

6
N. RYBKIN

ZBIÓR ZADAŃ Z GEOMETRII

CZĘŚĆ PIERWSZA
PLANIMETRIA

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO MNIEJSZOŚCI NARODOWYCH USSR

WŁAD. FELSZTYŃSKI ~~BRIGHTON~~

24
2

N. RYBKIN

WŁAD. ²⁴FELSZTYŃSKI

ZBIÓR ZADAŃ Z GEOMETRII

CZĘŚĆ PIERWSZA
PLANIMETRIA

PODRECZNIK DLA KLASY VI—IX SZKOŁY ŚREDNIEJ

ZATWIERDZONE PRZEZ LKO USRR

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO MNIEJSZOŚCI NARODOWYCH USRR
KIJÓW — 1940 — LWÓW

OD WYDAWNICTWA.

Aby nie wprowadzać zmian w numeracji zadań, układ zadań pozostawiono bez zmian. Jednakże wykładający powinni zwrócić uwagę na następujące uwagi. W § 1 i 2 zadania z ogólnymi danymi można dawać tylko wtedy, kiedy uczniowie zdobędą odpowiednie wiadomości z algebry. Konstrukcje geometryczne należy wykonywać przy pomocy linijki z podziałką i kątomierza, gdyż na wykonywanie zadań konstrukcyjnych przy pomocy cyrkla i linijki jest jeszcze za wcześnie. W § 3 zadania konstrukcyjne № 1, 3, 10, 11, 25, 31—37, 40 należy przenieść na koniec paragrafu; zadanie № 30 przenieść do działu o symetrii osiowej; a zadanie № 46 powinno się wykonywać przy powtórzeniu (wymaga ono umiejętności rozwiązywania równań kwadratowych). W § 4 należy dać w pierw zadanie № 43, a dopiero potem № 42. W § 5 dobrze jest przenieść zadanie № 64 do rozdziału „trapez równoramienny”. Zadanie № 51 z § 6 przenieść do § 7. W § 7 zadania № 27, 38 należy przenieść do rozdziału „kąty środkowe”. a zadanie № 57 spowodu jego trudności należy przenieść na koniec paragrafu. W § 9 trzeba dać do rozwiązania w pierw zadanie № 36, a potem № 35. Zadanie № 43 z § 12 należy przenieść do § 10. Zadanie № 19 z § 14 należy przenieść do § 12.



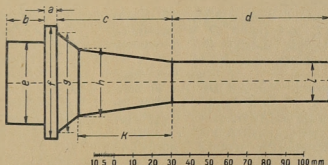
§ 1. Linia prosta.

(Zadania tego paragrafu należy rozwiązywać konstrukcją geometryczną, rozwiązania objaśniać arytmetycznie).

Mierzenie odcinków i działania na nich.

1. Rys. 1. przedstawia część obrabiarki. Posługując się daną podziałką wymierzyć odcinki oznaczone na rysunku liniami wymiarowymi i zapisać w zeszyte otrzymane liczby.

2. Połączono kolejno trzy drewniane belki: pierwsza ma długość $4,8\text{ m}$, druga $3,4\text{ m}$ i trzecia $5,8\text{ m}$. Znaleźć ich ogólną długość arytmetycznie i konstrukcyjnie, wyobrażając 1 m odcinkiem o długości 1 cm .



Rys. 1.

3. Jodła miała $20,25\text{ m}$ długości, z dołu odpiłowano z niej odcinek (kłoc) o długości $3,75\text{ m}$, a potem kłodę długości $7,40\text{ m}$. Jaka jest długość pozostałej części jodły?

4. Na odcinku AB długości 20 m odłożono od końca A część $AC = 5,1\text{ m}$ a od końca B część $BD = 7,9\text{ m}$. Wyznaczyć długość odcinka CD .

5. Rozwiązać zadanie 4 zmieniając liczby w następujący sposób: $AB = 4,8\text{ m}$, $AC = 2,8\text{ m}$ i $BD = 3\text{ m}$.

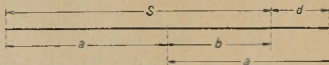
6. Narysować odcinek równy $3a + 2b$, gdzie a i b są długościami danych odcinków.

7. Narysować odcinek równy $4m - 3n$, gdy m i n są długościami danych odcinków ($m > n$).

8. Z punktu M odłożono na tej samej prostej i w tym samym kierunku dwa odcinki: $MN = 100\text{ cm}$ i $MP = 160\text{ cm}$. Znaleźć odległość między środkami tych odcinków.

9. Odcinek AB podzielono na dwie nierówne części. Odległość między środkami tych części wynosi $2,75\text{ m}$. Znaleźć długość AB .

10. Objaśnić na podstawie rysunku (rys. 2), jak znaleźć konstrukcyjnie dwa odcinki znając ich sumę S i ich różnicę d ($S = 7 \text{ cm}$, $d = 1,5 \text{ cm}$).



Rys. 2.

Podział proporcjonalny w zastosowaniu do odcinków.

11. Odcinek $AB = 2,8 \text{ m}$. Znaleźć odległość między środkiem tego odcinka i punktem, który dzieli odcinek w stosunku $\frac{2}{3} : \frac{4}{15}$.

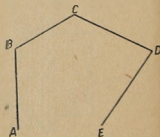
12. Odcinek AB przedłużono na długość BC , tak że AC jest m razy większy od AB ($m = 5$). Znaleźć stosunek $AB : BC$.

13. Odcinek AB podzielono na trzy części w stosunku $2 : 3 : 4$. Odległość między środkami części skrajnych wynosi $5,4 \text{ m}$. Wyznaczyć długość AB .

14. Punkt C dzieli odcinek AB w stosunku $5 : 7$, zaś punkt D w stosunku $5 : 11$, odległość między C i D wynosi 10 m . Wyznaczyć długość AB .

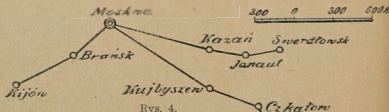
Długość łamanej.

15. Dana jest łamana $ABCDE$ (rys. 3). Znaleźć sumę odcinków łamanej mierząc każdy odcinek. Wyprostowawszy łamaną (konstrukcyjnie), zmierzyć długość otrzymanego odcinka i porównać oba wyniki.



Rys. 3.

16. Na rysunku 4, mamy mapę po-



Rys. 4.

wietrznych linii komunikacyjnych. Porównać (wyprostowując łamaną) odległości z Moskwy do Kijowa, Swierdłowska i Taszkentu. Znaleźć przy pomocy podziałki każdą z tych odległości.

Punkty oraz proste ich wzajemne położenie.

17. Zbadać, czy punkty A , B i C leżą na jednej prostej, jeśli odległości między nimi są następujące:

Taszkent

- 1) $AB = 20\text{ m}$ $AC = 13\text{ m}$ $BC = 7\text{ m}$.
 2) $AD = 4\text{ m}$ $AC = 7\text{ m}$ $BC = 3\text{ m}$.
 3) $AB = 1,8\text{ m}$ $AC = 1,3\text{ m}$ $BC = 3\text{ m}$.

18. 1) Dane są trzy punkty nie leżące na jednej prostej. Ile różnych prostych można przeprowadzić przez te punkty, biorąc je parami.

2) Ilość prostymi można połączyć parami cztery punkty, tak aby trzy z nich nie leżały na jednej prostej. To samo pytanie dla 5 punktów, 20 punktów, n punktów.

§ 2. Kąty.

Konstrukcja kątów, mierzenie kątów i działania na nich.

1. Przy pomocy kątomierza zbudować kąt równy danemu kątowi.

2. Przy pomocy kątomierza zbudować kąty: 60° , 75° , 125° , 150° .

3. Zbudować „na oko” kąty 30° , 45° , 120° , 135° .

Sprawdzić narysowane kąty kątomierzem.

Zadania № 4—16 rozwiązać najpierw konstrukcją geometryczną z pomocą kątomierza, a potem sprawdzić rozwiązania arytmetycznie.

4. Zbudować kąt równy sumie dwu danych kątów.

5. Znaleźć sumę trzech danych kątów.

6. Obliczyć sumę kątów: 1) $45^\circ 36'$ i $78^\circ 57'$, 2) $26^\circ 16' 45''$ i $117^\circ 52' 30''$, 3) $15^\circ 40'$, $37^\circ 50' 30''$, $88^\circ 45''$ i $20^\circ 30' 40''$.

7. Zbudować kąt równy różnicy dwu danych kątów.

8. Znaleźć różnicę kątów: 1) $96^\circ 35' 15''$ i $48^\circ 45' 45''$, 2) $71^\circ 10'$ i $29^\circ 52' 30''$, 3) $153^\circ 17' 42''$ i $68^\circ 29'$.

9. Znaleźć dopełnienia do kąta prostego następujących kątów ostrych: 1) 70° , 2) $34^\circ 23'$, 3) $22^\circ 42' 38''$.

10. Przy pomocy kątomierza zbudować dwa kąty mając daną ich sumę i różnicę.

11. Potroić dany kąt ostry.

12. Znaleźć iloczyn: 1) $35^\circ 42' \cdot 5$, 2) $17^\circ 23' 45'' \cdot 4$, 3) $55^\circ 32' 30'' \cdot 3$.

13. Przy pomocy kątomierza podzielić dany kąt na dwa, cztery, osiem, szesnaście równych części.

14. Znaleźć ilorazy: 1) $93^\circ 15' : 3$, 2) $147^\circ 45' : 2$, 3) $98^\circ 21' 50'' : 4$, 4) $161^\circ 40'' : 8$.

15. Narysować kąt ostry i rozwarty. Zbadać, ile razy kąt ostry mieści się w rozwartym.

16. Znaleźć ilorazy: 1) $105^\circ : 30^\circ$, 2) $66^\circ 55' : 24^\circ 20'$, 3) $28^\circ 35' : 40^\circ 50'$.

17. Wewnątrz kąta rozwartego poprowadzono z jego wierzchołka prostopadłe do jego ramion.

Kąt między tymi prostopadłymi równa się $\frac{4}{7}d$.

Wyznaczyć kąt rozwarty. Zrobić dokładny rysunek posługując się kątomierzem.

18. Dane są dwa kąty przyległe: ostry i rozwarty. Prosta poprowadzona jest przez ich wierzchołek prostopadłe do ich wspólnego ramienia, jest nachylona od drugiego ramienia kąta ostrego pod ką-

Kąty wierzchołkowe.

34. Jeden z kątów utworzonych przez dwie przecinające się proste równa się $\frac{3}{5}d$. Jakiej wielkości jest każdy z pozostałych kątów?

35. Przy pomocy samego tylko liniału narysować kąt równy danemu i mający z nim wspólny wierzchołek.

36. Proste AB i CD przecinają się w punkcie O . Suma kątów AOD i COB wynosi 220° . Wyznaczyć kąt AOC .

37. Dany kąt i dwa przyległe dają w sumie $2\frac{3}{8}d$. Znaleźć dany kąt.

§ 3. Trójkąty i wielokąty. Prostopadłe i pochyłe. Symetria osiowa.

Trójkąt równoramienny.

1. Zbudować trójkąt równoramienny mając dane:

- 1) podstawę i ramię;
- 2) podstawę i kąt przy podstawie;
- 3) ramię i kąt przy wierzchołku;

4) ramię i kąt przy podstawie.

2. Na ramieniu trójkąta równoramiennego o obwodzie 40 m zbudowano trójkąt równoboczny. Obwód tego drugiego trójkąta równa się 45 m . Znaleźć podstawę danego trójkąta.

Konstrukcja trójkątów i ich równość.

3. Zbudować trójkąt mając dane:

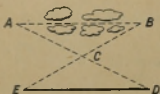
- 1) bok i dwa kąty przyległe;
- 2) dwa boki i kąt między nimi;
- 3) trzy boki.

4. Dowieść, że w trójkącie równoramiennym dwusieczne kątów przy podstawie są równe.

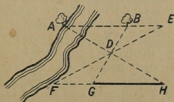
5. Dowieść, że w trójkącie równoramiennym środkowe poprowadzone do ramion są równe.

6. Aby zmierzyć w terenie odległość między dwoma punktami A i B (rys. 6), między którymi nie można przeciągnąć taśmy mierzniczej, wybiera się taki punkt C , z którego widać zarówno punkt A jak i punkt B i z którego można by do nich dojść. Następnie wytycza się¹⁾ AC i BC i przedłuża się je poza punkt C i odmierza się $CD = AC$ i $EC = CB$. Wówczas odcinek ED równa się szukanej odległości AB . Dlaczego?

7. Aby zmierzyć w terenie odległość między dwoma punktami A i B (rys. 7), z których jeden (punkt A) jest niedostępny, wytycza się¹⁾



Rys. 6.



Rys. 7.

¹⁾ Tj. wyznacza kierunek żerdziami — wiechami.

odcinek AB i na jego przedłużeniu odmierza się dowolny odcinek BE . Wybiera się w terenie punkt D , z którego można widzieć punkt A , i podejść do punktu B i E . Wytyczywszy prostą BDG i EDF , odmierza się $FD = DE$ i $DG = BD$. Następnie idzie się po prostej FG patrząc na punkt A , aż znajdzie się taki punkt H , który leży na prostej AD . Wówczas HG równa się szukanej odległości. Dowieść tego.

8) Na każdym z boków trójkąta równobocznego ABC odłożono równe odcinki $AB_1 = BC_1 = CA_1$. Punkty A_1 , B_1 i C_1 połączono prostymi. Dowieść, że trójkąt $A_1B_1C_1$ jest również równoboczny.

9) Każdy z boków trójkąta równobocznego ABC przedłużono: AB poza wierzchołek B ; BC poza wierzchołek C ; CA poza wierzchołek A ; na przedłużeniach odmierzone trzy równej długości odcinki i ich końce połączono ze sobą. Określić kształt otrzymanego trójkąta.

10. 1) Zbudować trójkąt mając dane dwa boki i kąt naprzeciw większego z nich.

2) Dowieść twierdzenia: jeśli dwa boki i kąt położony naprzeciwko większego z nich w jednym trójkącie są odpowiednio równe dwom bokom i kątowi położonemu naprzeciw większego z nich w drugim trójkącie, to trójkąty te są równe.

11. 1) Zbudować trójkąt mając dane dwa boki i kąt leżący naprzeciw mniejszego z nich.

2) Wykazać, że gdy dwa boki i kąt leżący naprzeciw boku mniejszego jednego trójkąta są równe odpowiednim dwom bokom i kątowi leżącemu naprzeciw boku mniejszego w drugim trójkącie, to trójkąty mogą być i równe i nierówne.

12. Dowieść twierdzenia: skoro dwa boki i środkowa jednego trójkąta są odpowiednio równe dwom bokom i środkowej drugiego, to takie dwa trójkąty są równe. Rozpatrzyc dwa wypadki: 1) środkową poprowadzono do jednego z danych boków, 2) środkową poprowadzono między danymi bokami.

13. Czy istnieje trójkąt o bokach: 1) 5 m , 10 m , 12 m . 2) 1 m , 2 m , $3,3\text{ m}$; 3) $1,2\text{ m}$, 1 m , $2,2\text{ m}$?

14. Czy boki trójkąta mogą pozostawać do siebie w stosunku: 1) $1:2:3$, 2) $2:3:4$?

15. W trójkącie jeden bok równa się $1,9\text{ m}$, drugi $0,7\text{ m}$. Znaleźć bok trzeci, jeśli jego długość wyraża się całkowitą liczbą metrów.

16. Obwód trójkąta równoramiennego o podstawie $0,4\text{ m}$ równa się 1 m . Znaleźć długość ramienia.

17. W równoramiennym trójkącie jeden bok wynosi 25 m , a drugi 10 m . Który z nich jest podstawą?

18. Środkowa poprowadzona od jednego z ramion trójkąta równoramiennego dzieli jego obwód na dwie części o długościach 15 cm i 6 cm . Wyznaczyć boki trójkąta.

19. Dowieść, że w trójkącie bok jest mniejszy od połowy obwodu.

20. Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu wewnątrz trójkąta od jego wierzchołków jest większa od połowy obwodu.

Zależność między bokami trójkąta.

21. Wewnątrz trójkąta ABC poprowadzono do boku BC prostą AD tak, że kąt CAD równa się kątowi ACD . Obwody trójkątów ABC i ABD wynoszą 37 m i 24 m . Znaleźć długość AC .

22. W trójkącie równoramiennym ABC poprowadzono wysokość BD . Obwód trójkąta ABC wynosi 50 m , zaś obwód trójkąta ABD równa się 40 m . Wyznaczyć wysokość BD .

Prostopadła
i pochyłe.

23. W trójkącie równoramiennym ABC ramię AB równa się 14 cm ; z jego środka D poprowadzono do niego prostopadłą DE do przecięcia z bokiem BC i punkt E połączono z A . Obwód trójkąta AEC równa się 24 cm . Znaleźć długość AC .

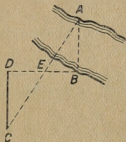
24. Z jednego punktu poprowadzono do danej prostej dwie równe pochyłe, odległość ich punktów przecięcia się z prostą równa się 16 m . Znaleźć rzuty każdej z pochyłych na daną prostą.

Konstrukcja
i równość trójkątów prostokątnych.

25. Zbudować trójkąt prostokątny mając dane:

- 1) dwie przyprostokątne,
- 2) przyprostokątną i przeciwprostokątną,
- 3) przyprostokątną i kąt ostry,
- 4) przeciwprostokątną i kąt ostry.

26. Aby zmierzyć odległość między punktami A i B , położonymi na różnych brzegach rzeki, wytycza się przy pomocy kątownicy prostopadłe do AB odcinek BD pewnej długości (rys. 8). Odcinek BD dzieli się na połowy w punkcie E . Prowadzi się prostą DC prostopadłą do BD w punkcie D , następnie patrząc na A — idzie się po DC do punktu C , leżącego na prostej AE . Długość DC równa się AB . Udowodnić to.



Rys. 8.

27. 1) Dowieść, że prosta prostopadła do dwusiecznej kąta odcina na jego ramionach równe odcinki.

2) Przez dany punkt wewnątrz lub poza kątem, poprowadzić prostą, tak aby odcinała na ramionach kąta równe odcinki.

28. 1) Dowieść, że wysokości spuszczone na ramiona trójkąta równoramiennego są równe.

2) Wypowiedzieć i dowieść twierdzenie odwrotne.

29. Trzy osiedla A , B i C nie leżą na jednej prostej. Wskazać na rysunku, jak należy prowadzić z A prostą drogę między osiedlami B i C jednakowo od nich odległą.

30. Punkty M i N znajdują się po tej samej stronie prostej AB . Znaleźć na niej punkt C , tak aby prosta AB otworzyła równe kąty z odcinkami łamanej MCN .

Miejsca
geometryczne
punktów.

31. Dany jest trójkąt ABC . Na dwusiecznej kąta A znaleźć punkt równo oddalony od wierzchołków B i C .

32. Znaleźć punkt, równo oddalony od wszystkich wierzchołków trójkąta. Czy zawsze punkt ten będzie wewnątrz trójkąta?

33. Dany jest kąt i punkt M wewnątrz kąta. Znaleźć punkt równo oddalony od obu ramion kąta, znajdujący się w danej odległości a od punktu M .

34. Na boku trójkąta znaleźć punkt równo oddalony od dwu innych boków.

35. Znaleźć w trójkącie punkt równo odległy od wszystkich jego 3 boków.

36. Dany jest kąt A i punkty B i C , z których jeden leży na jednym, drugi na drugim ramieniu kąta. Znaleźć: 1) punkt M , równo odległy od ramion kąta i spełniający warunek $MC=MB$, 2) punkt N leżący na jednym ramieniu kąta, tak że $NC=CB$, 3) punkt P taki, że każdy z punktów B i C ma jednakową odległość od A i P .

37. Dany jest kąt A i punkt B na jednym z jego ramion. Znaleźć na drugim ramieniu kąta punkt C , tak aby suma $CA+CB$ równała się danej długości l .

Czworokąty.

38. Wyznaczyć boki czworokąta o obwodzie 76 m , mające się do siebie jak $2:5:4:8$.

39. Czy boki czworokąta mogą być do siebie w stosunku $2:3:4:10$:

40. 1) Zbudować czworokąt o bokach 1 cm , 2 cm , 3 cm , 4 cm , którego przekątna wychodząca ze wspólnego wierzchołka pierwszego i czwartego boku równa się $2,6\text{ cm}$.

2) Wykonać to samo dla czworokąta o bokach $1,2\text{ cm}$, $1,8\text{ cm}$, $2,4\text{ cm}$, $3,0\text{ cm}$, jeśli kąt między drugim i trzecim bokiem równa się 102° .

41. Przekątna czworokąta dzieli go na dwa trójkąty o obwodach 25 m i 27 m . Obwód czworokąta równa się 32 m . Znaleźć długość tej przekątnej.

Wielokąty.

42. Ile przekątnych można poprowadzić z jednego wierzchołka: 1) pięciokąta, 2) dziesięciokąta, n -kąta?

43. Ile trójkątów otrzymamy, jeśli poprowadzimy wszystkie przekątne z jednego wierzchołka: a) sześciokąta, b) ośmiokąta, c) n -kąta?

44. Ile przekątnych można poprowadzić w 1) pięciokącie, 2) dziesięciokącie, 3) n -kącie?

45. Ile boków ma wielokąt, w którym ilość boków jest m razy większa od ilości przekątnych, poprowadzonych z jednego wierzchołka? ($m=2; 4; 5$.)

46. Ile boków ma wielokąt, w którym ilość jego wszystkich przekątnych jest m razy większa od ilości boków ($m=0,5; 1; 2; 2,5$)?

Symetria osiowa.

47. Zbudować odcinek symetryczny do danego względem danej osi symetrii.

48. Zbudować trójkąt symetryczny do danego trójkąta prostokątnego względem: 1) jednej przyprostokątnej, 2) drugiej przyprostokątnej, 3) przeciwprostokątnej.

49. Dana jest oś symetrii i koło. Narysować koło symetryczne do danego.

50. Dana jest oś symetrii i łamana. Znaleźć łamaną symetryczną względem danej.

§ 4. Proste równoległe. Suma kątów trójkąta i wielokąta.

Kąty przy równoległych i siecznej.

1. Dwie proste równoległe przecięte są trzecią prostą. Jeden z ośmiu powstałych kątów wynosi 72° . Znaleźć wielkości pozostałych kątów.

2. Dwie proste równoległe przecięte są trzecią prostą, przy czym jeden z kątów wewnętrznych

nych równa się $1\frac{3}{8}d$. Pod jakim kątem jego dwusieczna przecina drugą równoległą?

3. Dwie proste równoległe przecięte są trzecią prostą. Suma trzech kątów — danego wewnętrznego, wewnętrznego względem niego jednostronnego i wewnętrznego naprzemianległego względem pierwszego — równa się $3\frac{2}{7}d$. Wyznaczyć kąt odpowiadający pierwszemu wewnętrznemu.

4. Proste AMB i CND przecięto prostą $EMNF$; $\angle CNF = \frac{3}{16}d$ i $\angle NMB = \frac{3}{4}d$. Jak należy zmienić wielkość $\angle NMB$, aby proste stały się równoległymi?

5. Proste $AMNB$ i $CRSD$ przecięto prostymi $EMRF$ i $GNSH$. Wiedząc, że $\angle AME = 1\frac{5}{24}d$, $\angle ANS = 1\frac{3}{8}d$ i $\angle MRS = \frac{19}{24}d$, wyznaczyć $\angle DSH$.

Kąty o ramionach równoległych i prostopadłych.

6. Dany jest $\angle ABC = 43^\circ$. Z punktu P , położonego wewnątrz tego kąta poprowadzono dwie proste równoległe do jego ramion aż do przecięcia się z nimi. Znaleźć kąty powstałego czworokąta.

7. Dane są dwa kąty o ramionach równoległych. Jeden z nich jest o 90° większy od drugiego. Znaleźć te kąty.

8. Dane są dwa kąty o ramionach prostopadłych, jeden z nich jest cztery razy mniejszy od drugiego. Znaleźć wielkość każdego kąta.

9. Z końców podstawy trójkąta poprowadzono dwie prostopadłe do ramion, przecinające się pod kątem 130° . Wyznaczyć kąt wierzchołkowy trójkąta.

Suma kątów trójkąta.

10. W trójkącie jeden kąt równa się $1\frac{1}{6}d$, a drugi $\frac{3}{8}d$. Czemu równa się trzeci kąt?

11. Znaleźć kąty trójkąta, jeśli one mają się do siebie jak $1:2:3$.

12. Dwa kąty trójkąta mają się do siebie jak $5:7$, trzeci jest o $\frac{4}{19}d$ większy od pierwszego. Znaleźć trzeci kąt.

13. W trójkącie dwa kąty są równe: $110^\circ 23' 50''$ i $24^\circ 36' 40''$. Znaleźć trzeci kąt.

14. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych równa się $58^\circ 20'$. Wyznaczyć drugi kąt ostry.

Trójkąt równoramienny.

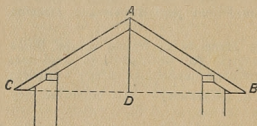
15. W środkowym obszarze ZSRR używa się zazwyczaj kątów następujących rozmiarów między krokiewiami AC i AB (rys. 9):

dla dachów żelaznych	120° (w przybliż.)
" " krytych papą . . .	145° "
" " krytych dachówką . . .	100° "
" " dranicowych . . .	90° "
" " słomianych . . .	60° "

Wyznaczyć dla każdego dachu kąt między krokiewiami i linią poziomą CB .

16. Znaleźć kąt przy podstawie w trójkącie równoramiennym, w którym kąt wierzchołkowy równa się $105^\circ 27'$.

17. Znaleźć kąt wierzchołkowy w trójkącie równoramiennym, gdy znany jest kąt przy podstawie $70^\circ 43'$.



Rys. 9.

18. W trójkącie równoramiennym kąt przywierzchołkowy równa się $1\frac{2}{7}d$. Znaleźć kąt przy podstawie.

19. W trójkącie równoramiennym kąt przy podstawie równa się $\frac{5}{9}d$. Znaleźć kąt przy wierzchołku.

20. Kąt przy wierzchołku w trójkącie równoramiennym równa się 30° , na ramię spuszczone wysokość. Znaleźć kąt między wysokością a podstawą.

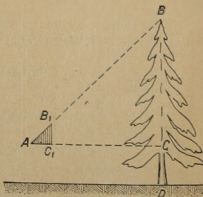
21. Kąt przy podstawie trójkąta równoramiennego równa się 30° , znaleźć kąt między ramieniem i wysokością spuszczoną na drugie ramię.

22. W trójkącie równoramiennym kąt między ramieniem i wysokością jest o $\frac{1}{7}d$ mniejszy od kąta przy podstawie. Znaleźć kąty tego trójkąta.

Trójkąt prostokątny.

23. Aby zmierzyć wysokość drzewa BD , przygotowano trójkąt prostokątny

AB_1C_1 o kącie $A = 45^\circ$ (rys. 10). Utrzymując ten trójkąt w płaszczyźnie pionowej, odstepujemy od drzewa tak, aby przeciwprostokątna AB_1 przechodziła przez wierzchołek B . Jak wysokie jest drzewo, skoro odległość $AC = 5,6$ m, a wysokość obserwatora $1,7$ m?



Rys. 10.

24. 1) Znaleźć przyprostokątne w trójkącie prostokątnym o kącie ostrym $\frac{1}{2}d$, jeśli ich suma wynosi 36 cm.

2) Znaleźć przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym o kącie ostrym $\frac{1}{2}d$, jeśli suma jej i wysokości na nią spuszczonej wynosi 12 cm.

Przyprostokątna leżąca naprzeciwko kąta 30° .

25. Dowieść twierdzenia: jeśli kąt ostry trójkąta prostokątnego równa się 30° , to przyprostokątna leżąca naprzeciw niego równa się połowie przeciwprostokątnej.

26. Twierdzenie odwrotne: (patrz zad. 25): jeżeli przyprostokątna jest połową przeciwprostokątnej, to przeciwległy do niej kąt równa się 30° . Udowodnić to.

27. Przy pomocy cyrkla i linijki podzielić kąt prosty na trzy równe części.

28. W trójkącie prostokątnym jeden z kątów ostrych równa się $\frac{2}{3}d$, a suma przeciwprostokątnej i mniejszej przyprostokątnej równa się 1,8. Wyznaczyć przeciwprostokątną.

Kąt zewnętrzny trójkąta.

29. W trójkącie ABC kąt zewnętrzny przy wierzchołku B jest trzy razy większy od kąta A i o $\frac{4}{9}d$ większy od kąta C . Wyznaczyć kąty trójkąta.

30. W trójkącie równobocznym poprowadzono dwie środkowe; znaleźć kąt ostry między nimi.

31. Jeden z kątów ostrych trójkąta prostokątnego równa się $\frac{d}{3}$. Znaleźć kąt ostry między przeciwprostokątną i dwusieczną kąta prostego.

32. W trójkącie równoramiennym suma kątów wewnętrznych i jednego zewnętrznego równa się $\frac{21}{8}d$. Znaleźć kąty tego trójkąta.

33. Dowieść, że dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku trójkąta równoramiennego jest równoległa do podstawy.

Zastosowanie twierdzenia o sumie kątów trójkąta do rozwiązywania różnych zadań na trójkąty.

34. Jeden z kątów trójkąta równa się $\frac{2}{3}d$. Jak wielki jest kąt ostry, utworzony przez dwusieczne dwu pozostałych kątów trójkąta?

35. Dany jest kąt A ; od jego wierzchołka A odłożono na jego ramieniu odcinek AB , z punktu B poprowadzono równoległą do drugiego ramienia danego kąta; na tej równoległej odłożono wewnątrz

kąta odcinek BD równy BA i połączono punkt D z wierzchołkiem A . Dowieść, że prosta AD połowi dany kąt.

36. Pod jakim kątem przecinają się dwusieczne dwu kątów wewnętrznych, jednostronnych przy prostych równoległych?

37. W trójkącie ABC kąt B jest prosty. M jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów A i C . Wyznaczyć kąt AMC .

38. W trójkącie ABC dwusieczne kątów A i C przecinają się w punkcie M . Znaleźć kąt ABC , jeśli wiadomo, że jest on połową kąta AMC .

39. W trójkącie ABC kąt B jest prosty. AD i CE są przedłużeniami przeciwprostokątnej AC . Kąty BAD i BCE podzielono na połowy. M jest punktem przecięcia dwusiecznych (przedłużonych poza wierzchołki). Znaleźć kąt AMC .

40. W trójkącie równoramiennym kąt między podstawą a wysokością spuszczoną na ramię równa się $\frac{8}{15}d$. Znaleźć kąty tego trójkąta.

41. W trójkącie równoramiennym ABC wysokość AD spuszczone na ramię BC tworzy z ramieniem AB kąt BAD równający się $\frac{1}{5}d$. Wyznaczyć kąty tego trójkąta zakładając, że 1) wysokość AD przebiega wewnątrz trójkąta, 2) że wysokość AD przebiega poza trójkątem.

42. Dowieść, że w trójkącie prostokątnym środkowa spuszczone na przeciwprostokątną równa się jej połowie.

43. Dowieść twierdzenia: jeśli środkowa równa się połowie boku, do którego została poprowadzona, to trójkąt jest prostokątny.

44. Jeśli na przeciwprostokątnej BC trójkąta BAC równoramiennego i prostokątnego wyznaczmy dwa punkty E i D , tak że BE równa się BA i CD równa się CA , to $\angle DAE = \frac{1}{2}d$. Dowieść tego.

45. ABC jest trójkątem równoramiennym o podstawie AC , CD — dwusieczną kąta C , $\angle ADC = \frac{5}{3}d$. Wyznaczyć $\angle B$.

46. Kąt przy wierzchołku trójkąta równoramiennego równa się 36° . Dowieść, że dwusieczna kąta przy podstawie przedłużona do przecięcia z przeciwległym bokiem dzieli trójkąt równoramienny na dwa inne trójkąty również równoramienne.

47. W trójkącie ABC bok AC przedłużono poza punkt C o długość $CE = CB$ i poza punkt A o długość $AD = AB$, punkty E i D połączono z B . Wyznaczyć kąty trójkąta DBE znając kąty trójkąta ABC .

48. W trójkącie ABC poprowadzono wysokości AD i CE , M oznacza punkt ich przecięcia. Wyznaczyć $\angle AMC$, jeśli $\angle BAC = \frac{1}{4}d$ i $\angle BCA = \frac{5}{6}d$.

49. W trójkącie równoramiennym ABC wysokości AD i CE spuszczone na ramiona tworzą kąt $AMC = \frac{8}{15}d$. Wyznaczyć kąty trójkąta ABC .

50. W trójkącie ABC poprowadzono z wierzchołka C dwusieczne kątów wewnętrzznego i zewnętrznego, pierwsza dwusieczna tworzy z bokiem AB kąt równy $\frac{6}{17}d$. Jaki kąt tworzy druga dwusieczna z przedłużeniem boku AB ?

51. Ze środka przeciwprostokątnej poprowadzono prostopadłą do przecięcia się z przyprostokątną i otrzymany punkt połączono z końcem drugiej przyprostokątnej odcinkiem, który dzieli kąt trójkąta w stosunku 2:5 (mniejsza część przylega do przeciwprostokątnej). Wyznaczyć ten kąt.

Suma kątów
wielokąta.

52. Wyznaczyć sumę kątów wewnętrznych: 1) siedmiokąta, 2) dziesięciokąta, 3) dwudziestopięciokąta.

53. Wyznaczyć kąty pięciokąta wiedząc, że ich wielkości są do siebie w takim stosunku, jak: 1:1,5:2:2,5:3.

54. Jak zmieni się suma kątów wielokąta, jeśli ilość jego boków zwiększymy o pięć?

55. Ile boków ma wielokąt, jeśli suma jego kątów wewnętrznych wynosi 1) 30 d , 2) 48 d , 3) 57 d ?

56. W jakim wielokącie suma kątów wewnętrznych równa się sumie kątów zewnętrznych?

57. Ile boków ma wielokąt, jeśli suma jego kątów wewnętrznych wraz z jednym z kątów zewnętrznych równa się 23 d ?

58. Wyznaczyć ilość boków wielokąta, jeśli suma jego kątów wewnętrznych jest m razy większa od sumy kątów zewnętrznych ($m = 1, 2, 3$).

59. Wyznaczyć kąty czworokąta, jeśli stosunek dwóch pierwszych wynosi 5:7, trzeci równa się ich różnicy, a czwarty jest mniejszy od trzeciego o $\frac{4}{11} d$.

§ 5. Równoległoboki i trapezy.

Kąty i boki
równoległo-
boku.

1. Jeden z kątów równoległoboku wynosi $\frac{3}{7} d$. Wyznaczyć pozostałe kąty.

2. Wyznaczyć kąty równoległoboku, jeśli jeden z nich jest większy od drugiego o $\frac{2}{11} d$.

3. W równoległoboku $ABCD$ bok AB równa się 9 cm i stanowi $\frac{3}{10}$ jego obwodu. Wyznaczyć pozostałe boki równoległoboku.

4. Dwa boki równoległoboku mają się do siebie jak 3:4, a obwód jego równy jest 2,8 m . Wyznaczyć boki równoległoboku.

5. W równoległoboku $ABCD$ poprowadzono dwusieczną kąta A , która przecina bok BC w punkcie E . Znaleźć odcinki BE i EC , skoro AB równa się 9 cm i $AD = 15 cm$.

6. Na czym opiera się budowa przyrządów rysowniczych zwanych „równoległymi liniałami“ (rys. 11)?

7. Boki równoległoboku równają się 8 cm i 3 cm , dwusieczne dwu kątów równoległoboku przyległych do dłuższego jego boku dzielą bok przeciwny na trzy części. Znaleźć każdą z tych części.

8. Jeden z boków równoległoboku równa się 5 m . Czy można jego przekątne wyrazić takimi liczbami: 1) 4 m i 6 m , 2) 4 m i 3 m , 3) 6 m i 7 m ?

9. Dowieść, że każdy czworokąt, którego przekątne wzajemnie się połowią, jest równoległobokiem.

10. Czy przekątna równoległoboku może równać się jego bokowi?



Rys. 11.

Przekątne
równoległobo-
ków.

11. Przez punkt przecięcia się przekątnych równoległoboku poprowadzono prostą. Wykazać, że jej odcinek zawarty między bokami równoległymi jest przez ten punkt podzielony na połowy.

12. W równoległoboku $ABCD$ poprowadzono przez punkt przecięcia przekątnych prostą, która na bokach BC i AD odcina odcinki $BE = 2\text{ m}$ i $AF = 2,8\text{ m}$. Znaleźć boki BC i AD .

13. W równoległoboku $ABCD$ wysokość poprowadzona z wierzchołka B połowi podstawę AD . Wyznaczyć przekątną BD i boki równoległoboku, jeśli wiadomo, że obwód równoległoboku wynosi $3,8\text{ m}$ i jest większy od obwodu trójkąta ABD o 1 m .

Konstrukcja
równoległo-
boku.

14. Zbudować równoległobok o danych bokach, jeśli wiadomo, że wysokość przeprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli przeciwległy bok na połowy.

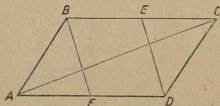
15. Zbudować równoległobok mając dane:

- 1) dwa boki o długościach 2 cm , 3 cm i kąt między nimi 110° ;
- 2) dwa boki o długościach $2,1\text{ cm}$ i $3,2\text{ cm}$ i jedną z przekątnych równą $4,0\text{ cm}$;
- 3) obie przekątne o długościach $6,0\text{ cm}$ i $5,0\text{ cm}$ i jeden bok równy $4,5\text{ cm}$;
- 4) obie przekątne 5 cm i 4 cm i kąt między nimi równy 135° ;
- 5) podstawę $2,0\text{ cm}$, wysokość $1,5\text{ cm}$ i przekątną równą $3,2\text{ cm}$.

Różne zadania
na równoległo-
boki.

16. Każde z ramion trójkąta równoramiennego równa się 5 dm . Z punktu leżącego na podstawie tego trójkąta poprowadzono dwie proste równoległe do ramion. Obliczyć obwód powstałego równoległoboku.

17. W równoległoboku kąt między wysokościami poprowadzonymi z wierzchołka kąta ostrego wynosi $1\frac{5}{11}d$. Wyznaczyć kąty równoległoboku.



Rys. 12.

18. Środki E i F równoległych boków BC i AD równoległoboku $ABCD$ połączono prostymi z wierzchołkami D i B (rys. 12). Dowieść, że te proste dzielą przekątną AC na trzy równe części.

19. Z dowolnego punktu podstawy trójkąta równoramiennego poprowadzono równoległe do jego ramion. Wykazać, że obwód utworzonego równoległoboku nie zależy od położenia punktu i równa się sumie ramion trójkąta.

Prostokąt.

20. W prostokącie przekątna tworzy z bokiem kąt równy $\frac{2}{5}d$. Znaleźć kąt między przekątnymi zwrócony do boku mniejszego.

21. W prostokącie określić kąt między mniejszym bokiem i przekątną, wiedząc, że jest on o $\frac{1}{3}d$ mniejszy od kąta między przekątnymi opierającego się na wspomnianym boku.

22. Czy wewnątrz prostokąta istnieje punkt jednakowo oddalony od: 1) wszystkich jego boków, 2) wszystkich jego wierzchołków?

23. W prostokącie punkt przecięcia się przekątnych jest oddalony od boku mniejszego o 4 cm więcej niż od boku większego. Obwód tego prostokąta wynosi 56 cm. Wyznaczyć jego boki.

24. W prostokącie przekątne przecinają się pod kątem $\frac{2}{3}d$. Suma obu przekątnych i obu mniejszych boków równa się 3,6 m. Obliczyć długość przekątnej.

25. $ABCD$ jest danym prostokątem. M jest środkiem boku BC . Znaleźć boki prostokąta, wiedząc, że proste MA i MD są do siebie prostopadłe, a obwód prostokąta $ABCD$ równa się 24 m.

26. W prostokącie prostopadła spuszczone z wierzchołka na przekątną dzieli kąt prosty na dwie części w stosunku 3:1. Znaleźć kąt między tą prostopadłą i drugą przekątną.

27. W trójkąt prostokątny, w którym każda przyprostokątna równa się 6 cm, wpisano prostokąt mający z trójkątem wspólny kąt. Znaleźć obwód prostokąta.

28. W trójkąt równoramienny prostokątny wpisano prostokąt, tak że jego dwa wierzchołki leżą na przeciwprostokątnej a dwa inne na przyprostokątnej. Wyznaczyć boki prostokąta, jeśli wiadomo, że tworzą one stosunek 5:2, a przeciwprostokątna trójkąta równa się 45 cm.

29. Prostopadła spuszczone z wierzchołka prostokąta na jego przekątną dzieli ją w stosunku 1:3. Znaleźć długość przekątnej, jeśli wiadomo, że punkt jej przecięcia się z drugą przekątną jest oddalony od większego boku o 2 m.

30. Zbudować prostokąt mając dane:

1) podstawę równą 2,4 cm i przekątną 3,1 cm.

2) przekątną równą 4,2 cm i kąt między przekątnymi 135° .

3) podstawę 3,2 cm i kąt między przekątnymi 120° .

31. Na danej prostej AB znaleźć punkt oddalony o m ($=2$ cm) od drugiej prostej CD .

32. Znaleźć punkt równo oddalony od dwu danych punktów i będący w odległości a ($=6$ cm) od danej prostej.

33. Wewnątrz danego kąta znaleźć punkt oddległy od jego ramion o m ($=1$ cm) i n ($=2$ cm).

34. 1) Wewnątrz danego kąta zbudowano drugi kąt o ramionach równoległych do ramion danego, jednakowo skierowanych i jednakowo od nich oddalonych. Wykazać, że dwusieczne obu kątów nakrywają się.

2) Przepolować kąt, którego wierzchołek znajduje się poza rysunkiem.

35. Między ramionami danego kąta ostrego poprowadzić odcinek danej długości, tak aby był prostopadły do jednego z ramion kąta.

36. Znaleźć kąty rombu, w którym jedna z przekątnych równa się bokowi.

Romb.

Miejsce geometryczne punktów równo oddalonych od prostej.



37. Dowieść, że:

1) każdy równoległobok o przekątnych wzajemnie prostopadłych jest rombem;

2) każdy równoległobok, którego przekątna połowi kąt między bokami, jest rombem.

38. Znaleźć kąty rombu, którego bok tworzy z przekątnymi kąt o danej różnicy $\frac{3}{17}d$.

39. Kąty między bokiem rombu a przekątnymi mają się do siebie jak 5 : 4. Znaleźć kąty rombu.

40. Wysokość rombu poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego połowi przeciwległy bok. Znaleźć kąty rombu.

41. Obwód rombu wynosi 8 cm, wysokość 1 cm. Znaleźć kąt rozwarty rombu.

42. Zbudować romb mając dane:

1) bok 2,7 cm i przekątną 6,0 cm;

2) obie przekątne 4 cm i 3 cm;

3) wysokość 2,2 cm i przekątną 4,2 cm;

4) kąt 70° i przekątną 3,7 cm, przechodzącą przez jego wierzchołek;

5) przekątną 5 cm i kąt przeciwległy 120° .

43. Zbudować kwadrat mając przekątną 3,8 cm

44. Dany jest kwadrat $ABCD$, na każdym z jego boków odmierzone równe części $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. Punkty $A_1B_1C_1D_1$ połączono kolejno prostymi. Dowieść, że $A_1B_1C_1D_1$ jest również kwadratem.

45. W równoramienny trójkąt prostokątny, w którym każda przyprostokątna równa się 2 m, wpisano kwadrat mający z nim wspólny kąt. Znaleźć obwód tego wpisanego kwadratu.

46. W trójkącie prostokątnym przepołowiono kąt prosty i z punktu przecięcia dwusiecznej z przeciwprostokątną poprowadzono proste równoległe do przyprostokątnych. Dowieść, że czworobok utworzony przez te proste i przyprostokątne jest kwadratem.

47. W równoramienny trójkąt prostokątny wpisano kwadrat, tak że jego dwa wierzchołki znajdują się na przeciwprostokątnych, a dwa inne na przyprostokątnych. Wyznaczyć bok kwadratu wiedząc, że przeciwprostokątna równa się 3 m.

48. Dany jest kwadrat o boku 1 m, jego przekątna jest bokiem drugiego kwadratu. Znaleźć przekątną drugiego kwadratu.

49. Bok kwadratu o przekątnej 4 m jest przekątną drugiego kwadratu. Znaleźć bok drugiego kwadratu.

50. 1) Dowieść, że dwusieczne kątów prostokąta przecinając się tworzą kwadrat.

2) Boki prostokąta równają się 1 cm i 3 cm. Wyznaczyć przekątne czworokąta utworzonego przez dwusieczne kątów wewnętrznych.

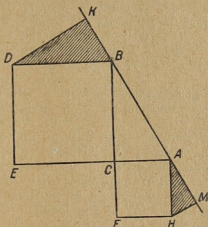
51. W kwadrat wpisano prostokąt tak, że na każdym boku kwadratu znajduje się jeden wierzchołek prostokąta, a boki prostokąta są równoległe do przekątnych kwadratu. Wyznaczyć boki tego pro-

Kwadrat.

stokata, wiedząc że jeden z nich jest dwukrotnie większy od drugiego, a przekątna kwadratu równa się 12 m .

52. Na przprostokątnych trójkąta prostokątnego ABC zbudowano dwa kwadraty (rys. 13). Z wierzchołków D i H tych kwadratów spuszczone prostopadłe DK i HM na przedłużenia przeciwprostokątnej. Wykazać, że:

1) dany trójkąt ABC można złożyć z dwu zacieniowanych trójkątów; 2) suma prostopadłych HM i DK równa się przeciwprostokątnej.



Rys. 13.

Linia średnia
trójkąta.

53. Na połowie
długości krokwi,
których końce

rozsunięto na 5 m , dopasowano bantę („rygiel“). Znaleźć jej długość.

54. W trójkącie o bokach 8 cm , 10 cm , 12 cm połączono środki boków odcinkami. Znaleźć boki powstałego w ten sposób trójkąta.

55. W trójkącie o obwodzie 12 cm połączono środki boków. Znaleźć obwód utworzonego trójkąta.

56. Boki trójkąta są do siebie w stosunku $3:4:6$. Połączywszy środki wszystkich boków otrzymamy trójkąt o obwodzie $5,2\text{ m}$. Wyznaczyć boki pierwszego trójkąta.

57. Po obu stronach danej prostej MN umieszczono dwa punkty A i B w odległościach 10 dcm i 4 dcm od niej. Znaleźć odległość środka O odcinka AB od danej prostej.

58. Wysokość trójkąta równobocznego równa się 6 dcm . Znaleźć rzut danej wysokości na drugą wysokość.

59. Przez wierzchołek kąta rozwartego trójkąta rozwartokątnego poprowadzono poza nim prostą, rzuty na tę prostą boków trójkąta przyległych do kąta rozwartego równają się 4 cm i 2 cm . Znaleźć rzuty wszystkich środkowych na tę prostą.

60. Wewnątrz dowolnego kąta rozwartego znajduje się punkt M . Poprowadzić przez punkt M prostą tak, aby jej odcinek zawarty między ramionami kąta był w punkcie M przepołowiony.

61. W trapezie $ABCD$ poprowadzono przez wierzchołek B prostą równoległą do ramienia CD aż do przecięcia się w punkcie E z większą podstawą AD . Obwód trójkąta $ABE = 1\text{ m}$, a długość $ED = 3\text{ dcm}$. Wyznaczyć obwód trapezu.

62. Ramię trapezu podzielono na sześć równych części. Z punktów podziału poprowadzono do drugiego ramienia odcinki równoległe do podstawy. Wyznaczyć długości tych odcinków, jeśli podstawy trapezu równają się 10 cm i 28 cm .

63. W trapezie $ABCD$ (AD —dłuższa podstawa) dane są: $AC \perp CD$, $AB = BC$, $\angle CAD = \frac{2}{7}d$. Wyznaczyć kąt w trapezie.

64. W trapezie $ABCD$ (AD — dłuższa podstawa) przekątna AC jest prostopadła do ramienia CD i dzieli kąt BAD na połowy; $\angle CDA = 60^\circ$; obwód trapezu równa się 2 m . Wyznaczyć AD .

65. AD oznacza dłuższą podstawę trapezu $ABCD$. Czy jego kąty A , B , C i D mogą pozostawać w stosunku $2:5:6:3$?

Linia środkowa
trapezu.

66. Podstawy trapezu mają się do siebie jak $7:3$, a różnica ich wynosi $3,2\text{ m}$. Znaleźć długość linii środkowej tego trapezu.

67. Podstawy trapezu wynoszą $2,4\text{ m}$ i 3 m . Wewnątrz tego trapezu poprowadzono między ramionami prostą równoległą do podstawy i równą $2,8\text{ m}$. Czy prosta ta jest równo oddalona od obu podstaw, a jeśli nie, to bliżej której podstawy leży?

68. W trapezie $ABCD$ z środka E ramienia AB poprowadzono prostą równoległą do podstaw do przecięcia się w punkcie F z ramieniem CD . Z wierzchołka B poprowadzono prostą równoległą do ramienia CD do przecięcia się w punkcie G z dłuższą podstawą AD . Wyznaczyć długość podstaw, jeśli $EF = 12\text{ cm}$ i $AG = 1\text{ cm}$.

69. W trapezie $ABCD$ poprowadzono prostą ze środka E ramienia AB równoległą do ramienia CD aż do spotkania się w punkcie G z dłuższą podstawą AD . Wyznaczyć podstawy trapezu, skoro $AG = 5\text{ dm}$, $GD = 2,5\text{ m}$.

70. Linia środkowa trapezu wynosi 8 dm , przekątna dzieli ją na dwa odcinki, których różnica wynosi 2 dm . Wyznaczyć podstawy trapezu.

71. Znaleźć stosunek boków równoległych trapezu, w którym linia środkowa jest podzielona przez dwie przekątne na trzy równe odcinki.

Trapez równo-
ramienny.

72. Dowieść, że kąty przy podstawach trapezu równoramiennego są równe.

73. W danym trapezie równoramiennym ramie równa się linii środkowej, a obwód równa się 24 m . Znaleźć ramie.

74. Różnica przeciwległych kątów trapezu równoramiennego równa się $\frac{8}{13}d$. Znaleźć te kąty.

75. Znaleźć kąty trapezu równoramiennego, którego krótsza podstawa równa się ramieniu a przekątna tworzy z ramieniem kąt prosty.

76. $ABCD$ jest równoramiennym trapezem, AD jego dłuższą podstawą. Różnica między obwodami trójkątów ACD i BAC wynosi 6 dm , a linia środkowa trapezu równa się 12 dm . Wyznaczyć podstawy.

77. W trapezie równoramiennym przekątna połowi kąt ostry. Obwód trapezu równa się $4,5\text{ m}$, a podstawa dłuższa $1,5\text{ m}$. Znaleźć podstawę krótszą.

78. W trapezie równoramiennym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego dzieli większą podstawę na odcinki 6 cm i 30 cm . Znaleźć podstawy tego trapezu.

79. $ABCD$ oznacza trapez równoramienny, AD — dłuższą podstawę, CE — wysokość spuszczoną na AD . Wiedząc, że DE równa się $1,25\text{ m}$ i że linia środkowa trapezu równa się $2,75\text{ m}$, wyznaczyć podstawę.

80. W trapezie równoramiennym większa podstawa równa się $2,7\text{ m}$, ramię równa się 1 m , a kąt między nimi 60° . Znaleźć mniejszą podstawę.

81. Wyznaczyć podstawy trapezu równoramiennego, w którym kąt ostry równa się 45° , wysokość stanowi h metrów, a linia środkowa m metrów.

82. Znaleźć linię środkową trapezu równoramiennego, którego wysokość równa się 10 cm , a przekątne są do siebie prostopadłe.

Trapez prostokątny.

83. Przekątna dzieli trapez prostokątny na dwa trójkąty; równoboczny o boku a i prostokątny. Znaleźć linię środkową tego trapezu.

84. W trapezie prostokątnym $ABCD$ kąt ostry $ADC = \frac{1}{2}d$, bok $AD = a$. Ze środka E boku CD poprowadzono do niego prostopadłą, która przecina przedłużenie boku BA w punkcie F . Znaleźć długość BF .

Konstrukcja trapezu.

85. Zbudować trapez mając dane:
1) dwa ramiona $1,5\text{ cm}$ i 2 cm , podstawy 5 cm i $2,3\text{ cm}$;
2) jedną z podstaw $4,8\text{ cm}$, wysokość $3,2\text{ cm}$ i dwie przekątne równe $4,2\text{ cm}$ i 5 cm ;

3) podstawę 4 cm , ramię $2,4\text{ cm}$, kąt między nimi 72° i drugie ramię 3 cm .

86. Zbudować trapez mając:

1) cztery boki (czy konstrukcja jest zawsze możliwa?);
2) obie podstawy i obie przekątne (kiedy konstrukcja jest możliwa?).

Zadania mieszane na równoległoki i trapezy.

87. Określić kształt czworokąta, którego wierzchołkami są środki boków danego: 1) dowolnego czworokąta, 2) równoległoboku, 3) prostokąta, 4) rombu, 5) kwadratu, 6) trapezu.

88. W czworokącie przekątne wynoszą 1 m i 8 dm i przecinają się pod kątem $56^\circ 25'$. Wyznaczyć boki i kąty czworokąta, który otrzymujemy łącząc środki boków danego czworokąta.

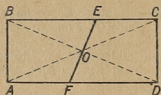
89. W trójkącie ABC dwusieczna kąta A przecina bok BC w punkcie D . Prosta poprowadzona z punktu D równolegle do CA przecina AB w punkcie E , prosta poprowadzona z punktu E równolegle do BC przecina AC w punkcie F . Wykazać, że $EA = FC$.

90. 1) Na podstawie trójkąta równoramiennego obrano punkt. Wykazać, że suma jego odległości od obu ramion równa się wysokości spuszczonej na ramię.

2) Na przedłużeniu podstawy trójkąta równoramiennego obrano punkt. Dowieść, że różnica odległości tego punktu od pozostałych boków równa jest wysokości opuszczonej na jeden z tych boków.

Symetria środkowa.

91. Podać najmniejszy kąt obrotu, przy którym nakrywa się sam ze sobą: 1) kwadrat, 2) romb, 3) prostokąt, 4) gwiazda radziecka.



Rys. 14.



Rys. 15.

92. Dowieść, że prosta przechodząca przez punkt przecięcia się przekątnych prostokąta (rys. 14) dzieli prostokąt na dwa czworokąty symetryczne względem środka.

93. Rozpatrując rysunek (rys. 15) dowieść, że punkty M i N , K i L są symetryczne względem środka, to znaczy znajdują się w jednakowej odległości od środka. Przy pomocy jakiej konstrukcji otrzymujemy w równoległoboku punkty symetryczne względem środka?

§ 6. OKRĄG.

Okrąg, jego położenie. Średnica, cięciwa i jej odległość od środka. Sieczna.

1. Na ramionach kąta $ABC = 120^\circ$ odmierzone odcinki $AB = BC = 4 \text{ cm}$. Przeprowadzić przez punkty A , B i C okrąg. Znaleźć długość jego promienia.

2. Znaleźć miejsce geometryczne środków okręgów o danym promieniu, przechodzących przez dany punkt.

3. Przez dane 2 punkty, poprowadzić okrąg, którego środek leży na danej prostej.

4. Zbudować okrąg przechodzący przez dwa dane punkty A i B , tak, że kąt między promieniem okręgu, poprowadzonym do punktu A i cięciwą AB wynosi 30° .

5. 1) Promień okręgu równa się 10 cm . Dany jest punkt odległy od środka o 15 cm . Znaleźć najmniejszą i największą odległość tego punktu od okręgu.

2) Promień okręgu równa się 10 cm . Dany jest punkt odległy od środka o 3 cm . Znaleźć najmniejszą i największą odległość jego punktu od okręgu.

6. Najmniejsza odległość danego punktu od okręgu równa się a , największa — b . Wyznaczyć promień (dwa przypadki).

7. Dowieść, że najkrótszą odległością między dwoma okręgami, z których jeden leży poza drugim, jest odcinek linii środków zawarty między tymi okręgami.

8. Z danego punktu na okręgu poprowadzono średnicę i cięciwę równą promieniowi. Znaleźć kąt zawarty między nimi.

9. Z danego punktu na okręgu poprowadzono dwie cięciwy, z których każda równa się promieniowi. Znaleźć kąt między nimi.

10. W kole poprowadzono dwie prostopadłe do siebie cięciwy, każda z nich dzieli drugą na dwa odcinki 3 cm i 7 cm . Znaleźć odległość każdej z cięciw od środka.

11. W kole w odległości 1 *cm*. od środka dane są dwie prostopadłe do siebie cięciwy, każda ma długość 6 *cm*. Znaleźć części na jakie jedna cięciwa dzieli drugą.

12. W kole o promieniu *R* poprowadzono 2 prostopadłe do siebie średnice i rzutowano na nie dowolny punkt okręgu. Znaleźć odległość między rzutami punktu.

13. Cięciwa przecina średnicę pod kątem 30° i dzieli ją na dwa odcinki 2 *cm* i 6 *cm*. Znaleźć odległość cięciwy od środka.

14. Z jednego punktu okręgu poprowadzono dwie prostopadłe do siebie cięciwy oddalone od środka o 6 *cm* i 10 *cm*. Wyznaczyć ich długości.

15. Końce średnicy są odległe od stycznej o 1,6 *m* i 0,6 *m*. Znaleźć długość średnicy.

16. W kole o środku *O* poprowadzono cięciwę *AB* i przedłużono ją na odległość *BC* równą promieniowi. Przez punkt *C* i środek *O* poprowadzono sieczną *CD* (*D* punkt przecięcia się z okręgiem, na zewnątrz odcinka *CO*). Wykazać, że kąt *AOD* równa się potrójnemu kątowi *ACD*.

17. 1) Dane jest koło o promieniu 2 *cm*. Poprowadzić w nim cięciwę długości 1,5 *cm*. Czy zadanie to jest oznaczone? Ile rozwiązań ma to zadanie? jeśli cięciwa danej długości ma przechodzić przez dany punkt okręgu?

2) Wykazać, że środki cięciw danej długości, poprowadzonych w danym okręgu, leżą na pewnym innym okręgu.

18. 1) Wykazać, że ze wszystkich cięciw przechodzących przez punkt *A* wewnątrz koła, najmniejsza jest ta, która jest prostopadła do średnicy przechodzącej przez punkt *A*.

2) Przez dany punkt w kole przeprowadzić cięciwę, która by ten punkt połowiła.

19. Na ramieniu danego kąta dany jest punkt. Z tego punktu jako ze środka opisać okrąg, odcinający na drugim ramieniu tego kąta dany odcinek.

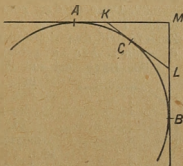
20. W danym kole poprowadzono dwie równe i równoległe cięciwy odległe od siebie o promień. Znaleźć kąt ostry między prostymi łączącymi końce cięciw.

21. 1) Z punktu zewnętrznego poprowadzono do okręgu dwie styczne prostopadłe do siebie. Pro-

Styczna. Scho-
dzenie się pro-
stych i okręgów.

mień okręgu $R = 1$ *dcm*. Znaleźć długość każdej ze stycznych.

2) Dany jest okrąg o promieniu $R = 1$ *dcm*. Z punktu zewnętrznego *M* poprowadzono do niego dwie prostopadłe do siebie styczne *MA* i *MB* (rys. 16). Między punktami styczności *A* i *B* wzięto na łuku *AB* dowolny punkt *C* i poprowadzono przez ten punkt trzecią styczną

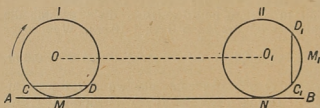


Rys. 16.

KL , tworzącą ze stycznymi MA i MB trójkąt KLM . Znaleźć obwód tego trójkąta.

22. Dany jest wycinek równy ćwierci koła o promieniu R . Znaleźć długość stycznej poprowadzonej przez środek jego łuku do przecięcia się z przedłużonymi krańcowymi promieniami wycinka.

23. W kąt prosty wpisano okrąg; cięciwa łącząca punkty styczności równa się 2 dcm . Znaleźć odległość tej cięciwy od środka koła.



Rys. 17.

24. AB i AC – styczne do jednego okręgu: $\angle BAC$ równa się 60° , linia łamana BAC ma długość 1 m . Znaleźć odległość między punktami styczności B i C .

25. Długość okręgu równa się $18,84\text{ cm}$. Koło toczy się po prostej AB (rys. 17). O ile przesunie się jego środek, skoro koło przejdzie z położenia I w położenie II? W położeniu I cięciwa $CD \parallel AB$, a w położeniu II cięciwa $C_1D_1 \perp AB$.

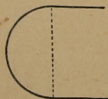
26. Długość okręgu równa się $18,84\text{ cm}$. Koło toczy się po prostej AB . O ile przesunie się jego środek O , skoro cięciwa z położenia początkowego $CD \parallel AB$ przejdzie w położenie $C_1D_1 \parallel AB$ (rys. 18)?

27. Promienie dwu kół równają się 2 cm i 4 cm , ich wspólne styczne wewnętrzne są do siebie prostopadłe. Znaleźć długość każdej z nich.

28. Dane są dwa koła, ich wspólne styczne wewnętrzne są do siebie prostopadłe, cięciwy łączące punkty styczności równają się 3 cm i 5 cm . Wyznaczyć odległość między środkami danych kół.

29. Dane są dwa koła o promieniach R i r , położone zewnątrz siebie. Poprowadzono do nich dwie wspólne styczne zewnętrzne. Znaleźć ich długości (między punktami styczności), jeśli ich przedłużenia tworzą kąt prosty ($R > r$).

30. Dany jest kąt 30° . Zbudować okrąg o promieniu $2,5\text{ cm}$, styczny do jednego ramienia tego kąta i mający środek na drugim ramieniu. Obliczyć odległość środka okręgu od wierzchołka kąta.



Rys. 19.

31. Narysować figurę wypukłą złożoną z dwu prostych równoległych schodzących się z półkołem. Taką figurę nazywają w architekturze „walczykiem”, gdy średnica półkola jest pionowa, a „łukiem” gdy jest pozioma (rys. 19).

32. Połączyć dwie proste nierównoległe łukiem,

który schodzi się z nimi. Rozważyć trzy wypadki: 1) jeśli nie znamy punktów połączenia (styczności) ani promienia łuku; 2) jeśli dano tylko promień łuku; 3) jeśli dany jest punkt połączenia a promień nie jest dany. (Przykładami takich połączeń prostych łukami są „zaokrąglenia” torów kolejowych).

33. Znaleźć miejsce geometryczne środków okręgów o danym promieniu, stycznych do danej prostej.

34. Danym promieniem narysować okrąg styczny do danej prostej w danym punkcie.

35. Narysować okrąg przechodzący przez dany punkt A i styczny do danej prostej w danym na niej punkcie B .

36. Narysować okrąg styczny do ramion danego kąta, przy tym do jednego z nich w danym punkcie.

37. Między dwiema prostymi równoległymi znajduje się punkt, poprowadzić okrąg przechodzący przez ten punkt i styczny do danych prostych.

38. Dane są dwie proste równoległe i sieczna. Poprowadzić okrąg styczny do wszystkich trzech prostych.

39. Danym promieniem opisać okrąg przechodzący przez dany punkt i styczny do danej prostej.

40. Dwie proste wychodzą z tego samego punktu M i są styczne do okręgu w punktach A i B . Prowadzimy promień OB przedłużając go za punkt B na odległość $BC = OB$. Dowieść, że $\angle AMC = 3\angle BMC$.

41. Jakie jest wzajemne położenie dwóch okręgów, jeśli:

1) odległość między ich środkami równa się: 10 cm, a promienie ich 8 cm i 2 cm?

2) odległość między ich środkami równa się 4 cm, a promienie ich 11 cm i 7 cm?

3) odległość między ich środkami równa się 12 cm, a promienie ich 5 cm i 3 cm?

42. Promienie dwóch okręgów mają się do siebie jak 5 : 3; jeśli okręgi te są wewnętrznie styczne, to odległość ich środków równa się 6 dcm. Określić wzajemne położenie tych kół, skoro odległość między środkami będzie: 1) 24 dcm, 2) 5 dcm, 3) 28 dcm, 4) 20 dcm.

43. Dane są dwa koła, jedno wewnątrz drugiego; przez ich środki poprowadzono w większym kole średnicę, którą okrąg mniejszego dzieli na trzy części: 5 cm, 8 cm i 1 cm. Znaleźć odległość środków tych kół.

44. Najkrótsza odległość między dwoma współśrodkowymi okręgami równa się 2 cm, a najdłuższa — 16 cm. Znaleźć promienie tych okręgów.

45. Dane są dwa koncentryczne okręgi. W większym okręgu dane są dwie cięciwy prostopadłe do siebie i styczne do mniejszego okręgu. Znaleźć promień mniejszego okręgu, skoro każda z cięciw dzieli drugą na odcinki 3 cm i 7 cm.

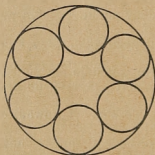
46. Promienie dwóch koncentrycznych okręgów mają się do siebie jak 7 : 4, a szerokość pierścienia równa się 12 cm. Znaleźć promień mniejszego okręgu.

Wzajemne położenie dwu okręgów.

47. Dowieść, że skoro dwa koncentryczne okręgi przetniemy sieczną, to odcinki siecznej leżące między okręgami są równe.

48. Jeden okrąg znajduje się wewnątrz drugiego; promienie ich równają się 28 cm i 12 cm , a najkrótsza odległość między nimi wynosi 10 cm . Wyznaczyć odległość między środkami.

49. 1) Trzy równe koła o promieniu R są zewnętrznie styczne jedno do drugiego. Wyznaczyć boki i kąty trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności.



Rys. 20.

2) W dane koło wpisać 3 równe koła parami styczne do siebie i do danego koła.

50. Dwa równe koła są styczne wewnętrznie do trzeciego i styczne do siebie. Łącząc 3 ich środki, otrzymujemy trójkąt o obwodzie 18 cm . Wyznaczyć promień większego koła.

51. W dane koło o promieniu 3 dm wpisano 6 jednakowych kół (rys. 20), z których każde jest styczne do danego i do dwóch sąsiednich. Znaleźć ich średnice. Wykonać rysunek.

52. Dookoła okręgu o promieniu 1 dm poprowadzono z zewnątrz 6 równych kół, z których każde jest styczne zewnętrznie do danego i do dwu sąsiednich. Znaleźć ich promienie. Wykonać rysunek.

Konstrukcja
okręgów
i łuków.

53. 1) Znaleźć miejsce geometryczne środków okręgów stycznych do danego okręgu w danym na nim punkcie.

2) Poprowadzić okrąg przechodzący przez dany punkt i styczny do danego okręgu w danym punkcie.

54. 1) Znaleźć miejsce geometryczne środków okręgów zakreślonych danym promieniem i stycznych do danego okręgu.

2) Danym promieniem poprowadzić okrąg styczny do danej prostej i danego okręgu.

55. Daną prostą i dany łuk połączyć łukiem o danym promieniu, z którym schodziłyby się; punktów połączenia (tj. punktów styczności) nie dano.

56. Połączyć dwa dane łuki łukiem o danym promieniu, tak by się schodziły; punktów styczności nie dano.

57. Zakreślić okrąg styczny do dwóch danych prostych równoległych i do koła leżącego między nimi.

58. Przez punkt przecięcia dwu okręgów poprowadzić sieczną, tak aby jej część zawarta wewnątrz kół, miała daną długość.

§ 7. Mierzenie kątów łukami.

Kąt środkowy.

1. 1) Większe koło przekładni zębatej ma 72 zęby. Ile stopni obwodu koła przypada na 1 ząb razem z wgłębieniem?

2) Mniejsze koło przekładni zębatej ma 24 zęby. Ile stopni ma łuk, który odpowiada jednemu zębowi koła razem z wgłębieniem?

3) Jaką część obrotu wykona większe koło o 72 zębach, skoro złączone z nim mniejsze koło o 24 zębach zrobi jeden pełny obrót.

2. Wyrazić w stopniach, minutach, sekundach następujące części okręgu: 1) $\frac{1}{72}$, 2) $\frac{1}{81}$, 3) 0,001, 4) $\frac{1}{14}$, 5) $\frac{5}{11}$.

3. Obliczyć, jaką część okręgu stanowią łuki: 1) 15° , 2) $22^\circ 30'$, 3) 108° , 4) $24'$, 5) $18''$, 6) $18^\circ 45'$, 7) $2^\circ 30''$, 8) $10' 40''$.

4. Wyznaczyć kąt między wskazówkami zegara, gdy zegar wskazuje: 1) godz. 5, 2) godz. 3 min. 25, 3) godz. 4 min. 50.

5. Cięciwa o długości 16 cm odcina łuk 90° . Znaleźć jej odległość od środka.

6. W kole o promieniu 1,4 m cięciwa odcina kąt 120° . Znaleźć jej odległość od środka.

7. Kąt między dwoma promieniami równa się $102^\circ 37''$. Znaleźć kąt między stycznymi poprowadzonymi przez koniec tych promieni.

8. Łuk AB ma $73^\circ 27'$, z jego końca B poprowadzono styczną do przecięcia w punkcie C z przedłużeniem promienia OA . Znaleźć $\angle ACB$.

9. Ile stopni i minut ma łuk, jeśli promień poprowadzony przez jego koniec tworzy z cięciwą kąt wpisany.

10. Łuk ma $117^\circ 23'$. Znaleźć kąt między cięciwą a przedłużeniem promienia, poprowadzonego do końca łuku.

11. ABC oznacza sieczną, BD cięciwę, $\sphericalangle BD$ ma 43° , $\sphericalangle BDC$ ma $213^\circ 41'$. Znaleźć $\angle ABD$.

12. Wyznaczyć kąt wpisany w łuk stanowiący $\frac{17}{32}$ okręgu.

13. Ile stopni i minut ma łuk mieszczący w sobie kąt $37^\circ 21'$.

14. Łuk ma $84^\circ 52'$. Pod jakim kątem widzimy jego cięciwę z punktów tego łuku?

15. Cięciwa dzieli okrąg w stosunku 5:11. Znaleźć wielkość kątów wpisanych, opartych na tej cięciwie.

16. AB i AC — dwie cięciwy, $\sphericalangle AB$ ma $110^\circ 23'$, $\sphericalangle AC$ ma 38° . Wyznaczyć $\angle BAC$. (Dwie odpowiedzi.)

17. Cięciwa AB dzieli okrąg na dwa łuki, z których mniejszy ma 130° , a większy jest podzielony cięciwą AC w stosunku 31:15 (poczynając od A). Znaleźć $\angle BAC$.

18. Cięciwy AB i AC leżą po różnych stronach środka i tworzą $\angle BAC$ równy $72^\circ 30'$; $\sphericalangle AB$: $\sphericalangle AC = 19:24$. Wyznaczyć te łuki.

19. Okrąg podzielono w stosunku 7:11:6 i punkty podziału połączono ze sobą. Wyznaczyć kąty utworzonego trójkąta.

20. Wyznaczyć, ile stopni ma łuk, jeśli prostopadła poprowadzona do cięciwy z jej końca, dzieli dopełniający (do okręgu) łuk w stosunku 5:2.

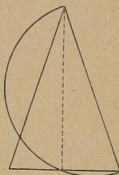
21. Posługując się okręgiem pomocniczym dowieść, że jeśli w trójkącie środkowa równa się połowie odpowiedniego boku, to kąt naprzeciw tego boku jest prosty.

22. Punkty A i B połączono dwoma łukami — $\sphericalangle ACB$ ma-

jącym $117^{\circ}23'$ i $\cup ADB$ mającym $42^{\circ}37'$, zwróconymi wypukłościami w różne strony; środki tych łuków C i D połączono z A . Znaleźć $\angle CAD$.

23. Dowieść, że każdy trapez wpisany w okrąg jest równoramienny.

24. W wycinek AMB wpisano trapez $ACDB$, w którym bok $AC = CD$ i $\angle CAB = 51^{\circ} 20'$. Ile stopni ma łuk AMB ?



Rys. 21.

25. AB — średnica; C, D i E — punkty na jednym półokręgu $ACDEB$. Na średnicy AB wzięto punkt F , tak że $\angle CFA = \angle DFB$ i punkt G tak, że $\angle DGA = \angle EGB$. Wyznaczyć $\angle FDG$, jeśli $\cup AC$ ma 60° i $\cup BE$ ma 20° .

26. Kąt przy wierzchołku trójkąta równoramiennego równa się 40° . Jedno ramię jest średnicą pół okręgu, który dzieli drugie ramię na trzy części (rys. 21). Znaleźć te części.

27. Podstawa trójkąta równoramiennego jest średnicą okręgu. Na jakie części dzieli okrąg boki trójkąta i na jakie części boki trójkąta dzieli półkole?

28. Wyznaczyć kilka punktów okręgu o danej średnicy, posługując się jedynie ekerką.

29. Zbudować trójkąt prostokątny mając daną przeciwprostokątną $c = 5$ cm i wysokość równą 2 cm, spuszczonej z wierzchołka kąta prostego na przeciwprostokątną.

30. Zbudować trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej 3,5 cm, w którym rzut jednej przyprostokątnej na przeciwprostokątną równa się 2,9 cm.

31. Znaleźć miejsce geometryczne środków wszystkich cięciw, przecinających się w jednym punkcie. Rozważyć trzy przypadki: 1) punkt leży na okręgu, 2) wewnątrz koła i 3) poza kołem.

32. Przez punkt styczności dwu okręgów poprowadzono sieczną. Dowieść, że promienie i styczne poprowadzone przez końce utworzonych cięciw są równoległe.

33. Na promieniach OA i OB ćwiartki koła AOB (jako na średnicach) zbudowano półokręgi ACO i OCB (rys. 22). Dowieść, że:

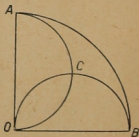
1) prosta OC połowi $\angle AOB$; 2) punkty A, C i B leżą na jednej prostej; 3) łuki AC, CO i CB są sobie równe.

34. Przez koniec cięciwy dzielącej okrąg w stosunku 3:5 poprowadzono styczną. Znaleźć kąt ostry między cięciwą a styczną.

35. AB i AC — równe cięciwy, MAN — styczna; łuk BC , na którym nie leży punkt A , ma $213^{\circ}42'$. Wyznaczyć kąt MAB i NAC .

36. C — punkt na przedłużeniu średnicy AB ; CD — styczna; $\angle ADC = 114^{\circ}25'$. Ile stopni i minut ma łuk BD ?

37. AB — średnica okręgu, BC — styczna. Okrąg połowi (w punkcie D) sieczną AC . Wyznaczyć $\angle DAB$.



Rys. 22.

38. M jest środkiem wysokości BD w trójkącie równoramiennym ABC , punkt M jest środkiem łuku zakreślonego promieniem MD między ramionami BA i BC . Wyznaczyć w stopniach miarę tego łuku, skoro $\angle BAC = 62^\circ 17'$.

Kąt o wierzchołku wewnątrz koła i poza kołem.
Kąt opisany.

39. Okrąg podzielono punktami A, B, C i D tak, że $\sphericalangle AB : \sphericalangle BC : \sphericalangle CD : \sphericalangle DA = 2 : 3 : 5 : 6$ i poprowadzono cięciwy AC i BD , przecinające się w punkcie M . Wyznaczyć $\angle AMB$.

40. Średnica AB i cięciwa CD przecinają się w punkcie M ; $\angle CMB = 73^\circ$; $\sphericalangle BC =$ równa się 110° .

Ile stopni ma $\sphericalangle BD$?

41. Cięciwy AB i CD przecinają się w punkcie M . $\angle AMC = 40^\circ$, $\sphericalangle AD$ jest większy od $\sphericalangle CB$ o $20^\circ 54'$. Wyznaczyć $\sphericalangle AD$.

42. Z końców $\sphericalangle AB$, mającego m° poprowadzono cięciwy AC i BD tak, że $\angle DMC$ utworzony przez ich przecięcie się jest równy $\angle DNC$ wpisanemu w $\sphericalangle CD$. Wyznaczyć ten łuk.

43. W czworokącie $ABCD$ kąty B i D są proste, przekątna AC tworzy z bokiem AB kąt 40° , a z bokiem AD kąt 30° . Wyznaczyć kąt ostry między przekątnymi AC i BD .

44. Okrąg podzielono punktami A, B, C i D tak, że $\sphericalangle AB : \sphericalangle BC : \sphericalangle CD : \sphericalangle DA = 3 : 2 : 13 : 7$. Cięciwy AD i BC przedłużono do przecięcia się w punkcie M . Wyznaczyć $\angle AMB$.

45. Dane jest koło z cięciwą i styczną, przy czym punkt styczności leży na mniejszym z dwu łuków odciętych cięciwą. Znaleźć na stycznej punkt, z którego widzimy cięciwę pod największym kątem.

46. Sieczna ABC odcina łuk BC , który ma 112° . Styczna AD dzieli ten łuk w punkcie D w stosunku $7 : 9$. Znaleźć $\angle BAD$.

Wskazówka (dla niektórych następnych zadań). Wyznaczając kąt opisany warto pamiętać, że kąt ten między dwiema stycznymi, wewnątrz którego leży koło, jest dopełnieniem do 180° kąta między promieniami, poprowadzonymi do punktów styczności.

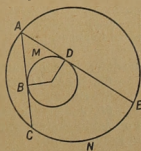
47. Z końców łuku mającego $200^\circ 30'$ poprowadzono styczne do wzajemnego przecięcia się. Znaleźć kąt między nimi.

48. Kąt opisany ma $73^\circ 25'$. Znaleźć łuki zawarte między jego ramionami.

49. Cięciwa dzieli okrąg w stosunku $11 : 16$. Wyznaczyć kąt między stycznymi, poprowadzonymi z końców tej cięciwy.

50. Wewnątrz danego okręgu (rys. 23) mieści się inny okrąg. ABC i ADE — cięciwy większego okręgu, styczne w punktach B i D do mniejszego okręgu. BMD — mniejszy z łuków między punktami styczności; CNE — łuk między końcami cięciw. Wyznaczyć łuk CNE , jeśli łuk BMD ma 130° .

51. Wewnątrz danego okręgu (rys. 24) znajduje się inny okrąg. CAE i DBF — dwie (nie przecinające się) cięciwy większego



Rys. 23.

68. ABC jest trójkątem równoramiennym. Promień OA koła opisanego tworzy z podstawą AC kąt OAC równy $20^{\circ}38'$. Wyznaczyć $\angle BAC$ (dwa przypadki).

69. Zbudować trójkąt równoramienny mając podstawę i promień koła wpisanego.

70. W trójkącie równoramiennym ramię zostało podzielone punktem styczności koła wpisanego na dwie części w stosunku 7:5 (licząc od wierzchołka). Znaleźć stosunek ramienia do podstawy.

71. W trójkącie prostokątnym równoramiennym promień koła wpisanego równa się r , zaś połowa obwodu p . Znaleźć przeciwprostokątną.

72. Na danym kole opisać trójkąt równoramienny prostokątny.

73. Na kole o promieniu 4 cm opisano trójkąt prostokątny o przeciwprostokątnej 26 cm. Znaleźć obwód trójkąta.

74. W dane koło wpisać trójkąt o danych dwu kątach.

75. Na danym kole opisać trójkąt o danych dwu kątach.

76. Mniejszy bok prostokąta równa się 1 m, kąt ostry między przekątnymi ma 60° . Znaleźć środek koła opisanego.

77. W prostokącie przekątna tworzy z boki kąt $12^{\circ}35'$. Na jakie cztery części wierzchołki tego prostokąta dzielą opisany na nim okrąg?

78. W dany romb wpisać koło.

79. Znaleźć promień koła wpisanego w romb o boku 8 cm i kącie ostrym 30° .

80. W romb wpisano okrąg. Na jakie cztery części dzielą ten okrąg punkty styczności, skoro jeden kąt ostry rombu równa się 37° ?

81. W trapezie równoramiennym kąt przy podstawie równa się 50° , zaś kąt między przekątnymi, zwrócony do ramienia — 40° . Gdzie leży środek koła opisanego: czy wewnątrz trapezu, czy poza nim?

82. Na kole opisano trapez o obwodzie 12 cm. Wyznaczyć linię środkową tego trapezu.

83. Na kole opisano trapez równoramienny o kącie 30° i linii środkowej 1 m. Wyznaczyć promień koła.

84. W czworokącie wpisanym $ABCD$ przekątna AC jest prostopadła do przekątnej BD i połowi ją. Znaleźć kąty tego czworokąta, skoro $\angle BAD = 70^{\circ}23'42''$.

85. Czy można opisać koło na czworokącie, którego kolejne kąty mają się do siebie jak: 1) 2:4:5:3; 2) 5:7:8:9?

86. Kąt środkowy wycinka o promieniu R równa się 60° . Znaleźć promień koła wpisanego w ten wycinek.

87. W czworokącie $ABCD$ dane są: $\angle ABC = 116^{\circ}$, $\angle ADC = 64^{\circ}$, $\angle CAB = 35^{\circ}$, $\angle CAD = 52^{\circ}$. Wyznaczyć kąt między przekątnymi oparty na boku AB .

88. 1) Trzy boki czworokąta opisanego (w kolejnym porządku) mają się do siebie jak 1:2:3. Wyznaczyć boki, skoro wiadomo, że obwód równa się 24 m.

2) Trzy kąty czworokąta wpisanego (w kolejnym porządku) mają się do siebie jak 1:2:3. Wyznaczyć kąty czworokąta.

Czworokąty
wpisane i opi-
sane.

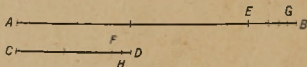
§ 8. Odcinki proporcjonalne. Własność dwusiecznej trójkąta.

Odcinki
proporcjonalne.

1. Droga kolejnego odkładania znaleźć stosunek odcinka AB do odcinka CD . (rys. 25).

2. Znaleźć (z dokładnością do 0,01) stosunek wysokości trójkąta równobocznego do jego boku.

3. 1) Punkt M dzieli odcinek AB w stosunku $AM:MB=1:2$. Znaleźć stosunki $AM:AB$ i $MB:AB$.



Rys. 25.

2) Punkt K dzieli odcinek AB w stosunku $m:n$. Znaleźć stosunki $AK:AB$ i $KB:AB$.

4. Na odcinku AB o długości 6 cm znajduje się punkt C w odległości 3,6 cm od punktu A ; wyszukać taki punkt D na przedłużeniu odcinka AB poza punktem B , aby odległość jego od A była w takim stosunku do odległości od B jak $AC:CB$.

5. Dwie równoległe ulice przecięto dwiema ulicami wychodzącymi z jednego punktu A . Części ulic równoległych, mieszczące się między „ulicami promienistymi“ wynoszą 0,75 km i 1,25 km. Tramwaj od punktu A idzie po jednej z promienistych ulic do pierwszej z ulic równoległych 15 minut. Ile czasu będzie on jechał — z tą samą prędkością — po tej samej ulicy promienistej od pierwszej do drugiej ulicy równoległej?

6. Ramiona kąta A przecięto dwiema równoległymi prostymi BC i DE (B i D oznaczają punkty na jednym ramieniu kąta). Należy:

1) wyznaczyć AE , jeśli $AB=8$ m, $AD=12$ m i $AC=10$ m;

2) wyznaczyć AB , jeśli $AB+AD=21$ m i $AC=12$ m, $AE=16$ m;

3) wyznaczyć AD , jeśli $AC:AE=\frac{3}{11}:0,6$ i $BD=12$ dcm.

7. Ramiona AB i CD trapezu $ABCD$ przedłużono do wzajemnego przecięcia się w punkcie M . Należy:

1) wyznaczyć odcinek CM , jeśli $AB=1$ m, $CD=15$ dcm i $BM=8$ dcm;

2) wyznaczyć odcinek BM , jeśli $AB=1,2$ m i $CD:CM=\frac{1}{6}:0,25$;

3) wyznaczyć CD , jeśli $AB:BM=17:9$ i $CD-CM=1,6$ m.

8. BA i BD — oznaczają odcinki na jednym ramieniu kąta B , BC i BE — odcinki na drugim ramieniu tego kąta. Zbadać czy AC i DE są prostymi równoległymi, jeśli:

1) $BA:AD=3:4$, $BC=1,2$ m i $BE=2,8$ m;

2) $BD:AD=11:8,5$ i $BC=\frac{5}{17}$ CE;

3) $BA=\frac{7}{13}$ BD, $BC=2,8$ m i $CE=2$ m.

9. 1) Bok trójkąta podzielono na pięć równych części i z punktów podziału poprowadzono proste równoległe do drugiego boku, który ma długość 20 cm. Wyznaczyć odcinki prostych równoległych, zawarte między bokiem pierwszym i trzecim.

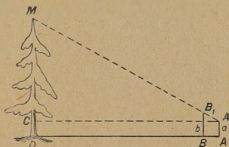
2) W trapezie podzielono ramię na osiem równych części i z punktów podziału poprowadzono proste równoległe do podstawy, do przecięcia z drugim ramieniem. Podstawy trapezu wynoszą 50 cm i 30 cm. Wyznaczyć długości odcinków prostych równoległych między ramionami.

10. Podstawy trapezu wynoszą 1,8 m i 1,2 m, ramiona jego o długościach 1,5 m i 1,2 m przedłużono do wzajemnego przecięcia się. Wyznaczyć, o ile przedłużono ramiona.

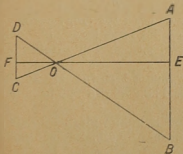
11. Aby zmierzyć wysokość drzewa (rys. 26), wytycza¹⁾ się w pewnej odległości od pnia prostą i na niej — w pewnych jej punktach — wbija się dwa paliki (żerdzie), tak aby ich końce A_1 i B_1 i wierzchołek drzewa M leżały na jednej prostej. Znaleźć wysokość drzewa znając odległość $AD=m$, $AB=n$ i wysokość palików a i b ($m=22,5$ m, $n=1,25$ m, $a=1,75$ m, $b=2,55$ m).

12. Na rys. 27 $AB \parallel CD$, $FE \perp AB$, $OA=4,8$ cm, $OE=4,5$ cm, $OB=5,4$ cm, $OF=1,5$ cm, $AB=4,8$ cm. Znaleźć OD , OC i DC .

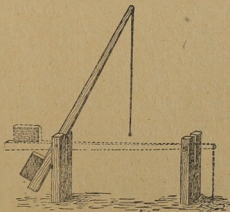
13. Krótsze ramię szlabanu (rys. 28) ma długość 0,75 m, zaś dłuższe 3,75 m. Jak wysoko pod-



Rys. 26.



Rys. 27.



Rys. 28.

nosi się koniec dłuższego ramienia, jeśli koniec krótszego opuszcza się na 0,5 m? Zrobić rysunek.

¹⁾ tj. wyznacza kierunek wiechami — żerdziami.

14. W trójkącie rzuty dwóch boków na podstawę są równe 15 m i 27 m, a jeden z tych boków równa się 45 m. Na jakie części (licząc od wierzchołka) zostaje podzielony ten bok przez prostopadłą do podstawy poprowadzoną z jej środka? (Dwa przypadki).

15. Przez punkt P , położony wewnątrz lub poza kątem MAN , poprowadzić prostą, tak aby jej odcinki położone między tym punktem i ramionami kąta były w stosunku $m:n$. Rozważyć osobno przypadek $m=n$.

16. 1) Znaleźć miejsce geometryczne punktów, których odległości od ramion danego kąta pozostają do siebie w stałym stosunku $m:n$.

2) Znaleźć w trójkącie punkt, z którego prostopadłe spuszczone na boki, mają się do siebie jak $m:n:p$.

17. BD oznacza dwusieczną kąta B w trójkącie ABC .

Wyznaczyć:

1) odcinki AD i DC , jeśli $AB=10$ m, $BC=15$ m i $AC=20$ m;

2) bok BC , jeśli $AD:DC=8:5$ i $AB=16$ m;

3) bok AC , jeśli $AB:BC=2:7$ i $DC-AD=1$ m.

18. Kąt trójkąta utworzony przez boki o długościach 9 cm i 6 cm został przepołowiony. Jeden z odcinków boku trzeciego równa się jednemu z danych boków. Wyznaczyć trzeci bok.

19. D oznacza punkt na boku BC trójkąta ABC . Zbadać, czy prosta AD połowi kąt A , jeśli:

1) $AB=12$ cm, $AC=15$ cm, $BD=8$ cm i $DC=10$ cm;

2) $AB=12$ m, $AC=56$ m, $BD:DC=14:3$;

3) $AB=\frac{5}{11}AC$, $BD=2$ m i $DC=4,5$ m;

4) $AB=6$ m, $AC=28$ m, $BD=\frac{3}{17}BC$.

20. W trójkąt ABC wpisano romb $ADEF$, tak że wierzchołki D , E i F leżą odpowiednio na bokach AB , BC i AC . Wyznaczyć odcinki BE i EC , jeśli $AB=14$ cm, $BC=12$ cm, $AC=10$ cm.

21. Boki trójkąta równają się 51 cm, 85 cm i 104 cm. Poprowadzono okrąg styczny do dwóch mniejszych boków, a którego środek leży na największym boku. Na jakie części środek ten dzieli największy bok?

22. W trójkącie równoramiennym wysokość równa się 20 cm a stosunek podstawy do ramienia jest jak 4:3. Wyznaczyć promień koła wpisanego.

23. W trójkącie równoramiennym środek koła wpisanego dzieli wysokość w stosunku 12:5. Ramię równa się 60 cm. Znaleźć podstawę.

24. W trójkącie równoramiennym promień koła wpisanego stanowi $\frac{2}{7}$ wysokości, a obwód całego trójkąta równa się 56 cm. Znaleźć jego boki.

25. Cięciwa AB równa się 15 m, cięciwa AC równa się 21 m i cięciwa $BC=24$ m. Punkt D jest środkiem łuku CB . Na jakie części BE i EC prosta AED dzieli cięciwę BC ?

Własność dwusiecznej w trójkącie.

26. W trójkącie ABC o bokach a, b i c , BD — dwusieczna kąta B ; O — punkt przecięcia się BD z dwusieczną kąta C . Znaleźć stosunek $OD:OB$.

27. W trójkącie ABC bok $AB=15$ cm i $AC=10$ cm, AD — dwusieczna kąta A ; z punktu D poprowadzono prostą równoległą do AB do przecięcia się z AC w punkcie E . Wyznaczyć AE, EC, DE .

28. W trójkącie równoramiennym ABC bok $AC=b$, bok $BA=BC=a$; AN i CM są dwusiecznymi kątów A i C . Znaleźć długość MN .

§ 9. Podobieństwo trójkątów i wielokątów.

Trójkąty podobne.

1. Boki trójkąta mają się do siebie jak 4:5:6; mniejszy bok trójkąta podobnego do niego równa się 0,8 m. Wyznaczyć pozostałe boki drugiego trójkąta.

2. Boki trójkąta mają się do siebie jak 2:5:4. Obwód podobnego do niego trójkąta równa się 55 m; znaleźć boki drugiego trójkąta.

3. Długość cienia komina fabrycznego równa się 35,8 m; pionowo wbity w ziemię palik długości 1,9 m daje równocześnie cień 1,62 m. Znaleźć wysokość komina fabrycznego.

4. W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ kąt $A=A_1$, kąt $B=B_1$. Rozwiązać dla tych trójkątów następujące zadania:

1) dane: $a=10$, $b=14$, $a_1=25$, $c_1=20$, znaleźć c i b_1 ;

2) dane: $a=35$, $a_1=21$, $c-c_1=8$. Znaleźć c .

5. W trójkątach ABC i DEF $\angle A=\angle E$ i $\angle B=\angle D$, bok $AB=16$ cm, $BC=20$ cm, $DE=12$ cm, $AC-EF=6$ cm. Znaleźć AC, EF i DF .

6. Dwa równoramienne trójkąty mają kąty przy wierzchołku równe, ramię i podstawa jednego z nich mają 17 cm i 10 cm długości; podstawa drugiego trójkąta równa się 8 cm. Znaleźć jego ramię.

7. W trójkątach ABC i $A_1B_1C_1$ $\angle B=B_1$ i ramiona $\angle B$ pierwszego trójkąta są 2,5 razy większe od ramion kąta B_1 drugiego trójkąta. Znaleźć AC i A_1C_1 wiedząc, że ich suma równa się 4,2 m.

8. W trójkątach ABC i DEF mamy: $\angle B=\angle D$, $AB=\frac{4}{3}DE$ i $DF=0,75BC$. Znaleźć AC i EF , jeśli ich różnica wynosi 5 cm.

9. Zbadać, czy podobne są trójkąty o bokach:

1) 1 m, 1,5 m i 2 m; 10 cm, 15 cm i 20 cm;

2) 1 m, 2 m i 15 dcm; 12 dcm, 8 dcm i 16 dcm;

3) 1 m, 2 m i 1,25 m; 10 cm, 9 cm i 16 cm.

10. 1) W trójkącie ABC bok $AB=15$ m i $AC=20$ m; na boku AB odłożono odcinek $AD=10$ m, na boku AC odcinek $AE=12$ m. Czy trójkąty ABC i ADE są podobne?

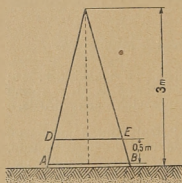
2) W poprzednim zadaniu zachować długości boku AB i AC i przyjąć że $AD=9$ m i $AE=12$ m. Czy będą wówczas podobne trójkąty ABC i ADE ?

11. AB —średnica pewnego okręgu, AC —cięciwa. Na odcinku DE jako na średnicy opisano okrąg, przy czym $DE=\frac{13}{17}AB$

i poprowadzono w nim cięciwę $DF = \frac{13}{17} AC$. Wyznaczyć EF , jeśli wiadomo, że $BC = 3,4 \text{ m}$.

12. 1) Boki pewnego trójkąta równają się $0,8 \text{ m}$, $1,6 \text{ m}$ i 2 m : obwód trójkąta podobnego do niego wynosi $5,5 \text{ m}$. Wyznaczyć boki drugiego trójkąta.

2) Obwód pewnego trójkąta stanowi $\frac{11}{13}$ obwodu trójkąta podo-



Rys. 29.

bnego do niego. Różnica odpowiednich boków równa się 1 m . Obliczyć te boki.

13. Aby lepiej rozdzielić parcie ciężaru mostu na grunt, przybija się przy budowie mostów wojskowych na kozłowych stojakach deskę AB do spodu nóg A i B kozłów i każdą parę nóg łączy się wiązaniem DE . Znaleźć długość wiązania DE , jeśli wysokość kozła h równa się 3 m , długość deski $AB = 1,5 \text{ m}$, a wiązanie umocowano w odległości $0,5 \text{ m}$ od deski AB .

14. Wewnątrz trójkąta ABC dany jest odcinek DE (D leży na AB , E na BC) równoległy do AC . Wyznaczyć długość DE jeśli:

1) $AC = 20 \text{ cm}$, $AB = 17 \text{ cm}$ i $BD = 11,9 \text{ cm}$;

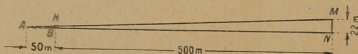
2) $AC = 18 \text{ cm}$, $AB = 15 \text{ cm}$ i $AD = 1 \text{ m}$.

15. Dany jest trójkąt ABC i w jego wnętrzu odcinek DE (D leży na AB , E na BC) równoległy do AC . Należy:

1) wyznaczyć AD , jeśli $AB = 16 \text{ cm}$, $AC = 2 \text{ cm}$ i $DE = 15 \text{ cm}$;

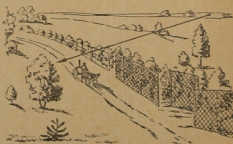
2) wyznaczyć stosunek $AD : BD$, jeśli $AC : DE = \frac{5}{7} : \frac{4}{11}$.

16. Odkryty odcinek drogi mieści się w pasie AB o szerokości 50 m (rys. 30). Punkt obserwacji przeciwnika mieści się na pod-



wyższeniu, które ma wysokość $MN = 22 \text{ m}$. Jak wysoką pionową zasłonę KB należy zrobić w odległości 500 m od punktu obserwacyjnego, aby zasłonić drogę przed nieprzyjacielskim obserwatorem.

17. W trójkącie ABC o danych bokach a , b i c poprowadzić prostą MN równoległą do AC tak aby $AM = BN$. Wyznaczyć MN .



Rys. 30.

18. W trójkącie ABC poprowadzono prostą BD , tak że $\angle BDC = \angle ABC$; prosta ta odcina na ramieniu AC odcinki: $AD = 7 \text{ cm}$ i $DC = 9 \text{ cm}$. Wyznaczyć bok BC i stosunek $BD : BA$.

19. W trójkącie ABC poprowadzono prostą BD , tak że $\angle ABD = \angle BCA$. Wyznaczyć odcinki AD i DC , jeśli $AB = 2 \text{ m}$ i $AC = 4 \text{ m}$.

20. Zbudować trójkąt podobny do danego, który ma obwód danej długości.

21. Zbudować trójkąt mając dany kąt, jeden z dwóch boków do niego przyległych i stosunek tego boku do trzeciego boku.

22. Zbudować trójkąt mając wysokość, kąt przy wierzchołku i stosunek odcinków podstawy.

Odcinki proporcjonalne w trapezie i równoległoboku.

23. Dany jest trapez $ABCD$, przy czym $BC \parallel AD$; O — punkt przecięcia się przekątnych; $AO = 8 \text{ cm}$, $OC = 1 \text{ cm}$ i $BD = 27 \text{ cm}$. Znaleźć OB i OD .

24. Dany jest trapez $ABCD$, przy czym $BC \parallel AD$ są równoległe, O — punkt przecięcia się przekątnych; $BO : OD = 0,3 : \frac{2}{3}$; linia środkowa trapezu równa się 29 cm . Znaleźć podstawy i stosunek $AO : OC$.

25. W trapezie $ABCD$, (w którym $BC \parallel AD$) o przekątnej BD , kąty ABD i BCD są równe. Dane: $BC = 10 \text{ cm}$, $DC = 15 \text{ cm}$ i $BD = 20 \text{ cm}$. Znaleźć AB i AD .

26. W trapezie $ABCD$ o przekątnej AC , kąty ABC i ACD są równe. Wyznaczyć przekątną AC , jeśli podstawy BC i AD równają się odpowiednio 12 cm i 27 cm .

27. Podstawy trapezu mają się do siebie jak $5 : 9$, a jedno ramie równa się 16 cm . O ile trzeba je przedłużyć, aby się przecięło z przedłużeniem drugiego ramienia?

28. W równoległoboku $ABCD$ ramie $AB = 420 \text{ m}$. Na ramieniu BC obrano punkt E tak, że BE tak się ma do EC jak $5 : 7$ i poprowadzono prostą DE , która przecina przedłużenie AB w punkcie F . Wyznaczyć BF .

29. $ABCD$ — dany równoległobok, F — punkt na przedłużeniu boku AB ; E — punktem przecięcia DF z AC . Wyznaczyć BF jeśli $AE : EC = m : n$ i $AB = a$.

30. $ABCD$ — dany równoległobok. Przez punkt przecięcia się jego przekątnych poprowadzono prostą do BC , która przecina BC w punkcie E , a przedłużenie AB w punkcie F . Wyznaczyć BE , skoro $AB = a$, $BC = b$, $BF = c$.

31. W trójkąt wpisano równoległobok, którego kąt pokrywa się z kątem trójkąta. Boki trójkąta tworzące ten kąt równają się 20 cm i 25 cm , a równoległe do nich boki równoległoboku mają się do siebie jak $6 : 5$. Znaleźć boki równoległoboku.

32. W trójkąt ABC wpisano romb $ADEF$, tak że kąt A jest wspólny, a wierzchołek E leży na boku BC . Wyznaczyć boki rombu, skoro $AB = c$ i $AC = b$.

33. Prosta, poprowadzona przez wierzchołek rombu poza nim,

odcina na przedłużeniach obu boków odcinki p i q . Wyznaczyć bok rombu.

34. W dany odcinek koła wpisać kwadrat, tak aby jeden jego bok leżał na cięciwie, a końce boku przeciwległego na łuku.

35. W dany trójkąt wpisać kwadrat, tak aby jeden jego bok leżał na większym boku trójkąta a wierzchołki przeciwległych kątów — na dwu pozostałych bokach trójkąta.

36. W trójkąt o podstawie a i wysokości h wpisano kwadrat, tak że dwa jego wierzchołki leżą na podstawie trójkąta, a dwa inne na pozostałych bokach. Obliczyć bok kwadratu.

37. W dany trójkąt wpisać prostokąt, którego boki mają się do siebie jak $m:n$.

38. W trójkąt o podstawie 48 cm i wysokości 16 cm wpisano prostokąt, w którym stosunek boków wynosi $5:9$, a bok większy leży na podstawie trójkąta. Wyznaczyć boki prostokąta.

39. W trójkąt o podstawie 30 cm i wysokości 10 cm wpisano trójkąt prostokątny równoramienny, tak że jego przeciwprostokątna jest równoległa do podstawy danego trójkąta a wierzchołek kąta prostego leży na tej podstawie. Wyznaczyć przeciwprostokątną.

40. W trójkąt wpisano półkole styczne do podstawy, przy czym średnica jego — której końce leżą na pozostałych bokach trójkąta — jest równoległa do podstawy. Wyznaczyć promień, jeśli podstawa trójkąta równa się a , a wysokość h .

41. W trójkącie ABC kąt C jest prosty, $AC=6\text{ cm}$, $BC=12\text{ cm}$. Na ramieniu BC obrano punkt D , tak że kąt $ADC=90^\circ-B$. Na jakie części punkt D dzieli bok BC ?

42. W trójkącie ABC dane są dwa boki $BC=16\text{ m}$ i $AC=12\text{ m}$. Suma odpowiednich wysokości $AD+BE=14\text{ m}$. Wyznaczyć AD i BE .

43. Boki równoległoboku równają się 2 m i 16 dm . Odległość między bokami większymi wynosi 8 dm . Wyznaczyć odległość między mniejszymi bokami.

44. Obwód równoległoboku $= 48\text{ cm}$. Jego wysokości mają się do siebie jak $5:7$. Wyznaczyć boki, które im odpowiadają.

45. Znaleźć długość cięciwy, jeśli dany jest promień r i odległość a od końca cięciwy do stycznej, poprowadzonej przez drugi koniec tej cięciwy.

46. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie. Na prostej przechodzącej przez punkt styczności okręgi odcinają dwie cięciwy, z których jedna równa się $\frac{13}{5}$ drugiej. Wyznaczyć promienie, jeśli odległość między środkami kół wynosi 36 cm .

47. Dany jest trójkąt ABC , CD jest dwusieczną kąta C . Punkt E leży na BC , przy czym $DE \parallel AC$. Wyznaczyć DE , jeśli $BC=a$, $AC=b$.

48. Dany jest trójkąt ABC , BD — wysokość, AE — dwusieczna kąta A , EF — prostopadła do AC . Wyznaczyć EF , jeśli $BD=30\text{ cm}$ i $AB:AC=7:8$.

49. W równoległobok wpisano romb tak, że jego boki są równoległe do przekątnych równoległoboku. Wyznaczyć bok rombu, jeśli przekątne równoległoboku równają się l i m .

50. Cztery równoległe, których odpowiednie odległości od siebie są w takim stosunku jak 2:3:4, przecięto dwiema zbieżnymi prostymi. Z powstałych czterech odcinków równoległych dwa zewnętrzne mają długości 60 *dc*m i 96 *dc*m. Wyznaczyć odcinki środkowe.

51. W trójkącie *ABC* poprowadzono od *BA* do *BC* odcinek *DE* równoległy do *AC*. Dane $AB=24\text{ m}$, $BC=32\text{ m}$, $AC=28\text{ m}$ i $AD+CE=16\text{ m}$. Znaleźć *DE*.

52. *AD* i *BE* — wysokości trójkąta *ABC*, które przecinają się w punkcie *O*. Dane: $AD+BE=35\text{ dcm}$, $AO=9\text{ dcm}$ i $BO=12\text{ dcm}$. Wyznaczyć *OE* i *OD*.

53. W trójkąt równoramienny o ramieniu 100 *dc*m i podstawie 60 *dc*m wpisano koło. Znaleźć odległość między punktami styczności leżącymi na ramionach trójkąta.

54. Wyznaczyć promień koła wpisanego w wycinek, którego promień równa się *r*, a cięciwa jego łuku równa się *a*.

55. Boki pięciokąta równają się 35 *cm*, 14 *cm*, 28 *cm*, 21 *cm*, 42 *cm*. Najmniejszy bok pięciokąta podobnego równa się 12 *cm*. Wyznaczyć pozostałe boki tego pięciokąta.

Wielokąty podobne.

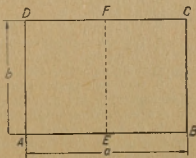
56. Boki pewnego czworokąta mają się do siebie jak $1:\frac{1}{2}:\frac{2}{3}:2$. Obwód czworokąta podobnego równa się 75 *m*. Znaleźć boki drugiego czworokąta.

57. Boki pewnego czworokąta równają się 10 *dc*m, 15 *dc*m, 20 *dc*m i 25 *dc*m. W czworokącie podobnym do niego suma boku największego i najmniejszego wynosi 28 *dc*m. Wyznaczyć boki drugiego czworokąta.

58. Najdłuższe boki dwóch wielokątów podobnych równają się 35 *m* i 14 *m*, a różnica ich obwodu wynosi 60 *m*. Znaleźć obwody.

59. Fabryka wykonująca cementowe płytki do podłogi uchwaliła u siebie znormalizowany kształt (standard) prostokątnych płytek taki, że połowa płytki *BCFE* jest podobną do całej płytki *ABCD*. Znaleźć stosunek dwóch boków takich płytek (rys. 31).

60. W równoległoboku *ABCD* bok $AB=a$ i $BC=b$, prosta *EF* odcina równoległobok *ABEF* podobny do *ABCD*. Wyznaczyć odcinek *BE*.



Rys. 31.

§ 10. Związki liczbowe między elementami liniowymi trójkątów i niektórych czworokątów.

W trójkącie prostokątnym: *a* i *b* oznaczają przyprostokątne; *c* — przeciwprostokątną; *a_c* i *b_c* są rzutami przyprostokątnych *a* i *b* na przeciwprostokątną; *h* oznacza wysokość poprowadzoną z wierzchołka kąta prostego. Zakładamy, że odcinki mierzone tą samą jednostką.

Odcinki proporcjonalne w trójkącie prostokątnym.

1. Obliczyć przeciwprostokątną, mając dane obie przyprostokątne:

- 1) 12 *cm* i 35 *cm*; 2) 56 *cm* i 33 *cm*;

- 3) 4 m i 9 dm; 4) 60 cm i 91 cm;
 5) 21 i $3\frac{1}{4}$; 6) $\frac{3}{2}$ i $\frac{7}{16}$; 7) 16,8 i 2,6; 8) 5 i 6.

2. Obliczyć drugą przyprostokątną, znając przeciwprostokątną i pierwszą przyprostokątną¹.

- 1) 289 i 240; 2) 269 i 69; 3) 145 i 143;
 4) 42,5 i 6,5; 5) 17 i $15\frac{2}{5}$; 6) 10 i 7;

3. Mając dane dwa elementy trójkąta prostokątnego obliczyć pozostałe cztery elementy:

- 1) $a=15$, $b=20$; 2) $a=24$, $b=7$;
 3) $a=4$, $b=5$; 4) $a=100$, $c=125$;
 5) $b=65$, $c=169$; 6) $a=600$, $c=625$;
 7) $a=6$, $a_c=3,6$; 8) $b=7$, $b_c=1,96$;
 9) $c=29$, $a_c=15\frac{6}{29}$; 10) $c=3$, $b_c=2$;
 11) $a_c=1\frac{1}{2}$, $b_c=2\frac{2}{3}$; 12) $a_c=2$, $b_c=18$;
 13) $a=136$, $h=120$; 14) $b=9$, $h=8\frac{32}{41}$.

4. Znając sumę dwóch odcinków i ich średnią proporcjonalną zbudować te odcinki.

5. Znając różnicę dwu odcinków i ich średnią proporcjonalną zbudować te odcinki.

6. Wykazać, że w trójkącie prostokątnym $ab=ch$.

7. Stosunek przyprostokątnych równa się 5:6. Przeciwpprostokątna równa się 122 cm. Znaleźć odcinki, na które podzieliła przeciwpprostokątną wysokość.

8. Stosunek przyprostokątnych równa się 3:2, wysokość dzieli przeciwpprostokątną na odcinki, z których jeden jest o 2 m dłuższy od drugiego. Wyznaczyć przeciwpprostokątną.

9. Przyprostokątne mają się do siebie jak 3:7. Wysokość spuszczone na przeciwpprostokątną równa się 42 cm. Znaleźć odcinki przeciwpprostokątnej.

10. Wykazać, że średnica koła wpisanego w równoramienny trapez jest średnią proporcjonalną między równoległymi bokami trapezu.

11. Wykazać, że stosunek kwadratów przyprostokątnych równa się stosunkowi ich rzutów na przeciwpprostokątną.

12. 1) Zbudować dwa odcinki, których kwadraty tworzą stosunek $m:n$.

2) Zbudować dwa odcinki, których stosunek byłby równy stosunkowi kwadratów danych odcinków.

Twierdzenie
Pitagorasa.

13. Zbadać, jakimi trzema kolejnymi liczbami całkowitymi można wyrazić boki trójkąta prostokątnego.

14. Między dwoma budynkami fabrycznymi sporządzono pochyłą rynnę dla przesyłania materiałów. Odległość

¹ W zadaniu tym i wielu innych wypadkach jest rzeczą korzystną różnicę kwadratów zastępować iloczynem sumy i różnicy.

między budynkami wynosi 10 m , a końce rynny znajdują się na wysokościach 8 m i 4 m nad ziemią. Wyznaczyć długość rynny.

15. 1) Punkt wewnątrz kąta prostego jest oddalony od jego ramion o odcinki a i b . Znaleźć odległość tego punktu od wierzchołka.

2) Boki prostokąta równają się 60 cm i 91 cm . Obliczyć jego przekątną.

16. Trzeba wypilować kwadratową główkę o boku 32 mm . Jaka ma być najmniejsza średnica okrągłego żelaza, nadającego się do tego celu?

17. 1) Bok kwadratu wynosi a . Ile wynosi jego przekątna?

2) Wyznaczyć bok kwadratu, wiedząc że bok ten jest mniejszy o 2 cm od przekątnej.

18. Średnica kłody równa się 12 cm . Czy można z niej wyciosać belkę, której przekrój poprzeczny jest kwadratem o boku 10 cm ?

19. 1) Wyznaczyć promień koła opisanego na prostokącie o bokach a i b .

2) W koło wpisano prostokąt, którego boki mają się do siebie jak $8:15$. Wyznaczyć te boki, jeśli promień koła równa się 34 cm .

20. 1) Przyprostokątne trójkąta prostokątnego równają się 8 dcm i 18 cm . Znaleźć promień koła opisanego.

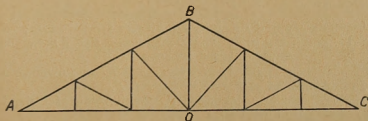
2) Przyprostokątne trójkąta prostokątnego równają się 16 cm i 12 cm . Wyznaczyć środkową względem przeciwprostokątnej.

21. 1) Znaleźć wysokość trójkąta równoramiennego o ramieniu 17 cm i o podstawie 16 cm .

2) Wyznaczyć boki trójkąta równoramiennego o wysokości 35 cm , w którym stosunek podstawy do ramienia równa się $48:25$.

3) Wyznaczyć ramię trójkąta równoramiennego, którego podstawa równa się 4 cm , a kąt przy podstawie 45° .

22. Wiązanie krokwi ma boki AB i CB po 9 m i rozpiętość $AC=15\text{ m}$ (rys. 32). Wyznaczyć wysokość wiązania BD .



Rys. 32.

23. 1) Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego na części równe $2\frac{1}{7}\text{ m}$ i $2\frac{6}{7}\text{ m}$. Znaleźć przyprostokątne.

2) Przyprostokątne trójkąta prostokątnego równają się 15 cm i 20 cm . Z wierzchołka kąta prostego poprowadzono wysokość i dwusieczną. Na jakie odcinki została podzielona przeciwprostokątna?

24. 1) Wyznaczyć wysokość trójkąta równobocznego o boku a .

2) W trójkącie równobocznym wysokość wynosi h . Znaleźć bok.
 3) W trójkącie równobocznym różnica między bokiem i wysokością równa się m . Wyznaczyć bok.

4) Jeden kąt trójkąta prostokątnego równa się 30° , zaś długość większej przyprostokątnej równa się 6 cm . Wyznaczyć pozostałe boki tego trójkąta.

25. 1) Boki trójkąta równają się: $a=25\text{ cm}$ i $b=30\text{ cm}$, a wysokość $h_c=24\text{ cm}$. Znaleźć podstawę c .

2) W trójkącie większy kąt przy podstawie równa się 45° , a wysokość dzieli podstawę na odcinki 20 cm i 21 cm . Znaleźć większy z pozostałych boków.

3) Z danego punktu poprowadzono prostopadłą i dwie pochyłe. Znaleźć długość prostopadłej wiedząc, że pochyłe mają długość 41 cm i 50 cm , zaś stosunek ich rzutów na daną prostą równa się $3:10$.

26. 1) Znaleźć boki rombu o przekątnych 24 cm i 70 cm .

2) Znaleźć przekątne rombu o obwodzie 1 m , jeśli stosunek ich równa się $3:4$.

27. 1) Podstawy trapezu równoramiennego równają się 10 cm i 24 cm , ramię -25 cm . Wyznaczyć wysokość trapezu.

2) Ramię trapezu równoramiennego równa się 41 cm , wysokość 4 dcm , a linia środkowa 45 cm . Znaleźć podstawy.

28. Równolegle do prostej drogi, w odległości 500 m od niej, rozmieścił się łańcuch strzelców; odległość między skrajnymi strzelcami wynosi 120 m , dalekość lotu kuli wynosi $2,8\text{ km}$. Jaka część drogi jest pod ostrzałem strzelców?

29. Na rys. 33 wyobrażono nit OST 302 (OST — „обтесанный стандарт”) z krytą główką. Kąt $\alpha=60^\circ$. Obliczyć:

1) D , jeśli $d=16,5\text{ mm}$ i $h=7,5\text{ mm}$;

2) d , jeśli $D=30\text{ mm}$ i $h=9,5\text{ mm}$;

3) h , jeśli $D=35\text{ mm}$ i $d=22\text{ mm}$. Podać formułę wiążącą ze sobą D , d i h .

30. 1) W trójkącie ABC poprowadzono wysokość AD . Dowieść, że $AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$.

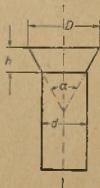
2) Gdy M oznacza jakikolwiek punkt wysokości AD trójkąta ABC , to $AB^2 - AC^2 = BM^2 - CM^2$. Dowieść tego.

31. 1) Wykazać, że w trapezie prostokątnym różnica kwadratów przekątnych równa się różnicy kwadratów podstaw.

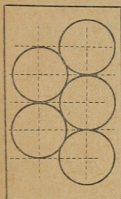
2) W trapezie prostokątnym mniejsza przekątna jest równa pochyłemu ramieniu. Wyznaczyć większą przekątną, jeśli pochyłe ramię trapezu równa się a , a mniejsza podstawa b .

32. Z blachy żelaznej trzeba wyciąć krążki o średnicy 28 mm . Znaleźć odległość między prostymi, na jakich należy rozmieścić środki krążków. (Rys. 34).

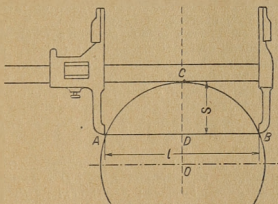
33. 1) Promień koła równa się 89 dcm , cięciwa 16 m . Wyznaczyć jej odległość od środka.



Rys. 33.



Rys. 34.



Rys. 35.

2) O — środek; ACB — cięciwa; OC — promień prostopadły do niej; $OC = 9\text{ cm}$ i $CD = 32\text{ cm}$. Wyznaczyć cięciwę.

3) Promienie dwu przecinających się okręgów równają się 13 cm i 15 cm , a wspólna cięciwa — 24 cm . Wyznaczyć odległość między środkami.

4) AB i CD — dwie równoległe cięciwy po przeciwnych stronach środka O okręgu o promieniu $R = 15\text{ cm}$. Cięciwa $AB = 18\text{ cm}$; cięciwa $CD = 24\text{ cm}$. Wyznaczyć odległość między cięciwami.

5) Dwie równoległe cięciwy AB i CD znajdują się po tej samej stronie od środka O koła o promieniu $R = 30\text{ cm}$. Cięciwa $AB = 48\text{ cm}$, cięciwa $CD = 36\text{ cm}$. Znaleźć odległość między cięciwami.

34. Celem zmierzenia średnicy dużego krążka ustawiono suwak tak, jak pokazuje rys. 35. Długość szcęk suwaka $s = 25\text{ mm}$, odległość między ich końcami $l = 200\text{ mm}$.

1) Znaleźć długość średnicy D ;

2) Wyprowadzić formułę wyrażającą zależność D od s i l .

35. Cięciwa odcinka koła wynosi a , a wysokość h . Wyznaczyć promień koła.

36. Promień koła równa się 25 cm . Dwie jego cięciwy równoległe równają się 14 cm i 40 cm . Znaleźć ich odległość od siebie.

37. Odległości jednego końca średnicy od końców cięciwy do niej równoległej wynoszą 13 cm i 84 cm . Znaleźć promień koła.

38. 1) Z punktu oddalonego o 85 cm od środka koła o promieniu 36 cm , poprowadzono styczną. Wyznaczyć jej długość.

2) Z tego samego punktu poprowadzono do koła o promieniu 11 cm dwie styczne, których suma wynosi 120 cm . Znaleźć odległość od środka do punktu przecięcia się stycznych.

3) Z punktu oddalonego o 25 cm od środka koła o promieniu 7 cm poprowadzono dwie styczne. Znaleźć odległość między punktami styczności.

39. Dwa koła o promieniach R i r są styczne zewnętrznie. Ze środka jednego koła poprowadzono styczną do drugiego koła i z punktu

styczności poprowadzono styczną do pierwszego koła. Znaleźć długość tej ostatniej stycznej.

40. 1) Dwa koła są styczne zewnętrznie. Wyznaczyć długość ich wspólnej stycznej zewnętrznej (między punktami styczności), jeśli promienie kół wynoszą 16 cm i 25 cm .

2) Odległość środków dwu kół o promieniach 27 cm i 13 cm wynosi 50 cm . Wyznaczyć długość ich wspólnych stycznych.

41. Styczna i sieczna poprowadzone z jednego punktu do jednego okręgu są do siebie prostopadłe. Styczna ma 12 m długości, a część wewnętrzna siecznej równa się 10 m . Wyznaczyć promień okręgu.

42. AB i CD — proste równoległe, AC — sieczna, E i F — punkty przecięcia się prostych AB i CD z dwusiecznymi kątów C i A . Znaleźć AC mając dane: $AF=96\text{ cm}$ i $CE=110\text{ cm}$.

43. W rozwartokątnym, równoramiennym trójkącie ABC podstawa $AC=32\text{ m}$ a ramię 20 m . Z wierzchołka B poprowadzono prostopadłą do ramienia aż do przecięcia się z podstawą. Na jakie części prostopadła ta dzieli podstawę?

44. Przyprostokątna $AC=15\text{ cm}$, przyprostokątna $CB=8\text{ cm}$. Z punktu C jako ze środka zakreślono promieniem CB łuk, który z przeciwprostokątnej wycina część BD . Wyznaczyć tę część.

45. Łuk zakreślony ze środka wierzchołka kąta prostego w trójkącie prostokątnym promieniem równym mniejszej przyprostokątnej, dzieli przeciwprostokątną na odcinki 98 cm i 527 cm (poczynając od mniejszej przyprostokątnej). Znaleźć przyprostokątne.

46. AB — średnica koła, BC — styczna, D — punkt przecięcia prostej AC z kołem. Wyznaczyć promień, jeśli $AD=32\text{ cm}$ i $DC=18\text{ cm}$.

47. AB — średnica; BC i CDA — styczna i sieczna. Wyznaczyć stosunek $CD:DA$, jeśli $BC=\text{promieniowi}$.

48. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną w stosunku $7:9$. W jakim stosunku (biorąc części w tym samym porządku) dzieli ją jej wysokość?

49. Dwusieczna kąta prostego dzieli przeciwprostokątną na części 15 cm i 20 cm . Wyznaczyć przeciwprostokątne.

50. Przyprostokątna równoramiennego trójkąta prostokątnego równa się a . Na jakie części dzieli ją dwusieczna kąta przyległego?

51. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli przyprostokątną na odcinki m i n ($m > n$). Wyznaczyć drugą przyprostokątną i przeciwprostokątną.

52. W trójkącie prostokątnym o przyprostokątnych 15 dm i 2 m poprowadzono z wierzchołka kąta prostego wysokość i dwusieczne obu kątów, które wysokość tworzy z przyprostokątnymi. Wyznaczyć odcinek przeciwprostokątnej zawarty między dwusiecznymi.

53. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna $BC=6\text{ cm}$, a przeciwprostokątna $AB=10\text{ cm}$. Dwusieczne kąta ABC i kąta doń przyległego przecinają przyprostokątną AC i jej przedłużenie w punktach D i E . Wyznaczyć długość DE .

Dwusieczna
w trójkącie
prostokątnym

54. Ramię AB trójkąta równoramiennego ABC równa się 10 m , a podstawa $AC=12\text{ m}$. Dwie przeciętne kątów A i C przecinają się w punkcie D . Wyznaczyć BD .

55. 1) Wyznaczyć promień koła wpisanego w trójkąt równoramienny o podstawie 30 cm i ramieniu 39 cm .

2) Znaleźć promień koła wpisanego w trójkąt równoramienny, w którym środek tego koła dzieli wysokość w stosunku $17:15$; podstawa trójkąta równa się 60 cm .

Wysokość i boki
w trójkącie
równoramiennym,
rombie
i trapezie.

56. Z punktu B poprowadzono do danej prostej prostopadłą BC i pochyłą BA . Na AC wzięto punkt D i prostą BD przedłużono do przecięcia się w punkcie E z prostą AE , prostopadłą do AC . Wyznaczyć AE , jeśli $BA=53\text{ dcm}$, $AD=8\text{ dcm}$ i $DC=20\text{ dcm}$.

57. 1) W trójkącie równoramiennym podstawa równa się 30 dcm a wysokość 20 dcm . Wyznaczyć wysokość spuszczoną na ramię.

2) W trójkącie równoramiennym wysokość poprowadzona między ramionami wynosi 3 dcm , a wysokość spuszczone na ramię — 4 dcm . Wyznaczyć boki tego trójkąta.

3) Wyznaczyć wysokość rombu o przekątnych 14 dcm i 48 dcm .

58. 1) Przeciwpromiennik $AB=34\text{ cm}$, przyprostokątna $BC=16\text{ cm}$. Wyznaczyć długość prostopadłej do przeciwprostokątnej, wystawionej z jej środka, do przecięcia z przyprostokątną AC .

2) Promień koła wynosi r . Znaleźć długość cięciwy, poprowadzonej z końca danej średnicy przez środek promienia prostopadłego do średnicy.

59. W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna $AC=16\text{ dcm}$, a przyprostokątna $BC=12\text{ dcm}$. Ze środka B , promieniem BC zakreślono okrąg i poprowadzono do niego styczną, równoległą do przeciwprostokątnej (styczna i trójkąt leżą po różnych stronach przeciwprostokątnej). Przyprostokątną BC przedłużono do przecięcia ze styczną. Obliczyć, o ile przedłużono przyprostokątną.

60. Z jednego punktu poprowadzono do okręgu dwie styczne. Długość stycznej równa się 156 dcm , a odległość między punktami styczności 120 dcm . Znaleźć promień koła.

61. W trapezie prostokątnym podstawy równają się 17 dcm i 25 dcm , a większe ramię 10 dcm . Ze środka tego ramienia wystawiono prostopadłą do niej aż do spotkania z przedłużeniem drugiego ramienia. Wyznaczyć długość tej prostopadłej.

62. AC i CB — przyprostokątne, CD — wysokość; $DE \parallel BC$. Wyznaczyć stosunek $AE:EC$, skoro $AC:CB=4:5$.

63. AC i CB — przyprostokątne, CD — wysokość; $DE \perp AC$ i $DF \perp CB$. Wyznaczyć DE i DF , jeśli

$AC=75\text{ dcm}$ i $BC=100\text{ dcm}$.

64. W dwu równoramiennych trójkątach ramiona mają równe długości a suma kątów przy wierzchołku wynosi 180° . Stosunek podstaw jest $9:40$, a długość ramienia równa się 41 dcm . Znaleźć podstawy.

Zadania mieszane na trójkąt prostokątny

65. 1) Podstawa trójkąta równa się 60 m, wysokość 12 m, a środkowa względem podstawy 13 m. Wyznaczyć ramiona.

2) Znaleźć stosunek przyprostokątnych w trójkącie prostokątnym, jeśli stosunek wysokości do środkowej, wychodzących z wierzchołka kąta prostego równa się 40 : 41.

66. Wyznaczyć promień koła opisanego na trójkącie równoramiennym, mając daną jego podstawę i ramię: 1) 6 dcm i 5 dcm; 2) 24 m i 13 m.

67. Znaleźć promień koła wpisanego w trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 13 dcm i 84 dcm.

68. Odległość środków dwu okręgów leżących jeden na zewnątrz drugiego wynosi 65 dcm; długość ich wspólnej stycznej zewnętrznej (między punktami styczności) wynosi 63 dcm, długość ich wspólnej stycznej wewnętrznej wynosi 25 dcm. Wyznaczyć promienie okręgów.

69. Długości dwu równoległych cięciw wynoszą 40 dcm i 48 dcm, a odległość między nimi 22 dcm. Wyznaczyć promień koła.

70. W trapezie równoramiennym opisanym na kole, podstawy są równe 36 cm i 1 m. Znaleźć promień koła.

71. Na okręgu o promieniu 12 cm opisano trapez równoramienny o promieniu 25 cm. Znaleźć podstawy trapezu.

72. Na kole o promieniu r opisano trapez równoramienny, w którym boki równoległe mają się do siebie jak $m : n$. Wyznaczyć boki trapezu.

73. AB i AC — styczne do koła o środku O ; M — punkt przecięcia prostej AO z kołem; DME — odcinek stycznej poprowadzony przez M między AB i AC . Wyznaczyć długość DE , jeśli promień koła równa się 15 dcm, a odległość $AO = 39$ dcm.

74. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego równają się 15 dcm i 20 dcm. Wyznaczyć odległość środka koła wpisanego od wysokości spuszczonej na przeciwprostokątną.

75. W trójkącie prostokątnym ABC z wierzchołka C kąta prostego poprowadzono prostopadłą na przeciwprostokątną i na niej jako na średnicy opisano okrąg, który na przyprostokątnych CA i CB odcina wewnętrzne odcinki m i n . Wyznaczyć przyprostokątne ($m = 12$, $n = 18$).

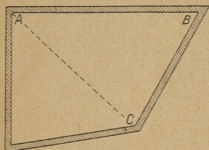
76. Przyprostokątne trójkąta prostokątnego równają się 75 dcm i 100 dcm. Na odcinkach przeciwprostokątnej utworzonych przez wysokość zbudowano półokręgi po tej samej stronie co dany trójkąt. Wyznaczyć odcinki przyprostokątnych, zawarte wewnątrz tych półokręgów.

77. Dowieść, że skoro dwa koła stykają się zewnętrznie, to ich wspólna styczna zewnętrzna jest średnią proporcjonalną między ich średnicami.

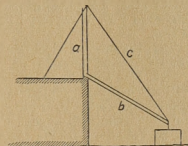
78. W trapezie $ABCD$ mniejsza przekątna BD jest prostopadłą do podstaw AD i BC ; suma kątów ostrych A i C wynosi 90° . Podstawa $AD = a$, $BC = b$. Wyznaczyć ramiona AB i CD .

Trójkąt ukośno-
kątny.

79. Rysunek 36 przedstawia plan pomieszczenia, które należy przegrodzić wzdłuż linii AC . Lecz z powodu przeszkód, jakie znajdują się wzdłuż



Rys. 36.



Rys. 37.

linii AC , wymierzono zamiast niej $AB = 50\text{ m}$, $BC = 35\text{ m}$ i $\angle ABC = 60^\circ$. Na podstawie tych danych obliczyć długość AC .

80. Na rys. 37 przedstawiono dźwig, którego stojak $a = 10\text{ m}$, ramię $b = 13\text{ m}$, a kąt między a i b wynosi 120° . Wyznaczyć długość c .

81. Wyznaczyć w trójkącie bok, jeśli pozostałe boki i rzut pierwszego boku na trzeci wyrażone są odpowiednio następującymi liczbami: 1) 6; 5; 3,8; 2) 2; 3; 2; 4) 12; 8; 11; 4) 2; 2; 3.

82. Wyznaczyć rodzaj trójkąta (ze względu na kąty) skoro dane są trzy boki albo ich stosunki: 1) 2; 3; 4; 2) 3; 4; 5; 3) 4; 5; 6; 4) 10; 15; 18; 5) 68; 119; 170.

83. W trójkącie ABC niech b oznacza podstawę, a i c ramiona, p i q — ich rzuty na podstawę, h — wysokość. Wyznaczyć p , q i h , jeśli dane są trzy boki:

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$; | 2) $a = 37$, $b = 30$, $c = 13$; |
| 3) $a = 25$, $b = 12$, $c = 17$; | 4) $a = 2$, $b = 4$, $c = 3$. |

84. W trójkącie wyznaczyć trzeci bok, jeśli dwa pozostałe tworzą kąt 60° i równają się odpowiednio: 1) 5 cm i 8 cm , 2) 8 cm i 15 cm , 3) 63 cm i 80 cm .

85. W trójkącie wyznaczyć trzeci bok, jeśli dwa pozostałe tworzą kąt 120° i równają się odpowiednio: 1) 3 cm i 5 cm , 2) 7 cm i 8 cm , 3) 11 cm i 24 cm .

86. Wyznaczyć trzeci bok trójkąta, jeśli dwa pozostałe tworzą kąt 45° i równają się odpowiednio: 1) 2 i 3; 2) $\sqrt{8}$ i 5; 3) $\sqrt{18}$ i 7.

87. Wyznaczyć boki trójkąta, jeśli wiadomo, że bok średni co do wielkości różni się od dwóch innych o jednostkę i że rzut boku większego na średni wynosi 9 jednostek.

88. Bok trójkąta równa się 21 cm , a dwa pozostałe tworzą kąt 60° i mają się do siebie jak 3:8. Wyznaczyć te boki.

89. W trójkącie jedno ramię równa się 16 m i tworzy z podstawą kąt 60° , drugie ramię 14 m . Wyznaczyć podstawę.

90. Podstawa trójkąta równa się 13 cm , kąt przy wierzchołku 60° , suma pozostałych boków 22 cm . Wyznaczyć te boki i wysokość.

91. Podstawa trójkąta równa się 12 cm , jeden z kątów przy podstawie 120° , bok przeciwległy temu kątowi równa się 28 cm . Wyznaczyć trzeci bok.

92. W trójkącie równoramiennym prostokątnym ABC , przeciw-

prostokątną AB przedłużono o długość BD równą BC , i punkt D połączono z C . Wyznaczyć boki trójkąta ADC , jeśli przyprostokątna $BC = a$.

93. Wyznaczyć cięciwę połowy łuku, skoro cięciwa całego łuku wynosi a , a promień równa się r ($r=25$, $a=48$).

94. 1) W trójkącie prostokątnym ABC przyprostokątna $AC = 15$ cm a przyprostokątna $BC = 20$ cm. Na przeciwprostokątnej AB odmierzone część AD o długości 4 cm i połączono punkt D z punktem C . Wyznaczyć długość CD .

2) Trójkąt ABC ma przy C kąt prosty. Na przedłużeniu przeciwprostokątnej AB odmierzone odcinek BD równy przyprostokątnej BC i punkt D połączono z C . Wyznaczyć długość CD , jeśli $BC = 7$ cm i $AC = 24$ cm.

95. W trójkącie ABC poprowadzono wysokości BD i CE i połączono punkty D i E . Wyznaczyć stosunek pola ADE do pola ABC , jeśli 1) $\angle A = 45^\circ$, 2) $\angle A = 30^\circ$.

96. W trójkącie ABC dany jest punkt D na boku AB , wyznaczyć długość CD , jeśli wiadomo, że $a=37$, $b=15$, $c=44$ i $AD=14$.

97. W trójkącie rozwartokątnym największy bok równa się 16 cm, a wysokości wyprowadzone z obu jego końców są oddalone od wierzchołka kąta rozwartego o 2 i 3 cm. Wyznaczyć oba mniejsze boki trójkąta.

98. Boki trójkąta równoramiennego są: $AB=BC=50$ cm i $AC=60$ cm. Poprowadzono wysokości AE i CD i punkty D i E połączono. Wyznaczyć boki trójkąta DBE .

99. W trójkącie ABC z końca C boku AC poprowadzono prostopadłą do niego aż do przecięcia się w punkcie D z przedłużeniem boku AB . Wyznaczyć BD i CD , jeśli $AB=45$, $BC=39$ i $AC=42$.

100. W trójkącie ABC dane są boki $AB=15$, $AC=14$ i $BC=13$. Dwusieczną kąta B przedłużono poza jego wierzchołek do przecięcia się w punkcie E z prostopadłą do AC , wyprowadzoną z punktu C . Wyznaczyć długość CE .

101. Dwa równe okręgi są styczne do danego większego okręgu, jeden wewnątrznie, drugi zewnątrznie, przy czym łuk między punktami styczności wynosi 60° . Promień kół mniejszych równa się r , promień koła większego równa się R . Wyznaczyć odległość między środkami kół mniejszych.

Równoległobok
i trapez.

102. 1) Boki równoległoboku równają się 23 cm i 11 cm, a stosunek przekątnych 2 : 3. Wyznaczyć przekątne.

2) Przekątne równoległoboku równają się 17 cm i 19 cm, a stosunek boków wynosi 2 : 3. Wyznaczyć boki.

103. 1) Przekątne równoległoboku równają się 12 cm i 14 cm, a różnica boków równa 4 cm. Wyznaczyć boki równoległoboku.

2) Wyznaczyć boki i przekątne równoległoboku, skoro większy bok równa się mniejszej przekątnej, różnica boków wynosi 3 cm, a różnica przekątnych równa się 2 cm.

104. 1) Boki trójkąta są: 16, 18 i 26. Obliczyć środkową względem boku największego.

2) Dwa boki trójkąta równają się 7 i 11, środkowa względem trzeciego równa się 6. Wyznaczyć trzeci bok.

3) Boki trójkąta są a , b i c . Wyznaczyć środkowe.

105. Wyznaczyć wysokość równoległoboku o podstawie 51 cm , i o przekątnych 40 cm i 74 cm .

106. W trapezie równoramiennym wyznaczyć długość przekątnych, skoro: 1) podstawy równają się 4 m i 6 m , a ramię równa się 5 m . 2) jeden bok równa się 5 cm , a inne trzy wynoszą każdy po 4 cm .

107. Wyznaczyć wysokość i przekątne trapezu mając dane podstawy a i c oraz ramiona b i d , wyrażone następującymi liczbami:

1) $a=25$, $b=13$, $c=11$, $d=15$;

2) $a=28$, $b=25$, $c=16$, $d=17$;

3) $a=6$, $b=3$, $c=1$, $d=4$.

108. W trójkąt wpisano równoległobok, tak że jeden jego bok leży na podstawie trójkąta a przekątne są odpowiednio równoległe do pozostałych boków trójkąta. Wyznaczyć boki równoległoboku, skoro podstawa trójkąta równa się 45 cm a pozostałe boki 39 cm i 48 cm .

109. Wykazać, że w trapezie równoramiennym kwadrat przekątnej równa się kwadratowi ramienia powiększonemu o iloczyn podstaw.

110. Dowieść, że w każdym trapezie suma kwadratów przekątnych równa się sumie kwadratów ramion powiększonej o podwojny iloczyn podstaw.

111. Wykazać, że w każdym czworokącie suma kwadratów przekątnych równa się podwójnej sumie kwadratów odcinków łączących środki przeciwległych boków.

112. Wyznaczyć kąt ostry rombu, którego bok jest średnią proporcjonalną między przekątnymi.

§ 11. Odcinki proporcjonalne w kole.

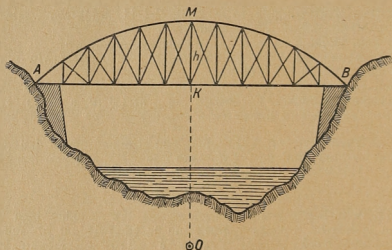
1. Wiązanie mostu ograniczone jest łukiem koła (rys. 38); wysokość wiązania $MK=h=3$ m ; promień łuku AMB przęsła $R=8,5$ m . Obliczyć długość AB przęsła mostu.

2. Na podwalu ze sklepieniem, mającym postać półwalca, należy postawić dwa stojaki, każdy w tej samej odległości od najbliższej ściany. Wyznaczyć wysokość stojaków, skoro szerokość podwala u dołu wynosi 4 m , a odległość między stojakami 2 m .

3. 1) Z punktu na okręgu spuszczone prostopadłą na średnicę. Wyznaczyć długość tej prostopadłej, skoro długość odcinków średnicy wynosi: 1) 12 cm i 3 cm , 2) 16 cm i 9 cm , 3) 2 m i 5 dc m .

2) Z punktu na średnicy wystawiono prostopadłą do przecięcia z okręgiem. Wyznaczyć długość tej prostopadłej, skoro średnica równa się 40 cm , a prostopadła jest odległa od jednego z końców średnicy o 8 cm .

4. Średnicę podzielono na odcinki: $AC=8$ dc m i $CB=5$ m . Z punktu C wystawiono do średnicy prostopadłą CD o danej długości. Jakie położenie ma punkt D względem koła, skoro CD równa się: 1) 15 dc m , 2) 2 m , 3) 23 dc m ?



Rys. 38.

5. ACB jest półokręgiem; CD — prostą do średnicy AB . Wyznaczyć:

- 1) DB , jeśli $AD=25$ i $CD=10$;
- 2) AB , jeśli $AD:DB=4:9$ i $CD=30$;
- 3) AD , jeśli $CD=3AD$, zaś promień jest r ;
- 4) AD , jeśli $AB=50$ i $CD=15$.

6. 1) Z punktu na okręgu poprowadzono prostą do promienia równą 34 cm , która dzieli go w stosunku $8:9$ (licząc od środka). Wyznaczyć długość prostej.

2) Cięciwa BDC jest prostą do promienia ODA . Wyznaczyć BC , jeśli $OA=25\text{ cm}$ i $AD=10\text{ cm}$.

3) Szerokość pierścienia, utworzonego z dwóch kół koncentrycznych, wynosi 8 dcm , cięciwa większego okręgu styczna do mniejszego wynosi 4 m . Wyznaczyć promienie okręgów.

7. Przy pomocy porównania odcinków wykazać, że średnia arytmetyczna dwu liczb (nierównych) jest większa od ich średniej geometrycznej.

8. Zbudować odcinek będący średnią proporcjonalną między odcinkami 3 cm i 5 cm .

9. Zbudować odcinek wynoszący: $\sqrt{15}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{6}$; $\sqrt{3}$.

10. ADB jest średnicą, AC — cięciwą, CD — prostą do średnicy. Wyznaczyć cięciwę AC , jeśli: 1) $AB=2\text{ m}$ i $AD=0,5\text{ m}$; 2) $AD=4\text{ cm}$ i $DB=5\text{ cm}$; 3) $AB=20\text{ m}$ i $DB=15\text{ m}$.

11. AB oznacza średnicę, AC — cięciwą, AD — jej rzut na średnicę AB . Wyznaczyć:

- 1) AD , jeśli $AB=18\text{ cm}$ i $AC=12\text{ cm}$;
- 2) promień, jeśli $AC=12\text{ m}$ i $AD=4\text{ m}$;
- 3) DB , jeśli $AC=24\text{ cm}$ i $DB=\frac{7}{9}AD$.

12. AB jest średnicą, AC — cięciwą, AD — jej rzutem na średnicę AB . Wyznaczyć:

- 1) AC , jeśli $AB=35$ cm i $AC=5AD$;
- 2) AC , jeśli promień wynosi r i $AC=DB$.

13. Dwie cięciwy przecinają się wewnątrz koła. Odcinki jednej cięciwy wynoszą 24 cm i 14 cm; jeden z odcinków drugiej cięciwy wynosi 28 cm. Wyznaczyć drugi jej odcinek.

14. Wiązanie mostu jest ograniczone łukiem koła (rys. 38); długość mostu $AB=6$ m, jego wysokość $h=1,2$ m. Wyznaczyć promień łuku ($OM=R$).

15. Dwa odcinki AB i CD przecinają się w punkcie M , tak że $MA=7$ cm, $MB=21$ cm, $MC=3$ cm i $MD=16$ cm. Czy punkty A , B , C i D leżą na jednym okręgu?

16. Długość wahadła $MA=l=1$ m (rys. 39), wysokość jego wzniesienia przy wychyleniu o kąt α , $CA=h=10$ cm. Znaleźć odległość BC punktu B od MA , to jest $BC=x$.

17. Dla przeprowadzenia toru kolei żelaznej o szerokości $b=1,524$ m w miejscu AB (rys. 40) zrobiono zaokrąglenie, przy czym okazało się, że $BC=a=42,4$ m. Wyznaczyć promień zaokrąglenia $OA=R$.

18. Cięciwę AMB obrócono około punktu M tak, że odcinek MA

zwiększył się $2\frac{1}{2}$ razy. Jak zmienił się odcinek MB ?

19. 1) Z dwu cięciw przecinających się jedna została podzielona na części 48 cm i 3 cm, a druga na połowy. Wyznaczyć długość drugiej cięciwy.

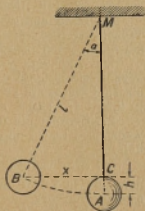
2) Z dwu cięciw przecinających się jedna podzielona została na części wynoszące 12 m i 18 m, a druga w stosunku 3:8. Znaleźć długość drugiej cięciwy.

20. Z dwu przecinających się cięciw, pierwsza równa się 32 cm, a odcinki drugiej równają się 12 cm i 16 cm. Wyznaczyć odcinki pierwszej cięciwy.

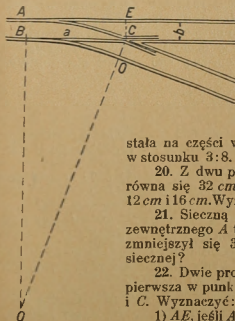
21. Sieczną ABC obrócono naokoło punktu zewnętrznego A tak, że zewnętrzny jej odcinek AB zmniejszył się 3 razy. Jak zmieniła się długość siecznej?

22. Dwie proste ADB i AEC przecinają okrąg: pierwsza w punktach D i B , druga w punktach E i C . Wyznaczyć:

- 1) AE , jeśli $AD=5$ cm, $DB=15$ cm i $AC=25$ cm;
- 2) BD , jeśli $AB=24$ m, $AC=16$ m i $EC=10$ m;



Rys. 39.



Rys. 40.

3) AB i AC , jeśli $AB+AC=50$ m, a $AD:AE=3:7$.

23. Z punktu oddalonego o 9 cm od środka koła o promieniu 7 cm poprowadzono sieczną tak, że okrąg ją połowi. Wyznaczyć długość tej siecznej.

24. MAB i MCD są dwiema siecznymi jednego okręgu. Wyznaczyć:

1) CD , jeśli $MB=1$ m, $MD=15$ dcm i $CD=MA$;

2) MD , jeśli $MA=18$ cm, $AB=12$ cm i $MC:CD=5:7$;

3) AB , jeśli $AB=MC$, $MA=20$ i $CD=11$.

25. Dwie cięciwy przedłużono do wzajemnego przecięcia się. Wyznaczyć długość powstałych przedłużeń, jeśli cięciwy równają się a i b , a ich przedłużenia tworzą stosunek $m:n$.

26. Z jednego punktu poprowadzono do koła sieczną i styczną. Wyznaczyć długość stycznej, jeśli zewnętrzny i wewnętrzny odcinek siecznej wyrażone są odpowiednio następującymi liczbami: 1) 4 i 5; 2) 2,25 i 1,75; 3) 1 i 2.

27. Styczna ma długość 20 cm, a najdłuższa sieczna poprowadzona z tego samego punktu wynosi 50 cm. Wyznaczyć promień koła.

28. Sieczna jest $2\frac{1}{4}$ razy dłuższa od swego odcinka zewnętrznego. Ile razy jest ona dłuższa od stycznej, poprowadzonej z tego samego punktu?

29. Wspólną cięciwę dwu przecinających się kół przedłużono i z punktu wziętego na tym przedłużeniu poprowadzono styczne do kół. Wykazać, że są one równe.

30. Na jednym ramieniu kąta A odmierzone kolejno dwa odcinki $AB=6$ cm i $BC=8$ cm; na drugim ramieniu odmierzone odcinek $AD=10$ cm. Przez punkty B , C i D poprowadzono okrąg. Sprawdzić, czy prosta AD jest styczną do tego okręgu, a jeśli nie, to czy punkt D (licząc od A) będzie pierwszym czy drugim punktem przecięcia.

31. AB jest styczną, a ACD sieczną tego samego okręgu. Wyznaczyć:

1) CD , jeśli $AB=2$ cm i $AD=4$ cm;

2) AD , jeśli $AC:CD=4:5$ i $AB=12$ cm;

3) AB , jeśli $AB=CD$ i $AC=a$.

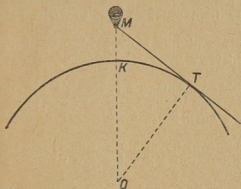
32. 1) Jak daleko można widzieć z balonu powietrznego (rys. 41), który wzniósł się nad ziemię na 4 km (promień ziemi wynosi ≈ 6370 km)?

2) Góra Elbrus (na Kaukazie) ma wysokość 5600 m nad poziomem morza. Jak daleko można widzieć z jej wierzchołka?

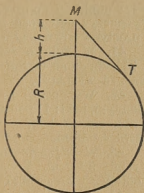
3) M oznacza punkt obserwacyjny znajdujący się w wysokości h metrów nad ziemią (rys. 42); promień ziemi R , $MT=d$ jest największą odległością widzenia. Wykazać, że $d=\sqrt{2Rh+h^2}$.

Uwaga. Ponieważ h^2 przedstawia bardzo małą wielkość w porównaniu z $2Rh$ i przez to na wynik prawie nie wpływa, to zazwyczaj używa się wzoru przybliżonego $d=\sqrt{2Rh}$.

33. 1) Wyznaczyć promień okręgu, jeśli styczna i sieczna wychodzące z jednego punktu są odpowiednio równe 20 cm i 40 cm, sieczna odległa jest od środka o 8 cm.



Rys. 41.



Rys. 42.

2) Wyznaczyć odległość środka od tego punktu, z którego poprowadzone styczna i sieczna mają odpowiednio długości 4 cm i 8 cm , przy czym sieczna jest odległa od środka o 12 cm .

34. 1) Ze wspólnego punktu poprowadzono do okręgu styczną i sieczną. Wyznaczyć długość stycznej, jeśli wiadomo, że jest ona o 5 cm dłuższa od zewnętrznego odcinka siecznej i o tyleż krótsza od odcinka wewnętrznego.

2) Z jednego punktu poprowadzono do okręgu sieczną i styczną. Sieczna ma długość a , a jej odcinek wewnętrzny jest większy od zewnętrznego o długość stycznej. Znaleźć styczną.

35. Ze wspólnego punktu poprowadzono do okręgu styczną i sieczną. Styczna jest dłuższa od wewnętrznego i zewnętrznego odcinka siecznej odpowiednio o 2 cm i 4 cm . Wyznaczyć długość siecznej.

36. Z jednego punktu poprowadzono do okręgu styczną i sieczną. Wyznaczyć ich długość, jeśli styczna jest o 20 cm krótsza od wewnętrznego odcinka siecznej i o 8 cm dłuższa od odcinka zewnętrznego.

37. 1) Z jednego punktu poprowadzono do koła sieczną i styczną. Suma ich wynosi 30 cm , zaś wewnętrzny odcinek siecznej jest o 2 cm krótszy od stycznej. Wyznaczyć sieczną i styczną.

2) Z jednego punktu poprowadzono do okręgu sieczną i styczną. Suma ich wynosi 15 cm , przy czym zewnętrzny odcinek siecznej jest o 2 cm mniejszy od stycznej. Wyznaczyć sieczną i styczną.

38. Odcinek AB przedłużono na odległość BC . Na AB i AC jako na średnicach zakreślono okręgi. Do odcinka AC w punkcie B wystawiono prostą BD do przecięcia się z większym kołem. Z punktu C poprowadzono styczną CK do mniejszego koła. Wykazać, że $CD = CK$.

39. Do danego okręgu poprowadzono dwie styczne równoległe i trzecią, która tamte przecina. Wykazać, że promień koła jest średnią proporcjonalną między odcinkami trzeciej stycznej.

40. Między dwiema równoległymi, których odległość wynosi 15 dcm , znajduje się punkt M w odległości 3 dcm od jednej z nich.

Przez punkt M poprowadzono okrąg styczny do obu równoległych. Wyznaczyć odległość między rzutami środka i punktu M na jedną z prostych równoległych.

41. W koło o promieniu r wpisano trójkąt równoramienny, w którym suma wysokości i podstawy równa się średnicy koła. Wyznaczyć wysokość.

42. Wyznaczyć promień koła opisanego na trójkącie równoramiennym, jeśli: 1) podstawa równa się 16 cm , wysokość 4 cm ; 2) ramię równa się 12 dcm , a wysokość 9 dcm ; 3) ramię — 15 m , a podstawa — 18 m .

43. W trójkącie równoramiennym podstawa równa się 48 dcm , a ramię 30 dcm . Wyznaczyć promienie kół opisanego i wpisanego i odległość ich środków.

44. Promień równa się r , a cięciwa danego łuku a . Wyznaczyć cięciwę podwójnego łuku.

45. Promień koła równa się 8 dcm , cięciwa AB ma długość 12 dcm . Z punktu A poprowadzono styczną, a z punktu B cięciwę BC równoległą do stycznej.

Wyznaczyć odległość między styczną i cięciwą BC .

46. Punkt A znajduje się w odległości a od prostej MN . Danym promieniem r zakreślono okrąg, który przechodzi przez punkt A i jest styczny do MN . Wyznaczyć odległość między otrzymanym punktem styczności i danym punktem A .

§ 12. Wielokąty foremne.

Oznaczenia: n — oznacza liczbę boków wielokąta foremnego, a_n — bok wielokąta foremnego wpisanego, b_n — bok wielokąta foremnego opisanego, k_n — apotemę foremnego wielokąta wpisanego, R — promień koła opisanego, r — promień koła wpisanego.

1. 1) Obliczyć kąt środkowy foremnego 24-kąta i 16-kąta.

2) Jaki wielokąt foremny ma kąt środkowy 30° , 12° ?

2. Wykazać, że kąt środkowy wielokąta foremnego i kąt przy wierzchołku mają sumę 180° .

3. Wyznaczyć wielkość kąta n -kąta foremnego ($n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 25$).

4. 1) Ile boków ma wielokąt foremny, w którym każdy kąt wewnętrzny ma 135° ? 150° ?

2) Ile boków ma wielokąt foremny, w którym każdy kąt zewnętrzny ma 36° ? 24° ?

5. Koniec wałka o średnicy 4 cm ociosano w kwadrat. Wyznaczyć największą długość, jaką może mieć bok kwadratu.

6. Koniec gwintu kurka gazowego ma postać foremną trójsieczną. Jaką największą długość może mieć ściana, jeśli walcowata część gwintu ma średnicę 2 cm ?

7. Obliczyć, jaka ma być największa długość otworu w klucza do foremnej sześciościenniej zakrętki, skoro szerokość jej ściany $a_s = 2,5\text{ cm}$. Wielkość odstepu między ścianami zakrętki i klucza wynosi $0,5\text{ mm}$. (rys. 43).

8. 1) Wpisać w koło foremny 12-kąt, 15-kąt.

2) Opisać na kole foremny 8-kąt, 10-kąt.

3) Zbudować foremny 8-kąt, 12-kąt o danym boku a .

9. 1) Dowieść, że cięciwa prostopadła do promienia w jego środku równa się bokowi foremnego trójkąta wpisanego.

2) Wykazać, że $k_3 = 0,5 a_3$.

10. 1) Wykazać, że w trójkącie foremnym apotema równa się $\frac{1}{3}$ wysokości i $\frac{1}{2}$ promienia koła opisanego.

2) Wyznaczyć bok trójkąta równobocznego, w którym różnica między promieniami kół opisanego i wpisanego wynosi m .

11. 1) Bok foremnego wielokąta wynosi a , promień koła opisanego na tym wielokącie wynosi R . Wyznaczyć promień koła wpisanego.

2) Bok wielokąta foremnego wynosi a , promień koła wewnątrz wpisanego r . Wyznaczyć promień koła opisanego.

3) R — promień koła opisanego na wielokącie, r — promień koła wpisanego. Wyznaczyć bok wielokąta.

12. W koło o promieniu $R=4$ cm wpisano 6-kąt foremny. Znaleźć rzuty jego boków na każdą z przekątnych.

13. Wykazać, że: 1) $a_6 = R \sqrt{2 - \sqrt{2}}$; 2) $k_6 = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

14. Wykazać, że: 1) $a_{12} = R \sqrt{2 - \sqrt{3}}$; 2) $k_{12} = \frac{R}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

15. Znajac a wyznaczyć R , jeśli n wynosi: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8; 5) 12.

16. Znajac a wyznaczyć: 1) k_3 ; 2) k_4 ; 3) k_6 .

17. Znajac k wyznaczyć R , jeśli n wynosi: 1) 3; 2) 4; 3) 6; 4) 8.

18. Znajac R wyznaczyć: 1) b_3 ; 2) b_4 ; 3) b_6 .

19. Wyznaczyć bok b opisanego foremnego n -kąta znając bok a foremnego n -kąta wpisanego i promień koła R .

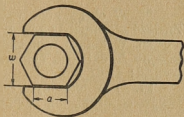
20. W koło o promieniu $R=50$ cm, wpisać foremny 7-kąt, wykorzystując to, że bok foremnego wpisanego 7-kąta równa się w przybliżeniu połowie boku trójkąta foremnego wpisanego.

21. Wyznaczyć długość przekątnych foremnego 8-kąta mając dane: 1) promień R , 2) bok a .

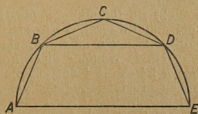
22. Wyznaczyć długość przekątnych foremnego 12-kąta mając dane: 1) promień R , 2) bok a .

23. Zbudować foremny pięciokąt mając daną przekątną.

24. Najprostsze pokrycie mansardowe tworzy w przekroju pionowym połowę foremnego 8-kąta (rys. 44). Znaleźć szerokość pokrycia BD , bok 8-kąta i wysokość mansardowego pokoju $ABDE$. Podano: $AE=6$ m.



Rys. 43.

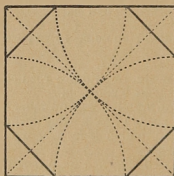


Rys. 44.

25. W okrąg koła wpisano i na nim opisano foremne n -kąty. Znaleźć stosunek boków tych n -kątów, jeśli $n=3$; $n=6$.

26. W koło o promieniu R wpisano foremny n -ką i połączono kolejno środki jego boków. Wyznaczyć bok nowego n -kąta, jeśli n wynosi: 1) 6; 2) 8.

27. 1) W foremnym 8-kącie o boku a połączono środki czterech boków co drugi, tak że powstał kwadrat. Wyznaczyć bok kwadratu.



Rys. 45.

2) W 12-kącie foremnym o boku a , połączono środki sześciu boków co drugi, tak że powstał foremny sześciokąt. Wyznaczyć jego bok.

28. Zbudować 8-kąt foremny, odcinając kąty danego kwadratu. Aby przetworzyć dany kwadrat, odcinając jego kąty, w foremny 8-kąt, przecinamy boki kwadratu (rys. 45) łukami, których promieniem jest połowa przekątnej kwadratu, a środkami wierzchołki kwadratu. Wykazać, że otrzymany 8-kąt będzie foremny.

29. Ścinając kąty zamienić foremny trójkąt o boku a na foremny 6-kąt i wyznaczyć jego bok.

30. W koło o promieniu R wpisano foremny wielokąt o boku a_n . Podwoić ilość boków tego wielokąta i dowieść, że

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

31. Bok foremnego trójkąta wpisanego w koło wynosi b . Znaleźć promień koła i bok kwadratu wpisanego w koło.

32. W koło o promieniu 4 dcm wpisano foremny trójkąt i na jego boku zbudowano kwadrat. Wyznaczyć promień koła opisanego na kwadracie.

33. 1) W koło o promieniu R wpisano foremny trójkąt; w ten trójkąt wpisano koło, a w to koło kwadrat. Wyznaczyć bok tego kwadratu.

2) Na foremnym trójkącie o boku a opisano koło, zaś na nim opisano kwadrat, i znów na kwadracie koło. Wyznaczyć promień koła opisanego na kwadracie.

34. 1) Wspólna cięciwa dwu przecinających się okręgów równa się a i jest dla jednego koła boki trójkąta foremnego wpisanego, a dla drugiego boki wpisanego kwadratu. Wyznaczyć odległość między środkami kół.

2) Środki dwóch przecinających się okręgów, leżą po jednej stronie ich wspólnej cięciwy o długości a , która ściąga w jednym kole łuk 60° , a w drugim 30° . Obliczyć odległość między środkami.

35. ABC — trójkąt foremny wpisany; AD oznacza trzecią część boku AB , BE — trzecią część boku BC . Wykazać, że odcinek DE równy jest promieniowi.

36. Każdy z boków foremnego trójkąta równych a został podzielony na trzy równe części. Odpowiednie punkty podziału (licząc w jednym kierunku) połączono ze sobą w ten sposób, że powstał nowy trójkąt. Wyznaczyć promień koła weń wpisanego.

37. W dany kwadrat wpisać drugi kwadrat o danym boku. Czy zadanie daje się zawsze wykonać?

38. W romb wpisać kwadrat, którego boki są równoległe do przekątnych rombu.

39. Jeden z dwu kwadratów o boku a nałożonych jeden na drugi, obrócono około środka o 45° . Znaleźć średnicę gwiazdy, utworzonej w ten sposób.

40. 1) Dowieść, że przykątne foremnego pięciokąta, łączące się kolejno, tworzą foremny pięciokąt.

2) Wykazać, że skoro boki foremnego pięciokąta przedłużymy do wzajemnego przecięcia się, to powstanie pięciokąt gwiaździsty o równych bokach.

41. 1) Koło o promieniu R podzielono na 6 równych części i poszczególne punkty podziału połączono co drugi cięciwami. Znaleźć bok otrzymanej w ten sposób sześcioramiennej gwiazdy.

2) Okrąg o promieniu R podzielono na 8 równych części, poszczególne punkty podziału połączono co drugi cięciwami. Znaleźć bok ośmiokątnej gwiazdy.

42. Znaleźć cięciwę łuku o promieniu R , mającej: 1) 135° ; 2) 150° .

43. Wyznaczyć stosunek boków trójkąta, którego kąty mają się do siebie jak $1:2:3$.

44. Środek półokręgu połączono z końcami średnicy i przez środki łączących odcinków poprowadzono cięciwę. Wyznaczyć promień koła, jeśli każdy z bocznych odcinków cięciwy wynosi c .

45. W wycinek koła mający łuk 120° i wysokości h wpisano prostokąt, którego podstawa jest czterokrotnie większa od wysokości. Wyznaczyć wysokość prostokąta.

46. n równych kół styka się między sobą i z kołem o promieniu R . Wyznaczyć promień tych kół, jeśli n wynosi: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

47. Na każdej z dwu połówek danego odcinka jako na średnicach zbudowano dwa koła i z każdego końca tego odcinka poprowadzono styczne do koła zbudowanego na drugiej połowie odcinka. Wykazać, że odcinek łączący punkty przecięcia się stycznych, równa się bokowi kwadratu wpisanego w jedno ze zbudowanych kół.

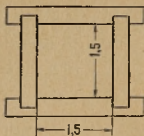
§ 13. Pola figur prostoliniowych.

Kwadrat.

1. Obliczyć pole przekroju tunelu wyobrażonego na rys. 46 (rozmiary podano w metrach).

2. Druk żelazny o przekroju 1 mm^2 rozrywa się pod ciężarem 40 kg . Jaki ciężar rozerwie żelazny druk, którego przekrój poprzeczny jest kwadratem o boku 24 mm ?

3. Boki dwu działek ziemi o postaci kwadratowej mają 100 m i 150 m . Wyznaczyć bok kwadratowej działki ziemi równoważnej dwom poprzednim.



Rys. 46.

4. 1) Wyznaczyć pole kwadratu o przekątnej l .

2) Wyznaczyć pole kwadratu wpisanego w koło o promieniu R .

3) Ile razy pole kwadratu opisanego jest większe od pola kwadratu wpisanego (w to samo koło)?

5. 1) Jak zmieni się pole kwadratu, jeśli każdy jego bok zwiększymy 3 razy? zmniejszymy 1,5 razy?

2) Jak należy zmienić każdy bok kwadratu, aby jego pole zwiększyło się 4 razy? zmniejszyło 25 razy?

6. Pole planu kwadratowej działki ziemi (podziałka 1:10.000) równa się $552,25 \text{ cm}^2$. Znaleźć rzeczywistą wielkość pola tej działki.

Prostokąt.

7. Tank „Reno” typu M waży 6.880 kg ; szerokość jego gąsienic wynosi $0,35 \text{ m}$, długość części gąsienic stykającej się z ziemią — $2,05 \text{ m}$ (z każdej strony). Jaki ciężar przypada na 1 dcm^2 powierzchni roboczej gąsienic?

8. Budynek fabryczny o postaci prostokąta ma długość $82,5 \text{ m}$, a szerokość $26,5 \text{ m}$. Wyznaczyć w arach pole zabudowanej działki.

9. Prostokątna działka ziemi zawiera 400 ha , jej długość 8 km . Znaleźć długość granic tej działki (obwód).

10. 1) Wyznaczyć boki prostokąta, których stosunek wynosi $4:9$, a pole prostokąta równa się 144 m^2 .

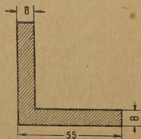
2) Wyznaczyć boki prostokąta, skoro jego obwód wynosi 74 dcm , a pole równa się 3 m^2 .

11. Boki prostokąta wynoszą 72 m i 8 m . Wyznaczyć bok równoważnego mu kwadratu.

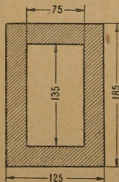
12. Obliczyć pole przekroju poprzecznego równoramiennej kątownika żelaznego (rys. 47, wymiary podano w milimetrach).

13. Obliczyć pole przekroju poprzecznego rury na rysunku 48 (wymiary podano w milimetrach).

14. Przekątna prostokąta równa się 305 cm , a pole wynosi 37128 cm^2 . Wyznaczyć obwód tego prostokąta.



Rys. 47.



Rys. 48.

Równoległobok.

15. Przez pole o postaci prostokąta $ABCD$ (rys. 49) ma przejść kolej żelazna. Wiadomo, że $AB=125\text{ m}$, $BC=72,5\text{ m}$, $AL=KC=114,6\text{ m}$. Obliczyć pole pasa $BLDK$.

16. Pole równoległoboku równa się 480 cm^2 ; jego obwód 112 cm ; odległość między większymi bokami 12 cm . Wyznaczyć odległość między mniejszymi bokami.

17. Wyznaczyć pole równoległoboku znając dwie jego wysokości h_1 i h_2 i obwód $2p$.

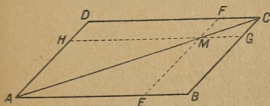
18. Znaleźć pole równoległoboku znając dwa boki i kąt między nimi: 1) $a, b, 30^\circ$; 2) $a, b, 45^\circ$; 3) $a, b, 60^\circ$.

19. Równoległobok i prostokąt mają jednakowe boki. Znaleźć kąt ostry równoległoboku, jeśli jego pole równa się połowie pola prostokąta.

20. Narysować kwadrat i romb o jednakowych obwodach. Która z tych figur ma większe pole? dlaczego?

21. Wyznaczyć pole rombu o wysokości 12 cm , którego mniejsza przekątna wynosi 13 cm .

22. W równoległoboku $ABCD$ bok $AB=37\text{ cm}$, a prostopadła spuszczone na bok AD z punktu przecięcia się przekątnych, dzieli ten bok na odcinki $AE=26\text{ cm}$ i $ED=14\text{ cm}$. Wyznaczyć pole równoległoboku.



Rys. 50.

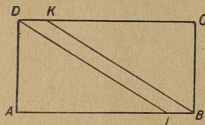
23. 1) W równoległoboku $ABCD$ (rys. 50) poprowadzono przekątną AC i na niej obrano punkt M , przez który poprowadzono proste równoległe do boków równoległoboku: $EF \parallel BC$ i $GH \parallel CD$. Wykazać, że utworzone w ten sposób równoległoboki $DHMF$ i $EBGM$, przez które przekątna nie przechodzi, są równoważne.

2) $a=8\text{ cm}$ i $b=4\text{ cm}$ — są bokami równoległoboku. Znaleźć bok równoległoboku równoważnego pierwszemu z takim samym kątem, mającego podstawę $b=6\text{ cm}$.

24. W danym kwadracie połączono każdy wierzchołek ze środkiem boku leżącego między dwoma dalszymi wierzchołkami (licząc wierzchołki w jednym kierunku). Proste łączące te punkty tworzą swymi przecięciami wewnętrzny kwadrat. Dowieść (rachunkiem), że jego pole stanowi $\frac{1}{5}$ pola danego kwadratu.

25. W trójkąt prostokątny wpisano kwadrat tak, że jeden z jego boków leży na przeciwprostokątnej. Odcinki boczne przeciwprostokątnej wynoszą m i n . Wyznaczyć pole kwadratu.

26. Z każdego wierzchołka danego kwadratu poprowadzono do dalszego wierzchołka łuk wewnętrzny 120° i punkty przecięcia łuków



Rys. 49.

połączono prostymi; powstaje w ten sposób kwadrat. Znaleźć stosunek pól obu kwadratów.

27. Z punktu na przeciwprostokątnej spuszczone prostopadłe na obie przyprostokątne. Wyznaczyć pole prostokąta odciętego tymi prostopadłymi, jeśli odcinki obu przyprostokątnych leżące przy przeciwprostokątnej wynoszą m i n .

28. W trójkąt o podstawie 30 cm i wysokości 10 cm wpisano prostokąt o polu 63 cm^2 . Znaleźć jego boki.

Trójkąt.

29. Powietrze ciśnie z siłą $1,03\text{ kg}$ na każdy cm^2 . Wyznaczyć parcie powietrza na płaszczyznę trójkątną o podstawie $0,13\text{ m}$ a wysokości $0,18\text{ m}$.

30. Wyznaczyć pole trójkąta, mając daną jego podstawę i odpowiednią wysokość: 1) 32 cm i 18 cm ; 2) 5 dcm i 4 m ; 3) $\sqrt{5}$ i $\sqrt{20}$.

31. 1) Zbudować trójkąt równoważny trójkątowi ABC , zachowując bok BC , lecz zmieniając kąt ABC na kąt α .

2) Zbudować trójkąt równoramienny o podstawie BC równoważny trójkątowi ABC .

32. 1) Podzielić dany trójkąt na trzy trójkąty równoważne prostymi wychodzącymi z jednego wierzchołka.

2) Dany równoległobok podzielić na cztery równoważne części prostymi wychodzącymi z jednego wierzchołka.

3) Dany równoległobok podzielić na trzy równoważne części prostymi wychodzącymi z jednego wierzchołka.

33. Wyznaczyć pole trójkąta o bokach a i b i kącie między nimi zawartym: 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° .

34. Czy pole trójkąta o bokach 3 cm i 8 cm może być równe: 1) 10 cm^2 ; 2) 15 cm^2 ; 3) 12 cm^2 ?

35. 1) Wyznaczyć pole trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej 313 cm a przyprostokątnej 312 cm .

2) Wyznaczyć przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego, którego pole równa się 720 cm^2 , a stosunek przyprostokątnych $9:40$.

3) Wyznaczyć wysokość spuszczoną na przeciwprostokątną, jeśli przyprostokątne są równe a i b .

36. Wyznaczyć pole trójkąta równoramiennego prostokątnego o przeciwprostokątnej c .

37. Wyznaczyć pole trójkąta równoramiennego, którego podstawa i ramię równają się odpowiednio: 1) 56 cm i 1 m ; 2) b i c ; 3) 20 cm i 11 cm .

38. Przez punkt K na boku AB trójkąta ABC poprowadzić prostą, tak żeby połowiła pole trójkąta.

39. 1) Wyznaczyć pole trójkąta równobocznego o boku a .

2) Wyznaczyć bok trójkąta równobocznego o polu Q .

3) Wyznaczyć pole trójkąta równobocznego o wysokości h .

40. 1) Wyznaczyć pole trójkąta równobocznego wpisanego w koło o promieniu R .

2) Wyznaczyć pole trójkąta równobocznego opisanego na kole o promieniu r .

41. Wyznaczyć pole trójkąta prostokątnego, którego wysokość dzieli przeciwprostokątną na odcinki o długości 32 cm i 18 cm .

42. Wyznaczyć pole trójkąta o wysokości 36 cm spuszczonej na jeden bok o pozostałych bokach 85 cm i 60 cm .

43. Wyznaczyć przyprostokątne trójkąta prostokątnego, jeśli jego przeciwprostokątna równa się 73 cm , a pole 1320 cm^2 .

44. Wyznaczyć podstawę w trójkącie równoramiennym o ramieniu 10 cm i polu 48 cm^2 .

45. 1) Wyznaczyć pole rombu, którego przekątne równają się 72 cm i 40 cm .

2) Wyznaczyć wysokość rombu, którego przekątne równają się 16 m i 12 m .

46. Wyznaczyć bok rombu o danym polu Q , jeśli jego przekątne mają się do siebie jak $m:n$.

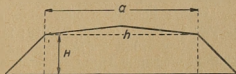
47. Ze środka podstawy trójkąta poprowadzono proste równoległe do ramion. Dowiedź, że pole utworzonego równoległoboku będzie równe połowie pola trójkąta.

48. Dowiedź, że skoro dowolny punkt wewnątrz równoległoboku połączymy z wszystkimi jego wierzchołkami, to suma pól dwu przeciwnych trójkątów równa się sumie pól dwóch pozostałych trójkątów.

49. Zbudować równoległobok równoważny danemu trójkątowi.

50. Zbudować równoważny danemu wielokątowi wielokąt, w którym liczba boków jest o 1 mniejsza niż w danym wielokącie.

51. Szerokość drogi a równa się $6,75\text{ m}$ (rys. 51); strzałka (h) wzniesienia nawierzchni nad nasypem ma stanowić 2% szerokości nawierzchni; wysokość nasypu $H=1,5\text{ m}$, boki nasypu pochylone są do poziomu pod kątem 45° . Obliczyć pole przekroju poprzecznego drogi.



Rys. 51.

52. Wyznaczyć pole trójkąta o podstawie a i kątach przy podstawie 30° i 45° .

53. Równe trójkąty prostokątne ACB i ADB znajdują się po jednej stronie przeciwprostokątnej AB ; przy tym $AD=BC=12\text{ cm}$ i $AC=BD=16\text{ cm}$. Wyznaczyć pole wspólnej części obu trójkątów.

54. Na bokach trójkąta równobocznego o boku a zbudowano kwadraty i ich wolne wierzchołki połączono. Wyznaczyć pole utworzonego 6-kąta.

55. W danym kwadracie o boku a ścięto wierzchołki tak, że powstał foremny 8-kąt. Wyznaczyć jego pole.

56. Wyznaczyć pole trójkąta prostokątnego, w którym stosunek przyprostokątnych wynosi $1,05$; różnica promienia koła opisanego i wpisanego równa się 17 dcm .

57. W rombie o przekątnych 150 cm i 200 cm poprowadzono z wierzchołka kąta rozwartego wysokości i ich końce połączono. Wyznaczyć pole utworzonego w ten sposób trójkąta.

58. AB i CD dwa równoległe odcinki, M —punkt przecięcia linii AD i BC (łąączących końce odcinków na krzyż). Wyznaczyć sumę

pól trójkątów ABM i MCD , jeśli odcinek $AB=8\text{ cm}$, $CD=12\text{ cm}$, zaś oddalenie ich wynosi 10 cm .

Formuła Herona.

59. Wyznaczyć pole trójkąta mając dane trzy boki: 1) 13, 14, 15; 2) 29, 25, 6; 3) 5, 6, 9; 4) 3, 5, 7; 5) 6, 5, 2,2; 6) 5, $8\frac{2}{3}$, $12\frac{1}{3}$; 7) 5, 4, $\sqrt{17}$;

8) 5, $\sqrt{58}$, $\sqrt{65}$; 9) $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$.

60. 1) Wyznaczyć najmniejszą wysokość trójkąta o bokach: 25 *dm*, 29 *dm*, 36 *dm*.

2) Wyznaczyć największą wysokość trójkąta o bokach 15, 112, 113.

61. Wyznaczyć boki trójkąta, jeśli: 1) ich stosunek równa się 26:25:3 a pole 9 m^2 ; 2) stosunek 9:10:17, a pole 144 cm^2 .

62. Wyznaczyć pole czworokąta mając dane przekątne 17 *cm*, i boki 10 *cm* i 21 *cm*, leżące po jednej stronie przekątnej oraz boki 8 *cm* i 15 *cm* leżące po drugiej stronie.

63. Promienie dwóch przecinających się okręgów wynoszą 17 *cm* i 39 *cm*, a odległość ich środków 44 *cm*. Wyznaczyć długość wspólnej siecznej.

64. Obliczyć pole równoległoboku, którego jeden bok wynosi 51 *cm*, a przekątne 40 *cm* i 74 *cm*.

65. Obliczyć pole trójkąta o bokach 27 *cm* i 29 *cm* i środkowej względem boku trzeciego wynoszącej 26 *cm*.

66. Wyznaczyć w trójkącie bok, skoro dane są pozostałe dwa boki i pole: 1) $a=17$, $b=28$, $S=210$; 2) $a=7$, $b=11$, $S=\sqrt{1440}$.

67. Boki trójkąta ABC wynoszą: $AB=26$, $BC=30$ i $AC=28$. Wyznaczyć część pola tego trójkąta, między wysokością i dwusieczną poprowadzonymi z wierzchołka B .

68. Boki trójkąta są: 13 *cm*, 14 *cm* i 15 *cm*. Wyznaczyć promień koła, którego środek leży na średnim boku i które jest styczne do dwu innych boków.

69. Wierzchołki danego trójkąta połączono ze środkiem koła wpisanego prostymi, które podzieliły pole trójkąta na trzy części: 28 m^2 , 60 m^2 i 80 m^2 . Wyznaczyć boki danego trójkąta.

70. W czworokącie $ABCD$ mamy dane: $AB=26\text{ cm}$, $BC=30\text{ cm}$,

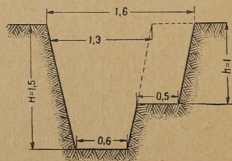
$CD=17\text{ cm}$, $AD=25\text{ cm}$ i przekątna $AC=28\text{ cm}$. Wyznaczyć pole czworokąta i przekątną BD .

Pole trapezu.

71. 1) Podstawy trapezu równają się 35 *cm* i 29 *cm*, a pole 256 cm^2 . Wyznaczyć wysokość trapezu.

2) Wysokość trapezu równa się 8 *cm*, a pole 2 dm^2 . Wyznaczyć długość linii środkowej.

3) Pole trapezu równa się 144 cm^2 , wysokość — 16 *cm*, a stosunek podstaw 4:5. Obliczyć podstawy.



Rys. 52.

72. Wyznaczyć pole przekroju poprzecznego okopu strzeleckiego (rys. 52). Wymiary podano w metrach.

73. Obliczyć pole przekroju poprzecznego rzeczki, danego na rysunku 53 (pole „żywego przekroju”) według danych w tablicy pomiarów głębokości:

odległość od brzegu w metrach	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
głębokość w metrach	0	0,65	0,9	1,5	1,85	2,4	2,35	1,75	1,25	0,6	0

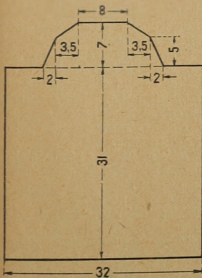


Rys. 53.

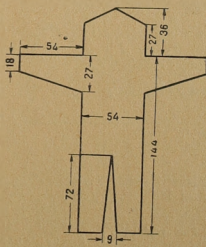
74. Rys. 54 przedstawia plan jadalni klubu robotniczego. Wymiary podano w metrach. Wyznaczyć pole jadalni.

75. Dla uszycia ubioru ochronnego wojskowego (do maskowania) posługują się szablonem wyobrażonym na rys. 55. Wymiary podano w centymetrach. Obliczyć pole szablonu.

76. 1) Pole trapezu $ABCD$ podzielono na połowy prostą EF ,



Rys. 54.



Rys. 55.

poprowadzoną równoległą do ramienia AB . Wyznaczyć odcinek AF , jeśli $AD=28\text{ cm}$ i $BC=12\text{ cm}$.

2) Przekątna trapezu dzieli jego pole w stosunku 3:7. W jakim stosunku dzieli to pole linia środkowa (licząc od podstawy mniejszej)?

77. Podstawy trapezu równoramiennego wynoszą 51 cm i 69 cm, a ramię 41 cm. Wyznaczyć pole.

78. Wyznaczyć pole trapezu równoramiennego o podstawach 42 cm i 54 cm i kącie 45° przy podstawie większej.

79. W trapezie prostokątnym kąt ostry przy podstawie wynosi 30° , suma podstaw m , a suma ramion n . Wyznaczyć pole.

80. Wyznaczyć pole trapezu o bokach równoległych 60 cm i 20 cm i ramionach 13 cm i 37 cm.

81. W trapezie równoramiennym większa podstawa równa się 44 m, ramię 17 m, a przekątna 39 m. Wyznaczyć pole trapezu.

82. 1) Wyznaczyć pole trapezu równoramiennego o podstawach 12 cm i 20 cm, którego przekątne są prostopadłe.

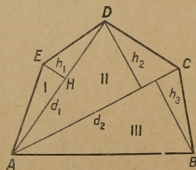
2) Wyznaczyć pole trapezu równoramiennego o wysokości h i przekątnych wzajemnie prostopadłych.

83. Wyznaczyć pole trapezu równoramiennego, w którym przekątna równa się c i tworzy z większą podstawą kąt 45° .

84. Wyznaczyć pole trapezu równoramiennego o podstawach 10 cm i 26 cm, w którym przekątne są prostopadłe do ramion.

85. Wyznaczyć pole trapezu o podstawach 142 cm i 89 cm i przekątnych 120 cm i 153 cm.

86. Po jednej stronie środka koła o promieniu R poprowadzono dwie cięciwy równoległe, które odcinają łuki 60° i 120° ; końce tych cięciw połączono. Wyznaczyć pole utworzonego trapezu.



Rys. 56.

87. Ramię trapezu równoramiennego opisanego na kole równa się a , kąt ostry przy podstawie 30° . Wyznaczyć pole tego trapezu.

88. 1) Podstawa trójkąta równa się 75 cm, a ramiona 65 cm i 70 cm; wysokość podzielono w stosunku 2:3 (licząc od wierzchołka) i przez punkt podziału poprowadzono prostą równoległą do podstawy. Wyznaczyć pole utworzonego trapezu.

2) Przekątne trapezu równają się 20 m i 15 m, wysokość 12 m. Wyznaczyć pole trapezu.

89. Stosunek podstaw i ramienia w trapezie równoramiennym wynosi 10:4:5. Pole trapezu wynosi 112 cm^2 . Wyznaczyć jego obwód.

Pole wielokąta.

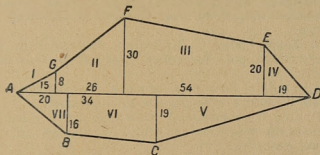
90. Na rysunku 56 podano plan działki ziemi w skali 1:10000. Na planie podano jej przekątne d_1 i d_2 ; oraz wysokości h_1 , h_2 i h_3 . Dane $d_1 = 44 \text{ mm}$, $d_2 = 50 \text{ mm}$, $h_1 = 7 \text{ mm}$, $h_2 = 20,4 \text{ mm}$, $h_3 = 21,6 \text{ mm}$.

Obliczyć w hektarach pole działki.

91. Obliczyć pole działki gruntu, której plan przedstawiono na rys. 57; wymiary podano w metrach.

92. Wyznaczyć pole czworokąta, jeśli jego przekątne równają się k i l , przy czym: 1) przekątne są wzajemnie prostopadłe, 2) tworzą kąt 30° .

93. Na bokach prostokąta zbudowano poza nim równoboczne trójkąty i wolne wierzchołki tych trójkątów połączono. Wyznaczyć pole utworzonego czworokąta, jeśli boki danego prostokąta są a i b .



Rys. 57.

94. Na odcinku AE wzięto punkt C tak, że $AC=a$ i $CE=b$. Na odcinkach AC i CE zbudowano po jednej stronie trójkąty równoboczne ABC i CDE i wierzchołki ich B i D połączono. Wyznaczyć pole czworokąta $ABDE$.

95. Niech M oznacza środek boku AD czworokąta $ABCD$. Dano: $MB \perp AB$, $MC \perp CD$, $AD=50$ cm, $AB=15$ cm i $CD=7$ cm. Wyznaczyć pole $ABCD$.

96. Na okręgu o promieniu r wzięto kolejne łuki $AB=30^\circ$, $BC=60^\circ$, $CD=90^\circ$ i $DE=120^\circ$ i utworzono pięciokąt $ABCDE$. Wyznaczyć jego pole.

97. 1) Obwód wielokąta opisanego równa się 60 cm, jego pole 240 cm². Wyznaczyć promień okręgu.

2) Na okręgu o promieniu 25 cm opisano wielokąt o polu 20 dm². Wyznaczyć jego obwód.

98. Wyznaczyć pole trójkąta foremnego opisanego na kole o promieniu r .

99. Bok foremnego sześciokąta równa się 84 cm. Obliczyć bok równoważnego mu foremnego trójkąta.

100. Podłogę w pokoju trzeba pokryć płytkami w postaci foremnych sześciokątów o boku 12 cm. Płaszczyzna podłogi ma długość $7,48$ m i szerokość $3,25$ m. Wyznaczyć ilość potrzebnych płytek parkietowych.

101. Pokój długości $5,6$ m i szerokości $4,5$ m ma balkon w postaci połowy sześciokąta foremnego o boku $1,6$ m. Wyznaczyć pole podłogi pokoju i balkonu.

102. 1) Wyznaczyć pole sześciokąta foremnego wpisanego w koło o promieniu R .

2) Wyznaczyć pole sześciokąta foremnego opisanego na kole o promieniu r .

3) Wyznaczyć bok sześciokąta foremnego znając jego pole S .

103. Wyznaczyć pole foremnego ośmiokąta i dwunastokąta wpisanych w koło o promieniu R .

104. Przekrój żelazo-betonowego pała ma postać foremnego ośmiokąta. Największa odległość przeciwległych wierzchołków wynosi 224 mm . Wyznaczyć pole przekroju.

105. Odległość między przeciwległymi ścianami ośmiościennego słupa żelaznego wynosi 36 mm . Obliczyć płaszczyznę przekroju poprzecznego.

106. 1) Znając pole Q foremnego dwunastokąta wpisanego w koło, wyznaczyć pole foremnego sześciokąta wpisanego w to samo koło.

2) Znając pole Q foremnego ośmiokąta wpisanego w koło wyznaczyć pole kwadratu wpisanego w to samo koło.

107. 1) Koło o promieniu R podzielono na 6 równych części i punkty podziału połączono co drugi. Wyznaczyć pole powstałej sześciokątnej gwiazdy.

2) Koło o promieniu R podzielono na 8 równych części i punkty podziału połączono co drugi. Wyznaczyć pole powstałej ośmiokątnej gwiazdy.

Porównanie pól
trójkątów
i wielokątów.

108. 1) Dowieść, że każda prosta przechodząca przez środek symetrii równoległoboku, dzieli go na dwie równoważne części.

2) Przeprowadzić przez dany punkt prostą, która podzieli powierzchnię danego równoległoboku na połowy.

109. Podzielić dany równoległobok na n równoważnych części prostymi wychodzącymi z jego wierzchołka, jeśli 1) $n=6$, 2) $n=5$.

110. Środek jednej z przekątnych czworokąta połączono z końcami drugiej. Wykazać, że otrzymana linia łamana dzieli czworokąt na dwie części równoważne.

111. Skoro przekątna dowolnego czworokąta połowi drugą przekątną, wykazać, że połowi ona także i pole czworokąta.

112. 1) Wykazać, że prosta przechodząca przez środki boków równoległych trapezu, dzieli go na dwie równoważne części.

2) Punkt leżący na prostej łączącej środki podstaw trapezu połączony ze wszystkimi wierzchołkami trapezu. Wykazać, że trójkąty przyległe do ramion trapezu są równoważne.

113. 1) Przekątne trapezu dzielą go na 4 trójkąty. Dowieść, że trójkąty przyległe do jego ramion są równoważne.

2) Dowieść, że jeśli w trapezie środek M jednego ramienia AB połączymy z końcami drugiego CD , to pole utworzonego trójkąta CMD będzie połową pola trapezu.

114. Przekątna trapezu dzieli jego pole w stosunku $3:7$. W jakim stosunku zostanie podzielone pole tego trapezu, jeśli z końca górnej podstawy poprowadzimy prostą równoległą do ramienia?

115. 1) Zbudować kwadrat równoważny sumie dwu danych kwadratów o bokach a i b ($a=5\text{ cm}$, $b=12\text{ cm}$).

2) Zbudować kwadrat, którego pole jest trzy razy większe od pola danego kwadratu o boku a .

116. Na bokach trójkąta prostokątnego zbudowano kwadraty i wolne ich wierzchołki połączono. Wyznaczyć pole utworzonego sześciokąta, jeśli przyprostokątne trójkąta wynoszą a i b .

117. W jakim stosunku pozostają do siebie pola P i Q dwu trójkątów mających równe kąty zawarte w jednym trójkącie między bokami 12 dm i 28 dm , a w drugim — między bokami 21 dm i 24 dm ?

118. W trójkącie ABC bok BA został przedłużony o długość $AD = 0,2 BA$ i bok BC — o długość $CE = \frac{2}{3} BC$; punkty D i E połączono. Znaleźć stosunek pól ABC i DBE .

119. Wyprowadzić właściwość dwusiecznej trójkąta drogą porównania pól.

120. Ile razy zwiększy się pole trójkąta, jeżeli każdy bok zwiększymy 4 razy? 5 razy?

121. Bok trójkąta wynosi 5 dm . Ile wynosi odpowiedni bok podobnego do niego trójkąta, który ma dwukrotnie większe pole?

122. Jaką część pola trójkąta (licząc od wierzchołka) odcina linia średnia trójkąta?

123. Wysokość trójkąta równa się h . W jakiej odległości od wierzchołka znajduje się równoległa do podstawy połowiąca jego pole?

124. 1) Bok trójkąta został podzielony w stosunku 2:3:4 (od wierzchołka do podstawy). Z punktów podziału poprowadzono proste równoległe do drugiego boku. W jakim stosunku zostało podzielone pole trójkąta?

2) Przez punkt E dzielący bok AB trójkąta ABC w stosunku $m:n$, poprowadzono równoległą do BC . Jaki jest stosunek pola odciętego trójkąta do pola utworzonego trapezu?

125. Prosta równoległa do boku trójkąta dzieli jego drugi bok w stosunku 5:3 (licząc od wierzchołka), a pole — na części, których różnica wynosi 56 cm^2 . Wyznaczyć pole całego trójkąta.

126. Pole trójkąta zostało podzielone prostymi równoległymi do podstawy w stosunku 9:55:161 (od wierzchołka do podstawy). W jakim stosunku podzielone zostały pozostałe boki?

127. Jaką część pola jednoimiennych opisanych figur stanowią pola następujących wpisanych figur: 1) foremnego trójkąta, 2) kwadratu, 3) foremnego sześciokąta? (Pytania rozwiązać nie obliczając samych pól).

128. Suma pól trzech podobnych wielokątów wynosi 232 dm^2 , a obwody ich mają się do siebie jak 2:3:4. Wyznaczyć pole każdego wielokąta.

129. Na bokach trójkąta prostokątnego zbudowano podobne figury, przy czym boki trójkąta są odpowiednimi bokami tych figur. Wykazać, że pole figury zbudowanej na przeciwprostokątnej jest równe sumie pól figur, zbudowanych na przyprostokątnych.

130. 1) Zbudować kwadrat równoważny różnicy dwu danych kwadratów.

2) Zbudować kwadrat równoważny sumie n danych kwadratów.

131. Zbudować trójkąt równoważny danemu wielokątowi.

132. Dany jest stosunek boków dwu kwadratów i jeden z kwadratów. Zbudować drugi kwadrat.

133. W równoległoboku połączono środek każdego boku z końcem dalszego, skutkiem czego powstał wewnętrzny równoległobok. Wykazać, że jego pole wynosi $\frac{1}{5}$ pola danego równoległoboku.

134. W jakim stosunku pozostają do siebie podstawy takiego trapezu, który jest równoważny swemu trójkątowi dopełniającemu?

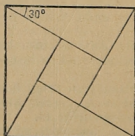
135. Pole trójkąta prostokątnego zostało przepołowione prostą prostopadłą do przeciwprostokątnej. Znaleźć odległość między tą prostą i wierzchołkiem mniejszego kąta ostrego, jeśli większa przyprostokątna wynosi 20 m.

136. W trójkącie prostokątnym stosunek przyprostokątnych wynosi 3:4 a wysokość dzieli pole trójkąta na części, których różnica wynosi 84 dm^2 . Wyznaczyć pole całego trójkąta.

137. 1) Trzy środkowe trójkąta ABC przecinają się w punkcie M . Dowieść, że pole trójkąta AMB stanowi trzecią część pola trójkąta ABC .

2) Dowieść, że trzy środkowe trójkąta dzielą jego pole na 6 równych części.

138. Z zewnętrznego punktu A poprowadzono do koła styczną AB i sieczną ACD . Wyznaczyć pole trójkąta CBD , jeśli $AC:AB = 2:3$ a pole $ABC = 20 \text{ dm}^2$.



Rys. 58.

139. AB i CD — dwie nieprzecinające się cięciwy, przy czym $\sphericalangle AB = 120^\circ$, a $\sphericalangle CD = 90^\circ$. M — punkt przecięcia się cięciw AD i BC . Wyznaczyć pola AMB i CMD , jeśli ich suma wynosi 100 cm^2 .

140. AB — średnica BC i AC — cięciwy, przy czym $\sphericalangle BC = 60^\circ$, D jest punktem przecięcia się przedłużenia średnicy ze styczną CD . Znaleźć stosunek pól DCB i DCA .

141. Każdy bok kwadratu obrócono o 30° do wnętrza kwadratu, jak wskazuje rys. 58. Wyznaczyć stosunek boków i pól danego

kwadratu i kwadratu utworzonego z obróconych boków.

142. $ABCD$ — dany kwadrat, E i F — środki boków CD i AD , M jest punktem przecięcia się prostych BE i FC . Wykazać, że pole BMC stanowi $\frac{1}{5}$ pola kwadratu.

143. Trójkąt i wpisany weń romb mają wspólny kąt. Boki trójkąta zawierające ten kąt, tworzą stosunek $m:n$. Znaleźć stosunek pola rombu do pola trójkąta.

§ 14. Wyznaczenie w trójkącie: środkowych, dwusiecznych i promieni koła opisanego i wpisanego.

Obliczanie środkowych.

1. Wykazać, że środkowa m_c poprowadzona do boku c w trójkącie o bokach a , b , c równa się $\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$.

2. 1) Podstawa trójkąta równa się 22 *dcm*, a pozostałe boki 13 *dcm* i 19 *dcm*. Wyznaczyć środkową względem podstawy.

2) Wyznaczyć wszystkie środkowe trójkąta o bokach $a=2$, $b=3$, $c=4$.

3. W trójkącie dwa boki równają się 11 i 23, a środkowa względem pierwszego boku 10. Znaleźć bok trzeci.

4. W trójkącie jeden z boków równa się 26 *dcm*, a środkowa względem niego równa się 16 *dcm*. Wyznaczyć dwa pozostałe boki tego trójkąta, jeśli mają się one do siebie jak 3:5.

5. Środkowe równoramienne trójkąta równają się 15, 15 i 18. Znaleźć pole.

6. Bok trójkąta równa się 23, środkowe względem pozostałych boków wynoszą 15 i $22\frac{1}{2}$. Znaleźć trzecią środkową.

7. 1) Zbudować trójkąt mając daną podstawę i dwie środkowe wychodzące z końców podstawy.

2) Podstawa trójkąta równa się 10, a środkowe względem dwu innych boków są równe 9 i 12. Obliczyć pole trójkąta.

8. 1) Zbudować trójkąt o danych trzech środkowych.

2) Środkowe trójkąta równają się 9, 12 i 15. Obliczyć pole trójkąta.

9. Wykazać, że kwadrat dwusiecznej kąta w trójkącie równa się różnicy iloczynu boków zawierających ten kąt i iloczynu odcinków boku przeciwległego.

10. W trójkącie ABC wyznaczyć dwusieczną kąta A przy długościach boków: 1) $a=7$, $b=6$, $c=8$; 2) $a=18$, $b=15$, $c=12$; 3) $a=39$, $b=20$, $c=45$.

11. Dwa boki trójkąta wynoszą 6 i 12 a kąt między nimi 120° . Wyznaczyć dwusieczną danego kąta.

12. Mając dane dwa boki trójkąta i dwusieczną kąta między nimi, wyznaczyć odcinki trzeciego boku. Dane: $b=20$, $c=45$, $b_A=24$.

13. 1) Dowieść, że promień koła wpisanego w trójkąt prostokątny równa się połowie różnicy sumy przyprostokątnych i przeciwprostokątnej.

2) Przyprostokątne równają się 40 *cm* i 42 *cm*. Wyznaczyć promienie kół opisanego i wpisanego.

14. Wyznaczyć względne położenie środka koła opisanego na trójkącie, jeśli dane są trzy jego boki, względnie ich stosunki: 1) 5, 8, 10; 2) 8, 7, 5; 3) 80, 315, 325.

15. Dowieść, że w każdym trójkącie iloczyn dwu boków równa się iloczynowi średnicy koła opisanego i wysokości spuszczonej na bok trzeci.

16. Pole trójkąta wynosi S . Jego obwód $a+b+c=2p$. Wykazać, że: 1) promień koła wpisanego $r=\frac{S}{p}$; 2) promień koła opisanego

$$R=\frac{abc}{4S}.$$

17. Wyznaczyć R i r w trójkącie, którego boki mają długość: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

Dwusieczne.

Promienie koła
wpisanego
i opisanego.

18. Ramię trójkąta równoramiennego wynosi 6, a wysokość 4. Znaleźć promień koła opisanego.

19. W koło o promieniu R wpisano trójkąt, którego jeden kąt wynosi: 1) 30° ; 2) 45° . Znaleźć przeciwległy bok trójkąta.

20. Wykazać słuszność formuły:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

21. Wyznaczyć pole trójkąta mając dany promień R koła opisanego i dwa kąty 45° i 60° .

22. Wyznaczyć przystroikowane trójkąta prostokątnego, jeśli ich stosunek wynosi 20:21, a różnica promieni koła opisanego i wpisanego wynosi 17 cm.

23. W koło o promieniu R wpisano prostokąt $ABCD$. Wyznaczyć jego pole, jeśli łuk AB zawiera α stopni (α wynosi: 1) 30° , 2) 45° , 3) 60° , 4) 90°).

§ 15. Długość okręgu i łuku. Pole koła i jego części.

Długość okręgu
i łuku.

1. Obliczyć długość okręgu o promieniu:
1) 10 m, 2) 15 m, 3) 35 cm.

2. Obliczyć promień, jeśli długość okręgu wynosi: 1) 1 m, 2) 25 cm, 3) 4,75 dm.

3. Odległość między środkami dwu zębów koła zębatego o średnicy 0,66 m wynosi 34,5 mm licząc wzdłuż łuku. Ile zębów ma koło?

4. Koło ma średnicę 1,4 m i robi 80 obrotów na minutę. Wyznaczyć prędkość punktu leżącego na obwodzie koła.

5. Wyznaczyć długość łuku, mającego przy danym promieniu R : 1) 45° , 2) $24^\circ 30'$, 3) $5^\circ 14' 15''$.

6. Wyznaczyć promień łuku o długości l i mierze stopniowej: 1) 135° , 2) $10^\circ 40'$.

7. Obwód koła (rys. 59) ma długość 540 mm, pas dotyka koła po łuku długości 200 mm. Wyznaczyć kąt (α), pod którym pas obejmuje koło.

8. Promień zaokrąglenia toru kolejowego wynosi 1.200 m; długość łuku równa się 450 m. Ile stopni ma ten łuk?

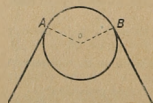
9. 1) Okrąg o promieniu 2 cm rozgięto w łuk o promieniu 5 cm. Znaleźć utworzony kąt środkowy.

2) Łuk o promieniu 4 cm, odpowiadający kątowi 120° równa się długości pewnego okręgu. Znaleźć promień tego okręgu.

3) Okrąg o promieniu 6 cm rozgięto w łuk o kącie środkowym 300° . Znaleźć promień łuku.

10. Wyznaczyć liczbę stopni łuku o danej długości l i promieniu R : 1) $R=10$; $l=45$; 2) $R=15$, $l=6$.

11. Ile stopni i minut ma łuk, którego długość równa się promieniowi ($\frac{1}{\pi} = 0,31831$)?



Rys. 59.

12. Znajac cięciwę a , wyznaczyć długość jej łuku, jeśli ma on: 1) 60° , 2) 90° , 3) 120° .

13. Znajac długość łuku l wyznaczyć jego cięciwę, jeśli kąt wynosi: 1) 60° , 2) 90° , 3) 120° .

14. Okrąg jest dłuższy od swej średnicy o 107 cm. Wyznaczyć jego promień.

15. 1) O ile zwiększy się długość okręgu, jeśli promień zwiększy się o m ?

2) Przypuśćmy, że kulę ziemską opasano na równiku obręczą i tak samo opasano piłkę nożną na jej wielkim kole, a następnie obie obręcze rozszerzono o 1 m. Obręcze, które przedtem obejmowały te kule, rozluźnią się i wytworzy się między nimi a kulami pewien odstęp. W jakim wypadku odstęp ten będzie większy, czy dla kuli ziemskiej, czy dla piłki?

16. 1) Żelazna rura o ściankach grubości 6 mm ma w przekroju okrąg zewnętrzny o długości 22 cm. Znaleźć długość okręgu wewnętrznego.

2) Znaleźć szerokość pierścienia koła utworzonego przez dwa koncentryczne okręgi o długościach 167 cm i 117 cm.

17. Wyznaczyć długość okręgu, skoro jest on o 7 cm dłuższy od obwodu foremnego sześciokąta wpisanego.

18. Łuk odcinka koła ma 120° , i długość l . Wyznaczyć długość okręgu wpisanego w ten odcinek.

19. Z końców łuku ABC , mającego 120° , poprowadzono styczne do wzajemnego przecięcia się w punkcie D i w utworzoną w ten sposób figurę $ABCD$ wpisano okrąg. Wykazać, że długość tego okręgu równa się długości łuku ABC .

20. Na rysunku 60 podano postać

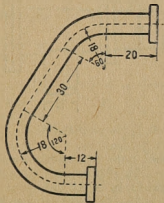
i wymiary w centymetrach kolankowej rury maszyny parowej. Znaleźć długość rury. (Długość należy mierzyć wzdłuż osi, tj. środkowej linii kropkowanej).

21. Znaleźć promień takiego okręgu, którego długość i pole wyrażałyby się tą samą liczbą.

22. Wyznaczyć błąd względny, jaki popełniamy, zastępując długość półkola $\frac{1}{2}C$ przez $a_3 + a_4$ (w celu przybliżonego wyprostowania okręgu).

23. Jedno z przybliżonych wyprostowań okręgu polega na tym, że zastępujemy go obwodem trójkąta prostokątnego o jednej przyprostokątnej równej $\frac{6}{5}$ średnicy, a w drugiej $\frac{3}{5}$ średnicy. Wyznaczyć błąd bezwzględny.

24. Wyznaczyć pole koła przy następujących długościach promienia: 1) 10 m; 2) 4 dcm; 3) 2,6 cm (przyjąć $\pi=3,14$).



Rys. 60.

25. Wyznaczyć promień koła, jeśli jego pole równa się: 1) 2 cm^2 , 2) 50 m^2 , 3) 17 dcm^2 .

26. Ręczny granat wzoru z r. 1914 podczas wybuchu może ranić odłamkami nie dalej jak na 45 m od miejsca wybuchu. Wyznaczyć jego pole działania.

27. Znaleźć pole przekroju tłoka pompy powietrznej mającego średnicę 10 cm .

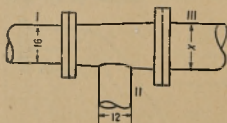
28. Przekrój tłoka pompy wynosi $12,56 \text{ cm}^2$. Wyznaczyć średnicę tego tłoka.

29. Drzewo ma w obwodzie $1,884 \text{ m}$. Znaleźć pole jego przekroju poprzecznego, który ma (w przybliżeniu) postać koła.

30. Jaki ciężar wytrzyma sznur konopny o obwodzie 18 cm , skoro dopuszczalne obciążenie wynosi 100 kg/cm^2 ?

31. 1) Wyznaczyć pole koła, jeśli długość okręgu równa się 8 cm .

2) Wyznaczyć długość okręgu, jeśli pole koła równa się 18 cm^2 .



Rys. 61.

32. 1) Wydajność przepustowa rury III (rys. 61) jest równa sumie wydajności rur I i II. Wyznaczyć konstrukcyjnie wielkość X na podstawie wymiarów danych na rysunku.

2) Dwie rury o średnicach 6 cm i 8 cm trzeba zamienić na jedną rurę o tej samej zdolności przepustowej. Znaleźć obwód tej rury.

33. Wyznaczyć pole koła, jeśli pole wpisanego kwadratu równa się F .

34. Wyznaczyć pole koła, które jest mniejsze od pola opisanego kwadratu o $4,3 \text{ m}^2$.

35. Znaleźć stosunek pól wpisanego i opisanego koła dla: 1) foremnego trójkąta; 2) kwadratu; 3) foremnego sześciokąta.

36. Pionowy kocioł walcowy o średnicy 78 cm i ciężarze 752 kg ma w dnie otwór okrągły, którego zewnętrzna średnica wynosi 36 cm . Kocioł opiera się na fundamencie całym polem swego dna. Wyznaczyć parcie ciężaru kotła na 1 cm^2 powierzchni fundamentu.

37. W pierścieniu utworzonym przez dwa koła koncentryczne cięciwa większego koła styczna do mniejszego wynosi a . Znaleźć pole pierścienia.

38. Do danego koła stycznych jest sześć równych mu kół, stycznych również między sobą. Powstała z tych siedmiu kół figurę otoczono takim koncentrycznym pierścieniem, który jest równoważny sumie tych kół. Wykazać, że szerokość tego pierścienia równa się promieniowi kół.

39. Wyznaczyć pole wycinka o promieniu r , którego łuk ma: 1) $67^\circ 30'$; 2) $15^\circ 45'$.

40. Wyznaczyć promień wycinka, jeśli jego pole równa się q , a kąt środkowy wynosi 1) 72° , 2) 36° .

Pole pierścienia.

Wycinek i odci-
ciniek koła.

41. Promień wycinka równa się r , a jego pole q . Znaleźć wielkość kąta środkowego (albo łuku).

42. Wyznaczyć pole odcinka o promieniu R , jeśli łuk ma: 1) 90° , 2) 60° , 3) 45° , 4) 30° .

43. Wyznaczyć pole odcinka, którego cięciwa wynosi a , a łuk ma: 1) 120° , 2) 90° , 3) 60° .

44. Wyznaczyć pole okna (rys. 62), które ma postać prostokąta, zakończonego u góry łukiem koła, wynoszącym 60° ; wysokość okna liczona od środka łuku do podstawy wynosi $2,4\text{ m}$, a jego szerokość $1,6\text{ m}$.

Pole figur zawartych między prostymi i łukami kół.

45. 1) Półokrąg o promieniu r podzielono na trzy równe części i punkty podziału połączone z końcami średnicy. Wyznaczyć pole środkowej części półkola.

2) Końce łuku CD są jednakowo odległe od końców średnicy AB . Wyznaczyć pole zawarte między łukiem CD i cięciwami AC i AD , jeśli pole koła wynosi Q , a łuk CD ma n° .

46. W kole o promieniu R poprowadzono po jednej stronie środka dwie równoległe cięciwy, z których jedna odcina łuk 120° , a druga 60° . Wyznaczyć część pola koła, zawartą między cięciwami.

47. Wspólna cięciwa dwu przecinających się okręgów wynosi a i ściąga w jednym kole łuk 60° , a w drugim 90° . Wyznaczyć pole wspólnej części obu kół (dwa wypadki).

48. Pole koła Q . Wyznaczyć pole wpisanego weń prostokąta, skoro jego boki tworzą stosunek $m:n$.

49. W koło o promieniu R wpisano prostokąt, którego pole równa się połowie pola koła. Wyznaczyć boki tego prostokąta.

50. Na kole o polu Q opisano romb mający kąt 30° . Wyznaczyć pole tego rombu.

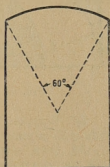
51. Wyznaczyć pole pierścienia utworzonego przez dwa koła, z których jedno jest opisane, a drugie wpisane w trójkąt foremny o polu Q .

52. AMB — łuk mający 120° , OA i OB — promienie, AC i BC — styczne; DME — łuk zakreślony ze środka C między CA i CB i styczny do łuku AMB . Znaleźć stosunek pól wycinków $CDME$ i $OAMB$.

53. Z końców łuku ACB poprowadzono styczne do przecięcia się w punkcie D . Wyznaczyć pole $DACB$, zawarte między obiema stycznymi i łukiem, jeśli promień wynosi R , a łuk ma: 1) 90° ; 2) 120° ; 3) 60° .

54. Ze środka trójkąta równobocznego opisano okrąg przecinający boki trójkąta tak, że zewnętrzne łuki mają po 90° . Skoro bok trójkąta wynosi a , wyznaczyć pole zawarte między wewnętrznymi łukami i środkowymi odcinkami boków.

55. 1) Ile razy zwiększy się pole koła, skoro jego średnicę zwiększymy trzy razy? Ile razy pole koła się zmniejszy, skoro promień zmniejszymy 5 razy?

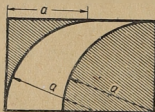


Rys. 62.

2) Ile razy należy zmniejszyć promień koła, aby jego pole zmniejszyć 4 razy? Ile razy trzeba zwiększyć średnicę koła, aby pole zwiększyć 5 razy?

56. 1) Czy można rurę wodociągową o średnicy 50 mm zastąpić dwiema rurami, z których każda ma średnicę 25 mm? Czy pole przekroju jednej dużej rury będzie równe sumie pól dwóch małych?

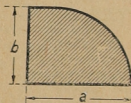
57. Obliczyć pole zacieniowanej części prostokąta na rys. 63.



Rys. 63.



Rys. 64.

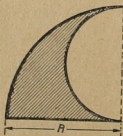


Rys. 65.

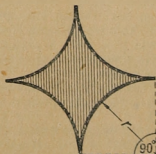
58. Wyznaczyć pola figur zacieniowanych na rys. 64 — 67, przy podanych wymiarach.

59. Dwa równe półkoła o promieniu R nałożono tak, że ich średnice są równoległe, a półokrąg jednego przechodzi przez środek drugiego. Wyznaczyć pole wspólnej części półkoli.

60. Na każdym boku a kwadratu jako na średnicy opisano półkoło ku wnętrzu kwadratu. Wyznaczyć pole utworzonej rozetki.



Rys. 66.



Rys. 67.

61. Na bokach rombu jako średnicach opisano półkoła ku wnętrzu rombu. Wyznaczyć pole utworzonej rozetki, jeśli przekątne rombu wynoszą a i b .

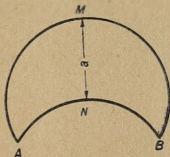
62. Średnicę koła podzielono na równe części i z obu jej końców poprowadzono półokręgi przez wszystkie punkty podziału, przy czym z jednego końca wszystkie półokręgi nad średnicą, a z drugiego pod nią. Wykazać, że utworzone zgięte linie dzielą koło na części jednakowej wielkości, a obwód każdej części równa się długości okręgu.

63. W trójkącie równobocznym o boku a poprowadzono łuki przez każde dwa wierzchołki i przez środek trójkąta (rys. 68). Wyznaczyć pole utworzonej rozetki.

64. Między punktami A i B poprowadzono dwa łuki zwrócone wypukłością w tę samą stronę; łuk AMB ma 240° a łuk ANB 120° . Odległość między środkami tych łuków wynosi a . Wyznaczyć pole „księżycy“ utworzonego przez dane łuki (rys. 69).



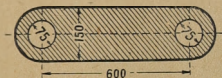
Rys. 68.



Rys. 69.

65. AB i CD są dwiema prostymi do siebie średnicami. Z punktu D jako ze środka zakreślono promieniem DA łuk AMB . Wykazać, że „księżyc“ $AMBC$ jest równoważny trójkątowi ABD .

66. Z punktu C danego półokręgu spuszczonego prostą CD na średnicę AB i na odcinkach AD i DB zbudowano nowe półokręgi po tej samej stronie jak i dany. Wykazać, że pole zawarte między trzema półokręgami równa się polu koła o średnicy CD .

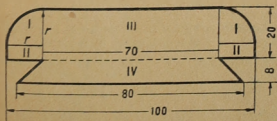


Rys. 70.

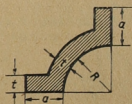
67. Obliczyć pole figury zacieniowanej na rys. 70. Wymiary podano w milimetrach.

68. Obliczyć pole przekroju przedstawionego na rys. 71. Wymiary podano w milimetrach.

69. Wyznaczyć pole przekroju poprzecznego kształtownika żelaznego przedstawionego na rys. 72.



Rys. 71.



Rys. 72.

70. Dwie równoległe cięciwy równają się 14 m i 40 m , a odległość między nimi 39 m . Wyznaczyć pole koła.

71. Wyznaczyć promień koła wpisanego w dany wycinek jeśli promień wycinka równa się R , a łuk zawiera α stopni [$\alpha = 1) 60^\circ$, $2) 90^\circ$, $3) 120^\circ$].

§ 16. Zastosowanie algebry do geometrii. Podział w stosunku średnim i skrajnym.

Konstrukcja
formuł.

1. 1) Zbudować odcinki wynoszące $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$.

2) Na rys. 73 dano: $OA = AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HK = KL = 1$, przy czym $AB \perp AO$, $BC \perp BO$, $CD \perp CO$ itd. Obliczyć OB , OC , OD , OE , OF , OG , OH , OK , OL .

3) Zbudować odcinki wynoszące:

$\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $2\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, $\frac{3}{5}\sqrt{6}$.

2. Zbudować trójkąt o bokach: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$.

3. Wskazać wymiary poniższych wyrażeń, w których każda litera, prócz π , oznacza długość odcinka:

1) $3,5a$; 2) $2\pi R$; 3) $R\sqrt{3}$;

4) $\frac{bh}{2}$; 5) abc ; 6) $\pi r^2 h$; 7) $\frac{abc}{d}$;

8) $\frac{3a}{2b+c-4d}$; 9) $\sqrt{ab}$; 10) $0,5\pi D$;

11) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 12) $\sqrt[3]{a^2 h}$;

13) $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; 14) $2\pi R^2 + 2\pi RH$;

15) $\frac{\pi D^2 H}{4}$; 16) $\frac{(a+b)h}{2}$; 17) $\frac{4}{3}\pi R^3$; 18) $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

4. Które z poniższych formuł nie są jednorodne:

1) $x = \frac{ab}{c} + \frac{b^2}{d} - 3a$; 2) $x = \sqrt{c-2}$; 3) $x^2 = \frac{a^3-b^3}{a+b}$;

4) $x = 2$; 5) $x = a + bc^2$; 6) $x = \frac{a}{b}$.

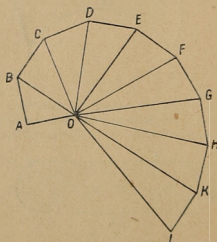
5. Zbudować trójkąt o bokach $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} - 1$, $c = 2\sqrt{3}$.

6. Zbudować odcinki wyrażone następującymi formułami:

1) $x = 3\frac{1}{2}a$; 2) $x = a - (b + 3d)$; 3) $x = 3c - (2m - n)$;

4) $x = \frac{2ab}{3c}$; 5) $x = \frac{ab}{c+d}$; 6) $x = \frac{a^2}{b}$;

7) $x = \pi r$; 8) $x = \frac{pqr}{st}$; 9) $x = \frac{ab}{c-d}$.



Rys. 73.

7. Zbudować odcinki wyrażone formułami:

1) $x = \sqrt{3ab}$;

2) $x = \sqrt{\frac{a^2 b}{c}}$;

3) $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$;

4) $x = \sqrt{4a^2 - b^2}$;

5) $x = \sqrt{b^2 + 3c^2}$;

6) $x = a \sqrt{\frac{a+c}{b+d}}$;

Konstrukcja
figur.

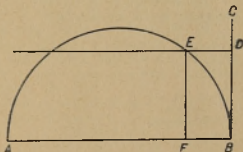
8. Zbudować kwadrat równoważny danemu trójkątowi równobocznemu o boku a .

9. Zbudować koło, którego pole jest dwa razy większe od pola danego koła o promieniu R .

10. Dane koło o promieniu R przepołowić okręgiem koncentrycznym.

11. Zbudować kwadrat równoważny $\frac{3}{5}$ równoległoboku o boku a i wysokości nań spuszczonej h .

12. Zbudować koło równoważne pierścieniowi zawartemu między dwoma koncentrycznymi okręgami o promieniach R i r .



Rys. 74.

13. Zbudować trójkąt o podstawie a i kącie 30° do niej przyległym, tak aby był równoważny danemu trójkątowi równoramiennemu o podstawie b i wysokości h .

14. Skonstruować pierwiastki równań kwadratowych $x^2 \pm px \pm q^2 = 0$.

15. 1) Na AB jako na średnicy (rys. 74) narysowano półokrąg. Dane: $AB = p$, $BC \perp AB$, $BD = q$, $DE \parallel AB$, $EF \perp AB$. Wykazać, że odcinki

AF i FB są pierwiastkami równania kwadratowego $x^2 - px + q^2 = 0$.

2) Zastosować powyższą konstrukcję do konstrukcji pierwiastków równania $x^2 - 6,5x + 4 = 0$, nie rozwiązując równania.

3) Dlaczego stosowanie postępowania z powyższego przykładu do równania $x^2 - 2,5x + 9 = 0$ nie daje wymaganego wyniku?

Podział w sto-
sunku średnim
i skrajnym.

16. Podzielić dany odcinek a w stosunku średnim i skrajnym, to znaczy podzielić go na dwie części, tak żeby część większa była średnią proporcjonalną między całym odcinkiem a jego mniejszą częścią.

17. 1) Wykazać, że bok foremnego wpisanego dziesięciokąta równa się większemu odcinkowi promienia, podzielonego w stosunku średnim i skrajnym.

2) Obliczyć a_{10} znając R .

18. Skoro dowolny odcinek podzielimy w stosunku średnim i skrajnym, to jego większa część stanowi w przybliżeniu $\frac{5}{8}$ całego odcinka. Sprawdzić to i wyznaczyć stopień dokładności tego przybliżenia.

19. 1) Wyznaczyć większą część odcinka podzielonego w stosunku średnim i skrajnym, jeśli część mniejsza wynosi b .

2) Wykazać, że skoro mniejszą część odcinka podzielonego w stosunku średnim i skrajnym odłożymy na części większej, to część większa również będzie podzielona w stosunku średnim i skrajnym.

20. Średnicę podzielono w stosunku średnim i skrajnym, prostopadłą poprowadzoną z punktu leżącego na okręgu. Promień okręgu równa się R . Znaleźć długość prostopadłej.

21. Wykazać, że w foremnym pięciokącie dwie przecinające się przekątne dzielą się nawzajem w stosunku średnim i skrajnym.

22. Wykazać, że skoro promień koła podzielimy w stosunku średnim i skrajnym i większą częścią opiszemy okrąg koncentryczny, to pole danego koła będzie również podzielone w stosunku średnim i skrajnym, przy czym większą częścią będzie pierścień.

Zastosowanie
metody
algebraicznej.

23. Na przedłużeniu średnicy okręgu o promieniu r znaleźć taki punkt, aby styczna poprowadzona z niego do danego okręgu równała się średnicy.

24. W dane półkole wpisać kwadrat.

25. W dany trójkąt o podstawie a i wysokości h wpisać prostokąt o obwodzie $2p$.

26. Dany trójkąt przepołować prostą równoległą do podstawy.

27. Pole trójkąta przepołować prostą prostopadłą do podstawy.

28. W dany romb wpisać prostokąt, którego boki będą równoległe do przekątnej rombu i którego pole równa się $\frac{1}{3}$ pola rombu.

29. W dany kwadrat wpisać równoboczny trójkąt, tak aby figury te miały jeden z wierzchołków wspólny.

30. W kwadrat o boku a wpisać drugi kwadrat o boku b .

31. Zbudować okrąg styczny do danego okręgu o promieniu r i do danej prostej w danym na niej punkcie.

32. Dane są 2 prostokąty. Zbudować trzeci prostokąt o takim samym obwodzie jak jeden z danych prostokątów i równoważny drugiemu.

33. W dany trójkąt wpisać prostokąt, którego podstawa tworzy z wysokością stosunek $m:n$.

34. W równoległoboku $ABCD$ bok $AB=a$, $BC=b$. Poprowadzić prostą EF , tak aby odcinała ona równoległobok $ABEF$ podobny do $ABCD$.

35. W równoległoboku $ABCD$ bok $AB=a$ i $BC=b$. Poprowadzić prostą EF równoległą do AB , tak aby dzieliła ona dany równoległobok na dwa podobne do siebie równoległoboki.

36. W kąty A i C prostokąta $ABCD$ wpisać dwa równe okręgi styczne do siebie.

37. Przez punkty A i B poprowadzić okrąg, który odcinałby na danej prostej cięciwę danej długości m .

ODPOWIEDZI.

§ 1.

2. 14 m. 3. 9,10 m. 4. 7 m. 5. 1 m. 8. 30 cm. 9. 5,5 m. 10. $a = 4,25$ cm, $b = 2,75$ cm. 11. 0,6 m. 12. $AB : BC = 1 : (m - 1) = 1 : 4$. 13. 8,1 m. 14. 96 m. 17. 1) Tak; 2) Tak; 3) Nie. 18. 1) 3; 2) 6; 10; 190; $\frac{n(n-1)}{2}$.

§ 2.

6. 1) $124^{\circ}33'$; 2) $144^{\circ}9'15''$; 3) $162^{\circ}1'55''$. 8. 1) $47^{\circ}49'30''$; 2) $41^{\circ}17'30''$; 3) $84^{\circ}48'42''$. 9. 1) 20° ; 2) $55^{\circ}37'$; 3) $67^{\circ}17'22''$. 12. 1) $178^{\circ}30'$; 2) $69^{\circ}35'$; 3) $166^{\circ}37'30''$. 14. 1) $31^{\circ}5'$; 2) $73^{\circ}52'30''$; 3) $24^{\circ}35'27'',5$; 4) $20^{\circ}7'35''$. 16. 1) $3\frac{1}{2}$; 2) $2\frac{3}{4}$; 3) 0,7. 17. $1\frac{3}{7}d$. 18. $1\frac{5}{7}d$. 20. Przedłużyć AB albo CB za punkt B . 21. 36° i 144° . 22. $\frac{8}{9}d$ i $1\frac{1}{9}d$. 23. 54° . 24. Tak. 25. Tak. 26. $\frac{3}{16}d$. 28. 72° i 144° . 29. $\frac{1}{3}d$; $\frac{4}{9}d$; $\frac{5}{9}d$; $\frac{2}{3}d$. 30. 36° . 31. 20° ; $22^{\circ}30'$. 32. $1\frac{8}{11}d$. 33. $\frac{4}{15}d$; $\frac{8}{15}d$; $1\frac{1}{15}d$; $\frac{2}{15}d$. 34. $1\frac{2}{5}d$; $\frac{3}{5}d$; $1\frac{2}{5}d$. 36. 70° . 37. $1\frac{5}{8}d$.

§ 3.

2. 10 m. 7. *Wskazówka*. Najpierw dowieść równości trójkątów DBE i DFG . 9. Równoboczny. 11. Mogą być 2 trójkąty, 1 lub ani jednego. 13. 1) Tak, 2) nie, 3) nie. 14. 1) Nie, 2) tak. 15. 2 m. 16. 0,3 m. 17. 10 m. 18. 10 cm, 10 cm, 1 cm. 19. *Wskazówka*. Skoro a, b, c są bokami trójkąta, to jego obwód równa się sumie $a + b + c = a + (b + c)$. Skoro w tej sumie zastąpimy składnik $(b + c)$ liczbą a , to suma się zmniejszy, bo $a < b + c$. Po podstawieniu otrzymamy $2a$; to znaczy $2a$ mniejsze od $a + b + c$ i $a < \frac{a + b + c}{2}$. 20. *Wskazówka*. Każdy bok trójkąta jest mniejszy od sumy odcinków łączących jego końce z wybranym punktem. 21. 13 m. 22. 15 m. 23. 10 cm. 24. 8 m. 29. Droga ma przechodzić przez środek odcinka łączącego punkty B i C . 30. Zbudować punkt symetryczny do jednego z danych punktów względem AB i połączyć go z drugim danym punktem. 32. Tylko wewnątrz ostrokątnego trójkąta. 33. *Wskazówka*. Zbudować okrąg o środku M i promieniu a i dwusieczną kąta. Mogą być dwa takie punkty, jeden albo wcale. 34. *Wskazówka*. Poprowadzić dwusieczną przeciwległego kąta. 36. *Wskazówka*. 1) Zbudować dwusieczną kąta A i prostą prostopadłą z środka BC . 2) Zakreślić okrąg ze środka C promieniem CB do przecięcia z ramionami kąta. Zadanie może mieć jedno, dwa lub trzy rozwiązania. 3) Zbudować punkt symetryczny wobec wierzchołka A względem prostej BC . 37. *Wskazówka*. Na drugim ramieniu kąta odłożyć odcinek $AD = l$.

i ze środka BD wystawić prostopadłą. 38. 8 m, 20 m, 16 m, 32 m. 39. Nie. 41. 10 m. 42. 1) 2; 2) 7; 3) $n-3$. 43. 1) 4; 2) 6; 3) $n-2$. 44. 1) 5; 2) 35; 3) $\frac{(n-3)n}{2}$. 45. $n = \frac{3m}{m-1}$; 6; 4; wypadek niemożliwy. 46. $n = 2m + 3$; 4; 5; 7; 8.

§ 4.

1. 72° i 108° . 2. $\frac{11}{16}d$. 3. $1\frac{2}{7}d$. 4. Zwiększyć o $1\frac{1}{16}d$. 5. $\frac{5}{8}d$. 6. 43° ; 137° i 137° . 7. 135° i 45° . 8. 36° i 144° . 9. 50° albo 130° . 10. $\frac{11}{24}d$. 11. 30° ; 60° ; 90° . 12. $\frac{14}{19}d$. 13. $44^\circ 59' 30''$. 14. $31^\circ 40'$. 15. 30° ; $17^\circ 30'$; 40° ; 45° ; 60° . 16. $37^\circ 29' 46''$. 17. $38^\circ 34'$. 18. $\frac{5}{14}d$. 19. $\frac{8}{9}d$. 20. 15° . 21. 30° . 22. $\frac{4}{7}d$; $\frac{4}{7}d$; $\frac{6}{7}d$. 23. $7,3m$. 24. 1) 18 cm; 2) 8 cm. 25. Wskazówka. Dany trójkąt jest połową równobocznego. 26. Wskazówka. Przedłużyć przyprostokątną poza wierzchołek kąta prostego, odłożyć odcinek równy tej przyprostokątnej i połączyć go z wierzchołkiem kąta ostrego. 28. 1,2 m. 29. $A = \frac{4}{9}d$; $C = \frac{8}{9}d$; $B = \frac{2}{3}d$. 30. 60° . 31. $\frac{5}{6}d$. 32. $1\frac{3}{8}d$; $\frac{5}{16}d$; $\frac{5}{16}d$. 34. $\frac{2}{3}d$. 35. Wskazówka. Zastosować twierdzenia: 1) o kątach przy podstawie trójkąta równoramiennego i 2) o kątach naprzemianległych wewnętrznych przy prostych równoległych. 36. 90° . 37. 135° . 38. $\frac{2}{3}d$. 39. $\frac{d}{2}$. 40. $\frac{7}{15}d$; $\frac{7}{15}d$; $1\frac{1}{15}d$. 41. 1) $\frac{4}{5}d$; $\frac{3}{5}d$; $\frac{3}{5}d$; 2) $1\frac{1}{5}d$; $\frac{2}{5}d$; $\frac{2}{5}d$. 42. Wskazówka. Przedłużyć środkową o równą jej długość. 44. Wskazówka. Obliczyć kąty CAD i $CAE = BAD$. 45. $1\frac{5}{9}d$. 46. Wskazówka. Obliczyć utworzone kąty. 47. $\angle D = \frac{1}{2}\angle A$; $\angle E = \frac{1}{2}\angle C$; $\angle DBE = d + \frac{1}{2}\angle B$. 48. $1\frac{1}{12}d$. 49. $\frac{4}{15}d$; $\frac{4}{15}d$; $1\frac{7}{15}d$. 50. $\frac{11}{17}d$. 51. $\frac{7}{9}d$. 52. 1) 10 d; 2) 16 d; 3) 46 d. 53. 54° , 81° , 108° , 135° , 162° . 54. Zwiększyć o 10 d. 55. 1) 17, 2) 26, 3) niemożliwe. 56. W czworokącie. 57. 13. 58. $2m + 2$. 59. $1\frac{4}{11}d$; $1\frac{10}{11}d$; $\frac{6}{11}d$; $\frac{2}{11}d$.

§ 5.

1. $1\frac{4}{7}d$; $\frac{3}{7}d$; $1\frac{4}{7}d$. 2. $\frac{19}{22}d$; $1\frac{3}{22}d$. 3. $BC = DA = 6\text{ cm}$; $CD = 9\text{ cm}$. 4. 0,6 m; 0,8 m. 5. $BE = 9\text{ cm}$; $EC = 6\text{ cm}$. 6. Czworokąt z dwiema parami równych przeciwległych boków jest równoległobokiem. 7. 3 cm; 2 cm; 3 cm. 8. 1) Nie, 2) nie, 3) tak. 9. Wskazówka. Dowieść równości kątów naprzemianległych wewnętrznych. 10. Tak: dwa równe trójkąty równoramienne przyłożone ramionami. 12. 4,8 m. 13. $AD = BC = 1\text{ m}$; $AB = BD = CD = 0,9\text{ m}$. 16. 10 dm. 17. $\frac{6}{11}d$; $1\frac{5}{11}d$. 18. Wskazówka. Poprowadzić przez wierzchołki A i C proste $\parallel BF$. 20. $\frac{4}{5}d$. 21. $\frac{5}{9}d$. 22. 1) Tak! punkt istnieje tylko w kwadracie; 2) tak. 23. 10 cm i 18 cm. 24. 1,2 m.

25. 4 m i 8 m. 26. 22°5. 27. 12 cm. 28. 25 cm i 10 cm albo 18,75 cm i 7,5 cm.
 29. 8 m. 30. Wskazówka. 3) dwa rozwiązania. 31. 32. Wskazówka. Dwa rozwią-
 zania, albo nieskończenie wiele, albo żadnego. 35. 120° i 60°. 38. $\frac{14}{17}d$ i $1\frac{3}{17}d$.
 39. 80° i 100°. 40. 60° i 120°. 41. 150°. 42. 1) Zagadnienie nie ma rozwiązania.
 45. 4 m. 47. 1 m. 48. 2 m. 49. 2 m. 50. 2) 2 cm. 51. 4 m i 8 m. 53. $2\frac{1}{2}m$. 54. 4 cm,
 5 cm i 6 cm. 55. 6 cm. 56. 2,4 m, 3,2 m, 4,8 m. 57. 3 dcm. Wskazówka. Poprowadzić
 przez B prostą równoległą do MN i spuścić na nią prostopadłą z A i O. 58. 3 dcm.
 59. 4 cm, 5 cm, 1 cm. 61. 16 dcm. 62. 13 cm, 16 cm, 19 cm, 22 cm, 25 cm. Wska-
 zówka. Najpierw dowieść (dodatkową konstrukcją), że równoległe odcinki otrzyma-
 nego rysunku wzrastają równomiernie. 63. $\angle A = \frac{4}{7}d$; $\angle B = 1\frac{3}{7}d$; $\angle C = 1\frac{2}{7}d$;
 $\angle D = \frac{5}{7}d$. 64. $AD = 0,8m$. 65. Nie. 66. 4 m. 67. Bliżej podstawy większej.
 68. $12\frac{1}{2}cm$, $11\frac{1}{2}cm$. 69. 3 m, 2 m. 70. 6 dcm i 10 dcm. 71. 1:2. 73. 6 m.
 74. $\frac{9}{13}d$ i $1\frac{4}{13}d$. 75. $\frac{2}{3}d$ i $1\frac{1}{3}d$. 76. 15 dcm, 9 dcm. 77. 1 m. 78. 24 cm i 36 cm.
 79. 1,5 m, 4 m. 80. 1,7 m. 81. $m-h$; $m+h$. 82. 10 cm. 83. $\frac{3}{4}a$. 84. a. Wska-
 zówka. Przedłużyć EF do przecięcia z przedłużeniem BC. 86. 1) Można zbudow-
 wać tylko w tym wypadku, gdy różnica podstaw trapezu jest mniejsza od sumy
 dwu ramion a większa od ich różnicy. Wskazówka. Najpierw zbudować trójkąt,
 w którym dwa boki są równe ramionom trapezu, a trzeci bok równa się różnicy
 pods aw trapezu. 2) Zadanie możliwe tylko przy warunku, że suma podstaw tra-
 pezu jest mniejsza od sumy przekątnych i większa od ich różnicy. Wskazówka. Naj-
 pierw zbudować trójkąt, którego dwa boki równają się przekątnym trapezu, a trzeci
 bok równa się sumie jego podstaw. 87. 1) i 2) równoległobok; 3) romb; 4) pro-
 stokąt; 5) kwadrat; 6) równoległobok. 88. 5 dcm, 4 dcm; 56°25' i 123°35'. 91. 1) 90°;
 2) 180°; 3) 180°; 4) 72°.

§ 6.

1. 4 cm. 5. 1) 5 cm i 25 cm; 2) 7 cm i 13 cm. 6. $\frac{b \pm a}{2}$. 8. 60°. 9. 120°. 10. 2 cm.
 11. 2 cm i 4 cm. 12. R. 13. 1 cm. 14. 20 cm i 12 cm. 15. 2,2 m. 16. $\angle AOD =$
 $= \angle OAC + \angle ACO$; $\angle OAC = \angle OBC = \angle BOC + \angle ACO = 2\angle ACO$; $\angle AOD =$
 $= 2\angle ACO + \angle ACO = 3\angle ACO$. 17. 1) Zadanie nieoznaczone. Gdy dany jest punkt
 na kole, to można poprowadzić dwie cięciwy. 20. 60°. 21. 1) 10 cm; 2) 2 dcm.
 22. 2 R. 23. 1 dcm. 24. 0,5 m. 25. 14,13 cm. 26. 9,42 cm. 27. 6 cm. 28. 8 cm.
 29. $R-r$. 30. 5 cm. 31. Środek półokręgu schodzącego się leży na środku od-
 cinka prostopadłego do obu równoległych. 32. Wskazówka. We wszystkich wy-
 padkach środek łuku schodzącego się leży na dwusiecznej kąta między danymi
 prostymi. 33. Dwie proste, równoległe do danej prostej, które leżą od niej w od-
 ległości równej danemu promieniowi okręgów. 34. Wskazówka. Środek okręgu
 leży na prostopadłej do danej prostej w danym punkcie. 35. Wskazówka. Środek
 koła leży na prostopadłej do danej prostej w punkcie B i na prostopadłej do
 odcinka AB, poprowadzonej przez środek tego odcinka. 36. Wskazówka. Środek
 koła leży na dwusiecznej kąta. 37. Wskazówka. Zadanie ma dwa rozwiązania.
 38. Wskazówka. Środkiem koła jest punkt przecięcia dwusiecznych dwóch ką-

tów jednostronnych wewnętrznych. Zadanie [ma dwa rozwiązania. 39. *Wskaźówka*. Zadanie może mieć jedno rozwiązanie, dwa lub żadnego. 41. 1) Styczna zewnętrzna; 2) styczna wewnętrzna; 3) jedno koło poza drugim. 42. 1) Styczna zewnętrzna; 2) jedno koło wewnątrz drugiego; 3) jedno koło poza drugim; 4) przecięcie. 43. 2 cm. 44. 9 cm, 7 cm. 45. 2 cm. 46. 16 cm. 47. *Wskaźówka*. Spisać ze środka koła prostą na sieczną. Jej spodek połowi obie cięciwy. 48. 6 cm. 49. 1) R i 60° ; 2) *Wskaźówka*. Podzielić okrąg na trzy równe części, w punktach podziału poprowadzić styczne; wierzchołki trójkąta utworzonego przez styczne połączyć ze środkiem koła; będziemy mieli trzy rozwartokątne trójkąty, w każdy z nich należy wpisać koło. 50. 9 cm. 51. 2 dm. *Wskaźówka*. Połączyć środki wszystkich kół wpisanych ze sobą i ze środkiem danego koła i zbadać powstałe trójkąty. 52. 1 dm. 53. 1) Prosta łącząca środek z danym punktem. 54. 1) Dwa koła koncentryczne. 2) *Wskaźówka*. Zadanie może mieć 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, albo 8 rozwiązań. Zbadać, przy jakim położeniu danej prostej i koła i przy jakim stosunku między promieniami danego i szukanego koła zachodzi każdy z tych wypadków. 57. *Wskaźówka*. Zadanie ma cztery rozwiązania.

§ 7.

1. 1) 5° ; 2) 15° ; 3) $\frac{1}{8}$. 2. 1) 5° ; 2) $4^\circ 26' 40''$; 3) $21' 36''$; 4) $25^\circ 42' 51 \frac{3''}{7}$;
 5) $163^\circ 38' 10 \frac{10''}{11}$. 3. 1) $\frac{1}{24}$; 2) $\frac{1}{16}$; 3) 0,8; 4) $\frac{1}{900}$; 5) $\frac{1}{72\,000}$; 6) $\frac{5}{96}$; 7) $\frac{241}{43200}$;
 8) $\frac{1}{2025}$. 4. 1) 150° ; 2) $47^\circ 5'$; 3) 155° . 5. 8 cm. 6. 0,7 m. 7. $77^\circ 59' 23''$. 8. $16^\circ 33'$.
 9. $105^\circ 14'$. 10. $148^\circ 41' 30''$. 11. $94^\circ 39' 30''$. 12. $84^\circ 22' 30''$. 13. $285^\circ 18'$. 14. $137^\circ 34'$.
 15. $123^\circ 45'$ i $56^\circ 15'$. 16. $105^\circ 48' 30''$ albo $36^\circ 11' 30''$. 17. $37^\circ 30'$. 18. 95° i 120° .
 19. $52^\circ 30'$; $82^\circ 30'$ i 45° . 20. 108° . 22. 40° . 24. 154° . 25. 50° . 26. 40° , 40° i 100° .
 27. Boki trójkąta połowią się, a półokrąg dzieli się na 3 równe części po 60° .
 28. Układając trójkąt, tak żeby jego przyprostokątne przechodziły przez końce średnicy, wyznaczyć położenie wierzchołka kąta prostego. 29. Szukany wierzchołek leży na okręgu zbudowanym na przeciwprostokątnej jako średnicy i na prostej równoległej do podstawy odległej od niej o 2 cm. 31. Okrąg, którego średnica jest odcinek łączący środek danego koła z danym punktem. 34. $67^\circ 30'$. 35. $36^\circ 34' 30''$ albo $143^\circ 25' 30''$. 36. $48^\circ 50'$. 37. 45° . 38. $110^\circ 52'$. 39. $73^\circ 45'$. 40. 144° . 41. $150^\circ 27'$.
 42. $180^\circ - \frac{m}{2}$. 43. 80° . 44. 72° . 45. Punkt styczności. 46. 7° . 47. $20^\circ 30'$. 48. $106^\circ 35'$ i $253^\circ 25'$. 49. $33^\circ 20'$. 50. 100° . 51. 18° , jeśli $\sphericalangle CND < \sphericalangle EPF$; 122° , jeśli $\sphericalangle CND > \sphericalangle EPF$. 52. 105° . 53. $31^\circ 12'$. 54. 60° . 55. $34^\circ 54'$. 56. $15^\circ 12'$ i $74^\circ 48'$. 57. $\sphericalangle BAC = 110^\circ$; $\sphericalangle BCA = 30^\circ$; $\sphericalangle DAC = 80^\circ$; $\sphericalangle DCA = 60^\circ$. *Wskaźówka*. Wykorzystać koło opisane na czworokącie $ABDC$. 58. *Wskaźówka*. Zadanie może mieć cztery rozwiązania, trzy, dwa, jedno albo wcale. 61. *Wskaźówka*. Zadanie może mieć 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 albo 8 rozwiązań, zależnie od wzajemnego położenia odcinków i wielkości odcinków i kątów. 62. *Wskaźówka*. Zadanie sprowadza się do zadania nr 60. 63. 2 m. 64. 4 cm. 65. 1) 40° ; 2) 36° . 66. 50° i 130° . 67. 105° , 115° i 140° . 68. $55^\circ 19'$ albo $34^\circ 41'$. 69. *Wskaźówka*. Zacząć od zbudowania trójkąta utworzonego z podstawy i odcinków łączących środek koła wpisanego z końcami podstawy. 70. 6:5. 71. $p - r$. 73. 60 cm. 75. *Wskaźówka*. Boki trójkąta są styczne do okręgu w wierzchołkach trójkąta o kątach $90^\circ - \frac{A}{2}$ i $90^\circ - \frac{B}{2}$, gdzie A i B są danymi kątami. 76. 1 m.

77. $25^{\circ}10'$; $154^{\circ}50'$; $25^{\circ}10'$ i $154^{\circ}50'$. 78. Wskazówka. Środek koła wpisanego leży w punkcie przecięcia się przekątnych rombu. 79. 2 cm. 80. 143° , 37° , 143° i 37° . 81. Na zewnątrz. 82. 3 cm. 83. 25 cm. 84. $\angle BCD = 109^{\circ}36'18''$; $\angle B = \angle D = 90^{\circ}$. 85. 1) Tak; 2) nie. 86. $\frac{1}{3}$. 87. 81° . 88. 1) 3 m, 6 m, 9 m, 6 m; 2) 45° , 90° , 135° , 90° .

§ 8.

1. $AB:CD \approx 2,4$. 2. 0,87. 3. 1) $AM:AB = 1:3$; $MB:AB = 2:3$; 2) $AK:AB = \frac{m}{m+n}$; $KB:AB = \frac{n}{m+n}$. 4. $BD = 12$ cm i $AD = 18$ cm. 5. 10 minut. 6. 1) 15 m; 2) 9 m; 3) 22 dm. 7. 1) 12 dm; 2) 1,8 m; 3) 3,4 m. 8. 1) Tak; 2) tak; 3) nie. 9. 1) 4 cm, 8 cm, 12 cm, 16 cm; 2) 32,5 cm, 35 cm, 37,5 cm, 40 cm, 42,5 cm, 45 cm, 47,5 cm. 10. 3 m i 2,4 m. 11. 16,15 m. 12. $OD = 1,8$ cm; $OC = 1,6$ cm; $DC = 1,6$ cm; 13. 2,5 m. 14. 10 m i 35 m albo 35 m i 10 m. 15. Wskazówka. W trójkącie utworzonym przez ramiona kąta i szukaną prostą, prosta równoległa do jednego ramienia kąta i przechodząca przez punkt P , dzieli dwa boki trójkąta w stosunku $m:n$. 16. Wskazówka. Prosta, której odległości od ramion danego kąta mają się jak $m:n$, dzieli w tym samym stosunku odcinek leżący między ramionami kąta i prostopadły do dwusiecznej kąta. 17. 1) $AD = 8$ m i $DC = 12$ m; 2) 10 m; 3) 1,8 m. 18. 10 cm. 19. 1) Tak; 2) nie; 3) nie; 4) tak. 20. $BE = 7$ cm; $EC = 5$ cm. 21. 39 cm i 65 cm. 22. 8 cm. 23. 50 cm. 24. 16 cm, 20 cm, 20 cm. 25. $BE = 10$ m; $EC = 14$ m. 26. $\frac{b}{a+c}$. 27. 6 cm, 4 cm i 6 cm. 28. $\frac{ab}{a+b}$.

§ 9.

1. 1 m, 1,2 m. 2. 10 m, 25 m, 20 m. 3. 42,0 m (z dokładnością do 0,1). 4. 1) $b_1 = 35$, $c = 8$; 3) $c = 20$. 5. $AC = 24$ cm, $EF = 18$ cm, $DF = 15$ cm. 6. 13,6 cm. 7. $AC = 3$ m; $A_1C_1 = 1,2$ m. 8. $AC = 20$ cm; $EF = 15$ cm. 9. 1) Tak; 2) tak; 3) nie. 10. 1) Nie; 2) tak. 11. 2,6 m. 12. 1) 1 m, 2 m i 2,5 m; 2) 6,5 m i 5,5 m. 13. 1,25 m. 14. 1) 14 cm; 2) 6 dm. 15. 1) 4 cm; 2) 27 : 28. 16. 2 m. 17. $\frac{bc}{a+c}$. 18. $BC = 12$ cm; $BD:BA = 3:4$. 19. $AD = 1$ m; $DC = 3$ m. 20. Wskazówka. Każdy bok szukanego trójkąta jest czwartą proporcjonalną do trzech odcinków: obwodu szukanego trójkąta, obwodu danego trójkąta i jednego z boków danego trójkąta. 22. Wskazówka. Zbudować trójkąt, podobny do szukanego, mając kąt i stosunek odcinków podstawy. 23. $OB = 15$ cm, $OD = 12$ cm. 24. $AO:OC = 20:9$, $AD = 40$ cm, $BC = 18$ cm. 25. $AB = 30$ cm, $AD = 40$ cm. 26. 18 cm. 27. 20 cm. 28. 300 m. 29. $\frac{a(m-n)}{n}$. 30. $\frac{bc}{a+c}$. 31. 10 cm i 12 cm. 32. $\frac{bc}{b+c}$. 33. $\sqrt{pq}$. 34. Wskazówka. Znaleźć kierunek prostych łączących środek cięciwy z wierzchołkami kwadratu. 35. Wskazówka. Znaleźć kierunek prostej łączącej jeden z wierzchołków trójkąta z jednym z wierzchołków kwadratu. 36. $\frac{ah}{a+h}$. 37. Wskazówka. Znaleźć kierunek prostej łączącej jeden z wierzchołków trójkąta z jednym z wierzchołków prostokąta. Zadanie ma naogół 6 rozwiązań. 38. 10 cm i 18 cm. 39. 12 cm. 40. $\frac{ah}{a+2h}$. 41. $CD = 3$ cm, $BD = 9$ cm. 42. $AD = 6$ m, $BE = 8$ m. 43. 1 m. 44. 14 cm i 10 cm. 45. $\sqrt{2ar}$. 46. 10 cm i 26 cm. 47. $\frac{ab}{a+b}$. 48. 16 cm. 49. $\frac{lm}{l+m}$.

50. 68 *dc*m i 80 *dc*m albo 76 *dc*m i 88 *dc*m albo $9\frac{1}{3}$ *dc*m i $61\frac{1}{3}$ *dc*m albo $25\frac{1}{3}$ *dc*m i $26\frac{2}{3}$ *dc*m. 51. 20 *m*. 52. $OE = 6$ *dc*m, $OD = 8$ *dc*m. 53. 42 *dc*m. 54. $\frac{ar}{a+2r}$. 55. 30 *cm*, 24 *cm*, 18 *cm*, 36 *cm*. 56. 18 *m*, 9 *m*, 12 *m*, 36 *m*. 57. 8 *dc*m, 12 *dc*m, 16 *dc*m, 20 *dc*m. 58. 100 *m* i 40 *m*. 59. $a : b = \sqrt{2} \approx 1,414$. 60. $\frac{a^3}{b}$.

§ 10.

1. 1) 37 *cm*; 2) 65 *cm*; 3) 41 *dc*m; 4) 109 *cm*; 5) $21\frac{1}{4}$; 6) $1\frac{9}{16}$; 7) 17;
8) $\sqrt{61} \approx 7,81$. 2. 1) 161; 2) 260; 3) 24; 4) 42; 5) $7\frac{1}{5}$; 6) $\sqrt{51} \approx 7,14$.

3.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>a_c</i>	<i>b_c</i>	<i>h</i>
1)	(15)	(20)	25	9	16	12
2)	(24)	(7)	25	$23\frac{1}{25}$	$1\frac{24}{25}$	$6\frac{18}{25}$
3)	(4)	(5)	$\sqrt{41}$	$\frac{16}{41}\sqrt{41}$	$\frac{25}{41}\sqrt{41}$	$\frac{20}{41}\sqrt{41}$
4)	(100)	75	(125)	80	45	60
5)	156	(65)	(169)	144	25	60
6)	(600)	175	(625)	576	49	168
7)	(6)	8	10	(3,6)	6,4	4,8
8)	24	(7)	25	23,04	(1,96)	6,72
9)	21	20	(29)	$(15\frac{6}{29})$	$13\frac{23}{29}$	$14\frac{14}{29}$
10)	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	(3)	1	(2)	$\sqrt{2}$
11)	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	$4\frac{1}{6}$	$(1\frac{1}{2})$	$(2\frac{2}{3})$	2
12)	$\sqrt{40}$	$\sqrt{360}$	20	(2)	(18)	6
13)	(136)	255	289	64	225	(120)
14)	40	(9)	41	$39\frac{1}{41}$	$1\frac{40}{41}$	$(8\frac{32}{41})$

4. Wskazówka. Wykorzystać § 190 z Kisielowa. 5. Wskazówka. Skoro różnica odcinka $x - y = r$, a średnia proporcjonalna $\sqrt{xy} = p$, to sumę odcinków można znaleźć jako przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych r i $2p$. 7. 50 *cm* i 72 *cm*. 8. 5,2 *m*. 9. 18 *cm*, 98 *cm*. 12. Wykorzystać zadanie Nr. 11. 13. 3, 4, 5.
14. $\sqrt{116} \approx 10,8$ *m*. 15. 1) $\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) 109 *cm*. 16. $32\sqrt{2} \approx 45,3$ *mm*. 17. 1) $a\sqrt{2}$;
2) $2(\sqrt{2} + 1)$ *cm*. 18. Nie. 19. 1) $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$; 2) 32 *cm* i 60 *cm*. 20. 1) 41 *cm*; 2) 10 *cm*.
21. 1) 15 *cm*; 2) 125 *cm*, 125 *cm*, 240 *cm*; 3) $2\sqrt{2}$ *cm*. 22. $BD \approx 4,97$ *m*. 23. 1) 3 *m*
14 *m*; 2) 9 *cm*, $1\frac{5}{7}$ *cm*, $14\frac{2}{7}$ *cm*. 24. 1) $\frac{a}{2}\sqrt{3}$; 2) $\frac{2h\sqrt{3}}{3}$; 3) 2 *m* ($2 + \sqrt{3}$); 4) $2\sqrt{3}$
i $4\sqrt{3}$ *cm*. 25. 1) 25 *cm* albo 11 *cm*; 2) 29 *cm*; 3) 40 *cm*. 26. 1) 37 *cm*; 2) 3 *dc*m
i 4 *dc*m. 27. 1) 24 *cm*; 2) 36 *cm* i 54 *cm*. 28. Około 5630 *m*. 29. 1) $D \approx 25$ *mm*;
2) $d \approx 19$ *mm*; 3) $h \approx 11$ *mm*; 4) $D = d + \frac{2}{3}h\sqrt{3}$. 31. 2) $\sqrt{a^2 + 3b^2}$. 32. 24,2 *mm*.

33. 1) 39 *dem*; 2) 80 *cm*; 3) 14 *cm* albo 4 *cm*; 4) 21 *cm*; 5) 6 *cm*. 34. 1) $D = 425$ *mm*; 2) $D = \frac{F + 4s^2}{4s}$. 35. $\frac{a^3 + 4h^2}{8h}$. 36. 9 *cm* albo 39 *cm*. 37. 42,5 *cm*. 38. 1) 77 *cm*; 2) 61 *cm*; 3) 13,44 *cm*. 39. $y = \sqrt{2Rr}$. 40. 1) 40 *cm*; 2) styczna zewnętrzna wynosi 48 *cm*; styczna wewnętrzna równa się 30 *cm*. 41. 13 *m*. 42. 73 *cm*. 43. 7 *m* i 25 *m*. 44. $7\frac{9}{17}$ *cm*. 45. 175 *cm* i 600 *cm*. 46. 20 *cm*. 47. 1:4. 48. 49:81. 49. 21 *cm* i 28 *cm*. 50. $a(\sqrt{2}-1)$ i $a(2-\sqrt{2})$. 51. $n\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$ i $m\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$. 52. 1 *m*. 53. 15 *cm*. 54. 5 *m*. 55. 1) 10 *cm*; 2) 7,5 *cm*. 56. 18 *dem*. 57. 1) 24 *dem*; 2) $2,4\sqrt{5}$ *dem*; 1,8 $\sqrt{5}$ *dem*; 3) 13,44 *dem*. 58. 1) $9\frac{1}{15}$ *cm*; 2) $0,8r\sqrt{5}$. 59. 15 *dem*. 60. 65 *dem*. 61. 35 *dem*. Wskazówka. Poprowadzić środkową i wysokość z wierzchołka kąta rozwartego. 62. $AE:EC = 16:25$. 63. 36 *dem*, 48 *dem*. 64. 18 *dem* i 80 *dem*. 65. 1) 37 *m* i $\sqrt{769} \approx 27,7$ *m*; 2) 4:5. 66. 1) 3,125 *dem*; 2) 16,9 *m*. 67. 6 *dem*. Wskazówka. Odcinki przeciwprostokątnej, utworzone punktem styczności, równają się przyległym do nich odcinkom przyprostokątnych. 68. 38 *dem* i 22 *dem*. 69. 25 *dem*. Wskazówka. Wprowadzić, jako niewiadomą pomocniczą, odległość od środka do jednej z cięciw. 70. 30 *cm*. 71. 32 *cm* i 18 *cm*. 72. Podstawy: $\frac{2mr}{\sqrt{mn}}$ i $\frac{2nr}{\sqrt{mn}}$; ramię $\frac{(m+n)r}{\sqrt{mn}}$. 73. 20 *dem*. 74. 1 *dem*. 75. $CA = \frac{m^2 + n^2}{m} = 39$; $CB = \frac{m^2 + n^2}{n} = 26$. Wskazówka. Połączyć końce odcinków m i n ze spodkiem prostopadłej. 76. 27 *dem* i 64 *dem*. 77. Wskazówka. Wyrazić długość wspólnej stycznej zewnętrznej przez promienie. 78. $AB = \sqrt{a(a+b)}$; $CD = \sqrt{b(a+b)}$. 79. $AC \approx 44$ *m*. 80. $c \approx 20$ *m*. 81. 1) 7; 2) $\sqrt{7}$; 3) 16; 4) $2\sqrt{3}$. 82. 1) Rozwartokątny; 2) prostokątny; 3) i 4) ostrokątny; 5) rozwartokątny. 83. 1) $p=5$, $q=9$, $h=12$; 2) $p=35$, $q=5$, $h=12$; 3) $p=20$, $q=8$, $h=15$; 4) $p=1\frac{3}{8}$, $q=2\frac{5}{8}$, $h=\frac{3}{8}\sqrt{15}$. 84. 1) 7 *cm*; 2) 18 *cm*; 3) 73 *cm*. 85. 1) 7 *cm*; 2) 13 *cm*; 3) 31 *cm*. 86. 1) $\sqrt{13-6\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) 5. 87. 13; 14; 15. 88. 9 *cm* i 24 *cm*. 89. 10 *m* albo 6 *m*. 90. Ramiona 7 *cm* i 15 *cm*, wysokość $\frac{105\sqrt{3}}{26}$ *cm*. 91. 20 *cm*. 92. $AC=a$, $AD=a(\sqrt{2}+1)$, $CD=a\sqrt{2+\sqrt{2}}$. 93. $x=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-a^2}}=30$. 94. 1) 13 *cm*; 2) 11,2 *cm*. 95. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{4}$. 96. 13. 97. 12 *cm* i 8 *cm*. 98. 14 *cm* i 16,8 *cm*. 99. 25; 56. 100. 52. Wskazówka. Poprowadzić wysokość trójkąta ABC i oprzeć się na podobieństwie trójkątów. 101. $\sqrt{R^2+3r^2}$. 102. 1) 20 *cm* i 30 *cm*; 2) 10 *cm* i 15 *cm*. 103. 1) 7 *cm* i 11 *cm*; 2) ramiona 4 *cm* i 7 *cm*; przekątne 7 *cm* i 9 *cm*. 104. 1) 11; 2) 14; 3) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$; $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$. 105. 24 *cm*. 106. 1) 7 *cm*; 2) 6 *cm*. 107. 1) 12; 20; $\sqrt{544}$; 2) 15; 17; 39; 3) 2,4; $\sqrt{23,4}$; $\sqrt{13,6}$. 108. 15 *cm* i 25 *cm*. 111. Wskazówka. Połączyć jeszcze kolejno środki boków czworokąta. 112. 30°.

§ 11.

1. $AB \approx 13$ m. 2. $\sqrt{3} \approx 1,7$ m. 3. 1) 6 cm, 12 cm, 1 m; 2) 16 cm. 4. 1) w środku koła; 2) na kole; 3) poza kołem. 5. 1) 4; 2) 65; 3) $\frac{r}{5}$; 4) 5 albo 45. 6. 1) 30 cm; 2) 40 cm; 3) 21 dm i 29 dm. 10. 1) 1 m; 2) 6 cm; 3) 10 m. 11. 1) 8 cm; 2) 18 m; 3) 14 cm. 12. 1) 7 cm; 2) r ($\sqrt{5} - 1$). 13. 12 cm. 14. $R = 4,35$ m. 15. Nie. 16. 30 cm. 17. $R \approx 591$ m. 18. Zmniejszy się $2\frac{1}{2}$ razy. 19. 1) 24 cm; 2) 33 m. 20. 24 cm i 8 cm. 21. Zwiększyła się 3 razy. 22. 1) 4 cm; 2) 20 m; 3) $AB = 35$ m i $AC = 15$ m. 23. 8 cm. 24. 1) 9 dm; 2) 36 cm; 3) 25. 25. mx i nx , gdzie $x = \frac{am - bn}{n^2 - m^2}$. 26. 1) 6; 2) 3; 3) $\sqrt{3}$. 27. 21 cm. 28. $1\frac{1}{2}$ razy. 30. Drugi punkt przecięcia. 31. 1) 3 cm; 2) 18 cm; 3) $\frac{a}{2}$ ($\sqrt{5} + 1$). 32. 1) 226 km; 2) 270 km. 33. 1) 17 cm; 2) 13 cm. 34. 1) 10 cm; 2) $\frac{a}{2}$. 35. 18 cm. 36. 12 cm i 36 cm. 37. 1) 18 cm i 12 cm; 2) 9 cm i 6 cm albo $12\frac{1}{2}$ cm i $2\frac{1}{2}$ cm. 40. 6 dm. 41. $\frac{2}{5} r$. 42. 1) 10 cm; 2) 8 dm; 3) 9,375 m. 43. 25 dm, 8 dm, 15 dm. 44. $\frac{a}{r} \sqrt{4r^2 - a^2}$. 45. 9 dm. 46. $\sqrt{2} ar$.

§ 12.

1. 1) 15° , $22^\circ,5$; 2) 12-kąt, 30-kąt. 3. 60° , 90° , 108° , 120° , 135° , 144° , 150° , $165^\circ 36'$. 4. 1) 8-kąt, 12-kąt; 2) 10-kąt, 15-kąt. 5. $2\sqrt{2} \approx 2,8$ cm. 6. $\sqrt{3} \approx 1,7$ cm. 7. 4,4 cm. 10. 2) $2m\sqrt{3}$. 11. 1) $r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$; 2) $R = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$; 3) $a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$. 12. 2 cm, 4 cm, $2\sqrt{3}$ cm. 15. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; 3) a ; 4) $\frac{a}{2} \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$; 5) $a \sqrt{2 + \sqrt{3}}$. 16. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 17. 1) $2k$; 2) $k\sqrt{2}$; 3) $\frac{2k\sqrt{3}}{3}$; 4) $k\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$. 18. 1) $2R\sqrt{3}$; 2) $2R$; 3) $\frac{2R\sqrt{3}}{3}$. 19. $b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$. 21. 1) $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $2R$; 2) $a\sqrt{2 + \sqrt{2}}$, $a(\sqrt{2} + 1)$, $a\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$. 22. 1) R , $R\sqrt{2}$, $R\sqrt{3}$, $R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $2R$; 2) $a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $a\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = a(\sqrt{3} + 1)$, $a\sqrt{3(2 + \sqrt{3})}$, $a(2 + \sqrt{3})$, $2a\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. 23. Wskazówka. Bok szukanego pięciokąta równa się bokowi dziesięciokąta wpisanego w okrąg o promieniu równym danej przekątnej. 24. $BD = 4,2$ m, $a_s = 2,3$ m, $H = 2,1$ m. 25. $a_n : b_n = r : R$, $a_1 : b_1 = \frac{1}{2}$, $a_6 : b_6 \approx 0,866$. 26. 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2} \approx 0,866 R$; 2) $\frac{R\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 R$. 27. 1) $\frac{a}{2} (2 + \sqrt{2})$; 2) $\frac{a}{2} (2 + \sqrt{3})$. 29. $\frac{a}{3}$. 31. $\frac{b\sqrt{3}}{3}$, $\frac{b\sqrt{6}}{3}$. 32. $2\sqrt{6}$. 33. 1) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, 2) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. 34. 1) $\frac{a}{6} (3 \pm \sqrt{3})$; 2) a . 36. $\frac{a}{6}$. 37. Wskazówka. Przez

środek danego kwadratu poprowadzić przekątną szukanego kwadratu, każda z nich stanie się przeciwprostokątną równoramiennego, prostokątnego trójkąta o przyprostokątnych równych danemu bokowi. 38. Wykorzystać metodę podobieństwa.

39. $8a(2 - \sqrt{2})$. 41. 1) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$; 2) $R(\sqrt{2} - 1)$. 42. 1) $R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$; 2) $R\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. 43. $1 : \sqrt{3} : 2$. 44. $c(\sqrt{3} + 1)$. 45. $\frac{3}{5}h$. 46. W wypadku styczności zewnętrznej: 1) $R(2\sqrt{3} + 3)$; 2) $R(\sqrt{2} + 1)$; 3) R . W wypadku styczności wewnętrznej: 1) $R(2\sqrt{3} - 3)$; 2) $R(\sqrt{2} - 1)$; 3) $\frac{R}{3}$.

§ 13.

1. 2,25 m². 2. 23 m. 3. $\sqrt{32500} \approx 180$ m. 4. 1) $\frac{l^2}{2}$; 2) $2R^2$; 3) 2 razy.
5. 1) Zwiększy się 9 razy; zmniejszy się 2,25 razy; 2) zwiększyć 2 razy; zmniejszyć 5 razy. 6. 552,25 ha. 7. $48 \frac{kg}{dcm^2}$. 8. 21,9 a. 9. 17 km. 10. 1) 8 m, 18 m; 2) 12 dcm i 23 dcm. 11. 24 m. 12. 8,16 cm². 13. 130 cm². 14. 818 cm. 15. 7,54 a.
16. 30 cm. 17. $\frac{ph_1h_2}{h_1 + h_2}$. 18. 1) $\frac{ab}{2}$; 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{2}$; 3) $\frac{ab\sqrt{3}}{2}$. 19. 30°. 21. 202,8 cm².
22. 1400 cm². 25. mn. 26. 1 : 3. 27. mn. 28. 7 cm i 9 cm albo 21 cm i 3 cm.
29. ≈ 121 kg. 30. 1) 288 cm²; 2) 1 m²; 3) 5 jednostek kwadratowych. 31. Wskazówka. Wysokości trójkątów danego i szukanego są równe. 33. 1) $\frac{ab}{4}$ 2) $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$
3) $\frac{ab\sqrt{3}}{4}$. 34. 1) tak; 2) nie; 3) tak. 35. 1) 39 dcm²; 2) 82 cm; 3) $\sqrt{a^2 + b^2}$
36. $\frac{c^2}{4}$. 37. 2688 cm²; 2) $\frac{b}{4}\sqrt{4c^2 - b^2}$; 3) $10\sqrt{21} \approx 46$ cm. 38. Wskazówka. Łączymy dany punkt K z D, tj. ze środkiem boku AC, prowadzimy BE || DK. Prosta KE jest szukaną. 39. 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{2}{3}\sqrt{3}Q\sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{3}h^2\sqrt{3}$. 40. 1) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$; 2) $3r^2\sqrt{3}$. 41. 6 dcm². 42. 2250 cm² albo 522 cm². 43. 55 cm, 48 cm. 44. 12 cm albo 16 cm. 45. 1) 1440 cm²; 2) 9,6 m. 46. $\sqrt{Q \frac{m^2 + n^2}{2mn}}$. 51. 12,8 m³. 52. $\frac{a^3}{4}(\sqrt{3} - 1)$.
53. 75 cm². 54. $a^2(3 + \sqrt{3})$. 55. $2a^2(\sqrt{2} - 1)$. 56. 8,4 m². 57. 6912 cm².
58. 52 cm². 59. 1) 84; 2) 60; 3) $10\sqrt{2} \approx 14,1$; 4) $\frac{15}{4}\sqrt{3} \approx 6,49$; 5) 5,28; 6) $17\frac{1}{3}$
7) 8; 8) $18\frac{1}{2}$; 9) $3\frac{1}{2}$. 60. 1) 2 m; 2) 112. 61. 1) 130 dcm, 125 dcm, 15 dcm
2) 18 cm, 20 cm, 34 cm. 62. 144 cm². 63. 30 cm. 64. 1224 cm². 65. 270 cm². 66. 1) 25 albo 39; 2) 14 albo 12. 67. 36 jednostek kwadratowych. 68. 6 cm. 69. 14 m, 30 m,
40 m. 70. 546 cm²; $\sqrt{1621} \approx 40$ cm. Wskazówka. Dla wyznaczenia BD prowadzimy BE ⊥ AC, DF ⊥ AC i DG || AC do przecięcia z przedłużeniem BE. 71. 1) 8 cm; 2) 25 cm; 3) 8 cm i 10 cm. 72. $\approx 1,9$ m². 73. 13,25 m³. 74. 1100 m². 75. $\approx 1,2$ m².
76. 1) 10 cm; 2) 2 : 3. 77. 24 dcm². 78. 288 cm². 79. $\frac{mn}{6}$. 80. 480 cm². 81. 540 m².
82. 1) 256 cm²; 2) h². 83. $\frac{c^2}{2}$. 84. 216 cm². 85. 8316 cm². Wskazówka. Niech

- $ABCD$ oznacza dany trapez, przy czym $BC \parallel AD$. Prowadzimy $CE \parallel BD$, gdzie E oznacza punkt na przedłużeniu AD i trapez zamieniamy na trójkąt ACE . 86. $\frac{R^2}{2}$. 87. $\frac{a^3}{2}$. 88. 1) 1764 cm^3 ; 2) 150 m^3 . 89. 48 cm . 90. $\frac{1}{2} [d_1 h_1 + d_2 (h_2 + h_3)] \approx 12,0 \text{ ha}$. 91. $\approx 34 \text{ a}$. 92. 1) $\frac{1}{2} kl$; 2) $\frac{1}{4} kl$. 93. $\frac{1}{2} (a + b \sqrt{3}) (b + a \sqrt{3})$. 94. $\frac{\sqrt{3}}{4} (a^3 + ab + b^3)$. 95. 426 cm^3 . Wskazówka. Poprowadzić $BE \perp AD$ i $CF \perp AD$. 96. $\frac{3r^3}{4} (\sqrt{3} + 1)$. 97. 1) 8 cm ; 2) 16 dcm . 98. $3r^2 \sqrt{3}$. 99. $84 \sqrt{6}$. 100. 650 . 101. $28,5 \text{ m}^3$. 102. 1) $\frac{3R^2 \sqrt{3}}{2}$; 2) $2r^2 \sqrt{3}$; 3) $\frac{1}{3} \sqrt{2S \sqrt{3}}$. 103. 1) $2R^2 \sqrt{2}$; 2) $3R^2$. 104. $\approx 355 \text{ cm}^3$. 105. $\approx 10,7 \text{ cm}^3$. 106. 1) $\frac{Q \sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{Q \sqrt{2}}{2}$. 107. 1) $R^2 \sqrt{3}$; 2) $4R^2 (2 - \sqrt{2})$. 114. $3 : 2$. 116. $2(a^2 + ab + b^2)$. 117. $P : Q = 2 : 3$. 118. Pole $\triangle ABC : \text{pole } \triangle DBE = 1 : 2$. 120. 16; 25. 121. $5\sqrt{2} \approx 7,07 \text{ dcm}$. 122. $\frac{1}{4}$. 123. $h \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7 \text{ h}$. 124. 1) $4 : 21 : 56$; 2) $m^2 : (2m + n) n$. 125. 256 cm^3 . 126. $3 : 5 : 7$. 127. 1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{3}{4}$. 128. 32 dcm^2 , 72 dcm^2 , 128 dcm^2 . 134. $\sqrt{2}$; 135. $10 \sqrt{2} \approx 14,14 \text{ m}$. 136. 300 dcm^2 . 138. 25 dcm^3 . 139. 60 cm^3 i 40 cm^3 . 140. $1 : 3$. 141. $\sqrt{3} + 1 \approx 2,732$; $2(2 + \sqrt{3}) \approx 7,464$. 143. $\frac{2mn}{(m+n)^2}$.

§ 14.

2. 1) 12 dcm ; 2) $m_a = \sqrt{11,5}$; $m_b = \sqrt{7,75}$; $m_c = \sqrt{2,5}$. 3. 30. 4. 15 dcm i 25 dcm . 5. 144. 6. 16,5. 7. 1) Wskazówka. Punkt przecięcia środkowych dzieli je w stosunku $2 : 1$. 2) 72. 8. Wskazówka. Zbudować trójkąt AMB mając boki AM i MB i środkową względem AB (A, B — wierzchołki szukanego trójkąta; M — punkt przecięcia środkowych); 2) 72. 10. 6; 10; 24. 11. 4. 12. 12 i 27. 13. 29 cm i 12 cm . 14. 1) Poza trójkątem; 2) wewnątrz trójkąta; 3) w środku przeciwprostokątnej. 17. 1) $R = 8\frac{1}{8}$, $r = 4$; 2) $R = 8\frac{1}{8}$, $r = 1,5$; 3) $R = 24\frac{1}{6}$, $r = 2\frac{1}{3}$; 4) $R = -\frac{35}{\sqrt{96}} \approx 3,6$, $r = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,2$. 18. 4,5. 19. 1) R ; 2) $R \sqrt{2}$. 20. Wskazówka. Wyrazić wszystkie wysokości przez pole i boki. 21. $\frac{R^3}{4} (3 + \sqrt{3})$. 22. 40 cm i 42 cm . 23. 1) R^3 ; 2) $R^3 \sqrt{2}$; 3) $R^3 \sqrt{3}$; 4) $2R^3$.

§ 15.

1. 1) $\approx 62,8 \text{ m}$; 2) $\approx 94,2 \text{ m}$; 3) $\approx 219,8 \text{ cm}$. 2. 1) $\approx 16 \text{ cm}$; 2) $\approx 4 \text{ cm}$; 3) $\approx 0,76 \text{ dcm}$. 3. 60. 4. $\approx 5,9 \frac{\text{m}}{\text{sek}}$. 5. 1) $\frac{\pi R}{4}$; 2) $\frac{49 \pi R}{360}$; 3) $\frac{419 \pi R}{14400}$. 6. 1) $\frac{4l}{3\pi}$; 2) $\frac{135l}{8\pi}$. 7. $133^\circ 20'$. 8. $\approx 21^\circ 5'$. 9. 1) 144° ; 2) $1\frac{1}{3} \text{ cm}$; 3) $7,2 \text{ cm}$. 10. $x = \frac{180^\circ}{\pi R}$; 1) $\frac{810^\circ}{\pi}$; 2) $\frac{72^\circ}{\pi}$. 11. $\approx 57^\circ 18'$. 12. 1) $\frac{\pi a}{3}$; 2) $\frac{\pi a \sqrt{2}}{4}$; 3) $\frac{2\pi a \sqrt{3}}{9}$. 13. 1) $\frac{3l}{\pi}$;

- 2) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$. 14. 25 cm. 15. 1) $2\pi m$; 2) odstęp i dla kuli ziemskiej i dla piłki będzie ten sam, równy $\frac{1}{2\pi}$. 16. 1) $\approx 182 mm$; 2) $\approx 8 cm$. 17. $\approx 157 cm$.
 18. $\frac{3}{4} l$. 20. $\approx 119 cm$. 21. 2. 22. $\approx 0,15\%$. 23. $\approx 0,00005 D$. 24. 1) $\approx 314 m^2$;
 2) $\approx 50,24 dcm^2$; 3) $\approx 21,2264 cm^2$. 25. 1) $\approx 0,8 cm$; 2) $\approx 4 m$; 3) $\approx 2,3 dcm$.
 26. $\approx 64 a$. 27. $\approx 78,5 cm^2$. 28. $\approx 4 cm$. 29. $\approx 0,2826 m^2$. 30. $\approx 2,6 t$.
 31. 1) $\approx 5,1 cm^2$; 2) $\approx 15 cm$. 32. 2) 10 cm. 33. $\frac{\pi F}{2}$. 34. $\approx 15,7 m^2$. 35. 1) 1:4;
 2) 1:2; 3) 3:4. 36. $\approx 0,2 \frac{kg}{cm^2}$. 37. $\frac{\pi a^2}{4}$. 39. 1) $\frac{3}{16} \pi r^2$; 2) $\frac{7}{160} \pi r^2$. 40. 1) $\sqrt{\frac{5q}{\pi}}$;
 2) $\sqrt{\frac{600q}{\pi}}$. 41. 360° . $\frac{q}{\pi r^2}$. 42. 1) $\frac{R^2}{4} (\pi - 2)$; 2) $\frac{R^2}{12} (2\pi - 3\sqrt{3})$; 3) $\frac{R^2}{8} (\pi - 2\sqrt{2})$;
 4) $\frac{R^2}{12} (\pi - 3)$. 43. 1) $\frac{a^3}{36} (4\pi - 3\sqrt{3})$; 2) $\frac{a^3}{8} (\pi - 2)$; 3) $\frac{a^3}{12} (2\pi - 3\sqrt{3})$. 44. $\approx 3,72 m^2$.
 45. 1) $\frac{1}{6} \pi r^2$; 2) $\frac{Qn}{360}$. 46. $\frac{\pi R^2}{6}$. 47. $\frac{a^2}{24} (7\pi - 6 - 6\sqrt{3})$ albo $\frac{a^2}{24} (13\pi + 6 - 6\sqrt{3})$. 48. $\frac{4Qmn}{\pi(m^2+n^2)}$. 49. $\frac{R}{2} (\sqrt{4+\pi} + \sqrt{4-\pi})$ i $\frac{R}{2} (\sqrt{4+\pi} - \sqrt{4-\pi})$.
 50. $\frac{8Q}{\pi}$. 51. $\frac{\pi Q\sqrt{3}}{3}$. 52. 1:2. 53. 1) $\frac{R^2}{4} (4 - \pi)$; 2) $\frac{R^2}{3} (3\sqrt{3} - \pi)$;
 3) $\frac{R^2}{6} (2\sqrt{3} - \pi)$. 54. $\frac{a^2}{24} (\pi + 6)$. 55. 1) 9 razy, 25 razy; 2) 2 razy, $\sqrt{5} \approx 2,236$ razy.
 56. 1) nie, potrzeba 4 takich małych rur. 57. a^2 . 58. 1) $\approx 0,215 r^2$; 2) $ab - 0,215 b^2$;
 3) $\approx 0,393 R^2$; 4) $\approx 0,858 r^2$. 59. $\frac{R^2}{6} (4\pi - 3\sqrt{3})$. 60. $\frac{a^2}{2} (\pi - 2)$. 61. $\frac{\pi}{8} (a^2 + b^2) - \frac{ab}{2}$. 63. $\frac{a^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3})$. 64. $\frac{a^2}{6} (2\pi + 3\sqrt{3})$. 67. $\approx 988 cm^2$. 68. $\approx 25 cm^2$.
 69. $(1,57R + 2a)t - 1,215 t^2$. 70. $625\pi m^2$. 71. 1) $\frac{R}{3}$; 2) $R(\sqrt{2}-1)$; 3) $R(2\sqrt{3}-3)$.

§ 16.

1. 2) $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{10}$. 3. Nr. 1, 2, 3, 9, 10, 11, 12, 13 — pierwszego stopnia; 4, 7, 14, 16, 18 — drugiego stopnia; 5, 6, 15, 17 — trzeciego stopnia; 8 — zerowego stopnia; 4. Nr. 2, 4, 5, 6.
 6. Wskazówka. 8) Najpierw zbudować $y = \frac{pq}{s}$, potem $x = \frac{yr}{t}$. 7. Wskazówka.
 2) $x = \sqrt{yb}$, gdzie $y = \frac{a^2}{c}$; 5) $x = \sqrt{b^2 + y^2}$, gdzie $y = c\sqrt{3}$; 6) $x = \sqrt{\frac{a^2 \cdot a + c}{b + d}} = \sqrt{yz}$, gdzie $y = \frac{a^3}{b + d}$, $z = a + c$. 8. Bok kwadratu $x = \sqrt{\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}$.
 9. Promień szukanego koła $x = R\sqrt{2}$. 10. Promień koła koncentrycznego $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$.
 11. Bok kwadratu $x = \sqrt{\frac{3}{5}ah}$. 12. Szukany promień $x = \sqrt{R^2 - r^2}$. 13. Wysokość

- szukanego trójkąta wynosi $\frac{hb}{a}$. 15. 1) Doprowadzić równanie do postaci: $x(p-x)=q^2$ i ułożyć z niego proporcję; 3) pierwiastki nierzeczywiste. 16. Część większa $x = \frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$; część mniejsza: $a-x = \frac{a(3-\sqrt{5})}{2}$. 17. $a_{10} = R \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 18. Część większa wynosi $a \cdot \frac{2,236-1}{2} = 0,618a$, a to różni się od $\frac{5}{8}a$ w przybliżeniu o 0,007 a . 19. 1) $\frac{b}{2}(\sqrt{5}+1)$. 20. $2r\sqrt{5}-2$. 23. Szukana odległość punktu od środka $x = r\sqrt{5}$. 24. Jeden z wierzchołków kwadratu leżący na średnicy jest odległy od środka o $x = r \frac{\sqrt{5}}{5}$. 25. Bok prostokąta prostopadły do podstawy trójkąta $x = \frac{h(p-a)}{h-a}$. 26. Odległość szukanej równoległej od wierzchołka trójkąta $x = \frac{h\sqrt{2}}{2}$. 27. Odległość szukanej prostej od wierzchołka mniejszego kąta przy podstawie trójkąta $x = \sqrt{\frac{bm}{2}}$, gdzie b jest podstawą trójkąta, m — rzutem większego z pozostałych boków trójkąta na podstawę. 28. Boki trójkąta $x = \frac{d_1(3+\sqrt{3})}{6}$ i $y = \frac{d_2(3-\sqrt{3})}{6}$, gdzie d_1 i d_2 są przekątnymi rombu. 29. Odległość wierzchołka trójkąta od wierzchołka kwadratu $x = a(2-\sqrt{3})$, gdzie a oznacza bok kwadratu. 30. Odległość między wierzchołkami danego i szukanego kwadratu $x = \frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$. 31. Promień koła szukanego $x = \frac{a^2 + b^2 - r^2}{2(a+r)}$, gdzie a oznacza długość prostopadłej spuszczanej ze środka danego koła na daną prostą, b — odległość prostopadłej od danego punktu. 32. Boki szukanego prostokąta wynoszą: $\frac{(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4cd}}{2}$, gdzie a i b są bokami pierwszego prostokąta, zaś c i d bokami drugiego. 33. Bok prostokąta równoległy do wysokości trójkąta $y = \frac{bhn}{bn+mh} = \frac{bh}{b+\frac{m}{n}h}$, gdzie b jest podstawą, h — wysokością trójkąta. 34. $BE = \frac{a^2}{b}$. 35. $BE = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a^2}}{2}$. 36. Szukany promień $r = \frac{a+b-\sqrt{2ab}}{2}$, gdzie a i b są bokami prostokąta. 37. $x = \frac{1}{2}[\sqrt{m^2 + 4b(a+b)} - m]$. Wskazówka: Przedłużyć odcinek $AB=a$ do przecięcia z daną prostą w punkcie C i oznaczyć odległość od punktu C do najbliższego z danych punktów literą b . Wykorzystać własność siecznych poprowadzonych z jednego punktu.

TREŚĆ.

	Strona
Przedmowa do ósmego wydania	2
1. Linia prosta (1—18)	3
2. Kąty (1—37)	5
3. Trójkąty i wielokąty. Prostopadłe i pochyłe. Symetria osiowa (1—50)	7
4. Proste równoległe. Suma kątów trójkąta i wielokąta (1—59)	11
5. Równoległoboki i trapezy (1—93)	15
6. Okrąg (1—59)	22
7. Mierzenie kątów łukami (1—88)	26
8. Odcinki proporcjonalne. Własność dwusiecznej w trójkącie (1—28)	32
9. Podobieństwo trójkątów i wielokątów (1—60)	35
10. Związki liczbowe między elementami liniowymi trójkątów i niektórych czworokątów (1—112)	39
11. Odcinki proporcjonalne w kole (1—46)	49
12. Wielokąty foremne (1—47)	54
13. Pola figur prostoliniowych (1—143)	57
14. Znajdowanie w trójkącie środkowych, dwusiecznych i promieni kół opisanego i wpisanego (1—23)	68
15. Długość okręgu i łuku. Pole koła i jego części (1—71)	70
16. Zastosowanie algebry do geometrii. Podział w stosunku średnim i skrajnym (1—37)	76
Odpowiedzi	79



Редактор: Ярусевич В.
Літредактор: Шаєр В.

Техредактор: Бромберг А. С.
Коректор: Шенкельбах Г. Ш.

„Укрдержнацменвидав“. Рукопис № 23. Уповн. Головліту № 8245. Зам. № 58.
Друк. арк. 5³/₄. Папер. арк. 2¹/₂. Обл. авт. арк. 7,48. Формат паперу 60×92.
Здано на виробництво 5/V 1940. Підписано до друку 19/VI 1940.

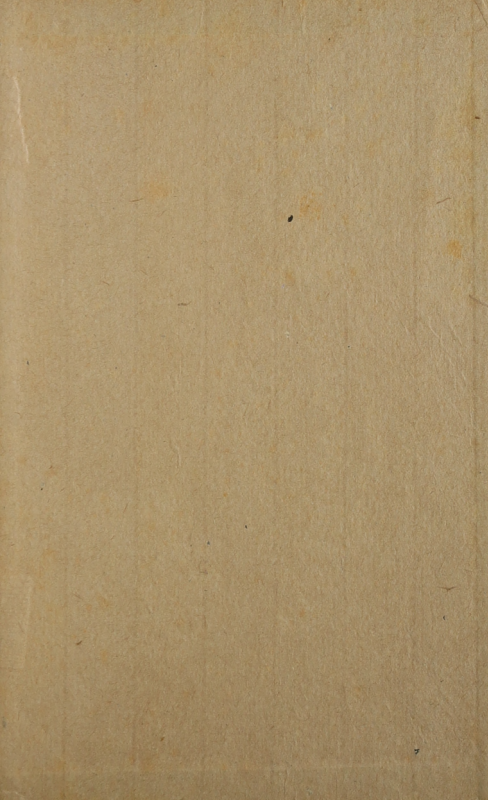
Друкарня АН УРСР № 1 Львів.

Зам. 286. Тираж 16.500.

Якщо в цій книжці будуть дефекти, просимо повернути її для заміни на адрес:
Держ. В-во Нац. Меншостей УРСР — Львів, вул. Чарнецького 12.

WŁAD.FELSZTYŃSKI

24



ЦІНА 1 Крб.

Pedagogiczna Biblioteka Wojewódzka
w Gdańsku

207092/1



010000207092

NIE WYPOŻYCZA SIĘ
DO DOMU

Польською мовою
Н. РИБКИН
ЗБІРНИК ЗАДАЧ
по
ГЕОМЕТРІЇ
для середньої школи
Частина I:
ПЛАНИМЕТРІЯ

На польском языке
Н. РЫБКИН
СБОРНИК ЗАДАЧ
по
ГЕОМЕТРИИ
для средней школы
Часть I:
ПЛАНИМЕТРИЯ

УКРДЕРЖНАЦМЕНВИДАВ