



POLITECHNIKA GDAŃSKA
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji
i Informatyki



mgr inż. Tomasz Krupski

Projektowanie i analiza
rekursywnych cyfrowych oscylatorów
sygnałów sinusoidalnych i świergotowych

Rozprawa doktorska

Promotor:

prof. dr hab. inż. Ewa Hermanowicz
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji
i Informatyki
Politechnika Gdańska

Gdańsk, 2011

Spis treści

Spis ważniejszych skrótów i oznaczeń	4
1. Wprowadzenie	9
2. Rekursywne oscylatory sygnałów sinusoidalnych i świergotowych.....	15
2.1. Sygnał sinusoidalny	15
2.2. Cyfrowe metody syntezy	17
2.3. Rekursywne metody syntezy	18
2.3.1. Biquad	18
2.3.2. Oscylator kompleksoidy.....	20
2.3.3. Cyfrowa prowadnica falowa.....	25
2.3.4. Kwadraturowy oscylator naprzemian aktualizujący	26
2.3.5. Zmodyfikowany oscylator kompleksoidy.....	27
2.4. Metoda projektowania oscylatorów sinusoidy dwuwymiarowej.....	28
2.5. Rekursywne oscylatory sygnałów sinusoidalnych modulowanych	33
2.6. Jakość generowanych sygnałów.....	34
2.6.1. Analiza szumu oscylatora.....	35
2.6.2. Skutki kwantowania współczynników macierzy rotacyjnej	37
2.6.3. Cykl graniczny	41
2.6.4. Widmowy zakres wolny od prążków obcych.....	43
2.7. Algorytmy poprawy czystości oscylacji	48
2.8. Nowa koncepcja badania jakości generowanych sygnałów	52
3. Projektowanie rekursywnych oscylatorów sygnałów sinusoidalnych.....	58
3.1. Sygnały wyjściowe oscylatora	59
3.2. Metody projektowania oscylatora sinusoidy dwuwymiarowej	62
3.2.1. Macierz rotacyjna oscylatora.....	63
3.2.2. Metoda projektowania oparta na transformacji Z	64
3.2.3. Procedury metod projektowania	67
3.3. Oscylator sinusoidy trójwymiarowej.....	69
3.3.1. Projektowanie oscylatora	69
3.3.2. Oscylator trójfazowy	73
3.3.3. Jakość generowanych sygnałów trójfazowych.....	74

3.4. Oscylator sinusoidy wielowymiarowej	77
3.4.1. Projektowanie oscylatora	77
3.4.2. Oscylator wielofazowy	79
4. Projektowanie rekursywnych oscylatorów sygnałów świergotowych.....	82
4.1. Oscylator tłumionych/wzmocnionych sygnałów sinusoidalnych	82
4.2. Pulsacja chwilowa w rekursywnej generacji sygnałów zmodulowanych.....	83
4.3. Sygnały świergotowe	84
4.4. Oscylator zespolonego sygnału świergotowego z liniową modulacją częstotliwości.....	84
4.5. Oscylator zespolonego sygnału z fazą chwilową w postaci wielomianu stopnia co najwyżej trzeciego.....	90
4.6. Sygnały świergotowe o malejącej częstotliwości	92
4.7. Jakość generowanych sygnałów.....	93
4.8. Oscylator zespolonego sygnału z fazą chwilową w postaci wielomianu dowolnego stopnia.....	105
5. Podsumowanie	109
Bibliografia	114

Spis ważniejszych skrótów i oznaczeń

Skróty:

AGC	—	automatyczna regulacja wzmocnienia (ang. <i>Automatic Gain Control</i>)
2D	—	dwuwymiarowy (ang. <i>Two-Dimensional</i>)
3D	—	trójwymiarowy (ang. <i>Three-Dimensional</i>)
2D-RDO	—	rekursywny cyfrowy oscylator sinusoidy dwuwymiarowej (ang. <i>Two-Dimensional Recursive Digital Oscillator</i>)
3D-RDO	—	rekursywny cyfrowy oscylator sinusoidy trójwymiarowej (ang. <i>Three-Dimensional Recursive Digital Oscillator</i>)
CFO	—	oscylator kompleksoidy (ang. <i>Coupled Form Oscillator</i>)
CORDIC	—	algorytm Voldera do sprzętowego obliczania funkcji trygonometrycznych (ang. <i>Coordinate Rotation Digital Computer</i>)
CPS	—	cyfrowe przetwarzanie sygnałów
CT	—	przekształcenie Concordii (ang. <i>Concordia Transformation</i>)
DDS	—	bezpośrednia synteza cyfrowa (ang. <i>Direct Digital Synthesis</i>)
DFT	—	dyskretna transformacja Fouriera (ang. <i>Discrete Fourier Transformation</i>)
DW	—	cyfrowa prowadnica falowa (ang. <i>Digital Waveguide</i>)
FFT	—	szybka transformacja Fouriera (ang. <i>Fast Fourier Transformation</i>)
FSK	—	kluczowanie częstotliwości (ang. <i>Frequency Shift Keying</i>)
LFM	—	liniowa modulacja częstotliwości (ang. <i>Linear Frequency Modulation</i>)
LUT	—	tablica podglądowa (ang. <i>Look-Up Table</i>)
MB	—	zmodyfikowany biquad (ang. <i>Modified Biquad</i>)
MCFO	—	zmodyfikowany oscylator kompleksoidy (ang. <i>Modified Coupled Form Oscillator</i>)
LS	—	metoda najmniejszych kwadratów (ang. <i>Least Square</i>)
mD	—	wielowymiarowy (ang. <i>Multi-Dimensional</i>)
m-PSK	—	m-wartościowe kluczowanie fazy (ang. <i>m-Phase Shift Keying</i>)

m -QAM	—	m -wartościowa kwadraturowa modulacja amplitudy (ang. <i>m-Quadrature Amplitude Modulation</i>)
m D-RDO	—	rekursywny cyfrowy oscylator sinusoidy wielowymiarowej (ang. <i>Multi-Dimensional Recursive Digital Oscillator</i>)
PA	—	akumulator fazy (ang. <i>Phase Accumulator</i>)
PPS	—	sygnał z fazą chwilową wyrażoną jako wielomian (ang. <i>Polynomial Phase Signal</i>)
ROM	—	pamięć tylko do odczytu (ang. <i>Read-Only Memory</i>)
QFM	—	kwadratowa modulacja częstotliwości (ang. <i>Quadratic Frequency Modulation</i>)
QSU	—	kwadraturowy oscylator naprzemian aktualizujący (ang. <i>Quadrature-Staggered Update</i>)
RDO	—	rekursywny cyfrowy oscylator (ang. <i>Recursive Digital Oscillator</i>)
Sa	—	próbka (ang. <i>Sample</i>)
SFDR	—	widmowy zakres dynamiczny wolny od prążków obcych (ang. <i>Spurious Free Dynamic Range</i>)
SU	—	naprzemienna aktualizacja (ang. <i>Staggered Update</i>)

Oznaczenia:

A	—	amplituda
A_i	—	amplituda sygnału na i -tym wyjściu oscylatora
\mathbf{A}	—	macierz rotacyjna oscylatora sinusoidy dwuwymiarowej
\mathbf{A}_{ad}	—	macierz dołączona
\mathbf{A}_ξ	—	macierz oscylatora tłumionych albo wzmocnionych sygnałów sinusoidalnych
\mathbf{A}^n	—	n -krotny iloczyn macierzy \mathbf{A} , macierz przejść
\mathbf{A}^T	—	macierz transponowana
$\text{Arg}(\cdot)$	—	argument główny, tzw. arcus tangens „czterocwiartkowy”
b_i	—	i -ty parametr strukturalny
\mathbf{B}	—	macierz oscylatora sinusoidy trójwymiarowej
B_{ij}	—	dopełnienie algebraiczne elementu b_{ij}

C	—	macierz oscylatora sinusoidy wielowymiarowej
D [·]	—	chwilowa macierz rotacyjna
$\det(\cdot)$	—	wyznacznik macierzy
e	—	liczba Eulera
$e[\cdot]$	—	realizacja szumu kwantyzacji
$\exp(\cdot)$	—	funkcja eksponencjalna
$E(z)$	—	transformata Z przebiegu błędu
$e_a[\cdot]$	—	chwilowy (bieżący) błąd amplitudy [dB]
$e_\varphi[\cdot]$	—	chwilowy (bieżący) błąd fazy [rad]
$e_\omega[\cdot]$	—	chwilowy (bieżący) błąd pulsacji [rad/Sa]
f	—	częstotliwość znormalizowana [1/Sa]
F_0	—	częstotliwość [Hz]
F_{\max}	—	regulowana częstotliwość maksymalna
F_{\min}	—	możliwa do zadania częstotliwość minimalna
F_s	—	szybkość próbkowania w próbkach na sekundę [Sa/s]
$g[\cdot]$	—	ciąg używany w rekursywnej generacji zespolonego sygnału z fazą chwilową w postaci wielomianu
$G[\cdot]$	—	współczynnik regulacji wzmocnienia
I	—	macierz jednostkowa
$\text{Im}(\cdot)$	—	składowa (część) urojona
j	—	jednostka urojona
n	—	numer bieżącej próbki
N	—	czas trwania sygnału dyskretnego w liczbie próbek [Sa] od chwili początkowej ($n = 0$), upływ czasu
O	—	macierz zerowa
p	—	iloraz pulsacji dwóch kompleksoid
$p[\cdot]$	—	moc chwilowa
P	—	dokładność kwantyzacji
Q	—	macierz podobieństwa macierzy A do macierzy diagonalnej Λ
$\mathcal{Q}(\cdot)$	—	funkcja kwantująca
\mathbf{Q}^{-1}	—	macierz odwrotna do macierzy Q

\mathbb{R}	—	zbiór (oś) liczb rzeczywistych
R^2	—	współczynnik determinacji
$\text{Re}(\cdot)$	—	składowa (część) rzeczywista
$s[\cdot]$	—	dyskretny, przyczynowy i rzeczywisty sygnał sinusoidalny
\hat{s}	—	funkcja kwantująca współczynniki macierzy rotacyjnej
SFDR_{\min}	—	najmniejszy osiągnięty widmowy zakres dynamiczny wolny od prążków obcych
S_{\max}	—	maksymalny poziom prążków obcych
\hat{S}_{\max}	—	wynik oszacowania (estymata) S_{\max}
T	—	okres
T_{LC}	—	przedział czasu od rozpoczęcia obliczeń do wystąpienia cyklu granicznego w RDO
$\text{tr} \mathbf{B}$	—	śląd macierzy \mathbf{B}
$\text{tr} \mathbf{B}_{ij}$	—	śląd macierzy \mathbf{B} powstałej przez wykreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny z macierzy \mathbf{B}
u_l	—	składnik losowy, zmienna zakłócająca
$u[\cdot]$	—	zespolony sygnał świergotowy LFM
$u^*[n]$	—	sprzężenie sygnału $u[n]$
$v[\cdot]$	—	zespolony sygnał z fazą chwilową w postaci wielomianu stopnia co najwyżej trzeciego
$w[\cdot]$	—	zespolony sygnał z fazą chwilową w postaci wielomianu dowolnego stopnia
$x[\cdot]$	—	zespolony sygnał wygenerowany za pomocą rzeczywistego (cyfrowego) oscylatora
$y[\cdot]$	—	zespolony sygnał wyjściowy oscylatora
$y_{1e}[\cdot]$	—	przebieg błędu
$y_m[\cdot]$	—	m -ty sygnał wyjściowy oscylatora
$y'[n]$	—	skwantowany sygnał $y[n]$
$y[0]$	—	warunek początkowy
$\mathbf{y}[\cdot]$	—	wektor sygnałów wyjściowych oscylatora
$\mathbf{y}[0]$	—	wektor warunków początkowych oscylatora
$Y_i(z)$	—	transformata \mathbf{Z} i -tego sygnału wyjściowego oscylatora

$Y_{id}(z)$	— transformata \mathbf{Z} dyskretnej sinusoidy przyczynowej
$Y_{1e}(z)$	— transformata \mathbf{Z} przebiegu błędu
$\mathbf{Y}(z)$	— transformata \mathbf{Z} wektora sygnałów wyjściowych oscylatora
z^{-1}	— opóźnienie o jeden odstęp próbkowania, o 1 Sa
\mathbf{Z}	— operator transformaty \mathbf{Z}
α	— faza początkowa
α_i	— faza początkowa sygnału na i -tym wyjściu oscylatora
α_{lk}	— różnica faz l -tego i k -tego sygnału wyjściowego oscylatora, $l > k$
β	— współczynnik równania różnicowego oscylatora SU
γ	— parametr oscylatora Reinscha
δ	— współczynnik równania różnicowego oscylatora SU
Δ	— szerokość przedziału kwantowania
ε	— współczynnik równania różnicowego oscylatora SU
λ	— wartość własna
Λ	— macierz diagonalna macierzy \mathbf{A}
μ_k	— k -ty współczynnik fazy świergotu
ξ	— współczynnik tłumienia, $0 < \xi < 1$, albo wzmocnienia, $\xi > 1$, sygnału
π	— pole koła o promieniu równym jeden
σ_0^2	— moc średnia (wariancja) szumu kwantyzacji
σ_u	— średni błąd reszt
ϕ	— różnica faz drugiego i pierwszego sygnału wyjściowego oscylatora sinusoidy dwuwymiarowej: $\alpha_2 - \alpha_1$
ψ	— iloraz amplitud drugiego i pierwszego sygnału wyjściowego oscylatora sinusoidy dwuwymiarowej: A_2/A_1
$\varphi[\cdot]$	— faza chwilowa
ω_0	— stała pulsacja oscylatora
ω'_0	— pulsacja niewspółmierna z π , „sąsiadująca” z pulsacją ω_0 współmierną z π : $\omega'_0 = 22\omega_0/(7\pi)$
$\omega[\cdot]$	— pulsacja chwilowa

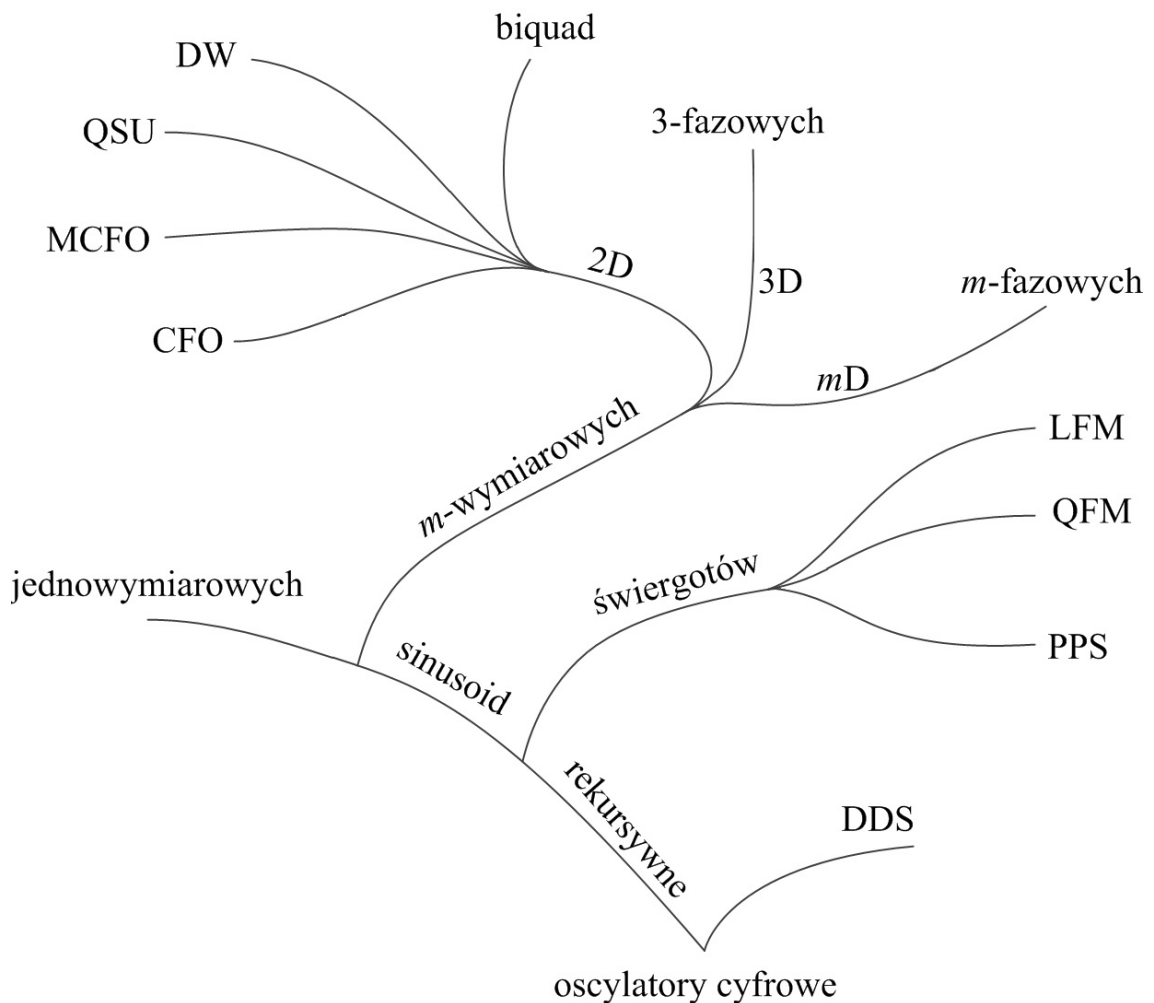
1. Wprowadzenie

Przedmiotem badań w tej rozprawie są rzeczywiste liniowe filtry cyfrowe rekursywne stacjonarne rzędu drugiego i wyższych, o dwu, trzech i więcej wyjściach, z założenia niestabilne – generujące, po pobudzeniu ich warunkami początkowymi, drgania niegasnące sinusoidalne lub przebiegi świergotowe na każdym wyjściu. Informacja o parametrach generowanych sygnałów jest zawarta w warunkach początkowych i współczynnikach struktury filtru, dobranych tak, aby jego bieguny znajdowały się na płaszczyźnie z , na okręgu jednostkowym, co jest warunkiem niegasnących oscylacji. Z punktu widzenia analizy systemów liniowych i stacjonarnych filtr o powyższych właściwościach nazywany jest rekursywnym cyfrowym oscylatorem (ang. *Recursive Digital Oscillator* – RDO).

Sygnały sinusoidalne są najczęściej spotykanymi sygnałami w naszym otoczeniu [Hor95], [Opp10]. Dyskretną, przyczynową, rzeczywistą sinusoidą m -wymiarową (ang. *m-Dimensional sine*, *multi-Dimensional sine* – *mD sine*) $m = 0, 1, 2, \dots$ nazwiemy przypisanie każdej liczbie n , $n = 0, 1, 2, \dots$ wartości wektora $\mathbf{s}[n] = [s_1[n] \ s_2[n] \ \dots \ s_m[n]]$, opisującego wartości przyjmowane dla danego n przez każdy z sygnałów sinusoidalnych: $s_i[n] = A_i \cos(\omega_0 n + \alpha_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$, gdzie $A_i > 0$ oznacza amplitudę, ω_0 pulsację w rad/Sa, a α_i – fazę początkową w radianach [rad] i -tego sygnału sinusoidalnego. W szczególności, dla $m = 2$ dostajemy sinusoidę dwuwymiarową (ang. *Two-Dimensional sine* – *2D sine*), a dla $m = 3$ sinusoidę trójwymiarową (ang. *Three-Dimensional sine* – *3D sine*). O praktycznym zastosowaniu sygnałów sinusoidalnych decyduje choćby to, że są one rozwiązaniami pewnych liniowych równań różniczkowych, opisujących zarówno zjawiska występujące w przyrodzie, jak i właściwości systemów liniowych [Dic00], [Fli92], [Hor95], [Tur03], [Opp10], [Woj84]. Modulując liniowo bądź kwadratowo częstotliwość sygnału sinusoidalnego, otrzymuje się sygnały świergotowe z , odpowiednio, liniową (ang. *Linear Frequency Modulation* – LFM) bądź kwadratową (ang. *Quadratic Frequency Modulation* – QFM) modulacją częstotliwości, stanowiące przykłady sygnału z fazą chwilową wyrażoną jako wielomian (ang. *Polynomial Phase Signal* – PPS) [Guo96], [McK09a], [McK09b], [Oul97].

Cyfrowe oscylatory sygnałów sinusoidalnych i świergotowych znajdują zastosowanie w licznych urządzeniach współczesnej telekomunikacji [Cos02],

[Dic00], [Gol69], [Gol71], [Gum72], [Hue98], [Joo08], [Nii00], [Opp10], systemach nawigacji [Adl95], [Hu08], [Hin89], [Iba06], [Mor85], [Xia08], geofizyki, astrofizyki, metrologii, testowaniu i diagnozowaniu urządzeń elektronicznych [Ale05], [Ali05], [Hor95], syntezie dźwięku [Ber97], [Hau99] i innych. Klasyfikację oscylatorów cyfrowych przedstawiono na rys. 1.1. Pośród algorytmów stosowanych w generacji sygnałów sinusoidalnych i ściągotowych można wyróżnić RDO oraz nieliniowy algorytm oscylatora cyfrowego z syntezą bezpośrednią, zwany DDS od ang. *Direct Digital Synthesizer*.



Rys. 1.1. Klasyfikacja oscylatorów cyfrowych

Ważnym i aktualnym zagadnieniem jest projektowanie i analiza oscylatorów cyfrowych. Wśród pożądanych cech tych oscylatorów wymienić można: oszczędny pobór mocy zasilania i miniaturyzację hardware'ową oraz wierność i dokładność generowanego sygnału. Projektowanie urządzeń mikromocowych o zadowalającej

dokładności generowanych sygnałów wymaga stosowania specjalnych metod od początku do końca projektu. Dotyczy to przede wszystkim lekkich, przenośnych przyrządów i podzespołów wykorzystywanych w telekomunikacji i multimediami.

Uważa się, że ze względu na łatwą regulację parametrów sygnałów wyjściowych RDO, metody rekursywnej generacji sygnałów sinusoidalnych są bardziej elastyczne w porównaniu z innymi znanymi metodami syntezy dyskretnej [Fli92], [Hau99]. Co więcej, RDO umożliwia prostą i niezwłoczną modulację parametrów generowanych sygnałów [Chr00], [Fli92], pożądaną w modulacji i demodulacji sygnałów, i oszczędny pobór mocy zasilania [Cur00b]. Zalety te związane są z tym, że próbki sygnału wyjściowego są obliczane w chwili bieżącej, a nie odczytywane bezpośrednio z tablicy funkcji lub wyników pośrednich przechowywanej w pamięci ROM.

Wadą rekursywnej generacji są błędy numeryczne, związane z procesem kwantowania [Cur00b], [Opp72]. Problem ten można rozwiązać, implementując odpowiednie algorytmy poprawy jakości generowanych sygnałów znane z literatury [Abu94], [Abu86a], [Ahm86], [Al-97], [Al-01], [Fli92], [Leh00], [Nii99], [Nii03], [Zie96] tak, aby osiągnąć zadowalające rezultaty.

Zagadnienie projektowania RDO polega – ogólnie biorąc – na określeniu rekursywnego równania macierzowego, które opisuje właściwości RDO i jednocześnie określa związek między sygnałami wyjściowymi RDO, warunkami początkowymi i elementami macierzy rotacyjnej. Równanie oscylatora jest rekursywne, co oznacza, że w obliczaniu kolejnych próbek sygnału wyjściowego oscylatora biorą udział jedynie opóźnione próbki poprzednie (z reguły jedna albo dwie) tego sygnału. W szczególności wygodnym sposobem projektowania RDO jest zastosowanie metod algebraicznych w trygonometrii.

W literaturze spotykamy algorytmy rekursywnej generacji sinusoidy 2D (rys. 1.1) opublikowane przez różnych autorów. Jednym z najbardziej znanych RDO są: biquad i oscylator kompleksoidy, znany pod ang. nazwą *Coupled Form Oscillator* – CFO, wytwarzający parę sygnałów sinusoidalnych o jednostkowych amplitudach i przesuniętych w fazie o $\pi/2$. Inne przykłady RDO to cyfrowa prowadnica falowa (ang. *Digital Waveguide* – DW), kwadraturowy oscylator naprzemian aktualizujący (ang. *Quadrature-Staggered Update* – QSU) czy zmodyfikowany oscylator kompleksoidy (ang. *Modified Coupled Form Oscillator* – MCFO). Pomimo takiej liczby algorytmów RDO, brakuje spójnej i uniwersalnej teorii rekursywnych cyfrowych

oscylatorów sinusoidalnych, która jednoczyłaby postaci macierzy rotacyjnych, opisujących oscylatory znane z literatury i umożliwiłaby zaprojektowanie oscylatora o dowolnie zadanych parametrach. Jest to zdaniem autora jeden z powodów, dla których prace nad oscylatorami rekursywnymi nie są rozwijane, a temat ich algorytmów, projektowania i metod projektowania często uważa się za wyczerpany. Ponadto brak jest w literaturze informacji w temacie rekursywnych oscylatorów sinusoidy mD ($m > 2$) i ich analizy, jak również nie opublikowano jak dotąd, według najlepszej wiedzy autora, algorytmu rekursywnego oscylatora sygnału PPS. Zamiarem autora niniejszej rozprawy jest uzupełnienie tej luki.

Nieodłącznym etapem projektowania oscylatorów jest ich analiza, uwzględniająca m. in. badanie właściwości struktur RDO, jakości generowanych sygnałów oraz sformułowanie wymagań sprzętowych w implementacji oscylatora, z podaniem przy tym liczby wykonywanych mnożeń na próbkę. Mimo, że mnożenie jest jednym z działań arytmetycznych, to jego stosowanie w strukturze układu scalonego wymaga bardzo rozbudowanej struktury kombinacyjnej i struktur pamięci [Al-I03], [Sch90]. Stąd, często w opracowywaniu algorytmów cyfrowego przetwarzania sygnałów (CPS), wymagana jest minimalizacja liczby wykonywanych mnożeń na próbkę [Sha08].

Projektowanie i analiza oryginalnych algorytmów rekursywnych oscylatorów oraz opracowywanie metod ich projektowania stawia przed inżynierami CPS nowe wyzwania. Stąd, do głównych **celów rozprawy** należą:

- 1) Zadaptowanie metody diagonalizacji macierzy do wyznaczania macierzy rotacyjnej i wyznaczania, przy różnych warunkach początkowych, postaci sygnałów wyjściowych oscylatora sinusoidy dwuwymiarowej.
- 2) Opracowanie metody projektowania rekursywnego cyfrowego oscylatora sinusoidy dwuwymiarowej, umożliwiającej zadawanie dowolnych parametrów sygnałów wyjściowych oscylatora.
- 3) Zaprojektowanie rekursywnego cyfrowego oscylatora sinusoidy wielowymiarowej o dowolnie zadanych parametrach, w tym oscylatora wielofazowego.
- 4) Opracowanie algorytmu rekursywnej generacji zespolonego sygnału świergotowego z liniową oraz z kwadratową modulacją częstotliwości.
- 5) Opracowanie miar jakościowych do oceny czystości generowanych rekursywnie przebiegów sinusoidalnych i świergotowych.

Tezy rozprawy są następujące:

- 1) Możliwe jest zaprojektowanie rekursywnego cyfrowego oscylatora sinusoidy wielowymiarowej o stałej pulsacji i z dowolnie zadanymi parametrami – amplitudą i fazą początkową każdego z sinusoidalnych sygnałów wyjściowych.
- 2) Możliwe jest zaprojektowanie rekursywnego cyfrowego oscylatora sygnału zespolonego z fazą chwilową wyrażoną jako wielomian dowolnego stopnia.
- 3) Bieżące błędy: amplitudy, fazy i pulsacji chwilowej, są indykatorami jakości generowanych rekursywnie przebiegów sinusoidalnych i świergotowych.

Układ pracy jest następujący. W rozdz. 2 omówiono znane w literaturze algorytmy rekursywnych oscylatorów sinusoidy 2D oraz przedstawiono metodę ich projektowania. Przedyskutowano również zagadnienia rekursywnej generacji sygnałów zmodulowanych. Dalej przedstawiono model szumowy RDO, pokazano wpływ kwantyzacji elementów macierzy rotacyjnej oscylatora na jakość generowanych sygnałów i omówiono cykl graniczny. W tym rozdziale podano również zależność maksymalnego poziomu prążków obcych w widmie od dokładności kwantyzacji i od upływu czasu, jak również przedstawiono znane z literatury algorytmy poprawy czystości generowanych sygnałów. Końcowy p. 2.8 zawiera opis nowej koncepcji badania czystości generowanych sygnałów opartej na wyznaczeniu chwilowych (bieżących) błędów: amplitudy, fazy i pulsacji. Rozdz. 3 poświęcony jest projektowaniu rekursywnych oscylatorów sygnałów sinusoidalnych. Zaprezentowano tu dwie metody projektowania oscylatorów sinusoidy 2D oraz algorytm rekursywnej generacji dwóch sygnałów sinusoidalnych o dowolnie zadanych parametrach – amplitudą i fazą początkową każdego z nich. Opracowanie wspomnianych metod projektowania było możliwe po zaadaptowaniu metody diagonalizacji macierzy do wyznaczenia postaci sygnałów wyjściowych i macierzy rotacyjnej oscylatora sinusoidy 2D. Dalej zaprojektowano rekursywny oscylator sinusoidy mD , którego szczególnym przypadkiem jest rekursywny oscylator wielofazowy. W rozdz. 3 przebadano czystość generowanych sygnałów dla różnych realizacji rekursywnego oscylatora trójfazowego, posługując się miernikami jakości z rozdz. 2. Rozdz. 4 poświęcony jest projektowaniu rekursywnych oscylatorów sygnałów świergotowych. Na podstawie wyników z rozdz. 3 i wykorzystując pojęcie pulsacji chwilowej, w rozdz. 4 opracowano kilka oryginalnych algorytmów, w tym algorytmy rekursywnej generacji tłumionego albo wzmocnionego sygnału sinusoidy mD , zespolonych sygnałów LFM i QFM czy sygnału PPS. Prezentowanym algorytmom towarzyszy analiza czy-

stości wygenerowanych sygnałów zmodulowanych na podstawie chwilowych błędów amplitudy, fazy i pulsacji. Rozdz. 5 stanowi podsumowanie najważniejszych wyników rozprawy.

2. Rekursywne oscylatory sygnałów sinusoidalnych i świergotowych

Zasadniczym celem niniejszego rozdziału jest przegląd współczesnych zagadnień związanych z rekursywną cyfrową generacją sygnałów sinusoidalnych i świergotowych. W pierwszej części rozdziału wprowadzamy pojęcie sinusoidy wielowymiarowej, która wraz z rachunkiem macierzowym jest pomocna w procesie projektowania rekursywnych cyfrowych oscylatorów. Również, wskazujemy na inne od rekursywnych metody syntezy dyskretnej. W dalszej części tego rozdziału omawiamy znane z literatury algorytmy rekursywnego oscylatora sinusoidy dwuwymiarowej (ang. *Two-Dimensional Recursive Digital Oscillator – 2D-RDO*). Ich cechą wspólną jest to, że bieguny transformaty Z sygnałów wyjściowych znajdują się na płaszczyźnie z , na okręgu jednostkowym, tj. o promieniu równym 1 i o środku w początku układu współrzędnych. Podejście do ich projektowania wyłoniło się po podaniu przez różnych autorów równań do rekursywnej generacji dyskretnej sinusoidy dwuwymiarowej (ang. *Two-Dimensional sine – 2D sine*). Kolejny p. 2.5 stanowi dyskusja rekursywnych cyfrowych oscylatorów sygnałów sinusoidalnych modulowanych. Następnie w tym rozdziale zajmujemy się analizą szumu rekursywnego cyfrowego oscylatora (ang. *Recursive Digital Oscillator – RDO*) oraz pokazujemy, jaki wpływ ma kwantyzacja elementów macierzy rotacyjnej na jakość generowanych sygnałów. Ponadto omawiamy najczęściej spotykane algorytmy poprawy jakości oscylacji. W końcowym p. 2.8 zawarto opis nowej koncepcji badania czystości sygnałów na wyjściu RDO.

2.1. Sygnał sinusoidalny

Dyskretny, przyczynowy, rzeczywisty sygnał sinusoidalny, niekiedy nazywany także harmonicznym, ma postać

$$s[n] = A \cos(\omega_0 n + \alpha), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

gdzie n jest numerem bieżącej próbki. Sygnał ten posiada trzy parametry: amplitudę $A > 0$, stałą pulsację ω_0 w rad/Sa oraz fazę początkową α w rad. Pulsacja ω_0 powiązana jest z częstotliwością sygnału sinusoidalnego F_0 w Hz i szybkością próbkowania F_s w Sa/s poniższą zależnością

$$\omega_0 = 2\pi \frac{F_0}{F_s} \in (0, \pi) \quad (2.2)$$

Zadaniem oscylatorów sinusoidalnych jest generacja czystych tj. niemodulowanych sygnałów sinusoidalnych o różnych wartościach parametrów. Sygnały te znajdują zastosowanie w telekomunikacji, w wielu algorytmach CPS, m.in. przy obliczaniu dyskretnej transformacji Fouriera (ang. *Discrete Fourier Transformation* – DFT), szybkiej transformacji Fouriera (ang. *Fast Fourier Transformation* – FFT) oraz w przesuwnikach fazy, przełącznikach, mieszaczach, w modulacji i demodulacji sygnałów [Dic00], [Fli92], [Tur03], i innych.

Analizę teoretyczną, niezbędną w projektowaniu oscylatorów sinusoidalnych, ułatwia wykorzystanie pojęć sygnału zespolonego i sygnału wielowymiarowego oraz stosowanie zapisu macierzowego. Za definicję dyskretnej funkcji zespolonej – ciągu $y[n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$ przyjmuje się przyporządkowanie każdej liczbie n dokładnie jednej liczby zespolonej $y = y[n]$. Dalej w rozprawie będziemy rozważać funkcję zespoloną $y[n]$ o poniższej postaci

$$y[n] = y_1[n] + jy_2[n], \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

gdzie $y_1[n] = \operatorname{Re} y[n]$ oraz $y_2[n] = \operatorname{Im} y[n]$ są dyskretnymi sygnałami sinusoidalnymi postaci jak w (2.1), o tej samej pulsacji ω_0 , a mogącymi różnić się między sobą amplitudami lub fazami początkowymi. W szczególności, dla $y_1[n] = \cos(n\omega_0 + \alpha)$ i $y_2[n] = \sin(n\omega_0 + \alpha)$ z (2.3), dostajemy sygnał $y[n] = \exp j(n\omega_0 + \alpha)$ zwany zespolonym sygnałem harmonicznym, zespoloną sinusoidą albo krótko: kompleksoidą (ang. *complexoid*) [Mar04], [Mar05] o jednostkowej amplitudzie. Z kolei dyskretną sinusoidą m -wymiarową (ang. *m-dimensional sine*, *multi-dimensional sine*) nazwiemy przypisanie każdej liczbie n wartości wektora $\mathbf{s}[n] = [s_1[n] \ s_2[n] \ \dots \ s_m[n]]$, opisującego wartości przyjmowane przez każdy z sygnałów sinusoidalnych: $s_i[n] = A_i \cos(\omega_0 n + \alpha_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ (mogących w ogólności różnić się między sobą amplitudą i fazą początkową), dla danego n . W szczególności, dla $m = 2$ dostajemy sinusoidę dwuwymiarową (ang. *Two-Dimensional sine* – 2D sine), a dla $m = 3$ sinusoidę trójwymiarową (ang. *Three-Dimensional sine* – 3D sine). Kolejnym kluczowym zapisem, ułatwiającym projektowanie i analizę RDO, jest zapis macierzowy. Wówczas m sygnałów wyjściowych RDO umieszczamy w tablicy o m wierszach i

jednej kolumnie (macierzy kolumnowej o wymiarze $m \times 1$), nazywanej wektorem $\mathbf{y}[n]$ sygnałów wyjściowych RDO.

2.2. Cyfrowe metody syntezy

Do cyfrowych metod syntezy sygnału harmonicznego zaliczamy: metody analityczne, metody bezpośredniej syntezy oraz metody rekursywne [Van05].

Metody analityczne polegają na bieżącym obliczaniu próbki sygnału w oparciu o rozwinięcie funkcji sinusoidalnej w szereg [Alw06], [Fin79], [Ker90]. Niewątpliwą zaletą tych metod jest kontrolowanie dokładności generowanego przebiegu. Odbywa się to poprzez wybór liczby składników do aproksymacji funkcji sinus. Przykładowo, przyjmując $\sin t \approx t - t^3/3! + t^5/5! - t^7/7!$, błąd aproksymacji jest nie większy niż $|t^9|/9!$. W szczególności, dla $|t| < \pi/2$ błąd aproksymacji jest nie większy niż $1,6 \cdot 10^{-4}$. Oczywiście, im większa dokładność stosowanej arytmetyki i stopień wielomianu aproksymującego, tym dokładność przybliżenia jest lepsza. Z drugiej strony, większa dokładność generacji sinusoidy zwiększa złożoność obliczeniową i wymagania sprzętowe w implementacji oscylatora, co czyni syntezę analityczną w czasie rzeczywistym nieefektywną [Her04a].

Wspomniane metody analityczne stosuje się zazwyczaj do niepotokowego (ang. *off-line*) generowania próbek sinusoidy gromadzonych w tablicy podglądowej, zwanej LUT od ang. *Look-Up Table*, z reguły używanej w metodach bezpośredniej syntezy [Gol71], [Her05], [Nic91], [Sam95], zwanych krótko DDS od ang. *Direct Digital Synthesis*. DDS w swojej pierwotnej formie jest kaskadą dwóch podstawowych członów: akumulatora fazy (ang. *Phase Accumulator* – PA) oraz konwertera fazowo-amplitudowego (ang. *phase to amplitude converter*) [Gol71]. Ciągami wejściowym PA jest przebieg pulsacji chwilowej, powodujący wpisanie nowej wartości fazy chwilowej do akumulatora fazy, a ta liczba, umieszczona w tym akumulatorze, jest używana jako adres pamięci LUT, zawierającej próbki wartości funkcji sinusoidalnej.

W projektowaniu DDSów można m.in. wyróżnić dwie skrajności. Pierwsza z nich – to kompletna LUT, zawierająca wartości pożądaných funkcji sinusoidalnych dla zbioru wszystkich faz chwilowych syntetyzowanego przebiegu [Bel00]. Druga skrajność – to DDSy nie posiadające LUT [Lah01], [Nii03], [Yi10], gdzie wszystkie

wartości próbek oblicza się na bieżąco. Rozwiązania pośrednie minimalizują wymiar LUT, zachowując pożądaną dokładność. Wykorzystują one m.in. metody analityczne [Al-03], [Blo04], [Tis06], zespolony filtr ułamkowo-opóźniający [Her04b] czy algorytm CORDIC [Har07], [Val06].

Ostatnią grupę metod dyskretnej syntezy stanowią metody rekursywne, które omawiamy w następnym punkcie tego rozdziału.

2.3. Rekursywne metody syntezy

Rekursywną generację sygnałów sinusoidalnych uzyskuje się, gdy bieguny rekursywnego filtra cyfrowego drugiego rzędu znajdują się na płaszczyźnie z , na okręgu jednostkowym [Car94], [Har83], [Hes72], [Fur75], [Gol69], [Pro96], [Sal70].

Rekursywny filtr cyfrowy, z założenia niestabilny, a służący do generacji przebiegów sinusoidalnych lub zmodulowanych, nazywamy oscylatorem cyfrowym RDO. W każdym filtrze cyfrowym wyodrębniamy takie same elementarne bloki funkcjonalne: sumatory, układy mnożące i elementy opóźniające. Odpowiednie połączenie tych podstawowych elementów określa strukturę filtra, a tym samym i algorytm przetwarzania sygnału. W strukturach RDO można wyróżnić wspólną cechę związaną z organizacją obliczeń – a mianowicie, że w tworzeniu kolejnych próbek sygnału wyjściowego oscylatora biorą udział jedynie opóźnione próbki (z reguły jedna lub dwie) tego sygnału. Na RDO nie działa żaden sygnał wejściowy, a przyczyną wywołującą przebiegi na wyjściu RDO są niezerowe warunki początkowe, określone przez wektor warunków początkowych.

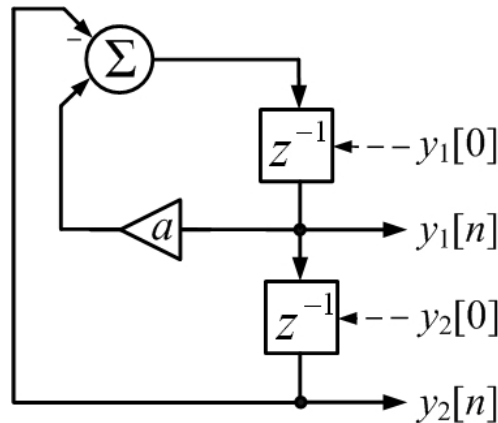
Zaznaczmy, że pojęcie realizacji RDO rozumiemy tu jako wyznaczenie jego struktury, a więc określenie algorytmu przetwarzania sygnału.

2.3.1. Biquad

Jedną z najbardziej znanych realizacji rekursywnego oscylatora sinusoidy jest biquad [Abu86a], [Abu86b], [Asg93], [Fur75], [Gol69], [Gor85], [Har83], [Pre94]. Jest to filtr cyfrowy o stale zerowym wejściu, pracujący zgodnie z liniowym równaniem rekursywnym zapisanym w poniższej postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cos\omega_0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ y_2[n-1] \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Równanie różnicowe (2.4) podał francuski matematyk François Viète (1540-1603), stosując jako pierwszy metody algebraiczne w trygonometrii. Strukturę tego oscylatora przedstawiamy na rys. 2.1. Oczywiście, współczynnik $2\cos\omega_0$ w (2.4) jest na stałe zapisany w pamięci i nie zmienia swej wartości w kolejnych iteracjach obliczeń. Dla $n = 0$ wartości: $y_1[0]$ i $y_2[0]$, określają warunki początkowe biquadu, w których przechowuje się wartości próbek sygnałów wyjściowych: $y_1[n]$ i $y_2[n]$, przed rozpoczęciem obliczeń. Sinusoidę 2D generujemy iteracyjnie, wyznając za pomocą (2.4) kolejne próbki: $y_1[1]$, $y_2[1]$, $y_1[2]$, $y_2[2]$, $y_1[3]$, $y_2[3]$, ... sygnałów wyjściowych biquadu. Przykładowo, zadając w (2.4) warunki początkowe: $y_1[0] = 1$ i $y_2[0] = \cos\omega_0$, generujemy: $y_1[n] = \cos n\omega_0$ i $y_2[n] = \cos((n-1)\omega_0)$, natomiast przy szczególnych warunkach początkowych w (2.4): $y_1[0] = 0$ i $y_2[0] = -\sin\omega_0$, otrzymujemy: $y_1[n] = \sin n\omega_0$ i $y_2[n] = \sin((n-1)\omega_0)$. W obu nastawach sygnały wyjściowe są fazowo przesunięte względem siebie o wartość pulsacji ω_0 (2.2).



Rys. 2.1. Struktura biquadu ze współczynnikiem $a = 2\cos\omega_0$ [Tur03]

Zaletą generacji sinusoidy wg. rys. 2.1 jest niski koszt nakładu sprzętowego ze względu na wykonywanie tylko jednego mnożenia (przez współczynnik o wartości rzeczywistej $0 < 2\cos\omega_0 < 2$) na próbkę. Liczba mnożeń na próbkę ma szczególne znaczenie. Stosowanie dużej liczby mnożeń na próbkę w strukturze układu scalonego wymaga bardzo rozbudowanej struktury kombinacyjnej i struktur pamięci. Wiąże się to także ze zwiększonym poborem mocy zasilania. Ponadto w implemen-

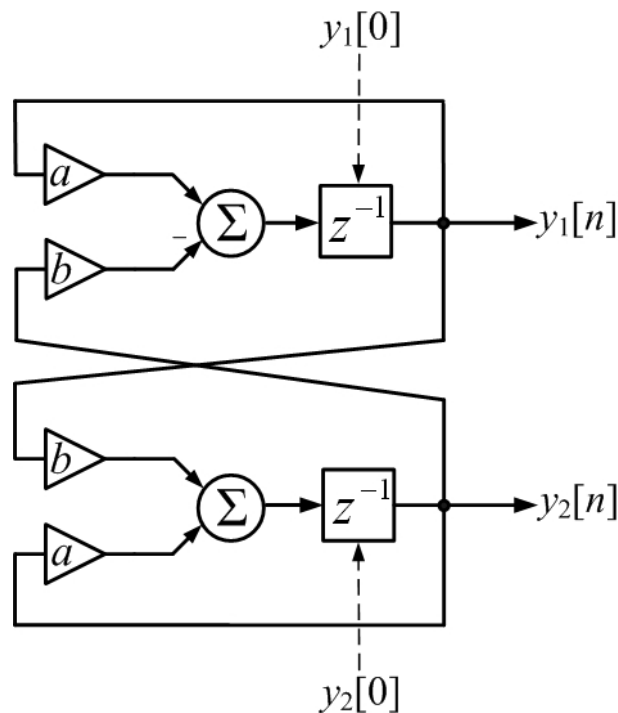
tacji stałoprzecinkowego mnożenia dwóch sygnałów M -bitowych wynik mnożenia jest liczbą $2M$ -bitową, z której musi zwykle zostać odciętych M najmniej znaczących bitów. W konsekwencji następuje utrata dokładności wyniku [Opp10]. Stąd, często w opracowywaniu różnych algorytmów RDO wymagane jest sprowadzanie liczby mnożeń na próbkę do racjonalnego minimum.

2.3.2. Oscylator kompleksoidy

Drugim popularnym wariantem realizacji RDO w postaci filtru cyfrowego drugiego rzędu jest standardowy oscylator przebiegu zespolonego wykładniczego o wykładniku urojonym liniowo narastającym (ang. *coupled standard quadrature oscillator*) [Opp10], [Van05], zwany oscylatorem Radera-Golda [Gol69], oscylatorem kompleksoidy, oscylatorem sinusoidy zespolonej lub oscylatorem kwadraturowym. Inne angielskie nazwy to *2D Rotation (2DR)* [Coo97] oraz *Coupled Form Oscillator – CFO* [Coo92]. Tu równanie rekursywne sygnałów wyjściowych ma postać macierzową

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 & -\sin \omega_0 \\ \sin \omega_0 & \cos \omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ y_2[n-1] \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

Strukturę tego oscylatora przedstawiamy na rys. 2.2.



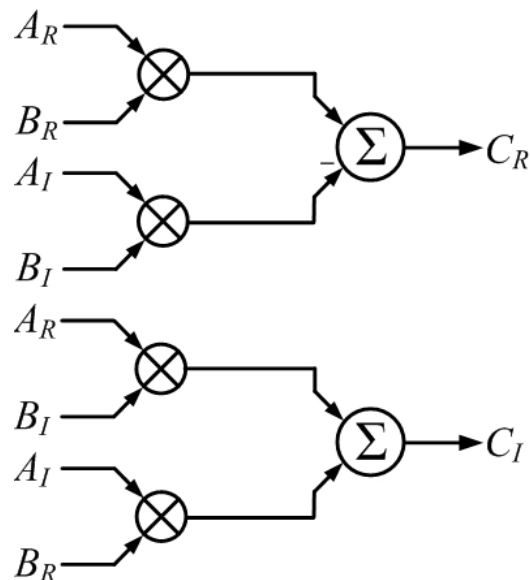
Rys. 2.2. Struktura CFO ze współczynnikami: $a = \cos \omega_0$ i $b = \sin \omega_0$ [Tur03]

Przyjmując w (2.5) warunki początkowe: $y_1[0] = 1$ i $y_2[0] = 0$, sygnały wyjściowe tego oscylatora wynoszą: $y_1[n] = \cos n\omega_0$ i $y_2[n] = \sin n\omega_0$. Zalety CFO w porównaniu z biquadem to [Fli92]: sygnały wyjściowe o jednostkowych amplitudach i pozostające względem siebie w kwadraturze (tzn. przesunięte w fazie o $\pi/2$) oraz mniejsza odchyłka częstotliwości wygenerowanego sygnału od zadanej częstotliwości sinusoidy, szczególnie w zakresie niskich częstotliwości. Jest to możliwe kosztem wykonywania czterech mnożeń na próbkę generowanego sygnału. Liczbę mnożeń na wygenerowaną próbkę można zredukować z czterech do trzech za pomocą pokazanego dalej algorytmu obliczania mnożenia zespolonego [Cur00a]. Zapiszmy najpierw wynik mnożenia (iloczyn) dwóch liczb zespolonych $A_R + jA_I$ oraz $B_R + jB_I$ w postaci liczby zespolonej $C_R + jC_I$ takiej, że

$$C_R = A_R B_R - A_I B_I \quad (2.6)$$

$$C_I = A_R B_I + A_I B_R \quad (2.7)$$

Sposób obliczenia iloczynu zespolonego za pomocą powyższych wzorów przedstawia rys. 2.3.



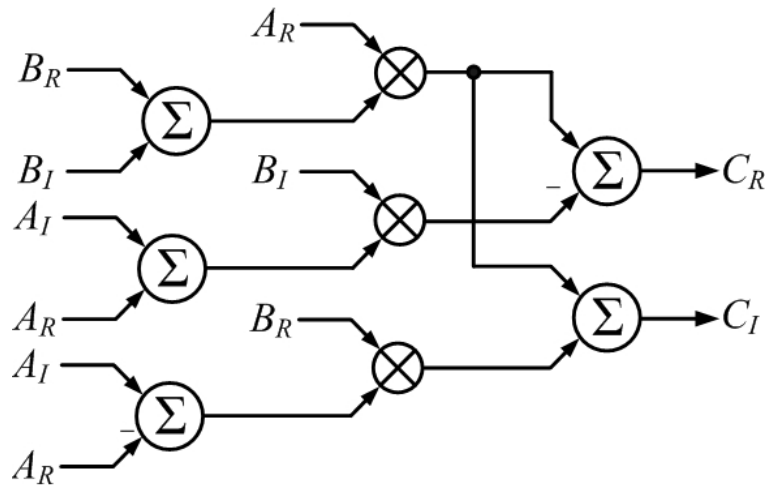
Rys. 2.3. Obliczanie iloczynu zespolonego z czterema mnożeniami na próbkę

Dodając i odejmując $A_R B_I$ po prawej stronie (2.6) i $A_R B_R$ po prawej stronie (2.7), otrzymujemy

$$C_R = A_R(B_R + B_I) - B_I(A_I + A_R) \quad (2.8)$$

$$C_I = A_R(B_R + B_I) + B_R(A_I - A_R) \quad (2.9)$$

Z (2.8) i (2.9) wynika bardziej oszczędny schemat obliczania iloczynu zespolonego pokazany na rys. 2.4, gdzie, w porównaniu z rys. 2.3, wykonywane jest o jedno mnożenie mniej. Jednakże widać też, że odbywa się to za cenę większej liczby sumatorów dwuwejściowych.



Rys. 2.4. Obliczanie iloczynu zespolonego z trzema mnożeniami na próbkę

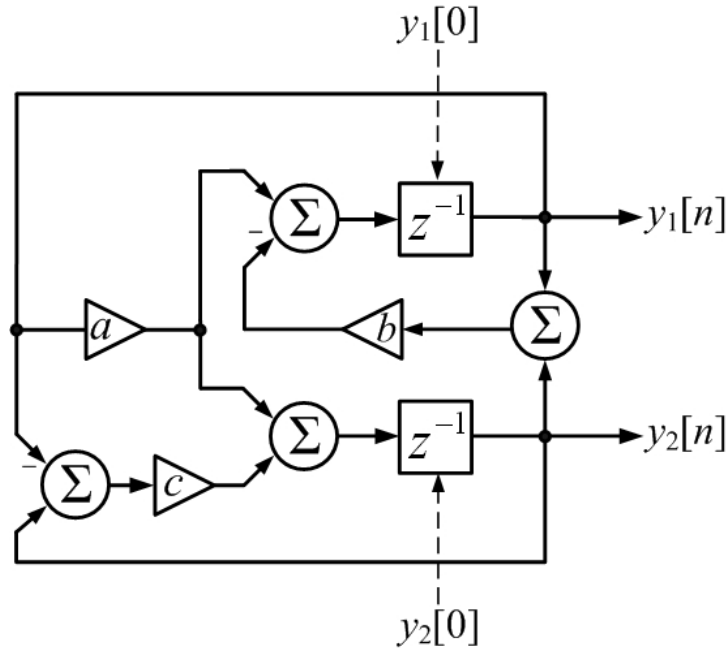
Zauważmy, że dodając i odejmując wyrażenia $y_1[n-1]\sin\omega_0$ oraz $y_1[n-1]\cos\omega_0$ odpowiednio w pierwszym i drugim równaniu z (2.5) o postaci

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1[n-1]\cos\omega_0 - y_2[n-1]\sin\omega_0 \\ y_1[n-1]\sin\omega_0 + y_2[n-1]\cos\omega_0 \end{bmatrix}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.10)$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1[n-1]\cos\omega_0 - y_2[n-1]\sin\omega_0 + y_1[n-1]\sin\omega_0 - y_1[n-1]\sin\omega_0 \\ y_1[n-1]\sin\omega_0 + y_2[n-1]\cos\omega_0 + y_1[n-1]\cos\omega_0 - y_1[n-1]\cos\omega_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (\cos\omega_0 + \sin\omega_0)y_1[n-1] - (y_1[n-1] + y_2[n-1])\sin\omega_0 \\ (\cos\omega_0 + \sin\omega_0)y_1[n-1] + (-y_1[n-1] + y_2[n-1])\cos\omega_0 \end{bmatrix}, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.11)$$

Wynikającą z równania (2.11) strukturę CFO, opracowaną przez autora niniejszej rozprawy, przedstawia rys. 2.5. Potrzeba tu trzech mnożeń na próbkę.



Rys. 2.5. Struktura CFO ze współczynnikami: $a = \sin \omega_0 + \cos \omega_0$, $b = \sin \omega_0$ oraz $c = \cos \omega_0$, z trzema mnożeniami na próbkę generowanego sygnału

Autor rozprawy zauważył, że chcąc otrzymać kompleksoidę o pulsacji $\omega_0 \in (0, \pi)$ i fazie początkowej α , posługujemy się strukturą CFO z rys. 2.2 albo z rys. 2.5, zadając warunki początkowe: $y_1[0] = \cos \alpha$ oraz $y_2[0] = \sin \alpha$.

Oscylator z sygnałami przesuniętymi w fazie o $\pi/2$ można też zrealizować za pomocą struktury biquadu [Al-97]. Wówczas sygnały wyjściowe projektowanego oscylatora $y_1[n]$ oraz $y_2[n]$ liczymy jako kombinację liniową sygnałów wyjściowych biquadu $y_{1b}[n]$ i $y_{2b}[n]$: $y_1[n] = \sin \omega_0 y_{1b}[n]$ oraz $y_2[n] = \cos \omega_0 y_{1b}[n] - y_{2b}[n]$. W rezultacie otrzymujemy: $y_1[n] = -y_{1b}[-2] \sin n\omega_0$ oraz $y_2[n] = -y_{1b}[-2] \cos n\omega_0$ [Al-97]. Wykorzystuje się tu trzy mnożenia na próbkę. Wadą takiego rozwiązania są z góry narzucone amplitudy sygnałów wyjściowych, zmieniające swe wartości w zależności od zadanej pulsacji. Chcąc na nie oddziaływać, wprowadza się dwa dodatkowe mnożenia na próbkę. Dwa kolejne RDO, generujące kompleksoidę za pomocą struktury biquadu, proponuje autor tej rozprawy. Pierwszy oscylator generuje dwa sygnały sinusoidalne o parametrach: $A_1 = A_2 = 1 / (2 \cos(\omega_0/2))$, $\alpha_1 = \omega_0/2$, $\alpha_2 = -\omega_0/2$ i pulsacji ω_0 , za pomocą macierzy kwadratowej, występującej w (2.4), zwanej dalej macierzą rotacyjną. Zakładamy warunki początkowe o postaci $y_{1b}[0] = y_{2b}[0] = 1/2$. Następnie korzystamy z tego, że

$$y_1[n] = y_{1b}[n] + y_{2b}[n] = \cos n\omega_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$y_2[n] = 2 \sin \omega_0 \sum_{i=0}^{n-1} y_{1b}[i] = 2 \sin(\omega_0/2) \sum_{i=1}^n \cos(n\omega_0 - \omega_0/2) = \sin n\omega_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.12)$$

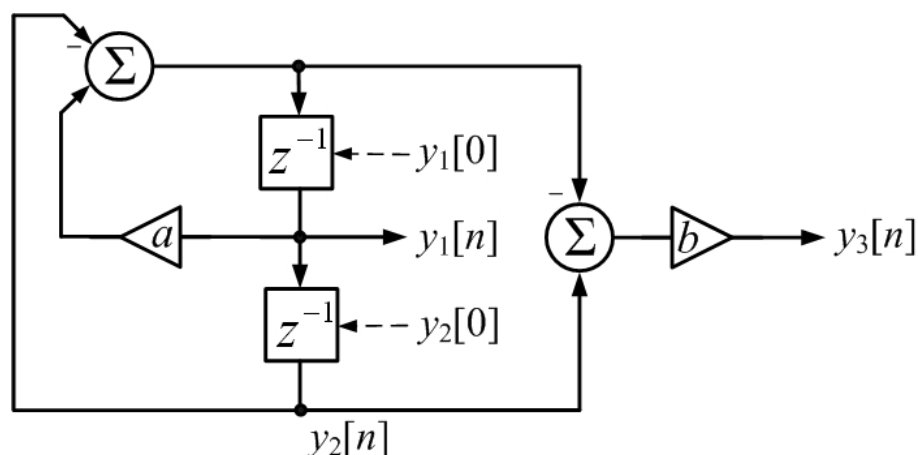
oraz $y_2[0] = 0$. Dodajmy, że sumę w (2.12) obliczyliśmy, stosując metodę Gaussa [Bli08]. Wykonywane są tu dwa mnożenia na próbkę. Drugi RDO, generujący kompleksoidę o dowolnej fazie początkowej, a zrealizowany w oparciu o strukturę biquadu, wykorzystuje zależność

$$y_2[n] - y_1[n+1] = \cos(n\omega_0 + \alpha - \omega_0) - \cos(n\omega_0 + \alpha + \omega_0) = 2 \sin \omega_0 \sin(n\omega_0 + \alpha), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

gdzie $y_1[n]$ i $y_2[n]$ są sygnałami wyjściowymi biquadu z rys. 2.1. Wobec (2.13), dla $\omega_0 \in (0, \pi)$, sygnał sinusoidalny $y_3[n]$ obliczamy jak poniżej

$$y_3[n] = \sin(n\omega_0 + \alpha) = \frac{1}{2 \sin \omega_0} (\cos(n\omega_0 + \alpha - \omega_0) - \cos(n\omega_0 + \alpha + \omega_0)) = \frac{1}{2 \sin \omega_0} (y_2[n] - y_1[n+1]), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Strukturę oscylatora, któremu autor niniejszej rozprawy nadał nazwę zmodyfikowany biquad (ang. *Modified Biquad* – MB), odpowiadającą równaniom (2.4) i (2.14), przedstawiono na rys. 2.6. W tym algorytmie rekursywnej generacji kompleksoidy potrzeba dwóch mnożeń na próbkę. Warunki początkowe wynoszą: $y_1[0] = \cos \alpha$ i $y_2[0] = \cos(\omega_0 + \alpha)$. Wówczas generowany sygnał jest postaci $y[n] = y_1[n] + jy_3[n] = \exp j(n\omega_0 + \alpha)$.



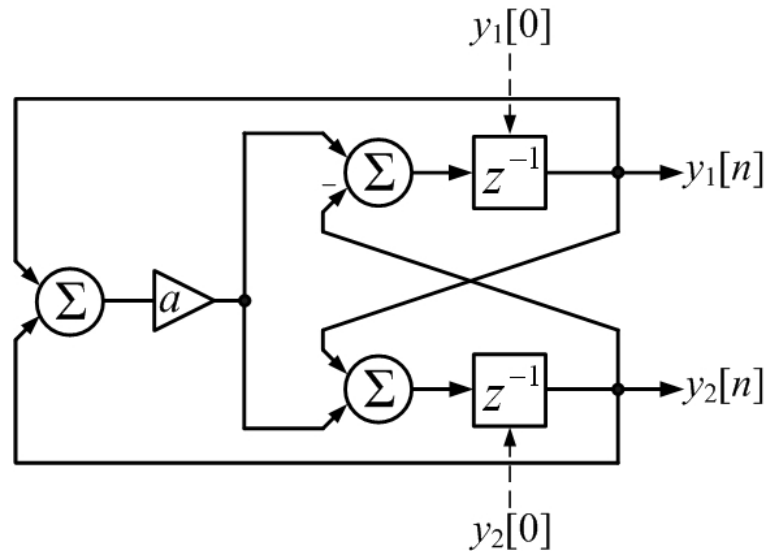
Rys. 2.6. Struktura MB ze współczynnikami: $a = 2 \cos \omega_0$, $b = 1/(2 \sin \omega_0)$, z dwoma mnożeniami na próbkę generowanego sygnału

2.3.3. Cyfrowa prowadnica falowa

Oscylatorem z parą sygnałów wyjściowych przesuniętych w fazie o $\pi/2$ jest cyfrowa prowadnica falowa (ang. *Digital Waveguide* – DW) [Coo92], [Coo97]. Tu, zgodnie z algorytmem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos\omega_0 & \cos\omega_0 - 1 \\ \cos\omega_0 + 1 & \cos\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ y_2[n-1] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (y_1[n-1] + y_2[n-1])\cos\omega_0 - y_2[n-1] \\ (y_1[n-1] + y_2[n-1])\cos\omega_0 + y_1[n-1] \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

wykonywane jest jedno mnożenie na próbkę (patrz rys. 2.7).



Rys. 2.7. Struktura DW ze współczynnikiem $a = \cos\omega_0$ [Tur03]

Przy warunkach początkowych: $y_1[0] = 1$ i $y_2[0] = 0$, zespolony sygnał wyjściowy ma postać $y[n] = \cos n\omega_0 + jA_2 \sin n\omega_0$, gdzie $A_2 = \text{ctg}(\omega_0/2)$. Co ciekawe, dla wartości współczynnika $\cos\omega_0$ z (2.15) bliskich zeru (czyli ω_0 bliskich $\pi/2$ rad/Sa) dostajemy $A_2 \approx 1$. Strukturę tego oscylatora przedstawia rys. 2.7.

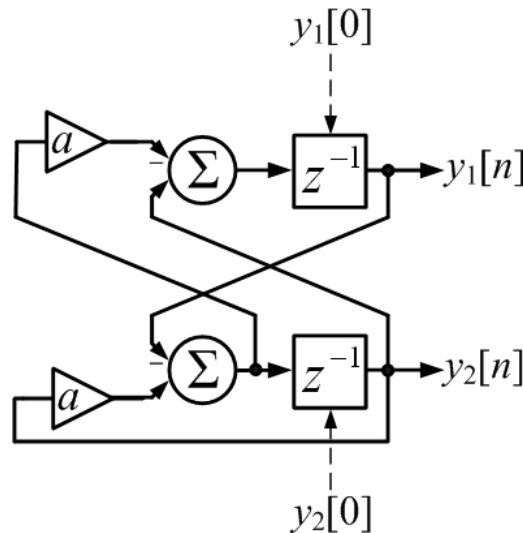
W kolejnych dwóch przedstawionych poniżej strukturach 2D-RDO wartość jednego sygnału wyjściowego oblicza się jako kombinację liniową drugiego sygnału wyjściowego i innych, opóźnionych próbek sygnałów wyjściowych, co nazywamy krótko SU od ang. *Staggered Update* [Tur10], określenie, które autor rozprawy przetłumaczył jako: naprzemienna aktualizacja (spis ważniejszych skrótów na str. 5).

2.3.4. Kwadraturowy oscylator naprzemian aktualizujący

Jedno mnożenie na próbkę więcej, w porównaniu z biquadem i cyfrową prowadnicą falową, cechuje kwadraturowy oscylator naprzemian aktualizujący (ang. *Quadrature-Staggered Update* – QSU) [Tur03], który pracuje zgodnie z poniższym algorytmem zapisanym w postaci równania macierzowego

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_2[n-1] - y_2[n] \cos \omega_0 \\ -y_1[n-1] + y_2[n-1] \cos \omega_0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \omega_0 & 1 - \cos^2 \omega_0 \\ -1 & \cos \omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ y_2[n-1] \end{bmatrix}, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Strukturę QSU pokazujemy na rys. 2.8.



Rys. 2.8. Struktura QSU ze współczynnikiem $a = \cos \omega_0$ [Tur03]

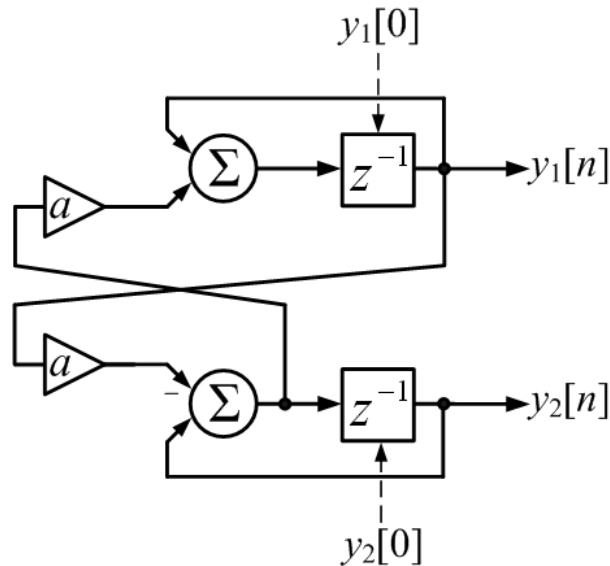
Przy warunkach początkowych: $y_1[0] = 1$ i $y_2[0] = 0$ w (2.16), sygnały wyjściowe tego oscylatora są przesunięte w fazie o $\pi/2$ i mają postać: $y_1[n] = \cos n\omega_0$ i $y_2[n] = -A_2 \sin n\omega_0$ z $A_2 = 1/\sin \omega_0$. Dla pulsacji ω_0 bliskich $\pi/2$ dostajemy $A_2 \approx 1$, czyli sprzężoną kompleksoidę $y[n] = \exp(-jn\omega_0)$. Dodajmy, że jednostkowe amplitudy sygnałów wyjściowych oscylatorów opisanych za pomocą równań: (2.15) i (2.16), otrzymuje się, mnożąc część urojoną zespolonego sygnału wyjściowego przez $1/A_2$. Wprowadza to, rzecz jasna, jedno dodatkowe mnożenie na próbkę generowanego sygnału.

2.3.5. Zmodyfikowany oscylator kompleksoidy

Oscylatorem z dwoma mnożeniami na próbkę mniej w porównaniu z CFO z rys. 2.2 jest zmodyfikowany oscylator kompleksoidy (ang. *Modified Coupled Form Oscillator* – MCFO) [Gor85] znany także pod angielską nazwą *magic circle* [Coo92] lub *equi-amplitude-staggered update* [Tur03]. Równanie rekursywne różnicowe, obliczające sygnały wyjściowe MCFO, zapisane w formie macierzowej, jest postaci

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1[n-1] + 2y_2[n] \sin \frac{\omega_0}{2} \\ -2y_1[n-1] \sin \frac{\omega_0}{2} + y_2[n-1] \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 - 4 \sin^2 \frac{\omega_0}{2} & 2 \sin \frac{\omega_0}{2} \\ -2 \sin \frac{\omega_0}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ y_2[n-1] \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.17)$$

za pomocą którego, z warunkami początkowymi: $y_1[0] = 1$ i $y_2[0] = \sin(\omega_0/2)$, generujemy sinusoidę dwuwymiarową o następujących elementach: $y_1[n] = \cos n\omega_0$ i $y_2[n] = -\sin((n-1/2)\omega_0)$. Różnica faz pomiędzy nimi wynosi $\pi/2 - \omega_0/2$ i zmierza do $\pi/2$ dla $0 < \omega_0 \ll \pi$. Strukturę MCFO pokazujemy na rys. 2.9.



Rys. 2.9. Struktura MCFO ze współczynnikiem $a = 2 \sin(\omega_0/2)$ [Tur03]

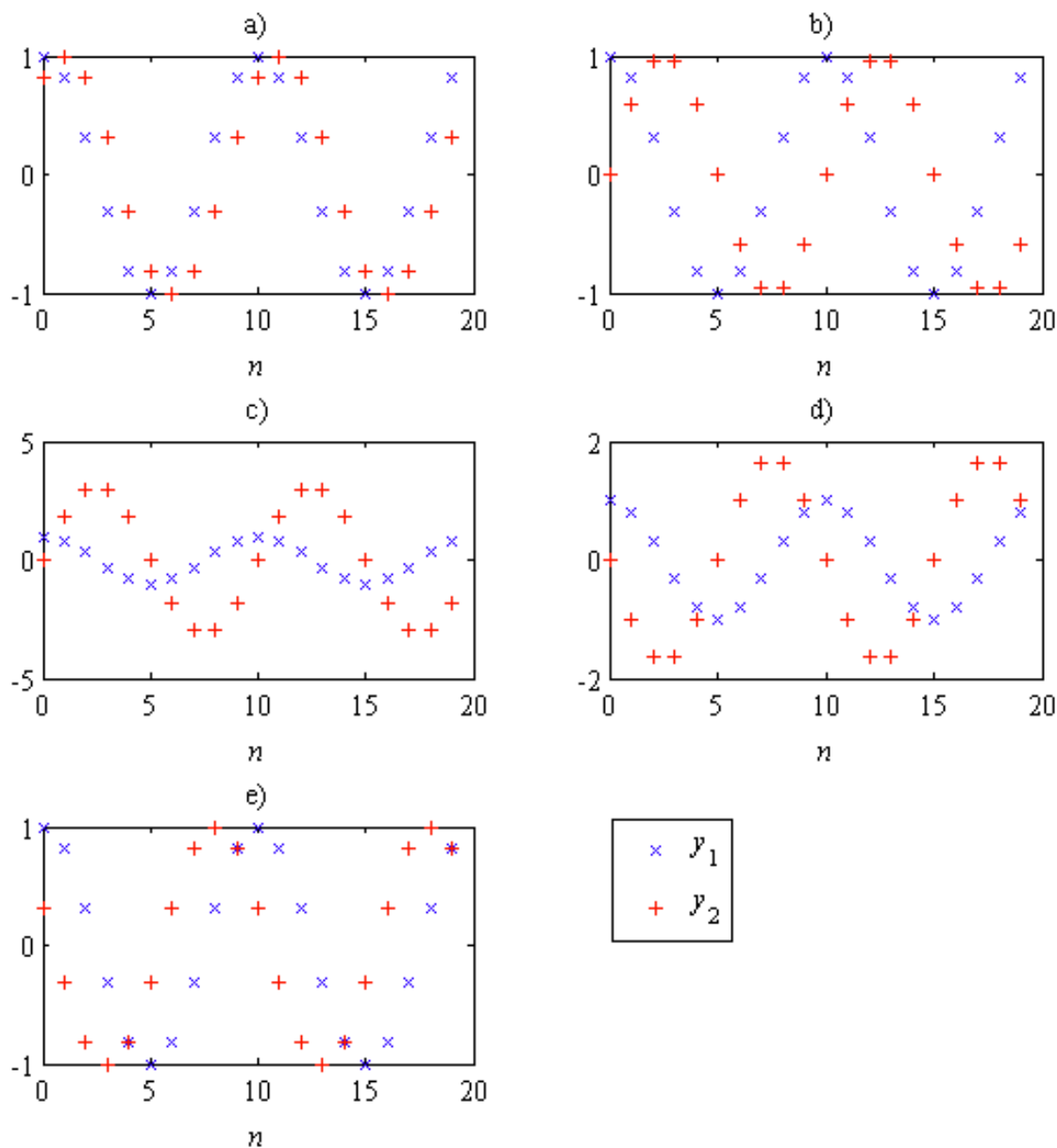
2.4. Metoda projektowania oscylatorów sinusoidy dwuwymiarowej

Chcąc posłużyć się wybranym algorytmem 2D-RDO, w pierwszej kolejności, na podstawie wymaganych, zadanych: częstotliwości generowanych sygnałów F_0 i szybkości próbkowania F_s , oblicza się wartość pulsacji zgodnie z równaniem (2.2). Następnym krokiem jest wybór jednej ze struktur 2D-RDO. Jako kryterium wyboru można zastosować: liczbę mnożeń na próbkę, równość amplitud sygnałów wyjściowych lub postać sygnałów wyjściowych [Tur03]. W tym celu w tab. 2.1 zebrano właściwości omówionych wyżej 2D-RDO.

Tab. 2.1. Właściwości 2D-RDO

oscylator	liczba mnożeń na próbkę	liczba dodawań/odejmowań na próbkę	jednakowe amplitudy sygnałów wyjściowych	sygnały wyjściowe przesunięte w fazie o $\pi/2$
biquad z rys. 2.1	1	1	tak	nie
CFO z rys. 2.2	4	2	tak	tak
CFO z rys. 2.5	3	4	tak	tak
MB z rys. 2.6	2	2	tak	tak
DW z rys. 2.7	1	3	nie	tak
QSU z rys. 2.8	2	2	nie	tak
MCFO z rys. 2.9	2	2	tak	nie

Niech, dla przykładu, zadana pulsacja ω_0 sinusoidy 2D wynosi $\pi/5$ rad/Sa. Na rys. 2.10 prezentujemy dwa okresy wygenerowanej sinusoidy na wyjściu 2D-RDO, po zadaniu warunków początkowych biquadu: $y_1[0] = 1$, $y_2[0] = \cos(\pi/5)$, CFO, DW i QSU: $y_1[0] = 1$, $y_2[0] = 0$, oraz MCFO: $y_1[0] = 1$, $y_2[0] = \sin(\pi/10)$. Podobne przebiegi jak dla CFO otrzymujemy na wyjściu MB po zadaniu warunków początkowych: $y_1[0] = 1$, $y_2[0] = \cos(\pi/5)$. Zwróćmy uwagę na sygnały wyjściowe przesunięte w fazie o $\pi/2$ dla MB, CFO, DW oraz QSU. Jednakowe amplitudy mają sygnały na wyjściu biquadu, MB, CFO oraz MCFO. Dla DW oraz QSU amplituda sygnału $y_1[n]$ wynosi jeden, z kolei sygnału $y_2[n]$ dla DW wynosi $\text{ctg}(\pi/20) \approx 3,078$ (rys. 2.10c), a dla QSU jest równa $1/\sin(\pi/10) \approx 1,701$ (rys. 2.10d).

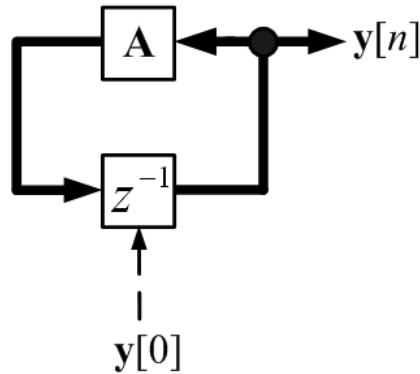


Rys. 2.10. Sygnały wyjściowe: a) biquadu, b) MB, CFO, c) DW, d) QSU, e) MCFO dla $\omega_0 = \pi/5$ rad/Sa

Algorytmy 2D-RDO zostały opracowane przez różnych autorów. W [Tur03] znajdujemy pierwszą próbę unifikacji tych algorytmów. W [Kru07a] autor tejże rozprawy zauważył, że w ogólności równania różnicowe: (2.4), (2.5), (2.15), (2.16) i (2.17), należą do wspólnego zbioru równań rekursywnych, służących do generacji dyskretnej sinusoidy 2D. Zbiór tych równań można przedstawić ogólniej – zbiorczo w następującej postaci macierzowej

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ y_2[n-1] \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{y}[n-1], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.18)$$

gdzie $\mathbf{y}[n] \in \mathbb{R}^2$ jest wektorem sygnałów wyjściowych, przy czym wektor warunków początkowych to $\mathbf{y}[n]|_{n=0} = \mathbf{y}[0]$, a $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{2 \times 2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ jest macierzą rotacyjną 2D-RDO, o stałych, niezależnych od czasu elementach. Wynika stąd schemat blokowy 2D-RDO w przestrzeni stanów zamieszczony na rys. 2.11.



Rys. 2.11. Schemat blokowy 2D-RDO w przestrzeni stanów

Okresowa powtarzalność wartości kolejnych generowanych rekursywnie próbek jest warunkowana położeniem wartości własnych macierzy rotacyjnej \mathbf{A} na okręgu jednostkowym [Kac99], co odpowiada tu położeniu biegunów transformaty \mathbf{Z} sygnałów wyjściowych na płaszczyźnie z , na okręgu jednostkowym. Oznacza to, że elementy macierzy rotacyjnej 2D-RDO muszą spełniać następujące dwa warunki [Tur03]

$$\begin{cases} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \\ |a_{11} + a_{22}| < 2 \end{cases} \quad (2.19)$$

Zwróćmy uwagę, że z (2.19) wynika, że warunki niegasnących oscylacji zależą jedynie od macierzy rotacyjnej \mathbf{A} . Nie zależą one od warunków początkowych, tzn. jeżeli występują niegasnące oscylacje dla jednych warunków początkowych, to również wystąpią one dla dowolnych innych warunków początkowych [Kac99]. Dobierając elementy macierzy rotacyjnej zgodnie z ograniczeniami (2.19), i zadając warunki początkowe: $y_1[0] = 0$ i $y_2[0] = \psi \cos \phi$, generowane są sygnały wyjściowe postaci: $y_1[n] = \cos n\omega_0$ i $y_2[n] = \psi \cos(n\omega_0 + \phi)$, z parametrami

$$\omega_0 = \arccos\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right), \quad \psi = \sqrt{\frac{-a_{21}}{a_{12}}}, \quad \phi = \text{Arg}\left(\frac{a_{22} - a_{11} + j\sqrt{4 - (a_{11} + a_{22})^2}}{2a_{12}}\right) \quad (2.20)$$

przy czym $a_{12} \neq 0$, a $\text{Arg}(\cdot)$ jest argumentem głównym liczby zespolonej [Bro68]. Dalej autor rozprawy zauważył, że w ogólności można położyć: $y_1[0] = \cos \alpha$ i $y_2[0] = \psi \cos(\phi + \alpha)$, aby otrzymać sygnały wyjściowe: $y_1[n] = \cos(n\omega_0 + \alpha)$ i $y_2[n] = \psi \cos(n\omega_0 + \phi + \alpha)$. Wówczas sterujemy dodatkowo fazą początkową jednego z sygnałów. Dowód tej zależności nie jest trywialny. Będziemy go mogli przeprowadzić dopiero po zastosowaniu diagonalizacji macierzy przy wyznaczeniu ogólnej postaci sygnałów wyjściowych oscylatora (p. 3.1 i 3.2). Co ciekawe, elementy sinusoidy dwuwymiarowej produkowanej przez 2D-RDO z tymi warunkami początkowymi są powiązane równaniem

$$y_1^2[n] + \psi^{-2}y_2^2[n] - 2\psi^{-1}y_1[n]y_2[n]\cos\phi - \sin^2\phi = 0, \psi > 0 \quad (2.21)$$

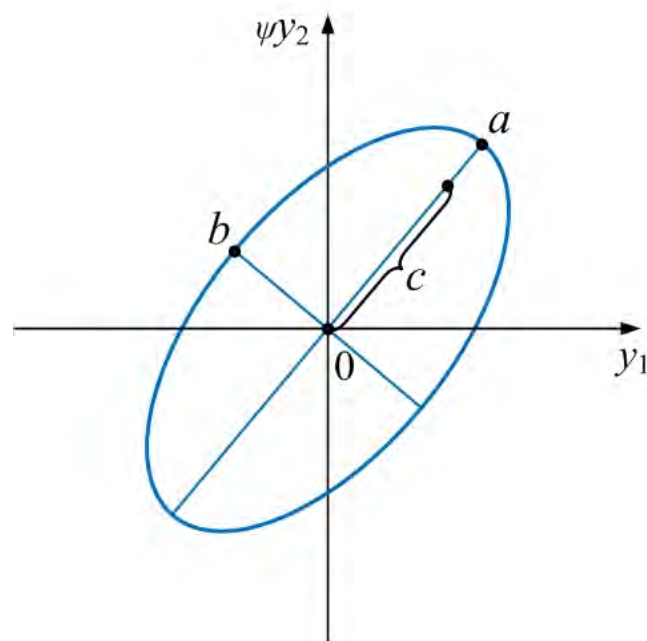
a naniesione na płaszczyznę zespoloną i połączone ze sobą tworzą elipsę. Przykładowo, dla biquadu mamy

$$y_1^2[n] + y_2^2[n] - 2y_1[n]y_2[n]\cos\omega_0 - \sin^2\omega_0 = 0 \quad (2.22)$$

a dla CFO otrzymujemy równanie okręgu

$$y_1^2[n] + y_2^2[n] - 1 = 0 \quad (2.23)$$

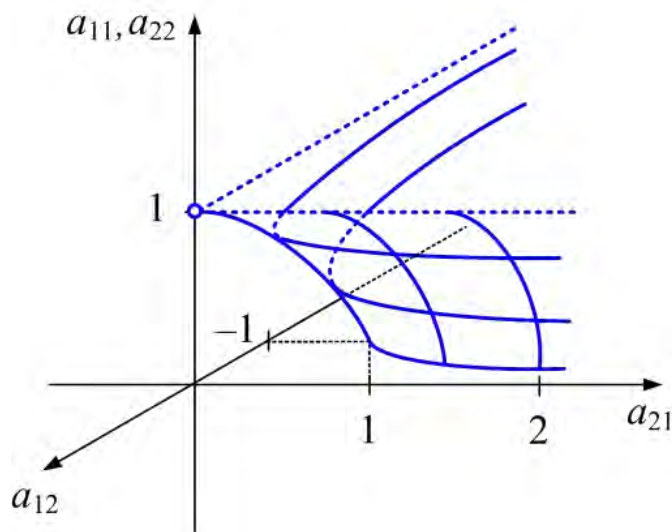
Krzywą z (2.21) prezentujemy na rys. 2.12. Półosie: wielka i mała oraz odległość ognisk od środka symetrii elipsy z rys. 2.12, wynoszą kolejno: $a = \sqrt{1 + \cos\phi}$, $b = \sqrt{1 - \cos\phi}$ i $c = \sqrt{2\cos\phi}$.



Rys. 2.12. Sygnały wyjściowe 2D-RDO na płaszczyźnie zespolonej

Zwróćmy uwagę na to, że wartość wyrażenia $y_1^2[n] + \psi^{-2}y_2^2[n] + -2\psi^{-1}y_1[n]y_2[n]\cos\phi$ w (2.21) w każdej chwili czasu (dla każdego numeru n próbki) jest stała i wynosi $\sin^2\phi$.

Warto także zauważyć, że oba sygnały wyjściowe 2D-RDO mają tę samą amplitudę, gdy $a_{12} = -a_{21}$, a pozostają przesunięte w fazie o $\pi/2$, gdy $a_{11} = a_{22}$. Zależność elementów macierzy rotacyjnej RDO dla: $a_{11} \geq 0$, $a_{12} \leq 0$, $a_{21} \geq 0$ i $a_{22} \geq 0$, zapewniająca generację sygnałów przesuniętych w fazie o $\pi/2$, odpowiada powierzchni z rys. 2.13.



Rys. 2.13. Rozwiązanie warunków (2.19) w rekursywnej generacji sygnałów wyjściowych oscylatora przesuniętych w fazie o $\pi/2$

Dodajmy, że zależności pomiędzy elementami macierzy rotacyjnej CFO z (2.5) i QSU z (2.16) dla pulsacji $0 < \omega_0 < \pi$ odpowiada krzywa na rys. 2.13: $a_{11} = \sqrt{1 + a_{12}a_{21}}$, $0 < a_{11} < 1$. Natomiast dla macierzy rotacyjnej DW z (2.15) zależności tej odpowiadają wartości płaszczyzny z rys. 2.13 dla $a_{12} \in (-2, 0)$ i $a_{21} \in (0, 2)$.

Przeanalizujmy dalej właściwości macierzy rotacyjnej oscylatorów SU przy spełnionych warunkach niegasnących oscylacji (2.19). W ogólności zbiór wszystkich oscylatorów SU (ang. *Staggered Update*) można scharakteryzować równaniem

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1[n-1]\beta + y_2[n-1]\gamma \\ y_1[n]\delta + y_2[n-1]\varepsilon \end{bmatrix}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.24)$$

gdzie $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$. Podstawiając $y_1[n]$ z pierwszego wiersza w (2.24) do drugiego wiersza tamże, dostajemy

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ \beta\delta & \gamma\delta + \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ y_2[n-1] \end{bmatrix}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

Dalej, przy spełnionym warunku pierwszym w (2.19), tj. $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$, dostajemy

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \gamma \\ \beta\delta & \gamma\delta + \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ y_2[n-1] \end{bmatrix}, n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.26)$$

i $\beta \neq 0$. Dodatkowo, warunek drugi w (2.19), czyli $|a_{11} + a_{22}| < 2$, jest spełniony, gdy $|1/\beta + \beta + \gamma\delta| < 2$. Widzimy, że sygnały wyjściowe oscylatorów SU mają te same amplitudy, gdy $\gamma = -\beta\delta$, a są przesunięte w fazie o $\pi/2$, gdy $\gamma\delta = \beta - 1/\beta$. Nadmienimy, że ustawiając w (2.26) dwa z trzech parametrów macierzy rotacyjnej na jedynekę, dostajemy macierz rotacyjną oscylatora Reinscha [Tur10]. Przykładowo, dla $\beta = \varepsilon = \delta = 1$ w (2.26) jest ona postaci

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma \\ 1 & 1 + \gamma \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Warunki niegasnących oscylacji o pulsacji $\omega_0 = \arccos(1 + \gamma/2)$ rad/Sa są tu spełnione, gdy $\gamma \in (-2, 0)$.

Należy podkreślić, że według najlepszej wiedzy autora tej rozprawy przedstawiona metoda projektowania jest jedyną metodą projektowania 2D-RDO znaną z literatury. Jej słabą stroną jest to, iż projektując dany oscylator mamy jedynie wpływ na amplitudę i różnicę faz sygnałów wyjściowych, których parametry są funkcją elementów macierzy rotacyjnej, a te wpływają na strukturę oscylatora.

2.5. Rekursywne oscylatory sygnałów sinusoidalnych modulowanych

Każdy z trzech parametrów dyskretnego sygnału sinusoidalnego (2.1): amplituda A , pulsacja ω_0 i faza początkowa α , może podlegać modulacji. Literatura [Wes06], [Woj69] wyróżnia modulacje: amplitudy, częstotliwości i fazy. Ostatnie dwa rodzaje modulacji łączy wspólna nazwa modulacji kątowej. Wymienione rodzaje modulacji stosują uzmiennienie tylko jednego parametru przebiegu sinusoidalnego, podczas gdy możliwe jest jednoczesne uzmiennienie amplitudy i kąta.

Zastosowania rekursywnych oscylatorów sinusoidalnych w modulacji sygnałów omówiono szczegółowo m. in. w [Fli92], [Tur03]. Przykładowo, algorytm rekursywnego oscylatora kompleksoidy znajduje zastosowanie w kluczowaniu częstotliwości (ang. *Frequency Shift Keying* – FSK). W algorytmie (2.5) należy dodatkowo zmieniać znaki współczynników przy $\sin \omega_0$ i $-\sin \omega_0$ na przeciwne w chwilach zmiany sygnału modulującego z zera na jedynkę [Fli92].

Ważnym i aktualnym zagadnieniem, dotyczącym oscylatorów cyfrowych, jest projektowanie oscylatorów sygnałów świergotowych, w szczególności sygnałów z liniową (ang. *Linear Frequency Modulation* – LFM) i kwadratową (ang. *Quadratic Frequency Modulation* – QFM) modulacją częstotliwości, znajdujących wiele praktycznych zastosowań [And92], [Gre94], [Iba06], [Xia08]. Zaznaczymy, że, tak samo jak rekursywny cyfrowy oscylator sygnałów sinusoidalnych, rekursywny cyfrowy oscylator sygnałów świergotowych LFM bądź QFM powinien być pobudzany warunkami początkowymi. W nich, oraz we współczynnikach struktury filtra, zawarta jest informacja o parametrach generowanych przebiegów. Ponadto, tak jak dla rekursywnych oscylatorów sygnałów sinusoidalnych, rekursywne oscylatory sygnałów świergotowych LFM i QFM powinna cechować mała złożoność obliczeniowa. Algorytmy tych oscylatorów nie zostały jeszcze opracowane.

2.6. Jakość generowanych sygnałów

Omawiając w p. 2.4 metodę projektowania oscylatorów, zakładaliśmy, że oscylator jest systemem dyskretnym, gdzie słowa, reprezentujące próbki sygnału, mają nieskończoną liczbę bitów, a operacje arytmetyczne są wykonywane z nieskończoną precyzją. W rzeczywistości operacje arytmetyczne określane przez rekurencyjne równanie macierzowe (2.18) nie są wykonywane dokładnie, ponieważ zarówno próbki generowanych przez oscylator ciągów, jak i współczynniki macierzy rotacyjnej są reprezentowane przez słowa o skończonej długości. Powoduje to powstanie zniekształceń, zwanych szumem kwantowania, błędem kwantowania lub szumem własnym (ang. *self-noise*) oscylatora. Wpływ zniekształceń na dokładność przetwarzania zależy oczywiście od organizacji obliczeń, a więc od struktur RDO i od zastosowanej arytmetyki.

Uwzględnienie tych niepożądanych efektów na etapie projektowania jest dość trudne, dlatego też na ogół realizuje się model oscylatora jako system dyskret-

ny, a następnie analizuje się zniekształcenia, powstające w rzeczywistym RDO [Al-97], [Cur00a], [Cur00b], [Fli92], [Kou09].

2.6.1. Analiza szumu oscylatora

Sposób przeprowadzania analizy zniekształceń, powstających w RDO, omówimy na przykładzie biquadu opisanego w p. 2.3.1. Ze względu na stosunkowo mało złożoną strukturę tego oscylatora można czytelnie pokazać wpływ wykonywania operacji arytmetycznych ze skończoną precyzją na błędy, powstające podczas rekursywnej generacji sinusoidy. W tym celu posłużymy się modelem szumowym elementu mnożącego, w którym operację kwantowania iloczynu zastępuje się operacją mnożenia liczb dokładnych, a do wyniku dodaje się błąd $e[n]$, zwany szumem kwantyzacji. Ogólnie biorąc, im bardziej rozbudowana struktura RDO, tym jego analiza szumowa jest trudniejsza. Zakładamy zatem, że źródłem szumu kwantyzacji $e[n]$ jest wynik mnożenia stałej $a = 2\cos\omega_0$ przez sygnał $y_1[n]$ w (2.4), co ilustruje rys. 2.14. Zakładamy dodatkowo, że: zmienne losowe (próbki błędu $e[n]$), tworzące dyskretny proces stochastyczny, są nieskorelowane, tzn. błąd jest reprezentowany przez szum biały oraz, że ciąg $e[n]$ jest procesem stacjonarnym. Z rys. 2.14 wynika równanie różnicowe (algorytm) dla sygnału wyjściowego oscylatora

$$y_1[n] = 2\cos\omega_0 y_1[n-1] - y_1[n-2] + e[n], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.28)$$

Transformata \mathbf{Z} obu stron powyższego równania wynosi

$$Y_1(z) = Y_{\text{lid}}(z) + Y_{1e}(z) \quad (2.29)$$

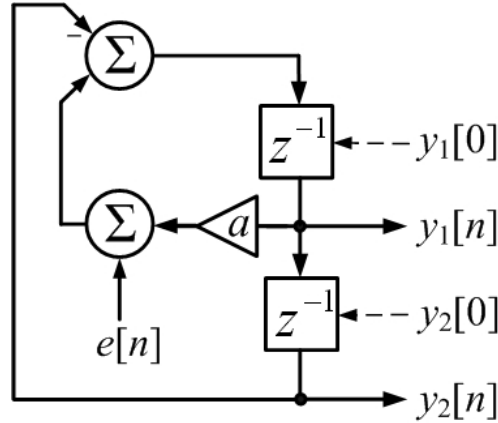
gdzie $Y_{\text{lid}}(z)$ jest transformatą \mathbf{Z} dyskretnej sinusoidy przyczynowej, a $Y_{1e}(z)$ jest transformatą \mathbf{Z} przebiegu błędu, czyli różnicy pomiędzy sygnałem generowanym, a sygnałem dyskretnej sinusoidy

$$Y_{1e}(z) = \frac{E(z)}{z^2 - 2\cos\omega_0 z + 1} \quad (2.30)$$

gdzie $E(z)$ jest transformatą \mathbf{Z} szumu $e[n]$. Transformując (2.30) do dziedziny czasu, dostajemy [Fur75]

$$y_{1e}[n] = \frac{1}{\sin\omega_0} \sum_{k=2}^n e[k] \sin((n-k+1)\omega_0), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.31)$$

przy czym zakładamy, że $e[-1] = e[0] = 0$. Z (2.31) wynika, że przebieg błędu jest superpozycją sygnałów sinusoidalnych i jest odwrotnie proporcjonalny do $\sin \omega_0$. Zatem, dla $\omega_0 \in (0, \pi/2) / \omega_0 \in (\pi/2, \pi)$ im jest mniejsza/większa zadana pulsacja generowanego sygnału, tym większe są błędy w jego rekursywnej generacji.



Rys. 2.14. Ilustracja błędu kwantyzacji wyniku mnożenia stałej $a = 2 \cos \omega_0$ przez sygnał $y_1[n]$ w biquadzie (2.4) [Abu86a]

Wariancja (moc średnia) szumu $e[n]$ (dla ustalonego N) wynosi [Abu86b]

$$\sigma_0^2[N] = \frac{\Delta^2}{3 \sin^2 \omega_0} \sum_{m=0}^{N-1} \sin^2((m+1)\omega_0) \quad (2.32)$$

gdzie Δ jest szerokością przedziału kwantowania. Wzór (2.32) można aproksymować w następujący sposób [Abu86b]

$$\sigma_0^2[N] = \frac{\Delta^2 N}{6 \sin^2 \omega_0} \quad (2.33)$$

Z kolei dla dowolnej, lecz ustalonej zmiennej N , wariancje szumu sygnałów sinusoidy 2D przesuniętych w fazie o $\pi/2$, w modelu szumowym z [Al-97], wynoszą [Al-97]

$$\sigma_{0y_1}^2[N] = \frac{\Delta^2}{3} \cos^2 \omega_0 \sum_{m=0}^{N-1} \sin^2((m-1)\omega_0) \quad (2.34)$$

oraz

$$\sigma_{0y_2}^2[N] = \frac{\Delta^2}{3} \cos^2 \omega_0 \sum_{m=0}^{N-1} \cos^2((m-1)\omega_0) \quad (2.35)$$

W rekursywnej generacji tych sygnałów zastosowano algorytm przedstawiony w p. 2.3.2, wykorzystujący strukturę biquadu.

Zauważmy, że ze wzoru (2.33) wynika ważny wniosek: wariancja błędu generacji jest liniową funkcją czasu trwania generowanego sygnału. W ogólności więc generowane sygnały są niestacjonarne – z upływem czasu parametry sygnałów wyjściowych oscylatora ulegają degradacji.

2.6.2. Skutki kwantowania współczynników macierzy rotacyjnej

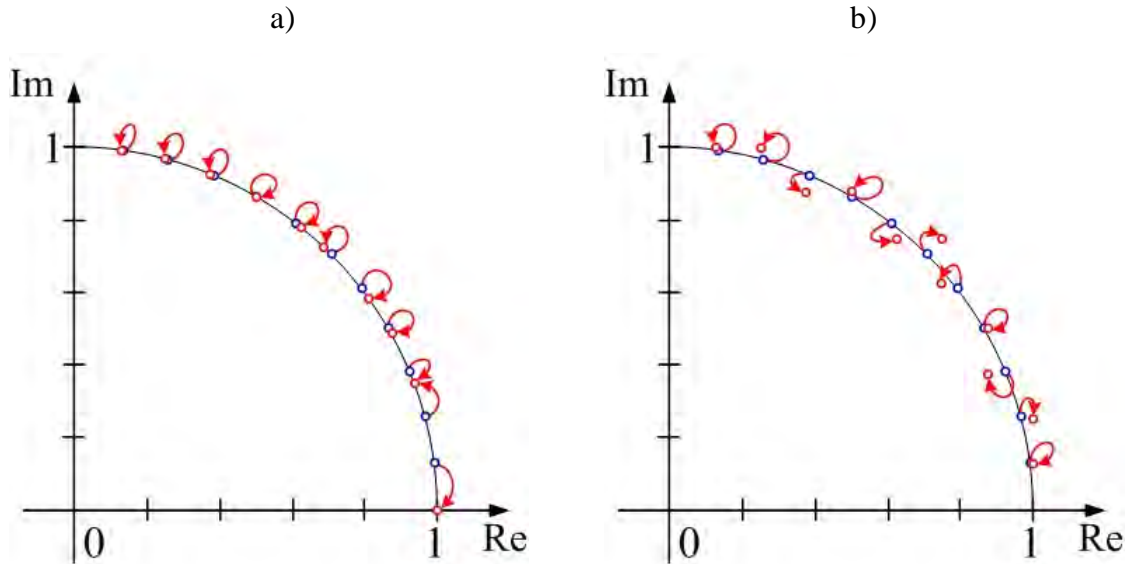
W p. 2.6.1 zakładaliśmy, że elementy macierzy rotacyjnej nie były kwantowane, a jedynym źródłem zniekształceń było kwantowanie iloczynów współczynników struktury RDO i jego sygnałów wyjściowych. W rzeczywistości elementy macierzy rotacyjnej przyjmują wartości dyskretne, określone przez długość rejestrów, w których są przechowywane. Można wówczas pulsację w modelu szumowym we wzorach (2.28) – (2.35) zastąpić pulsacją sinusoidy w praktycznej realizacji [Abu86b], [Fur75]. Ma to oczywiście wpływ na wartość szumu kwantyzacji.

Generalnie kwantyzacja współczynników struktury RDO modyfikuje położenie biegunów transformaty \mathbf{Z} sygnałów wyjściowych oscylatora na płaszczyźnie z . W konsekwencji powoduje to niepożądane efekty zmiany częstotliwości i amplitudy generowanych sygnałów [Cur00b], [Gol67], [Fli92], [Hes71], [Kai72], [Ojo70]. Powstaje więc problem analizy wrażliwości parametrów sygnałów wyjściowych na zmiany parametrów RDO.

Oczywiście, przy wykonywaniu operacji z nieskończoną precyzją, wielomian mianownika transformaty \mathbf{Z} sygnałów wyjściowych oscylatora jest taki sam dla wszystkich realizacji RDO. W badaniu skutków kwantyzacji porównuje się zmiany położenia biegunów RDO z kwantyzacją współczynników dla różnych wartości pulsacji i parametrów kwantyzacji [Opp10]. Dokładne określenie przewagi pod tym względem jednej struktury RDO nad inną w całym przedziale pulsacji (2.3) jest jednak trudne, ponieważ położenie biegunów zależy od wziętych do badania wartości parametrów sygnałów. Nie ma jednak wątpliwości co do przewagi CFO nad biquadem, szczególnie dla pracy tego oscylatora w zakresie niskich częstotliwości, $\omega_0 < \pi/2$ [Fli92], [Opp10].

Na rys. 2.15 prezentujemy położenie jednego bieguna biquadu i CFO na płaszczyźnie z dla różnych wartości pulsacji chwilowej, $\omega_0 = 2\pi k/48$, $k = 1, 2, 3, \dots, 11$, po kwantowaniu współczynników macierzy rotacyjnej 2D-RDO z parametrem P

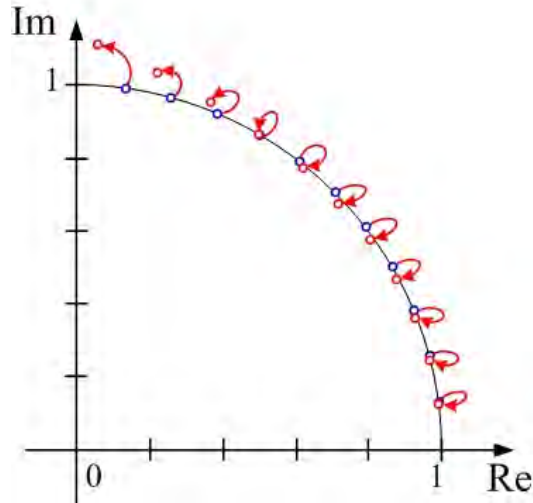
kwantyzacji (czyli liczbą bitów wykorzystywanych do zapisu skwantowanej wartości), wynoszącym 4 bity. Dodatkowo czerwona strzałka obrazuje przemieszczenie się bieguna na skutek kwantyzacji współczynników macierzy rotacyjnej.



Rys. 2.15. Biegun: a) biquadu i b) CFO dla różnych wartości pulsacji: $\omega_0 = 2\pi k/48$, $k = 1, 2, 3, \dots, 11$, przy wykonywaniu operacji arytmetycznych z nieskończoną (kolor niebieski) i skończoną (kolor czerwony) precyzją dla $P = 4$ bity

Zaznaczmy, że stosując proste operacje, takie jak przesunięcie bitowe i akumulację wartości współczynników, przez które mnożony jest wygenerowany ciąg, problem zmiany częstotliwości sygnału na skutek kwantowania współczynników macierzy rotacyjnej biquadu można zniwelować. Przykładowo, dla sygnału wyjściowego o zadanej częstotliwości $F_0 = 100$ Hz i szybkości próbkowania $F_s = 48$ kSa/s, stosując podejście z [Fli92], maksymalna fluktuacja częstotliwości generowanego sygnału redukuje się z 10 do 0,001 Hz, a więc aż 1000 razy. Inne metody poprawy jakości oscylacji omówiono w dalszym podpunkcie tego rozdziału.

Na szczególną uwagę w temacie kwantyzacji współczynników RDO zasługuje struktura MCFO. Charakteryzuje ją mała wrażliwość parametrów sygnałów wyjściowych na kwantyzację współczynników macierzy rotacyjnej w zakresie niskich częstotliwości, $\omega_0 < \pi/2$ [Coo92]. Położenie bieguna tego oscylatora na płaszczyźnie z , dla różnych wartości pulsacji chwilowej, $\omega_0 = 2\pi k/48$, $k = 1, 2, 3, \dots, 11$, przy $P = 4$ bity przedstawiono na rys. 2.16.



Rys. 2.16. Biegun MCFO dla różnych wartości pulsacji: $\omega_0 = 2\pi k/48$, $k = 1, 2, 3, \dots, 11$, przy wykonywaniu operacji arytmetycznych z nieskończoną (kolor niebieski) i skończoną (kolor czerwony) precyzją dla $P = 4$ bity

Przypomnijmy, że sygnały wyjściowe MCFO są przesunięte w fazie o wartość $\phi = \pi/2 - \omega_0/2$, stąd naniesione na płaszczyznę zespoloną i połączone ze sobą tworzą elipsę (rys. 2.12), zmieniającą swoje osie (małą i wielką) w zależności od wartości pulsacji. Przy $\omega_0 \rightarrow 0$ krzywa ta jest okręgiem, dzięki czemu dla $0 < \omega_0 < \pi/2$ MCFO może być (po dodatkowym przemnożeniu sygnału $y_2[n]$ w (2.17) przez -1) alternatywą dla CFO, którego sygnały wyjściowe naniesione na płaszczyznę zespoloną i połączone ze sobą są też okręgiem i to niezależnie od wartości pulsacji.

Spośród wielu metod analizy skutków kwantowania macierzy rotacyjnej naszkicujemy tę z [Kou09] dla generowanego rekursywnie sygnału kompleksoidy postaci $y[n] = \exp j(n\omega_0 + \alpha)$, ponieważ jest stosunkowo prosta, a jednocześnie oddaje istotę problemu. Jeżeli założymy, że części rzeczywista i urojona błędu kwantyzacji $e[n] = e_1[n] + je_2[n]$ generowanej kompleksoidy są zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym w przedziale $(-1/2^{P+1}, 1/2^{P+1})$, gdzie P jest dokładnością kwantyzacji, a warunek początkowy jest postaci $y[0] = \exp j\alpha$, to algorytm pracy rzeczywistego CFO można przedstawić zależnością

$$\begin{cases} y'[n] = y'[n-1]\hat{s} + e[n] & \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \\ y'[0] = y[0] + e[0] & \text{dla } n = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

gdzie indeksem prim oznaczono sygnały skwantowane, a $\hat{s} = Q(e^{j\omega_0})$ oznacza kwantowanie współczynników macierzy rotacyjnej. Równanie (2.36) można zapisać w równoważnej postaci

$$y'[n] = y[0]\hat{s}^n \left(1 + y[0]^{-1} \sum_{k=0}^n e[k]\hat{s}^{-k} \right) \quad (2.37)$$

Stosunek sygnału skwantowanego (2.37) do sygnału wyjściowego dyskretnego oscylatora jest więc określony następująco

$$\frac{y'[n]}{y[n]} = \left(\frac{\hat{s}}{s} \right)^n \left(1 + y[0]^{-1} \sum_{k=0}^n e[k]\hat{s}^{-k} \right) \quad (2.38)$$

i można go rozłożyć na część zdeterminowaną $D[n]$ i losową $R[n]$

$$D[n] = \left(\frac{\hat{s}}{s} \right)^n, \quad R[n] = \left(1 + y[0]^{-1} \sum_{k=0}^n e[k]\hat{s}^{-k} \right) \quad (2.39)$$

Stąd, w zależności od trzech wartości $|\hat{s}|$ ($|\hat{s}| > 1$, $|\hat{s}| < 1$ oraz $|\hat{s}| = 1$), analizuje się wartości przyjmowane przez składniki: zdeterminowany $D[n]$ i losowy $R[n]$ z (2.39) [Kou09]. Zwróćmy tu uwagę na to, że z postaci prezentowanych w (2.38) i (2.39) wynika ważny wniosek, a mianowicie, że jakość generowanych sygnałów zależy także od warunków początkowych pracy oscylatora.

Zaznaczmy także, że kwantyzacja współczynników RDO ma wpływ na możliwą do zadania częstotliwość F_{\min} minimalną sygnałów wyjściowych biquadu. W reprezentacji zmiennoprzecinkowej na występujący w (2.4) współczynnik $2\cos\omega_0$ przeznaczonych jest $b+2$ bitów: 1 bit na znak, 1 bit na część całkowitą mantysy i pozostałe b bitów na część ułamkową słowa. Największą wartością współczynnika $2\cos\omega_0$ jest zatem $(2 - 2^{-b})$ i wyznacza tym samym możliwą do zadania częstotliwość minimalną sygnałów na wyjściu biquadu w praktycznej realizacji [Abu86a]

$$F_{\min} = \frac{F_s}{2\pi} \arccos \frac{2 - 2^{-b}}{2} \quad (2.40)$$

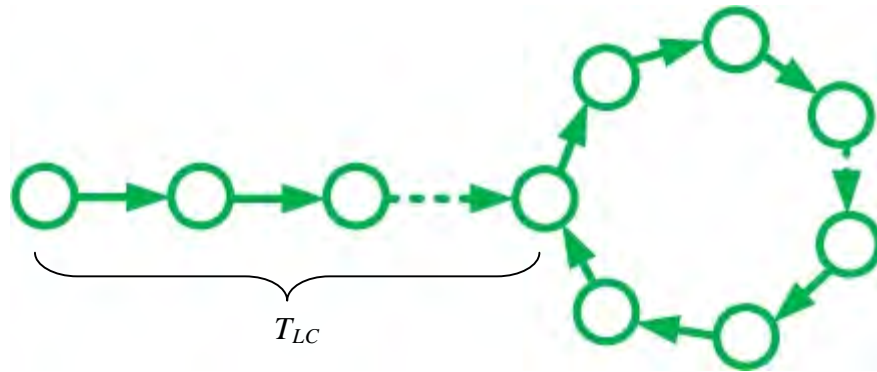
Przykładowo, przy $b = 25$ bitów i $F_s = 48$ kSa/s, możliwa do zadania częstotliwość minimalna sygnału to $F_{\min} = 1,32$ Hz.

2.6.3. Cykl graniczny

W rzeczywistych strukturach filtrów cyfrowych, w tym w RDO, mogą wystąpić zniekształcenia innego typu, których nie można wytłumaczyć za pomocą modeli szumowych. Przykładowo, założenia braku korelacji zarówno między próbkami szumu kwantowania, jak i między szumem a sygnałem w modelach szumowych, przestają obowiązywać, jeżeli różnica pomiędzy sąsiednimi próbkami sygnału jest mała w porównaniu z krokiem kwantowania. Istnienie korelacji może spowodować zmiany jakościowe zjawisk, zachodzących w filtrach cyfrowych. Analiza tych zjawisk zwanych cyklem granicznym (ang. *limit cycle* albo *deadband effect*) [Hes71], [Jac70] sprowadza się do badania wystąpienia oscylacji przy braku sygnału wejściowego oraz do badania szerokości przedziału amplitudowego, ograniczającego cykl graniczny, zwanego strefą martwą (ang. *dead zone*).

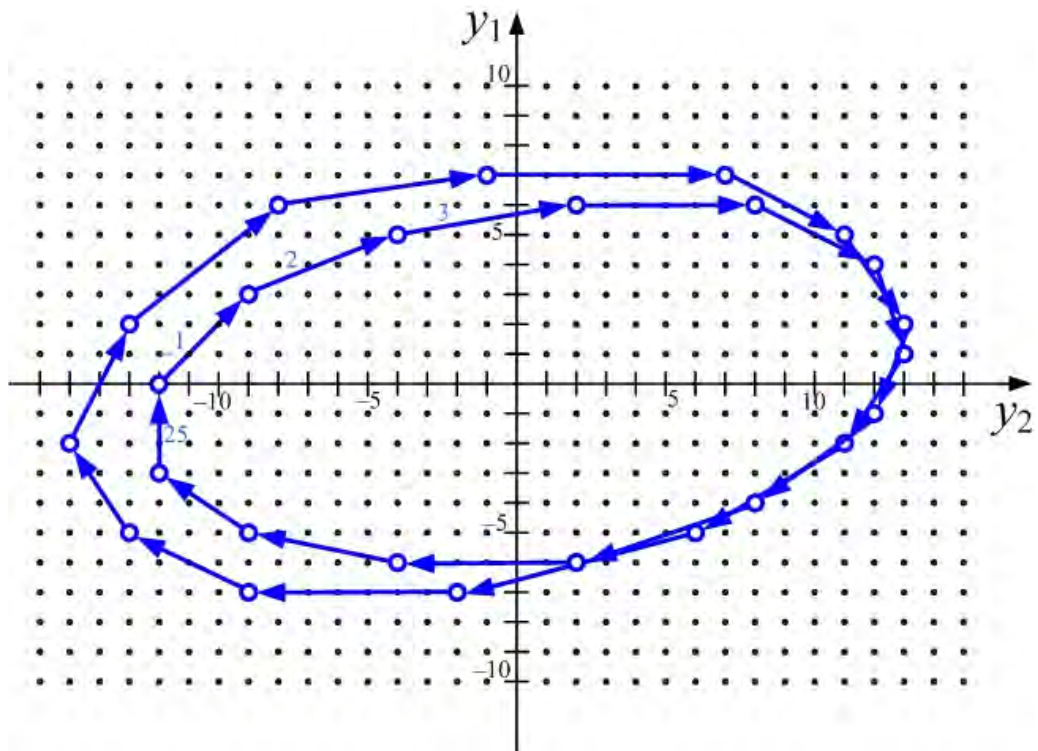
Generalnie, w zagadnieniach projektowania filtrów cyfrowych, cykl graniczny jest traktowany jako oscylacje pasożytnicze i zależy nam na jego uniknięciu albo, gdy już wystąpi, na wyprowadzeniu filtru ze strefy martwej [Law78], [Raj05]. Natomiast w rzeczywistych RDO cykl graniczny jest pożądanym [Fur75], [Har83], [Kou09]. Stąd, aby nadać mu pozytywny oddźwięk, nazywany jest w języku ang. *locking phenomenon* [Har83], co można przetłumaczyć jako efekt zamykania lub unieruchomienia. Od chwili jego wystąpienia błąd się nie akumuluje, a generowany przebieg staje się stacjonarny.

Na rys. 2.17 pokazujemy schematycznie cechy cyklu granicznego w RDO. Wraz z upływem czasu wartości próbek okresowo generowanych przez oscylator różnią się od siebie. Ale po wystąpieniu cyklu granicznego oscylator generuje okresowo te same wartości próbek. Efekt cyklu granicznego jest więc taki, jakby bieguny transformaty Z sygnałów wyjściowych oscylatora przesunęły się na okrąg jednostkowy. W praktycznych zastosowaniach RDO interesuje nas zatem odpowiedź na pytanie: czy w danej strukturze RDO wystąpi cykl graniczny, a jeżeli wystąpi, to ile wynosi czas T_{LC} liczony od rozpoczęcia obliczeń do wystąpienia cyklu granicznego w RDO. Oczywiście, im większy T_{LC} , tym generowany przebieg jest bardziej zniekształcony.



Rys. 2.17. Cykl graniczny w rzeczywistym RDO

Cykl graniczny zilustrujemy na rys. 2.18 na przykładzie oscylatora Reinscha z p. 2.4, korzystającego z macierzy rotacyjnej (2.27) z parametrem $\gamma = -2(1 - \cos \omega_0) = 1/4$ przy $\Delta = 1$ i przy warunkach początkowych postaci: $y_1[0] = 0$ i $y_2[0] = -12$. Okazuje się, że te same wartości próbek generowane są po 25 iteracjach obliczeń, a T_{LC} wynosi tu 0 Sa.



Rys. 2.18. Sygnały generowane przez oscylator Reinscha z warunkami początkowymi: $y_1[0] = 0$ i $y_2[0] = -12$, $\Delta = 1$ oraz parametrem $\gamma = 1/4$, pokazane na płaszczyźnie zespolonej w postaci diagramu Arganda [Har83]

Tak więc, na rys. 2.18 widzimy, że obecność cyklu granicznego można stwierdzić po wykreśleniu diagramu Arganda [Maz03].

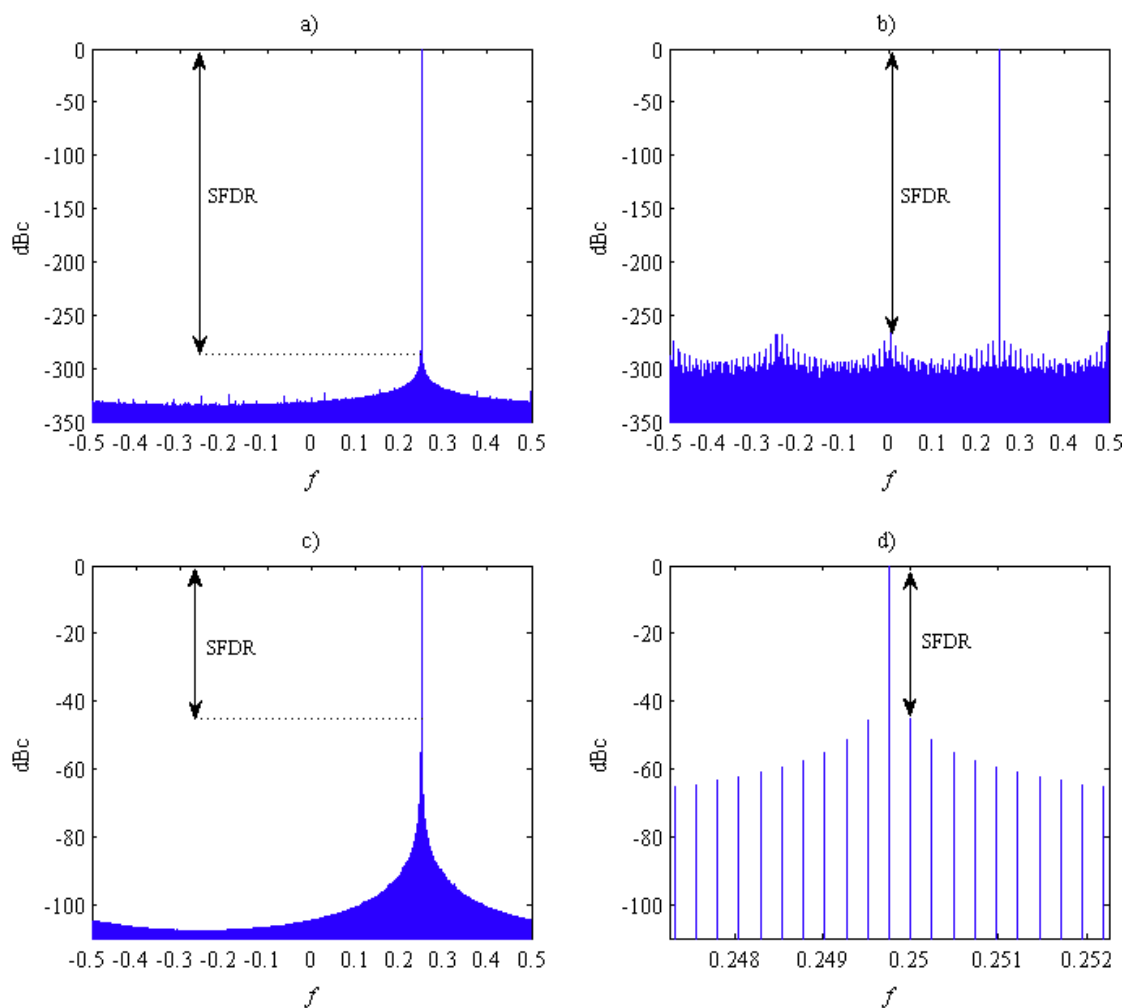
Warto wspomnieć, że w literaturze poświęconej temu zagadnieniu można wyróżnić statystyczne metody szacowania strefy martwej [Har83] i czasu T_{LC} [Kou09].

2.6.4. Widmowy zakres wolny od prążków obcych

W literaturze [Blo04], [Cor04], [Cur00a], [Cur00b], [Har07], [Her04a] przyjęto, że jakość sygnałów generowanych analogowo czy za pomocą cyfrowych metod syntezy określa się w kategoriach czystości widmowej generowanej sinusoidy. Miarą czystości jest widmowy zakres dynamiczny wolny od prążków obcych (ang. *Spurious Free Dynamic Range* – SFDR), zdefiniowany jako różnica poziomów widmowych sygnału generowanego (pożądanego) i najwyższego niepożądanego prążka widma. Jednostką SFDR są dBc (ang. *decibels relative to the carrier*) czyli liczba decybeli, mówiąca, o ile moc danego prążka różni się od mocy prążka podstawowego.

Na rys. 2.19a, 2.19c i 2.19d przedstawiamy moduł widma DFT w dBc unormowanego względem wysokości najwyższego jego prążka dla kompleksoidy wygenerowanej rekursywnie w MATLABie zgodnie z równaniem (2.5) ze znormalizowaną, zadaną częstotliwością $f = F_0/F_s = \omega_0/(2\pi) = 1023/4096$ i zerową fazą początkową $\alpha = 0$ rad dla $N = 2^{12} = 4096$ początkowych próbek generowanego sygnału bez kwantyzacji i z kwantyzacją o dokładności $P = 16$ bitów w wynikach działań arytmetycznych i na wyjściu oscylatora. Dla porównania, na rys. 2.19b, pokazujemy moduł widma DFT w dBc unormowanego względem wysokości najwyższego jego prążka dla sygnału wygenerowanego poleceniem `exp()` w MATLABie. Na rys. 2.19a widmowy zakres dynamiczny wolny od prążków obcych wynosi 273,5 dBc. Jest to wynik o 7,9 dBc lepszy od tego z rys. 2.19d, gdzie sygnał wygenerowano poleceniem `exp()` w MATLABie. Zwiększając upływ czasu czterokrotnie, tj. biorąc $N = 2^{14} = 16384$ Sa, dla oscylatora tej kompleksoidy osiągamy wynik SFDR = 267,1 dBc. Natomiast jakość przebiegów generowanych poleceniem `exp()` w MATLABie pozostaje ta sama. Dla innej znormalizowanej, zadanej częstotliwości $f = 500/16384$ i z $N = 2^{14} = 16384$ Sa, w rekursywnej generacji bez kwantyzacji osią-

gnięto wynik 258 dBc, natomiast dla sygnałów generowanych poleceniem `exp()` w MATLABie uzyskujemy SFDR równy 271,8 dBc. Tu porównanie wypada na korzyść MATLABa. Zauważmy także, że jakość generowanego przebiegu spada z kwantyzacją – przy $P = 16$ bitów osiągamy wynik SFDR = 45,4 dBc (rys. 2.19c i 2.19d).



Rys. 2.19. Moduł widma DFT w dBc unormowanego względem wysokości najwyższego jego prążka dla sygnału kompleksoidy ($f = 1023/4096$, $\alpha = 0$ rad) wygenerowanego przez CFO a) bez kwantyzacji: SFDR = 273,5 dBc, b) sygnału wygenerowanego poleceniem `exp()` w MATLABie: SFDR = 265,6 dBc, c) sygnału kompleksoidy ($f = 1023/4096$, $\alpha = 0$ rad) wygenerowanego przez CFO z kwantyzacją przy $P = 16$ bitów: SFDR = 45,4 dBc, d) z kwantyzacją przy $P = 16$ bitów (powiększenie)

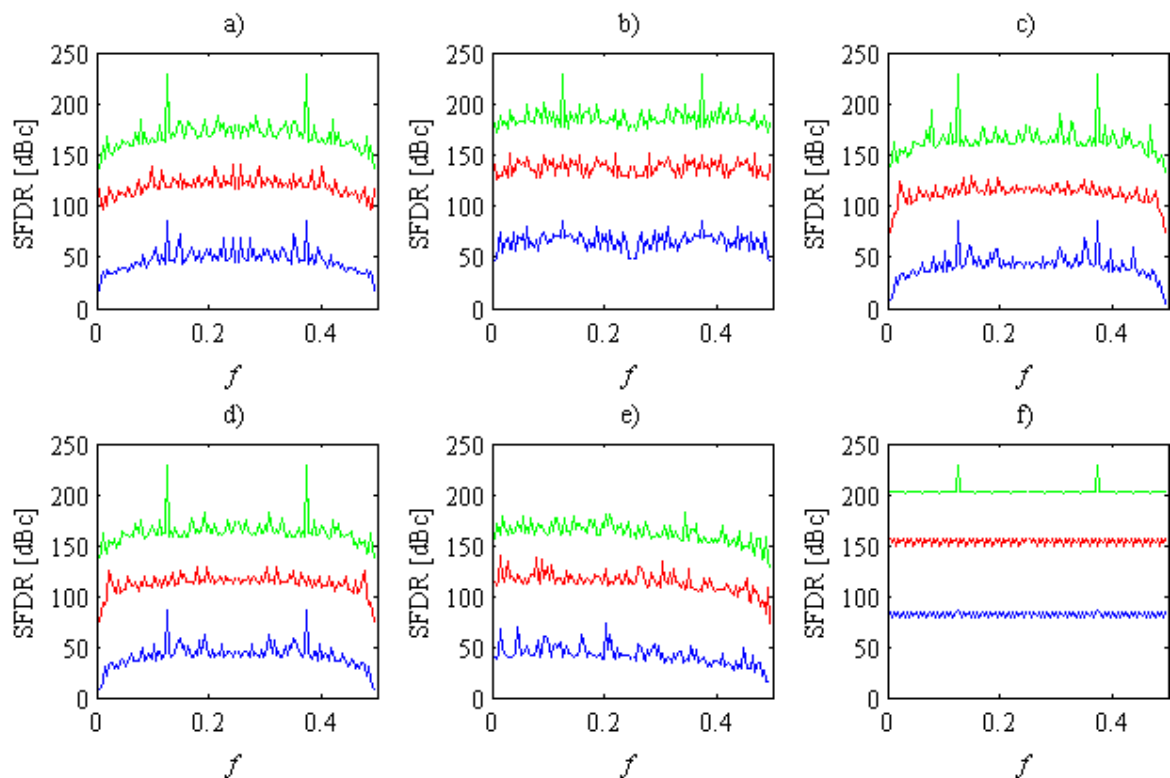
Powyższy eksperyment pokazuje, że wartość SFDR rekursywnego oscylatora zależy od znormalizowanej zadanej częstotliwości f generowanego sygnału, dokładności kwantyzacji P oraz upływu czasu reprezentowanego przez liczbę N obserwowanych próbek. Dalej zbadamy cechy i prawidłowości tych zależności, stosując tylko na tyle krótkie obserwacje, by można je było uznać za sygnały stacjonarne.

W tym celu najpierw skonstatujemy, że widma takie, jak np. pokazane na rys. 2.19 wygodnie jest opisywać za pomocą jednego tylko parametru. W rozwiązaniach katalogowych, charakteryzując dany oscylator, podaje się zazwyczaj maksymalny względny poziom prążków obcych

$$S_{\max} = -\text{SFDR}_{\min} \text{ [dBc]} \quad (2.41)$$

gdzie SFDR_{\min} jest najmniejszym widmowym zakresem dynamicznym wolnym od prążków obcych [Cor04]. Ponieważ w pracy źródłowej [Tur03], już wcześniej kilkakrotnie przywoływanej, ani w innych pracach, takich danych nie zamieszczono, przedmiotem kolejnych eksperymentów jest zbadanie wartości tego parametru. W badaniu zadajemy $f = M/N$ z $M = 1, 2, \dots, N/2 - 1$ oraz N przyjmujące wartości od 2^8 do 2^{12} co 2^8 próbek, a parametr kwantyzacji wynosi $P = 12, 14, 16, \dots, 32$ bity. Uzyskamy w ten sposób bazę 191312 sygnałów sinusoidalnych, dla których obliczamy: moduł widma DFT w dBc unormowany względem wysokości najwyższego jego prążka, a następnie zakres dynamiczny wolny od prążków obcych. Stąd dostajemy 176 zależności SFDR w funkcji f przy określonych wartościach P i N . Na rys. 2.20 przedstawiono kilka wyników obliczeń parametru SFDR w funkcji f dla $N = 2^8$ Sa oraz $P = 12, 24, 32$ bity dla oscylatorów z p. 2.3. Dla porównania zamieszczamy również wykresy SFDR dla sygnału wygenerowanego poleceniem `exp()` w MATLABie. Zwróćmy uwagę, że dla RDO wartość SFDR rośnie, gdy bieguny rzeczywistego oscylatora (czyli przy wykonywaniu operacji arytmetycznych ze skończoną precyzją) zbliżają się do biegunów oscylatora przy wykonywaniu operacji arytmetycznych z nieskończoną precyzją (por. rys. 2.15 i 2.16). Ma to miejsce dla biquadu, DW i QSU w przedziale znormalizowanej, zadanej częstotliwości $f \in (0, 0,25)$. Tu najlepszą jakość generowanych sygnałów gwarantuje wybór częstotliwości w pobliżu wartości f równej 0,25. Mając na uwadze wniosek wysunięty w p. 2.6.1, w tekście poniżej wzoru (2.31), że przebieg błędu na wyjściu biquadu jest odwrotnie proporcjonalny do $\sin\omega_0$, tu także konkludujemy, że w sytuacji z rys. 2.20 dla często-

tliwości $f \in (0, 0,25) / f \in (0,25, 0,5)$ im mniejsza/większa znormalizowana, zadana częstotliwość sygnału wyjściowego biquadu, DW i QSU, tym większe błędy w jego rekursywnej generacji. Zauważmy też, że krzywe SFDR są symetryczne względem $f = 0,25$ w sytuacji z rys. 2.20a-d i 2.20f. Co ciekawe, krzywa z rys. 2.20e nie jest symetryczna względem $f = 0,25$, a wraz ze wzrostem znormalizowanej, zadanej częstotliwości rzeczywisty biegun MCFO oddala się bieguna tego oscylatora przy wykonywaniu operacji arytmetycznych z nieskończoną precyzją (por. rys. 2.16). Stąd, w ogólności, dla MCFO wartość SFDR maleje ze wzrostem f , a najlepsze wyniki uzyskujemy dla częstotliwości bliskich zeru.



Rys. 2.20. Zależność poziomu prążków obcych od znormalizowanej, zadanej częstotliwości sygnału: a) biquadu, b) CFO, c) DW, d) QSU, e) MCFO, f) dla sygnału wygenerowanego poleceniem `exp()` w MATLABie, dla $P = 12$ bitów (kolor zielony), $P = 24$ bity (kolor czerwony), $P = 32$ bity (kolor niebieski)

Najmniejszą zmiennością wartości SFDR i wartością parametru S_{\max} w całym badanym przedziale f od 0 do 0,5 wśród rozpatrywanych RDO w sytuacji z rys. 2.20 gwarantuje CFO. Wartości parametru S_{\max} maksymalnego względnego poziomu prążków obcych, kolejno, dla biquadu, CFO, DW, QUS, MCFO oraz dla prze-

biegu wygenerowanego poleceniem `exp()` w MATLABie dla $P = 12$ bitów wynoszą: $-18,07$ dBc, $-47,21$ dBc, $-4,6$ dBc, $-8,02$ dBc, $-15,5$ dBc, $-79,25$ dBc, dla $P = 24$ bity: $-95,98$ dBc, $-126,44$ dBc, $-74,21$ dBc, $-74,22$ dBc, $-72,3$ dBc, $-148,69$ dBc, a dla $P = 32$ bity: $-137,32$ dBc, $-172,31$ dBc, $-133,12$ dBc, $-138,74$ dBc, $-128,68$ dBc, $-200,08$ dBc.

Wróćmy teraz do badania zależności S_{\max} od dokładności kwantyzacji P oraz wpływu czasu reprezentowanego przez liczbę N obserwowanych próbek. Połączenie wszystkich wspomnianych wcześniej 176 punktów dla CFO w powierzchnię prezentujemy na rys. 2.21. Zauważmy dalej, że obserwacja kolorowej powierzchni z rys. 2.21 sugeruje następującą zależność

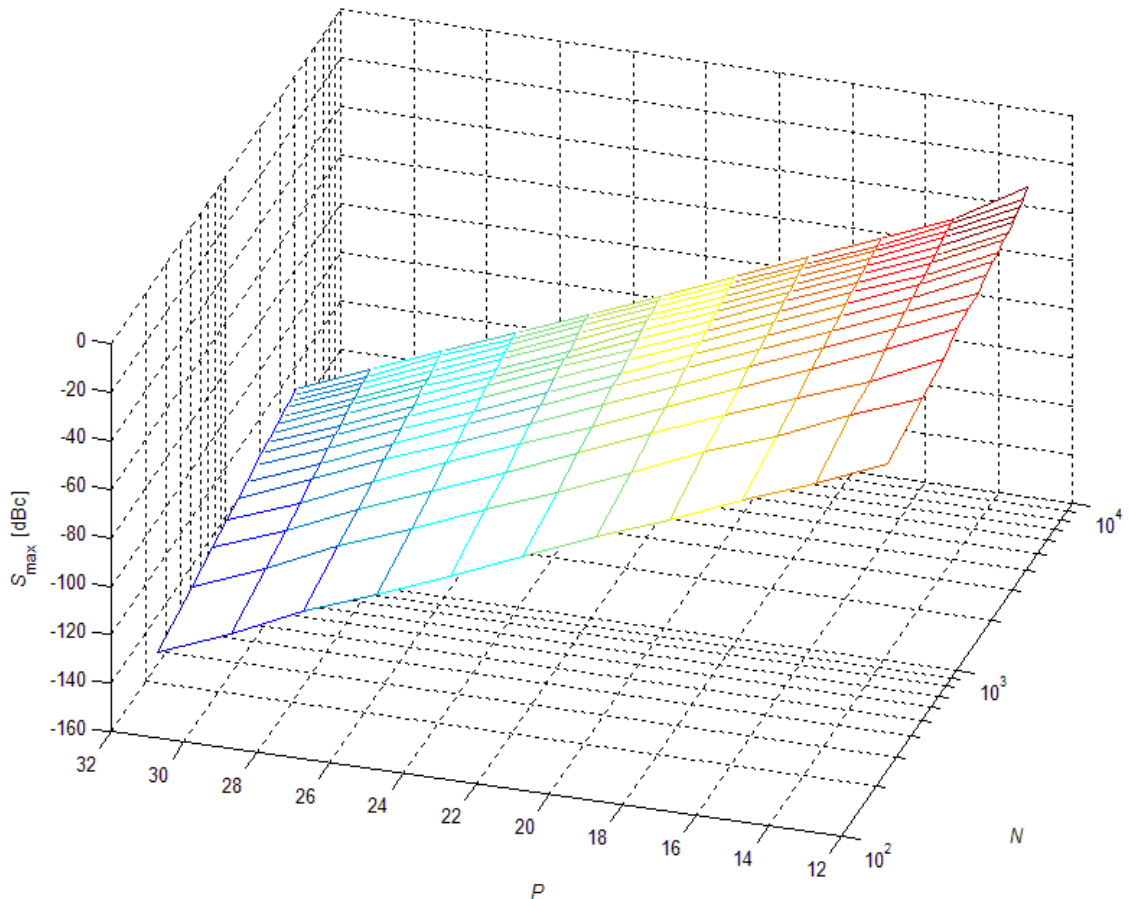
$$S_{\max} = b_0 + b_1 P + b_2 \log_2 N + u_l \quad (2.42)$$

gdzie b_0 , b_1 , b_2 są parametrami strukturalnymi, a u_l jest składnikiem losowym – tzw. zmienną zakłócającą modelu [Bar96]. Zakładamy tu, że zmienna u ma rozkład normalny o wartości oczekiwanej równej zeru i stałej wariancji oraz, że autokorelacja składnika losowego jest zerowa [Paw81]. Korzystając z danych zebranych na rys. 2.21, wynik oszacowania (2.42) metodą najmniejszych kwadratów (ang. *Least Square* – LS) [Bar96], [Paw81] w postaci zależności o charakterze empirycznym, przedstawia się następująco

$$\hat{S}_{\max} = -12,11 - 6,07P + 6,42 \log_2 N \quad (2.43)$$

ze współczynnikiem determinacji $R^2 = 0,9997$ i średnim błędem reszt $\sigma_u = 0,66$ [Bar96], [Paw81]. Oszacowanie w (2.43) ma następującą interpretację:

1. 99,97% całkowitej zmienności S_{\max} wyjaśnia model.
2. Wartości teoretyczne maksymalnych poziomów prążków obcych różnią się od wartości pomierzonych średnio o 0,66 dB.
3. Jeżeli P wzrośnie o 1 bit, to przy tej samej długości ciągu próbek początkowych generowanego sygnału, maksymalny poziom prążków obcych spadnie średnio o 6,07 dB.
4. Jeżeli N zwiększymy dwukrotnie, to przy stałości dokładności kwantyzacji P , maksymalny poziom prążków obcych wzrośnie średnio o 6,42 dB.



Rys. 2.21. Zależność maksymalnego poziomu prążków obcych od dokładności kwantyzacji P i wpływu czasu reprezentowanego przez N z osią N w skali logarytmicznej, dla sygnału na wyjściu CFO z rys. 2.2 dla $f = M/N$, $M = 1, 2, \dots, N/2 - 1$

Wzór (2.43) dobrze opisuje pracę CFO. Może być stosowany przez projektantów przy szacowaniu wartości maksymalnego względnego poziomu prążków obcych na podstawie dokładności kwantyzacji i wpływu czasu.

2.7. Algorytmy poprawy czystości oscylacji

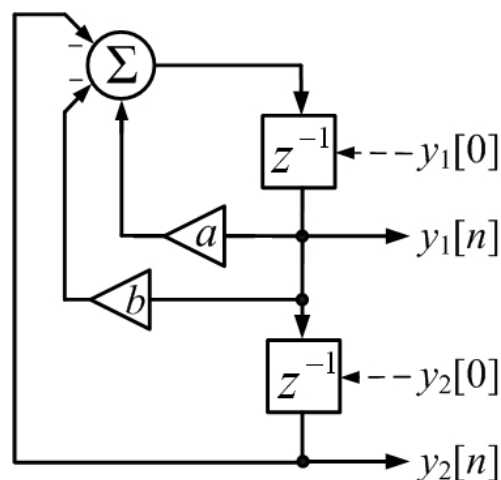
Gdy czystość (czyli jakość) generowanych sygnałów sinusoidalnych nie spełnia założeń projektowych, a więc jest niewystarczająca, pomocne okazują się algorytmy poprawy jakości generowanych sygnałów. Tym algorytmom poświęcono wiele prac naukowych [Abu94], [Abu86a], [Ahm86], [Al-97], [Al-01], [Fli92], [Leh00], [Nii99], [Nii03], [Zie96]. Dalej omówimy kilka przykładowych algorytmów tego typu.

Najbardziej efektywnym i zarazem najprostszym sposobem zwiększania czystości generowanych sygnałów jest okresowe restartowanie pracy oscylatora, stosowane dla pulsacji ω_0 współmiernych z π , tj. gdy $\omega_0/(2\pi) = F_0/F_s = f$ jest liczbą wymierną a sinusoida dyskretna jest okresowa. Wartości błędu wartości chwilowej sygnału w chwili restartu są wyzerowane, a następnie obserwuje się ich akumulację [Cur00b]. Widmowy zakres dynamiczny wolny od prążków obcych sygnału z restartowaniem co kT próbek, $k = 1, 2, 3, \dots$ gdzie T jest okresem sygnału, jest równy widmowemu zakresowi dynamicznemu wolnemu od prążków obcych sygnału o długości kT . Wykorzystując tę właściwość i model wyprowadzony przez autora w p. 2.6.4, można dobrać takie N , przy którym praca oscylatora spełnia wymagania projektowe i włączać mechanizm restartowania co N próbek, utrzymując w ten sposób pożądaną jakość oscylacji niezależnie od upływu czasu. Oscylator można również restartować, gdy moc chwilowa $p[n] = x_1^2[n] + x_2^2[n]$ przekroczy określoną wartość, przy czym $x_1[n]$ oraz $x_2[n]$ to generowane sygnały sinusoidy 2D, czyli na wyjściu 2D-RDO.

Częstą praktyką jest modyfikacja rekursywnego równania generacji sinusoidy. Dla oscylatora biquad równanie (2.4) można przepisać do postaci [Aga75]

$$y_1[n] = 2y_1[n-1] - 2(1 - \cos\omega_0)y_1[n-1] - y_1[n-2], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.44)$$

Strukturę oscylatora, pracującego zgodnie z algorytmem (2.44), przedstawia rys. 2.22.



Rys. 2.22. Struktura biquadu wg. (2.44) ze współczynnikami: $a = 2$ i $b = 2(1 - \cos\omega_0)$

Wykonywane jest tu faktycznie tylko jedno mnożenie na próbkę, gdyż sygnał opóźniony $2y_1[n-1]$ w (2.44) uzyskujemy bezmnożnikowo. Wartość współczynnika $2(1-\cos\omega_0)$ w (2.44) dla częstotliwości bliskich zeru jest bliska zeru. Co interesujące, jego wartość skwantowana charakteryzuje się mniejszym błędem kwantyzacji niż skwantowana wartość współczynnika $2\cos\omega_0$ w (2.4) [Abu86a], [Aga75].

Popularnym algorytmem, sterującym parametrami oscylatora, jest algorytm, realizujący automatyczną regulację wzmocnienia (ang. *Automatic Gain Control* – AGC) [Har07]. W tym algorytmie generowane sygnały są skalowane przez współczynnik G liczony jako

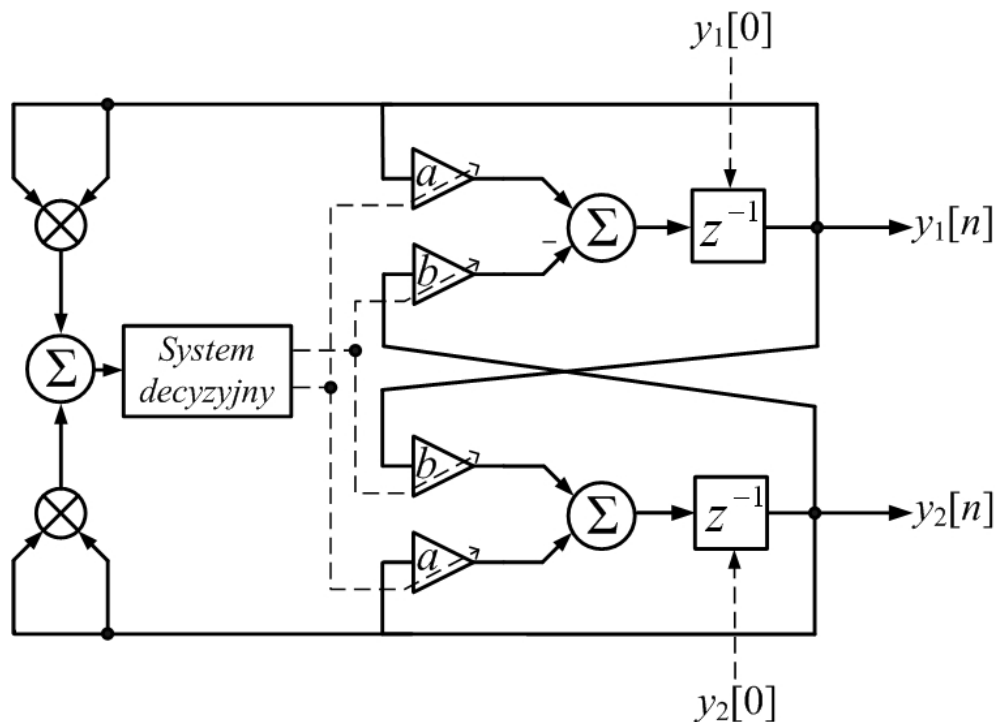
$$G[n] = \frac{3-p[n]}{2} \quad (2.45)$$

gdzie $p[n]$ – to moc chwilowa (kwadrat amplitudy chwilowej, obwiedni) sygnału na wyjściu RDO.

Z kolei w algorytmie opisanym w [Fli92] modyfikowane są współczynniki macierzy rotacyjnej oscylatora z sygnałami wyjściowymi, pozostającymi względem siebie w kwadraturze. Bieguny transformaty \mathbf{Z} generowanych sygnałów są przesuwane na płaszczyźnie z do wnętrza okręgu jednostkowego, gdy moc chwilowa $p[n]$ przekroczy wartość $(1+\varepsilon)^2$. W przeciwnym razie bieguny są lokowane na płaszczyźnie z na zewnątrz okręgu jednostkowego. Schemat blokowy realizacji takiego algorytmu przedstawia rys. 2.23. Oscylator kompleksoidy z rys. 2.23 pracuje w stanie I zwanym niestabilnym z $a = \cos\omega_0 + \varepsilon$ i $b = \sin\omega_0 + \varepsilon$ i w stanie II zwanym stabilnym z $a = \cos\omega_0 - \varepsilon$ i $b = \sin\omega_0 - \varepsilon$. System decyzyjny zmienia stan I na II, gdy $p[n] > (1+\varepsilon)^2$, a stan II na I, gdy $p[n] < (1-\varepsilon)^2$. Zaznaczmy, że na jakość generowanych sygnałów można dodatkowo wpływać poprzez odpowiedni wybór warunków początkowych [Kru07b].

Innym skutecznym sposobem zwiększania zakresu dynamicznego wolnego od prążków obcych jest algorytm, w którym generuje się pomocnicze sygnały sinusoidy 2D o częstotliwości p razy większej, $p = 2, 3, 4, \dots, N-1$, od pożądanej częstotliwości F_0 generowanego sygnału. W chwilach czasu $n = 0, 1, 2, \dots, p-1, p+1, \dots, 2p-1, 2p+1, \dots$ zadana częstotliwość sygnału wynosi F_0 , a w chwilach $n = p, 2p, 3p, \dots$ – zadana częstotliwość to pF_0 [Cur00b]. W ten sposób poprawiono w [Cur00b] jakość generowanej rekursywnie kompleksoidy z SFDR = 29 dBc aż do

78 dBc dla upływu czasu reprezentowanego przez $N = 2^{14}$ Sa oraz dla $f = 173/N$ i przy 14-bitowej ($P = 14$ bity) kwantyzacji. Natomiast generowaną kompleksoidę o długości $N = 2^{16}$ początkowych próbek i przy 16-bitowej kwantyzacji charakteryzuje $S_{\max} = -81$ dBc. Dodatkową zaletą generacji wg. [Cur00b] jest możliwość sterowania parametrami oscylatora dla pulsacji ω_0 niewspółmiernych z π . Ponadto, tak jak we wzmiankowanej wyżej AGC, opisany algorytm poprawy jakości oscylacji można stosować dla każdego RDO do generacji sinusoidy.



Rys. 2.23. Schemat blokowy realizacji algorytmu kontroli błędów z [Fli92]

Warto tu odnotować, że rekursywne oscylatory z algorytmami poprawy jakości oscylacji pozwalają osiągnąć wysoki stopień czystości generowanej sinusoidy przy niskim poborze mocy zasilania. Wyniki eksperymentów w [Abu94] wskazują na wyższość metod rekursywnych pod względem czystości generowanej sinusoidy w porównaniu z metodami z użyciem LUT w implementacji oscylatorów na procesorze sygnałowym TMS32010. Natomiast w pracach [Cur00a] i [Nii99] uzyskano działanie oscylatora rekursywnego porównywalne nawet z DDSem [Gie91] i [Kwe99]. Implementację oscylatora kompleksoidy w technologii CMOS z [Cur00a], gdzie osiągnięto wynik SFDR równy 78,6 dBc na tle 60 dBc z [Gie91], 84,3 dBc [Tan95] i 100 dBc z [Kwe99], cechującą: największa oszczędność poboru mocy zasil-

lania i najmniejsze wymagania sprzętowe, w porównaniu z metodami z [Gie91], [Kwe99] i [Tan95].

2.8. Nowa koncepcja badania jakości generowanych sygnałów

Z przeprowadzonej dyskusji z p. 2.6 wynika, że mechanizm powstawania zniekształceń w rzeczywistych RDO jest złożony, a ostateczne wyniki zależą od struktury oscylatora jak i od właściwości generowanego sygnału. Dalej w tej pracy przyjęto, że jakość generowanych cyfrowo przebiegów jest oceniana w kategoriach czystości widmowej generowanej sinusoidy, wykorzystując metody fourierowskie. Niezbędne jest wówczas założenie stacjonarności badanej realizacji. Jednak, jak wiemy z p. 2.6, w RDO przy braku cyklu granicznego następuje degradacja dokładności wyników generowanego ciągu, której szybkość uwarunkowana jest stosowaną arytmetyką. Prowadzi to do zmiany parametrów generowanej sinusoidy w czasie, a to uniemożliwia przeprowadzenie wspomnianej analizy. Co prawda, z jednej strony dla dostatecznie krótkiej obserwacji można założyć, że pobrany do analizy sygnał jest stacjonarny, ale z drugiej strony często konkurencyjność RDO (zaliczanego do grupy oscylatorów zwanych w języku angielskim *free-running oscillators* [Fli92]) polega na możliwości generacji długich ciągów przy niskim nakładzie sprzętowym [Cur00a]. Zatem dwa warunki, dotyczące czasu trwania obserwacji do analizy widmowej rekursywnej generacji, wykluczają się. Należy także podkreślić, że jakość estymaty SFDR jest wystarczająca tylko dla pulsacji ω_0 współmiernej z π (gdy F_0/F_S jest ułamkiem wymiernym). W przeciwnym razie zjawisko, zwane przeciekiem widma, skutecznie maskuje mniejsze prążki w widmie badanej sinusoidy. Klasyczny sposób przeciwdziałania przeciekom – okienkowanie, skutkuje tu umiarkowanie i tylko przy bardzo długich obserwacjach, maskując przy tym prążki obce bliskie ω_0 [Her04b]. Zauważmy także, że jeżeli nie stosuje się uzupełniania zerami i okienkowania, to do obliczenia SFDR jest wymagana całkowita liczba okresów sinusoidy zawartej w obserwacji.

Wynika stąd potrzeba opracowania nowego sposobu przeprowadzania analizy RDO, wykorzystującego miary jakościowe, które w badaniu czystości generowanych przez RDO sygnałów nie były dotychczas używane. Opisana poniżej metoda bada czystość generowanego przebiegu zespolonego $x[n] = x_1[n] + jx_2[n]$ na wyjściu

RDO względem sygnału idealnego (pożądanego) $y[n] = y_1[n] + jy_2[n]$, obliczając przebiegi: chwilowego (bieżącego) błędu amplitudy w dB

$$e_a[n] = 10 \log \left| |x[n]| - |y[n]| \right|^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.46)$$

chwilowego błędu fazy w rad

$$e_\varphi[n] = \text{Arg} \left(x[n] \exp(-j\varphi[n]) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.47)$$

gdzie $\varphi[n]$ jest pożądaną fazą chwilową, oraz chwilowego (bieżącego) błędu pulsacji w rad/Sa

$$e_\omega[n] = \begin{cases} 0 & \text{dla } n = 0 \\ \text{Arg} \left(x[n] x^*[n-1] \exp(-j\omega[n]) \right) & \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.48)$$

gdzie $x^*[n]$ jest wartością sprzężoną sygnału $x[n]$, a $\omega[n]$ oznacza pożądaną pulsację chwilową, definiowaną przyrostowo (różnicowo)

$$\omega[n] = \varphi[n] - \varphi[n-1], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.49)$$

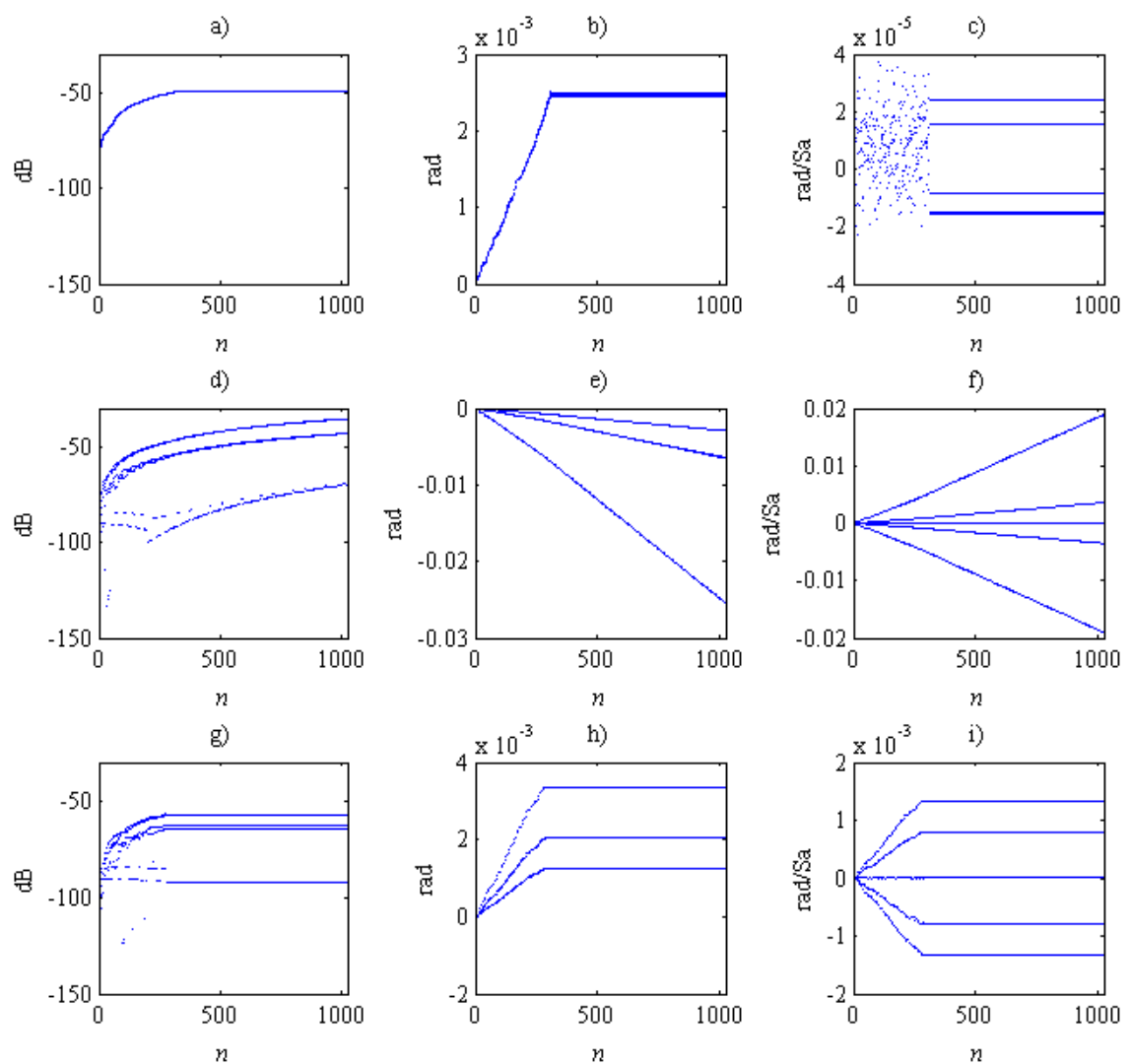
Faza chwilowa $\varphi[n]$ stanowi wynik akumulacji zadanej pulsacji chwilowej $\omega[n]$ przy fazie początkowej α

$$\varphi[n] = \begin{cases} \alpha & \text{dla } n = 0 \\ \varphi[n-1] + \omega[k] & \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (2.50)$$

Oczywiście referencyjne ciągi: $y[n]$ w (2.46), $\exp(-j\varphi[n])$ w (2.47) oraz $\exp(-j\omega[n])$ w (2.48), powinny być zadane (obliczane z wzoru) z maksymalną dostępną dokładnością.

Wizualizacja i analiza przebiegów chwilowych błędów dostarcza istotnych informacji o generowanym rekursywnie sygnale, a przede wszystkim o jego stacjonarności. Gdy przebieg jest stacjonarny, analizujemy go w dziedzinie częstotliwości na podstawie widma DFT obliczonego dla dostatecznie długiej obserwacji generowanego sygnału. Co ciekawe, prezentowana metoda, wykorzystująca chwilowe przebiegi jest bardziej uniwersalna od SFDR – umożliwia badanie czystości dowolnych sygnałów zespolonych o danym wzorcu. Może więc być zastosowana nie tylko do RDO w generacji sinusoidy, ale również do RDO w roli modulatora (co pokażemy w p. 3.3.3 i w p. 4.7). Przykłady zastosowania opisanych tu miar jakości RDO prezentujemy na rys. 2.24. Pokazano tu zależność chwilowego błędu amplitudy, fazy oraz pulsacji dla sygnału na wyjściu CFO, DW oraz MCFO dla znormalizowanej, zadanej częstotliwości $f = 1/10$, zerowej zadanej fazy początkowej oraz przy

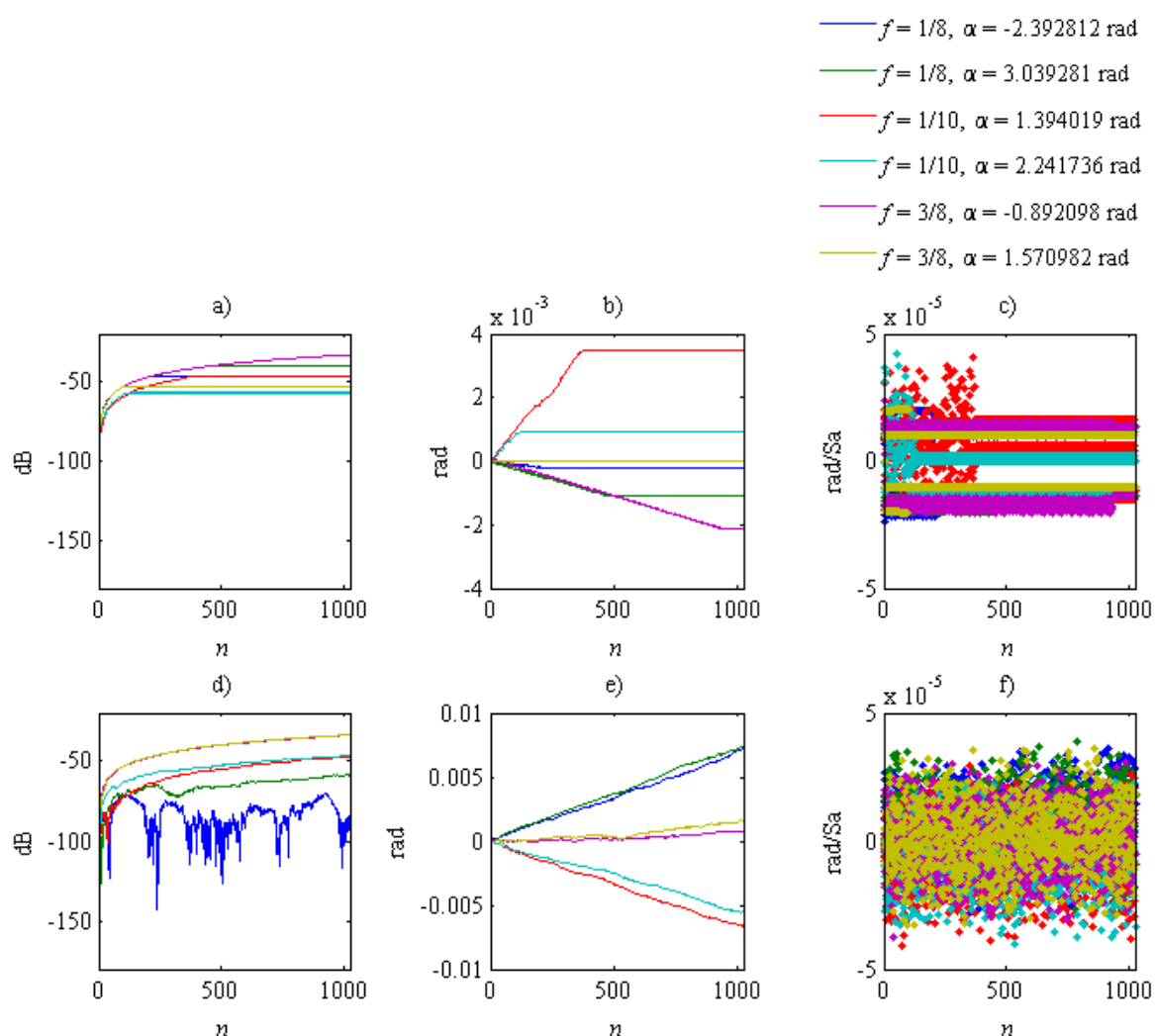
$N = 2^9$ początkowych próbek wygenerowanego sygnału i z parametrem kwantyzacji $P = 16$ bitów. Aby wykresy z rys. 2.24 były czytelniejsze dla małych wartości n , obliczonych wartości chwilowych błędów nie połączono ze sobą. Dla DW (rys. 2.24d-f) obserwujemy kumulację modułu wszystkich chwilowych błędów w czasie. Narastanie następuje nawet dla $N = 2^{16}$ Sa, gdzie chwilowy błąd amplitudy osiąga wartość większą niż 0 dB. Poza tym dla CFO i MCFO występuje cykl graniczny, czyli generator sinusoidy staje się generatorem szumu. Po jego wystąpieniu, generowany przebieg ustacjonarnia się.



Rys. 2.24. Chwilowe błędy: a) amplitudy, b) fazy oraz c) pulsacji dla sygnału na wyjściu CFO, chwilowe błędy: d) amplitudy, e) fazy oraz f) pulsacji dla sygnału na wyjściu DW oraz chwilowe błędy: g) amplitudy, h) fazy oraz i) pulsacji dla sygnału na wyjściu MCFO

Zauważmy, że w przykładzie z rys. 2.24 pulsację współmierną z π zadajemy wzorem $\omega_0 = \pi L / M$, gdzie L i $M > L$ to dwie liczby naturalne. Ponieważ $\pi \approx 22/7$ jest dobrym wymiernym przybliżeniem liczby π , to „sąsiadującą” z nią pulsację „niewspółmierną” z π zadajemy jako $\omega'_0 = 22L / (7M)$.

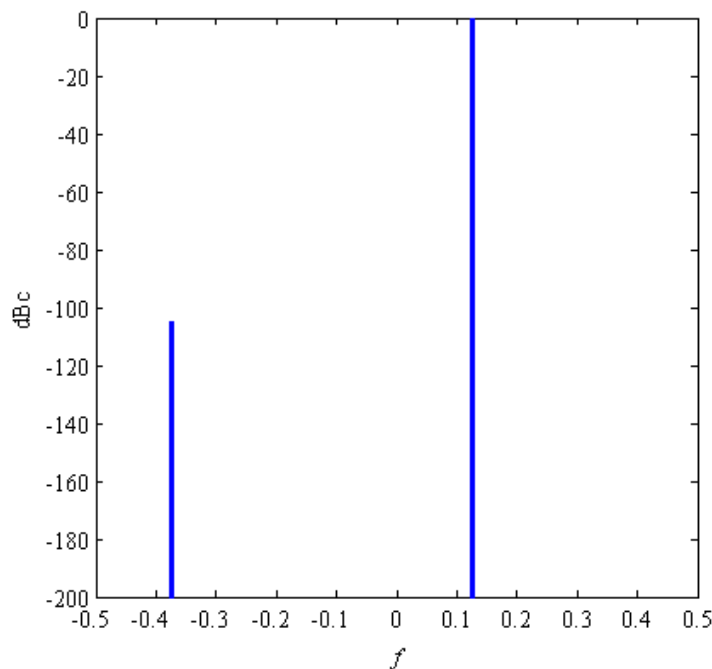
Na rys. 2.25a-c prezentujemy zależność chwilowego błędu amplitudy, fazy oraz pulsacji dla sygnału na wyjściu CFO przy różnych pulsacjach oraz fazach początkowych, dla których zaobserwowano cykl graniczny. Z kolei na rys. 2.25d-f pokazujemy te same błędy ale dla $\pi \approx 22/7$. Aby wykresy z rys. 2.25c i rys. 2.25f były czytelniejsze, wartości chwilowych błędów pulsacji nie połączone za sobą.



Rys. 2.25. Chwilowe błędy: a) amplitudy, b) fazy oraz c) pulsacji dla sygnału o zadanej pulsacji ω_0 współmiernej z π na wyjściu CFO; chwilowe błędy: d) amplitudy, e) fazy oraz f) pulsacji dla sygnału o zadanej pulsacji ω_0 niewspółmiernej z π na wyjściu CFO

Na rys. 2.25d-e, czyli dla $\pi \cong 22/7$, obserwujemy kumulację błędów amplitudy i modułów błędu fazy. Błąd pulsacji jest tu ograniczony, a mianowicie $|e_\omega[n]| < 5 \cdot 10^{-5}$ rad/Sa. Co ciekawe, przyjmując $\pi \cong 22/7$, może wystąpić sytuacja, gdy błąd chwilowy amplitudy kumuluje się wolniej niż w sytuacji, gdy pulsacja ω_0 jest współmierna z π (przebiegi z rys. 2.25a i 2.25d, kolor niebieski, $f = 1/8$, $\alpha = -2,392812$ rad). Dodatkowo, na chwilę wystąpienia cyklu granicznego wpływają warunki początkowe, w których zawarta jest informacja o zadanej fazie początkowej generowanego sygnału (rys. 2.25a-c). Nie ma ona jednak większego znaczenia dla badanych sygnałów o pulsacji ω_0 współmiernej z π (rys. 2.25d-f).

Badanie w kategoriach czystości widmowej generowanej sinusoidy przeprowadzamy tylko po stwierdzeniu cyklu granicznego. Na rys. 2.26 prezentujemy moduł widma DFT w dBc unormowanego względem wysokości najwyższego jego prążka dla kompleksoidy o parametrach $f = 1/8$ oraz $\alpha = -2,392812$ rad, po wystąpieniu cyklu granicznego (patrz przebiegi z rys. 2.25a-c, kolor niebieski). SFDR wynosi tu 105,8 dBc.



Rys. 2.26. Moduł widma DFT w dBc unormowanego względem wysokości najwyższego jego prążka dla sygnału kompleksoidy ($f = 1/8$, $\alpha = -2,392812$ rad) na wyjściu CFO po wystąpieniu cyklu granicznego

Prezentowaną powyżej koncepcją posłużymy się także w rozdz. 3 do badania czystości generowanej sinusoidy wielowymiarowej oraz w rozdz. 4 do badania czystości sygnałów produkowanych przez RDO w roli modulatora.

3. Projektowanie rekursywnych oscylatorów sygnałów sinusoidalnych

W rozdz. 2 omówiono znane z literatury rekursywne cyfrowe oscylatory przebiegów sinusoidalnych oraz przeanalizowano ich właściwości. Dalej sposób uzyskiwania algorytmu będziemy nazywać metodą projektowania. Generalnie, projektowanie rekursywnych oscylatorów sprowadza się do znajdowania rekursywnego algorytmu przetwarzania sygnału, służącego go generacji sygnałów sinusoidalnych. Temat ten został poruszony już w [Tur03], jednakże podana tam metoda projektowania ma pewne ograniczenia – ustalone z góry elementy macierzy rotacyjnej determinują parametry sygnałów wyjściowych.

W pierwszej części rozdz. 3 podajemy ogólną postać sygnałów wyjściowych 2D-RDO przy zadanych elementach macierzy rotacyjnej. Jako punkt wyjścia przyjmujemy warunki (2.19), zapewniające okresową powtarzalność wartości kolejnych generowanych rekursywnie próbek. Dzieje się tak wtedy, gdy bieguny transformaty Z sygnałów wyjściowych oscylatora leżą na płaszczyźnie z , na okręgu jednostkowym. Następnie podajemy macierz rotacyjną oscylatora. W oparciu o wyznaczone postaci sygnałów wyjściowych, macierz rotacyjną oscylatora i przeprowadzoną analizę w tym rozdziale, w p. 3.2 udoskonalamy metodę pierwszą z p. 2.4 oraz opracujemy drugą, alternatywną, a zarazem oryginalną metodę projektowania oscylatorów. Udoskonalenie metody pierwszej polega na tym, że, zadając odpowiednie warunki początkowe, mamy możliwość sterowania amplitudą i fazą początkową jednego z sygnałów oraz różnicą faz sygnałów wyjściowych oscylatora. Podczas projektowania ustala się elementy macierzy rotacyjnej, dochodząc następnie do wzorów na sygnały wyjściowe oscylatora. Z kolei w drugiej opracowanej tu metodzie projektowania procedura zostanie odwrócona: chcąc zaprojektować oscylator z pożądanymi parametrami sygnałów wyjściowych, obliczymy elementy macierzy rotacyjnej. Druga metoda projektowania wykorzysta opracowany tu oryginalny algorytm, pozwalający zadać dowolne parametry sygnałów części rzeczywistej i urojonej sinusoidy w (2.3). Korzystając z tak opracowanego algorytmu projektowania oscylatorów, podajemy dalej algorytm rekursywnego cyfrowego oscylatora sinusoidy wielowymiarowej (ang. *Multi-Dimensional Recursive Digital Oscillator – mD-RDO*), który wykorzystuje sygnały wyjściowe 2D-RDO. Zaznaczmy przy tym, iż nie jest konieczne, aby sinusoida 2D, którą posługujemy się w tym algorytmie, była generowana w spo-

sób rekursywny. Umożliwi to integrację rekursywnych metod generacji przebiegów sinusoidalnych z innymi cyfrowymi metodami syntezy, wspomnianymi w p. 2.2. Po zaprojektowaniu 2D-RDO jako systemu dyskretnego, analizujemy zniekształcenia, powstające w rzeczywistym oscylatorze za pomocą mierników wprowadzonych w rozdz. 2.

3.1. Sygnały wyjściowe oscylatora

Wśród metod wyznaczania macierzy stanu liniowego systemu dyskretnego wykorzystuje się m.in. [Kac77]: metodę Caley-Hamiltona, metodę Sylwestra, metodę diagonalizacji macierzy (metoda wektorów własnych) oraz metodę odwrotnego przekształcenia \mathbf{Z} . Jedną z najczęściej stosowanych jest metoda diagonalizacji macierzy (metoda wektorów własnych) [Top05]. Dodajmy, że macierz stanu 2D-RDO nazwaliśmy w p. 2.4 macierzą rotacyjną [Tur03].

Przy spełnionych warunkach (2.19) wartości własne macierzy rotacyjnej w (2.18) są zespolone sprzężone i wynoszą

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{(a_{11} + a_{22}) + j\sqrt{4 - (a_{11} + a_{22})^2}}{2} \\ \lambda_2 &= \frac{(a_{11} + a_{22}) - j\sqrt{4 - (a_{11} + a_{22})^2}}{2}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Przepisując (3.1) w postaci biegunowej, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \cos\omega_0 + j\sin\omega_0 = e^{j\omega_0} \\ \lambda_2 &= \cos\omega_0 - j\sin\omega_0 = e^{-j\omega_0}\end{aligned}\tag{3.2}$$

przy czym pulsacja

$$\omega_0 = \arccos\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)\tag{3.3}$$

Wobec (2.19) wielomian charakterystyczny macierzy rotacyjnej \mathbf{A} ma różne pierwiastki (3.1), więc macierz \mathbf{A} jest diagonalizowalna i jest podobna do macierzy diagonalnej

$$\Lambda = \begin{bmatrix} e^{j\omega_0} & 0 \\ 0 & e^{-j\omega_0} \end{bmatrix}\tag{3.4}$$

Korzystając z twierdzenia, że każda niezerowa kolumna macierzy dołączonej $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})_{ad}$ jest wektorem własnym, należącym do wartości własnej λ_i macierzy \mathbf{A} [Kac98], za wektory własne v_1, v_2 macierzy \mathbf{A} przyjmujemy drugą kolumnę macierzy dołączonej, kolejno dla λ_1 i λ_2 . Macierz utworzona z tych wektorów (po podzieleniu drugiej kolumny przez a_{12}) ma postać

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{a_{22} - a_{11} + j\sqrt{4 - (a_{11} + a_{22})^2}}{2a_{12}} & \frac{a_{22} - a_{11} - j\sqrt{4 - (a_{11} + a_{22})^2}}{2a_{12}} \end{bmatrix}, \quad a_{12} \neq 0 \quad (3.5)$$

i jest macierzą podobieństwa macierzy \mathbf{A} do macierzy diagonalnej $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Zaznaczmy w tym miejscu, że w występujących w tym rozdziale wzorach, ograniczenia nakładane na zmienne są zapisywane przy pierwszym wzorze, od którego obowiązują, i są w mocy dla dalszych wzorów, ale przy nich nie są już zamieszczane.

Zauważmy dalej, że wartość bezwzględna elementów q_{21} i q_{22} macierzy \mathbf{Q} z warunkiem (2.19) wynosi

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{22} - a_{11} \pm j\sqrt{4 - (a_{11} + a_{22})^2}}{2a_{12}} \right| &= \sqrt{\frac{(a_{22} - a_{11})^2 + 4 - (a_{11} + a_{22})^2}{4a_{12}^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{1 - a_{11}a_{22}}{a_{12}^2}} = \sqrt{\frac{-a_{12}a_{21}}{a_{12}^2}} = \sqrt{\frac{-a_{21}}{a_{12}}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

zatem macierz \mathbf{Q} można zapisać w postaci

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \psi e^{j\phi} & \psi e^{-j\phi} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

gdzie (por. (2.20))

$$\psi = \sqrt{\frac{-a_{21}}{a_{12}}} \quad (3.8)$$

oraz

$$\phi = \text{Arg} \left(\frac{a_{22} - a_{11} + j\sqrt{4 - (a_{11} + a_{22})^2}}{2a_{12}} \right) \quad (3.9)$$

Ze wzoru (2.18) dla $n = 1$, po uwzględnieniu warunku początkowego $\mathbf{y}[0]$, otrzymuje się

$$\mathbf{y}[1] = \mathbf{A}\mathbf{y}[0] \quad (3.10)$$

Dla $n = 2$ oraz biorąc pod uwagę zależność (3.10), dostaje się

$$\mathbf{y}[2] = \mathbf{A}\mathbf{y}[1] = \mathbf{A}^2\mathbf{y}[0] \quad (3.11)$$

i ogólnie

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{A}^n\mathbf{y}[0] \quad (3.12)$$

gdzie \mathbf{A}^n jest n -krotnym iloczynem macierzy \mathbf{A} , zwanym inaczej macierzą podstawową lub macierzą przejść [Woj84], przy czym \mathbf{A}^0 jest tożsamy z macierzą jednostkową \mathbf{I} . Oczywiście dla $n = 1$ macierz przejść jest macierzą rotacyjną 2D-RDO. Ponieważ macierz rotacyjna \mathbf{A} jest diagonalizowalna, a macierz \mathbf{Q} jest macierzą podobieństwa macierzy \mathbf{A} do macierzy diagonalnej $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, to $\Lambda\mathbf{Q} = \mathbf{Q}\Lambda$ i dla każdej liczby naturalnej n jest

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^n &= (\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1})^n = \mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1}\dots\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\Lambda\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\Lambda^n\mathbf{Q}^{-1} = \\ &= \mathbf{Q}(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2))^n\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}\text{diag}(\lambda_1^n, \lambda_2^n)\mathbf{Q}^{-1} \end{aligned} \quad (3.13)$$

gdzie \mathbf{Q}^{-1} jest macierzą odwrotną do macierzy \mathbf{Q}

$$\mathbf{Q}^{-1} = \frac{1}{\psi e^{-j\phi} - \psi e^{j\phi}} \begin{bmatrix} \psi e^{-j\phi} & -1 \\ -\psi e^{j\phi} & 1 \end{bmatrix}, \quad \psi \neq 0, \quad \phi \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.14)$$

Podstawiając do równania (3.12) zależność (3.13), otrzymujemy

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{Q}\Lambda^n\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{y}[0] \quad (3.15)$$

Mając dane macierze: \mathbf{Q} , Λ^n i \mathbf{Q}^{-1} , można przystąpić do wyznaczenia sygnałów wyjściowych oscylatora. W ogólności, zadając dowolne warunki początkowe, dostajemy

$$\begin{aligned} \mathbf{y}[n] &= \frac{1}{\psi e^{-j\phi} - \psi e^{j\phi}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \psi e^{j\phi} & \psi e^{-j\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{jn\omega_0} & 0 \\ 0 & e^{-jn\omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi e^{-j\phi} & -1 \\ -\psi e^{j\phi} & 1 \end{bmatrix} \mathbf{y}[0] = \\ &= \frac{1}{\psi(e^{-j\phi} - e^{j\phi})} \begin{bmatrix} \psi(e^{j(n\omega_0 - \phi)} - e^{-j(n\omega_0 - \phi)}) & -(e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}) \\ \psi^2(e^{jn\omega_0} - e^{-jn\omega_0}) & -\psi(e^{j(n\omega_0 + \phi)} - e^{-j(n\omega_0 + \phi)}) \end{bmatrix} \mathbf{y}[0] = \\ &= \frac{1}{-2j\psi \sin \phi} \begin{bmatrix} 2j\psi \sin(n\omega_0 - \phi) & -2j \sin n\omega_0 \\ 2j\psi^2 \sin n\omega_0 & -2j\psi \sin(n\omega_0 + \phi) \end{bmatrix} \mathbf{y}[0] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sin \phi} \begin{bmatrix} -\sin(n\omega_0 - \phi) & \frac{\sin n\omega_0}{\psi} \\ -\psi \sin n\omega_0 & \sin(n\omega_0 + \phi) \end{bmatrix} \mathbf{y}[0] = \\
&= \begin{bmatrix} \cos n\omega_0 - \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \sin n\omega_0 & \frac{1}{\psi \sin \phi} \sin n\omega_0 \\ -\frac{\psi}{\sin \phi} \sin n\omega_0 & \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \sin n\omega_0 + \cos n\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[0] \\ y_2[0] \end{bmatrix} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}[n] &= \begin{bmatrix} y_1[0] \cos n\omega_0 - \left(\frac{y_1[0] \cos \phi}{\sin \phi} - \frac{y_2[0]}{\psi \sin \phi} \right) \sin n\omega_0 \\ y_2[0] \cos n\omega_0 + \left(\frac{y_2[0] \cos \phi}{\sin \phi} - \frac{\psi y_1[0]}{\sin \phi} \right) \sin n\omega_0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos n\omega_0 \\ \sin n\omega_0 \end{bmatrix} \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Ponieważ dla dowolnych, rzeczywistych a i b zachodzi

$$a \cos n\omega_0 + b \sin n\omega_0 = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(n\omega_0 + \alpha) \quad (3.18)$$

gdzie

$$\alpha = \begin{cases} \arctg \frac{a}{b}, & \text{gdy } b \geq 0 \\ \arctg \frac{a}{b} + \pi, & \text{gdy } b < 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

to elementy wektora sygnałów wyjściowych oscylatora są dyskretnymi sygnałami sinusoidalnymi (2.1), mogącymi różnić się amplitudami lub fazami początkowymi. Uproszczenie końcowych wzorów na elementy tego wektora jest możliwe dzięki dobraniu odpowiednich warunków początkowych pracy oscylatora: $y_1[0]$ i $y_2[0]$, [Kru07b].

3.2. Metody projektowania oscylatora sinusoidy dwuwymiarowej

Warunki początkowe, sprowadzające równania na sygnały wyjściowe oscylatora w (3.17) do prostszych postaci niż te wynikające z (3.18), zamieszczono w tab. 3.1. Macierze w drugim wierszu tabeli z $\alpha = 0$ rad, czyli $\mathbf{y}[0] = [1 \ \psi \cos \phi]^T$ oraz $\mathbf{y}[n] = [\cos n\omega_0 \ \psi \cos(n\omega_0 + \phi)]^T$, pochodzą z [Tur03]. Pozostałe wyprowadził autor tej rozprawy.

Tab. 3.1. Warunki początkowe i odpowiadające im sygnały wyjściowe oscylatora

$\mathbf{y}[0]$	$\mathbf{y}[n]$
$\begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \psi \cos(\alpha + \phi) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \cos(n\omega_0 + \alpha) \\ \psi \cos(n\omega_0 + \alpha + \phi) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \frac{1}{\psi} \cos(\alpha + \phi) \\ \cos \alpha \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\psi} \cos(n\omega_0 - \alpha - \phi) \\ \cos(n\omega_0 - \alpha) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} \sin \alpha \\ \psi \sin(\alpha + \phi) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sin(n\omega_0 + \alpha) \\ \psi \sin(n\omega_0 + \alpha + \phi) \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\psi} \sin(\alpha + \phi) \\ -\sin \alpha \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{\psi} \sin(n\omega_0 - \alpha - \phi) \\ \sin(n\omega_0 - \alpha) \end{bmatrix}$

W metodzie projektowania 2D-RDO na podstawie zadanych wartości elementów macierzy rotacyjnej, które spełniają warunek (2.19), oblicza się ψ i ϕ (por. wzory (3.8) i (3.9)). Tak wyznaczone wartości ψ i ϕ podstawia się do interesującej nas aktualnie postaci wzorów na sygnały wyjściowe oscylatora z tab. 3.1. Ten sposób postępowania we wstępie do rozdz. 3 nazwaliśmy udoskonaloną metodą pierwszą.

3.2.1. Macierz rotacyjna oscylatora

W (3.16) obliczyliśmy postać n -krotnego iloczynu macierzy \mathbf{A} , zwaną macierzą przejść, która jest poniższej postaci

$$\mathbf{A}^n = \frac{1}{\sin \phi} \begin{bmatrix} -\sin(n\omega_0 - \phi) & \frac{\sin n\omega_0}{\psi} \\ -\psi \sin n\omega_0 & \sin(n\omega_0 + \phi) \end{bmatrix}, \quad \phi \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.20)$$

Zatem, w szczególności, dla $n = 1$ w (3.20), macierz rotacyjna 2D-RDO jest postaci

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sin \phi} \begin{bmatrix} -\sin(\omega_0 - \phi) & \frac{\sin \omega_0}{\psi} \\ -\psi \sin \omega_0 & \sin(\omega_0 + \phi) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

W literaturze znane są różne warianty macierzy rotacyjnych 2D-RDO, których przykłady omówiliśmy w rozdz. 2. Co istotne, projektując dany oscylator przy różnych warunkach początkowych (tab. 3.1), mamy dodatkowo wpływ (jednakże

ograniczony, o czym piszemy dalej we właściwościach metod projektowania) na amplitudę i fazę początkową jednego z sygnałów wyjściowych oscylatora. Przykładowo, kładąc warunek początkowy $y[0] = \cos \alpha + j\psi \cos(\alpha + \phi)$ (pierwszy z tab. 3.1), zapis (2.18) z macierzą rotacyjną z (3.21) służy do generacji sinusoidy postaci $y[n] = \cos(n\omega_0 + \alpha) + j\psi \cos(n\omega_0 + \alpha + \phi)$.

Możliwa jest druga metoda projektowania rekursywnych oscylatorów sinusoidy 2D, opracowana przez autora niniejszej rozprawy [Kru09]. Polega ona na tym, że gdy chcemy generować dwa sygnały o wybranej postaci, jak w tab. 3.1, czyli z zadaną fazą początkową jednego z sygnałów, zadaną różnicą faz sygnałów wyjściowych ϕ oraz z zadaną (ψ albo ψ^{-1} , $\psi \neq 0$) amplitudą jednego z nich, to macierz rotacyjną takiego oscylatora odczytujemy z (3.21) a warunki początkowe – z tab. 3.1. W ten sposób otrzymujemy kompletny algebraiczny opis projektowanego oscylatora.

Obie powyżej omówione metody projektowania mają różne właściwości. W pierwszej z nich, gdzie na początku ustala się elementy macierzy rotacyjnej, ma się wpływ na strukturę oscylatora, a tym samym na parametry generowanych sygnałów, które są funkcjami z góry zadanych wcześniej elementów macierzy rotacyjnej. Na sygnały wyjściowe można wpływać w niewielkim stopniu, zadając odpowiednie warunki początkowe – sterujemy wówczas amplitudą jednego z sygnałów, wynoszącą ψ albo ψ^{-1} , $\psi \neq 0$, oraz jego fazą początkową α . W metodzie drugiej postępowanie jest odwrotne. Mamy dowolność w zadawaniu niektórych parametrów sygnałów wyjściowych: amplitudy oraz fazy początkowej jednego z nich, kosztem niewielkiego wpływu na strukturę oscylatora, ponieważ elementy macierzy rotacyjnej liczone są na podstawie narzuconych z góry parametrów generowanych sygnałów.

3.2.2. Metoda projektowania oparta na transformacji \mathbf{Z}

Opracowanie algorytmu, pozwalającego zadać niezależnie amplitudy i fazy początkowe sygnałów części rzeczywistej i urojonej zespolonego sygnału w (2.3), umożliwia metoda oparta na transformacji \mathbf{Z} opracowana przez autora tej pracy. Jest ona przedstawiona poniżej.

Wektor sygnałów wyjściowych oscylatora jest następujący

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} A_1 \cos(n\omega_0 + \alpha_1) \\ A_2 \cos(n\omega_0 + \alpha_2) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Poddając równość (2.18) przekształceniu \mathbf{Z} i wyznaczając z niego transformatę $\mathbf{Y}(z)$ wektora $\mathbf{y}[n]$, otrzymuje się [Kac99]

$$\mathbf{Y}(z) = (z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} z\mathbf{I}\mathbf{y}[0] \quad (3.23)$$

i dalej

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(z) &= \frac{1}{(z - a_{11})(z - a_{22}) - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} z - a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & z - a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[0] \\ y_2[0] \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{z^2 - (a_{11} + a_{22})z + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} y_1[0]z^2 + (a_{12}y_2[0] - a_{22}y_1[0])z \\ y_2[0]z^2 + (a_{21}y_1[0] - a_{11}y_2[0])z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{y_1[0] + z^{-1}(a_{12}y_2[0] - a_{22}y_1[0])}{1 - z^{-1}(a_{11} + a_{22}) + z^{-2}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \\ \frac{y_2[0] + z^{-1}(a_{21}y_1[0] - a_{11}y_2[0])}{1 - z^{-1}(a_{11} + a_{22}) + z^{-2}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Transformata \mathbf{Z} sygnału kosinusoidalnego $s[n] = A \cos(n\omega_0 + \alpha)$ wynosi

$$\mathbf{Z}\{s[n]\} = A \frac{\cos\alpha - z^{-1} \cos(\omega_0 - \alpha)}{1 - 2z^{-1} \cos\omega_0 + z^{-2}}; |z| > 1 \quad (3.25)$$

Przyrównując współczynniki przy zmiennej z w (3.24) kolejno dla $Y_1(z)$ oraz $Y_2(z)$ ze współczynnikami przy zmiennej z w (3.25) kolejno z $A = A_1$ i $\alpha = \alpha_1$ oraz $A = A_2$ i $\alpha = \alpha_2$, otrzymujemy poniższy układ sześciu równań z sześcioma niewiadomymi: $y_1[0]$, $y_2[0]$, a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22}

$$\begin{cases} y_1[0] = A_1 \cos\alpha_1 \\ y_2[0] = A_2 \cos\alpha_2 \\ a_{12}y_2[0] - a_{22}y_1[0] = -A_1 \cos(\omega_0 - \alpha_1) \\ a_{21}y_1[0] - a_{11}y_2[0] = -A_2 \cos(\omega_0 - \alpha_2) \\ a_{11} + a_{22} = 2 \cos\omega_0 \\ a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

Zauważmy, że dwa ostatnie równania w (3.26), po uwzględnieniu przedziału wartości przyjmowanych przez pulsację chwilową w (2.2), czynią zadość warunkom (2.19) niegasnących oscylacji, a dodatkowo, z piątego równania w (3.26), łatwo jest udowodnić związek (3.3) pulsacji ω_0 z elementami macierzy rotacyjnej oscylatora. Nadmienmy także, że informację o amplitudach i fazach początkowych generowanych sygnałów zawierają elementy wektora warunków początkowych

$$\mathbf{y}[0] = \begin{bmatrix} A_1 \cos \alpha_1 \\ A_2 \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

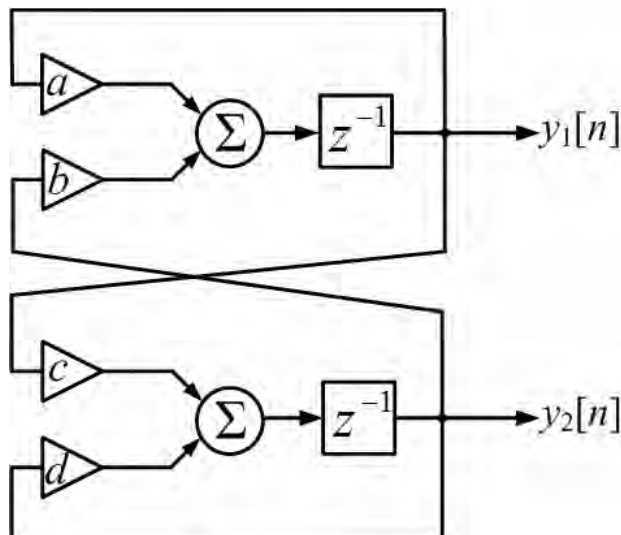
Po podstawieniu dwóch pierwszych równań układu (3.26) do równania trzeciego i czwartego tamże, otrzymujemy układ czterech równań z czterema niewiadomymi. Jego rozwiązaniem są poszukiwane elementy macierzy rotacyjnej oscylatora

$$\begin{cases} a_{11} = -\frac{\sin(\omega_0 - \alpha_{21})}{\sin \alpha_{21}} \\ a_{12} = \frac{A_1 \sin \omega_0}{A_2 \sin \alpha_{21}} \\ a_{21} = -\frac{A_2 \sin \omega_0}{A_1 \sin \alpha_{21}} \\ a_{22} = \frac{\sin(\omega_0 + \alpha_{21})}{\sin \alpha_{21}} \end{cases} \quad \text{i } \alpha_{21} \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.28)$$

gdzie $\alpha_{21} = \alpha_2 - \alpha_1$. Współczynniki w (3.28) zapisane w postaci tablicy tworzą ogólną macierz rotacyjną 2D-RDO

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sin \alpha_{21}} \begin{bmatrix} -\sin(\omega_0 - \alpha_{21}) & \frac{A_1 \sin \omega_0}{A_2} \\ -\frac{A_2 \sin \omega_0}{A_1} & \sin(\omega_0 + \alpha_{21}) \end{bmatrix}, \quad \alpha_{21} \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.29)$$

Strukturę oscylatora z macierzą rotacyjną (3.29) przedstawiamy na rys. 3.1. Wymaga ona czterech mnożeń na próbkę.



Rys. 3.1. Struktura 2D-RDO o dowolnie zadanych amplitudach i fazach początkowych sygnałów wyjściowych ze współczynnikami:

$$a = -\sin(\omega_0 - \alpha_{21})/\sin \alpha_{21},$$

$$b = A_1 \sin \omega_0 / (A_2 \sin \alpha_{21}), \quad c = -A_2 \sin \omega_0 / (A_1 \sin \alpha_{21}), \quad d = \sin(\omega_0 + \alpha_{21})/\sin \alpha_{21}$$

Zauważmy identyczność elementów macierzy rotacyjnej (3.20) i elementów macierzy rotacyjnej (3.29), gdy $\phi = \alpha_{21}$ i $\psi = A_2 / A_1$.

3.2.3. Procedury metod projektowania

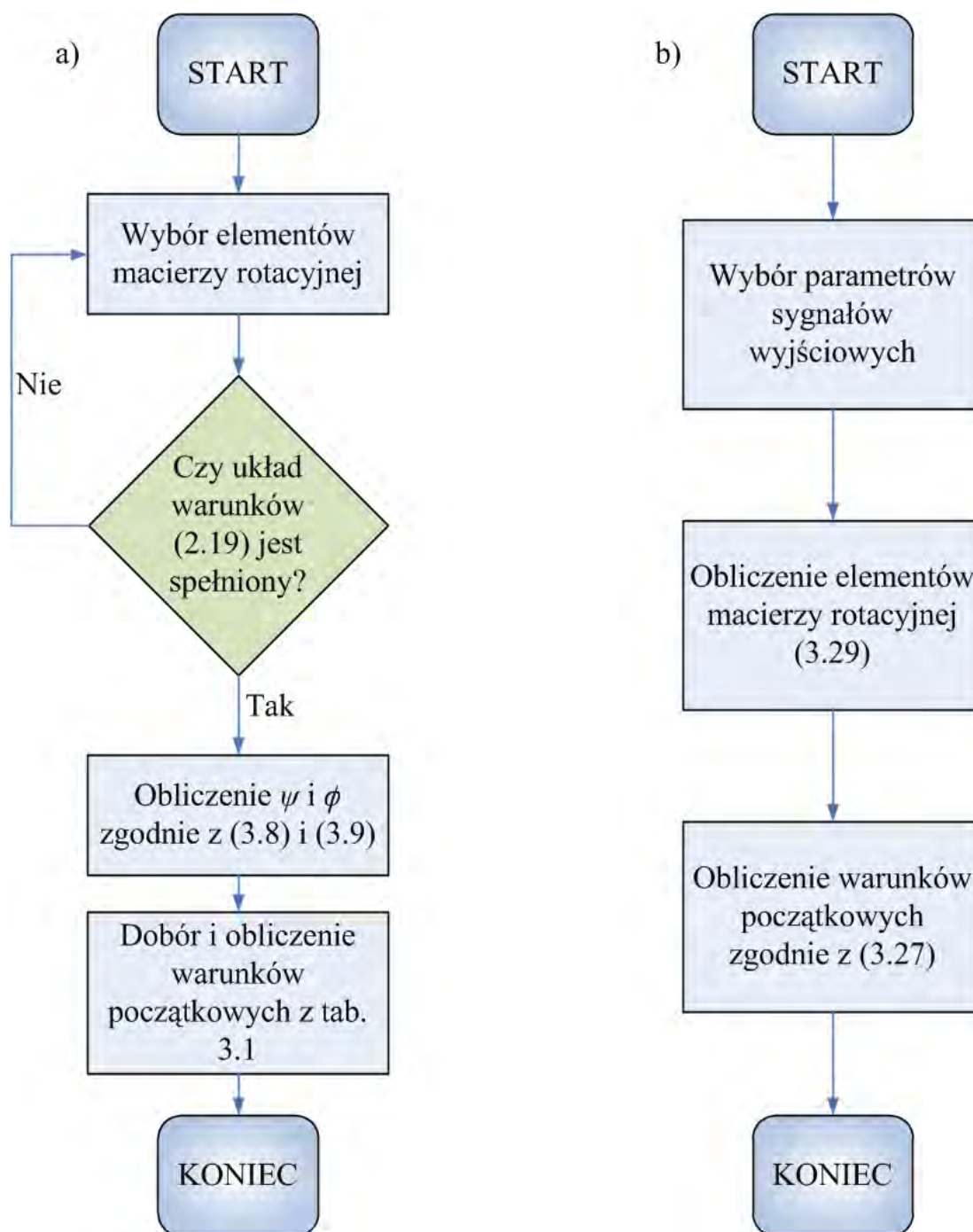
Procedury obu omawianych w tym rozdziale metod projektowania oscylatorów przedstawia rys. 3.2. W pierwszej metodzie projektowania, z rys. 3.2a, ustala się elementy macierzy rotacyjnej, dochodząc następnie do wzorów na sygnały wyjściowe oscylatora. Z kolei w drugiej metodzie projektowania, z rys. 3.2b, postępowanie jest odwrotne: chcąc zaprojektować oscylator z żądanymi parametrami sygnałów wyjściowych, oblicza się elementy macierzy rotacyjnej. Przykładowo, rozważając macierz rotacyjną DW w (2.15) i postępując zgodnie z algorytmem z rys. 3.2a przy warunkach początkowych: $y_1[0] = 1$ i $y_2[0] = 0$, sygnały wyjściowe oscylatora są postaci

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} \cos n\omega_0 \\ \operatorname{ctg} \frac{\omega_0}{2} \sin n\omega_0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Aby wygenerować te sygnały, należy w (3.22) przyjąć

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_2 &= \operatorname{ctg} \frac{\omega_0}{2} \\ \alpha_1 &= 0 \text{ rad} \\ \alpha_2 &= -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Następnie, podstawiając powyższe wartości parametrów do (3.21) i postępując zgodnie z algorytmem z rys. 3.2b dochodzimy do (2.15), czyli do algorytmu oscylatora już z zadanymi parametrami. Zauważmy tutaj, że teraz, na podstawie już znanych macierzy rotacyjnych, mamy otwartą drogę do opracowania nowych macierzy rotacyjnych. Wynika to stąd, że iloczyn dowolnych macierzy rotacyjnych, których elementy spełniają warunki (2.19), jest także macierzą rotacyjną, przy czym warunek drugi w (2.19) musi być spełniony. Warunku pierwszego w (2.19) nie trzeba sprawdzać, ponieważ zgodnie z twierdzeniem Cauchy'ego [Bia76], jeśli \mathbf{M} i \mathbf{N} są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, to $(\det \mathbf{M})(\det \mathbf{N}) = \det(\mathbf{MN})$.



Rys. 3.2. Procedury projektowania oscylatora sinusoidy 2D dla a) metody pierwszej, b) metody drugiej

W ogólności macierze, które się ze sobą mnoży, aby otrzymać macierz rotacyjną, nie muszą być rotacyjne. Przykładem są macierze

$$\begin{bmatrix} 1 & -\cos\omega_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \cos\omega_0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

dla których, pomimo że warunki (2.19) nie są spełnione, ich iloczyn tworzy macierz rotacyjną QSU opisanego wzorem (2.16), bowiem

$$\begin{bmatrix} 1 & -\cos\omega_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \cos\omega_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_0 & 1 - \cos^2\omega_0 \\ -1 & \cos\omega_0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Otrzymując interesującą nas macierz rotacyjną, dalej postępujemy zgodnie z procedurą z rys. 3.2a.

3.3. Oscylator sinusoidy trójwymiarowej

W poprzednich podpunktach rozdz. 3 rozważaliśmy rekursywny oscylator sinusoidy 2D. W dalszej części tego rozdziału, na podstawie wyprowadzonych wcześniej zależności, zaprojektujemy rekursywny cyfrowy oscylator sinusoidy 3D (ang. *Three-Dimensional Recursive Digital Oscillator* – 3D-RDO), którego sygnały wyjściowe są przebiegami sinusoidalnymi o tej samej pulsacji ω_0 i które mogą różnić się amplitudami lub fazami początkowymi

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \\ y_3[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cos(n\omega_0 + \alpha_1) \\ A_2 \cos(n\omega_0 + \alpha_2) \\ A_3 \cos(n\omega_0 + \alpha_3) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

3.3.1. Projektowanie oscylatora

Wzoruując się na (2.18), zakładamy, że algorytm rekursywnej generacji sygnałów (3.34) opisuje wzór

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{B}\mathbf{y}[n-1], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.35)$$

gdzie $\mathbf{B} = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ jest macierzą 3D-RDO. Wektor warunków początkowych jest definiowany jak wcześniej w tekście poniżej wzoru (2.18): $\mathbf{y}[n]|_{n=0} = \mathbf{y}[0]$. Następnie poddajemy równanie różnicowe (3.35) przekształceniu \mathbf{Z} , wyznaczając z niego transformatę $\mathbf{Y}(z)$ wektora $\mathbf{y}[n]$, podobnie, jak to zrobiliśmy wcześniej dla równania (2.18) w (3.23) i (3.24). Elementy wektora $\mathbf{Y}(z) = [Y_1(z) \ Y_2(z) \ Y_3(z)]^T$ transformaty \mathbf{Z} sygnałów wyjściowych wynoszą [Kru08]

$$Y_l(z) = \frac{y_l[0] - \left(y_l[0] \text{tr} \mathbf{B}_{ll} - \sum_{k=2}^3 y_l[0] b_{lk} \right) z^{-1} + \sum_{k=1}^3 y_l[0] B_{lk} z^{-2}}{1 - \text{tr} \mathbf{B} z^{-1} - (b_{13} b_{31} + b_{12} b_{21} + b_{23} b_{32} - b_{11} b_{33} - b_{11} b_{22} - b_{22} b_{33}) z^{-2} - \det \mathbf{B} z^{-3}} \quad (3.36)$$

gdzie $l = 1, 2, 3$, $\det \mathbf{B}$ oznacza wyznacznik macierzy \mathbf{B} , $\text{tr} \mathbf{B}$ jest śladem macierzy \mathbf{B} , $\text{tr} \mathbf{B}_{ij}$ jest śladem macierzy \mathbf{B} powstałej przez wykreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny z macierzy \mathbf{B} , a B_{ij} jest dopełnieniem algebraicznym elementu b_{ij} .

Porównując (3.25) z (3.36), dochodzimy do wniosku, że w macierzy \mathbf{B} w każdym jej wierszu wystąpi co najmniej jeden element zerowy. Zastosujemy następujący chwyt: do generacji dwóch dowolnych przebiegów sinusoidalnych użyjemy wprowadzoną w poprzednim podrozdziale macierz rotacyjną 2D-RDO postaci jak w (3.29), a skoro rekursywne wzory na sygnały wyjściowe $y_1[n]$ i $y_2[n]$ nie są funkcjami trzeciego sygnału wyjściowego, wyzerujemy elementy: b_{13} i b_{23} macierzy \mathbf{B} . Wówczas macierz \mathbf{B} podzielona na podmacierze przyjmuje postać

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

gdzie macierz \mathbf{O} jest macierzą zerową o wymiarze 2×1 , a macierze: $\mathbf{B}_1 = [b_{31} \quad b_{32}]$ i $\mathbf{B}_2 = [b_{33}]$, należy znaleźć. W tym celu należy rozwiązać układ równań nieliniowych, który powstaje w wyniku przyrównania odpowiednich współczynników przy zmiennych z we wzorach (3.25) i (3.36). Jego rozwiązaniem są elementy macierzy rotacyjnej \mathbf{B} w postaci tablicy

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sin \alpha_{21}} \begin{bmatrix} -\sin(\omega_0 - \alpha_{21}) & \frac{A_1}{A_2} \sin \omega_0 & 0 \\ -\frac{A_2}{A_1} \sin \omega_0 & \sin(\omega_0 + \alpha_{21}) & 0 \\ -\frac{A_3}{A_1} \sin(\omega_0 - \alpha_{23}) & \frac{A_3}{A_2} \sin(\omega_0 + \alpha_{31}) & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{21} \neq k\pi, \quad (3.38)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

z $\alpha_{23} = \alpha_2 - \alpha_3$ i $\alpha_{31} = \alpha_3 - \alpha_1$, przy czym wektor warunków początkowych ma postać

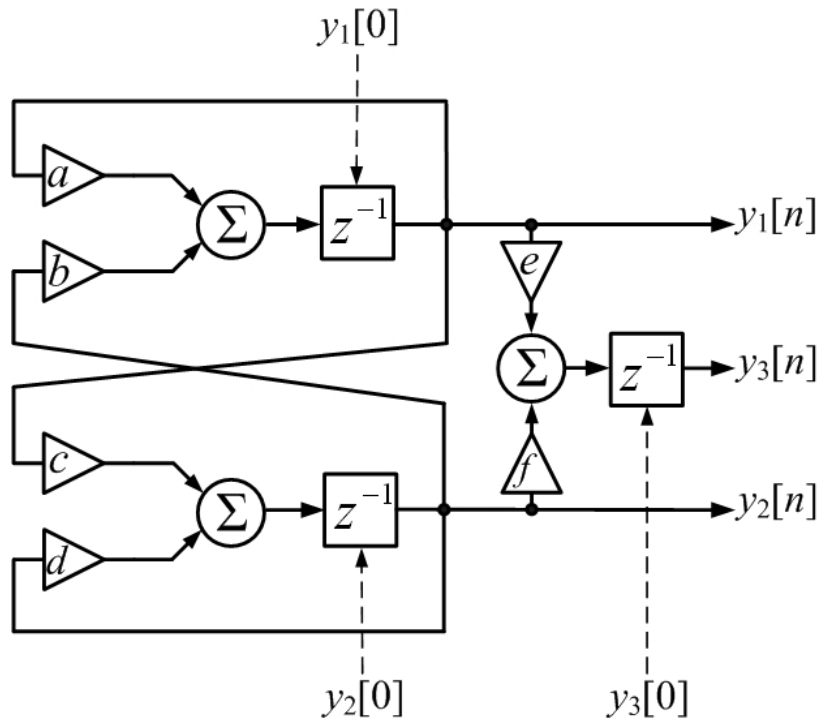
$$\mathbf{y}[0] = \begin{bmatrix} A_1 \cos \alpha_1 \\ A_2 \cos \alpha_2 \\ A_3 \cos \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Jedną z cech macierzy \mathbf{B} jest jej zerowa trzecia kolumna, a co za tym idzie – zerowy wyznacznik macierzy. Z racji tego ani przedstawionej tu macierzy \mathbf{B} ani rozważanej w p. 3.4 macierzy \mathbf{C} (o zerowym wyznaczniku dla $m > 2$) nie nazywamy

macierzą rotacyjną oscylatora, a jedynie macierzą oscylatora. Dodajmy, że również słuszny jest zapis z pominięciem zerowej kolumny w (3.38). Wtedy dostajemy

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \\ y_3[n] \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \alpha_{21}} \begin{bmatrix} -\sin(\omega_0 - \alpha_{21}) & \frac{A_1}{A_2} \sin \omega_0 \\ -\frac{A_2}{A_1} \sin \omega_0 & \sin(\omega_0 + \alpha_{21}) \\ -\frac{A_3}{A_1} \sin(\omega_0 - \alpha_{23}) & \frac{A_3}{A_2} \sin(\omega_0 + \alpha_{31}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ y_2[n-1] \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Jednak dalej, dla ujednolicenia, w niniejszej rozprawie posłużymy się konwencją zapisu jak w (3.38), przyjmując macierz każdego oscylatora za kwadratową. Podczas gdy w (3.38) wartości faz początkowych muszą spełniać warunek $\alpha_1 \neq \alpha_2 + k\pi$ i $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ wartość fazy początkowej α_3 może być dowolna. Gdy amplitudy sygnałów wyjściowych są takie same i α_3 jest równe fazie początkowej: α_1 albo α_2 , generowany sygnał $y_3[n]$ jest repliką przebiegu wyjściowego, odpowiednio, pierwszego albo drugiego sygnału wyjściowego. Strukturę 3D-RDO pokazano na rys. 3.3. Do jego opracowania skorzystano ze struktury 2D-RDO z rys. 3.1.



Rys. 3.3. Struktura 3D-RDO ze współczynnikami: $a = -\sin(\omega_0 - \alpha_{21}) / \sin \alpha_{21}$,

$$b = A_1 / A_2 \sin \omega_0 / \sin \alpha_{21}, \quad c = -A_2 / A_1 \sin \omega_0 / \sin \alpha_{21}, \quad d = \sin(\omega_0 + \alpha_{21}) / \sin \alpha_{21},$$

$$e = -A_3 / A_1 \sin(\omega_0 - \alpha_{23}) / \sin \alpha_{21} \quad \text{i} \quad f = A_3 / A_2 \sin(\omega_0 + \alpha_{31}) / \sin \alpha_{21}$$

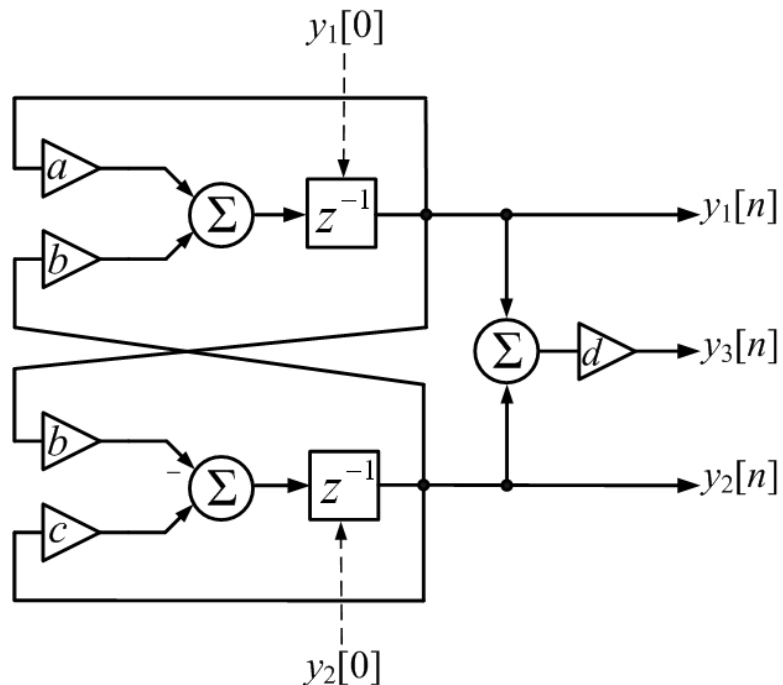
Przyjmując w (3.34) $\alpha_1 = -\alpha$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \alpha$, otrzymujemy oscylator dwóch par sygnałów sinusoidalnych o jednostkowych amplitudach i z różnicą faz wynoszącą α . W generacji tego sygnału można posłużyć się strukturą z rys. 3.3. My jednak zredukujemy liczbę mnożeń na próbkę. Zauważmy, że generując dwa sygnały sinusoidalne o jednakowych amplitudach równych A i o fazach początkowych w (3.34): $\alpha_1 = -\alpha$ oraz $\alpha_2 = \alpha$, uzyskujemy trzeci sygnał o amplitudzie jednostkowej i fazie początkowej $\alpha_3 = 0$, korzystając z tożsamości

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\cos\alpha}(y_1[n] + y_2[n]) &= \frac{A}{2\cos\alpha}(\cos(n\omega_0 - \alpha) + \cos(n\omega_0 + \alpha)) = \\ &= A\cos n\omega_0 = y_3[n], \quad \alpha \neq k\pi + \pi/2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (3.41)$$

Wówczas postać macierzy rotacyjnej do generacji ciągów $y_1[n]$ i $y_2[n]$ jest następująca

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sin 2\alpha} \begin{bmatrix} -\sin(\omega_0 - 2\alpha) & \sin \omega_0 \\ -\sin \omega_0 & \sin(\omega_0 + 2\alpha) \end{bmatrix}, \quad \alpha \neq k\pi/2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.42)$$

Do wyprowadzenia wzoru (3.42) skorzystaliśmy z ogólnej postaci macierzy rotacyjnej (3.29) z $A_1 = A_2 = A$ i $\alpha_{21} = 2\alpha$. Strukturę tego oscylatora dla $\alpha \neq k\pi/2$ rad, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ przedstawia rys. 3.4.



Rys. 3.4. Struktura oscylatora dwóch par sygnałów sinusoidalnych o jednakowych amplitudach i z różnicą faz α , ze współczynnikami:

$$a = -\sin(\omega_0 - 2\alpha)/\sin 2\alpha, \quad b = \sin \omega_0/\sin 2\alpha, \quad c = \sin(\omega_0 + 2\alpha)/\sin 2\alpha \quad \text{ i } \quad d = 1/(2\cos\alpha)$$

W rezultacie zredukowaliśmy tu liczbę mnożeń na próbkę z sześciu do pięciu i liczbę elementów opóźniających z trzech do dwóch w porównaniu z rozwiązaniem z rys. 3.3.

3.3.2. Oscylator trójfazowy

Jednym z przykładów oscylatora omówionego w p. 3.3.1 jest oscylator trójfazowy, w którym różnica faz dwóch par sinusów o jednakowych amplitudach wynosi $2\pi/3$ rad. Macierz tego oscylatora uzyskujemy, podstawiając w (3.39) $A_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, i $\alpha_i = (i-1)2\pi/3 + \alpha$

$$\mathbf{B} = \frac{2}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -\sin\left(\omega_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\omega_0 & 0 \\ -\sin\omega_0 & \sin\left(\omega_0 + \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ -\sin\left(\omega_0 + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\omega_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Wykonywanych jest tu sześć mnożeń na próbkę.

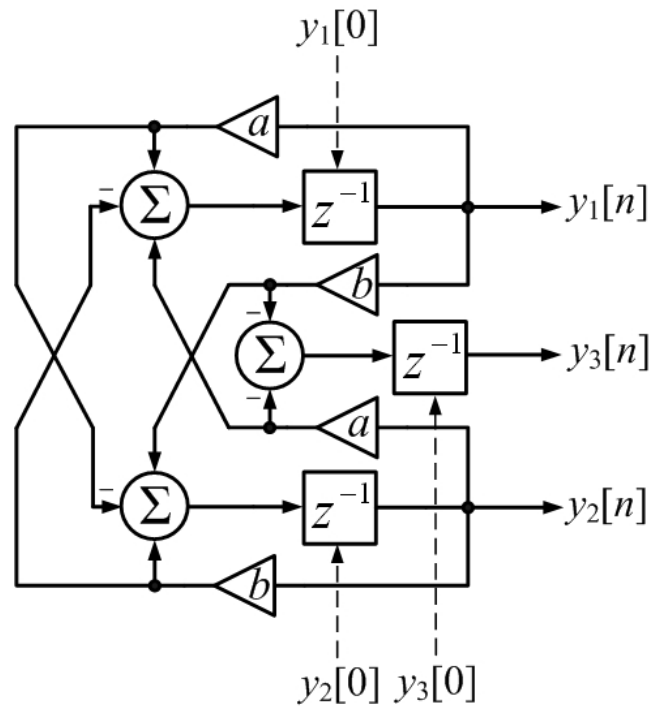
Przedstawimy następnie elementy macierzy (3.43) w funkcji jednego współczynnika kontrolnego $\chi = \cos\omega_0$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \chi + \sqrt{\frac{1-\chi^2}{3}} & 2\sqrt{\frac{1-\chi^2}{3}} & 0 \\ -2\sqrt{\frac{1-\chi^2}{3}} & \chi - \sqrt{\frac{1-\chi^2}{3}} & 0 \\ -\chi + \sqrt{\frac{1-\chi^2}{3}} & -\chi - \sqrt{\frac{1-\chi^2}{3}} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Powyższą reprezentację można wykorzystać np. do uzyskania dogodnej realizacji oscylatora do sterowania częstotliwością generowanych sygnałów. Z kolei kładąc $2\sin(2\pi/3 - \omega_0)/\sqrt{3} = \delta_1$ i $2\sin(2\pi/3 + \omega_0)/\sqrt{3} = \delta_2$ w (3.43), otrzymujemy

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \delta_1 & \delta_1 - \delta_2 & 0 \\ \delta_2 - \delta_1 & \delta_2 & 0 \\ -\delta_2 & -\delta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

co, na podstawie (3.43) lub (3.44), spowoduje redukcję liczby mnożeń na próbkę z sześciu do czterech. Strukturę oscylatora z macierzą (3.45) prezentujemy na rys. 3.5.



Rys. 3.5. Struktura oscylatora trójfazowego ze współczynnikami:

$$a = \delta_1 = 2 \sin(2\pi/3 - \omega_0) / \sqrt{3} \text{ i } b = \delta_2 = 2 \sin(2\pi/3 + \omega_0) / \sqrt{3}$$

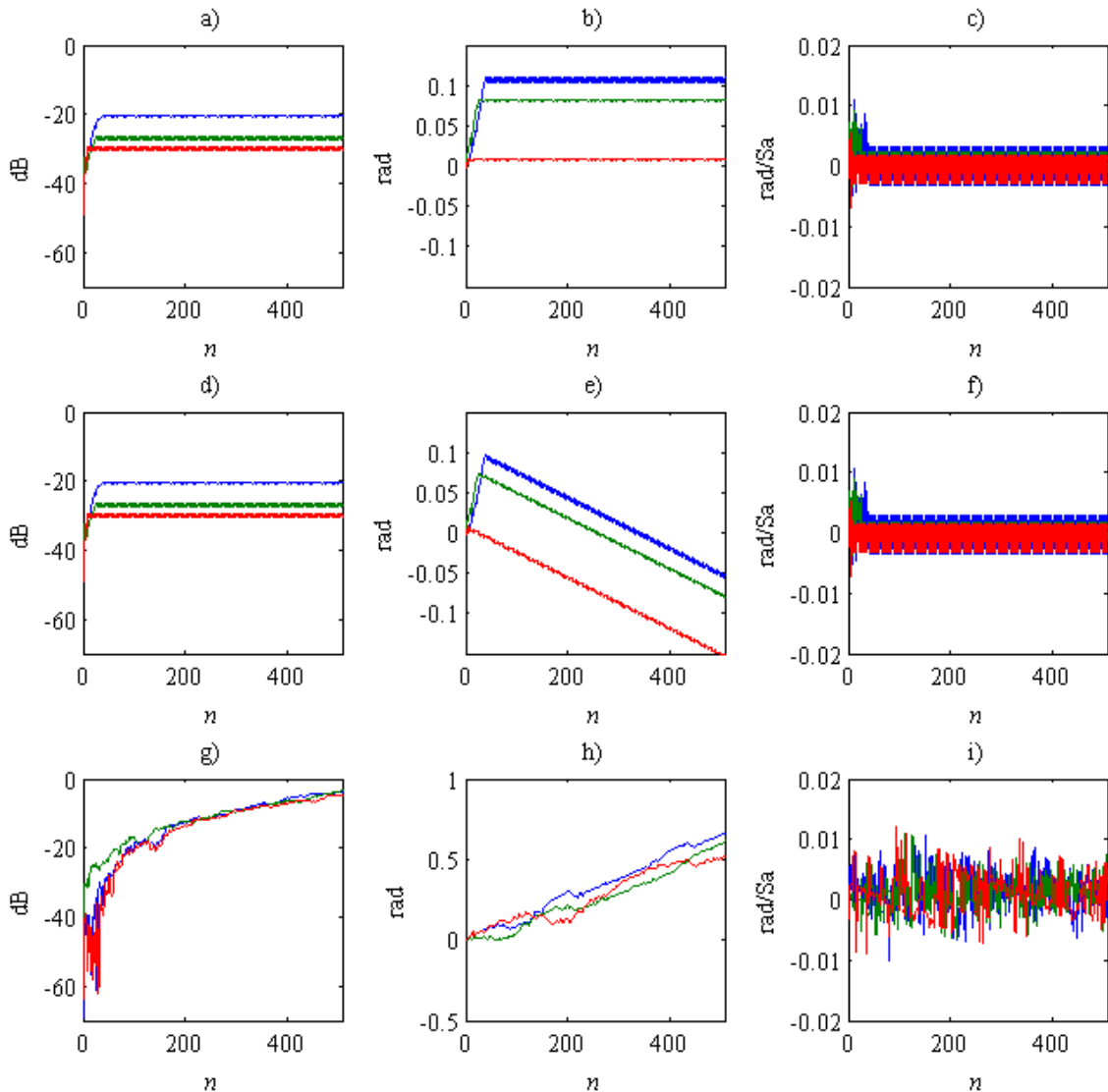
3.3.3. Jakość generowanych sygnałów trójfazowych

Przeanalizujemy teraz jakość sygnałów generowanych za pomocą oscylatorów trójfazowych: z rys. 3.3 ze współczynnikami z (3.43), rys. 3.4 z $\alpha = 2\pi/3$ rad i rys. 3.5. Zadając warunki początkowe postaci: $y_1[0] = y_2[0] = -0,5$ oraz $y_3[0] = 1$, otrzymujemy sygnały wyjściowe 3D-RDO postaci: $y_1[n] = \cos(\omega_0 n - 2\pi/3)$, $y_2[n] = \cos(\omega_0 n + 2\pi/3)$ i $y_3[n] = \cos \omega_0 n$. Ponieważ ciąg $y_3[n]$ obliczamy jako kombinację liniową pozostałych ciągów, to badanie czystości generowanych sygnałów wystarczy przeprowadzić dla pary ciągów $y_1[n]$ i $y_2[n]$ [Kru09]. Takie badanie nie różni się od tego, które wykonywaliśmy w p. 2.8. Co interesujące, dla oscylatora trójfazowego można użyć przekształcenia Concordii (ang. *Concordia Transformation* – CT) [Tra09] sinusoidy 3D w 2D

$$\begin{bmatrix} z_1[n] \\ z_2[n] \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \\ y_3[n] \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Uzyskujemy wówczas równoważną kompleksoidę $z[n] = z_1[n] + jz_2[n] = \exp(j\omega_0 n)$. Dodajmy, że CT używa się powszechnie w wykrywaniu uszkodzeń urządzeń technicznych [Aco00], [Car91], [Cru01], [Sil05], [Zar06].

Na rys. 3.6 prezentujemy zależności chwilowego błędu amplitudy, fazy i pulsacji przebiegów wyjściowych 3D-RDO z parametrem kwantyzacji $P = 8$ bitów, po zastosowaniu CT.

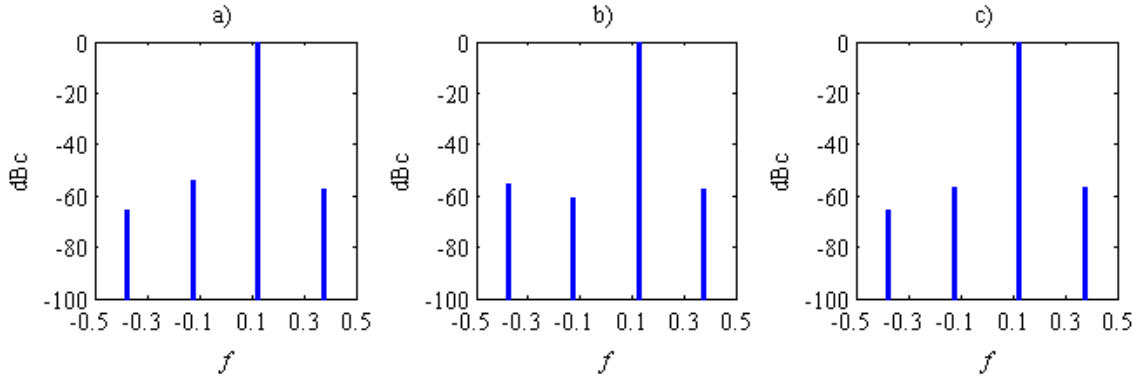


Rys. 3.6. Chwilowe błędy: a) amplitudy, b) fazy oraz c) pulsacji przy $\omega_0 = 2\pi/8$ rad/Sa, chwilowe błędy: d) amplitudy, e) fazy oraz f) pulsacji przy $\omega_0 = 11/14$ rad/Sa, chwilowe błędy: g) amplitudy, h) fazy oraz i) pulsacji przy $\omega_0 = 2\pi/160$ rad/Sa sygnału generowanego przez oscylator trójfazowy z rys. 3.3 ze współczynnikami z (3.43) (kolor niebieski), rys. 3.4 z $\alpha = 2\pi/3$ rad (kolor zielony) i rys. 3.5 (kolor czerwony)

Wizualizacja tych przebiegów umożliwia analizę porównawczą zaprojektowanych realizacji 3D-RDO. W przykładzie z rys. 3.6a-c ($\omega_0 = 2\pi/8$ rad/Sa) występuje cykl graniczny, a najlepszą realizacją okazuje się ta z rys. 3.5, dla której wszystkie analizowane błędy są najmniejsze. Przypomnijmy, że cechuje ją wykonywanie czterech mnożeń na próbkę, a więc najmniej z rozpatrywanych 3D-RDO. Odbywa się to jednak kosztem zwiększenia liczby sumatorów dwuwęściowych z 3 do 5. Na rys. 3.6d-f pokazujemy te same błędy dla $\pi \cong 22/7$ ($\omega'_0 = 11/14$ rad/Sa), czyli dla przebiegów na wyjściu RDO o zadanej pulsacji niewspółmiernej z π . Zmieniając pulsację $\omega_0 = 2\pi/8$ rad/Sa sinusoidy trójfazowej na pulsację $\omega'_0 = 11/14$ rad/Sa niewspółmierną z π , „sąsiadującą” z pulsacją ω_0 , do chwili wystąpienia cyklu granicznego z rys. 3.6a-c, obserwujemy ten sam przebieg błędu fazy jak na rys. 3.6b. Po tej chwili moduł chwilowego błędu fazy najpierw maleje, a następnie rośnie z upływem czasu. Chwilowe błędy amplitudy i pulsacji mają ten sam przebieg jak dla pulsacji współmiernej z π . W innym badaniu generujemy przebiegi o częstotliwości napięcia sieciowego równego $F_0 = 50$ Hz, z szybkością próbkowania $F_s = 8$ kSa/s i z parametrem kwantyzacji $P = 8$ bitów. Chwilowe błędy przebiegów na wyjściu oscylatora trójfazowego ze wspomnianymi nastawami po zastosowaniu CT pokazujemy na rys. 3.6g-i. Cechują je podobne przebiegi chwilowych błędów dla badanych tu 3D-RDO, jednakże w rozważanym przykładzie (rys. 3.6g) chwilowy błąd amplitudy sygnału na wyjściu 3D-RDO z rys. 3.5 jest mniejszy przez większą część pracy tego oscylatora dla $N = 512$ początkowych próbek generowanego sygnału w porównaniu z chwilowymi błędami amplitudy sygnałów na wyjściu realizacji oscylatora trójfazowego z rys. 3.3 ze współczynnikami z (3.43) i rys. 3.4 z $\alpha = 2\pi/3$ rad.

Moduł widma DFT w dBc unormowanego względem wysokości najwyższego jego prążka dla sygnałów generowanych przez zaprojektowane tu trzy realizacje 3D-RDO po wystąpieniu cyklu granicznego (czyli w sytuacji z rys. 3.6a-c) prezentujemy na rys. 3.7.

Warto zauważyć, że dla każdej realizacji obserwuje się prążki obce o tych samych częstotliwościach, a jedynie różniące się poziomem. Wartości SFDR w dBc dla sygnału kompleksoidy $z[n]$ obliczonego za pomocą (3.46) wynoszą: 54,98 dBc, 56,04 dBc oraz 57,69 dBc, kolejno dla realizacji 3D-RDO z sześcioma (rys. 3.3), pięcioma (rys. 3.4) i czterema (rys. 3.5) mnożeniami na próbkę.



Rys. 3.7. Moduł widma DFT w dBc unormowanego względem wysokości najwyższego jego prążka dla sygnału na wyjściu 3D-RDO: a) z rys. 3.5 ze współczynnikami z (3.43), b) z rys. 3.4 z $\alpha = 2\pi/3$ rad i c) z rys. 3.5

3.4. Oscylator sinusoidy wielowymiarowej

Zadaniem rekursywnego cyfrowego oscylatora sinusoidy m -wymiarowej (ang. *Multi-Dimensional Recursive Digital Oscillator – mD-RDO*) jest generacja m sygnałów ($m = 2, 3, 4, \dots$) postaci $y_i[n] = A_i \cos(n\omega_0 + \alpha_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$, gdzie i jest numerem sygnału wyjściowego oscylatora. Wektor sygnałów wyjściowych zapisujemy w postaci macierzowej

$$\mathbf{y}[n] = \begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \\ \vdots \\ y_m[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \cos(n\omega_0 + \alpha_1) \\ A_2 \cos(n\omega_0 + \alpha_2) \\ \vdots \\ A_m \cos(n\omega_0 + \alpha_m) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

Macierz $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times m}$ tego oscylatora jest macierzą kwadratową m -tego stopnia. Projekt m D-RDO, opracowany przez autora tej rozprawy, prezentujemy poniżej.

3.4.1. Projektowanie oscylatora

Przypomnijmy, że na podstawie (3.35) i (3.38) z ciągów $y_1[n]$ i $y_2[n]$ uzyskiwaliśmy $y_3[n]$. W podobny sposób znajdziemy teraz elementy tablicy \mathbf{C} , po przemnożeniu których przez $y_1[n]$ i $y_2[n]$ uzyskamy rekursywne wzory na $y_4[n]$, ..., $y_m[n]$. Wprowadzając oznaczenie $\alpha_{kl} = \alpha_k - \alpha_l$, gdzie $k = 1, 2$ oraz $l = 1, 2, 3, \dots, m$, zauważmy, że dla każdego $i = 3, 4, 5, \dots, m$, zachodzi

$$\begin{aligned}
y_i[n+1] &= -y_1[n] \frac{A_i \sin(\omega_0 - \alpha_{2i})}{A_1 \sin \alpha_{21}} + y_2[n] \frac{A_i \sin(\omega_0 + \alpha_{i1})}{A_2 \sin \alpha_{21}} = \\
&= A_i \frac{-\sin(\omega_0 - \alpha_{2i}) \cos(n\omega_0 + \alpha_1) + \sin(\omega_0 + \alpha_{i1}) \cos(n\omega_0 + \alpha_2)}{\sin \alpha_{21}} = \\
&= A_i \cos((n+1)\omega_0 + \alpha_i)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Wobec powyższego, równanie macierzowe rekursywnego oscylatora, generującego $m = 2, 3, 4, \dots$, sygnałów sinusoidalnych jest postaci

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{y}[n-1], \quad n = 1, 2, 3, \dots \tag{3.49}$$

gdzie $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times m}$ jest macierzą mD -RDO

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sin \alpha_{21}} \begin{bmatrix} -\sin(\omega_0 - \alpha_{21}) & \frac{A_1}{A_2} \sin \omega_0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{A_2}{A_1} \sin \omega_0 & \sin(\omega_0 + \alpha_{21}) & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{A_3}{A_1} \sin(\omega_0 - \alpha_{23}) & \frac{A_3}{A_2} \sin(\omega_0 + \alpha_{31}) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{A_m}{A_1} \sin(\omega_0 - \alpha_{2m}) & \frac{A_m}{A_2} \sin(\omega_0 + \alpha_{m1}) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_{21} \neq k\pi, \tag{3.50}$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

a wektor warunków początkowych wynosi

$$\mathbf{y}[0] = \begin{bmatrix} A_1 \cos \alpha_1 \\ A_2 \cos \alpha_2 \\ \vdots \\ A_m \cos \alpha_m \end{bmatrix} \tag{3.51}$$

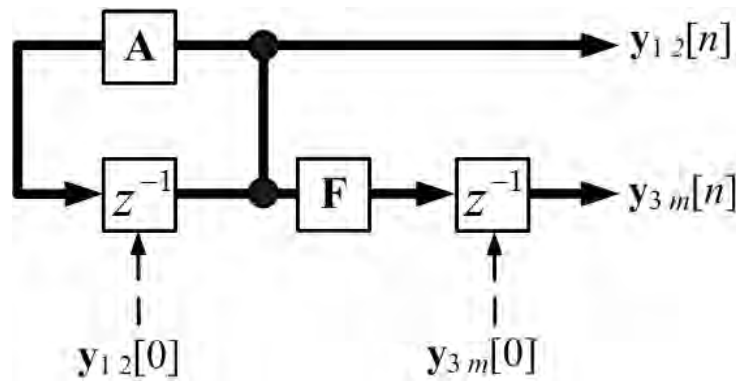
Zauważmy dalej, że $[c_{ij}]_{2 \times 2} = \mathbf{A}$ oraz $[c_{ij}]_{3 \times 3} = \mathbf{B}$. W implementacji mD -RDO wystarczy podstawić warunki początkowe: $\cos \alpha_1$ i $\cos \alpha_2$, odpowiednio, jako $y_1[0]$ i $y_2[0]$, ponieważ, jak wynika z (3.48), pozostałych $m - 2$ sygnałów wyjściowych jest kombinacją liniową sygnałów $y_1[n]$ i $y_2[n]$. Rozdzielimy dalej macierz \mathbf{C} na podmacierze

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{F} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

gdzie $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ jest macierzą rotacyjną $2D$ -RDO, a $\mathbf{F} = [f_{ij}]_{(m-2) \times 2}$ jest podmacierzą do generacji pozostałych $m - 2$ sygnałów wyjściowych oscylatora. Z (3.49) i postaci

macierzy \mathbf{C} w (3.52) wynika ogólny schemat blokowy m D-RDO pokazany na rys. 3.8.

Zaznaczmy, że sygnały wyjściowe oscylatora: $y_3[n], y_4[n], \dots, y_m[n]$, można otrzymać jako kombinację liniową dowolnych dwóch wyjść oscylatora – należy wówczas skorzystać ze związków podanych w (3.48), wstawiając za $y_1[n]$ i $y_2[n]$ pożądane sygnały i zmieniać odpowiednie współczynniki przy tych sygnałach. Szczególnym rodzajem m D-RDO jest omawiany dalej oscylator wielofazowy, nazywany także oscylatorem m -fazowym.



Rys. 3.8. Schemat blokowy m D-RDO w przestrzeni stanów z

$$\mathbf{y}_{12}[n] = [y_1[n] \quad y_2[n]]^T \text{ i } \mathbf{y}_{3m}[n] = [y_3[n] \quad \dots \quad y_m[n]]^T$$

3.4.2. Oscylator wielofazowy

Fazy początkowe sygnałów proponowanego tu oscylatora m -fazowego, $m > 2$, spełniają zależność $\alpha_i = 2\pi(i-1)/m$, gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, m$. Korzystając z tej zależności, za pomocą (3.50) otrzymujemy macierz oscylatora m -fazowego

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{m}} \begin{bmatrix} -\sin\left(\omega_0 - \frac{2\pi}{m}\right) & \frac{A_1}{A_2} \sin \omega_0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{A_2}{A_1} \sin \omega_0 & \sin\left(\omega_0 + \frac{2\pi}{m}\right) & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{A_3}{A_1} \sin\left(\omega_0 + \frac{2\pi}{m}\right) & \frac{A_3}{A_2} \sin\left(\omega_0 + \frac{4\pi}{m}\right) & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{A_m}{A_1} \sin\left(\omega_0 + \frac{m-2}{m}\pi\right) & \frac{A_m}{A_2} \sin\left(\omega_0 + 2\frac{m-1}{m}\pi\right) & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

W szczególności, przy jednakowych amplitudach sygnałów wyjściowych i dla $m = 3$ w (3.53) otrzymujemy macierz \mathbf{B} (3.43) oscylatora trójfazowego.

Dla parzystej liczby sygnałów wyjściowych, co oznacza, że $m = 3, 5, 7, \dots$, w tym oscylatorze można zredukować jedno mnożenie na próbkę i jeden element opóźniający, tak jak to zrobiliśmy wcześniej dla 3D-RDO z rys. 3.4. W tym celu w (3.53) dla $i = 1, 2, 3, \dots, m$ przyjmujemy

$$A_i = A$$

$$\alpha_i = -\frac{2\pi}{m} \frac{m-1}{2} + \frac{2\pi}{m} (i-1) = \frac{(2i-m-1)\pi}{m} \quad (3.54)$$

Wówczas sygnał wyjściowy $y_{(m+1)/2}[n] = A \cos n\omega_0$ liczymy jako sumę dwóch dowolnych par sygnałów wyjściowych $y_i[n]$ i $y_{m-i+1}[n]$, $i \neq (m+1)/2$, wymnożoną przez $1/(2\cos\alpha_i)$, ponieważ

$$\begin{aligned} y_{\frac{m+1}{2}}[n] &= \frac{1}{2\cos\alpha_i} (y_i[n] + y_{m-i+1}[n]) = \\ &= \frac{A}{2\cos\alpha_i} \left(\cos\left(n\omega_0 + \frac{(2i-m-1)\pi}{m}\right) + \cos\left(n\omega_0 + \frac{(2(m-i+1)-m-1)\pi}{m}\right) \right) = \\ &= \frac{A}{2\cos\alpha_i} \left(\cos\left(n\omega_0 + \frac{(2i-m-1)\pi}{m}\right) + \cos\left(n\omega_0 - \frac{(2i-m-1)\pi}{m}\right) \right) = \\ &= A \cos n\omega_0, \quad \alpha_i \neq k\pi + \pi/2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (3.55)$$

Wróćmy teraz do m D-RDO, tytułowego dla p. 3.4. Ponieważ czystość generowanych przebiegów zależy od różnicy faz sygnałów wyjściowych 2D-RDO tak, jak to pokazaliśmy na rys. 2.25, to projektując m D-RDO można ze zbioru faz początkowych pożądaných sygnałów wyjściowych tak dobrać fazy początkowe sygnałów $y_1[n]$ i $y_2[n]$, aby czystość oscylacji była największa. Atrakcyjnym aspektem zaprezentowanego wyżej algorytmu rekursywnej generacji sinusoidy m D jest to, że sygnały wyjściowe m D-RDO: $y_3[n], y_4[n], y_5[n], \dots, y_m[n]$, są kombinacją liniową sygnałów: $y_1[n]$ i $y_2[n]$, i gwarantują tę samą czystość [Kru08]. Z powodzeniem można więc sterować jakością sygnałów wyjściowych, stosując znane z literatury algorytmy poprawy jakości (patrz p. 2.7) jedynie do dwóch generowanych sygnałów. W metodzie projektowania m D-RDO w pierwszym kroku wybieramy parametry sygnałów wyjściowych oscylatorów. Dalej obliczamy elementy macierzy (3.50) i wa-

runki początkowe z (3.51). Warunki zapewniające ciągłą pracę oscylatora (2.19) są wówczas spełnione.

Ciekawym spostrzeżeniem jest to, że nie jest konieczne, aby sinusoida 2D, którą posługujemy się w algorytmie *mD-RDO* była generowana rekursywnie. Z zależności (3.48) wynika, że sygnał sinusoidalny o dowolnej amplitudzie i fazie początkowej można uzyskać na podstawie dwóch dowolnych sygnałów sinusoidalnych, ale pod warunkiem, że mają te same pulsacje.

Opracowany tu oscylator trójfazowy wymaga jedynie czterech mnożeń na próbkę i może być użyty w samochodach elektrycznych m.in. w kontrolerze siły napędowej jako alternatywa rozwiązania korzystającego z LUT [Toy94]. Prezentowane tu algorytmy *mD-RDO*, w tym oscylatora wielofazowego, mogą znaleźć zastosowanie m.in. w modulacji i demodulacji sygnałów, w tym w *m*-wartościowym kluczowaniu fazy (ang. *m-Phase Shift Keying – m-PSK*) [Sza07], *m*-wartościowej kwadraturowej modulacji amplitudy (ang. *m-Quadrature Amplitude Modulation – m-QAM*) z jednoczesnym kluczowaniem amplitudy i fazy [Hay99], [Sza07] w filtracji wielościeżkowej (ang. *multipath filtering*) [Fli92], testowaniu i diagnozowaniu urządzeń elektronicznych [Ale05], samochodach elektrycznych [Toy94] i w syntezie dźwięku [Hau99], [Coo92].

4. Projektowanie rekursywnych oscylatorów sygnałów świergotowych

Ten rozdział jest poświęcony projektowaniu rekursywnych cyfrowych oscylatorów sygnałów zmodulowanych z uzmiennieniem jednego parametru sygnału sinusoidalnego – jego częstotliwości. Zakładamy tu, że rekursywny oscylator sygnałów zmodulowanych pobudzany jest tylko warunkami początkowymi, w których jest zawarta informacja o parametrach sygnału.

Generalnie, w procesie projektowania będziemy korzystać z wyników rozdz. 3, odpowiednio modyfikując macierz rotacyjną (3.29) 2D-RDO. I tak, w p. 4.1 wprowadzamy oscylator tłumionych albo wzmacnionych sygnałów sinusoidalnych. W p. 4.2 zamieszczamy algorytm rekursywnej generacji sygnałów świergotowych. Następnie, w p. 4.4 (w powiązaniu z p. 4.3), podajemy oryginalny algorytm rekursywnej generacji zespolonego sygnału świergotowego z liniową modulacją częstotliwości (ang. *Linear Frequency Modulated chirp* – LFM chirp) [And92], [Wil07]. Na podstawie projektu oscylatora zespolonego sygnału świergotowego LFM rozszerzamy w p. 4.5 podany algorytm do rekursywnej generacji zespolonego sygnału z fazą chwilową w postaci wielomianu stopnia co najwyżej trzeciego, stanowiący ogólną postać algorytmu generacji zespolonego sygnału świergotowego z kwadratową modulacją częstotliwości (ang. *Quadratic Frequency Modulated chirp* – QFM chirp) [Abe09], [Wil07]. Niniejszy rozdz. 4 zamyka p. 4.8, gdzie projektujemy oscylator sygnału zespolonego z fazą chwilową wyrażoną jako wielomian dowolnego stopnia (ang. *Polynomial Phase Signal* – PPS) [Guo96], [McK09a], [McK09b], [Oul97].

4.1. Oscylator tłumionych/wzmacnionych sygnałów sinusoidalnych

Rozważmy zespolony sygnał o stałej pulsacji ω_0

$$\xi^n y[n] = \xi^n \left(A_1 \cos(n\omega_0 + \alpha_1) + jA_2 \cos(n\omega_0 + \alpha_2) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

gdzie $\forall_{n \geq 0} \xi > 0$ jest współczynnikiem takim, że dla $\xi < 1$ sygnał $y[n]$ jest tłumiony, a dla $\xi > 1$ sygnał $y[n]$ jest wzmacniany.

Kładąc w (2.18) $\xi \mathbf{A}$ w miejsce \mathbf{A} , co zapisujemy jako

$$\mathbf{y}[n] = (\xi \mathbf{A})^n \mathbf{y}[0] = \xi^n \mathbf{A}^n \mathbf{y}[0] \quad (4.2)$$

przy warunkach początkowych: $y_1[0] = A_1 \cos \alpha_1$ i $y_2[0] = A_2 \cos \alpha_2$, dostajemy od razu zespolony sygnał taki jak w (4.1). Zatem macierz oscylatora sygnału (4.1) przyjmuje postać

$$\mathbf{A}_\xi = \xi \mathbf{A} = \frac{\xi}{\sin \alpha_{21}} \begin{bmatrix} -\sin(\omega_0 - \alpha_{21}) & \frac{A_1}{A_2} \sin \omega_0 \\ -\frac{A_2}{A_1} \sin \omega_0 & \sin(\omega_0 + \alpha_{21}) \end{bmatrix}, \quad \alpha_{21} \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.3)$$

Struktura tego oscylatora jest taka, jak na rys. 3.1, ale ze współczynnikami: a , b , c i d , wymnożonymi przez stałą ξ . Algorytm można rozszerzyć na oscylatory sinusoidy mD , podstawiając w (3.49) $\xi \mathbf{C}$ w miejsce \mathbf{C} .

Dodajmy, że wymnożenie sinusoidalnego sygnału wyjściowego oscylatora przez sygnał modulowany można uznać za zastosowanie RDO do generacji sygnałów zmodulowanych amplitudowo.

4.2. Pulsacja chwilowa w rekursywnej generacji sygnałów zmodulowanych

Równanie macierzowe (2.18) z macierzą rotacyjną (3.29), służące do rekursywnej generacji sygnałów sinusoidalnych, można uogólnić, zauważając, że wartość fazy chwilowej sygnału wyjściowego oscylatora w chwili n jest sumą wartości fazy chwilowej tego sygnału w chwili poprzedniej ($n-1$) i wartości argumentów elementów macierzy rotacyjnej oscylatora. Powyższe prowadzi do następującego algorytmu

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin \xi} \begin{bmatrix} -\sin(\omega[n] - \xi) & \frac{A_1}{A_2} \sin \omega[n] \\ -\frac{A_2}{A_1} \sin \omega[n] & \sin(\omega[n] + \xi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ y_2[n-1] \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

$$\xi \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

przy czym warunki początkowe to: $y_1[0] = A_1 \cos \varphi[0]$ i $y_2[0] = A_2 \cos(\varphi[0] + \xi)$. Generowane sygnały są postaci: $y_1[n] = A_1 \cos \varphi[n]$ i $y_2[n] = A_2 \cos(\varphi[n] + \xi)$. Gdy pulsacja chwilowa $\omega[n]$ jest zależna od czasu, równanie różnicowe (4.4) służy do rekursywnej generacji zespolonego sygnału z modulacją częstotliwości. W przeciwnym razie, gdy pulsacja jest stała, $\omega[n] = \text{const}[n] = \omega_0$, to równanie macierzowe (4.4) można wykorzystać do generacji sinusoidy 2D (3.22).

4.3. Sygnały świergotowe

Ważną klasę sygnałów z modulacją częstotliwości stanowią okresowo powtarzane sygnały świergotowe (ang. *chirp*). Wykorzystuje się je powszechnie w radarach [Adl95], [Iba06], [Mor85], sonarach [Hop96], systemach nawigacji [Hin89], [Hu08], [Xia08], systemach z rozpraszaniem widma [Cos02], [Gau00], [Hue98], [Kow81], przetwarzaniu obrazu [Har09], modulacji oraz demodulacji [Ber73], [Jen03], transmisji danych [Joo08], przy pomiarach impedancji bioelektrycznej [Paa10] i innych. W powyżej wymienionych zastosowaniach na szczególną uwagę zasługują sygnały świergotowe LFM i QFM. Częstotliwość chwilowa sygnału świergotowego LFM

$$u[n] = u_1[n] + ju_2[n] = \exp j \left(\omega_0 n + \pi \frac{F_{\max} - F_0}{F_S (N-1)} n^2 + \alpha \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.5)$$

o długości N próbek narasta w czasie od wartości początkowej F_0 do regulowanej częstotliwości maksymalnej F_{\max} , $F_{\max} < F_S/2$ i $F_{\max} < F_0$. Z kolei sygnał świergotowy QFM o długości N próbek ma postać

$$v[n] = v_1[n] + jv_2[n] = \exp j \left(\omega_0 n + 2\pi \frac{F_{\max} - F_0}{3F_S (N-1)^2} n^3 + \alpha \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.6)$$

Częstotliwość chwilowa sygnału świergotowego QFM z (4.6) narasta z kwadratem czasu od wartości początkowej F_0 do częstotliwości maksymalnej F_{\max} , $F_{\max} < F_S/2$ i $F_{\max} < F_0$.

Popularną metodą generacji sygnałów (4.5) i (4.6) jest DDS z dodatkowymi rejestrami akumulującymi i rozbudowaną tablicą podglądową (ang. *Look-Up Table* – LUT), od której zależy pobór mocy zasilania [And92], [Gre94], [Iba06], [Xia08]. My proponujemy dalej rozwiązania oparte na generacji rekursywnej i nie korzystające z LUT.

4.4. Oscylator zespolonego sygnału świergotowego z liniową modulacją częstotliwości

W najprostszym podejściu część rzeczywistą i urojoną sygnału (4.5) dostaniemy, wykonując mnożenie liczb zespolonych, ponieważ

$$u[n] = \exp j(\omega_0 n + \pi\mu_1 n^2 + \alpha) = \exp j\pi\mu_1 n^2 \exp j(\omega_0 n + \alpha) \quad (4.7)$$

gdzie $\mu_1 = (F_{\max} - F_0)/(F_s(N-1))$, $0 < \mu_1 < 1/2$, jest współczynnikiem fazy świergotu LFM, zwanym szybkością przemiatania (ang. *swipping rate*). Sygnał świergotowy $\exp j\pi\mu_1 n^2$ uzyskamy, zachowując w pamięci w chwilach $0, 1, 2, 4, \dots, n^2$ próbki części rzeczywistej i urojonej sygnału $\exp j\pi\mu_1 k$, $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n^2$. Z kolei sygnały kompleksoidy $\exp j(\omega_0 n + \alpha)$ oraz $\exp j\pi\mu_1 k$ możemy wygenerować rekursywnie za pomocą struktury CFO. Jednak takie postępowanie, mimo swej prostoty, nie jest efektywne. Przykładowo, w generacji sygnału (4.5) o czasie trwania $N = 1000$ próbek, należy wygenerować $2N^2 = 2 \cdot 10^6$ próbek sygnałów $\cos\pi\mu_1 k$ i $\sin\pi\mu_1 k$, wykorzystując dalej tylko 0,1% z nich.

Opracowanie efektywnego algorytmu generacji sygnałów świergotowych umożliwia proponowana tu nowa metoda, wykorzystująca pulsację chwilową. Metoda ta omówiona jest poniżej.

Zauważmy, że pulsacja chwilowa sygnału (4.5) jest poniższą funkcją numeru próbki n

$$\omega[n] = (2n-1)\pi\mu_1 + \omega_0, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.8)$$

Korzystając z zależności (4.4) z podstawieniem: $A_1 = A_2 = 1$, $\varphi[n] = \omega_0 n + \pi\mu_1 n^2 + \alpha$, $\xi = -\pi/2$, i $\omega[n] = (2n-1)\pi\mu_1 + \omega_0$, w rekursywnej generacji (4.5) użyjemy poniższego równania

$$\mathbf{u}[n] = \mathbf{D}[n]\mathbf{u}[n-1], \quad n = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.9)$$

gdzie $\mathbf{u}[n] = [u_2[n] \quad u_1[n]]^T$ jest wektorem sygnałów wyjściowych oscylatora, a $\mathbf{D}[n]$ jest chwilową macierzą rotacyjną o postaci

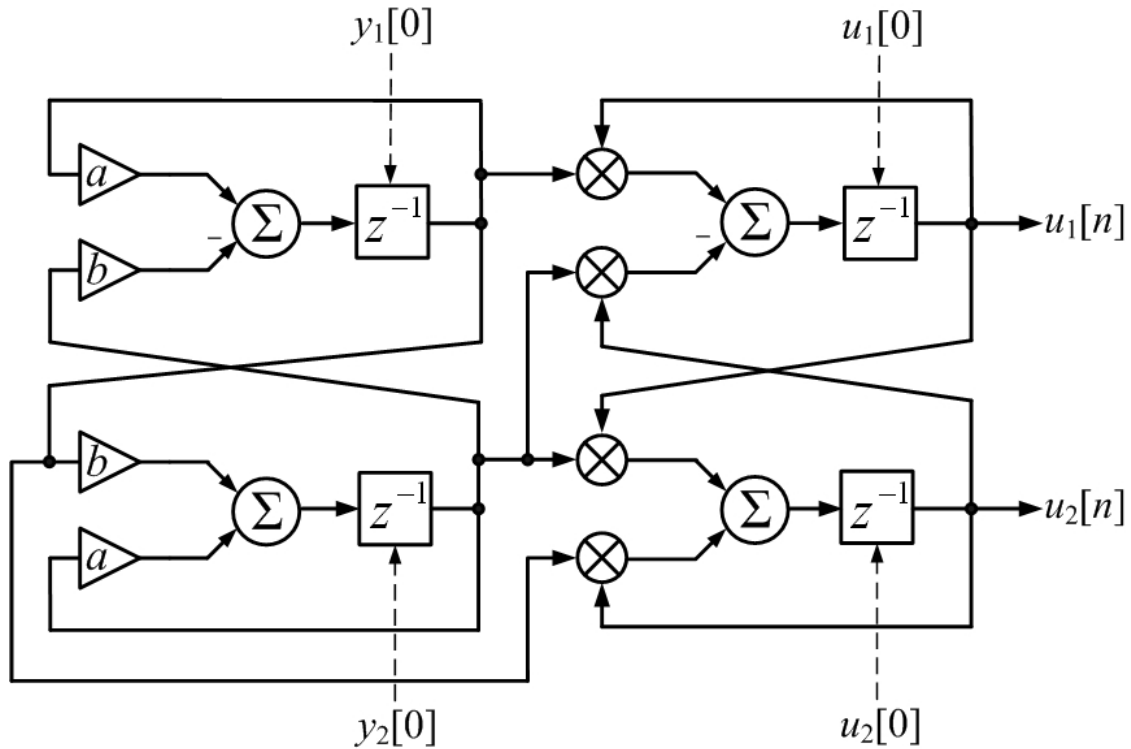
$$\begin{aligned} \mathbf{D}[n] &= \begin{bmatrix} \cos((2n-1)\pi\mu_1 + \omega_0) & -\sin((2n-1)\pi\mu_1 + \omega_0) \\ \sin((2n-1)\pi\mu_1 + \omega_0) & \cos((2n-1)\pi\mu_1 + \omega_0) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} y_1[n] & -y_2[n] \\ y_2[n] & y_1[n] \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.10)$$

która przy warunkach początkowych: $u_1[0] = \cos\alpha$ i $u_2[0] = \sin\alpha$, służy do generacji części rzeczywistej $u_1[n] = \text{Re } u[n]$ i urojonej $u_2[n] = \text{Im } u[n]$ sygnału (4.5). Dodajmy, że wobec definicji macierzy rotacyjnej z p. 2.4, z racji tego, że elementy macierzy $\mathbf{D}[n]$ sygnałów sinusoidalnych z (4.10) zależą od numeru próbki n , a więc od czasu,

nazwaliśmy ją chwilową macierzą rotacyjną. Zauważmy też, że wobec (4.4), elementy chwilowej macierzy rotacyjnej z (4.10), czyli dwa sygnały sinusoidalne o stałej pulsacji $2\pi\mu_1$: $y_1[n]$ i $y_2[n]$, mogą być generowane rekursywnie zgodnie z poniższym równaniem różnicowym macierzowym

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\pi\mu_1 & -\sin 2\pi\mu_1 \\ \sin 2\pi\mu_1 & \cos 2\pi\mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ y_2[n-1] \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.11)$$

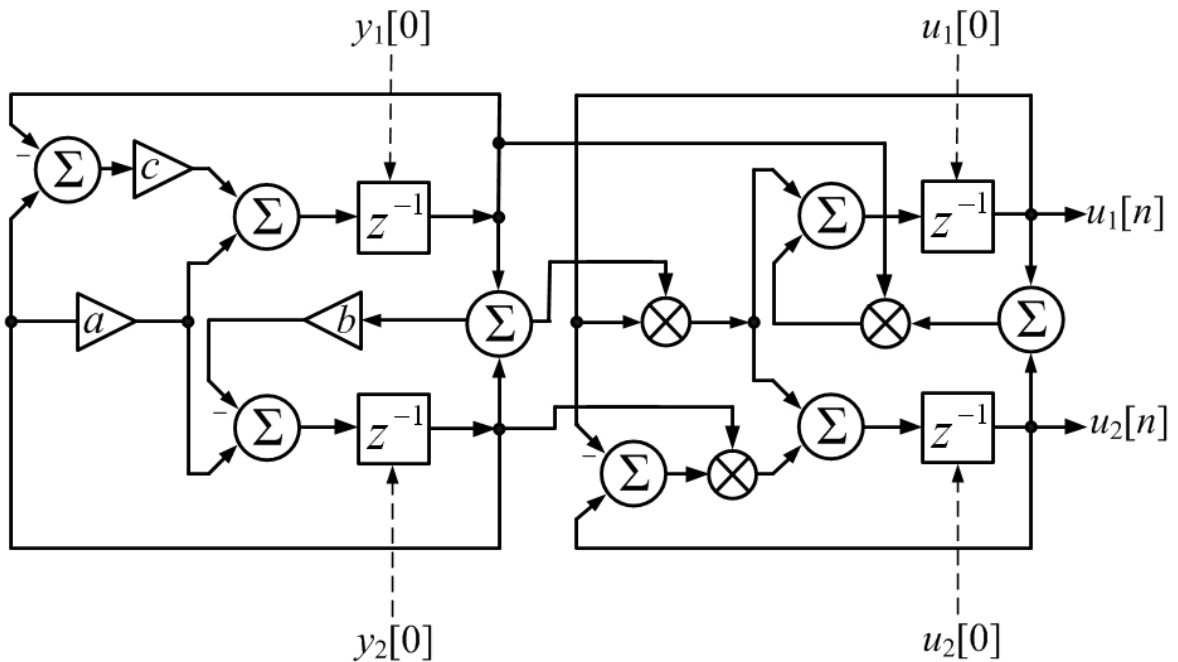
z warunkami początkowymi: $y_1[0] = \cos(-\pi\mu_1 + \omega_0)$ i $y_2[0] = \sin(-\pi\mu_1 + \omega_0)$. Wartości sygnałów: $y_1[n]$, $y_2[n]$ i $-y_2[n]$, w (4.11) w chwilach o indeksie n tworzą chwilową macierz rotacyjną $\mathbf{D}[n]$, którą posługujemy się w równaniu (4.9) celem rekursywnej generacji sygnału (4.5). Strukturę rekursywnego oscylatora zespolonego sygnału świergotowego LFM prezentujemy na rys. 4.1. W jej budowie wykorzystano strukturę CFO z rys. 2.2. W komórkach rejestru opóźniającego z rys. 4.1 przechowywane są wartości sygnałów wyjściowych przed rozpoczęciem obliczeń, czyli warunki początkowe: $y_1[0] = \cos(-\pi\mu_1 + \omega_0)$ i $y_2[0] = \sin(-\pi\mu_1 + \omega_0)$ oraz $u_1[0] = \cos \alpha$ i $u_2[0] = \sin \alpha$, zawierające informacje o parametrach: ω_0 , μ_1 i α , sygnału (4.5).



Rys. 4.1. Struktura oscylatora zespolonego sygnału świergotowego LFM ze współczynnikami: $a = \cos 2\pi\mu_1$ i $b = \sin 2\pi\mu_1$, z ośmioma mnożeniami na próbkę

Zaznaczmy tu, że we wzorach (4.5) i (4.6), parametr N oznacza okres powtórzenia i jest on powiązany ze współczynnikiem fazy świergotu: μ_1 albo μ_2 . Po tym czasie, reprezentowanym przez długość sygnału świergotowego N , proponowany tu oscylator z rys. 4.1 jak i omawiane dalej RDO należy zrestartować, czyli ponownie zadać te same warunki początkowe.

Dla oscylatora z rys. 4.1 liczba mnożeń na próbkę wynosi osiem. Liczbę tę można zmniejszyć do sześciu, posługując się strukturą CFO z rys. 2.5. Strukturę takiego RDO w roli modulatora z wykorzystaniem struktury CFO z rys. 2.5 prezentujemy na rys. 4.2. Warunki początkowe pozostają niezmienione.



Rys. 4.2. Struktura oscylatora zespolonego sygnału świergotowego LFM ze współczynnikami: $a = \sin 2\pi\mu_1 + \cos 2\pi\mu_1$, $b = \sin 2\pi\mu_1$ oraz $c = \cos 2\pi\mu_1$, z sześcioma mnożeniami na próbkę

Dodajmy, że autor w ramach eksperymentów projektował struktury rekurencyjnego cyfrowego oscylatora sygnału świergotowego LFM na podstawie innych znanych struktur 2D-RDO, modyfikując ich współczynniki do postaci przebiegów sinusoidalnych, ale te próby okazały się jak dotąd nieskuteczne, ponieważ otrzymane w ten sposób sygnały wyjściowe RDO nie były idealnymi (bezbłędnymi) sygnałami świergotowymi LFM. Przykładowo, nie można zrealizować RDO w roli oscylatora sygnału świergotowego LFM postaci $u_1[n] = \cos n^2\omega_0$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, korzy-

stając ze struktury biquadu i modyfikując tylko współczynnik a z rys. 2.1 do postaci przebiegu sinusoidalnego. Ponieważ w generacji sygnału wyjściowego $y_1[n]$ biquadu z rys. 2.1 korzystamy z zależności: $\cos(\alpha + \beta) = 2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha - \beta)$ z $\alpha = (n-1)\omega_0$ i $\beta = \omega_0$, to, aby otrzymać równanie rekursywne na sygnał świergotowy LFM $u_1[n] = \cos n^2\omega_0$, żądamy, aby $u_1[n] = 2\cos\beta u_1[n-1] - u_1[n-2]$, przy czym: $u_1[n] = \cos(\alpha + \beta)$, $u_1[n-1] = \cos\alpha$ i $u_1[n-2] = \cos(\alpha - \beta)$, gdzie α i β są naszymi niewiadomymi. Z drugiej strony musi zachodzić $u_1[n] = \cos n^2\omega_0$. Przyrównując $\cos n^2\omega_0 = \cos(\alpha + \beta)$ oraz $\cos(n-2)^2\omega_0 = \cos(\alpha - \beta)$, otrzymujemy układ dwóch równań: $\alpha + \beta = n^2\omega_0$ i $\alpha - \beta = (n-1)^2\omega_0$, którego rozwiązaniem są następujące liczby: $\alpha = (n-1)^2\omega_0 + \omega_0$ i $\beta = 2(n-1)\omega_0$. Zatem otrzymujemy $u_1[n-1] = \cos(n-1)^2\omega_0 = \neq \cos((n-1)^2\omega_0 - \omega_0) = \cos\alpha$, co dowodzi, że nie można tak dobrać współczynnika a (zmiennego w czasie i w postaci przebiegu sinusoidalnego) z rys. 2.1, aby za pomocą biquadu generować idealny (bezbłędny) sygnał świergotowy LFM.

Przedstawimy dalej algorytm rekursywnej generacji bardziej ogólnego ($A_1 \neq A_2$ i $|\alpha_{21}| \neq |\alpha_1 - \alpha_2| \neq \pi/2$) zespolonego sygnału świergotowego LFM

$$\begin{aligned} u[n] &= u_1[n] + ju_2[n] = \\ &= A_1 \cos(\omega_0 n + \pi\mu_1 n^2 + \alpha_1) + jA_2 \cos(\omega_0 n + \pi\mu_1 n^2 + \alpha_2), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (4.12)$$

czyli z dowolnie zadanymi amplitudami i fazami początkowymi części rzeczywistej i urojonej generowanego sygnału. Tu także skorzystamy z zależności (4.4), ale z podstawieniem: $\varphi[n] = \omega_0 n + \pi\mu_1 n^2 + \alpha_1$, $\xi = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_{21}$ i $\omega[n] = (2n-1)\pi\mu_1 + \omega_0$. Wówczas sygnał (4.12) generujemy rekursywnie zgodnie równaniem (4.9) o chwilowej macierzy rotacyjnej poniższej postaci

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[n] &= \frac{1}{\sin\alpha_{21}} \begin{bmatrix} -\sin((2n-1)\pi\mu_1 + \omega_0 - \alpha_{21}) & \frac{A_1}{A_2} \sin((2n-1)\pi\mu_1 + \omega_0) \\ -\frac{A_2}{A_1} \sin((2n-1)\pi\mu_1 + \omega_0) & \sin((2n-1)\pi\mu_1 + \omega_0 + \alpha_{21}) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} y_1[n] & y_3[n] \\ y_4[n] & y_2[n] \end{bmatrix}, \quad \alpha_{21} \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (4.13)$$

Początkowe warunki pracy tego oscylatora to: $u_1[0] = A_1 \cos\alpha_1$ i $u_2[0] = A_2 \cos\alpha_2$. Następnie wystarczy wygenerować elementy chwilowej macierzy rotacyjnej (4.13), np. za pomocą oscylatora sinusoidy czterowymiarowej zgodnie z (3.49) z podstawieniem $m = 4$, albo użyć 3D-RDO z sygnałami wyjściowymi: $y_1[n]$, $y_3[n]$ i $y_4[n]$, a

sygnał $y_4[n]$ uzyskać, mnożąc $y_3[n]$ przez $-(A_2/A_1)^2$. W pierwszej sytuacji, w rekursywnej generacji sygnału (4.12), należy wykonywać dwanaście mnożeń na próbkę, przy czym struktura oscylatora będzie zawierać sześć sumatorów i sześć elementów opóźniających. W drugiej sytuacji liczba wykonywanych mnożeń zredukuje się do jedenastu, a liczba sumatorów i elementów opóźniających do pięciu. W jeszcze innym podejściu autor skorzystał z tego, że dwa sygnały, stojące na przekątnej głównej macierzy (4.13), tj. $y_1[n]$ i $y_2[n]$, można wygenerować za pomocą 2D-RDO, co zapisujemy w poniższej postaci

$$\begin{bmatrix} y_1[n] \\ y_2[n] \end{bmatrix} = \frac{1}{\sin 2\alpha_{21}} \begin{bmatrix} -\sin(2\pi\mu_1 - 2\alpha_{21}) & -\sin 2\pi\mu_1 \\ \sin 2\pi\mu_1 & \sin(2\pi\mu_1 + 2\alpha_{21}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1[n-1] \\ y_2[n-1] \end{bmatrix}, \quad (4.14)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, N-1, \quad \alpha_{21} \neq k\pi/2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

z $y_1[0] = -\sin(\omega_0 - \pi\mu - \alpha_{21})/\sin\alpha_{21}$ i $y_2[0] = \sin(\omega_0 - \pi\mu + \alpha_{21})/\sin\alpha_{21}$. W następnym kroku pozostałe dwa sygnały macierzy $\mathbf{D}[n]$ generujemy jako liniową kombinację sygnałów $y_1[n]$ i $y_2[n]$, ponieważ dla $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$

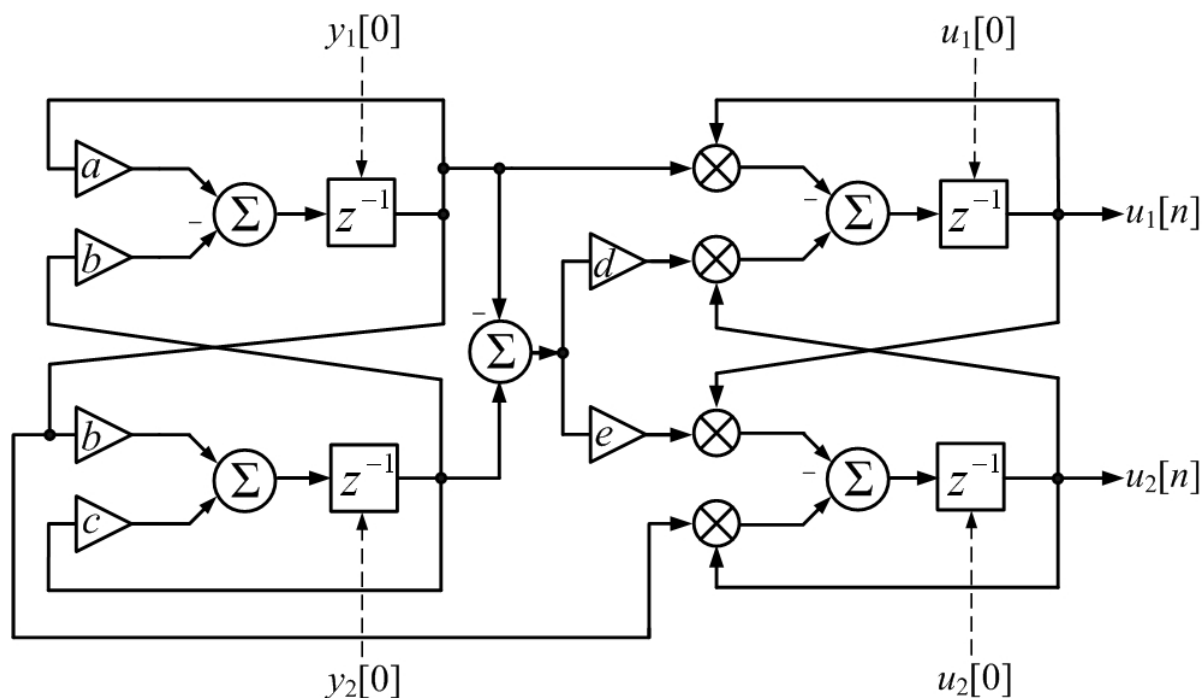
$$y_3[n] = \frac{A_1}{2A_2 \cos\alpha_{21}} (-y_1[n] + y_2[n]), \quad \alpha_{21} \neq k\pi + \pi/2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.15)$$

oraz

$$y_4[n] = -\frac{A_2}{2A_1 \cos\alpha_{21}} (-y_1[n] + y_2[n]), \quad \alpha_{21} \neq k\pi + \pi/2, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.16)$$

Wówczas okazuje się, że liczba mnożeń na próbkę, sumatorów i elementów opóźniających zmalała, odpowiednio, do: dziesięciu, pięciu i czterech, w porównaniu z pierwotną liczbą: dwunastu, sześciu i sześciu, w sytuacji, gdzie elementy chwilowej macierzy rotacyjnej (4.13) generowane są za pomocą oscylatora sinusoidy czterowymiarowej zgodnie z (3.49) z podstawieniem $m = 4$. Strukturę oscylatora sygnału (4.12) z tak zmniejszoną liczbą działań przedstawiamy na rys. 4.3.

Zwróćmy uwagę, że założenia: $\sin 2\alpha_{21} \neq 0$ i $\cos\alpha_{21} \neq 0$, dające $\alpha_{21} \neq k\pi/2$ rad, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ w (4.14), (4.15) i (4.16) ograniczają możliwość zastosowania struktury z rys. 4.3 do generacji sygnałów przesuniętych w fazie o $\pi/2$. Ale z drugiej strony, dla zespolonego sygnału świergotowego LFM definiowanego wzorem (4.5), dla którego $A_1 = A_2 = 1$ i $\alpha_{21} = -\pi/2$ rad, elementy chwilowej macierzy rotacyjnej (4.13) (czyli właśnie z podstawieniem w (4.13): $A_1 = A_2 = 1$ i $\alpha_{21} = -\pi/2$ rad) upraszczają się do postaci chwilowej macierzy rotacyjnej z (4.10) ze strukturą z rys. 4.1.



Rys. 4.3. Struktura oscylatora zespolonego sygnału (4.12) ze współczynnikami:

$$a = -\sin(2\pi\mu_1 - 2\alpha_{21}) / \sin \alpha_{21}, \quad b = \sin 2\pi\mu_1 / \sin \alpha_{21}, \quad c = \sin(2\pi\mu_1 + 2\alpha_{21}) / \sin \alpha_{21},$$

$$d = A_1 / (2A_2 \cos \alpha_{21}) \quad \text{i} \quad e = A_2 / (2A_1 \cos \alpha_{21})$$

4.5. Oscylator zespolonego sygnału z fazą chwilową w postaci wielomianu stopnia co najwyżej trzeciego

W kolejnych krokach procesu projektowania oscylatora zespolonego sygnału świergotowego LFM z p. 4.4 redukowaliśmy stopień wielomianu reprezentującego fazy chwilowe poszczególnych sygnałów. Okazuje się, że podobne postępowanie można także zastosować do projektowania rekursywnego oscylatora sygnału $v[n] = \exp j\varphi[n] = v_1[n] + jv_2[n]$ z fazą chwilową w postaci wielomianu stopnia co najwyżej trzeciego

$$\varphi[n] = \omega_0 n + \pi\mu_1 n^2 + \pi\mu_2 n^3 + \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.17)$$

przy ω_0 , μ_1 i μ_2 dobranych tak, aby pulsacja chwilowa sygnału $v[n]$

$$\omega[n] = \omega_0 - \pi\mu_1 + \pi\mu_2 + \pi(2\mu_1 - 3\mu_2)n + 3\pi\mu_2 n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.18)$$

nie wykroczała poza pasmo Nyquista $|\omega[n]| < \pi$.

Wobec (4.4), sygnał $v[n]$ z fazą chwilową (4.17) możemy wygenerować za pomocą poniższego algorytmu

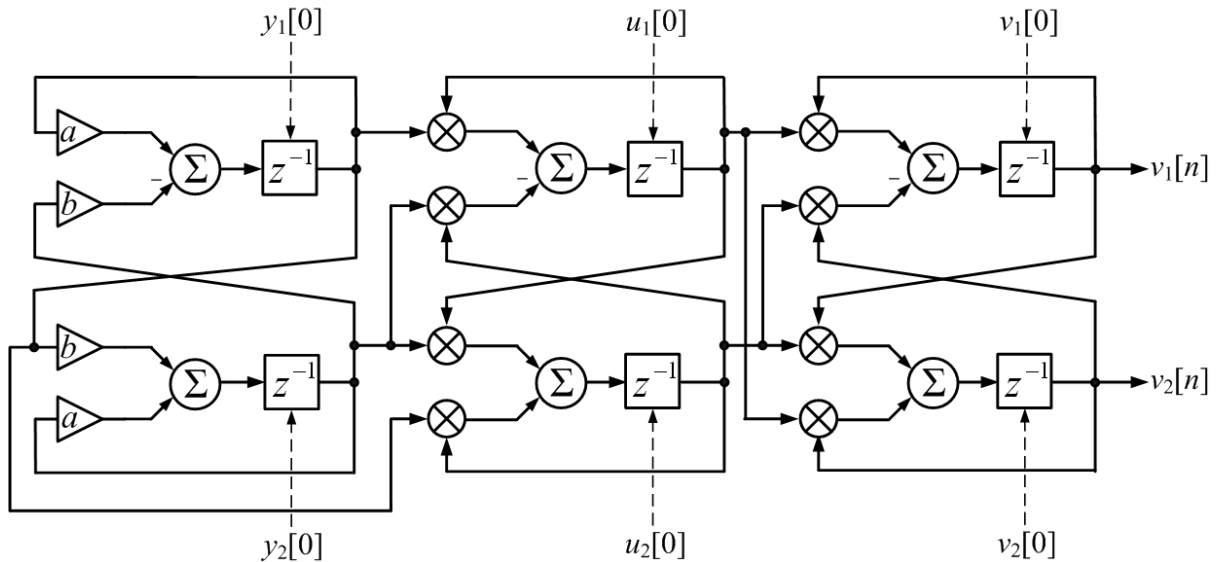
$$\begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega[n] & -\sin\omega[n] \\ \sin\omega[n] & \cos\omega[n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n-1] \\ v_2[n-1] \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.19)$$

z $v_1[0] = \cos\alpha$ i $v_2[0] = \sin\alpha$ i pulsacją $\omega[n]$ z (4.18). W następnym kroku generujemy rekursywnie sygnał LFM $u[n] = \exp j(\omega_0 - \pi\mu_1 + \pi\mu_2 + \pi(2\mu_1 - 3\mu_2)n + 3\pi\mu_2 n^2)$ o pulsacji chwilowej w postaci wielomianu stopnia co najwyżej pierwszego

$$2\pi(\mu_1 - 3\mu_2) + 6\pi\mu_2 n, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N-1 \quad (4.20)$$

a następnie kompleksoidę $y[n] = \exp j(2\pi(\mu_1 - 3\mu_2) + 6\pi\mu_2 n)$ o pulsacji $6\pi\mu_2$, przy czym $0 < \mu_2 < 1/6$.

Tak więc, w powyższym postępowaniu, w kolejnych krokach, redukujemy stopień wielomianu fazy chwilowej kolejnych sygnałów, zaczynając od wielomianu stopnia trzeciego, a kończąc na stopniu pierwszym, gdzie w generacji sygnału $y[n]$ używana jest macierz rotacyjna CFO, czyli o elementach niezależnych od czasu. Struktura oscylatora zespolonego sygnału świergotowego z fazą chwilową w postaci wielomianu stopnia co najwyżej trzeciego jest zaprezentowana na rys. 4.4. Warunki początkowe oscylatora, umieszczane w komórkach rejestru opóźniającego przed rozpoczęciem obliczeń, wynoszą: $y_1[0] = \cos(2\pi(\mu_1 - 3\mu_2))$, $y_2[0] = \sin(2\pi(\mu_1 - 3\mu_2))$, $u_1[0] = \cos(\omega_0 - \pi\mu_1 + \pi\mu_2)$, $u_2[0] = \sin(\omega_0 - \pi\mu_1 + \pi\mu_2)$, $v_1[0] = \cos\alpha$ oraz $v_2[0] = \sin\alpha$.



Rys. 4.4. Struktura oscylatora sygnału $\exp j(\omega_0 n + \pi\mu_1 n^2 + \pi\mu_2 n^3 + \alpha) = v_1[n] + jv_2[n]$ ze współczynnikami: $a = \cos 6\pi\mu_2$ i $b = \sin 6\pi\mu_2$

4.6. Sygnały świergotowe o malejącej częstotliwości

W części zastosowań wymienionych we wstępie p. 4.3 potrzebne są sygnały świergotowe o malejącej częstotliwości (ang. *down chirp*). Dalej rozpatrzmy dwa sygnały świergotowe o malejącej częstotliwości i omówimy sposób ich rekursywnej generacji. Częstotliwość chwilowa pierwszego z nich, sygnału świergotowego LFM o ujemnym nachyleniu pulsacji chwilowej $\omega[n]$ i o długości N próbek, maleje w czasie od częstotliwości F_{\max} do częstotliwości F_0 , $F_{\max} < F_S/2$ i $F_{\max} < F_0$. Jest on postaci

$$u[n] = \exp j \left(2\pi \frac{F_{\max}}{F_S} n - \pi \frac{F_{\max} - F_0}{F_S(N-1)} n^2 + \alpha \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.21)$$

Z kolei drugi sygnał – świergotowy z QFM o ujemnym nachyleniu pulsacji chwilowej $\omega[n]$ i o długości N próbek – zapisujemy za pomocą wzoru

$$v[n] = \exp j \left(2\pi \frac{F_{\max}}{F_S} n - 2\pi \frac{F_{\max} - F_0}{3F_S(N-1)^2} n^3 + \alpha \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (4.22)$$

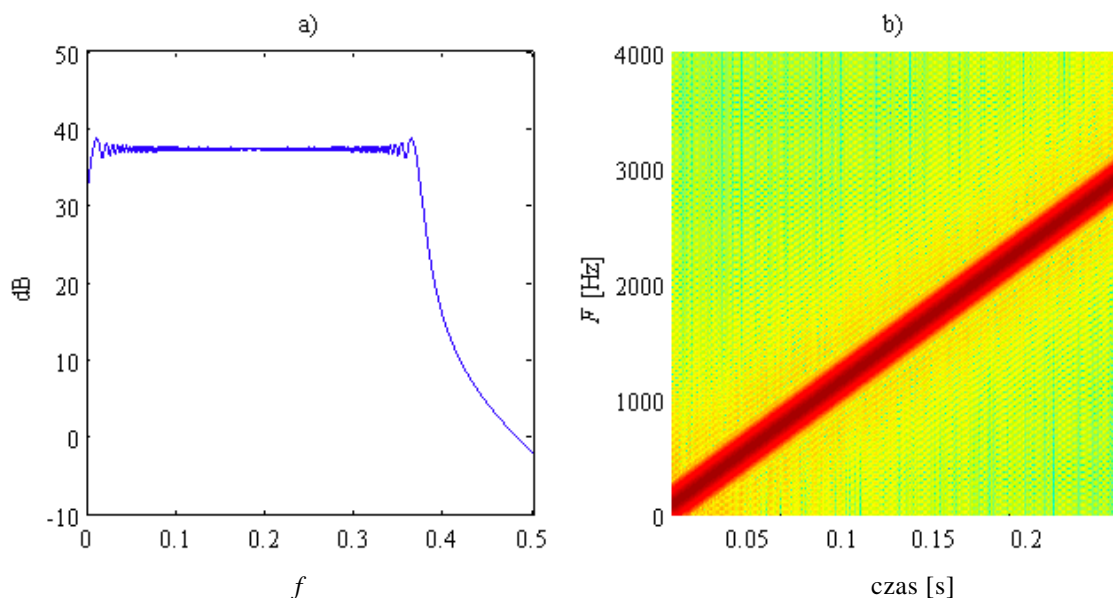
Częstotliwość chwilowa sygnału (4.22) maleje z kwadratem czasu od częstotliwości F_{\max} do częstotliwości F_0 , gdzie $F_{\max} < F_S/2$ i $F_{\max} < F_0$.

W rekursywnej generacji sygnału (4.21) można posłużyć się RDO z rys. 4.1 ze współczynnikami: $a = \cos 2\pi\mu_1$ i $b = -\sin 2\pi\mu_1$, $\mu_1 = (F_{\max} - F_0)/(F_S(N-1))$. Warunki początkowe wynoszą: $y_1[0] = \cos(\pi\mu_1 + 2\pi F_{\max}/F_S)$, $y_2[0] = \sin(\pi\mu_1 + 2\pi F_{\max}/F_S)$, $u_1[0] = \cos \alpha$ i $u_2[0] = \sin \alpha$. Z kolei w rekursywnej generacji sygnału (4.22) można użyć RDO z rys. 4.4 ze współczynnikami: $a = \cos 6\pi\mu_2$ i $b = -\sin 6\pi\mu_2$, $\mu_2 = 2(F_{\max} - F_0)/(3F_S(N-1)^2)$ i warunkami początkowymi: $y_1[0] = \cos 6\pi\mu_2$, $y_2[0] = -\sin 6\pi\mu_2$, $u_1[0] = \cos(2\pi F_{\max}/F_S - \pi\mu_2)$, $u_2[n] = \sin(2\pi F_{\max}/F_S - \pi\mu_2)$, $v_1[0] = \cos \alpha$ oraz $v_2[0] = \sin \alpha$. Widzimy, że przedstawione w tym rozdziale struktury RDO służą do rekursywnej generacji sygnałów świergotowych zarówno o narastającej jak i malejącej częstotliwości. Co ciekawe, opracowany tu RDO sygnału świergotowego LFM o strukturze z rys. 4.1 może służyć także jako binarny modulator świergotowy (ang. *binary chirp modulator*, *linear frequency sweeping modulator*). Ponieważ $\cos(-2\pi\mu_1) = \cos 2\pi\mu_1$, $\mu_1 = (F_{\max} - F_0)/(F_S(N-1))$, to w algorytmie z rys. 4.1 należy jedynie zmieniać znaki współczynników przy $\sin 2\pi\mu_1$ i $-\sin 2\pi\mu_1$ na przeciwne i warunki początkowe z: $y_1[0] = \cos(-\pi\mu_1 + 2\pi F_0/F_S)$ i $y_2[0] = \sin(-\pi\mu_1 + 2\pi F_0/F_S)$, na:

$y_1[0] = \cos(\pi\mu_1 + 2\pi F_{\max}/F_s)$, $y_2[0] = \sin(\pi\mu_1 + 2\pi F_{\max}/F_s)$, w chwilach zmiany sygnału modulującego z zera na jedynkę. Warunków początkowych: $u_1[0] = \cos\alpha$ oraz $u_2[0] = \sin\alpha$ nie trzeba zmieniać.

4.7. Jakość generowanych sygnałów

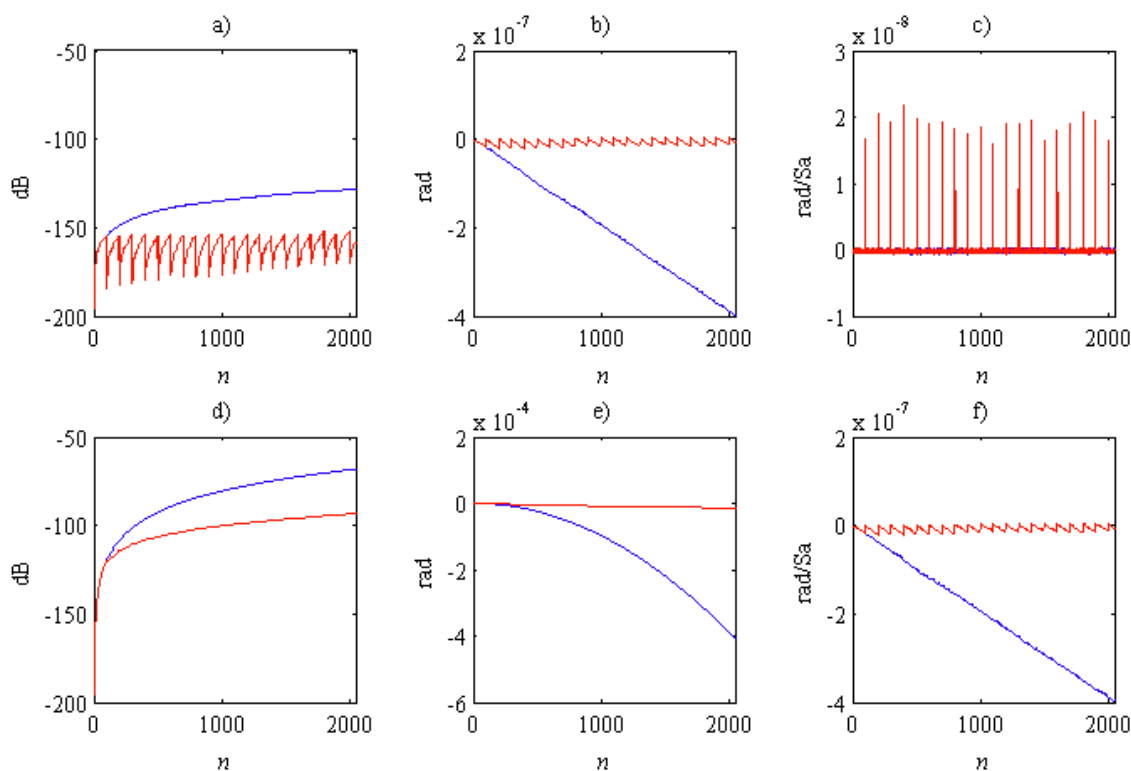
Jakość sygnałów na wyjściu rekursywnych oscylatorów sygnałów świergotowych, podobnie jak dla rekursywnych oscylatorów sinusoidalnych, zależy, rzecz jasna, od ich parametrów i upływu czasu. W tym podpunkcie przebadamy czystość sygnałów generowanych na wyjściu oscylatorów sygnałów świergotowych: LFM z p. 4.4 i QFM z p. 4.5. Przyjmijmy, że parametry sygnału LFM wynoszą: $\omega_0 = 0$ rad/Sa, $\alpha = 0$ rad, $F_{\max} = 3$ kHz, i $F_s = 8$ kSa/s. Moduł widma DFT oraz spektrogram z zastosowaniem okna Hamminga o szerokości 128 Sa i nakładkowaniem 125 Sa dla $N = 2048$ Sa na wyjściu oscylatora o strukturze z rys. 4.1 z parametrem kwantyzacji $P = 32$ bity pokazujemy na rys. 4.5. Czerwona smuga wyraźnie obrazuje pojedynczą składową sygnału o częstotliwości narastającej liniowo.



Rys. 4.5. Moduł widma DFT a) i spektrogram b) pojedynczego okresu zespolonego sygnału świergotowego LFM na wyjściu RDO z rys. 4.1

Czystość tak wygenerowanego sygnału w oparciu o chwilowy błąd amplitudy, fazy oraz pulsacji, przedstawiają rys. 4.6 od d do f (kolor niebieski). Warto

przypomnieć, że w generacji zespolonego sygnału świergotowego LFM posługujemy się strukturą CFO z rys. 2.2, produkującą kompleksoidę $y[n]$ (patrz p. 4.3), dla której chwilowe błędy: amplitudy, fazy i pulsacji, prezentujemy na rys. 4.6a-c (kolor niebieski).

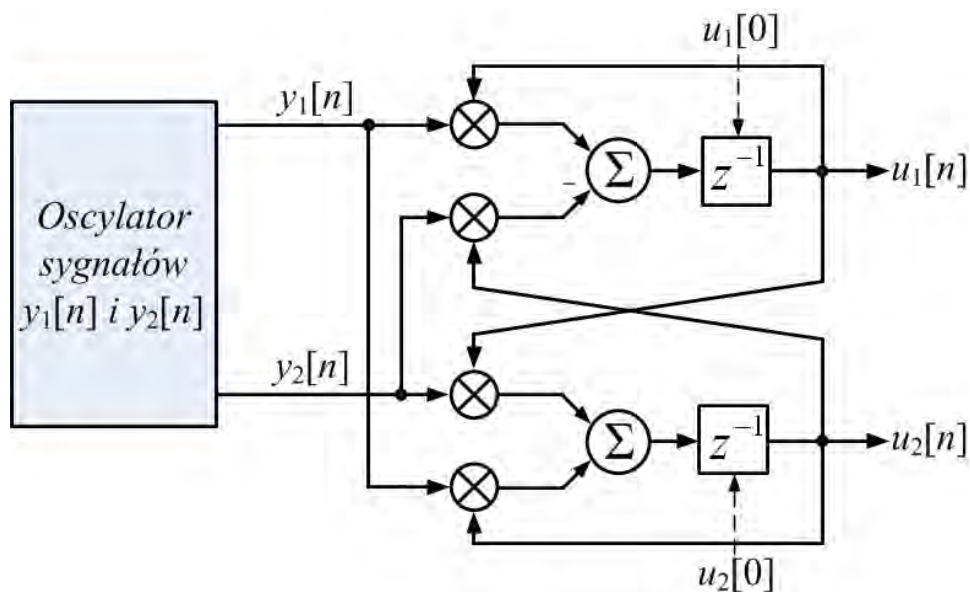


Rys. 4.6. Chwilowe błędy za 1 okres $N = 2048$ Sa: a) amplitudy, b) fazy oraz c) pulsacji kompleksoidy w rekursywnej generacji zespolonego sygnału świergotowego LFM z algorytmem poprawy jakości (kolor czerwony) i bez tego algorytmu (kolor niebieski) oraz chwilowe błędy za 1 okres $N = 2048$ Sa: d) amplitudy, e) fazy oraz f) pulsacji zespolonego sygnału świergotowego LFM na wyjściu RDO z rys. 4.1 z algorytmem poprawy jakości (kolor czerwony) i bez tego algorytmu (kolor niebieski)

Jakość sygnału na wyjściu RDO w roli modulatora zależy od czystości sygnału $y[n]$ z (4.10). Wpływa stąd ważny wniosek, a mianowicie, że poprawa jakości oscylacji RDO w roli modulatora jest możliwa za pomocą algorytmów poprawy czystości sygnałów na wyjściu CFO omówionych w rozdz. 2. Autor niniejszej rozprawy posłużył się jednym z nich – algorytmem poprawy czystości z [Cur00b], polegającej na generacji dodatkowej kompleksoidy o częstotliwości $p = 100$ razy większej od częstotliwości sygnału $y[n]$. Otrzymane wyniki, zestawione na rys. 4.6 (kolor czerwony), pokazują przebiegi chwilowego błędu amplitudy, fazy i pulsacji po-

prawionej kompleksoidy oraz przebiegi na wyjściu RDO z rys. 4.1 z tym algorytmem poprawy jakości. Pomimo zastosowania algorytmu poprawy czystości wciąż obserwuje się kumulację chwilowego błędu amplitudy i fazy (rys. 4.6d-e, kolor czerwony). Następuje ona jednak wolniej niż bez zastosowania tego algorytmu. Analogicznie, podobny efekt obserwujemy przy wystąpieniu cyklu granicznego dla kompleksoidy w generacji sygnału świergotowego. Mimo, że chwilowy błąd amplitudy poprawionej kompleksoidy utrzymuje się na stałym poziomie, to chwilowy błąd amplitudy poprawianego sygnału na wyjściu RDO narasta w czasie. Odpowiada to sytuacji, gdy w generacji sygnału świergotowego sygnał wyjściowy w chwili n jest obliczany rekursywnie na podstawie zbioru okresowo powtarzających się współczynników chwilowej macierzy rotacyjnej i wartości sygnału świergotowego w chwili $n - 1$. Dodatkowo, warto zaznaczyć, że implementując powyżej wspomniany algorytm poprawy jakości oscylacji, znacząco ograniczyliśmy powstające zniekształcenia. W chwili zakończenia obliczeń ($n = N - 1$) chwilowy błąd amplitudy zredukowaliśmy z $-68,2$ dB do $-93,3$ dB, moduł błędu fazy z $4,05 \cdot 10^{-4}$ rad do $1,37 \cdot 10^{-5}$ rad, a moduł błędu pulsacji z $3,96 \cdot 10^{-7}$ rad/Sa do $5,31 \cdot 10^{-9}$ rad/Sa. Te same obliczenia przeprowadzono dalej dla oscylatora sygnału LFM z malejącą częstotliwością. Uzyskane wyniki nie różnią się od tych z rys. 4.6.

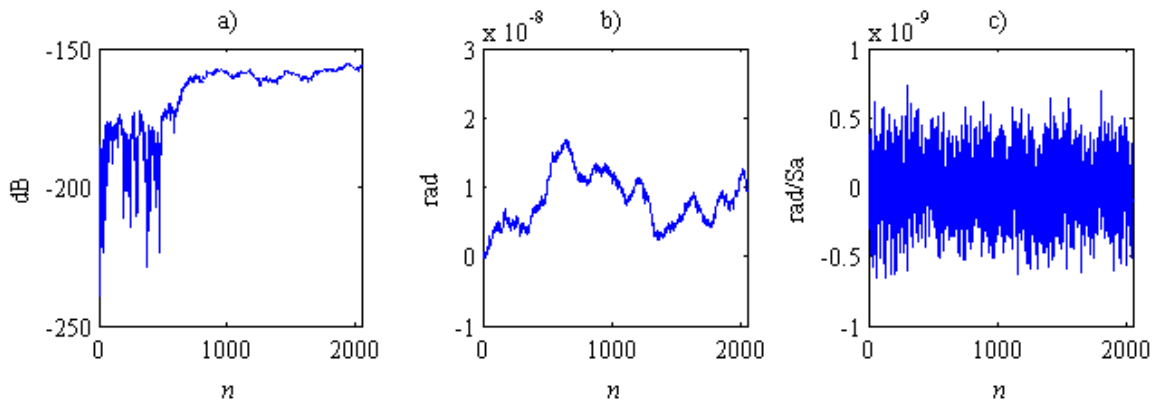
Zauważmy, że sygnały $y_1[n]$ oraz $y_2[n]$ w (4.10) nie muszą być generowane rekursywnie. Schemat blokowy oscylatora, działającego w oparciu o dowolną metodę syntezy dyskretnej przedstawiamy na rys. 4.7.



Rys. 4.7. Schemat blokowy realizacji algorytmu zespolonego sygnału świergotowego LFM na podstawie dowolnej metody syntezy dyskretnej kompleksoidy

Warunki początkowe są postaci $u_1[0] = \cos \alpha$ i $u_2[0] = \sin \alpha$. Zespolony sygnał świergotowy LFM (4.5) jest tu generowany za pomocą kwadraturowo powiązanych sinusoid: $y_1[n]$ i $y_2[n]$, z użyciem czterech mnożeń na próbkę. Rekursywny filtr z rys. 4.7 ma dwa wejścia: $y_1[n]$ i $y_2[n]$, oraz dwa wyjścia: $u_1[n]$ i $u_2[n]$. Jeżeli na wejście tego filtru podamy kompleksoidę $y[n] = y_1[n] + jy_2[n] = \exp j(\omega_0 n + \vartheta)$ o pulsacji ω_0 i fazie początkowej ϑ , to przy warunkach początkowych: $u_1[0] = \cos \alpha$ i $u_2[0] = \sin \alpha$, na wyjściu filtru z rys. 4.7 otrzymamy sygnał świergotowy postaci $u[n] = u_1[n] + ju_2[n] = \exp j(0,5\omega_0 n^2 + 0,5\omega_0 n + \vartheta n + \alpha)$.

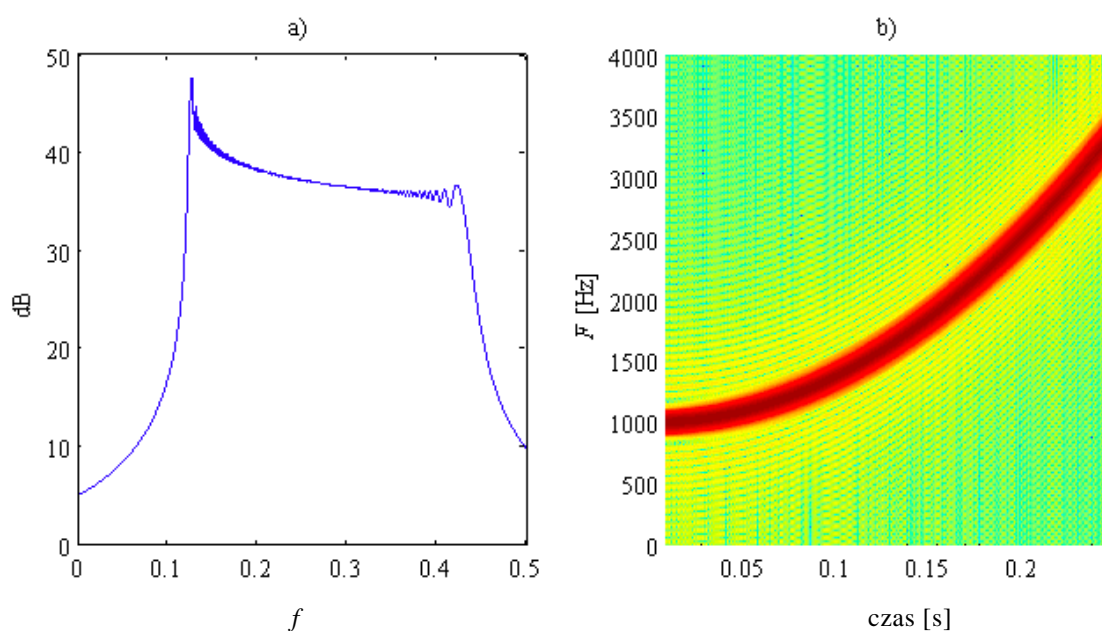
Wizualizację chwilowych błędów zespolonego sygnału świergotowego LFM o parametrach jak na rys. 4.6, wygenerowanego za pomocą oscylatora z rys. 4.7, gdzie sygnały $y_1[n]$ oraz $y_2[n]$ o postaci jak w (4.10) obliczono przy użyciu standardowych funkcji MATLABa, pokazujemy na rys. 4.8. Parametr kwantyzacji wynosi $P = 32$ bity. Wyraźnie tu widać, że każdy błąd chwilowy z rys. 4.8 jest sumą dwóch przebiegów: błędu systematycznego i przypadkowego.



Rys. 4.8. Chwilowe błędy za 1 okres $N = 2048$ Sa: a) amplitudy, b) fazy oraz c) pulsacji zespolonego sygnału świergotowego LFM na wyjściu oscylatora z rys. 4.7, gdzie sygnały sinusoidalne $y_1[n]$ oraz $y_2[n]$ obliczono przy użyciu standardowych funkcji MATLABa

Przeanalizujemy następnie czystość generowanego rekursywnie zespolonego sygnału świergotowego QFM, który otrzymujemy za pomocą oscylatora sygnałów z fazą chwilową w postaci wielomianu stopnia co najwyżej trzeciego opisanego w p. 4.5 z $\mu_1 = 0$ oraz $\mu_2 = 2(F_{\max} - F_0) / (3F_s(N-1)^2)$. Niech dalej $F_0 = 1$ kHz, $\alpha = 0$ rad,

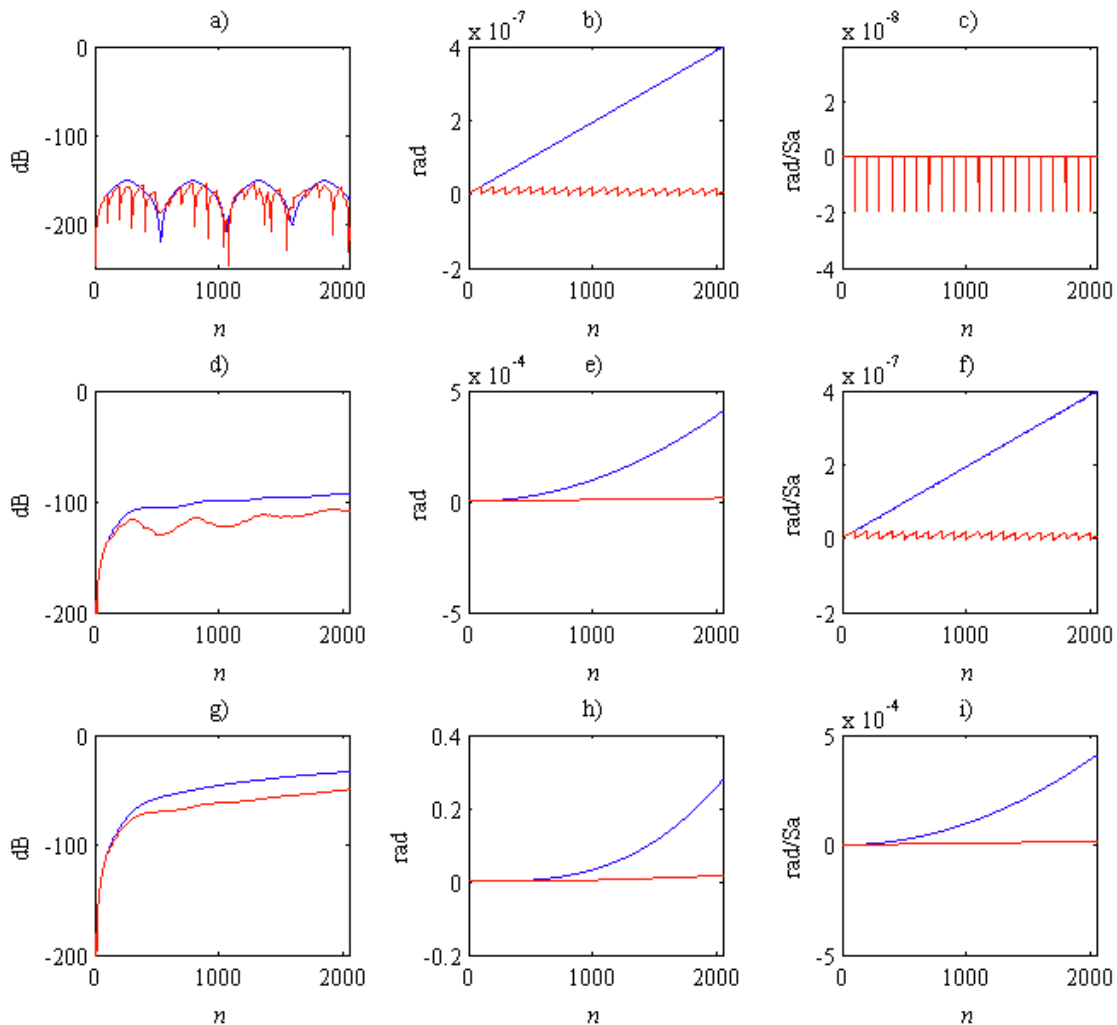
$F_{\max} = 3,5$ kHz oraz $F_s = 8$ kSa/s. Rys. 4.9 przedstawia moduł widma DFT oraz spektrogram (o tych samych nastawach jak na rys. 4.5b) dla $N = 2048$ początkowych próbek sygnału wygenerowanego rekursywnie z parametrem kwantyzacji $P = 32$ bity. Częstotliwość wygenerowanego sygnału narasta tu z kwadratem czasu od wartości początkowej $F_0 = 1$ kHz do częstotliwości maksymalnej $F_{\max} = 3,5$ kHz.



Rys. 4.9. Moduł widma DFT a) i spektrogram b) pojedynczego okresu zespolonego sygnału świergotowego QFM na wyjściu RDO z rys. 4.4

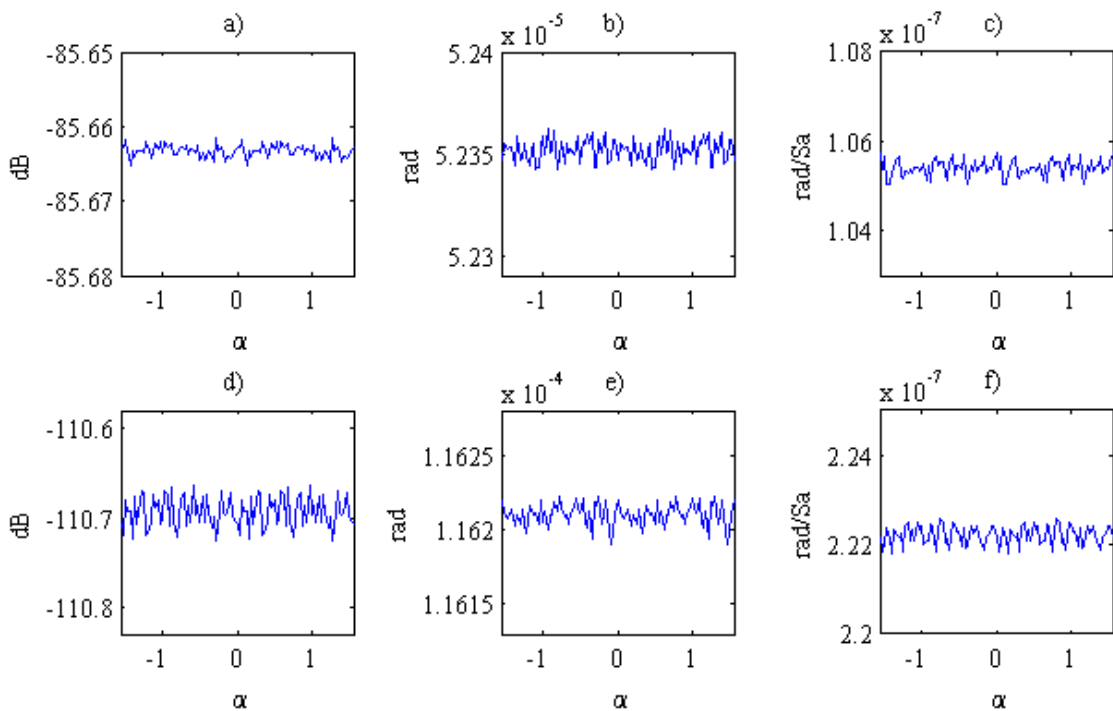
Na rys. 4.10 zamieszczamy wykresy przebiegu chwilowego błędu amplitudy, fazy i pulsacji w implementacji oscylatora z rys. 4.4. Podobnie jak na rys. 4.6d-f, na rys. 4.10g-i obserwuje się tu degradację amplitudy, fazy i pulsacji z upływem czasu. Stosowanie metod poprawy jakości sygnałów wyjściowych zmniejsza wartości wszystkich chwilowych błędów w czasie. Generujemy tu dodatkową kompleksoidę o częstotliwości $p = 100$ razy większej niż częstotliwość sygnałów sinusoidalnych z fazą chwilową postaci $2\pi(\mu_1 - 3\mu_2) + 6\pi\mu_2 n$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Wykresy chwilowego błędu amplitudy, fazy oraz pulsacji w implementacji oscylatora z omówioną metodą poprawy czystości generowanych przebiegów pokazujemy na rys. 4.10 (kolor czerwony). Tu także (por. badanie jakości generowanego rekursywnie sygnału świergotowego LFM, którą przeprowadziliśmy na początku tego podpunktu), zastosowanie dodatkowych sygnałów sinusoidalnych prowadzi do znacznej redukcji chwilowego błędu amplitudy z -33.23 dB do -49.56 dB, chwilowego błędu fazy z

0,277 rad do 0,017 rad i chwilowego błędu pulsacji z $4,06 \cdot 10^{-4}$ rad/Sa do $1,56 \cdot 10^{-5}$ rad/Sa



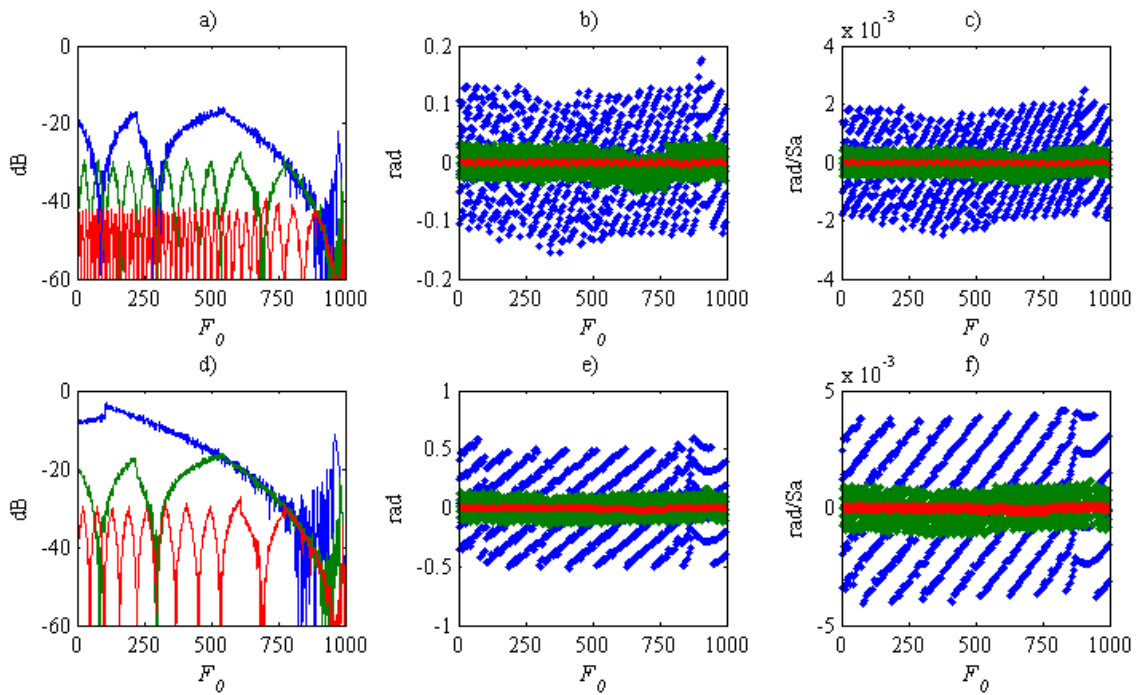
Rys. 4.10. Chwilowe błędy za 1 okres $N = 2048$ Sa: a) amplitudy, b) fazy oraz c) pulsacji kompleksoidy w rekursywnej generacji zespolonego sygnału świergotowego QFM z algorytmem poprawy jakości (kolor czerwony) i bez tego algorytmu (kolor niebieski); chwilowe błędy za 1 okres $N = 2048$ Sa: d) amplitudy, e) fazy oraz f) pulsacji zespolonego sygnału świergotowego LFM w rekursywnej generacji zespolonego sygnału świergotowego QFM z algorytmem poprawy jakości (kolor czerwony) i bez tego algorytmu (kolor niebieski) oraz chwilowe błędy: za 1 okres $N = 2048$ Sa: g) amplitudy, h) fazy oraz i) pulsacji zespolonego sygnału świergotowego QFM na wyjściu RDO z rys. 4.4 z algorytmem poprawy jakości (kolor czerwony) i bez tego algorytmu (kolor niebieski)

Przebadamy teraz wpływ zadanych parametrów sygnałów świergotowych (4.5) i (4.6) na jakość generowanych sygnałów dla RDO z rys. 4.1 i rys. 4.4. Gdy chwilowe błędy rekursywnie generowanych sygnałów narastają w czasie, to istotna jest informacja o jakości generowanych przebiegów w chwili zakończenia obliczeń, czyli wartości chwilowych błędów dla $n = N - 1$. Na rys. 4.11 przedstawiamy zależności bieżących błędów w chwili zakończenia obliczeń od zadanej fazy początkowej, przyjmującej wartości od $-\pi/2$ do $\pi/2$ rad co $\pi/100$ rad, dla oscylatora sygnału świergotowego LFM o dwóch nastawach: $F_0 = 50$ Hz, $F_{\max} = 1$ kHz, $F_s = 8$ kSa/s, $N = 1024$ Sa, $P = 32$ bity oraz $F_0 = 1$ kHz, $F_{\max} = 10$ kHz, $F_s = 48$ kSa/s, $N = 1024$ Sa, $P = 32$ bity. Łatwo sprawdzić, że, przy tych nastawach, chwilowe błędy rekursywnie generowanych sygnałów narastają w czasie, dlatego na rys. 4.11 wizualizujemy jedynie ich wartości dla $n = N - 1$.

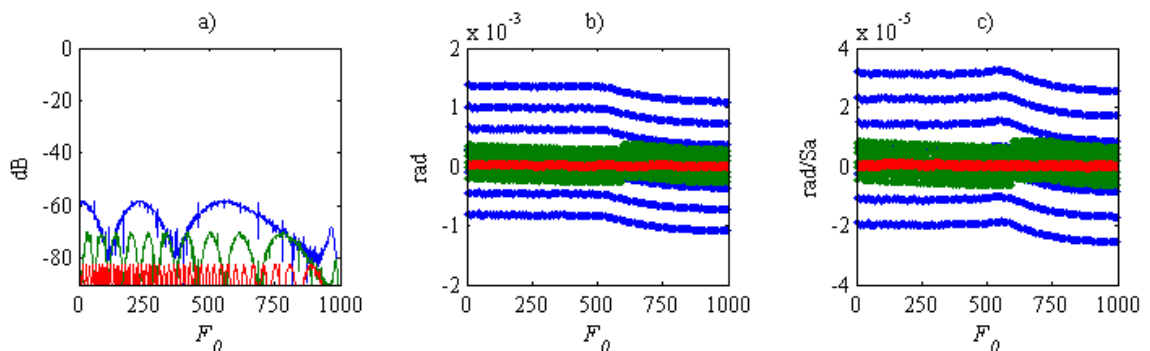


Rys. 4.11. Wartości chwilowych błędów: a) amplitudy, b) fazy oraz c) pulsacji sygnału świergotowego LFM na wyjściu RDO z rys. 4.1 w chwili zakończenia obliczeń w funkcji α dla $F_0 = 50$ Hz, $F_{\max} = 1$ kHz, $F_s = 8$ kSa/s, $N = 1024$ Sa, $P = 32$ bity oraz wartości chwilowych błędów: d) amplitudy, e) fazy oraz f) pulsacji sygnału świergotowego LFM na wyjściu RDO z rys. 4.1 w chwili zakończenia obliczeń w funkcji α dla $F_0 = 1$ kHz, $F_{\max} = 10$ kHz, $F_s = 48$ kSa/s, $N = 1024$ Sa, $P = 32$ bity

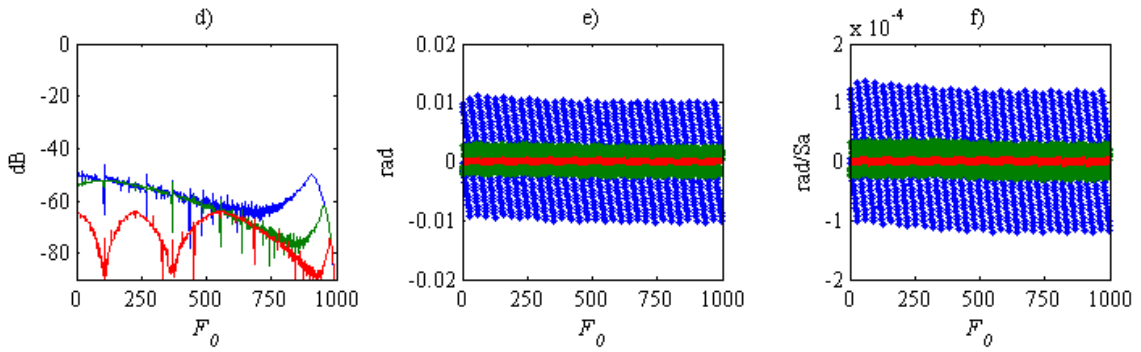
Wizualizacja wartości bieżących błędów z rys. 4.11 sugeruje, że zadana faza początkowa sygnału świergotowego LFM nie ma dużego wpływu na jakość generowanych sygnałów w ostatniej iteracji obliczeń próbek wyjściowych RDO. W ramach eksperymentów autor rozprawy wykonał podobne obliczenia przy tych samych nastawach co na rys. 4.11 dla oscylatora sygnału świergotowego QFM o strukturze z rys. 4.4. Dla tego RDO faza początkowa ma również niewielki wpływ na jakość generowanych sygnałów. Co interesujące, z rys. 4.11 wynika, że na jakość sygnałów wyjściowych RDO z rys. 4.1 większy wpływ niż zadana faza początkowa sygnału mają iloraz zadanych częstotliwości: F_0 i F_{\max} oraz szybkości próbkowania F_s . Przykładowo, uzyskana wartość chwilowego błędu amplitudy w sytuacji z rys. 4.11a dla $\alpha = 0$ rad jest o 25,05 dB większa od wartości tego błędu w sytuacji z rys. 4.11d dla $\alpha = 0$ rad. Mając to na uwadze, w kolejnym kroku przebadamy jakość generowanych sygnałów w zależności od zadanej częstotliwości początkowej F_0 . Tym razem zadajemy: $\alpha = 0$ rad, $F_{\max} = 1$ kHz, $F_s = 4$ kSa/s oraz $F_0 = M$ z $M = 1, 2, \dots, F_{\max} - 1$. Obliczenia wykonujemy dla okresu powtarzania $N = 2^7$ i 2^8 próbek i P równego 16, 18 i 20 bitów w generacji sygnału świergotowego LFM i P równego 28, 30 i 32 bitów w generacji sygnału świergotowego QFM. Wartości współczynnika $P = 28, 30$ i 32 bity dla oscylatora sygnału świergotowego QFM autor rozprawy dobrał tak aby uniknąć dużego błędu fazy (dla $P = 16$ bitów jest on większy od $\pi/2$ rad). We wszystkich badanych sytuacjach chwilowe błędy amplitudy, fazy i pulsacji narastają wraz z upływem czasu, podobnie jak na rys. 4.6d-f oraz rys. 4.10d-i, stąd największe wartości tych błędów obserwujemy w chwili zakończenia obliczeń. Wykresy wartości chwilowych błędów sygnału świergotowego LFM na wyjściu RDO z rys. 4.1 dla $n = N - 1$ prezentujemy na rys. 4.12, a sygnału świergotowego QFM na wyjściu RDO z rys. 4.4 na rys. 4.13. Wykresy wartości bieżących błędów amplitudy z rys. 4.12a, 4.13d oraz z rys. 4.13a, 4.13d w funkcji zadanej częstotliwości F_0 mają charakterystyczny kształt, który *de facto* sugeruje spore rozbieżności jakości generowanych sygnałów świergotowych dla różnych wartości F_0 . Ciekawym spostrzeżeniem jest również to, że im większa wartość dokładności kwantyzacji P , tym przedstawione wykresy chwilowych błędów amplitudy w funkcji zadanej częstotliwości F_0 stają się bardziej „zafalowane”. Podobny efekt obserwujemy, gdy N , parametr oznaczający okres powtarzania (powiązany z zadanymi z góry parametrami świergotu), maleje.



Rys. 4.12. Wartości chwilowych błędów: a) amplitudy, b) fazy oraz c) pulsacji sygnału świergotowego LFM na wyjściu RDO z rys. 4.1 w chwili zakończenia obliczeń w funkcji F_0 dla $\alpha = 0$ rad, $F_{\max} = 1$ kHz, $F_s = 4$ kSa/s, $N = 2^7$ Sa i $P = 16$ bitów (kolor niebieski), 18 bitów (kolor zielony) i 20 bitów (kolor czerwony) oraz wartości chwilowych błędów: d) amplitudy, e) fazy oraz f) pulsacji sygnału świergotowego LFM na wyjściu RDO z rys. 4.1 w chwili zakończenia obliczeń w funkcji F_0 dla $\alpha = 0$ rad, $F_{\max} = 1$ kHz, $F_s = 4$ kSa/s, $N = 2^8$ Sa i $P = 16$ bitów (kolor niebieski), 18 bitów (kolor zielony) i 20 bitów (kolor czerwony)

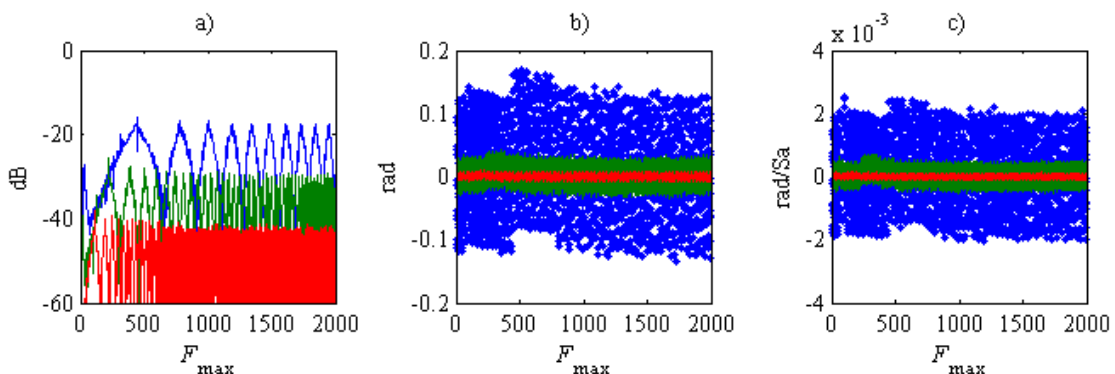


Rys. 4.13. Wartości chwilowych błędów: a) amplitudy, b) fazy oraz c) pulsacji sygnału świergotowego QFM na wyjściu RDO z rys. 4.4 w chwili zakończenia obliczeń w funkcji F_0 dla $\alpha = 0$ rad, $F_{\max} = 1$ kHz, $F_s = 4$ kSa/s, $N = 2^7$ Sa i $P = 28$ bitów (kolor niebieski), 30 bitów (kolor zielony) i 32 bitów (kolor czerwony)

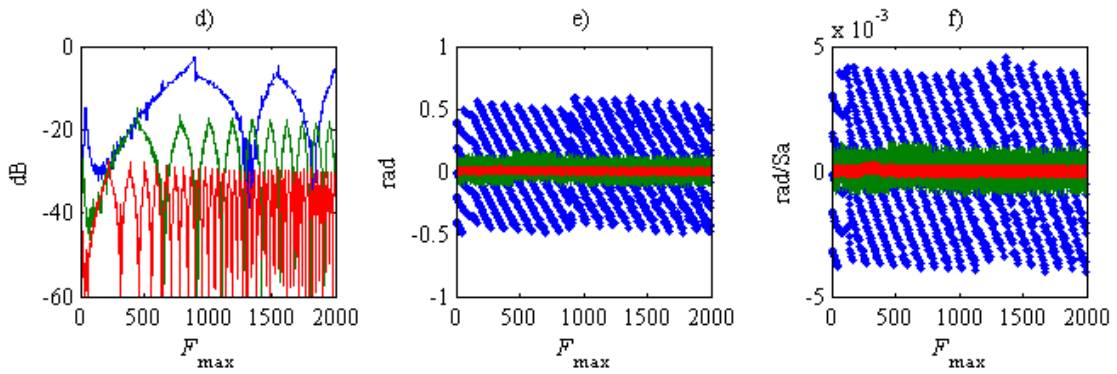


Cd. rys. 4.13. Wartości chwilowych błędów: d) amplitudy, e) fazy oraz f) pulsacji sygnału świergotowego QFM na wyjściu RDO z rys. 4.4 w chwili zakończenia obliczeń w funkcji F_0 dla $\alpha = 0$ rad, $F_{\max} = 1$ kHz, $F_s = 4$ kSa/s, $N = 2^8$ Sa i $P = 28$ bitów (kolor niebieski), 30 bitów (kolor zielony) i 32 bitów (kolor czerwony)

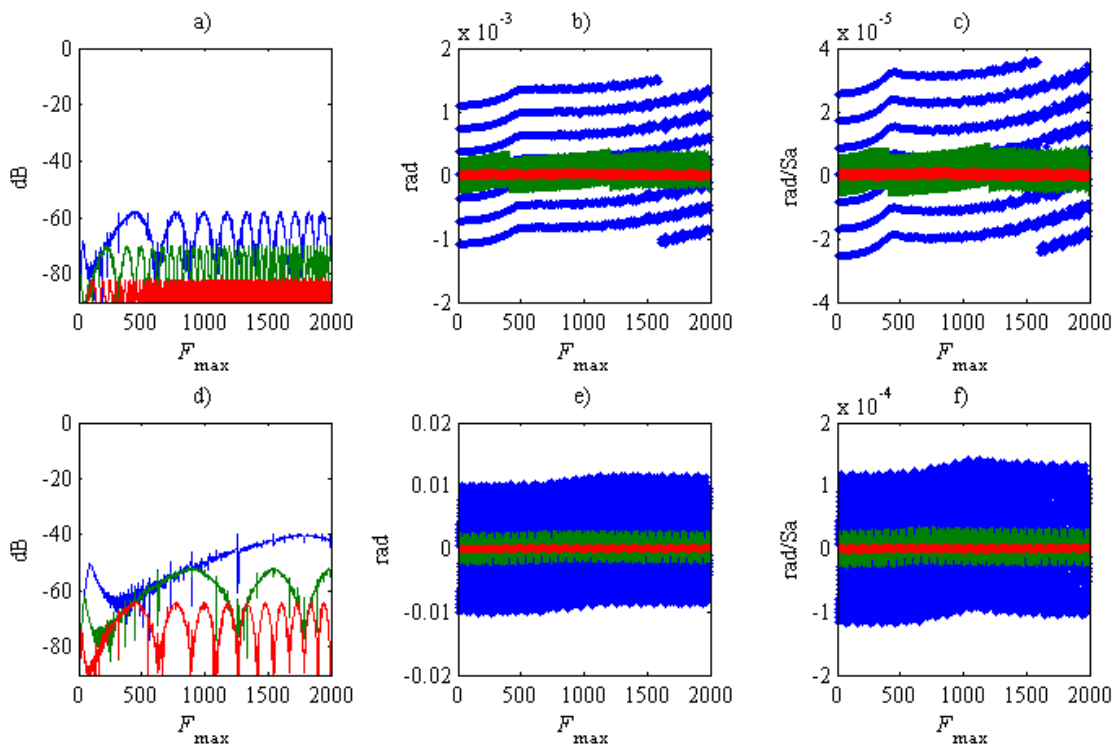
Kolejne badanie przeprowadzamy dla różnych wartości zadanej, regulowanej częstotliwości maksymalnej F_{\max} . Na rys. 4.14 i rys. 4.15 zamieszczono wykresy wartości chwilowych błędów amplitudy, fazy i pulsacji w funkcji $F_{\max} = M$, $M = 1, 2, \dots, F_s/2 - 1$, w chwili zakończenia obliczeń kolejno, na wyjściu oscylatora sygnału świergotowego LFM z rys. 4.1 i QFM z rys. 4.4. Nastawy oscylatorów z rys. 4.14 i 4.15 wynoszą: $\alpha = 0$ rad, $F_0 = 0$ Hz, $F_s = 4$ kSa/s dla $N = 2^7$ i 2^8 próbek i $P = 16, 18$ i 20 bitów. Autor niniejszej rozprawy sprawdził, że tu także chwilowe błędy narastają z upływem czasu, stąd chwilowe błędy amplitudy, fazy i pulsacji przyjmują wartości maksymalne dla $n = N - 1$.



Rys. 4.14. Wartości chwilowych błędów: a) amplitudy, b) fazy oraz c) pulsacji sygnału świergotowego LFM na wyjściu RDO z rys. 4.1 w chwili zakończenia obliczeń w funkcji F_{\max} dla $\alpha = 0$ rad, $F_0 = 0$ Hz, $F_s = 4$ kSa/s, $N = 2^7$ Sa i $P = 16$ bitów (kolor niebieski), 18 bitów (kolor zielony) i 20 bitów (kolor czerwony)



Cd. rys. 4.14. Wartości chwilowych błędów: d) amplitudy, e) fazy oraz f) pulsacji sygnału świergotowego LFM na wyjściu RDO z rys. 4.1 w chwili zakończenia w funkcji F_{\max} dla $\alpha = 0$ rad, $F_0 = 0$ Hz, $F_s = 4$ kSa/s, $N = 2^8$ Sa i $P = 16$ bitów (kolor niebieski), 18 bitów (kolor zielony) i 20 bitów (kolor czerwony)



Rys. 4.15. Wartości chwilowych błędów: a) amplitudy, b) fazy oraz c) pulsacji sygnału świergotowego QFM na wyjściu RDO z rys. 4.4 w chwili zakończenia obliczeń w funkcji F_{\max} dla $\alpha = 0$ rad, $F_0 = 0$ Hz, $F_s = 4$ kSa/s, $N = 2^7$ Sa i $P = 28$ bitów (kolor niebieski), 30 bitów (kolor zielony) i 32 bitów (kolor czerwony) oraz wartości chwilowych błędów: d) amplitudy, e) fazy oraz f) pulsacji sygnału świergotowego QFM na wyjściu RDO z rys. 4.4 w chwili zakończenia obliczeń w funkcji F_{\max} dla $\alpha = 0$ rad, $F_0 = 0$ Hz, $F_s = 4$ kSa/s, $N = 2^8$ Sa i $P = 28$ bitów (kolor niebieski), 30 bitów (kolor zielony) i 32 bitów (kolor czerwony)

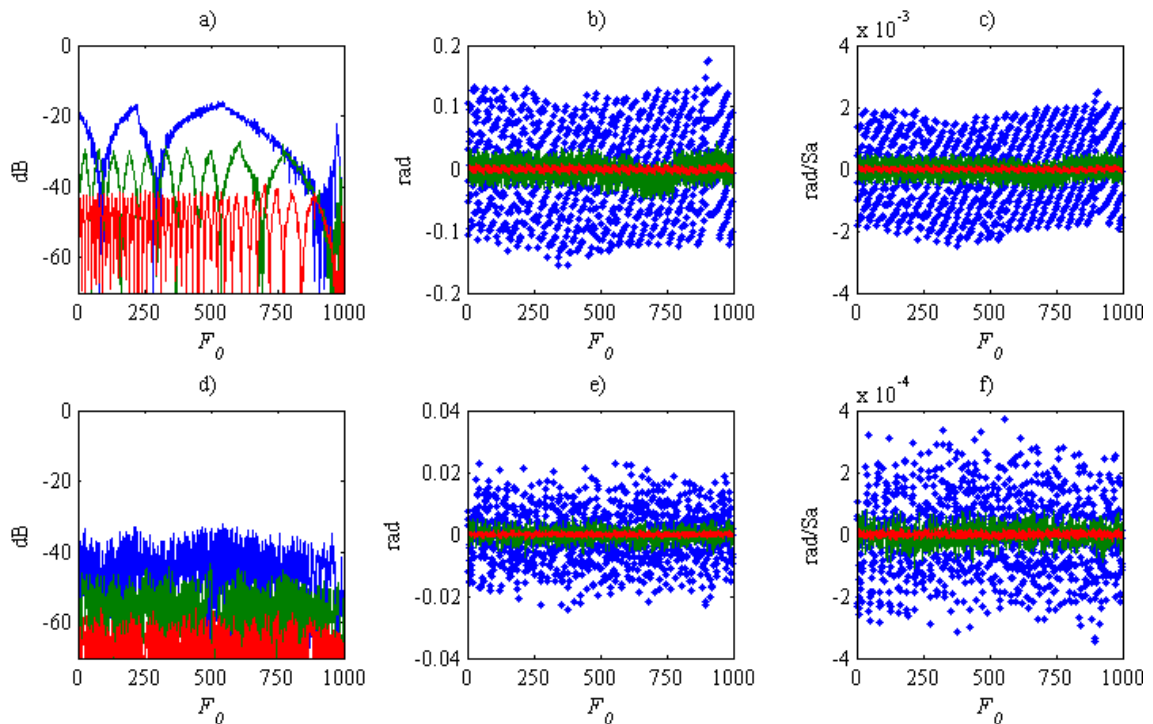
Na rys. 4.14 i 4.15, podobnie jak na rys. 4.12a i 4.12d oraz rys. 4.13a i 4.13d, im większa wartość dokładności kwantyzacji P albo im mniejsza wartość okresu powtarzania N , tym przedstawione wykresy chwilowych błędów amplitudy w funkcji zadanej, regulowanej częstotliwości maksymalnej F_{\max} stają się bardziej „zafałowane”.

Wizualizacja chwilowych błędów amplitudy, fazy i pulsacji, jak również zależności ich wartości w chwili zakończenia obliczeń od parametrów sygnałów świergotowych, pod warunkiem, że chwilowe błędy narastają wraz z upływem czasu, jest pomocna w ocenie skuteczności algorytmów poprawy czystości sygnałów na wyjściu RDO w roli modulatora. Algorytm poprawy czystości z [Cur00b] zaimplementowano dla sygnału kompleksoidy $y[n]$ w rekursywnej generacji sygnału świergotowego LFM dla nastaw z rys. 4.12a-c i różnych wartości zadanej częstotliwości $F_0 = M$, $M = 1, 2, 3, \dots, 999$. Generujemy tu dodatkową kompleksoidę o częstotliwości $p = 10$ razy większej niż częstotliwość sygnałów z fazą chwilową postaci $2\pi(\mu_1 - 3\mu_2) + 6\pi\mu_2 n$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$. Otrzymane wyniki obliczeń zestawiono na rys. 4.16d-f. Dla porównania na rys. 4.16a-c zamieszczamy te same przebiegi co na rys. 4.12a-c, czyli bez implementacji wspomnianego algorytmu poprawy jakości. Zauważmy, że na rys. 4.16d-f obserwujemy znaczną poprawę czystości generowanych przebiegów. Przykładowo, dla $P = 16$ bitów (przebiegi o kolorze niebieskim na rys. 4.16), maksymalna wartość (czyli w chwili zakończenia obliczeń) chwilowego błędu amplitudy przy różnych wartości zadanej częstotliwości F_0 została zredukowana z $-15,86$ dB (rys. 4.16a) do $-32,2$ dB (rys. 4.16d), maksymalna wartość modułu chwilowego błędu fazy z $0,18$ rad (rys. 4.16b) do $0,024$ rad (rys. 4.16e), a maksymalna wartość modułu chwilowego błędu pulsacji z $2,5 \cdot 10^{-3}$ rad/Sa (rys. 4.16c) do $3,72 \cdot 10^{-4}$ rad/Sa (rys. 4.16f).

Nadmienimy, że w ramach eksperymentów autor niniejszej rozprawy zaimplementował wspomnianą metodę kontroli błędów z $p = 10$ również dla oscylatora LFM z nastawami z rys. 4.14 oraz dla QFM z nastawami z rys. 4.13 i rys. 4.15, a więc także przy różnych wartościach parametrów F_0 i F_{\max} . Ta implementacja również prowadziła do poprawy jakości sygnałów świergotowych na wyjściu RDO w roli modulatora.

Podsumowując, pokazaliśmy tu, że możliwe jest sterowanie czystością sygnałów świergotowych wygenerowanych rekursywnie poprzez implementację algo-

rytmów poprawy czystości sygnału kompleksoidy używanego w rekursywnej generacji sygnałów świergotowych (rys. 4.6, rys. 4.10, rys. 4.16) oraz przebadaliśmy wpływ zadanych parametrów sygnałów świergotowych na ich jakość (rys. 4.11-4.15).



Rys. 4.16. Wartości chwilowych błędów: a) amplitudy, b) fazy oraz c) pulsacji sygnału świergotowego LFM na wyjściu RDO z rys. 4.1 w chwili zakończenia obliczeń w funkcji F_0 dla $\alpha = 0$ rad, $F_{\max} = 1$ kHz, $F_S = 4$ kSa/s, $N = 2^7$ Sa i $P = 16$ bitów (kolor niebieski), 18 bitów (kolor zielony) i 20 bitów (kolor czerwony) bez algorytmu poprawy czystości oraz wartości chwilowych błędów: d) amplitudy, e) fazy oraz f) pulsacji sygnału świergotowego LFM na wyjściu RDO z rys. 4.1 w chwili zakończenia obliczeń w funkcji F_0 dla $\alpha = 0$ rad, $F_{\max} = 1$ kHz, $F_S = 4$ kSa/s, $N = 2^7$ Sa i $P = 16$ bitów (kolor niebieski), 18 bitów (kolor zielony) i 20 bitów (kolor czerwony) z tym algorytmem

4.8. Oscylator zespolonego sygnału z fazą chwilową w postaci wielomianu dowolnego stopnia

Systematyzując omawiane wcześniej algorytmy generacji sygnałów świergotowych, zajmiemy się teraz opracowaniem algorytmu rekursywnej generacji zespo-

lonego sygnału z fazą chwilową wyrażoną w postaci wielomianu dowolnego skończonego stopnia

$$w[n] = \exp j(\pi\mu_0 n + \pi\mu_1 n^2 + \pi\mu_2 n^3 + \dots + \pi\mu_{k-1} n^k + \alpha), \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.23)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

gdzie μ_{k-1} jest k -tym współczynnikiem fazy świergotu. Dodajmy, że współczynniki fazy świergotu z (4.23) dobiera się tak, aby pulsacja chwilowa sygnału (4.23) nie wykraczała poza pasmo Nyquista $|\omega[n]| < \pi$.

Wzór (4.23) stanowi ogólną postać rozważanych tu sygnałów z modulacją częstotliwości. Przypomnijmy tu, że rekursywną generację sygnału (4.23) z $\mu_0 = \omega_0/\pi = 2f$ i $k = 1$ przebadaliśmy w rozdz. 2 i 3, a z $\mu_0 = 2f$ i $k = 2$ i 3 we wcześniejszych punktach (tj. p. 4.4 i p. 4.5) tego rozdziału.

Niech

$$g[i] = \begin{cases} 0 & \text{dla } i = 0 \\ 1 & \text{dla } i = 1 \\ n^i - (n-1)^{i-1} & \text{dla } i = 2, 3, \dots, l, \dots, k \end{cases} \quad (4.24)$$

Wartości ciągu $g[i]$ z (4.24) zamieszczamy także w tab. 4.1 z nieco innym sposobem ich prezentacji. Niech $d_k[n] = w[n]$ i niech ciąg $d_{k-1}[n]$ powstaje przez zastąpienie składników n^i , $i = 0, 1, 2, \dots, k$, składnikami $g[i]$ w $d_k[n]$, natomiast ciąg $d_{k-2}[n]$ powstaje przez zastąpienie składników n^i , $i = 0, 1, 2, \dots, k-1$, składnikami $g[i]$ w $d_{k-1}[n]$ itd., dochodząc do $d_0[n]$. Następnie oznaczamy $\mathbf{d}_k[n] = [\text{Re } d_k[n] \quad \text{Im } d_k[n]]^T$.

Tab. 4.1. Wartości ciągu $g[i]$ z (4.24)

i	$g[i]$
0	0
1	1
2	$2n - 1$
3	$3n^2 - 3n + 1$
...	...
k	$\sum_{m=1}^k \binom{k}{m} (-1)^{m-1} n^{k-m}$

Niech dalej a_l , $l = 0, 1, 2, \dots, k$, równa się wartościom stojącym przy n w zerowej potędze w wyrażeniu na fazę chwilową ciągu $d_l[n]$ oraz niech

$$\mathbf{D}_l[n] = \begin{bmatrix} \operatorname{Re} d_l[n] & -\operatorname{Im} d_l[n] \\ \operatorname{Im} d_l[n] & \operatorname{Re} d_l[n] \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Proponowany tu algorytm rekursywnej generacji sygnału z (4.23) składa się z k kroków:

Krok 1: Sygnał $d_k[n]$ generujemy za pomocą równania macierzowego $\mathbf{d}_k[n] = \mathbf{D}_{k-1}[n]\mathbf{d}_k[n-1]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, z $\mathbf{d}_k[0] = [\cos a_k \quad \sin a_k]^T$.

Krok 2: Sygnał $d_{k-1}[n]$ generujemy za pomocą równania macierzowego $\mathbf{d}_{k-1}[n] = \mathbf{D}_{k-2}[n]\mathbf{d}_{k-1}[n-1]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, z $\mathbf{d}_{k-1}[0] = [\cos a_{k-1} \quad \sin a_{k-1}]^T$.

...

Krok l : Sygnał $d_{k-l+1}[n]$ generujemy za pomocą równania macierzowego $\mathbf{d}_{k-l+1}[n] = \mathbf{D}_{k-l}[n]\mathbf{d}_{k-l+1}[n-1]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, z $\mathbf{d}_{k-l+1}[0] = [\cos a_{k-l+1} \quad \sin a_{k-l+1}]^T$.

...

Krok k : Sygnał $d_1[n]$ generujemy za pomocą równania macierzowego $\mathbf{d}_1[n] = \mathbf{D}_0[n]\mathbf{d}_1[n-1]$, $n = 1, 2, 3, \dots$, z $\mathbf{d}_1[0] = [\cos a_1 \quad \sin a_1]^T$.

Podany tu algorytm można nazwać uniwersalnym. Obejmuje on bowiem rekursywny sposób generacji sygnałów świergotu LFM oraz QFM, omówione we wcześniejszych podpunktach rozdziału. Co więcej, jeżeli faza chwilowa $\varphi[n]$ sygnału jest rzeczywista i taka, by jego pulsacja chwilowa nie wykraczała poza pasmo Nyquista $|\omega[n]| < \pi$, to taką fazę można aproksymować wielomianem – tym dokładniej, im stopień wielomianu aproksymującego jest większy. Aproksymowany sygnał można wówczas wygenerować rekursywnie za pomocą zaprojektowanego powyżej RDO.

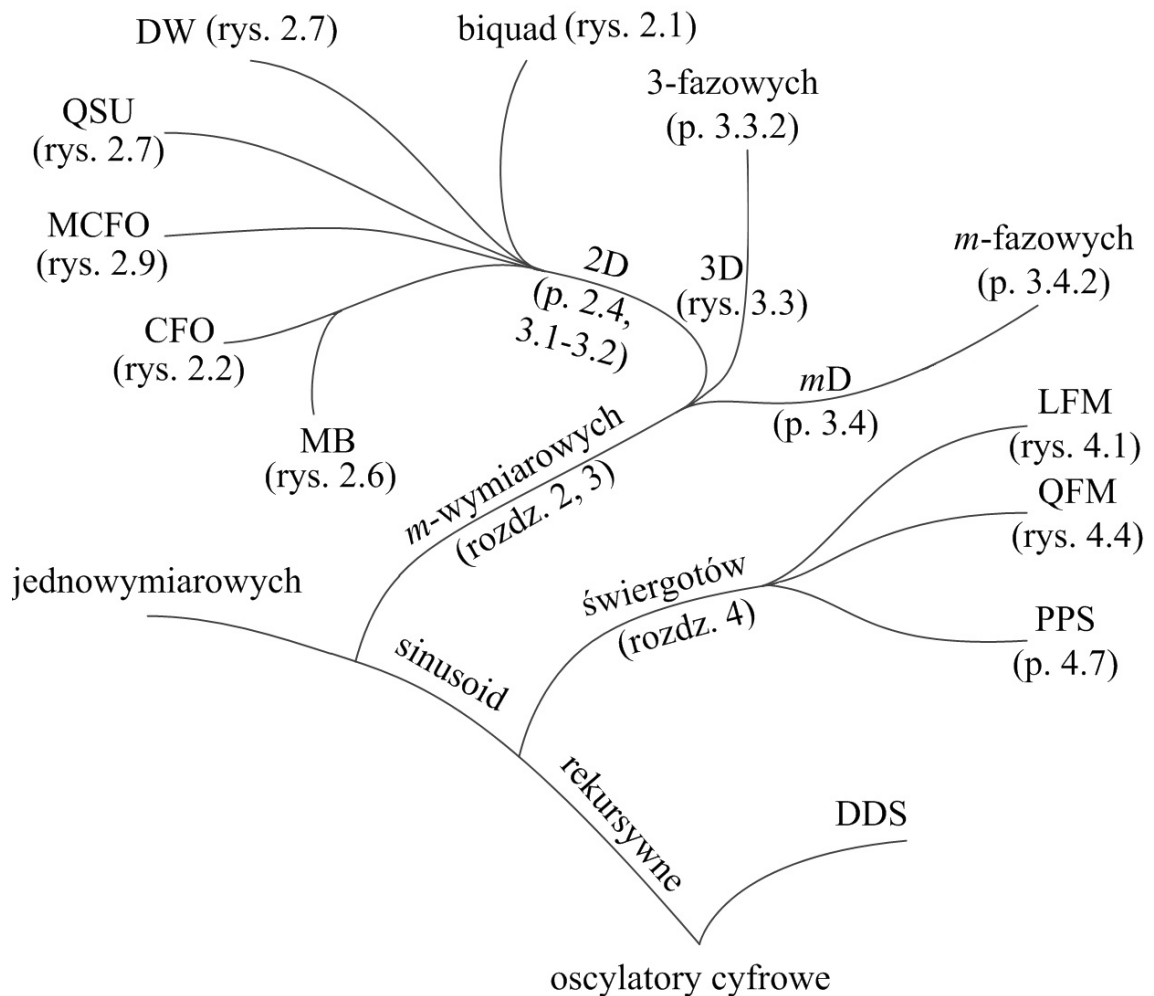
Strukturę oscylatora sygnału (4.23) z fazą chwilową w postaci wielomianu k -tego stopnia można zbudować za pomocą k struktur CFO z rys. 2.2. Wówczas wykonywanych jest $4k$ mnożeń na próbkę. Dla $k = 1$ strukturę oscylatora przedstawia rys. 3.1, dla $k = 2$ ma ona postać jak na rys. 4.1, a dla $k = 3$ – jak na rys. 4.3. Zauważmy, że liczbę mnożeń na próbkę można zredukować do $3k$, budując strukturę tego oscylatora za pomocą struktury CFO z rys. 2.5 z trzema mnożeniami na próbkę. Wówczas struktura oscylatora sygnału (4.23) z $k = 2$ jest taka, jak pokazuje rys. 4.2.

Sterowanie parametrami sygnału świergotowego odbywa się tu poprzez modyfikowanie współczynników struktury RDO oraz zadawanie warunków początkowych pracy oscylatora. Dodatkową zaletą prezentowanego tu algorytmu jest dowolność stosowania metody syntezy sygnału $d_1[n]$ w k -tym kroku algorytmu.

Dodajmy na zakończenie, że gdy decydujemy się na rekursywną generację tego sygnału, to wyniki implementacji rekursywnych oscylatorów zespolonych sygnałów świergotowych LFM oraz QFM wskazują znaczną poprawę czystości generowanych sygnałów dzięki użyciu wskazanych wyżej algorytmów poprawy jakości rekursywnych oscylatorów sinusoidalnych. Zaimplementowany w niniejszej rozprawie algorytm poprawy czystości wymaga czterech mnożeń na próbkę oraz dwóch sumatorów dwuwejściowych.

5. Podsumowanie

Powyższa rozprawa jest wynikiem pracy autora nad nowymi algorytmami i strukturami rekursywnych cyfrowych oscylatorów sygnałów sinusoidalnych i świergotowych, ich projektowaniem i analizą. Klasyfikację oscylatorów cyfrowych z etykietami, zawierającymi odpowiednie numery rozdziałów, punktów i rysunków z powyższej rozprawy przedstawiono na rys. 5.1.



Rys. 5.1. Klasyfikacja oscylatorów cyfrowych

Pierwotnie w literaturze [Fli92], [Har83], [Tur03], [Tur10] rozwinięto zagadnienie rekursywnych oscylatorów do opisu sposobu rekursywnej generacji sinusoidy dwuwymiarowej (ang. *Two-Dimensional sine* – 2D sine). W związku z tym głównym jej zadaniem było poszukiwanie konkretnych realizacji cyfrowego rekursywnego oscylatora (ang. *Recursive Digital Oscillator* – RDO) jako systemu dys-

kretnego i badanie zniekształceń w cyfrowym RDO rzeczywistym. Wszystkie zniekształcenia na wyjściu rzeczywistego RDO mają wspólne źródło, a jest nim kwantowanie sygnałów i wykonywanie działań arytmetycznych ze skończoną dokładnością. W konsekwencji, przy braku zjawiska cyklu granicznego, wraz z upływem czasu parametry sygnałów wyjściowych oscylatora ulegają zmianie, a błąd się kumuluje [Cur00a]. Stąd, o przydatności danej struktury decyduje, obok jej złożoności i parametrów sygnałów wyjściowych oscylatora, moc szumu, wrażliwość parametrów sinusoidy na kwantowanie parametrów RDO oraz cykl graniczny. Uwzględnienie tych wszystkich aspektów w procesie projektowania RDO jest zwykle trudne, dlatego też na ogół projektuje się RDO jako system dyskretny, mając na uwadze jego złożoność i postaci sygnałów wyjściowych, a następnie analizuje się szum kwantowania jego cyfrowej realizacji.

W rozprawie podjęto się rozbudowania metody projektowania rekursywnego cyfrowego oscylatora sinusoidy dwuwymiarowej (ang. *Two-Dimensional Recursive Digital Oscillator* – 2D-RDO) z [Tur03] i opracowano drugą, alternatywną metodę. W pierwszym etapie prac wyznaczono postaci sygnałów wyjściowych 2D-RDO oraz podano macierz rotacyjną tego oscylatora. W rezultacie wykazano formalną zależność pomiędzy współczynnikami struktury 2D-RDO i warunkami początkowymi, a parametrami generowanej sinusoidy. Współczynniki macierzy rotacyjnej wpływają na pulsację, amplitudę jednego z sygnałów wyjściowych i różnicę faz sygnałów wyjściowych, natomiast warunki początkowe pozwalają na sterowanie wartością amplitudy i fazy początkowej jednego z sygnałów wyjściowych. Dzięki zastosowaniu diagonalizacji macierzy do wyznaczania ogólnej postaci sygnałów wyjściowych oscylatora i macierzy rotacyjnej 2D-RDO opracowano tu nową metodę projektowania 2D-RDO, którą dalej rozwinięto i ulepszono za pomocą przekształcenia Z . W metodzie tej, chcąc zaprojektować oscylator z żądanymi parametrami sygnałów wyjściowych, oblicza się elementy macierzy rotacyjnej. Przedstawiona metoda projektowania korzysta z oryginalnego algorytmu rekursywnej generacji dwóch sinusoid, w którym można zadać dowolne amplitudy i fazy początkowe sygnałów wyjściowych. Dodatkowo, projektując dany oscylator, nie trzeba tu sprawdzać warunków niegasnących oscylacji. Korzystając z tak opracowanych algorytmów, w rozprawie opracowano oryginalny algorytm rekursywnego cyfrowego oscylatora sinusoidy wielowymiarowej (ang. *Multi-Dimensional Recursive Digital Oscillator* – mD-RDO). W rezultacie pojęcie oscylatora sinusoidalnego zostało rozszerzone do sytu-

acji, w której możliwa jest rekursywna generacja dowolnej liczby sygnałów sinusoidalnych z dowolnie zadanymi amplitudami i fazami początkowymi, czyli właśnie *mD-RDO*. W ten sposób potwierdzono pierwszą tezę rozprawy, że jest możliwe zaprojektowanie rekursywnego cyfrowego oscylatora sinusoidy wielowymiarowej o stałej pulsacji i z dowolnie zadanymi parametrami – amplitudą i fazą początkową każdego z sinusoidalnych sygnałów wyjściowych. Cechą prezentowanego tu *mD-RDO* jest to, że jego sygnały wyjściowe są kombinacjami liniowymi sygnałów wyjściowych opracowanego wcześniej *2D-RDO* oraz to, że gwarantują tę samą czystość, co te sygnały. Z powodzeniem można tu zatem sterować jakością generowanych sygnałów na wyjściu *mD-RDO*, implementując znane z literatury algorytmy poprawy jakości oscylacji tylko dla sygnałów wyjściowych *2D-RDO*, a nie dla wszystkich sygnałów na wyjściu *mD-RDO*. Dodatkowo, postać macierzy *mD-RDO* jednoczy wszystkie występujące w rozprawie i w literaturze macierze rekursywnych oscylatorów. Jej szczególnym rodzajem jest macierz oscylatora wielofazowego z dowolnie zadaną liczbą wyjściowych sygnałów sinusoidalnych.

Opracowaną tu uniwersalną postacią macierzy rotacyjnej *2D-RDO* posłużono się również w projektowaniu rekursywnych oscylatorów sygnałów świergotowych. W rozprawie założono, że uziemienny jest jeden parametr przebiegu sinusoidalnego – jego częstotliwość, oraz, że podobnie, jak rekursywny oscylator sygnałów sinusoidalnych, również rekursywny oscylator sygnałów zmodulowanych nie posiada sygnałów wejściowych, a jego pobudzeniem, a zarazem jedynymi zadanymi z góry wartościami, są warunki początkowe, w których zawarta jest informacja o uziemiennych parametrach sygnału sinusoidalnego. To założenie pozwala na zachowanie zalet pierwotnie rozwijanych w literaturze oscylatorów rekursywnych, budowanych z podstawowych elementów, takich jak układy mnożące, układy opóźniające i sumatory. Nowatorska modyfikacja rekursywnego równania *2D-RDO* do postaci macierzowej, w której wykorzystano pojęcie pulsacji chwilowej sygnału, umożliwiła autorowi tej rozprawy opracowanie oryginalnego algorytmu oscylatora sygnału zespolonego z fazą chwilową wyrażoną jako wielomian dowolnego stopnia (ang. *Polynomial Phase Signal – PPS*). W ten sposób potwierdzono drugą tezę rozprawy, że jest możliwe zaprojektowanie rekursywnego cyfrowego oscylatora sygnału zespolonego z fazą chwilową wyrażoną jako wielomian dowolnego stopnia. Zaznaczmy, że czystość sygnałów wyjściowych tego oscylatora może być skutecznie poprawiana przez implementację algorytmów poprawy jakości sygnałów sinusoidalnych. Do podania

algorytmu tego oscylatora autor dochodził etapami, po udanym zaprojektowaniu oscylatora zespolonego sygnału świergotowego z liniową (ang. *Linear Frequency Modulation* – LFM) oraz kwadratową (ang. *Quadratic Frequency Modulation* – QFM) modulacją częstotliwości, które to znajdują najwięcej praktycznych zastosowań, a stanowią przykłady oscylatora zespolonego sygnału z fazą chwilową wyrażoną jako wielomian skończonego stopnia (ang. *Polynomial Phase Signal* – PPS). Dodajmy, że opracowany tu RDO sygnału świergotowego LFM (4.5) może służyć jako binarny modulator świergotowy (ang. *binary chirp modulator*). W algorytmie z rys. 4.1 należy zmieniać znaki współczynnika przy $\sin 2\pi\mu_1$ i $-\sin 2\pi\mu_1$ na przeciwne i warunki początkowe z: $y_1[0] = \cos(-\pi\mu_1 + 2\pi F_0/F_s)$ i $y_2[0] = \sin(-\pi\mu_1 + 2\pi F_0/F_s)$, na: $y_1[0] = \cos(\pi\mu_1 + 2\pi F_{\max}/F_s)$ i $y_2[0] = \sin(\pi\mu_1 + 2\pi F_{\max}/F_s)$, w chwilach zmiany sygnału modulującego z zera na jedynkę. Zauważmy też, że gdy fazę chwilową zespolonego sygnału aproksymujemy za pomocą wielomianu skończonego stopnia, to taki sygnał jest sygnałem PPS. Dalej, zgodnie z drugą tezą niniejszej rozprawy, taki sygnał można wygenerować rekursywnie.

Trzecia z tez postawionych na początku rozprawy brzmiała następująco: bieżące błędy: amplitudy, fazy i pulsacji chwilowej, są indykatorami jakości generowanych rekursywnie przebiegów sinusoidalnych i świergotowych.

Potrzeba nowej koncepcji analizy zniekształceń w RDO wynikała stąd, że generowane rekursywnie przebiegi są z reguły – dla sinusoidalnego RDO – czy z założenia – dla RDO w roli modulatora – niestacjonarne. Klasyczne badanie jakości oscylacji w kategoriach czystości widmowej generowanej sinusoidy nie zdaje tu egzaminu, ponieważ wymaga założenia stacjonarności badanego przebiegu.

W nowej, opracowanej tu koncepcji badania jakości generowanych przebiegów wizualizujemy różnicę modułów, faz i pulsacji pomiędzy generowanym przebiegiem zespolonym a sygnałem idealnym (pożądanym) zwane tu, odpowiednio, chwilowymi (bieżącymi) błędami: amplitudy w dB, fazy w rad i pulsacji w rad/Sa. Pokazują one osobno, jak parametry generowanych przebiegów ulegają degradacji z upływem czasu. Na wykresach chwilowych błędów wyraźnie widać szybkość narastania błędu (każdego parametru generowanego sygnału osobno) w czasie i zachodzący cykl graniczny. Po jego wystąpieniu przebieg sinusoidalny ustacjonarnia się i może być analizowany metodami fourierowskimi.

Inną istotną cechą opisaną tu koncepcji badania jakości oscylacji jest jej uniwersalność. W rozprawie posługujemy się nią kolejno w badaniu czystości generowanych sygnałów 2D-RDO, 3D-RDO, będących szczególnymi odmianami mD -RDO oraz RDO w roli modulatora, zarówno dla sygnałów o zadanej pulsacji współmiernej, jak i niewspółmiernej z π . W konsekwencji powyższe badanie jest ułatwione, ponieważ nie jest konieczne, aby generowany sygnał był okresowy. Dodatkowo, dzięki tej nowej koncepcji badania czystości przebiegów, możliwe jest również czytelne pokazanie wpływu zadanych parametrów generowanych przebiegów, warunków początkowych i czasu na jakość oscylacji.

Ważnym i aktualnym zagadnieniem związanym z projektowaniem RDO jest poszukiwanie takich realizacji, w których wpływ szumów własnych oscylatora na generowane przebiegi byłby minimalny. Wizualizacja bieżących błędów umożliwia analizę porównawczą opracowanych realizacji RDO. W tym, o przewadze danej struktury mogą decydować: szybkość narastania błędu oraz wystąpienie cyklu granicznego. Zastosowane powyższe wskaźniki jakości generowanych sygnałów są pomocne w wyborze takiej struktury, która zapewnia spełnienie narzuconych wymagań projektowych. Również, mogą stanowić pomoc w wyborze odpowiedniego algorytmu poprawy jakości oscylacji, znanego z literatury, tak, aby wymagania projektowe były spełnione.

Podsumowując, wprowadzone tu mierniki badania dokładności generowanych rekursywnie przebiegów – chwilowe błędy – obrazują zjawiska jakościowe zachodzące w zaimplementowanych RDO, co czyni je praktycznymi indykatorami jakości generowanych rekursywnie przebiegów niestacjonarnych. Dowodzi to słuszności trzeciej tezy postawionej w rozprawie.

Bibliografia

- [Abe09] Abeysekera S. S.: Performance analysis of an autocorrelation based frequency tracker for LFM and QFM signals, 7th International Conference on Information, Communications and Signal Processing ICICS 2009, December 2009, pp. 1-5.
- [Abu86a] Abu-El-Haija A. I., Al-Abraham M. M.: Digital oscillator having low sensitivity and roundoff errors, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-22, No. 1, January 1986, pp. 23-32.
- [Abu86b] Abu-El-Haija A. I., Al-Abraham M. M.: Improving performance of digital sinusoidal oscillators by means of error feedback circuits, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-33, No. 4, April 1986, pp. 373-379.
- [Abu94] Abu-El-Haija A. I., Al-Abraham M. M.: Recursive digital sine wave oscillators using the TMS32010 DSP, IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference IMTC/94 Advanced Technologies in I & M, May 1994, pp. 792-796.
- [Aco00] Acosta G. G., Verucchi C. J., Gelso E. R.: A current monitoring system for diagnosing electrical failures in induction motors, Mechanical Systems and Signal Processing 20, Vol. 4, 2000, pp. 953-965.
- [Adl95] Adler D. E., Viveiros E. A.: Direct digital synthesis applications for radar development, IEEE International Radar Conference, May 1995, pp. 224-226.
- [Aga75] Agarwal R.C., Burrus C.S.: New recursive digital filter structures having very low sensitivity and roundoff noise, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-22, No. 12, December 1975, pp. 921-927.
- [Ahm86] Ahmad I., Abu-El-Haija A.: Improving performance of digital sinusoidal oscillators by means of error feedback circuits, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. CAS-33, No. 4, April 1986, pp. 373-380.
- [Al-01] Al-Abraham M. M.: A multifrequency range digital sinusoidal oscillator with high resolution and uniform frequency spacing, IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Signal Processing, Vol. 48, No. 9, September 2001, pp. 872-876.
- [Al-03] Al-Khalili D., Langlois J. M. P.: Novel approach on the design of direct digital frequency synthesizers based on linear interpolation, IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing, Vol. 50, No. 9, September 2003, pp. 567-578.

- [Al-97] Al-Ibrahim M. M., Al-Khateeb A. M.: Digital sinusoidal oscillator with low and uniform frequency spacing, *IEEE Proceedings – Circuits, Devices and Systems*, Vol. 144, No. 3, June 1997, pp. 185-189.
- [Ale05] Alegria F. A., Moschitta A., Carbone P.: Effective ADC linearity testing using sinewaves, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 52, No. 7, July 2005, pp. 941-955.
- [Al-I03] Al-Ibrahim M. M.: A new hardware-efficient digital sinusoidal oscillator with low- and uniform-frequency spacing, *Electrical Engineering*, Vol. 85, No. 5, November 2003, pp. 255-260.
- [Ali05] Alipi C., Catelani M., Fort A.: Automated selection of test frequencies for fault diagnosis in analog electronic circuits, *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 54, No. 3, June 2005, pp. 1033-1044.
- [Alw06] Alwan N. A. S.: A fully pipelined systolic array for sinusoidal sequence generation, *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 55, No. 5, May 2006, pp. 636-639.
- [And92] Andrews V., Chang Ch., Cayo J. D., Sabin S.: A monolithic digital chirp synthesizer chip with I and Q channels, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 27, No. 10, October 1992, pp. 1321-1326.
- [Asg93] Asghar S. M., Linz A. R.: Frequency controlled recursive oscillator having sinusoidal output, U. S. Patent 5 204 624, April 1993.
- [Bar96] Bartoszewicz J.: *Wykład ze statystyki matematycznej*, PWN, Warszawa, 1996.
- [Bel00] Bellaouar A., O'brecht M. S.: Low-power direct digital frequency synthesis for wireless communications, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 35, No. 3, March 2000, pp. 385-390.
- [Ber73] Berni A. J., Gregg W. D.: On the utility of chirp modulation for digital signalling, *IEEE Transactions on Communications*, Vol. COM-21, No. 6, June 1973, pp. 748-751.
- [Ber97] Bernardinis F., Roncella R., Saletti R.: A single-chip 1,200 sinusoid real-time generator for additive synthesis of musical signals, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing ICASSP-97*, Vol. 1, No. 1, April 1997, pp. 427-430.
- [Bia76] Andrzej Białyński-Birula A.: *Algebra liniowa z geometrią*, Biblioteka Matematyczna 48, PWN, Warszawa 1976.

- [Bli08] Blinder S. M.: Guide to Essential Math: A Review for Physics, Chemistry and Engineering Students (Complementary Science), Academic Press, 2008.
- [Blo04] Blok E., Hermanowicz E., Rojewski M.: A memoryless direct digital synthesizer based on Taylor series approach, III Krajowa Konferencja Elektroniki, June 2004, pp. 303-308.
- [Bro68] Bronsztejn I. N., Siemiendajew K. A.: Matematyka. Poradnik encyklopedyczny, PWN, Warszawa 1968.
- [Car91] Cardoso A. J. M., Saraiva E. S., Computer aided detection of airgap eccentricity in operating three-phase induction motors, by Park's vector approach, IEEE Industry Applications Society Annual Meeting, September–October 1991, pp. 94–98.
- [Car94] Cardamone G., Presti L.: A direct digital frequency synthesizer using an IIR filter implemented with a DSP microprocessor, in Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics Speech and Signal Processing, Vol. 3, No. 3, Apr. 1994, pp. 201–204.
- [Chr00] Chren W. A., Ridley J. N.: Digital oscillators over finite fields, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 48, No. 8, August 2000, pp. 2406-2413.
- [Coo92] Cook P. R., Smith J. O.: The second order digital waveguide oscillator, in Proceedings of the International Computer Music Conference, October 1992, pp. 150-153.
- [Coo97] Cook P. R., Smith J. O.: System and method for real-time sinusoidal signal generation using waveguide resonance oscillators, U. S. Patent No. 5 701 393, December 1997.
- [Cor04] Cordesses L.: Direct digital synthesis: a tool for periodic wave generation (Part 1), DSP tips and tricks, IEEE Signal Processing Magazine, July 2004, Vol. 21, No. 4, pp. 50-53.
- [Cos02] Costa A. H., Hengstler S., Kasilingam D. P.: A novel chirp modulation spread spectrum technique for multiple access, IEEE 7th International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications, September 2002, pp. 73-77.
- [Cru01] Cruz S. M. A, Cardoso A. J. M.: Stator winding fault diagnosis in three-phase synchronous and asynchronous motors, by the extended Park's vector approach, IEEE Transactions on Industry Applications, Vol. 37, No. 5, September 2001, pp. 1227–1233.

- [Cur00a] Curticapean F., Palomaki K., Niittylahti J.: Hardware implementation of a quadrature digital oscillator, IEEE Nordic Signal Processing Symposium, June 2000, pp. 291-294.
- [Cur00b] Curticapean F., Niittylahti J.: Complex digital oscillator with absolute periodicity, European Signal Processing Conference EUSIPCO 2000, September 2000, pp. 1537-1540.
- [Dic00] Dick Ch., Harris F., Rice M.: Synchronization in software defined radios – carrier and timing recovery using FPGAs, IEEE Symposium on Fieldprogrammable Custom Computing Machines, April 2000, pp. 195-204.
- [Fin79] Finney R. L., Thomas G. B.: Calculus and Analytic Geometry, Manila: Addison-Wesley, 1979.
- [Fli92] Fliege N., Wintermantel J.: Complex digital oscillators and FSK modulators, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. SP-40, No. 2, February 1992, pp. 333-342.
- [Fur75] Furuno K., Mitra S. K., Hirano, K., Ito Y.: Design of digital sinusoidal oscillators with absolute periodicity, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-11, No. 6, November 1975, pp. 1286-1298.
- [Gau00] Gugler W., Huemer M., Springer A., Reindl L.: Spread spectrum communications using chirp signals, IEEE/AFCEA, EUROCOMM 2000, Information Systems for Enhanced Public Safety and Security, May 2000, pp. 166-170.
- [Gie91] Gielis G. C., van Plassche R., van Valburg J.: A 540 MHz polar-to-cartesian converter, IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol. 26, No. 11, November 1991, pp. 1645-1650.
- [Gol67] Gold B., Rader C. M.: Effects of parameter quantization on the pole of a digital filter, Proceedings of the IEEE, Vol. 55, No. 5, May 1967, pp. 688-689.
- [Gol69] Gold B., Rader C. M.: Digital Processing of Signals, New York: McGraw-Hill, 1969.
- [Gol71] Gold B., Rader C. M., Tierney J.: A digital frequency synthesizer, IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, Vol. AU-19, No. 1, March 1971, pp. 48-54.
- [Gor85] Gordon J. W., Smith J. O.: A sine generation algorithm for VLSI applications, International Computer Music Conference, 1985, pp. 165-168.

- [Gre94] Green P. R., Salus S.: A novel digital chirp generation using a dual clock field programmable gate array architecture, HF Radio Systems and Techniques, Conference Publication, No. 392, July 1994, pp. 391-395.
- [Gum72] Gumacos A. B.: Digital multiple tone generator, U. S. Patent No. 3 949 821, March 1972.
- [Guo96] Guotong Z., Giannakis G. B., Swami A.: On polynomial phase signals with time-varying amplitudes, IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 44, No. 4, April 1996, pp. 848-861.
- [Har07] Harris F.: Ultra low phase noise DDS oscillator, DSP tips and tricks, IEEE Signal Processing Magazine, Vol. 24, No. 4, July 2007, pp. 121-124.
- [Har09] Hardy S., Fletcher P., Larkin K.: Affine-invariant image watermarking using the hyperbolic chirp, IEEE Digital Image Computing: Techniques and Applications, December 2009, pp. 6-13.
- [Har83] Hartimo I.: Self-sustained stable oscillations of second order recursive algorithms, Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, Vol. 1, No. 1, April 1983, pp. 635-638.
- [Hau99] Hauser J., Hodes T., Wawrzynek J.: A fixed-point recursive digital oscillator for additive synthesis of audio, IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing ICASSP 1999, Vol. 2, March 1999, pp. 993-996.
- [Hay99] Haykin S.: Systemy telekomunikacyjne, WKŁ, 1999.
- [Her04a] Hermanowicz E., Rojewski M.: A multirate approach to DDS algorithm versus Taylor-series expansion technique, The 2004 International TICSP Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing Proceedings, SMMSP 2004, September 2004, pp. 253-257.
- [Her04b] Hermanowicz E., Rojewski M.: Kwadraturowy DDS z ułamkowo-opóźniającym filtrem o strukturze flash-Farrow, Zeszyty Naukowe WETI PG, Seria: Technologie Informacyjne, Nr 2, 2004, str. 143-152.
- [Her05] Hermanowicz E.: Special Discrete-Time Filters and Applications, Akademia Oficyna Wydawnicza EXIT, Warszawa, 2005.
- [Hes71] Hess S. F., S. R. Parker: Limit-cycle oscillations in digital filters, IEEE Transactions on Circuit Theory, Vol. CT-18, November 1971, pp. 687-697.
- [Hes72] Hess S. F., Parker S. R.: Heuristic bounds for the frequency of digital oscillators due to quantization noise, Electronics Letters, Vol. 8, February 1972, pp. 86-87.

- [Hin89] Hinedi S., Kumar R., Vlnrotter V. A.: Frequency estimation techniques for high dynamic trajectories, *IEEE Transactions on Aerospace and Electronics Systems*, Vol. 25, No. 4, July 1989, pp. 559-577.
- [Hop96] Hopkins T. L., Remsen A., Sutton T. T.: A high frequency chirp sonar to be deployed on the high resolution sampler (HRS II) and capable of sizing small zooplankton, *OCEANS 1996 MTS/IEEE Prospects for the 21st Century*, Vol. 3, September 1996, pp. 1480-1484.
- [Hor95] Horwitz P., Hill W.: *Sztuka elektroniki*, WKŁ, Warszawa 2005.
- [Hu08] Hu X., Xiang Y.: A novel time-varying Doppler frequency synthesizer, 9th International Conference on Signal Processing, ICSP 2008, October 2008, pp. 1854-1857.
- [Hue98] Huemer M., Reindl C. C., Springer A.: A robust ultra broadband wireless communication system using SAW chirped delay lines, *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 46, No. 12, December 1998, pp. 2213-2219.
- [Iba06] Ibars A. B., Porqueras F. M., Sole A. A.: Performance study of quantized linear frequency modulated signals and its application to CW radars, *IEEE Proceedings of the 3rd European Radar Conference*, September 2006, pp. 100-103.
- [Jac70] Jackson L. B.: On the interaction of roundoff noise and dynamic range in digital filters, *Bell Systems Technical Journal*, Vol. 49, No. 1, 1970, pp. 159-184.
- [Jen03] Jenkins A.: Methods and apparatus for offset chirp modulation, U. S. Patent 6 937 108, September 2005.
- [Joo08] Joon-goo P., Young-il S.: A novel cubic-phase linear chirp for DS-UWB ranging, 10th International Conference on Advanced Communication Technology, ICACT 2008, Vol. 1, February 2008, pp. 534-536.
- [Kac77] Kaczorek T.: *Teoria sterowania, Tom I, Układy liniowe ciągłe i dyskretne*, PWN, Warszawa, 1977.
- [Kac98] Kaczorek T.: *Macierze w automatyce i elektrotechnice*, WNT, Warszawa, 1998.
- [Kac99] Kaczorek T.: *Teoria sterowania i systemów*, PWN, Warszawa, 1999.
- [Kai72] Kaiser J. F., Sandberg I. W.: A bound on limit cycles in fixed-point implementations of digital filters, *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, Vol. 20, June 1972, pp. 110-112.
- [Ker90] Kerr R. J., L. A. Weaver L. A.: High resolution phase to sine amplitude conversion, U. S. Patent No. 4 905 177, February 1990.

- [Kou09] Kountouris A.: A randomized algorithm for controlling the round-off error accumulation in recursive digital frequency synthesis (DFS), *Digital Signal Processing*, Vol. 19, No. 4, March 2009, pp. 534-544.
- [Kow81] Kowatsch M., Lafferl J. T.: A spread spectrum concept combining chirp modulation and pseudonoise coding, *IEEE Transactions on Communications*, Vol. 31, No. 10, October 1981, pp. 1133-1142.
- [Kru07a] Krupski T.: Algorytmy cyfrowego generatora sinusoidy zespolonej, *Information Technology Conference Proceedings, Zeszyty Naukowe WETI PG, Seria: Technologie Informacyjne*, Nr 14, 2007, str. 707-714.
- [Kru07b] Krupski T.: Digital complex sinusoidal oscillators with outputs in quadrature, *Signal Processing 2007 Scientific Workshop*, Poznań, September 2007, pp 75-79.
- [Kru08] Krupski T., Hermanowicz E., A recursive multi-output discrete-time sinusoidal oscillator, *International Conference on Signals and Electronic Systems, ICSES 2008*, Cracow, September 2008, pp. 277-280.
- [Kru09] Krupski T., Hermanowicz E.: Novel designs of recursive discrete-time sinusoidal oscillators, *2009 Ph.D. Research in Microelectronics and Electronics (PRIME) Conference Proceedings*, Cork, July 2009, pp. 224-227.
- [Kwe99] Kwentus A. Y., Madisetti A., Willson Jr.: A 100 MHz, 16-b, direct digital frequency synthesizer with a 100-dBc spurious-free dynamic range, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 34, August 1999, pp. 1034-1043.
- [Lah01] Lahiji G. R., Sodgar A. M.: A pipelined ROM-less architecture for sine output DDFSs using the second order parabolic approximation, *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, Vol. 48, No. 9, September 2001, pp 850-857.
- [Law78] Lawrence V., Kent V.: Control of limit cycle oscillations in second-order recursive digital filters using constrained random quantization, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, April 1978, pp. 127-134.
- [Leh00] Lehtinen V., Niittylahi J., Palomaki K. I.: A pipelined digital frequency synthesizer based on feedback, *Proceedings of the 43rd IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 2, August 2000, pp. 814-817.
- [Mar04] Martin K.: Complex signal processing is not-complex, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. 51, September 2004, pp. 1823-1836.

- [Mar05] Martin K.: Approximation of complex IIR bandpass filters without arithmetic symmetry, *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, Vol. 52, No. 4, April 2005, pp. 794-803.
- [Maz03] Mazur B.: *Imagining Numbers (Particularly the Square Root of Minus Fifteen)*, Farrar, Straus and Giroux, 2003.
- [McK09a] McKilliam, R. G., Clarkson, I. V. L.: Identifiability and aliasing in polynomial-phase signals, *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 57, No. 11, November 2009, pp. 4554-4557.
- [McK09b] McKilliam R.G., Clarkson I. V. L., Quinn B. G., Moran B.: Polynomial-phase estimation, phase unwrapping and the nearest lattice point problem, the Forty-Third Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers, November 2009, pp. 493-495.
- [Mor85] Morgan D. P.: *Surface Wave Devices for Signal Processing*, Elsevier: Amsterdam, 1985.
- [Nic91] Nicholas H. T., Samueli H.: A 150-MHz direct digital frequency synthesizer in 1.25- μm CMOS with 90-dBc spurious performance, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 26, No. 12, December 1991, pp. 1959-1969.
- [Nii00] Niittylahti J., Uusikartano R.: A compact digital frequency synthesizer for GSM IF up/downconverter, *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 3, May 2000, pp. 113-116.
- [Nii03] Niittylahti J., Palomaki K. I.: A low-power, memoryless direct digital frequency synthesizer architecture, *Proceedings of the IEEE Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 2, May 2003, pp. 77-80.
- [Nii99] Niittylahi J., Palomaki K. I., Renfors M.: Numerical sine and cosine synthesis using a complex multiplier, *Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 4, June 1999, pp. 356-359.
- [Ojo70] Ojongbede H. A.: Limit-cycle constraints for recursive-digital-filter design, *Electronics Letters*, Vol. 6, No. 22, October 1970, pp. 698-700.
- [Opp72] Oppenheim A. V., Weinstein C. J.: Effects of finite register length in digital filtering and the fast Fourier transform, *Proc. IEEE*, Vol. 60, No. 8, August 1972, pp. 954-976.
- [Opp10] Oppenheim A. V., Schaffer R. W.: *Digital Signal Processing*, 3rd Edition, Prentice Hall, 2010.

- [Oul97] Ouldali A., Benidir, M.: Distinction between polynomial phase signals with constant amplitude and random amplitude, IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-97, Vol. 5, April 1997, pp. 3653-3656.
- [Paa10] Paavle T., Min M.: Short-time chirp excitations for using in wideband characterization of objects: an overview, 12th Biennial Baltic Electronics Conference (BEC), , Tallinn, Estonia, October 2010, pp. 253-256.
- [Paw81] Pawłowski Z.: Statystyka matematyczna, PWN, Warszawa, 1981.
- [Pre94] Presti L., Cardamone G.: A direct digital frequency synthesizer using an IIR filter implemented with a DSP microprocessor, IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, ICASSP-94, Vol. 2, April 1994, pp. 201-204.
- [Pro96] Proakis J. G.: Manolakis D. G.: Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications, Third Edition, Prentice Hall, 1996.
- [Raj05] Raj K.: Detection and correction of limit cycle oscillations in second-order recursive digital filter, 1st International Conference on Computers, Communications, & Signal Processing with Special Track on Biomedical Engineering, CCSP 2005, November 2005, pp. 45-49.
- [Sal70] Saltzberg B. R.: Frequency modulation using digital filtering techniques, IEEE Transactions on Communication Technology, Vol. 18, No. 5, October 1970, pp. 632-637.
- [Sam95] Samueli H., Tan L.: A 200 MHz quadrature digital synthesizer/mixer in 0.8 μm CMOS, IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol. 30, No. 3, March 1995, pp. 193-200.
- [Sch90] Schanerberg M.: The implementation of a digital sine wave oscillator using the TMS320C25: distortion reduction and applications, IEEE Transactions on Instrument Measurement, Vol. 39, No. 6, December 1990, pp. 870-873.
- [Sha08] Shatnawi A., Shatnawi M.: A pipelined architecture for a high speed digital oscillator, 9th International Conference on Signal Processing, 2008, ICSP 2008, October 2008, pp. 406-409.
- [Sil05] Silva J. L. H., Cardoso A. J. M.: Bearing failures diagnosis in three-phase induction motors by extended Park's vector approach, 31st Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society IECON'05, November 2005, pp. 2591–2596.
- [Sza07] Szabatin J.: Podstawy teorii sygnałów, WKŁ, 2007.

- [Tan95] Tan L. K., Roth E. W., Yee G. E., Samueli H.: A 800 MHz quadrature digital synthesizer with ECL-compatible output drivers in 0.8 μm CMOS, *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, Vol. 30, No. 12, December 1995, pp. 1463-1473.
- [Tis06] Tisserand A.: Hardware operator for simultaneous sine and cosine evaluation, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, ICASSP Proceedings*, Vol. 3, May 2006, pp. 992-995.
- [Top05] Topp J.: *Algebra liniowa*, Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2005.
- [Toy94] Toyoda M., Morodo S., Kawamoto M., Yamashita M.: Driving force controller for electric motor vehicle, U. S. Patent 5 376 868, December 1994.
- [Tra09] Trajin B., Chabert M.: Hilbert versus Concordia transform for three-phase machine stator current time-frequency monitoring, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 23, No. 8, November 2009, pp. 2648-2657.
- [Tur03] Turner C. S.: Recursive discrete-time sinusoidal oscillators, *DSP tips and tricks*, *IEEE Signal Processing Magazine*, Vol. 20, No. 3, May 2003, pp. 103-111.
- [Tur10] Turner C. S.: Digital Resonators, Discrete-time oscillator theory, presentation at COMP.DSP 2010 Conference, 9-10 April 2010.
- [Val06] Vallis J., Sansaloni T.: The use of CORDIC in software defined radios: a tutorial, *IEEE Communications Magazine*, Vol. 44, No. 9, September 2006, pp. 46-50.
- [Van05] Vankka J.: *Digital Synthesizers and Transmitters for Software Radio*, New York: Springer, 2005.
- [Wes06] Wesołowski K.: *Podstawy cyfrowych systemów telekomunikacyjnych*, WKŁ, Warszawa 2006.
- [Wil07] Willis N. J., Hugh G.: *Advances in Bistatic Radar*, SciTech Publishing, 2007.
- [Woj69] *Poradnik inżyniera radioelektryka pod redakcją A. Wojnara*, WNT, Warszawa 1969, p. XIV.6.
- [Woj84] Wojtkiewicz A.: *Elementy syntezy filtrów cyfrowych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1984.
- [Xia08] Xiang Y., Hu X.: A novel time-varying Doppler frequency synthesizer, *International Conference on Signal Processing, ICSP 2008 Proceedings*, October 2008, pp. 1854-1857.

[Yi10] Yi S.: A direct digital frequency synthesizer based on ROM free algorithm, International Journal of Electronics and Communication, Vol. 64, No. 11, November 2010, pp. 1068-1072.

[Zar06] Zarei J., Poshtan J.: An advanced Park's vectors approach for bearing fault detection, IEEE International Conference on Industrial Technology ICIT'06, December 2006, pp. 1472-1479.

[Zie96] Ziernhofer C. M.: A multiplier-free digital sinusoid generator based on sigma-delta modulation, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Analog and Digital Signal Processing, Vol. 46, No. 5, May 1996, pp. 387-396.