



CZĘŚĆ I.

TEORJA FUNKCJI ANALITYCZNYCH.

„WIEDZA MATEMATYCZNA”

ZBIÓR DZIEŁ Z DZIEDZINY MATEMATYKI CZYSTEJ I STOSOWANEJ, WYDAWANY PRZEZ
ST. KWIETNIEWSKIEGO, ST. STRASZEWICZA I WŁ. WÓJTOWICZA.

EDWARD GOURSAT

PROFESOR WYDZIAŁU NAUK ŚCISŁYCH UNIwersYTETU PARYSKIEGO.

KURS ANALIZY MATEMATYCZNEJ

WYDANIE DRUGIE,
CAŁKOWICIE PRZEROBIONE.

TOM II.

CZĘŚĆ I. — TEORIA FUNKCJI ANALITYCZNYCH.

PRZEKŁAD, DOKONANY
PRZEZ
T. J. ŁAZOWSKIEGO.

Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA POLU NAUKOWYM
IMIENIA D-ra JÓZEFA MIANOWSKIEGO.

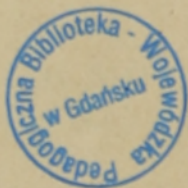


WARSZAWA

SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA.

1919

D 11/2016



Cyf. 186863 / 2 / 1

SPIS RZECZY.

PRZEDMOWA	Str 1
---------------------	----------

ROZDZIAŁ XIII.

FUNKCJE ELEMENTARNE ZMIENNEJ ZESPOLONEJ.

I. — WIADOMOŚCI OGÓLNE — FUNKCJE MONOGIENICZNE (F. Monogènes)	3
259. Określenia	3
260. Funkcje ciągle zmiennej zespolonej	7
261. Funkcje monogeniczne	8
262. Funkcje holomorficzne	11
263. Funkcje wymierne	12
264. Badanie pewnych funkcji niewymiernych	13
265. Funkcje jednowartościowe i wielowartościowe	18
II. — SZEREGI POTĘGOWE O WYRAZACH ZESPOLONYCH. — ELEMENTARNE FUNKCJE PRZESTĘPNE.	19
266. Koło zbieżności	19
267. Szeregi szeregów	22
268. Rozwinięcie w szereg potęgowy iloczynu nieskończonego	23
269. Funkcja wykładnicza	24
270. Funkcje trygonometryczne	27
271. Logarytmy	29
272. Funkcje odwrotne: arcsin z , arctang z	31
273. Zastosowanie do rachunku całkowego	34
274. Rozkład na elementy proste funkcji wymiernej wstawy i dostawy zmiennej z	36
275. Rozwinięcie w szereg funkcji Log $(1+z)$	40
276. Rozszerzenie zakresu wzoru dwumianowego	42
III. — WIADOMOŚCI O ODWZOROWANIU PODOBNYM.	45
277. Znaczenie geometryczne pochodnej	45
278. Badanie ogólne odwzorowań podobnych	48
279. Odwzorowanie podobne płaszczyzny na płaszczyźnie	51
280. Twierdzenie Riemanna	52
281. Mapy	54

	Str.
282. Krzywe izotermiczne	57
Ćwiczenia	59

ROZDZIAŁ XIV.

TEORIA OGÓLNA FUNKCJI ANALITYCZNYCH PODŁUG CAUCHY'EGO.

I. — CAŁKI OKREŚLONE, OBLICZANE POMIĘDZY GRANICAMI UROJONEMI	63
283. Określenia i wiadomości ogólne	63
284. Zamiana zmiennych	65
285. Wzory Weierstrassa i Darboux'a	68
286 — 288. Całki, brane wzdłuż obwodu zamkniętego	70
289. Rozszerzenie zakresu wzorów rachunku całkowego	77
290. Inny dowód powyższych wyników	79
II. — CAŁKA CAUCHY'EGO. — SZEREGI TAYLORA I LAURENTA. — PUNKTY OSOBLIWE. — POZOSTAŁOŚCI	80
291. Wzór podstawowy	80
292. Twierdzenie Morery	84
293. Szereg Taylora	84
294. Twierdzenie Louville'a	87
295. Szereg Laurenta	87
296. Szeregi rozmaite	90
297. Szeregi funkcji całokształtnych	93
298. Bieguny	95
299. Funkcje meromorficzne	97
300. Punkty istotnie osobliwe	98
301. Pozostałości	101
III. — ZASTOSOWANIA TWIERDZEŃ OGÓLNYCH	103
302. Uwagi rozmaite	103
303. Obliczanie całek określonych	104
304. Różne przykłady rachunku całek określonych	106
305. Obliczanie $\Gamma(p) \Gamma(1-p)$	109
306. Zastosowanie do funkcji częściokształtnych	110
307. Zastosowanie do teorii równań	113
308. Wzór Jensena	114
309. Wzór Lagrange'a	116
310. Badanie funkcji przy wartościach nieskończenie wielkich zmiennej	119
IV. — OKRESY CAŁEK OKREŚLONYCH	123
311. Okresy biegunowe	123
312. Badanie całki $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$	125
313. Okresy całek ultraeliptycznych	127

	Str.
314. Okresy całki eliptycznej gatunku pierwszego	132
<i>Ćwiczenia</i>	134

ROZDZIAŁ XV.

FUNKCJE JEDNOWARTOŚCIOWE.

I. — CZYNNIKI PIERWSZE WEIERSTRASSA. — TWIERDZENIE MITTAG — LEFFLERA	142
315. Wyrażanie funkcji całkowitej w postaci iloczynu czynników pierw- szych	142
316. Rodzaj funkcji całkowitej	148
317. Funkcje jednowartościowe o liczbie skończonej punktów osobliwych	148
318. Funkcje jednowartościowe z liczbą nieskończoną punktów osobli- wych	150
319. Twierdzenie Mittag-Lefflera	151
320. Badanie pewnych przypadków szczególnych	154
321. Metoda Cauchy'ego	156
322. Iloczyn nieskończone, wyrażające $\cot x$ i $\sin x$	159
II — FUNKCJE PODWÓJNE OKRESOWE. — FUNKCJE ELIPTYCZNE.	163
323. Funkcje okresowe. Ich rozwijanie w szeregi	163
324. Niemożliwość istnienia funkcji jednowartościowej o trzech okresach	166
325. Funkcje podwójnie okresowe	168
326. Funkcje eliptyczne. Własności ogólne	169
327. Funkcja $p u$	174
328. Związek algebriczny pomiędzy $p u$ a $p' u$	177
329. Funkcja ζu	179
330. Funkcja σu	182
331. Wyrażenia ogólne funkcji eliptycznych	183
332. Wzory, wyznaczające funkcje sumy	187
333. Całkowanie funkcji eliptycznych	189
334. Funkcja Θ	191
III. — ODWRACANIE. — KRZYWE RODZAJU PIERWSZEGO	194
335. Związek pomiędzy okresami a niezmiennikami	194
336. Funkcja odwrotna względem całki eliptycznej pierwszego gatunku	196
337. Nowe określenie funkcji $p u$ zapomocą niezmienników	205
338. Zastosowanie do krzywych płaskich trzeciego rzędu	208
339. Wzory inwersyjne ogólne	212
340. Krzywe rodzaju pierwszego	216
<i>Ćwiczenia</i>	220

ROZDZIAŁ XVI.

PRZEDŁUŻANIE ANALITYCZNE.

I. — OKREŚLANIE FUNKCJI ANALITYCZNEJ PRZY POMOCY JEDNEGO Z JEJ ELEMENTÓW	223
341. Pierwsze pojęcie o przedłużaniu analitycznym	223

	Str
342. Nowe określenie funkcji analitycznych	227
343. Punkty osobliwe	233
344. Zagadnienie ogólne	236
II. — PRZESTRZENIE PRÓŻNE. — CIĘCIA	238
345. Linje osobliwe. Przestrzenie próżne	238
346. Przykłady	242
347. Osobliwości, występujące przy badaniu wyrażeń analitycznych	245
348. Wzór Hermite'a	247
Ćwiczenia	249

ROZDZIAŁ XVII.

FUNKCJE ANALITYCZNE WIELU ZMIENNYCH.

I. — WŁASNOŚCI OGÓLNE	253
349. Określenia	253
350. Koła zbieżności skojarzone	254
351. Całki podwójne	257
352. Uogólnienie twierdzeń Cauchy'ego	261
353. Funkcje, dane w postaci całek określonych	263
354. Zastosowanie do funkcji Γ	266
355. Przedłużanie analityczne funkcji dwu zmiennych	267
II. — FUNKCJE UWIKŁANE. — FUNKCJE ALGIEBRAICZNE	270
356. Twierdzenie Weierstrassa	270
357. Punkty krytyczne	276
358. Funkcje algebraiczne	280
359. Całki abelowe	285
360. Twierdzenie Abela	286
361. Zastosowanie do całek ultraeliptycznych	290
362. Uogólnienie wzoru Lagrange'a	294
Ćwiczenia	297

SPROSTOWANIA.

Str.	Wiersz	Zamiast	Winno być
104	10 od dołu	$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dz$	$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$
144	11 „	$\frac{z^v}{v a_n^v}$	$\frac{z^v}{v a_n^v}$
166	4 od góry	34	324
186	17 „	$\varphi(u) = \frac{(pu - pa_1)(pu - pa_2) \dots (pu - pa_n)}{(pu - pb_1)(pu - pb_2) \dots (pu - pb_m)}$	$\varphi(u) = \frac{(pu - pa_1)(pu - pa_2) \dots (pu - pa_n)}{(pu - pb_1)(pu - pb_2) \dots (pu - pb_m)}$
236	1 „	343	344

PRZEDMOWA.

Pierwsza część tego tomu uległa jedynie nieznacznym zmianom; przekształcenia ważniejsze dotyczą wyłącznie ostatnich rozdziałów.

W pierwszym wydaniu mogłem poświęcić zaledwie niewielką liczbę stronnic równaniom o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu oraz rachunkowi warjacyjnemu. Ażeby osiągnąć możność wyłożenia w sposób mniej zwięzły tematów tak rozległych, postanowiłem przesunąć je do tomu trzeciego, który będzie również zawierał szkic nowoczesnej teorii równań całkowych. Odrzucenie ostatniego rozdziału umożliwiło dodanie pewnych uzupełnień, z których najważniejsze dotyczą równań różniczkowych linjowych oraz równań, zawierających pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.

17-go maja r. 1911.

E. Goursat.

ROZDZIAŁ XIII.

Funkcje elementarne zmiennej zespolonej.

I. — Wiadomości ogólne. — Funkcje monogeniczne. (F. Monogènes).

259. Określenia. — *Liczbą*¹⁾ *urojoną* (quantité imaginaire) czyli *zespoloną* (q. complexe) nazywamy wszelkie wyrażenie o postaci $a + bi$, gdzie a i b oznaczają dwie jakiekolwiek liczby rzeczywiste, a i — symbol szczególny, wprowadzony w celu osiągnięcia w algebrze większej ogólności. Liczba zespolona nie jest to w istocie nic innego, jak układ dwóch liczb rzeczywistych, wziętych w pewnym oznaczonym porządku. Jakkolwiek wyrażenia tego rodzaju jak $a + bi$ nie posiadają same przez się żadnego znaczenia konkretnego, stosujemy do nich zwykle zasady rachunku algebraicznego, umawiając się ponad to, że będziemy zastępowali wszędzie kwadrat i^2 przez -1 .

Dwie liczby urojone $a + bi$ i $a' + b'i$ są uważane za *równe*, gdy mamy: $a' = a$, $b' = b$. Sumą dwu liczb urojonych $a + bi$ i $c + di$ nazywamy symbol o tej samej postaci $a + c + i(b + d)$; podobnie różnica $a + bi - (c + di)$ równa się $a - c + i(b - d)$. Aby otrzymać iloczyn $a + bi$ przez $c + di$, obliczamy go na zasadzie zwykłych prawideł mnożenia algebraicznego i zastępujemy i^2 przez -1 ; mamy w ten sposób:

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc).$$

Iloraz $a + bi$ przez $c + di$ jest to trzeci symbol urojony $x + yi$, który po pomnożeniu przez $c + di$ daje $a + bi$.

¹⁾ Zgodnie z rozpowszechnionym u nas zwyczajem, zastępuję przekład dosłowny „ilość” terminu „quantité”, użytego w takim lub podobnym znaczeniu, przez termin właściwszy „liczba”. [Uw. tłum.]

Równość

$$a + bi = (c + di)(x + yi)$$

jest równoważna, podług prawa mnożenia, związkom

$$cx - dy = a, \quad dx + cy = b$$

skąd otrzymujemy

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Iloraz $a + bi$ przez $c + di$ piszemy w zwykłej postaci ułamka algebraicznego

$$x + yi = \frac{a + bi}{c + di};$$

aby obliczyć dogodnie x i y , wystarczy pomnożyć oba wyrazy tego ułamka przez $c - di$ i wykonać wskazane mnożenia.

Wszystkie własności podstawowych działań algebraicznych pozostają, w zastosowaniu do symbolów urojonych, bez zmiany; mamy tedy, oznaczając przez $A, B, C, \dots$ symbole urojone:

$$A \cdot B = B \cdot A, \quad A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C), \quad A(B + C) = AB + AC, \dots,$$

i tak dalej. Liczby zespolone $a + bi$ i $a - bi$ nazywamy *sprzężeniami* (des imaginaires conjuguées). Liczby $a + bi$ i $-a - bi$, o sumie równej zeru, są względem siebie *przecienne* (opposées) czyli *symetryczne* (symétriques).

Mając w płaszczyźnie układ prostokątny dwóch osi o zwykłym zwrocie, wyobrażamy liczbę zespoloną $a + bi$ zapomocą punktu M płaszczyzny xOy , posiadającego spółrzedne $x = a$, $y = b$. Nadajemy w ten sposób wyrażeniom czysto symbolicznym znaczenie konkretne, i wszelkie twierdzenie, uzasadnione dla liczb urojonych, odpowiada jakiemuś twierdzeniu planimetrycznemu. Najważniejsze atoli korzyści z tego odwzorowania ujawniają się jeszcze lepiej w dalszym ciągu. Liczby rzeczywiste odpowiadają punktom osi Ox , zwanej również z tego powodu *osią rzeczywistą* (axe réel). Dwie liczby sprzężone $a + bi$ i $a - bi$ odpowiadają dwu punktom symetrycznym względem Ox ; dwie liczby przeciwne $a + bi$ i $-a - bi$ są wyobrażone zapomocą punktów symetrycznych względem punktu O .

Liczba $a + bi$, odpowiadająca punktowi M o spółrzednych (a, b) , nazywa się również niekiedy *afiksem* (affixe) tego punktu. O ile nie będzie obawy żadnego nieporozumienia, będziemy oznaczali przez tę samą literę liczbę zespoloną i punkt, który ją wyobraża.

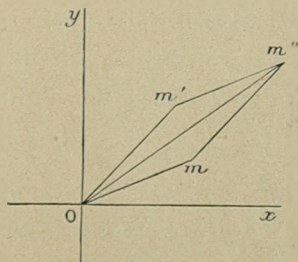
Połączmy początek układu z punktem m o współrzędnych (a, b) . Odległość Om nazywa się *modułem* (czyli wartością bezwzględną — *Uw. tł.*; fr. module) liczby $a + bi$, a kąt, o który należy obrócić promień, nakrywający Ox , aby przysłał do Om (kąt ten odmierzamy podobnie jak w trygonometrii w kierunku od Ox do Oy) stanowi *argument* czyli *amplitudę*¹⁾ (fr. argument) $a + bi$. Niech ς i ω oznaczają moduł i amplitudę liczby $a + bi$; między liczbami rzeczywistymi a, b, ς, ω zachodzą związki $a = \varsigma \cos \omega$, $b = \varsigma \sin \omega$, skąd otrzymujemy

$$\varsigma = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \omega = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \omega = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Moduł, liczba z istoty swej dodatnia, jest wyznaczony bez żadnych wątpliwości, gdy tymczasem amplituda, jako dana jedynie zapomocą funkcji trygonometrycznych, może przybierać różne wartości, różniące się o wielokrotności 2π , co jest oczywiste już ze względu na samo określenie tego pojęcia. Wszelka liczba urojona posiada tedy nieskończenie wiele argumentów, tworzących postęp arytmetyczny o różnicy 2π . Do tego aby dwie liczby zespolone były równe, potrzeba, iżby były równe ich moduły a ponad to, iżby ich argumenty różniły się o wielokrotność 2π ; warunki te są wystarczające. Moduł ilości urojonej z oznacza się w ten sam sposób, jak wartość bezwzględna liczby rzeczywistej, przez $|z|$.

Weźmy dwie liczby zespolone $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ oraz odpowiadające im punkty m i m' ; suma $z + z'$ będzie wyobrażona zapomocą punktu m'' , stanowiącego wierzchołek równoległoboku, opartego na Om i Om' . Boki trójkąta Omm'' (rys. 46) równają się odpowiednio modułom liczb $z, z', z + z'$. Stąd wnioskujemy, że *moduł sumy dwóch liczb jest mniejszy, niż suma modułów obu składników, lub co najwyżej równy jej, a*

Rys. 46.

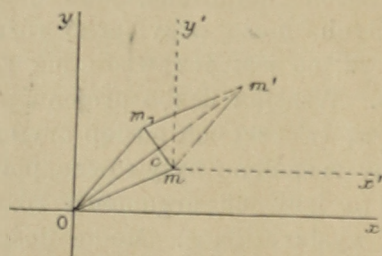


¹⁾ Niektórzy z naszych autorów używają w tym znaczeniu nazwy: *azyмут* (L. Böttcher, Zasady algebry elementarnej; J. Miśkiewicz, Podręcznik arytmetyki). *Uw. tł.*

większy lub co najmniej równy różnicy tych modułów. Ponieważ dwie liczby przeciwne mają ten sam moduł, przeto twierdzenie powyższe stosuje się również do modułu różnicy. Widzimy nareszcie w ten sam sposób, że moduł sumy jakiegokolwiek liczby ilości zespolonych równa się co najwyżej sumie ich modułów; równość może zachodzić jedynie wtedy, kiedy wszystkie punkty, wyobrażające te ilości, są położone na tym samym promieniu, wykreślonym z początku układu.

Jeżeli przez punkt m przesuniemy proste mr' , my' , równoległe do Ox i Oy , to współrzędnymi punktu m' w tym nowym układzie osi będą: $a' - a$ i $b' - b$ (rys. 47). Punkt m' wyobraża tedy w nowym układzie

Rys. 47.



$z' - z$; moduł liczby $z' - z$ równa się długości mm' , a argument — kątowi θ pomiędzy mm' i mx' . Wykreślmy z punktu O odcinek Om_1 , równy odcinkowi mm' i równoległy doń; koniec m_1 tego odcinka wyobraża różnicę $z' - z$ w układzie osi Ox , Oy . Lecz figura $Omm'm_1$ jest równoległobokiem; punkt m_1 jest tedy symetryczny z m względem środka c odcinka Om' .

Przypomnijmy sobie jeszcze wzór, który daje moduł i argument iloczynu dowolnej liczby czynników. Oznaczmy je ogólnie przez

$$z_k = \zeta_k (\cos \omega_k + i \sin \omega_k); \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

zasady mnożenia, łącznie z wzorami, wyznaczającymi funkcje trygonometryczne sumy kątów, doprowadzają do wyniku

$$z_1 z_2 \dots z_n = \zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n [\cos (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n) + i \sin (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_n)],$$

co wskazuje, iż moduł iloczynu równa się iloczynowi modułów a argument iloczynu jest równy sumie argumentów. Wysnuwamy stąd z łatwością słynny wzór Moivre'a

$$\cos m\omega + i \sin m\omega = (\cos \omega + i \sin \omega)^m,$$

który zogniskowuje, w postaci nader zwężłej, wszystkie wzory, wyznaczające funkcje trygonometryczne iloczynów.

Wprowadzenie symbolów urojonych pozwoliło w teorii równań algebraicznych osiągnąć doskonałą ogólność i harmonję. Zresztą właśnie z powodu równań drugiego stopnia wyrażenia te nasunęły się po raz pierwszy uwadze badaczy. Ich doniosłość w analizie matematycznej jest nieminiejsza — wyjaśnimy tedy z początku w sposób dokładny, co należy rozumieć przez słowa: *funkcja zmiennej urojonej*.

260. Funkcje ciągle zmiennej zespolonej. — Gdy x i y oznaczają zmienne rzeczywiste, niezależne od siebie, to liczba zespolona $z = x + yi$ stanowi tak zwaną zmienną zespoloną. Jeżeli słowo: *funkcja* weźmiemy w jego znaczeniu najogólniejszym, to wyda się naturalnym orzeczenie, iż wszelka inna liczba urojona u , której wartość zależy od wartości z , jest *funkcją zmiennej z* . Pewna liczba określeń rozciąga się na ten nowy zakres bez żadnych trudności. Tak np. powiemy, że funkcja $u = f(z)$ jest ciągła, jeżeli moduł różnicy $f(z + h) - f(z)$ dąży do zera, gdy moduł h dąży do zera, t. j. jeżeli do każdej liczby dodatniej ϵ można dobrać taką inną liczbę dodatnią η , iżbyśmy dla $|h|$ mniejszego od η mieli:

$$|f(z + h) - f(z)| < \epsilon.$$

Szereg

$$u_0(z) + u_1(z) + \dots + u_n(z) + \dots,$$

którego wyrazy są funkcjami zmiennej zespolonej z , jest *jednostajnie zbieżny* w pewnym obszarze A płaszczyzny, jeżeli wszelkiej liczbie dodatniej ϵ można podporządkować taką liczbę całkowitą N , iżbyśmy mieli przy $n \geq N$

$$|R| = |u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \dots| < \epsilon$$

dla wszystkich wartości z , branych w obszarze A . Można dowieść, jak wyżej (I, art. 31), że suma szeregu, którego wyrazy są funkcjami ciągłymi w jakimś obszarze A , a jednostajnie zbieżnego w tym obszarze, stanowi również funkcję ciągłą zmiennej z w tym samym obszarze. Można jeszcze poznać zbieżność jednostajną szeregu po tym, że dla wszystkich rozważanych wartości z moduł jakiegokolwiek wyrazu $|u_n|$ jest mniejszy od wyrazu odpowiedniego v_n szeregu zbieżnego, którego wszystkie wyrazy są liczbami stałymi i dodatnimi. Szereg jest w takim razie jednocześnie bezwzględnie zbieżny i jednostajnie zbieżny.

Wszelka funkcja ciągła zmiennej zespolonej z posiada postać $u = P(x, y) + iQ(x, y)$, w której P i Q oznaczają funkcje rzeczywiste ciągle dwu zmiennych rzeczywistych x, y . Gdybyśmy tedy nie dodali innych warunków, badanie funkcji zmiennej zespolonej z stałoby się w istocie rzeczy badaniem układu dwu funkcji dwu zmiennych rzeczywistych; użycie symbolu i spowodowałoby jedynie pozorne uproszcze-

nia. Aby teoria funkcji zmiennej zespolonej wykazała pewne podobieństwo do teorii funkcji zmiennej rzeczywistej, poszukajmy wraz z Cauchy'm, jakim warunkom winny czynić zadość funkcje P i Q , iżby wyrażenie $P + iQ$ posiadało podstawową własność funkcji zmiennej rzeczywistej, do których się stosuje rachunek nieskończonościowy.

261. Funkcje monogeniczne. — Jeżeli $f(x)$ oznacza funkcję zmiennej rzeczywistej x , posiadającą pochodną, to stosunek $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ dąży do $f'(x)$, gdy h dąży do zera. Zbadajmy również, w jakich wypadkach iloraz

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta P + i \Delta Q}{\Delta x + i \Delta y}$$

dąży do pewnej określonej granicy, gdy moduł Δz dąży do zera, to jest gdy zmierzają niezależnie od siebie do zera przyrosty Δx i Δy . Łatwo przewidzieć, iż nie będzie to zachodziło dla jakichkolwiek funkcji $P(x, y)$ i $Q(x, y)$, gdyż granica rozważanego stosunku zależy w ogólności od granicy stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, t. j. od sposobu, w jaki punkt, wyobrażający wartość $z + h$, zbliża się do punktu, wyobrażającego wartość z .

Pozostawmy z początku y bez zmiany, a zmiennej x nadajmy wartość pobliską $x + \Delta x$; otrzymamy

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{P(x + \Delta x, y) - P(x, y)}{\Delta x} + i \frac{Q(x + \Delta x, y) - Q(x, y)}{\Delta x};$$

aby ten stosunek posiadał granicę, potrzeba, iżby funkcje P i Q posiadały pochodne cząstkowe względem x ; w takim razie owa granica wyraża się w sposób następujący:

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Uważajmy następnie x za stałą, a zmiennej y nadajmy wartość $y + \Delta y$; otrzymamy

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{P(x, y + \Delta y) - P(x, y)}{i \Delta y} + \frac{Q(x, y + \Delta y) - Q(x, y)}{\Delta y};$$

stosunek ten dąży do granicy równej

$$\frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y},$$

byleby funkcje P i Q posiadały pochodne cząstkowe względem y . Do

tego, aby granice stosunku $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ były w obu wypadkach jednakowe, potrzeba warunków

$$(1) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Załóżmy, że funkcje P i Q czynią zadość tym warunkom i że pochodne cząstkowe $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ są to funkcje ciągłe. Jeżeli przypiszemy obecnie zmiennym x i y dowolne przyrosty Δx , Δy , to będziemy mogli napisać, oznaczając przez θ i θ' liczby dodatnie mniejsze od jedności, a przez ε , ε' , ε_1 , ε_1' — nieskończenie małe, dążące do zera wraz z Δx i Δy :

$$\begin{aligned} \Delta P &= P(x + \Delta x, y + \Delta y) - P(x + \Delta x, y) + P(x + \Delta x, y) - P(x, y) = \\ &= \Delta y P_y'(x + \Delta x, y + \theta \Delta y) + \Delta x P_x'(x + \theta' \Delta x, y) \\ &= \Delta x [P_x'(x, y) + \varepsilon] + \Delta y [P_y'(x, y) + \varepsilon_1], \end{aligned}$$

i podobnież

$$\Delta Q = \Delta x [Q_x'(x, y) + \varepsilon'] + \Delta y [Q_y'(x, y) + \varepsilon_1'].$$

Przyrost $\Delta u = \Delta P + i \Delta Q$ można napisać, zgodnie z warunkami (1), w postaci

$$\begin{aligned} \Delta u &= \Delta x \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \Delta y \left(- \frac{\partial Q}{\partial x} + i \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \eta \Delta x + \eta' \Delta y \\ &= (\Delta x + i \Delta y) \left(\frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \eta \Delta x + \eta' \Delta y. \end{aligned}$$

$[\eta, \eta' \text{ — nieskończenie małe}]$.

Stąd wynika

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\eta \Delta x + \eta' \Delta y}{\Delta x + i \Delta y};$$

jeżeli $|\eta|$ i $|\eta'|$ są mniejsze od jakiejś liczby α , to moduł wyrazu uzupełniającego jest mniejszy niż 2α . Wyraz ten dąży tedy do zera, gdy Δx i Δy zmierzają do zera, i mamy

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Jeżeli tedy pochodne cząstkowe funkcji P i Q są ciągłe, to warunki (1) są niezbędne i wystarczające do tego, iżby stosunek $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ posiadał oznaczoną granicę dla każdej wartości z . Funkcja u nazywa

się w takim razie funkcją *monogeniczną* (monogène) czyli *analityczną* (analytique) zmiennej z^1 ; jeżeli ją oznaczymy przez $f(z)$, to pochodna $f'(z)$ będzie się równała któremukolwiek z następujących, równoważnych względem siebie, wyrażeń:

$$(2) \quad f'(z) = \frac{\partial P}{\partial x} + i \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} - i \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x} - i \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial y} + i \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Nader zasadnicze znaczenie posiada ten wzgląd, że żadna z funkcji $P(x, y)$, $Q(x, y)$ nie może być wzięta dowolnie. W istocie, założmy, iż funkcje P i Q posiadają pochodne drugiego rzędu; jeżeli zróżniczkujemy pierwszy ze związków (1) względem x , a drugi względem y , a następnie dodamy je, to otrzymamy

$$\Delta_2 P = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0,$$

i podobnie dowodzimy, że $\Delta_2 Q = 0$. Funkcje $P(x, y)$, $Q(x, y)$ stanowią tedy rozwiązanie równania Laplace'a.

Nawzajem, wszelkie rozwiązanie równania Laplace'a może być wzięte za jedną z funkcji P lub Q . Niech np. $P(x, y)$ stanowi rozwiązanie tego równania; związki (1), w których Q jest uważane za funkcję niewiadomą, są zgodne z sobą, i funkcja monogeniczna o części rzeczywistej, równej $P(x, y)$, będzie wyznaczona zapomocą następującego wyrażenia, zawierającego stałą dowolną C :

$$u = P(x, y) + i \left[\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} dy - \frac{\partial P}{\partial y} dx \right) + C \right].$$

Badanie funkcji analitycznych zmiennej zespolonej z staje się tedy w istocie rzeczy badaniem układu dwu takich funkcji $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ zmiennych rzeczywistych x i y , które czynią zadość warunkom (1), i możnaby rozwinać całą teorię bez użycia symbolu i^2 . Będziemy atoli w dalszym ciągu posługiwali się symboliką Cauchy'ego, pamiętając o tym, że różnica pomiędzy temi dwiema metodami jest w gruncie rzeczy bardziej pozorna niż rzeczywista. Każde twierdzenie, uzasadnione dla funkcji analitycznej $f(z)$, da się bezpośrednio wysłowić w postaci twierdzenia, stosującego się do funkcji P i Q , i nawzajem.

¹⁾ Nazwa: *monogeniczna* była często używana przez Cauchy'ego. Mówi się również niekiedy: *synectyczna* (*synectique*). Będziemy tu używali raczej terminu: *analityczny*; nieco dalej okaże się, iż powyższe określenie jest zupełnie zgodne z danym poprzednio. (I, art. 197).

²⁾ Takie właśnie stanowisko zajmują wogóle matematycy niemieccy ze szkoły Riemanna.

PRZYKŁADY. — Funkcja $u = x^2 - y^2 + 2ixy$ jest to funkcja analityczna, ponieważ związki (1) są spełnione, i pochodna równa się $2x + 2iy = 2z$; funkcja owa nie jest to nic innego, jak $(x + iy)^2 = z^2$. Przeciwnie, wyrażenie $v = x - iy$ nie jest funkcją analityczną; w istocie, mamy

$$\frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{1 - i \frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 + i \frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

i rzecz jasna, że granica stosunku $\frac{\Delta v}{\Delta z}$ zależy od granicy stosunku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Gdy założymy, że $x = \varsigma \cos \omega$, $y = \varsigma \sin \omega$ i zastosujemy wzory, dotyczące zamiany zmiennych (I, art. 63), związki (1) przybiorą postać:

$$(3) \quad \frac{\partial P}{\partial \omega} = -\varsigma \frac{\partial Q}{\partial \varsigma}, \quad \frac{\partial Q}{\partial \omega} = \varsigma \frac{\partial P}{\partial \varsigma},$$

a pochodna zostanie wyrażona w sposób następujący

$$f'(z) = \left(\frac{\partial P}{\partial \varsigma} + i \frac{\partial Q}{\partial \varsigma} \right) (\cos \omega - i \sin \omega).$$

Zapomocą tych wzorów stwierdzimy łatwo, że funkcja

$$z^m = \varsigma^m (\cos m\omega + i \sin m\omega)$$

jest funkcją analityczną zmiennej z , o pochodnej równej

$$m\varsigma^{m-1} (\cos m\omega + i \sin m\omega) (\cos \omega - i \sin \omega) = mz^{m-1}.$$

262. Funkcje holomorficzne. — Wiadomości, wyluszczone powyżej, są jeszcze nieco zbyt ogólnikowe, ponieważ nie było dotychczas mowy o granicach, między którymi ma się zmieniać z .

Część A płaszczyzny nazywa się *spójną* (connexe) lub *jednokrotnie spójną* (d'un seul tenant), jeżeli dwa jakiegokolwiek punkty, należące do tej części, można połączyć zapomocą linii ciągłej, położonej również całkowicie w tym obszarze. Obszar spójny, położony całkowicie w odległości skończonej, może być ograniczony przez jedną lub więcej krzywych zamkniętych, wśród których istnieje zawsze krzywa zamknięta, ograniczająca go zewnątrz. Część płaszczyzny, rozciągająca się do nieskończoności, może się składać z punktów, leżących nazewnątrz jednej lub kilku krzywych zamkniętych; może również być ograniczoną przez krzywe, posiadające gałęzie nieskończone. Gdy nie będzie obawy żadnej dwuznaczności, będziemy używali do oznaczenia części spójnej płaszczyzny któregośkolwiek ze słów: *pole* (aire) lub *obszar* (région).

Funkcja $f(z)$ zmiennej zespolonej z nazywa się *funkcją holomorficz-*

na (holomorphe) lub *całokształtną* ¹⁾ w pewnym obszarze spójnym A płaszczyzny, jeżeli czyni zadość warunkom następującym:

po 1-sze) każdemu punktowi z obszaru A odpowiada oznaczona wartość $f(z)$;

po 2-gie) $f(z)$ zmienia się w sposób ciągły, gdy z porusza się w obszarze A , to jest moduł $f(z+h) - f(z)$ dąży do zera wraz z modulem liczby h ;

po 3-cie) $f(z)$ posiada w każdym punkcie z obszaru A jedną określoną pochodną $f'(z)$, to jest każdemu punktowi z odpowiada taka liczba zespolona $f'(z)$, iż moduł różnicy

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z)$$

dąży do zera, gdy $|h|$ dąży do zera. Wszelkiej liczbie dodatniej ε można w takim razie podporządkować taką inną liczbę dodatnią η , iż przy $|h|$ mniejszym od η mamy:

$$(4) \quad |f(z+h) - f(z) - hf'(z)| \leq \varepsilon |h|.$$

W danej chwili nie uczynimy żadnego założenia co do wartości $f(z)$ wzdłuż zarysu, ograniczającego A . Gdy powiemy, że funkcja $f(z)$ jest *całokształtna* wewnątrz pola A , ograniczonego przez linię zamkniętą Γ oraz *na samym obwodzie*, będziemy przez to rozumieli, że $f(z)$ jest *całokształtna* w obszarze A , zawierającym obwód Γ i obszar A .

Funkcja analityczna $f(z)$ niekoniecznie musi być holomorficzną w całym obszarze istnienia; w ogólności funkcja taka posiada punkty osobliwe, które mogą być nader rozmaite. Szkicowanie klasyfikacji tych punktów osobliwych byłoby w tej chwili przedwczesne; ich istota zostanie odsłonięta właśnie przez badanie, do którego obecnie przystępujemy.

263. Funkcje wymierne. — Przepisy, dotyczące obliczania pochodnej sumy, iloczynu lub ilorazu, jako wnioski logiczne z samego określenia pochodnej, stosują się bez zmiany do funkcji zmiennej zespolonej. To samo zachodzi z prawidłem różniczkowania funkcji innej funkcji. Niech $u = f(Z)$ oznacza funkcję analityczną zmiennej zespolonej Z ; jeżeli zastąpimy Z przez inną funkcję analityczną $\psi(z)$ zmiennej zespolonej z , u okaże się również funkcją analityczną zmiennej z . Mamy w istocie:

¹⁾ Sądzę, że to spolszczenie wyrazu greckiego nie powinno wywołać żadnych nieporozumień. Podobnie używam w dalszym ciągu nazwy: *częściokształtna* zamiast: *meromorficzna*. [Uw. Num.].

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \frac{\Delta u}{\Delta Z} \times \frac{\Delta Z}{\Delta z};$$

gdy $|\Delta z|$ dąży do zera, to samo zachodzi z $|\Delta Z|$, i każdy ze stosunków $\frac{\Delta u}{\Delta Z}, \frac{\Delta Z}{\Delta z}$ zmierza do określonej granicy. Stosunek $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ dąży tedy również do granicy

$$\lim \frac{\Delta u}{\Delta z} = f'(Z) \phi'(z).$$

Stwierdziliśmy już powyżej (art. 261), że funkcja

$$z^m = (x + iy)^m$$

jest funkcją [analityczną] zmiennej z , o pochodnej mz^{m-1} . Można przekonać się o tym bezpośrednio, podobnie jak w tym przypadku, gdy zmienna przybiera tylko wartości rzeczywiste. W istocie, wzór dwumianowy Newtona, jako oparty wyłącznie na własnościach mnożenia, rozciąga się oczywiście na ilości zespolone. Możemy tedy napisać, oznaczając przez m liczbę całkowitą dodatnią

$$(z + h)^m = z^m + \frac{m}{1} z^{m-1} h + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^{m-2} h^2 + \dots,$$

a przeto

$$\frac{(z + h)^m - z^m}{h} = mz^{m-1} + h \left[\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^{m-2} + \dots + h^{m-2} \right];$$

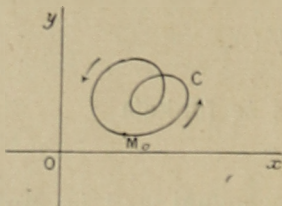
rzecz jasna, iż prawa strona tej równości dąży do granicy mz^{m-1} , gdy moduł h dąży do zera.

Wszelki wielomian całkowity o dowolnych współczynnikach jest tedy również funkcją analityczną, całokształtną w całym obszarze płaszczyzny. Funkcja wymierna, to jest iloraz dwu wielomianów całkowitych $P(z)$, $Q(z)$, które można uważać za pierwsze względem siebie, jest również funkcją analityczną — funkcja taka posiada atoli pewną liczbę punktów osobliwych, odpowiadających pierwiastkom równania $Q(z) = 0$. Jest to funkcja całokształtna w każdym obszarze płaszczyzny, nie zawierającym żadnego z tych pierwiastków.

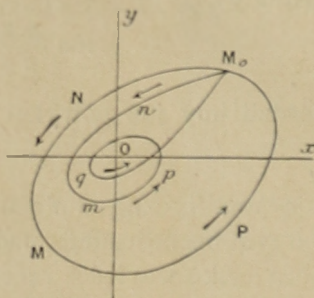
264. Badanie pewnych funkcji niewymiernych. — Gdy punkt z zakreśla krzywą ciągłą, spólrzędne x i y , zarówno jak moduł ς , zmieniają się w sposób ciągły — to samo stosuje się do argumentu, o ile przebiegana krzywa nie przechodzi przez początek układu. Gdy punkt z zakreśla krzywą zamkniętą, x , y i ς przybierają ponownie swe wartości początkowe, lecz niezawsze zachodzi to samo z argumentem. Jeżeli po-

czątek układu leży nazewnątrz obszaru, otoczonego przez krzywą zamkniętą (rys. 48a), to, rzecz jasna, argument odzyskuje swą wartość początkową; dzieje się inaczej, gdy punkt z zakreśla krzywą w rodzaju $M_0 N P M_0$ lub $M_0 n m p q M_0$ (rys. 48b).

Rys. 48a.



Rys. 48b.



W pierwszym przypadku argument odzyskuje wartość początkową powiększoną o 2π , w drugim przybiera wartość początkową, powiększoną o 4π . Rzecz jasna, że można poruszać punkt z po takich krzywych zamkniętych, że zmienianie się w sposób ciągły argumentu wzdłuż jednej z nich doprowadza do wartości różnej od wartości początkowej o iloczyn liczby 2π przez dowolną liczbę całkowitą n , dodatnią lub ujemną. Ogólnie, gdy z zakreśla krzywą zamkniętą, argument różnicy $z - a$ przybiera wartość początkową, jeżeli punkt a leży nazewnątrz pola, otoczonego przez tę krzywą zamkniętą, lecz można zawsze obrać krzywą, zakreśloną przez z , w taki sposób, iżby wartość ostateczna argumentu różnicy $z - a$ była równa wartości początkowej, powiększonej o $2n\pi$.

Ustaliwszy te fakty, rozważmy równanie

$$(5) \quad u^m = z,$$

w którym m oznacza liczbę całkowitą dodatnią. Związek ten podporządkowuje wszelkiej wartości z , prócz $z = 0$, m wartości różnych zmiennej u . Istotnie, jeżeli założymy

$$z = \zeta (\cos \omega + i \sin \omega), \quad u = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

związek (5) jest równoważny dwu następującym

$$r^m = \zeta, \quad m \varphi = \omega + 2k\pi;$$

z pierwszego otrzymujemy $r = \zeta^{\frac{1}{m}}$, to jest że r jest równe pierwiastkowi arytmetycznemu m -go stopnia z liczby dodatniej ζ . Mamy następnie

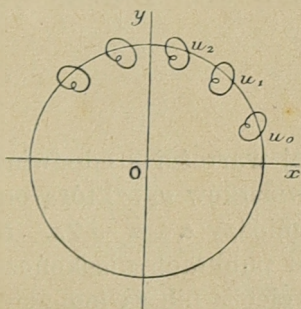
$\varphi = \frac{\omega + 2k\pi}{m}$ i w celu otrzymania wszystkich odmiennych wartości u wystarczy nadać liczbie całkowitej dowolnej k m następujących po sobie wartości całkowitych $0, 1, 2, \dots, m-1$; w ten sposób wyrazimy m pierwiastków równania (5) w postaci

$$(6) \quad u_k = \sqrt[m]{\zeta} \left[\cos \left(\frac{\omega + 2k\pi}{m} \right) + i \sin \left(\frac{\omega + 2k\pi}{m} \right) \right] \quad (k = 0, 1, 2, \dots, m-1);$$

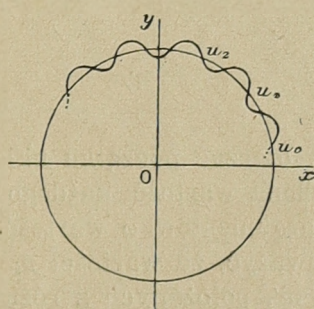
którykolwiek z tych pierwiastków oznaczamy przez $z^{\frac{1}{m}}$.

Gdy punkt, odpowiadający zmiennej z , zakreśla krzywą ciągłą, każdy z tych pierwiastków zmienia się również w sposób ciągły. Gdy z przebiega krzywą zamkniętą, względem której początek układu leży nazewnątrż, argument ω przybiera ponownie wartość początkową, i każdy z pierwiastków $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$ zakreśla również krzywą zamkniętą (rys. 49a). Lecz jeżeli punkt z zakreśla krzywą M_0NPM_0 (rys. 48b), to ω zmienia się w $\omega + 2\pi$, wartość końcowa pierwiastka u_i równa się wartości początkowej pierwiastka u_{i+1} , i krzywe, zakreślone przez różne punkty, odpowiadające pierwiastkom, tworzą jedną krzywą zamkniętą.

Rys. 49a.



Rys. 49b.



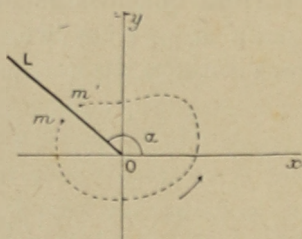
m pierwiastków $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$ ulegają tedy przemianie kołowej, gdy punkt, odpowiadający zmiennej z , przebiega w zwrocie dodatnim¹⁾ krzywą zamkniętą bez punktów podwójnych, otaczającą początek układu. Rzecz jasna, iż można poruszać ten punkt po takiej drodze zamkniętej, że jeżeli wartość początkowa któregoś z pierwiastków równa się np. u_0 , to jego wartość końcowa będzie równa któremukolwiek innemu pierwiastkowi. Jeżeli tedy nie chcemy wprowadzać nieciągłości, to musimy uważać m pierwiastków równania (5) nie za tyleż funkcji

¹⁾ t. j. w kierunku wzrostu argumentów

osobnych zmiennej z , lecz za m *odmiennych gałęzi* (branches distinctes) tej samej funkcji. Punkt $z = 0$, dokoła którego zachodzi permutacja tych m wartości zmiennej u , posiada nazwę *punktu krytycznego* (point critique) czyli *punktu rozgałęzienia* (p. de ramification).

Na to aby m wartości u mogły być uważane za osobne funkcje zmiennej z , należy przerwać ciągłość tych pierwiastków wzdłuż jakiejś linii nieograniczonej, wychodzącej z początku układu. To zniesienie ciągłości można sobie wyobrazić konkretnie w sposób następujący: wystawmy sobie, że w płaszczyźnie, w której wyobrażamy wartości zmiennej z , zostało zrobione cięcie nieograniczone podług promienia, wykreślonego z początku układu, np. podług promienia OL (rys. 50), i że rozsунęliśmy zlekka oba otrzymane brzegi, w ten sposób, iżby droga punktu z nie mogła przejść z jednego na drugi. W tych warunkach żadna droga zamknięta

Rys. 50.



nie może otaczać początku układu; każdej wartości z odpowiada zupełnie określona wartość każdego z m pierwiastków u_i , którą otrzymamy nadając argumentowi ω wartość, zawartą między α i $\alpha - 2\pi$. Należy jednak zauważyć, że wartości u_i w dwu punktach nieskończenie blizkich m i m' , położonych z różnych stron cięcia, nie są jednakowe. Wartość u_i w punkcie m' równa się wartości u_i w punkcie m , pomnożonej przez $\left(\cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m} \right)$.

Każdy z pierwiastków równania (5) jest funkcją monogeniczną. Niech u_0 stanowi wartość jednego z pierwiastków, odpowiadającą danej wartości z_0 ; wartości z , zbliżonej do z_0 , odpowiada wartość u bliska wartości u_0 . Zamiast odnajdywania granicy stosunku $\frac{u - u_0}{z - z_0}$ można szukać granicy stosunku odwrotnego

$$\frac{z - z_0}{u - u_0} = \frac{u^m - u_0^m}{u - u_0};$$

granica owa równa się mu_0^{m-1} . Otrzymujemy tedy następujące wyrażenie pochodnej funkcji u

$$u' = \frac{1}{m} \frac{1}{u^{m-1}} = \frac{1}{m} \frac{u}{z},$$

można je napisać również w postaci, zawierającej wykładniki ujemne

$$u' = \frac{1}{m} z^{\frac{1}{m}-1},$$

lecz postać $\frac{1}{m} \frac{u}{z}$ lepiej wziąć z tego względu, iż unikniemy wówczas nieporozumień co do wartości pochodnej, odpowiadającej danemu pierwiastkowi. Wewnątrz jakiegokolwiek krzywej zamkniętej, nie otaczającej początku układu, każdy z m pierwiastków $\sqrt[m]{z}$ jest funkcją holomorficzną. Również $u^m = A(z-a)$ posiada podobnie m pierwiastków, które ulegają przemianie kołowej dokoła punktu krytycznego $z=a$.

Rozpatrzmy jeszcze równanie

$$(7) \quad u^2 = A(z-e_1)(z-e_2)\dots(z-e_n)$$

w którym $e_1, e_2, \dots, e_n$ są to liczby, różne od siebie. Oznaczmy przez te same litery punkty, wyobrażające te n ilości. Załóżmy

$$A = R(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

$$z - e_k = \zeta_k (\cos \omega_k + i \sin \omega_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$u = r (\cos \theta + i \sin \theta);$$

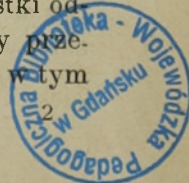
ω_k oznacza kąt, utworzony przez kierunki prostych: Ox i $e_k z$, łączącej punkt e_k z punktem z . Z równania (7) otrzymujemy

$$r^2 = R\zeta_1\zeta_2\dots\zeta_n, \quad 2\theta = \alpha + \omega_1 + \dots + \omega_n + 2m\pi;$$

równanie to posiada tedy dwa pierwiastki przeciwne

$$(8) \quad \begin{cases} u_1 = (R\zeta_1\zeta_2\dots\zeta_n)^{\frac{1}{2}} \left[\cos \left(\frac{\alpha + \omega_1 + \dots + \omega_n}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha + \omega_1 + \dots + \omega_n}{2} \right) \right], \\ u_2 = (R\zeta_1\dots\zeta_n)^{\frac{1}{2}} \left[\cos \left(\frac{\alpha + \omega_1 + \dots + \omega_n + 2\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha + \omega_1 + \dots + \omega_n + 2\pi}{2} \right) \right]. \end{cases}$$

Gdy punkt z przebiega krzywą zamkniętą C , otaczającą p z pośród punktów $e_1, e_2, \dots, e_n$, to p argumentów, należących do ciągu $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ powiększa się o 2π ; argument pierwiastka u_1 i podobnie argument pierwiastka u_2 wzrastają przeto o $p\pi$. Jeżeli p jest parzyste, oba pierwiastki odzyskują swe wartości początkowe; jeżeli p jest nieparzyste, to każdy przechodzi w drugi. W szczególności zamiana pierwiastków zachodzi w tym



przypadku, gdy wewnątrz obwodu jest położony tylko jeden punkt e_1 . Punkty e_i stanowią n punktów rozgałęzienia. Do tego aby pierwiastki u_1 i u_2 pozostawały określonymi dokładnie funkcjami zmiennej z , wystarczy utworzyć taki układ cięć, aby wszelka krzywa zamknięta otaczała zawsze liczbę parzystą punktów krytycznych. Można np. przeciągnąć szereg cięć nieograniczonych podług prostych, wychodzących ze wszystkich punktów e_i , w ten sposób, by te cięcia nie krzyżowały się. Lecz można również zastosować wiele innych sposobów. Jeżeli np. istnieją 4 punkty krytyczne e_1, e_2, e_3, e_4 , to można zrobić jedno cięcie wzdłuż odcinka prostej e_1e_2 , a drugie — wzdłuż odcinka e_3e_4 .

265. Funkcje jednowartościowe i wielowartościowe. — Przykłady elementarne, rozpatrzone przed chwilą, uwydatniają pewien fakt nader ważny. Wartość funkcji $f(z)$ zmiennej z niezawsze mianowicie zależy jedynie od samej wartości z , lecz może również w pewnym stopniu zależeć od sposobu, w jaki następują po sobie wartości, przybierane przez zmienną przy przejściu od pewnej wartości początkowej do wartości danej (actuelle), czyli innemi słowy od toru, po którym się porusza punkt, odpowiadający zmiennej.

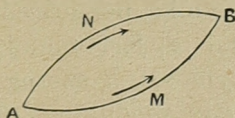
Powróćmy np. do funkcji $u = \sqrt[m]{z}$. Gdy będziemy szli z punktu M_0 do punktu M dwiema drogami M_0NM i M_0PM (rys. 48b), nadając funkcji u w obu przypadkach tę samą wartość początkową, to w punkcie M nie otrzymamy tej samej wartości, ponieważ wartości argumentu zmiennej z w tych dwu przypadkach różnią się o 2π . Musimy tedy wprowadzić jeszcze nowe rozróżnienia.

Funkcja analityczna $f(z)$ nazywa się *jednowartościową* (uniforme) czyli *monodromiczną* (monodrome) w obszarze A , jeżeli wszystkie drogi, położone w tym obszarze, które łączą jakiś punkt z_0 z jakimkolwiek punktem z , wiodą do tej samej wartości końcowej $f(z)$. Gdy wartość końcowa $f(z)$ nie jest przy wszystkich możliwych drogach jednakowa, funkcja jest *wielowartościowa* (multiforme). Funkcja holomorficzna w obszarze A musi być w tym obszarze jednowartościową. Ogólnie, do tego by funkcja $f(z)$ była funkcją jednowartościową w danym obszarze, potrzeba i wystarcza, iżby jakakolwiek droga zamknięta, zakreślona przez zmienną, przywracała tej funkcji jej wartość początkową. W istocie, jeżeli przesuwanie się od punktu A do punktu B po dwóch drogach AMB i ANB (rys. 51) doprowadza do tej samej wartości $f(z)$, to rzecz jasna, że poruszając punkt z po obwodzie zamkniętym $AMBNA$, odzyskamy w punkcie A wartość początkową $f(z)$.

Nawzajem założmy, że przy poruszaniu się punktu z po obwodzie

$AMBNA$ powracamy do punktu wyjścia z wartością początkową u_0 , i niech u_1 oznacza wartość, którą funkcja osiąga w punkcie B , gdy z przebiegło drogę AMB . Gdy z przebiega łuk BNA , funkcja zmienia się od wartości u_1 aż do wartości u_0 ; więc naodwrot drogą ANB doprowadzi od wartości u_0 do wartości u_1 , t. j. do tej samej wartości, co droga AMB .

Rys. 51.



Należy zauważyć, że funkcja może nie być jednowartościową w jakimś polu, nie posiadając bynajmniej w tym polu punktów krytycznych. Rozpatrzmy np. część płaszczyzny, zawartą pomiędzy dwoma kołami spółśrodkowymi C i C' , których środkiem jest początek układu. Funkcja $u = z^{\frac{1}{m}}$ nie posiada w tym obszarze żadnego punktu krytycznego; mimo to nie jest w nim jednowartościowa, gdyż w razie zakreślenia przez z okręgu spółśrodkowego, zawartego pomiędzy C a C' , funkcja ta zostaje pomnożona przez $\cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m}$.

II. — Szeregi potęgowe o wyrazach zespolonych. — Elementarne funkcje przestępne.

266. **Koło zbieżności.** — Rozumowania, użyte przy badaniu szeregów potęgowych w rozdz. IX tomu I, dadzą się z łatwością rozciągnąć na szeregi potęgowe o wyrazach zespolonych (series entières à termes imaginaires); wystarczy zastąpić *wartość bezwzględną* (w jej dawnym znaczeniu — *Uw. tł.*) przez *moduł*. Przypomnimy tutaj pokrótce bieg rozważań i wyniki.

Weźmy szereg potęgowy

$$(9) \quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots,$$

w którym współczynniki i zmienna mogą przybierać dowolne wartości urojone. Rozpatrzmy jednocześnie, zakładając: $A_i = |a_i|$, $r = |z|$, szereg modułów

$$(10) \quad A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + \dots + A_n r^n + \dots;$$

uzasadniliśmy (I, art. 181) istnienie takiej liczby dodatniej R , że szereg (10) jest zbieżny dla wszelkiej wartości $r < R$, a rozbieżny dla wszelkiej wartości $r > R$. Ta liczba R równa się odwrotności największej z granic ciągu

$$A_1, \sqrt[2]{A_2}, \sqrt[3]{A_3}, \dots, \sqrt[n]{A_n}, \dots,$$

i w przypadkach szczególnych może być równą zeru lub nieskończoną.

Z własności liczby R wynika bezpośrednio, że szereg (9) jest bezwzględnie zbieżny, gdy moduł $|z|$ jest mniejszy od R . Dla wartości z_0 zmiennej z o module większym niż R szereg (9) nie może być zbieżnym, ponieważ w takim razie szereg modułów (10) musiałby być zbieżnym dla wartości r większych niż R (I, art. 181). Jeżeli, biorąc początek układu za środek, zakreslimy w płaszczyźnie zmiennej z okrąg C o promieniu R (rys. 52), to szereg całkowity (9) okaże się bezwzględnie zbieżnym dla każdego punktu, położonego wewnątrz C , a rozbieżnym w każdym punkcie zewnętrznym; stąd nazwa *koła zbieżności* (cercle de convergence), nadawana temu kołu. W punkcie, położonym na obwodzie koła, szereg może być zbieżnym lub rozbieżnym, stosownie do okoliczności ¹⁾.

Wewnątrz koła C' , spółśrodkowego z pierwszym i o promieniu R' , mniejszym niż R , szereg (9) jest jednostajnie zbieżny, ponieważ dla każdego punktu, położonego wewnątrz C' , mamy oczywiście

$$|a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_{n+p} z^{n+p}| < A_{n+1} R'^{n+1} + \dots + A_{n+p} R'^{n+p},$$

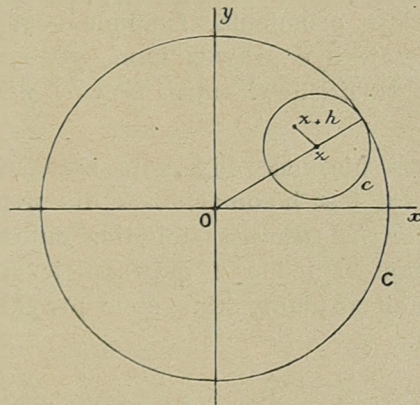
i można znaleźć liczbę n dość wielką, by prawa strona była przy wszelkim p mniejsza od wszelkiej, danej z góry, liczby dodatniej ϵ . Stąd wnioskujemy, że suma szeregu (9) jest to funkcja $f(z)$ zmiennej z , ciągła w każdym punkcie, położonym wewnątrz koła zbieżności (art. 260).

Różniczkując dowolną liczbę razy, wyraz za wyrazem, szereg (9),

¹⁾ Niech $f(z) = \sum a_n z^n$ stanowi szereg całkowity o promieniu zbieżności $R=1$. Jeżeli współczynniki $a_0, a_1, a_2, \dots$ są liczbami dodatnimi, coraz to mniejszemi, i a_n dąży do zera przy n rosnącym nieograniczenie, to szereg jest zbieżny we wszystkich punktach obwodu koła zbieżności, oprócz, być może, punktu $z=1$. Istotnie, szereg $\sum z^n$, w którym $|z|=1$, jest, z wyjątkiem wartości $z=1$, nieoznaczony, ponieważ moduł sumy n pierwszych wyrazów jest mniejszy niż $\frac{2}{1-z}$; wystarczy tedy zastosować rozumowanie z artykułu 166 i oprzeć się na twierdzeniu Abela uogólnionym. Podobnie szereg $a_0 - a_1 z + a_2 z^2 - \dots$, utworzony z poprzedniego zapomocą zamiany z na $-z$, jest zbieżny we wszystkich punktach okręgu $|z|=1$, oprócz, być może, punktu $z=-1$ (p. art. 166).

otrzymujemy liczbę nieograniczoną szeregów potęgowych $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$, ..., posiadających to samo koło zbieżności, co pierwszy szereg (I, art. 183). Można dowieść w taki sam sposób jak w art. 184, że $f_1(z)$ stanowi pochodną funkcji $f(z)$ i ogólnie, że $f_n(z)$ jest pochodną funkcji $f_{n-1}(z)$. *Wszelki szereg potęgowy wyraża tedy funkcję holomorficzną wewnątrz koła zbieżności.* Ciąg pochodnych tej funkcji daje się przedłużać nieograniczenie, i wszystkie te pochodne są również funkcjami całokształtnymi w tym samym kole.

Rys. 52.



Mając punkt z , położony wewnątrz koła C , zakresłmy dokoła tego punktu okrąg c styczny wewnątrz do okręgu C i weźmy punkt $z+h$, leżący wewnątrz c ; jeżeli r i ς oznaczają moduły $|z|$ i $|h|$, to $r + \varsigma < R$ (rys. 52). Suma $f(z+h)$ szeregu jest równa sumie szeregu podwójnego

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \\ \quad + a_1 h + 2a_2 z h + \dots + n a_n z^{n-1} h + \dots \\ \quad \quad + a_2 h^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_n z^{n-2} h^2 + \dots \\ \quad \quad \quad + \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

obliczonej za pomocą dodawania w kolumnach pionowych. Lecz szeregów jest bezwzględnie zbieżny, ponieważ, zastępując każdy wyraz przez jego moduł, otrzymujemy szereg podwójny o wyrazach dodatnich, którego suma wynosi

$$A_0 + A_1(r + \varsigma) + \dots + A_n(r + \varsigma)^n + \dots$$

Można tedy dodawać wyrazy szeregu podwójnego (11) również wzdłuż wierszy (poziomych), i przeto otrzymujemy dla wszelkiego punktu $z+h$, leżącego wewnątrz koła c , związek następujący:

$$(12) \quad f(z+h) = f(z) + hf_1(z) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f_2(z) + \dots + \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} f_n(z) + \dots$$

Szereg z prawej strony znaku równości jest napewno zbieżny, skoro moduł przyrostu h jest mniejszy od $R-r$, może być jednak zbieżnym w większym jeszcze zakresie. Funkcje $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z), \dots$ są równe kolejnym pochodnym funkcji $f(z)$, a więc wzór (12) utożsamia się ze wzorem Taylora.

Jeżeli szereg (9) jest zbieżny w punkcie Z obwodu koła zbieżności, suma $f(Z)$ szeregu jest granicą, do której dąży suma $f(z)$, gdy punkt z dąży do punktu Z wzdłuż promienia, zakończonego w tym punkcie. Twierdzenie to nie przestaje być prawdziwym, gdy z , pozostając wciąż wewnątrz koła, zmierza do Z wzdłuż jakiejś krzywej, nie stycznej w punkcie Z z kołem zbieżności¹⁾.

Gdy promień R jest nieskończony, koło zbieżności wypełnia całą płaszczyznę, i funkcja $f(z)$ jest holomorficzna dla wszelkiej wartości z . Powiemy, że jest to *funkcja całkowita* (fonction entière); badanie tych funkcji przestępnych stanowi jedno z najważniejszych zadań Analizy. W najbliższych artykułach zbadamy klasyczne przykłady funkcji przestępnych elementarnych.

267. Szeregi szeregów (Séries de séries). — Mając szereg potęgowy (9) o jakichkolwiek współczynnikach, powiemy, iż jakiś inny szereg potęgowy $\sum a_n z^n$, którego wszystkie współczynniki są rzeczywiste i dodatnie, jest dla pierwszego szeregu szeregiem *zaczynającym* (s. majorante), jeżeli przy wszelkim n zachodzi związek: $|a_n| \leq a_n$. Wszystkie wyniki, osiągnięte zapomocą użycia funkcji wyższych (art. 186–189), stosują się bez zmian do funkcji zmiennych zespolonych. Oto jeszcze jedno zastosowanie:

$$(13) \quad f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots$$

stanowi szereg, którego każdy wyraz jest znowuż sumą szeregu potęgowego, zbieżnego w kole o promieniu równym lub większym od pewnej liczby $R > 0$.

$$f_i(z) = a_{i0} + a_{i1}z + \dots + a_{in}z^n + \dots$$

Wyobraźmy sobie, że każdy wyraz szeregu (13) jest zastąpiony przez odpowiedni szereg potęg zmiennej z ; otrzymujemy w ten sposób szereg podwójny, którego każda kolumna jest utworzona przez rozwinięcie jednej z funkcji $f_i(z)$. Jeżeli ten szereg jest bezwzględnie zbieżny dla jakiejś wartości z o module c , t. j. jeżeli szereg podwójny $\sum \sum |a_{in}| c^n$ jest zbieżny, to można przy każdej wartości z o module nie większym od c dodawać wyrazy pierwszego szeregu wzdłuż wierszy poziomych, i otrzymujemy sumę $F(z)$ szeregu (13) w postaci szeregu potęg zmiennej z

¹⁾ por. Picard, *Traité d'Analyse* (Kurs Analizy), t. II, str. 73.

$$F(z) = b_0 + b_1 z + \dots + b_n z^n + \dots$$

$$b_n = a_{0n} + a_{1n} + \dots + a_{in} + \dots \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Jest to w gruncie rzeczy to samo rozumowanie, które pozwoliło rozwinąć $f(z+h)$ podług potęg liczby h .

Załóżmy np., że szereg $f_i(z)$ posiada funkcję wyższą o postaci $\frac{M_i r}{r-z}$ i że szereg $\sum M_i$ jest zbieżny. W szeregu podwójnym moduł wyrazu ogólnego jest mniejszy niż $M_i \frac{|z|^n}{r^n}$. Bylebyśmy mieli $|z| < r$, szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, ponieważ szereg modułów jest zbieżny; jego suma jest mniejsza niż $\frac{r \sum M_i}{r-|z|}$.

268. Rozwinięcie w szereg potęgowy iloczynu nieskończonego. — Weźmy iloczyn nieskończony

$$F(z) = (1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_n) \dots,$$

w którym każda z funkcji u_i jest funkcją ciągłą zmiennej zespolonej z w pewnym obszarze D . Jeżeli szereg $\sum U_i$ jest w tym obszarze jednostajnie zbieżny, $F(z)$ równa się sumie szeregu jednostajnie zbieżnego w D i przeto stanowi funkcję ciągłą (art. 175, 176). Jeżeli funkcje u_i są funkcjami analitycznymi zmiennej z , to z pewnego twierdzenia ogólnego, które zostanie dowiedzione w dalszym ciągu (art. 297), wynika, że to samo się stosuje do $F(z)$.

Naprzykład iloczyn nieskończony

$$F(z) = z(1 - z^2) \left(1 - \frac{z^2}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \dots$$

wyraża funkcję zmiennej z , holomorficzną w dziedzinie całej płaszczyzny, ponieważ szereg $\sum \frac{|z|^2}{n^2}$ jest jednostajnie zbieżny wewnątrz dowolnej krzywej zamkniętej. Ten iloczyn równa się zero dla $z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ale tylko dla tych wartości.

Można dowieść bezpośrednio, że iloczyn $F(z)$ może być rozwinięty w szereg potęgowy, jeżeli, rozwiniawszy każdą z funkcji u_i w szereg potęgowy

$$u_i(z) = a_{i0} + a_{i1}z + \dots + a_{in}z^n + \dots \quad (i = 0, 1, 2, \dots),$$

otrzymujemy szereg podwójny $\sum_i \sum_n |a_{in}| r^n$ zbieżny przy odpowiednio dobranej wartości dodatniej r .

Załóżmy, jak w art. 174

$$v_0 = 1 + u_0, \quad v_n = (1 + u_0)(1 + u_1) \dots (1 + u_{n-1}) u_n;$$

wystarczy okazać, że suma szeregu

$$(14) \quad v_0 + v_1 + \dots + v_n + \dots,$$

równego iloczynowi nieskończonemu $F(z)$, da się wyrazić w postaci szeregu potęgowego. Owóż, jeżeli założymy jeszcze

$$u_i' = |a_{i1}| + |a_{i1}|z + \dots + |a_{in}|z^n + \dots,$$

to rzecz jasna, że iloczyn

$$v_n' = (1 + u_0') (1 + u_1') \dots (1 + u_{n-1}') u_n'$$

będzie dla v_n funkcją zwyższającą. Szereg (14) może być tedy uzyskiwany podług potęg zmiennej z , jeżeli można orzec to samo o szeregu pomocniczym

$$(15) \quad v_0' + v_1' + \dots + v_n' + \dots$$

Jeżeli rozwinieśmy każdy wyraz tego szeregu w szereg potęgowy, to otrzymamy szereg podwójny o współczynnikach dodatnich i dla osiągnięcia naszego celu wystarczy dowieść, iż po zastąpieniu z przez r , ów szereg podwójny będzie zbieżny. Oznaczmy przez U_n' i V_n' wartości funkcji u_n' i v_n' dla $z = r$; mamy

$$V_n' = (1 + U_0') (1 + U_1') \dots (1 + U_{n-1}') U_n',$$

i przeto

$$V_0' + V_1' + \dots + V_n' = (1 + U_0') \dots (1 + U_n')$$

czyli jeszcze

$$V_0' + V_1' + \dots + V_n' < e^{U_0' + \dots + U_n'}.$$

Gdy n wzrasta nieograniczenie, suma $U_0' + \dots + U_n'$ dąży do pewnej granicy, ponieważ szereg $\sum U_n'$, jak założyliśmy, jest zbieżny. Szereg podwójny (15) jest tedy bezwzględnie zbieżny, o ile $|z| \leq r$; szereg podwójny, otrzymany zapomocą rozwinięcia każdego wyrazu v_n szeregu (14) jest tedy *tym bardziej* bezwzględnie zbieżny wewnątrz odpowiedniego koła C , i można go uzyskiwać podług potęg całkowitych z .

Spółczynnik b_p przy z^p w szeregu, wyrażającym $F(z)$, równa się podług tego granicy, do której dąży przy n rosnącym nieograniczenie spółczynnik b_{pn} przy z^p w sumie $v_0 + v_1 + \dots + v_n$, czyli, co na jedno wychodzi, w szeregu, powstałym z rozwinięcia iloczynu

$$P_n = (1 + u_0) (1 + u_1) \dots (1 + u_n);$$

spółczynnik ten otrzymamy przeto, stosując do iloczynu nieskończonego zwykły sposób obliczania spółczynnika jakiejś potęgi zmiennej z w iloczynie liczby skończonej wielomianów.

Naprzekład iloczyn nieskończony

$$F(z) = (1 + z) (1 + z^2) (1 + z^4) \dots (1 + z^{2^n}) \dots$$

da się rozwinąć podług potęg zmiennej z , hyleby $|z| < 1$. Wszelka potęga zmiennej z , np. z^N , wystąpi w tym szeregu ze spółczynnikiem równym jedności, ponieważ wszelka liczba całkowita N może być napisana w pewien jedyny sposób w postaci sumy potęg liczby 2. Mamy więc, gdy $|z| < 1$

$$(16) \quad F(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \frac{1}{1 - z},$$

co możnaby również uzasadnić nader łatwo zapomocą tożsamości

$$\frac{1 - z^{2^n}}{1 - z} = (1 + z) (1 + z^2) (1 + z^4) \dots (1 + z^{2^{n-1}}).$$

269. Funkcja wykładnicza. — Określenie arytmetyczne funkcji wykładniczej (f. exponentielle) traci oczywiście wszelkie znaczenie, gdy wykładnik jest urojony. Aby uogólnić odpowiednio określenie, potrzeba

przeto oprzeć się na jakiejs własności, dającej się rozciągnąć na funkcje zmiennej zespolonej. Użyjemy własności, wyrażonej przez związek funkcyjony $a^x \times a^{x'} = a^{x+x'}$, i postaramy się wyznaczyć taki szereg potęgowy $f(z)$, zbieżny w kole o promieniu R , iżbyśmy mieli

$$(17) \quad f(z + z') = f(z) f(z'),$$

skoro moduły liczb $z, z', z + z'$ są mniejsze od R , co zachodzi napewno, gdy $|z|$ i $|z'|$ są mniejsze niż $\frac{R}{2}$. Jeżeli uczynimy w związku poprzednim $z' = 0$, to otrzymamy

$$f(z) = f(z) f(0);$$

musi tedy się spełniać równość $f(0) = 1$, i szereg szukany napiszemy w postaci

$$f(z) = 1 + \frac{a_1}{1} z + \frac{a_2}{1 \cdot 2} z^2 + \dots + \frac{a_n}{1 \cdot 2 \dots n} z^n + \dots$$

Zastąpmy w tym szeregu z kolejno przez λt i $\lambda' t$, oznaczając przez λ i λ' dwie stałe a przez t — zmienną pomocniczą, i pomnożmy oba otrzymane szeregi; wypadnie

$$f(\lambda t) f(\lambda' t) = 1 + \frac{a_1}{1} (\lambda + \lambda') t + \dots + \frac{t^n}{1 \cdot 2 \dots n} \left(a_n \lambda^n + \frac{n}{1} a_{n-1} a_1 \lambda^{n-1} \lambda' + \dots + a_n \lambda'^n \right) + \dots$$

Z drugiej strony mamy

$$f(\lambda t + \lambda' t) = 1 + \frac{a_1}{1} (\lambda + \lambda') t + \dots + \frac{a_n}{1 \cdot 2 \dots n} (\lambda + \lambda')^n t^n + \dots$$

Równość $f(\lambda t + \lambda' t) = f(\lambda t) f(\lambda' t)$ musi zachodzić dla wszystkich wartości λ, λ', t , spełniających warunki $|\lambda| < 1, |\lambda'| < 1, |t| < \frac{R}{2}$; trzeba tedy, iżby oba szeregi były identyczne, t. j. iżbyśmy mieli

$$a_n (\lambda + \lambda')^n = a_n \lambda^n + \frac{n}{1} a_{n-1} a_1 \lambda^{n-1} \lambda' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a_{n-2} a_2 \lambda^{n-2} \lambda'^2 + \dots + a_n \lambda'^n;$$

stąd wynikają związki $a_n = a_{n-1} a_1, a_n = a_{n-2} a_2, \dots$, które można sformułować w postaci jednego warunku ogólnego

$$(18) \quad a_{p+q} = a_p a_q,$$

w którym p i q oznaczają dowolne liczby całkowite dodatnie. Aby znaleźć rozwiązanie ogólne zagadnienia, założmy: $q = 1$ i uczynmy ko-

lejno $p = 1, p = 2, p = 3, \dots$; wypada, iż $a_2 = a_1^2$, potem $a_3 = a_2 a_1 = a_1^3$, ..., i wreszcie $a_n = a_1^n$. Otrzymane w ten sposób wyrażenia spełniają warunek (18), i szereg szukany przybiera postać

$$f(z) = 1 + \frac{a_1 z}{1} + \frac{(a_1 z)^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{(a_1 z)^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots;$$

szereg ten jest zbieżny w dziedzinie całej płaszczyzny i związek

$$f(z + z') = f(z)f(z')$$

jest spełniony przy wszelkich wartościach liczb z i z' .

Szereg powyższy zależy od stałej dowolnej a_1 ; zakładając iż $a_1 = 1$, przyjmiemy

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{z^n}{1 \cdot 2 \dots n} + \dots;$$

w ten sposób rozwiązanie ogólne postawionego zagadnienia stanowi e^{az} .

Gdy z przybiera wartość rzeczywistą x , funkcja całkowita e^x wyraża to samo, co funkcja wykładnicza e^x , zbadana w algiebrze; przy dowolnych z i z' mamy zawsze $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$. Pochodna funkcji e^z równa się samej funkcji. Zgodnie z wzorem podstawowym mamy

$$e^{x+yi} = e^x e^{yi};$$

aby móc obliczyć e^z , gdy z posiada wartość zespoloną $x + yi$, wystarczy umieć obliczyć e^{iy} . Otóż, łącząc z osobna wyrazy o wykładnikach parzystych i nieparzystych, możemy napisać szereg, wyrażający e^{yi} w postaci

$$e^{yi} = 1 - \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots + i \left(\frac{y}{1} - \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right);$$

rozpoznajemy po prawej stronie znaku równości wyniki rozwinięcia funkcji $\cos y$ i $\sin y$, a więc, *gdy y jest rzeczywiste*

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y.$$

Gdy zastąpimy we wzorze poprzednim e^{yi} przez to wyrażenie, otrzymamy

$$(19) \quad e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y);$$

funkcja e^{x+iy} posiada moduł e^x i argument y .

Wzór ten uwydatnia pewną ważną własność funkcji e^z ; gdy zmieniamy mianowicie z na $z + 2\pi i$, x nie ulega zmianie a y wzrasta o 2π , co nie pociąga za sobą żadnej zmiany w wartości prawej strony wzoru (19). Mamy tedy $e^{z+2\pi i} = e^z$; *funkcja wykładnicza e^z posiada okres $2\pi i$.*

Postaramy się jeszcze rozwiązać równanie $e^z = A$, w którym A oznacza dowolną liczbę zespoloną, różną od zera, o module ς i argumencie ω ; chcemy mieć

$$e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \sin y) = \varsigma (\cos \omega + i \sin \omega),$$

co wymaga spełnienia warunków

$$e^x = \varsigma, \quad y = \omega + 2k\pi.$$

Oznaczając przez symbol $\log$ logarytm naturalny liczby dodatniej, otrzymujemy z pierwszego związku $x = \log \varsigma$. Przy wyznaczeniu y -ka mamy do czynienia z dowolną wielokrotnością 2π . Gdyby $A = 0$, równanie $e^x = 0$ doprowadziłoby do wyniku niemożliwego. A więc równanie $e^z = A$, przy A różnym od zera, posiada nieskończenie wiele pierwiastków, wyrażonych przez wzór $\log \varsigma + i(\omega + 2k\pi)$; równanie $e^z = 0$ nie posiada żadnego pierwiastku rzeczywistego ani urojonego.

Uwaga. — Można by również określić e^z jako granicę wielomianu $\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$ przy m rosnącym nieograniczenie. Metoda, użyta w algiebrze w celu uzasadnienia, iż ten wielomian ma za granicę szereg e^z , stosuje się również w tym przypadku, gdy z jest zespolone.

270. Funkcje trygonometryczne. W celu określenia funkcji $\sin z$ i $\cos z$ dla z zespolonego zastosujemy bezpośrednio do wartości zespolonych szeregi potęgowe, znalezione w tym przypadku, gdy zmienna była rzeczywista, i założymy

$$(20) \quad \begin{cases} \sin z = z - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{z^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots, \\ \cos z = 1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots \end{cases}$$

Są to funkcje przestępne całkowite, posiadające wszystkie własności funkcji trygonometrycznych. Tak np. widzimy ze wzorów (20), że pochodna funkcji $\sin z$ równa się $\cos z$ i że pochodną funkcji $\cos z$ jest $-\sin z$; gdy zmieniamy z na $-z$, $\sin z$ przechodzi w $-\sin z$, gdy tymczasem $\cos z$ pozostaje bez zmiany.

Obie nowe funkcje przestępne dadzą się wyrazić zapomocą funkcji wykładniczej. Rozwińmy, w istocie, e^{zi} w szereg potęg zmiennej z , łącząc z osobna wyrazy o wykładnikach parzystych i nieparzystych

$$e^{zi} = 1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \dots + i \left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \right),$$

równość tę, zgodnie z wzorami (20), można napisać w postaci

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z.$$

Zastępując z przez $-z$, otrzymujemy jeszcze

$$e^{-zi} = \cos z - i \sin z,$$

a z tych dwu związków wynika nawzajem

$$(21) \quad \cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i}.$$

Są to znane wzory Eulera, sprowadzające funkcje trygonometryczne do funkcji wykładniczej. Wzory te uwydatniają okresowość obu funkcji, ponieważ ich prawe strony nie ulegają zmianie, gdy z przechodzi w $z + 2\pi$. Dodawszy je, po podniesieniu do kwadratu, otrzymujemy

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Użyjmy jeszcze wzoru $e^{(z+z')i} = e^{zi} e^{z'i}$ czyli

$$\begin{aligned} \cos(z+z') + i \sin(z+z') &= (\cos z + i \sin z)(\cos z' + i \sin z') \\ &= \cos z \cos z' - \sin z \sin z' + i(\sin z \cos z' + \sin z' \cos z); \end{aligned}$$

gdy zastąpimy w tym wzorze z przez $-z$, z' przez $-z'$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \cos(z+z') - i \sin(z+z') &= \cos z \cos z' - \sin z \sin z' - i(\sin z \cos z' + \sin z' \cos z), \end{aligned}$$

i z tych dwu wzorów wynika

$$\begin{aligned} \cos(z+z') &= \cos z \cos z' - \sin z \sin z' \\ \sin(z+z') &= \sin z \cos z' + \sin z' \cos z. \end{aligned}$$

Wzory, wyznaczające funkcje sumy, zarówno jak wszystkie płynące z nich wnioski, stosują się tedy bez zmiany do przypadku, gdy zmienna jest zespolona. Obliczmy np. część rzeczywistą i współczynnik przy i w wyrażeniach $\cos(x+yi)$ i $\sin(x+yi)$. Mamy przedewszystkiem podług wzorów Eulera

$$\cos yi = \frac{e^{-y} + e^y}{2} = \cos \text{hip } y,$$

$$\sin yi = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \sin \text{hip } y;$$

wzory powyższe dają następnie

$$\begin{aligned} \cos(x+yi) &= \cos x \cos yi - \sin x \sin yi = \cos x \cos \text{hip } y - i \sin x \sin \text{hip } y, \\ \sin(x+yi) &= \sin x \cos yi + \cos x \sin yi = \sin x \cos \text{hip } y + i \cos x \sin \text{hip } y. \end{aligned}$$

Inne funkcje trygonometryczne dają się określić zapomocą poprzednich. Mamy np.

$$\operatorname{tang} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}},$$

co można również napisać w postaci

$$\operatorname{tang} z = \frac{1}{i} \frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1};$$

prawa strona stanowi funkcję wymierną potęgi e^{2zi} ; styczna posiada tedy okres, równy π .

271. Logarytmy. — Stwierdziliśmy już (art. 269), że gdy z jest dane, jako liczba urojona, różna od zera, to równanie $e^u = z$ posiada nieskończenie wiele pierwiastków. Załóżmy, że $u = x + iy$; jeżeli prócz tego ς i ω oznaczają moduł i argument liczby z , to muszą zachodzić związki

$$e^x = \varsigma, \quad y = \omega + 2k\pi.$$

Którykolwiekbyś z tych pierwiastków nazywa się *logarytmem* zmiennej z i oznaczamy go przez $\operatorname{Log}(z)$. Możemy tedy napisać

$$\operatorname{Log}(z) = \log \varsigma + i(\omega + 2k\pi),$$

zachowując symbol $\log$ dla oznaczenia zwyczajnego logarytmu neperowskiego (czyli naturalnego — *Uw. tt.*) liczby dodatniej. Wszelka liczba rzeczywista lub zespolona, różna od zera, posiada przeto nieskończenie wiele logarytmów, tworzących postęp arytmetyczny o różnicy $2\pi i$. W szczególności, jeżeli z jest liczbą rzeczywistą i dodatnią x , mamy $\omega = 0$ i biorąc $k = 0$, mamy do czynienia ze zwykłym logarytmem; lecz pozatym istnieje jeszcze nieskończenie wiele wartości zespolonych logarytmu, o postaci $\log x + 2k\pi i$. Jeżeli z jest rzeczywiste i ujemne, to można założyć $\omega = \pi$, i wszystkie wartości logarytmu są urojone.

Niech z' oznacza inną liczbę zespoloną o module ς' i argumentie ω' . Mamy

$$\operatorname{Log}(z') = \log \varsigma' + i(\omega' + 2k'\pi);$$

dodając oba logarytmy, otrzymujemy

$$\operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(z') = \log \varsigma \varsigma' + i[\omega + \omega' + 2(k + k')\pi].$$

Ponieważ $\varsigma \varsigma'$ równa się modułowi, a $\omega + \omega'$ — argumentowi iloczynu zz' , więc można jeszcze napisać ten wzór w postaci

$$\operatorname{Log}(z) + \operatorname{Log}(z') = \operatorname{Log}(zz'),$$

która wskazuje, że gdy dodajemy do którejkolwiek z wartości wyrażę-

$\text{Log}(z)$ którąkolwiek wartość wyrażenia $\text{Log}(z')$, to otrzymana suma stanowi jedną z wartości wyrażenia $\text{Log}(zz')$.

Wyobraźmy sobie teraz, że punkt, odpowiadający zmiennej z , zakreśla w swej płaszczyźnie jakąkolwiek krzywą ciągłą, nie przechodzącą przez początek układu; wzdłuż tej krzywej ζ i ω zmieniają się w sposób ciągły i to samo zachodzi z rozmaitemi wartościami logarytmu. Lecz jeżeli punkt z przebiega krzywą zamkniętą, to należy odróżnić dwa odmienne wypadki. Gdy z , wyszedłszy z punktu z_0 , powraca doń, zakreślając krzywą zamkniętą, nie otaczającą początku układu, to argument ω zmiennej odzyskuje wartość początkową ω_0 , i rozmaite gałęzie logarytmu wracają ponownie do swych wartości początkowych. Gdybyśmy wyobrazili wartości logarytmu zapomocą punktów, każdy z tych punktów zakreśliłby krzywą zamkniętą. Jeżeli zaś przeciwnie punkt z zakreśla krzywą zamkniętą w rodzaju krzywej M_0NMP (rys. 48b), to argument zmiennej z wzrasta o 2π i każda gałąź logarytmu przybiera wartość początkową, powiększoną o $2\pi i$. Ogólnie, gdy z przebiega jakąkolwiek krzywą zamkniętą, wartość końcowa logarytmu równa się wartości początkowej, powiększonej o $2k\pi i$; k oznacza przytym liczbę całkowitą dodatnią lub ujemną, którą otrzymujemy, mierząc kąt, o który się odchylił promień wodzący, wykreślony z początku układu do punktu z (t. j. liczbę całkowitych obrotów promienia wodzącego, w kierunku dodatnim lub ujemnym — *Uw. II*). Nie można tedy, o ile nie czynimy żadnych zastrzeżeń co do przebiegu zmian z -tu, uważać rozmaitych określeń, funkcji $\text{Log}(z)$ za tyleż funkcji osobnych tej zmiennej, ponieważ można przejść w sposób ciągły od jednego z nich do innego. Są to gałęzie tej samej funkcji, które ulegają permutacji dokoła punktu krytycznego $z = 0$.

Wewnątrz pola, ograniczonego przez jakąś jedną krzywą zamkniętą i nie zawierającego początku układu, każda z gałęzi $\text{Log}(z)$ jest funkcją ciągłą i jednowartościową zmiennej z . Aby dowieść, że jest to funkcja całokształtna, wystarczy okazać, że posiada w każdym punkcie jedną oznaczoną pochodną. Niech z i z_1 oznaczają dwie zbliżone do siebie wartości zmiennej, a $\text{Log}(z)$, $\text{Log}(z_1)$ odpowiednie wartości logarytmu, wziętego w obu przypadkach w tym samym znaczeniu; gdy z_1 dąży do z , moduł $\text{Log}(z_1) - \text{Log}(z)$ dąży do zera. Załóżmy: $\text{Log}(z) = u$, $\text{Log}(z_1) = u_1$; otrzymamy

$$\frac{\text{Log}(z_1) - \text{Log}(z)}{z_1 - z} = \frac{u_1 - u}{e^{u_1} - e^u};$$

otóż, gdy u_1 dąży do u , iloraz $\frac{e^{u_1} - e^u}{u_1 - u}$ zmierza do granicy, stanowiącej

pochodną e^z , t. j. do e^z czyli z . Logarytm posiada tedy w każdym punkcie jedną tylko pochodną, równą $\frac{1}{z}$.

Ogólnie, $\text{Log}(z - a)$ posiada nieskończenie wiele wartości, które ulegają permutacji dokoła punktu krytycznego $z = a$; pochodna tej funkcji równa się $\frac{1}{z - a}$.

Jeżeli m jest liczbą dowolną, rzeczywistą czy zespoloną, to funkcja z^m da się określić zapomocą równości

$$z^m = e^{m \text{Log}(z)};$$

o ile m nie jest rzeczywiste i wymierne, funkcja ta posiada, równie jak sam logarytm, nieskończenie wiele wartości, ulegających permutacji, gdy z obraca się dokoła punktu $z = 0$. Do tego, aby każda gałąź była funkcją holomorficzną w dziedzinie całej płaszczyzny, wystarczy wytknąć cięcie nieograniczone wzdłuż dowolnego promienia, wychodzącego z początku układu. Pochodna posiada wyrażenie następujące

$$\frac{m}{z} e^{m \text{Log}(z)} = m z^{m-1};$$

rzecz jasna, iż należy nadawać argumentowi zmiennej z tę samą wartość w funkcji i w pochodnej.

272. Funkcje odwrotne: $\text{arc sin } z$, $\text{arc tang } z$. — Funkcje odwrotne względem $\sin z$, $\cos z$, $\text{tang } z$, określimy w sposób analogiczny. Tak więc określimy funkcję $u = \text{arc sin } z$ zapomocą związku

$$z = \sin u;$$

aby rozwiązać to równanie względem u , napiszemy

$$z = \frac{e^{ui} - e^{-ui}}{2i} = \frac{e^{2ui} - 1}{2ie^{ui}},$$

skąd wynika równanie drugiego stopnia

$$(22) \quad U^2 - 2izU - 1 = 0$$

względem niewiadomej pomocniczej $U = e^{ui}$. Z równania tego otrzymujemy

$$(23) \quad U = iz \pm \sqrt{1 - z^2},$$

a przeto

$$(24) \quad u = \text{arc sin } z = \frac{1}{i} \text{Log}(iz \pm \sqrt{1 - z^2}).$$

Równanie $z = \sin u$ posiada tedy dwa szeregi pierwiastków, pochodzących z jednej strony z dwu wartości pierwiastka $\sqrt{1 - z^2}$, z drugiej zaś — z nieskończenie wielu wartości logarytmu. Lecz, jeżeli znamy jeden z tych pierwiastków, łatwo stąd wysnuć wszystkie inne. Oznaczmy pierwiastki równania (22) przez $U = \zeta' e^{i\omega'}$ i $U' = \zeta'' e^{i\omega''}$; zachodzi między nimi związek $U U' = -1$, a zatem $\zeta' \zeta'' = 1$, $\omega' + \omega'' = (2n + 1)\pi$. Można oczywiście założyć: $\omega'' = \pi - \omega'$ i otrzymamy

$$\text{Log}(U) = \log \zeta' + i(\omega' + 2k'\pi)$$

$$\text{Log}(U') = -\log \zeta' + i(\pi - \omega' + 2k''\pi).$$

Wszystkie wartości funkcji $\arcsin z$ są tedy dane zapomocą wzorów:

$$\arcsin z = \omega' + 2k'\pi - i \log \zeta', \quad \arcsin z = \pi + 2k''\pi - \omega' + i \log \zeta',$$

które można jeszcze napisać, gdy założymy $u' = \omega' - i \log \zeta'$, w postaci

$$(A) \quad \arcsin z = u' + 2k'\pi$$

$$(B) \quad \arcsin z = (2k'' + 1)\pi - u'.$$

Gdy punkt z zakreśla krzywą ciągłą, różne wartości logarytmu we wzorze (24) przechodzą ogólnie jedna w drugą w sposób ciągły. Punkty $z = \pm 1$ są to jedyne możliwe punkty krytyczne; dokoła tych punktów zachodzi kolejna przemiana dwu wartości pierwiastka $\sqrt{1 - z^2}$. Wartości zmiennej z , które by czyniły wyrażenie $iz \pm \sqrt{1 - z^2}$ równym zeru, nie istnieją, ponieważ, podnosząc do kwadratu obie strony równania $iz = \mp \sqrt{1 - z^2}$, otrzymujemy $1 = 0$.

Wyobraźmy sobie, żeśmy wykreślili dwa cięcia wzdłuż osi rzeczywistej, jedno od $-\infty$ do punktu -1 , drugie od punktu $+1$ do $+\infty$. Jeżeli postawimy warunek, aby zmienna w swym przebiegu nie przekraczała tych cięć, to rozmaite gałęzie funkcji $\arcsin z$ będą funkcjami jednowartościowymi z . Istotnie, gdy punkt z zakreśla tor zamknięty, nie przekraczający żadnego z tych cięć, oba pierwiastki U, U' równania (22) zakreślają również krzywe zamknięte. Początek układu nie leży wewnątrz żadnej z tych krzywych; gdyby np. krzywa, zakreślona przez U , otaczała początek układu, to musiałaby przeciąć co najmniej raz oś Oy w punkcie, położonym powyżej Ox . Otóż wartości U o postaci iz ($\alpha > 0$) związek (22) podporządkowuje wartość $\frac{1 + \alpha^2}{2\alpha}$ zmiennej z , rzeczywistą i > 1 . Krzywa, zakreślona przez z , musiałaby tedy przekroczyć cięcie, idące od $+1$ do $+\infty$.

Rozmaite gałęzie funkcji $\arcsin z$ są ponad to funkcjami holomor-

ficznemi zmiennej z^1). W istocie, weźmy dwie wartości pobliskie u i u_1 funkcji $\arcsin z$, odpowiadające dwom wartościom pobliskim z i z_1 zmiennej. Mamy

$$\frac{u_1 - u}{z_1 - z} = \frac{u_1 - u}{\sin u_1 - \sin u};$$

gdy moduł różnicy $u_1 - u$ zmierza do zera, stosunek powyższy dąży do granicy $\frac{1}{\cos u} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 - z^2}}$. Dwie wartości pochodnej odpowiadają dwu szeregom (A) i (B) wartości funkcji $\arcsin z$.

Gdy nie czynimy żadnych zastrzeżeń co do przebiegu zmian liczby z , to można przejść od jakiejś określonej wartości początkowej $\arcsin z$ do którejkolwiek z gałęzi tej funkcji, byle dobrać odpowiednio krzywą zamkniętą, po której ma się poruszać punkt z . Istotnie, widzimy przede wszystkim, że gdy z zakreśla dokoła punktu $z = 1$ taką krzywą zamkniętą, że punkt $z = -1$ leży zewnątrz niej, to obie wartości pierwiastka $\sqrt{1 - z^2}$ przechodzą jedna w drugą, i jedna z wartości, należących do szeregu (A), przechodzi w jedną z wartości, należących do (B). Załóżmy następnie, że punkt z porusza się po obwodzie koła o promieniu R większym niż 1 i o środku w początku układu; każdy z punktów U' , U'' przebiega krzywą zamkniętą. Punktowi $z = +R$ równanie (22) podporządkowuje wartości $U' = i\alpha$, $U'' = i\beta$, gdzie α i β są dodatnie; punktowi $z = -R$ odpowiadają podług tego samego równania wartości $U' = -i\alpha'$, $U'' = -i\beta'$ (α' i β' — liczby również rzeczywiste i dodatnie). Każda z krzywych zamkniętych, zakreślonych przez punkty U' , U'' , przecina tedy oś Oy w dwu punktach, z których jeden leży powyżej, drugi poniżej punktu O ; oba logarytmy $\text{Log}(U')$ i $\text{Log}(U'')$ powiększają się tedy lub zmniejszają o $2\pi i$.

Podobnie określamy funkcję $\arctan z$ zapomocą związku $\tan u = z$ czyli

¹⁾ Jeżeli weźmiemy we wzorze $U = iz + \sqrt{1 - z^2}$ tę wartość pierwiastka, która staje się 1-scią dla $z = 0$, to część rzeczywista liczby U pozostaje dodatnią, gdy z nie przekracza cięć, i możemy założyć, oznaczając przez Φ liczbę zawartą pomiędzy $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$, iż $U = Re^{i\Phi}$. Wartość odpowiednia wyrażenia $\frac{1}{i} \text{Log } U$

$$\arcsin z = \frac{1}{i} \text{Log } U = \Phi - i \log R$$

nazywa się niekiedy wartością *główną* (principale) funkcji $\arcsin z$; jest to zwykła wartość kąta o wstawie z , gdy z jest rzeczywiste i zawiera się między -1 a $+1$.

$$z = \frac{1}{i} \frac{e^{2ui} - 1}{e^{2ui} + 1},$$

skąd otrzymujemy

$$e^{2ui} = \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{i-z}{i+z},$$

a przeto

$$\text{arc tang } z = \frac{1}{2i} \text{Log} \left(\frac{i-z}{i+z} \right).$$

Wyrażenie to uwydatnia istnienie dwu punktów krytycznych $\pm i$ funkcji $\text{arc tang } z$. Gdy z obraca się dokola jednego z tych punktów, $\text{Log} \left(\frac{i-z}{i+z} \right)$ powiększa się lub zmniejsza o $2\pi i$, a $\text{arc tang } z$ wzrasta lub zmniejsza się o π .

273. Zastosowanie do rachunku całkowego. — Pochodne określonych przed chwilą funkcji posiadają tę samą postać, jak w przypadku, gdy zmienna jest rzeczywista. Odwrotnie, znane przepisy co do odnajdywania funkcji pierwotnych stosują się również do funkcji elementarnych zmiennej zespolonej. Tak np., oznaczając przez $\int f(z)dz$ wszelką funkcję zmiennej urojonej z , która ma za pochodną $f(z)$, napiszemy

$$\int \frac{Adz}{(z-a)^m} = -\frac{A}{m-1} \frac{1}{(z-a)^{m-1}} \quad (m > 1),$$

$$\int \frac{Adz}{z-a} = A \text{Log} (z-a).$$

Te dwa wzory pozwalają odnaleźć funkcję pierwotną, odpowiadającą dowolnej funkcji wymiernej, o współczynnikach rzeczywistych lub urojonych, byleby były wiadome pierwiastki mianownika.

Rozpatrzmy w szczególności funkcję wymierną, o współczynnikach rzeczywistych, zmiennej rzeczywistej x . Jeżeli mianownik posiada pierwiastki zespolone, to są one parami sprzężone i oba pierwiastki tej samej pary występują tyle samo razy. Weźmy dwa pierwiastki sprzężone $\alpha + \beta i$ i $\alpha - \beta i$, których rząd wielokrotności równa się p . Jeżeli przy rozkładzie na ułamki proste będziemy postępowali z pierwiastkami urojonymi tak samo, jak z pierwiastkami rzeczywistymi, to pierwiastkowi $\alpha + \beta i$ będzie odpowiadał ciąg ułamków prostych

$$\frac{M_1 + N_1 i}{x - \alpha - \beta i} + \frac{M_2 + N_2 i}{(x - \alpha - \beta i)^2} + \dots + \frac{M_p + N_p i}{(x - \alpha - \beta i)^p},$$

a pierwiastek $\alpha - \beta i$ da ciąg analogiczny o mianownikach, sprzężonych z poprzednimi. Połączmy przy obliczaniu funkcji pierwotnej wyrazy, pochodzące od ułamków sprzężonych; otrzymamy, gdy $p > 1$,

$$\begin{aligned} & \int \frac{M_p + N_p i}{(x - \alpha - \beta i)^p} dx + \int \frac{M_p - N_p i}{(x - \alpha + \beta i)^p} dx \\ &= -\frac{1}{p-1} \left[\frac{M_p + N_p i}{(x - \alpha - \beta i)^{p-1}} + \frac{M_p - N_p i}{(x - \alpha + \beta i)^{p-1}} \right] \\ &= -\frac{1}{p-1} \frac{(M_p + N_p i)(x - \alpha + \beta i)^{p-1} + \dots}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{p-1}}; \end{aligned}$$

licznik stanowi oczywiście sumę dwu wielomianów zespolonych sprzężonych. Gdy $p = 1$, mamy

$$\begin{aligned} & \int \frac{M_1 + N_1 i}{x - \alpha - \beta i} dx + \int \frac{M_1 - N_1 i}{x - \alpha + \beta i} dx \\ &= (M_1 + N_1 i) \text{Log} [(x - \alpha) - \beta i] + (M_1 - N_1 i) \text{Log} [(x - \alpha) + \beta i]. \end{aligned}$$

Zastąpmy logarytmy przez ich wyrażenia szczegółowe, a otrzymamy po prawej stronie

$$M_1 \log [(x - \alpha)^2 + \beta^2] + 2N_1 \arctan \frac{\beta}{x - \alpha};$$

wystarczy zastąpić jeszcze $\arctan \frac{\beta}{x - \alpha}$ przez $\left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x - \alpha}{\beta} \right)$, aby odnaleźć wynik, który otrzymaliśmy byli bezpośrednio, bez pomocy symbolów urojonych.

Rozpatrzmy jeszcze całkę nieoznaczoną

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}},$$

która stosownie do znaku współczynnika A występuje w dwóch, zasadniczo różnych postaciach. Wprowadzenie zmiennej zespolonej pozwala na połączenie obu wzorów w jeden; istotnie, jeżeli we wzorze

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \text{Log} (x + \sqrt{1+x^2})$$

zmienimy x na ix , to wypadnie

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{i} \text{Log} (ix + \sqrt{1-x^2}),$$

i prawa strona równości wyraża właśnie $\arcsin x$.

Wprowadzenie symbolów urojonych do rachunku całkowego pozwala tedy stwierdzić ścisły związek pomiędzy wzorami, których powinowactwa nie zauważylibyśmy, gdybyśmy nie opuścili dziedziny liczb rzeczywistych. Oto jeszcze przykład uproszczeń, wynikających z użycia liczb zespolonych:

Mamy, gdy a i b są rzeczywiste:

$$\int e^{(a+bi)x} dx = \frac{e^{(a+bi)x}}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx);$$

przyrównajmy części rzeczywiste i współczynniki przy i , a otrzymamy odrazu obie obliczone już kiedyś (I, art. 109) całki

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2},$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}.$$

Podobniez sprowadzamy całki

$$\int x^m e^{ax} \cos bx dx, \quad \int x^m e^{ax} \sin bx dx$$

do całki $\int x^m e^{(a+bi)x} dx$, którą obliczamy, stosując kilkakrotnie całkowanie przez części.

274. Rozkład na elementy proste funkcji wymiernej wstawy i dostawy zmiennej z . — Jeżeli, mając funkcję wymierną wstawy i dostawy zmiennej, $F(\sin z, \cos z)$, zastąpimy w niej $\sin z$ i $\cos z$ przez ich wyrażenia, dane we wzorach Eulera, to funkcja ta zmieni się w funkcję wymierną $R(t)$ zmiennej $t = e^{zi}$. Funkcja $R(t)$, po dokonaniu rozdziału na elementy proste, będzie się składała z części całkowitej oraz z szeregu ułamków, odpowiadających pierwiastkom mianownika. Jeżeli mianownik funkcji $R(t)$ posiada pierwiastek $t = 0$, to ułamki, odpowiadające temu pierwiastkowi, dołączymy do części całkowitej, co nam da wielomian lub wogóle funkcję wymierną

$$R_1(t) = \Sigma K_m t^m;$$

m może tu przybierać wartości ujemne.

Weźmy pierwiastek mianownika $t = a$, różny od zera. Pierwiastek taki da szereg ułamków prostych.

$$f(t) = \frac{A_1}{t-a} + \frac{A_2}{(t-a)^2} + \dots + \frac{A_n}{(t-a)^n}.$$

"słyszane" = $\log$; "słyszane" = $\secans = \frac{1}{\cos}$
 "do słyszane" = $\csc$; "dosłyszane" = $\cscans = \frac{1}{\sin}$

Ponieważ a nie jest równe zeru, przeto można znaleźć liczbę α , czyniącą zadość równaniu $e^{\alpha i} = a$; $\frac{1}{t-a}$ da się wyrazić nader łatwo w zależności od $\cot \frac{z-\alpha}{2}$. W istocie

$$\cot \frac{z-\alpha}{2} = i \frac{e^{\pi i} + e^{\alpha i}}{e^{\pi i} - e^{\alpha i}} = i \left(1 + \frac{2e^{\alpha i}}{e^{\pi i} - e^{\alpha i}} \right),$$

i stąd wypada nawzajem

$$\frac{1}{t-a} = \frac{1}{e^{\pi i} - e^{\alpha i}} = -\frac{1}{2e^{\alpha i}} \left(1 + i \cot \frac{z-\alpha}{2} \right);$$

ułamek wymierny $f(t)$ przechodzi tedy w wielomian stopnia n względem $\cot \frac{z-\alpha}{2}$

$$A_0' + A_1' \cot \frac{z-\alpha}{2} + A_2' \cot^2 \left(\frac{z-\alpha}{2} \right) + \dots + A_n' \cot^n \left(\frac{z-\alpha}{2} \right).$$

Kolejne potęgi dotyczącej aż do n -tej mogą znowuż być wyrażone za pomocą kolejnych pochodnych tej funkcji, aż do $(n-1)$ -ej; istotnie, mamy przedewszystkim

$$\frac{d \cot z}{dz} = -\frac{1}{\sin^2 z} = -1 - \cot^2 z,$$

a więc $\cot^2 z$ da się wyrazić w zależności od $\frac{d \cot z}{dz}$; dalej można uzasadnić bez trudności, iż jeżeli omawiane prawo jest prawdziwe dla wszystkich potęg, aż do $\cot^n z$ włącznie, to jest również prawdziwe dla $\cot^{n+1} z$. Powyższy wielomian stopnia n względem $\cot \frac{z-\alpha}{2}$ zmienia się tedy w funkcję linjową wyrażenia $\cot \frac{z-\alpha}{2}$ i jego pochodnych

$$\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 \cot \frac{z-\alpha}{2} + \mathcal{A}_2 \frac{d}{dz} \left(\cot \frac{z-\alpha}{2} \right) + \dots + \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(\cot \frac{z-\alpha}{2} \right).$$

Uczyńmy to samo ze wszystkimi pierwiastkami $b, c, \dots, l$ mianownika funkcji $R(t)$, różnemi od zera, i dodajmy wyniki, otrzymane po zastąpieniu w $R_1(t)$ zmiennej t przez $e^{\pi i}$. Rozważana funkcja wymierna $F(\sin z, \cos z)$ będzie się składała z dwóch części

$$(25) \quad F(\sin z, \cos z) = \Phi(z) + \Psi(z);$$

funkcja $\Phi(z)$, analogiczna do części całkowitej funkcji wymiernej zmiennej niezależnej, posiada postać następującą:

$$(26) \quad \Phi(z) = C + \Sigma(\alpha_m \cos mz + \beta_m \sin mz);$$

m oznacza tu liczbę całkowitą, nie równą zero. Co do funkcji $\Psi(z)$, odpowiadającej części ułamkowej funkcji wymiernej, jest to wyrażenie o postaci

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} \Psi(z) = & \mathcal{A}_1 \cot \left(\frac{z-\alpha}{2} \right) + \mathcal{A}_2 \frac{d}{dz} \cot \left(\frac{z-\alpha}{2} \right) + \dots + \mathcal{A}_n \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \cot \left(\frac{z-\alpha}{2} \right) \\ & + \mathcal{B}_1 \cot \left(\frac{z-\beta}{2} \right) + \mathcal{B}_2 \frac{d}{dz} \cot \left(\frac{z-\beta}{2} \right) + \dots + \mathcal{B}_p \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \cot \left(\frac{z-\beta}{2} \right) \\ & + \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

Rolę elementu prostego odgrywa tu funkcja $\cot \left(\frac{z-\alpha}{2} \right)$, podobnie jak przy rozkładzie funkcji wymiernej ułamek $\frac{1}{z-\alpha}$. Funkcja $F(\sin z, \cos z)$, rozłożona w ten sposób, daje się łatwo scałkować; mamy w istocie

$$\int \cot \frac{z-\alpha}{2} dz = 2 \operatorname{Log} \left[\sin \left(\frac{z-\alpha}{2} \right) \right],$$

a pozostałe wyrazy całkujemy bezpośrednio. Ażeby funkcja pierwotna była funkcją okresową, potrzeba i wystarcza, iżby wszystkie spółczynniki $C, \mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1, \dots$ były równe zero.

W praktyce nadanie funkcji $F(\sin z, \cos z)$ postaci ostatecznej (25) niezawsze wymaga dokonania tych wszystkich kolejnych przekształceń. Niech α oznacza wartość zmiennej z , która czyni funkcję F nieskończoną; można zawsze zapomocą zwykłego dzielenia obliczyć spółczynniki $\frac{1}{z-\alpha}, \frac{1}{(z-\alpha)^2}, \dots$, w części, która się staje nieskończoną dla $z=\alpha$. (I art. 188). Z drugiej strony, oznaczając przez $P(z-\alpha)$ odpowiedni szereg potęgowy, mamy

$$\cot \frac{z-\alpha}{2} = \frac{2}{z-\alpha} + P(z-\alpha);$$

przyrównywując spółczynniki tych samych potęg ułamka $\frac{1}{z-\alpha}$ po obu stronach wzoru (25), otrzymamy tedy łatwo $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$.

Weźmy np. funkcję $\frac{1}{\cos z - \cos \alpha}$, która po podstawieniu: $e^{zi} = t$, $e^{zi} = a$, przybiera postać

$$\frac{2at}{a(t^2 + 1) - t(a^2 + 1)};$$

mianownik posiada dwa pierwiastki jednokrotne $t = a$, $t = \frac{1}{a}$, a stopień licznika jest niższy od stopnia mianownika. Otrzymamy tedy rozkład następujący

$$\frac{1}{\cos z - \cos \alpha} = C + \mathcal{A} \cot \frac{z - \alpha}{2} + \mathcal{B} \cot \frac{z + \alpha}{2}.$$

Aby wyznaczyć $\mathcal{A}$, pomnóżmy obie strony przez $z - \alpha$ i uczynmy następnie $z = \alpha$: otrzymamy $\mathcal{A} = -\frac{1}{2 \sin \alpha}$. Podobnie znajdujemy

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2 \sin \alpha}.$$

Gdy zastąpimy $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ przez te wartości i założymy $z = 0$, to okaże się, iż $C = 0$ i osiągamy ostatecznie wzór

$$\frac{1}{\cos z - \cos \alpha} = \frac{1}{2 \sin \alpha} \left(\cot \frac{z + \alpha}{2} - \cot \frac{z - \alpha}{2} \right).$$

Zastosujmy jeszcze metodę ogólną do potęg całkowitych wstawy i dostawy zmiennej z . Mamy np. $(\cos z)^m = \left(\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2} \right)^m$; łącząc z sobą wyrazy, jednakowo oddalone od obu końców licznika, w jego postaci rozwiniętej, i stosując wzory Eulera otrzymujemy bezpośrednio

$$(2 \cos z)^m = 2 \cos mz + 2m \cos (m - 2)z + 2 \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \cos (m-4)z + \dots$$

Jeżeli m jest nieparzyste, ostatni wyraz zawiera $\cos z$; jeżeli m jest parzyste, to wyraz końcowy nie zależy od z i równa się $\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}!\right)^2}$.

Podobnie, jeżeli m jest nieparzyste,

$$(2i \sin z)^m = 2i \sin mz - 2im \sin (m - 2)z + 2i \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} \sin (m-4)z + \dots,$$

a przy m parzystym

$$(2i \sin z)^m = 2 \cos mz - 2m \cos (m - 2)z + \dots + (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{m!}{\left(\frac{m}{2}!\right)^2}.$$

Wzory te wskazują bezpośrednio, iż funkcje pierwotne względem potęg $(\sin z)^m$ i $(\cos z)^m$, są to funkcje perjodyczne zmiennej z , gdy m jest *nieparzyste*, ale tylko w tym przypadku.

U w a g a. — Jeżeli funkcja $F(\sin z, \cos z)$ posiada okres π , to można ją wyrazić, jako funkcję wymierną wyrażenia e^{2zi} i użyć w roli elementów prostych $\cot(z - \alpha)$, $\cot(z - \beta)$, ...

275. Rozwinięcie w szereg funkcji $\text{Log}(1+z)$.— Określiliśmy powyżej funkcję przestępną dwojakiego rodzaju: niektóre, jakoto e^z , $\sin z$, $\cos z$, są całokształtne w dziedzinie całej płaszczyzny, gdy tymczasem inne: $\text{Log}(z)$, $\text{arc tang } z$, ... posiadają punkty osobliwe i nie mogą być wyrażone zapomocą szeregów potęgowych, zbieżnych w dziedzinie całej płaszczyzny. Można atoli tworzyć w takich razach szeregi, ważne dla pewnych części płaszczyzny; okażemy to w zastosowaniu do funkcji logarytmicznej.

Zapomocą zwyczajnego dzielenia otrzymujemy wzór elementarny

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n \pm \frac{z^{n+1}}{1+z};$$

jeżeli $|z| < 1$, reszta $\frac{z^{n+1}}{1+z}$ dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie, i wewnątrz koła C o promieniu równym jedności mamy

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n \pm \dots$$

Oznaczmy przez $F(z)$ szereg, otrzymany zapomocą całkowania tego szeregu wyraz po wyrazie

$$F(z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots;$$

szereg ten jest zbieżny w tym samym kole i wyraża funkcję całokształtną o pochodnej $F'(z) = \frac{1}{1+z}$. Owóż znamy już funkcję, posiadającą taką pochodną; jest to $\text{Log}(1+z)$. Różnica $\text{Log}(1+z) - F(z)$ musi tedy być liczbą stałą¹⁾; aby ją wyznaczyć, należy się porozumieć dokładnie co do obranej gałęzi logarytmu. Jeżeli weźmiemy wartość, która staje się równą zeru przy $z=0$, to dla wszelkiego punktu, położonego wewnątrz C , zachodzi związek

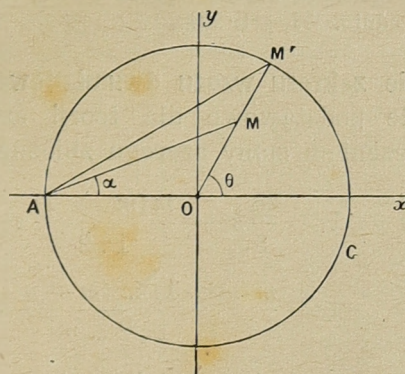
$$(28) \quad \text{Log}(1+z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

Połączmy punkt $A(z=-1)$ z punktem M , wyobrażającym z (rys. 53); moduł liczby $1+z$ równa się długości odcinka $r=AM$, a za argument tej ilości można wziąć kąt α , utworzony przez AM i AO ; gdy

¹⁾ Do tego aby pochodna funkcji analitycznej $X + Yi$ równała się zeru, potrzeba iżby (art. 261) $\frac{\partial X}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$, a przeto również: $\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial X}{\partial y} = 0$; X i Y są tedy liczbami stałymi.

punkt M pozostaje wewnątrz koła C , kąt ten pozostaje zawarty pomiędzy $-\frac{\pi}{2}$ a $+\frac{\pi}{2}$. Wartość logarytmu, równa zeru dla $z = 0$, przybiera postać $\log r + i\alpha$, i wzór (28) nie daje powodu do żadnych nieporozumień.

Rys. 53.



Zastępując w tym wzorze z przez $-z$ i odejmując otrzymany wzór od pierwszego, osiągamy jeszcze wynik następujący

$$\operatorname{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = 2 \left(\frac{z}{1} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \dots \right);$$

a zastępując następnie z przez iz , odnajdujemy ponownie szereg, wyrażający arc tang z

$$\operatorname{arc tang} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right) = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots$$

Szereg (28) pozostaje zbieżnym w każdym punkcie okręgu koła zbieżności oprócz punktu A (str. 19 odsyłacz); przeto oba szeregi

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 3\theta}{3} - \frac{\cos 4\theta}{4} + \dots, \\ \sin \theta &= \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \frac{\sin 4\theta}{4} - \dots \end{aligned}$$

są zbieżne dla wszelkiej wartości argumentu θ prócz $\theta = (2k+1)\pi$ (por. art. 166). Podług twierdzenia Abela suma szeregu w punkcie M' stanowi granicę, do której dąży suma tegoż szeregu w punkcie M , położonym na promieniu OM' . Jeżeli zakładamy, że θ zawiera się pomiędzy $-\pi$ a $+\pi$, to kąt α dąży do granicy $= \frac{\theta}{2}$, a moduł

AM ma za granicę $2 \cos \frac{\theta}{2}$. Możemy tedy napisać

$$\begin{aligned} \log \left(2 \cos \frac{\theta}{2} \right) &= \cos \theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{\cos 3\theta}{3} - \frac{\cos 4\theta}{4} + \dots, \\ \frac{\theta}{2} &= \sin \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} + \frac{\sin 3\theta}{3} - \dots \quad (-\pi < \theta < \pi). \end{aligned}$$

Jeżeli zastąpimy w ostatnim wzorze θ przez $\theta - \pi$, to odnajdziemy wzór, uzasadniony dawniej bezpośrednio. (I, art. 204).

276. Rozszerzenie zakresu wzoru dwumianowego. — W rozprawie, posiadającej znaczenie podstawowe dla teorii szeregów potęgowych, Abel zajął się wyznaczeniem sumy szeregu zbieżnego

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(m, z) &= 1 + \frac{m}{1} z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \dots \\ &+ \frac{m(m-1) \dots (m-p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} z^p + \dots, \end{aligned} \right.$$

dla wszelkich wartości rzeczywistych lub urojonych m i z , czyniących zadość jednemu warunkowi: $|z| < 1$. Można by osiągnąć ten cel zapomocą równania różniczkowego, jak wskazaliśmy już, gdy chodziło o zmienne rzeczywiste (I, art. 183). Użyjemy jednak innej metody, stanowiącej zastosowanie art. 269, a bardziej zbliżonej do biegu rozumowań Abela. Założymy, iż z jest dane i $|z| < 1$, i zbadamy własności funkcji $\varphi(m, z)$, rozważanej jako funkcja zmiennej m . Jeżeli m jest liczbą całkowitą dodatnią, funkcja ta staje się oczywiście wielomianem $(1+z)^m$. Jeżeli m i m' oznaczają dwie jakiekolwiek wartości parametru m , to zawsze

$$(30) \quad \varphi(m, z) \varphi(m', z) = \varphi(m+m', z).$$

W istocie, obliczmy zapomocą zwykłych przepisów iloczyn szeregów $\varphi(m, z)$, $\varphi(m', z)$; zakładając dla uproszczenia

$$m_k = \frac{m(m-1) \dots (m-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k},$$

możemy napisać współczynnik przy z^p w tym iloczynie w postaci

$$(31) \quad m_p + m_{p-1} m_1' + m_{p-2} m_2' + \dots + m_1 m_{p-1}' + m_p',$$

i związek funkcjonalny (30) będzie uzasadniony, gdy okażemy, że wyrażenie (31) jest tożsamościowo równe współczynnikowi przy z^p w $\varphi(m+m', z)$, to jest $(m+m')_p$. Można by sprawdzić bezpośrednio tożsamość

$$(32) \quad (m+m')_p = m_p + m_{p-1} m_1' + \dots + m_p',$$

lecz wykonywanie tego rachunku okaże się zupełnie zbyteczne, jeżeli zauważymy, że związek (30) jest napewno prawdziwy w każdym przypadku, gdy m i m' są liczbami całkowitemi dodatnimi. Obie strony wzoru (32) są to wielomiany całkowite względem m i m' , zawsze równe sobie, gdy m i m' oznaczają liczby całkowite dodatnie; wielomiany te są przeto identyczne.

Z drugiej strony funkcja $\varphi(m, z)$ może być rozwinięta w szereg uszykowany podług potęg rosnących liczby m . W istocie, $\varphi(m, z)$, po wykonaniu wszystkich wskazanych mnożeń, może być uważana za sumę szeregu podwójnego

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi(m, z) = & 1 + \frac{m}{1} z - \frac{m}{2} z^2 + \frac{m}{3} z^3 - \dots \pm \frac{m}{p} z^p \mp \dots \\ & + \frac{m^2}{2} z^2 - \frac{m^2}{2} z^3 + \dots \\ & + \frac{m^3}{6} z^3 - \dots \\ & + \frac{m^p}{1 \cdot 2 \dots p} z^p + \dots, \end{aligned} \right.$$

obliczoną zapomocą dodawania wyrazów wzdłuż kolumn. Ten szereg podwójny jest bezwzględnie zbieżny. W istocie, niech $|z| = \varsigma$ i $|m| = \sigma$; jeżeli zastąpimy każdy wyraz przez jego moduł, suma wyrazów nowego szeregu, należących do $(p+1)$ szej kolumny, będzie równa

$$\frac{\sigma(\sigma+1) \dots (\sigma+p-1)}{1 \cdot 2 \dots p} \varsigma^p;$$

jest to wyraz ogólny szeregu zbieżnego. Można tedy dodawać wyrazy szeregu podwójnego (33) wzdłuż wierszy, i w ten sposób rozwijamy $\varphi(m, z)$ w szereg potęgowy

$$\varphi(m, z) = 1 + \frac{a_1}{1} m + \frac{a_2}{1 \cdot 2} m^2 + \dots$$

Zgodnie ze związkiem (30) i wynikami, uzasadnionemi powyżej (art. 269), szereg ten winien być tożsamościowo równym e^{am} . Owóż współczynnik przy m

$$a_1 = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \text{Log}(1+z);$$

mamy tedy, biorąc wartość logarytmu, równą zeru przy $z=0$,

$$(34) \quad \varphi(m, z) = e^{m \text{ Log}(1+z)}.$$

Można jeszcze nadać temu wyrażeniu postać $(1+z)^m$; ale w celu uniknięcia nieporozumień co do wartości, o którą chodzi, lepiej odwoływać się do wyrażenia $e^{m \operatorname{Log}(1+z)}$.

Niech $m = \eta + \nu i$; nadając liczbom r i α takie samo znaczenie, jak w poprzednim artykule, otrzymujemy

$$\begin{aligned} e^{m \operatorname{Log}(1+z)} &= e^{(\mu + \nu i)(\log r + i\alpha)} \\ &= e^{\mu \log r - \nu \alpha} [\cos(\mu \alpha + \nu \log r) + i \sin(\mu \alpha + \nu \log r)]. \end{aligned}$$

Aby skończyć z tym zagadnieniem, zbadajmy jeszcze omawiany szereg na obwodzie koła zbieżności. Oznaczmy przez U_n moduł wyrazu ogólnego, dla jakiegoś punktu z tego okręgu; stosunek dwu następujących po sobie wyrazów szeregu modułów równa się $\left| \frac{m-n+1}{n} \right|$, t. j. jeżeli $m = \mu + \nu i$,

$$\frac{\sqrt{(\mu+1-n)^2 + \nu^2}}{n} = 1 - \frac{\mu+1}{n} + \frac{\Psi(n)}{n^2};$$

funkcja $\Psi(n)$ w tym wzorze pozostaje skończona, gdy n rośnie nieograniczenie. Zastosowanie znanego sprawdzianu zbieżności (I art, 163) przekonywa, że ów szereg modułów jest zbieżny, gdy $\mu+1 > 1$, a rozbieżny we wszystkich innych wypadkach. *Szereg (29) jest tedy bezwzględnie zbieżny we wszystkich punktach obwodu koła zbieżności, jeżeli μ jest dodatnie.*

Jeżeli $\mu+1$ jest ujemne lub równe zero, to moduł wyrazu ogólnego nigdy nie maleje, ponieważ stosunek $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ nie jest nigdy mniejszy od jedności. A więc, jeżeli $\mu \leq -1$, *szereg (29) jest rozbieżny we wszystkich punktach okręgu.*

Należy jeszcze zbadać przypadek, gdy $-1 < \mu \leq 0$. Rozpatrzmy szereg o wyrazie ogólnym U_n^p ; stosunek dwu następujących po sobie wyrazów równa się

$$\left[1 - \frac{\mu+1}{n} + \frac{\Psi(n)}{n^2} \right]^p = 1 - \frac{p(\mu+1)}{n} + \frac{\Psi_1(n)}{n^2},$$

i jeżeli weźmiemy p dość wielkie, by został spełniony warunek $p(\mu+1) > 1$, szereg ten będzie zbieżny. Stąd wynika, iż U_n^p ; a więc i moduł wyrazu ogólnego U_n , dąży do zera. Wobec tego weźmy z obu stron tożsamości

$$\varphi(m, z)(1+z) = \varphi(m+1, z)$$

jedynie wyrazy stopnia niższego niż n lub równego n ; oznaczając odpowiednio przez S_n i S'_n sumy $(n+1)$ pierwszych wyrazów szeregów $\varphi(m, z)$ i $\varphi(m+1, z)$, otrzymujemy związek

$$S_n(1+z) = S'_n + \frac{m(m-1) \dots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} z^{n+1}.$$

Jeżeli część rzeczywista liczby m zawiera się pomiędzy -1 a 0 , to część rzeczywista sumy $m+1$ jest dodatnia. Załóżmy, iż $|z| = 1$: gdy n rośnie nieograniczenie, S'_n dąży do swej granicy, a wyraz uzupełniający dąży do zera; stąd wynika, iż S_n zmierza również do pewnej granicy, o ile tylko nie mamy $1+z=0$. Przeto, *gdy $-1 < \mu \leq 0$, szereg (29) jest zbieżny we wszystkich punktach obwodu koła zbieżności z wyjątkiem punktu $z = -1$.*

III. — Wiadomości o odwzorowaniu podobnym.

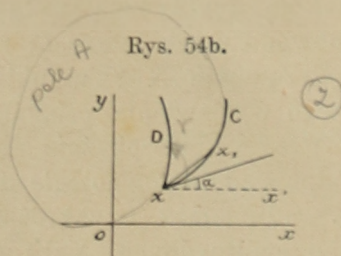
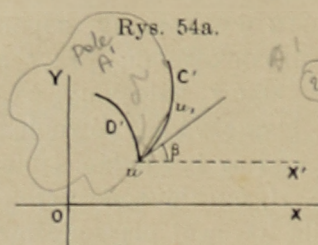
277. **Znaczenie geometryczne pochodnej.** — Niech $u = X + Yi$ stanowi funkcję analityczną zmiennej zespolonej z , holomorficzną wewnątrz obwodu zamkniętego C ; wartość u wyobrazimy zapomocą punktu o współrzędnych X, Y w układzie prostokątnym; przytym dla dogodniejszego wysłowienia osiąganých wyników założymy, że osie OX i OY , położone w płaszczyźnie xy lub płaszczyźnie równoległej do pł. xy , są odpowiednio równoległe do osi ox i oy i zgodne z niemi co do zwrotów. Gdy punkt z zakreśla pole A , ograniczone przez obwód C , punkt u o współrzędnych (X, Y) zakreśla w swej płaszczyźnie pole A' ; związek $u = f(z)$ określa tedy pewien sposób podporządkowania wzajemnego punktów dwóch płaszczyzn lub dwóch części płaszczyzny. Lecz jest to rzecz oczywista, że z powodu związków pomiędzy pochodnymi funkcji X i Y ten sposób podporządkowania wzajemnego musi posiadać pewne szczególne właściwości; okażemy mianowicie, że *kąty są zachowane bez zmian*.

Niech z i z_1 oznaczają dwa punkty sąsiednie pola A, u i u_1 — punkty odpowiednie pola A' ; stosownie do samego określenia pochodnej, iloraz $\frac{u_1 - u}{z_1 - z}$ dąży zawsze do granicy $f'(z)$, gdy moduł $|z_1 - z|$ dąży do zera, niezależnie od tego, w jaki sposób $z_1 - z$ zmierza do zera. Założmy, że punkt z_1 zbliża się do punktu z , przebiegając krzywą C , której styczna w punkcie z tworzy kąt α z prostą, równoległą do ox ; punkt u_1 zakreśli wtedy krzywą C' , przechodzącą przez punkt u . Nie rozważając przypadku, w którym $f'(z) = 0$, oznaczmy moduł i argument pochodnej $f'(z)$ przez ς i ω ; r i r_1 niech oznaczają odległości zz_1 i uu_1 , α' — kąt utworzony przez zz_1 z prostą zx' równoległą do ox , β' — kąt prostej uu_1 z prostą uX' , równoległą do OX . Moduł ilorazu $\frac{u_1 - u}{z_1 - z}$ równa się $\frac{r_1}{r}$, a argument $\beta' - \alpha'$. Mamy tedy dwa związki

$$(35) \quad \lim \frac{r_1}{r} = \varsigma, \quad \lim (\beta' - \alpha') = \omega + 2k\pi.$$

Zajmiemy się jedynie drugim z tych związków; można w nim założyć $k = 0$, ponieważ to jest równoważne powiększeniu argumentu ω o wielokrotność liczby 2π . Gdy punkt z_1 , przebiegając krzywą C , zbliża się do punktu z , α' dąży do α , jako do granicy, β' dąży do β , i otrzymujemy $\beta = \alpha + \omega$, co wyraża, że *aby mieć kierunek stycznej do krzywej, zakreślonej*

przez punkt u , wystarczy obrócić o pewien kąt stały w kierunku stycznej do krzywej, zakreślonej przez z . Zakładamy, rzecz jasna, w tym twierdzeniu, że podporządkowujemy sobie wzajemnie zwroty stycznych, odpowiadające temu samemu kierunkowi przebiegu punktów z i u .



Weźmy w płaszczyźnie xoy inną krzywą D , przechodzącą przez punkt z , której odpowiada w płaszczyźnie XOY krzywa D' ; oznaczając literami γ i δ kąty, utworzone przez odpowiadające sobie kierunki stycznych tych dwu krzywych z prostymi xz' i ux' (rys. 54a i 54b), mamy jednocześnie

$$\beta = \alpha + \omega, \quad \delta = \gamma + \omega$$

a stąd $\delta - \beta = \gamma - \alpha$. Krzywe C' i D' przecinają się pod tym samym kątem, co krzywe C i D . Widzimy ponad to, że został zachowany bez zmiany zwrot kątów. Należy zauważyć, że dowód traci wartość, gdy $f'(z) = 0$.

W szczególności, jeżeli rozważamy w jednej z płaszczyzn xoy i XOY dwie rodziny krzywych ortogonalnych, krzywe odpowiednie utworzą w drugiej płaszczyźnie również dwie rodziny krzywych, przecinających się pod kątem prostym. Np. dwie rodziny krzywych $X=C$, $Y=C'$ oraz dwie inne rodziny

$$(36) \quad \operatorname{mod} f(z) = C, \quad \arg f(z) = C'$$

tworzą w płaszczyźnie xoy sieci prostokątne, ponieważ krzywe, odpowiadające im w płaszczyźnie XOY , tworzą w pierwszym przypadku dwa układy prostych, równoległych do osi współrzędnych, w drugim zaś — są to koła, których środek stanowi początek układu, oraz proste, wykreślone z początku układu.

Przykłady. — 1. Załóżmy, iż $z' = z^\alpha$ [α — liczba rzeczywista i dodatnia]. Gdy oznaczymy przez r i θ współrzędne biegunowe punktu z' , to związek poprzedni stanie się równoważny związkowi: $r' = r^\alpha$, $\theta' = \alpha\theta$. Przechodzimy tedy od punktu z do punktu z' , podnosząc promień wodzący do potęgi α i mnożąc kąt biegunowy przez α . Kąty są zachowane, z wyjątkiem tych, których wierzchołkiem jest początek układu, a które są pomnożone przez czynnik stały α .

2. Rozważmy przekształcenie dwulinjowe

$$(37) \quad z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

(a, b, c, d — liczby stałe dowolne). W pewnych przypadkach szczególnych widać bezpośrednio, jak przejść od punktu z do punktu z' . Weźmy np. przekształcenie $z' = z + b$; jeżeli $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$, $b = \alpha + \beta i$, to ze związku tego wynika: $x' = x + \alpha$, $y' = y + \beta$, a więc przechodzimy od punktu z do punktu z' zapomocą przeniesienia równoległego. Załóżmy podobnież $z' = az$; oznaczając przez ρ i ω moduł i arg. liczby a , otrzymamy: $r' = \rho r$, $\theta' = \omega + \theta$. Przechodzimy tedy od punktu z do punktu z' zapomocą pomnożenia promienia wodzącego przez liczbę stałą ρ , a następnie obrotu tegoż promienia o kąt stały ω . Otrzymujemy tedy przekształcenie, określone przez wzór $z' = az$, kojarząc przekształcenie jednokładne z obrotem. Rozpatrzmy wreszcie związek

$$z' = \frac{1}{z};$$

nadając symbolom r, θ, r', θ' zawsze to samo znaczenie, otrzymamy w tym przypadku $rr' = 1$, $\theta + \theta' = 0$. Iloczyn promieni wodzących równa się tedy jedności, gdy tymczasem kąty biegunowe posiadają znaki przeciwne ale są równe co do wartości bezwzględnej. Mając dane koło C o środku A i promieniu R , nazwiemy *inwersją* (inversion) względem tego koła przekształcenie przez promienie odwrotne (transformation par rayons vecteurs réciproques) o biegunie A i module R^2 . Otrzymujemy tedy przekształcenie, określone przez wzór $z'z = 1$, wykonywując z początku inwersję względem koła o promieniu, równym jedności, mającego środek w początku układu, a następnie biorąc punkt symetryczny z otrzymanym punktem względem osi Ox .

Przekształcenie najogólniejsze o postaci (37) może być otrzymane jako wynik skojarzenia przekształceń szczególnych, któreśmy przed chwilą poznali. Jeżeli $c = 0$, to można zastąpić przekształcenie (37) przez parę przekształceń

$$z_1 = \frac{a}{d}, \quad z' = z_1 + \frac{b}{d};$$

jeżeli c nie równa się zeru, to dzieląc licznik przez mianownik możemy napisać

$$z' = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2 z + cd},$$

i badane przekształcenie może być zastąpione przez szereg przekształceń następujących:

$$\begin{aligned} z_1 &= z + \frac{d}{c}, & z_2 &= c^2 z_1, & z_3 &= \frac{1}{z_2}, \\ z_4 &= (bc - ad) z_3, & z' &= z_4 + \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Każde z tych przekształceń szczególnych zachowuje kąty i kierunek obrotu i przemienia koła również w koła; to samo tedy stosuje się do przekształcenia ogólnego (37), zwanego z tego powodu *przekształceniem kołowym* (transformation circulaire). Zauważmy, że formułując ten wynik, uważamy linie proste za okręgi o promieniu nieskończenie wielkim.

3. Oznaczając przez $e_1, e_2, \dots, e_p$ jakiekolwiek ilości i biorąc za wykładniki $m_1, m_2, \dots, m_p$ liczby rzeczywiste, dodatnie lub ujemne, założymy:

$$z' = (z - e_1)^{m_1} (z - e_2)^{m_2} \dots (z - e_p)^{m_p}.$$

Liczby $z, e_1, e_2, \dots, e_p$ wyobraźmy zapomocą punktów $M, E_1, E_2, \dots, E_p$; odległości $ME_1, ME_2, \dots, ME_p$ oznaczmy przez $r_1, r_2, \dots, r_p$, a kąty, utworzone przez proste $E_1M, E_2M, \dots, E_pM$ z prostymi, równoległymi do Ox — przez $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$. Moduł i argument liczby z' równają się odpowiednio $r_1^{m_1} r_2^{m_2} \dots r_p^{m_p}$ i $m_1 \theta_1 + \dots + m_p \theta_p$; dwie rodziny krzywych

$$r_1^{m_1} r_2^{m_2} \dots r_p^{m_p} = C, \quad m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2 + \dots + m_p \theta_p = C'$$

tworzą przeto sieć prostokątną. Gdy wykładniki $m_1, m_2, \dots, m_p$ są wymierne, wszystkie te krzywe są algebraiczne. Jeżeli np. $p = 2, m_1 = m_2 = 1$, to jedna z tych rodzin składa się z kassinoid (cassinoides) o dwóch ogniskach, a druga jest utworzona przez hiperbole równoboczne.

278. Badanie ogólne odwzorowań podobnych. — Roztrząsanie twierdzenia odwrotnego względem tego, któreśmy powyżej uzasadnili, nasuwa do zbadania zagadnienie o szerszym jeszcze zakresie. Mając dwie powierzchnie Σ i Σ' , podporządkujemy punkty każdej z nich punktom drugiej w sposób dowolny (z zachowaniem atoli pewnych warunków, które ściślej będą określone), i zbadajmy, w jakich przypadkach takie przekształcenie nie zmienia wielkości kątów. Oznaczmy przez x, y, z współrzędne prostokątne punktu powierzchni Σ , a przez x', y', z' — współrzędne prostokątne punktu powierzchni Σ' . Zakładamy, iż współrzędne x, y, z, x', y', z' są wyrażone w zależności od dwu parametrów zmiennych u i v w ten sposób, że punkty odpowiednie obu powierzchni są wyznaczone przez ten sam układ wartości parametrów u i v

$$(38) \quad \Sigma \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = \varphi(u, v), \\ z = \psi(u, v), \end{cases} \quad \Sigma' \begin{cases} x' = f'(u, v), \\ y' = \varphi'(u, v), \\ z' = \psi'(u, v); \end{cases}$$

zakładamy ponad to, że zarówno funkcje $f, \varphi, \dots$, jak ich pochodne cząstkowe pierwszego rzędu są ciągłe, o ile punkty (x, y, z) i (x', y', z') pozostają w pewnych określonych obszarach powierzchni Σ i Σ' . Przypomnijmy sobie przytym znakowanie, wprowadzone dawniej (I, art. 131)

$$(39) \quad \begin{cases} E = S \left(\frac{dx}{du} \right)^2, & F = S \frac{dx}{du} \frac{dx}{dv}, & G = S \left(\frac{dx}{dv} \right)^2, \\ E' = S \left(\frac{dx'}{du} \right)^2, & F' = S \frac{dx'}{du} \frac{dx'}{dv}, & G' = S \left(\frac{dx'}{dv} \right)^2, \\ ds^2 = Edu^2 + Fdudv + Gdv^2, & ds'^2 = E'du^2 + F'dudv + G'dv^2. \end{cases}$$

Obierzmy na powierzchni Σ dwie krzywe C i D (rys. 55a i 55b), przechodzące przez punkt m tej powierzchni, którym odpowiadają na powierzchni Σ' krzywe C' i D' , przechodzące przez punkt m' . Przy poruszaniu się wzdłuż krzywej C parametry u i v stanowią funkcje jednej zmiennej pomocniczej t — oznaczmy różniczki tych funkcji przez du i dv ; podobnie przy przebiegu wzdłuż D u i v stanowią funkcje jednej zmiennej t' , których różniczki oznaczmy przez δu i δv . Ogólnie będziemy oznaczali przez litery d i δ różniczki, odpowiadające przesunięciu wzdłuż krzywej C i wzdłuż D . Spółczynniki kierunkowe stycznej do krzywej C są następujące

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv;$$

podobnie wyrazimy współczynniki kierunkowe stycznej do krzywej D

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial u} \delta u + \frac{\partial x}{\partial v} \delta v, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial u} \delta u + \frac{\partial y}{\partial v} \delta v, \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial u} \delta u + \frac{\partial z}{\partial v} \delta v.$$

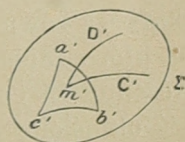
Dostawa kąta ω pomiędzy stycznymi krzywych C i D da się wyznaczyć zapomocą wzoru

$$\cos \omega = \frac{dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}},$$

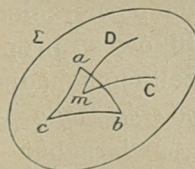
który przy uwzględnieniu znakowania (39) może być napisany w postaci

$$(40) \quad \cos \omega = \frac{E du \delta u + F(du \delta v + dv \delta u) + G dv \delta v}{\sqrt{E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}.$$

Rys. 55a.



Rys. 55b.



Mamy podobnie, oznaczając przez ω' kąt pomiędzy stycznymi krzywych C' i D' ,

$$(41) \quad \cos \omega' = \frac{E' du \delta u + F'(du \delta v + dv \delta u) + G' dv \delta v}{\sqrt{E' du^2 + 2F' du dv + G' dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}}.$$

Ażeby rozważane przekształcenie nie zmieniało wartości kątów, potrzeba, iżby przy wszelkich du , dv , δu , δv zachodził związek $\cos \omega' = \cos \omega$.

Owóż obie strony równości

$$\cos^2 \omega' = \cos^2 \omega$$

stanowią funkcje wymierne stosunków $\frac{\partial v}{\partial u'} \frac{dv}{du}$, które muszą być równe przy wszelkich wartościach tych stosunków. Potrzeba do tego, iżby odpowiednie współczynniki tych dwu funkcji ułamkowych były proporcjonalne, to jest iżbyśmy mieli, oznaczając przez λ jakąś funkcję parametrów u i v

$$(42) \quad \frac{E'}{E} = \frac{F'}{F} = \frac{G'}{G} = \lambda^2;$$

warunki te są oczywiście dostateczne, gdyż np. $\cos \omega$ jest funkcją jednorodną stopnia zerowego ilości E, F, G .

Warunki (42) mogą być zastąpione przez jeden tylko związek $ds'^2 = \lambda^2 ds^2$ czyli

$$ds' = \lambda ds;$$

związek ten wyraża, że stosunek dwu odpowiednich łuków dąży do granicy niezależnej od du i dv , gdy te oba łuki maleją nieograniczenie. Taki warunek czyni wniosek, zależny odeń, niemal bezpośrednio oczywistym. W istocie, weźmy na pierwszej powierzchni nieskończenie mały trójkąt abc — odpowiadający mu trójkąt, położony na drugiej powierzchni, nazwijmy $a'b'c'$. Uważajmy te trójkąty w przybliżeniu za prostoliniowe; ponieważ stosunki $\frac{a'b'}{ab}, \frac{a'c'}{ac}, \frac{b'c'}{bc}$ dążą do tej samej granicy $\lambda(u, v)$, przeto w położeniu granicznym trójkąty są podobne i odpowiednie ich kąty są równe.

Widzimy, że dwie odpowiednie nieskończenie małe figury, położone na omawianych powierzchniach, mogą być uważane za podobne, ponieważ długości łuków są proporcjonalne i kąty są równe; z tego powodu nadajemy wszelkiemu podporządkowaniu, które zachowuje bez zmiany kąty, nazwę *odzworowania podobnego* (*représentation conforme*).

Mając dwie powierzchnie Σ i Σ' i jakieś określone podporządkowanie punktów tych powierzchni, możemy zawsze przekonać się, czy warunki (42) są spełnione, a więc czy mamy do czynienia z odzworowaniem podobnym jednej powierzchni na drugiej. Może atoli chodzić o rozwiązanie innych zagadnień; możemy np., gdy są dane powierzchnie Σ i Σ' , zająć się wyznaczeniem wszystkich sposobów podporządkowania wzajemnego punktów tych powierzchni, które zachowują kąty bez zmiany. Załóżmy, że współrzędne (x, y, z) punktów powierzchni Σ są wyrażone w zależności od dwu parametrów (u, v) , a współrzędne (x', y', z')

punktów Σ' — w zależności od dwu innych parametrów (u' , v'); wyrażenia kwadratów elementów linjowych są następujące:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2, \quad ds'^2 = E'du'^2 + 2F'du'\,dv' + G'dv'^2.$$

Zagadnienie, dane do rozwiązania, sprowadza się do zadania: *Znaleźć dwie takie funkcje $u' = \pi_1(u, v)$, $v' = \pi_2(u, v)$, iżbyśmy mieli tożsamościowo, oznaczając przez λ funkcję dowolną zmiennych u i v :*

$$E'd\pi_1^2 + 2F'd\pi_1d\pi_2 + G'd\pi_2^2 = \lambda^2(Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2).$$

Z teorii ogólnej równań różniczkowych wynika, iż zadanie to posiada zawsze nieskończenie wiele rozwiązań, w tym miejscu roztrząśniemy tylko pewne przypadki szczególne.

279. Odwzorowanie podobne płaszczyzny na płaszczyźnie. — Wszelkie podporządkowanie wzajemne punktów dwóch płaszczyzn określa się zapomocą wzorów o postaci

$$(44) \quad X = P(x, y), \quad Y = Q(x, y);$$

zakładamy przytym, że rozważane płaszczyzny stanowią odpowiednio podstawy układów współrzędnych prostokątnych (x, y) i (X, Y) . Podług tego cośmy stwierdzili, do zachowania kątów przy przekształceniu potrzeba i wystarcza, iżby zachodził związek

$$d\lambda^2 + dY^2 = \lambda^2(dx^2 + dy^2)$$

(λ — funkcja dowolna zmiennych x i y , niezależna od ich różniczek). Rozwijając różniczki dX i dY i wyrażając warunki tożsamości dwu stron równania, przekonujemy się, że funkcje $P(x, y)$ i $Q(x, y)$ winny czynić zadość warunkom

$$(45) \quad \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2, \quad \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} = 0.$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ nie mogą jednocześnie równać się zeru,

gdyż pierwszy ze związków (45) wykazałby również, iż $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = 0$

a więc funkcje P i Q musiałyby być liczbami stałymi. Możemy tedy, oznaczając przez μ niewiadomą pomocniczą, napisać na zasadzie drugiego związku

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \mu \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\mu \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Podstawiając te wartości do pierwszego z warunków (45), nadajemy mu postać

$$(\mu^2 - 1) \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)^2 \right] = 0,$$

skąd wnioskujemy, że $\mu = \pm 1$. Muszą tedy zachodzić już to związki

$$(46) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

już to inne

$$(47) \quad \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Pierwszy układ warunków wyraża, że $P + iQ$ jest funkcją analityczną zmiennej $x + iy$; co do drugiego układu, sprowadzamy go do pierwszego zapomocą zamiany Q na $-Q$, to jest biorąc figurę symetryczną względem osi OX z figurą przekształconą. Ostatecznie, wszelkiemu odwzorowaniu podobnemu płaszczyzny na płaszczyźnie odpowiada jakieś rozwiązanie układu (46) a zatem pewna funkcja analityczna. Jeżeli zakładamy, że osie OX i OY są odpowiednio równoległe do osi ox i oy , to zwrot kątów jest lub nie jest zachowany, stosownie do tego, czy funkcje P i Q czynią zadość równaniom (46) czy też (47).

280. Twierdzenie Riemanna. — Są dane: w płaszczyźnie zmiennej z pole A , ograniczone przez obwód pojedynczy (czyli obwód niezłożony — *contour simple*) oraz, w płaszczyźnie zmiennej u , koło C . Riemann dowiódł, że w tych warunkach istnieje taka funkcja analityczna $u = f(z)$, całokształtna w obszarze A , iż każdemu punktowi pola A odpowiada punkt koła i nawzajem każdemu punktowi koła odpowiada jeden i tylko jeden punkt pola A . Funkcja $f(z)$ zależy jeszcze od trzech stałych dowolnych, które można dobrać w ten sposób, aby środek koła odpowiadał jakiemuś określonemu punktowi pola A i ponad to jakiś punkt, dowolnie obrany na okręgu koła, odpowiadał określonemu punktowi obwodu pola A .

Nie podamy tutaj dowodu tego twierdzenia, lecz wskażemy tylko niektóre przykłady z zakresu jego zastosowania.

Zauważmy, że można zastąpić koło C przez półpłaszczyznę. W istocie, założmy, że okrąg koła C w płaszczyźnie zmiennej u przechodzi przez początek układu; przekształcenie $u' = \frac{1}{u}$ zmienia ten okrąg w prostą, a koło w część płaszczyzny zmiennej u' , położoną z jednej strony tej prostej, przedłużonej nieograniczenie w obu zwrotach.

Przykłady. — Po 1-sze. Załóżmy, biorąc α rzeczywiste i dodatnie, że $u = z^\alpha$; część A płaszczyzny zmiennej z niech się zawiera pomiędzy prostą ox a promieniem nieograniczonym, wychodzącym z początku układu i tworzącym z ox kąt ω ($\alpha \leq 2$). Jeżeli $z = re^{i\theta}$, $u = Re^{i\omega}$, to

$$R = r^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \omega = \frac{\theta}{\alpha};$$

gdy punkt z przebiega obszar A , r zmienia się od O do $+\infty$ a θ od O do $\alpha\pi$; R zmienia się tedy od O do $+\infty$ a ω od O do π . Punkt u przebiega przeto półpłaszczyznę, położoną powyżej osi OX , i każdemu punktowi tej półpłaszczyzny odpowiada tylko jeden punkt pola A , ponieważ mamy nawzajem: $r = R^\alpha$, $\theta = \alpha\omega$.

Weźmy jeszcze część B płaszczyzny zmiennej z , ograniczoną przez dwa przecinające się łuki kół. Punktom przecięcia niech odpowiadają wartości z_2 , z_1 ; jeżeli wykonamy z początku przekształcenie

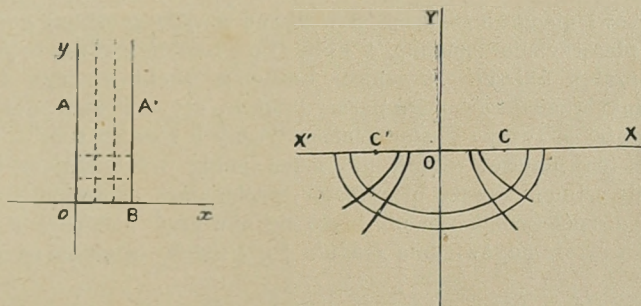
$$z' = \frac{z - z_0}{z - z_1}$$

pole B zostanie zastąpione przez część A płaszczyzny zmiennej z' , zawartą pomiędzy dwoma promieniami nieograniczonymi, wychodzącymi z początku układu, ponieważ wzdłuż łuku koła, przechodzącego przez punkty z_0 , z_1 , argument ilorazu $\frac{z - z_0}{z - z_1}$ zachowuje stałą wartość. Stosując następnie przekształcenie poprzednie, określone przez wzór $u = (z')^\alpha$, stwierdzamy, że funkcja

$$u = \left(\frac{z - z_0}{z - z_1} \right)^\alpha$$

odpowiada przy α odpowiednio dobranym odwzorowaniu podobnemu pola B na półpłaszczyźnie.

Rys. 56.



Po 2-gie. $u = \cos z$. Niech z przebiega półpas (demi-bande) nieograniczony R czyli $AOBA'$ (rys. 56), określony zapomocą nierówności $0 \leq x \leq \pi$, $y \geq 0$; wyznaczmy obszar, zakreślany przez punkt $u = X + Yi$. Mamy w tym przypadku (art. 270)

$$(48) \quad X = \cos x \frac{e^y + e^{-y}}{2}, \quad Y = -\sin x \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

Gdy x wzrasta od O do π , Y jest wciąż ujemne i punkt u pozostaje w części płaszczyzny, położonej poniżej osi XOX . Każdemu punktowi obszaru R odpowiada przeto pewien punkt tej półpłaszczyzny zmiennej u , a gdy punkt z leży na obwodzie pola R , to $Y = 0$, ponieważ jeden z dwu czynników: $\sin x$ lub $\frac{e^y - e^{-y}}{2}$ równa się

zeru. Nawzajem każdemu punktowi półpłaszczyzny zmiennej u , położonej poniżej OX , odpowiada pewien jedyny punkt półpasa R w płaszczyźnie zmiennej z . Istotnie, jeżeli z' stanowi pierwiastek równania $u = \cos z'$, to wszystkie inne pierwiastki posiadają postać ogólną $2k\pi \pm z'$. Założmy, iż współczynnik przy i w z' jest dodatni; w takim razie tylko jeden z punktów, odpowiadających pierwiastkom, należy do pasa R , ponieważ wszystkie punkty $2k\pi - z'$ leżą poniżej osi Ox . Że istnieje zawsze jeden z punktów $2k\pi + z'$, należący do R , wynika z tego, że dość wyznaczyć odpowiednio k , aby odcięta zawierała się pomiędzy 0 a 2π . Ta odcięta nie może być zawartą pomiędzy π a 2π , ponieważ w takim razie wartość odpowiednia Y byłaby dodatnia. Taki punkt jest tedy położony w polu R .

Z wzorów (48) łatwo wywnioskować, że gdy punkt z przebiega wewnątrz pasa, R odcinek prostej, równoległej do Ox , punkt u zakreśla pół elipsy. Gdy punkt z przebiega prostą, równoległą do Oy , punkt u zakreśla pół gałęzi hiperboli. Wszystkie te przekroje stożkowe mają za ogniska punkty C i C' osi OX , o odciętych $+1$ i -1 .

Po 3 cie. Założmy, nadając parametrowi a wartość rzeczywistą i dodatnią:

$$(49) \quad u = \frac{e^{\frac{\pi z}{2a}} - 1}{e^{\frac{\pi z}{2a}} + 1}$$

Ażeby $|u|$ było mniejsze od jednośc, potrzeba i wystarcza — jak wskazuje łatwy rachunek — iżby był spełniony warunek $\frac{\pi y}{2a} > 0$. Zmieniając y od $-a$ do $+a$, widzimy, iż pasowi nieograniczonemu, zawartemu między prostymi $y = -a$ i $y = +a$, odpowiada w płaszczyźnie zmiennej u koło C o promieniu równym *jedności*, mające za środek początek układu. Nawzajem każdemu punktowi tego koła odpowiada tylko jeden punkt wzmiankowanego pasa. Istotnie, wartości zmiennej z , odpowiadające jakiejś wartości u , tworzą postęp geometryczny o różnicy $4ai$ — do rozważanego pasa nie może tedy należeć więcej, niż jeden punkt, wyobrażający taką wartość z . Z drugiej strony istnieje zawsze pierwiastek, posiadający współczynnik przy i zawarty między $-a$ i $3a$; współczynnik ten nie może się zawierać pomiędzy a i $3a$, ponieważ w takim razie wartość odpowiednia modulu $|u|$ byłaby większa od *jedności*.

281. *Mapy.* — Wykonać mapę jakiejś powierzchni to znaczy porządkować punkty tej powierzchni punktom płaszczyzny w ten sposób, iżby kąty zostały zachowane bez zmiany. Założmy, że spólrzędne punktów rozważanej powierzchni Σ są wyrażone w zależności od dwu parametrów zmiennych (u, v) ; kwadrat elementu linjowego

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2.$$

Oznaczmy przez (α, β) spólrzędne prostokątne punktu płaszczyzny P , odpowiadającego punktowi (u, v) powierzchni Σ . Chodzi o wyznaczenie takich funkcji

$$u = \pi_1(\alpha, \beta), \quad v = \pi_2(\alpha, \beta),$$

izbyśmy mieli tożsamościowo, oznaczając przez λ funkcję dowolną zmiennych α i β , nie zawierającą różniczek:

$$E du^2 + 2 F dudv + G dv^2 = \lambda (d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Zagadnienie to posiada nieskończenie wiele rozwiązań, które możemy odnaleźć, gdy się ma jedno z nich, stosując zbadane już odwzorowania podobne płaszczyzny na płaszczyźnie. W istocie, założmy, że zachodzą jednocześnie związki

$$ds^2 = \lambda (d\alpha^2 + d\beta^2), \quad ds^2 = \lambda' (d\alpha'^2 + d\beta'^2);$$

stąd wynika również

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = \frac{\lambda'}{\lambda} (d\alpha'^2 + d\beta'^2),$$

a więc $\alpha + \beta i$ lub $\alpha - \beta i$ jest funkcją analityczną zmiennej $\alpha' + \beta' i$. Twierdzenie odwrotne jest oczywiste.

Przykłady: 1. Rzut Merkatora. — Można narysować mapę każdej powierzchni obrotowej w ten sposób, iżby równoleżniki i południki odpowiadaly prostym, równoległym do osi współrzędnych. W istocie, współrzędne punktów powierzchni obrotowej o osi Oz mogą być wyrażone w sposób następujący:

$$x = \varsigma \cos \omega, \quad y = \varsigma \sin \omega, \quad z = f(\varsigma),$$

stąd

$$ds^2 = d\varsigma^2 [1 + f'^2(\varsigma)] + \varsigma^2 d\omega^2 = \varsigma^2 \left[d\omega^2 + \frac{1 + f'^2(\varsigma)}{\varsigma^2} d\varsigma^2 \right]$$

czyli

$$ds^2 = \varsigma^2 (dX^2 + dY^2),$$

jeżeli zakładamy:

$$X = \omega, \quad Y = \int \frac{\sqrt{1 + f'^2(\varsigma)}}{\varsigma} d\varsigma.$$

Gdy mamy do czynienia z kulą o promieniu R , to możemy napisać

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, \quad y = R \sin \theta \sin \varphi, \quad z = R \cos \theta,$$

$$ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = R^2 \sin^2 \theta \left(d\varphi^2 + \frac{d\theta^2}{\sin^2 \theta} \right);$$

założymy tedy:

$$X = \varphi, \quad Y = \int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \log \left(\tan \frac{\theta}{2} \right).$$

Otrzymujemy w ten sposób rzut zwany rzutem Merkatora (projection de Mercator), który podporządkowuje południki prostym, równoległym

do osi OY , a równoleżniki — prostym, równoległym do OX . Aby otrzymać całą powierzchnię kulistą, należy zmieniać φ od 0 do 2π , a θ od 0 do π ; X wzrasta przy tym od 0 do 2π , a Y od $-\infty$ do $+\infty$. Mapa posiada tedy postać pasa nieograniczonego o szerokości $= 2\pi$. Krzywe, położone na powierzchni i przecinające wszystkie południki pod tym samym kątem, czyli linie loksodromiczne (inaczej: linie stałego kierunku, fr. loxodromies), są wyobrażone na mapie zapomocą prostych.

2. Rzut stereograficzny. — Kwadrat elementu linjowego powierzchni kulistej może jeszcze być napisany w postaci

$$ds^2 = 4 \cos^4 \frac{\theta}{2} \left(\frac{R^2 d\theta^2}{4 \cos^4 \frac{\theta}{2}} + R^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} d\varphi^2 \right)$$

czyli

$$ds^2 = 4 \cos^4 \frac{\theta}{2} (d\zeta^2 + \zeta^2 d\omega^2),$$

jeżeli zakładamy, że $\zeta = R \tan \frac{\theta}{2}$, $\omega = \varphi$.

Ale $d\zeta^2 + \zeta^2 d\omega^2$ przy użyciu spółrzędnych biegunowych (ζ, ω) stanowi kwadrat elementu linjowego płaszczyzny; aby tedy osiągnąć odwzorowanie podobne powierzchni kulistej, wystarczy podporządkować punktowi (θ, φ) tej powierzchni punkt płaszczyzny, posiadający odpowiednie spółrzędne biegunowe (ζ, ω) . Wykonywując rysunek, widzimy bezpośrednio, że ζ i ω stanowią spółrzędne biegunowe rzutu stereograficznego punktu (θ, φ) powierzchni kulistej na płaszczyznę równika, gdy środkiem rzutu jest jeden z biegunów.

3. Mapa pierścienia. — Rozpatrzmy pierścień, utworzony przez obrót koła o promieniu R dokoła osi, położonej w płaszczyźnie tegoż koła, w odległości a od jego środka (założymy, iż $a > R$). Biorąc za oś Oz oś obrotu, a za płaszczyznę xy płaszczyznę środkową pierścienia, możemy wyrazić spółrzędne dowolnego punktu powierzchni w sposób następujący:

$$x = (a + R \cos \theta) \cos \varphi, \quad y = (a + R \cos \theta) \sin \varphi, \quad z = R \sin \theta,$$

i wystarczy zmieniać θ i φ od $-\pi$ do $+\pi$. Z tych wzorów otrzymujemy:

$$ds^2 = (a + R \cos \theta)^2 [d\varphi^2 + \frac{R^2 d\theta^2}{(a + R \cos \theta)^2}];$$

aby wykonać mapę powierzchni, założymy:

$$\begin{aligned}
 X &= \varphi, \\
 Y &= e \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{1+e \cos \vartheta} = \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tang} \frac{\vartheta}{2} \right) \\
 &\quad \left[e = \frac{R}{a} < 1 \right].
 \end{aligned}$$

Powierzchnia całkowita pierścienia odpowiada przy tym sposobie podporządkowania punktów powierzchni prostokąta o bokach, równych 2π i $\frac{2\pi e}{\sqrt{1-e^2}}$.

282. Krzywe izotermiczne. — Jeżeli (U, x, y) stanowi rozwiązanie równania Laplace'a

$$\Delta_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

to krzywe, wyrażone przez równanie

$$(50) \quad U(x, y) = C,$$

w którym C oznacza stałą dowolną, tworzą rodzinę krzywych *izotermicznych* (isothermes). Wszelkie rozwiązanie $U(x, y)$ równania Laplace'a można skojarzyć z takim innym rozwiązaniem $V(x, y)$, iżby $U + iV$ stanowiło funkcję analityczną zmiennej $x + yi$; związki

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

wskazują, iż dwie rodziny krzywych izotermicznych

$$U(x, y) = C, \quad V(x, y) = C'$$

tworzą sieć prostokątną, ponieważ współczynniki kątowe stycznych do krzywych C i C' równają się odpowiednio

$$-\frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Krzywe, prostopadłe do rodziny krzywych izotermicznych, tworzą zatem drugą rodzinę krzywych izotermicznych. Otrzymamy wszystkie układy sprzężone krzywych izotermicznych, rozważając funkcje analityczne $f(z)$ i biorąc krzywe, dla których zachowuje wartość stałą część rzeczywista funkcji $f(z)$ lub współczynnik przy i . Krzywe, którym odpowiada stały moduł R funkcji $f(z)$, tworzą również wraz z krzywymi, dla których argument Ω tej funkcji zachowuje stałą wartość, parę układów izotermicznych sprzężonych, ponieważ $\log R$ równa się części rzeczywistej funkcji analitycznej $\operatorname{Log} [f(z)]$, a Ω stanowi tam współczynnik przy i .

Otrzymujemy również układy izotermiczne sprzężone, nadając zmiennej x lub zmiennej y wartość stałą i biorąc krzywe, zakreślone w tych warunkach przez punkt o współrzędnych X, Y [$X + iY = f(z)$]. W istocie, wystarczy uważać nawzajem $x + iy$ za funkcję analityczną zmiennej $X + iY$. Ogólnie wszelkie przekształcenie punktowe płaszczyzny na płaszczyznę, zachowujące wielkość kątów, zmienia rodzinę krzywych izotermicznych w inną rodzinę krzywych izotermicznych. Niech wzory

$$x = p(x', y'), \quad y = q(x', y')$$

określają przekształcenie, zachowujące wielkość kątów; oznaczmy przez $F(x', y')$ wynik podstawienia do $U(x, y)$ funkcji $p(x', y')$ i $q(x', y')$ zamiast x i y . Całe zadanie polega na uzasadnieniu, że $F(x', y')$ stanowi rozwiązanie równania Laplace'a, jeżeli jest nim $U(x, y)$. Odpowiedni rachunek nie nastrocza żadnych trudności (patrz rozdział III, ćwiczenie 8); lecz można również okazać prawdziwość twierdzenia bez żadnego rachunku. W istocie, możemy założyć, że funkcje $p(x', y')$ i $q(x', y')$ spełniają warunki

$$\frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\partial q}{\partial y'}, \quad \frac{\partial p}{\partial y'} = -\frac{\partial q}{\partial x'}$$

ponieważ przekształcenie symetryczne zmienia oczywiście rodzinę krzywych izotermicznych w inną rodzinę krzywych izotermicznych. Funkcja $x + iy = p + iq$ jest w takim razie funkcją analityczną zmiennej zespolonej $z' = x' + iy'$, i $U + iV$ staje się również po podstawieniu funkcją analityczną $F(x', y') + i\Phi(x', y')$ tejże zmiennej z' (art. 263). Równania

$$F(x', y') = C, \quad \Phi(x', y') = C'$$

wyznaczają tedy nową sieć prostokątną, utworzoną przez dwie rodziny izotermiczne sprzężone.

Tak np. koła spółśrodkowe i promienie, wychodzące z początku układu, tworzą dwie rodziny izotermiczne sprzężone, jak się przekonywamy bezpośrednio z rozważania funkcji analitycznej $\text{Log } z$. Stosując przekształcenie przez promienie odwrotne, dochodzimy do wniosku, że okręgi, przechodzące przez dwa punkty stałe, tworzą również układ izotermiczny. Układ sprzężony z nim składa się również z okręgów.

Elipsy spółogniskowe tworzą także układ izotermiczny. W istocie widzieliśmy powyżej, że gdy punkt z przebiega proste, równoległe do osi Ox , punkt $u = \cos z$ zakreśla elipsy spółogniskowe (art. 280). Układ sprzężony składa się z hiperbol spółogniskowych, ortogonalnych względem elips.

Uwaga. — Do tego, aby rodzina krzywych, dana przez równanie $P(x, y) = C$, była izotermiczna, nie potrzeba koniecznie, iżby funkcja $P(x, y)$ stanowiła rozwiązanie równania Laplace'a. Istotnie, tym krzywym odpowiada także równanie $\varphi[P(x, y)] = C$, w którym φ może oznaczać jakąkolwiek funkcję; warunek dostateczny stanowi możność wyboru funkcji φ w taki sposób, iżby funkcja $U(x, y) = \varphi(P)$ czyniła zadość równaniu Laplace'a. Wykonywując odpowiedni rachunek, stwierdzamy, że winien zachodzić związek

$$\frac{d^2\varphi}{dP^2} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{d\varphi}{dP} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \right) = 0;$$

trzeba tedy, iżby stosunek

$$\frac{\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)^2}$$

zależał jedynie od P i jeżeli ten warunek jest spełniony, to otrzymamy funkcję φ zapomocą dwóch kwadratur.

Ćwiczenia

1. Wyznaczyć funkcję analityczną $f(z) = X + iY$ o część rzeczywistą X równą

$$\frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x};$$

to samo przy założeniu, że podana funkcja jest równa $X + Y$.

2. $\varphi(m, p) = 0$ stanowi równanie stycznościowe krzywej algebricznej rzeczywistej, czyli warunek, żeby prosta $y = mx + p$ była styczna do tej krzywej. Dowiedzieć, że pierwiastki równania $\varphi(i, -iz) = 0$ odpowiadają ogniskom rzeczywistym tej krzywej.

3. Jeżeli p i q są liczbami całkowitymi, pierwszymi względem siebie, wyrażenia $(\sqrt[p]{z})^p$ i $\sqrt[q]{z^p}$ są równoważne. Co się dzieje, gdy p i q posiadają największy wspólny dzielnik $d > 1$?

4. Znaleźć moduł i argument wyrażenia e^{x+yi} , uważanego za granicę, do której dąży wielomian $\left(1 + \frac{x+yi}{m}\right)^m$, gdy liczba całkowita m wzrasta nieograniczenie.

5. Uzasadnić wzory

$$\cos a + \cos(a+b) + \dots + \cos(a+nb) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right),$$

$$\sin a + \sin(a+b) + \dots + \sin(a+nb) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \sin\left(a + \frac{nb}{2}\right).$$

6. Jaka będzie wartość końcowa funkcji $\arcsin z$, gdy z przebiega odcinek prostej, łączący początek układu z punktem $1+i$, a wartość początkowa równa się zero?

7. Uzasadnić ciągłość szeregu potęgowego zapomocą wzoru (12) (art. 266)

$$f(z+h) - f(z) = hf_1(z) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f_2(z) + \dots + \frac{h^n}{n!} f_n(z) + \dots$$

[Należy wziąć odpowiednią funkcję wyższą (f. majorante) względem szeregu, występującego z prawej strony znaku równości].

8. Obliczyć całki

$$\int x^m e^{ax} \cos bx \, dx, \quad \int x^m e^{ax} \sin bx \, dx, \\ \int \cot(x-a) \cot(x-b) \dots \cot(x-l) \, dx.$$

9. Mając w płaszczyźnie xOy krzywą zamkniętą C o dowolnej liczbie punktów [podwójnych, przebieganą w umówionym zwrocie, oznaczamy, podług przepisu z art. 97 (I), każdy z obszarów płaszczyzny, wyznaczonych przez tę krzywą, odpowiednim współczynnikiem liczbowym. Z dwu obszarów sąsiednich, oddzielonych łukiem ab krzywej, przebieganym od a ku b , ten, który leży na lewo, posiada współczynnik wyższy o jedność, niż ten, który jest położony na prawo; obszar zewnętrzny względem C posiada współczynnik 0.

Niech z_0 oznacza punkt, położony w jednym z obszarów, o współczynniku N . Dowieść, iż przyrost argumentu różnicy $z - z_0$, gdy punkt z przebiega krzywą C w umówionym zwrocie, równa się $2N\pi$.

10. Rozwijając w szereg $\text{Log} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)$ na obwodzie koła zbieżności, dowieść, iż suma szeregu

$$\frac{\sin \theta}{1} + \frac{\sin 3\theta}{3} + \frac{\sin 5\theta}{5} + \dots + \frac{\sin (2n+1)\theta}{2n+1} + \dots$$

równa się $+\frac{\pi}{4}$ lub $-\frac{\pi}{4}$, stosownie do tego czy $\sin \theta > 0$ czy < 0 . (I, art. 204).

11. Zbadać krzywe, określone przez punkt $Z = z^2$, gdy punkt z przebiega prostą lub okrąg.

12. Związek $2Z = z + \frac{c^2}{z}$ wyznacza odwzorowanie podobne pola, zawartego między dwiema elipsami spółogniskowymi na pierścieniu kołowym, zawartym między dwoma spółśrodkowymi okręgami.

[Weźmy np. $z = Z + \sqrt{Z^2 - c^2}$, z umową, że w płaszczyźnie zmiennej Z istnieje cięcie prostopadłe ($-c, +c$), i że obieramy wartość pierwiastka, dodatnią przy Z rzeczywistym i większym od c].

13. Wszelkie przekształcenie kolowe $z' = \frac{az+b}{cz+d}$ może być otrzymane przez połączenie liczby parzystej inwersji. Uzasadnić twierdzenie odwrotne.

14. Wszelkie przekształcenie, określone przez związek $z' = \frac{az_0+b}{cz_0+d}$, w którym z_0 oznacza liczbę sprzężoną z liczbą z , stanowi wynik liczby *nieparzystej* inwersji. Twierdzenie odwrotne.

15. Przekształcenia Fuchsa (T. Fuchsienues). — Wszelkie przekształcenie kolowe $z' = \frac{az+b}{cz+d}$, którego parametry a, b, c, d spełniają warunek $ad - bc = 1$, podporządkowuje każdemu punktowi z , położonemu powyżej Ox , punkt z' , położony z tej samej strony.

Całki określone

$$\int \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}, \quad \iint \frac{dx dy}{y^2}$$

stanowią *niezmienniki* (invariants) tych wszystkich przekształceń.

Omawiane przekształcenie daje dwa punkty podwójne, odpowiadające pierwiastkom α i β równania $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Jeżeli α i β są rzeczywiste i nierów-

ne, to można napisać równanie $z' = \frac{az + b}{cz + d}$ w postaci równoważnej

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = k \frac{z - \alpha}{z - \beta};$$

k jest rzeczywiste i przekształcenie nazywa się *hiperbolicznym*. Jeżeli α i β są liczbami zespolonemi sprzężonemi, to równanie przybiera postać

$$\frac{z' - \alpha}{z' - \beta} = e^{i\omega} \frac{z - \alpha}{z - \beta} \quad [\omega - \text{liczba rzeczywista}];$$

jest to przekształcenie *eliptyczne*. Jeżeli $\beta = \alpha$, to możemy napisać, oznaczając przez k liczbę rzeczywistą (równie jak α)

$$\frac{1}{z' - \alpha} = \frac{1}{z - \alpha} + k.$$

Takie przekształcenie nazywa się *parabolicznym*.

16. $z' = f(z)$ wyraża przekształcenie Fuchsa. Zakładamy:

$$z_1 = f(z), z_2 = f(z_1), \dots, z_n = f(z_{n-1}).$$

Dowieść, że wszystkie punkty $z, z_1, z_2, \dots, z_n$ leżą na pewnym okręgu. Czy punkt z_n dąży do jakiegoś położenia granicznego, gdy n wzrasta nieograniczenie?

17. Dwa punkty M i M' , położone na półprostej, wykreślonej ze środka O koła o promieniu R , nazywają się symetrycznymi względem tego koła, jeżeli $OM \times OM' = R^2$. Załóżmy, że są dane dwa koła C i C' , położone w tej samej płaszczyźnie, oraz dowolny punkt M tej płaszczyzny. Weźmy punkt M_1 , symetryczny z M względem C , następnie punkt M'_1 symetryczny z M_1 względem C' , potem punkt M_2 , symetryczny z M'_1 względem C i tak dalej bez końca. Zbadać rozkład punktów $M_1, M'_1, M_2, M'_2, \dots$ w ich płaszczyźnie.

18. Jaka funkcja analityczna $Z = f(z)$ pozwala na przejście od rzutu Merkatora do rzutu stereograficznego?

19*. Dowieść, iż wszystkie rodziny izotermiczne, złożone z okręgów, są utworzone przez okręgi, przechodzące przez dwa punkty stałe, różne lub nakrywające się, rzeczywiste lub urojone.

[Równanie [rodziny okręgów, zależnych od parametru zmiennego λ , którego funkcjami są współczynniki tego równania (a, b, c), może być napisane przy założeniu że $z = x + iy, z_0 = x - iy$, w postaci następującej

$$zz_0 + az + bz_0 + c = 0.$$

Aby ta rodzina była izotermiczna, potrzeba, iżby zachodził związek $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial z \partial z_0} = 0$. Czytniacz odpowiedni rachunek, uzasadniamy przytoczone twierdzenie].

20*. Jeżeli $|q| < 1$, to mamy tożsamość

$$(1 + q)(1 + q^2) \dots (1 + q^n) \dots = \frac{1}{(1 - q)(1 - q^3) \dots (1 - q^{2n+1}) \dots}$$

[EULER].

[Dla dowodu przekształcamy iloczyn nieskończony, występujący z lewej strony znaku równości, w iloczyn nieskończony o dwu wskaźnikach, biorąc do pierwszego wiersza czynniki $1 + q$, $1 + q^2$, $1 + q^4$, ..., $1 + q^{2^n}$, ..., do drugiego czynniki $1 + q^3$, $1 + q^6$, ..., $1 + (q^3)^{2^n}$, ..., i stosujemy wzór (16) z art. 268].

21. Rozwinać w szereg potęg zmiennej z iloczyny nieskończone

$$F(z) = (1 + xz)(1 + x^2z) \dots (1 + x^n z) \dots,$$

$$\phi(z) = (1 + xz)(1 + x^3z) \dots (1 + x^{2n+1}z) \dots$$

[Można użyć np. związków $F(xz)(1 + xz) = F(z)$, $\phi(x^2z)(1 + xz) = \phi(z)$.]

22°. Zakładając iż $|x| < 1$, uzasadnić wzór Eulera

$$(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3) \dots (1 - x^n) \dots \\ = 1 - x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - \dots + x^{\frac{3n^2 - n}{2}} - x^{\frac{3n^2 + n}{2}} + \dots$$

[J. Bertrand, *Calcul différentiel (Rachunek różniczkowy)*, str. 328].

23°. Biorąc za środek rzutu jeden z biegunów danej kuli o promieniu równym jedności, wyznaczamy jej rzut stereograficzny na płaszczyznę równika. Każdemu punktowi M powierzchni kulistej podporządkowujemy w ten sposób liczbę zespoloną $s = x + iy$, oznaczając przez x i y współrzędne prostokątne rzutu m punktu M w układzie osi, położonych w płaszczyźnie równika i przecinających się w środku kuli. Dwu końcom jednej średnicy powierzchni kulistej odpowiadają liczby zespolone s , $-\frac{1}{s_0}$ [s_0 — liczba sprzężona z liczbą s]. Wszelkie przekształcenie linjowe o postaci

$$(A) \quad \frac{s' - \alpha}{s' - \beta} = e^{i\omega} \frac{s - \alpha}{s - \beta},$$

spełniające warunek $\beta\bar{\alpha}_0 + 1 = 0$, wyznacza obrót kuli dookoła jednej ze średnic. Grupa obrotów, które zmuszają jakiś wielościan foremny do zajęcia tego samego miejsca w przestrzeni (font revenir sur lui-même), odpowiadają grupy rzędu skończonego podstawień linjowych o postaci (A). (KLEIN, *Das Ikosaeder*).

ROZDZIAŁ XIV.

Teoria ogólna funkcji analitycznych podług Cauchy'ego.

I. — Całki określone, obliczane pomiędzy granicami urojonymi.

283. Określenia i wiadomości ogólne. — Wyniki, wyłożone w poprzednim rozdziale, nie są zależne od prac Cauchy'ego; pochodzenie ich jest przeważnie jeszcze dawniejsze. W danej chwili rozpoczniemy na nowo badanie funkcji analitycznych, wprowadzając pewien ścisły system i rozwijając wnioski logiczne, wypływające z samego określenia tych funkcji. Przypomnijmy sobie, że funkcja $f(z)$ jest całokształtna (czyli holomorficzna) w jakimś obszarze A : 1) jeżeli każdemu punktowi, położonemu w tym obszarze, odpowiada określona wartość funkcji $f(z)$; 2) jeżeli ta wartość zmienia się w sposób ciągły wraz z z ; 3) jeżeli dla wszelkiego punktu z , należącego do A , stosunek

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

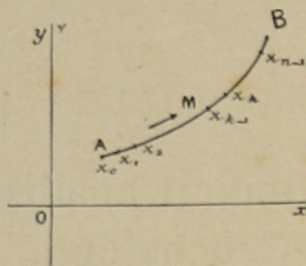
dąży do pewnej granicy $f'(z)$, gdy moduł h dąży do zera.

Cauchy zapoczątkował rozważanie całek określonych, w których zmienna przechodzi przez ciąg wartości urojonych¹⁾; jest to źródło metod nowych i owocnych.

¹⁾ „*Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires*“, 1825 („Rozprawa o całkach określonych, branych pomiędzy granicami urojonymi“). Można znaleźć przedruk tej rozprawy w tomach VII i VIII wydawn. „*Bulletin des sciences mathématiques*“ (serja 1-sza).

Weźmy funkcję $f(z)$ zmiennej z , ciągłą wzdłuż łuku AMB (rys. 57); oznaczmy na tym łuku pewną liczbę punktów podziału $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z'$, następujących po sobie od punktu A do punktu B w porządku wyznaczonym przez wzrost wskaźnika; przytym punkty z_0 i z' mają nakrywać punkty A i B .

Rys. 57.



Weźmy następnie inny szereg punktów $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ łuku AB , położonych w ten sposób, że punkt ζ_k należy do łuku $z_{k-1} z_k$, i utwórzmy sumę

$$S = f(\zeta_1)(z_1 - z_0) + f(\zeta_2)(z_2 - z_1) + \dots + f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) + \dots + f(\zeta_n)(z' - z_{n-1});$$

gdy liczba punktów podziału $z_1, \dots, z_{n-1}$ wzrasta nieograniczenie w taki sposób, iż moduły wszystkich różnic $z_1 - z_0, z_2 - z_1, \dots$, stają się mniejsze od obranej dowolnej liczby dodatniej, suma S dąży do granicy, którą nazywamy całką funkcji $f(z)$, określoną wzdłuż AMB , i którą oznaczamy zapomocą symbolu

$$\int_{(AMB)} f(z) dz.$$

W istocie, wyodrębnijmy w wyrażeniu sumy S część rzeczywistą i współczynnik przy i ; w tym celu założmy, oznaczając przez X i Y funkcje ciągłe wzdłuż łuku AMB :

$$f(z) = X + Yi, \quad z_k = x_k + y_k i, \quad \zeta_k = \xi_k + \eta_k i.$$

Łącząc wyrazy analogiczne, możemy napisać S w postaci

$$\begin{aligned} S = & X(\xi_1, \eta_1)(x_1 - x_0) + \dots + X(\xi_k, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) + \dots \\ & + X(\xi_n, \eta_n)(x' - x_{n-1}) \\ & - [Y(\xi_1, \eta_1)(y_1 - y_0) + \dots + Y(\xi_k, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) + \dots] \\ & + i[X(\xi_1, \eta_1)(y_1 - y_0) + \dots] + i[Y(\xi_1, \eta_1)(x_1 - x_0) + \dots]. \end{aligned}$$

Gdy liczba punktów podziału wzrasta nieograniczenie, suma każdego z czterech szeregów wyrazów analogicznych dąży do granicy, równej pewnej całce krzywoliniowej, obliczonej wzdłuż AMB , a więc granica S równa się sumie czterech całek krzywoliniowych ¹⁾:

$$\int_{(AMB)} f(z) dz = \int_{(AMB)} (X dx - Y dy) + i \int_{(AMB)} (Y dx + X dy).$$

Z samego określenia wypływa bezpośrednio wniosek:

$$\int_{(AMB)} f(z) dz + \int_{(BMA)} f(z) dz = 0.$$

Często potrzeba znać jakąś granicę wyższą modułu całki. Jeżeli s oznacza długość łuku AM , L — długość łuku AB , s_{k-1} , s_k , σ_k — długości łuków Az_{k-1} , Az_k , $A\zeta_k$ krzywej, wzdłuż której całkujemy, wreszcie $F(s) = |f(z)|$, to

$$|f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1})| = F(\sigma_k)(z_k - z_{k-1}) \leq F(\sigma_k)(s_k - s_{k-1}),$$

gdyż $|z_k - z_{k-1}|$ wyraża długość cięciwy, a $(s_k - s_{k-1})$ — długość łuku. Moduł sumy S jest tedy mniejszy niż suma $\sum F(\sigma_k)(s_k - s_{k-1})$ lub co najwyżej równy jej, i po przejściu do granicy otrzymujemy

$$\left| \int_{(AMB)} f(z) dz \right| \leq \int_0^L F(s) ds.$$

Jeżeli M stanowi granicę wyższą modułu $f(z)$ wzdłuż AB , to rzecz jasna, że moduł drugiej całki jest mniejszy niż ML i tym bardziej

$$\left| \int_{(AMB)} f(z) dz \right| < ML.$$

284. Zamiana zmiennych. — Rozważmy przypadek nader często spotykany w zastosowaniach, gdy spólrzędne x , y punktów łuku AB są takimi funkcjami ciągłymi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ parametru zmiennego t ,

¹⁾ Aby uniknąć przy dowodzie niepotrzebnych zawiłości, zakładamy, iż spólrzędne x , y punktów łuku AMB stanowią funkcje ciągłe $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ parametru t , posiadające pomiędzy A i B liczbę skończoną największości i najmniejszości. Można w takim razie rozłożyć drogę całkowania na liczbę skończoną łuków, z których każdy jest wyrażony zapomocą równania $y = F(x)$, zawierającego funkcję F , ciągłą w odpowiednich granicach — albo też na liczbę skończoną łuków, którym odpowiadają równania o postaci $x = G(y)$. Takie przypuszczenie nie powoduje żadnych niedogodności, ponieważ we wszystkich zastosowaniach panuje znaczny stopień dowolności co do wyboru krzywej, wzdłuż której funkcja ma być całkowana. Wystarczyłoby zresztą założenie, że $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ są funkcjami o zmienności ograniczonej. Widzieliśmy, że w tym przypadku łuk AMB jest sprostowalny. (t. I).

posiadającymi ciągle również pochodne $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, iż przy zmianie t od α aż do β , punkt (x, y) przebiega drogę całkowania od punktu A do punktu B . Oznaczmy przez $P(t)$ i $Q(t)$ funkcje zmiennej t , powstałe przez podstawienie do X i Y zamiast zmiennych x i y funkcji $\varphi(t)$ i $\psi(t)$. Podług wzoru, uzasadnionego dla całek krzywoliniowych (I, art. 95), otrzymujemy:

$$\int_{(AB)} X dx - Y dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(t) \varphi'(t) - Q(t) \psi'(t)] dt,$$

$$\int_{(AB)} X dy + Y dx = \int_{\alpha}^{\beta} [P(t) \psi'(t) + Q(t) \varphi'(t)] dt.$$

Dodajmy do siebie te dwa związki, pomnożywszy drugi z nich przez i ; wypadnie

$$(1) \quad \int_{(AB)} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(t) + i Q(t)] [\varphi'(t) + i \psi'(t)] dt.$$

Ten sam wynik otrzymalibyśmy, stosując bezpośrednio do całki $\int f(z) dz$ wzór, uzasadniony dla całki określonej w tym przypadku, gdy zmienna i funkcje są rzeczywiste: ażeby otrzymać nową całkę, wystarczy zastąpić w $f(z) dz$ zmienną z przez $\varphi(t) + i \psi(t)$, a dz przez $[\varphi'(t) + i \psi'(t)] dt$. Obliczenie całki $\int f(z) dz$ daje się tedy sprowadzić do obliczenia dwu zwyczajnych całek określonych. Jeżeli łuk AMB składa się z kilku odrębnych odcinków krzywej, to można zastosować dany wzór do każdej z tych części z osobna.

Zbadajmy np. całkę określoną $\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{z^2}$. Funkcja, dana do całkowania, staje się nieskończoną przy $z=0$, i dlatego nie można jej całkować wzdłuż osi rzeczywistej; można jednak obrać dowolną drogę, nie przechodzącą przez początek układu. Przypuśćmy, że z przebiega półokrąg o promieniu równym *jedności*, którego środek stanowi początek układu; w tym celu wystarczy założyć, że $z=e^{it}$ i zmieniać t od π do 0 . Wypada

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dz}{z^2} = \int_{\pi}^0 i e^{-it} dt = i \int_{\pi}^0 \cos t dt + \int_{\pi}^0 \sin t dt = -2;$$

stosując wzór podstawowy rachunku całkowego do funkcji pierwotnej $-\frac{1}{z}$ (I, art. 78), otrzymalibyśmy ten sam wynik.

Ogólniej, niech $z = \varphi(u)$ stanowi taką funkcję ciągłą nowej zmiennej zespolonej $u = \xi + \eta i$, iż wtedy, gdy u przebiega w swojej płaszczyźnie drogę CND , punkt z zakreśla łuk AMB . Punktom podziału łuku AMB odpowiadają na łuku CND punkty $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_k, \dots, u'$. Jeżeli funkcja $\varphi(u)$ posiada wzdłuż łuku CND pochodną $\varphi'(u)$, to możemy napisać, oznaczając przez ε_k liczbę, dążącą do zera, gdy u_k zbliża się po łuku CND do u_{k-1} :

$$\frac{z_k - z_{k-1}}{u_k - u_{k-1}} = \varphi'(u_{k-1}) + \varepsilon_k.$$

Gdy zastąpimy $z_k - z_{k-1}$ przez wyrażenie, otrzymane z tej równości i założymy że $z_{k-1} = z_{k-1}$, to suma S , rozważana powyżej, przybierze postać

$$S = \sum_{k=1}^n f(z_{k-1}) \varphi'(u_{k-1}) (u_k - u_{k-1}) + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k f(z_{k-1}) (u_k - u_{k-1}).$$

Pierwszy wyraz z prawej strony znaku równości ma za granicę całkę określoną

$$\int_{(CND)} f[\varphi(u)] \varphi'(u) du.$$

Co do drugiego wyrazu, to, oznaczając przez η liczbę większą od wszystkich modułów $|\varepsilon_k|$ a przez L' długość łuku CND , możemy stwierdzić, iż moduł jego jest mniejszy niż $\eta M L'$ (M ma takie samo znaczenie, jak w art. 283 — uw. tl.). Jeżeli można obrać punkty podziału tak zbliżone do siebie, iżby wszystkie moduły $|\varepsilon_k|$ były mniejsze od dowolnej liczby dodatniej, ten wyraz uzupełniający dąży do zera, i otrzymujemy wzór ogólny, dotyczący zamiany zmiennych

$$(2) \quad \int_{(AMB)} f(z) dz = \int_{(CND)} f[\varphi(u)] \varphi'(u) du.$$

Wzór ten da się zastosować zawsze, gdy $\varphi(u)$ jest funkcją całokształtną; dowiedziemy istotnie nieco dalej, iż pochodna funkcji całokształtnej jest również funkcją całokształtną.¹⁾ (p. art. 292).

⁽¹⁾ Założywszy istnienie tej własności, uzasadniamy z łatwością twierdzenie następujące:

Jeżeli $f(z)$ jest funkcją holomorficzną w obszarze skończonym A płaszczyzny, to do wszelkiej liczby dodatniej ε można dobrać taką inną liczbę dodatnią η , iżby związek

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) \right| < \varepsilon$$

zachodził w każdym przypadku, gdy z i $z+h$ oznaczają punkty obszaru A , których odległość $|h|$ jest mniejsza od η .

W istocie, założmy że $f(z) = P(x, y) + i Q(x, y)$,

$h = \Delta x + i \Delta y$. Podług obliczenia, wykonanego powyżej w celu odszukania warunków istnienia jedynej pochodnej, można napisać

285. Wzory Weierstrassa i Darboux'a. — Dowód twierdzenia o wartości średniej (I art. 76) opiera się na nierównościach, które tracą znaczenie, gdy chodzi o liczby zespolone. Mimo to Weierstrass i Darboux otrzymali w tym względzie zajmujące wyniki, rozważając całki,brane wzdłuż odcinka osi rzeczywistej. Widzieliśmy powyżej, iż przy pomocy pewnych założeń o charakterze nader ogólnym co do drogi całkowania, pozatym dowolnej, można ją sprowadzić do tego typu szczególnego.

Weźmy trzy funkcje rzeczywiste zmiennej rzeczywistej t , ciągle w przedziale (α, β) i utwórzmy całkę określoną o postaci następującej:

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) [\varphi(t) + i \psi(t)] dt;$$

podług samego określenia całki, mamy oczywiście

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \varphi(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \psi(t) dt.$$

Zalóżmy, w celu ustalenia uwagi, iż $\alpha < \beta$; różnica $t - \alpha$ wyraża w takim razie długość drogi całkowania, liczoną od początku tej drogi, i wzór ogólny, której wyznacza granicę wyższą całki określonej, przybiera w tym przypadku postać

$$I \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(t) [\varphi(t) + i \psi(t)]| dt;$$

czyli, przy założeniu, że funkcja $f(t)$ jest między α i β wciąż dodatnia

$$I \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(t) [\varphi(t) + i \psi(t)] dt.$$

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - f'(z) &= \frac{[P'_x(x + \theta \Delta x, y) - P'_x(x, y)] \Delta x}{\Delta x + i \Delta y} \\ &+ \frac{[P'_y(x + \Delta x, y + \theta \Delta y) - P'_y(x, y)] \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Ponieważ pochodne P'_x, P'_y, Q'_x, Q'_y są ciągle w obszarze A , przeto można znaleźć taką liczbę η , iżby moduły współczynników przy Δx i Δy były mniejsze od $\frac{\varepsilon}{4}$, gdy $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ jest $< \eta$. Nierówności, przytoczonej powyżej, stanie się tedy zadość, gdy weźmiemy $|h| < \eta$. Wobec tego, jeżeli funkcja $\varphi(u)$ jest całokształtna, w celu uczynienia wszystkich modułów $|z_k|$ mniejszemi od danej z góry liczby dodatniej ε wystarczy podzielić luk CND w ten sposób, iżby odległość dwu sąsiednich punktów podziału była mniejsza od odpowiedniej liczby η ; prawdziwość wzoru (2) nie ulega tedy wątpliwości.

Stosując do tej nowej całki twierdzenie o wartości średniej i oznaczając przez ξ odpowiednią wartość t , zawartą pomiędzy α i β , otrzymujemy również

$$I \leq |\varphi(\xi) + i\psi(\xi)| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt.$$

Zakładając jeszcze, iż $\varphi(t) + i\psi(t) = F(t)$ i oznaczając przez λ liczbę zespoloną o module mniejszym niż jedność lub równym jedności, możemy napisać ten wynik w postaci

$$(3) \quad I = \lambda F(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt;$$

jest to właśnie wzór Darboux'a.

Wyrażenie bardziej dokładne, które można nawiązać do elementarnych rozważań z zakresu statyki, pochodzi od Weierstrassa. Gdy t zmienia się od α do β , punkt o współrzędnych $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ przebiega pewien łuk krzywej L . Przypuśćmy, że wartościom α , $t_1, \dots, t_{k-1}, \dots$ zmiennej t odpowiadają punkty (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , $\dots$ (x_{k-1}, y_{k-1}) , $\dots$ krzywej L . Napiszmy wyrażenia

$$X = \frac{\sum \varphi(t_{k-1}) f(t_{k-1}) (t_k - t_{k-1})}{\sum f(t_{k-1}) (t_k - t_{k-1})},$$

$$Y = \frac{\sum \psi(t_{k-1}) f(t_{k-1}) (t_k - t_{k-1})}{\sum f(t_{k-1}) (t_k - t_{k-1})};$$

podług znanego twierdzenia X i Y są to współrzędne środka ciężkości układu mas, rozłożonych w punktach (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , $\dots$, (x_{k-1}, y_{k-1}) , $\dots$ linii L w ten sposób, iż masa, ześrodkowana w punkcie (x_{k-1}, y_{k-1}) , równa się $f(t_{k-1}) (t_k - t_{k-1})$. Rzecz jasna, że środek ciężkości leży wewnątrz wszelkiego obwodu wypukłego zamkniętego C , otaczającego krzywą L . Gdy liczba przedziałów wzrasta nieograniczenie, punkt (x, y) dąży do granicy, którą stanowi punkt (u, v) o współrzędnych

$$u = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \varphi(t) dt}{\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt}, \quad v = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \psi(t) dt}{\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt},$$

położony również wewnątrz C . Można złączyć te dwa wzory w jeden pisząc

$$(4) \quad I = (u + i v) \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = Z \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt;$$

Z oznacza tutaj punkt, położony wewnątrz wszelkiego obwodu wypukłego zamkniętego, otaczającego linię L .

Rzecz jasna, iż ogólnie czynnik Z Weierstrassa może się zmieniać w zakresie o wiele bardziej ograniczonym, niż obszar zmienności czynnika $\lambda F(\xi)$ we wzorze Darboux'a.

286. Całki, brane wzdłuż obwodu zamkniętego. — W poprzednich artykułach wystarczało założenie, że $f(z)$ jest funkcją zmiennej zespolonej z , ciągłą wzdłuż drogi całkowania. Obecnie założymy jeszcze, że funkcja $f(z)$ jest analityczna, i zbadamy przedewszystkiem, jak wpływa na wartość całki określonej wybór drogi, wiodącej w płaszczyźnie zmiennej z od jakiegoś punktu A do innego punktu B .

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest holomorficzna wewnątrz jakiejś krzywej zamkniętej i na samej krzywej, to całka $\int f(z) dz$, wzięta wzdłuż tej krzywej, równa się zeru.

W celu dowiedzenia tego podstawowego twierdzenia, które zawdzięczamy Cauchy'emu, uzasadnimy z początku kilka twierdzeń pomocniczych:

Po 1-sze. Całki $\int dz$, $\int z dz$, obliczone wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej, równają się zeru. Istotnie, stosownie do samego określenia całka $\int dz$, wzięta wzdłuż jakiejkolwiek krzywej, łączącej punkty a i b , równa się $b-a$, a więc staje się równą zeru, gdy tor się zamyka, ponieważ wtedy $b = a$. Co do całki $\int z dz$, wziętej wzdłuż jakiejkolwiek krzywej, łączącej punkty a i b , sprawdzamy, zakładając kolejno: $\xi_k = z_{k-1}$ a potem $\xi_k = z_k$ (art. 283), iż całka ta stanowi również granicę sumy

$$\sum_i \frac{z_i (z_{i+1} - z_i) + z_{i+1} (z_{i+1} - z_i)}{2} = \sum \frac{z_{i+1}^2 - z_i^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2};$$

jeżeli tedy krzywa jest zamknięta, $\int z dz = 0$.

Po 2-gie. Jeżeli pole, ograniczone przez dowolny obwód C , rozłożymy na części zapomocą krzywych poprzecznych, wykreślonych w dowolny sposób, to suma całek $\int f(z) dz$, obliczonych wzdłuż obwodów tych wszystkich części z zachowaniem tego samego kierunku przebiegu,

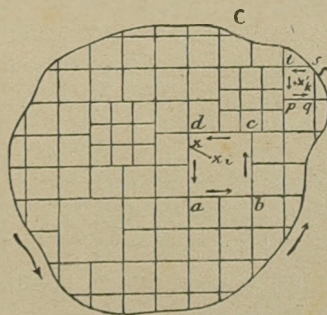
okaże się równa całce $\int f(z) dz$, obliczonej wzdłuż ogólnego obwodu C .

W istocie, rzecz jasna, że każda część którejś z krzywych pomocniczych oddziela dwa sąsiednie obszary cząstkowe i winna być przebieżona dwa razy w przeciwnych zwrotach. Gdy więc dodamy te wszystkie całki, pozostaną po redukcji jedynie całki, liczone wzdłuż łuków obwodu — suma ich równa się całce

$$\int_{(c)} f(z) dz.$$

Ustaliwszy te fakty, wyobraźmy sobie, żeśmy podzielili pole A na części foremne, a mianowicie kwadraty o bokach równoległych do osi Ox i Oy , oraz nieforemne, utworzone przez podział tych kwadratów, które występują częściowo poza obwód C . Wszystkie te kwadraty niekoniecznie muszą mieć równe boki. Można np. wyobrazić sobie, że wykreśliliśmy z początku dwa szeregi prostych równoległych do Ox i Oy , w ten sposób, iż odległość między dwiema sąsiednimi równoległymi jest stała i równa l , i że następnie podzieliliśmy niektóre z otrzymanych przy tym kwadratów zapomocą nowych prostych równoległych do osi na mniejsze kwadraty. Jakikolwiekbyśmy zresztą obrali sposób podziału, przypuśćmy, iż utworzyło się N części foremnych i N' części nieforemnych; oznaczmy części foremne, uszykowane w dowolnym porządku, zapomocą liczb od 1 do N , a części nieforemne — zapomocą liczb od 1 do N' . Załóżmy, że kwadrat o wskaźniku i posiada bok l_i a część nieforemna o wskaźniku k należy do kwadratu o boku l'_k ; że następnie obwód C posiada długość L , a powierzchnia jakiegoś wielokąta, wewnątrz którego leży C , równa się A .

Rys. 58.



Jeżeli z_i oznacza punkt, położony wewnątrz kwadratu $abcd$ o wskaźniku i (rys. 58) lub na jednym z jego boków, a z — dowolny punkt obwodu tego kwadratu, to można napisać wzór

$$(5) \quad \frac{f(z) - f(z_i)}{z - z_i} = f'(z_i) + \varepsilon_i,$$

w którym wyraz ε_i posiada bardzo małą wartość bezwzględną, jeżeli bok kwadratu jest również bardzo mały. Stąd wynika

$$f(z) = z f'(z_i) + f(z_i) - z_i f'(z_i) + \varepsilon_i (z - z_i),$$

i następnie po scałkowaniu wzdłuż obwodu c_i kwadratu:

$$\begin{aligned} \int_{(c_i)} f(z) dz &= f'(z_i) \int_{(c_i)} z dz + [f(z_i) - z_i f'(z_i)] \int_{(c_i)} dz \\ &\quad + \int_{(c_i)} \varepsilon_i (z - z_i) dz; \end{aligned}$$

zgodnie z pierwszym twierdzeniem pomocniczym dwa pierwsze składniki znikają i otrzymujemy

$$(6) \quad \int_{(c_i)} f(z) dz = \int_{(c_i)} \varepsilon_i (z - z_i) dz.$$

Weźmy jeszcze część nieforemną $pgrst$ i oznaczmy przez z'_k punkt, położony wewnątrz tego obszaru lub na jego obwodzie, a przez z — punkt zmienny obwodu; możemy podobnie napisać, wprowadzając nową liczbę ε'_k , malejącą nieograniczenie wraz z l'_k

$$(7) \quad \frac{f(z) - f(z'_k)}{z - z'_k} = f'(z'_k) + \varepsilon'_k,$$

stąd wnioskujemy

$$(8) \quad \int_{(c'_k)} f(z) dz = \int_{(c'_k)} \varepsilon'_k (z - z'_k) dz.$$

Obierzmy następnie liczbę dodatnią η , większą od modułów wszystkich czynników ε_i i ε'_k . Moduł różnicy $z - z_i$ jest mniejszy niż $l_i \sqrt{2}$, i z wzoru (6) wynika, że

$$\left| \int_{(c_i)} f(z) dz \right| < 4 l_i \eta \sqrt{2} = 4 \eta \sqrt{2} \omega_i$$

(ω_i — pole części foremnej o wskaźniku i). Podobnie otrzymujemy ze związku (8)

$$\left| \int_{(c'_k)} f(z) dz \right| < \eta l'_k \sqrt{2} (4 l_k + \text{łuk } rs = 4 \eta \sqrt{2} \omega'_k + \eta l'_k \sqrt{2} \text{łuk } rs.$$

ω_k — pole kwadratu, zawierającego k^{ta} część nieforemną).

Dodając te wszystkie nierówności i wprowadzając do wzoru granicę wyższą λ boków l'_k , otrzymujemy z tym większą pewnością

$$(9) \quad \left| \int_{(C)} f(z) dz \right| < \eta [4 \sqrt{2} (\Sigma \omega_i + \Sigma \omega'_k) + \lambda \sqrt{2} L].$$

Gdy liczba kwadratów wzrasta nieograniczenie, w ten sposób, iż wszystkie boki l_i i l'_k dążą do zera, suma $\Sigma \omega_i + \Sigma \omega'_k$ staje się mniejsza od λ . Mamy tedy z prawej strony znaku nierówności iloczyn wielkości, która pozostaje skończoną, przez czynnik η , który może być uczyniony mniejszym od wszelkiej liczby dodatniej, z góry danej. Stąd wynika, że lewa strona nierówności (9) musi niezbędnie równać się zeru:

$$\int_{(C)} f(z) dz = 0.$$

237. Ażeby wniosek powyższy był zupełnie uprawniony, potrzeba się upewnić, iż można nadać kwadratowi wymiary dość małe, by przy odpowiednim wyborze punktów z_i i z'_k moduły wszystkich liczb ϵ_i i ϵ'_k były mniejsze niż dowolna liczba dodatnia η , z góry dana. ⁽¹⁾ Powiemy dla krótkości, iż pole, ograniczone przez krzywą zamkniętą γ , położoną w obszarze płaszczyzny, ograniczonym przez obwód C , czyni zadość warunkowi (α) względem liczby η , jeżeli można znaleźć wewnątrz krzywej γ lub na niej samej taki punkt z' , iżby przy zakreślaniu przez z krzywej γ stałe zachodził związek

$$|f(z) - f(z') - (z - z') f'(z')| \leq |z - z'| \eta.$$

Wszystko polega na wykazaniu, iż można nadać kwadratowi wymiary dość małe, by wszystkie rozważane części obszaru, foremne i nieforemne, czyniły zadość warunkowi (α) względem liczby η .

Uzasadnimy to nowe twierdzenie pomocnicze zapomocą znanej metody kolejnych podziałów. Wyobraźmy sobie z początku, iż wykreślono dwa szeregi prostych równoległych do osi Ox i Oy , tak iż odległość między dwiema sąsiednimi równoległymi jest stała i równa l . Wśród otrzymanych w ten sposób części niektóre mogą spełniać warunek (α), gdy tymczasem inne nie czynią mu zadość. Nie zmieniając w niczym części, spełniających warunek (α), podzielimy pozostałe na mniejsze części zapomocą połączenia środków boków przeciwległych kwadratów, które stanowią te pozostałe części lub zawierają je. Jeżeli po tym nowym podziale okażą się jeszcze części, nie spełniające warunku (α), to zastosujemy do nich to samo postępowanie — i tak samo w dalszym ciągu. Mogą się zdarzyć przytym tylko dwa przypadki: albo otrzymamy wreszcie jedynie części, spełniające warunek (α), i twierdzenie nie będzie wy-

⁽¹⁾ Transactions of the American Mathematical Society. (Rozprawy Amerykańskiego Towarzystwa Matematycznego). Tom I, 1900, str. 14.

magalo więcej dowodów, albo też, jakkolwiekbyśmy się posunęli w ciągu działań, zawsze będziemy mieli do czynienia z częściami, nie czyniącemi zadość temu warunkowi.

Jeżeli tak jest, to dzieląc we wskazany sposób nieograniczenie jedną z części foremnych lub nieforemnych, otrzymanych przy pierwszym podziale, nie osiągamy nigdy tego, by wszystkie obszary częściowe czyniły zadość warunkowi (α); nazwijmy tę część A_1 . Po dokonaniu drugiego podziału otrzymujemy część A_2 , zawartą w A_1 , która również nie może być podzielona wyłącznie na obszary, spełniające warunek (α). Powtarzając to rozumowanie bez końca, otrzymamy ciąg obszarów (kwadratów lub części kwadratów)

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots,$$

z których każdy zawiera się w poprzednim i których wymiary dążą do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie.

Istnieje tedy punkt graniczny z_0 , położony wewnątrz obwodu C lub na samym obwodzie. Ponieważ, zgodnie z założeniem, funkcja $f(z)$ posiada dla $z = z_0$ pochodną $f'(z_0)$, przeto można znaleźć taką liczbę ϵ , iżby przy $|z - z_0| < \epsilon$ zachodził związek

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)| \leq \eta |z - z_0|.$$

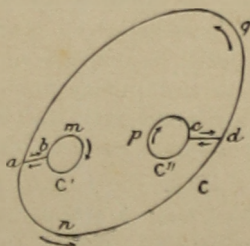
Niech ϵ oznacza koło o promieniu ϵ , zakreślone dokola punktu z_0 , jako środka. Przy n większym od pewnej odpowiedniej liczby pole A_n leży wewnątrz koła ϵ i wszystkie punkty obwodu tego pola spełniają warunek

$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0) f'(z_0)| \leq |z - z_0| \eta.$$

Skądinąd jest to rzecz jasna, że punkt z_0 jest położony wewnątrz lub na obwodzie pola A_n , a więc obszar ten winien czynić zadość warunkowi (α) względem η . Ostatecznie widzimy, że przypuszczenie, jakoby twierdzenie pomocnicze nie było prawdziwe, doprowadza do sprzeczności.

288. Czyniąc odpowiednią umowę co do kierunku przebiegu, możemy również zastosować powyższe twierdzenie do obwodów, utworzonych z kilku różnych krzywych zamkniętych. Rozważmy np. funkcję $f(z)$, całokształtną zarówno wewnątrz pola A , ograniczonego przez krzywą zamkniętą C oraz dwie krzywe wewnętrzne C, C' , jakoteż na tych samych krzywych (rys. 59). Obwód całkowity F pola A składa

Rys. 59.



się z tych trzech osobnych krzywych, i powiemy, że obwód ten jest przebiegany w zwrocie dodatnim, gdy pole A pozostaje wciąż z lewej strony; ów kierunek dodatni przebiegu wzdłuż każdej z krzywych jest oznaczony na rysunku zapomocą wskazówek. Obliczając, zgodnie z taką umową, całkę funkcji wzdłuż całkowitego obwodu w zwrocie dodatnim, otrzymujemy zawsze

$$\int_{(\Gamma)} f(z) dz = 0.$$

Można tu zastosować bezpośrednio taki sam dowód, jakiegośmy użyli przy rozważaniu pola o pojedynczym obwodzie; można również sprowadzić ten przypadek do poprzedniego, przeciągając poprzeczne ab i cd i stosując omawiane twierdzenie do krzywej zamkniętej $abmbandcpdq$ (I, art. 153).

Bywa niekiedy dogodnie dla celów praktycznych pisać wzór powyższy w postaci

$$\int_{(C)} f(z) dz = \int_{(C')} f(z) dz + \int_{(C'')} f(z) dz;$$

wszystkie trzy całki winny być przytym liczone w tym samym zwrocie, a więc dwie ostatnie — w zwrocie przeciwnym temu, który oznaczają wskazówki.

Powróćmy do pytania, postawionego na początku artykułu 286-go; łatwo w tej chwili dać na nie odpowiedź. Weźmy funkcję $f(z)$, całkokształtną w pewnym obszarze A płaszczyzny zmiennej z ; dwie różne drogi AMB i ANB , położone całkowicie w tym obszarze i posiadające wspólne punkty końcowe, dają tą samą wartość całki $\int f(z) dz$, byleby funkcja $f(z)$ była całkokształtna wszędzie wewnątrz krzywej zamkniętej, utworzonej przez drogę AMB wraz z BNA . (W celu ustalenia uwagi założymy, że ta krzywa zamknięta nie posiada punktów podwójnych). W istocie, skoro suma całek, branych wzdłuż AMB i wzdłuż BNA , równa się zeru, to całki, wzięte wzdłuż AMB i wzdłuż ANB , muszą być równe. Można jeszcze sformułować ten wynik w sposób następujący:

Dwie drogi AMB i ANB , posiadające te same punkty końcowe, wiodą do tej samej wartości całki $\int f(z) dz$, jeżeli można przejść od jednej z nich do drugiej zapomocą przekształcenia ciągłego, bez natknięcia się na żaden punkt, w którym funkcja przestałaby być całkokształtną (holomorficzną).

Twierdzenie, wyrażone w tej postaci, daje się zastosować również wtedy, gdy dwie badane drogi posiadają oprócz punktów końcowych dowolną liczbę punktów wspólnych (I, art. 152). Stąd wnioskujemy, iż gdy funkcja $f(z)$ jest całokształtna w obszarze, ograniczonym przez jedną tylko krzywą zamkniętą, całka $\int f(z) dz$, wzięta wzdłuż jakiegokolwiek obwodu zamkniętego, zawartego w tym polu, równa się zeru. Nie należy atoli rozciągać tego wniosku na przypadki, w których występują pola, ograniczone przez kilka osobnych krzywych zamkniętych. Weźmy np. funkcję $f(z)$, całokształtną w dziedzinie pierścienia, zawartego pomiędzy dwoma okręgami współśrodkowymi C i C' . Oznaczmy przez C'' okrąg o tym samym środku, zawarty pomiędzy C a C' ; całka $\int f(z) dz$, obliczona wzdłuż C'' , w ogólności nie równa się zeru. Twierdzenie Cauchy'ego pozwala jedynie orzec, iż wartość tej całki pozostaje bez zmiany, gdy zmieniamy promień koła C'' . ⁽¹⁾

(1) Do warunków niezbędnych prawdziwości twierdzenia ogólnego Cauchy'ego nie należy bynajmniej ani istnienie funkcji $f(z)$ poza polem A , ograniczonym przez obwód C , ani też istnienie pochodnej w każdym punkcie krzywej C . Wystarczy, iżby funkcja $f(z)$ była całokształtna w każdym punkcie wewnętrznym pola A i ciągła na obwodzie C , to jest iżby wartość $f(Z)$ funkcji w punkcie Z krzywej C zmieniała się w sposób ciągły wraz z położeniem punktu Z na tym obwodzie i żeby różnica $f(Z) - f(z)$ pomiędzy $f(Z)$ i wartością $f(z)$, odpowiadającą punktowi wewnętrznemu z , dążyła do zera jednocześnie z $|Z - z|$. W istocie, założmy z początku, że wszelki promień, wykreślony z pewnego określonego punktu a obszaru A , przecina obwód C w jednym tylko punkcie. Gdy punkt z przebiega C , punkt $a + \eta(z - a)$ (η — jakaś liczba rzeczywista, zawarta między 0 a 1) zakreśla obwód C' , położony w polu A . Różnica całek, wziętych wzdłuż obwodów C i C' , równa się

$$\delta = \int_{(C)} \{f(z) - \eta f[z - (z - a)(1 - \eta)]\} dz,$$

i można nadać różnicy $1 - \eta$ wartość dość małą, iżby δ było mniejsze od wszelkiej liczby dodatniej, z góry danej, ponieważ funkcja, poddana całkowaniu, może być napisana w postaci:

$$f(z) = f[z - (z - a)(1 - \eta)] + (1 - \eta)f[z - (z - a)(1 - \eta)].$$

Ze względu na to, że całka wzięta wzdłuż C' , równa się zeru, mamy tedy również

$$\int_{(C)} f(z) dz = 0.$$

Mając do czynienia z obwodem C o dowolnej postaci, możemy zapomocą przeciągnięcia odpowiednio dobranych linii poprzecznych zastąpić ten obwód szeregiem obwodów zamkniętych, spełniających powyższy warunek.

289. Rozszerzenie zakresu wzorów rachunku całkowego.—Niech $f(z)$ oznacza funkcję całokształtną w obszarze A , ograniczonym przez obwód niezłożony C . Całka określona

$$\Phi(Z) = \int_{z_0}^Z f(z) dz,$$

liczona wzdłuż drogi, położonej w polu A , od punktu stałego z_0 do punktu zmiennego Z , stanowi stosownie do tego, cośmy stwierdzili, zupełnie określoną funkcję granicy wyższej Z . Dowiedzmy obecnie, iż ta funkcja $\Phi(Z)$ jest również funkcją holomorficzną zmiennej Z i że ma za pochodną $f(Z)$. Istotnie, oznaczając przez $Z+h$ punkt zbliżony do punktu Z , mamy związek

$$\Phi(Z+h) - \Phi(Z) = \int_Z^{Z+h} f(z) dz,$$

i możemy założyć, że całka, która w nim występuje, jest liczona wzdłuż odcinka prostej, łączącego punkty Z i $Z+h$. Jeżeli te punkty są położone nader blisko siebie, to $f(z)$ wzdłuż całej drogi całkowania różni się bardzo mało od $f(Z)$, i możemy napisać, oznaczając przez δ liczbę, której wartość bezwzględna przy $|h|$ dość małym jest mniejsza od dowolnej liczby dodatniej η :

$$f(z) = f(Z) + \delta.$$

Dzieląc przez h , otrzymujemy stąd

$$\frac{\Phi(Z+h) - \Phi(Z)}{h} = f(Z) + \frac{1}{h} \int_Z^{Z+h} \delta dz;$$

moduł ostatniej całki jest mniejszy od $\eta |h|$, a więc gdy h dąży do zera, lewa strona równości dąży do $f(Z)$.

Jeżeli już znamy jakąś funkcję $F(Z)$, która ma za pochodną $f(Z)$, to możemy być pewni, że funkcje $\Phi(Z)$ i $F(Z)$ różnią się od siebie jedynie o liczbę stałą (art. 275, odsyłacz); stąd wynika, że również w zastosowaniu do funkcji zmiennej zespolonej jest prawdziwym wzór podstawowy rachunku całkowego

$$(10) \quad \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Wzór ten, uzasadniony przy założeniu, że funkcje $f(z)$ i $F(z)$ są całokształtne wewnątrz pola A , daje się zastosować również w warunkach bardziej ogólnych. Może się zdarzyć, iż funkcja $F(z)$ posiada różne gałęzie albo też że posiadają różne gałęzie obie funkcje $f(z)$ i $F(z)$.

jednocześnie; w takim razie całka daje się wyznaczyć zupełnie dokładnie, jeżeli droga całkowania nie przechodzi przez żaden z punktów krytycznych tych funkcji. Przy stosowaniu wzoru należy wybrać wartość początkową $F(z_0)$ funkcji pierwotnej i następnie baczyc, by w miarę zakreślania przez z drogi całkowania funkcja ta zmieniała się w sposób ciągły; prócz tego, jeżeli $f(z)$ jest również funkcją wielowartościową, to pomiędzy gałęziami funkcji $F(z)$ należy wybrać tę, której odpowiada pochodna, równa danej odmianie funkcji $f(z)$.

W każdym przypadku, gdy droga całkowania daje się pomieścić wewnątrz pola o obwodzie niezłożonym, w którym rozważane rozgałęzienia funkcji $f(z)$ i $F(z)$ są całokształtne, można uważać wzór za dowiedziony. Otóż, jakkolwiekby była droga całkowania, możemy ją rozłożyć na łuki, czyniące zadość temu warunkowi, i stosować wzór (10) do każdego z nich z osobna. Dodając otrzymane wyniki, stwierdzamy, że wzór ten posiada znaczenie ogólne; należy jeno przy jego stosowaniu zachować niezbędne ostrożności.

Przypuśćmy np., że oznaczając przez m liczbę rzeczywistą lub zespoloną różną od -1 i obierając dowolną drogę, nie przechodzącą przez początek układu, chcemy obliczyć całkę określoną $\int_{z_0}^{z_1} z^m dz$. Jedną z funkcji pierwotnych jest $\frac{z^{m+1}}{m+1}$ i wzór ogólny (10) przybiera w tym razie postać

$$\int_{z_0}^{z_1} z^m dz = \frac{z_1^{m+1} - z_0^{m+1}}{m+1};$$

aby usunąć wieloznaczność, występującą w tym wzorze, gdy m nie jest liczbą całkowitą, napiszmy go w postaci

$$\int_{z_0}^{z_1} z^m dz = \frac{e^{(m+1) \text{Log}(z_1)} - e^{(m+1) \text{Log}(z_0)}}{m+1}.$$

Obierając wartość początkową $\text{Log}(z_0)$, ustalamy przez to zarówno wartość potęgi z^m wzdłuż drogi całkowania, jak wartość końcową $\text{Log}(z_1)$. Wartość całki zależy jednocześnie od wartości początkowej $\text{Log}(z_0)$ i od drogi całkowania. Podobnie nie sprawia trudności interpretacja wzoru

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{Log}[f(z_1)] - \text{Log}[f(z_0)],$$

byleby tylko wzdłuż drogi całkowania funkcja $f(z)$ była ciągła i nie równała się nigdzie zeru. Punkt $u = f(z)$ zakreśla w swej płaszczyźnie

łuk, nie przechodzący przez początek układu, i prawa strona równości wyraża zmianę, której ulega $\text{Log}(u)$ wzdłuż tego łuku.

Zauważmy jeszcze, nie zatrzymując się przy tym dłużej, iż wzór, dotyczący całkowania przez części, jako wypływający z wzoru (10), stosuje się z tego powodu również do całek funkcji zmiennej zespolonej.

290. Inny dowód powyższych wyników. — Własności całek $\int f(z) dz$ posiadają wiele wspólnego z własnościami całek krzywoliniowych, występującymi w tym przypadku, gdy jest spełniony warunek całkowalności. (I, art. 152). Riemann dowiódł istotnie, że twierdzenie Cauchy'ego wynika bezpośrednio z analogicznego twierdzenia, dotyczącego całek krzywoliniowych. Niech $f(z) = X + iY$ stanowi funkcję zmiennej z , całkością wewnątrz pola A o obwodzie niezłożonym; całka tej funkcji, brana wzdłuż obwodu zamkniętego C , położonego w tym polu, równa się sumie dwu całek krzywoliniowych:

$$\int_{(C)} f(z) dz = \int_{(C)} X dx - Y dy + i \int_{(C)} Y dx + X dy;$$

ze względu na związki, zachodzące pomiędzy pochodnymi funkcji X i Y

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x},$$

obie te całki są równe zeru ⁽¹⁾ (I, art. 152).

Stąd wynika, że całka $\int_{z_0}^z f(z) dz$, wzięta od punktu stałego z_0 do punktu zmiennego z , jest funkcją jednowartościową w polu A ; oznaczmy ją przez $\Phi(z)$ i rozpatrzmy z osobna część rzeczywistą oraz współczynnik przy i

$$\Phi(z) = P(x, y) + i Q(x, y),$$

$$P(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} X dx - Y dy, \quad Q(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Y dx + X dy;$$

funkcje P i Q posiadają pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial P}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -Y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = Y, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = X,$$

które czynią zadość warunkom

⁽¹⁾ Należy zauważyć, że dowód Riemanna wymaga ciągłości pochodnych $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y}, \dots$, to jest ciągłości pochodnej $f'(z)$.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Przeto $P + i Q$ jest funkcją całokształtną zmiennej z , której pochodna równa się $X + i Y$, to jest $f(z)$.

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest nieciągła w pewnych punktach pola A , to samo zachodzi z jedną co najmniej z funkcji X i Y , i całki krzywoliniowe funkcji $P(x, y)$, $Q(x, y)$ posiadają w ogólności okresy, pochodzące z dróg, zakreślonych dokoła punktów nieciągłości. To samo tedy można orzec o calce $\int_{z_0}^{z_1} f(z) dz$. Powrócimy do badania tych okresów po zgłębieniu istoty punktów osobliwych, jakie może posiadać $f(z)$.

Jako jeden przynajmniej przykład, weźmy całkę $\int_1^z \frac{dz}{z}$; oddzielając część rzeczywistą i urojoną, otrzymujemy

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_{(x,y)}^{(x,y)} \frac{dx + i dy}{x + i y} = \int_{(x,y)}^{(x,y)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \int_{(x,y)}^{(x,y)} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Część rzeczywista nie zależy od drogi całkowania i równa się $\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$. Co do współczynnika przy i , stwierdziliśmy już, iż posiada okres, równy 2π ; jest to kąt obrotu promienia wodzącego, który łączy początek układu z punktem (x, y) . Otrzymujemy tedy istotnie różne wartości funkcji $\text{Log}(z)$.

II. — Całka Cauchy'ego. — Szeregi Taylora i Laurenta. — Punkty osobliwe. — Pozostałości.

Przechodzimy obecnie do szeregu nowych i ważnych wyników, otrzymanych przez Cauchy'ego zapomocą badania całek określonych, branych pomiędzy granicami urojonemi.

291. **Wzór podstawowy.** — Weźmy funkcję $f(z)$, całokształtną w polu skończonym A , o obwodzie I , utworzonym przez jedną lub kilka różnych krzywych zamkniętych, a ciągłą na samym obwodzie. Jeżeli x oznacza punkt⁽¹⁾, położony w polu A , to funkcja

$$\frac{f(z)}{z - x}$$

jest całokształtna w tym samym obszarze, z wyjątkiem punktu $z = x$.

(¹) W dalszym ciągu będziemy mieli często do czynienia jednocześnie z kilku liczbami zespolonemi. Będziemy je oznaczali przez którąkolwiek z liter: $x, z, u, \dots$. Z wyjątkiem przypadków, w których to będzie wyraźnie zaznaczone, litera x nie będzie używana specjalnie do oznaczania zmiennej rzeczywistej.

Zakreślmy dokoła punktu x okrąg γ o promieniu ς , położony całkowicie w polu A ; wymieniona funkcja jest całokształtna w obszarze płaszczyzny, ograniczonym przez obwód Γ i okrąg γ , więc można do niej zastosować twierdzenie ogólne z art. 286. Przypuśćmy, w celu ustalenia uwagi, że obwód Γ składa się z dwu krzywych zamkniętych C i C' (rys. 60); w takim razie, licząc całki w kierunku, oznaczonym za pomocą wskazówek, mamy równość

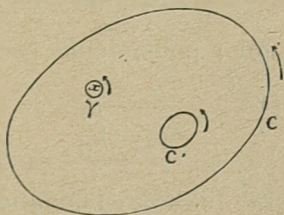
$$\int_{(C)} \frac{f(z) dz}{z - x} = \int_{(C')} \frac{f(z) dz}{z - x} + \int_{(\gamma)} \frac{f(z) dz}{z - x},$$

którą można napisać w postaci

$$\int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{z - x} = \int_{(\gamma)} \frac{f(z) dz}{z - x},$$

jeżeli $\int_{(\Gamma)}$ oznacza całkę, braną wzdłuż całkowitego obwodu I' w zwrocie dodatnim. Jeżeli promień ς

Rys. 60.



koła γ jest nader mały, to wartość $f(z)$ w jakimkolwiek punkcie obwodu tego koła różni się bardzo nieznacznie od $f(x)$;

$$f(z) = f(x) + \delta,$$

przytym $|\delta|$ jest nader małe. Zastępując $f(z)$ przez to wyrażenie, otrzymujemy

$$(11) \quad \int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{z - x} = f(x) \int_{(\gamma)} \frac{dz}{z - x} + \int_{(\gamma)} \frac{\delta dz}{z - x}.$$

Łatwo obliczyć pierwszą z całek, występujących z prawej strony znaku równości; jeżeli założymy, że $z = x + \varsigma e^{i\theta}$, to wypadnie

$$\int_{(\gamma)} \frac{dz}{z - x} = \int_0^{2\pi} \frac{i \varsigma e^{i\theta} d\theta}{\varsigma e^{i\theta}} = 2\pi i.$$

Całka $\int_{(\gamma)} \frac{\partial dz}{z - x}$ nie zależy tedy od promienia ϵ okręgu γ ; z drugiej strony, jeżeli $|\partial|$ pozostaje mniejszym od liczby dodatniej η , to moduł tej całki jest mniejszy niż $\frac{\eta}{\epsilon} 2\pi\epsilon = 2\pi\eta$. Otóż ze względu na ciągłość funkcji $f(z)$ dla $z = x$ można uczynić promień ϵ dość małym, by η było dowolnie male. Omawiana całka równa się przeto zeru i dzieląc przez $2\pi i$ obie strony wzoru (11), otrzymujemy:

$$(12) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{z - x}.$$

Jest to wzór podstawowy Cauchy'ego, wyrażający wartość funkcji $f(z)$ w jakimś punkcie x , położonym wewnątrz pewnego obwodu, w zależności od wartości, jakie ta sama funkcja przybiera wzdłuż obwodu.

Weźmy punkt $x + \Delta x$, zbliżony do x ; przypuśćmy, że punkt ten leży np. wewnątrz koła γ o promieniu ϵ . Mamy również

$$f(x + \Delta x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{z - x - \Delta x},$$

a przeto po odjęciu stronami i podzieleniu przez Δx wypada:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{(z - x)(z - x - \Delta x)}.$$

Gdy Δx dąży do zera, funkcja, poddana całkowaniu, zmierza do $\frac{f(z)}{(z - x)^2}$. Aby dowieść ściśle, iż mamy prawo stosować zwykły sposób różniczkowania, napiszmy tę całkę w postaci:

$$\int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{(z - x)(z - x - \Delta x)} = \int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{(z - x)^2} + \int_{(\Gamma)} \frac{\Delta x f(z) dz}{(z - x)(z - x - \Delta x)}.$$

Oznaczmy przez M jakąś granicę wyższą modułu $|f(z)|$ wzdłuż Γ , przez L — długość tego obwodu a przez δ — granicę niższą odległości jakiegokolwiek punktu okręgu γ od dowolnego punktu krzywej Γ . Moduł ostatniej całki jest mniejszy niż $\frac{ML}{\delta^2} |\Delta x|$ i przeto dąży do zera wraz z $|\Delta x|$. Otrzymujemy tedy po przejściu do granicy

$$(13) \quad f'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{(z - x)^2}.$$

W ten sam sposób dowodzimy, że zwykły przepis różniczkowania pod znakiem $\int$ daje się zastosować⁽¹⁾ do całki (13) i do wszystkich całek, które otrzymujemy kolejno na tej zasadzie, a więc

$$f''(x) = \frac{1 \cdot 2}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{(z-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{(z-x)^4}$$

i wogóle

$$(14) \quad f^{(n)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

Widzimy przeto, iż jeżeli funkcja $f(z)$ jest całokształtna w pewnym obszarze płaszczyzny, to ciąg kolejnych pochodnych tej funkcji jest nieograniczony i każda z nich jest również funkcją całokształtną w tym samym obszarze. Warto zauważyć, iż osiągnęliśmy ten wynik, zakładając jedynie istnienie pierwszej pochodnej.

Uwaga. — Rozumowania, rozwinięte w tym artykule, doprowadzają do wniosków jeszcze ogólniejszych. Weźmy funkcję $\varphi(z)$ zmiennej zespolonej z , niekoniecznie analityczną, lecz ciągłą wzdłuż łuku Γ , zamkniętego lub nie. Całka określona

$$F(x) = \int_{(\Gamma)} \frac{\varphi(z) dz}{z-x}$$

posiada przy wszelkiej wartości x , nie należącej do drogi całkowania, pewną określoną wartość. Obliczenia, dokonane przed chwilą, wyka-

zują, że granicą, do której dąży stosunek $\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$, gdy $|\Delta x|$ zmierza do zera, jest całka określona

$$F'(x) = \int_{(\Gamma)} \frac{\varphi(z) dz}{(z-x)^2};$$

$F(x)$ stanowi tedy funkcję analityczną, całokształtną dla wszelkiej wartości zmiennej x , oprócz tych, które odpowiadają punktom obwodu Γ ; są to w ogólności punkty osobliwe tej funkcji (p. nieco dalej, art. 348). Stwierdzamy, jak poprzednio, że n -ta pochodna $F^{(n)}(x)$ posiada wyrażenie

(1) Przepis ogólny różniczkowania pod znakiem $\int$ będzie uzasadniony poniżej. (Rozdz. XVII).

$$F^{(n)}(x) = n! \int_{(1)} \frac{z(z) dz}{(z-x)^{n+1}}.$$

292. Twierdzenie Morery. — Twierdzeniu podstawowemu Cauchy'ego odpowiada twierdzenie odwrotne, podane przez Morerę, które brzmi jak następuje: *Jeżeli funkcja $f(z)$ zmiennej zespolonej z jest ciągła w polu A i jeżeli całka określona*

$\int_{(C)} f(z) dz$, liczona wzdłuż jakiegokolwiek obrotu zamkniętego C , położonego w obszarze A , równa się zawsze zero, to $f(z)$ jest funkcją całokształtną w polu A .

Istotnie, w tych warunkach całka określona $F(z) = \int_{z_0}^z f(t) dt$, wzięta wzdłuż dowolnej drogi, położonej w polu A i łączącej dwa punkty tego pola z_0 i z , posiada wartość niezależną od drogi całkowania; jeżeli zakładamy, że punkt z_0 jest stały, to ta całka jest funkcją zmiennej z . Rozumowanie, rozwinięte w art. 289, przekonywa, że stosunek $\frac{\Delta F}{\Delta z}$ dąży do granicy, równej $f(z)$, gdy Δz dąży do zera. Funkcja $F(z)$ jest tedy funkcją całokształtną zmiennej z , mającą za pochodną $f(z)$, a przeto $f(z)$ jest również funkcją holomorficzną.

293. Szereg Taylora. — *Jeżeli $f(z)$ jest funkcją całokształtną we wnętrzu koła C o środku a , to wartość tej funkcji w jakimkolwiek punkcie x , położonym w tym kole, równa się sumie szeregu zbieżnego, danego we wzorze:*

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1} f'(a) \\ + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(a) + \dots \end{aligned} \right.$$

Możemy założyć przy dowodzie, że funkcja $f(z)$ jest całokształtna również na samym okręgu C ; w istocie, jeżeli x oznacza jakikolwiek punkt, położony wewnątrz koła, to można zawsze znaleźć okrąg C' o środku a i promieniu mniejszym niż promień okręgu C , dla którego punkt x byłby również punktem wewnętrznym, i zastosować do tego okręgu C' te same rozumowania, jakie zastosujemy do C . Stwierdziwszy to, wyrażamy zgodnie z wzorem podstawowym wartość funkcji w punkcie x , położonym wewnątrz C :

$$(12 \text{ bis}) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(z)}{z-x} dz;$$

napişmy $\frac{1}{z-x}$ w postaci następującej

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{(z-a)-(x-a)} = \frac{1}{z-a} \left(\frac{1}{1 - \frac{x-a}{z-a}} \right),$$

skąd otrzymujemy, po wykonaniu dzielenia aż do reszty stopnia $(n+1)$ -go względem $x - a$

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(z-a)^3} + \dots$$

$$+ \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{(x-a)^{n+1}}{(z-x)(z-a)^{n+1}}.$$

Podstawmy to wyrażenie do wzoru (12 bis) i przenieśmy poza znak $\int$ czynniki $x - a$, $(x - a)^2$, ..., niezależne od z ; otrzymamy wzór

$$f(x) = J_0 + J_1(x-a) + \dots + J_n(x-a)^n + R_n,$$

w którym współczynniki $J_0, J_1, \dots, J_n$ i reszta R_n posiadają wartości następujące:

$$(16) \quad \begin{cases} J_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(z) dz}{z-a}, & J_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(z) dz}{(z-a)^2}, \dots, \\ J_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(z) dz}{(z-a)^{n+1}}, & R_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \left(\frac{x-a}{z-a} \right)^{n+1} \frac{f(z) dz}{z-x}. \end{cases}$$

Gdy liczba n wzrasta nieograniczenie, reszta R_n dąży do zera. Istotnie, oznaczmy przez M jakąś granicę wyższą modułu funkcji $f(z)$ wzdłuż okręgu C , przez R — promień tego okręgu, a przez r — moduł różnicy $x-a$. Gdy z przebiega okrąg C , to $|z-x| \geq R-r$, a więc

$$\left| \frac{1}{z-x} \right| \leq \frac{1}{R-r}; \text{ moduł reszty } R_n \text{ jest tedy mniejszy niż}$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{r}{R} \right)^{n+1} \frac{M}{R-r} 2R\pi = \frac{MR}{R-r} \left(\frac{r}{R} \right)^{n+1}; \text{ czynnik zaś } \left(\frac{r}{R} \right)^{n+1}$$

tego iloczynu dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie. Stąd wynika, że $f(x)$ równa się sumie szeregu zbieżnego

$$J_0 + J_1(x-a) + \dots + J_n(x-a)^n + \dots$$

Owóż, wystarczy we wzorach (12), (13) i (14) uważać okrąg C za obwód Γ i założyć, że $x = a$, aby otrzymać

$$J_0 = f(a), \quad J_1 = f'(a), \quad \dots, \quad J_n = \frac{f^{(n)}(a)}{1 \cdot 2 \dots n}, \quad \dots;$$

szereg powyższy utożsamia się z szeregiem (15), to jest z szeregiem Taylora.

Koło C jest to koło o środku a , wewnątrz którego funkcja jest całokształtna; rzecz jasna, że otrzymamy możliwie największe koło,

spełniające ten warunek, biorąc za promień odległość punktu a od punktu osobliwego funkcji $f(z)$, najbardziej zbliżonego do punktu a . Będzie to również koło zbieżności szeregu, stanowiącego prawą stronę równości ⁽¹⁾

$$f(x) = J_0 + J_1 (x - a) + \dots + J_n (x - a)^n + \dots$$

Ważne twierdzenie, uzasadnione przed chwilą, wykazuje tożsamość obu danych przez nas określeń funkcji analitycznej (art. 197 i 261). W istocie, wszelki szereg potęgowy wyraża funkcję całokształtną w kole zbieżności (art. 266) i nawzajem stwierdziliśmy, że wszelka funkcja, całokształtna w kole o środku a , może być rozwinięta w szereg kolejnych potęg różnicy $x - a$, zbieżny w tym kole. Zauważmy jeszcze, że niektóre z otrzymanych przedtym wyników stają się niemal oczywiste; np. stosując dane twierdzenie do funkcji $\text{Log } (1+z)$ i $(1+z)^m$, całokształtnych w kole o promieniu równym jednośc i o środku w początku układu, odnajdujemy wzory z art. 275 i 276. Zbadajmy jeszcze iloraz

$\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ dwu szeregów potęgowych, zbieżnych w tym samym kole o promieniu R ; jeżeli szereg $\varphi(x)$ nie równa się zeru dla $x = 0$, to ze względu na jego ciągłość można zakreślić okrąg o promieniu $r \leq R$, wewnątrz którego $\varphi(x)$ nie staje się równym zeru. Funkcja $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ jest w takim razie całokształtna w kole o promieniu r , i przeto w sąsiedztwie początku układu daje się rozwinąć w szereg całkowity (I, art. 188). Można by również sprawdzić twierdzenie, dotyczące podstawiania jednego szeregu do drugiego i t. d.

Uwaga. — Weźmy funkcję $f(z)$, całokształtną wewnątrz koła C o środku a i promieniu r i ciągłą na samym obwodzie koła. Moduł $|f(z)|$ funkcji na okręgu C jest funkcją ciągłą, której największość oznaczmy przez $M(r)$. Skądinąd, współczynniki a_n przy $(x - a)^n$ w szeregu, wyrażającym $f(x)$, równa się $\frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$, to jest

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{(C)} \frac{f(z) dz}{(z - a)^{n+1}},$$

a więc

$$(17) \quad A_n = |a_n| < \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{M(r)}{r^n},$$

⁽¹⁾ Ostatni wniosek wymaga pewnych wyjaśnień co do istoty punktów osobliwych — damy je w rozdziale, omawiającym przedłużenie analityczne.

tak iż $\mathcal{M}(r)$ jest większe od wszystkich iloczynów $A_n r^n$. ⁽¹⁾ Można tedy w wyrażeniu funkcji wyższej (I, art. 186) zastąpić M przez $\mathcal{M}(r)$.

294. Twierdzenie Liouville'a. — Jeżeli funkcja $f(x)$ jest całokształtna dla wszelkiej wartości skończonej zmiennej x , to można ją rozwinąć w szereg Taylora, przy dowolnym a , w dziedzinie całej płaszczyzny — taka funkcja nazywa się *funkcją całkowitą* (fonction entière). Z wyrażień (17), ograniczających współczynniki, łatwo wywnioskować następujące twierdzenie, podane przez Liouville'a:

Wszelka funkcja całkowita, której moduł pozostaje mniejszym od liczby stałej M , musi być liczbą stałą.

Istotnie, przypuśćmy, iż rozwinęliśmy $f(x)$ podług potęg różnicy $x - a$, i oznaczmy współczynnik przy $(x - a)^n$ przez a_n . Rzecz jasna iż przy jakimkolwiek promieniu r największość $\mathcal{M}(r)$ jest mniejsza niż M , a przeto $|a_n| < \frac{M}{r^n}$. Lecz promieniowi r możemy nadać wartość dowolnie wielką; otrzymujemy tedy $a_n = 0$, gdy $n \geq 1$, i $f(x)$ równa się stałej $f(a)$.

Można jeszcze uogólnić to twierdzenie. Weźmy funkcję całkowitą $f(x)$, spełniającą ten warunek, iż moduł ilorazu $\frac{f(x)}{x^m}$ dla wartości x o module większym od pewnej liczby dodatniej R pozostaje mniejszy niż liczba stała M : *funkcja $f(x)$ musi być wielomianem stopnia co najwyżej m -ego.* Istotnie, wyobraźmy sobie, że rozwinęliśmy $f(x)$ podług potęg zmiennej x , i a_n niech stanowi współczynnik przy x^n . Jeżeli promień r koła C jest większy od R , to $\mathcal{M}(r) < M r^m$, a zatem $|a_n| < M r^{m-n}$. Stąd wynika, iż $a_n = 0$, gdy $n > m$, ponieważ w takim razie, obierając dość wielkie r , możemy uczynić $M r^{m-n}$ dowolnie małym.

295. Szereg Laurenta. — Rozumowanie, zastosowane przez Cauchy'ego do uzasadnienia wzoru Taylora, nadaje się do wielostronnego uogólnienia. Weźmy np. funkcję $f(z)$, holomorficzną w pierścieniu kołowym, zawartym między dwoma okręgami C i C' o wspólnym środku a ; dowiedziemy, iż *wartość $f(x)$ funkcji w dowolnym punkcie x tego obszaru równa*

⁽¹⁾ Nierówności (17) zasługują na uwagę głównie dlatego, że wyrażają związek pomiędzy rzędem wielkości współczynników szeregu całkowitego a rzędem wielkości funkcji, danej przez ten szereg; $\mathcal{M}(r)$ nie jest zresztą w ogólności najmniejszą z liczb, czyniących zadość tym nierównościom, jak można stwierdzić bezpośrednio, gdy wszystkie współczynniki a_n są rzeczywiste i dodatnie. Nierówności (17) mogą być uzasadnione bez pomocy całki Cauchy'ego (MÉRAY, *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale*. (Nowe wykłady analizy nieskończonościowej), t. I., str. 99).

się sumie dwu szeregów zbieżnych, z których jeden jest uzyskowany podług potęg dodatnich różnicy $x - a$, drugi zaś podług potęg dodatnich jej odwrótności

$$\frac{1}{x - a}. \quad (1)$$

Możemy założyć, podobnie jak przed chwilą, że funkcja $f(z)$ jest holomorficzna na samych okręgach C i C' . Oznaczamy promienie tych okręgów przez R i R' , a moduł różnicy $x - a$ przez r ; jeżeli C' jest okręgiem wewnętrznym, to $R' < r < R$. Zakreślmy dokoła punktu x mały okrąg γ , położony w całości pomiędzy C a C' . Biorąc całki w odpowiednim zwrocie, otrzymujemy równość

$$\int_{(C)} \frac{f(z)dz}{z - x} = \int_{(C')} \frac{f(z)dz}{z - x} + \int_{(\gamma)} \frac{f(z)dz}{z - x};$$

ostatnia z tych całek, liczona wzdłuż γ , równa się $2\pi i f(x)$, i możemy, zachowując wciąż ten sam zwrot przy całkowaniu, napisać związek powyższy w postaci

$$(18) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(z)dz}{z - x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{(C')} \frac{f(z)dz}{x - z}.$$

Powtarzając rozważania, podane w art. 293, otrzymujemy w dalszym ciągu wzór

$$(19) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(z)dz}{z - x} = J_0 + J_1(x - a) + \dots + J_n(x - a)^n + \dots,$$

w którym współczynniki $J_0, J_1, \dots, J_n, \dots$ są dane przez wzory (16). Aby rozwinąć w szereg drugą całkę, zauważymy, że

$$\begin{aligned} \frac{1}{x - z} &= \frac{1}{x - a} \left(\frac{1}{1 - \frac{z - a}{x - a}} \right) = \frac{1}{x - a} + \frac{z - a}{(x - a)^2} + \dots \\ &\quad + \frac{(z - a)^{n-1}}{(x - a)^n} + \frac{(z - a)^n}{(x - z)(x - a)^n} \end{aligned}$$

i że całka wyrazu uzupełniającego

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C')} \left(\frac{z - a}{x - a} \right)^n \frac{f(z)}{x - z} dz$$

dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie. W istocie, jeżeli M' sta-

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*. (Sprawozdania Akademji Nauk), t. XVIII. — P. *Oeuvres de Cauchy*. (Dziela Cauchy'ego), Serja 1-sza, t. VIII, str. 115.

nowi największość modułu $|f(z)|$ wzdłuż C' , to moduł tej całki jest mniejszy niż

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{R'}{r} \right)^n \frac{M'}{r - R'} 2\pi R' = \frac{M' R'}{r - R'} \left(\frac{R'}{r} \right)^n,$$

czynnik zaś $\left(\frac{R'}{r} \right)$ jest mniejszy od jedności. Otrzymujemy tedy również

$$(20) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(C')} \frac{f(z) dz}{x - z} = \frac{K_1}{x - a} + \frac{K_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{K_n}{(x - a)^n} + \dots,$$

przytym spółczynnik K_n równa się następującej całce określonej

$$(21) \quad K_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} (z - a)^{n-1} f(z) dz.$$

Wystarczy teraz dodać oba szeregi (19) i (20), aby otrzymać rozwinięcie funkcji $f(x)$.

Stosując wzory (16) i (21), wyznaczające spółczynniki J_n i K_n , można brać całki wzdłuż jakiegokolwiek okręgu Γ o środku a , zawartego pomiędzy C a C' , gdyż funkcje, poddane całkowaniu, są w dziedzinie pierścienia całokształtne. Umówiwszy się, że wskaźnik n ma się zmieniać od $-\infty$ do $+\infty$, można w tych warunkach napisać szereg, wyrażający $f(x)$, w postaci

$$(22) \quad f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n (x - a)^n;$$

spółczynnik J_n , niezależnie od znaku n , wyznacza się zapomocą wzoru

$$(23) \quad J_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{(z - a)^{n+1}}.$$

Przykład. — Ta sama funkcja $f(x)$ może być rozwijana w różne zupełnie szeregi, zależnie od rozważanego obszaru. Weźmy np. ułamek wymierny $f(x)$, którego mianownik posiada jedynie pierwiastki jednokrotne o różnych modułach; pierwiastki te, uszykowane podług wzrostu modułów, oznaczmy przez $a, b, c, \dots, l$. Odrzucając część całkowitą, która tu nie odgrywa żadnej roli, możemy napisać

$$f(x) = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} + \frac{C}{x - c} + \dots + \frac{L}{x - l}.$$

W kole o promieniu $|a|$, mającym za środek początek układu, każdy z ułamków prostych może być rozwinięty podług potęg dodatnich zmiennej x , i szereg, wyrażający w ten sposób $f(x)$, jest tym samym, co szereg, dany przez wzór Maclaurina

$$f(x) = -\left(\frac{A}{a} + \dots + \frac{L}{l}\right) - \left(\frac{A}{a^2} + \dots + \frac{L}{l^2}\right)x - \dots \\ - \left(\frac{A}{a^{n+1}} + \dots + \frac{L}{l^{n+1}}\right)x^n - \dots$$

W dziedzinie pierścienia, zawartego pomiędzy okręgami o promieniach $|a|$ i $|b|$ ułamki $\frac{1}{x-b}, \frac{1}{x-c}, \dots, \frac{1}{x-l}$ winny być rozwinięte podług potęg dodatnich zmiennej x , natomiast ułamek $\frac{1}{x-a}$ winien być rozwinięty podług potęg dodatnich ułamka $\frac{1}{x}$; otrzymujemy w ten sposób

$$f(x) = -\left(\frac{B}{b} + \dots + \frac{L}{l}\right) - \left(\frac{B}{b^2} + \dots + \frac{L}{l^2}\right)x - \dots \\ - \left(\frac{B}{b^{n+1}} + \dots + \frac{L}{l^{n+1}}\right)x^n - \dots + \frac{A}{x} + \frac{Aa}{x^2} + \dots + \frac{Aa^{n-1}}{x^n} + \dots$$

Następnym pierścieniem odpowiadają szeregi analogiczne. Wreszcie nazewnątrz koła o promieniu $|l|$ mamy do czynienia jedynie z potęgami odwrotności $\frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{A + \dots + L}{x} + \frac{Aa + \dots + Ll}{x^2} + \dots + \frac{Aa^{n-1} + \dots + Ll^{n-1}}{x^n} + \dots$$

296. Szeregi rozmaite. — Dowody, zastosowane przy wprowadzeniu szeregów Taylora i Laurenta, opierają się ostatecznie na rozwinięciu w pewien sposób w szeregu ułamka prostego $\frac{1}{z-x}$, gdy punkt x leży nawewnątrz lub zewnątrz pewnego stałego koła. Appell dowiódł, iż możemy jeszcze uogólnić te wzory, rozważając funkcję $f(x)$, całokształtną wewnątrz pola A , ograniczonego przez liczbę dowolną łuków okręgu lub całych okręgów. Weźmy np. funkcję $f(x)$, całokształtną w trójkącie krzywoliniowym PQR (rys. 61), utworzonym przez trzy łuki PQ, QR, RP , należące odpowiednio do trzech okręgów C, C', C'' . Oznaczając przez x jakikolwiek punkt, położony wewnątrz tego trójkąta krzywoliniowego, mamy związek:

$$(24) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(PQ)} \frac{f(z) dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{(QR)} \frac{f(z) dz}{z-x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{(RP)} \frac{f(z) dz}{z-x}.$$

Gdy z przebiega wzdłuż łuku PQ , to, oznaczając środek koła C przez a , możemy napisać

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a} + \frac{x-a}{(z-a)^2} + \dots + \frac{(x-a)^n}{(z-a)^{n+1}} + \frac{1}{z-x} \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1};$$

a że w tym przypadku moduł ilorazu $\frac{x-a}{z-a}$ jest mniejszy od jedności, przeto moduł całki

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(PQ)} \frac{f(z)}{z-x} \left(\frac{x-a}{z-x} \right)^{n+1} dz$$

dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie. Stąd otrzymujemy

$$(\alpha) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(PQ)} \frac{f(z) dz}{z-x} = J_0 + J_1 (x-a) + \dots + J_n (x-a)^n + \dots;$$

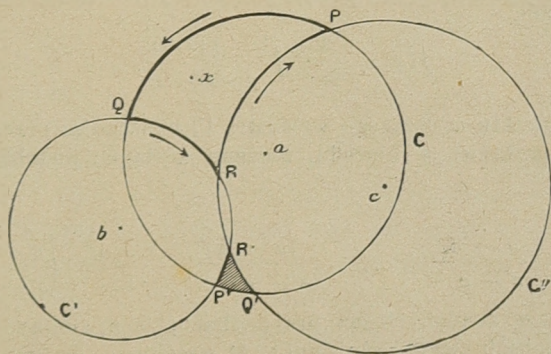
spółczynniki $J_0, J_1, \dots$ są to stałe, których wyrażenia łatwo utworzyć. Przebiegowi wzdłuż łuku QR okręgu C o środku b odpowiada wzór

$$\frac{1}{x-z} = \frac{1}{x-b} + \frac{z-b}{(x-b)^2} + \dots + \frac{(z-b)^{n-1}}{(x-b)^n} + \frac{1}{x-z} \left(\frac{z-b}{x-b} \right)^n;$$

ponieważ moduł potęgi $\left(\frac{z-b}{x-b} \right)^n$ dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie, przeto druga całka daje się rozwinąć w szereg o postaci

$$(\beta) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(QR)} \frac{f(z) dz}{z-x} = \frac{K_1}{x-b} + \frac{K_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{K_n}{(x-b)^n} + \dots$$

Rys. 61.



Podobnie, oznaczając przez c środek koła C'' , otrzymujemy

$$(\gamma) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(RP)} \frac{f(z) dz}{z-x} = \frac{L_1}{x-c} + \frac{L_2}{(x-c)^2} + \dots + \frac{L_n}{(x-c)^n} + \dots$$

Dodając te trzy wzory (α) , (β) i (γ) , wyrażamy $f(x)$ w postaci sumy trzech szeregów, uporządkowanych odpowiednio podług potęg dodatnich wyrażeń: $x-a$, $\frac{1}{x-b}$, $\frac{1}{x-c}$. Rzecz jasna, że można przekształcić tę sumę w szereg, którego wszystkie wyrazy są funkcjami wymiernymi zmiennej x , np. zapomocą połączenia wyrazów te-

go samego stopnia względem $x - a$, $\frac{1}{x - b}$ i $\frac{1}{x - c}$. Rozumowanie powyższe daje się zastosować do liczby dowolnej łuków kołowych.

Zauważmy jeszcze, że szeregi (α) , (β) i (γ) , występujące w poprzednim przykładzie, pozostają zbieżnymi, gdy punkt x znajdzie się wewnątrz trójkąta $P'Q'R'$ i że suma tych szeregów równa się tak samo całce $\int \frac{f(z) dz}{z - x}$, wziętej wzdłuż obwodu

trójkąta PQR w zwrocie dodatnim. Owóż, gdy punkt x leży w trójkącie $P'Q'R'$, funkcja $\frac{f(z)}{z - x}$ jest całokształtna wewnątrz trójkąta PQR , a więc omawiana całka jest równa zeru. Otrzymujemy tedy w ten sposób szereg ułamków wymiernych, który jest zbieżny, gdy x leży wewnątrz jednego z dwu trójkątów PQR lub $P'Q'R'$, i posiada sumę równą funkcji $f(x)$ lub zeru, stosownie do tego, czy punkt x jest położony w trójkącie PQR czy też w trójkącie $P'Q'R'$.

W tej samej dziedzinie badań Painlevé otrzymał wyniki jeszcze ogólniejsze ⁽¹⁾. Poprzestając na przypadku nader prostym, weźmy krzywą wypukłą zamkniętą Γ , której styczna, istniejąca w każdym punkcie, zmienia się w sposób ciągły, i której promień krzywizny pozostaje mniejszy od pewnej liczby stałej. Można w takim razie, jak łatwo stwierdzić, dobrać do każdego punktu M krzywej Γ koło C styczne w tym punkcie z Γ , zawierające wewnątrz siebie całą tę krzywą i spełniające warunki, iżby jego środek poruszał się w sposób ciągły wraz z punktem M . Niech $f(z)$ stanowi funkcję całokształtną wewnątrz krzywej Γ i ciągłą na samym obwodzie; we wzorze podstawowym

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f(z) dz}{z - x},$$

zastosowanym do punktu x , leżącego wewnątrz Γ , oznaczając przez a środek koła C , odpowiadającego punktowi z obwodu, możemy zastąpić, podobnie jak poprzednio,

$\frac{1}{z - x}$ przez

$$\frac{1}{z - a} + \frac{x - a}{(z - a)^2} + \dots + \frac{(x - a)^n}{(z - a)^{n+1}} + \frac{1}{z - x} \left(\frac{x - a}{z - a} \right)^{n+1};$$

a nie jest stałe, jak w zbadanych już przypadkach, lecz stanowi funkcję liczby z zmieniającą się w sposób ciągły, gdy punkt M przebiega krzywą Γ . Mimo to moduł ilorazu $\frac{x - a}{z - a}$, stanowiący funkcję ciągłą zmiennej z , pozostaje mniejszy od pewnej liczby stałej ϵ , mniejszej niż jedność, ponieważ nie może nigdy osiągnąć wartości $= 1$, a przeto całka wyrazu uzupełniającego dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie. Mamy tedy znów związek

$$(25) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{(\Gamma)} \frac{(x - a)^n}{(z - a)^{n+1}} f(z) dz,$$

¹⁾ *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques (Annales de la Faculté de Toulouse, 1888).* [„O liniach osobliwych funkcji analitycznych“ — *Roczniki Uniwersytetu Tuluskiego*, 1888].

i rzecz jasna, że wyraz ogólny tego szeregu jest wielomianem całkowitym $P_n(x)$, stopnia co najwyżej n -go. *Funkcja $f(z)$ daje się tedy rozwinąć wewnątrz obwodu Γ w szereg wielomianów.*

Teoria przekształceń podobnych umożliwia wyrażenie funkcji holomorficzych zapomocą szeregów innego jeszcze rodzaju. Weźmy funkcję $f(x)$, całokształtną wewnątrz pola A , które może się rozciągać do nieskończoności. Przypuśćmy, że umiemy podporządkować z zachowaniem kątów polu A pole koła C , w ten sposób, iż każdemu punktowi pola A odpowiada tylko jeden punkt koła i nawzajem; niech $u = \varphi(z)$ stanowi funkcję analityczną, podporządkowującą polu A koło C , które ma za środek w płaszczyźnie zmiennej u punkt $u = 0$. Gdy u zmienia się w dziedzinie tego koła, wartość odpowiednia z jest funkcją całokształtną zmiennej u . To samo stosuje się do funkcji $f(z)$, która przeto może być rozwinięta w szereg zbieżny, ustalony podług potęg zmiennej u czyli $\varphi(z)$, gdy punkt z pozostaje wewnątrz pola A .

Załóżmy np. iż pole A jest to pas nieograniczony, zawarty pomiędzy dwiema równoległymi do osi rzeczywistej $y = \pm a$. Stwierdziliśmy (art. 280), iż możemy pod-

porządkować temu pasowi zapomocą wzoru $u = \frac{e^{\frac{\pi z}{2a}} - 1}{e^{\frac{\pi z}{2a}} + 1}$ koło o promieniu równym

jedności, mające za środek punkt $u = 0$. Wszelka funkcja $f(z)$, całokształtna w dziedzinie rozważanego pasa nieograniczonego, może być tedy rozwinięta w tym zakresie w szereg zbieżny o postaci następującej:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \left(\frac{e^{\frac{\pi z}{2a}} - 1}{e^{\frac{\pi z}{2a}} + 1} \right)^n.$$

297. Szeregi funkcji całokształtnych. — Suma szeregu jednostajnie zbieżnego, którego wyrazy są funkcjami holomorficznymi zmiennej z , stanowi funkcję ciągłą tej zmiennej, lecz nie można oprzeć na tej jedynie podstawie twierdzenia, iż jest to również funkcja całokształtna. Należy jeszcze dowieść, iż funkcja taka posiada w każdym punkcie jedną określoną pochodną; łatwo to uczynić przy pomocy całki Cauchy'ego.

Zauważmy z początku, że szereg jednostajnie zbieżny, którego wyrazy są funkcjami ciągłymi zmiennej zespolonej z , może być całkowany wyraz po wyrazie, równie jak w tym przypadku, gdy mamy do czynienia ze zmienną rzeczywistą. Dowód, podany dla zmiennej rzeczywistej (I, art. 114), da się tu zastosować bez żadnej zmiany, byleby droga całkowania posiadała długość skończoną.

Twierdzenie, które chcemy uzasadnić, należy oczywiście do zakresu następującego twierdzenia bardziej ogólnego:

Weźmy szereg

$$(26) \quad f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) + \dots,$$

którego wszystkie wyrazy są funkcjami analitycznymi, całokształtami w obszarze A , ograniczonym przez obwód zamknięty Γ , i ciągłymi na samym obwodzie. Jeżeli szereg (26) jest jednostajnie zbieżny wzdłuż krzywej Γ , to jest również zbieżny w każdym punkcie obszaru A , i suma tego szeregu stanowi funkcję całokształtną $F(z)$, której p -ta pochodna wyraża się zapomocą szeregu, utworzonego z pochodnych rzędu p poszczególnych wyrazów.

Oznaczmy przez $\varphi(z)$ sumę szeregu (26), odpowiadającą jakiemuś punktowi krzywej Γ ; $\varphi(z)$ jest funkcją zmiennej z , ciągłą wzdłuż tego obwodu, a więc, jak stwierdziliśmy w uwadze do art. 291, całka określona

$$(27) \quad F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{\varphi(z) dz}{z-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{\sum_{v=1}^{+\infty} f_v(z)}{z-x} dz,$$

w której x oznacza dowolny punkt obszaru A , stanowi funkcję całokształtną w obszarze A , której pochodna rzędu p jest dana przez wzór

$$(28) \quad F^{(p)}(x) = \frac{1 \cdot 2 \dots p}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{\varphi(z) dz}{(z-x)^{p+1}} = \frac{1 \cdot 2 \dots p}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{\sum_{v=1}^{+\infty} f_v(z)}{(z-x)^{p+1}} dz.$$

Lecz z powodu zbieżności jednostajnej szeregu (26) wzdłuż Γ , szereg, otrzymany zapomocą podziału wszystkich wyrazów przez $z-x$, posiada tę samą własność, i możemy napisać

$$F(x) = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \frac{f_v(z) dz}{z-x};$$

a stąd, uwzględniając, że $f_v(z)$ jest funkcją całokształtną wewnątrz krzywej Γ , otrzymujemy [wzór (12)]

$$F(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_v(x) + \dots$$

Wzór (28) przybiera również postać

$$F^{(p)}(x) = f_1^{(p)}(x) + \dots + f_v^{(p)}(x) + \dots$$

Zatym, jeżeli szereg (26) jest jednostajnie zbieżny w obszarze A płaszczyzny zmiennej z , a x oznacza dowolny punkt tego obszaru, wystarczy zastosować poprzednie twierdzenie do jakiegokolwiek obwodu zamkniętego Γ , położonego w obszarze A i otaczającego punkt x ; w ten sposób otrzymujemy twierdzenie następujące:

Wszelki szereg, zbieżny jednostajnie w obszarze A płaszczyzny, którego wszystkie wyrazy są funkcjami całokształtnymi w polu A , wyraża funkcję $F(z)$, całokształtną w tym samym obszarze. Pochodna rzędu p funkcji $F(z)$ równa się sumie szeregu, otrzymanego zapomocą p -krotnego różniczkowania każdego wyrazu szeregu, który wyraża $F(z)$. ⁽¹⁾

298. Bieguny. — Wszelka funkcja, całokształtna w kole o środku a , równa się wewnątrz tego koła sumie szeregu potęgowego

$$(29) \quad f(z) = A_0 + A_1 (z - a) + \dots + A_m (z - a)^m + \dots$$

Powiemy dla krótkości, iż funkcja jest *regularna* (régulière) w punkcie a , który stanowi dla niej *punkt zwyczajny* (point ordinaire); wewnątrz koła C o promieniu ϵ , zakreślonego dokoła a , w którym daje się zastosować wzór (29), nazwiemy *otoczeniem* punktu a (le domaine du point a). Zauważmy, iż niekoniecznie ma to być największe z kół, wewnątrz których jest ważny wzór (29); promień ϵ otoczenia będzie często wyznaczony zapomocą jakiejś innej własności szczególnej.

Jeżeli pierwszy ze współczynników A_0 jest równy zeru, to $f(a) = 0$, i punkt a jest *punktem zerowym* ⁽²⁾ funkcji $f(z)$. Rząd punktu zerowego określamy tak samo jak w zastosowaniu do wielomianów: jeżeli szereg, wyrażający $f(z)$, rozpoczyna się od wyrazu stopnia m względem $z - a$,

$$f(z) = A_m (z - a)^m + A_{m+1} (z - a)^{m+1} + \dots$$

$$[m > 0, A^m \neq 0],$$

to

$$f(a) = 0, f'(a) = 0, \dots, f^{(m-1)}(a) = 0, f^{(m)}(a) \neq 0,$$

i punkt a jest *punktem zerowym rzędu m* (zéro d'ordre m). Można jeszcze, jeżeli oznaczymy przez $\varphi(z)$ szereg potęgowy, nie stający się zerem dla $z = a$, napisać wzór poprzedni w postaci

$$f(z) = (z - a)^m \varphi(z).$$

Ponieważ $\varphi(z)$ jest funkcją ciągłą zmiennej z , można uczynić promień ϵ obszaru dość małym, iżby $\varphi(z)$ nigdzie w tym obszarze nie było

⁽¹⁾ Twierdzenie to jest ogólnie przypisywane Weierstrassowi.

⁽²⁾ J. Puzyna używa w tym znaczeniu nazw: miejsce zerowe, miejsce pierwiastkowe, pierwiastek („Teoria funkcji analitycznych” — t. I, str. 129). Tłumaczenie bezpośrednio nazwy francuskiej „le zéro d'une fonction” przez „zero funkcji” powodowałoby mogło, jak sądzę, pewne nieporozumienia. Termin „pierwiastek”, o ile chodzi o bezwzględną ścisłość, wypada stosować do samej wartości zmiennej zespolonej, a nie do punktu, który jej odpowiada — zresztą, zgodnie z utartymi zwyczajami, skrupulatności w tym względzie nie chciałbym posuwać zbyt daleko. (por. np. E. Pascala „Repertorium matematyki wyższej”, w przekładzie S. Dicksteina, t. I). [Uw. Tłum.]

równe zeru; wewnątrz takiego obszaru funkcja $f(z)$ nie będzie miała innego punktu zerowego, prócz punktu a . Zera funkcji całkowanej są tedy punktami odosobnionemi.

Wszelki punkt, który nie jest punktem zwyczajnym funkcji jedno-wartościowej $f(z)$, nazywa się *punktem osobliwym* (point singulier). Punkt osobliwy a funkcji $f(z)$ nosi nazwę *bieguna* (pôle), jeżeli jest punktem zwyczajnym dla odwrotności $\frac{1}{f(z)}$. Szereg potęg różnicy $z - a$, w któ-ry daje się rozwinąć $\frac{1}{f(z)}$, nie może zawierać wyrazu stałego, ponie-waż punkt a byłby w takim razie dla $f(z)$ punktem zwyczajnym. Przy-puśćmy, iż ten szereg rozpoczyna się od wyrazu stopnia m -ego względem $z - a$, czyli że mamy wzór

$$(30) \quad \frac{1}{f(z)} = (z - a)^m \varphi(z),$$

w którym $\varphi(z)$ oznacza funkcję regularną w otoczeniu punktu a i nie równą zeru przy $z = a$. Wnioskujemy stąd, iż nawzajem

$$(31) \quad f(z) = \frac{1}{(z - a)^m} \cdot \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{\psi(z)}{(z - a)^m},$$

$\psi(z)$ oznacza również funkcję regularną w otoczeniu punktu a i nie równą zeru przy $z = a$. Możemy napisać ten wzór w postaci równo-ważnej

$$(31 \text{ bis}) \quad f(z) = \frac{B_m}{(z - a)^m} + \frac{B_{m-1}}{(z - a)^{m-1}} + \dots + \frac{B_1}{z - a} + P(z - a),$$

oznaczając przez $B_m, B_{m-1}, \dots, B_1$ liczby stałe, a przez $P(z - a)$, jak to często będziemy czynili w dalszym ciągu, funkcję regularną dla $z = a$. Niektóre ze współczynników $B_1, B_2, \dots, B_{m-1}$ mogą być równe zeru, lecz współczynnik B_m jest napewno różny od zera; liczba całkowita m jest to *rzęd bieguna* (l'ordre du pôle). Widzimy, że biegun rzędu m funkcji $f(z)$ jest punktem zerowym rzędu m dla $\frac{1}{f(z)}$ i nawzajem.

Szereg, wyrażający $f(z)$ w otoczeniu bieguna a , składa się z części regularnej $P(z - a)$ oraz z wielomianu całkowitego względem $\frac{1}{z - a}$; nadajemy temu wielomianowi nazwę *części głównej* (partie principale) funkcji $f(z)$ w otoczeniu bieguna. Gdy moduł różnicy $z - a$ dąży do zera, moduł funkcji $f(z)$ wzrasta nieograniczenie, niezależnie od sposobu, w jaki punkt

z zbliża się do bieguna. W istocie, korzystając z tego, że funkcja $\phi(z)$ nie równa się zeru dla $z = a$, uczynimy promień otoczenia dość małym, by moduł $|\phi(z)|$ przewyższał w tym całym obszarze pewną liczbę dodatnią M : oznaczając przez r moduł różnicy $z - a$, otrzymujemy $|f(z)| > \frac{M}{r^m}$, a przeto $|f(z)|$ wzrasta nieograniczenie, skoro tylko r dąży do zera. Ponieważ funkcja $\phi(z)$ jest regularna dla $z = a$, możemy wyznaczyć koło C o środku w punkcie a , wewnątrz którego funkcja $\phi(z)$ jest całokształtna. Iloraz $\frac{\phi(z)}{(z-a)^m}$ jest funkcją całokształtną we wszystkich punktach tego koła, prócz samego punktu a . Funkcja $f(z)$ nie posiada tedy w otoczeniu jakiegoś bieguna a żadnego innego punktu osobliwego prócz samego bieguna; innemi słowy, *bieguny są to punkty osobliwe odosobnione*.

299. Funkcje meromorficzne. — Wszelka funkcja jednowartościowa, która nie posiada w jakimś obszarze A innych punktów osobliwych, niż bieguny, nazywa się funkcją *meromorficzną* czyli *częściokształtną* (méromorphe) w tym obszarze. Funkcja częściokształtna w dziedzinie całej płaszczyzny może posiadać nieskończenie wiele biegunów, lecz w obszarze, położonym całkowicie w odległości skończonej, może się zawierać jedynie liczba skończona tych punktów. Odpowiedni dowód opiera się na twierdzeniu ogólnym, do którego wypadnie nam również odwoływać się w dalszym ciągu, a mianowicie: *Jeżeli w obszarze A , położonym całkowicie w odległości skończonej, istnieje nieskończenie wiele punktów o pewnej szczególnej własności, to zbiór tych punktów posiada co najmniej jeden punkt graniczny, położony w obszarze A lub na jego obwodzie*. (Punktem granicznym (point limite) nazywamy każdy punkt, w którego sąsiedztwie istnieje nieskończenie wiele punktów, posiadających omawianą własność). Twierdzenie to da się uzasadnić zapomocą tak często używanej metody kolejnych podziałów. Cznaczymy dla krótkości zbiór rozważanych punktów przez (E) i wyobraźmy sobie, żeśmy podzielili obszar A zapomocą równoległych do osi Ox i Oy na kwadraty lub części kwadratów; jeden co najmniej z obszarów cząstkowych, A_1 , zawiera nieskończenie wiele punktów zbioru (E) . Dzieląc podobnie A_1 i tak dalej, utworzymy ciąg nieograniczony obszarów $A_1, A_2, \dots, A_n$, coraz to mniejszych, z których każdy stanowi część poprzedniego i zawiera nieskończenie wiele punktów omawianego zbioru. Wszystkie punkty obszaru A_n dążą do punktu granicznego Z , położonego wewnątrz obszaru A lub na jego obwodzie. Ów punkt Z musi być jednym z punktów granicznych zbioru

(E), ponieważ wewnątrz koła o dowolnie małym promieniu, mającego za środek punkt Z , zawiera się zawsze nieskończenie wiele punktów zbioru (E).

Ustaliwszy ten fakt, załóżmy, że funkcja $f(z)$ jest częściokształtna wewnątrz pola A , położonego w odległości skończonej, jak również na obwodzie Γ tego pola. Gdyby ta funkcja posiadała w obszarze A nieskończenie wiele biegunów, to musiałby istnieć, zgodnie z poprzednim twierdzeniem, przynajmniej jeden punkt Z , położony w tym obszarze lub na Γ , w którego sąsiedztwie znajdowałoby się nieskończenie wiele biegunów. Taki punkt Z nie mógłby być ani biegunem (ponieważ bieguny są punktami odosobnionymi — *Ue. tl.*) ani punktem zwyczajnym. Tak samo stwierdzamy, że funkcja $f(z)$ może posiadać w omawianym obszarze jedynie liczbę skończoną punktów zerowych. Możemy tedy wypowiedzieć twierdzenie następujące:

Wszelka funkcja, częściokształtna (meromorficzna) w obszarze A , położonym całkowicie w odległości skończonej, i na jego obwodzie, może posiadać w tej dziedzinie jedynie liczbę skończoną punktów zerowych i liczbę skończoną biegunów.

W otoczeniu jakiegokolwiek punktu a funkcja częściokształtna $f(z)$ może być wyrażona zapomocą wzoru

$$(32) \quad f(z) = (z - a)^\mu \varphi(z),$$

w którym $\varphi(z)$ oznacza funkcję regularną, nie równą zeru dla $z = a$. Wykładnik μ nazywa się *rzędem* (l'ordre) funkcji $f(z)$ w punkcie a . Rząd równa się zeru, jeżeli punkt a nie jest dla $f(z)$ ani biegunem ani punktem zerowym; jeżeli punkt a jest punktem zerowym rzędu m funkcji $f(z)$, to rząd równa się m , a jeżeli a jest biegunem rzędu n funkcji $f(z)$, to rząd $= -n$.

300. Punkty istotnie osobliwe. — Każdy punkt osobliwy funkcji jednowartościowej, który nie jest biegunem, nazywa się *punktem istotnie osobliwym* (point singulier essentiel). Punkt istotnie osobliwy a jest odosobniony, jeżeli można zakresić okrąg C o środku a , wewnątrz którego funkcja $f(z)$ nie posiada, oprócz punktu a , żadnego innego punktu osobliwego; w tej chwili przestaniemy jedynie na takich punktach.

Twierdzenie Laurenta daje bezpośrednio szereg, wyrażający funkcję $f(z)$ w otoczeniu punktu istotnie osobliwego. Weźmy koło C o środku a , nie zawierające żadnego innego punktu osobliwego funkcji $f(z)$; c zaś niech oznacza koło współśrodkowe, położone wewnątrz C . W pierścieniu kołowym, zawartym pomiędzy C i c , funkcja $f(z)$ jest całokształtna, i przeto równa się sumie szeregu, uszykowanego podług potęg dodatnich i ujemnych różnicy $z - a$

$$(33) \quad f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m (z-a)^m.$$

To rozwinięcie w szereg jest ważne dla wszystkich punktów, położonych wewnątrz koła C , z wyjątkiem punktu a , ponieważ do każdego punktu z , leżącego wewnątrz C , a różnego od a , można dobrać promień koła c , mniejszy niż $|z-a|$, a współczynniki A_m nie zależą bynajmniej od tego promienia (art. 295). Szereg (33) składa się z części regularnej w punkcie a , utworzonej przez wyrazy o wykładnikach dodatnich, którą oznaczymy przez $P(z-a)$, oraz z drugiej strony, z szeregu uporządkowanego według potęg ilorazu $\frac{1}{z-a}$

$$(34) \quad \frac{A_{-1}}{z-a} + \frac{A_{-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{A_{-m}}{(z-a)^m} + \dots;$$

jest to *część główna* (partie principale) funkcji $f(z)$ w obszarze punktu osobliwego. Owa część główna nie może być wielomianem, gdyż punkt $z=a$, wbrew założeniu, byłby w takim razie biegunem ⁽¹⁾. Jest to *funkcja całkowita ułamka* $\frac{1}{z-a}$. Istotnie, niech r oznacza jakąkolwiek liczbę dodatnią, mniejszą od promienia koła C ; jeżeli oznaczymy przez C' koło o promieniu r i środku a , to współczynnik A_{-m} szeregu (34) da się wyrazić (art. 295) w postaci

$$A_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C')} (z-a)^{m-1} dz.$$

Stąd wynika nierówność

$$(35) \quad |A_{-m}| < \mathcal{M}(r) r^m,$$

w której $\mathcal{M}(r)$ oznacza największość modułu $f(z)$ na okręgu C' . Szereg (34) jest tedy zbieżny, o ile tylko $|z-a|$ jest większe niż r , a ponieważ r jest liczbą dodatnią, którą możemy uczynić dowolnie małą, więc szereg (34) jest zbieżny dla wszelkiej wartości z , różnej od a , i może-

⁽¹⁾ Aby nie pominąć żadnego przypuszczenia, należałoby również zbadać przypadek, w którym szereg, wyrażający $f(z)$ wewnątrz C , zawiera jedynie potęgi dodatnie różnicy $z-a$, a wartość $f(a)$ funkcji w punkcie a jest różna od wyrazu szeregu, niezależnego od $z-a$. Punkt $z=a$ byłby w takim razie dla $f(z)$ *punktem nieciągłości* (point de discontinuité). Osobliwość tę, o charakterze zupełnie sztucznym usuniemy z naszych rozważań. (p. poniżej, rozdz. XVI).

my napisać, oznaczając przez $P(z-a)$ funkcję regularną w punkcie a a przez $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$ funkcję całkowitą ⁽¹⁾ ułamka $\frac{1}{z-a}$:

$$f(z) = P(z-a) + G\left(\frac{1}{z-a}\right).$$

Gdy moduł $|z-a|$ maleje nieograniczenie, wartość funkcji $f(z)$ nie dąży do żadnej określonej granicy. Dokładniej: *wewnątrz okręgu C , określonego dokoła punktu a dowolnym promieniem ς , istnieją zawsze punkty z , w których $f(z)$ różni się dowolnie mało od wszelkiej liczby z góry danej.* (WEIERSTRASS).

Dowiedzmy z początku, iż przy jakichkolwiek wartościach dwu liczb dodatnich ς i M istnieją wartości zmiennej z , spełniające jednocześnie warunki $|z-a| < \varsigma$, $|f(z)| > M$. Gdyby, w istocie, moduł funkcji $f(z)$ był co najwyżej równy M , gdy $|z-a| < \varsigma$, to dla $r < \varsigma$ $\mathcal{M}(r)$ byłoby mniejsze od M lub równe M , i zgodnie z nierównością (35) wszystkie współczynniki A_m równałyby się zeru, ponieważ iloczyn $\mathcal{M}(r) r^m \leq M r^m$ dążyłby do zera wraz z r .

Weźmy następnie jakąkolwiek wartość A . Jeżeli równanie $f(z)=A$ posiada pierwiastki wewnątrz koła C o wszelkim, dowolnie małym promieniu ς , to twierdzenie sprawdza się odrazu. Jeżeli równanie $f(z)=A$ nie posiada w sąsiedztwie punktu a nieskończenie wielu pierwiastków, to można wybrać tak mały promień ς , iż wewnątrz koła C o tym promieniu, mającego punkt a za środek, omawiane równanie nie posiada żadnego pierwiastka. Funkcja $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$ jest w takim razie cał-

kształtna w każdym punkcie z , położonym wewnątrz C , prócz punktu a , który może być dla $\varphi(z)$ jedynie punktem istotnie osobliwym, gdyż w przeciwnym przypadku punkt ten byłby dla $f(z)$ albo biegunem albo też punktem zwyczajnym. Przeto, zgodnie z otrzymanym przed chwilą wynikiem, istnieją wewnątrz koła C wartości z , spełniające warunki

$$|\varphi(z)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{czyli} \quad |f(z)-A| < \varepsilon,$$

przy dowolnie małej wartości liczby dodatniej ε .

Własność ta stanowi wybitną różnicę pomiędzy biegunami a punktami istotnie osobliwymi. W otoczeniu bieguna moduł funkcji $f(z)$ wzrasta nieograniczenie, gdy tymczasem wartość $f(z)$ w punkcie istotnie

(1) Będziemy często oznaczali funkcję całkowitą zmiennej x przez $G(x)$.

osobliwym jest zupełnie nieokreślona. Picard⁽¹⁾ otrzymał twierdzenie jeszcze dokładniejsze, wykazując, iż każde z równań $f(z) = A$, bez wyjątku lub z wyjątkiem *jednego*, zawierającego pewną szczególną wartość A , posiada w sąsiedztwie punktu istotnie osobliwego nieskończenie wiele pierwiastków.

Przykład. — Punkt $z = 0$ jest punktem istotnie osobliwym funkcji:

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{z^2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} \frac{1}{z^n} + \dots;$$

łatwo sprawdzić, iż równanie $e^{\frac{1}{z}} = A$ posiada nieskończenie wiele pierwiastków o module mniejszym od dowolnie małej liczby ς , o ile A nie równa się zeru. Załóżmy, że $A = r(\cos \theta + i \sin \theta)$; z równania powyższego wynika.

$$\frac{1}{z} = \log r + i(\theta + 2k\pi);$$

do tego, by $|z|$ było $< \varsigma$, wystarcza warunek

$$(\log r)^2 + (\theta + 2k\pi)^2 \geq \frac{1}{\varsigma^2}.$$

Istnieje, rzecz oczywista, nieskończenie wiele wartości liczby całkowitej k , spełniających ten warunek. W rozważanym przykładzie istnieje wartość wyjątkowa A , mianowicie $A = 0$. Może jednak również zdarzyć się, iż niema żadnej wartości wyjątkowej, jak np., gdy mowa o funkcji $\sin \frac{1}{z}$.

301. Pozostałości. — Niech a oznacza biegun lub punkt istotnie osobliwy odosobniony funkcji $f(z)$. Obliczmy całkę $\int_C f(z) dz$ wzdłuż okręgu C o środku a , zakreślonego w otoczeniu punktu a . Część regularna $P(z-a)$ daje przy tym całkowaniu wynik równy zeru. Co do części głównej $G\left(\frac{1}{z-a}\right)$, można ją całkować wyraz po wyrazie; istotnie, jeżeli punkt a jest punktem istotnie osobliwym, mamy do czynienia z szeregiem potęgowym jednostajnie zbieżnym. Całka wyrazu ogólnego

$$\int_{(C)} \frac{A_{-m} dz}{(z-a)^m}$$

równa się zeru, gdy wykładnik m jest większy od jedności, ponieważ

⁽¹⁾ *Annales de l'École Normale supérieure*, 1880. (Roczniki Wyższej Szkoły Normalnej).

funkcja pierwotna $-\frac{A_{-m}}{(m-1)(z-a)^{m-1}}$ przybiera po zakreszeniu przez zmienną drogi zamkniętej tę samą wartość. Jeżeli zaś $m=1$, to całka określona $A_{-1} \int \frac{dz}{(z-a)^1} = A_{-1} \int \frac{dz}{z-a}$ posiada, jak wykazuje obliczenie, dokonane już w art. 291-ym, wartość $2\pi i A_{-1}$. Mamy tedy wzór

$$2\pi i A_{-1} = \int_{(C)} f(z) dz,$$

który stanowi zresztą w istocie rzeczy jedynie zastosowanie szczególne wzoru (23), wyznaczającego współczynniki szeregu Laurenta. Współczynnik A_{-1} nazywa się *pozostałością* czyli *residuum* (résidu) funkcji $f(z)$ względem punktu osobliwego a .

Weźmy obecnie funkcję $f(z)$, ciągłą na obwodzie zamkniętym Γ i posiadającą wewnątrz tego obwodu jedynie liczbę skończoną punktów osobliwych $a, b, c, \dots, l$. Oznaczmy odpowiednie pozostałości przez $A, B, C, \dots, L$; jeżeli otoczmy każdy z tych punktów osobliwych kołem o nader małym promieniu, to całka $\int f(z) dz$, wzięta wzdłuż Γ w zwrocie dodatnim, będzie się równała sumie całek, liezonych w tym samym zwrocie wzdłuż małych okręgów — stąd wzór nader ważny

$$(36) \quad \int_{(\Gamma)} f(z) dz = 2\pi i (A + B + C + \dots + L),$$

który wyraża, że całka $\int f(z) dz$, brana wzdłuż Γ w zwrocie dodatnim, jest równa iloczynowi liczby $2\pi i$ przez sumę pozostałości, odpowiadających punktom osobliwym funkcji $f(z)$, leżących wewnątrz tego obwodu.

Rzecz jasna, iż to twierdzenie stosuje się również do obwodów Γ , utworzonych przez kilka krzywych zamkniętych.

Z powyższych rozważań widzimy, jak ważną rolę odgrywają pozostałości; pożytecznie umieć je szybko obliczać. Jeżeli punkt a jest dla $f(z)$ biegunem rzędu m , to iloczyn $(z-a)^m f(z)$ jest funkcją regularną w punkcie a , i pozostałość funkcji $f(z)$ równa się oczywiście współczynnikowi potęgi $(z-a)^{m-1}$ w szeregu, wyrażającym ten iloczyn. W razie, gdy mamy do czynienia z biegunem pierwszego rzędu (pôle simple), przepis się upraszcza; pozostałość równa się wtedy granicy iloczynu $(z-a)f(z)$ przy $z=a$. Najczęściej funkcja $f(z)$ jest dana w postaci

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

przytym funkcje $P(z)$ i $Q(z)$ są regularne dla $z = a$, i $P(a)$ nie równa się zeru, dla $Q(z)$ zaś a jest punktem zerowym pierwszego rzędu. Niech

$$Q(z) = (z - a) R(z); \text{ pozostałość jest równa ilorazowi } \frac{P(a)}{R(a)} \text{ czyli także,}$$

jak można bezpośrednio sprawdzić, ilorazowi $\frac{P(a)}{Q'(a)}$,

III. — Zastosowania twierdzeń ogólnych.

Zastosowania ostatniego twierdzenia nie dadzą się zliczyć. Podamy niektóre z nich, dotyczące głównie obliczania całek określonych oraz teorii równań.

302. Uwagi rozmaite. — Weźmy taką funkcję $f(z)$, iż iloczyn $(z - a)f(z)$ dąży do zera wraz z $|z - a|$. Całka tej funkcji, brana wzdłuż okręgu γ , o środku a i promieniu ϵ , dąży do zera wraz z promieniem tego okręgu. W istocie możemy napisać

$$\int_{(\gamma)} f(z) dz = \int_{(\gamma)} (z - a)f(z) \frac{dz}{z - a};$$

jeżeli maximum modułu $|(z - a)f(z)|$ na okręgu γ równa się η , to moduł całki jest mniejszy niż $2\pi\eta$ a przeto dąży do zera, ponieważ η maleje również nieskończenie wraz z ϵ . Tak samo można stwierdzić, iż jeżeli iloczyn $(z - a)f(z)$ dąży do zera, gdy moduł różnicy $z - a$ nieo-

graniczenie wzrasta, to całka $\int_{(C)} f(z) dz$, liczona wzdłuż okręgu C o środku a , dąży do zera, gdy promień koła nieograniczenie wzrasta. Uwagi powyższe nie tracą wartości, gdy całkujemy zamiast całego okręgu tylko wzdłuż pewnej jego części, byleby rozważany iloczyn dążył do zera wzdłuż tej części.

Częstokroć trzeba znaleźć granicę wyższą modułu całki określonej o postaci $\int_a^b f(x) dx$, branej wzdłuż osi rzeczywistej. Załóżmy w celu ustalenia biegu myśli, że $a < b$. Stwierdziliśmy powyżej (art. 283), że moduł takiej całki jest równy co najwyżej całce $\int_a^b |f(x)| dx$, i prze-

to mniejszy niż iloczyn $M(b - a)$, w którym M oznacza jakąś granicę wyższą modułu funkcji $f(x)$.

303. Obliczanie elementarnych całek określonych. — Całka określona funkcji wymiernej $F(x)$, wzięta wzdłuż osi rzeczywistej, $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$ posiada określoną wartość, o ile mianownik nie staje się równym zero przy żadnej wartości rzeczywistej zmiennej x oraz stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika co najmniej o dwie jednostki. Zakreślmy dokoła początku układu okrąg C o promieniu R dość wielkim, by wszystkie pierwiastki mianownika funkcji $F(x)$ były zawarte wewnątrz tego okręgu i całkujemy wzdłuż obwodu, utworzonego ze średnicy BA , wykreślonej wzdłuż osi liczb rzeczywistych i z półokręgu C' , leżącego powyżej tej osi. Wewnątrz tego obwodu $F(z)$ nie posiada innych punktów osobliwych, prócz biegunów, powstających z tych pierwiastków mianownika funkcji $F(z)$, które mają przy i współczynnik dodatni. Możemy tedy, oznaczając przez ΣR_k sumę pozostałości, odpowiadających tym biegunom, napisać wzór

$$\int_{-R}^{+R} F(z) dz + \int_{(C')} F(z) dz = 2\pi i \Sigma R_k;$$

gdy promień R wzrasta nieograniczenie, całka wzdłuż C' dąży do zera ponieważ iloczyn $zF(z)$ równa się zero dla z nieskończenie wielkiego, i po przejściu do granicy otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 2\pi i \Sigma R_k.$$

Łatwo sprowadzić do tego typu całki określone funkcji wymiernych wielkości trygonometrycznych $\sin x$ i $\cos x$, nie stających się nieskończonościami przy żadnej wartości rzeczywistej x , liczone wzdłuż osi rzeczywistej:

$$\int_0^{2\pi} F(\sin x, \cos x) dx.$$

Zauważmy przedewszystkiem, że wartość całki nie ulega zmianie, jeżeli weźmiemy za granice dowolną liczbę rzeczywistą x_0 oraz $x_0 + 2\pi$; można tedy obrać np. granice $-\pi$ i $+\pi$. Otóż klasyczne podstawienie $\tan \frac{x}{2} = t$ zamienia badaną całkę w całkę funkcji wymiernej zmien-

nej t , braną pomiędzy granicami $-\infty$ i $+\infty$, ponieważ $\tan \frac{x}{2}$ wzrasta od $-\infty$ do $+\infty$, gdy x rośnie od $-\pi$ do $+\pi$.

Można postępować jeszcze inaczej. Gdy założymy: $e^{xi} = z$, to $dx = \frac{dz}{iz}$ i otrzymujemy podług wzorów Eulera

$$\cos x = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin x = \frac{z^2 - 1}{2iz};$$

badana całka przechodzi tedy w całkę

$$\int F\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{dz}{iz}.$$

Co do nowej drogi całkowania łatwo stwierdzić, że gdy x wzrasta od 0 do 2π , punkt z przebiega w zwrocie dodatnim okrąg o promieniu równym jedności, mający za środek początek układu. Wystarczy tedy obliczyć pozostałości otrzymanej w ten sposób funkcji wymiernej zmiennej z względem biegunów o module mniejszym od jedności.

Weźmy np. całkę $\int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{x - a - bi}{2}\right) dx$, która posiada wartość skończoną, o ile b nie równa się zeru. Otóż

$$\cot\left(\frac{x - a - bi}{2}\right) = i \frac{e^{i\left(\frac{x - a - bi}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{x - a - bi}{2}\right)}}{e^{i\left(\frac{x - a - bi}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x - a - bi}{2}\right)}}$$

czyli inaczej

$$\cot\left(\frac{x - a - bi}{2}\right) = i \frac{e^{ix} + e^{-b + ai}}{e^{ix} - e^{-b + ai}}.$$

Zamiana $e^{xi} = z$ doprowadza tedy do całki

$$\int_{(C)} \frac{z + e^{-b + ai}}{z - e^{-b + ai}} \frac{dz}{z}.$$

Funkcja do całkowania posiada dwa bieguny pierwszego rzędu $z = 0$ i $z = e^{-b + ai}$, i odpowiednie pozostałości są równe -1 i $+2$. Jeżeli b jest dodatnie, oba te bieguny leżą wewnątrz obwodu całkowania i całka równa się $2\pi i$; jeżeli b jest ujemne, wewnątrz obwodu leży tylko punkt $z = 0$ i całka równa się $-2\pi i$. Dana całka równa się tedy $\pm 2\pi i$, stosownie do tego, czy b jest dodatnie czy ujemne. — Podajemy poniżej kilka przykładów mniej elementarnych.

304. Różne przykłady rachunku całek określonych. — 1) Funkcja $\frac{e^{imz}}{1+z^2}$

posiada dwa bieguny $+i$ i $-i$, którym odpowiadają pozostałości $\frac{e^{-m}}{2i}$ i $-\frac{e^m}{2i}$.

Zalóżmy, w celu ustalenia biegu myśli, iż m jest dodatnie i rozpatrzmy obwód, utworzony z półokręgu o promieniu R nader wielkim, mającego za środek początek układu, oraz ze średnicy, nakrywającej oś rzeczywistą. Wewnątrz tego obwodu funkcja $\frac{e^{miz}}{1+z^2}$ posiada tylko jeden biegun $z = i$, więc całka, obliczona wzdłuż tej całej linii zamkniętej, równa się πe^{-m} . Otóż całka, wzięta wzdłuż półokręgu, dąży do zera, gdy R wzrasta nieograniczenie, ponieważ moduł iloczynu

$\frac{z}{1+z^2} e^{imz}$ dąży w punktach tej krzywej do zera. W istocie, jeżeli zastąpimy z przez $R(\cos \theta + i \sin \theta)$, to otrzymamy

$$e^{miz} = e^{-mR \sin \theta + imR \cos \theta};$$

gdy θ wzrasta od 0 do π , moduł $e^{-mR \sin \theta}$ pozostaje mniejszy od jedności. Co do modułu czynnika $\frac{z}{1+z^2}$, ten dla z nieskończonego równa się zeru. Otrzymujemy tedy po przejściu do granicy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{mix}}{1+x^2} dx = \pi e^{-m};$$

po zastąpieniu e^{mix} przez $\cos mx + i \sin mx$ współczynnik przy i z lewej strony znaku równości okazuje się równym zeru, gdyż elementy całki znoszą się parami. Ponieważ mamy prócz tego $\cos(-mx) = \cos mx$, przeto można wzorowi poprzedniemu nadać postać

$$(37) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-m}.$$

2) Funkcja $\frac{e^{iz}}{z}$ jest holomorficzną wewnątrz obwodu $ABMB'A'NA$ (rys. 62),

utworzonego z dwu półokręgów BMB' , $A'NA$, zakreślonych dokoła początku układu promieniami R i r , oraz z prostych AB , $B'A'$.

Stąd wynika związek

$$\int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{(BMB')} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{(A'NA)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

który można również napisać w postaci

$$\int_r^R \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx + \int_{(BMB')} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{(A'NA)} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0.$$

Gdy r dąży do zera, ostatnia całka dąży do $-\pi i$; istotnie, oznaczając przez $P(z)$ pewną funkcję regularną w początku układu, możemy napisać

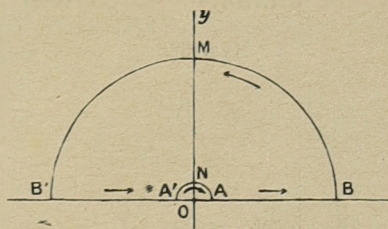
$$\frac{e^{iz}}{z} = \frac{1}{z} + P(z)$$

więc

$$\int_{(A'NA)} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{(A'NA)} P(z) dz + \int_{(A'NA)} \frac{dz}{z}.$$

Całka części regularnej $P(z)$ staje się nieskończenie małą wraz z długością drogi całkowania, gdy tymczasem druga z tych całek równa się przyrostowi funkcji $\text{Log}(z)$, nabytemu wzdłuż $A'NA$, to jest $-\pi i$.

Rys. 62.



Całka, brana wzdłuż BMB' , dąży do zera, gdy R wzrasta nieograniczenie. W istocie, jeżeli założymy, że $z = R(\cos \theta + i \sin \theta)$, to

$$\int_{(BMB')} \frac{e^{iz}}{z} dz = i \int_0^\pi e^{-R \sin \theta + i R \cos \theta} d\theta,$$

moduł tej całki jest mniejszy niż

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta.$$

Gdy θ wzrasta od 0 do $\frac{\pi}{2}$, stosunek $\frac{\sin \theta}{\theta}$ maleje od 1 do $\frac{2}{\pi}$, więc

$$R \sin \theta > \frac{2}{\pi} R \theta,$$

i przeto

$$e^{-R \sin \theta} < e^{-\frac{2R\theta}{\pi}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta < \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} d\theta = -\frac{\pi}{2R} \left(e^{-\frac{2R\theta}{\pi}} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2R} (1 - e^{-R}),$$

skąd wynika wypowiedziane twierdzenie.

Po przejściu do granicy otrzymujemy zatem (p. t. I, art. 100)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x} dx = \pi i$$

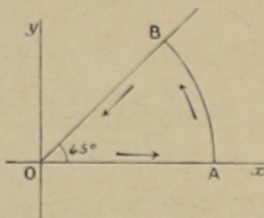
czyli

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3] Całka funkcji całkowitej e^{-z^2} , liczona wzdłuż obwodu $OABO$, utworzonego z dwu promieni OA i OB , nachylonych do siebie pod kątem $= 45^\circ$, i z łuku AB okręgu (rys. 63), równa się zeru, co można wyrazić jak następuje

$$\int_0^R e^{-x^2} dx + \int_{(AB)} e^{-z^2} dz = \int_{(OB)} e^{-z^2} dz.$$

Rys. 63.



Gdy promień R okręgu, do którego należy łuk AB , powiększa się nieograniczenie, całka, brana wzdłuż AB , dąży do zera. W istocie, jeżeli założymy, że

$z = R \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$, to całka ta przybierze postać

$$\frac{iR}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \left(\cos \varphi + i \sin \varphi \right)} e^{\frac{i\varphi}{2}} d\varphi,$$

więc jej moduł jest mniejszy od całki $\frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \cos \varphi} d\varphi$. W ten sam sposób,

jak w poprzednim przykładzie, otrzymujemy

$$\frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \cos \varphi} d\varphi = \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2 \sin \varphi} d\varphi < \frac{R}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2 \varphi}{\pi}} d\varphi.$$

Ostatnia z tych całek posiada wartość

$$-\frac{\pi}{4R} \left(e^{-\frac{2R^2 \varphi}{\pi}} \right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4R} (1 - e^{-R^2}),$$

dąży zatem do zera, gdy R wzrasta nieograniczenie.

Można założyć, iż wzdłuż promienia OB

$z = \zeta \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$; stąd $e^{-z^2} = e^{-i\zeta^2}$, i gdy R wzrasta nieograniczenie, osiągamy granicę (p. t. I, art. 135)

$$\int_0^{+\infty} e^{-i\zeta^2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) d\zeta = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

więc

$$\int_0^{+\infty} e^{-i\zeta^2} d\zeta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Przyrównywując do siebie części rzeczywiste i spółczynniki przy i , otrzymujemy wartości całek Fresnela

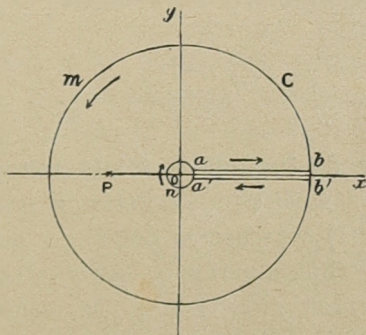
$$(38) \quad \int_0^{+\infty} \cos \zeta^2 d\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad \int_0^{+\infty} \sin \zeta^2 d\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

305. Obliczanie $\Gamma(p) \Gamma(1-p)$. — Całka określona $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1} dx}{1+x}$

(zmienna x i wykładnik p — rzeczywiste) posiada wartość skończoną, o ile p jest dodatnie i mniejsze od jedności; wartość ta równa się iloczynowi $\Gamma(p) \Gamma(1-p)$.⁽¹⁾

Aby obliczyć tę całkę, weźmy funkcję $\frac{z^{p-1}}{1+z}$, posiadającą jeden biegun, w punkcie $z = -1$, oraz jeden punkt rozgałęzienia, $z = 0$. Weźmy obwód $abmb'a'na$ (rys. 64), utworzony z dwu okręgów C i C' o promieniach r i ζ , zakreślonych dokoła początku układu, oraz z dwu prostych, nieskończenie bliskich, ab i $a'b'$, położonych z obu

Rys. 64.



(¹) Wystarczy zastąpić w tym celu we wzorze, podanym na str. 340 (t. I) u dołu, t przez $\frac{1}{1+x}$. Wzór (39), uzasadniony przy założeniu, że p jest rzeczywiste, jest wogóle prawdziwy, gdy część rzeczywista wykładnika p zawiera się pomiędzy 0 a 1.

stron cięcia, wyznaczonego podług ox . Funkcja $\frac{z^{p-1}}{1+z}$ jest wewnątrz tego obwodu,

który otacza tylko jeden punkt osobliwy, a mianowicie biegun $z = -1$, funkcja jednowartościowa; aby określić ją w zupełności, umówmy się, że nadajemy argumentowi zmiennej z wartość, zawartą pomiędzy 0 a 2π . Oznaczając przez R pozostałość, odpowiadającą biegunowi $z = -1$, otrzymujemy przeto:

$$\int_{ab} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{(C)} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{b'a'} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz + \int_{(C')} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 2\pi i R.$$

Całki, brane wzdłuż okręgów C i C' , dążą do zera, gdy r wzrasta nieskończenie lub ϵ nieograniczenie maleje, ponieważ w tych warunkach zmierza również do zera iloczyn $\frac{z^p}{1+z}$, a to z powodu że $0 < p < 1$.

Wzdłuż ab z jest rzeczywiste; w celu osiągnięcia większej jasności, oznaczmy jego wartość przez x . Wobec tego, że argument zmiennej z równa się zeru, z^{p-1} jest równe wartości arytmetycznej potęgi x^{p-1} . Wzdłuż $a'b'$ z jest również rzeczywiste, lecz ze względu na to, że jego argument równa się 2π , otrzymujemy:

$$z^{p-1} = e^{(p-1)(\log x + 2\pi i)} = e^{2\pi i(p-1)} x^{p-1}.$$

Suma całek, liczonych wzdłuż ab i $b'a'$, dąży tedy do granicy

$$[1 - e^{2\pi i(p-1)}] \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx.$$

Pozostałość R jest równa $(-1)^{p-1}$, t. j. $e^{(p-1)\pi i}$, ponieważ argument liczby -1 uważamy za równy π . Stąd

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{(p-1)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} = \frac{2\pi i}{e^{-(p-1)\pi i} - e^{(p-1)\pi i}} = \frac{-\pi}{\sin(p-1)\pi}$$

czyli wreszcie

$$(39) \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

306. Zastosowanie do funkcji częściokształtnych. — Przypuśćmy, że są dane dwie funkcje: $f(z)$ i $\varphi(z)$, z których jedna, $f(z)$, jest częściokształtna (meromorficzna) wewnątrz pewnego obwodu zamkniętego C , a druga—całokształtna (holomorficzna) wewnątrz tego samego obwodu, i że ponad to funkcje $f(z)$, $f'(z)$ i $\varphi(z)$ są ciągłe na samym obwodzie.

Poszukajmy w tych warunkach punktów osobliwych funkcji $\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$, zawartych wewnątrz C . Każdy punkt a , który nie jest dla $f(z)$ ani biegunem ani punktem zerowym, jest oczywiście punktem zwyczajnym dla $\frac{f'(z)}{f(z)}$, a przeto i dla $\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$. Jeżeli punkt a jest biegunem lub

punktem zerowym funkcji $f(z)$, to w otoczeniu tego punktu daje się zastosować wzór:

$$f(z) = (z - a)^{\mu} \phi(z),$$

w którym μ oznacza liczbę całkowitą, dodatnią lub ujemną, wyrażającą rząd funkcji w tym punkcie (art. 299), a $\phi(z)$ — funkcję regularną i nie równą zeru dla $z = a$. Stąd wynika, przy pomocy pochodnych logarytmicznych:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mu}{z - a} + \frac{\phi'(z)}{\phi(z)}.$$

Ponieważ, z drugiej strony, w otoczeniu punktu a

$$\varphi(z) = \varphi(a) + (z - a) \varphi'(a) + \dots,$$

zatem punkt a jest dla iloczynu $\varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)}$ biegunem pierwszego rzędu,

któremu odpowiada pozostałość, równa $\mu \varphi(a)$ to jest $m \varphi(a)$, jeżeli punkt a jest punktem zerowym rzędu m funkcji $f(z)$, lub równa $-n \varphi(a)$, jeżeli punkt a jest biegunem rzędu n tej funkcji. Otrzymujemy tedy, podług twierdzenia ogólnego o pozostałościach i przy założeniu, że na obwodzie C niema żadnego pierwiastka funkcji $f(z)$, wzór następujący:

$$(40) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \Sigma \varphi(a) - \Sigma \varphi(b),$$

w którym a oznacza którykolwiek z punktów zerowych funkcji $f(z)$, położonych wewnątrz obwodu C , b — którykolwiek z biegunów, należących do tegoż obszaru, a przytym każdy z punktów zerowych lub biegunów liczymy tyle razy, ile wymaga jego rząd. Wzór (40) dostarcza nieskończenie wielu związków, ponieważ możemy zastąpić w nim symbol ogólny $\varphi(z)$ przez dowolną funkcję całokształtną.

W szczególności założmy, że $\varphi(z) = 1$ i oznaczmy odpowiednio przez N i P liczbę pierwiastków i liczbę biegunów funkcji $f(z)$, zawartych wewnątrz obwodu C ; wzór (40) przybiera postać

$$(41) \quad N - P = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Wzór ten stanowi podstawę ważnego twierdzenia. A mianowicie, $\frac{f'(z)}{f(z)}$ jest to pochodna funkcji $\text{Log}[f(z)]$; aby obliczyć całkę określoną, występującą we wzorze (41) z prawej strony znaku równości, wystarczy tedy znaleźć przyrost, który otrzymuje

$$\log |f(z)| + i \arg f(z),$$

gdy punkt z przebiega obwód C w zwrocie dodatnim. Lecz $|f(z)|$ przybiera napowrót wartość początkową, gdy tymczasem argument funkcji $f(z)$ wzrasta o $2K\pi$ (K — liczba całkowita, dodatnia lub ujemna). Stąd

$$(42) \quad N - P = \frac{2K\pi i}{2\pi i} = K$$

to jest: różnica $N - P$ równa się ilorazowi od podzielenia przez 2π przyrostu, który otrzymuje argument funkcji $f(z)$, gdy punkt z przebiega obwód C w zwrocie dodatnim.

Oddzielmy część rzeczywistą funkcji $f(z)$ od części, zawierającej czynnik i :

$$f(z) = X + Yi;$$

gdy punkt $z = x + yi$ zakreśla w zwrocie dodatnim obwód C , punkt o współrzędnych X, Y przebiega w układzie prostokątnym osi, ułożonych w ten sam sposób, jak osie współrzędnych x, y , również krzywą zamkniętą C_1 , którą wystarczy nakreślić bodaj w przybliżeniu, aby na zasadzie jej wyglądu wyznaczyć liczbę K . Istotnie, potrzeba jedynie policzyć w tym celu liczbę całkowitych obrotów w tym lub w innym kierunku, dokonanych przez promień wodzący, który łączy punkt (X, Y) z początkiem układu. Wzór (42) można jeszcze napisać w postaci

$$(43) \quad N - P = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} d \operatorname{arc} \operatorname{tang} \left(\frac{Y}{X} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{(C)} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2};$$

ze względu na to, że funkcja $\frac{Y}{X}$ odzyskuje po zakreśleniu przez z obwodu zamkniętego C tę samą wartość, całka określona

$$\int_{(C)} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$$

równa się iloczynowi π przez nadmiar I ilorazu $\frac{Y}{X}$ na obwodzie C , czy-

li: wskaźnik ilorazu $\frac{Y}{X}$ na obwodzie C ⁽¹⁾ („l'indice du quotient $\frac{Y}{X}$ le long du contour C “), t. j. przewyżkę liczby przypadków, w których ten iloraz staje się nieskończonym, przechodząc od $+\infty$ do $-\infty$ nad liczbą przypadków, w których przechodzi od $-\infty$ do $+\infty$ (t. I, art.

(1) J. Puzyna. *Teorja funkcji analitycznych*, t. II, str. 438.

79, 154), czyli $\pi I \left(\frac{Y}{X} \right)$. Możemy tedy nadać jeszcze wzorowi (43) postać równoważną:

$$(44) \quad N - F = \frac{1}{2} I \left(\frac{Y}{X} \right).$$

307. Zastosowanie do teorii równań. — Jeżeli sama funkcja $f(z)$ jest całokształtna wewnątrz obwodu C i nie posiada na tym obwodzie ani bieguna ani punktu zerowego, to wzory powyższe stosują się jedynie do pierwiastków równania $f(z) = 0$, położonych wewnątrz C . Wzory (42), (43) i (44) wyznaczają liczbę N tych pierwiastków zapomocą przyrostu, nabytego przez argument funkcji $f(z)$ wzdłuż obwodu C lub zapomocą nadmiaru ilorazu $\frac{Y}{X}$. Jeżeli funkcja $f(z)$ jest wielomianem całkowitym względem z , o jakichkolwiek współczynnikach, a obwód C składa się z liczby skończonej łuków krzywych jednobieźnych (unicursales), to można obliczyć ten nadmiar zapomocą działań elementarnych, t. j. mnożenia i dzielenia wielomianów. W istocie, niech łukowi AB obwodu odpowiadają wzory:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

w których $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ oznaczają takie funkcje wymierne parametru t , że parametr ten musi się zmieniać od α do β , na to aby punkt (x, y) przebiegł łuk AB w zwrocie dodatnim. Zastępując w wielomianie $f(z)$ zmienną z przez $\varphi(t) + i\psi(t)$ i oznaczając przez $R(t)$ i $R_1(t)$ funkcje wymierne zmiennej t o współczynnikach rzeczywistych, otrzymujemy:

$$f(z) = R(t) + i R_1(t).$$

Nadmiar ilorazu $\frac{Y}{X}$ na łuku AB jest tedy równy nadmiarowi, nabytemu przez funkcję wymierną $\frac{R_1}{R}$, gdy t zmienia się od α do β , który nauczyliśmy się obliczać (t. I, art. 79). Jeżeli przeto obwód C składa się z łuków krzywych jednobieźnych, to wystarczy, w celu otrzymania liczby pierwiastków równania $f(z) = 0$, zawartych wewnątrz obwodu C , obliczyć nadmiar, odpowiadający każdemu z tych łuków i wziąć połowę sumy tych wszystkich nadmiarów.

Uwaga. — Z powyższych rozważań wynika bez trudności twierdzenie d'Alemberta. W tym celu uzasadnijmy przedewszystkiem pewne twierdzenie pomocnicze, którym będziemy się nieraz posilkowali. Niech

$F(z)$ i $\Phi(z)$ oznaczają funkcje holomorficzne wewnątrz krzywej zamkniętej C , ciągle na samej krzywej i takie, że mamy stale wzdłuż C : $|\Phi(z)| < |F(z)|$; w tych warunkach *różnienia*

$$F(z) = 0, \quad F(z) + \Phi(z) = 0$$

posiadają wewnątrz C tę samą liczbę pierwiastków. W istocie

$$F(z) + \Phi(z) = F(z) \left[1 + \frac{\Phi(z)}{F(z)} \right];$$

gdy punkt z przebiega obwód C , punkt $Z = 1 + \frac{\Phi(z)}{F(z)}$ zakresła krzywą zamkniętą, położoną całkowicie wewnątrz koła o promieniu równym jedności, mającego za środek punkt $Z = 1$, ponieważ wzdłuż całej krzywej C zachodzi związek $|Z - 1| < 1$. Argument tego czynnika odzyskuje tedy po zakresleniu przez punkt z obwodu C swą wartość początkową, i przyrost argumentu sumy $F(z) + \Phi(z)$ równa się przyrostowi argumentu składnika $F(z)$; oba równania posiadają przeto wewnątrz C tę samą liczbę pierwiastków.

Stwierdziwszy ten fakt, weźmy wielomian $f(z)$ stopnia m -ego o jakichkolwiek współczynnikach i załóżmy:

$$F(z) = A_0 z^m, \quad \Phi(z) = A_1 z^{m-1} + \dots + A_m, \quad f(z) = F(z) + \Phi(z).$$

Obierzmy liczbę R dość wielką, by zachodziła nierówność

$$\left| \frac{A_1}{A_0} \right| \frac{1}{R} + \left| \frac{A_2}{A_0} \right| \frac{1}{R^2} + \dots + \left| \frac{A_m}{A_0} \right| \frac{1}{R^m} < 1;$$

wzdłuż całego okręgu C o promieniu większym od R , zakresłonego do koła początku układu, będziemy oczywiście mieli nierówność: $\left| \frac{\Phi}{F} \right| < 1$.

Równanie $f(z) = 0$ posiada zatem wewnątrz koła C taką samą liczbę pierwiastków, jak równanie $F(z) = 0$, to jest m .

308. Wzór Jensena. — Weźmy funkcję $f(z)$, częściokształtną wewnątrz okręgu C o promieniu r , zakresłonego dookoła początku układu, a całokształtną i pozbawioną punktów zerowych na C . Oznaczmy przez $a_1, a_2, \dots, a_n$ punkty zerowe, a przez $b_1, b_2, \dots, b_m$ — bieguny funkcji $f(z)$, zawarte wewnątrz tego okręgu, licząc każdy z nich tylekroć, ile wymaga jego rząd; założymy prócz tego, że początek układu nie jest dla $f(z)$ ani punktem zerowym ani biegunem. W tych warunkach przystąpmy do wyznaczenia całki określonej

$$(45) \quad I = \int_{(C)} \text{Log } [f(z)] \frac{dz}{z},$$

branej wzdłuż C w zwrocie dodatnim; niech np. punkt z rozpoczyna swą drogę od położenia $z = r$ na osi rzeczywistej, a przytym argument funkcji $f(z)$ posiada wartość, z góry obraną. Całkując przez części, otrzymujemy

$$(46) \quad I = \{ \text{Log } (z) \text{ Log } [f(z)] \}_{(C)} - \int_{(C)} \text{Log } (z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz;$$

pierwsza część prawej strony równości oznacza przyrost, nabyty przez iloczyn $\text{Log } (z) \text{Log } [f(z)]$ przy zakreśleniu przez punkt z okręgu C . Przyrost ten, jeżeli bierzemy zero, jako wartość początkową argumentu zmiennej z , równa się

$$\begin{aligned} & (\log r + 2\pi i) \{ \text{Log } [f(r)] + 2\pi i (n - m) \} - \log r \text{Log } [f(r)] \\ & = 2\pi i \text{Log } [f(r)] + 2\pi i (n - m) \log r - 4 (n - m) \pi^2. \end{aligned}$$

Aby obliczyć nową całkę określoną, rozpatrzmy obwód zamknięty Γ , utworzony z okręgu C , okręgu c o promieniu ς nieskończenie małym, zakreślonego dokoła początku układu, oraz dwu brzegów cięcia, wyznaczonego wzdłuż osi rzeczywistej od punktu $z = \varsigma$ do punktu $z = r$ (rys. 64). [W celu ustalenia biegu myśli zakładamy że $f(z)$ nie posiada na tym odcinku osi rzeczywistej ani biegunów ani punktów zerowych; w przeciwnym razie wystarczyłoby wyznaczenie cięcia, tworzącego z osią rzeczywistą kąt nieskończenie mały]. Funkcja $\text{Log } (z)$ jest całokształtna wewnątrz Γ i podług wzoru ogólnego (40) otrzymujemy związek

$$\begin{aligned} \int_{(ab)} \text{Log } (z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{(C)} \text{Log } (z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \int_{(b'a')} \text{Log } (z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ + \int_{(c)} \text{Log } (z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \text{Log } \left(\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m} \right) \end{aligned}$$

Całka, wzięta wzdłuż okręgu c , dąży do zera wraz z ς , gdyż iloczyn $z \text{Log } (z)$ maleje nieskończenie wraz z ς . Z drugiej strony, jeżeli argument zmiennej z jest równy zeru wzdłuż ab , to wzdłuż $a'b'$ równa się $2\pi i$, i suma dwu odpowiednich całek zmierza do granicy

$$- \int_0^r 2\pi i \frac{f'(z)}{f(z)} dz = - 2\pi i \text{Log } [f(r)] + 2\pi i \text{Log } [f(0)].$$

Więc ostatecznie

$$\int_{(C)} \text{Log } (z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \text{Log } \left(\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m} \right) + 2\pi i \text{Log } \left[\frac{f(r)}{f(0)} \right],$$

i wzór (46) przybiera postać

$$\begin{aligned} I &= 2\pi i (n - m) \log r \\ &+ 2\pi i \text{Log } [f(0)] - 2\pi i \text{Log } \left(\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{b_1 b_2 \dots b_m} \right) - 4 (n - m) \pi^2. \end{aligned}$$

Całkując wzdłuż okręgu C , możemy założyć: $z = re^{i\varphi}$ i zmieniać φ od 0 do 2π . Otrzymujemy wtedy: $\frac{dz}{z} = i d\varphi$. Założmy jeszcze, oznaczając przez R i Φ

funkcje zmiennej φ , ciągle wzdłuż C , że $f(z) = R e^{i\Phi}$. Przyrównywując do siebie w poprzednim wzorze współczynniki przy i , otrzymujemy wzór Jensena ⁽¹⁾.

$$(47) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log R \, d\varphi = \log |f(0)| + \log \left| r^{n-m} \frac{b_1 b_2 \dots b_m}{a_1 a_2 \dots a_n} \right|,$$

w którym występują jedynie zwyczajne logarytmy neperowskie.

Rzecz jasna, iż w razie, gdy $f(z)$ jest całokształtna wewnątrz C , należy zastąpić iloczyn $b_1 b_2 \dots b_m$ przez jedność, i wzór Jensena przybiera postać

$$(48) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log R \, d\varphi = \log |f(0)| + \log \left| \frac{r^n}{a_1 a_2 \dots a_n} \right|.$$

Wzór ten zasługuje na uwagę ze względu na to, że zawiera jedynie moduły pierwiastków funkcji $f(z)$, położonych wewnątrz C , tudzież moduł funkcji $f(z)$ na okręgu C oraz w środku tego okręgu.

309. Wzór Lagrange'a. — Wzór Lagrange'a, uzasadniony już poprzednio zapomocą metody Laplace'a (I, art. 195), może być również dowiedziony z wielką łatwością zapomocą twierdzeń ogólnych Cauchy'ego. Obierzemy przytym bieg myśli, wskazany przez Hermite'a.

Niech $f(z)$ oznacza funkcję, całokształtną w pewnym obszarze D , zawierającym punkt a . Równanie

$$(49) \quad F(z) = z - a - \alpha f(z) = 0,$$

w którym α stanowi parametr zmienny, posiada przy $\alpha = 0$ pierwiastek $z = a$. Załóżmy, że $\alpha \neq 0$; niech C oznacza okrąg o środku a i promieniu r , położony w obszarze D i taki, że w każdym jego punkcie $|\alpha f(z)| < |z - a|$; równanie $F(z) = 0$, zgodnie z uzasadnionym powyżej (art. 307) twierdzeniem pomocniczym, posiada wewnątrz obwodu C tyleż pierwiastków, co równanie $z - a = 0$, to jest jeden tylko pierwiastek. Oznaczmy ten pierwiastek przez ξ i wprowadźmy jeszcze pewną funkcję $\Pi(z)$, całokształtną w kole C .

Funkcja $\frac{\Pi(z)}{F(z)}$ posiada wewnątrz C tylko jeden biegun, a mianowicie $z = \xi$, i odpowiednia pozostałość równa się $\frac{\Pi(\xi)}{F'(\xi)}$. Przeto, według twierdzenia ogólnego:

$$\frac{\Pi(\xi)}{F'(\xi)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{\Pi(z) \, dz}{F(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{\Pi(z) \, dz}{z - a - \alpha f(z)}.$$

⁽¹⁾ *Acta mathematica*, t. XXII.

Aby rozwinąć ostatnią całkę w szereg potęg parametru α , zastosujmy zupełnie takie samo postępowanie, jak przy dowodzie wzoru Taylora, pisząc:

$$\frac{1}{z - a - \alpha f(z)} = \frac{1}{z - a} + \frac{\alpha f(z)}{(z - a)^2} + \dots \\ + \frac{[\alpha f(z)]^n}{(z - a)^{n+1}} + \frac{1}{z - a - \alpha f(z)} \left[\frac{\alpha f(z)}{z - a} \right]^{n+1};$$

podstawiając tę wartość do całki, otrzymujemy wzór

$$\frac{\Pi(\xi)}{F'(\xi)} = J_0 + \alpha J_1 + \dots + \alpha^n J_n + R_{n+1},$$

w którym

$$J_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{\Pi(z) dz}{z - a}, \dots, J_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{[f(z)]^n \Pi(z) dz}{(z - a)^{n+1}}, \\ R_{n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{\Pi(z)}{z - a - \alpha f(z)} \left[\frac{\alpha f(z)}{z - a} \right]^{n+1} dz$$

Niech m oznacza największość modułu $|\alpha f(z)|$ na okręgu C ; stosownie do założenia m jest mniejsze od r . Największość modułu funkcji $\Pi(z)$ na okręgu C nazwijmy M ; otrzymamy

$$|R_{n+1}| < \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{r}\right)^{n+1} \frac{2\pi r M}{r - m},$$

co wskazuje, że R_{n+1} dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie. Poza tym, ze względu na same wyrażenia współczynników $J_0, J_1, \dots, J_n, \dots$ i zgodnie z wzorami (14)

$$J_0 = \Pi(a), \dots, J_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{da^n} \left\{ [f(a)]^n \Pi(a) \right\},$$

i ostatecznie otrzymujemy szereg następujący:

$$(50) \quad \frac{\Pi(\xi)}{F'(\xi)} = \Pi(a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n}{da^n} \left\{ \Pi(a) [f(a)]^n \right\}.$$

Można jeszcze nadać temu wzorowi postać nieco odmienną. Oznaczając przez $\Phi(z)$ funkcję, całokształtną w tym samym obszarze, założmy: $\Pi(z) = \Phi(z) [1 - \alpha f'(z)]$; lewa strona wzoru (50) nie będzie w takim razie zawierała α i zamieni się w $\Phi(\xi)$. Co do prawej strony, zauważmy, że musi ona zawierać dwa wyrazy stopnia n -go względem α , których suma wyraża się w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n}{da^n} \left\{ \Phi(a) [f(a)]^n \right\} - \frac{\alpha^n}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left\{ \Phi(a) [f(a)]^{n-1} f'(a) \right\} \\
&= \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left\{ \Phi'(a) [f(a)]^n + n \Phi(a) f'(a) [f(a)]^{n-1} - n \Phi(a) f'(a) [f(a)]^{n-1} \right\} \\
&= \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left\{ \Phi'(a) [f(a)]^n \right\},
\end{aligned}$$

otrzymujemy tedy ponownie wzór Lagrange'a w jego zwykłej postaci [p. I, art. 195, wzór (52)]

$$(51) \quad \Phi(\xi) = \Phi(a) + \frac{\alpha}{1} \Phi'(a) f(a) + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{da^{n-1}} \left\{ \Phi'(a) [f(a)]^n \right\} + \dots$$

Założyliśmy, iż wzdłuż koła C mamy stale $|\alpha f(z)| < r$; warunek ten jest spełniony, gdy $|\alpha|$ jest dość małe. Szukając największości modułu $|\alpha|$, poprzestańmy na przypadku, w którym $f(z)$ jest wielomianem lub funkcją całkowitą. Niech $\mathcal{M}(r)$ oznacza wartość największą modułu $|f(z)|$ na okręgu C o promieniu r , zakreślonym dokoła punktu a ; dowód podany może być zastosowany do tego koła, byleby $|\alpha| \mathcal{M}(r) < r$.

Musimy tedy obliczyć maximum stosunku $\frac{r}{\mathcal{M}(r)}$ przy wzroście r od 0 do $+\infty$. Stosunek ten równa się zeru przy $r=0$, ponieważ gdyby $\mathcal{M}(r)$ dążyło do zera wraz z r , punkt $z=a$ byłby punktem zerowym funkcji $f(z)$, i funkcja $F(z)$ byłaby podzielna przez czynnik $z-a$; dla $r=\infty$ stosunek $\frac{r}{\mathcal{M}(r)}$ jest także równy zeru, gdyż inaczej funkcja $f(z)$ byłaby

wielomianem pierwszego stopnia (art. 294). Stąd wynika, że $\frac{r}{\mathcal{M}(r)}$ osiąga przy pewnej wartości r_1 promienia r jakąś wartość największą μ . Zgodnie z poprzednim rozumowaniem równanie (41) posiada jeden i tylko jeden pierwiastek o module mniejszym niż r_1 , o ile $|\alpha| < \mu$; wzory (50) i (51) dają się tedy zastosować, o ile $|\alpha|$ nie przewyższa μ , byleby funkcje $\Pi(z)$ i $\Phi(z)$ były całokształtne w kole C_1 o promieniu r_1 .

Przykład. — Weźmy $f(z) = \frac{z^2-1}{2}$; równanie (49) posiada pierwiastek

$$\xi = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\alpha\alpha + \alpha^2}}{\alpha},$$

który dąży do a , gdy α dąży do zera. Niech $\Pi(z) = 1$; wzór (50) przybiera postać

$$(52) \quad \frac{1}{\sqrt{1-2a\alpha+\alpha^2}} = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n}{d\alpha^n} \left[\frac{(a^2-1)^n}{2^n} \right] = 1 + \sum_1^{\infty} \alpha^n X_n(a);$$

X_n oznacza tu n -ty wielomian Legendre'a (p. I, art. 90, 189). W celu rozpoznania, pomiędzy jakimi granicami daje się zastosować ten wzór, założmy, że a jest rzeczywiste i większe od jedności. Na okręgu o promieniu r $M(r)$ równa się oczywiście $\frac{(a+r)^2-1}{2}$, i należy obliczyć wartość największą, osiąganą przez $\frac{2r}{(a+r)^2-1}$ przy

wzrastaniu r od 0 do $+\infty$. To maximum odpowiada wartości $r = \sqrt{a^2-1}$ i równa się $a - \sqrt{a^2-1}$. Podobnie, jeżeli a zawiera się pomiędzy -1 a $+1$, znajdujemy zapomocą nader prostego i elementarnego rachunku $M(r) = \frac{r^2+1-a^2}{2\sqrt{1-a^2}}$. Otóż $\frac{2r\sqrt{1-a^2}}{r^2+1-a^2}$ osiąga największość, równą jedności, przy $r = \sqrt{1-a^2}$.

Łatwo sprawdzić te wyniki. W istocie, pierwiastek $\sqrt{1-2a\alpha+\alpha^2}$, rozważany jako funkcja zmiennej α , posiada dwa punkty krytyczne $a \pm \sqrt{a^2-1}$. Jeżeli $a > 1$, punktem bardziej zbliżonym do początku układu jest punkt $a - \sqrt{a^2-1}$. Jeżeli a zawiera się pomiędzy -1 a $+1$, oba punkty krytyczne $a \pm \sqrt{1-a^2}$ posiadają moduły równe jedności.

W kursie litografowanym Hermite'a (wydanie 4-te, str. 185) znajdzie czytelnik nader wyczerpujące roztrząsanie, przy pomocy tej metody, równania Keplera $z - a = \alpha \sin z$. Potrzeba przy tym obliczyć pierwiastek równania przestępnego $e^r(r-1) = e^{-r}(r+1)$, zawarty pomiędzy 1 a 2. Stieltjes otrzymał wartości

$$r_1 = 1,199678640257734, \quad \mu = 0,6627434193492.$$

310. Badanie funkcji przy wartościach nieskończenie wielkich zmiennej. — W celu zbadania funkcji $f(z)$ przy wartościach zmiennej o module

rosnącym nieograniczenie można założyć: $z = \frac{1}{z'}$, i badać funkcję $f\left(\frac{1}{z'}\right)$

w sąsiedztwie początku układu. Łatwo jednak pominąć to przekształcenie pomocnicze. Założmy z początku, że można znaleźć taką liczbę dodatnią R , że wszelka wartość skończona zmiennej z , o module większym niż R , oznacza punkt zwyczajny funkcji $f(z)$. Jeżeli zatoczmy dokoła początku układu okrąg C o promieniu równym R , funkcja $f(z)$ będzie regularna w każdym punkcie z , położonym w odległości skończonej i nazewnątrz C . Dziedzinę płaszczyzny, położoną zewnątrz C nazwiemy *otoczeniem punktu w nieskończoności* (domaine du point à l'infini).

Zakreślmy jeszcze, oprócz okręgu C , okrąg spółśrodkowy C' o promieniu $R' > R$. Funkcja $f(z)$, jako całokształtna w pierścieniu kołowym, zawartym pomiędzy C a C' , równa się, podług twierdzenia Laurenta,

sumie szeregu, uszykowanego według potęg całkowitych, dodatnich i ujemnych, zmiennej z

$$(53) \quad f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_{-m} z^m.$$

Spółczynniki A_{-m} tego szeregu nie zależą od promienia R' , który można uczynić dowolnie wielkim; stąd wynika, że wzór (53) daje się zastosować do całego otoczenia punktu w nieskończoności czyli do wszelkiego obszaru, położonego zewnątrz C . Ustaliwszy ten fakt, możemy odróżnić kilka przypadków:

po 1-sze) Gdy szereg, wyrażający $f(z)$, zawiera jedynie potęgi ujemne zmiennej z

$$(54) \quad f(z) = A_0 + A_1 \frac{1}{z} + A_2 \frac{1}{z^2} + \dots + A_m \frac{1}{z^m} + \dots,$$

$f(z)$ dąży przy wzroście nieograniczonym modułu $|z|$ do A_0 ; mówimy, że funkcja $f(z)$ jest regularna w punkcie w nieskończoności lub inaczej, że punkt w nieskończoności jest punktem zwyczajnym funkcji $f(z)$. Jeżeli spółczynniki $A_0, A_1, \dots, A_{m-1}$ są równe zeru, a A_m nie jest równe zeru, to punkt w nieskończoności jest punktem zerowym rzędu m funkcji $f(z)$.

Po 2-gie) Gdy szereg, wyrażający $f(z)$, zawiera liczbę skończoną potęg dodatnich zmiennej z

$$(55) \quad f(z) = B_m z^m + B_{m-1} z^{m-1} + \dots + B_1 z + A_0 + A_1 \frac{1}{z} + A_2 \frac{1}{z^2} + \dots$$

[pierwszy współczynnik $B_m \neq 0$],

to punkt w nieskończoności jest biegunem rzędu m funkcji $f(z)$, i wielomian $B_m z^m + \dots + B_1 z$ stanowi część główną funkcji w stosunku do tego bieguna. Gdy $|z|$ wzrasta nieograniczenie, to samo dzieje się z $|f(z)|$, niezależnie od sposobu poruszania się punktu z .

Po 3-cie). Wreszcie, gdy szereg, wyrażający $f(z)$, zawiera liczbę nieskończoną potęg dodatnich zmiennej z , punkt w nieskończoności jest punktem istotnie osobliwym funkcji $f(z)$. Szereg, utworzony przez potęgi dodatnie zmiennej z , wyraża funkcję całkowitą $G(z)$, stanowiącą część główną funkcji $f(z)$ w otoczeniu punktu w nieskończoności. W szczególności widzimy, że punkt w nieskończoności jest punktem istotnie osobliwym dla każdej funkcji całkowitej.

Określenia powyższe wypływają poniekąd z określeń, zastosowanych poprzednio do punktów w odległości skończonej. W istocie, przy założeniu, że $z = \frac{1}{z'}$, funkcja $f(z)$ przemienia się w funkcję zmiennej z' ,

$\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z'}\right)$, i stwierdzamy bezpośrednio, że przenieśliśmy jedynie na punkt w nieskończoności nazwy, przybierane przez punkt $z' = 0$ w stosunku do funkcji $\varphi(z')$. Rozumując przez analogję, byłibyśmy skłonni dać nazwę *pozostałości* współczynnikowi A_{-1} pierwszej potęgi zmiennej z w szeregu (53); byłoby to jednak mylne. Aby zachować charakterystyczną własność tego pojęcia, nazwiemy *pozostałością, odpowiadającą punktowi w nieskończoności, współczynnik przy $\frac{1}{z}$, wzięty ze znakiem przeciwnym, t. j. — A_1* . Liczba ta równa się, jak dawniej, całce

$$\frac{1}{2\pi i} \int f(z) dz,$$

liczonej w zwrocie dodatnim wzdłuż obwodu otoczenia punktu w nieskończoności. W danym razie atoli, ponieważ otoczeniem punktu w nieskończoności jest część płaszczyzny, położona zewnątrz C , za zwrot dodatni uważać należy zwrot, przeciwny zwykłemu. W istocie całka ta sprowadza się do całki

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{A_1 dz}{z} = \frac{A_1}{2\pi i} (\text{Log } z)_{(C)};$$

gdy punkt z przebiega w żądanym zwrocie okrąg C , argument zmiennej z zmniejsza się o 2π , skąd wynika dla całki wartość $-A_1$.

Należy koniecznie zauważyć, że funkcja może być regularną w nieskończoności, choćby pozostałość nie równała się zeru; za przykład może służyć funkcja $1 + \frac{1}{z}$.

Jeżeli punkt w nieskończoności jest dla $f(z)$ biegunem lub punktem zerowym, to w otoczeniu tego punktu daje się zastosować wzór

$$f(z) = z^\mu \varphi(z),$$

w którym μ oznacza liczbę całkowitą dodatnią lub ujemną, równą rzędowi funkcji, wziętemu ze znakiem przeciwnym, a $\varphi(z)$ — funkcję regularną w nieskończoności i nie równą zeru dla $z = \infty$. Stąd wynika

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mu}{z} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)};$$

funkcja $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ jest również regularna w punkcie w nieskończoności,

lecz szereg, który ją wyraża, zaczyna się od wyrazu, zawierającego $\frac{1}{z^2}$

lub wyrazu o stopniu jeszcze wyższym (względem $\frac{1}{z}$ — Uw. II). Pozostałość funkcji $\frac{f'(z)}{f(z)}$ równa się tedy -1 , to jest rzędowi funkcji $f(z)$ w punkcie w nieskończoności. Otrzymujemy zatem to samo twierdzenie, co w zastosowaniu do bieguna lub punktu zerowego w odległości skończonej (art. 306).

Weźmy funkcję jednowartościową $f(z)$, posiadającą liczbę skończoną punktów osobliwych. Umowa, zawarta co do punktu w nieskończoności, pozwala na wysłowienie w nader prostej postaci następującego twierdzenia ogólnego:

Suma pozostałości funkcji $f(z)$ w całej płaszczyźnie, włącznie z punktem w nieskończoności, równa się zeru.

Dowodzimy tego odrazu, zakreślając dokoła początku układu okrąg C , otaczający wszystkie punkty osobliwe funkcji $f(z)$, różne od punktu w nieskończoności. Całka $\int f(z) dz$, wzięta wzdłuż tego okręgu w zwykłym zwrocie, jest równa iloczynowi $2\pi i$ przez sumę pozostałości, odpowiadających wszystkim punktom osobliwym funkcji $f(z)$, położonym w odległości skończonej. Z drugiej strony ta sama całka, wzięta wzdłuż tegoż okręgu w zwrocie przeciwnym, równa się iloczynowi $2\pi i$ przez pozostałość, odpowiadającą punktowi w nieskończoności. Ponieważ suma takich dwóch całek jest równa zeru, więc to samo stosuje się do sumy pozostałości.

Cauchy nadawał sumie pozostałości funkcji $f(z)$, odpowiadających wszystkim punktom osobliwym w odległości skończonej, nazwę: *pozostałość całkowita* (résidu intégral). Gdy mamy do czynienia tylko z liczbą skończoną punktów osobliwych, to, jak widzieliśmy, pozostałość całkowita równa się pozostałości, odpowiadającej punktowi w nieskończoności, wziętej ze znakiem przeciwnym.

Przykład. — Weźmy iloraz

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

w którym $P(z)$ oznacza wielomian stopnia p , $Q(z)$ — wielomian stopnia parzystego $2q$. Nazewnątrż koła C o promieniu R , większym od modułów wszystkich pierwiastków wielomianu $Q(z)$, funkcja $f(z)$ jest jednowartościowa, i możemy napisać

$$f(z) = z^{p-q} \varphi(z),$$

oznaczając przez $\varphi(z)$ funkcję regularną w nieskończoności, nie równą zeru dla $z = \infty$. Punkt w nieskończoności jest dla $f(z)$ biegunem, jeżeli $p > q$, a punktem zwyczajnym, jeżeli $p \leq q$. Pozostałość równa się napewno zeru, jeżeli p jest mniejsze od $q - 1$.

IV. — Okresy całek określonych.

311. Okresy biegunowe. — Badanie całek krzywoliniowych wymagało występującą w pewnych warunkach okresowość tych całek. Ponieważ wszelka całka funkcji $f(z)$ zmiennej zespolonej z stanowi sumę całek krzywoliniowych, więc rzecz jasna, że taka całka może również posiadać pewne okresy. Weźmy z początku funkcję analityczną $f(z)$, posiadającą wewnątrz jakiejś krzywej zamkniętej C jedynie liczbę skończoną odosobnionych punktów osobliwych, bądź biegunów, bądź punktów istotnie osobliwych. Ten przypadek jest zupełnie współrzędny z przypadkiem, zbadanym już w teorii całek krzywoliniowych (I, art. 153), i stosować można bez zmiany te same rozumowania. Wszystkie drogi, położone wewnątrz obwodu C , które można wytknąć pomiędzy dwoma punktami z_0 i Z tego obszaru, tak aby nie przechodziły przez żaden z punktów osobliwych funkcji $f(z)$, dają się zastąpić przez jakąś jedną określoną drogę, łączącą te dwa punkty i następującą po pewnej liczbie pęteli (lacets), zakreślonych z punktu z_0 dokoła punktów osobliwych $a_1, a_2, \dots, a_n$ funkcji $f(z)$. Niech $A_1, A_2, \dots, A_n$ oznaczają odpowiednio pozostałości tej funkcji: całka $\int f(z) dz$, wzięta wzdłuż drogi, okrążającej punkt a_1 , jest równa $\pm 2\pi i A_1$ — i podobnie w stosunku do innych punktów. Różne wartości całki $\int_{z_0}^Z f(z) dz$ są tedy dane przez wzór

$$(56) \quad \int_{z_0}^Z f(z) dz = F(Z) + 2\pi i (m_1 A_1 + m_2 A_2 + \dots + m_n A_n),$$

w którym $F(z)$ oznacza jedną z wartości tej całki, odpowiadającą pewnej określonej drodze, a $m_1, m_2, \dots$ — dowolne liczby całkowite, dodatnie lub ujemne: okresy są równe

$$2\pi i A_1, 2\pi i A_2, \dots, 2\pi i A_n.$$

W większości przypadków punkty $a_1, a_2, \dots, a_n$ są to bieguny, i okresy powstają wskutek zakreślania dokoła tych biegunów nieskończenie małych obwodów, skąd nazwa: *okresy biegunowe* (périodes polaires), nada-

wana im zwykle w celu odróżnienia od okresów innego rodzaju, o których będzie mowa poniżej.

Zamiast obszaru, położonego wewnątrz krzywej zamkniętej, można rozważać obszar płaszczyzny, rozciągający się w nieskończoność; funkcja $f(z)$ może w takim razie posiadać nieskończenie wiele biegunów, a całka — nieskończenie wiele okresów. Jeżeli pozostałość, odpowiadająca jakiemuś punktowi osobliwemu a funkcji $f(z)$, równa się zeru, to odpowiedni okres jest równy zeru, i punkt a jest również biegunem lub punktem istotnie osobliwym dla całki. Lecz jeżeli ta pozostałość nie równa się zeru, punkt a jest dla całki punktem krytycznym logarytmicznym (p. critique logarithmique). Jeżeli np. punkt a jest biegunem rzędu m funkcji $f(z)$, to w otoczeniu tego punktu

$$f(z) = \frac{B_m}{(z-a)^m} + \frac{B_{m-1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{B_1}{z-a} + A_0 + A_1(z-a) + \dots,$$

i zatem

$$\int_{z_0}^{\infty} f(z) dz = C - \frac{B_m}{(m-1)(z-a)^{m-1}} + \dots + B_1 \operatorname{Log}(z-a) + A_0(z-a) + A_1 \frac{(z-a)^2}{2} + \dots;$$

C oznacza w tym wzorze stałą, zależną od punktu początkowego z_0 i od zakreślonej drogi.

Stosując te rozważania ogólne do funkcji wymiernych, czynimy pewne znane wyniki zupełnie oczywistymi. Tak np., do tego aby całka funkcji wymiernej była również funkcją wymierną, potrzeba niezbędnie, iżby ta całka nie posiadała okresów czyli iżby wszystkie pozostałości były równe zeru. Ten warunek jest jednocześnie dostateczny. Całka określona

$$\int_{z_0}^{\infty} \frac{dz}{z-a}$$

posiada tylko jeden punkt krytyczny $z=a$ i odpowiedni okres równa się $2\pi i$; a więc właśnie w rachunku całkowym kryje się prawdziwe źródło wielowartościowości funkcji $\operatorname{Log}(z-a)$, jak to już wyjaśniliśmy szczegółowo co do $\int_1^{\infty} \frac{dz}{z}$ (art. 289). Weźmy jeszcze całkę określoną

$$F(z) = \int_0^{\infty} \frac{dz}{1+z^2};$$

całka ta posiada dwa punkty krytyczne logarytmiczne $+i$ i $-i$, ale tylko jeden okres, równy π . Jeżeli poprzestajemy na wartościach rzeczywistych zmiennej, różne gałęzie funkcji arc tang x wydają się tyłuż odmiennymi funkcjami zmiennej x . Wbrew temu widzimy, jak myśl Cauchy'ego zniewala nas do uważania ich za tyleż różnych odnóg tej samej funkcji analitycznej.

Uwaga. — Gdy mamy więcej niż trzy okresy, wartość całki określonej w jakimś punkcie z może być zupełnie nieoznaczoną. Przypomnijmy sobie z początku twierdzenie, należące do zakresu teorii ułamków ciągłych ⁽¹⁾: Gdy jest dana dowolna liczba niewymierna α , to można zawsze znaleźć takie dwie liczby całkowite p i q , dodatnie lub ujemne, iż $|p + q\alpha| < \varepsilon$ (ε — liczba dodatnia dowolna).

Obrawszy w ten sposób liczby p i q , wyobraźmy sobie, że tworzymy ciąg wielokrotności wyrażenia $p + q\alpha$. Wszelka liczba rzeczywista A równa się jednej z tych wielokrotności, lub zawiera się pomiędzy dwiema wielokrotnościami, kolejno po sobie następującemi. Można tedy znaleźć również takie dwie liczby całkowite m i n , iż $|m + n\alpha - A|$ jest mniejsze niż ε . Stwierdziwszy to, weźmy funkcję

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z-a} + \frac{\alpha}{z-b} + \frac{i}{z-c} + \frac{i\beta}{z-d} \right);$$

a, b, c i d oznaczają tu cztery różne bieguny, a α i β — liczby rzeczywiste niewymierne. Całka $\int_{z_0}^z f(z) dz$ posiada cztery okresy: 1, α , i , $i\beta$. Niech $I(z)$ stanowi wartość tej całki, gdy ją liczymy wzdłuż pewnej określonej drogi, łączącej z_0 z z , a $M + Ni$ niech oznacza dowolną liczbę zespoloną. Można zawsze znaleźć takie liczby całkowite m, n, m', n' , iżby moduł różnicy

$$I(z) + m + n\alpha + i(m' + n'\beta) - (M + Ni)$$

był mniejszy od dowolnej liczby dodatniej ε . Do tego wystarczy, by zachodziły związki

$$|m + n\alpha - A| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |m' + n'\beta - B| < \frac{\varepsilon}{2},$$

w których A i B są dane przez założenie: $M + Ni - I(z) = A + Bi$. Można tedy obrać dla zmiennej taką drogę, łączącą dwa, z góry dane, punkty z_0 i z , iż wartość całki $\int f(z) dz$ wziętej wzdłuż tej drogi, różni się dowolnie mało od wszelkiej liczby, z góry danej. Stwierdzamy w ten sposób raz jeszcze pierwszorzędne znaczenie, jakie posiada droga, zakreślona przez punkt z , dla wartości końcowej funkcji analitycznej.

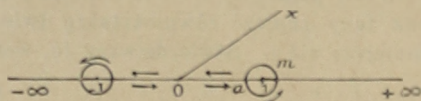
312. Badanie całki $\int_0^x \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$. — Rachunek całkowy wyjaśnia również w sposób najprostszy wielowartościowość funkcji arc sin z ; różne jej wartości pochodzą z obliczania całki określonej

⁽¹⁾ Nieco dalej podamy dowód bezpośredni (art. 324).

$$57) \quad F(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

wzdłuż dróg, wiodących do różnych wyników. W celu ustalenia biegu myśli, założmy, iż rozpoczynamy całkowanie od początku układu, nadając pierwiastkowi wartość początkową $+1$, i oznaczmy przez I wartość tej całki, osiągniętą wzdłuż pewnej określonej drogi (czyli drogi bezpośredniej, franc. *chemin direct*), np. wzdłuż prostej, gdy punkt z nie leży na osi rzeczywistej, poza odcinkiem łączącym punkty -1 i $+1$; gdy z jest rzeczywiste i $|z| > 1$, weźmiemy za drogę bezpośrednią drogę, położoną ponad osią rzeczywistą.

Rys. 65.



Uczyniwszy te założenia, możemy, ze względu na to, że punktami krytycznymi funkcji $\sqrt{1-z^2}$ są jedynie punkty $z = +1$ i $z = -1$, zastąpić wszelką drogę, wiodącą od początku układu do punktu z przez szereg pętli (lacets), zakreślonych dokoła punktów krytycznych $+1$ i -1 z dodatkiem drogi bezpośredniej. Musimy tedy zbadać wartość, osiąganą przy całkowaniu wzdłuż jednej z pętli. Weźmy np. pętlę $OamaO$, zakreśloną dokoła punktu $z = +1$ i składającą się z odcinka Oa , przeciągniętego od początku układu do punktu $1-\epsilon$, okręgu ama o promieniu ϵ , zakreślonego dokoła $z = 1$ oraz z odcinka aO . Całka, liczona wzdłuż tej drogi, równa się tedy sumie całek

$$\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{(ama)} \frac{az}{\sqrt{1-z^2}} + \int_{1-\epsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

całka, wzięta wzdłuż małego okręgu, dąży do zera wraz z ϵ , ponieważ iloczyn $(z-1)f(z)$ dąży również do zera. Z drugiej strony, po zakreśleniu przez z tego okręgu pierwiastek $\sqrt{1-x^2}$ zmienia znak, i przy całkowaniu wzdłuż odcinka aO należy mu nadawać wartość ujemną. Całka, wzięta wzdłuż drogi $OamaO$ równa się tedy granicy, do której zmierza $2 \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, gdy ϵ dąży do zera, t. j. π . Zauważmy, że wartość tej całki nie zależy od zwrotu, w którym jest przebiegana pętla $OamaO$, lecz że powracamy zawsze do punktu wyjścia z wartością -1 pierwiastka.

Gdybyśmy całkowali wzdłuż tego samego obwodu, okrążającego punkt $z = +1$, nadawszy pierwiastkowi wartość początkową -1 , to wartość całki byłaby $-\pi$, i powrócilibyśmy do punktu wyjścia z wartością $+1$ pierwiastka. W ten sam sposób stwierdzamy, że pętli, zakreślonej dokoła punktu krytycznego $z = -1$, odpowiada wartość całki, równa $-\pi$ lub $+\pi$, stosownie do tego, czy w początku układu nadajemy pierwiastkowi wartość początkową, równą $+1$ czy -1 .

Całkując kolejno wzdłuż dwu pętlic (t. j. wzdłuż dwu różnych takich dróg lub dwa razy kolejno wzdłuż tej samej, — *Dod. tłum.*), odzyskujemy w początku układu wartość początkową $+1$ (lub -1 , stosownie do założenia — *Uw. tłum.*), a wartość ogólna całki równa się w takim razie $+2\pi$, 0 lub -2π , stosownie do porządku, w jakim są przebiegane te drogi. Liczba parzysta pętlic nadaje tedy całce wartość o postaci $2m\pi$, a pierwiastkowi przywraca jego wartość początkową $+1$. Liczba nieparzysta pętlic nadaje natomiast całce wartość o postaci $(2m+1)\pi$, a wartość końcowa pierwiastka w początku układu równa się w takim razie -1 . Stąd wynika, że wartość całki $F(z)$ posiada jedną z dwu postaci

$$I + 2m\pi, \quad (2m+1)\pi - I,$$

stosownie do tego, czy droga, zakreślona przez zmienną, może być zastąpiona przez drogę prostą, poprzedzoną przez liczbę *parzystą* czy *nieparzystą* pętlic.

313. Okresy całek ultraeliptycznych. — Można badać w ten sam sposób różne wartości całki określonej

$$(58) \quad F(z) = \int_{\pi_0}^z \frac{P(z) dz}{\sqrt{R(z)}},$$

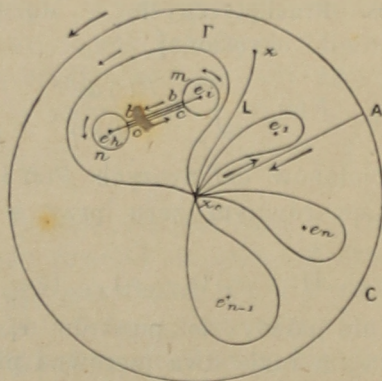
zależnej od dwu wielomianów całkowitych $P(z)$ i $R(z)$, z których $R(z)$, stopnia n -tego, staje się równym zeru przy n różnych wartościach zmiennej z ,

$$R(z) = A(z - e_1)(z - e_2) \dots (z - e_n).$$

Założmy, że punkt z_0 nie należy do punktów $e_1, e_2, \dots, e_n$; równanie $u^2 = R(z_0)$ posiada w takim razie dwa nierówne pierwiastki $+u_0$ i $-u_0$; u_0 ma oznaczać wartość początkową pierwiastka $\sqrt{R(z)}$. Jeżeli punkt z przebiega drogą o jakiegokolwiek postaci, nie przechodzącą przez żaden z punktów krytycznych $e_1, e_2, \dots, e_n$, to wartość pierwiastka $\sqrt{R(z)}$ w każdym punkcie tej drogi jest wyznaczona przez ciągłość. Wyobraźmy sobie, że z każdego z punktów $e_1, e_2, \dots, e_n$ zostało wykreślone cię-

cie nieograniczone, w ten sposób, iż te cięcia nie krzyżują się ze sobą. Całka, liczona od z_0 aż do jakiegokolwiek punktu z wzdłuż drogi, która nie przekracza żadnego z tych cięć (czyli drogi bezpośredniej — fr. chemin direct), posiada wartość $I(z)$ zupełnie określoną, zależną jedynie od z . Należy jeszcze zbadać wpływ na wartość całki pętli, zakreślonej z punktu z_0 dokoła któregośkolwiek z punktów krytycznych e_i . Oznaczmy przez $2E_i$ wartość całki, wziętej wzdłuż obwodu zamkniętego, rozpoczynającego się od punktu z_0 i otaczającego jakiś jeden punkt krytyczny e_i , przy założeniu, że wartość początkowa pierwiastka jest równa u_0 ; wartość $2E_i$ nie zależy od kierunku, w którym jest zakreślany ten obwód, lecz jedynie od wartości początkowej pierwiastka w punkcie z_0 . Istotnie, oznaczmy przez $2E_i'$ wartość całki, wziętej wzdłuż tego samego obwodu w zwrocie przeciwnym, przy tej samej wartości początkowej u_0 pierwiastka. Jeżeli przesuniemy punkt z wzdłuż rozważanego obwodu dwa razy po kolei, w dwu przeciwnych zwrotach, to rzecz jasna, że suma otrzymanych całek musi być równa zeru. Owóż całka, otrzymana przy pierwszym przesunięciu, równa się $2E_i$, a do punktu z_0 powracamy z wartością $-u_0$ pierwiastka $\sqrt{R(z)}$; całka, wzięta wzdłuż obwodu, przebieganego po raz drugi w zwrocie przeciwnym, równa się tedy $-2E_i'$, i ostatecznie $E_i' = E_i$. Rozważany obwód zamknięty można zastąpić pętlą, złożoną z prostej $z_0 a$, okręgu c_i o promieniu nieskończenie małym, zakreślonego dokoła e_i oraz prostej $a z_0$; całka,

Rys. 66.



wzięta wzdłuż c_i , jest nieskończenie mała, ponieważ iloczyn $(z - e_i) \frac{P(z)}{\sqrt{R(z)}}$ dąży do zera wraz z modułem różnicy $z - e_i$. Co do całek, liczonych

wzdłuż $z_0 a$ i $a z_0$, ich części składowe powtarzają się dwukrotnie, i ostatecznie

$$E_1 = \int_{z_0}^{e_i} \frac{P(z) dz}{\sqrt{R(z)}},$$

przy założeniu, że całka została wzięta wzdłuż prostej, a wartość początkowa pierwiastka równa się u_0 .

Wskutek tego całka, wzięta wzdłuż drogi, którą można zastąpić dwiema następującymi po sobie kolejno pętlami, zakreślonymi dokoła punktów e_α, e_β , jest równa $2E_\alpha - 2E_\beta$, ponieważ po zakreśleniu pierwszej pętli powracamy do punktu z_0 z wartością $-u_0$ pierwiastka, i całka, wzięta wzdłuż drugiej pętli musi się równać $-2E_\beta$. Po zakreśleniu tej drugiej drogi okólnej zostaje odzyskana w punkcie z_0 pierwotna wartość początkowa u_0 . Jeżeli droga, zakreślona przez z , sprowadza się do liczby parzystej pęteli, zakreślonych kolejno dokoła punktów $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma, e_\delta, \dots, e_x, e_\lambda$ (wskaźniki $\alpha, \beta, \dots, x, \lambda$ są wzięte z pośród liczb $1, 2, \dots, n$) oraz drogi bezpośredniej, wiodącej od z_0 do z , to wartość całki, obliczonej wzdłuż tej drogi, równa się, zgodnie z powyższymi rozważaniami

$$F(z) = I + 2(E_\alpha - E_\beta) + 2(E_\gamma - E_\delta) + \dots + 2(E_x - E_\lambda).$$

Jeżeli zaś droga, którą przebiega z , może być zastąpiona przez liczbę nieparzystą pętlic, zakreślonych kolejno dokoła punktów krytycznych $e_\alpha, e_\beta, \dots, e_x, e_\lambda, e_\mu$ (tudzież, jak poprzednio, drogę bezpośrednią — *dod. tłum.*), to wartość całki wynosi

$$F(z) = 2(E_\alpha - E_\beta) + \dots + 2(E_x - E_\lambda) + E_\mu - I.$$

Okresami badanej całki są tedy wszystkie wyrażenia $2(E_i - E_h)$; wszystkie te okresy dają się jednak sprowadzić do $(n-1)$ takich okresów:

$$\omega_1 = 2(E_1 - E_n), \omega_2 = 2(E_2 - E_n), \dots, \omega_{n-1} = 2(E_{n-1} - E_n);$$

w istocie, rzecz jasna, że można napisać ogólnie:

$$2(E_i - E_h) = 2(E_i - E_n) - 2(E_h - E_n) = \omega_i - \omega_h.$$

Ponieważ z drugiej strony $2E_\mu = \omega_\mu + 2E_n$, przeto stwierdzamy, że wszystkie wartości, jakie może przybierać w punkcie z całka określona $F(z)$, są dane przez wzory

$$F(z) = I + m_1 \omega_1 + \dots + m_{n-1} \omega_{n-1},$$

$$F(z) = 2E_n - I + m_1 \omega_1 + \dots + m_{n-1} \omega_{n-1},$$

w których $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ oznaczają liczby całkowite dowolne.

Otrzymany wynik nasuwa pewne ważne uwagi. Jest to rzecz niemal oczywista, że okresy winny być niezależne od punktu z_0 , obranego za początek drogi całkowania; łatwo to sprawdzić. Weźmy np. okres $2E_i - 2E_h$, równy wartości całki, wziętej wzdłuż obwodu zamkniętego Γ , przechodzącego przez punkt z_0 i otaczającego tylko dwa punkty krytyczne e_i i e_h . Jeżeli założymy, w celu ustalenia biegu myśli, że wewnątrz trójkąta o wierzchołkach z_0, e_i, e_h nie ma żadnego innego punktu krytycznego, to ten obwód zamknięty może być zastąpiony przez obwód $bb'nc'cmb$ (rys. 66), i zmniejszając nieograniczenie promienie dwu małych okręgów, stwierdzamy, że omawiany okres równa się podwójnej całce

$$\int_{e_i}^{e_h} \frac{P(z) dz}{R(z)},$$

liczonej wzdłuż prostej, która łączy punkty krytyczne e_i i e_h .

Może się zdarzyć, iż $(n - 1)$ okresów $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ nie są niezależne od siebie. Ta okoliczność zachodzi zawsze, gdy wielomian $R(z)$ posiada *stopień parzysty*, a *stopień wielomianu $P(z)$ jest mniejszy od $\frac{n}{2} - 1$* .

Aby to wykazać, zakresłmy dokoła punktu z_0 , okrąg C o promieniu dość wielkim, by wewnątrz tego koła zawierały się wszystkie punkty krytyczne, i wyobraźmy sobie, w celu uproszczenia zadania, iż ponumerowaliśmy te punkty zapomocą liczb od 1 do n , biorąc je w tym porządku, w jakim są spotykane przez promień nieograniczony, obracając się dokoła z_0 w zwrocie dodatnim.

Obliczając całkę

$$\int \frac{P(z) dz}{\sqrt{R(z)}}$$

wzdłuż obwodu zamkniętego $z_0 A M A z_0$, utworzonego z promienia $z_0 A$, okręgu C oraz promienia $A z_0$ (zakreślonego w przeciwnym zwrocie), otrzymujemy wynik, równy zeru. Istotnie, całki, wzięte wzdłuż $z_0 A$ i wzdłuż $A z_0$, znoszą się wzajemnie, gdyż koło C zawiera liczbę *parzystą* punktów krytycznych, i po zakreśleniu jego obwodu przez z pierwiastek odzyskuje tę samą wartość. Z drugiej strony całka, wzięta wzdłuż C , dąży do zera, gdy promień koła wzrasta nieograniczenie, ponieważ, zgodnie z założeniem co do stopnia wielomianu $P(z)$, to samo zachodzi z iloczynem $\frac{z P(z)}{\sqrt{R(z)}}$; a że ta całka nie zależy od promienia okręgu C , przeto musi być równą zeru.

Owóż, rozważany obwód $z_0 A M A z_0$ może być zastąpionym przez szereg pętlic, zakreślonych dokoła punktów krytycznych $e_1, e_2, \dots, e_n$ w porządku, odpowiadającym wskaźnikom. Stąd wypływa związek

$$2 E_1 - 2 E_2 + 2 E_3 - 2 E_4 + \dots + 2 E_{n-1} - 2 E_n = 0,$$

który można jeszcze napisać w postaci

$$\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 + \dots + \omega_{n-1} = 0;$$

widzimy tedy, że $n - 1$ okresów całki sprowadza się do $n - 2$ okresów $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-2}$.

Zbadajmy jeszcze całkę o postaci bardziej ogólnej

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{P(z) dz}{Q(z) \sqrt{R(z)}},$$

zależną od trzech wielomianów P, Q, R , z których ostatni $R(z)$ posiada jedynie pierwiastki jednokrotne. Niektóre z pośród pierwiastków wielomianu $Q(z)$ mogą należeć do $R(z)$; oznaczmy przez $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ pierwiastki, które nie czynią $R(z)$ równym zeru. Całka $F(z)$ posiada, podobnie jak powyżej, okresy $2(E_i - E_h)$, przyczym $2E_i$ oznacza zawsze całkę, wziętą wzdłuż obwodu zamkniętego, przeciągniętego od punktu z_0 i nie otaczającego żadnych pierwiastków wielomianów $Q(z)$ i $R(z)$, prócz e_i . Ale całka ta posiada ponad to pewną liczbę okresów biegunowych, pochodzących od pętlic, zakreślonych dokoła biegunów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$. Liczba ogólna tych okresów zmniejsza się o jedność, gdy $R(z)$ posiada stopień parzysty n i przytym zachodzi związek

$$p < q + \frac{n}{2} - 1,$$

w którym p i q oznaczają stopnie wielomianów P i Q .

Przykład. — Niech $R(z)$ oznacza wielomian czwartego stopnia, posiadający pierwiastek wielokrotny. Poszukajmy liczby okresów całki

$$\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}.$$

Jeżeli $R(z)$ posiada pierwiastek podwójny e_1 oraz dwa pierwiastki pojedyncze e_2 i e_3 , to całka

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{(z - e_1) \sqrt{A(z - e_2)(z - e_3)}}$$

posiada okres $2E_2 - 2E_3$ i oprócz tego okres biegunowy, pochodzący od drogi, zakreślonej dokoła bieguna e_1 ; zgodnie z uczynioną przed chwilą uwagą, okresy te są równe. Jeżeli $R(z)$ posiada dwa pierwiastki podwójne, to widać odrazu, że całka posiada tylko jeden okres biegunowy.

Jeżeli jeden z pierwiastków $R(z)$ jest potrójny, to całka

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{(z - e_1) \sqrt{A(z - e_1)(z - e_2)}}$$

posiada okres $2E_1 - 2E_2$, który stosownie do uwagi ogólnej równa się zeru. To samo zachodzi, gdy $R(z)$ ma pierwiastek poczwórny. Ostatecznie: *jeżeli $R(z)$ posiada jeden pierwiastek podwójny lub dwa pierwiastki podwójne, to całka posiada jeden okres; jeżeli $R(z)$ posiada pierwiastek potrójny lub poczwórny, to całka nie ma okresów.*

Łatwo sprawdzić te wszystkie wyniki bezpośrednio zapomocą całkowania.

314. Okresy całki eliptycznej gatunku pierwszego. — Niech $R(z)$ oznacza wielomian trzeciego lub czwartego stopnia, pierwszy względem swej pochodnej; całka eliptyczna gatunku pierwszego (l'intégrale elliptique de première espèce)

$$F(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

zgodnie z wyłożoną poprzednio teorią ogólną, posiada dwa okresy. Dowiedzmy, że *stosunek tych dwu okresów jest liczbą zespoloną.*

Nie zmniejszając ogólności rozważań, możemy założyć, iż $R(z)$ jest wielomianem trzeciego stopnia. W istocie, niech $R_1(z)$ stanowi wielomian czwartego stopnia; jeżeli a jest jednym z pierwiastków tego wielomianu, to zakładając, iż $z = a + \frac{1}{y}$, otrzymujemy (t. I, art. 105)

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R_1(z)}} = \int \frac{dy}{\sqrt{R(y)}} \quad [R(y) - \text{wielomian trzeciego stopnia}],$$

i rzecz oczywista, że obie całki posiadają te same okresy.

Jeżeli $R(z)$ jest wielomianem trzeciego stopnia, to można założyć, iż posiada pierwiastki 0 i 1, ponieważ wystarczy odpowiednio podstawienie linjowe $z = \alpha + \beta y$, aby przejść do tego przypadku. Ostatecznie, wszystko polega na uzasadnieniu, że całka

$$(59) \quad F(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(a-z)}},$$

w której a jest różne od zera i od jedności, posiada dwa okresy, których stosunek jest urojony.

Jeżeli a jest rzeczywiste, własność ta daje się stwierdzić odrazu jeżeli np. a jest większe od jedności, to całka posiada okresy

$$2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(a-z)}}, \quad 2 \int_1^a \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(a-z)}},$$

z których pierwszy jest rzeczywisty, drugi zaś równa się iloczynowi

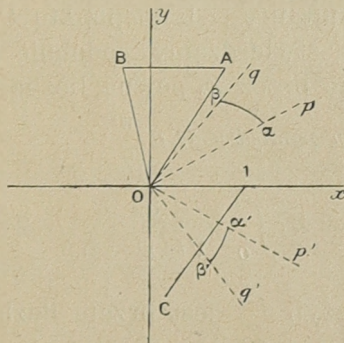
jednostki urojonej i przez liczbę rzeczywistą. Żaden z tych okresów nie może być równym zeru.

Założmy następnie, że a jest liczbą zespoloną, taką np., że współczynnik przy i jest dodatni. Można znów wziąć za jeden z okresów

$$\Omega_1 = 2 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(a-z)}};$$

zastosujemy do tej całki wzór Weierstrassa (art. 285). Gdy z zmienia się od 0 do 1, czynnik $\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}$ pozostaje dodatni, i punkt, oznaczający $\frac{1}{\sqrt{a-z}}$, zakresła krzywą L , o której łatwo wytworzyć sobie pojęcie. Niech A stanowi punkt, wyobrażający liczbę a ; gdy z wzrasta od 0 do 1, punkt $a-z$ przebiega odcinek AB równoległy do Ox , którego długość równa się jednośc (rys. 67).

Rys. 67.



Oznaczmy przez Op i Oq dwusieczne kątów, utworzonych przez proste OA i OB z osią Ox , przez Op' i Oq' proste symetryczne z temi dwusiecznymi względem Ox . Jeżeli weźmiemy tę wartość pierwiastka $\sqrt{a-z}$, której argument zawiera się pomiędzy O a $\frac{\pi}{2}$, to punkt $\sqrt{a-z}$ zakresli łuk $\alpha\beta$, biegnący od punktu α na Op do punktu β na Oq ; punkt $\frac{1}{\sqrt{a-z}}$ zakresli tedy łuk $\alpha'\beta'$, który połączy punkt α' na Op' z punktem β' , należącym do Oq' . Jeżeli oznaczmy przez Z_1 odpowiednik liczbowy (affixe) pewnego punktu, położonego wewnątrz wszelkiego obwo-

du wypukłego, otaczającego łuk $\alpha'\beta'$, to stosując wzór Weierstrassa, otrzymamy

$$\Omega_1 = 2 Z_1 \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}} = 2\pi Z_1.$$

Rzecz jasna, że punkt Z_1 leży w kącie $p'Oq'$ i że nie może znaleźć się w początku układu; jego argument zawiera się tedy między $-\frac{\pi}{2}$ a O .

Jako drugi okres, można wziąć

$$\Omega_2 = 2 \int_{OA} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(a-z)}} = 2 \int_0^a \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)(a-z)}},$$

czyli, przy założeniu, że $z = at$:

$$\Omega_2 = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)(1-at)}}.$$

Aby zastosować do tej całki wzór Weierstrassa, zauważmy, że przy wzroście zmiennej t od 0 do 1 punkt at zakreśla odcinek OA , a punkt, wyobrażający liczbę $1-at$, zakreśla odcinek równy i równoległy, przeciągnięty od punktu $z=1$ do punktu C . Obierając odpowiednio wartość pierwiastka, stwierdzamy podobnie jak poprzednio, że możemy napisać, oznaczając przez Z_2 pewną liczbę zespoloną różną od zera, o argumencie zawartym pomiędzy O a $\frac{\pi}{2}$:

$$\Omega_2 = 2 Z_2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}} = 2\pi Z_2.$$

Stosunek okresów $\frac{\Omega_2}{\Omega_1}$ czyli $\frac{Z_2}{Z_1}$ jest przeto liczbą zespoloną.

Ćwiczenia

1. Rozwinąć funkcję

$$y = \frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 - 1})^m + \frac{1}{2} (x - \sqrt{x^2 - 1})^m$$

w szereg potęg całkowitych zmiennej x . Liczba m — dowolna.

Rozwiązanie (dod. tłum.). Dla $|x| < 1$:

$$y = f(x) = f(0) + f'(0)x - \frac{m^2}{1 \cdot 2} f(0) \cdot x^2 - \frac{m^2 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'(0) \cdot x^3 +$$

$$+ \frac{m^2(m^2-4)}{4!} f(0) x^4 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{5!} f'(0) x^5 - \dots$$
$$\dots + (-1)^n \frac{m^2(m^2-4)\dots[m^2-(2n-2)^2]}{(2n)!} f(0) x^{2n} +$$
$$+ (-1)^n \frac{(m^2-1)(m^2-9)\dots[m^2-(2n-1)^2]}{(2n+1)!} f'(0) x^{2n+1} + \dots$$
$$\dots;$$
$$f(0) = \frac{1}{2} [i^m + (-i)^m]; \quad f'(0) = -\frac{m}{2} [i^{m+1} + (-i)^{m+1}].$$

2. Znaleźć szeregi potęg dodatnich lub ujemnych zmiennej z , wyrażające funkcję $\frac{1}{(z^2 + 1)(z - 2)}$ przy rozmaitych położeniach punktu z w płaszczyźnie.

[*Wskazówka tłum.* — Najdogodniej użyć metody, wskazanej przy końcu art. 295 „Przykład“].

3. Obliczyć całkę określoną $\int z^2 \operatorname{Log} \left(\frac{z+1}{z-1} \right) dz$ wzdłuż okręgu o promieniu, równym 2, określonego dokoła początku układu, przy założeniu, że wartość początkowa logarytmu w punkcie $z = 2$ jest rzeczywista. Obliczyć wzdłuż tego samego obwodu całkę

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + z + 1}}.$$

(Rozwiązanie [dod. tłum.]. 1) $\frac{4\pi i}{3}$, 2) $2\pi i$ (o ile w punkcie $z = 0$ nadajemy pierwiastkowi wartość $+1$).

4. $f(z)$ oznacza funkcję całokształtną wewnątrz krzywej zamkniętej C , otaczającej początek układu. Obliczyć całkę określona $\int_{(C)} f'(z) \operatorname{Log} z \, dz$, rozpoczynając drogę całkowania od wartości początkowej z_0 .

5. Uzasadnić wzór

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \pi;$$

użyć go do obliczenia całek określonych

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[(t-\alpha)^2 + \beta^2]^{n+1}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(At^2 + 2Bt + C)^{n+1}}.$$

6. Obliczyć zapomoca metody pozostałości następujące całki określone:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin mx \, dx}{x(x^2 + a^2)^2} \quad \text{przy } m \text{ i } a - \text{rzeczywistych,}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^4} \, dx \quad \text{przy } a \text{ rzeczywistym,}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2\beta i x - \beta^2 - \alpha^2)^{n+1}} \quad \text{przy } \alpha \text{ i } \beta - \text{rzeczywistych,}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)},$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{4x^2(1-x)}}{(1+x)^3} \, dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \log x \, dx}{(1+x^2)^2},$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} \, dx \quad \text{przy } a \text{ i } b - \text{rzeczywistych i dodatnich.}$$

(Aby wyznaczyć wartość ostatniej całki, możemy całkować funkcję $\frac{e^{alz} - e^{biz}}{z^2}$ wzdłuż obwodu, podanego na rys. 62-im).

7. Dowieść, że całka określona $\int_0^\pi \frac{d\varphi}{A + C - (A - C) \cos \varphi}$ równa się, o ile ma wartość skończoną, iloczynowi $i \frac{\pi}{2\sqrt{AC}}$, w którym czynnik i jest równy ± 1 i dobrany w ten sposób, ażeby współczynnik przy i w wyrażeniu $\frac{i\sqrt{AC}}{A}$ był dodatni.

8. Niech $F(z)$ i $G(z)$ oznaczają funkcje holomorphyczne, a $z = a$ niech stanowi pierwiastek podwójny równania $G(z) = 0$, taki, że $F(a) \neq 0$; odpowiednia pozostałość ilorazu $\frac{F(z)}{G(z)}$ równa się $\frac{6F'(a)G''(a) - 2F(a)G'''(a)}{3[G''(a)]^2}$.

Podobnie pozostałość ilorazu $\frac{F(z)}{[G(z)]^2}$ względem pierwiastka pojedynczego a równania $G(z) = 0$ jest równa $\frac{F'(a)G'(a) - F(a)G''(a)}{[G'(a)]^2}$.

9. Uzasadnić wzór

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(x-a)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi i}{\sqrt{1-a^2}},$$

w którym a oznacza liczbę zespoloną lub rzeczywistą o module, większym od jedności, a pierwiastkowi $\sqrt{1-x^2}$ nadajemy przy całkowaniu (wzdłuż osi rzeczywistej) wartość dodatnią.

Określić dokładnie wartość, którą należy przypisać pierwiastkowi $\sqrt{1-a^2}$.

10. Weźmy całki: $\int_{(s)} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$ i $\int_{(s_1)} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$, w których S i S_1 oznaczają obwody, utworzone w sposób następujący: obwód S składa się z prostej OA (którą przedłużamy nieograniczenie), przeciągniętej wzdłuż Ox , z okręgu o środku O i promieniu OA , wreszcie z prostej AO ; obwód S_1 — z trzech pętli, otaczających punkty a, b, c , które odpowiadają pierwiastkom równania $z^3 + 1 = 0$. Sformułować związek pomiędzy całkami

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{i} \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

wynikający z porównania tamtych całek.

11. Zapomocą całkowania funkcji e^{-x^2} wzdłuż obwodu prostokąta, utworzonego przez proste $y = 0$, $y = b$, $x = +R$, $x = -R$ i powiększania nieograniczonego odległości R , uzasadnić związek

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}.$$

12. Scałkować funkcję $e^{-x} x^{n-1}$ [$n - 1$ rzeczywista i dodatnia] wzdłuż obwodu, utworzonego przez promień OA , nakrywający Ox , łuk AB koła o promieniu OA , zakreślonego dokoła punktu O , oraz takiego promienia BO , że kąt $\alpha = \widehat{AOB}$ jest zawarty pomiędzy O a $\frac{\pi}{2}$. Użyć otrzymanego wyniku, w którym należy w tym celu powiększać nieograniczenie OA , do obliczenia całek określonych

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{n-1} e^{-au} \cos bu \, du, \quad \int_0^{+\infty} u^{n-1} e^{-au} \sin bu \, du$$

[a i b — liczby rzeczywiste i dodatnie].

Otrzymane wzory są ważne również dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$, byleby n spełniało warunek $n < 1$.

13. m, m', n oznaczają liczby całkowite dodatnie; $m < n$, $m' < n$ (jedna z nich może być $= 0$ — Uw. tł.) Uzasadnić wzór

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2m} - t^{2m'}}{1 - t^{2n}} dt = \frac{\pi}{2n} \left[\cot \left(\frac{2m+1}{2n} \right) \pi - \cot \left(\frac{2m'+1}{2n} \right) \pi \right].$$

14. Wysnuć z poprzedniego wzoru wzór Eulera

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{2m} dt}{1 + t^{2n}} = \frac{\pi}{2n \sin \left(\frac{2m+1}{2n} \pi \right)}.$$

15. Jeżeli część rzeczywista parametru a jest dodatnia i mniejsza od jedności, to

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{1 + e^x} = \frac{\pi}{\sin a \pi}.$$

[Można to wywnioskować z wzoru (39) (art. 305), albo też scałkować w tym celu funkcję $\frac{e^{ax}}{1 + e^x}$ wzdłuż obwodu prostokąta, utworzonego przez proste $y = 0$, $y = 2\pi$, $x = +R$, $x = -R$, a następnie założyć, że R wzrasta nieograniczenie].

16. Podobnie uzasadnić wzór

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{1 - e^x} dx = \pi (\cot a\pi - \cot b\pi),$$

w którym a i b są to liczby o częściach rzeczywistych dodatnich i mniejszych od jedności.

[Można obrać za drogę całkowania obwód prostokąta, utworzonego przez proste $y = 0$, $y = \pi$, $x = R$, $x = -R$ i zastosować poprzednie ćwiczenie].

17. Z wzoru

$$\int_{(C)} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz = 2\pi i \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k},$$

w którym n i k oznaczają liczby całkowite dodatnie a C — okrąg, mający za środek początek układu, wysnuć wzory

$$\int_0^\pi (2 \cos u)^{n+k} \cos (n-k)u du = \pi \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}{1 \cdot 2 \dots k},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}.$$

[Zalóżmy $z = e^{2iu}$, następnie $\cos u = x$ i zastąpmy n przez $n+k$ a k przez n].

*18. Całka określona

$$\Phi(x) = \int_0^\pi \frac{d\varphi}{1 - \alpha(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)}$$

jest równa, o ile posiada wartość skończoną, $\pm \frac{\pi}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$, stosownie do położenia względnego punktów α i x . Otrzymać stąd wyrażenie n -tego wielomianu Legendre'a, podane przez Jacobiego

$$X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi.$$

19. Zbadać również całkę określoną $\int_0^\pi \frac{d\varphi}{x - \alpha + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi}$ i z otrzymanego wyniku wysnuć wzór Laplace'a

$$X_n = \frac{\varepsilon}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^{n+1}},$$

w którym $\varepsilon = +1$ lub -1 , stosownie do tego, czy część rzeczywista zmiennej x jest dodatnia czy ujemna.

*20. Uzasadnić ostatni wzór zapomocą całkowania funkcji

$$\frac{1}{z^{n+1} \sqrt{1 - 2xz + z^2}}$$

*21. *Sumy Gaussa.* — Niech $T_s = e^{\frac{2\pi i s^2}{n}}$ (n i s — całkowite; oznaczmy przez S_n sumę $T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1}$). Uzasadnić wzór

$$S_n = \frac{(1+i)(1+i^{3n})}{2} \sqrt{n}.$$

22. Jeżeli $f(z)$ oznacza funkcję holomorficzną wewnątrz obwodu zamkniętego Γ , otaczającego punkty $a, b, c, \dots, l$, a $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ — liczby całkowite dodatnie, to suma pozostałości funkcji

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{x-z} \left(\frac{x-a}{z-a} \right)^{\alpha} \left(\frac{x-b}{z-b} \right)^{\beta} \dots \left(\frac{x-l}{z-l} \right)^{\lambda},$$

$$F(a) = f(a), F'(a) = f'(a), \dots, F^{(\alpha-1)}(a) = f^{(\alpha-1)}(a),$$

$$F(b) = f(b), \quad F'(b) = f'(b), \quad \dots, \quad F^{(\beta-1)}(b) = f^{(\beta-1)}(b),$$

.....

[Można się oprzeć na związku $F(x) = f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\Gamma)} \varphi(z) dz$].

$$F_n(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n);$$
$$f(z) = f(a_1) + \dots + (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n) \sum_{h=1}^n \frac{f(a_h)}{F_n'(a_h)} + \dots$$

[LAURENT „*Journal de Mathématiques*“, serja 5a, t. VIII, str. 325]. [Użyć następującego wzoru, łatwego do sprawdzenia:

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z-a_1} + \frac{x-a_1}{(z-a_1)(z-a_1)} + \dots$$

$$+ \frac{(x-a_1) \dots (x-a_{n-1})}{(z-a_1) \dots (z-a_{n-1})(z-a_n)} + \frac{1}{z-x} \frac{(x-a_1) \dots (x-a_n)}{(z-a_1) \dots (z-a_n)}$$

i postępować, jak przy uzasadnieniu wzoru Taylora].

24. Niech $z_0 = a + bi$ stanowi pierwiastek rzędu n równania $f(z) = X + Yi = 0$, w którym $f(z)$ oznacza funkcję całokształtną w sąsiedztwie tego punktu z_0 . Punkt $x = a$, $y = b$ jest dla obu krzywych $X = 0$, $Y = 0$ punktem wielokrotnym rzędu n ; styczne w tym punkcie do każdej z tych krzywych tworzą rodzaj „róży wiatrów“ (rose de vents), przytym promienie jednego z tych pęków są dwusiecznymi kątów, utworzonych przez promienie drugiego.

25. Weźmy wielomian stopnia m o dowolnych współczynnikach

$$f(z) = X + iY = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \dots + A_m.$$

Dowieść, iż wszystkie asymptoty krzywych $X = 0$, $Y = 0$ przechodzą przez punkt

$$-\frac{A_1}{mA_0} \text{ i są ułożone tak samo jak proste z poprzedniego ćwiczenia.}$$

26. *Szereg Burmanna.* — Gdy mamy dane dwie funkcje $f(x)$ i $F(x)$ zmiennej x , wzór Burmanna pozwala na rozwinięcie jednej z nich według potęg drugiej. Aby nadać zagadnieniu postać ściślejszą, weźmy pierwiastek pojedynczy a równania $F(x) = 0$ i założmy, że obie funkcje $f(x)$ i $F(x)$ są całokształtne w otoczeniu punktu a . W tym obszarze zachodzi związek

$$F(x) = \frac{x-a}{\varphi(x)},$$

w którym $\varphi(x)$ oznacza funkcję regularną dla $x = a$ (o ile a jest pierwiastkiem pojedynczym równania $F(x) = 0$). Zastępując $F(x)$ przez y , otrzymujemy zamiast poprzedniego związku związek równoważny

$$x - a - y\varphi(x) = 0,$$

należy rozwinąć $f(z)$ według potęg zmiennej y (wzór Lagrange'a).

27. *Równanie Keplera.* — Równanie $z - a - e \sin z = 0$, w którym a i e oznaczają liczby dodatnie, przytym $a < \pi$, $e < 1$, posiada jeden pierwiastek rzeczywisty, zawarty pomiędzy 0 a π , oraz dwa pierwiastki o częściach rzeczywistych, zawartych pomiędzy $m\pi$ a $(m+1)\pi$, o ile m jest liczbą dodatnią parzystą lub ujemną nieparzystą; jeżeli m oznacza liczbę dodatnią nieparzystą lub ujemną parzystą, to nie ma żadnego pierwiastka, którego część rzeczywista byłaby zawarta pomiędzy $m\pi$ a $(m+1)\pi$. [BRIOT et BOUTQUET „Théorie des fonctions elliptiques“ („Teoria funkcji eliptycznych“, wyd. 2-gie, str. 199)].

[Należy zbadać krzywą, określoną przez punkt $u = z - a - e \sin z$, gdy zmienna z przebiega po kolei boki prostokąta, utworzonego przez proste $x = m\pi$, $x = (m+1)\pi$, $y = +R$, $y = -R$; R oznacza tu liczbę bardzo wielką].

28. Przy nader wielkich wartościach liczby m , pierwiastki, omówione w poprzednim ćwiczeniu, których część rzeczywista zawiera się pomiędzy $2m\pi$ a $(2m+1)\pi$, są w przybliżeniu równe

$$2m\pi + \frac{\pi}{2} \pm i \left[\log \left(\frac{2}{e} \right) + \log \left(2m\pi + \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

[GOURIER, „*Annales de l'Ecole Normale*“ (Roczniki Szkoły Normalnej), serja 2-ga, t. VII, str. 73].

ROZDZIAŁ XV.

Funkcje jednowartościowe.

Pierwsza część tego rozdziału jest poświęcona udowodnieniu twierdzeń ogólnych Weierstrassa ⁽¹⁾ i Mittag-Lefflera o funkcjach całkowitych oraz funkcjach jednowartościowych, posiadających nieskończenie wiele rzeczy osobliwych. Twierdzenia te zastosowuję następnie do funkcji eliptycznych. Przeznaczywszy na tę teorię niewielką liczbę stronic, nie mogłem marzyć o rozwinięciu jej w sposób o tyle o ile zupełny; poprzestałem tedy jedynie na zaznaczeniu w grubszych zarysach rzeczy najbardziej zasadniczych, tak iżby czytelnik mógł bodaj zdać sobie sprawę z wagi tych funkcji. Tym, którzyby pragnęli posunąć dalej badania nad funkcjami eliptycznymi lub zająć się zastosowaniem ich, nie wystarczy zwykły *kurs analizy matematycznej*; tacy będą zmuszeni zawsze do posilkowania się traktatami specjalnemi.

I. — Czynniki pierwsze Weierstrassa. — Twierdzenie Mittag - Lefflera.

315. Wyrażanie funkcji całkowitej w postaci iloczynu czynników pierwszych. — Wszelki wielomian stopnia m -ego równa się iloczynowi liczby stałej przez m czynników o postaci $x - a$, równych lub nierównych,

⁽¹⁾ Twierdzenia Weierstrassa, które mamy wyłożyć, zostały ogłoszone drukiem w jego „*Rozprawie o funkcjach jednowartościowych jednej zmiennej*”. (*Rozprawy [Mémoires] Akademji Berlińskiej*, r. 1876). Prof. Picard umieścił w „*Rocznikach wyższej Szkoły Normalnej*” (*Annales de l'École Normale supérieure*), w r. 1879, przekład tej rozprawy. Ogół badań Mittag-Lefflera znajdziemy w rozprawie, ogłoszonej w „*Acta mathematica*” (tom II).

i rozkład ten ujawnia pierwiastki wielomianu. Euler pierwszy rozwinął $\sin z$ w podobny iloczyn nieskończony, składający się atoli, jak zobaczymy poniżej, z czynników drugiego stopnia względem z . Cauchy stwierdził, iż w pewnych przypadkach jest się zmuszonym do skojarzenia z każdym czynnikiem dwumiennym, o postaci $x - a$, odpowiedniego czynnika wykładniczego. Atoli dopiero Weierstrass opanował to zagadnienie w jego postaci najogólniejszej, okazując, że wszelka funkcja całkowita o nieskończenie wielu pierwiastkach może być wyrażoną jako iloczyn liczby nieskończonej czynników, z których każdy staje się równy zeru jedynie przy pewnej określonej wartości zmiennej.

Znamy już funkcję całkowitą, która się nie staje równą zeru przy żadnej wartości zmiennej z : jest to e^z ; to samo dzieje się z funkcją $e^{g(z)}$, o ile $g(z)$ oznacza wielomian lub funkcję całkowitą. Nawzajem, wszelka funkcja całkowita, która nie staje się równą zeru dla żadnej wartości z , posiada ten właśnie kształt. Istotnie, jeżeli funkcja całkowita $G(z)$ nie równa się zeru przy żadnej wartości zmiennej z , punkt, odpowiadający dowolnej wartości $z = a$, jest punktem zwyczajnym dla

funkcji $\frac{G'(z)}{G(z)}$; jest to tedy funkcja całkowita, którą oznaczymy przez $g_1(z)$:

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = g_1(z);$$

całkując obie strony równości pomiędzy granicami z_0 i z i oznaczając przez $g(z)$ pewną nową funkcję całkowitą zmiennej z , otrzymujemy:

$$\text{Log} \left[\frac{G(z)}{G(z_0)} \right] = \int_{z_0}^z g_1(z) dz = g(z) - g(z_0)$$

i stąd

$$G(z) = G(z_0) e^{g(z) - g(z_0)} = e^{g(z) - g(z_0) + \text{Log}[G(z_0)]}.$$

Prawa strona równości tej posiada istotnie żadaną postać.

Jeżeli funkcja całkowita $G(z)$ posiada tylko n pierwiastków $a_1, a_2, \dots, a_n$, odmiennych lub nie, to oczywiście należy jej ⁽¹⁾ przypisać postać $(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n) e^{g(z)}$:

$$G(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n) e^{g(z)}.$$

(1) Ponieważ iloraz

$$\frac{G(z)}{(z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_n)}$$

winien być funkcją całkowitą, nie stającą się zerem, a więc posiadać, jak uzasadniemy powyżej, kształt $e^{g(z)}$. [Uw. tłum.].

Rozważmy teraz przypadek, gdy równanie $G(z) = 0$ posiada nieskończenie wiele pierwiastków. Ponieważ może istnieć tylko skończona liczba pierwiastków o module równym jakiegokolwiek liczbie R lub mniejszym od niej (art. 299), przeto, jeżeli uszykujemy wszystkie pierwiastki w ten sposób, iżby moduł nigdy nie malał, to każdy z nich otrzyma określone miejsce w otrzymanym, zgodnie z tym założeniem, ciągu:

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots,$$

w którym $|a_n| \leq |a_{n+1}|$ i $|a_n|$ wzrasta nieograniczenie wraz ze wskaźnikiem n . Przypuśćmy, że każdy z tych pierwiastków występuje w ciągu tyle razy, ile wymaga jego stopień wielokrotności, i że tam nie wchodzi pierwiastek $z = 0$, jeżeli $G(0) = 0$. Okażemy z początku, jak można utworzyć funkcję całkowitą $G_1(z)$, mającą za pierwiastki wyrazy ciągu (1) i nie posiadającą innych pierwiastków.

Iloczyn $\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_v(z)}$, w którym $Q_v(z)$ oznacza jakiś wielomian, stanowi funkcję całkowitą, równą zeru jedynie przy $z = a_n$. Iloczyn ten możemy napisać w postaci

$$e^{Q_v(z) + \text{Log} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)};$$

jeżeli zastąpimy $\text{Log} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)$ przez szereg całkowity, w który da się rozwinąć to wyrażenie, to szereg w wykładniku rozpocznie się od wyrazu stopnia $v + 1$, bylebyśmy założyli

$$Q_v(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{z^2}{2 a_n^2} + \dots + \frac{z^v}{v a_n^v}.$$

W ten sposób właśnie obierzemy wielomian stopnia v , $Q_v(z)$.

Liczba całkowita v jest na razie nieoznaczona. Dowiedzimy, że można obrać ją w zależności od n w ten sposób, iżby iloczyn nieskończony

$$(2) \quad \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_v(z)}$$

był bezwzględnie i jednostajnie zbieżny we wszelkim kole o promieniu R , zakreślonym dokoła początku układu, chociażby R było nieskończenie wielkie. Ustaliwszy liczbę R , oznaczmy przez α liczbę dodatnią, mniejszą od *jedności*. Odsuńmy na bok czynniki iloczynu (2), odpowiadające pierwiastkom a_n o modułach, nie przewyższających $\frac{R}{\alpha}$. Przy-

puśćmy, że ten warunek spełnia q pierwiastków. Iloczyn q czynników

$$F_1(z) = \prod_{n=1}^q \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_\nu(z)}$$

stanowi oczywiście funkcję całkowitą zmiennej z ; rozpatrzmy iloczyn czynników dalszych, poczynając od $(q+1)^{\text{ego}}$

$$F_2(z) = \prod_{n=q+1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_\nu(z)}.$$

Gdy punkt z leży wewnątrz koła o promieniu R , to $|z| \leq R$, a ponieważ $|a_n| < \frac{R}{\alpha}$, gdy $n > q$, przeto mamy również $|z| < \alpha |a_n|$.

Dowolny czynnik $\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_\nu(z)}$ tego iloczynu, zgodnie ze sposobem, w jaki obraliśmy $Q_\nu(z)$, może być napisany w postaci

$$e^{-\frac{1}{\nu+1} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu+2} - \dots};$$

i jeżeli go oznaczmy przez $1 + u_n$, to

$$u_n = e^{-\frac{1}{\nu+1} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu+2} - \dots} - 1.$$

Wszystko polega obecnie na uzasadnieniu, że przy odpowiednim wyborze liczby ν szereg o wyrazie ogólnym $U_n = |u_n|$ jest jednostajnie zbieżny w kole o promieniu R . (T. I, art. 176). Owóż mamy ogólnie, dla wszelkiej liczby rzeczywistej lub urojonej m :

$$|e^m - 1| < e^{|m|} - 1;$$

tym bardziej tedy

$$U_n < e^{\frac{1}{\nu+1} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1} \left(1 + \frac{\nu+1}{\nu+2} \left|\frac{z}{a_n}\right| + \frac{\nu+1}{\nu+3} \left|\frac{z}{a_n}\right|^2 + \dots\right)} - 1$$

czyli, ze względu na to, że $|z| < \alpha |a_n|$ gdy $|z| < R$:

$$U_n < e^{\frac{1}{\nu+1} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1} \frac{1}{1-\alpha}} - 1.$$

Lecz przy x rzeczywistym i dodatnim, $e^x - 1$ jest mniejsze od $x e^x$; otrzymujemy przeto jeszcze

$$U_n < \frac{1}{\nu+1} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1} \frac{1}{1-\alpha} e^{\frac{1}{\nu+1} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1} \frac{1}{1-\alpha}} < \frac{1}{\nu+1} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu+1} \frac{e}{1-\alpha}.$$

Do tego, aby szereg o wyrazie ogólnym U_n był jednostajnie zbieżny w kole o promieniu R , wystarczy, iżby to samo się stosowało do szeregu, którego wyrazem ogólnym jest $\left| \frac{z}{a_n} \right|^{v+1}$. Jeżeli istnieje taka liczba całkowita p , że szereg $\sum \left| \frac{1}{a_n} \right|^p$ jest zbieżny, to wystarczy wziąć $v = p - 1$. Jeżeli nie ma liczby całkowitej p , posiadającej tę własność,⁽¹⁾ to wystarczy wziąć $v = n - 1$. Istotnie, szereg o wyrazie ogólnym $\left| \frac{z}{a_n} \right|^n$ jest zbieżny jednostajnie w kole o promieniu R , ponieważ jego wyrazy są mniejsze od wyrazów szeregu $\sum \left| \frac{R}{a_n} \right|^n$, pierwiastek n -ego stopnia z wyrazu ogólnego tego właśnie szeregu, to jest $\left| \frac{R}{a_n} \right|$, dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie.⁽²⁾

Można tedy zawsze obrać liczbę całkowitą v w ten sposób, iżby iloczyn nieskończony $F_2(z)$ był w kole o promieniu R jednostajnie i bezwzględnie zbieżny; iloczyn ten może być zastąpiony przez sumę szeregu jednostajnie zbieżnego (art. 176), którego wyrazy są holomorficzne. Jest on przeto sam funkcją całokształtną w tym kole (art. 297). Mnożąc $F_2(z)$ przez iloczyn $F_1(z)$, który zawiera tylko skończoną liczbę czynników całokształtnych, stwierdzamy, że iloczyn nieskończony

$$(3) \quad G_1(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) e^{Q_v(z)}$$

jest również bezwzględnie i jednostajnie zbieżny wewnątrz koła C o promieniu R i wyraża funkcję całokształtną w tym kole. Ponieważ promień R może być obrany dowolnie a liczba v nie zależy od n , więc iloczyn ten jest funkcją całkowitą, mającą za pierwiastki wyrazy ciągu (1) i nie posiadającą innych pierwiastków.

(¹) Weźmy np. $a_n = \log n$ $n \geq 2$. Szereg o wyrazie ogólnym $(\log n)^{-p}$ jest rozbieżny przy jakiegokolwiek wartości dodatniej liczby p , ponieważ suma $(n-1)$ pierwszych wyrazów jest większa niż $\frac{n-1}{(\log n)^p}$, a wyrażenie to wzrasta nieograniczenie wraz z n .

(²) Borel zwrócił uwagę na to, że wystarczy wziąć taką liczbę v , iżby $v+1$ było większe niż $\log n$. W istocie, szereg $\sum \left| \frac{R}{a_n} \right|^{\log n}$ jest zbieżny, ponieważ

Jeżeli dla funkcji całkowitej $G(z)$ jest ponad to punktem zerowym rzędu p punkt $z = 0$, to iloczyn $\frac{G(z)}{z^p G_1(z)}$ jest funkcją analityczną, nie posiadającą w dziedzinie całej płaszczyzny ani biegunów, ani punktów zerowych. Jest to tedy funkcja całkowita o postaci $e^{g(z)} (g(z)$ — wielomian lub funkcja całkowita), i funkcja $G(z)$ daje się wyrazić w postaci następującej:

$$(4) \quad G(z) = e^{g(z)} z^p \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_v(z)}.$$

Funkcja całkowita $g(z)$ może znowuż być zastąpioną nieskończenie wielu sposobami przez sumę szeregu jednostajnie zbieżnego wielomianów

$$g(z) = g_1(z) + g_2(z) + \dots + g_n(z) + \dots,$$

i wzorowi poprzedniemu możemy jeszcze nadać kształt

$$G(z) = z^p \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{Q_v(z) + g_n(z)};$$

czynniki tego iloczynu, z których każdy staje się równym zeru tylko przy pewnej *jednej* wartości z , nazywają się *czynnikami pierwszymi lub pierwotnymi* (facteurs primaires).

Wobec zbieżności bezwzględnej iloczynu (4) można ustawiać czynniki pierwsze w dowolnym porządku lub też dowolnie łączyć je ze sobą. Występujące w tym iloczynie wielomiany $Q_v(z)$, skoro tylko zostało wybrane prawo, wyznaczające liczbę v w zależności od n , zależą jedynie od samych pierwiastków. Lecz czynnik wykładniczy $e^{g(z)}$ nie może być wyznaczonym, o ile znamy tylko pierwiastki funkcji $G(z)$. Weźmy np. funkcję $\sin \pi z$, której pierwiastkami pojedynczemi są wszystkie liczby całkowite, dodatnie i ujemne. W tym przypadku szereg

$\sum' \left| \frac{1}{a_n} \right|^2$ jest zbieżny; można tedy wziąć $v = 1$, i funkcja

wyraz ogólny może być napisany w postaci $e^{\log n \log \left| \frac{R}{a_n} \right|} = n^{\log \left| \frac{R}{a_n} \right|}$. Poczynając od pewnej, dość wielkiej, wartości n , $\left| \frac{a_n}{R} \right|$ jest większe od e^2 , więc wyraz ogólny — mniejszy niż $\frac{1}{n^2}$.

$$G(z) = z \prod_{n=-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}},$$

w której symbolu kreska, umieszczona na prawo od Π , oznacza, że wskaźnikowi n nie należy nadawać wartości zerowej⁽¹⁾, będzie posiadała te same pierwiastki, co $\sin \pi z$. Przeto $\sin \pi z = e^{\vartheta(z)} G(z)$, lecz powyższe rozumowanie nie poucza nas bynajmniej co do czynnika $e^{\vartheta(z)}$. Dowiedzimy poniżej, że czynnikiem tym jest prostopu π .

316. Rodzaj funkcji całkowitej. — Ujrzelśmy, w jaki sposób — gdy jest dany jakikolwiek ciąg nieskończony $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, o wyrazie ogólnym, którego wartość bezwzględna $|a_n|$ wzrasta nieograniczenie wraz z n — można utworzyć nieskończenie wiele funkcji całkowitych, mających za punkty zerowe wszystkie wyrazy tego ciągu i nie posiadających innych punktów zerowych. Jeżeli istnieje taka liczba całkowita p , że szereg $\sum |a_n|^{-p}$ jest zbieżny, to wszystkie wielomiany $Q_v(z)$ mogą posiadać stopień $p - 1$.

Gdy mamy funkcję całkowitą o postaci

$$G(z) = z^r e^{P(z)} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p-1} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{p-1}}$$

z tym zastrzeżeniem, że $P(z)$ oznacza wielomian stopnia co najwyżej $(p - 1)$ -ego, to nazywamy liczbę $(p - 1)$ *rodzajem* (genre) tej funkcji.

Tak np. funkcja $\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n^2}\right)$ jest funkcją rodzaju *zerowego*; funkcja $\frac{\sin \pi z}{\pi}$, wyrażona powyżej — funkcją rodzaju *pierwszego*. Badanie rodzaju funkcji całkowitej spowodowało w ciągu kilku ostatnich lat powstanie wielkiej liczby prac naukowych.⁽²⁾

317. Funkcje jednowartościowe o liczbie skończonej punktów osobliwych. — Gdy funkcja jednowartościowa $F(z)$ posiada w dziedzinie całej płaszczyzny tylko liczbę skończoną punktów osobliwych, wówczas muszą to być punkty osobliwe odosobnione (isolés): bieguny lub punkty istotnie

⁽¹⁾ Gdy ten wyjątek ma być zastrzeżony w jakim wzorze, przypominamy o tym, umieszczając kreskę po znaku charakterystycznym iloczynu lub sumy.

⁽²⁾ Por. rozprawę E. Borela „Leçons sur les fonctions entières” — 1900 i najnowszą pracę Blumenthala „O funkcjach całkowitych rodzaju nieskończonego” („Sur les fonctions entières de genre infini” — 1910).

osobliwe. Punkt $z = \infty$ jest również punktem zwyczajnym lub punktem osobliwym odosobnionym (art. 310). Nawzajem, jeżeli funkcja jednowartościowa posiada w dziedzinie całej płaszczyzny (z punktem w nieskończoności włącznie) jedynie punkty osobliwe odosobnione, to liczba tych punktów musi być skończoną. Istotnie, punkt w nieskończoności jest dla funkcji punktem zwyczajnym lub punktem osobliwym odosobnionym. W obu przypadkach można zakreślić okrąg C o promieniu dość wielkim, by nazewnątrz tego okręgu dana funkcja nie posiadała żadnych punktów osobliwych, prócz samego punktu w nieskończoności. Wewnątrz koła C może się zawierać jedynie liczba skończona punktów osobliwych; gdyby bowiem funkcja posiadała ich tam nieskończenie wiele, istniałby przynajmniej jeden punkt osobliwy graniczny (art. 299), a ten nie byłby już punktem osobliwym odosobnionym. Tak tedy funkcja jednowartościowa, posiadająca tylko bieguny, może posiadać tylko skończoną ich liczbę, ponieważ biegun jest punktem osobliwym odosobnionym.

Wszelka funkcja jednowartościowa, regularna dla wszelkiej wartości skończonej z i dla $z = \infty$, jest liczbą stałą. — Istotnie, gdyby taka funkcja była czymś innym, to ze względu na to, że jest regularna dla wszelkiej wartości skończonej z , musiałaby być wielomianem lub funkcją całkowitą — w takim razie atoli wbrew założeniu, punkt w nieskończoności byłby dla niej biegunem lub punktem istotnie osobliwym.

Stwierdziwszy to, weźmy funkcję jednowartościową $F(z)$, posiadającą n różnych punktów osobliwych $a_1, a_2, \dots, a_n$, w odległości skończonej; część główną postaci rozwiniętej funkcji $F(z)$ w otoczeniu punktu

a_i oznaczmy przez $G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right)$. G_i jest tu symbolem wielomianu lub

funkcji całkowitej — w obu przypadkach ta część główna jest regularna dla wszelkiej wartości z (włącznie z wartością $z = \infty$), oprócz $z = a_i$. Niech również $P(z)$ oznacza część główną postaci rozwiniętej funkcji $F(z)$ w otoczeniu punktu w nieskończoności; jeżeli punkt w nieskończoności jest dla $F(z)$ punktem zwyczajnym, to $P(z)$ równa się zeru. Różnica

$$D = F(z) - P(z) - \sum_{i=1}^n G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right)$$

jest oczywiście funkcją regularną dla wszelkiej wartości zmiennej z włącznie z wartością $z = \infty$; jest to tedy stała C i otrzymujemy równość ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Osiągamy także ten wzór zapomocą przyrównania do zera sumy pozostałości funkcji $F(x) \left(\frac{1}{x - z} - \frac{1}{x - z_0} \right)$, uważając z i z_0 za stałe, a x za zmienną (por. art. 310).

$$(5) \quad F(z) = P(z) + \sum_{i=1}^n G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right) + C,$$

co wskazuje, że funkcja $F(z)$ jest zupełnie określona — z pominięciem pewnego stałego składnika — gdy znamy części główne w otoczeniu każdego z punktów osobliwych. Te części główne, równie jak same punkty osobliwe, mogą być zresztą obrane dowolnie.

Gdy wszystkie punkty osobliwe są biegunami, części główne G_i są to wielomiany; $P(z)$, o ile nie równa się zero, jest również wielomianem, i prawa strona wzoru (5) staje się ułamkiem wymiernym. Ponieważ z drugiej strony funkcja jednowartościowa, która posiada z punktów osobliwych jedynie bieguny, ma je w liczbie skończonej, przeto *funkcja jednowartościowa, której wszystkie punkty osobliwe są biegunami, nie jest niczym innym, tylko ułamkiem wymiernym.*

318. Funkcje jednowartościowe z liczbą nieskończoną punktów osobliwych. — Jeżeli funkcja jednowartościowa posiada nieskończenie wiele punktów osobliwych w jakimś obszarze skończonym, to istnieje co najmniej jeden punkt graniczny tego zbioru, położony wewnątrz obszaru

lub na jego ograniczeniu. Np. biegunami funkcji $\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}$ są wszystkie

punkty, odpowiadające pierwiastkom równania $\sin \left(\frac{1}{z} \right) = 0$, to jest

wszystkie punkty, odpowiadające wartościom $z = \frac{1}{k\pi}$ (k — dowolna liczba całkowita); punktem granicznym jest tu początek układu.

Punkty osobliwe funkcji $\frac{1}{\sin \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{z}} \right)}$ są również wyznaczone, jako

odpowiadające pierwiastkom równania $\sin \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{k\pi}$, do których na-

leżą wszystkie wartości $z = \frac{1}{2k'\pi + \arcsin \left(\frac{1}{k\pi} \right)}$, zależne od dwu

liczb całkowitych dowolnych k i k' . Wszystkie punkty $\frac{1}{2k'\pi}$ są punktami granicznymi, gdyż wyrażenie poprzednie, przy k rosnącym nie-

ograniczenie a stałym k' zmierza do granicy $\frac{1}{2k'\pi}$. Łatwo, zapomocą uwielokrotniania znaku $\sin$ tworzyć coraz to bardziej złożone przykłady tego rodzaju. Istnieją również, jak stwierdzimy nieco dalej, funkcje, dla których punktami osoblwymi są wszystkie punkty pewnej linii.

Może się zdarzyć, że funkcja jednowartościowa ma tylko liczbę skończoną punktów osoblwych w każdym skończonym obszarze płaszczyzny, chociaż posiada ich nieskończenie wiele w dziedzinie całej płaszczyzny. Nazewnątrż każdego koła C , jakkolwiek wielki byłby jego promień, leży nieskończenie wiele punktów osoblwych, i powiemy z tego powodu, że punkt w nieskończoności jest punktem granicznym (zbioru punktów osoblwych — *dod. tłum.*). W następnych artykułach zajmemy się funkcjami jednowartościowymi, posiadającymi nieskończenie wiele punktów osoblwych odosobnionych, których jedynym punktem granicznym jest punkt w nieskończoności.

319. Twierdzenie Mittag-Lefflera. — Jeżeli w każdej części płaszczyzny w odległości skończonej leży tylko liczba skończona punktów osoblwych, to można, jak już zauważyliśmy co do punktów zerowych funkcji całkowitej, ustawić te punkty osoblwe w ciąg

$$(6) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

w ten sposób, iżbyśmy mieli $|a_n| \leq |a_{n+1}|$, i rzecz jasna, że $|a_n|$ będzie w takim razie wzrastało nieograniczenie wraz z n . Możemy oprócz tego założyć, że wszystkie wyrazy tego ciągu są różne. Każdemu wyrazowi a_i ciągu (6) podporządkujemy wielomian lub funkcję całkowitą względem $\frac{1}{z - a_i}$, $G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right)$, obraną w sposób zupełnie dowolny. Twierdzenie Mittag-Lefflera może być wysłowione w sposób następujący:

Istnieje funkcja analityczna jednowartościowa, regularna dla wszelkiej wartości z , nie należącej do ciągu (6), a której częścią główną w otoczeniu punktu $z = a_i$ jest $G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right)$.

W celu udowodnienia tego twierdzenia okażemy, że jest rzeczą możliwą dołączyć do każdej funkcji $G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right)$ taki wielomian $P_i(z)$, iżby szereg

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left[G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right) + P_i(z) \right]$$

wyrażał funkcję analityczną, posiadającą te własności. Jeżeli punkt $z = 0$ należy do ciągu (6), to weźmiemy dlań wielomian równy zeru. Każdemu z innych punktów a_i podporządkujemy taką liczbę dodatnią ϵ_i , iżby szereg $\Sigma \epsilon_i$ był zbieżny; oznaczmy prócz tego przez α liczbę dodatnią mniejszą od jedności. Niech C_i oznacza okrąg koła o środku w początku układu, przechodzący przez punkt a_i , a C'_i okrąg, współśrodkowy z tamtym, o promieniu równym $\alpha |a_i|$. Ponieważ funkcja $G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right)$ jest całokształtna w kole C_i , przeto w każdym punkcie wewnętrznym tego koła

$$G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right) = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} z + \dots + \alpha_{in} z^n + \dots$$

Szereg całkowity z prawej strony znaku równości jest jednostajnie zbieżny w kole C'_i , można tedy znaleźć liczbę całkowitą ν , dość wielką, by wewnątrz koła C'_i zachodziła nierówność:

$$(7) \quad \left| G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right) - \alpha_{i0} - \alpha_{i1} z - \dots - \alpha_{i\nu} z^\nu \right| < \epsilon_i;$$

wyznaczywszy w ten sposób liczbę ν , weźmiemy za $P_i(z)$ wielomian $-\alpha_{i0} - \alpha_{i1} z - \dots - \alpha_{i\nu} z^\nu$.

Ustaliwszy to, weźmy koło C o promieniu R , mające za środek punkt $z = 0$. Odsuńmy na bok w ciągu (6) punkty osobliwe a_i , których moduł nie przewyższa $\frac{R}{\alpha}$. Oznaczając liczbę ich przez q , założmy:

$$F_1(z) = \sum_{i=1}^q \left[G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right) + P_i(z) \right].$$

Co do szeregu

$$F_2(z) = \sum_{i=q+1}^{+\infty} \left[G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right) + P_i(z) \right],$$

jest on bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w kole C , gdyż dla każdego punktu, wziętego w tym kole, $|z| < R < \alpha |a_i|$, o ile wskaźnik i jest większy od q . Ze względu na nierówność (7) i sposób, w któryśmy obrali wielomian $P_i(z)$, moduł wyrazu ogólnego tego drugiego szeregu jest mniejszy od ϵ_i , gdy punkt z leży wewnątrz C . Funkcja $F_2(z)$ jest tedy funkcją holomorficzną w tym kole, i rzecz jasna, iż, gdy dodamy do niej $F_1(z)$, suma

$$(8) \quad F(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right) + P_i(z) \right]$$

będzie miała w kole U te same punkty osobliwe co $F_1(z)$, wraz z temi samemi częściami głównymi. Te punkty osobliwe są to właśnie wyrazy ciągu (6) o modułach mniejszych niż R , i częścią główną w otoczeniu punktu a_i jest $G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right)$. Ponieważ promień R jest dowolny, przeto funkcja $F(z)$ spełnia wszystkie warunki twierdzenia.

Rzecz jasna, iż dodając do $F(z)$ jakikolwiek wielomian lub funkcję całkowitą $G(z)$, otrzymujemy sumę $F(z) + G(z)$, posiadającą te same punkty osobliwe co $F(z)$ wraz z temi samemi częściami głównymi. Nawzajem, powstaje w ten sposób wyrażenie *ogólne* funkcji jednowartościowych, posiadających dane punkty osobliwe wraz z danemi częściami głównymi, odpowiadającymi tym punktom, gdyż różnica dwu takich funkcji, będąc regularną dla wszelkiej wartości skończonej z , jest wielomianem lub funkcją całkowitą. Wobec tego, że funkcja $G(z)$ może również być wyrażoną w postaci sumy wielomianów, funkcja $F(z) + G(z)$ może z kolei być wyrażoną w postaci sumy szeregu, którego każdy wyraz da się otrzymać przez dodanie do części głównej

$$G_i \left(\frac{1}{z - a_i} \right) \text{ odpowiedniego wielomianu.}$$

Jeżeli wszystkie części główne G_i są wielomianami, funkcja jest częściokształtna (meromorficzna) we wszelkim obszarze płaszczyzny w odległości skończonej i nawzajem. Widzimy tedy, iż wszelka funkcja meromorficzna może być przedstawioną w postaci sumy szeregu, którego każdy wyraz jest ułamkiem wymiernym, przybierającym wartość nieskończoną tylko przy jednej wartości skończonej zmiennej z . To upostaciowanie jest podobne do rozkładu ułamka wymiernego na elementy proste. Wszelka funkcja częściokształtna $\Phi(z)$ może również być wyrażoną przez iloraz dwu funkcji całkowitych. W istocie, załóżmy, że bieguny funkcji $\Phi(z)$ stanowią wyrazy ciągu (6), w ten sposób, że uwzględniamy stopień wielokrotności każdego z nich. Przypuśćmy, że $G(z)$ oznacza funkcję całkowitą, posiadającą te właśnie zera; iloczyn $\Phi(z) G(z)$ nie posiada żadnych biegunów. Jest to tedy funkcja całkowita $G_1(z)$, i otrzymujemy równość

$$\Phi(z) = \frac{G_1(z)}{G(z)}.$$

320. Badanie pewnych przypadków szczególnych. — Dowód powyższy twierdzenia ogólnego niezawsze daje sposób najprostszy tworzenia funkcji jednowartościowej, spełniającej postawione warunki. Przypuśćmy np., że chodzi o wyznaczenie funkcji $\Phi(z)$, dla której wszystkie punkty ciągu (6) są biegunami o pozostałościach równych jedności; założymy przytym, że punkt $z = 0$ nie jest biegunem. Część główna, odpowiadająca biegunowi a_i , równa się $\frac{1}{z - a_i}$, i możemy napisać:

$$\frac{1}{z - a_i} = -\frac{1}{a_i} - \frac{z}{a_i^2} - \dots - \frac{z^{v-1}}{a_i^v} + \frac{1}{z - a_i} \left(\frac{1}{a_i}\right)^v;$$

jeżeli bierzemy

$$P_i(z) = \frac{1}{a_i} + \frac{z}{a_i^2} + \dots + \frac{z^{v-1}}{a_i^v},$$

to wszystko się sprowadza do wyznaczenia w zależności od wskaźnika i liczby całkowitej v w ten sposób, iżby szereg

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{z - a_i} \left(\frac{z}{a_i}\right)^v = - \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{z^v}{(1 - \frac{z}{a_i})} \frac{1}{a_i^{v+1}}$$

był bezwzględnie i jednostajnie zbieżny we wszelkim kole, mającym za środek początek układu, po odrzuceniu dostatecznej liczby wyrazów początkowych. Wystarczy, by sam szereg $\sum \left(\frac{z}{a_i}\right)^{v+1}$ był bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w tym samym obszarze. Jeżeli istnieje taka liczba p , że szereg $\sum \left|\frac{1}{a_i}\right|^p$ jest zbieżny, to wystarczy wziąć $v = p - 1$.

Jeżeli nie istnieje żadna liczba całkowita, posiadająca tę własność, to można wziąć, jak powyżej (art. 315) $v = i - 1$, albo $v + 1 > \log i$. Po odpowiednim wyborze liczby v funkcja meromorficzna

$$(9) \quad \Phi(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{z - a_i} + \frac{1}{a_i} + \frac{z}{a_i^2} + \dots + \frac{z^{v-1}}{a_i^v} \right]$$

będzie miała za bieguny wszystkie punkty ciągu (6), oraz pozostałości równe jedności.

Łatwo wysnuć stąd nowy dowód twierdzenia Weierstrassa o rozkładzie funkcji całkowitej na czynniki pierwotne. W istocie, można całkować szereg (9) wyraz po wyrazie wzdłuż dowolnej drogi, nie przechodzącej przez żaden z biegunów, gdyż skoro ta droga jest za-

warta w kole U , mającym za środek początek układu, szereg (9) może być zastąpiony przez szereg jednostajnie zbieżny w tym kole z dodatkiem sumy liczby *skończonej* funkcji częściokształtnych [wynika to z samego uzasadnienia wzoru (9)]. Biorąc przy całkowaniu punkt $z = 0$ za granicę niższą, otrzymamy

$$\int_0^z \Phi(z) dz = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\text{Log} \left(1 - \frac{z}{a_i} \right) + \frac{z}{a_i} + \frac{z^2}{2a_i^2} + \dots + \frac{z^\nu}{\nu a_i^\nu} \right],$$

a przeto

$$(10) \quad e^{\int_0^z \Phi(z) dz} = \prod_{i=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{a_i} \right) e^{\frac{z}{a_i} + \frac{z^2}{2a_i^2} + \dots + \frac{z^\nu}{\nu a_i^\nu}}.$$

Łatwo sprawdzić, iż lewa strona tego wzoru jest funkcją całkowitą zmiennej z . W sąsiedztwie wartości a tej zmiennej, nie należącej

do ciągu (6), całka $\int_0^z \Phi(z) dz$ jest całokształtna; funkcja $e^{\int_0^z \Phi(z) dz}$ jest również całokształtna i różna od zera przy $z = a$. W otoczeniu punktu a_i mamy, oznaczając przez P i Q pewne funkcje holomorficzne,

$$\Phi(z) = \frac{1}{z - a_i} + P(z - a_i),$$

$$\int_0^z \Phi(z) dz = \text{Log}(z - a_i) + Q(z - a_i),$$

$$e^{\int_0^z \Phi(z) dz} = (z - a_i) e^{Q(z - a_i)}.$$

Widzimy, że ta funkcja całkowita ma za pierwiastki wyrazy ciągu (6), i wzór (10) wyraża to samo, co wzór (3), uzasadniony dawniej.

Ten sam dowód daje się zastosować do funkcji całkowitych o pierwiastkach wielokrotnych. Jeżeli a_i jest pierwiastkiem wielokrotnym rzędu r , to wystarczy założyć, iż $\Phi(z)$ posiada biegun $z = a_i$, z pozostałością równą r .

Postaramy się jeszcze utworzyć funkcję meromorficzną, której biegunami drugiego rzędu byłyby wszystkie punkty ciągu (6), tak iżby część główną w otoczeniu punktu a_i miała kształt $\left(\frac{1}{z - a_i} \right)^2$. Przy-

puśćmy, że punkt $z = 0$ jest punktem zwyczajnym i że szereg

$\sum \left| \frac{1}{a_i} \right|^3$ jest zbieżny; rzecz jasna, że to samo stosuje się do szeregu $\sum \left| \frac{1}{a_i} \right|^4$. Kończąc rozwinięcie ułamka $\frac{1}{(z-a_i)^2}$ w szereg potęg zmiennej z na pierwszym wyrazie, możemy napisać:

$$\frac{1}{(z-a_i)^2} - \frac{1}{a_i^2} = \frac{2 a_i z - z^2}{a_i^3 (z-a_i)^2} = \frac{2 a_i z - z^2}{a_i^4 \left(1 - \frac{z}{a_i}\right)^2},$$

i szereg

$$(11) \quad \Phi(z) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{(z-a_i)^2} - \frac{1}{a_i^2} \right] = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2 a_i z - z^2}{\left(1 - \frac{z}{a_i}\right)^2 a_i^4}$$

będzie spełniał postawione warunki, byleby tylko był jednostajnie zbieżny w dowolnym kole C , zakreślonym dokoła początku układu, przy pominięciu dostatecznej liczby wyrazów początkowych. Otóż, jeżeli uwzględnimy tylko wyrazy szeregu, pochodzące od biegunów a_i , spełniających warunek $|a_i| > \frac{R}{\alpha}$, w którym R oznacza promień koła C a

α — liczbę dodatnią mniejszą od jedności, moduł potęgi $\left(1 - \frac{z}{a_i}\right)^{-2}$ będzie pozostawał wciąż mniejszym od pewnej granicy, i szereg o wyrazie ogólnym $\frac{2z}{a_i^3} - \frac{z^2}{a_i^4}$, zgodnie z założeniami, uczynionymi co do biegunów a_i , będzie bezwzględnie i jednostajnie zbieżny w kole C .

321. Metoda Cauchy'ego. — Twierdzenie Mittag-Lefflera pozwala, gdy jest dana funkcja meromorficzna $F(z)$, utworzyć szereg o wyrazach wymiernych, którego suma $F_1(z)$ posiada te same bieguny, co $F(z)$ z temi samemi częściami głównymi. Pozostaje atoli jeszcze do wyznaczenia funkcja całkowita, równa różnicy $F(z) - F_1(z)$. Na długo przed pracami Weierstrassa Cauchy wysnuł metodę rozkładu funkcji częściokształtnej na liczbę nieskończoną składników wymiernych, przy pewnych założeniach nader ogólnych co do tej funkcji, z teorii pozostałości. Łatwo zresztą wyłożyć ową metodę w jej postaci najogólniejszej.

Niech $F(z)$ oznacza funkcję częściokształtną, regularną w otoczeniu początku układu, a $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ — ciąg nieograniczony obwodów zamkniętych, otaczających punkt $z = 0$, nie przechodzących przez żaden z biegunów i takich, że poczynając od dość wielkiej war-

tości wskaźnika n , odległość początku układu od jakiegokolwiek punktu zarysu C_n pozostaje większą od wszelkiej liczby danej. Rzecz jasna, że każdy biegun funkcji $F(z)$ musi się znaleźć wewnątrz wszystkich kolejnych obwodów $C_n, C_{n+1}, \dots$, byleby tylko n było dość wielkie. Całka określona

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(C_n)} \frac{F(z)}{z-x} dz,$$

w której x oznacza jakikolwiek punkt, położony wewnątrz C_n i różny, od biegunów, równa się wartości $F(x)$, powiększonej o sumę pozostałości, odpowiadających rozmaitym biegunom funkcji $F(z)$, położonym wewnątrz C_n . Weźmy jeden z tych biegunów a_k ; odpowiednia część główna $G_k \left(\frac{1}{z-a_k} \right)$ jest funkcją wymierną, i w otoczeniu punktu a_k

$$F(z) = \frac{A_m}{(z-a_k)^m} + \frac{A_{m-1}}{(z-a_k)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{z-a_k} + B_0 + B_1(z-a_k) + \dots$$

W zastosowaniu do otoczenia tegoż punktu można również napisać

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{x-a_k-(z-a_k)} = -\frac{1}{x-a_k} - \frac{z-a_k}{(x-a_k)^2} - \frac{(z-a_k)^2}{(x-a_k)^3} - \dots,$$

i wykonywując mnożenie, stwierdzamy, że pozostałość funkcji $\frac{F(z)}{z-x}$ względem bieguna a_k jest równa

$$-\frac{A_1}{x-a_k} - \dots - \frac{A_{m-1}}{(x-a_k)^{m-1}} - \frac{A_m}{(x-a_k)^m} = -G_k \left(\frac{1}{x-a_k} \right).$$

Otrzymujemy tedy związek

$$(12) \quad F(x) = \sum_{C_n} G_k \left(\frac{1}{x-a_k} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_n)} \frac{F(z) dz}{z-x},$$

w którym znak $\sum_{C_n}$ wskazuje sumowanie, rozciągające się na wszystkie bieguny a_k , położone wewnątrz obwodu C_n . Z drugiej strony, możemy zastąpić $\frac{1}{z-x}$ przez

$$\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \dots + \frac{x^p}{z^{p+1}} + \frac{1}{z-x} \left(\frac{x}{z} \right)^{p+1}$$

i napisać wzór poprzedni w postaci

$$(13) \quad F(x) = \sum_{C_n} G_k \left(\frac{1}{x - a_k} \right) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_n)} \frac{F(z) dz}{z} + \dots$$

$$+ \frac{x^p}{2i\pi} \int_{(C_n)} \frac{F(z)}{z^{p+1}} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_n)} \frac{F(z)}{z - x} \left(\frac{x}{z} \right)^{p+1} dz.$$

Całka $\frac{1}{2\pi i} \int_{(C_n)} \frac{F(z) dz}{z}$ równa się wartości $F(0)$, powiększonej

o sumę pozostałości funkcji $\frac{1}{z} F(z)$, odpowiadających biegunom funkcji $F(z)$,

położonym wewnątrz C_n . Ogólnie, całka określona $\frac{1}{2\pi i} \int_{(C_n)} \frac{F(z) dz}{z^r}$

równa się $\frac{F^{(r-1)}(0)}{1 \cdot 2 \dots (r-1)}$, więcej suma pozostałości funkcji $z^{-r} F(z)$,

odpowiadających biegunom funkcji $F(z)$, położonym wewnątrz C_n .

Oznaczając przez $s_k^{(r-1)}$ pozostałość funkcji $F(z) z^{-r}$ względem bieguna a_k , możemy napisać wzór (13) w postaci

$$(14) \quad F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \dots + \frac{x^p}{1 \cdot 2 \dots p} F^{(p)}(0)$$

$$+ \sum_{C_n} \left[G_k \left(\frac{1}{x - a_k} \right) + s_k^{(0)} + s_k^{(1)} x + \dots + s_k^{(p)} x^p \right]$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_n)} \frac{F(z)}{z - x} \left(\frac{x}{z} \right)^{p+1} dz.$$

Aby otrzymać granicę wyższą wyrazu uzupełniającego, napiszmy ten wyraz w postaci

$$R_n = \frac{x^{p+1}}{2\pi i} \int_{(C_n)} \frac{F(z)}{z^p} \frac{dz}{z(z-x)};$$

załóżmy, że wzdłuż C_n moduł funkcji $\frac{F(z)}{z^p}$ pozostaje wciąż mniejszym

od M , a moduł zmiennej z większym od δ . Ponieważ liczba n ma wzrastać nieograniczenie, możemy przypuścić, iż wzięto dość wielką wartość tej liczby, iżby δ było większe od $|x|$, i wzdłuż C_n będziemy mieli

$$\left| \frac{1}{z-x} \right| < \frac{1}{\delta - |x|}.$$

Otrzymujemy przeto, jeżeli S_n jest to długość obwodu C_n :

$$|R_n| < \frac{|x|^{p+1}}{2\pi} M \frac{S_n}{\delta(\delta - |x|)}.$$

Można twierdzić, iż ten wyraz uzupełniający dąży do zera przy n wzrastającym nieograniczenie, jeżeli można znaleźć ciąg obwodów zamkniętych $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$, oraz liczbę całkowitą dodatnią p , spełniające warunki następujące:

po 1-sze). Wzdłuż tych wszystkich obwodów moduł iloczynu $F(z)z^{-p}$ pozostaje mniejszym od pewnej liczby stałej M .

po 2-gie). Stosunek $\frac{S_n}{\delta}$ długości obwodu C_n do odległości najmniejszej δ początku układu od punktu obwodu pozostaje mniejszą od pewnej granicy L , gdy n wzrasta nieograniczenie.

Jeżeli te warunki są spełnione, $|R_n|$ jest mniejsze od ilorazu pewnej liczby stałej przez liczbę $\delta - |x|$, rosnącą nieograniczenie wraz z n . Owa reszta R_n dąży przeto do zera, i mamy po przejściu do granicy

$$(15) \quad F(x) = F(0) + x F'(0) + \dots + \frac{x^p}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot p} F^{(p)}(0) \\ + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{C_n} \left[G_k \left(\frac{1}{x - a_k} \right) + s_k^{(0)} + s_k^{(1)}x + \dots + s_k^{(p)}x^p \right].$$

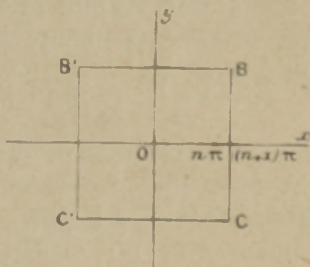
Funkcja $F(x)$ została tedy rozwinięta w szereg, złożony z nieskończenie wielu wyrazów wymiernych. Porządek, w jakim następują po sobie, jest wyznaczony przez prawo kolejnego następstwa obwodów $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$. Jeżeli otrzymany szereg jest bezwzględnie zbieżny, można je ustawić w dowolnym porządku.

Uwaga. — Jeżeli punkt $z = 0$ jest dla $F(z)$ biegunem o części głównej $G\left(\frac{1}{z}\right)$, to wystarczy zastosować powyższą metodę do funkcji $F(z) - G\left(\frac{1}{z}\right)$.

322. Iloczyny nieskończone, wyrażające $\cot x$ i $\sin x$. — Zastosujmy tę metodę do funkcji $F(z) = \cot z - \frac{1}{z}$, której biegunami pierwszego rzędu są punkty $z = k\pi$ (k — dowolna liczba całkowita, różna od zera); odpowiednie pozostałości równają się jedności. Weźmy za obwód C_n obwód takiego kwadratu, jak $BCB'C'$ na rysunku, którego środkiem jest początek układu, a którego boki, równoległe do osi, posiadają długość $2n\pi + \pi$; na zarysie tym nie leży żaden biegun, a stosunek jego długości S_n do odległości najmniejszej δ od początku układu jest stały i równy 8. Kwadrat modułu funkcji $\cot(x + yi)$ równa się

$$\frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2 \cos 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x}$$

Rys. 68.



Na bokach BC i $B'C'$ mamy $\cos 2x = -1$, i moduł funkcji jest mniejszy od jedności. Na bokach BB' i CC' kwadrat tego modułu jest mniejszy od

$$\frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{e^{2y} + e^{-2y} - 2} = \left(\frac{1 + e^{-2y}}{1 - e^{-2y}} \right)^2,$$

we wzorze tym należy zastąpić $2y$ przez $\pm (2n+1)\pi$; otrzymane wyrażenie dąży do jedności, gdy n wzrasta nieograniczenie. Ponieważ moduł odwrotności $\frac{1}{z}$ na obwodzie C_n dąży do zera, gdy n rośnie

nieograniczenie, moduł funkcji $\cot z = \frac{1}{z}$ na obwodzie C_n pozostaje przy wszelkiej wartości n mniejszym od dowolnej liczby stałej M . Możemy tedy stosować do tej funkcji wzór (15), zakładając, że $p = 0$. Mamy tu

$$F(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \right) = 0,$$

a wyraz $s_k^{(0)}$, stanowiący pozostałość funkcji $\frac{1}{z} \cot z = \frac{1}{z^2}$ w biegunie $k\pi$, równa się $\frac{1}{k\pi}$. Otrzymujemy tedy

$$(16) \quad \cot x - \frac{1}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n}^{+n} \left(\frac{1}{x - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right),$$

przytym wartość $k = 0$ została wyłączona przy sumowaniu. Szereg, powstający przy nieograniczonym wzroście wskaźnika n , jest bezwzględnie zbieżny, gdyż wyraz ogólny może być napisany w postaci

$$\frac{1}{x - k\pi} + \frac{1}{k\pi} = \frac{x}{k\pi(k\pi - x)} = \frac{1}{k^2\pi^2} \cdot \frac{x}{1 - \frac{x}{k\pi}},$$

a moduł czynnika $\frac{x}{1 - \frac{x}{k\pi}}$ pozostaje wciąż mniejszym od pewnej granicy, byleby x nie było wielokrotnością liczby π . Otrzymujemy tedy ostatecznie

$$(17) \quad \cot x = \frac{1}{x} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{x - k\pi} + \frac{1}{k\pi} \right).$$

Gdy się scałkuje obie części tej równości wzdłuż drogi, wychodzącej z początku układu i nie przechodzącej przez żaden z biegunów, to wypadnie

$$\int_0^x \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) dx = \text{Log} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \text{Log} \left(1 - \frac{x}{k\pi} \right) + \frac{x}{k\pi},$$

skąd wynika

$$(18) \quad \sin x = x \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{x}{k\pi} \right) e^{\frac{x}{k\pi}}.$$

Czynnik $e^{\frac{x}{k\pi}}$ jest w tym przypadku równy jedności. Kojarzając we wzorze (17) pary wyrazów, danych przez wartości przeciwne liczby k , otrzymujemy wzór:

$$(17) \quad \cot x = \frac{1}{x} + 2x \sum_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - k^2\pi^2}.$$

Podobniez kojarząc ze sobą pary czynników iloczynu (18), odpowiadających wartościom przeciwnym liczby k , otrzymamy nowy wzór.⁽¹⁾

$$(18) \quad \sin x = x \prod_1^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2} \right);$$

możemy tedy jeszcze napisać, zastępując x przez πx :

$$\frac{\sin \pi x}{x} = x \prod_1^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right).$$

¹⁾ Ten rozkład funkcji $\sin x$ na nieskończenie wiele czynników zawdzięczamy Eulerowi, który go otrzymał w sposób elementarny („*Introductio in Analysin infinitorum*“).

Uwagi rozmaite. — Po 1-sze. Ostatnie wzory uwydatniają okresowość funkcji $\sin x$, która się nie ujawnia przy rozwinięciu w szereg potęgowy. Widzimy istotnie, że $\frac{\sin \pi x}{\pi}$ stanowi granicę, do której dąży przy n rosnącym nieograniczenie wielomian

$$\varphi_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n-1}\right) \dots (1-x) x (1+x) \dots \left(1 + \frac{x}{n}\right);$$

zmieniając x na $x+1$, stwierdzamy z łatwością, że

$$\varphi_n(x+1) = -\varphi_n(x) \frac{n+1+x}{n-x},$$

skąd, powiększając n nieograniczenie, otrzymujemy wynik

$$\sin(\pi x + \pi) = -\sin \pi x$$

czyli $\sin(z + \pi) = -\sin z$, a przeto $\sin(z + 2\pi) = \sin z$.

Po 2-gie. Przy rozważaniu tego przykładu szczególnego łatwo zdać sobie sprawę z konieczności dołączania do każdego z czynników dwumiennych o postaci $1 - \frac{x}{a_k}$ odpowiedniego czynnika wykładniczego, gdy chcemy otrzymać iloczyn bezwzględnie zbieżny. Załóżmy, w celu ustalenia biegu myśli, że x jest rzeczywiste i dodatnie. Ze względu na to, że szereg $\sum \frac{x}{n}$ jest rozbieżny, iloczyn

$$P_m = x \left(1 + \frac{x}{1}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{m}\right)$$

wzrasta nieograniczenie wraz z m , gdy tymczasem iloczyn

$$Q_n = (1-x) \left(1 - \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{n}\right)$$

dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie (t. I, art. 177). Gdy bierzemy $m=n$, iloczyn $P_m Q_n = P_m Q_m$ dąży do granicy $\frac{\sin \pi x}{\pi}$; lecz gdy m i n mają wzrastać niezależnie od siebie, granica tego iloczynu staje się zupełnie nieokreślona. Łatwo to stwierdzić dla wszelkiej wartości liczby x przy pomocy czynników pierwszych Weierstrassa. Zauważmy przedewszystkiem, że oba iloczyny nieskończone

$$F_1(x) = x \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}, \quad F_2(x) = \prod_{n=1}^{+x} \left(1 - \frac{x}{n}\right) e^{\frac{x}{n}}$$

są bezwzględnie zbieżne, a ich iloczyn $F_1(x) F_2(x)$ równa się $\frac{\sin \pi x}{\pi}$.

Napiszmy teraz iloczyn $P_m Q_n$ w postaci następującej:

$$P_m Q_n = x \prod_{v=1}^m \left(1 + \frac{x}{v}\right) e^{-\frac{x}{v}} \prod_{v=1}^n \left(1 - \frac{x}{v}\right) e^{\frac{x}{v}} e^{x \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n}\right)}.$$

Gdy obie liczby m i n wzrastają nieograniczenie, iloczyn wszystkich czynników po prawej stronie znaku równości, prócz ostatniego, dąży do granicy $F_1(x) F_2(x) =$

$= \frac{\sin \pi x}{\pi}$. Co do pominiętego czynnika, stwierdziliśmy, że wyrażenie

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m} - 1 - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{n}$$

dąży do granicy, równej $\log \omega$, jeżeli ω oznacza granicę stosunku $\frac{m}{n}$ (t. I, art. 161).

Granica iloczynu $P_m Q_n$ jest zatem $\frac{\sin \pi x}{\pi} e^{x \log \omega}$; widzimy, w jaki sposób granica ta zależy od prawa, podług którego rosną nieograniczenie liczby m i n .

Po 3-cie. Można zastosować zupełnie podobne uwagi do rozwinięcia w szereg funkcji $\cot x$. Wskażemy tu jedynie, jak można z szeregu (17) wyciągnąć wniosek co do okresowości tej funkcji. Zauważmy przedewszystkiem, że szereg o wyrazie ogólnym $\frac{1}{k\pi} - \frac{1}{(k-1)\pi} = -\frac{1}{k(k-1)\pi}$, określonym przy założeniu, iż wskaźnik k przybiera wszelkie wartości całkowite od $-\infty$ do $+\infty$, prócz $k=0$ i $k=1$, jest bezwzględnie zbieżny i że jego suma $= -\frac{2}{\pi}$, co znajdujemy, zmieniając k z początku od 2 do $+\infty$, następnie od -1 do $-\infty$. Możemy tedy, uważając wartości $k=0$, $k=1$ za wyłączone przy sumowaniu co oznaczamy zapomocą — *Uw. tłum.*), napisać szereg, wyrażający $\cot x$, w postaci

$$\cot x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-\pi} - \frac{1}{\pi} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{x-k\pi} + \frac{1}{(k-1)\pi} \right].$$

Wszystko polega na odjęciu od każdego wyrazu szeregu (17) odpowiedniego wyrazu szeregu zbieżnego, utworzonego z szeregu, przytoczonego powyżej, przez dodanie $\frac{2}{\pi}$. Zmieniając x na $x+\pi$, otrzymujemy:

$$\cot(x+\pi) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+\pi} - \frac{1}{\pi} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{x-(k-1)\pi} + \frac{1}{(k-1)\pi} \right]$$

czyli wreszcie

$$\cot(x+\pi) = \frac{1}{x} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{x-k\pi} + \frac{1}{(k-1)\pi} \right];$$

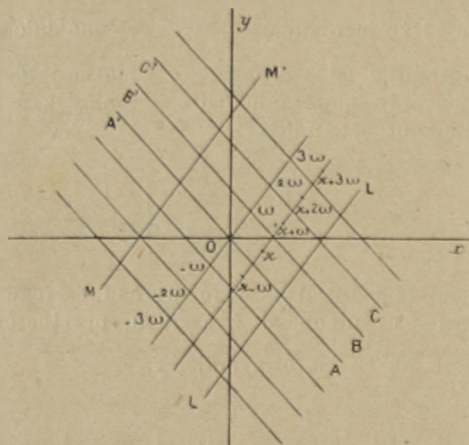
$k-1$ ma tu przybierać wszystkie wartości całkowite, prócz zera. Prawa strona ostatniej równości wyraża właśnie $\cot x$.

II. Funkcje podwójnie okresowe. — Funkcje eliptyczne.

323. Funkcje okresowe. Ich rozwijanie w szereg. — Funkcja analityczna jednowartościowa $f(z)$ nazywa się *perjodyczną* (périodique) czyli *okresową*, jeżeli istnieje taka liczba ω , rzeczywista lub zespolona, że przy

wszelkiej wartości z jest spełniony warunek $f(z + \omega) = f(z)$. Zaznaczmy na płaszczyźnie punkt, odpowiadający liczbie ω i na prostej nieograniczonej, przechodzącej przez początek układu i przez ten punkt, odmierzymy dowolnie wiele razy w tym lub innym zwrocie, poczynając od początku układu, odcinek o długości, równej $|\omega|$. Otrzymamy w ten sposób punkty $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, n\omega, \dots$, i punkty $-\omega, -2\omega, \dots, -n\omega, \dots$. Przez te wszystkie punkty i przez początek układu przeciągniemy równoległe o dowolnym kierunku, różnym od kierunku prostej 0ω ; w ten sposób płaszczyzna zostaje podzielona na nieskończenie wiele pasów o jednakowej szerokości (rys. 69).

Rys. 69.



Przeciągniemy jeszcze przez jakikolwiek punkt z równoległą do prostej 0ω ; otrzymamy wszystkie jej punkty zapomocą zmiany parametru rzeczywistego λ w wyrażeniu $z + \lambda\omega$ od $-\infty$ do $+\infty$. W szczególności, jeżeli punkt z zakreśla pierwszy pas $AA'BB'$, punkt odpowiedni $z + \omega$ musi zakreślać pas przyległy $BB'CC'$, punkt $z + 2\omega$ — pas trzeci z kolei i tak dalej. Wszystkie wartości funkcji $f(z)$, odpowiadające punktom pierwszego pasa, będą się odtwarzały periodycznie w innych pasach.

Niech LL' i MM' oznaczają dwie proste nieograniczone, równoległe do prostej 0ω . Załóżmy: $u = e^{2\pi i z}$ i zbadajmy, jaki obszar płaszczyzny zmiennej u zakreśla punkt u , gdy punkt z pozostaje w obrębie pasa nieskończonego, zawartego pomiędzy dwiema równoległymi LL' i MM' . Jeżeli $\alpha + \beta i$ jest liczbą, odpowiadającą punktowi prostej LL' ,

to otrzymamy wszystkie inne punkty tej prostej, zakładając, że $z = \alpha + \beta i + \lambda \omega$ i zmieniając λ od $-\infty$ do $+\infty$. Otrzymamy wówczas:

$$u = e^{\frac{2i\pi}{\omega}(\alpha + \beta i + \lambda \omega)} = e^{\frac{2\pi i \lambda}{\omega}} e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\alpha + \beta i)};$$

gdy λ wzrasta od $-\infty$ do $+\infty$, punkt u zakreśla okrąg C_1 , którego środkiem jest początek układu. Stwierdzamy również, iż, gdy punkt z zakreśla prostą MM' , punkt u pozostaje na okręgu C_2 , spółśrodkowym z C_1 ; gdy punkt z zakreśla pas nieograniczony, zawarty pomiędzy prostymi LL' i MM' , punkt u zakreśla pierścień, zawarty pomiędzy dwoma okręgami C_1 i C_2 . Gdy atoli każdej wartości zmiennej z odpowiada tylko jedna wartość zmiennej u , każdej wartości zmiennej u odpowiada nieskończenie wiele wartości zmiennej z , tworzących postęp arytmetyczny o różnicy ω , nieograniczony z obu stron.

Funkcja perjodyczna $f(z)$, posiadająca okres ω i całokształtna w pasie nieograniczonym, zawartym pomiędzy prostymi LL' i MM' , jest równa funkcji $\varphi(u)$ nowej zmiennej u , całokształtnej w dziedzinie pierścienia, zawartego pomiędzy okręgami C_1 i C_2 . W istocie, każdej wartości u odpowiada wprawdzie nieskończenie wiele wartości zmiennej z , lecz wszystkie te wartości zmiennej z dają, z powodu okresowości, tę samą wartość funkcji $f(z)$. Z drugiej strony, jeżeli u_0 oznacza wartość szczególną zmiennej u , a z_0 jedną z wartości odpowiednich zmiennej z , to wartość z , dążąca do z_0 , jest funkcją całokształtną zmiennej u w otoczeniu punktu u_0 ; to samo się tedy stosuje do $\varphi(u)$. Możemy przeto zastosować do tej funkcji $\varphi(u)$ twierdzenie Laurenta; w pierścieniu, zawartym pomiędzy okręgami C_1 i C_2 , funkcja ta równa się sumie szeregu o postaci następującej:

$$\varphi(u) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m u^m;$$

powracając do zmiennej z , wnioskujemy stąd, że funkcja okresowa $f(z)$

równa się wewnątrz rozważanego pasa sumie szeregu $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{\frac{2mi\pi z}{\omega}}$

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{\frac{2mi\pi z}{\omega}}.$$

Jeżeli funkcja $f(z)$ jest całokształtna w dziedzinie całej płaszczyzny, to można przypuścić, że proste LL' i MM' , ograniczające pas, oddalają się nieograniczenie, jedna ku górze, druga w dół. Wszelka

funkcja okresowa całkowita daje się tedy rozwinąć w szereg, uporządkowany według potęg dodatnich i ujemnych funkcji wykładniczej $e^{\frac{2\pi iz}{\omega}}$ i zbieżny dla wszelkiej wartości skończonej zmiennej z .

34. Niemożliwość istnienia funkcji jednowartościowej o trzech okresach. — Według słynnego twierdzenia Jacobiego funkcja jednowartościowa nie może posiadać więcej niż dwa okresy, różne od siebie. Aby to wykazać, wystarczy oczywiście dowieść, iż funkcja jednowartościowa nie może posiadać trzech odmiennych okresów. Uzasadnijmy z początku twierdzenie pomocnicze następujące:

Niech a, b, c , oznaczają trzy ilości dowolne, rzeczywiste lub urojone, a m, n, p — trzy liczby całkowite dowolne, dodatnie lub ujemne, z których jedna co najmniej jest różna od zera. Jeżeli uwzględnimy takie układy wszystkich możliwych wartości całkowitych, prócz $m = n = p = 0$, to kraniec niższy wyrażenia $|ma + nb + pc|$ będzie różny zera.

Wyobraźmy sobie zbiór (E) punktów płaszczyzny, odpowiadających liczbom o postaci $ma + nb + pc$. Jeżeli dwa punkty, odpowiadające dwu różnym układom, nakrywają się, to mamy np.

$$ma + nb + pc = m_1a + n_1b + p_1c$$

i przeto

$$(m - m_1)a + (n - n_1)b + (p - p_1)c = 0,$$

przy założeniu, że jedna co najmniej z liczb $m - m_1, n - n_1, p - p_1$, nie równa się zeru. W tym przypadku twierdzenie jest oczywiste. Jeżeli wszystkie punkty zbioru (E) są odmienne, oznaczmy przez 2δ kraniec niższy wyrażenia $|ma + nb + pc|$; owa liczba 2δ jest również krańcem niższym odległości pomiędzy dwoma jakimikolwiek punktami zbioru (E) . W istocie odległość dwu punktów, wyobrażających $ma + nb + pc$ i $m_1a + n_1b + p_1c$ równa się $|(m - m_1)a + (n - n_1)b + (p - p_1)c|$. Dowiedziemy, że założenie $\delta > 0$ prowadzi do wniosku niedorzecznego.

Weźmy jakąś liczbę całkowitą dodatnią N i utwórzmy wszelkie możliwe połączenia wartości liczb m, n, p , branych z ciągu:

$$-N, -(N-1), \dots, 0, \dots, N-1, N.$$

Otrzymamy w ten sposób $(2N+1)^3$ punktów⁽¹⁾ zbioru (E) , i zgodnie z założeniem, wszystkie te punkty są różne od siebie. Przypuśćmy, że $|a| \geq |b| \geq |c|$; odległość któregośkolwiek z tych punktów od początku układu równa się co najwyżej $3N|a|$. Wszystkie te punkty są tedy położone wewnątrz koła C o promieniu $3N|a|$ i środku w początku układu, lub też na samym obwodzie koła. Jeżeli do koła każdego z tych punktów jako środka zatoczmy koło o promieniu δ , wszystkie te koła będą leżały wewnątrz koła C_1 , o środku w początku układu i promieniu równym $3N|a| + \delta$, jedno nazewnątrz drugiego, gdyż odległość pomiędzy środkami jakichkolwiek dwu z nich nie może być mniejszą od 2δ . Suma pól tych wszystkich kół jest tedy mniejsza od pola koła C_1 , i otrzymujemy:

(1) Ścisłej: $(2N+1)^3 - 1$, gdyż wyłączamy układ $m = n = p = 0$; zgodnie z tą poprawką, otrzymamy wzór: $\delta < \frac{3N|a|}{(2N+1)^3 - 2}$, uprawniający, rzecz oczywista, do tych samych wniosków. (Uio. tłum.).

czyli

$$(3N|a| + \delta)^2 > (2N+1)^3 \delta^2$$

$$\delta < \frac{3N|a|}{(2N+1)^{\frac{3}{2}} - 1}$$

Prawa strona tej nierówności dąży do zera, gdy N rośnie nieograniczenie; zatem żadna liczba dodatnia δ nie czyni jej zadość przy wszelkim N . Stąd wynika, że kraniec niższym wyrażenia $|ma + nb + pc|$ nie może być żadna liczba dodatnia; kraniec ów musi się tedy równać zeru, i twierdzenie pomocnicze jest uzasadnione.

Widzimy przeto, iż jeżeli nie istnieją takie układy liczb całkowitych m, n i p (prócz $m = n = p = 0$), iż $ma + nb + pc = 0$, to można zawsze nadać tym liczbom całkowitym takie wartości, iżby wyrażenie $|ma + nb + pc|$ było mniejsze od dowolnej liczby dodatniej ε . W tym razie funkcja jednowartościowa $f(z)$ nie może posiadać jednocześnie trzech okresów a, b i c . W istocie, niech z_0 oznacza punkt zwyczajny funkcji $f(z)$; dokoła tego punktu, jako środka, zatoczmy koło o promieniu ε tak małym, iżby równanie $f(z) = f(z_0)$ nie miało wewnątrz tego koła żadnych pierwiastków prócz $z = z_0$ (art. 298). Jeżeli a, b, c są to okresy funkcji $f(z)$, to rzecz jasna, że $ma + nb + pc$ jest również, przy dowolnych wartościach liczb m, n i p , jej okresem, i że przeto

$$f(z_0 + ma + nb + pc) = f(z_0).$$

Gdyby można było obrać m, n i p w ten sposób, ażeby $|ma + nb + pc|$ było mniejsze niż ε , to równanie $f(z) = f(z_0)$ miałoby pierwiastek z_1 , różny od z_0 i taki, że $|z_1 - z_0| < \varepsilon$, co jest niemożliwe.

Gdy pomiędzy liczbami a, b i c istnieje związek o postaci

$$(20) \quad ma + nb + pc = 0,$$

w którym m, n i p nie równają się jednocześnie zeru, to funkcja jednowartościowa $f(z)$ może posiadać okresy a, b, c , lecz te trzy okresy sprowadzają się do dwu lub do jednego. Możemy istotnie założyć, że liczby całkowite m, n i p , brane wszystkie trzy jednocześnie, nie posiadają wspólnych czynników. Niech D oznacza największy wspólny czynnik liczb m i n ; $m = Dm', n = Dn'$. Ponieważ liczby m' i n' są pierwsze względem siebie, przeto można znaleźć takie dwie inne liczby całkowite m'' i n'' , iż $m'n'' - m''n' = 1$. Założmy:

$$m'a + n'b = a', \quad m''a + n''b = b';$$

otrzymamy nawzajem $a = n'a' - n'b', b = m'b' - m'a'$. Jeżeli a i b stanowią okresy funkcji $f(z)$, to samo się stosuje do a' i b' i nawzajem. Można tedy zastąpić układ z dwu okresów a i b przez układ okresów a' i b' . Związek (20) przybiera postać $Da' + pc = 0$; obierzmy teraz, co jest możliwe wobec tego, że D i p są pierwsze względem siebie, dwie inne liczby całkowite D' i p' , spełniające warunek $Dp' - D'p = 1$, i założmy, że $D'a' + p'c = c'$. Otrzymujemy z tych związków $a' = -pc', c = Dc'$, i stwierdzamy w ten sposób, że trzy okresy a, b, c stanowią kombinacje dwu okresów b' i c' .

Uwaga. — Z powyższego twierdzenia pomocniczego wysnuwamy wniosek następujący: jeżeli α i β oznaczają dwie liczby rzeczywiste, a m i n — dowolne liczby całkowite (z których jedna przynajmniej nie jest równa zeru), to kres niższy modułu $|m\alpha + n\beta|$ równa się zeru. Istotnie, wystarczy założyć $\alpha = a, \beta = b, c = i$ i zauważyć, że moduł sumy $ma + nb + pi$ może być mniejszym od liczby $\varepsilon < 1$ jedy-

nie wtedy, gdy $p = 0$, $|m\alpha + n\beta| < \epsilon$. Stąd wynika, że funkcja jednowartościowa $f(z)$ nie może posiadać dwu różnych okresów rzeczywistych α , β . Jeżeli stosunek $\frac{\beta}{\alpha}$ jest niewymierny, to można wyznaczyć takie dwie liczby m i n (całkowite), że $|m\alpha + n\beta| < \epsilon$, i rozumowanie da się skończyć jak przed chwilą. Jeżeli stosunek $\frac{\beta}{\alpha}$ jest wymierny i równy ułamkowi nieskracalnemu $\frac{m}{n}$, to oberzmy dwie takie liczby m' i n' , iżby był spełniony warunek $m'n' - m'n = 1$ i założmy, iż $m'\alpha - n'\beta = \gamma$. Liczba γ jest również okresem, i ze związków $m\alpha - n\beta = 0$, $m'\alpha - n'\beta = \gamma$ otrzymujemy: $\alpha = -n\gamma$, $\beta = -m\gamma$, tak iż α i β są to wielokrotności jednego okresu γ . Ogólniej, funkcja jednowartościowa $f(z)$ nie może posiadać dwu różnych okresów a i b , których stosunek byłby rzeczywisty, gdyż w takim razie funkcja $f(az)$ posiadałaby dwa odmienne okresy rzeczywiste 1 i $\frac{b}{a}$.

325. Funkcje podwójnie okresowe. — Funkcja *podwójnie okresowa* czyli *podwójnie perjodyczna*, a krócej: *dwuokresowa* lub *duoperjodyczna* (f. doublement périodique) jest to funkcja jednowartościowa, posiadająca dwa okresy, których stosunek jest urojony. Aby się uzgodnić ze znakovaniem Weierstrassa, oznaczymy zmienną niezależną przez u , a okresy przez 2ω i $2\omega'$, i założmy, że współczynnik przy i w stosunku $\frac{\omega'}{\omega}$ jest dodatni. Zaznaczmy na płaszczyźnie punkty 2ω , 4ω , 6ω , ... i punkty $2\omega'$, $4\omega'$, $6\omega'$, ...; przez punkty $2m\omega$ wykreślmy równoległe do prostej $O\omega'$, a przez punkty $2m'\omega'$ — równoległe do $O\omega$. Otrzymujemy w ten sposób na płaszczyźnie sieć równych równoległoboków (rys. 70). Weźmy funkcję jednowartościową $f(u)$, posiadającą dwa okresy 2ω i $2\omega'$; ze związków $f(u + 2\omega) = f(u)$, $f(u + 2\omega') = f(u)$ wnioskujemy natychmiast, że $f(u + 2m\omega + 2m'\omega') = f(u)$, tak iż $2m\omega + 2m'\omega'$ jest to również okres, przy jakichkolwiek wartościach całkowitych m i m' ; oznaczymy ten okres przez $2u$.

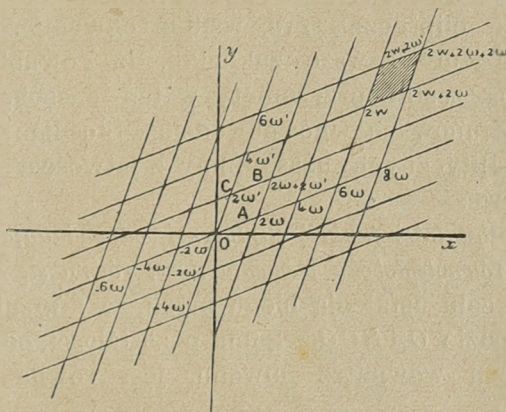
Punkty, wyobrażające okresy, są to właśnie wierzchołki wzmiarkowanej sieci równoległoboków. Gdy punkt u zakreśla równoległobok $OABC$, o wierzchołkach O , 2ω , $2\omega + 2\omega'$, $2\omega'$, punkt $u + 2u$ zakreśla równoległobok, którego wierzchołkami są punkty $2u$, $2u + 2\omega$, $2u + 2\omega + 2\omega'$, $2u + 2\omega'$, i funkcja $f(u)$ przybiera w punktach odpowiednich tych dwu równoległoboków te same wartości. Wszelki równoległobok o wierzchołkach u_0 , $u_0 + 2\omega$, $u_0 + 2\omega'$, $u_0 + 2\omega + 2\omega'$, nazwiemy *równoległobokiem okresowości* lub *równoległobokiem elementarnym* ¹⁾

(¹) Termin „równoległobok perjodyczności” napotkałem w tomie II (str. 503) „Teorii funkcji analitycznych” J. Puzyry; S. Dickstein w przekładzie dzieła E. Pascala „Repertorium matematyki wyższej” używa nazw „wielokąt tworzący”, „równoległobok

(parallélogramme des périodes); bierzemy zwykle równoległobok $OABC$, lecz można zastąpić początek układu przez dowolny punkt płaszczyzny. Okres $2\omega + 2\omega'$ oznaczmy dla krótkości przez $2\omega''$; punkt ω' jest środkiem równoległoboku $OABC$, a punkty ω i ω' stanowią środki boków OA i OC .

Wszelka funkcja dwuokresowa całkowita jest stałą. W istocie, niech $f(u)$ oznacza funkcję dwuokresową; jeżeli funkcja ta jest całkowita, to

Rys. 70.



jest holomorficzna w równoległoboku $OABC$, i moduł $|f(u)|$ pozostaje wszędzie wewnątrz tego równoległoboku mniejszym od pewnej liczby stałej M . Lecz wartość funkcji $f(u)$ w jakimkolwiek punkcie płaszczyzny jest równa, z powodu podwójnej okresowości, wartości tej funkcji w odpowiednim punkcie równoległoboku $OABC$. Moduł jej pozostaje tedy mniejszy od liczby stałej M ; jest to więc, według twierdzenia Liouville'a, liczba stała.

326. Funkcje eliptyczne. Własności ogólne. — Z powyższego twierdzenia wynika, że funkcja dwuokresowa, o ile nie ma być stałą, musi posiadać punkty osobliwe w odległości skończonej. Funkcje dwuokresowe częściokształtne (= meromorficzne) nazywamy *funkcjami eliptycznymi* (fonctions elliptiques). W każdym równoległoboku elementarnym funkcja eliptyczna posiada pewną grupę biegunów; liczbę tych biegunów, wyznaczoną przy uwzględnieniu ich stopnia wielokrotności, nazy-

elementarny“ (t. I, str. 321). Obaj ci polscy autorzy wprowadzają również nazwę „równoległobok zasadniczy“ dla odróżnienia pewnych równoległoboków szczególnych, każdy zresztą w innym znaczeniu. („T. f. an.“ — t. II, str. 506, „Rep. m. w.“ t. I, str. 321).

wamy *rzędem* (ordre) funkcji. Zauważmy, iż jeżeli funkcja eliptyczna $f(u)$ posiada biegun u_0 na boku OC , to punkt $u_0 + 2\omega$, położony na boku przeciwległym AB , jest również biegunem; obliczając jednak liczbę biegunów, zawartych w $OABC$, należy uwzględnić tylko jeden z tych biegunów. Podobnie, jeżeli początek układu jest biegunem, to wszystkie wierzchołki siatki są również biegunami funkcji $f(u)$, lecz w każdym równoległoboku należy liczyć tylko jeden z nich. Wystarczyłoby na przykład przesunąć nieskończenie blisko wierzchołek sieci, położony w początku układu, ażeby rozważana funkcja $f(u)$ nie posiadała już żadnego bieguna na obwodzie równoległoboku. Gdy będziemy mieli całkować funkcję eliptyczną $f(u)$ wzdłuż obwodu równoległoboku elementarnego, będziemy zawsze zakładali, iż równoległobok ten, o ile zachodzi potrzeba, został przesunięty w ten sposób, iżby funkcja $f(u)$ nie posiadała biegunów na jego obwodzie. Stosując twierdzenia ogólne teorii funkcji analitycznych, uzasadnimy z łatwością następujące twierdzenia podstawowe:

1. *Suma pozostałości funkcji eliptycznej, odpowiadających biegunom, położonym w jednym równoległoboku elementarnym, równa się zeru.*

Zalóżmy, w celu ustalenia biegu myśli, że $f(u)$ nie posiada żadnego bieguna na obwodzie $OABCO$. Suma pozostałości, odpowiadających biegunom, położonym wewnątrz obwodu, jest równa iloczynowi

$\frac{1}{2\pi i} \int f(u) du$, w którym całka jest wzięta wzdłuż $OABCO$. Całka ta równa się zeru, gdyż suma całek, wziętych wzdłuż dwu przeciwległych boków, jest zerem. Mamy np.

$$\int_{(OA)} f(u) du = \int_0^{2\omega} f(u) du, \quad \int_{(BC)} f(u) du = \int_{2\omega+2\omega'}^{2\omega'} f(u) du;$$

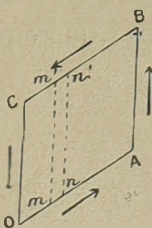
jeżeli zastąpimy w drugiej całce u przez $u + 2\omega'$, otrzymamy

$$\int_{(BC)} f(u) du = \int_{2\omega}^0 f(u + 2\omega') du = \int_{2\omega}^0 f(u) du = - \int_{(OA)} f(u) du.$$

W podobny sposób stwierdzilibyśmy, że suma całek, wziętych wzdłuż AB i CO , równa się zeru. Zresztą, fakt ten wydaje się niemal oczywistym, gdy spoglądamy na rysunek (rys. 71); zwróćmy np. uwagę na dwa odpowiadające sobie elementy dwu całek, branych wzdłuż OA i wzdłuż BC . W punktach m i m' wartości funkcji $f(u)$ są takie same, gdy tymczasem wartości różniczki du są przeciwne.

Z dowiedzionego twierdzenia wynika, że funkcja eliptyczna $f(u)$ nie może posiadać w równoległoboku elementarnym tylko jednego

Rys. 71.



bieguna pierwszego rzędu. Funkcja eliptyczna musi być co najmniej funkcją drugiego rzędu.

2. Liczba punktów zerowych funkcji eliptycznej w równoległoboku elementarnym równa się rzędowi funkcji (każdy z punktów zerowych liczymy przytym z uwzględnieniem jego stopnia wielokrotności).

Weźmy funkcję eliptyczną $f(u)$; iloraz $\frac{f'(u)}{f(u)} = \varphi(u)$ jest również funkcją eliptyczną, i suma pozostałości funkcji $\varphi(u)$ w równoległoboku równa się liczbie punktów zerowych funkcji $f(u)$, zmniejszonej o liczbę biegunów (art. 306). Stosując do funkcji $\varphi(u)$ twierdzenie poprzednie, wywnioskujemy stąd twierdzenie, o którym mowa w tej chwili. Ogólnie, liczba pierwiastków równania $f(u) = C$ w jakimś równoległoboku okresowości jest równa rzędowi funkcji, gdyż $f(u) - C$ posiada, przy wszelkiej wartości stałej C , te same bieguny, co $f(u)$.

3. Różnica pomiędzy sumą wartości zerowych, a sumą biegunów funkcji eliptycznej, należących do jednego równoległoboku elementarnego, równa się jednemu z okresów.

Zbadajmy całkę $\frac{1}{2\pi i} \int u \frac{f'(u)}{f(u)} du$, braną wzdłuż obwodu równoległoboku $OACB$. Jak już się przekonaliśmy w art. 306, całka ta jest równa sumie wartości, odpowiadających punktom zerowym funkcji $f(u)$, położonym wewnątrz tego równoległoboku, zmniejszonej o sumę liczb zespolonych, odpowiadających biegunom funkcji wewnątrz tegoż obwodu. Obliczmy sumę całek, powstających na dwu bokach przeciwległych OA i BC :

$$\int_0^{2\omega} u \frac{f'(u)}{f(u)} du + \int_{2\omega+2\omega'}^{2\omega'} u \frac{f'(u)}{f(u)} du;$$

gdy zmienimy w drugiej z tych całek u na $u + 2\omega'$, suma ta przybierze postać:

$$\int_0^{2\omega} u \frac{f'(u)}{f(u)} du + \int_{2\omega}^{2\omega'} (u + 2\omega') \frac{f'(u + 2\omega')}{f(u + 2\omega')} du,$$

czyli ze względu na okresowość funkcji $f(u)$

$$- \int_0^{2\omega} 2\omega' \frac{f'(u)}{f(u)} du.$$

Całka $\int_0^{2\omega} \frac{f'(u)}{f(u)} du$ równa się przyrostowi, nabytemu przez

$\text{Log } [f(u)]$, gdy punkt u przebiega bok OA ; $f(u)$ odzyskuje wówczas wartość początkową, i przeto przyrost funkcji $\text{Log } [f(u)]$ jest równy iloczynowi $-2m_2 \pi i$, w którym m_2 oznacza liczbę całkowitą. Suma całek, liczonych wzdłuż boków przeciwnych OA i BC , równa się tedy

$$\frac{1}{2\pi i} (4m^2 \pi i \omega') = 2m_2 \omega'.$$

W podobny sposób stwierdzilibyśmy, że suma całek, wziętych wzdłuż AB i CO , ma postać $2m_1 \omega$. Badana różnica równa się tedy $2m_1 \omega + 2m_2 \omega'$, t. j. jednemu z okresów.

Twierdzenie to stosuje się również do pierwiastków równania $f(u) = C$, zawartych wewnątrz jednego z równoległoboków elementarnych, przy dowolnej wartości stałej C , a to na mocy tego samego argumentu.

4. *Pomiędzy dwiema funkcjami eliptycznymi o tych samych okresach istnieje związek algebraiczny.*

Niech $f(u)$ i $f_1(u)$ oznaczają dwie funkcje eliptyczne, posiadające te same okresy $2\omega, 2\omega'$. Weźmy w jednym z równoległoboków elementarnych punkty $a_1, a_2, \dots, a_m$, stanowiące bieguny jednej z tych dwu funkcji $f(u), f_1(u)$ lub obu jednocześnie, i niech μ_i oznacza wyższy ze stopni wielokrotności bieguna a_i w stosunku do tych dwu funkcji; założmy: $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m = N$. Niech z drugiej strony $F(x, y)$ oznacza wielomian całkowity stopnia n o współczynnikach stałych; jeżeli zastąpimy w tym wielomianie x przez $f(u)$ a y przez $f_1(u)$, to wynikiem będzie nowa funkcja eliptyczna $\Phi(u)$, której biegunami mogą być tylko punkty $a_1, a_2, \dots, a_m$, oraz punkty, otrzymane przez dodanie okresu. Ażeby ta funkcja $\Phi(u)$ zamieniła się na liczbę stałą, potrzeba i wystarczy, iżby znikły części główne w otoczeniu każdego z punktów $a_1, a_2, \dots, a_m$. Owóż punkt a_i jest dla $\Phi(u)$ biegunem rzędu co najwyżej równego $n\mu_i$. Wyrażając tedy, że wszystkie współczynniki części głównych są równe zeru, otrzymamy co najwyżej

$$n(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m) = Nn$$

związków linjowych i jednorodnych pomiędzy współczynnikami wielomia-

nu $F(x, y)$, w których nie będzie występował wyraz niezależny od x i y . Liczba tych współczynników wynosi $\frac{n(n+3)}{2}$; jeżeli obierzemy liczbę n dość wielką, by został spełniony warunek $n(n+3) > 2Nn$ czyli $n+3 > 2N$, to otrzymamy układ równań linjowych i jednorodnych, o liczbie niewiadomych większej od liczby równań. Równania takie posiadają zawsze układ rozwiązań, nie równych jednocześnie zeru. Jeżeli $F(x, y)$ jest wielomianem, otrzymanym właśnie w ten sposób, funkcje eliptyczne $f(u)$, $f_1(u)$ czynią zadość związkowi algebraicznemu:

$$F[f(u), f_1(u)] = C,$$

w którym C oznacza liczbę stałą.

Uwagi. — Zanim skończymy z temi wiadomościami ogólnemi, zrobimy jeszcze kilka uwag, które będą potrzebne w dalszym ciągu.

Funkcja jednowartościowa $f(u)$ jest *parzysta* (paire), jeżeli $f(-u) = f(u)$; *nieparzysta* (impaire), jeżeli $f(-u) = -f(u)$. Pochodna funkcji parzystej jest funkcją nieparzystą; a pochodna funkcji nieparzystej — funkcją parzystą. Ogólnie, pochodne rzędu parzystego funkcji parzystej są to również funkcje parzyste, a pochodne rzędu nieparzystego — funkcje nieparzyste. Przeciwnie, pochodne rzędu parzystego funkcji nieparzystej są to funkcje nieparzyste, a pochodne rzędu nieparzystego — funkcje parzyste.

Weźmy funkcję eliptyczną nieparzystą $f(u)$; jeżeli w jest połową okresu, to muszą być jednocześnie spełnione warunki $f(w) = -f(-w)$ i $f(w) = f(-w)$, ponieważ $w = -w + 2w$. Potrzeba tedy, ażeby wartość $f(w)$ była równa zeru lub nieskończona, t. j. ażeby punkt w był punktem zerowym lub biegunem funkcji $f(u)$. Stopień wielokrotności tego punktu zerowego lub bieguna musi być koniecznie nieparzysty. Istotnie, gdyby punkt w był punktem zerowym rzędu parzystego $2n$ funkcji $f(u)$, to pochodna $f^{(2n)}(u)$, jako funkcja nieparzysta, byłaby holomorficzna i różna od zera dla $u = w$. Gdyby punkt w był biegunem rzędu parzystego funkcji $f(u)$, byłby to punkt zerowy rzędu parzystego odwrotności $\frac{1}{f(u)}$. Ostatecznie, *wszelki półokres funkcji eliptycznej nieparzystej stanowi jej wartość zerową lub biegunową rzędu nieparzystego.*

Jeżeli funkcja eliptyczna parzysta $f(u)$ ma za biegun lub punkt zerowy jeden z punktów, odpowiadających półokresom, to *rzęd tego bieguna lub tego punktu zerowego jest liczbą parzystą.* W istocie, gdyby np. punkt w był punktem zerowym rzędu nieparzystego $2n+1$, to byłby

to punkt zerowy rzędu parzystego pochodnej $f'(u)$, będącej funkcją nieparzystą, i to samo stosowałoby się do biegunów. Ponieważ okres podwojony jest również okresem, przeto wszystko, cośmy powiedzieli o półokresach stosuje się również do samych okresów.

327. Funkcja p_u .—Zauważyliśmy już, że wszelka funkcja eliptyczna posiada w każdym równoległoboku elementarnym co najmniej dwa bieguny pierwszego rzędu lub jeden biegun podwójny. W symbolice Jacobiego wzięto za elementy pierwotne funkcje o dwu biegunach jednokrotnych; używając znakowania Weierstrassa, uważamy natomiast za element prosty funkcję eliptyczną, posiadającą jeden tylko biegun podwójny w równoległoboku elementarnym. Ponieważ pozostałość winna być zerem, część główna w otoczeniu bieguna a winna posiadać kształt

$\frac{A}{(u-a)^2}$. Aby ująć dość ściśle zagadnienie, wystarczy wziąć $A=1$

i założyć, że biegunami funkcji są: początek układu $u=0$ i wszystkie punkty, odpowiadające okresom $2w=2m\omega+2m'\omega'$. W ten sposób nasuwa się nam z początku potrzeba rozwiązania zagadnienia następującego:

Utworzyć funkcję eliptyczną, mającą za bieguny drugiego rzędu wszystkie punkty $2w=2m\omega+2m'\omega'$ (m i m' — dwie dowolne liczby całkowite) i nie posiadającą innych biegunów, w ten sposób, iżby część główna w otoczeniu punktu $2w$, była równa

$$\frac{1}{(u-2w)^2}.$$

Przed zastosowaniem do tego zagadnienia metody ogólnej z art. 320 dowiedzimy z początku, że szereg podwójny

$$(21) \quad \sum' \frac{1}{|m\omega + m'\omega'|^2},$$

w którym m i m' przybierają wszelkie wartości całkowite od $-\infty$ do $+\infty$ (z zastrzeżeniem, że wyłączamy skojarzenie $m=m'=0$), jest zbieżny, byłby wykładnik μ był liczbą dodatnią większą od 2.

Weźmy trójkąt, którego wierzchołkami byłyby punkty $u=0$, $u=m\omega$, $u=m\omega+m'\omega'$; boki tego trójkąta są odpowiednio równe $|m\omega|$, $|m'\omega'|$, $|m\omega+m'\omega'|$. Mamy tedy, oznaczając przez θ kąt dwu prostych $O\omega$ i $O\omega'$ ($0<\theta<\pi$), związek następujący:

$$|m\omega+m'\omega'|^2 = m^2|\omega|^2 + m'^2|\omega'|^2 + 2mm'|\omega\omega'| \cos \theta.$$

Załóżmy dla krótkości: $|\omega|=a$, $|\omega'|=b$, i przypuśćmy, że $a \leq b$. Związek poprzedni może być również napisany w postaci:

$$|m\omega + m'\omega'|^2 = m^2 a^2 + m'^2 b^2 \pm 2 m m' a b \cos \Theta,$$

przy założeniu, że kąt $\Theta = \theta$ jeżeli $\theta \leq \frac{\pi}{2}$, a $\pi - \theta$, jeżeli $\theta > \frac{\pi}{2}$; ów kąt Θ nie może się równać zeru, ponieważ punkty $0, \omega, \omega'$ nie leżą na jednej prostej, i zatem $0 \leq \cos \Theta < 1$. Otrzymujemy tedy jeszcze:

$$|m\omega + m'\omega'|^2 = (1 - \cos \Theta) (m^2 a^2 + m'^2 b^2) + \cos \Theta (ma \pm m'b)^2,$$

i przeto

$$|m\omega + m'\omega'|^2 \geq (1 - \cos \Theta) (m^2 a^2 + m'^2 b^2) \geq (1 - \cos \Theta) a^2 (m^2 + m'^2).$$

Stąd wynika, że wyrazy szeregu (21) są odpowiednio mniejsze od wyrazów szeregu $\sum' \left(\frac{1}{m^2 + m'^2} \right)^{\frac{\mu}{2}}$, pomnożonych przez pewien czynnik stały (lub co najwyżej równe), a wiemy, że ten właśnie szereg jest zbieżny, jeżeli wykładnik $\frac{\mu}{2}$ jest większy od 1 (tom I, art. 172).

Szereg (21) jest tedy zbieżny, gdy bierzemy $\mu = 3$ lub $\mu = 4$. Zgodnie z osiągniętym już dawniej wynikiem (art. 320), szereg

$$\varphi(u) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u - 2w)^2} - \frac{1}{4w^2} \right] \quad (w = m\omega + m'\omega')$$

wyraża funkcję częściokształtną, posiadającą te same bieguny wraz z temi samemi częściami głównemi, co szukana funkcja eliptyczna. Wykażemy, że ta funkcja $\varphi(u)$ posiada właśnie dwa okresy 2ω i $2\omega'$. Zbadajmy z początku szereg

$$\sum'' \left[\frac{1}{(2w + 2\omega)^2} - \frac{1}{(2\omega)^2} \right],$$

w którym $2w = 2m\omega + 2m'\omega'$, a sumowanie rozciąga się na wszystkie wartości całkowite m i m' , prócz $m = m' = 0$ i $m = -1, m' = 0$. Szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, gdyż jest to szereg $\varphi(u)$, w którym, po usunięciu dwu wyrazów, zastąpiono u przez -2ω . Łatwo stwierdzimy, uważając ten szereg za podwójny i obliczając z osobna sumę każdego wiersza, że suma jego równa się zeru; możemy tedy, odjawszy go od $\varphi(u)$, napisać jeszcze

$$\varphi(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{1}{(u + 2\omega)^2} - \frac{1}{4\omega^2} + \sum'' \left[\frac{1}{(u - 2w)^2} - \frac{1}{(2w + 2\omega)^2} \right];$$

zachowujemy przytym wciąż to zastrzeżenie, że skojarzenia ($m = m' = 0$),

($m = -1$, $m' = 0$) są przy sumowaniu wyłączone. Zmieńmy teraz u na $u - 2\omega$; wypadnie:

$$\varphi(u - 2\omega) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u - 2\omega - 2\omega')^2} - \frac{1}{(2\omega + 2\omega')^2} \right],$$

przyczym jest wyłączone jedynie skojarzenie $m = -1$, $m' = 0$. Lecz prawa strona tej równości jest tożsamościowo równa $\varphi(u)$. Funkcja ta posiada przeto okres 2ω , i podobnież stwierdzilibyśmy, że posiada także okres $2\omega'$. Jest to funkcja, którą Weierstrass oznaczył przez $\wp u$, i która daje się tedy określić zapomocą równości:

$$(22) \quad \wp u = \frac{1}{u^2} + \sum' \left[\frac{1}{(u - 2\omega)^2} - \frac{1}{4\omega^2} \right] \quad (\omega = m\omega + m'\omega').$$

Jeżeli w różnicy $\wp u - \frac{1}{u^2}$ uczynimy u równym zero, wszystkie wyrazy podwójnej sumy staną się zerami i sama różnica stanie się równą zero. Funkcja $\wp u$ posiada tedy własności następujące:

po 1-sze) jest ona podwójnie okresowa i biegunami jej są wszystkie punkty 2ω , ale nie żadne inne;

po 2-gie) część główna w otoczeniu początku układu równa się $\frac{1}{u^2}$;

po 3-cie) różnica $\wp u - \frac{1}{u^2}$ równa się zero przy $u = 0$.

Te własności znamionują wyłącznie funkcję $\wp u$. W istocie, wszelka funkcja $f(u)$, posiadająca drugą i trzecią, różni się od $\wp u$ jedynie o liczbę stałą, gdyż różnica jest funkcją dwuokresową bez biegunów.

Jeżeli taka funkcja spełnia prócz tego warunek, że $f(u) - \frac{1}{u^2} = 0$ dla $u = 0$, to $f(u) - \wp u$ równa się zero przy $u = 0$; zatem $f(u) = \wp u$.

Funkcja $(-\wp u)$ posiada oczywiście wszystkie te trzy własności; przeto $\wp(-u) = \wp u$, i funkcja $\wp u$ jest parzysta, co również da się stwierdzić bez trudności bezpośrednio zapomocą wzoru (22).

Weźmy okres o najmniejszym module i oznaczmy ten moduł przez δ . W kole C_δ o promieniu δ , zakreślonym dokoła początku układu, jako środka, różnica $\wp u - \frac{1}{u^2}$ jest całokształtna i może być rozwinięta w szereg według potęg dodatnich zmiennej u . Wyraz ogólny szeregu (22) da się rozwinać podług potęg zmiennej u w sposób następujący

$$\frac{1}{(u - 2\omega)^2} - \frac{1}{4\omega^2} = \frac{2u}{(2\omega)^3} + \frac{3u^2}{(2\omega)^4} + \dots + \frac{(n+1)u^n}{(2\omega)^{n+2}} + \dots,$$

i łatwo się upewnić, iż funkcją zwiększającą dla tego szeregu będzie $\frac{5}{16|w|^3} \frac{u}{1 - \frac{u}{|w|}}$, a tym bardziej wyrażenie, otrzymane zapomocą za-

stąpienia ilorazu $1 - \frac{u}{|w|}$ przez $1 - \frac{2u}{\bar{c}}$. Ponieważ szereg $\sum' \frac{1}{|w|^3}$ jest zbieżny, przeto mamy prawo dodawać do siebie wyraz po wyrazie otrzymane szeregi (art. 257). Spółczynniki potęg nieparzystych zmiennej u okażą się równe zeru, gdyż wyrazy, pochodzące od okresów przeciwnych, znoszą się wzajemnie, i możemy, zakładając:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_2 = 3 \sum' \frac{1}{(2w)^4}, \quad c_3 = 5 \sum' \frac{1}{(2w)^6}, \dots, \\ c_\lambda = (2\lambda - 1) \sum' \frac{1}{(2w)^{2\lambda}}, \dots, \end{array} \right.$$

napisać szereg, wyrażający pu , w postaci:

$$(23) \quad pu = \frac{1}{u^2} + c_2 u^2 + c_3 u^4 + \dots + c_\lambda u^{2\lambda-2} + \dots$$

Wzór (23) jest ważny tylko wewnątrz okręgu c_λ , mającego za środek początek układu i przechodzącego przez najbliższy z punktów, wyobrażających okresy (point-période), gdy tymczasem wzór (22) stosuje się do całej płaszczyzny.

Pochodna $p'u$ jest także funkcją eliptyczną, której biegunami trzeciego rzędu są wszystkie punkty $2w$; daje się ona wyrazić w zakresie całej płaszczyzny zapomocą szeregu

$$(25) \quad p'u = -\frac{2}{u^3} - 2 \sum' \frac{1}{(u - 2w)^3}.$$

W ogólności, pochodna rzędu n , $p^{(n)}u$, jest funkcją eliptyczną, której biegunami rzędu $n + 2$ są wszystkie punkty $u = 2w$:

$$(26) \quad p^{(n)}u = (-1)^n \frac{1 \cdot 2 \dots (n+1)}{u^{n+2}} + (-1)^n 1 \cdot 2 \dots (n+1) \sum' \frac{1}{(u - 2w)^{n+2}}.$$

Polecamy czytelnikowi stwierdzenie prawowitości tych sposobów rozwinięcia w szeregi, co nie powinno, przy uwzględnieniu twierdzeń, uzasadnionych powyżej (art. 297 i 319), nasunąć żadnych trudności.

323. Związek algebracyjny pomiędzy pu a $p'u$. — Zgodnie z twierdzeniem ogólnym, podanym w art. 326, istnieje pomiędzy pu a $p'u$ za-

leżność algebryczna. Otrzymujemy ją z łatwością w sposób następujący: w otoczeniu początku układu, według wzoru (23):

$$\begin{aligned} p'u &= -\frac{2}{u^3} + 2c_2 u + 4c_3 u^3 + \dots, \\ (p'u)^2 &= \frac{4}{u^6} - \frac{8c_2}{u^2} - 16c_3 + \dots, \\ (p'u)^3 &= \frac{1}{u^9} + \frac{3c_2}{u^3} + 3c_3 + \dots, \end{aligned}$$

przezyczym wszystkie wyrazy pominięte są równe zeru przy $u = 0$. Różnica $p'^2(u) - 4p^3u$ jest tedy funkcją, dla której początek układu jest biegunem drugiego rzędu, i w otoczeniu tego punktu mamy

$$p'^2(u) - 4p^3u = -\frac{20c_2}{u^2} - 28c_3 + \dots;$$

wyrazy pominięte równają się przytym zeru dla $u = 0$.

Funkcja eliptyczna $-20c_2 p'u - 28c_3$ posiada tedy te same bieguny z temi samemi częściami głównymi, co funkcja eliptyczna $p'^2 - 4p^3$, i różnica tych funkcji równa się zeru przy $u = 0$. Owe dwie funkcje eliptyczne są tedy identyczne, i zakładając:

$$g_2 = 20c_2 = 60 \sum \left(\frac{1}{2w} \right)^4, \quad g_3 = 28c_3 = 140 \sum \left(\frac{1}{2w} \right)^6,$$

otrzymujemy związek szukany w postaci

$$(27) \quad (p'u)^2 = 4p^3u - g_2 p'u - g_3.$$

Związek (27) posiada w teorii funkcji eliptycznych znaczenie podstawowe; liczby g_2 i g_3 nazywają się *niezmiennikami* (invariants).

Wszystkie współczynniki c_k szeregu (23) są to funkcje całkowite niezmienników g_2 i g_3 ; istotnie, ze związku (27), biorąc pochodne obu stron i dzieląc przez $2p'u$, wnioskujemy, że

$$(28) \quad p''u = 6p^3u - \frac{g_2}{2}.$$

Z drugiej strony, w otoczeniu początku układu:

$$p''u = \frac{6}{u^4} + 2c_2 + 12c_3 u^2 + \dots + (2\lambda - 2)(2\lambda - 3)c_\lambda u^{2\lambda-4} + \dots$$

Zastępując w związku (28) pu i $p''u$ przez wyrażające je szeregi i utożsamiając ze sobą obie strony, otrzymujemy wzór zwrotny

$$c_\lambda = \frac{3}{(2\lambda + 1)(\lambda - 3)} \sum_{\nu} c_\nu c_{\lambda-\nu} \quad [\nu = 2, 3, \dots, (\lambda - 2)],$$

który pozwala obliczać kolejno wszystkie współczynniki c_λ w zależności od c_2 i c_3 , a przeto od g_2 i g_3 ; znajdujemy w ten sposób

$$c_4 = \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2}, \quad c_5 = \frac{3g_2g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}, \quad \dots$$

Ten rachunek uwydatnia fakt godny uwagi, iż wszystkie sumy $\sum' \frac{1}{(2w)^{2n}}$ dają się wyrazić w postaci funkcji całkowitych dwu pierwszych sum.

Pierwiastki funkcji $p'u$ znamy z góry. Ponieważ jest to funkcja trzeciego rzędu, więc posiada w każdym równoległoboku trzy pierwiastki. Ze względu na nieparzystość tej funkcji, pierwiastkami jej są wartości $u = \omega$, $u = \omega'$, $u = \omega'' = \omega + \omega'$ (art. 326, *Uwagi*). Według wzoru (27), pierwiastki równania $4p^3 - g_2p - g_3 = 0$ są zatem wartościami funkcji pu przy $u = \omega$, ω' , ω'' . Oznaczając będziemy te trzy pierwiastki przez e_1 , e_2 , e_3 :

$$e_1 = p\omega, \quad e_2 = p\omega', \quad e_3 = p\omega''.$$

Są to trzy wartości odmienne, gdyby bowiem np. e_1 równało się e_2 , to równanie $pu = e_1$ posiadałoby w jednym równoległoboku elementarnym dwa pierwiastki podwójne ω i ω' , co jest niemożliwe, gdyż pu jest funkcją drugiego rzędu. Możemy tedy napisać:

$$4p^3u - g_2pu - g_3 = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3),$$

a więc pomiędzy niezmiennikami g_2 , g_3 i pierwiastkami e_1 , e_2 , e_3 zachodzą związki

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0, \quad e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 = -\frac{g_2}{4}, \quad e_1e_2e_3 = \frac{g_3}{4}.$$

Wyróżnik $\frac{1}{16}(g_2^3 - 27g_3^2)$ jest niewątpliwie różny od zera.

329. Funkcja ζu . — Całkując funkcję $pu - \frac{1}{u^2}$ wzdłuż jakiegokol-

wiek drogi, wychodzącej z początku układu i nie przechodzącej przez żaden z biegunów, otrzymujemy związek

$$\int_0^u \left(pu - \frac{1}{u^2} \right) du = - \sum \left[\frac{1}{u - 2w} + \frac{1}{2w} + \frac{u}{(2w)^2} \right].$$

Szereg z prawej strony znaku równości wyraża funkcję częściokształtną, której biegunami pierwszego rzędu są wszystkie punkty $u = 2\omega$ prócz $u = 0$. Zmieniając znak i dodając ułamek $\frac{1}{u}$, założmy:

$$(29) \quad \zeta u = \frac{1}{u} + \sum' \left[\frac{1}{u - 2\omega} + \frac{1}{2\omega} + \frac{u}{(2\omega)^2} \right];$$

wobec tego poprzedni związek może być napisany w postaci

$$(30) \quad \int_0^u \left(\rho u - \frac{1}{u^2} \right) du = -\zeta u + \frac{1}{u};$$

po zróżniczkowaniu obu stron, otrzymujemy

$$(31) \quad \zeta' u = -\rho u.$$

Łatwo stwierdzić zapomocą któregośkolwiek z tych wzorów, że funkcja ζu jest nieparzysta. W otoczeniu początku układu mamy, zgodnie z rozwinięciem w szereg (23) i wzorem (30),

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \frac{e_2}{3} u^2 - \frac{e_4}{5} u^4 + \dots$$

Funkcja ζu nie może mieć okresów 2ω i $2\omega'$, gdyż posiadałaby w takim razie tylko jeden biegun pierwszego rzędu w równoległoboku elementarnym. Atoli, ponieważ funkcje $\zeta(u + 2\omega)$ i ζu posiadają tę samą pochodną $-\rho u$, te dwie funkcje różnią się od siebie tylko o liczbę stałą; funkcja ζu wzrasta zatem o liczbę stałą, gdy zmienna u powiększa się o jeden okres. Łatwo otrzymać wyrażenie, wyznaczające tę stałą. Napiszmy, dla większej jasności, wzór (30) w postaci

$$\int_0^u \left(\rho v - \frac{1}{v^2} \right) dv = \frac{1}{u} - \zeta u;$$

po zamianie u na $u + 2\omega$ i odjęciu od siebie obu wzorów, otrzymamy:

$$\zeta(u + 2\omega) - \zeta u = - \int_u^{u+2\omega} \rho v dv.$$

Założmy

$$2\eta = \int_u^{u+2\omega} \rho v dv, \quad 2\eta' = - \int_u^{u+2\omega'} \rho v dv;$$

η i η' są to stałe, niezależne od granicy dolnej u i drogi całkowania. Niezależność od drogi całkowania jest oczywista *a priori*, ponieważ wszystkie pozostałości funkcji ρv są równe zeru. Funkcja ζu czyni tedy zadość dwu warunkom

$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta u + 2\eta, \quad \zeta(u + 2\omega') = \zeta u + 2\eta'.$$

Czyniąc w tych wzorach u równym $-\omega$ lub $u = -\omega'$, otrzymujemy

$$\eta = \zeta\omega, \quad \eta' = \zeta\omega'.$$

Pomiędzy czterema ilościami ω , ω' , η , η' istnieje związek nader prosty. Ażeby go uzasadnić, wystarczy obliczyć dwoma sposobami całkę

$\int \zeta u du$, brana wzdłuż obwodu równoległoboku o wierzchołkach u_0 ,

$u_0 + 2\omega$, $u_0 + 2\omega + 2\omega'$, $u_0 + 2\omega'$. Założymy przytym, że ζu nie posiada na tym obwodzie żadnego bieguna i że współczynnik przy i w ilorazie $\frac{\omega'}{\omega}$ jest dodatni, tak iż przy przebieganiu obwodu w zwrocie dodat-

nim napotykamy wierzchołki w takim porządku, w jakim zostały tu napisane. Wewnątrz tego obwodu istnieje tylko jeden biegun funkcji ζu , z pozostałością równą $+1$; badana całka równa się tedy $2\pi i$. Z drugiej strony, suma całek, wziętych wzdłuż boku, łączącego wierzchołki u_0 i $u_0 + 2\omega$ oraz boku przeciwnego, jest równa (p. art. 326) całce:

$$\int_{u_0}^{u_0 + 2\omega} [\zeta u - \zeta(u + 2\omega')] du = -4\omega\eta',$$

i stwierdzamy podobnie, że suma całek, pochodzących z dwu innych boków, jest równa $4\omega'\eta$. Otrzymujemy przeto zapowiedziany związek w postaci

$$(32) \quad \omega'\eta - \omega\eta' = \frac{\pi}{2} i.$$

Obliczmy jeszcze całkę określoną $F(u) = \int_u^{u+2\omega} \zeta v dv$, biorąc jakąkolwiek drogę całkowania, nie przechodzącą przez żaden z biegunów. Otrzymujemy

$$F'(u) = \zeta(u + 2\omega) - \zeta u = 2\eta,$$

tak iż $F'(u)$ ma postać $2\eta u + K$; przytym stała K daje się wyznaczyć z pominięciem wielokrotności iloczynu $2\pi i$, gdyż można zawsze zmienić drogę całkowania bez zmiany jej końców w ten sposób, iżby całka została powiększona o dowolną wielokrotność liczby $2\pi i$. Aby ją wyznaczyć — z tym zastrzeżeniem — obliczmy całkę określoną $\int_{-\omega}^{+\omega} \left(\zeta v - \frac{1}{v} \right) dv$

wzdłuż drogi nader zbliżonej do odcinka prostej, łączącego punkty ω i $-\omega'$. Całka ta równa się zeru, gdyż można zastąpić drogę całkowania przez drogę prostoliniową; i wówczas elementy całki będą się parami

znosiły. Lecz, zastępując u przez $-\omega$ we wzorze, wyznaczającym $F(u)$, otrzymujemy:

$$\int_{-\omega}^{+\omega} \zeta v dv = -2\eta\omega + K,$$

a całka $\int_{-\omega}^{+\omega} \frac{1}{v} dv$ jest równa $\pm \pi i$, tak iż można wziąć $K = 2\eta\omega \pm \pi i$; nie czyniąc tedy żadnego przypuszczenia co do drogi całkowania, możemy napisać ogólnie

$$(33) \quad \int_u^{u+2\omega} \zeta v dv = 2\eta(u + \omega) + (2m + 1)\pi i$$

[m — liczba całkowita];

podobny wzór stosuje się do całki $\int_u^{u+2\omega'} \zeta v dv$.

330. Funkcja σu . — Całkując funkcję $\zeta u - \frac{1}{u}$ wzdłuż jakiejkolwiek drogi, wychodzącej z początku układu a nie przechodzącej przez żaden z biegunów, otrzymujemy

$$\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u} \right) du = \sum' \left[\text{Log} \left(1 - \frac{u}{2w} \right) + \frac{u}{2w} + \frac{u^2}{8w^2} \right]$$

i przeto

$$(34) \quad u e^{\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u} \right) du} = u \prod' \left(1 - \frac{u}{2w} \right) e^{\frac{u}{2w} + \frac{u^2}{8w^2}}.$$

Funkcja całkowita z prawej strony znaku równości jest najprostszą z funkcji całkowitych, których pierwiastkami jednokrotnymi są wszystkie okresy $2w$; jest to funkcja σu :

$$(35) \quad \sigma u = u \prod' \left(1 - \frac{u}{2w} \right) e^{\frac{u}{2w} + \frac{u^2}{8w^2}}.$$

Równość (34) może być napisana w postaci

$$(34 \text{ bis}) \quad \sigma u = u e^{\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u} \right) du},$$

i gdy weźmiemy pochodne logarytmiczne obu stron, to wypadnie:

$$(36) \quad \frac{\sigma' u}{\sigma u} = \frac{1}{u} + \zeta u - \frac{1}{u} = \zeta u.$$

Funkcja σu , jako funkcja całkowita, nie może być dwuokresową; gdy zmienna wzrasta o jeden okres, funkcja ta zostaje pomnożona przez czynnik wykładniczy, który można wyznaczyć w sposób następujący:

Wnioskujemy np. z wzoru (34 bis)

$$\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma u} = \frac{u+2\omega}{u} e^{\int_u^{u+2\omega} \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right) du} = e^{\int_u^{u+2\omega} \zeta u du};$$

czynnik ten był już wyliczony powyżej, i ostatecznie

$$(37) \quad \sigma(u+2\omega) = e^{2\eta(u+\omega) + (2m+1)\pi i} \sigma u = -e^{2\eta(u+\omega)} \sigma u.$$

Podobnie dochodzimy do wzoru

$$(38) \quad \sigma(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')} \sigma u.$$

Oba wzory (35) i (34 bis) uwydatniają ten fakt, iż σu jest funkcją *nieparzystą*.

Jeżeli rozwiniemy tę funkcję według potęg zmiennej u , to otrzymany szereg będzie ważny w dziedzinie całej płaszczyzny. Łatwo wykazać, że wszystkie współczynniki są funkcjami całkowitemi liczb g_2 i g_3 . Istotnie

$$\int_0^u \left(\zeta u - \frac{1}{u}\right) du = -\frac{c_2}{3 \cdot 4} u^4 - \frac{c_3}{5 \cdot 6} u^6 - \dots - \frac{c_\lambda}{2\lambda(2\lambda-1)} u^{2\lambda} - \dots$$

$$\sigma u = u e^{-\frac{c_2}{3 \cdot 4} u^4 - \frac{c_3}{5 \cdot 6} u^6 - \dots}$$

Widzimy, iż niema wyrazu, któryby zawierał u^3 i że każdy ze współczynników jest funkcją całkowitą liczb c_λ a przez to i niezmienników g_2 i g_3 ; pierwsze pięć wyrazów mają kształt następujący:

$$(39) \quad \sigma u = u - \frac{g_2 u^5}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} - \frac{g_3 u^7}{2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2^2 u^9}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} - \frac{g_2 g_3 u^{11}}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11} - \dots$$

Trzy funkcje $p u$, ζu , σu stanowią pierwiastki zasadnicze teorii funkcji eliptycznych. Dwie pierwsze można uzależnić od σu zapomocą związków $\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}$, $p u = -\zeta' u$.

331. Wyrażenia ogólne funkcji eliptycznych.—Wszelka funkcja eliptyczna $f(u)$ może być wyrażoną już to zapomocą jednej tylko funkcji σu , już to zapomocą funkcji ζu i jej pochodnych, już to wreszcie zapomocą dwu funkcji $p u$ i $p' u$. Wyłożymy zwięźle wszystkie te trzy metody.

1. *Wyrażanie funkcji $f(u)$ zapomocą funkcji σu .* — Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ oznaczają punkty zerowe funkcji $f(u)$ w jednym równoległoboku elementarnym, a $b_1, b_2, \dots, b_n$ — jej bieguny w tym samym równoległoboku; każdy z punktów zerowych i biegunów liczymy przy tym tyle razy, ile wymaga jego stopień wielokrotności. Pomiedzy temi punktami zerowymi a temi biegunami istnieje związek:

$$(40) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + 2\omega,$$

w którym 2ω oznacza jeden z okresów. Stwierdziwszy to, weźmy funkcję:

$$\varphi(u) = \frac{\sigma(u - a_1) \dots \sigma(u - a_n)}{\sigma(u - b_1) \dots \sigma(u - b_n - 2\omega)}.$$

Funkcja ta posiada te same bieguny i te same punkty zerowe, co funkcja $f(u)$, gdyż wartościami zerowymi czynnika $\sigma(u - a_i)$ są tylko wartości $u = a_i$ oraz wartości zmiennej u , różne od a_i o jeden okres. Z drugiej strony funkcja $\varphi(u)$ jest funkcją podwójnie okresową, jeżeli bowiem zmienimy np. u na $u + 2\omega$, to na mocy związku (37) licznik i mianownik tej funkcji zostaną pomnożone odpowiednio przez czynniki

$$(-1)^n e^{2\pi i(nu + n\omega - a_1 - a_2 - \dots - a_n)}, \quad (-1)^n e^{2\pi i(nu + n\omega - b_1 - b_2 - \dots - b_n - 2\omega)},$$

które według związku (40) są równe sobie. Stwierdzilibyśmy podobnie, że $\varphi(u + 2\omega') = \varphi(u)$. Iloraz $\frac{f(u)}{\varphi(u)}$ stanowi tedy funkcję dwuokresową zmiennej u , nie posiadającą żadnych wartości nieskończonych, a więc jest to liczba stała, i możemy napisać

$$(41) \quad f(u) = C \frac{\sigma(u - a_1) \sigma(u - a_2) \dots \sigma(u - a_n)}{\sigma(u - b_1) \sigma(u - b_2) \dots \sigma(u - b_n - 2\omega)}.$$

Ażeby wyznaczyć stałą C , wystarczy nadać zmiennej u wartość, któraby nie odpowiadała ani biegunowi ani punktowi zerowemu.

Ogólniej, ażeby wyrazić funkcję eliptyczną $f(u)$ o znanych biegunach i punktach zerowych w zależności od funkcji σu , wystarczy obrać n punktów zerowych ($a'_1, a'_2, \dots, a'_n$) oraz n biegunów ($b'_1, b'_2, \dots, b'_n$) w taki sposób, iżby każdy z pierwiastków funkcji $f(u)$ mógł być otrzymany zapomocą dodania jednego z okresów do jednej z liczb a'_i , a wszelki biegun funkcji $f(u)$ — przez dodanie jednego z okresów do jednej z liczb b'_i , i żeby ponad to był spełniony warunek $\Sigma a'_i = \Sigma b'_i$. Owe bieguny i punkty zerowe mogą zresztą być położone w płaszczyźnie w sposób dowolny, byleby czyniły zadość powyższemu warunkowi.

2. *Wyrażanie funkcji $f(u)$ w zależności od funkcji ζu i jej pochodnych.* — Weźmy k takich biegunów $a_1, a_2, \dots, a_k$ funkcji $f(u)$, iż wszelki inny biegun może być otrzymany przez dodanie do jednej z tych wartości jednego z okresów. Można wziąć np. bieguny, położone w tym samym równoległoboku, ale to nie jest niezbędne. Niech wyrażenie

$$\frac{A_1^{(i)}}{u - a_i} + \frac{A_2^{(i)}}{(u - a_i)^2} + \dots + \frac{A_{n_i}^{(i)}}{(u - a_i)^{n_i}}$$

stanowi część główną funkcji $f(u)$ w otoczeniu punktu a_i .

Różnica

$$f(u) - \sum_{i=1}^k [A_1^{(i)} \zeta(u - a_i) - A_2^{(i)} \zeta'(u - a_i) \dots + \frac{(-1)^{n_i-1} A_{n_i}^{(i)}}{1 \cdot 2 \dots (n_i - 1)} \zeta^{(n_i-1)}(u - a_i)]$$

jest funkcją holomorficzną w dziedzinie całej płaszczyzny; jest to ponad to funkcja dwuokresowa, gdyż jeżeli zmieniamy u na $u + 2\omega$, funkcja ta wzrasta o $-2\eta \sum A_1^{(i)}$, t. j. o liczbę, która równa się zeru ze względu na to, że $\sum A_1^{(i)}$ wyraża sumę pozostałości w jednym równoległoboku. Badana różnica jest tedy liczbą stałą i ostatecznie

$$(42) \quad \left\{ \begin{aligned} f(u) = C + \sum_{i=1}^k [A_1^{(i)} \zeta(u - a_i) - A_2^{(i)} \zeta'(u - a_i) \dots \\ + (-1)^{n_i-1} \frac{A_{n_i}^{(i)}}{1 \cdot 2 \dots (n_i - 1)} \zeta^{(n_i-1)}(u - a_i)]. \end{aligned} \right.$$

Wzór powyższy zawdzięczamy Hermite'owi. Ażeby go móc zastosować, należy znać bieguny funkcji eliptycznej $f(u)$ i odpowiednie części główne. Podobnie jak wzór (41) jest analogiczny z wzorem, wyrażającym funkcję wymierną w postaci ilorazu dwu wielomianów, rozłożonych na swe czynniki linjowe, tak wzór (42) odpowiada wzorowi, dającemu rozkład ułamka wymiernego na składniki proste. W tym razie rolę elementu prostego odgrywa funkcja $\zeta(u - a)$.

3. *Wyrażanie funkcji $f(u)$ w zależności od $p u$ i $p' u$.* — Weźmy przede wszystkim funkcję eliptyczną parzystą $f(u)$. Wartości zerowe tej funkcji, które nie są okresami, są parami przeciwne sobie; możemy tedy znaleźć n takich punktów zerowych ($a_1, a_2, \dots, a_n$), iż wszystkie wartości zerowe, różne od okresów, będą dane przez wzory

$$\pm a_1 + 2w, \pm a_2 + 2w, \dots, \pm a_n + 2w.$$

Można wziąć np. równoległobok, którego wierzchołkami byłyby punkty $\omega + \omega'$, $\omega' - \omega$, $-\omega - \omega'$, $\omega - \omega'$, i uwzględnić w tym równoległoboku punkty zerowe, położone z tej samej strony jakiejś prostej, przechodzącej przez początek układu. Jeżeli któryś z pierwiastków a_i nie jest pólkresem, powtórzmy go w ciągu $a_1, a_2, \dots, a_n$ tyle razy, ile jedności zawiera jego stopień wielokrotności. Jeżeli jakiś pierwiastek, np. a_1 jest pólkresem, musi to być pierwiastek rzędu parzystego $2r$ (326, *Uragi*); powtórzmy taki punkt zerowy w ciągu $a_1, a_2, \dots, a_n$ tylko r razy. Przy tych umowach iloczyn

$$(\rho u - \rho a_1)(\rho u - \rho a_2) \dots (\rho u - \rho a_n)$$

posiada tyleż pierwiastków i tego samego rzędu, co $f(u)$, o ile tylko nie mamy $f(0) = 0$. Utwórzmy podobnie drugi iloczyn

$$(\rho u - \rho b_1)(\rho u - \rho b_2) \dots (\rho u - \rho b_m),$$

którego punktami zerowymi, z zastrzeżeniem, że stopnie wielokrotności są odpowiednio takie same, są wszystkie bieguny funkcji $f(u)$ prócz punktów, odpowiadających okresom. Załóżmy:

$$\tau(u) = \frac{(\rho u - \rho a_1)(\rho u - \rho a_2) \dots (\rho u - \rho a_n)}{(\rho u - \rho b_1)(\rho u - \rho b_2) \dots (\rho u - \rho b_m)};$$

iloraz $\frac{f(u)}{\tau(u)}$ jest funkcją eliptyczną, posiadającą przy wszelkiej wartości zmiennej u , nie równej okresowi, wartość skończoną i różną od zera. Taka funkcja eliptyczna nie jest niczym innym, tylko liczbą stałą, gdyż biegunami jej mogą być tylko okresy, a gdyby nawet tak było, jej odwrotność nie posiadałaby biegunów. Otrzymujemy tedy:

$$f(u) = C \frac{(\rho u - \rho a_1)(\rho u - \rho a_2) \dots (\rho u - \rho a_n)}{(\rho u - \rho b_1)(\rho u - \rho b_2) \dots (\rho u - \rho b_m)}.$$

Jeżeli $f_1(u)$ jest funkcją eliptyczną nieparzystą, $\frac{f_1(u)}{\rho' u}$ jest funkcją parzystą, i przeto ten iloraz stanowi funkcję wymierną funkcji ρu . Wreszcie dowolna funkcja eliptyczna $F(u)$ może być uważana za sumę funkcji parzystej i funkcji nieparzystej:

$$F(u) = \frac{F(u) + F(-u)}{2} + \frac{F(u) - F(-u)}{2};$$

zastosowując poprzednie wyniki, stwierdzamy, że wszelkiej funkcji eliptycznej można nadać postać

$$43) \quad F(u) = R(\rho u) + \rho' u R_1(\rho u) \\ [R \text{ i } R_1 \text{ — funkcje wymierne}].$$

332. **Wzory, wyznaczające funkcje sumy.** — Wzór elementarny, dotyczący funkcji $\sin x$, pozwala wyrazić $\sin(a + b)$ w zależności od wartości tej funkcji i jej pochodnej dla $x = a$ i $x = b$. Istnieje wzór podobny dla funkcji $p u$, ale wyrażenie, wyznaczające $p(u + v)$ w zależności od $p u$, $p v$, $p' u$, $p' v$ jest nieco bardziej złożone, z powodu obecności mianownika.

Zastosujmy z początku wzór ogólny (41), w którym występuje funkcja σu , do funkcji eliptycznej $p u - p v$. Widzimy odrazu, że

$$\frac{\sigma(u + v) \sigma(u - v)}{\sigma^2 u}$$

jest funkcją eliptyczną, posiadającą te same punkty zerowe i te same bieguny, co i $p u - p v$. Otrzymujemy tedy:

$$p u - p v = C \frac{\sigma(u + v) \sigma(u - v)}{\sigma^2 u};$$

ażeby wyznaczyć stałą C , wystarczy pomnożyć obie strony przez $\sigma^2 u$ i założyć, że u dąży do zera. Dochodzimy w ten sposób do związku $1 = -C \sigma^2 v$, skąd wnioskujemy

$$(44) \quad p u - p v = - \frac{\sigma(u + v) \sigma(u - v)}{\sigma^2 u \sigma^2 v}.$$

Weźmy pochodne logarytmiczne obu stron, uważając przytym v za stałą a u za zmienną niezależną. Wypada

$$\frac{p' u}{p u - p v} = \zeta(u + v) + \zeta(u - v) - 2\zeta u;$$

wzór ten, po przestawieniu liczb u i v , przybiera postać

$$\frac{-p' v}{p u - p v} = \zeta(u + v) - \zeta(u - v) - 2\zeta v;$$

wreszcie, dodając do siebie oba te wzory, otrzymujemy związek

$$(45) \quad \zeta(u + v) - \zeta u - \zeta v = \frac{1}{2} \frac{p' u - p' v}{p u - p v},$$

który stanowi właśnie wzór poszukiwany dla funkcji ζu .

Różniczkując obie strony względem u , otrzymalibyśmy wyrażenie funkcji $p(u + v)$; prawa strona zawierałaby drugą pochodną $p'' u$, którą należałoby zastąpić przez $6 p^2 u - \frac{g_2}{2}$. Rachunek ten byłby nieco przy-

długi, i dojdziemy do żądanego wyniku w sposób bardziej wytworny, uzasadniając z początku wzór

$$(46) \quad p(u+v) + pu + pv = [\zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v]^2.$$

Uważajmy wciąż u za zmienną niezależną; obie strony stanowią funkcje eliptyczne, których biegunami drugiego rzędu są punkty $u = 0$, $u = -v$ oraz wszystkie inne, które dadzą się otrzymać przez dodanie do tych wartości jednego z okresów. W otoczeniu początku układu

$$\begin{aligned} \zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v &= \zeta'v + u\zeta'v + \dots - \zeta u - \zeta v \\ &= -\frac{1}{u} + u\zeta'v + \alpha u^2 + \dots, \end{aligned}$$

a przeto

$$[\zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v]^2 = \frac{1}{u^2} - 2\zeta'v - 2\alpha u + \dots$$

Część główną tego wyrażenia, równie jak pierwszej strony wzoru (46), stanowi $\frac{1}{u^2}$. Porównajmy podobnie części główne w otoczeniu bieguna $u = -v$. Zakładając, że $u = -v + h$, otrzymujemy

$$\zeta h - \zeta(-v+h) - \zeta v = \frac{1}{h} - h\zeta'v + \beta h^2 + \dots,$$

$$[\zeta h - \zeta(-v+h) - \zeta v]^2 = \frac{1}{h^2} - 2\zeta'v + \dots$$

Część główna prawej strony wzoru (46) w otoczeniu punktu $u = -v$, równa się tedy $\frac{1}{(u+v)^2}$, równie jak część główna lewej strony. Różnica nie może tedy być niczym innym, tylko liczbą stałą. Aby wyznaczyć tę stałą, porównajmy na przykład szeregi, stanowiące wyniki rozwinięcia w otoczeniu początku układu; mamy w tym otoczeniu:

$$p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{u^2} + 2pv + up'v + \dots$$

Porównywuując to rozwinięcie z rozwinięciem funkcji $[\zeta(u+v) - \zeta u - \zeta v]^2$, stwierdzamy, że przy $u = 0$ różnica równa się zeru. Wzór (46) jest tedy uzasadniony. Zestawiając oba wzory (45) i (46), otrzymujemy wzór na dodawanie dla funkcji $p u$

$$(47) \quad p(u+v) + pu + pv = \frac{1}{4} \left(\frac{p'u - p'v}{p u - p v} \right)^2.$$

333. Całkowanie funkcji eliptycznych. — Wzór rozkładowy Hermite'a nadaje się bezpośrednio do całkowania funkcji eliptycznej. W istocie, wnioskujemy z wzoru (42)

$$(48) \quad \int f(u) du = Cu + \sum_{i=1}^k \{ A_1^{(i)} \text{Log} [\sigma(u - a_i)] - A_2^{(i)} \zeta(u - a_i) + \dots \\ + (-1)^{n_i-1} \frac{A_{n_i}^{(i)}}{(n_i - 1)!} \zeta^{(n_i-2)}(u - a_i) \}.$$

Widzimy, że całka funkcji eliptycznej daje się wyrazić w zależności od tych samych funkcji przestępnych σ , ζ , p , od których zależy sama funkcja; lecz funkcja σu może tam występować pod znakiem Log. Ażeby całka funkcji eliptycznej była również funkcją eliptyczną, trzeba przede wszystkim, iżby całka nie posiadała punktów krytycznych logarytmicznych, to jest iżby wszystkie pozostałości $A_1^{(i)}$ były równe zeru. Jeżeli tak jest, całka jest funkcją częściokształtną (meromorficzną); do tego, aby była funkcją eliptyczną, wystarczy, by nie ulegała zmianie przy dodaniu okresu, t. j. iżby były spełnione warunki:

$$2C\omega - 2\eta \sum_i A_2^{(i)} = 0, \quad 2C\omega' - 2\eta' \sum_i A_2^{(i)} = 0,$$

skąd wynika: $C = 0$, $\sum A_2^{(i)} = 0$. Jeżeli te warunki są spełnione, całka przybiera samą przez się postać, wskazaną we wzorze Hermite'a.

Gdy funkcja eliptyczna, którą chcemy całkować, jest wyrażona przy pomocy funkcji pu i $p'u$, bywa często dogodnie opierać się na tym wzorze zamiast używać metody ogólnej. Niech będzie dana do całkowania funkcja eliptyczna $R(pu) + p'u R_1(pu)$, przyczym R i R_1 oznaczają funkcje wymierne. Nie mamy potrzeby zajmować się całką $\int R_1(pu) p'u du$, która przy pomocy zamiany zmiennej, określonej przez wzór $pu = t$, daje się sprowadzić do typu całki funkcji wymiernej. Co do całki $\int R(pu) du$, możnaby zapomocą działań wymiernych, połączonych z obraniami odpowiednio całkowaniami przez części, sprowadzić ją do pewnej liczby całek typowych, lecz toby polegało na przerobieniu ponownym pod inną postacią obliczeń, dawniej już wykonanych. (Rozdz. V, str. 257 — 262 oryginału). Istotnie, jeżeli wykonamy zamianę zmiennej: $pu = t$, skąd $p'u du = dt$, czyli

$$du = \frac{dt}{p'u} = \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}},$$

to całka $\int R(pu) du$ przybierze postać

$$\int \frac{R(t) dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}}.$$

Wdzieliśmy, w jaki sposób ta całka rozkłada się na funkcję wymierną zmiennej t i pierwiastka $\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}$, na pewną liczbę całek o postaci

$$\int \frac{t^n dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$$

i wreszcie na pewną liczbę całek o postaci

$$\int \frac{Q(t)}{P(t)} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}},$$

w których $P(t)$ oznacza wielomian pierwszy względem swej pochodnej i trójkianu $4t^3 - g_2 t - g_3$, a $Q(t)$ — wielomian pierwszy względem $P(t)$, o stopniu niższym niż $P(t)$.

Powracając do zmiennej u , stwierdzamy tedy, iż całka $\int R(pu) du$ równa się sumie funkcji wymiernej funkcji pu i $p'u$, pewnej liczby całek o postaci $\int (pu)^n du$ oraz innych całek typu

$$(49) \quad \int \frac{Q(pu) du}{P(pu)},$$

i cała ta redukcja może być dokonana zapomocą działań wymiernych (mnożenie i dzielenie wielomianów), połączonych z pewnemi całkowaniami przez części.

Łatwo otrzymać wzór zwrotny do obliczania całek $I_n = \int (pu)^n du$. W związku

$$\frac{d}{du} [(pu)^{n-1} p'u] = (n-1) (pu)^{n-2} p'^2 u + (pu)^{n-1} p'' u$$

zastąpmy $p'^2 u$ i $p'' u$ odpowiednio przez $4p^3 u - g_2 p u - g_3$ i $6p^2 u - \frac{1}{2} g_2$; otrzymamy, porządkując względem pu :

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} [(pu)^{n-1} p'u] &= \\ &= (4n+2)(pu)^{n+1} - (n-\frac{1}{2})g_2(pu)^{n-1} - (n-1)g_3(pu)^{n-2}, \end{aligned}$$

skąd, zapomocą całkowania obu stron, wnioskujemy

$$(50) \quad (pu)^{n-1} p'u = (4n+2) I_{n+1} - (n-\frac{1}{2})g_2 I_{n-1} - (n-1)g_3 I_{n-2}.$$

Czyniąc kolejno w tym wzorze n równym 1, 2, 3, ..., potrafimy obliczać stopniowo wszystkie całki I_n w zależności od dwu pierwszych $I_0 = u$, $I_1 = -\zeta u$.

Ażeby módz wyrazić przy pomocy bardziej znanych typów całki o postaci (49), należy znać pierwiastki wielomianu $P(t)$. Jeżeli znamy te pierwiastki, to wszystko polega na obliczeniu pewnej liczby całek o postaci

$$\int \frac{du}{pu - pv},$$

w których $p\sigma$ jest różne od e_1 , e_2 i e_3 , gdyż wielomiany $P(t)$ i $4t^3 - g_2t - g_3$ są pierwsze względem siebie. Wartość σ nie jest tedy żadnym półokresem, i $p'\sigma$ nie równa się zeru. Wzór

$$\frac{-p'\sigma}{pu - p\sigma} = \zeta(u + \sigma) - \zeta(u - \sigma) - 2\zeta\sigma,$$

uzasadniony powyżej (art. 332), daje nam wobec tego

$$(51) \quad \int \frac{du}{pu - p\sigma} = \frac{-1}{p'\sigma} [\text{Log } \sigma(u + \sigma) - \text{Log } \sigma(u - \sigma) - 2u\zeta\sigma] + C.$$

334. Funkcja θ . — Szeregi, zapomocą których określiliśmy funkcje pu , ζu , σu , oraz szereg potęgowy, ważny w dziedzinie całej płaszczyzny, w który rozwinęliśmy σu , nienazbyt się nadają do wyliczeń. Założyciele teorii funkcji eliptycznych, Abel i Jacobi, wprowadzili tam jeszcze jedną funkcję przestępną, godną uwagi, którą Fourier napotkał już był w swych pracach o teorii ciepła, a którą można rozwinąć w szereg bardzo szybko zbieżny; jest to t. zw. funkcja θ . Uzasadnimy pokrótce główne własności tej funkcji i wskażemy, w jaki sposób można przejść od niej z łatwością do funkcji σu Weierstrassa.

Niech τ oznacza liczbę zespoloną $r + si$, w której współczynnik s przy i jest dodatni, a σ — zmienną zespoloną; funkcję $\theta(\sigma)$ określimy zapomocą szeregu

$$(52) \quad \theta(\sigma) = \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi i \sigma} \quad [q = e^{\pi i \tau}],$$

który można uważać za szereg Laurenta, w którym z jest zastąpione przez $e^{\pi i \sigma}$. Szereg ten jest bezwzględnie zbieżny, gdyż moduł U_n wyrazu ogólnego posiada wyrażenie

$$e^{-\pi s \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - (2n+1)\pi \beta}$$

o ile $\sigma = \alpha + \beta i$; $\sqrt[n]{U_n}$ dąży do zera, gdy n wzrasta nieograniczenie, przechodzącą przez wartości dodatnie, i to samo się stosuje do $\sqrt[n]{U_{-n}}$. Funkcja $\theta(\sigma)$ jest zatem funkcją przestępną całkowitą zmiennej σ . Jest to funkcja nieparzysta; istotnie, jeżeli połączymy wyrazy szeregu, odpowiadające wartościom n i $-n-1$ wskaźnika (przy zmianie liczby n od 0 do $+\infty$), to szereg (52) będzie zastąpiony przez inny:

$$(53) \quad \theta(\sigma) = 2 \sum_0^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n+1)\pi \sigma,$$

co wskazuje, iż

$$\theta(-\sigma) = -\theta(\sigma), \quad \theta(0) = 0.$$

Gdy σ powiększa się o jedność, wyraz ogólny szeregu (52) ulega pomnożeniu przez $e^{(2n+1)\pi i} = -1$. Mamy tedy: $\theta(\sigma + 1) = -\theta(\sigma)$. Zmieniając σ na $\sigma + \tau$, nie spostrzegamy odrazu jakiegoś prostego związku pomiędzy dwoma szeregami. Lecz możemy napisać

$$\theta(\sigma + \tau) = \frac{1}{i} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + 2n+1} e^{(2n+1)\pi i \sigma};$$

zamieńmy w tym szeregu n na $n-1$, a wyraz ogólny nowego szeregu

$$(-1)^{n-1} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 + 2n-1} e^{(2n+1)\pi i \tau} e^{-2\pi i \tau}$$

okaże się równym wyrazowi ogólnemu szeregu pierwotnego (52), pomnożonemu przez $-q^{-1} e^{-2\pi i \tau}$. Funkcja $\theta(\tau)$ czyni tedy zadość dwu związkom:

$$(54) \quad \theta(\tau+1) = -\theta(\tau), \quad \theta(\tau+\tau) = -q^{-1} e^{-2\pi i \tau} \theta(\tau);$$

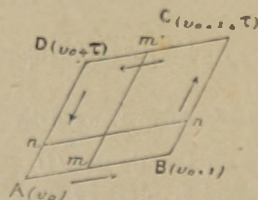
ponieważ początek układu jest punktem zerowym funkcji $\theta(\tau)$, przeto związki te wskazują, że wogóle punktami zerowymi tej funkcji są punkty, dane przez wyrażenie $m_1 + m_2 \tau$, w którym m_1 i m_2 oznaczają liczby całkowite dowolne, dodatnie lub ujemne.

Są to jedyne pierwiastki równania $\theta(\tau) = 0$. Istotnie, rozpatrzmy równoległobok, którego wierzchołkami są punkty τ_0 , $\tau_0 + 1$, $\tau_0 + 1 + \tau$, $\tau_0 + \tau$, zakładając, że wierzchołek τ_0 został obrany w ten sposób, iżby żaden z punktów zerowych funkcji $\theta(\tau)$ nie był położony na obwodzie równoległoboku. Dowiedzimy, że równanie $\theta(\tau) = 0$ posiada w tym równoległoboku jeden tylko pierwiastek. Wystarczy w tym celu obliczyć całkę $\int \frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)} d\tau$ wzdłuż obwodu równoległoboku w zwrocie dodatnim; zgodnie z założeniem co do τ , napotkamy przytym wierzchołki w takim porządku, w jakim zostały napisane.

Ze związków (54) wnioskujemy:

$$\frac{\theta'(\tau+1)}{\theta(\tau+1)} = \frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)}, \quad \frac{\theta'(\tau+\tau)}{\theta(\tau+\tau)} = \frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)} - 2\pi i.$$

Rys. 72.



Pierwszy z tych związków wskazuje, że w punktach odpowiednich n (rys. 72) i n' boków AD i BC funkcja $\frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)}$ przybiera tę samą wartość. Ponieważ te dwa boki są przebiegane w zwrotach przeciwnych, suma odpowiednich całek jest równa zeru. Jeżeli zaś weźmiemy dwa punkty odpowiednio m i m' na bokach AB i DC , to wartość funkcji $\frac{\theta'(\tau)}{\theta(\tau)}$ w punkcie m' równa się wartości tej funkcji w punkcie m , zmniejszonej o $2\pi i$. Suma całek, która powstałaby na tych dwu bokach, równa się tedy $\int_{(CD)} -2\pi i d\tau$, t. j. $2\pi i$. Ponieważ w równoległoboku $ABCD$ istnieje, rzecz oczywista, jeden i tylko jeden punkt, którego odpowiednik liczbowy ma postać $m_1 + m_2 \tau$, przeto funkcja $\theta(\tau)$ nie posiada żadnych innych punktów zerowych.

Ostatecznie funkcja $\Theta(v)$ jest funkcją całkowitą nieparzystą, spełniającą warunki (54) i taką, że jej punktami zerowymi pierwszego rzędu są wszystkie punkty $m_1 + m_2 \tau$, ale nie żadne inne. Weźmy teraz takie dwa okresy 2ω i $2\omega'$, że współczynnik przy i w ilorazie $\frac{\omega'}{\omega}$ jest dodatni. Zastąpmy w funkcji $\Theta(v)$ zmienną v przez $\frac{u}{2\omega}$, a τ przez $\frac{\omega'}{\omega}$ i oznaczmy przez $\varphi(u)$ funkcję $\Theta\left(\frac{u}{2\omega}\right)$:

$$(55) \quad \varphi(u) = \Theta\left(\frac{u}{2\omega}\right).$$

$\varphi(u)$ jest to funkcja całkowita nieparzysta, której punktami zerowymi są wszystkie punkty, odpowiadające okresom

$$2\omega = 2m\omega + 2m'\omega',$$

zamiast związków (54) występują teraz następujące:

$$(56) \quad \varphi(u + 2\omega) = -\varphi(u), \quad \varphi(u + 2\omega') = -e^{-\pi i \left(\frac{u+\omega'}{\omega}\right)} \varphi(u).$$

Własności te są nader zbliżone do własności funkcji ϖu . Aby przejść do ϖu , należy pomnożyć $\varphi(u)$ przez pewien czynnik wykładniczy. W istocie, założmy, oznaczając jak poprzednio przez η funkcję okresów ω i ω' , określoną w art. 329-ym:

$$(57) \quad \psi(u) = \frac{2\omega}{\Theta'(0)} e^{\frac{\eta}{2\omega} u^2} \varphi(u);$$

$\psi(u)$ jest również funkcją całkowitą nieparzystą, posiadającą te same punkty zerowe, co $\varphi(u)$. Pierwszy ze związków (56) przybiera postać

$$(58) \quad \psi(u+2\omega) = -\frac{2\omega}{\Theta'(0)} e^{\frac{\eta}{2\omega} (u+2\omega)^2} \varphi(u) = -e^{2\eta(u+\omega)} \psi(u).$$

Otrzymujemy następnie

$$\psi(u+2\omega') = -\frac{2\omega}{\Theta'(0)} e^{\frac{\eta}{2\omega} (u+2\omega')^2} e^{-\frac{\pi i}{\omega} (u+\omega')} \varphi(u)$$

czyli ze względu na związek $\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{\pi i}{2}$:

$$(59) \quad \psi(u+2\omega') = -e^{2\eta'(u+\omega')} \psi(u).$$

Związki (58) i (59) wyrażają to samo, co związki, uzasadnione powyżej dla funkcji ϖu . Iloraz $\frac{\psi(u)}{\varpi u}$ posiada zatem dwa okresy 2ω i $2\omega'$, ponieważ oba wyrazy tego stosunku ulegają pomnożeniu przez ten sam czynnik, gdy u wzrasta o jeden okres. Ponieważ obie funkcje posiadają te same punkty zerowe, przeto ten stosunek jest stały; zresztą współczynnik pierwszej potęgi zmiennej u w obu szeregach równa się jedności. A więc $\varpi u = \psi(u)$ czyli

$$(60) \quad \varpi u = \frac{2\omega}{\Theta'(0)} e^{\frac{\eta}{2\omega} u^2} \Theta\left(\frac{u}{2\omega}\right),$$

i funkcja ϖu została uzależniona od funkcji Θ , jakśmy zapowiedzieli byli. Gdy się nadaje zmiennej niezależnej v wartości rzeczywiste, przy module liczby q mniejszym

od jedności, szereg (53) jest nader szybko zbieżny. Nie będziemy więcej rozwijali tych wskazówek, które w uwzględnionym zakresie wystarczą do okazania podstawowej roli funkcji Θ w zastosowaniach funkcji eliptycznych.

III. — Odwracanie. — Krzywe pierwszego rodzaju.

335. Związek pomiędzy okresami a niezmiennikami. — Wszelkiemu układowi dwu liczb zespolonych ω , ω' , których stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ nie jest rzeczywisty, odpowiada funkcja eliptyczna $\wp u$, najzupełniej określona, posiadająca dwa okresy 2ω i $2\omega'$, regularna dla wszystkich wartości zmiennej u , które nie mają postaci

$$2m\omega + 2m'\omega'$$

i mająca za bieguny drugiego rzędu wszystkie okresy. Funkcje ζu i σu , które otrzymujemy z $\wp u$ za pomocą jednego lub dwu całkowań, dają się również wyznaczyć przez układ okresów $(2\omega, 2\omega')$. Gdy chodzi o uwydatnienie tych okresów, można użyć do oznaczenia trzech funkcji podstawowych symbolów

$$\wp(u | \omega, \omega'), \quad \zeta(u | \omega, \omega') \quad \text{ i } \quad \sigma(u | \omega, \omega').$$

Należy atoli zauważyć, że można zastąpić układ (ω, ω') przez nieskończenie wiele innych układów (Ω, Ω') , tak iż funkcja $\wp u$ nie ulegnie zmianie. Weźmy, w istocie, cztery liczby całkowite m, m', n, n' , dodatnie lub ujemne, spełniające warunek

$$m n' - m' n = \pm 1.$$

Jeżeli założymy, że

$$\Omega = m\omega + n\omega', \quad \Omega' = m'\omega + n'\omega',$$

to otrzymamy nawzajem:

$$\omega = \pm (n'\Omega - n\Omega') \quad \omega' = \pm (m\Omega' - m'\Omega),$$

i rzecz jasna, że wszystkie okresy funkcji eliptycznej $\wp u$ są równie dobrze kombinacjami dwu okresów $2\Omega, 2\Omega'$, jak pary okresów $2\omega, 2\omega'$.

Powiemy, że dwa układy okresów $(2\omega, 2\omega')$ i $(2\Omega, 2\Omega')$ są równoważne. Funkcja $\wp(u | \Omega, \Omega')$ posiada te same okresy i te same bieguny z temi samemi częściami głównymi, co funkcja $\wp(u | \omega, \omega')$, i różnica tych funkcji równa się zeru dla $u = 0$. Są one przeto identyczne, co wynika również z rozwinięcia w szereg (22), gdyż zbiór liczb $2m\omega + 2m'\omega'$ i zbiór liczb $2m\Omega + 2m'\Omega'$ są tym samym. Z tegoż powodu

$$\zeta(u | \Omega, \Omega') = \zeta(u | \omega, \omega'), \quad \sigma(u | \Omega, \Omega') = \sigma(u | \omega, \omega').$$

Funkcje ρu , ζu , τu dają się również dokładnie określić zapomocą niezmienników g_2 , g_3 . Istotnie, widzieliśmy, że funkcja τu wyraża się zapomocą szeregu potęgowego, którego wszystkie współczynniki są wielomianami względem g_2 i g_3 ; mamy następnie $\zeta u = \frac{\tau' u}{\tau u}$, a wreszcie $\rho u = -\zeta' u$. Aby oznaczyć funkcje, odpowiadające niezmiennikom g_2 i g_3 , używać będziemy symbolów

$$\rho(u; g_2, g_3), \quad \zeta(u; g_2, g_3), \quad \tau(u; g_2, g_3).$$

W tym miejscu nasuwa się zagadnienie o znaczeniu podstawowym. Jeżeli jest to oczywiste, że względu na sam sposób tworzenia się funkcji ρu , że każdemu układowi (ω, ω') odpowiada funkcja eliptyczna ρu , byleby tylko stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ nie był rzeczywisty, nie nie przekonywa z góry, że *wszelkiemu* układowi g_2 , g_3 wartości niezmienników odpowiada również pewna funkcja eliptyczna. Wiemy wprawdzie, że wyrażenie $g_2^3 - 27 g_3^2$ winno być różne od zera, niema jednak pewności, czy ten warunek jest wystarczający. Zagadnienie, o które tu chodzi, polega w swej istocie na rozwiązaniu uzasadnionych powyżej równań przestępnych

$$(61) \quad \begin{aligned} g_2 &= 60 \sum' \frac{1}{(2m\omega + 2m'\omega')^4}, \\ g_3 &= 140 \sum' \frac{1}{(2m\omega + 2m'\omega')^6} \end{aligned}$$

względem niewiadomych ω i ω' , lub przynajmniej na rozpoznaniu, czy w tym przypadku, gdy $g_2^3 - 27 g_3^2$ nie jest równe zeru, równania te posiadają taki układ rozwiązań, iżby stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ nie był rzeczywisty.

Jeżeli istnieje jeden układ rozwiązań, to istnieje również nieskończenie wiele innych układów, lecz zbadanie bezpośrednio powyższych równań wydaje się niedostępnym. Osiągamy rozwiązanie zagadnienia w sposób uboczny, badając z początku zagadnienie co do odwracania całki eliptycznej pierwszego gatunku.

Uwaga. — Weźmy dwie takie liczby zespolone ω i ω' , iż stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$ nie jest rzeczywisty. Odpowiednia funkcja $\rho(u | \omega, \omega')$ czyni zadość równaniu różniczkowemu

$$\left(\frac{d\rho u}{du} \right)^2 = 4\rho^3 - g_2\rho - g_3,$$

w którym g_2 i g_3 mają wartości, wyznaczone przez równanie (61). Przy $u = \omega$, wartość ρ_ω funkcji ρu jest równa jednemu z pierwiastków, e_1 , równania

$$4\rho^3 - g_2\rho - g_3 = 0.$$

Gdy u zmienia się od 0 do ω , ρu zakreśla linię L , ciągnącą się od nieskończoności do punktu e_1 ; ze związku

$$du = \frac{d\rho}{\sqrt{4\rho^3 - g_2\rho - g_3}}$$

wnioskujemy, że półokres ω równa się całce określonej

$$\int_{\omega}^{e_1} \frac{d\rho}{\sqrt{4\rho^3 - g_2\rho - g_3}},$$

wziętej wzdłuż linii L . Dla ω' otrzymujemy wyrażenie analogiczne, zastępując w tej całce e_1 przez e_2 .

Wyrażamy w ten sposób oba półokresy ω i ω' w zależności od niezmienników g_2 i g_3 . Aby móc wysnuć stąd rozwiązanie zajmującego nas zagadnienia, należałoby uzasadnić, że ten nowy układ jest *równoważny* układowi (61), t. j. iż określa g_2 i g_3 jako funkcje jednowartościowe półokresów ω , ω' .

336. Funkcja odwrotna względem całki eliptycznej pierwszego gatunku. — Niech $R(z)$ oznacza wielomian trzeciego lub czwartego stopnia, pierwszy względem swej pochodnej.

Możemy go napisać ogólnie w postaci

$$R(z) = A(z - x_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4);$$

przytym a_1, a_2, a_3, a_4 oznaczają cztery różne pierwiastki, gdy $R(z)$ jest wielomianem czwartego stopnia; gdy zaś $R(z)$ jest wielomianem trzeciego stopnia, to oznaczać będziemy jego trzy pierwiastki przez a_1, a_2, a_3 i zakładać ponad to, że $a_4 = \infty$, z tym zastrzeżeniem, że w wyrażeniu powyższym $z - \infty$ ma być zastąpione przez jedność. Całka eliptyczna pierwszego gatunku posiada kształt:

$$(62) \quad u = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}};$$

zakładamy przytym, w celu ustalenia uwagi, że początek drogi całkowania z_0 jest różny od punktów zerowych funkcji $R(z)$ i położony w odległości skończonej, i że pierwiastkowi została nadana określona wartość początkowa. Gdy $R(z)$ jest wielomianem czwartego stopnia, pierwiastek $\sqrt{R(z)}$ posiada cztery punkty krytyczne a_1, a_2, a_3 i a_4 , i dla każdej wartości tego pierwiastka punkt $z = \infty$ jest biegunem drugiego rzędu.

Gdy $R(z)$ jest wielomianem trzeciego stopnia, pierwiastek $\sqrt{R(z)}$ posiada już tylko trzy punkty krytyczne a_1, a_2, a_3 w odległości skończonej; lecz gdy punkt z zakreśla okrąg, otaczający punkty a_1, a_2, a_3 , dwie wartości pierwiastka przechodzą nawzajem jedna w drugą. Punkt $z = \infty$ jest tedy w tym przypadku punktem rozgałęzienia funkcji $\sqrt{R(z)}$.

Przypomnijmy sobie jeszcze uzasadnione już własności całki eliptycznej u (art. 313). Jeżeli $\overline{u(z)}$ oznacza jedną z wartości, przybieranych przez tę całkę, gdy się idzie po pewnej określonej drodze od punktu z do punktu z , to całka ta może przybrać w tym samym punkcie u nieskończenie wiele wartości, zawartych we wzorach:

$$(63) \quad z = \overline{u(z)} + 2m\omega + 2m'\omega', \quad u = l - \overline{u(z)} + 2m\omega + 2m'\omega'.$$

We wzorach tych m i m' oznaczają dwie liczby całkowite, zupełnie dowolne, 2ω i $2\omega'$ — dwa okresy, których stosunek nie jest rzeczywisty, a l — stałą, którą można np. uważać za równą całce, wziętej wzdłuż pętli, zakreślonej dokoła punktu a_1 .

Weźmy funkcję eliptyczną $\rho(u | \omega, \omega')$, wyznaczoną przez okresy 2ω , $2\omega'$ całki eliptycznej (62). Zastąpmy w tej funkcji zmienną u przez samą całkę (62), zmniejszoną o $\frac{1}{2}$, i oznaczmy funkcję, otrzymaną w ten sposób, przez $\Phi(z)$:

$$(64) \quad \Phi(z) = \rho \left[\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} - \frac{l}{2} \mid \omega, \omega' \right] = \rho \left(u - \frac{l}{2} \mid \omega, \omega' \right).$$

Owa funkcja $\Phi(z)$ jest funkcją jednowartościową zmiennej z . W istocie, gdy zastąpimy u przez którąkolwiek z wartości (63), otrzymamy zawsze, przy dowolnych wartościach m i m'

$$\Phi(z) = \rho \left[\overline{u(z)} - \frac{l}{2} \mid \omega, \omega' \right] \quad \text{czyli} \quad \Phi(z) = \rho \left[\frac{l}{2} - \overline{u(z)} \mid \omega, \omega' \right],$$

czyli wciąż tę samą wartość $\Phi(z)$.

Poszukajmy punktów osobliwych tej funkcji $\Phi(z)$. Weźmy z początku wartość skończoną z_1 zmiennej z , nie odpowiadającą punktowi rozgałęzienia, i przypuśćmy, że idziemy po pewnej określonej drodze od punktu z_0 do punktu z_1 . W punkcie tym otrzymujemy pewną określoną wartość pierwiastka i pewną wartość u_1 całki. W otoczeniu punktu z_1 $\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$ jest funkcją całokształtną zmiennej z , i możemy ją rozwinąć w szereg o postaci następującej:

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = \alpha_0 + \alpha_1(z - z_1) + \alpha_2(z - z_1)^2 + \dots, \quad [z_0 \neq 0],$$

skąd wynika

$$(65) \quad u = u_1 + \alpha_0(z - z_1) + \frac{\alpha_1}{1 \cdot 2}(z - z_1)^2 + \dots$$

Jeżeli $u_1 - \frac{1}{2}$ nie równa się żadnemu z okresów, to funkcja $\rho\left(u - \frac{1}{2}\right)$ jest całokształtna w otoczeniu punktu u_1 , i przeto funkcja $\Phi(z)$ jest całokształtna w otoczeniu punktu z_1 . Jeżeli $u_1 - \frac{1}{2}$ stanowi okres, to punkt u_1 jest dla $\rho\left(u - \frac{1}{2}\right)$ biegunem drugiego rzędu, i za tym punkt z_1 jest biegunem drugiego rzędu dla $\Phi(z)$, gdyż w otoczeniu punktu u_1 , przy oznaczeniu przez P pewnej funkcji całokształtnej, mamy w tym przypadku związek:

$$\rho\left(u - \frac{1}{2}\right) = \frac{P(u - u_1)}{(u - u_1)^2}.$$

Załóżmy dalej, że punkt z dąży do punktu krytycznego a_i . W otoczeniu punktu a_i

$$[R(z)]^{-\frac{1}{2}} = (z - a_i)^{-\frac{1}{2}} P_i(z - a_i)$$

$$[P_i - \text{funkcja całokształtna dla } z = a_i]$$

czyli

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = \frac{1}{\sqrt{z - a_i}} [x_0 + x_1(z - a_i) + x_2(z - a_i)^2 + \dots], \quad [x_0 \neq 0];$$

całkując wyraz po wyrazie, otrzymujemy stąd:

$$(66) \quad u = u_i + \sqrt{z - a_i} \left[2x_0 + \frac{2}{3}x_1(z - a_i) + \dots \right].$$

Jeżeli $u_i - \frac{1}{2}$ nie jest okresem, $\rho\left(u - \frac{1}{2}\right)$ stanowi funkcję całokształtną zmiennej u w otoczeniu punktu u_i . Gdy zastąpimy w szeregu potęg różnicy $u - u_i$, wyrażającym tę funkcję, $u - u_i$ przez wartość tej różnicy, otrzymaną z wzoru (66), to potęgi ułamkowe różnicy $z - a_i$ będą musiały zniknąć, gdyż, jak wiemy, lewa strona jest funkcją jednowartościową zmiennej z , i funkcja $\Phi(z)$ okaże się całokształtną w otoczeniu punktu a_i . Jest to wskazówką — co zauważmy przy sposobności — że różnica $u_i - \frac{1}{2}$ musi być równą półokresowi. Stwierdzamy w podobny sposób, iż jeżeli $u_i - \frac{1}{2}$ równa się jednemu z okresów, punkt a_i jest dla $\Phi(z)$ biegunem pierwszego rzędu.

Zbadajmy wreszcie zachowanie się funkcji $\Phi(z)$ przy wartościach nieskończonych zmiennej z . Musimy tu odróżnić dwa przypadki, stosownie do tego, czy $R(z)$ jest wielomianem czwartego czy trzeciego stopnia. Jeżeli jest to wielomian czwartego stopnia, to nazewnątrż koła C , zakreślonego dokoła początku układu i zawierającego wszystkie cztery pierwiastki, każda z wartości wyrażenia $\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$ stanowi funkcję całokształtną ułamka $\frac{1}{z}$. Mamy np., dla jednej z nich

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = \frac{\alpha_0}{z^2} + \frac{\alpha_1}{z^3} + \frac{\alpha_2}{z^4} + \dots, \quad [\alpha_0 \neq 0].$$

i wystarczy tylko zmienić wszystkie znaki, ażeby otrzymać szereg, wyrażający drugą wartość. Jeżeli moduł zmiennej z wzrasta nieograniczenie, a pierwiastkowi $\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$ nadajemy wartość, wyrażoną przed chwilą, to całka u dąży do pewnej wartości skończonej u_∞ , i w otoczeniu punktu w nieskończoności

$$(67) \quad u = u_\infty - \frac{\alpha_0}{z} - \frac{\alpha_1}{2z^2} - \frac{\alpha_2}{3z^3} - \dots$$

Jeżeli $u_\infty - \frac{1}{2}$ nie jest jednym z okresów, funkcja $\rho\left(u - \frac{1}{2}\right)$ jest w punkcie u_∞ regularna, a więc punkt $z = \infty$ jest dla $\Phi(z)$ punktem zwyczajnym. Jeżeli wartość $u_\infty - \frac{1}{2}$ jest okresem, to punkt u_∞ jest dla $\rho\left(u - \frac{1}{2}\right)$ biegunem drugiego rzędu, i, ponieważ możemy napisać dla otoczenia punktu $z = \infty$

$$\frac{1}{u - u_0} = z \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \dots \right),$$

punkt $z = \infty$ jest również biegunem drugiego rzędu funkcji $\Phi(z)$.

Jeżeli $R(z)$ jest wielomianem trzeciego stopnia, to zewnątrz koła, mającego za środek początek układu i zawierającego trzy punkty krytyczne a_1, a_2, a_3 , jest ważne rozwinięcie w szereg o postaci następującej

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots \right), \quad [\alpha_0 \neq 0],$$

a przeto

$$(68) \quad u = u_x - \frac{1}{Vz} \left(2\alpha_0 + \frac{2\alpha_1}{3} \frac{1}{z} + \dots \right).$$

Rozumując tak samo, jak powyżej, stwierdzamy, że punkt w nieskończoności jest dla $\Phi(z)$ punktem zwyczajnym lub biegunem pierwszego rzędu. Ostatecznie funkcja $\Phi(z)$ ma z punktów osobliwych tylko bieguny; jest to tedy funkcja wymierna zmiennej z , i całka eliptyczna pierwszego gatunku (62) spełnia związek o postaci

$$(60) \quad \rho \left(u - \frac{1}{2} \right) = \Phi(z),$$

w którym $\Phi(z)$ jest funkcją wymierną. Nie znamy jeszcze stopnia tej funkcji; okażemy, że stopień ten równa się jedności, i w tym celu będziemy badali funkcję odwrotną. Innymi słowy, będziemy teraz uważali u za zmienną niezależną i poszukiwali własności granicy wyższej z całki (62), uważanej za funkcję tej całki. Podzielimy to badanie, dość trudne, na kilka części:

1. *Wszelkiej wartości skończonej zmiennej u odpowiada m wartości zmiennej z , jeżeli m równa się stopniowi funkcji wymiernej $\Phi(z)$.*

Niech, istotnie, u_1 oznacza pewną wartość skończoną zmiennej u ; równanie

$$\Phi(z) = \rho \left(u_1 - \frac{1}{2} \right)$$

wyznacza m wartości zmiennej z , w ogólności różnych i skończonych, acz może się zdarzyć przy pewnych szczególnych wartościach u_1 , iż niektóre z tych pierwiastków staną się równymi sobie lub nieskończonemi. Niech z_1 oznacza jedną z tych wartości zmiennej z ; wartości całki eliptycznej u , odpowiadające tej wartości zmiennej z , czynią zadość równaniu:

$$\rho \left(u - \frac{1}{2} \right) = \Phi(z_1) = \rho \left(u_1 - \frac{1}{2} \right).$$

Mamy tedy jeden z dwu związków:

$$u = u_1 + 2m_1\omega + 2m_2\omega', \quad u = l - u_1 + 2m_1\omega + 2m_2\omega';$$

w obu przypadkach punkt z może zakreślić taką drogę, idącą od punktu z_0 do z_1 , iżby wartość całki, wzięta wzdłuż tej drogi, była równa właśnie u_1 . Jeżeli tedy $\Phi(z)$ jest funkcją stopnia m , to istnieje m wartości zmiennej z , dla których całka (62) przybiera daną wartość u .

2. Weźmy wartość skończoną u_1 zmiennej u , której odpowiada wartość skończona z_1 zmiennej z ; *wartość zmiennej z , dążąca do z_1 , gdy u dąży do u_1 , stanowi funkcję całokształtną zmiennej u w otoczeniu punktu u_1 .*

W istocie, jeżeli punkt z_1 nie jest punktem krytycznym, wartości zmiennych u i z , dążące odpowiednio do u_1 i z_1 , są związane przez wzór (65), uzasadniony przed chwilą, w którym współczynnik α_0 nie równa się zero. Według twierdzenia ogólnego o funkcjach uwikłanych (t. I, art. 193), wysnuwamy stąd nawzajem rozwinięcie różnicy $z - z_1$ w szereg potęg całkowitych i dodatnich różnicy $u - u_1$.

Gdyby przy jakiejś wartości szczególnej u_i zmienna z przybierała wartość krytyczną a_i , to możnaby również uważać prawą stronę wzoru (66) za szereg potęg pierwiastka $\sqrt{z - a_i}$; ponieważ α_0 nie równa się zero, otrzymamy stąd nawzajem rozwinięcie pierwiastka $\sqrt{z - a_i}$, a więc i różnicy $z - a_i$ w szereg potęg całkowitych różnicy $u - u_i$.

3. Niech u_∞ oznacza jedną z wartości, które przybiera całka u , gdy $|z|$ wzrasta nieograniczenie; *punkt u_∞ jest biegunem dla wartości zmiennej z , której moduł wzrasta nieograniczenie.*

Istotnie, wartość całki u , która dąży do u_∞ , wyraża się w otoczeniu punktu w nieskończoności przez jeden lub drugi z szeregów (67) i (68). W pierwszym przypadku otrzymamy rozwinięcie odwrotności $\frac{1}{z}$ w szereg, uporządkowany względem potęg różnicy $u - u_\infty$

$$\frac{1}{z} = \beta_1(u - u_\infty) + \beta_2(u - u_\infty)^2 + \dots, \quad [\beta_1 \neq 0];$$

w drugim można będzie rozwinąć w ten sam sposób $\frac{1}{\sqrt{z}}$, a przeto:

$$\frac{1}{z} = (u - u_\infty)^2 [\beta_1 + \beta_2(u - u_\infty) + \dots]^2.$$

Punkt u_∞ jest tedy biegunem pierwszego lub drugiego rzędu, stosownie do tego, czy $R(z)$ jest wielomianem czwartego czy trzeciego stopnia.

4. Uzasadnijmy wreszcie, że *jednej wartości zmiennej u nie może odpowiadać więcej niż jedna wartość zmiennej z .* W istocie, przypuśćmy, że przy zakresłaniu przez punkt z dwu dróg, wiodących od punktu z_0 do dwu różnych punktów z_1 i z_2 , otrzymujemy równe wartości całki.

Możnaby w takim razie znaleźć drogę L , łączącą punkty z_1 i z_2 i taką, zby całka $\int_L \frac{dz}{R(z)}$ była równa zeru. Przy wyobrażaniu całki

$$u = X + iY$$

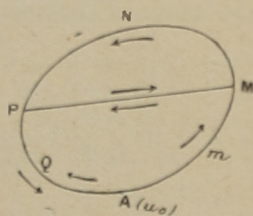
przez punkt o współrzędnych (X, Y) w układzie osi współrzędnych OX, OY punkt u zakresliłby krzywą zamkniętą Γ , gdy punkt z zakresła krzywą niezamkniętą L . Owóż jest to niezgodne z własnościami, uzasadnionemi przed chwilą, jak zaraz dowiedzimy.

Każdej wartości zmiennej u związek

$$\rho\left(u - \frac{1}{2}\right) = \Phi(z)$$

podporządkowuje liczbę *skończoną* wartości zmiennej z , z których każda zmienia się wraz z u w sposób ciągły, o ile tylko droga, zakresłana przez u , nie przechodzi przez żaden z punktów, odpowiadających wartości $z = \infty$ ⁽¹⁾. Według tego, cośmy założyli, gdy punkt u przebiega w swej płaszczyźnie krzywą zamkniętą Γ , wychodząc z punktu $A(u_0)$ i wracając do tego samego miejsca, punkt z zakresła łuk ciągły i niezamknięty, wiodący od punktu z_1 do punktu z_2 . Weźmy na krzywej Γ wa punkty M i P (rys. 73), i niech z', z'' oznaczają wartości, które się

Rys. 73.



osiąga w tych punktach, gdy przy wartości początkowej z_1 zmiennej z punkt u zakresła odpowiednio drogi AM i $AMNP$. Oznaczmy jeszcze przez z_1'' wartość, osiąganą w punkcie P w tym przypadku, gdy u zakresła łuk AQP ; zgodnie z założeniem, z' i z_1'' są różne. Połączmy punkty M i P linią poprzeczną MP , zawartą wewnątrz obwodu Γ i wyobraźmy sobie, że punkt u zakresła z początku łuk AmM , a potem poprzeczną MP ; niech z_2'' oznacza wartość, z którą się przybywa do punktu P .

⁽¹⁾ Uznajemy tu za prawdziwe własności funkcji uwiklanych, które zostaną uzasadnione później (w rozdz. XVII).

Wartość ta musi być różną albo od z'' albo od z_1'' . Jeżeli jest różna od z_1'' , to drogi $AmMP$ i AQP nie wiodą do tej samej wartości z w punkcie P . Jeżeli z'' i z_2'' nie są równe, to drogi $AmMP$ i $AmMNP$ nie wiodą do tej samej wartości w punkcie P ; więc gdy się wychodzi z punktu M z wartością z' zmiennej z i podąża do P drogą MP lub drogą MNP , otrzymuje się różne wartości zmiennej z .

W obu przypadkach stwierdzamy, iż można zastąpić obwód zamknięty Γ przez mniejszy obwód zamknięty Γ_1 , zawarty częściowo wewnątrz Γ i taki, że gdy u zakresła go, punkt z przebiega łuk niezamknięty. Powtarzając to samo postępowanie w stosunku do obwodu Γ_1 , i tak dalej nieograniczenie, otrzymalibyśmy ciąg nieograniczony obwodów zamkniętych $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2, \dots$, posiadających tę samą własność, co pierwszy obwód Γ . Można oczywiście uczynić to w taki sposób, iżby wymiary tych następujących po sobie obwodów malały nieograniczenie, a w takim razie obwód Γ_n dąży do punktu granicznego λ . Stosownie do sposobu, w który został określony ten punkt, wewnątrz wszelkiego koła o promieniu ε , *dowolnie małym*, i środka w punkcie λ istniałaby zawsze jakaś droga zamknięta, nie przywracająca zmiennej z jej wartości początkowej. Owóż jest to niemożliwe, gdyż punkt λ jest dla różnych wartości zmiennej z punktem zwyczajnym lub biegunem; w obu przypadkach z jest funkcją jednowartościową zmiennej u w sąsiedztwie punktu λ . Przypuszczając tedy, że całka $\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$, wzięta wzdłuż linii niezamkniętej L , może być równą zeru lub, co wychodzi na jedno, że jednej wartości zmiennej u odpowiadają dwie różne wartości zmiennej z , dochodzimy do sprzeczności.

Zauważyliśmy już powyżej, iż jeżeli dla dwu wartości odmiennych z_1 i z_2 zmiennej z zachodzi równość: $\Phi(z_1) = \Phi(z_2)$, wówczas można znaleźć taką drogę L , wiodącą od z_1 do z_2 , iżby całka $\int_L \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ równała się zeru. Potrzeba tedy, iżby funkcja wymierna $\Phi(z)$ nie mogła przybrać tej samej wartości przy dwu różnych wartościach zmiennej z , t. j. iżby była to funkcja pierwszego stopnia:

$$\Phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Wobec tego ze związku (69) wynika co następuje:

$$(70) \quad z = \frac{b - d p \left(u - \frac{1}{2} \right)}{c p \left(u - \frac{1}{2} \right) - a},$$

i dochodzimy do takiego ważnego twierdzenia: *Granica wyższa całki eliptycznej pierwszego gatunku, brana jako funkcja tej całki, jest funkcją eliptyczną drugiego rzędu.*

Teoria całek eliptycznych była zgłębianą przez Legendre'a; odwracając to zagadnienie, Abel i Jacobi doszli do odkrycia funkcji eliptycznych.

Rzeczywiste wyznaczanie funkcji eliptycznej $z = f(u)$ stanowi zagadnienie, zwane *odwracaniem* czyli *inwersją* (problème de l'inversion).

Ze związku (62) wynika

$$\frac{dz}{du} = \sqrt{R(z)},$$

a przeto $\sqrt{R(z)} = f'(u)$. Widzimy, iż sam pierwiastek $\sqrt{R(z)}$ jest również funkcją eliptyczną zmiennej u . W języku geometrycznym można streścić wszystkie poprzednie wyniki w sposób następujący:

Niech $R(x)$ oznacza wielomian trzeciego lub czwartego stopnia, pierwszy względem swej pochodnej; spółrzedne jakiegokolwiek punktu krzywej C ,

$$(71) \quad y^2 = R(x),$$

dają się wyrazić zapomocą funkcji eliptycznych całki pierwszego gatunku

$$u = \int_{x_0}^x \frac{dx}{y} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$$

w taki sposób, iż każdemu punktowi (x, y) tej krzywej odpowiada tylko jedna wartość u , o ile się nie zważa na różnicę, równą dowolnemu okresowi.

Ażeby uzasadnić część ostatnią twierdzenia, wystarczy zauważyć, że wszystkie wartości całki u , odpowiadające danej wartości x , są dane przez wzory

$$u_0 + 2m_1\omega + 2m_2\omega', \quad l - u_0 + 2m_1\omega + 2m_2\omega'.$$

Wszystkie wartości całki u , zawarte w pierwszym wzorze, pochodzą od liczby parzystej pętli, zakreślonych dokoła punktów krytycznych, wraz z drogą bezpośrednią, wiodącą od x_0 do x , i odpowiadają tej samej wartości pierwiastka $\sqrt{R(x)}$. Wartości całki u , dane przez drugi wzór, powstają za pomocą zakreślenia dokoła punktów krytycznych liczby nieparzystej pętli oraz drogi bezpośredniej od x_0 do x ; odpowiednia wartość pierwiastka $\sqrt{R(x)}$ jest przeciwna względem pierwszej. Jeżeli tedy mamy

dane jednocześnie x i y , odpowiednich wartości szukać należy tylko w jednym z tych wzorów,

Z obliczeń, wykonanych powyżej, wynika, że funkcja eliptyczna $x = f(u)$ posiada w równoległoboku elementarnym jeden biegun podwójny, jeżeli $R(x)$ jest wielomianem trzeciego stopnia, a dwa bieguny pierwszego rzędu, jeżeli $R(x)$ jest wielomianem czwartego stopnia; $y = f'(u)$ jest tedy funkcją trzeciego lub czwartego rzędu stosownie do stopnia wielomianu $R(x)$.

Uwaga. — Załóżmy, iż współrzędne (x, y) punktu krzywej $y^2 = R(x)$ zostały w jakikolwiek sposób wyrażone zapomocą funkcji eliptycznych parametru v , a mianowicie $x = \varphi(v)$, $y = \varphi_1(v)$. Całka eliptyczna pierwszego gatunku przybiera wówczas postać:

$$u = \int \frac{dx}{y} = \int \frac{\varphi'(v) dv}{\varphi_1(v)};$$

funkcja eliptyczna $\frac{\varphi'(v)}{\varphi_1(v)}$ nie może posiadać biegunów, ponieważ u winno zachowywać wartość skończoną przy wszelkiej wartości skończonej zmiennej v ; jest to tedy stała k , i $u = kv + l$. Stała l zależy oczywiście od wartości, obranej jako granica niższa całki u ; co do współczynnika k , wystarczy w celu wyznaczenia tegoż nadać zmiennej v jakąś wartość szczególną.

337. Nowe określenie funkcji $\wp u$ za pomocą niezmienników. — Bardzo łatwo obecnie odpowiedzieć na pytanie, postawione powyżej (art. 325). Przypuśćmy, że są dane dwie takie liczby g_2 i g_3 , iż $g_2^3 - 27g_3^2$ nie równa się zeru: *istnieje zawsze taka funkcja eliptyczna $\wp u$, której niezmiennikami są g_2 i g_3 .* Istotnie, wielomian

$$R(z) = 4z^3 - g_2z - g_3,$$

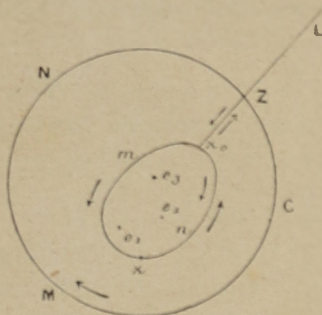
jest pierwszy względem swej pochodnej, i całka eliptyczna $\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ posiada dwa okresy 2ω , $2\omega'$, których stosunek jest liczbą urojoną. Niech $\wp(u | \omega, \omega')$ oznacza odpowiednią funkcję eliptyczną. Zastąpmy w tej funkcji u przez całkę $\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} - H$:

$$\wp(u) = \wp\left(\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} - H\right);$$

H ma tu oznaczać stałą, obraną w ten sposób, iżby jedna z wartości funkcji $\wp$ przy $z = \infty$ była równa zeru. Można wziąć np. półprostą

nieograniczoną L , wychodzącą z punktu z_0 i nadać liczbie H wartość całki $\int_{z_0}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$, wziętej wzdłuż tej półprostej L . Wykażmy przedewszystkiem, że funkcja, otrzymana w ten sposób, jest funkcją jednowartościową

Rys. 74.



zmiennej z . Weźmy dowolny punkt płaszczyzny z ; oznaczmy przez v i v' wartości całek

$$v = \int_{(z_0 m z)} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad v' = \int_{(z_0 n z)} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

branych z tą samą wartością początkową pierwiastka $\sqrt{R(z)}$ wzdłuż dwu dróg $z_0 m z$, $z_0 n z$, które tworzą łącznie obwód zamknięty, otaczający trzy punkty krytyczne e_1, e_2, e_3 pierwiastka. Weźmy obwód zamknięty $z_0 m z n z_0$, utworzony przez obwód $z_0 m n z z_0$, odcinek $z_0 Z$, okrąg C o promieniu bardzo wielkim i odcinek $Z z_0$.

Wewnątrz tego obwodu funkcja $\frac{1}{\sqrt{R(z)}}$ jest całokształtna, i mamy związek

$$v + v' - \int_{z_0}^Z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \int_{(C)} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} - \int_{z_0}^Z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = 0,$$

który przy wzroście nieskończonym promienia koła C przybiera postać:

$$v + v' - 2H = 0.$$

Wartości całki u , otrzymane na dwu drogach $z_0 m z$, $z_0 n z$, czynią tedy zadość warunkowi $u + u' = 0$. Wnioskujemy stąd, że funkcja

$$p(u | \omega, \omega') = p\left(\int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} - H | \omega, \omega'\right).$$

jest funkcją jednowartościową zmiennej z . Stwierdziliśmy już, że jest to funkcja linjowa o postaci $\frac{az+b}{cz+d}$. Ażeby wyznaczyć a, b, c i d , wystarczy zbadać rozwinięcie tej funkcji w otoczeniu punktu w nieskończoności. Owóż w tym obszarze

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = \frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{g_2}{4z^2} - \frac{g_3}{4z^3} \right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}} + \frac{g_2}{16z^{\frac{5}{2}}} + \dots;$$

wartość całki u , równa zero dla z nieskończonego, wyraża się tedy zapomocą szeregu

$$u = -\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{g_2}{40z^2} + \dots \right).$$

Otrzymujemy stąd

$$\frac{1}{u^2} = z \left(1 + \frac{g_2}{40z^2} + \dots \right)^{-2} = z - \frac{g_2}{20z} + \dots,$$

tak iż różnica $\wp u - z$ równa się zero przy $z = \infty$. Lecz różnica $\frac{az+b}{cz+d} - z$ może się stać zerem przy wartości nieskończonej zmiennej z jedynie wtedy, gdy $c=0$, $b=0$, $a=d$, i funkcja $\wp(u | \omega, \omega')$ po zastąpieniu zmiennej u przez całkę (72) staje się tożsamościowo równą z . Biorąc za granicę niższą tej całki sam punkt w nieskończoności, możemy ją jeszcze napisać w postaci

$$(72') \quad u = \int_{\infty}^z \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

i związek ten pociąga za sobą związek $\wp u = z$, przy założeniu, że funkcja $\wp u$ została utworzona w ten sposób, iż jej okresami są okresy $2\omega, 2\omega'$ całki $\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$. Porównyując wartości pochodnej $\frac{du}{dz}$, wysnute z tych związków, otrzymujemy $\wp' u = \sqrt{R(z)}$ czyli po podniesieniu do kwadratu

$$(73) \quad \wp'^2 u = R(z) = 4\wp^3 u - g_2 \wp u - g_3.$$

Liczby g_2, g_3 są niezmiennikami funkcji eliptycznej $\wp u$, wyznaczonej przez okresy $2\omega, 2\omega'$. W ten sposób zagadnienie, postawione wyżej (art. 335), zostaje rozwiązane. Jeżeli $g_2^3 - 27g_3^2$ nie równa się zero, równania (61) są spełnione przez nieskończenie wiele układów wartości ω, ω' . Niech e_1, e_2, e_3 oznaczają pierwiastki równania

$$R(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 0;$$

otrzymamy jeden układ rozwiązań, biorąc np.

$$(74) \quad \omega = \int_{c_1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad \omega' = \int_{c_2}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}};$$

stąd zaś dadzą się wyznaczyć, jak zostało wyjaśnione, wszystkie inne układy rozwiązań.

W zastosowaniach teorii funkcji eliptycznych funkcja ρu bywa najczęściej określona przez swe niezmienniki. Ażeby wykonać rachunki liczbowe, należy umieć obliczyć przy pomocy g_2 i g_3 jeden układ okresów i ponadto umieć znaleźć jeden z pierwiastków równania $\rho u = A$, gdy jest dana stała A . Co do szczegółów metody, której się tu używa, zarówno jak co do wszystkiego, co dotyczy zastosowania tablic, możemy jedynie polecić czytelnikom udanie się do dzieł specjalnych (¹).

338. Zastosowanie do krzywych płaskich trzeciego rzędu. — Jeżeli wyrażenie $g_2^3 - 27g_3^2$ nie jest równe zeru, to równanie

$$(75) \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

odpowiada krzywej trzeciego rzędu bez punktu podwójnego. Czynimy załóżkę temu równaniu, zakładając $x = \rho u$, $y = \rho' u$, z warunkiem, że niezmiennikami użytej funkcji ρu są właśnie dane liczby g_2 i g_3 . Każdemu punktowi krzywej odpowiada w każdym równoległoboku elementarnym jedna wartość zmiennej u . Istotnie, równanie $\rho u = x$ posiada w równoległoboku dwa pierwiastki u_1 i u_2 ; suma $u_1 + u_2$ stanowi okres i wartości $\rho' u_1$, $\rho' u_2$ są przeciwne. Wartości te równają się zatem odpowiednio dwu wartościom spółrzędnej y , odpowiadającym tej samej wartości spółrzędnej x .

Ogólnie, spółrzędne punktu krzywej płaskiej trzeciego rzędu bez punktu podwójnego dają się wyrazić zapomocą funkcji eliptycznych jednego parametru. Wiemy, w istocie, iż przy pomocy przekształcenia homograficznego można nadać równaniu krzywej trzeciego rzędu postać (75), lecz przekształcenie to może być wykonane tylko wówczas, gdy znamy jeden z punktów przegięcia krzywej, których wyznaczenie zależy od rozwiązania pewnego równania dziewiątego stopnia, o szczególnej postaci. Wykażemy, iż można otrzymać równania parametryczne krzywej trzeciego rzędu, zawierające funkcje eliptyczne, bez rozwiązywania żadnego równania, bylebyśmy tylko znali spółrzędne jednego punktu krzywej.

(¹) Wzór (39), wyrażający σu w postaci szeregu potęgowego, oraz wzory, które otrzymamy zeń przez różniczkowanie, umożliwiają, bodaj teoretycznie, obliczanie funkcji σu , $\sigma' u$, $\sigma'' u$, a zatem i funkcji ζu i ρu , dla wszystkich układów wartości u , g_2 , g_3 .

Założmy z początku, że równanie krzywej trzeciego rzędu ma postać

$$(76) \quad y^2 = b_0 x^3 + 3 b_1 x^2 + 3 b_2 x + b_3,$$

co wymaga, by punkt w nieskończoności był punktem przegięcia. Równaniu temu możemy nadać postać poprzednią, zakładając:

$$y = \frac{4}{b_0} y', \quad x = -\frac{b_1}{b_0} + \frac{4}{b_0} x',$$

skąd powstaje równanie

$$y'^2 = 4 x'^3 - g_2 x' - g_3,$$

w którym niezmienniki g_2 i g_3 posiadają odpowiednio wartości:

$$g_2 = \frac{12 (b_1^2 - b_0 b_2)}{16}, \quad g_3 = \frac{3 b_0 b_1 b_2 - 2 b_1^3 - b_0^2 b_3}{16}.$$

Dla spólrzędnych punktu krzywej trzeciego rzędu (76) otrzymujemy tedy wyrażenia:

$$x = -\frac{b_1}{b_0} + \frac{4}{b_0} \rho u, \quad y = \frac{4}{b_0} \rho' u.$$

Weźmy teraz jakąś dowolną krzywą trzeciego rzędu C_3 , i niech (α, β) oznaczają spólrzędne pewnego jej punktu. Styczna do krzywej w tym punkcie (α, β) spotyka ją jeszcze w innym punkcie (α', β') , którego spólrzędne można otrzymać w postaci wymiernej. Jeżeli ten punkt (α', β') jest wzięty za początek układu spólrzędnych, to, oznaczając ogólnie przez $\varphi_i(x, y)$ wielomian jednorodny stopnia i ($i = 1, 2, 3$), możemy napisać równanie krzywej sześcienniej w sposób następujący

$$\varphi_3(x, y) + \varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) = 0.$$

Wprowadźmy sieczną $y = tx$; odcięte dwu punktów przecięcia są wyznaczone przez równanie drugiego stopnia

$$x^2 \varphi_3(1, t) + x \varphi_2(1, t) + \varphi_1(1, t) = 0,$$

skąd, oznaczając przez $R(t)$ wielomian

$$\varphi_2^2(1, t) - 4 \varphi_3(1, t) \varphi_1(1, t),$$

w ogólności czwartego stopnia, otrzymujemy

$$x = \frac{-\varphi_2(1, t) + \sqrt{R(t)}}{2 \varphi_3(1, t)}, \quad y = tx.$$

Pierwiastki wielomianu $R(t)$ są to właśnie współczynniki kątowe stycznych do krzywej trzeciego rzędu, przechodzących przez początek układu. Jeden z tych pierwiastków znamy z góry, a mianowicie współczynnik kątowy t_0 prostej, łączącej początek układu z punktem (α, β) . Zakładając $t = t_0 + \frac{1}{t'}$, otrzymujemy

$$\sqrt{R(t)} = \frac{\sqrt{R_1(t')}}{t'^2};$$

$R_1(t')$ jest tu wielomianem trzeciego stopnia. Spółrzędne (x, y) punktu bieżącego krzywej trzeciego rzędu C_3 dają się tedy wyrazić w sposób wymierny w zależności od parametru t' i pierwiastka kwadratowego z wielomianu trzeciego stopnia $R_1(t')$. Widzieliśmy już, w jaki sposób można wyrazić t' i $\sqrt{R_1(t')}$ zapomocą funckji eliptycznych pewnego parametru u ; więc x i y otrzymać możemy również w postaci funckji eliptycznych tegoż parametru u .

Zgodnie z użytym sposobem postępowania punktowi (x, y) krzywej trzeciego rzędu odpowiadają: jedna tylko wartość zmiennej t i dokładnie określona wartość pierwiastka $\sqrt{R(t)}$, a przeto i dokładnie określone wartości zmiennej t' i pierwiastka $\sqrt{R_1(t')}$. Owóż każdemu układowi wartości t' i $\sqrt{R_1(t')}$ odpowiada, jak już zauważyliśmy, tylko jedna wartość parametru u w równoległoboku elementarnym. Wyrażenia $x = f(u)$ i $y = f_1(u)$, otrzymane dla spółrzędnych punktu bieżącego krzywej C_3 , są tedy takie, że wszystkie wartości parametru u , wyznaczające ten sam punkt tej krzywej trzeciego rzędu, dają się otrzymać zapomocą dodania do jednej z nich tego lub innego okresu.

To przedstawienie parametryczne krzywych płaskich trzeciego rzędu zapomocą funckji eliptycznych jest nader ważne⁽¹⁾. Dla przykładu wykażemy, w jaki sposób pozwala ono wyznaczyć punkty przecięcia. Niech spółrzędne będą dane w postaci:

$$x = f(u), \quad y = f_1(u);$$

argumenty punktów przecięcia krzywej z prostą $Ax + By + C = 0$ są to pierwiastki równania

$$Af(u) + Bf_1(u) + C = 0.$$

(¹) CLERSCH, *Ueber diejenigen Curven deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameter darstellen lassen*. („O krzywych, których spółrzędne dają się wyrazić w postaci funckji eliptycznych jednego parametru“). (*Journal de Crelle*, t. LXIV).

Ponieważ punktowi (x, y) odpowiada tylko jedna wartość zmiennej u w równoległoboku elementarnym, przeto funkcja eliptyczna

$$Af(u) + Bf_1(u) + C$$

winna być funkcją trzeciego rzędu. Bieguny jej są oczywiście niezależne od A, B, C jeżeli tedy u_1, u_2, u_3 oznaczają trzy wartości, odpowiadające trzem punktom przecięcia się krzywej trzeciego rzędu z prostą, musimy mieć związek (art. 326)

$$u_1 + u_2 + u_3 = K + 2m_1\omega + 2m_2\omega',$$

w którym K oznacza sumę wartości biegunowych w równoległoboku. Zastępując w f i $f_1 u$ przez $\frac{K}{3} + u$, możemy napisać ten związek w postaci prostszej

$$u_1 + u_2 + u_3 = \text{okresowi}.$$

Nawzajem, ten warunek wystarcza do tego, by trzy punkty $M_1(u_1), M_2(u_2), M_3(u_3)$ były położone na jednej prostej. W istocie, niech M'_3 oznacza trzeci punkt, w którym prosta M_1M_2 spotyka krzywą trzeciego rzędu, a u'_3 — odpowiedni argument. Ze względu na to, że suma $u_1 + u_2 + u'_3$ równa się okresowi, u_3 i u'_3 mogą się różnić tylko o okres, i przeto M'_3 nakrywa M_3 .

Jeżeli u odpowiada punktowi przegięcia, styczna w tym punkcie spotyka krzywą w trzech punktach zbiegających się, i iloczyn $3u$ winien się równać jednemu z okresów. Winniśmy tedy mieć:

$$u = \frac{2m_1\omega + 2m_2\omega'}{3},$$

i wystarczy oczywiście nadać liczbom całkowitym m_1 i m_2 wartości 0, 1, 2, aby otrzymać wszystkie punkty przegięcia; a więc istnieje *dziewięć* punktów przegięcia. Prosta, przechodząca przez dwa punkty przegięcia

$$\frac{2m_1\omega + 2m_2\omega'}{3} \quad \text{ i } \quad \frac{2m_1'\omega + 2m_2'\omega'}{3},$$

przecina krzywą trzeciego rzędu w trzecim punkcie, którego argument

$$= \frac{2(m_1 + m_1')\omega + 2(m_2 + m_2')\omega'}{3}$$

stanowi znowuż trzecią część okresu, a więc w jeszcze jednym punkcie przegięcia. Liczba prostych, spotykających w ten sposób krzywą trzeciego rzędu w 3 punktach przegięcia, równa się $\frac{8 \cdot 9}{2 \cdot 3}$, to jest *dwunastu*.

• *Uwaga.* — Punkty przecięcia krzywej normalnej trzeciego rzędu (75) z prostą $y = mx + n$ dają się wyznaczyć zapomocą równania

$$p'u - m p u - n = 0$$

którego lewa strona posiada biegun potrójny $u = 0$. Suma wartości zmiennej u , odpowiadających punktom przecięcia, jest tedy równa jednemu z okresów. Jeżeli u_1 i u_2 oznaczają argumenty dwu z tych punktów, to można uważać $-u_1 - u_2$ za argument trzeciego punktu przecięcia, i odcięte tych punktów będą wyznaczone w postaci

$$p u_1, \quad p u_2, \quad p(u_1 + u_2).$$

Można wysnuć stąd nowy dowód twierdzenia o dodawaniu, dotyczącego funkcji ρu . Istotnie, odcięte punktów przecięcia są to pierwiastki równania:

$$4x^2 - g_2x - g_3 = (mx + n)^2;$$

otrzymujemy przeto

$$x_1 + x_2 + x_3 = \rho u_1 + \rho u_2 + \rho(u_1 + u_2) = \frac{m^2}{4}.$$

Z drugiej strony, ponieważ prosta $y = mx + n$ przechodzi przez punkty $M_1(u_1)$, $M_2(u_2)$, mamy związki

$$\rho' u_1 = m \rho u_1 + n, \quad \rho' u_2 = m \rho u_2 + n;$$

stąd wynika, że

$$m = \frac{\rho' u_2 - \rho' u_1}{\rho u_2 - \rho u_1},$$

otrzymujemy w ten sposób związek, już wykryty (art. 332)

$$\rho u_1 + \rho u_2 + \rho(u_1 + u_2) = \frac{1}{4} \left(\frac{\rho' u_2 - \rho' u_1}{\rho u_2 - \rho u_1} \right)^2.$$

339. Wzory inwersyjne ogólne. — Niech $R(x)$ oznacza wielomian czwartego stopnia, pierwszy względem swej pochodnej. Zbadajmy krzywą C_4 , daną przez równanie

$$(77) \quad y^2 = R(x) = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4;$$

chcemy przytym wskazać, w jaki sposób można wyrazić współrzędne x i y jakiegoś punktu tej krzywej zapomocą funkcji eliptycznych parametru. Jeżeli znamy jeden pierwiastek a równania $R(x) = 0$, to wiemy już, na zasadzie poprzedniego badania krzywych trzeciego rzędu, jak należy postępować. Gdy założymy $x = a + \frac{1}{x'}$, to związek (77) przybiera postać

$$y^2 = R\left(a + \frac{1}{x'}\right) = \frac{R_1(x')}{x'^4}.$$

[$R_1(x')$ — wielomian trzeciego stopnia].

Punkty danej krzywej C_4 odpowiadają tedy punktom krzywej trzeciego rzędu C_3' o równaniu $y'^2 = R_1(x')$, i przekształcenie to jest określone zapomocą wzorów:

$$x = a + \frac{1}{x'}, \quad y = \frac{y'}{x'^2}.$$

Owóż możemy wyrazić x' i y' w zależności od jednego parametru u zapomocą wzorów o postaci:

$$x' = \alpha \rho u + \beta, \quad y' = \alpha \rho' u.$$

przy odpowiednim wyborze współczynników α i β oraz niezmienników funkcji ρu .

Otrzymujemy stąd dla x i y wzory następujące:

$$(78) \quad x = a + \frac{1}{\alpha p u + \beta}, \quad y = \frac{\alpha p' u}{(\alpha p u + \beta)^2};$$

z wzorów tych wynika, że $du = -\frac{dx}{y}$, tak iż parametr u jest tym samym, z pominięciem znaku, co całka eliptyczna gatunku pierwszego $\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}}$ i wzory (78) stanowią zupełne rozwiązanie zagadnienia odwracania funkcji.

Przejdźmy teraz do przypadku ogólnego, w którym nie znamy żadnego pierwiastka równania $R(x) = 0$. Wykażemy, że *bez wprowadzania żadnej niewymierności prócz pierwiastka kwadratowego, można wyrazić wymiennie x i y zapomocą funkcji eliptycznej pu o znanych niezmiennikach oraz jej pochodnej $p'u$.*

Zastąpmy na chwilę x i y odpowiednio przez t i v , tak iż związek (77) przybierze postać

$$(77 \text{ bis}) \quad v^2 = R(t) = a_0 t^4 + 4a_1 t^3 + 6a_2 t^2 + 4a_3 t + a_4.$$

Wielomianowi $R(t)$ można nieskończenie wielu sposobami nadać kształt

$$R(t) = [\varphi_2(t)]^2 - \varphi_1(t) \varphi_3(t),$$

z umową, że $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ oznaczają wielomiany stopnia, równego wskaźnikowi. Istotnie, niech (α, β) oznaczają współrzędne dowolnego punktu krzywej C_4 . Weźmy taki wielomian $\varphi_2(t)$, iż $\varphi_2(\alpha) = \beta$, co można osiągnąć nieskończenie wielu sposobami; równanie

$$R(t) - [\varphi_2(t)]^2 = 0$$

posiada w takim razie pierwiastek $t = \alpha$ i można wziąć $\varphi_1(t) = t - \alpha$.

Nadawszy wielomianowi $R(t)$ wskazaną postać, rozpatrzmy krzywą pomocniczą trzeciego rzędu C_3 , daną przez równanie

$$x^3 \varphi_3 \left(\frac{y}{x} \right) + 2x^2 \varphi_2 \left(\frac{y}{x} \right) + x \varphi_1 \left(\frac{y}{x} \right) = 0;$$

jeżeli ją przetniemy sieczną $y = tx$, to odcięte dwu zmiennych punktów przecięcia będą stanowiły pierwiastki równania

$$x^2 \varphi_3(t) + 2x \varphi_2(t) + \varphi_1(t) = 0$$

będą przeto wyznaczone przez wzór:

$$x = \frac{-\varphi_2(t) + v}{\varphi_3(t)},$$

w którym występuje wartość v , wyznaczona przez równanie (77 bis). Widzimy, że nawzajem t i v dają się wyrazić w sposób wymier-ny w zależności od współrzędnych x , y punktu krzywej C_3 zapomocą wzorów

$$(80) \quad t = \frac{y}{x}, \quad v = x \varphi_3\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi_2\left(\frac{y}{x}\right).$$

Otóż x i y potrafimy wyrazić zapomocą funkcji eliptycznych parametru u , ponieważ znamy jeden punkt krzywej sześcienniej C_3 , a mianowicie początek układu. To samo się tedy stosuje do zmiennych u i v . Można oczywiście wielu sposobami urozmaicać to postępowanie; wprowadzamy przytym jedno tylko wyrażenie niewymierne $\beta = \sqrt{R(x)}$, zależne od liczby dowolnej x .

Wykonamy dokładnie odpowiednie obliczenie, zakładając, co może być zawsze uczynione, że usunęliśmy przedewszystkiem współczynnik a_1 przy t^3 w wielomianie $R(t)$. Możemy wówczas napisać

$$a_0 R(t) = (a_0 t^2)^2 + 6 a_0 a_2 t^2 + 4 a_0 a_3 t + a_0 a_4,$$

i założyć

$$\varphi_1(t) = -1, \quad \varphi_2(t) = a_0 t^2, \quad \varphi_3(t) = 6 a_0 a_2 t^2 + 4 a_0 a_3 t + a_0 a_4.$$

Krzywa pomocnicza trzeciego rzędu C_3 otrzyma równanie:

$$(81) \quad 6 a_0 a_2 x y^2 + 4 a_0 a_3 x^2 y + a_0 a_4 x^3 + 2 a_0 y^3 - x = 0.$$

Według metody ogólnej przetnijmy tę krzywą sieczną $y = tx$; otrzymane równanie można napisać w postaci

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3 - 2 a_0 t^2 \frac{1}{x} - (6 a_0 a_2 t^2 + 4 a_0 a_3 t + a_0 a_4) = 0,$$

skąd wynika:

$$\frac{1}{x} = a_0 t^2 + \sqrt{a_0 R(t)}.$$

Nawzajem, możemy wyrazić t i $\sqrt{a_0 R(t)}$ w zależności od x i y

$$(82) \quad t = \frac{y}{x}, \quad \sqrt{a_0 R(t)} = \frac{1}{x} - a_0 \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Z drugiej strony, rozwiązując równanie (81) względem y , otrzymujemy

$$y = \frac{-2a_0a_3x^2 + \sqrt{4a_0^2a_3^2x^4 - x(a_0a_4x^2 - 1)(6a_0a_2x + 2a_0)}}{6a_0a_2x + 2a_0}.$$

Wielomian pod znakiem pierwiastka posiada pierwiastek $x = 0$; stosując wyłożoną przed chwilą metodę, będziemy tedy mogli wyrazić x i y zapomocą funkcji eliptycznych jednego parametru. Po dokonaniu obliczeń dojdziemy do wzorów:

$$(83) \quad x = \frac{1}{2a_0\wp u - a_2}, \quad y = \frac{a_0\wp' u - a_3}{2(a_0\wp u + a_2)(2a_0\wp u - a_2)},$$

zawierających funkcję eliptyczną $\wp u$, której niezmiennikom g_2 i g_3 nadać wypadnie wartości następujące:

$$(84) \quad g_2 = \frac{a_0a_4 + 3a_2^2}{a_0^2}, \quad g_3 = \frac{a_0a_2a_4 - a_2^3 - a_0a_3^2}{a_0^3}.$$

Zastępując we wzorach (82) x i y przez te wyrażenia, otrzymujemy

$$(85) \quad \left\{ \begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \left[\frac{\wp' u - \frac{a_3}{a_0}}{\wp u + \frac{a_2}{a_0}} \right], \\ \sqrt{R(t)} &= \sqrt{a_0} \left[2\wp u - \frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{4} \left(\frac{\wp' u - \frac{a_3}{a_0}}{\wp u + \frac{a_2}{a_0}} \right)^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

Wzory te można napisać w postaci nieco prostszej, ze względu na zgodność związków

$$(86) \quad \wp v = -\frac{a_2}{a_0}, \quad \wp' v = \frac{a_3}{a_0},$$

wobec danych wartości niezmienników g_2 i g_3 . Z drugiej strony można zastąpić

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v} \right)^2 \quad \text{przez} \quad \wp(u+v) + \wp u + \wp v.$$

Łącząc ze sobą te wyniki i zastępując odpowiednio t i $\sqrt{R(t)}$ przez x i y , dochodzimy do sformułowania twierdzenia następującego:

Spółrzędne (x, y) dowolnego punktu krzywej C_n , określonej przez równanie (77) (w którym $a_1 = 0$), dają się wyrazić w zależności od parametru zmiennego u zapomocą wzorów

$$(87) \quad x = \frac{1}{2} \frac{\rho' u - \rho' v}{\rho u - \rho v}, \quad y = \sqrt{a_0} [\rho u - \rho(u + v)],$$

przy założeniu, że g_2 i g_3 posiadają wartości dane przez wzory (84), a $\rho'v$ i ρv zostały wyznaczone przez równania zgodne (84).

Z wzoru (45), uzasadnionego powyżej (art. 332), otrzymujemy zapomocą różniczkowania obu stron

$$\frac{1}{2} \frac{d}{du} \left(\frac{\rho' u - \rho' v}{\rho u - \rho v} \right) = \rho u - \rho(u + v),$$

to jest

$$\frac{dx}{du} = \frac{y}{\sqrt{a_0}} \quad \text{czyli} \quad du = \sqrt{a_0} \frac{dx}{y}.$$

Parametr u równa się tedy całce eliptycznej pierwszego gatunku

$$\sqrt{a_0} \int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

i wzory (87) stanowią rozwiązanie zagadnienia odwracania funkcji.

340. Krzywe rodzaju pierwszego. — Krzywa płaska algebryczna C_n rzędu n -go nie może posiadać więcej niż $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ punktów podwójnych, o ile nie rozkłada się na kilka osobnych krzywych. Jeżeli krzywa C_n jest nierozkładalna i posiada d punktów podwójnych, to różnicę

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$$

nazywamy *rodzajem* (genre) tej krzywej. Krzywe rodzaju zerowego są to krzywe jednobieżne, których spółrzędne dają się wyrażać w postaci funkcji wymiernych jednego parametru. Krzywe najmniej złożone po tanitych są to krzywe rodzaju 1 (de genre un) czyli rodzaju pierwszego; krzywa C_n rodzaju pierwszego posiada

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 = \frac{n(n-3)}{2}$$

punktów podwójnych.

Spółrzędne punktu krzywej rodzaju pierwszego mogą być wyrażone przez funkcje eliptyczne jednego parametru.

Aby dowieść tego twierdzenia, wprowadźmy krzywe *dołączone* (courbes adjointes) rzędu $n - 2$, to jest krzywe C_{n-2} , przechodzące przez $\frac{n(n-3)}{2}$ punktów podwójnych krzywej C_n . Ponieważ do wyznaczenia krzywej rzędu $n - 2$ potrzeba $\frac{(n-2)(n+1)}{2}$ punktów, przeto krzywe dołączone C_{n-2} zależą jeszcze od

$$\frac{(n-2)(n+1) - n(n-3)}{2} = n - 1$$

parametrów dowolnych. Jeżeli poddamy te krzywe temu warunkowi, by przechodziły jeszcze przez $n - 3$ punkty zwyczajne, obrane dowolnie na C_n , to otrzymamy sieć krzywych dołączonych, przechodzących przez $\frac{n(n-3)}{2}$ punktów podwójnych i $n - 3$ punkty zwyczajne krzywej C_n .

Niech $F(x, y) = 0$ stanowi równanie krzywej C_n , a równanie

$$f_1(x, y) + \lambda f_2(x, y) + \mu f_3(x, y) = 0,$$

w którym λ i μ oznaczają dwa parametry dowolne, niech będzie równaniem wzmiankowanej sieci krzywych C_{n-2} . Każda krzywa tej sieci spotyka C_n tylko w trzech punktach zmiennych, gdyż każdy punkt podwójny winien być liczony jako dwa punkty wspólne, a mamy związek:

$$n(n-3) + n - 3 = n(n-2) - 3.$$

Założmy obecnie:

$$(88) \quad x' = \frac{f_2(x, y)}{f_1(x, y)}, \quad y' = \frac{f_3(x, y)}{f_1(x, y)},$$

gdy punkt (x, y) przebiega krzywą C_n , punkt (x', y') zakresła krzywą algebriczną C' , której równanie otrzymalibyśmy zapomocą rugowania zmiennych x i y z równań (88) i równania $F(x, y) = 0$. Krzywe C' i C_n odpowiadają sobie wzajemnie tak, iż pokrewieństwo punktowe pomiędzy nimi jest *pokrewieństwem dwuwymiernym* (transformation birationnelle), gdyż nawzajem spólrzędne (x, y) punktu krzywej C_n wyrażają się w sposób wymierny w zależności od spólrzędnych (x', y') punktu odpowiedniego krzywej C' . Ażeby dowieść tego, wystarczy okazać, że punktowi (x', y') krzywej C' może odpowiadać tylko jeden punkt krzywej C_n , lub że równania (88), przyłączone do równania $F(x, y) = 0$, posiadają, jako równania względem x i y , tylko jeden układ rozwiązań, zmieniających się wraz z x' i y' .

Istotnie, przypuścmy, że punktowi krzywej C' odpowiadają dwa punkty (a, b) i (a', b') krzywej C_n , nie należące do punktów węzłowych (points de base) sieci krzywych C_{n-2} . Otrzymaliśmy:

$$\frac{f_1(a', b')}{f_1(a, b)} = \frac{f_2(a', b')}{f_2(a, b)} = \frac{f_3(a', b')}{f_3(a, b)},$$

i wszystkie krzywe sieci, przechodzące przez punkt (a, b) , przechodziłyby również przez punkt (a', b') . Krzywe, należące do sieci i przechodzące przez te dwa punkty, zależałyby jeszcze *linjowo* od jednego parametru zmiennego i spotykałyby krzywą C_n w jednym punkcie zmiennym. Spółrzędne tego właśnie punktu przecięcia z C_n byłyby tedy funkcjami wymiernymi pewnego parametru zmiennego, i krzywa C_n byłaby jednobieżna; jest to zaś niemożliwe, gdyż posiada ona tylko $\frac{n(n-3)}{2}$ punktów podwójnych.

Każdemu punktowi (x', y') krzywej C' odpowiada zatem tylko jeden punkt (x, y) krzywej C_n , i spółrzędne tego punktu, według teorii eliminacji, są funkcjami wymiernymi zmiennych x', y'

$$(S9) \quad x = \varphi_1(x', y'), \quad y = \varphi_2(x', y').$$

Ażeby wyznaczyć rząd krzywej C' , poszukajmy liczby punktów wspólnych tej krzywej i prostej dowolnej

$$ax' + by' + c = 0.$$

Sprowadza się to do wyznaczenia punktów przecięcia się krzywej C_n z krzywą

$$af_2(x, y) + bf_3(x, y) + cf_1(x, y) = 0,$$

ponieważ każdemu punktowi krzywej C' odpowiada tylko jeden punkt krzywej C_n i nawzajem. Owóż istnieją tylko trzy punkty przecięcia, zmieniające się wraz z a, b, c . C' jest tedy krzywą trzeciego rzędu. Zatem spółrzędne punktu krzywej C_n dają się wyrazić wymiernie w zależności od spółrzędnych krzywej płaskiej trzeciego rzędu, a ponieważ spółrzędne takiej krzywej stanowią funkcje eliptyczne pewnego parametru, to samo się stosuje do spółrzędnych punktu krzywej C_n .

Z podanego dowodu i z tego, cośmy powyżej stwierdzili co do krzywych trzeciego rzędu wynika, że można ustalić to uzależnienie w ten sposób, iżby każdemu punktowi krzywej C_n odpowiadała tylko jedna wartość parametru u w każdym równoległoboku elementarnym.

Niech x i y będą dane przez wzory

$$x = \phi(u), \quad y = \phi_1(u);$$

wszelka całka abelowa

$$w = \int R(x, y) dx,$$

związana z krzywą C_n (t. I, art. 103), przechodzi przy tej zamianie zmiennej w całkę funkcji eliptycznej; taka całka w wyraża się tedy również zapomocą funkcji eliptycznych $\wp$, ζ , σ . Wprowadzenie tych funkcji przestępnych do Analizy podwoiło potęgę rachunku całkowego.

PRZYKŁAD. — Krzywe czwartego rzędu dwukołowe (*Quartiques bicirculaires*). — Krzywa czwartego rzędu o dwu punktach podwójnych jest krzywą rodzaju pierwszego. Gdy punktami podwójnemi krzywej C_4 są punkty kołowe w nieskończoności, jest to *krzywa czwartego rzędu dwukołowa* (*quartique bicirculaire*).

Gdy bierzemy za początek układu jakiś punkt tej krzywej, to za krzywe dołączone C_{n-2} mogą nam służyć okręgi, przechodzące przez początek układu

$$x^2 + y^2 + \lambda x + \mu y = 0;$$

ażebymy otrzymać krzywą sześcienną, odpowiadającą punkt za punktem krzywej czwartego rzędu C_4 , wystarczy według metody ogólnej założyć:

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Nawzajem

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2},$$

i wzory te określają inwersję (przekształcenie przez promienie odwrotne) względem koła o promieniu = *jedności*, posiadającego środek w początku układu. Ażebymy otrzymać równanie krzywej trzeciego rzędu C_3' , wystarczy zastąpić w równaniu krzywej C_4 x i y przez wyrażenia, dane powyżej. Przypuśćmy np., że krzywa czwartego rzędu C_4 posiada równanie

$$(x^2 + y^2)^2 - ay = 0;$$

równaniem krzywej sześcienniej C_3' będzie:

$$ay'(y'^2 + x'^2) - 1 = 0.$$

Uwaga. — Jeżeli jakaś krzywa płaska C_n posiada punkty osobliwe o charakterze bardziej złożonym, to jest ona krzywą rodzaju pierwszego, o ile te wszystkie punkty osobliwe są równoważne $\frac{n(n-3)}{2}$ zwykłym punktom podwójnym. Naprzy-

kład krzywa czwartego rzędu, posiadająca jeden tylko punkt podwójny, w którym obie jej gałęzie są styczne do siebie, bez innych zresztą własności osobliwych, jest rodzaju pierwszego; ażebymy to stwierdzić, wystarczy przeciąć tę krzywą siecią stożkowych, stycznych do obu gałęzi w punkcie podwójnym i przechodzących przez pewien inny punkt danej krzywej. Jeżeli $R(x)$ oznacza wielomian czwartego

stopnia, pierwszy względem swej pochodnej, to krzywa $y^2 = R(x)$ posiada w nieskończoności właściwość tego właśnie rodzaju. Zastępujemy ją przez krzywą sześcienną zapomocą przekształcenia dwuwymiernego, danego przez wzory

$$x = x', \quad y = y' + \sqrt{a_0 x'^2},$$

co pozwala z łatwością odnaleźć ponownie wzory inwersyjne (87).

ĆWICZENIA.

1. Dowieść, że funkcja dwuokresowa całkowita jest to liczba stała przy pomocy rozwinięcia w szereg:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{2n\pi z}{\omega}}.$$

[Warunek $f(z + \omega') = f(z)$ wymaga, iżbyśmy mieli $A_n = 0$, gdy $n \neq 0$].

2. Jeżeli α nie jest wielokrotnością liczby π , to

$$\frac{\sin(z+a)}{\sin a} = \left(1 + \frac{z}{a}\right) \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{a - n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}}.$$

[Zmieniamy we wzorze, dającym rozwinięcie w szereg funkcji $\cot z$, z na $z + a$, a następnie całkujemy pomiędzy granicami 0 i z].

3. Wywnieść z wzoru poprzedniego wzory, zawierające nowe iloczyny nieskończone:

$$\frac{\cos(z+a)}{\cos a} = \left(1 + \frac{2z}{2a+\pi}\right) \prod_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + \frac{2z}{2a - (2n-1)\pi}\right] e^{\frac{z}{n\pi}};$$

$$\frac{\sin \alpha - \sin z}{\sin \alpha} = \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{z}{\alpha + \pi}\right) \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{\alpha - 2n\pi}\right) \left(1 - \frac{z}{(2n-1)\pi - \alpha}\right) e^{\frac{z}{n\pi}};$$

$$\frac{\cos z - \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \left(1 - \frac{z^2}{\alpha^2}\right) \prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{2n\pi + \alpha}\right) \left(1 - \frac{z}{2n\pi - \alpha}\right) e^{\frac{z}{n\pi}}.$$

Przekształcić te iloczyny w iloczyny, nie zawierające już czynników wykładniczych, takie, jak np.:

$$\cos z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{4z^2}{9\pi^2}\right) \cdots \left[1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right] \cdots$$

4. Udowodnić wzory:

$$\operatorname{tang} z = 2z \left[\frac{1}{\frac{\pi^2}{4} - z^2} + \frac{1}{\frac{9\pi^2}{4} - z^2} + \dots + \frac{1}{\frac{(2n+1)^2\pi^2}{4} - z^2} + \dots \right],$$

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} - 2z \left[\frac{1}{z^2 - \pi^2} - \frac{1}{z^2 - 4\pi^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2} + \dots \right].$$

Uzasadnić podobne wzory dla $\frac{1}{\sin z - \sin a}$, $\frac{1}{\cos z - \cos a}$.

5. Uzasadnić wzór

$$\frac{\sin \pi z}{\pi z} = 1 - \frac{z^2}{1} + \frac{z^2(z^2-1)}{(1 \cdot 2)^2} - \frac{z^2(z^2-1)(z^2-4)}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{z^2(z^2-1) \dots (z^2-n^2)}{[1 \cdot 2 \dots (n+1)]^2} + \dots$$

6. Rozłożyć na elementy proste funkcje $\frac{1}{p'u}$, $\frac{1}{p'^2u}$.

7. Gdy $g_2 = 0$, a z oznacza jeden z pierwiastków sześciennych z jedności, to

$$p(zu; 0, g_3) = z p(u; 0, g_3), \quad p'(zu; 0, g_3) = p'(u; 0, g_3).$$

Oprzeć na tym rozkład na elementy proste funkcji $\frac{1}{p'u - p'v}$, gdy $g_2 = 0$.

8. Są dane całki

$$\int \frac{ax+b}{(x-1)\sqrt{x^3-1}} dx, \quad \int \frac{ax^2+b}{\sqrt{1+x^4}} dx,$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^3-x}}, \quad \int \frac{ax^2+b}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx;$$

wyrazić zmienną x i którąkolwiek z tych całek zapomocą funkcji przestępnych p, ζ, σ .

9. Uzasadnić wzór rozkładowy Hermite'a (art. 331) zapomocą przyrównania do zera sumy pozostałości funkcji

$$F(z) [\zeta(x-z) - \zeta(x_0-z)]$$

w jednym równoległoboku elementarnym, przy założeniu, że $F(x)$ jest to funkcja eliptyczna, a x i x_0 są uważane za stałe.

10. Wywnioskować z wzoru (60) związek

$$\tau = -\frac{\Theta'''(0)}{12\omega\Theta'(0)}$$

[Zauważmy, że szereg σu nie posiada wyrazu, zawierającego u^3].

11*. Wyrazić w postaci funkeji eliptycznych jednego parametru współrzędne x i y którejs z krzywych następujących:

$$y^2 = A [(x-a)(x-b)(x-c)]^2, \quad y^2 = A [(x-a)(x-b)]^2.$$

$$y^4 = A (x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2, \quad y^4 = A (x-a)^2 (x-b)^4,$$

$$y^4 = A (x-a)^4 (x-b)^2,$$

$$y^6 = A (x-a)^3 (x-b)^4 (x-c)^2, \quad y^6 = A (x-a)^3 (x-b)^4,$$

$$y^6 = A (x-a)^2 (x-b)^5, \quad y^6 = A (x-a)^4 (x-b)^3,$$

$$y^3 + (lx^2 + mx + n) y^2 + A [(x-a)(x-b)(x-c)]^2 = 0.$$

$$y^4 + Ax y^2 + x^2 \left(Bx + \frac{3^2}{4^2} \frac{A^4}{4B} \right)^2 = 0, \quad y^4 + Ax y^2 + x^2 \left(Bx^2 + \frac{3^2}{4^2} \frac{A^4}{4B} \right)^2 = 0,$$

$$y^4 + Ax y^2 + \left(Bx^4 + \frac{3^2}{4^2} \frac{A^4}{4B} \right)^2 = 0, \quad y^5 + Ax y^4 + x^4 \left(Bx - \frac{4^4}{3^2} \frac{A^5}{4B} \right)^2 = 0,$$

$$y^5 + Ax y^4 + \left(Bx^5 - \frac{4^4}{3^2} \frac{A^4}{4B} \right)^2 = 0.$$

Parametr zmienny ma się równać, z pominięciem stałej, całce $\int \frac{dx}{y}$.

[BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions doublement periodiques* (Teorja funkeji dwuokresowych), wyd. 2-gie, str. 388—412].

ROZDZIAŁ XVI.

Przedłużanie analityczne.

I. — Określanie funkcji analitycznej przy pomocy jednego z jej elementów.

341. Pierwsze pojęcie o przedłużaniu analitycznym. — Niech $f(z)$ oznacza funkcję całokształtną w obszarze spójnym A płaszczyzny, ograniczonym przez jedną albo kilka krzywych, zamkniętych lub niezamkniętych; słowa „krzywe“ używamy przy tym zawsze w jego zwykłym znaczeniu elementarnym, jak to czyniliśmy dotychczas.

Jeżeli znamy wartość funkcji $f(z)$ i wszystkich jej kolejnych pochodnych w jakimś określonym punkcie a obszaru A , to potrafimy otrzymać stąd wartość tej funkcji w jakimkolwiek innym punkcie b tegoż obszaru. Aby tego dowieść, połączmy punkty a i b linią L , zawartą całkowicie w obszarze A np. linią łamaną lub też krzywą o dowolnej postaci. Niech δ oznacza granicę niższą odległości dowolnego punktu drogi L od jakiegokolwiek punktu obwodu obszaru A , tak iżby koło o promieniu δ , mające za środek jakikolwiek punkt linii L , było położone całkowicie w tym obszarze. Jak założyliśmy, znamy wartość $f(a)$ funkcji oraz wartości jej kolejnych pochodnych,

$$f'(a), f''(a) \dots \text{ dla } z = a.$$

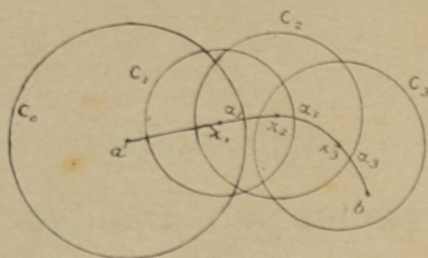
Możemy tedy napisać szereg potęgowy, wyrażający funkcję $f(z)$ w otoczeniu punktu a :

$$(1) \quad f(z) = f(a) + \frac{z-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(a) + \dots$$

Promień koła zbieżności tego szeregu równa się co najmniej δ , lecz może być większym. Jeżeli punkt b jest położony w kole zbieżności C_0 szeregu (1), to wystarczy zastąpić w nim z przez b , aby otrzymać $f(b)$.

Przypuśćmy, iż punkt b leży poza C_0 , i niech α_1 oznacza punkt, w którym droga L wychodzi z tego koła (1) (rys. 75). Na drodze tej,

Rys. 75.



wewnątrz koła C_0 , weźmy punkt z_1 , bliski punktu α_1 i taki, iżby odległość między temi punktami z_1 i α_1 była mniejsza od $\frac{\delta}{2}$. Szereg (1) i szeregi, które się dadzą zeń otrzymać przez kolejne różniczkowanie, wyznaczają wartości funkcji $f(z)$ i wszystkich jej pochodnych dla $z = z_1$:

$$f(z_1), f'(z_1), \dots, f^{(n)}(z_1).$$

Spółczynniki szeregu, wyrażającego funkcję $f(z)$ w otoczeniu punktu z_1 , mogą być tedy wyznaczone, gdy znamy spółczynniki szeregu (1), i w sąsiedztwie punktu z_1 :

$$(2) \quad f(z) = f(z_1) + \frac{z - z_1}{1} f'(z_1) + \dots + \frac{(z - z_1)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(z_1) + \dots$$

Promień koła zbieżności C_1 tego szeregu jest równy co najmniej δ ; punkt z_1 należy zatem do punktów wewnętrznych tego koła, skąd wynika, że musi ono być położonym częściowo poza pierwszym kołem C_0 . Jeżeli punkt b leży w tym nowym kole C_1 , to wystarczy, w celu otrzymania wartości $f(b)$, uczynić w szeregu (2) z równym b . Przy-

(1) Ponieważ wartość funkcji $f(z)$ w punkcie b nie zależy od drogi L , o ile ta droga nie wychodzi poza obszar A , przeto można założyć, jak to zostało wyobrażone na rysunku, iż ta droga przecina tylko w jednym punkcie okrąg koła C_0 , a co najwyżej w dwu punktach okręgi następne $C_1, C_2, \dots$. Sprowadza się to, jeżeli kto chce, do obrania za z_1 ostatniego punktu przecięcia się drogi L z C_0 , i podobnie dla innych kół.

puścimy, że punkt b leży również nazewnątrz koła C_1 , i niech α_2 oznacza punkt, w którym droga $z_1 b$ wykracza poza to koło. Weźmy na linii L punkt z_2 , położony wewnątrz koła C_1 i taki, że odległość pomiędzy nim a punktem α_2 jest mniejsza od $\frac{\delta}{2}$. Szereg (2) i szeregi, które otrzymujemy zeń przez kolejne różniczkowanie, wyznaczają wartości

$$f(z_2), f'(z_2), f''(z_2), \dots,$$

funkcji $f(z)$ i jej pochodnych w punkcie z_2 . Można tedy utworzyć nowy szereg

$$(3) \quad f(z) = f(z_2) + \frac{z-z_2}{1} f'(z_2) + \dots + \frac{(z-z_2)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(z_2) + \dots,$$

który będzie wyrażał funkcję $f(z)$ w nowym kole C_2 o promieniu większym od δ lub równym δ . Jeżeli punkt b jest położony w tym kole, to wystarczy zastąpić w powyższej równości (3) z przez b ; jeżeli nie, to musimy ciągnąć dalej to samo postępowanie. Po liczbie skończonej działań dojdziemy wreszcie do tego, że otrzymamy koło, zawierające punkt b , jako punkt wewnętrzny; na naszym rysunku punkt b leży wewnątrz koła C_3 . W istocie, można zawsze dobrać punkty z_1, z_2, z_3 w ten sposób, iżby odległość pomiędzy dwu następującymi po sobie punktami była mniejsza od $\frac{\delta}{2}$; z drugiej strony, niech S oznacza długość drogi L . Długość linii łamanej $a z_1 z_2 \dots z_{p-1} z_p b$ jest zawsze mniejsza niż S ; przeto

$$p \frac{\delta}{2} + |z_p - b| < S.$$

Weźmy taką liczbę całkowitą p , iżby była spełniona nierówność

$$\left(\frac{p}{2} + 1 \right) \delta > S.$$

Nierówność poprzednia wskazuje, że co najwyżej po p działaniach otrzymamy punkt z_p drogi L , którego odległość od punktu b będzie mniejsza od δ , punkt b okaże się wówczas położonym wewnątrz koła zbieżności C_p szeregu potęgowego, wyrażającego funkcję $f(z)$ w otoczeniu punktu z_p , i wystarczy zastąpić w tym szeregu z przez b , ażeby otrzymać $f(b)$. W ten sam sposób zdołamy obliczyć wszystkie pochodne $f'(b)$, $f''(b)$,...

Rozumowanie powyższe wskazuje możliwość, przynajmniej teoretyczną, obliczenia wartości funkcji, całokształtnej w pewnym obszarze A , oraz

wszystkich jej pochodnych, w dowolnym punkcie tego obszaru, bylebyśmy tylko znali ciąg wartości

$$(4) \quad f(a), f'(a), f''(a), \dots, f^{(n)}(a), \dots,$$

funkcji i jej kolejnych pochodnych w jednym *określonym* punkcie a tego obszaru. Stąd wynika, że wszelka funkcja, całokształtna w obszarze A , jest najzupełniej określona w tym całym obszarze, jeżeli jest znana w obszarze tak małym, jak tylko zechcemy, otaczającym jakikolwiek punkt a , należący do obszaru A , a nawet, jeżeli znamy jej wartości wzdłuż łuku jakiejś krzywej, tak małego, jak tylko zechcemy, kończącego się w punkcie a . Istotnie, jeżeli są dane wartości, przybierane przez $f'(z)$ wzdłuż pewnego łuku, wówczas to samo się stosuje do pochodnej $f'(z)$, gdyż wartość $f'(z_1)$ w dowolnym punkcie tego łuku równa się granicy, do której dąży stosunek $\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1}$, gdy punkt z_2 zbliża się wzdłuż rozważanego łuku do punktu z_1 ; znając pochodną $f'(z)$, wyznaczymy w ten sam sposób $f''(z)$, potem $f'''(z), \dots$. Wszystkie kolejne pochodne funkcji $f(z)$ mogą być tedy wyznaczone dla $z = a$. Powiemy dla krótkości, że znając wartości liczbowe wszystkich wyrazów ciągu (4), mamy *element* funkcji $f(z)$ ⁽¹⁾. Wynik otrzymany może tedy być wysłowionym w sposób następujący: *Funkcja, całokształtna w obszarze A , jest najzupełniej określona, jeżeli znamy jakiś jeden z jej elementów.* Można jeszcze stwierdzić, że dwie funkcje, całokształtne w tym samym obszarze, nie mogą mieć elementu wspólnego, o ile nie są identyczne.

Założyliśmy, w celu ustalenia biegu myśli, iż chodzi o funkcję całokształtną $f(z)$; lecz to samo rozumowanie może być zastosowane do dowolnej funkcji analitycznej, byleby droga L , po której punkt, odpowiadający zmiennej, porusza się od a do b , nie przechodziła przez żaden punkt osobliwy funkcji. Wystarczy w tym celu, jakeśmy to już czynili byli w art. 289, podzielić tę drogę na takie łuki, iżby każdy z nich mógł być otoczony przez obwód zamknięty, wewnątrz którego badana gałąź funkcji $f(z)$ byłaby holomorficzna. Znajomość elementu początkowego i drogi, zakreślonej przez zmienną, wystarcza, przynajmniej teoretycznie,

(¹) Por. E. Pascal „Repertorium matematyki wyższej“ (wyd. z 1900) t. I, str. 201, J. Puzyra „Teoria funkcji analitycznych“ (wyd. z r. 1898) t. I, str. 506. Elementem funkcji nazwano w drugim dziele szereg potęgowy i t. d., jak powyżej szereg (1).

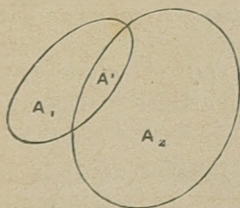
do wyznaczenia elementu końcowego, to jest wartości liczbowych wszystkich wyrazów ciągu analogicznego

$$(5) \quad f(b), f'(b), \dots, f^{(n)}(b), \dots$$

342. Nowe określenie funkcji analitycznych. — Funkcje analityczne, któreśmy badali dotychczas, były określone przez wyrażenia, pozwalające na obliczanie wartości tych funkcji przy wszelkiej wartości zmiennej, należącej do obszaru, w którym dana funkcja była badana. Pojmujemy obecnie, zgodnie z powyższymi wyjaśnieniami, iż można określić funkcję analityczną dla dowolnej wartości zmiennej, skoro tylko znamy jeden element tej funkcji. Ażeby jednak wyłożyć naszą teorię przy zastosowaniu tego nowego punktu widzenia, w sposób bardziej zupełny, musimy dorzucić do określenia funkcji analitycznych według Cauchy'ego nową umowę, której jasne sformułowanie wydaje nam się tu pożytecznym.

Weźmy dwie funkcje $f_1(z)$ i $f_2(z)$, ^{holomorphic} całokształtne w dwu odpowiednich obszarach A_1 i A_2 , posiadających jedną i tylko jedną część wspólną A' (rys. 76).

Rys. 76.



Jeżeli w części wspólnej A'

$$f_2(z) = f_1(z),$$

co musi nastąpić, jeżeli te dwie funkcje posiadają bodaj jeden element wspólny w tym obszarze, to będziemy uważali $f_1(z)$ i $f_2(z)$ za tworzące jedną funkcję całokształtną $F(z)$, określoną w obszarze $A_1 + A_2$ przez równości:

$$F(z) = f_1(z) \text{ w obszarze } A_1 \text{ i } F(z) = f_2(z) \text{ w } A_2.$$

Powiemy również, że $f_2(z)$ jest *przedłużeniem* czyli *dalszym ciągiem analitycznym* (prolongement analytique) w obszarze $A_2 - A'$ funkcji całokształtnej $f_1(z)$, która była określona według założenia, tylko w obszarze A_1 . Rzecz jasna, że przedłużenie analityczne funkcji $f_1(z)$ w części

obszaru A_2 , położonej zewnątrz A_1 , da się uskuteczyć tylko w jeden sposób ⁽¹⁾.

Weźmy teraz ciąg nieskończony liczb rzeczywistych lub zespolonych

$$(6) \quad a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

poddanych temu tylko warunkowi, że szereg

$$(7) \quad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots,$$

ma być zbieżny przy jakiejś wartości zmiennej z , różnej od zera. (Bierzemy za wartość początkową zmiennej $z = 0$, co nie zmniejsza ogólności).

Zgodnie z tym założeniem szereg (7) posiada koło zbieżności C_0 o promieniu R , nie równym zeru. Jeżeli R jest nieskończone, szereg ten jest zbieżny dla wszelkiej wartości zmiennej z i stanowi funkcję całkowitą zmiennej niezależnej. Gdy promień R ma wartość skończoną, różną od zera, suma szeregu (7) jest funkcją całokształtną wewnątrz koła C_0 . Ponieważ atoli znamy tylko ciąg współczynników (6), nie wiemy nic z góry

(1) Ażeby dowieść, że powyższa umowa jest odmienna od określenia funkcji analitycznych, wystarczy zauważyć, że pociąga ona za sobą bezpośrednio wynik następujący: jeżeli jakaś funkcja $f(z)$ jest całokształtna w obszarze A , wszelka inna funkcja $f_1(z)$, przybierająca te same wartości, co $f(z)$ w pewnej części obszaru A , równa się tożsamościowo funkcji $f(z)$ w całym obszarze A . Owóż, weźmy funkcję $F(z)$, określoną dla wszystkich wartości zmiennej zespolonej z w sposób następujący:

$$F(z) = \sin z; \quad \text{jeżeli} \quad z \neq \frac{\pi}{2}; \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Aczkolwiek ta umowa wydaje się nader dziwaczną, niema w niej nic sprzecznego z określeniem dawniejszym funkcji analitycznych. Funkcja $F(z)$, określona w ten sposób, byłaby całokształtna dla wszelkiej wartości zmiennej z prócz wartości $z = \frac{\pi}{2}$, któraby była punktem osobliwym szczególnego rodzaju. Lecz własności tej funkcji $F(z)$ byłyby niezgodne z umową, którą przyjęliśmy, gdyż funkcje $F(z)$ i $\sin z$ byłyby identyczne dla wszystkich wartości zmiennej z , prócz wartości $z = \frac{\pi}{2}$, dającej punkt osobliwy jednej tylko z nich.

Weierstrass w Niemczech, a Méray we Francji rozwinęli teorię funkcji analitycznych, opartą wyłącznie na własnościach szeregów potęgowych; ich badania są zresztą zupełnie niezależne. Teoria Méray'a została wyłożona w jego wielkim dziele „Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale“ („Nowe wykłady z dziedziny Analizy nieskończonościowej“). Wykażemy w tekście, w jaki sposób można określać stopniowo funkcję analityczną, gdy mamy dany jeden z jej elementów; będziemy przytym zawsze uważali za znane twierdzenie Cauchy'ego o funkcjach holomorficznym.

o istocie tej funkcji zewnątrz koła C_0 . Nie wiemy, czy można dołączyć do koła C_0 obszar, któryby tworzył z tym kołem takie pole spójne A , iżby istniała funkcja, całokształtna w A a równa tożsamościowo $f(z)$ wewnątrz C_0 . Metoda z poprzedniego artykułu pozwala rozpoznać, czy tak jest istotnie. Weźmy w kole C_0 punkt a , różny od początku układu; zapomocą szeregu (7) i szeregów, które powstają z różniczkowania tegoż wyrazu po wyrazie, możemy otrzymać element funkcji $f(z)$, odpowiadający punktowi a , i przeto utworzyć szereg potęgowy

$$(8) \quad f(a) + \frac{z-a}{1} f'(a) + \dots + \frac{(z-a)^n}{1 \cdot 2 \dots n} f^{(n)}(a) + \dots,$$

wyrażający funkcję $f(z)$ w otoczeniu punktu a . Szereg ów jest napewno zbieżny w kole o środku a i promieniu $R - |a|$ (art. 266), lecz może być również zbieżnym w większym kole, którego promień nie może zresztą przewyższyć $R + |a|$; gdyby bowiem był zbieżny w kole o promieniu $R + |a| + \delta$, to wynikałoby stąd, wbrew założeniu, jakoby szereg (7) był zbieżny w kole o promieniu $R + \delta$, zakreślonym do koła początku układu.

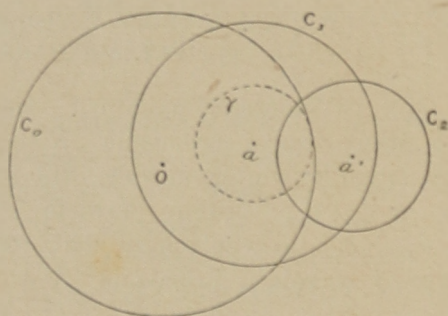
Przypuśćmy przedewszystkiem, iż promień zbieżności szeregu (8) równa się zawsze $R - |a|$, niezależnie od tego, jaki punkt a bierzemy wewnątrz koła C_0 . Wówczas niema żadnego sposobu przedłużenia analitycznego funkcji $f(z)$ nazewnątrz koła, przynajmniej o ile używamy tylko szeregów potęgowych. Możemy twierdzić, iż nie istnieje żadna funkcja całokształtna $F(z)$, określona w obszarze płaszczyzny A , większym niż koło C_0 , i równa tożsamościowo funkcji $f(z)$ w tym kole, ponieważ metoda przedłużania analitycznego pozwoliłaby, jak stwierdziliśmy, na wyznaczenie wartości tej funkcji w punkcie, położonym zewnątrz koła C_0 . Mówimy w takim razie, że część płaszczyzny, położona poza kołem C_0 , stanowi dla funkcji $f(z)$ *przestrzeń próżną* (espace lacunaire). Odpowiednie przykłady spotkamy nieco dalej.

Przypuśćmy następnie, że przy odpowiednim obiorze punktu a w kole C_0 koło zbieżności C_1 szeregu (8) posiada promień większy niż $R - |a|$. To koło C_1 posiada część, leżącą zewnątrz C_0 (rys. 77), i suma szeregu (8) jest w kole C_1 funkcją całokształtną $f_1(z)$. Wewnątrz koła γ o środku a , stycznego wewnątrz do koła C_0 , $f_1(z) = f(z)$ (art. 266); równość ta jest tedy spełniona dla całego obszaru, wspólnego obu kołom C_0 i C_1 . Szereg (8) daje nam dalszy ciąg analityczny funkcji $f(z)$ w części koła C_1 , położonej poza kołem C_0 .

Niech a' oznacza inny punkt, wzięty w tym właśnie obszarze; postępując w ten sam sposób, utworzymy nowy szereg, uporządkowany

według potęg różnicy $z - a'$, a zbieżny w pewnym kole C_1 . Jeżeli to koło nie leży całkowicie wewnątrz C_1 , nowy szereg posłuży do przedłużenia funkcji $f(z)$, tak iż zostanie określona w obszarze jeszcze rozleglejszym — i podobnie w dalszym ciągu. Widzimy tedy, iż można w ten sposób rozszerzać kolejno obszar istnienia funkcji $f(z)$, określonej początkowo jedynie wewnątrz koła C_0 .

Rys. 77.



Rzecz jasna, iż można wykonać opisane działania nieskończenie wielu sposobami. Ażeby zdać sobie z tego sprawę, musimy określić ściśle drogę, przebieganą przez zmienną. Przypuśmy, że można otrzymać w sposób, wyjaśniony przed chwilą, dalszy ciąg analityczny funkcji, określonej przez szereg (7) wzdłuż drogi L . Każdy punkt x drogi L jest środkiem koła o promieniu r , wewnątrz którego funkcja daje się wyrazić zapomocą szeregu zbieżnego, uporządkowanego według potęg różnicy $z - x$. Promień r tego koła zmienia się w sposób ciągły wraz z x .

Istotnie, niech x i x' oznaczają dwa punkty pobliżkie drogi L , a r i r' — odpowiednie promienie zbieżności; jeżeli punkt x' leży dość blisko punktu x , aby był spełniony warunek

$$|x' - x| < r,$$

to promień r' zawiera się pomiędzy

$$r - |x' - x| \quad \text{a} \quad r + |x' - x|,$$

jak zauważyliśmy przed chwilą. Różnica $r' - r$ dąży tedy do zera wraz z $|x' - x|$. Weźmy teraz okrąg C_0' o promieniu $\frac{R}{2}$, zatoczony dokoła początku układu, jako środka; jeżeli a oznacza jakikolwiek punkt tego okręgu,

to promień zbieżności szeregu (8) równa się co najmniej $\frac{R}{2}$, ale może być większym. Ponieważ ten promień zmienia się w sposób ciągły wraz z położeniem punktu a , osiąga tedy w pewnym punkcie okręgu C_0' minimum $\frac{R}{2} + r$. Nie można przytym otrzymać wartości $r > 0$.

Istotnie, gdyby r było dodatnie, to istniałaby funkcja $F(z)$, całkokształtna w kole o promieniu $R + r$, mającym za środek początek układu, i identyczna wewnątrz koła C_0 z funkcją $f(z)$. Przy wartości zmiennej z o module, zawartym pomiędzy R a $R + r$, funkcja $F(z)$ byłaby równa sumie któregośkolwiek z szeregów (8), przy założeniu, że a oznacza taki punkt okręgu C_0' , że

$$|z - a| < \frac{R}{2} + r.$$

Według twierdzenia Cauchy'ego funkcja $F(z)$ byłaby równa sumie szeregu potęgowego, zbieżnego w kole o promieniu $R + r$, i szereg ten musiałby być tożsamościowo równym szeregowi (7), co jest niemożliwe.

Istnieje zatem na okręgu C_0' przynajmniej jeden taki punkt a , iż koło zbieżności szeregu (8) ma za promień $\frac{R}{2}$, i koło to jest styczne do koła C_0 w punkcie α , w którym promień $O\alpha$ przecina okrąg koła C_0 . Punkt α jest to punkt *osobliwy* (singulier) funkcji $f(z)$ na okręgu koła C_0 . W żadnym kole c , dla którego punkt α jest środkiem, jakkolwiek małym byłby jego promień, nie może istnieć żadna funkcja całkokształtna, równa tożsamościowo funkcji $f(z)$ w części wspólnej obu kołom C_0 i c . Rzecz jasna również, że koło zbieżności szeregu (8), które ma za środek punkt dowolny promienia $O\alpha$, musi być styczne wewnętrznie w punkcie α do okręgu koła C_0 ⁽¹⁾.

(1) Jeżeli wszystkie współczynniki szeregu (7) są rzeczywiste i dodatnie, to punkt $z = R$ musi być konieczniew punktem osobliwym okręgu C_0 . Istotnie, gdyby tak nie było, szereg potęgowy

$$f\left(\frac{R}{2}\right) + \left(z - \frac{R}{2}\right) f'\left(\frac{R}{2}\right) + \dots + \frac{\left(z - \frac{R}{2}\right)^n}{n!} f^{(n)}\left(\frac{R}{2}\right) + \dots,$$

wyrażający $f(z)$ w sąsiedztwie punktu $z = \frac{R}{2}$, miałby promień zbieżności większy niż $\frac{R}{2}$. To samo stosowałoby się *tym bardziej* do szeregu:

$$f\left(\frac{R e^{i\omega}}{2}\right) + \left(z - \frac{R e^{i\omega}}{2}\right) f'\left(\frac{R e^{i\omega}}{2}\right) + \dots$$

Weźmy teraz drogę L , wychodzącą z początku układu i kończącą się w jakimkolwiek punkcie Z , położonym poza kołem C_0 , i wyobraźmy sobie ciało ruchome, przebiegające tę drogę zawsze w tym samym zwrocie od O ku Z . Niech α_1 oznacza punkt, w którym to ciało ruchome wychodzi poza obręb koła; gdyby ten punkt α_1 był punktem osobliwym, posuwanie się dalsze wzdłuż drogi L byłoby niemożliwe. Przypuścimy, że nie jest to punkt osobliwy; można wówczas utworzyć taki szereg, uporządkowany według potęg różnicy $z - \alpha_1$ i zbieżny w kole C_1 o środku α_1 , że jego suma równa się tożsamościowo funkcji $f(z)$ w części, wspólnej obu kołom C_0 i C_1 . Ażeby obliczyć

$$f(\alpha_1), f'(\alpha_1), \dots,$$

można będzie użyć np. punktu pośredniego na promieniu $O\alpha_1$. Sumowanie drugiego szeregu daje nam dalszy ciąg analityczny funkcji $f(z)$ wzdłuż drogi L , poczynając od α_1 , o ile ciało ruchome, zakreślając tę drogę, nie wychodzi z koła C_1 . W szczególności, jeżeli cała ta droga od α_1 leży wewnątrz koła C_1 , to ten szereg da wartość funkcji w punkcie Z . Jeżeli droga L wychodzi z koła C_1 w punkcie α_2 , to potrzeba utworzyć podobnie nowy szereg, zbieżny w kole C_2 o środku α_2 , i podobnie w dalszym ciągu.

Przypuśćmy z początku, że po liczbie skończonej takich działań dochodzimy do koła C_p o środku α_p , zawierającego całą część drogi L , następującą po α_p , a w szczególności punkt Z . Wystarczy zastąpić z przez Z w ostatnim z użytych szeregów oraz w szeregach, które dają się zeń otrzymać przez różniczkowanie wyraz po wyrazie, ażeby wyznaczyć wartości funkcji

$$f(Z), f'(Z), f''(Z), \dots,$$

osiągane w punkcie Z , t. j. element końcowy funkcji badanej.

Rzecz jasna, że do punktu jakiegokolwiek drogi L przybywamy z zupełnie określonymi wartościami funkcji i wszystkich jej pochodnych. Zauważmy również, że możnaby zastąpić koła $C_0, C_1, C_2, \dots, C_p$

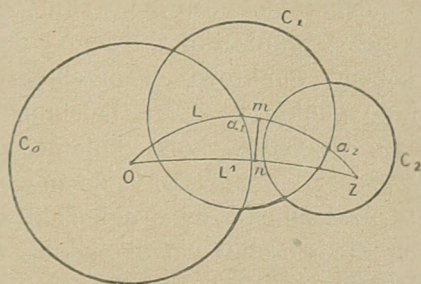
przy dowolnej wartości argumentu ω , gdyż mamy oczywiście, ze względu na to, że wszystkie współczynniki a_n są dodatnie

$$\left| f^{(n)} \left(\frac{Re^{i\omega}}{2} \right) \right| \leq f^{(n)} \left(\frac{R}{2} \right).$$

Minimum, osiągnęte przez promień zbieżności szeregu (8), gdy a zakreśla okrąg C_0 , byłoby tedy większe niż $\frac{R}{2}$.

przez ciąg kół, określonych w ten sam sposób, których środkami byłyby punkty dowolne $z_1, z_2, \dots, z_q$ drogi L , byleby koło o środku z_i zawierało część drogi L od z_i do z_{i+1} . Możemy również zmienić drogę L , zachowując jej punkty końcowe, w taki sposób, ażeby nie uległy zmianie wartości końcowe funkcji $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$, $\dots$. W istocie, koła $C_0, C_1, \dots, C_p$ nakrywają część płaszczyzny, stanowiącą rodzaj pasa, w którym leży droga L ; drogę tę można zastąpić przez wszelką inną drogę L' , idącą od $z=O$ do punktu Z , i położoną w tym samym pasie. Założmy, w celu ustalenia biegu myśli, że byliśmy zmuszeni do użycia trzech następujących po sobie kolejno kół C_0, C_1, C_2 (rys. 78). Niech L'

Rys. 78.



oznacza nową drogę, położoną w pasie, utworzonym przez te trzy koła; połączmy punkty m i n . Rzecz jasna, że, idąc od O do m z początku po drodze $O a_1 m$, a następnie po drodze $O n m$, otrzymamy w punkcie m ten sam element, ponieważ mamy do czynienia z funkcją, całokształtną w obszarze, utworzonym przez C_0 i C_1 . Podobnie, idąc od m do Z po drodze $m a_2 Z$ lub po drodze $m n Z$, przybywamy do punktu Z z tym samym elementem. Droga L jest tedy równoznaczna drodze $O n m n Z$, t. j. drodze L' . Metoda nie ulega zmianie przy liczbie dowolnej następujących po sobie kół. W szczególności można zawsze zastąpić drogę dowolnego kształtu przez linię łamaną ⁽¹⁾.

343. Punkty osobliwe. — Przy wyjaśnionym powyżej postępowaniu może się zdarzyć, iż choćbyśmy posuwali jakkolwiek daleko wskazane działania, nie zdołamy otrzymać koła, zawierającego całą część dro-

⁽¹⁾ Rozumowanie powyższe wymaga nieco więcej uwagi, gdy droga L posiada punkty podwójne, gdyż wówczas pas, utworzony przez następujące po sobie koła $C_0, C_1, C_2, \dots$, może częściowo nakrywać sam siebie. W istocie rzeczy jednak nie ma tu żadnej prawdziwej trudności.

gi L , która ma być jeszcze zakresłona. Nie otrzymamy go, gdy punkt α_p będzie punktem osobliwym okręgu C_{p-1} , ponieważ będziemy zmuszeni wówczas do zatrzymania się. Jeżeli można powtarzać wskazane działania nieograniczenie bez osiągnięcia koła, któreby zawierało całą część drogi L , która ma być jeszcze zakresłona, to punkty $\alpha_{p-1}, \alpha_p, \alpha_{p+1}, \dots$, dążą do punktu granicznego λ , położonego na drodze L , którym może być bądź sam punkt Z , bądź jakiś punkt, położony pomiędzy O i Z . Punkt λ jest również *punktem osobliwym* (point singulier), i przedłużanie analityczne funkcji $f(z)$ wzdłuż drogi L poza punkt λ jest niemożliwe. Jeżeli jednak λ jest różne od Z , okoliczność ta nie dowodzi, iżby sam punkt Z był punktem osobliwym, i iżby nie można było przejść od O do Z inną drogą.

Weźmy np. funkcje $V1+z$ lub $\text{Log}(1+z)$; od początku układu do punktu $z=-2$ nie można się posuwać wzdłuż osi rzeczywistej, gdyż nie zdołalibyśmy przekroczyć punktu osobliwego $z=-1$. Atoli jest to rzecz jasna, iż jeżeli każemy punktowi z przebiegać drogę, nie przechodzącą przez ten punkt, to punkt $z=-2$ zostanie osiągnięty po liczbie skończonej działań, gdyż wszystkie koła, kolejno po sobie następujące, przejdą przez punkt $z=-1$. Zauważmy, że powyższe określenie punktów osobliwych zawiera uzależnienie od drogi, zakreslanej przez zmienną; punkt λ może być punktem osobliwym dla jakiejś określonej drogi i nie być nim dla innej, jeżeli funkcja posiada kilka odmiennych gałęzi.

Gdy dwie drogi L_1, L'_1 , idące od początku układu do punktu Z , dają w punkcie Z różne elementy, to istnieje przynajmniej jeden punkt osobliwy wewnątrz obszaru, który byłby zakresłony przez jedną z tych dróg, np. L_1 , gdybyśmy przekształcali ją w sposób ciągły, zachowując punkty końcowe, tak by przystał do L'_1 . Przypuśćmy, co zawsze można uczynić, iż obie drogi L_1 i L'_1 są to linie łamane o tej samej liczbie boków:

$$Oa_1 b_1 c_1 \dots l_1 Z \quad \text{ i } \quad Oa'_1 b'_1 c'_1 \dots l'_1 Z$$

(rys. 79). Oznaczmy przez

$$\begin{array}{ccccccc} a_2, & b_2, & c_2, & \dots, & l_2 \\ \text{środkie odcinków} & & & & \\ a_1 a'_1, & b_1 b'_1, & \dots, & l_1 l'_1; \end{array}$$

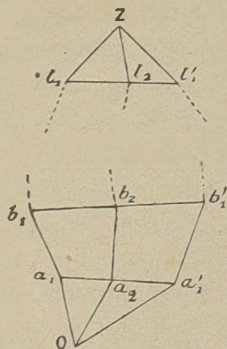
droga L_2 wzdłuż linji łamanej

$$Oa_2 b_2 \dots l_2 Z$$

nie może być równoważna jednocześnie dwu drogom L_1 i L'_1 , o ile nie zawiera punktów osobliwych. Jeżeli ta droga L_2 zawiera punkt osobliwy, twierdzenie nie wymaga dalszego dowodu. Jeżeli dwie drogi L_1 i L_2 , nie są równoważne, można będzie w ten sam sposób otrzymać

nową drogę L_3 , zawartą pomiędzy L_1 i L_2 . Postępując tak samo w dalszym ciągu, albo dojdziemy do jakiejś drogi L_p z punktem osobliwym, albo otrzymamy ciąg nieograniczony dróg $L_1, L_2, \dots$. Drogi te będą dążyły do pewnej drogi granicznej Λ , gdyż punkty $a_1, a_2, a_3, \dots$ będą zmierzały do punktu granicznego, zawartego pomiędzy a_1 , a $a'_1, \dots$,

Rys. 79.



i podobnie inne punkty. Owa droga graniczna Λ musi przechodzić niezbędnie przez punkt osobliwy, gdyż można wykreślić po dwu stronach drogi Λ drogi, nieograniczenie zbliżone do Λ i dające różne elementy funkcji w punkcie Z . Nie byłoby to możliwe, gdyby droga Λ nie zawierała żadnego punktu osobliwego, gdyż drogi nieograniczenie bliskie tej drogi winnyby być jej równoważne.

Określenie powyższe punktów osobliwych posiada charakter czysto negatywny i nie poucza nas zupełnie o istocie funkcji w sąsiedztwie takich punktów. Żadne przypuszczenie co do nich samych, ani też co do ich rozkładu w płaszczyźnie nie może być z góry usunięte, o ile nie chcemy narazić się na sprzeczności. Jedynie badanie przedłużenia analitycznego może nas doprowadzić do poznania różnych możliwych okoliczności ⁽¹⁾.

(¹) Niech $f(x)$ oznacza funkcję analityczną, całokształtną wzdłuż odcinka ab osi rzeczywistej. W sąsiedztwie jakiegokolwiek punktu α tego odcinka funkcja może być wyrażona przez szereg potęgowy o promieniu zbieżności $R(\alpha)$, nie równym zeru. Ów promień R , jako funkcja ciągła zmiennej α , osiąga najniższą wartość dodatnią r . Niech ρ oznacza liczbę dodatnią, mniejszą od r , a E — pole, zamiatane przez koło o promieniu ρ , którego środek przebiega odcinek ab . Funkcja $f(x)$ jest całokształtna w obszarze E i na jego obwodzie; oznaczmy przez M granicę wyższą modulu tej

343. Zagadnienie ogólne. — Z poprzedniego wyniku, że funkcja analityczna jest *teoretycznie określona* (virtuellement déterminée), gdy znamy jeden z jej elementów, t. j. gdy znamy taki ciąg współczynników

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

że szereg

$$a_0 + a_1(x - \alpha) + \dots + a_n(x - \alpha)^n + \dots$$

posiada promień zbieżności różny od zera. Przypuśćmy, że te współczynniki są dane; wypada sobie w takim razie postawić zagadnienie ogólne następujące: *wyznaczyć wartość, którą funkcja przybiera w dowolnym punkcie β płaszczyzny, gdy każemy zmiennej przebiegać pewną określoną drogę, wiodącą od punktu α do punktu β* . Można również dążyć do wyznaczenia z góry punktów osobliwych funkcji analitycznej; rzecz jasna zresztą, że oba te zagadnienia ściśle się wiążą ze sobą. Sama metoda przedłużania analitycznego daje rozwiązanie, przynajmniej teoretyczne, obu tych zagadnień, można ją jednak zastosować w praktyce jedynie w nielicznych przypadkach szczególnych. Ponieważ np. nic nie wyznacza *a priori* liczby szeregów pośrednich, których należy użyć, aby przejść od punktu α do punktu β , i ponieważ sumy tych szeregów można obliczyć jedynie z pewnym przybliżeniem, zdanie sobie sprawy ze stopnia przybliżenia, który otrzymamy w końcu, wydaje się rzeczą niemożliwą. Przeto należało koniecznie poszukiwać rozwiązań prostszych, przynajmniej w przypadkach szczególnych. Atoli dopiero od lat kilku to zagadnienie poczęło być badane w pracach systematycznych, które już dostarczyły poważnych wyników⁽¹⁾. Jeżeli te badania są tak niedawne, nie należy tego przypisywać jedynie trudności zagadnienia, acz istotnie wielkiej. W istocie, funkcje, zbadane kolejno przez matematyków, nie były przez nich wybierane w sposób dowolny; badanie tych funkcji narzucało się samo przez się ze względu na istotę zadań, wymagających ich wysiłków. Owóż, poza małą liczbą funkcji przestępnych, wszystkie te funkcje zostały

funkcji; z wzorów ogólnych (14) art. 291 wynika, że dla dowolnego punktu x odcinka $a b$ jest ważna nierówność:

$$\left| f^{(n)}(x) \right| < \frac{M n!}{\rho^n}.$$

(Por. t. I, str. 484).

⁽¹⁾ Co do wszystkiego, dotyczącego tego zagadnienia, odeślę czytelnika do doskonałej rozprawy Hadamard'a: *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Szereg Taylora i jego przedłużanie analityczne). (Naud, 1901). Można tam znaleźć bardzo wyczerpujące wskazówki bibliograficzne.

określone po funkcjach wyraźnych elementarnych bądź jako pierwiastki równań, nie dających się formalnie rozwiązać, bądź jako całki równań różniczkowych algebracyjnych. Łatwo tedy pojąć, że badanie funkcji uwikłanych i funkcji, określonych przez te równania różniczkowe, musiało ze względów logicznych poprzedzić zbadanie zagadnienia ogólnego, którego postaciami nader szczególnymi są właściwie w istocie rzeczy tamte dwa zagadnienia.

Łatwo okazać, w jaki sposób badanie równań różniczkowych algebracyjnych wiąże się z teorią przedłużania analitycznego. Weźmy, w celu ustalenia biegu myśli, dwa szeregi $y(x)$, $z(x)$, uporządkowane według potęg dodatnich zmiennej x i zbieżne w kole C o promieniu R , zakreślonym dokoła punktu $x = 0$, jako środka. Niech z drugiej strony

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(p)}, z, z', \dots, z^{(q)})$$

oznacza wielomian całkowity względem

$$x, y, y'', \dots, y^{(p)}, z, z', \dots, z^{(q)}.$$

Przypuśćmy, że się zastępuje w tym wielomianie y i z przez szeregi powyższe,

$$y', y'', \dots, y^{(p)},$$

przez kolejne pochodne szeregu $y(x)$, a

$$z', z'', \dots, z^{(q)},$$

przez pochodne szeregu $z(x)$; wynik stanowiąc będzie również szereg, zbieżny w kole C . Jeżeli wszystkie współczynniki tego szeregu są równe zeru, to funkcje całokształtne $y(x)$ i $z(x)$ czynią zadość, w kole C , warunkowi:

$$(9) \quad F(x, y, y', \dots, y^{(p)}, z, z', \dots, z^{(q)}) = 0.$$

Uzasadnimy teraz, że funkcje, otrzymane zapomocą przedłużania analitycznego szeregów $y(x)$ i $z(x)$, spełniają ten sam warunek w całym obszarze swego istnienia. Dokładniej: jeżeli punkt x przebiega drogą L , wychodzącą z początku układu, wykraczającą poza koło C i kończącą się w jakimkolwiek punkcie α płaszczyzny, i jeżeli można tworzyć dalszy ciąg analityczny obu szeregów $y(x)$ i $z(x)$ wzdłuż tej drogi bez napotkania żadnego punktu osobliwego, to szeregi potęgowe

$$Y(x - \alpha) \quad \text{i} \quad Z(x - \alpha),$$

do których dochodzimy w punkcie α , wyrażają w otoczeniu tego punktu funkcje całokształtne, spełniające związek (9).

Niech, w istocie, x_1 oznacza punkt drogi L , położony wewnątrz koła C i bliski punktu, w którym ta droga L wychodzi poza koło C ; dokoła punktu x_1 jako środka można zakreślić koło C_1 , położone częściowo zewnątrz koła C , i istnieją dwa szeregi potęgowe

$$y(x - x_1), \quad z(x - x_1),$$

zbieżne w kole C_1 i takie, że ich sumy są tożsamościowo równe sumom szeregów $y(x)$ i $z(x)$ w części wspólnej obu kołom C i C_1 . Wynikiem zastąpienia w F funkcji y i z przez te dwa szeregi będzie szereg potęgowy $P(x - x_1)$, zbieżny w kole C_1 . Owóż, w części wspólnej dwu kołom C i C_1 $P(x - x_1) = 0$; szereg $P(x - x_1)$ posiada tedy wszystkie współczynniki równe zeru, i dwa nowe szeregi

$$y(x - x_1) \quad \text{i} \quad z(x - x_1)$$

czynią zadość warunkowi (9) w kole C_1 . Postępując tak samo w dalszym ciągu, stwierdzamy, że ten warunek nie przestaje być nigdy spełnionym — jakkolwiek byłaby droga zmiennej — przez dalsze ciągi analityczne szeregów $y(x)$ i $z(x)$; twierdzenie tedy jest dowiedzione.

Badanie funkcji, określonej przez równanie różniczkowe, jest tedy w istocie rzeczy tylko odmianą szczególną zagadnienia ogólnego co do przedłużenia analitycznego. Z drugiej strony atoli łatwo zrozumieć, że znajomość pewnego szczególnego związku pomiędzy funkcją analityczną i niektórymi jej pochodnymi może w pewnych przypadkach ułatwić rozwiązanie zadania. Wypadnie nam wrócić do tego punktu przy badaniu równań różniczkowych.

II. — Przestrzenie próżne. — Cięcia.

Badanie funkcji modułowych eliptycznych dało Hermite'owi pierwszy przykład funkcji analitycznej, określonej tylko w pewnej części płaszczyzny. Wskażemy tu bardzo prosty sposób otrzymywania funkcji analitycznych, dla których przestrzeń próżną stanowi dowolny obszar płaszczyzny, odpowiadający pewnym założeniom o charakterze nader ogólnym co do krzywej, która go ogranicza.

345. Linje osobliwe. Przestrzenie próżne. — Uzasadnijmy przede wszystkim pewne twierdzenie pomocnicze ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ POINCARÉ, *Acta Societatis Fennicae*, t. XIII, 1881. — GOURSAT, *Bulletin des Sciences mathématiques*, serja 2, t. XI, str. 109 i t. XVII, str. 247.

Weźmy dwa szeregi

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad \text{ i } \quad c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots$$

o wyrazach dowolnych i załóżmy, że drugi z nich jest bezwzględnie zbieżny i że każdy jego wyraz jest różny od zera; niech C oznacza okrąg o środku z_0 , nie otaczający żadnego z punktów a_i i przechodzący przez *jeden tylko* z tych punktów; szereg

$$(10) \quad F(z) = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{c_v}{a_v - z}$$

wyraża w kole C funkcję całokształtną, która może być rozwinięta w szereg, uporządkowany względem potęg różnicy $z - z_0$. *Kołem zbieżności tego szeregu jest właśnie koło C .*

Można, rzecz oczywista, założyć, że $z_0 = 0$, gdyż przy zamianie zmiennej z na $z_0 + z'$, a_v zostaje zastąpione przez $a_v - z_0$, i c_v nie ulega zmianie. Założymy również, oznaczając przez R promień koła C , że

$$|a_1| = R, \quad \text{ oraz } \quad |a_i| > R \quad \text{ przy } \quad i > 1.$$

W kole C wyraz ogólny $\frac{c_v}{a_v - z}$ może być rozwinięty w szereg potęgowy, dla którego funkcją wyższą, jak łatwo stwierdzić, będzie

$$\frac{|c_v|}{R} \frac{1}{1 - \frac{z}{R}}.$$

Według twierdzenia ogólnego, dowiedzionego wyżej (art. 267), przy zbieżności szeregu $\sum |c_v|$ funkcja $F(z)$ może być rozwinięta w kole C w szereg potęgowy, który możemy otrzymać, dodając wyraz po wyrazie szeregi, wyrażające poszczególne wyrazy. Otrzymamy tedy, w tym kole C

$$(10)' \quad F(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots + A_n z^n + \dots,$$

$$A_n = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{c_v}{a_v^{n+1}}.$$

Obierzmy taką liczbę całkowitą p , iżby suma $\sum_{v=p+1}^{+\infty} |c_v|$ była mniejsza niż $\frac{1}{2} |c_1|$, co jest możliwe, gdyż c_1 nie równa się zeru,

a szereg $\sum |c_v|$ jest zbieżny. Obrawszy w ten sposób p i zakładając:

$$F_1(z) = \sum_{v=2}^p \frac{c_v}{a_v - z}, \quad F_2(z) = \frac{c_1}{a_1 - z} + \sum_{v=p+1}^{+\infty} \frac{c_v}{a_v - z},$$

możemy napisać:

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z).$$

$F_1(z)$ jest to funkcja wymierna, posiadająca bieguny jedynie zewnętrznie koła C , można ją tedy rozwinąć w szereg potęgowy o promieniu $R' > R$. Co do $F_2(z)$, mamy

$$(11) \quad F_2(z) = B_0 + B_1 z + \dots + B_n z^n + \dots,$$

zakładając, że

$$B_n = \frac{1}{a_1^{n+1}} + \frac{c_{p+1}}{(a_{p+1})^{n+1}} + \frac{c_{p+2}}{(a_{p+2})^{n+1}} + \dots$$

Można jeszcze napisać ten współczynnik w postaci

$$B_n = \frac{1}{a_1^{n+1}} \left[c_1 + \sum_{v=p+1}^{+\infty} c_v \left(\frac{a_1}{a_v} \right)^{n+1} \right];$$

lecz zgodnie z założeniem $\left| \frac{a_1}{a_v} \right| < 1$, i moduł sumy

$$\sum_{v=p+1}^{+\infty} c_v \left(\frac{a_1}{a_v} \right)^{n+1},$$

jest ze względu na sposób, w jaki została obrana liczba p , mniejszy niż $\frac{1}{2} |c_1|$. Moduł współczynnika B_n zawiera się tedy pomiędzy

$$\frac{1}{2R^{n+1}} |c_1| \quad \text{a} \quad \frac{3}{2R^{n+1}} |c_1|,$$

i moduł wyrazu ogólnego szeregu (11) jest zawarty pomiędzy

$$\frac{|c_1|}{2R} \left| \frac{z}{R} \right|^n \quad \text{a} \quad \frac{3|c_1|}{2R} \left| \frac{z}{R} \right|^n;$$

szereg ten jest zatem rozbieżny, gdy $|z| > R$.

Rzecz oczywista, że dodając do szeregu $F_2(z)$, zbieżnego w kole o promieniu R , szereg $F_1(z)$ zbieżny w kole o promieniu $R' > R$, otrzymamy sumę $F(z)$, dla której kołem zbieżności będzie koło C o promieniu R ; wypowiedziane twierdzenie jest już tedy dowiedzione.

Weźmy teraz jakąś krzywą L , zamkniętą lub nie, któraby posiadała w każdym punkcie określony promień krzywizny. Pamiętając, że szereg $\sum |c_v|$ jest bezwzględnie zbieżny, założmy, że wszystkie punkty, należące do ciągu $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots$ leżą na krzywej L i to w taki sposób, że na każdym łuku skończonym tej krzywej mieści się nieskończenie wiele tych punktów. Szereg

$$(12) \quad F(z) = \sum_{v=1}^{+\infty} \frac{c_v}{a_v - z},$$

jest zbieżny we wszelkim punkcie z_0 , nie należącym do krzywej L , i wyraża funkcję, całokształtną w otoczeniu takiego punktu: w celu uzasadnienia tego wystarczyłoby podjąć na nowo pierwszą część poprzedniego dowodu z warunkiem zastąpienia koła C dowolnym kołem o środku z_0 , nie zawierającym żadnego punktu a_i . Jeżeli krzywa L nie jest zamknięta i nie posiada punktów podwójnych, szereg (12) wyraża funkcję, całokształtną w dziedzinie całej płaszczyzny, z wyjątkiem punktów krzywej L . Nie możemy jeszcze stąd wnioskować, że ta krzywa jest linią osoblwą; należałoby jeszcze upewnić się, że przedłużenie funkcji $F(z)$ poprzez jakąś część, bodaj najmniejszą, krzywej L , jest niemożliwe. Wystarczy do tego stwierdzenie, że koło zbieżności szeregu potęgowego, który wyraża $F(z)$ w otoczeniu jakiegokolwiek punktu z_0 , nie położonego na L , nie może nigdy zawierać żadnego łuku tej linii, choćby najmniejszego. Istotnie, założmy, że koło C o środku z_0 zawiera łuk $\alpha\beta$ linii L . Na tym łuku $\alpha\beta$ weźmy punkt a_i , a na normalnej do łuku w punkcie a_i punkt z' , tak bliski punktu a_i , izby okrąg C_i o promieniu $|z' - a_i|$, zatoczony dokoła punktu z' , jako środka, leżał całkowicie wewnątrz C i nie posiadał żadnych punktów wspólnych z łukiem $\alpha\beta$ prócz samego punktu a_i . Według uzasadnionego przed chwilą twierdzenia koło C_i byłoby kołem zbieżności szeregu potęgowego, wyrażającego $F(z)$ w otoczeniu punktu z' . Lecz byłoby to sprzeczne z własnościami ogólnymi szeregów potęgowych, gdyż to koło zbieżności nie może być mniejsze od koła o środku z' , stycznego wewnętrznie do koła C .

Jeżeli linia L jest zamknięta, szereg (12) wyraża dwie odrębne funkcje analityczne, z których jedna istnieje tylko w obszarze A , położonym wewnątrz linii L , tak że obszar płaszczyzny, zewnętrzny względem tej linii, stanowi dla tej funkcji *przestrzeń próżną* (espace lacunaire); druga zaś, przeciwnie, istnieje zewnątrz linii L , i przestrzenią próżną jest dla niej obszar wewnętrzny. Mówi się również, iż linia L jest dla każdej z tych funkcji *cięciem istotnym* (coupure essentielle).

Gdy mamy kilka linii, zamkniętych lub nie, $L_1, L_2, \dots, L_p$, można utworzyć w ten sposób szeregi o postaci szeregu (12), dla których te linie stanowią odpowiednio cięcia istotne; dla sumy owych szeregów cięciami będą wszystkie te linie razem.

346. PRZYKŁADY. — Niech AB oznacza odcinek prostej, a α i β — odpowiedniki liczbowe końców A i B . Wszystkie punkty

$$\gamma = \frac{m\alpha + n\beta}{m+n},$$

przy założeniu, że m i n są to liczby całkowite dodatnie, zmieniające się od 1 do $+\infty$, są położone na odcinku AB , i na każdej części tego odcinka leży nieskończenie wiele punktów tego rodzaju, ponieważ punkt γ dzieli AB w stosunku $\frac{m}{n}$. Niech z drugiej strony $C_{m,n}$ oznacza wyraz ogólny szeregu o dwu wskaźnikach, bezwzględnie zbieżnego. Szereg podwójny

$$F(z) = \sum \frac{C_{m,n}}{\frac{m\alpha + n\beta}{m+n} - z},$$

wyraża funkcję analityczną, dla której odcinek AB jest cięciem istotnym. Można w istocie nieskończenie wielu sposobami przekształcić ten szereg w szereg o jednym wskaźniku. Rzecz oczywista, że dodając do siebie kilka szeregów takiego rodzaju można utworzyć funkcję analityczną, której przestrzenią próżną byłby dowolny wielokąt.

Oto jeszcze drugi przykład, w którym linia L będzie okręgiem. Niech α oznacza jakąś liczbę dodatnią niewymierną, ν liczbę dodatnią całkowitą. Załóżmy:

$$a = e^{2i\pi\alpha}, \quad a_\nu = a^\nu = e^{2i\pi\nu\alpha};$$

wszystkie punkty a_ν są różne i leżą na okręgu C o promieniu 1, zakreślonym dokoła początku układu. Ponad to, jak wiemy, można wyznaczyć takie dwie liczby całkowite m i n , iżby różnica $2\pi(n\alpha - m)$ była mniejsza co do wartości bezwzględnej od liczby ε , dowolnie małej.

Istnieją tedy potęgi liczby a , których moduł jest tak bliski zera, jak tylko zechcemy, i przeto na każdym łuku skończonym okręgu leży nieskończenie wiele punktów a^ν . Załóżmy następnie, że

$$c_\nu = \frac{a^\nu}{2^\nu};$$

szereg

$$F(z) = \sum_{\nu=1}^{+\infty} \frac{1}{2^\nu} \frac{1}{1 - \frac{z}{a^\nu}},$$

wyraża według twierdzenia ogólnego funkcję całokształtną w kole C , dla której przestrzeń próżną stanowi cały obszar płaszczyzny, położony zewnątrz tego koła. Rozwijając każdy wyraz według potęg zmiennej z , otrzymujemy jako wynik rozwinięcia funkcji $F(z)$ szereg potęgowy

$$(13) \quad 1 + \frac{z}{2a-1} + \frac{z^2}{2a^2-1} + \dots + \frac{z^n}{2a^n-1} + \dots$$

Łatwo sprawdzić bezpośrednio, że funkcja, wyrażona przez ten szereg potęgowy, nie może być przedłużona analitycznie poza koło C . Istotnie, jeżeli dodamy do niej szereg $\frac{1}{1-z}$, to otrzymamy

$$F(z) + \frac{1}{1-z} = 2 + z \left(\frac{1}{2a-1} + 1 \right) + \dots + z^n \left(\frac{1}{2a^n-1} \right) + \dots = 2F(az),$$

czyli

$$F(az) = \frac{1}{2} F(z) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z}.$$

Zmieniając w tym związku z na az , potem na $a^2z, \dots$, dochodzimy do związku ogólnego

$$(14) \quad F(a^n z) = \frac{1}{2^n} F(z) + \frac{1}{2^n(1-z)} + \frac{1}{2^{n-1}(1-az)} + \dots + \frac{1}{2(1-a^{n-1}z)},$$

który wskazuje, że różnica

$$2^n F(a^n z) - F(z)$$

jest to funkcja wymierna $\varphi(z)$, posiadająca n biegunów pierwszego rzędu

$$1, \frac{1}{a}, \dots, \frac{1}{a^{n-1}}.$$

Wzór (14) został uzasadniony przy założeniu, że

$$|z| < 1 \quad \text{ i } \quad |a| = 1.$$

Jeżeli argument liczby a jest współmierny z π , to z wzoru tego wynika, że $F(z)$ jest funkcją wymierną; wystarczy wziąć za n taką liczbę całkowitą, iżby $a^n = 1$. Jeżeli argument liczby a jest niewspółmierny z π , to jest niemożliwością, iżby funkcja $F(z)$ była całokształtna na jakimś łuku skończonym AB okręgu, chociażby dowolnie małym. W istocie, niech a^{-p} i a^{n-p} oznaczają dwa punkty, położone na łuku AB ($n > p$). Obrawszy w ten sposób liczby n i p , wyobraźmy sobie, że z zmierza do a^{-p} ; wówczas iloczyn $a^n z$ będzie dążył do a^{n-p} , i obie funkcje $F(z)$ i $F(a^n z)$ musiałyby dążyć do granic skończonych. Otóż związek (14) wskazuje, że jest to niemożliwe, gdyż funkcja $\varphi(z)$ posiada biegun a^{-p} .

Podobna metoda da się zastosować, jak wykazał Hadamard, do szeregu badanego przez Weierstrassa

$$(15) \quad F(z) = \sum b^n z^{a^n},$$

w którym a oznacza liczbę całkowitą dodatnią, a b — stałą o module mniejszym od jedności. Szereg ten jest zbieżny, o ile $|z|$ nie przekracza jedności, a rozbieżny, gdy $|z| > 1$. Koło C o promieniu $= 1$ jest tedy kołem zbieżności. Okrąg tego koła jest cięciem istotnym funkcji $F(z)$. Załóżmy, w istocie, że na jakimś łuku skończonym $\alpha\beta$ tego okręgu nie leży żaden punkt osobliwy funkcji. Jeżeli

zastąpimy zmienną z w $F(z)$ przez $ze^{\frac{2k i \pi}{c^h}}$, przy założeniu, że k i h są to dwie liczby całkowite dodatnie, a c jest to dzielnik liczby a , to wszystkie wyrazy szeregu (15), poczynając od wyrazu o wskaźniku h , pozostają bez zmiany, i różnica

$$F(z) - F\left(ze^{\frac{2k i \pi}{c^h}}\right),$$

musi być wielomianem. Funkcja $F(z)$ nie posiadałaby tedy również żadnego punktu osobliwego na łuku $z_k\beta_k$, powstającym z łuku $\alpha\beta$ przez obrót o kąt $\frac{2k\pi}{c^h}$

dokoła początku układu. Weźmy h dość wielkie, by iloraz $\frac{2\pi}{c^h}$ był mniejszy od łuku $\alpha\beta$; rzecz jasna, że łuki $\alpha_1\beta_1, \alpha_2\beta_2, \dots$, otrzymywane kolejno przy

$$k = 1, 2, \dots, c^h,$$

nakryłyby w zupełności okrąg. Funkcja $F(z)$ nie posiadałaby tedy na nim żadnego punktu osobliwego, co jest niedorzeczne (art. 342).

W przykładzie tym występuje następujący objaw szczególny, zasługujący na uwagę: szereg (15) jest wzdłuż okręgu C bezwzględnie i jednostajnie zbieżny. Wyraża tedy na tym okręgu funkcję ciągłą argumentu Θ (1).

(1) Fredholm dowiódł, że suma szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{n^2},$$

w którym a oznacza liczbę dodatnią mniejszą od jedności, nie może być przedłużona poza koło zbieżności (*Comptes rendus*, d. 24 marca r. 1890). Przykład ten prowadzi do wniosku, który zasługuje na zaznaczenie. Na okręgu o promieniu $= 1$ szereg jest zbieżny i suma

$$F(\Theta) = \sum a^n [\cos(n^2 \Theta) + i \sin(n^2 \Theta)],$$

jest funkcją ciągłą argumentu Θ , posiadającą nieskończenie wiele pochodnych. Mimo to owa funkcja $F(\Theta)$ nie może być rozwinięta zapomocą wzoru Taylora w żadnym przedziale, choćby dowolnie małym.

347. Osobliwości, występujące przy badaniu wyrażeń analitycznych. — Wszelkie wyrażenie analityczne o typie szeregu, którego wyrazy stanowią funkcje zmiennej z , lub całki oznaczonej, w której ta zmienna występuje jako parametr, wyraża przy zachowaniu pewnych warunków funkcję całokształtną w sąsiedztwie każdej wartości zmiennej z , dla której da się wogóle obliczyć. Jeżeli ogół takich wartości zmiennej z nakrywa w zupełności pewien obszar spójny A płaszczyzny, dane wyrażenie stanowi funkcję holomorficzną w tym obszarze A . Lecz jeżeli zbiór tych wartości zmiennej z tworzy dwa lub więcej obszarów osobnych i oddzielonych od siebie (*séparées*), to może się przydarzyć, że dane wyrażenie analityczne wyznacza w tych różnych obszarach funkcje zupełnie różne. Napotkaliśmy już taki przykład w art. 296-ym.

Widzieliśmy, w istocie, w jaki sposób można utworzyć szereg o wyrazach wymiernych, zbieżny w dwu trójkątach krzywoliniowych PQR , $P'Q'R'$ (rys. 61), którego suma równa się w trójkącie PQR funkcji całokształtnej $f(z)$, a w trójkącie $P'Q'R'$ — zeru. Dodając dwa takie szeregi, możemy otrzymać szereg o wyrazach wymiernych, którego suma będzie równa $f(z)$ w trójkącie PQR , a innej funkcji całokształtnej $\varphi(z)$, jak najzupełniej dowolnej, w trójkącie $P'Q'R'$. Rzecz jasna, że wobec dowolności obu funkcji $f(z)$ i $\varphi(z)$ suma szeregu w trójkącie $P'Q'R'$ nie będzie miała w ogólności żadnego związku z dalszym ciągiem analitycznym sumy tegoż szeregu w trójkącie PQR .

Oto jeszcze przykład nader prosty, podobny do przykładu, podanego przez Schrödera i Tannery'ego. Wyrażenie $\frac{1-z^n}{1+z^n}$, w którym n oznacza liczbę całkowitą dodatnią, wzrastającą nieograniczenie, dąży do gra-

Istotnie, przypuścemy, że w pewnym przedziale $(\Theta_0 - \alpha, \Theta_0 + \alpha)$

$$F(\Theta) = A_0 + A_1(\Theta - \Theta_0) + \dots + A_n(\Theta - \Theta_0)^n + \dots$$

Szereg z prawej strony znaku równości wyraża w kole c o promieniu α i środku w punkcie Θ_0 funkcję całokształtną zmiennej zespolonej Θ . Związek $z = e^{\Theta}$ podporządkowuje temu kolu w płaszczyźnie zmiennej z pole zamknięte A , które zawiera łuk γ okręgu o promieniu $=1$, łączący punkt o argumentcie $\Theta_0 - \alpha$ z punktem o argumentcie $\Theta_0 + \alpha$. W polu A dałaby się zatem określić funkcja całokształtna zmiennej z , równa tożsamościowo sumie szeregu

$$\sum a^n z^{n^2},$$

wzdłuż γ ; jest to atoli niemożliwe, gdyż sumy tego szeregu nie można przedłużyć poza kolo zbieżności.

nicy $= +1$, jeżeli $|z| < 1$, a -1 , jeżeli $|z| > 1$; jeżeli $|z| = 1$, wyrażenie to nie posiada granicy, chyba że $z = 1$. Owóż suma n pierwszych wyrazów szeregu

$$S(z) = \frac{1-z}{1+z} + \left(\frac{1-z^2}{1+z^2} - \frac{1-z}{1+z} \right) + \dots + \left(\frac{1-z^n}{1+z^n} - \frac{1-z^{n-1}}{1+z^{n-1}} \right),$$

równa się temuż wyrażeniu. Szereg ów jest tedy zbieżny, o ile tylko wartość bezwzględna $|z|$ jest różna od jedności, i suma jego równa się $+1$ wewnątrz koła C o promieniu równym *jedności* i środku w początku układu, a -1 zewnątrz tego koła. Ustaliwszy to, weźmy dwie jakiegokolwiek funkcje analityczne, np. dwie funkcje całkowite, $f(z)$ i $\varphi(z)$; wyrażenie

$$\psi(z) = \frac{1}{2} [f(z) + \varphi(z)] + \frac{1}{2} S(z) [f(z) - \varphi(z)],$$

jest równe funkcji $f(z)$ wewnątrz koła C , a $\varphi(z)$ zewnątrz tego koła. Sam obwód koła jest dla tego wyrażenia *cięciem*, lecz zupełnie innego rodzaju, niż cięcia istotne, o których przed chwilą mówiliśmy. Funkcja, równa $\psi(z)$ wewnątrz tego koła C , może być przedłużona analitycznie poza to koło, i podobnież funkcja, równa $\psi(z)$ zewnątrz C , może być przedłużona analitycznie wewnątrz koła.

Podobne osobliwości występują, gdy mowa o funkcjach, wyrażonych przez całki oznaczone. Przykład najprostszy stanowi całka Cauchy'ego; jeżeli $f(z)$ jest funkcją całokształtną wewnątrz obwodu zamkniętego Γ i na samym obwodzie, całka

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z-x}$$

równa się $f(x)$, gdy punkt x leży wewnątrz Γ ; ta sama całka równa się zeru, gdy punkt x jest położony zewnątrz obwodu Γ , gdyż funkcja $\frac{f(z)}{z-x}$ jest wówczas całokształtna wewnątrz obwodu. Linja Γ jest dla całki również *cięciem* nieistotnym. Podobnież dla całki oznaczonej

$$\int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{z-x}{2}\right) dz,$$

jest *cięciem* oś rzeczywista; całka ta jest równa $+2\pi i$ lub $-2\pi i$, stosownie do tego, czy punkt x leży nad tym *cięciem* lub też pod nim.

348. Wzór Hermite'a. — Z tym samym biegiem myśli można skojarzyć pewien zajmujący wynik, który zawdzięczamy Hermite'owi ⁽¹⁾. Niech $F(t, z)$ i $G(t, z)$ oznaczają dwie funkcje całokształtne dwu zmiennych t i z , np. wielomiany lub szeregi potęgowe, zbieżne przy wszystkich wartościach tych zmiennych.

Całka oznaczona

$$(16) \quad \Phi(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(t, z)}{G(t, z)} dt,$$

wzięta wzdłuż odcinka prostej, łączącego punkty α i β , stanowi, jak uzasadnimy dalej (art. 353) funkcję zmiennej z , wogóle całokształtną, z wyjątkiem jednak tych wartości tej zmiennej, które są pierwiastkami równania $G(t, z) = 0$, rozumianego w ten sposób, że t jest odpowiednikiem liczbowym jakiegoś punktu odcinka $\alpha\beta$. Równanie to wyznacza przeto liczbę skończoną lub nieskończoną krzywych, dla których całka (16) traci określone znaczenie. Niech AB oznacza jedną z tych krzywych, nie posiadającą punktów podwójnych; aby znaleźć się w warunkach ściśle określonych, założmy, iż przy zakresłaniu przez punkt t odcinka $\alpha\beta$ jeden z pierwiastków równania $G(t, z) = 0$ zakresła łuk AB , i że wszystkie inne pierwiastki tego równania, o ile istnieją, są położone zewnątrz pewnego obwodu zamkniętego, odpowiednio dobranego, otaczającego łuk AB , tak iż odcinek $\alpha\beta$ i łuk AB odpowiadają sobie wzajemnie punkt za punktem. Całka (16) traci wszelką treść, gdy punkt z dostaje się na łuk AB ; postaramy się obliczyć różnicę wartości, które przybiera funkcja $\Phi(z)$ w punktach N i N' , nieskończenie blizkich punktu M linji AB , a wziętych z obu stron tej linji. Niech ζ , $\zeta + \varepsilon$, $\zeta + \varepsilon'$ stanowią odpowiedniki liczbowe tych trzech punktów. Związek $G(t, z) = 0$ podporządkowuje tym trzem punktom w płaszczyźnie zmiennej t punkt m na $\alpha\beta$ i dwa punkty nieskończenie blizkie n i n' , położone po obu stronach odcinka $\alpha\beta$; niech θ , $\theta + \eta$, $\theta + \eta'$ oznaczają wartości odpowiednie zmiennej t . Weźmy w sąsiedztwie odcinka $\alpha\beta$ punkt γ dość zbliżony, by wewnątrz trójkąta $\alpha\beta\gamma$ (rys. 80), równanie $G(t, \zeta + \varepsilon) = 0$, miało tylko jeden pierwiastek $t = \theta + \eta$. Funkcja

$$\frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)}$$

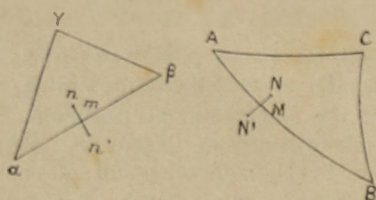
posiada zatem wewnątrz trójkąta $\alpha\beta\gamma$ tylko jeden biegun $\theta + \eta$, i stosownie do uczynionych założeń, jest to biegun jednokrotny. Stosując twierdzenie Cauchy'ego, otrzymamy tedy związek:

$$(17) \quad \left| \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)} dt + \int_{\beta}^{\gamma} \frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)} dt + \int_{\gamma}^{\alpha} \frac{F(t, \zeta + \varepsilon)}{G(t, \zeta + \varepsilon)} dt = 2i\pi \frac{F(\theta + \eta, \zeta + \varepsilon)}{G'(\theta + \eta, \zeta + \varepsilon)} \right|$$

⁽¹⁾ HERMITE, *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* (O pewnych tematach z teorii funkcji). (*Journal de Crelle*, t. 91).

Obie całki $\int_{\beta}^{\gamma} \int_{\gamma}^{\alpha}$ mają tę samą postać, co $\Phi(z)$; stanowią one tedy funkcje $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, całokształtne, o ile tylko punkt zmienny nie jest położony na pewnych cięciach. Oznaczmy przez AC i BC cięcia, odpowiadające odcinkom $\alpha\gamma$ i $B\gamma$ płaszczyzny zmiennej t i położone nieskończenie blisko cięcia AB funkcji $\Phi(z)$.

Rys. 80.



Nadajmy następnie zmiennej z wartość $\zeta + \epsilon'$; wartością odpowiednią zmiennej t będzie wartość $\Theta + \eta'$, wyobrażona przez punkt n' , i funkcja $\frac{F(t, \zeta + \epsilon')}{G(t, \zeta + \epsilon')}$ zmiennej t jest całokształtna wewnątrz trójkąta $\alpha\beta\gamma$. Mamy tedy związek:

$$(18) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{F(t, \zeta + \epsilon')}{G(t, \zeta + \epsilon')} dt + \int_{\beta}^{\gamma} \frac{F(t, \zeta + \epsilon')}{G(t, \zeta + \epsilon')} dt + \int_{\gamma}^{\alpha} \frac{F(t, \zeta + \epsilon')}{G(t, \zeta + \epsilon')} dt = 0;$$

odejmowanie stronami wzorów (17) i (18) daje nam wynik, który możemy napisać w postaci następującej:

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta + \epsilon) - \Phi(\zeta + \epsilon') + |\Phi_1(\zeta + \epsilon) - \Phi_1(\zeta + \epsilon')| + \\ + |\Phi_2(\zeta + \epsilon) - \Phi_2(\zeta + \epsilon')| = 2i\pi \frac{F(\Theta + \eta, \zeta + \epsilon)}{G'(\Theta + \eta, \zeta + \epsilon)}. \end{aligned}$$

Atoli funkcje $\Phi_1(z)$ i $\Phi_2(z)$, dla których AB nie jest cięciem, są całokształtne w sąsiedztwie punktu $z = \zeta$, i przy dążeniu liczb ϵ i ϵ' do zera, otrzymamy, jako granicę, różnicę wartości funkcji $\Phi(z)$ w dwu punktach nieskończenie zbliżonych z jednej i drugiej strony do AB . Napišemy ten wynik w postaci skróconej

$$(19) \quad \Phi(N) - \Phi(N') = 2i\pi \frac{F(\Theta, \zeta)}{\partial G(\Theta, \zeta)}.$$

jest to wzór Hermite'a. Stwierdzamy, iż wzór ten wiąże się w sposób nader prosty z twierdzeniem Cauchy'ego⁽¹⁾. Dówód wskazuje wyrażnie, w jaki sposób należy wziąć punkty N i N' ; punkt $N(\zeta + \epsilon)$ winien być położony w taki sposób, iżby punkt odpowiedni $\Theta + \eta$ leżał na lewo od widza, przebiegającego odcinek $\alpha\beta$.

(1) GOURSAT, *Sur un théorème de M. Hermite*. (O pewnym twierdzeniu Hermite'a). (*Acta mathematica*, t. I).

Należy zauważyć, że linja AB nie jest dla funkcji $\Phi(z)$ cięciem istotnym. W sąsiedztwie punktu N' można zastąpić, według wzoru (18), $\Phi(z)$ przez

$$- [\Phi_1(z) + \Phi_2(z)],$$

owóż suma $\Phi_1(z) + \Phi_2(z)$ jest funkcją całokształtną w trójkącie krzywoliniowym ACB i na samej prostej AB , równie jak w sąsiedztwie punktu N' . Zmienna z może tedy przekroczyć linję AB w jakimkolwiek jej punkcie M , różnym od krańców A i B , bez napotkania żadnej przeszkody do przedłużania analitycznego. Rzecz oczywista, to samo działoby się przy przechodzeniu przez punkt z linji AB w kierunku przeciwnym.

Przykład. — Zbadajmy całkę

$$(26) \quad \Phi(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(t) dt}{t - z},$$

braną wzdłuż odcinka AB osi liczb rzeczywistych, z warunkiem, że $f(z)$ oznacza funkcję całokształtną wzdłuż tegoż odcinka AB . Wyobrażajmy zmienną z na tej samej płaszczyźnie, co t . Funkcja $\Phi(z)$ jest funkcją zmiennej z , całokształtną w sąsiedztwie wszelkiego punktu, nie położonego na samym odcinku AB , który stanowi dla całki cięcie. Różnica $\Phi(N) - \Phi(N')$ równa się tu

$$+ 2\pi i f(\zeta)$$

[ζ odpowiada pewnemu punktowi odcinka AB]. Gdy zmienna z przekracza linję AB , dalszym ciągiem analitycznym funkcji $\Phi(z)$ staje się suma

$$\Phi(z) + 2\pi i f(z).$$

*Przykład ten nasuwa nam ważną uwagę. Funkcja $\Phi(z)$ jest funkcją całokształtną zmiennej z również wówczas, gdy $f(z)$ nie jest funkcją analityczną zmiennej t , byleby funkcja ta była ciągła między α i β (art. 291). Lecz w tym przypadku rozumowania powyższe nie mogą być zastosowane, i odcinek AB będzie w ogólności dla funkcji $\Phi(z)$ cięciem istotnym.

ĆWICZENIA.

1. Wyznaczyć linje nieciągłości całek określonych

$$F(z) = \int_0^1 \frac{z dt}{1 + z^2 t^2}, \quad \Phi(z) = \int_a^b \frac{dt}{1 + iz},$$

branych wzdłuż prostej, łączącej punkty $(0, 1)$ lub (a, b) : określić ściśle wartość każdej z tych całek w punkcie z , nie położonym na cięciach.

2. Weźmy cztery koła o promieniu $\frac{1}{\sqrt{2}}$, których środkami byłyby punkty
 $+1, +i, -1, -i$.

Przestrzeń, położona *zewnątrz* tych czterech kół, składa się z pola skończonego A_1 , zawierającego początek układu, oraz z pola nieograniczonego A_2 . Utworzyć zapomocą metody z art. 296 szereg funkcji wymiernych, zbieżny w tych obszarach, którego suma byłaby równa $+1$ w A_1 a 0 w A_2 . Sprawdzić wynik, obliczając sumę otrzymanego szeregu.

3. Zbadać to samo zagadnienie w stosunku do dwu pól, położonych *wewnątrz* koła o promieniu $=2$, mającego za środek początek układu, a *zewnątrz* dwu kół o promieniu $=1$, których środkami są odpowiednio punkty $+1$ i -1 .

[APPELL, *Acta mathematica*, t. I].

4. Dla całki określonej

$$\Phi(z) = \int_0^{+\infty} \frac{t^a \sin z}{1+2t \cos z + t^2} dt,$$

branej wzdłuż osi rzeczywistej, cięciami są proste

$$x = (2k+1)\pi$$

[k — całkowite]. Niech

$$z = (2k+1)\pi + iz$$

oznacza punkt na jednym z tych cięć. Różnica pomiędzy wartościami całki w dwu punktach, nieskończenie zbliżonych do tego punktu i położonych z różnych stron cięcia, równa się

$$\pi(e^{a\frac{z}{2}} + e^{-a\frac{z}{2}}).$$

[HERMITE, *Journal de Crelle*, t. 91].

5. Dla całek określonych, branych wzdłuż osi liczb rzeczywistych

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i(t-z)}}{t-z} dt, \quad J_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i(t-z)}}{t-z} dt,$$

stanowi cięcie oś liczb rzeczywistych w płaszczyźnie zmiennej z . Nad tą osią $J = 2i\pi$, $J_0 = 0$, a pod nią $J = 0$, $J_0 = -2i\pi$. Wysnuć z tych wzorów wartości całek określonych

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{t-z} dt, & \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(t-z)}{t-z} dt, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-it}}{t-z} dt, & \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(t-z)}{t-z} dt. \end{aligned}$$

[HERMITE, *Journal de Crelle*, t. 91].

6. Uzasadnić zapomocą cięć wzór (Rozdz. XIV, ćw. 15)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}}{1+e^t} dt = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

[HERMITE, *Journal de Crelle*, t. 91].

Bierzemy całkę

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{a(t+z)}}{1+e^{t+z}} dt,$$

dla której są cięciami wszystkie proste

$$y = (2k+1)\pi,$$

i która zachowuje stałą wartość w pasie, zawartym pomiędzy dwoma kolejnymi cięciami. Potym, oznaczając przez

$$z \text{ i } z + 2i\pi$$

dwa punkty, oddzielone od siebie przez cięcie $y = \pi$, uzasadniamy związki

$$\Phi(z + 2i\pi) = \Phi(z) + 2i\pi e^{i\pi a}, \quad \Phi(z + 2i\pi) = e^{2i\pi a} \Phi(z).$$

7°. Weźmy funkcję analityczną całokształtną w otoczeniu początku układu

$$f(z) = \sum a^n z^n$$

i oznaczmy przez $F(z)$ funkcję całkowitą *skojarzoną* (associée), równą

$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n.$$

Stwierdzamy łatwo, że

$$(1) \quad F(az) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(u)}{u} e^{\frac{az}{u}} du,$$

jeżeli obwód C , wzdłuż którego obliczamy całkę, otacza początek układu w ten sposób, iż funkcja $f(z)$ jest całokształtna w ograniczonym przezeń obszarze; wnioskujemy stąd, oznaczając przez l liczbę rzeczywistą i dodatnią:

$$(2) \quad \int_0^l e^{-a} F(az) da = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(u)}{u} du \int_0^l e^{a\left(\frac{z}{u}-1\right)} da.$$

Jeżeli część rzeczywista stosunku $\frac{z}{u}$ pozostaje mniejsza od $1-\varepsilon$ (ε — dodatnie) przy zakresłaniu przez punkt u obwodu C , to całka

$$\int_0^l e^{a\left(\frac{z}{u}-1\right)} da,$$

dąży jednostajnie do $\frac{u}{u-z}$, gdy l wzrasta nieograniczenie, i wzór (2) przybiera postać graniczną

$$(3) \quad \int_0^{+\infty} e^{-a} F(az) da = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{f(u) du}{u-z} = f(z).$$

Wzór ten daje się zastosować do wszystkich punktów, położonych wewnątrz linii spodkowej ujemnej (podaire négative) krzywej C .

[Ob. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, (Wykłady o szeregach rozbieżnych)].

8*. Weźmy dwa szeregi potęgowe

$$f(z) = \sum a^n z^n \quad \text{ i } \quad \varphi(z) = \sum b^n z^n,$$

których promienie zbieżności są równe odpowiednio r i ρ . Szereg

$$\psi(z) = \sum a^n b^n z^n,$$

posiada promień zbieżności, równy co najmniej $r\rho$, i funkcja $\psi(z)$ posiada tylko takie punkty osobliwe, które można otrzymać przez mnożenie odpowiedników liczbowych różnych punktów osobliwych funkcji $f(z)$ przez odpowiedniki liczbowe punktów osobliwych funkcji $\varphi(z)$.

[HADAMARD. *Acta mathematica*, t. XXIII, str. 55].

ROZDZIAŁ XVII.

Funkcje analityczne wielu zmiennych.

I. — Własności ogólne.

Zajmiemy się w tym rozdziale funkcjami wielu niezależnych zmiennych zespolonych. Ażeby uprościć wykład i wzory, założymy, że chodzi tylko o *dwie* zmienne; rozciągnięcie jednak własności ogólnych na funkcje dowolnej liczby zmiennych nie stanowi nic trudnego.

349. Określenia. — Weźmy dwie zmienne zespolone niezależne

$$z = u + i v, \quad z' = w + i t;$$

wszelka inna liczba zespolona Z , której wartość zależy od wartości zmiennych z i z' , może być nazwana *funkcją* dwu zmiennych z i z' . Wyobraźmy wartości tych zmiennych zapomocą punktów, posiadających odpowiednio w dwu układach współrzędnych prostokątnych, położonych w dwu płaszczyznach P i P' , współrzędne (u, v) oraz (w, t) i oznaczmy przez A i A' dwa jakiegokolwiek obszary tych dwu płaszczyzn. Powiemy, że funkcja $Z = f(z, z')$ jest *holomorficzna* (holomorphe) czyli *całokształtna* w obszarach A i A' , jeżeli wszelkiemu układowi dwu punktów z, z' , położonych odpowiednio w polach A i A' , odpowiada zupełnie określona wartość $f(z, z')$, zmieniająca się w sposób ciągły wraz z z i z' , i jeżeli każdy ze stosunków

$$\frac{f(z + h, z') - f(z, z')}{h}, \quad \frac{f(z, z + k) - f(z, z')}{k},$$

dąży do pewnej określonej granicy, gdy przy stałych wartościach z i z'

moduły przyrostów h i k dążą do zera. Granice te są to pochodne cząstkowe funkcji $f(z, z')$, i używamy do nich tego samego znakowania, które stosowaliśmy do zmiennych rzeczywistych.

Rozróżnijmy w $f(z, z')$ część rzeczywistą i współczynnik przy i , pisząc

$$f(z, z') = X + iY;$$

X i Y są to funkcje rzeczywiste czterech zmiennych niezależnych rzeczywistych u, v, w, t , spełniające cztery warunki następujące

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{\partial Y}{\partial u}, \quad \frac{\partial X}{\partial w} = \frac{\partial Y}{\partial t}, \quad \frac{\partial X}{\partial t} = -\frac{\partial Y}{\partial w},$$

których znaczenie jest oczywiste ⁽¹⁾.

Przechodząc do pochodnych drugiego rzędu, możemy wyrugować Y sześciu różnemi sposobami; lecz sześć otrzymanych przy tym związków sprowadza się tylko do czterech równań (niezależnych)

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial t} - \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial w} = 0, & \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial w} + \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial t} = 0, \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = 0, & \frac{\partial^2 X}{\partial w^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right.$$

Znaczna liczba tych związków jest zrozumiałym powodem, dla którego mało się niemi posilkowano dotychczas przy badaniu funkcji analitycznych dwu zmiennych.

350. Koła zbieżności skojarzone. — Własności szeregów potęgowych, zależnych od dwu zmiennych rzeczywistych (t. I, art. 190 — 192), dają się z łatwością rozciągnąć na przypadek, gdy współczynniki i zmienne przybierają wartości zespolone. Weźmy szereg podwójny o współczynnikach dowolnych

$$(2) \quad F(z, z') = \sum a_{mn} z^m z'^n.$$

(1) Jeżeli z i z' są to funkcje analityczne innej zmiennej x , to związki powyższe pozwalają łatwo uzasadnić, że pochodna funkcji $f(z, z')$ względem x da się otrzymać przez zastosowanie zwykłego przepisu, dającego pochodną funkcji złożonej. Wzory rachunku różniczkowego, a w szczególności wzory, dotyczące zamiany zmiennych, stosują się tedy również do funkcji analitycznych zmiennych zespolonych.

Oznaczmy $|a_{mn}|$ przez A_{mn} ; stwierdziliśmy byli (tom I, art. 190), że istnieje w ogólności nieskończenie wiele takich układów dwu liczb dodatnich R i R' , iżby szereg modułów

$$(3) \quad \sum A_{mn} Z^m Z'^n,$$

był zbieżny, gdy jednocześnie

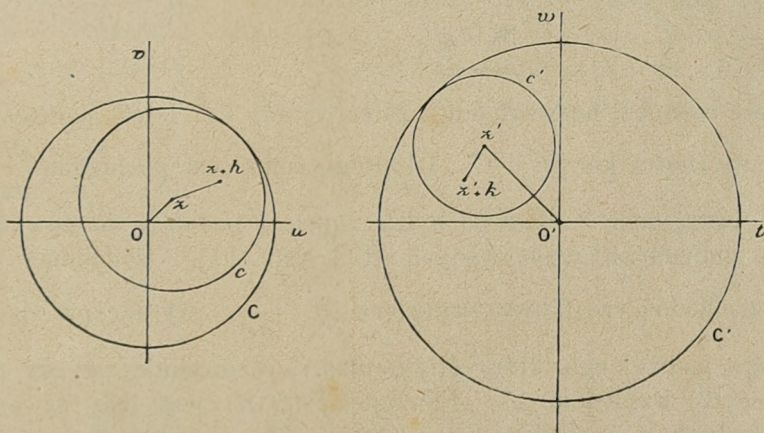
$$Z < R, \quad Z' < R',$$

a rozbieżny, gdy

$$Z > R \text{ i } Z' > R'.$$

Niech C oznacza okrąg o promieniu R , zakresłony w płaszczyźnie zmiennej z dokoła początku układu, jako środka; podobnie C' niech oznacza okrąg, zakresłony w płaszczyźnie zmiennej z' dokoła punktu $z' = 0$, jako środka, promieniem R' (rys. 81). Szereg podwójny (1) jest bezwzględnie zbieżny, gdy punkty, odpowiadające zmiennym z i z'

Rys. 81.



leżą odpowiednio wewnątrz kół C i C' , a rozbieżny gdy punkty te są położone odpowiednio zewnątrz tych kół (t. I, art. 191). Mówimy, że koła C i C' tworzą układ kół zbieżności *skojarzonych* (associés). Ta para kół odgrywa tu tę samą rolę, co koło zbieżności w stosunku do szeregu potęg jednej zmiennej; lecz zamiast jednego koła dla szeregu potęgowego, zależnego od dwu zmiennych, istnieje w ogólności nieskończenie wiele układów kół skojarzonych. Naprzykład szereg

$$\sum \frac{(m+n)}{m! n!} z^m z'^n,$$

jest bezwzględnie zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| + |z'| < 1$.

Wszelki układ kół C i C' , których promienie R i R' spełniają warunek $R + R' = 1$, jest układem kół zbieżności skojarzonych. Może się zdarzyć, iż wystarczy wprowadzenie jednego tylko układu kół zbieżności skojarzonych; dzieje się tak np. z szeregiem

$$\sum z^m z'^n,$$

który jest zbieżny jedynie wtedy, gdy jednocześnie

$$|z| < 1, \quad |z'| < 1.$$

Niech C_1 oznacza koło o promieniu $R_1 < R$, współśrodkowe z C , a C'_1 — koło o promieniu $R'_1 < R'$, współśrodkowe z C' ; gdy punkty z i z' pozostają odpowiednio wewnątrz kół C_1 i C'_1 , szereg (2) jest jednostajnie zbieżny (p. art. 191), i suma tegoż stanowi przeto wewnątrz dwu kół C i C' funkcję ciągłą $F(z, z')$ dwu zmiennych z i z' .

Różniczkując wyraz po wyrazie szereg (2), np. względem zmiennej z , otrzymujemy nowy szereg

$$\sum m a_{m n} z^{m-1} z'^n,$$

który jest również bezwzględnie zbieżny, gdy z i z' pozostają odpowiednio wewnątrz kół C i C' i którego sumą jest pochodna $\frac{\partial F}{\partial z}$ funkcji

$F(z, z')$ względem z . Dowód byłby zupełnie podobny do dowodu, podanego dla zmiennych rzeczywistych (t. I, art. 191). Podobnież $F(z, z')$ posiada pochodną cząstkową względem z' , $\frac{\partial F}{\partial z'}$, wyrażającą się zapomo-

cą szeregu podwójnego, który otrzymujemy, różniczkując wyraz po wyrazie szereg (2) względem z' . Funkcja $F(z, z')$ jest tedy w omawianej dziedzinie funkcją analityczną dwu zmiennych z i z' . To samo się stosuje oczywiście do dwu pochodnych $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial F}{\partial z'}$, i przeto funkcja $F(z, z')$ może być różniczkowaną wyraz po wyrazie ilekolwiek razy; wszystkie jej pochodne cząstkowe są to również funkcje analityczne.

Weźmy wewnątrz koła C jakiegokolwiek punkt z o module r , i dokoła tego punktu, jako środka, zakreślmy okrąg c o promieniu $R - r$, styczny wewnątrz do koła C . Niech również z' oznacza punkt jakiegokolwiek o module $r' < R'$, a c' — okrąg, zatoczony dokoła tego punktu promieniem $R' - r'$. Niech wreszcie $z + h$ i $z' + k$ oznaczają dwa dowolne punkty, położone odpowiednio w kołach c i c' , tak iż

$$|z| + |h| < R, \quad |z'| + |k| < R'.$$

Jeżeli zastąpimy w szeregu (2) z i z' przez

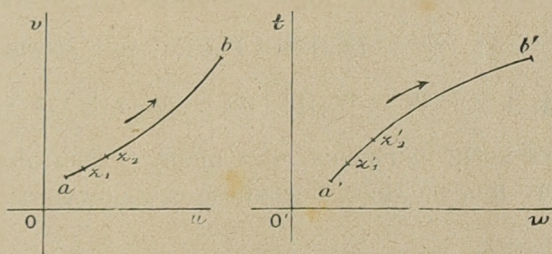
$$z + h \quad \text{ i } \quad z' + k,$$

to można będzie rozwinąć każdy wyraz w szereg, uporządkowany według potęg przyrostów h i k , i szereg podwójny, otrzymany w ten sposób, będzie bezwzględnie zbieżny. Ustawiając ten szereg według potęg przyrostów h i k , otrzymamy wzór Taylora

$$(4) \quad F(z + h, z' + k) = \sum \frac{\frac{\partial^{m+n} F}{\partial z^m \partial z'^n}}{1 \cdot 2 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \dots n} h^m k^n.$$

351. Całki podwójne. — Gdy chcemy rozciągnąć na funkcje wielu zmiennych zespolonych twierdzenia ogólne, które Cauchy wysnuł z badania całek określonych, branych pomiędzy granicami urojonemi, spotykamy trudności, które zostały w zupełności wyświetlone przez H. Poincarégo. Zbadamy tutaj tylko jeden przypadek bardzo prosty, który nam wystarczy do dalszego wykładu. Niech $f(z, z')$ oznacza funkcję, która jest całokształtna, gdy punkty z i z' pozostają odpowiednio w obrębie dwu pól A i A' (rys. 82). Weźmy krzywą ab , położoną w obszarze A

Rys. 82.



i krzywą $a'b'$, należącą do obszaru A' , i podzielmy każdą z tych krzywych na mniejsze łuki zapomocą dowolnej liczby punktów granicznych; oznaczmy przez

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{k-1}, z_k, \dots, z_{n-1}, Z$$

(¹) POINCARÉ. *Sur les résidus des intégrales doubles* (O pozostałościach całek podwójnych), (*Acta mathematica*, t. IX).

punkty podziału łuku ab , z zastrzeżeniem, że punkty z_0 i Z utożsamiają się z punktami a i b , a przez

$$z'_0, z'_1, z'_2, \dots, z'_{h-1}, z'_h, \dots, z'_{m-1}, Z'$$

punkty podziału łuku $a'b'$, przytym punkty z'_0 i Z' mają nakrywać a' i b' . Suma o dwu wskaźnikach:

$$(5) \quad S = \sum_{k=1}^m \sum_{h=1}^n f(z_{k-1}, z'_{h-1}) (z_k - z_{k-1}) (z'_h - z'_{h-1})$$

dąży do pewnej granicy, gdy obie liczby m i n wzrastają nieograniczenie w taki sposób, że wszystkie moduły

$$|z_k - z_{k-1}| \quad \text{ i } \quad |z'_h - z'_{h-1}|$$

zmierzają do zera. Załóżmy, że

$$f(z, z') = X + i Y,$$

gdzie X i Y są to funkeje rzeczywiste czterech zmiennych u, v, w, t ; założmy również, że

$$z_k = u_k + i v_k, \quad z'_h = w_h + i t_h.$$

Wyraz ogólny szeregu S może być napisany w postaci

$$[X(u_{k-1}, v_{k-1}; w_{h-1}, t_{h-1}) + i Y(u_{k-1}, v_{k-1}; w_{h-1}, t_{h-1})] \\ \cdot [u_k - u_{k-1} + i (v_k - v_{k-1})] [w_h - w_{h-1} + i (t_h - t_{h-1})],$$

i wykonywując wskazane mnożenia, otrzymamy osiem iloczynów częściowych. Dowiedzmy np., że suma iloczynów częściowych

$$(6) \quad \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^m X(u_{h-1}, v_{k-1}; w_{h-1}, t_{h-1}) (u_k - u_{k-1}) (w_h - w_{h-1}),$$

dąży do pewnej granicy. Załóżmy zgodnie z rysunkiem, że krzywą ab wszelka prosta, równoległa do osi Ov , przecina w jednym tylko punkcie, i że podobnie prosta, równoległa do osi $O't$, spotyka tylko w jednym punkcie krzywą $a'b'$. Niech

$$v = \varphi(u), \quad t = \psi(w)$$

stanowią równania tych dwu krzywych, u i U — granice, między którymi zmienia się u , w_0 i W — granice, pomiędzy którymi zmienia się w . Jeżeli zastąpimy w wyrażeniu X zmienne v i t odpowiednio przez

$\varphi(u)$ i $\psi(w)$, to wyrażenie to stanie się funkcją ciągłą $P(u, w)$ zmiennej u i w .

Sumie (6) możemy tedy jeszcze nadać postać

$$(6)' \quad \sum_{k=1}^n \sum_{h=1}^m P(u_{k-1}, w_{h-1}) (u_k - u_{k-1}) (w_h - w_{h-1}).$$

Gdy m i n rosną nieograniczenie, suma ta dąży do granicy, którą stanowi całka podwójna

$$\iint P(u, w) du dv,$$

wzięta w prostokącie, ograniczonym przez proste

$$u = u_0, \quad u = U, \quad w = w_0, \quad w = W.$$

Można napisać również tę całkę w postaci

$$\int_{u_0}^U du \int_{w_0}^W P(u, w) dw,$$

albo też wreszcie, przy uwzględnieniu całek krzywoliniowych

$$(7) \quad \int_{(ab)} du \int_{(a'b')} X(u, v; w, t) dw.$$

Co do ostatniego wyrażenia, zakładamy, że u i v są to współrzędne jakiegokolwiek punktu łuku ab , a w i t — współrzędne dowolnego punktu łuku $a'b'$. Zakładając, że punkt (u, v) jest stały, kažemy punktowi (w, t) zakresłać łuk $a'b'$ i bierzemy całkę krzywolinową

$\int X dw$ wzdłuż $a'b'$. Otrzymujemy funkcję liczb u i v , którą oznaczmy np. przez $R(u, v)$; następnie obliczamy wzdłuż łuku ab całkę krzywolinową $\int R(u, v) du$.

Ostatnie (7) z otrzymanych wyrażań granicy sumy (6) może być zastosowane przy jakichkolwiek drogach ab i $a'b'$. Wystarczy, jak to już wielokrotnie czyniliśmy, podzielić każdą z krzywych ab i $a'b'$ na łuki dość małe, ażeby spełniały żądane warunki, skojarzyć wszelkimi możliwymi sposobami części łuku ab z częściami łuku $a'b'$ a następnie dodać otrzymane wyniki. Postępując w ten sam sposób ze wszystkimi sumami iloczynów częściowych, analogicznymi do sumy (6), stwierdzimy, że granicą sumy S jest suma ośmiu całek podwójnych, podobnych do całki (7).

Oznaczmy tę granicę przez

$$\iint F(z, z') dz, dz';$$

mamy równość:

$$(8) \quad \left| \begin{aligned} \iint F(z, z') dz dz' &= \int_{(ab)} du \int_{(a'b')} X d\omega - \int_{(ab)} dv \int_{(a'b')} X dt \\ &\quad - \int_{(ab)} du \int_{(a'b')} Y dt - \int_{(ab)} dv \int_{(a'b')} Y d\omega \\ &\quad + i \int_{(ab)} du \int_{(a'b')} Y d\omega - i \int_{(ab)} dv \int_{(a'b')} Y dt \\ &\quad + i \int_{(ab)} du \int_{(a'b')} X dt + i \int_{(ab)} dv \int_{(a'b')} X d\omega, \end{aligned} \right|$$

którą można jeszcze napisać w postaci skróconej

$$\iint F(z, z') dz dz' = \int_{(ab)} (du + i dv) \int_{(a'b')} (X + i Y) (d\omega + i dt)$$

lub wreszcie

$$(9) \quad \iint F(z, z') dz dz' = \int_{(ab)} dz \int_{(a'b')} F(z, z') dz'.$$

Wzór (9) jest zupełnie podobny do wzoru, który pozwala obliczyć zapomocą dwu kolejnych kwadratur zwykłą całkę podwójną, rozciągniętą na powierzchnię prostokąta (t. I, art. 120). Obliczamy z początku całkę

$$\int F(z, z') dz'$$

wzdłuż łuku $a'b'$, uważając z za stałą; wynik stanowi funkcję $\Phi(z)$ zmiennej z , którą całkujemy następnie wzdłuż łuku ab . Ponieważ obie drogi ab i $a'b'$ odgrywają podobną rolę, można oczywiście odwracać porządek całkowań.

Niech M oznacza liczbę dodatnią większą od wartości, przybieranych przez moduł funkcji $F(z, z')$, gdy z i z' przebiegają łuki ab i $a'b'$; jeżeli L i L' oznaczają odpowiednio długości tych łuków, to moduł całki podwójnej jest mniejszy niż MLL' (art. 283). Gdy jedna z tych dróg, np. $a'b'$ jest krzywą zamkniętą, całka

$$\int_{(a'b')} F(z, z') dz'$$

równa się zeru, jeżeli funkcja $F(z, z')$ jest całokształtna dla wartości z' , odpowiadających punktom, położonym wewnątrz tej krzywej i dla wartości zmiennej z , odpowiadających punktom łuku ab . To samo tedy stosuje się do całki podwójnej.

352. Uogólnienie twierdzeń Cauchy'ego. — Niech C i C' oznaczają dwie krzywe zamknięte bez punktów podwójnych, położone odpowiednio w płaszczyznach zmiennych z i z' , a $F(z, z')$ — funkcję, którą jest całokształtna, gdy punkty z i z' pozostają w obszarach, ograniczonych przez te krzywe i na samych krzywych. Weźmy całkę podwójną

$$I = \int_{(C)} dz \int_{(C')} \frac{F(z, z') dz'}{(z - x)(z' - x')},$$

w której x oznacza punkt, położony wewnątrz obwodu C , a x' — punkt wewnętrzny względem obwodu C' , i przypuśćmy, że oba te obwoły są przebiegane w zwrocie dodatnim. Jeżeli z oznacza punkt stały obwodu C , to całka

$$\int_{(C')} \frac{F(z, z') dz'}{(z - x)(z' - x')},$$

jest równa

$$2\pi i \frac{F(z, x')}{z - x}.$$

Otrzymujemy tedy

$$I = 2\pi i \int_{(C)} \frac{F(z, x')}{z - x} dz,$$

a następnie, stosując raz jeszcze wzór Cauchy'ego

$$I = -4\pi^2 F(x, x'),$$

skąd wynika wzór

$$(10) \quad F(x, x') = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{(C)} dz \int_{(C')} \frac{F(z, z') dz'}{(z - x)(z' - x')},$$

podobny zupełnie do wzoru Cauchy'ego i upoważniający do podobnych wniosków. Przekonywamy się przy pomocy tego wzoru o istnieniu w rozważanych polach pochodnych cząstkowych wszystkich rzędów funkcji $F(z, z')$ i otrzymujemy dla pochodnej

$$\frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial x'^n}$$

wzór ogólny

$$(11) \quad \frac{\partial^{m+n} F}{\partial x^m \partial x'^n} = - \frac{1 \cdot 2 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \dots n}{4 \pi^2} \int_{(C)} dz \int_{(C')} \frac{F(z, z') dz'}{(z-x)^{m+1} (z'-x')^{n+1}},$$

W celu otrzymania wzoru Taylora założmy, że obwody C i C' są okręgami; niech a oznacza środek a R — promień koła C , b zaś i R' — środek i promień koła C' . Gdy bierzemy punkty x i x' , położone odpowiednio wewnątrz tych okręgów, to

$$|x - a| = r < R \quad \text{ i } \quad |x' - b| = r' < R',$$

i ułamek wymierny

$$\frac{1}{(z-x)(z'-x')} = \frac{1}{[z-a-(x-a)][z'-b-(x'-b)]}$$

może być rozwinięty według potęg różnic $x-a$ i $x'-b$

$$\frac{1}{(z-x)(z'-x')} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^m (x'-b)^n}{(z-a)^{m+1} (z'-b)^{n+1}};$$

szereg z prawej strony znaku równości jest jednostajnie zbieżny, gdy punkty z i z' przebiegają odpowiednio okręgi C i C' , ponieważ moduł wyrazu ogólnego jest równy

$$\frac{1}{R R'} \left(\frac{r}{R}\right)^m \left(\frac{r'}{R'}\right)^n.$$

Można tedy we wzorze (10) zastąpić

$$\frac{1}{(z-x)(z'-x')}$$

przez ten szereg i całkować wyraz po wyrazie, co nam da:

$$F(x, x') = - \frac{1}{4 \pi^2} \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (x-a)^m (x'-b)^n \int_{(C)} dz \int_{(C')} \frac{F(z, z') dz}{(z-a)^{m+1} (z'-b)^{n+1}};$$

uwzględniając wzory, powstające przez podstawienie do związków (10) i (11) liczb a i b zamiast x i x' , odnajdujemy wzór Taylora

$$(12) \quad F(x, x') = F(a, b) + \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial^{m+n} F}{\partial a^m \partial b^n} \frac{(x-a)^m (x'-b)^n}{m! n!},$$

w którym skojarzenie $m=n=0$ zostaje przy sumowaniu wyłączone.

Uwaga. — Spółczynnik a_{mn} przy $(x-a)^m (x'-b)^n$ w szeregu powyższym równa się całce podwójnej

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_{(C)} dz \int_{(C')} \frac{F(z, z') dz'}{(z-a)^{m+1} (z'-b)^{n+1}};$$

jeżeli M jest granicą wyższą modułu $|F(z, z')|$ na okręgach C i C' , to zgodnie z pewną znaną uwagą ogólną

$$|a_{mn}| < \frac{1}{4\pi^2} \frac{M}{R^{m+1} \cdot R'^{n+1}} 2\pi R \cdot 2\pi R' = \frac{M}{R^m R'^n}.$$

Funkcja

$$\frac{M}{\left(1 - \frac{x-a}{R}\right) \left(1 - \frac{x'-b}{R'}\right)},$$

est zatem dla $F(x, x')$ funkcją zwyższającą (t. I, art. 192).

35.3. Funkcje, dane w postaci całek określonych. — Ażeby zbadać niektóre funkcje, staramy się często wyrazić je w postaci całek określonych, w których zmienna niezależna występowałaby pod znakiem całkowania jako parametr. Podaliśmy już warunki dostateczne do tego, iżby można było stosować zwykły sposób różniczkowania, gdy zmienne są rzeczywiste (t. I, art. 98, 100).

Poruszymy na nowo to zagadnienie w zakresie zmiennych zespolonych. Niech $F(z, z')$ oznacza funkcję dwu zmiennych z i z' , całokształtną, gdy punkty, odpowiadające tym zmiennym, leżą odpowiednio w obszarach A i A' . Weźmy w obszarze A jakąś określoną drogę L o długości skończonej i zbadajmy całkę określoną

$$(13) \quad \Phi(x) = \int_L F(z, x) dz,$$

przy założeniu, że x oznacza dowolny punkt obszaru A' . Ażeby dowieść, że ta funkcja $\Phi(x)$ jest funkcją całokształtną zmiennej x , zakreślmy dokoła punktu x , jako środka, okrąg o promieniu R , położony całkowicie w obszarze A' . Ponieważ funkcja $F(z, z')$ jest całokształtna, przeto według wzoru podstawowego Cauchy'ego:

$$F(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{F(z, z') dz}{z' - x},$$

i całka (13) może być napisana w postaci

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} dz \int_{(C)} \frac{F(z, z') dz'}{z' - x}.$$

Weźmy w kole C punkt $x + \Delta x$, zbliżony do punktu x ; mamy podobnie:

$$\Phi(x + \Delta x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} dz \int_{(C)} \frac{F(z, z') dz'}{z' - x - \Delta x},$$

i przeto, zapomocą rachunku, wykonanego już kiedyś (art. 291), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} dz \int_{(C)} \frac{F(z, z') dz'}{(z' - x)^2} \\ &\quad + \frac{\Delta x}{2\pi i} \int_{(L)} dz \int_{(C)} \frac{F(z, z') dz'}{(z' - x)^2 (z' - x - \Delta x)}. \end{aligned}$$

Niech M oznacza liczbę dodatnią, większą od wartości, przybieranych przez moduł funkcji $F(z, z')$, gdy punkty z i z' zakresłają odpowiednio linje L i C , S — długość linji L , a ρ — moduł przyrostu Δx . Moduł drugiej całki jest mniejszy niż

$$\frac{\rho}{2\pi} \frac{M}{R^2(R-\rho)} \cdot 2\pi R \cdot S = \frac{\rho MS}{R(R-\rho)}$$

i przeto dąży do zera, gdy punkt $x + \Delta x$ zbliża się nieograniczenie do punktu x . Funkcja $\Phi(x)$ posiada tedy jedną określoną pochodną:

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} dz \int_{(C)} \frac{F(z, z') dz'}{(z' - x)^2}.$$

Atoli istnieje również związek (art. 291)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C)} \frac{F(z, z') dz'}{(z' - x)^2},$$

wzór poprzedni może być napisany w postaci

$$(14) \quad \Phi'(x) = \int_{(L)} \frac{\partial F}{\partial x} dz.$$

Odnajdujemy zwykły wzór, dotyczący różniczkowania pod znakiem całki.

Rozumowanie powyższe nie da się zastosować, gdy droga całkowania L rozciąga się w nieskończoność. Załóżmy, w celu ustalenia biegu myśli, że L jest to półprosta nieograniczona, wychodząca z punktu a_0 i tworząca z osią liczb rzeczywistych kąt Θ . Powiemy, że cała

$$\Phi(x) = \int_{a_0}^{\infty} F(z, x) dz,$$

jest jednostajnie zbieżna, jeżeli wszelkiej liczbie dodatniej ε można podporządkować taką liczbę dodatnią N , iżby przy wszelkim położeniu punktu x w A' był spełniony warunek

$$\left| \int_{a_0 + \rho e^{i\Theta}}^{\infty} F(z, x) dz \right| < \varepsilon,$$

o ile tylko ρ jest większe niż N . Dzieląc drogę całkowania na nieskończenie wiele odcinków prostoliniowych, uzasadnimy, że wszelka cała jednostajnie zbieżna jest równa sumie szeregu jednostajnie zbieżnego, którego wyrazami są całki, brane wzdłuż pewnych odcinków półprostej nieograniczonej L . Wszystkie te całki są funkcjami całokształtnymi zmiennej x ; to samo da się tedy orzec o całej

$$\int_{a_0}^{\infty} F(z, x) dz$$

(art. 297).

Stwierdzamy również, że można stosować zwykły sposób różniczkowania, hyleby otrzymana cała

$$\int_{a_0}^{\infty} \frac{\partial F}{\partial x} dz,$$

była także jednostajnie zbieżna.

Przypuśćmy, że funkcja $F(z, z')$ staje się nieskończoną dla jednej z granic a_0 linii całkowania: powiemy podobnie, że cała jest jednostajnie zbieżna w pewnym obszarze, jeżeli do każdej liczby dodatniej ε można dobrać taki punkt $a_0 + \eta$ linii L , iżby przy wszelkim położeniu punktu x w danym obszarze dowolny punkt b linii L , zawarty pomiędzy punktami a_0 i $a_0 + \eta$, czynił zadość warunkowi:

$$\left| \int_{a_0 + \eta}^b F(z, x) dz \right| < \varepsilon.$$

Można związać z tym określeniem takie same wnioski, jak w przypadku, gdy jedna z granic całki oddala się w nieskończoność, i uzasadnić je w taki sam sposób.

354. Zastosowanie do funkcji Γ . — Całka, określona wzdłuż osi liczb rzeczywistych

$$(15) \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

którą zbadaliśmy byli tylko dla wartości rzeczywistych i dodatnich zmiennej z (t. I, art. 94), przybiera wartości skończone, gdy część rzeczywista tej zmiennej, którą oznaczymy przez $\Re(z)$, jest dodatnia. Weźmy w istocie, $z = x + iy$; stąd wynika, że

$$|t^{z-1} e^{-t}| = t^{x-1} e^{-t}.$$

Ponieważ całka

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

posiada wartość skończoną, gdy x jest dodatnie, to samo się stosuje do całki (15), (t. I, art. 91, 92). Całka ta jest jednostajnie zbieżna we wszelkim obszarze, określonym przez warunki

$$N > \Re(z) > \eta,$$

przy założeniu, że N i η oznaczają dwie dowolne liczby dodatnie. Istotnie, możemy napisać

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt,$$

i wystarczy dowieść, że każda z całek z prawej strony znaku równości jest jednostajnie zbieżna. Dowiedzmy tego np. co do drugiej. Niech l oznacza liczbę dodatnią większą od jedności; jeżeli $\Re(z) < N$, to

$$\left| \int_l^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \right| < \int_l^{+\infty} t^{N-1} e^{-t} dt,$$

i można wyznaczyć liczbę dodatnią A tak wielką, iżby ostatnia całka była mniejsza od wszelkiej liczby dodatniej ϵ , byleby był spełniony warunek $l \geq A$. Funkcja $\Gamma(z)$, określona przez całkę (15), jest zatem funkcją, całokształtną w każdym obszarze płaszczyzny, położonym na prawo od osi Oy . Funkcja $\Gamma(z)$ czyni jeszcze prócz tego zadość warunkowi

$$(16) \quad \Gamma(z+1) = z \Gamma(z),$$

który da się otrzymać zapomocą całkowania przez części, a przeto i warunkowi bardziej ogólnemu

$$(17) \quad \Gamma(z+n) = z(z+1) \dots (z+n-1) \Gamma(z),$$

który stanowi bezpośredni wynik poprzedniego.

Własność ta pozwala rozciągnąć określenie funkcji $\Gamma(z)$ również na wartości zmiennej z , których części rzeczywiste są ujemne. Weźmy, w istocie, funkcję

$$(18) \quad \psi(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1) \dots (z+n-1)},$$

oznaczając przez n liczbę całkowitą dodatnią; licznik $\Gamma(z+n)$ jest funkcją całokształtną zmiennej z , określoną dla wartości, spełniających warunek

$$\Re(z) > -n;$$

funkcja $\psi(z)$ jest to tedy funkcja częściokształtna, określona dla wszystkich wartości zmiennej, których część rzeczywista jest większa, niż $-n$. Owóż ta funkcja $\psi(z)$ na prawo od osi Oy równa się tożsamościowo, według wzoru (17), funkcji całokształtnej $\Gamma(z)$; jest to tedy właśnie, w pasie zawartym między prostymi

$$\Re(z) = 0 \quad \text{ i } \quad \Re(z) = -n,$$

dalszy ciąg analityczny funkcji całokształtnej $\Gamma(z)$. Ponieważ atoli liczba całkowita n jest dowolna, wnioskujemy stąd, iż istnieje funkcja częściokształtna, której biegunami pierwszego rzędu są wszystkie punkty

$$z = 0, \quad z = -1, \quad z = -2, \dots, \quad z = -n, \dots,$$

i która na prawo od osi Oy równa się całce (15). Oznaczamy również tę funkcję częściokształtną przez $\Gamma(z)$, lecz wzór (15) pozwala wyznaczyć jej wartość liczbową tylko wówczas, gdy $\Re(z) > 0$. Gdy $\Re(z) < 0$, należy w celu otrzymania wartości liczbowej tej funkcji stosować prócz tego związek (17).

Podamy tu wyrażenie funkcji $\Gamma(z)$, ważne przy wszelkiej wartości zmiennej z .

Weźmy funkcję całkowitą

$$S(z) = z \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

której punktami zerowymi są bieguny funkcji $\Gamma(z)$. Iloczyn $S(z) \Gamma(z)$ musi być funkcją całkowitą. Można dowieść, że ta funkcja całkowita równa się e^{-Cz} , gdzie C oznacza stałą Eulera ⁽¹⁾, (t. I, str. 42), i stąd wysnuwamy wzór

$$(19) \quad \frac{1}{z \Gamma(z)} = \frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{Cz} \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}},$$

który wskazuje, że $\frac{1}{\Gamma(z+1)}$ jest to funkcja przestępna całkowita.

355. Przedłużanie analityczne funkcji dwu zmiennych. — Niech $u = F(z, z')$ oznacza funkcję dwu zmiennych z i z' , całokształtną, gdy punkty, wyobrażające te dwie zmienne, pozostają w dwu obszarach spójnych A i A' odpowiednich płaszczyzn. Można dowieść, podobnie jak w stosunku do jednej zmiennej (art. 341), że wartość tej funkcji dla dowolnego układu punktów z i z' , należących do obszarów A i A' , może być wyznaczona, gdy znamy wartości funkcji F i wszystkich jej pochodnych cząstkowych, odpowiadające układowi dwu punktów $z=a$, $z'=b$, należących do tych samych obszarów. Wobec tego wydaje się rzeczą łatwą zastoso-

(1) HERMITE, *Cours d'Analyse*, (kurs Analizy), wyd. 4, str. 142.

wanie pojęcia przedłużenia analitycznego również do funkcji dwu zmiennych zespolonych. Weźmy taki szereg o dwu wskaźnikach $\sum a_{mn}$, iż istnieją dwie liczby dodatnie r i r' , posiadające własność następującą: szereg

$$(20) \quad F(z, z') = \sum a_{mn} z^m z'^n,$$

jest zbieżny, gdy jednocześnie

$$|z| < r, \quad |z'| < r',$$

a rozbieżny, gdy jednocześnie

$$|z| > r, \quad |z'| > r'.$$

Szereg ten określa zatem funkcję $F(z, z')$, która jest całokształtna, gdy punkty z, z' pozostają odpowiednio w kołach C i C' o promieniach r i r' ; nie poucza nas jednak bynajmniej o sposobie istnienia tej funkcji, gdy

$$|z| > r \quad \text{lub} \quad |z'| > r'.$$

Wyobraźmy sobie, w celu ustalenia biegu myśli, że punkt z przebiega drogą L , idącą od początku układu do punktu Z , położonego zewnątrz koła C , a punkt z' inną drogą L' , która się zaczyna w punkcie $z' = 0$, a kończy w pewnym punkcie Z' , zewnętrznym względem koła C' . Weźmy dwa punkty α i β , położone odpowiednio na dwu drogach L i L' , wewnątrz kół C i C' . Szereg (20) i szeregi, które otrzymujemy zeń przez wielokrotne różniczkowanie, pozwalają utworzyć nowy szereg potęgowy

$$(21) \quad \sum b_{mn} (z - \alpha)^m (z' - \beta)^n,$$

który jest bezwzględnie zbieżny, gdy moduły

$$|z - \alpha| \quad \text{i} \quad |z' - \beta|$$

są odpowiednio mniejsze od dwu dobranych stosownie liczb dodatnich r_1 i r'_1 :

$$|z - \alpha| < r_1, \quad |z' - \beta| < r'_1.$$

Oznaczmy przez C_1 okrąg o promieniu r_1 , zakresłony w płaszczyźnie z -ów dokoła punktu α , jako środka, a przez C'_1 — okrąg o promieniu r'_1 , zakresłony w płaszczyźnie zmiennej z' dokoła punktu β . Gdy punkt z leży w części wspólnej dwu kół C i C_1 , a punkt z' w części wspólnej kół C' i C'_1 , suma szeregu (21) równa się tożsamościowo sumie szeregu (20). Jeżeli można obracać liczby r_1 i r'_1 w ten sposób, iżby koło C_1 wykraczało częściowo poza koło C lub koło C'_1 poza koło C' , to określenie funkcji $F(z, z')$ zostaje rozciągnięte na obszar, występujący częściowo poza poprzedni. Łatwo zrozumieć, iż postępując dalej w ten sposób, możemy stopniowo przedłużać coraz dalej funkcję $F(z, z')$. Lecz tu występuje nowy ważny pierwiastek. W istocie, należy koniecznie uwzględnić spójność sposobów poruszania się obu punktów zmiennych po ich drogach. Oto przykład nader prosty, który zawdzięczamy Sauvage'owi⁽¹⁾.

(1) SAUVAGE, *Premiers principes de la Théorie générale des fonctions de plusieurs variables* (Pierwsze zasady teorii ogólnej funkcji wielu zmiennych). (*Annales*

Mamy dane:

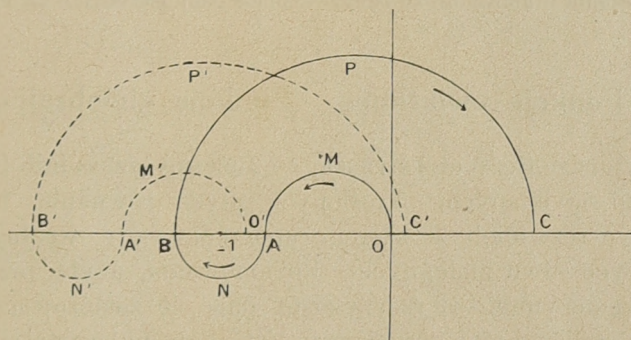
$$u = \sqrt{z - z' + 1};$$

weźmy wartości początkowe następujące:

$$z = z' = 0, \quad u = 1$$

i określmy drogi punktów zmiennych z i z' w taki sposób: po 1-sze) drogą, zakreślaną przez z' , ma być odcinek prostoliniowy, rozciągający się od początku układu do punktu $z' = 1$; po 2-gie) droga, zakreślaną przez z , ma się składać z trzech półokręgów: pierwszego OMA (rys. 83), o środku na osi liczb rzeczywistych, na lewo od początku układu, i promieniu mniejszym od $\frac{1}{2}$; drugiego ANB , o środku, położonym również na osi liczb rzeczywistych, w ten sposób, iżby punkt -1 należał jeszcze do średnicy AB ; wreszcie trzeciego, PBC , którego środkiem byłby

Rys. 83.



środek odcinka, łączącego punkt B z punktem C ($z = 1$). Pierwszy i trzeci półokrąg niech będą położone powyżej osi liczb rzeczywistych, a drugi — poniżej, tak iżby obwód $OMANBPCO$ otaczał punkt $z = -1$. Obierzmy teraz przebieg następujący:

- 1) z' pozostaje równym zeru, a punkt z zakreśla całą drogę $OABC$;
- 2) z pozostaje równym 1, a punkt z' zakreśla całą swą drogę.

Biorąc zmienną pomocniczą $t = z - z'$, stwierdzamy łatwo, że drogą, przebieganą przez punkt, wyobrażający zmienną t w płaszczyźnie z -ów, jest właśnie obwód $OABCO$, który otacza punkt krytyczny $t = -1$ pierwiastka $t^2 + 1$. Wartość końcowa funkcji u równa się zatem -1 .

de la Faculté de Sciences de Marseille — Roczniki wydziału nauk ścisłych w Marsylii — t. XVII. Rozprawa ta jest doskonałym wstępem do badań nad funkcjami analitycznymi wielu zmiennych.

Ochierzmy natomiast przebieg następujący:

- 1) z pozostaje równym zero, a z' zmienia się od 0 do $1-\epsilon$ (ϵ — liczba dodatnia nader mała);
- 2) z' pozostaje równym $1-\epsilon$, a punkt z zakreśla całą drogę $OABC$;
- 3) z pozostaje równym 1 , a z' zmienia się od $1-\epsilon$ do 1 .

Gdy z' zmienia się od 0 do $1-\epsilon$, punkt pomocniczy t zakreśla drogę OO' , która się kończy w punkcie O' nader bliskim punktu -1 osi liczb rzeczywistych. Gdy z zakreśla następnie drogę $OABC$, t przebiega drogę $O'A'B'C'$, nakładalną na poprzednią i kończącą się w punkcie C' osi liczb rzeczywistych, takim że $OC' = \epsilon$. Wreszcie, gdy z' zmienia się od $1-\epsilon$ do 1 , punkt t wraca z C' do początku układu. Punkt pomocniczy t przebiega tedy obwód zamknięty $OO'A'B'C'O$, względem którego punkt -1 leży ze strony zewnętrznej, bylebyśmy obrali dość małe ϵ . Wartość końcowa funkcji u będzie tedy równa $+1$.

Istota osobliwości funkcji analitycznych wielu zmiennych jest o wiele mniej znana, niż istota osobliwości funkcji jednej zmiennej. Jedną z największych trudności tego zagadnienia stanowi to, że pary wartości osobliwych nie są odosobnione (¹).

II. — Funkcje uwikłane. — Funkcje algebraiczne.

356. Twierdzenie Weierstrassa. — Jużśmy uzasadnili (t. I, art. 193) istnienie funkcji uwikłanych, określonych przez równania, których lewa strona może być rozwinięta w szereg, uporządkowany według potęg dodatnich rosnących dwu zmiennych. Rozumowania, użyte przy założeniu, że zmienne i współczynniki są rzeczywiste, dają się zastosować bez zmiany, gdy zmienne i współczynniki przybierają jakiekolwiek wartości rzeczywiste lub urojone, byleby zostały zachowane inne założenia. Uzasadnimy teraz wzór bardziej ogólny, zachowując znakowanie, użyte poprzednio przy tym badaniu; zmienne zespolone oznaczymy przez x i y .

Niech $F(x, y)$ oznacza funkcję, całokształtną w otoczeniu układu wartości $x = \alpha$, $y = \beta$ i taką, że $F(\alpha, \beta) = 0$; założmy, do czego jesteśmy zawsze uprawnieni, że $\alpha = \beta = 0$. Równanie $F(0, y) = 0$ posiada pierwiastek $y = 0$, jedno lub wielokrotny. Zbadaliśmy przypadek, gdy $y = 0$ jest pierwiastkiem jednokrotnym; zbadajmy obecnie założenie ogólne, że $y = 0$ jest pierwiastkiem wielokrotnym rzędu n równania $F(0, y) = 0$. Jeżeli uporządkujemy względem potęg zmiennej y szereg, wyrażający $F(x, y)$ w otoczeniu punktu $x = y = 0$, to szereg ten przybierze postać:

(¹) Wszystko, co dotyczy tego zagadnienia, znajdzie czytelnik w rozprawie Poincaré'go w czasopiśmie „Acta mathematica” (t. XXVI) i w pracy P. Cousin'a (tamże, t. XIX).

$$(22) \quad F(x, y) = A_0 + A_1 y + \dots + A_n y^n + A_{n+1} y^{n+1} + \dots;$$

spółczynniki A_i w tym wzorze są to szeregi potęg zmiennej x , z których n pierwszych równa się zero przy $x = 0$, lecz $(n+1)$ -szy, A_n , nie jest równy zero przy $x = 0$. Niech C i C' oznaczają dwa okręgi o promieniu R i R' , zakreślone odpowiednio w płaszczyznach x -ów i y -ów dokoła początku układu, jako środka. Załóżmy, że funkcja $F(x, y)$ jest całokształtna w obszarze, określonym przez te dwa koła oraz na samych obwodach tych kół; ze względu na to, że A_n nie równa się zero przy $x = 0$, możemy założyć, że promień R koła C jest tak mały, że funkcja A_n nie staje się zerem ani wewnątrz koła C ani na jego obwodzie. Niech M stanowi granicę wyższą modułu $|F(x, y)|$ w omawianym obszarze, a B — granicę niższą modułu $|A_n|$. Według wzoru podstawowego Cauchy'ego, przy oznaczaniu przez x i y dwu dowolnych punktów, położonych wewnątrz kół C i C' , mamy

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{F(x, y') dy'}{y' - y};$$

wnioskujemy stąd, że moduł współczynnika A_m przy y^m we wzorze (22) jest mniejszy od $\frac{M}{R'^m}$, a to przy dowolnej wartości x wewnątrz koła C .

Po stwierdzeniu tego możemy napisać

$$(23) \quad F(x, y) = A_n y^n (1 + P + Q),$$

zakładając, że

$$P = \frac{A_{n+1}}{A_n} y + \frac{A_{n+2}}{A_n} y^2 + \dots,$$

$$Q = \frac{A_0}{A_n} \frac{1}{y^n} + \dots + \frac{A_{n-1}}{A_n} \frac{1}{y}.$$

Niech ρ oznacza moduł zmiennej y ; otrzymujemy

$$|P| < \frac{M}{B R'^n} \left(\frac{\rho}{R'} + \frac{\rho^2}{R'^2} + \dots \right) = \frac{M}{B R'^n} \frac{\frac{\rho}{R'}}{1 - \frac{\rho}{R'}},$$

i jeżeli

$$(24) \quad \rho < R' \frac{B R'^n}{B R'^n + 2M},$$

moduł ten musi być mniejszym od $\frac{1}{2}$.

Oznaczmy z drugiej strony przez $\mu(r)$ wartość największą modułów funkcji

$$A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$$

dla wszystkich wartości zmiennej x , których moduły nie przewyższają liczby dodatniej $r < R$. Ponieważ te n funkcji równają się zero przy $x = 0$, przeto $\mu(r)$ dąży do zera wraz z r , i można zawsze obrać dość małe r , iżby, przy oznaczeniu przez ρ jakiejś określonej liczby dodatniej, był spełniony warunek

$$(25) \quad \frac{\mu(r)}{B} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} + \dots + \frac{1}{\rho^n} \right) < \frac{1}{2} \quad [r < R].$$

Obrawszy liczby r i ρ , czyniące zadość wskazanym warunkom (24) i (25), zastąpmy koło C w płaszczyźnie x -ow kołem C_r o środku w punkcie $x = 0$ i promieniu r , i podobnież koło C' w płaszczyźnie zmiennej y kołem spółśrodkowym C_{ρ}' o promieniu ρ . Jeżeli nadajemy zmiennej x taką wartość, że $|x| \leq r$ i kažemy punktowi y przebiegać okrąg C_{ρ}' , otrzymujemy wzdłuż tego całego okręgu, ze względu na sposób, w który obraliśmy liczby r i ρ :

$$|P| < \frac{1}{2}, \quad |Q| < \frac{1}{2},$$

a przeto $|P + Q| < 1$. Gdy punkt y przebiega okrąg C_{ρ}' w zwrocie dodatnim, argument sumy $1 + P + Q$ odzyskuje wartość początkową, gdy tymczasem argument czynnika $A_n y^n$ wzrasta o $2n\pi$. *Równanie* $F(x, y) = 0$, *w którym* $|x| \leq r$, *posiada tedy* n *i tylko* n *pierwiastków o module mniejszym od* ρ .

Wszystkie inne pierwiastki równania $F(x, y) = 0$, o ile istnieją, posiadają moduły większe od ρ . Otóż liczbę ρ można zastąpić przez liczbę dowolnie małą, mniejszą niż ρ , byleby r było zastąpione jednocześnie przez liczbę mniejszą, a spełniającą zawsze warunek (25); stwierdzamy tedy, że równanie $F(x, y) = 0$ posiadają nie mniej i nie więcej, niż n pierwiastków, które dążą do zera wraz z x .

Gdy punkt x pozostaje wewnątrz koła C_r lub na jego obwodzie, n punktów, odpowiadających pierwiastkom $y_1, y_2, \dots, y_n$ o module mniejszym niż ρ , pozostaje wewnątrz koła C_{ρ}' . Pierwiastki te nie są w ogólności funkcjami całokształtnymi zmiennej x w kole C_r , lecz wszelka funkcja symetryczna całkowita tych n pierwiastków jest taką funkcją. Wystarczy oczywiście uzasadnić to dla sumy

$$y_1^k + y_2^k + \dots + y_n^k,$$

w której k oznacza jakąkolwiek liczbę całkowitą dodatnią. Zbadajmy w tym celu całkę podwójną

$$I = \int_{(C_r)} dy' \int_{(C_r)} y'^k \frac{\frac{\partial F(x', y')}{\partial y'}}{F(x', y')} \frac{dx'}{x' - x},$$

przy założeniu, że $|x| < r$. Jeżeli $|y'| = \rho$, to funkcja $F(x', y')$ nie może się stać równą zero przy żadnej wartości zmiennej x' w obszarze C_r i na obwodzie tegoż, i jedynym biegunem funkcji podcałkowej wewnątrz koła C_r jest punkt $x' = x$. Otrzymamy tedy

$$\int_{(C_r)} y'^k \frac{\frac{\partial F(x', y')}{\partial y'}}{F(x', y')} \frac{dx'}{x' - x} = 2\pi i y'^k \frac{\frac{\partial F(x, y')}{\partial y'}}{F(x, y')},$$

a przeto

$$I = 2\pi i \int_{(C_r)} y'^k \frac{\frac{\partial F(x, y')}{\partial y'}}{F(x, y')} dy'.$$

Zgodnie z pewnym twierdzeniem ogólnym (art. 306), całka ta równa się wyrażeniu

$$-4\pi^2 (y_1^k + y_2^k + \dots + y_n^k),$$

w którym

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

oznaczają n pierwiastków równania $F(x, y) = 0$, których moduły są mniejsze od ρ . Z drugiej strony całka I jest funkcją całokształtną zmiennej x w obszarze zmienności C_r ⁽¹⁾, gdyż można rozwinąć $\frac{1}{x' - x}$ w szereg jednostajnie zbieżny, uporządkowany według potęg zmien-

(1) Oczywiście, oznaczamy tutaj, jak w wielu innych miejscach, tą samą literą zarówno pewien określony zbiór wartości liczbowych czyli obszar zmienności, jak odpowiadający mu obszar płaszczyzny (koło i t. p.). Co więcej, nie odróżniamy często dla krótkości tych pojęć, mówiąc o poruszaniu się zmiennej, zawieraniu się zmiennej wewnątrz koła i t. p., co na danym poziomie naukowym nie powinno powodować żadnych nieporozumień. Oryginał odznacza się w tym względzie jeszcze większą swobodą.

nej x i całkować następnie wyraz po wyrazie. Ponieważ rozmaite sumy $\sum y_i^k$ stanowią funkcje całokształtne w kole C_r , to samo stosuje się do sumy tych pierwiastków, sumy iloczynów par tych pierwiastków i t. d.; więc ostatecznie pierwiastki

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

są jednocześnie pierwiastkami równania stopnia n

$$(26) \quad y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0,$$

którego współczynnikami

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

są funkcje zmiennej x , całokształtne w kole C_r i równe zeru przy $x = 0$.

Obie funkcje

$$F(x, y) \text{ i } f(x, y) = y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y + a_n,$$

stają się równe zeru dla tych samych układów zmiennych x, y , wziętych wewnątrz obszarów C_r i C_ρ . Dowiedzmy, że stosunek $\frac{F(x, y)}{f(x, y)}$ jest funkcją całokształtną w tej dziedzinie. Weźmy w tym celu takie określone wartości tych zmiennych, że

$$|x| < r, \quad |y| < \rho,$$

i zbadajmy całkę podwójną

$$J = \int_{(C_\rho)} dy' \int_{(C_r)} \frac{F(x', y')}{f(x', y')} \frac{dx'}{(x' - x)(y' - y)}.$$

Po ustaleniu jakiejś wartości y' o module ρ , funkcja $f(x', y')$ zmiennej x' nie może się stać zerem przy żadnej wartości tej zmiennej, należącej do koła C_r lub jego obwodu. Funkcja podcałkowa posiada tedy wewnątrz C_r jeden tylko biegun $x' = x$, i odpowiednia pozostałość równa się

$$\frac{F(x, y')}{f(x, y')} \frac{1}{y' - y}.$$

Otrzymujemy przeto

$$J = 2\pi i \int_{(C_\rho)} \frac{F(x, y')}{f(x, y')} \frac{dy'}{y' - y}.$$

Atoli obie funckje całokształtne $F(x, y')$ i $f(x, y')$ zmiennej y' posiadają wewnątrz C'_ρ te same punkty zerowe o tych samych stopniach wielokrotności; stosunek tych funckji jest tedy w kole C'_ρ funckją całokształtną zmiennej y' , i jedynym biegunem funckji, danej do całkowania, jest w tym kole punkt $y' = y$; więc

$$J = -4\pi^2 \frac{F(x, y)}{f(x, y)}.$$

Z drugiej strony można zastąpić w całce iloraz

$$\frac{1}{(x' - x)(y' - y)}$$

przez szereg jednostajnie zbieżny, uporządkowany według potęg dodatnich zmiennych x i y . Całkując wyraz po wyrazie, stwierdzamy, że ta całka równa się sumie szeregu potęgowego, uporządkowanego według potęg zmiennych x i y i zbieżnego w kołach C_r , C'_ρ . Możemy tedy napisać, oznaczając przez $H(x, y)$ funckję całokształtną w kołach C_r i C'_ρ :

$$F(x, y) = f(x, y) H(x, y)$$

czyli

$$(27) \quad F(x, y) = (y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_n) \cdot H(x, y).$$

Spółczynnik A_n przy y^n w $F(x, y)$ zawiera wyraz stały, różny od zera; ponieważ

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

są równe zeru przy $x = 0$, przeto postać rozwinięta funckji $H(x, y)$ musi zawierać wyraz stały, różny od zera, i rozkład, dany przez wzór (27), uwydatnia ten fakt, że wszystkie pierwiastki równania $F(x, y) = 0$, dążące do zera wraz z x , dadzą się otrzymać zapomocą przyrównania do zera pierwszego czynnika.

Ważne twierdzenie, wyłożone przed chwilą, zawdzięczamy Weierstasowski (1). Twierdzenie to stanowi — o ile to tylko możliwe w stosunku do funckji dwu zmiennych — uogólnienie rozkładu na czynniki funckji jednej zmiennej.

(1) *Abhandlungen aus der Funktionenlehre von K. Weierstrass*. (K. Weierstrass, Rozprawy z dziedziny teorii funckji). — Berlin, 1860. Możemy również uzasadnić to twierdzenie, opierając się jedynie na własnościach szeregów potęgowych i na twierdzeniu o istnieniu funckji uwikłanej (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXVI, 1908, str. 209—215).

357. Punkty krytyczne. — Badanie n pierwiastków równania $F(x, y) = 0$, nieskończenie małych wraz z x , sprowadza się tedy do badania przy wartościach zmiennej x , bliskich zera, pierwiastków równania o postaci

$$(28) \quad f(x, y) = y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0,$$

w którym

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

są to funkeje całokształtne, równe zero przy $x = 0$. Gdy $n > 1$ (jedyny przypadek, którym mamy się zająć) punkt $x = 0$ jest w ogólności *punktem krytycznym* (point critique). Wyrugujmy z równań

$$f = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

zmienną y ; rugownik $\Delta(x)$ stanowi wielomian całkowity względem współczynników

$$a_1, a_2, \dots, a_n,$$

a więc funkeję całokształtną w otoczeniu początku układu. Ów rugownik ⁽¹⁾ staje się równym zero przy $x = 0$, i ze względu na to, że punkty zerowe funkeji jednokształtnej tworzą układ punktów odosobnionych, możemy przypuścić, że obraliśmy tak mały promień r koła C_r , iż wewnątrz tego koła równanie $\Delta(x) = 0$ nie ma innych pierwiastków, tylko $x = 0$.

Każdemu punktowi x_0 , wziętemu w tym kole, a różnemu od początku układu, będzie odpowiadało n różnych pierwiastków równania

$$f(x_0, y) = 0;$$

zgodnie z poprzednimi badaniami (t. I, art. 194), n pierwiastków równania (28) stanowi w otoczeniu punktu x_0 tyleż funkeji całokształtnych zmiennej x . Wewnątrz koła C_r nie może zatem istnieć żaden punkt krytyczny, oprócz początku układu.

Oznaczmy n pierwiastków równania

$$f(x_0, y) = 0 \quad \text{przez} \quad y_1, y_2, \dots, y_n.$$

⁽¹⁾ Odsuwamy na bok przypadek, w którym rugownik byłby tożsamościowo równy zero. Wówczas funkeja $f(x, y)$ byłaby podzielna przez czynnik

$$[f_1(x, y)]^k, \quad \text{w którym} \quad k > 1,$$

a $f_1(x, y)$ posiadałaby tę samą postać, co $f(x, y)$.

Niech zmienna x zakresła pętlę dokoła punktu $x = 0$, poczynając od punktu x_0 ; wzdłuż tej pętli wszystkie pierwiastki równania

$$f(x, y) = 0$$

są różne i zmieniają się w sposób ciągły. Jeżeli się wychodzi np. z punktu x_0 z wartością y_1 i zachowuje ciągłość w zmianie tego pierwiastka wzdłuż pętli, to się powraca do punktu wyjścia z wartością końcową, równą jednemu z pierwiastków równania

$$f(x_0, y) = 0$$

Jeżeli tą wartością końcową jest y_1 , to badany pierwiastek jest funckją jednowartościową w otoczeniu początku układu. Przypuśćmy, że wartość końcowa jest różna od y_1 i równa się y_2 . Zakreślanie ponowne pętli w tym samym zwrocie spowoduje zastąpienie pierwiastka y_2 , którymś innym z pierwiastków

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Nie może to być y_2 , gdyż droga odwrotna winna prowadzić od y_2 do y_1 . Nową wartością końcową winien tedy być jeden z pierwiastków

$$y_1, y_3, \dots, y_n;$$

jeżeli jest to y_1 , to stwierdzamy, że pierwiastki y_1 i y_2 ulegają permutacji, gdy punkt zmienny zakresła pętlę dokoła początku układu. Jeżeli tą wartością końcową nie jest y_1 , to jest nią jeden z $(n - 2)$ pozostałych pierwiastków; niech to będzie np. y_3 . Ponowne zakreslenie w tym samym zwrocie doprowadzi od pierwiastka y_3 do jednego z pierwiastków

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n.$$

Nie może to być, z tej samej przyczyny, co poprzednio, pierwiastek y_3 ; nie jest to również y_2 , ponieważ droga odwrotna powodowałaby zamianę tego pierwiastka y_2 na y_1 . Wartością końcową jest zatem teraz y_1 lub też jeden z $(n - 3)$ pozostałych pierwiastków

$$y_1, y_3, \dots, y_n.$$

Jeżeli to jest y_1 , to trzy pierwiastki y_1, y_2, y_3 ulegają przemianie kołowej, gdy punkt zmienny x przebiega pętlę dokoła początku układu. Jeżeli wartość końcowa jest różna od y_1 , to będziemy obracali w dalszym ciągu punkt zmienny dokoła początku układu i po pewnej skończonej liczbie działań powrócić musimy niezbędnie do jednego z pierwiastków już otrzymanych, a mianowicie do pierwiastka y_1 . Przypuśćmy np., że to nastąpi po p obrotach; p otrzymanych pierwiastków

$$y_1, y_2, \dots, y_p$$

ulega przemianie kołowej, gdy punkt zmienny x przebiega pętlę dokoła początku układu; mówimy, że tworzą one *układ kołowy* p *pierwiastków* (système circulaire de p racines). Jeżeli $p = n$, to wszystkie n pierwiastków tworzą jeden tylko układ kołowy. Jeżeli $p < n$, to zaczniemy na nowo to samo rozumowanie, poczynając od jednego z $n - p$ pozostałych pierwiastków i t. d.; rzecz jasna, że postępując wciąż w ten sposób, wyczerpiemy wreszcie wszystkie pierwiastki, i że można wypowiedzieć twierdzenie następujące: n *pierwiastków równania* $F(x, y) = 0$, *równych zeru przy* $x = 0$, *tworzy w otoczeniu początku układu jeden lub więcej układów kołowych.*

Dla ogólności wystarczy umówić się, że układ kołowy może się składać z jednego tylko pierwiastka; pierwiastek ów jest wówczas funkcją jednowartościową w otoczeniu początku układu.

Pierwiastki, należące do tego samego układu kołowego, mogą być wyrażone przez ten sam szereg. Oznaczmy p pierwiastków z jednego układu kołowego przez

$$y_1, y_2, \dots, y_p$$

i założmy, że $x = x'^p$. Każdy z tych pierwiastków staje się funkcją całokształtną zmiennej x' dla wszelkiej wartości tej zmiennej, różnej od $x' = 0$; z drugiej strony, gdy x' zakresła pętlę dokoła punktu $x' = 0$, punkt x zakresła kolejno w tym samym zwrocie p pętli dokoła początku układu. Każdy z pierwiastków

$$y_1, y_2, \dots, y_p$$

odzyskuje tedy swą wartość początkową: są to, w otoczeniu początku układu funkcje jednowartościowe zmiennej x' ; ponieważ te pierwiastki dążą do zera, gdy x' dąży do zera, początek układu $x' = 0$ może być tylko punktem zwyczajnym, i jeden z tych pierwiastków da się wyrazić zapomocą szeregu o postaci

$$(29) \quad y = a_1 x' + a_2 x'^2 + \dots + a_m x'^m + \dots$$

czyli, po zastąpieniu zmiennej x' przez $x^{\frac{1}{p}}$:

$$(30) \quad y = a_1 x^{\frac{1}{p}} + a_2 \left(x^{\frac{1}{p}}\right)^2 + \dots + a_m \left(x^{\frac{1}{p}}\right)^m + \dots$$

Twierdzę obecnie, że szereg (30) stanowi wynik rozwinięcia wszystkich pierwiastków, należących do tego samego układu kołowego, o ile tylko nadajemy przytym potęgę $x^{\frac{1}{p}}$ jej p różnych wartości. W istocie, przypuśćmy, że, nadając pierwiastkowi 1^{o} x jedną z jego wartości,

otrzymaliśmy rozwinięcie pierwiastka y_1 ; gdy punkt x przebiega w zwrocie dodatnim pętlę dokoła początku układu, y_1 zamienia się na y_2 , a $x^{\frac{1}{p}}$ ulega pomnożeniu przez $e^{\frac{2\pi i}{p}}$. Stwierdzamy podobnie, że y_q powstaje przez zamianę we wzorze (30) pierwiastka $x^{\frac{1}{p}}$ przez $x^{\frac{1}{p}} e^{\frac{2q\pi i}{p}}$. Ten wspólny szereg dobrze uwydatnia przemianę kołową p pierwiastków.

Należałoby jeszcze wskazać, w jaki sposób można podzielić n pierwiastków równania $F(x, y) = 0$ na układy kołowe i jak obliczać współczynniki a_i szeregów (30). Rozpatrzyliśmy już przypadek, gdy punkt $x = y = 0$ jest punktem podwójnym (t. I, art. 199). Rozważmy inny jeszcze przypadek szczególny.

Jeżeli przy $x = y = 0$ pochodna $\frac{\partial F}{\partial x}$ nie jest równa zeru, to szereg, wyrażający $F(x, y)$, zawiera wyraz pierwszego stopnia względem x ; wówczas możemy zastosować wzór

$$(31) \quad F(x, y) = Ax + By^n + \dots, \quad (AB \neq 0)$$

w którym wyrazy nienapisane są podzielne przez jeden z czynników

$$x^2, \quad xy, \quad y^{n+1}.$$

Uważajmy na chwilę y za zmienną niezależną; równanie $F(x, y) = 0$ posiada jeden tylko pierwiastek, dążący do zera wraz z y , i pierwiastek ten jest funkcją całokształtną w otoczeniu początku układu. Szereg, który nauczyliśmy się układać (t. I, art. 35, 193), posiada postać

$$(32) \quad x = y^n (a_0 + a_1 y + \dots) \quad (a_0 \neq 0).$$

Wyciągając pierwiastek n -go stopnia z obu części równania, otrzymujemy

$$(33) \quad x^{\frac{1}{n}} = y \sqrt[n]{a_0 + a_1 y + \dots}$$

Przy $y = 0$ równanie pomocnicze

$$u^n = a_0 + a_1 y + \dots$$

posiada n różnych pierwiastków, z których każdy daje się rozwinąć w szereg potęg zmiennej y . Ponieważ te pierwiastki stanowią iloczyn jednego z nich przez kolejne potęgi wyrażenia $e^{\frac{2\pi i}{n}}$, przeto można wziąć jako

$$\sqrt[n]{a_0 + a_1 y + \dots}$$

we wzorze (33) którykolwiek z tych pierwiastków, pod warunkiem, że nadamy kolejno potęgze $x^{\frac{1}{n}}$ wszystkie jej n wartości.

Można tedy napisać równanie (33) w postaci:

$$x^{\frac{1}{n}} = b_1 y + b_2 y^2 + \dots \quad (b_1 \neq 0),$$

skąd wysnuwamy nawzajem rozwinięcie zmiennej y według potęg pierwiastka $x^{\frac{1}{n}}$:

$$(34) \quad y = c_1 x^{\frac{1}{n}} + c_2 \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^2 + \dots$$

Szereg ten, gdy nadajemy kolejno pierwiastkowi $x^{\frac{1}{n}}$ jego n wartości, wyraża n pierwiastków, dążących wraz ze zmienną x do zera. Pierwiastki te tworzą przeto jeden układ kołowy.

O ile chodzi o zbadanie ogólne zagadnienia, musimy odwołać się do dzieł, poświęconych specjalnie teorii funkcji algebricznych (¹).

358. Funkcje algebraiczne. — Funkcjami uwikłanemi, zbadanemi dotychczas najlepiej, są *funkcje algebraiczne* (fonctions algébriques), określone przez równanie $F(x, y) = 0$, którego lewa strona jest to wielomian *nierozkładalny* (indécomposable) względem x i y . Mówimy, że wielomian całkowity jest nierozkładalny, jeżeli nie można znaleźć dwu takich wielomianów całkowitych stopnia niższego

$$F_1(x, y) \quad \text{i} \quad F_2(x, y).$$

ізby funkcja $F(x, y)$ równała się tożsamościowo ich iloczynowi:

$$F(x, y) = F_1(x, y) \times F_2(x, y).$$

Gdyby wielomian $F(x, y)$ równał się iloczynowi tego rodzaju, to równanie $F(x, y) = 0$ mogłoby być, rzecz jasna, zastąpione przez dwa osobne równania

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0.$$

Weźmy tedy równanie stopnia n -tego względem y , w którym

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$$

oznaczają wielomiany całkowite względem x :

$$(35) \quad F(x, y) = \varphi_0(x) y^n + \varphi_1(x) y^{n-1} + \dots + \varphi_{n-1}(x) y + \varphi_n(x) = 0.$$

(¹) Ob. również słynną rozprawę pr. Puiseux o funkcjach algebricznych (*Journal de Mathématiques*, t. XV, 1850).

Rugując y ze związków

$$F = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

otrzymujemy jako wynik wielomian $\Delta(x)$, który nie może być tożsamościowo równym zeru, gdyż założyliśmy, że wielomian $F(x, y)$ jest nierozkładalny. Oznaczmy w płaszczyźnie punkty

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k,$$

odpowiadające pierwiastkom równania $\Delta(x) = 0$ i punkty

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_h,$$

odpowiadające równaniu $\varphi_0(x) = 0$; niektóre z pierwiastków mogą przy tym należeć również do pierwiastków równania $\varphi_0(x) = 0$. W punkcie a , różnym od punktów α_i, β_j , równanie $F(a, y) = 0$ posiada n pierwiastków różnych i skończonych

$$b_1, b_2, \dots, b_n.$$

W otoczeniu punktu a równanie (35) posiada zatem n pierwiastków *catokształtnych* (holomorphes), dających odpowiednio do

$$b_1, b_2, \dots, b_n,$$

gdy x dąży do a . Niech α_i oznacza jeden z pierwiastków równania $\Delta(x) = 0$; równanie $F(\alpha_i, y) = 0$ posiada pewną liczbę pierwiastków równych. Załóżmy np., że posiada ono p pierwiastków, równych b . p pierwiastków, które dążą do b , gdy x zmierza do α_i , dzieli się na pewną liczbę układów kołowych, i pierwiastki, należące do tego samego układu kołowego, dają się wyrazić w postaci szeregu, uporządkowanego według potęg ułamkowych różnicy $x - \alpha_i$. Jeżeli dla wartości α_i funkcja $\varphi_0(x)$ nie staje się równą zeru, wszystkie pierwiastki równania (35) w otoczeniu punktu α_i tworzą tedy pewną liczbę układów kołowych; niektóre z tych układów mogą zawierać tylko jeden pierwiastek. Przy wartości β_j , czyniącej funkcję $\varphi_0(x)$ równą zeru, niektóre z pierwiastków równania (35) stają się nieskończone; aby zbadać te pierwiastki, zakładamy, że $y = \frac{1}{y'}$ i przystępujemy do badania pierwiastków równania

$$F_1(x, y') = y'^n F(x, \frac{1}{y'}) = 0,$$

które stają się równymi zeru przy $x = \beta_j$. Pierwiastki te dzielą się również na pewną liczbę układów kołowych, takich że pierwiastki te-

go samego układu dają się wyrazić zapomocą szeregu o postaci następującej:

$$(36) \quad y' = a_m (x - \beta_j)^{\frac{m}{p}} + a_{m+1} (x - \beta_j)^{\frac{m+1}{p}} + \dots; \quad [a_m \neq 0],$$

odpowiednie pierwiastki równania względem y będą wyznaczone przez szereg

$$(37) \quad y = (x - \beta_j)^{-\frac{m}{p}} \left[a_m + a_{m+1} (x - \beta_j)^{\frac{1}{p}} + \dots \right]^{-1},$$

który można uporządkować według potęg rosnących wyrażenia

$$(x - \beta_j)^{\frac{1}{p}},$$

zawierający na początku liczbę skończoną wyrazów o wykładnikach ujemnych.

Ażeby zbadać wartości funkcji y , odpowiadające wartościom nieskończonym zmiennej x , używamy podstawienia $x = \frac{1}{x'}$, i w ten sposób sprowadzamy zadanie do badania pierwiastków równania o tej samej postaci w otoczeniu początku układu. Ostatecznie w otoczeniu jakiegokolwiek punktu $x = a$ n pierwiastków równania (35) wyraża się zapomocą pewnej liczby szeregów, uporządkowanych według wzrostu potęg wyrażen:

$$x - a \quad \text{lub} \quad (x - a)^{\frac{1}{p}};$$

szeregi te mogą zawierać liczbę skończoną wyrazów o wykładnikach ujemnych. To samo się stosuje również do wartości nieskończonych zmiennej x , z tą zmianą, że zastępujemy

$$x - \infty \quad \text{przez} \quad \frac{1}{x}.$$

Należy zauważyć, że potęgi ułamkowe lub wykładniki ujemne występują tylko wtedy, gdy mowa o punktach wyjątkowych. Punktami osobliwymi pierwiastków równania są tedy punkty krytyczne, dokoła których niektóre z tych pierwiastków ulegają przestawieniu kołowemu, i bieguny, w których pewne pierwiastki stają się nieskończone; zresztą żaden punkt nie może być jednocześnie biegunem i punktem krytycznym. Te dwa rodzaje punktów osobliwych nazywa się często *punktami osobliwymi algiebraicznymi* (points singuliers algébriques).

Badaliśmy dotychczas pierwiastki danego równania jedynie w otoczeniu jakiegoś określonego punktu. Założmy obecnie, że dwa punkty

$x = a$ i $x = b$, z których każdemu odpowiada n pierwiastków różnych i skończonych równania (35), zostały połączone zapomocą linii AB , nie przechodzącej przez żaden punkt osobliwy równania. Niech y_1 oznacza jeden z pierwiastków równania $F(a, y) = 0$; pierwiastek $y = f(x)$, który się staje równym y_1 przy $x = a$, jest wyznaczony w otoczeniu punktu a przez szereg potęg całkowitych $P(x - a)$, i można szukać jego dalszego ciągu analitycznego przy zakresłaniu przez punkt zmienny łuku AB . Jest to przypadek szczególny zagadnienia ogólnego, i wiemy z góry, że w punkcie B zostanie osiągnięta wartość końcowa, stanowiąca jeden z pierwiastków równania $F(b, y) = 0$ (art. 344). Przybędziemy napewno do punktu b po liczbie *skończonej* działań; w istocie, promienie kół zbieżności szeregów, wyrażających różne pierwiastki równania $F(x, y) = 0$ — przy założeniu, że środkami tych kół są rozmaite punkty drogi AB — posiadają kraniec niższy ⁽¹⁾ $\delta > 0$, ponieważ ta droga nie zawiera żadnego punktu krytycznego, i rzecz jasna, że można będzie zawsze wziąć promienie kół, których się użyje przy przedłużaniu analitycznym, conajmniej równe δ .

Pomiędzy wszystkimi drogami, łączącymi punkty A i B , można zawsze znaleźć taką, która prowadzi od pierwiastka y_1 do któregośkolwiek z pierwiastków równania $F(b, y) = 0$, jako do wartości końcowej. Aby dowieść tego, opieramy się na twierdzeniu następującym: *Jeżeli funkcja analityczna z zmiennej x przybiera przy każdej wartości tej zmiennej tylko p różnych wartości i posiada w dziedzinie całej płaszczyzny (wraz z punktami w nieskończoności) jedynie punkty osobliwe algebriczne, to wartości tej funkcji stanowią pierwiastki równania stopnia p , którego współczynnikami są funkcje wymierne zmiennej x .*

Niech

$$z_1, z_2, \dots, z_p$$

oznaczają p wartości funkcji z ; gdy punkt x zakresła krzywą zamkniętą, owe wartości

$$z_1, z_2, \dots, z_p$$

mogą tylko przechodzić jedna w drugą. Funkcja symetryczna

$$u_k = z_1^k + z_2^k + \dots + z_p^k,$$

(k — liczba całkowita dodatnia) jest tedy funkcją jednowartościową.

⁽¹⁾ W celu dowiedzenia tego z całą ścisłością wystarczy zastosować rozumowanie podobne do rozumowania z art. 342.

Funkcja ta zresztą może posiadać jedynie miejsca osobliwe o charakterze biegunowym (*des singularités polaires*). W istocie szeregi, wyrażające

$$z_1, z_2, \dots, z_p$$

w otoczeniu punktu dowolnego w odległości skończonej $x = a$, zawierają tylko liczbę skończoną wyrazów o wykładnikach ujemnych. To samo się zatem stosuje do szeregu, wyrażającego u_k . Z drugiej strony, szereg, wyrażający u_k , nie może zawierać potęg ułamkowych, gdyż funkcja ta jest jednowartościowa. Punkt a jest tedy dla u_k biegunem lub punktem zwyczajnym, i to samo się stosuje do punktu w nieskończoności. Funkcja u_k jest przeto, przy wszelkiej wartości liczby całkowitej k , funkcją wymierną zmiennej x ; to samo się stosuje do funkcji symetrycznych niezłożonych jakoto

$$\sum z_i, \sum z_i z_k, \dots,$$

i w ten sposób dowód wypowiedzianego twierdzenia zostaje ukończony.

Przypuśćmy teraz, że idąc wszelkimi możliwymi drogami od punktu a do jakiegokolwiek innego punktu x płaszczyzny otrzymujemy jako wartości końcowe jedynie p pierwiastków równania

$$F(x, y) = 0 \quad (p < n).$$

Owe pierwiastki

$$y_1, y_2, \dots, y_p$$

mogą, rzecz oczywista, tylko przechodzić w siebie wzajemnie, gdy punkt x zakresła obwód zamknięty; posiadają one wszystkie własności p gałęzi

$$z_1, z_2, \dots, z_p$$

funkcji analitycznej z , którą przed chwilą zbadaliśmy. Stąd wnioskujemy, że

$$y_1, y_2, \dots, y_k$$

byłyby pierwiastkami równania stopnia p o współczynnikach wymiernych: $F_1(x, y) = 0$. Równaniu $F(x, y) = 0$ czyniłyby tedy zadość przy wszelkiej wartości x wszystkie pierwiastki równania $F_1(x, y) = 0$, i wielomian $F(x, y)$ nie byłby, wbrew założeniu, nierozkładalnym. n pierwiastków równania (35) należy przeto uważać — jeżeli nie czynimy żadnych zastrzeżeń co do drogi, zakreslanej przez punkt x — za osobne gałęzie jednej funkcji analitycznej, podobnie jak już zauważyliśmy z powodu pewnych prostych przykładów (art. 264).

Wyobraźmy sobie, że z każdego punktu krytycznego zostało wykreślone cięcie nieograniczone, w taki sposób, iż cięcia te nie przecinają

się wzajemnie. Jeżeli droga punktu x spełnia ten warunek, by nie przekroczyć żadnego cięcia, to pierwiastki stanowią funkeje jednowartościowe w dziedzinie całej płaszczyzny, gdyż każda z dwu dróg o tych samych punktach końcowych może przejść w drugą bez przekraczania żadnego punktu krytycznego (art. 343). Ażeby było możliwe zdanie sobie sprawy ze zmienności jakiegoś pierwiastka wzdłuż jakiejkolwiek drogi, wystarczy znajomość prawa przemiany tych pierwiastków przy zakreślaniu przez zmienną pętli dokoła każdego z punktów krytycznych.

Uwaga. — Badanie funkeji algebraicznych czyni stosunkowo łatwym tą okoliczność, iż można wyznaczyć z góry, zapomocą obliczeń algebraicznych, punkty osobliwe tych funkeji. Nie tak się dzieje w ogólności z funkejami uwikłanymi niealgebraicznymi, które mogą posiadać punkty osobliwe *przestępne* (p. *singuliers transcendants*). Np. funkeja uwikłana $y(x)$, określona przez równanie $ey - x - 1 = 0$ nie posiada żadnego punktu krytycznego algebraicznego, ale ma punkt osobliwy *przestępny* $x = -1$.

359. Całki abelowe. — Niech y oznacza funkeję algebraiczną, określoną przez równanie $F(x, y) = 0$, a $R(x, y)$ — funkeję, wymierną względem x i y ; wszelka całka o postaci

$$I = \int R(x, y) dx$$

jest *całką abelową* (intégrale abélienne), związaną z tą krzywą. Ażeby wyznaczyć ostatecznie tę całkę, musimy jeszcze mieć: granicę dolną x_0 oraz odpowiednią wartość y_0 , wybraną z pośród pierwiastków równania $F(x_0, y) = 0$. Podamy tu niektóre z ogólnych i najważniejszych własności tych całek. Gdy się idzie od punktu x_0 do jakiegokolwiek punktu x po wszystkich możliwych drogach, to otrzymane przy tym wartości całki I dają się wyznaczyć zapomocą jednego z wzorów

$$(38) \quad i = I_k + m_1 \omega_1 + m_2 \omega_2 + \dots + m_r \omega_r \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

w których

$$I_1, I_2, \dots, I_n$$

oznaczają wartości całki, odpowiadające pewnym określonym drogom,

$$m_1, m_2, \dots, m_r —$$

liczby całkowite dowolne, a

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r —$$

okresy. Istnieją dwa rodzaje tych okresów. Niektóre pochodzą z zakreślania pętli dokoła biegunów funkeji $R(x, y)$; są to *okresy biegunowe*

(périodes polaires). Inne powstają na obwodach zamkniętych, zwanych *cyklami* (cycles), otaczających pewną liczbę punktów krytycznych; są to *okresy cykliczne* (p. cycliques). Liczba różnych okresów cyklicznych zależy tylko od badanego związku algebrycznego $F(x, y) = 0$; jeżeli p oznacza rodzaj tej krzywej (art. 340), to liczba ta równa się $2p$. Liczba okresów biegunowych może być, przeciwnie, dowolna.

Co do miejsc osobliwych, odróżniamy trzy klasy całek abelowych. Nazywamy całkami *gatunku pierwszego* (de première espèce) takie, które w sąsiedztwie wszelkiej wartości zmiennej x pozostają skończone; jeżeli ich moduł wzrasta nieograniczenie, to tylko z powodu dodania nieskończonej liczby okresów. Całki *gatunku drugiego* (de deuxième espèce) są to takie całki, które posiadają jeden tylko biegun; całki *gatunku trzeciego* (de troisième espèce) posiadają dwa punkty osobliwe logarytmiczne. Każda całka abelowa stanowi sumę całek trzech gatunków, i liczba różnych całek pierwszego gatunku równa się rodzajowi.

Badanie tych całek można skutecznie bardzo łatwo zapomocą powierzchni płaskich o wielu liściach (feuilletés), zwanych *powierzchniami Riemanna*. Nie będziemy jednak niemi się tutaj zajmowali. Podamy tylko, a to ze względu na charakter zupełnie elementarny, dowód pewnego podstawowego twierdzenia, odkrytego przez Abela.

360. Twierdzenie Abela. — Aby łatwiej wysłowić wyniki, weźmy krzywą płaską C , wyrażoną przez równanie $F(x, y) = 0$; równaniem drugiej krzywej płaskiej algebrycznej niech będzie $\Phi(x, y) = 0$. Te dwie krzywe posiadają N punktów wspólnych

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_N, y_N).$$

(N jest równe iloczynowi stopni obu krzywych). Niech jeszcze $R(x, y)$ oznacza jakąś funkcję wymierną; rozważmy sumę następującą:

$$(39) \quad I = \sum_{i=1}^N \int_{(x_0, y_0)}^{(x_i, y_i)} R(x, y) dx,$$

w której

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_i, y_i)} R(x, y) dx$$

oznacza całkę abelową, braną od punktu stałego x_0 aż do punktu x_i wzdłuż drogi, która, co do y , prowadzi od wartości początkowej y_0 do wartości końcowej y_i ; wartość początkowa y_0 zmiennej y ma być jednakowa dla tych wszystkich całek. Rzecz jasna, że suma I daje się wyznaczyć jedynie z pominięciem okresu, równie jak każda z całek.

Wyobraźmy sobie teraz, że niektóre ze współczynników

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

wielomianu $\Phi(x, y)$ są zmienne. Gdy te współczynniki zmieniają się w sposób ciągły, punkty x_i zmieniają się również w sposób ciągły, i jeżeli żaden z nich nie przechodzi przez jedno z miejsc nieciągłości całki

$$\int R(x, y) dx,$$

suma I zmienia się także w sposób ciągły. Zakładamy przy tym, że się podąża za zmianą ciągłą każdej z całek, występujących w tej sumie, wzdłuż drogi, zakresłonej przez odpowiednią granicę wyższą. Suma I jest tedy funkcją parametrów

$$a_1, a_2, \dots, a_k,$$

której postaci analitycznej będziemy obecnie szukali.

Oznaczmy ogólnie przez ∂V różniczkę zupełną jakiejkolwiek funkcji V względem zmiennych $a_1, a_2, \dots, a_k$:

$$\partial V = \frac{\partial V}{\partial a_1} \partial a_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial a_k} \partial a_k.$$

Zgodnie z wzorem (39) otrzymujemy:

$$\partial I = \sum_{i=1}^N R(x_i, y_i) \partial x_i.$$

Ze związków

$$F(x_i, y_i) = 0, \quad \Phi(x_i, y_i) = 0$$

wynika

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \partial x_i + \frac{\partial F}{\partial y_i} \partial y_i = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \partial x_i + \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \partial y_i + \partial \Phi_i = 0,$$

i przeto, oznaczając przez $\Psi(x_i, y_i)$ funkcję wymierną zmiennych

$$x_i, y_i, a_1, a_2, \dots, a_k$$

i pisząc Φ_i zamiast $\Phi(x_i, y_i)$ otrzymujemy

$$\partial x_i = \Psi(x_i, y_i) \partial \Phi_i.$$

Stąd:

$$\partial I = \sum_{i=1}^N R(x_i, y_i) \Psi(x_i, y_i) \partial \Phi_i;$$

spółczynnik przy ∂a_1 w drugiej części równości jest funkcją wymierną symetryczną współrzędnych N punktów (x_i, y_i) , wspólnych obu krzywym C i C' ; teoria eliminacji wykazuje, iż jest to funkcja wymierna współczynników dwu wielomianów $F(x, y)$ i $\Phi(x, y)$ a przeto funkcja wymierna parametrów

$$a_1, a_2, \dots, a_k.$$

To samo się stosuje oczywiście do współczynników przy $\partial a_2, \dots, \partial a_k$, i I można otrzymać zapomocą całkowania różniczki zupełnej, zawierającej funkcje wymierne

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k \quad \text{zmiennych} \quad a_1, a_2, \dots, a_k;$$

$$I = \int \pi_1 \partial a_1 + \pi_2 \partial a_2 + \dots + \pi_k \partial a_k.$$

Owóż całkowanie to nie może wprowadzić żadnych funkcji przestępnych prócz logarytmów. Suma I równa się tedy funkcji wymiernej współczynników

$$a_1, a_2, \dots, a_k,$$

powiększonej o sumę wyrazów, z których każdy jest równy logarytmowi funkcji wymiernej tych samych współczynników, pomnożonemu przez czynnik stały. To jest właśnie sformułowanie twierdzenia Abela w postaci najogólniejszej. W języku geometrycznym można rzec również, że suma wartości jakiegokolwiek całki abelowej, branej od wspólnego początku aż do N punktów przecięcia danej krzywej z krzywą zmienną stopnia m o równaniu $\Phi(x, y) = 0$, jest równa sumie funkcji wymiernej współczynników funkcji $\Phi(x, y)$ i liczby skończonej składników, z których każdy jest utworzony z logarytmu funkcji wymiernej tych samych współczynników i pewnego czynnika stałego.

Druga redakcja wydaje się na pierwszy rzut oka bardziej interesującą; lecz gdy chodzi o zastosowania, należy zawsze odwoływać się w myśli do analitycznego sposobu wysłowienia, aby ocenić zmiany ciągle sumy I , odpowiadające zmianom ciągłym parametrów

$$a_1, a_2, \dots, a_k.$$

Twierdzenie nabiera określonej dokładnie treści dopiero wówczas, gdy się uwzględni drogi, zakreslane przez N punktów

$$x_1, x_2, \dots, x_N$$

w płaszczyźnie zmiennej x .

Twierdzenie staje się ogromnie prostym, gdy mamy całkę gatunku pierwszego. W istocie, gdyby

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$$

nie były równe tożsamościowo zeru, możnaby znaleźć układ wartości

$$a_1 = a'_1, \dots, a_k = a'_k,$$

przy którym suma I stałaby się nieskończoną. Niech punktami przecięcia krzywej C z krzywą C' , odpowiadającą wartościom

$$a'_1, \dots, a'_k$$

parametrów będą punkty

$$(x'_1, y'_1), \dots, (x'_N, y'_N).$$

Całka

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} R(x, y) dx$$

wzrastałaby nieograniczenie, gdyby granica wyższa dążyła do jednego z punktów (x'_i, y'_i) ; jest to zaś niemożliwe dla całki gatunku pierwszego. Przeto $\delta I = 0$ i gdy

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

zmieniają się w sposób ciągły, I pozostaje stałe; twierdzenie Abela można wypowiedzieć w sposób następujący:

Gdy są dane krzywa stała C i krzywa zmienna C' stopnia m , suma przyrostów całki abelowej gatunku pierwszego, związanej z krzywą C , nabytych wzdłuż linii ciągłych, zakreślonych przez punkty przecięcia krzywych C i C' , jest równa zeru.

Uwaga. — Przypuszczamy, że stopień krzywej C' pozostaje stałym i równym m . Gdyby przy pewnych szczególnych wartościach współczynników

$$a_1, a_2, \dots, a_k,$$

stopień tej krzywej uległ obniżeniu, niektóre z punktów przecięcia krzywej C z C' winnyby być uważane za odrzucone w nieskończoność, i należałoby to uwzględnić przy stosowaniu twierdzenia. Dołączmy jeszcze tę, niemal oczywistą, uwagę, że gdy niektóre z punktów przecięcia krzywych C i C' są stałe, niema potrzeby uwzględniania odpowiednich całek w sumie I .

361. Zastosowanie do całek ultraeliptycznych. — Zastosowania twierdzenia Abela do analizy i geometrii są nader liczne i ważne. Obliczmy wyraźnie $\oint$ dla całek ultraeliptycznych (ultra-elliptiques).

Weźmy związek algebraiczny

$$(40) \quad y^2 = R(x) = A_0 x^{2p+2} + A_1 x^{2p+1} + \dots + A_{2p+2},$$

w którym $R(x)$ oznacza wielomian pierwszy względem swej pochodnej; załóżmy, iż współczynnik A_0 może być równym zeru lecz że A_0 i A_1 nie są jednocześnie równe zeru, tak iż $R(x)$ jest wielomianem stopnia

$$2p+1 \text{ lub } 2p+2.$$

Niech $Q(x)$ oznacza jakikolwiek wielomian stopnia q ; weźmy za początek wartość x_0 zmiennej x , nie czyniącą wielomianu $R(x)$ równym zeru, i oznaczmy przez y_0 jeden z pierwiastków równania

$$y^2 = R(x_0).$$

Całkując wzdłuż drogi, łączącej x_0 z x , i oznaczając przez y wartość końcową pierwiastka $\sqrt{R(x)}$, gdy się wychodzi z punktu x_0 z wartością y_0 , napiszemy

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{Q(x) dx}{\sqrt{R(x)}}.$$

W celu zbadania punktów przecięcia krzywej C , odpowiadającej równaniu (40), z inną krzywą algebraiczną C' można oczywiście zastąpić w równaniu krzywej C' każdą potęgę parzystą y^{2r} zmiennej y przez $[R(x)]^r$, a potęgę nieparzystą y^{2r+1} przez $y[R(x)]^r$. Po dokonaniu tych podstawień otrzymamy równanie, zawierające y jedynie w pierwszej potędze, i możemy tedy, oznaczając przez $f(x)$ i $\varphi(x)$ dwa wielomiany pierwsze względem siebie, stopnia λ i stopnia μ , których niektóre współczynniki będziemy uważali za zmienne, nadać równaniu krzywej C' postać

$$(41) \quad y \varphi(x) - f(x) = 0.$$

Odciętami punktów przecięcia krzywych C i C' są pierwiastki równania stopnia N

$$(42) \quad \psi(x) = f^2(x) - R(x) \varphi^2(x) = 0.$$

Przy pewnych szczególnych układach wartości współczynników zmiennych w dwu wielomianach $f(x)$ i $\varphi(x)$ może się zdarzyć, że stopień

równania będzie niższy od N ; niektóre z punktów przecięcia będą wówczas odrzucone w nieskończoność, lecz odpowiednie całki winny występować w sumie, którą będziemy badali. Wszelkiemu pierwiastkowi x_i równania (42) odpowiada dokładnie określona wartość

$$y_i = \frac{f(x_i)}{\varphi(x_i)}$$

zmienniej y . Po tych zastrzeżeniach rozważmy sumę

$$I = \sum_{i=1}^N v(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^N \int_{(x_0, y_0)}^{(x_i, y_i)} \frac{Q(x) dx}{\sqrt{R(x)}};$$

otóż

$$\delta I = \sum_{i=1}^N \frac{Q(x_i) \delta x_i}{\sqrt{R(x_i)}} = \sum_{i=1}^N \frac{Q(x_i) \varphi(x_i)}{f(x_i)} \delta x_i,$$

gdyż wartość końcowa pierwiastka w punkcie x_i winna być równa y_i ,

t. j. $\frac{f(x_i)}{\varphi(x_i)}$. Z drugiej strony z równania $\psi(x_i) = 0$ wynika

$$\psi'(x_i) \delta x_i + 2 R(x_i) \varphi(x_i) \delta \varphi_i - 2 f(x_i) \delta f_i = 0,$$

a przeto

$$\delta I = \sum_{i=1}^N \frac{Q(x_i) \varphi(x_i)}{f(x_i)} \times \frac{2 f(x_i) \delta f_i - 2 R(x_i) \varphi(x_i) \delta \varphi_i}{\psi'(x_i)},$$

czyli ze względu na samo równanie (42):

$$(43) \quad \delta I = \sum_{i=1}^N \frac{2 Q(x_i) (\varphi_i \delta f_i - f_i \delta \varphi_i)}{\psi'(x_i)}.$$

Obliczmy np., oznaczając przez a_k współczynnik przy x^k w wielomianie $f(x)$, uważany za zmienny, współczynnik przy δa_k w δI ; δa_k nie występuje w $\delta \varphi_i$ a w δf_i jest pomnożone przez x_i^k . Współczynnik poszukiwany przy δa_k jest tedy równy

$$\sum_{i=1}^N \frac{2 Q(x_i) \varphi(x_i) x_i^k}{\psi'(x_i)} = 2 \sum_{i=1}^N \frac{\pi(x_i)}{\psi'(x_i)},$$

przy założeniu, że

$$\pi(x) = Q(x) \varphi(x) x^k.$$

Sumowanie to winno być rozciągnięte na wszystkie pierwiastki równania

$$\psi(x) = 0;$$

otrzymujemy funkcję wymierną i symetryczną pierwiastków, a więc funkcję wymierną współczynników dwu wielomianów $f(x)$ i $\varphi(x)$. Można ułatwić obliczenie tej sumy zapomocą uwagi, że

$$\sum \frac{\pi(x_i)}{\psi'(x_i)}$$

równa się sumie pozostałości funkcji wymiernej $\frac{\pi(x)}{\psi(x)}$, odpowiadających N biegunom w odległości skończonej

$$x_1, x_2, \dots, x_N.$$

Według pewnego twierdzenia ogólnego suma ta jest także równa pozostałości, odpowiadającej punktowi w nieskończoności, ze znakiem zmienionym (art. 310). Otrzymamy tedy współczynnik przy a_k zapomocą zwykłego dzielenia.

Łatwo sprawdzić, iż ten współczynnik jest równy zeru, jeżeli całka $v(x, y)$ jest całką gatunku pierwszego. Zakładamy, że $q \leq p - 1$, stopień wielomianu $\pi(x)$ równa się $q + \mu + k$ i

$$q + \mu + k \leq \mu + k + p - 1.$$

Wyznamy stopień funkcji $\psi(x)$. Jeżeli wyrazy najwyższego stopnia wielomianów

$$R(x) \varphi^2(x) \text{ i } f^2(x)$$

nie znoszą się, to

$$2\lambda \leq N, \quad 2p + 1 + 2\mu \leq N,$$

skąd

$$\lambda + \mu + p + 1 \leq N,$$

i tym bardziej

$$k + \mu + p + 1 \leq N.$$

Gdyby te dwa wyrazy się znosiły, to mielibyśmy związek:

$$\lambda = \mu + p + 1;$$

ponieważ jednak wyraz $a_k x^{\lambda+k}$ nie może ulec redukcji z żadnym innym, więc otrzymalibyśmy

$$\lambda + k \leq N,$$

a stąd tę samą nierówność, co przed chwilą. Zawsze tedy

$$q + \mu + k \leq N - 2.$$

Pozostałość funkcji wymiernej $\frac{\pi(x)}{\psi(x)}$, odpowiadająca punktowi w nieskończoności, jest tedy równa zero, gdyż szereg się rozpocznie od wyrazu, zawierającego $\frac{1}{x^2}$ lub wyrazu stopnia jeszcze wyższego. Stwierdzimy podobnie, że współczynnik przy δb_h w δI — przy założeniu, że b_h jest jednym ze zmiennych współczynników wielomianu $\varphi(x)$ — jest równy zero, gdy $Q(x)$ jest wielomianem stopnia $p-1$ lub niższego. Wynik ten jest zupełnie zgodny z teorią ogólną.

Weźmy np. $\varphi(x) = 1$ i napiszmy, oznaczając przez

$$a_0, a_1, \dots, a_p$$

$p+1$ współczynników zmiennych:

$$f(x) = \sqrt{A_0} x^{p+1} + a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots a_1 x + a_0.$$

Krzywe

$$y^2 = R(x), \quad y = f(x)$$

przecinają się w $2p+1$ punktach zmiennych, i suma wartości całki $v(x, y)$, branej od wspólnego początku aż do tych $2p+1$ punktów przecięcia jest funkcją *algebraiczno-logarytmiczną* (algebrico-logarithmique) współczynników

$$a_0, a_1, \dots, a_p.$$

Otóż można dobrać $p+1$ współczynników w ten sposób, iżby $p+1$ z liczby tych punktów przecięcia były jakimikolwiek, z góry danymi, punktami krzywej $y^2 = R(x)$; spółrzędne p punktów pozostałych będą wówczas funkcjami algebraicznymi spółrzędnych $p+1$ punktów danych.

Suma $p+1$ całek

$$v(x_1, y_1) + v(x_2, y_2) + \dots + v(x_{p+1}, y_{p+1}),$$

branych od początku wspólnego aż do $p+1$ punktów dowolnych, jest tedy równa sumie p całek, których granicami są funkcje algebraiczne spółrzędnych $(x_1, y_1), \dots, (x_{p+1}, y_{p+1})$, oraz wyrażeń algebraiczno-logarytmicznych. Rzecz jasna, że zapomocą kolejnych redukcji można zastosować twierdzenie do sumy liczby całkowitej jakiejkolwiek m , większej od p , całek. W szczególności suma jakiejkolwiek liczby całek gatunku pierwszego daje się zastąpić przez sumę tylko p całek. Własność ta, którą posiadają najogólniejsze całki abelowe gatunku pierwszego, sławni treść twierdzenia o dodawaniu tych całek.

Gdy chodzi o całki eliptyczne gatunku pierwszego, twierdzenie Abela prowadzi właśnie do twierdzenia o dodawaniu, dotyczącego funckji $p u$. Weźmy w istocie krzywą normalną trzeciego rzędu

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

i niech

$$M_1(x_1, y_1), \quad M_2(x_2, y_2), \quad M_3(x_3, y_3)$$

stanowią punkty przecięcia się tej krzywej z pewną prostą D . Według twierdzenia ogólnego suma

$$\int_x^{(x_1, y_1)} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} + \int_x^{(x_2, y_2)} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}} + \\ + \int_x^{(x_3, y_3)} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

jest równa okresowi, gdyż punkty

$$M_1, \quad M_2, \quad M_3$$

zostają odsunięte w nieskończoność, gdy prosta D oddala się w nieskończoność. Owóż, gdy się używa do określenia krzywej sześcienniej równań parametrycznych

$$x = p u, \quad y = p' u,$$

parametr u równa się właśnie całce

$$\int_x^{(x, y)} \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

i wzór powyższy wyraża, że suma argumentów

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3,$$

odpowiadających trzem punktom

$$M_1, \quad M_2, \quad M_3,$$

jest równa okresowi. Widzieliśmy już powyżej, w jaki sposób związek ten jest równoważny twierdzeniu o dodawaniu, dotyczącemu funckji $p u$ (art. 338).

362. Uogólnienie wzoru Lagrange'a. — Twierdzenie ogólne o funckjach uwi-
klanych, określonych przez układ równań (t. I, art. 194), stosuje się również do
zmiennych zespolonych, bylebyśmy zachowali inne założenia, występujące w nim.
Rozważmy np. dwa równania współczesne

$$(44) \quad P(x, y) = x - a - \alpha f(x, y) = 0, \quad Q(x, y) = y - b - \beta \varphi(x, y) = 0,$$

w których x i y oznaczają zmienne zespolone, a

$$f(x, y) \quad \text{ i } \quad \varphi(x, y)$$

funckje tych zmiennych, całokształtne w sąsiedztwie układu wartości

$$x = a, \quad y = b.$$

Przy

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0,$$

równania (44) posiadają układ rozwiązań

$$x = a, \quad y = b$$

i wyznacznik $\frac{D(P, Q)}{D(x, y)}$ staje się równym jedności. Przeto równania (44), zgodnie z twierdzeniem ogólnym, posiadają jeden i tylko jeden układ pierwiastków, dążących odpowiednio do a i b , gdy α i β dążą do zera, i pierwiastki te są funkcjami całokształtnymi zmiennych α i β . Laplace pierwszy zastosował do tego układu równań wzór Lagrange'a (art. 309).

Przypuśćmy, w celu ustalenia biegu myśli, iż dokoła punktów a i b jako środków zostały zakreślone w płaszczyznach zmiennych x i y okręgi C i C' o promieniach r i r' dość małych, ażeby funkcje

$$f(x, y) \quad \text{i} \quad \varphi(x, y)$$

były całokształtne, gdy punkty x i y pozostają odpowiednio wewnątrz tych okręgów lub na samych okręgach; niech M i M' oznaczają wartości największe funkcji

$$|f(x, y)| \quad \text{i} \quad |\varphi(x, y)|$$

w tym obszarze. Założmy ponadto, że stałe α i β spełniają warunki

$$M|\alpha| < r, \quad M'|\beta| < r'.$$

Nadajmy teraz zmiennej x jakąkolwiek wartość, położoną wewnątrz C lub na samym okręgu; równanie

$$Q(x, y) = 0,$$

sprawdza się przy jednej tylko wartości zmiennej y wewnątrz koła C' , gdyż argument funkcji

$$y - b - \beta \varphi(x, y)$$

wzrasta o 2π , gdy y zakreśla C' w zwrocie dodatnim (art. 307). Pierwiastek ten jest tedy w kole C funkcją całokształtną

$$y_1 = \psi(x)$$

zmiennej x . Jeżeli zastąpimy y w $P(x, y)$ przez ten pierwiastek y_1 , otrzymane równanie

$$x - a - \alpha f(x, y_1) = 0$$

będzie posiadało wewnątrz koła C z tego samego powodu co poprzednio, jeden i tylko jeden pierwiastek.

Oznaczmy ten pierwiastek przez ξ , a przez η odpowiednią wartość zmiennej y :

$$\eta = \psi(\xi).$$

Uogólniony wzór Lagrange'a służy do rozwinięcia według potęg liczb α i β wszelkiej funkcji $F(\xi, \eta)$, całokształtnej w obszarze, który teraz określiliśmy.

Zbadajmy w tym celu całkę podwójną:

$$(45) \quad I = \int_{(C)} dx \int_{(C')} \frac{F(x, y) dy}{P(x, y) Q(x, y)};$$

gdy x jest punktem okręgu C , $P(x, y)$ nie może się stać zerem dla żadnej wartości y , wewnętrznej względem C' , gdyż argument funckji

$$x - a - z f(x, y)$$

musi koniecznie odzyskać swą wartość początkową, gdy y zakreśla C' , a x jest punktem stałym okręgu C . Jedynym biegunem funckji podcałkowej, uważanej za funckję jednej zmiennej y , jest zatem biegun $y = y_1$, wyznaczony jako pierwiastek równania

$$Q(x, y) = 0,$$

odpowiadający wartości x na okręgu C , i otrzymujemy po pierwszym całkowaniu

$$\int_{(C)} \frac{F(x, y) dy}{P(x, y) Q(x, y)} = 2i\pi \frac{F(x, y_1)}{P(x, y_1) \left(\frac{\partial Q}{\partial y} \right)_1}.$$

Druga część tej równości — przy założeniu, że y_1 zostało w niej zastąpione przez funckję całokształtną $\psi(x)$, określoną powyżej, posiada również wewnątrz C jeden tylko biegun pierwszego rzędu, a mianowicie punkt $x = \xi$, któremu odpowiada wartość $y_1 = \eta$, i odpowiednia pozostałość, jak wykazuje łatwe obliczenie, jest równa

$$\frac{2i\pi F(\xi, \eta)}{\left[\frac{D(P, Q)}{D(x, y)} \right]_{x=\xi, y=\eta}}.$$

Całka podwójna I posiada tedy wartość

$$I = -4\pi^2 \frac{F(\xi, \eta)}{\left[\frac{D(P, Q)}{D(x, y)} \right]_{x=\xi, y=\eta}}.$$

Z drugiej strony można rozwinąć $\frac{1}{PQ}$ w szereg jednostajnie zbieżny

$$\frac{1}{(x - a - z f)(y - b - g z)} = \sum \frac{a^m g^n f^m z^n}{(x - a)^{m+1} (y - b)^{n+1}}$$

skąd otrzymujemy

$$I = \sum J_{mn} a^m g^n,$$

zakładając, że

$$J_{mn} = \int_{(C)} dx \int_{(C)} \frac{F(x, y) |f(x, y)|^m |g(x, y)|^n dy}{(x - a)^{m+1} (y - b)^{n+1}}.$$

Całkę tę już obliczaliśmy (art. 352) i przekonaliśmy się, że jest równa

$$= \frac{4\pi^2}{m! n!} \frac{\partial^{m+n} |F(a, b) f^m(a, b) g^n(a, b)|}{\partial a^m \partial b^n}.$$

Przyrównywując do siebie dwie wartości całki I , otrzymujemy wzór szukany, który posiada oczywiście podobieństwo do wzoru (50) (art. 309)

$$(46) \quad \frac{F(\xi, \eta)}{\left[\frac{D(P, Q)}{D(x, y)} \right]_{\substack{x=\xi \\ \eta=\eta}}} = \\ = \sum_m \sum_n \frac{\alpha^m \beta^n}{m! n!} \frac{\partial^{m+n} [F(a, b) f^m(a, b) \varphi^n(a, b)]}{\partial a^m \partial b^n}.$$

Moglibyśmy otrzymać również drugi wzór, analogiczny do wzoru (51) z art. 309, zakładając, że

$$F(x, y) = \Phi(x, y) \frac{D(P, Q)}{D(x, y)},$$

lecz współczynniki tego wzoru są bardziej złożone niż wówczas, gdy chodzi o jedną zmienną.

ĆWICZENIA.

1. Wszelka krzywa algebraiczna C_n stopnia n i rodzaju p może być zmieniona zapomocą przekształcenia dwuwymiernego na krzywą stopnia p .

[Postępujemy podobnie jak w art. 340, przecinając daną krzywą pękiem krzywych C_{n-2} , przechodzących przez

$$\frac{n(n-1)}{2} - 3$$

punkty krzywej C_n , do których należy

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$$

punktów podwójnych, i zakładając:

$$X = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \quad Y = \frac{\varphi_3}{\varphi_1},$$

przy umowie, że równaniem pęku jest

$$\varphi_1(x, y) + \lambda \varphi_2(x, y) + \mu \varphi_3(x, y) = 0].$$

2. Wywnioskować z poprzedniego ćwiczenia, że współrzędne punktu krzywej rodzaju 2-go dają się wyrazić zapomocą funkcji wymiernych parametru t i pierwiastka kwadratowego z wielomianu $R(t)$, piątego lub szóstego stopnia, pierwszego względem swej pochodnej.

[Można zacząć od wykazania, że krzywa przechodzi przy pomocy przekształcenia punktowego w krzywą czwartego stopnia z jednym punktem podwójnym].

3*. Niech

$$y = a_1 x + a_2 x^2 + \dots,$$

oznacza szereg potęgowy, wyrażający funkcję algebraiczną, określoną jako pierwiastek równania $F(x, y) = 0$, w którym $F(x, y)$ jest takim wielomianem o *spółczynnikach całkowitych*, że punkt o współrzędnych $x = 0$, $y = 0$, jest punktem zwyczajnym krzywej, danej przez równanie $F(x, y) = 0$. Wszystkie współczynniki $a_1, a_2, \dots$ są to ułamki, i wystarczy zmienić x na Kx (K — liczba całkowita odpowiednio dobrana), ażeby te wszystkie współczynniki stały się liczbami całkowitemi.

[EISENSTEIN].

[Zauważmy, że wystarczy przekształcenie o postaci

$$x = k^2 x', \quad y = k y',$$

ażeby współczynnik przy y' w pierwszej części nowego związku stał się równym jedności, a wszystkie inne — liczbami całkowitemi].



Pedagogiczna Biblioteka Wojewódzka
w Gdańsku

196863



020000196863 T2/1

Czytelnia