MINISTERSTWO OŚWIATY

SZÓSTA OLIMPIADA MATEMATYCZNA

(1954—1955)

SPRAWOZDANIE
KOMITETU GŁÓWNEGO

WARSZAWA 1956
PAŃSTWOWE ZAKŁADY WYDAWNICTW SZKOLNYCH

MINISTERSTWO OŚWIATY

SZÓSTA OLIMPIADA MATEMATYCZNA

(1954—1955)

SPRAWOZDANIE
KOMITETU GŁÓWNEGO

WARSZAWA 1956
PAŃSTWOWE ZAKŁADY WYDAWNICTW SZKOLNYCH

Redaktor odpowiedzialny
ZYGMUNT KOEHLER

Redaktor techniczny
HALINA FRĄCKA

Ministerstwo Oświaty pismem nr GM 1-244/56 z 6 lutego 1956 r. zaakceptowało treść i wyraziło zgodę na wydrukowanie sprawozdania

PAŃSTWOWE ZAKŁADY WYDAWNICTW SZKOLNYCH—WARSZAWA 1956

Wydanie pierwsze	Oddano do składania 23 III 1956 r.
Nakład 3500+180 egz.	Podpisano do druku 8 V 1956 r.
Arkuszy druk. 3,875	Druk ukończono w maju 1956 r.
Papier 61×86 cm, 70 g, kl. V	E-7-4682 Zam. nr 9627/A325

Zakłady Graficzne PZWS w Bydgoszczy, ulica Generalissimusa Stalina nr 1

SPRAWOZDANIE KOMITETU GŁÓWNEGO VI OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ

(1954—1955)

Zasady organizacyjne VI Olimpiady Matematycznej pozostały te same, co w Olimpiadach poprzednich. Wobec tego, że w różnych ośrodkach urządzane były lokalne zawody matematyczne dla uczniów klas niższych, VI Olimpiada została przeprowadzona tylko na szczeblu wyższym.

Terminy zawodów były następujące:

Zawody stopnia I (przygotowawcze)	—	1. X. 1954 — 10. I. 1955 r.
Zawody stopnia II (okręgowe)	—	4 i 5 marca 1955 r.
Zawody stopnia III (ostateczne)	—	18 i 19 kwietnia 1955 r.
Rozdanie dyplomów	—	18 czerwca 1955 r.

W roku sprawozdawczym Komitet Główny Olimpiady wydał broszurę pt. *Piąta Olimpiada Matematyczna* (1953—1954). *Sprawozdanie Komitetu Głównego*. PZWS, Warszawa 1955, str. 106. Broszura ta, zawierająca oprócz części sprawozdawczej rozwiązania wszystkich zadań V Olimpiady Matematycznej, została w jesieni 1955 r. rozesłana bezpłatnie do wszystkich szkół średnich ogólnokształcących i zawodowych. Ponadto Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych wydały osobno książkę: S. Straszewicz *Zadania z olimpiad matematycznych* — jako książkę pomocniczą dla uczestników Olimpiad i dla kółek matematycznych.

Skład komitetów Olimpiady Matematycznej

Komitet Główny. Powołany przez Ministra Oświaty Komitet Główny VI Olimpiady Matematycznej miał skład następujący: prof.

dr Stefan Straszewicz — przewodniczący Komitetu Głównego, prof. dr Kazimierz Zarankiewicz — kierownik Olimpiady, prof. dr Edward Otto — członek Komitetu, mgr Olga Turska — członek Komitetu, mgr Jan Kozicki — członek Komitetu, mgr Melania Danilowicz — członek Komitetu, przedstawiciel Ministerstwa Oświaty, mgr Władysław Stojda — członek Komitetu, kierownik Sekcji Matematyki w Centralnym Ośrodku Doskonalenia Kadr Oświatowych, mgr Stanisław Kowal — członek Komitetu, przedstawiciel Centralnego Urzędu Szkolenia Zawodowego, mgr Jan Wierzbowski — członek Komitetu, przedstawiciel Związku Młodzieży Polskiej.

Sekretarzem technicznym Komitetu Głównego był mgr inż. Konstanty Fanti.

Komitet Główny odbył 11 posiedzeń.

Prezydium Zarządu Polskiego Towarzystwa Matematycznego powołało na wniosek poszczególnych oddziałów PTM komitety okręgowe, do których weszli również przedstawiciele wydziałów oświaty przy prezydiach wojewódzkich rad narodowych oraz kierownicy ośrodków dydaktyczno-naukowych matematyki.

Skład komitetów okręgowych był następujący:

Warszawa: przewodniczący — prof. dr Wacław Sierpiński, członkowie: prof. dr Mieczysław Czyżykowski, prof. Stefan Kulczycki, prof. Aleksander Białas — przedstawiciel CODKO, członkowie dokooptowani: mgr Ryszard Gagla, mgr Mieczysław Krystosiak, prof. Alfons Paszke.

Sekretarzem Komitetu był mgr Ryszard Gagla.

Komitet odbył 4 posiedzenia.

Kraków: przewodniczący — prof. Józef Jodłowski, członkowie: prof. dr Zofia Krygowska — sekretarz Komitetu, prof. dr Jacek Szarski, dr Stanisław Łojasiewicz, mgr Augustyn Miętka — przedstawiciel DOSZ, członkowie dokooptowani: mgr Janina Maroszkowa, mgr Józef Jastrzębski, Andrzej Zajtz — przedstawiciel ZMP.

Komitet odbył 8 posiedzeń.

Wrocław: przewodniczący — prof. Bolesław Iwaszkiewicz, członkowie: prof. dr Hugo Steinhaus, mgr Jerzy Mioduszewski, mgr Józef Podemski — przedstawiciel WODKO, mgr Stefania Witek — przedstawiciel Wydziału Oświaty PWRN, mgr Juliusz Skowyra — przedstawiciel DOSZ.

Sekretarzem technicznym Komitetu był mgr Lech Stasierski.

Komitet odbył 6 posiedzeń.

Łódź: przewodniczący — prof. dr Władysław Kryśicki, członkowie: mgr Janina Waszkiewicz — sekretarz Komitetu, mgr Alina Musiatowicz — przedstawiciel WODKO, mgr Władysław Wendorff, mgr Stanisław Krzywański — przedstawiciel DOSZ, mgr Zygmunt Zwolski — przedstawiciel Wydziału Oświaty PWRN, Jan Maciulewicz — przedstawiciel Wydziału Oświaty PWRN, członkowie dokooptowani: mgr Aniela Ehrenfeucht, mgr Tadeusz Gerstenkorn.

Sekretarzem technicznym Komitetu był Bolesław Płódowski.

Komitet odbył 7 posiedzeń.

Poznań: przewodniczący — prof. dr Wiktor Jankowski, mgr Jerzy Albrycht — sekretarz Komitetu, prof. dr Andrzej Alexiewicz, prof. dr Zygmunt Butlewski, mgr Wanda Matuszewska, mgr Roman Taberski, mgr Antoni Doruch — przedstawiciel Ośrodka Naukowo-Dydaktycznego Matematyki.

Sekretarzem technicznym Komitetu był mgr Jerzy Radecki.

Komitet odbył 6 posiedzeń.

Toruń: przewodniczący — prof. Leon Jeśmanowicz, członkowie: Felicja Wiśniewska — sekretarz Komitetu, przedstawiciel Wydziału Oświaty MRN, Maksymilian Bylicki — przedstawiciel WODKO, Maria Król, Józef Słonimski, mgr Aleksander Śniatycki.

Komitet odbył 6 posiedzeń.

Lublin: przewodniczący — prof. dr Mieczysław Biernacki, członkowie: kand. n. mat. Jan Krzyż — sekretarz Komitetu, prof. dr Włodzimierz Urbański, mgr Tadeusz Lewicki — przedstawiciel Wydziału Oświaty WRN, mgr Jerzy Rozmej — przedstawiciel WODKO, mgr Józef Pawelec — przedstawiciel DOSZ.

Komitet odbył 6 posiedzeń.

Zawody stopnia I (przygotowawcze)

Udział w zawodach wzięła młodzież ze szkół znajdujących się w następujących miejscowościach:

Okrąg warszawski (obejmujący m. st. Warszawę oraz województwo warszawskie, białostockie i olsztyńskie).

Szkoły ogólnokształcące: Anin, Białystok, Ciechanów, Gostynin, Łochów, Łomża, Maków Mazowiecki, Milanówek, Morąg, Mszczonów, Olsztyn, Ostrów Mazowiecka, Otwock, Piastów, Płock, Płońsk, Pruszków, Przasnysz, Ryki, Siedlce, Sierpc, Skolimów, Sobieszyn, Suchowola, Sulejówek, Ursus, Warszawa, Wilanów, Włochy.

Szkoły zawodowe: Białystok, Płock, Siedlce, Starachowice, Warszawa.

Okrąg krakowski (obejmujący województwo krakowskie i rzeszowskie).

Szkoły ogólnokształcące: Andrychów, Biecz, Bielsko-Biała, Bochnia, Brzozów, Chrzanów, Gdów, Iwonicz-Zdrój, Jarosław, Jasło, Kalwaria-Zebrzydowska, Kańczuga, Kraków, Krosno n. Wisłokiem, Krynica, Limanowa, Lubliniec, Łańcut, Niepołomice, Nisko, Nowy Sącz, Nowy Targ, Olkusz, Przemyśl-Zasanie, Przeworsk, Rabka-Zdrój, Radłów, Rzeszów, Sanok, Stalowa Wola, Tarnów, Tuchów, Wieliczka, Zakopane, Żmigród Nowy, Żywiec.

Szkoły zawodowe: Chrzanów, Kraków, Limanowa, Rzeszów, Stalowa Wola, Tarnów, Ustroń.

Okrąg wrocławski (obejmujący województwo opolskie, wrocławskie, zielonogórskie i stalinogrodzkie).

Szkoły ogólnokształcące: Będzin, Brzeg, Bytom, Chorzów, Cieszyn, Częstochowa, Drezdenko, Dzierżoniów, Gliwice, Głogów, Głubczyce, Jelenia Góra, Kamienna Góra, Kłodzko, Legnica, Lubań Śląski, Mikołów, Nysa, Oleśnica, Opole, Otmuchów, Piekary Śląskie, Pszczyna, Racibórz, Rybnik, Rydułtowy, Siemianowice Śląskie, Sobięcin, Stalinogród-Ligota, Strzelce Opolskie, Tarnowskie Góry, Wałbrzych, Wodzisław Śląski, Wołów Śląski, Wrocław, Wschowa, Zabrze, Ząbkowice Śląskie, Złotoryja.

Szkoły zawodowe: Brzeg, Bytom, Cieszyn, Częstochowa, Dąbrowa Górnicza, Dzierżoniów, Gorzów Wielkopolski, Jelenia Góra, Nowa Sól, Opole, Sławęcice, Szopienice, Tarnowskie Góry, Tychy Śląskie, Wrocław, Zabrze.

Okrąg łódzki (obejmujący województwo łódzkie i kieleckie).

Szkoły ogólnokształcące: Aleksandrów koło Łodzi, Busko Zdrój, Jędrzejów, Kielce, Klementów, Łęczyca, Łowicz, Łódź, Ostrowiec Świętokrzyski, Pajęczno, Pabianice, Pionki, Piotrków Trybunalski, Poddębice, Radom, Radomsko, Skarżysko-Kamienna, Skierniewice, Smogorzów, Tomaszów Mazowiecki, Wieluń, Zgierz, Żychlin.

Szkoły zawodowe: Kielce, Końskie, Ostrowiec, Pabianice, Piotrków, Radom, Radomsko, Sandomierz, Skarżysko, Skierniewice, Starachowice.

Okrąg poznański (obejmujący województwo poznańskie, szczecińskie i koszalińskie).

Szkoły ogólnokształcące: Gniezno, Gostyń, Izbica Kujawska, Kalisz, Kleczew, Koło, Kościan, Krotoszyn, Leszno, Myślibórz, Nowa Sól, Ostrów, Ostrzeszów, Poznań, Słupca, Słupsk, Szamotuły, Szczecin, Śrem, Środa, Świnoujście, Trzcianka Lubuska, Wałcz, Wolsztyn, Złotów.

Szkoły zawodowe: Krotoszyn, Nowa Sól, Ostrów, Poznań, Słupsk, Szczecin.

Okrąg toruński (obejmujący województwo bydgoskie i gdańskie).

Szkoły ogólnokształcące: Aleksandrów Kujawski, Białogard, Bydgoszcz, Chełmża, Chojnice, Elbląg, Gdańsk, Gdynia, Gniew, Inowrocław, Lipno, Nakło n. Notecią, Pelplin, Pruszcz Gdański, Puck, Solec Kujawski, Sopot, Starogard Gdański, Strzelno, Tczew, Toruń, Wąbrzeźno, Wejherowo, Włocławek, Żnin.

Szkoły zawodowe: Bydgoszcz, Gdańsk, Inowrocław, Toruń, Włocławek.

Okrąg lubelski (obejmujący województwo lubelskie).

Szkoły ogólnokształcące: Biała Podlaska, Biłgoraj, Chełm Lubelski, Horodło, Hrubieszów, Kraśnik, Kraśnik Fabryczny, Lubartów, Lublin, Łuków, Puławy, Tomaszów Lubelski, Zakrzówek, Zamość.

Szkoły zawodowe: Lublin.

Udział młodzieży w zawodach stopnia I

Okrąg	Ilość zawodników ze szkół					Ilość szkół		Ilość zadań z oceną		
	ogólnokszt.		zawodowych		Razem	ogólnokszt.	zawodowych	co najmniej dostatecznie	niedostatecznie	Razem
	chłopcy	dziewczęta	chłopcy	dziewczęta						
Warszawski	157	43	11	3	214	59	10	955 (82,4%)	204 (17,6%)	1159
Krakowski	148	52	39	5	244	58	14	920 (67,2%)	448 (32,8%)	1368
Wrocławski	115	28	39	5	187	43	17	650 (71,2%)	263 (28,8%)	913
Poznański	86	35	38	2	161	31	8	700 (82,0%)	154 (18,0%)	854
Łódzki	96	33	47	1	177	35	14	739 (75,4%)	241 (24,6%)	980
Toruński	103	41	9	4	157	35	6	674 (80,7%)	161 (19,3%)	835
Lubelski	45	11	7	2	65	17	3	249 (71,1%)	101 (28,9%)	350
Razem	750	243	190	22	1205	278	72	4887 (75,7%)	1572 (24,3%)	6459

Zawody stopnia II (okręgowe)

Do zawodów stopnia II zakwalifikowano 277 uczniów, z których do zawodów stanęło 270. Liczby zawodników z poszczególnych okręgów były następujące:

Warszawa	Kraków	Wrocław	Poznań	Łódź	Toruń	Lublin
56	42	31	40	46	44	18

Oceny zadań z zawodów stopnia II

	Okrąg	Zadania 1	2	3	4	5	6	Razem zadań
Ilość zadań z oceną b. dobrze (5)	Wa	22	4	8	5	4	1	44
	Kr	16	2	3	1	0	1	23
	Wr	12	0	7	0	0	1	20
	Po	14	11	3	3	6	1	38
	Łó	14	2	1	0	3	1	21
	Tr	19	5	1	2	1	1	29
	Lu	4	2	0	3	2	0	11
		101	26	23	14	16	6	186 (11.5%)
Ilość zadań z oceną dobrze (4)	Wa	6	21	7	18	8	2	62
	Kr	11	6	5	3	10	0	35
	Wr	1	5	5	2	5	0	18
	Po	2	14	5	9	3	0	33
	Łó	4	4	7	2	5	0	22
	Tr	0	3	7	7	7	0	24
	Lu	3	6	4	0	1	0	14
		27	59	40	41	39	2	208 (12,9%)
Ilość zadań z oceną dostatecznie (3)	Wa	4	18	9	8	8	3	50
	Kr	1	25	6	27	6	2	67
	Wr	1	14	6	12	2	0	35
	Po	3	4	9	6	4	0	26
	Łó	1	24	10	11	7	1	54
	Tr	1	18	6	10	4	0	39
	Lu	1	2	1	6	2	0	12
		12	105	47	80	33	6	283 (17,5%)
Ilość zadań z oceną niedostateczną (2)	Wa	10	8	25	13	27	18	101
	Kr	6	6	22	6	21	16	77
	Wr	9	11	9	11	18	8	66
	Po	11	5	18	14	17	21	86
	Łó	18	10	23	17	25	25	118
	Tr	17	13	23	18	23	18	112
	Lu	10	4	8	6	8	11	47
		81	57	128	85	139	117	607 (37,6%)
Ilość zadań nierozpoczętych	Wa	13	4	6	11	8	31	73
	Kr	6	1	4	3	3	21	38
	Wr	8	1	4	6	6	22	47
	Po	7	3	2	5	7	15	39
	Łó	8	5	4	15	5	18	55
	Tr	7	5	7	7	9	20	55
	Lu	0	4	5	3	5	7	24
		49	23	32	50	43	134	331 (20,5%)

Zawody stopnia III (ostateczne)

Po dokonaniu oceny prac z zawodów stopnia II zakwalifikowano do finału Olimpiady 70 uczniów; na zawody stawili się wszyscy. Skład zawodników według okręgów był następujący:

Warszawa	Wrocław	Kraków	Poznań	Łódź	Toruń	Lublin
21	5	13	9	9	10	3

Lista uczestników zawodów stopnia III

1. Anusiak Jan — Olsztyn, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego
2. Bała Wacław — Żnin, Liceum Ogólnokształcące im. Br. Śniadeckich
3. Bekta Edward — Słupsk, Państwowe Liceum Ogólnokształcące
4. Bremer Bronisław — Inowrocław, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego
5. Bubnicki Zdzisław — Gliwice, II Liceum Ogólnokształcące
6. Chruszczewski Zbigniew — Starachowice, Technikum Budowy Samochodów
7. Cichewicz Zenon — Sierpc, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia licealnego
8. Ciermoch Barbara — Poznań, VII Liceum Ogólnokształcące TPD
9. Czaporowski Krzysztof — Tarnów, I Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego im. K. Brodzińskiego
10. Darski Andrzej — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca im. gen. Sowińskiego
11. Dudkiewicz Jerzy — Łańcut, Liceum Ogólnokształcące TPD
12. Feder Szloma — Wrocław, VII Liceum Ogólnokształcące TPD
13. Filipczak Mirosław — Łódź, XV Liceum Ogólnokształcące TPD
14. Freindl Ludwik — Tarnów, I Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego im. K. Brodzińskiego
15. Furdzik Zbigniew — Kraków, Technikum Chemiczne Nr 1
16. Garbowska Krystyna — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia licealnego im. N. Żmichowskiej
17. Gersten Alik — Warszawa, II Ogólnokształcąca Szkoła TPD

18. Hagmajer Wojciech — Warszawa, Państwowe Liceum Ogólnokształcące im. Władysława IV
19. Harski Andrzej — Aleksandrów Kujawski, Szkoła Ogólnokształcąca
20. Horak Teresa — Poznań, Liceum Ogólnokształcące Nr 8
21. Iwiński Tadeusz — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca im. T. Reytana
22. Jankowski Andrzej — Gdańsk, Technikum Przemysłu Okrętowego
23. Jastrzębski Włodzimierz — Warszawa, Technikum Budowy Silników
24. Jaworski Maciej — Radom, I Liceum Ogólnokształcące im. T. Chałubińskiego
25. Kerntopf Paweł — Warszawa, Państwowe Liceum Ogólnokształcące im. Władysława IV
26. Kiełbowicz Henryk — Hrubieszów, Liceum Ogólnokształcące
27. Kobzdej Ludomir — Słupsk, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego TPD
28. Konopczyński Andrzej — Warszawa, Państwowe Liceum Ogólnokształcące im. Władysława IV
29. Kordylewski Zbigniew — Kraków, V Liceum Ogólnokształcące
30. Kwiatkowski Bogdan — Radom, I Liceum Ogólnokształcące im. T. Chałubińskiego
31. Leśniak Krystyna — Biecz, Państwowe Liceum Ogólnokształcące
32. Ławrynowicz Julian — Łódź, XI Szkoła Ogólnokształcąca TPD stopnia podstawowego i licealnego
33. Makowski Andrzej — Warszawa, Państwowa Koedukacyjna Szkoła stopnia licealnego
34. Malicki Józef — Sokółka, Liceum Ogólnokształcące
35. Małecki Bolesław — Kraków, I Liceum Ogólnokształcące TPD
36. Maniakowski Feliks — Gniew, Państwowe Liceum Ogólnokształcące
37. Muszyński Zbigniew — Warszawa, Państwowa Szkoła Ogólnokształcąca im. T. Reytana
38. Nazarczuk Kazimierz — Zamość, I Liceum Ogólnokształcące
39. Onyszkiewicz Janusz — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca im. T. Reytana
40. Pawlak Andrzej — Poznań, VI Liceum Ogólnokształcące TPD

41. Piotrzkowski Ryszard — Gdańsk-Wrzeszcz, II Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego TPD
42. Podowski Sylwester — Gdańsk, I liceum TPD
43. Protasewicz Mirosław — Wołów, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia licealnego
44. Przybyszewska Romana — Inowrocław, II Liceum Ogólnokształcące im. M. Konopnickiej
45. Raczyński Stanisław — Kraków, VI Liceum Ogólnokształcące TPD
46. Ratyński Bogusław — Słupsk, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego TPD
47. Rayski Wojciech — Kraków, VI Państwowa Ogólnokształcąca Szkoła stopnia licealnego
48. Romanowski Sławomir — Lublin, VI Liceum Ogólnokształcące TPD
49. Rybicki Krzysztof — Kraków, I Liceum Ogólnokształcące TPD
50. Se Don Sik — Nowa Sól, Technikum Odlewnicze
51. Sendyk Andrzej — Łódź, III Ogólnokształcąca Szkoła TPD im. T. Kościuszki
52. Stec Bronisław — Chrzanów, Liceum Ogólnokształcące TPD
53. Stróżewski Wojciech — Poznań, VI Liceum Ogólnokształcące TPD
54. Strzałkowski Leonard — Białystok, Liceum Ogólnokształcące Nr 1
55. Suszycki Leszek — Kraków, II Liceum Ogólnokształcące
56. Suwalska Milada — Włochy, Szkoła TPD Nr 11
57. Szalek Marek — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca im. gen. Sowińskiego
58. Szeptycki Aleksander — Warszawa, Państwowa Koedukacyjna Szkoła Ogólnokształcąca stopnia licealnego
59. Szmigielski Stanisław — Tarnów, I Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego im. K. Brodzińskiego
60. Szorc Piotr — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca TPD im. J. Dąbrowskiego
61. Szostak Piotr — Bielsko-Biała, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego
62. Szubert Janusz — Ostrzeszów, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego

63. Szumiło Witold — Pruszcz Gdański, Liceum Ogólnokształcące TPD
64. Szydłowski Wiesław — Warszawa, Liceum Ogólnokształcące im. A. Mickiewicza
65. Śniatycki Jędrzej — Toruń, I Państwowa Szkoła Ogólnokształcąca stopnia licealnego i podstawowego im. M. Kopernika
66. Śpiewak Erazm — Słupsk, Państwowe Liceum Pedagogiczne
67. Teper Władysław — Łódź, III Ogólnokształcąca Szkoła TPD im. T. Kościuszki
68. Werner Andrzej — Łódź, III Ogólnokształcąca Szkoła TPD im. T. Kościuszki
69. Wojtczak Leszek — Aleksandrów Łódzki, Liceum Ogólnokształcące
70. Zajdel Janusz — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca im. gen. Sowińskiego

Oceny zadań z zawodów stopnia III

	Zadanie						Razem
	1	2	3	4	5	6	
Ilość zadań z oceną b. dobrze (5)	31	22	32	9	13	12	119
Ilość zadań z oceną dobrze (4)	11	23	22	27	9	15	107
Ilość zadań z oceną dostatecznie (3)	3	13	9	13	13	5	56
Ilość zadań z oceną niedostatecznie (2)	19	9	5	17	24	8	82
Ilość zadań nierozpoczętych	6	3	2	4	11	30	56
	70	70	70	70	70	70	420

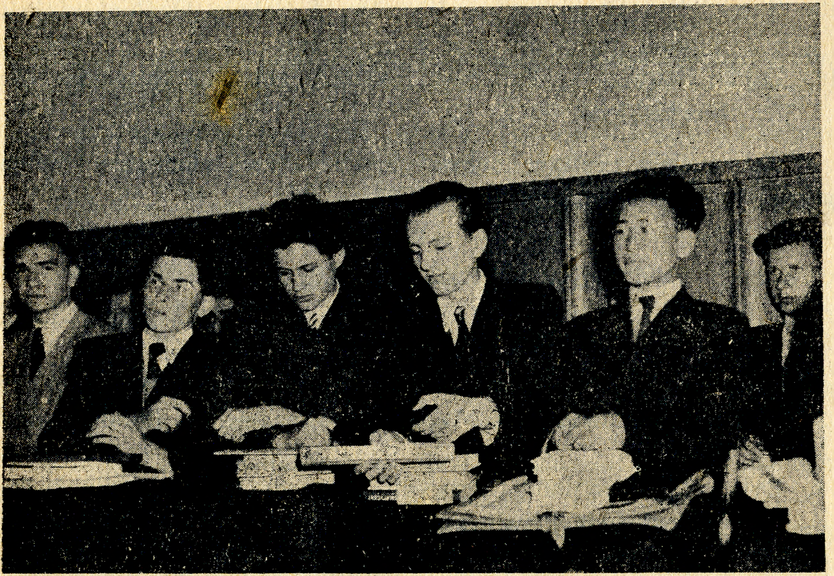
Uchwalono przyznać dyplomy Olimpiady Matematycznej 19 uczestnikom, a ponadto wyróżnić (bez dyplomów) dalszych 14 zawodników.

Lista nagrodzonych zawodników VI Olimpiady Matematycznej

1. Bekta Edward — Słupsk, Państwowe Liceum Ogólnokształcące
2. Filipczak Mirosław — Łódź, IV Liceum Ogólnokształcące TPD
3. Furdzik Zbigniew — Kraków, Technikum Chemiczne Nr 1
4. Kerntopf Paweł — Warszawa, Państwowe Liceum Ogólnokształcące im. Władysława IV
5. Śniatycki Jędrzej — Toruń, I Państwowa Szkoła Ogólnokształcąca stopnia licealnego i podstawowego im. M. Kopernika
6. Sendyk Andrzej — Łódź, III Ogólnokształcąca Szkoła TPD im. T. Kościuszki
7. Szalek Marek — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca im. gen. Sowińskiego
8. Feder Szloma — Wrocław, VII Liceum Ogólnokształcące TPD
9. Iwiński Tadeusz — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca im. T. Reytana
10. Jankowski Andrzej — Gdańsk, Technikum Przemysłu Okrętowego
11. Jastrzębski Włodzimierz — Warszawa, Technikum Budowy Silników
12. Malicki Józef — Sokółka, Liceum Ogólnokształcące
13. Małecki Bolesław — Kraków, I Liceum Ogólnokształcące TPD
14. Muszyński Zbigniew — Warszawa, Państwowa Szkoła Ogólnokształcąca im. T. Reytana
15. Rayski Wojciech — Kraków, IV Państwowa Ogólnokształcąca Szkoła stopnia licealnego
16. Rybicki Krzysztof — Kraków, I Liceum Ogólnokształcące TPD
17. Se Don Sik — Nowa Sól, Technikum Odlewnicze
18. Strzałkowski Leonard — Białystok, Liceum Ogólnokształcące Nr 1
19. Werner Andrzej — Łódź, III Ogólnokształcąca Szkoła TPD im. T. Kościuszki

Lista wyróżnionych zawodników VI Olimpiady Matematycznej

1. Anusiak Jan — Olsztyn, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego
2. Bubnicki Zdzisław — Gliwice, II Liceum Ogólnokształcące



Grupa nagrodzonych. Siedzą od prawej do lewej: Se Don Sik, Śniatycki, Filipczak, Bekta i Jankowski

3. Darski Andrzej — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca im. gen. Sowińskiego
4. Dudkiewicz Jerzy — Łańcut, Liceum Ogólnokształcące TPD
5. Garbowska Krystyna — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia licealnego im. N. Żmichowskiej
6. Jaworski Maciej — Radom, I Liceum Ogólnokształcące im. T. Chałubińskiego
7. Kiełbowicz Henryk — Hrubieszów, Liceum Ogólnokształcące
8. Ławrynowicz Julian — Łódź, XI Szkoła Ogólnokształcąca TPD stopnia podstawowego i licealnego
9. Onyszkiewicz Janusz — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca im. T. Reytana
10. Pawlak Andrzej — Poznań, VI Liceum Ogólnokształcące TPD
11. Piotrzkowski Ryszard — Gdańsk-Wrzeszcz, II Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego TPD
12. Stróżewski Wojciech — Poznań, VI Liceum Ogólnokształcące TPD

13. Szmigielski Stanisław — Tarnów, I Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego im. K. Brodzińskiego
14. Zajdel Janusz — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca im. gen. Sowińskiego

Nauczyciele uczniów nagrodzonych i wyróżnionych otrzymali nagrody w postaci premii pieniężnych.

Lista nagrodzonych nauczycieli

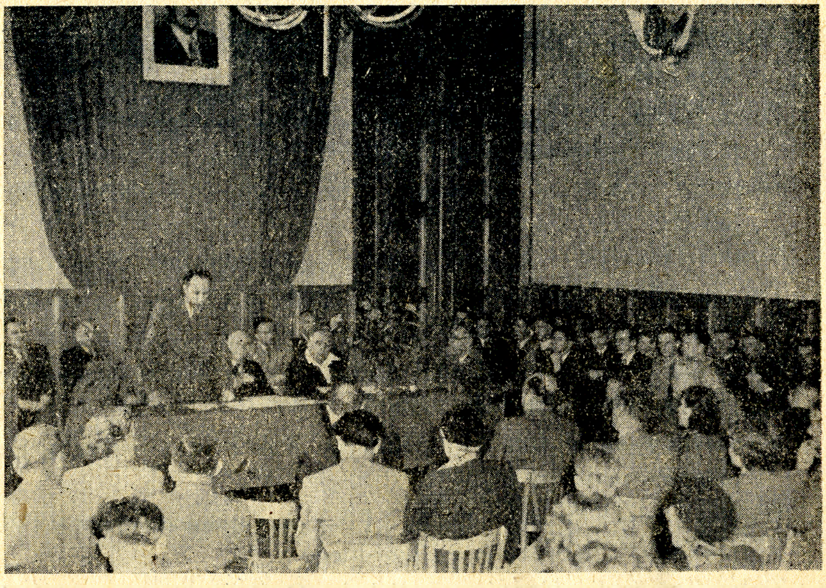
1. Auerbach Anna — Kraków, Technikum Chemiczne Nr 1
2. Berger Bronisława — Kraków, I Liceum Ogólnokształcące TPD
3. Biskupski Franciszek — Warszawa, Technikum Budowy Silników
4. Bylicki Maksymilian — Toruń, I Państwowa Szkoła Ogólnokształcąca stopnia licealnego i podstawowego im. M. Kopernika
5. Dębski Bolesław — Łódź, III Ogólnokształcąca Szkoła TPD im. T. Kościuszki
6. Gąsior Władysław — Nowa Sól, Technikum Odlewnicze
7. Kapczyński Aleksander — Łódź, XV Liceum Ogólnokształcące TPD
8. Kowalska Wanda — Poznań, VI Liceum Ogólnokształcące TPD
9. Kozicki Jan — Warszawa, Państwowa Szkoła Ogólnokształcąca im. T. Reytana
10. Kozioł Kazimierz — Kraków, I Liceum Ogólnokształcące TPD
11. Krasiński Władysław — Warszawa, Państwowe Liceum Ogólnokształcące im. Władysława IV
12. Krüger Henryk — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia licealnego im. N. Żmichowskiej
13. Kurliszyn Włodzimierz — Białystok, Liceum Ogólnokształcące Nr 1
14. Lewicki Kazimierz — Sokółka, Liceum Ogólnokształcące
15. Łaganowski Brunon — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca im. T. Reytana
16. Majda Franciszek — Kraków, IV Państwowa Ogólnokształcąca Szkoła stopnia licealnego
17. Marszał Jan — Łańcut, Liceum Ogólnokształcące TPD
18. Nemetti Karol — Hrubieszów, Liceum Ogólnokształcące

19. Osiński Antoni — Poznań, VI Liceum Ogólnokształcące
20. Paszke Alfons — Warszawa, Szkoła Ogólnokształcąca im. gen. Sowińskiego
21. Polak Maria — Gdańsk-Wrzeszcz, II Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego TPD
22. Sochocka Wiera — Wrocław, VII Liceum Ogólnokształcące TPD
23. Szluma Henryka — Gdańsk, Technikum Przemysłu Okrętowego
24. Trąmpczyński Wiesław — Słupsk, Państwowe Liceum Ogólnokształcące
25. Walasiak Stefan — Radom, I Liceum Ogólnokształcące im. T. Chałubińskiego
26. Wojciechowska Józefa — Olsztyn, Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego
27. Wojciechowska Maria — Łódź, XI Szkoła Ogólnokształcąca TPD stopnia podstawowego i licealnego
28. Zięba Zenon — Tarnów, I Szkoła Ogólnokształcąca stopnia podstawowego i licealnego im. K. Brodzińskiego
29. Żerebecki Zdzisław — Gliwice, II Liceum Ogólnokształcące

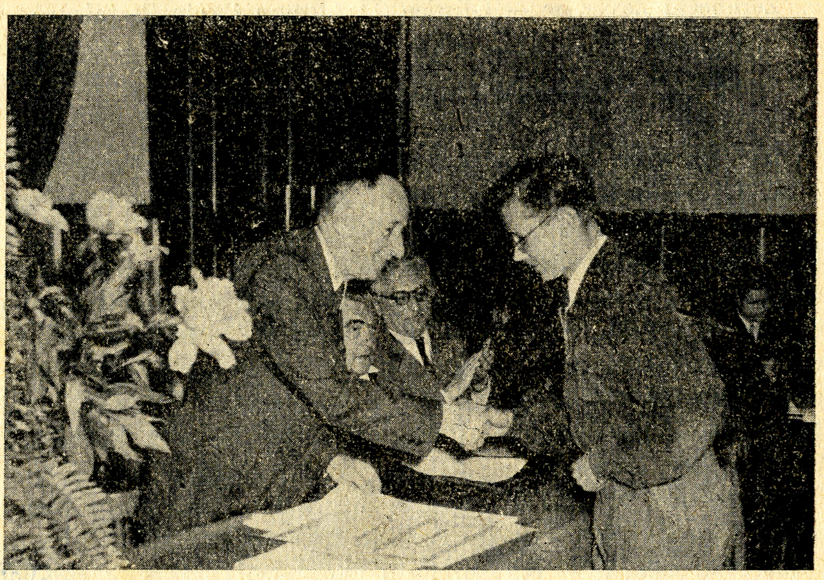
Uroczystość wręczenia dyplomów

VI Olimpiada Matematyczna zakończyła się uroczystością wręczenia dyplomów, która odbyła się dn. 18 czerwca 1955 r. w sali konferencyjnej Ministerstwa Oświaty w Warszawie.

Oprócz dyplomów uprawniających do wstępu na wyższe uczelnie bez egzaminu wstępnego zawodnicy otrzymali jeszcze następujące nagrody: 3 zegarki na rękę — dar Ministra Oświaty, 3 komplety cyrkli — dary Zarządu Głównego ZMP i Centralnego Urzędu Szkoln. Zawodowego, aparat fotograficzny — dar Redakcji „Młodego Technika", suwak i stypendium pieniężne — dar Rektora Politechniki Warszawskiej, stypendium pieniężne — dar Rektora Uniwersytetu Warszawskiego, 3 teczki skórzane — dary ZMP i Centralnego Urzędu Szkoln. Zawodowego, wreszcie portfele, wieczne pióra, stypendia pieniężne oraz książki — od Komitetu Głównego Olimpiady Matematycznej.



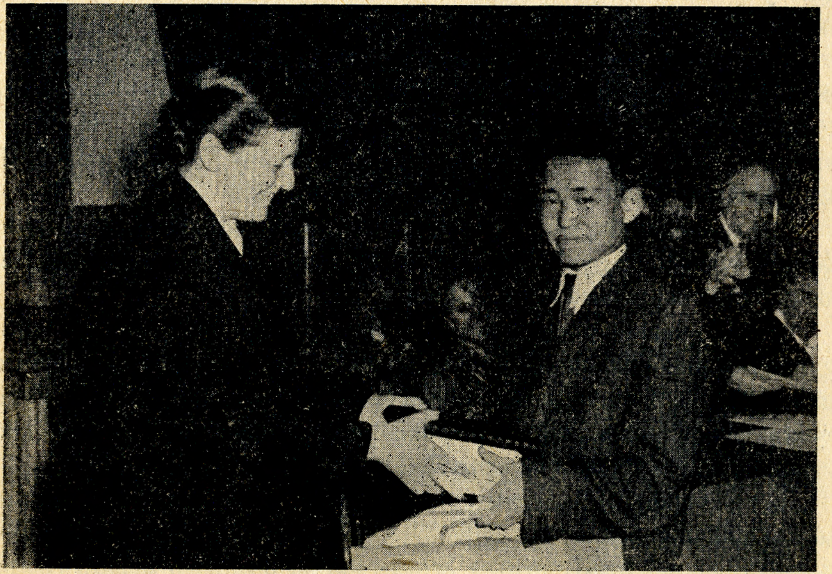
Uroczystość rozdania dyplomów VI Olimpiady Matematycznej. Przemawia dyrektor generalny Ministerstwa Oświaty ob. F. Bielecki



Zawodnik T. Iwiński otrzymuje dyplom

Ministerstwo Szkolnictwa Wyższego przyznało uczniom nagrodzonym dwutygodniowe wczasy akademickie.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej składa wszystkim ofiarodawcom serdeczne podziękowanie.



Nagrodzony zawodnik Se Don Sik otrzymuje nagrodę

Regulamin Olimpiady Matematycznej na rok 1955—1956

§ 1. Celem zawodów jest: a) podniesienie poziomu wykształcenia uczniów w zakresie matematyki, b) rozbudzenie zamiłowania do matematyki, c) wyszukanie jednostek o wybitnych zdolnościach matematycznych i ułatwienie im dalszej nauki.

§ 2. Zawody organizuje Polskie Towarzystwo Matematyczne na zlecenie Ministerstwa Oświaty.

§ 3. W zawodach może wziąć udział każdy uczeń klasy X lub XI szkoły ogólnokształcącej lub równorzędnej klasy liceum pedagogicznego, lub równorzędnych klas szkół zawodowych. W wypadkach wyjątkowych (stwierdzenie wybitnych zdolności) mogą być dopuszczeni do zawodów uczniowie klas niższych od wyżej wymienionych.

§ 4. Zawody obejmują trzy stopnie: I, II, III. Zawody stopnia I mają charakter przygotowawczy i trwają od 1 października do dnia 15 stycznia. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej ustala co miesiąc grupę zadań i teksty tych zadań przesyła do wszystkich szkół; nauczyciel matematyki podaje tekst zadań do wiadomości młodzieży i zachęca ją do wzięcia udziału w zawodach.

§ 5. Każdy uczestnik zawodów rozwiązuje te zadania w domu, przy czym wolno mu korzystać z książek, naradzać się z kolegami, a nawet zwracać się z zapytaniami do nauczyciela, który jednak powinien ograniczyć się do wyjaśnienia ewentualnych wątpliwości, ale nie pomagać w obmyślaniu rozwiązania zadań.

§ 6. Zawodnik, który rozwiązał wszystkie zadania lub niektóre zadania danej grupy, oddaje swemu nauczycielowi matematyki te rozwiązania we wskazanym terminie.

§ 7. Wypracowania powinny zawierać pełne rozwiązania zadań z potrzebnymi obliczeniami; powinny być one napisane na papierze znormalizowanym (format kancelaryjny) — każde zadanie na osobnym arkuszu, jednostronnie, z podaniem na każdym arkuszu nazwiska i adresu ucznia, a także nazwy i adresu szkoły.

§ 8. Nauczyciel matematyki, któremu uczeń oddał swe rozwiązania, ma obowiązek:

a) opatrzyć każdy arkusz krótką opinią o danym uczniu (podać notę z matematyki z ostatniego świadectwa rocznego oraz charakterystykę w rodzaju: bardzo zdolny, średnio zdolny, słaby, niezdolny, pracowity itp.);

b) nauczyciel nie ma obowiązku poprawiania zadań, powinien jednak przejrzeć prace (bez zaznaczania błędów i czynienia uwag) i odrzucić rozwiązania wyraźnie błędne lub niesamodzielne, a wszystkie pozostałe prace przesłać niezwłocznie do komitetu okręgowego właściwego terytorialnie dla danej szkoły.

§ 9. Dyrekcja szkoły powinna zachować w swych aktach tematy zadań nadesłanych przez Komitet Główny, opatrzone datą otrzymania oraz podpisem nauczyciela matematyki, stwierdzającym, że podał zadania do wiadomości uczniów.

§ 10. Przewodniczący Komitetu Okręgowego przydziela każdą pracę do oceny dwóm członkom Komitetu; w razie niezgodności ich opinii ocenę ostateczną wystawia przewodniczący lub wyznaczony przezeń trzeci recenzent w przypadku, gdy przewodniczący nie uważa siebie za kompetentnego do rozstrzygnięcia wątpliwości (jest to zobowiązanie dla przewodniczącego niespecjalisty, by nie rozstrzygał wątpliwości z tytułu swego urzędu, lecz potraktował ją merytorycznie).

§ 11. Najpóźniej do dnia 15 lutego Komitet Okręgowy roześle do wybranych kandydatów imienne zawiadomienia o terminie i miejscu zawodów stopnia II, a listę zawodników poda do wiadomości Komitetu Głównego. Komitet Okręgowy przesyła co miesiąc sprawozdanie zawierające liczbę nadesłanych przez nauczycieli rozwiązań uczniowskich, krótką ich charakterystykę i własne uwagi dotyczące stopnia trudności rozesłanych zadań.

§ 12. Zawody stopnia II odbędą się jednocześnie we wszystkich miastach, będących siedzibami Komitetów Okręgowych, w dwóch następujących po sobie dniach w końcu lutego. Techniczną organizację zawodów przeprowadzi Komitet Okręgowy w porozumieniu z Wydziałem Oświaty odpowiedniej Rady Narodowej.

§ 13. Uczestnicy zawodów stopnia II otrzymują do piśmiennego rozwiązania grupę zadań jednakowych dla wszystkich okręgów, nadesłaną przez Komitet Główny. Zawody te odbywają się pod kontrolą członków Komitetu Okręgowego i trwają do 5 godzin dziennie. Zawodnikom nie wolno porozumiewać się pomiędzy sobą, wolno jednak korzystać z przyniesionych książek lub notatek. Na każdym oddawanym przez ucznia arkuszu (papier znormalizowany — format kancelaryjny) musi być umieszczone jego nazwisko i imię, adres prywatny oraz adres i nazwa szkoły, do której uczęszcza. Brulionów pracy może uczeń nie oddawać. Tematy zadań są tajemnicą do chwili ich ujawnienia na sali.

§ 14. Komitet Okręgowy ocenia oddane prace uczniów wystawiając na każdej pracy jedną z ocen: bardzo dobrze z wyróżnieniem, bardzo dobrze, dobrze, dostatecznie, niedostatecznie — i wszystkie prace opatrzone swą opinią przesyła najpóźniej w ciągu tygodnia do Komitetu Głównego.

§ 15. Komitet Główny po zbadaniu nadesłanych rozwiązań ustala listę uczestników dopuszczonych do zawodów stopnia III i zawiadamia ich imiennie o terminie oraz miejscu zawodów.

§ 16. Zawody stopnia III przeprowadzi Komitet Główny w porozumieniu z Ministerstwem Oświaty. Zawody te odbędą się w Warszawie w ciągu dwóch następujących po sobie dni w marcu z podobnym przebiegiem jak zawody stopnia II.

§ 17. Komitet Główny ocenia oddane rozwiązania, przy czym na każdej pracy wystawia oceny co najmniej 4 (czterech) członków Komitetu Głównego. O przyznaniu nagród decyduje plenarne zebranie Komitetu.

§ 18. Nagrodzeni zawodnicy otrzymują dyplomy i po ukończeniu szkoły średniej mają prawo wstępu bez dalszych egzaminów na wydział matematyczno-przyrodniczy uniwersytetów lub wyższych szkół pedagogicznych i na dowolny wydział wyższych szkół technicznych oprócz architektury, gdzie obowiązuje dodatkowy egzamin z rysunku. W roku bieżącym może być przyznanych do 20 nagród. Nagrodzeni będą mieli zapewnione w razie potrzeby w czasie studiów wyższych stypendium państwowe.

§ 19. Nauczyciel matematyki, którego uczeń zostanie zwycięzcą Olimpiady, otrzymuje premię pieniężną.

§ 20. Uczestnicy zawodów stopnia II i III otrzymują zwrot kosztów podróży od miejsca zamieszkania do miejsca zawodów i z powrotem, zakwaterowanie i wyżywienie w ciągu trzech dni. Każdy uczestnik zawodów stopnia II i III powinien przybyć na miejsce zawodów najpóźniej wieczorem dnia poprzedzającego dzień zawodów i ma udać się pod adres wskazany mu w liście powołującym go do zawodów.

§ 21. Okręgowe Komitety Olimpiady Matematycznej znajdują się:

1. dla m. st. Warszawy oraz województw warszawskiego, białostockiego i olsztyńskiego: Warszawa, Al. Ujazdowskie 4, Seminarium Matematyczne Uniwersytetu Warszawskiego;

2. dla województw wrocławskiego, opolskiego i zielonogórskiego: Wrocław, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, Politechnika, Seminarium Matematyczne;

3. dla województw krakowskiego, rzeszowskiego i stalinogrodzkiego: Kraków, ul. św. Jana 22, Seminarium Matematyczne Uniwersytetu Jagiellońskiego;

4. dla województw poznańskiego, szczecińskiego i koszalińskiego: Poznań, ul. Fredry 10, Seminarium Matematyczne Uniwersytetu Poznańskiego;

5. dla m. Łodzi i województw łódzkiego i kieleckiego: Łódź, ul. Uniwersytecka 3, Seminarium Matematyczne Uniwersytetu Łódzkiego;

6. dla województwa lubelskiego: Lublin, plac Stalina 5, Seminarium Matematyczne Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej;

7. dla województw bydgoskiego i gdańskiego: Toruń, Seminarium Matematyczne Uniwersytetu Toruńskiego.

§ 22. Do Komitetu Okręgowego wchodzą trzy osoby powołane przez Zarząd Polskiego Towarzystwa Matematycznego (przy czym przynajmniej jedna z nich powinna być nauczycielem akademickim), przedstawiciel Wydziału Oświaty odpowiedniej Rady Narodowej oraz kierownik miejscowego ośrodka naukowo-dydaktycznego matematyki. Komitet Okręgowy wybiera ze swego grona przewodniczącego i sekretarza Komitetu. Komitet Okręgowy ma prawo dokooptować jedną lub dwie osoby.

§ 23. Komitet Główny ma siedzibę w Warszawie i składa się z 8 osób: przedstawiciela Ministerstwa Oświaty, przedstawiciela Centralnego Urzędu Szkolenia Zawodowego, 5 członków powołanych przez Ministra Oświaty na wniosek Prezydium Zarządu Polskiego Towarzystwa Matematycznego oraz przedstawiciela Związku Młodzieży Polskiej powołanego przez Ministra Oświaty na wniosek Zarządu Głównego Związku Młodzieży Polskiej. Komitet Główny ma prawo dokooptować jedną lub dwie osoby za zgodą Ministra.

§ 24. Komitet Główny wybiera spośród swego grona przewodniczącego Komitetu oraz kierownika Olimpiady.

§ 25. Komitet Główny dysponuje funduszami pieniężnymi Olimpiady i uchwala potrzebne wydatki.

§ 26. Kierownik Olimpiady jest organem wykonawczym Komitetu Głównego i czuwa nad należytą organizacją i przebiegiem zawodów. Kierownik Olimpiady ma do swej pomocy biuro, które mu podlega; siły biurowe przyjmuje i zwalnia Komitet Główny na wniosek kierownika Olimpiady.

STEFAN STRASZEWICZ

*

ZADANIA

Z SZÓSTEJ
OLIMPIADY MATEMATYCZNEJ
(1954—1955)

TEKSTY ZADAŃ

Zawody stopnia I

1. Rozwiązać układ równań

$$\begin{aligned} x+y+z+u &= 8 \\ x^2+y^2+z^2+u^2 &= 20 \\ xy+xu+zy+zu &= 16 \\ xyzu &= 9 \end{aligned}$$

2. Fabryka wysyła towar w paczkach po 3 i po 5 kg. Wykazać, że można w ten sposób wysłać każdą całkowitą ilość kilogramów większą niż 7. Czy można w tym zadaniu zastąpić dane liczby innymi liczbami?

3. Przez środek jednego z boków nierównoległych trapezu przeprowadzić prostą, która dzieli trapez na dwie części o równych polach.

4. Dowieść, że jeżeli istnieje kula styczna do wszystkich krawędzi czworościanu, to sumy krawędzi przeciwległych czworościanu są równe i że prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.

5. Znaleźć wzór wyrażający sumę

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}$$

w zależności od n.

6. Jakie warunki konieczne i dostateczne powinny spełniać liczby całkowite a i b, przy czym b nie jest kwadratem liczby całkowitej, żeby istniały liczby całkowite x i y spełniające równanie

$$\sqrt{a-\sqrt{b}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}.$$

7. Na środkowej CM trójkąta ABC obrano punkt N i poprowadzono prostą AN przecinającą bok BC w punkcie Q oraz prostą BN przecinającą bok AC w punkcie P. Dowieść, że prosta PQ jest równoległa do prostej AB.

8. Dowieść, że w trapez można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi, których średnicami są boki nierównoległe trapezu, są do siebie styczne zewnętrznie.

9. Przedstawić wielomian $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ w postaci różnicy kwadratów dwóch wielomianów niejednakowego stopnia o współczynnikach rzeczywistych.

10. Wykazać, że liczba $53^{53} - 33^{33}$ jest podzielna przez 10.

11. Dowieść, że w trójkącie ostrokątnym suma odległości ortocentrum (tzn. punktu przecięcia wysokości) od wierzchołków jest dwa razy większa od sumy promieni kół opisanego i wpisanego.

12. W jakiej części trójkąta równobocznego powinien leżeć punkt P, aby z odcinków równych odległościom tego punktu od boków trójkąta można było zbudować trójkąt?

Zawody stopnia II

13 (1). Obliczyć sumę $x^4 + y^4 + z^4$ wiedząc, że $x + y + z = 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 = a$, gdzie a jest daną liczbą dodatnią.

14 (2). Znaleźć liczbę naturalną n wiedząc, że suma

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

jest liczbą trzycyfrową o jednakowych cyfrach.

15 (3). Jaki powinien być kąt przy wierzchołku trójkąta równoramiennego, żeby można było zbudować trójkąt o bokach równych wysokości, podstawie i jednemu z pozostałych boków tego trójkąta równoramiennego?

16 (4). Wewnątrz trójkąta ABC dany jest punkt P; znaleźć na obwodzie tego trójkąta taki punkt Q, żeby łamana APQ dzieliła trójkąt na dwie części o równych polach.

17 (5). Dany jest trójkąt ABC. Znaleźć prostokąt o najmniejszym polu zawierający ten trójkąt.

18 (6). Wewnątrz kąta trójściennego $OABC$, którego kąty płaskie AOB, BOC, COA są równe, obrano punkt S równo odległy od ścian tego kąta. Przez punkt S poprowadzono płaszczyznę przecinającą krawędzie OA, OB, OC odpowiednio w punktach M, N, P. Dowieść, że suma

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} + \frac{1}{OP}$$

ma wartość stałą, tzn. niezależną od położenia płaszczyzny MNP.

Zawody stopnia III

19 (1). Jakie warunki powinny spełniać liczby rzeczywiste a, b i c, żeby równanie

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

miało trzy różne pierwiastki rzeczywiste tworzące postęp geometryczny?

20 (2). Dowieść, że spośród siedmiu liczb naturalnych tworzących postęp arytmetyczny o różnicy 30 jedna i tylko jedna jest podzielna przez 7.

21 (3). W okrąg wpisano trójkąt równoboczny ABC; dowieść, że jeżeli M jest dowolnym punktem okręgu, to jedna z odległości MA, MB, MC jest równa sumie dwóch pozostałych.

22 (4). Dowieść, że

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geqslant \sin\alpha \sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta - 1$$

23 (5). Na płaszczyźnie dana jest prosta m oraz punkty A i B leżące po przeciwnych stronach prostej m. Znaleźć na prostej m taki punkt M, żeby różnica odległości tego punktu od punktów A i B była jak największa.

24 (6). Przez punkty A i B poprowadzono dwie proste skośne m i n prostopadłe do prostej AB. Na prostej m obrano punkt C (różny od A), a na prostej n punkt D (różny od B). Mając dane długości odcinków $AB = d$ i $CD = l$ oraz kąt φ, jaki tworzą proste skośne m i n, obliczyć promień powierzchni kuli, przechodzącej przez punkty A, B, C, D.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zawody stopnia I

1. *Rozwiązać układ równań*

$$(1)\qquad \begin{aligned} x + y + z + u &= 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 &= 20 \\ xy + xu + zy + zu &= 16 \\ xyzu &= 9 \end{aligned}$$

Rozwiązanie

Ponieważ

$(x + y + z + u)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + 2(xy + xu + zy +$
$+ zu) + 2(xz + yu)$, $xy + xu + zy + zu = (x + z)(y + u)$,

przeto wprowadzając oznaczenia

$$x + z = m, \quad xz = n, \quad y + u = p, \quad yu = q$$

możemy układ równań (1) zastąpić układem

$$m + p = 8 \qquad n + q = 6$$
$$mp = 16 \qquad nq = 9$$

równoważnym układowi

$$m = p = 4, \qquad n = q = 3$$

czyli układowi

$$(2)\qquad \begin{aligned} x + z &= 4 \qquad & y + u &= 4 \\ xz &= 3 \qquad & yu &= 3 \end{aligned}$$

Układ równań (2), a więc i układ (1) ma 4 rozwiązania:

$$x_1 = 3, \quad y_1 = 3, \quad z_1 = 1, \quad u_1 = 1;$$
$$x_2 = 3, \quad y_2 = 1, \quad z_2 = 1, \quad u_2 = 3;$$
$$x_3 = 1, \quad y_3 = 3, \quad z_3 = 3, \quad u_3 = 1;$$
$$x_4 = 1, \quad y_4 = 1, \quad z_3 = 3, \quad u_3 = 3;$$

2. *Fabryka wysyła towar w paczkach po 3 kg i po 5 kg. Wykazać, że można w ten sposób wysłać każdą całkowitą ilość kilogramów większą niż 7. Czy można w tym zadaniu zastąpić dane liczby innymi liczbami?*

Rozwiązanie

Każda liczba całkowita większa niż 7 może być przedstawiona w jednej z postaci $3k-1$, $3k$, $3k+1$, gdzie k jest liczbą całkowitą większą niż 2. Ponieważ $3k-1=3(k-2)+5$, a $3k+1=3(k-3)+2\cdot 5$, więc wnioskujemy stąd, że każda liczba całkowita większa niż 7 może być przedstawiona w postaci $3x+5y$, gdzie x i y są liczbami całkowitymi nieujemnymi. Istotnie więc można wysłać każdą całkowitą ilość kilogramów towaru, większą niż 7, używając tylko paczek trzy- i pięciokilogramowych. Łatwo sprawdzić, że nie można wysłać w ten sposób 7 kg.

Twierdzenie to można uogólnić w sposób następujący. Przypuśćmy, że towar wysyła się w paczkach po a i po b kilogramów. Gdy a i b mają wspólny podzielnik $d>1$, wtedy oczywiście liczba kilogramów każdej wysłanej paczki towaru musi być podzielna przez d. Załóżmy tedy, że liczby naturalne a i b są pierwsze względem siebie, przy czym żadna z nich nie jest równa 1. Dowiedziemy, że w paczkach po a kg i po b kg można wysłać każdą całkowitą ilość c kilogramów większą niż $ab-a-b$, nie można zaś wysłać $ab-a-b$ kilogramów.

Aby to wykazać, weźmy pod uwagę równanie $ax+by=c$, skąd

$$y=\frac{c-ax}{b}.$$

Nadajmy zmiennej x wartości $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2\ldots x_{b-1}=b-1$; odpowiednie wartości zmiennej y oznaczmy literami $y_0, y_1, y_2 \ldots y_{b-1}$; wartości te tworzą ciąg malejący. Łatwo dowieść, że jedna i tylko jedna z nich jest liczbą całkowitą. Istotnie, każda z liczb $c-ax_i$ $(i=0, 1, \ldots b-1)$ daje inną resztę przy dzielniku b; gdyby bowiem dwie z nich, np. $c-ax_i$ i $c-ax_k$, dawały tę samą resztę, to różnica

$$(c-ax_i)-(c-ax_k)=a(x_k-x_i)$$

byłaby podzielna przez b, co jest niemożliwe, gdyż liczba a jest pierwsza względem b, a liczba x_k-x_i jest bezwzględnie mniejsza od b.

Stąd wynika, że jedna i tylko jedna z owych b reszt jest równa zeru, a zatem jedna i tylko jedna z liczb $y_0, y_i \ldots y_{k-1}$ jest całkowita. Aby liczba ta była nieujemna, tzn. większa niż -1 wystarczy, żeby najmniejsza z liczb $y_0, y_1 \ldots y_{b-1}$, tj. liczba y_{b-1} była większa od -1, co daje warunek

$$\frac{c - a(b-1)}{b} > -1 \quad \text{lub} \quad c > ab - a - b.$$

A zatem, jeśli warunek ten jest spełniony, to równanie $ax + by = c$ ma rozwiązanie w liczbach całkowitych nieujemnych (x, y).

Jeśli $c = ab - a - b$, to

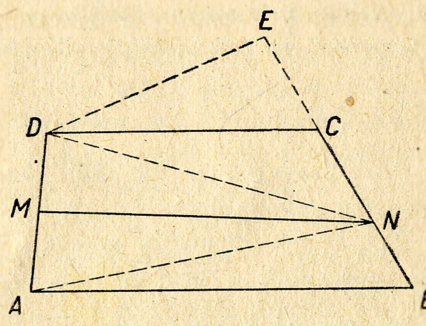
$$y_{b-1} = \frac{ab - a - b - a(b-1)}{b} = -1.$$

Równanie $ax + by = c$ nie ma wówczas rozwiązań całkowitych nieujemnych, gdyż wobec tego, że y_{b-1} jest całkowite, żadna z liczb $y_0, y_1 \ldots y_{b-2}$ nie jest całkowita, a gdy $x > b - 1$, wtedy $y < -1$.

3. *Przez środek jednego z boków nierównoległych trapezu przeprowadzić prostą, która dzieli trapez na dwie części o równych polach.*

Rozwiązanie

Niech $ABCD$ będzie trapezem, w którym bokami równoległymi są AB i DC i niech M będzie środkiem boku AD (rys. 1). Zauważmy, że pole $ABM = \frac{1}{4} AB \cdot h$, pole $DCM = \frac{1}{4} DC \cdot h$, pole $ABCD = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot h$, gdzie h oznacza wysokość trapezu. Każdy z trójkątów ABM i DCM ma zatem pole mniejsze od połowy pola trapezu, a stąd wynika, że prosta przechodząca przez punkt M i dzieląca trapez na dwie części o równych polach musi przeciąć prostą BC w pewnym punkcie N leżącym między punktami B i C. Niech MN



Rys. 1

będzie prostą szukaną, wówczas pole $ABNM$ = pole $MNCD$. Poprowadźmy odcinki AN i ND, wówczas pole AMN = pole MDN. zatem również pole ABN = pole CDN. Ponieważ pole $ABN = AB \cdot BN \cdot \sin \sphericalangle B$, pole $CDN = CD \cdot CN \cdot \sin \sphericalangle C$, a

$$\sin \sphericalangle C = \sin (180^0 - \sphericalangle B) = \sin B,$$

zatem

$$AB \cdot BN = CD \cdot CN \quad \text{lub} \quad \frac{BN}{CN} = \frac{CD}{AB}.$$

Poszukiwany punkt N musi zatem dzielić odcinek BC w stosunku $\frac{CD}{AB}$. Odwrotnie, jeśli $\frac{BN}{CN} = \frac{CD}{AB}$, to przebiegając powyższe rozumowanie w kierunku odwrotnym stwierdzamy, że istotnie pole $ABNM$ = pole $MNCD$. Zadanie ma zawsze rozwiązanie i tylko jedno.

Zadanie można rozwiązać bez zastosowania trygonometrii opierając się np. na twierdzeniu, że pola trójkątów mających jedną parę równych kątów są w takim stosunku jak iloczyny boków zawierających owe równe kąty.

W tym celu na przedłużeniu boku BC odmierzamy odcinek $CE = CN$. Wówczas pole DCE = pole DCN = pole ABN, przy czym trójkąty ABN i DCE mają przy wierzchołkach B i C kąty równe. Stosując wymienione wyżej twierdzenie otrzymujemy

$$AB \cdot BN = CD \cdot CE = CD \cdot CN,$$

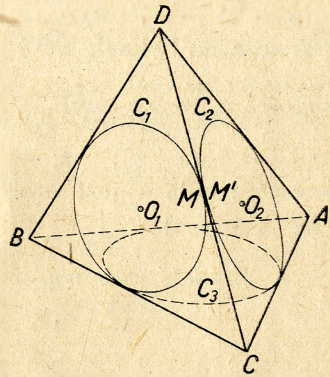
tj. tę samą równość co poprzednio.

4. *Dowieść, że jeżeli istnieje kula styczna do wszystkich krawędzi czworościanu, to sumy krawędzi przeciwległych czworościanu są równe i że prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne.*

Rozwiązanie

a) Dowiedziemy, że jeżeli istnieje kula styczna do wszystkich krawędzi czworościanu $ABCD$, to $AB + CD = AC + BD = AD + BC$. Niech O oznacza środek, a r — promień takiej kuli. Punkty styczności kuli z krawędziami czworościanu dzielą każdą krawędź na dwa odcinki, przy czym każde 3 z owych 12 odcinków, które wychodzą z tego samego wierzchołka czworościanu, są równe; np. każdy z trzech odcinków wychodzących z punktu A ma długość $\sqrt{AO^2 - r^2}$. Oznaczmy długości odcinków wychodzących z wierzchołków A, B, C, D odpowiednio literami x, y, z, u. Wówczas $AB = x + y$, $CD = z + u$, zatem $AB + CD = x + y + z + u$. Analogicznie $AC + BD = x + z + y + u$, $AD + BC = x + u + y + z$. Istotnie więc zachodzi równość $AB + CD = AC + BD = AD + BC$.

b) Dowiedziemy, że jeżeli w czworościanie $ABCD$ jest $AB + CD = AC + BD = AD + BC$, to istnieje kula styczna do wszystkich krawędzi czworościanu (rys. 2). Weźmy pod uwagę okręgi C_1 i C_2 o środkach O_1 i O_2 wpisane odpowiednio w trójkąty BCD i ACD. Niech okrąg C_1 styka się z krawędzią CD w punkcie M, a okrąg C_2 — w punkcie M'. Stosując do trójkątów BCD i ACD znane wzory na długość odcinków wyznaczonych na bokach trójkąta przez koło wpisane mamy



Rys. 2

$$CM = \frac{1}{2}(BC + CD - BD),$$

$$CM' = \frac{1}{2}(AC + CD - AD);$$

zatem

$$CM - CM' = \frac{1}{2}(BC + AD - BD - AC) = 0,$$

skąd wynika, że punkty M i M' pokrywają się, tj. okręgi C_1 i C_2 są styczne do krawędzi BC w tym samym punkcie M. W takim razie istnieje kula K, której powierzchnia przechodzi przez okręgi C_1 i C_2. Istotnie, punkty O_1, O_2 i M nie leżą na jednej prostej, wyznaczają więc płaszczyznę $O_1 O_2 M$ prostopadłą do prostej CD, a zatem prostopadłą do płaszczyzn BCD i ACD. W płaszczyźnie $O_1 O_2 M$ leżą prostopadłe poprowadzone do płaszczyzn BCD i ACD odpowiednio w punktach O_1 i O_2; te prostopadłe nie są równoległe (gdyż płaszczyzny BCD i ACD przecinają się), mają zatem punkt wspólny O. Punkt O ma tę samą odległość, równą OM, od wszystkich punktów okręgów C_1 i C_2, więc powierzchnia kuli K o środku O i promieniu OM przechodzi przez okręgi C_1 i C_2. Kula K jest styczna do krawędzi BC, BD, AC, AD, CD; udowodnimy, że jest ona styczna również do krawędzi AB. Otóż powierzchnia kuli K przecina płaszczyznę ABC według okręgu C_3 stycznego do krawędzi BC i AC w tych samych punktach co okręgi C_1 i C_2. Twierdzenie będzie dowiedzione, gdy wykażemy, że okrąg C_3 jest okręgiem wpisanym w trójkąt ABC. Oznaczając odcinki wyznaczone na krawędziach BC, BD, AC, AD, CD przez okręgi C_1 i C_2 w ten sam sposób, co w a), mamy $BC = y + z$, $BD = y + u$, $AC = x + z$, $AD = x + u$, $CD = z + u$. Według założenia $AB + CD = AC + BD$, skąd $AB = AC + BD - CD$, więc $AB = (x + z) + (y + u) - (z + u) = x + y$. Okrąg C_4 wpisany w trójkąt ABC wyznacza na bokach BC i AC przy wierzchołku C odcinki o pewnej długości z_1, przy czym $z_1 = \frac{1}{2}(BC + AC - AB) = \frac{1}{2}[(y + z) + (x+z) - (x+y)] = z$; stąd wynika, że okrąg C_4 pokrywa się z okręgiem C_3 i kula K jest styczna do wszystkich krawędzi czworościanu $ABCD$, c. n. d.

5. *Znaleźć wzór wyrażający sumę*

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n}$$

w zależności od n.

Rozwiązanie

Sposób 1. Według wzoru na sumę wyrazów postępu geometrycznego jest

$$2^k + 2^{k-1} + \ldots + 2 + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

Poszukiwaną sumę s_n możemy obliczyć przedstawiając ją w postaci sumy n składników, z których każdy jest sumą pewnego postępu geometrycznego

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2^n}\Big[2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-2} + 3 \cdot 2^{n-3} + \ldots + (n-1) \cdot 2 + n\Big] = \frac{1}{2^n}\Big[(2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 1) + (2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 1) + \ldots + (2 + 1) + 1\Big].$$

Stosując wzór wyżej podany otrzymamy

$$s_n = \frac{1}{2^n}[(2^n - 1) + (2^{n-1} - 1) + \dots (2^2 - 1) + (2 - 1)] =$$

$$= \frac{1}{2^n}(2^n + 2^{n-1} + \dots + 2^2 + 2 - n) =$$

$$= \frac{1}{2^n}[(2^{n+1} - 1) - 1 - n] = \frac{1}{2^n}[2^{n+1} - (2 + n)]$$

i ostatecznie

$$(*) \qquad s_n = 2 - \frac{2+n}{2^n}.$$

Sposób 2. Krótki dowód wzoru (*) możemy uzyskać stosując indukcję zupełną. Mianowicie wzór ten jest prawdziwy dla $n = 1$, gdyż $s_1 = \frac{1}{2}$; przyjmując, że $s_k = 2 - \frac{2+k}{2^k}$ mamy $s_{k+1} = s_k + \frac{k+1}{2^{k+1}} =$

$$= 2 - \frac{2+k}{2^k} - \frac{k+1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{4 + 2k - k - 1}{2^{k+1}} = 2 - \frac{2 + (k+1)}{2^{k+1}};$$

wzór (*) jest zatem prawdziwy dla każdego naturalnego n.

6. *Jakie warunki konieczne i dostateczne powinny spełniać liczby całkowite a i b, przy czym b nie jest kwadratem liczby całkowitej, żeby istniały liczby całkowite x i y spełniające równanie*

$$\sqrt{a - \sqrt{b}} = \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

Rozwiązanie

Przypuśćmy, że zachodzi równość

$$(1) \qquad \sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{a - \sqrt{b}},$$

gdzie a, b, x, y są liczbami całkowitymi, a przy tym b nie jest kwadratem liczby całkowitej; w takim razie liczby a, b, x, y są dodatnie, tj. są liczbami naturalnymi i $x > y$. Podnosząc równość (1) do kwadratu otrzymujemy równość

$$x + y - 2\sqrt{xy} = a - \sqrt{b} \quad \text{lub} \quad (x + y - a) + \sqrt{b} = 2\sqrt{xy},$$

a stąd przez ponowne podniesienie do kwadratu równość

$$(2) \qquad (x + y - a)^2 + b + 2(x + y - a)\sqrt{b} = 4xy.$$

Z równości (2) wnioskujemy, że $x + y - a = 0$; gdyby bowiem było $x + y - a \neq 0$, wtedy z równości (2) wynikałoby, że

$$(3) \qquad \sqrt{b} = \frac{4xy - (x + y - a)^2 - b}{2(x + y - a)},$$

co nie może zachodzić, gdyż lewa strona równości (3) jest według założenia liczbą niewymierną, prawa zaś — wymierną.

Zatem $x + y = a$, więc na mocy (2) $4xy = b$.

Rozwiązując ten układ równań względem x i y i biorąc pod uwagę, że $x > y$ otrzymujemy

$$(4) \qquad x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}, \qquad y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}.$$

Ponieważ x i y są liczbami całkowitymi, więc ze wzorów (4) wynika, że:

1⁰ liczba $a^2 - b$ jest kwadratem liczby całkowitej, gdyż $a^2 - b = (x - y)^2$,

2⁰ liczba b jest parzysta, gdyż a i $\sqrt{a^2 - b}$ muszą być liczbami tej samej parzystości, oraz $b = a^2 - (\sqrt{a^2 - b})^2$.

Odwrotnie, jeżeli a i b są liczbami naturalnymi spełniającymi warunki 1⁰ i 2⁰, to a i $\sqrt{a^2 - b}$ są liczbami naturalnymi tej samej parzystości, gdyż $a^2 - (\sqrt{a^2 - b})^2 = b$ jest liczbą parzystą; zatem liczby x i y określone wzorami (4) są liczbami naturalnymi, a przy tym spełniają one równość (1), gdyż według wzorów (4)

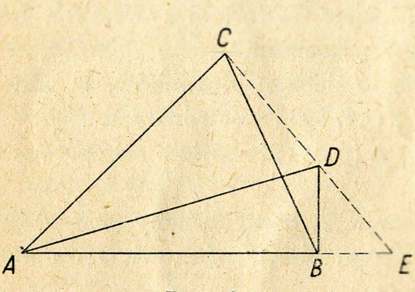
$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x + y - 2\sqrt{xy} = a - 2\sqrt{\frac{b}{4}} = a - \sqrt{b}.$$

7. *Na środkowej CM trójkąta ABC obrano punkt N i poprowadzono prostą AN przecinającą bok BC w punkcie Q oraz prostą BN przecinającą bok AC w punkcie P. Dowieść, że prosta PQ jest równoległa do prostej AB.*

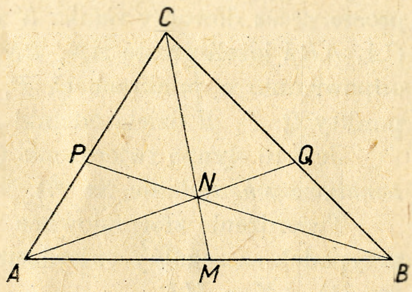
Rozwiązanie

Twierdzenie może być dowiedzione różnymi sposobami; podamy dwa z nich.

Sposób 1. Zauważmy, że jeżeli prosta przechodząca przez wierzchołki dwóch trójkątów ABC i ABD o wspólnej podstawie AB przecina prostą AB w punkcie E (rys. 3), to stosunek pól trójkątów ABC i ABD równa się stosunkowi odcinków CE i DE, gdyż te odcinki są proporcjonalne do wysokości trójkątów ABC i ABD poprowadzonych z wierzchołków C i D.



Rys. 3



Rys. 4

Opierając się na tym spostrzeżeniu możemy twierdzenie sformułowane w zadaniu udowodnić w następujący prosty sposób (rys. 4):

$$\begin{aligned} \text{pole } ANC &: \text{pole } CNB = AM : MB \\ \text{pole } BNA &: \text{pole } ANC = BQ : QC \\ \text{pole } CNB &: \text{pole } BNA = CP : PA \end{aligned}$$

Iloczyn lewych stron powyższych równań jest równy 1, zatem

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1. \tag{1}$$

Ponieważ $AM = MB$, więc równość (1) daje $BQ \cdot CP = QC \cdot PA$ lub

$$\frac{AP}{PC} = \frac{BQ}{QC},$$

a stąd na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnioskujemy, że proste PQ i AB są równoległe.

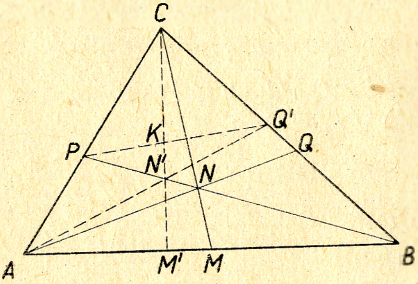
Uwaga. Wzór (1) otrzymaliśmy nie korzystając wcale z założenia, że M jest środkiem odcinka AB. Wzór ten jest więc prawdziwy również wtedy, gdy M jest dowolnym punktem wewnętrznym odcinka AB, a N — dowolnym punktem wewnętrznym odcinka MC. Możemy nawet przyjąć ogólniej, że punkt M jest dowolnym punktem prostej AB, różnym od A i od B, a N dowolnym punktem prostej MC różnym od M i od C, z tym jednak, żeby prosta AN przecinała prostą BC, a prosta BN — prostą AC; rozumowanie nie ulegnie zmianie.

Własność trójkąta, wyrażoną wzorem (1) można wypowiedzieć jak następuje. Jeżeli z wierzchołków A, B, C trójkąta poprowadzić proste przez dowolny punkt N nie leżący na żadnej z prostych BC, CA, AB i jeżeli proste AN, BN, CN przecinają proste BC, CA, AB odpowiednio w punktach Q, P, M, to iloczyn stosunków, w jakich punkty Q, P, M dzielą odcinki BC, CA, AB, jest równy 1.

Jest to słynne twierdzenie Cevy (patrz *Zadania z olimpiad matematycznych*, zadanie Nr 97).

Twierdzenie sformułowane w zadaniu otrzymujemy rozważając przypadek szczególny twierdzenia Cevy, biorąc mianowicie we wzorze (1) $AM = MB$.

Sposób 2. Zastosujemy metodę sprowadzenia do niedorzeczności. Przypuśćmy, że równoległa do prostej AB poprowadzona przez punkt P przecina prostą BC w punkcie Q' różnym od punktu Q (rys. 5). Prosta AQ' przecina wówczas prostą BP w punkcie N' różnym od punktu N; prosta CN' przecina prostą AB w punkcie M' różnym od punktu M, a prostą PQ' w punkcie K.



Rys. 5

Wówczas

$AM' : M'B = PK : KQ'$ (w jednokładności względem środka C),
$AM' : M'B = KQ' : PK$ („ „ „ N').

Z tych równań wynika, że $AM' : M'B = M'B : AM'$, zatem $(AM')^2 = (M'B)^2$ i $AM' = M'B$, co jest sprzeczne z założeniem, że środkiem odcinka AB jest punkt M, a nie punkt M'.

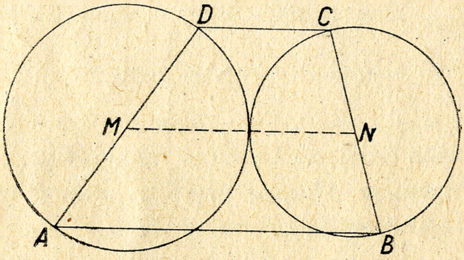
8. *Dowieść, że w trapez można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi, których średnicami są boki nierównoległe trapezu, są do siebie styczne zewnętrznie.*

Rozwiązanie

W czworokąt wypukły $ABCD$ można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy boków przeciwległych czworokąta są równe, tj. gdy

$$AB + CD = AD + BC. \tag{1}$$

Gdy czworokąt $ABCD$ jest trapezem o bokach równoległych AB i CD, to oznaczając literami M i N odpowiednio środki boków AD i BC (rys. 6) mamy $AB + CD = 2\,MN$, wobec czego równość (1) możemy zastąpić równością



Rys. 6

$$MN = \frac{1}{2}\,AD + \frac{1}{2}\,BC. \tag{2}$$

Równość (2) zaś wyraża warunek konieczny i dostateczny styczności zewnętrznej okręgów o środkach M i N i promieniach $\frac{1}{2}\,AD$ i $\frac{1}{2}\,BC$.

9. *Przedstawić wielomian* $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ *w postaci różnicy kwadratów dwóch wielomianów niejednakowego stopnia o współczynnikach rzeczywistych.*

Rozwiązanie

Jeżeli wielomian $W(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ jest równy różnicy $U(x)^2 - V(x)^2$, gdzie $U(x)$ i $V(x)$ są wielomianami niejednakowego stopnia, to wielomian $U(x)$ musi być stopnia drugiego a wielomian $V(x)$ stopnia pierwszego lub zerowego. W takim razie wielomian $V(x)^2$ nie zawiera wyrazów stopnia wyższego niż drugi, wobec czego pierwsze dwa wyrazy wielomianu $U(x)^2$ muszą być takie same, jak w danym wielomianie $W(x)$, tj. $U(x)^2$ ma postać $x^4 + x^3 + \ldots$. Stąd wnioskujemy, że wielomian $U(x)$ ma postać $U(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + a$. Zatem

$$V(x)^2 = U(x)^2 - W(x) = (x^2 + \frac{1}{2}x + a)^2 - (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) =$$

$$= \left(2a - \frac{3}{4}\right)x^2 + (a - 1)\,x + a^2 - 1.$$

Z wyrażenia otrzymanego dla $V(x)^2$ widzimy, że $V(x)$ nie może być stopnia zerowego, gdyż nie może być jednocześnie $2a - \frac{3}{4} = 0$ i $a - 1 = 0$; $V(x)$ musi być zatem stopnia pierwszego. Stąd wynika dalej, że kwadrat funkcji $V(x)$ musi być trójmianem kwadratowym, w którym współczynnik przy x^2 jest dodatni, a wyróżnik równa się 0, zatem

$$2a - \frac{3}{4} > 0, \quad (a - 1)^2 - 4\left(2a - \frac{3}{4}\right)(a^2 - 1) = 0.$$

Drugi warunek daje po uproszczeniu równanie

$$(a - 1)(4a^2 + 2a - 1) = 0.$$

Równanie to ma trzy pierwiastki $a = 1$ i $a = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{5})$, z których tylko pierwiastek $a = 1$ spełnia warunek $2a - \frac{3}{4} > 0$. Ostatecznie otrzymujemy rozkład

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + \frac{1}{2}x + 1)^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\,x\right)^2$$

jako jedyne rozwiązanie zadania.

10. *Wykazać, że liczba* $53^{53} - 33^{33}$ *jest podzielna przez* 10.

Rozwiązanie

Wystarczy dowieść, że końcowe cyfry liczb 53^{53} i 33^{33} są jednakowe. Otóż końcowa cyfra iloczynu $(10k + a)(10m + b)(10n + c)\ldots$, gdzie $k, m, n, \ldots a, b, c, \ldots$ są liczbami naturalnymi jest równa końcowej cyfrze iloczynu $abc\ldots$ Liczba 53^{53} ma zatem taką samą końcową cyfrę, jak liczba 3^{53}. Lecz $3^{53} = 3^{52} \cdot 3 = (81)^{13} \cdot 3$, więc liczba 3^{53} ma taką samą końcową cyfrę, jak liczba $1^{13} \cdot 3$, tj. cyfrę 3. Podobnie liczba 33^{33} ma taką samą końcową cyfrę jak liczba $3^{33} = 3^{32} \cdot 3 = (3^4)^8 \cdot 3 = (81)^8 \cdot 3$, tj. cyfrę 3, c. n. d.

Powyższemu rozumowaniu można nadać postać krótką i dobitną posługując się pojęciami i najprostszymi własnościami kongruencji (p. *Zadania z olimpiad matematycznych*, zadanie Nr 8).

Ponieważ $53 \equiv 3 \pmod{10}$, $33 \equiv 3 \pmod{10}$, $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$, więc

$$53^{53} \equiv 3^{53} \equiv (3^4)^{13} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{10},$$
$$33^{33} \equiv 3^{33} \equiv (3^4)^8 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{10},$$

zatem

$$53^{53} - 33^{33} \equiv 0 \pmod{10}.$$

11. *Dowieść, że w trójkącie ostrokątnym suma odległości ortocentrum* (tzn. punktu przecięcia wysokości) *od wierzchołków jest dwa razy większa od sumy promieni kół opisanego i wpisanego.*

Rozwiązanie

Sposób 1. Przyjmiemy dla trójkąta ABC zwykłe oznaczenia: a, b, c — boki, α, β, γ — kąty, R i r promienie kół opisanego i wpisanego, S — pole, $2p$ — obwód; niech prócz tego d_1, d_2, d_3 oznaczają odległości ortocentrum H odpowiednio od wierzchołków A, B, C (rys. 7). Jeśli trójkąt ABC jest ostrokątny, to punkt H leży wewnątrz tego trójkąta, a odcinki AH, BH, CH dzielą trójkąt na trójkąty AHB, BHC, CHA. W trójkącie AHB mamy $\sphericalangle ABH = 90^0 - \alpha$, $\sphericalangle BAH = 90^0 - \beta$, więc $\sphericalangle AHB = \alpha + \beta$; stosując do tego trójkąta twierdzenie sinusów otrzymujemy

$$\frac{AH}{\sin \sphericalangle ABH} = \frac{AB}{\sin \sphericalangle AHB}, \text{ zatem } \frac{d_1}{\cos\alpha} = \frac{c}{\sin(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

stąd $d_1 = 2R \cos\alpha$ i analogicznie $d_2 = 2R\cos\beta$, $d_3 = 2R\cos\gamma$, mamy więc

$$(1) \qquad d_1 + d_2 + d_3 = 2R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma).$$

Z drugiej strony wiemy, że $r = \frac{S}{p}$, $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ $2p = 2R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$, wobec czego

$$2(R+r) = 2R\left(1 + \frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}\right) =$$

$$= 2R\left(1 + \frac{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\right) =$$

$$= 2R\left(1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

i ostatecznie

(2) $\quad 2(R+r) = 2R(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$.

W powyższym obliczeniu zastosowaliśmy znane tożsamości trygonometryczne: jeżeli $\alpha + \beta = 180^0$, to $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$ i $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Z równości (1) i (2) wynika, że

$$d_1 + d_2 + d_3 = 2(R+r).$$

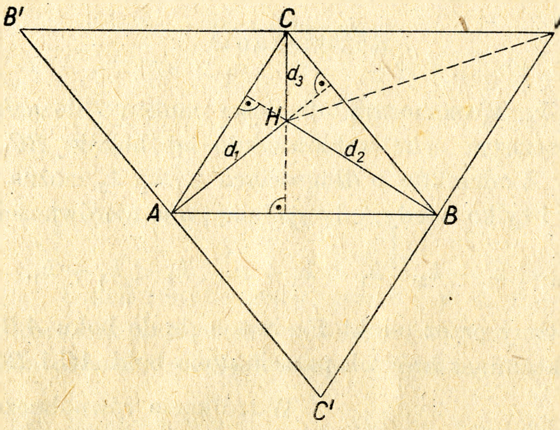
W trójkącie rozwartokątnym istnieje związek analogiczny; jeśli $\alpha > 90^0$, a r_a oznacza promień koła dopisanego do boku BC, to

$$d_1 + d_2 + d_3 = 2(r_a - R).$$

Równość tę można uzasadnić zupełnie podobnie jak poprzednią.

Sposób 2. Dowód twierdzenia można przeprowadzić bez stosowania związków trygonometrycznych. Poprowadźmy przez każdy wierzchołek trójkąta prostą równoległą do boku przeciwległego i oznaczmy punkty przecięcia tych prostych literami A', B', C', jak wskazuje rys. 7. Trójkąt $A'B'C'$ jest podobny do trójkąta ABC w skali 2 : 1, punkty A, B, C są odpowiednio środkami boków $B'C'$, $C'A'$ i $A'B'$, więc punkt H, jako punkt przecięcia symetralnych boków trójkąta $A'B'C'$, jest środkiem koła opisanego na tym trójkącie; promień tego koła wynosi $2R$. Pole $4S$ trójkąta $A'B'C'$ jest sumą pól trójkątów $B'HC'$, $C'HA'$ i $A'HB'$ o podstawach równych odpowiednio $2a$, $2b$, $2c$ i wysokościach d_1, d_2, d_3, zatem

$$ad_1 + bd_2 + cd_3 = 4S. \tag{3}$$



Rys. 7

Weźmy pod uwagę czworokąt $A'BHC$; ma on w wierzchołkach B i C kąty proste, wobec czego ma koło opisane o średnicy $A'H = 2R$. Stosując do tego czworokąta twierdzenie Ptolemeusza otrzymujemy:

$$A'C \cdot BH + A'B \cdot CH = A'H \cdot BC,$$

czyli

$$c \cdot d_2 + bd_3 = 2R \cdot a. \tag{4}$$

Analogicznie

$$ad_3 + cd_1 = 2Rb, \tag{5}$$

$$bd_1 + ad_2 = 2Rc. \tag{6}$$

Dodajmy stronami równości (3), (4), (5), (6); otrzymamy:

$$(a+b+c)\ (d_1+d_2+d_3) = 2R\,(a+b+c) + 4S;$$

stąd

$$d_1 + d_2 + d_3 = 2R + \frac{4S}{a+b+c}$$

i ostatecznie

$$d_1 + d_2 + d_3 = 2R + 2r.$$

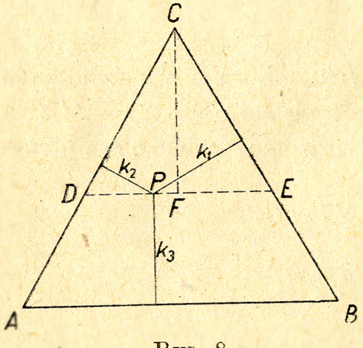
12. *W jakiej części trójkąta równobocznego powinien leżeć punkt P, aby z odcinków równych odległościom tego punktu od boków trójkąta można było zbudować trójkąt?*

Rozwiązanie

Niech k_1, k_2, k_3 oznaczają odległości punktu P leżącego w trójkącie równobocznym ABC odpowiednio od boków BC, CA, AB tego trójkąta. Z odcinków o długościach k_1, k_2, k_3 można zbudować trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy spełniają one nierówności:

$$(1) \qquad k_3 < k_1 + k_2, \quad k_1 < k_2 + k_3, \quad k_2 < k_3 + k_1.$$

Poprowadźmy przez punkt P równoległą do boku AB i niech D i E będą punktami, w których przecina ona boki AC i BC (rys. 8):



Rys. 8

W trójkącie równobocznym CDE suma k_1+k_2 odległości punktu P leżącego na boku DE od boków pozostałych równa się wysokości CF tego trójkąta. Istotnie pole CEP + pole CDP = pole CDE, więc $CE \cdot k_1 + CD \cdot k_2 = DE \cdot CF$, skąd $k_1 + k_2 = CF$. Warunek $k_3 < k_1 + k_2$ można zatem napisać w postaci $k_3 < CF$, a ponieważ $k_3 + CF$ równa się wysokości h trójkąta ABC, więc warunek ten jest równoważny warunkowi

$$k_3 < \frac{1}{2} h.$$

Analogicznie nierówności $k_1 < k_2 + k_3$ i $k_2 < k_3 + k_1$ są równoważne odpowiednio nierównościom

$$k_1 < \frac{1}{2} h \quad \text{i} \quad k_2 < \frac{1}{2} h.$$

Punkt P spełnia te trzy warunki wtedy i tylko wtedy, gdy leży wewnątrz trójkąta utworzonego przez środki boków trójkąta ABC.

13 (1). *Obliczyć sumę $x^4 + y^4 + z^4$ wiedząc, że $x + y + z = 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 = a$, gdzie a jest daną liczbą dodatnią.*

Rozwiązanie

$$x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) =$$
$$= a^2 - 2\,[(xy + yz + zx)^2 - 2x^2yz - 2xy^2z - 2xyz^2] =$$
$$= a^2 - 2\,(xy+yz+zx)^2 - 4xyz\,(x+y+z) =$$
$$= a^2 - 2\,(xy + yz + zx)^2 =$$
$$= a^2 - 2\left[\frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2}\right]^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Uwaga. Układ równań $x+y+z = 0$ i $x^2 + y^2 + z^2 = a$, gdzie $a > 0$, ma nieskończenie wiele rozwiązań (x, y, z). Wynik powyższego zadania oznacza, że dla każdego z tych rozwiązań suma $x^4 + y^4 + z^4$ ma tę samą wartość $\frac{a^2}{2}$. Gdyby warunek $x+y+z = 0$ zastąpić warunkiem ogólniejszym $x+y+z = b$, gdzie b jest daną liczbą, nie można by udowodnić, że suma $x^4 + y^4 + z^4$ ma wartość jednoznacznie określoną przez a i b. Gdy a i b są liczbami naturalnymi, równania $x + y + z = b$ i $x^2 + y^2 + z^2 = a$ mogą mieć nawet rozwiązania (x, y, z) w liczbach naturalnych o różnych wartościach sumy $x^4+y^4+z^4$. Dowodzi tego przykład $a = 5946$, $b = 108$, gdyż

$$1 + 43 + 64 = 8 + 29 + 71 = 16 + 19 + 73 = 108,$$
$$1^2 + 43^2 + 64^2 = 8^2 + 29^2 + 71^2 = 16^2 + 19^2 + 73^2 = 5946,$$

natomiast sumy $1^4 + 43^4 + 64^4$, $8^4 + 29^4 + 71^4$ i $16^4 + 19^4 + 73^4$ są różne.

Żeby się o tym przekonać, nie potrzeba obliczać tych sum dokładnie; wystarczy posługując się tablicą kwadratów liczb od 1 do 1000 sprawdzić, że pierwsza z nich jest mniejsza od $21 \cdot 10^6$, druga jest zawarta między $26 \cdot 10^6$ i $27 \cdot 10^6$, a trzecia jest większa od $28 \cdot 10^6$.

Gdy $a = 66$, $b = 10$, wtedy

$(-1) + 4 + 7 = 1+1+8 = 10$, $(-1)^2 + 4^2 + 7^2 = 1^2 + 1^2 + 8^2 = 66$, natomiast

$$(-1)^4 + 4^4 + 7^4 = 2658, \quad \text{a} \quad 1^4 + 1^4 + 8^4 = 4098.$$

14 (2). *Znaleźć liczbę naturalną n wiedząc, że suma*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

jest liczbą trzycyfrową o jednakowych cyfrach.

Rozwiązanie

Liczba trzycyfrowa o jednakowych cyfrach ma postać $111 \cdot c = 3 \cdot 37 \cdot c$, gdzie c jest jedną z liczb 1, 2, ..., 9, suma zaś pierwszych n liczb naturalnych wynosi $\frac{1}{2} n (n + 1)$, wobec czego liczba n ma czynić zadość warunkowi

$$n (n + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot c. \tag{1}$$

Ponieważ 37 jest liczbą pierwszą, więc jedna z liczb n i $n + 1$ musi być podzielna przez 37. Możliwe są dwa przypadki:

a) $n = 37 k$, gdzie k jest liczbą naturalną; równość (1) daje wówczas

$$k (37 k + 1) = 2 \cdot 3 \cdot c.$$

Prawa strona jest tu najwyżej równa 54, wobec czego liczba k może być najwyżej równa 1, czyli $n = 37$. Wartość ta nie jest jednak rozwiązaniem zadania, gdyż $\frac{1}{2} n (n + 1)$ równa się wówczas $37 \cdot 19 = 703$.

b) $n + 1 = 37 k$ (k = liczba naturalna); równość (1) daje $(37 k - 1) k = 2 \cdot 3 \cdot c$.

Jedyną możliwą wartością k jest podobnie jak w a) liczba 1, wówczas $n = 36$ i $\frac{1}{2} n (n + 1) = 18 \cdot 37 = 666$. Zatem jedynym rozwiązaniem zadania jest $n = 36$.

15 (3). *Jaki powinien być kąt przy wierzchołku trójkąta równoramiennego, żeby można było zbudować trójkąt o bokach równych wysokości, podstawie i jednemu z pozostałych boków tego trójkąta równoramiennego?*

Rozwiązanie

Przyjmiemy oznaczenia wskazane na rys. 9.

Trójkąt o bokach równych a, c, h można zbudować wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są nierówności:

$$a + c > h, \quad c + h > a, \quad a + h > c.$$

Ponieważ w trójkącie ADC mamy $a > h$, $\frac{c}{2} + h > a$, więc pierwsze dwie z powyższych nierówności zachodzą zawsze, wobec czego warunkiem koniecznym i dostatecznym istnienia trójkąta o bokach a, c, h jest nierówność

$$a + h > c. \tag{1}$$

Z trójkąta ADC mamy $h = a \cos \frac{x}{2}$, $\frac{c}{2} = a \sin \frac{x}{2}$; podstawienie do nierówności (1) daje

$$1 + \cos \frac{x}{2} > 2 \sin \frac{x}{2}$$

lub

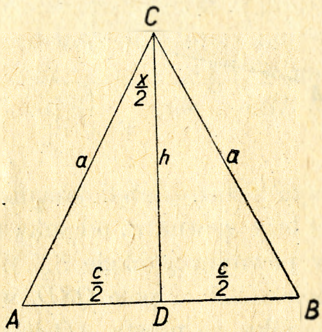
$$2 \cos^2 \frac{x}{4} > 4 \sin \frac{x}{4} \cos \frac{x}{4},$$

a ponieważ $\frac{x}{4} < 90^0$, więc warunek żądany przybiera postać

$$\operatorname{tg} \frac{x}{4} < \frac{1}{2}$$

lub

$$x < 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$



Rys. 9

W przybliżeniu $4 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} \approx 106^0$ (z niedomiarem).

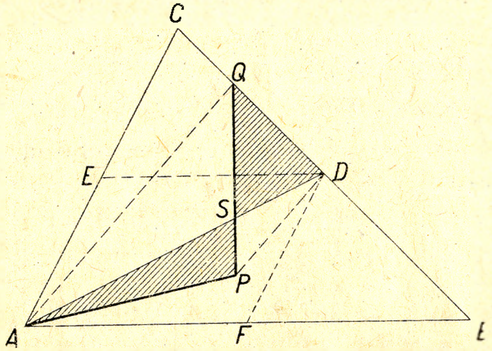
16 (4). *Wewnątrz trójkąta ABC dany jest punkt P; znaleźć na obwodzie tego trójkąta taki punkt Q, żeby łamana APQ dzieliła trójkąt na dwie części o równych polach.*

Rozwiązanie

Weźmy pod uwagę trójkąty APB i APC. Możliwe są trzy następujące przypadki:

a) Każdy z trójkątów APB i APC ma pole mniejsze od połowy pola trójkąta ABC. Przypadek ten zachodzi, gdy odległości punktu P

od boków AB i BC są mniejsze niż połowy odpowiednich wysokości trójkąta, tzn. gdy punkt P leży wewnątrz równoległoboku $AFDE$, którego wierzchołki F, D, E są odpowiednio środkami boków AB, BC i CA (rys. 10).



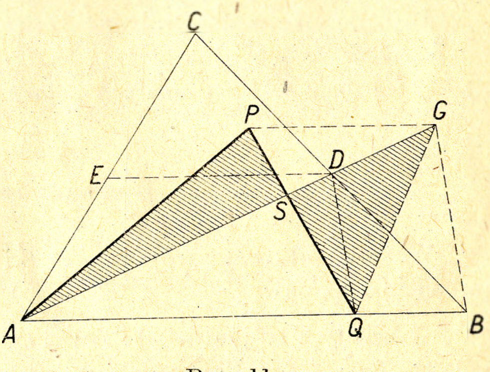
Rys. 10

Jeżeli punkt P leży na tej przekątnej AD równoległoboku, która jest środkową trójkąta ABC, to poszukiwany punkt Q pokrywa się z punktem D.

Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy punkt P leży wewnątrz jednego z trójkątów AFD i AED, na przykład wewnątrz trójkąta AFD. Jeżeli łamana APQ spełnia warunki zadania, to punkt Q leży wewnątrz odcinka CD, a odcinek PQ przecina środkową AD w pewnym punkcie S. Wówczas pole $ABQP$ = pole ABD, zatem pole ASP = pole QSD, wobec czego pole APD = pole QPD, skąd wynika, że prosta AQ jest równoległa do prostej PD. Poszukiwany punkt Q wyznaczymy więc w tym przypadku jako punkt przecięcia półprostej poprowadzonej przez punkt A równolegle do prostej PD z odcinkiem DC. Punkt taki istnieje zawsze, gdyż owa półprosta, jako równoległa do PD, leży wewnątrz kąta DAC.

b) Jeden z trójkątów APB i APC na przykład $\triangle APB$ ma pole równe połowie trójkąta ABC. Poszukiwaną łamaną jest wtedy łamana APB.

c) Jeden z trójkątów APB i APC na przykład $\triangle APB$ ma pole większe od połowy pola trójkąta ABC. Przypadek ten zachodzi, gdy punkt P leży wewnątrz trójkąta EDC (rys. 11).



Rys. 11

Jeżeli łamana APQ spełnia warunek zadania, to punkt Q leży wewnątrz boku AB, a odcinek PQ przecina odcinek AD w pewnym punkcie S. Wówczas pole AQP = pole ABD, zatem pole ASP = = pole $SQBD$. Poprowadźmy przez punkt B prostą równoległą do przekątnej QD czworokąta $SQBD$; przetnie ona przedłużenie boku SD w pewnym punkcie G. Wówczas pole QDG = pole QDB zatem pole $SQBD$ = pole SQG, wobec czego pole ASP = pole SQG a pole APG = = pole QPG, skąd wynika, że prosta PG jest równoległa do prostej AB. Konstrukcja łamanej APQ jest więc następująca: Prowadzimy przez punkt P prostą równoległą do prostej AB do przecięcia z przedłużeniem odcinka AD w punkcie G, a następnie przez punkt D prostą równoległą do prostej GB, która przetnie odcinek AB w szukanym punkcie Q. Istotnie pole APQ = pole ASQ + pole APS = pole ASQ + pole SQG = pole ASQ + pole $SQBD$ = pole ABD = = $\frac{1}{2}$ pola ABC.

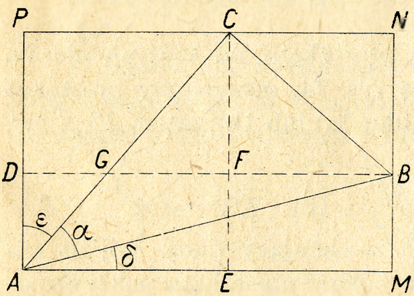
17 (5). *Dany jest trójkąt ABC. Znaleźć prostokąt o najmniejszym polu zawierający ten trójkąt.*

Rozwiązanie

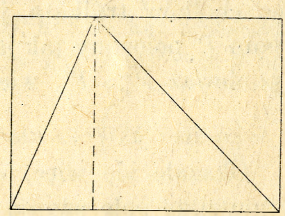
Jeżeli prostokąt o polu P zawiera trójkąt ABC, to możliwe są tylko przypadki następujące:

1. Na każdym boku prostokąta leży jakiś wierzchołek trójkąta. Ponieważ czworokąt ma cztery boki, a trójkąt trzy wierzchołki, więc co najmniej jeden wierzchołek trójkąta musi leżeć na dwóch bokach prostokąta, tzn. w jednym z wierzchołków prostokąta. Mamy zatem dwie możliwości:

a) Tylko jeden wierzchołek trójkąta jest wierzchołkiem prostokąta (rys. 12).



Rys. 12



Rys. 13

Przyjmując oznaczenia podane na rys. 12 poprowadźmy odcinki BD i CE równolegle do boków AM i AP prostokąta. Stwierdzamy, że

pole CFB = pole CBN, gdyż $\triangle CFB$ i $\triangle CBN$ są przystające,
pole ABG < pole AMB, gdyż $GB < AM$, a $AD = MB$,
pole CGF < pole ACP, gdyż $GF < PC$ i $FC < AP$.

Suma lewych stron powyższych związków równa się polu trójkąta ABC, zatem pole ABC < pole CBN + pole AMB + pole ACP.

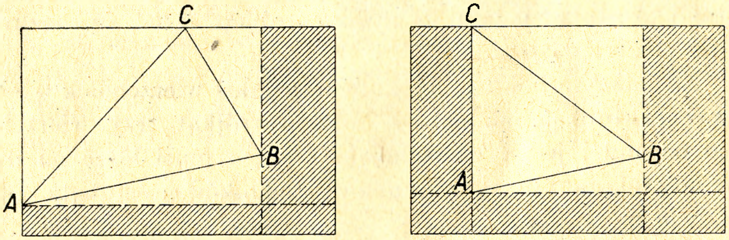
Pole S trójkąta ABC jest zatem mniejsze od pola pozostałej części prostokąta, czyli

$$P > 2S.$$

b) Co najmniej dwa wierzchołki trójkąta są wierzchołkami prostokąta (rys. 13). Wówczas oczywiście

$$P = 2S.$$

2. Przynajmniej na jednym z boków prostokąta nie leży żaden wierzchołek trójkąta (rys. 14)



Rys. 14

Przesuwając równolegle te boki prostokąta, na których nie ma wierzchołków trójkąta, jak pokazuje rys. 14, otrzymamy prostokąt o polu P' położony tak jak w przypadku 1a) lub 1b), zatem $P' \geqslant 2S$, a ponieważ $P > P'$, więc

$$P > 2S.$$

Okazało się więc, że prostokąt zawierający dany trójkąt ma najmniejsze pole wtedy, gdy jeden z boków prostokąta pokrywa się z jednym z boków trójkąta, a bok przeciwległy prostokąta przechodzi przez trzeci wierzchołek trójkąta; pole prostokąta jest wówczas równe podwojonemu polu trójkąta. Dla trójkąta ostrokątnego są trzy takie prostokąty, dla prostokątnego — dwa, dla rozwartokątnego — jeden.

Uwaga. Dowód, że w przypadku 1a) zachodzi nierówność $P > 2S$ można również uzyskać w sposób następujący (rys. 12)

$$P = AM \cdot AP = AB \cos\delta \cdot AC \cos\varepsilon = AB \cdot AC \cdot \frac{1}{2} [\cos(\delta +$$

$$+ \varepsilon) + \cos(\delta - \varepsilon)] = \frac{1}{2} AB \cdot AC [\sin\alpha + \cos(\delta - \varepsilon)];$$

ponieważ $|\delta - \varepsilon| < \delta + \varepsilon = 90^0 - \alpha$, więc $\cos(\delta - \varepsilon) > \sin\alpha$; z poprzedniej równości wynika zatem, że

$$P > AB \cdot AC \sin\alpha, \qquad \text{tj. } P > 2S.$$

18 (6). *Wewnątrz kąta trójściennego $OABC$, którego kąty płaskie AOB, BOC, COA są równe, obrano punkt S równo odległy od ścian tego kąta. Przez punkt S poprowadzono płaszczyznę przecinającą krawędzie OA, OB, OC odpowiednio w punktach M, N, P. Dowieść, że suma*

$$\frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} + \frac{1}{OP}$$

ma wartość stałą, tzn. niezależną od położenia płaszczyzny MNP.

Rozwiązanie

Obliczymy dwoma sposobami objętość V czworościanu $OMNP$ (rys. 15).

1^0. Niech PQ będzie prostopadłą opuszczoną z punktu P na płaszczyznę AOB i niech α oznacza kąt AOB, a β — kąt nachylenia krawędzi OP do płaszczyzny AOB; wówczas $PQ = OP \cdot \sin\beta$ oraz

$$V = \frac{1}{3} \text{ pole } MON \cdot PQ = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} OM \cdot ON \cdot \sin\alpha\right) \cdot \left(OP \cdot \sin\beta\right) =$$

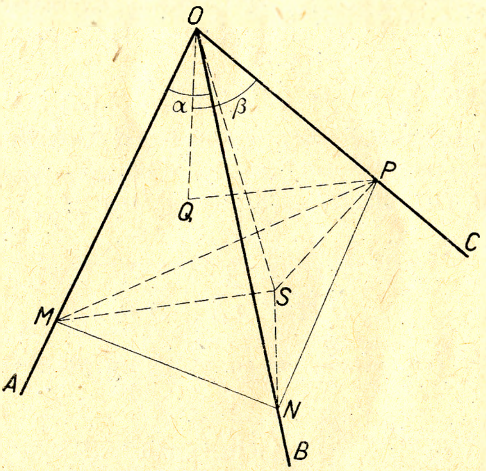
$$= \frac{1}{6} OM \cdot ON \cdot OP \cdot \sin\alpha \sin\beta.$$

2°. Czworościan $OMNP$ jest sumą czworościanów $SMON$, $SNOP$, $SPOM$ o wspólnym wierzchołku S i podstawach MON, NOP, POM; wysokości tych czworościanów są równe odległości d punktu S od ścian kąta trójściennego. Zatem

$$V = V_{SMON} + V_{SNOP} + V_{SPOM} = \tfrac{1}{3} d \cdot (\text{pole } MON + \text{pole } NOP + \text{pole } POM) = \tfrac{1}{6} d \cdot (OM \cdot ON + ON \cdot OP + OP \cdot OM) \cdot \sin\alpha.$$

Z 1° i 2° wynika, że

$$\tfrac{1}{6} d \cdot (OM \cdot ON + ON \cdot OP + OP \cdot OM) \cdot \sin\alpha = \tfrac{1}{6} OM \cdot ON \cdot OP \cdot \sin\alpha \sin\beta.$$



Rys. 15

Dzieląc obie strony tej równości przez $\frac{1}{6} d \cdot OM \cdot ON \cdot OP \cdot \sin\alpha$ otrzymujemy

$$\frac{1}{OP} + \frac{1}{OM} + \frac{1}{ON} = \frac{\sin\beta}{d},$$

skąd wynika teza twierdzenia, gdyż β i d nie zależą od położenia płaszczyzny MNP.

19 (1). *Jakie warunki powinny spełniać liczby rzeczywiste a, b i c, żeby równanie*

$$x^2 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

miało trzy różne pierwiastki rzeczywiste tworzące postęp geometryczny?

Rozwiązanie

Zadanie można sformułować w sposób następujący: Znaleźć warunki konieczne i dostateczne, jakie powinny spełniać liczby rzeczywiste a, b, c, aby istniały liczby x_1 i q o następujących własnościach:

a) liczby x_1, $x_1 q$, $x_1 q^2$ spełniają równanie (1),

b) liczby x_1 i q są rzeczywiste,

c) $x_1 \neq 0$,

d) $q \neq 0$, $q \neq 1$, $q \neq -1$.

Zajmiemy się najpierw wyszukaniem warunków koniecznych, a następnie zbadamy czy warunki te są dostateczne.

Jeżeli zachodzi a), to spełnione są równania (wzory Viète'a):

$$\begin{aligned} &x_1 + x_1 q + x_1 q^2 = -a, \\ &x_1^2 q + x_1^2 q^2 + x_1^2 q^3 = b, \\ &x_1^3 q^3 = -c. \end{aligned} \tag{2}$$

Oznaczając dla krótkości literą m tę (jedyną) liczbę rzeczywistą, dla której $m^3 = -c$ zastąpimy układ równań (2) układem

$$\begin{aligned} &x_1 (1 + q + q^2) = -a, \\ &x_1^2 q (1 + q + q^2) = b, \\ &x_1 q = m. \end{aligned} \tag{3}$$

Układ równań (3) jest równoważny układowi

$$\begin{aligned} &x_1 (1 + q + q^2) = -a, \\ &a x_1 q + b = 0, \\ &x_1 q = m. \end{aligned} \tag{4}$$

Drugie równanie układu (4) otrzymaliśmy mnożąc pierwsze z równań (3) przez $x_1 q$ a następnie odejmując je od drugiego z tych równań.

Z drugiego i trzeciego równania układu (4) wynika, że

$$(\alpha) \qquad b = -am.$$

Znaleźliśmy w ten sposób pierwszy warunek konieczny dla współczynników równania (1). Jeśli ten warunek jest spełniony, to układ (4) jest równoważny układowi

$$(5) \qquad \begin{aligned} x_1 (1 + q + q^2) &= -a, \\ x_1 q &= m. \end{aligned}$$

Zastępując w pierwszym równaniu układu (5) $x_1 q$ przez m otrzymujemy układ równoważny

$$(6) \qquad \begin{aligned} x_1 + mq &= -a - m, \\ x_1 q &= m. \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę warunek (c) widzimy, że dalszym warunkiem koniecznym dla współczynników a, b, c jest nierówność

$$(\beta) \qquad m \neq 0.$$

Rugując x_1 z równań (6) otrzymamy równanie

$$(7) \qquad mq^2 + (m + a) q + m = 0.$$

Aby równanie (7) miało pierwiastki rzeczywiste (warunek b) musi być (wobec tego, że $m \neq 0$) spełniony warunek

$$(\gamma) \qquad a^2 + 2am - 3m^2 \geqslant 0.$$

Uwzględniając wreszcie, że według d) ma być $q \neq 1$ i $q \neq -1$ otrzymujemy z równania (7) jeszcze dwa warunki konieczne dla a, b, c:

$$(\delta) \qquad a \neq -3m,$$
$$(\varepsilon) \qquad a \neq m.$$

Zauważmy jednak, że wartości $a = -3m$ i $a = m$ są tymi wartościami a, dla których trójmian $a^2 + 2am - 3m^2$ równa się zeru. Możemy wobec tego zastąpić warunki (γ), (δ), (ε) jednym warunkiem

$$(\eta) \qquad a^2 + 2am - 3m^2 > 0.$$

Ostatecznie otrzymaliśmy zatem trzy warunki (α), (β), (η) jako warunki konieczne dla współczynników a, b, c równania (1).

Udowodnimy, że te warunki są dostateczne, tzn. że jeżeli spełnione są warunki (α), (β) i (η), to istnieją liczby x_1 i q spełniające warunki a), b), c), d).

Istotnie, na mocy (β) i (η) równanie (7) ma dwa pierwiastki rzeczywiste; niech q oznacza jeden z nich $\left(\text{drugim jest } \frac{1}{q}\right)$. Na mocy ($\beta$) jest $q \neq 0$, a na mocy (η) mamy $q \neq 1$ i $q \neq -1$. Z drugiego równania układu (6) otrzymamy wówczas $x_1 = \frac{m}{q}$, przy czym x_1 jest liczbą rzeczywistą i spełnia również pierwsze równanie układu (6), a na mocy (β) jest $x_1 \neq 0$. Ponieważ układ (6) jest przy spełnieniu warunku (α) równoważny układowi równań (2), więc znalezione wartości x_1 i q spełniają układ (2), a wobec tego spełniają też równanie (1).

Warunek (η) oznacza, że m jest zawarte między liczbami a i $-\frac{a}{3}$; uwzględniając, że $m^3 = -c$ możemy warunkom (α), (β), (η) nadać następującą ostateczną postać:

$$(\mathrm{W}) \qquad \left|\begin{array}{l} b^3 = a^3 c, \\ c \neq 0, \\ c \text{ jest zawarte między } -a^3 \text{ i } \dfrac{a^3}{27}. \end{array}\right.$$

Układ warunków (W) stanowi rozwiązanie zadania. Układ ten spełniają na przykład liczby $a = b = 4$, $c = 1$; równanie

$$x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

ma pierwiastki

$$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \quad -1, \quad \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$$

tworzące postęp geometryczny o ilorazie $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

20 (2). *Dowieść, że spośród siedmiu liczb naturalnych tworzących postęp arytmetyczny o różnicy* 30 *jedna i tylko jedna jest podzielna przez* 7.

Rozwiązanie

Siedem liczb tworzących postęp arytmetyczny o różnicy 30 można napisać w postaci: a, $a+30$, $a+2\cdot 30 \ldots a+6\cdot 30$. Różnica którychkolwiek dwóch z tych liczb ma postać

$$r=(a+k\cdot 30)-(a+m\cdot 30)=(k-m)\cdot 28+(k-m)\cdot 2,$$

gdzie k i m są liczbami całkowitymi, przy czym $0\leqslant k\leqslant 6$, $0\leqslant m\leqslant 6$, $k\neq m$, wobec czego $-6\leqslant k-m\leqslant 6$ i $k-m\neq 0$. Liczba $(k-m)\cdot 28$ jest podzielna przez 7, a liczba $(k-m)\cdot 2$ nie jest podzielna przez 7, gdyż jej wartość bezwzględna jest liczbą naturalną parzystą nie większą niż 12. Wobec tego suma tych liczb tj. liczba r nie jest podzielna przez 7. Stąd wynika, że każda z rozważanych siedmiu liczb daje inną resztę przy dzielniku 7, a zatem jedna i tylko jedna z tych siedmiu reszt równa się zeru, c. n. d.

21 (3). *W okrąg wpisano trójkąt równoboczny ABC; dowieść, że jeżeli M jest dowolnym punktem okręgu, to jedna z odległości MA, MB, MC jest równa sumie dwóch pozostałych.*

Rozwiązanie

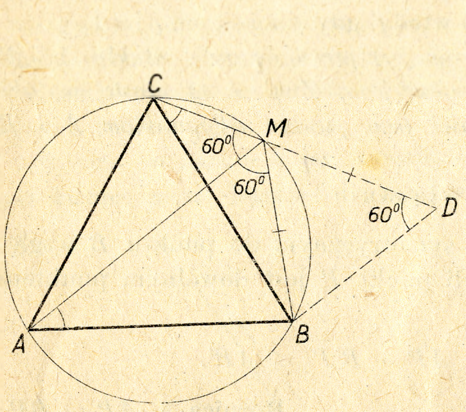
Gdy punkt M znajduje się w jednym z wierzchołków trójkąta ABC, twierdzenie jest oczywiste, gdyż wówczas jedna z odległości MA, MB, MC równa się zeru. Pozostaje do rozpatrzenia przypadek, gdy M leży wewnątrz jednego z łuków, na jakie punkty A, B, C dzielą okrąg, na przykład wewnątrz łuku BC.

Sposób 1. Na przedłużeniu odcinka CM poza punkt M odmierzmy $MD=MB$ (rys. 16) i zauważmy, że $\sphericalangle AMB=60^0$, $\sphericalangle AMC=60^0$, wobec czego również $\sphericalangle BMD=60^0$. Stąd wynika, że trójkąt BMD jest równoboczny i $\sphericalangle BDM=60^0$. W takim razie trójkąty ABM i CBD są przystające, gdyż $AB=CB$, $\sphericalangle BAM=\sphericalangle BCD$ i $\sphericalangle AMB=60^0=\sphericalangle BDM$.

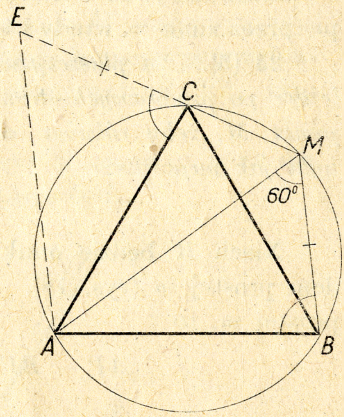
Zatem $MA=CD=MC+MD$, istotnie więc $MA=MC+MB$.

Sposób 2. Na przedłużeniu odcinka MC poza punkt C odmierzmy $CE=MB$ (rys. 17) i zauważmy, że $\sphericalangle ACE=180^0-\sphericalangle ACM=\sphericalangle ABM$. Wobec tego trójkąty ACE i ABM są przystające, gdyż $AC=AB$, $CE=BM$ i $\sphericalangle ACE=\sphericalangle ABM$. Stąd $AE=AM$

a ponieważ $\sphericalangle AME = 60^0$, więc trójkąt AME jest równoboczny i $MA = ME = MC + CE = MC + MB$, c. n. d.



Rys. 16



Rys. 17

Sposób 3. Natychmiastowy dowód twierdzenia uzyskujemy stosując twierdzenie Ptolemeusza do czworokąta $ABMC$:

$$MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB,$$

ponieważ $BC = AC = AB$, więc z powyższej równości wynika, że

$$MA = MB + MC.$$

22 (4). *Dowieść, że*

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \geqslant \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha + \sin \beta - 1.$$

Rozwiązanie

Nierówność

$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \geqslant \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha + \sin \beta - 1$ jest równoważna nierówności

$$\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta \geqslant - \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha + \sin \beta - 1$$

(od obu stron nierówności odjęliśmy $2 \sin \alpha \sin \beta$), czyli nierówności

$$(\sin \alpha - \sin \beta)^2 \geqslant (\sin \alpha - 1)\ (1 - \sin \beta),$$

ta zaś nierówność jest oczywiście prawdziwa, gdyż lewa jej strona jest $\geqslant 0$, a prawa jest $\leqslant 0$ (albowiem $\sin\alpha - 1 \leqslant 0$, a $1 - \sin\beta \geqslant 0$).

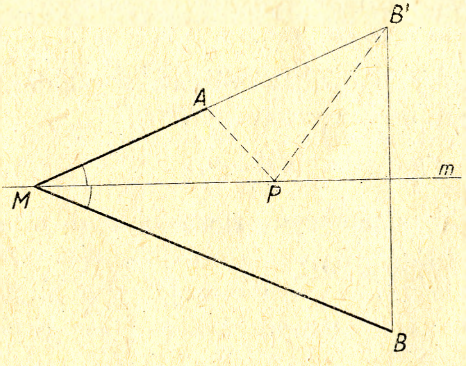
Zauważmy, że w rozważanej nierówności znak $\geqslant$ można zastąpić przez znak $=$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sin\alpha = \sin\beta = 1$.

23 (5). *Na płaszczyźnie dana jest prosta m oraz punkty A i B leżące po przeciwnych stronach prostej m. Znaleźć na prostej m taki punkt M, żeby różnica odległości tego punktu od punktów A i B była jak największa.*

Rozwiązanie

Niech B' będzie punktem symetrycznym do punktu B względem prostej m (rys. 18). Jeżeli punkt P jest dowolnym punktem prostej m, to

$$|AP - BP| = |AP - B'P| \leqslant AB'.$$



Rys. 18

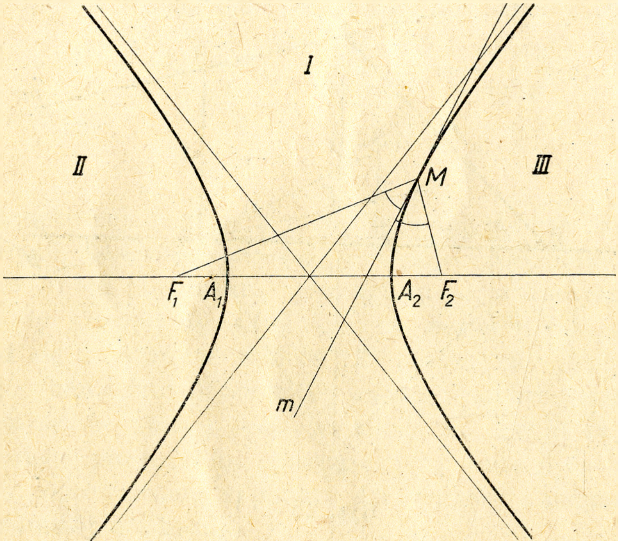
Różnica $|AP - BP|$ osiąga zatem swą największą wartość, równą długości odcinka AB', gdy $|AP - B'P| = AB$, tzn. gdy punkty A, B', P leżą na jednej prostej. Jeśli prosta AB' nie jest równoległa do prostej m, to szukany punkt M jest punktem przecięcia prostych AB' i m. Prosta m jest wówczas dwusieczną kąta AMB. Jeśli proste AB' i m są równoległe, tzn. jeśli punkty A i B są równo odległe od prostej m, wówczas zadanie nie ma rozwiązania.

Dowiedzione twierdzenie pozwala w prosty sposób uzasadnić ważną własność hiperboli. Niech A_1 i A_2 będą wierzchołkami, a F_1 i F_2 — ogniskami hiperboli (rys. 19). Hiperbola dzieli płaszczyznę na trzy obszary, które oznaczymy I, II, III, jak na rys. 19.

Wiadomo, że jeżeli punkt P leży na hiperboli, to $|F_1P - F_2P| = A_1A_2$, jeżeli P znajduje się w obszarze I, to $|F_1P - F_2P| < A_1A_2$, jeśli zaś P leży w jednym z obszarów II lub III, to $|F_1P - F_2P| > A_1A_2$.

Niech m będzie prostą styczną do hiperboli w punkcie M, a P — dowolnym punktem prostej m. Prosta m leży (poza punktem M) w obszarze I zatem różnica $|F_1 P - F_2 P|$ jest dla każdego punktu P różnego od M mniejsza niż A_1A_2, a w punkcie M osiąga swą największą wartość równą długości A_1A_2. Z dowiedzionego poprzednio twierdzenia wynika, że prosta m jest dwusieczną kąta $F_1 MF_2$, tzn. zachodzi twierdzenie:

Styczna do hiperboli jest dwusieczną kąta utworzonego przez odcinki łączące punkt styczności z ogniskami hiperboli.

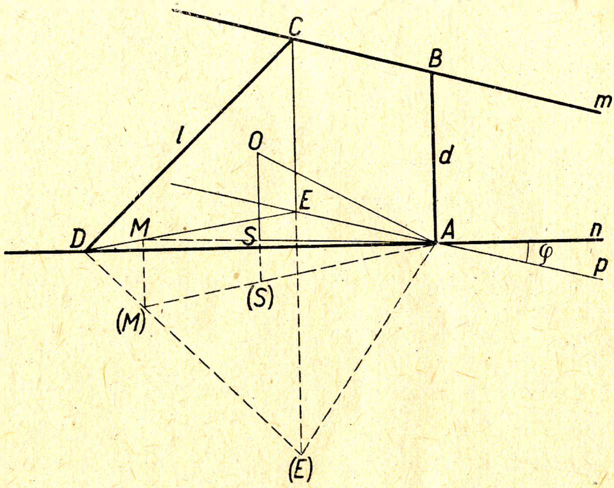


Rys. 19

24 (6). *Przez punkty A i B poprowadzono dwie proste skośne m i n prostopadłe do prostej AB. Na prostej m obrano punkt C (różny od A), a na prostej n punkt D (różny od B). Mając dane długości odcinków $AB = d$ i $CD = l$ oraz kąt φ, jaki tworzą proste skośne m i n, obliczyć promień powierzchni kuli przechodzącej przez punkty A, B, C, D.*

Rozwiązanie

Rys. 20 przedstawia rozważaną figurę w rzucie prostokątnym na płaszczyznę wyznaczoną przez proste AB i n, wobec czego na tym rysunku $AB \perp n$. Dla uproszczenia oznaczamy rzuty punktów i prostych tymi samymi literami, co same punkty i proste. Poprowadźmy przez punkt A prostą p równoległą do prostej m, a przez punkt C prostą równoległą do prostej AB; przetnie ona prostą p w punkcie E. Niech σ oznacza powierzchnię kuli czyli sferę przechodzącą przez punkty $ABCD$; ponieważ punkty A, B, C, D nie leżą w jednej płaszczyźnie (proste m i n są skośne), więc taka sfera istnieje i to tylko jedna. Czworokąt $ABCE$ jest prostokątem, gdyż $AB \perp m$, $CE \perp m$ i $AB \perp p$; ponieważ trzy wierzchołki A, B, C tego



Rys. 20

prostokąta leżą na sferze σ więc i czwarty wierzchołek E też leży na σ. Sfera σ przecina płaszczyznę prostych n i p według okręgu przechodzącego przez punkty A, D, E; środek S tego okręgu jest zatem środkiem okręgu opisanego na trójkącie ADE; objaśnimy za chwilę, jak punkt S wyznaczony został konstrukcyjnie na rys. 20. Środek O sfery σ leży na prostej prostopadłej w punkcie S do płaszczyzny ADE, a więc na równoległej do AB (gdyż $AB \perp n$ i $AB \perp p$). Z drugiej strony punkt O jako równo odległy od punktów A i B leży na płaszczyźnie symetralnej odcinka AB wobec czego jego odległość OS od płaszczyzny ADE jest równa $\frac{1}{2} AB$. Punkt O znajdujemy zatem prowadząc przez punkt S równoległą do AB i odmierzając na niej $SO = \frac{1}{2} d$ w kierunku od A do B.

Weźmy pod uwagę trójkąt ASO; kąt przy wierzchołku S jest prosty, przeciwprostokątna OA równa się szukanemu promieniowi r sfery σ, $OS = \frac{1}{2}d$, a SA równa się promieniowi okręgu opisanego na trójkącie ADE, więc $SA = \dfrac{DE}{2 \sin \sphericalangle DAE}$. Lecz z trójkąta prostokątnego DEC (CE jest prostopadłe do płaszczyzny ADE) $DE^2 = DC^2 - EC^2 = l^2 - d^2$, a kąt DAE równa się kątowi φ prostych skośnych m i n, zatem $SA = \dfrac{\sqrt{l^2 - d^2}}{2 \sin \varphi}$.

Ponieważ w trójkącie ASO jest $OA^2 = SO^2 + SA^2$ więc

$$r^2 = \frac{d^2}{4} + \frac{l^2 - d^2}{4 \sin^2 \varphi} = \frac{l^2 - d^2 \cos^2 \varphi}{4 \sin^2 \varphi}$$

i ostatecznie

$$r = \frac{\sqrt{l^2 - d^2 \cos^2 \varphi}}{2 \sin \varphi}$$

Konstrukcja punktu S zaznaczona jest na rys. 20 liniami kreskowanymi, przebiega ona jak następuje. Wykonujemy kład trójkąta ADE na płaszczyznę rysunku, tj. na płaszczyznę ABD, tzn. obracamy płaszczyznę ADE dookoła prostej n tak, aby punkt E znalazł się w pewnym punkcie (E) płaszczyzny rysunku. Podczas takiego obrotu rzut prostokątny każdego punktu płaszczyzny ADE porusza się po prostej prostopadłej do n. Punkt (E) znajdujemy w przecięciu prostopadłej opuszczonej z punktu E na prostą n i półprostej poprowadzonej z punktu A i tworzącej z półprostą AD kąt φ (w naturalnej wielkości).

Niech (S) będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie $AD(E)$ i niech prosta $A(S)$ przecina prostą $D(E)$ w punkcie (M). Prowadząc z punktu (M) prostopadłą do prostej n do przecięcia w punkcie M z prostą DE, a następnie z punktu (S) prostopadłą do prostej n znajdziemy w przecięciu tej prostopadłej z prostą AM poszukiwany punkt S.

Zauważmy jeszcze, że gdy punkty A i B oraz proste m i n są dane, to istnieje nieskończenie wiele odcinków CD o danej długości l i o końcach leżących na prostych m i n. Istnieje więc też nieskończenie wiele sfer, przechodzących przez A i B i przecinających proste m i n jeszcze w takich punktach C i D, że $CD = l$. Wynik naszego zadania pokazuje, że promienie wszystkich tych sfer są równe.