung bestehender Balkenbrücken unter Eisenbahngleisen ist das System, soweit bekannt, erstmalig vom Verfasser anlässlich des Neubaus einer Straßenunterführung in Berlin vorgeschlagen worden.

Inzwischen ist bereits eine größere Zahl von Überbauten dieser Bauart zur Ausführung gebracht worden. Die Bilder 2 u. 3 stellen einen neuen Überbau mit einhüftigen Rahmenträgern dar. Die Stützweite der Mittelöffnung ist gegenüber dem alten Bauwerk auf 19,69 m vergrößert worden, um eine beabsichtigte spätere Fahrdammverbreiterung zu ermöglichen. Die linke Stütze (s. Ansicht) ist biegungsfest an den Hauptträger angeschlossen und leitet die Bremskräfte dem Stützenfundament zu, die rechte Stütze ist als Pendelstütze ausgebildet, während sämtliche Endauflager längsbeweglich sind. Die Stützen beider Hauptträger des Unterbaues sind durch Querriegel paarweise zu

Zweigelenkrahmen gekuppelt. Durch die Anordnung von seitlichen Längsträgern ließen sich die biegungsfest angeschlossenen Stützen ohne Durchbrechung von Buckelplatten bis an die obere Hauptträgergurtung hochführen (Bild 4). Die konstruktive Ausbildung des Stützenanschlusses ist aus Bild 5 ersichtlich. Die Niete sind für das Moment aus der am Stützenfuß wirkenden Bremsreaktion, für die betreffende Querkraft und den gesamten Stützendruck berechnet. Auch der Seitenstoß von 100 t infolge der eventuellen Rammwirkung durch Straßenfahrzeuge ist bei den Stützen berücksichtigt worden.

Der Werkstoff für sämtliche Teile des Überbaues ausschließlich der Lager ist Flußstahl St 37, die Bemessung erfolgte für den Lastenzug N. Die bestehenden Widerlager zeigen recht knappe Abmessungen. Dank ihrer zur Aufnahme des Erddruckes gut geeigneten Form (Bild 2) sowie der vorgenommenen Zurücklegung der Brückenaullager übertrifft die aus



Bild 6.

der ständigen Last, dem Lastenzug N und dem Erddruck resultierende Bodenpressung an der Vorderkante nicht den Wert von $3,15 \text{ kg/cm}^2$. Hingegen wäre an die Aufnahme der Bremskräfte durch die vorhandene Widerlagersohle nicht zu denken. Durch die gewählte Neubauanordnung konnte von jeglicher Widerlagerverstärkung abgesehen werden. Die einzigen an den Widerlagern vorgenommenen Arbeiten waren der Einbau von Eisenbeton-Auflagerbänken und die Entfernung der durch den Einbau von Gelenken entbehrlich gewordenen Anker.

Ein zweites nach demselben System erneuertes Brückenbauwerk ist die in Bild 6 dargestellte Straßenunterführung. Die durch den einhüftigen Rahmen herbeigeführte Entlastung der Widerlager von den Bremskräften läßt sich natürlich auch durch einen Zweigelenkrahmen erreichen. Der ebenfalls von dem Verfasser ausgearbeitete Entwurf nach Bild 7 stellt die Anwendung dieses Systems zur Erneuerung einer weiteren Straßenunterführung dar. Der einzige Vorteil des Zweigelenkrahmens gegenüber dem einhüftigen Rahmen liegt

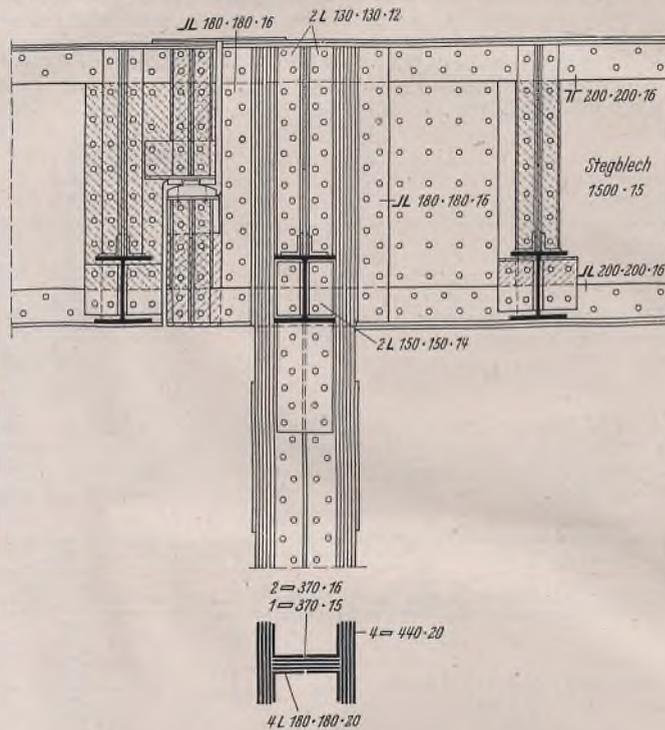


Bild 5.

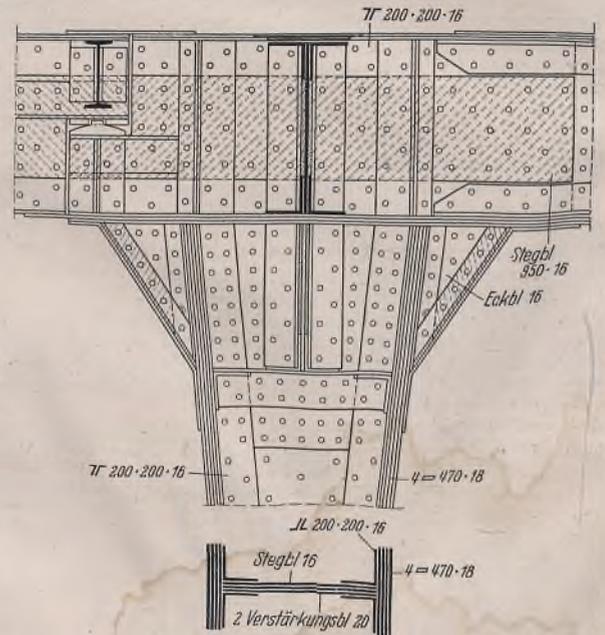


Bild 8.

in der wirksamen Entlastung des Riegels durch den Horizontalschub, wonach dieser Hauptträger relativ leicht ausfällt.

Die Anordnung wird aber durch die Umwandlung der Pendelstütze in eine zweite feste Stütze äußerlich statisch unbestimmt und im Gegen-



Bild 4.



Bild 7.

satz zum einhäufigen Rahmen gegen die waagerechten Verschiebungen der Stützenfundamente empfindlich. Die Stützen erfordern jedenfalls eine breite und relativ kostspielige Gründung; bei einigermaßen unzuverlässigem Baugrund ist das System überhaupt nicht zu empfehlen.

Andererseits werden die Stützen des Zweigelenrahmens in höchst ungünstiger Weise auch durch Biegemomente aus der senkrechten Belastung, der Wärmeänderung, den Bremskräften beansprucht und sind außerdem noch für die Stöße der Straßenfahrzeuge bis zu einer Höhe von 100 t nachzuweisen.

Die einfache und schlanke Formgebung nach Bild 2 wird bei gleichzeitiger Wirkung aller dieser Kräfte nur schwierig einzuhalten sein; vor allem aber wird sich der momentenfesteste Anschluß an den Hauptträger entsprechend Bild 5 als überhaupt nicht ausführbar erweisen. Man kommt nun zwangsläufig auf eine Stützenform, wie sie aus der Konstruktionszeichnung der Rahmenecke in Bild 8 hervorgeht. Hierdurch wird entweder das lichte Straßendurchfahrprofil eingeengt, oder aber es muß die Stützweite der Mittelöffnung auf Kosten der Bürgersteige vergrößert werden.

Die Stabilität des Dreigelenrechteckrahmens.

Von Dipl.-Ing. Wilhelm Bültmann, Hamburg.

Einleitung.

Neuerdings wird für die Ermittlung der Knickfestigkeit der Stiele von Zweigelenrechteckrahmen in der Rahmenebene die Knicklänge $s_k \geq 2h$ gefordert, wo h die Stielhöhe entsprechend Bild 1 ist. Diese Forderung stützt sich auf theoretische Untersuchungen von Hertwig und Pohl¹⁾ und Chwalla²⁾ sowie auf Versuche von Chwalla und Kollbrunner³⁾, die den Nachweis der antisymmetrischen Knickfigur des symmetrisch belasteten Zweigelenrahmens erbrachten.

Ähnliche Überlegungen treffen auch für den in der Baupraxis manchmal nicht vermeidbaren Dreigelenrechteckrahmen zu.

Dieser Rahmen soll hier untersucht werden, insbesondere auch, wenn die Lasten in veränderlicher Höhe am Rahmenstiel angreifen, da diesem Belastungsfall in der Praxis immerhin einige Bedeutung zukommt und derselbe nur durch umständliche, viel Zeit beanspruchende Rechnung zu erfassen ist.

A. Die Trägheitsmomente der Rahmenstäbe sind konstant.

1. Die Last greift an der Rahmenecke an.

Der Dreigelenrechteckrahmen nach Bild 1 hat, wie leicht einzusehen ist, durch die Anordnung des Gelenkes bei a geringere Stabilität als ein Zweigelenrechteckrahmen gleicher Abmessungen und Querschnitte. Wird die Untersuchung der Stabilität dieses Rahmens auf die in der Bildebene beschränkt, ist weiterhin der Elastizitätsmodul des Riegels und Stieles konstant, dann ergibt sich die Knickbedingung des Dreigelenrechteckrahmens mit den Daten und für die Belastung nach Bild 1 aus der vereinfachten Differentialgleichung der Biegelinie zu

$$(1) \quad z \cdot \operatorname{tg} z = 3c,$$

worin $z = \alpha h$, $\alpha^2 = \frac{P}{E J_h}$ und $c = \frac{h J_r}{l J_h}$ bedeuten. Wird

$$(2) \quad \gamma = \frac{\pi}{z}$$

gesetzt, dann ist die Grenzkraft

$$(3) \quad P_k = \frac{E J_h \pi^2}{(\gamma h)^2}.$$

In Bild 2 ist die Knicklänge $s_k = \gamma h$ für $h = 1$ als $f(c)$ dargestellt worden.

Die Grenzwerte sind

$$\text{für } c = 0; \gamma = \infty, \text{ also } P_k = 0 \text{ und}$$

$$\text{für } c = \infty; \gamma = 2, \text{ also } P_k = \frac{E J_h \pi^2}{4 h^2} \text{ (I. Eulerfall).}$$

Die Kurve $\gamma = f(c)$ nähert sich sehr schnell dem Grenzwert $\gamma = 2$. Von diesem Verlauf wird man bei der Bemessung von Dreigelenrechteckrahmen Gebrauch machen, um große Knicklängen der Stiele zu vermeiden. Eine Frage der Normung wäre, für den Rahmensteifigkeitswert c Mindestwerte vorzuschreiben.

Bei $c \geq 2$ läßt sich $\gamma = f(c)$ auch genau genug durch die Näherungsformel

$$(4) \quad \gamma \approx 2 \sqrt{1 + \frac{0,70}{c}}$$

erfassen⁴⁾, während für $c \leq 2$

$$(4a) \quad \gamma \approx 2 \sqrt{1 + \frac{0,70}{c} + \frac{0,035}{c^2}} \text{ ist.}$$

¹⁾ A. Hertwig u. K. Pohl, Die Stabilität der Brückenendrahmen. Stahlbau 1936, S. 129.

²⁾ E. Chwalla, Die Stabilität lotrecht belasteter Rechteckrahmen. Bauing. 1938, S. 69.

³⁾ E. Chwalla u. C. F. Kollbrunner, Beiträge zum Knickproblem des Bogenträgers und des Rahmens. Stahlbau 1938, S. 94.

⁴⁾ E. Chwalla gibt in den Erläuterungen zu DIN E 4114 für den Zweigelenrechteckrahmen eine entsprechende Faustformel an, aus der Gl. (4) entwickelt wurde.

Wie Vergleichsrechnungen zeigen, ist der Stahlbedarf des einhäufigen Rahmens nahezu der gleiche wie für den Zweigelenrahmen. Was sich beim Zweigelenrahmen am Riegel sparen läßt, wird bei den Stützen und Eckblechen wieder zugegeben. Durch die erheblich kostspieligeren Fundamente des Zweigelenrahmens wird somit die Frage der Wirtschaftlichkeit zugunsten des einhäufigen Rahmens entschieden.

Der einhäufige Rahmen der oben beschriebenen Art, unter Umständen auch über nur zwei Öffnungen, d. h. ohne Pendelstütze, kommt in erster Linie bei der Auswechslung bestehender Überbauten von Eisenbahnbrücken in Frage. Dies schließt jedoch seine Verwendung auch bei vollständigen Neubauten keineswegs aus. Namentlich dort, wo der Baugrund keine hohe Bodenpressung verträgt, lassen sich die Bremskräfte weit zweckmäßiger durch biegezugsfeste Stützen und Stützenfundamente in den Baugrund leiten als durch Widerlager, die in solchen Fällen eine überaus große Sohlenfläche erfordern, in ihren durchschnittlichen Abmessungen stark zunehmen und die Wirtschaftlichkeit des Gesamtbauwerks sehr ungünstig beeinflussen.

Gl. (1) gilt streng genommen nur dann, wenn der Elastizitätsmodul E des Riegels und Stieles gleich und über deren Längen konstant ist. Das ist jedoch nur so lange erfüllt, wie das Knicken des Stieles elastisch ist. Die Kurve nach Bild 2 gibt jedoch auch über die Stabilität im plastischen Bereich Aufschluß, wenn statt des veränderlichen Knickmoduls $T = \tau E$ der Elastizitätsmodul E konstant und das Trägheitsmoment des Stieles über dessen Länge veränderlich angenommen werden. Für das Trägheitsmoment J_h ist dann in $c = \frac{h J_r}{l J_h}$ näherungsweise der kleinere Mittelwert $J_m = \tau J_h$ einzuführen, so daß im plastischen Bereich der Abszissenwert c in Bild 2 größer und die Knicklänge $s_k = \gamma h$ kleiner wird als die für den elastischen Bereich errechnete. Wählt man den Rahmensteifigkeitswert c von vornherein groß genug, dann weichen die entsprechenden Knicklängen kaum voneinander ab.

Begnügt man sich zur Ermittlung der Knicklänge mit Gl. (4), dann läßt sich aus dieser Faustformel für den elastischen Bereich eine entsprechende für den plastischen Bereich angeben.

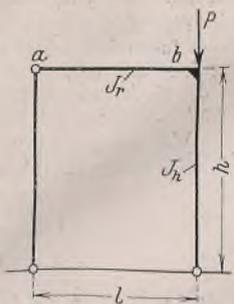


Bild 1.

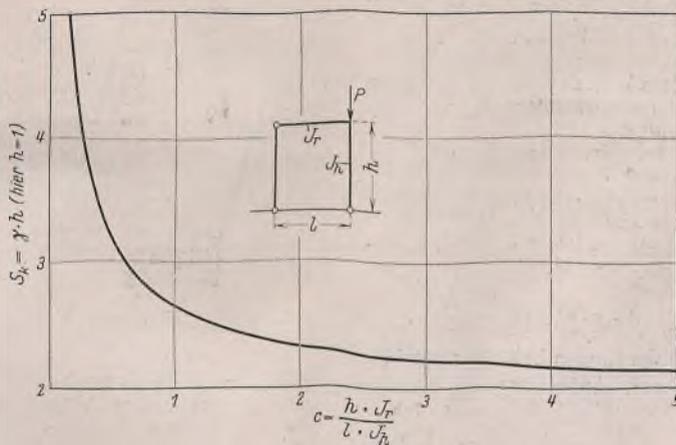


Bild 2. Dreigelenrechteckrahmen. Knicklänge des Rahmenstieles $s_k = \gamma h$.

Schreibt man statt $c_m = \frac{h J_r}{l J_h} \approx \frac{c}{\tau}$ und ersetzt τ durch $\tau = A \lambda^2 = A \gamma^2 \lambda_{II}^2$, worin $\lambda_{II} = \frac{h}{i}$ den Stielschlankheitsgrad des II. Eulerfalles

und $i = \sqrt{\frac{J_h}{F_h}}$ den Trägheitsradius des Stielquerschnitts bedeuten, dann liefert Gl. (4) die im plastischen Bereich gültige Gleichung

$$(4b) \quad \gamma \approx \sqrt{2 + 2 \sqrt{1 + \frac{0,70 A \lambda_{II}^2}{c}}}$$

Nach DIN E 4114, Tafel 1, ist, wie leicht nachzuprüfen ist, für St 37

$$A = \frac{\sigma_{ki}}{E \pi^2} = 0,000 115 8 \text{ und entsprechend für St 52 } A = 0,000 173 7,$$

wenn $\sigma_{ki} = 2400 \text{ kg/cm}^2$ und 3600 kg/cm^2 die entsprechenden Knickspannungen des plastischen Bereiches sind. Die Abgrenzung der Bereiche müßte dann nach DIN E 4114, Tafel 1, durch die Schlankheitsgrade $\lambda = 92,9$ und $\lambda = 75,9$ erfolgen.

Bedient man sich zur Ermittlung von τ der σ_k -Linie nach Tafel 1 der DIN E 4114, dann werden die γ -Werte noch kleiner als die aus Gl. (4b) errechneten, so daß man sich mit den Ergebnissen der Näherungsgleichung (4b) immer auf der sicheren Seite bewegt.

Ein Beispiel erläutere den Rechnungsgang.

Die Abmessungen und Querschnittswerte des zu untersuchenden Dreigelenrechteckrahmens sind:

der Riegel $l = 4 \text{ m}$; $J_r = 113\,200 \text{ cm}^4$;
 der Stiel $h = 4 \text{ m}$; $J_h = 36\,940 \text{ cm}^4$ und $i = 14,5 \text{ cm}$.

1. $c = \frac{400 \cdot 113\,200}{400 \cdot 36\,940} = 3,064$, nach Bild 2 oder Gl. (4) ist dann

2. $\gamma \approx 2 \sqrt{1 + \frac{0,70}{3,064}} \approx 2,217$ und
 3. $s_k \approx 2,217 \cdot 4,00 \approx 8,87 \text{ m}$, so daß
 4. $\lambda \approx \frac{887}{14,5} \approx 61,2 < 92,9$ für St 37, also plastisches Knicken.

5. $\lambda_{II} = \frac{400}{27,6} = 27,6$ liefert mittels Gl. (4b)
 6. $\gamma \approx \sqrt{2 + 2 \sqrt{1 + \frac{0,70 \cdot 0,000\,115\,8 \cdot 27,6^2}{3,064}}} \approx 2,005$

7. $s_k \approx 2,005 \cdot 4,00 \approx 8,02 \text{ m}$ die Knicklänge und
 8. $\lambda \approx \frac{802}{14,5} \approx 55,3$ den Schlankheitsgrad für St 37, der zur Ermittlung der weiteren Größen anzusetzen ist.

2. Die Last greift am Stiel unterhalb der Rahmenecke an.
 Für den Belastungsfall, daß nach Bild 3 die Last am Stiel angreift, stehen noch keine Werte, die eine einfache praktische Rechnung ermöglichen, zur Verfügung, obwohl diesem Fall einige Bedeutung zukommt, da er in der Praxis sehr oft zu verfolgen ist. Daher kann man leider noch allzuoft erleben, daß in den oberhalb dieses Lastangriffspunktes nachgewiesenen Spannungswerten der Stiele die Last gar nicht mehr berücksichtigt wird. Im Bereich I des Stieles ist mit den Daten von Bild 3, wie sich mittels der linearisierten Differentialgleichung der elastischen Linie leicht nachweisen läßt,

$$y = \frac{f}{\sin \alpha u} \cdot \sin \alpha x,$$

worin wiederum $\alpha^2 = \frac{P}{E J_h}$ ausmacht.

An der Stelle $x = u$ ist mithin

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha f}{\sin \alpha u}$$

Im Bereich II des Stieles ist aber mit den gleichen Bezeichnungen

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 f = 0 \quad \text{und}$$

$$\frac{dy}{dx} + \alpha^2 f x + K_1 = 0.$$

Das Eckmoment ist mit den bekannten Bedingungen

$$M_b = P_1 f = \frac{3 E J_r \tau}{l},$$

wenn τ der Knotendrehwinkel der Ecke ist.

Durch Umformung und Einführung von α^2 wird dieser Winkel

$$\tau = \frac{l J_h}{3 J_r} \cdot \alpha^2 f.$$

Die Konstante K_1 wird der Grenzbedingung $x = h$, $\frac{dy}{dx} = \tau$ zufolge

$$K_1 = -\alpha^2 f h - \frac{l J_h}{3 J_r} \cdot \alpha^2 f$$

und demnach

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} - \alpha^2 f (h - x) - \frac{l J_h}{3 J_r} \cdot \alpha^2 f = 0.$$

Schreibt man $\frac{u}{h} = \psi$, $\alpha h = z_1$ und wiederum $\frac{h J_r}{3 J_h} = c$, dann lautet die

Gleichung der Knickbedingung nach Verknüpfung der beiden Bereiche des Stieles mittels Gl. (5) u. (6) für $x = u$

$$(7) \quad z_1 \cdot \text{tg } \psi z_1 \left(1 - \psi + \frac{1}{3c}\right) = 1.$$

Mit gegebenen c und ψ liefert die Wurzel z_1 der Gl. (7), wenn wiederum $\gamma_1 = \frac{\pi}{z_1}$ gesetzt wird, die Grenzkraft

$$P_{k_1} = \frac{E J_h \pi^2}{(\gamma_1 h)^2}.$$

Wird die in Abschnitt 1 für Lasten, die am Rahmeneckpunkt angreifen, errechnete Knicklänge $s_k = \gamma h$ beibehalten, dann ist nach Einführung von

$$(8) \quad \mu = \frac{\gamma_1^2}{\gamma^2} = \frac{z^2}{z_1^2}$$

$$(9) \quad P_{k_1} = \frac{E J_h \pi^2}{\mu (\gamma h)^2}.$$

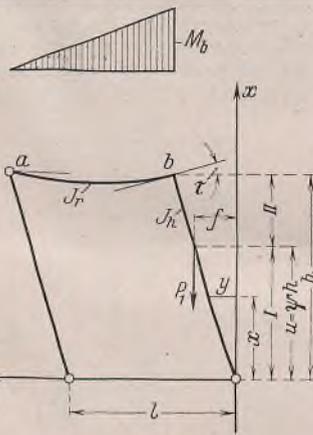


Bild 3.

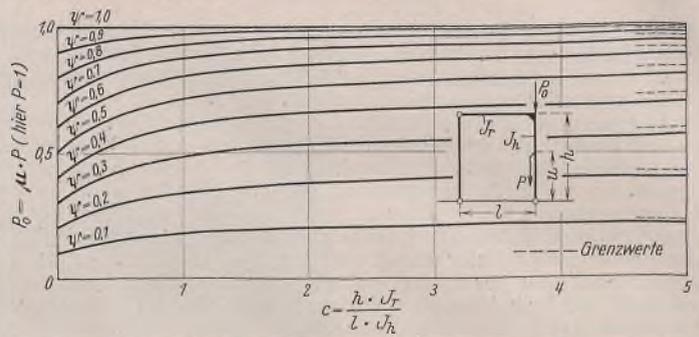


Bild 4. Dreigelenrechteckrahmen.
Beiwerte μ der am Rahmenstiel angreifenden Kräfte.

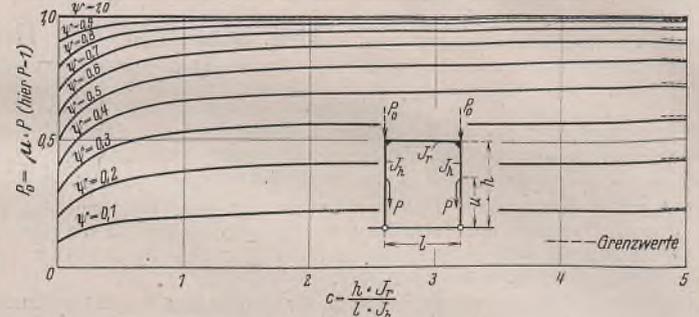


Bild 4a. Zweigelenrechteckrahmen.
Beiwerte μ der an den Stielen angreifenden Kräfte.

In Bild 4 sind diese Abminderungsbeiwerte μ mit c als Abszisse und ψ als Parameter für $\psi = 0,1, 0,2, \dots, 0,9$ dargestellt worden. Die μ -Werte nähern sich asymptotisch den Grenzwerten, die durch starre Einspannung des Stieles ($J_r = \infty$) gekennzeichnet sind. Bei $c = 0$ ist $\mu = \psi$, wie sich aus Gl. (1), (7) u. (8) leicht nachweisen läßt, wenn $\text{tg } z = z$ und $\text{tg } \psi z_1 = \psi z_1$ gesetzt wird, da $z \rightarrow 0$ und ebenfalls $z_1 \rightarrow 0$.

Für den entsprechend, aber symmetrisch belasteten Zweigelenrechteckrahmen sind die Grenzwerte, einfachen Überlegungen zufolge, dieselben. Allerdings nähern sich die μ -Werte schneller den Asymptoten, wie das zum Vergleich eingefügte Bild 4a zeigt.

Wie Bild 4 vermittelt, ist der Einfluß der am Stiel angreifenden Last doch immerhin bedeutend. So ist z. B. eine Last, die in halber Höhe am Stiel angreift, im Bereich praktischer Rahmensteifigkeiten mit $\mu \approx 0,75$ in die Rechnung einzuführen. Beim Lastangriff $\psi > 0,7$ sind im gleichen Bereich kaum nennenswerte Abminderungen zu verzeichnen.

Will man die Abminderungsbeiwerte rechnerisch erfassen, dann leistet für den Dreigelenrechteckrahmen die Faustformel

$$(10) \quad \mu \approx \frac{\mu_{c=\infty} c + 0,70 \psi}{c + 0,70} \quad \text{mit}$$

$$(11) \quad \mu_{c=\infty} \approx (2,55 - 2,00 \psi + 0,45 \psi^2) \psi$$

gute Dienste, da sie diese Werte ziemlich genau wiedergibt.

In Gl. (11) sind die Asymptoten der Abminderungsbeiwerte in Abhängigkeit von den Lastangriffspunkten festgelegt. Die Zahlen dieser Gleichung wurden nach praktischen Gesichtspunkten abgerundet. Für den symmetrisch belasteten Zweigelenrahmen nach Bild 4a gilt sinngemäß

$$(10a) \quad \mu \approx \frac{\mu_{c=\infty} c + 0,35 \psi}{c + 0,35},$$

wo $\mu_{c=\infty}$, wie schon erwähnt, Gl. (11) zu entnehmen ist.

3. Die Lasten greifen gleichzeitig an der Rahmenecke und unterhalb derselben am Stiel an.

Greifen die Lasten, wie Bild 5 zeigt, gleichzeitig an der Rahmenecke und am Stiel unterhalb der Rahmenecke an, dann ist der Einfluß der Stiellasten P_1 und P_2 auf die Stabilität des Rahmens ein anderer als bei getrenntem Angriff nach A 1 und A 2. Dieser Unterschied soll an Hand der abzuleitenden Bedingungsgleichung festgelegt werden.

Die vereinfachte Differentialgleichung der elastischen Linie des Bereiches II des Rahmenstieles lautet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \beta^2 y + (\alpha^2 - \beta^2) f = 0,$$

wenn statt $\frac{P_1}{E J_h} = \beta^2$ und $\frac{P_2}{E J_h} = \alpha^2 - \beta^2$

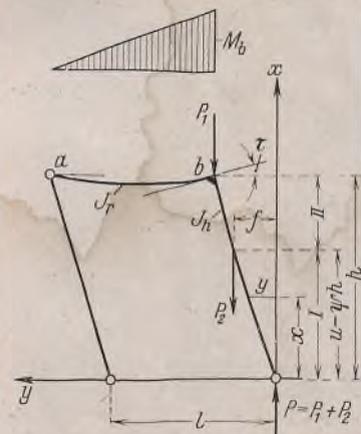


Bild 5.

geschrieben wird. Die Konstanten der Lösung

$$y = K_1 \cdot \sin \beta x + K_2 \cdot \cos \beta x - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} \cdot f$$

liefern die Grenzbedingungen

$$x = h, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_b}{E J_h} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{dx} = \tau$$

und $x = u, y = f$, wenn die Verknüpfung von M_b und τ mit

$$\frac{M_b}{E J_h} = \frac{3 J_r \tau}{l J_h}$$

berücksichtigt wird. Es ist

$$\frac{3 J_r \tau}{l J_h} = \beta^2 K_1 \cdot \sin \beta h + \beta^2 K_2 \cdot \cos \beta h$$

$$\frac{3 J_r \tau}{l J_h} = \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \beta K_1 \cdot \cos \beta h - \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \beta K_2 \cdot \sin \beta h$$

$$0 = K_1 \left(\beta \cdot \sin \beta h - \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \cos \beta h \right) + K_2 \left(\beta \cdot \cos \beta h + \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \sin \beta h \right)$$

$$f \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} = K_1 \cdot \sin \beta u + K_2 \cdot \cos \beta u$$

$$K_1 = \frac{f \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left(\beta \cdot \cos \beta h + \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \sin \beta h \right)}{\beta \cdot \sin \beta (h-u) - \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \cos \beta (h-u)}$$

$$K_2 = \frac{f \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2} \left(\beta \cdot \sin \beta h - \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \cos \beta h \right)}{\beta \cdot \sin \beta (h-u) - \frac{3 J_r}{l J_h} \cdot \cos \beta (h-u)}$$

Nach Abkürzung durch $u = \psi h, \beta^2 = m \alpha^2$ bzw. $\beta = \alpha \sqrt{m}, z_2 = \alpha h, c = \frac{h J_r}{l J_h}$ und Einsetzen der Konstanten ergibt sich die Gleichung der Knickbedingung nach Verknüpfung mit Gl. (5) der Bedingung des Bereiches I und zweckmäßiger Umformung zu

$$(12) \quad \frac{z_2 \{ \sqrt{m} \cdot \operatorname{tg} \psi z_2 + m \cdot \operatorname{tg} [(1-\psi) \sqrt{m} z_2] \}}{\sqrt{m} - \operatorname{tg} \psi z_2 \cdot \operatorname{tg} [(1-\psi) \sqrt{m} z_2]} = 3c$$

Die Lösung dieser Gleichung wirft die auf die Knicklänge nach A 1 bezogene Grenzkraft

$$(13) \quad P_{k_2} = \frac{E J_h \pi^2}{\mu_1 (\gamma h)^2}, \quad \text{wo } \mu_1 = \frac{z^2}{z_2^2} \quad \text{entsprechend Gl. (8),}$$

aus. Wird der Last P_1 derselbe Einfluß auf die Stabilität des Rahmengebildes wie P in A 1 beigemessen, dann muß die Wirkung von P_2 durch die Gleichung $\mu_1 (P_1 + P_2) = P_1 + \mu_2 P_2$ erfaßt werden. Bei Beachtung der Bedeutung des eingeführten Lastverhältnisses mit $\frac{P_1}{P_2} = \frac{m}{1-m}$ ist der Einflußfaktor, der der Last P_2 zugeordnet ist,

$$(14) \quad \mu_2 = \frac{\mu_1 - m}{1 - m}$$

In Bild 6 sind die Beiwerte μ_2 für $\psi = 0,5$ und $m = 0,0, 0,2, 0,4, 0,6$ und $0,8$ als Parameter über c aufgetragen worden.

Der Verlauf der Kurven zeigt deutlich, daß man der praktischen Rechnung das Überlagerungsprinzip mittels der Kurventafel nach Bild 4 bzw. Gl. (10) genau genug zugrunde legen kann. Die so begangenen

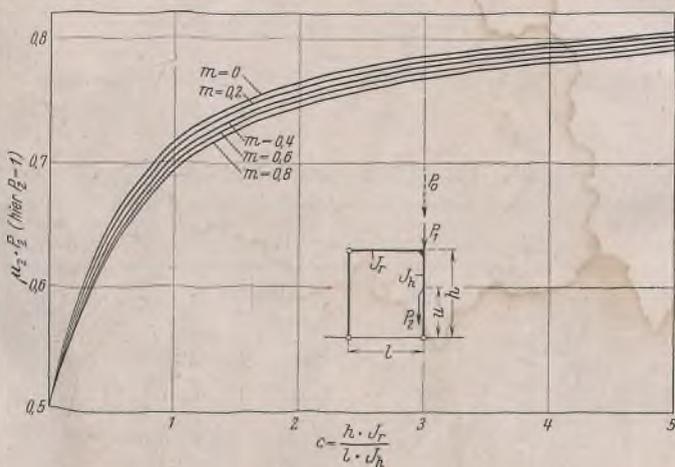


Bild 6. Dreigelenrechteckrahmen. Beiwerte μ_2 der am Rahmenstiel bei $\psi = 0,5$ angreifenden Kräfte ($P_0 = P_1 + \mu_2 \cdot P_2$).

Fehler sind gering und liegen immerhin auf der sicheren Seite, so daß die erhebliche Vereinfachung der praktischen Rechnung die Anwendung des Überlagerungsprinzips gerechtfertigt erscheinen läßt.

B. Das Trägheitsmoment des Riegels ist veränderlich.

Die Berücksichtigung veränderlicher Trägheitsmomente des Riegels bereitet keine Schwierigkeiten, wenn beachtet wird, daß in obigen Entwicklungen jeweils für den Knotendrehwinkel τ die Beziehung

$$E \tau = \frac{l}{3 J_r}$$

bestand, die durch die Momentenfläche mit dem Eckmoment $M_b = 1$ gemäß Bild 3 und 5 zu deuten ist.

Bei veränderlichem Trägheitsmoment ist also nur der Mittelwert J_r zu errechnen, der $J_r = \frac{l}{3 E \tau}$ und der Momentenfläche des Riegels mit dem Moment $M_b = 1$ über der Ecke entspricht.

1. Die Trägheitsmomente des Riegels lassen sich durch eine Gerade angleichen.

Sind die Trägheitsmomente J_x , wie Bild 7 zeigt, linear veränderlich, dann ist der E -fache Knotendrehwinkel τ bei b mit den Größen dieses Bildes, wenn $J_x = J \left(1 + \frac{n-1}{l} \cdot x \right)$ die Trägheitsmomente wiedergibt:

$$E \tau = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{x^2}{J_x} \cdot dx = \frac{1}{l^2 J} \int_0^l \frac{x^2}{\left(1 + \frac{n-1}{l} \cdot x \right)} \cdot dx$$

$$E \tau = \frac{l}{(n-1)^3 J} \left[\frac{(n-1)^2}{2} - (n-1) + \ln(n) \right]$$

Demnach kann man für den Mittelwert J_r der Trägheitsmomente

$$(15) \quad J_r = \frac{J(n-1)^3}{3 \left[\frac{(n-1)^2}{2} - (n-1) + \ln(n) \right]}$$

schreiben.

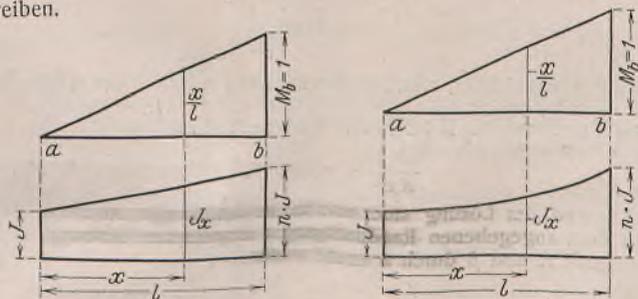


Bild 7.

Bild 8.

2. Die Trägheitsmomente lassen sich durch eine Halbparabel angleichen.

Sind die Trägheitsmomente J_x des Riegels nach Bild 8 durch die Halbparabel 2. Ordnung

$$J_x = \frac{J}{1 + \frac{1-n}{n} \cdot \frac{x^2}{l^2}}$$

erfaßbar und ist so der E -fache Knotendrehwinkel τ bei b , wenn die Momentenfläche des Riegels gemäß Bild 8 in Rechnung gestellt wird,

$$E \tau = \frac{1}{l^2} \int_0^l \frac{x^2}{J_x} \cdot dx$$

$$E \tau = \frac{1}{l^2 J} \int_0^l \left(1 + \frac{1-n}{n} \cdot \frac{x^2}{l^2} \right) dx$$

$$E \tau = \frac{l}{15 J} \left[5 + \frac{3(1-n)}{n} \right]$$

dann kann der Mittelwert J_r der Trägheitsmomente aus der einfachen Gleichung

$$(16) \quad J_r = J \cdot \frac{5n}{2n+3}$$

ermittelt werden.

3. Die Trägheitsmomente sind sprungweise veränderlich.

Der Vollständigkeit halber soll noch der Mittelwert angegeben werden, wenn die Trägheitsmomente nach Bild 9 sprungweise veränderlich sind. Die einfache

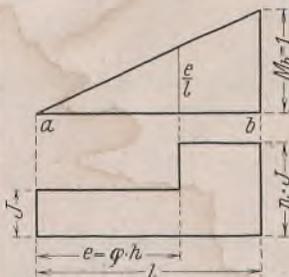


Bild 9.

Zwischenrechnung soll hier jedoch nicht eingefügt werden. Setzt man $\varphi = \frac{e}{h}$, dann lautet:

$$(17) \quad J_r = \frac{nJ}{1 + \varphi(n-1)}$$

Es macht keine Mühe, den Mittelwert J_r bei mehrfach abgestuften Trägheitsmomenten zu erfassen. Bei unregelmäßigen Trägheitsmomenten kann man den Mittelwert notfalls graphisch erfassen.

C. Die Trägheitsmomente des Stieles sind veränderlich.

1. Die Last greift an der Rahmenecke an.

a) Die Trägheitsmomente sind sprungweise veränderlich.

Bei Rahmenstielen aus Profilstählen kann man manchmal nicht umhin, den oberen Teil des Stieles wirtschaftlicher Bemessung halber durch Lamellen zu verstärken. Die Trägheitsmomente ändern sich dann, wie Bild 10 zeigt, sprungweise.

Die Ermittlung der die Stabilitätsgrenze kennzeichnenden Gleichung erfolgt wiederum durch Lösung der für die beiden Stielbereiche I und II verschiedenen vereinfachten Differentialgleichungen der elastischen Linie.

Mit den Abmessungen und Querschnittswerten von Bild 10 ist der Stielbereich I gemäß Gl. (5) durch

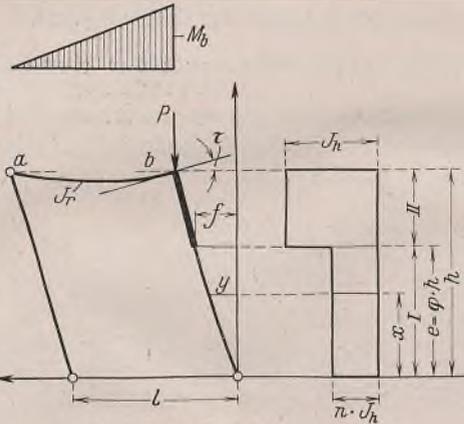


Bild 10.

$$(18) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha f}{\sqrt{n} \cdot \text{tg} \frac{\alpha e}{\sqrt{n}}}$$

bei $x = e$ gekennzeichnet, wenn wiederum $\alpha^2 = \frac{P}{EJ_h}$. Die Differentialgleichung des Bereiches II ist mit obigen Bezeichnungen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0.$$

Die Konstanten der Lösung sind nach den Ausführungen unter A 3 und den dort angegebenen Randbedingungen entsprechenden Rechnung, wenn u durch h und β durch α ersetzt werden,

$$K_1 = - \frac{f(\alpha \cdot \cos \alpha h + \frac{3J_r}{lJ_h} \cdot \sin \alpha h)}{\alpha \cdot \sin \alpha(h-e) - \frac{3J_r}{lJ_h} \cdot \cos \alpha(h-e)}$$

$$K_2 = \frac{f(\alpha \cdot \sin \alpha h - \frac{3J_r}{lJ_h} \cdot \cos \alpha h)}{\alpha \cdot \sin \alpha(h-e) - \frac{3J_r}{lJ_h} \cdot \cos \alpha(h-e)}$$

Nach Einsetzen dieser Festwerte und zweckmäßiger Umformung ist

$$(19) \quad \frac{dy}{dx} = -\alpha f \cdot \frac{\alpha + \frac{3J_r}{lJ_h} \cdot \text{tg} \alpha(h-e)}{\alpha \cdot \text{tg} \alpha(h-e) - \frac{3J_r}{lJ_h}}$$

bei $x = e$. Die Verbindung der Gl. (18) u. (19) liefert, wenn noch $\varphi = \frac{e}{h}$ und $z_3 = \alpha h$ abgekürzt wird, die Knickbedingung

$$(20) \quad \frac{z_3 \left[\sqrt{n} \cdot \text{tg} \frac{\varphi z_3}{\sqrt{n}} + \text{tg}(1-\varphi) z_3 \right]}{1 - \sqrt{n} \cdot \text{tg} \frac{\varphi z_3}{\sqrt{n}} \cdot \text{tg}(1-\varphi) z_3} = 3c,$$

worin der Rahmensteifigkeitswert wiederum c ist.

Wird die Grenzkraft wieder auf die unter A 1 errechnete Knicklänge bezogen, dann ist diese

$$(21) \quad P_k = \frac{n E J_h \pi^2}{(\gamma h)^2}$$

mit

$$n = \frac{z_3^2}{z^2}$$

Bei stufenförmigem Verlauf der Trägheitsmomente ist also nur das mittlere Trägheitsmoment nJ_h zu bestimmen. Die Berechnung kann im übrigen in der bekannten Weise erfolgen.

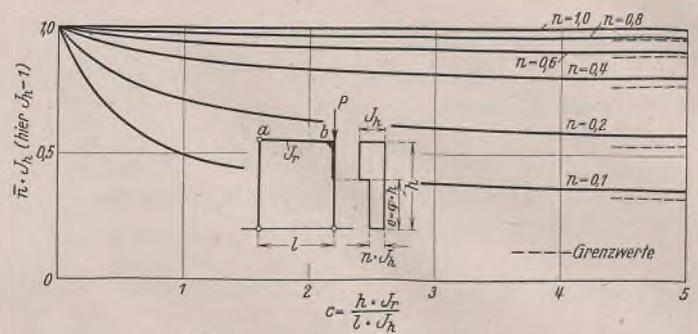


Bild 11. Dreigelenrechteckrahmen, Trägheitsmomente nJ_h bei $\varphi = 0,5$ und γ nach Bild 2.

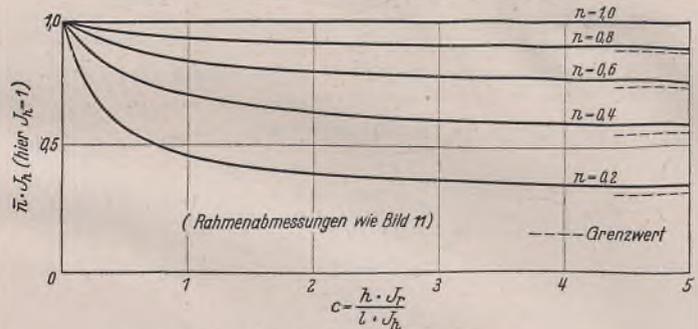


Bild 12. Dreigelenrechteckrahmen, Trägheitsmomente nJ_h bei $\varphi = 0,75$ und γ nach Bild 2.

In Bild 11 und 12 sind die Trägheitsmomentenbeiwerte n für $\varphi = 0,5$ und $0,75$ bei verschiedenen Stufenverhältnissen n als $f(c)$ dargestellt worden. Die angegebenen asymptotischen Grenzwerte $n_{c=\infty}$ sind nochmal in Bild 13 und Tabelle 1

zusammengefaßt worden. Sie ergeben sich, wie leicht einzusehen ist, mittels der jeweils kleinsten, von Null verschiedenen Lösung $z_{3c=\infty}$ der Gleichung für den einseitig eingespannten, am anderen Ende frei beweglichen Stiel

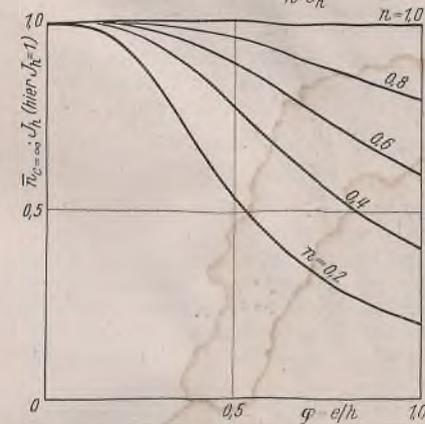
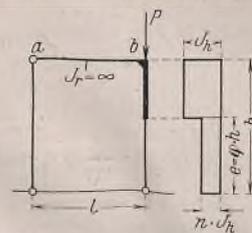


Bild 13. Trägheitsmomente $n_{c=\infty} \cdot J_h$ bei $J_r = \infty$ und $\gamma = 2$. genau genug ermitteln.

$$(22) \quad \text{tg} \frac{\varphi z_3}{\sqrt{n}} \cdot \text{tg}(1-\varphi) z_3 = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\text{zu } n_{c=\infty} = \frac{z_{3c=\infty}^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

Im Bereiche praktischer Rahmensteifigkeiten c und Stielträgheitsmomentenverhältnisse n lassen sich die Trägheitsmomentenbeiwerte \bar{n} mittels der $n_{c=\infty}$ aus der Faustformel

$$(23) \quad \bar{n} = \frac{c + 0,70}{n_{c=\infty} + 0,70}$$

Tabelle 1. Trägheitsmomentenbeiwerte $n_{c=\infty}$.

φ	$n = 0,2$	$n = 0,4$	$n = 0,6$	$n = 0,8$	$n = 1,0$
0,0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
0,1	0,9926	0,9976	0,9989	0,9996	1,0000
0,2	0,9543	0,9802	0,9913	0,9984	1,0000
0,3	0,8305	0,9358	0,9716	0,9894	1,0000
0,4	0,6782	0,8623	0,9366	0,9759	1,0000
0,5	0,5375	0,7700	0,8876	0,9560	1,0000
0,6	0,4277	0,6765	0,8293	0,9297	1,0000
0,7	0,3451	0,5903	0,7676	0,9009	1,0000
0,8	0,2832	0,5155	0,7071	0,8664	1,0000
0,9	0,2363	0,4526	0,6508	0,8328	1,0000
1,0	0,2000	0,4000	0,6000	0,8000	1,0000

Zur Erleichterung des Auffindens der Lösung der Gl. (22), die durch Probieren zu erhalten ist, sind in Bild 14 noch die $z_{3c=\infty}$ über φ für verschiedene Trägheitsmomentenverhältnisse n aufgetragen worden.

Der Faustformel (23) für den nach Bild 10 belasteten und ausgebildeten Dreigelenrechteckrahmen entspricht die Faustformel

$$(24) \quad \bar{n} = \frac{c + 0,35}{\frac{c}{n_{c=\infty}} + 0,35}$$

für den gemäß Bild 4a symmetrisch nur durch P_0 belasteten Zweigelenrechteckrahmen bei entsprechenden Bedingungen praktischer Rahmensteifigkeiten und Stufenverhältnisse der Stielträgheitsmomente, wobei zu berücksichtigen ist, daß beide Rahmenstiele gemäß Bild 10 gleich ausgebildet sind.

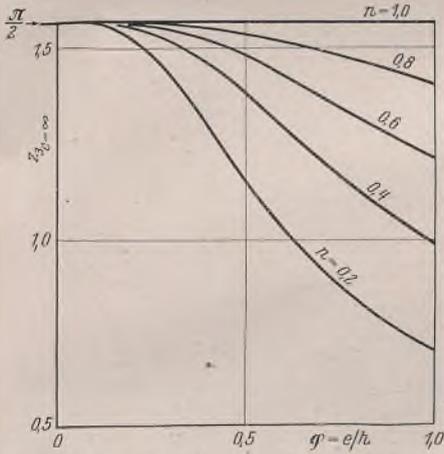


Bild 14. Die Werte $z_{3c=\infty}$ bei $J_r = \infty$.

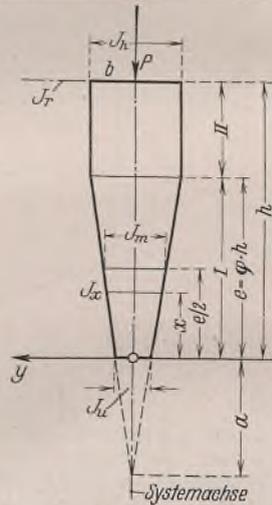


Bild 15.

Die Differentialgleichung der Biegelinie lautet im Stielabschnitt I mit veränderlichem Trägheitsmoment J_x mit den bekannten Vereinfachungen, wenn wiederum die x -Achse gleichzeitig Symmetrieachse des Stieles ist,

$$(28) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{P y}{E J_h} \left(\frac{a+e}{a+x} \right)^\lambda = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist für $\lambda=2$ und $\lambda=4$, wie schon Lommel⁴⁾ nachgewiesen hat, mittels Elementarfunktionen möglich. Bei $\lambda=1$ und $\lambda=3$ ist die Differentialgleichung (28) in eine Besselsche Differentialgleichung umzuformen, wie Lommel⁴⁾ erstmalig gezeigt hat, deren Lösung dann durch Besselsche oder Zylinderfunktionen zu erzielen ist.

α) Der Exponent des Trägheitsmomentengesetzes (25) ist $\lambda=2$.

Der durch $\lambda=2$ gegebene Verlauf der Trägheitsmomente im Stielabschnitt e hat für den Stahlbau das größte Interesse. Der Verlauf entspricht einem Stab mit linear veränderlicher Höhe, konstanten Gurten

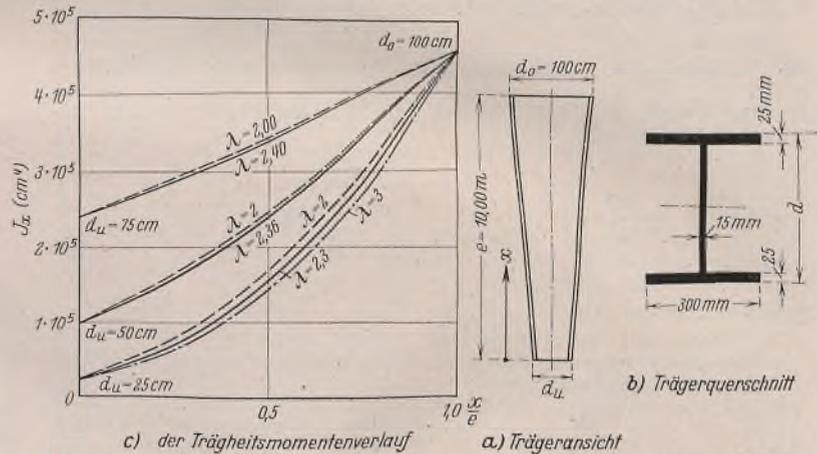


Bild 16. Trägheitsmomente des Stabes mit linear veränderlicher Höhe.

b) Die Trägheitsmomente sind stetig veränderlich.

Sehr oft wird man die Rahmenstiele, sei es aus Gründen der Materialersparnis, der Architektur oder solchen der Raumausnutzung, mit in der Rahmenebene veränderlichen Querschnittshöhen ausbilden. Stiele mit ausschließlich linear veränderlicher Querschnittshöhe kommen zwar zumeist vor, aber auch entsprechend Bild 15 ausgebildete Stiele haben im Industriebau zur Wahrung des freien Kranbahndurchgangsprofils ihre Berechtigung.

Die Trägheitsmomente haben nach Bild 15 im Stielabschnitt II den konstanten Wert J_h , der im Abschnitt I nach dem Gesetz

$$(25) \quad J_x = J_h \left(\frac{a+x}{a+e} \right)^\lambda$$

auf den minimalen Wert J_u am Fußgelenk abfällt.

Wie leicht nachzuweisen ist, verschwindet das Trägheitsmoment bei $x=-a$, wo nach Einführung des minimalen Trägheitsmoments J_u und

des Verhältnisses $n = \frac{J_u}{J_h}$ der Nullpunkt mit

$$(26) \quad a = e \cdot \frac{\sqrt[\lambda]{n}}{1 - \sqrt[\lambda]{n}}$$

festgelegt ist.

Hat der Exponent λ in Gl. (25) u. (26) einen gebrochenen Wert, dann läßt sich dieser aus der Gleichung

$$(27) \quad 2 \sqrt[\lambda]{n'} - \sqrt[\lambda]{n} = 1$$

durch Probieren näherungsweise errechnen. In Gl. (27) ist $n' = \frac{J_m}{J_h}$,

wo J_m das Trägheitsmoment in $x = \frac{e}{2}$ ist.

Zur Veranschaulichung wurden in Bild 16 für den dort skizzierten Träger mit I-Querschnitten linear veränderlicher Höhe die Trägheitsmomente für verschiedene λ und Trägerneigungen vergleichsweise angegeben. Für den tatsächlichen Verlauf der Trägheitsmomente wurde der Exponent λ jeweils aus Gl. (27) ermittelt.

Der Nachweis der Knickkräfte bzw. der Trägheitsmomentenbeiwerte kann auf die Zahlen $\lambda=2$ und $\lambda=3$ beschränkt werden, da mit diesen Zahlen einmal die meisten in der Konstruktionspraxis vorkommenden Fälle erfaßt werden und andererseits im folgenden gezeigt wird, daß sich die Trägheitsmomentenbeiwerte für veränderliche Rahmensteifigkeiten c wiederum mittels Näherungsformeln und der für den starren Rahmenriegel schon bekannten Abminderungsbeiwerte der Stielträgheitsmomente, die wir wieder mit $n_{c=\infty}$ bezeichnen wollen, erfassen lassen.

Der Fall $\lambda=0$ wurde unter A 1 behandelt. Für gebrochene Exponenten λ können die für die Rechnung erforderlichen Trägheitsmomentenbeiwerte durch Interpolation ermittelt werden.

und vernachlässigbaren Trägheitsmomenten der Gurte und des oder der Stege.

Wenn auch solche Stäbe, wie schon Bild 16 zeigt, praktisch nie vorkommen, so wollen wir der erforderlichen Interpolation wegen doch für $\lambda=2$ die Abminderungsbeiwerte ermitteln, da es praktisch unmöglich ist, für die Vielzahl der möglichen gebrochenen Exponenten λ diese Beiwerte zu ermitteln.

Für den Stielabschnitt I geht die Differentialgleichung (28) mit $\lambda=2$ in

$$(29) \quad (a+x)^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + \beta^2 y = 0$$

über, worin zur Abkürzung

$$(30) \quad \beta^2 = \frac{P(a+e)^2}{E J_h}$$

gesetzt wurde.

Die periodische Lösung von (29), die für die Beziehungen, die hier nachgewiesen werden sollen, durchaus genügt, ergibt sich zu

$$(31) \quad y = \sqrt{a+x} \left[A \cdot \sin \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) + B \cdot \cos \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) \right],$$

wenn

$$(32) \quad k = \sqrt{4\beta^2 - 1} \quad \text{ist.}$$

Für die Ermittlung der Konstanten A und B benötigen wir noch die erste Ableitung von (31) und schreiben gleichzeitig zum Nachweis der Richtigkeit des Lösungsansatzes die zweite Ableitung an,

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{a+x}} \left\{ A \left[\sin \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) - k \cdot \cos \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + B \left[\cos \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) - k \cdot \sin \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) \right] \right\} \end{aligned} \right.$$

und

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{k^2 + 1}{4\sqrt{(a+x)^3}} \left[A \cdot \sin \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) + B \cdot \cos \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+x} \right) \right].$$

Wie man sofort sieht, erfüllt Gl. (31) Gl. (29). Die Konstanten sind durch die Grenzbedingungen $x=0, y=0$ und $x=e, y=f$ über

$$0 = A \cdot \sin \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a} \right) + B \cdot \cos \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a} \right)$$

$$\text{und} \quad \frac{f}{\sqrt{a+e}} = A \cdot \sin \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+e} \right) + B \cdot \cos \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a+e} \right)$$

⁴⁾ E. Lommel, Studien über die Besselschen Funktionen. Leipzig 1868.

festgelegt zu

$$A = - \frac{f \cdot \cos\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a}\right)}{\sqrt{a+e} \cdot \sin\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{a+e}{a}\right)}$$

$$B = \frac{f \cdot \sin\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{a}\right)}{\sqrt{a+e} \cdot \sin\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{a+e}{a}\right)}$$

Mit diesen Werten ergibt sich für $x=e$ aus Gl. (33) nach entsprechender Umformung und Vereinfachung

$$(34) \quad \frac{dy}{dx(x=e)} = \frac{f}{2(a+e)} \cdot \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{a+e}{a}\right) + k}{\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{a+e}{a}\right)}$$

die Bedingung, die der Stielabschnitt I für die Stetigkeit der Biegelinie stellt.

Die entsprechende Bedingung des Stielbereiches II ist dem Abschnitt C 1a zufolge

$$(19) \quad \frac{dy}{dx(x=e)} = -\alpha f \cdot \frac{\alpha + \frac{3J_r}{lJ_h} \cdot \operatorname{tg} \alpha (h-e)}{\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha (h-e) - \frac{3J_r}{lJ_h}}$$

worin wiederum $\alpha^2 = \frac{P}{EJ_h}$ ist.

Die Forderung, daß Gl. (19) u. (34) gleich sind, ergibt nach Umformung und Einführung von

$$(35) \quad \alpha = \frac{\sqrt{k^2+1}}{2(a+e)} \quad c = \frac{hJ_r}{lJ_h} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{e}{h}$$

die Gleichung der Knickbedingung zu

$$(36) \quad \frac{(1-\sqrt{n})\sqrt{k^2+1} \left\{ \sqrt{k^2+1} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{(1-\varphi)(1-\sqrt{n})\sqrt{k^2+1}}{2\varphi}\right) \left[\operatorname{tg}\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}}\right) + k \right] \right\}}{2\varphi \left\{ k - \operatorname{tg}\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left[\sqrt{k^2+1} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{(1-\varphi)(1-\sqrt{n})\sqrt{k^2+1}}{2\varphi}\right) - 1 \right] \right\}} = 3c$$

Diese transzendente Gleichung wurde wiederum in der Form $c=f(k)$ angeschrieben, da es praktisch unmöglich ist, die Unbekannte k nach gegebenem c zu ermitteln. Auf Vereinfachungen, die durch die Einführung des Cotangens möglich sind, wurde verzichtet, da das für die numerischen Ermittlungen zur Verfügung stehende Tabellenwerk⁵⁾ nur den Tangens mit den natürlichen Zahlen als Argument führt, so daß die jeweilige Ermittlung des Cotangens die Vereinfachung wieder hinfällig macht.

Die maßgebende Lösung k der Gl. (36), das ist der kleinste von Null verschiedene Wert $k \geq 0$, liefert mit und nach Einführung von φ aus (35) die Knickbedingung

$$P_k = \frac{k^2+1}{4} \cdot \frac{EJ_h(1-\sqrt{n})^2}{h^2\varphi^2}$$

Wird wiederum die unter A 1 errechnete Knicklänge γh eingeführt, dann geht diese Gleichung wieder in

$$(21) \quad P_k = \frac{\bar{n} EJ_h \pi^2}{(\gamma h)^2}$$

mit dem Abminderungsbeiwert \bar{n} des maximalen Trägheitsmoments J_h

$$(37) \quad \bar{n} = \frac{(k^2+1)(1-\sqrt{n})^2}{4\varphi^2\pi^2}$$

über. Diese Beiwerte \bar{n} müssen einfachen Überlegungen zufolge ähnlich verlaufen, wie die in Bild 11 und 12 dargestellten Beiwerte für konstante, abgestufte Stielträgheitsmomente. Bei $c=0$ wird wiederum $\bar{n}=1$, während die Asymptoten $n_{c=\infty}$ sich für $c=\infty$ mittels k aus der Gleichung

$$(38) \quad \operatorname{tg}\left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \left[\sqrt{k^2+1} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{(1-\varphi)(1-\sqrt{n})\sqrt{k^2+1}}{2\varphi}\right) - 1 \right] = k$$

zu

$$(39) \quad \bar{n}_{c=\infty} = \frac{(k^2+1)(1-\sqrt{n})^2}{\varphi^2\pi^2} \quad \text{ergeben.}$$

Gl. (38) ergibt sich aus der Tatsache, daß bei $c=\infty$ der Nenner von Gl. (36) zu Null wird.

Der Gl. (38) entsprechende Formeln wurden von Tölke⁶⁾ angegeben, die aus der aperiodischen Lösung von Gl. (29) ermittelt wurden. Da

⁵⁾ Keiichi Hayashi, Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen. Berlin 1938.

⁶⁾ F. Tölke, Über die Bemessung von Druckstäben mit veränderlichem Querschnitt. Bauing. 1929, S. 500.

Gl. (36) u. (38) jedoch durch alle praktisch vorkommenden Parameter n und φ befriedigt werden, wie nachstehend gezeigt werden soll, genügt der Lösungsansatz (31) durchaus.

Zu diesem Zwecke vergegenwärtige man sich, daß Gl. (38) nur zu Null wird, wenn deren Lösung $k=0$ ist. Dieser Grenzwert $k=0$ gibt uns aber den Periodenwechsel an, für den wir nach kurzer Umformung für die Parameter

$$(40) \quad \varphi = \frac{1}{1 + \frac{2}{1-\sqrt{n}} \cdot \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{2}{\ln \frac{1}{\sqrt{n}}}\right)}$$

erhalten.

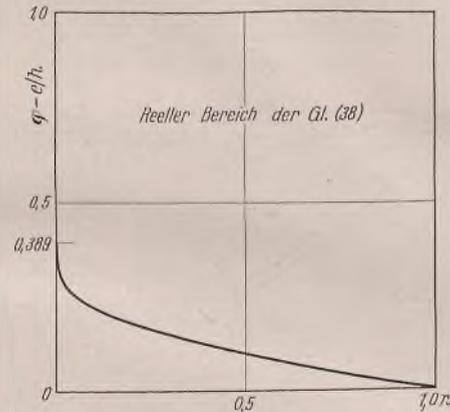
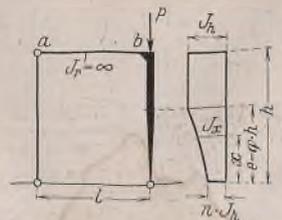


Bild 17.

In Bild 17 wurde φ über n dargestellt. Die praktisch wichtigen Werte von φ und n befriedigen also Gl. (38). Wird nunmehr noch beachtet, daß die Lösungen k der Gl. (36) zwischen $k=0$ bei $c=0$ und $k=k_{c=\infty}$ bei $c=\infty$ liegen und positiv sind, dann erkennt man sofort, daß Gl. (40) und Bild 17 auch zugleich Grenzkriterien der Gl. (36) sind.



Da die in Abb. 14 der angeführten Arbeit⁶⁾ aufgestellten Beiwerte $\bar{n}_{c=\infty}$, die dort mit u bezeichnet sind, mit dem Parameter $k_1 = \frac{b_0}{b_m}$,

wo b_0 und b_m die Grenzwerte der Abstände der Gurtschwerpunkte des Stieles sind, in Abhängigkeit von $\frac{\varphi}{2}$ wiedergegeben sind, sollen dieselben zur Vereinfachung der numerischen Rechnung nochmals in Bild 18 und Tabelle 2 mit dem Parameter $n = \frac{J_u}{J_h}$ von φ abhängig zusammengefaßt werden⁷⁾.

In Bild 19 und 20 wurden außerdem die Trägheitsmomentenbeiwerte \bar{n} für $\varphi=0,5$ und $\varphi=1,0$ und $n=0,05; 0,1; 0,2$ usw. als Funktion des Rahmensteifigkeitswertes c aufgezeichnet.

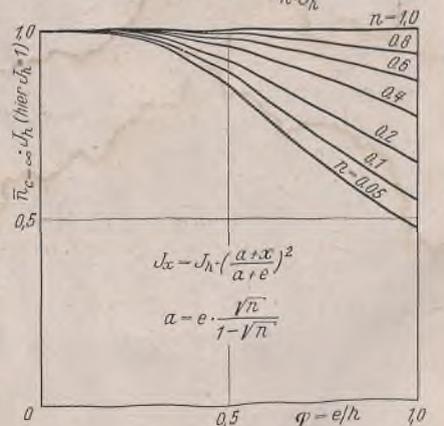


Bild 18. Trägheitsmomente

$\bar{n}_{c=\infty} \cdot J_h$ bei $J_r = \infty$, $\lambda = 2$ und $\gamma = 2$, aufgezeichnet.

Tabelle 2. Trägheitsmomentenbeiwerte $\bar{n}_{c=\infty}$ ($\lambda = 2$).

$\varphi \backslash n$	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,990	0,992	0,994	0,997	0,998	0,999	1,000
0,4	0,918	0,937	0,956	0,976	0,987	0,995	1,000
0,5	0,851	0,885	0,920	0,955	0,975	0,989	1,000
0,6	0,770	0,819	0,872	0,927	0,960	0,982	1,000
0,8	0,605	0,676	0,759	0,853	0,915	0,962	1,000
1,0	0,471	0,547	0,647	0,771	0,862	0,936	1,000

⁷⁾ Vgl. Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, 4. Bd., 1. Hälfte, S. 103, und E. Chwalla, Erläuterungen zum Normblattentwurf DIN E 4114.

Diese Bilder bestätigen die Erwartung, daß diese Beiwerte n , von $n=1$ bei $c=0$ ausgehend, sich wiederum den Werten $n_{c=\infty}$ asymptotisch nähern.

Um die Beiwerte n der numerischen Rechnung nutzbar zu machen (die Lösung der Gl. (36) für gegebene Stabwerte bereitet derartige Schwierigkeiten, daß der erforderliche Rechenaufwand als nicht mehr erträglich zu bezeichnen ist, zumal sie einige Gewandtheit erfordert), sollen dieselben wiederum durch eine Näherungsformel erfaßt werden. Das bereitet indes keine Schwierigkeit, denn mittels Faustformel (23), die hier nochmal angeschrieben werden soll,

$$(23) \quad \bar{n} \approx \frac{c + 0,70}{\frac{c}{n_{c=\infty}} + 0,70}$$

lassen sich die Beiwerte hinreichend genau errechnen.

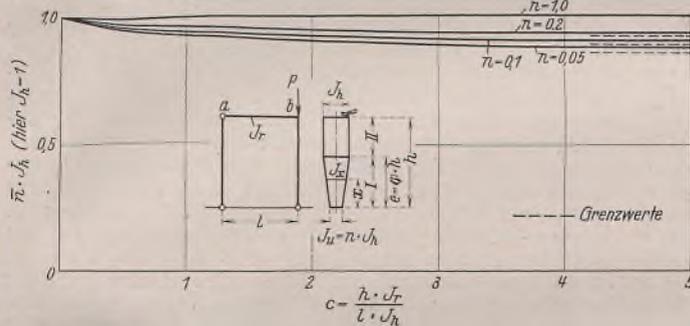


Bild 19. Dreigelenrechteckrahmen.

Trägheitsmomente $n J_h$ bei $\varphi = 0,5$, $\lambda = 2$ und γ nach Bild 2.

Wie Bild 19, in das zu den genauen Beiwerten die aus der Näherungsgleichung errechneten Werte zum Vergleich eingetragen wurden, darlegt, sind die Abweichungen nur bei kleiner Abszisse etwas größer. Trotzdem erscheint die Anwendung von Gl. (23) unbedenklich, da in diesem Bereich, wo die Knicklänge γh ohnehin mit c stark veränderlich ist, die Erhöhung der Sicherheit durch die Anwendung der Näherungswerte nur wünschenswert sein kann. Zur Vervollständigung sollen noch die Formeln, die sich mit $\varphi = 1$ ergeben, aufgeführt werden.

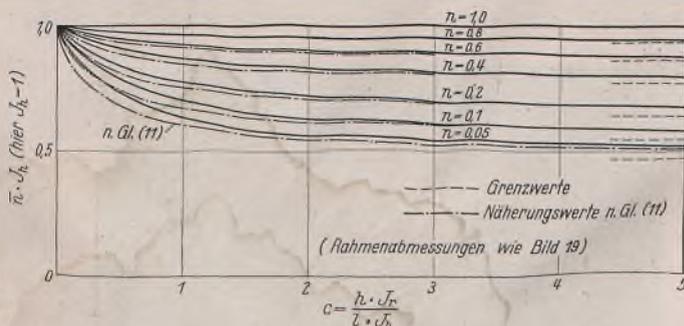


Bild 20. Dreigelenrechteckrahmen.

Trägheitsmomente $n J_h$ bei $\varphi = 1,0$, $\lambda = 2$ und γ nach Bild 2.

Es wird die Knickbedingung

$$(41) \quad \frac{(1 - \sqrt{n})(k^2 + 1) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}} \right)}{2 \left[k + \operatorname{tg} \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right]} = 3c$$

und die Beiwerte

$$(42) \quad \bar{n} = \frac{(k^2 + 1)(1 - \sqrt{n})^2}{4z^2}$$

Für $c = \infty$ geht dann die Bedingungsgleichung (41) in

$$(43) \quad \operatorname{tg} \left(\frac{k}{2} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = -k$$

über. Diese Formel stimmt mit der von Bleich⁵⁾ angegebenen überein, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Bedeutung der gewählten Bezeichnungen entsprechend berücksichtigt. Der Beiwert ist

$$(44) \quad n_{c=\infty} = \frac{(k^2 + 1)(1 - \sqrt{n})^2}{\pi^2}$$

Es erübrigt sich weiter darauf einzugehen, daß die Beiwerte auch der von Bleich stammenden Näherungsformel

$$(45) \quad \bar{n}_{c=\infty} = 0,34 + 0,66 \sqrt{n},$$

⁵⁾ F. Bleich, Stahlhochbauten, Bd. I., S. 168. Berlin 1932.

die in DIN 1050 niedergelegt ist, entnommen werden können, wenn nur $n \geq 0,2$ ist.

Die Beziehungen, die hier für den Dreigelenrechteckrahmen entwickelt wurden, lassen sich auf den symmetrisch ausgebildeten Zweigelenrechteckrahmen, der in jedem Rahmeneckpunkt mit P belastet ist, ohne weiteres übertragen. Man muß sich nur vergegenwärtigen, daß beim antisymmetrischen Knicken des Zweigelenrahmens die Rieglmomentenfläche antisymmetrisch verschränkt ist und daher der Koeffizient des Rahmensteifigkeitswertes c jeweils 6 statt 3 für den Dreigelenrechteckrahmen ist.

Dementsprechend geht die Faustformel (23) des Dreigelenrechteckrahmens auch bei dieser Art der Stielausbildung in die Näherungsformel (24) für den Zweigelenrechteckrahmen über. Die Grenzwerte sind bei beiden Rahmen gleich.

β) Der Exponent des Trägheitsmomentengesetzes (25) ist $\lambda = 3$.

Gl. (25) gibt mit $\lambda = 3$ die Trägheitsmomente rechteckiger Querschnitte mit linear veränderlicher Querschnittshöhe, wie sie insbesondere im Eisenbetonbau zur Anwendung gelangen, wieder. Da wir jedoch eingangs gesehen haben, daß die Trägheitsmomente der I- oder ähnlicher Querschnitte mit linear veränderlicher Höhe durch $\lambda = 2$ nicht exakt erfaßt werden, da für diese der Exponent wegen der Eigentragheitsmomente der Gurte und Stege $2 < \lambda < 3$ ist, benötigen wir die Ergebnisse n bzw. $n_{c=\infty}$ aus $\lambda = 3$ zur Interpolation von n und $n_{c=\infty}$ für gebrochene Werte von λ .

Die Anwendungsmöglichkeit der im Abschnitt C 1 a gefundenen Faustformel (23) beim Trägheitsmomentenverlauf des Stieles nach Gl. (25) mit $\lambda = 2$ läßt die Schlußfolgerung aufkommen, daß diese Faustformel auch für $\lambda = 3$ ihre durchaus genügende Berechtigung hat.

Da die erforderlichen $n_{c=\infty}$ -Werte bekannt sind⁷⁾, wäre jede weitere Untersuchung überflüssig. Dessen ungeachtet sollen in einer folgenden Arbeit für $\lambda = 3$ die entsprechenden Beziehungen nachgewiesen werden. In dieser Arbeit sollen dann auch noch die Einflüsse der an den Rahmenstielen mit veränderlichen Trägheitsmomenten in verschiedenen Höhen angreifenden Lasten untersucht werden.

Beispiel 1 a.

Der in Bild 21 skizzierte Rahmen soll zur weiteren Erläuterung untersucht werden. Diese Untersuchung wird hier auf die Ermittlung der

Knickfestigkeit bzw. der Knicklast beschränkt. Örtliche Deformierungen durch Ausbeulen usw., die hier nicht verfolgt werden, sind natürlich zu beachten. Die Abmessungen des mittleren Rahmenstiels entsprechen bis auf die Stielhöhe, die hier mit $h = 15,00 \text{ m}$ gewählt wurde, denen des in Bild 16 skizzierten Trägers mit $d_u = 25 \text{ cm}$.

Es sind die angenommenen Abmessungen und Querschnitte des Riegels: $l = 10,00 \text{ m}$,
IP 100 mit $J_r = 644 700 \text{ cm}^4$,
des Stieles: $h = 15,00 \text{ m}$,
 $J_h = 463 700 \text{ cm}^4$, $F_h = 292,5 \text{ cm}^2$,
 $J_u = 20 060 \text{ cm}^4$.

Mit diesen Daten ist
 $n = \frac{20 060}{463 700} = 0,0432$

und der Rahmensteifigkeitswert

$$c = \frac{15,00 \cdot 644 700}{10,00 \cdot 463 700} = 2,08.$$

Aus der Näherungsgleichung (4) ergibt sich mit

$$\gamma \approx 2 \sqrt{1 + \frac{0,70}{2,08}} \approx 2,34$$

die Knicklänge zu $s_k \approx \gamma h \approx 2,34 \cdot 15,00 \approx 35,10 \text{ m}$. Durch Interpolation erhalten wir $n_{c=\infty} = 0,45$.

Mithin ist nun nach (11)

$$\bar{n} \approx \frac{2,08 + 0,70}{\frac{2,08}{0,45} + 0,70} \approx 0,523$$

die Knickkraft

$$P_k = \frac{0,523 \cdot 21 000 000 \cdot 0,004 637 \pi^2}{35,10^2}$$

$$P_k = 406 \text{ t},$$

wenn noch berücksichtigt wird, daß mittels

$$i = \sqrt{\frac{0,523 \cdot 463 700}{292,5}} = 28,8 \text{ cm}$$

der Schlankheitsgrad

$$\lambda = \frac{3510}{28,8} = 122$$

das elastische Knicken anzeigt.

Beispiel I b.

Ist die untere Querschnittshöhe des Rahmenstieles mit $d_u = 50$ cm bemessen, dann wird, wenn alle anderen Abmessungen beibehalten werden,

$$P_k = \text{rd. } 548 \text{ t bei } \lambda = \text{rd. } 105.$$

Die Beispiele I a und I b zeigen deutlich, in welchem erheblichem Maße die Knickkraft bei nur geringer Materialersparnis absinkt. Dieser Umstand ist bei der Bemessung von Stahlbauten wohl zu beachten.

Beispiel II a.

Der Rahmenstiel im Beispiel I nach Bild 21 bestehe aus einem durchgehenden Profil IP 60 und sei im oberen Teil von $\varphi = 0,8$ bis $\varphi = 1,0$ durch zwei auf die Flansche aufgeschweißte $320 \cdot 20$ verstärkt. Alle übrigen Daten werden beibehalten. Somit ist für den Stiel

$$J_h = 303\,900 \text{ cm}^4, F_h = 291 \text{ cm}^2, J_u = 180\,800 \text{ cm}^4$$

$$n = \frac{J_u}{J_h} = \frac{180\,800}{303\,900} = 0,596 \text{ und } \varphi = 0,8.$$

Es ist nunmehr mit

$$c = \frac{15,00 \cdot 644\,700}{10,00 \cdot 303\,900} = 3,17$$

$$\gamma \approx 2 \sqrt{1 + \frac{0,70}{3,17}} \approx 2,21$$

$$s_k = 2,21 \cdot 15,00 = 33,20 \text{ m.}$$

Nach Bild 13 ist $n_{c=\infty} = 0,70$ und somit

$$\bar{n} \approx \frac{3,17 + 0,70}{\frac{3,17}{0,70} + 0,70} \approx 0,74$$

$$P_k = \frac{0,74 \cdot 21\,000\,000 \cdot 0,002\,245 \pi^2}{33,20^2} = 420 \text{ t}$$

$$i = \sqrt{\frac{0,74 \cdot 303\,900}{291}} = 27,8 \text{ cm}$$

$$\lambda = \frac{33,20}{27,8} = 119,$$

also elastisches Knicken.

Beispiel II b.

Das Profil IP 60 des Stieles wird nicht verstärkt, sonst wie vor. Ohne Zwischenrechnung ist mit $c = 5,34$, $\gamma = 2,13$, $s_k = 32$ m die Knickkraft $P_k = 365$ t bei $i = 25$ cm und $\lambda = 128$.

Schlußbemerkung.

Vom Dreigelenrahmen ausgehend sollte für einige Systeme und Belastungsfälle bei verschiedenartigem Verlauf der Trägheitsmomente sowohl der Stiele als auch der Riegel der Praxis das Problem der Rahmenknickung nutzbar gemacht werden. Die Ausführungen legen natürlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit, denn in diesem Rahmen konnte das Problem nicht erschöpfend behandelt werden. Daher sollen in einer weiteren Arbeit, wie schon erwähnt, weitere Fragen untersucht werden.

Die in den Ermittlungen getroffenen Vereinfachungen und Vernachlässigungen, wie Außerachtlassung des Einflusses der Längenänderungen der Stäbe infolge der Normkräfte und Querkkräfte, konnten, die angegebenen Veröffentlichungen als bekannt voraussetzend, stillschweigend gemacht werden. Es wurde der größte Wert darauf gelegt, die numerische Rechnung auf ein erträgliches Mindestmaß so zu reduzieren, daß keine erheblichen Abweichungen von den exakten Werten vorkommen. Das dürfte insbesondere bei veränderlichen Trägheitsmomenten der Rahmenstiele durchaus gelungen sein.

Neben der richtigen Knicklänge ist bei Rahmengebilden auch der tatsächliche Trägheitsmomentenbeiwert zu berücksichtigen, wenn man sich über die Sicherheit eines Bauwerks keiner Täuschung hingeben will; dabei ist es bedeutungslos, ob die Stäbe vollwandig oder fachwerkartig ausgebildet sind.

Alle Rechte vorbehalten.

Der Hohlsteg-Verbundträger, DRP.a., eine bautechnische Neuheit.

Von Ing. Walter E. Uhlig VDI, Mannheim.

Bei der Berechnung der Stahlkonstruktion von Stahlskelettbauten, also Bauwerken, bei welchen die Stahlteile ausgefacht, ummantelt oder einbetoniert werden, verzichtet der Ingenieur bei der Bemessung grundsätzlich auf die statische Mitwirkung des Betons, und zwar aus folgenden drei Gründen:

Erstens ist im Normalfall eines Unterzuges oder Deckenträgers die Verbundwirkung gering, d. h. zweifellos wird die Steifigkeit des Trägers durch den ihn umgebenden Beton erheblich verbessert, aber die sich herausrechnende Ersparnis an Stahl ist unbedeutend. Selten kann auf das nächst niedere Profil zurückgegriffen werden. Zweitens ist auch in der DIN-Vorschrift 1050 (Berechnungsgrundlagen für Stahl im Hochbau) der Fall einer Verbundkonstruktion nicht vorgesehen. Und endlich drittens heißt es in der Deutschen Bestimmung 1932 für Eisenbeton, § 1, Absatz 3: „... Walz- und Blechträger in Beton, deren Steghöhe einen erheblichen Teil der Balkenhöhe ausmacht, dürfen nicht als Eisenbetonbalken berechnet werden, sie sind vielmehr so zu bemessen, daß sie ohne Rücksicht auf die Tragfähigkeit des Betons die Lasten allein aufnehmen können“. In der Praxis bedeutet dies, daß Walz- und Vollwandträger nur dann als Glieder einer Verbundkonstruktion betrachtet werden können, wenn der Träger unterhalb der Nulllinie des Querschnitts bleibt, also nicht in die Druckzone des Betonquerschnitts hineinragt (Bild 1). Nachdem diese Bedingung in der Praxis nur in den seltensten Fällen erfüllt ist, wird von seiten des Stahlbau-Ingenieurs auf die Verbundwirkung bei der Bemessung verzichtet.



Bild 1.

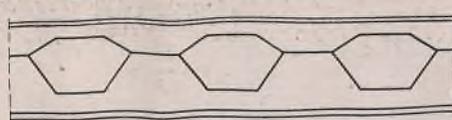


Bild 2.

Der starke Auftrieb der Bauwirtschaft in den verflossenen Jahren und die dadurch und durch die Aufrüstung eingetretene Verknappung des Baustoffs Stahl hat zu einer Reihe von staatlichen Vorschriften über die sparsamste Verwendung von Eisen und Stahl geführt. Im Zuge dieser Maßnahmen ist der Stahlskelettbau vollständig verboten worden und der Stahlträger als Unterzug und Deckenträger vom reinen Eisenbetonträger verdrängt worden, da in diesem Falle eine Stahlersparnis von 50 und mehr Prozent gegenüber dem Stahlträger erzielt wird.

Gegenüber dem Stahlträger haben Eisenbetonträger Nachteile, die auch für die augenblickliche Lage der deutschen Wirtschaft ins Gewicht fallen. Der Eisenbetonträger erfordert einen größeren Facharbeiteraufwand, seine Herstellung ist fast nur Baustellenarbeit, und er verbraucht viel Bauholz infolge der erforderlichen Einschalungen, Abstützungen und kompletten Lehrgerüste. Demgegenüber stehen auch Vorteile, die außer der bereits erwähnten großen Stahlersparnis auch in seiner großen statischen Steifigkeit bestehen. Die Durchbiegung ist gegenüber dem Stahlträger unerheblich.

Der Gedanke liegt nahe, ein Tragelement zu entwickeln, welches die Vorteile beider Bauweisen in sich vereinigt und ihre Nachteile ausschließt.

Es sind verschiedene Lösungen dieses Problems bekanntgeworden, so unter anderem der sog. Alpha-Träger, ein Stahlträger mit auf dem Oberflansch aufgeschweißter Rundeisenspirale. Die Rundeisenspirale wird ganz einbetoniert, wodurch der Stahlträger etwas tiefer in die Zugzone zu liegen kommt, und die Spirale ist in der Lage, die für die Verbundwirkung wichtigen Schubkräfte aufzunehmen und in den Träger zu leiten.

Eine neue Lösung ist der vom Verfasser entwickelte Hohlsteg-Verbundträger (Bild 2 u. 3). Dieser Träger unterscheidet sich vom Walzträger und Vollwandträger durch folgende Merkmale:



Bild 3.

1. der Obergurt ist schwächer als der Untergurt,
2. der Steg hat Öffnungen (Ausparungen),
3. der Träger wird grundsätzlich überhöht hergestellt, wodurch den Eigengewichtsdurchbiegungen begegnet wird,
4. der Träger kann freier dimensioniert werden, wodurch eine restlose Ausnutzung des Stahls möglich ist.

Die Herstellung des Trägers erfolgt in einfacher, eigenartiger, abfallloser Weise. Zwei verschiedene große Walzträger werden zickzackförmig aufgetrennt und je zwei verschiedene Hälften an den hohen Stellen der Ausschnitte elektrisch miteinander verschweißt, wobei die Hälfte des kleineren Trägers den Obergurt und die Hälfte des größeren Trägers den Untergurt des neuen Trägers bilden (Bild 4). In der Praxis ist ein Träger bekanntgeworden, der in der gleichen Weise hergestellt wird. Es handelt sich jedoch in diesem Fall nur um eine Vergrößerung der Höhe und damit des Widerstandsmoments und um keinen Verbundträger. Die Gurte sind daher auch, da die Herstellung nur aus einem Walzträger erfolgt, gleich stark dimensioniert.

Statisch ist der Verbundträger zweierlei. In erster Funktion ist er ein selbständiges Tragelement und in der Lage, sein eigenes Gewicht, ferner

das einer etwaigen Einschalung zum Ausbetonieren, oder bei Decken das Gewicht etwaiger Deckenfüllkörper, und endlich das Gewicht des ihn umschließenden, nassen Betons aufzunehmen. In zweiter Funktion ist der Träger die Bewehrung eines Eisenbetonträgers.

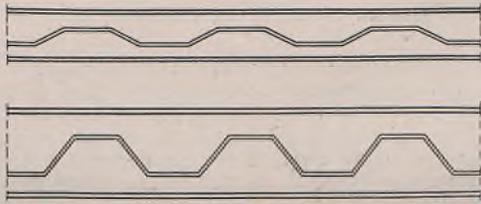


Bild 4.

Verwendung findet der Träger als Unterzug und Deckenträger für Decken verschiedener Ausführungen (Bild 5 bis 10).

Wie bereits gesagt, ist durch den Träger der Versuch gemacht, die statischen und bautechnischen Vorteile des reinen Eisenbetonträgers und des Stahlträgers zu erzielen. Dies kann in folgenden Punkten als gelungen bezeichnet werden:

1. beträchtliche Stahlersparnis gegenüber dem Stahlträger (40 bis 50%). Der Stahlbedarf des reinen, mit Rundeisen bewehrten Eisenbetonträgers wird jedoch nicht erreicht, sondern liegt immer noch 10 bis 30% höher,
2. Einsparung von Bauholz infolge Verringerung der Schalung (keine Abstützungen und keine Lehrgerüste),

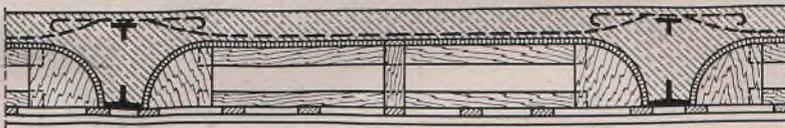


Bild 6.

3. größere statische Steifigkeit als der Stahlträger, da der fertige Querschnitt ein Eisenbetonquerschnitt mit guter Verbundwirkung (infolge der Öffnungen im Steg) ist,
4. Verringerung der Baustellenarbeit gegenüber dem Eisenbetonträger durch verminderte Schalungsarbeit und durch Wegfall des Rundeisenbiegens und Flechtens,
5. die Schalungs- und Bewehrungsfehlergefahr ist erheblich vermindert.



Bild 8.

Die Berechnungsweise des Hohlsteg-Verbundträgers erfolgt in zwei dem Bauvorgang entsprechenden Stufen. In erster Stufe wird der nackte Träger als selbständiges Tragelement berechnet. Nach dem Abbinden des Betons ist das Ganze ein Eisenbetonquerschnitt, und zwar ein Balken oder ein Plattenbalken mit Bewehrung auf der Zug- und Druckseite.

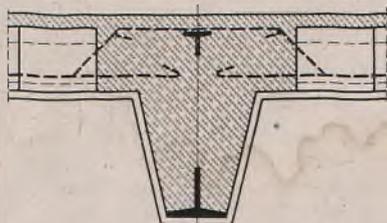


Bild 10.

Als Bewehrung in den Gurten des Eisenbetonträgers werden die \perp -förmigen Querschnitte angenommen, in der Abmessung, wie sie an der Stelle des offenen Trägerquerschnitts, also an der querschnittärmsten Stelle oben und unten vorhanden sind.

Versuche haben die rechnerischen Ergebnisse in jeder Richtung bestätigt. Es wurden bisher zwei Werksversuche durchgeführt, und zwar einer im Betrieb der Burbacher Hütte in Saarbrücken mit einer Hoyer-Decke (Versuch 1) und ein zweiter im Betrieb der Firma Hch. Fürst Söhne, Homburg, mit einem Plattenbalken (Versuch 2). Der Versuch 1 wurde in Anwesenheit verschiedener Behördenvertreter und Herrn Professor Kleinlogel, Darmstadt, durchgeführt.

Im Vorversuch wurde ein nackter Träger belastet, um zunächst die Berechnung der Durchbiegung infolge Eigenlasten zu prüfen. Die rechnerische Durchbiegung stimmte mit der praktischen scharf überein. Der Träger wurde weiter bis zum Bruch belastet. Der Obergurt wurde durch einen Gitterträger ausgesteift, so daß die Knicklänge noch 500 mm betrug. Bei einer Beanspruchung von 3100 kg/cm² knickte der Obergurt aus und der Träger brach zusammen (Bild 11).



Bild 5.

Es ist mit Bestimmtheit anzunehmen, daß bei Umschließung des Trägers mit nassem Beton, wodurch die Knicklänge gleich Null ist, eine weit höhere Bruchbeanspruchung erreicht wird. Die Schweißnähte zeigten keinerlei Beschädigung.

Beim Großversuch mit einem 3,25 m breiten Deckenstreifen (schalungslose Hoyer-Decke) konnte ein ausgezeichnetes Verhalten des Trägers und die volle rechnerische Verbundwirkung festgestellt werden.

Auch der Versuch 2 eines 1,00 m breiten Stegdeckenstreifens nach Bild 5 bei der Firma Fürst bestätigte die rechnerischen Ergebnisse und die ausgezeichnete Verbundwirkung.

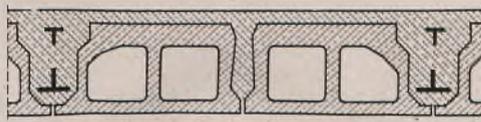


Bild 7.

Bei einer Beanspruchung von

$$\sigma_{eu} = 3170 \text{ kg/cm}^2 \text{ und } \sigma_{eo} = 1765 \text{ kg/cm}^2$$

betrug die bleibende Durchbiegung rd. 80 mm. Ohne Berücksichtigung des Verbundes wäre die Beanspruchung folgende gewesen:

$$\sigma_{eu} = 3440 \text{ kg/cm}^2 \text{ und } \sigma_{eo} = 6690 \text{ kg/cm}^2.$$

Leider konnte der Versuch nicht weiter bis zur Zerstörung des Trägers durchgeführt werden.

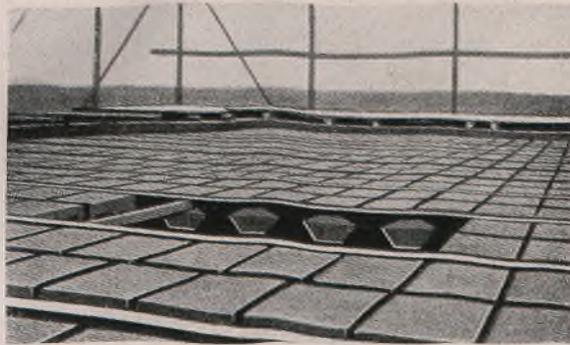


Bild 9.

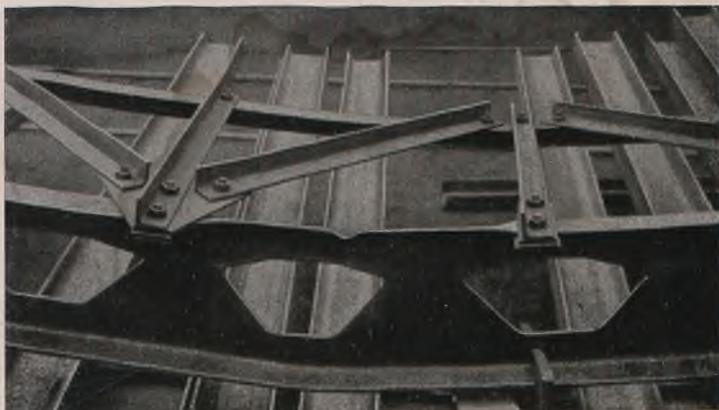


Bild 11.

Zusammenfassung.

Außer der großen Ersparnis an Stahl wird durch den Hohlsteg-Verbundträger als Deckenträger und Unterzug eine bautechnische Verbesserung erzielt. Der Hohlsteg-Verbundträger ist eine steife, tragfähige Bewehrung eines Eisenbetonträgers und gewissermaßen das Mittelding zwischen der Stahlbauweise und der Eisenbetonbauweise, und er vereinigt die Vorteile beider Bauweisen. Die Stahlersparnis ist beträchtlich. Der Versuchsträger des 2. Versuchs (Stegdecke) bestand aus I 20 und I 12, was ein Metergewicht von 18,75 kg/m $\left(\frac{26,3}{2} + \frac{11,2}{2}\right)$ ergibt. Das maximale Moment einschließlich das aus Eigengewicht betrug $M = 815\,000$ cmkg. Bei der erreichten maximalen Beanspruchung von 3170 kg/cm² (der Normalträger würde sich wahrscheinlich weit früher bleibend durchbiegen) würde ein Widerstandsmoment von 257 cm³ $\left(\frac{815\,000}{3170}\right)$ erforderlich sein, was einem I 22 mit einem Metergewicht von 31,1 kg entspricht. Die Stahlersparnis beträgt 40%. Bei höheren Abmessungen ist die Ersparnis weit größer.

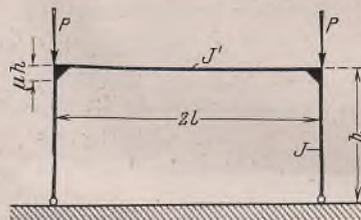
Verschiedenes.

Nachtrag zu dem Aufsatz „Die Berechnung der regelmäßig vieleckigen Rahmenkuppeln“ von Oberingenieur Fritz Wansleben, Rheinhausen.

Einige an mich gerichtete Fragen lassen es als zweckmäßig erscheinen, meine in Heft 16/18 Jahrg. 1940 dieser Zeitschrift abgedruckte Abhandlung durch einige Erläuterungen zu ergänzen.

Zunächst sei klarstellend bemerkt, daß der Drehsinn der Lastmomente mit dem der Knotendrehwinkel übereinstimmt. Hierbei ist auf die besondere Annahme bezüglich des Drehsinnes von η und ζ zu achten.

Bei der Behandlung der Knickfestigkeit der Kuppel wurde, ohne es besonders zu erwähnen, eine wesentliche Vereinfachung vorgenommen. Um nämlich bei der an sich schon recht verwickelten Rechnung die sie außerordentlich erschwerenden transzendenten Funktionen zu vermeiden, wurde der bei Bauwerken der vorliegenden Art stets geringe Einfluß der Längskräfte auf die Größe des Biege widerstandes der Stäbe vernachlässigt. Der begangene Fehler wird um so kleiner, je steifer die Rippenstäbe gegenüber den Ringstäben sind. Um einen ungefähren Überblick über die Größe des Fehlers zu erhalten, soll hier ein ganz einfaches, aber keineswegs besonders günstiges Beispiel durchgerechnet werden. Es handelt sich um ein einfaches rechteckiges Rahmenportal (Bild 1). Für dieses ist die Knickbelastung



$P = \frac{u^2 EJ}{h^2}$. Hierin ist u der aus der Formel $u \cdot \operatorname{tg} u = \frac{3J'h}{Jl}$ ermittelte Wert. Für den Sonderfall $\frac{J'h}{Jl} = 1,0$ ergibt sich $u = 1,1925$ und damit

$$P = 1,428 \cdot \frac{EJ}{h^2}$$

Wird wie in meiner Abhandlung die Wirkung der Längskräfte in den Portalstützen vernachlässigt, dann lautet die Knickgleichung:

$$P = \frac{3}{1 + \frac{Jl}{J'h}} \cdot \frac{EJ}{h^2}$$

oder für den betrachteten Sonderfall:

$$P = 1,5 \cdot \frac{EJ}{h^2}$$

Der Fehler ist also + 5%. In Wirklichkeit ist jedoch der Fehler noch geringer, weil die Rahmenstäbe nicht bis an die theoretischen Eckpunkte gleichbleibend steif sind. Ein gewisser Bereich der Stäbe an den Rahmenecken kann als starr angenommen werden. Wählen wir als Ausmaß dieser starren Stäbeteile die Strecken μl bzw. μh , dann lautet die Gleichung zur Bestimmung von u :

$$u \left(\operatorname{tg} u + \frac{\mu}{1-\mu} \cdot u \right) = \frac{3J'h}{(1-\mu)^2 Jl}$$

Wählen wir z. B. $\mu = 0,03$, dann finden wir aus $u (\operatorname{tg} u + 0,03093 u) = 3,1884$ den Wert $u = 1,205$. Damit wird

$$P = 1,452 \cdot \frac{EJ}{h^2}$$

Der Fehler der angenäherten Berechnung ist also nur noch + 3,3%.

Mit Rücksicht auf den großen Gewinn an Rechenarbeit ist daher die vorgenommene Vereinfachung voll gerechtfertigt.

Wie sich bei einer Kontrolle der in meiner Abhandlung gegebenen Formeln gelegentlich einer praktischen Anwendung herausstellte, haben sich infolge des sehr verwickelten Zusammenhanges der Kräfte und Verformungen, welcher durch den Umfang der Formeln zum Ausdruck kommt, einige Auslassungen sowie Unstimmigkeiten einiger Vorzeichen und Kennziffern eingeschlichen. Sie sollen hier richtiggestellt werden. Bei der Wiedergabe der betreffenden Formeln werden, soweit es die Deutlichkeit

Nach den deutschen Bestimmungen für Eisenbeton müssen die Bewehrungseisen eine geringste Betonüberdeckung von 2 1/2 cm haben. Beim Hohlsteg-Verbundträger ist dies für den Untergurt zur Erzielung der maximalen Verbundwirkung absolut unnötig, da ja die untere Bewehrung mit der oberen steif verbunden ist. Der Versuch 2, bei welchem diese Überdeckung nicht der Fall war, hat dies ja auch voll bestätigt.

Die Notwendigkeit der überdeckten Untergurteisen ist an sich als schwerer Nachteil im Eisenbetonbau bekannt. Das Mißverhältnis der Dehnungsmasse beider Baustoffe (Stahl—Beton) und der Umstand, daß der weniger dehnungsfähige Stoff gerade in der äußersten, am meisten gedehnten (unteren) Zone liegt, führt zu der bekannten nachteiligen Erscheinung der Risse im Beton an der unteren Seite des Trägers, weit früher als die Bewehrungseisen ihre größte zulässige Beanspruchung erfahren haben.

Beim Hohlsteg-Verbundträger ist die Risselast wesentlich größer, da in der unteren Zone Stahl liegt.

nicht erfordert, nur die sich ändernden Zeichen ausgeschrieben, während die unveränderten Teile durch Punkte angedeutet sind.

In den vier Momentengleichungen der Gruppe (32) ist überall an Stelle von $3Y$ zu setzen: $\frac{3ZY}{s}$. Ferner muß es in der dritten Gleichung der Gruppe (34) heißen $M_{(o)z} + 6[\dots + \dots] + \dots$, während in Gl. (34b) α_1'' zu halbieren ist.

Für die Ersatzlasten zur Berücksichtigung der Wärmeeinflüsse ist es richtiger, eine Gruppe zu wählen, welche P_x nicht enthält. In diesem Falle lauten die Gl. (36) u. 36a):

$$P_{(o)x} = 0 \quad P_{(o)y} = \frac{\dots}{l_1^3 \cdot \cos^2 \gamma_1} \quad M_{(o)z} = \frac{\dots}{l_1^2 \cdot \cos \gamma_1}$$

Hierzu ist noch zu bemerken, daß in den untersten Rippenstäben Anfangsmomente vorhanden sind, denen sich die aus der Rechnung mit den Ersatzlasten ergebenden Momente überlagern. Diese Anfangsmomente sind an den oberen Stäben gleich $M_{(o)z}$ und bei den angespannten Füßen $-M_{(o)z}$.

Die Vorzeichen in der Gleichungsgruppe (37) sind:

$$\begin{aligned} \frac{P_z}{6E} + 2[|+|] - [\dots + \dots - \dots] &= 0 \\ \frac{M_x}{2E} - 3[\dots - \dots - \dots] + [|+|] &= 0 \\ \frac{M_y}{2E} + 3[\dots - \dots - \dots] + [|+|] &= 0 \end{aligned}$$

und in den zugehörigen Gl. (37a) und (37b):

$$\begin{aligned} \delta_j' &= (\dots - \dots + \dots) & \delta_j'' &= (\dots - \dots - \dots) \\ \delta_1' &= (\dots - \dots + \dots) & \delta_1'' &= \left(\dots - \frac{\dots}{2} \dots - \dots \right) \\ \epsilon_j' &= \left(\frac{\dots + \dots}{\dots} + \frac{\dots + \dots}{\dots} + \dots \right) & \epsilon_1' &= \left(\frac{\dots + \dots}{\dots} + \dots + \dots \right) \\ \epsilon_1'' &= \left[(\dots - \dots) \frac{\dots}{4 \dots} - \dots + \dots \right] & \epsilon_1'' &= [(\dots - \dots) \dots - \dots + \dots] \end{aligned}$$

In der letzten Gleichung der Gruppe (38), und zwar in der die y enthaltenden ersten Klammer sind nur das erste und dritte Glied positiv. Damit ist bei den Werten a_1 , a_1' und a_1'' in Gl. (38a) statt $\operatorname{tg} \gamma_1$ der Faktor $(\operatorname{tg} \gamma_{11} - \operatorname{tg} \gamma_1)$ zu setzen, wie es bei den entsprechenden Werten A_1 , A_1' und A_1'' in Gl. (39a) geschehen ist. Hier sind noch bei A_j'' die Trägheitsmomente J'' durch J' zu ersetzen. Es muß ferner darauf geachtet werden, daß in Gl. (38a), (39a) und (42) bei allen Gliedern die Größen a , A oder $P_{(h)x}$, welche mit der Differenz der Stabneigungstangenten behaftet sind, die Kennziffern der Trägheitsmomente J_w , J_{vw} , der Stablängen s und der Stabkräfte S ohne Rücksicht auf den Index des zugehörigen y stets J sein müssen.

In der letzten Gleichung der Gruppe (39) ist das Glied mit C'' negativ und in der folgenden Klammer das Glied mit D_{j-1}' positiv zu setzen. Außerdem ist in Gl. (39a) und (39b) noch im letzten Glied der Werte D_j'' bzw. D_1'' der Faktor $\sin \frac{\alpha}{2}$ zu streichen.

Schließlich ist das Vorzeichen im rund eingeklammerten Anfangsglied der gleichlautenden Werte B_1' und C_1 der Gl. (39b) negativ, während das zweite Glied des Wertes A_1'' halbiert werden muß.

INHALT: Entlastung bestehender Brückenwiderlager durch Anordnung einhöflicher Rahmen-träger. — Die Stabilität des Dreigelenkreuzrahmens. — Der Hohlsteg-Verbundträger, DRP. a., eine bautechnische Neuheit. — Verschiedenes: Nachtrag zum Aufsatz „Die Berechnung der regelmäßig vieleckigen Rahmenkuppeln“.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 7. Februar 1941

Heft 4/5

Alle Rechte vorbehalten.

Die Biegespannungen querschwingender, achsrecht belasteter Stäbe.

Von Dr.-Ing. Max Georg Puwein, Wien.

Inhaltsangabe. Für die als Folge harmonischer Querbewegungen der Auflager in achsrecht belasteten Stäben auftretenden Biegemomente wird eine strenge Beziehung abgeleitet. Zwischen Erregerfrequenz und den bezüglich Resonanz kritischen Achslasten wird der Zusammenhang nachgewiesen und anschaulich dargestellt. Für eine Belastung unterhalb des ersten Resonanzbereichs werden Näherungsformeln abgeleitet. Aus den Erkenntnissen werden Folgerungen bezüglich baulicher Ausbildungen gezogen. Die Betrachtung wird auf Fälle veränderlichen Querschnitts und veränderlicher Achskraft erweitert. Die folgenden Untersuchungen dienen vornehmlich der Feststellung der dynamischen Nebenspannungen, welche in den Stäben von Fachwerksbrücken durch Fahrzeugstöße und in den Stützen von Skelettbauten durch Bodenschwingungen entstehen.

Harmonische Schwingungen der Auflager achsrecht belasteter Stäbe zwingen diese zu Biegeschwingungen. Im folgenden werden die dabei auftretenden Biegespannungen festgestellt, die sich den Normalspannungen des Stabes überlagern. Solange sich nicht die Achskraft bestimmten, von der Frequenz der Auflagerschwingungen abhängigen, in bezug auf Resonanzerscheinungen kritischen Werten nähert, sind diese Biegespannungen als Nebenspannungen anzusehen, die nicht in den üblichen Standberechnungen, sondern bei der Festsetzung von Spannungen und Knickzahlen beachtet werden müssen.

Wenn eine pulsationsfrei in einem Stabe wirkende Achskraft ihre Größe allmählich ändert, ändern sich mit ihr die Eigenfrequenzen des Stabes. Stimmt eine dieser Eigenfrequenzen mit der gleichbleibend vorausgesetzten Erregerfrequenz überein, so tritt Resonanz ein, wie im folgenden exakt gezeigt wird. Die Auflagerschwingungen können ohne Zusammenhang (z. B. bei Bodenschwingungen) oder im Zusammenhang mit der Belastung (z. B. bei Triebrostößen) auftreten. Die Formänderung des Stabes folgt aus der Anwendung der Zeitweggleichung¹⁾ des stationären Teils der ungedämpften, erzwungenen Schwingung auf die Stabenden:

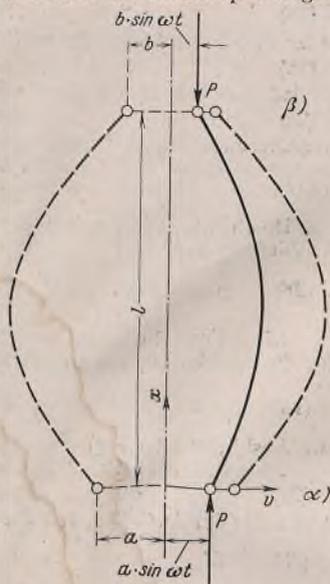


Bild 1.

$$(1) v(x, t) = (A \cdot \cos \epsilon x + B \cdot \sin \epsilon x + C \cdot \cos \delta x + D \cdot \sin \delta x) \sin \omega t,$$

wobei

$$(2) \delta = \sqrt{\mp \frac{P}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EJ}\right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{EJ}}}$$

Dabei bezeichnen

$\mu = F \cdot \frac{\gamma}{g}$ = die Stabmasse je Längeneinheit,

F = Querschnittsfläche,

γ = Einheitsgewicht des Baustoffs,

$g = 981 \text{ cm/sek}^2$ = die Schwerebeschleunigung,

E = Elastizitätsmodul des Baustoffs,

J = Trägheitsmoment des Querschnitts um die zur Zeichenebene senkrechte Schwerachse,

$\omega = 2\pi f$ = die Kreisfrequenz der f erzwungenen Schwingungen je Sekunde,

P = als Druckkraft positiv bezeichnete Achskraft.

¹⁾ M. G. Puwein, Die Verminderung der Knicklast eines Stabes durch Querschwingungen. Bauing. 1939, Heft 1/2.

Aus Gl. (1) folgen die Randbedingungen (Bild 1):

$$(x) x = 0 \begin{cases} v(x, t) = a \cdot \sin \omega t = (A + C) \sin \omega t \\ -\frac{M}{EJ} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0 = (A \epsilon^2 - C \delta^2) \sin \omega t \end{cases}$$

$$(3) A = a \cdot \frac{\delta^2}{\epsilon^2 + \delta^2}$$

$$(4) C = a \cdot \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + \delta^2}$$

$$(\beta) x = l \begin{cases} v(x, t) = b \cdot \sin \omega t = (A \cdot \cos \epsilon l + B \cdot \sin \epsilon l + C \cdot \cos \delta l + D \cdot \sin \delta l) \sin \omega t \\ -\frac{M}{EJ} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = 0 = (A \epsilon^2 \cdot \cos \epsilon l + B \epsilon^2 \cdot \sin \epsilon l - C \delta^2 \cdot \cos \delta l - D \delta^2 \cdot \sin \delta l) \sin \omega t \end{cases}$$

$$(5) B = \frac{(b - a \cdot \cos \epsilon l) \delta^2}{\sin \epsilon l (\epsilon^2 + \delta^2)}$$

$$(6) D = \frac{(b - a \cdot \cos \delta l) \epsilon^2}{\sin \delta l (\epsilon^2 + \delta^2)}$$

Daher lautet die Gleichung der Biegelinie:

$$(7) v(x, t) = \frac{1}{\epsilon^2 + \delta^2} \left[a \delta^2 \cdot \cos \epsilon x + \frac{(b - a \cdot \cos \epsilon l) \delta^2}{\sin \epsilon l} \cdot \sin \epsilon x + a \epsilon^2 \cdot \cos \delta x + \frac{(b - a \cdot \cos \delta l) \epsilon^2}{\sin \delta l} \cdot \sin \delta x \right] \sin \omega t.$$

Der Abstand x_m des gefährdetsten Querschnitts vom Auflager α ergibt sich aus

$$(8) Q(x, t) = \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} = -EJ \cdot \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} = 0.$$

Bei Schwingungen, die langsamer als die niederste Eigenfrequenz unter der Achslast P erfolgen [vgl. Gl. (17)], ist das Maximalmoment nahe der Balkenmitte zu erwarten.

Es tritt, wenn

$$(9) t = \frac{\pi}{2\omega}, \quad 3 \cdot \frac{\pi}{2\omega}, \quad 5 \cdot \frac{\pi}{2\omega}, \dots$$

ist, auf und folgt aus

$$(10) M(x, t) = -EJ \cdot \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}$$

mit

$$(11) M_{\max, \max} = \mp EJ \cdot \frac{\delta^2 \epsilon^2}{\delta^2 + \epsilon^2} \left[a \cdot \cos \epsilon x_m + \frac{(b - a \cdot \cos \epsilon l)}{\sin \epsilon l} \cdot \sin \epsilon x_m + a \cdot \cos \delta x_m + \frac{(b - a \cdot \cos \delta l)}{\sin \delta l} \cdot \sin \delta x_m \right].$$

Die größten Randspannungen folgen aus der bekannten Gleichung

$$(12) \sigma_{1,2} = \frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max, \max}}{W_{1,2}}$$

Die vorliegende Betrachtung setzt einen konstanten Elastizitätsmodul E voraus und gilt daher nur, solange Gl. (12) Spannungen ergibt, für die man bei dem betreffenden Baustoff das Hookesche Gesetz als noch gültig ansehen kann.

Wenn sich $\sin \delta l$ dem Werte 0 nähert, müssen die letzten Glieder in den Klammerausdrücken der Gl. (7) u. (11) dem Werte ∞ zustreben.

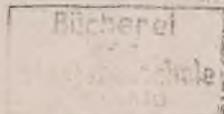
Setzt man jedoch zur Bestimmung der Eigenfrequenzen

$$(\alpha_E) x = 0 \begin{cases} v(x, t) = 0 = (A + C) \sin \omega t \\ -M/EJ = 0 = (A \epsilon^2 - C \delta^2) \sin \omega t \end{cases} A = C = 0$$

$$(\beta_E) x = l \begin{cases} v(x, t) = 0 = (B \cdot \sin \epsilon l + D \cdot \sin \delta l) \sin \omega t \\ -M/EJ = 0 = (B \epsilon^2 \cdot \sin \epsilon l - D \delta^2 \cdot \sin \delta l) \sin \omega t \end{cases} B = 0,$$

so folgt

$$D \neq 0 \text{ für } \sin \delta l = 0.$$



Die Bedingung
(13) $\sin \delta l = 0$
bestimmt daher auch die Eigenkreisfrequenzen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ und nach Gl. (2) deren Abhängigkeit von der jeweiligen Achslast.

Folglich müssen für
(14) $\omega = \omega_1, \omega = \omega_2, \dots, \omega = \omega_n$
d. h. wenn die Frequenz der erzwungenen Schwingung mit einer der von der veränderlichen Achskraft abhängigen Eigenfrequenzen übereinstimmt, große Ausbiegungen und große Biegespannungen entstehen. Aus Gl. (13) folgt

$$(15) \quad \delta l = l \sqrt{\frac{P}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EJ}\right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{EJ}}} = \pi, 2\pi, \dots, n\pi;$$

daraus können mit $\omega = 2\pi f$ die bei einer gegebenen Erregerfrequenz f für die „n“te Resonanzerscheinung kritischen Achskräfte

$$(16) \quad P_{kfn} = \pi^2 \cdot \frac{EJ}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} - \frac{G}{n} \cdot \frac{\left(\frac{l}{n}\right)}{g} [2f]^2$$

$G =$ Eigengewicht des Stabes $n = 1, 2, \dots, n$
bestimmt werden. Da für $P_{kfn} > 0$, also wenn die kritische Achskraft eine Druckkraft ist, als Folge der Aufschaukelung eine Plastizierung und als weitere Folge ein Gleichgewichtswechsel eintreten muß, kann man auch die Bezeichnung „Schwingknicklast“ gebrauchen. Der Ablauf der „Schwingknickung“ kann jedoch durch die eine harmonische Bewegung voraussetzende Gl. (1) u. (2) nicht verfolgt werden. Bild 2 zeigt den Zusammenhang der Schwingknicklasten mit den zugehörigen Erregerfrequenzen. Dabei ist P_{kfn} auf die Euler-Last $P_E = \pi^2 EJ/l^2$ und

$$(17) \quad f = \frac{n^2 \pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} \sqrt{1 - \frac{P_{kfn}}{n^2 P_E}}$$

auf die niederste Eigenfrequenz des unbelasteten Balkens

$$(18) \quad f_{1,0} = \frac{\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

bezogen. Eine Verminderung des Tragvermögens eines Druckstabes durch Resonanzerscheinungen besteht somit nur in den Bereichen

$$\begin{aligned} n=1 & \quad 0 < f < f_{1,0} \\ n=2 & \quad f_{1,0} \sqrt{12} < f < 4f_{1,0} \\ n=3 & \quad f_{1,0} \sqrt{72} < f < 9f_{1,0} \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

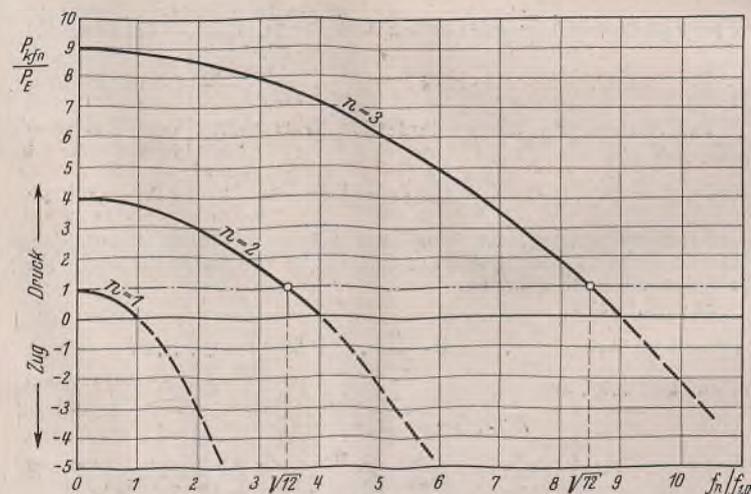


Bild 2.

Eine überschlägige Berechnung²⁾ zeigt, daß für $f \leq 5$ (Triebradstöße, Verkehrserschütterungen) und $l \leq 10$ m bei Berücksichtigung der Verminderung der statischen Knicklast durch unvermeidliche Endhebelarme eine hinlängliche Sicherheit gegen das Erreichen der niedersten Schwingknicklast besteht, wenn

$$(19) \quad \lambda l \leq 1000$$

ist. $\lambda =$ Stabschlankheit, $l =$ Stablänge in Metern.

Gl. (19) fußt auf den noch geltenden Knickvorschriften DIN 1050 § 11 ($\nu = 3,5$ für $\lambda \geq 100$) und ist bei Haupttragwerken im allgemeinen erfüllt. Bild 3 zeigt einen im Bereiche $n=3$ durch harmonische Bewegung des unteren Endes aufgeschaukelten Stab.

Für $a = -b$ und $\delta l = \pi, 3\pi, \dots, (2n-1)\pi$
und für $a = +b$ und $\delta l = 2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi$

wird das letzte Glied in Gl. (7) u. (11) Null. Da die übrigen Glieder nur endliche Werte besitzen können, ist unter diesen Bedingungen eine Resonanz ausgeschlossen. Dies erinnert daran, daß, wie Gl. (11) lehrt, die Biegemomente nicht nur durch Resonanz, sondern auch durch große Endamplituden bedeutende Werte erreichen können.

²⁾ Vgl. Note 1, Gl. (15) bis Gl. (17).

Im Übrigen erhält man mit Hilfe der aus Gl. (2) gewonnenen Beziehungen

$$(20) \quad \varepsilon^2 \delta^2 = \frac{\mu \omega^2}{EJ}$$

$$(21) \quad \varepsilon^2 + \delta^2 = 2 \sqrt{\frac{P^2}{(2EJ)^2} + \frac{\mu \omega^2}{EJ}}$$

für die Umgebung der ersten Resonanzstelle $\delta l = \pi$, mit

$$(22) \quad \sin \delta l \approx \pi - \delta l \quad \cos \delta l \approx -1$$

durch Einsetzen der Gl. (20), (21) u. (22) in Gl. (11) die folgende Näherungsformel

$$(23) \quad M_{\max, \max} = \frac{\mu \omega^2}{\sqrt{\left(\frac{P}{2EJ}\right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{EJ}}}$$

$$\pi - l \sqrt{\frac{P}{2EJ} + \sqrt{\left(\frac{P}{2EJ}\right)^2 + \frac{\mu \omega^2}{EJ}}}$$

wobei $a = b = m$ angenommen ist.

In entsprechender Entfernung von der obigen Resonanzstelle ($\delta l < \pi$) kann man auf folgendem Wege eine andere Näherungsformel gewinnen:

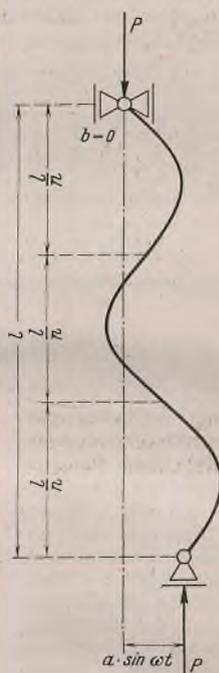


Bild 3.

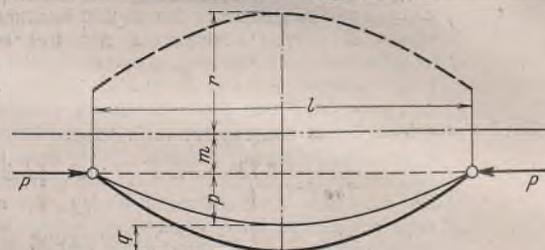


Bild 4.

Denkt man sich den Stab vorerst achskraftfrei ($P = 0$) und gewichtlos ($\mu = 0$), so ist für $a = b = m$ (Bild 4)

$$(24) \quad v(x, t) = m \cdot \sin \omega t;$$

jeder Punkt der Stabachse besitzt dann die Beschleunigung

$$(25) \quad v''(x, t) = -m \omega^2 \cdot \sin \omega t,$$

so daß der Stab in der Amplitude die gleichmäßige Belastung

$$(26) \quad m \mu \omega^2 \cdot \sin \omega t$$

und die angenäherte Durchbiegung

$$(27) \quad p = \frac{5}{384} \cdot \frac{m \mu \omega^2 l^4}{EJ} \text{ erhält.}$$

Durch die nachträglich angebrachte Achskraft vergrößert sich die Ausbiegung auf

$$(28) \quad p + q = p \cdot \frac{P_{kf}}{P_{kf} - P} = \frac{5}{384} \cdot \frac{m \mu \omega^2 l^4}{EJ} \cdot \frac{P_{kf}}{P_{kf} - P}.$$

Diese Formel entsteht in Anlehnung an die bekannte Näherungsformel für die Ausbiegung von Druckstäben mit Anfangskrümmung³⁾, da für $n = 1$

$$(16)_1 \quad P = P_{kf} = \pi^2 \cdot \frac{EJ}{l^2} - G \cdot \frac{l}{g} (2f)^2$$

die Ausbiegung $(p + q) = \infty$ sein muß.

So erhält man den vergrößerten Ausschlag in der Stabmitte

$$(29) \quad r = m + (p + q)$$

und unter der Annahme, daß dieser über die ganze Stablänge konstant sei,

$$(30) \quad M_{\max, \max} = \frac{l^2}{8} \cdot \mu \omega^2 r + P(p + q) = \frac{Gl}{8} \cdot \frac{r \omega^2}{g} + P(p + q) \\ = M_g \eta + P(p + q) = m \cdot \frac{Gl}{8} \cdot \frac{(2\pi f)^2}{g} \\ + m \left[\frac{Gl}{8} \cdot \frac{(2\pi f)^2}{g} + P \right] \frac{5}{384} \cdot \frac{Gl^3 (2\pi f)^2}{g EJ} \cdot \frac{P_{kf}}{P_{kf} - P}.$$

Der Faktor $Gl/8$ in Gl. (30) ist das Biegemoment durch das Eigengewicht eines waagerechten Stabes; dieser erhält durch den Schwingvorgang das Größtmoment

$$(31) \quad M = M_g \left(1 + \eta + \frac{P}{M_g} [p + q] \right).$$

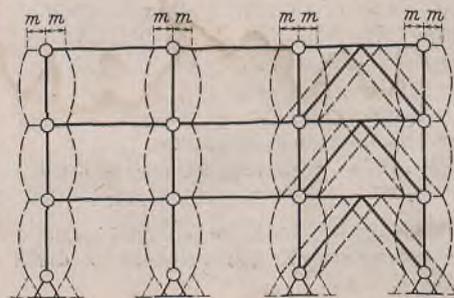


Bild 5.

Zur Auswertung der Gl. (11), (23) u. (30) braucht man Angaben über die Größe der Endamplituden a und b bzw. m und der Kreisfrequenz der erzwungenen Schwingungen $\omega = 2\pi f$. Bei den Stützen von Skelettbauten kann man z. B. für sehr starke Erdbewegungen (Bild 5) $m = 0,5$ cm und $f = 1$ Schw./sek annehmen.

³⁾ z. B. Stahlbau-Kalender 1939, S. 111.

Für Fachwerkstäbe⁴⁾ folgt aus der willkürlichen Annahme, daß sich eine Schwankung von 10% der Achskräfte ungeändert bis zu den Knoten auswirke (Bild 6), der einfache Vorschlag

$$(32) \quad m = a = b \approx 0,1 \delta \cdot \frac{P}{Q} = 0,1 \cdot \frac{6l}{700} \cdot \frac{P}{Q} \approx \frac{l}{1000} \cdot \frac{P}{Q}$$

$f \approx 5 \text{ Schw./sek.}$

wobei: P = gesamte Verkehrslast,
 Q = Eigengewicht des gesamten Tragwerks + P .

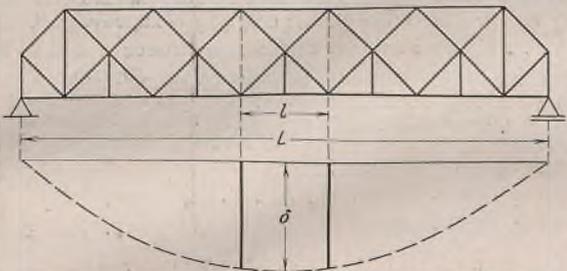


Bild 6.

Die Schwingung von Fachwerkstäben wird wie diejenige durchlaufender Stützen durch die Durchlaufwirkung der steifen Knotenanschlüsse behindert. Durch Vergleich der Eigenkreisfrequenz des frei aufliegenden Balkens

$$(33) \quad \omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

mit der des beiderseits eingespannten Balkens

$$(34) \quad \omega_{be} = \frac{4,73^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = \frac{\pi^2}{l_{s,be}^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

erhält man für dessen niederste Eigenschwingung

$$(35) \quad l_{s,be} \approx \frac{2}{3} \cdot l.$$

Die niederste Eigenkreisfrequenz des einseitig eingespannten, anderseitig frei aufliegenden Balkens beträgt:

$$(36) \quad \omega_{ee} = \frac{4,93^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}} = \frac{\pi^2}{l_{s,ee}^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu}}$$

und man erhält analog zu Gl. (35)

$$(37) \quad l_{s,ee} \approx \frac{4}{5} \cdot l.$$

Diese „Schwinglängen“ können der Einfachheit halber der Berechnung der Schwingungsnebenspannungen zugrunde gelegt werden. Sie haben, im Gegensatz zu den „Knicklängen“ keine geometrische Bedeutung.

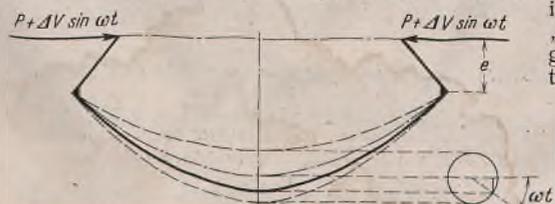


Bild 7.

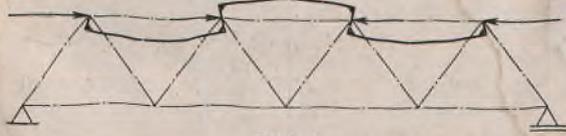


Bild 8.



Bild 9.

Die Schwankungen der Verkehrslast haben außer Stabendenschwingungen auch eine Pulsation der Achskraft zur Folge. Diese beträgt daher

$$(38) \quad \bar{P} = (R + V) + \Delta V \cdot \sin \omega t = P + \Delta V \cdot \sin \omega t,$$

R = Anteil der ruhenden Belastung,
 V = Anteil der Verkehrsbelastung.

Da die Pulsation der Achskräfte im selben Takte wie die Endschwingungen erfolgen muß, werden für $\delta l < \pi$ die Ausschläge in der einen Amplitude vergrößert und in der anderen verkleinert. (Eine doppelt so

⁴⁾ Bezüglich im Versuchswege bestimmter Werte dynamischer Durchbiegung siehe: Krabbe, Neuere Ergebnisse der Versuchsforschung auf dem Gebiete der Schwingungsmeßtechnik bei Eisenbahnbrücken. Stahlbau 1937, Heft 26, und H. Kulka, Dynamische Probleme im Brückenbau, Stahlbau 1930, Heft 26.

schnell wie die Endschwingungen erfolgende Pulsation würde für $\delta l < \pi$ beide Amplituden vergrößern⁵⁾; im Bauwesen wird ein solcher Fall wohl selten sein.) Gl. (1) u. (2) setzen eine streng harmonische Bewegung voraus. Daher kann nur näherungsweise zur Spannungsbestimmung an Stelle von P

$$(39) \quad \bar{P}_{\min}^{\max} = P \pm \Delta V$$

gesetzt werden.

Wenn die pulsierenden Achskräfte an Endhebelarmen e angreifen, entstehen harmonisch veränderliche Endmomente. Diese erzwingen ebenfalls Querschwingungen (Bild 7 u. 8), welche bei Fachwerken mit Hilfsstäben von diesen behindert werden (Bild 9). Die Notwendigkeit möglichst achsgenauer Stabanschlüsse gewinnt hiermit weitere Bedeutung. Bild 7 setzt $\Delta V \ll P$ voraus.

Der allgemeinste Fall liegt vor, wenn die Druckkraft $P + \Delta V \cdot \sin \omega t$ an einem Stabe von der Anfangskrümmung $u = f(x)$ mit den Endhebelarmen e_a und e_b angreift und die Stabenden die Bewegungen $a \cdot \sin \omega t$ bzw. $b \cdot \sin \omega t$ ausführen. Die entsprechende Differentialgleichung lautet⁶⁾

$$(A) \quad \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{(P + \Delta V \cdot \sin \omega t)}{EJ} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\mu}{EJ} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{(P + \Delta V \cdot \sin \omega t)}{EJ} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Diese aus der Betrachtung des Kräftespiels am Balkenelement folgende Beziehung wird durch die Annahme vereinfacht, daß die ruhende Stabachse ein flacher Kreisbogen vom Halbmesser R sei

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{R} = \text{konst.}$$

Die Randbedingungen lauten:

$$(\alpha_A) \quad x = 0 \begin{cases} v = a \cdot \sin \omega t \\ M = -v'' EJ = (P + \Delta V \cdot \sin \omega t) \cdot e_a \end{cases}$$

$$(\beta_A) \quad x = l \begin{cases} v = b \cdot \sin \omega t \\ M = -v'' EJ = (P + \Delta V \cdot \sin \omega t) \cdot e_b \end{cases}$$

In den Gl. (A), (α_A) und (β_A) kann man die partiellen Differentialquotienten von v nach Ort und Zeit durch die Differenzquotienten⁷⁾ ersetzen. Teilt man die Stablänge in n und die Periode $2\pi/\omega$ in σ gleiche Teile, so erhält man $\sigma \cdot (n + 5)$ lineare Gleichungen mit ebenso vielen Unbekannten, die jedoch z. T. paarweise gleich groß sind. Dadurch sind Verformung und Beanspruchung in der Amplitudenlage bestimmbar. Symmetrie der Randbedingungen verursacht eine bedeutende Vereinfachung der Rechnung.

Für die Gurte sind daher zweifach symmetrische Querschnitte zweckmäßig, da bei diesen der „Achsenprung“ und damit die Endhebelarme von vornherein vermieden sind. Abgesehen von „H“- und „I“-Gurten bedingt diese Ausbildung die Verwendung zweiteiliger Querschnitte auch im Druckgurt, also die Anordnung von Rahmenstäben⁸⁾.

Da Schwingungen des Stabes senkrecht zur Tragwerkebene nicht ausgeschlossen sind, braucht man zur Auswertung der Gl. (16) das ideale Trägheitsmoment des zweiteiligen Querschnitts. Die Mitten der Bindebleche mehrteiliger Stäbe liegen während des Schwingungsvorganges ebenso auf einer Sinuslinie wie während des statischen Ausknickens.

Daher kann man das ideale Trägheitsmoment J_{yi} aus der Engeberschen Formel

$$(40) \quad J_{yi} = J_y \cdot \frac{\lambda_y^2}{\lambda_y^2 + \lambda_1^2}$$

berechnen, wobei J_y das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche um ihre stofffreie Achse, λ_y die Schlankheit des Vollstabes und λ_1 die Schlankheit des Teilstabes bedeuten. Damit J_{yi} möglichst groß ist, muß λ_1 möglichst klein sein. Man erkennt, daß auch bei Zugstäben ein starrer, also mindestens zweieitiger Anschluß der Bindebleche notwendig ist und daß deren Entfernung keineswegs beliebig groß sein kann. Im übrigen besitzen, wie Gl. (30) lehrt, Zugstäbe in bezug auf die Schwingungsnebenspannungen ein günstigeres Verhalten als Druckstäbe.

Die bisherigen Erwägungen setzen ein über die Stablänge gleichbleibendes Trägheitsmoment voraus. Gl. (1) u. (2) können auch zur Untersuchung von Stäben mit absatzweise ungleichem Trägheitsmoment und ebensolcher Achskraft verwendet werden (Bild 10). Die Randbedingungen sind in den früheren Gl. (α) u. (β) analog. In jedem Absatzpunkte entstehen vier neue Unbekannte, denen insgesamt vier Gleichungen gegen-

⁵⁾ Bezüglich des Sonderfalles $a = b = 0$ siehe: E. Mettler, Biegeschwingungen eines Stabes unter pulsierender Achslast. Mitteilungen aus den Forschungsanstalten 1940, Heft 1.

⁶⁾ Vgl. K. Jäger, Die Festigkeit leicht gekrümmter Stäbe aus Stahl bei schwingender Belastung. Stahlbau 1940, Heft 23 24.

⁷⁾ M. G. Puwein, Schwingungen hoher Schornsteine. B. u. E. 1940, Heft 12, S. 162.

⁸⁾ Hütte, 26. Aufl., Bd. III, S. 776, Abb. 83, 1, 2, 4, 5.

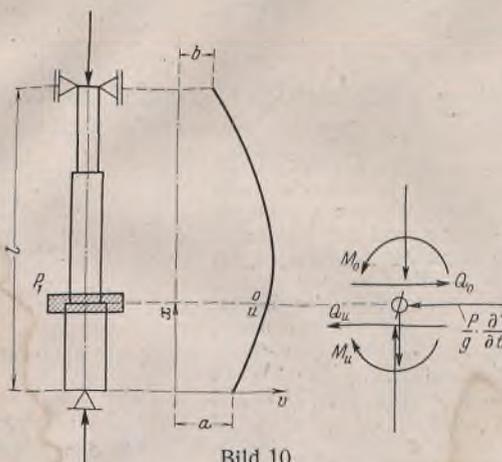


Bild 10.

überstehen, welche die gemeinsame Ausbiegung, die gemeinsame Tangente und das Gleichgewicht des Balkenelementes im Absatzpunkte bedingen:

$$(41) \quad \begin{aligned} v_o &= v_u \\ v_o' &= v_u' \\ M_o &= M_u \\ (EJv'')_o &= (EJv'')_u \\ Q_o &= Q_u + \frac{P}{g} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (EJv''')_o &= (EJv''')_u + \frac{P}{g} \cdot \omega^2 v. \end{aligned}$$

Bedacht muß werden, daß eine absatzweise Änderung der Achskräfte nur durch Gewichte erfolgen kann, welche während des Schwingungsvorganges Trägheitskräfte hervorrufen. Das Eigengewicht der Stababschnitte kann man näherungsweise berücksichtigen, indem man bei der Berechnung von ε und δ jeweils das halbe Gewicht eines Abschnitts zur Achskraft hinzuschlägt.

Bei einer größeren Zahl von Abschnitten, bei stetig veränderlichem Trägheitsmoment und ebensolcher Achskraft (Bild 11) empfiehlt sich die Anwendung der Energiemethode. Für die Formänderung geht man von dem Ansatz

$$(42) \quad v(x, t) = \left(b \cdot \frac{x}{l} + a \cdot \frac{l-x}{l} + C_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + C_2 \cdot \sin \frac{2\pi x}{l} + C_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right) \sin \omega t = v(x) \sin \omega t \text{ aus.}$$

Die auf dem Wege des Stabes von der Mittenlage zur Amplitude aufgewendete Formänderungsarbeit wird von den Lasten, den Trägheitskräften ihrer Massen, den Gewichten der Stabelemente und den Trägheitskräften der Massen dieser Stabelemente geleistet.

$$(43) \quad \text{Daher gilt} \quad A_i = A_a,$$

wenn unter A_i die Formänderungsarbeit und unter A_a die Summe der potentiellen und der kinetischen Energien verstanden wird. Führt man die Ausbiegungen und ihre Ableitungen in Gl. (43) ein, so entsteht

$$(44) \quad \int_0^l \frac{1}{2} \cdot v'^2 EJ dx = \sum_0^{x_p} P \int_0^{x_p} \frac{1}{2} \cdot v'^2 dx + \sum \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} (v_P \omega)^2 + \int_0^l g \mu dx \int_0^x \frac{1}{2} \cdot v'^2 dx + \int_0^l \frac{1}{2} \cdot \mu dx (v \omega)^2.$$

Der Widerstand, den die Balkenelemente und die Einzelmassen der Verdrehung um v' entgegensetzen, ist dabei vernachlässigt. Der Umstand, daß die wirkliche Amplitudenlinie aus mehreren in den Angriffspunkten der Einzellasten ineinander übergehenden Ästen besteht, wird mit wachsender Gliederzahl der Gl. (42) bedeutungslos.

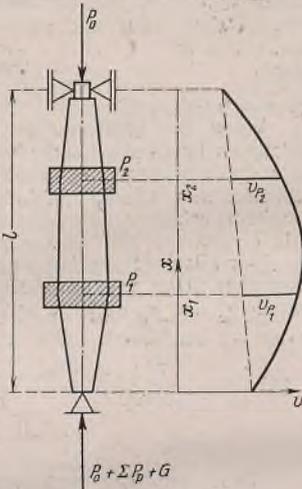


Bild 11.

Die Integrationen werden abschnittsweise entweder strenge oder mit einer Quadraturformel angenähert durchgeführt.

In dem Arbeitsvergleich Gl. (44) sind nur quadratische Glieder der Ausbiegungen und ihrer Ableitungen enthalten. Daher muß

$$(45) \quad A = A_i - A_a = \min$$

sein⁹⁾ was nur durch

$$(46) \quad \frac{\partial A}{\partial C_1} = 0 \quad \frac{\partial A}{\partial C_2} = 0 \quad \frac{\partial A}{\partial C_3} = 0 \dots$$

erreicht werden kann. Setzt man in Gl. (42) $v(x)$ mit n Koeffizienten $C_1 \dots C_n$ an, so liefert die Bedingung (46) n zugehörige Gleichungen, welche $C_1 \dots C_n$ als Funktion der Endamplituden a und b darstellen. Der Verlauf der Biegemomente folgt wieder aus Gl. (10).

Die Bestimmung der Eigenschwingungszahlen ist ebenfalls mit Hilfe der Gl. (44) u. (46) möglich. Die Bedingung $a = b = 0$ liefert zusammen mit der Bedingung Gl. (46) n für die Werte C homogene Gleichungen zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \dots \omega_n$$

und der zugehörigen Gruppen

$$\left(\frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_1}, \dots, \frac{C_n}{C_1} \right)_{1, 2, \dots, n}$$

Hierdurch wird auch bei veränderlichen Querschnitten die Bestimmung der Resonanz-Achslast möglich.

Teilt man Gl. (44) durch A_i , so erhält man

$$(47) \quad \sum \frac{P_p}{P_{pk}} + \sum \frac{\omega_1^2}{\omega_p^2} + \frac{G}{G_k} + \frac{\omega_1^2}{\omega_G^2} \approx 1,$$

also eine Verallgemeinerung der Formel von Dunkerley¹⁰⁾. Dabei bedeuten: P_{pk} die statisch kritischen Lasten am Angriffspunkte der jeweiligen Last P_p , ω_p die niederste Eigenkreisfrequenz des nur mit der Masse P/g behafteten waagerechten Balkens, G_k das statisch kritische Eigengewicht des Balkens, ω_G die niederste Eigenkreisfrequenz des unbelasteten, waagerechten Balkens und ω_1 die niederste Eigenkreisfrequenz des lotrechten Balkens.

Wenn nur die am Balkenende angreifende Achslast vorhanden ist, gilt bei kleinem Eigengewicht die im Schrifttum bereits vorfindliche Beziehung

$$(48) \quad \frac{P_0}{P_{0k}} + \frac{\omega_1^2}{\omega_G^2} \approx 1.$$

Ein anderer Weg zur Behandlung des Schwingungsproblems lotrechter Stäbe mit veränderlichem Querschnitt besteht in der Auswertung der diesbezüglichen Differentialgleichung mittels der Differenzenrechnung¹¹⁾.

Die Bestimmung der Eigenschwingzahl achsrecht belasteter Stäbe hat auch bei rotierenden Stäben Bedeutung, da die in ihnen entstehenden Fliehkräfte unbegrenzt groß werden, wenn die Winkelgeschwindigkeit der Rotation und die Kreisfrequenzen der Eigenbiegeschwingungen übereinstimmen.

⁹⁾ Th. Pöschl, Über die Minimalprinzipie der Elastizitätstheorie. Bauing. 1936, S. 160.

¹⁰⁾ z. B. in L. Zipperer, Technische Schwingungslehre, II. Bd., S. 105. Berlin 1927.

Alle Rechte vorbehalten.

Zur Windberechnung vielstockiger, zweistieliger, symmetrischer Rahmen.

Von Dipl.-Ing. Franz Obert, Saarbrücken.

Die Windlasten greifen in den Steifknoten an. Um bei der Ermittlung der Knotenmomente zeitraubende Berechnungen zu vermeiden, wird sehr häufig von der bekannten Näherungsmethode Gebrauch gemacht, die für die Stiele jeweils in halber Geschoßhöhe und für die Riegel ebenfalls in der Mitte Gelenke annimmt und damit das Anschreiben der Momente aus den Querkräften ohne weiteres gestattet.

Dieses sehr einfache Verfahren gibt aber mitunter für das oberste Rahmenfeld beträchtlich unzutreffende Werte, wie aus nachstehendem, der Praxis entnommenen Beispiel eines fünfstockigen Rahmens hervorgeht.

Wie eine sehr gute Annäherung auf verhältnismäßig einfache Weise erzielt wird, soll an demselben Beispiel gezeigt werden, unabhängig davon, ob die Stützenfüße gelenkig aufgesetzt oder ganz oder teilweise eingespannt sind.

In Bild 1 sind die Abmessungen des Rahmensystems, die Windkräfte, die Querkräfte und die Trägheitsmomente der Stiele und Riegel angegeben. Die Trägheitsmomente sind alle auf das Trägheitsmoment J_c der Stiele h_1 im fünften Geschoß bezogen. Außerdem sind die Momente M der Windkräfte hinsichtlich der einzelnen Steifknoten sowie die Werte $\frac{Q}{2} \cdot h$ für jedes Rahmenfeld aufgeführt und schließlich sind nachstehend noch die für die genaue Berechnung erforderlichen reduzierten Längen aller Stäbe festgelegt:

$$\begin{aligned} h_1' &= \frac{6,1 J_c}{J_c} = 6,10 \text{ m} & h_2' &= \frac{5,3 J_c}{1,65 J_c} = 3,21 \text{ m} \\ h_3' &= \frac{5,1 J_c}{1,85 J_c} = 2,76 \text{ m} & h_4' &= \frac{4,5 J_c}{2 J_c} = 2,25 \text{ m} \\ h_5' &= \frac{5,5 J_c}{2 J_c} = 2,75 \text{ m} \end{aligned}$$

$$l_1' = \frac{10,06 J_c}{16 J_c} = 0,629 \text{ m} \quad l_2' = \frac{10,06 J_c}{2 J_c} = 5,03 \text{ m}$$

$$l_3' = \frac{10,06 J_c}{2,4 J_c} = 4,19 \text{ m} \quad l_4' = \frac{10,06 J_c}{2 J_c} = 5,03 \text{ m}$$

$$l_5' = \frac{10,06 J_c}{2,4 J_c} = 4,19 \text{ m}$$

und bei teilweiser Fußeinspannung

$$l_5' = \frac{10,06 J_c}{2,4 J_c} = 4,19 \text{ m.}$$

In den Bildern 2, 3 u. 4 sind die mit Hilfe des Viermomentensatzes ermittelten, genauen Knotenmomente dargestellt, und zwar in Bild 2 bei teilweiser Einspannung der Stützenfüße, die auch der Auswertung zugrunde gelegt war. Die teilweise Einspannung ist durch Einführen eines Stabes mit dem Trägheitsmoment $2,4 J_c$ berücksichtigt.

In Bild 3 sind die Momente bei gelenkiger Fußstützung und in Bild 4 bei voller Fußeinspannung eingeschrieben.

Der Vergleich der Bilder 2 bis 4 zeigt, daß die oberen Rahmenfelder von der Art der Fußstützung nur wenig beeinflußt werden.

In Bild 5 sind die Knotenmomente dargestellt, die sich nach der bekannten und eingangs erwähnten Näherungsmethode (Annahme von Gelenken in den Stabmitten) ergeben (vgl. Stahlbau-Kalender 1940, S. 284).

Unabhängig von der Art der Fußstützung können die Momente des obersten Feldes genügend genau nach Bild 2 bis 4 wie folgt angenommen werden:

$$\begin{aligned} \text{oberes Eckmoment} & M_o = 72,0 \text{ tm} \\ \text{Stielmoment} & M_n = 37,6 \text{ tm} \\ \text{Riegelmoment} & M_m = 134,1 \text{ tm.} \end{aligned}$$

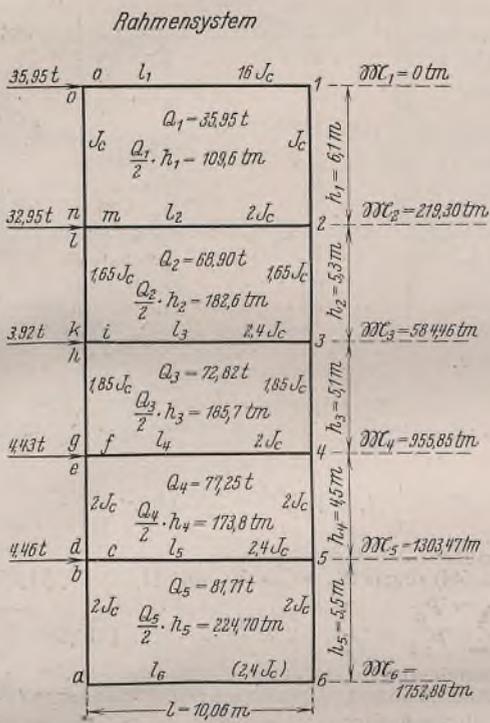


Bild 1.

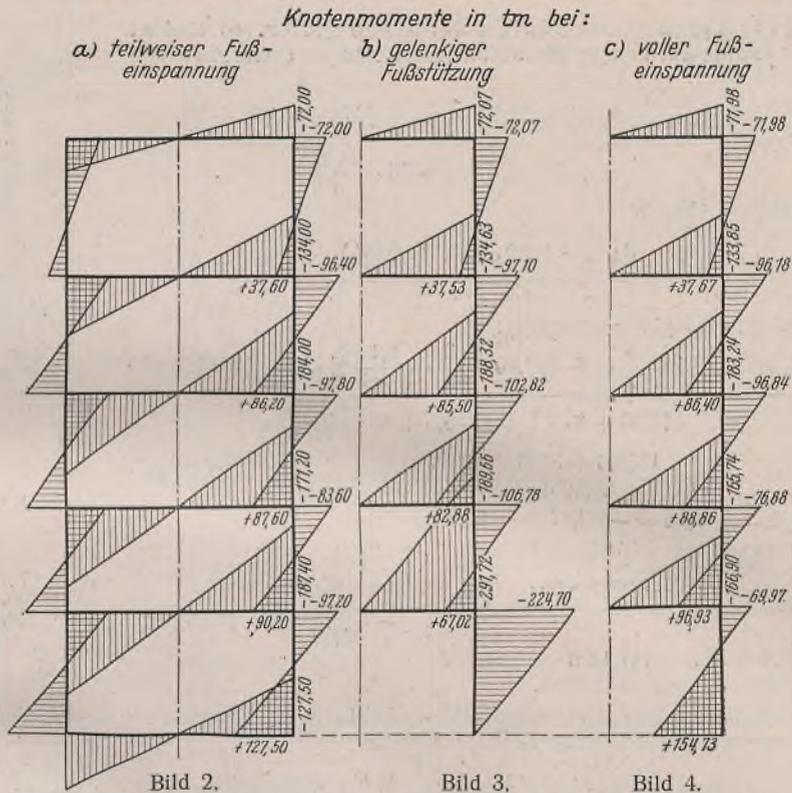


Bild 2.

Bild 3.

Bild 4.

Demgegenüber ergeben sich nach der allgemeinen Näherungsmethode laut Bild 5 die nachstehenden Momente:

- oberes Eckmoment $M_o = 54,8 \text{ tm}$ ($-23,9\%$)
- Stielmoment $M_n = 54,8 \text{ tm}$ ($+45,7\%$)
- Riegelmoment $M_m = 146,1 \text{ tm}$ ($+9,0\%$)

d. h. Abweichungen von den richtigen Werten wie eingeklammert in % angegeben.

Da die Art der Fußstützung auf die Momente der oberen Felder nur geringen Einfluß hat, kommt man zu einer recht guten Annäherung, wenn man die beiden oberen Rahmenfelder für sich als zweistöckigen Rahmen mit elastischer Fußeinspannung betrachtet und dabei von den Riegelmomenten des dritten Riegels ausgeht, die in Bild 6 mit M_e bezeichnet sind und zu

$$(1) M_e = \frac{Q_2}{2} \cdot \frac{h_2}{2} + \frac{Q_3}{2} \cdot \frac{h_3}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{Q_2}{2} \cdot h_2 + \frac{Q_3}{2} \cdot h_3 \right)$$

eingesetzt werden.

Für den linken Rahmenstiel ergeben sich dann die Knotenmomente wie folgt:

Das Eckmoment M_5 des obersten Riegels bestimmt sich aus der Gleichung:

$$(2) M_5 = \frac{l_3' M_e + \frac{3}{2} \cdot h_2' (M_3 + M_2) + \frac{3}{2} \cdot \frac{h_1'}{l_2'} (6 h_2' + l_2') (M_2 + M_1)}{l_1' + 6 (h_1' + h_2') + 6 \cdot \frac{h_2'}{l_2'} (6 h_1' + l_1')}$$

Hierin bezeichnen M_1 bzw. M_2 bzw. M_3 die Momente der über dem Steifknoten 1 bzw. 2 bzw. 3 liegenden Windkräfte in bezug auf diese Knoten.

Entspricht das in die Berechnung eingeführte M_e dem genauen Wert, so ergibt sich auch M_5 genau. Die Formel kann daher auch als Kontrollformel dienen.

Mit M_5 ist auch M_4 bestimmt, da

$$M_5 - M_4 = \frac{Q_1}{2} \cdot h_1 \text{ ist, oder}$$

$$(3) M_4 = M_5 - \frac{Q_1}{2} \cdot h_1.$$

(Die absolute Summe von M_4 und M_5 ist $= \frac{Q_1}{2} \cdot h_1$.)

Weiter folgt M_2 aus der Gleichung

$$(4) M_2 = \frac{l_3' M_e + 3 \left(\frac{Q_2}{2} \cdot h_2 \right) h_2' + M_4 l_2'}{6 h_2' + l_2'}$$

(Vorzeichen von M_4 beachten.)

Das Riegelmoment M_3 folgt aus: $M_2 = M_3 + M_4$ oder:

$$(5) M_3 = M_2 - M_4 = \frac{Q_2}{2} \cdot h_2$$

und endlich folgt aus: $M_2 - M_1 = \frac{Q_2}{2} \cdot h_2$

$$(6) M_1 = M_2 - \frac{Q_2}{2} \cdot h_2.$$

Die Durchrechnung für den vorliegenden Fall ergibt (vgl. Bild 1):

$$M_e = \frac{1}{2} (182,6 + 185,7) = 184,15 \text{ tm}$$

und mit $M_1 = 0$ $M_2 = 219,30 \text{ tm}$ $M_3 = 584,46 \text{ tm}$
 $M_1 + M_2 = 219,30 \text{ tm}$ $M_2 + M_3 = 803,76 \text{ tm}$
 $l_1' = 0,629 \text{ m}$ $l_2' = 5,03 \text{ m}$ $l_3' = 4,19 \text{ m}$
 $h_1' = 6,1 \text{ m}$ $h_2' = 3,21 \text{ m}$

$$M_5 = \frac{4,19 \cdot 184,15 + \frac{3}{2} \cdot 3,21 \cdot 803,76 + \frac{3}{2} \cdot \frac{6,1}{5,03} (6 \cdot 3,21 + 5,03) 219,30}{0,629 + 6 (6,1 + 3,21) + 6 \cdot \frac{3,21}{5,03} (6 \cdot 6,1 + 0,629)}$$

$$= \frac{772 + 3870 + 9690}{0,63 + 55,86 + 142,55} = \frac{14332}{199,04} = 72,0 \text{ tm.}$$

$$M_4 = 72,0 - 109,6 = -37,6 \text{ tm}$$

$$M_2 = \frac{4,19 \cdot 184,15 + 3 \cdot 182,6 \cdot 3,21 - 37,6 \cdot 5,03}{6 \cdot 3,21 + 5,03} = \frac{772 + 1758 - 189}{24,29} = \frac{2341}{24,29} = +96,38 \text{ tm}$$

$$M_3 = 96,38 + 37,60 = 133,98 \text{ tm}$$

$$M_1 = 96,38 - 182,60 = -86,22 \text{ tm,}$$

d. h. nahezu übereinstimmend mit den genauen Werten. Gl. (2) gibt auch einen schnellen Überblick über den Einfluß der Änderung der Trägheitsverhältnisse.

Hätte beispielsweise der oberste Riegel das Trägheitsmoment $2 J_c$ statt $16 J_c$, so wäre

$$l_1' = \frac{10,06 J_c}{2 J_c} = 5,03 \text{ m (statt } 0,629 \text{ m).}$$

Da l_1' nur im Nenner vorkommt, wird in diesem Fall:

$$M_5 = \frac{14332}{5,03 + 55,86 + 6 \cdot \frac{3,21}{5,03} (6 \cdot 6,1 + 5,03)} = \frac{14332}{220,29} = 65,06 \text{ tm (statt } 72,0 \text{ tm).}$$

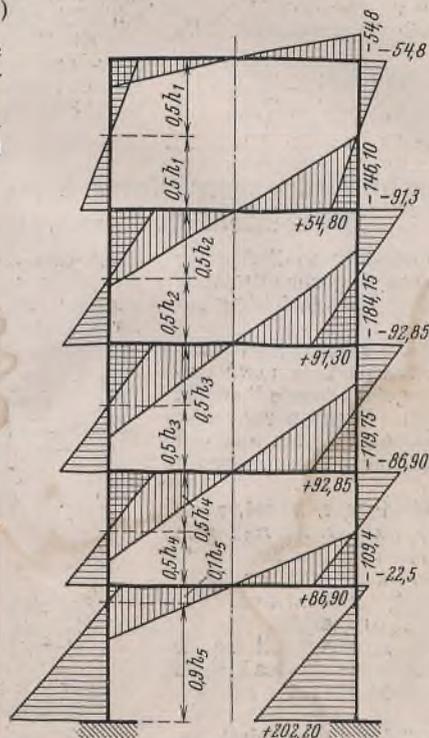


Bild 5.

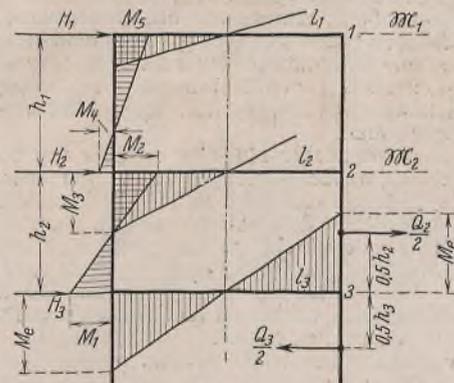


Bild 6.

Sind die Trägheitsmomente aller Stäbe gleich, so sind an Stelle der reduzierten Längen die wirklichen Stablängen einzusetzen und Gl. (2) lautet dann:

$$(2a) M_5 = \frac{l M_e + \frac{3}{2} \cdot h_2 (\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_2) + \frac{3}{2} \cdot \frac{h_1}{l} (6 h_2 + l) (\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1)}{l + 6 h_1 + 12 h_2 + 36 \cdot \frac{h_1 h_2}{l}}$$

und Gl. (4) geht über in

$$(4a) M_2 = \frac{3 \left(\frac{Q_2}{2} \cdot h_2 \right) h_2 + l (M_e + M_4)}{6 h_2 + l}$$

Auf obiges Beispiel angewendet:

$$M_5 = \frac{10,06 \cdot 184,15 + \frac{3}{2} \cdot 5,3 \cdot 803,76 + \frac{3}{2} \cdot \frac{6,1}{10,06} (6 \cdot 5,3 + 10,06) 219,30}{10,06 + 6 \cdot 6,1 + 12 \cdot 5,3 + 36 \cdot \frac{6,1 \cdot 5,3}{10,06}}$$

$$= \frac{1852,5 + 6390 + 8349,5}{10,06 + 36,60 + 63,60 + 115,69} = \frac{16592}{225,95} = 73,43 \text{ tm}$$

$$M_4 = 73,43 - 109,60 = -36,17 = -36,2 \text{ tm}$$

$$M_2 = \frac{3 \cdot 182,6 \cdot 5,3 + 10,06 (184,15 - 36,17)}{6 \cdot 5,3 + 10,06} = \frac{2903 + 1489}{41,86} = \frac{4392}{41,86} = +104,9 \text{ tm}$$

$$M_3 = 104,9 + 36,2 = 141,1 \text{ tm}$$

$$M_1 = 104,9 - 182,6 = -77,7 \text{ tm}$$

Bei gleichen Stockwerkshöhen und gleichen Trägheitsmomenten für alle Stäbe geht Gl. (2) über in

$$(2b) M_5 = \frac{l M_e + \frac{3}{2} \cdot h (\mathfrak{M}_3 + \mathfrak{M}_2) + \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{l} (6 h + l) (\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_1)}{l + 18 h \left(1 + \frac{2 h}{l} \right)}$$

und Gl. (4) in

$$(4b) M_2 = \frac{3 \left(\frac{Q_2}{2} \cdot h \right) h + l (M_e + M_4)}{6 h + l}$$

Weiteres Beispiel (Bild 7 u. 8):

Einem achtstockigen Rahmen entnommen.

In Bild 7 sind die Knotenmomente eingeschrieben, die sich bei der genauen Berechnung mit eingespannten Stützenfüßen ergeben haben.

In Bild 8 sind die Knotenmomente dargestellt, die sich nach der allgemein bekannten Näherungsmethode (Gelenke in den Stabmitten) ergeben.

Nach Bild 7:

- oberes Eckmoment $M_5 = 0,659 \text{ tm}$
- Stielmoment $M_4 = 0,241 \text{ tm}$
- Rieglmoment $M_3 = 1,713 \text{ tm}$

Nach Bild 8:

- oberes Eckmoment $M_5 = 0,45 \text{ tm} (-31,8\%)$
- Stielmoment $M_4 = 0,45 \text{ tm} (+87,5\%)$
- Rieglmoment $M_3 = 1,80 \text{ tm} (+5,3\%)$

d. h. Abweichungen von den richtigen Werten wie eingeklammert in % angegeben.

Nach den vorstehend angegebenen Formeln wird mit:

$$l_1' = l_2' = 13,8 \text{ m} \quad l_3' = 8,95 \text{ m} \quad h_1' = h_2' = 11,5$$

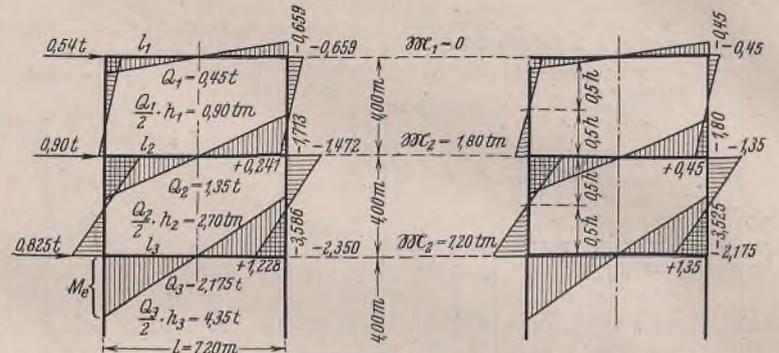


Bild 7.

Bild 8.

und $\mathfrak{M}_1 = 0$ $\mathfrak{M}_2 = 1,80 \text{ tm}$ $\mathfrak{M}_3 = 7,2 \text{ tm}$
 $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = 1,80 \text{ tm}$ $\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 = 9,0 \text{ tm}$,
 nach Gl. (1)

$$M_e = \frac{1}{2} (2,70 + 4,35) = 3,525 \text{ tm},$$

nach Gl. (2)

$$M_5 = \frac{8,95 \cdot 3,525 + \frac{3}{2} \cdot 11,5 \cdot 9,0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{11,5}{13,8} (6 \cdot 11,5 + 13,8) 1,80}{13,8 + 6 (11,5 + 11,5) + 6 \cdot \frac{11,5}{13,8} (6 \cdot 11,5 + 13,8)}$$

$$= \frac{31,48 + 155,25 + 186,30}{13,8 + 138,0 + 414,0} = \frac{373,03}{565,8} = 0,659 \approx 0,66 \text{ tm}$$

$$M_4 = 0,66 - 0,90 = -0,24 \text{ tm},$$

nach Gl. (4)

$$M_2 = \frac{8,95 \cdot 3,525 + 3 \cdot 2,70 \cdot 11,5 - 0,24 \cdot 13,8}{6 \cdot 11,5 + 13,8} = \frac{31,48 + 93,15 - 3,31}{82,8} = \frac{121,32}{82,8} = 1,465 \approx 1,47 \text{ tm}$$

$$M_3 = 1,47 + 0,24 = 1,71 \text{ tm},$$

d. h. mit den genauen Werten gut übereinstimmend.

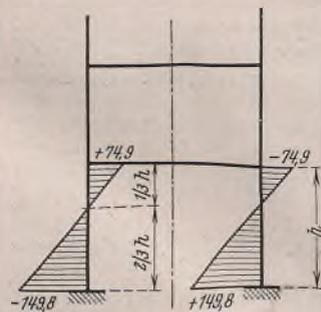


Bild 9.

In Bild 9 ist beiläufig angedeutet, daß bei Anwendung der allgemeinen Näherungsmethode nach Stahlbau-Kalender 1940, S. 284, die dort für das unterste Rahmenfeld angegebene Gelenklage von $0,9 h_1$ und $0,1 h_1$ natürlich keinen Anspruch auf allgemeine Gültigkeit hat.

In Bild 5 wurde diese Annahme zu Vergleichszwecken beibehalten, wobei sich Stielmomente von $+202,2 \text{ tm}$ und $-22,5 \text{ tm}$ ergaben.

Die genaue Berechnung ergab aber laut Bild 4 Stielmomente von $+154,73 \text{ tm}$ und $-69,97 \text{ tm}$, was ungefähr der Gelenklage in Bild 9 von $2/3 h_1$ und $1/3 h_1$ entspricht. Hiermit ergäben sich Stielmomente von $+149,8 \text{ tm}$ und $-74,9 \text{ tm}$, die den richtigen Werten erheblich näher liegen.

Die Gelenklage $0,9 h_1$ und $0,1 h_1$ wird beispielsweise dann auftreten, wenn das unterste Geschoß wesentlich niedriger ist als die folgenden, während schon bei ungefähr gleichen Geschoßhöhen die Gelenke eher bei $2/3 h_1$ und $1/3 h_1$ entsprechend Bild 9 liegen werden.

Beitrag zur praktischen Durchbiegungsermittlung für einfache und durchlaufende Träger.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Ingenieur Fritz Steinack, München.

Die heute an jeden gestellte höchste Anforderung an Steigerung der Leistung verlangt die Nutzbarmachung jeder nur möglichen Ersparnis bzw. Vereinfachung der Arbeit. Mit nachfolgendem soll ein Beitrag zur Zeiteinsparung gebracht werden.

Für die aus gleichmäßig verteilter Last und aus regelmäßigen Lastgruppen (z. B. Einzellasten in den Drittels-, Viertelpunkten usw.) entstehenden Durchbiegungen gibt es unmittelbar zu gebrauchende Formeln, die den Bedürfnissen der Praxis gerecht werden. Dagegen verursacht die Ermittlung der Durchbiegung aus unregelmäßigen Lasten und vor allem aus Wanderlasten eine meist recht umständliche und zeitraubende Rechenarbeit.

Umständlicher wird dies noch für den Durchlaufträger, zumal, wenn mehrere Wanderlastgruppen (z. B. zwei oder mehrere Krane) vorliegen, die natürlich auch noch in den Nachbarfeldern ihren Einfluß auf das zu untersuchende Feld geltend machen. Erschwerend kommt weiter hinzu, daß die erstermittelte Laststellung für die Feststellung der Größtmomente nicht immer gleichzeitig auch die Größtdurchbiegung ergibt.

Mit den beigegebenen Tafeln soll die Durchbiegungsermittlung für den Balken auf zwei bis fünf Stützen und für das Innenfeld des Trägers sehr vieler Felder mit gleichbleibendem Trägheitsmoment auf ein Mindestmaß beschränkt werden.

Die errechneten Werte, welche zu Einflußlinien (Biegelinien) zusammengestellt sind, entsprechen der elastischen Verformung des Trägers

durch eine Last von der Größe 1, angreifend jeweils in Feldmitte. Nach dem Satz von Maxwell von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen ist dann diese Biegelinie bekanntlich gleichzeitig Einflußlinie für die Durchbiegung in Feldmitte, welche durch an beliebig anderer Stelle wirkende Lasten hervorgerufen wird. Jede Last erzeugt also in Feldmitte die Durchbiegung, die der unter ihr befindlichen Ordinate η entspricht. Alle in Tafel 1 und 2 enthaltenen Werte der Einflußlinien sind zu multiplizieren mit dem Faktor $\frac{P l^3}{E J}$.

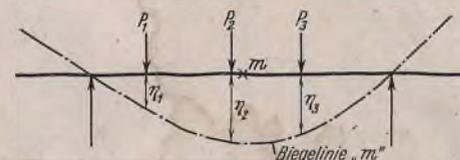


Bild 1.

Für mehrere Lasten ist also die Durchbiegung in Trägermitte (Bild 1)

$$f = \frac{l^3}{E J} (P_1 \eta_1 + P_2 \eta_2 + P_3 \eta_3 + \dots) \text{ oder } f = \frac{l^3}{E J} \cdot \Sigma P \eta$$

Für die Benutzung der regulären Tafelwerte sind alle Werte in kg und cm einzusetzen.

Will man in bequemeren Zahlen rechnen und setzt man, wie oft gebräuchlich, P in t, l in m, J in cm^4 , ferner für Stahl $E = 2,1$, so gelten

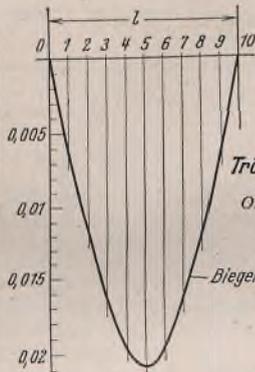
die 1000fachen Tabellenwerte. (Für Eisenbeton müßte entsprechend $E = 0,21$, für Holz $E = 0,1$ bzw. $0,125$ eingesetzt werden.) Es gilt dann das in Tafel 1 und 2 hochgesetzte Komma; das Ergebnis f erscheint in cm.

Streckenlasten können mit genügender Genauigkeit in Einzellasten unterteilt werden.

Tafel 1.

Abstand vom linken Auflager	Ordinate der Biegelinie	Abstand vom linken Auflager
$x:l$	η	$x:l$
0,025	0,00156	0,975
0,05	0,00372	0,95
0,075	0,00665	0,925
1/10 = 0,1	0,00677	0,9
1/8 = 0,125	0,00765	0,875 = 7/8
0,15	0,00909	0,85
1/6 = 0,166...	0,01003	0,833... = 5/6
0,175	0,01049	0,825
1/5 = 0,2	0,01183	0,8 = 4/5
0,225	0,01311	0,775
0,25	0,01432	0,75
0,275	0,01545	0,725
0,3	0,01650	0,7
0,325	0,01745	0,675
1/3 = 0,333...	0,01775	0,666... = 2/3
0,35	0,01830	0,65
3/8 = 0,375	0,01904	0,625
2/5 = 0,4	0,01967	0,6 = 3/5
0,425	0,02017	0,575
0,45	0,02053	0,55
0,475	0,02076	0,525
1/2 = 0,5	0,02083	0,5 = 1/2

$$\times \frac{P \cdot l^3}{E \cdot J}$$



Träger auf 2 Stützen

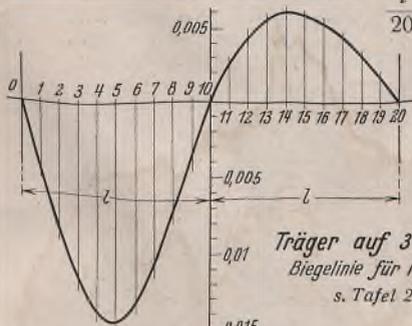
Ordinaten nach nebenstehender Tafel 1

Biegelinie für Trägermitte 5

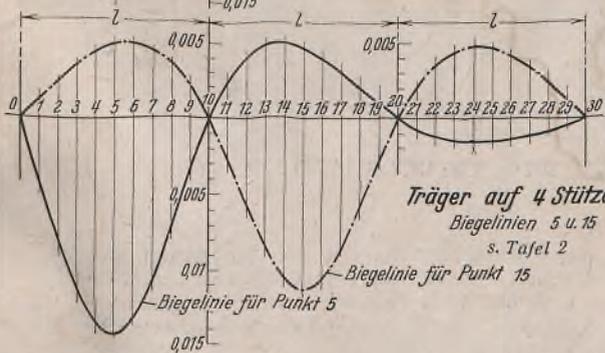
Mit dem Gebrauch dieser Tafeln verzichten wir auf die absolut genaue Ermittlung der Größtdurchbiegung und beschränken uns auf die Durchbiegung in Feldmitte. Die Differenz dieser beiden Werte ist am größten in den Endfeldern und kaum merklich in den Innenfeldern,

in beiden Fällen aber ohne weiteres als sehr klein zu vernachlässigen.

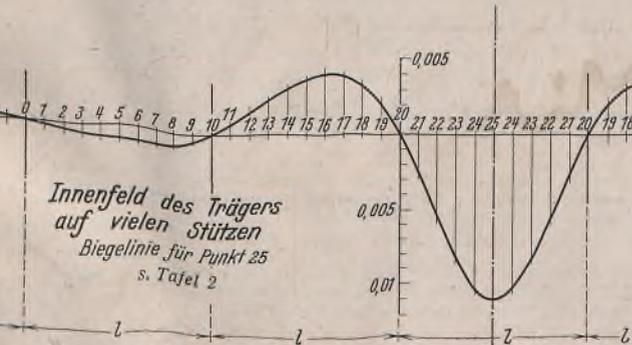
Für den besonderen Fall des Trägers auf zwei Stützen sind die η -Werte in Tafel 1 in Abständen von $0,025 l$ errechnet worden, außerdem sind die Sechstelwerte erfasst. Für die Kurven der Durchlaufträger in Tafel 2 wurden die Ordinatenhöhen im allgemeinen in Zehntelabständen ermittelt. Die mittleren Fünftel der zu untersuchenden Felder sind wegen der stärkeren Kurvenkrümmung in $\frac{l}{20}$ unterteilt worden.



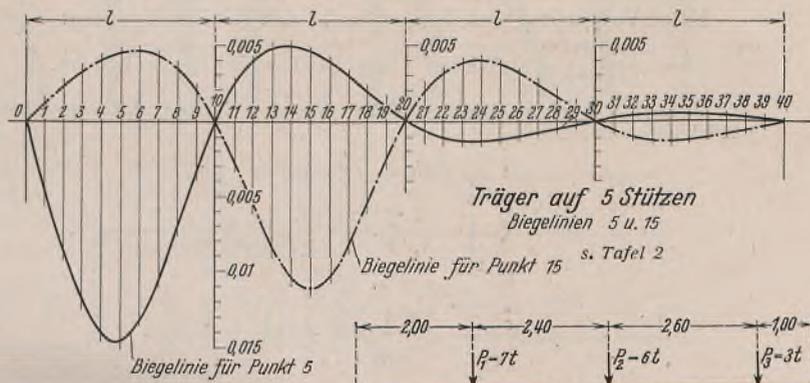
Träger auf 3 Stützen
Biegelinie für Punkt 5
s. Tafel 2



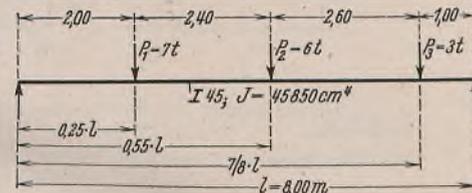
Träger auf 4 Stützen
Biegelinien 5 u. 15
s. Tafel 2



Innenfeld des Trägers auf vielen Stützen
Biegelinie für Punkt 25
s. Tafel 2



Träger auf 5 Stützen
Biegelinien 5 u. 15
s. Tafel 2



Beispiel 1. Ein Träger INP 45 auf zwei Stützen, belastet nach nebenstehendem Bilde 2.

Bild 2.

Tafel 2. Biegelinien für den Durchlaufträger.

Ordinate Nr.	Träger auf drei Stützen	Träger auf vier Stützen		Träger auf fünf Stützen		Träger auf vielen Stützen	Ordinate Nr.
	Biegelinie 5	Biegelinie 5	Biegelinie 15	Biegelinie 5	Biegelinie 15	Biegelinie 25	
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0,004'62	0,004'52	- 0,001'24	0,004'51	- 0,001'21	0,000'19	1
2	8'83	8'63	- 2'40	8'62	- 2'36	0'41	2
3	0,012'23	0,011'95	- 3'41	0,011'93	- 3'35	0'63	3
4	14'41	14'07	- 4'20	14'04	- 4'12	0'83	4
4,5	14'92	14'55		14'53			4,5
5	14'97	14'58	- 4'69	14'56	- 4'60	0'97	5
5,5	14'53	14'14		14'11			5,5
6	13'66	13'27	- 4'80	13'24	- 4'71	1'04	6
7	10'92	10'55	- 4'46	10'53	- 4'38	1'00	7
8	0,007'33	0,007'03	- 3'60	0,007'01	- 3'53	0'84	8
9	3'49	3'32	- 2'14	3'31	- 2'10	0'51	9
10	0	0	0	0	0	0	10
11	- 0,002'67	- 0,002'44	0,002'79	- 0,002'42	0,002'74	- 0,000'70	11
12	- 4'50	- 4'00	5'83	- 3'96	5'73	- 1'52	12
13	- 5'58	- 4'81	8'63	- 4'75	8'47	- 2'34	13
14	- 6'00	- 5'00	0,010'67	- 4'93	0,010'46	- 3'08	14
14,5			11'25		11'02		14,5
15	- 5'86	- 4'69	11'46	- 4'60	11'22	- 3'63	15
15,5			11'25		11'00		15,5
16	- 5'25	- 4'00	10'67	- 3'91	10'41	- 3'88	16
17	- 4'27	- 3'06	0,008'63	- 2'97	0,008'37	- 3'75	17
18	- 3'00	- 2'00	5'83	- 1'93	5'62	- 3'12	18
19	- 1'55	- 0'94	2'79	- 0'89	2'56	- 1'91	19
20	0	0	0	0	0	0	20
21		0,000'71	- 0,002'14	0,000'65	- 0,001'96	0,002'60	21
22		1'20	- 3'60	1'07	- 3'21	5'50	22
23		1'49	- 4'46	1'29	- 3'86	8'18	23
24		1'60	- 4'80	1'34	- 4'01	0,010'16	24
24,5						10'73	24,5
25		1'56	- 4'69	1'26	- 3'76	10'93	25
25,5							25,5
26		1'40	- 4'20	1'07	- 3'21		26
27		1'14	- 3'41	0'82	- 2'46		27
28		0'80	- 2'40	0'54	- 1'61		28
29		0'41	- 1'24	0'25	- 0'75		29
30		0	0	0	0		30
31				- 0,000'19	0,000'57		31
32				- 0'32	0'97		32
33				- 0'40	1'20		33
34				- 0'43	1'29		34
35				- 0'42	1'26		35
36				- 0'38	1'13		36
37				- 0'31	0'92		37
38				- 0'21	0'64		38
39				- 0'11	0'33		39
40				0	0		40

Alle Ordinatenwerte sind zu multiplizieren mit $\frac{P l^3}{E J}$.

Unter Verwendung von Tafel 1 ergibt sich die Durchbiegung:

$$f = \frac{8,0^3}{2,1 \cdot 45\,850} (7,0 \cdot 14,32 + 6,0 \cdot 20,53 + 3,0 \cdot 7,65) = 1,31 \text{ cm.}$$

Beispiel 2. Ein Träger INP 24 auf vier Stützen, belastet nach nachstehendem Bild 3.

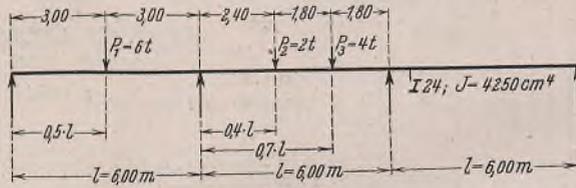


Bild 3.

a) Durchbiegung des Innenfeldes: Maßgebend ist Biegelinie 15 des Trägers auf vier Stützen, Tafel 2.

Wir lesen ab:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -4,69 \text{ (Ordinate 5)} \\ \eta_2 &= +10,67 \text{ (" 14)} \\ \eta_3 &= +8,63 \text{ (" 17).} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$f = \frac{6,0^3}{2,1 \cdot 4250} (-6,0 \cdot 4,69 + 2,0 \cdot 10,67 + 4,0 \cdot 8,63) = 0,67 \text{ cm.}$$

b) Durchbiegung des linken Endfeldes: Maßgebend ist Biegelinie 5.

$$\begin{aligned} \eta_1 &= +14,58 \text{ (Ordinate 5)} \\ \eta_2 &= -5,00 \text{ (" 14)} \\ \eta_3 &= -3,06 \text{ (" 17).} \end{aligned}$$

$$f = \frac{6,0^3}{2,1 \cdot 4250} (+6,0 \cdot 14,58 - 2,0 \cdot 5,0 - 4,0 \cdot 3,06) = 1,58 \text{ cm.}$$

Mit diesen Beispielen dürfte der Tafelgebrauch geläufig sein. Treten mehrere Wanderlastgruppen auf, so müssen die ungünstigsten auf dem zu untersuchenden Feld möglichst nahe nebeneinander gestellt werden; weitere Lastgruppen sind in den zweiten Nachbarfeldern zur Aufstellung zu bringen (vgl. Bild 5). In solchen Fällen wird sich meist erst durch Probieren die ungünstigste Stellung ermitteln lassen.

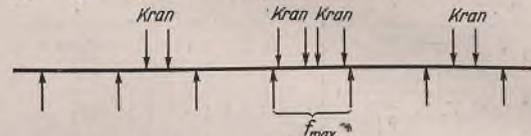


Bild 5.

Für den oft wiederkehrenden Fall, daß zwei gleichgroße Wanderlasten als Belastung auftreten, sind in Tafel 3 die Werte V , abhängig vom Verhältnis $a:l$, für die verschiedenen Träger zusammengestellt. Aus der Tafel sind auch die Stellungen, in welchen die Größtdurchbiegungen auftreten, ersichtlich. Dabei ist beim Träger auf zwei Stützen und bei den Endfeldern der Durchlaufträger zu beachten, ob die Möglichkeit besteht, daß eine Last außerhalb des Trägersystems zu stehen kommen kann. Dies wird beim Träger auf zwei Stützen fast immer, beim kontinuierlichen Träger seltener der Fall sein. Hier gelten dann für $a > 0,65l$ die gesondert markierten Werte. Alle Tafelwerte sind zu multiplizieren mit dem Faktor $\frac{Pl^3}{EJ}$. Also

$$f = V \cdot \frac{Pl^3}{EJ}$$

Hierin ist

V der Tafel 3 zu entnehmen, J in cm^4 einzusetzen,
 P = Raddruck in t, f ergibt sich in cm,
 l = Spannweite in m, a = Radstand
 $E = 2,1$ (für Stahl), l = Trägerspannweite

Tafel 3. Werte „V“ für die Durchbiegung aus 2 gleichen Wanderlasten.

l : a	Träger auf 2 Stützen		Träger auf 3 Stützen		Endfeld: Träg. auf 4 St.		Innenfeld: Träg. auf 4 St.		2. Feld: Träg. auf 5 St.		Innenfeld: viele Stützen		l : a
	x : l	V	rd. x : l	V	rd. x : l	V	x : l	V	rd. x : l	V	x : l	V	
0,0	0,50	47,7	0,48	30,1	0,47	29,2	0,50	22,9	0,5	22,4	0,50	21,9	0,0
0,05	0,475	47,5	0,45	29,9	0,45	29,1	0,475	22,8	0,47	22,3	0,475	21,8	0,05
0,10	0,45	47,1	0,43	29,6	0,42	28,8	0,45	22,5	0,45	22,0	0,45	21,5	0,10
0,15	0,425	40,3	0,40	29,0	0,40	28,2	0,425	22,0	0,42	21,5	0,425	21,0	0,15
0,20	0,40	39,3	0,38	28,1	0,37	27,4	0,40	21,3	0,40	20,8	0,40	20,3	0,20
0,25	0,375	38,1	0,35	27,1	0,35	26,4	0,375	20,4	0,37	19,9	0,375	19,4	0,25
0,30	0,35	36,6	0,32	25,9	0,33	25,2	0,35	19,5	0,35	19,0	0,35	18,5	0,30
0,35	0,325	34,9	0,30	24,6	0,30	23,9	0,325	18,5	0,32	17,9	0,325	17,5	0,35
0,40	0,30	33,0	0,28	23,1	0,28	22,5	0,30	17,3	0,30	16,7	0,30	16,4	0,40
0,45	0,275	30,9	0,26	21,5	0,25	21,0	0,275	16,0	0,27	15,5	0,275	15,1	0,45
0,50	0,25	28,6	0,23	19,8	0,23	19,3	0,25	14,6	0,25	14,2	0,25	13,8	0,50
0,55	0,225	26,2	0,20	18,0	0,20	17,5	0,225	13,2	0,22	12,8	0,225	12,4	0,55
0,60	0,20	23,7	0,20	16,2	0,18	15,7	0,20	11,7	0,20	11,4	0,20	11,0	0,60
0,65	0,175	21,0	0,20	14,2	0,20	13,8	0,175	10,2	0,18	9,8	0,175	9,6	0,65
0,70	0,15	18,2	0,20	12,3	0,32	12,0	0,15	8,7	0,37	8,6	rd. 0,375	8,3	0,70
0,75	0,125	15,3	0,35	10,8	0,35	10,8	rd. 0,425	7,8	0,40	7,9	" 0,425	7,7	0,75
0,80	0,10	12,3	0,40	9,9	0,40	10,1	" 0,43	7,2	0,45	7,4	" 0,45	7,3	0,80
0,85	0,075	9,3	0,43	9,4	0,43	9,7	" 0,48	6,8	0,475	7,3	" 0,5	7,1	0,85
0,90	0,05	6,2	0,47	9,1	0,48	9,6	" 0,48	6,7	0,5	7,2	" 0,5	7,1	0,90
0,95	0,025	3,1	0,48	9,0	0,50	9,7	" 0,50	6,7	0,5	7,3	" 0,52	7,2	0,95
1,00	0	0	0,50	9,1	0,50	9,9	" 0,53	6,8	0,52	7,5	" 0,53	7,4	1,00

Alle Werte „V“ sind mit: $\frac{Pl^3}{E \cdot J}$ zu multiplizieren. P in t, $E_{\text{Stahl}} = 2,1$, l in m, J in cm^4 , f in cm

Beispiel 3. Das Innenfeld eines Trägers über vielen Stützen wird durch nebenstehend angegebene Rad drücke belastet. An Hand der Kurve¹⁾ ermittelt man durch Probieren die ungünstigste Laststellung für die Durchbiegung bei $x = 0,2l$. (Bild 4.)

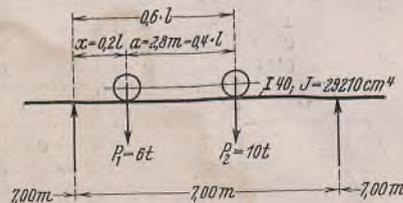


Bild 4.

Die Ordinaten sind dann

$$\eta_1 = 5,5 \quad \eta_2 = 10,16$$

und $f = \frac{7,0^3}{2,1 \cdot 29\,210} (6,0 \cdot 5,5 + 10,0 \cdot 10,16) = 0,75 \text{ cm.}$

¹⁾ Es empfiehlt sich, alle Kurven in größerem Maßstab ($l = 10 \text{ cm}$, die Kurvenwerte in dekadischem Maßstab) auf Millimeterpapier sorgfältig zu zeichnen, womit erfahrungsgemäß ein ausgezeichnetes Hilfsmittel gegeben ist.

Die Werte für das Endfeld des Balkens auf vier Stützen können auch für das Endfeld eines Trägers von fünf und mehr Stützen Verwendung finden (vgl. Ordinatenwerte in Tafel 2).

Die Werte für das zweite Feld des Trägers auf fünf Stützen können auch für Träger größerer Feldzahl gelten.

Die Werte für das Innenfeld vieler Felder können vom Mittelfeld des fünffeldrigen Trägers ab als ausreichend genau zugrunde gelegt werden.

Zu erwähnen ist noch, daß die Tafeln auch für durchlaufende Träger mit verschiedenen Spannweiten gelten, wenn die Felder gleiche Steifigkeiten haben, wenn also: $\frac{l_1}{J_1} = \frac{l_2}{J_2} = \frac{l_3}{J_3}$ usw.

INHALT: Die Biegespannungen querschwingender, achsrecht belasteter Stäbe. — Zur Windberechnung vielstöckiger, zwelseitiger, symmetrischer Röhren. — Beitrag zur praktischen Durchbiegungsermittlung für einfache und durchlaufende Träger.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Kießel, Darmstadt.
 Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
 Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
 Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
 Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
 Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
 Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
 zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
 samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 7. März 1941

Heft 6/7

Alle Rechte vorbehalten.

Der R-Träger, eine neue, leichte Trägerform.

Von Prof. Ernst Neufert, Berlin.

Beim Konstruieren leichter Dächer und Decken werden die normalen I-Profile unter Berücksichtigung der zulässigen Durchbiegung meist sehr ungünstig ausgenutzt. Es fehlt deshalb nicht an Versuchen, für solche Zwecke leichte, aufgelöste Träger zu konstruieren. Solche Bauarten fanden aber nur selten den Weg in die Praxis, weil sie durchweg teurer waren als die schweren Normalprofile, im Gegensatz zur allgemeinen Erfahrung, derzufolge die statisch am günstigsten ausgenutzte Konstruktion zumeist auch die wirtschaftlichste ist.

	Profil	Höhe cm	Gewicht kg/m
1	I 28	28	48,0
2	aus I 24	28	36,2
3	∟ 12 = 80 · 12 ∟ 12	38	36,0
4	aus I 20 = 100 · 10 aus I 20	40	33,0
5	aus I 18 = 80 · 12 aus I 18	45	31,0
6	C Bandstahl Profil 100	100	30,4
7	T 12 = 60 · 8 L 35 · 35 · 4	80	28,6
8	∟ 12 φ 24 ∟ 10	38	28,2
9	T 10 · 5 φ 24 L 10 · 5	38,5	24,5

Bild 1.

Um hier weiterzukommen, war es notwendig, daß man zunächst einmal alle bekannten und neuen Konstruktionen solcher Leichtträger mit gleichen statischen Eigenschaften für einen bestimmten Fall, der ein I 28 erforderte, verglich (Bild 1).

Leichtträgerformen.

1. I 28.
2. Aufgelöster Träger, gebildet aus einem diagonal aufgeschnittenen I 28, der an den Ausschnitten so zusammengeschweißt ist, daß die Kräfte vom Obergurt günstig auf den Untergurt oder umgekehrt übertragen werden.
3. Träger mit Diagonalversteifung aus Flachstählen zwischen Gurten aus C-Stählen.
4. Gitterträger aus T-Gurten mit dazwischen geschweißten Flachstählen.
5. Ungleichmäßige T-Gurte mit diagonal angeschweißten Stäben.
6. Obergurt aus Abkantprofil, hängewerkartig durch Abkantprofile unterstützt.
7. Das gleiche wie vor, unter Verwendung von Normalprofilen bzw. Flachstählen.
8. Eine Rundstahlschlange als Diagonalverstrebung zwischen C-Gurten.
9. Im Prinzip die gleiche Konstruktion mit einer Rundstahlschlange, jedoch zwischen breitfüßigen T-Stählen.

Der letzte Träger 9 hat das günstigste Gewicht gegenüber allen anderen Konstruktionen und wiegt etwa die Hälfte vom I 28. Außerdem ist der Träger verhältnismäßig niedrig und in seiner Erscheinungsform schöner als alle anderen Konstruktionen.

Aus diesen Gründen wurde die Trägerart („R-Träger“) eingehend durchkonstruiert und für die verschiedenen Spannweiten berechnet, wobei sich herausstellte, daß die Gewichtersparnis gegenüber der Verwendung von I-Normalprofilen im ungünstigsten Falle 33,48%, im günstigsten Falle 68,5% betrug (Tafel 1).

Tafel 1. Ersparnisse der R-Träger gegenüber Normalprofilen.

Spannweite m	Dacheindeckung	Normalprofilträger		R-Träger		Ersparnis an Gewicht	
		Gewicht kg	R-Träger Gewicht kg	in kg	in %		
10,00	Bimsdielen	I 30	575	315	260	45	
10,00	Bimsdielen	I 30	550	318	232	42,3	
5,00	Bimsdielen	I 16	89,5	55,49	34,01	38	
7,50	Holzbohlen	I 20	197,25	112,53	84,72	43	
10,00	Bimsdielen	I 30	550	235,00	315	57,4	
10,00	Holzbohlen	I 28	480	188	292	61	
10,00	Bimsdielen	I 30	526	197	329	62,6	
10,00	Holzbohlen	I 28	473	159	314	66,5	
12,50	Bimsdielen	I 34	845	332	513	60,5	
12,50	Holzbohlen	I 32	745	235	510	68,5	
10,00	Bimsdielen	I 30	534	240	294	55	
10,00	Holzbohlen	I 28	478	191	287	60	
12,50	Bimsdielen	I 34	845	383	462	54,6	
12,50	Holzbohlen	I 32	745	289	456	61,2	

Aus dieser Tafel geht eindeutig hervor, daß die Verwendung von R-Trägern vorteilhafter wird, je leichter die Dacheindeckung und je größer die Spannweite ist. So konnte allein bei einer Einflughalle, für die die übliche Bimseindeckung vorgesehen war, durch Verwendung einer Bohlendachhaut von gleicher Wärmedämmung und Anordnung von R-Trägern in der gesamten Dachhaut und Verwendung von R-Trägerartigen Stützen eine Herabsetzung des Eigengewichts von 100 kg auf 65 kg/m² erreicht werden.

Wirtschaftlichkeit.

Wenn auch für den Augenblick noch die Stahlersparnis im Vordergrund steht und die Kostenfrage gegebenenfalls zurückgestellt werden könnte, so ist die Verwendungsfrage andererseits durch ihren Zusammen-

hang mit dem Arbeitsaufwand auch heute besonders zu beachten. Die gemeinsamen Untersuchungen mit der beauftragten Herstellungsfirma Jucho, Dortmund, und dem Stahlbau-Verband, Berlin, haben ergeben, daß die R-Träger bei den hierfür geeigneten Aufgaben auch wirtschaftlich den Normalträgern überlegen sind. Die eingehende Kostenzergliederung ergab dabei folgende Vergleichswerte:

zweckmäßige Maschinen und rationelle Arbeitsmethoden in der Zukunft noch eine weitere Verbilligung eintreten, insbesondere, wenn es gelingt, die Normalisierung des Trägers so durchzuführen, daß diese einmal weitestgehend den betrieblichen Erfordernissen der Herstellung gerecht werden und andererseits sich den vielfältigen Erfordernissen der praktischen Bauausführung anpassen.

a) Werkstoffkosten.

Diese Kosten verringerten sich infolge des geringeren Gewichts der R-Träger zwar nicht entsprechend dem Gewichtsunterschied, die Ersparnisse betragen jedoch noch immer 32%.

b) Werkstattkosten.

Diese Kosten sind naturgemäß beim R-Träger je Tonne teurer als beim Normalprofil, aber infolge der Gewichtseinsparung je Träger gleicher Leistung geringer um 22%.

c) Kosten der Beförderung.

Diese Kosten wurden der Gewichtseinsparung entsprechend geringer um rd. 50%.

d) Kosten der Aufstellung.

Diese Kosten fallen ebenfalls erheblich infolge des geringeren Gewichts, wenn auch nicht im gleichen Umfange wie die Beförderungskosten, da die Aufstellung leichter Träger verhältnismäßig teurer ist als die schwerer Träger. Die Ersparnis betrug aber immer noch 33%.

e) Unterhaltungskosten.

Die Oberfläche der R-Träger ist gegenüber den ersetzten Normalprofilen um 26 bis 38% kleiner. Demgegenüber ist der Anstrich der aufgelösten Leichtträger etwas schwieriger. Die Gesamtanstrichkosten sind deshalb etwa gleich hoch.

f) Gesamtkosten.

Die genaue Erfassung all dieser Ersparnisse ergab im Durchschnitt eine Gesamtsparsnis von 35%.

g) Zukünftige Verwendungsmöglichkeit.

Die Herstellung von I-Normalprofilen ist jetzt so rationalisiert, daß mit einer Kostenherabsetzung dieser Träger in der Zukunft nicht gerechnet werden kann.

Die R-Trägerfabrikation steht aber in ihren ersten Anfängen. Bei einer Verwendung von R-Trägern in großem Umfange kann durch

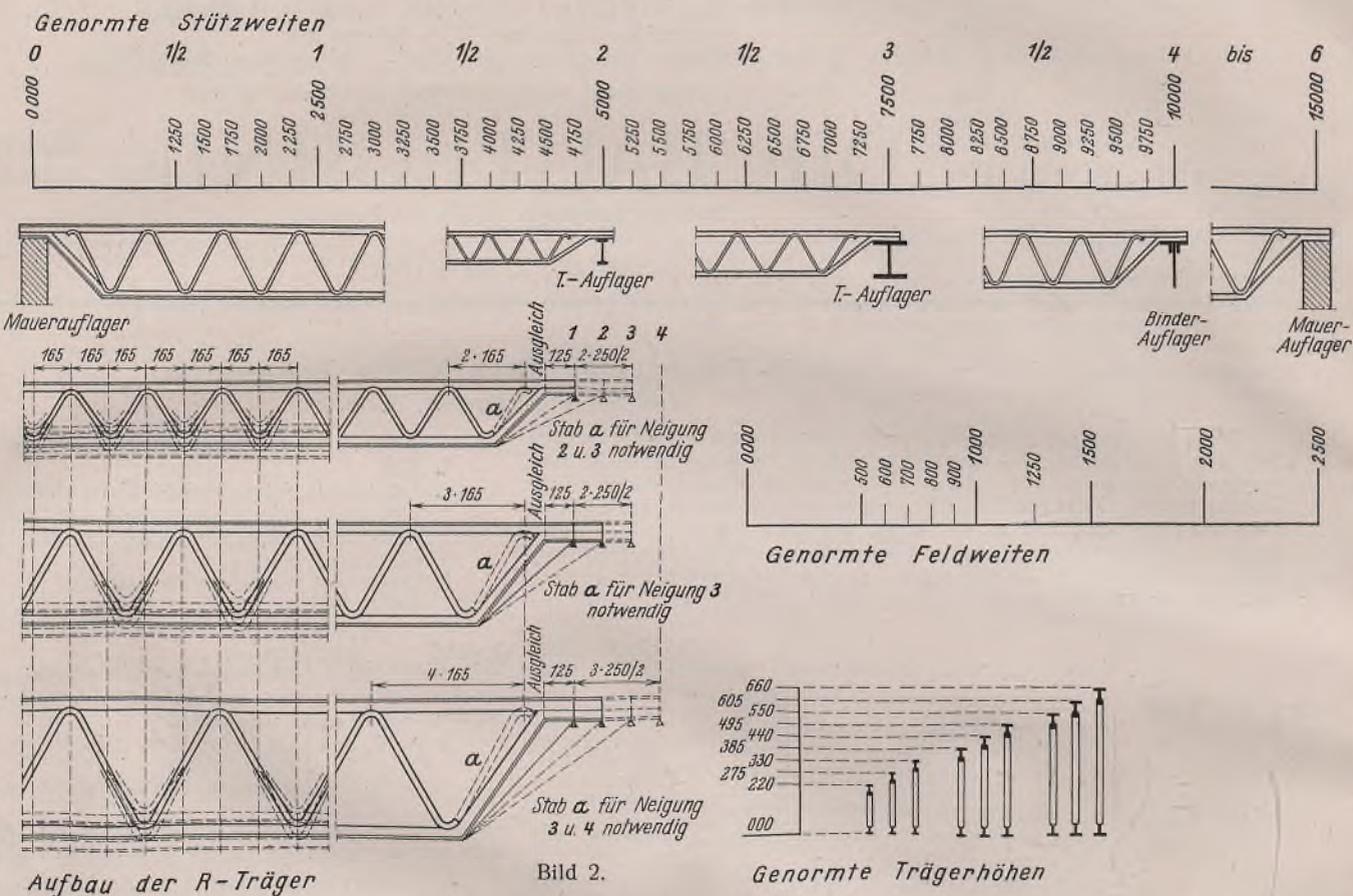


Bild 2.

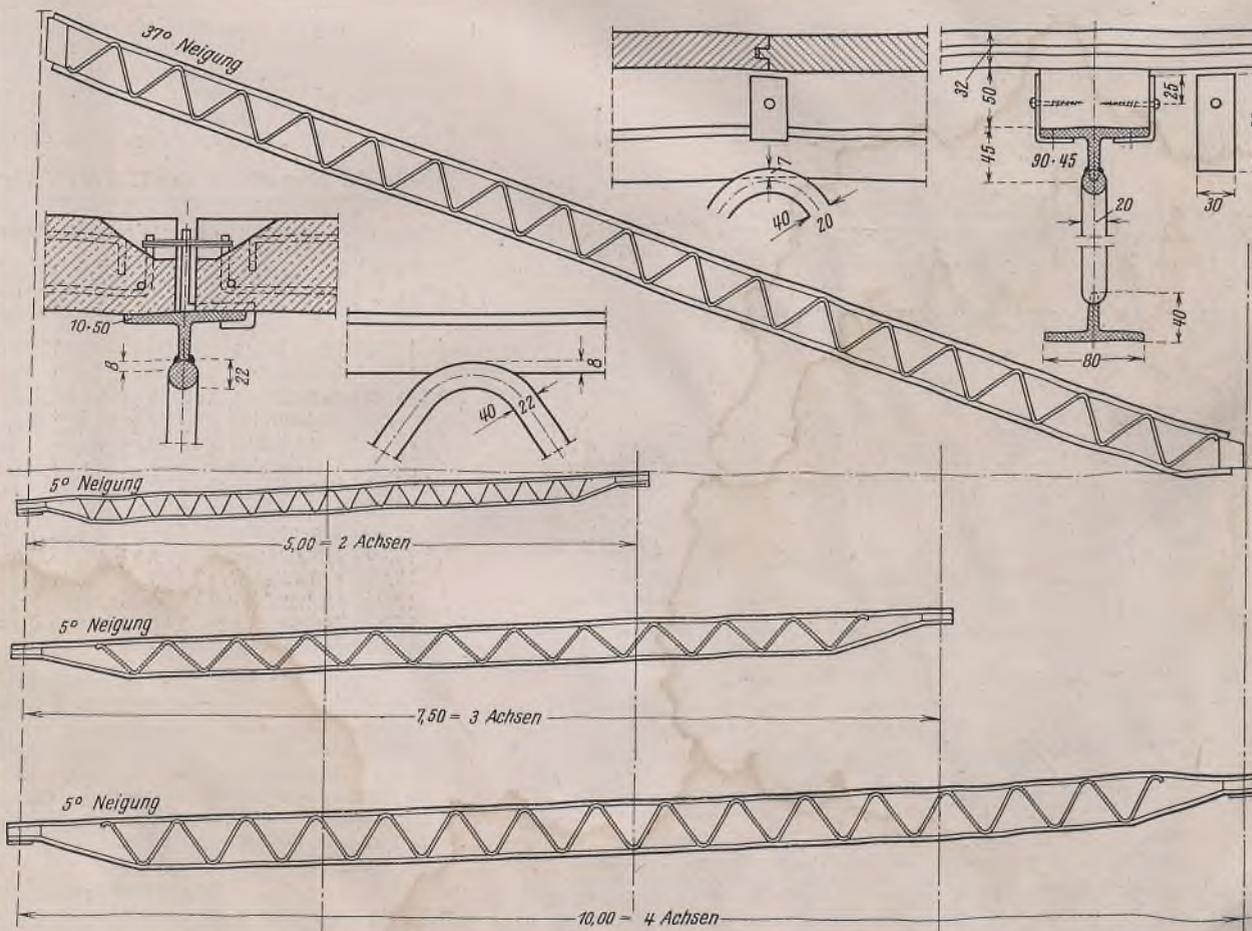


Bild 3.

Systematik.

Zu diesem Zwecke ist aufbauend auf dem Industrieachsennetz des Generalbauinspektors eine Systematik für die R-Träger-Herstellung entwickelt worden (Bild 2).

Stützweiten sind von 25 zu 25 cm gestaffelt, beginnend mit einer Länge von 1,25 m bis zur Länge von 15,00 m.

Feldweiten beginnen mit 50 cm und sind von hier aus gestaffelt von 10 zu 10 cm bis zur Weite von 1,50 m. Darüber hinaus gibt es noch die Weiten von 2,00 m, und 2,50 m = 1 Achse.

Trägerhöhen. Die geringste Höhe ist 22 cm, die höchste 66 cm, dazwischen liegen die sieben anderen Höhen in Abständen von 5,5 cm.

Es ergaben sich durch die Systematik nur wenig R-Trägerformen, deren vielfältige Verwendungsmöglichkeit durch die in der Praxis anfallenden verschiedenen Längen, Feldweiten und Belastungen erstaunlich groß ist. Um nach Möglichkeit alle Fälle für die Praxis sofort greifbar ermitteln zu können, wurde ein umfangreiches Tabellenwerk ausgearbeitet, das dem Konstrukteur ermöglicht, den für den gegebenen Belastungsfall passenden R-Träger sofort ohne jede Berechnung aus der Tabelle zu entnehmen.

Bisher wurden zwei Dacheindeckungen ausprobiert: einmal eine Eindeckung durch Bimsplatten von 8 cm Dicke und einmal durch Bohlen von 35 mm Dicke, wie aus Bild 3 zu ersehen ist, welches die für die praktischen Bedürfnisse des Generalbauinspektors benötigten R-Träger zeigt.

ausgezeichneten Eindruck macht und mindestens so klar und überzeugend aussieht wie ein ähnlicher Bau gleicher Abmessung, der noch mit Vollwandträgern errichtet wurde.

In Amerika befassen sich mehrere Firmen mit der Herstellung von Leichtträgern, die dem R-Träger ähnlich sind. Es ist bemerkenswert, daß gerade dort diese Träger in unvorstellbaren Ausmaßen, vom Einfamilienhaus bis zum Wolkenkratzer, vor allem aber im Industriebau Verwendung finden, obgleich in Amerika die Arbeitslöhne sehr viel höher und die Materialkosten sehr viel niedriger sind als bei uns; beides Gründe, die die Fertigung von Leichtträgern ungünstig beeinflussen.

Der Vorzug wird diesen Leichtträgern in Amerika daher vor allem gegeben, weil die vielfältigen Installationen eines modernen Baues kreuz und quer durch die Träger verlegt werden können, die meistens unterseitig durch Rabitzdecken abgespannt sind.

So bietet der R-Träger eine Reihe praktischer Vorteile, die allein ihn schon dem Normalprofil überlegen machen, abgesehen von der in Deutschland wichtigen Stahleinsparung und Verbilligung.

Lieferzeit.

Die Lieferzeit der R-Träger ist im allgemeinen erheblich kürzer als die der dazugehörigen Unterkonstruktion, weil diese meist erst berechnet, gezeichnet und auf dem üblichen Wege der einmaligen Anfertigung langwierig hergestellt werden muß. Der passende R-Träger dagegen wird

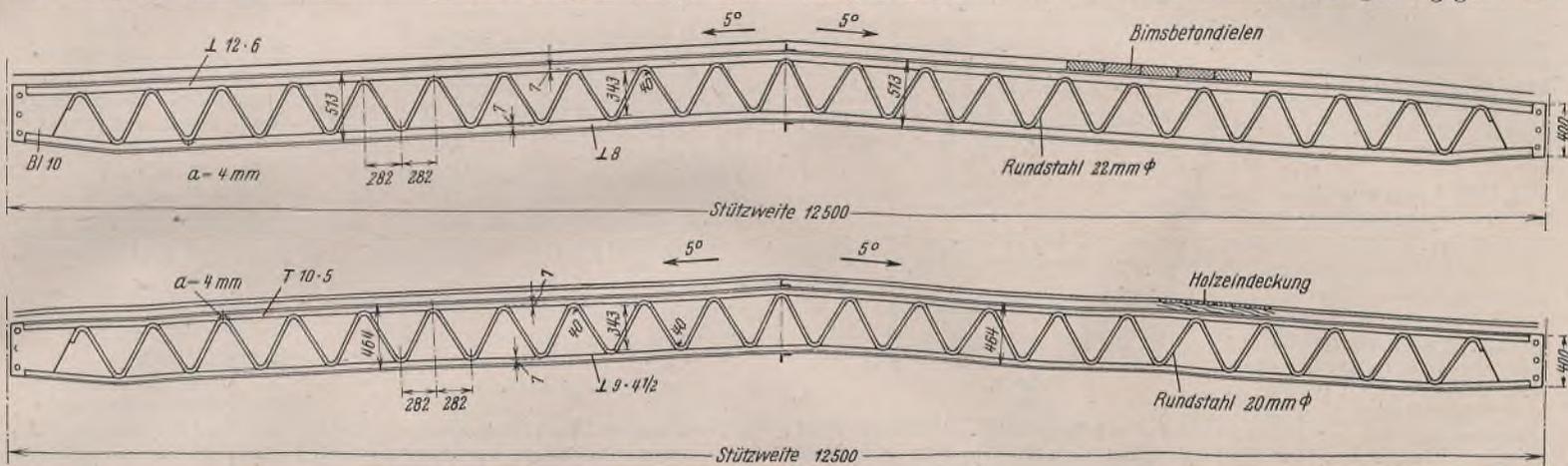


Bild 4.

Inzwischen sind eine Reihe weiterer Träger entwickelt worden. So zeigt Bild 4 beispielsweise einen satteldachartig ausgebildeten R-Träger, der als Binder über eine 12,50 m breite Halle Verwendung findet und in diesem Falle eine ausgezeichnete Formgestaltung aufweist.

Die Fragen der Kräfteübertragung und der Spannungsverhältnisse in den Gurten und Streben sind im Staatlichen Materialprüfungsamt Dahlem

aus der Tabelle abgelesen, die Konstruktionszeichnung hierfür ist fertig und die Herstellung erfolgt auf fabrikatorischem Wege in sehr kurzer Zeit.

Bei den bisher ausgeführten Hallen waren deshalb die R-Träger ausnahmslos mehrere Monate eher auf der Baustelle als die dazugehörige Unterkonstruktion aus Stahl oder Mauerwerk.



Bild 5.

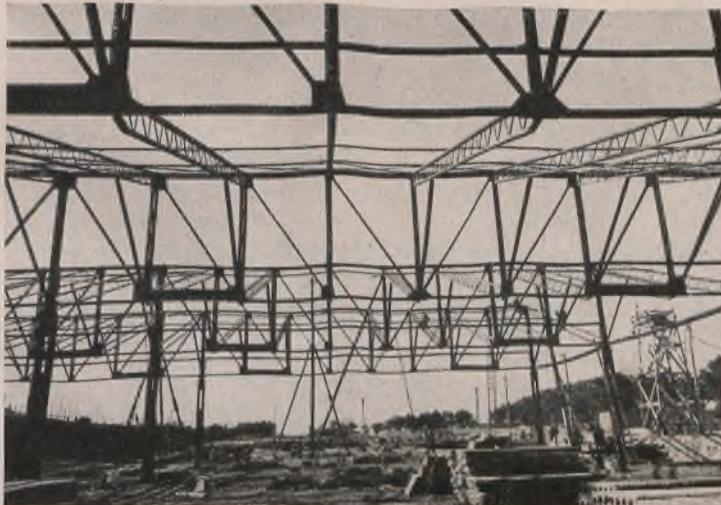


Bild 6.

von Professor Bierett in mehreren Belastungsversuchen eingehend untersucht, auf Grund deren die zweckentsprechendste Auswahl der Profile und die letzte Formgebung erfolgte, so daß der R-Träger in jeder Beziehung allen statischen, material- und herstellungstechnischen Anforderungen entspricht.

Ausführung.

Diese Art R-Träger ist in Deutschland zum erstenmal bei Bauten ausgeführt worden, die der Generalbauinspektor im Rahmen des von ihm betreuten Rüstungsbaues ausführte. Bilder 5 u. 6 zeigen eine Shedhalle mit solchen R-Trägern nach Entwurf des bekannten Hamburger Architekten Gutschow (Bauleitung: Sprotte), die auch in Wirklichkeit einen ganz

Zusammenfassung.

Aus dem vorstehenden ist ersichtlich, daß bei Verwendung von Stahlkonstruktionen für Dächer und leichte Decken der R-Träger schneller, leichter und billiger geliefert werden kann als alle sonstigen Konstruktions-teile, und daß er außerdem noch eine Reihe praktischer und ästhetischer Vorteile bietet, so daß seine allgemeine Verwendung in jeder Beziehung angebracht erscheint.

Die Träger, die vom Generalbauinspektor für die Reichshauptstadt unter Schutz gestellt wurden, werden von C. H. Jucho in Dortmund hergestellt. Diesem Werk hat der Generalbauinspektor das alleinige Ausführungsrecht übertragen, um eine wirtschaftliche Massenherstellung zu ermöglichen.

Die Stabilität der Drei- und Zweigelenrechteckrahmen mit Eckstreben und mit Fachwerkriegeln.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Dipl.-Ing. Wilh. Bültmann, Hamburg.

Einleitung.

Bisher ist nur die Stabilität der Rahmentragwerke verfolgt worden, deren Stiele und Riegel direkt biegeungssteif miteinander verbunden sind¹⁾. Neben diesen Rahmen haben aber auch solche Rahmentragwerke, deren Riegel und Stiele durchweg gelenkig miteinander verbunden sind und die Rahmenwirkung bzw. Ecksteifigkeit durch die Anordnung von Eckstreben oder Kopfbändern erzielt wird, baupraktisches Interesse, da durch diese verhältnismäßig einfach herzustellenden Eckstreben einmal die immerhin schwierige Ausbildung von Steifecken umgangen wird und andererseits die Stiele und Riegel nicht unerheblich versteift werden. Offenbar ist auch die Stabilität bei dieser Rahmenausbildung größer als die der Rahmen mit direktem biegeungssteifem Übergang der Stiele und Riegel.

Die Stabilität solcher Rahmen mit Eckstreben soll hier für einige Belastungsfälle nachgewiesen werden und die Untersuchungen dann auf Rahmen mit Fachwerkriegeln erweitert werden.

Im Anschluß daran wird noch die Abhängigkeit der Stabilität von ungleichen Lasten, die an den Rahmenecken der Drei- und Zweigelenrechteckrahmen angreifen, angezeigt und für die Sonderfälle der starren Riegel die Knicklängenbeiwerte ermittelt.

A. Die Lasten greifen an den Rahmenecken an.

1. Drei- und Zweigelenrechteckrahmen mit Eckstreben.

Bei unseren Betrachtungen setzen wir wieder voraus, daß die Längenänderungen aller Stäbe vernachlässigbar klein sind und die Stabilitätsuntersuchung auf die Rahmenebene beschränkt wird. Letzteres setzt natürlich voraus, daß der Rahmen gegen Knicken aus der Bildebene gesichert ist. Mit den in Bild 1²⁾ angedeuteten vereinfachten Annahmen, denen nur kleine seitliche Verschiebungen des Dreigelenrechteckrahmens mit Eckstrebe zugrunde gelegt sind, liefert die vereinfachte Differentialgleichung der Biegelinie für den Stielbereich I die Neigung der Biegelinie des Rahmenstieles zu

$$(1') \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\alpha f_u}{\text{tg } \alpha h_u}$$

bei $x = h_u$, während die des Stielbereichs II mit $D_{ii} = \frac{P f_o}{h_o}$ diese Neigung zu

$$(1'') \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha f_u}{\text{tg } \alpha h_o} + \frac{f_o}{h_o}$$

liefert. Aus der Forderung der Stetigkeit der Biegelinie ergeben Gl. (1') u. (1''), die Bedingungsgleichung der Knickkraft

$$(2') \quad \frac{1}{\text{tg } \alpha h_u} = -\frac{1}{\text{tg } \alpha h_o} + \frac{f_o}{\alpha f_u h_o}$$

Beachten wir noch, daß nach Einführung des Stabdrehwinkels ϑ die Verschiebungen f_u und f_o miteinander durch die geometrische Beziehung $f_u = f_o - h_o \vartheta$ verbunden sind und dieser Stabdrehwinkel aus der senkrechten Durchbiegung δ des Riegels am Angriffspunkt des Kopfbandes mittels der Vertikalkomponente der Stabkraft dieses Kopfbandes

$$D_v = \frac{P f_o}{b} \text{ aus}$$

$$\vartheta = \frac{\delta}{b} = \frac{P f_o l}{3 E J_r} \left(1 - \frac{b}{l}\right)^2$$

zu errechnen ist, dann ist in Gl. (2') der Summand

$$(2'') \quad \frac{f_o}{\alpha f_u h_o} = \frac{1}{\alpha h_o \left[1 - \frac{\alpha^2 h^2 l J_h h_o}{3 h J_r h} \left(1 - \frac{b}{l}\right)^2 \right]}$$

Wird noch zur Abkürzung

$$(3a) \quad c = \frac{h J_r}{l J_h} \quad z_1 = \alpha h \quad \varphi = \frac{h_o}{h} \quad \text{und} \quad \varepsilon = \frac{b}{l}$$

¹⁾ W. Bültmann, Die Stabilität des Dreigelenrechteckrahmens. Stahlbau 1941, Heft 1/3, S. 3. Vgl. auch die dort in den Fußnoten 1, 2 und 3 angegebenen Arbeiten.

²⁾ Ungeachtet des Gleichgewichts sind in Bild 1 u. 2 nur die Kräfte eingeführt worden, die zum Nachweis der Knickbedingungen erforderlich sind, während die Kräfte, die in den Ableitungen mit vernachlässigbaren Produkten der kleinen Formänderungswerte multipliziert erscheinen würden, fortgelassen sind.

gesetzt, dann ergibt sich die Bedingungsgleichung der Grenzkraft aus den Zwischengleichungen (2') u. (2'') zu

$$(3) \quad \frac{\varphi^2 z_1^3 [\text{tg } \varphi z_1 + \text{tg} (1 - \varphi) z_1]}{\varphi z_1 [\text{tg } \varphi z_1 + \text{tg} (1 - \varphi) z_1] - \text{tg } \varphi z_1 \cdot \text{tg} (1 - \varphi) z_1} = k$$

mit

$$(3b) \quad k = \frac{3c}{(1 - \varepsilon)^2}$$

für den Dreigelenrechteckrahmen nach Bild 1.

Die Grenzwerte bei $k = \infty$ werden durch die Gleichung

$$(4) \quad \varphi z_1 [\text{tg } \varphi z_1 + \text{tg} (1 - \varphi) z_1] = \text{tg } \varphi z_1 \cdot \text{tg} (1 - \varphi) z_1$$

erfüllt.

Für den gemäß Bild 2 ausgebildeten und belasteten Zweigelenrechteckrahmen mit symmetrisch angeordneten Eckstreben gelten ebenfalls Gl. (3) u. (4), jedoch geht in Gl. (3) der Rahmensteifigkeitswert k nunmehr in

$$(3c) \quad k = \frac{6c}{(1 - 2\varepsilon)^2}$$

über, wovon man sich sehr leicht überzeugen kann.

Die Knickkräfte können wiederum in der Form

$$(5) \quad P_k = \frac{E J_h \pi^2}{(\gamma h)^2}$$

dargestellt werden, wenn der Faktor γ der Stielhöhe h , also der Knicklängenbeiwert, mit

$$(5a) \quad \gamma = \frac{\pi}{z_1}$$

festgelegt wird.

In Bild 3a finden wir die Knicklängenbeiwerte γ für verschiedene Eckstrebenanordnungen φ am Stiel über k wiedergegeben. Diese Kurven gelten, was ja leicht einzusehen ist, sowohl für den Dreigelenrechteckrahmen als auch für den Zweigelenrechteckrahmen mit Eckstreben.

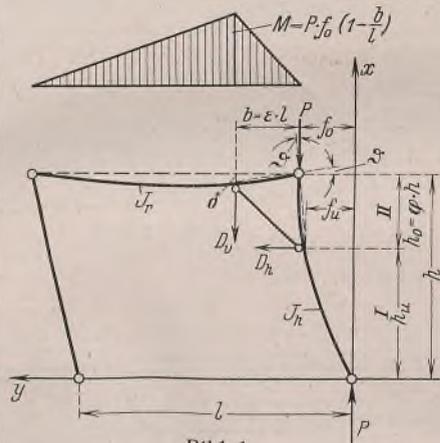


Bild 1.

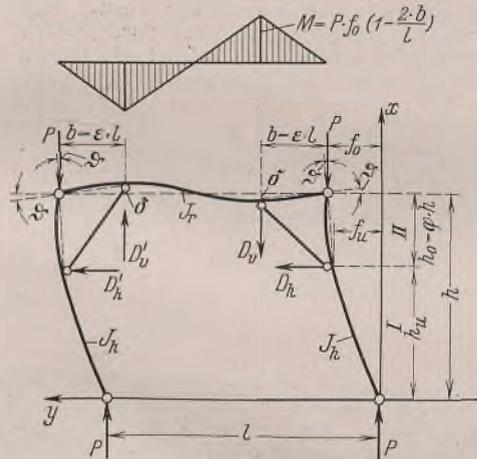


Bild 2.

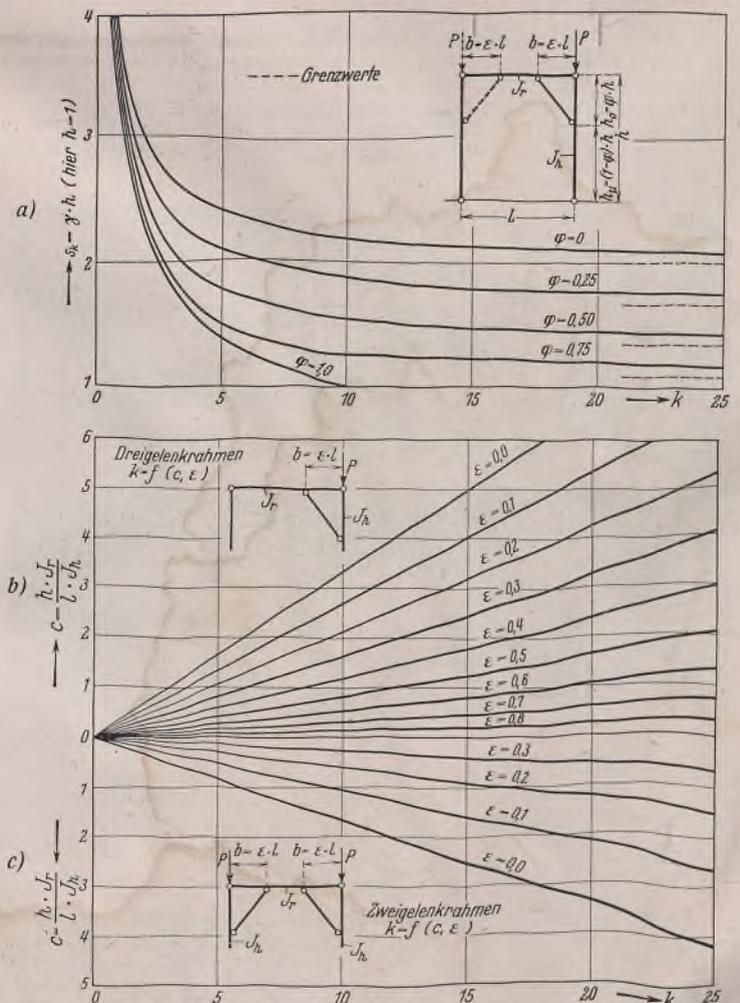


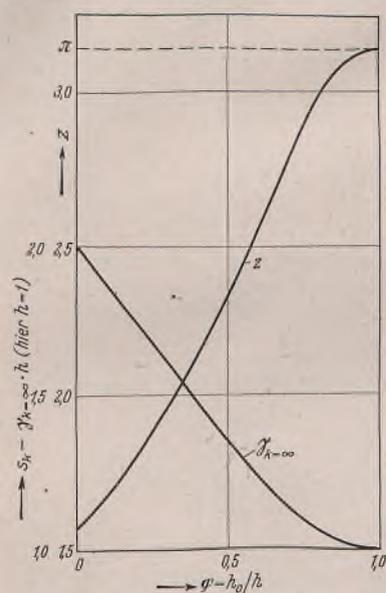
Bild 3a bis c. Drei- und Zweigelenrechteckrahmen mit Eckstreben. Die Knicklängen $s_k = \gamma \cdot h$ der Rahmenstiele.

Die nähere Bestimmung des Zwischenwertes k erfolgt mittels des Rahmensteifigkeitswertes c und der durch ε festgelegten Anordnung der Kopfbänder am Riegel durch Gl. (3b) u. (3c). Die Zwischenwerte k sind zum schnellen Ablesen des Knicklängenbeiwertes γ mit Bild 3b für den Dreigelenrechteckrahmen und Bild 3c für den Zweigelenrechteckrahmen zu Bild 3 zusammengefaßt worden. Mit $\varphi \rightarrow 0$ muß notgedrungen auch $\varepsilon \rightarrow 0$ werden, d. h. Riegel und Stiel gehen biegungssteif ineinander über, und wir erhalten die schon früher abgeleiteten Beziehungen¹⁾.

Bei $\varphi = 1,0$ und $k \gg 10$ ist die Knicklänge $\gamma h = h$, also $\gamma = 1$. In Bild 4 sind noch die Knicklängenbeiwerte $\gamma_{k=\infty}$, die sich aus Gl. (4) u. (5a) ergeben, dargestellt worden. Diese Werte finden wir auch in der Tabelle 1 nochmal zusammengefaßt.

Tabelle 1. Knicklängenbeiwerte $\gamma_{k=\infty}$

φ	0	0,1	0,2	0,25	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,75	0,8	0,9	1
$\gamma_{k=\infty}$	2	1,870	1,736	1,668	1,603	1,473	1,348	1,231	1,130	1,089	1,055	1,012	1



$\varphi = 0$ liefert den I. Eulerfall, während $\varphi = 1,0$ den II. Eulerfall anzeigt. Bild 4 und Tabelle 1 gelten selbstverständlich sowohl für den Dreigelenrechteckrahmen als auch für den Zweigelenrechteckrahmen. Die $\gamma_{k=\infty}$ -Werte lassen sich auch für den nach Bild 5 auf Druck beanspruchten Träger auf zwei starren Stützen mit einem Kragarm anwenden, wobei allerdings vorauszusetzen ist, daß die Kraftrichtungen beim Ausknicken nicht geändert werden, was zumeist der Fall ist. Die von Bleich für den geraden Stab mit Kragarmen angegebene Regel gilt demgemäß nur dann, wenn die Kräfte in die Sehne der Verformungslinie fallen.

Wir wollen die Knicklängenbeiwerte, die nach den obigen Untersuchungen nur durch umständliche Lösung der transzendenten Gleichungen zu erfassen sind, wieder durch Faustformeln zugänglich machen. Wie Bild 4 zeigt, sind im zumeist interessierenden Bereich von $\varphi = 0$ bis

$\varphi = 0,5$ die Knicklängenbeiwerte $\gamma_{k=\infty}$ linear von φ abhängig wiederzugeben und durch die einfache Näherungsformel

$$(6) \quad \gamma_{k=\infty} \approx 2(1 - 0,65\varphi)$$

genau genug zu errechnen. Darüber hinaus erhält man mittels dieser

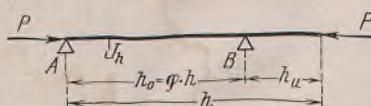


Bild 5.

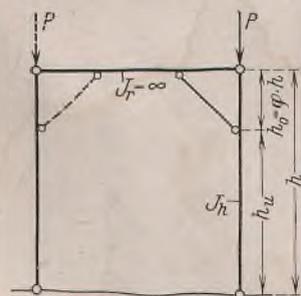


Bild 4a.

Näherungsformel die allgemeinen Beiwerte γ für beliebige φ , c und ε , beliebig bis auf die oben getroffenen Einschränkungen durch

$$(7a) \quad \gamma \approx 2(1 - 0,65\varphi) \sqrt{(1 - 0,23\varphi) + \frac{2,1 + 4,4\varphi}{k}}$$

wo k den Gl. (3b) u. (3c) zu entnehmen ist. Für $\varphi = 0$ geht die Näherungsgleichung (7a) in

$$(7b) \quad \gamma \approx 2 \sqrt{1 + \frac{2,1}{k}}$$

über, die wir schon in ¹⁾ aufgezeichnet haben³⁾. Die Anwendung von (7a) wollen wir auf den Bereich $k = 1$ bis $k = 20$ begrenzen und können uns für den Steifigkeitswert $k > 20$ der Faustformel

$$(7c) \quad \gamma \approx 2(1 - 0,65\varphi) \sqrt{1 + \frac{2,1}{k}} \quad \text{bedienen.}$$

Die Faustformeln liefern, von dem Abschnitt $k = 0$ bis $k = 1$ bzw. 2, der ohnehin keine praktische Bedeutung hat, abgesehen, äußerst befriedigende Ergebnisse.

Neben günstigeren statischen Verhältnissen weisen die Rahmen mit Eckstreben auch größere Stabilität als solche mit steifen Ecken auf.

³⁾ Zu der auf S. 3 in 1. aufgezeichneten Quellenangabe⁴⁾ ist die auf S. 16 der DIN 4114 angegebene Fußnote¹³⁾, die von mir übersehen wurde, nachzutragen, nach der die Faustformel mit der Aufrundung von 0,4 für den Zweigelenrechteckrahmen von M. G. Puwein stammt.

2. Drei- und Zweigelenrechteckrahmen mit Fachwerkriegeln.

Wird der Riegel des Dreigelenrechteckrahmens nach Bild 6a fachwerkartig ausgebildet, dann haben wir es offenbar mit einem Stabilitätsfall zu tun, der dem im vorigen Abschnitt behandelten gleicht und aus diesem abgeleitet werden kann. Wir können zur Ableitung der Knickbedingung daher auch von der Zwischengleichung (2') ausgehen und schreiben zur Elimination der horizontalen Verschiebungen f_u und f_o des Rahmens

bei c und d wegen $D_h = \frac{P f_o}{h_o}$ bei Vernachlässigung der Längenänderung der Rahmenstiele infolge der Normalkräfte

$$f_o - f_u = \frac{P f_o}{E h_o} \sum S_1^2 \varrho,$$

wo $\delta = \sum S_1^2 \varrho$ die E -fache Verschiebung von c gegen d infolge der in Bild 6b angedeuteten Belastung ist. Mit der Beziehung für $f_o - f_u$ geht Gl. (2') wieder in die Bedingungsgleichung (3) über. Der einzige Unterschied besteht darin, daß nunmehr der Rahmenwert

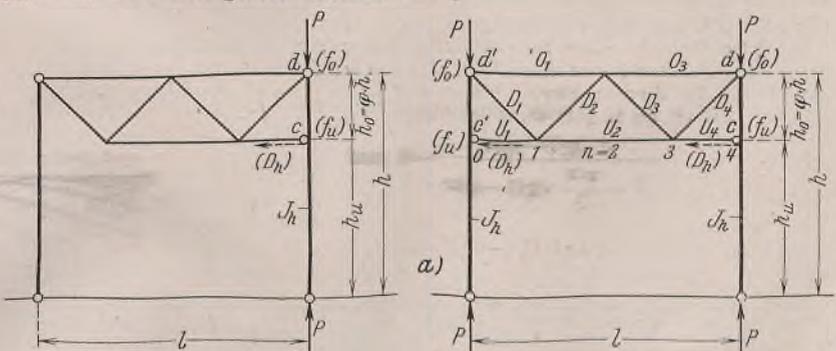
$$(8a) \quad k = \frac{\varphi^2 h^3}{J_h \sum S_1^2 \varrho} \quad \text{wird,}$$

Die im vorigen Abschnitt angegebenen Gl. (4), (5) u. (5a) sowie die Faustformeln (6), (7a), (7b) u. (7c) behalten mithin auch hier ihre Gültigkeit, so daß der Nachweis der Stabilität beim Vorhandensein fachwerkartig ausgebildeter Riegel keine Schwierigkeiten bereitet.

Für den Zweigelenrahmen des Bildes 7a, dessen Riegel ein symmetrisch ausgebildeter Fachwerkträger ist, gelten unter den gleichen Voraussetzungen wiederum dieselben Gleichungen. Nur Gl. (8a) geht jetzt in

$$(8b) \quad k = \frac{2 \varphi^2 h^3}{J_h \sum S_2^2 \varrho}$$

über, wo die Stabkräfte S_o der Antimetrie wegen aus der Belastung gemäß Bild 7b zu bestimmen sind. Damit erklärt sich aber auch die Bedeutung von $\frac{1}{2} \sum S_2^2 \varrho$ als die E -fache Verschiebung von c gegen d infolge dieser in Bild 7b eingezeichneten Belastung.



a)

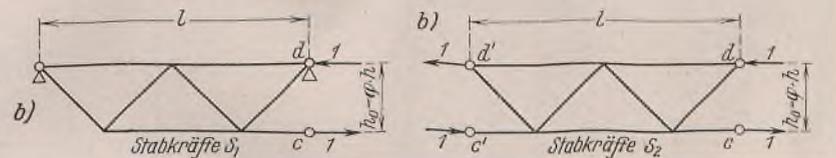


Bild 6a u. b.

Bild 7a u. b.

B. Die Lasten greifen an den Rahmenstielen unterhalb der Eckstreben an.

1. Drei- und Zweigelenrechteckrahmen mit Eckstreben.

Für die am Rahmenstiel unterhalb der Eckstrebe angreifende Last P des Dreigelenrechteckrahmens mit Eckstrebe nach Bild 8 erhält man unter Beibehaltung der im Abschnitt A getroffenen Voraussetzungen mittels Integration der vereinfachten Differentialgleichungen

- I. $\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 y = 0$
- II. $\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 f = 0$
- III. $\frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha^2 f - \frac{\alpha^2 f}{h_o} (x - h_u) = 0$

der drei Stielabschnitte I. $x = 0$ bis $x = u$, II. $x = u$ bis $x = h_u$ und III. $x = h_u$ bis $x = h$ nach Berücksichtigung der Randwerte und entsprechender Umformung und Vereinfachung die Knickbedingung zu

$$(9) \quad \frac{z \cdot \operatorname{tg} \psi z}{1 - \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \varphi - \psi\right) z \cdot \operatorname{tg} z} = k.$$

Die Bewertung von ψ und φ ist Bild 8 zu entnehmen, während zur Abkürzung $z = \alpha h$ mit $\alpha^2 = \frac{P}{E J_h}$ geschrieben wurde.

Es ist nach

$$(3a) \quad c = \frac{6,00 \cdot 11\,690}{8,00 \cdot 5950} = 1,47$$

$$(3c) \quad k = \frac{6 \cdot 1,47}{(1 - 2 \cdot 0,2)^2} = 24,5 > 20, \text{ daher}$$

$$(7c) \quad \gamma \approx 2(1 - 0,65 \cdot 0,25) \sqrt{1 + \frac{2,1}{24,5}} \approx 1,75$$

$$s_k \approx 1,75 \cdot 6,00 \approx 10,50 \text{ m}$$

$$(5) \quad P_k = \frac{21\,000\,000 \cdot 0,000\,059\,5 \pi^2}{10,50^2} = 111,4 \text{ t.}$$

Fallen bei demselben Rahmen die Eckstreben fort und gehen statt dessen Stiele und Riegel biegungssteif ineinander über, dann werden mit

$$(7b) \quad \gamma \approx 2 \sqrt{1 + \frac{2,1}{6 \cdot 1,47}} \approx 2,225$$

$$s_k \approx 2,225 \cdot 6,00 \approx 13,35 \text{ m}$$

die Knickkräfte $P_k \approx 69,0 \text{ t.}$

Die Erhöhung der Knickkräfte durch eingezogene Eckstreben ist also recht bedeutend.

2. Der Zweigelenrechteckrahmen mit Fachwerkriegel des Bildes 7 habe folgende Abmessungen und Querschnitte:

die Stiele:

$$h = 6,00 \text{ m}; \quad h_o = 1,50 \text{ m}; \quad \varphi = 0,25; \quad J_h = 5950 \text{ cm}^4 \quad \text{und} \quad i_h = 8,48 \text{ cm};$$

der Riegel:

$$l = 8,00 \text{ m}; \quad h_o = 1,50 \text{ m};$$

die Querschnitte der Riegelstäbe werden unten angegeben.

Die Stabkräfte S_2 infolge der Belastung nach Bild 7b.

n	M m	O	U	D
0	-1,50		-1,00	
1	-0,75	+0,50		+0,625
2	0		0	-0,625
3	+0,75	-0,50		+0,625
4	+1,50		+1,00	-0,625

Mittels dieser Stabkräfte sind nunmehr die Längenänderungen $S_2^2 \varrho$ der einzelnen Stäbe zu errechnen, deren Summe bekanntlich in Gl. (8b) eingeht. Die Rechenoperationen sind höchst einfach und bedürfen keiner weiteren Erläuterung.

Es ergibt nunmehr

$$(8b) \quad k = \frac{2 \cdot 0,25^2 \cdot 600^3}{5950 \cdot 69,2} = 65,6$$

$$(7b) \quad \gamma \approx 1,688 \sqrt{1 + \frac{2,1}{69,2}} \approx 1,70$$

$$s_k \approx 1,70 \cdot 6,00 \approx 10,20 \text{ m}$$

$$P_k \approx 118,0 \text{ t.}$$

In beiden Beispielen erfolgt das Knicken im elastischen Bereich, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Die Berücksichtigung von Fachwerkriegeln bereitet demnach keine Schwierigkeiten. Das Ansteigen der Stabilität infolge Eckstreben bzw. Fachwerkriegel ist immerhin so erheblich, daß der Einfluß der letzteren auf keinen Fall vernachlässigt werden kann.

C. Ungleiche Lasten greifen an den Rahmenecken an.

Vielfach wird heute bei der Bemessung von Zweigelenrahmen schlechthin die Einführung der Knicklänge mit $s_k \approx 2h$ gefordert. Bei symmetrisch ausgebildeten und belasteten Zweigelenrahmen ist diese Forderung zweifelsohne berechtigt. Sie kann jedoch zu einer unnützen Materialvergeudung bei symmetrisch ausgebildeten, aber unsymmetrisch belasteten Zweigelenrahmen führen. Mit solchen Bindern haben wir es sehr oft bei Hallenbauten zu tun. Die Berücksichtigung der von diesen Rahmen aufzunehmenden Kranlasten, Seitenkräfte, Winddrücke usw. führt zumeist zu unsymmetrischen Lastzuständen, aus denen die größten Beanspruchungen nachzuweisen sind. Während also der eine Stiel des Rahmens die größte Last erhält, ist derweil die des anderen unter Umständen bedeutend geringer. Dieser weniger belastete Stiel verleiht aber je nach dem Unterschied der beiden einander zugeordneten Stiellasten dem Gesamtrahmen eine mehr oder weniger große Versteifungshilfe, die die Stabilität des Rahmens vergrößert bzw. eine Reduzierung der Knicklängenbeiwerte γ gestattet. Natürlich werden jetzt, da die Symmetrie der Belastung fortfällt, der Stabilitätsnachweis bedeutend langwieriger und die anfallenden Knickgleichungen entsprechend umfangreicher.

Um zu einem Überblick der Stabilitätsverhältnisse unsymmetrisch belasteter Rahmen zu gelangen, wollen wir hier nur einige Sonderfälle anzeigen und die Knickgleichungen ohne Zwischenrechnung angeben.

1. Dreigelenrechteckrahmen.

Für den Dreigelenrechteckrahmen des Bildes 14 lautet die Gleichung der Knickbedingung mit den bekannten Abkürzungen, wenn P_1 und P_2 an den Rahmenecken angreifen, $P_2 = m P_1$ ist und P_2 eine Druckkraft ist:

$$(16) \quad \frac{(1+m)z^2 \cdot \operatorname{tg} z}{(1+m)z - m \cdot \operatorname{tg} z} = 3c \quad \text{mit}$$

$$(17) \quad \operatorname{tg} z = \frac{1+m}{m} \cdot z \quad \text{bei } c = \infty.$$

Mit P_2 als Zugkraft ist:

$$(18) \quad \frac{(1-m)z^2 \cdot \operatorname{tg} z}{(1-m)z + m \cdot \operatorname{tg} z} = 3c \quad \text{und}$$

$$(19) \quad \operatorname{tg} z = -\frac{1-m}{m} \cdot z \quad \text{bei } c = \infty.$$

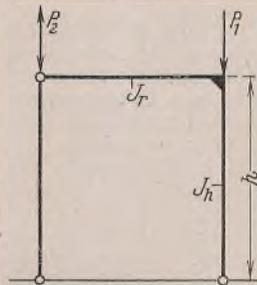


Bild 14.

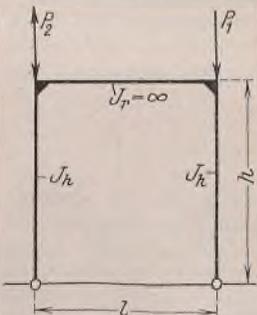


Bild 15.

Tabelle 3. Knicklängenbeiwerte $\gamma_{c=\infty}$.

m	Dreigelenrahmen		Zweigelenrahmen	
	P_2 Druck	P_2 Zug	P_2 Druck	P_2 Zug
0	2,000	2,000	1,426	1,426
0,1	2,080	1,917	1,491	1,358
0,2	2,155	1,831	1,555	1,288
0,25	2,194	1,786	1,586	1,252
0,3	2,231	1,741	1,617	1,215
0,4	2,303	1,647	1,676	1,142
0,5	2,373	1,549	1,734	1,068
0,6	2,440	1,445	1,790	0,995
0,7	2,507	1,336	1,844	0,929
0,75	2,539	1,279	1,871	0,899
0,8	2,571	1,222	1,898	0,873
0,9	2,634	1,108	1,950	0,832
1,0	2,695	1,000	2,000	0,800

2. Zweigelenrechteckrahmen.

Die Stabilität des Zweigelenrechteckrahmens unter unsymmetrischer Eckbelastung wollen wir hier zunächst ebenfalls nur kurz streifen und die Knickgleichungen für $c = \infty$, was bekanntlich mit $J_r = \infty$ identisch ist, angeben. Mit den Daten von Bild 15 und mit P_2 als Druckkraft erhalten wir:

$$(20) \quad \operatorname{tg} \sqrt{m} z + m \sqrt{m} \cdot \operatorname{tg} z = (1+m) \sqrt{m} z,$$

während P_2 als Zugkraft

$$(21) \quad \operatorname{Tg} \sqrt{m} z - m \sqrt{m} \cdot \operatorname{tg} z = (1-m) \sqrt{m} z \quad \text{liefert.}$$

Die Knickkräfte P_k und die Knicklängenbeiwerte γ sind den bekannten Gl. (5) u. (5a) zu entnehmen.

Wir wollen uns hier mit dem Nachweis der Knicklängenbeiwerte $\gamma_{c=\infty}$, die wegen $J_r = \infty$ für alle Fälle der Riegelbelastung die zutreffenden Grenzwerte sind, begnügen und lassen uns durch Bild 16 und Tabelle 3 den Verlauf dieser Beiwerte für beide Rahmensysteme veranschaulichen. Eindeutig wird an Hand dieser Beiwerte die Abhängigkeit der Rahmenstabilität von der Belastung dargelegt.

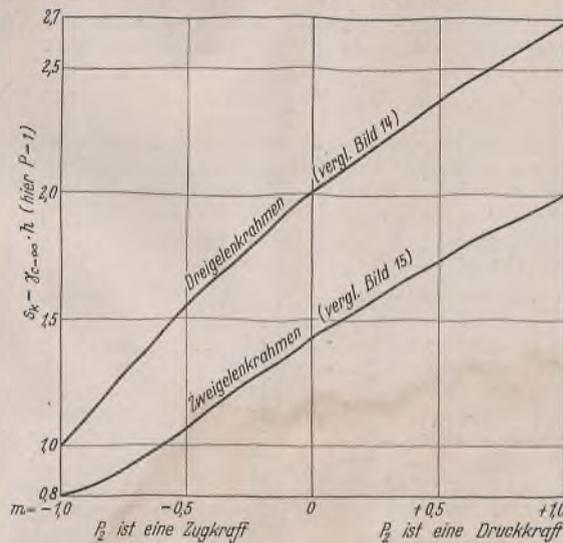


Bild 16. Die von der Belastung abhängigen Knicklängen

$$s_k = \gamma_{c=\infty} \cdot h; \quad \frac{P_2}{P_1} = (\mp) m.$$

Da wir die Abhängigkeit der Knicklängenbeiwerte γ von der Rahmensteifigkeitszahl für einige Belastungsfälle schon kennengelernt haben, können wir uns an Hand der Grenzwerte der Tabelle 3 ein allgemeines Bild über die Größe der Beiwerte machen und kommen zu dem Schluß, daß die Forderung, die Knicklänge mit $s_k \approx 2h$ einzuführen, für den Zweigelenrahmen unbegründet ist und unter keinen Umständen allgemein aufrechterhalten werden kann.

Alle Rechte vorbehalten.

Über die Berechnung von Einzelwinkeln auf Biegung.

Von Sergius Woinowsky-Krieger in Berlin.

Einleitung.

Ein Einzelwinkel ist seiner Querschnittsform nach zur Aufnahme von Biegemomenten wenig geeignet; indessen wird er bei Anwendung im Stahlbau nicht selten der Biegung ausgesetzt. Für Bauteile von untergeordneter Bedeutung, so z. B. für Geländerholme und Geländerstiele, auch für Träger unter leichten Bühnen und Galerien werden einzelne Winkelstähle wegen ihres besseren Aussehens oder einfacheren Anschlusses oft an Stelle der sonst üblichen I- und C-Profile gewählt. Die meistens aus Einzelwinkeln gebildeten Ausfachungsstäbe von Masten, Türmen und leichteren Verbänden haben außer axialem Zug oder Druck mitunter eine von Biegung begleitete Querbelastrung durch Winddruck, Eigengewicht oder zufällige Einzellasten aufzunehmen. Der außermittige Anschluß solcher Stäbe an die Knotenbleche gibt einen weiteren Anlaß zur Entstehung von Biegemomenten, die die Randspannungen eines Winkelquerschnitts ganz erheblich beeinflussen können.

In der Regel werden die aus einem Einzelwinkel gebildeten Stäbe durch Momente beansprucht, die um eine der beiden Achsen X oder Y drehen (Bild 1). Da diese Achsen nicht die Hauptachsen des Querschnitts sind, so hat man das gegebene Moment, etwa M_x , in die Komponenten M_ξ und M_η zu zerlegen und die Biegungsspannung nach der Formel

$$\sigma = \frac{M_\xi e_\xi}{J_\xi} + \frac{M_\eta e_\eta}{J_\eta}$$

zu berechnen, worin unter e_ξ und e_η die Abstände der am stärksten beanspruchten Randfaser von den Hauptachsen ξ bzw. η zu verstehen sind.

Die Erfahrung zeigt, daß diese grundsätzlich sehr einfache, in der Ausführung aber ziemlich schwerfällige Berechnungsweise so gut wie nie angewendet wird. In der Praxis begnügt man sich meist mit einem Spannungsnachweis nach der Formel $\sigma = M_x/W_x$ bzw. $\sigma = M_y/W_y$, tut also so, als wären X und Y die Hauptachsen des Querschnitts. Wie später gezeigt werden soll, ist diese Berechnungsweise selbst für die Zwecke einer Überschlagsrechnung als kaum brauchbar zu bezeichnen. Sie liefert in der Tat Spannungswerte, die unter Umständen weniger als 50% der wahren Werte ausmachen.

Zweck der folgenden Ausführungen ist es, die Ermittlung der Größtspannungen in einem durch ein Moment M_x oder M_y verbogenen Einzelwinkel auf die Berechnung gewisser Querschnittswerte zurückzuführen, die dann für die üblichen Profile tabellarisch angegeben werden.

Randspannungen und zugeordnete Widerstandsmomente.

Es sind im einzelnen die folgenden Fälle zu betrachten:

1. Ungleichschenkliger Winkel, Moment M_x (Bild 1).

Dreht das Biegemoment um die Achse $X-X$, so haben seine Komponenten in bezug auf die Hauptachsen des Querschnitts die Größe

$$M_\xi = M_x \cdot \cos \alpha \quad \text{und} \quad M_\eta = M_x \cdot \sin \alpha.$$

Die zugehörigen Spannungen auf der Nulllinie $N-N$ des Querschnitts sind dann den Werten $M_x \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi_x / J_\xi$ bzw. $M_x \cdot \sin \alpha \cdot \sin \varphi_x / J_\eta$ proportional. Die Lage der Nulllinie wird also durch die Gleichung $\cos \alpha \cdot \cos \varphi_x / J_\xi - \sin \alpha \cdot \sin \varphi_x / J_\eta = 0$ bestimmt, woraus dann

$$(1) \quad \text{tg } \varphi_x = \frac{J_\eta}{J_\xi} \cdot \text{ctg } \alpha$$

folgt. Die größten Beanspruchungen treten in den beiden am weitesten von der Nulllinie entfernten Randpunkten des Querschnitts auf. Der eine Punkt B liegt auf dem Lot DOB zu NN , der andere ist der Eckpunkt E .

Bemerkung der Schriftleitung.

Wenn die Zentrifugalmomente J_{xy} in den Profiltabellen angegeben wären, könnte man die schiefe Biegung auch nach den für querkraftfreie Biegung allgemeingültigen Formeln

$$\sigma = M_x \frac{J_y y - J_{xy} x}{J_x J_y - J_{xy}^2}$$

$$\sigma = M_y \frac{J_x x - J_{xy} y}{J_x J_y - J_{xy}^2}$$

berechnen. Dazu ist allerdings einschränkend zu bemerken, daß diese Formeln im Falle der Biegung mit Querkraft keine richtigen Werte für solche Querschnitte liefern, bei denen der Schubmittelpunkt nicht mit dem Schwerpunkt zusammenfällt; hierzu gehört z. B. der Einzelwinkel. K. Klöppel.

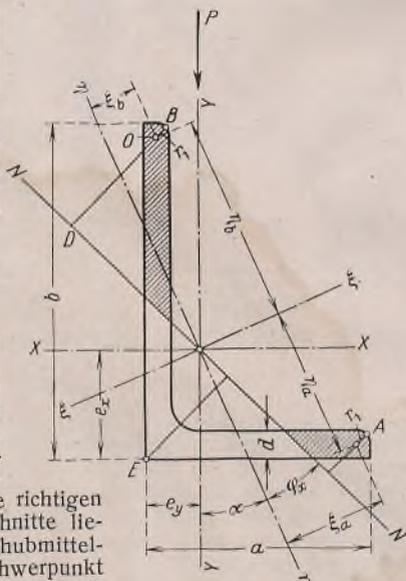


Bild 1.

Die Gesamtbeanspruchung in B ergibt sich zu

$$(2) \quad \sigma_{bx} = \frac{M_x \cdot \cos \alpha}{J_\xi} (\eta_b + r_1 \cdot \sin \varphi_x) + \frac{M_x \cdot \sin \alpha}{J_\eta} (\xi_b + r_1 \cdot \cos \varphi_x)$$

Dieser Ausdruck läßt sich in der einfacheren Gestalt

$$(3) \quad \sigma_{bx} = \frac{M_x}{W_{bx}}$$

schreiben. W_{bx} spielt hier die Rolle eines Widerstandsmoments, dessen Größe sich auf Grund von (2) zu

$$(4) \quad W_{bx} = \frac{J_\xi J_\eta}{J_\xi (\xi_b + r_1 \cdot \cos \varphi_x) \sin \alpha + J_\eta (\eta_b + r_1 \cdot \sin \varphi_x) \cos \alpha}$$

ergibt. ξ_b und η_b , d. h. die Koordinaten des Mittelpunktes der Schenkelausrundung bei B im Achsenkreuz ξ, η , lassen sich aus Bild 1 leicht herleiten. Es ist

$$(5) \quad \begin{cases} \xi_b = (b - e_x - r_1) \sin \alpha - (e_y - d + r_1) \cos \alpha \\ \eta_b = (b - e_x - r_1) \cos \alpha + (e_y - d + r_1) \sin \alpha \end{cases}$$

Sämtliche im Ausdruck (4) enthaltenen Größen lassen sich somit entweder aus den Profiltafeln direkt entnehmen oder auf Grund von (1) und (5) rasch berechnen. Für den Punkt E erhält man (ohne Rücksicht auf das Vorzeichen) den Spannungswert

$$(6) \quad \sigma_e = \frac{M_x \eta_e \cdot \cos \alpha}{J_\xi} + \frac{M_x \xi_e \cdot \sin \alpha}{J_\eta}$$

Es folgt in ähnlicher Weise wie vorhin

$$(7) \quad \sigma_{ex} = \frac{M_x}{W_{ex}}$$

mit dem Widerstandsmoment

$$(8) \quad W_{ex} = \frac{J_\xi J_\eta}{J_\xi \xi_e \cdot \sin \alpha + J_\eta \eta_e \cdot \cos \alpha}$$

worin für die Koordinaten des Punktes E die Ausdrücke

$$(9) \quad \begin{cases} \xi_e = e_x \cdot \sin \alpha + e_y \cdot \cos \alpha \\ \eta_e = e_x \cdot \cos \alpha - e_y \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

einzusetzen sind.

2. Ungleichschenkliger Winkel, Moment M_y (Bild 2).

Die Lage der Nulllinie ist in diesem Falle durch

$$(10) \quad \text{tg } \varphi_y = \frac{J_\eta}{J_\xi} \cdot \text{tg } \alpha$$

gegeben, während für die größten Randspannungen die beiden Punkte A und E in Betracht kommen. Unter Bezugnahme auf die Ausführungen in dem vorigen Fall beschränken wir uns hier auf die Wiedergabe der zugehörigen Ausdrücke.

Spannung in A :

$$(11) \quad \sigma_{ay} = \frac{M_y}{W_{ay}}$$

Zugeordnetes Widerstandsmoment:

$$(12) \quad W_{ay} = \frac{J_\xi J_\eta}{J_\xi (\xi_a + r_1 \cdot \cos \varphi_y) \cos \alpha + J_\eta (\eta_a + r_1 \cdot \sin \varphi_y) \sin \alpha}$$

mit

$$(13) \quad \begin{cases} \xi_a = (a - e_y - r_1) \cos \alpha - (e_x - d + r_1) \sin \alpha \\ \eta_a = (a - e_y - r_1) \sin \alpha + (e_x - d + r_1) \cos \alpha \end{cases}$$

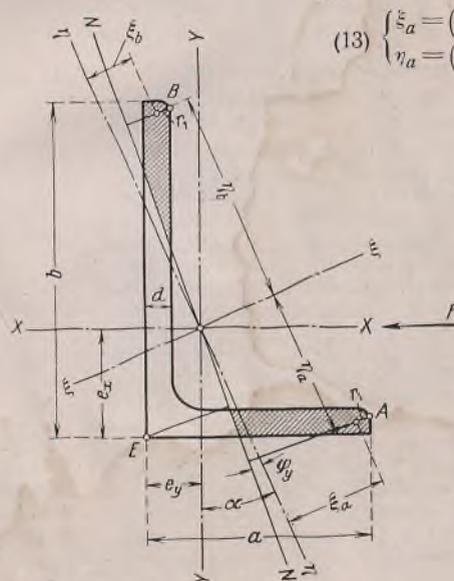


Bild 2.

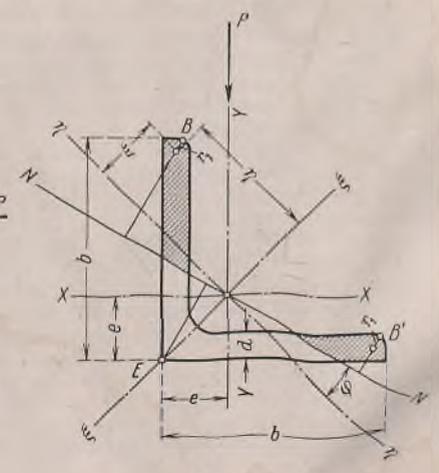


Bild 3.

Spannung in E:

$$(14) \quad \sigma_{ey} = \frac{M_y}{W_{ey}}$$

mit dem Widerstandsmoment

$$(15) \quad W_{ey} = \frac{J_\xi J_\eta}{J_\xi \xi_e \cdot \cos \alpha - J_\eta \eta_e \cdot \sin \alpha}$$

wobei ξ_e und η_e nach Gl. (9) zu berechnen sind.

3. Gleichschenkliger Winkel, Moment M_x oder M_y (Bild 3).

Es genügt hier offensichtlich, den Fall der Biegung durch $M_x = M$ zu betrachten. Die entsprechenden Formeln lassen sich auf Grund der Gl. (1) bis (9) ohne weiteres aufschreiben, indem $\alpha = 45^\circ$, ferner $\xi_b = \xi$, $\eta_b = \eta$ und schließlich $e_x = e_y = e$ gesetzt wird. Die Nulllinie ist hier nach bestimmt durch

$$(16) \quad \text{tg } \varphi = \frac{J_\eta}{J_\xi}$$

Die Biegungsbeanspruchung im Punkt B wird

$$(17) \quad \sigma_b = \frac{M}{W_b}$$

Hierin ist

$$(18) \quad W_b = \frac{J_\xi J_\eta \sqrt{2}}{J_\xi (\xi + r_1 \cdot \cos \varphi) + J_\eta (\eta + r_1 \cdot \sin \varphi)}$$

mit

$$(19) \quad \xi = \frac{b+d}{\sqrt{2}} - (e+r_1)\sqrt{2} \quad \text{und} \quad \eta = \frac{b-d}{\sqrt{2}}$$

Die Ecke E wird beansprucht mit

$$(20) \quad \sigma_e = \frac{M}{W_e}$$

worin ist

$$(21) \quad W_e = \frac{J_\eta}{e}$$

Letzterer Wert ergibt sich auch unmittelbar aus der Überlegung heraus, daß die Komponente M_ξ von M keinen Beitrag zu σ_e liefert, während der Komponente $M_\eta = M/\sqrt{2}$ das Widerstandsmoment $J_\eta/e\sqrt{2}$ entspricht.

4. Gleichzeitige Wirkung der Momente M_x und M_y .

Wir beschränken uns auf die einfachste Annahme, daß die größte Gesamtbeanspruchung im Eckpunkt E des Querschnitts entsteht. Dies ist beispielsweise bei Biegung infolge der Exzentrizität der Winkelanschlüsse in ihrer üblichen Ausführung der Fall. Für die gesamte Biegungsspannung in der Ecke gilt dann einfach

$$(22) \quad \sigma_e = \sigma_{ex} + \sigma_{ey}$$

wobei der Anteil σ_{ex} nach den Gl. (7) oder (20), der Anteil σ_{ey} nach den Gl. (14) oder (20) zu berechnen ist.

Die Widerstandsmomente zur Bemessung der im Stahlbau üblichen Winkelprofile nach DIN 1028/1029 in sämtlichen oben behandelten Fällen von Biegung sind in den Tafeln 1 und 2 zusammengestellt. Es ist nicht uninteressant, die Tafelwerte mit den Werten $W_x = J_x/b - e_x$, $W_x' = J_x/e_x$ usw. zu vergleichen, deren man sich in ähnlichen Fällen öfters in der Praxis bedient. An Hand der Profiltabellen lassen sich die folgenden Durchschnitts- bzw. Grenzwerte für das uns interessierende Verhältnis berechnen¹⁾.

Gleichschenklige Winkel:

$$\frac{W_x}{W_b} = 1,25 \pm 0,02 \quad \frac{W_x'}{W_e} = 2,40 \pm 0,08$$

Ungleichschenklige Winkel:

$$\frac{W_x}{W_{bx}} = 1,30 \pm 0,04 \quad \frac{W_x'}{W_{ex}} = 2,15 \pm 0,27$$

$$\frac{W_y}{W_{ay}} = 1,20 \pm 0,06 \quad \frac{W_y'}{W_{ey}} = 2,54 \pm 0,16$$

Aus vorstehenden Verhältniszahlen ersieht man ohne weiteres, wie wenig brauchbar die Widerstandsmomente W_x und W_y sind, sobald es sich um die Bemessung einzelner Winkelstähle auf Biegung handelt.

Anwendung der Tafeln.

Bezeichnungen.

Die Bezeichnungweise sei hier kurz rekapituliert. In Tafel 2 bezieht sich der erste Index bei W auf den Ort der Spannung, der zweite auf ihre Ursache (Bezugsachse des Moments). Die Bezeichnungen der DIN-Tafeln wurden hierbei beibehalten und durch einige weitere nach Bild 1 u. 2 ergänzt. Die Indices haben also die Bedeutung: a — kurzer Schenkel (Punkt A), b — langer Schenkel (Punkt B), e — Eckpunkt E. In Tafel 1 bezieht sich b auf den (am stärksten beanspruchten) Schenkel, e — auf den Eckpunkt E (Bild 3); der zweite Index fällt hier weg.

¹⁾ Bei dieser Vergleichsrechnung hat sich u. a. herausgestellt, daß für den L 75·90·11 $W_y = 15,1 \text{ cm}^3$, nicht $18,5 \text{ cm}^3$ (nach DIN 1029) gelten muß.

Tafel 1. Widerstandsmomente der gleichschenkligen Winkel nach DIN 1028.

L	b b d		W_b cm ³	W_e cm ³
	b	d		
45·45·5	5	5	1,97	2,54
	7	7	2,65	3,23
50·50·5	5	5	2,48	3,28
	6	6	2,88	3,61
	7	7	3,30	4,04
	9	9	4,13	4,92
55·55·6	6	6	3,57	4,64
	8	8	4,60	5,70
	10	10	5,55	6,57
60·60·6	6	6	4,27	5,58
	8	8	5,49	6,84
	10	10	6,62	7,89
65·65·7	7	7	5,79	7,46
	9	9	7,21	8,91
	11	11	8,60	10,3
	11	11	8,61	8,93
70·70·7	7	7	6,81	8,93
	9	9	8,51	10,7
	11	11	10,1	12,2
	11	11	10,1	12,2
75·75·7	7	7	7,72	10,1
	8	8	8,84	11,5
	10	10	10,8	13,5
	12	12	12,5	15,1
80·80·8	8	8	10,1	13,1
	10	10	12,3	15,3
	12	12	14,5	17,8
	14	14	16,4	19,6
90·90·9	9	9	14,4	18,8
	11	11	17,2	21,8
	13	13	19,9	24,4
	13	13	19,9	24,4
100·100·10	10	10	19,8	26,0
	12	12	23,3	29,7
	14	14	26,6	33,0
	14	14	26,6	33,0
110·110·10	10	10	24,2	32,1
	12	12	28,5	36,8
	14	14	32,5	41,4
	14	14	32,5	41,4
120·120·11	11	11	31,6	41,7
	13	13	36,6	47,1
	15	15	41,8	53,0
	15	15	41,8	53,0
130·130·12	12	12	40,4	53,3
	14	14	46,5	59,9
	16	16	52,3	66,1
	16	16	52,3	66,1
140·140·13	13	13	50,6	66,8
	15	15	57,7	74,5
	17	17	64,6	81,9
	17	17	64,6	81,9
150·150·14	14	14	62,7	82,4
	16	16	70,7	91,1
	18	18	78,8	100
	18	18	78,8	100
160·160·15	15	15	76,7	101
	17	17	85,7	111
	19	19	94,4	120
	19	19	94,4	120
180·180·16	16	16	103	135
	18	18	114	148
	20	20	126	160
	20	20	126	160
200·200·16	16	16	128	171
	18	18	143	187
	20	20	157	204
	20	20	157	204

Tafel 2. Widerstandsmomente der ungleichschenkligen Winkel nach DIN 1029.

L	a b d		W_{bx} cm ³	W_{ex} cm ³	W_{ay} cm ³	W_{ey} cm ³
	a	d				
40·60·5	5	5	3,33	3,90	1,66	2,44
	6	6	3,90	4,48	1,95	2,79
40·80·4	4	4	4,70	5,43	1,40	2,47
	6	6	6,79	7,59	2,05	3,38
50·65·5	5	5	4,04	4,96	2,59	3,70
	7	7	5,45	6,43	3,49	4,73
50·100·6	6	6	10,9	12,4	3,25	5,59
	8	8	14,1	15,5	4,25	6,83
55·75·5	5	5	5,40	6,63	3,16	4,67
	7	7	7,32	8,65	4,32	6,04
60·90·6	6	6	9,18	11,0	4,58	6,95
	8	8	11,9	13,9	5,99	8,68
65·75·6	6	6	6,55	8,32	5,12	7,06
	8	8	8,52	10,4	6,68	8,82
65·80·6	6	6	7,44	9,32	5,21	7,38
	8	8	9,63	11,7	6,78	9,21
65·100·7	7	7	13,0	15,5	6,18	9,48
	9	9	16,4	18,9	7,82	11,5
65·115·6	6	6	15,0	17,7	5,59	9,38
	8	8	19,4	22,4	7,33	11,7
65·130·8	8	8	23,5	26,6	8,95	13,7
	10	10	24,5	27,7	7,34	12,4
75·90·7	7	7	11,0	13,8	8,02	11,2
	9	9	13,8	16,8	10,1	13,6
75·100·7	7	7	13,4	16,6	8,15	12,0
	9	9	16,9	20,2	10,3	14,5
75·130·8	8	8	20,1	23,6	12,3	16,8
	10	10	25,1	29,2	9,67	15,6
75·150·9	9	9	30,6	34,9	11,9	18,5
	12	12	35,9	40,3	14,1	21,1
75·170·10	10	10	36,6	41,5	11,1	18,9
	11	11	43,7	48,9	13,4	21,9
80·120·8	8	8	50,5	55,7	15,6	24,7
	10	10	51,1	56,9	12,5	22,3
80·150·10	10	10	60,2	66,2	14,9	25,5
	12	12	68,7	74,7	17,2	28,4
80·200·10	10	10	76,9	82,8	19,5	31,0
	12	12	21,7	26,1	10,8	16,4
90·110·9	9	9	26,6	31,1	13,3	19,5
	11	11	31,2	35,9	15,7	22,3
90·130·10	10	10	35,6	40,4	18,0	24,9
	12	12	21,2	26,6	15,0	21,1
90·150·10	10	10	25,3	30,9	17,9	24,5
	13	13	29,2	34,9	20,8	27,5
90·200·10	10	10	31,8	37,7	16,9	24,9
	12	12	37,3	43,7	19,9	28,5
90·250·10	10	10	42,6	48,9	22,8	31,7
	12	12	41,7	48,8	17,3	27,3
100·150·10	10	10	49,0	56,1	20,4	31,0
	12	12	56,1	63,6	23,6	35,0
100·200·10	10	10	111	122	19,0	38,9
	12	12	131	143	22,5	44,6
100·250·10	10	10	150	162	26,0	49,5
	12	12	168	181	29,6	54,7
100·300·10	10	10	42,4	50,8	21,1	32,1
	12	12	50,0	58,8	25,0	36,9
100·350·10	10	10	57,4	66,5	28,8	41,4
	12	12	73,7	84,8	22,0	38,7
100·400·10	10	10	87,0	98,7	26,3	44,7
	12	12	99,8	112	30,3	50,0
100·450·10	10	10	112	124	34,3	55,1
	12	12	124	136	38,4	60,1

Vorzeichen.

Bei einfacher Biegung ist natürlich das kleinere der beiden Widerstandsmomente maßgebend. Bei „Biegezug“ und „Biegedruck“ ist jedoch die Spannung unter Umständen sowohl im Schenkel als auch in der Ecke nachzuweisen. Hinsichtlich der Vorzeichen ist an Hand der Bilder 1 bis 3 folgendes zu beachten: eine auf den Winkel als einfachen Balken in der Pfeilrichtung wirkende Feldbelastung erzeugt im schraffierten Querschnittsteil Druck, im übrigen Teil Zug.

Nietabzug.

Wie aus den (maßstäblich gezeichneten) Bildern 1 bis 3 hervorgeht, liegen die etwa vorhandenen Niet- oder Schraubenlöcher in der Nähe der Nulllinie. Sie können also die Tragfähigkeit eines durch ein Moment M_x oder M_y verbogenen Einzelwinkels nicht wesentlich beeinträchtigen. Im praktisch wichtigen Fall eines exzentrisch angeschlossenen Zug- oder Druckstabes ist der Anteil der Biegung an der Gesamtbeanspruchung ohnehin gering, und es erscheint hierbei zulässig, den Einfluß der Querschnittsschwächung auf die Biegungsspannung ganz zu vernachlässigen. In anderen Fällen, z. B. bei Biegung ohne Längskraft, verfährt man am einfachsten und bleibt auch in der Regel auf der sicheren Seite, indem man näherungsweise $W_n = \frac{WF_n}{F}$ setzt.

Beispiele.

1. Beispiel. Ein Geländerholm ist für ein Moment $M = 20$ tcm aus waagerechter Querbelastung zu bemessen.

Unter der Voraussetzung $\sigma_{zul} = 1400$ kg/cm² hat man

$$W_{erf} = \frac{20}{1,4} = 14,3 \text{ cm}^3.$$

Gewählt wird L 90 · 90 · 9 mit $W_b = 14,4$ cm³ nach Tafel 1 oder L 65 · 100 · 9 (flach gelegt) mit $W_{bx} = 16,4$ cm³ nach Tafel 2.

2. Beispiel. Ein L 40 · 80 · 6 (flach liegend) ist als ein 6 m langer Füllungsstab eines waagerechten Verbandes für $S = 7$ t Zugkraft bemessen. Die Querschnittsbeanspruchung in Stabmitte ist unter Berücksichtigung der Biegung durch Eigengewicht $g = 5,41$ kg/m, jedoch unter Außerlassung der Endmomente nachzurechnen.

Es ist

$$M_y = \frac{5,41 \cdot 6^2}{8} = 24,4 \text{ kgm} = 2,44 \text{ tcm}, \quad F = 6,89 \text{ cm}^2;$$

ferner nach Tafel 2: $W_{ay} = 2,05$ cm³, $W_{ey} = 3,38$ cm³.

Am oberen Rande (Punkt A nach Bild 2) wird

$$\sigma = \frac{S}{F} - \frac{M_y}{W_{ay}} = \frac{7}{6,89} - \frac{2,44}{2,05} = 1,02 - 1,19 = -0,17 \text{ t/cm}^2 \text{ (Druck).}$$

Am unteren Rande (Punkt E nach Bild 2) wird

$$\sigma = \frac{S}{F} + \frac{M_y}{W_{ey}} = 1,02 + \frac{2,44}{3,38} = 1,02 + 0,72 = 1,74 \text{ t/cm}^2 \text{ (Zug).}$$

Setzt man nun $F_n = 6,89 - 1,7 \cdot 0,6 = 5,87$ cm², so hat man am Anschluß nur $\sigma = 7/5,87 = 1,19$ t/cm². Allerdings ist bei unserem Nachweis der Spannungen in Stabmitte das Gegenmoment infolge der Durchbiegung des Stabes unberücksichtigt geblieben.

3. Beispiel. Ein aus L 90 · 110 · 9 (in Flußstahl St 37) gebildeter Füllungsstab hat eine Druckkraft $S = 5$ t bei einer Knicklänge $s_k = 2,5$ m

aufzunehmen. Die Beanspruchung ist unter Berücksichtigung der aus Bild 4 ersichtlichen außermittigen Anschlüsse an 10 mm dicke Knotenbleche nachzuweisen.

Es gilt zunächst

$$F = 17,3 \text{ cm}^2, \quad i_y = 1,89 \text{ cm}, \\ \lambda = 132, \quad \omega = 4,12.$$

Die maßgebende Beanspruchung sei unter den folgenden beiden Annahmen berechnet:

a) Die Netzlinie des Fachwerks fällt mit der Schwerachse des Querschnitts zusammen.

Die Exzentrizitäten sind in diesem Falle

$$\epsilon_x = 0, \quad \epsilon_y = 0,5 + 2,32 = 2,82 \text{ cm},$$

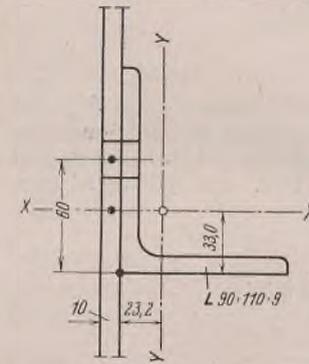


Bild 4.

Die größte Beanspruchung tritt im Eckpunkte auf. Mit $W_{ey} = 21,1$ cm³ nach Tafel 2 wird

$$\sigma = \frac{\omega S}{F} + \frac{M_y}{W_{ey}} = \frac{4,12 \cdot 5}{17,3} + \frac{5 \cdot 2,82}{21,1} = 1,19 + 0,67 = 1,86 \text{ t/cm}^2 > \sigma_{zul}$$

b) Die Netzlinie des Fachwerks fällt mit der Nietrißlinie des Winkels zusammen.

Nach Bild 4 ist

$$\epsilon_x = 6,0 - 3,3 = 2,7 \text{ cm}, \quad \epsilon_y = 2,82 \text{ cm} \text{ wie vorhin}; \quad W_{ex} = 26,6 \text{ cm}^3;$$

$$\sigma = \frac{\omega S}{F} + \frac{M_y}{W_{ey}} + \frac{M_x}{W_{ex}} = 1,19 + 0,67 + \frac{5 \cdot 2,7}{26,6} \\ = 1,86 + 0,51 = 1,35 \text{ t/cm}^2 < \sigma_{zul}$$

Aus letzterem Beispiel ist leicht zu ersehen, wie erheblich ein exzentrischer Kraftangriff die maßgebende Beanspruchung eines Einzelwinkels zu beeinflussen vermag.

Alle Rechte vorbehalten.

Die Berechnung durchlaufender Träger unter Berücksichtigung der Plastizität.

Von Dr.-Ing. Georg Schmidt, Berlin.

In den Berechnungsgrundlagen für Stahl im Hochbau (DIN 1050) sind in § 13, Absatz 3, Angaben für die Berechnung durchlaufender Träger unter Berücksichtigung der Plastizität enthalten, welche besagen, daß die Endfelder eines Durchlaufträgers für $q \cdot \frac{l^2}{11}$, die Innenfelder für $q \cdot \frac{l^2}{16}$ zu bemessen sind. Dabei darf die kleinste Stützweite oder Belastung nicht weniger als das 0,8fache der größten betragen.

Wesentlich für die Gültigkeit der angegebenen Momente ist ein gleichbleibendes Trägerprofil über die ganze Trägerlänge. Diese Forderung ist jedoch in dem genannten Absatz nicht enthalten, wodurch man verleitet wird, das Endfeld stärker als die Mittelfelder zu bemessen, wie es in der Praxis dauernd beobachtet werden kann. Dann ist aber die Bruchsicherheit $\nu = 1,71$ für die Endfelder nicht mehr gewährleistet, wie auch die Bemessungsformel $M = \frac{q l^2}{11}$ nicht mehr gültig ist. Hierdurch angeregt, wurde der gesamte Fragenkomplex bezüglich des Einflusses verschiedener Stützweiten, Profile und Belastungen untersucht.

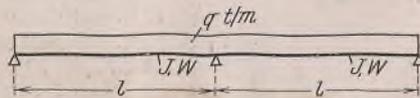


Bild 1.

Bevor jedoch im einzelnen auf jeden Punkt eingegangen wird, sei die bekannte Ableitung für das im Endfeld anzunehmende Moment nochmals in einer anderen Form wiederholt. Wir führen sie am Dreistützträger mit zwei gleichen Öffnungen durch. Die Grundlagen für die Berechnung sind wieder idealplastisches Verhalten des Baustoffs — also bis zur Fließgrenze Verlauf der σ/ϵ -Linie nach der Hookeschen Geraden, dann unbegrenztes Fließen ohne Spannungsänderung — und die Größe des Tragnoments $M_F = W \sigma_F$, bei dem die Tragfähigkeit des Trägerprofils erschöpft ist.

Die gleichmäßig verteilte Belastung, für die der Träger zu berechnen ist, sei q t/m (Gebrauchslast). Gemäß der geforderten Sicherheit $\nu = 1,71$ darf der Träger erst bei einer Belastung $q_2 = 1,71 q$ t/m zu Bruch gehen. Dazwischen sei ein Wert q_1 t/m eingeschaltet, bei dem über der Mittelstütze das Moment gleich dem Tragnoment wird, d. h. im Querschnitt über der Mittelstütze in der Randfaser die Spannung σ_F auftritt.

Der Vorgang der Laststeigerung wird also in zwei Abschnitte aufgeteilt: q bis q_1 , Laststeigerung bis zum Auftreten des Tragnoments (Fließmoments) in einem Querschnitt des statisch unbestimmten Trägers, und q_1 bis q_2 , weitere Laststeigerung bis zum Bruch des Trägers.

Gesucht wird das Moment $\frac{q l^2}{Z}$, für das der Träger zu bemessen ist, damit $q_2/q = 1,71$ ist.

Aus den Gleichungen

$$(1) \quad \frac{q l^2}{Z W} = 1,4 \text{ t/cm}^2 \quad \text{und} \quad \frac{q_1 l^2}{8 W} = 2,4 \text{ t/cm}^2$$

folgt

$$n = \frac{q}{q_1} = \frac{Z \cdot 1,4}{8 \cdot 2,4} = \frac{Z}{8 \cdot 1,71},$$

der erste Teil der Laststeigerung.

Der zweite Teil ergibt sich aus dem Maximalmoment eines mit der gleichmäßig verteilten Last q_2 und dem negativen Endmoment $M_F = -\frac{q_1 l^2}{8}$ belasteten Trägers. Das Maximalmoment ist gleich M_F zu setzen und tritt an der Stelle

$$X = \frac{l}{2} - \frac{M_F}{l q_2} = \frac{l}{2} - \frac{q_1 l}{q_2 \cdot 8} \text{ auf.}$$

Damit ergibt sich

$$(2) \quad \frac{q_1 l^2}{8} = \frac{q_2}{2} \left(\frac{l^2}{4} - \frac{q_1^2 l^2}{q_2^2 \cdot 64} \right) - \frac{q_1 l^2}{16} + \frac{q_1^2 l^2}{q_2^2 \cdot 64}.$$

$m = \frac{q_1}{q_2}$ hierin eingesetzt liefert die quadratische Gleichung für m

$$m^2 - 24 m = -16 \text{ oder } m = 4(3 - \sqrt{8}).$$

Aus der Bedingung

$$\nu = \frac{q_2}{q} = \frac{1}{m n} = 1,71$$

findet man

$$1,71 = \frac{8 \cdot 1,71}{Z \cdot 4(3 - \sqrt{8})} \quad \text{und} \quad Z = \frac{2}{3 - \sqrt{8}} = 11,63.$$

Diese Zahl ist in den Vorschriften auf 11 abgerundet worden.

Die Steigerung der Gebrauchslast q um

$$\frac{1}{n} = \frac{8 \cdot 1,71}{11,63} = 1,176 \text{ bis } q_1$$

erzeugt in einem Querschnitt das Fließmoment, eine Steigerung von q_1 um

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{4(3-\sqrt{8})} = 1,453 \text{ bis } q_2$$

bringt den Bruch des Trägers.

Verschiedene Stützweiten.

Für den Träger nach Bild 2 mit gleichem Trägheitsmoment und gleicher Belastung über die ganze Länge lautet jetzt Gl. (1)

$$(3) \quad \frac{q l_1^2}{Z W} = 1,4 \text{ t/cm}^2 \quad \text{und} \quad \frac{q_1 (l_1^3 + l_2^3)}{8 W (l_1 + l_2)} = \frac{q_1 L^2}{8 W} = 2,4 \text{ t/cm}^2,$$

wenn $L^2 = \frac{l_1^3 + l_2^3}{l_1 + l_2}$ ist.

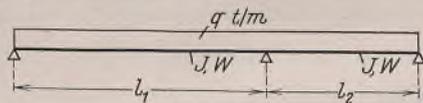


Bild 2.

Sie ergeben

$$n = \frac{q}{q_1} = \frac{Z}{8 \cdot 1,71} \cdot \frac{L^2}{l_1^2}$$

Gl. (2) ändert sich mit $M_F = -\frac{q_1 L^2}{8}$ in

$$(4) \quad \frac{q_1 L^2}{8} = \frac{q_2}{2} \left(\frac{l_1^2}{4} - \frac{q_1^2 L^4}{q_2^2 \cdot 64 l_1^2} \right) - \frac{q_1 L^2}{16} + \frac{q_1^2 L^4}{q_2^2 \cdot 64 l_1^2}$$

und ergibt

$$m^2 - 24 \cdot \frac{l_1^2}{L^2} \cdot m = -16 \cdot \frac{l_1^4}{L^4} \quad \text{oder} \quad m = 4(3 - \sqrt{8}) \frac{l_1^2}{L^2},$$

$$v = \frac{1}{m n} = 1,71 = \frac{8 \cdot 1,71 l_1^2}{Z L^2} \cdot \frac{L^2}{4(3 - \sqrt{8}) l_1^2}$$

ergibt wieder für

$$Z = \frac{2}{3 - \sqrt{8}} = 11,63.$$

Das Verhältnis der Stützweiten übt also keinerlei Einfluß auf die Sicherheit des Trägers aus. Z behält für den ganzen Bereich $1 \leq \frac{l_2}{l_1} \leq 0$ den gleichen Wert. Lediglich die Größe der Zwischenlast q_1 erfährt eine Änderung. Für $l_1 = 7,0$ m und $l_2 = 5,0$ m wird

$$L^2 = \frac{7^3 + 5^3}{7 + 5} = 39.$$

Jetzt kann also q um

$$\frac{1}{n} = \frac{8 \cdot 1,71}{11,63} \cdot \frac{49}{39} = 1,478$$

gesteigert werden, ehe das Fließmoment M_F auftritt. Dafür geht der Träger jetzt aber schon nach einer weiteren Steigerung der Last um

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{4(3 - \sqrt{8})} \cdot \frac{39}{49} = 1,157$$

zu Bruch.

Analog findet man für ein Mittelfeld eines Durchlaufträgers unabhängig von den benachbarten Stützweiten das Gebrauchslastmoment $M = \frac{q l^2}{16}$, für das der Träger zu berechnen ist, damit eine Sicherheit $v = 1,71$ gegen Bruch vorhanden ist. Die Ableitung wird der Raumersparnis wegen fortgelassen.

Es sei nur bemerkt, daß die Steigerung der Gebrauchslast bis zur Bruchlast jetzt in drei Abschnitte aufgeteilt werden muß. q ist wieder die Gebrauchslast. Bei q_1 tritt über einer Stütze, bei q_2 über der anderen das Fließmoment auf — die Stützmomente des elastischen Durchlaufträgers brauchen ja nicht gleich zu sein — und bei q_3 geht das Feld zu Bruch.

Verschiedene Profile in den einzelnen Feldern.

Die Werte für Z von 11,63 bzw. 16 sind jedoch nicht mehr gültig, sobald die Nachbarfelder ein kleineres Profil aufweisen als das betrachtete Feld. Die Ableitung für Z sei deshalb für einen Träger mit verschiedenen

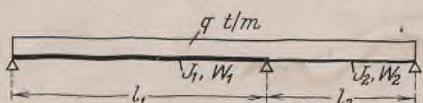


Bild 3.

Profilen in den einzelnen Öffnungen durchgeführt. Um sie allgemein zu halten, seien gleichzeitig verschiedene Stützweiten für die verschiedenen Felder zugrunde gelegt (Bild 3, J = Trägheitsmoment, W = Widerstandsmoment).

Ist l_1 die größere Stützweite, J_1 das größere Trägheitsmoment und

$$L^2 = \frac{l_1^3 + l_2^3 \cdot \frac{J_1}{J_2}}{l_1 + l_2 \cdot \frac{J_1}{J_2}},$$

so lauten Gl. (3) jetzt

$$(5) \quad \frac{q l_1^2}{Z W_1} = 1,4 \text{ t/cm}^2 \quad \text{und} \quad \frac{q_1 L^2}{8 W_2} = 2,4 \text{ t/cm}^2.$$

Somit ist

$$n = \frac{q}{q_1} = \frac{Z L^2}{8 \cdot 1,71 l_1^2} \cdot \frac{W_1}{W_2}$$

In Gl. (4) wird jetzt auf der linken Seite nicht das Fließmoment des Stützquerschnitts, sondern das des Trägers mit der Stützweite l_1 eingesetzt. Es ist außerdem die neue Bedeutung von L^2 zu beachten.

$$(6) \quad \frac{q_2 l_1^2}{Z} = \frac{q_2}{2} \left(\frac{l_1^2}{4} - \frac{q_1^2 L^4}{q_2^2 \cdot 64 l_1^2} \right) - \frac{q_1 L^2}{16} + \frac{q_1^2 L^4}{q_2^2 \cdot 64 l_1^2}$$

Hieraus erhält man für $m = \frac{q_1}{q_2}$

$$m = \frac{l_1^2}{L^2} \left(4 \pm \sqrt{\frac{128}{Z}} \right)$$

$$v = \frac{1}{m n} = 1,71$$

$$= \frac{L^2}{l_1^2 \left(4 \pm \sqrt{\frac{128}{Z}} \right)} \cdot \frac{8 \cdot 1,71 l_1^2 W_2}{Z L^2 W_1} = \frac{8 \cdot 1,71 W_2}{(4 Z \pm \sqrt{128 Z}) W_1}$$

liefert für Z die Gleichung

$$4 Z \pm \sqrt{128 Z} = 8 \cdot \frac{W_2}{W_1} \quad \text{und} \quad Z = 4 + 2 \cdot \frac{W_2}{W_1} + 4 \sqrt{1 + \frac{W_2}{W_1}}$$

Die Richtigkeit dieses Wertes kann man leicht durch Einsetzen von W_2 nachprüfen.

Für den Balken auf zwei Stützen ist $W_2 = 0$ und $Z = 4 + 4 = 8$, für den durchlaufenden Balken mit gleichem Profil in beiden Feldern $W_2 = W_1$ und

$$Z = 4 + 2 + 4\sqrt{2} = 2(3 + \sqrt{8}) = \frac{2}{3 - \sqrt{8}} = 11,63,$$

der gleiche Wert wie oben.

Wäre $W_2 > W_1$, dürfte in der Gleichung für Z der Bruch $\frac{W_2}{W_1}$ jedoch nur 1 gesetzt werden, denn es ist offen ersichtlich, daß die Tragfähigkeit eines Endfeldes durch Verstärken des zweiten (Mittelfeldes) nicht größer werden kann, da das Fließmoment über der Stütze den Wert $M_F = \frac{q_1 L^2}{8 W_1}$ nicht zu überschreiten vermag. An einem Beispiel sei das Ergebnis erläutert. Ein Träger mit den Stützweiten $l_1 = 7,0$ m, $l_2 = 6,0$ m = $l_3 = l_4$ sei für die Gebrauchslast $q = 0,5$ t/m zu bemessen. Dann geschieht das in der Praxis fälschlicherweise immer so:

Endfeld

$$M = 0,5 \cdot \frac{7,0^2}{11} = 2,33 \text{ mt},$$

$$\text{I 18} \quad W = 161 \text{ cm}^3 \quad \sigma = \frac{223}{161} = 1,380 \text{ t/cm}^2.$$

Mittelfeld

$$M = 0,5 \cdot \frac{6,0^2}{16} = 1,12 \text{ mt},$$

$$\text{I 14} \quad W = 81,9 \text{ cm}^3 \quad \sigma = \frac{112}{81,9} = 1,370 \text{ t/cm}^2.$$

Da aber das Fließmoment am eingespannten Ende des Endfeldes nicht $M_F = 161 \cdot 2,4 = 386,4$ t·cm, sondern nur $M_F = 81,9 \cdot 2,4 = 196,56$ t·cm, die Entlastung des Endfeldes also bedeutend geringer ist, als bei der Ermittlung von $Z = 11$ zugrunde gelegt, ist die Sicherheit natürlich auch nicht $v = 1,71$.

Das Endfeld hätte mit

$$Z = 4 + 2 \cdot \frac{81,9}{161} + 4 \sqrt{1 + \frac{81,9}{161}} = 9,93$$

für $M = 0,5 \cdot \frac{7,0^2}{9,93} = 2,46$ mt berechnet werden müssen. Dafür ist aber die Spannung bei dem Profil I 18

$$\sigma = \frac{246}{161} = 1,530 \text{ t/cm}^2 \quad \text{und} \quad v = \frac{2,4}{1,53} = 1,57.$$

Für das Endfeld müßte also I 20 gewählt werden.

Hierfür wäre

$$Z = 4 + 2 \cdot \frac{81,9}{214} + 4 \sqrt{1 + \frac{81,9}{214}} = 9,63,$$

$$M = 0,5 \cdot \frac{7,0^2}{9,63} = 2,55 \text{ mt} \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{255}{214} = 1,195 \text{ t/cm}^2.$$

Für ein Mittelfeld wird auf ähnliche Weise

$$Z = 4 + 2 \cdot \frac{W_2}{W_1} + 2 \cdot \frac{W_3}{W_1} + 4 \sqrt{1 + \frac{W_2}{W_1} + \frac{W_3}{W_1} + \frac{W_2 W_3}{W_1^2}}$$

gefunden, wobei W_1 das Widerstandsmoment des betrachteten Feldes, W_2 und W_3 die der Nachbarfelder sind. Die Ableitung ist der Raumersparnis wegen wieder fortgelassen.

Von der Richtigkeit der Formel kann man sich jedoch leicht überzeugen. Ist $W_1 = W_2 = W_3$, so ergibt sich $Z = 4 + 2 + 2 + 4\sqrt{4} = 16$, der Wert für ein Mittelfeld des Durchlaufträgers mit gleichbleibendem Querschnitt.

Setzt man $W_3 = 0$, ist

$$Z = 4 + 2 \cdot \frac{W_2}{W_1} + 4 \sqrt{1 + \frac{W_2}{W_1}}$$

dies ist der Wert für das Endfeld, wenn das Nachbarfeld ein anderes Profil aufweist.

Verschiedene gleichmäßig verteilte Belastung in den einzelnen Feldern.

Wir betrachten wieder den Dreistützträger von Bild 3. Jetzt seien aber die Gebrauchslasten q t/m im Feld l_1 und p t/m im Feld l_2 . Wird die Last q unter Beibehaltung von p vergrößert, so läßt sich wieder ein Wert q_1 bestimmen, für den Gl. (5) gelten.

Allerdings ist jetzt

$$L^2 = \frac{l_1^3 + l_2^3 \cdot \frac{p}{q_1} \cdot \frac{J_1}{J_2}}{l_1 + l_2 \cdot \frac{J_1}{J_2}}$$

Zwar ist durch die Gleichung

$$n = \frac{q}{q_1} \cdot \frac{Z L^2}{8 \cdot 1,71 l_1^2} \cdot \frac{W_1}{W_2}$$

q_1 nicht explizit dargestellt, da es noch in L^2 enthalten ist, aber dies ist für das Endergebnis unwesentlich.

Verschiedenes.

Ergänzung zu dem Aufsatz „Die Festigkeit leichtgekrümmter Druckstäbe aus Stahl bei schwingender Belastung“. Stahlbau 1940, H. 23/24.

Zunächst sei auf einige sinnstörende Druckfehler verwiesen. In Gl. (8), S. 129, fehlt im Zähler des zweiten Gliedes die abschließende runde Klammer. Gl. (22), S. 130, muß lauten:

$$(22) \quad \lambda_0^2 = \frac{\pi^2 E}{\left(\sigma_{kr} + \frac{\gamma l^2 \omega^2}{g \pi^2}\right)}$$

In Gl. (32), S. 131, ist das zweite Glied mit dem Faktor $\left(\frac{u_0}{l}\right)$ zu multiplizieren.

Hinsichtlich der Aufstellung der Gl. (16) u. (31) ist textlich folgendes zu ergänzen. Die angegebene Näherungslösung führt zu einer kritischen Last, die etwas kleiner ist als die wirkliche Tragfähigkeit. Aus diesem Grunde wurde zum Ausgleich bei der Aufstellung der Biegemomente (16) und (31) auf den hier unwesentlichen sekundären Einfluß der die Krümmung verstärkenden Trägheitskräfte bewußt verzichtet (der primäre und maßgebliche Einfluß der Trägheitskräfte ist bereits in der Durchbiegung enthalten). Die genauen Werte für die Biegemomente erhält man am einfachsten aus Gl. (7), S. 129. Es ergibt sich dann gemäß Gl. (19), S. 130, die für die Ermittlung der kritischen Axialspannung im Falle reiner Schwellbeanspruchung maßgebende Gl. (20), S. 130, in der etwas geänderten Form

$$(20) \quad \left(1 - \frac{\sigma_{kr} \lambda^2}{2 \pi^2 E}\right) \left[1 - \frac{\lambda^2}{\pi^2 E} \left(\sigma_{kr} + \frac{\gamma l^2 \omega^2}{g \pi^2}\right)\right] - \frac{\sigma_{kr} \lambda}{(\sigma_F - \sigma_{kr})} \left[1 - \frac{\lambda^2}{2 \pi^2 E} \left(\sigma_{kr} + \frac{\gamma l^2 \omega^2}{g \pi^2}\right)\right] \left(\frac{u_0}{l}\right) = 0.$$

Die einer reinen Wechselbeanspruchung zugeordnete, der Gl. (32), S. 131, entsprechende genauere Beziehung lautet:

$$(32) \quad \left[1 - \frac{\lambda^2}{\pi^2 E} \left(\sigma_{kr} + \frac{\gamma l^2 \omega^2}{g \pi^2}\right)\right] - \frac{\sigma_{kr} \lambda}{(\sigma_F - \sigma_{kr})} \left(\frac{u_0}{l}\right) = 0.$$

Die Verwendung der Gl. (20)' u. (32)' an Stelle der Gl. (20) u. (32) führt zu ganz unwesentlich kleineren kritischen Spannungen (im Bereiche $\lambda = 200$ wird die kritische Spannung um höchstens 3% kleiner), doch sei nochmals ausdrücklich hervorgehoben, daß hierdurch der Genauigkeitsgrad der gegebenen Näherungslösung nicht verbessert, sondern verschlechtert wird.

In Gl. (6), die für den vorliegenden Fall ihre Form beibehält, ist nämlich das gleiche L^2 einzuführen, das wir in Gl. (5) einsetzen mußten. Bei der Ermittlung von ν hebt es sich heraus und wir erhalten für ν wieder den gleichen Wert

$$\nu = \frac{8 \cdot 1,71 W_2}{(4Z \pm \sqrt{128Z}) W_1}$$

und somit

$$Z = 4 + 2 \cdot \frac{W_2}{W_1} + 4 \sqrt{1 + \frac{W_2}{W_1}}$$

Es spielt also bei der Berechnung eines Feldes die Belastung des Nachbarfeldes gar keine Rolle, sie könnte auch Null sein. Durch den Unterschied der Belastungen wird lediglich die Lage von q_1 zwischen q und q_2 verändert, das Endergebnis von ν jedoch nicht berührt.

Folgerung.

Soll ein durchlaufender Balken von verschiedenen Stützweiten und verschiedenen gleichmäßig verteilten Belastungen in den einzelnen Feldern nach der Plastizität berechnet werden, so ist jedes Feld für $M = \frac{q l^2}{Z}$ zu bemessen, wobei für q und l die zu dem betreffenden Feld gehörigen Werte und für

$$Z = 4 + \frac{2W_2}{W_1} + \frac{2W_3}{W_1} + 4 \sqrt{1 + \frac{W_2}{W_1} + \frac{W_3}{W_1} + \frac{W_2 W_3}{W_1^2}}$$

einzusetzen ist. W_1 ist das Widerstandsmoment des betrachteten Feldes, W_2 und W_3 die der Nachbarfelder. Die Stützweiten und Belastungen der Nachbarfelder sind völlig ohne Belang.

Die Formel für Z ist allgemein gültig, also auch für die Endfelder, für die einfach $W_3 = 0$ zu setzen ist. Sie gilt für

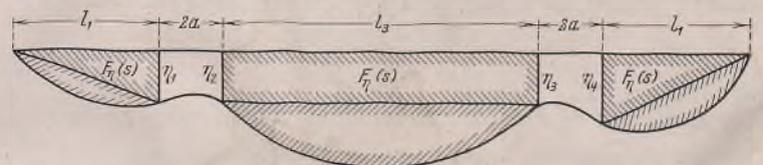
$$0 \leq \frac{W_2}{W_1} \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \frac{W_3}{W_1} \leq 1.$$

Für $W_2 > W_1$ und $W_3 > W_1$ sind die Quotienten $\frac{W_2}{W_1}$ und $\frac{W_3}{W_1}$ gleich 1 zu setzen.

Berichtigung

zu dem Aufsatz „Hängebrücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers“ in Stahlbau 1940, Heft 21/22.

Bild 7 auf S. 112 soll folgendermaßen sein:



Und auf der gleichen Seite muß es statt

$$F_{\eta}(s) = \frac{1}{2} [(\eta_1 + \eta_4) l_1' + (\eta_2 + \eta_3) l_3']$$

heißen:

$$F_{\eta}(s) = \frac{1}{2} [(\eta_1 + \eta_4) l_1 + (\eta_2 + \eta_3) l_3].$$

Infolgedessen sind in Gl. (27a), (28), (29) u. (29)' sowie in die Ausdrücke $\frac{a}{2} (l_1 C_1 + l_3' C_{III})$ und $\frac{a}{2 \eta_2} (\lambda l_1 l_1'' + l_3 l_3'')$ der Gl. (31) und Gl. (31)' statt l_1, l_1'' und l_3' die Größen $\nu_1 l_1, \nu_1' l_1$ und l_3 einzusetzen. Die zahlenmäßige Auswirkung dieser Richtigstellung ist belanglos.

K. Klöppel, K. Lie.

INHALT: Der R-Träger, eine neue, leichte Trägerform. — Die Stabilität der Drei- und Zweigelenkrechteckrahmen mit Eckstreben und mit Fachwerkgiebeln. — Über die Berechnung von Einzelwinkeln auf Biegung. — Die Berechnung durchlaufender Träger unter Berücksichtigung der Plastizität. — Verschiedenes: Ergänzung zu dem Aufsatz „Die Festigkeit leichtgekrümmter Druckstäbe aus Stahl bei schwingender Belastung“. — Berichtigung.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule

Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 11. April 1941

Heft 8/9

Alle Rechte vorbehalten.

Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens.

Von Ernst Chwalla und Friedrich Jokisch in Brünn.

1. Einführung.

Wir untersuchen einen Stockwerkrahmen, der aus geraden, axial undeformablen Stäben besteht und in den Knotenpunkten durch ein System von Kräften — die sogenannte „Baubelastung“ — belastet wird. Versehen wir alle diese Kräfte mit einem gemeinsamen Multiplikator ν , so lassen sich — wenn die üblichen idealisierenden Voraussetzungen der Knicktheorie (ideal gerade Stabachsen, ideal mittige Kräfteintragung, ideal homogener Werkstoff) erfüllt sind — bestimmte kritische Werte ν_{Ki} angeben, die den idealen Knickbelastungszuständen des Rahmens (den „Verzweigungsstellen“ des Gleichgewichts, das zwischen den inneren und den äußeren Kräften besteht) zugehören. Diese idealen Knickbelastungszustände sind dadurch gekennzeichnet, daß unter derselben Laststufe zwei verschiedene, unmittelbar benachbarte Gleichgewichtsfiguren — die gegebene, biegemomentenfreie und eine infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur — zur Ausbildung gelangen können. Die kleinste aller positiven und reellen Zahlen ν_{Ki} stellt die der gegebenen Baubelastung zugeordnete „ideale Knicksicherheitszahl“ dar und bestimmt die für die Stabilitätssicherung des Rahmens maßgebende kleinste ideale Knickbelastung.

Bei Rahmen, die symmetrisch gebaut und symmetrisch belastet sind, brauchen wir die Ausbildung eines idealen Knickbelastungszustandes nicht mehr an die Voraussetzung eines biegemomentenfreien Ausgangszustandes zu binden. Die Gefahr einer Gleichgewichtsverzweigung besteht hier auch in jenen Fällen, in denen die Riegel und Stiele des Rahmens durch Querlasten beansprucht werden und daher schon vor dem Ausknicken des Rahmens Biegemomente und Querkräfte aufweisen. Da die theoretisch strenge Bestimmung von ν_{Ki} bei dieser Art von Instabilitätserscheinungen — die auch bei den Bogenträgern von Bedeutung ist und kurz als „Symmetrieknickung“ bezeichnet werden kann — auf große Schwierigkeiten stößt, wurde vorgeschlagen¹⁾, die Stabilitätsuntersuchung näherungsweise für eine Ersatzbelastung durchzuführen, die dadurch gekennzeichnet ist, daß die unter der gegebenen Belastung wirksamen Axialkräfte als äußere Doppelkräfte an den Stabenden — also in den Knotenpunkten des Rahmens — mittig angreifen und daher die gleiche Normalkraftverteilung wie die gegebene Baubelastung hervorrufen. Das Problem der Ermittlung von ν_{Ki} ist damit auf das früher geschilderte Problem zurückgeführt.

Mit Rücksicht auf die hohe statische Unbestimmtheit der vielzelligen Stockwerkrahmen ist es zweckmäßig, bei der Stabilitätsuntersuchung nicht die „Kräfteformel“, sondern die „Deformationsmethode“ anzuwenden — also aus den verfügbaren Bedingungsgleichungen nicht die Verschiebungsgrößen, sondern die Schnittgrößen zu eliminieren und die Komponenten des Verschiebungszustandes mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen zu berechnen; als Unbekannte treten dann bloß die Verdrehungswinkel der Rahmenknoten und die Axialverschiebungen der Rahmenriegel auf. Da der Rahmen voraussetzungsgemäß nur in den Knotenpunkten belastet ist, sind die Gleichungen, die wir für diese Unbekannten anschreiben können, nicht nur linear, sondern auch homogen: sie besitzen daher nur dann eine von der trivialen Nulllösung verschiedene Lösung, wenn ihre Koeffizientendeterminante D_K verschwindet. Die Gleichung $D_K = 0$ stellt die gesuchte Knickbedingung dar und dient zur Berechnung von ν_{Ki} ²⁾.

Die Anwendung dieses unter dem Namen „Knotendrehwinkelverfahren“ allgemein bekannten Lösungsverfahrens bietet den großen Vorteil, daß die einzelnen Zeilen der Koeffizientendeterminante D_K unmittelbar

¹⁾ E. Chwalla, Bauing. 19, 1938, S. 69; E. Chwalla und C. F. Kollbrunner, Stahlbau 10, 1937, S. 121, und 11, 1938, S. 73.

²⁾ Vgl. dazu auch K. Thalau und A. Teichmann, Aufgaben aus der Flugzeugstatik, IV. Kap., Berlin 1933, sowie E. Chwalla, Anzeiger Akad. d. Wiss. in Wien, 1938, S. 73.

angeschrieben werden können und daß die Zahl der Unbekannten — verglichen mit der Zahl der statisch überzähligen Größen — verhältnismäßig klein ist; das Ausrechnen von D_K und Aufstellen der Knickbedingung bereitet daher nur wenig Mühe. Außerdem entfällt bei den baustatischen Anwendungen des Knotendrehwinkelverfahrens erforderliche, durch die Notwendigkeit der Rückrechnung der Schnittgrößen aus den gefundenen Verschiebungsgrößen bedingte zusätzliche Aufwand an Rechenarbeit.

Die folgenden Untersuchungen beziehen sich auf die ebene Stabilität von Stockwerkrahmen, deren Querschnitte stabweise konstant und in ihren Abmessungen sehr klein im Vergleich zu den Stablängen sind. Wir setzen, wie wir schon einleitend erwähnten, axial undeformbare Stäbe voraus (vgl. dazu auch den 8. Abschnitt) und vernachlässigen den Einfluß, den die Schubverzerrung auf die Größe von ν_{Ki} nimmt. Ferner verlangen wir, daß die äußeren Lasten ihre Richtungen auch während des Ausknickens des Rahmens beibehalten und daß das Ausknicken innerhalb des Hookeschen Formänderungsbereiches erfolgt.

2. Die Grundbeziehungen.

a) Druckstäbe.

Die der idealen Knickbelastung zugeordnete Verzweigungsstelle des Gleichgewichts ist, wie wir schon feststellten, dadurch gekennzeichnet, daß unter derselben Laststufe zwei verschiedene Gleichgewichtsfiguren — die biegemomentenfreie und die infinitesimal ausgebogene — gleich gut möglich sind. Wenn wir uns den Rahmen der gesuchten Knickbelastung unterworfen und die erste dieser beiden Gleichgewichtsfiguren in die benachbarte zweite übergeführt denken, werden die einzelnen Stäbe des Rahmens unendlich wenig verbogen. Die Enden eines beliebig herausgegriffenen, die Rahmenknoten a und b verbindenden Stabes (Bild 1) verdrehen sich hierbei gemeinsam mit den anschließenden Rahmenknoten um die unendlich kleinen Knotendrehwinkel φ_a, φ_b , und die Stabsehne ab erfährt eine Verdrehung um den infinitesimalen Stabdrehwinkel φ_{ab} ; außer der endlich großen Druckkraft S_{ab} gelangen noch die unendlich kleinen Endmomente M_{ab}, M_{ba} und die unendlich kleinen Stützkräfte V_{ab} zur Wirkung.

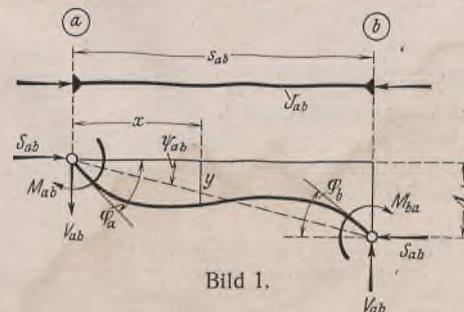


Bild 1.

Die Endmomente, die Knotendrehwinkel und die Stabdrehwinkel werden im Uhrzeigersinn positiv gezählt. Die Reihenfolge der Zeiger a, b ist nur bei den Endmomenten von Bedeutung, da das linke Endmoment M_{ab} vom rechten Endmoment M_{ba} unterschieden werden muß; bei allen übrigen in Bild 1 angegebenen Größen kann statt ab ebensogut auch ba geschrieben werden. Die Druckkraft S_{ab} wird mit ihrem Absolutwert in die Rechnung eingeführt.

Die dem Stab (ab) zugeordnete Differentialgleichung der Biegelinie, die die infinitesimalen Ausbiegungen y mit den infinitesimalen Biegemomenten M_x verknüpft und

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\mathfrak{M}_x}{EJ_{ab}} = 0$$

lautet, geht, wenn wir sie zweimal nach x differenzieren und die Hilfsgröße

$$(2) \quad \omega = s_{ab} \sqrt{\frac{S_{ab}}{EJ_{ab}}}$$

einbringen, in die Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} + \left(\frac{\omega}{s_{ab}}\right)^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

über. Ihre allgemeine Lösung

$$(4) \quad y = C_1 + C_2 \cdot \frac{\omega x}{s_{ab}} + C_3 \cdot \cos \frac{\omega x}{s_{ab}} + C_4 \cdot \sin \frac{\omega x}{s_{ab}}$$

enthält vier Integrationskonstante, die durch die vier Randbedingungen

$$(5) \quad \begin{cases} x=0, y=0 \text{ und } \frac{dy}{dx} = \varphi_a \\ x=s_{ab}, y=\psi_{ab} s_{ab} \text{ und } \frac{dy}{dx} = \varphi_b \end{cases}$$

bestimmt sind und der Reihe nach die Größe

$$(6) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{s_{ab}}{\omega} \cdot \frac{(\varphi_a - \varphi_b)(\omega - \sin \omega) + \omega(\psi_{ab} - \varphi_a)(1 - \cos \omega)}{2(1 - \cos \omega) - \omega \cdot \sin \omega} \\ C_2 = \frac{s_{ab}}{\omega} \cdot \varphi_a - C_1 \\ C_3 = -C_1 \\ C_4 = \frac{s_{ab}}{\omega} \cdot \frac{(\varphi_a - \varphi_b)(1 - \cos \omega) + \omega(\psi_{ab} - \varphi_a) \sin \omega}{2(1 - \cos \omega) - \omega \cdot \sin \omega} \end{cases}$$

besitzen. Für die Endmomente M_{ab} und M_{ba} lassen sich die Beziehungen

$$(7) \quad \begin{cases} M_{ab} \equiv \mathfrak{M}_x|_{x=0} = -EJ_{ab} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=0} \\ M_{ba} \equiv -\mathfrak{M}_x|_{x=s_{ab}} = +EJ_{ab} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \Big|_{x=s_{ab}} \end{cases}$$

ansprechen, die nach Beachtung von (4) u. (6) und Einführung der Hilfsgrößen

$$(8) \quad \begin{cases} A_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \alpha, \quad \alpha = \frac{\omega \cdot \sin \omega - \omega^2 \cdot \cos \omega}{2(1 - \cos \omega) - \omega \cdot \sin \omega} \\ B_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \beta, \quad \beta = \frac{\omega^2 - \omega \cdot \sin \omega}{2(1 - \cos \omega) - \omega \cdot \sin \omega} \end{cases}$$

in die „Grundbeziehungen“

$$(9) \quad \begin{cases} M_{ab} = A_{ab} \varphi_a + B_{ab} \varphi_b - (A_{ab} + B_{ab}) \psi_{ab} \\ M_{ba} = A_{ab} \varphi_b + B_{ab} \varphi_a - (A_{ab} + B_{ab}) \psi_{ab} \end{cases}$$

übergehen. Ist der Stab nur im Endpunkt b mit einem elastisch drehbaren Knoten verbunden, im Endpunkt a hingegen gelenkig gelagert, so nehmen diese Grundbeziehungen die Form

$$(10) \quad \begin{cases} M_{ab} = 0 \\ M_{ba} = \left(1 - \frac{B_{ab}}{A_{ab}}\right) (A_{ab} + B_{ab}) (\varphi_b - \psi_{ab}) \end{cases}$$

an; ist der Stab im Endpunkt b gelenkig gelagert, so gilt

$$(11) \quad \begin{cases} M_{ab} = \left(1 - \frac{B_{ab}}{A_{ab}}\right) (A_{ab} + B_{ab}) (\varphi_a - \psi_{ab}) \\ M_{ba} = 0. \end{cases}$$

Die zur Berechnung von A_{ab} und B_{ab} erforderlichen Hilfswerte α und β können aus Tafel 1 entnommen werden.

Ist die Druckkraft $S_{ab} = 0$, so nehmen die Hilfsgrößen (8), wie wir mit Hilfe der Reihenentwicklung der trigonometrischen Funktionen leicht feststellen können, die Grenzwerte

$$(12) \quad \begin{cases} A_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \frac{\left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}\right) - \left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{2} + \frac{\omega^6}{24}\right)}{\left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{12} + \frac{\omega^6}{360}\right) - \left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}\right)} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{4EJ_{ab}}{s_{ab}} \\ B_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \frac{\omega^2 - \left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}\right)}{\left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{12} + \frac{\omega^6}{360}\right) - \left(\omega^2 - \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}\right)} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{2EJ_{ab}}{s_{ab}} \end{cases}$$

an; für die Gln. (9) ergeben sich dann die bekannten, für querlastfreie, axial unbelastete Stäbe geltenden Grundbeziehungen

$$(13) \quad \begin{cases} M_{ab} = \frac{2EJ_{ab}}{s_{ab}} (2\varphi_a + \varphi_b - 3\psi_{ab}) \\ M_{ba} = \frac{2EJ_{ab}}{s_{ab}} (2\varphi_b + \varphi_a - 3\psi_{ab}). \end{cases}$$

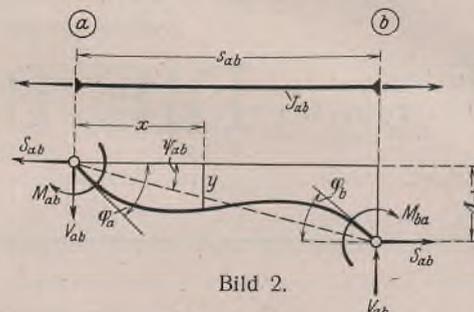


Bild 2.

b) Zugstäbe.

Ist S_{ab} eine Zugkraft (Bild 2), so geht die Differentialgleichung (1), wenn wir sie zweimal nach x differenzieren und die Hilfsgröße (2) einbringen, in die Differentialgleichung

$$(14) \quad \frac{d^4 y}{dx^4} - \left(\frac{\omega}{s_{ab}}\right)^2 \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

über, deren allgemeine Lösung

$$(15) \quad y = C_1 + C_2 \cdot \frac{\omega x}{s_{ab}} + C_3 \cdot \cos \frac{\omega x}{s_{ab}} + C_4 \cdot \sin \frac{\omega x}{s_{ab}}$$

lautet; die Integrationskonstanten sind wieder durch die Randbedingungen (5) bestimmt und betragen

$$(16) \quad \begin{cases} C_1 = \frac{s_{ab}}{\omega} \cdot \frac{(\varphi_a - \varphi_b)(\sin \omega - \omega) + \omega(\psi_{ab} - \varphi_a)(\cos \omega - 1)}{2(\cos \omega - 1) - \omega \cdot \sin \omega} \\ C_2 = \frac{s_{ab}}{\omega} \cdot \varphi_a - C_1 \\ C_3 = -C_1 \\ C_4 = \frac{s_{ab}}{\omega} \cdot \frac{(\varphi_a - \varphi_b)(\cos \omega - 1) + \omega(\psi_{ab} - \varphi_a) \sin \omega}{2(\cos \omega - 1) - \omega \cdot \sin \omega} \end{cases}$$

Tafel 1.

Tafel 2.

ω	α	β	ω	α	β
0,00	4,000	2,000	0,00	4,000	2,000
0,10	3,999	2,000	0,10	4,001	2,000
0,20	3,995	2,001	0,20	4,005	1,999
0,30	3,988	2,003	0,30	4,012	1,997
0,40	3,979	2,005	0,40	4,021	1,995
0,60	3,952	2,012	0,60	4,048	1,988
0,80	3,914	2,022	0,80	4,085	1,979
1,00	3,865	2,034	1,00	4,132	1,968
1,20	3,804	2,050	1,20	4,189	1,954
1,40	3,732	2,070	1,40	4,255	1,938
1,60	3,647	2,093	1,60	4,330	1,921
1,80	3,548	2,120	1,80	4,415	1,902
2,00	3,436	2,152	2,00	4,508	1,882
2,20	3,309	2,189	2,20	4,608	1,860
2,40	3,166	2,233	2,40	4,716	1,837
2,60	3,005	2,283	2,60	4,831	1,814
2,80	2,825	2,343	2,80	4,953	1,791
3,00	2,624	2,412	3,00	5,081	1,767
3,20	2,399	2,492	3,20	5,214	1,742
3,40	2,146	2,588	3,40	5,353	1,718
3,60	1,862	2,702	3,60	5,497	1,694
3,80	1,540	2,838	3,80	5,645	1,671
4,00	1,173	3,004	4,00	5,788	1,647
4,20	0,751	3,207	4,20	5,953	1,625
4,40	0,259	3,462	4,40	6,112	1,603
4,60	-0,323	3,787	4,60	6,275	1,581
4,80	-1,029	4,211	4,80	6,440	1,561
5,00	-1,909	4,785	5,00	6,608	1,541
5,20	-3,052	5,592	5,20	6,779	1,521
5,40	-4,625	6,798	5,40	6,952	1,503
5,60	-6,992	8,759	5,60	7,121	1,485
5,80	-11,111	12,428	5,80	7,331	1,470
6,00	-20,637	21,454	6,00	7,446	1,450

Die „Grundbeziehungen“ Gl. (9), (10) u. (11) bleiben unverändert in Geltung, nur müssen an Stelle von (8) die Hilfsgrößen

$$(17) \begin{cases} A_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \alpha & \alpha = \frac{\omega \cdot \text{Si} \omega - \omega^2 \cdot \text{Co} \omega}{2(\text{Co} \omega - 1) - \omega \cdot \text{Si} \omega} \\ B_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \beta & \beta = \frac{\omega^2 - \omega \cdot \text{Si} \omega}{2(\text{Co} \omega - 1) - \omega \cdot \text{Si} \omega} \end{cases}$$

eingeführt werden; α und β können aus Tafel 2 entnommen werden. Ist die Zugkraft $s_{ab} = 0$, so nehmen die Hilfsgrößen (17), wie wir mit Hilfe der Reihenentwicklung der hyperbolischen Funktionen leicht feststellen können, die schon in (12) angegebenen Grenzwerte

$$(18) \begin{cases} A_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \frac{(\omega^2 + \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120}) - (\omega^2 + \frac{\omega^4}{2} + \frac{\omega^6}{24})}{(\omega^2 + \frac{\omega^4}{12} + \frac{\omega^6}{360}) - (\omega^2 + \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120})} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{4EJ_{ab}}{s_{ab}} \\ B_{ab} = \frac{EJ_{ab}}{s_{ab}} \cdot \frac{\omega^2 - (\omega^2 + \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120})}{(\omega^2 + \frac{\omega^4}{12} + \frac{\omega^6}{360}) - (\omega^2 + \frac{\omega^4}{6} + \frac{\omega^6}{120})} \Big|_{\omega \rightarrow 0} = \frac{2EJ_{ab}}{s_{ab}} \end{cases}$$

an. Die Gl. (9) gehen dann in die für querlastfreie, axial unbelastete Stäbe geltenden Grundbeziehungen (13) über.

3. Die Knickbedingung.

Fall I: Die Riegel erfahren beim Ausknicken des Rahmens keine axialen Verschiebungen.

Werden die Riegel des Stockwerkrahmens in axialer (waagerechter) Richtung festgehalten, dann werden die Knotenpunkte — wenn wir von der im ersten Abschnitt erwähnten biegemomentenfreien Gleichgewichtslage in die infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtslage übergehen — nur um Beträge höherer Kleinheitsordnung verschoben, so daß die Stabdrehwinkel für sämtliche Stäbe gleich Null gesetzt werden dürfen. Die Grundbeziehungen (9), (10), (11) enthalten dann als Unbekannte bloß die Knotendrehwinkel φ .

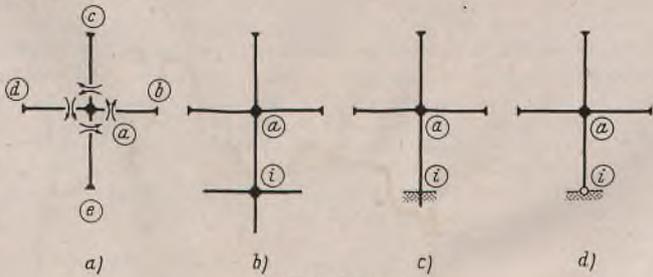


Bild 3a bis d.

Zur Bestimmung dieser Unbekannten werden die Knotengleichgewichtsbedingungen $\sum M = 0$ herangezogen. Denken wir uns beispielsweise den elastisch drehbaren Knoten a , von dem die Stäbe (ab) , (ac) , (ad) und (ae) abzweigen, aus dem infinitesimal ausgeknickten Stockwerkrahmen herausgeschnitten und die Reaktionen der im Uhrzeigersinn positiv gezählten Stabmomente M_{ab} , M_{ac} , M_{ad} , M_{ae} angebracht (Bild 3a), so lauten diese „Knotengleichgewichtsbedingungen“

$$(19) \quad \sum_i M_{ai} \equiv (M_{ab} + M_{ac} + M_{ad} + M_{ae}) = 0,$$

wobei der Zeiger i der Reihe nach allen Nachbarknoten von a zugeordnet wird. Ist der Nachbarknoten i gleichfalls ein elastisch drehbarer Knoten (Bild 3b), so ist das Stabmoment M_{ai} durch die Grundbeziehung (9)

$$(20) \quad M_{ai} = A_{ai} \varphi_a + B_{ai} \varphi_i$$

bestimmt; ist der Stab (ai) im Punkt i starr eingespannt (Bild 3c), so gilt $\varphi_i = 0$ und daher

$$(21) \quad M_{ai} = A_{ai} \varphi_a,$$

und ist er im Punkt i gelenkig gelagert (Bild 3d), so wird (20) durch die aus (11) folgende Beziehung

$$(22) \quad M_{ai} = \left(1 - \frac{B_{ai}}{A_{ai}}\right) (A_{ai} + B_{ai}) \varphi_a$$

ersetzt.

Hat der Rahmen k Stück elastisch drehbare Knoten, so lassen sich k Knotengleichgewichtsbedingungen $\sum M = 0$ nach Art von Gl. (19) un-

mittelbar anschreiben. Nach Einführung der Grundbeziehungen (20) [bzw. (21) oder (22)] gehen diese Gleichgewichtsbedingungen in ein System von k linearen, homogenen Gleichungen für die unendlich kleinen Knotendrehwinkel φ über, das nur dann eine von der trivialen Nulllösung (alle $\varphi = 0$) verschiedene Lösung zuläßt, wenn seine Koeffizientendeterminante D_K verschwindet. Die Gleichung

$$(23) \quad D_K = 0$$

stellt demnach die gesuchte Knickbedingung vor.

Wir gehen bei der Stabilitätsuntersuchung des Rahmens von der einleitend erwähnten, nach Größe und Richtung gegebenen „Baubelastung“ aus, unter der im Stab (ab) des Rahmens eine bestimmte Stabkraft (Zug- oder Druckkraft) entsteht. Den Absolutwert dieser Stabkraft wollen wir mit S_{ab}^* bezeichnen. Werden die einzelnen Baulasten mit dem gemeinsamen Multiplikator ν versehen und wächst ν bis zum gesuchten kritischen Wert ν_{Ki} an, dann geht die Baubelastung in die gesuchte ideale Knickbelastung und die Stabkraft S_{ab}^* in die Stabkraft $S_{ab} = \nu_{Ki} S_{ab}^*$ über, so daß die Beziehung (2) auch in der Form

$$(24) \quad \omega = s_{ab} \sqrt{\frac{\nu_{Ki} S_{ab}^*}{EJ_{ab}}} = \nu_{Ki} \left(s_{ab} \sqrt{\frac{S_{ab}^*}{EJ_{ab}}} \right)$$

angeschrieben werden kann. Wird der Stab (ab) gedrückt, so ist diese Beziehung in (8) einzusetzen, und wird er gezogen, so muß sie in (17) eingeführt werden; die Hilfsgrößen A und B , die wir für sämtliche Stäbe des Rahmens zu berechnen haben, sind dann bis auf den gemeinsamen Faktor $\sqrt{\nu_{Ki}}$ eindeutig bestimmt. Der Faktor $\sqrt{\nu_{Ki}}$, der in der Knickbedingung $D_K = 0$ als einzige Unbekannte auftritt, dient zur Festlegung der gesuchten idealen Knickbelastung.

Wenn die Baubelastung nicht zahlenmäßig, sondern allgemein durch Kräfte P oder Vielfache von P gegeben ist, können wir alle Stabkräfte des Rahmens durch P ausdrücken und die Knickbedingung nach dem idealen Knicklastwert P_{Ki} auflösen. Außer P werden zweckmäßigerweise auch noch andere Größen — ein beliebig gewähltes Vergleichsträgheitsmoment, eine beliebig gewählte Vergleichslänge und der Elastizitätsmodul E — aus der Rechnung herausgehoben; die Beziehung (2) erhält dann allgemein die Form

$$(25) \quad \omega = \kappa \omega^*,$$

in der κ einen für alle Stäbe des Rahmens gemeinsamen Beiwert bedeutet, der die einzige in der Knickbedingung $D_K = 0$ auftretende Unbekannte darstellt.

Die Knickbedingung $D_K = 0$ ist eine transzendente Gleichung und hat im allgemeinen unendlich viele positive und reelle Lösungen. Jeder dieser Lösungen ist eine bestimmte infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur zugeordnet, deren affines Bild als „Knickfigur“ bezeichnet wird. Baupraktisch bedeutungsvoll ist nur die kleinste aller dieser Lösungen; die übrigen („höheren“) Lösungen sind praktisch nur dann von Interesse, wenn die Ausbildung der ihnen zugeordneten Knickfiguren durch besondere konstruktive Maßnahmen erzwungen wird.

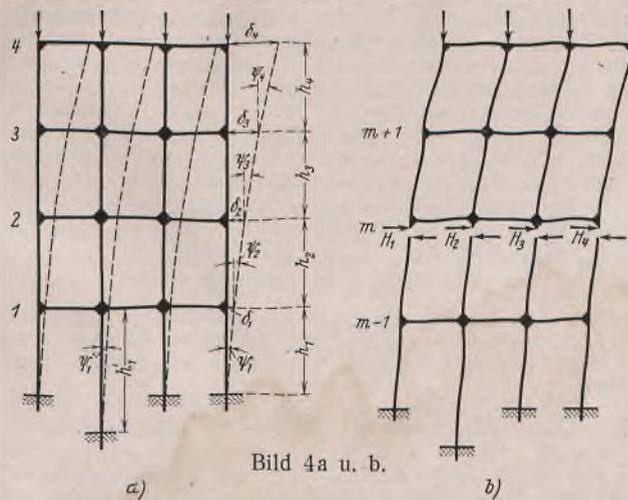


Bild 4a u. b.

Fall II: Die Riegel werden beim Ausknicken des Rahmens in axialer (waagerechter) Richtung verschoben.

Erfahren die Riegel Nr. 1, 2, 3, ... des Stockwerkrahmens — wenn wir die biegemomentenfreie Gleichgewichtslage in die infinitesimal ausgeknickte Lage überführen — axiale (waagerechte) Verschiebungen um die unendlich kleinen Beträge $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$, so ergeben sich für die Stiele des Rahmens unendlich kleine Stabdrehwinkel ψ , die mit Bezug auf Bild 4a die Größe

$$(26) \quad \begin{cases} \psi_1 = \frac{\Delta_1}{h_1} = \frac{\delta_1}{h_1}, & \psi_1' = \frac{\Delta_1}{h_1'} = \frac{\delta_1}{h_1'}, & \psi_2 = \frac{\Delta_2}{h_2} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{h_2}, \\ \psi_3 = \frac{\Delta_3}{h_3} = \frac{\delta_3 - \delta_2}{h_3}, & \psi_4 = \frac{\Delta_4}{h_4} = \frac{\delta_4 - \delta_3}{h_4} \end{cases}$$

besitzen; die Stabdrehwinkel der Riegel haben wir, da die zugehörigen Knotenverschiebungen von höherer Ordnung klein sind, gleich Null zu setzen. Ebenso wie früher denken wir uns aus dem infinitesimal ausgeknickten Rahmen einen Knoten *a* herausgeschnitten, mit den Reaktionen der Stabendmomente M_{ab} , M_{ac} , M_{ad} , M_{ae} versehen (Bild 3a) und die Knotengleichgewichtsbedingung

$$(27) \quad \sum_i M_{ai} \equiv (M_{ab} + M_{ac} + M_{ad} + M_{ae}) = 0$$

aufgestellt, wobei der Zeiger *i* der Reihe nach allen dem Knoten *a* benachbarten Knoten zuzuordnen ist. Wenn alle diese Nachbarknoten elastisch drehbar sind, können wir die Beziehungen (9) für die Stabendmomente in der Form (vgl. dazu Bild 5)

$$(28) \quad \begin{cases} M_{ab} = A_{ab} \varphi_a + B_{ab} \varphi_b \\ M_{ac} = A_{ac} \varphi_a + B_{ac} \varphi_c - (A_{ac} + B_{ac}) \psi_{ac} \\ M_{ad} = A_{ad} \varphi_a + B_{ad} \varphi_d \\ M_{ae} = A_{ae} \varphi_a + B_{ae} \varphi_e - (A_{ae} + B_{ae}) \psi_{ae} \end{cases}$$

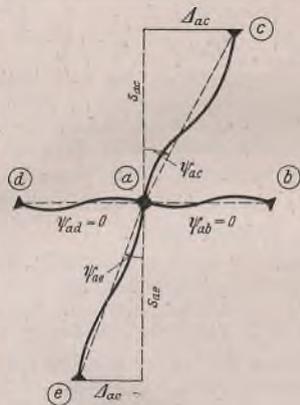


Bild 5.

anschreiben; ist der Stiel (*ae*) im Fußpunkt *e* starr eingespannt, so ist in die letzte dieser vier Gleichungszeilen $\varphi_e = 0$ einzuführen, und ist er im Fußpunkt *e* gelenkig gelagert, so muß diese Gleichungszeile durch

$$(29) \quad M_{ae} = \left(1 - \frac{B_{ae}}{A_{ae}}\right) (A_{ae} + B_{ae}) (\varphi_a - \psi_{ae})$$

ersetzt werden. Die Beiwerte *A* und *B* haben bei den einzelnen Stäben im allgemeinen verschiedene Größe; sie sind, wenn der Stab gedrückt wird, durch (8), und wenn er gezogen wird, durch (17) auszudrücken.

Hat der untersuchte Stockwerkrahmen *k* Stück elastisch drehbare Knoten und *r* Stück Riegel oder Stockwerke, so lassen sich *k* Knotengleichgewichtsbedingungen $\sum M = 0$ nach Art von (27) unmittelbar aufstellen. Diese Gleichgewichtsbedingungen bilden nach Einführung der Grundbeziehungen ein System von *k* Gleichungen, in denen als Unbekannte *k* Stück Knotendrehwinkel φ und *r* Stück Stabdrehwinkel ψ vorkommen. Diese Stabdrehwinkel müssen eliminiert werden, wozu wir weitere Gleichgewichtsbedingungen — die *r* Stück „Riegelgleichgewichtsbedingungen“ — benötigen. Um beispielweise die dem Riegel Nr. *m* (Bild 4b) zugeordnete Gleichgewichtsbedingung zu gewinnen, denken wir uns den infinitesimal ausgeknickten Stockwerkrahmen unmittelbar unterhalb dieses Riegels durchschnitten und für den abgeschnittenen Oberteil des belasteten Rahmens die Bedingung

$$(30) \quad \sum H \equiv (H_1 + H_2 + H_3 + H_4) = 0$$

aufgestellt. Greifen wir nun einen der durchschnittenen Rahmenstiele heraus und bezeichnen wir den oberen und unteren Endpunkt dieses Stiels mit *o* bzw. *u* (Bild 6), so erhalten wir für die waagerechte Stützkraft die Beziehung

$$(31) \quad H_{ou} = \frac{1}{s_{ou}} (M_{ou} + M_{uo} \pm S_{ou} \Delta_m),$$

wobei sich das obere der beiden übereinander geschriebenen Vorzeichen auf den Fall „ S_{ou} = Absolutwert einer Druckkraft“ und das untere auf den (praktisch bedeutungslosen) Fall „ S_{ou} = Zugkraft“ bezieht; die Größe

$$(32) \quad \Delta_m \equiv \delta_m - \delta_{m-1} = \psi_{ou} \cdot s_{ou}$$

stellt die waagerechte Relativverschiebung vor, die der Riegel Nr. *m* gegenüber dem Riegel Nr. (*m* - 1) erfährt.

Die in (31) auftretenden Stabendmomente lassen sich durch die Grundbeziehungen (9) ausdrücken, die nach Beachtung von (32)

$$(33) \quad \begin{cases} M_{ou} = A_{ou} \varphi_o + B_{ou} \varphi_u - (A_{ou} + B_{ou}) \frac{\Delta_m}{s_{ou}} \\ M_{uo} = A_{ou} \varphi_u + B_{ou} \varphi_o - (A_{ou} + B_{ou}) \frac{\Delta_m}{s_{ou}} \end{cases}$$

lauten und, wenn wir sie in (31) einführen, die Gleichung

$$(34) \quad H_{ou} = \frac{1}{s_{ou}} (A_{ou} + B_{ou}) (\varphi_o + \varphi_u) - \Delta_m \left[\frac{2(A_{ou} + B_{ou})}{s_{ou}^2} \mp \frac{S_{ou}}{s_{ou}} \right] \\ = \frac{1}{s_{ou}} (A_{ou} + B_{ou}) (\varphi_o + \varphi_u) - \Delta_m \left[\frac{2(A_{ou} + B_{ou})}{s_{ou}^2} \mp \frac{E J_{ou} \omega_{ou}^2}{s_{ou}^3} \right]$$

liefern, wobei ω_{ou} durch Gl. (2) bestimmt ist. Wird der Stiel im Fußpunkt *u* starr eingespannt, so ist in dieser Beziehung $\varphi_u = 0$ zu setzen; wird er im Fußpunkt *u* gelenkig gelagert, so gilt mit Rücksicht auf (11) an Stelle von (34)

$$(35) \quad \begin{cases} M_{ou} = \left(1 - \frac{B_{ou}}{A_{ou}}\right) (A_{ou} + B_{ou}) \left(\varphi_o - \frac{\Delta_m}{s_{ou}}\right) \\ M_{uo} = 0 \end{cases}$$

und daher

$$(36) \quad H_{ou} = \frac{1}{s_{ou}} \left(1 - \frac{B_{ou}}{A_{ou}}\right) (A_{ou} + B_{ou}) \varphi_o \\ - \Delta_m \left[\frac{\left(1 - \frac{B_{ou}}{A_{ou}}\right) (A_{ou} + B_{ou})}{s_{ou}^2} \mp \frac{E J_{ou} \omega_{ou}^2}{s_{ou}^3} \right]$$

Die Gln. (34) bzw. (36) sind in die Riegelgleichgewichtsbedingung $\sum H = 0$ einzuführen. Wenn die vom Schnitt getroffenen Stiele in ihren Fußpunkten an elastisch drehbare Knoten angeschlossen sind (vgl. die unterhalb der Riegel Nr. 2, 3 oder 4 liegenden Stiele in Bild 4a), erhalten wir aus dieser Gleichgewichtsbedingung die Beziehung

$$(37) \quad \Delta_m = \frac{\sum \left[\frac{1}{s_{ou}} (A_{ou} + B_{ou}) (\varphi_o + \varphi_u) \right]}{\sum \left[\frac{2(A_{ou} + B_{ou})}{s_{ou}^2} + C_{ou} \right]}$$

wenn sie in den Fußpunkten starr eingespannt sind (vgl. die unterhalb des Riegels Nr. 1 liegenden Stiele in Bild 4a)

$$(38) \quad \Delta_m = \frac{\sum \left[\frac{1}{s_{ou}} (A_{ou} + B_{ou}) \varphi_o \right]}{\sum \left[\frac{2(A_{ou} + B_{ou})}{s_{ou}^2} + C_{ou} \right]}$$

und wenn sie in den Fußpunkten gelenkig gelagert sind, die Beziehung

$$(39) \quad \Delta_m = \frac{\sum \left[\frac{1}{s_{ou}} \left(1 - \frac{B_{ou}}{A_{ou}}\right) (A_{ou} + B_{ou}) \varphi_o \right]}{\sum \left[\frac{\left(1 - \frac{B_{ou}}{A_{ou}}\right) (A_{ou} + B_{ou})}{s_{ou}^2} + C_{ou} \right]}$$

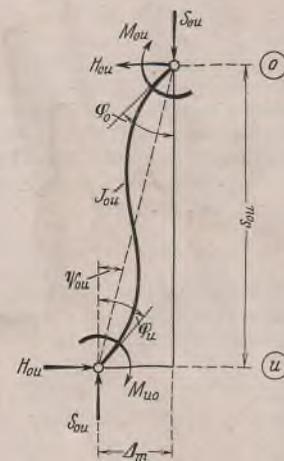


Bild 6.

Die Summen erstrecken sich in diesen Beziehungen über alle vom Schnitt getroffenen Stiele. Wird der Stiel, auf den sich der Summand bezieht, auf Druck beansprucht, so ist

$$(40) \quad C_{ou} = - \frac{E J_{ou} \omega_{ou}^2}{s_{ou}^3}$$

zu schreiben und A, B durch (8) festzulegen; wird er auf Zug beansprucht, so ist

$$(41) \quad C_{ou} = + \frac{E J_{ou} \omega_{ou}^2}{s_{ou}^3}$$

zu setzen und A und B mit Hilfe von (17) darzustellen.

Durch die Beziehung (37) bzw. (38) oder (39), die für jeden der r Stück Rahmenriegel anzuschreiben ist, werden die waagerechten Relativverschiebungen Δ_m und damit auch die Stabdrehwinkel

$$(42) \quad \psi_{ou} = \frac{\Delta_m}{s_{ou}}$$

Alle Rechte vorbehalten.

Bemerkungen zu DIN E 4114.

Knick- und Beulvorschriften für Stahlbau.

Von Prof. Dr. techn. Josef Fritsche, Prag, Deutsche Techn. Hochschule.

Die Berechnung der Druckstäbe wird durch die beabsichtigte Neufassung der Knickvorschriften gedanklich auf eine ganz neue Grundlage gestellt, wenn sich auch praktisch an den Werten σ_{dzul} nicht viel ändert. Es ist daher die Frage berechtigt, ob damit ein Fortschritt im Sinn einer besseren Anpassung der Berechnung an die wirklich im Bauwerk vorliegenden Verhältnisse erzielt wird, denn einer Weiterentwicklung der Vorschriften kann ja nur dieses Ziel vorschweben. Während bisher die Berechnung auf den ideal geraden und ideal mittig gedrückten Stab aufgebaut war, wird nun, um zum Ausdruck zu bringen, daß in Wirklichkeit diese Voraussetzungen um so weniger erfüllt sind, je größer das Schlankheitsverhältnis des Stabes ist, das Verhalten des Druckstabes dadurch zu beschreiben versucht, daß man die Druckkraft mit einer veränderlichen, aber an beiden Stabenden gleichen Außermittigkeit a einwirken läßt. Es ist dabei völlig klar, daß diese Voraussetzungen der Rechnung baupraktisch ebensowenig erfüllt sind wie die früheren. Es wird daher eine Fiktion durch eine andere ersetzt. Wenn man daher von einem Fortschritt sprechen will, muß der Nachweis erbracht werden können, daß die neue Fiktion an die tatsächlich im Bauwerk vorliegenden Verhältnisse besser herankommt als die frühere, denn von einer Vereinfachung des Bemessungsverfahrens kann nicht gesprochen werden, da sich daran ja nicht viel ändert.

Was beim Vergleich der beiden Verfahren zunächst auf einen Fortschritt hinweist, ist die Zugrundelegung einer gleichen Knicksicherheit ν_K für alle Schlankheitsverhältnisse, denn es wird dadurch der Eindruck erweckt, daß es gelungen ist, an die wirklichen Verhältnisse im Bauwerk soweit heranzukommen, daß es sich erübrigt, durch eine veränderliche Sicherheit ν_K den erfahrungsgemäß stärker gefährdeten schlanken Stäben die notwendige Verstärkung zu geben; denn die Einführung einer veränderlichen Sicherheit weist ja immer darauf hin, daß es noch nicht gelungen ist, durch die Rechnung die im Bauwerk tatsächlich vorliegenden Gegebenheiten formelmäßig befriedigend zu erfassen. Dieser erste Eindruck erweist sich bei näherer Betrachtung leider als nicht ganz zutreffend, denn es wird lediglich die mit wachsendem λ benötigte, größere Knicksicherheit ν_K durch ein „baupraktisch unvermeidbares“ Außermittigkeitsmaß $m_0 = C \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2$ ersetzt, das mit wachsendem λ auch immer größer wird und der vermeintliche Fortschritt schmilzt auf die Einführung einer anderen Größe zusammen, mit der man die vorhandenen Abweichungen von den angenommenen Berechnungsgrundlagen berücksichtigen will.

Nach der Niederschrift dieser Bemerkungen erschien eine 2. Fassung der auf die Bemessung von Druckstäben bezüglichen Vorschläge, deren Kennzeichen darin besteht, daß nun völlig von den Stabilitätsfragen des Druckstabes bzw. von den kritischen Lasten des außermittig beanspruchten Stabes bei elastisch-idealplastischen Verhalten des Werkstoffs abgerückt wurde. An die Stelle des Traglastverfahrens trat eine Beurteilung der Sicherheit nach dem Spannungsmaßstab; wenn bei einer baupraktisch nicht vermeidbaren Außermittigkeit des Lastangriffs die elastizitätstheoretisch ermittelte Größtspannung die Fließgrenze σ_F des einachsigen Zugversuchs erreicht, sollte demnach die Tragfähigkeit erschöpft sein und die zugehörige Schwerpunktspannung hätte an Stelle der Knickspannung σ_K zu treten. Daß man nach diesem Verfahren, das sich an die sogenannte Sekantenformel anlehnt, bei passender Wahl der baupraktisch unvermeidbaren Außermittigkeiten einen durch die Erfahrung gutbestätigten Verlauf der Linie $\sigma_K(\lambda)$ erreichen kann, ist von Prof. Chwalla bereits ausführlich gezeigt worden. Es ist aber auch sehr genau bekannt, daß dieser Weg ganz unabhängig von der der Betrachtung zugrunde gelegten Fließbedingung nur bei biegemäßig richtig ausgebildeten Querschnittsformen zu theoretisch vertretbaren Ergebnissen führt. Querschnitte, bei denen ein maßgebender Teil der Fläche in der Nähe der Stabachse angeordnet ist, werden nach diesen Verfahren im Hinblick auf ihr Tragvermögen immer unterschätzt, und es kann nicht das erstrebenswerte Ziel einer gleichen Sicherheit für alle Stäbe erreicht werden. Diese Verhältnisse liegen nach der neuen Fassung sogar ungünstiger als beim früheren Vorschlag, der sich auf das elastisch-

auf die Knotendrehwinkel des infinitesimal ausgeknickten Stockwerkrahmens zurückgeführt. Die Stabdrehwinkel lassen sich auf diese Weise aus den Grundbeziehungen eliminieren, so daß in den k Stück Knotengleichgewichtsbedingungen (27), die wir für die k elastisch drehbaren Knoten des Rahmens aufstellen können, nur mehr die k Knotendrehwinkel als Unbekannte auftreten. Diese Gleichgewichtsbedingungen sind in den Unbekannten linear und homogen und besitzen daher nur dann eine von der trivialen Nulllösung verschiedene Lösung, wenn ihre Koeffizientendeterminante D_K verschwindet. Die Gleichung

$$(43) \quad D_K = 0$$

stellt die gesuchte Knickbedingung vor; sie ist, wie wir an Hand von (24) und (25) geschildert haben, nach dem kritischen Multiplikator aufzulösen und dient zur Festlegung der idealen Knickbelastung. (Schluß folgt.)

plastische Verhalten des Rechteckstabes bezog und so die Einhaltung einer mittleren Linie gewährleistete, während nun als Beurteilungsmaß nur das Verhalten der Stäbe auf dem einen Rande der Querschnittsabhängigkeit, allerdings dem sicheren, herangezogen wird. Wie man auf einfache Weise die Querschnittsabhängigkeit in Vorschriften fassen könnte, ist in den folgenden Zeilen gezeigt worden. Wenn auch dabei an die Sekantenformel angeknüpft werden konnte, so ist dabei trotzdem der Charakter der Aufgabe als Frage nach der kritischen Last bei gegebener Außermittigkeit aufrechterhalten worden, und es liegt nur an der Fließbedingung, daß Chwalla eine gewisse Ähnlichkeit der Rechnungsführung mit den folgenden Ausführungen erhielt.

I.

Die Festlegung der Knickspannung σ_K geschieht auf der Grundlage der Tragfähigkeit eines außermittig gedrückten Stabes rechteckigen Querschnitts unter Voraussetzung der sogenannten klassischen Plastizitätstheorie, die ein mit wachsender Belastung sich stetig ausbreitendes plastiziertes Gebiet annimmt. Auf die Erkenntnis, daß die Fließvorgänge beim Baustahl ganz anders verlaufen und nur durch Fließschichtenbildung zu erklären sind, wird dabei nicht Rücksicht genommen, und man stellt sich daher schon aus diesem Grunde im Gegensatz zu einem großen Teil der Werkstoffprüfer, die schon des öfteren darauf hingewiesen haben, daß das elastisch-idealplastische Kontinuum wohl eine für die mathematische Behandlung der Aufgaben geeignete Grundlage bildet, daß es jedoch die wirklich zu beobachtenden Erscheinungen nicht immer in befriedigender Weise wiedergibt¹⁾. Die Gegensätze zwischen klassischer und wirklichkeitstreuer Plastizitätstheorie klaffen und da noch nicht von der Durchsetzung der einen oder der anderen Auffassung gesprochen werden kann, scheint mir die Erwähnung zweckmäßig, daß in die Berechnungsvorschriften Grundlagen und Auffassungen eingeführt worden sind, die noch dem Streit der Meinungen unterliegen. Man kann sich allerdings auf den Standpunkt stellen, diesem Meinungsstreit nur akademische Bedeutung zuzuerkennen, mit um so größerer Berechtigung, als die Rechenergebnisse nach den beiden Auffassungen zahlenmäßig nicht erheblich voneinander abweichen; aber erwähnenswert ist diese Tatsache doch.

Neben diesen grundsätzlichen, vom praktischen Standpunkte jedoch mehr oder weniger belanglosen Bemerkungen entstehen aber durch die Ersetzung eines veränderlichen ν_K durch ein veränderliches m_0 eine Reihe von Querschnittsabhängigkeiten, die in den Erläuterungen nicht besprochen worden sind und die gelegentlich zu Ergebnissen führen, die mit den wahrscheinlich im Druckstabe zu erwartenden Verhältnissen nur schwer in Einklang zu bringen sind.

In dem Ansatz

$$(1) \quad m_0 = C \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2$$

sind m_0 und λ bezogene Größen, die einen Rückschluß auf den Einfluß der wirklichen Größen, der Stablänge s bzw. der Knicklänge s_K , des Fehlerhebels a des Lastangriffs und etwaiger Querschnittsgrößen nicht unmittelbar gestatten. Beschränkt man sich zunächst auf einen Querschnitt mit zwei Symmetrieachsen, dann ist

$$(2) \quad a = C k \left(\frac{\lambda}{100}\right)^2 = \frac{2C}{h} \left(\frac{s_K}{100}\right)^2$$

Das ist eine Form der Gl. (1), die eine Betrachtung auf ihre Übereinstimmung mit den im Stahlbauwerk wirklich vorliegenden Verhältnissen verdient. Beim Vergleich von Stäben mit gleicher Knicklänge ist der berücksichtigte Fehlerhebel a der Querschnittshöhe h in der Richtung des Ausknickens verkehrt verhältnismäßig; schwerbelasteten Stäben, die zu einer breiteren Ausbildung zwingen, wird ein kleinerer

¹⁾ J. Fritsche, Grundsätzliches zur Plastizitätstheorie, Stahlbau 1936, Heft 9. — Derselbe, Die Fließbehinderung bei der Biegung von Balken und Stützen aus Baustahl, Stahlbau 1938, Heft 7/8 u. 9.

Fehlerhebel a zugeordnet als leicht belasteten. Oft ist übrigens die Stabbreite nicht ausschließlich durch die Größe der angreifenden Kräfte, sondern auch durch andere bauliche Umstände bedingt. Wird aus irgendeinem Grunde ein Stab verbreitert, so wird damit für die Berechnung der Tragfähigkeit nach Gl. (2) ein kleineres a bzw. nach Gl. (1) ein kleineres m_0 eingeführt, da sich dadurch bei gleicher Knicklänge s_K das Schlankheitsverhältnis vermindert.

Bei Stäben mit nur einer Symmetrieachse liefert die Annahme (1) ganz verschiedene Außermittigkeiten des Lastangriffs, je nachdem ob dieser oberhalb oder unterhalb des Querschnittsschwerpunkts erfolgt. Unter Bezugnahme auf die Bezeichnungen von Bild 1 ist im ersten Falle

$$(3) \quad a_1 = C k_1 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 = \frac{C}{b_1} \left(\frac{s_K}{100} \right)^2,$$

im zweiten Falle

$$(4) \quad a_2 = C k_2 \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 = \frac{C}{b_2} \left(\frac{s_K}{100} \right)^2 = a_1 \cdot \frac{b_1}{b_2}.$$

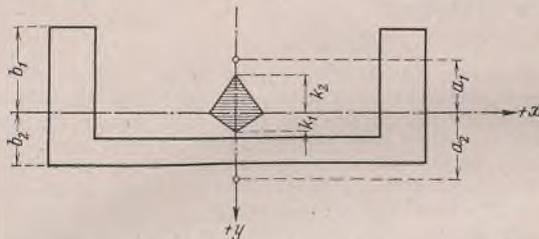


Bild 1.

Eine Begründung dieses Ergebnisses in den tatsächlichen Verhältnissen des gedrückten Stabes wird schwerlich gelingen; da durch den Fehlerhebel a Zufälligkeiten der Bauausführung erfaßt werden sollen, ist nicht recht einzusehen, warum er nach der einen Seite groß, nach der anderen Seite klein angenommen wird. Wahrscheinlicher ist doch, daß er nach beiden Seiten in gleicher Größe auftreten wird und damit bekommt in die Annahme, den Fehlerhebel a von der Kernweite k des Querschnitts abhängig zu machen, eine gewisse Unsicherheit, wenn auch nicht gelehrt werden soll, daß ein Vorschlag, der diese Unsicherheiten völlig beseitigt, nicht so leicht zu finden sein wird.

Um die Richtigkeit der Annahme (1) bzw. (2) zu prüfen, wird man sich die Frage nach der Ursache des Auftretens von Fehlerhebeln des Lastangriffs zu stellen haben. Die Einführung eines außermittigen Lastangriffs soll 1. unvermeidliche Anfangskrümmungen des Stabes berücksichtigen und 2. der Tatsache Rechnung tragen, daß in Wirklichkeit der Druckstab niemals ganz genau in der theoretischen Systemachse des Tragwerks liegen kann.

1. Anfangskrümmungen der Stabachse haben in der Hauptsache zwei Ursachen: mangelhafte Geradrichtung bei der Fertigung des Stabes und nachträgliche Verbiegungen entweder durch kleine Querbelastungen, wie z. B. das Eigengewicht des Druckstabes, das bei der statischen Berechnung nicht gesondert berücksichtigt zu werden braucht, oder zufällige Verbiegungen bei der Aufstellung des Bauwerks. Was die mangelhafte Geradrichtung anbetrifft, so glaube ich, daß es bei einem breiteren Stabe schwieriger ist als bei einem schmäleren, ihn wirklich gerade zu machen; dies steht aber in Gegensatz zu der Annahme (2). Lediglich die nachträglichen Verbiegungen verhalten sich der Annahme (2) entsprechend; je schmaler ein Stab in der Richtung des Ausknickens ist, um so größer muß daher der Hebelarm des Lastangriffs angenommen werden, um diesen Verbiegungen Rechnung zu tragen.

2. Was das Einbauen des Stabes in die theoretische Netzachse des Tragwerks anbetrifft, so ist wohl nicht zu leugnen, daß dies bei einem breiteren Stabe erheblich schwieriger ist, ganz gleichgültig, ob der Einbau durch Nietung oder durch Schweißung erfolgt; die Annahme (2) wird daher den wahrscheinlich zu erwartenden Verhältnissen nicht gerecht. Dasselbe gilt von einer weiteren Ursache des Auftretens von Außermittigkeiten des Lastangriffs, von den Nebenspannungen; es ist bekannt, daß die Nebenspannungen mit der Stabbreite stark anwachsen, sodaß daher bei breiteren Stäben mit einem größeren Werte a gerechnet werden müßte als bei schmäleren Stäben, um gleiche Sicherheit gegen die Erreichung der Tragfähigkeit zu erhalten. Die Wirkung der Nebenspannungen auf den Druckstab wird übrigens nur in den seltensten Fällen der Annahme gleicher Fehlerhebel an beiden Stabenden entsprechen; meistens sind sie verschieden groß und in vielen Fällen werden sie sogar verschiedene Vorzeichen haben, so daß die Druckkraft die theoretische Netzachse schneidet und diesen s-förmig verbiegt. Prof. Chwalla empfiehlt in solchen Fällen mit dem arithmetischen Mittel der Fehlerhebel zu rechnen, das dann sehr stark gegen Null zu liegen kommt, so daß der Stab dann eher wie ein mittig gedrückter zu berechnen wäre. Ich habe bereits gezeigt³⁾, daß man damit die wirkliche Tragfähigkeit des Stabes oder der Stütze nicht immer richtig beurteilt.

³⁾ J. Fritsche, Der Einfluß einer Ungleichartigkeit der Fehlerhebel auf die Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stahlstützen. Stahlbau 1936, Heft 23 u. 24.

Zusammenfassend kann gesagt werden, daß die Annahme, die den neuen Knickvorschriften zugrunde gelegt worden ist, keine höhere innere Berechtigung hat als die frühere Annahme des mittigen Druckes, daß im Gegenteil in vielen Fällen die wirklichen Umstände eher für die grundsätzliche Beibehaltung der alten Vorschriften sprechen, die allerdings dem derzeitigen Stande der Forschung anzupassen wären³⁾. Eine Entscheidung dieser Frage kann nur aus dem Meinungsaustausch berufener Fachleute hervorgehen.

II.

Stellt man sich auf den Standpunkt des neuen Entwurfs und berücksichtigt die rechnerisch nicht erfassbaren Abweichungen von den theoretischen Forderungen nach (1), so erscheint es mir wünschenswert, die Ergebnisse der neueren, wirklichkeitstreuen Plastizitätstheorie bei der Untersuchung dieser Fragen der Darstellung in den „Erläuterungen zur Begründung des Normblattentwurfs DIN 4114“ gegenüber zu stellen, und zu versuchen, den Einfluß der Querschnittsform einer genaueren Prüfung zu unterziehen. Bezeichnet man mit ν eine Zahl, die die Fähigkeit des Querschnitts kennzeichnet, beim Anlegen eines Spannungsfeldes die P - bzw. F -Grenze an der Spannungsspitze hinaufzusetzen, dann ist für einen elastisch-idealplastischen Körper die erhöhte Fließgrenze σ_F' an der Spannungsspitze⁴⁾

$$(5) \quad \sigma_F' = \sigma_0 + \frac{1}{\nu} (\sigma_F - \sigma_0)$$

(σ_0 bedeutet die Schwerpunktspannung im Querschnitt).

Die Tragfähigkeit eines Stabes ist erreicht, wenn die auftretende Größtspannung dieser erhöhten Fließgrenze σ_F' gleich wird; damit erhält man

$$(6) \quad \sigma_F' = \frac{P}{F} + \frac{P a \cdot \sec \frac{\times l}{2}}{W} = \sigma_K \left(1 + m_0 \cdot \sec \frac{\times l}{2} \right),$$

worin $\times^2 = \frac{P}{EJ}$ bzw. $\times^2 = \frac{\sigma_K}{E I^2}$ bedeutet. Setzt man für $\sec \frac{\times l}{2}$ die

sehr gute Näherung

$$(7) \quad \sec \frac{\times l}{2} = \frac{\sigma_E + 0,234 \sigma_K}{\sigma_E - \sigma_K},$$

wobei $\sigma_E = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$ die Eulerlast des Stabes vorstellt, dann erhält man aus (6)

$$(8) \quad (\sigma_F - \sigma_K)(\sigma_E - \sigma_K) = \frac{m_0}{\nu} (\sigma_E + 0,234 \sigma_K).$$

Aus dieser quadratischen Gleichung kann nun ohne besondere Schwierigkeiten σ_K ausgerechnet werden. Setzt man nach (1) $m_0 = C \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2$, so erhält man mit der Abkürzung

$$(9) \quad \sigma_A = 210 \cdot \frac{C \pi^2}{\nu}$$

$$(10) \quad \sigma_K = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_E (\sigma_F + \sigma_E + \sigma_A)}{\sigma_E - 0,234 \sigma_A} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4 \sigma_F (\sigma_E - 0,234 \sigma_A)}{(\sigma_F + \sigma_E + \sigma_A)^2}} \right].$$

Die Quadratwurzel in dem obigen Ausdruck kann nun mit Hilfe der binomischen Reihe entwickelt werden; man erhält

$$\sqrt{1-A} = 1 - \frac{A}{2} - \frac{A^2}{8} - \frac{A^3}{16} - \dots = 1 - \frac{A}{2} \left[1 + \frac{A}{4} \left(1 + \frac{A}{2} \right) \right]$$

und man wird mit Rücksicht darauf, daß A in der Regel klein ist, immer mit dem 4. Gliede abbrechen dürfen. Damit berechnet sich nun

die Knickzahl $\omega = \frac{\sigma_F}{\sigma_K}$ mit

$$(11) \quad \omega = \left[1 + \frac{\sigma_F}{\sigma_E} + \frac{C}{\nu} \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \right] v_1,$$

worin

$$(12) \quad v_1 = \frac{1}{1 + \frac{A}{4} \left(1 + \frac{A}{2} \right)} \quad \text{und} \quad A = \frac{4 \sigma_F (\sigma_E - 0,234 \sigma_A)}{(\sigma_F + \sigma_E + \sigma_A)^2}$$

bedeutet.

³⁾ J. Fritsche, Das Formänderungsgesetz des Baustahles im bild-samen Bereiche. Stahlbau 1939, Heft 14/15.

⁴⁾ J. Fritsche, Der Einfluß der Querschnittsform auf die Tragfähigkeit außermittig gedrückter Stahlstützen. Stahlbau 1936, Heft 12. Derselbe, Die neuere Fließbedingung und die Ergebnisse der Werkstoffprüfung. Stahlbau 1939, Heft 3.

Tafel 1.

λ	σ_E in kg/cm ²	$\sigma_E + \sigma_F + \sigma_A$ in kg/cm ²	$\sigma_E - 0,234 \sigma_A$ in kg/cm ²	A	v_{37}	ω_a	ω nach DIN E 4114	$\omega_a - \omega$	ω_b	$\omega_a - \omega_b$
20	51 815	55 272	51 568	0,162	0,956	1,019	1,016	0,003	1,012	0,007
30	23 029	26 486	22 786	0,312	0,916	1,053	1,042	0,011	1,039	0,014
40	12 954	16 411	12 707	0,454	0,877	1,111	1,090	0,021	1,086	0,025
50	8 290	11 747	8 043	0,560	0,848	1,202	1,168	0,034	1,163	0,039
60	5 757	9 240	5 510	0,619	0,832	1,332	1,288	0,044	1,279	0,053
70	4 230	7 687	3 983	0,647	0,822	1,493	1,455	0,038	1,422	0,071
80	3 238	6 695	2 991	0,638	0,827	1,709	1,674	0,035	1,616	0,093
90	2 558	6 015	2 311	0,614	0,832	1,956	1,940	0,016	1,837	0,119
100	2 073	5 530	1 826	0,574	0,843	2,249	2,256	- 0,007	2,100	0,149
110	1 713	5 170	1 466	0,528	0,856	2,584	2,612	- 0,028	2,401	0,183
120	1 439	4 896	1 192	0,477	0,877	2,983	3,011	- 0,028	2,761	0,222
130	1 226	4 683	979	0,429	0,884	3,377	3,453	- 0,076	3,113	0,264
140	1 057	4 514	810	0,382	0,898	3,834	3,928	- 0,094	3,523	0,311
150	921	4 378	674	0,338	0,909	4,320	4,444	- 0,124	3,959	0,361
160	810	4 267	563	0,297	0,920	4,847	5,000	- 0,153	4,430	0,417
170	717	4 174	470	0,259	0,931	5,419	5,594	- 0,175	4,943	0,476
180	640	4 097	393	0,225	0,940	6,018	6,218	- 0,200	5,479	0,539
190	574	4 031	327	0,193	0,947	6,650	6,897	- 0,247	6,044	0,606
200	518	3 975	271	0,165	0,956	7,335	7,595	- 0,260	6,659	0,676
210	470	3 927	223	0,139	0,962	8,037	8,333	- 0,296	7,287	0,750
220	428	3 885	181	0,115	0,969	8,794	9,125	- 0,331	7,964	0,830
230	392	3 849	145	0,094	0,974	9,565	9,959	- 0,394	8,653	0,912
240	360	3 817	113	0,074	0,980	10,393	10,811	- 0,418	9,393	1,000
250	332	3 789	85	0,057	0,985	11,457	11,707	- 0,250	10,155	1,302

Erläuterung zur Tafel 1.

Es ist $E = 2\,100\,000$ kg/cm², $\sigma_F = 2400$ kg/cm², $C_{37} = 0,51$, $\nu_a = 1$; damit ergibt sich $\sigma_A = 210 \cdot 9,8696 \cdot 0,51 = 1057$ kg/cm². v_{37} ändert sich mit σ_A ; da sich diese Änderung aber nur in sehr geringen Grenzen bewegen kann, wurde sie zahlenmäßig nicht berücksichtigt und v_{37} aus Tafel 1 sowohl zur Berechnung von ω_a als auch zur Berechnung von ω_b benutzt.

Tafel 2.

λ	σ_{Ka} in kg/cm ²	σ_{Kb}	$\sigma_{Kb} - \sigma_{Ka}$	$\frac{\sigma_{Kb} - \sigma_{Ka}}{\sigma_{Ka}}$ in % von σ_{Ka}	σ_K nach DIN E 4114	$\sigma_K - \sigma_{Ka}$	$\frac{\sigma_K - \sigma_{Ka}}{\sigma_K}$ in % von σ_K
20	2355	2371	16	0,68	2363	8	0,32
30	2279	2310	31	1,36	2303	24	1,04
40	2160	2209	39	1,80	2202	42	1,90
50	1997	2063	66	3,30	2055	58	2,82
60	1802	1876	74	4,10	1864	62	3,32
70	1607	1688	81	5,03	1650	43	2,62
80	1404	1485	81	5,76	1434	30	2,09
90	1227	1306	79	6,43	1237	10	0,81
100	1067	1142	75	7,04	1064	- 3	- 0,28
110	929	1000	71	7,65	919	- 10	- 1,08
120	805	869	64	7,96	797	- 12	- 1,51
130	711	771	60	8,45	695	- 16	- 2,31
140	626	681	55	8,81	611	- 16	- 2,62
150	556	606	50	9,02	540	- 16	- 2,97
160	495	542	47	9,50	480	- 15	- 3,13
170	443	485	42	9,68	429	- 14	- 3,26
180	399	438	39	9,80	386	- 13	- 3,54
190	361	397	38	10,15	348	- 12	- 3,46
200	327	360	35	10,28	316	- 11	- 3,49
210	298	329	31	10,38	288	- 10	- 3,48
220	273	301	28	10,34	263	- 10	- 3,82
230	251	277	26	10,64	241	- 10	- 4,16
240	231	256	25	10,80	222	- 9	- 4,05
250	209	236	27	11,90	205	- 4	- 1,95

Gl. (11) läßt noch die folgende Umformung zu:

$$(11a) \quad \omega = \left[1 + \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \left(c + \frac{C}{\nu} \right) \right] v_1,$$

worin $c = \frac{\sigma_F}{210 \pi^2}$ bedeutet; damit erhält man für St 37

$$(11b) \quad \omega_{37} = \left[1 + \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \left(1,158 + \frac{C_{37}}{\nu} \right) \right] v_{1,37}$$

und schließlich für St 52

$$(11c) \quad \omega_{52} = \left[1 + \left(\frac{\lambda}{100} \right)^2 \left(1,737 + \frac{C_{52}}{\nu} \right) \right] v_{1,52}$$

Der Einfluß der Querschnittsform auf die Tragfähigkeit des Stabes kommt in der Hauptsache in der Zahl ν zum Ausdruck, die unter Zugrundelegung bereits erläuterter Vorstellungen über die Auslösung des Fließvorganges längs einer Fließschicht auf bekannte Weise berechnet werden kann⁵⁾. Es erscheint mir nun nicht zweckmäßig, zur Erlangung einer „mittleren Lösung“, von der aus der Einfluß der Querschnittsform nach beiden Seiten ungefähr gleich weit ausschlägt, die weitere Untersuchung an den Rechteckquerschnitt anzuknüpfen, sondern es erscheint mir richtiger, obere und untere Grenzwerte für ν zu suchen. Demnach wäre dann mit zwei Werten von ν zu rechnen, die sich mit guter Näherung je einer großen Gruppe von Querschnittsformen zuordnen

⁵⁾ J. Fritsche, Zur Mechanik des Fließvorganges. Stahlbau 1938, Heft 16 u. 17.

lassen müßten. Es ist nun wirklich möglich, die im Stahlbau benutzten Querschnittsformen in Hinblick auf ihr Verhalten bei der Plastizierung in nur zwei große Gruppen zu unterteilen:

- Querschnitte, bei denen der Spannungsgrößtwert, die elastische Spannungsspitze, einen breiten Flansch trifft, bei denen der Werkstoff innerhalb des Querschnitts biegemäßig richtig verteilt ist und dessen Hauptmasse folglich in den Querschnittsrändern liegt. Beispiele dafür bildet der I-Stahl, wenn die Lastebene mit der Stegebene zusammenfällt oder der aus zwei I-Stählen gebildete Querschnitt bei Knickung senkrecht zur Stoffachse.
- Querschnitte, bei denen die Spannungsspitze einen schmalen, von der Hauptmasse desselben abstehenden Stegrand trifft und bei denen daher ein wesentlicher Teil der Querschnittsfläche in der Nähe des Schwerpunktes liegt; der Querschnitt ist also nicht biegemäßig richtig ausgebildet. Beispiele für diese Querschnittsgruppe sind der \perp -Querschnitt in seinen verschiedenen Ausbildungsformen und der Kreuzquerschnitt \perp .

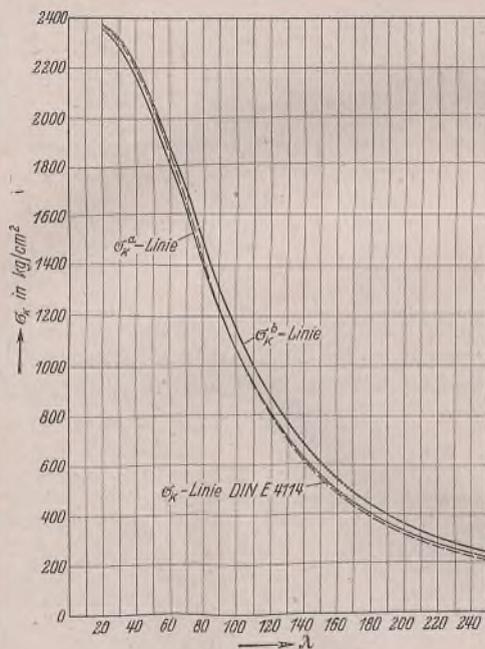


Bild 2.

Beim Querschnitt mit nur einer Symmetrieachse werden die Verhältnisse insofern verwickelter, als derartige Stäbe bei einer plastizitätstheoretischen Untersuchung eine ganz verschiedene Tragfähigkeit ergeben, je nachdem auf welcher Seite des Schwerpunktes sich der Lastangriffspunkt befindet. Der häufigste Vertreter dieser Querschnittsgruppe ist der \perp -Stahl oder der aus zwei Winkeln gebildete \perp -Querschnitt. Die seitliche Ausbiegung einer solchen Stütze kann nach der offenen oder nach der geschlossenen Seite des Querschnitts erfolgen; im ersteren Falle trifft die elastische Spannungsspitze den breiten Steg, im anderen Falle den schmalen abstehenden Flansch. Diese Querschnitte mit nur einer Symmetrieachse ordnen sich daher je nach der Lage der Spannungsspitze (bei gegebener Lage des Lastangriffspunktes) der Gruppe a oder der Gruppe b zu. Ist die Lage des Lastangriffs nicht bekannt, handelt es sich lediglich um eine unvermeidbare Außermittigkeit, mit der verschiedene Unzulänglichkeiten von Theorie und Ausführung erfaßt werden sollen, wird es zweckmäßig sein, den Querschnitt jener Gruppe zuzuschlagen, zu der das größere ω gehört.

Plastizitätstheoretische Untersuchungen auf verschiedenster Grundlage haben nun ergeben, daß man die Tragfähigkeit einer außermittig gedrückten Stütze bei den Querschnittsformen der Gruppe a mit $\nu_a = 1$ befriedigend genau erfassen kann. Bei den Querschnittsformen der Gruppe b wird man mit $\nu_b = \frac{3}{2}$ einen brauchbaren Mittelwert treffen, der in den typischen Fällen die Tragfähigkeit noch immer ein wenig unterschätzt; die theoretischen Untersuchungen³⁾ zur Zahl ν , deren Grundlage allerdings noch nicht völlig geklärt ist, liefern für Querschnitte mit beträcht-

lichen Massenanhäufungen in der Nähe des Schwerpunktes bis $\nu_b = 1,65$ und erreichen bei dem auf die Spitze gestellten Quadrate den Wert $\nu = 2$.

Über die Größe C kann man noch frei verfügen und man kann diese Möglichkeit nun dazu benutzen, mit den ω -Werten der ungünstiger wirkenden Querschnittsgruppe a die derzeit in Gültigkeit befindlichen Werte nahezu wiederzugeben, da man mit der damit festgelegten Knick-sicherheit immer gute Erfahrungen gemacht hat. Die größere Tragfähigkeit der Querschnittsgruppe b wird nun durch kleinere Werte ω besser ausgenutzt, denn es muß das Ziel aller Rechnung sein, allen Druckstäben die gleiche Sicherheit gegen Ausknicken zu geben.

In den folgenden Tafeln 1 und 2 sind die eben abgeleiteten Formeln für Baustahl 37 mit $\sigma_F = 2400 \text{ kg/cm}^2$ ausgewertet. Um die Stäbe der Querschnittsgruppe a, für die $\nu_a = 1$ gesetzt werden muß, nicht schlechter als bisher zu stellen, mußte mit $C_{37} = 0,51$ gerechnet werden. Aus den Tafeln und der beiliegenden bildlichen Darstellung ihres Inhalts in Bild 2 u. 3 ist zunächst ersichtlich, daß die neuen Werte σ_{Ka} , die ausschließlich mit den Werten σ_K in DIN E 4114 verglichen werden

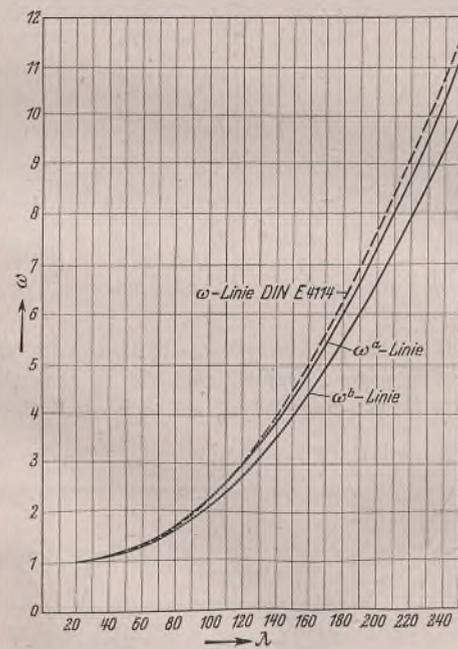


Bild 3.

können, von diesen nur sehr wenig abweichen. Die Abweichung beträgt im Bereich der praktisch wichtigen Schlankheiten höchstens 3%. Beim Vergleich von σ_{Ka} und σ_{Kb} erkennt man zahlenmäßig den wirtschaftlich günstigen Einfluß der vorgeschlagenen Regelung auf die Stäbe der Gruppe b; die biegemäßig ungünstige Massenverteilung im Querschnitt, die sich bei gleicher Fläche gegenüber der Anordnung a in einer starken Vergrößerung des Schlankheitsverhältnisses zum Ausdruck bringt, wird durch die theoretisch und versuchsmäßig gut begründete Einführung verschiedener Zahlen ν zum guten Teile wieder wettgemacht. Es wirkt sich darin die bekannte Tatsache aus, daß auch biegemäßig nicht richtig angeordnete Massen doch die Sicherheit der Konstruktion vergrößern, allerdings zeigt sich dies erst bei einer plastizitätstheoretischen Untersuchung. Jeder, der sich daran erinnert, mit welchem Mehraufwand an Werkstoff die Stützen der Gruppe b knicksicher ausgebildet werden müssen, würde eine Einführung verschiedener ω -Zahlen für die zwei Gruppen von Querschnitten lebhaft begrüßen.

Berichtigung

zu dem Aufsatz von Dr. G. Schmidt „Einfaches Hilfsmittel zur Bemessung von Rahmenquerschnitten für zahlreiche Lastfälle“ in Heft 25/26 vom Dezember 1940.

Der in den Bildern angegebene Maßstab ist versehentlich in den Skizzen mit aufgenommen worden. Der Maßstab sollte nur ein Anhalt für den Verkleinerungsmaßstab sein und hat für das Verständnis der Bilder keine Bedeutung.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule

Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 16. Mai 1941

Heft 10/11

Alle Rechte
vorbehalten.

Die Werkstoff-Fragen beim Schweißen dicker Abmessungen von St 52.

Von Prof. Dr.-Ing. Ernst Hermann Schulz und Dr.-Ing. habil. Wilhelm Bischof, Dortmund.

Die Frage der Schweißbarkeit des St 52 in dickeren Abmessungen ist in den letzten Jahren Gegenstand vieler Veröffentlichungen und Aussprachen gewesen, wobei mannigfaltige Aufklärungen, Vorschläge und Anregungen von Konstrukteuren, Werkstoffprüfern und Stahlherstellern gegeben wurden. Obwohl das Problem insbesondere als Folge der im Schrifttum vielfach erörterten, an einzelnen Bauwerken aufgetretenen Schadensfälle [1] so weitgehend behandelt und auch der Lösung nähergebracht wurde, so sind doch zahlreiche Einzelfragen noch ungeklärt geblieben oder teilweise sogar abwegige Schlußfolgerungen gezogen worden. Wenn bis in die letzte Zeit Äußerungen bekanntgeworden sind, nach denen das Schweißen von St 52 in dicken Abmessungen besser unterbliebe oder die zu schweißenden Abmessungen nach oben mit 30 mm begrenzt werden sollten, so ist diese Einstellung mit dem tatsächlichen Stand der Entwicklung durchaus nicht in Einklang zu bringen: Stahl St 52 kann bei entsprechender Herstellung und Behandlung in Abmessungen bis zu mindestens 50 mm Dicke mit der für geschweißte Konstruktionen vom Werkstoff aus überhaupt erreichbaren Sicherheit geschweißt werden. Wesentlich erscheint dabei die Erfüllung der Aufschweißbiegeprüfung, die in dem „Anhang“ zu den „Vorläufigen technischen Lieferbedingungen der Deutschen Reichsbahn für Formstahl, Stabstahl usw. (Drucksache 918 02) und für Grobbleche (Drucksache 918 162)“ [2] beschrieben ist.

Auch die meisten Feststellungen, die zu der Frage der Schweißbarkeit von St 52 in dicken Abmessungen gemacht worden sind, beziehen sich auf Versuchsergebnisse mit dieser Probe, die ursprünglich von verschiedenen Seiten als Maß für die „Schweißempfindlichkeit“ des St 52 betrachtet wurde. Unter Schweißempfindlichkeit versteht man die Neigung eines Werkstoffes zu Ribbildungen beim Schweißen. Bei dicken Abmessungen ist aber die Feststellung der Schweißempfindlichkeit an einer besonderen Probe von geringerem Wert, da die für die Ausbildung von Schweißrissen bei dünnen Blechen im Werkstoff liegenden Voraussetzungen bei großen Bauwerken durch die beim Schweißen und bei der Beanspruchung auftretenden besonderen Spannungsverhältnisse völlig überlagert werden. Die Heranziehung etwa der Verhältnisse beim Schweißen von dünnen Flugzeugblechen, die anfänglich versucht wurde, war schon deshalb abwegig; ferner spricht dagegen die höhere Temperatur bei der Entstehung der Risse bei dünnen Blechen sowie die Ausbildung der Risse in den Korngrenzen anstatt in den Körnern selbst (Spannungsrisse). Wenn die Aufschweißbiegeprobe nun auch zunächst nicht einem idealen genau definierten Prüfverfahren entspricht, so ließen sich mit ihr doch Untersuchungen unter weitgehender Angleichung an die praktischen, im Bauwerk vorliegenden Bedingungen ausführen, und weiter ist dem Studium dieses Prüfverfahrens innerhalb verhältnismäßig kurzer Zeit die Entwicklung zu verdanken, die von einem beim Schweißen in dicken Abmessungen verhältnismäßig stark trennempfindlichen Werkstoff zu einem Werkstoff hoher Verformungsfähigkeit führte [3]. Wenn dies auch einen erheblichen Fortschritt auf der Werkstoffseite darstellt, so bedeutet das aber keineswegs, daß auf diesem Gebiete etwa eine Rückständigkeit vorgelegen hätte, vielmehr darf wohl festgestellt werden, daß auf der schweißtechnischen und bautechnischen Seite noch erhebliche Anstrengungen gemacht werden müßten, um diesen Fortschritt auf der Werkstoffseite weiter auszubauen. Über die Art des Schweißens, wie über die Elektrodenfrage, Behandlung des Stahles auf der Baustelle u. dgl. ist zweifellos viel gearbeitet und auch erreicht worden, aber die Frage der Gestaltung der zu schweißenden Bauteile umfaßt noch manche unerschlossene Gebiete — es sei nur an das eigenartige Zusammentreffen der bekannten Schadensfälle an der Brücke am Zoo in Berlin und der Autobahnbrücke bei Rüdersdorf mit der Verwendung von Wulst-Profilen erinnert [4].

1. Bewertung der Aufschweißbiegeprobe.

Bei den Schadensfällen am Bahnhof Zoo und bei Rüdersdorf ist zweifellos am wesentlichsten das Auftreten von verformungslos und schlagartig entstandenen Rissen, für die sich zunächst keine Erklärung finden ließ, insbesondere als sie in einem hinsichtlich Zusammensetzung,

Festigkeitseigenschaften und Reinheit einwandfreien Stahl aufgetreten waren. Durch die Aufschweißbiegeprobe nach Kommerell [5] ließ sich nun dieser schlagartige Bruch nachahmen. Dabei fiel der Winkel, den die Probe bis zu diesem Bruch erreichte, bei verschiedenen Werkstoffen verschieden groß aus, und einige Stähle — allerdings mit kleinen Anrissen in der Schweißnaht — ließen sich sogar weitgehend biegen. Man glaubte aus diesen ersten Ergebnissen zunächst Rückschlüsse auf den Einfluß der verschiedenen Legierungselemente ziehen zu können, obwohl die 1937 noch zugelassenen Legierungen des St 52 [6] bereits praktisch weitgehend einander angeglichen waren. Immerhin führten aber letzten Endes die Unterschiede bei gleichen Versuchsbedingungen zwangsläufig auf den Werkstoff als maßgebenden Faktor für den Ausfall der Prüfung hin. Da bei den verschiedenen Legierungstypen aber der Grundwerkstoff in seinen Eigenschaften nach damaliger Erkenntnis auf Grund der Erfahrungen an dünnen Abmessungen keine Unterschiede aufwies [7], bot zunächst nur noch die Aufhärtung in der Nähe der Schweißnaht eine Möglichkeit für die Klärung, obwohl es schon von Anfang an dann unverständlich blieb, weshalb Stähle genau gleicher Zusammensetzung, damit also gleicher Neigung zur Härteannahme, verschiedene Biegewinkel bei der Aufschweißbiegeprüfung ergaben. Eine weitere Unsicherheit lag auch in der verschiedenen Bewertung der Aufschweißbiegeprobe. Es hatten sich für die Beurteilung der Prüfungsergebnisse zwei Gepflogenheiten herausgestellt, je nachdem der Biegewinkel gemessen wurde:

- a) beim „ersten Anriß“, d. h. im Augenblick, wo der erste Riß von der Schweißnaht zum Grundwerkstoff übergeht, oder
- b) beim Bruch, soweit ein solcher überhaupt eintritt.

Beide Beurteilungen sind einerseits mit starken Unsicherheiten behaftet, und andererseits ging aus den Veröffentlichungen und Erörterungen über diesen Gegenstand niemals klar hervor, daß die Grundlage für die Beurteilung in beiden Fällen, wie noch gezeigt werden wird, grundsätzlich verschieden ist.



Bild 1. Ausbreitung des Risses unter der Oberfläche.
(Einzelne Stufen durch Gasätzung sichtbar gemacht.)

Legt man den Biegewinkel beim ersten Anriß zugrunde, so läßt sich mit zunehmender Härte der Übergangszone eine Abnahme des Biegewinkels — allerdings mit großen Streuungen — feststellen. Der Winkel beim ersten Anriß wird gemessen, wenn der erste Riß aus der Schweißnaht gerade in den Grundwerkstoff übergeht. Zu diesem Zeitpunkt ist jedoch der Bruch nicht selten bereits weiter in den Grundwerkstoff eingedrungen, als von außen zu erkennen ist, da er sich häufig nierenförmig fortpflanzt (Bild 1). Es kann sogar äußerlich in der Schweißnaht erst ein kurzer, keineswegs schon in den Grundwerkstoff eindringender Riß vorhanden sein, wenn der Bruch sich innen bereits über mehr als $\frac{1}{3}$ des Querschnitts der Probe fortpflanzt hat. Bemerkenswert ist auch, daß der Bruch in mehreren Absätzen erfolgt, die in Bild 1 durch Anätzen mit Gasen während des Versuchs verschieden stark gedunkelt sind. Andererseits können aber auch schlagartig durchgehende Trennungsbrüche auftreten, wenn bereits größere Biegewinkel erreicht sind, bevor der erste Anriß sich beobachten ließ. So entstand der in Bild 2 dar-

gestellte ziemlich verformungslose Bruch erst bei einem Biegewinkel von fast 50° , ohne daß vorher ein Anriß auftrat.

Hieraus geht hervor, daß der erste Anriß nicht in unmittelbarem Zusammenhang mit dem Gesamtbruch der Probe steht oder daß zwischen der Trennfestigkeit der Übergangzone und der des Grundwerkstoffes eine Beziehung nicht zu bestehen braucht.



Bild 2.
Trennungsbruch bei einem Biegewinkel von 48° .

Der Biegewinkel beim Bruch ist auch nicht ganz eindeutig. Zunächst erfolgt nicht stets ein Bruch. Weiter hat die Erfahrung gezeigt, daß der Bruch zwar bei kleineren Biegewinkeln plötzlich erfolgt — die Bezeichnung als verformungsloser Trennungsbruch hat in diesem Fall eine gewisse Berechtigung; das plötzliche Durchschlagen kann jedoch auch bei größeren Biegewinkeln eintreten, dann kann von einem verformungslosen Bruch nicht mehr gesprochen werden. Der schlagartige durchgehende Bruch zeigt allerdings auch in diesen Fällen ein vorwiegend körniges Aussehen. Ihm gegenüber steht der zähe Verformungsbruch mit teils fasriger oder sehniger Bruchfläche. Man könnte danach zwischen körnigem und sehnigem Bruch unterscheiden. Es zeigt sich aber, daß alle möglichen Übergänge vorkommen können, so daß eine solche Unterteilung ebenfalls erhebliche Schwierigkeiten haben würde.

Die Vorschriften der Reichsbahn besagen:

„Die Walzerzeugnisse müssen beim Biegeversuch einen zähen Verformungsbruch zeigen (keinen Trennbruch). Ein bestimmter Biegewinkel bis zum Eintritt des ersten Anrisses in der Schweißnaht wird vorläufig nicht vorgeschrieben, doch ist der beim Bruch erreichte Biegewinkel festzustellen und in der Niederschrift aufzunehmen. Bei diesem Biegewinkel, der

bei 30 mm dicken Platten mindestens	50° ,
„ 40 „ „ „ „	40° ,
„ 50 „ „ „ „	30° .

sein muß, muß sich eine deutliche Verformung (Einschnürung) zeigen. Der Versuch ist bis zum Bruch, mindestens bis zu einem Biegewinkel von etwa 90° fortzusetzen.

Ein verformungsloser Bruch (Trennbruch) liegt vor, wenn Risse, die im Schweißgut auftreten, nicht vom Mutterwerkstoff aufgefangen werden, wenn vielmehr der Querschnitt nach Eintreten von Rissen im Schweißgut beim Weiterbiegen auf seine ganze Dicke ohne Verformung durchschlägt, wobei es unwesentlich ist, ob an den Außenkanten der Probestücke der Werkstoff noch mehr oder weniger zusammenhängt, so daß sich beim Weiterbiegen mehr oder weniger große Biegewinkel ergeben.“

Es ist also eine gewisse Eindeutigkeit erzielt, indem eine Probe als bedingungsgemäß angesehen wird, wenn sie nicht gebrochen ist. Eine Probe gilt aber als gebrochen, auch wenn der Werkstoff an den Außenkanten noch mehr oder weniger zusammenhängt. Hierin liegt noch eine gewisse Unklarheit, die etwa durch Angabe der zulässigen größten Rißbreite behoben werden könnte. Im ganzen ist festzustellen, daß mit Angabe des Biegewinkels beim Bruch die ganze Prüfung auf die Trennempfindlichkeit des Grundwerkstoffes abgestellt worden ist, allerdings unter besonderen Voraussetzungen — nämlich dem Vorliegen scharfster Kerbbedingungen, gegeben durch feine Anrisse in Schweiße und Übergangzone sowie bisher vielleicht noch nicht zu übersehende Spannungsverhältnisse.

Die vorliegende Untersuchung soll dazu beitragen, diese Einflußgrößen, soweit sie den Werkstoff betreffen, herauszustellen und damit eine Klärung des Werkstoffeinflusses zunächst beim Verhalten der Aufschweißbiegeprobe, dann aber auch beim Schweißen des St 52 in dicken Abmessungen herbeizuführen.

2. Die Werkstoffeigenschaften der Übergangzone.

Unter Übergangzone wird im folgenden die Zone verstanden, deren eine Begrenzung unmittelbar an der Schweiße liegt, während die andere dort besteht, wo im Mikroskop gerade noch eine sichtbare Änderung im Gefüge des Grundwerkstoffes zu erkennen ist. Durch Ätzung des Schliffes eines Schnittes durch Grundwerkstoff und Schweiße mit alkoholischer Salpetersäure wird die Übergangzone durch mehr oder weniger starke Dunklung zum Teil auch dem bloßen Auge deutlich sichtbar. Die Einwirkung der Schweiße geht jedoch infolge der beim Schweißen auftretenden Kaltverformungen noch erheblich tiefer. Die Tiefe dieser Zone, die derartige im Gefüge nicht sichtbare Änderungen mit umfaßt — wohl am besten Einflußzone genannt —, läßt sich bei den legierten Stählen leider nicht feststellen, wohl aber bei St 37 durch eine besondere Ätzung (Ätzung auf Kraftwirkungslinien nach Fry). Die gesamte Einflußzone ist n 50 mm dicken Abmessungen bei Einlagenschweißungen mehrfach breiter als die Übergangzone, wie Bild 3 das erkennen läßt.

In der Übergangzone werden die Gefügeänderungen beim Schweißen bestimmt durch

- a) die Erhitzungsgeschwindigkeit,
- b) die erreichte Höchsttemperatur,
- c) die Verweilzeit bei dieser Temperatur,
- d) die Abkühlungsgeschwindigkeit.

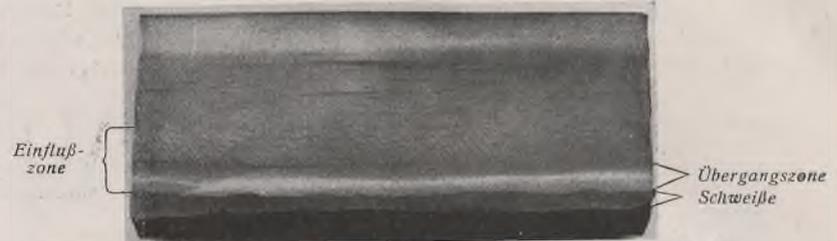


Bild 3. Einflußzone und Übergangzone von Schweißen an St 37.

Genau zahlenmäßige Angaben über diese Größen lassen sich mit den heute verfügbaren Mitteln noch nicht machen, grundsätzlich läßt sich aber folgendes aussagen.

Die Erhitzungsgeschwindigkeit kann an allen Stellen der Übergangzone praktisch als sehr groß angenommen, ihre Unterschiede können somit vernachlässigt werden.

Messungen der Höchsttemperaturen mit dem Thermoelement sind bei der mehrere Zehntel Millimeter dicken Lötstelle deshalb außerordentlich schwierig, weil die rd. 3,5 mm breite Übergangzone bei der Einlagenschweißung einer 50 mm dicken Aufschweißbiegeprobe ein Temperaturgefälle vom Schmelzpunkt des Stahles bei rd. 1520° bis zur Perlitumwandlung bei rd. 700° , also von 25° je Zehntel Millimeter aufweist. Es besteht aber die Möglichkeit einer ziemlich genauen nachträglichen Abschätzung durch mikroskopische Untersuchung des Gefüges in der Übergangzone.

Die Abkühlungsgeschwindigkeit hat für die Ausbildung des Gefüges nur eine Bedeutung von etwa 800° abwärts. Mit abnehmender Temperatur wird auch die Abkühlungsgeschwindigkeit geringer, so daß Temperaturen unter 800° schon mit besserer Annäherung festgestellt werden können, für die Abkühlungsgeschwindigkeit liegen daher auch bereits einige Zahlen im Schrifttum vor [8], [9]. Sie kann bei 50 mm dicken Abmessungen zu etwa 30 bis $50^\circ/\text{sek}$ angenommen werden [8] und dürfte über die ganze Breite der Übergangzone ziemlich gleich sein.

Die Verweilzeit bei der Höchsttemperatur ergibt sich aus dem Vorschub der Elektrode beim Schweißen und dürfte praktisch nur einige Sekunden betragen.

Am wichtigsten von diesen Größen ist die Höchsttemperatur und die Abkühlungsgeschwindigkeit, die bei gegebener Zusammensetzung und Gefügebeschaffenheit des Grundwerkstoffes das Gefüge der Übergangzone und damit auch die Eigenschaften vorzugsweise bestimmen.

3. Übergangzone und Gefügebeschaffenheit des Grundwerkstoffes.

Der Schweißfachmann pflegt von den Werkstoffeigenschaften der Übergangzone meist nur die Härte zu betrachten, da ihre Feststellung zunächst einwandfrei zu sein scheint. So ist dann auch zunächst für die Beurteilung der bekannten Schadensfälle der Aufhärtung der Übergangzone eine besondere Bedeutung zugemessen worden [10] und wird ihr teilweise auch heute noch zugeschrieben [11]; begünstigt wurde diese Auffassung dadurch, daß ein Zusammenhang zwischen der Härte der Übergangzone und dem Biegewinkel beim ersten Anriß der Aufschweißbiegeprobe festgestellt wurde. Neben der Härte spielt aber auch die Kerbschlagzähigkeit eine Rolle, da sie eine gewisse Beurteilung des Verhaltens des Werkstoffes bei mehrachsiger Beanspruchung, wie sie in der Übergangzone bei Schweißen vorliegt, ermöglicht. Die Messung der Kerbschlagzähigkeit der Übergangzone von Schweißen wurde zwar verschiedentlich versucht, scheiterte aber bisher an der Schwierigkeit der richtigen Anbringung des Kerbes zur einwandfreien Erfassung der sehr schmalen Übergangzone. Da die Sprödigkeit eines Werkstoffes durchaus nicht unbedingt mit der Härte parallel zu gehen braucht, ist jedoch die Feststellung der Kerbschlagzähigkeit zumindest zunächst für die wissenschaftliche Beurteilung der Eigenschaften der Übergangzone unerlässlich.

Härtemessung. Um den sich überlagernden Einfluß der einzelnen Legierungselemente auszuschalten, wurde zur Untersuchung des Härteverlaufs in der Übergangzone von Schweißen an dicken Abmessungen zunächst nur ein einziger Stahl (Union-Baustahl) der Zusammensetzung

0,18% C, 0,26% Si, 1,04% Mn, 0,34% Cr, 0,50% Cu

herangezogen. Um wirklich Klarheit in die Härteverhältnisse in der Übergangzone zu bringen, mußte von einer eingehenden Untersuchung des Gefüges ausgegangen werden. Durch Maßnahmen beim Walzen und durch Glühen bei verschiedenen hohen Temperaturen mit folgender Luftabkühlung wurden daher in mehreren 50 mm dicken Platten Gefüge mit

äußerst grobem bis feinem Perlit und Ferrit¹⁾ erzeugt sowie ein durch eine Sonderschmelzbehandlung in Verbindung mit Normalglühung erhaltenes sehr feinkörniges Gefüge des gleichen Stahles. Von den so behandelten Platten wurden Aufschweißbiegeproben hergestellt und gebogen. Durch die Schweißbraupe wurden sodann Längsschnitte senkrecht durch die Probe gelegt, so daß (s. Bild 4 und 5, oben) das Gefüge der Übergangszone sowie des anschließenden Teiles der Schweißnaht und des Grundwerkstoffes beobachtet werden konnte. In den beiden genannten Bildern sind die Proben mit dem äußerst groben und mit dem durch Sonderbehandlung erhaltenen feinen Gefüge wiedergegeben. Die Perlitinseln im Grundwerkstoff gehen, wie besonders deutlich in Bild 4 zu erkennen ist, an den Stellen, die beim Schweißen gerade über den Umwandlungspunkt des Perlit, d. h. rd. 700° erhitzt wurden, z. T. in hellere, schwerer ätzbare Martensitflecken²⁾ über. Diese Martensitinseln sind bekanntlich äußerst hart und spröde. Je höher die Höchsttemperatur war, um so größer sind die Flecken geworden, haben dann aber dunkle Säume erhalten und wurden selbst mehr und mehr geätzt. In dem Gebiete der Höchsttemperatur von 900° an ist der Ferrit plötzlich feinkörnig, d. h. er war vorübergehend in γ -Eisen umgewandelt. Bei etwa 1300° ist der ganze Ferrit von dem Härtegefüge gewissermaßen absorbiert worden, so daß eine Zone von etwa 1 1/2 bis 2 mm Breite unvorstellbar an der Schweißnaht aus einem ziemlich gleichmäßigen Gefüge mit 0,18% C bestand, das bei dem grobkörnigen (Bild 4) und dem feinkörnigen (Bild 5) Stahl weitgehend übereinstimmt. Diese Feststellungen lassen bereits erkennen, daß in der „Übergangszone“ nicht, wie teilweise wohl noch angenommen wird, ein einheitliches, sondern ein sehr ungleichmäßiges Gefüge vorliegt, d. h. daß sie aus verschiedenen „Einzelzonen“ besteht. Das ist nun sehr bedeutsam für die Frage der Härte und Härteprüfung dieser Zone.

Die Brinell-Härteprüfung etwa mit der 2,5-mm-Kugel, wie sie oftmals für die Untersuchung von Schweißübergängen gebraucht wird, ergibt Eindrücke von etwa 0,8 bis 1,3 mm Durchm., die Vickersprüfung bei 10 kg Belastung solche von etwa 0,2 bis 0,32 mm Breite. Diese Eindrücke sind aber nach dem eben Gesagten bereits zu groß, um den Härteverlauf über alle in den Gefügebildern erkennbaren Einzelzonen genau wiederzugeben. Es ergibt sich mehr oder weniger eine Durchschnittshärte, die auch bei grundsätzlich verschiedener Ausbildung der Übergangszone keinerlei Unterschiede zu ergeben braucht. So wurde bei dieser Art der Härtebestimmung in dem Gefüge der Bilder 4 und 5 übereinstimmend eine Härte von 300 bis 320 kg/mm² gefunden. Für eine genaue Beurteilung der Übergangszone sind mithin die genannten Härtemessverfahren zu grob. Eine Verbesserung der Prüfung mit großer Belastung stellt das Roll-Härteprüfungsverfahren nach Hauttmann [12] dar. Hierbei wird die Breite der Spur einer unter Belastung quer über die Übergangszone hinweg gerollten Kugel gemessen. Obwohl die härteste Zone mit diesem Verfahren sicher erfaßt wird, lassen sich doch solche ausgeprägten, für das Verhalten maßgebenden Unterschiede wie zwischen Bild 4 und 5 damit nicht feststellen. Eine Härtemessung, die genauestens den Verlauf der Härte in der Übergangszone entsprechend dem besonderen Gefügebau wiedergibt, ist aber mit dem Mikrohartprüfgerät (Vickers-Pyramide, 20 g Belastung) möglich, das im Forschungsinstitut der Vereinigte Stahlwerke AG. entwickelt und seit fast drei Jahren für solche Zwecke verwendet wird. In den Bildern 4 und 5 sind in den unteren Teilbildern die Ergebnisse der Messung mit diesem Gerät dargestellt. Die Eindrücke haben nur 0,03 mm Abstand voneinander und sind im Gefügebild als Punktreihe zu erkennen. Es ergibt sich dabei bei Bild 4 und 5 ein grundsätzlich verschiedener Härteverlauf in der Übergangszone als Folge der verschiedenen Gefügebildungen trotz genau gleicher chemischer Zusammensetzung des Grundwerkstoffes. Vor allem fällt bei dem Stahl mit grobem Sekundärkorn³⁾ in einem Abstand von 2,0 bis 3,5 mm vom Rande der Schweißnaht ein Gebiet mit sehr großen Härteschwankungen und sehr hohen Härtespitzen auf, das in Bild 5 fehlt.

¹⁾ Dem aus dem Leserkreis dieser Zeitschrift geäußerten Wunsch, zu den verwendeten Fachausdrücken der Werkstoffkunde kurze Erläuterungen zu geben, kommen wir nach. Sowohl St 37 wie St 52 besteht bei Raumtemperatur normalerweise aus einer Grundmasse aus praktisch kohlenstofffreiem im Schlißbild hell erscheinenden Ferrit und darin eingelagerten dunkelgeätzten Perlitkörnern mit rd. 0,8% Kohlenstoff in Form eines meist streifigen Gemenges von Eisenkarbid und Ferrit.

²⁾ Martensit entsteht durch rasche Abkühlung aus Temperaturgebieten, die je nach dem Kohlenstoffgehalt über 700 bis 900° liegen. Für die Abkühlung ist je nach der Legierungszusammensetzung eine Mindestgeschwindigkeit erforderlich.

³⁾ Unter „Sekundärkorn“ ist das Korn des bei Raumtemperatur normalerweise vorhandenen, im geätzten Schliß ohne weiteres erkennbaren Perlit-Ferrit-Gefüges zu verstehen. Von ihm zu unterscheiden ist das „Primärkorn“, auch Austenitkorn genannt; es ist das Korn des je nach dem Kohlenstoffgehalt nur über 700 bis 900°, d. h. oberhalb der Temperaturen der Linie GS im Eisen-Kohlenstoff-Schaubild, beständigen Zustandes, des Austenits. Auf die Größe des Austenitkorns kann meistens aus der Größe des sogenannten Ehn-Korns geschlossen werden. Das Ehn-Korn oder Mc Quaid-Ehn-Korn wird an den Stahlproben durch ein Zementationsverfahren entwickelt. Eine Probe des Stahles wird beispielsweise 8 Stunden lang bei 930° in einer Mischung aus Barium-Karbonat und Holzkohle geglüht. An den Korngrenzen des in diesem Temperaturbereich vorliegenden Austenits wird durch Aufkohlung Karbid zu einem Zementitnetz abgeschieden. Bei der Abkühlung auf Raumtemperatur bleibt dies Netz unverändert bestehen und wird dann im Schliß nach geeigneter Ätzung sichtbar gemacht. Das Mc Quaid-Ehn-Korn und auch das Austenitkorn sind aber nicht identisch, wie manchmal angenommen wird.

Der Unterschied im Härteverlauf läßt sich wie folgt erklären: Der Kohlenstoffgehalt des Austenits der beiden Stähle ist im Gleichgewichtszustand 0,2%. Der Kohlenstoffgehalt der Perlitflecken, aus denen bei der Erhitzung der Austenit zunächst entsteht, ist rd. 0,8%. Bei sehr langsamer Erhitzung würde sich der Kohlenstoffgehalt des Austenits — unmittelbar nach der Entstehung 0,8% betragend — mit steigender Temperatur genau entsprechend der Linie GS des Eisen-Kohlenstoff-Schaubildes von 0,8 bis 0,2% ändern. Da die Erhitzung beim Schweißen aber außerordentlich rasch erfolgt und die Wanderungsgeschwindigkeit des Kohlenstoffes verhältnismäßig gering ist, bleibt der Kohlenstoffgehalt des Austenits höher, als er bei der jeweiligen Temperatur nach dem Eisen-Kohlenstoff-Schaubild tatsächlich sein müßte. Bei dem feinkörnigen Stahl ist der Ausgleich des Kohlenstoffes im Austenit wegen der Kleinheit der ursprünglichen Perlitinseln noch verhältnismäßig rasch möglich, deshalb geht die Änderung von 0,8 auf 0,2% C immerhin noch ziemlich nahe der GS-Linie vor sich. Bei dem grobkörnigen Stahl ist wegen der größeren Ausbildung des Perlit der Diffusionsweg erheblich größer und demnach der Ausgleich langsamer, so daß der Austenit bei der raschen Erhitzung bis zu erheblich höheren Temperaturen hohe Kohlenstoffgehalte beibehält. Beispielsweise enthält der Austenit in der Zone, die beim Schweißen etwa 940° erreicht hat, bei dem feinkörnigen Stahl nur noch rd. 0,30%, bei dem grobkörnigen Stahl aber noch rd. 0,75% C. Da aber nur bei höheren Kohlenstoffgehalten die Abkühlung beim Schweißen die für die Bildung des harten Martensits erforderliche kritische Abkühlungsgeschwindigkeit erreicht, ist die Zone mit harten Martensitflecken bei dem Grobkornstahl sehr breit im Vergleich zum Feinkornstahl.

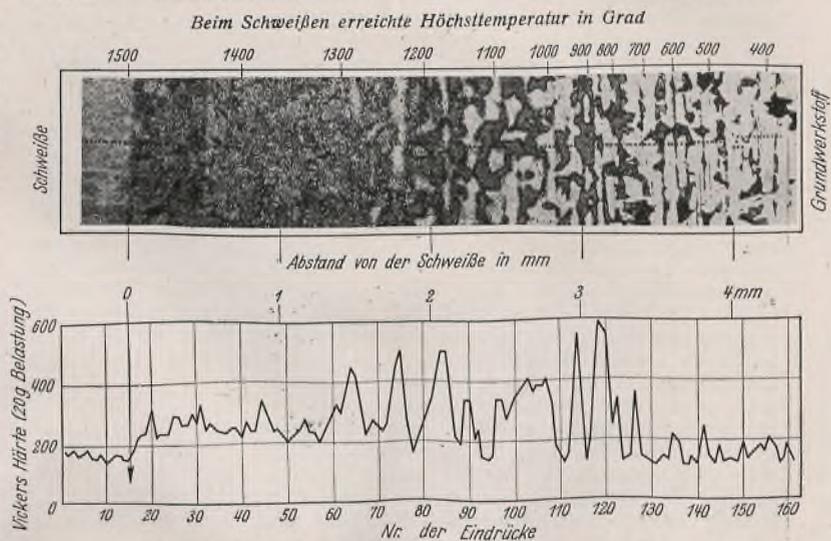


Bild 4. Entstehung der Übergangszone und Härteverlauf bei Grobgefüge.

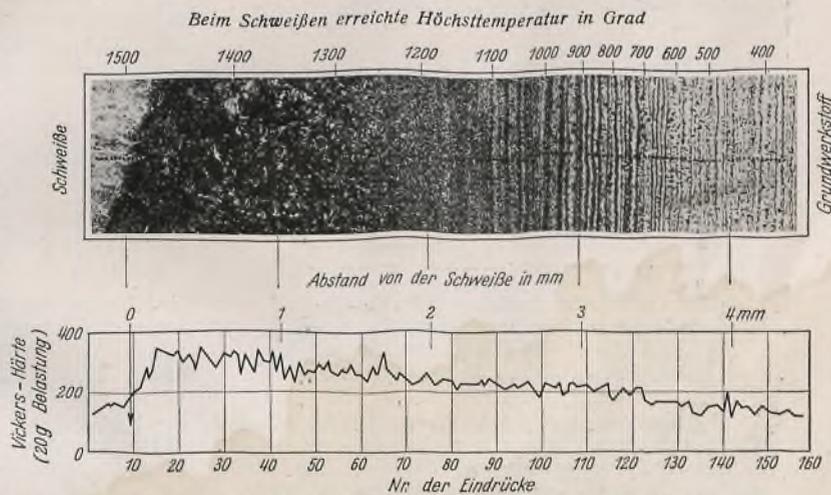


Bild 5. Entstehung der Übergangszone und Härteverlauf bei Feingefüge.

Nimmt man an, daß die kritische Abkühlungsgeschwindigkeit für 0,30% C beim Schweißen von 50 mm dicken Abmessungen gerade erreicht wird, so würde die Zone mit Martensitflecken beim Feinkornstahl von rd. 700 bis 940°, d. h. über eine Breite von 0,5 mm reichen, bei Grobkornstahl dagegen von 700 bis 1280°, also über eine Breite von 1,9 mm. Zwischen den beiden besprochenen Gefügebildungen können alle möglichen Übergänge auftreten, von deren Wiedergabe hier aus Raumgründen abgesehen werden muß.

Von besonderer Bedeutung, da einigermaßen eindeutig, ist der normalgeglühte Zustand⁴⁾ des Stahles. Bei diesem Zustand können in der Übergangszone noch einige wenige hohe Härtespitzen auftreten, die jedoch

⁴⁾ Unter Normalglühung versteht man bei St 52 eine Glühung bei einer Temperatur, die etwa 30° über dem oberen Umwandlungspunkt liegt, d. h. bei etwa 880°, mit nachfolgender Abkühlung in ruhender Luft.

für den Ausfall der Aufschweißbiegeprobe, wenn es sich um Chrom-Kupfer-Stahl handelt, meistens nicht mehr von Belang sind. Für Chrom-Kupfer-Stahl wird nämlich im allgemeinen bereits durch eine Normalglühung auch ohne besondere Schmelzbehandlung eine ausreichende Verfeinerung des Sekundärkornes erhalten. Eine Sonderschmelzbehandlung zusammen mit Normalglühung gibt bei ihm mit Sicherheit einen Härteverlauf wie in Bild 5 und parallel damit einen günstigen Ausfall der Aufschweißbiegeprobe.

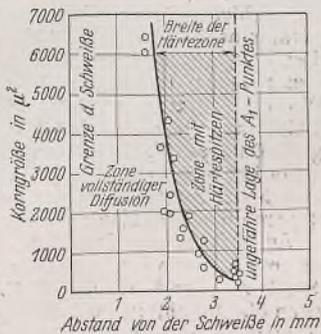


Bild 6. Aufbau der Übergangszone in Abhängigkeit von der Ferrit-Perlit-Korngröße.

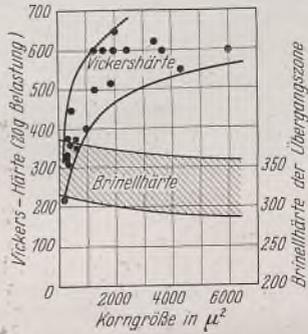


Bild 7.

Wenn auch die Breite des Gebietes der Härtespitzen nicht immer so deutlich auszumessen ist wie bei Bild 4, so sind die Beobachtungen doch weitgehend auf andere Stähle gleicher Art zu übertragen. Bild 6 gibt die Lage des Gebietes der Härtespitzen bei verschiedenen Chrom-Kupfer-Stählen in Abhängigkeit von der Perlit-Ferrit-Korngröße des Grundwerkstoffes bei Einlagenschweißen von 50 mm dicken Platten (Aufschweißbiegeproben) an. Die gestrichelte Linie entspricht etwa der Entfernung vom Rand der Schweißnaht, von der ab unabhängig von der Korngröße eine Gefügeänderung des Grundwerkstoffes nicht mehr erfolgt. Die ausgezogene Linie ist die Begrenzung der Zone mit den höchsten Mikrohärtigkeiten. Bild 7 zeigt, daß zwischen der höchsten Mikrohärtigkeit und der mit der 2,5-mm-Brinellkugel gemessenen Härte keinerlei Beziehung besteht. Die Härtespitzen nehmen danach stark mit der Korngröße zu, während die Brinellhärte entsprechend dem schraffierten Streuungsgebiet sich kaum ändert, wenn sie nicht sogar eine gewisse Verringerung bei zunehmender Korngröße aufweist. Die Einführung der Vorschrift einer bestimmten Höchst Korngröße wäre aber unzumutbar, da die Grenze zwischen guten und schlechten Stählen, beurteilt nach dem Ausfall der Aufschweißbiegeprobe, eine ganz verschiedene Lage hat, bei Chrom-Kupfer-Stahl beispielsweise bei etwa 900 µ², bei Stählen anderer Zusammensetzung teils erheblich niedriger.

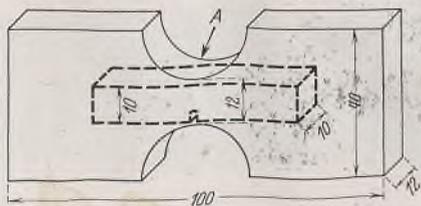


Bild 9. Versuchsanordnung zur Bestimmung der Kerbschlagzähigkeit von Gefügezuständen wie in der Übergangszone von Schweißen an dicken Abmessungen.

Kerbschlagzähigkeit. Versuche, die Abnahme der Kerbschlagzähigkeit durch die Schweißnaht festzustellen und dabei insbesondere den Einfluß der Übergangszone zu erfassen, sind bereits oft durchgeführt worden. Es wurde die Kerbschlagprobe so gelegt, daß die Übergangszone ganz im beanspruchten Querschnitt liegt (Bild 8a). Tatsächlich ergab sich dabei ein erheblicher Abfall der Kerbschlagzähigkeit in diesen Proben. Eine Kennzeichnung der Übergangszone und Erfassung von Unterschieden, wie sie durch das Gefüge (Bild 4 und 5) gegeben sein können, ist dadurch aber nicht möglich. Man hat ferner die Proben so gelegt, daß der Kerb von der Schweißnaht aus mit der Spitze gerade bis an den Rand der Übergangszone reicht [13], so daß die Übergangszone quer durchschlagen wird (Bild 8b) oder daß der Kerb selbst ganz oder teilweise in der Übergangszone liegt [14], so daß der Bruch längs der Übergangszone erfolgt (Bild 8c und d). Auch in diesen Fällen kommt der Unterschied im Gefüge der Übergangszone nicht zur Wirkung. Einen gänzlich anderen Weg zur Beurteilung der Kerbschlagzähigkeit in der Übergangszone schlug Bruckner ein [9]. Er prüfte nicht die Schweißnaht selbst, sondern den Werkstoff unter Abkühlungsbedingungen, wie sie in der Übergangszone beim Schweißen vorliegen sollten. Aber auch mit der Bruckner-Probenvorbereitung werden die Verhältnisse der Übergangszone nicht in vollem

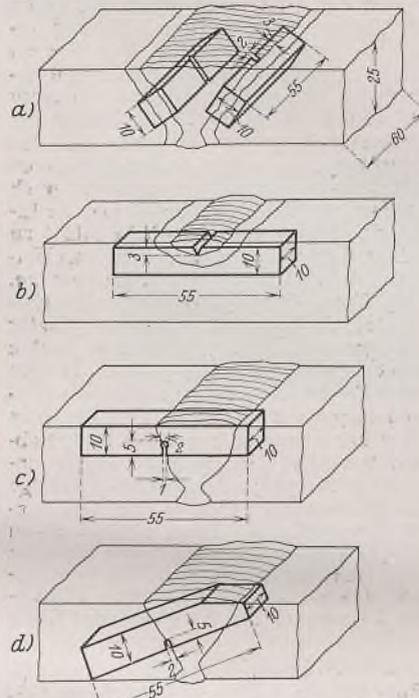


Bild 8a bis d. Entnahme der Kerbschlagproben zur Bestimmung der Zähigkeit der Übergangszone von Schweißen.

Mittelwert zusammengefaßt. Das Gefüge der Proben an den Bruchenden wurde schließlich zur Kontrolle der Temperaturen und zum Vergleich mit dem Gefüge an der betreffenden Stelle der Übergangszone an der Schweißnaht der Aufschweißbiegeprobe nachgeprüft. Die Ergebnisse der Untersuchung an dem oben schon behandelten Chrom-Kupfer-Stahl und an einem Mangan-Silizium-Stahl sind in den Bildern 10 und 11 dargestellt.

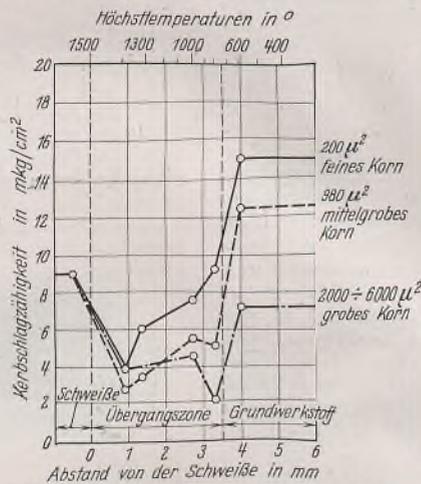


Bild 10. Kerbschlagzähigkeit in der Übergangszone bei verschiedener Korngröße von Union-Baustahl (0,17% C, 0,35% Si, 0,98% Mn, 0,35% Cr, 0,46% Cu).

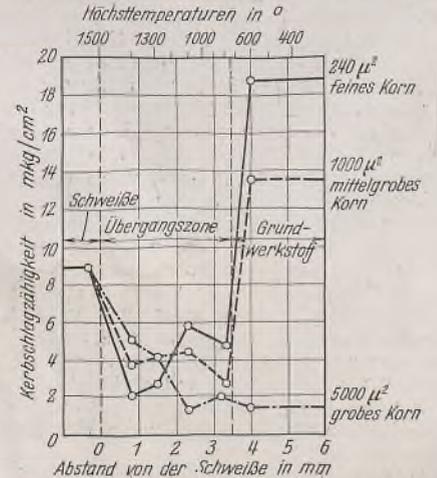


Bild 11. Kerbschlagzähigkeit in der Übergangszone bei verschiedener Korngröße von Mn-Si-Stahl (0,19% C, 0,46% Si, 1,33% Mn, 0,07% Cr, 0,08% Cu).

Die Chrom-Kupfer-Stähle des Bildes 10 mit den Korngrößen 200 und 980 µ² zeigten gute Ergebnisse bei der Aufschweißbiegeprüfung, bei 2000 bis 6000 µ² dagegen schlechtes Verhalten. Die Unterschiede der Kerbschlagzähigkeit wurden in den Proben mit einem Gefüge, wie es in nächster Nähe der Schweißnaht vorliegt, geringer. Die stärksten Unterschiede ergaben sich in den Proben, die der entfernteren Zone entsprachen, wie das auch den Unterschieden in der Mikrohärtigkeit entspricht. Die Kerbschlagwerte der Mangan-Silizium-Stähle des Bildes 11 lagen durchweg etwas tiefer. Insbesondere zeigt bei ihm die Kurve auch selbst des Feinkornstahles in der Zone der Härtespitzen keinen glatten Verlauf. Jedenfalls scheint bei diesem Stahl eine Verbesserung der Kerbschlagzähigkeit in der Übergangszone durch die Feinkornbehandlung praktisch nicht eingetreten zu sein. Die zugehörigen Aufschweißbiegeproben gaben bei 1000 µ² und 5000 µ² verformungslosen Bruch, bei dem Stahl mit 240 µ² einen, wenn auch zusammenhängenden, so doch immer noch stark klaffenden Bruch. Die Kerbschlagzähigkeit an den verschiedenen Stellen der Übergangszone hängt somit ebenso wie die Härte wesentlich von der Gefügeausbildung des Grundwerkstoffes ab, gleichzeitig zeigt sich aber auch ein gewisser Einfluß der Legierung.

Umfang wiedergegeben, sondern kann nur die überhitzte Zone unmittelbar an der Schweißnaht beurteilt werden.

Um den genauen Verlauf der Kerbschlagzähigkeit in der Übergangszone feststellen zu können, wurde ein mittelbares Untersuchungsverfahren angewendet. Proben mit Abmessungen nach Bild 9 wurden zwischen den Klemmen eines Tamman-Ofens in sehr kurzer Zeit durch Widerstandsbeheizung auf verschiedene Temperaturen über 800 bis 1400 °C gebracht. Die Erhaltungsdauer betrug hierbei nur 2 sek und entsprach praktisch derjenigen beim Schweißen. Nach Erreichen dieser Temperaturen, was durch Anvisieren der mit Wasserstoff umspülten Probe bei A mit einem optischen Pyrometer nach vorheriger Eichung genau festgestellt werden konnte, wurde der Strom abgeschaltet und die Probe mit Preßluft bis auf Raumtemperatur rasch abgekühlt. Danach wurde aus der Probe eine DVMR-Probenvorbereitung entsprechend Bild 9 herausgearbeitet und zerschlagen. Die Ergebnisse von drei Messungen wurden jeweils zu einem

Kerbschlagzähigkeit. Der Einfluß der Legierungselemente auf die Kerbschlagzähigkeit kann aus den schon bei der Aufhärtung besprochenen Gründen nur für die homogene Zone unmittelbar an der Schweißnaht mit einiger Sicherheit festgestellt werden. Die Struktur dieser Zone ist bestimmt durch die beim Schweißen erreichte sehr hohe Temperatur und durch die Abkühlungsgeschwindigkeit. Versuche, mittelbar unter diesen Bedingungen die Kerbschlagzähigkeit zu messen, wurden erstmalig von Bruckner [9] ausgeführt, allerdings als Grundlage für die Beurteilung der Verhältnisse bei Einlagenschweißungen an 12 mm dicken Blechen. Die Abkühlungsgeschwindigkeit betrug nach den kurvenmäßigen Angaben innerhalb von 800 bis 400° nur 20°/sek. Die Abkühlung selbst wird bei Bruckner stufenweise in zwei Salzbadern vorgenommen, wodurch außerdem die Abkühlung keinen glatten Verlauf zeigt [8].

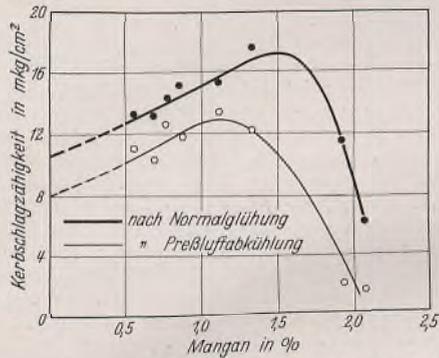


Bild 14. Einfluß des Mangangehaltes auf die Kerbschlagzähigkeit (DVMR-Probe) von normalgeglühten und prebluftabgekühlten Proben (1/4 Std. 1350° Prebluft 30 bis 40°/sek zwischen 800 und 400°) mit rd. 0,10% Si.

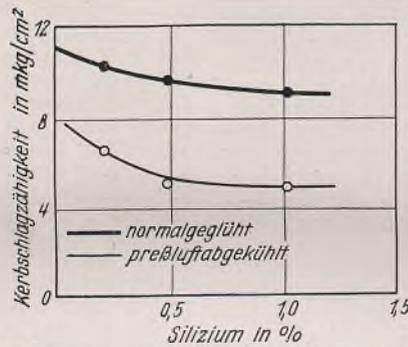


Bild 15. Einfluß des Siliziumgehaltes auf die Kerbschlagzähigkeit (DVMR-Probe) von normalgeglühten und prebluftabgekühlten Proben (1/4 Std. 1350° Prebluft 30 bis 40°/sek zwischen 800 und 400°) mit rd. 0,08% Mn.

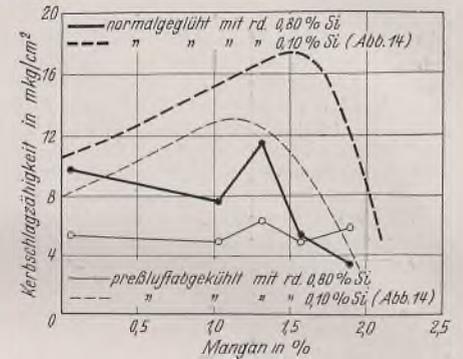


Bild 16. Einfluß des Mangangehaltes in Stählen mit rd. 0,8% Si auf die Kerbschlagzähigkeit (DVMR-Probe) von normalgeglühten und prebluftabgekühlten Proben (1/4 Std. 1350° Prebluft 30 bis 40°/sek zwischen 800 und 400°).

In den eigenen Versuchen wurden wie bei den Härtemessungen die Abkühlungsverhältnisse beim Schweißen von dicken Abmessungen durch eine geregelte Prebluftabkühlung von 1350° weitgehend nachgeahmt. Zu diesem Zweck wurden DVMR-Kerbschlagproben einer Anzahl von Mangan-, Silizium-, Chrom- und Kupfer-Stählen entsprechend den Legierungsbereichen des St 52 eine Viertelstunde auf 1350° erhitzt und dann in Prebluft mit einer Abkühlungsgeschwindigkeit von 30 bis 40°/sek zwischen 800 und 400° abgekühlt. Verwendet wurden die Stähle der Zahlentafel 2. Die Herstellung dieser Stähle erfolgte in Schmelzen von je 5 kg im Hochfrequenzofen. Die Blöckchen wurden zu Stäben mit einem Querschnitt von 10 × 10 mm² heruntergeschmiedet, aus denen die Kerbschlagproben entnommen wurden. In den Bildern 14 bis 19 sind die Versuchsergebnisse zusammengestellt, und zwar sind außer den Kerbschlagwerten nach Prebluftabkühlung auch die Werte nach Normalglühung angegeben. Jeder Punkt entspricht einem Mittelwert aus zwei Versuchen.

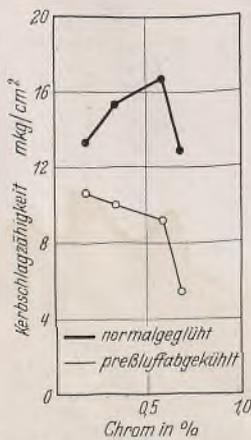


Bild 17. Einfluß von Chrom in Stählen mit rd. 0,6% Mn auf die Kerbschlagzähigkeit (DVMR-Probe) von normalgeglühten und prebluftabgekühlten Proben (1/4 Std. 1350° Prebluft 30 bis 40°/sek zwischen 800 und 400°).

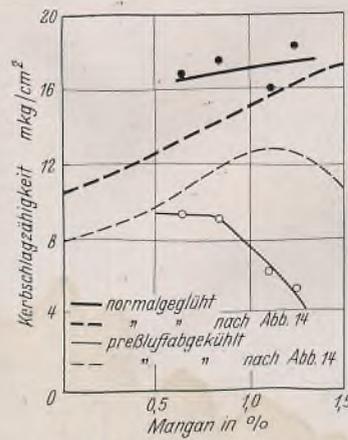


Bild 18. Einfluß von Mangan in Stählen mit 0,6% Cr auf die Kerbschlagzähigkeit (DVMR-Probe) von normalgeglühten und prebluftabgekühlten Proben (1/4 Std. 1350° Prebluft 30 bis 40°/sek zwischen 800 und 400°).

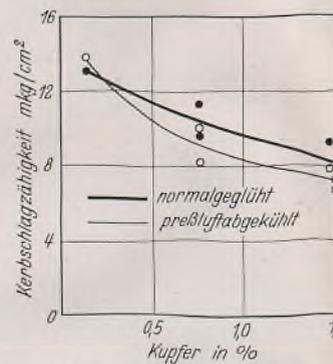


Bild 19. Einfluß des Kupfergehaltes in Stählen mit rd. 0,4% Mangan auf die Kerbschlagzähigkeit (DVMR-Probe) von normalgeglühten und prebluftabgekühlten Proben (1/4 Std. 1350° Prebluft 30 bis 40°/sek zwischen 800 und 400°).

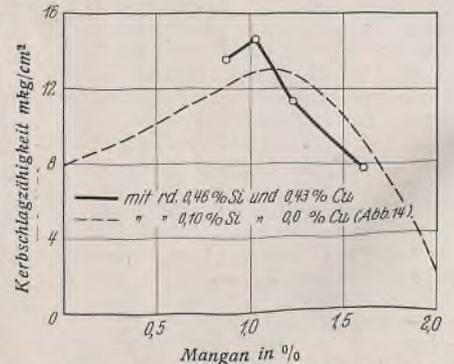


Bild 20. Einfluß von Kupfer in Mangan-Silizium-Stählen auf die Kerbschlagzähigkeit (DVMR-Probe) von prebluftabgekühlten Proben (1/4 Std. 1350° Prebluft 30 bis 40°/sek zwischen 800 und 400°).

Nach Bild 14 wird die Kerbschlagzähigkeit unmittelbar an der Schweißnaht durch steigenden Mangangehalt verbessert, aber nur bis zu einem Mangangehalt von rd. 1,2%. Von da an wirkt sich die größere Härtebarkeit von manganlegierten Stählen erniedrigend aus. Bei Luftabkühlung beginnt der Abfall erst bei rd. 1,6% Mangan, wie die Kurve für den normalgeglühten Zustand zeigt.

Durch steigenden Siliziumgehalt allein wird nach Bild 15 die Kerbschlagzähigkeit schon im normalgeglühten Zustand, wenn auch nur

schwach, herabgesetzt. Nach Prebluftabkühlung, d. h. also in der überhitzten Zone unmittelbar an der Schweißnaht, wird die Herabsetzung der Kerbschlagzähigkeit mit zunehmendem Siliziumgehalt stärker. Die ungünstige Wirkung von Silizium wird durch höhere Mangangehalte keineswegs beseitigt, wie aus Bild 16 hervorgeht; die Vorteile mittlerer Mangangehalte um rd. 1% werden sogar durch 0,8% Silizium völlig wieder aufgehoben. Anscheinend ist auch in dieser Verringerung der Kerbschlagzähigkeit eine der Ursachen für die verbreitete Abneigung gegen höhere Siliziumgehalte in den zu schweißenden Hochbaustählen begründet.

Die Stähle mit Chrom zeigen nach Bild 17 bei einem Mangangehalt von rd. 0,6% anfänglich nur ein schwaches, über 0,5% Cr jedoch ein starkes Absinken der Kerbschlagzähigkeit. Hierbei ist aber zu

berücksichtigen, daß die Kerbschlagzähigkeit im normalgeglühten Zustand durch Chrom zunächst bis mindestens 0,6% Cr stark ansteigt. Durch rd. 0,6% Cr wird nach Bild 18 der günstige Einfluß des Mangans nach Normalglühung mindestens bis 1% Mn noch verbessert. Bei Prebluftabkühlung sinkt die Kerbschlagzähigkeit bei Zusatz von 0,6% Cr bereits von 0,8% Mn an stärker ab, also schon früher als bei reinen Manganstählen. Da im Chrom-Kupfer-Stahl der Chromgehalt höchstens 0,4% beträgt, so übt er auf die Kerbschlagzähigkeit unmittelbar an der Schweißnaht keinen ungünstigen Einfluß aus, er wird im Gegenteil insofern günstig wirken, als durch den Chromgehalt eine Verbesserung des Grundwerkstoffes erfolgt. Die Richtigkeit der praktischen Begrenzung des Mangangehaltes bei diesem Chrom-Kupfer-Stahl mit 1,1% dürfte auch durch die Kurven des Bildes 18 bestätigt werden, da natürlich der Abfall der Kerbschlagzähigkeit bei 0,3 bis 0,4% Chrom bei etwas höheren Mangangehalten liegt als bei 0,6% Chrom.

In Bild 19 ist der Einfluß von Kupfer dargestellt. Es ist bemerkenswert, daß durch steigenden Kupfergehalt die Kerbschlagzähigkeit zwar in geringem Maße abfällt, aber durch die Prebluftabkühlung aus dem überhitzten Zustand keine stärkere Abnahme und praktisch auch keine

niedrigeren Werte erhalten werden als nach Normalglühung, d. h. Kupfer übt auf die Kerbschlagzähigkeit der Übergangszone unmittelbar an der Schweißnaht keine ungünstige Wirkung aus. Es handelt sich bei den untersuchten Stählen um solche mit rd. 0,4% Mangan und mit nur Spuren Silizium. Bei niedrigem Kupfergehalt liegen die Kerbschlagwerte etwas höher als bei kupferarmem Stahl mit 0,40% Mn, wie aus Bild 14 zu entnehmen wäre. Dies dürfte auf den Siliziumgehalt von rd. 0,10% in den Stählen des Bildes 13 zurückzuführen sein. In Bild 20 ist der Einfluß

des Kupfers auf die Kerbschlagzähigkeit von überhitzten Mangan-Silizium-Stählen nach Preßluftabkühlung wiedergegeben. Leider stand nicht genügend Werkstoff zur Verfügung, um auch Kerbschlagversuche an normalgeglühten Proben durchführen zu können. Ein Kupfergehalt von 0,4 bis 0,5% hat keine zusätzliche Verringerung der Kerbschlagzähigkeit zur Folge.

Es sei in diesem Zusammenhang noch erwähnt, daß Bruckner in nach seinem Verfahren abgeschreckten Proben von Stahl mit 1% Mangan einen Rückgang der Kerbschlagzähigkeit bis auf rd. 40% der Kerbschlagzähigkeit des unbeeinflussten Stahles erhielt. Dieser gegenüber dem entsprechenden Wert des Bildes 14 stärkere Abfall dürfte teils auf den höheren Kohlenstoffgehalt von 0,20 bis 0,29% und teils auf den Siliziumgehalt von 0,21 bis 0,25% bei Bruckners Proben zurückzuführen sein. 0,2% Silizium gibt nämlich nach Bruckner allein schon einen Abfall von 20%, und durch eine Änderung des Kohlenstoffgehaltes von 0,20 auf 0,30% sinkt nach Bruckner die Kerbschlagzähigkeit ebenfalls um rd. 20%, so daß — wenn die Wirkung der einzelnen Elemente in grober Annäherung als additiv betrachtet wird — bei 1% Mangan die Kerbschlagzähigkeit unmittelbar an der Schweißnaht auch um rd. 20% gegenüber der des Grundwerkstoffes herabgesetzt würde. Nach Bild 14 wurde in den

eigenen Versuchen eine Abnahme von 15,6 auf 12,8 mkg/cm², d. h. um rd. 18% gefunden, was dieser Überlegung sehr gut entspricht.

Für die Legierungsarten des St 52 ergibt sich aus den Untersuchungen die Feststellung, daß man hinsichtlich der Übergangszone auch vom Standpunkt der Kerbschlagzähigkeit in gleicher Weise, wie schon früher für die Härte festgestellt wurde, bereits zu den günstigsten Legierungsbereichen gelangt war. Chrom und Silizium bewegten sich in den Grenzen, die für die Kerbschlagzähigkeit nicht nachteilig waren. Chrom hatte aber dabei noch den Vorteil der Verbesserung des Grundwerkstoffes. Auch Mangan konnte wegen der Zulegierung von Chrom und Kupfer so niedrig gehalten werden, daß der Bereich des Kerbschlagzähigkeitsabfalls durch Mangan noch nicht erreicht war. Andererseits lassen aber die Ergebnisse mit höheren Siliziumgehalten die vielfach empfohlene Vorsicht bei Anwendung der heute vorgeschriebenen Mangan-Silizium-Stähle für dicke zu schweißende Abmessungen nicht unberechtigt erscheinen, zumal wenn zur Erreichung der Festigkeitseigenschaften auch der Mangananteil verhältnismäßig hoch eingestellt werden muß. Weiter ergibt sich aus diesen Untersuchungen, daß die Härte allein ein völlig falsches Bild von den Eigenschaften der Übergangszone gibt.

(Schluß folgt.)

Alle Rechte vorbehalten.

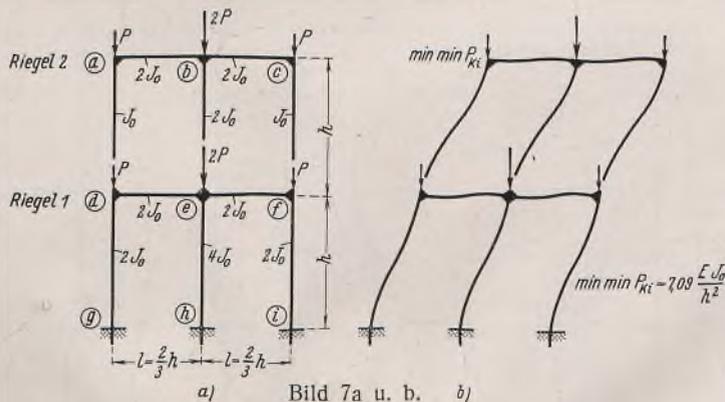
Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens.

Von Ernst Chwalla und Friedrich Jokisch in Brünn.

(Schluß aus Heft 8/9.)

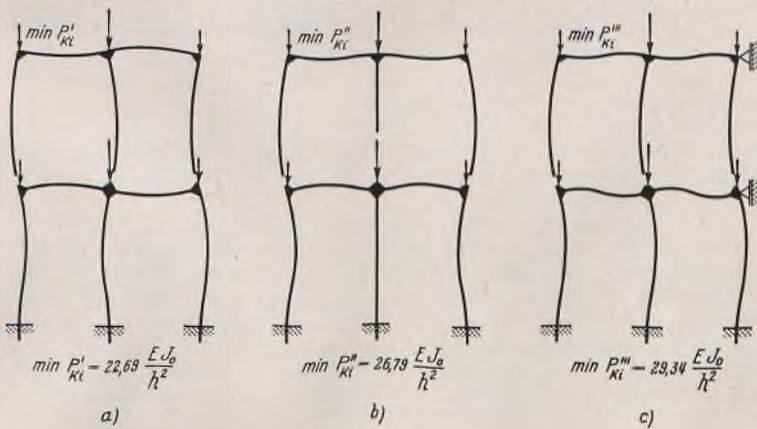
4. Erstes Zahlenbeispiel.

Wir untersuchen das ebene Knickproblem des in Bild 7 gezeichneten zweifeldrigen Zweistockrahmens, der an den Füßen starr eingespannt ist und in den Knotenpunkten durch lotrechte, auch während des Ausknickens lotrecht bleibende Kräfte belastet wird; die Abmessungen des Rahmens, die Lasten und die Trägheitsmomente der Stabquerschnitte sind aus Bild 8a zu entnehmen. Die beim Ausknicken auftretende elastische Längenänderung und Schubverzerrung der Stäbe wird, wie wir einleitend vermerkt haben, vernachlässigt.



Die beiden Riegel Nr. 1 und Nr. 2 werden, wenn der Rahmen unter seiner idealen Knickbelastung von der ersten (biegemomentenfreien) in die zweite (infinitesimal ausgebogene) Gleichgewichtsfigur übergeht, die unendlich kleinen Axialverschiebungen $\delta_1 = \Delta_1$ bzw. $\delta_2 = \Delta_1 + \Delta_2$ erfahren, die eine Verdrehung der Stiele um die Stabdrehwinkel

$$(49) \quad \psi_{dg} = \psi_{eh} = \psi_{fi} = \frac{\Delta_1}{h} \quad \psi_{ad} = \psi_{be} = \psi_{cf} = \frac{\Delta_2}{h}$$



Für die Beziehung (2) schreiben wir gemäß (25)

$$(44) \quad \omega = s \sqrt{\frac{S}{EJ}} = \left(h \sqrt{\frac{P}{EJ_0}} \right) \omega^* = x \omega^*,$$

wobei sich

$$(45) \quad \begin{cases} \text{für die Stiele } \omega^* = 1, \text{ also } \omega = x \\ \text{für die Riegel } \omega^* = 0, \text{ also } \omega = 0 \end{cases}$$

ergibt. Der allen Stäben des Rahmens gemeinsame Beiwert x stellt dann die einzige in der Knickbedingung vorkommende Unbekannte dar und dient zur Festlegung der idealen Knicklast

$$(46) \quad P_{Ki} = x^2 \cdot \frac{E J_0}{h^2}$$

Die durch (8) bestimmten, den gedrückten Stielen zugeordneten Hilfsgrößen betragen

$$(47) \quad \begin{cases} A_{ad} = A_{cf} = \frac{E J_0}{h} \cdot \alpha & B_{ad} = B_{cf} = \frac{E J_0}{h} \cdot \beta \\ A_{be} = A_{dg} = A_{fi} = \frac{2 E J_0}{h} \cdot \alpha & B_{be} = B_{dg} = B_{fi} = \frac{2 E J_0}{h} \cdot \beta \\ A_{eh} = \frac{4 E J_0}{h} \cdot \alpha & B_{eh} = \frac{4 E J_0}{h} \cdot \beta \end{cases}$$

wobei die Werte α und auch die Werte β mit Rücksicht auf (45) bei allen Stielen dieselbe Größe besitzen. Für die durch (12) festgelegten, den axial unbelasteten Riegeln zugeordneten Hilfsgrößen ergibt sich

$$(48) \quad \begin{cases} A_{ab} = A_{bc} = A_{de} = A_{ef} = \frac{12 E J_0}{h} \\ B_{ab} = B_{bc} = B_{de} = B_{ef} = \frac{6 E J_0}{h} \end{cases}$$

$$(52) \quad \begin{cases} \Delta_1 = h \cdot \frac{2(\alpha + \beta) \varphi_d + 4(\alpha + \beta) \varphi_e + 2(\alpha + \beta) \varphi_f}{[4(\alpha + \beta) - 2x^2] + [8(\alpha + \beta) - 4x^2] + [4(\alpha + \beta) - 2x^2]} = \frac{\gamma h}{\alpha + \beta} (\varphi_d + 2\varphi_e + \varphi_f) \\ \Delta_2 = h \cdot \frac{(\alpha + \beta)(\varphi_a + \varphi_d) + 2(\alpha + \beta)(\varphi_b + \varphi_e) + (\alpha + \beta)(\varphi_c + \varphi_f)}{[2(\alpha + \beta) - x^2] + [4(\alpha + \beta) - 2x^2] + [2(\alpha + \beta) - x^2]} = \frac{\gamma h}{\alpha + \beta} (\varphi_a + 2\varphi_b + \varphi_c + \varphi_d + 2\varphi_e + \varphi_f) \end{cases}$$

bewirken. Die sechs Knotengleichgewichtsbedingungen $\Sigma M = 0$, die sich für die elastisch drehbaren Knoten a bis f gemäß (27) und (28) unmittelbar anschreiben lassen, lauten daher — wenn wir noch beachten, daß an den starr eingespannten Stützenfüßen $\varphi_g = \varphi_h = \varphi_i = 0$ sein muß —

$$(50) \quad \begin{cases} \varphi_a (A_{ab} + A_{ad}) + \varphi_b B_{ab} + \varphi_d B_{ad} - (A_{ad} + B_{ad}) \psi_{ad} = 0 \\ \varphi_b (A_{ab} + A_{bc} + A_{be}) + \varphi_a B_{ab} + \varphi_c B_{bc} + \varphi_e B_{be} - (A_{be} + B_{be}) \psi_{be} = 0 \\ \varphi_c (A_{bc} + A_{cf}) + \varphi_b B_{bc} + \varphi_f B_{cf} - (A_{cf} + B_{cf}) \psi_{cf} = 0 \\ \varphi_d (A_{ad} + A_{de} + A_{dg}) + \varphi_a B_{ad} + \varphi_e B_{de} - (A_{ad} + B_{ad}) \psi_{ad} - (A_{dg} + B_{dg}) \psi_{dg} = 0 \\ \varphi_e (A_{be} + A_{de} + A_{eh}) + \varphi_b B_{be} + \varphi_d B_{de} + \varphi_f B_{eh} - (A_{be} + B_{be}) \psi_{be} - (A_{eh} + B_{eh}) \psi_{eh} = 0 \\ \varphi_f (A_{cf} + A_{ef} + A_{fi}) + \varphi_c B_{cf} + \varphi_e B_{ef} - (A_{cf} + B_{cf}) \psi_{cf} - (A_{fi} + B_{fi}) \psi_{fi} = 0 \end{cases}$$

Die beiden Riegelgleichgewichtsbedingungen, die für den Riegel Nr. 1 durch (38) und für den Riegel Nr. 2 durch (37) bestimmt sind, nehmen — wenn wir (45) und (47) beachten, durch $E J_0 / h$ kürzen und die Hilfsgröße

$$(51) \quad \gamma = \frac{(\alpha + \beta)^2}{4[2(\alpha + \beta) - x^2]}$$

einführen — die Form

an. Setzen wir (52) nach Berücksichtigung von (49) in (50) ein, so gelangen wir zu einem System von sechs in den infinitesimalen Knotendrehwinkeln $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d, \varphi_e, \varphi_f$ linearen und homogenen Gleichungen, das nur dann eine von der Nulllösung verschiedene Lösung zuläßt, wenn seine Koeffizientendeterminante D_K verschwindet. Die Gleichung $D_K=0$, die schon die gesuchte allgemeine Knickbedingung darstellt, lautet

$$(53) \quad D_K = \begin{vmatrix} 12 + \alpha - \gamma & 6 - 2\gamma & -\gamma & \beta - \gamma & -2\gamma & -\gamma \\ 3 - \gamma & 12 + \alpha - 2\gamma & 3 - \gamma & -\gamma & \beta - 2\gamma & -\gamma \\ -\gamma & 6 - 2\gamma & 12 + \alpha - \gamma & -\gamma & -2\gamma & \beta - \gamma \\ \beta - \gamma & -2\gamma & -\gamma & 12 + 3\alpha - 3\gamma & 6 - 6\gamma & -3\gamma \\ -\gamma & \beta - 2\gamma & -\gamma & 3 - 3\gamma & 12 + 3\alpha - 6\gamma & 3 - 3\gamma \\ -\gamma & -2\gamma & \beta - \gamma & -3\gamma & 6 - 6\gamma & 12 + 3\alpha - 3\gamma \end{vmatrix} = 0$$

$$= [(18 + \alpha - 4\gamma)(18 + 3\alpha - 12\gamma) - (\beta - 4\gamma)^2] \cdot [(6 + \alpha)(6 + 3\alpha) - \beta^2] \cdot [(12 + \alpha)(12 + 3\alpha) - \beta^2] = 0$$

und zerfällt in die drei voneinander unabhängigen Teilbedingungen

$$(54) \quad (18 + \alpha - 4\gamma)(18 + 3\alpha - 12\gamma) - (\beta - 4\gamma)^2 = 0,$$

$$(55) \quad (6 + \alpha)(6 + 3\alpha) - \beta^2 = 0$$

und

$$(56) \quad (12 + \alpha)(12 + 3\alpha) - \beta^2 = 0,$$

von denen jede einem bestimmten Typ von Knickfiguren zugeordnet ist. Nach der Einführung von (8), (51) und (45) gehen diese Teilknickbedingungen in transzendente Gleichungen über, die durch Probieren nach der Unbekannten κ aufzulösen sind. Die kleinste (positive und reelle) Lösung von (54) beträgt $\min \kappa = 2,663$ und führt, wenn wir sie in (46) einsetzen, zur Knicklast $\min P_{Ki} = 7,09 \cdot \frac{EJ_0}{h^2}$. Die kleinste Lösung von (55) lautet

$\min \kappa' = 4,764$ und führt zu $\min P'_{Ki} = 22,69 \cdot \frac{EJ_0}{h^2}$, und die kleinste Lösung von (56) hat die Größe $\min \kappa'' = 5,176$ und liefert $\min P''_{Ki} = 26,79 \cdot \frac{EJ_0}{h^2}$. Der erste dieser drei Lösungswerte ist der absolut kleinste; er beträgt, wie wir nochmals anschreiben wollen,

$$(57) \quad \min \min P_{Ki} = 7,09 \cdot \frac{EJ_0}{h^2}$$

und stellt die für die Bemessung des Rahmens maßgebende „kleinste ideale Knicklast“ vor. Die beiden übrigen Werte gehören zu den „höheren“ Lösungen.

Wenn wir mit Hilfe des Lösungswertes κ die Hilfsgrößen α, β und γ bestimmen und in das erwähnte, durch die Koeffizientendeterminante (53) gekennzeichnete homogene Gleichungssystem einsetzen, lassen sich die unbekanntene Knotendrehwinkel $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c, \varphi_d, \varphi_e, \varphi_f$ bis auf einen gemeinsamen Faktor K (der der Größe nach unbestimmt bleibt und voraussetzungsgemäß unendlich klein zu denken ist) eindeutig berechnen. Sind die Knotendrehwinkel bekannt, so lassen sich mit Hilfe von (52) die waagerechten Relativverschiebungen Δ_1, Δ_2 der beiden Riegel und damit auch die Stabdrehwinkel (49) bestimmen, die Integrationskonstanten (6) ermitteln und der Biegelinienverlauf (4) für alle Stäbe des Rahmens bis auf den gemeinsamen Faktor K eindeutig festlegen; jeder Lösung κ der Knickbedingung — also jedem „Eigenwert“ des mathematischen Problems — läßt sich demnach eine ganz bestimmte Knickfigur — die „Eigenlösung“ des mathematischen Problems — zuordnen. Die den angeführten Lösungswerten $\min \min P_{Ki}, \min P'_{Ki}$ und $\min P''_{Ki}$ entsprechenden Knickfiguren sind in Bild 7b, 8a und 8b dargestellt.

Setzen wir in (54) willkürlich $\gamma=0$ — verlangen wir also, daß die durch (52) festgelegten waagerechten Riegelverschiebungen Δ_1, Δ_2 verschwinden —, so geht diese Teilknickbedingung in die einfache Bedingung

$$(57) \quad (18 + \alpha)(18 + 3\alpha) - \beta^2 = 0$$

über, deren kleinste Lösung $\min \kappa''' = 5,417$ beträgt und zur Knicklast $\min P'''_{Ki} = 29,34 \cdot \frac{EJ_0}{h^2}$ führt. Die diesem Lösungsergebnis entsprechende Knickfigur ist in Bild 8c gezeichnet. Sie kann nur dann zur Ausbildung gelangen, wenn die Verschiebungen der Riegel in axialer (waagerechter) Richtung durch besondere Lager verhindert werden. Ordnen wir solche Lager tatsächlich an, dann stellt jedoch nicht $\min P'''_{Ki}$, sondern der der Knickfigur Bild 8a zugeordnete Wert $\min P'_{Ki}$, die für die Bemessung des Rahmens maßgebende kleinste ideale Knicklast dar.

5. Zweites Zahlenbeispiel.

Wir untersuchen die Stabilität des in Bild 9a dargestellten einfeldrigen Zweistockrahmens, der an den Füßen starr eingespannt ist und in den beiden oberen Knotenpunkten durch lotrechte, auch während des Ausknickens lotrecht bleibende Kräfte P belastet wird. Alle Stäbe des Rahmens sind axial undeformierbar und haben das gleiche Querschnittsträgheitsmoment J . Für die Hilfsgröße (2) schreiben wir

$$(58) \quad \omega = s \sqrt{\frac{S}{EJ}} = \left(h \sqrt{\frac{P}{EJ}} \right) \omega^* = \kappa \omega^*,$$

wobei sich für die Stiele

$$(59) \quad \omega^* = 1, \text{ also } \omega = \kappa$$

und für die Riegel

$$(60) \quad \omega^* = 0, \text{ also } \omega = 0$$

ergibt; der allen Stäben gemeinsame Beiwert κ dient zur Festlegung der idealen Knickbelastung

$$(61) \quad P_{Ki} = \kappa^2 \cdot \frac{EJ}{h^2}$$

und wird mit Hilfe der Knickbedingung ermittelt. Diese Knickbedingung, deren Herleitung ähnlich wie im ersten Zahlenbeispiel erfolgt, zerfällt in die beiden Teilknickbedingungen

$$(62) \quad \left[\alpha - (\alpha + \beta)\gamma + \frac{6h}{l} \right] \left[2\alpha - 2(\alpha + \beta)\gamma + \frac{6h}{l} \right] - [\beta - (\alpha + \beta)\gamma]^2 = 0$$

$$(63) \quad \left(\alpha + \frac{2h}{l} \right) \left(2\alpha + \frac{2h}{l} \right) - \beta^2 = 0$$

und enthält die Hilfsgröße

$$(64) \quad \gamma = \frac{1 - \cos \kappa}{\kappa \cdot \sin \kappa},$$

die — ähnlich wie die Hilfsgröße (51) im ersten Zahlenbeispiel — den waagerechten Relativverschiebungen der Riegel verhältnismäßig ist. Nach Einführung von (8) und (59) läßt sich die Teilknickbedingung (62) noch wesentlich vereinfachen und auf die Form der im 8. Abschnitt angegebenen Knickbedingung (82) bringen; sie stellt ebenso wie (63) eine transzendente Gleichung dar und entspricht einem bestimmten Typ von Knickfiguren. Die Bedingung (62) liefert den absolut kleinsten Lösungswert $\min \kappa = 2,601$ und damit die für die Bemessung des Rahmens maßgebende kleinste ideale Knicklast

$$(65) \quad \min \min P_{Ki} = 6,76 \cdot \frac{EJ}{h^2}$$

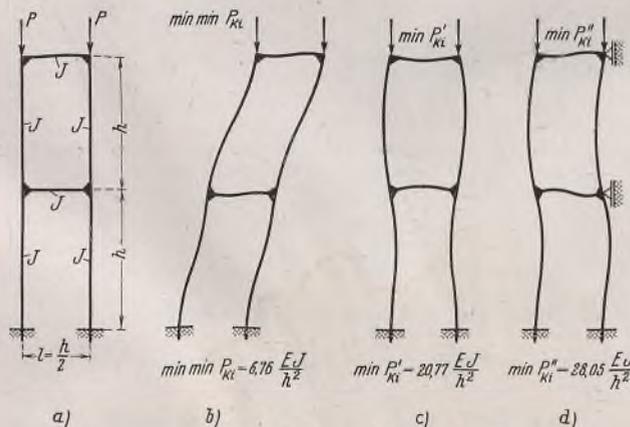


Bild 9a bis d.

Die kleinste Lösung der Teilknickbedingung (63) beträgt $\min \kappa' = 4,558$ und ergibt $\min P'_{Ki} = 20,77 \cdot \frac{EJ}{h^2}$. Die diesen beiden Lösungsergebnissen zugeordneten Knickfiguren sind in Bild 9b bzw. 9c dargestellt.

Setzen wir in (62) willkürlich $\gamma=0$, verlangen wir also, daß die waagerechten Riegelverschiebungen gleich Null sind, so geht diese Teilknickbedingung in die einfache Bedingung

$$(66) \quad \left(\alpha + \frac{6h}{l} \right) \left(2\alpha + \frac{6h}{l} \right) - \beta^2 = 0$$

über, deren kleinste Lösung $\min \kappa'' = 5,296$ lautet und zur Knicklast $\min P''_{Ki} = 28,05 \cdot \frac{EJ}{h^2}$ führt. Die dieser Lösung entsprechende Knickfigur ist in Bild 9d gezeichnet. Sie kann nur zur Ausbildung gelangen, wenn die waagerechten Stützkräfte, die hier beim Ausknicken des Rahmens auftreten, von besonderen Lagern übernommen werden. Ordnen wir derartige Lager tatsächlich an, dann stellt jedoch nicht $\min P''_{Ki}$, sondern der der Knickfigur Bild 9c zugeordnete Wert $\min P'_{Ki}$, die für die Bemessung des Rahmens maßgebende kleinste ideale Knicklast dar.

Im 8. Abschnitt werden wir zeigen, daß der strenge, den Einfluß der elastischen Stablängenänderungen berücksichtigende Wert $\min \min P_{Ki}$ den in (65) angegebenen, für Rahmen mit axial undeformbaren Stäben geltenden Lösungswert unter Umständen um mehr als 10% zu unterschreiten vermag.

6. Drittes Zahlenbeispiel.

Wir untersuchen das Knickproblem des in Bild 10a gezeichneten zweifeldrigen Zweistockrahmens, der an den Füßen starr eingespannt ist und in den drei oberen Knotenpunkten durch lotrechte, auch während des Ausknickens lotrecht bleibende Kräfte P belastet ist. Alle Stäbe sind axial undeformbar vorausgesetzt und haben das gleiche Querschnittsträgheitsmoment J . Die Hilfsgröße (2) läßt sich auch hier durch (58), (59) u. (60) festlegen, so daß die Knicklast durch die Beziehung (61) bestimmt wird. Die Knickbedingung $D_K = 0$ zerfällt in zwei voneinander unabhängige Teilbedingungen, von denen die erste den absolut kleinsten Lösungswert $\min \min \kappa = 2,861$ und damit die für die Bemessung des Rahmens maßgebende kleinste ideale Knicklast

$$(67) \quad \min \min P_{Ki} = 8,18 \cdot \frac{EJ}{h^2}$$

liefert; die kleinste Lösung der zweiten Teilknickbedingung beträgt $\min \kappa' = 5,476$ und führt zu $\min P'_{Ki} = 29,98 \cdot \frac{EJ}{h^2}$. Die diesen beiden Lösungsergebnissen zugeordneten Knickfiguren sind in Bild 10b bzw. Bild 11a dargestellt.

Setzen wir in der ersten Teilknickbedingung die den waagerechten Riegelverschiebungen verhältnismäßige Hilfsgröße gleich Null, so geht diese Teilknickbedingung in eine einfachere Bedingung über, deren kleinste Lösung $\min \kappa'' = 5,185$ lautet und $\min P''_{Ki} = 26,88 \cdot \frac{EJ}{h^2}$ liefert; die erste höhere Lösung dieser einfachen Sonderbedingung beträgt $\kappa''' = 5,886$ und führt auf $P'''_{Ki} = 34,64 \cdot \frac{EJ}{h^2}$. Die diesen beiden Lösungsergebnissen entsprechenden Knickfiguren (Bild 11b bzw. Bild 11c) können nur dann zur Ausbildung gelangen, wenn die waagerechten Stützkräfte, die sich hier beim Ausknicken des Rahmens ergeben, durch besondere Lager aufgenommen werden. Sind diese Lager tatsächlich vorhanden, dann stellt $\min P'''_{Ki}$ die kleinste für die Bemessung des Rahmens maßgebende ideale Knicklast vor.

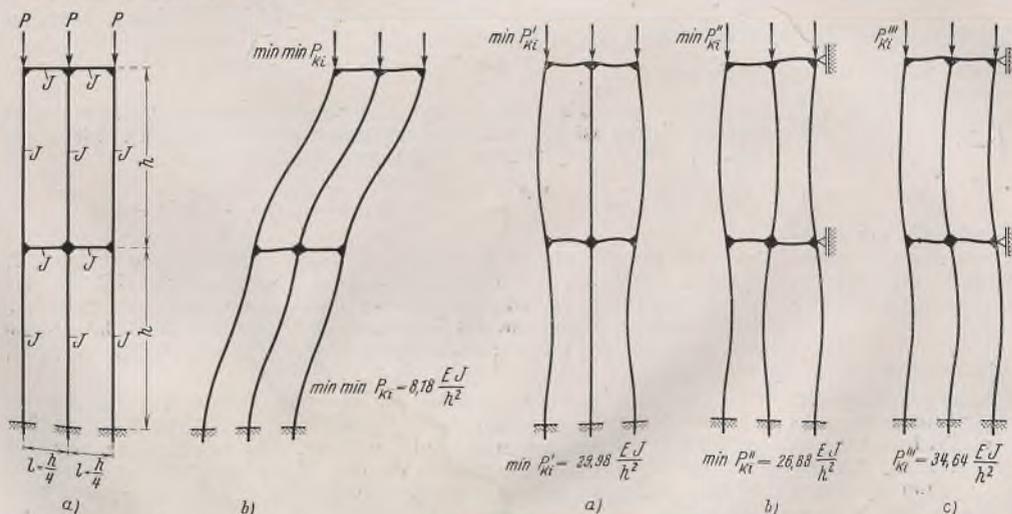


Bild 10a u. b.

Bild 11a bis c.

Da die Riegel des in Bild 10a gezeichneten Rahmens den gleichen Stabquerschnitt, jedoch nur ein Viertel der Achsenlänge der Stiele besitzen, und daher einen verhältnismäßig großen Biege- und Torsionswiderstand aufweisen, führt die Voraussetzung axial undeformbarer Stäbe zu einer schon fühlbaren Überschätzung des Knickwiderstandes. Wie wir im 8. Abschnitt zeigen werden, ist die in (67) angeführte Knicklast unter Umständen um rd. 20% größer als der strenge, den Einfluß der elastischen Stablängenänderungen berücksichtigende Lösungswert.

7. Viertes Zahlenbeispiel.

Wir suchen die kleinste ideale Knickbelastungsintensität des in Bild 12a gezeichneten zweifeldrigen Zweistockrahmens, der die gleichen Abmessungen wie der in Bild 7a gezeichnete Rahmen besitzt, jedoch nicht durch Knotenlasten, sondern durch eine lotrechte, über die Riegel gleichmäßig verteilte Querlast p belastet wird. Der Verlauf der unter p auftretenden Biegemomente und Normalkräfte ist in Bild 12b bzw. Bild 12c dargestellt; die Biegemomente sind hierbei positiv gezählt, wenn sie auf der in Bild 12a angedeuteten „Unterseite“ der Stäbe Biegezugspannungen hervorrufen.

Da der Rahmen symmetrisch gebaut und symmetrisch belastet ist, liegt auch hier ein Problem der Gleichgewichtsverzweigung vor — jedoch ein Problem, das sich mit Rücksicht auf das Vorhandensein primärer Biege-

momente von den früher untersuchten Problemen unterscheidet und daher im 1. Abschnitt als „Problem der Symmetrieknickung“ bezeichnet wurde. Die ideale Knickbelastung ist hier dadurch gekennzeichnet, daß unter derselben Laststufe zwei verschiedenartig ausgebogene Gleichgewichtsfiguren — die symmetrisch verformte und eine unmittelbar benachbarte, unsymmetrisch verformte Gleichgewichtsfigur — gleich gut möglich sind. Die symmetrische Figur ist in Bild 13a dargestellt; beim Übergang zur benachbarten unsymmetrischen Figur wird der symmetrischen Figur eine nach Bild 13b infinitesimal ausgebogene Deformationsfigur überlagert.

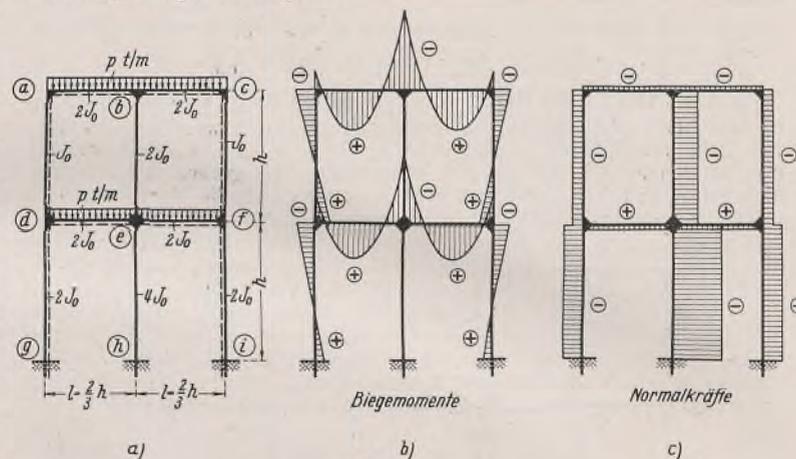


Bild 12a bis c.

Die theoretisch strenge Lösung der Probleme der Symmetrieknickung begegnet großen Schwierigkeiten. An Hand eines einfachen, dieser strengeren Lösung zugänglichen Falles und an Hand sorgfältig durchgeführter Modellversuche konnte gezeigt werden¹⁾, daß wir zu einer hinreichend scharfen Näherungslösung gelangen, wenn wir die Stabilitätsuntersuchung des Rahmens nicht für die gegebene Belastung, sondern für eine Ersatzbelastung durchführen, die ausschließlich aus mittig angreifenden Knotenlasten besteht und dadurch gekennzeichnet ist, daß sie die gleichen Normalkräfte wie die gegebene Belastung hervorruft; das Problem der „Symmetrieknickung“ wird auf diese Weise in ein Knickproblem der früher behandelten Art übergeführt.

Wir wollen dieses Näherungsverfahren hier anwenden und haben daher die in Bild 12c eingetragenen, unter der gegebenen Belastung auftretenden Normalkräfte mit ihren Absolutwerten S in die Beziehungen (2) einzuführen und die Hilfsgröße ω für die einzelnen Stäbe festzulegen. Die Beziehung (2) wird zweckmäßig in der Form

$$(68) \quad \omega = s \sqrt{\frac{S}{EJ}} = \left(h \sqrt{\frac{p h}{EJ_0}} \right) \omega^* = \kappa \omega^*$$

geschrieben, wobei

$$(69) \quad \begin{cases} \omega_{ab}^* = \omega_{bc}^* = 0,068\ 398 & \omega_{de}^* = \omega_{ef}^* = 0,032\ 243 \\ \omega_{ad}^* = \omega_{cf}^* = 0,524\ 82 & \omega_{dg}^* = \omega_{fi}^* = 0,534\ 76 \\ \omega_{be}^* = 0,625\ 48 & \omega_{eh}^* = 0,617\ 01 \end{cases}$$

beträgt. Der allen Stäben gemeinsame Beiwert κ stellt dann die einzige in der Knickbedingung auftretende Unbekannte vor und dient zur Bestimmung der idealen Knickbelastungsintensität

$$(70) \quad P_{Ki} = \kappa^2 \cdot \frac{EJ_0}{h^3}$$

Wir beschränken uns auf die Berechnung der für die Bemessung des Rahmens maßgebenden absolut kleinsten Knickbelastungsintensität $\min \min p_{Ki}$ und weisen den Knoten a, c und d, f — wie aus der Knickfigur Bild 13b folgt — die Knotendrehwinkel

$$(71) \quad \varphi_a = \varphi_c \quad \varphi_d = \varphi_f$$

zu. Die sechs Knotengleichgewichtsbedingungen und die beiden Riegelgleichgewichtsbedingungen, die ähnlich wie im ersten Zahlenbeispiel zu ermitteln sind, führen zur Knickbedingung

$$(72) \quad D_K = \begin{vmatrix} 3\alpha_{ab} + \alpha_{ad} - \eta_1 & 3\beta_{ab} - \eta_2 & \beta_{ad} - \eta_1 & -\eta_2 \\ 3\beta_{ab} - \eta_2 & 3\alpha_{ab} + \alpha_{be} - \eta_3 & -\eta_2 & \beta_{be} - \eta_3 \\ \beta_{ad} - \eta_1 & -\eta_2 & 3\alpha_{de} + \alpha_{ad} - 2\alpha_{dg} - \eta_1 - 2\eta_4 & 3\beta_{de} - \eta_2 - 2\eta_5 \\ -\eta_2 & \beta_{be} - \eta_3 & 3\beta_{de} - \eta_2 - 2\eta_5 & 3\alpha_{de} + \alpha_{be} + 2\alpha_{eh} - \eta_3 - 2\eta_6 \end{vmatrix} = 0,$$

in der die Hilfsgrößen η durch die Beziehungen

$$(73) \begin{cases} \eta_1 = \frac{(\alpha_{ad} + \beta_{ad})^2}{N_1} & \eta_2 = \frac{(\alpha_{ad} + \beta_{ad})(\alpha_{be} + \beta_{be})}{N_1} \\ \eta_3 = \frac{(\alpha_{be} + \beta_{be})^2}{N_1} & \eta_4 = \frac{(\alpha_{dg} + \beta_{dg})^2}{N_2} \\ \eta_5 = \frac{(\alpha_{dg} + \beta_{dg})(\alpha_{eh} + \beta_{eh})}{N_2} & \eta_6 = \frac{(\alpha_{eh} + \beta_{eh})^2}{N_2} \end{cases}$$

und

$$(74) \begin{cases} N_1 = 2(\alpha_{ad} + \beta_{ad}) - \omega_{ad}^2 + 2(\alpha_{be} + \beta_{be}) - \omega_{be}^2 \\ N_2 = 2(\alpha_{dg} + \beta_{dg}) - \omega_{dg}^2 + 2(\alpha_{eh} + \beta_{eh}) - \omega_{eh}^2 \end{cases}$$

festgelegt werden. Die in (72) vorkommenden Größen α_{de} und β_{de} sind, da die Stäbe (de) und (ef) auf Zug beansprucht werden (Bild 12c), mit Hilfe von (17) als hyperbolische Funktionen von κ darzustellen; alle übrigen in (72), (73) und (74) auftretenden Hilfsgrößen α, β beziehen sich auf gedrückte Stäbe und werden daher durch die Beziehungen (8) als trigonometrische Funktionen von κ bestimmt.

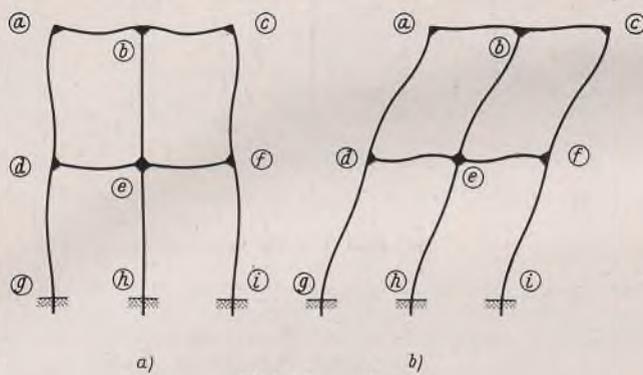


Bild 13 a u. b.

Die durch Probieren gefundene, kleinste (positive und reelle) Lösung der Knickbedingung (72) — die kleinste „Nullstelle“ der Determinante D_K — beträgt $\min \min \kappa = 4,612$ und führt zur kleinsten idealen Knickbelastungsintensität

$$(75) \quad \min \min p_{Ki} = 21,27 \cdot \frac{E J_0}{h^3}$$

Die zugeordnete Knickfigur können wir uns — wie wir schon erwähnt haben — dadurch entstanden denken, daß wir der unter der gegebenen Belastung ausgebildeten, endlich stark ausgebogenen Gleichgewichtsfigur Bild 13a eine infinitesimale Deformationsfigur nach Bild 13b überlagern.

8. Der Einfluß der elastischen Stablängenänderungen.

Wir haben unserem Verfahren zur Untersuchung der ebenen Stabilität von Stockwerkrahmen die Voraussetzung axial undehnbarer Stäbe zugrunde gelegt, haben also den Einfluß, den die elastischen Längenänderungen der Stäbe auf die Größe der idealen Knickbelastung nehmen, vernachlässigt. Diese Vernachlässigung ist — wie wir schon einleitend erwähnt und nunmehr zahlenmäßig nachweisen wollen — nur in jenen Fällen praktisch zulässig, in denen die Querschnittsabmessungen der Stäbe sehr klein im Vergleich zur Stablänge sind. Bei Stockwerkrahmen mit kurzen, verhältnismäßig biegesteifen Riegeln muß daher der Einfluß der elastischen Stablängenänderungen — vor allem der Einfluß der Längenänderungen der Stiele — in Rücksicht gezogen werden.

Für den nach Bild 9a belasteten einfeldrigen Stockwerkrahmen³⁾ und den nach Bild 10a belasteten zweifeldrigen Stockwerkrahmen⁴⁾ ist ein strenges, den Einfluß der elastischen Stablängenänderungen berücksichtigendes Lösungsverfahren schon entwickelt worden; es bedient sich allerdings nicht des Knotendrehwinkelverfahrens, gehört also nicht der Deformationsmethode, sondern der Kräfte-methode an. Wenden wir dieses Lösungsverfahren auf den in Bild 14a gezeichneten einfeldrigen Zweistockrahmen an, dessen Stäbe einen unveränderlichen Querschnitt mit dem Trägheitsmoment J und der Fläche F haben, so gelangen wir — wenn wir unsere Untersuchung nach wie vor auf Rahmen beschränken, die

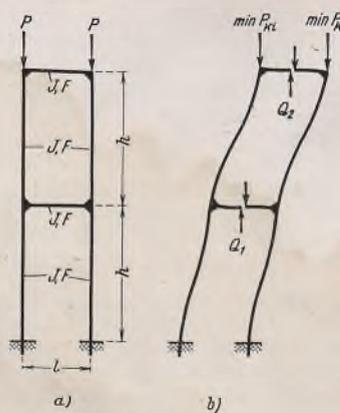


Bild 14 a u. b.

³⁾ E. Chwalla, Sitzungsberichte Akad. d. Wiss. Wien, IIa, 136, 1927, S. 487.

⁴⁾ F. Jokisch, Zur ebenen Stabilitätstheorie des zweifeldrigen Stockwerkrahmens und des dreiteiligen Druckstabes. Diss. T. H. Brünn, 1940.

innerhalb des Hookeschen Formänderungsbereiches ausknicken — zu den beiden Gleichungen

$$(76) \begin{cases} Q_1 \left[2 \cos \kappa + \frac{6h}{l} \cdot \frac{\sin \kappa}{\kappa} - \varepsilon (1 - 2 \cos \kappa) \right] - Q_2 [1 + 2\varepsilon (1 - \cos \kappa)] = 0 \\ Q_1 [1 + \varepsilon (1 - \cos \kappa)] - Q_2 \left[\cos \kappa + \frac{6h}{l} \cdot \frac{\sin \kappa}{\kappa} - \varepsilon (1 - 2 \cos \kappa) \right] = 0, \end{cases}$$

in denen Q_1 und Q_2 die im infinitesimal ausgeknickten Gleichgewichtszustand in den beiden Rahmenriegeln wirksamen Querkräfte vorstellen (Bild 14b); die Hilfsgröße κ wird durch die Beziehung

$$(77) \quad \kappa = h \sqrt{\frac{P}{EJ}}$$

festgelegt, und für die Hilfsgröße ε gilt

$$(78) \quad \varepsilon = \frac{24}{\lambda_1^2} \left(\frac{h}{l} \right)^3,$$

wobei

$$(79) \quad \lambda_1 = \frac{h}{i} \quad i = \sqrt{\frac{J}{F}}$$

bedeutet. Die Gln. (76) sind in den Unbekannten Q_1, Q_2 linear und homogen und besitzen daher nur dann eine von der trivialen Nulllösung verschiedene Lösung, wenn ihre Koeffizientendeterminante D_K verschwindet. Die gesuchte, für den in Bild 14a dargestellten und nach Bild 14b ausknickenden Zweistockrahmen geltende Knickbedingung lautet daher

$$(80) \left[2 \cos \kappa + \frac{6h}{l} \cdot \frac{\sin \kappa}{\kappa} - \varepsilon (1 - 2 \cos \kappa) \right] \left[\cos \kappa + \frac{6h}{l} \cdot \frac{\sin \kappa}{\kappa} - \varepsilon (1 - 2 \cos \kappa) \right] - [1 + \varepsilon (1 - \cos \kappa)] [1 + 2\varepsilon (1 - \cos \kappa)] = 0$$

und ist für einen Rahmen mit den Kennwerten h/l und λ_1 nach der Hilfsgröße κ aufzulösen. Der kleinste der durch Probieren gefundenen positiven und reellen Lösungswerte wird mit $\min \kappa^*$ bezeichnet und liefert die für die Bemessung des Rahmens maßgebende kleinste ideale Knicklast

$$(81) \quad \min P_{Ki} = \min \kappa^2 \cdot \frac{EJ}{h^2}$$

Wenn wir den Einfluß, den die elastischen Stablängenänderungen auf die Knicklast nehmen, vernachlässigen wollen, müssen wir $\varepsilon = 0$ setzen. Die Knickbedingung (80) nimmt dann die Form

$$(82) \left[2 \cdot \cos \kappa + \frac{6h}{l} \cdot \frac{\sin \kappa}{\kappa} \right] \left[\cos \kappa + \frac{6h}{l} \cdot \frac{\sin \kappa}{\kappa} \right] - 1 = 0$$

an und stimmt, wie nach einigen einfachen Umformungen festgestellt werden kann, mit der Teilknickbedingung (62) inhaltlich überein. Da die Hilfsgröße λ_1 in (82) nicht auftritt, sind die aus dieser vereinfachten Knickbedingung gewonnenen Lösungswerte — die wir zum Unterschied von den strengen Lösungswerten mit $\min \kappa^*$ bezeichnen wollen — von λ_1 unabhängig.

Um den Einfluß aufzuzeigen, den die elastischen Stablängenänderungen auf die Knickbelastung nehmen, sind in Tafel 3 die aus (82) erhaltenen Näherungswerte $\min \kappa^*$ den aus (80) gewonnenen strengen Werten $\min \kappa$ gegenübergestellt worden. Wir sehen, daß die strengen Werte — wie zu erwarten war — grundsätzlich kleiner als die Näherungswerte sind, und daß die Unterschiede um so größer werden, je kleiner die Rieglänge l im Vergleich zur Stiellänge h ist. Im Fall $l = h$ ist der durch die Vernachlässigung der elastischen Stablängenänderungen bedingte Fehler praktisch noch gänzlich unbedeutend. Hingegen beträgt er im Fall $l = h/2$, falls λ_1 bis auf $\lambda_1 = 30$ heruntersinkt, schon 7,4%, so daß für die Knicklast (die sich mit κ gemäß (61) quadratisch ändert) ein um 15% zu großer Wert erhalten wird; das im zweiten Zahlenbeispiel gefundene Lösungsergebnis (65) ist daher praktisch nur so lange brauchbar, als die einleitend angeführte Voraussetzung verhältnismäßig kleiner Querschnittsabmessungen (d. h. verhältnismäßig schlanker Stäbe) hinreichend erfüllt ist. Im extrem ungünstigen Fall $l = h/8$, $\lambda_1 = 30$ würde, wie Tafel 3 lehrt, $\min \kappa^*$ schon um 96% größer als der strenge Wert sein und daher zu einer Knicklast führen, die um 284% zu groß ist.

Tafel 3.

		$l =$				
		h	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{8}$	
min κ für	$\lambda_1 = 30$	2,240	2,423	2,159	1,520	
	$\lambda_1 = 40$	2,254	2,497	2,389	1,802	
	$\lambda_1 = 50$	2,260	2,533	2,525	2,035	
	$\lambda_1 = 60$	2,264	2,553	2,611	2,219	
	$\lambda_1 = 70$	2,266	2,566	2,666	2,363	
min κ^* für	$\lambda_1 = 30$	2,272	2,601	2,837	2,980	
	$\lambda_1 = 40$	2,272	2,601	2,837	2,980	
	$\lambda_1 = 50$	2,272	2,601	2,837	2,980	
	$\lambda_1 = 60$	2,272	2,601	2,837	2,980	
	$\lambda_1 = 70$	2,272	2,601	2,837	2,980	

Bei der Beurteilung dieser Ergebnisse muß beachtet werden, daß wir den Riegeln — ganz gleichgültig, wie groß ihre Längen sind — dieselben Werte J und F wie den Stielen zugewiesen und die Untersuchung auf die Ermittlung der für die Bemessung des Rahmens maßgebenden kleinsten Knicklast beschränkt haben.

Zu einer anderen Art der Darstellung unserer Lösungsergebnisse gelangen wir, wenn wir die in den Rahmenstielen auftretende kleinste ideale Knickspannung

$$(83) \quad \min \sigma_{Ki} = \frac{\min P_{Ki}}{F} = \min \kappa^2 \cdot \frac{EJ}{Fh^2} = \min \kappa^2 \cdot \frac{E}{\lambda_1^2}$$

der Eulerschen Knickspannung

$$(84) \quad \min \sigma_{Ki} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{id}^2}$$

eines geraden, mittig gedrückten Vollstabes der Schlankheit λ_{id} gleichsetzen und auf diese Weise

$$(85) \quad \lambda_{id} = \frac{\pi}{\min \kappa} \cdot \lambda_1$$

gewinnen. Der Wert λ_{id} wird „ideeller Schlankheitsgrad“ des Rahmenstiels genannt und dient dazu, den Knickwiderstand des Stockwerkrahmens auf den Knickwiderstand eines aus dem gleichen Werkstoff bestehenden, mittig gedrückten Vollstabes zurückzuführen; da sich die amtlichen Knickvorschriften auf mittig gedrückte Vollstäbe beziehen, kommt dieser Darstellung praktische Bedeutung zu. In Tafel 4 sind die mit Hilfe der strengen Lösungswerte $\min \kappa$ gewonnenen ideellen Schlankheitsgrade λ_{id} den unter der Voraussetzung axial undehnbarer Stäbe erhaltenen, aus den Näherungswerten $\min \kappa^*$ berechneten ideellen Schlankheiten λ_{id}^* gegenübergestellt. Auch diese Tafel läßt deutlich erkennen, daß eine Vernachlässigung des Einflusses der elastischen Stablängenänderungen bei Stockwerkrahmen mit verhältnismäßig kurzen, gedrungen gebauten Riegeln zu einer fühlbaren Unterschätzung des ideellen Schlankheitsgrades und damit zu einer erheblichen Überschätzung des Knickwiderstandes führt.

Tafel 4.

$l =$		h	$\frac{h}{2}$	$\frac{h}{4}$	$\frac{h}{8}$
λ_{id} für	$\lambda_1 = 30$	42,06	38,89	43,64	62,02
	$\lambda_1 = 40$	55,75	50,33	52,60	69,75
	$\lambda_1 = 50$	69,49	62,01	62,21	77,20
	$\lambda_1 = 60$	83,26	73,82	72,20	84,94
	$\lambda_1 = 70$	97,05	85,71	82,48	93,08
λ_{id}^* für	$\lambda_1 = 30$	41,49	36,23	33,22	31,63
	$\lambda_1 = 40$	55,31	48,30	44,30	42,17
	$\lambda_1 = 50$	69,14	60,38	55,37	52,71
	$\lambda_1 = 60$	82,97	72,46	66,44	63,26
	$\lambda_1 = 70$	96,80	84,53	77,52	73,80

Diese Feststellungen legen die Befürchtung nahe, daß die Voraussetzung axial undehnbarer Stäbe bei dem in Bild 10a gezeichneten zweifeldrigen Zweistockrahmen — dessen Riegel denselben Querschnitt wie die Stiele haben, wiewohl ihre Länge bloß ein Viertel der Stielhöhe beträgt — einen schon unzulässig großen Fehler zur Folge hat. Diese Befürchtung ist nicht ungerechtfertigt. Jokisch⁴⁾ hat die kleinste ideale Knicklast des in Bild 10a dargestellten Rahmens unter Berücksichtigung des Einflusses der elastischen Stablängenänderungen für den Fall gleicher Stabquerschnitte und $\lambda_1 = h/i = 40$ berechnet und den Wert

$$(86) \quad \min P_{Ki} = 6,80 \cdot \frac{EJ}{h^2}$$

erhalten. Der im dritten Zahlenbeispiel angeführte Lösungswert $\min P_{Ki} = 8,18 \cdot \frac{EJ}{h^2}$ ist daher bei einem derartigen Rahmen um rd. 20% zu groß.

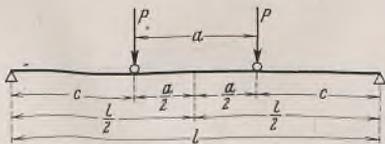
Alle Rechte vorbehalten.

Berechnung der Durchbiegung von Krangleisträgern.

Von Ing. Heinrich Heyer VDI.

Für die Berechnung der Durchbiegung von Krangleisträgern auf zwei Stützen mit gleichbleibendem Trägheitsmoment steht bisher nur die Formel

$$\max f = \frac{P(l-a)[3l^2 - (l-a)^2]}{48EJ_x}$$



zur Verfügung (s. Hütte 1931, 26. Aufl., Bd. I, S. 621).

Diese Formel hat jedoch für den täglichen und schnellen Gebrauch eine Reihe von Nachteilen.

1. Vielfach wird nicht beachtet oder nicht gewußt, daß die Formel nur für $a \leq 0,65l$ angewendet werden darf. Für $a > 0,65l$ erhält man zu kleine Werte, da von hier ab f_{\max} entsteht wenn ein P in Trägermitte steht und damit

$$\max f = \frac{Pl^3}{48EJ_x}$$

wird.

2. Obige Formel ist außerdem reichlich umständlich, wodurch sich in dem heutigen Arbeitstempo sehr schnell Fehler einschleichen.

3. Bei der Wahl eines Profils interessiert ja zunächst nicht, welche tatsächliche Durchbiegung das schon vorher nach dem Widerstandsmoment gewählte Profil hat, sondern welches Trägheitsmoment überhaupt erforderlich ist, um die gewünschte Durchbiegung von beispielsweise

$f = \frac{1}{1000} \cdot l$ zu erhalten. Gerade dieser Punkt ist vielleicht der wichtigste, denn hierdurch wird ermöglicht, daß auf den ersten Anstoß sofort das richtige Profil gewählt wird.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie man durch Verwandlung der vorgenannten Formeln gebrauchsfähigere Formeln erhält.

I. Die Berechnung des erforderlichen Trägheitsmoments.

A. Für den Bereich $a \leq 0,65l$.

$$\max f = \frac{P(l-a)[3l^2 - (l-a)^2]}{48EJ_x}$$

$$J_{\text{verf}} = \frac{P(l-a)[3l^2 - (l-a)^2]}{48Ef};$$

setzt man für $f = \frac{1}{1000} \cdot l$, so erhält man

$$J_{\text{verf}} = \frac{P(l-a)[3l^2 - (l-a)^2]}{48E \cdot \frac{l}{1000}}$$

$$J_{\text{verf}} = \frac{1000P}{48El} (2l^3 - 3a^2l + a^3)$$

$$J_{\text{verf}} = \frac{1000P}{48E} \left(2l^2 - 3a^2 + \frac{a^3}{l} \right)$$

Um von nun an P in t und l in m einsetzen zu können, muß der Wert mit 10^7 multipliziert werden.

E wird mit 2100000 kg/cm^2 eingesetzt.

$$J_{\text{verf}} = \frac{1000P \cdot 10^7}{48 \cdot 0,21 \cdot 10^7} \left(2l^2 - 3a^2 + \frac{a^3}{l} \right)$$

$$J_{\text{verf}} = \frac{1000P}{10,08} \left(2l^2 - 3a^2 + \frac{a^3}{l} \right)$$

Setzt man nun noch für $a = 0,1l$, so erhält man:

$$J_{\text{verf}} = \frac{1000P}{10,08} (2l^2 - 3 \cdot 0,1^2 l^2 + 0,1^3 l)$$

$$J_{\text{verf}} = \frac{1000Pl^2}{10,08} (2 - 3 \cdot 0,1^2 + 0,1^3)$$

$$J_{\text{verf}} = 1000Pl^2 \cdot 0,09920634 \cdot 1,971$$

$$J_{\text{verf}} = 195,535 Pl^2 \quad \text{bei } a = 0,1l \quad f = \frac{l}{1000}$$

Bei der Einsetzung der verschiedenen Werte $f = \frac{l}{300}; \frac{l}{400}$ usw. und $a = 0,1l; 0,12l; 0,14l$ usw. erhält man die Werte, die in Tafel 1 zusammengestellt sind.

B. Für den Bereich $a > 0,65l$.

$$f_{\max} = \frac{Pl^3}{48EJ_x}$$

$$J_{\text{verf}} = \frac{Pl^3}{48Ef}$$

für $f = \frac{l}{1000}$ eingesetzt

$$J_{x\text{erf}} = \frac{1000 P l^2}{48 E}$$

mit 10^7 multipliziert und $E = 0,21 \cdot 10^7$

$$J_{x\text{erf}} = \frac{1000 P l^2}{48 \cdot 0,21}$$

$$J_{x\text{erf}} = 99,21 P l^2 \quad \text{bei } f = \frac{l}{1000}$$

Tafel 1.

Durchbiegung von Krangleisträgern.

$$J_{x\text{erf}} = n P l^2 \quad J_x = \text{cm}^4 \quad P \text{ in t} \\ l \text{ in m einsetzen.}$$

$a =$	$f = \frac{l}{300}$	$f = \frac{l}{400}$	$f = \frac{l}{500}$	$f = \frac{l}{600}$	$f = \frac{l}{700}$	$f = \frac{l}{800}$	$f = \frac{l}{900}$	$f = \frac{l}{1000}$
0,10 l	58,7	78,2	97,8	117	137	156	176	196
0,12 l	58,3	77,7	97,1	116	136	155	175	194
0,14 l	57,8	77,1	96,4	116	135	154	174	193
0,16 l	57,3	76,5	95,6	115	134	153	172	191
0,18 l	56,8	75,7	94,7	114	133	152	170	189
0,20 l	56,2	74,9	93,6	112	131	150	169	187
0,22 l	55,5	74,0	92,5	111	130	148	167	185
0,24 l	54,8	73,0	91,3	110	128	146	164	183
0,26 l	54,0	72,0	90,0	108	126	144	162	180
0,28 l	53,2	70,9	88,6	106	124	142	160	177
0,30 l	52,3	69,7	87,1	105	122	139	157	174
0,32 l	51,3	68,5	85,6	103	120	137	154	171
0,34 l	50,4	67,2	83,9	101	118	134	151	168
0,36 l	49,3	65,8	82,2	98,7	115	132	148	164
0,38 l	48,3	64,3	80,4	96,5	113	129	145	161
0,40 l	47,1	62,8	78,6	94,3	110	126	141	157
0,42 l	46,0	61,3	76,6	91,9	107	123	138	153
0,44 l	44,8	59,7	74,6	89,5	104	119	134	149
0,46 l	43,5	58,0	72,5	87,0	102	116	131	145
0,48 l	42,2	56,3	70,4	84,5	98,6	113	127	141
0,50 l	40,9	54,6	68,2	81,8	95,5	109	123	136
0,52 l	39,6	52,7	65,9	79,1	92,3	106	119	132
0,54 l	38,2	50,9	63,6	76,3	89,1	102	115	127
0,56 l	36,7	49,0	61,2	73,5	85,7	98,0	110	123
0,58 l	35,3	47,1	58,8	70,6	82,3	94,1	106	118
0,60 l	33,8	45,1	56,3	67,6	78,9	90,2	101	113
0,62 l	32,3	43,1	53,8	64,6	75,3	86,1	96,9	108
0,64 l	30,1	40,2	50,3	60,3	70,4	80,4	90,5	101
0,65 l	30,0	40,0	49,9	59,9	69,9	79,9	89,9	99,9
0,66 bis 1,0 l	29,8	39,7	49,6	59,5	69,4	79,4	89,3	99,2

II. Die Berechnung der max. Durchbiegung.

A. Für den Bereich $a \leq 0,65 l$.

$$f = \frac{P(l-a)[3l^2 - (l-a)^2]}{48 E J_x}$$

$$f = \frac{P}{48 E J_x} (2l^3 - 3a^2 l + a^3) \quad \text{für } a = 0,1 l$$

$$f = \frac{P}{48 E J_x} (2l^3 - 3 \cdot 0,1^2 l^3 + 0,1^3 l^3)$$

$$f = \frac{P l^3}{J_x} \cdot \frac{2 - 3 \cdot 0,1^2 + 0,1^3}{48 \cdot 0,21 \cdot 10^7}$$

Um von nun an P in t und l in m einsetzen zu können, muß der Wert mit 10^9 multipliziert werden.

$$f = \frac{P l^3}{J_x} \cdot \frac{(2 - 3 \cdot 0,1^2 + 0,1^3) 10^9}{0,48 \cdot 10^2 \cdot 0,21 \cdot 10^7}$$

$$f = \frac{P l^3}{J_x} \cdot \frac{1}{0,1008} (2 - 3 \cdot 0,1^2 + 0,1^3)$$

$$\frac{1}{0,1008} = 0,920 634$$

$$f = \frac{P l^3}{J_x} \cdot 9,920 634 \cdot 1,971$$

$$f = 19,554 \cdot \frac{P l^3}{J_x} \quad \text{bei } a = 0,1 l$$

B. Für den Bereich $a > 0,65 l$.

$$f = \frac{P l^3}{48 E J_x} = \frac{P l^3}{J_x} \cdot \frac{1 \cdot 10^9}{0,48 \cdot 0,21 \cdot 10^9}$$

$$f = \sim 10 \cdot \frac{P l^3}{J_x}$$

Durch Einsetzung der verschiedenen Werte $a = 0,1 l; 0,12 l$ usw. erhält man Tafel 2.

Tafel 2.

Durchbiegung von Krangleisträgern.

$$f = \eta \cdot \frac{P l^3}{J_x}, \quad P \text{ in t, } l \text{ in m, } J_x \text{ in cm}^4, f \text{ in cm einsetzen.}$$

a	η	a	η	a	η
0,10 l	19,6	0,30 l	17,4	0,50 l	13,6
0,12 l	19,4	0,32 l	17,1	0,52 l	13,2
0,14 l	19,3	0,34 l	16,8	0,54 l	12,7
0,16 l	19,1	0,36 l	16,4	0,56 l	12,3
0,18 l	18,9	0,38 l	16,1	0,58 l	11,8
0,20 l	18,7	0,40 l	15,7	0,60 l	11,3
0,22 l	18,5	0,42 l	15,3	0,62 l	10,8
0,24 l	18,3	0,44 l	14,9	0,64 l	10,1
0,26 l	18,0	0,46 l	14,5	0,65 l	10,0
0,28 l	17,7	0,48 l	14,1	0,66 bis 1,0 l	$\sim 10,0$

Beispiel.

Stützweite des Krangleisträgers $l = 8,0 \text{ m}$
 Radstand des Krans $a = 2,4 \text{ m}$
 Max. Raddruck des Krans $P = 6,0 \text{ t}$.

Gesucht ist das Profil des Trägers.

$$\sigma_{\text{zul}} = 1,4 \text{ tcm}^{-2} \quad f_{\text{zul}} = \frac{1}{500} \cdot l$$

$$M = \frac{P}{8 l} (2l - a)^2 = \frac{6}{8 \cdot 8,0} (2 \cdot 8,0 - 2,4)^2 = \sim 17,3 \text{ tm}$$

$$W_{x\text{erf}} = \frac{1730}{1,4} = 1235 \text{ cm}^3$$

$$J_{x\text{erf}} = n P l^2, \text{ worin } \frac{a}{l} = \frac{2,4}{8,0} = 0,3 \quad n = 87,1 \text{ (Tafel 1)}$$

$$J_{x\text{erf}} = 87,1 \cdot 6,0 \cdot 8,0^2 = 33 440 \text{ cm}^4;$$

gewählt wird daher I 42 $\frac{1}{2}$ mit $W_x = 1740 \text{ cm}^3, J_x = 36 970 \text{ cm}^4$

$$\sigma = \frac{1730}{1740} = \sim 1,0 \text{ tcm}^{-2}.$$

Möchte man nun trotzdem noch die genaue Durchbiegung des Trägers berechnen, so benutzt man die Formel:

$$f = \eta \cdot \frac{P l^3}{J_x} = \text{(Tafel 2)}$$

$$f = 17,4 \cdot \frac{6,0 \cdot 8,0^3}{36 970} = 1,45 \text{ cm,}$$

das ist $\frac{1}{550} \cdot l$.

Bemerkung: Bei der Ermittlung der Spannung wurde der Einfachheit halber nur die Spannung aus dem max. 1 Raddruck ermittelt und bewußt alle übrigen Zusatzkräfte vernachlässigt.

INHALT: Die Werkstoff-Fragen beim Schweißen dicker Abmessungen von St 52. — Über das ebene Knickproblem des Stockwerkrahmens. (Schluß) — Berechnung der Durchbiegung von Krangleisträgern.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöpperl, Darmstadt.
 Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
 Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule

Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 6. Juni 1941

Heft 12/13

Alle Rechte vorbehalten.

Große Werkhalle für den Zusammenbau von Eisenbahngüterwagen.

Von Professor Rein, Breslau.

Schon vor dem Ausbruch des englischen Krieges sah sich die deutsche Reichsbahn infolge der starken Ausnutzung ihres Wagenparkes und zur Bewältigung neuer zusätzlicher Aufgaben genötigt, den Bestand an Eisenbahnwagen erheblich zu vergrößern. Da auch der deutsche Bergbau

infolge der Aufgaben, welche ihm durch den Vierjahresplan entstanden sind, einen wesentlich gesteigerten Bedarf an Schienenfahrzeugen aller Art hat, muß die deutsche Wagenbauindustrie den vermehrten Anforderungen durch Erhöhung ihrer Leistungsfähigkeit Rechnung tragen.

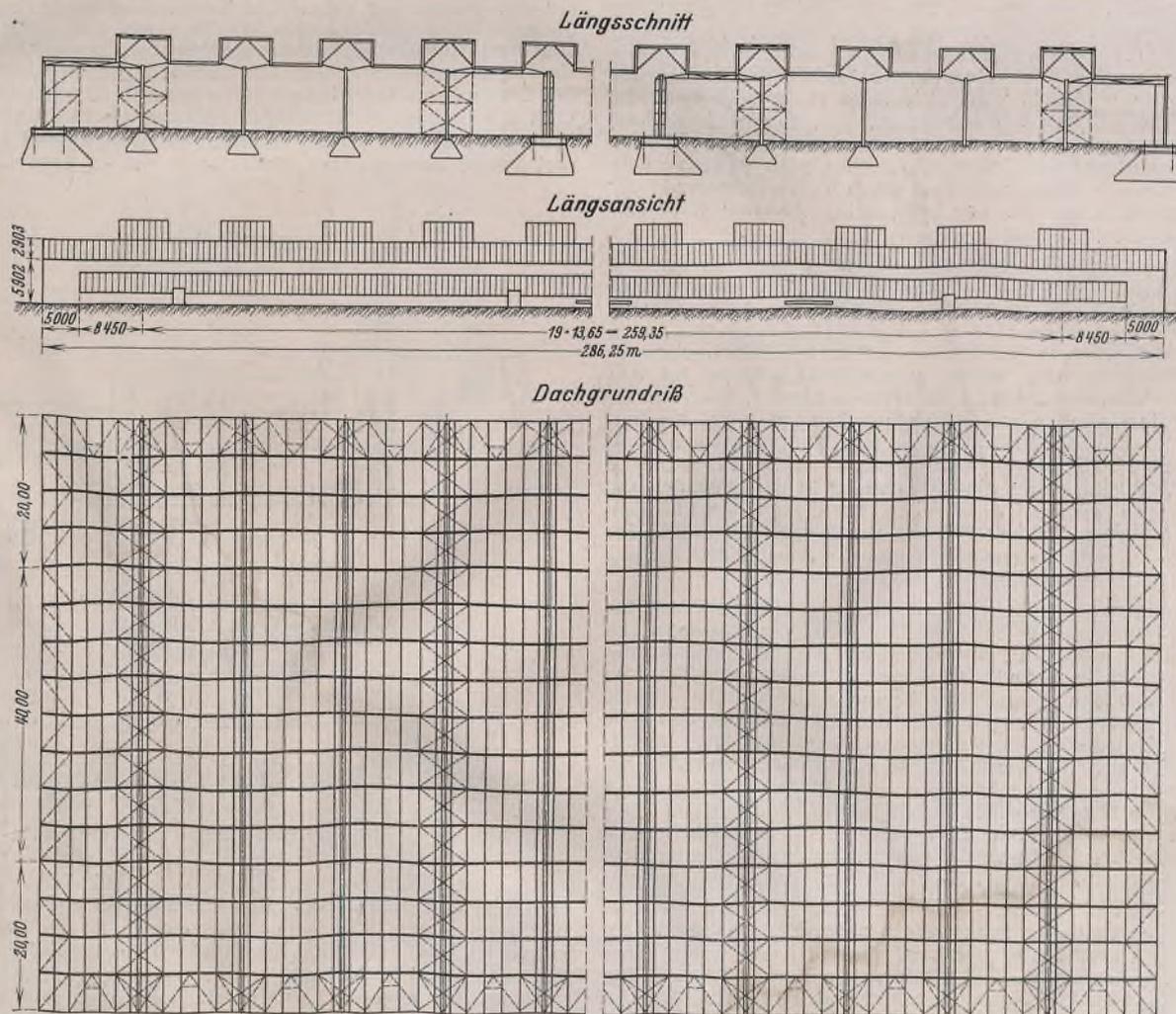


Bild 1. Die neue Werkhalle.

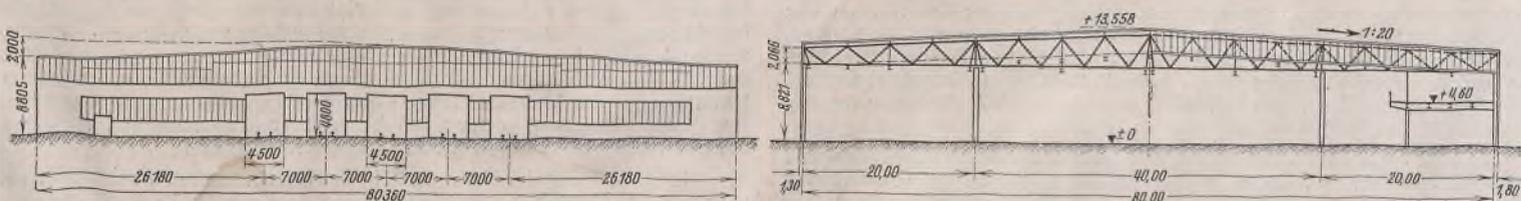


Bild 2. Nördliche Giebelwand und Hallenquerschnitt.

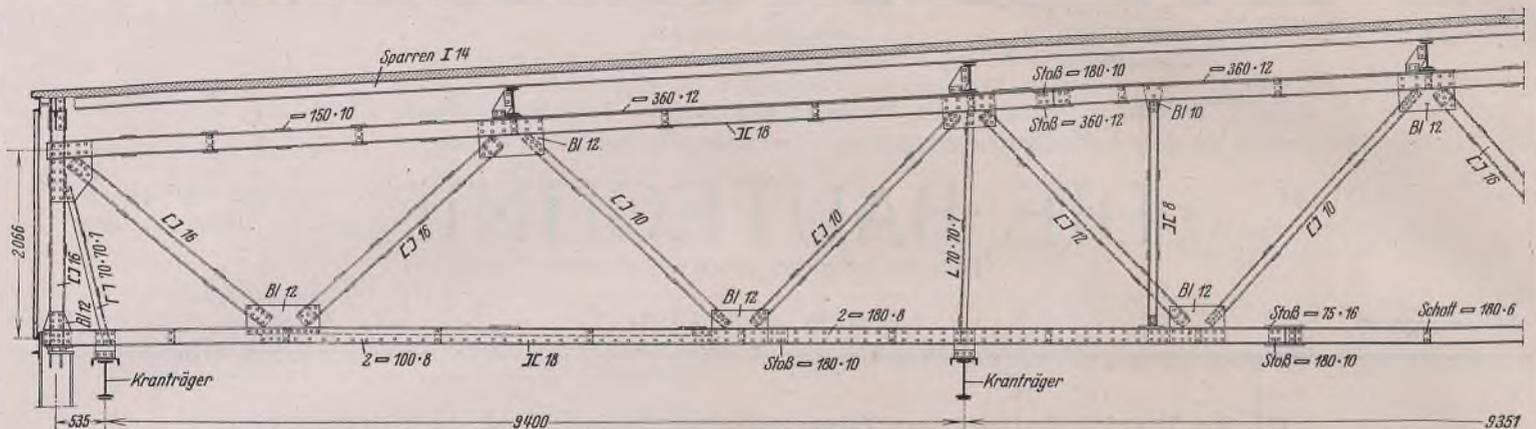


Bild 3. Dachbinder.

Dieser Notwendigkeit entsprach auch ein Werk der Wagenbauindustrie durch die Planung und Ausführung einer neuen großen Halle, um ohne Vernachlässigung der umfangreichen Ausfuhrlieferung den Anforderungen des Vierjahresplans und des gesteigerten Bedarfs der deutschen Reichsbahn entsprechen zu können. Die Erweiterung der Erzeugung dieses Werkes soll so vor sich gehen, daß die Herstellung von Regalgüterwagen für die Reichsbahn aus einer bestehenden Werksanlage herausgenommen und in einer großen neuen Halle für eine Fließbandfertigung untergebracht wird. Die neue Halle muß sämtliche erforderlichen Hilfswerkstätten mit aufnehmen, so daß die Herstellung der Güterwagen von den älteren Werkstätten möglichst unabhängig wird. Lediglich die erforderlichen Schmiedearbeiten sollen auch weiterhin dem alten Werk zugewiesen werden, weil dort durch Vervollkommnung der bestehenden Schmiedeanlage die neu anfallenden Arbeiten mit übernommen werden können.

Für die Fließfertigung in dieser neuen Halle mußten für den Zusammenbau der Güterwagen, unter Einrechnung der Trockenstände, etwa 44 Arbeitsstände verfügbar werden. Beim Durchlaufen dieser Arbeitsstände in einer Richtung hätte sich eine Hallenlänge von etwa 500 m ergeben. Man wählte deshalb für den Arbeitsfluß des Zusammenbaues einen Hin- und Rückgang und konnte dadurch mit Rücksicht auf den Bebauungsplan des Werkes die Länge der Halle auf 286 m beschränken. Aus den für die Einzelarbeiten erforderlichen Zeiten ergab sich die Notwendigkeit, den Einbau der Stahlteile auf vier Fertigungsbändern in einer Richtung und das Einbringen des Fußbodens, der Seitenwände und die Ausführung des Anstriches auf einen Gleisstrang in der Gegenrichtung vorzusehen. Da auch zwischen den Gleisen für diesen Zusammenbau genügend Raum verbleiben mußte, ergab sich für diese Arbeitsgänge eine Breite von etwa 40 m. Selbstverständlich dürfen innerhalb dieses Raumes keinerlei Stützen den Zusammenbauvorgang stören.

Die Bearbeitung der Einzelteile wurde zwei weiteren Seitenschiffen zugewiesen. Die Breite dieser Seitenschiffe sollte 20 m betragen. Im westlichen Seitenschiff erfolgt die Bearbeitung der Stahlteile, welche von dem außerhalb der Halle befindlichen Lager durch Mauerschlitze unmittelbar an die Bearbeitungsmaschinen herangebracht werden können. Diese Maschinen werden so angeordnet, daß die fertigen Stahlteile unmittelbar da verfügbar sind, wo sie eingebaut werden sollen. Im östlichen Seitenschiff erfolgt die Bearbeitung der Holzteile. Außerdem befinden sich hier auch die Trockenkammern. Da die ganze Breite dieses Schiffes für die Holzbearbeitung nicht benötigt wird, sind dort auf einer 12 m breiten, hochliegenden Bühne die Umkleide- und Aufenthaltsräume für die Gefolgschaft und die Betriebsbüros untergebracht. Unter dem nordöstlichen Teil dieser Bühne befinden sich Einbauten für die Werkzeugausgabe und Lagerräume.

Die herzustellenden Güterwagen werden während ihres Zusammenbaues auf eigenen Achsen fortbewegt; sehr schwere Krane waren daher nicht erforderlich. Andererseits aber müssen viele leichte Teile an die Einbaustellen herangeschafft werden. Hierfür wurden 10 leichte Demag-Hängekrane mit etwa 3 t Tragkraft je Katze vorgesehen. Das westliche Seitenschiff enthält eine Kranbahn und das Mittelschiff deren zwei für die hintereinanderlaufenden leichten Hängekrane. Die Anordnung der Kranbahn wurde so gewählt, um die Katzen der Krane auch von dem Mittelschiff nach dem westlichen Seitenschiff verfahren zu können. Da die Bauhöhe dieser Krane gering ist und 7 m Hubhöhe ausreichen, konnte die Höhe bis Binderunterkante auf etwa 8,67 m beschränkt werden. Eine weitere Beschränkung der Hallenhöhe wurde durch die Unterbringung der Dachbinder in den Oberlichtern erzielt.

In Bild 1 u. 2 sind Längsschnitt, Grundriß, Querschnitt und Längs- und Giebelansicht der auf Grund dieser Betriebsbedingungen entstandenen Halle dargestellt. Sie besteht aus drei durch zwei innere Stützenreihen aufgeteilten Schiffen von 2 mal 20 m und 40 m Breite. Die in der Längs-

richtung oder in der Längs- und Querrichtung eingespannten Innenstützen sind vollwandig ausgebildet. Auf ihren Köpfen stützen sich die Dachbinder als Balken auf zwei Stützen ab. Der Binder- und Stützenabstand beträgt 13,65 m. Die Ausbildung der Dachbinder als durchlaufende Träger auf vier Stützen lag nahe. Die Vergleichsrechnung ergab jedoch, daß dadurch keine Stahlersparnis erzielbar war, weil dann die Untergurte über den Hallenstützen infolge der dort wirksamen Druckkräfte seitlich abgestützt werden mußten. Die hierfür erforderliche Stahlmenge hätte die Ersparnis an den Bindern voll aufgewogen. Außerdem hätte damit noch der Nachteil der unruhigen Wirkung der erforderlichen Verbände in Kauf genommen werden müssen. Die Unterteilung des sich über die drei Schiffe erstreckenden Binderzuges erfolgt über den Innenstützen.

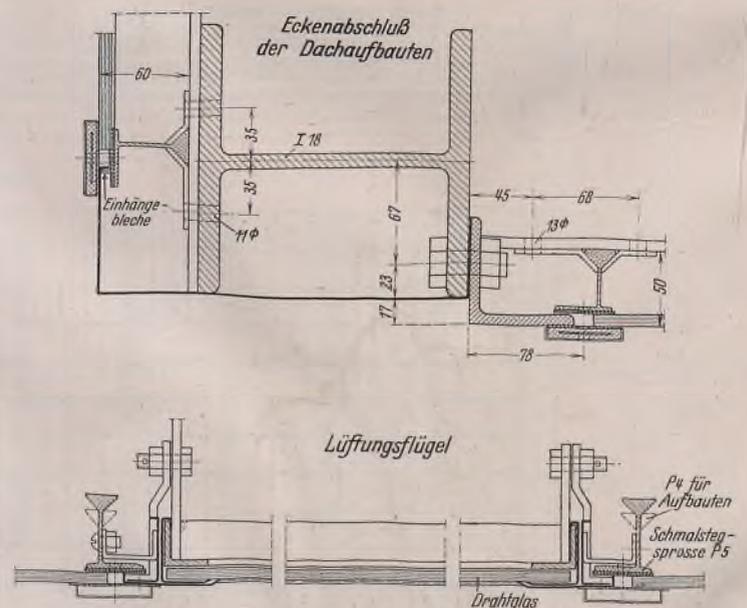
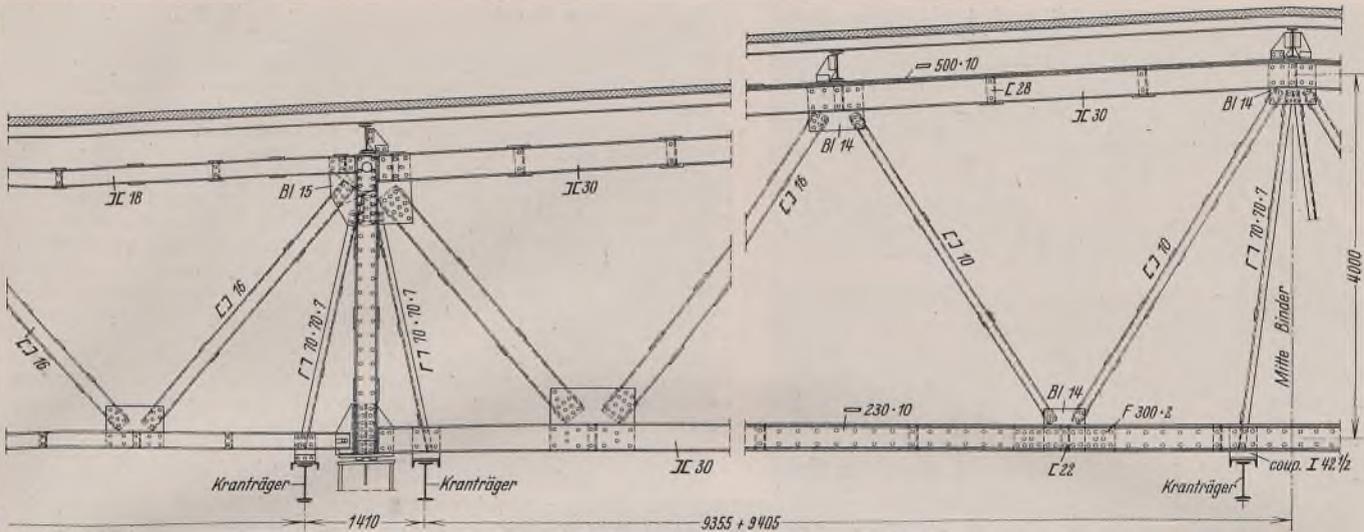


Bild 4. Einzelheiten der Verglasung.

Dort sind (vgl. Bild 3) die oberen Gurtungen mittels geteilter Knotenbleche durch ein Bolzengelenk verbunden und die unteren Gurtungen mittels Langlochverbindung verschieblich zusammengeführt. Die oberen Gurtungen der doppelwandig ausgebildeten Dachbinder sind der Dachneigung 1:20 angepaßt. Die unteren Gurtungen sind waagrecht durchgeführt. Sie durchschneiden zwar im Blick von schräg unten die unteren Dachflächen, doch ist, wie Bild 10 zeigt, damit keine ungünstige Wirkung verbunden. Gurtungen und Füllstäbe der Dachbinder zeigen sorgfältige Bindungen in den Feldern und zum Teil auch innerhalb der Anschlüsse. Die Lagerung der Binder auf den Stützen erfolgt durch Linienkipplager, welche in einfachster Weise aus einzelnen Teilen zusammengebaut sind. Auf bewegliche Lagerung der Binder ist hier, wie auch sonst üblich, im Hinblick auf die Verschieblichkeit der Stützenköpfe verzichtet worden. Dadurch erzielt man ja auch den Vorteil der Mitwirkung aller Stützen bei der Ableitung quergerichteter waagerechter Kräfte.

Die Eindeckung der Halle besteht aus Bimsbetondielen auf I-Sparren, welche in Abständen bis zu 2,4 m angeordnet sind. Die Belichtung erfolgt durch Oberlichter in kastenförmigen Dachaufbauten von rechteckigem



Noch Bild 3.

Querschnitt und durch große durchgehende Lichtbänder in den Längs- und Giebelwänden. Die kittlose Verglasung wurde nach dem System Eberspächer ausgeführt.

Die Eckausbildung dieser Verglasung an den rechteckigen Dachaufbauten und die Anordnung eines Lüftungsflügels in den Lichtbändern der Umfassungswände sind auf Bild 4 zu ersehen. Da für die senkrechten Oberlichter keine Rinnensprossen benötigt werden, kam hier die sogenannte Schmalstegsprosse der Firma Eberspächer zur Verwendung. Diese Sprosse vereinigt die Vorzüge der Einstegsprossen mit dem Vorteil der bequemen Unterbringung der Glastafelbefestigung in den einseitig ausgebildeten Flanschen. Die geringe Breite der Sprossen läßt

in den Längswänden im Zusammenwirken mit je zwei Innenstützen abgeleitet werden. In der Längsrichtung ist die Halle durch drei Trennfugen in vier Teile aufgeteilt. Diese Trennfugen unterbrechen sowohl die Dacheindeckung wie auch alle längsdurchlaufenden Stahlteile einschließlich der Kranbahnen. Die Standsicherheit jedes Gebäudeteiles in der Längsrichtung wird durch je zwei biegeunfähige, eingespannte Stützen und durch Verbände in den Längswänden erzielt. In den beiden äußeren Teilen sind je zwei Giebelwand- und Innenstützen und in den inneren Hallenabschnitten je vier Innenstützen zur Aufnahme von Längskräften ausgebildet und in der Längsrichtung eingespannt (Bild 1 u. 5). Die Aufnahme der Windkräfte auf die Giebelwände und die kastenförmigen

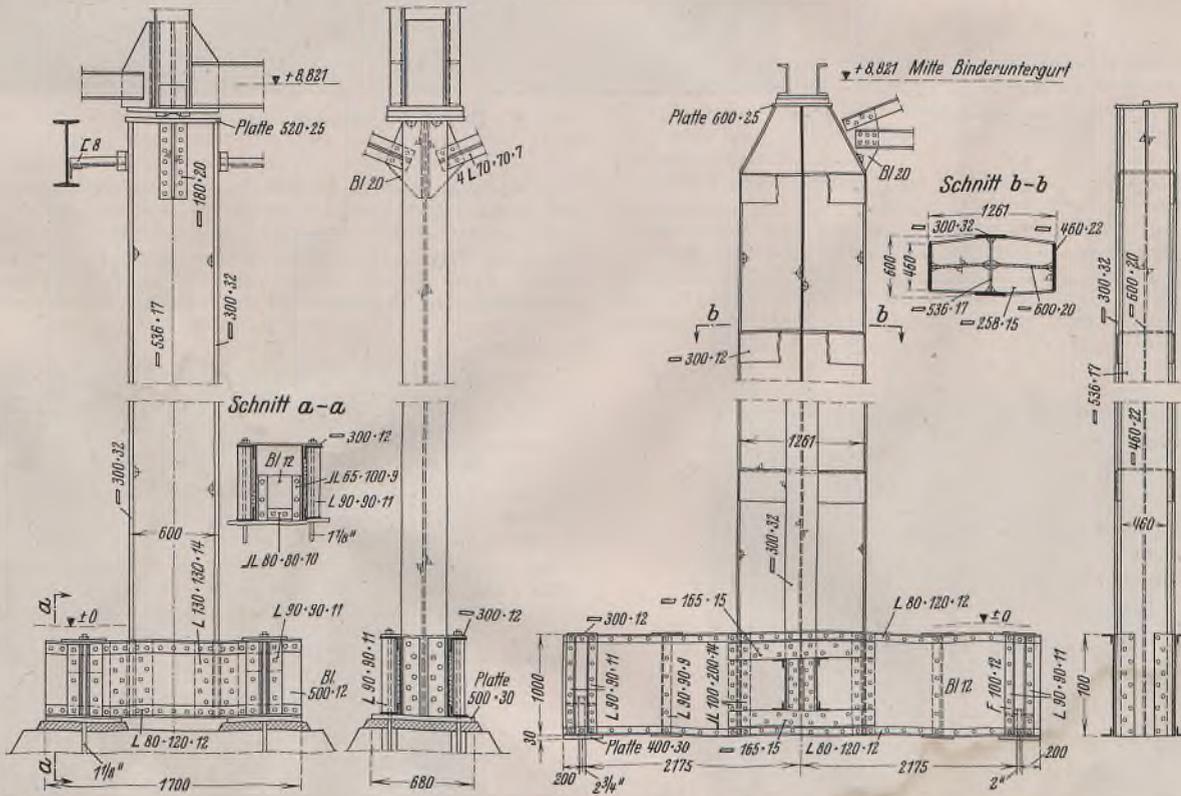


Bild 5. Innenstützen.

außerdem einen größeren Lichteinfall zu. An Stelle von Deckschienen aus verzinktem Stahlblech wurde zur Befestigung der Glastafeln und zur Abdeckung der Längsstöße Hartdrahtglas mit drahtfreien Längsrändern verwendet.

Die Anordnung senkrechter Glasflächen in den Oberlichtern verhindert unerwünschte Spiegelung und entspricht den Anforderungen des Luftschutzes. Der dadurch erforderliche Mehraufwand an Stahl und Glas ist nicht gering, da schräge Oberlichter bekanntlich viel wirksamer sind und geringere Abmessungen erfordern. Die weitgehende Verteilung der Lichtflächen im Dach wird zweifellos eine ausreichende und gleichmäßige Belichtung der Halle ergeben. Die Längs- und Giebelwände bestehen aus 1/2 Stein starkem Stahlfachwerk.

Sämtliche Stützen sind quer zur Längsachse des Gebäudes eingespannt, so daß die waagrecht wirkenden Kräfte durch je zwei Stützen

Dachaufbauten erfolgt durch waagerechte, über die Hallenbreite durchlaufende Verbände (vgl. Bild 1). Diese waagerechten Verbände befinden sich in Höhe der oberen Riegel der einzelnen Dachaufbauten, und zwar dort, wo die Windkräfte durch senkrechte Längsverbände in die Stützenköpfe übergeleitet werden (Bild 1 u. 7). Außen stützen sich diese waagerechten Dachverbände auf die senkrechten Verbände in den Längswänden ab. Die Längskräfte der Kranbahnen werden zum Teil unmittelbar in die Stützenköpfe, zum anderen Teil mittels leichter Verstreben aus Rundstahl in die Dachverbände geleitet. Die Winddrücke auf die Längswände werden durch längslaufende Dachverbände aufgenommen und durch die Dachbinder in die Stützenköpfe übergeleitet. Die Ausbildung der Innenstützen ist aus Bild 5 zu ersehen. Die Regelstützen bestehen aus einem zusammengesetzten, geschweißten I-Querschnitt und sind in der Querrichtung eingespannt. Mit 600 mm Breite wirken sie in der

großen Halle recht schlank und beanspruchen auch wenig Raum, so daß die Breitenausnutzung der Halle, auf welche es hier hauptsächlich ankommt, recht günstig wird. Unter dem Stützenfuß sind außen zwei einzelne Fußplatten angeordnet. Gegenüber der früher üblichen durch-

gehenden Fußplatte bringt diese Aufteilung die Vorteile geringeren Stahlverbrauchs und des klaren Kräftespiels. Falls nicht irgendwelche besonderen Gründe vorliegen, sollte dieser Vorteile wegen künftig stets auf durchgehende Fußplatten verzichtet werden. Zwischen je zwei Trennfugen bzw. den äußeren Trennfugen und den Giebelwänden sind die für die Aufnahme der Längskräfte bestimmten Innenstützen als Kreuzquerschnitte ausgebildet (Bild 5). Auch diese Stützen sind vollständig geschweißt und weisen in kurzen Abständen Querschotten mit kräftigen Bindungen auf. Damit sind alle Einzelteile der kreuzförmigen Stützen gegen Ausknicken gut abgesteift. Auch der Fuß dieser Stützen zeigt kreuzförmige Ausbildung, und auch hier sind die durchgehenden Fußplatten durch kurze Einzelplatten an den Ankerstellen ersetzt. Die Giebelwandstützen sind in Bild 6 dargestellt. Die äußeren Fachwerkswände und die durchgehenden Lichtbänder sitzen vor diesen Stützen, deren Fuß ebenfalls zur Aufnahme waagerechter Kräfte eingespannt ist. Diese L-förmigen Stützen sind ebenfalls geschweißt und weisen die ansehnliche Breite von 1200 mm auf, welche durch den starken Einfluß der Windkräfte auf die Giebelwände und den großen Stützenabstand gegeben ist. Hier sind die Stege durch aufgeschweißte Flachstäbe noch besonders versteift.

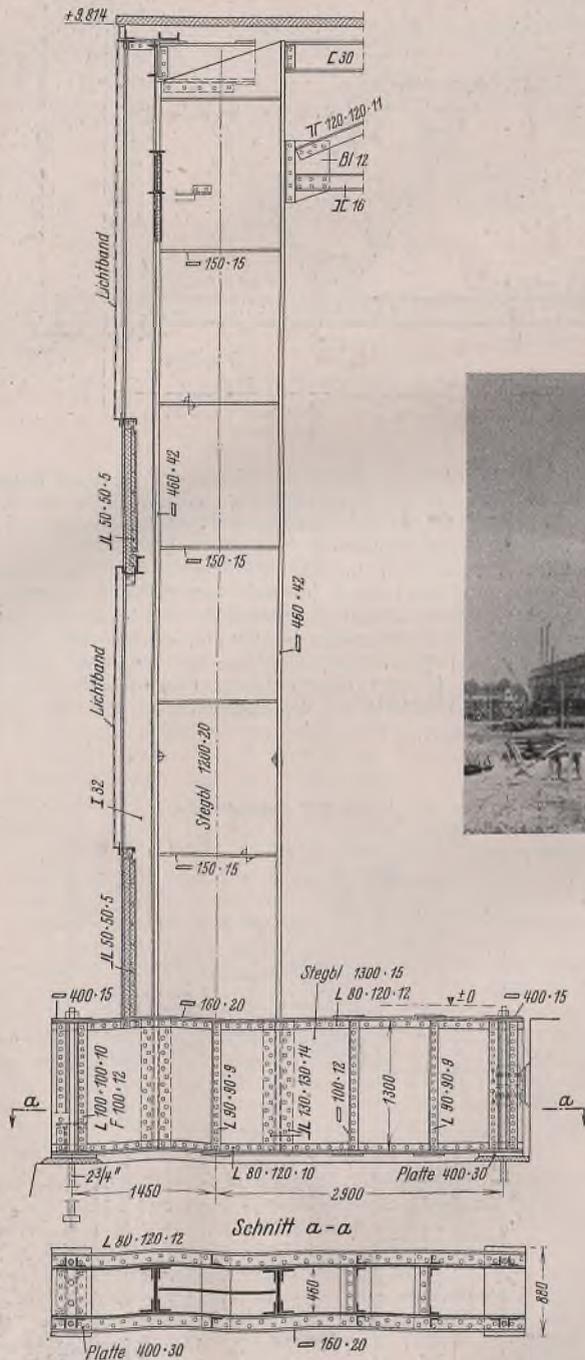


Bild 6. Giebelwandstütze.



Bild 8. Aufstellung der Halle.

Die Dachaufbauten für die Oberlichter werden aus I-Rahmen gebildet, welche in 5 m Abstand senkrecht zur Dachneigung über die Dachbinder gezogen sind (Bild 7). Diese Rahmen sind in versandfähigen Längen geschweißt. Der Zusammenschluß der einzelnen Stücke erfolgt in einer oberen Ecke mittels Anschlußwinkeln und einer Eckversteifung durch einen weiteren eingelegten Winkel. An den Trennfugen sind die oberen und unteren Riegel gelenkig mit dem der Trennfuge benachbarten Stiel verbunden, so daß hier ein Pendelausgleich geschaffen ist.

Bild 8 zeigt die Aufstellung der Halle, welche von der Mitte aus durch die beteiligten Werke nach beiden Seiten vorgetragen wurde. Aus Bild 9 sind die tragenden Teile und das Dachgerippe der Halle deutlich zu erkennen. Bild 10 vermittelt einen Einblick in die Halle kurz vor der Fertigstellung. Hier erkennt man auch deutlich das recht gute Zusammenwirken der Fachwerksbinder und Verbände mit den vollwandigen Stützen.

Bei der großen Stützweite der Mittelbinder war hier die fachwerkartige Ausbildung der Dachbinder an sich gegeben. Bei den Stützen hätte die gleichartige Ausbildung wahrscheinlich zu kleinen Stahlersparnissen geführt. Die in der Halle sich abspielenden Betriebsvorgänge erfordern jedoch in der Längs- und Querrichtung breite, durch keinerlei Vorbauten eingeschränkte Arbeitsfelder. Diesen Anforderungen entsprach

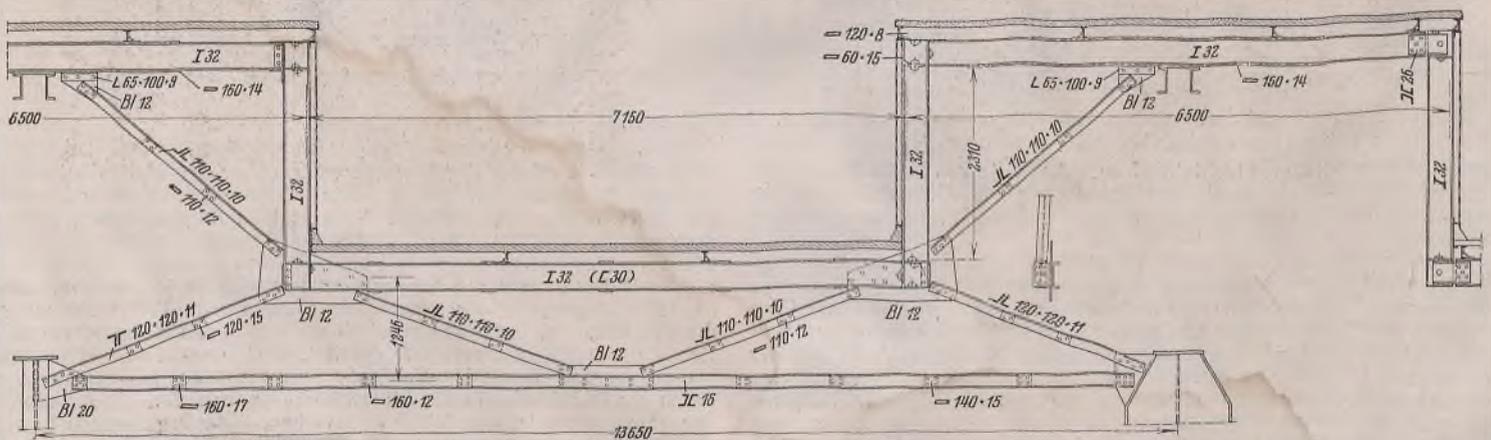


Bild 7. Dachaufbauten mit Längsverband.



Bild 9. Die Halle im Bauzustand.



Bild 10. Blick in die eingedeckte Halle.

die für die Halle gewählte tragende Konstruktion am besten, zumal ja auch die große Tragfähigkeit des Stahles die Möglichkeit geringster Stützenabmessungen ergibt.

Zur Zeit ist die Halle bereits fertiggestellt. Das Gesamtgewicht dieses in St 37 ausgeführten Stahlbaues beträgt 2450 t. Die Aufstellung der Halle erfolgte innerhalb 3 Monaten.

Alle Rechte vorbehalten.

Die Werkstoff-Fragen beim Schweißen dicker Abmessungen von St 52.

Von Prof. Dr.-Ing. Ernst Hermann Schulz und Dr.-Ing. habil. Wilhelm Bischof, Dortmund.

(Schluß aus Heft 10/11.)

5. Bedeutung der Eigenschaften des nicht beeinflussten Grundwerkstoffes.

Im vorhergehenden ist der Einfluß des Grundwerkstoffes auf die Ausbildung der Übergangszone klar zum Ausdruck gekommen. Bei allen diesen Untersuchungen ist davon ausgegangen, daß ein in bezug auf die Festigkeitseigenschaften und die Zusammensetzung einwandfreier Werkstoff vorliegt. Ein Werkstoff, der Lunkerstellen, Seigerungen, ungewöhnlich viel Schlackeneinschlüsse und dergleichen enthält oder dessen Zusammensetzung von vornherein ein ungünstiges Verhalten beim Schweißen bzw. bei der Behandlung des Werkstoffes auf der Baustelle erwarten läßt, soll auch bei nachstehenden Betrachtungen unberücksichtigt bleiben.

berücksichtigen, daß zumindest grobkörniger Stahl bereits unmittelbar nach dem Schweißen und vor irgendwelcher äußeren Verformung Risse aufweisen kann, eine Feststellung, der zunächst widersprochen [19], die aber dann doch von anderer Seite [20], insbesondere von Klöppel [21] bestätigt wurde.

Durch das Auftreten des Risses tritt eine Entlastung in der Beanspruchung ein. Die Beanspruchung ergibt sich angenähert aus den Abmessungen und der Durchbiegung der Probe. Es kann nun der Fall eintreten, daß ein einziger Riß zum völligen Bruch führt oder einer von wenigen Anrissen bevorzugt weiterreißt und dann sehr stark aufklafft (Bild 21), so daß dadurch die volle Entlastung eintritt, oder daß eine größere Anzahl von Anrissen sich bildet, von denen keiner besonders

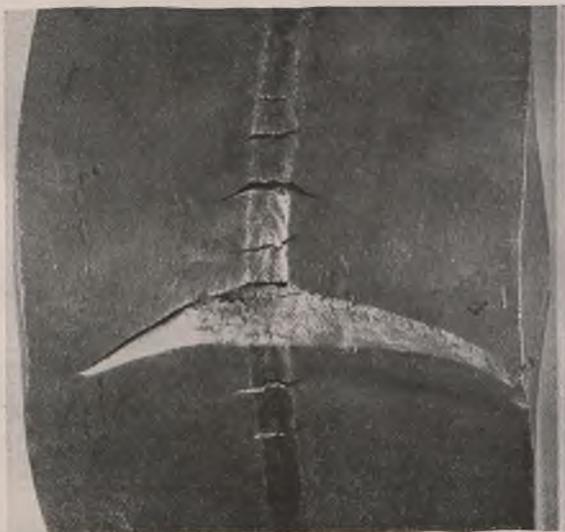


Bild 21. Aufschweißbiegeprobe mit klaffendem Riß.



Bild 22. Aufschweißbiegeprobe mit zahlreichen Anrissen.

Da bei geeigneten Elektroden die Schweißraupe weitgehend verformbar ist, dürfte die Annahme, daß die Risse von der Übergangszone ausgehen, berechtigt sein. Zahlreiche Gefügebildungen bestätigen dies auch. Bei Voraussetzung einer homogenen Übergangszone würde der Anfang des Risses an der äußersten am stärksten beanspruchten Zone liegen. Da die Zone aber nicht homogen ist, dürfte der Rißbeginn wahrscheinlich im Gebiet der größten Härte und geringsten Kerbschlagzähigkeit liegen, also bei feinkörnigem Stahl unmittelbar an der Schweißnaht, bei grobkörnigem Stahl weiter zum Grundwerkstoff zu. Hierbei ist zu

stärker hervortritt (Bild 22), wodurch sich aber insgesamt auch die gleiche Entlastung ergibt. Maßgebend für dieses unterschiedliche Verhalten ist die verschiedene Eignung des Werkstoffes, die Risse aufzufangen und nicht weiterzuleiten, oder, wie angenommen wurde, eine verschiedene Trennfestigkeit des Werkstoffes. Ob tatsächlich die Trennfestigkeit des Werkstoffes oder die Trennempfindlichkeit, wie sie etwa von Kuntze [22] bestimmt wird, allein maßgebend ist, kann nicht mit Sicherheit gesagt werden. Das Bruchbild bei stärker gebogenen Aufschweißbiegeproben — weites Klaffen des oberen Teils der Risse, häufiger Verlauf der Risse

unter 45° zur Oberfläche, nicht selten feststellbares Gleiten auf einer Zeile — spricht zum Teil dagegen.

Für die Trennfestigkeit des Werkstoffes wäre das Gefüge wie auch die Zusammensetzung des Stahls maßgebend [22]. Die Bestimmung der Trennempfindlichkeit nach Kuntze ist nicht ganz einfach, leichter läßt sich jedenfalls die Prüfung der Kerbschlagzähigkeit durchführen. Die Anwendung dieser Prüfung hatte von vornherein deshalb viel für sich, als sie bekanntlich auf verschiedene Schmelz- und Warmbehandlungen des Stahls anspricht und hierdurch auch die Aufschweißbiegeprüfung nach den Untersuchungen von Wasmuth [23] erheblich beeinflußt wird.

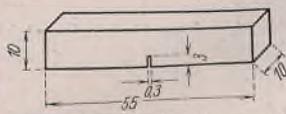


Bild 23. Kerbschlagprobe mit Schlitzkerb.

Um diese Fragen nachzuprüfen, wurden aus einer Reihe von untersuchten Aufschweißbiegeproben, deren Prüfungsergebnisse zusammen mit mechanischen und physikalischen Eigenschaften der Grundwerkstoffe in Zahlentafel 3 zusammengestellt sind, in der Längsrichtung aus der Mitte Kerbschlagproben entnommen, und zwar in Form der DVMR-Probe und der von Graf vorgeschlagenen Kerbschlagprobe mit Rechteckkerb, im folgenden Schlitzkerbprobe genannt, deren Abmessungen in Bild 23 angegeben sind. In Bild 24 ist zunächst für Chrom-Kupfer-Stahl die Kerbschlagzähigkeit, gemessen an den beiden Proben, gegenübergestellt. Es kann danach zwischen guten Aufschweißbiegeproben (Vollpunkte) und schlechten (Kreispunkte) deutlich unterschieden werden, wenn die Schlitzkerbprobe zugrunde gelegt wird; die Grenze zwischen guten und schlechten Proben liegt bei 7 bis 8 mkg/cm². Bei der DVMR-Probe zeigt sich eine gewisse Überschneidung von guten und schlechten Werten zwischen 12 und 15 mkg/cm². In Bild 25 sind weiter einige von Wasmuth und Salzmann [23] angegebene Werte der Kerbschlagzähigkeit in gleicher Weise wie in Bild 24 zusammengestellt. Es ergibt sich praktisch das gleiche Bild bezüglich der Schlitzkerbprobe, wenn auch die Grenze mit 8 bis 12 mkg/cm² höher zu liegen scheint. Die Überschneidung bei der DVMR-Probe ist dagegen erheblich stärker.

Gefügemäßig läßt sich ein Zusammenhang dieser Kerbschlagzähigkeit mit Schlitzkerbprobe und der Sekundärkorngröße zeigen. In Bild 26

Zahlentafel 3
Untersuchungen an Aufschweißbiegeproben von Chrom-Kupfer und Mangan-Silizium Stählen des St 52

Lfd. Nr.	Werkstoff	Behandlung	Aufschweißbiegeprobe			Festigkeitseigenschaften				Kerbschlagzähigkeit mkg/cm ² DVMR- Probe	Kerbschlagzähigkeit mkg/cm ² Schlitzkerb- Probe	Korngrößen			Hysteresis- werte	
			% Anriß Schweiß in °	Bruch in °	Wertung	Streck- grenze kg/mm ²	Zug- festigkeit kg/mm ²	Dehnung in %	Ein- schrumpung %			Mo Quaid-Ehn in µ²	A STM- Skala	Sekundär in µ²	A ₁ - A ₂ in °	A ₃ - A ₄ in °
1	Cr-Cu (mit Al)	2h 900°/Luft	10	>112	+	38,1	55,9	21,8	71,5	17,6	15,7	2570	5-6	355	205	140
2	"	"	9	>113	+	38,5	56,2	23,0	72,0	17,9	15,5	2650	5-6	212	245	145
3	"	2h 900°/Ofen	8	>110	+	36,1	53,5	27,1	70,4	16,0	13,3	2890	5-6	202	280	175
4	"	"	14	>98	+	35,9	53,5	24,9	67,5	15,3	14,0	2500	5-6	184	265	160
5	"	2h 850°/Luft	7	>88	+	39,4	57,3	25,2	69,2	16,5	13,0	965	7	181	245	135
6	"	"	6	>83	+	39,8	58,2	25,7	68,1	15,4	12,0	1325	6-7	175	205	135
7	"	2h 850°/Ofen	9	>118	+	35,1	53,4	23,8	65,8	12,2	10,9	1020	6-7	224	195	135
8	"	"	12	>106	+	35,4	53,7	25,5	65,2	12,9	10,1	3780	5	260	170	105
9	"	2h 1000°/Luft	9	>103	+	36,8	58,0	23,1	69,2	15,1	10,7	1900	6	305	200	125
10	"	"	6	>100	+	39,0	58,4	24,5	68,1	14,6	12,5	570	7-8	279	240	140
11	"	2h 1000°/Ofen	9	20	-**)	31,1	51,4	27,2	61,5	10,1	4,5	2290	5-6	695	280	170
12	"	"	12	19	-	30,6	52,0	27,5	62,2	9,1	3,7	3210	5-6	840	245	150
13	"	2h 1050°/Ofen	10	16	-	29,7	51,1	27,8	59,7	7,9	4,1	1440	6-7	1890	230	115
14	"	"	12	25	-	30,1	50,8	27,2	57,8	7,9	4,0	1445	6-7	1350	185	125
15	"	2h 1100°/Ofen	13	35	-	30,3	50,4	28,1	58,8	9,5	4,6	3720	5-6	1700	245	130
16	"	"	12	77	-	30,1	50,8	27,1	58,8	9,0	5,2	1000	6-7	870	220	145
17	"	2h 1150°/Ofen	8	24	-	28,6	50,5	25,7	58,8	8,1	3,7	1000	6-7	1000	315	160
18	"	"	7	22	-	29,1	50,4	25,4	60,4	7,3	3,7	1770	6-7	1470	220	125
19	"	1/2h 880°/Luft	15	>78	+	37,9	58,1	25,4	67,1	17,1	13,9	1715	6-7	183	230	135
20	"	2h 1100°/Ofen 1/2h 880°/Luft	35	>94	+	36,9	57,2	24,4	72,8	18,1	14,7	750	7-8	301	245	140
21	"	2h 1100°/Ofen 1/2h 880°/Luft	30	>95	+	36,8	56,7	24,5	71,8	16,7	12,1	2750	5-6	232	255	125
22	Cr-Cu (ohne Al)	1/2h 880°/Luft	11	46	-**)	33,1	53,6	27,9	67,5	13,3	5,4	87500	0-1	580	330	175
23	"	2h 1100°/Ofen 1/2h 880°/Luft	-	18	-	32,0	52,8	27,8	69,2	14,2	6,1	116600	0-1	840	335	155
24	"	2h 1100°/Ofen 1/2h 880°/Luft	-	22	-	31,6	53,9	26,0	66,1	11,2	4,6	58400	1-2	715	405	250
25	Cr-Cu (mit Al)	1h 860°/Luft	15	180	+	34,0	55,3	25,2	58,4	16,2	13,1	n. b.	n. b.	670	345	195
26	"	1h 860°/Luft	9	>89	+	32,0	54,5	22,2	49,5	12,6 12,3	8,8 7,9	"	"	700	345	150
27	"	angeliefert	12	39	-	29,3	55,4	19,7	47,4	9,5 10,7	4,6 6,2	"	"	1000	330	150
28	"	1h 860°/Luft	11	>106	+	35,5	56,9	21,6	56,4	15,1 16,8	13,4 12,4	"	"	364	285	125
29	"	angeliefert	11	25	-	32,7	58,3	16,3	46,7	9,6 9,7	3,5 5,3	"	"	1053	295	130
30	"	1h 860°/Luft	8	>102	+	38,9	60,0	19,7	55,0	14,0 15,8	11,1 13,8	"	"	400	325	160
31	Mn-Si (mit Al)	1h 880°/Luft	n. b.	>95	+	35,9	54,8	29,0	68,1	17,8	15,4	1945	6	270	295	155
32	"	"	"	>87	+	36,8	54,0	29,5	68,7	16,5	15,7	1820	6-7	254	250	135
33	"	"	"	>85	+	35,8	53,0	31,2	70,4	16,7	13,6	2605	5-6	370	250	145
34	"	"	"	>87	+	35,6	55,0	28,4	66,7	15,2	13,6	2500	5-6	226	230	125
35	"	"	"	>81	+	36,2	53,2	29,2	70,4	16,9	15,3	805	bis 8	265	260	145
36	"	"	"	>89	+	34,4	53,0	28,6	67,5	17,1	17,4	1890	6	358	225	120
37	"	"	"	>102	+	33,6	52,6	30,2	65,8	17,8	16,5	1435	bis 7	355	220	130
38	"	"	"	>94	+	35,8	53,6	28,4	66,7	17,1	13,4	3020	5-6	373	255	140
39	"	"	"	>94	+	36,5	56,5	29,0	65,8	14,9	12,1	3400	5-6	208	235	145
40	"	"	"	>95	+	37,1	56,8	27,4	65,5	18,1	13,6	1675	6-7	187	265	145
41	"	"	"	>102	+	37,2	56,8	27,2	67,6	17,7	19,5	3500	5-6	238	235	125
42	"	"	"	>94	+	37,2	56,5	27,4	62,6	13,5	9,5	2380	5-6	185	250	130
43	Mn-Si	angeliefert	18	46	-**)	36,1	55,4	22,0	62,7	n. b.	n. b.	n. b.	n. b.	n. b.	n. b.	n. b.
44	"	"	18	23	-	36,5	55,4	22,2	69,3	"	"	"	"	"	"	"
45	"	1h 880°/Luft	21	49	-	38,9	55,9	20,8	66,0	"	"	"	"	"	"	"
46	"	"	21	29	-	36,9	55,9	20,8	66,0	"	"	"	"	"	"	"
47	"	angeliefert	21	62	-	34,8	55,2	22,7	63,3	"	"	"	"	"	"	"
48	"	"	21	21	-	37,2	55,0	22,7	69,8	"	"	"	"	"	"	"
49	"	1h 880°/Luft	17	>90	+	39,0	55,7	21,3	62,3	"	"	"	"	"	"	"
50	"	"	13	60	-	39,0	55,7	21,2	62,3	"	"	"	"	"	"	"
51	"	angeliefert	10	12	-	44,9	62,8	20,3	63,5	"	"	"	"	"	"	"
52	"	"	9	16	-	44,9	61,4	19,9	66,0	"	"	"	"	"	"	"
53	"	1h 880°/Luft	14	>110	+	50,0	62,2	20,0	67,9	"	"	"	"	"	"	"
54	"	"	13	>110	+	50,0	62,2	20,0	67,9	"	"	"	"	"	"	"
55	"	2h 880°/Luft	15	25	-	33,5	54,3	27,1	70,3	13,0	6,6	21200	2-3	357	330	190
56	"	"	8	>54	+	47,5	60,7	25,0	73,5	18,9	16,7	740	7-8	141	280	160
57	"	"	11	100	-	35,0	54,4	27,8	70,5	13,5	7,2	10000	3-4	405	320	205
58	"	2h 1100°/Ofen	-	19	-	26,5	49,7	27,4	55,0	1,8	0,8	1520	6-7	2180	375	170
59	"	"	-	21	-	27,6	54,6	26,7	57,7	6,7	2,8	1890	6	980	290	135
60	"	"	-	17	-	27,6	50,6	26,0	60,3	1,3	0,6	20000	2-3	1775	285	150
61	"	angeliefert	-	15	-	30,3	52,0	28,6	65,2	10,7	8,3	2120	6-7	401	n. b.	n. b.
62	"	"	-	5	-	27,9	52,3	26,0	60,9	6,9	4,1	1030	6-7	585	"	"
63	"	"	-	14	-	33,5	56,0	26,9	63,4	9,8	6,0	1830	6	356	"	"
64	"	"	-	28	-	30,5	53,0	27,7	63,4	9,8	6,8	2690	5-6	470	"	"
65	"	"	-	14	-	29,5	52,9	27,9	62,8	11,8	9,7	2310	5-6	534	"	"
66	"	"	-	12	-	27,5	52,0	30,3	62,2	7,1	4,3	3470	5-6	612	"	"

) +- bedingungsgemäß **) -- nicht bedingungsgemäß

ist für die Chrom-Kupfer-Stähle des Bildes 24 die Korngröße der Kerbschlagzähigkeit nach der Schlitzkerbprobe gegenübergestellt. Es ergibt sich deutlich der Zusammenhang zwischen Sekundärkorngröße und der Aufschweißbiegeprobe, allerdings ist die Unterscheidung im Grenzgebiet von $500 \mu^2$ nicht ganz eindeutig. Da die Kerbschlagprobe mit Rechteckkerb etwas schwierig herzustellen ist, sind auch Versuche mit der leichter

Da, wie bereits gezeigt wurde, der Mangan-Silizium-Stahl zur Erfüllung der Aufschweißbiegeprüfung ein feineres Korn als der Chrom-Kupfer-Stahl haben muß, können über die Wirksamkeit der Normalglühung bei diesem Stahl Zweifel bestehen.

Ein weiteres Hilfsmittel, mit größerer Sicherheit ein feines Sekundärkorn zu erzielen, ist eine geeignete Schmelzbehandlung des Stahles. Eine solche Schmelzbehandlung, gegebenenfalls zusammen mit einer Normalglühung, ergibt bei Chrom-Kupfer-Stahl mit großer Sicherheit einwandfreie Aufschweißbiegeproben mit dem typischen Ribbild des Bildes 22, während bei Mangan-Silizium-Stahl nach unseren Erfahrungen sehr häufig der auch von Houdremont, Schönrock und Wiester [24] angeführte Typ des fasrigen, klaffenden Risses des Bildes 21 auftritt.

Die Brauchbarkeit der Mc Quaid-Ehn-Korngrößenbestimmung für die Beurteilung des Stahles — woran man bei einer Schmelzbehandlung zunächst denken könnte — ist begrenzt, weil normalgeglühte oder mit entsprechenden walztechnischen Maßnahmen hergestellte Stähle ohne besondere Schmelzbehandlung trotz grobem Ehn-Korn ein ausreichend feines Sekundärkorn haben können. Es würde unzweckmäßig sein, diese Möglichkeit für die Herstellung geeigneter Stähle oder die Entwicklung solcher Stähle in dieser Richtung durch irgendwelche Vorschriften in bezug auf das Ehn-Korn auszuschalten, wobei weiter noch zu bedenken wäre, daß auch das Ehn-Korn in der Auswirkung auf die Sekundärkorngröße von den vorangehenden Walzbedingungen mehr oder weniger abhängt und auch keine absolut sichere Gefügeverbesserung gewährleistet.

Für die untersuchten Stähle ist aber noch eine Nachprüfung des Zusammenhangs zwischen Ehn-Korn und Sekundärkorn durchgeführt worden. In Bild 29 ist der Zusammenhang zwischen Ehn-Korn und Sekundärkorn beim Chrom-Kupfer-Stahl dargestellt. Hierbei ist die mittlere Korngröße des Ehn-Korns eingesetzt. Man kann natürlich entgegenhalten, daß die wirkliche Ausbildung des Ehn-Korns, wie etwa das gleichzeitige Auftreten von feinen neben großen Körnern, hierbei nicht zur Geltung käme. Deshalb wurde auch in Bild 30 die Kornzählung nach der ASTM-Skala (American Society for Testing Material) durchgeführt.

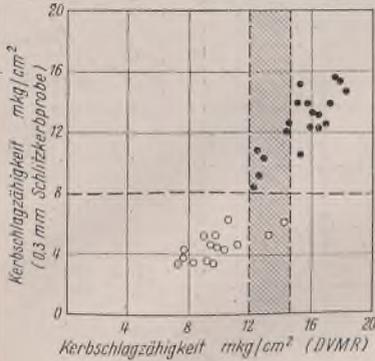


Bild 24.

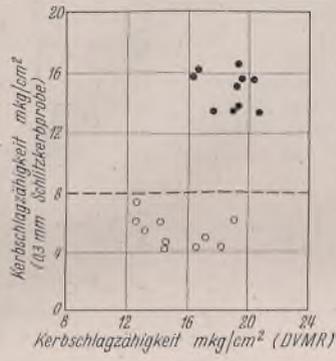


Bild 25.

● Aufschweißbiegeprobe bedingungsgemäß
○ „ „ nicht

(Nach Versuchen von Wasmuth und Salzmann)

Bild 24 u. 25. Kerbschlagzähigkeit an Proben mit Rund- und Schlitzkerb und Ausfall der Aufschweißbiegeprobe an Cr-Cu-Stählen.

herzustellenden DVMS-Probe (Spitzkerb) durchgeführt worden [23], die anscheinend auch eine Unterscheidung zwischen Stählen gestatten, die gute und schlechte Aufschweißbiegeproben ergeben. Allerdings liegt bei Chrom-Kupfer-Stählen die Grenze dann etwa zwischen 10 und 14 mkg/cm².

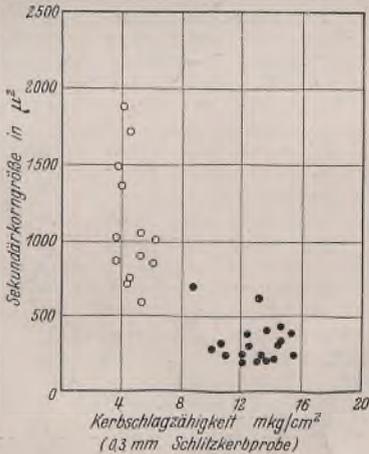


Bild 26. Zusammenhang zwischen Sekundärkorngröße, Aufschweißbiegeprüfung und Kerbschlagzähigkeit bei Cr-Cu-Stählen.

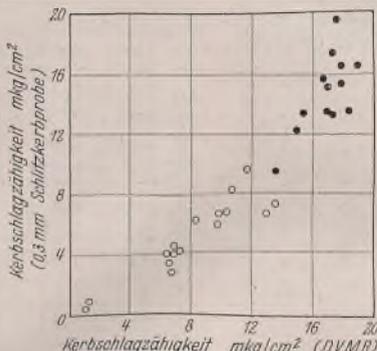


Bild 27. Kerbschlagzähigkeit an Proben mit Rund- und Schlitzkerb und Ausfall der Aufschweißbiegeproben an Mn-Si-Stählen.

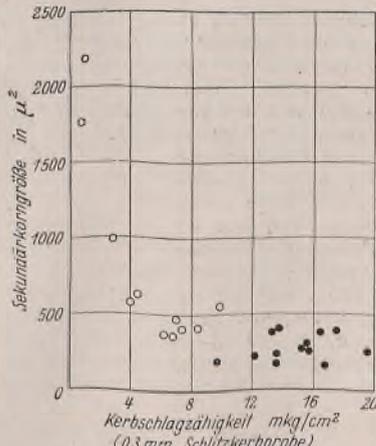


Bild 28. Zusammenhang zwischen Sekundärkorngröße, Aufschweißbiegeprüfung und Kerbschlagzähigkeit bei Mn-Si-Stählen.

Während die Lage der Punkte in den Bildern 24 bis 26 mehr oder weniger durch verschiedenes Gefüge bedingt ist, geben die Bilder 27 und 28 im Vergleich mit den vorhergehenden einen Anhalt dafür, daß sich verschiedene Stahlzusammensetzungen auch unterschiedlich verhalten. In Bild 27 sind die Kerbschlagwerte einer Anzahl von Mangan-Silizium-Stählen aus guten und schlechten Aufschweißbiegeproben gegenübergestellt. Die Unterscheidung zwischen guten und schlechten Proben ist bei dieser Stahlart anscheinend weniger deutlich. Ein Sprung wie bei den Chrom-Kupfer-Stählen ist hier nicht vorhanden. In Bild 28 sind die Kerbschlagwerte in Abhängigkeit von der Sekundärkorngröße dargestellt. Die Abhängigkeit des Ausfalls der Aufschweißbiegeprobe ist zwar eindeutig, aber in dem Gebiet von 200 bis 500 μ^2 überschneiden sich gute und nicht genügende Stähle. Weiter folgt aus Bild 28, daß die Korngrößen bei Mangan-Silizium-Stahl erheblich kleiner sein müssen als bei Chrom-Kupfer-Stahl und wahrscheinlich nicht über 300 μ^2 liegen dürfen.

Ein bereits ziemlich feines Sekundärkorn — bei Chrom-Kupfer-Stahl bis herunter zu 500 μ^2 — kann schon lediglich durch Normalglühung erhalten werden. Es ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Wirkung der Glühung wesentlich von der vorhergehenden Walzbehandlung abhängig ist. Im allgemeinen ist eine Verfeinerung wahrscheinlich, da ein Fertigwalzen bei verhältnismäßig niedrigen Temperaturen, das von vornherein bereits zu einem feinen Korn führen würde, praktisch bei dicken Abmessungen kaum möglich ist. Ob die Normalglühung jedoch ausreicht, um eine für den Aufschweißbiegeversuch genügend weitgehende Kornverfeinerung zu erhalten, hängt auch von der Stahlzusammensetzung ab.

Waren mehr als eine Kornklasse in dem untersuchten Stahl vorhanden, so ist dies durch eine Verbindungslinie zwischen den Punkten für die entsprechenden Kornklassen dargestellt. Weder in Bild 29 noch in Bild 30 zeigt sich ein Zusammenhang zwischen Ehn-Korn und Ausfall der Auf-

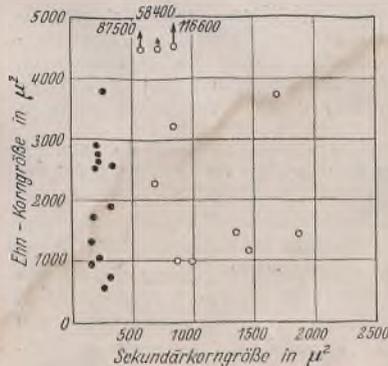


Bild 29.

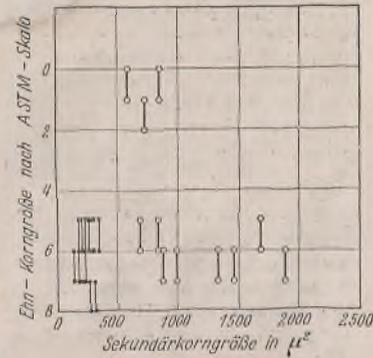


Bild 30.

● Aufschweißbiegeprobe bedingungsgemäß
○ „ „ nicht

Bild 29 u. 30. Zusammenhang zwischen Ehn-Korn, Sekundärkorn und Aufschweißbiegeprüfung bei Cr-Cu-Stählen.

schweißbiegeprobe bzw. zwischen Ehn-Korn und Sekundärkorn. Nur die Stähle mit ganz grober Ausbildung des Ehn-Korns sind anscheinend mit Sicherheit für die Aufschweißbiegeprobe als ungeeignet anzusehen. In Bild 31 und 32 ist die gleiche Darstellung für Mangan-Silizium-Stahl gegeben, wofür dasselbe wie für die Chrom-Kupfer-Stähle gilt.

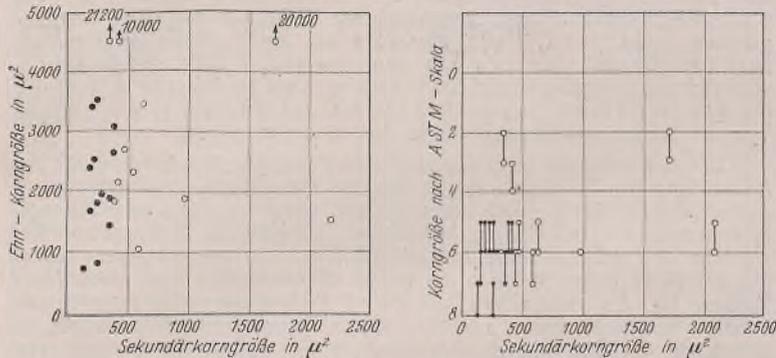
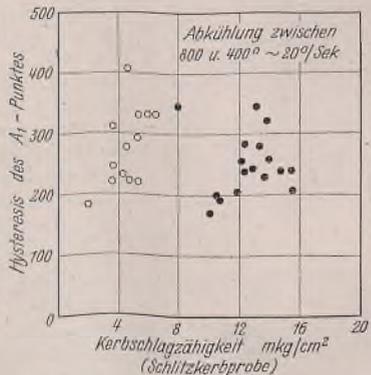


Bild 31. Bild 32.

● Aufschweißbiegeprobe bedingungsgemäß
○ nicht

Bild 31 u. 32. Zusammenhang zwischen Ehn-Korn, Sekundärkorn und Aufschweißbiegeprüfung bei Mn-Si-Stählen.

Ergänzend hierzu sei noch die Auffassung nachgeprüft, ob es möglich sei, den Stahl hinsichtlich seines Verhaltens bei der Aufschweißbiegeprüfung nach der Hysterisis des A_1 -Punktes⁵⁾ auf Grund von Ausdehnungsmessungen zu beurteilen. Entsprechend der von dem Vertreter [11] dieser Auffassung angegebenen Durchführung der Ausdehnungsmessung wurden die Zahlen der letzten Spalte der Zahlentafel 3 erhalten. Es muß bemerkt werden, daß der A_{r1} -Punkt aus den Ausdehnungskurven nicht genau entnommen werden kann. Um eine Möglichkeit der Nachprüfung zu haben und eine gewisse Eindeutigkeit zu erhalten, wurde die Temperatur des Maximums der Abkühlungskurve angenommen. Wie Bild 33 für Chrom-Kupfer-Stähle und Bild 34 für Mangan-Silizium-Stähle zeigen, läßt sich weder mit den Ergebnissen der Aufschweißbiegeprüfung noch mit den Werten der Schlitzkerbprobe ein auch nur irgendwie gearteter Zusammenhang feststellen.



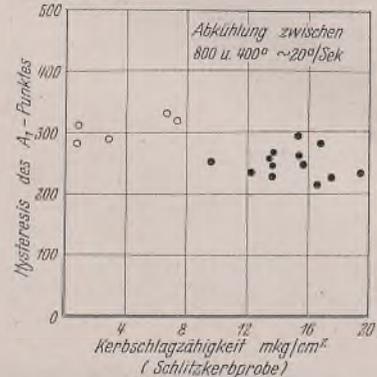
● Aufschweißbiegeprobe bedingungsgemäß
○ nicht

Bild 33. Kerbschlagzähigkeit und Hysterisis des A_1 -Punktes ($A_{c1} - A_{r1}$) von Aufschweißbiegeproben aus Chrom-Kupfer-Stählen.

Da auch die Festigkeitseigenschaften auf Wärme- und Walzbehandlung ansprechen, dürfte schließlich noch die Untersuchung ihres Zusammenhanges mit dem Ausfall der Aufschweißbiegeprüfung von Interesse sein, und zwar um so mehr, als die Auffassung geäußert wurde [15], man könne die Schwierigkeiten beim Schweißen von dicken Abmessungen durch

⁵⁾ Bei der Erhitzung von St 52, dessen Kohlenstoffgehalt von weniger als 0,2% in Form von Perlitinseln im Ferritgefüge vorliegt, geht bei der Temperatur A_{c1} — etwa 700° — der streifige Perlitbestandteil in die homogene Phase des Austenits über. Dieser Austenit nimmt mit steigender Temperatur mehr und mehr Ferrit auf, bis dieser bei der Temperatur A_{c3} — etwa 850° — völlig verschwunden ist. Bei der Abkühlung vollzieht sich der umgekehrte Vorgang. Bei A_{r3} beginnt sich der Ferrit auszuschcheiden. Der Austenit wird mit Kohlenstoff angereichert, bis er sich plötzlich bei A_{r1} zu Ferrit mit rd. 0,8% C wieder umwandelt. Je nach der Abkühlungsgeschwindigkeit tritt ein Verzug der Umwandlungen ein, so daß A_{r1} bzw. A_{r3} tiefer als A_{c1} bzw. A_{c3} liegen. Der Unterschied zwischen A_{r1} und A_{c1} bzw. A_{r3} und A_{c3} wird Hysterisis des A_1 - bzw. A_3 -Punktes genannt.

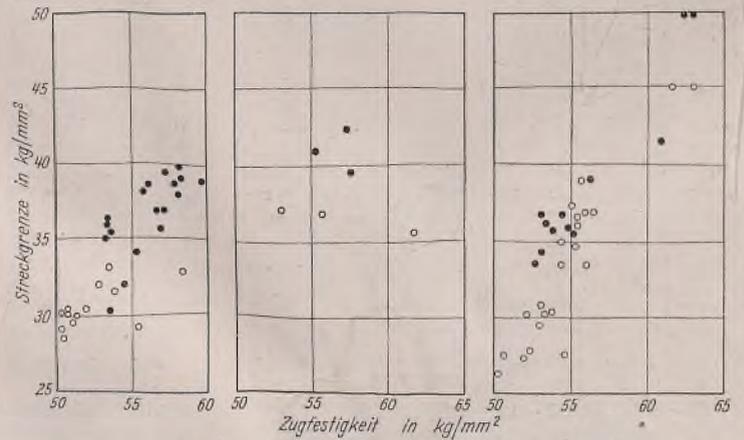
Verwendung eines weicheren Stahles vermeiden, und ferner theoretisch abgeleitet wurde [22], daß die Einschnürung für den Ausfall der Aufschweißbiegeprobe von Bedeutung sei. In Bild 35 bis 37 sind Streckgrenze und Festigkeit der untersuchten bzw. der von Wasmuth und Salzmann angegebenen Chrom-Kupfer- und der untersuchten Mangan-Silizium-Stähle



● Aufschweißbiegeprobe bedingungsgemäß
○ nicht

Bild 34. Kerbschlagzähigkeit und Hysterisis des A_1 -Punktes ($A_{c1} - A_{r1}$) von Aufschweißbiegeproben aus Mangan-Silizium-Stählen.

einander gegenüber aufgetragen, wobei die Werte je nach dem Ausfall der Aufschweißbiegeprüfung besonders bezeichnet sind. In der Festigkeit unterscheiden sich bei den beiden Stahltypen die Stähle mit gebrochener und nicht gebrochener Aufschweißbiegeprobe nicht. Die Streckgrenze liegt dagegen bemerkenswerterweise bei den bedingungsgemäßen Chrom-Kupfer-Stählen zum größten Teil ausgesprochen höher als bei den nicht geeigneten Stählen. Bei den Mangan-Silizium-Stählen zeigt sich auch hier kein Zusammenhang. Mithin ist die Empfehlung weicherer Stähle, soweit es sich um die Erfüllung der Vorschriften des Aufschweißbiege-



● Aufschweißbiegeprobe bedingungsgemäß
○ nicht

Bild 35. Cr-Cu-Stähle Bild 36. Cr-Cu-Stähle Bild 37. Mn-Si-Stähle (eigene Versuche). (nach Wasmuth und Salzmann). (eigene Versuche).

Zusammenhang zwischen dem Ergebnis der Aufschweißbiegeprüfung und der Zugfestigkeit und Streckgrenze.

versuchs handelt, nicht gerechtfertigt. Anders liegen vielleicht die Verhältnisse, wenn es sich um die Schweißempfindlichkeit des Werkstoffes, also um Rißerscheinungen in oder in nächster Nähe der Schweißnaht handelt, was aber nicht unmittelbar im Zusammenhang mit den schlagartig auftretenden Trennungsbrüchen steht. In dieser Richtung liegt auch eine andere Forderung, die zu verschweißenden Abmessungen auf unter 30 mm herabzusetzen. Abgesehen davon, daß dies technisch einen Rückschritt bedeuten würde und sich bei der Möglichkeit, heute einwandfreie Stähle zu liefern, auch nicht rechtfertigen ließe, ist nur zu sagen, daß bei 50 mm Dicke ungeeignete Stähle sehr oft auch die Aufschweißbiegeprüfung in Abmessungen von sogar nur 20 mm Dicke nicht aushalten.

Weiter sind in Bild 38 und 39 die Dehnung und Einschnürung der untersuchten Chrom-Kupfer- bzw. Mangan-Silizium-Stähle — der Einfachheit halber in je einem Schaubild — im Zusammenhang mit dem Ausfall der Aufschweißbiegeprüfung dargestellt. Die Dehnung zeigt danach überhaupt keine Parallele zu dem Ergebnis der Aufschweißbiegeprüfung. Nur bei den Chrom-Kupfer-Stählen ergibt sich vorzugsweise eine höhere Einschnürung, falls sie bedingungsgemäß sind. Bei den Mangan-Silizium-Stählen besteht zwischen dem Ergebnis der Aufschweißbiegeprüfung und der Einschnürung kein Zusammenhang.

Es ergibt sich aus dem Vorhergehenden, daß die Möglichkeit der Einführung der Ehn-Korngröße als Prüfverfahren nicht besteht, aber die Bestimmung der Sekundärkorngröße und die Prüfung der Kerbschlagzähigkeit mit geeigneter Probe eine gewisse Differenzierung zwischen bedingungsgemäßen und ungeeigneten Stählen gestattet.

Die Sekundärkorngröße, die nach den obigen Ausführungen grundsätzlich maßgebend für den Aufbau der Übergangzone als auch für das Verhalten der Aufschweißbiegeprobe betrachtet werden muß, zeigt deshalb noch keine ganz eindeutige Abgrenzung, da das Gefüge je nach dem Stahltyp verschiedenartig zeitig ausgebildet und außerdem die Verteilung der Schlackeneinschlüsse je nach der Schmelz- und walztechnischen Vorbehandlung verschieden sein kann. Auf diese naturgemäß in großer Mannigfaltigkeit möglichen sekundären Einflüsse soll hier aber nicht näher eingegangen werden. Eine genaue Charakterisierung etwa für ein quantitatives Prüfverfahren ist hierbei nicht möglich.

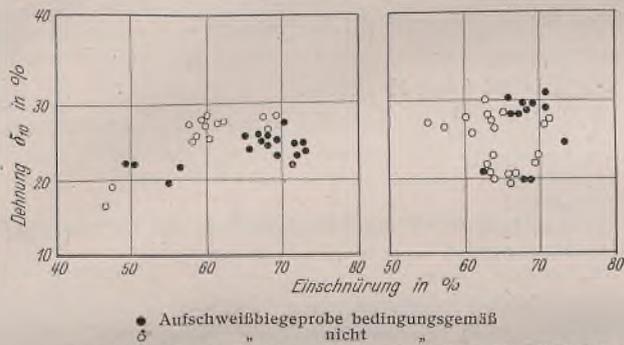


Bild 38. Cr-Cu-Stähle (eigene Versuche).
Bild 39. Mn-Si-Stähle (eigene Versuche).

Zusammenhang zwischen dem Ergebnis der Aufschweißbiegeprüfung und der Einschnürung und Dehnung.

Der alleinigen Prüfung mit der Kerbschlagprobe stehen einige Bedenken gegenüber: An der Spitze der Risse im Bauteil sind unter Beanspruchung mehrachsige Spannungszustände vorhanden, wodurch das Formänderungsvermögen des Werkstoffes erheblich beeinflußt wird. Da aber die Form der Probe ebenso wie die des Bauteils für den Grad der Änderung des Formänderungsvermögens wesentlich mit maßgebend ist, müßten möglichst diejenigen Probenabmessungen bei dem Prüfverfahren gewählt werden, die den Verhältnissen des praktischen Bauteils am nächsten kommen. Hierbei ist noch abgesehen von weiteren äußeren Bedingungen, wie der Temperatur und Verformungsgeschwindigkeit. Versuche also, die Kerbschlagprobe an die Stelle der Aufschweißbiegeprobe zu setzen, müssen dementsprechend mit einem gewissen Vorbehalt beurteilt werden. Wenn auch bei der Kerbschlagprobe im Kerbgrunde ebenfalls ein mehrachsiger Spannungszustand vorhanden ist, so sind doch die Faktoren für die Auswirkung dieses Spannungszustandes auf den Werkstoff andere als bei der Aufschweißbiegeprobe bzw. beim Bauwerk (wesentlich geringe Abmessungen, einmalige schlagartige Beanspruchung, starke Gestaltsänderung während der Verformung). Da andererseits aber die Kerbschlagprobe auf verschiedene Zustände des Stahles, die durch Verarbeitung, Wärme- und Schmelzbehandlung bedingt sind, anspricht, wo die statischen Prüfverfahren versagen oder keine Eindeutigkeit ergeben, und gerade die Verbesserung des Stahls für die Erfüllung der Aufschweißbiegeprüfung durch eine besondere Wärme- und Schmelzbehandlung möglich gewesen ist, liegt der Versuch nahe, sie doch an Stelle der teureren Aufschweißbiegeprobe anzuwenden. Weil aber für die Übertragung der Ergebnisse des Kerbschlagversuchs sonstige Anhaltspunkte nicht vorliegen, kann die Berechtigung des Ersatzes der Aufschweißbiegeprobe durch eine Kerbschlagprobe nur durch Großzahluntersuchungen nachgewiesen werden, und es entspricht diesen Überlegungen, wenn neuerdings von der Reichsbahn die Kerbschlagprobe als Studienprobe neben der Aufschweißbiegeprobe in der Abnahme vorgeschrieben wird, um an Hand der damit zu erzielenden umfangreichen Versuchsergebnisse später eine Entscheidung über ihre Verwendbarkeit zu treffen.

Zusammenfassung.

Entstehung, Eigenschaften und Bedeutung der Übergangzone von Schweißen an dicken Abmessungen von St 52 sowie die Bedeutung der Zusammensetzung und der Gefügeausbildung des Grundwerkstoffes wurden gefügemäßig und durch Zugversuche eingehend untersucht. Es ergab sich dabei, daß die Gesamthärte, wie sie bei Härteprüfverfahren mit großer Belastung festgestellt wird, keinen Zusammenhang mit dem durch Reichsbahnvorschrift verlangten Ergebnis des Aufschweißbiegeversuchs aufweist. Der Härteverlauf in der Übergangzone auf Grund von Mikrohärtmessungen steht mit dem Gefüge des Grundwerkstoffes in Zusammenhang und ist bei einem Stahl, der sich in der Aufschweißbiegeprüfung bedingungsgemäß verhält, grundsätzlich verschieden von einem nicht genügenden Stahl. Feines, durch entsprechende Walz- und Wärmebehandlung bzw. Schmelzbehandlung erzielltes Sekundärkorn ist Voraussetzung für gleichmäßigen Härteverlauf in der Übergangzone. Die Kerbschlagzähigkeit dieser Zone läßt sich nur mittelbar durch ein

besonderes Verfahren feststellen. Sie ist ebenfalls von dem Gefüge des Grundwerkstoffes abhängig und bei grobem Sekundärkorn niedriger und ungleichmäßiger als bei feinem Korn. Der Einfluß der Zusammensetzung auf die Härte wird von dem des Gefüges fast völlig überlagert und läßt sich einigermaßen eindeutig nur für eine schmale homogene Zone des Überganges dicht an der Schweißse feststellen. Mangan erhöht die Härte, insbesondere bei höheren Gehalten über 1%, Chrom wirkt weniger härtend, Kupfer und Silizium haben praktisch keinen Einfluß. Der Einfluß auf die Kerbschlagzähigkeit geht keineswegs demjenigen auf die Härte parallel. Mangan verbessert mit steigenden Gehalten die an sich gegenüber dem normalgeglühten Zustand herabgesetzte Kerbschlagzähigkeit, Chrom und Silizium setzen die Kerbschlagzähigkeit herab, ohne daß dies bei den niedrigen Gehalten des chromhaltigen Baustahles sich praktisch auswirken kann, während die Bedenken gegen Silizium durch die Versuche mehr oder weniger berechtigt erscheinen, so daß Chrom einen vorteilhaften, Silizium einen ungünstigen Einfluß auf den Grundwerkstoff ausübt.

Im ganzen ist die Anfälligkeit der verschiedenen Sorten des St 52 für Anrisse in der Schweißse und im Schweißübergang größenordnungsmäßig nach allem nicht sehr verschieden. Gänzlich verschieden ist die Aufnahme dieser Risse durch den Grundwerkstoff, was sich bereits im Ribbild der Aufschweißbiegeprobe verschieden äußert, insofern als verformungslose Trennungsbrüche, zahlreiche, wenig in den Grundwerkstoff eintretende Risse ohne Bruch oder einzelne stark klaffende, oft bis zur Trennung führende Risse auftreten können⁶⁾. Die Unterschiede im Ribbild müssen sich in den Eigenschaften des Grundwerkstoffes äußern. Die Untersuchung des Grundwerkstoffes bezog sich auf die Festigkeitseigenschaften und die Kerbschlagzähigkeit nach der DVMR- bzw. einer besonderen Schlitzkerbschlagprobe sowie auf die Sekundär- und Ehn-Korngröße. Hierbei zeigte sich, daß die Schlitzkerbschlagprobe eine gewisse Differenzierung zwischen den Stählen unzureichender und bedingungsgemäßer Aufschweißbiegeproben gestattet. Von grundsätzlicher Bedeutung erscheint die Sekundärkorngröße. Die Ehn-Korngröße ergibt praktisch keinen Zusammenhang mit dem Verhalten des Stahles in der Aufschweißbiegeprüfung.

Die Kerbschlagprobe dürfte wie die Bestimmung der Sekundärkorngröße angenähert als Prüfverfahren zur Feststellung der Trennempfindlichkeit des Grundwerkstoffes bezeichnet werden können. Die Verwendung der Schlitzkerbprobe für eine allgemeine Beurteilung des Ausfalls der Aufschweißbiegeprobe ist aber noch nicht möglich. Es besteht höchstens die Wahrscheinlichkeit, daß sie zur Differenzierung zwischen ausreichenden und ungenügenden Stählen nur innerhalb einer einzigen Stahlqualität verwendet werden kann, wobei noch offen bleibt, ob die gleiche Legierungsart von verschiedenen Herstellerwerken völlige Übereinstimmung in der Beurteilung zuläßt.

Die weiteren Untersuchungen an den Festigkeitseigenschaften zeigten nur beim Chrom-Kupfer-Stahl eine gewisse Parallele zwischen dem Ausfall der Aufschweißbiegeprobe und der Streckgrenze. Festigkeit, Einschnürung und Dehnung wiesen keinen Zusammenhang mit dem Ergebnis der Aufschweißbiegeprobe auf. Unbegründet ist danach die Forderung eines weichen Stahles. Ein Ersatz der Aufschweißbiegeprüfung durch einfachere Prüfverfahren besteht heute noch nicht.

Schrifttum.

- [1] Schaper, G., Reichsbahn 15 (1939), S. 732 bis 766; Bautechn. 16 (1938), S. 649 bis 655; Kommerell, O., Stahlbau 11 (1938), S. 49 bis 54; Schaechterle, K., Bautechn. 17 (1939), S. 46 bis 52.
- [2] Kommerell, O., Wichtige Änderungen der Vorschriften für geschweißte Stahlbauten. Bautechn. 18 (1940), S. 201 bis 203.
- [3] Wasmuth, R., Bautechn. 17 (1939), S. 85 bis 90.
- [4] Schaechterle, K., Bautechn. 17 (1939), S. 46 bis 52.
- [5] Kommerell, O., St. u. E. 57 (1937), S. 421, Bautechn. 15 (1937), S. 151 u. 152; Bierett, G., und W. Stein, St. u. E. 58 (1938), S. 427 bis 431.
- [6] Schaper, G., Elektroschweißung 8 (1937), S. 121 bis 125 und 141 bis 147; Technische Lieferbedingungen der Deutschen Reichsbahn für Baustahl St 52 und Nietstahl St 44 (Drucksache 918 156, Ausgabe Januar 1937).
- [7] Schulz, E. H., Z. d. VDI 82 (1938), S. 642 u. 643; Zeyen, K. L., Techn. Mitt. Krupp 6 (1938), S. 25 bis 46.
- [8] Bischof, W., Arch. Eisenhüttenwes. 13 (1939/40), S. 519 bis 526.
- [9] Bruckner, W. H., Proc. Amer. Soc. Test. Mater. 38 (1938), II., S. 71 bis 97, vgl. St. u. E. 58 (1938), S. 1118.
- [10] Bierett, G., Elektroschweißung 8 (1937), S. 148 bis 152.
- [11] Werner, O., Elektroschweißung 10 (1939), S. 61 bis 67 und 145 bis 152.
- [12] Hauttmann, H., Mitt. Forsch.-Anst. Gutehoffn. 7 (1939), S. 41 bis 47.
- [13] Jackson, C. E., und P. A. Rominski, Welding Journal 18 (1939), Nr. 9, S. 312s bis 317s.

⁶⁾ Die in vorliegender Arbeit im ganzen vertretene Auffassung von der Notwendigkeit, die schweißtechnischen und werkstofflichen Einflüsse auseinander zu halten, geht bereits aus Anfang 1940 geäußerten Feststellungen von Klöppel hervor [21].

[14] DIN Vornorm A 122.
 [15] Grosse, W., St. u. E. 60 (1940), S. 441 bis 453.
 [16] Cornelius, H., und K. Fahsel, Elektroschweißung 10 (1939), S. 106 bis 112 und 132 bis 135.
 [17] French, H. J., und T. N. Armstrong, Welding Journal 18 (1939), Anhang, S. 339 bis 347; vgl. Elektroschweißung 11 (1940), S. 117 bis 120.
 [18] Arch. Eisenhüttenwes. 13 (1939/40), S. 526 bis 530 [Erörterung zu Bischof, Arch. Eisenhüttenwes. 13 (1939/40), S. 519 bis 526].
 [19] Grosse, W., St. u. E. 60 (1940), S. 445; Bennek, Arch. Eisenhüttenwes. 13 (1939/40), S. 527.
 [20] St. u. E. 60 (1940), S. 545 bis 550 [Erörterung zu Grosse, St. u. E. 60 (1940), S. 441 bis 453]; Graf, Berichte Dtsch. Aussch. Stahlbau, Ausg. B, Heft 11, S. 29 ff. Berlin 1940, Springer.
 [21] Klöppel, K., Schweißtechnik im Stahlbau, Stahlbaukalender 1940, S. 380 bis 432, insbesondere S. 405 bis 407. Berlin, Wilh. Ernst & Sohn.
 [22] Kuntze, W., Wissenschaftliche Abhandlungen der deutschen Materialprüf-Anstalten 1 (1939), Heft 2, S. 11 bis 18.
 [23] Wasmuth, R., und C. Salzmann, St. u. E. 60 (1940), S. 453 bis 455.
 [24] Houdremont, E., K. Schönrock und H. J. Wiester, St. u. E. 59 (1939), S. 1268 bis 1273.

Alle Rechte vorbehalten.

Fertigungen und Baudringlichkeitsstufen.

Von **Friedrich Desch**, Referent beim Generalbevollmächtigten für die Regelung der Bauwirtschaft.

Bei der Aufstellung von Fertigungsprogrammen und Festlegung von Lieferzeiten ist die eisen-, die metall- und die holzverarbeitende Industrie angewiesen, sich an die Ausführungsbestimmungen (ADFW) zu dem Erlaß des Vorsitzenden des Reichsverteidigungsrates Ministerpräsident Reichsmarschall Göring über Dringlichkeit der Fertigungsprogramme der Wehrmacht oder an die Anordnung Nr. 20 des G. B. Bau zu halten. Die Abgrenzung der Gültigkeit der beiden Anordnungen wird nochmals erläutert, da immer wieder seitens der Industrie Rückfragen über die Gültigkeit von Baudringlichkeitsstufen und der Dringlichkeitsstufen SS und S kommen.

In der ADFW ist unter Ziffer E 1 eindeutig festgelegt, daß Bauten nicht unter die Dringlichkeitskennzeichen SS und S fallen. Für Bauten sind nach Ziffer E 2 nur die Dringlichkeitskennzeichnungen des G. B. Bau und dessen Vorschriften maßgebend. Damit ist klargestellt, daß sämtliche Aufträge, die mit Baueisenkontrollnummern belegt sind, nach der Anordnung Nr. 20 des G. B. Bau zu behandeln sind. Es ist damit auch festgelegt, daß Aufträge mit Baueisenkontrollnummern nicht mit SS- oder S-Bescheinigungen versehen werden können. Derartige Bescheinigungen sollten stets vom Verarbeiterbetrieb zur Überprüfung an das O. K. W. — Wi Rü Amt — gegeben werden. Es soll aber auch darauf hingewiesen werden, daß der Verarbeiter gehalten ist, für Bauaufträge nur Baueisenkontrollnummern anzunehmen. Falls für Bauaufträge Maschineneisenkontrollnummern ausgegeben werden, sollte der verarbeitende Betrieb diese an die ausgebende Stelle zurückreichen oder dem G. B. Bau zum Umtausch melden.

Die Abgrenzung des aus den Baueisenkontingenten zu deckenden Eisenbedarfs ist im Merkblatt Nr. 3 und im Merkblatt „Begriff Baueisen“ des G. B. Bau festgelegt. Danach ist mit Baueisenkontrollnummern der Stahl zu bestellen, der in den Bau eingeht oder mit ihm fest verbunden ist. Darüber hinaus sind sämtliche Versorgungsleitungen aus dem Baueisenkontingent zu decken, soweit es sich hierbei nicht um Maschinen oder elektrische Geräte handelt. Die Trennung nach Maschinen- und Baueisen bei Baumaßnahmen, bei denen Bau- und Maschinenanlagen ineinander übergehen, ist in den genannten Merkblättern an Beispielen durchgeführt. Der G. B. Bau muß aus Gründen der Festlegung des Bauvolumens und der Lenkung der Bauwirtschaft mehr denn je auf Beachtung dieser scharfen Trennung von Baueisen- und Maschineneisenkontingenten Wert legen. Es sei deshalb ein Auszug aus dem Merkblatt Nr. 3 gegeben, der es den Verarbeiterbetrieben ermöglicht, die Forderungen des G. B. Bau auf Beachtung der einschlägigen Vorschriften zu erfüllen. Der G. B. Bau hat mit Erlaß G. B. 47/0-1-IV vom 12.3. 1941 nochmals darauf hingewiesen, daß er für die Zukunft Verstöße gegen die Baueisenkontingentierung durch ersatzlosen Einzug der Kontingente ahnden wird.

Auszug aus dem Merkblatt Nr. 3.

Allgemeine Abgrenzung des kontingentpflichtigen „Eisens für Bauvorhaben“.

A. „Baueisen“, wie folgt umrissen:

a) bei Hochbauten

I. Eisen- und Stahlmengen, die in dem der Baupolizeibehörde mit dem Bauantrag vorzulegenden statischen Nachweis berechnet werden müssen:

1. Stabstahl (ohne Moniereisen)
2. Moniereisen
3. Formstahl einschließlich Breitflanschträger
4. Stahlgewebe.

II. Eisen- und Stahlmengen, die benötigt werden für:

1. Versorgungs- und Entwässerungsleitungen
2. Zentrale Heizungs- und Lüftungsanlagen
3. Eiserne Türen, Tore, Fenster, eiserne Oberlichte, Vergitterungen, Schutzdächer, Werbeanlagen, eiserne Treppen und Leitern, Geländer, Einfriedigungen
4. Blechdächer, Dachrinnen und Regenabflußrohre
5. Spundwände, die nach Fertigstellung des Neubaus nicht entfernt werden.

b) bei Tiefbauten

1. Stabstahl (ohne Moniereisen)
2. Moniereisen
3. Stahlgewebe
4. Formstahl
5. Bleche
6. Röhren
7. Spundwände, die nach Fertigstellung des Neubaus nicht entfernt werden
8. Sonstige Eisen.

c) bei Oberbauten für Gleisanlagen

Oberbaumaterial, ausgenommen das Oberbaumaterial der Deutschen Reichsbahn, soweit es nicht für private Anschlußgleise bestimmt ist.

B. „Kleineisen“,

das in Verbindung mit „Baueisen“ oder auch einzeln in Bauvorhaben aufgeht (Beschlagteile, Nägel, Schrauben, Bolzen, Anker, Haken, Drähte usw.).

C. „Sanitäre Objekte“

(Wannen, Becken usw. sowie Öfen und Herde).

Beispiele

zur Abgrenzung zwischen dem Eisen, das aus den Baustoffkontingenten für Bauvorhaben bereitzustellen ist, und dem Eisen von verarbeitenden Wirtschaftsgruppen, Betrieben und Unternehmungen, das mit Hilfe des vom Reichswirtschaftsministerium für andere Bedarfszwecke erhaltenen Eisenkontingents bzw. des Handwerkskontingents oder aus dem freien Markt zu beziehen ist.

Die notwendige Abgrenzung ist nachstehend durch eine größere Anzahl von Beispielen an Bauvorhaben gekennzeichnet, bei denen Bau- und insbesondere Maschinenanlagen unmittelbar ineinandergreifen.

Die in diesen Beispielen gegebenen Unterscheidungsmerkmale können sinngemäß auf weitere Anlagen übertragen werden. Die Beispiele zeigen, daß Eisenmengen, die unter das „Eisen für Bauvorhaben“ fallen, unter allen Umständen unter die Zuständigkeit der Baustoffkontingente gehören. Notwendige Maschinen, Apparaturen, Geräte usw. rechnen nicht hierzu. Hierbei ist es ohne Belang, ob Bauvorhaben im baulichen, maschinellen und auch im Apparateteil von einer einzigen Firma erstellt werden.

1. Kraftanlagen

a) Kolbendampfmaschinen einschließlich Rohrleitung, Bühne, Geländer, soweit sie zur Maschine gehören Maschineneisen
 Maschinenhaus einschließlich der zum Maschinenhaus gehörigen Geländer, Treppen usw. Baueisen
 Dasselbe gilt für Verbrennungsmotoren und Dampfturbinen sowie andere Wärmekraftanlagen.

b) Wasserturbinen mit Rohrkrümmer, Rechen- und Rechenreinigungsmaschinen, Rohrleitung außerhalb Turbinenhaus Maschineneisen
 Gebäude mit Träger für Turbine Baueisen

2. Tiefbohranlagen

Tiefbohrgeräte Maschineneisen
 Bohrturm Baueisen

3. Fördermittel, Hebezeuge

a) fahrbare, pneumatische Entladeeinrichtung, Gebläse, Förderleitung, fahrbare Krananlage einschließlich Schienen Maschineneisen
 Kranlaufbahn, Tragkonstruktion und Gebäude zur Aufnahme des maschinellen Teils Baueisen

b) Aufzug einschließlich Bühne für Winde und Führungsschienen, Gegengewichte, Seile, Sicherheitseinrichtung Maschineneisen
 Türen, Stützen im Aufzugsschacht bzw. Stahlgerüste des Schachtes als Gebäudebestandteil Baueisen

c) Normallaufkrane, Kran, Laufkatze, Fahrwerk, Laufschiene Maschineneisen
 Kranlaufbahn Baueisen

- d) Drehkrane, kleine Werkstattendrehkrane, die in Serien hergestellt und katalogmäßig geliefert werden Maschineneisen
große Drehkrane, die für besondere Aufgaben konstruiert werden:
Maschinenanlage zum Drehen, Hubwerke, Laufkatzen, Seile, Kranhaken, stählerne Tragteile, drehbare und fester Teil, Gegengewichte Maschineneisen
Fundament Baueisen
Pontone für Schwimmkrane, schwimmende Getreideheber, schwimmende Kohlenheber, schwimmende Eimerbagger, schwimmende Sauge- und Elevier-Bagger . . . Eisen für den Schiffbau
- e) Verladebrücken: Antrieb von Wellen, Zahnradern usw., Laufkatze und Hubwerk, Fahrwerk von Verladebrücken . . . Maschineneisen
Stahlkonstruktionen größerer Verladebrücken, feststehende Fundamente Baueisen
4. Silos und Bunker
- a) Silo: Aufgabeeinrichtungen (Bänder, Schnecken, Rüttelschuhe), Fördereinrichtungen (Greifer, Kübel, Förderbänder), Siloverschlüsse (Klappen, Schieber, Wäge- und Meßeinrichtungen) Maschineneisen
Aufnahmezellen und -behälter in Silos und Speichern, Stahlkonstruktionen für Abstützung der Zellen, Rohrleitungen . . . Baueisen
- b) Bunker: Krananlage bzw. Förderanlage zum Beschicken des Bunkers, Wägeeinrichtung, Entleerrutsche, Verschlüsse Maschineneisen
Bunker, Gleisanlagen, Stahlkonstruktionen für Fördereinrichtung Baueisen
5. Industrieöfen
- Transportable Öfen, z. B. kleine Werkstattöfen, Härteöfen, z. B. Salzbäder Maschineneisen
Ortsfeste Öfen: Brenner, Brennstoffzuleitung, hitzebeständige Wärmeaustauscher, Schaltafeln, Beschickungseinrichtung, Türen bzw. Deckel, Transportbänder, kippbare Drehöfen (außer Fundamente) Maschineneisen
Träger und Stützen im Ofenmauerwerk, Blechverkleidungen, Eisenkonstruktion des Bauwerks zur Abstützung, Verankerungen, Arbeitsbühnen und Fundamente sowie Zu- und Abflußrohrleitungen Baueisen
6. Tankanlagen
- Pumpen, Rohrleitungen, Meßeinrichtungen, Behälter . . . Maschineneisen
Eisen in Fundamentierung, Stahlkonstruktion der Überdachung und Umbauung, Gerüste zum Begehen der Anlagen . . . Baueisen
7. Kühlhauseinrichtungen
- Kältemaschinen mit Rohrleitung, Verdampfer, Hängebahnen, Förderbänder Maschineneisen
Tragkonstruktionen, Türen, Gleisanlagen Baueisen
8. Sudhauseinrichtungen
- Bottiche, Leitungen Maschineneisen
stählerne Tragkonstruktionen Baueisen
9. Gaserzeugung
- Apparate für Gaserzeugung, -reinigung und -waschung usw. einschließlich Rohrleitung Maschineneisen
stählerne Tragkonstruktion, ebenso wie eingemauerte tragende Konstruktion Baueisen
10. Versorgungsleitungen
- Zum Baueisen gehört auch der Eisenaufwand für die Fortleitung und insbesondere auch die Fernleitung von elektrischem Strom, Gas, Wasser und Dampf, soweit es sich nicht um Eisen für Maschinenteile, elektrische Geräte und Apparaturen handelt. Die unter 1 bis 9 gegebenen Abgrenzungen sind für die Beurteilung im einzelnen zu berücksichtigen.

Die Industrie hat mit der Feststellung der richtig erteilten Maschinen- oder Baueisenkontrollnummer auch die Möglichkeit, festzustellen, ob sie eine Bescheinigung nach der ADFW auf SS- oder S-Dringlichkeitsstufen, die nur auf Wehrmachtskennziffern gegeben werden kann, benötigt oder ob sie die Bekanntgabe des G. B. Bau-Kennzeichens für das Bauvorhaben verlangen muß. In letzterem Falle ist der Auftrag nach der Anordnung Nr. 20 des G. B. Bau zu behandeln. Die Anordnung Nr. 20 ist im Reichs- und Preußischen Staatsanzeiger Nr. 72 vom 26. 3. 41 und die dazugehörige 1. Ausführungsbestimmung im Reichs- und Preußischen Staatsanzeiger Nr. 96 vom 26. 4. 41 veröffentlicht.

Der Auftragnehmer, soweit er nicht der eisenschaffenden Industrie angehört, ist gehalten, sich vom Besteller die Kennzeichnung des Bauvorhabens, für das die Bestellung gemacht ist, geben zu lassen. Aus dieser Kennzeichnung kann er die Baudringlichkeitsstufe ersehen. Die Kennzeichnung eines Bauvorhabens erfolgt durch den G. B. Bau durch die Verbindung folgender Angaben: an erster Stelle steht die Dringlichkeitsstufe durch eine arabische Ziffer gekennzeichnet, an zweiter Stelle steht die Kurzbezeichnung (Buchstaben) des Kontingenträgers, an dritter Stelle die Abkürzung für das zuständige Landeswirtschaftsamt und an letzter Stelle die laufende Nummer, unter der das Bauvorhaben in den entsprechenden Listen des G. B. Bau gebucht ist. Es bedeutet demnach:

1 N Bln 51 = ein Bauvorhaben der Dringlichkeitsstufe 1, für das der Kontingenträger N die Baustoffkontingente geben muß, das im Bezirk des Landeswirtschaftsamtes Berlin liegt und unter Nr. 51 in den Listen des G. B. Bau eingetragen ist. Der G. B. Bau hat fünf Dringlichkeitsstufen, nämlich: 0, 1, 2, 3 und 4 festgelegt. Die erste Zahl in der G. B. Bau-Kennzeichnung, die dem Auftragnehmer vollständig bekanntgegeben werden muß, ist stets die Dringlichkeitsstufe. Falls dem Auftragnehmer unvollständige Angaben über die Kennzeichnung des Bauvorhabens gemacht werden oder ihm nur die Baudringlichkeitsstufe bescheinigt wird, ist dieser gehalten, den Auftrag als Auftrag ohne Dringlichkeitsstufe zu behandeln. In besonderen Fällen stellt der G. B. Bau selbst Bescheinigungen über die Baudringlichkeitsstufe oder über Sonderkennzeichnungen aus. Nur derartige Bescheinigungen des G. B. Bau haben neben den oben angeführten normalen Kennzeichnungen der Bauvorhaben Gültigkeit. Ein Auftrag kann demnach entsprechend der Anordnung Nr. 20 nur behandelt werden, wenn das vollständige Kennzeichen des Bauvorhabens oder eine besondere Bescheinigung des G. B. Bau vorliegt. Die Änderung der Kennzeichnung kann nie vom Besteller oder Kontingenträger, sondern nur durch den G. B. Bau erfolgen.

Die Behandlung der mit Baudringlichkeitsstufen gekennzeichneten Aufträge erfolgt nach den in Ziffer 4 der Anordnung Nr. 20 festgelegten Richtlinien. Diese Richtlinien gelten für die eisen-, metall- und holzverarbeitenden Betriebe.

Aufträge der Baudringlichkeitsstufe 0 sind in die Fertigungsprogramme so aufzunehmen, daß sie möglichst fristgemäß erledigt werden können. Dementsprechend können von diesen Fertigungen keine Arbeiter abgezogen werden, auch nicht zu Arbeiten der Sonderstufen SS und S. Sollten sich Schwierigkeiten bei der Einreihung dieser Aufträge in die Fertigungsprogramme ergeben, ist der G. B. Bau zu verständigen, der in Verhandlung mit den zuständigen Zentralstellen einen Entscheid herbeiführen wird. In den Meldungen an den G. B. Bau müssen folgende Angaben enthalten sein: Verarbeitender Betrieb, bei dem die Schwierigkeiten sind, kurze Beschreibung des Auftrages, Gründe für die Schwierigkeiten, zuständige Rüstungsinspektion (Rü In) und zuständiges Rüstungskommando (Rü Ko), zuständiges Landeswirtschaftsamt, Kennzeichen des Bauvorhabens, für das die Lieferung bestimmt ist, der Bauherr, falls er nicht selbst Antragsteller ist, und möglichst die Zentralstelle (z. B. O. K. H. Wa), mit der verhandelt werden muß.

Von Arbeiten der Baudringlichkeitsstufe 1 können Arbeiter nur zugunsten von Arbeiten der Stufe SS und der Baudringlichkeitsstufe 0 innerhalb des gleichen Betriebes abgezogen werden. Aufträge der Baudringlichkeitsstufe 1 sind in die Fertigungsprogramme nach den gleichen Gesichtspunkten wie Aufträge für die Sonderstufe S aufzunehmen.

Arbeiten für die Baudringlichkeitsstufen 2, 3 und 4 können nur noch in dem Maße durchgeführt werden, wie Arbeitskräfte zur Verfügung stehen, die nicht für Arbeiten der Baudringlichkeitsstufen 0 und 1 und Fertigungen der Sonderstufen SS und S im gleichen Betriebe benötigt werden. Der Abzug von Arbeitskräften in andere Betriebe darf von Arbeiten der Baudringlichkeitsstufen 2, 3 und 4 nur zugunsten von Fertigungen der Sonderstufen SS und S erfolgen. Es ist damit noch ein kleines Volumen für Arbeiten dieser Baudringlichkeitsstufen gegeben. Es muß allerdings mit etwas längeren Lieferzeiten gerechnet werden. Die Betriebe sind gehalten, derartige Aufträge nicht abzulehnen oder zurückzugeben, sondern sie, soweit es möglich ist, in ihre Fertigungsprogramme aufzunehmen. Darüber hinaus kann in einzelnen Fällen durch Antragstellung beim G. B. Bau geklärt werden, ob ein Auftrag niederer Baudringlichkeitsstufe in ein Fertigungsprogramm aufgenommen werden muß. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß sich derartige Anträge auf Ausnahme- und besonders gelagerte Fälle beschränken müssen, da das zur Verfügung stehende Arbeitsvolumen durch die Vordringlichkeit der Arbeiten für die Baudringlichkeitsstufen 0 und 1 gering ist.

Für die Herstellung, Lieferung und Verarbeitung von Installationsmaterialien für Gas-, Wasser- und Elektrizitätsleitungen sowie Heizanlagen gelten ebenfalls nur die für die einzelnen Baudringlichkeitsstufen gegebenen Richtlinien.

Bei der Herstellung von Holzbauten, insbesondere von Baracken oder Barackenteilen, ist nur die Baudringlichkeitsstufe des Bauvorhabens maßgebend, für das die Lieferung bestimmt ist. Soweit es sich um Lieferungen von Baracken, die außerhalb eines Bauvorhabens errichtet werden, handelt, muß bei dem G. B. Bau eine Sonderkennzeichnung für die Bestellung beantragt werden. Barackenbestellungen für die Baudringlichkeitsstufe 0 können nur entsprechend den Richtlinien für Arbeiten der Baudringlichkeitsstufe 1 behandelt werden. Dies gilt auch für die zu den Baracken gehörigen Einrichtungsgegenstände. Stahlbauteile für Baracken sind entsprechend der gegebenen Baudringlichkeitsstufe, auch bei der 0-Stufe, in die Fertigungsprogramme aufzunehmen.

Für die verarbeitenden Betriebe sind damit klare Richtlinien für die Behandlung von Aufträgen für Baudringlichkeitsstufen gegeben. Schwieriger gestaltete sich jedoch die Regelung für die eisenschaffende Industrie. Materialbestellungen für Bauten erfolgen meistens in Spezifikationen, die auf die fertige Konstruktion zugeschnitten sind. Materialentnahmen aus Lagerbeständen sind selten. Es mußte demnach ein Verfahren gesucht werden, das einerseits Rücksicht auf diese Art der Materialbestellung nimmt und andererseits so elastisch ist, daß jederzeit eine Umsteuerung der Bevorzugung von Materiallieferungen entsprechend geänderter Bauprogramme möglich ist. Die Weitergabe des Bauvorhabenkennzeichens

oder der Baudringlichkeitsstufe an die eisenschaffende Industrie hätte jedoch zu einer schematischen Behandlung aller Aufträge führen müssen und sehr große Schwierigkeiten bei Umstellungen in der Baudringlichkeit gegeben. Es wurde deshalb das etwas umständlichere, aber sehr elastische Verfahren der Auflageerteilung durch die Reichsstelle für Eisen und Stahl gewählt.

Es ist deshalb angeordnet, daß die Weitergabe der Kennzeichen an die eisenschaffende Industrie zwecklos ist, da diese keinerlei Folgerungen aus der Bekanntgabe der Baudringlichkeitsstufe ziehen kann. Anträge zur Auflageerteilung zur Abkürzung von Lieferterminen bei der eisenschaffenden Industrie müssen von dem Materialbesteller über die die Kontrollnummer ausgebende Stelle an die Reichsstelle für Eisen und Stahl eingereicht werden. Der 1. Ausführungsbestimmung zur Anordnung Nr. 20 ist ein Muster eines Antragsvordruckes beigelegt. Auflagen werden nur erteilt, nachdem die Aufträge bei den Werken gebucht sind und die nicht ausreichenden Lieferzeiten festgestellt sind. Der Materialbesteller wird bemüht sein müssen, von seinen Lieferanten möglichst schnell die Angaben über Lieferwerk, Werksnummer, Zuweisungsnummer und Lieferzeiten zu erhalten, um den Antrag formgerecht stellen zu können. Auflagen werden nur entsprechend der tatsächlichen Verarbeitungsmöglichkeit des Materials, also nie für die gesamte Bestellmenge bei größeren Bestellungen, erteilt werden. Für jedes Lieferwerk und jede Werksnummer muß getrennter Antrag gestellt werden. Die Anträge sind in doppelter Fertigung einzureichen. Die Antragsvordrucke sind genauestens auszufüllen. Das Bauvorhaben darf nur mit der G. B. Bau-Kennzeichnung, aus der die Baudringlichkeitsstufe zu ersehen ist, genannt werden. Die Kontrollnummer ist mit der Quartalsbezeichnung anzugeben. Wichtig ist die Abgabe der Erklärung, daß die vom Besteller geforderten Termine nicht kürzer sind, als zur Ausführung des Auftrages unbedingt erforderlich ist, und daß das bestellte Material nicht aus Beständen entnommen werden kann. Diese Angaben werden durch Beauftragte der Reichsstelle für Eisen und Stahl und des G. B. Bau überprüft werden. Der Materialbesteller gibt den Antrag an die die Kontrollnummer ausgebende Stelle, die ihm vom Bauherrn genannt werden muß. Mangelhafte Angaben führen zu Rückfragen und damit zu weiteren Terminverzögerungen.

Die prüfende Stelle ist angewiesen, die ihr vorliegenden Anträge einer scharfen Prüfung zu unterziehen und nur solche Anträge an die Reichsstelle für Eisen und Stahl weiterzuleiten, die alle erforderlichen Angaben enthalten. Vor allem ist zu prüfen, ob durch Zurückstellung anderer Aufträge oder bereits erteilter Auflagen Kapazitäten bei den Werken für die beantragte Auflage frei gemacht werden können. Im Prüfungsvermerk sind hierüber Angaben zu machen. Mangelhaft ausgefüllte Anträge sind an die Antragsteller sofort zurückzugeben. Die geprüften Anträge werden bei Zustimmung durch die prüfende Stelle an die Reichsstelle für Eisen und Stahl weitergegeben, die bei Auflageerteilung eine Fertigung des Antrages mit ihrem Vermerk versehen an den Antragsteller zurückreicht. Anträge, die von Antragstellern unter Übergehung der die Kontrollnummer ausgebenden Stelle bei der Reichsstelle eingereicht werden, werden von dieser weder bearbeitet noch beantwortet. Rückfragen nach solchen Anträgen sind demnach auch zwecklos.

Ich habe dieses Verfahren eingehend behandelt, da ich immer wieder die Beobachtung machen konnte, daß von Firmen sowohl bei Anträgen auf Terminverfolgungen und auf Auflageerteilungen sehr unvollständige Angaben gemacht wurden. Es sei deshalb auch das Muster des Antragsvordruckes hier nochmals angefügt:

Antrag auf Auflageerteilung zur Abkürzung des Liefertermins.

Die Firma in
hat für das Bauvorhaben:
und den Bauherrn: in
Lieferungen auszuführen und dementsprechend auf folgende Kontrollnummer:
am (Tag der Bestellung)
bei der Handelsfirma in
das nachfolgende Material bestellt:

Menge t	Material	Güte	Lieferwerk	Werks-Nr. und Zuweisgs.-Nr.	Lieferzeit	
					vom Werk genannt	v. Besteller gefordert

Ich bestätige(n), daß die von mir geforderte Lieferzeit nicht kürzer ist, als unbedingt zur Durchführung meines Auftrages erforderlich ist, und daß das Material nicht aus eigenen Lagerbeständen entnommen werden kann.

Ort:
Rechtsverbindliche Unterschrift des Antragstellers:

Prüfungsvermerk der die Kontrollnummer ausgebenden Stelle:

Ort:
Prüfstelle:
Unterschrift:

Vermerk der Reichsstelle für Eisen und Stahl:

Schwierigkeiten werden sich in der ersten Zeit hauptsächlich bei Fertigungen für Bauvorhaben ergeben, die in Gebieten liegen, in denen die Anordnungen des G. B. Bau nicht eingeführt sind, wie z. B. ein Teil der neu erworbenen Gebiete und die besetzten Gebiete. Es wird sich empfehlen, daß die Bauherren für derartige Fertigungen beim G. B. Bau eine Sonderkennzeichnung beantragen. Anträge auf Sonderkennzeichnung sollten möglichst folgende Angaben enthalten: ausführende Firma, Größe des Auftrages, möglichst mit Angabe der Menge der zu verarbeitenden Stoffe, Auftragsnummer, Bauort.

Für die Montage der Konstruktionsteile gelten selbstverständlich ebenfalls die Richtlinien der Anordnung Nr. 20. Keine Anwendung findet jedoch die Anordnung Nr. 20 auf die Baustoffindustrie, für die die im Erlaß II S Jn 1/569/41 g vom 26. 3. 41 des Reichswirtschaftsministers bekanntgegebenen „Richtlinien über die Einschränkung der Fertigungen Nr. 8 Baustoffindustrie“ gelten. Für die Beschaffung von Baumaschinen und Baugeräten gelten die seitherigen Bestimmungen des G. B. Bau (10. Anordnung vom 20. 2. 40; Merkblatt 4 vom 2. 5. 39; Merkblatt 6 vom 16. 1. 40). Es darf angenommen werden, daß die Betriebe selbstverständlich auch noch die außerhalb von Baudringlichkeitsstufen liegenden Aufträge für Reparatur- und Unterhaltungsbedarf von Versorgungsleitungen und Baukonstruktionen ausführen.

Es kann erwartet werden, daß mit der Anordnung Nr. 20 Klarheit über die Möglichkeit der Fertigung von Bauvorhaben geschaffen ist. In der Einlaufzeit dieser Anordnung werden sich allerdings eine große Anzahl von Rückfragen bei Lieferanten, Bauherren, Kontigentträgern und auch beim G. B. Bau ergeben, die sich aber bei vollständiger Beachtung der Anordnung und der dazugehörigen Ausführungsbestimmungen auf ein Kleinstmaß beschränken lassen. Es darf vor allem von den Bauherren und Kontigentträgern erwartet werden, daß die seither geübte Sitte der Ausstellung von Dringlichkeitsbescheinigungen mit zum Teil phantasiereichen Begründungen und Kennzeichnungen nunmehr endlich begraben wird und nur noch Bescheinigungen über das Bauvorhabenkennzeichen ausgestellt werden. Von den Betrieben werden für die Zukunft andere Bescheinigungen sofort in den Papierkorb gegeben werden können. Je verständnisvoller Bauherren und Betriebe die in der Anordnung Nr. 20 gegebenen Vorschriften und Richtlinien handhaben und beachten, um so mehr ist Gewähr gegeben, daß die Betriebe durch starke Konzentration ihrer Fertigungsmöglichkeiten auf die wichtigsten Aufträge den Bauherren die Möglichkeit für fristgemäße Fertigstellung kriegsentscheidender oder kriegswichtiger Bauvorhaben geben.

INHALT: Große Werkhalle für den Zusammenbau von Eisenbahngüterwagen. — Die Werkstoff-Fragen beim Schweißen dicker Abmessungen von St 52. (Schluß.) — Fertigungen und Baudringlichkeitsstufen.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöpper, Darmstadt. — Verlag: Wih. Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule

Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 4. Juli 1941

Heft 14/15

Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung.¹⁾

Einfeldrige und durchlaufende Versteifungsträger mit konstantem und veränderlichem Trägheitsmoment.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Dr.-Ing. Kuo-hao Lie, Darmstadt.

I. Abschnitt.

Allgemeines über die Hängebrückenberechnung.

In der Baustatik wird die in den meisten Fällen praktisch zulässige Annahme gemacht, daß die Verformung des Tragwerks infolge der Belastung sehr klein ist und vernachlässigt werden kann (Theorie I. Ordnung). Es gibt aber Systeme, bei denen die Auswirkung der Systemverformung nicht als bedeutungslos betrachtet werden darf. Hierzu gehört in erster Linie die in der vorliegenden Arbeit zu behandelnde versteifte Hängebrücke, deren Hängegurt im Boden verankert ist. Bei größeren Tragwerken dieser Art können die Schnittgrößen in ihrem Versteifungsträger durch die Berücksichtigung der Systemverformung im Kräftespiel (Theorie II. Ordnung) größenordnungsmäßig um 50% vermindert werden, und infolgedessen ist die Anwendung der Theorie II. Ordnung in diesem Fall aus Wirtschaftlichkeitsgründen geboten.

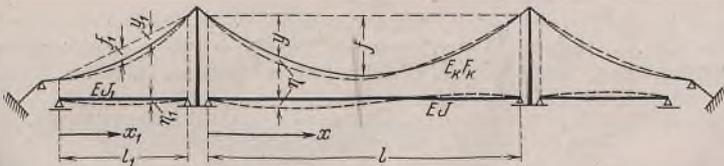


Bild 1.

Das Kräftespiel in der Hängebrücke gehorcht zwei Grundgleichungen²⁾ (Bild 1).

$$(1) \quad (E J \eta''')' = p + y'' H_p + H \eta'' \quad \text{und}$$

$$(2) \quad H_p \cdot \frac{L}{E_K F_K} \pm \alpha_t t L_1 + \int y'' \eta dx = 0.$$

Darin sind

$$(3a) \quad L = \int \frac{F_K^0 dx}{F_K \cdot \cos^3 \varphi},$$

$$(3b) \quad L_1 = \int \frac{dx}{\cos^2 \varphi},$$

H die horizontale Komponente des Kabelzuges infolge der ständigen Last g und der Verkehrslast p sowie der Temperaturschwankungen $\pm t$,

H_g die horizontale Komponente des Kabelzuges infolge g bei normaler Temperatur und

$$H_p = H - H_g.$$

Weitere Bezeichnungen gehen aus Bild 1 hervor.

Gl. (1) benutzt man zur Berechnung der Durchbiegungen und Biege-
winkel sowie der Momente und Querkräfte des Versteifungsträgers³⁾ und
Gl. (2) zur Bestimmung des horizontalen Kabelzuges.

Schwierig bei der praktischen Berechnung ist es, daß H und die
Schnittgrößen des Versteifungsträgers komplizierte Funktionen voneinander

¹⁾ Auszug aus der von der Abteilung für Bauingenieurwesen der
Technischen Hochschule Darmstadt genehmigten Dissertation. Für die
Anregung zu dieser Arbeit sei Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt,
bestens gedankt.

²⁾ Die Ableitung der beiden Grundgleichungen enthält die unter der
Fußnote 1 genannte Dissertation.

³⁾ Falls der Versteifungsträger z. B. in den Seitenöffnungen nicht am
Kabel aufgehängt ist, so gilt hierfür statt Gl. (1) die einfachere Differential-
gleichung:

$$(1a) \quad (E J_1 \eta_1''')' = p.$$

sind, so daß die Lösung nur durch Annahme von H versuchsweise ge-
funden werden kann. Es ist aber nicht leicht, die Größe von H sehr
gut zu schätzen und mit geringem Arbeitsaufwand zu verbessern. Man
nimmt gewöhnlich den aus der Näherungstheorie gewonnenen Wert als
erste Näherung an. Dieser Wert weicht im allgemeinen auch nicht viel
von dem genauen ab, selten über 5%.

Eine weitere Schwierigkeit liegt darin, daß sich alle statischen Größen
nicht mehr durch lineare Funktionen von der Belastung p darstellen lassen,
so daß das Superpositionsgesetz seine Gültigkeit verliert und infolgedessen
keine eigentlichen allgemein gültigen Einflußlinien benutzt werden können.
Um eine Schnittgröße zu ermitteln, muß man entweder zwei oder drei
„beschränkte Einflußlinien“⁴⁾ anwenden oder für eine näherungsweise
ungünstigste Laststellung die Berechnung durchführen.

Eine weitere Schwierigkeit ergibt sich durch die Berücksichtigung
der Veränderlichkeit des Trägheitsmoments der Versteifungsträger. Die
Unannehmlichkeit des veränderlichen Trägheitsmoments macht sich ja
schon bei einfachen Balkentragwerken fühlbar. Aber bei der Berechnung
von Hängebrücken wachsen die dadurch entstehenden Schwierigkeiten
und Umstände noch in weit stärkerem Maße.

Aus den vorstehenden Ausführungen geht hervor, daß ein praktisches
Berechnungsverfahren folgende Anforderungen zu erfüllen hat:

1. Der angenommene horizontale Kabelzug H soll leicht und schnell
berichtigt werden können.

2. Für den Fall des Versteifungsträgers mit veränderlichem J soll
ein Minimum an Rechenarbeit erzielt werden.

3. Das Verfahren soll anschaulich und übersichtlich sein, um die
Berechnung zu erleichtern und die Fehler auszuschalten, was besonders
beim System mit durchlaufendem Versteifungsträger zu beachten ist.

4. Es sollen sich ferner die beschränkten Einflußlinien ermitteln lassen,
um die genauen Größtwerte oder die ungünstigsten Laststellungen der
Schnittgrößen zu bestimmen.

Nachdem J. Melan [1]⁵⁾ als erster auf die Notwendigkeit, die System-
verformung bei der Berechnung der Hängebrücken zu berücksichtigen,
hingewiesen und dafür ein Berechnungsverfahren entwickelt hatte, sind
dann viele Arbeiten und Verfahren⁶⁾ veröffentlicht worden. Aber ein
befriedigendes praktisches Berechnungsverfahren konnte im einschlägigen
Schrifttum noch nicht festgestellt werden. Diese Lücke schließen zu
helfen, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Im folgenden werden ein
genaues und ein Annäherungsverfahren entwickelt, die sowohl für Hänge-
brücken mit einfeldrigen als auch für solche mit durchlaufenden Ver-
steifungsträgern anwendbar sein sollen. Das genaue Verfahren soll zur
Berechnung der Systeme mit Versteifungsträgern von öfFnungsweise kon-
stantem J dienen, während das Annäherungsverfahren für den Fall des
veränderlichen Trägheitsmoments verwendet wird.

II. Abschnitt.

Das genaue Verfahren zur Berechnung der Hängebrücken mit Versteifungsträgern von öfFnungsweise konstantem J .

1. Grundlegende Betrachtungen.

Bild 2 stellt drei Träger dar, die durch verschiedene Querlasten, aber
gleich große Axialzugkraft H belastet sind. Es gilt

$$\text{für den Träger (b): } (E J \eta_b''')' = p + H \eta_b'',$$

$$\text{für den Träger (c): } (E J \eta_c''')' = y'' H_p + H \eta_c''.$$

⁴⁾ Im folgenden wird dieser Ausdruck benutzt. Hierunter versteht
man die nach der Theorie II. Ordnung ermittelte Einflußlinie, deren
Gültigkeit beschränkt ist (siehe später).

⁵⁾ Die Zahl in der Klammer bezieht sich auf die am Schluß zusammen-
gestellten Veröffentlichungen.

⁶⁾ Wegen der Erörterung der verschiedenen Berechnungsverfahren
sei auf die Dissertation (Fußnote 1) verwiesen.

Addiert man die beiden Gleichungen, so erhält man mit $\eta = \eta_b + \eta_c$ die Differentialgleichung der Biegelinie des Trägers (a) zu

$$(EJ \eta''')' = p + y'' H_p + H \eta''.$$

Diese Gleichung ist identisch mit der Grundgleichung (1) der Hängebrücke. Hieraus folgt, daß man eine Hängebrücke statisch durch einen ihrem Versteifungsträger entsprechenden „stellvertretenden Träger“ ersetzen kann, der durch die Querlasten p und $y'' H_p$ und durch eine gedachte Axialzugkraft H belastet ist⁷⁾. Ferner erkennt man, daß bei konstantem H auch für den stellvertretenden Träger das Superpositions-gesetz gilt, weil ja die Differentialgleichung linear ist. Hierauf kommen wir später noch zurück.

Das angegebene Gedankenmodell des stellvertretenden Trägers ist von Nutzen, weil dadurch die schwer zu durchschauende Berechnung der Hängebrücken sehr leicht zu veranschaulichen ist und die verschiedenen Einzeleinflüsse getrennt untersucht werden können. Bei der Berechnung eines solchen Trägers kommt nur die Bestimmung des Horizontalzuges H für den betreffenden gesamten Lastfall hinzu. Auch diese Aufgabe kann man mit Hilfe des gedachten Trägers folgendermaßen lösen. Aus der Bestimmungsgleichung (2) für H_p ersehen wir, daß H_p außer von den festen Größen des Systems nur noch von dem unbekanntem Ausdruck $\int y'' \eta dx$, der den Einfluß der Verkehrslast umfaßt, abhängig ist. In diesem Ausdruck ist mit der üblichen Annahme, daß die Kabelkurve unter der Belastung von g die Form einer quadratischen Parabel annimmt, $y'' = \text{konstant}$ und kann vor das Integral gesetzt werden. Als einzige Unbekannte bleibt nun $\int \eta dx$. Dieses Integral stellt eine anschauliche Größe dar, nämlich die Fläche der Biegelinie des Versteifungsträgers F_η . Diesen Wert kann man aber ohne weiteres auch am gedachten Träger bestimmen. Damit ist die Hängebrücke hinsichtlich der statischen Untersuchung vollkommen auf einen stellvertretenden Träger zurückgeführt.

Wie schon erwähnt, gilt für den Träger mit konstantem H das Superpositions-gesetz. Dadurch läßt sich jede komplizierte Belastung der Hängebrücke in zwei oder drei Grundlastfälle zerlegen. Statt einer komplizierten unklaren Berechnung macht man zwei oder drei einfache Teilberechnungen. Bei Hängebrücken mit einfachen Versteifungsträgern werden die statischen Größen des Versteifungsträgers immer als Summe aus zwei Teilzuständen p und $y'' H_p$ ermittelt (Bild 2):

$$(4) \quad \begin{cases} \eta_a = \eta_b + \eta_c, \\ M_a = M_b + M_c, \\ Q_a = Q_b + Q_c. \end{cases}$$

Die Belastungsstrecke und die Laststellung von p sind jeweils sehr verschieden, während $y'' H_p$ sich immer über die ganze Öffnung erstreckt.

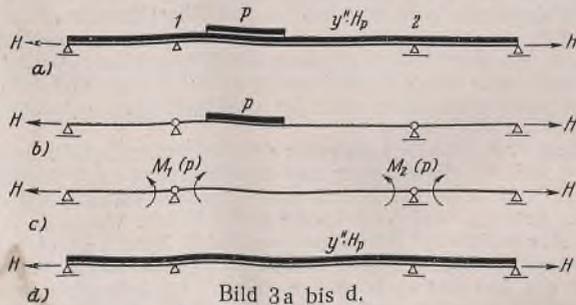


Bild 2a bis d.

Beim durchlaufenden Versteifungsträger kommen noch die Stützmomente hinzu. In diesem Fall empfiehlt es sich, die statischen Größen in drei Teilzuständen nach Bild 3 getrennt zu berechnen und daraus die Summe zu bilden:

$$(5) \quad \begin{cases} \eta_a = \eta_b + \eta_c + \eta_d, \\ M_a = M_b + M_c + M_d, \\ Q_a = Q_b + Q_c + Q_d. \end{cases}$$

An dieser Stelle wollen wir die Berechnung der Stützmomente des stellvertretenden Trägers vorausschicken. Wie beim Durchlaufbalken mit nur Querlast stehen uns hierzu auch die Kontinuitätsbedingung über den Stützen und das Superpositions-gesetz zur Verfügung. Ein Unterschied besteht nur darin, daß im vorliegenden Fall der Einfluß der axialen Zugkraft H bei der Ermittlung der Tangentendrehwinkel an den Trägerenden berücksichtigt werden muß.

⁷⁾ Das H soll nur jeweils mit dem Hebelarm η am Träger angreifen und keine Zugspannung im Versteifungsträger erzeugen. Ferner ist zu beachten, daß $y'' H_p$ und H nur auf den am Kabel aufgehängten Teil des Versteifungsträgers wirken, weil für die nicht aufgehängten Teile Gl. (1a) gilt.

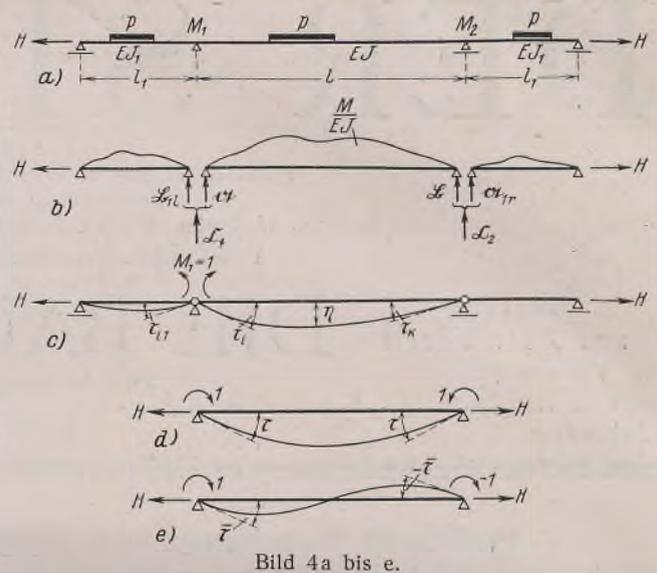


Bild 4a bis e.

Bild 4 möge z. B. einen dreifeldrigen symmetrischen Durchlaufträger mit Axialzug H darstellen. Aus der Kontinuitätsbedingung über den Stützen folgt unter Beachtung der Symmetrie

$$\begin{aligned} M_1(\tau_{i1} + \tau_i) + M_2 \tau_k &= -\mathcal{C}_1, \\ M_2(\tau_{i1} + \tau_i) + M_1 \tau_k &= -\mathcal{C}_2. \end{aligned}$$

Addiert und subtrahiert man beide Gleichungen und beachtet, daß (Bild 4d und e)

$$\tau_i + \tau_k = \tau \quad \text{und} \quad \tau_i - \tau_k = \bar{\tau}$$

sind, so erhält man

$$(6) \quad \begin{cases} M_1 + M_2 = -\frac{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2}{\tau_{i1} + \tau} = -\frac{\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2}{\varphi}, \\ M_1 - M_2 = -\frac{\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2}{\tau_{i1} - \tau} = -\frac{\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}_2}{\bar{\varphi}}. \end{cases}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst. Beim Träger über mehr als drei Öffnungen kann man auf ähnliche Weise verfahren. Es sind wie beim gewöhnlichen Durchlaufbalken dreigliedrige Gleichungen aufzustellen und zu lösen.

II. Formeln für Momente, Querkräfte, Durchbiegungen, Biegeflächen und Tangentendrehwinkel.

Nachstehend wird das Verfahren der unmittelbaren Integration der Differentialgleichung (1) angewendet, weil der Nachteil dieses Verfahrens, die Bestimmung der lästigen Integrationskonstanten, durch die Zerlegung der Belastung in Teilzustände wegfällt und eine unempfindliche Bestimmungsgleichung für H_p entwickelt werden kann. Im folgenden soll das Verfahren an zwei Lastfällen gezeigt werden.

(1) Einzellast (Bild 5). Die Differentialgleichung eines durch Querlast p und Axialzug H belasteten Trägers heißt

$$(EJ \eta''')' = p + H \eta''.$$

Durch zweimalige Integration geht diese Gleichung über in

$$(7) \quad \eta'' = -\frac{M^0}{EJ} + \frac{H \eta}{EJ}.$$

Darin ist M^0 das Moment des Einfachbalkens (ohne H) infolge p , im vorliegenden Fall infolge P . Mit den Abkürzungen

$$(8) \quad \beta = \sqrt{\frac{H}{EJ}} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{1}{2} \cdot \beta$$

lautet dann die Lösung der Gl. (7)

$$(9) \quad \begin{cases} \text{für die Strecke } a \\ \eta_1 = A \cdot \sin \beta x + B \cdot \cos \beta x + \frac{1}{H} \left(M_x^0 + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{d^2 M_x^0}{dx^2} + \dots \right) \\ \text{und für Strecke } b \\ \eta_2 = C \cdot \sin \beta x + D \cdot \cos \beta x + \frac{1}{H} \left(M_x^0 + \frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{d^2 M_x^0}{dx^2} + \dots \right). \end{cases}$$

Im vorstehenden Fall ist innerhalb der Strecken a und b $\frac{d^2 M^0}{dx^2} = 0$.

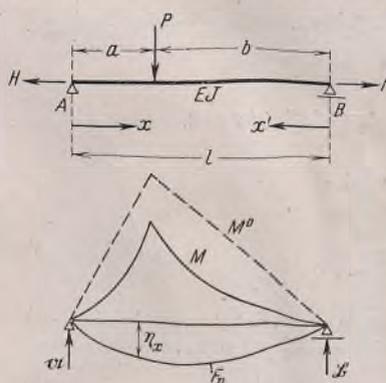


Bild 5.

Die vier Integrationskonstanten A, B, C und D bestimmt man mit Hilfe der folgenden vier Bedingungen:

- (1) und (2): Für $x=0$ und $x=l$ ist $\eta=0$.
- (3) und (4): Für $x=a$ sind $\eta_1=\eta_2$ und $\frac{d\eta_1}{dx}=\frac{d\eta_2}{dx}$.

Rechnet man die Konstanten aus und setzt sie in Gl. (9) ein, dann erhält man nach einer Umformung die Durchbiegung

$$(10) \begin{cases} \text{für die Strecke } a & \eta_1 = \frac{M_x^0}{H} - \frac{P}{H} \cdot \frac{\sin b\beta}{\beta \cdot \sin 2\alpha} \cdot \sin \beta x \\ \text{und für die Strecke } b & \eta_2 = \frac{M_x^0}{H} - \frac{P}{H} \cdot \frac{\sin a\beta}{\beta \cdot \sin 2\alpha} \cdot \sin \beta x' \end{cases}$$

Die Ausdrücke für M kann man entweder nach $M = -EJ\eta''$ berechnen oder einfacher aus der Beziehung

$$M_x = M_x^0 - H\eta$$

ermitteln. Hieraus folgt

$$(11) \begin{cases} \text{für die Strecke } a & M_x = P \cdot \frac{\sin b\beta}{\beta \cdot \sin 2\alpha} \cdot \sin \beta x \\ \text{und für die Strecke } b & M_x = P \cdot \frac{\sin a\beta}{\beta \cdot \sin 2\alpha} \cdot \sin \beta x' \end{cases}$$

Differenziert man Gl. (11), so ergibt sich die Querkraft

$$(12) \begin{cases} \text{für die Strecke } a & Q_x = P \cdot \frac{\sin b\beta}{\sin 2\alpha} \cdot \cos \beta x \\ \text{und für die Strecke } b & Q_x = -P \cdot \frac{\sin a\beta}{\sin 2\alpha} \cdot \cos \beta x' \end{cases}$$

Die Biegefläche erhält man, indem man Gl. (10) integriert:

$$F_\eta = \int_0^a \eta_1 dx + \int_0^b \eta_2 dx' = \frac{1}{H} \left[F_{M^0} - \frac{P}{\beta^2} \left(1 - \frac{\sin a\beta + \sin b\beta}{\sin 2\alpha} \right) \right]$$

Darin bedeutet F_{M^0} die Momentenfläche von M^0 des gewöhnlichen Einfaßbalkens. Im vorliegenden Fall ist $F_{M^0} = \frac{1}{2} \cdot Pab$. Obige Formel geht nach einer Umformung über in

$$(13) HF_\eta = P \cdot \frac{ab}{2} - \frac{P}{\beta^2} \left(1 - \frac{\cos \left(\frac{l}{2} - a \right) \beta}{\cos \alpha} \right)$$

Zur Bestimmung von H_p braucht man nur F_η . Da in allen Lastfällen der Ausdruck für F_η das H im Nenner enthält, wird später zwecks der bequemeren Rechnung die Bestimmungsgleichung für H_p so entwickelt, daß man den Ausdruck HF_η unmittelbar benutzen kann.

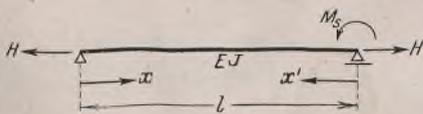


Bild 6.

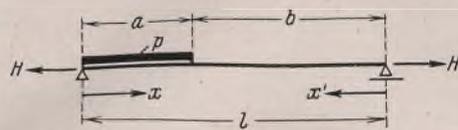


Bild 7.

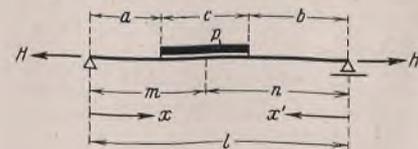


Bild 8.

Differenziert man Gl. (10) und setzt $x=0$ und $x'=0$, so erhält man die Tangentendrehwinkel an den Trägerenden, die wie die Belastungsglieder des gewöhnlichen Balkens mit deutschen Buchstaben bezeichnet werden. Da in den Ausdrücken der Tangentendrehwinkel infolge der Belastung und der Stützmomente $M_s=1$ das H im Nenner auftritt, kann man sie bei der Ermittlung der Stützmomente unmittelbar in H -facher Größe benutzen, weil sich das H in der Rechnung von selbst aufhebt. Die Belastungsglieder heißen also im vorliegenden Fall

$$(14) \begin{cases} H\tau_a = H\mathfrak{A} = A^0 - P \cdot \frac{\sin b\beta}{\sin 2\alpha} \\ H\tau_b = H\mathfrak{B} = B^0 - P \cdot \frac{\sin a\beta}{\sin 2\alpha} \end{cases}$$

Das zweite Glied auf der rechten Seite der obigen Gleichungen erhält man auch, wenn man in Gl. (12) x und x' gleich Null setzt. Das heißt, sie sind nichts anderes als die Auflagerdrücke A und B des Trägers mit Axialzug H . Diese Beziehung gilt auch für die anderen Lastfälle. Man kann daher die Auflagerdrücke A und B aus der Formel für die Belastungsglieder $H\mathfrak{A}$ und $H\mathfrak{B}$ berechnen.

Damit verfügen wir nunmehr über alle nötigen Größen für diesen Lastfall. Aus den Gl. (10) bis (14) erkennt man, daß die statischen Größen der Last P proportional sind, wenn das H sich nicht ändert. Das ist der Beweis für das anfangs Gesagte, daß das Superpositions-gesetz auch in diesem Fall Gültigkeit besitzt.

(2) Moment am Trägerende (Bild 6). Aus Gl. (9) folgt unter Beachtung $\frac{d^2 M^0}{dx^2} = 0$ und der Randbedingungen die Lösung für die Durchbiegung

$$(15) \eta_x = \frac{M_s}{H} \left(\frac{x}{l} - \frac{\sin \beta x}{\sin 2\alpha} \right)$$

und daraus ergeben sich wie in (1)

$$(16) M_x = M_s \cdot \frac{\sin \beta x}{\sin 2\alpha}$$

$$(17) Q_x = M_s \cdot \frac{\beta \cdot \cos \beta x}{\sin 2\alpha}$$

$$(18a) H\tau_a = M_s \left(\frac{1}{l} - \frac{\beta}{\sin 2\alpha} \right)$$

$$(18b) H\tau_b = M_s \left(\frac{\beta}{\sin 2\alpha} - \frac{1}{l} \right) \quad \text{und} \quad HF_\eta = \frac{M_s l}{2} \left(1 - \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} \right)$$

Da der Klammerausdruck der Biegefläche auch in anderen Formeln oft vorkommt, wird er zur Abkürzung⁵⁾ gesetzt

$$(19a) k = 1 - \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}$$

Damit ergibt sich

$$(19) HF_\eta = \frac{M_s l}{2} \cdot k$$

Im folgenden mögen noch die Formeln für vier andere wichtige Lastfälle zusammengestellt werden. Aus den Formeln der sechs Lastfälle lassen sich diejenigen für andere beliebige Belastungen ohne weiteres ableiten.

(3) Bild 7:

$$(20a) a \quad M_x = \frac{p}{\beta^2} \left(1 - \frac{\sin \beta x' + \cos b\beta \cdot \sin \beta x}{\sin 2\alpha} \right)$$

$$(20b) b \quad M_x = \frac{p}{\beta^2} \cdot \frac{\cos a\beta - 1}{\sin 2\alpha} \cdot \sin \beta x'$$

$$(20c) Q_a = -\frac{p}{\beta} \cdot \frac{\cos a\beta - 1}{\sin 2\alpha} \cdot \cos b\beta, \quad \eta_x = \frac{M_x^0 - M_x}{H}$$

$$(20d) \begin{cases} HF_\eta = F_{M^0} - \frac{2p}{\beta^2} \left(\frac{a}{2} - \frac{\sin \frac{a}{2} \cdot \beta \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \beta}{\beta \cdot \cos \alpha} \right) \\ F_{M^0} = \frac{p a^2}{12} (3l - 2a) \end{cases}$$

$$(20e) H\mathfrak{A} = A^0 - \frac{p}{\beta} \cdot \frac{\cos 2\alpha - \cos b\beta}{\sin 2\alpha}$$

$$(20f) H\mathfrak{B} = B^0 - \frac{p}{\beta} \cdot \frac{\cos a\beta - 1}{\sin 2\alpha}$$

(4) Bild 8:

$$(21a) c \quad M_x = \frac{p}{\beta^2} \left(1 - \frac{\cos a\beta \cdot \sin \beta x' + \cos b\beta \cdot \sin \beta x}{\sin 2\alpha} \right)$$

$$(21b) Q_a = \frac{2p}{\beta} \cdot \frac{\sin m\beta \cdot \sin \frac{c}{2} \cdot \beta}{\sin 2\alpha} \cdot \cos \beta a$$

$$(21c) \begin{cases} HF_\eta = F_{M^0} - \frac{2p}{\beta^2} \left(\frac{c}{2} - \frac{\sin \frac{c}{2} \cdot \beta \cdot \cos \frac{m-n}{2} \cdot \beta}{\beta \cdot \cos \alpha} \right) \\ F_{M^0} = \frac{1}{24} \cdot p c (12mn - c^2) \end{cases}$$

$$(21d) H\mathfrak{A} = A^0 - \frac{2p}{\beta} \cdot \frac{\sin n\beta \cdot \sin \frac{c}{2} \cdot \beta}{\sin 2\alpha}$$

$$(21e) H\mathfrak{B} = B^0 - \frac{2p}{\beta} \cdot \frac{\sin m\beta \cdot \sin \frac{c}{2} \cdot \beta}{\sin 2\alpha}$$

⁵⁾ Der Beiwert k ist eine Funktion von α . Für verschiedene α kann man ihn aus der Tafel im Stahlbau-Kalender 1941, S. 118, entnehmen. Dort ist er mit c_α bezeichnet, aber das α ist dasselbe. Für α zwischen den in der Tafel angegebenen Stufen kann man k mit ausreichender Genauigkeit geradlinig einschalten.

(5) Bild 9:

$$(22a) \quad \begin{cases} M_x = \frac{p}{\beta^2} \left(1 - \frac{\sin \beta x + \sin \beta x'}{\sin 2\alpha} \right) \text{ oder} \\ = \frac{p}{\beta^2} \left(1 - \frac{\cos \left(\frac{l}{2} - x \right) \beta}{\cos \alpha} \right), \end{cases}$$

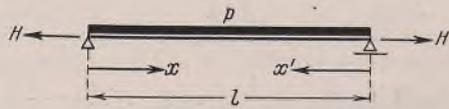


Bild 9.

$$(22b) \quad Q_x = \frac{p}{\beta} \cdot \frac{\cos \beta x' - \cos \beta x}{\sin 2\alpha} = \frac{p}{\beta} \cdot \frac{\sin \left(\frac{l}{2} - x \right) \beta}{\cos \alpha},$$

$$(22c) \quad \eta_x = \frac{M_x - M_x'}{H},$$

$$(22d) \quad HF_\eta = \frac{pl^3}{12} - pl \cdot \frac{k}{\beta^2},$$

$$(22e) \quad H\mathfrak{A} = H\mathfrak{B} = \frac{pl}{2} \cdot k.$$

(6) Bild 10:

Stützenmomente:

$$(23a) \quad M_1 = M_2 = -\frac{pl}{2} \cdot \frac{K'}{\varphi}, \quad K' = k + \frac{p_1 l_1}{pl} k_1.$$

Mittelloffnung:

$$(23b) \quad M_x = \frac{p}{\beta^2} \left(1 - \frac{\sin \beta x + \sin \beta x'}{\sin 2\alpha} \right) + M_1 \cdot \frac{\sin \beta x + \sin \beta x'}{\sin 2\alpha},$$

$$(23c) \quad Q_x = \beta \left(\frac{p}{\beta^2} - M_1 \right) \frac{\cos \beta x' - \cos \beta x}{\sin 2\alpha},$$

$$(23d) \quad \eta_x = \frac{M_x^0 + M_1 - M_x}{H}, \quad M_x^0 = \frac{pxx'}{2}.$$

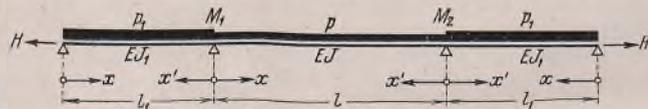


Bild 10.

Seitenöffnung:

$$(23e) \quad M_x = \frac{p_1}{\beta_1^2} \left(1 - \frac{\sin \beta_1 x + \sin \beta_1 x'}{\sin 2\alpha_1} \right) + M_1 \cdot \frac{\sin \beta_1 x}{\sin 2\alpha_1},$$

$$(23f) \quad Q_x = \frac{p_1}{\beta_1} \cdot \frac{\cos \beta_1 x' - \cos \beta_1 x}{\sin 2\alpha_1} + M_1 \cdot \frac{\beta_1 \cdot \cos \beta_1 x}{\sin 2\alpha_1},$$

$$(23g) \quad \eta_x = \frac{M_x^0 + M_1 \cdot \frac{x}{l_1} - M_x}{H}, \quad M_x^0 = \frac{p_1 x x'}{2}.$$

III. Formeln für den Horizontalzug H_p .

A. Systeme mit einfeldrigen Versteifungsträgern.

Die allgemeine Bestimmungsgleichung (2) geht über in

$$(24) \quad H_p \cdot \frac{L}{E_K F_K^0} \pm \alpha_t t L_t + y'' F_\eta = 0,$$

wenn man, wie bereits erwähnt, die konstante Größe y'' vor das Integral setzt und dieses mit F_η bezeichnet. Diese Gleichung kann an sich schon zur Bestimmung der H_p -Kraft benutzt werden, ist jedoch ungeeignet für den praktischen Gebrauch und muß daher weiter entwickelt werden.

Es soll zunächst eine ganz allgemeine Bestimmungsgleichung abgeleitet werden, die für Hängebrücken von beliebig vielen Öffnungen gilt. Hierzu schicken wir folgendes voraus:

$$(25) \quad \begin{cases} y_1'' = -\frac{8f_1}{l_1^2} = -\frac{1}{\varrho_1} \\ \dots \\ y_n'' = -\frac{8f_n}{l_n^2} = -\frac{1}{\varrho_n} \\ y_c'' = -\frac{8f_c}{l_c^2} = -\frac{1}{\varrho_c} \end{cases}$$

$$(25') \quad \lambda_1 = \frac{\varrho_c}{\varrho_1}, \dots, \lambda_n = \frac{\varrho_c}{\varrho_n}.$$

Falls die im Anfangszustand vom Kabel aufgenommene ständige Last g in allen Öffnungen gleich groß ist, wird auch ϱ überall gleich, und damit ist $\lambda = 1$.

Wir multiplizieren Gl. (24) zunächst mit ϱ , um y'' von F_η zu entfernen, und dann mit H , um den schon berechneten Wert HF_η unmittelbar anwenden zu können. Das HF_η setzt sich stets aus zwei Teilen zusammen, nämlich aus dem Teile infolge $y'' H_p$ und aus dem infolge der Verkehrslast p (Bild 2). Damit geht Gl. (24) unter Beachtung $H = EJ_c \beta_c^2$ über in

$$(26) \quad H_p \beta_c^2 \cdot \frac{EJ_c}{E_K F_K^0} \cdot \varrho_c L \pm \beta_c^2 \alpha_t t EJ_c \varrho_c L_t - \sum \lambda HF_\eta (y'' H_p) - \sum \lambda HF_\eta (p) = 0.$$

Darin sind die mit dem Index c versehenen Größen J_c , β_c , ϱ_c entweder beliebige Vergleichszahlen oder die zu einer Öffnung, z. B. der Hauptöffnung, zugeordneten Werte.

Den Wert der vorletzten Summe kann man unmittelbar aus Gl. (22d) durch Einsetzen $y'' H_p = -\frac{8f}{l^2} \cdot H_p$ statt p erhalten. Es ergibt sich

$$\sum \lambda HF_\eta (y'' H_p) = -\sum \lambda H_p \cdot \frac{8f}{l^2} \left(\frac{l^3}{12} - \frac{lk}{\beta^2} \right).$$

Unter Beachtung $\beta_c^2 : \beta^2 = J : J_c$ und $\frac{f}{l} = \frac{f_c}{l_c} \cdot \lambda \cdot \frac{l}{l_c}$ folgt hieraus

$$(27) \quad \sum \lambda HF_\eta (y'' H_p) = -H_p \left(\frac{2}{3} \sum \lambda f l - 8 \cdot \frac{f_c}{l_c} \cdot \frac{1}{\beta_c^2} \sum \lambda^2 \cdot \frac{lJ}{l_c J_c} \cdot k \right).$$

Setzt man diesen Wert in Gl. (26) ein und löst sie nach H_p auf, dann erhält man die allgemeine Bestimmungsgleichung

$$(28) \quad H_p = \frac{\sum \lambda HF_\eta (p) \mp \beta_c^2 \alpha_t t EJ_c \varrho_c L_t}{\frac{2}{3} \sum \lambda f l - 8 \cdot \frac{f_c}{l_c} \cdot \frac{1}{\beta_c^2} \sum \lambda^2 \cdot \frac{lJ}{l_c J_c} \cdot k + \beta_c^2 \cdot \frac{EJ_c}{E_K F_K^0} \cdot \varrho_c L} = \frac{Z^0}{N^0}.$$

In dieser Gleichung enthält der Nenner kein einziges von p direkt abhängiges Glied und ist deshalb bei jedem Lastzustand von derselben Form. Das gilt auch für die im folgenden noch zu entwickelnden Bestimmungsgleichungen. Den direkten Einfluß von p erkennt man nur an dem Summenausdruck $\sum \lambda HF_\eta (p)$ im Zähler. Diese Summe ist für alle von p belasteten Felder zu bilden, während sich die Summen im Nenner über alle am Kabel aufgehängten Trägereile erstrecken. Die Größen β_c und k sind nach Gl. (8) u. (19a) leicht zu ermittelnde Zahlenwerte.

Liegt ein dreifeldriges symmetrisches System vor, dann lautet die Bestimmungsgleichung

$$(29) \quad H_p = \frac{\sum \lambda HF_\eta (p) \mp \beta^2 \alpha_t t EJ \varrho L_t}{\frac{2}{3} \cdot fl + \frac{4}{3} \cdot \lambda_1 l_1 f_1 - 8 \cdot \frac{f}{l} \cdot \frac{K_0'}{\beta^2} + \beta^2 \cdot \frac{EJ}{E_K F_K^0} \cdot \varrho L}.$$

Darin beziehen sich die mit dem Index 1 versehenen Größen auf die Seitenöffnungen, und die Abkürzungen sind

$$(30') \quad K_0' = k + \lambda_1^2 \cdot \frac{2l_1 J_1}{lJ} \cdot k_1$$

und

$$\lambda_1 = \frac{\varrho}{\varrho_1}.$$

Bei der Berechnung des Horizontalzuges H_t infolge der Temperaturschwankungen allein fällt das Lastglied im Zähler $HF_\eta (p)$ fort. Mit Vollast p in allen Öffnungen und einem Temperaturabfall $-t^0$ ergibt sich der Zähler von $\max H_p$ zu

$$(31) \quad \max Z_3^0 = \frac{p}{12} (l^3 + 2l_1^3) - pl \cdot \frac{K_0'}{\beta^2} + \beta^2 \alpha_t t EJ \varrho L_t,$$

worin

$$(30) \quad K_0 = k + \frac{2l_1 J_1}{lJ} \cdot k_1.$$

Falls das System außerdem noch $\lambda = 1$ aufweist, so fällt diese Verhältniszahl in Gl. (29) u. (30') fort, und es ist dann auch $K_0' = K_0$.

Aus den vorhergehenden Gleichungen ergibt sich entsprechend für das einfeldrige System

$$(32) \quad H_p = \frac{HF_\eta (p) \mp \beta^2 \alpha_t t EJ \varrho L_t}{\frac{2}{3} \cdot fl - 8 \cdot \frac{f}{l} \cdot \frac{k}{\beta^2} + \beta^2 \cdot \frac{EJ}{E_K F_K^0} \cdot \varrho L} \quad \text{und}$$

$$(33) \quad \max Z_1^0 = \frac{pl^3}{12} - pl \cdot \frac{k}{\beta^2} + \beta^2 \alpha_t t EJ \varrho L_t.$$

B. Systeme mit durchlaufendem Versteifungsträger.

Für vorliegende Systeme läßt sich die Bestimmungsgleichung genau wie unter A aus Gl. (26) ableiten, nur muß man noch die Wirkung der Stützenmomente berücksichtigen. Die Biegefläche HF_η infolge der

Stützenmomente bildet sich auch aus zwei Teilen; der erste rührt von der Belastung $y'' H_p$ her und der zweite von der Verkehrslast p . Sie sollen getrennt berechnet werden.

Bild 11a möge den Versteifungsträger einer Hängebrücke darstellen. Die über den Innenstützen stehenden Pylonen und das Kabel sind der Einfachheit halber nicht eingezeichnet.

Die H -fache Biegefläche infolge der Stützenmomente ergibt sich nach Gl. (19) zu

$$(34) \quad HF_{\eta} = \frac{1}{2} \sum (M_{i-1} + M_i) l_i k_i$$

Für die im Bild 11b skizzierte Belastung $y'' H_p$ läßt sich das Stützenmoment M_i in der Form

$$M_i = H_p \mu_{M_i}$$

angeben, worin μ_{M_i} , wie es anschließend gezeigt wird, eine Funktion von den Systemgrößen l, f, J und dem Horizontalzug H darstellt und nicht direkt von p abhängig ist. Durch Einsetzen der obigen Gleichung in Gl. (34) ergibt sich der erste Teil von HF_{η} infolge der Stützenmomente zu

$$(35) \quad HF_{\eta}(M) = H_p \cdot \frac{1}{2} \sum (\mu_{M_{i-1}} + \mu_{M_i}) l_i k_i$$

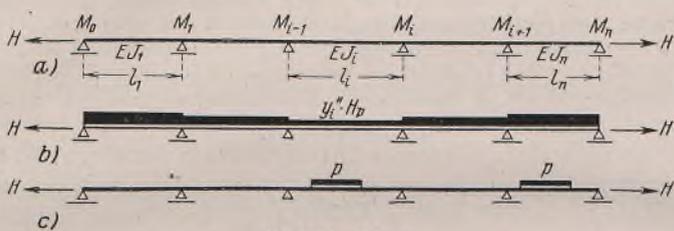


Bild 11a bis c.

Der zweite Teil von HF_{η} infolge der Stützenmomente M_p ist abhängig von der Größe und Stellung der Verkehrslast p . Man muß für den betreffenden Lastfall zunächst M_p nach dem Unterabschnitt I des II. Abschnittes beschriebenen Gedankengang berechnen und dann nach Gl. (34) die Biegefläche ermitteln. Es sei kurz bezeichnet:

$$(36) \quad HF_{\eta}(M_p) = \frac{1}{2} \sum (M_{i-1} + M_i) l_i k_i$$

Setzt man Gl. (35), (36) u. (27) in die Ausgangsgleichung (26) ein und löst sie nach H_p auf, so ergibt sich mit der Abkürzung der Gl. (28) die allgemein gültige Gleichung

$$(37) \quad H_p = \frac{Z^0 + \frac{1}{2} \sum (M_{i-1} + M_i) l_i k_i}{N^0 - \frac{1}{2} \sum (\mu_{M_{i-1}} + \mu_{M_i}) l_i k_i}$$

Darin erstrecken sich die Summen im Zähler und Nenner über alle am Kabel aufgehängten Trägereile. Aus obiger Gleichung läßt sich der Einfluß der Kontinuität des Versteifungsträgers auf den Horizontalzug im Kabel deutlich erkennen. Die obenstehende Gleichung ist ganz allgemein für über beliebig viele Öffnungen gespannte Hängebrücken abgeleitet. Aus ihr läßt sich z. B. die Bestimmungsgleichung für das dreifeldrige symmetrische System entwickeln⁹⁾:

$$(38) \quad H_p = \frac{\sum \lambda HF_{\eta}(p) - \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{f} (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) \mp \beta^2 \alpha_t t E J \varrho L_t}{\frac{2}{3} \cdot f l + \frac{4}{3} \cdot \lambda_1 f_1 l_1 - 8 \cdot \frac{f}{l} \cdot \frac{K_0'}{\beta^2} - 4f \cdot \frac{K K'}{\varphi} + \beta^2 \cdot \frac{E J}{E_K F_K^2} \cdot \varrho L}$$

⁹⁾ Wegen der Ableitung s. die unter Fußnote 1 angegebene Dissertation.

Darin sind

$$(39) \quad K = k + \frac{l_1}{l} \cdot k_1,$$

$$(39) \quad K' = k + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{l} \cdot k_1$$

und nach Gl. (6) und Bild 4

$$(40) \quad \varphi = H \tau + H \tau_{i1} = \beta \cdot \mathfrak{Z} \varrho \alpha + \frac{\beta_1}{\mathfrak{Z} \varrho 2 \alpha_1} - \frac{1}{l_1},$$

$$(41) \quad \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 = H (\mathfrak{B}_{1l} + \mathfrak{A}) + H (\mathfrak{B} + \mathfrak{A}_{1l}).$$

Nebenbei zu bemerken ist, daß die vorhin erwähnte μ_{M_i} -Funktion beim vorliegenden System folgende Form hat:

$$\mu_{M_1} = \mu_{M_2} = \frac{4f}{l} \cdot \frac{K'}{\varphi}$$

Sie ist also nur abhängig von Systemgrößen und H .

Zur Bestimmungsgleichung (38) ist zu bemerken, daß man zur Bestimmung von H_p nur die H -fachen Biegeflächen und Belastungsglieder des entsprechenden statisch bestimmten Hauptsystems vom Versteifungsträger infolge der Teilbelastung p benötigt. Ferner ist der Nenner, wie schon erwähnt, stets von derselben Form. Weiter wird in der Gleichung $\lambda_1 = 1$, $K_0' = K_0$ und $K' = K$, wenn die vom Kabel aufgenommene ständige Last g über die ganze Brücke gleich ist.

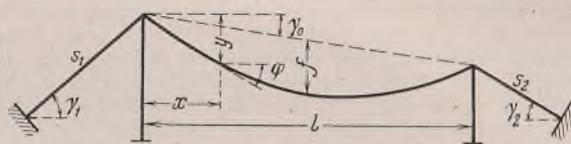


Bild 12.

Soll H_t infolge der Temperaturschwankungen allein berechnet werden, so sind die beiden ersten Glieder im Zähler gleich Null. Bei $-t$ und Vollast p in der Mittelöffnung allein erreicht H_p das Maximum. Dabei ergibt sich der Zähler zu

$$(42) \quad \max Z = \frac{p l^3}{12} - p l k \left(\frac{1}{\beta^2} + \frac{l}{2} \cdot \frac{K}{\varphi} \right) + \beta^2 \alpha_t t E J \varrho L_t$$

Im Anschluß mögen vollständigshalber noch die Formeln für L und L_t angegeben werden. Sie lauten für Hängegurt mit konstantem Querschnitt $F_k = F_k^0$ (Kabel) nach Bild 12

$$(43) \quad L = l \left(1 + 8 \cdot \frac{f^2}{l^2} + \frac{3}{2} \cdot \text{tg}^2 \gamma_0 \right) + s_1 \cdot \sec^2 \gamma_1 + s_2 \cdot \sec^2 \gamma_2$$

$$(44) \quad L_t = l \left(1 + \frac{16}{3} \cdot \frac{f^2}{l^2} + \text{tg}^2 \gamma_0 \right) + s_1 \cdot \sec \gamma_1 + s_2 \cdot \sec \gamma_2$$

Für den Fall des veränderlichen, aber angepaßten Hängegurtquerschnitts $F_k = F_k^0 \cdot \sec \varphi$ (Kette) hat man $L = L_t$, und damit gilt Gl. (44) für beide Größen.

Bei vielgliedrigem System ist der erste Summand in obigen Gleichungen durch die Summe aus solchen Ausdrücken aller Öffnungen zu ersetzen. Obige Formeln sind unabhängig davon, ob der Versteifungsträger statisch bestimmt ist oder nicht.

Zusammenfassung des II. Abschnitts. Am Eingang dieses Abschnitts wurde gezeigt, daß die Berechnung der Hängebrücken auf diejenige des stellvertretenden Trägers mit dem Axialzug H und den Querlasten p und $y'' H_p$ zurückgeführt werden kann und daß sich die Querlasten in Teilzustände zerlegen lassen (Bild 2 u. 3). Weiter haben wir den stellvertretenden Träger ausführlich behandelt und die Bestimmungsgleichungen für H_p , damit auch $H = H_g + H_p$, der verschiedenen Hängebrückensysteme entwickelt. Damit ist das Problem der Hängebrückenberechnung vollkommen gelöst. Hinsichtlich der praktischen Anwendung des Verfahrens sei auf die nähere Erläuterung und die Beispielrechnung in der Dissertation verwiesen. (Schluß folgt.)

Alle Rechte vorbehalten.

Mitteilungen über einen neuen, nach dem Thomasverfahren erschmolzenen hochwertigen Mangan-Phosphor-Baustahl.¹⁾

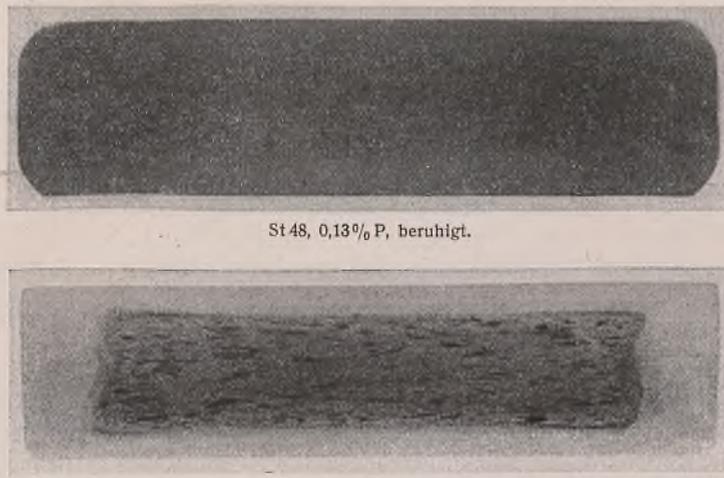
Von Dr.-Ing. habil. Roland Wasmuth, Dortmund.

Durch die Rohstofflage gezwungen, hat sich das Interesse der Stahlverbraucher in jüngster Zeit immer mehr dem Thomasstahl zugewandt. Der Zwang, deutsche Eisenerze zu verarbeiten, und die bestehende Schrottknappheit läßt die Bedeutung des Thomasstahls volkswirtschaftlich besonders in den Vordergrund rücken. Dem Thomasstahl haften nun, durch seine Herstellungsweise bedingt, gewisse Nachteile gegenüber dem SM-Stahl an, die zu überbrücken eine besondere Aufgabe für die Metallurgen darstellte. Einen besonderen Nachteil des Thomasstahls stellte der höhere Stickstoffgehalt und die hierdurch bedingte Eigenschaft des Thomasstahls, im Anschluß der Kaltverformungen zu verspröden, dar. Es hat nicht an Versuchen gefehlt, gerade den Stickstoffgehalt des Thomasstahls möglichst niedrig zu halten. Diese Versuche sind auch

von Erfolg gekrönt gewesen. Ich möchte bei dieser Gelegenheit auf den von den Vereinigten Stahlwerken in jüngster Zeit herausgebrachten HPN-Stahl hinweisen. Bei der Herstellung dieses Stahles konnte durch bestimmte metallurgische Maßnahmen der Stickstoffgehalt des Thomasstahls nennenswert gesenkt werden. Auch fehlt es nicht an erfolgreichen Untersuchungen, durch Beruhigung des Thomasstahls eine weitgehende Verbesserung zu erzielen. Durch die Aluminiumzugabe gelingt es dabei ebenfalls, neben anderen Wirkungen, den schädlichen Stickstoff in gewissem Umfange abzubinden. So ist es gelungen, dem Thomasstahl eine große Anzahl von Verwendungsgebieten zuzuführen, die früher dem Siemens-Martin-Stahl vorbehalten waren.

Für die gewichtsparenden, hochwertigen Baustähle, deren wichtigster Vertreter St 52 ist, ist man bisher nach wie vor auf Siemens-Martin-Stahl angewiesen. Bei den vielseitigen Ansprüchen, die an St 52 gestellt werden, ist es auch zweifelsohne richtig, diesen in Zukunft nur als

¹⁾ Vortrag, gehalten auf der Sitzung des Deutschen Ausschusses für Stahlbau am 28. 2. 1941 in Weimar.



St 48, 0,13% P, beruhigt.

St 37, 0,083% P, unberuhigt.

Bild 1. Baumann-Abdrücke von St 48 und St 37 unberuhigt.

Siemens-Martin-Stahl zu verwenden. Es wäre jedoch von Bedeutung, worauf auch schon H. Hauttmann²⁾ hingewiesen hat, wenn zwischen dem normalen St 37 und dem hochwertigen St 52 ein Stahl eingeschaltet werden könnte, etwa mit den physikalischen Anforderungen des alten St 48, der in solchen Fällen zur Anwendung gelangen könnte, wenn die Verwendung des hochwertigen St 52-SM-Stahls nicht unbedingt erforderlich ist, aber trotzdem Gewichtersparnis gegenüber der Verwendung von St 37 wünschenswert erscheint. Dabei sollte es möglichst angestrebt werden, einen solchen Stahl als Thomasstahl zu erzeugen.

Die erhöhten physikalischen Werte des St 48, also 48 kg/mm² Festigkeit und 29 kg/mm² Streckgrenze, lassen sich naturgemäß nur durch irgendeine zusätzliche Legierung erreichen. Von der Legierung durch Kohlenstoff, die am naheliegendsten erscheinen würde, wurde von uns bewußt abgesehen, da sie ja die Grundlage des alten St 48 darstellte, der sich nicht bewährt hatte und deshalb fallen gelassen wurde. Eine Legierung durch Erhöhung des Kohlenstoffgehalts erscheint insbesondere wegen der zu fordernden guten Schweißbarkeit bedenklich. Das gleiche gilt für eine Legierung mit Silizium. Wir haben deshalb in Anlehnung an ältere Arbeiten, über die bereits im Jahre 1936 von A. Ristow, K. Daevcs und E. H. Schulz³⁾ berichtet wurde, die Festigkeitssteigerung des neuen Stahls durch Legierung mit Mangan und Phosphor erreicht. Gleichzeitig wurde der Stahl mit Silizium und Aluminium beruhigt und so als ausgesprochener Feinkornstahl hergestellt. Über die Eigenschaften dieses neuen Stahles will ich Ihnen in der Folge berichten.

Ich bin nun darauf gewappnet, von Ihrer Seite die größten Bedenken zu hören, daß wir einen mit Phosphor legierten Stahl als Baustahl vorschlagen. Ich kann hierzu nur sagen, daß gerade dieser Stahl den besten Beweis darstellt für die Feststellung, daß es sich bei der Sorge um hohen Phosphor-Gehalt um ein altes Vorurteil handelt. Ich gebe zu, daß bei dem früheren Stand der Metallurgie dieses Vorurteil seine Berechtigung hatte. Es steht aber heute fest, daß metallurgisch einwandfrei erschmolzene Stähle ohne weiteres Phosphor-Legierungen in Sonderfällen bis zu 0,3% P enthalten können, ohne daß sie die dem Phosphor nachgesagten bedenklichen Eigenschaften aufweisen. Der Phosphor ist gerade dann ein besonders glücklich gewähltes Legierungselement, wenn man den Stahl aus der Thomasbirne erzeugt. Wenn dieser Stahl durch Abfangen der Charge hergestellt wird, so sind die hohen Phosphorgehalte die beste Gewähr dafür, daß der Stahl nicht zu lange geblasen wurde, und daß er daher keinen Sauerstoff aufnehmen konnte. Das Abbrechen der Charge bei hohen Phosphorgehalten bewirkt, daß der Stahl ungewöhnlich sauerstofffrei bleibt, da während des Durchblasens der Frischluft der Phosphor das Eisen zunächst gewissermaßen vor der Verbrennung schützt, so daß die Bildung von Oxyden verhindert wird. Der Phosphor konnte aber nur dann schädlich werden, wenn er in Verbindung mit Sauerstoffgehalten im Stahl auftritt. Das ist meist bei niedrigen oder mittleren Phosphorgehalten der Fall. Bei hohen Phosphorgehalten liegt der Phosphor als Legierungselement vor, welches bei einem zwangsläufig sauerstofffreien Stahl nur günstig wirken kann. Hinzu kommt, daß die Beruhigung des Stahles mit Silizium und Aluminium und die Legierung mit Mangan auch noch in Richtung eines besonders sauerstofffreien Stahls hinwirken.

Nun könnte man noch einige Bedenken gegen den Phosphor-Mangan-Stahl haben, nämlich wegen der bekannten Neigung des Phosphors zur Bildung von Seigerungen. Diese Erscheinung des Auftretens starker Konzentrationsunterschiede im gleichen Querschnitt ist ja bekannt und man weiß, daß der Phosphor zur Ausbildung solcher Seigerungen besonders neigt. Dies gilt aber vor allem für den normalen, unberuhigten Thomasstahl, bei dem sich der Phosphor in den inneren Querschnitten beträchtlich gegenüber dem äußeren Querschnitt anreichert. Wird der Stahl jedoch stark beruhigt, so wird die Phosphorseigerung weitgehend unterdrückt, so daß mit einer verhältnismäßig gleichmäßigen Verteilung des Phosphors im ganzen Querschnitt gerechnet werden kann. Diese Zusammenhänge werden anschaulich durch Bild 1, das einmal die Phosphorverteilung in einem unberuhigten Thomasstahl mit 0,08% P darstellt und das andere Mal die Phosphor-Verteilung bei einem beruhigten Thomasstahl mit 0,13% P zeigt.

²⁾ St. u. E. 1941, Heft 6, S. 129 bis 136 und Heft 7, S. 164 bis 170.
³⁾ St. u. E. 1936, Heft 32, S. 889 bis 899 und Heft 33, S. 921 bis 930.

Die Phosphor-Seigerung braucht also, falls man keine allzu großen Ausgangsblöcke wählt, kein Hinderungsgrund für die Verwendung beruhigter Phosphor-Mangan-Stähle zu sein. Stellt man nun weiterhin diese Stähle nach dem eingangs erwähnten HPN-Verfahren, also mit möglichst niedrigem Stickstoff, her, so ist zu erwarten, daß ein derartiger Phosphor-Mangan-Stahl verhältnismäßig günstige physikalische Werte aufweist. Die Untersuchung einer Anzahl nach diesen Gesichtspunkten erschmolzener Chargen hat diesen Überlegungen Recht gegeben.

Zahlentafel 1 zeigt beispielsweise die von Versuchsstählen bei verschiedener Zusammensetzung erreichten Festigkeitseigenschaften. Als ein besonders günstiger Phosphorgehalt hatte sich bei früheren Untersuchungen, über die hier aus Raummangel nicht berichtet werden kann, der Gehalt von 0,13 bis 0,15% P herausgestellt. Die im Lichtbild gezeigten Schmelzen weisen alle einen Phosphorgehalt in dieser Größenordnung auf; sie unterscheiden sich lediglich durch den Kohlenstoff- und Mangan-Gehalt. Aus Bild 2 geht hervor, daß bei gleichbleibendem Phosphorgehalt mit steigendem Kohlenstoff- und Mangan-Gehalt Streckgrenze und Festigkeit weiter ansteigen. Die für St 48 zu fordernde Streckgrenze von 29 kg/mm² wird bereits bei Gehalten von (C + Mn) von 0,7% erreicht. Will man aber auf jeden Fall auf Festigkeiten über 48 kg/mm² kommen, so muß der (C + Mn)-Gehalt 1% übersteigen. Die Streckgrenze ist in solchem Falle auf im Mittel 34 kg/mm² weiter angestiegen. Aus Zahlentafel 1 und Bild 2 geht hervor, daß diese neuen Stähle ein gutes Streckgrenzenverhältnis von etwa 65 bis 70% aufweisen. Wir haben uns auf Grund dieser ersten Versuche dann entschlossen, den Stahl zunächst mit etwa 0,1% C und 0,9% Mn herzustellen. Derartige Stähle würden demnach Festigkeitseigenschaften gemäß Zahlentafel 2 aufweisen. Im Walzzustand beträgt die Zugfestigkeit 48 bis 52 kg/mm², die Streckgrenze im allgemeinen über

Zahlentafel 1.

Mechanische Güterwerte der untersuchten Schmelzen, St 48.

Bezeichnung	Zustand	Streckgrenze kg/mm ²	Zugfestigkeit kg/mm ²	Streckgrenzen- verhältnis %	Dehnung (L=5d) %	Einschnürung %	Kerbschlagzähigkeit DVMR mkg/cm ²
A							
Analyse							
C	Anlieferung	32,7	46,7	70	30,4	70	13,7
Si							
Mn	Normalisiert	30,5	45,7	67	33,8	73	20,0
P							
S							
Erkorn	6-8						
B							
Analyse							
C	Anlieferung	36,2	48,3	75	30,1	70	12,4
Si							
Mn	Normalisiert	33,5	47,3	71	33,4	70	12,2
P							
S							
Erkorn	5-8						
C							
Analyse							
C	Anlieferung	34,1	53,6	64	28,0	64	6,7
Si							
Mn	Normalisiert	35,4	52,7	67	30,7	69	14,2
P							
S							
Erkorn	6-8						

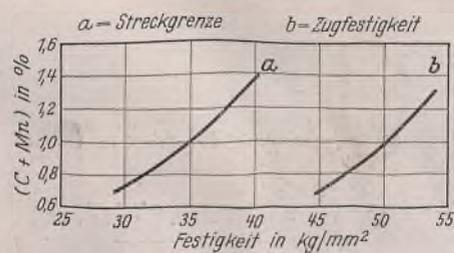


Bild 2. Festigkeitseigenschaften von Stählen in Abhängigkeit vom (C + Mn)-Gehalt bei 0,13% P.

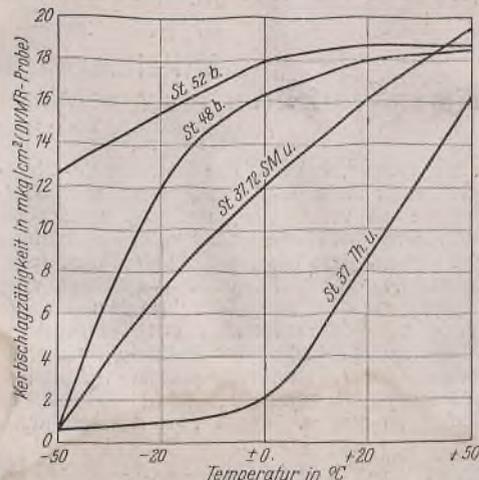


Bild 3. Kerbschlagzähigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur. Normalisiert, unverformt.

32 kg/mm² und die Bruchdehnung L=5d über 27%. Erwähnenswert sind auch die recht guten Werte für Einschnürung und Kerbschlagzähigkeit. Es muß jedoch festgestellt werden, daß dieser Stahl nicht alterungsbeständig ist. Die Alterungsanfälligkeit ist allerdings geringer als beim üblichen unberuhigten Thomasstahl; sie liegt etwa in der Größenordnung der üblichen Siemens-Martin-Stähle. Schließlich ist hervorzuheben, daß die Festigkeitseigenschaften des Stahles, besonders die Kerbschlagzähigkeit, durch Normalglühen noch nennenswert verbessert werden. In normalgeglühtem Zustand ist die Kerbschlagzähigkeit auch bei dicken Abmessungen — bei 30 mm Dicke und mehr — recht gut.

In Bild 3 wird die Temperaturabhängigkeit der Kerbschlagzähigkeit des neuen Stahles im Vergleich zu der Temperaturabhängigkeit von St 37 und St 52 gezeigt. Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß der neue

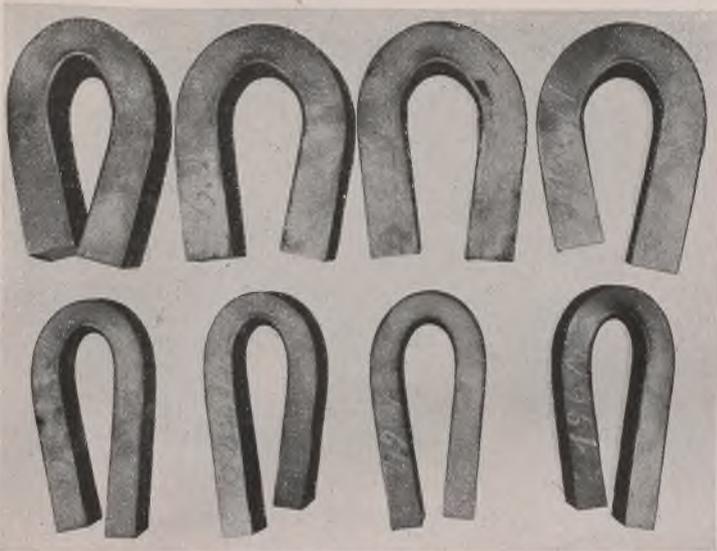


Bild 4. Faltpföhen nach DIN 1605, St 48.

Stahl in seiner Kerbschlagzähigkeit im allgemeinen günstiger liegt als die üblichen unberuhigten St 37 Thomas- und auch Siemens-Martin-Stähle, während er die hohe Kerbschlagzähigkeit des aus beruhigtem Feinkorn-Siemens-Martin-Stahl erschmolzenen St 52 bei sehr tiefen Temperaturen nicht erreicht.

Schließlich wurde der Stahl auch mit dem Faltversuch nach DIN 1605 untersucht. Der Faltversuch wird ohne weiteres erfüllt, wie aus Bild 4 hervorgeht.

Aus diesen Angaben ist ersichtlich, daß die alten Lieferbedingungen für St 48 bei diesem neuen Stahl übernommen werden könnten, mit einziger Ausnahme natürlich der Analyse (Zahlentafel 2).

Zahlentafel 3. Zug- und Faltversuch an einer X-Naht-Verbindungsschweißung von St 48.

Bezeichnung	Plattendicke mm	Zustand	Zugversuch		Bruchstelle	Faltversuch	
			Streckgrenze kg/mm ²	Zugfestigkeit kg/mm ²		DIN Vornorm DVM A 121 erster Anriß-Biege Winkel °	DIN Vornorm DVM A 121 Gesamt-Biege Winkel °
A	20	Anlieferung	35,9	47,1	Übergang-Schweißse	—	180
		Normalisiert	37,8	45,3	Grund-Werkstoff	—	180
	30	Anlieferung	36,3	42,3	Übergang-Schweißse	55	60
		Normalisiert	35,3	42,8	Übergang-Schweißse	62	75
C	20	Anlieferung	38,0	52,4	Grund-Werkstoff	90	108
		Normalisiert	40,0	53,8	Schweißse	60	70
	30	Anlieferung	38,2	56,0	Schweißse	52	56
		Normalisiert	41,2	55,0	Schweißse	—	180

Als Höchstwert für den Phosphorgehalt schlagen wir 0,17% vor und vielleicht noch die Regel, daß der Phosphor- und Kohlenstoffgehalt 0,28% nicht übersteigen soll. Unser Abnahmevorschlag für die chemische Zusammensetzung würde dann lauten: höchstens 0,13% C, höchstens 0,3% Si, höchstens 1,0% Mn, höchstens 0,17% P, höchstens 0,05% S und höchstens 0,28% (P + C).

Zahlentafel 4. Kerbschlagzähigkeit nach DIN — Vornorm DVM — Prüfverfahren A 122 — St 48.

Probenlage	Bezeichnung A				Bezeichnung C			
	Blechkdicke 20 mm Anlief.	Blechkdicke 30 mm Normal.	Blechkdicke 20 mm Anlief.	Blechkdicke 30 mm Normal.	Blechkdicke 20 mm Anlief.	Blechkdicke 30 mm Normal.	Blechkdicke 20 mm Anlief.	Blechkdicke 30 mm Normal.
Bild 1 DVMR - Probe	7,6	8,5	7,6	7,4	8,9	7,6	7,0	7,6
Bild 2a DVMR - Probe	7,0	10,2	7,0	6,9	6,6	7,6	7,0	8,2
Bild 2b DVMR - Probe	5,8	7,0	5,3	5,8	5,3	6,4	7,4	6,3

Besonders eingehend wurde nun die Schweißbarkeit des Stahles geprüft. Wie es auf Grund seines niedrigen Kohlenstoffgehalts erwartet wurde, ließ sich der Stahl gut verschweißen. Die Makroätzung von Schweißverbindungen zeigt Bild 5. Auch beim Schweißzug- und beim Schweißfaltversuch verhält sich der neue Stahl zufriedenstellend, wie aus Zahlentafel 3 hervorgeht. Beim Zugversuch der geschweißten Proben wurden grundsätzlich die gleichen Streckgrenzen und Festigkeiten gefunden wie bei der Prüfung des Grundmaterials. Bei dem Faltversuch lagen alle Biege Winkel des ersten Anrisses über 50°. Das Aussehen von Schweißfaltproben zeigt als Beispiel Bild 5a.

A 20 mm

C 20 mm

A 30 mm

C 30 mm



Bild 5a. X-Naht-Verbindungsschweißung, St 48.

Zahlentafel 2.

Festigkeitseigenschaften eines beruhigten Thomasstahles.

	Zugfestigkeit kg/mm ²	Streckgrenze kg/mm ²	Bruchdehnung % l=5d.	Einschnürung %	Kerbschlagzähigkeit		
					DVMR - Probe 1) ungealtert	DVMR - Probe 2) gealtert	DVMR - Probe 2) ungealtert
Waltzustand	48 bis 52	30 bis 36	27 bis 33	65 bis 70	rd. 12	rd. 2	rd. 7
Normalgeglüht	48 bis 53	30 bis 36	29 bis 35	68 bis 73	rd. 20	rd. 3	rd. 15

1.) Probe von 55 x 10 x 10 mm² mit 3 mm tiefem Rundkerb von 2 mm Dmr.

2.) Probe von 55 x 10 x 10 mm² mit 3 mm tiefem Spitzkerb von 45° (Kerbgrundhalbmesser 0,5 mm)

Abnahmevorschlag:

Zugfestigkeit Streckgrenze Dehnung (l=5d.)

48 = 58 kg/mm² mind. 29 kg/mm² mind. 24%

Biege Winkel beim Faltversuch nach DIN 1605 mind. 180° (beim Durchmesser 2 x d.)

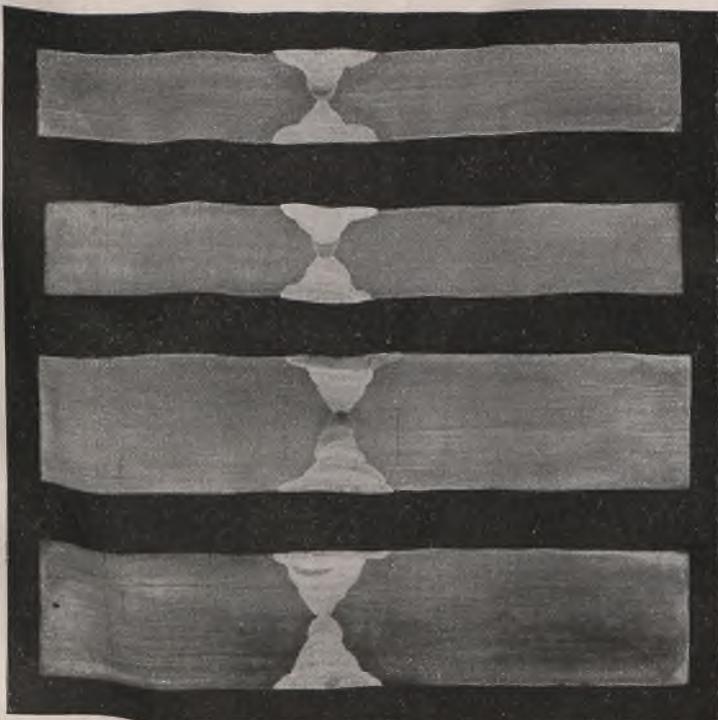


Bild 5. Makro-Gefüge von Schweißverbindungen, St 48.

Außerdem wurden auch Kerbschlagzähigkeitsuntersuchungen nach DIN A 122 in der Schweißnaht vorgenommen (Zahlentafel 4). Aus diesen Untersuchungen ging hervor, daß in der Schweißnaht in allen Fällen befriedigende Kerbschlagzähigkeiten vorgefunden werden konnten. Eine nennenswerte Härtingszone entsteht beim Schweißen nicht, da der Stahl insbesondere wegen seines niedrigen Kohlenstoff-Gehaltes nicht zur Härting neigt.

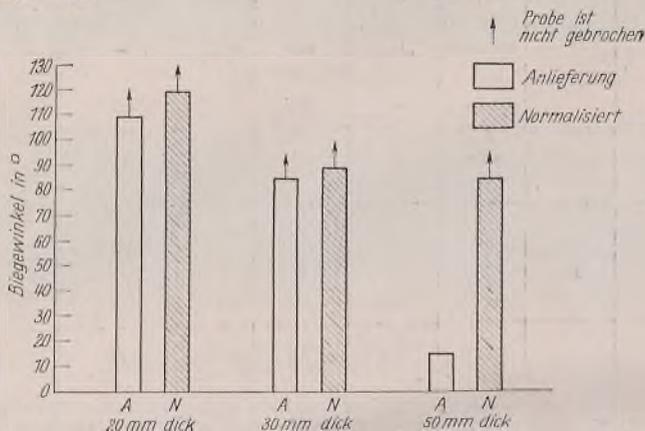


Bild 6. Schweißbraunbiegeprobe, St 48.

Weiterhin wurden Aufschweißbiegeversuche nach Kommerell mit Proben aus Platinen von 20, 30 und 50 mm Dicke ausgeführt. Wie aus Bild 6 hervorgeht, konnten, besonders in normalgeglühtem Zustande, in allen Fällen hohe Biegewinkel erreicht werden. Der Biegewinkel der 30 mm dicken Proben betrug etwa 90°. Die Aufschweißbiegeproben mit Dicken über 30 mm sind jedoch nicht so einwandfrei in ihrem Aussehen und nicht so streuungsfrei, wie man es von normalgeglühten Aufschweißbiegeproben aus Stahl St 52 gewohnt ist. Auf Grund dieser Untersuchungen mit der Schweißbraunbiegeprobe schlagen wir die Verwendung dieses neuen Stahles nur bis zu Abmessungen von 30 mm Dicke vor.

Das Aussehen von 30 mm dicken Schweißbraunbiegeproben zeigen Bild 7 u. 8. Die Proben sehen verhältnismäßig gut aus. Verformungslose Brüche bei niedrigen Biegewinkeln sind in keinem Falle zu beobachten. Im Anlieferungszustand können bei hohen Biegewinkeln zuweilen größere Anrisse in das Material hinein eintreten (Bild 7). Im normalisierten Zustand ist ein solches Einreißen aber nicht zu beobachten. Das Aussehen der Probe entspricht dann Bild 8.

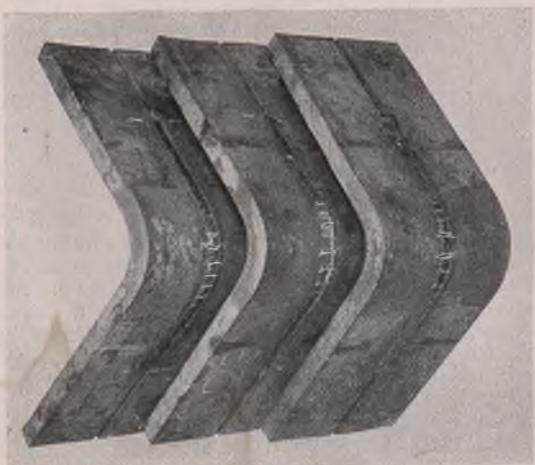


Bild 8. Schweißbraunbiegeprobe, St 48, 30 mm, normalisiert.

Zum Abschluß mögen noch einige Angaben über die Dauerfestigkeitseigenschaften des beruhigten Phosphor-Mangan-Thomasstahls gebracht werden. In Zahlentafel 5 sind einige Feststellungen über die Biege-wechselselfestigkeit, die Zugdruckwechselselfestigkeit und die Zugursprungselfestigkeit am glatten Stab angeführt. Es kam mir bei dieser Darstellung vor allem darauf an, die Größenordnung der Dauerfestigkeitseigenschaften im Vergleich zu derjenigen von St 37 einerseits und St 52 andererseits darzustellen. Aus dieser Zahlentafel ist ersichtlich, daß die Dauerfestigkeitswerte zwischen den für St 37 und St 52 bekannten Werten liegen. In den untersuchten Beispielen ist einmal eine Schmelze mit Zerreißeigenschaft an der unteren Grenze und einmal eine solche gewählt worden, deren Zerreißeigenschaft an der oberen Grenze lag. Aus diesen Untersuchungen ergibt es sich, daß die Biege-wechselselfestigkeit zwischen ± 27 kg/mm² und ± 29 kg/mm², die Zugdruckwechselselfestigkeit zwischen ± 20 und ± 22 kg/mm² und die Zugursprungselfestigkeit bei etwa 30 (15 \pm 15) kg/mm² liegen. Bei Stäben mit Walzhaut oder bei gelochten Stäben

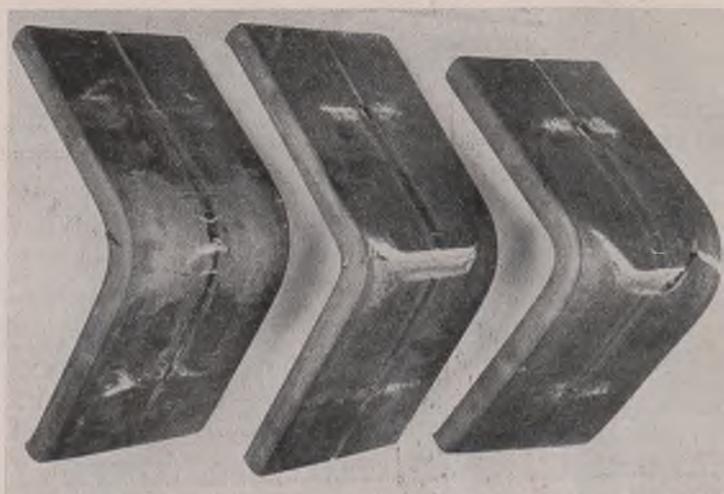


Bild 7. Schweißbraunbiegeprobe, St 48, 30 mm, Anlieferung.

Zahlentafel 5. Dauerfestigkeitseigenschaften von St 48 im Vergleich zu St 37 und St 52.

Stahlart	Bezeichnung	Zerreißeigenschaft kg/mm ²	Biege-wechsel - Festigkeit kg/mm ² N= 10 x 10 ⁶	Zug-Druck-Festigkeit kg/mm ² N= 2 x 10 ⁶	Zug-Ursprungselfestigkeit kg/mm ² N= 2 x 10 ⁶
St 37	✓	> 37	± 22 bis ± 24	± 17	12 \pm 12
St 48	Anlieferung	46,4	± 27	± 21	15 \pm 15
	Normalisiert	45,1	± 28	± 20	
	Anlieferung	54,5	± 29	± 21	15,5 \pm 15,5
	Normalisiert	53,6	± 22		
St 52	✓	> 52	± 30 bis ± 32	± 23	16 \pm 16

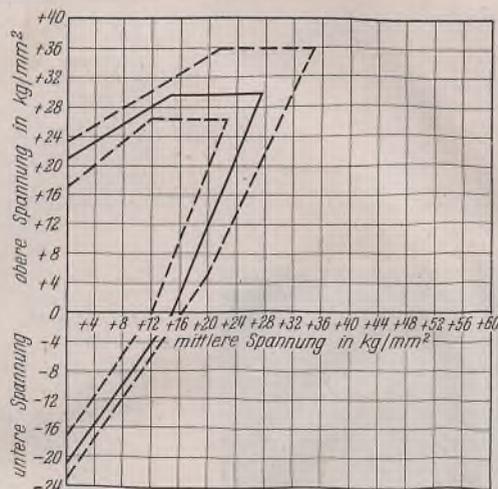


Bild 9. Zug-Druck-Dauerfestigkeit von St 48 im Vergleich zu St 37 und St 52.

St 48: ausgezogene Kurve,
St 52: äußere gestrichelte Kurve,
St 37: innere gestrichelte Kurve.

sind die bekannten Herabsetzungen der Dauerfestigkeitseigenschaften zu erwarten. Entsprechende Untersuchungen sind zur Zeit in Arbeit, worüber später berichtet werden soll. Nach den bisherigen Untersuchungen würde sich also das Zugdruckdauerfestigkeitsschaubild des neuen Stahles im Vergleich zu demjenigen des St 37 und des St 52 gemäß Bild 9 darstellen. Die Werte für den Phosphor-Mangan-Stahl liegen, wie schon erwähnt, zwischen den für den St 52 und St 37 bekannten Werten.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, daß aus den Versuchen mit beruhigtem Phosphor-Mangan-Stahl aus der Thomasbirne ein Baustahl hervorgegangen ist, der gute physikalische Eigenschaften zwischen denen des St 37 und des St 52 aufweist. Die Walzbarkeit des Stahles ist, wie allgemein bei Phosphorstählen, eine gute, das Oberflächen aussehen trotz der Beruhigung zufriedenstellend. Der Stahl hat infolge seines niedrigen Kohlenstoffgehaltes den Vorteil, gut schweißbar zu sein. Außerdem verleiht der hohe Phosphorgehalt ein besonders gutes Verhalten gegenüber

INHALT: Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung. — Mitteilungen über einen neuen, nach dem Thomasverfahren erschmolzenen hochwertigen Mangan-Phosphor-Baustahl.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Kießpel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule

Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 1. August 1941

Heft 16/18

Über das Ausknicken statisch unbestimmt gelagerter Kreisbogenträger von veränderlichem Querschnitt.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Ernst Chwalla und Friedrich Jokisch in Brünn.

1. Bekannte Lösungen für den Kreisbogenträger von gleichbleibendem Querschnitt.

Die der Verzweigungsstelle des Gleichgewichts zugeordnete ideale Knicklast eines radial gleichmäßig belasteten, auf mittigen Druck¹⁾ beanspruchten Kreisbogenträgers ist bekanntlich dadurch gekennzeichnet, daß unter ihrer Einwirkung neben der kreisförmigen Gleichgewichtsfigur (Bild 1a) noch eine infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur (Bild 1b) zur Ausbildung gelangen kann. Während im ersten Gleichgewichtszustand in allen Querschnitten des Bogenträgers ausschließlich Normalkräfte der Größe

$$(1) N_{Ki} = p_{Ki} r$$

auftreten, kommen im zweiten Gleichgewichtszustand noch infinitesimale Biegemomente und Querkkräfte zur Geltung. Ein Achspunkt 0 wird beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtsfigur nach 0' verschoben und erfährt hierbei eine unendlich kleine, in der Richtung wachsender s positiv gezählte Tangentialverschiebung v sowie eine unendlich kleine, in der Richtung zum Kreismittelpunkt positiv gezählte Radialverschiebung w (Bild 1c). Beide Verschiebungskomponenten sind durch die Beziehung

$$(2) w = d v / d \varphi$$

verknüpft, die der Energiebilanz des Knickvorganges entspringt²⁾ und zum Ausdruck bringt, daß die elastische Längenänderung der Bogenachse beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtsfigur von höherer Ordnung klein ist als v und w .

1) Diese Voraussetzung ist bei Bogenträgern, deren Achse, Lagerung oder Querschnittsgesetz keine Symmetrie zur Scheitelnormalen (Halbierenden der Stützweite) aufweist, für das Auftreten einer Verzweigungsstelle des Gleichgewichts von entscheidender Bedeutung. Bei den statisch unbestimmt gelagerten Bogenträgern, bei denen sich die durch die elastische Achsverkürzung bedingten Biegemomente durch baustatische Maßnahmen nicht ausschalten lassen, darf hier daher — genau genommen — von einer „idealen“ Knicklast nicht gesprochen werden; bei Trägern aus elastisch-plastischen Werkstoffen tritt in diesen Fällen an die Stelle der idealen Knicklast eine Traglast von nahezu der gleichen Größe. Bei symmetrisch gebauten Bogenträgern wird die Ausbildung einer Verzweigungsstelle des Gleichgewichts durch das Vorhandensein vorkritischer Biegemomente — sofern diese Biegemomente symmetrisch verteilt sind — nicht gestört; sind die Biegemomente, wie dies bei den durch die elastische Achsverkürzung bedingten Biegemomenten zutrifft, verhältnismäßig klein, dann nehmen sie auch zahlenmäßig keinen nennenswerten Einfluß auf die ideale Knicklast.

²⁾ E. Chwalla und C. F. Kollbrunner, Stahlbau 1938, Heft 10, S. 73.

Die im Punkt 0 an die Bogenachse gelegte Tangente verdreht sich beim Übergang von der ersten zur zweiten Gleichgewichtsfigur entgegen dem Uhrzeiger um den unendlich kleinen Betrag

$$(3) \psi = -\frac{1}{r} \left(\frac{d w}{d \varphi} + v \right),$$

und die im Punkt 0 vorhandene Krümmung der Bogenachse wird um den unendlich kleinen Betrag

$$(4) \kappa = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{d^2 w}{d \varphi^2} + w \right)$$

vermindert; κ ist mit der örtlichen Biegesteifigkeit $E J_{\varphi}$ und dem unendlich kleinen Biegemoment M — das positiv bezeichnet wird, wenn es auf der Innenseite des Bogens Biegezugspannungen hervorruft — durch die Beziehung

$$(5) \kappa = \frac{M}{E J_{\varphi}}$$

verknüpft.

Beschränken wir uns auf die Untersuchung eines Kreisbogenträgers von gleichbleibendem Querschnitt ($J_{\varphi} = J = \text{konst}$) und nehmen wir an, daß der rechte Winkel, den die auf den Bogenträger einwirkenden Lastelemente mit den zugehörigen Bogenelementen einschließen, auch während des Ausknickens erhalten bleibt, so lautet die Differentialgleichung für die Tangentialverschiebung v nach Federhofer³⁾

$$(6) \frac{d^4 v}{d \varphi^4} + (1 + k^2) \frac{d^2 v}{d \varphi^2} + k^2 \cdot \frac{d^2 v}{d \varphi^2} = 0,$$

wobei

$$(7) k = \sqrt{1 + \frac{p_{Ki} r^3}{E J}}$$

bedeutet. Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung hat die Form

$$(8) v = C_1 \cdot \cos k \varphi + C_2 \cdot \sin k \varphi + C_3 \cdot \sin \varphi + C_4 \cdot \cos \varphi + C_5 \varphi + C_6$$

und enthält sechs Integrationskonstanten, die durch die sechs Randbedingungen des Problems bestimmt sind. Wenn wir (8) in diese Randbedingungen einsetzen und (2) beachten, gelangen wir zu einem System von sechs in den Integrationskonstanten linearen und homogenen Gleichungen, das nur dann eine von der trivialen Nulllösung verschiedene Lösung für diese Integrationskonstanten — also nur dann eine infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur — zuläßt, wenn seine Koeffizientendeterminante D_K verschwindet. Die Gleichung

$$(9) D_K = 0$$

stellt daher die gesuchte Knickbedingung dar; sie dient zur Berechnung des kleinsten positiven und reellen „Knickwertes“ k und damit zur Bestimmung der gesuchten kleinsten idealen Knickbelastungsintensität

$$(10) p_{Ki} = (k^2 - 1) \frac{E J}{r^3}$$

Beziehen wir uns beispielsweise auf den allgemeinen Fall der elastischen Einspannung der Trägerenden und bezeichnen wir die im infinitesimal ausgebogenen Gleichgewichtszustand an der linken und rechten Einspannstelle entstehenden unendlich kleinen Verdrehungen mit ψ_l, ψ_r (Bild 1b) und die an diesen Stellen auftretenden Biegemomente mit M_l, M_r , so erhalten wir

$$(11) \begin{cases} \psi_l = M_l \tau_l \\ \psi_r = -M_r \tau_r \end{cases}$$

wobei die Winkel τ_l, τ_r zur Kennzeichnung des Grades der elastischen

³⁾ K. Federhofer, Eisenbau (12) 1921, S. 289.

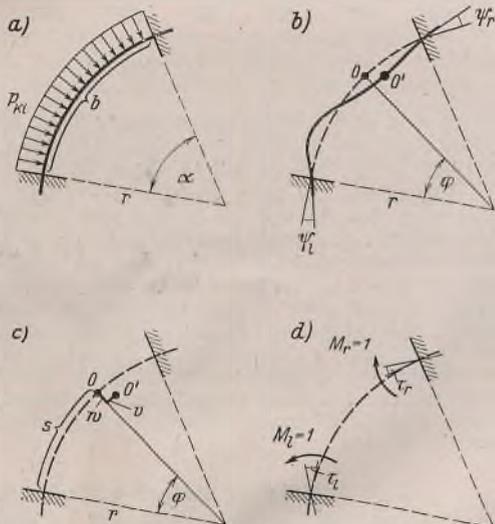


Bild 1a bis d.

Einspannung dienen und die Verdrehungen darstellen, die ein an der linken bzw. rechten Einspannstelle angebracht gedachtes starrs Trägestück unter der Einwirkung $M=1$ erfährt (Bild 1d). Die Beziehungen (11) lauten nach Einführung von (3), (4), (5)

$$(12) \begin{cases} \varphi=0 \dots -\frac{1}{r} \left(\frac{d w}{d \varphi} + v \right) = -\frac{E J \tau_l}{r^2} \left(\frac{d^2 w}{d \varphi^2} + w \right) \\ \varphi=\alpha \dots -\frac{1}{r} \left(\frac{d w}{d \varphi} + v \right) = +\frac{E J \tau_r}{r^2} \left(\frac{d^2 w}{d \varphi^2} + w \right) \end{cases}$$

und gehen, wenn wir berücksichtigen, daß an den Einspannstellen sowohl v als auch w verschwindet, in

$$(13) \begin{cases} \varphi=0 \dots \frac{d w}{d \varphi} = \frac{E J \tau_l}{r} \cdot \frac{d^2 w}{d \varphi^2} \\ \varphi=\alpha \dots \frac{d w}{d \varphi} = -\frac{E J \tau_r}{r} \cdot \frac{d^2 w}{d \varphi^2} \end{cases}$$

über. Die sechs Randbedingungen, denen die infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur eines elastisch eingespannten Kreisbogenträgers unterworfen sind, lassen sich daher nach Beachtung von (2) in der Form

$$(14) \begin{cases} \varphi=0 \dots v=0, \quad \frac{d v}{d \varphi}=0, \quad \frac{d^2 v}{d \varphi^2} - \frac{E J \tau_l}{r} \cdot \frac{d^3 v}{d \varphi^3} = 0 \\ \varphi=\alpha \dots v=0, \quad \frac{d v}{d \varphi}=0, \quad \frac{d^2 v}{d \varphi^2} + \frac{E J \tau_r}{r} \cdot \frac{d^3 v}{d \varphi^3} = 0 \end{cases}$$

anschreiben. Ist der Kreisbogenträger an beiden Enden starr eingespannt, dann ist $\tau_l = \tau_r = 0$, so daß die Randbedingungen (13)

$$(15) \quad \varphi=0 \text{ und } \varphi=\alpha \dots \frac{d w}{d \varphi} = 0$$

lauten; ist er an beiden Enden gelenkig gelagert, gilt also $\frac{1}{\tau_l} = \frac{1}{\tau_r} = 0$, so wird für (13)

$$(16) \quad \varphi=0 \text{ und } \varphi=\alpha \dots \frac{d^2 w}{d \varphi^2} = 0$$

erhalten. Bei Kreisbogenträgern, deren Achse nicht durch den Zentriwinkel α und den Kreisradius r , sondern durch die Stützweite l und die Pfeilhöhe f festgelegt ist (Bild 2a), kann α und r mit Hilfe der Beziehungen

$$(17) \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\frac{l}{4f} + \frac{f}{l}} \quad r = \frac{l}{2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}$$

bestimmt werden.

Für den radial gleichmäßig belasteten, kreisförmigen Zweigelenkbogen von gleichbleibendem Querschnitt (Bild 2a) ergibt sich — wie

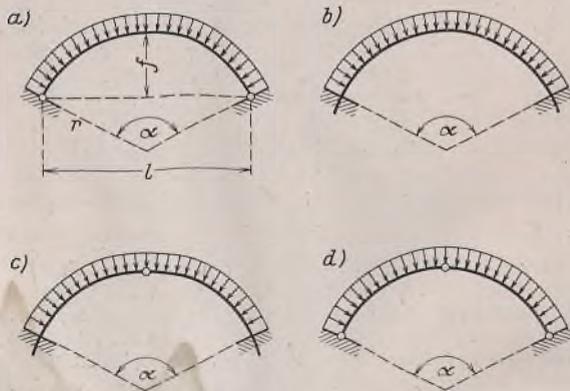


Bild 2a bis d.

schon von Hurlbrink⁴⁾ mit elementaren Hilfsmitteln gewonnen, von Timoshenko⁵⁾ und Mayer⁴⁾ unter Zugrundelegung des experimentell gefundenen Verlaufes der maßgebenden Knickfigur nachgeprüft und von Nicolai⁶⁾ theoretisch abgeleitet worden ist — für den in (10) auftretenden Knickwert k die durch die Kurve a in Bild 3 dargestellte Formel

$$(18) \quad k = \frac{2 \pi}{\alpha}$$

Für die Knickbedingung (9) des radial gleichmäßig belasteten, beiderseits starr eingespannten Kreisbogenträgers (Bild 2b) hat Nicolai⁶⁾

⁴⁾ E. Hurlbrink, Schiffbau (9) 1908, S. 640; S. Timoshenko, Stabilität elastischer Systeme, Kiew 1910; R. Mayer, Z. Math. u. Physik (61) 1913, S. 318.

⁵⁾ E. L. Nicolai, Ber. d. Polytechn. Inst. St. Petersburg (27) 1918, S. 323; P. Funk, Z. ang. Math. (4) 1924, S. 143; E. Chwalla, Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien, IIa, 136, 1927, S. 645.

⁶⁾ E. L. Nicolai, a. a. O. und Z. ang. Math. (3) 1923, S. 227; A. Lokschin, Z. ang. Math. (16) 1936, S. 49; S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability, New York und London 1936, S. 227.

die Gleichung

$$(19) \quad \frac{k \alpha}{2} \cdot \cotg \frac{k \alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} \cdot \cotg \frac{\alpha}{2} = 0$$

erhalten; der Knickwert k , der die kleinste über 1 liegende Wurzel dieser transzendenten Gleichung vorstellt, wird in seiner Abhängigkeit vom Zentriwinkel α durch die Kurve b in Bild 3 bestimmt. Für den Ein-gelenkbogen (Bild 2c) wurden von Woinowsky-Krieger⁷⁾ die in Bild 3, Kurve c , angegebenen Knickwerte ermittelt, während das ebene Knickproblem des radial gleichmäßig belasteten, kreisförmigen Dreigelenkbogens (Bild 2d) — wie der Vollständigkeit halber noch vermerkt sei — von Nasarow⁸⁾ untersucht wurde und zu der durch die

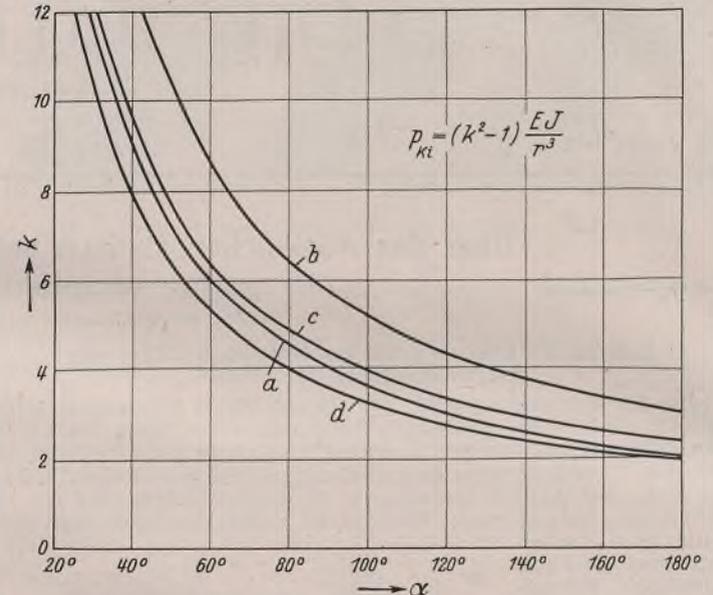


Bild 3.

Kurve d in Bild 3 dargestellten Lösung führt; für den kreisförmigen Dreigelenkbogen mit beliebig angeordnetem Scheitelgelenk hat Woinowsky-Krieger⁷⁾ die Knickbedingung abgeleitet.

Alle diese Lösungen sind an die schon erwähnte Voraussetzung gebunden, daß die auf den Bogenträger einwirkenden Lasten mit dem zugehörigen Bogenelement auch während des Ausknickens einen rechten Winkel einschließen. Würden wir annehmen, daß die Wirkungsgeraden dieser Lasten auch während des Ausknickens des Bogenträgers durch den ursprünglichen Kreismittelpunkt hindurchgehen, oder würden wir für diese Lasten während des Ausknickens des Bogenträgers ausschließlich Parallelverschiebungen zulassen, so würden wir zu grundsätzlich anderen Knickbedingungen und damit auch zu anderen Lösungsergebnissen gelangen. Für den Zweigelenkbogen sind diese Lösungsergebnisse von Chwalla³⁾ einander gegenübergestellt worden.

2. Einführung statisch unbestimmter Größen.

Die Differentialgleichung für die Tangentialverschiebung v , zu der wir bei der Untersuchung der unendlich wenig ausgebogenen Gleichgewichtsfigur des Kreisbogenträgers gelangen, ist von sechster Ordnung und in ihrer allgemein gültigen Form zur Aufstellung eines einfachen, praktisch brauchbaren Iterationsverfahrens nicht geeignet. Die Herabsetzung der Ordnungszahl dieser Differentialgleichung gelingt in übersichtlicher Weise durch die Einführung der beim Übergang von der kreisförmigen zur infinitesimal ausgebogenen Gleichgewichtsfigur auftretenden statisch unbestimmten Stützgrößen. Bei einem beiderseits eingespannten Kreisbogenträger, bei dem wir drei solche Stützgrößen — die zusätzliche, unendlich kleine tangentiale Stützkraft X_a , die unendlich kleine radiale Stützkraft X_b und das unendlich kleine Einspannmoment X_c (Bild 4a) — zu unterscheiden haben, lautet dann die Beziehung für das an der Querschnittsstelle φ auftretende, unendlich kleine Biegemoment (vgl. Bild 4b u. 4c)

$$(20) \quad M = p_{ki} r w + X_a r (1 - \cos \varphi) + X_b r \cdot \sin \varphi + X_c,$$

wobei alle von höherer Ordnung kleinen Glieder — wie etwa die Glieder von der Form $X_a w$ oder $X_b v$ — weggelassen sind; führen wir (20) in die Beziehung

$$(21) \quad \frac{d^2 w}{d \varphi^2} + w + \frac{M r^2}{E J_\varphi} = 0$$

ein, die aus der Gleichsetzung von (4) und (5) folgt⁹⁾, so gelangen wir zur

⁷⁾ S. Woinowsky-Krieger, Stahlbau 1937, Heft 24, S. 185.

⁸⁾ A. Nasarow, Bautechn. (14) 1936, Heft 7, S. 114.

⁹⁾ Diese Differentialgleichung war schon J. Boussinesq [Compt. rend. (97) 1883, S. 843] bekannt.

Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$(22) \quad \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \left(1 + \frac{p_{Ki} r^3}{EJ_\varphi}\right) w + \frac{X_a r^3}{EJ_\varphi} (1 - \cos \varphi) + \frac{X_b r^3}{EJ_\varphi} \cdot \sin \varphi + \frac{X_c r^2}{EJ_\varphi} = 0.$$

Die beiden Integrationskonstanten C_1', C_2' , die in der allgemeinen Lösung dieser Differentialgleichung auftreten, sind ebenso wie die Integrationskonstante C_3' , die in der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung (2)

$$(23) \quad v = \int w d\varphi + C_3'$$

enthalten ist, durch die drei Randbedingungen bestimmt, denen die unendlich wenig ausgebogene Gleichgewichtsfigur an der rechten Einspannstelle unterworfen ist. Zur Berechnung der drei statisch unbestimmten Stützgrößen X_a, X_b und X_c stehen uns drei Elastizitätsgleichungen zur Verfügung, die für die linke Einspannstelle die Erfüllung der hier vorgeschriebenen Randbedingungen verlangen. Wir haben daher — ebenso wie früher — insgesamt sechs Randbedingungen aufzustellen und können mit Hilfe dieser Randbedingungen die sechs unbekannt GröÙen — drei Integrationskonstante und drei statisch unbestimmte StützgröÙen — ermitteln. Setzen wir die allgemeinen Lösungen von (22) und (2) in diese sechs Randbedingungen ein, so erhalten wir ein System von sechs in den Unbekannten $C_1', C_2', C_3', X_a, X_b$ und X_c linearen, homogenen Gleichungen, das nur dann eine von der trivialen Nulllösung verschiedene Lösung — also nur dann eine infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur — zuläßt, wenn seine Koeffizientendeterminante D_K verschwindet; die Gleichung

$$(24) \quad D_K = 0$$

stellt somit die gesuchte Knickbedingung dar. Im Sonderfall des gleichbleibenden Querschnitts ($J_\varphi = J = \text{const}$) lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (22), wenn wir uns wieder der HilfsgröÙe

$$(25) \quad k = \sqrt{1 + \frac{p_{Ki} r^3}{EJ}}$$

bedienen,

$$(26) \quad w = C_1' \cdot \sin k\varphi + C_2' \cdot \cos k\varphi + \frac{X_a r^3}{(k^2 - 1) EJ} \cdot \cos \varphi - \frac{X_b r^3}{(k^2 - 1) EJ} \cdot \sin \varphi - \frac{X_a r^3 + X_c r^2}{k^2 EJ},$$

so daß sich aus (23)

$$(27) \quad v = -\frac{C_1'}{k} \cdot \cos k\varphi + \frac{C_2'}{k} \cdot \sin k\varphi + \frac{X_a r^3}{(k^2 - 1) EJ} \cdot \sin \varphi + \frac{X_b r^3}{(k^2 - 1) EJ} \cdot \cos \varphi - \frac{X_a r^3 + X_c r^2}{k^2 EJ} \cdot \varphi + C_3'$$

ergibt. Der Vergleich von (27) und (8) läßt den formalen Zusammenhang, der zwischen diesen beiden Lösungsansätzen besteht, deutlich erkennen.

Untersuchen wir beispielsweise einen am linken Ende gelenkig gelagerten und am rechten Ende starr eingespannten Kreisbogenträger von gleichbleibendem Querschnitt (vgl. Bild 4d), so haben wir in (26) und (27)

$$(28) \quad X_c = 0$$

zu setzen und die zur Festlegung von $C_1', C_2', C_3', X_a, X_b$ dienenden fünf Randbedingungen in der Form

$$(29) \quad \begin{cases} \varphi = 0 \dots v = 0 & w = 0 \\ \varphi = \alpha \dots v = 0 & w = 0 & \frac{dw}{d\varphi} = 0 \end{cases}$$

zu schreiben; die Bedingung $\frac{d^2 w}{d\varphi^2} = 0$, die wir gemäß (16) für die Stelle $\varphi = 0$ noch aufstellen können, ist mit Rücksicht auf (21) — da an der linken Einspannstelle sowohl w als auch M verschwinden — von selbst erfüllt. Dann haben wir die durch (28) vereinfachten allgemeinen Lösungen (26) und (27) in diese fünf Randbedingungen einzuführen,

die Koeffizientendeterminante D_K des so erhaltenen, linearen und homogenen Gleichungssystems zu berechnen und gemäß (24) gleich Null zu setzen. Wir gelangen auf diese Weise zur Knickbedingung

$$(30) \quad [k \cdot \sin k\alpha - \sin \alpha - (k^2 - 1) \cos k\alpha \cdot \sin \alpha] \cdot [k \cdot \sin k\alpha - k^2 \cdot \sin \alpha + \frac{k^2 - 1}{k} (k\alpha - \sin k\alpha) \cos \alpha] + [k^2 \cdot \cos k\alpha - \cos \alpha - (k^2 - 1) \cos k\alpha \cdot \cos \alpha] \cdot [\cos k\alpha - 1 - k^2(\cos \alpha - 1) - \frac{k^2 - 1}{k} (k\alpha - \sin k\alpha) \sin \alpha] = 0,$$

die, wenn wir uns auf den in Bild 4d gezeichneten Bogenträger mit dem Zentriwinkel

$$(31) \quad \alpha = 1,187 \approx 68^\circ$$

beziehen, für den kleinsten positiven und reellen Knickwert den Wert

$$(32) \quad k = 6,35$$

liefert; die für die Bemessung des Kreisbogenträgers maßgebende „kleinste ideale Knickbelastungsintensität“ beträgt daher mit Rücksicht auf (25)

$$(33) \quad p_{Ki} = (k^2 - 1) \frac{EJ}{r^3} = 39,32 \cdot \frac{EJ}{r^3}.$$

Diese Knickbelastungsintensität ist, wie wir vergleichsweise erwähnen wollen, ein wenig kleiner als das arithmetische Mittel der idealen Knickbelastungsintensitäten

$$(34) \quad p_{Ki} = 27,03 \cdot \frac{EJ}{r^3}$$

und

$$(35) \quad p_{Ki} = 57,06 \cdot \frac{EJ}{r^3},$$

die wir mit Hilfe von (18) und (19) in den Grenzfällen beidseitig gelenkiger Lagerung bzw. beidseitig starrer Einspannung des Bogenträgers erhalten.

Wenn wir den Lösungswert (32) in das erwähnte System von fünf linearen, homogenen Gleichungen einsetzen und dieses Gleichungssystem nach den Unbekannten C_1', C_2', C_3', X_a und X_b auflösen, erhalten wir

$$(36) \quad \begin{cases} C_1' = -13,40 K & C_2' = K & C_3' = -14,84 K \\ X_a = -1585,48 \cdot \frac{KEJ}{r^3} & X_b = 500,58 \cdot \frac{KEJ}{r^3} \end{cases}$$

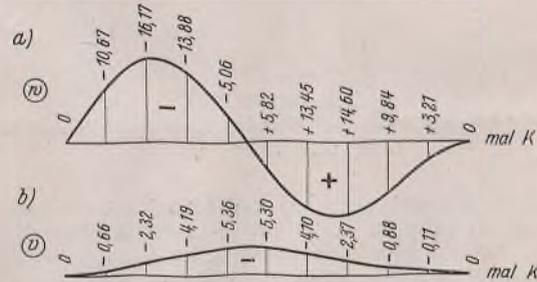


Bild 5a u. b.

wobei K einen unbestimmt bleibenden (im Sinne unserer Voraussetzung unendlich klein zu denkenden) Faktor bedeutet. Die Beziehungen (26) und (27) nehmen nach Berücksichtigung dieser Ergebnisse die Form

$$(37) \quad \begin{cases} w = K(-13,40 \cdot \sin 6,35\varphi + \cos 6,35\varphi - 12,73 \cdot \sin \varphi - 40,32 \cdot \cos \varphi + 39,32) \\ v = K(2,11 \cdot \cos 6,35\varphi + 0,16 \cdot \sin 6,35\varphi + 12,73 \cdot \cos \varphi - 40,32 \cdot \sin \varphi + 39,32\varphi - 14,84) \end{cases}$$

an und führen zu den in Bild 5 gezeichneten Verteilungskurven; die durch w und v festgelegte infinitesimal ausgebogene Gleichgewichtsfigur ist in maßstäblicher Verzerrung — als sogenannte „Knickfigur“ — in Bild 6 dargestellt.

3. Das Verfahren schrittweiser Annäherung zur Bestimmung von p_{Ki} bei statisch unbestimmter Lagerung und beliebigem stetigen Querschnittsgesetz.

Bei Kreisbogenträgern mit veränderlichem Querschnitt bereitet die Integration der Differentialgleichung (22) erhebliche Schwierigkeiten. Dinnik¹⁰⁾ und Steuermann¹⁰⁾ haben einige strenge Sonderlösungen des Problems für einen symmetrisch ausgebildeten, antisymmetrisch ausknickenden Zweigelenkbogen von stetig veränderlichem Querschnitt angegeben, und andere russische Autoren haben ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der kleinsten idealen Knickbelastungsintensität eines symmetrisch gebauten und symmetrisch knickenden Drei-

¹⁰⁾ A. N. Dinnik, vgl. das Buch von S. Timoshenko, Theory of Elastic Stability. New York und London 1936, S. 229; J. E. Steuermann, Ber. d. Polytechn. Inst. Kiew, 1929, S. 25, und Ing. Arch (1), 1930, S. 301.

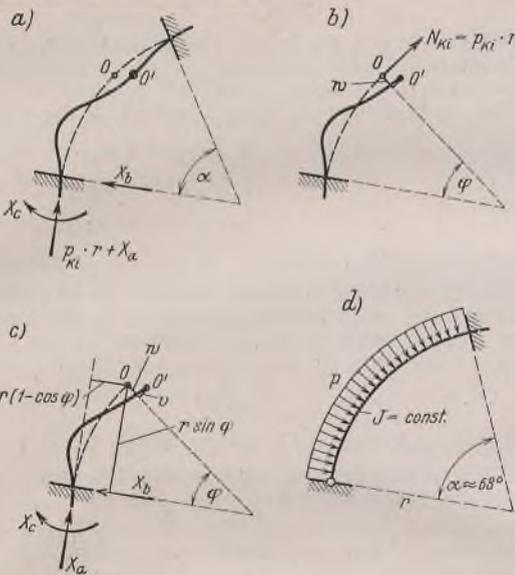


Bild 4a bis d.

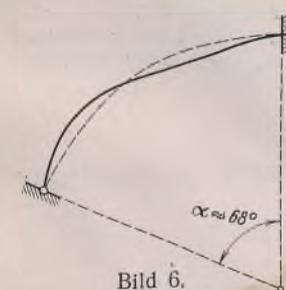


Bild 6.

gelenkbogens von veränderlichem Querschnitt entwickelt¹¹⁾. Ein bei beliebiger statisch unbestimmter Lagerung und beliebigem stetigen Querschnittsgesetz verwendbares Verfahren schrittweiser Annäherung läßt sich im Anschluß an die im 2. Abschnitt angestellten Überlegungen in folgender Weise entwickeln:

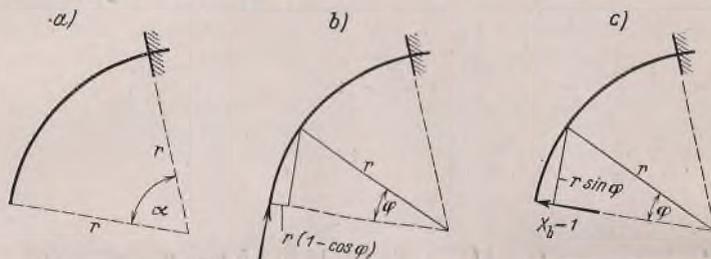
Wird an Stelle von φ die Größe

$$(38) \quad s = r \varphi$$

als unabhängige Veränderliche eingeführt (Bild 1c) und für die unendlich kleine Radialverschiebung ein den Randbedingungen entsprechendes Gesetz $w = f(s)$ plausibel angenommen, so lassen sich die diesem Gesetz zugeordneten, in (20) auftretenden statisch unbestimmten Größen X_a, X_b, X_c mit Hilfe der schon erwähnten drei Elastizitätsgleichungen eindeutig berechnen. Wenn wir uns beispielsweise auf einen beiderseits starr eingespannten Kreisbogenträger mit den in Bild 4a eingetragenen Überzähligen X_a, X_b, X_c beziehen, bringen diese Elastizitätsgleichungen zum Ausdruck, daß an der linken Einspannstelle sowohl die Verschiebungen v und w als auch die Verdrehung φ verschwinden müssen; sie lauten daher

$$(39) \quad \begin{cases} \int_b^s \bar{M}_a \cdot \frac{M}{EJ_s} \cdot ds = 0 \\ \int_b^s \bar{M}_b \cdot \frac{M}{EJ_s} \cdot ds = 0 \\ \int_b^s \bar{M}_c \cdot \frac{M}{EJ_s} \cdot ds = 0, \end{cases}$$

wobei J_s das an der Stelle s vorhandene Querschnittsträgheitsmoment bedeutet und $\bar{M}_a, \bar{M}_b, \bar{M}_c$ die Biegemomente darstellen, die im statisch bestimmten Grundsystem (dem Freitrag, Bild 7a) unter den Hilfsangriffen $X_a = 1$ bzw. $X_b = 1$ bzw. $X_c = 1$ entstehen. Setzen wir (20)



$X_a = 1$ Bild 7a bis c.

in diese Elastizitätsgleichungen ein und integrieren wir über die ganze Bogenlänge b , so gelangen wir zu drei linearen Gleichungen, aus denen wir X_a, X_b und X_c berechnen können. Ist X_a, X_b und X_c bekannt, dann läßt sich mit Hilfe von (20) das Biegemoment M und durch Integration von (21) ein neues Gesetz für w bestimmen, das dem zu Beginn der Rechnung gewählten Gesetz gegenübergestellt werden kann und mit ihm bis auf einen gemeinsamen Faktor übereinstimmen würde, wenn unsere Annahme zufällig die „richtige“ gewesen wäre. Praktisch wird diese Übereinstimmung beim ersten Lösungsschritt noch nicht erzielt sein, so daß wir die Rechnung mit dem neuen, verbesserten Gesetz wiederholen müssen („Verfahren schrittweiser Annäherung“).

Wir gehen von einer plausibel angenommenen, den vorgeschriebenen Randbedingungen entsprechenden Knickfigur aus, legen diese Knickfigur durch

$$(40) \quad \begin{cases} v = f_1(s) \\ w = r \cdot \frac{dv}{ds} = f_2(s) \end{cases}$$

fest und stellen (40) ordnatensweise dar, indem wir die Bogenlänge b in m Stück (z. B. $m = 10$ Stück) gleiche Teile

$$(41) \quad \lambda = \frac{b}{m}$$

unterteilen und für die Unterteilungspunkte $n = 0, 1, 2, 3 \dots m$ der Reihe nach die Ordinatenwerte

$$(42) \quad w_n = c_n K$$

bis auf den gemeinsamen Faktor K (dem wir die Dimension einer Länge zuweisen) zahlenmäßig angeben. Dann setzen wir die den einzelnen Stellen $n = 0, 1, 2, 3 \dots m$ zugeordneten Werte c_n und $\varphi_n = \frac{n\alpha}{m}$ in (20)

$$(43) \quad M_n = c_n p_{Ki} r K + X_a r \left(1 - \cos \frac{n\alpha}{m}\right) + X_b r \cdot \sin \frac{n\alpha}{m} + X_c$$

ein, berechnen die im statisch bestimmten Grundsystem (dem Freitrag, Bild 7a) unter den Hilfsangriffen $X_a = 1$ bzw. $X_b = 1$ bzw. $X_c = 1$ auftretenden Biegemomente

¹¹⁾ J. E. Steuermann u. A. A. Pikowski, Grundlagen der Stabilitätstheorie der Baukonstruktionen, § 27. Moskau 1939.

$$(44) \quad \begin{cases} \bar{M}_a = +1 r (1 - \cos \varphi) = +1 r \left(1 - \cos \frac{n\alpha}{m}\right) \\ \bar{M}_b = +1 r \cdot \sin \varphi = +1 r \cdot \sin \frac{n\alpha}{m} \\ \bar{M}_c = +1 \end{cases}$$

und ermitteln die den einzelnen Stellen $n = 0, 1, 2, 3 \dots m$ zugeordneten Werte

$$\left(\bar{M}_a \cdot \frac{M}{EJ}\right)_n, \left(\bar{M}_b \cdot \frac{M}{EJ}\right)_n \text{ und } \left(\bar{M}_c \cdot \frac{M}{EJ}\right)_n.$$

Führen wir nun die in den Elastizitätsgleichungen (39) vorgeschriebenen Integrationen näherungsweise unter Verwendung der Simpson'schen Regel (oder der Trapezformel) durch, so gelangen wir zu drei in X_a, X_b, X_c linearen Gleichungen, deren Lösungen in der Form

$$(45) \quad \begin{cases} X_a = a' K p_{Ki} \\ X_b = a'' K p_{Ki} \\ X_c = a''' K p_{Ki} \end{cases}$$

erhalten werden, wobei a', a'' und a''' Zahlenwerte darstellen. Ist X_a, X_b und X_c bekannt, dann lassen sich die Biegemomente (43) und — nach Einführung eines beliebig gewählten Vergleichswertes J^* für die Querschnittsträgheitsmomente J — auch die in

$$(46) \quad \left(\frac{M}{EJ}\right)_n = c_n \cdot \frac{K p_{Ki} r}{EJ^*}$$

auftretenden Beiwerte c_n für alle Stellen $n = 0, 1, 2, 3 \dots m$ berechnen. Wir sind damit in der Lage, in der Differentialgleichung (21) — für die wir wegen (38) nunmehr

$$(47) \quad \frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{r^2} + \frac{M}{EJ_s} = 0$$

schreiben wollen — die Ortsfunktion $\frac{M}{EJ_s} = f_3(s)$ ordnatensweise anzugeben. Das zur Integration dieser Differentialgleichung erforderliche, von Stüssi¹²⁾ entwickelte Verfahren baut auf der Näherungsbeziehung

$$(48) \quad \frac{\lambda^2}{12} \left[\left(\frac{d^2 \eta}{ds^2}\right)_{n-1} + 10 \left(\frac{d^2 \eta}{ds^2}\right)_n + \left(\frac{d^2 \eta}{ds^2}\right)_{n+1} \right] = \eta_{n-1} - 2 \eta_n + \eta_{n+1}$$

auf, die zwischen einer stetigen, an den Stellen $s = n \cdot \lambda$ (λ = Intervalllänge, $n = 0, 1, 2 \dots m$) festgelegten Funktion $\eta = f(s)$ und ihrer zweiten Ableitung besteht und — wenn wir uns auf die Funktion $w = f_3(s)$ beziehen und für $\left(\frac{d^2 w}{ds^2}\right)_n$ den aus (47) folgenden Ausdruck

$$(49) \quad \left(\frac{d^2 w}{ds^2}\right)_n = -\frac{w_n}{r^2} - \left(\frac{M}{EJ}\right)_n$$

einsetzen — zur Gleichung

$$(50) \quad \frac{\lambda^2}{12} \left[-\frac{w_{n-1}}{r^2} - \left(\frac{M}{EJ}\right)_{n-1} - 10 \cdot \frac{w_n}{r^2} - 10 \left(\frac{M}{EJ}\right)_n - \frac{w_{n+1}}{r^2} - \left(\frac{M}{EJ}\right)_{n+1} \right] = w_{n-1} - 2 w_n + w_{n+1}$$

führt. Die Gl. (50), die nach Beachtung von (46) und

$$(51) \quad \frac{\lambda^2}{12 r^2} = \frac{b^2}{12 m^2 r^2} = \frac{\alpha^2}{12 m^2}$$

in

$$(52) \quad w_{n-1} \left(1 + \frac{\alpha^2}{12 m^2}\right) - w_n \left(2 - 10 \cdot \frac{\alpha^2}{12 m^2}\right) + w_{n+1} \left(1 + \frac{\alpha^2}{12 m^2}\right) = -\frac{\alpha^2}{12 m^2} \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ^*} (c_{n-1} - 10 c_n + c_{n+1})$$

übergeht, ist der Reihe nach für alle Stellen $n = 1, 2, 3 \dots (m-1)$ anzuschreiben; für die an den Stellen $n = 0$ und $n = m$ geltenden Funktionswerte haben wir hierbei mit Rücksicht auf die vorgeschriebenen Randbedingungen

$$(53) \quad w_0 = 0, \quad w_m = 0$$

zu setzen. Das auf diese Weise erhaltene System von $(m-1)$ linearen, dreigliedrigen Gleichungen ist nach den Unbekannten w_n aufzulösen und liefert diese Unbekannten in der Form

$$(54) \quad w_n = c_n^* \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ^*},$$

wobei c_n^* einen von $n = 0, 1, 2, 3 \dots m$ abhängigen Zahlenwert bedeutet.

¹²⁾ F. Stüssi, Abhandlungen der IVBH., 3. Band, Zürich 1935, S. 401. Das Verfahren wurde von E. Amstutz, Schweiz. Bauztg. (112) 1938, S. 83, und von E. Chwalla, Forschungsheft Nr. 2 aus dem Gebiete des Stahlbaues, Berlin 1939, S. 53, verwendet; über weitere Anwendungen bei der Winddruckuntersuchung von Hängebrücken und bei der Stabilitätsuntersuchung frei vorgebauter Blechträgerbrücken wird demnächst berichtet werden.

Wir sind bei der Durchführung unseres Lösungsverfahrens von dem angenommenen Gesetz (42) ausgegangen und nach der Integration der Differentialgleichung des Problems zum neuen Gesetz (54) gelangt. Würden wir bei unseren Integrationen weder von der Simpsonschen Regel [bei der Lösung von (39)] noch von der Stüssischen Beziehung [bei der Lösung von (47)] Gebrauch machen und hätten wir mit unserer Annahme (42) zufällig das der gesuchten Lösung entsprechende „richtige“ Gesetz getroffen, so würde sich das Gesetz (54) vom angenommenen bloß durch einen konstanten Faktor unterscheiden; der aus den Zahlenwerten c_n und c_n^* gebildete Quotient

$$(55) \quad Q_n = c_n / c_n^*$$

wäre dann an allen Stellen $n = 1, 2, 3 \dots (m-1)$ der gleiche, so daß wir für eine beliebige Stelle n die Bedingung

$$(56) \quad (w_n)_{\text{erhalten}} = (w_n)_{\text{angenommen}}$$

anschreiben und mit Hilfe dieser Bedingung — nach Beachtung von (42) und (54) — die ideale Knickbelastungsintensität

$$(57) \quad p_{Ki} = Q_n \cdot \frac{EJ^*}{r^3}$$

berechnen könnten. Entspricht die Annahme (42) der genauen Knickfigur — wie wir dies praktisch zu erwarten haben — nur mit mehr oder minder guter Annäherung, dann hat der Quotient (55) an jeder Stelle $n = 1, 2, 3 \dots (m-1)$ einen etwas anderen Wert; in einem solchen Fall dürfen wir mit mehr oder minder großer Genauigkeit für die Knickbelastungsintensität

$$(58) \quad p_{Ki} = Q_{\text{mittel}} \cdot \frac{EJ^*}{r^3}$$

schreiben, wobei Q_{mittel} das arithmetische Mittel aller dieser Einzelwerte Q_n vorstellt. Unterscheiden sich die Quotienten (55) an den Stellen $n = 1, 2, 3 \dots (m-1)$ stark voneinander, so beweist dies, daß wir mit unserer Annahme (42) von der genauen Knickfigur stark abgewichen sind; wir müssen dann die ganze Rechnung mit der verbesserten Annahme (42) wiederholen, und zwar so lange, bis die Anwendung von (58) gerechtfertigt ist. Hinsichtlich der Konvergenz dieses durch „schrittweise Annäherung“ gekennzeichneten Rechenvorganges gelten ähnliche Überlegungen wie bei dem bekannten Iterationsverfahren von Engeßer-Vianello¹³⁾.

Abschließend sei mit Bezug auf (58) noch erwähnt, daß es naheliegender erscheint, bei der Berechnung von Q_{mittel} die Flächen $(F_w)_{\text{angenommen}}$ und $(F_w)_{\text{erhalten}}$, die die c_n -Kurve bzw. die c_n^* -Kurve mit den Koordinatenachsen einschließen, mit Hilfe der Simpsonschen Regel (oder der Trapezformel) zu bestimmen und Q_{mittel} in der Formel

$$(59) \quad Q_{\text{mittel}} = \frac{(F_w)_{\text{angenommen}}}{(F_w)_{\text{erhalten}}}$$

darzustellen. Diese Art der Mittelbildung hat sich gut bewährt¹⁴⁾, ist aber nur in jenen Fällen zweckmäßig, in denen alle c_n dasselbe Vorzeichen haben. Im Rahmen unserer Untersuchung treten sowohl positive als auch negative Vorzeichen c_n auf, so daß sowohl der Nenner als auch der Zähler in (59) eine Differenz von Flächeninhalten darstellt. Sind diese Differenzen verhältnismäßig klein, dann ist die Formel (59) zur Mittelbildung ungeeignet. Ihrer Anwendung steht jedoch nichts entgegen, wenn die Vorzeichen c_n und c_n^* mit ihren Absolutwerten in die Simpsonsche Regel (bzw. die Trapezformel) eingeführt werden.

4. Zahlenbeispiel zur Nachprüfung der praktisch erreichbaren Genauigkeit.

Um den Gang der Untersuchung bei Zugrundelegung des im 3. Abschnitt geschilderten Lösungsverfahrens an Hand eines Zahlenbeispiels klarzustellen und die praktisch erzielbare Genauigkeit der Lösung zu beleuchten, wollen wir das Verfahren bei der Bestimmung der kleinsten idealen Knickbelastungsintensität des im 2. Abschnitt behandelten, zweifach statisch unbestimmten Kreisbogenträgers (Bild 4d, Zentriwinkel $\alpha = 1,187 \approx 68^\circ$, Querschnittsträgheitsmoment $J = \text{konst}$) anwenden. Wir gehen hierbei von dem in Bild 5 angegebenen, der strengen Problemlösung zugeordneten Verteilungsgesetz (42) aus und dürfen daher erwarten, daß der Quotient (55) schon nach dem ersten Lösungsschritt an allen Stellen $n = 1, 2, 3 \dots (m-1)$ praktisch derselbe ist und zu einem Wert p_{Ki} führt, der mit dem strengen Lösungswert (33) hinreichend übereinstimmt.

Wir unterteilen die Bogenlänge b in $m = 10$ gleiche Teile der Länge $\lambda = b/10$, stellen die Biegemomente (43) unter Verwendung der in Bild 5a angegebenen Vorzeichen c_n in der Form

$$(60) \quad M_n = c_n p_{Ki} r K + X_a r \left(1 - \cos \frac{n\alpha}{10}\right) + X_b r \cdot \sin \frac{n\alpha}{10},$$

$n = 0, 1, 2, 3 \dots m$

dar und ermitteln die im statisch bestimmten Grundsystem (Freitrag)

¹³⁾ Vgl. dazu A. Schleusner, Zur Konvergenz des Engeßer-Vianello-Verfahrens. Leipzig und Berlin 1938.

¹⁴⁾ K. Karas, Ing. Arch. (1) 1930, S. 177; K. Pohl, Stahlbau (6) 1933, Heft 18, S. 137.

unter den Hilfsangriffen $X_a = 1$ (Bild 7b) bzw. $X_b = 1$ (Bild 7c) auftretenden, durch (44) festgelegten Werte

$$(61) \quad \begin{cases} \overline{M}_a = +1r(1 - \cos 0,1187n) \\ \overline{M}_b = +1r \cdot \sin 0,1187n, \quad n = 0, 1, 2, 3 \dots 10. \end{cases}$$

Dann berechnen wir für $n = 0, 1, 2, 3 \dots 10$ der Reihe nach die Integralen

$$(62) \quad \begin{cases} \left(\frac{\overline{M}_a M}{EJ}\right)_0 = 0 \\ \left(\frac{\overline{M}_a M}{EJ}\right)_1 = \frac{r^2}{EJ} \cdot 10^{-3} (-74,996 K p_{Ki} + 0,0494 X_a + 0,8324 X_b) \\ \dots \text{ usw.} \end{cases}$$

und

$$(63) \quad \begin{cases} \left(\frac{\overline{M}_b M}{EJ}\right)_0 = 0 \\ \left(\frac{\overline{M}_b M}{EJ}\right)_1 = \frac{r^2}{EJ} \cdot 10^{-3} (-1263,091 K p_{Ki} + 0,8324 X_a + 14,0185 X_b) \\ \dots \text{ usw.,} \end{cases}$$

integrieren (39) mit Hilfe der Simpsonschen Regel

$$(64) \quad \begin{cases} \int_b \frac{\overline{M}_a M}{EJ} \cdot ds = \frac{\lambda}{3} \left[\left(\frac{\overline{M}_a M}{EJ}\right)_0 + 4 \left(\frac{\overline{M}_a M}{EJ}\right)_1 + 2 \left(\frac{\overline{M}_a M}{EJ}\right)_2 + \dots \right] \\ \int_b \frac{\overline{M}_b M}{EJ} \cdot ds = \frac{\lambda}{3} \left[\left(\frac{\overline{M}_b M}{EJ}\right)_0 + 4 \left(\frac{\overline{M}_b M}{EJ}\right)_1 + 2 \left(\frac{\overline{M}_b M}{EJ}\right)_2 + \dots \right] \end{cases}$$

und gelangen so zu den beiden Elastizitätsgleichungen

$$(65) \quad \begin{cases} 19,299 K p_{Ki} r + 331,186 X_b + 168,571 X_a = 0 \\ 32,162 K p_{Ki} r + 710,878 X_b + 331,186 X_a = 0, \end{cases}$$

deren Lösungen

$$(66) \quad \begin{cases} X_a = -0,30227 K p_{Ki} r \\ X_b = +0,09558 K p_{Ki} r \end{cases}$$

lauten und nach Einführung in (60) die in Bild 8 angegebenen Werte

$$(67) \quad \begin{cases} \left(\frac{M}{EJ}\right)_0 = 0 \\ \left(\frac{M}{EJ}\right)_1 = -9,437 \cdot \frac{K p_{Ki} r}{EJ} \\ \left(\frac{M}{EJ}\right)_2 = -14,295 \cdot \frac{K p_{Ki} r}{EJ} \\ \dots \text{ usw.} \end{cases}$$

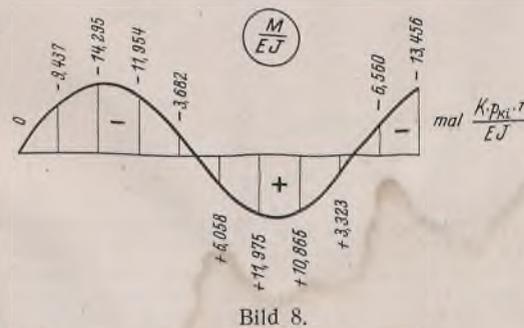


Bild 8.

liefern. Diese Werte setzen wir nun in die für $n = 1, 2, 3 \dots 9$ angeschriebenen Gl. (52) ein, beachten hierbei (53) sowie

$$(68) \quad \frac{\alpha^2}{12 m^2} = \frac{1,187^2}{12 \cdot 10^2} = 0,001174$$

und erhalten so die dreigliedrigen Gleichungen

$$(69) \quad \begin{cases} 0 - 1,98826 w_1 + 1,00117 w_2 = 0,12754 \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \\ 1,00117 w_1 - 1,98826 w_2 + 1,00117 w_3 = 0,19289 \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \\ \dots \text{ usw. } \dots \\ 1,00117 w_8 - 1,98826 w_9 + 0 = 0,08889 \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \end{cases}$$

mit der Lösung

$$(70) \begin{cases} w_0 = w_{10} = 0 & w_5 = +0,150 \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \\ w_1 = -0,271 \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ} & w_6 = +0,344 \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \\ w_2 = -0,411 \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ} & w_7 = +0,373 \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \\ w_3 = -0,352 \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ} & w_8 = +0,251 \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \\ w_4 = -0,127 \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ} & w_9 = +0,082 \cdot \frac{K p_{Ki} r^3}{EJ} \end{cases}$$

Hätten wir bei der Durchführung der Rechnungen weder von der Simpson'schen Regel noch vom Stüssischen Integrationsverfahren Gebrauch gemacht, dann würden die angenommenen Vorzeichen c_n (Bild 5a) nach Division durch die nach der Integration der Differentialgleichung gewonnenen, in (70) enthaltenen Vorzeichen c_n^* für alle $n = 1, 2, 3 \dots 9$ denselben Quotienten Q_n ergeben. Mit Rücksicht auf die der Simpson'schen Regel und dem Stüssischen Integrationsverfahren entspringenden Fehler zeigen diese Quotienten geringfügige Schwankungen innerhalb der

Grenzen 38,86 und 39,81; das arithmetische Mittel aller dieser Q_n beträgt

$$(71) \quad Q_{\text{mittel}} = 39,30$$

und führt nach Beachtung von (58) zum Lösungswert

$$(72) \quad p_{Ki} = 39,30 \cdot \frac{EJ}{r^3},$$

der mit dem exakten Wert (33) fast vollkommen übereinstimmt. Würden wir die Beziehung (59) verwenden und bei der Ermittlung von $(F_w)_{\text{angenommen}}$ und $(F_w)_{\text{erhalten}}$ die Absolutwerte $|c_n|$ und $|c_n^*|$ in die Simpson'sche Regel einsetzen, so würden wir

$$(73) \quad Q_{\text{mittel}} = \frac{10,602 \cdot 140,857}{10,602 \cdot 3,586} = 39,28$$

und damit praktisch das gleiche Lösungsergebnis wie früher gewinnen. Würden wir hingegen die Flächenbestimmung unter Wahrung der Vorzeichen von c_n und c_n^* durchführen, dann würden sich die positiven und negativen Teilflächen (vgl. Bild 5a) nahezu ausgleichen und für Q_{mittel} den fehlerhaften Wert

$$(74) \quad Q_{\text{mittel}} = \frac{10,602 \cdot 0,217}{10,602 \cdot 0,019} = 11,39$$

liefern; im Rahmen unserer Untersuchung ist daher diese Art der Mittelbildung, wie schon im 3. Abschnitt erwähnt wurde, unbrauchbar.

Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung.

Einfeldrige und durchlaufende Versteifungsträger mit konstantem und veränderlichem Trägheitsmoment.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Dr.-Ing. Kuo-hao Lie, Darmstadt.

(Schluß aus Heft 14/15.)

III. Abschnitt.

Das Annäherungsverfahren zur Berechnung der Hängebrücken mit Versteifungsträgern von veränderlichem Trägheitsmoment J .

1. Entwicklung des Lösungsverfahrens.

Das im II. Abschnitt angewandte Gedankenmodell, eine Hängebrücke statisch durch einen ihrem Versteifungsträger entsprechenden stellvertretenden Träger zu ersetzen, soll auch die Grundlage des vorliegenden Verfahrens bilden. Die Aufgabe ist also im vorliegenden Fall die, den durch die Querlast und den Axialzug H belasteten stellvertretenden Träger von veränderlichem J zu berechnen oder, mathematisch ausgedrückt, die das veränderliche J enthaltende Differentialgleichung (7)

$$(7) \quad \eta_x'' = -\frac{M_x^0}{EJ_x} + \frac{H \eta_x}{EJ_x}$$

zu lösen¹⁰⁾. Hierzu wollen wir zunächst zwei Sonderfälle betrachten, wo die Lösung der Differentialgleichung gleich gefunden werden kann.

Sonderfall 1. $M^0 = 0$, d. h. der Träger ist nur durch den Axialzug H belastet. Es ist klar, daß in diesem Fall $\eta = 0$ die einzige Lösung darstellt. Sonderfall 2. Die Linien η und η^0 sind affin¹¹⁾, worin η^0 die Durchbiegung infolge M^0 allein bedeutet. Die Lösung lautet dann $\eta = a \eta^0$, und aus

$$(45) \quad \begin{cases} a \eta_x^{0''} = -\frac{a M_x^0}{EJ_x} \\ \text{und } a \eta_x'' = -\frac{M_x^0}{EJ_x} + \frac{a H \eta_x^0}{EJ_x} \end{cases}$$

ergibt sich unmittelbar der konstante Multiplikator

$$(46) \quad a = \frac{M_x^0}{M_x^0 + H \eta_x^0}.$$

Wie man leicht einsehen kann, existiert ein solcher Sonderfall nur dann, wenn M^0 - und η^0 -Linie auch affin sind. Dieser Fall liegt nur dann vor, wenn diese Linien Sinuslinien sind und das J des Trägers konstant ist.

Der allgemeine Fall, den Gl. (7) darstellt, ist weder $M^0 = 0$ noch $\eta = a \eta^0$. Aber die vorhergehenden Betrachtungen geben uns schon genug Winke, um die Lösung des allgemeinen Falles zu finden. Wir denken uns die endgültige Biegelinie η zunächst aus zwei Teilen zusammengesetzt:

$$(47) \quad \eta = a_0 \eta^0 + \eta_1.$$

Dabei bedeutet η^0 die Durchbiegung infolge M^0 allein:

$$(48) \quad \eta_x^{0''} = -\frac{M_x^0}{EJ_x}.$$

Diese Durchbiegung kann man bei beliebig veränderlichem J_x nach dem

¹⁰⁾ Das im nachstehenden entwickelte Verfahren ist ebensogut für den Träger mit dem Axialdruck und der Querlast anwendbar. Man braucht nur in den im folgenden abgeleiteten Gleichungen das Vorzeichen von H zu ändern.

¹¹⁾ Die η - und η^0 -Linie heißen affin oder quasiaffin, wenn die Verhältniszahl $\nu_x = \frac{\eta_x}{\eta_x^0}$ über die ganze Trägerlänge gleich oder annähernd gleich ist.

Mohrschen Satz leicht ermitteln, indem man zu der $\frac{M^0}{EJ_x}$ -Belastung die

Momentenlinie berechnet. Der konstante Multiplikator a_0 ist zunächst eine unbekannte Größe, und η_1 ist eine unbekannte Durchbiegung. Es ist klar, daß man über a_0 beliebig verfügen kann. Sobald es aber einmal gewählt ist, liegt die η_1 -Linie fest. Die Aufgabe ist nun die, ein geeignetes a_0 zu wählen und dann die η_1 -Linie zu bestimmen.

Zu diesem Zweck differenzieren wir Gl. (47) zweimal und kombinieren sie dann mit Gl. (48) u. (7). Daraus ergibt sich

$$(49) \quad \eta_1'' = -\frac{M_1}{EJ_x} + \frac{H \eta_1}{EJ_x},$$

worin bedeutet

$$(50) \quad M_1 = M^0(1 - a_0) - H a_0 \eta^0.$$

Wie man leicht einsieht, ist Gl. (49) von demselben Typ wie Gl. (7), und es wird daher $\eta_1 = 0$, wenn $M_1 = 0$ ist (Sonderfall 1). Gl. (50) kann aber nur dann durch eine geeignete Wahl von a_0 über die ganze Trägerlänge gleich Null werden, wenn M^0 - und η^0 -Linie affin sind. Das ist der vorgehend behandelte Sonderfall 2. Für den allgemeinen Fall sind M_1 und damit auch η_1 nicht gleich Null. Eines ist aber klar, daß η_1 um so geringer wird, je kleiner M_1 ist. Das ist der erste maßgebende Gesichtspunkt, wonach die Wahl von a_0 zu treffen ist.

Der nächste Schritt ist der, die η_1 -Linie zu bestimmen. Da Gl. (49) von demselben Typ wie Gl. (7) ist, handelt es sich hier um dieselbe Aufgabe wie die Bestimmung von η . Man kann also genau wie oben vorgehen. Mit

$$(51) \quad \eta_1 = a_1 \eta_1^0 + \eta_2,$$

$$(50') \quad \eta_1^{0''} = -\frac{M_1}{EJ_x},$$

$$(52) \quad M_2 = M_1(1 - a_1) - H a_1 \eta_1^0$$

ergibt sich

$$\eta_2'' = -\frac{M_2}{EJ_x} + \frac{H \eta_2}{EJ_x}.$$

Die Einführung der Gl. (51) in Gl. (47) liefert dann

$$\eta = a_0 \eta^0 + a_1 \eta_1^0 + \eta_2.$$

In obiger Gleichung wird $\eta_2 = 0$, wenn $M_2 = 0$ ist, d. h. wenn M_1 - und η_1^0 -Linie affin sind. Das hängt aber sehr davon ab, wie man a_0 wählt. Das ist der zweite maßgebende Gesichtspunkt für die Wahl von a_0 . Es gilt daher ganz allgemein die Regel:

a_{n-1} ist so zu wählen, daß erstens M_n möglichst klein wird und zweitens die hieraus konstruierte Biegelinie η_n^0 voraussichtlich der M_n -Linie affin oder quasiaffin wird.

Falls M_2 und η_2 nicht verschwinden, so ist der gleiche Vorgang zu wiederholen. Bei n -maliger Wiederholung hat man

$$\eta_n = a_n \eta_n^0 + \eta_{n+1},$$

$$(53) \quad \eta_n^{0''} = -\frac{M_n}{EJ_x},$$

$$(54) \quad M_{n+1} = M_n(1 - a_n) - H a_n \eta_n^0,$$

$$(55) \quad \eta_{n+1}'' = -\frac{M_{n+1}}{EJ_x} + \frac{H \eta_{n+1}}{EJ_x}.$$

Die gesuchte Durchbiegung ergibt sich dann zu

$$(56) \quad \eta = a_0 \eta^0 + a_1 \eta_1^0 + \dots + a_n \eta_n^0 + \eta_{n+1}$$

In dieser Gleichung sind a_0, \dots, a_n die gewählten konstanten Multiplikatoren und η^0, \dots, η_n^0 die nach dem Mohrschen Satz aus M^0, \dots, M_n ermittelten Biegelinien des Einfachbalkens, der nicht durch H belastet ist. Das Restglied kann man durch Wiederholung der Operation verschwindend klein machen, so daß es vernachlässigt werden kann, ohne die Genauigkeit der Berechnung zu beeinträchtigen. Damit haben wir die Durchbiegung η durch schrittweise Näherung gefunden.

Aus der gewonnenen Durchbiegung folgt das Biegemoment

$$(57) \quad M_x = M_x^0 - H \eta_x$$

Durch Differentiation obiger Gleichung ergibt sich die Querkraft

$$(58) \quad Q_x = Q_x^0 - H \cdot \text{tg } \tau_x$$

worin τ_x den Biegewinkel an der Stelle x bedeutet. Wie man sich leicht überzeugen kann, gelten für die Biegewinkel an der Stelle x und an den Trägern folgende Beziehungen

$$(59) \quad \begin{cases} \tau_x = a_0 \tau_x^0 + a_1 \tau_{1x}^0 + \dots \\ \eta = a_0 \eta^0 + a_1 \eta_1^0 + \dots \end{cases}$$

Es darf nicht vergessen werden, daß in obiger Berechnung der Horizontalzug H noch nicht der richtige ist. Das angenommene H muß nachgerechnet und verbessert werden. Hierzu muß man die Biegefläche F_η kennen. Bezeichnet man mit $F_{\eta_i^0}$ die Biegefläche von der Biegelinie η_i^0 , so ergibt sich aus Gl. (56)

$$(60) \quad F_\eta = \sum_{i=0}^n a_i F_{\eta_i^0} + F_{\eta_{n+1}}$$

weil a_i ein konstanter Multiplikator für alle Ordinaten von η_i^0 ist und infolgedessen auch für $F_{\eta_i^0}$ gilt.

Damit ist die Aufgabe theoretisch gelöst. Zum Zwecke der praktischen Anwendung soll das Verfahren im folgenden Abschnitt näher besprochen werden.

II. Praktische Anwendung des Verfahrens.

A. Die Wahl der Multiplikatoren a_0, \dots, a_n .

Wir haben die Hängebrücke auf den Balken mit Axialzug H zurückgeführt und diesen wieder auf den gewöhnlichen Träger ohne H . Die Aufgabe besteht nun darin, die Biegelinien, Winkel und Flächen des entsprechenden Einfachbalkens zu ermitteln und die geeigneten Multiplikatoren zu wählen. Im vorgehenden Abschnitt ist kurz darauf hingewiesen worden, wie die Wahl von a getroffen werden soll. Die Frage möge hier näher auseinandergesetzt werden.

Es sei z. B. die Biegelinie η für den Lastfall nach Bild 13a gesucht.

Man ermittle zunächst für den Balken ohne H die M^0 - und η^0 -Linie und weiter die Biegelinie $H \cdot \eta^0$ für die Momentenfläche $H \eta^0$ (Bild 13c) nach

$$(61) \quad H \eta^{0''} = - \frac{H \eta^0}{E J_x}$$

Betrachtet man obige Gleichung und Gl. (50) sowie (50'), so hat man

$$(62a) \quad M_1 = M^0 (1 - a_0) - a_0 H \eta^0$$

$$(62b) \quad \eta_1^0 = \eta^0 (1 - a_0) - a_0 H \eta^0$$

Mit¹²⁾

$$(63a) \quad 1 - a_0 = b_0$$

$$(63b) \quad \bar{M}_1 = \frac{M_1}{b_0}$$

$$(63c) \quad \bar{\eta}_1^0 = \frac{\eta_1^0}{b_0}$$

lassen sich Gl. (62a) u. (62b) umformen in

$$(63d) \quad \bar{M}_1 = M^0 - \frac{a_0}{b_0} \cdot H \eta^0$$

$$(63e) \quad \bar{\eta}_1^0 = \eta^0 - \frac{a_0}{b_0} \cdot H \eta^0$$

Sollen \bar{M}_1 und $\bar{\eta}_1^0$ möglichst klein und affin sein, so ist die notwendige, aber noch nicht hinreichende Bedingung die, daß diese Linien zum Teil positiv und zum Teil negativ sein und durch denselben Null-

¹²⁾ Die Einführung der neuen Größen \bar{M}_n und $\bar{\eta}_n^0$ statt M_n und η_n^0 ist für das vorliegende Verfahren von größter Wichtigkeit, wie wir später sehen werden.

punkt gehen müssen. Die gewünschten Linien von \bar{M}_1 und $\bar{\eta}_1^0$ sind im Bild 13d dargestellt. Für den Nullpunkt S gilt

$$(64a) \quad M_0 - \frac{a_0}{b_0} \cdot H \eta^0 = 0,$$

$$(64b) \quad \eta^0 - \frac{a_0}{b_0} \cdot H \eta^0 = 0.$$

Das sind die Bedingungen, die a_0 erfüllen muß. Damit ist die Wahl von a_0 mathematisch formuliert. Die Lösung der Aufgabe geschieht leicht durch Probieren. Man nimmt schätzungsweise den Punkt i als S an und bestimmt aus Gl. (64a) den Multiplikator a_0 , der in Gl. (64b) eingesetzt einen von Null verschiedenen Wert $\bar{\eta}_1^0$ liefert. Wiederholt man den gleichen Vorgang mit dem Punkt k , so erhält man $\bar{\eta}_1^0$. Den richtigen Multiplikator a_0 findet man durch Interpolation für $\bar{\eta}_1^0 = 0$.

Mit a_0 sind \bar{M}_1 und $\bar{\eta}_1^0$ nach Gl. (63) bekannt. Um den zweiten Multiplikator a_1 zu bestimmen, kann man auf ähnliche Weise vorgehen, indem \bar{M}_1 und $\bar{\eta}_1^0$ als Anfangszustand betrachtet werden.

Mit

$$(65a) \quad 1 - a_1 = b_1,$$

$$(65b) \quad M_2 = b_0 b_1 \bar{M}_2,$$

$$(65c) \quad \eta_2^0 = b_0 b_1 \bar{\eta}_2^0$$

geht Gl. (52) über in

$$(65d) \quad \bar{M}_2 = \bar{M}_1 - \frac{a_1}{b_1} \cdot H \bar{\eta}_1^0,$$

und man erhält

$$(65e) \quad \bar{\eta}_2^0 = \bar{\eta}_1^0 - \frac{a_1}{b_1} \cdot H \bar{\eta}_1^0,$$

worin bedeutet

$$(65f) \quad H \bar{\eta}_1^{0''} = - \frac{H \bar{\eta}_1^0}{E J_x}$$

Setzt man diesen Vorgang fort, so hat man

$$(66a) \quad 1 - a_n = b_n,$$

$$(66b) \quad M_{n+1} = b_0 \dots b_n \bar{M}_{n+1},$$

$$(66c) \quad \eta_{n+1} = b_0 \dots b_n \bar{\eta}_{n+1}^0,$$

$$(66d) \quad \bar{M}_{n+1} = \bar{M}_n - \frac{a_n}{b_n} \cdot H \bar{\eta}_n^0,$$

$$(66e) \quad \bar{\eta}_{n+1}^0 = \bar{\eta}_n^0 - \frac{a_n}{b_n} \cdot H \bar{\eta}_n^0,$$

$$(66f) \quad H \bar{\eta}_n^{0''} = - \frac{H \bar{\eta}_n^0}{E J_x}$$

Vorangehende Darlegung gilt nur für den Fall, wo die M^0 - und η^0 -Linie quasiaffin sind. Im allgemeinen liegt die Affinität zwischen den

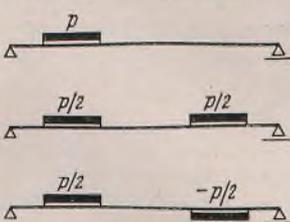


Bild 14.

beiden Linien bei einem Einfachbalken in ausreichendem Maße vor, wenn die Streckenlast p symmetrisch oder gegen-symmetrisch angeordnet ist. Daher empfiehlt es sich immer, eine unsymmetrische Belastung in solche Teilstände umzuordnen (Bild 14).

Es gibt aber Lastfälle, wo zwischen M^0 - und η^0 -Linie keinerlei Affinität besteht, was man auch nicht durch Lastumordnung ändern kann. Das sind die bei den durchlaufenden Versteifungsträgern vorkommenden Lastfälle in den Bildern 4c, 4d u. 4e. Es handelt sich nur um Stützmomente an Trägerenden. In solchen Fällen hat es keinen Sinn, a_0 nach Gl. (64a) und (64b) zu bestimmen. Man muß anders vorgehen.

Wir haben an den Multiplikator a_0 die Anforderung gestellt, daß \bar{M}_1 und $\bar{\eta}_1^0$ möglichst klein werden und quasiaffin sein sollen. Der Sinn dieser Anforderung ist der, daß η_2^0 verschwindend klein wird. Um das zu erreichen, kann man die Bedingung auch anders ausdrücken. Betrachtet man Gl. (63e) u. (65e), so kann man die Regel folgendermaßen formulieren: a_0 ist so zu wählen, daß die Biegelinien η_1^0 und $H \eta_1^0$ (das ist die Biegelinie für die Momentenfläche $H \eta_1^0$) möglichst affin werden.

Für weitere Multiplikatoren gilt die entsprechende Regel. Man braucht sich somit nicht mehr um die Momentenlinien zu kümmern, und diese werden auch im Gegensatz zum vorhergehenden Beispiel gar nicht ermittelt.

Da zwischen η^0 und $H \eta^0$ meistens schon gewisse Affinität besteht, kann man auch einen mathematischen Ausdruck zur Bestimmung von a_0 ableiten. Bezeichnet $(H \eta^0)_H$ die Biegelinie für die Momentenfläche $H \eta^0$, so erhält man durch Einsetzen der Gl. (63e) in Gl. (65f)

$$(67) \quad H \bar{\eta}_1^{0''} = H \eta^0 - \frac{a_0}{b_0} (H \eta^0)_H$$

Aus ähnlicher Überlegung wie im vorigen Beispiel kann man für den

Nullpunkt S , wo $\bar{\eta}_1^0$ und $\bar{H}\bar{\eta}_1^0$ gleichzeitig verschwinden, wie Gl. (64) anschreiben:

$$(68a) \quad \bar{\eta}_1^0 = \eta^0 - \frac{a_0}{b_0} \cdot H\eta^0 = 0,$$

$$(68b) \quad H\bar{\eta}_1^0 = H\eta^0 - \frac{a_0}{b_0} (H\eta^0)H = 0.$$

Somit läßt sich der Multiplikator a_0 auch in diesem Fall, wo M^0 - und η^0 -Linie von ganz verschiedenem Verlauf sind, nach bestimmter Regel ermitteln.

Bisher sind $\bar{\eta}_1^0, \dots, \bar{\eta}_n^0$ statt $\eta_1^0, \dots, \eta_n^0$ ermittelt worden. Durch Einsetzen dieser Werte aus Gl. (63 e), (65 e) u. (66 e) in Gl. (56) ergibt sich dann

$$(69) \quad \eta = a_0 \eta^0 + a_1 b_0 \bar{\eta}_1^0 + \dots + a_n b_0 \dots b_{n-1} \bar{\eta}_n^0$$

und entsprechend:

$$(70) \quad \begin{cases} \tau = a_0 \tau^0 + a_1 b_0 \bar{\tau}_1^0 + \dots + a_n b_0 \dots b_{n-1} \bar{\tau}_n^0, \\ \mathfrak{A} = a_0 \mathfrak{A}^0 + a_1 b_0 \bar{\mathfrak{A}}_1^0 + \dots + a_n b_0 \dots b_{n-1} \bar{\mathfrak{A}}_n^0, \end{cases}$$

$$(71) \quad F_{\eta} = a_0 F_{\eta^0} + a_1 b_0 F_{\bar{\eta}_1^0} + \dots + a_n b_0 \dots b_{n-1} F_{\bar{\eta}_n^0}.$$

Darin beziehen sich die Größen $\bar{\tau}_n^0, \bar{\mathfrak{A}}_n^0, F_{\bar{\eta}_n^0}$ jeweils auf die Biegelinie $\bar{\eta}_n^0$. Für $\bar{\tau}_n^0, \bar{\mathfrak{A}}_n^0$ und $F_{\bar{\eta}_n^0}$ gelten die den Gl. (63 e), (65 e) u. (66 e) entsprechenden Gleichungen.

Es sollen nun die bisher nicht berücksichtigten Fragen, warum man statt $\eta_n^0, \tau_n^0, F_{\eta^0}$ die Werte $\bar{\eta}_n^0, \bar{\tau}_n^0, F_{\bar{\eta}_n^0}$ berechnet und wie man der Änderung von H Rechnung trägt, erläutert werden. Die beiden Fragen haben einen engen Zusammenhang und können auch nur gemeinsam erörtert werden.

Betrachtet man Gl. (62 a) u. (63 d), so ist ein wichtiger Unterschied zwischen beiden Gleichungen zu bemerken: M_1 kann unverändert bleiben, wenn man die Änderung von H und a_0 aufeinander abstimmt, M_1 dagegen nicht. Dementsprechend können η_n^0, τ_n^0 und F_{η^0} für beliebiges H konstant bleiben und $\bar{\eta}_n^0, \bar{\tau}_n^0$ und $F_{\bar{\eta}_n^0}$ nicht. Daraus erklärt sich die erste Frage.

Um die Änderung von H zu berücksichtigen, betrachten wir zunächst Gl. (63 d) u. (63 e). In diesen Gleichungen sind M^0 und η^0 unabhängig von H . Damit \bar{M}_1 und $\bar{\eta}_1^0$ immer konstant bleiben, müssen $\frac{a_0}{b_0} \cdot H\eta^0$

und $\frac{a_0}{b_0} \cdot H\eta^0$ für jedes H denselben Wert beibehalten. Hat man für H' den Multiplikator a_0' bestimmt, so ergibt sich der neue Multiplikator a_0 für das neue H aus

$$\frac{a_0}{b_0} \cdot H\eta^0 = \frac{a_0'}{b_0'} \cdot H'\eta^0$$

oder

$$\frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{H}{H'} \cdot H'\eta^0 = \frac{a_0'}{b_0'} \cdot H'\eta^0$$

zu

$$(72a) \quad a_0 = \frac{\frac{a_0'}{b_0'}}{\frac{H}{H'} + \frac{a_0'}{b_0'}}.$$

Ganz allgemein gilt die Beziehung

$$(72b) \quad a_n = \frac{\frac{a_n'}{b_n'}}{\frac{H}{H'} + \frac{a_n'}{b_n'}}.$$

Damit ist die zweite Frage erledigt. Von der Lösung dieser Frage hängt überhaupt die praktische Anwendbarkeit des vorliegenden Berechnungsverfahrens ab. Denn es würde sehr umständlich sein, wenn man mit einem anderen H alle Biegelinien, Winkel und Flächen von neuem berechnen müßte. Im Zusammenhang mit der Betrachtung über die praktische Anwendbarkeit des Verfahrens sei darauf hingewiesen, daß die Reihen der Gl. (69) bis (71) sehr rasch konvergieren. In den meisten Fällen lassen sich die Lösungen genau genug in zwei Gliedern darstellen, und zwar ist das zweite Glied sehr klein, so daß der Multiplikator a_1 nach Gutdünken gewählt werden kann, ohne einen nennenswerten Fehler zu begehen. Ausnahmen hiervon bilden die Lastfälle, wo nur Stützmomente an Trägerenden angreifen. Hierfür muß man nötigenfalls vier Glieder wählen, um die Biegewinkel genau genug zu ermitteln.

B. Die Bestimmungsgleichung für H_p

Zur Bestimmung von H_p dient im vorliegenden Fall auch die allgemeine Gl. (24). Sie läßt sich umformen, indem man y'' von F_{η} entfernt und dieses in zwei Teile $F_{\eta}(p)$ und $F_{\eta}(y''H_p)$ zerlegt. Bezeichnet $F_{H_p=1}$ die Biegefläche aller am Kabel aufgehängten Trägereile infolge der Vollast $y'' \cdot 1$, d. h. $H_p = 1$, so ergibt sich bei konstantem H

$$F_{\eta}(y''H_p) = H_p F_{H_p=1}$$

Das $F_{H_p=1}$ ändert sich mit H . Die Änderung kann man aber leicht durch Berichtigung der Multiplikatoren a berücksichtigen.

Setzt man obigen Ausdruck in Gl. (24) ein und löst sie nach H_p auf so erhält man die Bestimmungsgleichung

$$(73) \quad H_p = \frac{\sum \lambda F_{\eta}(p) - \alpha_t t \varrho_c L_t}{\frac{L \varrho_c}{E_K F_K} - F_{H_p=1}}$$

In obiger Gleichung gilt die Summe im Zähler für die mit p belasteten Träger. Beim durchlaufenden Versteifungsträger muß man noch die Biegefläche infolge der Stützmomente berücksichtigen, und zwar erstreckt sich diese über alle am Kabel aufgehängten Trägereile¹³⁾. Zur Ermittlung der Biegefläche F_{η} wird Gl. (71) benutzt. Die darin enthaltenen einzelnen $F_{\bar{\eta}_i^0}$ kann man leicht bestimmen (s. unten).

Ergibt sich aus der Bestimmungsgleichung H_p anders als der angenommene Wert, so braucht man nur nach Gl. (72) die Multiplikatoren a zu verbessern, während das einzelne $F_{\eta_i^0}$ unverändert bleibt. Mit den neuen Multiplikatoren berechnet man das neue F_{η} , um H_p zu kontrollieren.

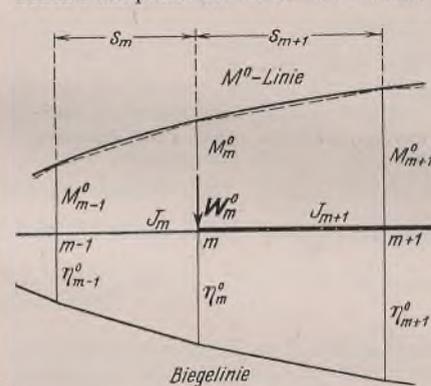


Bild 15.

Nachdem H richtig bestimmt ist, berechnet man dann die Momente und Querkkräfte nach Gl. (57) u. (58), wobei zu beachten ist, daß man nicht nur die Verkehrslast p , sondern auch die gedachte Last $y''H_p$ und gegebenenfalls noch die Stützmomente M_s berücksichtigen muß (Bild 2 oder 3). Hinsichtlich der praktischen Anwendung des Verfahrens sei auf die Beispielrechnung in der Dissertation verwiesen.

Im Anschluß soll noch die Ermittlung der Biegelinie und Fläche kurz erläutert werden. Nach dem Mohr-

schen Satz ist die Biegelinie gleich der Momentenlinie infolge der $\frac{M}{EJ}$ -Belastung. Ersetzt man nach Bild 15 die Momentenkurve durch einen Polygonzug, so ergibt sich das W -Gewicht im Punkt m

$$(74a) \quad W_m^0 = (M_{m-1}^0 + 2M_m^0) \frac{s_m}{6EJ_m} + (2M_m^0 + M_{m+1}^0) \frac{s_{m+1}}{6EJ_{m+1}}$$

Für die praktische Zahlenrechnung empfiehlt es sich, das $6EJ_c$ -fache W -Gewicht zu berechnen:

$$(74) \quad \begin{cases} 6EJ_c W_m^0 = (M_{m-1}^0 + 2M_m^0) s_m + (2M_m^0 + M_{m+1}^0) s_{m+1} \\ \text{Darin sind } s_m' = s_m \cdot \frac{J_c}{J_m} \quad s_{m+1}' = s_{m+1} \cdot \frac{J_c}{J_{m+1}} \end{cases}$$

und J_c eine beliebige geeignete Vergleichszahl.

Hat man die einzelnen Biegelinienordinaten η^0 ermittelt, so läßt sich die Biegefläche berechnen nach der Formel

$$(75) \quad F_{\eta^0} = \frac{1}{2} \sum \eta_m^0 (s_m + s_{m+1}).$$

IV. Abschnitt.

Die beschränkten Einflußlinien und ungünstigsten Laststellungen.

1. Grundlegendes.

In der Theorie I. Ordnung, wo unter Vernachlässigung der Verformung das Superpositions-gesetz seine Gültigkeit besitzt, lassen sich die Einflußlinien für jede statische Größe konstruieren. Die hierfür in der Baustatik übliche Methode ist bekannt. Im folgenden wird aber gezeigt, wie man auf andere Weise auch zum Ziele gelangen kann.

Die für die Theorie I. Ordnung gültige Differentialgleichung der elastischen Linie des Versteifungsträgers lautet:

$$(76) \quad (EJ\eta'')'' = p + y''H_p.$$

Aus dieser Gleichung folgt, daß man, wie es schon in vorhergehenden Abschnitten geschehen ist, die Hängebrücke statisch durch ihren Versteifungsträger mit zwei Teilbelastungen p und $y''H_p$ ersetzen kann, wobei die Last $y''H_p$ stets als Vollast vorzustellen ist. Dementsprechend bildet sich jede statische Größe aus zwei Teilen. Genau so ist die Einflußlinie.

Es sei z. B. die M_a -Linie einer dreifeldrigen Hängebrücke mit einfachen Versteifungsträgern (Bild 16) gesucht. Diese Aufgabe kann man ganz anschaulich mit Hilfe des stellvertretenden Trägers lösen.

Der erste der Belastung p entsprechende Ast der Einflußlinie ist die M_a^0 -Linie des Einfachbalkens, und zwar ist sie in den Seitenöffnungen gleich Null, weil dort P kein Moment im Punkt a hervorrufen kann.

¹³⁾ Die Biegefläche infolge der Stützmomente läßt sich nach dem im IV. Abschnitt bewiesenen 3. Satz leicht bestimmen.

Den zweiten Ast erhält man, indem man das Moment M_a infolge $y'' H_p$ (Bild 16b) berechnet. Es ist

$$M_a' = \frac{1}{2} \cdot y'' H_p \cdot a \cdot b.$$

Die Einführung von $y'' = -\frac{8f}{l^2}$ für die Mittelöffnung liefert

$$(77) \quad M_a' = -\frac{4f}{l^2} \cdot a \cdot b \cdot H_p = -y_a H_p.$$

Obige Gleichung besagt, daß der zweite Ast gleich der y_a -fachen H_p -Linie ist. Da eine Last P in der Seitenöffnung auch H_p hervorrufen kann, erstreckt sich dieser Ast über drei Öffnungen. Durch Addition beider Linien ergibt sich dann die gesuchte Einflußlinie für das Moment M_a . Auf gleiche Weise erhält man die Q_a -Linie für die Querkraft im Punkt a aus zwei Ästen, nämlich Q_a^0 -Linie und $-\frac{4f}{l^2}(l-2a)H_p$ -Linie. Wie man leicht feststellen kann, liefert das Verfahren genau dasselbe Ergebnis wie die gewöhnliche Methode.

Vorstehende Betrachtung soll zur Einführung für die Ermittlung der beschränkten Einflußlinien nach der Theorie II. Ordnung dienen. Wir haben in der Theorie II. Ordnung die Hängebrücke auch durch ihren Versteifungsträger mit zwei Teilbelastungen p und $y'' H_p$ ersetzt behandelt. Ein Unterschied besteht nur darin, daß hier an beiden Enden des stellvertretenden Trägers noch eine gedachte axiale Zugkraft H angreift, deren Wirkung mit dem Einfluß der Systemverformung identisch ist. Dieser Unterschied ist aber unwesentlich, denn das H wird z. B. nur eine Änderung der M_a^0 - und M_a^1 -Linie zur Folge haben. Wichtig dabei ist, daß hier bei konstantem H das Superpositionsgesetz auch gilt, und es folgt daraus, daß man nach der Theorie II. Ordnung die Einflußlinie genau so konstruieren kann wie in der Theorie I. Ordnung. Nur muß man bei der Ermittlung der einzelnen Äste, z. B. M_a^0 - und M_a^1 -Linie, den Axialzug H berücksichtigen, und infolgedessen liefert diese Einflußlinie auch nur bei jenem Verkehrslastzustand p einen streng richtigen Wert, wo $H_p + H_g = H$ gerade so groß ist wie das vorher zugrunde gelegte. Die Gültigkeit dieser Einflußlinie ist also beschränkt, und sie wird deshalb als „beschränkte Einflußlinie“ bezeichnet.

Aus der vorhergehenden Ausführung kann man schon erkennen, daß die Schwierigkeit nicht darin besteht, eine Einflußlinie zu konstruieren, sondern darin, das H im voraus richtig zu schätzen, damit die richtige Einflußlinie ermittelt werden kann. Nach H. Neukirch [10] werden für jede statische Größe drei beschränkte Einflußlinien für $H = H_g$, $H = H_g + \frac{1}{2} \max H_p$ und $H = H_g + \max H_p$ konstruiert und jede für sich ausgewertet. Zu den maßgebenden Laststellungen sind jeweils noch die zugehörigen beschränkten Einflußlinien von H_p mit auszuwerten. Aus den gewonnenen Werten findet man auf zeichnerischem Wege das richtige H_p (damit auch H) und die richtige Schnittgröße. Dabei kann auch die Temperaturwirkung leicht berücksichtigt werden.

Da die Werte aus drei Einflußlinien nur wenig von einer geraden Linie abweichen, kann man mit Hilfe zweier Einflußlinien für $H = H_g$ und $H = \max H$ schon ausreichend genaue Ergebnisse erzielen. Die geradlinige Interpolation geschieht leicht auf rechnerischem Wege. Die Ermittlung der Schnittgrößen durch die Auswertung der beschränkten Einflußlinien verdient nur dann den Vorzug, wenn man mit einer ungleichmäßigen Verkehrslast zu tun hat. Im Falle der gleichmäßigen Streckenlast empfiehlt es sich, die ungünstigste Laststellung aus der beschränkten Einflußlinie zu entnehmen und dafür die Schnittgröße zu berechnen. Zu diesem Zweck kann man zur Ermittlung der beschränkten Einflußlinie entweder $H = H_g$ oder $H = \max H$ nehmen, weil ein gewisser Unterschied der H -Werte die Lage der Lastscheidpunkte nicht wesentlich beeinflussen kann.

Nachdem wir die Anwendung der Einflußlinien dargelegt haben, sei zunächst darauf hingewiesen, daß beim Träger mit konstantem Axialzug H infolge der Gültigkeit des Superpositionsgesetzes auch der Gegenseitigkeitssatz von Betti und Maxwell gilt.

Aus den beiden Gesetzen, dem Superpositionsgesetz und dem Gegenseitigkeitssatz, folgt, daß beim Träger mit konstantem Axialzug H die Einflußlinie irgendeiner statischen Größe auch nach der Gleichung

$$(78) \quad X_1 = -\frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}}$$

ermittelt werden kann, worin δ_{m1} die Verschiebung an der Stelle m und δ_{11} an der Stelle 1 infolge $X_1 = +1$ bedeuten.

Im folgenden mögen drei Sätze, die für die Ermittlung der beschränkten Einflußlinien nutzbar sind, bewiesen werden.

Satz 1. Bei Balken auf zwei Stützen ohne oder mit konstantem Axialzug H gilt für das Biegemoment stets die Beziehung

$$(79) \quad M_{ik} = M_{ki}.$$

Für Einfachbalken ohne H (Bild 17) erbringt man den Beweis sofort, wenn man die Gleichung der Momente anschreibt. Beim Balken mit konstantem H kann man den Beweis unmittelbar aus Gl. (11) ablesen, weil in den Gleichungen b und x oder a und x' umtauschbar sind. Dieser Satz gilt aber auch für Träger mit veränderlichem J , denn es ist

$$M_{ik} = M_{ik}^0 - H \eta_{ik},$$

$$M_{ki} = M_{ki}^0 - H \eta_{ki},$$

und darin sind M_{ik}^0 und M_{ki}^0 sowie η_{ik} und η_{ki} für jedes Trägheitsmomentverhältnis einander gleich. Aus dieser Gegenseitigkeitsbeziehung der Biegemomente läßt sich ein nutzbarer Satz folgern:

Die Einflußlinie für das Biegemoment M_i im Querschnitt i eines Balkens auf zwei Stützen mit oder ohne Axialzug H ist identisch mit der Momentenlinie des Trägers bei der Belastung $P = 1$ an der betreffenden Stelle i .

Dieser Satz leistet besonders in dem Fall, wo das J des Trägers veränderlich ist, gute Dienste.

Satz 2. Die Biegefläche $F_\eta(P_i)$ eines einfachen oder durchlaufenden Trägers mit oder ohne Axialzug H , hervorgerufen durch eine Last P_i in Tonnen an der Stelle i , ist zahlenmäßig gleich der Durchbiegung $\eta_i(p)$ im Punkt i infolge der Vollast p t/m (zahlenmäßig $P = p$).

Beweis. Es seien

$$\eta_{ki} \text{ Durchbiegung im Punkt } k \text{ infolge der Last } P_i = 1 \text{ t,}$$

$$\eta_{ik} \text{ Durchbiegung im Punkt } i \text{ infolge der Last } P_k = 1 \text{ t.}$$

Nach dem Superpositionsgesetz hat man

$$F_\eta(P_i) = \int P_i \eta_{ki} dx,$$

$$\eta_i(p) = \int \eta_{ik}(p) dx.$$

Aus $p = P$ (Voraussetzung) und $\eta_{ik} = \eta_{ki}$ (Gegenseitigkeitssatz) folgt:

$$(80a) \quad F_\eta(P_i) = \eta_i(p).$$

Der Satz gilt ganz allgemein für Träger mit konstantem oder mit veränderlichem J , und zwar ist er besonders im letzten Fall für die Ermittlung der beschränkten Einflußlinien für H_p , wo man die Biegefläche einer wandernden Einzellast braucht, von Wichtigkeit. Zu beachten ist, daß sich die Vollast p über alle diejenigen Trägereile erstreckt, für die die Biegefläche gebildet wird.

Satz 3. Die Biegefläche $F_\eta(M_i)$ eines einfachen oder durchlaufenden Trägers mit oder ohne Axialzug H , hervorgerufen durch ein Moment M_i tm an der Stelle i , ist zahlenmäßig gleich dem Biegewinkel $\tau_i(p)$ im Punkt i infolge der Vollast p t/m (zahlenmäßig $p = M_i$):

$$(80b) \quad F_\eta(M_i) = \tau_i(p).$$

Dieser Satz ist nur eine Erweiterung des vorhergehenden. Den Beweis hierfür kann man leicht, wie beim Satz 2, mit Hilfe des Superpositionsgesetzes und des Gegenseitigkeitssatzes $\tau_{ik} = \tau_{ki}$ erbringen. Beim durchlaufenden Versteifungsträger mit veränderlichem J kann dieser Satz mit Vorteil angewendet werden, um die Biegefläche infolge der Stützmomente zu bestimmen.

III. Ermittlung der beschränkten Einflußlinien für Systeme mit Versteifungsträgern von öfnungsweise konstantem Trägheitsmoment.

Der allgemeine Vorgang zur Ermittlung der beschränkten Einflußlinien einer beliebigen Hängebrücke nach der Theorie II. Ordnung ist folgender:

1. Ermittlung der Einflußlinie für die betreffende Schnittgröße des stellvertretenden Trägers mit Axialzug H . Dies entspricht der Teilbelastung p .

2. Berechnung dieser Schnittgröße infolge der Vollast $y'' H_p$ unter Berücksichtigung von H . Daraus ergibt sich der zweite Ast der Einflußlinie, der stets gleich ist der H_p -Linie, multipliziert mit einer Konstanten.

3. Addition beider Linien liefert die gesuchte beschränkte Einflußlinie. Es sei aber bemerkt, daß die Auswertung der Einflußlinie nur mit der Verkehrslast p zu erfolgen hat.

A. Systeme mit einfachen Versteifungsträgern.

1. Die Einflußlinie für den Horizontalkabelzug H_p (Bild 18a). Diese Linie muß zu allererst ermittelt werden, weil sie für jede andere Linie unentbehrlich ist. Betrachtet man Gl. (28) u. (29), so erkennt man, daß die H_p -Linie für die Verkehrslast p allein (ohne Temperaturschwankungen) nach der Gleichung

$$(81) \quad H_p = \frac{\lambda H F_\eta}{N^0}$$

berechnet wird, worin N^0 je nach dem System den Nenner in Gl. (28) oder (29) bedeutet. Nachdem H , für das die Einflußlinie konstruiert werden soll, festgelegt ist, bleibt N^0 konstant.

Der Zähler $\lambda H F_\eta$ ergibt sich aus Gl. (13) durch Einsetzen $P=1$, $a=x$ und $b=x'$. Damit erhält man die Gleichung der H_p -Linie für alle Öffnungen

$$(82) \quad H_p = \frac{\lambda}{N^0} \left[\frac{x x'}{2} - \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{\cos\left(\frac{l-x}{2}\beta\right)}{\cos\alpha} \right) \right]$$

Darin beziehen sich die konstanten Werte α , β und λ jeweils auf die betreffende Öffnung. Wie es aus obiger Gleichung ersichtlich ist, gestaltet sich die H_p -Linie in allen Öffnungen stets symmetrisch in bezug auf die Trägermitte, so daß man die Hälfte der Rechenarbeit ersparen kann.

2. Einflußlinie für die Auflagerkraft A des Versteifungsträgers (Bild 18b). Nach dem vorhergehend beschriebenen Vorgang erhält man den ersten Ast der A -Linie aus Gl. (12) durch Einsetzen $P=1$, $x=0$ und $b=x'$

$$(83a) \quad A_1 = \frac{\sin \beta x'}{\sin 2\alpha}$$

Die A_1 -Linie ist insofern der gewöhnlichen A^0 -Linie ähnlich, als sie unter den beiden Auflagern A und B auch 1 und 0 aufweist. Ihr Verlauf ist aber gleich einer hyperbolischen Sinuslinie.

Der zweite Ast, A_2 -Linie, infolge $y' H_p$ ergibt sich aus Gl. (22b)

$$\text{durch Einsetzen } p = -\frac{8f}{l^2} \cdot H_p$$

und $x=0$ zu

$$(83b) \quad \begin{cases} A_2 = \frac{4f}{l} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot H_p \text{ oder} \\ A_2 = -\mu_A H_p \end{cases}$$

Die A_2 -Linie ist also gleich der H_p -Linie, multipliziert mit $-\mu_A$, und zwar erstreckt sie sich über alle Öffnungen. Zur Bestimmung von μ_A sind natürlich l , f und α von jener Öffnung zu nehmen, deren A -Linie gesucht ist.

Addiert man die A_1 - und A_2 -Linie unter Beachtung der Vorzeichen, so erhält man die endgültige A -Linie.

3. Einflußlinien für die Querkraft Q_m im Versteifungsträger (Bild 18c). Wie es aus Gl. (12) leicht ersichtlich ist, zerfällt die Q_{m1} -Linie, wie die gewöhnliche Q^0 -Linie, in zwei Abschnitte:

$$(84) \quad \begin{cases} \text{rechts von } m & Q_{m1} = A_1 \cdot \cos \beta m, \\ \text{links von } m & Q_{m1} = -B_1 \cdot \cos \beta m'. \end{cases}$$

Die Linien A_1 und $-B_1$ sind gegensymmetrisch und berechnen sich nach Gl. (83a).

Die Q_{m2} -Linie infolge $y' H_p$ ergibt sich aus Gl. (22b) zu

$$(85) \quad Q_{m2} = -\mu_{Qm} H_p,$$

worin ist

$$(85a) \quad \mu_{Qm} = \frac{4f}{l} \cdot \frac{\sin\left(\frac{l-m}{2}\beta\right)}{\alpha \cdot \cos \alpha}$$

Die endgültige Q_m -Linie ergibt sich durch Addition der Q_{m1} - und Q_{m2} -Linie.

4. Einflußlinie für das Biegemoment M_m im Versteifungsträger (Bild 18d). Die M_{m1} -Linie berechnet sich nach Gl. (11) für $P=1$. In den Gleichungen kann man entweder x und x' oder a und b variieren lassen. Mit anderen Worten: Man kann die M_{m1} -Linie entweder nach der gewöhnlichen Auffassung ermitteln oder nach dem Satz 1 im vorigen Abschnitt als Momentenlinie des Trägers infolge $P=1$ im Punkt m betrachten. Es ergibt sich:

$$(86) \quad \begin{cases} \text{rechts von } m & M_{m1} = \frac{\sin \beta m}{\beta \cdot \sin 2\alpha} \cdot \sin \beta x', \\ \text{links von } m & M_{m1} = \frac{\sin \beta m'}{\beta \cdot \sin 2\alpha} \cdot \sin \beta x. \end{cases}$$

Die M_{m2} -Linie erhält man aus Gl. (22a) zu

$$(87) \quad M_{m2} = -\mu_{Mm} H_p.$$

Darin lautet der Multiplikator

$$(87a) \quad \mu_{Mm} = \frac{8f}{l^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{\cos\left(\frac{l-m}{2}\beta\right)}{\cos \alpha} \right).$$

Die endgültige M_m -Linie ergibt sich zu

$$(88) \quad M_m = M_{m1} - \mu_{Mm} H_p.$$

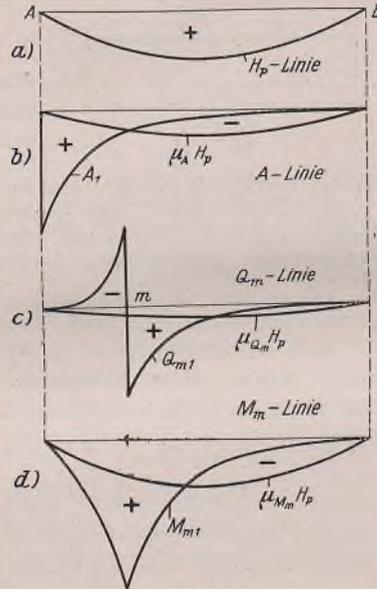


Bild 18a bis d.

5. Einflußlinie für die Durchbiegung η_m im Punkt m . Die Einflußlinie für η_{m1} ist nach dem Gegenseitigkeitssatz des vorigen Abschnitts gleich der Biegelinie des Trägers infolge $P=1$ im Punkt m . Sie berechnet sich nach

$$(89a) \quad H \eta_{m1} = M_{m1}^0 - M_{m1}$$

Darin bedeutet M_{m1}^0 die Einflußlinie des Einfachbalkens ohne H , während M_{m1} durch Gl. (86) definiert ist.

Der zweite Ast dieser Linie berechnet sich nach Gl. (22c), worin M^0 das Moment infolge $y' H_p$ im Punkt m des Einfachbalkens ohne H bedeutet. Daraus ergibt sich

$$(89b) \quad \begin{aligned} H \eta_{m2} &= -y_m H_p + \mu_{Mm} H_p \\ &= -(y_m - \mu_{Mm}) H_p \end{aligned}$$

Die Addition der Gl. (89a) u. (89b) liefert dann die Gleichung der Einflußlinie für die H -fache Biegelinie. Auf ähnliche Weise läßt sich die Einflußlinie für den Biegewinkel ermitteln.

Zusammenfassung. Aus den vorangehenden Ausführungen erkennt man, daß die beschränkten Einflußlinien für A , Q , M , η und τ , wie in der Theorie I. Ordnung, stets aus zwei Ästen zusammengesetzt sind und daß man bei der praktischen Rechnung jeweils durch die Einführung eines Multiplikators die H_p -Linie unmittelbar verwenden kann. Es sei darauf hingewiesen, daß das Verfahren für Systeme von beliebig vielen Öffnungen anwendbar ist; denn außerhalb derjenigen Öffnungen, wo die gesuchte Schnittgröße liegt, ist die Einflußlinie überall gleich der H_p -Linie, multipliziert mit μ .

B. Systeme mit durchlaufenden Versteifungsträgern.

Die Ermittlung der beschränkten Einflußlinien für das vorliegende System geschieht auf ähnliche Weise wie unter A. Nur muß man jeweils noch die Wirkung der Stützenmomente berücksichtigen. Im folgenden möge ein dreifeldiges symmetrisches System als Beispiel näher besprochen werden.

1. Einflußlinie für H_p . Aus Gl. (38) ergibt sich die Einflußlinie für H_p (ohne Temperaturschwankungen) zu

$$(90) \quad H_p = \frac{\lambda H F_\eta(p) - \frac{l}{2} \cdot \frac{K}{q} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)}{N}$$

worin die Abkürzung N den Nenner in Gl. (38) bedeutet, der konstant bleibt, wenn H gewählt ist.

Das erste Glied des Zählers $\lambda H F_\eta$ ist gleich demjenigen in Gl. (82), während das zweite den Einfluß der Stützenmomente in dem Teilzustand p (Bild 3c) darstellt. Es ergibt sich aus Gl. (14) für $P=1$ in der Seitenöffnung

$$(91a) \quad \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \frac{x}{l} \cdot \frac{\sin \beta_1 x}{\sin 2\alpha_1}$$

für $P=1$ in der Mittelöffnung

$$(91b) \quad \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = 1 - \frac{\cos\left(\frac{l-x}{2}\beta\right)}{\cos \alpha}$$

Der Ausdruck $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ für die Mittelöffnung tritt auch in $H F_\eta$ auf, so daß sich die H_p -Linie in dieser Öffnung ebenso leicht ermitteln läßt wie beim einfeldrigen Versteifungsträger. Wegen der Symmetrie des Tragwerks verläuft die H_p -Linie symmetrisch in bezug auf die Brückenmitte, und infolgedessen vermindert sich die Rechenarbeit noch bis auf die Hälfte.

2. Einflußlinie für die Stützenmomente M_1 und M_2 . Sie werden den beiden Belastungszuständen p und $y' H_p$ entsprechend in zwei Teilen ermittelt. Um den der Teilbelastung p entsprechenden Ast zu ermitteln, werden zur Ausnutzung der Symmetrie des Tragwerks folgende Substitutionen eingeführt:

$$(92a) \quad X_1 = \frac{M_1' + M_2'}{2}$$

$$(92b) \quad X_2 = \frac{M_1' - M_2'}{2}$$

Man berechne die symmetrische X_1 - und gegensymmetrische X_2 -Linie. Daraus ergibt sich dann

$$(93a) \quad M_1' = X_1 + X_2,$$

$$(93b) \quad M_2' = X_1 - X_2.$$

Die M_1' - und M_2' -Linie sind wegen der Symmetrie der Brücke spiegelbildgleich.

Zur Ermittlung der X_1 - und X_2 -Linie (Bild 19) bedient man sich der Gl. (78)

$$(94a) \quad X_1 = -\frac{\delta_{m1}}{\delta_{11}}$$

$$(94b) \quad X_2 = -\frac{\delta_{m2}}{\delta_{22}}$$

Wie bereits erwähnt, ist es zweckmäßig, die Verschiebungen (Durchbiegungen und Tangentendrehwinkel) in H -facher Größe auszudrücken. Betrachtet man Bild 4 und Gl. (6), so erhält man die beiden Verschie-

bungen im Zustand $X_1 = 1$ und $X_2 = 1$ (Bild 19b u. 19c) zu

$$(95a) \quad \delta_{11} = 2\varphi,$$

$$(95b) \quad \delta_{22} = 2\bar{\varphi}.$$

Darin berechnet sich der Drehwinkel φ nach Gl. (40), während $\bar{\varphi}$ sich ergibt zu

$$(96) \quad \varphi = H\tau_{i1} + H\bar{\tau} = \left(\frac{\beta_1}{2g \cdot 2\alpha_1} - \frac{1}{l_1} \right) + \left(\frac{\beta}{2g\alpha} - \frac{2}{l} \right).$$

Die Biegelinien δ_{m1} und δ_{m2} in der Seitenöffnung sind alle von gleichem Verlauf. Aus Gl. (15) erhält man durch Einsetzen von $M_s = 1$ die Gleichung für diese Biegelinien. Sie ist identisch mit der Gl. (91a), was sich aus dem Gegenseitigkeitssatz $\delta_{m1} = \tau_{1m}$ auch ergeben muß. Aus gleichem Grunde stellt Gl. (91b) die Biegelinie δ_{m1} in der Mittelöffnung dar.

Die gegensymmetrische Biegelinie δ_{m2} in der Mittelöffnung ergibt sich, wie man leicht aus Gl. (15) ableiten kann, zu

$$(97) \quad \delta_{m2} = \left(1 - 2 \cdot \frac{x}{l} \right) \frac{\sin \left(\frac{l-x}{l} \beta \right)}{\sin \alpha}.$$

Damit ist der erste Ast der Einflußlinie für die Stützenmomente (Bild 19d) erledigt.

Es bleibt übrig, den zweiten Ast der Einflußlinie infolge $y'' H_p$ zu bestimmen. Aus dem in Lastfall (6) der Formelzusammenstellung enthaltenen Ausdruck für M_1 und M_2 ergibt sich

$$(98) \quad M_1'' = M_2'' = \mu M_s H_p.$$

Darin ist

$$(99) \quad \mu_{M_s} = \frac{4f}{l} \cdot \frac{K'}{\varphi}.$$

Addiert man nun die M_1' - und M_2'' -Linie zusammen, dann erhält man die endgültige beschränkte Einflußlinie für M_1 . Die M_2 -Linie ist spiegelbildgleich.

3. Einflußlinien für A , Q_m , M_m , η_m und τ_m . Die Einflußlinien für diese Größen kann man sich aus drei Teilen zusammengesetzt denken (Bild 3).

a) Der erste Teil ist die Einflußlinie der betreffenden Größe im entsprechenden Einfachbalken mit dem Axialzug H (Bild 3b). Diese Teilaufgabe ist schon im vorangehenden Unterabschnitt A ausführlich behandelt worden.

b) Der zweite Teil rührt von den Stützenmomenten M_1' und M_2'' in dem Teilzustand p her (Bild 3c). Für die Schnittgrößen in der Seitenöffnung gelten die Gleichungen im Lastfall (2). Aus diesen Gleichungen erkennt man, daß dieser Teil der Einflußlinie stets gleich ist der mit einem Multiplikator μ vervielfachten M_1' -Linie. Den Multiplikator erhält man, indem man in die betreffende Gleichung statt x die Abszisse m der gesuchten Größe einsetzt. Für die Schnittgrößen in der Mittelöffnung muß man sowohl die M_1' - als auch die M_2'' -Linie berücksichtigen. Die Multiplikatoren im einzelnen Fall lassen sich leicht aus den für den Lastfall (2) angegebenen Formeln ableiten.

c) Der dritte Teil entspricht der Teilbelastung $y'' H_p$ (Bild 3d). Dieser Teil der Einflußlinie ist immer gleich der H_p -Linie des Systems, vervielfacht durch einen Multiplikator μ . Für die einzelne Schnittgröße kann man den Multiplikator jeweils aus den Gleichungen im Lastfall (6) der Formelzusammenstellung leicht berechnen.

III. Ermittlung der beschränkten Einflußlinien für Systeme mit Versteifungsträgern von veränderlichem J .

Der im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Gedankengang zur Ermittlung der beschränkten Einflußlinien ist für vorliegenden Fall ebenso gut anwendbar. Ein Unterschied besteht darin, daß hier statt der genauen Methode das Annäherungsverfahren (Abschnitt III) zur Lösung der Aufgabe benutzt wird. Im folgenden sei kurz auf den praktischen Rechnungsgang hingewiesen.

1. H_p -Linie. Aus Gl. (73) ergibt sich die Gleichung der Einflußlinie für H_p zu

$$H_p = \frac{\lambda F_{\eta} (P_x = 1)}{\frac{L \varrho_c}{E_k F_k} - F_{H_p = 1}}.$$

Mit der Annahme der H -Kraft für die Einflußlinie läßt sich der Nenner ermitteln, und er bleibt für jeden Lastzustand von p konstant. Der

Zähler $F(P_x = 1)$ ist nach dem Satz 2, Gl. (80a), gleich der Durchbiegung $\eta_x(p = 1)$ an der Stelle x infolge der Vollast $p = 1$. Es gilt also

$$(100) \quad H_p = \frac{\lambda \eta_x (p = 1)}{\frac{L \varrho_c}{E_k F_k} - F_{H_p = 1}}.$$

Zur Ermittlung der Biegefläche $F_{H_p = 1}$ und der Durchbiegung $\eta_x(p = 1)$

kann man die Biegelinien η^0, η_1^0, \dots je nach der Bequemlichkeit der Zahlenrechnung zunächst für eine beliebige Vollast p und einen beliebigen Axialzug H berechnen und hieraus dann die gesuchten Größen für die Vollast $p = 1$ und $y'' \cdot 1$ (d. h. $H_p = 1$) und für den gewählten Axialzug H bestimmen.

2. Die Einflußlinien für A , Q_m , M_m , η_m und τ_m . Sie setzen sich, wie die Einflußlinien im vorangehenden Abschnitt, auch aus zwei oder drei Teilen zusammen. Die der Teilbelastung p entsprechende Einflußordinate im Punkt x einer Schnittgröße erhält man, indem man für $P_x = 1$ die Biegelinien und Winkel nach Gl. (69) u. (70) ermittelt und das Biegemoment und die Querkraft nach Gl. (57) oder (58) berechnet. Die Linien für M_m , η_m und τ_m lassen sich aber einfacher nach dem Gegenseitigkeitssatz der Momente und der Verschiebungen ermitteln. Der zweite der Belastung $y'' H_p$ entsprechende Teil der Einflußlinie ist stets gleich der mit einer Konstanten multiplizierten H_p -Linie. Die Konstante ist nichts anderes als die betreffende Größe infolge der Vollast $y'' \cdot 1$, d. h. für $H_p = 1$. Die Biegelinien und Winkel für diesen Lastzustand hat man aber schon bei der Bestimmung der Biegefläche $F_{H_p = 1}$ berechnet, und daher können die Konstanten für einzelne Schnittgrößen leicht ermittelt werden.

Das Verfahren ist wie das im vorigen Abschnitt beschriebene sowohl für einfache als auch für durchlaufende Versteifungsträger von beliebig vielen Öffnungen anwendbar.

Die Ergebnisse aus den Beispielrechnungen.

Es wurde eine Hängebrücke nach Bild 20 nach dem in der vorliegenden Arbeit entwickelten genauen und Annäherungsverfahren durchgerechnet, und zwar für folgende vier Fälle:

1. einfacher Versteifungsträger mit konstantem $J = 11,0 \text{ m}^4$,
2. durchlaufender Versteifungsträger mit konstantem $J = 11,0 \text{ m}^4$,
3. einfacher Versteifungsträger mit veränderlichem J ,
4. durchlaufender Versteifungsträger mit veränderlichem J .

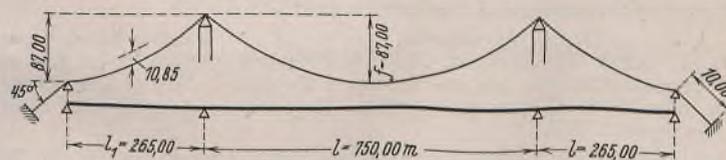


Bild 20.

In den beiden letzten Fällen wurde das Trägheitsmoment des Trägers jeweils der max M -Linie aus der Theorie II. Ordnung (Bild 21) angepaßt gewählt, und dabei ist der über die ganze Öffnung gebildete Mittelwert von J gerade $J_m = 11,0 \text{ m}^4$.

Der Berechnung lagen ferner zugrunde:

- der Elastizitätsmodul des Versteifungsträgers $E = 2100 \text{ t/cm}^2$,
- der E -Modul und Querschnitt des Kabels $E_k = 1550 \text{ t/cm}$, $F_k = 0,67 \text{ m}^2$,
- die ständige Last je Tragwand $g_1 = g_2 = 26,0 \text{ t/m}$
- und die Verkehrslast je Tragwand $p = 15,0 \text{ t/m}$.

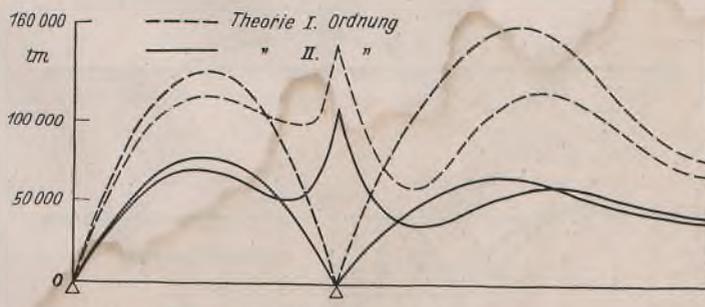


Bild 21.

Im folgenden sollen nur die wichtigsten Rechnungsergebnisse auszugsweise mitgeteilt werden. Die übrigen sowie die Durchführung der Berechnung können in der Dissertation nachgelesen werden.

A. max M (absoluter Wert) im Versteifungsträger des 1. und 2. Falls nach der Theorie I. Ordnung und der Theorie II. Ordnung (Bild 21).

B. Die Einflußlinien für H_p und M_v des 1. Falls nach der Theorie I. Ordnung und der Theorie II. Ordnung (Bild 22).

C. Die Einflußlinien für H_p , M_1 und M_v des 2. Falls nach der Theorie I. Ordnung und der Theorie II. Ordnung (Bild 23).

D. Gegenüberstellung der beschränkten Einflußlinien für M_v des 1. und 3. Falls sowie für M_1 des 2. und 4. Falls (Bild 24).

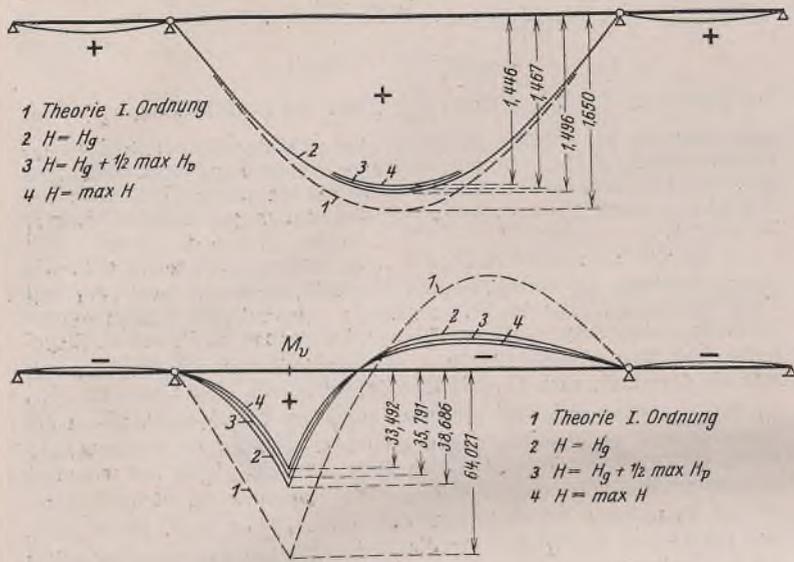


Bild 22.

Abschließend sei noch mitgeteilt, daß die Grundgedanken der vorliegenden Arbeit weitere Verwertung bei der Behandlung von Hänge-

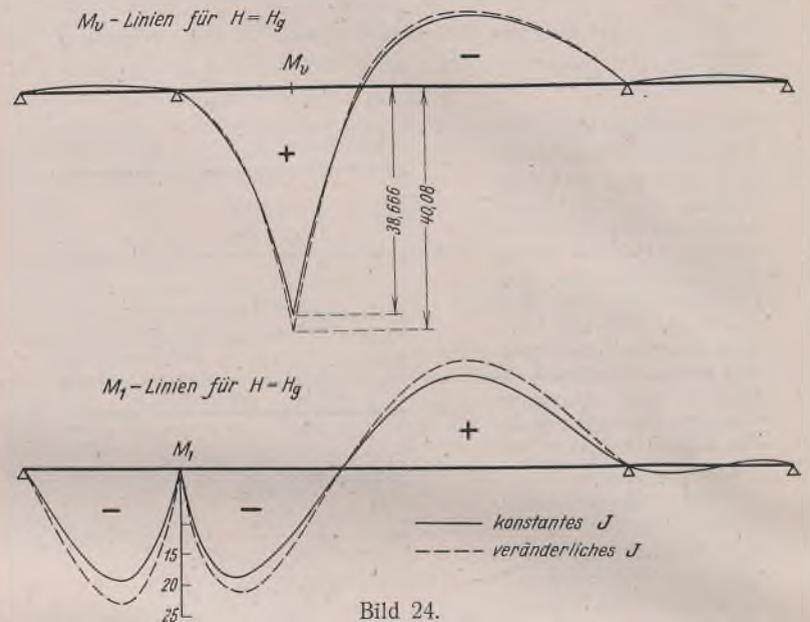


Bild 24.

E. Gegenüberstellung von max H, max η_m , max M_v und min M_1 nach der Theorie II. Ordnung.

Fall	max H		max η_m		max M_v		min M_1	
	t	%	mm	%	tm	%	tm	%
1	32 350	100,0	4518	100,0	63 572	100,0		
2	32 159	99,4	4386	97,1	58 900	92,7	-106 300	100,0
3	32 365	100,0	4564	101,0	64 485	102,1		
4	32 242	99,7	4356	96,4			-122 758	115,5

Zusammenfassung. Aus den vorangehenden Gegenüberstellungen läßt sich zusammenfassend folgendes sagen:

1. Bei großen Hängebrücken, was beim vorliegenden Beispiel der Fall ist, liefert die Theorie I. Ordnung erheblich größere Werte von M des Versteifungsträgers als die Theorie II. Ordnung. Das gleiche wurde auch bei Q und η festgestellt, deren Gegenüberstellungen hier nicht wiedergegeben sind.

2. Das Durchlaufen des Versteifungsträgers hat wenig Einfluß auf die max H -Kraft. Dagegen vermindert es die Durchbiegung max η_m in der Mitte der Mittelöffnung um etwa 3% und hat eine günstigere Größtmomentenverteilung des Versteifungsträgers zur Folge, abgesehen von den Momentenspitzen über den Innenstützen.

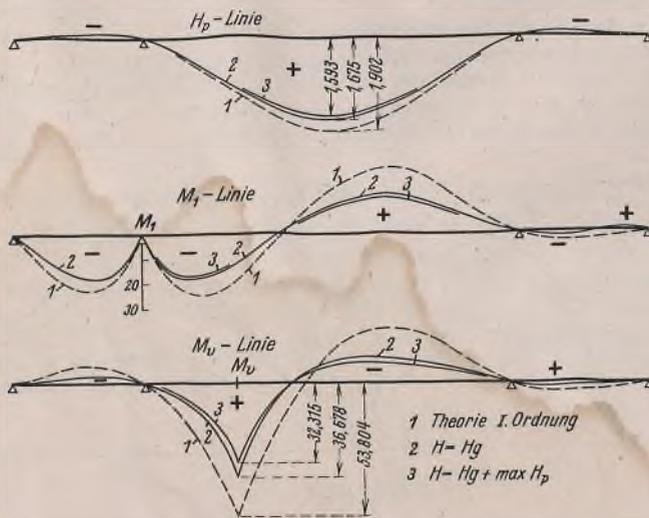


Bild 23.

3. Die Veränderlichkeit des Trägheitsmoments des Versteifungsträgers beeinflusst die max H -Kraft fast nicht und die Durchbiegung max η_m auch nur in ganz geringem Maße. Ihr Einfluß auf das Biegemoment ist beim einfachen Versteifungsträger auch nicht sehr wesentlich. Beim durchlaufenden Versteifungsträger ruft dagegen die Verstärkung des Trägerquerschnitts über den Stützen eine beträchtliche Vergrößerung des Stützenmoments hervor.

brücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers (21) gefunden haben. Ferner entstand aus ihnen das vom Ingenieurlaboratorium der Technischen Hochschule Darmstadt zum Patent angemeldete „Vereinfachte Hängebrückenmodell“.

Schriftumsverzeichnis.

- [1] Melan, J., Handbuch der Ingenieurwissenschaften, 4. Aufl., 2. Teil, VI. Bd. 1925.
- [2] Moisseiff, L. S., The Delaware River Bridge, final report of board of engineers, R. Modjeski, Chairman.
- [3] Johnson, Bryan and Turneure, Modern framed structures, Vol. II.
- [4] Müller-Breslau, Die graphische Statik der Baukonstruktionen, 2. Bd., 2. Abtl.
- [5] Timoshenko, S., Steifigkeit von Hängebrücken. Z. ang. Math. 1928, S. 1 bis 10.
- [6] Priester, G. C., Applications of trigonometric series to cable stress analysis in suspension bridge. Engineering Research Bulletin, No. 12, Univ. of Michigan, März 1929.
- [7] Fritsche, J., Zur genauen Theorie der Hängebrücken. Bautechn. 1929, Heft 40, S. 631.
- [8] Neukirch, H., Angenäherte Berechnung der Hängebrücken unter Berücksichtigung ihrer Verformung. Stahlbau 1936, Heft 9, S. 130.
- [9] Blick, W., Der Einfluß der Formänderungen auf die Größe der statischen Funktionen von versteiften Hängebrücken und die wirtschaftliche Auswirkung der Berücksichtigung der Formänderungen. Diss. T. H. Berlin 1932 (Auszug siehe Z. d. VdI 1932, S. 939, und 1933, S. 921).
- [10] Neukirch, H., Berechnung der Hängebrücke bei Berücksichtigung der Verformung des Kabels. Ing. Arch. 1936, Heft 7, S. 140 bis 155.
- [11] Stüssi, F., Zur Berechnung der verankerten Hängebrücken. Abh. d. Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Bd. 4. Zürich 1936.
- [12] Börner, H., Beitrag zur Berechnung von Hängebrücken mit Berücksichtigung der Formänderungen. Diss. T. H. Darmstadt 1930.
- [13] Grüning, M., Der Eisenbau. Handbibliothek für Bauing., IV. Teil, 4. Bd. Berlin 1929.
- [14] Steinman, D. B., Deflection theory for continuous suspension bridges. Abh. d. Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Bd. 2. Zürich 1934.
- [15] Timoshenko, S., Suspension bridges with a continuous stiffening truss. Abh. d. Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Bd. 2. Zürich 1934.
- [16] Hartmann, F., Zur Theorie und Ausführung der Hängebrücken. Zeitschrift d. Österr. Ingenieur- und Architektenvereins 1934, S. 293.
- [17] Jakkula, A. A., The theory of the suspension bridge. Abh. d. Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau, Bd. 4. Zürich 1936.
- [18] Klöppel, K., und Lie, K., Hängebrücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers. Stahlbau 1940, Heft 21/22, und Berichtigung, Stahlbau 1941, Heft 6/7.

INHALT: Über das Ausknicken statisch unbestimmt gelagerter Kreisbogenträger von veränderlichem Querschnitt. — Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung. (Schluß.)

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftleitung:
 Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
 Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
 Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
 Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
 zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 5. September 1941

Heft 19/20

Alle Rechte vorbehalten.

Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Hänger.

Von Kurt Klöppel und Kuo-hao Lie, Darmstadt.

I. Einleitung.

Bei der üblichen statischen Berechnung der im Boden verankerten Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung werden die Längenänderungen der Hänger vernachlässigt. Es wäre die Frage zu erörtern, welchen Einfluß die Nachgiebigkeit der Hänger auf die Kabelzugkraft, die Formänderungs- und Schnittgrößen des Versteifungsträgers ausüben kann und ob ihre Vernachlässigung praktisch berechtigt ist. H. Neukirch¹⁾ hat in seiner Arbeit über Hängebrücken mit einfeldrigen Versteifungsträgern die Längenänderungen der Hänger mit berücksichtigt, ohne jedoch die Größe dieses Einflusses zu erörtern. F. Stüssi²⁾ untersuchte den Einfluß der Hängernachgiebigkeit mit Hilfe der Differenzenrechnung auf dem Wege der Nachrechnung, indem er aus der für die starren Hänger durchgeführten Berechnung die Längenänderungen der Hänger ermittelte und sie nachträglich berücksichtigte, was also eine Annäherung darstellt. In der vorliegenden Arbeit wird ein allgemeines Verfahren entwickelt, das die Längenänderungen der Hänger auf einfache Weise in der Berechnung zu berücksichtigen gestattet und für Hängebrücken mit einfeldrigen und durchlaufenden Versteifungsträgern von konstantem und veränderlichem Trägheitsmoment anwendbar ist.

Wie der zweitgenannte Verfasser zeigte³⁾, läßt sich die übliche Berechnung der Hängebrücke nach der Theorie II. Ordnung auf diejenige eines ihrem Versteifungsträger entsprechenden „stellvertretenden“ Trägers zurückführen, der durch die Querlasten p und $y'' H_p$ sowie die Axialzugkraft H belastet ist, die mit Hilfe der Verschiebungsläche $F(\eta_k)$ des Kabels (bei starren Hängern ist $F(\eta_k)$ gleich $F(\eta_b)$ der Biegefläche des stellvertretenden Trägers) bestimmt wird. Dieses Gedankenmodell hat sich auch bei der Behandlung des besonderen Hängebrückensystems⁴⁾ als zweckdienlich erwiesen. Auf der gleichen Grundlage ist auch das vorliegende Verfahren aufgebaut, so daß im folgenden zwecks Umfangseinschränkung oft auf die Ableitungen und Zusammenstellungen der Formeln in dieser Arbeit⁵⁾ verwiesen wird.

II. Entwicklung des Verfahrens.

Die Differentialgleichungen des Kabels und des Versteifungsträgers lauten (Bild 1 und 1a):

$$(1) \quad -(H_g + H_p)(y + \eta_k)'' = g_k + p_k$$

$$(2) \quad (EJ \eta_b'''' = g_b + p_b.$$

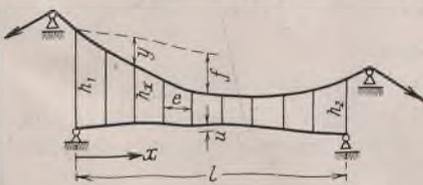


Bild 1.

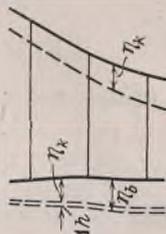


Bild 1a.

Die Addition beider Gleichungen liefert unter Beachtung $g_k + g_b = g$, $p_k + p_b = p$ folgende Gleichung:

$$(EJ \eta_b'''' = p + g + (H_g + H_p)(y + \eta_k)''.$$

¹⁾ H. Neukirch, Berechnung der Hängebrücke bei Berücksichtigung der Verformung des Kabels. Ing. Arch. Bd. VII, 1936, S. 140.

²⁾ F. Stüssi, Zur Berechnung verankerter Hängebrücken. Abh. d. I. V. B. H. Bd. 4, 1936, S. 531.

³⁾ K. H. Lie, Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung. Stahlbau 1941, Heft 14/15 und 16/18.

⁴⁾ K. Klöppel und K. H. Lie, Hängebrücken mit besonderen Stützbedingungen des Versteifungsträgers. Stahlbau 1940, Heft 21/22, und 1941, Heft 6/7.

Unter der Annahme, daß die ständige Last g vom Kabel allein aufgenommen wird, und daß dabei der Versteifungsträger spannungslos ist, also $\eta_b = 0$ wird, geht obige Gleichung mit $H_g + H_p = H$ in

$$(3) \quad (EJ \eta_b'''' = p + H_p y'' + H \eta_b'' - H \Delta h''$$

über, worin $\Delta h = \eta_b - \eta_k$ die Längenänderung des Hängers infolge der Übertragung der Last p_k auf das Kabel bedeutet.

Mit den Bezeichnungen

- h_x Länge der Hänger,
- e Abstand der Hänger,
- E_h E-Modul der Hänger,
- F_h Querschnitt der Hänger,

$$(4) \quad \frac{e}{E_h F_h} = a$$

haben wir

$$(5) \quad \Delta h = \frac{e p_k}{E_h F_h} \cdot h_x \pm \alpha_t t h_x = a p_k h_x \pm \alpha_t t h_x.$$

Aus Gl. (1) ergibt sich, da darin $g_k = g = -H_g y''$ ist,

$$(6) \quad p_k = -H_p y'' - H \eta_k''.$$

Hierin kann man zunächst belanglos $\eta_k = \eta_b$ setzen. Die Einführung dieses Ausdrucks in Gl. (5) liefert

$$(7) \quad \Delta h = -a h_x (H_p y'' + H \eta_b'') \pm \alpha_t t h_x$$

und

$$(8) \quad \Delta h'' = -(a H_p y'' h_x + a H h_x \eta_b'') \pm \alpha_t t h''_x.$$

Mit (s. Bild 1)

$$(9) \quad \begin{cases} h_x = h_1 - \frac{h_1 - h_2}{l} \cdot x - y - \frac{2u}{l} \cdot x \\ h'_x = -y'' \end{cases}$$

geht obige Gleichung unter Berücksichtigung dessen, daß $a H_p y''$ eine von x unabhängige Größe ist, über in

$$(8') \quad \Delta h'' = a H_p (y'')^2 - (a H h_x \eta_b'') \pm \alpha_t t y''.$$

Setzt man diesen Ausdruck für $\Delta h''$ in Gl. (3) ein, so erhält man nach einer einfachen Umformung

$$\left[EJ \left(1 - \frac{a H^2 h_x}{EJ} \right) \eta_b'''' \right] = p + H_p y'' \left(1 - a H y'' \pm \frac{H}{H_p} \alpha_t t \right) + H \eta_b''$$

oder

$$(10) \quad (EJ \eta_b'''' = p + \nu H_p y'' + H \eta_b'',$$

wenn man die Abkürzungen

$$(11) \quad J = J \mu_x$$

$$(11a) \quad \mu_x = 1 - \frac{a H^2}{EJ} \cdot h_x$$

und

$$(11b) \quad \nu = 1 - a y'' H \pm \frac{H}{H_p} \alpha_t t$$

einführt.

Gl. (10) stellt nichts anderes dar als einen Träger, der das gedachte Trägheitsmoment J aufweist und durch die Querlasten p und $\nu H_p y''$ sowie die axiale Zugkraft H belastet ist. Wenn der Berechnung ohnehin ein veränderliches Trägheitsmoment J zugrunde liegt, so erfordert die Lösung der Gl. (10) gegenüber der üblichen Differentialgleichung der Hängebrücke, die $\Delta h = 0$ voraussetzt, keine nennenswerte Mehrarbeit, unabhängig davon, ob der Versteifungsträger einfeldrig oder

durchlaufend ist. Zur praktischen Berechnung eines solchen Trägers mit veränderlichem Trägheitsmoment kann man entweder das vom zweitgenannten Verfasser entwickelte Annäherungsverfahren³⁾ oder andere Methoden^{2) 5)} anwenden.

Die nächste Aufgabe ist nun die Ermittlung von H_p . Die allgemeine Bestimmungsgleichung für H_p lautet³⁾:

$$(12) \quad H_p \cdot \frac{L}{E_k F_k} \pm \alpha_t t L_t + y'' F(\eta_k) = 0,$$

worin $F(\eta_k)$ die Verschiebungsfläche des Kabels bedeutet. Diese ist nun nicht mehr gleich der Biegefläche $F(\eta_b)$ des Versteifungsträgers, sondern

$$(13) \quad F(\eta_k) = F(\eta_b) - F(\Delta h),$$

worin $F(\Delta h)$ die Änderung der zwischen Kabel und Versteifungsträger begrenzten Fläche $F(h)$ der Hängewand bezeichnen soll. Sie ergibt sich aus Gl. (7) zu

$$F(\Delta h) = - \int a h_x (H_p y'' + H \eta_b'') dx \pm \int \alpha_t t h_x dx$$

oder mit $\eta_b'' = - \frac{M_y}{EJ_x}$ zu

$$F(\Delta h) = - a y'' H_p F(h) + \int \frac{a H}{EJ_x} \cdot h_x M_x dx \pm \alpha_t t F(h).$$

In dieser Gleichung kann man das zweite Glied gegenüber dem ersten ohne weiteres vernachlässigen. Eine zahlenmäßige Verfolgung an dem im Schluß mitgeteilten Beispiel zeigt z. B., daß die Vorzahl $\frac{a H}{EJ}$ des Integrals $\int h_x M_x dx$ nur etwa ein Zehntel vom Beiwert $a y''$ des Ausdrucks $H_p F(h)$ beträgt, und daß außerdem auch das Integral im Vergleich zu $H_p F(h)$ sehr klein ist, weil ja das Biegemoment zum Teil positiv und zum Teil negativ ausfällt. Die Vernachlässigung des zweiten Gliedes in der obigen Gleichung ist identisch mit dem Verzicht auf den zweiten Summanden in Gl. (6), und dies bedeutet statisch, daß die Kabelast p_k als gleichmäßig verteilt betrachtet wird. Daß man bei der Bestimmung von H_p nach der Theorie II. Ordnung von der ungleichmäßigen Verteilung der Last p_k absehen kann, ist nachgewiesen worden. Außerdem handelt es sich im vorliegenden Falle nur um die Berechnung von $F(\Delta h)$, die an sich nur ein kleines Korrekturglied für H_p darstellt. Es sei aber erwähnt, daß das Integral sich auch ohne weiteres numerisch auswerten läßt, wenn man für die starren Hänger das Biegemoment M_x berechnet hat und darin einsetzt. Wir wollen jedoch hiervon Abstand nehmen und erhalten somit für Hängebrücken über mehrere Öffnungen

$$F(\Delta h) = - a H_p \sum y'' F(h) \pm \alpha_t t \sum F(h).$$

Mit den Bezeichnungen

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_i'' = - \frac{8 f_i}{l_i^2} = - \frac{1}{\varrho_i} \\ y_c'' = - \frac{8 f_c}{l_c^2} = - \frac{1}{\varrho_c} \\ \lambda_i = \varrho_c : \varrho_i \end{array} \right.$$

geht obiger Ausdruck in

$$(15) \quad F(\Delta h) = \frac{a}{\varrho_c} \cdot H_p \sum \lambda F(h) \pm \alpha_t t \sum F(h)$$

über, worin die Summe sich über alle Öffnungen erstreckt.

Die Biegefläche $F(\eta_b)$ des Trägers kann man sich nach Gl. (10) aus zwei Teilen zusammengesetzt denken, der eine Teil $F \eta_b(p)$ infolge der Last p und der andere $F \eta_b(\nu y'' H_p)$ infolge der Last $\nu y'' H_p$. Dieser läßt sich auch schreiben

$$(16) \quad F \eta_b(\nu y'' H_p) = - H_p F \eta_b \left(\frac{\nu}{\varrho} \right),$$

worin die Biegefläche $F \eta_b \left(\frac{\nu}{\varrho} \right)$ des Ersatzträgers infolge der Vollast $\frac{\nu}{\varrho} = - \nu y'' \cdot 1$, d. h. $H_p = 1$, bedeutet.

Führt man Gl. (15) u. (16) in Gl. (13) und diese wieder in Gl. (12) ein, so ergibt sich unter Beachtung der Gl. (14) die Bestimmungsgleichung für H_p zu

³⁾ J. Ratzersdorfer, Durchlaufende Balken mit beliebig vielen Öffnungen bei Beanspruchung durch längs- und querwirkende Kräfte. Eisenbau Bd. 10, 1919, S. 93.

$$(20) \quad H_p = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\sum \lambda H F \eta_b(p) \mp \beta_c^2 \alpha_t t E J_c [\varrho_c L_t + \sum \lambda F(h)]}{\frac{2}{3} \sum \lambda f l - 8 \cdot \frac{f_c}{l_c} \cdot \frac{1}{\beta_c^2} \sum \lambda^2 \cdot \frac{l_j}{l_c J_c} \cdot k + \frac{\beta_c^2}{\nu} \left(\frac{E J_c}{E_K F_K^0} \cdot \varrho_c L + \frac{E J_c}{E_h F_h} \cdot \frac{e}{\varrho_c} \sum \lambda^2 F(h) \right)}$$

$$(17) \quad H_p = \frac{\sum \lambda F \eta_b(p) \mp \alpha_t t \varrho_c L_t \mp \alpha_t t \sum \lambda F(h)}{\frac{L \varrho_c}{E_K F_K} + \frac{a}{\varrho_c} \sum \lambda^2 F(h) + \sum \lambda F \eta_b \left(\frac{\nu}{\varrho} \right)}$$

In der obigen Gleichung gilt die Summe im Zähler für alle am Kabel aufgehängten Trägereile. Beim durchlaufenden Versteifungsträger ist im Summenausdruck auch die Biegefläche infolge der Stützenmomente zu berücksichtigen.

Mit Gl. (10) u. (17) ist die vorliegende Aufgabe ganz allgemein formuliert und auch gelöst. Nun muß noch einiges zur praktischen Rechnung gesagt werden. Die Bestimmung von H_p nach Gl. (17) und die Lösung der Gl. (10) sowie die Ermittlung von μ und ν nach Gl. (11a) u. (11b) setzen H als bekannt voraus. Da μ und ν nur sehr wenig von 1,0 (etwa 1%) und weniger) abweichen, so genügt zu ihrer Ermittlung ein Näherungswert von H . Zur Berechnung von H_p und des Ersatzträgers kann man zwei oder drei Werte von $H_p + H_g = H$ annehmen. Daraus lassen sich dann das richtige H_p und die richtigen Schnitt- und Formänderungsgrößen des Ersatzträgers durch Interpolation bestimmen. Es muß nun betont werden, daß nur die Formänderungsgrößen (Durchbiegung η_b , Biegewinkel τ_b und die Krümmungsradien ϱ_b) des Ersatzträgers denjenigen des Versteifungsträgers gleich sind. Denn es befriedigen Gl. (3) für den Versteifungsträger nur die Lösungen $\eta_b, \tau_b = \eta_b'$ und $\varrho_b = 1/\eta_b''$ aus Gl. (10) des Ersatzträgers, während die Momente und Querkräfte im Versteifungsträger $M = - E J \eta_b'', Q = (- E J \eta_b''')$ zu denen im Ersatzträger $\bar{M} = - E \bar{J} \eta_b'', \bar{Q} = (- E \bar{J} \eta_b''')$ sich wie $J : \bar{J} = \mu$ verhalten, also

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} M = \frac{\bar{M}}{\mu} \\ Q = \frac{\bar{Q}}{\mu} \end{array} \right.$$

Die im vorstehenden dargelegte strenge Berücksichtigung der Längenänderungen von Hängern ist nur dann zu empfehlen, wenn man, wie bereits erwähnt, der Berechnung ohnehin ein veränderliches J des Trägers zugrunde legt. Im Fall des öfters konstanten Trägheitsmoments läßt sich nun die Längenänderung der Hänger näherungsweise auf folgendem einfachen Weg erfassen.

Wie bereits erwähnt, weichen μ und ν nur wenig von 1,0 ab, und zu ihrer Ermittlung genügt durchaus ein Näherungswert von H . Nehmen wir hierfür $H = H_g + \frac{1}{2} \cdot \max H_p$, so sind dies für alle Lastzustände Festwerte. Setzen wir ferner in Gl. (11b) für h_x die mittlere Länge h_m der Hänger in der betreffenden Öffnung, was praktisch ohne weiteres zulässig ist, dann wird auch das Ersatzträgheitsmoment

$$(11') \quad J = \bar{J} \mu_m = J \left(1 - \frac{a H^2}{E J} \cdot h_m \right)$$

öffnungsweise konstant. Gl. (10) stellt somit einen einfeldrigen oder durchlaufenden stellvertretenden Träger mit öfters konstantem Trägheitsmoment dar, der durch die Querlasten p und $\nu y'' H_p$ sowie die Axialzugkraft H belastet ist. Solche Träger lassen sich mit Hilfe der in der Arbeit³⁾ angegebenen Formeln leicht berechnen. Im folgenden wollen wir die H_p -Gleichung für den vorliegenden Fall in einer für den praktischen Gebrauch geeigneten Form entwickeln.

Hierzu multiplizieren wir Gl. (12) mit ϱ_c und $H = E J_c \beta_c$, um y'' von $F \eta$ zu entfernen und die Formeln³⁾ für H -fache Biegefläche unmittelbar anwenden zu können. Die Einführung der Gl. (13) u. (15) liefert dann

$$(19) \quad H_p \beta_c^2 \cdot \frac{E J_c}{E_K F_K^0} \cdot \varrho_c L^0 \pm \beta_c^2 \alpha_t t E J_c \varrho_c L_t - \sum \lambda H F \eta_b(\nu y'' H_p) - \sum \lambda H F \eta_b(p) + H_p \beta_c^2 \cdot \frac{a E J_c}{\varrho_c} \sum \lambda^2 F(h) \pm \alpha_t t \sum \lambda F(h) = 0.$$

Rechnet man den Ausdruck³⁾

$$\sum \lambda H F \eta_b(\nu y'' H_p) = \nu H_p \sum \lambda H F \eta_b(y'')$$

weiter aus, setzt ihn in Gl. (19) ein und löst diese nach H_p auf, so ergibt sich für Hängebrücken über mehrere Öffnungen mit einfeldrigen Trägern die Bestimmungsgleichung

$$(21) \quad H_p = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\sum \lambda H F \eta_b(p) - \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{\varphi} (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) \mp \beta_c^2 \alpha_t t E J [\varrho L_t + F(h) + 2 \lambda_1 F_1(h)]}{\frac{2}{3} \cdot f l + \frac{4}{3} \cdot \lambda_1 f_1 l_1 - 8 \cdot \frac{f}{l} \cdot \frac{K_0'}{\beta^2} - 4 f \cdot \frac{K K'}{\varphi} + \beta_c^2 \cdot \frac{1}{\nu} \left[\frac{E J}{E_K F_K^0} \cdot \varrho L + \frac{E J}{E_h F_h} \cdot \frac{e}{\varrho} (F(h) + 2 \lambda_1^2 F_1(h)) \right]}$$

In den beiden vorstehenden Gleichungen erstreckt sich der Summenausdruck über alle am Kabel aufgehängten Trägereile, und $F_{\eta_b}(p)$ ist die Biegefläche des einfeldrigen Ersatzträgers infolge p allein³⁾, weil die Biegefläche infolge der Stützkräfte $M(p)$ im zweiten Glied des Zählers berücksichtigt ist. Ferner beziehen sich die mit Index 1 versehenen Größen im Nenner der Gl. (21) auf die Seitenöffnung.

Die Bezeichnungen in den obigen Gleichungen sind³⁾:

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta^2 &= \frac{H}{EJ} & \alpha &= \frac{l}{2} \cdot \beta \\ k &= 1 - \frac{\mathfrak{L}g \alpha}{\alpha} \\ K_0' &= k + \lambda_1^2 \cdot \frac{2l_1 \bar{J}_1}{lJ} \cdot k_1 \\ K &= k + \frac{l_1}{l} \cdot k_1 \\ K' &= k + \lambda_1 \cdot \frac{l_1}{l} \cdot k_1 \\ \varphi &= \beta \cdot \mathfrak{L}g \alpha + \frac{\beta_1}{\mathfrak{L}g 2 \alpha_1} - \frac{1}{l_1} \\ \bar{\varphi} &= \frac{\beta}{\mathfrak{L}g \alpha} - \frac{2}{l} + \frac{\beta_1}{\mathfrak{L}g 2 \alpha_1} - \frac{1}{l_1} \end{aligned} \right.$$

und \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 bedeuten die Belastungsglieder³⁾ des Ersatzträgers über den Innenstützen im Teilzustand p .

Ferner berechnet sich die Hängewandfläche nach Bild 1 zu

$$(23) \quad F(h) = \frac{h_1 + h_2}{2} l - \frac{2}{3} f l - \frac{u l}{2}$$

Im folgenden wollen wir die Anwendung des Verfahrens am Beispiel zeigen und daran anschließend das Rechnungsergebnis — den Einfluß der Nachgiebigkeit von Hängern — erörtern.

Zahlenbeispiel.

Die Anwendung des mitgeteilten Verfahrens möge im folgenden an Hand der Berechnung einer Hängebrücke mit durchlaufenden Versteifungsträgern nach Bild 2 gezeigt werden.

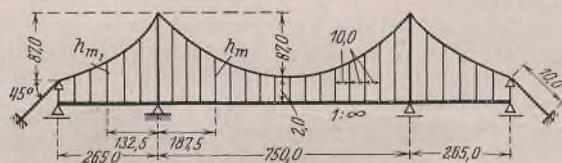


Bild 2.

Versteifungsträger	$J_1 = J = 11,0 \text{ m}^4$	$E = 2100 \text{ t/cm}^2$
Kabel	$F_k = 0,67 \text{ m}^2$	$E_k = 1550 \text{ t/cm}^2$
Hängeseil	$F_h = 80,0 \text{ cm}^2$	$E_h = 1600 \text{ t/cm}^2$
Last je Tragwand	$g_1 = g = 26 \text{ t/m}$	$p = 15 \text{ t/m}$

Wegen $g = g_1$ haben wir

$$\lambda_1 = 1$$

$$y_1'' = y'' = -\frac{1}{\rho} = -\frac{8f}{l^2} = -0,0012373$$

$$H_g = g \cdot \rho = 21013 \text{ t}$$

Mit $\max H_p = 11100 \text{ t}$ aus der Berechnung bei starren Hängern ergibt sich der Näherungswert für Gl. (11) u. (11b)

$$H = H_g + \frac{1}{2} \cdot \max H_p = 26500 \text{ t}$$

Die Dehnungszahl und die mittleren Längen der Hänger sowie die Hängewandflächen betragen

$$a = \frac{e}{E_h F_h} = 0,78 \cdot 10^{-4} \text{ m/t}$$

$$h_{m1} = 34,65 \text{ m} \quad h_m = 23,75 \text{ m}$$

$$F_1(h) = 10140 \text{ m}^2 \quad F(h) = 23260 \text{ m}^2$$

Damit ergeben sich nach Gl. (11) u. (11b) für $t = +25^\circ \text{ C}$ und $\alpha_1 = 0,000012$

$$\mu_1 = 0,9918 \quad \bar{J}_1 = \mu_1 J_1 = 10,910 \text{ m}^4$$

$$\mu = 0,9944 \quad J = \mu J = 10,983 \text{ m}^4$$

$$\nu_1 = \nu = 1,004 \quad \frac{1}{\nu} = 0,9960 \quad \nu y'' = -0,0012423$$

Die Einführung der bekannten Zahlenwerte sowie $L = 1473,4 \text{ m}$ und $L_1 = 1430,1 \text{ m}$ in Gl. (21) liefert die H_p -Gleichung für das vorliegende System

$$H_p = 0,9960 \cdot \frac{\sum H F_{\eta}(p) - 375,0 \cdot \frac{K}{\varphi} (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) \mp \beta^2 \cdot 826,393 \cdot 10^8}{47333,6 - 0,9280 \cdot \frac{K_0}{\beta^2} - 348,00 \cdot \frac{K^2}{\varphi} + \beta^2 \cdot 2719,5 \cdot 10^4}$$

und

$$K_0' = k + \frac{2l_1 \bar{J}_1}{lJ} \cdot k_1 = k + 0,705 k_1$$

$$K' = K = k + \frac{l_1 k_1}{l} = k + 0,353 k_1 \quad (\text{wegen } \lambda_1 = 1)$$

$$\varphi = \beta \cdot \mathfrak{L}g \alpha + \frac{\beta_1}{\mathfrak{L}g 2 \alpha_1} - \frac{1}{l_1} = \beta \cdot \mathfrak{L}g \alpha + \frac{\beta_1}{\mathfrak{L}g 2 \alpha_1} - 0,3774 \cdot 10^{-2}$$

$$\bar{\varphi} = \frac{\beta}{\mathfrak{L}g \alpha} - \frac{2}{l} + \frac{\beta_1}{\mathfrak{L}g 2 \alpha_1} - \frac{1}{l_1} = \frac{\beta}{\mathfrak{L}g \alpha} + \frac{\beta_1}{\mathfrak{L}g 2 \alpha_1} - 0,6441 \cdot 10^{-2}$$

Im folgenden wollen wir das größte positive Biegemoment des Trägers im Viertelpunkt der Mittelöffnung $\max M_v$ berechnen. Hierfür wurde die Laststellung Bild 3 aus der beschränkten Einflußlinie für M_v bei starren Hängern entnommen. Um gleichzeitig die Ermittlung der Durchbiegung zu zeigen und den Einfluß der Nachgiebigkeit der Hänger auf sie festzustellen, soll auch die Senkung der Träger im Viertelpunkt η_v für dieselbe Laststellung berechnet werden, obwohl diese von der ungünstigsten Belastung für $\max \eta_v$ etwas abweicht.

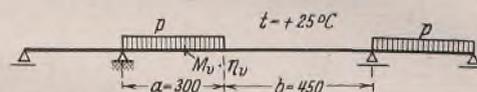


Bild 3.

1. Bestimmung von H_p .

Annahme $H_p = 3260 \text{ t}$ (Wert bei starren Hängern)

$$H = H_g + H_p = 21013 + 3260 = 24273 \text{ t}$$

$$\beta^2 = \frac{H}{EJ} = 1,0567 \cdot 10^{-4} \quad \beta = 1,0280 \cdot 10^{-2}$$

$$\beta_1^2 = \frac{H}{EJ_1} = 1,0594 \cdot 10^{-4} \quad \beta_1 = 1,0294 \cdot 10^{-2}$$

$$\alpha = \frac{l}{2} \cdot \beta = 3,8550 \quad k = 0,7406 \quad \mathfrak{L}g \alpha = 0,9991$$

$$\alpha_1 = \frac{l_1}{2} \cdot \beta_1 = 1,3640 \quad k_1 = 0,3570 \quad \mathfrak{L}g 2 \alpha_1 = 0,9915$$

$$K_0 = 0,9923 \quad K = 0,8666 \quad \varphi = 1,6879 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{a}{2} \cdot \beta = 1,542 \quad \mathfrak{C} \sin \frac{a}{2} \cdot \beta = 2,2300$$

$$\frac{b}{2} \cdot \beta = 2,313 \quad \mathfrak{C} \cos \frac{b}{2} \cdot \beta = 5,1018 \quad \mathfrak{C} \cos \alpha = 23,625$$

Nenner der Bestimmungsgleichung:

$$N = 47333,6 - 0,9280 \cdot \frac{0,9923}{1,0567} \cdot 10^4 - 348,00 \cdot \frac{0,8666^2}{1,6879} \cdot 10^2 + 1,0567 \cdot 10^{-4} \cdot 2719,5 \cdot 10^4 = 26009,6$$

Zähler Z der Bestimmungsgleichung:

Unter Verwendung der Formelwerte der Dissertation³⁾ erhält man die H -fachen Biegeflächen

$$\sum H F_{\eta}(p) = F_{M_0} - F_M \quad (\text{Mittelöffnung und Seitenöffnung})$$

$$= \frac{p a^2}{12} \cdot (3l - 2a) - \frac{2p}{\beta^2} \left[\frac{a}{2} - \frac{\mathfrak{C} \sin \frac{a}{2} \cdot \beta \cdot \mathfrak{C} \cos \frac{b}{2} \cdot \beta}{\beta \cdot \mathfrak{C} \cos \alpha} \right]$$

$$+ \frac{p l_1^3}{12} - p l_1 \cdot \frac{k_1}{\beta_1^2}$$

$$= 18562,5 \cdot 10^4 - 2928,6 \cdot 10^4 + 2326,2 \cdot 10^4 - 1339,5 \cdot 10^4 = 16620,6 \cdot 10^4$$

und die H -fachen Biegewinkel

$$\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 = \beta^2 F_M + \frac{1}{2} \cdot \beta_1^2 F_{M1} = 3094,65 + 709,54 = 3804,19$$

und

$$\frac{l}{2} \cdot \frac{K}{\varphi} (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2) = 7324,3 \cdot 10^4$$

Weiter beträgt

$$\beta^2 \cdot 826,393 \cdot 10^8 = 873,3 \cdot 10^4$$

Damit ergibt sich:

$$Z = 16620,6 \cdot 10^4 - 7324,3 \cdot 10^4 - 873,3 \cdot 10^4 = 8423,0 \cdot 10^4$$

und

$$H_p = \frac{1}{\nu} \cdot \frac{Z}{N} = 0,9960 \cdot \frac{8423,0 \cdot 10^4}{26009,6} = 3225 \text{ t} < 3260 \text{ t}$$

Man erkennt, daß im vorstehenden Lastfall die Nachgiebigkeit der Hänger das H_p um

$$\frac{3260 - 3225}{3260} = 1,07\%$$

vermindert hat.

Das ermittelte H_p braucht, weil es vom Ausgangswert wenig abweicht, nicht nochmals nachgerechnet zu werden und kann der weiteren Berechnung zugrunde liegen.

$$\begin{aligned}
 H_p &= 3225 \text{ t} & H &= H_g + H_p = 24\,238 \text{ t} \\
 \beta^2 &= 1,0552 \cdot 10^{-4} & \beta &= 1,0272 \cdot 10^{-2} \\
 \beta_1^2 &= 1,0579 \cdot 10^{-4} & \beta_1 &= 1,0286 \cdot 10^{-2} \\
 \alpha &= 3,8520 & k &= 0,7404 & \mathfrak{T}g \alpha &= 0,9991 \\
 \alpha_1 &= 1,3629 & k_1 &= 0,3565 & \mathfrak{T}g 2 \alpha_1 &= 0,9915 \\
 K &= 0,8662 & \varphi &= 1,6863 \cdot 10^{-2} & \varphi &= 1,4214 \cdot 10^{-2} \\
 \sin 0,5 \alpha &= 3,358 & \cos \alpha &= 23,550 \\
 \sin 1,5 \alpha &= 161,557 & \sin 2 \alpha &= \cos 2 \alpha = 1109,52 \\
 a \beta &= 3,0816 & \sin \frac{a}{2} \cdot \beta &= 2,2271 & \cos a \beta &= 10,920 \\
 b \beta &= 4,6224 & \cos \frac{b}{2} \cdot \beta &= 5,0928 & \cos b \beta &= 50,866.
 \end{aligned}$$

2. Das Biegemoment M_v .

Das Biegemoment \bar{M}_v des Ersatzträgers setzt sich nach Bild 4 aus drei Teilen zusammen³⁾.

a) Bild 4a:

$$\bar{M}(p) = \frac{p}{\beta^2} \left[1 - \frac{\sin 1,5 \alpha + \cos b \beta \cdot \sin 0,5 \alpha}{\sin 2 \alpha} \right] = 99\,570 \text{ tm.}$$

b) Bild 4b:

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_1(p) + \bar{M}_2(p) &= -\frac{\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2}{\varphi} & \bar{M}_1(p) - \bar{M}_2(p) &= \frac{\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2}{\varphi} \\
 \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 &= 2p \left[\frac{a}{2} - \frac{\sin \frac{a}{2} \cdot \beta \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \beta}{\beta \cdot \cos \alpha} \right] + \frac{1}{2} \cdot p l_1 k_1 \\
 &= 3801,93 \\
 \mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2 &= A^0 - B^0 - \frac{p}{\beta} \cdot \frac{\cos 2 \alpha - \cos b \beta - \cos a \beta + 1}{\sin 2 \alpha} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cdot p l_1 k_1 = 611,18
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_1(p) + \bar{M}_2(p) &= -225\,460 \text{ tm} \\
 \bar{M}_1(p) - \bar{M}_2(p) &= -42\,998 \text{ tm} \\
 \bar{M}_1(p) &= -134\,229 \text{ tm} & \bar{M}_2(p) &= -91\,231 \text{ tm} \\
 \bar{M}_v(p) &= \frac{\bar{M}_1(p) \cdot \sin 1,5 \alpha + \bar{M}_2(p) \cdot \sin 0,5 \alpha}{\sin 2 \alpha} = -19\,821 \text{ tm.}
 \end{aligned}$$

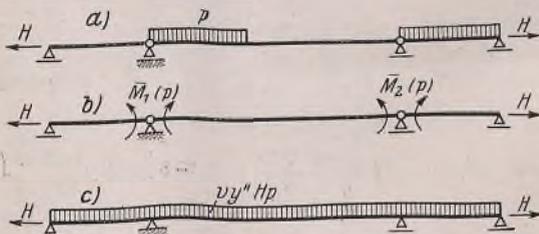


Bild 4a bis c.

c) Bild 4c:

$$\begin{aligned}
 \nu y'' H_p &= -0,001\,242\,3 \cdot 3225 = -4,0064 \text{ t/m} \\
 \bar{M}_1(\nu y'' H_p) &= \bar{M}_2(\nu y'' H_p) = -\nu y'' H_p \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{K}{\varphi} = 77\,174 \text{ tm} \\
 \bar{M}_v(\nu y'' H_p) &= \frac{\nu y'' H_p}{\beta^2} + \left(\bar{M}_1 - \frac{\nu y'' H_p}{\beta^2} \right) \frac{(\sin 1,5 \alpha + \sin 0,5 \alpha)}{\sin 2 \alpha} \\
 &= -20\,854 \text{ tm.}
 \end{aligned}$$

Zusammen

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_v &= \bar{M}_{v1}(p) + \bar{M}_{v2}(p) + \bar{M}_v(\nu y'' H_p) \\
 &= 99\,570 - 19\,821 - 20\,854 = 58\,895 \text{ tm.}
 \end{aligned}$$

Das Biegemoment des Versteifungsträgers ergibt sich zu

$$\max M_v = \frac{\bar{M}_v}{\mu} = \frac{58\,895}{0,9944} = 59\,227 \text{ tm.}$$

Bei Vernachlässigung der Dehnungen von Hängern beträgt für dieselbe Belastung $\max M_v = 58\,893 \text{ tm}$. Die Nachgiebigkeit der Hänger hat also das Moment um 0,56% erhöht.

3. Die Durchbiegung η_v für dieselbe Laststellung.

Es gilt für den Ersatzträger allgemein³⁾

$$\eta = \frac{\bar{M}^0 - \bar{M}}{H}$$

worin \bar{M}^0 das Moment des entsprechenden Trägers ohne den Axialzug H bedeutet.

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_v^0(p) &= \left(\frac{p a (l - 2 a)}{8} - \frac{p l^2}{32} \right) + \frac{3}{4} \cdot \bar{M}_1(p) + \frac{1}{4} \cdot \bar{M}_2(p) \\
 &= 411\,328 - 100\,671 - 22\,808 = 287\,849 \text{ tm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_v^0(\nu y'' H_p) &= -\nu y'' H_p + \bar{M}_1(\nu y'' H_p) & \nu y'' &= \frac{3}{4} \cdot f \\
 &= -211\,273 + 77\,174 = -134\,099 \text{ tm}
 \end{aligned}$$

$$\bar{M}_v^0 = \bar{M}_v^0(p) + \bar{M}_v^0(\nu y'' H_p) = 153\,750 \text{ tm.}$$

Damit ergibt sich

$$\eta_v = \frac{153\,750 - 58\,895}{24\,238} = 3,913 \text{ m.}$$

Die berechnete Durchbiegung ist unmittelbar gleich der des Versteifungsträgers. Bei starren Hängern ergab sich für dieselbe Laststellung $\eta_v = 3,866 \text{ m}$. Die Berücksichtigung der Nachgiebigkeit von Hängern liefert also um 4,7 cm oder 1,21% größere Durchsenkung η .

Zusammenfassung.

Im vorstehenden wurde gezeigt, wie man durch die Einführung der Ersatzträgheitsmomente $\bar{J} = \mu J$ und eines Multiplikators ν der Teillast $y'' H_p$ die Nachgiebigkeit der Hänger bei der Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung erfasst. In bezug auf die Formänderungen ist der Versteifungsbalken dem stellvertretenden Träger mit dem Ersatzträgheitsmoment \bar{J} , der durch die Querlasten p und $\nu y'' H_p$ sowie die Axialzugkraft $H = H_g + H_p$ belastet ist, vollkommen gleich, während die Schnittgrößen des Versteifungsträgers zu denen des Ersatzträgers sich wie J zu \bar{J} verhalten. Das mitgeteilte Verfahren ist für echte (d. h. im Boden verankerte) Hängebrücken über beliebig viele Öffnungen mit einfeldrigen oder durchlaufenden Versteifungsträgern von konstantem oder veränderlichem Trägheitsmoment und von üblichen oder besonderen Stützbedingungen⁴⁾ anwendbar. Die Durchrechnung des Beispiels, das eine große Hängebrücke mit $g:p = 1,73$ und mit durchlaufenden Versteifungsträgern über drei Öffnungen darstellt, zeigt ferner die Anwendung des Verfahrens und den Einfluß der Nachgiebigkeit der Hänger. Wie man aus den Berechnungsergebnissen erkennt, ist der Einfluß der Nachgiebigkeit von Hängern auf die Kabelzugkraft, die Formänderungs- und Schnittgrößen des Versteifungsträgers sehr gering, im vorstehenden Beispiel etwa 1%. Wenn man bedenkt, daß man sich heute bei der Bemessung des Trägers, z. B. bei Berechnung der Stöße des Trägers, der Festlegung der zulässigen Beanspruchung unter Berücksichtigung der Dauerbeanspruchung bei Hängebrücken für Eisenbahnfahrt usw. noch mit grober Näherung begnügen muß, so steht eine solche Verfeinerung der statischen Berechnung — die Berücksichtigung des geringfügigen Einflusses der Nachgiebigkeit von Hängern — keinesfalls im Einklang mit der Festigkeitsberechnung des Trägers. Es ist also ohne weiteres zulässig, wenn man heute bei der Berechnung der echten Hängebrücke nach der Theorie II. Ordnung die Nachgiebigkeit der Hänger vernachlässigt. Es sei ferner erwähnt, daß man sich zu Untersuchungen eines derartig kleinen Nebeneinflusses nur einer genauen Berechnung bedienen kann, nicht aber der Modellversuche am Hängebrückenmodell, weil die Größenordnung des Einflusses gerade im Bereich der Meßgenauigkeit liegt.

Einfluß der nachgiebigen Hängestangen auf die Berechnung der Hängebrücke.

Alle Rechte vorbehalten.

Von August Hertwig.

Im Anschluß an die Arbeit von Klöppel u. Lie ist vielleicht eine etwas ausführlichere Betrachtung aus meinem Aufsatz im Stahlbau 1940, Heft 21/22, von Interesse, in der zugleich ein Vorzeichenfehler beseitigt ist, auf den mich Herr Klöppel aufmerksam gemacht hat.

In der Differentialgleichung der Hängebrücke stehen die Durchbiegungen η_b des Versteifungsbalkens und η_k des Seiles:

$$(EJ_x \eta_b'')'' = p_x + g_x + H_{g+p} z'' + H_{g+p} \eta_k''$$

Zunächst setzt man $\eta_b = \eta_k$, dann entsteht mit $g_x + H_{g+p} z'' = 0$ die übliche Gleichung

$$(EJ_x \eta'')'' - H_{g+p} \eta_b'' = p_x + H_p z'',$$

oder mit $EJ_x \eta_b'' = y$

$$y'' - \frac{H_{g+p}}{EJ_x} \cdot y = p_x + H_p z''$$

Nimmt man die weitere grundlegende Voraussetzung hinzu, daß für bestimmte Belastungen H_{g+p} und H_p als von η_b unabhängig angenommen werden können und feste Werte besitzen, die aus der Berechnung I. Ordnung entnommen werden können, dann ist die Differentialgleichung eine lineare

2. Ordnung mit dem von x abhängigen $\psi(x) = \frac{H_{g+p}}{EJ_x}$ neben y .

Nun wollen wir die Voraussetzung $\eta_b = \eta_k$ fallen lassen. Es ist notwendig, die Differenz zwischen η_b und η_k auszudrücken. Für die Differentialgleichung muß man statt einzelner Hängeseile eine Hängewand annehmen von wechselnder Dicke δ_x . Die Belastung eines Streifens

von der Länge h_x und dem Querschnitt $\delta_x dx$ ist $H_{g+p} \cdot \frac{d^2(z + \eta_k)}{dx^2}$,

also ist:

$$(1) \quad \Delta h_x = -\frac{H_{g+p}}{E_h \delta_x} \cdot \frac{d^2(z + \eta_k)}{dx^2} \cdot h_x = \eta_b - \eta_k$$

Die Differentialgleichung des Balkens lautet:

$$(2) \quad (E_b J_x \eta_b''')' - H_{g+p} \eta_k'' = p_x + H_{g+p} z''.$$

Aus den beiden Gleichungen kann man eine Verschiebung η eliminieren und erhält eine Differentialgleichung 6. Ordnung. Ihre Lösung bereitet große Schwierigkeiten. Man muß also vereinfachende Annahmen machen.

Bei der Berechnung von $\eta_b - \eta_k$ in Gl. (1) soll die Belastung der Hängestreifen statt aus $H_{g+p} \cdot \frac{d^2(z + \eta_k)}{dx^2}$ aus $H_{g+p} \cdot \frac{d^2(z + \eta_b)}{dx^2}$ berechnet werden. Wir führen also eine vergrößerte Belastung der Hängestreifen ein, vergrößern also den Einfluß der nachgiebigen Hängestangen. Dann kann aus Gl.

$$(1a) \quad \eta_k = \eta_b + \frac{H_{g+p} h_x}{E_h \delta_x} \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 \eta_b}{dx^2} \right)$$

bestimmt und in Gl. (2) eingesetzt werden.

$$\eta_k'' = \eta_b'' + \left(\frac{H_{g+p} h_x z''}{E_h \delta_x} \right)'' + \left(\frac{H_{g+p} h_x}{E_h \delta_x} \cdot \eta_b'' \right)''$$

$$\left[(E_b J_x - \frac{H_{g+p}^2 h_x^2}{E_h \delta_x^2}) \eta_b'' \right] - H_{g+p} \eta_b'' = p_x + H_p z'' + \left(\frac{H_{g+p} H_p h_x z''}{E_h \delta_x} \right)''.$$

Mit

$$(3a) \quad \left(E_b J_x - \frac{H_{g+p}^2 h_x^2}{E_h \delta_x^2} \right) \eta'' = y,$$

$$(3b) \quad \frac{H_{g+p}}{E_b J_x - \frac{H_{g+p}^2 h_x^2}{E_h \delta_x^2}} = \psi(x),$$

$$(3c) \quad p_x + H_p z'' + \left(\frac{H_{g+p} H_p h_x z''}{E_h \delta_x} \right)'' = f(x)$$

entsteht dann wieder die bekannte Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(4) \quad y'' - \psi(x)y = f(x),$$

in der nur y , $\psi(x)$ und $f(x)$ die vorstehende geänderte Bedeutung haben.

An den Gl. (3a) bis (3c) und (4) kann man nun leicht den Einfluß der Hängestangennachgiebigkeit auf die y , d. h. die Biegemomente der Versteifungsbalken abschätzen.

In dem Klammersausdruck neben η_b'' in Gl. (3a) kann der Ausdruck $\frac{H_{g+p}^2 h_x^2}{E_h \delta_x^2}$ gegenüber $E_b J_x$ vernachlässigt werden. Das gleiche gilt dann auch für den Nenner von $\psi(x)$, wie die Zahlenrechnung beweist.

Schließlich wäre noch der Einfluß von $\left(\frac{H_{g+p} H_p h_x z''}{E_h \delta_x} \right)''$ zu untersuchen. $\frac{H_{g+p} H_p}{E_h \delta_x}$ kann als fester Mittelwert angesetzt werden. Es wird dann

$$(h_x z'')'' = z'''' h_x + 2 z''' h_x' + h_x'' z''.$$

Setzt man für z eine Parabel $\frac{4f}{l^2} \cdot x(l-x)$ und $h_x = h_0 - z$, dann ist

$$z'' = -\frac{8f}{l^2}, \quad z''' = z'''' = 0, \quad h_x'' = -z'', \quad (h_x z'')'' = -\left(\frac{8f}{l^2}\right)^2$$

und

$$f(x) = p_x - H_p \cdot \frac{8f}{l^2} \left(1 + \frac{H_{g+p} \delta f}{E_h \delta_x l^2} \right).$$

Auch in dieser Klammer ist der Bruch gegen 1 im allgemeinen klein. Aus diesen Abschätzungen geht hervor, daß die Nachgiebigkeit der Hängestangen, von geringem Einfluß auf die Biegemomente, mit Recht vernachlässigt wird.

Alle Rechte vorbehalten.

Zur Berechnung von vierseitigen Fachwerkmasten auf Verdrehen.

Von Prof. Ing. Dr. Josef Wanke, Prag.

Die Beanspruchungen von vierseitigen Freileitungsmasten (Gitter- und Rahmenmasten), wie sie durch einseitigen oder wechselseitigen Leiterraß auftreten, können für den Bestand dieser Tragwerke gefährlich werden. Es ist daher wichtig, die bei einer solchen Belastung auftretenden größten Spannungen zu kennen. In einer früheren Arbeit¹⁾ hat der Verfasser ein Verfahren zur Berechnung von Masten auf Verdrehen gezeigt, in dem der Einfluß der Querverbände und des Verdrehungswiderstandes der Stiele berücksichtigt wurde. Im folgenden werden zu dieser Berechnung, soweit sie sich auf Gittermaste bezieht, einige Vereinfachungen und Ergänzungen angegeben. Wenn dabei auf die erwähnte Arbeit Bezug zu nehmen ist, wird sie mit A36 bezeichnet werden.

A. Vierseitige Fachwerkmaste aus Winkelprofilen.

Diese Maste sollen grundsätzlich außer einem möglichst starren Querverband in der Ebene des angreifenden Verdrehungsmoments M_d

(im Falle der Belastung nach Bild 1a ist $M_d = P(b_0 + 2c)$) noch Zwischenquerverbände erhalten. Letztere dienen zur Verhinderung der rhombischen bzw. rhomboidischen Verformung der Mastquerschnitte. Bei der üblichen Ausführung können diese Zwischenquerverbände, im Gegensatz zum Verband in der Ebene von M_d , keine wesentlichen Verdrehungsmomente auf die Stiele übertragen.

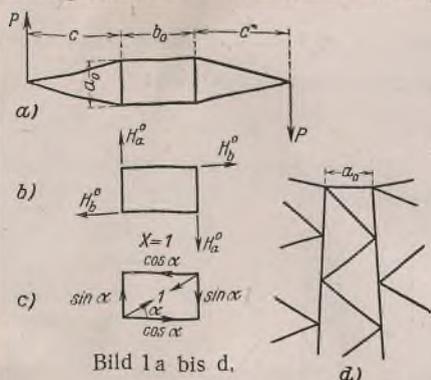


Bild 1a bis d.

1. Fachwerkmast mit einem Querverband.

Bei niedrigen Rechteckmasten kann man sich mit einem Querverband begnügen, wenn man ihn in der Ebene des angreifenden Moments anordnet. Bei quadratischen Masten, auch größerer Höhe, bleiben im allgemeinen die Zwischenquerverbände spannungslos, so daß auch diese Maste so berechnet werden können, als ob nur ein Verband vorhanden wäre. Dieser Fall wird deshalb zuerst untersucht. Die Berechnung wird ohne Berücksichtigung der Verdrehungssteifigkeit der Stiele durchgeführt, da bei dem sehr geringen Drillungswiderstand der offenen Winkelprofile der auf die Stiele entfallende Anteil am Verdrehungsmoment so klein ist, daß er vernachlässigt werden kann.

Wir nehmen an, daß der Querverband in der Ebene von M_d aus vier Riegeln und einer Diagonale besteht. Weiter wird neben der Gelenk-

¹⁾ Berechnung von gegliederten Masten und Türmen auf Verdrehen, Stahlbau 1936, Heft 25 u. 26, S. 193 u. 203.

verbindung der Systemstäbe vorausgesetzt, daß auch durch die Querriegel des Querverbandes keine Verdrehungsmomente auf die Stiele übertragen werden können.

Es bezeichnen

S^0 die Stabkräfte in den Seitenwänden des statisch bestimmten Grundsystems (ohne Querverband) infolge der äußeren Belastung (im Falle einer Belastung nach Bild 1a ist $H_a^0 = P$ und $H_b^0 = \frac{2c}{a_0} \cdot P$),

S^x die Stabkräfte im gleichen System infolge $X=1$ (Bild 1e),

F und s die Querschnitte und Längen der Stäbe.

Weiter deuten die unteren Zeiger a und b die bezüglichen Seitenwände an.

Die unbekannte Diagonalkraft im Querverband berechnet sich aus

$$(1) \quad X = - \frac{\sum \frac{S^0 S^x}{F} \cdot s}{\sum \frac{S^{x^2}}{F} \cdot s}$$

Dieser Ausdruck läßt sich umformen, indem man die waagerechten Verschiebungen δ_a und δ_b einführt, die in den vier Seitenwänden des statisch bestimmten Grundsystems durch je eine in der Höhe des Querverbandes wirkende waagerechte Kraft 1 in deren Richtung hervorgerufen wird. Die Richtung dieser Kräfte stimmt mit der von H_a^0 und H_b^0 (Bild 1b) überein.

Bezeichnen S_a bzw. S_b die in den Seitenwänden a bzw. b infolge der waagerechten Kräfte 1 (in der Ebene des Moments M_d wirkend) entstehenden Stabkräfte, so sind die bezüglichen durch H_a^0 und H_b^0 hervorgerufenen Werte

$$(2) \quad \begin{cases} \text{Diagonalen:} & S_a^0 = H_a^0 S_a \\ & S_b^0 = H_b^0 S_b \\ \text{Eckstiele:} & S^0 = H_a^0 S_a + H_b^0 S_b \\ \text{Riegel des Querverbandes:} & R_a^0 = -\frac{1}{2} H_a^0, \quad R_b^0 = -\frac{1}{2} H_b^0 \end{cases}$$

(bei einer Ausfachung nach Bild 1d).

In gleicher Weise findet man für die durch $X=1$ entstehenden Stabkräfte

$$(3) \quad \begin{cases} \text{Diagonalen:} & S_a^x = S_a \cdot \sin \alpha \\ & S_b^x = -S_b \cdot \cos \alpha \\ \text{Eckstiele:} & S^x = S_a \cdot \sin \alpha - S_b \cdot \cos \alpha \\ \text{Riegel und Diagonale des Querverbandes:} & R_a^x = -\sin \alpha, \quad R_b^x = 0, \quad X=1. \end{cases}$$

Damit sind die Anteile, die zwei benachbarte Seitenwände zu Zähler und Nenner von (1) liefern:

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \sum_V \frac{S^0 S^x}{F} \cdot s &= H_a^0 \cdot \sin \alpha \sum_D \frac{S_a^2}{F} \cdot s - H_b^0 \cdot \cos \alpha \sum_D \frac{S_b^2}{F} \cdot s \\ &+ \sum (H_a^0 S_a + H_b^0 S_b) (S_a \cdot \sin \alpha - S_b \cdot \cos \alpha) + \frac{1}{2} H_a^0 \cdot \frac{a_0 \cdot \sin \alpha}{F} \\ \sum_V \frac{S^{x^2}}{F} \cdot s &= \sin^2 \alpha \sum_D \frac{S_a^2}{F} \cdot s + \cos^2 \alpha \sum_D \frac{S_b^2}{F} \cdot s \\ &+ \sum_V (S_a \cdot \sin \alpha - S_b \cdot \cos \alpha)^2 + \frac{a_0 \cdot \sin^2 \alpha}{F} + \frac{d}{2F} \end{aligned} \right.$$

Das Zeichen \sum_D deutet an, daß die Summe sich über die Diagonalen einer Seitenwand erstreckt; \sum_V umfaßt die Formänderungen zweier benachbarter Stiele.

Führt man zur Abkürzung in (4) die E-fachen waagerechten Verschiebungen

$$(5) \left\{ \begin{aligned} \sum_V \frac{S_a^2}{F} \cdot s + \sum_D \frac{S_a^2}{F} \cdot s &= \delta_a^V + \delta_a^D = \delta_a \\ \sum_V \frac{S_b^2}{F} \cdot s + \sum_D \frac{S_b^2}{F} \cdot s &= \delta_b^V + \delta_b^D = \delta_b \end{aligned} \right.$$

und, in gleicher Weise gebildet,

$$(5a) \quad \sum_V \frac{S_a S_b}{F} \cdot s = \delta_{ab}$$

ein, so lautet der Ausdruck (1)

$$(6) \quad X = \frac{H_a^0 \delta_a \cdot \sin \alpha - H_b^0 \delta_b \cdot \cos \alpha - (H_a^0 \cdot \cos \alpha - H_b^0 \cdot \sin \alpha) \delta_{ab} + \frac{1}{2} H_a^0 \cdot \frac{a_0 \cdot \sin \alpha}{F}}{\delta_a \cdot \sin^2 \alpha + \delta_b \cdot \cos^2 \alpha - 2 \delta_{ab} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \frac{a_0 \cdot \sin^2 \alpha}{F} + \frac{d_0}{2F}}$$

Bei starrem Querverband entfallen im Zähler und Nenner die Glieder ohne δ . Das Verhältnis $x = \frac{H_a^0}{H_b^0}$ hängt von der Art der Eintragung

des Drehmoments M_d ab. Bei einem bestimmten Verhältnis $x' = \frac{H_a'}{H_b'}$ wird der Zähler von (6) gleich Null und die Wandkräfte H_a' und H_b' sind gleich den Werten H_a und H_b des statisch unbestimmten Raumsystems. Man erkennt leicht, daß auch bei starrem Querverband — die bei höheren Masten stets zulässige Vernachlässigung der von der Formänderung des Querverbandes herrührenden Glieder in (6) entspricht auch einem solchen Verbande — die Annahme der üblichen Näherungsrechnung

$$(7) \quad H_a' \cdot \cos \alpha - H_b' \cdot \sin \alpha = 0$$

oder mit Einführung von $\frac{H_a'}{H_b'} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_0}{b_0}$ und Berücksichtigung von $H_a' b_0 + H_b' a_0 = M_d$

$$(7a) \quad H_a' = \frac{M_d}{2 b_0} \quad H_b' = \frac{M_d}{2 a_0}$$

nur richtig ist, wenn auch die folgende Bedingung

$$(8) \quad H_a' \delta_a \cdot \sin \alpha - H_b' \delta_b \cdot \cos \alpha = 0$$

oder umgeformt

$$(8a) \quad a_0^2 \delta_a - b_0^2 \delta_b = 0$$

erfüllt ist. Das trifft nie zu; folglich ergibt sich bei Vernachlässigung der Formänderung des Querverbandes mit den Wandkräften H_a' und H_b' nach (7a) eine zusätzliche Diagonalkraft

$$(6a) \quad X' = - \frac{H_a' \delta_a \cdot \sin \alpha - H_b' \delta_b \cdot \cos \alpha}{\delta_a \cdot \sin^2 \alpha + \delta_b \cdot \cos^2 \alpha - 2 \delta_{ab} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

Daraus berechnen sich die endgültigen Wandkräfte

$$(9) \quad \begin{cases} H_a = H_a' + X' \cdot \sin \alpha \\ H_b = H_b' - X' \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

Indem man für H_a' und H_b' die Werte aus (7a) einführt und die Winkel-funktionen durch die Riege-längen a_0 und b_0 ausdrückt, erhält man

$$(9a) \quad \begin{cases} H_a = \frac{b_0 \delta_b - a_0 \delta_{ab}}{a_0^2 \delta_a + b_0^2 \delta_b - 2 a_0 b_0 \delta_{ab}} \\ H_b = \frac{a_0 \delta_a - b_0 \delta_{ab}}{a_0^2 \delta_a + b_0^2 \delta_b - 2 a_0 b_0 \delta_{ab}} \end{cases}$$

In ähnlicher Weise ist die Rechnung vorzunehmen, wenn der Querverband ohne Diagonalen als Rahmen ausgeführt wird. Aus Symmetriegründen müssen die Eckmomente X_v des Rahmens in den aufeinander-

folgenden Ecken der Größe nach gleich, dem Vorzeichen nach aber verschieden sein. Die dem Selbstspannungszustande $X=1$ ($X_1 = -X_2 = X_3 = -X_4 = 1$) entsprechenden Rahmenmomente und Wandkräfte sind in Bild 2a, b eingetragen. Aus dem Vergleich mit Bild 1c folgt, daß in (6) $\sin \alpha$ durch $\frac{4}{b_0}$ und $\cos \alpha$ durch $\frac{4}{a_0}$ sowie im Nenner die beiden letzten, von der Formänderung des Querverbandes herrührenden Glieder durch $\frac{a_0 + b_0}{3 J_q}$ zu ersetzen sind, um aus derselben Gleichung die Rahmen-eckmomente zu erhalten. Dabei bedeutet J_q das Trägheitsmoment eines

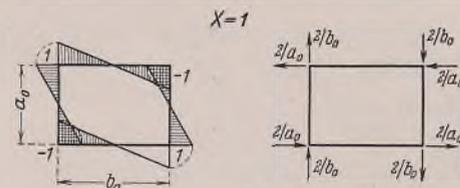


Bild 2.

(10)

$$E \omega^m = \sum \frac{S_M^0 S_M}{F} \cdot s$$

Dabei bezeichnen

S_M^0 die Stabkräfte im statisch bestimmten Raumsystem infolge $M_d = 1$, also infolge der Wandkräfte H_a^0 und H_b^0 ,

S_M die Stabkräfte im statisch unbestimmten Raumsystem infolge $M_d = 1$, also infolge H_a und H_b ,

ω^m die Verdrehung in der Ebene von M_d im Bogenmaß.

Mit den nach (2) bestimmten Stabkräften erhält man für den Summenausdruck in (10)

$$(11) \quad \sum \frac{S_M^0 S_M}{F} \cdot s = 2 \left[H_a^0 H_a \sum_D \frac{S_a^2}{F} \cdot s + H_b^0 H_b \sum_D \frac{S_b^2}{F} \cdot s + \sum (H_a^0 S_a + H_b^0 S_b) (H_a S_a + H_b S_b) \right]$$

Durch Einführung von δ_a , δ_b und δ_{ab} aus (5) und (5a) wird (10) umgeformt in

$$(12) \quad E \omega^m = 2 [H_a^0 H_a \delta_a + H_b^0 H_b \delta_b + (H_a^0 H_b + H_b^0 H_a) \delta_{ab}]$$

H_a^0 und H_b^0 müssen nur der Bedingung $H_a^0 b_0 + H_b^0 a_0 = 1$ entsprechen,

das Verhältnis $x = \frac{H_a^0}{H_b^0}$ aber kann, wenn man von der Berücksichtigung der Formänderungen des Querverbandes absieht, beliebig gewählt werden; somit sind auch die Annahmen zulässig: $H_a^0 = \frac{1}{b_0}$, $H_b^0 = 0$ oder

$H_a^0 = 0$, $H_b^0 = \frac{1}{a_0}$. Damit kann ω^m aus folgenden einfachen Beziehungen ermittelt werden:

$$(12a) \quad E \omega^m = \frac{2}{b_0} [H_a \delta_a + H_b \delta_{ab}] = \frac{2}{a_0} [H_b \delta_b + H_a \delta_{ab}]$$

Die vorstehenden Betrachtungen gelten allgemein auch für den Fall, daß die Eckstiele Knickpunkte aufweisen und das Seitenverhältnis veränderlich ist. Am häufigsten wird der quadratische Mast mit gleichen ebenen Seitenwänden ausgeführt. Bei diesem ist $a_0 = b_0$ und $\delta_a = \delta_b$. Bei der angenommenen Ausfachung ist aber $\delta_{ab} \neq -\delta_a^V$; der Verdrehungswinkel ω^m wird also auch durch die Formänderungen der Stiele beeinflusst.

Die Verschiebungen δ_a , δ_b und δ_{ab} sind nach (5) und (5a) zu berechnen. Die Stabkräfte S_a und S_b können mittels Cremonaplan gefunden oder in bekannter Weise analytisch bestimmt werden.

Kammüller²⁾ hat, indem er Summen durch Integrale ersetzte, bei geraden Eckstielen sowohl für unveränderliche als auch schußweise veränderliche Stabflächen Näherungsausdrücke δ^V und δ^D entwickelt, deren Genauigkeit um so größer ist, je mehr unterteilt die Seitenwände sind. Wechseln die Stielflächen in den Schüssen h_1, h_2, \dots , die Diagonalfächen in den Abschnitten h_1', h_2', \dots , so lauten diese Näherungsformeln mit den Bezeichnungen von Bild 3:



Bild 3.

²⁾ Kammüller, Die Beanspruchung der Leitungsmaste bei Seilriß. Stahlbau 1928, Heft 12, S. 133 u. f.

$$(14) \begin{cases} \delta_a^V = \frac{1}{2 \cdot \sin^2 \beta_a} \sum \frac{h_k}{F_k} \left[1 + \frac{a_0^2}{a_k a_{k-1}} - \frac{2 a_0}{a_n - a_0} \cdot \ln \frac{a_k}{a_{k-1}} \right] \\ \delta_a^D = a_0^2 \sum \frac{h_k'}{F_k' a_k' a_{k-1}' \cdot \cos^2 \varphi_{ak}' \cdot \sin \varphi_{ak}'} \end{cases}$$

Für φ_{ak}' ist im Abschnitt h_k' ein Mittelwert einzusetzen. Sind Stiel- und Diagonalfächen auf die ganze Länge des Mastes unveränderlich, so vereinfachen sich die Ausdrücke:

$$(14a) \begin{cases} \delta_a^V = \frac{h}{2 F \cdot \sin^2 \beta_a} \left[1 + \frac{a_0}{a_n} - \frac{2 a_0}{a_n - a_0} \cdot \ln \frac{a_n}{a_0} \right] \\ \delta_a^D = \frac{a_0 h}{F a_n \cdot \cos^2 \varphi_a \cdot \sin \varphi_a} \end{cases}$$

Für φ_a ist wiederum ein Mittelwert einzusetzen.

In ähnlicher Weise findet man, wenn das Seitenverhältnis veränderlich ist, für den nur von der Formänderung der Stiele herrührenden Ausdruck

$$(15) \delta_{ab} = - \int_0^h \frac{x^2 dx}{(a_0 + 2x \cdot \operatorname{tg} \beta_a)(b_0 + 2x \cdot \operatorname{tg} \beta_b) F} \\ = 1/2 \left[\frac{1}{\operatorname{tg} \beta_a \cdot \operatorname{tg} \beta_b} \sum \frac{h_k}{F_k} - \frac{1}{2(a_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_b - b_0 \cdot \operatorname{tg} \beta_a)} \right. \\ \left. \cdot \left\{ \frac{a_0^2}{\operatorname{tg}^2 \beta_a} \sum \frac{1}{F_k} \cdot \ln \frac{a_k}{a_{k-1}} - \frac{b_0^2}{\operatorname{tg}^2 \beta_b} \sum \frac{1}{F_k} \cdot \ln \frac{b_k}{b_{k-1}} \right\} \right]$$

Bei unveränderlichem Seitenverhältnis $\mu = \frac{a}{b}$, wenn also die verlängerten Stiele sich in einem Punkte treffen, vereinfacht sich der Ausdruck:

$$(15a) \delta_{ab} = - \int_0^h \frac{\mu x^2 dx}{(a_0 + 2x \cdot \operatorname{tg} \beta_a)^2 F} = -\mu \delta_a^V$$

Beim quadratischen Mast ist $\mu = 1$ und damit $\delta_{ab} = -\delta_a^V$.

II. Fachwerkmast mit mehreren Querverbänden.

Wie bereits erwähnt, empfiehlt es sich, außer dem Verband in der Ebene des angreifenden Moments noch Zwischenquerverbände anzuordnen. Diese sind beim Rechteckmast stets beansprucht, so daß die übliche Annahme der Auflösung des Drehmoments in die waagerechten Wandlasten $H_a = \frac{M_d}{2 b_0}$ und $H_b = \frac{M_d}{2 a_0}$ nicht mehr richtig ist. Wenn man bei stärkerer Abweichung des Mastquerschnitts vom Quadrat nicht große Fehler in Kauf nehmen will, ist die genaue Berechnung nicht zu umgehen. Dabei kann man aber auch hier, wenn es sich nicht um sehr schmale Maste handelt, auf die Berücksichtigung des Verdrehungswiderstands der Stiele verzichten.

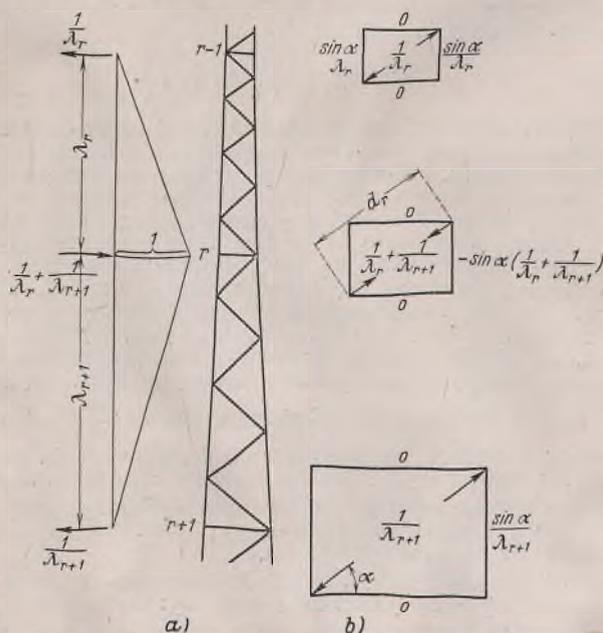


Bild 4a u. b.

Der Verfasser hat in A 36 ein Verfahren angegeben, bei dem durch Gruppenzusammenfassung der unbekannt Diagonalkräfte der Querverbände zu neuen Unbekannten dreigliedrige Gleichungen entstehen, die verhältnismäßig leicht aufzulösen sind:

$$(16) \delta_{r,r-1} U_{r-1} + \delta_{rr} U_r + \delta_{r,r+1} U_{r+1} = -\delta_{r0}$$

Das Verfahren hat jedoch nur Gültigkeit bei unveränderlichem Seitenverhältnis, wobei aber die Stiele nicht gerade sein müssen.

Die Beiwerte und Belastungsglieder der Gl. (16) lassen sich wieder durch Einführung der Teilverschiebungen δ_a, δ_b und δ_{ab} umformen. Bezeichnen $S_{ar} (S_{br})$ die in den Stäben der Seitenwände $a (b)$ bei der in Bild 4a dargestellten Belastung auftretenden Kräfte, so lassen sich die zum Selbstspannungszustand $U_r = 1 \left(X_{r-1} = -\frac{1}{\lambda_r}, X_r = \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}}, X_{r+1} = -\frac{1}{\lambda_{r+1}} \right)$ gehörigen Stabkräfte wie folgt ausdrücken:

$$(17) \begin{cases} \text{Diagonalen:} & S_{ar}^u = S_{ar} \cdot \sin \alpha \\ & S_{br}^u = -S_{br} \cdot \cos \alpha \\ \text{Eckstiele:} & S_r^u = S_{ar} \cdot \sin \alpha - S_{br} \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

Die Kräfte in den Riegeln und Diagonalen der Querverbände sind in Bild 4b eingetragen.

Wenn weiter S^0 die nach (2) zu bestimmenden Stabkräfte des statisch bestimmten Raumsystems infolge $M_d = 1$ bedeuten, erhält man aus zwei benachbarten Seitenwänden für die Beiwerte und Belastungsglieder der Elastizitätsgleichungen

$$(18) \begin{cases} \delta_{ri} = \sum \frac{S_r^u S_i^u}{F} \cdot s = \sin^2 \alpha \sum \frac{S_{ar} S_{ai}}{F} \cdot s \\ \quad + \cos^2 \alpha \sum \frac{S_{br} S_{bi}}{F} \cdot s + \sin^2 \alpha \sum \frac{S_{ar} S_{ai}}{F} \cdot s \\ \quad + \cos^2 \alpha \sum \frac{S_{br} S_{bi}}{F} \cdot s - \sin \alpha \cdot \cos \alpha \\ \quad \cdot \sum \left(\frac{S_{ar} S_{bi}}{F} \cdot s + \frac{S_{ai} S_{br}}{F} \cdot s \right) + \delta_{ri}^q \\ \delta_{ro} = \sum \frac{S_r^0 S_r^u}{F} \cdot s = H_a^0 \cdot \sin \alpha \sum \frac{S_{ar} S_a}{F} \cdot s \\ \quad - H_b^0 \cdot \cos \alpha \sum \frac{S_{br} S_b}{F} \cdot s + H_a^0 \cdot \sin \alpha \sum \frac{S_{ar} S_a}{F} \cdot s \\ \quad - H_b^0 \cdot \cos \alpha \sum \frac{S_{br} S_b}{F} \cdot s + H_b^0 \cdot \sin \alpha \sum \frac{S_{ar} S_b}{F} \cdot s \\ \quad - H_a^0 \cdot \cos \alpha \sum \frac{S_{br} S_a}{F} \cdot s \end{cases}$$

Beim Belastungsglied der 0-ten Gleichung kommt noch δ_{oo}^q hinzu.

Für die von der Formänderung der Querverbände herrührenden Zusatzglieder δ_{ri}^q und δ_{oo}^q leiten sich aus Bild 4b mit Benutzung der abkürzenden Bezeichnung $q_i = \frac{a_i \cdot \sin^2 \alpha}{F_q} + \frac{d_i}{2 F_d}$ folgende Ausdrücke ab:

$$(19) \begin{cases} \delta_{r,r-1}^q = -\frac{1}{\lambda_r} \left[\left(\frac{1}{\lambda_{r-1}} + \frac{1}{\lambda_r} \right) q_{r-1} + \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) q_r \right] \\ \delta_{rr}^q = \left(\frac{1}{\lambda_r} \right)^2 q_{r-1} + \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right)^2 q_r + \left(\frac{1}{\lambda_{r+1}} \right)^2 q_{r+1} \\ \delta_{r,r+1}^q = -\frac{1}{\lambda_{r+1}} \left[\left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) q_r + \left(\frac{1}{\lambda_{r+1}} + \frac{1}{\lambda_{r+2}} \right) q_{r+1} \right] \\ \delta_{oo}^q = -\frac{1}{2 \lambda_1} \cdot H_a^0 \cdot \frac{a_0 \cdot \sin \alpha}{F_q} \end{cases}$$

Setzt man in (18)

$$(20) \begin{cases} \sum \frac{S_{ar} S_{ai}}{F} \cdot s + \sum \frac{S_{ar} S_{ai}}{F} \cdot s = \delta_{ri}^V + \delta_{ri}^D = \delta_{ri}^a \\ \sum \frac{S_{br} S_{bi}}{F} \cdot s + \sum \frac{S_{br} S_{bi}}{F} \cdot s = \delta_{ri}^V + \delta_{ri}^D = \delta_{ri}^b \\ \sum \frac{S_{ar} S_{bi}}{F} \cdot s = \sum \frac{S_{br} S_{ai}}{F} \cdot s = \delta_{ri}^{ab} \end{cases}$$

$$(21) \begin{cases} \sum \frac{S_{ar} S_a}{F} \cdot s + \sum \frac{S_{ar} S_a}{F} \cdot s = \delta_{ro}^V + \delta_{ro}^D = \delta_{ro}^a \\ \sum \frac{S_{br} S_b}{F} \cdot s + \sum \frac{S_{br} S_b}{F} \cdot s = \delta_{ro}^V + \delta_{ro}^D = \delta_{ro}^b \\ \sum \frac{S_{ar} S_b}{F} \cdot s = \sum \frac{S_{br} S_a}{F} \cdot s = \delta_{ro}^{ab} \end{cases}$$

ein, so erhält man

$$(18a) \begin{cases} \delta_{ri} = \delta_{ri}^a \cdot \sin^2 \alpha + \delta_{ri}^b \cdot \cos^2 \alpha - 2 \delta_{ri}^{ab} \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \delta_{ri}^q \\ \delta_{ro} = H_a^0 \delta_{ro}^a \cdot \sin \alpha - H_b^0 \delta_{ro}^b \cdot \cos \alpha + (H_b^0 \cdot \sin \alpha - H_a^0 \cdot \cos \alpha) \delta_{ro}^{ab} \end{cases}$$

Die Stabkräfte S_{ar} und S_{br} sowie S_a und S_b können zeichnerisch mittels Cremonaplan oder auf bekannte Weise rechnerisch ermittelt werden.

Aus der Form der Belastungsglieder erkennt man, daß, auch bei starrem Querverband in der Ebene von M_d , die Unbekannten nur dann verschwinden, wenn außer der Annahme der üblichen Näherungsrechnung (7) auch die (8) bzw. (8a) entsprechenden Bedingungen

$$(22) \quad H_a^0 \delta_{ro}^a \cdot \sin \alpha - H_b^0 \delta_{ro}^b \cdot \cos \alpha = 0 \text{ bzw.}$$

$$(22a) \quad a_r^2 \delta_{ro}^a - b_r^2 \delta_{ro}^b = 0$$

erfüllt sind. Das aber ist in der Regel nicht der Fall.

Es ergeben sich neben den mit $H_a^0 = \frac{M_d}{2 b_0}$ und $H_b^0 = \frac{M_d}{2 a_0}$ ermittelten Näherungswerten der Stabkräfte noch Zusatzkräfte, die aus Unbekannten U' zu bestimmen sind. Die Belastungsglieder der die U' liefernden Bestimmungsgleichungen (16) sind, da $H_b^0 \cdot \sin \alpha - H_a^0 \cdot \cos \alpha = 0$ ist,

$$(23) \quad \delta_{ro} = \frac{M_d}{2} \left[\frac{\delta_{ro}^a \cdot \sin \alpha}{b_0} - \frac{\delta_{ro}^b \cdot \cos \alpha}{a_0} \right]$$

Treten an die Stelle von Diagonalverbänden Rahmen, so muß, wie aus dem Belastungszustand des Mastes für $X_r = 1$ (Bild 5b) hervorgeht, wegen der Veränderlichkeit der Riegehlängen die Gruppenzusammenfassung anders vorgenommen werden. Ordnet man dem Selbstspannungszustande $U_r = 1$ die X -Werte

$$(24) \quad \begin{cases} X_{r-1} = -\mu_{r,r-1} \cdot \frac{1}{\lambda_r} \\ X_r = \frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \\ X_{r+1} = -\mu_{r,r+1} \cdot \frac{1}{\lambda_{r+1}} \end{cases}$$

zu, wobei bezeichnen

$$(25) \quad \begin{cases} \mu_{r,r-1} = \frac{a_{r-1}}{a_r} = \frac{b_{r-1}}{b_r} = \frac{1}{\mu_{r-1,r}} \\ \mu_{r,r+1} = \frac{a_{r+1}}{a_r} = \frac{b_{r+1}}{b_r} = \frac{1}{\mu_{r+1,r}} \end{cases}$$

so sind die zugehörigen Wandkräfte aus (17) zu berechnen, wenn, wie beim Mast mit einem Querverband, $\sin \alpha$ durch $\frac{4}{b_r}$ bzw. $\frac{4}{b_i}$ und $\cos \alpha$ durch $\frac{4}{a_r}$ bzw. $\frac{4}{a_i}$ ersetzt wird. S_{ar} und S_{br} sind wiederum die Wandkräfte beim Belastungszustande nach Bild 4a. An die Stelle von Gl. (18a) treten

$$(18b) \quad \begin{cases} \delta_{ri} = 16 \left[\frac{\delta_{ri}^a}{b_r b_i} + \frac{\delta_{ri}^b}{a_r a_i} - 2 \cdot \frac{\delta_{ri}^{ab}}{a_r b_i} \right] + \delta_{ri}^q \\ \delta_{ro} = 4 \left[H_a^0 \cdot \frac{\delta_{ro}^a}{b_r} - H_b^0 \cdot \frac{\delta_{ro}^b}{a_r} - \left(\frac{H_a^0}{b_r} - \frac{H_b^0}{a_r} \right) \delta_{ro}^{ab} \right] \end{cases}$$

Die von der Formänderung der Querrahmen herrührenden Glieder δ_{ri}^q und δ_{ro}^q lauten mit Einführung von $\varrho_i = \frac{a_i + b_i}{3 J_q}$:

$$(19a) \quad \begin{cases} \delta_{r,r-1}^q = -\frac{\mu_{r,r-1}}{\lambda_r} \left(\frac{1}{\lambda_{r-1}} + \frac{1}{\lambda_r} \right) \varrho_{r-1} \\ \quad \quad \quad - \frac{\mu_{r-1,r}}{\lambda_r} \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) \varrho_r \\ \delta_{rr}^q = \left(\frac{\mu_{r,r-1}}{\lambda_r} \right)^2 \varrho_{r-1} + \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right)^2 \varrho_r \\ \quad \quad \quad + \left(\frac{\mu_{r,r+1}}{\lambda_{r+1}} \right)^2 \varrho_{r+1} \\ \delta_{r,r+1}^q = -\frac{\mu_{r+1,r}}{\lambda_{r+1}} \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) \varrho_r \\ \quad \quad \quad - \frac{\mu_{r,r+1}}{\lambda_{r+1}} \left(\frac{1}{\lambda_{r+1}} + \frac{1}{\lambda_{r+2}} \right) \varrho_{r+1} \\ \delta_{oo}^q = -\frac{\mu_{1,0}}{2 \lambda_1} \cdot H_a^0 \cdot \frac{a_0 \cdot \sin \alpha}{F_q} \end{cases}$$

B. Geschweißte Fachwerkmaste aus Stahlrohren.

I. Allgemeines über geschweißte gegliederte Maste aus Stahlrohren.

Durch das Schweißen wird die Verwendung geschlossener Profile und die Ausnutzung deren Vorteile ermöglicht. Bei den Rahmenmasten aus Stahlrohren wird das Rohr nicht nur für die Stiele, wo ihr verhältnismäßig großer Verdrillungswiderstand zur Geltung kommt, sondern auch für die Riegel benutzt. Da die geltenden amtlichen Vorschriften für diese Mastformen keine höheren Beanspruchungen zulassen als für Gittermaste, obwohl beim Rahmentragwerk im Gegensatz zum Fachwerk die aus der Steifheit der Stabanschlüsse sich ergebenden Spannungen voll erfaßt werden können, ergeben sich meist Gewichtsunterschiede zugunsten der Gittermaste. Trotz der Vorzüge, die der Stahlrohrrahmenmast in schönheitlicher Hinsicht und bei der Herstellung bietet, sah man sich, um Werkstoff zu sparen, gezwungen, auch bei den gegliederten Rohrmasten das Fachwerksystem zu verwenden.

Geschweißte Fachwerkmaste aus Stahlrohren unterscheiden sich hinsichtlich ihres statischen Verhaltens von den Gittermasten aus Winkelprofilen dadurch, daß bei den ersteren durch den geschweißten Anschluß der Diagonalen und allfälligen Riegel (Rahmenwirkung) Drehmomente auf die Stiele sowie Biegemomente von einer Wand auf die andere übertragen werden, während bei den letzteren, selbst bei geschweißter Ausführung, diese Wirkung weit geringer ist und daher vernachlässigt werden kann. Bei den quadratischen Rohrgittermasten ist es deshalb im allgemeinen möglich, auf die Anordnung besonderer Zwischenverbände mit Diagonalen zu verzichten; dagegen ist es bei Masten mit rechteckigem Grundriß ratsam, zur Vermeidung stärkerer Verquetschungen des Mastquerschnitts solche Verbände vorzusehen.

II. Rechteckiger Stahlrohrgittermast.

Wenn der Verdrillungswiderstand der Stiele vernachlässigt wird, ist dieser Rohrmast wie der Gittermast aus Winkelprofilen zu berechnen. Die Verdrehungssteifigkeit der Stielrohre läßt sich näherungsweise dadurch berücksichtigen, daß man die auf einen Stiel und auf den statisch bestimmten Mast entfallenden Anteile M^s und M^m am Drehmoment wie beim Mast mit einem starren Querverband (in der Ebene des anliegenden Moments) berechnet. In A 36 wurden hierfür folgende Ausdrücke gefunden:

$$(26) \quad M^s = \frac{\omega^m}{4 \omega^m + \omega^s} \cdot M_d$$

$$(27) \quad M^m = \frac{\omega^s}{4 \omega^m + \omega^s} \cdot M_d$$

Dabei ist ω^m , der Drehwinkel des statisch bestimmten Mastes infolge $M^m = 1$, nach (12a) zu berechnen. Der Drehwinkel ω^s des Stieles infolge $M^s = 1$ ist bei gleichbleibendem Drillungswiderstand J_d

$$(28) \quad \omega^s = \frac{l}{G J_d}$$

Wenn im Abstände l_r von der Einspannstelle der Stielquerschnitt wechselt und der Verdrillungswiderstand im Oberschuß J_d' , im Unterschuß J_d'' ist, so lauten die gleichen Beziehungen:

$$(28a) \quad \omega^s = \frac{1}{G} \left(\frac{l-l_r}{J_d'} + \frac{l_r}{J_d''} \right)$$

Gl. (27) ergibt auch ein brauchbares Kriterium für die Notwendigkeit der Berücksichtigung des Verdrillungswiderstandes. Im Gegensatz zu den Rahmenmasten, bei denen infolge der größeren Nachgiebigkeit dieses Systems die Stiele einen beträchtlichen Teil des Drehmoments unmittelbar aufnehmen, ist bei den Stahlrohrgittermasten trotz der — im Vergleich zum offenen Winkelprofil — großen Verdrehungssteifigkeit des geschlossenen Ringprofils häufig ω^m gegenüber ω^s so klein, daß eine nennenswerte Entlastung der Ausfachungsstäbe der Seitenwände nicht eintritt und die Verdrehungsbeanspruchung der Stiele vernachlässigt werden kann. Es gibt aber Fälle (schmale Maste, verhältnismäßig dicke Stiele), wo die Berücksichtigung des Verdrillungswiderstandes der Stielrohre aus Wirtschaftlichkeitsgründen geboten erscheint. Im allgemeinen wird es sich empfehlen, ihn bei einem Verhältnis $\frac{\omega^s}{\omega^m} = 150$ bis 200 in

Rechnung zu stellen. Im folgenden soll deshalb auch ein genaues Verfahren zur Berechnung der Stieldrehmomente beschrieben werden.

Die Untersuchungen gelten für Querverbände mit und ohne Diagonalen; die bezüglichen Berechnungen unterscheiden sich nur in den Beiwerten der Elastizitätsgleichungen.

Durch die Anordnung von Rahmenquerverbänden treten in jeder Rahmenecke ($\nu = 1-4$) zwei Unbekannte auf: ein Moment X_ν zwischen den in der Ecke zusammenstoßenden Riegeln und ein Moment Y_ν zwischen dem Stiel und den Riegeln. Infolge der Symmetrie sind die X_ν in den aufeinanderfolgenden Rahmenecken entgegengesetzt, die Y_ν auch dem Vorzeichen nach gleich. Man kann daher an ihre Stelle in jedem Rahmen eine einzige Unbekannte X_r bzw. Y_r setzen, deren auf das statisch bestimmte Grundsystem bezogene Selbstspannungs- bzw. Belastungszustände in Bild 5a bis d dargestellt sind.

Bei einem zweistufigen Berechnungsverfahren, das zuerst die X liefert, gelingt es nur auf der ersten Stufe Unbekannten-Gruppen so zu bilden, daß sich dreigliedrige Gleichungen ergeben. Auf der zweiten

Stufe ist das nicht möglich, da die Unbekannten Y nicht mehr am statisch bestimmten Grundsystem angreifen. Man kann aber sowohl die X als auch die Y am statisch bestimmten Grundsystem wirken lassen und erhält durch geeignete Gruppenzusammenfassung zwei Systeme simultaner Gleichungen, in denen je drei der neuen Unbekannten U und V vorkommen.

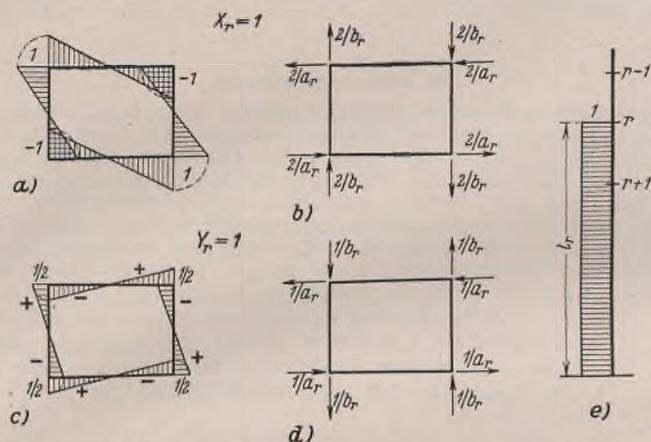


Bild 5a bis f.

In der Regel wird man in den Querverbänden noch Diagonalen vorsehen. Dadurch kommt in jedem Verband eine weitere Unbekannte hinzu. Da aber durch diese Diagonalen die rhomboidische Querschnittsverformung verschwindend klein wird, kann die Rahmenwirkung zwischen den Riegeln vernachlässigt und die Diagonalkraft als Unbekannte X eingeführt werden. Der zugehörige Selbstspannungszustand ($X_r=1$) ist in Bild 5f dargestellt. Auf diesen Fall beziehen sich die weiteren Untersuchungen.

Der Selbstspannungszustand $U_r=1$ ist, wie aus Bild 6a hervorgeht, der gleiche wie bei dem in A II behandelten Falle (Bild 4). Dem Selbstspannungszustand $V_r=1$ entsprechen in den Wänden des statisch bestimmten Grundsystems Belastungen, die der Größe nach nur durch einen Beiwert von den zu $U_r=1$ (Rahmen, vgl. Bild 5b) gehörigen Werten, in den aufeinanderfolgenden Seitenwänden durch das Vorzeichen unterschieden sind. Hinzu kommen noch die Drehmomente in den Stielrohren, die, aus Bild 5e abgeleitet, in Bild 6b dargestellt sind. Daraus folgen die Bestimmungsgleichungen der U und V :

$$(29) \begin{cases} \delta_{r,r-1} U_{r-1} + \delta_{rr} U_r + \delta_{r,r+1} U_{r+1} + \zeta_{r,r-1} V_{r-1} \\ \quad + \zeta_{rr} V_r + \zeta_{r,r+1} V_{r+1} = -\delta_{r0} \\ \zeta_{r,r-1} U_{r-1} + \zeta_{rr} V_r + \zeta_{r,r+1} V_{r+1} + \varepsilon_{r,r-1} V_{r-1} \\ \quad + \varepsilon_{rr} V_r + \varepsilon_{r,r+1} V_{r+1} = -\varepsilon_{r0} \end{cases}$$

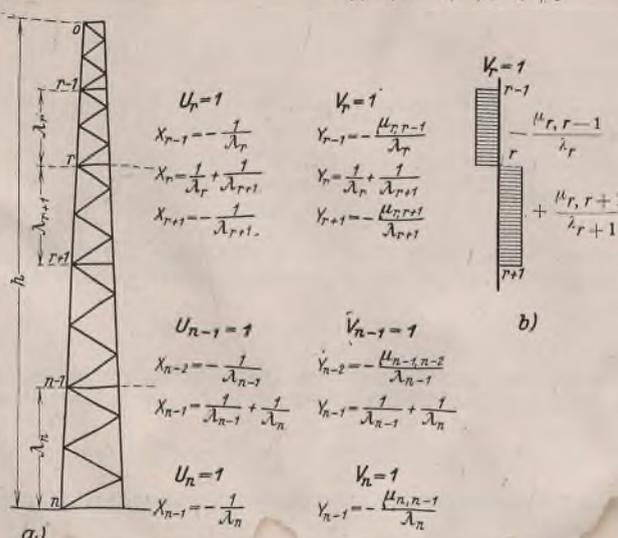


Bild 6a u. b.

δ_{ri} und δ_{r0} sind nach (18a) zu ermitteln. In ähnlicher Weise findet man auch ε_{ri} und ε_{r0} ; dabei ist aber zu beachten, daß zu ε_{ri} auch die Stielrohre einen Beitrag ε_{ri}^s liefern:

$$(30) \quad \varepsilon_{ri} = \varepsilon_{ri}^m + 2 \varepsilon_{ri}^s \quad \varepsilon_{r0} = \varepsilon_{r0}^m$$

Mit dem oberen Zeiger m wird angedeutet, daß der bezügliche Teil der Formänderung vom Mast mit gelenkigen Kanten herrührt.

So wie (18b) aus dem Vergleich der Belastungszustände in Bild 5b u. 5f gefunden wurde, kann man ε_{ri}^m und ε_{r0}^m unter Berücksichtigung von $a_r b_i = a_i b_r$ (gültig bei unveränderlichem Seitenverhältnis) durch Gegenüberstellung der Belastungszustände in Bild 5d u. 5f aus (18) herleiten.

$$(31) \quad \begin{cases} \varepsilon_{ri}^m = -4 \left[\frac{\delta_{ri}^a}{b_r b_i} + \frac{\delta_{ri}^b}{a_r a_i} + 2 \cdot \frac{\delta_{ri}^{ab}}{a_r b_i} \right] + \varepsilon_{ri}^q \\ \varepsilon_{r0}^m = -2 \left[H_a^0 \cdot \frac{\delta_{r0}^a}{b_r} + H_b^0 \cdot \frac{\delta_{r0}^b}{a_r} + \left(\frac{H_a^0}{a_r} + \frac{H_b^0}{b_r} \right) \delta_{r0}^{ab} \right] \end{cases}$$

Das von der Formänderung der Querrahmen herrührende Glied ε_{ri}^q berechnet sich nach (19a), indem dort $\varrho_i = \frac{a_i + b_i}{12 J_q}$ eingesetzt wird.

Der Verdrehungswiderstand der Stielrohre kommt in den Gliedern ε_{ri}^s zum Ausdruck, die sich aus dem zu $V_r=1$ gehörigen Momentenbild der Stiele (Bild 6b) unter Beachtung von (25), wonach $\mu_{ri} \mu_{ir} = 1$ ist, für $i=r-1$, r und $r+1$ wie folgt ergeben:

$$(32) \quad \begin{cases} \varepsilon_{r,r-1}^s = -\frac{E}{G J_d} \cdot \frac{1}{\lambda_r} \\ \varepsilon_{rr}^s = \frac{E}{G J_d} \left[\frac{\mu_{r,r-1}^2}{\lambda_r} + \frac{\mu_{r,r+1}^2}{\lambda_{r+1}} \right] \\ \varepsilon_{r,r+1}^s = -\frac{E}{G J_d} \cdot \frac{1}{\lambda_{r+1}} \end{cases}$$

Aus der Verbindung der Selbstspannungszustände $U_r=1$ und $V_i=1$ (Bild 5d u. 5f) erhält man die Beiwerte ζ_{ri} :

$$(33) \quad \zeta_{ri} = 2 \left[-\frac{\delta_{ri}^a \cdot \sin \alpha}{b_i} + \frac{\delta_{ri}^b \cdot \cos \alpha}{a_i} + \left(\frac{\cos \alpha}{b_i} - \frac{\sin \alpha}{a_i} \right) \delta_{ri}^{ab} \right] + \zeta_{ri}^q$$

Die Zusatzglieder ζ_{ri}^q berechnen sich nach (19), wenn darin für $\varrho_i = \frac{2}{F_q} \cdot \left(-\frac{\sin \alpha}{b_i} + \frac{\cos \alpha}{a_i} \right)$ gesetzt wird. Bei der Auswertung von ε_{ri} und ζ_{ri} ist ebenso wie bei δ_{ri} darauf zu achten, daß für $i=r$ die Stabkräfte von zwei Mastschüssen (λ_r und λ_{r+1}) einzuführen sind.

Da aus (33) hervorgeht, daß die Beiwerte ζ verhältnismäßig klein sind, werden die Gl. (29) zweckmäßig durch Iteration gelöst. Durch Vernachlässigung der Glieder mit V findet man aus dem ersten Gleichungssystem Näherungswerte U , mit denen sich aus dem zweiten System V ergeben, die wiederum in das erste System einzusetzen sind usw.

Sind die Unbekannten gefunden, erhält man damit die Stabkräfte

$$(34) \quad \begin{cases} \text{Diagonalen:} & S_a = H_a^0 S_a + \sin \alpha \sum U_i S_{ai} - \frac{2}{b_i} \sum V_i S_{ai} \\ & S_b = H_b^0 S_b - \cos \alpha \sum U_i S_{bi} - \frac{2}{a_i} \sum V_i S_{bi} \\ \text{Stiele:} & S = H_a^0 S_a + H_b^0 S_b + \sum U_i (S_{ai} \cdot \sin \alpha - S_{bi} \cdot \cos \alpha) \\ & \quad - 2 \sum V_i \left(\frac{S_{ai}}{b_i} + \frac{S_{bi}}{a_i} \right) \end{cases}$$

und die Diagonalkräfte der Querverbände

$$(35) \quad \begin{cases} X_0 = -\frac{1}{\lambda_1} \cdot U_1 \\ X_1 = \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) U_1 - \frac{1}{\lambda_2} \cdot U_2 \dots r=2 \text{ bis } n-1 \\ X_r = -\frac{1}{\lambda_r} \cdot U_{r-1} + \left(\frac{1}{\lambda_r} + \frac{1}{\lambda_{r+1}} \right) U_r \\ \quad - \frac{1}{\lambda_{r+1}} \cdot U_{r+1} \dots r=2 \text{ bis } n-1 \end{cases}$$

Auf die Bestimmung der Y kann man verzichten — wenn nicht die Biegebeanspruchung der Riegel berechnet werden soll —, da die im Schuß r wirkenden Drehmomente M_r^s unmittelbar aus den V ermittelt werden können:

$$(36) \quad \begin{cases} M_1^s = -\frac{\mu_{1,0} V_1}{\lambda_1} \\ M_r^s = \frac{1}{\lambda_r} (\mu_{r-1,r} V_{r-1} - \mu_{r,r-1} V_r) \dots r=2 \text{ bis } n \end{cases}$$

Beim quadratischen Mast mit gleich ausgebildeten Seitenwänden und Querverbänden mit Diagonalen vereinfacht sich die Berechnung. Da die Beiwerte $\zeta=0$ sind, zerfallen die simultanen Gl. (29) in zwei unabhängige Systeme. Für $H_a^0 = H_b^0 = \frac{1}{2 a_0}$ wird bei Vernachlässigung der geringen Formänderung δ_{r0}^q des Querverbandes in der Ebene von M_d das erste Gleichungssystem homogen; somit sind die Un-

bekanntes $U' = 0$. Das zweite System liefert die V' ; daraus erhält man mit den angenommenen $H_a^{0'}$ aus (34) die endgültigen Stabkräfte und aus (36) die Drehmomente der Stiele. Die Diagonalkräfte der Querverbände an die können aus (35) nur mit den Unbekannten U berechnet werden, die den tatsächlichen Wandkräften H_a^0 und H_b^0 entsprechen.

III. Quadratischer Mast ohne Zwischenquerverbände.

1. Genaue Berechnung.

Wenn beim quadratischen Rohrgittermast auf die Anordnung von Zwischenquerverbänden mit Diagonalen verzichtet wird, tritt die durch die steifen Anschlüsse der Diagonalen bedingte Rahmenwirkung der Wände an die Stelle dieser Verbände. Diese nimmt bei gleichbleibendem Querschnitt der Ausfachungsstäbe mit wachsender Wandbreite ab. Die Rahmenwirkung der Wände kann man durch die Wirkung von Einzelrahmen ersetzen, deren Riegel aus zwei aufeinander folgenden Diagonalen und dem eingeschlossenen Stielstück (Bild 7a) gebildet werden. In Bild 7b ist die dem Belastungszustand $X_r = 1$ (vgl. Bild 5a) entsprechende Belastung eines solchen Riegels im Aufriß und Grundriß eingetragen, wobei im Aufriß die Momente durch ihre Vektoren dargestellt sind.

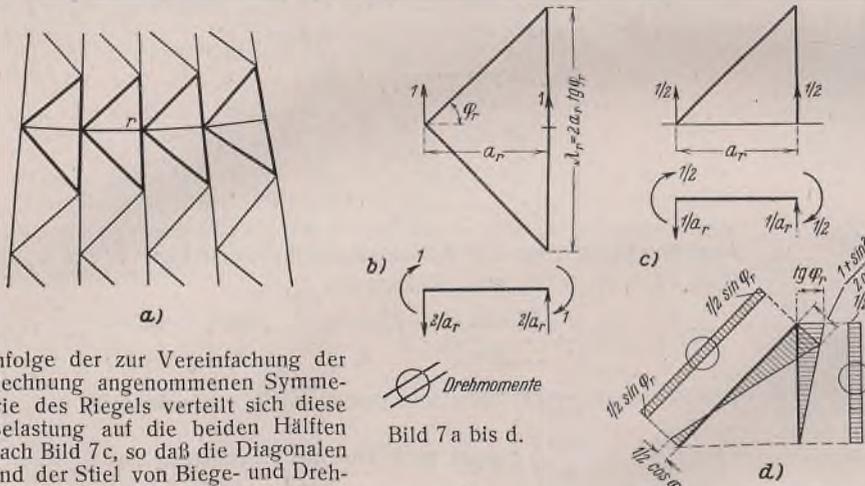


Bild 7 a bis d.

Infolge der zur Vereinfachung der Rechnung angenommenen Symmetrie des Riegels verteilt sich diese Belastung auf die beiden Hälften nach Bild 7c, so daß die Diagonalen und der Stiel von Biege- und Drehmomenten laut Bild 7d beansprucht werden. Daraus findet man in bekannter Weise mit den Bezeichnungen J_q und J_d' für Trägheitsmoment und Verdrillungswiderstand der Diagonalen die Werte

$$(37) \quad \varrho_i = a_i \left[\frac{1 + 3 \cdot \sin^4 \varphi_i}{3 J_q \cdot \cos^3 \varphi_i} + \frac{4 \cdot \tan^3 \varphi_i}{3 J} + \frac{E}{G} \left(\frac{\sin \varphi_i \cdot \tan \varphi_i}{J_d'} + \frac{\tan \varphi_i}{J_d} \right) \right],$$

womit die von der Formänderung der gedachten Querrahmen herrührenden $\delta_{r,i}^q$ und $\delta_{r,i}^o$ zu den Beiwerten $\delta_{r,i}$ und Belastungsgrößen $\delta_{r,i}^o$ der Unbekannten U nach (19a) berechnet werden. Beim Querverband in der Ebene des angreifenden Moments ist mit der Riegeillänge a_0 der entsprechende Ausdruck

$$(37a) \quad \varrho_0 = \frac{2 a_0}{3 J_{o,q}}$$

$Y_r = 1$ entspricht der in Bild 5c u. 5d dargestellte Belastungszustand. Die zugehörige Belastung eines gedachten Querriegels ist halb so groß wie beim Belastungszustand $X_r = 1$ (Bild 7b). Demnach können die Zusatzglieder $\varepsilon_{r,i}^q$ zu den Beiwerten $\varepsilon_{r,i}$ der Unbekannten V auch nach (19a) ermittelt werden, für ϱ_i ist aber ein Viertel des Wertes nach (37) einzusetzen.

Die weitere Rechnung stimmt mit dem genauen Berechnungsverfahren rechteckiger Stahlrohrgittermaste überein.

Wie bereits erwähnt, zerfallen beim quadratischen Mast die simultanen Gleichungssysteme (29) in zwei unabhängige Systeme. Die genaue Untersuchung solcher Mastformen bereitet somit keine besonderen Schwierigkeiten, wenn sie auch infolge der großen Anzahl von Diagonalen bzw. gedachten Querrahmen zeitraubend ist. Man kann sie dadurch vereinfachen, daß man zwei oder mehr aufeinanderfolgende Diagonalenpaare zu einem Rahmenriegel zusammenfaßt, der bei zwei Diagonalenpaaren zwischen ihnen, bei drei Paaren in der Höhe des mittleren anzunehmen ist. Dabei ist es nicht erforderlich, immer gleichviel Diagonalen zusammenzuziehen. Die von den Formänderungen der gedachten Querrahmen herrührenden Zusatzglieder der Beiwerte und Belastungsgrößen in den Elastizitätsgleichungen erhält man, indem man in (19a) für ϱ_i die Summe der je einem Diagonalenpaar entsprechenden Werte nach (37) einführt.

Die genaue Untersuchung zeigt, daß bei solchen quadratischen Masten auch Rahmenmomente X und daher rhombische Querschnittsverformungen auftreten können, was durch angestellte Großversuche³⁾ bestätigt wurde.

³⁾ Die Versuche wurden im Jahre 1937 bei den Mannesmannröhrenwerken in Düsseldorf durchgeführt.

Die Größe dieser Mastverformungen hängt von dem Verhältnis $\alpha = \frac{H_a^0}{H_b^0}$, also von der Eintragungsart des Drehmoments ab; sie verschwindet bei starrem Querverband oder $\alpha = 1$.

Die Drehmomente M^s haben ihren Größtwert in der Ebene des angreifenden Moments; im Oberschuß tritt deshalb auch die größte Entlastung der Seitenwände ein.

2. Näherungsrechnung.

Wie beim rechteckigen Rohrgittermast bereits erwähnt wurde, sind beim quadratischen Mast mit Diagonalquerverbänden die Kräfte X und die Momente Y voneinander unabhängig. Bei einem Verhältnis $\alpha = 1$ bleiben die Diagonalen der Zwischenquerverbände spannungslos. Aber auch bei $\alpha \neq 1$ sind ihre Beanspruchungen verhältnismäßig klein, so daß sie in einer Näherungsrechnung vernachlässigt werden können. Dem entsprechend kann man beim geschweißten Mast ohne besondere Zwischenverbände die Rahmenmomente $X = 0$ setzen. In beiden Fällen ist der Verband in der Ebene von M_d nach (6) zu berechnen.

Zur Bestimmung der Momente Y kann das Näherungsverfahren aus A 36 dienen, das auf einer Beziehung zwischen den am statisch bestimmten Mast angreifenden Drehmomenten und den zugehörigen Drehwinkeln

$$(38) \quad \psi_k^m = \omega_k^m \sum_0^k M_i^m + \sum_{k+1}^{n-1} \omega_i^m M_i^m$$

fußt, die man als gute Näherung gelten lassen kann. Sie gilt, streng genommen, nur für den prismatischen Mast, wenn die Formänderungen der Stiele verschwinden. Letzteres trifft aber bei der üblichen Ausfachung selbst für den quadratischen Mast nicht ganz zu. Die Abweichungen von den genauen Werten bewegen sich aber in solchen Grenzen, daß die erwähnte Beziehung als Grundlage für eine brauchbare Näherungsrechnung dienen kann.

Das erwähnte Verfahren in A 36 setzt voraus, daß die Querverbände starr sind. Wenn aber, wie es hier der Fall ist, diese — gedachten — Verbände verhältnismäßig weich sind, muß ihre Nachgiebigkeit das Ergebnis der Rechnung beeinflussen. Im folgenden wird deshalb ein Näherungsverfahren angegeben, das auch die Formänderungen der Querverbände berücksichtigt.

Die Näherungsbeziehung (38) für den statisch bestimmten Mast wird als zutreffend angenommen. Die entsprechende Beziehung für die Stiele

$$(39) \quad \psi_k^s = \omega_k^s \sum_0^k M_i^s + \sum_{k+1}^{n-1} \omega_i^s M_i^s$$

ist genau. Bezeichnet

$$(40) \quad \psi_k^r = \omega_k^r M_k^s$$

den Knotendrehwinkel des Rahmens k , der in den Endpunkten durch je ein Moment M_k^s gleichsinnig belastet wird, ω_k^r den gleichen Drehwinkel für die gleichartige Belastung durch $M_k^s = 1$, so lautet die für jeden Rahmen zu erfüllende Formänderungsbedingung

$$(41) \quad \psi_k^s + \psi_k^r = \psi_k^m,$$

die nach Einsatz der Drehwinkel aus (38) u. (40) bei Beachtung der Gleichgewichtsbedingungen

$$(42) \quad 4 M_o^s + M_o^m = M_d \quad 4 M_i^s + M_i^m = 0$$

übergeht in

$$(43) \quad (\omega_k^s + 4 \omega_k^m) \sum_0^k M_i^s + \omega_k^r M_k^s + \sum_{k+1}^{n-1} (\omega_i^s + 4 \omega_i^m) M_i^s = \omega_k^m M_d.$$

Bei starren Querverbänden ist $\omega_k^r = 0$, und man erhält aus (43), wenn zur Abkürzung

$$(44) \quad \omega_k^s + 4 \omega_k^m = \alpha_k$$

bezeichnet wird, die in A 36 durch die Matrix (21) dargestellten Bestimmungsgleichungen⁴⁾, die in geänderter Schreibweise lauten:

$$\alpha_k \sum_0^k M_i^s + \sum_{k+1}^{n-1} \alpha_i M_i^s = \omega_k^m M_d.$$

Daraus ergeben sich in einfacher Weise als Lösungen die im Stielquerschnitt k wirksamen Drehmomente

$$(45) \quad \sum_0^k M_i^s = \frac{\omega_k^m - \omega_{k+1}^m}{\alpha_k - \alpha_{k+1}} \cdot M_d.$$

Die für nachgiebige Zwischenverbände geltenden Gl. (43) lassen sich nicht so leicht auflösen. Es gelingt aber, sie zu einem System dreigliedriger Gleichungen umzuformen. Bezeichnet man

$$(44a) \quad \omega_k^r = \beta_k,$$

so kann man (43) mit Einführung der Abkürzung (44) auch in folgender Form schreiben:

$$(43a) \quad \alpha_k \sum_0^k M_i^s + \beta_k M_k^s + \sum_{k+1}^{n-1} \alpha_i M_i^s = \omega_k^m M_d.$$

⁴⁾ Den Werten α_k entsprechen in A 36 die Beiwerte $l_k \alpha_k'$ bzw. $l_k \alpha_k''$.

Bei der Aufstellung der Gleichung für $k = n - 1$ ist zu beachten, daß $\alpha_n = \beta_n = 0$ ist. Somit lautet diese Gleichung:

$$(43b) \quad \alpha_{n-1} \sum_0^{n-1} M_i^s + \beta_{n-1} M_{n-1}^s = \omega_{n-1}^m M_d.$$

Durch schrittweises Voneinanderabziehen je zweier aufeinanderfolgender Gleichungen, beginnend mit Gl. 0 u. 1, erhält man $n - 1$ Gleichungen

$$(46) \quad (\alpha_k - \alpha_{k+1}) \sum_0^k M_i^s + \beta_k M_k^s - \beta_{k+1} M_{k+1}^s = (\omega_k^m - \omega_{k+1}^m) M_d,$$

wozu noch (43b) kommt. Dividiert man jede dieser Gleichungen durch $(\alpha_k - \alpha_{k+1})$ und zieht nochmals je zwei aufeinanderfolgende Gleichungen voneinander ab, wobei man Gl. 0 unverändert übernimmt, so erhält man bei Beachtung von

$$(47) \quad \sum_0^k M_i^s - \sum_0^{k-1} M_i^s = M_k^s$$

und Einführung von $\sum_0^k M_i^s$ aus (45) das folgende System von dreigliedrigen Gleichungen:

$$(48) \quad \delta_{k-1,k} M_{k-1}^s + \delta_{kk} M_k^s + \delta_{k+1,k} M_{k+1}^s = \sum_0^k M_i^s - \sum_0^{k-1} M_i^s = M_k^s.$$

Darin sind die Beiwerte durch folgende Ausdrücke gegeben:

$$(49) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_{k-1,k} &= \frac{-\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1} - \alpha_k} \\ \delta_{kk} &= 1 + \beta_k \left(\frac{1}{\alpha_{k-1} - \alpha_k} + \frac{1}{\alpha_k - \alpha_{k+1}} \right) \\ \delta_{k+1,k} &= \frac{-\beta_{k+1}}{\alpha_k - \alpha_{k+1}} \end{aligned} \right.$$

$$(49a) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta_{00} &= 1 + \frac{\beta_0}{\alpha_0 - \alpha_1} \\ \delta_{n-1,n-1} &= 1 + \beta_{n-1} \left(\frac{1}{\alpha_{n-1}} + \frac{1}{\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}} \right). \end{aligned} \right.$$

Zur Ermittlung der α - und β -Werte werden die Drehwinkel ω^m , ω^s und ω^r benötigt. Der Mastdrehwinkel ω_i^m im Querschnitt i infolge eines in der gleichen Ebene wirkenden Drehmoments 1 berechnet sich aus

$$(50) \quad \omega_i^m = \frac{\delta_i^a + \delta_i^{ab}}{E a_i^2}.$$

Diese Beziehung folgt aus (12a), wenn man dort $H_a = H_b = \frac{1}{2 a_i}$ einsetzt. Der entsprechende Drehwinkel der Stielrohre ist bei gleichbleibendem Querschnitt

$$(51) \quad \omega_i^s = \frac{l_i}{G J_d}.$$

Wenn in r der Stielquerschnitt wechselt, so lautet die den Drehwinkel liefernde Gleichung nach (28) bzw. (28a)

$$(51a) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_i^s &= \frac{l}{G} \left[\frac{l_i - l_r}{J_d'} + \frac{l_r}{J_d''} \right] \dots \dots i \leq r \\ \omega_i^s &= \frac{l}{G} \cdot \frac{l_i}{J_d''} \dots \dots i \geq r. \end{aligned} \right.$$

Dem Knotendrehwinkel ω_k^r des Rahmens k entspricht (vgl. Bild 5a bis d) die halbe in Bild 7b dargestellte Riegelbelastung; demnach sind auch die zugehörigen Biege- und Drehmomente halb so groß wie in Bild 7d. Ihre Verbindung mit den Riegelmomenten des Belastungszustandes $M_k^s = 1$ — dargestellt in Bild 8a, b — liefert den Drehwinkel

$$(52) \quad \omega_k^r = a_r \left[\frac{l}{E} \left(\frac{1 - 6 \cdot \sin^2 \varphi_k + 4 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_k}{12 J_g \cdot \cos \varphi_k} + \frac{\operatorname{tg}^3 \varphi_k}{3 J} \right) + \frac{\operatorname{tg} \varphi_k \cdot \sin \varphi_k}{2 G J_d''} \right]^5.$$

Die Auflösung der Gl. (48) bereitet keine Schwierigkeiten. Mit den Momenten M_i^s erhält man nach (47) schrittweise die in den Stielquerschnitten k wirksamen Drehmomente $\sum_0^k M_i^s$, nach (42) die auf den Mast mit gelenkigen Kanten entfallenden Momente M_k^m und daraus die Stabkräfte

⁵⁾ Das beschriebene Näherungsverfahren kann auch bei Rahmenmasten angewendet werden. Bezeichnet δ_{kk} die E -fache waagerechte Verschiebung einer Seitenwand in der Höhe des Querrahmens k infolge einer in der gleichen Höhe angreifenden waagerechten Kraft 1, so ist für (50) zu setzen $\omega_k^m = \frac{\delta_{kk}}{E a_k^2}$ und für (52) der einfache Ausdruck $\omega_k^r = \frac{a_k}{12 E J_g}$.

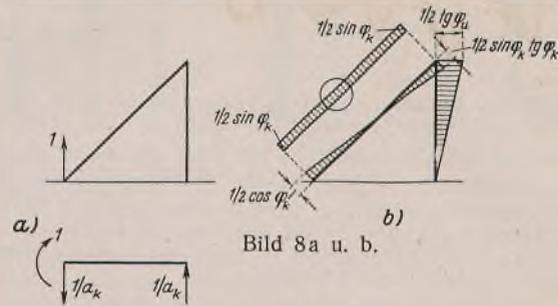


Bild 8a u. b.

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Diagonalen:} \quad S &= \frac{1}{2} \sum \frac{M_k^m}{a_k} \cdot S_{ak} \\ \text{Stiele:} \quad S &= \frac{1}{2} \sum \frac{M_k^m}{a_k} (S_{ak} + S_{bk}), \end{aligned} \right.$$

wobei mit S_{ak} bzw. S_{bk} die bereits zur Berechnung der ω_k^m benötigten Stabkräfte bezeichnet werden, die in der Seitenwand a bzw. b entstehen, wenn in ihr in der Höhe des Querverbandes k eine waagerechte Kraft 1 wirkt, deren Richtung mit der Drehrichtung von M_d übereinstimmt.

Zu den aus den Stieldrehmomenten sich ergebenden Schubspannungen

$$(54) \quad \tau_k = \frac{\sum_0^k M_i^s}{2 W} = \frac{16 D \sum_0^k M_i^s}{(D^4 - d^4)}$$

kommen noch die von den Stielängskräften herrührenden Spannungen σ . Die Sicherheit ist gewährleistet, wenn die Vergleichsspannung

$$(55) \quad \sigma_g = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2} \leq \sigma_{zul}$$

ist, wobei noch die Frage offenbleibt, welchen Einfluß die Schubspannung τ auf die Knicksicherheit hat. Bei wechselseitig gleichen Zügen sind die Längskräfte klein, weshalb hier diese Frage keine Rolle spielt; sie hat aber Bedeutung beim Verdrehen durch einseitige Züge im Zusammenwirken mit anderen Belastungsfällen. Dann empfiehlt es sich, in (55) für die Längsspannung $\sigma_k = \omega \sigma$ einzusetzen.

Wie bereits bemerkt wurde, treten die größten Stielmomente in der Ebene des angreifenden Moments auf. Die durch die Zwischenquerrahmen erzeugten entgegengesetzt gerichteten Momente sind verhältnismäßig klein und um so kleiner, je nachgiebiger diese Rahmen sind. Für eine überschlägige Rechnung kann man daher auf die Berücksichtigung der Wirkung dieser Verbände verzichten und nur den Querverband in der Ebene von M_d , der in der Regel als starr angenommen werden kann, in Rechnung stellen. Die auf die Stiele und den statisch bestimmten Mast entfallenden Anteile am Drehmoment berechnen sich dann in einfacher Weise nach (26) und die Stabkräfte aus

$$(53a) \quad \left\{ \begin{aligned} \text{Diagonalen:} \quad S &= \pm \frac{M^m}{2 a_0} \cdot S_a \\ \text{Eckstielen:} \quad S &= \pm \frac{M^m}{2 a_0} (S_a + S_b). \end{aligned} \right.$$

Schlußfolgerungen.

Bei Rechteckmasten aus Winkelprofilen mit mehreren Querverbänden ist die nach der Näherungsrechnung übliche Aufteilung des Drehmoments in die Wandkräfte $H_a^0 = \frac{M_d}{2 b_0}$ und $H_b^0 = \frac{M_d}{2 a_0}$ unrichtig. In der genauen Untersuchung kommt es weniger auf die richtige Bestimmung der Beanspruchungen der Querverbände an — die Diagonalen dieser Verbände müssen in der Regel stärker als erforderlich bemessen werden —, sondern auf die Ermittlung der Stabkräfte der Mastwände. Diese können aus den bezüglichen Werten der Näherungsrechnung und Zusatzkräften, die Unbekannten U' entsprechen, gefunden werden. In den Bestimmungsgleichungen der U' sind die Belastungsglieder nach (23) einzuführen.

Bei quadratischen Masten mit gleich ausgebildeten Seitenwänden ist die übliche Berechnung — abgesehen von sehr niedrigen Masten — praktisch genau. Die Beanspruchung der bei höheren Masten vorzuziehenden Zwischenquerverbände ist gering, so daß ihr Einfluß auf die Wandkräfte ohne Bedenken vernachlässigt werden kann.

Der Verdrillungswiderstand der mit offenen Profilen ausgeführten Stiele braucht wegen seiner geringfügigen Wirkung nicht berücksichtigt zu werden.

Geschweißte rechteckige Rohrgittermaste mit mehreren Querverbänden müssen stets genau untersucht werden, bei $\frac{\omega^s}{\omega^m} = 150$ bis 200 auch mit

Berücksichtigung des Verdrillungswiderstandes der Stielrohre. Beim quadratischen Mast ohne besondere Zwischenverbände genügt es, nach einem Näherungsverfahren die Drehmomente, die in der Höhe gedachter Querrahmen an den Stielen und am Mast mit Gelenkverbindungen angreifen, zu bestimmen und daraus die Stabbeanspruchungen zu ermitteln. Brauchbare Überschlagswerte erhält man auch, wenn man nur den Querverband in der Ebene des angreifenden Moments als wirksam betrachtet und diesen als starr annimmt.

Zuschrift an die Schriftleitung.

(Ohne Verantwortung der Schriftleitung.)

Zuschrift zum Aufsatz „Bemerkungen zu DIN 4114, Knick- und Beulvorschriften für Baustahl“, Stahlbau 1941, Heft 8/9, S. 37.

Zu obigem Aufsatz gestatte ich mir folgendes auszuführen:

1. Die Bearbeiter der alten, derzeit noch geltenden Vorschriften zur Bemessung planmäßig mittig gedrückter Baustahlstäbe sind von der idealen Knicklast ausgegangen und haben diese ideale Knicklast — um zur zulässigen Druckkraft zu gelangen — durch die ideale Knicksicherheitszahl ν_{Ki} geteilt. Durch die Einführung von ν_{Ki} sollte der Einfluß der folgenden praktisch unvermeidbaren „Mängel“ (Abweichungen von den idealisierenden Voraussetzungen der Theorie) ausgeglichen werden:

- der nicht ideal mittige Kraftangriff,
- die nicht ideal gerade Stabachse,
- die nicht ideale Homogenität des Baustahls (Schwankungen von E und σ_F bei Druckstäben, die aus einzelnen Walzstähen zusammengesetzt sind),
- die unvermeidbare Unterschreitung des Normwertes E ,
- die unvermeidbare Unterschreitung des Normwertes σ_F (sofern kein Mindestwert gewährleistet wird),
- der Einfluß einer für das Tragvermögen ungünstigen Querschnittsform,
- die unvermeidbare Unterschreitung der genormten Profilabmessungen,
- der unvermeidbare Fehler bei der Ermittlung der Stabkraft,
- der Einfluß der bei der theoretischen Bestimmung der Ausgangswerte zugelassenen Näherungsannahmen.

Mit Rücksicht auf die große Zahl und die Verschiedenartigkeit dieser Mängel ergaben sich bei der Festsetzung der Sicherheitszahl ν_{Ki} einige Schwierigkeiten, was dazu führte, ν_{Ki} von 1,71 bis auf 3,50 ansteigen zu lassen und mit dem Schlankheitsgrad des Stabes durch ein willkürlich angenommenes Gesetz zu verknüpfen. In Erkenntnis dieser Schwierigkeiten ist bei der Bearbeitung der neuen Knickvorschriften DIN 4114 von allem Anfang an angestrebt worden, die ersten sechs der genannten Einflüsse zumindest in groben Zügen schon bei der theoretischen Ermittlung der Ausgangswerte zu berücksichtigen und auf diese Weise funktional richtig zur Geltung zu bringen. Zum Unterschied von früher wird daher bei der Festsetzung der neuen Knickzahlen nicht von einem Idealstab ausgegangen, sondern ein Stab vorausgesetzt, der mit den Mängeln a bis f behaftet ist und in dieser Hinsicht aller Voraussicht nach von keinem der baupraktisch verwendeten Stäbe übertroffen wird; die Einflüsse a, b und c lassen sich hierbei — da Überschneidungen der Stabachse mit der Kraftwirkungslinie nicht zum ungünstigsten Fall führen und daher außer Betracht bleiben — mit hinreichender Annäherung durch den Einfluß beiderseits gleich großer Fehlerhebel ersetzen. Die Sicherheitszahl hat dann nur mehr kleine Resteinflüsse und die unter g, h und i genannten Mängel zu decken; sie ist kleiner als ν_{Ki} und darf, da diese Mängel nur in verhältnismäßig geringem Maße durch die Kenngrößen des Stabes beeinflußt werden, als konstante Zahl angesetzt werden.

2. Da alle unsere Vorschriften (vor allem die Vorschriften zur Berechnung der auf Biegung beanspruchten Stäbe) an die klassische Fließhypothese anknüpfen, wurde diese Hypothese — wie schon im 1. Heft der „Erläuterungen“, S. 10, vermerkt worden ist — auch der Traglastberechnung der gedrückten Stäbe zugrunde gelegt. Die Ergebnisse der auf der klassischen Fließhypothese aufgebauten Traglasttheorie stimmen mit den Versuchsergebnissen — im Anschluß an die schon bekannten Versuche wurden im Februar d. J. noch Sonderversuche mit hochglanzpolierten Modellstäben durchgeführt — sehr gut überein. Auf die neuen, über die ersten Ansätze allerdings noch nicht hinausgekommenen Fließhypothesen und die einschlägigen Arbeiten von Fritsche wurde in dem von Fritsche erwähnten 3. Heft der „Erläuterungen“ (Vorschläge zur wirtschaftlichen Bemessung gedrückter Baustahlstäbe, S. 18) ausdrücklich hingewiesen. Die von Fritsche vorgeführte Herleitung der Knickzahlen ist von der in diesen „Erläuterungen“ angegebenen Herleitung im Wesen nur dadurch unterschieden, daß an Stelle der genormten Fließgrenze σ_F ein fiktiver Wert σ_F' eingeführt wird. Für Stäbe der Querschnittsgruppe „a“ setzt Fritsche unmittelbar $\sigma_F' = \sigma_F$; für Stäbe der Querschnittsgruppe „b“ wählt er den erhöhten Wert $\sigma_F' = \sigma_F + \frac{\sigma_F - \sigma_0}{2}$ [in Gl. (5) soll ν statt $\frac{1}{\nu}$ stehen!] und gelangt dementsprechend zu etwas größeren Traglastspannungen.

3. Auf S. 19 des eben genannten 3. Heftes der „Erläuterungen“ wurde ausdrücklich darauf hingewiesen, daß das praktisch unvermeidbare Außer-mittigkeitsmaß bei Stäben mit unsymmetrischen Querschnitten auf die mittlere Kernweite $k_m = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ zu beziehen ist. Der im 1. Heft der „Erläuterungen“ untersuchte Stab besitzt einen Rechteckquerschnitt, so daß kein Anlaß vorlag, k durch k_m zu ersetzen.

4. Der „richtige“ Wert des praktisch unvermeidbaren Außer-mittigkeitsmaßes läßt sich — ebenso wie der „richtige“ Wert der zu fordernden Sicherheitszahl — nur auf Grund der Erfahrung festlegen. Bei der Herleitung der neuen Ausgangswerte soll dieses Maß aus einem konstanten, vom Schlankheitsgrad des Stabes unabhängigen Anteil und einem mit dem Schlankheitsgrad anwachsenden Anteil zusammengesetzt werden. Bei einem Stab von gegebener Länge entspricht der erste Anteil den mit der Querschnittshöhe anwachsenden Außer-mittigkeiten.

5. Der Vorschlag, den Fall ungleich großer Angriffshebel p_1, p_2 näherungsweise auf den Fall der beiderseits gleich großen Angriffshebel $p_m = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ zurückzuführen, wurde in allen Veröffentlichungen ausdrücklich an die Voraussetzung gebunden, daß das Hebelverhältnis p_2/p_1 nicht an den Grenzwert (-1) heranrücken darf. So steht schon im Stahlbau 1934, S. 183: „... sofern sich p_2 nicht allzusehr dem Wert $-p_1$ nähert (der Grenzfall $p_2 = -p_1$ führt auf ein Stabilitätsproblem mit Gleichgewichtsverzweigung, das der Verfasser in der Z. ang. Math. 11, 1931, S. 335, Bild 3, erwähnte) ...“. Im Stahlbau 1937, S. 59, wird die im Jahre 1930 abgeleitete, auf der klassischen Fließhypothese aufgebaute Lösung des Grenzfalls $p_2 = -p_1$ geschildert und in gesperrtem Druck vermerkt, daß die zugeordneten Knicklasten grundsätzlich kleiner als die für mittigen Druck geltenden Knicklasten sind; zur Unterstreichung dieses Sachverhalts wurden außerdem noch die Ergebnisse einschlägiger amerikanischer Versuche angeführt.

6. Die Vorschreibung von zwei nur geringfügig voneinander verschiedenen Knickzahlen für jede der beiden Baustahlarten dürfte von der Praxis kaum begrüßt werden; auch sei dahingestellt, ob es vom baupolizeilichen Standpunkt empfehlenswert ist, die Verwendung ungünstiger Querschnittsformen durch die Zuordnung kleinerer Knickzahlen zu prämiieren.

7. Die Unterteilung der Querschnittsformen in einzelne Gruppen ist normungstechnisch unzweckmäßig, da sie sprunghaft Änderungen der Vorschrift bedingt und daher im Grenzgebiet zu Unzukömmlichkeiten bei der Anwendung führt. Rein formell genügt hier schon die Änderung einer Querschnittsabmessung um den Bruchteil eines Millimeters, um von der einen Gruppe in die andere und damit vom Geltungsbereich der einen Bemessungsformel in den Geltungsbereich der anderen zu gelangen.

E. Chwalla.

Erwiderung.

Zur Zuschrift von Prof. Chwalla bemerke ich folgendes:

Für jeden, der mit den Schwierigkeiten in der Beurteilung der Tragfähigkeit gedrückter Stäbe vertraut ist, erscheint das eine sicher, daß es niemals ein genormtes Berechnungsverfahren geben kann, das in allen Fällen den wirklichen Verhältnissen in voller Schärfe gerecht wird, und infolgedessen wird es immer verschiedene Auffassungen geben. Genau so wie früher der Gleichgewichtswechsel des mittig gedrückten Stabes kann nun die Tragfähigkeit des außermittig gedrückten Stabes aus elastisch-plastischen Werkstoffen nur ein Mittel sein, die Sicherheit zu beurteilen bzw. als Vergleichsmaßstab zu dienen. Ich gebe gerne zu, daß DIN 4114 einen Fortschritt bedeutet, indem sie mehr Umstände aus dem Sicherheitsgrad herausnimmt und in der Rechnung berücksichtigt, im übrigen bleibt aber noch vieles unerfaßt. Ich habe mit meiner Arbeit auch kein anderes Ziel verfolgt, als auf die Schwierigkeiten der rechnerischen Grundlagen hinzuweisen.

Die Einführung von zwei Querschnittsgruppen, denen verschiedene ω -Zahlen zugeordnet werden, erscheint mir auch normenmäßig nicht unmöglich, da die Querschnittsgruppen fest umrissen sind und eine Ver-wechselung nicht gut möglich ist. Von einer Prämie für ungünstige Querschnittsformen kann man doch wohl nicht sprechen, da jeder Konstrukteur weiß, daß Querschnitte der Gruppe b aus konstruktiven Gründen nicht immer zu vermeiden sind; ohne baulichen Zwang wird man sie bestimmt nicht anwenden. Im übrigen ist bei den Zahlen ν wirklich ein Druckfehler stehengeblieben. Es soll auf Seite 40 heißen: $\frac{1}{\nu_b} = \frac{3}{2}$ bzw.

$\frac{1}{\nu_b} = 1,65$, womit man dann aus Gl. (5) den von Chwalla für die

Querschnittsgruppe b angegebenen Wert von $\sigma_F' = \sigma_F + \frac{1}{2}(\sigma_F - \sigma_0)$ bekommt.

J. Fritsche.

INHALT: Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung unter Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Hänger. — Einfluß der nachgiebigen Hängestangen auf die Berechnung der Hängebrücke. — Zur Berechnung von vierseitigen Fachwerkmasten auf Verdrehen. — Zuschrift an die Schriftleitung.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Kloppe, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftwattung:

Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule

Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599

Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61

Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das ge-
samte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 3. Oktober 1941

Heft 21/22

Alle Rechte
vorbehalten.

Prüftechnische Erfassung der Ursachen zum spröden Bruch des Baustahls.

Von Wilhelm Kuntze, Berlin.

(Mitteilung aus dem Institut für Werkstoff-Mechanik des Staatlichen Materialprüfungsamts Berlin-Dahlem.)¹⁾

Einleitung.

Im allgemeinen ist man der Meinung, daß der verformungsfähigste Baustahl die größten Sicherheitsreserven gegenüber dem spröden Bruch bieten müsse. Diese sich in vielen Fällen nicht verwirklichende Anschauung hängt damit zusammen, daß man mit den Methoden der Werkstoffprüfung nur Verformung und Verformungswiderstand erfaßt, aber den Einfluß innerer Lockerungen und damit der Trenneigenschaften auf die Sicherheit noch völlig unberücksichtigt läßt. Ein sehr verformungsfähiger Werkstoff, mit inneren, nicht ohne weiteres erkennbaren Lockerungen behaftet, kann indessen in der Konstruktion zur Katastrophe führen, obgleich die Normenprüfung seine Abnahme bedingungslos zuläßt.

Aus diesen Gedankengängen heraus ist als Ergänzung der üblichen Abnahmeprüfung eine Gebrauchswertprüfung in der Entwicklung begriffen. Die Auswertung des üblichen Zerreißversuchs im Sinne einer Gebrauchswertprüfung soll zunächst betrachtet werden.

Auswertung des Zerreißversuchs für die Reißempfindlichkeit des Grundwerkstoffs.

Als innere Lockerungen wollen wir Häufungen von reißschwachen Stellen mikroskopischen oder noch kleineren Ausmaßes ansehen, aber auch Häufungen von feinen Rissen. Innere Lockerungen wirken wie innere Kerben. Man kann die Wirkung innerer Kerben studieren, indem man einen gesunden Werkstoff künstlich einkerbt und nun die Veränderung seiner Eigenschaften gegenüber dem ungekerbten Zustand beobachtet.

Zahlentafel 1. Dehnungen am Zerreißstab mit und ohne Kerb.

Werkstoff St 37, 900°, Wasser	Lineare Dehnung in %		$\frac{\delta_e}{\delta_g}$
	bei der Höchstlast (gleichm. Dehnung) δ_g	beim Bruch (Einschnürdehnung) δ_e	
glatter Prüfstab	9	270	30
gekerbter Prüfstab	17	49	3

In Zahlentafel 1 sind die bleibenden Dehnungen bei Erreichen der Höchstlast und beim Bruch — erstens an einem glatten und zweitens an einem ringsherum eingekerbten Prüfstab — miteinander verglichen. Die lineare Dehnung unter der Höchstlast, die am glatten Prüfstab als Gleichmaßdehnung bezeichnet wird, läßt sich bei der gekerbten Probe ermitteln, indem man die gemessene Durchmesseränderung an der Kerbe auf Grund des Gesetzes von der Volumenbeständigkeit in Längenveränderung umrechnet. Die lineare Einschnürdehnung beim Bruch beider Prüfstäbe wird ebenso durch Umrechnung der Durchmesseränderung beim Bruch in Längenänderung erhalten. Aus der Zahlentafel erkennt man, daß die gesamte Einschnürdehnung beim Bruch von 270% am glatten Stabe auf 49% bei Einkerbung herabgesunken ist, daß aber bei der Höchstlast die Dehnung von 9% am glatten Stabe auf 17% bei Einkerbung gestiegen ist.

Eine Kerbe vermehrt mithin die bis zur Höchstlast auftretende Dehnung auf Kosten der Gesamteinschnürung, und der Quotient δ_e/δ_g , d. h. aus Einschnürdehnung dividiert durch Gleichmaßdehnung, nimmt erheblich ab.

Ist nun das Material eines glatten Prüfstabes von inneren Kerben durchsetzt, so wird an allen diesen Kerbstellen die bei der Höchstlast auftretende Dehnung vermehrt sein, und da die inneren Kerben über das ganze Stabvolumen verstreut liegen, erscheint die Summe dieser Dehnungsvermehrungen als gesamte Vermehrung der Gleichmaßdehnung δ_g des Prüfstabes. Das im Bild 1 als Beispiel gezeigte Bruchstück entstammt einem in

sehr grober Weise mit Lockerungen durchsetzten Zerreißstab aus Bronze, welcher bei einer Gleichmaßdehnung von über 20% völlig spröde brach.

Diese paradox erscheinende Dehnungsvermehrung, die an sich als Selbsthilfe des Materials gegenüber Einkerbungen angesehen werden kann, ist zugleich eine Anzeige für ein von Lockerungen durchsetztes Material. Da die gleichmäßige Dehnung den größten Anteil an der Bruchdehnung δ_{10} ausmacht, so wird bei einem innerlich gelockerten, also schadhafem Werkstoff auch die Bruchdehnung erheblich vergrößert, wobei die Brucheinschnürung meistens mehr oder weniger abnimmt. Die vergrößerte Bruchdehnung verleitet aber dazu, bei der Abnahmeprüfung gerade die mit inneren Lockerungen behafteten Werkstoffe zuzulassen.

Gegen eine solche unzweckmäßige Abnahmeprüfung müssen wir uns schützen, indem wir die Ermittlung des Quotienten δ_e/δ_g als einen kritischen Maßstab für die Reißempfindlichkeit des Stahls und als Ergänzungsprüfung oder als Gebrauchswertprüfung verwenden, wobei die Erfahrung gelehrt hat, daß Werte unterhalb $\delta_e/\delta_g = 10$ als besonders gefährlich in der Konstruktion anzusehen sind.



Bild 1. Spröder Bruch bei inneren Lockerungen.

Daß wir diesen kritischen Quotienten aus den linearen Dehnungen δ und nicht aus den Querschnittsverminderungen ψ , also nicht aus Flächenwerten bilden, hat seinen Sinn darin, daß bei einer Mehrzahl gesunder und ausgeglichener Materialien mit verschiedenem Verformungsvermögen die Werte δ_e und δ_g in linearer Beziehung zueinander stehen, so daß der Quotient δ_e/δ_g für Werkstoffe mit verschiedener Verformungsfähigkeit eine Materialkonstante darstellt.

Eine Gegenüberstellung von Werten des Quotienten δ_e/δ_g bei gesunden Werkstoffen und bei einer Reihe im Betrieb spröde gebrochener Bauteile zeigt Zahlentafel 2. Während bei den gesunden Werkstoffen sich der Quotient zwischen 13 und 16 bewegt, liegt derselbe bei den vorliegenden Schadensfällen bei nur etwa 6 und darunter. Außerdem ist in der letzten Spalte noch eine weitere den Gebrauchswert kennzeichnende Meßgröße, die Kerbeinschnürung ψ_n angegeben. Das ist die Brucheinschnürung eines gekerbten Prüfstabes bestimmter Abmessungen, auf welche später noch eingegangen werden soll. Die Bruchkerbeinschnürung ψ_n spricht nicht nur auf die Schädigung des Werkstoffs durch innere Lockerungen an, sondern auch auf die durch ungeeignete, insbesondere sperrige Gefügeausbildung hervorgerufene Gebrauchswertminderung, insbesondere läßt ψ_n eine bessere Unterscheidung der Konstruktionsgüte z. B. bei den Baustählen St 52 und St 37 zu als die Querschnittsverminderung ψ des üblichen Zerreißstabes. Die Bruchkerbeinschnürung ψ_n soll erfahrungsgemäß nicht unter 20% liegen.

Wenn nun der Kennwert δ_e/δ_g etwa durch Kaltrecken oder Wärmebehandlung (durch sperriges Gefüge) gestört (vergrößert) wird, dann zeigt der Wert ψ_n dies an. Diese zusätzlichen Einflüsse auf den Quotienten δ_e/δ_g wollen wir jedoch hier nicht eingehender erörtern. Die Beziehung der Kenngröße δ_e/δ_g zum Gebrauchswert unserer Werkstoffe ist eine Wissenschaft für sich und ist eingehend studiert worden, worauf an anderer Stelle näher eingegangen werden soll²⁾. Hier sei nur hervorgehoben,

¹⁾ Vorgetragen auf der Sitzung des Deutschen Ausschusses für Stahlbau in Weimar am 28. Februar 1941.

²⁾ Im Druck.

Zahlentafel 2. Bruchursache bei Baustählen.

Werkstoff			Dicke bzw. Durchmesser mm	Abnahmeprüfung				Gebrauchswertprüfung		
				σ_B kg/mm ²	σ_F	δ_{10} %	ψ	$\frac{\delta_e}{\delta_g}$ 1)	ψ_n %	
Gesunde Werkstoffe	Breitflachstahl	St 37 Anlief.	20	34	21	30	77	16	46	
		St 52 Anlief.	20	58	34	24	70	13	22	
		St 52 normal.	—	54	34	25	70	13	30	
	Rundstange	Duralumin 350° geglüht	16φ	34	—	11	47	13	—	
Spröder Bruch: beim Rammen im Betrieb im Großversuch	U-Profil geschweißt Schiffsplatte geschweißt Schiffsblech genietet	Flußstahl 0,14 C	9 17	50	30	26	52	6,5	10 19	
		Thomasstahl 0,18 C normal.	9	50	31	21 23	46 49	6,6	—	
		Kohlenstoff-Stahl	12	46	29	27	57	5,9	17	
Beschädigte bzw. spröde gebrochene Brücken (geschweißt)	Zoo	St 52	65	61 68	39 48	17 23	44 60	6 12	15	
	Rüdersdorf	St 52	Flansch	40	59	34 39	18 26	31 57	9 11	—
			Steg	20	55	32 34	22 25	53 56	6 9	—
	Hasselt	St 37	55	43	21	23	25	2	—	
	Herenthals	St 37	Rand	45	40	24	26	65	7	15
			Kern	45	46	27	24	54	5	16

1) Die angegebenen Werte beziehen sich auf einen Zerreißstab von 10 mm Durchm.

daß ψ_n zwar eine umfassendere Anzeige zuläßt als der Quotient $\frac{\delta_e}{\delta_g}$, daß aber $\frac{\delta_e}{\delta_g}$, wenn er kleiner als 10 ist, immer auf den besonderen Fall von Lockerungen als Ursache schließen läßt.

Zahlentafel 2 zeigt noch eine Charakterisierung des Werkstoffs, gekennzeichnet durch einen zu geringen Wert $\frac{\delta_e}{\delta_g}$ bei den bekannten Schadensfällen an geschweißten Brücken, wobei ψ_n soweit es gemessen wurde, ebenfalls zu gering ausfiel.

Bemerkt sei noch, daß bei den meisten Werkstoffen, die infolge eingetretener Schadensfälle zur Prüfung kamen und die durch einen unerwartet spröden Bruch gekennzeichnet waren, der Quotient $\frac{\delta_e}{\delta_g}$ zu gering ausfiel.

Zahlentafel 3.

Prüfwerte der untersuchten Schmelzen, geordnet nach der Größe des Anrißbiegewinkels α_1 .

Zeichenerklärung für die Gebrauchswertprüfung:

δ_e = lineare Einschnürdehnung, δ_g = Gleichmaßdehnung, α_1 = Anrißbiegewinkel, α_2 = Bruchbiegewinkel beim Aufschweißbiegeversuch, ψ_n = Bruchkerbeinschnürung, S = Sehnigkeit, ΔT = Umwandlungshysterese.

Probe Nr.	Zustand	Abnahmeprüfung							Gebrauchswertprüfung						
		σ_{Fo}	σ_{Fu}	σ_B	δ_{10}	δ_5	δ_g	ψ	$\frac{\delta_e}{\delta_g}$	α_1	α_2	ψ_n	S	ΔT	α_1 berechnet
26	normal.	35	34	57	23	31	15	64	12	11	11 ⁴⁾	22	1,6	282	12
B 6	Anlief.	36	36	61	20	28	13	63	13	13	13 ⁴⁾	21	1,8	282	13
14	normal.	40	37	61	20	29	15	64	13	14	14 ⁴⁾	22	1,6	288	10
38	normal.	33	33	58	24	31	14	66	14	16	18 ⁴⁾	21	1,8	280	16
35	Anlief.	32	31	55	22	32	15	68	14	19	19 ⁴⁾	24	1,6	267	21
16	normal.	37	36	61	21	30	11	65	17	21	23 ⁴⁾	21	1,8	269	20
28	normal.	35	33	55	22	34	17	67	12	25	28 ⁴⁾	25	1,7	240	35
15	Anlief.	45	40	61	21	29	14	63	12	26	91 ²⁾	21	2,3	278	31
8	normal.	37	33	54	25	34	17	68	12	32	86 ³⁾	26	2,1	225	56
A 7	Anlief.	36	34	54	23	31	17	66	12	43	43 ⁴⁾	25	1,9	233	43
9	Anlief.	32	30	51	24	33	16	67	13	46	46 ⁴⁾	25	1,8	221	45
4	normal.	34	32	52	21	29	14	66	14	51	90 ¹⁾	24	2,6	213	68
34	normal.	40	36	57	23	32	16	67	13	54	92 ¹⁾	25	1,9	205	53
1	Anlief.	31	30	50	27	35	19	65	10	69	94 ¹⁾	27	2,2	210	66
20	normal.	42	36	56	23	31	16	66	12	69	89 ¹⁾	26	2,0	168	70
3	Anlief.	30	30	50	26	34	18	68	12	73	73 ⁴⁾	27	2,5	217	73

1) Nicht gebrochen bei vielen Anrissen.
2) Spröder Bruch bei vielen Anrissen.
3) Gleitbruch nach einzeitigem, verfrühtem Anriß.
4) Spröder Bruch im ersten Anriß.

Entwicklung von Prüfverfahren für die Beurteilung der Schweißbarkeit.

Außer einer solchen Schädigung des Materials durch innere Lockerungen, die fast ausnahmslos zu einem ungünstigen Verhalten in der Konstruktion führt, gibt es noch die Fälle, wo der angelieferte Werkstoff an sich gesund, aber nicht geeignet ist, den betrieblichen Einflüssen standzuhalten. Der Werkstoff hat auch hier den nur Verformung und Verformungswiderstand berücksichtigenden Abnahmebedingungen genügt, aber in besonderen Fällen, z. B. in der geschweißten Konstruktion oder beim Aufschweißbiegeversuch versagt er; er ist nicht schweißgerecht ausgewählt worden. Auch für diese Fälle müssen diejenigen Eigenschaften des Stahls prüftechnisch erfaßt werden, welche die Ursache seines Versagens sind.

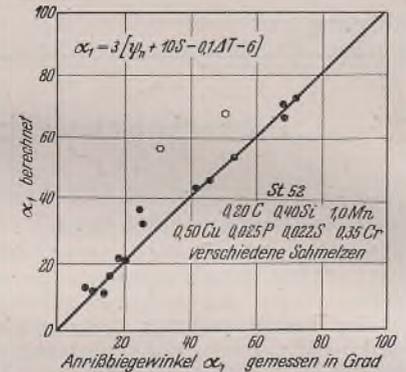


Bild 2. Zusammenhang zwischen Anrißbiegewinkel α_1 und der Summe der Einzelprüfwerte ψ_n , S und ΔT beim Aufschweißbiegeversuch.

Für die Durchführung eines Beispiels in dieser Richtung wollen wir als Maßstab für die praktische Bewährung des Stahls seine Haltbarkeit im Aufschweißbiegeversuch ansehen und feststellen, durch welche elementaren Prüfwerte dieses Verhalten nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ zu erfassen ist.

Das Ergebnis einer solchen Untersuchung mit einer Reihe von 40 mm dicken Blechen aus St 52, vom Chrom-Kupfer-Mangan-Typus (0,20 C; 0,4 Si; 1,0 Mn; 0,5 Cu; 0,025 P; 0,35 Cr) verschiedener Schmelzen veranschaulicht Bild 2 (vgl. auch Zahlentafel 3). Die Stähle, welche zu einer von Werner²⁾ zusammengestellten Versuchsreihe gehörten, genügten alle der Bedingung $\frac{\delta_e}{\delta_g} \geq 10$, sie waren also im Anlieferungszustand frei von schädlichen inneren Lockerungen. Bei diesen Stählen wurde der von Werner ermittelte Anrißbiegewinkel α_1 der Aufschweißbiegeprobe als Abszisse aufgetragen. Als Anriß galt nicht der erste Schweißraupenriß, sondern der erste in der Aufhärtungszone äußerlich gut sichtbare Riß. Seine Feststellung ließ sich in allen Fällen eindeutig durchführen. Auf der Ordinate des Bildes wurde eine Summe aus drei elementaren Kennwerten aufgetragen, welche der Größe des Anrißbiegewinkels mit großer Annäherung gleichkommt.

Hier ist es also gelungen, den Anrißbiegewinkel auf eine einfache Summe von drei elementaren und prüftechnisch leicht erfassbaren Eigenschaften, der schon erwähnten Bruchkerbeinschnürung ψ_n , der im Walzprozeß erzeugten Sehnigkeit S und der Umwandlungshysterese ΔT zurückzuführen³⁾. Wir wollen diese drei Eigenschaften näher betrachten.

Zuerst erscheint in der Formel die Bruchkerbeinschnürung ψ_n . Sie gibt eine Eigenschaft des unveränderten Grundwerkstoffs an, und zwar sein Verformungsvermögen im dreiaxigen Zugspannungszustand, ermittelt an einer gekerbten Zerreißprobe bestimmter Abmessungen. Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß die Entstehung und das Aufklaffen eines Anrisses in der gehärteten Zone durch die Eigenschaften des benachbarten und unveränderten Grundwerkstoffs mit bedingt wird. Die Vorgänge des Anreißen sind

3) Im Druck.
4) Die Zahlenbeiwerte 10 und 0,1 für S bzw. ΔT haben nur den Sinn einer Veränderung der Dezimalstellen, um die Prüfgrößen ihrer Größenordnung nach einander anzugleichen. Die Zahl 3 bewirkt, daß die Gerade unter 45° verläuft und die Zahl 6, daß sie durch den Koordinatenanfangspunkt verläuft.

mit den Bedingungen für das Weiterreißen verkoppelt. Wenn das Weiterreißen erschwert ist, so ist auch schon das Anreißen erschwert.

Die Gestalt des hierzu verwendeten Kerbzerrastabes erstet aus ganz bestimmten Überlegungen. Auf einen gekerbten Prüfstab wirkt ein: 1. der räumliche Zugspannungszustand, 2. die ungleichmäßige Spannungsverteilung. Bei Betrachtung des Bildes 3 erkennt man, daß mit zunehmender Kerbtiefe bei etwa konstanter Kerbrundung der räumliche Zugspannungszustand, ausgedrückt durch das Verhältnis der kleinsten zur größten Hauptspannung, also des Quotienten s_3/s_1 , zunimmt, wohingegen die Formziffer σ_{max}/σ_n als Ausdruck für die Größe der Spannungsspitze abnimmt. Die beiden Grenzfälle kleinster und größter Kerbtiefe sind ungefährlich; Links, bei kleiner Kerbtiefe, wirkt die Spannungsspitze allein. Sie erzeugt, was als bekannt vorausgesetzt sei, im linearen Spannungszustand, also bei $s_3/s_1 = 0$, keinen spröden Bruch. Ganz rechts, bei größter Kerbtiefe, wirkt keine Spannungsspitze mehr, sondern allein der räumliche Spannungszustand. Im räumlichen Spannungszustand wird aber der Verformungswiderstand weitgehend gehoben, so daß von einer Bruchgefahr nicht gesprochen werden kann, zumal bei Fehlen der Spannungsspitze die Kräfteverhältnisse übersichtlich sind. Ausgesprochene Trennempfindlichkeit zeigt ein verformbarer Werkstoff nur beim Zusammenwirken von Spannungsspitze und räumlichem Spannungszustand, welcher die Verformung verhindert.

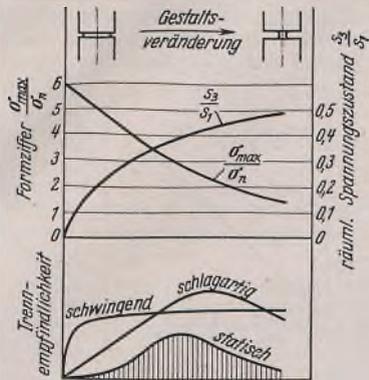


Bild 3. Abhängigkeit der Trennempfindlichkeit vom Verlauf der Formziffer (Spannungsspitze) und des räumlichen Spannungszustandes. Bei mittlerer Kerbtiefe ist die Trennempfindlichkeit am größten.

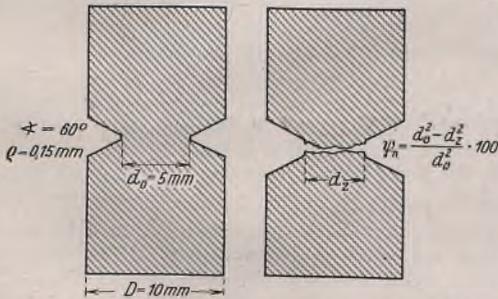


Bild 4. Profilbild des Kerbzerrastabes vor und nach dem Zerreißen.

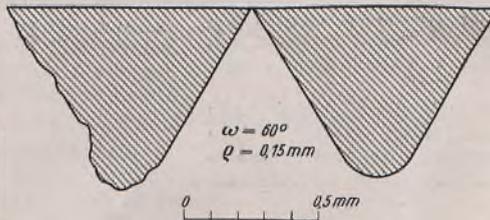


Bild 5. Profilbilder von mangelhafter und einwandfreier Einkerbung.

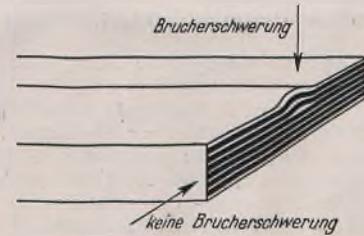


Bild 6. Bruchwiderstand bei Zeilenstruktur.

Soll ein Kerbzerrastab die Trennempfindlichkeit am günstigsten anzeigen, so muß er mithin eine mittlere Kerbtiefe haben.

Die hieraus folgende Kerbform an einem Rundstabe vor und nach dem Zerreißen sehen wir im Profilbild (Bild 4). Die Kerbeinschnürung ψ_n nach dem Bruch wird mittels Profilprojektors ausgemessen. Ebenso geschieht die Einhaltung der richtigen Kerbrundung bei der Herstellung des Prüfstabes in der Werkstatt mittels Profilprojektors bei 100facher Vergrößerung (Bild 5). Bei genügender Einarbeitung kann dieser Kerbstab ohne Schwierigkeiten am laufenden Band in der Werkstatt hergestellt werden.

Nun darf dieser Kerbstab auch nicht beliebig proportional vergrößert oder verkleinert werden, da alsdann die Einschnürung erheblich ab- oder zunimmt und man keine Vergleichswerte erhält. Die Abhängigkeit der Kennwerte von der absoluten Größe tritt ja sowohl beim Schwingungsversuch als auch beim statischen Versuch immer dann auf, wenn der Versuchsstab gekerbt ist, nicht beim glatten Prüfstab. Bei einem gekerbten Stab müssen daher die festgelegten absoluten Abmessungen stets beibehalten werden. Beim glatten Prüfstab ist diese Begrenzung der absoluten Größe nicht erforderlich.

Die Kenngröße ψ_n hat sich bei den bisherigen Prüfungen von schadhafte Stahlkonstruktionen als außerordentlich wertvoll erwiesen.

Nun kommen wir zu der zweiten elementaren Erscheinung, die den Anrißbiegewinkel mit bedingt, das ist die mit der Zeilenstruktur zusammenhängende Schichtung des gewalzten Materials. Auch diese kennzeichnet den Grundwerkstoff im Anlieferungszustand. Die Schichtung hat einen erheblichen Einfluß auf das Einreißen. Man hat dafür verschiedene Erklärungen aufgestellt, z. B. sagt man, daß Risse durch Schlackenzeilen aufgefangen werden (Houdremont, Schönrock, Wiester⁵⁾, oder daß (nach Werner⁶⁾ der innere Spannungsabbau durch die Zeilenstruktur erleichtert werde. Letztere Begründung ist nicht ohne weiteres einzusehen, und Schlackenzeilen sind auch nicht immer gerade da, wo ein Riß verläuft. Ich möchte ein viel grundsätzlicheres Naturgesetz für die Erklärung heranziehen.

Wenn ein Riß nach Bild 6 beispielsweise in einem Wulstprofil senkrecht zur Ferrit-Perlit-Schichtung verläuft, so muß er beim Fortschreiten immer neue Schichtungen durchdringen. Jede neue Schicht bedeutet einen Gefügewechsel, welcher einen anderen Bruchverlauf, vielleicht auch eine andere Reißgeschwindigkeit zur Folge hat. Diese Umstellung von Schicht zu Schicht bedeutet eine jedesmalige Aufwendung zusätzlicher Energien, und die Summe dieser zusätzlichen Energien entspricht der Zahl der durchbrochenen Schichten. Verläuft dagegen der Riß mit den Schichten, so werden gleichzeitig alle Schichten erfaßt, und der Riß verbleibt in den Schichten, ein zusätzlicher Energieverbrauch fällt fort. Bei der Längsschweißbiegeprobe und im Flansch eines Trägerprofils tritt immer der erstere Fall ein. Nach diesem Naturgesetz verläuft auch stets der Bruch von geschichtetem Holz, wie Bild 7 zeigt⁷⁾. Auch beim Durchschlagen von geschichteten Kunst- und Preßstoffen war die Schlagarbeit größer, wenn der Bruchverlauf die Schichten durchkreuzen mußte⁸⁾.

Diese Wirkung der Zeilenstruktur auf den Bruch des Stahls muß prüftechnisch erfaßt werden. Werner hat zur Kennzeichnung der Anisotropie des Stahls den Quotienten der Kerbschlagzähigkeiten längs/quer mit der Bezeichnung „Sehnigkeit S“ für die Analyse des Längsschweißbiegeversuchs verwendet. Diesen Quotienten wollen wir auch hier als elementaren Prüfwert verwenden, obgleich die Ermittlung der Kerbzähigkeit stets mit Unsicherheiten verbunden ist; denn die in der Querrichtung entnommene Kerbschlagprobe ist großen örtlichen Einwirkungen unterworfen, die die Kenngröße Sehnigkeit leicht beeinflussen können. (Erstrebt wird daher die prüfmäßige Festlegung der Sehnigkeit auf sicherere Weise, z. B. aus der Bruchkerbeinschnürung längs/quer des vorhin beschriebenen Kerbzerrastabes oder aus dem Eindruckhärteversuch. Hierüber sind Untersuchungen im Gange.)

Der dritte elementare Prüfwert, der in der Formel für den Anrißbiegewinkel auftritt, ist die an sich bekannte Umwandlungshysterese ΔT , die von Werner für die Erklärung der Vorgänge in der Längsschweißbiegeprobe eigens herangezogen wurde. Dieser Kennwert, der unter Einhaltung bestimmter Versuchsbedingungen mit Hilfe des optischen Dilatometers als Differenz des A_{c1} - und A_{r1} -Punktes ermittelt werden kann, wird vielfach als Maßstab für die Aufhärtung angesehen. Die Werte von ΔT laufen aber weder uneingeschränkt gleichlaufend mit der Festigkeit des Grundmaterials noch mit der mit diesem Grundmaterial zu erreichenden Aufhärtung.



Bild 7. Mit den Schichten verlaufender Bruch bei Holz (in Pfeilrichtung).

maximale Härte der Übergangzone. Die Umwandlungshysterese ΔT ist nach Werner ein umgekehrter Maßstab für die Zahl der Keime in der Schmelze und die daraus zu folgernde Umwandlungsfreudigkeit.

⁵⁾ Stahl u. Eisen 16 (1939), S. 1241 bis 1248.

⁶⁾ a. a. O.

⁷⁾ Z. Metallkd. 26 (1934), S. 106 bis 113.

⁸⁾ Kunststoffe 29 (1939), S. 33 bis 41.

Zwei Baustähle St 52 verschiedener Zusammensetzung und mit verschiedenen ΔT -Werten (229° und 78°) wurden bei steigenden Temperaturen in Wasser abgeschreckt. In Bild 8 ist über der Abschreckungstemperatur die Bruchkerbeinschnürung ψ_n aufgetragen. Die Verformungswerte des umwandlungsfreudigeren Stahls (mit kleinerem ΔT) sind in vorliegendem Fall entgegen der bisherigen Annahme sowohl im Anlieferungs- als auch im Abschreckungszustand durchschnittlich ungünstiger als die des umwandlungsträgeren Stahls. Eine große Umwandlungsfreudigkeit bietet mithin keine Garantie für gute Verformungseigenschaften im Anlieferungszustand. Die ungünstige Eigenart des umwandlungsträgeren Stahls mit großem ΔT scheint jedoch darin zu beruhen, daß er beim Abschrecken unausgeglichene Gefügestände hervorruft, die außerordentlich reißempfindlich sind. Im Bild zeigt sich dies in dem breiten schraffierten Streugebiet mit sehr niedriger unterer Begrenzung.

Der Stahl sucht bei jeder Wärmebehandlung zu einem entsprechenden ausgeglichenen Endzustand zu gelangen. Hierzu gehört Zeit. Infolge

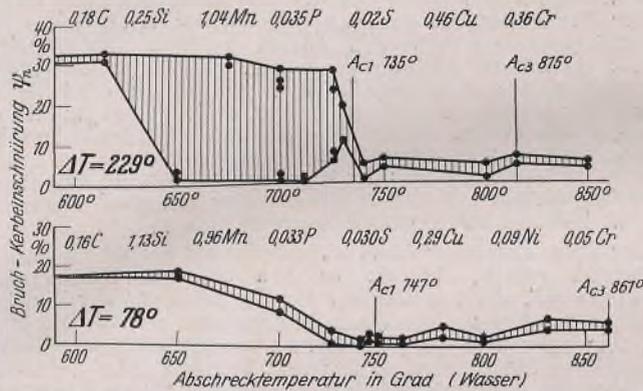


Bild 8. Verlauf der Kenngröße ψ_n mit zunehmender Abschreckung bei zwei Baustählen St 52 verschiedener Zusammensetzung.

der Umwandlungsträgheit fehlt die erforderliche Zeit; er bleibt in verschiedenen Zwischenstadien der Entwicklung stecken, wodurch Tief- und Hochwerte der Verformung nebeneinander entstehen können. Bei dem umwandlungsfreudigen Stahl tritt dieses Streugebiet nicht so leicht auf, er erreicht ohne große Zeitspanne einen ihm eigentümlichen ausgeglichenen Endzustand.

Ein durch Abschrecken entstehender metastabiler Zustand kann durchaus ausgeglichener Natur sein, d. h. das Gefüge entspricht dann durchgehend einem gleichmäßigen Zwischenzustand. Bei umwandlungsträgeren Stählen tritt die Unausgeglichenheit infolge mehrerer Zwischenzustände hinzu; es entstehen Nester verschiedener Stabilität, wobei Stellen mit großen Zwängungen neben Stellen mit Lockerungen liegen, welche die Reißempfindlichkeit besonders begünstigen.

Die größte Gefahr tritt, wie wir es im Bild sehen, unterhalb des A_1 -Punktes, also bei Abschreckungen unterhalb von 700° besonders stark auf. Der überhitzt gehärtete Zustand ist, wie sich aus den Versuchen ergab, nicht so gefährlich wie gerade die Temperaturzone unterhalb A_1 . Dies dürfte eine neue Auslegung des Begriffs ΔT sein, dessen sichere Bestätigung jedoch nur durch zahlreiche Versuche möglich ist. Durch Glühen bei 500 bis 600° kann diese Gefahr zum größten Teil beseitigt werden.

Nachdem wir diese drei elementaren Kenngrößen ψ_n , S und ΔT beschrieben haben, wollen wir noch auf ihre Beziehung zum Biegewinkel im einzelnen eingehen. Im Bild 9 sind die drei Prüfgrößen einzeln in Abhängigkeit vom Anrißbiegewinkel der Aufschweißbiegeprobe aufgetragen. Man erkennt schon eine lose Beziehung jeder der drei Prüfgrößen zum Anrißbiegewinkel. Wollte man aber jede dieser Beziehungen für sich verwenden, um den Biegewinkel im voraus zu errechnen, so kommt es infolge der sehr flachen Neigung der drei Geraden in Verbindung mit den Streuungen zu erheblichen Abweichungen vom wirklichen Wert, die im Bild 10 dargestellt sind. Aber auch, wenn man je zwei der gezeigten Prüfgrößen kombiniert und daraus den Anrißwinkel errechnet, erhält man noch fast ebenso große Streuungen (Bild 10).

Erst die Kombination aller drei Größen führt zum Ziel, wie wir das schon im Bild 2 sahen. Die beiden etwas herausfallenden Werte lassen sich, wie wir im folgenden noch sehen werden, restlos aufklären. Sie bestätigen damit nur die Richtigkeit der gefundenen Beziehung.

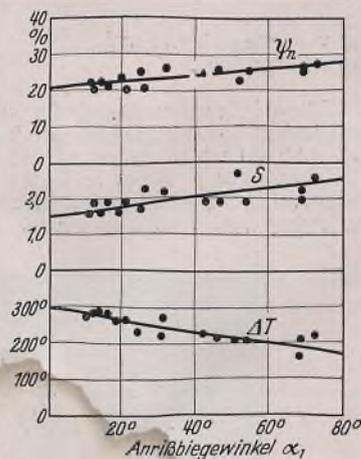


Bild 9. Zusammenhang zwischen den drei einzelnen Prüfgrößen ψ_n , S und ΔT und dem Anrißbiegewinkel α_1 beim Aufschweißbiegeversuch mit Baustahl St 52.

Die Erklärung des werkstofflichen Verhaltens beim Aufschweißbiegeversuch läuft mithin allein auf die Gesetze des Reißens und nicht auf die meist nur bekannten Gesetze der Verformung und des Verformungswiderstandes (oder der Härte) hinaus. Der Kerberreißstab mit der Ermittlung der Kerbeinschnürung ψ_n ist eine ausgesprochene Reißprobe für den räumlichen Spannungszustand. Die Sehnigkeit des geschichteten Materials bildet ein Hindernis für das Einreißen quer zur Schichtung. Die Umwandlungshysterese ist die Ursache für die Entstehung unausgeglichener und dadurch reißempfindlicher Gefügestände während des Schweißens.

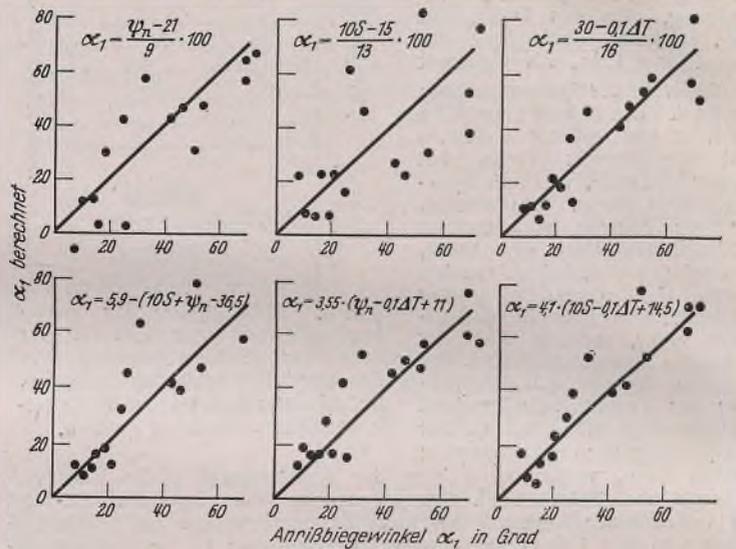


Bild 10. Starke Streuungen der Beziehungen zwischen dem Anrißbiegewinkel α_1 und einer bzw. der Summe von zwei der Einzelprüfgrößen.

Der Anrißbiegewinkel als Gütemaßstab.

Die Nützlichkeit des Aufschweißbiegeversuchs als komplexer Gütemaßstab muß auf Grund vorangehender Analyse bejaht werden. Dem Abnehmer gibt er auf die Frage Antwort, ob der Baustahl den Ansprüchen gerecht wird. Im Fall eines Versagens läßt er aber die Frage nach den Ursachen offen, welche durch die Einzelprüfgrößen ψ_n , S und ΔT (ergänzt durch δ_e/δ_g) sehr genau beantwortet werden können und welche daher für den Erzeuger von besonderer Bedeutung sind. Aber auch in den Fällen, in welchen man auf einen Aufschweißbiegeversuch verzichten muß, sind die Einzelwerte ψ_n , S und ΔT geeignet, Grenzwerte für den Abnehmer abzugeben. Hierauf kommen wir zurück, nachdem die Frage der quantitativen Auswertung des Aufschweißbiegeversuchs geklärt ist.

Bisher hatte Werner die Größe des Anrißbiegewinkels α_1 allein durch die Elementargeöße ΔT gedeutet und den Durchbruchwinkel α_2 als abhängig von dem Produkt Sehnigkeit \times Kerbzähigkeit, also $S \cdot a_K$ gefunden. In quantitativer Hinsicht ließ das Ergebnis noch zu wünschen übrig.

Bei den vorliegenden Versuchen wurde eine sehr genaue Beziehung zwischen den drei Elementargeößen ψ_n , S und ΔT und dem Anrißbiegewinkel α_1 gefunden. Es ließ sich jedoch für den Durchbruchwinkel α_2 keine so klare Beziehung aufstellen wie für den Anrißbiegewinkel, und es wurde gefunden, daß der Durchbruchwinkel noch verschiedenen Einflüssen unterworfen ist, die seine maßstäbliche Verwendung als völlig

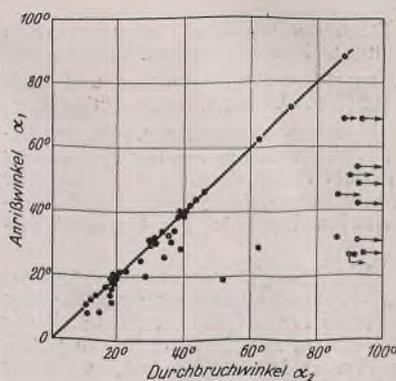


Bild 11. Zusammenhang zwischen Anrißbiegewinkel α_1 und Durchbruchwinkel α_2 beim Aufschweißbiegeversuch, ermittelt aus 50 Versuchen mit Baustahl St 52 von Albers und Werner.

ungeeignet erscheinen lassen. Zuerst wollen wir eine Übersicht über die Beziehung beider Biegewinkel zueinander aus 50 Versuchen betrachten (Bild 11). Man kann deutlich zwei Gruppen unterscheiden: erstens die Fälle, die auf der Diagonalen liegen; bei ihnen ist der Anrißbiegewinkel = dem Durchbruchwinkel, sie erstrecken sich fast über den ganzen Winkelmeßbereich bis zu 88° und zeigen alle einen spröden Bruch; zweitens die Fälle, wo der Durchbruchwinkel größer als der Anrißbiegewinkel ist, und die zum größten Teil gar nicht zum Bruch kommen. Diese Fälle beginnen schon bei Anrißbiegewinkeln von 19° . Sie zeigen zum Teil spröde, zum Teil zähe Brüche. Bei der letzten Gruppe wird man geneigt sein, die Zähigkeit des Grundmaterials höher einzuschätzen als bei der ersten Gruppe. Das ist jedoch nicht ausnahmslos der Fall.

Zur Erklärung soll uns eine Übersicht dienen (Zahlentafel 4). Bei der Probe Nr. 14, die zur ersten Gruppe gehört, tritt der Durchbruch schon beim ersten Anriß unter geringem Biegewinkel ein. Die Kenn-

größen ψ_n , S und ΔT genügen in ihrer Gesamtheit den Anforderungen nicht, insbesondere ist das ΔT zu groß. Bei den nächsten Proben Nr. 15 und 34 erfolgt der Durchbruch viel später als der Anriß oder gar nicht. Vor Eintritt des Durchbruchs sind hier eine größere Anzahl von Anrissen erschienen, die zur Entlastung der Probe beitragen und deren weites Aufklaffen eine Vergrößerung des Durchbruchwinkels bewirken. Der große Biegewinkel, insbesondere bei Probe Nr. 34, die bei 92° noch nicht gebrochen ist, ist daher kein Maßstab für die wirklichen Eigenschaften des Baustahls, weil dieser ja durch die vorangehenden Anrisse entlastet wurde. Die Kenngrößen ψ_n und S lassen zwar auf ein etwas besseres Grundmaterial als bei Probe Nr. 14 schließen, jedoch ist der Durchbruchbiegewinkel im Verhältnis zu ihnen zu groß.

Nach der Statistik in Zahlentafel 5 waren von 38 Aufschweißbiegeproben 9 Proben (das sind 24%) infolge zahlreicher Anrisse nicht zum Durchbruch gelangt. Von diesen waren aber 3 Stück (Nr. 12, 13, 32) von sehr geringer Güte, da ihre Anrißbiegewinkel nur 26° bis 31° betragen und die Zahl der von Werner festgestellten Mikrorisse je 120 mm bei diesen 3 Proben verhältnismäßig groß war.

Wenn man also das verfrühte Anreißen durch Verminderung der Umwandlungsfähigkeit (d. h. Erhöhung von ΔT) fördert, so kann bei nur einigermaßen zähem Grundmaterial der Durchbruch gänzlich verhindert werden. Den umgekehrten Fall sehen wir bei Probe Nr. 3 (Zahlentafel 4). Hier hatte sowohl die Aufhärtungszone als auch das Grundmaterial so gute Eigenschaften, daß erst bei 73° der erste Anriß auftrat. Durch die hierbei erzeugten sehr hohen elastischen Anspannungen und die damit verbundene hohe Anrißgeschwindigkeit schlug die Probe aber gänzlich spröde durch, obgleich bei dieser Probe das Grundmaterial mit $\psi_n = 27$ und $S = 2,5$ von allen in Zahlentafel 3 aufgeführten Proben die besten Eigenschaften im Anlieferungszustand aufwies. Dieses Material läuft in der Konstruktion niemals Gefahr, spröde zu brechen, da ein Biegewinkel von 73° dort nie vorkommt.

Nach Zahlentafel 5 war bei 24 Proben (= 63%) der spröde Bruch im Anriß eingetreten. Unter diesen waren 5 Proben (Nr. 7, 9, 5, 3, 17) mit Anrißbiegewinkeln von 40° aufwärts, also von guter Qualität ($\alpha_1 = 40, 46, 63, 73, 88^\circ$). Bestätigt wird diese gute Qualität auch durch die geringe Zahl von Mikrorissen je 120 mm nach Werner.

Weder die Erscheinung des spröden Bruches (bei spätem Anriß) noch die Tatsache, daß die Probe (bei vielen Anrissen) nicht zu Bruch geht, sind mithin Maßstäbe für die wirkliche Güte des Grundmaterials.

Die Probe Nr. 8 (Zahlentafel 4), die in der Berechnung des Anrißbiegewinkels eine Abweichung vom Versuchswert ergab und zu den beiden einzigen ausgefallenen Werten in Bild 2 gehörte, wollen wir einer besonderen Betrachtung unterziehen. Bei ihr trat der Anriß schon bei 32° auf, weitere Risse folgten aber nicht, der große Durchbruchwinkel von 86° wurde hier durch einen wirklichen zähen Bruch mit Gleitflächenbildung erreicht. Eine Gefahr spröden Durchschlagens auf Grund hoher Anrißgeschwindigkeit wie bei der vorigen Probe war hier infolge des zeitigen Anreißens nicht gegeben. Obgleich das Grundmaterial mit $\psi_n = 26$ und $S = 2,1$ besser war als das der Proben Nr. 15 und 34, wurde kein so hoher Durchbruchwinkel erreicht, weil ein einzelner Anriß nicht dazu beitragen konnte, den Durchbruchwinkel so zu fälschen, wie das eine Summe von Anrissen bei den obigen Proben tat. Aber auch der verfrühte einzelne Anriß der Probe Nr. 8 entspricht nicht der Güte des Materials, da erstens weitere Risse zwischen dem ersten Anriß und dem viel später erfolgenden Durchbruch nicht folgten und zweitens nach der Berechnung aus ψ_n , S und ΔT die Probe einen größeren Anrißbiegewinkel von 56° gegenüber 32° hätte ergeben müssen.

Nach Zahlentafel 5 traten dreimal (das sind 8% der Fälle) zähe Verformungsbrüche auf mit je einem einzigen verfrühten Anriß. In diesen Fällen betrug $\alpha_1 : \alpha_2 = 29 : 63, 32 : 86$ und $45 : 86$. Der Anriß dürfte bei diesen Proben an einer zufälligen Fehlstelle oder vielleicht als Folge einer Ausbesserung beim Schweißen oder auch eines Schweißspritzers entstanden sein⁹⁾.

Es ergaben sich mit obigen Betrachtungen folgende Grundregeln:

1. Bruchaussehen. Falls die Probe zum Bruch kommt, ist der spröde Bruch die natürliche Bruchform für Baustahl St 52 in der Aufschweißbiegeprobe, auch für Stähle besserer Güte. Er begründet sich damit, daß eine Flachprobe an und für sich wenig Neigung zur Einschnürung zeigt, wozu noch die ungleichmäßige Spannungsverteilung der Biegebeanspruchung beiträgt. Bei besserer Güte des Stahls, die durch einen späteren Anriß gekennzeichnet ist, trägt außerdem die plötzliche Auslösung der aufgespeicherten elastischen Anspannungen zum spröden Durchschlagen bei. Ein zäher Bruch erschien daher jedesmal nur dann, wenn ein zufälliger verfrühter Anriß (welcher durch die Güte des Materials nicht begründet ist) eine Milderung dieser plötzlichen Auslösung hoher elastischer Anspannungen hervorrief. Der spröde Trennbruch ist aus dieser Begründung nicht in allen Fällen ein Maßstab für einen Stahl geringer Güte.

2. Bruchwinkel. Die Größe des Anrißbiegewinkels, worunter der Winkel beim ersten äußerlich sichtbaren Anriß im Stahl und nicht in der Schweißraupe gemeint ist, zeigt die Güte der Schweißbarkeit einwandfrei an. Risse in der Schweißraupe haben nichts zu bedeuten. Der Bruchbiegewinkel kann hingegen häufig nicht als Maßstab der Güte gelten, weil auch Stähle minderer Güte nicht durchbrechen, wenn infolge einer Vielheit von Anrissen die Probe entlastet wird und somit große Bruchwinkel ermöglicht werden. Ob ein Durchbruch beim ersten Anriß entsteht oder viele Anrisse den Durchbruch verhindern, hängt offenbar nur von geringfügigen Einflüssen ab, da die mindere Güte auch solcher Stähle, die nicht brachen, nachgewiesen werden konnte. In anderen Konstruktionsformen, z. B. der Aufschweißzugprobe, müssen solche Stähle versagen.

Es wird daher zweckmäßig sein, nicht den Durchbruchwinkel, sondern den Anrißbiegewinkel α_1 als Gütemaßstab einzusetzen und hierfür bei einer Blechdicke von 40 mm einen Grenzwert von etwa 40° zu fordern. Die Zweckmäßigkeit dieser Grenze findet sich in Zahlentafel 5 dadurch bestätigt, daß die Zahl innerer (mikroskopischer) Risse bei Anrißbiegewinkeln von etwa 40° aufwärts erheblich abnimmt, worauf Werner besonders hingewiesen hat⁹⁾.

⁹⁾ Hiermit wird einer der beiden ausfallenden Werte in dem vorhin gezeigten Bild 2 erklärt. Der zu günstig errechnete Biegewinkel bei dem anderen ausfallenden Wert (vgl. Probe Nr. 4 in Zahlentafel 3) ist mit einiger Sicherheit auf die Ermittlung der Kerbzähigkeit in der Querrichtung zurückzuführen. Sie wies den niedrigsten Wert von allen 40 Proben auf, wodurch die Sehnigkeit S zu groß ausfiel.

Zahlentafel 4. Beurteilung des Aufschweißbiegeversuchs mit Baustahl St 52 auf Grund der Kenngrößen ψ_n , S , ΔT .

Bruchbild	Probe Nr.	Anriß-Bruchbiegewinkel		Bruchart	ψ_n %	S	ΔT°	α_1° be-rechnet
		α_1°	α_2°					
	14	14	14	spröde	22	1,6	288	10
	15	26	91	spröde	21	2,3	278	31
	34	54	—	nicht gebrochen	25	1,9	205	53
	3	73	73	spröde	27	2,5	217	73
	8	32	86	zähe	26	2,1	225	56

Zahlentafel 5.
Zusammenstellung der Ergebnisse von 38 Aufschweißbiegeversuchen nach Werner.

Probe Nr.	Anrißbiegewinkel α_1	Bruchbiegewinkel α_2	Anzahl der inneren Risse je 120 mm ¹)	Äußere Anrisse	Häufigkeit der Fälle
Spröder Trennbruch					
26	11	11	20	} $\alpha_1 \approx \alpha_2$ 1. Anriß = Durchbruch	} 63 %
14	14	14	9		
36	14	18	28		
24	16	17	27		
38	16	18	12		
35	19	19	39		
37	19	19	28		
31	20	29	21		
25	21	21	25		
16	21	23	8		
28	25	28	5		
6	28	39	1		
19	31	31	8		
10	31	31	8		
33	31	36	17		
27	33	36	—		
11	34	34	11		
29	34	37	10		
30	39	39	1		
7	40	40	4		
9	46	46	1		
5	63	63	4		
3	73	73	2		
17	88	88	3		
23	19	52	25	} $\alpha_2 > \alpha_1$ Viele Anrisse, daher α_2 groß	} 5 %
15	26	91	14		
Zäher Verformungsbruch					
2	29	63	3	} $\alpha_2 > \alpha_1$ Einzelner verfrühter Anriß	} 8 %
8	32	86	4		
22	45	86	8		
Nicht gebrochen					
12	26	Nicht gebrochen	10	} $\alpha_2 > \alpha_1$ Viele Anrisse, daher nicht gebrochen	} 24 %
13	27		16		
32	31		18		
18	43		5		
21	49		3		
4	51		2		
34	54		6		
20	69		12		
1	69		5		

¹⁾ Mikroskopische Risse in der wärmebeeinflussten Zone.

Zahlentafel 6. Bruchursachen bei Baustahl St 52.

Werkstoff (geschweißt) aus:	Zu-stand	Dicke in mm	Abnahme-Prüfung				Gebrauchswert-Prüfung				
			σ_B	δ_{10}	ψ	a_k	$\frac{\delta_e}{\delta_g}$	α_1	ψ_n	S	ΔT
Sonderprofil 3 (Aufschweißbiegeprobe)	Anlief.	40	50	26	68	12	12	73	27	2,5	217
	normal.		57	23	64	9	12	11	22	1,6	282
	normal.		55	22	68	10	15	19	24	1,6	267
Zoo-Brücke	Anlief.	65	61	17	44	7	6	[27]	15	2,0	203
	normal.		68	23	60	7	12	—	23	—	203
Versuchsbrücke	Anlief.	45	58	20	68	10	17	[6 33]	13 22	1,8	290
Sonderprofil 1 (Großversuch)	Anlief.	40	62	21	66	8 11	13	[0]	17 24	1,3	280

Die []-Werte sind aus den Einzelprüfwerten errechnet.

Die zulässigen Mindestgrößen der Einzelprüfwerte ψ_n , S und ΔT regeln sich alsdann unter Einsetzung dieses Grenzwinkels, welcher der einfachen Rechnung halber zu 42° gewählt wurde, in die auf Bild 5 vermerkte Gleichung. Es ergeben sich dann zugeordnete Mindestwerte, die sich auf der Leitertafel (Bild 12) geradlinig verbinden lassen.

Es sei einem vermutlichen Einwand des Lesers vorweggegriffen, daß nämlich die angegebene Beziehung zwischen α_1 und den Größen ψ_n , S und ΔT nicht allgemeingültig sei, und daß vor allem der Anrißbiegewinkel in verschiedenen Laboratorien verschieden groß gemessen werden könne.

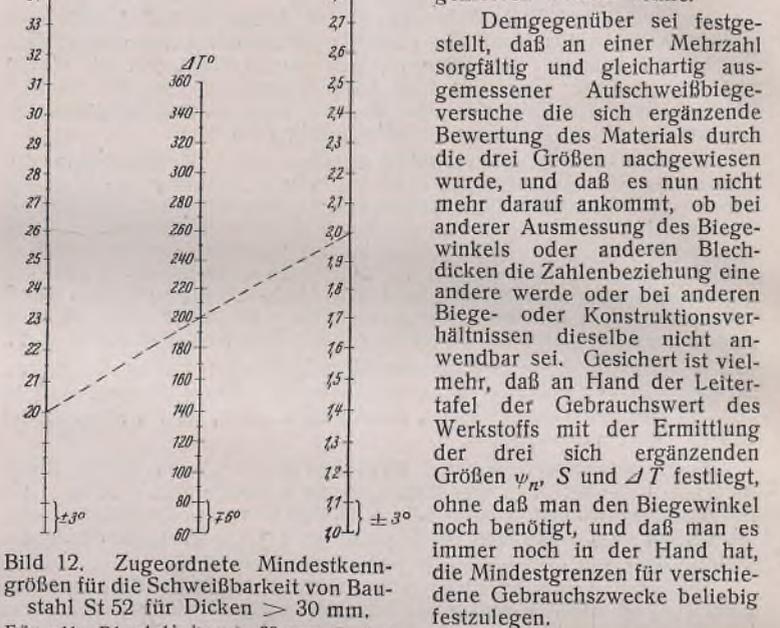


Bild 12. Zugeordnete Mindestkenngrößen für die Schweißbarkeit von Baustahl St 52 für Dicken > 30 mm.

Für alle Blechdicken > 30 mm: Je drei mit einem aufgelegten Lineal verbindbare Zahlenwerte auf den Leitern erfüllen die Mindestbedingungen für die Schweißbarkeit.

Für 40 mm Blechdicke ergeben drei geradlinig verbindbare Werte einen Anrißbiegewinkel von 42° . Darüber- oder darunterliegende Versuchswerte entsprechen bei der ψ_n -Leiter $\pm 3^\circ$, bei der ΔT -Leiter $\mp 6^\circ$, bei der S-Leiter $\pm 3^\circ$ Biegeänderung je Maßteil Leiterlänge. Berechnungsbeispiel für den Anrißbiegewinkel: Für Versuchswerte $S=2$, $\Delta T=200^\circ$ ist der zugeordnete Mindestwert $\psi_n=20\%$ (gestrichelte Gerade). Ergibt der Versuch $\psi_n=28\%$, so beträgt der Anrißbiegewinkel $\alpha_1=42^\circ + (28-20) \cdot 3 = 66^\circ$.

Demgegenüber sei festgestellt, daß an einer Mehrzahl sorgfältig und gleichartig ausgemessener Aufschweißbiegeversuche die sich ergänzende Bewertung des Materials durch die drei Größen nachgewiesen wurde, und daß es nun nicht mehr darauf ankommt, ob bei anderer Ausmessung des Biege- oder Konstruktionsverhältnissen dieselbe nicht anwendbar sei. Gesichert ist vielmehr, daß an Hand der Leitertafel der Gebrauchswert des Werkstoffs mit der Ermittlung der drei sich ergänzenden Größen ψ_n , S und ΔT festliegt, ohne daß man den Biege- oder Konstruktionsverhältnis noch benötigt, und daß man es immer noch in der Hand hat, die Mindestgrößen für verschiedene Gebrauchszwecke beliebig festzulegen.

Die Leitertafel gilt daher auch für andere Blechdicken als 40 mm, was dadurch zum Ausdruck kommt, das man die Bedingung für die Schweißbarkeit auch folgendermaßen schreiben kann:

$$\psi_n + 10S - 0,1 \Delta T \geq 20.$$

Nur die Errechnung des Biege- oder Konstruktionsverhältnisses in Bild 2 ist an die Blechdicke von 40 mm gebunden.

Würde man aber die Gültigkeit dieser aus der Aufschweißbiegeprobe entwickelten Leitertafel anzweifeln, so würde man damit auch den Wert des Aufschweißbiegeversuchs für die Beurteilung der Schweißbarkeit in Frage stellen.

Für eine Auswahl praktischer Fälle wollen wir nun aus der Zahlentafel 6 die Ursache für einen zu geringen Anrißbiegewinkel betrachten. Bei der ersten Gruppe dieser Proben (benannt Sonderprofil 3), die gleiche chemische Zusammensetzung, aber eine verschiedene Schmelzbehandlung aufwiesen, war die Kerbeinschnürung ψ_n etwa ausreichend, jedoch war der zu geringe Anrißbiegewinkel bei zwei Proben auf eine mangelnde Umwandlungsfreudigkeit, d. h. zu großes ΔT , zurückzuführen. (Die Mindestwertwerte von ΔT lassen sich aus der Leitertafel zu 180° bzw. 200° für die 2. bzw. 3. Probe abgreifen, wenn man die Werte für ψ_n und S als gegeben ansieht.)

Die erste Probe, welche erst bei 73° anriß, zeigt dementsprechend günstige Werte für alle drei Größen ψ_n , S und ΔT .

Bei dem Zoo-Material war umgekehrt die Umwandlungsfreudigkeit in Ordnung, aber ψ_n war mit 15% gering. Wir erinnern uns aus dem ersten Teil dieser Darlegungen, daß der geringe Wert von ψ_n beim Zoo-Material auf innere Lockerungen im Anlieferungszustand zurückzuführen war, die in einer zu großen gleichmäßigen Dehnung oder einem zu geringen Quotienten δ_e/δ_g ihren Ausdruck fand. Da durch Normalisieren der Versuchsstäbe das grobe Korn in ein sehr feines überging, so wurden auch die Werte von ψ_n und δ_e/δ_g etwas günstiger, d. h. der ungünstige Einfluß der inneren Lockerungen auf die mechanischen Eigenschaften wurde zum Teil durch das feine Korn aufgehoben.

Aus der Zahlentafel geht weiterhin hervor, daß das Normalisieren großer Stücke nichts nützt, wenn ΔT zu groß ist, z. B. bei der 2. und 3. Probe des Sonderprofils 3.

Bei zwei weiteren praktischen Beispielen von spröde gebrochenen Brücken oder Brückenteilen (siehe die beiden untersten Zeilen in der Zahlentafel) lag die Bruchursache zum Teil in zu geringer Umwandlungsfreudigkeit, d. h. zu großem ΔT , zum Teil in einem zu geringen ψ_n ,

welches in diesen Fällen auf ein sperriges Gefüge, ähnlich dem Widmannstättenschen Gefüge, zurückzuführen war.

Aus dieser Zahlentafel ersehen wir aber auch, daß die Querschnittsverminderung ψ des normalen Zerreißstabes kein Urteil auf die Bruchsicherheit zuläßt, da bei dem sehr großen Wert von $\psi = 68\%$ in zwei Fällen ein Versagen eingetreten ist. Aber auch die Kerbzähigkeit a_K ist in ihrer Anzeige sehr indifferent. Während sich bei den versagenden Stählen die Kerbzähigkeit zwischen 7 und 11 kgm/cm² bewegt, weist demgegenüber der weitaus sicherste Werkstoff in der obersten Zeile des Bildes nur eine Kerbzähigkeit von 12 kgm/cm² auf.

Kerbschlagbiegeprobe als Wertmesser ungeeignet.

Einfügend seien nun noch einige Worte der Bedeutung der mittels der Kerbschlagbiegeprobe ermittelten „Kerbzähigkeit“ für die Beurteilung der Schweißbarkeit gewidmet.

Im allgemeinen sollte man von einer Einführung dieser Kenngröße als Abnahmegrenzwert abraten. Abgesehen von den ausgesprochenen und unübersichtlichen Unterschieden zwischen Hoch- und Tieflage, welche bei Zahlenangaben sehr störend wirken, sollte man berücksichtigen, daß die Kerbzähigkeit ein Arbeitsbegriff aus dem Produkt Verformung \times Verformungswiderstand ist. Wenn man also beispielsweise bei Stahl St 37 eine Kerbzähigkeit von 18 kgm/cm² erhält, so müßte man bei Einhaltung gleicher Zähigkeit vom Stahl St 52 wegen seiner

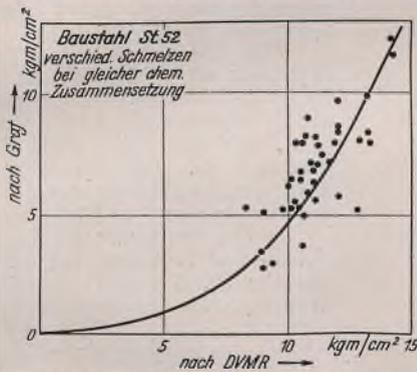


Bild 13. Zusammenhang zwischen der Kerbzähigkeit nach Graf (Sägeschnitt) und der DVMR-Probieren, ausgewertet aus Versuchen von Werner.

höheren Festigkeit eine Kerbzähigkeit von $\frac{18 \cdot 52}{37} = 25$ kgm/cm² verlangen, die er nie erreicht. Oder umgekehrt, wenn man die Kerbzähigkeit des Stahls St 52 mit 12 mkg/cm² als normal voraussetzt, so brauchte man beim Stahl St 37 nur eine Kerbzähigkeit von $\frac{12 \cdot 37}{52} = 8,5$ kgm/cm² zu erwarten, die in Wirklichkeit weit übertroffen wird. Man sieht daraus, welche Wertverschiebungen die Festigkeit, die ja ohnehin im Bauwerk schon eingerechnet wird, in den Begriff der Kerbzähigkeit hinein trägt. Die Kenngröße ψ_n wird den Werkstoffeigenschaften viel besser gerecht.

Verbleibt man aber bei Stahl St 52, so wurde festgestellt, daß die Kerbschlagprobe, mit Sägeschnitt nach Graf geeigneter erschien, das Ergebnis der Längsschweißbiegeprobe zu charakterisieren als die DVMR-Probieren. Nach dem Kurvenverlauf in Bild 13 liegt dies daran, daß im Gebiet der Kerbzähigkeit des St 52, also zwischen 8 und 15 kgm/cm², die Grafsche Probe empfindlicher ist als die DVMR-Probieren. Bei Werkstoffen mit geringerer Kerbzähigkeit würde aber die DVMR-Probieren eine empfindlichere Anzeige ergeben. Man sieht aber aus dem großen Streubereich, daß das gegenseitige Verhältnis beider Werte sehr wechselt und eine sichere Beurteilung nicht zu erwarten ist. Mit den vorliegenden Versuchen konnte dementsprechend eine eindeutige Beziehung zwischen der Kerbzähigkeit (beider Ausführungsformen) und dem Biegewinkel auch nicht gefunden werden.

Schlußbemerkung.

Zum Schluß sei auf einen Ausblick von Houdremont, Schönrock und Wiester⁵⁾ in Stahl u. Eisen 1939 verwiesen, welcher folgendermaßen formuliert war:

„Die Grundlage für die Weiterentwicklung des Werkstoffs wird durch Versuche zu schaffen sein, die unter eindeutigen und zuverlässigen Versuchsbedingungen klären, ob und wie weit sich die einzelnen Stähle in ihrer Verformungsfähigkeit unter mehrachsiger Beanspruchung unterscheiden und welche Kenngrößen dafür maßgebend sind. Dabei wird der Werkstoff in allen in Betracht kommenden Wärmebehandlungszuständen einschließlich des überhitzt gehärteten, wie er beim Schweißen in der beeinflussten Zone auftritt, zu prüfen sein. Aus den Ergebnissen dieser Versuche wird man dann zuverlässig ableiten können, welche Maßnahmen geeignet sind, dem Werkstoff unter den Spannungsbedingungen geschweißter Bauwerke das Höchstmaß an Verformungsfähigkeit zu verleihen und wie man gegebenenfalls diese Eigenschaft prüftechnisch sicher erfassen kann. Es ist durchaus möglich, daß sich aus solchen Versuchen unter Umständen ganz andere Gesichtspunkte für die weitere Entwicklung des Werkstoffs ergeben, als sie aus dem Aufschweißbiegeversuch mit seinen verwickelten und unklaren Prüfbedingungen abgeleitet worden sind.“

Soweit dieser Ausblick der genannten Verfasser. Wir glauben, zuverlässige und prüftechnisch einfache Kenngrößen entwickelt zu haben, die die Verformungsfähigkeit unter mehrachsiger Beanspruchung und in den in Betracht kommenden Wärmebehandlungszuständen eindeutig und vor allem quantitativ genau kennzeichnen und den Wert des Aufschweißbiegeversuchs erwiesen haben. Daß sich hieraus ganz andere, aber nicht unausführbare Gesichtspunkte für die weitere Entwicklung und Kontrolle des Stahls ergeben, darauf wurde wiederholt hingewiesen. Die Kenngrößen der Festigkeit, Streckgrenze, Härte, Bruchdehnung, Querschnittsverminderung, sind alles Verformungsbegriffe der alten Schule, wir müssen sie durch Reißbegriffe ergänzen, wie wir sie hier entwickelt und vorgetragen haben, und solche nun auch für die Weiterentwicklung des Gebrauchswertes der Stähle in Anwendung bringen.

Alle Rechte vorbehalten.

Allgemeine Kräftebestimmung an Körpern mit vier windschiefen Kräften.

Von Prof. Dr.-Ing. habil. Robert Kraus, Forsbach.

Bei einem an drei Stellen statisch bestimmt gestützten Körper, der an einer vierten Stelle eine Last trägt, sind bekanntlich nur die beiden folgenden Stützungen möglich:

- I. Von den drei Stützstellen hat eine Stelle eine festgelegte Wirkungsebene und eine andere eine festgelegte Wirkungslinie, während an der dritten Stützstelle die Kraft eine beliebige, durch den Stützpunkt gehende Wirkungslinie hat.
- II. An den drei Stützstellen sind die Wirkungsebenen festgelegt.

Für die Kräftebestimmung am Körper mit vier windschiefen Kräften, der unter diesen Kräften im Gleichgewicht ist, folgt hieraus, daß nur eine Kraft ganz gegeben sein darf und

1. von der zweiten die Wirkungslinie, von der dritten ein Punkt und eine Wirkungsebene und von der vierten ein Punkt oder
2. von den drei anderen Kräften je ein Punkt und eine Wirkungsebene

festgelegt sein muß. Unter Wirkungsebene wird eine die Wirkungslinie einer Kraft enthaltende Ebene verstanden.

Für die Kräfteermittlung am Körper, der an drei Stellen statisch bestimmt gestützt ist, wurden in einer früheren Arbeit Verfahren gezeigt, die für die häufigeren Sonderfälle in Frage kommen. Da in mehrgliedrigen räumlichen Fachwerken oft Körper mit vier Kräften vorkommen, die sich nicht in Sonderlagen darstellen lassen, ist für diese Fälle ein Verfahren nützlich, das bei jeder Lage des Körpers in der Zeichnung anwendbar ist. Der Verzicht auf die durch Sonderlagen gebotenen Hilfsmittel erfordert die Benutzung allgemeiner Beziehungen zwischen vier einen Körper im Gleichgewicht haltenden Kräften. Aus diesen Beziehungen sind entsprechend den beiden genannten Stützmöglichkeiten zwei Kräfteermittlungsverfahren abzuleiten.

Aus der Mechanik der starren Körper sind als Gleichgewichtsbedingungen bekannt, daß

- a) die geometrische Summe der Kräfte und
- b) für einen beliebigen Bezugspunkt die geometrische Summe der Momente der Kräfte null sein muß.

Die Bedingung b) ist nur dann erfüllt, wenn durch die Wirkungslinien der Kräfte vier Ebenen gelegt werden können, die sich in derselben

Geraden schneiden. Es gibt unendlich viele solcher Geraden. Wenn man nämlich den Momentenbezugspunkt auf einer Wirkungslinie wählt, dann ist hierfür das Moment der zugehörigen Kraft null und die drei anderen Kräfte bilden Momentenvektoren, die sich zu einem Vektordreieck addieren lassen, das als ebenes Gebilde Momentenebenen bedingt, die sich in derselben durch den Bezugspunkt gehenden Geraden schneiden. Durch diese Gerade und die Wirkungslinie mit dem Bezugspunkt ist die vierte Ebene festgelegt. Die Verschiebung des Bezugspunktes auf einer Wirkungslinie liefert sämtliche möglichen Schnittgeraden.

Zur Durchführung der gestellten Aufgaben benutzt man die Möglichkeit der Rückführung der vier windschiefen Kräfte auf drei Kräfte, indem man eine der vier Kräfte durch zwei Teilkkräfte ersetzt und diese mit zwei anderen Kräften zu Mittelkräften vereinigt. Man behält als Ergebnis statt der ursprünglichen vier Kräfte eine dieser Kräfte und zwei Mittelkräfte, unter denen der Körper wie vorher im Gleichgewicht ist. Bekanntlich müssen die drei Kräfte in derselben Ebene liegen, sich in demselben Punkt schneiden und dürfen keine Mittelkraft bilden.

A. Stützung nach I.

Der Körper (Bild 1) wird von den vier Kräften A, B, C, D im Gleichgewicht gehalten, wovon die Kraft A als Last vollständig bekannt ist, von der Kraft B die Wirkungslinie b, von der Kraft C ihr Angriffspunkt C und die Wirkungsebene e_c (senkrecht zu Grund- und Seitenriß, Bild 1b u. c), von der Kraft D nur ihr Angriffspunkt D gegeben ist. Da von der Kraft D nur ihr Angriffspunkt bekannt ist, muß er als Momentenbezugspunkt gewählt werden, durch den die Schnittgerade s_{ab} der vier Ebenen gelegt wird. Die Ebene durch D und die Wirkungslinie b sowie die Ebene durch D und die Wirkungslinie a können gelegt werden, weil diese Wirkungslinien bekannt sind. Die Schnittgerade s_{ab} dieser beiden Ebenen, die durch D geht, weil sich hier die beiden Ebenen schneiden, findet man leicht nach den Regeln der Darstellenden Geometrie und legt nun durch die Gerade s_{ab} und den Angriffspunkt C eine Ebene, in der der Momentenfreiheit wegen die Kraft C liegen muß, die auch in der gegebenen Wirkungsebene e_c liegt, so daß die Schnittgerade beider Ebenen die fehlende Wirkungslinie c der Kraft C ist.

Zur Rückführung des Kräftebildes auf drei Kräfte denkt man sich die unbekannte Kraft D durch zwei Teilkräfte ersetzt, von denen die eine mit der Wirkungslinie d_b mit der Kraft B und die andere mit der Wirkungslinie d_c mit der Kraft C zu einer Mittelkraft vereinigt wird. Eine der beiden Wirkungslinien ist wählbar und daher in Bild 1 die Wirkungslinie d_c vom Angriffspunkt D zum Angriffspunkt C gezogen. Im Punkt C entsteht aus den Kräften C und D_c eine Mittelkraft mit der Wirkungslinie r_c , die mit der Kraft A und der Wirkungslinie r_b aus den Kräften B und D_b in derselben Ebene liegt. Diese Ebene ist die durch die Wirkungslinie a der Kraft A und den Punkt C zu legende Ebene, die die Wirkungslinie b im Punkt E_b schneidet, durch den die Wirkungslinie d_b der Teilkraft D_b geht. Der Punkt E_b wird in bekannter Weise als Durchstoßpunkt der Wirkungslinie b durch die Ebene a, C bestimmt.

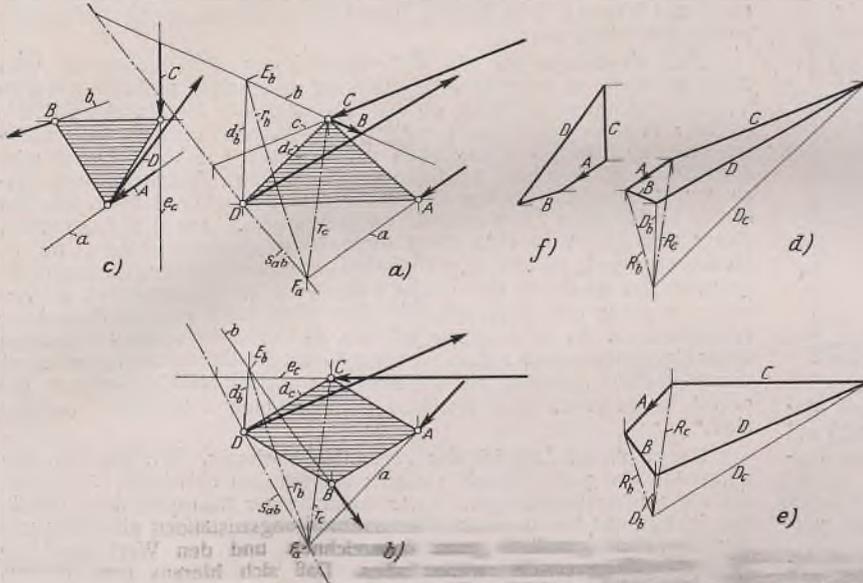


Bild 1a bis f.

Die Wirkungslinie a liegt in der Ebene durch die Schnittgerade s_{ab} und den Punkt A , die Wirkungslinie r_b in der Ebene durch s_{ab} und den Punkt E_b , die Wirkungslinie r_c in der Ebene durch s_{ab} und den Punkt C . Da diese drei Wirkungslinien außer in diesen drei sich in der Geraden s_{ab} schneidenden Ebenen noch in einer ihnen gemeinsamen Ebene liegen und sich in demselben Punkt schneiden müssen, kann dieser Schnittpunkt F_a nur ein Punkt der Geraden s_{ab} sein. Er ist nach Ermittlung der Geraden s_{ab} als deren Schnittpunkt mit der Wirkungslinie a bekannt.

Nachdem so in Auf- und Grundriss (Bild 1a u. b) die nötigen Wirkungslinien bekanntgeworden sind, werden die Kräftepläne (Bild 1d u. e) für Auf- und Grundriß gezeichnet. Man beginnt mit der bekannten Kraft A und zeichnet mit den Wirkungslinien r_b und r_c die Mittelkräfte R_b und R_c , dann mit den Wirkungslinien b und d_b die Kraft B und Teilkraft D_b sowie mit den Wirkungslinien c und d_c die Kräfte C und D_c . Die Teilkräfte D_b und D_c bilden in den Kräfteplänen die am Punkt D angreifende Kraft D .

Zur Kontrolle und für besondere Lagen wird der Seitenriß des Körpers und der zugehörige Kräfteplan (Bild 1c u. f) gezeichnet. Der Kräfteplan des Seitenrisses muß sich auch als Projektion aus Auf- und Grundrißkräfteplan ergeben.

Beispiele.

An dem Gelenkfachwerk (Bild 2) sind die Gelenkkräfte zu ermitteln, wenn das Glied 1 durch eine Last P belastet ist. Die den Gelenken

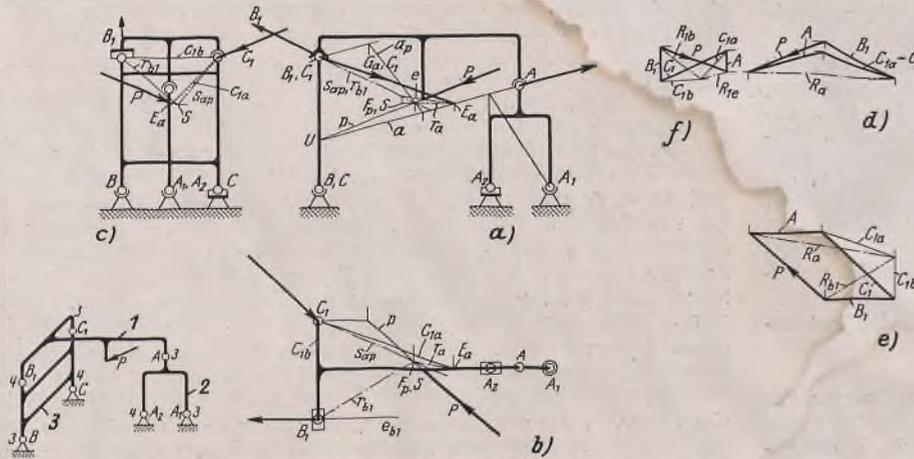


Bild 2a bis f.

beigeschriebenen Zahlen bedeuten deren Freiheitsgrade. Demnach sind die Gelenke A, A_1, B, C_1 Kugelschalengelenke und die Gelenke A_2, B_1, C Kugelrillengelenke. Ausführungen der weniger bekannten Kugelrillengelenke sind in Bild 3, 4, 5a u. b angedeutet. In Bild 3 u. 4 sind Zwischengelenke dargestellt, die jedoch auch als Stützgelenke anwendbar sind, wobei bei Druckbelastung die Ausführung des halben Gelenks genügt. Bei dem Kugelrillengelenk nach Bild 3 ist die Kugel durch Zapfen mit dem einen Fachwerkteil verbunden und liegt zur Verteilung der Gelenkkraft in einem zweiteiligen Ring, der im anderen Fachwerkteil verschiebbar ist. Die Wirkungsebene dieses Gelenks ist die durch die Kugelmittle gehende Ringebene.

Eine einfachere Ausführung, die bei Kupplungen im Maschinenbau vorkommt, zeigt Bild 4, bei der der Ring weggelassen und dafür statt der Kugel eine Tonne ausgeführt ist, die wegen der größeren Krümmungsradien geringere Flächenpressung als die Kugel ergibt. Die Tonne muß zum Unterschied von der Kugel mit Spiel in die Bohrung eingesetzt werden, damit sie die dem Freiheitsgrad entsprechende Beweglichkeit hat.

Eine andere Ausführung ist nach Bild 5a u. b bei einem Stützlager mit Druckbelastung möglich. In der Grundplatte 1 ist ein Zylinderabschnitt 2 verschiebbar, auf dem quer zu ihm ein Zylinderabschnitt 3 ruht, der sich um einen Zapfen drehen kann. Auf dem Teil 3 stützt sich, in einer Rille drehbar, das Fachwerk ab. Das Stützlager erlaubt so alle Bewegungen außer Verschiebewebungen in der Ebene senkrecht zur Rille der Grundplatte 1 und hat daher den Freiheitsgrad 4.

In Bild 2a, b u. c ist das Fachwerk von Bild 2 in Auf-, Grund- und Seitenriß dargestellt. Die Wirkungsebenen der Gelenke B_1, C liegen parallel zur Aufrißebene, während die Wirkungsebene des Gelenks A_2 senkrecht dazu liegt.

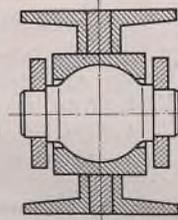


Bild 3.

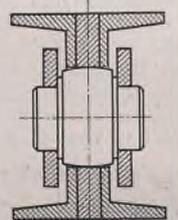


Bild 4.

Am Glied 1 sind zur Kräfteermittlung außer der Last P die Gelenke als Angriffspunkte und außerdem die Wirkungsebene des Gelenks B_1 bekannt. Zur Durchführung der Kräftebestimmung nach Bild 1 muß noch eine Wirkungslinie ermittelt werden. Man findet in Bild 2a die Wirkungslinie a dadurch, daß das Glied BCB_1C_1 auf der Aufrißebene senkrecht steht und daher in dieser Projektion die Kräfte B_1 und C_1 eine Mittelkraft mit der Wirkungslinie durch die Gelenkprojektionen B_1, C_1 und B, C bilden, denn so erscheint im Aufriß das Glied 1 unter dieser Mittelkraft, der Last P und der Gelenkkraft A im Gleichgewicht. Es muß daher die Wirkungslinie a durch den Schnittpunkt U der Kraft P mit der Mittelkraft aus den Kraftprojektionen B_1, C_1 gehen.

Da am Gelenk C_1 nur der Kraftangriffspunkt bekannt ist, wird hier der Ersatz der Kraft C_1 durch Teilkräfte C_{1a} und C_{1b} vorgenommen und das Gelenk C_1 als Momentenbezugspunkt verwendet. Man legt von C_1 aus die Ebenen durch die Wirkungslinie p der Kraft P und die Wirkungslinie a und bestimmt ihre Schnittgerade s_{ap} , die die vier Kräfte am Glied 1 schneidet. Diese Schnittgerade wurde in Bild 2a u. b dadurch bestimmt, daß im Grundriß eine die Kraft P enthaltende senkrechte Ebene errichtet und im Aufriß deren Schnittgerade a_p mit der Ebene durch C_1 und a gesucht wird. Der Schnittpunkt S der Geraden a_p mit der Wirkungslinie p ist ein Punkt in der Ebene C_{1a} und C_{1b} und daher der gesuchte zweite Punkt der Schnittgeraden s_{ap} .

Da die Teilkräfte C_{1a} und C_{1b} mit den Kräften A und B_1 vereinigt werden, ist die Wirkungslinie p diejenige, welche den hier mit S zusammenfallenden Punkt F_p angibt, durch den die Wirkungslinien r_a, r_{b1} der Mittelkräfte aus den Kräften A, C_{1a} bzw. B_1, C_{1b} gehen. Die Wirkungslinie r_{b1} läßt sich sofort zeichnen, weil die Teilkraft C_{1b} durch das Gelenk B_1 gelegt wurde, durch das deshalb auch die Linie r_{b1} geht,

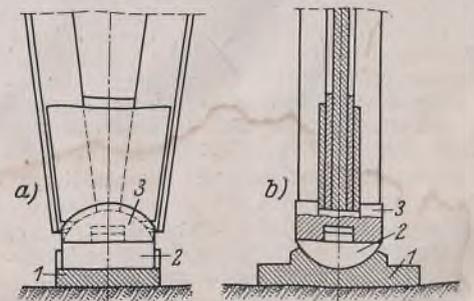


Bild 5a u. b.

während der Schnittpunkt E_a der noch unbekanntes Wirkungslinie der Teilkraft C_{1a} mit der Wirkungslinie a gesucht werden muß. Der Punkt E_a und die Wirkungslinie r_a müssen mit den Wirkungslinien p und r_{b1} in derselben Ebene liegen, weshalb man die Schnittgerade e der Ebene $r_{b1}p$ z. B. mit der durch die Wirkungslinie a senkrecht zum Grundriß gelegten Ebene bestimmt. Sie trifft die Wirkungslinie a im Punkt E_a als dem Punkt, an dem die Wirkungslinie a die Ebene $r_{b1}p$ durchstößt. Mit dem Punkt E_a werden die Wirkungslinie r_a und diejenige der Teilkraft C_{1a} bekannt. Man bestimmt noch die Wirkungslinie b_1 des Gelenks B_1 als Schnittgerade der Wirkungsebene von B_1 mit der Ebene $C_1 r_{b1}$ und kann nun die Kräftepläne (Bild 2d, e u. f) des Auf-, Grund- und Seitenrisses zeichnen.

In Bild 2a sind die Wirkungslinien der Gelenkkräfte A_1, A_2 eingezeichnet, die mit der bekannten Wirkungslinie a und Wirkungsebene des Gelenks A_2 gefunden werden.

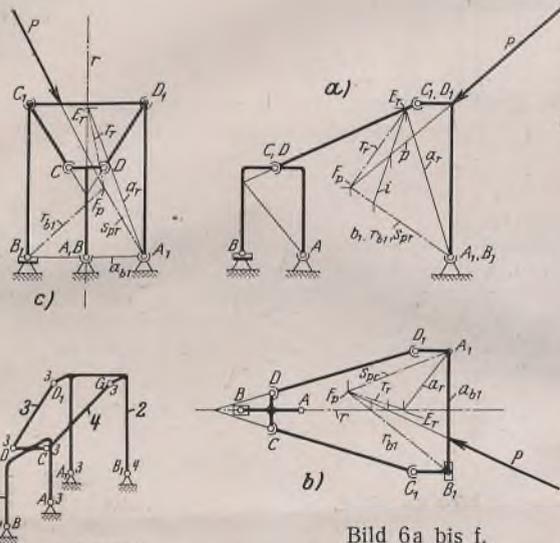


Bild 6a bis f.

Die Kräfte der Gelenke B, C bestimmt man z. B. mit Hilfe der Kraft B_1 oder C_1 nach dem Verfahren Bild 1.

Das Fachwerk (Bild 6) enthält die Glieder 1 und 2, deren Gelenkkräfte nach dem Verfahren des Bildes 1 bestimmbar sind. Der einfache Fall, daß die Glieder 3 und 4 symmetrisch zum Glied 1 liegen und sich ihre Wirkungslinien in der Symmetrieebene dieses Gliedes schneiden, ist der in den Bildern 6a bis f vorgenommenen Gelenkkräfteermittlung zugrunde gelegt. Die Gelenkkräfte C_1 und D_1 bilden so eine Mittelkraft R , deren Wirkungslinie r in der Ebene $DD_1C_1D_1$ und in der lotrechten Symmetrieebene des Fachwerks liegt. Ersetzt man vorläufig die Kräfte C_1 und D_1 durch die Mittelkraft R , so sind am Glied $A_1B_1C_1D_1$ vier Kräfte vorhanden, von denen die Last P völlig, von der Kraft R die Wirkungslinie r , von der Kraft B_1 der Angriffspunkt B_1 und die Wirkungsebene und von der Kraft A_1 ihr Angriffspunkt bekannt sind. Daher ist das Kräfteermittlungsverfahren nach Bild 1 anwendbar.

Da von der Kraft A_1 nur das Gelenk als Angriffspunkt bekannt ist, werden von hier aus die Ebenen durch die Wirkungslinien p und r gelegt und deren Schnittgerade s_{pr} bestimmt. Die Teilkräfte der Kraft A_1 erhalten die durch das Gelenk B_1 gelegte Wirkungslinie a_{b1} und die durch den auf der Wirkungslinie r liegenden, noch unbekanntes Punkt E_r zu legende Wirkungslinie a_r . Daher bleibt nur die Wirkungslinie p als solche weiter verwendbar und bestimmt deshalb auf der Schnittgeraden s_{pr} den Punkt F_p , durch den die Wirkungslinien r und r_{b1} der Mittelkräfte aus den Kräften R, A_r bzw. B_1, A_{b1} gehen. Die Wirkungslinie r_{b1} kann schon gezogen werden, während für die Wirkungslinie r_r noch der Punkt E_r zu bestimmen ist. Er liegt dort, wo die Wirkungslinie r die durch die Wirkungslinien r_{b1} und p festgelegte Ebene durchstößt, weil die Wirkungslinie r_r in dieser Ebene liegen muß. Zur Bestimmung des Punktes E_r ist im Grundriß (Bild 6b) durch die Wirkungslinie r eine senkrechte Ebene gelegt, deren Schnittpunkte mit den Wirkungslinien p und r_{b1} in den Aufriß (Bild 6a) projiziert wurden und dort die in der erwähnten senkrechten Ebene liegende Gerade i festlegen, die die Wirkungslinie r im Punkt E_r trifft, der aus dem Aufriß in den Grundriß projiziert wird. Als Schnittgerade der Ebene durch A_1 und r_{b1} mit der Wirkungsebene von B_1 wird noch die Wirkungslinie b_1 der Kraft B_1 bestimmt und nun der Kräfteplan (Bild 6d) des Aufrisses und der Kräfteplan (Bild 6e) des Grundrisses gezeichnet. Beide Kräftepläne müssen Projektionen voneinander sein. Zur weiteren Kontrolle stellt man aus Bild 6d u. e durch Projektion den Kräfteplan (Bild 6f) des Seitenrisses her, bestimmt im Seitenriß (Bild 6c) durch Projektion aus Auf- und Grundriß (Bild 6a u. b) die Wirkungslinien und vergleicht sie mit dem Kräfteplan (Bild 6f).

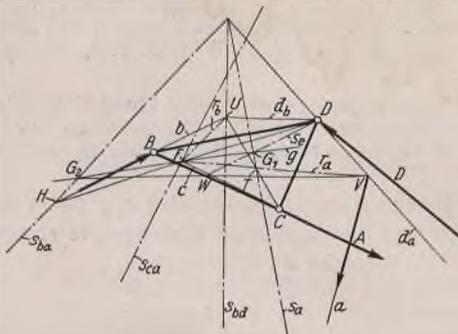


Bild 7.

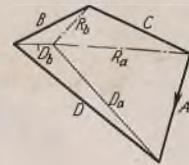


Bild 7a.

B. Stützung nach II.

An dem Körper (Bild 7) greift die bekannte Kraft A an, während an den Stellen B, C, D unbekanntes Kräfte vorhanden sind, von denen nur die Wirkungsebenen bekannt sind, und die mit der Kraft A zusammen den Körper im Gleichgewicht halten.

Zur Bestimmung der fehlenden Kräfte werden wie früher die vier Kräfte auf drei verringert und deren Schnittpunkt und Wirkungslinien gesucht. Zu diesem Zweck ist in Bild 7 die Kraft D als eine beliebige der drei unbekanntes Kräfte durch zwei Teilkräfte ersetzt, wovon eine mit der bekannten Kraft A und die andere mit der unbekanntes Kraft B zu einer Mittelkraft R_a bzw. R_b vereinigt werden. Die Wirkungslinien r_a und r_b schneiden sich in dem Punkt F , durch den auch die noch unbekanntes Wirkungslinie c der Kraft C gehen muß.

Zur Durchführung der Kräfteermittlung wird in Bild 7 die bekannte Kraft A bis zum Durchstoßpunkt V mit der Wirkungsebene der Kraft D verschoben, weil diese Kraft durch Teilkräfte ersetzt werden soll. Die mit der Kraft A zu vereinigende Teilkraft D_a hat eine Wirkungslinie

$d_a = DV$. Da diese Teilkraft in der Wirkungsebene der Kraft D liegt, enthält diese Ebene auch die mit der Kraft B zu vereinigende zweite Teilkraft D_b . Wegen der Vereinigung müssen sich die Wirkungslinie b der Kraft B und die Wirkungslinie d_b der Teilkraft D_b in einem Punkt U auf der Schnittgeraden s_{bd} der Wirkungsebenen der Kräfte B und D treffen. Man bestimmt daher die Schnittgerade s_{bd} als einen geometrischen Ort für den unbekanntes Punkt U .

Die Mittelkraft R_a mit der Wirkungslinie r_a wird aus den Kräften A und D_a gebildet und liegt deshalb in der durch die Wirkungslinien a und d_a festgelegten Ebene, die deshalb auch den Schnittpunkt F enthält. Die Ebene durch die Wirkungslinien b und d_b , die vorläufig noch unbekannt sind, enthält die Wirkungslinie r_b und daher ebenfalls den Punkt F , der deshalb in der Schnittgeraden $HD = s$ dieser Ebene mit der Ebene durch d_a und a liegen muß. Da durch den Punkt F auch die noch unbekanntes Wirkungslinie c geht, liegt er auch in der Schnittgeraden s_{ca} der Wirkungsebene der Kraft C mit der Ebene durch a und d_a . Diese Schnittgerade s_{ca} ist zu bestimmen, da die Wirkungsebene von C bekannt ist. Außerdem ist die Schnittgerade s_{ba} der Wirkungsebene von B mit der Ebene durch d_a und a zu zeichnen, auf der die Wirkungslinie b diese Ebene in einem Punkt H trifft.

Die Ebene, die den Punkt F und die sich in ihm schneidenden Wirkungslinien r_a, r_b und c enthält, geht durch die Punkte V, U und C , enthält also die Gerade UC , die von der Wirkungslinie r_a geschnitten wird. Die Gerade UC liegt auch in der Ebene durch die bekannte Schnittgerade s_{bd} und das Gelenk C . Die Schnittgerade s_a dieser Ebene mit der Ebene durch a und d_a wird ebenfalls von der Wirkungslinie r_a geschnitten, die deshalb durch den Punkt T der Geraden UC mit der Schnittgeraden s_a geht. Die Gerade s_a ist bestimmbar, während die Gerade UC wegen des unbekanntes Punktes U nicht gezeichnet werden kann.

Wenn man auf der Geraden s_{bd} einen beliebigen Punkt U wählt, und die Gerade UB bis zum Schnittpunkt H mit der Geraden s_{ba} zieht, erhält man eine Spur $HD = s$, auf der der zu dem gewählten Punkt U gehörende Punkt F liegt. Vom gewählten Punkt U aus ist die Gerade UC zu ziehen, durch deren Schnittpunkt T mit der Geraden s_a von V aus die Wirkungslinie r_a zu ziehen ist, die die Spur s im Punkt F trifft. Der Punkt F müßte außerdem auf der Geraden s_{ca} liegen, was bei der beliebigen Wahl des Punktes U im allgemeinen nicht der Fall sein dürfte.

Die Verschiebung des Punktes U auf der Geraden s_{bd} bedingt infolge der Geradenkonstruktion eine ähnliche Verschiebung des Punktes F . Der Punkt F verschiebt sich also ebenfalls auf einer Geraden, die in Bild 7 mit g bezeichnet ist. Wo die Gerade g die Schnittgerade s_{ca}

schneidet, liegt der richtige Punkt F . Man findet durch ihn den wirklichen Punkt U durch Bestimmung des Schnittpunktes T oder H mit Hilfe der Geraden VF oder DF und der Geraden CT bzw. HB , die die Gerade $s_{b,d}$ in U schneiden.

Zur Festlegung der Geraden g wird entweder der Punkt U in zwei beliebigen Lagen gewählt und dafür die beschriebene Konstruktion durchgeführt, oder es werden in einfacherer Weise die Punkte G_1 und G_2 ermittelt.

Als Punkt U sei der Durchstoßpunkt der Geraden $s_{b,d}$ durch die Ebene BCD gewählt. Dann liegt die zugehörige Wirkungslinie r_b und die Spur s in dieser Ebene. Letztere ist als Schnittgerade der Ebene UBD mit der Ebene $d_a a$ auch die Schnittgerade dieser Ebene mit der Ebene BCD . Auf ihr liegt der Punkt F , der auch in der Ebene UCV liegen muß. Er liegt also dort, wo sich die Ebenen BCD , UCV und $d_a a$ schneiden. Da die Linie UC hier in der Ebene BCD liegt, muß auch ihr Schnittpunkt T mit der Geraden s_a in der Ebene BCD liegen. Da der Punkt T auch in der Ebene $d_a a$ liegt, kann er nur auf der Spur DW liegen, die auch den Punkt F enthält. Da ferner die Punkte F und T auf derselben Geraden r_a von V aus liegen, müssen sie zusammenfallen. Man findet also diesen Punkt F , der in Bild 7 mit G_1 bezeichnet ist, als Schnittpunkt der Spur DW mit der Geraden s_a .

Um einen zweiten Punkt F der Geraden g , der in Bild 7 mit G_2 bezeichnet ist, zu finden, betrachtet man die Ebene VCB als diejenige, in der F und die Wirkungslinien r_a, r_b, c liegen sollen. Da die Wirkungslinie r_a auch in der Ebene $d_a a$ liegt, ist VW diese Wirkungslinie. Die Ebene VCB schneidet die durch die Schnittgeraden $s_{b,d}$ und $s_{b,a}$ festgelegte Wirkungsebene der Kraft B in der Geraden $G_2 BU$. Da die Ebene UCB den Punkt U enthält und die Wirkungsebene von B schneidet, muß die Schnittgerade die Wirkungslinie b sein. Die Ebene VCB enthält also die beiden Wirkungslinien r_b und b und müßte auch die Wirkungslinie d_b enthalten. Da die Ebene VCB jedoch nicht durch den Angriffspunkt D geht, ist die Wirkungslinie d_b und die zugehörige Teilkraft D_b unmöglich. Daher muß die Wirkungslinie r_b in die Linie b fallen. Sie schneidet die Wirkungslinie r_a im Punkt G_2 , der somit der zu diesem Fall gehörende Punkt F ist.

Da die Gerade g nunmehr festliegt, wird der wirkliche Punkt F (Bild 7) als ihr Schnittpunkt mit der Geraden $s_c a$ gefunden. Damit können die Wirkungslinien r_a, r_b, c , die Spur s und die Wirkungslinie b und danach auch der Kräfteplan (Bild 7a) gezeichnet werden.

Beispiel.

Am Gelenkfachwerk (Bild 8), bei dem die Glieder 1, 2, 3 ein belastetes Glied 4 stützen, sind die Ebenen der Glieder 1, 2, 3 die Wirkungsebenen der Gelenke B, C, D am Glied 4, dessen Stützkkräfte demnach nach dem Ermittlungsverfahren von Bild 7 bestimmbar sind. An Stelle der bekannten Kraft A (Bild 7) ist in Bild 8a bis d die Kraft P gesetzt und daher statt der Zeiger a in Bild 7 der Zeiger p zu setzen. Die übrigen

Bezeichnungen und die Durchführung der Kräfteermittlung ist dieselbe wie in Bild 7.

Man bestimmt in Bild 8a, b den Durchstoßpunkt V der Last P durch die Wirkungsebene des Gelenks D , zieht die Wirkungslinie d_p von V nach D und ermittelt die Schnittgeraden $s_{b,p}$ und $s_{c,p}$ der Wirkungsebenen der Gelenke B und C mit dieser Ebene, bestimmt ferner die Schnittgerade $s_{b,d}$ der Wirkungsebenen der Gelenke B und D und die Schnittgerade s_p der Ebene durch die Gerade $s_{b,d}$ und das Gelenk C mit der Ebene durch P und D und ermittelt noch die Schnittgerade DW dieser Ebene mit der Ebene durch die Gelenke B, C, D . Im Grundriß

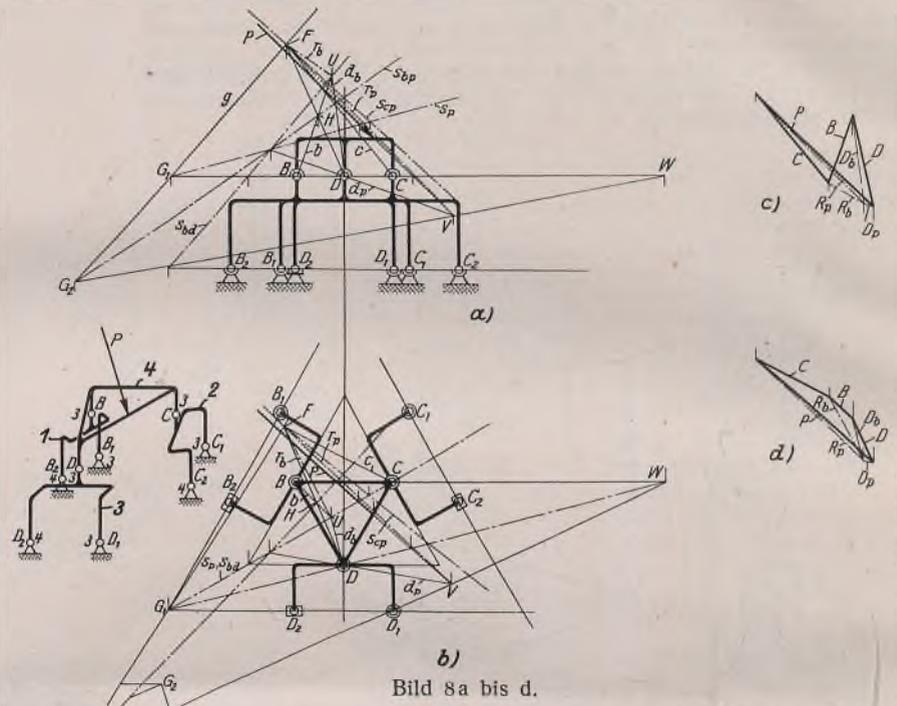


Bild 8a bis d.

(Bild 8b) findet man jetzt als Schnittpunkt der Geraden DW mit der Geraden s_p den Punkt G_1 und als Schnittpunkt der Geraden VW mit der Geraden $s_{b,p}$ den Punkt G_2 . Beide Punkte werden in den Aufriß Bild 8a gelotet, wo sie zur Kontrolle noch einmal in derselben Weise ermittelt werden. Da die Gerade g nunmehr bekannt ist, kennt man auch ihren Schnittpunkt F mit der Geraden $s_{c,p}$ und kann die Wirkungslinien r_a und c von V und C nach F ziehen. Zur Festlegung der Wirkungslinien b und r_b wird die Gerade DF bis zum Schnitt H mit der Geraden $s_{b,p}$ und von H durch das Gelenk B die Wirkungslinie b bis zum Schnittpunkt U mit der Geraden $s_{b,d}$ gezogen. Von U nach F ist nun die Wirkungslinie r_b und von U nach D die Wirkungslinie d_b zu ziehen. Da die nötigen Wirkungslinien bekannt sind, können die Kräftepläne des Auf- und Grundrisses (Bild 8c u. d) hergestellt werden.

Alle Rechte vorbehalten.

Berechnung des Verhaltens von Hängebrücken unter Windbelastung.

Von Ingenieur Arne Selberg, Technische Hochschule Trondheim, Norwegen.

Unter der Einwirkung des Seitenwindes werden sowohl die Brückenbahn als auch die Kabel sich in der Seitenrichtung nach außen biegen, und es wird eine Kraftübertragung zwischen der Brückenbahn (horizontaler Windverband) und den Kabeln durch die schräggestellten Hängestangen stattfinden (Bild 1 u. 2).

Die Windkraft, welche auf die Brückenbahn und die bewegliche Last einwirkt, ist $W_b(x)$ t/m, die Windkraft auf das Kabel und den oberen Teil

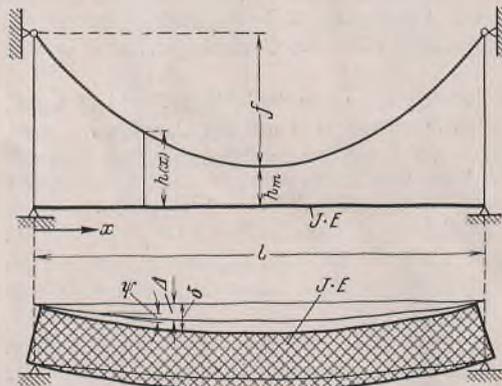


Bild 1.

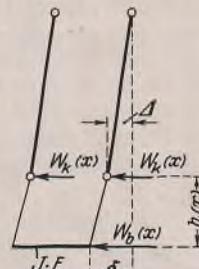


Bild 2.

der Hängestangen $W_k(x)$ t/m. Das Gewicht der Brückenbahn je Meter infolge des Eigengewichts und der Belastung, d. h. des gesamten Gewichts, welches von den Hängestangen getragen wird, ist $q(x)$ und die Kabelkraft H .

Wir können nun folgende Gleichung für die Ausbiegung Δ der Kabel ansetzen:

$$W_k(x) dx + q(x) \frac{\delta - \Delta}{h(x)} dx = H [\text{tg}(\psi - d\psi) - \text{tg} \psi] = -H d \text{tg} \psi = -H \Delta'' dx,$$

oder umgeordnet:

$$(1) \quad W_k(x) + q(x) \frac{\delta - \Delta}{h(x)} = -H \Delta''.$$

Für die Ausbiegung des Windverbandes haben wir die Beziehung:

$$W_b(x) dx - 2q(x) \frac{\delta - \Delta}{h(x)} dx = -dQ = -M'' dx = (JE \delta''') dx,$$

oder

$$(2) \quad W_b(x) - 2q(x) \frac{\delta - \Delta}{h(x)} = (JE \delta''') = -M''.$$

In diesen Gleichungen bedeutet Δ die Ausbiegung der Kabel und δ die des Windverbandes im Punkte x , $h(x)$ bedeutet die Länge der Hängestange im selben Punkte.

Gl. (1) u. (2) kann man durch Probieren lösen, indem man einen Verlauf von δ und Δ annimmt. Durch wiederholte Durchrechnung des Systems erhält man einen Verlauf von δ und Δ , der Gl. (1) u. (2) für alle Werte von x erfüllt. Im allgemeinen wird man nach ein paar Durchrechnungen eine zufriedenstellende Lösung erhalten. Allerdings sind diese Berechnungen sehr beschwerlich und langwierig. In dieser Arbeit werden wir eine angenäherte Lösung angeben, welche mit einem Minimum von Rechenarbeit einen ausreichenden Grad von Genauigkeit ergibt.

Im allgemeinen können wir ohne größere Fehler folgende Vereinfachungen in Gl. (1) u. (2) vornehmen: Das Trägheitsmoment des Windverbandes I sei konstant über die ganze Brückenlänge. Ebenso sei $W_k(x)$ und $W_b(x)$ konstant über die ganze Brückenlänge, also gleich W_k bzw. W_b . Das ist einigermaßen richtig für die zwei wichtigsten Fälle: bei Wind auf die vollständig belastete Brücke und bei Wind auf die unbelastete Brücke.

Gl. (1) u. (2) kann geschrieben werden:

$$(1a) \quad W_k + q \cdot \frac{\delta - \Delta}{h(x)} = -H \Delta''$$

und

$$(2a) \quad W_b - 2q \cdot \frac{\delta - \Delta}{h(x)} = JE \delta'''' = -M''$$

Eine direkte Lösung dieser Gleichungen ist ebenfalls sehr beschwerlich.

Wir führen daher folgende Substitution ein:

$$\frac{\delta - \Delta}{h(x)} = \frac{\delta_m - \Delta_m}{h_m} \left(A_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + A_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} + A_5 \cdot \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right)$$

wo δ_m und Δ_m die respektiven Ausbiegungen in der Brückenmitte sind und h_m die Länge der mittleren Hängestange bedeutet. Im Normalfalle ergibt sich, daß es hinreichend ist, die ersten zwei oder drei Glieder der Sinusreihe zu nehmen.

Im folgenden führen wir die Rechnung mit drei Gliedern der Reihe durch.

Bei Einsetzung für $\frac{\delta - \Delta}{h}$ in Gl. (1a) u. (2a) erhält man:

$$(3) \quad H \Delta = W_k \cdot \frac{l x - x^2}{2} + q \cdot \frac{\delta_m - \Delta_m}{h_m} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \left\{ A_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{9} \cdot A_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{25} \cdot A_5 \cdot \sin \frac{5\pi x}{l} \right\}$$

$$(4) \quad JE \delta = W_b \cdot \frac{l^3 x - 2 l x^3 + x^4}{24} - 2q \cdot \frac{\delta_m - \Delta_m}{h_m} \cdot \frac{l^4}{\pi^4} \cdot \left\{ A_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{81} \cdot A_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{625} \cdot A_5 \cdot \sin \frac{5\pi x}{l} \right\}$$

$$(5) \quad M = W_b \cdot \frac{l x - x^2}{2} - 2q \cdot \frac{\delta_m - \Delta_m}{h_m} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \left\{ A_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{9} \cdot A_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{25} \cdot A_5 \cdot \sin \frac{5\pi x}{l} \right\}$$

Für das Moment in der Brückenmitte, das im allgemeinen das maximale Moment und daher von größtem Interesse ist, erhält man:

$$(5a) \quad M_m = \frac{W_b l^2}{8} - 2q \cdot \frac{\delta_m - \Delta_m}{h_m} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \left\{ A_1 - \frac{1}{9} \cdot A_3 + \frac{1}{25} \cdot A_5 \right\}$$

Für den Ausdruck $\frac{\delta_m - \Delta_m}{h_m}$ können wir mit Hilfe der Gl. (3) u. (4) folgende Formel finden:

$$(6) \quad \frac{\delta_m - \Delta_m}{h_m} = \frac{\frac{5}{384} \cdot \frac{W_b l^4}{JE} - \frac{1}{8} \cdot \frac{W_k l^2}{H}}{h_m + B \left(A_1 - \frac{1}{81} \cdot A_3 + \frac{1}{625} \cdot A_5 \right) + C \left(A_1 - \frac{1}{9} \cdot A_3 + \frac{1}{25} \cdot A_5 \right)}$$

wo $B = 2q \cdot \frac{l^4}{\pi^4 JE}$ und $C = q \cdot \frac{l^2}{\pi^2 H}$.

Für die Bestimmung der Koeffizienten A_1 , A_3 und A_5 können wir davon Gebrauch machen, daß die Beziehung:

$$\frac{\delta - \Delta}{h(x)} = \frac{\delta_m - \Delta_m}{h_m} \left(A_1 \cdot \sin \frac{\pi x}{l} + A_3 \cdot \sin \frac{3\pi x}{l} + A_5 \cdot \sin \frac{5\pi x}{l} \right)$$

außer an den Brückenenden auch für $x = \frac{1}{6} \cdot l$; $\frac{1}{3} \cdot l$ und $\frac{1}{2} \cdot l$ erfüllt sein soll, wenn man δ und Δ aus den Gl. (3) u. (4) einsetzt. Aus Symmetriegründen wird dann auch die Beziehung für $x = \frac{2}{3} \cdot l$ und $\frac{5}{6} \cdot l$

erfüllt sein. Die Punkte $\frac{1}{6} \cdot l$; $\frac{1}{3} \cdot l$ und $\frac{1}{2} \cdot l$ sind so gewählt, daß man ein Minimum an Rechenarbeit erhält.

Für den Punkt $x = \frac{1}{2} \cdot l$ gibt dies die folgende Gleichung:

$$(7) \quad A_1 - A_3 + A_5 = 1.$$

Für Punkt $x = \frac{1}{3} \cdot l$ erhalten wir:

$$(8) \quad A_1 \left\{ h_3 + (B + C)(1 - D_3) \right\} + A_3 \left\{ \left(\frac{B}{81} + \frac{C}{9} \right) D_3 \right\} - A_5 \left\{ h_3 + \left(\frac{B}{625} + \frac{C}{25} \right) (1 + D_3) \right\} = D_3 h_m$$

wo h_3 die Länge der Hängestange beim Punkt $x = \frac{1}{3} \cdot l$ ist und D_3 bedeutet:

$$D_3 = \frac{\frac{11}{972} \cdot \frac{W_b l^4}{JE} - \frac{1}{9} \cdot \frac{W_k l^2}{H}}{\frac{5}{384} \cdot \frac{W_b l^4}{JE} - \frac{1}{8} \cdot \frac{W_k l^2}{H}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Für den Punkt $x = \frac{1}{6} \cdot l$ erhält man:

$$(9) \quad A_1 \left\{ h_6 + (B + C)(1 - D_6) \right\} + A_3 \left\{ 2 h_6 + \left(\frac{B}{81} + \frac{C}{9} \right) (2 + D_6) \right\} + A_5 \left\{ h_6 + \left(\frac{B}{625} + \frac{C}{25} \right) (1 - D_6) \right\} = D_6 h_m$$

wo h_6 die Länge der Hängestange im Punkte $x = \frac{1}{6} \cdot l$ ist und D_6 bedeutet:

$$D_6 = \frac{\frac{205}{31104} \cdot \frac{W_b l^4}{JE} - \frac{5}{72} \cdot \frac{W_k l^2}{H}}{\frac{5}{384} \cdot \frac{W_b l^4}{JE} - \frac{1}{8} \cdot \frac{W_k l^2}{H}} \cdot 2.$$

Wie man sieht, erhält man so drei Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten A_1 , A_3 und A_5 . Hat man die Koeffizienten bestimmt, so setzt man in Gl. (3) bis (6) ein und kann mit sehr großer Genauigkeit die gesuchten Größen berechnen.

In sehr vielen Fällen bei kleineren und leichten Brücken erweist sich der Mehraufwand an Rechnung, der aus der Mitnahme des dritten Gliedes in der Sinusreihe folgt, als überflüssig. Man kann ein vollkommen zufriedenstellendes Resultat unter Verwendung von nur zwei Gliedern erzielen. In diesen Fällen benutzen wir die Punkte $x = \frac{1}{4} \cdot l$ und $\frac{1}{2} \cdot l$ statt $x = 1/6 l$; $1/3 l$ und $1/2 l$.

Wir erhalten so die folgenden Gleichungen für A_1 und A_3 :

$$A_3 = A_1 - 1$$

und

$$(10) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{h_4 + D_4 h_m + B \cdot \frac{1 + D_4}{81} + C \cdot \frac{1 + D_4}{9}}{2 h_4 + B \cdot \frac{82 - 80 D_4}{81} + C \cdot \frac{10 - 8 D_4}{9}} \\ D_4 = \frac{19 \cdot \frac{W_b l^4}{JE} - \frac{3}{32} \cdot \frac{W_k l^2}{H}}{\frac{5}{384} \cdot \frac{W_b l^4}{JE} - \frac{1}{8} \cdot \frac{W_k l^2}{H}} \cdot \sqrt{2} \end{cases}$$

Die Gleichungen sind mit Hinsicht auf A_1 gelöst; h_4 bezeichnet hier die Länge der Hängestange im Punkte $x = \frac{1}{4} \cdot l$.

Falls man die Berechnung mit nur zwei Gliedern A_1 , A_3 durchführt, kann man sich der Formeln (3) bis (6) bedienen, indem man $A_5 = 0$ setzt.

Die Querkraft im Windverband wird:

$$(11) \quad Q = W_b \cdot \frac{l - 2x}{2} - 2q \cdot \frac{\delta_m - \Delta_m}{h_m} \cdot \frac{l}{\pi} \left\{ A_1 \cdot \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} \cdot A_3 \cdot \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5} \cdot A_5 \cdot \cos \frac{5\pi x}{l} \right\}$$

und die Auflagerkraft des Windverbandes an den Brückenenden:

$$(11a) \quad Q_0 = \frac{1}{2} \cdot W_b l - 2q \cdot \frac{\delta_m - \Delta_m}{h_m} \cdot \frac{l}{\pi} \left\{ A_1 + \frac{1}{3} \cdot A_3 + \frac{1}{5} \cdot A_5 \right\}$$

Die Windkraft, welche durch die Kabel auf die Türme übertragen wird, ergibt sich auf entsprechende Weise:

$$(12) \quad W_t = l W_k + 2q \cdot \frac{\delta_m - \Delta_m}{h_m} \cdot \frac{l}{\pi} \left\{ A_1 + \frac{1}{3} \cdot A_3 + \frac{1}{5} \cdot A_5 \right\}$$

Im folgenden wollen wir durch ein Beispiel die Genauigkeit der hier ausgeführten Annäherungsrechnung für die Windwirkungen und Formänderungen von Hängebrücken zeigen.

Als Beispiel wird ein Projekt für die Hudson-Brücke (USA.) benutzt¹⁾.
 $l = 4000$ ft.; $f = 500$ ft.; $h_m = 10$ ft.; $q = 11$ kipd./ft.; $H = 55\,000$ kipd.;
 $JE = 4698 \cdot 10^7$ kipd. ft.²; $W_b = 1,15$ kipd./ft. und $W_k = 0,075$ kipd./ft.

Untenstehend haben wir ein Schema der Formänderungen und Momente im Viertelpunkt und in der Brückenmitte zusammengestellt:

	$M l/2$ kipd./ft.	$M l/4$ kipd./ft.	$\delta l/2$ ft.	$\delta l/4$ ft.	$\Delta l/2$ ft.	$\Delta l/4$ ft.
Genau gerechnet nach Proceedings . . .	436 000	544 000	20,5	15,4	19,7	12,8
Drei Glieder $A_1; A_3; A_5$	440 000	544 000	20,4	15,4	19,6	12,8
Zwei Glieder $A_1; A_3$	443 000	532 000	20,4	15,2	19,6	12,9
Ohne Rücksicht der Übertragung . . .	2 300 000	1 725 000	81,6	58,2	2,7	2,0

¹⁾ L. S. Moiseiff und F. Lienhard, Suspension bridges under the action of lateral forces. Proc. Am. Soc. Civil Eng. 1932, S. 301.

Verschiedenes.

Amerikanische Dauerversuche mit Nietverbindungen. In den letzten Jahren sind von W. M. Wilson und F. P. Thomas umfangreiche Versuche mit Nietverbindungen, vor allem Dauerversuche, durchgeführt worden; der Versuchsbericht ist im Herbst 1938 erschienen¹⁾. Die wichtigsten Ergebnisse der Dauerversuche sind vor kurzem von O. Graf in Heft 12 der Berichte des Deutschen Ausschusses für Stahlbau besprochen worden. Hieraus ist das folgende entnommen.

Die Blechwerkstoffe waren Kohlenstoffstahl mit $\sigma_{zB} = 43$ bis 46 kg/mm², Siliziumstahl mit $\sigma_{zB} = 56$ bis 66 kg/mm² und Nickelstahl mit $\sigma_{zB} = \text{rd. } 70$ kg/mm². Die Niete mit 1" Durchm. waren in der Regel aus Kohlenstoffstahl mit $\sigma_{zB} = 37$ bis 43 kg/mm² gefertigt. In einem Fall wurden auch Niete aus Manganstahl mit höherer Festigkeit verwendet. Die Dauerversuche sind meistens als reine Schwellzugversuche (Unterspannung $\sigma_{zu} = 0$ kg/mm²; Ursprungsbelastung), vereinzelt auch als Wechselbelastungsversuche und Schwellzugversuche mit höherer Unterzugspannung ($\sigma_{zu} = 0,5 \sigma_{zo}$) durchgeführt worden. Ermittelt wurde in der Regel die Widerstandsfähigkeit gegen zwei Millionen Lastspiele.

Die Versuchsergebnisse bestätigen in der Hauptsache ältere deutsche Feststellungen. Vereinzelt wurden auch Verhältnisse untersucht, deren Nachprüfung zwar in Deutschland schon längere Zeit geplant ist, für die die zugehörigen Versuche aber wegen anderen, dringenderen zurückgestellt werden mußten.

In einem Fall (gestanzte Nietlöcher) wurde bei uns von vornherein auf die Untersuchung verzichtet.

Bei den Versuchen wurde grundsätzlich folgendes festgestellt²⁾:

1. Wenn sich die Stoßflächen an den Stoßfugen von zweireihigen Nietverbindungen³⁾ berührten, ertrugen die Niete bei Wechselbelastung wesentlich mehr Lastspiele, als wenn an den Stoßfugen ein Spalt von 13 mm vorhanden war ($\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 3,2 : 2,1$).

¹⁾ W. M. Wilson und F. P. Thomas, Bulletin 302 der Engineering Experiment Station, Heft 79, Bd. 35, der Universität von Illinois in Urbana (USA). Der Bericht enthält neben den Ergebnissen der Dauerversuche auch Feststellungen über die Klemmspannungen von Nieten verschiedener Länge aus verschiedenen Werkstoffen.

²⁾ Da die ermittelten Dauerfestigkeiten u. a. wegen der andersgearteten Beschaffenheit der Werkstoffe, den Verhältnissen $\sigma : \sigma_l : \tau$ und auch den Herstellungsbedingungen (z. B. größere Unterschiede zwischen Schaftdurchmesser der Rohniete und Durchmesser der Nietlöcher) nicht unmittelbar auf unsere deutschen Verhältnisse angewendet werden können, wird hier auf ihre Wiedergabe verzichtet. Wegen Einzelheiten sei auf den Versuchsbericht von Wilson und Thomas sowie auf die deutsche Bearbeitung von O. Graf in Heft 12 der Berichte des Deutschen Ausschusses für Stahlbau, S. 35ff., verwiesen.

³⁾ An den Nietverbindungen unter 1, 3 bis 6 und 9 waren Bleche und Niete aus Kohlenstoffstahl; an den Verbindungen unter 7 waren

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung bei Verwendung von drei Gliedern sehr gut und der Unterschied übersteigt, was das Moment anbetrifft, nirgends 1%.

Bei Verwendung von zwei Gliedern erhält man selbst bei dieser Brücke, bei der das maximale Moment durch Übertragung um 81% reduziert wird, ein Resultat, das jeder berechtigten Forderung nach Genauigkeit Genüge leistet.

Die hier vorgeschriebene Methode kann für nicht symmetrische Windbelastung angepaßt werden, indem man nicht symmetrische Glieder in die trigonometrische Reihe einführt. Eine solche Rechnung ist allerdings selten aktuell und soll hier nicht angeführt werden. Falls der Windverband kontinuierlich ist, müssen Gl. (4) u. (5) in Übereinstimmung mit den neuen Grenzbedingungen verändert werden. Die ganze Berechnung muß dann entsprechend geändert werden, aber die Methode ist auch weiterhin gleich brauchbar.

Die hier ausgeführte Berechnungsart ist nach der Meinung des Verfassers die schnellste und genaueste Methode zur Berechnung des Verhaltens von Hängebrücken bei Seitenwind.

Die Methode liefert einen so hohen Grad von Genauigkeit, daß eine direkte Berechnung, ausgehend von den grundlegenden Differentialgleichungen, kaum notwendig sein dürfte.

2. Die Dauerschweifigkeit von Schraubenbolzen, die an Stelle von Nieten eingezogen wurden, wurde bei reiner Schwellzugbelastung (Ursprungsbelastung) höher, wenn die Vorspannung der Schrauben erhöht wurde (Verbindungen mit einer Schraube; $\sigma_l : \tau = 2,1 : 1,0$).

3. Die Widerstandsfähigkeit von Nieten aus Kohlenstoffstahl gegen wechselnde Scherbeanspruchung war bei Klemmlängen von 117 und 78 mm annähernd gleich groß (einreihige Verbindungen mit $\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 3,5 : 1,7$ und $1,0 : 3,5 : 3,3$).

4. Bei Wechselbelastungen ertrugen die Bleche von zwei- und dreireihigen Nietverbindungen rd. 40% höhere Schwingweiten als bei reiner Schwellbeanspruchung (zwei- und dreireihige Verbindungen mit $\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 0,8 : 0,4$ und $1,0 : 1,3 : 0,6$).

Wenn die Unterspannung bei Schwellzugversuchen $\sigma_{zu} = 0,5 \sigma_{zo}$ war, wurden 25% niedrigere Schwingweiten ertragen, als wenn $\sigma_{zu} = 0$ war, also reine Schwellbeanspruchung vorlag.

5. Die Dauerzugfestigkeit bei reiner Schwellbeanspruchung wurde größer, wenn der Lochleibungsdruck vom 1,2fachen auf das 1,6- und 2,3fache der Zugspannung σ erhöht wurde; $\sigma : \tau$ betrug $1,0 : 0,75$. Es ist jedoch zu beachten, daß die Nietverbindungen mit $\sigma : \sigma_l = 1,0 : 1,2$ viereihig, mit $\sigma : \sigma_l = 1,0 : 1,6$ dreireihig und mit $\sigma : \sigma_l = 1,2 : 3$ zweireihig waren.

6. Die Dauerzugfestigkeit von Nietverbindungen mit $\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 1,4 : 0,5$ wurde bei reiner Schwellzugbelastung (Ursprungsbelastung) höher, wenn die vier Niete statt in vier Reihen hintereinander in zwei Reihen hintereinander angeordnet wurden.

7. Wenn die Nietlöcher mit rd. 27 mm Durchm. in zweireihigen Nietverbindungen mit $\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 1,4 : 0,44$ gebohrt wurden, ergaben sich im Mittel die gleichen Ursprungszugfestigkeiten (reine Schwellbelastung), wie wenn die Löcher auf 6,3 mm vorgestanzt und dann auf-gebohrt oder wenn sie ganz gestanzt wurden.

8. Die reinen Schwellzugfestigkeiten (Ursprungszugfestigkeiten) von zweireihigen Verbindungen ($\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 1,5 : 0,7$) mit Nieten aus Kohlenstoffstahl und Blechen aus Kohlenstoffstahl oder Siliziumstahl oder Nickelstahl sowie von Verbindungen mit Blechen aus Siliziumstahl und Nieten aus Manganstahl sind wenig verschieden ausgefallen.

9. Bei reinen Schwellzugversuchen mit einreihigen Nietverbindungen ($\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 4,9 : 2,3$) wurde festgestellt, daß der Achsenabstand der Nietlöcher von der Stirnfläche der Bleche kleiner als $2d$, wahrscheinlich noch kleiner als $1,75d$ sein darf ($d =$ Nietlochdurchmesser). Die Deutsche Reichsbahn schreibt $\geq 2d$ vor. Fritz Munzinger, Stuttgart.

die Bleche aus Kohlenstoffstahl oder aus Siliziumstahl, die Niete immer aus Kohlenstoffstahl. Zu den Nietverbindungen unter 8 wurden Bleche aus Kohlenstoff-, Silizium- und Nickelstahl sowie Niete aus Kohlenstoff- und Manganstahl verwendet.

INHALT: Prüftechnische Erfassung der Ursachen zum spröden Bruch des Baustahls. — Allgemeine Kräftebestimmung an Körpern mit vier windschiefen Kräften. — Berechnung des Verhaltens von Hängebrücken unter Windbelastung. — Verschiedenes: Amerikanische Dauerversuche mit Nietverbindungen.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klüppel, Darmstadt. — Verlag: With. Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W9, Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftwaltung:
 Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
 Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
 Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
 Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 7. November 1941

Heft 23/24

Alle Rechte vorbehalten.

Stahlkonstruktion für Großschmiedehallen.

Von Dr.-Ing. Heinz Frobenius.

Ein bemerkenswertes Ingenieurbauwerk dürften die nachfolgend beschriebenen Werkshallen und ihr Herstellungsvorgang darstellen. Durch ihre Abmessungen und die damit zu lösenden Aufgaben war dem ausführenden Ingenieur eine Aufgabe gestellt, wie sie im Hochbau nicht alltäglich sein dürfte. Die glatte Abwicklung des Bauvorhabens hat gezeigt, daß die bei der Planung und Ausführung getroffenen Maßnahmen richtig waren.

Vorgesehen war die Erbauung zweier zweischiffigen Werkshallen von 170 m Länge und 28,5 m Stützweite je Schiff (Bild 1 u. 2). Eine der Hallen sollte dabei vorläufig nur einschiffig ausgeführt werden, jedoch mußte die Erweiterungsmöglichkeit für das zweite Schiff zugleich mit vorgesehen werden. Die Raumhöhe von rd. 24 m verlangte eine Lösung, die sowohl die Wucht des Baues zur Geltung kommen ließ, als auch den bei diesen Abmessungen auftretenden baulichen Aufgaben in einwandfreier Weise gerecht wird.

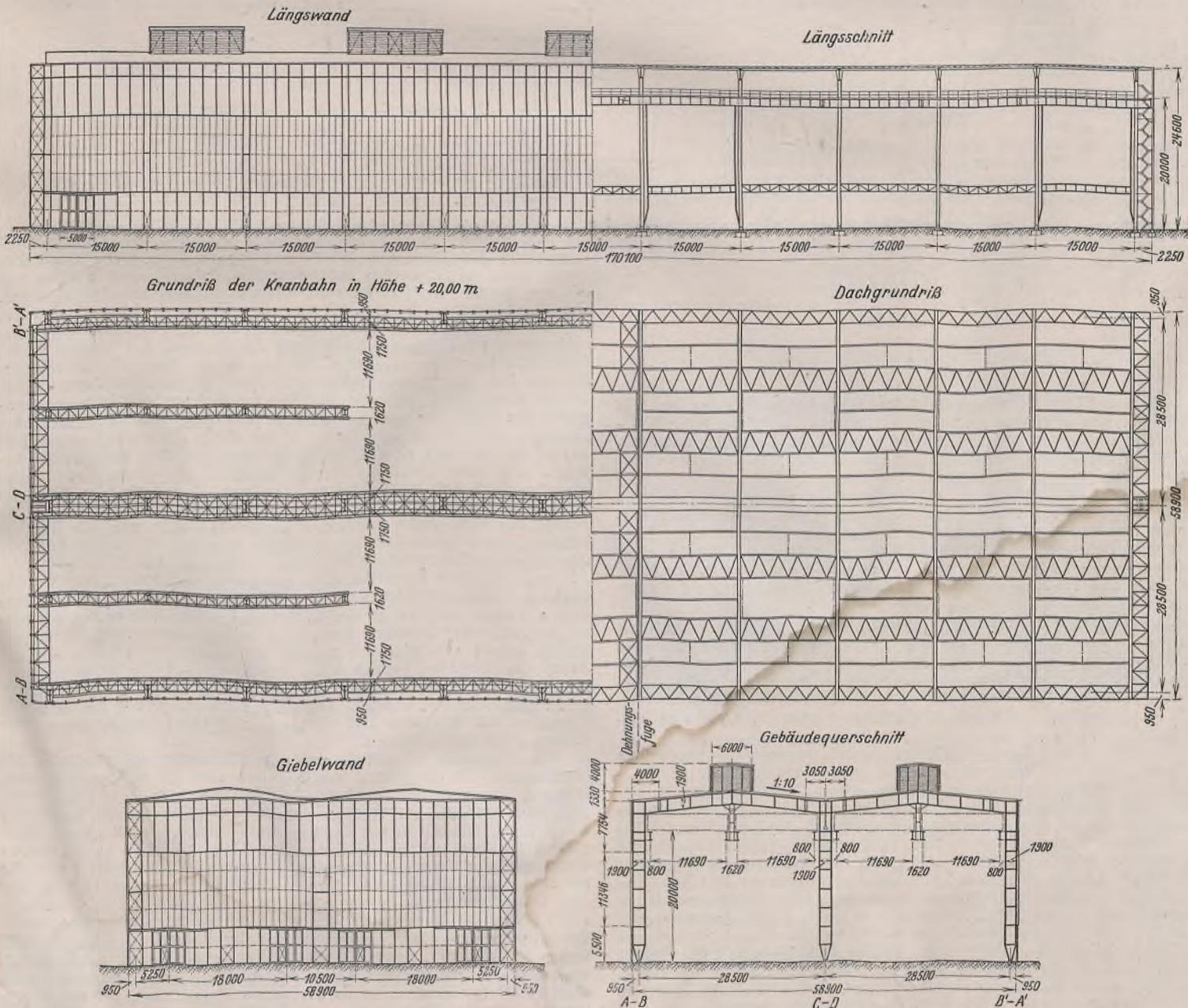


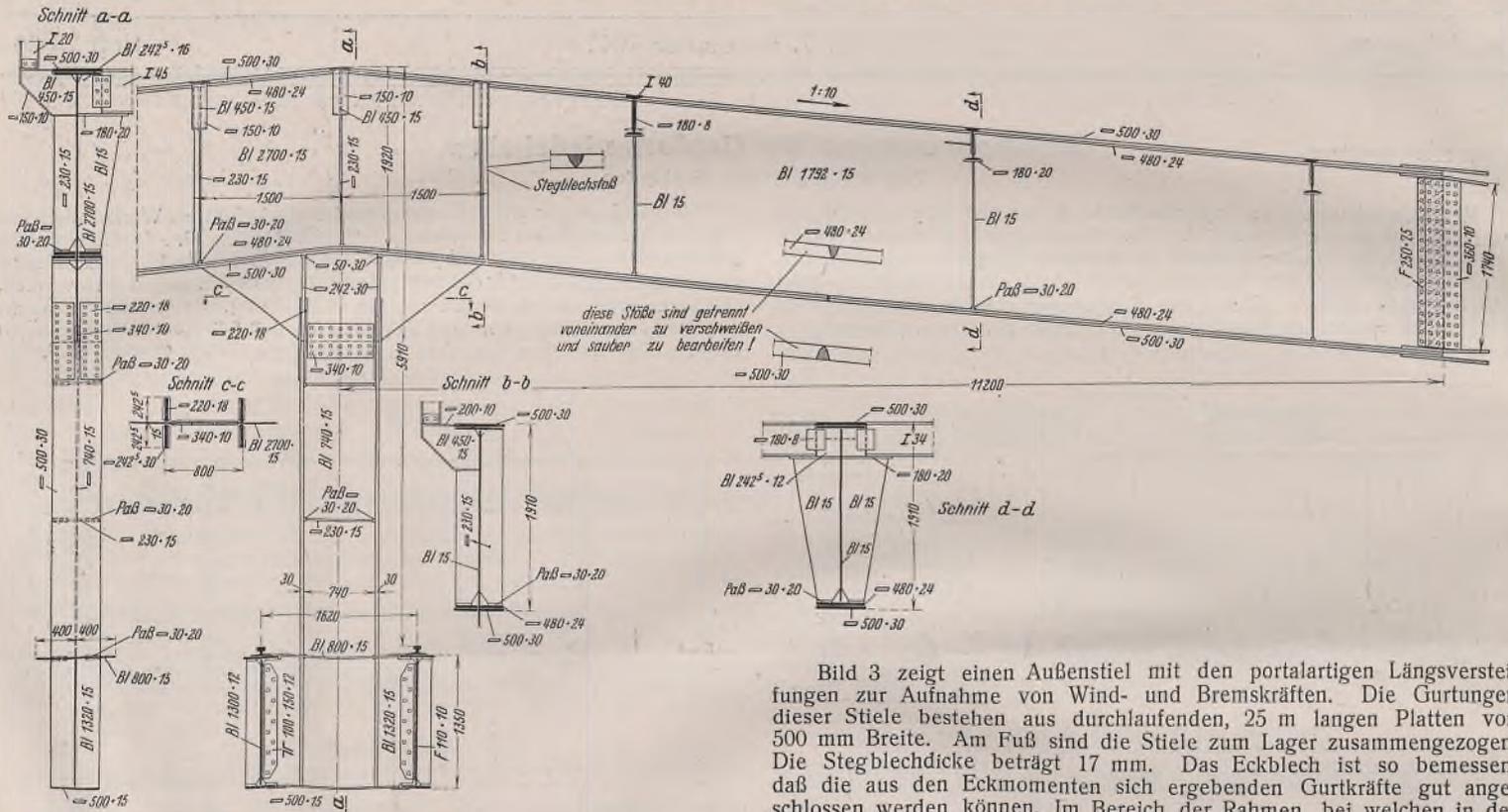
Bild 1 u. 2.

Die Entscheidung fiel zugunsten einer vollwandigen Rahmenkonstruktion aus, nachdem Überschlagsberechnungen ergaben, daß für die zu überbauenden Räume bei Anwendung der Schweißung gegenüber einer Fachwerkskonstruktion nur ein geringer Stahlgewichtsunterschied bestand und bei der Vollwandkonstruktion ein den Ausmaßen des Baues angepaßtes geschlossenes Raumbild erzielt wurde. Auch blieben die infolge nicht sehr günstigen Baugrundes bei Setzungen der Fundamente zu erwartenden Spannungserhöhungen bei dem gewählten System nur in geringen und unbedenklichen Grenzen.

Gewählt wurde als Grundsystem der Binderrahmen ein dreistieliger Gelenkrahmen, wobei für die vorläufig einschiffige Halle der Zweigelenkrahmen als statisches System der Berechnung zugrunde gelegt wurde. Für die Berechnung waren die Bestimmungen für den Hoch- und Kranbau maßgebend. Jedoch wurde mit Rücksicht auf die Abmessungen und Lasten in bezug auf die bauliche Ausbildung nach den im Brückenbau maßgebenden Gesichtspunkten der Reichsbahnvorschriften gearbeitet.

Rings um die Hallen ist ein durchlaufendes 11,4 m hohes Lichtband mit kittloser Verglasung vorgesehen, welches in 5,5 m Höhe über dem Boden beginnt. Die Scheibenbreite beträgt 1 m. Nur an den Rahmenstielen ist das Lichtband durch etwa 1 m breite hochgemauerte Felder unterbrochen. Für gute Beleuchtung des Innenraumes ist somit in besonderem Maße Sorge getragen, zugleich ist eine straffe Gliederung der Längswände erreicht.

Die bauliche Durchbildung der geschweißten Konstruktionsglieder, welche alltägliche Abmessungen überschreiten, bot dem gestaltenden Ingenieur manche interessante Aufgabe. Insbesondere sind bei der Ausbildung der geschweißten Rahmen die neuesten Erfahrungen auf dem Gebiete des Schweißens beachtet worden. Bei dem verwendeten Baustoff St 37 in SM-Qualität bestanden keine Bedenken, sehr lange Platten und auch Dicken bis zu 50 mm zu verwenden. Zur Verhinderung von Kerbwirkungen sind in den Zugurten Quernähte vermieden, und die eingebauten Aussteifungen wurden mittels besonderer Paßstücke verkeilt.



Die in der Binderebene wirkenden Kräfte und Momente aus ungleichen Kranlasten und Seitenstößen werden durch biegungsfesten Anschluß der Hängestangen an das Firstblech auf die Rahmenbinder übertragen. Die senkrecht zur Binderebene wirkenden Bremskräfte werden durch die Kranbahn und den Bremsverband zur Giebelwand auf den

Die Stiele sind 24,7 m lang und wiegen etwa 25 t; der Riegel ist etwa 22,5 m lang und wiegt ohne Kranhängestange etwa 16 t. Das Gewicht eines ganzen Rahmens beträgt somit rd. 70 t. Sowohl die Länge als auch das Gewicht der einzelnen Bauglieder machten besondere Maßnahmen für die Anfuhr erforderlich, die noch später beschrieben werden.

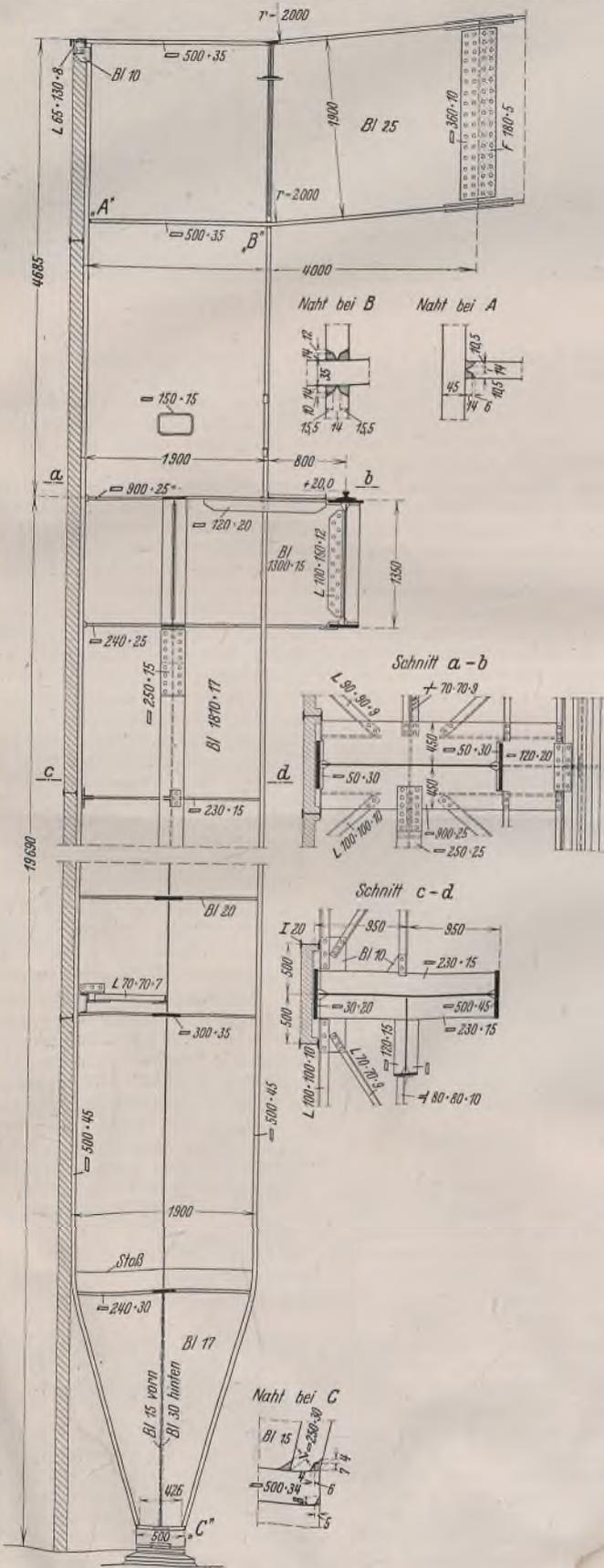


Bild 3.

dort angeordneten Kopfverband geleitet. Da für diese Wirkungsweise das Firstblech eigentlich wie eine Blattfeder wirken soll, ist von einem biegungsfesten Anschluß der Flanschen der Hängestangen senkrecht zur Binderebene abgesehen worden. In der Giebelwand werden die Bremskräfte durch den dort angeordneten Verband auf die Eckstiele übergeleitet,



Bild 5. Sondertransport zweier Stiele, zwischen zwei Wagen das eingehängte Zwischenstück.

Dadurch, daß die Kranbahn in den Konsolen eingebunden ist, mußte den Ausgleichsmöglichkeiten der Kranbahn besondere Beachtung geschenkt werden. Zu diesem Zweck war hier ein besonders großes Aufreibemaß der Befestigungslöcher vorgeschrieben, und zwischen Anschlußwinkel und Kranbahnstegblech sind Ausfütterungen vorgesehen. Es besteht so eine Ausgleichmöglichkeit von 13 mm seitlich und 4 bis 5 mm in der Höhenlage.

Die vor der Stahlkonstruktion angeordneten Giebel- und Längswände sind als Fachwerkwände für $\frac{1}{2}$ Stein dicke Ausmauerung ausgebildet. Der Zwischenraum zwischen der Wand und dem Flansch des Rahmenstieles wurde mit fettem Mörtel ausgefüllt, um Rostansatz an diesen Stellen zu vermeiden.

Die Dachpfetten sind in einem größten Abstand von 3,45 m angeordnet. Sie stehen senkrecht zum Dach und ruhen auf den als Konsolen ausgebildeten Versteifungen des Rahmenbinders. Zur Erzielung der statischen Wirkung als durchlaufende Balken wurden die Oberflansche mit dem Binder-Obergurt nach dem Abnieten des Binders auf der Baustelle verschweißt. Die Anschlußflanschen des Untergurtes und die Stege wurden im Anschluß aufgerieben und angenietet. In den Feldern mit den Oberlichtaufbauten ist keine Firstpfette vorhanden. Die Dachverbände laufen beiderseits der Laternen durch den ganzen Bau bis zu den Giebelwänden durch.

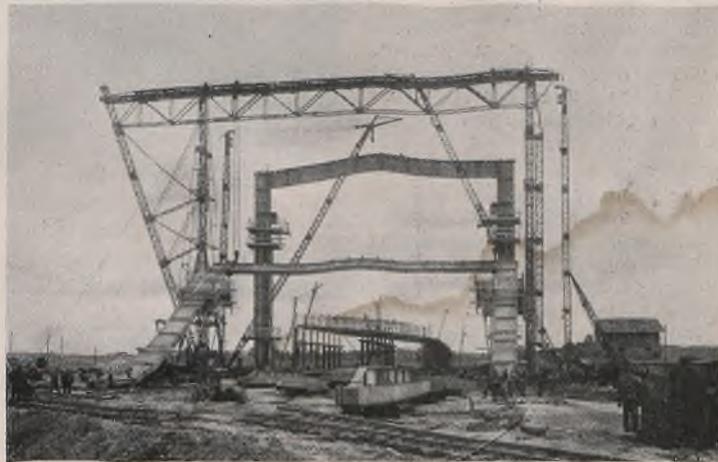


Bild 6. Rahmen der Einzelhalle während des Ziehens. Sofort nach dem Aufrichten werden die Verbindungsteile mit dem Nachbarrahmen mittels der zwei Derricks eingebaut.

In Höhe der Kranbahn sind Bedienungsstege vorgesehen. Außerdem ist ein Bedienungsgang längs der Fensterbrüstung angeordnet. An jedem Ende der Halle sind Treppenaufgänge bis zum Dach durchgeführt.

Für die Verfrachtung wurde mit der Deutschen Reichsbahn eine Vereinbarung über die Einsetzung von Spezialzügen getroffen, welche als Pendelzüge zwischen dem Werk und der Baustelle eingesetzt wurden. Ein Zug förderte immer jeweils einen vollständigen Rahmen, bestehend aus den Stielen und dem Riegel. Die Einzelteile wurden auf SSLa-Wagen verladen, und bei überragenden Teilen wurden Schutzwagen angesetzt. Da die Stiele jedoch mit ihrem Eckanschluß bis auf das Mindestprofilmaß über Schienenoberkante herabreichten, mußte hier eine besondere Maßnahme getroffen werden, weil die Wagen nicht miteinander gekuppelt werden konnten.

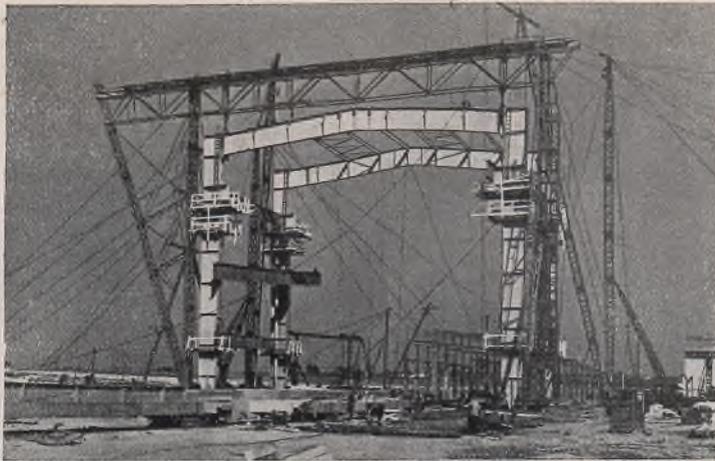


Bild 7. Rahmen hochgezogen, noch im Portalkran hängend.

Zwischen zwei Wagen wurde daher ein aus einem Stahlrahmen bestehendes Zwischenstück eingehängt (Bild 5). Dieses Zwischenstück war mit Puffern und vollständigen Kupplungen versehen und erlaubte so das ungehinderte Hindurchtragen der Stielenden. Bild 5 zeigt einen zur Abfertigung zusammengestellten Zug, auf welchem zwei Stiele verladen sind. Die getroffene Anordnung hat allen Anforderungen genügt, selbst bei Einreihung des Spezialzuges in normale Güterzüge traten keine Störungen auf.

Bei der zur Verfügung stehenden kurzen Aufstellungszeit war eine besonders sorgfältige Planung notwendig, um durch richtiges Arbeitstempo in der Werkstatt unter Berücksichtigung der Anfuhrspanne keine Stockungen auf der Baustelle eintreten zu lassen. So ist es gelungen, die Hallen trotz der zum Teil erschwerten Verfrachtung nicht nur in der vorgeschriebenen Zeit aufzustellen, sondern bei der Einzelhalle noch eine Verkürzung der vorgesehenen Bauzeit zu erreichen.

Für die beiden Hallen waren durch die Ausbildung der einen als Doppel- und der anderen als Einzelhalle ganz verschiedene Montagevorgänge geboten.

Für die Einzelhalle wurde ein kombinierter Montagevorgang gewählt, indem zur Aufstellung der Rahmenbinder ein Portalkran vorgesehen war, während durch zwei nachlaufende Derricks die Kranbahnen, Pfetten und Wandkonstruktion eingebaut wurden (Bild 6).

Auch wurden so die Wünsche der Bauleitung erfüllt, schon während der Aufstellung der Stahlkonstruktion im Innern der Halle Maschinen-Fundamente herstellen zu können, denn bei diesem Montagevorgang blieb der Innenraum der Halle bis auf einen schmalen Streifen beiderseits längs der Fundamente frei von Montagegeräten.

Ein weiterer Gesichtspunkt für die Wahl dieser Arbeitsweise war die Möglichkeit, die Rahmen am Erdboden auslegen und zusammennieten zu können und somit Nietrüstungen zu sparen. Auch dürfte damit eine nicht unwesentliche Zeitersparnis verbunden gewesen sein.

Der Portalkran war für das Ziehen der im ungünstigsten Fall bis zu 70 t schweren Binder vorgesehen. Da ein Verfahren des Portalkrans unter Last nicht vorzusehen war, wurde das Fahrwerk nur für Eigenlasten konstruiert. Beim Ziehen des Binders wurden die Stiele auf einem jeweils behelfsmäßig hergestellten Rost abgestützt. Die Spreizverbände der Portalfüße waren nach den größten zu erwartenden Windkräften bei eingehängtem Binder bemessen. Abgesehen davon waren Abfangseile nach beiden Seiten angeordnet. Tatsächlich verursachte auch ein heftiger Sturm, der an sonstigen Anlagen erheblichen Schaden anrichtete, keinerlei Störung des Bauvorganges.

Für die Berechnung des Portals war eine seitliche Seilabweichung aus der Lotrechten von etwa 1 : 8 vorgesehen. Die Höhe des Obergurtes des Portalkrans betrug 29,2 m, die Spannweite 33 m.

Die Füße der Stiele wurden beim Hochziehen zur Verminderung der Reibung auf Schleppwägelchen gesetzt.

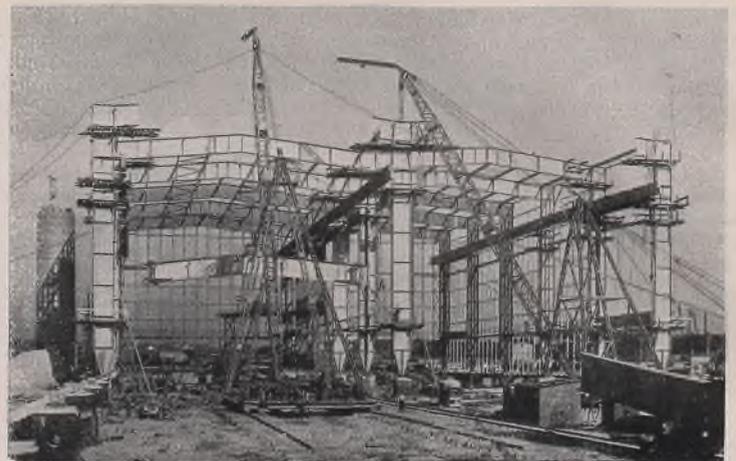


Bild 8. Längsblick in die Doppelhalle.

Bild 6 zeigt das Hochziehen eines Binders. Im Vordergrund ist noch ein Teil des Fundamentaushubs in der Halle sichtbar.

Aus Bild 7 erkennt man im Vordergrund einen bereits hochgezogenen und noch am Portalkran hängenden Binder, während die beiden Derricks bereits die Pfetten und Windportale eingebaut haben und der erste Kranbahnträger hochgezogen wird.

Das Aufstellen eines Feldes, bestehend aus einem Binder, Pfetten, Verbänden, Kranbahnen und Wandkonstruktion, erforderte nur 5 Arbeitstage.

Bei der Doppelhalle war der oben geschilderte Bauvorgang nicht durchzuführen. Da hier der Fundamentaushub im Innern der Halle erst später vorgesehen war, konnte die Montage mittels zweier im Innern der Halle aufgestellter Derricks erfolgen.

Die ankommenden Teile wurden mittels eines Portalkrans abgeladen und auf einem Transportgleis in die Reichweite der Derricks gebracht. Hier wurde am Boden das mit Rücksicht auf die Verfrachtung in der Werkstatt nicht angebrachte zweite Eckblech am Mittelstiel angeschweißt. Dann erfolgte das Aufstellen der Stiele. Jeder Stiel wurde einzeln auf-

gestellt und durch Einbau der Kranbahnträger und Abfangseile gesichert. Dann wurden die Rahmenriegel hochgezogen und eingebaut. Das Abnieten des Riegelanschlusses durfte erst nach dem Einbau der Pfetten vorgenommen werden, um dem Rahmen die Berechnung zugrunde liegende Grundbelastung zu geben.

Der Einbau der Pfetten und Wandglieder erfolgte mittels besonderer leichter Hilfsausleger, welche über die eingebauten Riegel hinwegreichten.

Aus Bild 8 ist der Montagevorgang zu erkennen. Im Vordergrund sind die drei Stiele schon aufgestellt und durch die Kranbahn und Randpfetten gesichert. Der Riegel des einen Hallenschiffes wird gerade hochgezogen.

Nach dem Einbau der Pfetten wurde dann der Rahmenstoß von Hängerüstungen aus aufgerieben und

vernietet. — Beide Bauvorgänge ermöglichen jeweils im dritten Feld hinter dem Rahmeneinbau schon die Freigabe der Wand- und Dachkonstruktion für andere Bauarbeiten.

Bild 9 zeigt eine Außenansicht der Doppelhalle mit drei für die Ausmauerung fertig ausgerichteten Rahmenfeldern.

Das Gesamtstahlgewicht der Hallen betrug für die Einzelhalle 1490 t, für die Doppelhalle 2445 t.

Zur sicheren Einhaltung der geforderten äußerst knappen Baufristen wurde die Lieferung und Aufstellung unter drei Firmen verteilt, derart, daß die Einzelhalle von einer Firma allein, die Doppelhalle von zwei Firmen gemeinsam geliefert und errichtet wurde.

Die Werkstattarbeiten und die Aufstellungsarbeiten wurden für das Gesamtbauvorhaben in weniger als fünf Monaten durchgeführt, wovon die Aufstellung etwa drei Monate beanspruchte. Hierbei muß berücksichtigt werden, daß die Werkstoffanlieferung bei Beginn der Aufstellung noch nicht restlos erfolgt war. Infolge des auf der Baustelle herrschenden Mangels geschulter Kräfte wurde von den Montageleitern zur glatten Abwicklung des Bauvorganges außerordentliche Umsicht und Energie verlangt.

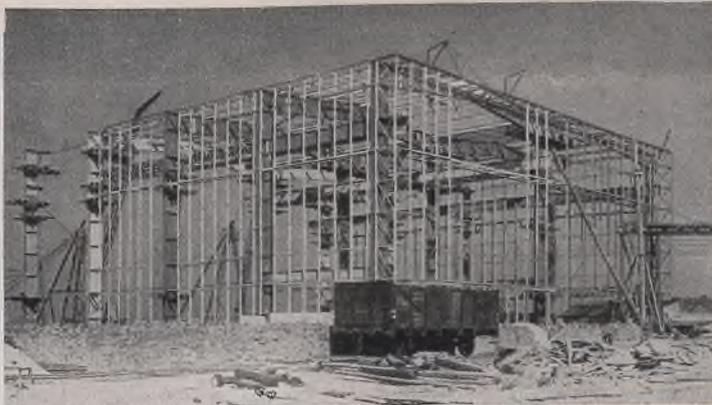


Bild 9. Ansicht der Stahlkonstruktion der Doppelhalle.

Alle Rechte vorbehalten.

Berechnung von Biegeträgern mit axialer Zugkraft.

Von Dr. techn. Felix Cichocki, Dortmund.

Die Ermittlung der Durchbiegungen und Momente eines Trägers, der neben lotrechter Belastung auch durch eine axial wirkende Zugkraft belastet ist, hat in neuerer Zeit erhöhte Bedeutung erlangt. Wie die theoretische Behandlung der Berechnung echter Hängebrücken nach der Theorie zweiter Ordnung ergibt (siehe Timoshenko [1], Stüssi [2], K. H. Lie [3]¹⁾, läßt sich die Berechnung dieser Tragwerke auf die Berechnung eines Trägers mit axialer Zugkraft unter Berücksichtigung der Verformung zurückführen²⁾.

Die Differentialgleichung für die Durchbiegung eines solchen Trägers mit der Zugkraft H und einer Belastung, die am Biegeträger das Moment \mathfrak{M} hervorruft, lautet bekanntlich

$$(1) \quad EJ(x) \eta'' - H \eta = -\mathfrak{M}$$

Für konstantes Trägheitsmoment J ist die Lösung nach Melan [4], welcher eine entsprechende Gleichung für das Hängebrückenproblem entwickelt hat,

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta = \frac{1}{H} (C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x} + \mathfrak{M} + \frac{\mathfrak{M}''}{\omega^2} + \frac{\mathfrak{M}^{IV}}{\omega^4} + \dots) \\ \text{mit } \omega^2 = \frac{H}{EJ} \end{array} \right.$$

Die Lösung ist vollständig genau, wenn die Belastung derart ist, daß \mathfrak{M}^{IV} oder die höheren Ableitungen verschwinden. Setzt man, wie es hier geschehen soll, nur Einzellasten oder gleichmäßige Streckenlasten voraus, so erhält man mit $\mathfrak{M}'' = -p$ und $\delta = H \eta$ die Lösung

$$(3) \quad \delta = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x} + \mathfrak{M} - \frac{p}{\omega^2}$$

Weist das Moment Unstetigkeitsstellen auf, so ist für jeden Abschnitt eine Lösung nach (3) vorhanden. Statt der Funktionen $e^{\omega x}$ und $e^{-\omega x}$ können auch die hyperbolischen Funktionen verwendet werden. K. H. Lie [3] gibt mit diesen die Lösungen für eine Reihe einfacher Belastungsfälle an.

Träger mit konstantem J werden als Versteifungsträger von Hängebrücken — auch bei einfachen Balken — kaum ausgeführt werden. Besonders aber bei durchlaufendem Versteifungsträger ist über den Stützen eine beträchtliche Erhöhung des J erforderlich, welche auch in der Rechnung berücksichtigt werden muß. Stüssi [2] geht hierzu — im Sinne des von M. Grüning [6] eingeschlagenen Weges — statt von der Differentialgleichung von der entsprechenden Differenzenbeziehung dreier aufeinanderfolgender Punkte aus und löst das entstehende System dreigliedriger Gleichungen. K. H. Lie [3] bestimmt die Biegelinie für veränderliches J auf Grund schrittweiser Näherungen, wobei die Konvergenz durch besondere Maßnahmen erzielt wird.

Bei Trägern großer Länge, wie es bei Versteifungsträgern großer Brücken der Fall ist, wird J auf größere Strecken konstant sein oder durch einen Mittelwert ersetzt werden können. Der Träger besteht dann aus mehreren Abschnitten mit konstantem J . In diesem Fall bietet auch die genaue Lösung keine Schwierigkeiten und ist nicht zeitraubender als andere Verfahren, da, wie im folgenden gezeigt wird, sich die große Zahl der Konstanten auf einfache Weise ermitteln läßt.

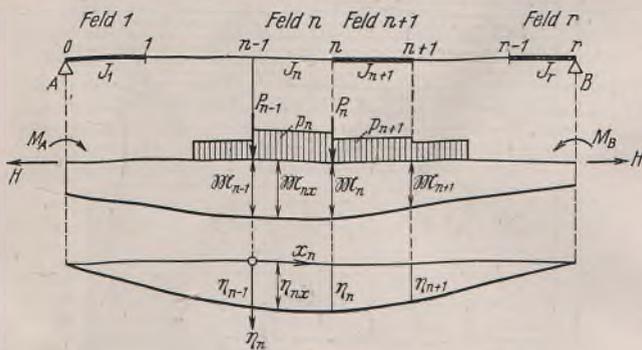


Bild 1.

Nach Bild 1 wird der Träger in r Abschnitte unterteilt, so daß in jedem Abschnitt $J = \text{konstant}$ ist und keine Einzellasten vorhanden sind. Dann ergibt sich für jedes Feld eine Lösung der Differentialgleichung mit zwei Konstanten. Zu deren Berechnung sind zwei Bestimmungen über die Durchbiegung an den Trägerenden, $r-1$ Bedingungen für gleiche Durchbiegungen und $r-1$ Bedingungen für gleiche Tangenten in den Punkten n vorhanden. Diese $2r$ Gleichungen lassen sich aber auf ein dreigliedriges Gleichungssystem mit $r-1$ Gleichungen reduzieren.

Für jedes Feld wird ein Koordinatenanfangspunkt am linken Feldende angenommen. Für jedes Feld ist mit C_{n1} und C_{n2} als Konstanten nach (3)

$$\delta_{nx} = C_{n1} e^{\omega nx} + C_{n2} e^{-\omega nx} + \mathfrak{M}_{nx} - \frac{p_n}{\omega_n^2}$$

Für Feldanfang und Feldende sind die Durchbiegungen

$$x_n = 0: \quad \delta_{n-1} = C_{n1} + C_{n2} + \mathfrak{M}_{n-1} - \frac{p_n}{\omega_n^2}$$

$$x_n = l_n: \quad \delta_n = C_{n1} e^{\omega_n l_n} + C_{n2} e^{-\omega_n l_n} + \mathfrak{M}_n - \frac{p_n}{\omega_n^2}$$

Rechnet man aus diesen beiden Gleichungen die Konstanten als Funktionen der Durchbiegungen aus, so erhält man

$$C_{n1} = \frac{1}{e^{\omega_n l_n} - e^{-\omega_n l_n}} \left[-\delta_{n-1} e^{-\omega_n l_n} + \delta_n + \frac{p_n}{\omega_n^2} (1 - e^{-\omega_n l_n}) + \mathfrak{M}_{n-1} e^{-\omega_n l_n} - \mathfrak{M}_n \right]$$

$$C_{n2} = \frac{1}{e^{\omega_n l_n} - e^{-\omega_n l_n}} \left[\delta_{n-1} e^{\omega_n l_n} - \delta_n + \frac{p_n}{\omega_n^2} (e^{\omega_n l_n} - 1) - \mathfrak{M}_{n-1} e^{\omega_n l_n} + \mathfrak{M}_n \right]$$

und mit Einführung von $X_n = \delta_n - \mathfrak{M}_n$ als neuer Unbekannten

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} C_{n1} = \frac{1}{e^{\omega_n l_n} - e^{-\omega_n l_n}} \left[-e^{-\omega_n l_n} X_{n-1} + X_n + \frac{p_n}{\omega_n^2} (1 - e^{-\omega_n l_n}) \right] \\ C_{n2} = \frac{1}{e^{\omega_n l_n} - e^{-\omega_n l_n}} \left[e^{\omega_n l_n} X_{n-1} - X_n + \frac{p_n}{\omega_n^2} (e^{\omega_n l_n} - 1) \right] \end{array} \right.$$

Die Bedingung, daß im Punkte n die beiden Äste ohne Knick aneinanderstoßen, lautet:

$$\delta'_{nx}|_{x=l_n} = \delta'_{n+1}|_{x=0}$$

Es ist

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta'_{nx}|_{x=l_n} = C_{n1} \omega_n e^{\omega_n l_n} - C_{n2} \omega_n e^{-\omega_n l_n} + \mathfrak{Q}'_n \\ \delta'_{n+1}|_{x=0} = C_{n+1,1} \omega_{n+1} - C_{n+1,2} \omega_{n+1} + \mathfrak{Q}'_{n+1} \end{array} \right.$$

\mathfrak{Q}'_n und \mathfrak{Q}'_{n+1} sind die Querkräfte aus der Belastung links und rechts vom Punkte n . Ist im Punkt n eine Einzellast vorhanden, so ist

$$\mathfrak{Q}'_n - \mathfrak{Q}'_{n+1} = P_n$$

Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke (5) mit der Einführung von (4) für C_{n1} und C_{n2} und entsprechend für $C_{n+1,1}$ und $C_{n+1,2}$ liefert nach Vereinfachung das dreigliedrige Gleichungssystem für die Werte X_n :

$$(6) \quad -\frac{2 \omega_n}{e^{\omega_n l_n} - e^{-\omega_n l_n}} \cdot X_{n-1} + \left[\frac{\omega_n (e^{\omega_n l_n} + e^{-\omega_n l_n})}{e^{\omega_n l_n} - e^{-\omega_n l_n}} + \frac{\omega_{n+1} (e^{\omega_{n+1} l_{n+1}} + e^{-\omega_{n+1} l_{n+1}})}{e^{\omega_{n+1} l_{n+1}} - e^{-\omega_{n+1} l_{n+1}}} \right] X_n - \frac{2 \omega_{n+1}}{e^{\omega_{n+1} l_{n+1}} - e^{-\omega_{n+1} l_{n+1}}} \cdot X_{n+1} + \frac{p_n}{\omega_n} \cdot \frac{e^{\omega_n l_n} - 1}{e^{\omega_n l_n} + 1} + \frac{p_{n+1}}{\omega_{n+1}} \cdot \frac{e^{\omega_{n+1} l_{n+1}} - 1}{e^{\omega_{n+1} l_{n+1}} + 1} + P_n = 0$$

Die Werte für X_0 und X_r sind bekannt, da die Durchbiegungen und etwa am Trägerende wirkende Momente bekannt sein müssen. Nach der Auflösung der Gl. (6) ergeben sich die C_{n1} und C_{n2} nach (4). Die gesuchte Biegelinie des Trägers ist damit gefunden.

Die Einflußlinie der Durchbiegung eines Punktes n ist in bekannter Art als Biegelinie für $P=1$ in n zu berechnen. Die Momente M ergeben sich aus $M = \mathfrak{M} - H \eta = \mathfrak{M} - \delta$.

Wie K. H. Lie [3] zeigte, ist bei einem Träger auf zwei Stützen mit der axialen Zugkraft H die Einflußlinie des Moments M_n auch gleich der Momentenzustandslinie für $P=1$ in n . Sie kann aber auch aus $[M] = [\mathfrak{M}] - H[\eta]$ ermittelt werden, wobei die $[\]$ Einflußlinien bezeichnen sollen.

Schrifttum.

- [1] S. Timoshenko u. S. W. Way, Hängebrücken mit durchlaufendem Versteifungstragwerk. I. V. B. H. Abh., II. Bd., 1933/34.
- [2] F. Stüssi, Zur Berechnung verankerter Hängebrücken, I. V. B. H. Abh., IV. Bd., 1936.
- [3] K. H. Lie, Praktische Berechnung von Hängebrücken nach der Theorie II. Ordnung. Diss. T. H. Darmstadt, 1940.
- [4] J. Melan, Der Brückenbau, Handb. d. Ing. Wiss., II. Bd., 5. Abtlg., 1925.
- [5] J. Ratzersdorfer, Durchgehende Balken mit beliebig vielen Öffnungen, bei Beanspruchung durch längs- und querwirkende Kräfte, Der Eisenbau 1919, S. 93.
- [6] M. Grüning, Der Eisenbau I, 1929.

¹⁾ Die in eckigen Klammern stehenden Zahlen beziehen sich auf die Schrifttumangaben am Schluß der Arbeit.

²⁾ Über die Berechnung solcher Träger siehe auch die Arbeit von J. Ratzersdorfer [5].

Verschiedenes.

Versuche zur Feststellung der Klemmspannungen und der Lochfüllung mit Nietten aus St 44. Erfahrene Brückenbauer haben aus verschiedenen Gründen immer wieder hohe Klemmspannungen und gute Lochfüllung der Niete gefordert¹⁾. Um eine gute Lochfüllung zu gewährleisten, sind einige Sondernietverfahren entwickelt worden²⁾.

Bei der Einführung der hochwertigen Baustähle im Stahlhoch- und Brückenbau gewannen diese Bestrebungen nach hohen Klemmspannungen und guten Lochfüllungen erhöhte Bedeutung, weil die zulässigen Spannungen erhöht wurden und weil außerdem die Niete aus Stählen höherer Festigkeit einen höheren Verformungswiderstand aufweisen als Niete aus St 34. Im Auftrage des Deutschen Ausschusses für Stahlbau wurden daher seit 1934 im Institut für die Materialprüfungen des Bauwesens, Stuttgart, Versuche zur Feststellung der Klemmspannungen und Lochfüllungen von Nietten aus St 44 in Probekörpern aus Stahlbau durchgeführt. Der Versuchsbericht von O. Graf ist vor kurzem erschienen³⁾.

Die Versuche gliederten sich im wesentlichen in drei Gruppen.

A. Versuche in den Jahren 1934, 1935 und 1940. Zu den ersten Versuchen wurden sechs Probekörper nach Bild 1 hergestellt. Die Klemmlänge betrug etwa $4,5d$. Bei jedem Probekörper wurden die Niete nach einem anderen Verfahren eingezogen.

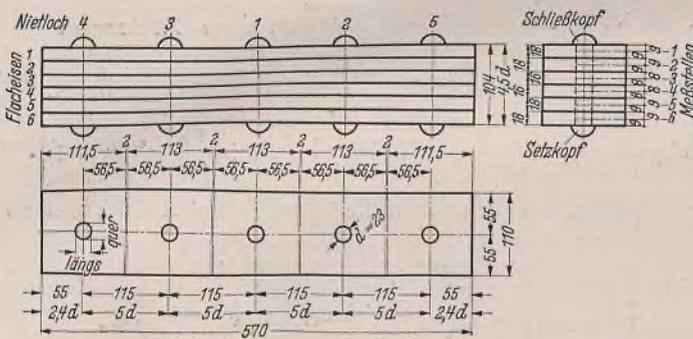


Bild 1.

Beim Verfahren I wurden Rohrniete nach DIN 124 im offenen Koksfeuer über die ganze Schaftlänge auf Weißglut gebracht und mit einem 13,4 kg schweren Preßlufthammer geschlagen. Die Nietzeit⁴⁾ betrug 13 bis 15 sek.

Das Verfahren II unterschied sich vom Verfahren I durch die Verwendung von Rohrnieten mit um 0,2 bis 0,3 mm dickeren Nietschäften und größeren Setzköpfen. Außerdem wurden die Niete in einem Zweikammerofen besonderer Bauart so angewärmt, daß sie bei der Entnahme aus dem Feuer am Setzkopf weißglühend und am Schaftende gelbglühend waren. Die Nietzeit betrug 37 bis 41 sek.

Beim Verfahren III wurden Rohrniete nach DIN 124 mit einer „Stauchzange“⁵⁾ während 2 sek vorgestaucht und dann mit dem Preßlufthammer zu Verfahren I fertiggenietet. Die Niete sind in einem offenen Koksfeuer so angewärmt worden, daß ihre Glühfarbe bei der Entnahme aus dem Feuer am Setzkopf gelb, am Schaftende weiß war. Die gesamte Nietzeit, einschließlich der Zeit zum Vorstauchen und der kleinen Pause beim Wegnehmen der Stauchzange, betrug 24 bis 33 sek.

Beim Nietverfahren IV wurden die Rohrniete nach DIN 124 mit einem Stauchhammer⁶⁾ besonderer Bauart während 1 bis 2 sek vorgestaucht und dann mit dem Preßlufthammer zu Nietverfahren I fertig geschlagen. Die gesamte Nietzeit, einschließlich der Zeit zum Vorstauchen und zum Wechseln der Niethämmer, betrug 19 bis 22 sek. Im übrigen wurde wie bei Nietverfahren I vorgegangen.

Das Nietverfahren V zeichnete sich besonders durch die Verwendung von gedrehten Nietten mit zylindrischen Nietschäften aus; die Durchmesser der Nietschäfte waren nur um 0,5 mm kleiner als die Durchmesser der Nietlöcher. Die Niete wurden in einem Flammofen besonderer Bauart so erwärmt, daß sie bei der Entnahme aus dem Ofen über die ganze Länge gelbglühend waren. Zum Schlagen der Niete wurde der gleiche Preßlufthammer wie zu Nietverfahren I verwendet. Die Nietzeit betrug 18 bis 23 sek.

Das Nietverfahren VI unterschied sich von den Verfahren I bis V durch die Verwendung einer Kniehebelpresse mit Druckluftbetrieb zum

¹⁾ Vgl. u. a. K. Schaechterle, Bautechn. 1928, S. 81ff. sowie Stahlbau 1933, S. 117ff.

²⁾ Vgl. z. B. K. Schaechterle, Stahlbau 1933, S. 117ff.

³⁾ O. Graf, Versuche mit Nietverbindungen. Heft 12 der Berichte des Deutschen Ausschusses für Stahlbau, S. 14ff. Berlin 1941, Jul. Springer. Daraus dieser Auszug.

⁴⁾ Unter Nietzeit wird hier und im folgenden die Zeit verstanden, während der die Preßlufthammer bzw. Nietpressen auf die Niete einwirkten. Bei den Nietungen mit Vorstauchen sind auch die Zeiten zum Wechseln der Werkzeuge eingerechnet.

⁵⁾ Vgl. K. Schaechterle, Stahlbau 1933, S. 119, Abb. 11.

⁶⁾ Vgl. K. Schaechterle, Stahlbau 1933, S. 120, Abb. 10 u. 13.

Stauben der Niete und zur Bildung der Schließköpfe. Die Rohrniete nach DIN 124 wurden wie beim Verfahren II in einem Koksfeuer mit Vorwärmkammer erwärmt. Die Glühfarbe der Niete war bei der Entnahme aus dem Feuer am Setzkopf weiß und am Schaftende gelb. Die Nietzeit betrug 47 bis 61 sek.

Die Klemmspannungen wurden mit $\alpha = \frac{1}{2 \cdot 100 \cdot 000}$ aus den federnden Verkürzungen der Nietschäfte berechnet, die nach dem seitlichen Abdrehen der Setzköpfe eintraten⁷⁾. Die grundlegenden Messungen der Nietlängen wurden an den ganzen, noch nicht aufgeteilten Probekörpern ausgeführt. Hierzu wurden besondere Meßeinrichtungen mit hoher Meßgenauigkeit entwickelt.

Zur Feststellung der Lochfüllungen und der Änderungen der Nietdurchmesser, auch der Nietlochdurchmesser, wurden die Durchmesser der Nietschäfte und der Nietlöcher vor und nach dem Nietten genau gemessen.

Die höchsten Klemmspannungen wurden mit dem Nietverfahren VI (Kniehebelpresse) erzielt; sie betragen $\sigma_K = 33,6$ bis $36,9$ kg/mm², im Mittel $35,4$ kg/mm². Darauf folgten der Reihe nach

die Nietverfahren	mit Klemmspannungen σ_K von
I (gewöhnliche Preßluft-hammernietung)	30,4 bis 32,4, im Mittel 31,6 kg/mm ²
IV (Stauchhammer)	11,7 „ 31,4 „ „ 25,8 „
V (gedrehte Niete)	14,1 „ 20,5 „ „ 16,7 „
III (Stauchzange)	6,0 „ 8,6 „ „ 7,0 „
II (dickere Rohrniete und Setzkopf wärmer)	0,6 „ 14,7 „ „ 6,9 „

Die beste Lochfüllung hat das Verfahren III mit Stauchzange geliefert; die Unterschiede zwischen Nietschaftdurchmesser und Nietlochdurchmesser betragen 0,15 bis 0,23 mm. Beinahe ebenso gut war die Lochfüllung bei den Verfahren V und II. Die Verfahren I, IV und VI lieferten wesentlich schlechtere Lochfüllungen. Die größten Unterschiede mit 0,47 mm zwischen Nietschaft- und Nietlochdurchmesser wurden bei dem Verfahren VI (Kniehebelpresse) gefunden.

Gleichzeitig mit den Probekörpern nach Bild 1 wurden drei Probekörper nach Bild 2 mit Nietlochdurchmessern von $d = 26,0$ mm und einer Klemmlänge $s = 8,2d$ hergestellt. Die Niete von je einem Probekörper wurden nach den Verfahren I (gewöhnliche Preßluft-hammernietung), IV (Stauchhammer) und V (gedrehte zylindrische Niete) eingezogen. Zum Schlagen der Niete wurden die gleichen Niethämmer wie bei den kleineren Probekörpern verwendet. Die Probekörper lagerten dann bis zur Feststellung der Lochfüllungen und Klemmspannungen im Jahre 1940 in den Versuchsräumen des Instituts.

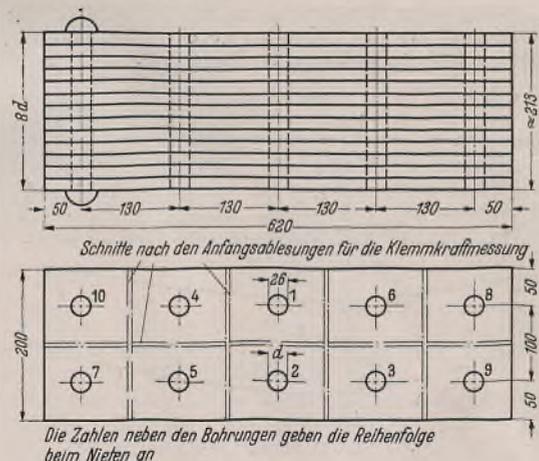


Bild 2.

Wie bei den Probekörpern nach Bild 1 waren auch bei den größeren Probekörpern nach Bild 2 die Klemmspannungen der Niete, die nach dem Verfahren V eingezogen wurden, mit dem Durchschnitt von $25,6$ kg/mm² wesentlich niedriger als die Klemmspannungen der Niete, die nach den Verfahren I und IV eingezogen wurden (Mittelwerte je $31,1$ kg/mm²). Dafür lieferte das Verfahren V, ebenfalls in Übereinstimmung mit den Probekörpern nach Bild 1, die weitaus beste Lochfüllung. Die Lochfüllung ist bei dem Verfahren V mit Unterschieden zwischen den Nietschaft- und Nietlochdurchmessern von 0,17 bis 0,38 mm recht zufriedenstellend ausgefallen, während die Lochfüllung der Verfahren I und IV weniger gut war.

B. Versuche vom Jahre 1936. Bei den Versuchen mit den Probekörpern nach Bild 1 war festzustellen, daß bei Preßluft-hammernietung

⁷⁾ Eine Kritik und Erläuterung zu diesen Verfahren findet sich in K. Wellinger, Eigenspannung, Gefüge und Festigkeit warmgeschlagener Nietten, S. 16ff. Berlin 1932, Wilh. Ernst & Sohn.

um so höhere Klemmspannungen entstanden, je hellglühender die Niete aus dem Feuer genommen wurden und je kürzer die Nietzeiten waren. Zur Nachprüfung dieser Feststellungen wurden im Jahre 1936 Versuche mit vier Probekörpern nach Bild 3 durchgeführt. Die Nietlochdurchmesser waren auf 22,6 mm herabgesetzt, um eine gute Lochfüllung zu erreichen.

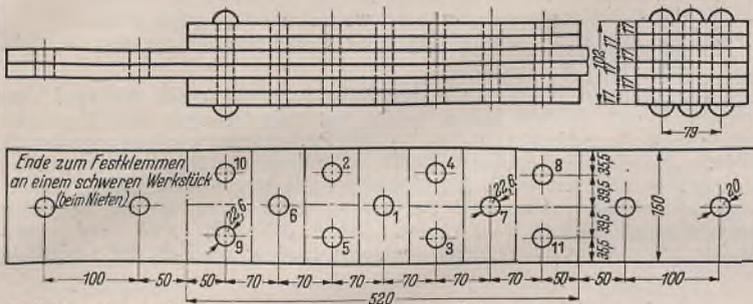


Bild 3.

Die Klemmlänge der Niete betrug 102 mm, entsprechend rd. 4,5 d. Zum Schlagen der Niete wurde der 13,4 kg schwere Preßlufthammer von den Versuchen unter A und zum Gegenhalten ein 11,15 kg schwerer Preßluftgegenhalter verwendet. Beim Nieteten wurden gemäß der folgenden Aufstellung Unterschiede in der Art des Nietfeuers, der Glühfarbe der Niete und der Nietzeit gemacht.

Probekörper	Erwärmen der Niete in einem			
	A. Koksfeuer	B.	C.	D.
Glühfarbe der Niete bei Beginn des Nietens ⁵⁾	am Schaftende beinahe weiß	am Schaftende beinahe weiß	am Schaftende beinahe weiß	am Schaftende gelbbrot
Nietzeit	10 sek	40 sek	10 bis 11 sek	11 bis 12 sek

Es war vorgesehen, alle Niete im Koksfeuer zu erwärmen. Beim Einbringen der Niete in die Nietlöcher des Probekörpers A wurde jedoch der zähe Zunder, der an den Nietschäften haftete, an die Übergänge zu den Setzköpfen geschoben, so daß die Setzköpfe der geschlagenen Niete nicht satt anlagen. Der Zunder konnte auch durch kräftiges Bürsten und Abklopfen nicht entfernt werden. Die Niete der Probekörper B, C und D wurden deshalb im Holzkohlenfeuer erwärmt, wodurch das Übel beseitigt war. Nietlöcher mit 22,6 mm Durchm. sind offenbar zu eng, wenn die Rohniete nach DIN 124 im Koksfeuer erwärmt werden.

Aus den Versuchsergebnissen sei folgendes hervorgehoben:

1. Die im Mittel höchsten Klemmspannungen wurden an dem Probekörper C gefunden, also bei hohen Niettemperaturen und kurzen Nietzeiten.
2. Die Klemmspannungen des Probekörpers B mit hohen Niettemperaturen und langen Nietzeiten waren im Mittel um ein Viertel niedriger als die Klemmspannungen im Probekörper C.
3. Die niedrigsten und ungleichmäßigsten Klemmspannungen entstanden am Probekörper D mit niedriger Niettemperatur und kurzer Nietzeit. Sie waren im Mittel um mehr als ein Drittel niedriger als beim Probekörper C; bei zwei Nieteten entstanden überhaupt keine Klemmspannungen.
4. Die Lochfüllungen der im Holzkohlenfeuer erwärmten Niete waren trotz der kleinen Nietlochdurchmesser nicht befriedigend.

Die Versuche haben also hinsichtlich des Einflusses der Niettemperaturen und der Nietzeiten auf die Klemmspannungen die früheren Feststellungen bestätigt. Die mittleren Klemmspannungen sind aber in keinem Fall so niedrig geworden wie bei den Verfahren II, III und V bei den Versuchen unter A.

C. Versuche vom Jahre 1938. Bei den letzten Versuchen wurden drei Probekörper geprüft, deren Niete ohne Vorstauchen mit Nietzeiten von 6 bis 7, 11 und 18 sek eingezogen wurden. Zum Schlagen der Niete

⁵⁾ Bei den Versuchen, über die hier berichtet wird, dienten die Glühfarben der Niete als Maßstab für die Niettemperaturen. Dieses Verfahren ist angängig, wenn wie bei diesen Versuchen dafür gesorgt wird, daß an den Arbeitsstellen annähernd die gleiche Lichtstärke vorhanden ist. Für die Versuche unter B wurde ein Zelt aus Wagenplanen aufgebaut, weil die Niettemperaturen auch mit einer verlaufenden Grauscheibe mit Blaufiltervorsatz (Pyroversum) gemessen wurden. Bei den Versuchen unter A und C wurden alle Nietungen in Brückenbauwerkstätten mit Oberlicht ausgeführt. Bei Ausführung der Nietarbeiten an genieteten Stahlbauten sind die Lichtstärken an den Arbeitsstellen sehr verschieden. Das eine Mal wird z. B. bei einbrechender Dämmerung in den Brückenbauwerkstätten, das andere Mal bei Sonnenschein an der Baustelle genietet. Bei so verschiedenen Lichtstärken sind die Niettemperaturen bei gleicher Glühfarbe der Niete sehr verschieden. Für die Warmverformbarkeit der Niete sind aber die Niettemperaturen maßgebend und nicht die Glühfarben. Bei der Anwendung der Versuchsergebnisse auf praktische Fälle ist daher der Einfluß der Lichtstärke zu beachten.

wurde der 13,4 kg schwere Preßlufthammer von den Versuchen unter A verwendet. Bei einem vierten Probekörper wurden die Niete während rd. 1 sek mit dem Preßluftstauchhammer vorgestaucht und anschließend während 8 bis 10 sek mit dem 13,4 kg schweren Preßlufthammer fertiggenietet. Beim fünften Probekörper wurden die Niete nur mit dem Stauchhammer 2 sek lang gestaucht. Die Probekörper hatten, abgesehen von den Nietlochdurchmessern, die Abmessungen nach Bild 3; die Durchmesser der Nietlöcher waren auf 22,7 mm erhöht worden. Trotzdem setzte sich bei einem Teil der Niete der zähe Zunder, der beim Einbringen der im offenen Koksfeuer erwärmten Niete vom Nietschaft abgestreift wurde, wieder am Übergang vom Nietschaft zum Setzkopf fest und verhinderte dadurch das satte Anliegen der Setzköpfe. Der Schaftdurchmesser der Rohniete betrug am Setzkopf 22,1 bis 22,2 mm, am Schaftende 21,4 bis 21,5 mm. Die Niete waren bei der Entnahme aus dem Feuer am Setzkopf gelbweißglühend und am Schaftende weißglühend. Zum Gegenhalten wurde eine rd. 19 kg schwere Drehwinde verwendet.

Die Klemmspannungen wurden bei 6 bis 7 sek Nietzeit am größten und am gleichmäßigsten; sie betragen im Mittel 27,9 kg/mm². Bei 11 und 18 sek Nietzeit entstanden weniger gleichmäßige Klemmspannungen; die Mittelwerte (26,0 und 26,2 kg/mm²) sind jedoch nur wenig niedriger als bei 6 bis 7 sek Nietzeit. Die Klemmspannungen der mit dem Stauchhammer vorgestauchten Niete sind sehr ungleichmäßig (4,8 bis 34,5 kg/mm²) ausgefallen; auch war der Mittelwert (19,7 kg/mm²) wesentlich niedriger als bei den drei anderen Probekörpern.

Die Lochfüllung ist bei den nicht vorgestauchten Nieteten mit 18 sek Nietzeit am besten und ganz zufriedenstellend ausgefallen. Der Unterschied zwischen den Durchmessern der Nietschäfte und Nietlöcher betrug im Mittel aus drei Versuchen etwa 0,20 bis 0,25 mm. Dann folgten die Niete mit 11 sek Nietzeit. Am schlechtesten war die Lochfüllung der nicht vorgestauchten Niete mit 6 bis 7 sek Nietzeit; hier betragen die Unterschiede zwischen Nietschaft und Nietloch 0,22 bis 0,34 mm. Die Lochfüllung der mit dem Stauchhammer vorgestauchten Niete lag etwa in der Mitte zwischen den Lochfüllungen der nicht vorgestauchten Niete mit 11 und 18 sek Nietzeit. Die Lochfüllung der nur mit dem Stauchhammer vorgestauchten und nicht fertiggenieteten Niete war noch etwa 0,1 mm schlechter als die Lochfüllung der nicht vorgestauchten Niete mit 6 bis 7 sek Nietzeit.

D. Schlußfolgerungen. Die Versuche haben gezeigt, daß es mit Preßlufthammermarnierung möglich ist, bei Klemmlängen bis etwa 4,5 d mit Nieteten aus St 44 gute Lochfüllungen und zufriedenstellende Klemmspannungen zu erreichen. Voraussetzung ist, daß bei rd. 23 mm Nietlochdurchmesser zwischen den Durchmessern d der Rohniete, vgl. DIN 124, und den Nietlochdurchmessern ein Unterschied von etwa 0,6 mm vorhanden ist, daß die Niete bei der Entnahme aus dem Feuer über die ganze Schaftlänge nahezu weißglühend sind und sofort geschlagen werden und daß die Nietzeit 10 bis 18 sek beträgt. Allerdings besteht bei so kleinen Unterschieden zwischen Rohniet- und Nietlochdurchmessern die Gefahr, daß die Setzköpfe wegen des abgestreiften Glühzunders nicht zum Anliegen kommen.

Die Bedeutung des Gewichts der Preßlufthammer und der Bauart der Gegenhalter ist noch festzustellen. Auch wäre zu untersuchen, ob bei den Nietverfahren II, III und V bei Anwendung kürzerer Nietzeiten und höherer Niettemperaturen höhere Klemmspannungen entstehen. Mit dem Stauchhammer ist die Lochfüllung unter sonst gleichen Umständen nur wenig verbessert worden.

Bei Klemmlängen von etwa 8 d kann zunächst nur die Verwendung von gedrehten Nieteten mit geringem Spiel zwischen Nietschaft und Nietloch empfohlen werden. Bei diesen Versuchen haben zylindrische Niete mit 0,5 mm Unterschied zwischen Nietschaft- und Nietlochdurchmesser zufriedenstellende Ergebnisse geliefert. Fritz Munzinger, Stuttgart.

Über Dauerversuche mit Nietverbindungen. Seit 1933 sind im Auftrag des Deutschen Ausschusses für Stahlbau im Institut für die Materialprüfungen des Bauwesens in Stuttgart Wechselbelastungsversuche und Schwellzugversuche mit großen Nietverbindungen aus St 52 im Gang. Zuerst sind zwei- und dreireihige Verbindungen¹⁾ mit $\sigma: \sigma_1: \tau = 1,0: 1,9: 0,8$ geprüft worden²⁾. Dann wurden zweireihige Verbindungen mit $\sigma: \sigma_1: \tau = 1,0: 1,5: 0,8$ und $1,0: 2,5: 0,8$ untersucht³⁾. Zuletzt wurden Versuche mit zweireihigen Verbindungen, bei denen das Verhältnis $\sigma: \tau$ verschieden war, durchgeführt. Über diese letzten Versuche hat O. Graf vor kurzem berichtet⁴⁾.

Die Bauart und die Abmessungen der Verbindungen sind in den Bildern 1 bis 3 wiedergegeben. Es betrug

bei den Verbindungen	das Verhältnis $\sigma: \sigma_1: \tau$
der Reihe 6 nach Bild 1	1,0: 1,9: 0,6,
der Reihen 2 a ₀ und 2 a ₄ nach Bild 2	1,0: 1,9: 0,8,
der Reihe 7 nach Bild 3	1,0: 1,9: 1,0.

¹⁾ Hier und im folgenden werden Verbindungen als zwei-, drei- oder mehrreihig bezeichnet, wenn die Niete in 2, 3 oder mehr Reihen quer zur Krafrichtung angeordnet sind.

²⁾ Vgl. O. Graf, Dauerversuche mit Nietverbindungen, Heft 5 der Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau, Ausgabe B, S. 42ff.

³⁾ Vgl. O. Graf, Stahlbau 1936, S. 185ff. sowie Heft 12 der Berichte des Deutschen Ausschusses für Stahlbau, S. 2ff.

⁴⁾ Vgl. O. Graf, Versuche mit Nietverbindungen, Heft 12 der Berichte des Deutschen Ausschusses für Stahlbau, S. 9ff.

Bei den Verbindungen der Reihen 2_a, 6 und 7 war an der Stoffuge ein Spalt von 4 mm vorgesehen, während bei den Verbindungen der Reihe 2_a die Stirnflächen der Mittelbleche planparallel bearbeitet waren und ohne Zwischenraum gegeneinanderstießen.

Bei der Herstellung der Verbindungen im Institut für die Materialprüfungen des Bauwesens in Stuttgart sind die Vorschriften der Deutschen Reichsbahn beachtet worden. Die Nietlöcher wurden aufgerieben. Die Berührungsflächen der Mittelbleche und Laschen wurden vor dem Zusammenfügen sorgfältig entfettet.

Zwei bis vier Verbindungen jeder Versuchsreihe wurden oftmaligem Wechsel zwischen gleich großen Zug- und Druckkräften unterworfen. Außerdem wurden je zwei Verbindungen der Reihe 6 mit $\sigma : \tau = 1,0 : 0,6$ und der Reihe 7 mit $\sigma : \tau = 1,0 : 1,0$ durch Dauerschwellzugversuche mit einer Unterzugspannung $\sigma_{zu} = 0,5 \text{ kg/mm}^2$ geprüft. Die Zahl der Lastspiele in der Minute betrug bei den Versuchen mit Wechselbelastung $n = \text{rd. } 100$, bei den Dauerschwellzugversuchen $n = \text{rd. } 170$.

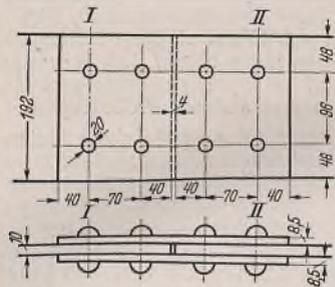


Bild 1. Nietverbindungen der Reihe 6. $\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 1,9 : 0,6$.

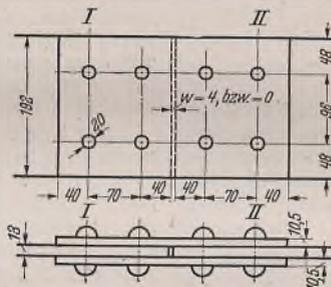


Bild 2. Nietverbindungen der Reihen 2_a ($w = 4 \text{ mm}$) und 2_{a0} ($w = 0 \text{ mm}$). $\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 1,9 : 0,8$.

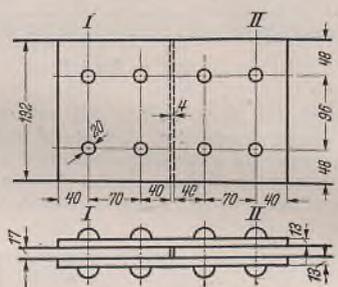


Bild 3. Nietverbindungen der Reihe 7. $\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 1,9 : 1,0$.

Die Schwingweite S , die 500 000 mal ertragen wurde, ergab sich

bei den Verbindungen	bei Wechselbelastung zwischen gleich großen Zug- und Druckkräften	bei Dauerschwellzugbelastung mit $\sigma_{zu} = 0,5 \text{ kg/mm}^2$
nach Bild 1 mit $\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 1,9 : 0,6$	zu 23	21,5 kg/mm^2 ,
nach Bild 2 mit $\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 1,9 : 0,8$	{ mit $w = 4 \text{ mm}$ zu 24,5 mit $w = 0 \text{ mm}$ zu 23,5	— kg/mm^2 ,
nach Bild 3 mit $\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 1,9 : 1,0$	zu 24	18,5 kg/mm^2 .

Bei allen Verbindungen sind die Mittelbleche im Nietlochquerschnitt einer äußeren Nietreihe gebrochen. An den Verbindungen der Reihe 7 mit $\sigma : \tau = 1,0 : 1,0$ sind bei Wechselbelastung außerdem Niete gebrochen. Durch Ermäßigung der Scherspannung τ der Niete vom 1,0fachen auf das 0,6fache der Zugspannungen σ der Bleche ist demnach die Schwingweite S bei Wechselbelastung annähernd gleich geblieben und bei Schwellzugbelastung rd. $\frac{1}{5}$ größer geworden⁹⁾.

Nach den Berechnungsgrundlagen für stählerne Eisenbahnbrücken der Deutschen Reichsbahn (BE 1936) dürfen die Scherspannungen τ der Niete das 0,8fache und der Lochleibungsdruck σ_l das 2,0fache der zulässigen Zugspannungen σ der Bleche nicht überschreiten. Die Dauerfestigkeit der vorschriftsmäßig bemessenen Nietverbindungen mit $\sigma : \sigma_l : \tau = 1,0 : 1,9 : 0,8$ für 500 000 Lastspiele wurde bei Wechselbelastung zu $\pm 11,75 \text{ kg/mm}^2$, bei reiner Schwellzugbelastung (Ursprungsbelastung) zu $17,5 \text{ kg/mm}^2$ ¹⁰⁾ ermittelt.

Nach den Vorschriften der Deutschen Reichsbahn (BE) sind, wenn nur die Hauptkräfte berücksichtigt werden, zulässig:

Für Wechselbelastung bei starkem Verkehr ⁷⁾	10,8 kg/mm^2 ,
bei schwachem Verkehr ⁸⁾	14,0 kg/mm^2 ,
für reine Schwellzugbelastung bei starkem Verkehr ⁷⁾	18,0 kg/mm^2 ,
bei schwachem Verkehr ⁸⁾	21,0 kg/mm^2 .

Die ermittelten Dauerfestigkeiten für 500 000 Lastspiele liegen bei Wechselbelastung nur wenig oberhalb und bei reiner Schwellzugbelastung knapp unterhalb der zulässigen Spannungen für starken Verkehr mit mehr als 25 Zügen im Tag. Wenn man eine mittlere Lebensdauer der Brücken

⁹⁾ Bei diesen Vergleichen ist zu beachten, daß auch die Rauigkeit der Blechoberflächen eine Rolle spielte. Die Rauigkeit wurde nicht gemessen; sie war aber dem Aussehen nach bei den Blechen mit verschiedener Dicke deutlich verschieden.

¹⁰⁾ Vgl. O. Graf, Dauerversuche mit Nietverbindungen. Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau, Ausgabe B, Heft 5, S. 47.

⁷⁾ Mehr als 25 Züge im Tag.

⁸⁾ Bis 25 Züge im Tag.

von 60 Jahren⁹⁾ voraussetzt, kommen bei insgesamt 500 000 Lastspielen im Durchschnitt rd. 23 Züge auf den Tag.

Schadenfälle an genieteten Brücken aus St 52 sind jedoch bis jetzt nicht bekannt geworden. Diese gute Erfahrung kann u. a. durch folgendes begründet sein:

1. die Brücken aus St 52 bestehen erst seit etwa 10 Jahren;
2. die Belastungsannahmen sind weitreichend gewählt worden;
3. die Zahl der Vollbelastungen ist wesentlich kleiner als die Zahl der Züge¹⁰⁾.

Die vorliegenden Versuchsergebnisse gestatten einen weiteren Vergleich. In den letzten Jahren wurde bei Fachsitzungen und Tagungen wiederholt die Ansicht vertreten, daß die Probekörper weniger angestrengt würden, wenn die Lastspiele durch schnelllaufende Pulsationsmaschinen erzeugt werden, als wenn die Lastspiele mit langsamlaufenden „Steuerapparaten“ gesteuert werden. Bei den früheren Versuchen mit den Nietverbindungen GH 52. 1—2,4 und GH 52. 3,6—7¹¹⁾ sind die Lastspiele mit einem Steuerapparat gesteuert worden; die Zahl der Lastspiele

in der Minute betrug $n = 8$ bis 16. Bei den Versuchen mit den Verbindungen 4—5,1 und 4—5,2¹²⁾ wurden dagegen die Lastspiele mit einer Pulsationsmaschine erzeugt. Alle vier Verbindungen sind aber aus Werkstoffen der gleichen Lieferung in gleicher Weise hergestellt worden.

Die Wechselbelastungsversuche mit den Verbindungen haben folgendes ergeben:

Versuchsdurchführung	Zahl der Lastspiele in der Minute	Bezeichnung der Nietverbindungen	Zug- und Druckspannung σ der Bleche kg/mm^2	Zahl der Lastspiele bis zum Bruch
Mit Steuerapparat	8 bis 16	GH 52. 1—2,4	15,0	220 090
		GH 52. 3,6—7	14,0	483 347
Mit Pulsationsmaschine	rd. 100	4—5,1	15,0	245 200
		4—5,2	14,0	246 200

Die Widerstandsfähigkeit der Verbindungen war demnach bei „Steuerbetrieb“ mit $n = 8$ bis 16 Lastspielen in der Minute und bei „Pulsationsbetrieb“ mit $n = \text{rd. } 100$ Lastspielen in der Minute annähernd gleich; bei „Pulsationsbetrieb“ eher kleiner als größer¹³⁾.

Fritz Munziger, Stuttgart.

⁹⁾ Vgl. K. Klöppel, Beitrag zur Frage der Unterhaltungskosten von Stahlbauwerken. Diss. 1934; Technische Hochschule Breslau.

¹⁰⁾ Der Einfluß von oftmals wiederholten Belastungen, die kleiner sind als die Vollbelastungen, auf die Lebensdauer von größeren Bauteilen muß noch erkundet werden. Versuche mit kleinen Probestäben liegen vor; vgl. z. B. K. Daeves, E. Gerold und E. H. Schulz, St. u. E. 1940, S. 100ff. E. Gaßner, Luftwiss. Bd. 6 (1939), S. 61 ff.

¹¹⁾ Vgl. O. Graf, Heft 5 der Berichte des Ausschusses für Versuche im Stahlbau, S. 42/43, Zusammenstellung 6.

¹²⁾ Vgl. O. Graf, Heft 12 der Berichte des Deutschen Ausschusses für Stahlbau, S. 12.

¹³⁾ Vgl. auch O. Graf, Versuche über den Einfluß der Zahl der minutlich auftretenden Lastwechsel auf die Ursprungszugfestigkeit von Nietverbindungen. Stahlbau 1936, S. 48.

INHALT: Stahlkonstruktion für Großschmiedehallen. — Berechnung von Biegeträgern mit axialer Zugkraft. — Verschiedenes: Versuche zur Feststellung der Klemmspannungen und der Lochfüllung mit Nieten aus St 44. — Über Dauerversuche mit Nietverbindungen.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt.
Verlag: Wilhelm Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W 9.
Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

DER STAHLBAU

Schriftwaltung:
 Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt, Technische Hochschule
 Fernsprecher: Darmstadt 7711, Apparat 599
 Professor W. Rein, Breslau, Technische Hochschule. — Fernsprecher: Breslau 421 61
 Veröffentlichungsbeiträge an voranstehende Anschriften erbeten

Beilage
 zur Zeitschrift

DIE BAUTECHNIK

Fachschrift für das gesamte Bauingenieurwesen

Preis des Jahrganges 10 RM und Postgeld

14. Jahrgang

BERLIN, 26. Dezember 1941

Heft 25/26

Ein Rechenschema zur Knickberechnung mehrfeldriger beliebig gestützter Druckstäbe und seine Anwendung auf Zahlenbeispiele.

Alle Rechte vorbehalten.

Von Professor Dr.-Ing. Karl Krisko, Brünn.

Ende September 1940 habe ich dem Generalsekretariat der Internationalen Vereinigung für Brücken- und Hochbau in Zürich die Abhandlung „Knickberechnung mehrfeldriger, in den Feldgrenzen beliebig gestützter Stäbe“ als Beitrag zum Band VI der „Abhandlungen der I. V. B. H.“ vorgelegt. Da sich die Drucklegung des Bandes VI noch weiterhin verzögert, so bringe ich in diesem Aufsatz das Ergebnis der obengenannten Abhandlung zur Kenntnis.

Dieses Ergebnis besteht in einem einfachen Rechenschema, nach welchem die strenge Knickberechnung, d. h. die Ermittlung der Knickdeterminante eines beliebig gestützten mehrfeldrigen Stabes, in immer gleicher und gleich einfacher Weise erfolgen kann.

Der Berechnung liegen gerade Stäbe zugrunde, die innerhalb eines Feldes konstanten Querschnitt und konstantes Trägheitsmoment aufweisen, an den Feldgrenzen von axial wirkenden Einzelkräften beliebiger Größe ergriffen werden und daselbst nach irgendeiner der sechs in Bild 1 schematisch dargestellten Stützungsarten gelagert sind. Demnach dürfen Durchlaufstäbe der hier betrachteten Art jede beliebige Unsymmetrie hinsichtlich Konstruktion, Belastung und Lagerung aufweisen.

I. Bezeichnungen.

Bild 1a bis 1c stellt eine in der Querrichtung unverschiebliche, Bild 1d bis 1f eine in der Querrichtung federnde Stützung dar. Die über den Stützen liegenden „Stützenquerschnitte“ des Durchlaufstabes sind entweder frei drehbar (Bild 1a, 1d), elastisch drehbar (Bild 1b, 1e) oder unverdrehbar (Bild 1c, 1f).

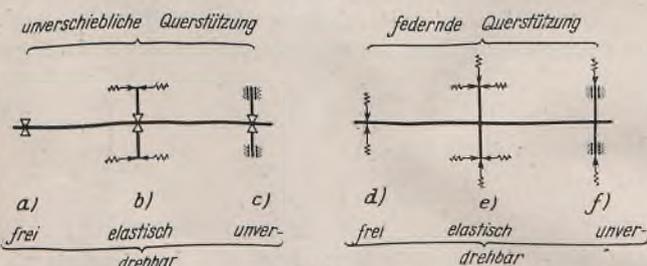


Bild 1.

Die im Stützenquerschnitt gedachte Einspannung des Durchlaufstabes in eine elastische oder starre Stütze (Pfeiler eines Rahmentragwerks, Pfosten eines Fachwerks usw.) wird schematisch nach Bild 1 so dargestellt, daß ein im Stützenquerschnitt mit dem Durchlaufstab biegesteif verbundener starrer Stab, der sogenannte „Stützenstab“, elastisch drehbar bzw. unverdrehbar gelagert ist.

Wird die federnde Querstützung eines Durchlaufstabes (Bild 2a) durch eine unverschiebliche Stützung ersetzt (vorhandene elastische Verdrehbarkeit von Stützenstäben bleibt unverändert erhalten), so wird der nunmehr auf unverschieblichen Stützen lagernde Durchlaufstab aus einem hier nicht näher zu erläuternden Grunde als „Ersatzstab“ bezeichnet. Aus ihm erhält man, wie dies beispielsweise in Bild 2 für den dort dargestellten Stab durchgeführt wurde, bei Kenntnis der elastischen Stützelemente ein statisch bestimmtes System, indem man die Querschnitte an den Enden der Feldstäbe durchschneidet und daselbst nach Bild 2c Gelenke einschaltet. Diese Trennungsquerschnitte im Ersatzstab heißen Gelenkquerschnitte. Liegt zwischen zwei Feldstäben ein Stützenstab, so sind die einzuschaltenden Gelenke unendlich nahe links und rechts vom Stützenstab anzubringen; das zwischen ihnen liegende Stabelement ist mit dem Stützenstab in starrer Verbindung.

Nach Bild 2c sind die Gelenke der Reihe nach mit den fortlaufenden arabischen Ziffern zu bezeichnen, die auch gleichzeitig die Gelenk-

querschnitte des Ersatzstabes kennzeichnen. Zwischen je zwei Gelenken $r-1$ und r liegt der ebenfalls mit einer arabischen Ziffer zu benennende Feld- bzw. Stützenstab (r) (Bild 2a).

Die Stützen selbst werden ebenfalls durch arabische Ziffern gekennzeichnet. Eine zwischen zwei Feldstäben liegende Stütze führt die Ordnungsnummer des links von ihr liegenden Feldstabes. Ist der Stützenquerschnitt in einem Stützenstab eingespannt, so wird auch die Stütze mit der Ordnungsnummer des Stützenstabes bezeichnet. Nach dieser Festsetzung weist die Bezifferung der Stützen, falls der Stabzug Stützenstäbe enthält, keine regelmäßige Zahlenfolge auf. Die letzte Stütze eines n -stäbigen Stabzuges, gleichgültig, ob der letzte Stab ein Feld- oder Stützenstab ist, führt stets die Bezeichnung „ n “, die erste Stütze wird mit „1“ bezeichnet, falls der erste Stab des Verbandes ein Stützenstab ist, hingegen mit „0“, wenn der Stabzug mit einem Feldstab beginnt (Bild 2 bzw. 6).

In den Stützenquerschnitten sollen die von außen, z. B. von den Füllstäben eines Fachwerks, aufgebrachtene Axialkräfte $\Delta \mathcal{E}_r$ angreifen. Diese Gebrauchsbelastung erzeugt in den Feldstäben die Druckkräfte \mathcal{E}_r .

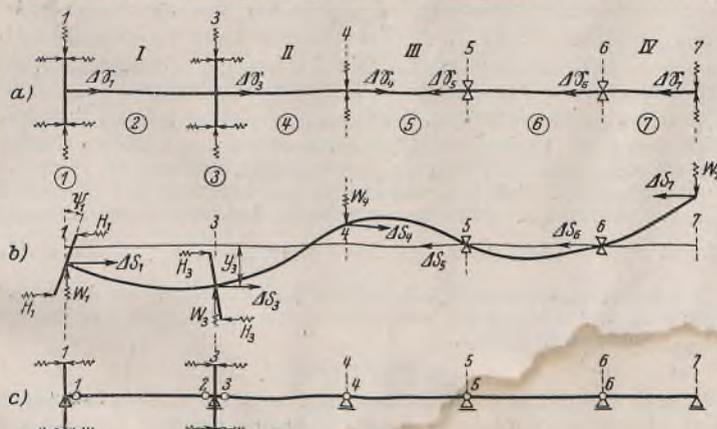


Bild 2.

Der Durchlaufstab besitzt mit Bezug auf ein Ausknicken in der Zeichenebene die Knicksicherheit ν , wenn bei vorgegebener Stützung die ν -fach erhöhte Gebrauchslast $\nu \Delta \mathcal{E}_r = \Delta \mathcal{E}_{Ki(r)}$ das Ausknicken bewirkt. Im Felde r wirkt dann die Knickkraft $\mathcal{E}_{Ki(r)}$, die zwecks Vermeidung der Doppelzeiger im weiteren mit S_r bezeichnet werden soll;

sie erzeugt die Knickspannung $\sigma_r = \frac{S_r}{F_r}$, wobei F_r die Querschnittsfläche

des Feldstabes darstellt. T_r sei der der Knickspannung σ_r zugeordnete (Engebersche) Knickmodul. Das Trägheitsmoment des Querschnitts F_r in bezug auf seine zur Zeichenebene senkrechte Achse sei J_r und c_r die Feldlänge.

II. Die elastische Stützung.

Der elastische an der Stütze i wirkende Stützenwiderstand W_i und ebenso das infolge einer elastischen Einspannung am Stützenstab zur Wirkung kommende Spannungsmoment \mathcal{M}_i gehorchen dem Elastizitätsgesetz. W_i und \mathcal{M}_i sind demnach den Deformationen proportional. Es sei $W_i = A_i y_i$ und $\mathcal{M}_i = C_i \psi_i$, wobei y_i die Stützensenkung infolge W_i und ψ_i die Stützenstabverdrehung infolge \mathcal{M}_i darstellt.

Die Konstante A_i ist der spezifische Stützenwiderstand infolge $y_i = 1$, die Konstante C_i ist der spezifische Verdrehungswiderstand infolge $\psi_i = 1$. A_i und C_i — die Federkonstanten — bestimmen die „Stärke“ der elastischen Stützung.

Sinngemäß wird die durch $W_i = 1$ verursachte Stützensenkung $y_i \equiv \delta_i$ spezifische Stützensenkung genannt und die durch $\mathfrak{M}_i = 1$ erzeugte Verdrehung $\psi_i \equiv \varepsilon_i$ als spezifische Stützenstabverdrehung bezeichnet. Mit Einführung dieser Größen folgt $y_i = \delta_i W_i$, $\psi_i = \varepsilon_i \mathfrak{M}_i$ und $1 = A_i \delta_i$ bzw. $1 = C_i \varepsilon_i$, woraus sich die Formeln

$$(1) \quad \begin{cases} A_i = \frac{1}{\delta_i} & \text{bzw.} & \delta_i = \frac{1}{A_i} \\ C_i = \frac{1}{\varepsilon_i} & \text{bzw.} & \varepsilon_i = \frac{1}{C_i} \end{cases}$$

ergeben.

III. Die beiden Hauptaufgaben.

Zur Lösung jedweder Knickaufgabe steht immer nur eine einzige Gleichung zur Verfügung, die aus der Bedingung „Knickdeterminante $\Delta = 0$ “ fließt. Deshalb sind in einem vorliegenden Knickproblem alle von vornherein unbekanntes Größen passend anzunehmen bis auf eine einzige, die als unbekannt offen bleibt und aus der Bedingung $\Delta = 0$ zu errechnen ist.

Über die zweckmäßige Annahme dieser Unbekannten gibt der Abschnitt IV/13 nähere Auskunft; hier sollen die beiden Hauptaufgaben der Knickuntersuchung, die Überprüfung einer bestehenden Konstruktion einerseits und der Entwurf einer Neukonstruktion andererseits, näher umschrieben werden.

A. Die Überprüfung.

In diesem Falle sind alle Abmessungen des Durchlaufstabes, die Druckkräfte \mathfrak{S}_r infolge der Gebrauchsbelastung und die spezifischen Stützenwiderstände A_i , C_i bzw. deren Reziprokwerte δ_i , ε_i gegeben. Mit Bezug auf das Ausknicken des Stabes in der Zeichenebene ergeben sich nun zweierlei Fragestellungen: 1. die Frage nach der „Knicksicherheit“ des Durchlaufstabes und 2. die Frage nach der „Stützensicherheit“ der federnden Querstützung.

Die erste Frage lautet: Um wieviel dürfen die durch die Gebrauchsbelastung erzeugten Druckkräfte \mathfrak{S}_r der Feldstäbe von \mathfrak{S}_r auf $S_r = \nu \mathfrak{S}_r$ erhöht werden, damit die vorhandene Stützung ein Ausknicken des Durchlaufstabes gerade noch zu verhindern vermag. Die Unbekannte des Problems ist die Knicksicherheit ν .

Im zweiten Falle wird gefragt, um wieviel die vorhandenen spezifischen Stützenwiderstände $A_{i, \text{vorh}}$ größer sind als die erforderlichen Widerstände $A_{i, \text{erf}}$, die das Ausknicken des Durchlaufstabes bei vorgegebener Knickbelastung und, falls Stützenstäbe vorhanden sind, auch bei vorgegebenen spezifischen Verdrehungswiderständen $C_{i, \text{vorh}}$ gerade noch zu verhindern vermögen. Wird $A_{i, \text{vorh}} = \mu A_{i, \text{erf}}$ gesetzt, so zeigt ein Wert $\mu > 1$ die „Stützensicherheit“ an; der Wert $\mu = 1$ gibt zu erkennen, daß die vorhandene Querstützung gerade genügt, während ein Wert $\mu < 1$ darauf hindeutet, daß die vorhandene Querstützung zu schwach ist, um das Ausknicken unter den gegebenen Umständen zu verhindern.

Wegen $A_i = \frac{1}{\delta_i}$ folgt aus obiger Gleichung $\delta_{i, \text{erf}} = \mu \delta_{i, \text{vorh}}$ und ein Wert $\mu > 1$ bedeutet wieder, daß die erforderliche Federung um das μ -fache „weicher“ sein darf als die vorhandene. Die Unbekannte des Problems ist die Stützensicherheit μ .

B. Der Entwurf.

Beim Entwurf einer Neukonstruktion sind die Gebrauchslasten \mathfrak{S}_r , die verlangte Knicksicherheit ν des Durchlaufstabes und daher auch die Knickkräfte $S_r = \nu \mathfrak{S}_r$ gegeben. Die Abmessungen der Feldstäbe und die Stärke der elastischen Stützungen sind nun so zu bestimmen, daß die vorgeschriebene Knicksicherheit des Durchlaufstabes gewährleistet erscheint.

Im vorliegenden Falle existiert eine große Zahl von vornherein unbekanntes, frei zu wählenden Bestimmungsstücken. Bei der Festsetzung dieser Bestimmungsstücke wird man stets so vorgehen, daß nur eine einzige, die federnde Querstützung betreffende Größe als Unbekannte des Problems offen bleibt. Nur bei diesem Vorgang liefert, wie im Abschnitt IV/13 näher umschrieben, die Bedingung $\Delta = 0$ eine algebraische Gleichung zur direkten Ermittlung der Unbekannten.

Bei Entwurfsaufgaben ist demnach nicht nur über die spezifischen Verdrehungswiderstände C_i , falls sie nicht ohnehin vorgegeben sind, passend zu verfügen, sondern auch über die Abmessungen der Feldstäbe, die ebenfalls passend anzunehmen sind. In dieser Hinsicht sei bemerkt, daß beim Knicken der ganze Stabverband als durchlaufender Stab wirken soll, was z. B. bei einem elastisch gestützten Durchlaufstab ohne Stützenstäbe nur dann zutrifft, wenn die einzelnen Feldstäbe innerhalb der Feldweite c_r knicksicher sind. Dies ist der Fall, wenn ihre „freien Knicklängen $l_r = m_r c_r$ “ größer sind als die entsprechenden Feldlängen. Die Abmessungen der Feldstäbe sind daher in solchen Fällen „passend“ gewählt, wenn in dem die Größe m_r bestimmenden Ausdruck

$$m_r = \pi \sqrt{\frac{T_r J_r}{S_r c_r^2}} > 1.$$

Dieser Wert m_r ist eine wichtige Kennziffer für die Stärke eines Feldstabes im Stabverband. Zweckmäßig soll $m_r > 1,2$ sein, und sollen sich, wenn möglich, die m_r -Werte aller Feldstäbe nicht allzusehr voneinander unterscheiden, weil oft schon ein einziger, zu den übrigen relativ kleiner m_r -Wert eine unverhältnismäßig starke Querstützung bedingt. Je größer die m_r -Werte sind, um so schwächer ist die erforderliche elastische Querstützung. Bei den Druckgurten offener Fachwerksbrücken sind m_r -Werte in den Grenzen $1,2 < m_r < 3$ üblich.

Da die Lösung von Knickaufgaben jeder Art die Kenntnis der Knickdeterminante erfordert, ist es wichtig, dieselbe möglichst rasch in einem einfachen Rechnungsgang ermitteln zu können.

IV. Die Ermittlung der Knickdeterminante.

In den folgenden Abschnitten 1 bis 12 wird nun das Rechenschema zur Ermittlung der Knickdeterminante mitgeteilt. Bezüglich der Herleitung dieses Schemas sei auf die bereits genannte Arbeit im Band VI der Abhandlungen der I. V. B. H. verwiesen.

Die in den Abschnitten 1 bis 12 definierten Größen sind entweder den einzelnen Stäben des Stabverbandes oder den Gelenken bzw. den Gelenkquerschnitten des Ersatzstabes zugeordnet. Sie sollen daher in kurzer Sprechweise einfach als „Stabwerte“ bzw. als „Gelenkwerte“ bezeichnet werden und sind demnach auch mit der dem Stab oder der dem Gelenk zugeordneten Ziffer zu bezeichnen. Diese Definitionsgrößen sind durchwegs Absolutwerte, die erst in der Knickdeterminante — sofern sie daselbst auftreten — nach einer festliegenden Regel mit Vorzeichen zu versehen sind. Ihre Berechnung ist in der Reihenfolge der Abschnitte 1 bis 12 durchzuführen.

1. Die Kennziffer m_r eines Feldstabes (r)

definiert seine freie Knicklänge l_r in der Form $l_r = m_r c_r$, wobei

$$(2) \quad m_r = \pi \sqrt{\frac{T_r J_r}{S_r c_r^2}}$$

Beim Entwurf ist S_r in jedem Falle gegeben, J_r und T_r sind, wenn nicht direkt gegeben, so zu bestimmen, daß $m_r > 1$ wird. Hierbei ist zu beachten, daß der Knickmodul T_r , falls die Knickspannung $\sigma_r = \frac{S_r}{F_r} > \sigma_{\text{prop}}$, eine Funktion von σ_r ist. Nach Engeßer ist beispielsweise der der Knickspannung σ_r t/cm² zugeordnete Knickmodul

$$(3) \quad T_r = \frac{(3,1 - \sigma_r)^2 \sigma_r}{1,28265} \cdot 10^3 \text{ t/cm}^2,$$

doch kann T_r auch nach irgendeinem anderen Gesetz festgelegt werden. Für $\sigma_r < \sigma_{\text{prop}}$ ist T_r identisch mit dem Elastizitätsmodul E . Die m_r -Werte für sämtliche Feldstäbe sind stets in erster Linie zu berechnen.

2. Die σ_r - und τ_r -Werte der Feldstäbe.

Mit Kenntnis der m_r ermittelt man für jeden Feldstab (r) das Bogenmaß

$$(4) \quad \widehat{\varphi}_r = \frac{\pi}{m_r}$$

oder berechnet es direkt aus

$$(5) \quad \widehat{\varphi}_r = \sqrt{\frac{S_r c_r^2}{T_r J_r}}$$

bestimmt ferner das zugeordnete Gradmaß φ_r° , berechnet $\sin \varphi_r$, $\text{tg } \varphi_r$ und ermittelt die beiden Werte

$$(6) \quad \begin{cases} s_r = \frac{\widehat{\varphi}_r}{\sin \varphi_r} - 1 \\ t_r = 1 - \frac{\widehat{\varphi}_r}{\text{tg } \varphi_r} \end{cases}$$

Nun wählt man einen beliebigen, abgerundeten Vergleichswert S^* von der Größenordnung der Stabkräfte S_r , analog einen Vergleichswert c_r^* von der Größenordnung der Feldlängen c_r , berechnet die dimensionslosen Größen

$$(7) \quad S_r' = \frac{S_r}{S^*}, \quad c_r' = \frac{c_r}{c_r^*}, \quad S_r' c_r' = \dots$$

und hiermit die ebenfalls dimensionslosen Stabwerte

$$(8) \quad \sigma_r' = S^* c_r^* s_r = \frac{S_r}{S_r' c_r'} \quad \text{und} \quad \tau_r' = S^* c_r^* t_r = \frac{t_r}{S_r' c_r'}$$

für alle Feldstäbe¹⁾.

¹⁾ Die in dieser Abhandlung mit Hilfe der Vergleichswerte S^* , c_r^* und δ^* gebildeten dimensionslosen Zahlenwerte sind durch Beisetzung eines Striches gekennzeichnet.

3. Die ϵ_r' -Werte der Stützenstäbe

werden erhalten, indem man die den elastisch drehbaren Stützenstäben (r) zugeordneten ϵ_r' -Werte (Dimension 1/Kraft · Länge), die entweder gegeben oder passend zu wählen sind, mit dem Produkt $S^* c^*$ multipliziert. Man erhält dann die dimensionslosen Stabwerte

$$(9) \quad \epsilon_r' = S^* c^* \epsilon_r$$

Einem fest eingespannten unverdrehbaren Stützenstab entsprechen die Werte $\epsilon_r = 0$ und $\epsilon_r' = 0$.

4. Die δ_i' -Werte der Querstützung

werden erhalten, indem man die δ_i -Werte (Dimension 1/Kraft) durch einen frei zu wählenden Vergleichswert δ^* (Dimension 1/Kraft) von der Größenordnung der δ_i dividiert. Man erhält dann die dimensionslosen Stützenwerte δ_i' aus

$$(10) \quad \delta_i' = \frac{\delta_i}{\delta^*}$$

Einer unverschieblichen Querstützung entsprechen die Werte $\delta_i = 0$ und $\delta_i' = 0$.

Wie bereits in III/B erwähnt, wird bei einer Entwurfsaufgabe zweckmäßig die elastische Querstützung in passender Form als unbekannt offen gehalten und mit Hilfe der Knickbedingung $\mathcal{L} = 0$ so bestimmt, daß sie die verlangte Knicksicherheit gewährleistet. Hierbei sind über die Querstützung, d. h. über die sie kennzeichnenden δ_i - bzw. δ_i' -Werte bestimmte, im Abschnitt IV/13 näher umschriebene Annahmen zu treffen.

5. Die Gelenkwerte κ_i' und k_i'

Schließt ein Gelenk i zwei Feldstäbe zusammen, so ist der κ_i' -Wert die Summe aus den τ' -Werten der zusammengeschlossenen Stäbe.

Verbindet das Gelenk i aber einen Feld- und einen Stützenstab, so ist der κ_i' -Wert dieses Gelenkes die Summe aus dem τ' -Wert des Feldstabes und dem ϵ' -Wert des Stützenstabes.

Nach dieser Definition erhält man z. B. für den in Bild 2 dargestellten Stab:

$$(11) \quad \begin{cases} \kappa_1' = \tau_1' + \tau_2' & \kappa_4' = \tau_4' + \tau_5' \\ \kappa_2' = \tau_2' + \tau_3' & \kappa_5' = \tau_5' + \tau_6' \\ \kappa_3' = \tau_3' + \tau_4' & \kappa_6' = \tau_6' + \tau_7' \end{cases}$$

Die Gelenkwerte k_i' sind die Reziprokwerte der κ_i' , daher die Formel

$$(12) \quad k_i' = \frac{1}{\kappa_i'}$$

6. Die Fortleitungszahlen a_r und b_r der Feld- und Stützenstäbe.

Jeder innere Feld- oder Stützenstab wird im Hauptssystem von zwei Gelenken begrenzt, die Randstäbe sind nur durch ein Gelenk an den Stabzug angeschlossen. Der κ' -Wert, der dem Gelenk am linken Ende eines Feld- oder Stützenstabes zugeordnet ist, soll kurz als „ κ'_{links} “ bezeichnet werden, und analog gehört der Wert „ κ'_{rechts} “ dem am rechten Stabende liegenden Gelenke zu. Mit Beachtung dieser Bezeichnung werden die Fortleitungszahlen a_r und b_r in folgender Weise definiert:

$$(13) \quad \begin{cases} \text{Feldstab } (r) \dots \dots a_r = \frac{\sigma_r'}{\kappa'_{\text{links}}}, & b_r = \frac{\sigma_r'}{\kappa'_{\text{rechts}}} \\ \text{Stützenstab } (r) \dots \dots a_r = \frac{\epsilon_r'}{\kappa'_{\text{links}}}, & b_r = \frac{\epsilon_r'}{\kappa'_{\text{rechts}}} \end{cases}$$

Da ein linker Randstab (1) kein „ κ'_{links} “, ein rechter Randstab (n) niemals ein „ κ'_{rechts} “ besitzt, so ist stets $a_1 = 0$ und $b_n = 0$.

Beispielsweise erhält man nach (13) für den Durchlaufstab nach Bild 2:

$$a_1 = 0, b_1 = \frac{\epsilon_1'}{\kappa_1'}; a_2 = \frac{\sigma_2'}{\kappa_2'}, b_2 = \frac{\sigma_2'}{\kappa_2'}; a_3 = \frac{\epsilon_3'}{\kappa_3'}, b_3 = \frac{\epsilon_3'}{\kappa_3'} \text{ usw.}$$

7. Die Fortleitungszahlen p_r , q_r und die Multiplikatoren μ_r der Feld- und Stützenstäbe.

Mit Kenntnis der Fortleitungszahlen a_r und b_r gewinnt man die Fortleitungszahlen p_r und q_r aus den Definitionsgleichungen:

$$(14) \quad \begin{cases} p_r = \frac{a_r}{1 - b_{r-1} p_{r-1}} & r = 1, 2, 3, \dots, n \\ q_r = \frac{b_r}{1 - a_{r+1} q_{r+1}} & r = n, n-1, \dots, 2, 1 \end{cases}$$

Bei der Ermittlung der p_r ist mit dem ersten, bei der Ermittlung von q_r mit dem letzten Stab zu beginnen. Weil stets $a_1 = 0$, $b_n = 0$, so ist auch $p_1 = 0$ und $q_n = 0$. Der linke Randstab besitzt demnach keine Fortleitungszahl p , der rechte Randstab keine Fortleitungszahl q .

Die Multiplikatoren μ_r sind aus der Definitionsgleichung

$$(15) \quad \mu_r = \frac{q_r}{p_r} \quad r = 2, 3, \dots, (n-1)$$

zu errechnen.

Den beiden Randstäben ist kein Multiplikator μ zugeordnet, daher immer $\mu_1 = 0$ und $\mu_n = 0$.

8. Die Einflußzahlen λ'_{ii}

sind den Gelenkquerschnitten des Ersatzstabes zugeordnet. Das erste nach Abschnitt I in den Stabzug einzuschaltende Gelenk und auch der erste Gelenkquerschnitt des n -stäbigen Ersatzstabes führen stets die Bezeichnung „1“, das letzte dieser Gelenke bzw. der letzte Gelenkquerschnitt des Ersatzstabes die Bezeichnung „ $n-1$ “. Daher sind auch die λ'_{ii} von $i=1$ bis $i=n-1$ zu berechnen. Es ist:

$$(16) \quad \begin{cases} \lambda'_{11} = \frac{q_1}{b_1} \cdot k_1' \\ \lambda'_{22} = \mu_2 \lambda'_{11} \\ \lambda'_{33} = \mu_3 \lambda'_{22} \\ \dots \\ \lambda'_{n-1, n-1} = \mu_{n-1} \lambda'_{n-2, n-2} \end{cases}$$

Zur Kontrolle kann der letzte λ' -Wert auch aus der Formel

$$(17) \quad \lambda'_{n-1, n-1} = \frac{p_n}{a_n} \cdot k_{n-1}'$$

und irgendein Zwischenwert aus

$$(18) \quad \lambda'_{ii} = \frac{1}{b_r} \cdot \frac{q_r}{1 - p_r q_r} \cdot k_i' \quad r = i$$

ermittelt werden.

9. Die A' -, B' -, C' -, D' -... Momente in den Gelenkquerschnitten des Ersatzstabes.

Dies sind die Absolutwerte der „bezogenen Biegemomente $M'_i = \frac{M_i}{S^* c^*}$ “, wobei die Zähler M_i jene Biegemomente in den Gelenkquerschnitten des Ersatzstabes darstellen, die durch besondere Stützenverschiebungen erzeugt werden. Bild 3 zeigt diese Stützenverschiebungen am statisch bestimmten Hauptsystem des dem Durchlaufstab Bild 2 zugeordneten Ersatzstabes. Wie zu ersehen, sind die Stützen so zu verschieben, daß jeweils nur ein Feldstab die „Verdrehung $\nu = +1$ “ erhält. Hierzu muß bemerkt werden, daß die „Verdrehung $\nu = +1$ “ nur mit jenen Feldstäben — Stützenstäbe kommen überhaupt nicht in Frage — vorzunehmen ist, die an beiden oder zumindest an einem der beiden Enden federnd quergestützt sind. Deshalb fällt z. B. der Feldstab (6) von Bild 2 aus, da seine beiden Enden seitlich unverschieblich gelagert sind, und in Bild 3 kommen nur die vier Feldstäbe (2), (4), (5) und (7) für die Verdrehung $\nu = +1$ in Betracht. Weil nunmehr die regelmäßige Zahlenfolge in den Ordnungsnummern dieser Stäbe durch den Ausfall der Stützen- und Feldstäbe gestört ist, so müssen sie, wie in Bild 3 angegeben, eine Neuzeichnung durch römische Ziffern in der Folge I bis IV erhalten.

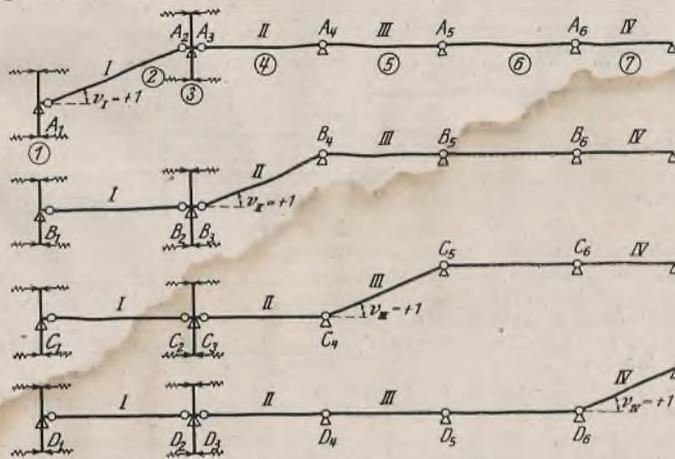


Bild 3.

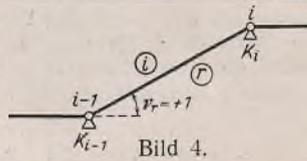
Diese neuerliche Bezeichnung der federnd gestützten Feldstäbe mit römischen Ziffern, neben welcher die bisherige Bezeichnung gleichzeitig weiterbesteht, wird immer dann erforderlich, wenn 1. Stützenstäbe zwischen zwei Feldstäben eingeschaltet sind, und 2. wenn im Stabzug Feldstäbe vorkommen, die an beiden Enden unverschieblich gelagert sind. Trifft beides nicht zu, so kann diese zweite Bezeichnung mit römischen Ziffern entfallen.

Ein Stabneigungswinkel ν_r soll, falls die Bezeichnung durch römische Ziffern notwendig ist, die dem Stab zugeordnete römische Ziffer als Zeiger erhalten. Das durch die Formänderung $\nu_1 = +1$ in irgendeinem Gelenkquerschnitt i des Ersatzstabes hervorgerufene „bezogene Biegemomente“

moment M_i^* wird, wie in Bild 3 angedeutet, mit A_i' bezeichnet, und analog führen die durch $\nu_{II} = +1$ bzw. $\nu_{II}^I = +1$, $\nu_{IV} = +1 \dots$ in den Gelenkquerschnitten i erzeugten „bezogenen Biegemomente M_i^* “ die Bezeichnung $B_i', C_i', D_i' \dots$. Der Zeiger i stimmt mit der dem Gelenkquerschnitt zugeordneten arabischen Ziffer überein. Durch diese Erläuterung erklärt sich auch die Bezeichnung „ $A', B', C', D' \dots$ Momente“ in der Überschrift dieses Absatzes.

Die bezogenen Momente K_{i-1}' und K_i' in den Gelenkquerschnitten $i-1$ und i eines beliebigen, in Bild 4 dargestellten, mit der arabischen Ordnungsziffer (i) [römische Ordnungsziffer (r)] versehenen Feldstabes infolge seiner Verdrehung $\nu_r = +1$ sind aus den Formeln

$$(19) \begin{cases} K_{i-1}' = \lambda_{i-1, i-1}' (1 + q_i) \\ K_i' = \lambda_{i, i}' (1 + p_i) \end{cases}$$



zu errechnen. Hierin ist der Buchstabe K' durch $A', B', C' \dots$ zu ersetzen, wenn die Ordnungsnummer r des Stabes den Wert $r=I$ bzw. $II, III \dots$ besitzt. Die Momente in den Gelenkquerschnitten links von $i-1$ und rechts von i werden aus K_{i-1}' bzw. aus K_i' , wie aus der untenstehenden, dem Durchlaufstab Bild 2 zugehörigen Tabelle 1 zu ersehen ist, mit Hilfe der Fortleitungszahlen p und q abgeleitet. In der stark umrandeten Hauptdiagonale dieser Tabelle erscheinen die nach (19) zu berechnenden Biegemomente; wegen $q_7 = 0$ ist $D_6' = \lambda_{6,6}' (1 + 0)$.

Tabelle 1.

		Bezogene Biegemomente infolge				
		$\nu_I = +1$	$\nu_{II} = +1$	$\nu_{III} = +1$	$\nu_{IV} = +1$	
	$A_1' = \lambda_{1,1}' (1 + q_2)$	$B_1' = p_2 B_2'$	$C_1' = p_2 C_2'$	$D_1' = p_2 D_2'$		$p_2 = \dots$
	$A_2' = \lambda_{2,2}' (1 + p_2)$	$B_2' = p_3 B_3'$	$C_2' = p_3 C_3'$	$D_2' = p_3 D_3'$		$p_3 = \dots$
$q_3 = \dots$	$A_3' = q_3 A_2'$	$B_3' = \lambda_{3,3}' (1 + q_4)$	$C_3' = p_4 C_4'$	$D_3' = p_4 D_4'$		$p_4 = \dots$
$q_4 = \dots$	$A_4' = q_4 A_3'$	$B_4' = \lambda_{4,4}' (1 + p_4)$	$C_4' = \lambda_{4,4}' (1 + q_5)$	$D_4' = p_5 D_5'$		$p_5 = \dots$
$q_5 = \dots$	$A_5' = q_5 A_4'$	$B_5' = q_5 B_4'$	$C_5' = \lambda_{5,5}' (1 + p_5)$	$D_5' = p_6 D_6'$		$p_6 = \dots$
$q_6 = \dots$	$A_6' = q_6 A_5'$	$B_6' = q_6 B_5'$	$C_6' = q_6 C_5'$	$D_6' = \lambda_{6,6}' (1 + 0)$		

10. Die Summe der an den Enden der Feldstäbe wirkenden $A', B', C', D' \dots$ Momente

ist nun einfach zu errechnen, indem man die entsprechenden, in der obigen Tafel eingeschriebenen, an den Enden eines Feldstabes wirkenden Momente addiert. Diese sich z. B. über den Feldstab I erstreckende Summe der A' -Momente soll mit $\Sigma A_1'$ angedeutet werden. Ist die Bezeichnung mit römischen Ziffern nicht erforderlich, so wäre die Bezeichnung $\Sigma A_{(I)}$ oder $(\Sigma A)_I$ zu verwenden. Für den in Bild 2 dargestellten Stab erhält man die in der folgenden Tabelle 2 enthaltenen Summenwerte.

Tabelle 2.

$\Sigma A_1' = A_1' + A_2'$	$\Sigma B_1' = B_1' + B_2'$	$\Sigma C_1' = C_1' + C_2'$	$\Sigma D_1' = D_1' + D_2'$
$\Sigma A_{II}' = A_3' + A_4'$	$\Sigma B_{II}' = B_3' + B_4'$	$\Sigma C_{II}' = C_3' + C_4'$	$\Sigma D_{II}' = D_3' + D_4'$
$\Sigma A_{III}' = A_4' + A_5'$	$\Sigma B_{III}' = B_4' + B_5'$	$\Sigma C_{III}' = C_4' + C_5'$	$\Sigma D_{III}' = D_4' + D_5'$
$\Sigma A_{IV}' = A_6' + 0$	$\Sigma B_{IV}' = B_6' + 0$	$\Sigma C_{IV}' = C_6' + 0$	$\Sigma D_{IV}' = D_6' + 0$

Die Zahlenwerte dieser Tabelle zeigen bei richtiger Rechnung stets Symmetrie zur Diagonale, gleichgültig ob der Durchlaufstab selbst irgendeine Symmetrie aufweist oder nicht. Diese Tatsache bildet eine Kontrolle für die Richtigkeit der bisherigen Rechnung.

11. Die Stabwerte a_r', b_r' und m_r' der Feldstäbe.

Jedem Feldstab (r) wird je ein von der Querstützung der Stabenden abhängiger Stabwert a_r', b_r' und m_r' zugeordnet. Der Wert a_r' gehört gewissermaßen dem linken Stabende, b_r' dem rechten Stabende und m_r' der Stabmitte an. Die Definition dieser Werte ist durch die folgenden Sätze gegeben.

Der a_r' -Wert des Feldstabes (r) ist gleich dem δ' -Wert der linken Querstütze, geteilt durch den c' -Wert des links von dieser Stütze liegenden Feldstabes.

Der b_r' -Wert des Feldstabes (r) ist gleich dem δ' -Wert der rechten Querstütze, geteilt durch den c' -Wert des rechts von dieser Stütze liegenden Feldstabes.

Diesen Definitionen entsprechend wurden die in Bild 5 eingeschriebenen a' - und b' -Werte gebildet. Die Zeiger dieser Werte und auch die der m' -Werte stimmen mit der römischen Ziffer jenes Feldstabes überein, dem sie zugeordnet sind. Ist die Bezeichnung durch römische Ziffern nicht erforderlich, so erfolgt die Bezeichnung mit der arabischen Ziffer des Feldstabes.

Werden die links und rechts von der Querstützung anzuschreibenden $\frac{\delta'}{c'}$ -Werte, im Hinblick auf die Feldstäbe, in „innere“ und „äußere“ $\frac{\delta'}{c'}$ -Werte (a_{III}', b_{III}' bzw. b_{II}', a_{IV}') unterschieden, so kann man den m' -Wert eines Feldstabes auch als Summe der äußeren $\frac{\delta'}{c'}$ -Werte des Feldes definieren. Demnach ist in Bild 5 $m_{III}' = \frac{\delta_{r-1}'}{c_{r-1}'} + \frac{\delta_{r+1}'}{c_{r+1}'} = b_{II}' + a_{IV}'$.

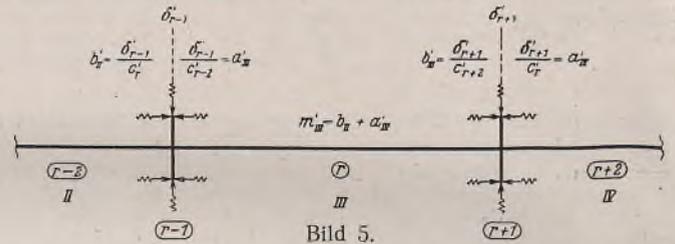


Bild 5.

Der a' -Wert des ersten und der b' -Wert des letzten Feldstabes ist stets Null, da die zur Bildung dieser Werte erforderlichen c' -Werte nicht existieren.

Zu einer unverschieblichen Querstützung i gehören die Werte $\delta_i' = 0$ und $\delta_{i+1}' = 0$, daher verschwinden auch die links und rechts an einer unverschieblichen Stütze anzuschreibenden $\frac{\delta'}{c'}$ -Werte. Ein an beiden Enden seitlich unverschieblich gelagerter Feldstab (r) besitzt demnach die Werte $a_r' = 0$, $b_r' = 0$, und $m_r' = 0$ und überdies ist auch $b_{r-1}' = 0$ und $a_{r+1}' = 0$.

Beispielsweise erhält man nach den gegebenen Definitionen für die elastisch gestützten Feldstäbe des in Bild 2 dargestellten Durchlaufstabes:

$$\begin{aligned} a_I' &= 0; & m_I' &= \frac{\delta_1'}{c_2'} + \frac{\delta_3'}{c_2'}; & b_I' &= \frac{\delta_3'}{c_4'}; \\ a_{II}' &= \frac{\delta_2'}{c_2'}; & m_{II}' &= \frac{\delta_3'}{c_4'} + \frac{\delta_4'}{c_4'}; & b_{II}' &= \frac{\delta_4'}{c_5'}; \\ a_{III}' &= \frac{\delta_4'}{c_4'}; & m_{III}' &= \frac{\delta_4'}{c_5'} + 0; & b_{III}' &= 0; \\ a_{IV}' &= 0; & m_{IV}' &= 0 + \frac{\delta_7'}{c_7'}; & b_{IV}' &= 0. \end{aligned}$$

12. Die Knickdeterminante.

Die Zahl der Vertikalkolonnen und der hierdurch bestimmte Grad der Knickdeterminante stimmt immer überein mit der Zahl der elastisch quer-gestützten Feldstäbe, gleichgültig ob die elastische Stützung dieser Stäbe an beiden Enden oder nur an einem Ende stattfindet. Die erste Kolonne der Determinante baut sich im wesentlichen aus den A' -Momenten, die zweite aus den B' -Momenten usw. auf. Daher wird die erste, zweite, dritte, ... Kolonne auch als „ A -Kolonne“, „ B -Kolonne“, „ C -Kolonne“ ... bezeichnet. Ist in einem Stabverband, der auch Stützenstäbe enthalten kann, die Querstützung durchwegs elastisch, so besitzt die Knickdeterminante die „Normalform“, die z. B. für einen Stabverband mit 4 Feldstäben gegeben ist durch

$$(20) \Delta = \begin{vmatrix} \eta + h_{IA}' - m_I' S_I' & -h_{IB}' + a_{II}' S_{II}' & +h_{IC}' & -h_{ID}' \\ -h_{IIA}' + b_I' S_I' & \eta + h_{IIB}' - m_{II}' S_{II}' & -h_{IIC}' + a_{III}' S_{III}' & +h_{IID}' \\ +h_{IIIA}' & -h_{IIIB}' + b_{II}' S_{II}' & \eta + h_{IIIC}' - m_{III}' S_{III}' & -h_{IIID}' + a_{IV}' S_{IV}' \\ -h_{IIVA}' & +h_{IIVB}' & -h_{IIVC}' + b_{III}' S_{III}' & \eta + h_{IIVD}' - m_{IV}' S_{IV}' \end{vmatrix} = 0.$$

Das Bildungsgesetz dieser aus lauter dimensionslosen Absolutgliedern aufgebauten Knickdeterminante ist leicht zu erkennen.

Die Summen in der nach rechts fallenden Hauptdiagonale sind stets dreigliedrig. Ihr erstes Glied

$$(21) \eta = \frac{c^*}{\delta^* S^*} = \frac{A^* c^*}{S^*}$$

ist aus den frei gewählten Vergleichswerten S^* , c^* und δ^* bzw. $A^* = \frac{1}{\delta^*}$ aufgebaut und stets mit einem positiven Vorzeichen zu versehen. Das dritte Glied, das Produkt $m' S'$, erhält immer ein negatives Vorzeichen, in der Zeile darüber und darunter erscheinen die Produkte $a' S'$ bzw. $b' S'$, die stets ein positives Vorzeichen bekommen. Diese

„S'-Produkte“ sind in der ersten Spalte dem Feldstab I, in der zweiten Spalte dem Feldstab II usw. zugeordnet und daher dementsprechend zu bezeichnen.

Die stets doppelt bezeichneten h' -Glieder der Knickdeterminante (20) werden den elastisch gestützten Feldstäben zugeordnet. Sie sollen ganz allgemein die Bezeichnung $h'_{rK'}$ führen und werden durch die Formel

$$(22) \quad h'_{rK'} = \frac{1}{c_r'} [a_r' \sum K'_{r-1} + m_r' \sum K'_r + b_r' \sum K'_{r+1}]_{r=I, II, III, \dots; K'=A', B', C', \dots}$$

bestimmt. Der erste Zeiger „ r “ zeigt einerseits die Ordnungszahl in der Folge dieser Stäbe an und bezeichnet andererseits auch gleichzeitig die Reihe in der Determinante. Der zweite als Zeiger verwendete Buchstabe „ K' “ deutet einerseits die Kolonne der Determinante an, gibt aber andererseits auch zu erkennen, daß sich in dieser Kolonne die nach (22) zu errechnenden h' -Glieder aus jenen „bezogenen Biegemomenten“ aufbauen, die durch den Zeiger K' angezeigt werden. Aus (22) erhält man z. B. für das dritte Glied der vierten Kolonne (= D -Kolonne)

$$h'_{III D'} = \frac{1}{c_{III}'} [a_{III}' \sum D_{II}' + m_{III}' \sum D_{III}' + b_{III}' \sum D_{IV}']$$

Aus (22) gewinnt man auch die folgenden Formeln für sämtliche h' -Glieder der Knickdeterminante in

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{der ersten Reihe} \dots h'_{IK'} = \frac{1}{c_I'} [0 + m_I' \sum K'_I + b_I' \sum K'_{II}] \\ \text{„ zweiten „} \dots h'_{II K'} = \frac{1}{c_{II}'} [a_{II}' \sum K'_I + m_{II}' \sum K'_{II} + b_{II}' \sum K'_{III}] \\ \text{„ dritten „} \dots h'_{III K'} = \frac{1}{c_{III}'} [a_{III}' \sum K'_{II} + m_{III}' \sum K'_{III} + b_{III}' \sum K'_{IV}] \\ \text{„ vierten „} \dots h'_{IV K'} = \frac{1}{c_{IV}'} [a_{IV}' \sum K'_{III} + m_{IV}' \sum K'_{IV} + 0] \end{array} \right.$$

Die vier Gl. (23) liefern auch die sämtlichen h' -Glieder in der ersten Kolonne der Knickdeterminante, wenn man den „Kolonnenbuchstaben K' “ durch A' ersetzt. Sinngemäß erhält man auch die h' -Glieder der übrigen Kolonnen. Bei der Zahlenrechnung erscheinen die in (23) auftretenden „ K' -Summen“ in Tabelle 2 bereits ziffernmäßig errechnet.

In der Knickdeterminante (20) und auch in den Knickdeterminanten von anderen nach diesem Verfahren berechneten Knickfällen sind die (+)- und (-)-Vorzeichen der $h'_{rK'}$ -Glieder stets schachbrettartig so zu verteilen, daß die $h'_{rK'}$ -Glieder in der nach rechts fallenden Hauptdiagonale immer positive Vorzeichen erhalten.

Der Aufbau der in (20) dargestellten Normalform der Knickdeterminante eines 4-feldrigen elastisch gestützten Stabes ist charakteristisch, er wird von einer einfachen Gesetzmäßigkeit beherrscht, nach welcher sich sinngemäß die Knickdeterminanten für Stäbe von mehr oder weniger Feldern leicht anschreiben lassen.

Eine Abweichung von dieser Normalform der Knickdeterminante wird nur durch das Auftreten von unverschieblichen Querstützungen verursacht²⁾. Wie schon früher bemerkt, bewirkt eine unverschiebliche Stütze das Nullwerden des links und rechts anliegenden a' - und b' -Wertes und beeinflusst daher auch die hiervon abhängenden m' -Werte. In den $h'_{rK'}$ -Summen eines Stabes mit teilweise unverschieblicher Querstützung, sowie in seiner Knickdeterminante entfallen daher jene Glieder, deren a' - und b' -Beiwerte infolge der unverschieblichen Stützung verschwinden. Mit Berücksichtigung dieser Bemerkungen läßt sich die Knickdeterminante eines jeden beliebig gelagerten mehrfeldrigen Stabes ohne weiteres anschreiben. So geht z. B. die Knickdeterminante des in Bild 2 dargestellten Stabes aus (20) hervor, indem man hierin $b'_{III} = 0$ und $a'_{IV} = 0$ setzt. Diese Sonderwerte $b'_{III} = 0$ und $a'_{IV} = 0$ sind auch bei den nach (23) zu bildenden $h'_{rK'}$ -Gliedern entsprechend zu berücksichtigen.

13. Die Lösung des Knickproblems.

Wie schon im Abschnitt III erwähnt, liefert die Bedingung „Knickdeterminante $\Delta = 0$ “ die einzige Gleichung zur Lösung eines vorliegenden Knickproblems. Deshalb muß jede Knickaufgabe so gestellt werden, daß nur eine einzige Unbekannte offen bleibt, die mit Hilfe der aus $\Delta = 0$ fließenden Gleichung zu errechnen ist.

Bei Überprüfungsaufgaben ist diese Unbekannte — die Knicksicherheit ν bzw. die Stützensicherheit μ — eindeutig festgelegt.

Anders liegen die Verhältnisse bei einer Entwurfsaufgabe, wo die offen zu haltende Unbekannte aus einer großen Zahl von frei wählbaren Größen entnommen werden kann. Wenn nicht zwingende Gründe dagegen sprechen, so empfiehlt es sich, diese Unbekannte aus den δ -Werten der federnden Querstützung zu entnehmen. Da die in der Knickdeterminante auftretenden Beiwerte a'_r, m'_r und b'_r die δ -Werte in linearer Form enthalten, so erkennt man ohne weiteres, daß die Bedingung $\Delta = 0$ eine algebraische Gleichung zur direkten Ermittlung des unbekanntes δ -Wertes liefert.

²⁾ Über Abweichungen von der „Normalform“, die dadurch erzeugt werden, daß im Durchlaufstab auch Feldstäbe vorkommen, die entweder auf Zug oder überhaupt durch keine Normalkraft beansprucht sind, siehe im Band VI der Abhandlungen der J.V.B.H.

Hingegen sind alle auf einen Feldstab (r) bezughabenden Größen

im Werte $\eta_r = \sqrt{\frac{S_r c_r^2}{T_r J_r}}$ vereinigt, der in transzendenten Form ($\sin \eta_r$, $\operatorname{tg} \eta_r$) in die Knickrechnung eingeht. Wird daher irgendeine in η_r auftretende Größe als unbekannt offen gelassen, so ist eine direkte Ermittlung dieser Größe aus der Bedingung $\Delta = 0$ unmöglich. In solchen Fällen ist die Lösung nur mittels eines analytisch-graphischen Verfahrens in folgender Weise zu gewinnen. Sei u die allgemeine Bezeichnung der unbekanntes Größe, so nimmt man probeweise einen passenden Wert u_1 an und ermittelt den zugeordneten Wert $\Delta(u_1)$ der Knickdeterminante. Die mehrmalige Wiederholung dieses Vorganges ermöglicht die Konstruktion der Kurve $\Delta = f(u)$. Der dem Punkte $\Delta = 0$ zugeordnete u_0 -Wert ist die Lösung des Problems.

In dieser Art ist auch die erste Überprüfungsaufgabe, die Ermittlung der Knicksicherheit ν des Durchlaufstabes, durchzuführen. Man erhöht die durch die Gebrauchsbelastung erzeugten Druckkräfte \mathcal{E}_r unter der Annahme von passenden ρ -Werten auf $\rho \mathcal{E}_r$, berechnet die den jeweiligen Druckkräften $\rho \mathcal{E}_r$ zugeordneten Knickdeterminanten $\Delta(\rho)$ und gewinnt nun graphisch, mittels der Kurve $\Delta = f(\rho)$, aus $\Delta = 0$ die Knicksicherheit $\rho_0 = \nu$.

Bei der zweiten Überprüfungsaufgabe, der Ermittlung der Stützensicherheit μ , führt die Bedingung $\Delta = 0$ zu einer algebraischen Gleichung nach μ , weil diese Unbekannte ein Element der federnden Querstützung darstellt. Bei einer solchen Aufgabe setzen sich die Stabwerte a'_r, m'_r und b'_r aus Gliedern von der allgemeinen Form

$$\frac{\delta'_{i, \text{erf}}}{c'} = \mu \cdot \frac{\delta'_{i, \text{vorh}}}{c'}$$

zusammen. Diese Stabwerte, die den Faktor μ als Multiplikator enthalten, erscheinen, wie der Aufbau der Knickdeterminante, z. B. die

Normalform (20), erkennen läßt, in den Beiwerten der Determinantenglieder. Nur der erste Posten η der Diagonalglieder enthält keinen Beiwert μ . Dividiert man daher jede Zeile der Determinante durch μ , so tritt diese Unbekannte nur mehr im η -Wert der Hauptdiagonale, und zwar

in der Form $\frac{\eta}{\mu} = \frac{c^*}{\mu \delta^* S^*} = \eta'$ auf. Durch diesen Vorgang würde

beispielsweise die Knickdeterminante (20) in die Form $\Delta = \mu^4 \Delta'$ übergeführt, und aus $\Delta = 0$ folgt auch $\Delta' = 0$. Die Determinante Δ' stimmt in ihrem Aufbau vollkommen überein mit der Determinante Δ , nur werden in Δ' die Beiwerte a'_r, m'_r und b'_r mit den bekannten vorhandenen $\delta'_{i, \text{vorh}}/c'$ -Werten gebildet, während in Δ die Werte der unbekanntes $\delta'_{i, \text{erf}}/c'$ -Werte auftreten. In Δ' ist nun $\eta' = \frac{\eta}{\mu}$, wegen des unbekanntes μ ,

die einzige Unbekannte des Problems, während in Δ der Wert $\eta = \frac{c^*}{J^* S^*}$ bekannt ist. Hiermit erscheint der Vorgang zur Ermittlung der Stützensicherheit μ vollkommen klargestellt. Man bestimmt unter Zugrundelegung der vorhandenen spezifischen Stützenwiderstände $\delta'_{i, \text{vorh}}$ die

Stabwerte a'_r, m'_r, b'_r und hiermit die Glieder der Knickdeterminante Δ' des Durchlaufstabes. Aus $\Delta' = 0$ gewinnt man nun eine algebraische Gleichung höheren Grades zur Bestimmung der Unbekanntes $\eta' = \frac{\eta}{\mu}$

$= \frac{1}{\mu} \cdot \frac{c^*}{\delta^* S^*}$ und der größte aller η' -Werte liefert die vorhandene Stützensicherheit $\mu = \mu_{\text{min}} = \frac{1}{\eta'_{\text{max}}} \cdot \frac{c^*}{\delta^* S^*}$.

Bei einer Entwurfsaufgabe wird man, wie bereits erwähnt, aus der Gruppe der die federnde Querstützung kennzeichnenden δ_i -Werte einen passenden δ -Wert auswählen und als unbekannt offen lassen. In dieser Auswahl bieten sich u. a. die folgenden Möglichkeiten dar.

a) Man läßt den irgendeiner Stütze s zugeordneten δ_s - bzw. δ'_s -Wert offen, während alle übrigen δ -Werte beliebig angenommen werden. Aus $\Delta = 0$ erhält man eine algebraische Gleichung zur Ermittlung des unbekanntes δ'_s -Wertes. Aus $\delta'_s = \frac{\delta_s}{\delta^*}$ gewinnt man den spezifischen

Stützenwiderstand $A_s = \frac{1}{\delta_s} = \frac{1}{\delta'_s \delta^*}$. Wenn es die gegebenen Um-

stände erlauben, so ist es hinsichtlich der Rechenarbeit von besonderem Vorteil, den Wert $\delta_s = \delta_0$ oder $\delta_s = \delta_n$ als unbekannt offen zu lassen.

b) Man kann auch für sämtliche Querstützen zunächst beliebige Werte δ_i annehmen und hierzu die proportionalen Werte $\delta_{i, \text{erf}} = \mu \delta_i$ bestimmen, die erforderlich sind, um die vorgeschriebene Knicksicherheit des Durchlaufstabes zu gewährleisten. In dieser Form erscheint die Entwurfsaufgabe auf die zweite Überprüfungsaufgabe zurückgeführt, die Ermittlung des Proportionalitätsfaktors μ ist in einem der Bestimmung der Stützensicherheit analogen Rechnungsgang durchzuführen.

c) Es ist auch ohne weiteres möglich, aus den zunächst beliebig angenommenen δ_i -Werten eine gewisse Gruppe als unabänderlich feststehend zu betrachten und für die Restgruppe, wie oben unter b, die hierzu proportionalen $\delta_{i, \text{erf}} = \mu \delta_i$ so zu bestimmen, daß die vorgeschriebene Knicksicherheit gewährleistet erscheint.

d) Schließlich kann man auch sämtliche Querstützungen als gleich stark voraussetzen und als unbekannt offen lassen. Der diese Querstützung bestimmende δ -Wert ist dann die einzige Unbekannte des Problems. In der Durchführung der Berechnung wird im vorliegenden Falle mit Vorteil als Vergleichswert $\delta^* = \delta$ gewählt, wodurch für sämtliche Querstützen die Werte $\delta' = \frac{\delta}{\delta^*} = 1$ bekannt werden und die Unbekannte $\delta \equiv \delta^*$ nur im Gliede $\eta = \frac{c^*}{\delta^* S^*} = \frac{c^*}{\delta S^*}$ der Hauptdiagonale erscheint. Die Bedingung $\Delta = 0$ führt zu einer algebraischen Gleichung höheren Grades nach η . Der größte der η -Werte bestimmt die Lösung des Problems in $\delta_{\min} = \frac{1}{\eta_{\max}} \cdot \frac{c^*}{S^*}$, woraus sich der für die Zwischenstützen erforderliche spezifische Stützenwiderstand $A_{\text{erf}} = \frac{1}{\delta_{\min}} = \eta_{\max} \cdot \frac{S^*}{c^*}$ ergibt.

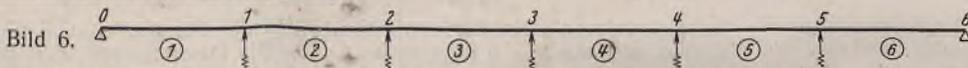
e) Die Knickberechnung der Druckgurte offener Brücken wird vielfach unter der in d gegebenen Voraussetzung durchgeführt, oft aber werden nur die Zwischenrahmen untereinander gleich stark angenommen und hierzu die Endrahmen so bestimmt, daß die Knicksicherheit des Druckgurtes gewährleistet erscheint. Ist δ die spezifische Stützensenkung der Zwischenrahmen, $\delta_0 = \delta_n$ jene der Endrahmen, so wählt man zweckmäßig als Vergleichswert $\delta^* = \delta$, womit die δ -Werte aller Zwischenstützen den Wert $\delta' = 1$ annehmen und $\delta_0' = \frac{\delta_0}{\delta} = \delta_n'$ die einzige Unbekannte des Problems bildet, die aus $\Delta = 0$ zu ermitteln ist.

Diese unter a bis e zusammengestellten Annahmen oder ähnliche andere führen bei der Ausrechnung der Knickdeterminante immer auf eine algebraische Gleichung zur direkten Ermittlung der Unbekannten des Knickproblems.

V. Sonderfall: die Knickdeterminante eines mehrfeldrigen elastisch quergestützten Gelenkstabes.

Die durch Gelenke miteinander verbundenen Feldstäbe seien durch die Knickkräfte S_r beansprucht. Alle Stäbe besitzen Kennziffern $m_r > 1$,

1. Fortleitungszahlen a_r und b_r ; Gelenkwerte k_i' [Gl. (12), (13)].



S_r in t	268	524	782	1 024	1 306	1 882
J_r in cm ⁴	43 400	43 400	65 100	92 800	92 800	112 200
c_r in cm	600	600	600	600	600	600
T_r in t/cm ²	2 150	2 150	2 150	2 150	2 150	2 150
φ_r nach (5)	0,9834	0,7033	0,7051	0,7357	0,6514	0,5967
m_r nach (4)	3,09	2,21	2,22	2,31	2,05	1,87
φ_r°	58° 15' 39"	81° 27' 57"	81° 15' 30"	77° 52' 51"	87° 57' 12"	96° 01' 17"
$\sin \varphi_r$	0,8505	0,9889	0,9884	0,9777	0,9994	0,9945
$\text{tg } \varphi_r$	1,6167	6,6640	6,5033	4,6570	27,9826	9,4803
s_r nach (6)	0,1957	0,4378	0,4349	0,3903	0,5361	0,6832
t_r nach (6)	0,3710	0,7866	0,7819	0,7081	0,9451	1,1768
Frei gewählte Vergleichswerte nach IV/2: $S^* = 1000$ t; $c^* = 600$ cm						
S_r' nach (7)	0,2680	0,5240	0,7820	1,0240	1,3060	1,8820
c_r' nach (7)	1	1	1	1	1	1
$S_r' c_r'$ nach (7)	0,2680	0,5240	0,7820	1,0240	1,3060	1,8820
σ_r' nach (8)	0,7300	0,8354	0,5561	0,3811	0,4105	0,3641
τ_r' nach (8)	1,3844	1,5012	0,9999	0,6915	0,7237	0,6253
x_i' nach IV/5		2,8856	2,5011	1,6914	1,4152	1,3490
k_i' nach (12)		0,3465	0,3998	0,5912	0,7066	0,7413
a_r nach (13)	0	0,2895	0,2224	0,2253	0,2900	0,2699
b_r nach (13)	0,2530	0,3340	0,3288	0,2693	0,3043	0

sie sind daher unter der Belastung S_r knicksicher. Die federnde Querstützung ist nun so zu bestimmen, daß auch der Stabzug als Ganzes die geforderte Knicksicherheit aufweist.

Der vorliegende Knickfall ist ein Sonderfall des bisher behandelten Durchlaufstabes. Der zugeordnete Ersatzstab ist ebenfalls ein Gelenkstab, daher sind alle $A', B', C' \dots$ Momente gleich Null. Mit Beachtung dieser Tatsachen erhält man z. B. aus der Determinante (20) die Knickdeterminante eines 4feldrigen Gelenkstabes, indem man hierin die aus den $A', B', C' \dots$ Momenten aufgebauten h_{rK} -Glieder gleich Null setzt. Dies führt zur Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \eta - m_1' S_1' & + a_{12}' S_{II}' & 0 & 0 \\ + b_1' S_1' & \eta - m_2' S_{II}' & + a_{13}' S_{III}' & 0 \\ 0 & + b_2' S_{II}' & \eta - m_3' S_{III}' & + a_{14}' S_{IV}' \\ 0 & 0 & + b_3' S_{III}' & \eta - m_4' S_{IV}' \end{vmatrix}$$

deren Nullsetzung die Berechnung der erforderlichen Querstützung ermöglicht.

VI. Zahlenbeispiele³⁾.

Beispiel 1. In Heft 1 der Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaues „Die Stabilität des mehrfeldrigen elastisch gestützten Stabes“ von Dr.-Ing. A. Schleusner wird der in Bild 6 dargestellte 6feldrige, elastisch quergestützte, an den Rändern unverschieblich gelagerte Druckgurt bei der neuen Tempelhofer Flugsteighalle (vgl. Stahlbau 1938, Heft 12) einer Knickberechnung unterzogen. An der Hand dieses Beispiels entwickelt Schleusner ein Verfahren zur Knickberechnung solcher hinsichtlich Belastung, Konstruktion und federnder Querstützung beliebig unsymmetrischer Durchlaufstäbe.

Der Druckgurt der Flugsteighalle ist durch die in das unten folgende Rechenschema eingetragenen Bestimmungsstücke gegeben. Dies sind die durch die Gebrauchsbelastung erzeugten Druckkräfte S_r , die verlangte Knicksicherheit $\nu = 2$, die Knickkräfte $S_r = \nu S_r$, die Trägheitsmomente J_r und die durchwegs gleichen Feldlängen c_r . Der Knickmodul T_r ist laut Schleusners Angabe konstant und gleich dem Elastizitätsmodul $E = 2150$ t/cm². Die spezifischen Stützenwiderstände sind ebenfalls gegeben und besitzen in t/cm die Werte: $A_0 = \infty$, $A_1 = 15,12$, $A_2 = 10,3$, $A_3 = 7,55$, $A_4 = 5,78$, $A_5 = 17,2$, $A_6 = \infty$.

Zu ermitteln ist die Stützensicherheit μ . Dieser von Schleusner untersuchte Druckgurt, ein Sonderfall des in dieser Abhandlung betrachteten Durchlaufstabes, soll nun nach dem hier entwickelten Verfahren nachgerechnet werden, um dessen einfache zahlenmäßige Durchführung an der Hand dieses Beispiels aufzuzeigen. Gleichzeitig bietet sich hierbei die Gelegenheit zu einem Vergleich der beiden Verfahren, die, an ein und demselben Zahlenbeispiel angewendet, zum gleichen Endergebnis führen.

Die vorliegende Aufgabe ist der im Abschnitt III/A bzw. IV/13 als sogenannte „zweite Überprüfungs-aufgabe“ bezeichnete Knickfall. Seine Lösung wurde in IV/13 eingehend besprochen und bedarf daher keiner weiteren Erläuterung. Die Berechnung der zum Aufbau der Knickdeterminante benötigten, in den Abschnitten IV/1 bis 12 definierten Größen wird im nachfolgenden Rechenschema auf Grund obiger Angabe in tabellarischer Anordnung durchgeführt. (Schluß folgt.)

³⁾ Die Zahlenbeispiele wurden von meinem Assistenten, Herrn Dr.-Ing. Erwin Streisky, gerechnet, dem ich hierfür an dieser Stelle bestens danke.

INHALT: Ein Rechenschema zur Knickberechnung mehrfeldriger beliebig gestützter Druckstäbe und seine Anwendung auf Zahlenbeispiele.

Verantwortlich für den Inhalt: Professor Dr.-Ing. K. Klöppel, Darmstadt. — Verlag: Wlb. Ernst & Sohn, Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin W9. Druck: Buchdruckerei Gebrüder Ernst, Berlin SW 68.

Ende des Jahrgangs 1941.

technik*

e Quer-
Ganzes

andelten
elenk-
achtung
e Knick-
die aus
ch Null

ung er-

ete des
ch ge-
d 6 dar-
unver-
eighalle
An der
Knick-
derder

olgende
es sind
die ver-
ägheits-
Knick-
h dem
m². Die
de sind
tzen in
= 15,12,
= 5,78,

ützen-
leusner
Sonder-
ung be-
oll nun
en Ver-
en, um
näßige
d dieses
chzeitig
genheit
en Ver-
mselben
zum

ist der
als so-
fungs-
nickfall.
13 ein-
f daher
. Die
au der
, in den
inierten
genden
obiger
ordnung
olgt.)

den von
Dr. Ing.
dem ich
danke.

