



POLITECHNIKA GDAŃSKA
WYDZIAŁ INŻYNIERII LĄDOWEJ I ŚRODOWISKA
KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI I MOSTÓW

MGR INŻ. KAROL WINKELMANN

**OBLICZANIE NIEZAWODNOŚCI
KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH
METODAMI SYMULACYJNYMI
ORAZ METODĄ
POWIERZCHNI ODPOWIEDZI**

ROZPRAWA DOKTORSKA

PROMOTOR
DR HAB. INŻ. JAROSŁAW GÓRSKI, PROF. NADZW. PG

GDAŃSK 2013

PRAGNĘ SERDECZNIE PODZIĘKOWAĆ:

mojemu Promotorowi

dr hab. inż. Jarosławowi Górskiemu, prof. nadzw. PG

za nieocenioną pomoc przy niniejszej pracy,
wyrażoną przekazaną wiedzą, poświęconym czasem
oraz cierpliwością i wsparciem

najdroższej Rodzinie

za to, że zawsze przy mnie jest

oraz Losowi

za wszystkie życzliwe Osoby,
których drogi splótł On z moją

Spis treści

1. Przedmiot, cel i zakres pracy	1
1.1. Przedmiot pracy	1
1.2. Cel i zakres pracy	2
1.3. Teza pracy	9
2. Metody określania niezawodności modeli konstrukcji inżynierskich	11
2.1. Wprowadzenie	11
2.2. Niezawodność w ujęciu normowym (deterministycznym)	14
2.3. Niezawodność według podejścia symulacyjnego (probabilistycznego)	22
2.3.1. Podstawowe pojęcia teorii niezawodności	24
2.3.2. Problem podstawowy analizy niezawodności	26
2.4. Wybrane miary niezawodności	29
2.4.1. Wskaźnik niezawodności Cornella	31
2.4.2. Wskaźnik niezawodności Rosenbluetha – Estevy / FOSM	34
2.4.3. Wskaźnik niezawodności Hasofer – Linda	36
2.4.4. Wskaźnik niezawodności Hasofer – Linda – Rackwitz – Fiesslera	41
2.5. Metoda perturbacyjna	43
2.6. Metody oparte na miarach funkcji prawdopodobieństwa	45
2.6.1. Metoda Monte Carlo	46
2.6.2. Metoda Monte Carlo z użyciem technik redukcyjnych	50
2.6.2.1. Próbkowanie warstwowe	51
2.6.2.2. Próbkowanie hipersześcianu łacińskiego	54
2.6.2.3. Próbkowanie wagowe	57
2.6.2.4. Próbkowanie rosyjskiej ruletki i rozdzielania	58
2.6.3. Ilustracja numeryczna wpływu technik redukcyjnych na obliczenia metodą Monte Carlo	61
2.6.3.1. Model 2-D	62
2.6.3.2. Model 3-D	66
2.7. Metoda powierzchni odpowiedzi	77
2.7.1. Metoda powierzchni odpowiedzi z użyciem aproksymacji wielomianem	79
2.7.2. Metoda powierzchni odpowiedzi z użyciem aproksymacji ilorzem wielomianów	82
2.8. Wrażliwość probabilistyczna modeli konstrukcji inżynierskich	83
2.8.1. Techniki określania wrażliwości mające za podstawę metodę Monte Carlo	86
2.8.2. Techniki określania wrażliwości mające za podstawę metodę powierzchni odpowiedzi	88

3. Autorski program do obliczeń wskaźników niezawodności i prawdopodobieństwa awarii konstrukcji inżynierskich – RSM–Win	91
3.1. Wprowadzenie	91
3.2. Technika analizy wariancji metodą tabelaryczną	93
3.3. Techniki i algorytmy działania programu autorskiego	97
4. Imperfekcje geometryczne konstrukcji inżynierskich	103
4.1. Imperfekcje w konstrukcjach rzeczywistych w świetle podejścia normowego	103
4.2. Identyfikacja inżynierska pól imperfekcji geometrycznych modeli rzeczywistych konstrukcji inżynierskich	107
5. Generacja dwuwymiarowych i trójwymiarowych pól losowych	111
5.1. Generacja pól losowych za pomocą metody warunkowej akceptacji i odrzucania	111
5.2. Generacja pól losowych za pomocą rozwinięcia Karhunen – Loève’a	117
5.3. Przykład symulacji pola losowego za pomocą przedstawionych technik generacji	119
6. Przykłady zastosowań podejścia probabilistycznego w rzeczywistych problemach inżynierskich	123
6.1. Proste modele prętowe	123
6.1.1. Dobór optymalnej powierzchni odpowiedzi do zadania początkowego	124
6.1.2. Kalkulacja i porównanie wskaźników niezawodności dla trójprzęsłowej belki ciągłej Lemaitre’a	128
6.1.3. Pełne rozwiązanie problemu niezawodności dla kolumny Zieglera	133
6.1.4. Pełne rozwiązanie problemu niezawodności dla ramy Roordy	141
6.2. Mało wyniosła powłoka kompozytowa	147
6.3. Obrotowosymetryczny metalowy dźwigar powierzchniowy	165
7. Ocena rezultatów i wnioski z pracy	207
8. Literatura	211

Rozdział 1

Przedmiot, cel i zakres pracy

1.1. Przedmiot pracy

Nigdy dotąd przed inżynierem nie stała konieczność projektowania tak bardzo restrykcyjnego oraz tak mocno balansującego na granicy wykorzystania pełni parametrów fizycznych i wytrzymałości materiału w stosunku do jego gabarytów, tak jak to ma miejsce w czasach dzisiejszych. Jednakże jakkolwiek taka konstrukcja będzie wytworzona, w jakimkolwiek polu inżynierii ma znaleźć swoje zastosowanie i jak mocno zbliżono się w niej do limitu wytrzymałości materiału, jedna rzecz musi pozostać uniwersalna. Konstrukcja taka musi bezwarunkowo zagwarantować spełnienie swojego podstawowego zadania – wypełnienia jej przeznaczenia przez całkowity czas użytkowania, założony w procesie projektowania. To z kolei pociąga za sobą wymóg kolejny – zapewnienie całkowitego bezpieczeństwa konstrukcji inżynierskiej już w trakcie jej użytkowania.

W standardowym procesie projektowym zapewnianie bezpieczeństwa konstrukcji spełniane jest przez odpowiednie stosowanie się do normatyw technicznych charakterystycznych dla danego kraju lub środowiska. Na ich podstawie parametry materiałowe lub obciążeniowe, w rzeczywistości zmienne, obarczone pewnymi tolerancjami lub niepewnościami, przedstawia się w postaci zbioru mnożników i współczynników, zastępujących wiedzę o określonym stopniu losowości lub zmienności w czasie tychże cech. Zależnie od potrzeb – współczynniki te zwiększają wpływy zewnętrzne, jeśli niekorzystnym w sensie inżynierskim będzie narastanie danego obciążenia lub niedoskonałości materiału, albo też zmniejszają je, jeśli wpływy danego czynnika naturalnie pomagają zachować bezpieczeństwo danej konstrukcji, bądź gdy zmniejszenie obciążenia powoduje bezpośrednio zmniejszenie bezpieczeństwa konstrukcji. Jednakże należy mieć świadomość, że nawet najdokładniejsze sterowanie rzeczonymi współczynnikami w procesie projektowym może nie być wystarczającym gwarantem bezpieczeństwa konstrukcji. Pojawić się bowiem mogą (z pewnym określonym prawdopodobieństwem) niepewności czynników większe niż te, które były brane pod uwagę przy projektowaniu zgodnie z normami czy specyfikacjami. Zatem, także z pewnym określonym prawdopodobieństwem, konstrukcja zaprojektowana z należyтым zachowaniem procedur normowych, może mimo wszystko ulec awarii [Vrouwenvelder, 2002].

Jest to jeden z najistotniejszych powodów, dla których w czasach obecnych rozwija się teorie i modele probabilistyczne. We wszystkich probabilistycznych wariantach analizy, między innymi w analizie niezawodności konstrukcji, która jest przedmiotem niniejszej pracy, przyjąć można, iż wspomniane powyżej materiały, obciążenia, bądź całe konstrukcje obciążane są pewnymi niepewnościami (wymiaru, wielkości, wykonania, wytrzymałości) i niepewności te powinno się modelować za pomocą odpowiednio dobranych zmiennych losowych lub pól losowych. Wówczas awarię konstrukcji inżynierskiej definiuje się w sposób bardziej złożony,

jako pewien stan, nazywany granicznym, w którym odpowiedź konstrukcji lub materiału na zadane obciążenie stanowić zaczyna zagrożenie bezpieczeństwa jej funkcjonowania. Zatem, awarią konstrukcji jest de facto pewne niekorzystne zdarzenie losowe, które jest zbiorem wartości założonych niepewności parametrów materiałowych bądź konstrukcji, które prowadzą do przekroczenia wspomnianego stanu niebezpiecznego. Natomiast poszczególne przekroczenia dopuszczalności odchyłek ustalonych w procesie projektowania zmiennych materiału i obciążenia można nazwać jako naruszenie obszaru granicznego bezpieczeństwa konstrukcji. Prawdopodobieństwo zaistnienia zdarzenia losowego niepożądanego w pracy konstrukcji, czyli prawdopodobieństwo awarii, wraz z wywodzącymi się z niego wartościami, są zatem miarami losowego ujęcia niezawodności danej konstrukcji.

Metody probabilistyczne cechują się jednakże znaczną złożonością, zarówno w kwestii oszacowania prawdopodobieństwa awarii, czy w ogóle stworzenia poprawnego modelu do analizy losowej. Stąd ich póki co mała popularność w codziennej praktyce inżynierskiej, mimo, iż pozwalają na bardzo racjonalną i w ogromnej mierze inwestycyjnie oszczędną ocenę bezpieczeństwa konstrukcji, jej elementu, czy pracy danego materiału [Vrouwenvelder, 2002].

Utworzeniu prawidłowego modelu zjawisk losowych, którym poddana jest konstrukcja, pomaga zazwyczaj odpowiednie przygotowanie obserwacyjne inżyniera. Wszelakie odnotowane w różnych źródłach (także we wspomnianych wyżej deterministycznych normatywach inżynierskich) informacje i dane statystyczne dotyczące zmienności obciążeń oraz parametrów wytrzymałościowych w miejscu i w czasie, dane zawierające potrzebne ilościowe i jakościowe średnie miary tych zjawisk, wiadomości o ich relacjach i kombinacjach, a także o ich charakterystykach, są niezbędne do poprawnego funkcjonowania późniejszego modelu konstrukcji obciążonej losowością jej elementów. Współczesny inżynier w prosty sposób może wszystkie te dane zastąpić za pomocą matematycznych funkcji rozkładów prawdopodobieństwa danych niepewności [Stocki, 1999].

Tutaj więc rodzi się kolejna trudność, która stoi na przeszkodzie popularyzacji metod losowych. Jest to złożoność odwzorowania wspomnianych niepewności do rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych działających na konstrukcję bądź jej elementy. Ich określenie wymaga w najlepszym wypadku przeprowadzenia wielu testów (jeśli zmienną jest wytrzymałość), wielu symulacji numerycznych, poprowadzenia serii eksperymentów o znacznej liczbie pojedynczych prób (dla zmiennych określanych poprzez projekt eksperymentalny), lub też wielomiesięcznych, a czasem nawet wieloletnich obserwacji procesów natury (w przypadku obciążeń działaniami atmosferycznymi). Kolejno, nawet dysponując odpowiednimi bazami danych o wymienionych czynnikach, napotkać można trudności związane z właściwą ich implementacją do analizy, tj. przy opracowywaniu danych statystycznych. Procedury numeryczne służące temu celowi również mogą być działaniami o dużej złożoności, co jest kolejną niedogodnością stojącą często jako argument przeciwko stosowaniu podejścia probabilistycznego w projektowaniu [Ang i Tang, 2007].

Dalej, jeśli określona niepewność wytrzymałości materiału lub obciążenia konstrukcji, oprócz zmienności wartości, wykazuje również zmienność w czasie i/lub w przestrzeni, to musi być ona koniecznie opisana funkcją losową, bądź polem losowym. Zbiór funkcji matematycznego opisu tego typu niepewności nazywamy wówczas procesem losowym i jego opis także cechuje się wysokim stopniem trudności matematycznej. Wiele z procesów losowych nawet po dzień dzisiejszy nie ma poprawnego odwzorowania numerycznego. Stąd śmiało można stwierdzić,

iż problem zapewnienia konstrukcji bezpieczeństwa ze względu na nośność i użytkowanie nie tylko wymaga wiedzy na temat podejścia probabilistycznego potrzebnej do kalkulacji prawdopodobieństwa awarii projektowanej konstrukcji, ale także umiejętności stworzenia i kalibracji modelu do użycia w takich obliczeniach [Devroye, 1986].

Wszystkie powyższe fakty działają na niekorzyść podejścia losowego, jeżeli mowa o projektowaniu „codziennym”, o standardowym działaniu biur projektów budownictwa komunalnego. Istnieją jednakże projekty o większej złożoności, o silniej i wyraźniej stawianych kryteriach odbioru lub większych niż zazwyczaj obostrzeniach ekonomiki konstrukcji. W tychże projektach podejście normowe jest niewystarczające i stosowanie metod losowych staje się koniecznością. Pamiętać również należy, iż dzięki nieustannemu zwiększaniu się możliwości obliczeniowych komputerów i algorytmów numerycznych coraz bliżej jest tradycyjnej inżynierii do przeskoku na podejście probabilistyczne i w coraz większym procencie komercyjnego oprogramowania analizy takie są na dzień dzisiejszy możliwe do wykonania [Stocki, 1999].

W skład rodziny analiz podejścia probabilistycznego oprócz wspomnianego szacowania niezawodności wchodzi również szeroko pojęte optymalizacje niezawodnościowe oraz analizy wrażliwości konstrukcji. Optymalizacje niezawodnościowe są technikami pozwalającymi na wprowadzenie w konstrukcję szeregu ograniczeń prawdopodobieństwa jej awarii w sposób globalny (suma zmian czynników obciążonych niepewnościami lub modyfikowalnymi pod względem kubatury i przyjętego materiału), a analizy wrażliwości podchodzą do czynników podlegających niepewnościom w sposób lokalny, skupiając się na zmianach prawdopodobieństwa awarii konstrukcji na skutek wywołania określonego poziomu zmiany ustalonej wcześniej pojedynczej, konkretnej zmiennej losowej. Objęcie zasięgiem wszystkich wymienionych gałęzi analiz daje z całą pewnością najdoskonalszy obraz zachowania się konstrukcji, a połączenie lub wzbogacenie standardowej metodologii elementów skończonych o szereg procedur i algorytmów zawierających podejście losowe w wielu przypadkach prowadzi do redukcji czasu bądź rozciągłości obliczeń modelu oraz lepszej kontroli procesu kalkulacji rozwiązania, co ma swoje najbardziej wyraźne zalety w przypadku postępowania z konstrukcjami materiałowo lub geometrycznie nieliniowymi [Kolanek, 2007; Stocki, 2010].

1.2. Cel i zakres pracy

Celem niniejszej pracy jest przede wszystkim potwierdzenie zasadności i celowości wykonywania analizy niezawodności nieliniowych problemów ściśle inżynierskich, na każdym kroku procesu projektowania. Celem pracy jest także przedstawienie możliwych do zastosowania, szeroko uznawanych probabilistycznych metod szacowania bezpieczeństwa konstrukcji, teoretyczne opracowanie oraz komputerowa implementacja programu autorskiego służącego do jego obliczania, a także stworzenie ściśle zgodnej z normatywami procedury generacji pól losowych modelujących przestrzenny rozkład imperfekcji geometrycznych i materiałowych, wraz z udowodnieniem wpływu tych ostatnich na nośność konstrukcji inżynierskiej.

Trzon niniejszej rozprawy stanowi, jak podkreślono powyżej, analiza nieliniowych (zarówno geometrycznie, jak i materiałowo) modeli konstrukcji. Rozważane są zarówno modele prętowe i powierzchniowe, co wskazać ma na uniwersalność i wszechstronność metodologii podejścia probabilistycznego w zastosowaniu do procesu projektowania i do oceny bezpieczeństwa konstrukcji już istniejącej. Podjęcie operacji na obu typach konstrukcji ma także wskazywać możliwość przełożenia zaprezentowanych w niniejszej rozprawie technik obliczeniowych na szerokie spektrum problemów inżynierskich.

W konstrukcjach tego typu, głównymi problemami są zagadnienia stateczności (zarówno lokalnej, związanej z wyboczeniem pojedynczych elementów, jak i globalnej, związanej z utratą stateczności przez całość konstrukcji) oraz problemy przekroczenia nośności granicznej konstrukcji lub jej elementu – uplastycznienia materiału, z którego jest wykonana.

Szczególne uwagi w większej części rozprawy poświęcone są imperfekcjom geometrycznym, to w nich właśnie poszukiwana jest główna przyczyna zmienności parametrów modelu probabilistycznego. W niniejszej rozprawie podjęta została próba oszacowania ich wpływu na zachowanie rozważanych konstrukcji inżynierskich oraz zasygnalizowania wrażliwości tychże konstrukcji na zmienności wywołane wskazanymi imperfekcjami, traktowanymi jako istniejące bądź zachodzące osobno. Jest sprawą oczywistą, iż mogą one w krótkiej perspektywie czasu, w zupełnie różnym charakterze, doprowadzać konstrukcję do utraty stateczności lub nośności pod danym stanem obciążenia. Jednakże, w wielu dziedzinach inżynierii nadal sprawą otwartą pozostaje charakter tej zmiany, a w sporej grupie typów konstrukcji analiza wrażliwości nie została do tej pory przeprowadzona dostatecznie szczegółowo [Górski i Mikulski, 2005; Kamiński, 2005].

Stosowanie technik generacji losowego zestawu zmiennych wejściowych dla parametrów analizy modeli z imperfekcjami i czytanie na ich podstawie odpowiedzi konstrukcji jest zatem, jak wskazano w pracy, w pełni uzasadnione i niemalże konieczne (a przynajmniej – z całą pewnością zalecane), nawet w przypadku dość szerokiej grupy konstrukcji inżynierii komunalnej – w powłokach silosów i zbiorników, co jest też potwierdzane w samych normach.

Istotną ogniskową rozprawy są też materiały kompozytowe. W obecnej inżynierii to właśnie materiały kompozytowe są najsmielej wprowadzane do procesu projektowania. Bardzo istotnym elementem stosowania takiego materiału także jest analiza probabilistyczna wpływu imperfekcji geometrycznych i materiałowych na całość zachowania się kompozytu. Dokonanie szczegółowej stochastycznej charakterystyki kompozytów jest niezbędne do stworzenia wiarygodnych danych, które posłużą projektowaniu i realizacji obiektów inżynierskich z materiałów kompozytowych. Istotnym elementem analizy powinno być przede wszystkim zgrubne oszacowanie niezawodności konstrukcji kompozytowych w zakresie problemu materiałowo nieliniowego, zatem także jest to elementem niniejszej rozprawy [Bucinell, 1998; Johnson, 2010].

Niniejsza praca ma w zamierzeniu charakter aplikacyjny – wnioski z niej płynące mają doprowadzić do zwiększenia świadomości o możliwym wpływie określonego gatunku losowości na niezawodność konstrukcji, a zaproponowane w niej rozwiązania – zarówno numeryczne, jak i praktyczne – mają być w prosty sposób przetłumaczalne na inżynierię „codzienną” i przybliżające inżynierowi posługiwanie się metodologią probabilistyczną.

Praca składa się z ośmiu rozdziałów.

Rozdział 1 jest dedykowany przedstawieniu przedmiotu pracy, jej celu oraz zakresu tematyki, jakiej podejmuje się niniejsza rozprawa doktorska.

Rozdział ten nakreśla między innymi różnice pomiędzy klasycznym podejściem do projektowania, a podejściem probabilistycznym, sugerowanym przez pracę i w niej przedstawianym. Zawiera także wskazania, iż probabilistyczne szacowanie niezawodności może mieć przewagę nad podejściem normowym, co skutkuje w czasach obecnych gwałtownym rozwojem tej dyscypliny inżynierii (który to fakt stał się motywem podjęcia pracy w takim temacie i o takiej rozciągłości). Pokróćce naświetla się w nim także nieliczne wady, jakimi charakteryzuje się podejście probabilistyczne.

W drugiej części rozdziału nakreśla się szczegółowo zakres pracy. Tekst składa się z dwóch partii – ujęcia ogólnego poruszanego w pracy wycinka zbioru technik probabilistycznych i modeli konstrukcji inżynierskich, do których zostanie on zastosowany oraz ujęcia szczegółowego, odnoszącego poszczególne tematy przewodnie do ich miejsc w treści pracy.

Końcowo, dokonane jest **sformułowanie tezy pracy**.

Rozdział 2 jest w całości poświęcony metodom określania niezawodności konstrukcji, na każdym poziomie oceny bezpieczeństwa konstrukcji inżynierskich.

W pierwszej części rozdziału umieszcza się ściśle przedstawienie podejścia probabilistycznego i definiuje się podział metod szacowania bezpieczeństwa konstrukcji inżynierskich na cztery odpowiednie poziomy, w zależności od stopnia zaawansowania ich odniesienia do technik probabilistycznych. Szczegółowo przedstawione zostają dwa z nich – poziom pierwszy, tj. ujęcie deterministyczne problemu niezawodności, przedstawiane w normatywach technicznych i kodach projektowych oraz poziom drugi, tj. ujęcie symulacyjne problemu niezawodności, przedstawiane w literaturze dedykowanej obliczeniom probabilistycznym i technikom stochastycznym. Dla poziomu symulacyjnego definiowane są podstawowe pojęcia matematyczne teorii niezawodności oraz formułowany jest problem podstawowy analizy niezawodności. Przedstawiane są także miary niezawodności w probabilistycznej przestrzeni realizacji zmiennych losowych problemu. Znajduje się wśród nich także nakreślenie najistotniejszego z punktu widzenia rozprawy współczynnika – wskaźnika niezawodności, stosowanego jako podstawowa miara niezawodności modelu konstrukcji inżynierskiej. Definiowane są cztery różne koncepcje wskaźnika: liniowy Cornella, quasi – liniowy FOSM, kwadratowy Hasofera – Linda i kwadratowy ulepszony Rackwitza – Fiesslera. Opisano także wszystkie techniki pomocne przy jego kalkulacji.

W drugiej części rozdziału przedstawiono gałąź metod, dzięki którym oszacować można wszystkie miary probabilistyczne bezpieczeństwa konstrukcji inżynierskiej. Pokróćce omówiona zostaje między nimi metoda perturbacyjna, jednakże główną ogniskową rozprawy są **metoda Monte Carlo** oraz **metoda powierzchni odpowiedzi (RSM)**. Metoda Monte Carlo przedstawiana jest w ujęciu podejścia bezpośredniej generacji populacji punktów obliczeniowych, jak również w ujęciu metod świadomej i bezstratnej redukcji populacji punktów obliczeniowych. Opisane są szczegółowo cztery techniki próbkowania redukcyjnego: próbkowanie warstwowe, próbkowanie hipersześcianu łacińskiego, próbkowanie wagowe oraz próbkowanie rosyjskiej ruletki i rozdzielania. Pierwsze trzy techniki znajdują następnie szerokie zastosowanie w przykładach obliczeniowych, przedstawionych w rozprawie.

Kolejną częścią rozdziału są dwa przykłady ilustrujące wpływ wyżej wymienionych technik redukcji wariancji na obliczenia prowadzone metodą Monte Carlo. Podejmuje się w rozprawie

analizę dwóch modeli nieskończenie sztywnego pionowego elementu prętowego (masztu) z odciążeniem (odciągami) w postaci elementów sprężystych o losowych stałych sprężystości. Wpierw analizuje się model geometrycznie dwuwymiarowy, o jednym stopniu swobody, a następnie – geometrycznie trójwymiarowy, o dwóch stopniach swobody. Zakłada się, że maszty mają pewną niezamierzoną niedoskonałość wykonania, która objawia się utratą jego pionowości. Układ geometrycznie dwuwymiarowy służy przede wszystkim do teoretycznego wprowadzenia w rozpatrywany problem nieliniowy, natomiast model geometrycznie trójwymiarowy jest użyty przede wszystkim do wykonania wyżej wspomnianej analizy porównawczej sprawności ulepszonej metody Monte Carlo.

Następny punkt rozdziału dedykowany jest przedstawieniu teoretycznych podstaw **metody powierzchni odpowiedzi**, będącej główną ogniskową rozprawy. Metoda ta pozwala na oszacowanie, jak określona odpowiedź konstrukcji zmienia się pod wpływem zmian poziomów współczynników analizy oraz pozwala osiągnąć zrozumienie zachowania się konstrukcji obciążonej zadanymi niepewnościami. Przede wszystkim jednak, metoda ta pozwala uzyskać kompletną wiedzę o właściwościach pracy konstrukcji na testowanym obszarze zmienności jej parametrów. Przedstawia się dwa podejścia do metody – podejście klasyczne, gdzie powierzchnię odpowiedzi aproksymuje się modelem wielomianowym, a także podejście innowacyjne, gdzie powierzchnię aproksymuje się modelem ilorazu wielomianowego. Osobne miejsce na końcu rozdziału zostało poświęcone opisowi problemu określania wrażliwości probabilistycznej modeli konstrukcji inżynierskich. Dokonano krytycznego przeglądu technik, jakie mogą być stosowane do szacowania wrażliwości, jeśli dysponuje się wynikami analizy niezawodności metodą Monte Carlo i/lub metody powierzchni odpowiedzi.

Rozdział 3 jest poświęcony przedstawieniu autorskiego programu **RSM-Win** (napisanego w języku Fortran F90), służącego do analizy problemów inżynierskich za pomocą metodologii powierzchni odpowiedzi oraz do szacowania podstawowych miar niezawodności pierwszego i drugiego rzędu, dokonywanych na bazie informacji numerycznej z powierzchni odpowiedzi.

W rozdziale tym umieszcza się kolejno: przedstawienie motywacji do wykonania takiego narzędzia, naświetlenie technik matematycznych, wokół których został zbudowany (głównie standardową analizę regresji oraz analizę wariancji odpowiedzi metodą tablicową ANOVA) oraz przedstawienie głównych schematów jego działania, jakie są przez program używane do uzyskiwania wartości pożądaných przez osobę realizującą obliczenia. Rozpisane zostają między innymi używane przez program algorytmy poszukiwania wskaźników niezawodności Hasofera – Linda i Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera.

Rozdział 4 jest poświęcony imperfekcjom geometrycznym konstrukcji inżynierskich.

W pierwszej części rozdziału poruszono problem występowania imperfekcji geometrycznych, widziany z perspektywy przepisów normowych. Przedstawiono kolejno wszystkie typy imperfekcji, jakie mogą wystąpić w rzeczywistych konstrukcjach inżynierskich, a następnie przywołano fakt, iż norma nakazuje wybierać do analiz procesu projektowego jedynie niepewności geometryczne. Przywołuje się wszystkie prawomocne krajowe normatywy, jakie poruszają wspomnianą kwestię. Zgodnie z Eurokodem PN-EN 1993-1-6:2009, podaje się wstępne założenia dotyczące ich wymiarów i położenia, w odniesieniu do grubości elementu obciążonego imperfekcją lub do klasy precyzji wykonania elementu konstrukcyjnego.

W drugiej części rozdziału podano technikę identyfikacji inżynierskiej rozproszonych imperfekcji geometrycznych jako równoważną metodę dokonywania wstępnych założeń dotyczących ich wymiarów i położenia. Odwołano się do literatury podkreślającej zasadność

i użyteczność takiego działania. Na koniec rozdziału podaje się literaturę poruszającą temat transkrypcji danych doświadczalnego pomiaru imperfekcji w postaci odpowiadających im symulowanych pól losowych. Formułuje się warunki, jakie narzucane są na pola losowe, aby pozostały one wiernym odwzorowaniem niedokładności geometrii konstrukcji rzeczywistych.

Rozdział 5 jest intuicyjną kontynuacją rozważań nad polami imperfekcji geometrycznych, opisującą procesy generacji dwuwymiarowych i trójwymiarowych pól losowych służących do późniejszego modelowania imperfekcji geometrycznych i materiałowych.

Przywoływane są dwie techniki generacji pól losowych. W pierwszej kolejności prezentowana jest metoda warunkowej akceptacji i odrzucania. Wpierw dokonuje się krytycznego przeglądu literatury, jaki poświęcony jest metodzie, a następnie podaje się matematyczne podstawy generacji. Na ich podstawie definiuje się obrazowo przebieg generacji, a końcowo – formułuje się jej algorytm. Ostatecznie, rozważa się zalety generacji warunkowej i przywołuje jej zastosowania. Jako druga, przedstawiana jest uniwersalnie stosowana generacja pól losowych za pomocą rozwinięcia Karhunen – Loève’a. Podaje się wpierw, jak poprzednio, podstawy matematyczne generacji, a na ich podstawie formułuje się końcowo algorytm generacyjny.

Druga część rozdziału poświęcona jest wykonaniu przykładu obliczeniowego, wygenerowanego w programie własnym, polegającego na symulacji pola losowego za pomocą obu technik generacji i jednocześnie dokonującego porównania wyników dla obu metod. Dodatkowo, oblicza się dla przykładu globalny błąd macierzy kowariancyjnej, służący jako miara jakości otrzymanych pól losowych. Błędy owe porównuje się w końcówce rozdziału, a na ich podstawie wyciąga się wnioski sugerujące korzystniejszą dla przyszłych przykładów obliczeniowych technikę generacji.

Rozdział 6 jest w opinii autora **najbardziej istotną częścią rozprawy**. Rozdział ten zawiera opis przeprowadzonych obliczeń przykładów ilustrujących możliwość zastosowania podejścia probabilistycznego w rzeczywistych konstrukcjach inżynierskich do szacowania ich niezawodności. Podjęte badania numeryczne mają na celu potwierdzenie tezy rozprawy, sformułowanej w rozdziale otwierającym pracę.

Wszelakie wprowadzenie danych, obliczenia probabilistyczne oraz obróbka danych wyjściowych została wykonana przy użyciu programu autorskiego RSM–Win oraz przy użyciu autorskich procedur wspomagających, napisanych w językach Fortran F90 oraz SciLab. Obliczenia numeryczne zaawansowanych modeli konstrukcji inżynierskich zostały wykonane w komercyjnych programach obliczeniowych NX Nastran i SOFiSTiK FEA.

W pierwszej części rozdziału przedsięwzięto analizę prostych modeli prętowych, dla których rezultaty obliczeń wykonanych programem autorskim można w łatwy sposób porównać z wynikami badań numerycznych, jakie zostały przeprowadzone w literaturze światowej.

Przykłady te mają przede wszystkim na celu wskazanie poprawności działania programu autorskiego, a także naświetlenie tychże obszarów modelowania probabilistycznego wykonywanych przy użyciu programu autorskiego, w których użytkownikowi zalecana jest szczególna ostrożność przy wprowadzaniu danych wejściowych oraz przy analizie, obróbce i interpretacji wyników końcowych.

Wykonywane są kolejno: dobór optymalnej powierzchni odpowiedzi do zadania początkowego, gdzie wskazuje się wpływ ilości i rozproszenia punktów obliczeniowych zadania na poprawność aproksymacji algorytmu programu; kalkulacja i porównanie wskaźników niezawodności dla trójprzęsłowej belki ciągłej Lemaitre’a, co ma na celu wskazanie poprawności działania algorytmów programu autorskiego obliczających wskaźniki

niezawodności Hasofera – Linda (HL) i Hasofera – Linda – Rackwitz – Fiessler (HLRF) oraz zaproponowanie jednego z nich jako referencyjny dla reszty obliczeń; pełne rozwiązanie problemu niezawodności dla kolumny Zieglera, zawierające rozpoznanie problemu nieliniowego modelu, opis funkcji granicznej równaniem jawnym, dopasowanie powierzchni odpowiedzi zadania i na jej podstawie dokonanie obliczenia miar probabilistycznego bezpieczeństwa konstrukcji (prawdopodobieństwa awarii i wskaźnika HLRF) oraz porównanie ich z rozwiązaniem referencyjnym; a także pełne rozwiązanie problemu niezawodności dla ramy Roordy, o rozciągłości badań numerycznych identycznej, jak dla kolumny Zieglera.

W drugiej części rozdziału rozważa się model mało wyniosłej, 16-warstwowej powłoki kompozytowej z włókien węglowych w spoiwie z żywicy epoksydowej, poddanej obciążeniu ściskającemu wzdłuż tworzącej, obciążonej imperfekcjami geometrycznymi.

Celem zadania jest zbadanie wpływu wygenerowanych symulacyjnie, losowych pól imperfekcji geometrycznych na wynikowe rozkłady odpowiedzi konstrukcji oraz zbadanie niezawodności konstrukcji powłokowej obciążonej tego typu odchyłkami od geometrii idealnej. Do generacji pól modelujących imperfekcje geometryczne według sformułowanej wcześniej funkcji korelacyjnej zastosowano algorytm warunkowej akceptacji i odrzucania. Pole losowe jest nośnikiem zmiennych podstawowych problemu – pierwszą z nich jest wielkość amplitudy pola, a drugą – wartość parametrów opisujących zasięg korelacji w obu kierunkach pola.

Obliczenia realizuje się w trzech seriach, które zawierają w sumie 24 realizacje. Wynikiem pojedynczej realizacji, wykonywanej w programie NX Nastran, jest wykreślona ścieżka równowagi dla przemieszczenia osiowego. Stan graniczny zdefiniowano dwójako – jako przemieszczenie węzła środkowego krawędzi zakrzywionej dla ustalonego poziomu wypadkowej siły obciążającej oraz punkt utraty stateczności, w którym osiągnięta zostaje odpowiednia krytyczna lub graniczna wartość obciążenia.

Dla danego przykładu kalkulowane jest prawdopodobieństwo awarii paneli przy użyciu bezpośredniego podejścia metody Monte Carlo oraz prawdopodobieństwo awarii i wskaźnik niezawodności paneli przy użyciu metody powierzchni odpowiedzi. Wykonuje się także prostą analizę zbieżności dla obu podejść. Na jej podstawie dokonuje się krytycznej oceny rezultatów, przyjęcia postanowień odnośnie kolejnych badań i definiuje się wnioski z zadania.

W trzeciej części rozdziału rozważa się stan wyężenia modelu osiowosymetrycznego silosu aluminiowego, obciążonego określoną punktową imperfekcją geometryczną jego powierzchni bocznej. Wyężenie wywołane jest działającym na zbiornik obciążeniem wiatrem. Rezultatem analizy jest znalezienie ciśnienia krytycznego obciążenia, które prowadzi do utraty stateczności zbiornika.

Celem zadania jest odnalezienie zależności, między zaistniałą na zbiorniku imperfekcją o określonym rozmiarze i lokalizacji, a kierunkiem głównym obciążenia wiatru.

Imperfekcje punktowe wygenerowano zgodnie z założeniami PN-EN 1993-1-6:2009, w kształcie elipsy, o długościach osi ustalonych na mocy przepisów tej samej normatywy. Obciążenie wiatrem zostało wygenerowane w świetle zapisów PN-EN 1991-1-4:2007.

Jako pierwszą zmienną losową rozważanego problemu przyjęto kąt zorientowania kierunku głównego działania wiatru względem osi głównej imperfekcji powierzchni bocznej silosu, a jako drugą przyjęto wysokość położenia zadanej imperfekcji na powierzchni bocznej silosu.

Obliczenia realizuje się przy użyciu 144 realizacji modelu. Wynikiem pojedynczej realizacji, wykonywanej w programie SOFiSTiK FEA, jest wyznaczona wartość ciśnienia krytycznego wiatru. Stan graniczny konstrukcji zdefiniowano dwójako – jako przekroczenie przez ciśnienie

wiatru 75% oraz 50% kwantyle wartości ciśnienia krytycznego wiatru obliczonego jak dla zbiornika idealnego, co ma uzasadnienie w przypadkach rozważanych w normatywach.

Dla danego przykładu kalkulowane są (w kilku oddzielnych seriach) prawdopodobieństwo awarii i wskaźnik niezawodności – przy użyciu bezpośredniego podejścia metody Monte Carlo, a także przy użyciu trzech technik próbkowania redukującego wielkość populacji punktów obliczeniowych – próbkowania warstwowego, próbkowania hipersześcianu łacińskiego oraz próbkowania wagowego. Dla punktów obliczeniowych wyznaczonych przy użyciu poszczególnych próbek dla poszczególnych serii, aproksymowane są powierzchnie odpowiedzi. Na ich podstawie, przy użyciu ich równań obliczane są prawdopodobieństwo awarii i wskaźnik niezawodności silosu. Wykonuje się także prostą analizę zbieżności obu metod. Na jej podstawie dokonuje się krytycznej oceny wyników oraz definiuje się wnioski.

Końcowo, dokonuje się także krótkiego zebrania wniosków płynących ze wszystkich wyżej opisanych przykładów obliczeniowych, podsumowującego zauważalny wpływ imperfekcji konstrukcji na zmianę jej nośności.

Rozdział 7 zawiera ocenę rezultatów obliczeń przeprowadzonych w rozprawie, zebranie wniosków wyciągniętych z podjętych badań numerycznych oraz spostrzeżenia, jakie poczyniono w analizowanym temacie.

W rozdziale tym dokonano również ostatecznego potwierdzenia słuszności wszystkich tez rozprawy, postawionych w rozdziale pierwszym.

Rozdział 8 jest poświęcony zebraniu literatury, z jakiej korzystano przy sporządzaniu niniejszej rozprawy pracy oraz norm, jakie przywołuje w swojej treści rozprawa.

Dla wygody czytelnika, każdej pozycji na liście przypisane jest jej odwołanie w tekście.

1.3. Teza pracy

Przedstawione w poprzednich podrozdziałach podłoże metodyczno – merytoryczne oraz wstępnie przeprowadzone analizy rozpoznawcze aktualnego stanu wiedzy o problemie poruszonym w rozprawie pozwalają na sformułowanie kilku najistotniejszych punktów, jakie postawiono w postaci zbiorczej tezy rozprawy.

Teza główna: **Możliwe jest szacowanie niezawodności konstrukcji inżynierskich z losowymi imperfekcjami geometrycznymi i materiałowymi (na każdym etapie procesu projektowania) opisanych nieliniowymi modelami MES, przy zastosowaniu zoptymalizowanego podejścia probabilistycznego, zaimplementowanego w procedurach obliczeniowych.**

Tezy uszczegółowiające: Obliczenia obejmujące losowy charakter modeli konstrukcji inżynierskich są zasadne i powinny mieć oddźwięk w obliczeniach inżynierskich.

Imperfekcje (nieliniowości geometryczne), ustalone zgodnie z zapisami kodu projektowego, również widocznie różnicują odpowiedzi konstrukcji (parametry jej nośności oraz użyteczności). Taką samą sytuację obserwuje się dla imperfekcji materiałowych. W przypadku niektórych typów konstrukcji inżynierskich zdecydowanie nie można rozpatrywać jedynie modeli o geometrii idealnej.

Rozwiązanie symulacyjne problemu umożliwia uwzględnienie imperfekcji geometrycznych i/lub materiałowych w nieliniowych obliczeniach konstrukcji.

Stosując metodę Monte Carlo i/lub metodę powierzchni odpowiedzi można efektywnie oszacować niezawodność konstrukcji. Istnieją także takie techniki redukcji populacji punktów obliczeniowych rozpatrywanych zadań, które pozwalają na znaczne oszczędności kosztu i czasu obliczeń numerycznych w komercyjnych programach obliczeniowych.

Możliwe jest wnioskowanie na temat projektowych procesów optymalizacyjnych na podstawie zapewnianych przez obie metody miar niezawodności tego typu konstrukcji.

Udowodnienie wyżej sformułowanych tez zawarte jest w rozdziałach kolejnych, w których przedstawiono algorytmy autorskich programów obliczeniowych dedykowanych zagadnieniu, rozważania nad możliwością implementacji pól losowych do analiz numerycznych oraz wyniki tychże analiz i zaproponowane na ich podstawie wnioski końcowe.

Rozdział 2

Metody określania niezawodności modeli konstrukcji inżynierskich

2.1. Wprowadzenie

Sposób, w jaki konstrukcja zachowa się pod odpowiedniego typu i określonej wielkości obciążeniem jest oczywiście ściśle zależny od wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych i od sztywności konstrukcji. Z kolei to, czy wywołana odpowiedź konstrukcji jest zadowalająca dla jej projektanta lub użytkownika, zależy od wszystkich wymagań, które konstrukcja ta musi spełnić. Zmienności parametrów projektowych muszą być zatem koniecznie ujęte w rozważaniach nad bezpieczeństwem lub użytecznością układu [Bethea i inni, 1984].

Wszystkie parametry konstrukcji, które bierze się pod rozwagę w inżynierskich obliczeniach projektowo – budowlanych, są w rzeczywistości obarczone pewną niepewnością, zmiennością. Fakt ten jest uznawany przez większość kodów projektowych i konstrukcyjnych, zarówno proponowanych obecnie (Eurokody – EC, polskie normy dostosowane – PN-EN), jak i poprzedzających (polskie normy – PN, normy branżowe – B, itp.), co wyraźnie sugeruje konieczność uwzględnienia tychże niepewności w procesie projektowania i konstruowania obiektów inżynierskich.

Wielkości zmienności wszystkich parametrów konstrukcji są jednak albo ograniczone w sposób naturalny, albo też mogą być ograniczone w określonych przedziałach przez projektanta, przykładowo poprzez wykonywanie kontroli o odpowiednim standardzie tychże parametrów. To właśnie wartości ograniczające często są wskazywane jako te, które powinny być wykorzystywane jako podstawa do projektowania [Simonnet, 1996].

Jednakże w inżynierii o poziomie dokładności większym niż standardowy, takie myślenie jest nieodpowiednie. Przykładowo górne granice przyjmowane dla efektu działania sumy poszczególnych obciążeń i granice dolne przyjmowane dla wytrzymałości materiału, nie są łatwo identyfikowane w praktyce (np. obciążenia zmienne użytkowe, obciążenia wiatrem, śniegiem, obciążenia pozastatyczne, granica plastyczności stali, wytrzymałości betonu), a nawet jeśli takie granice istnieją naturalnie, to ich bezpośrednie wykorzystanie w projektowaniu może nie zawsze być racjonalne lub może być ekonomicznie nieuzasadnione. Ponadto, ograniczenia nałożone przez testowanie odbiorcze, bądź też kontrolę jakości, mogą nie być w pełni skuteczne, szczególnie w przypadku tych z parametrów konstrukcji, których pomiarów można dokonywać jedynie na drodze badań niszczących lub wtedy, gdy pomiary są fałszowane zmianami w mierzonej właściwości materiału dokonującymi się w nim pomiędzy pobraniem próbki, a momentem jej badania lub momentem wykorzystania materiału w rzeczywistej konstrukcji (zachowanie betonu, niektórych asfaltów, itp.).

Właśnie z wyżej wymienionych przyczyn wkracza do rozważań teoria obliczania niezawodności konstrukcji. Stojąc przed niemożnością poczynienia zbyt daleko idących uproszczeń projektowych, projektant musi zastanowić się, na jak duże uproszczenia może sobie pozwolić i z jaką konstrukcją (pod względem czynników ekonomicznych, znaczenia społeczno – gospodarczego lub inżynierskiego) ma do czynienia.

Najprostszym trybem postępowania w projektowaniu jest ściśle zastosowanie się wyłącznie do poleceń normatyw – takie potraktowanie problemu zwane jest **podjęciem deterministycznym**. W przypadku niektórych konstrukcji to podejście jest jednak nieuzasadnione lub niepoprawne i w tym przypadku korzysta się z obliczeń na bazie teorii prawdopodobieństwa – jest to **podjęcie probabilistyczne**.

Rozważania na temat niezawodności oraz sposobów jej analizy należałoby rozpocząć od wprowadzenia linii wyraźnie rozdzielającej podejście deterministyczne od podejścia probabilistycznego, wskazując równocześnie na odpowiednie pola inżynierii, na których poszczególne podejścia powinny znaleźć swoje zastosowanie, lub już je znajdują [Lind, 1970].

W samym podejściu losowym istnieją bowiem różne poziomy analizy niezawodności konstrukcji inżynierskich, które mogą być wykorzystane w jakiegokolwiek metodologii projektowania, które rozróżniane są w zależności wyłącznie od samej konstrukcji – jej typu, stopnia złożoności, przeznaczenia, gabarytów. Do stworzenia takiej klasyfikacji wprowadzany jest powszechnie termin **poziomu**, co można przetłumaczyć jako charakterystykę myślową zakresu zebranych informacji na temat problemu zmienności parametrów materiałów i obciążeń, który to zakres jest brany pod rozwagę na starcie procesu projektowania.

W zgodności z ogólnie przyjętym w literaturze trendem, metody analizy bezpieczeństwa konstrukcji, proponowane obecnie do identyfikacji określonego stanu granicznego układu można podzielić na cztery podstawowe poziomy, w zależności od stopnia zaawansowania ich podejścia do problemów inżynierii konstrukcyjnej.

Poziom 1 stanowią te metody, w których probabilistyczna natura problemu występowania niepewności parametrów materiałów i obciążeń jest (w celu zapewnienia odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa konstrukcji) brana pod uwagę wyłącznie jako odpowiednie, reprezentatywne wartości, zwane częściowymi współczynnikami obciążenia lub częściowymi współczynnikami bezpieczeństwa. Metody te polegają w skrócie na wprowadzeniu wyżej wymienionych statystycznie określonych współczynników (reprezentujących zmienności cech materiałów konstrukcyjnych oraz charakteru i mocy oddziaływania obciążeń) do obliczeń odwołujących się do stabelaryzowanych, unormowanych i powszechnie przyjmowanych uśrednionych wartości zmiennych losowych nakreślonych w przeprowadzanej analizie. Współczynniki częściowe są rozumiane jako odpowiednie kwantyle określonych rozkładów prawdopodobieństwa opisujących zmienne losowe – takie, aby zapewniały na etapie procesu projektowania pożądany dla konstrukcji poziom niezawodności. Należy jednak pamiętać, że poprzez tak upraszczające podejście, współczynnik niezawodności płynący z tego typu obliczeń odbiega od zakładanych wartości docelowych. Koniecznością zatem jest minimalizacja rozbieżności między wynikiem obliczeń upraszczających, a analizą dokładną, co uzyskać można przykładowo rozmyślną kalibracją przyjmowanych częściowych współczynników bezpieczeństwa. Do tego poziomu metod analizy bezpieczeństwa, biorących za priorytet kalibrację współczynników, można zaliczyć szeroko spopularyzowaną grupę

metod zwanych Load and Resistance Factor Design (LRFD; pol.: Projektowanie Współczynników Bezpieczeństwa Obciążeń i Wytrzymałości). Metoda ta w czasach obecnych znajduje ponownie bardzo rozległy obszar zastosowania [Lundberg i Galambos, 1996; Razzaq i inni, 1996; Baoping i inni, 2011; King i inni, 2012].

Poziom 2 stanowią te metody, w których probabilistyczna natura problemu ujęta jest w operowaniu dwiema statystycznymi miarami wartości niepewności parametrów materiałów i obciążeń – najczęściej wartością średnią zmiennej losowej oraz jej wariancją, uzupełnioną o miarę korelacji pomiędzy wymienionymi parametrami.

Metody te obejmują pewien szereg przybliżonych, iteracyjnych procedur obliczeniowych, wykonywanych w celu uzyskania informacji o prawdopodobieństwie awarii konstrukcji. Zazwyczaj wymagają one pewnej kontrolowanej idealizacji obszaru reprezentującego awarię, utożsamianego często z uproszczoną reprezentacją układu rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych zestawu obciążeń oraz wytrzymałości materiałów [Elishakoff, 1983].

Metody analizy bezpieczeństwa konstrukcji przynależne do poziomu drugiego zostaną znacznie szerzej opisane w kolejnych rozdziałach niniejszej pracy.

Poziom 3 stanowią te metody, w których obliczenia bezpieczeństwa konstrukcji są dokonywane w celu określenia matematycznie dokładnego prawdopodobieństwa awarii konstrukcji lub jej wyszczególnionego elementu strukturalnego, przy których to metodach korzysta się z pełnego opisu probabilistycznego wspólnego występowania wszelkich branych pod uwagę w procesie projektowania wartości niepewności parametrów materiałów i obciążeń.

Obliczenia te nie mają żadnych algorytmów upraszczających i odwołują się do pełnej analizy problemu, skupiającej się przede wszystkim na dostarczeniu rozciągłego opisu możliwości awarii konstrukcji, a także na całkowaniu wielowymiarowych łącznych funkcji gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych (reprezentujących obciążenia projektowe i wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych), rozciągających się na obszarze, na którym przeprowadzana jest analiza bezpieczeństwa konstrukcji. Niezawodność określana na bazie metod poziomu trzeciego jest najczęściej wyrażana w postaci odpowiednich miar bezpieczeństwa, takich jak **wskaźniki niezawodności** i **prawdopodobieństwo awarii**.

Metody analizy bezpieczeństwa konstrukcji przynależne do poziomu trzeciego również zostaną znacznie szerzej opisane w kolejnych rozdziałach niniejszej pracy.

Poziom 4 jest poziomem bardzo rzadko wyróżnianym i opisywanym, gdyż praktycznie niewiele jest w jego ujęciu różnic, jakie stosuje się w metodach analizy bezpieczeństwa konstrukcji poziomu trzeciego. Mówi się o nim raczej w relacji do konstrukcji, a nie do zbioru metod, aby wskazać, iż meritum problemu nie leży w sposobie matematycznego podejścia, ale w wyjątkowej specyfice konstrukcji, dla której to podejście jest inkorporowane.

Metody analizy bezpieczeństwa konstrukcji przynależne do poziomu czwartego są odpowiednie do stosowania w przypadku postępowania z konstrukcjami inżynierskimi, które mają istotne znaczenie gospodarcze. Są stosowane do projektów, w których z definicji zakłada się szczególną dokładność postępowania odnośnie zasad wiedzy inżynierskiej i analizy ekonomicznej. Projekty takie mają wówczas, oprócz standardowego zapewnienia bezpieczeństwa konstrukcji w sensie stricte inżynierskim, rozważać koszty i korzyści z budowy w sensie społeczno – ekonomicznym, między innymi: sensowność i możliwość zapewnienia

konserwacji i napraw konstrukcji lub jej elementu, szybkości narastania odsetek od zapożyczonego kapitału inwestycyjnego w stosunku do wypracowywanego przez konstrukcję zysku, konsekwencje awarii konstrukcji lub urządzeń w niej działających dla społeczeństwa, ludności cywilnej lub środowiska, itp.

Sztandarowymi obiektami inżynieryjnymi wymagającymi projektowania poruszającego się na poziomie czwartym analizy bezpieczeństwa konstrukcji są fundamenty specjalne dla konstrukcji wrażliwych na wpływy środowiskowe lub drgania spowodowane obciążeniami wyjątkowymi, takich jak elektrownie jądrowe, budynki wysokościowe, budynki na terenach zagrożonych sejsmiką skorupy ziemskiej, przyczółki i oparcia mostów autostradowych, wieże transmisji elektryczności, wieże i maszty radiowe i telekomunikacyjne, itd.

2.2. Niezawodność w ujęciu normowym (deterministycznym)

Losowość, często nazywana także **niepewnością** lub **przypadkowością**, ma jawny wpływ na konstrukcję i powinna być brana pod uwagę już na początku powstawania projektu inżynierskiego, od fazy projektu wstępnego. Zanim konstrukcja zostanie wykonana w środowisku, do jakiego została przeznaczona oraz zanim zostanie poddana działaniu obciążeń, których przeniesienie ma gwarantować, musi zostać sporządzony jej projekt, obejmujący odpowiedniego poziomu analizę bezpieczeństwa w warunkach użytkowania.

Standardowym podejściem do wyżej wspomnianego problemu, prezentowanym w dzisiejszej inżynierii, jest bez wątpienia projektowanie z użyciem typowych procedur i zaleceń, unifikowanych dla danego obszaru, środowiska, państwa, itp. – tj. **normatyw** bądź **kodów projektowych**. Większość obecnie używanych norm i specyfikacji konstrukcyjnych w obszarze przewidywania bezwzględne bezpieczeństwa użytkowania konstrukcji ma swoje podstawy w podejściu deterministycznym lub półprobabilistycznym, czyli wykorzystuje podejście prezentowane we wstępie do niniejszego rozdziału, podejście poziomu pierwszego metod analizy bezpieczeństwa konstrukcji. Metody te, polegające na wprowadzeniu statystycznie określonych częściowych współczynników bezpieczeństwa (reprezentujących zmienność cech materiałów i obciążeń) do obliczeń projektowych, są najszybszym i w wielu przypadkach wystarczającym gwarantem zachowania wiedzy o możliwości pojawienia się niebezpiecznych dla konstrukcji niepewności parametrów projektowych i zabezpieczenia projektowanej struktury na taki niekorzystny zestaw przypadków [Woliński, 2011a].

Częściowe współczynniki bezpieczeństwa są wprowadzane jako określony poziom zmienności, gwarantujący pożądaną dla konstrukcji poziom niezawodności. Normy definiują te współczynniki jako wielkości uwzględniające możliwość wystąpienia wartości obciążenia lub parametru wytrzymałościowego będącej mniej korzystną dla konstrukcji, niż wartość ustalona jako reprezentatywna średnia [Ellingwood, 2001].

Jako główne grupy zjawisk, kształtujące wielkość współczynników częściowych wymienia się: niepewność właściwości mechanicznych materiałów konstrukcyjnych, niedokładność wykonania przekrojów poprzecznych elementów konstrukcyjnych, jakość pracy wytwórni komponentów konstrukcji lub dokładność ich wykonania w warunkach placu budowy, zmiany

właściwości materiałowych i przekrojów poprzecznych na skutek eksploatacji w ustalonym okresie czasu (degradacja, zarysowania, reologia i korozja), losowość obciążeń działających na konstrukcję (możliwa jednoczesność zaistnienia, zmienność w czasie i przestrzeni, długotrwałość, cykliczność, redukcja w czasie, dynamika), możliwa konsekwencja zniszczenia konstrukcji (w zależności od stopnia zagrożenia życia ludzkiego i wartości strat gospodarczych), dokładność teorii obliczeniowych zastosowanych w projekcie, dokładność modelu matematycznego (dokładność programu komputerowego wspomagania projektowania) oraz końcowo zgodność modelu teoretycznego z rzeczywistą pracą wykonanych wcześniej podobnego typu konstrukcji [PN-82/B-02000, 1982].

Zasadą ogólną ustalania wartości wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych i obciążeń, zarówno według PN-82/B-02000, jak i PN-EN 1991-1 jest poprawne określenie całości cech fizycznych i wytrzymałościowych wszystkich materiałów konstrukcyjno – budowlanych użytych w procesie projektowania oraz wszystkich obciążeń występujących w stadium montażu i eksploatacji konstrukcji (w niezbędnych wypadkach również w stadiach wykonywania, przechowywania, remontu i transportu elementów konstrukcji) tak, aby projektując budowle i konstrukcje budowlane zapewnić im należyte bezpieczeństwo, pojmowane w określonym przez projekt znaczeniu. W celu deterministycznego ujęcia zmienności tychże cech w czasie i w przestrzeni, winno się rozróżniać następujące wartości tychże parametrów losowych: wartość charakterystyczną oraz wartość obliczeniową.

Wartość charakterystyczna jest podstawą myślową wyrażania wielkości podlegających wyżej wspomnianym typom zmienności, według metod poziomu pierwszego.

Zastępuje ona jednoznacznie każdy parametr losowy, występujący w procesie projektowym.

Polska Norma PN-82/B-02000 określa wartość charakterystyczną jako wartość o przyjętym prawdopodobieństwie nieprzekroczenia w kierunku niebezpiecznym dla konstrukcji, w ciągu określonego czasu (okresu użytkowania budowli lub innego okresu odniesienia); lub też, jeśli brak jest wystarczających do pełnego rozpoznania zjawiska danych statystycznych, jako wartość nominalną, ustaloną odpowiednio do przewidywanego sposobu użytkowania konstrukcji, lub też warunków fizycznych bądź prawnych jej funkcjonowania.

Oznaczając wartość średnią określonej wytrzymałości danego materiału konstrukcyjnego jako μ_R oraz odchylenie standardowe tejże wytrzymałości przez σ_R zdefiniować można wartość charakterystyczną wytrzymałości materiału konstrukcyjnego, jako

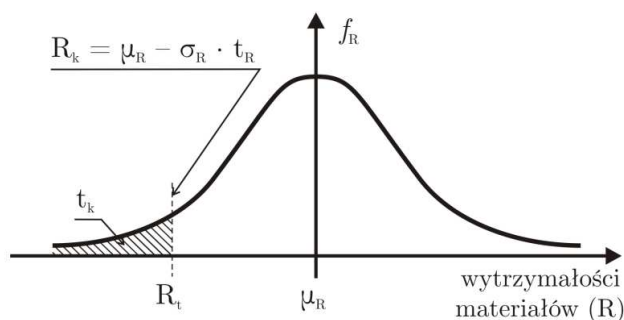
$$R_k = \mu_R - \sigma_R \cdot t_R \quad (2.1)$$

Dla zmiennej losowej całościowej wytrzymałości materiałów danej konstrukcji ($X_R = R$), jej wartości charakterystyczne definiuje się jako odpowiedniego zasięgu lewostronny margines rozkładu funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_R(x_R)$, co zaprezentowano na rys. 2.1.

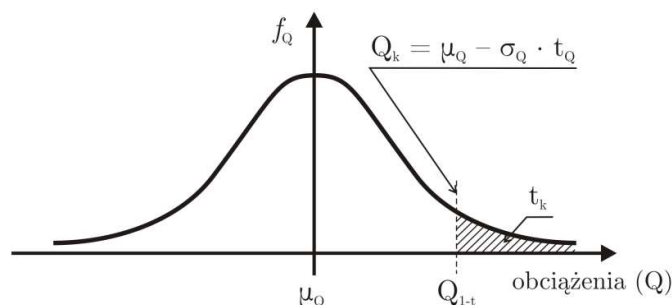
Natomiast, oznaczając wartość średnią dowolnego obciążenia działającego na konstrukcję jako μ_Q oraz odchylenie standardowe tegoż obciążenia przez σ_Q , analogicznie zdefiniować można wartość charakterystyczną obciążenia jako

$$Q_k = \mu_Q + \sigma_Q \cdot t_Q \quad (2.2)$$

Dla zmiennej losowej całościowej sumy efektów działających obciążeń ($X_S = S$), jej wartości charakterystyczne definiuje się jako odpowiedniego zasięgu prawostronny margines rozkładu funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_S(x_S)$, co zaprezentowano na rys. 2.2.



Rys. 2.1. Definicja wartości charakterystycznej zmiennej losowej wytrzymałości materiałów.



Rys. 2.2. Definicja wartości charakterystycznej zmiennej losowej całościowej sumy efektów obciążeń działających na konstrukcję.

Obliczone wartości R_k oraz Q_k oznaczają wartości charakterystyczne wytrzymałości danego materiału konstrukcyjnego oraz dowolnego obciążenia i są to, jak wspomniano we wstępie do rozdziału, takie kwantyle rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych wytrzymałości R (głównie poziom 2% wartości gwarantowanej) oraz obciążenia Q (głównie poziom 98% rocznej wartości maksymalnej), które zapewniają konstrukcji należyty poziom jej niezawodności. Wielkością wpasowującą wartość charakterystyczną w wymagane kwantyle są wymienione we wzorach mnożniki t_R oraz t_Q .

Zgodnie z zaleceniami centralnych komitetów inżynierskich zwykło się dobierać wartości $t_R = 1,645$ dla konstrukcji betonowych (Europejski Komitet Betonu) oraz $t_R = 2,000$ dla konstrukcji stalowych (Europejska Konwencja Konstrukcji Stalowych), co gwarantuje osiągnięcie zadowalającego poziomu bezpieczeństwa dla obszaru Europy Środkowej.

W dowolnym kodzie projektowym wartości charakterystyczne wytrzymałości materiałów i obciążeń w metodach poziomu pierwszego zapewniania bezpieczeństwa konstrukcji określa się jako wartości podstawowe i nakazuje się przyjmowanie ich zgodnie z zaleceniami norm.

Dla parametrów materiałowych i dla obciążeń stałych ustala się te wartości jako średnią danej wielkości zmiennej losowej, a dla obciążeń zmiennych jako wartość mającą okres powrotu co najmniej równy zakładanemu okresowi eksploatacji konstrukcji lub inny uzasadniony ekonomicznie i zapewniający bezpieczeństwo konstrukcji.

Podstawową, obowiązującą na terenie Polski normą definiującą wartości charakterystyczne jest PN-82/B-02000 (lub też, równoważnie PN-EN 1990), a ustalającymi te wartości normami szczegółowymi są m.in. PN-82/B-02001 lub PN-EN 1991-1-1 (parametry materiałowe i obciążenia stałe), PN-82/B-02003 (obciążenia zmienne technologiczne), PN-82/B-02004 (obciążenia pojazdami), PN-86/B-02005 (obciążenia zmienne maszynowe), PN-80/B-02010 lub PN-EN 1991-1-3 (obciążenie śniegiem), PN-77/B-02011 lub PN-EN 1991-1-4 (obciążenie wiatrem), PN-87/B-02013 (obciążenie oblodzeniem), PN-88/B-02014 (obciążenie gruntem), PN-86/B-02015 lub PN-EN 1991-1-5 (obciążenia termiczne), PN-EN 1991-1-2 (pożary).

Wartość obliczeniowa jest koniecznym z inżynierskiego punktu widzenia rozszerzeniem wartości charakterystycznej. Często nazywana jest wartością projektową, co wyraźnie podkreśla fakt, iż ostatecznie zapewnia konstrukcji określony poziom niezawodności.

Polska Norma PN-82/B-02000 definiuje wartość obliczeniową jako wartość parametru materiałowego lub obciążenia nie korzystniejszą od wartości charakterystycznej, domyślnie równą iloczynowi tej ostatniej i częściowego współczynnika bezpieczeństwa.

Biorąc wartości charakterystyczne wytrzymałości danego materiału konstrukcyjnego oraz dowolnego obciążenia oznaczone przez R_k oraz Q_k otrzymujemy:

$$R_d = \gamma_f \cdot R_k \quad (2.3)$$

$$\text{oraz } Q_d = \gamma_f \cdot Q_k \quad (2.4)$$

gdzie γ_f jest zasugerowanym w normie odpowiednim częściowym współczynnikiem bezpieczeństwa (zależnie od typu zmienności – współczynnikiem wytrzymałości materiału, często też definiowanym jako $\gamma_s = \gamma_f^{-1}$ lub współczynnikiem obciążenia).

Normowe (deterministyczne) zapewnienie bezpieczeństwa konstrukcji inżynierskiej polega na wykazaniu, że we wszystkich przewidywalnych przypadkach projektowych, zarówno w fazie realizacji, jak i eksploatacji konstrukcji, spełnione są dwa podstawowe warunki – **nośności** (wymiarowanie na stan graniczny nośności i odpowiadające temu stanowi wartości obliczeniowe parametrów obciążonych zmiennościami) oraz **sztywności** (wymiarowanie na stan graniczny użytkowania i odpowiadające temu stanowi wartości charakterystyczne parametrów obciążonych zmiennościami).

W ogólnym przypadku normatywny warunek bezpieczeństwa konstrukcji (w metodach probabilistycznych poziomu pierwszego) można zapisać w postaci:

$$g(R_d, Q_d, \gamma) > 0 \quad (2.5)$$

gdzie: R_d oraz Q_d to odpowiednio wartości obliczeniowe wytrzymałości danego materiału konstrukcyjnego oraz dowolnego obciążenia, a symbol γ jest wyrażeniem wszystkich współczynników modelujących zachowanie należytego bezpieczeństwa i niezawodności konstrukcji, uwzględniających niepewności jej modelu matematycznego, oczywiście nie licząc do tej grupy tych spośród rzeczonych współczynników, które zostały wzięte pod uwagę wcześniej, jako wpływające na odpowiednie częściowe współczynniki bezpieczeństwa parametrów materiałowych i obciążenia (γ_f oraz γ_s) [PN-82/B-02000, 1982].

Współczynniki bezpieczeństwa i niezawodności konstrukcji inżynierskiej wymienione pod koniec poprzedniego paragrafu można podzielić na kilka zdecydowanie odmiennych od siebie kategorii – według stanowionego przez nie sensu myślowego, według wartości uzyskanej w określonym punkcie czasu i przestrzeni, lub też według znaczenia samej konstrukcji inżynierskiej dla człowieka i środowiska.

Norma PN-82/B-02000 (lub też równoważnie PN-EN 1991-1), podaje następujące grupy tychże współczynników: współczynniki konsekwencji zniszczenia konstrukcji γ_n (dodatkowe zwiększenie lub zmniejszenie bezpieczeństwa konstrukcji w zależności od zagrożenia życia ludzkiego, strat materialnych, gospodarczych, ekonomicznych lub środowiskowych); współczynniki jednoczesności zachodzenia obciążeń ψ_o (wystąpienie w jednym czasie kilku różnych grup obciążeń o małym prawdopodobieństwie wspólnego zaistnienia); współczynniki części długotrwałej obciążenia ψ_d (określające naturę obciążenia w czasie: w całości długotrwałość, w części długotrwałość, w całości krótkotrwałość, wyjątkowość); współczynniki redukcji obciążenia a (zmniejszone prawdopodobieństwo jednoczesnego wystąpienia jednego typu obciążenia na dużej powierzchni jednego poziomu ustroju konstrukcyjnego lub na kilku poziomach jednego ustroju konstrukcyjnego) oraz współczynniki dynamiczne β_{dyn} (zwiększenie wartości obciążenia statycznego do wartości modelującej działanie obciążenia o charakterze ściśle dynamicznym – wytyczne przyjmowania tychże współczynników znaleźć można dla niektórych rodzajów obciążeń m.in. w PN-82/B-02003, PN-82/B-02004, PN-86/B-02005 oraz PN-77/B-02011).

Kombinacje obciążeń wyłaniają się jako logiczne następstwo wymienionych wyżej współczynników. Ze wszystkich nich płynie bowiem jasny przekaz – nie można dla całego zestawu różnorodnych obciążeń, jakim poddawana jest konstrukcja już od fazy montażu, przypisać jednakowej wagi i jednoczesnego występowania w danym punkcie przestrzeni i czasu. Ta mnogość możliwych do zaistnienia kombinacji – zarówno samych typów obciążeń, jak i ich wartości, a także wyżej wymienionych częściowych współczynników, przez które zaleca się wymnożyć te wartości, jest właściwym sensem projektowania w ramach metod poziomu pierwszego zapewniania bezpieczeństwa i niezawodności konstrukcji inżynierskiej.

Według PN-82/B-02000 zasada ogólna kombinowania obciążeń stanowi, iż kombinacje te ustala się w zależności od rozpatrywanego stanu granicznego (opisano je w PN-76/B-03001) w wyniku analizy możliwych wariantów jednoczesnego działania różnych obciążeń, uwzględniając przy tym, że niektóre z nich mogą nie występować lub zmieniać schemat przyłożenia sił. Obciążenia powinny być zestawione tak, aby dawały najbardziej niekorzystny efekt w rozpatrywanym stanie granicznym [PN-82/B-02000, 1982].

W przypadku podjęcia analizy stanu granicznego nośności należy, wg PN-82/B-02000, zastosować dwie kombinacje obciążeń – kombinację podstawową i kombinację wyjątkową.

Kombinacja podstawowa dla SGN składa się z obciążeń stałych i zmiennych, przy czym te ostatnie powinno uszeregować się wg ich znaczenia, z przynależnymi do każdego z nich współczynnikami jednoczesności obciążenia. Postać odpowiadającej tej kombinacji obciążenia obliczeniowego można przedstawić za pomocą wyrażenia

$$P = \sum_{i=1}^m (G_{ki} \cdot \gamma_{fi}) \cdot \gamma_n + \sum_{j=1}^n (Q_{kj} \cdot \gamma_{fj}) \cdot \gamma_n \cdot \psi_{oj} \cdot a_j \cdot \beta_{dyn,j} \quad (2.6)$$

gdzie: $(G_{ki} \cdot \gamma_{fi})$ to wartość obliczeniowa i-tego obciążenia stałego, $(Q_{kj} \cdot \gamma_{fj})$ to wartość obliczeniowa j-tego obciążenia zmiennego, a reszta symboli reprezentuje wkład odpowiednich współczynników obciążenia (i-tego stałego i j-tego zmiennego): konsekwencji zniszczenia γ_n , jednoczesności zachodzenia obciążeń ψ_o , części długotrwałej obciążenia ψ_d , redukcji obciążenia a oraz dynamiczny β_{dyn} .

Kombinacja wyjątkowa (akcydentalna) dla SGN składa się z obciążeń stałych oraz niektórych zmiennych, przy czym należy wymnożyć je przez współczynnik jednoczesności zachodzenia obciążeń $\psi_o = 0,8$, niezależnie od ich liczby i znaczenia, z wyjątkiem ściśle określonych przypadków projektowania konstrukcji, których zniszczenie miałyby katastrofalne skutki społeczno – ekonomiczne (takie myślenie powoduje, że bardzo często przyjmuje się w tej kombinacji wpływ współczynnika konsekwencji zniszczenia $\gamma_n = 1$) oraz jednego, rozważanego w danej kombinacji obciążenia wyjątkowego. Postać odpowiadającego tej kombinacji obciążenia obliczeniowego można przedstawić za pomocą wyrażenia

$$P_a = \sum_{i=1}^m (G_{ki} \cdot \gamma_{fi}) + 0,8 \cdot \sum_{j=1}^n (Q_{kj} \cdot \gamma_{fj}) \cdot a_j \cdot \beta_{dyn,j} + F_a \quad (2.7)$$

gdzie symbole użyte w początkowym fragmencie powyższego zapisu są zgodne z powyżej objaśnioną nomenklaturą, a F_a to wartość rozważanego obciążenia wyjątkowego.

W przypadku podjęcia analizy stanu granicznego użytkowania należy wg PN-82/B-02000 zastosować również dwie kombinacje obciążeń – podstawową i obciążeń długotrwałych.

Kombinacja podstawowa dla SGU dotyczy wszystkich konstrukcji i składa się ze wszystkich obciążeń stałych i jednego, najbardziej niekorzystnego obciążenia zmiennego, bez żadnych współczynników zmniejszających. Postać odpowiadającego tej kombinacji obciążenia charakterystycznego można przedstawić za pomocą wyrażenia

$$P_k = \sum_{i=1}^m G_{ki} + Q_k \quad (2.8)$$

gdzie G_{ki} to wartość charakterystyczna i-tego obciążenia stałego, a Q_k to wartość charakterystyczna wybranego, najbardziej niekorzystnego obciążenia zmiennego.

Kombinacja obciążeń długotrwałych dla SGU dotyczy tylko tych konstrukcji, dla których ma znaczenie czas występowania obciążenia ze względu na skutki eksploatacji (degradacja, zarysowania, reologia i korozja) i składa się ze wszystkich obciążeń stałych i tych obciążeń zmiennych, które wykazują długotrwałość. Postać odpowiadającego tej kombinacji obciążenia charakterystycznego można przedstawić za pomocą wyrażenia

$$P_{k,lt} = \sum_{i=1}^m G_{ki} + \sum_{j=1}^n Q_{kj} \cdot \psi_{dj} \quad (2.9)$$

gdzie wszystkie symbole użyte w powyższym zapisie są zgodne z powyższymi objaśnieniami.

Aktualizacja kodów projektowych i normatyw technicznych to kolejny ważny punkt projektowania na poziomie pierwszym szacowania bezpieczeństwa i niezawodności konstrukcji inżynierskich, nierozłączny z bardzo szeroką gałęzią projektów budowlanych i inżynieryjnych.

Kody projektowe mają zwykle ścisły format deterministyczny i podają wytyczne dotyczące projektowania oraz wykonania każdego typu konstrukcji z danej grupy czy z danej klasy budowli w sposób kompendialny. Są używane wobec rozległych grup konstrukcji inżynierskich, a w ich świetle celem inżyniera powinno być zapewnienie bezpieczeństwa dla wszystkich przypadków kombinacji obciążeń w całości klasy danej konstrukcji, bardziej niż dla pojedynczego przypadku. Powoduje to uzyskanie w analizie sprecyzowanego problemu wyników bardzo różnorodnych, związanych przede wszystkim z uśredniającą, uśredniającą problem inżynierski naturą częściowych współczynników bezpieczeństwa [Murzewski, 1999].

Jednakże, jeśli przyjmie się za cel indywidualizację projektu, wyraźną próbę dopasowania kosztów budowy i utrzymania konstrukcji dla potrzeb sprecyzowanego zagadnienia, jeśli narzuci się dodatkowe warunki na projektowanie, to można zagwarantować jeden indywidualny, najbardziej optymalny poziom bezpieczeństwa konstrukcji inżynierskiej przy danych materiałach i obciążeniach, uzyskując w tym przypadku niezawodność jednorodną dla każdego przypadku obciążenia. Akceptowanym powszechnie celem ewolucji kodów obliczeniowych jest chęć osiągnięcia poziomów bezpieczeństwa starych norm projektowych, za pomocą optymalizacyjnej natury nowych norm, biorącej za cel wyraźną indywidualizację funkcji stanu granicznego dla poszczególnych konstrukcji z danej grupy czy z danej klasy realizacji [Rosenblueth i Mendoza, 1971; Sørensen i inni, 1994; Rackwitz, 2000].

Kolejnym celem ewolucji norm projektowych powinna być tendencja do tworzenia takich procedur projektowych, które podchodzą z ufnością do całkowicie nowych form budownictwa, bez uprzedniej konieczności przeprowadzania testów laboratoryjnych lub terenowych dla osobno wykonanego modelu konstrukcji (prototypu). Normy projektowe muszą nadążać za zmianami – przede wszystkim za rozwojem technologii budowy, pojawianiem się nowych materiałów, a także za definiowaniem nowych obciążeń, którym poddawane są konstrukcje. Normatywy muszą więc zawsze mieć charakter ewolucyjny, ze zmianami wprowadzanymi w regularnych okresach czasu (zwykle w odstępach 3 – 10 lat), właśnie w celu implementacji do myślenia inżynierskiego nowych typów formowania konstrukcji, skutków lepszego zrozumienia zachowania konstrukcji, skutków zmian w produkcji lub kontroli jakości elementów konstrukcyjnych, lepszą i bardziej rozwiniętą wiedzą odnośnie obciążeń itp.

Najnowsza generacja kodów projektowych, do których można zaliczyć wprowadzane szeroko Eurokody i związane z nimi wytyczne dla stali, betonu, innych klasycznych materiałów oraz wreszcie – materiałów technologicznie przełomowych (kompozyty), muszą generować korzyści projektowe dla inżyniera, leżące zazwyczaj w możliwości zwiększenia ogólnego bezpieczeństwa konstrukcji przy zachowaniu tych samych kosztów budowy, bądź też w sytuacji odwrotnej, tj. zachowania ogólnego bezpieczeństwa konstrukcji przy zmniejszeniu kosztów budowlanych.

Proces projektowania w głównej mierze dążyć ma bowiem do kompromisu pomiędzy opisywanymi wyżej czynnikami – kosztem budowy, bezpieczeństwem konstrukcji, trwałością, użytecznością, sztywnością, czynnikami ekologicznymi, społeczno – ekonomicznymi itp., zatem nierozsądne jest niekiedy reagowanie na przekroczenie stanu granicznego konstrukcji jedynie zwiększaniem wymiarów konstrukcji inżynierskiej lub zwiększaniem kosztów

zapewnienia odpowiedniego poziomu obciążenia. Zastępczo, powinno się wówczas stosować regulację częściowych współczynników bezpieczeństwa, które, jak podkreślono w ustępach powyżej, mają charakter arbitralny, a normatywy bardzo często same zalecają ich kalibrację i modyfikację. Taką sytuację wyszczególniają praktycznie wszystkie Eurokody – kolejno: PN-EN 1990 (podstawy konstruowania inżynierskiego); PN-EN 1991-1-1 (budownictwo ogólne); PN-EN 1993-1-1 (konstrukcje stalowe); PN-EN 1994-1-1 (konstrukcje zespolone) itp.

Na początku wprowadzania kodów projektowych, do takich modyfikacji zatrudniano wyłącznie zespoły eksperckie, jednakże przy rozwoju komputerowego wspomaganie budownictwa, normy zostawiają te działania po stronie jej użytkownika, zastrzegając tylko nadrzędny obowiązek narzucany na inżynierię – konieczność wypełnienia celu projektowego.

Nowoczesne podejście do konstrukcji inżynierskich polega obecnie właśnie na modyfikacji wybranych częściowych współczynników bezpieczeństwa, a następnie wykonywaniu ponownego sprawdzenia, czy przy tak dobranym poziomie ich wartości (nadal dopuszczalnym przez normę) stan graniczny jest przekroczony, a jeśli tak, to w jak niekorzystnie dużym stopniu (niekorzystnym ze względów kosztów obliczeniowych, projektowych bądź ekonomicznych). Proces kilku do kilkunastu iteracji może w takim przypadku wygenerować zadowalające rezultaty (spełniony zostanie stan graniczny, zadowalająco zostaną zminimalizowane powyższe koszty), ale jednocześnie nie powinien zapewnić optymalnego kształtowania konstrukcji, więc poprawniejsze projektowanie konstrukcji powinno się odwołać do bardziej złożonych, pełnych technik probabilistycznych, złożonej wielokryterialnej optymalizacji całości zadania, biorących pod uwagę różne zalecenia i sytuacje projektowe. Jeszcze raz w tym miejscu powinno się podkreślić, iż niepewności parametrów materiałów i obciążeń, wraz z ryzykiem, jakie jest z nimi związane, wyrażane jest według podejścia deterministycznego jedynie za pomocą częściowych współczynników bezpieczeństwa, zgodnie z ich naturą wyrażaną w poziomie pierwszym metod szacowania niezawodności konstrukcji.

Widać zatem, że wszystkie cele i korzyści opisane powyżej mogą być osiągnięte jedynie poprzez racjonalną ocenę tychże współczynników częściowych (związanych czy to z informacją o zakresie możliwej zmiany dowolnej zmiennej losowej konstrukcji inżynierskiej, czy też z jej ewolucją) oraz poprzez szczegółowe wcześniejsze zbadanie oddziaływań, którym ta konstrukcja zostanie poddana.

To ogólne stwierdzenie można zastosować jako przedstawienie istoty nowej gałęzi analizy niezawodności na poziomie pierwszym (często identyfikowanej jako metody poziomu 1,5) – tzw. metod kalibracyjnych, które zbiorczo nazywa się w literaturze terminem Load and Resistance Factor Design (LRFD; pol.: Projektowanie Współczynników Bezpieczeństwa Obciążeń i Wytrzymałości). Procedury kalibracyjne są podawane i szeroko komentowane w wielu monografiach traktujących o niezawodności konstrukcji [Nowak i Collins, 1976; Ellingwood i inni, 1982; Galambos i inni, 1982; Thoft–Christensen i Baker, 1982].

Metody kalibracyjne są stosowane po to, aby wypracować optymalny format innowacyjnych normatyw projektowych, zachowując jednocześnie wymagane wcześniej przez komitety normalizacyjne odpowiednie poziomy bezpieczeństwa i niezawodności konstrukcji budowlanych. Procedura kalibracyjna może być postrzegana jako specyficzny proces optymalizacyjny, gdzie rozpatrywanymi i analizowanymi zmiennymi nie są de facto rzeczywiste zmienne parametry zmienności cech i wytrzymałości materiałów oraz obciążenia

(tak jak dzieje się to w przypadku metod poziomu drugiego), ale właśnie modelujące niepewności tych parametrów częściowe współczynniki bezpieczeństwa.

W literaturze dostępnych jest wiele różnych metod, wybór odpowiedniej jest prawie zawsze trudnym zadaniem, a często dostrzec można także, że wybór ten jest mocno uwarunkowany problemem, z jakim zmagają się konstruktor [Gayton i inni, 2004; Woliński, 2011b].

Co ważne, ten sam poziom niezawodności konstrukcji może być osiągnięty przez nieskończenie wiele różnych kombinacji częściowych współczynników bezpieczeństwa. Eurokod PN-EN 1990 pozwala inżynierowi na następującą sytuację – dopuszcza się zamianę wybranego zestawu współczynników częściowych dowolnym innym, jeżeli projektant ma na względzie redukcję marginesu bezpieczeństwa lub tolerancji wymiarów dla jednego zestawu zmiennych, a ich zwiększeniu dla dowolnego innego zestawu, przy poszanowaniu spełnienia wszystkich stanów granicznych konstrukcji. Norma nie podaje innego kryterium uniwersalnego, zatem w wielu przypadkach staje się nim wspomniany już koszt ekonomiczny. Najlepszym rozwiązaniem jest jednak wybór zmienianych współczynników częściowych na podstawie wrażliwości całości konstrukcji na zmiany w nich zachodzące, nawet jeśli wzrasta przez to koszt wykonania lub utrzymania konstrukcji [Kharmanda i inni, 2002].

Z technicznego punktu widzenia techniki kalibracyjne (LRFD) mogą być podzielone na dwie kategorie: **metody globalne** (GOM) oraz **metody przybliżające** (AOM). Metody globalne mają podstawę w bezpośrednich rozwiązaniach dopasowania optymalizacji docelowej. Wysokiego kosztu obliczeniowego tej procedury można uniknąć przez stosowanie metod przybliżających, gdzie uproszczenia są wprowadzane w sformułowanie problemu inżynierskiego. Oczywiście, skuteczność metod przybliżających wiąże się z mniejszą precyzją [Gayton i inni, 2004].

2.3. Niezawodność według podejścia probabilistycznego

Jak wskazano wcześniej, metody probabilistyczne są rozszerzeniem analizy deterministycznej, przeniesieniem jej na poziom bardziej szczegółowy i bardziej dokładnie odwzorowujący złożoność problemów niepewności parametrów wytrzymałości materiału oraz obciążenia konstrukcji. Jeżeli przedsięwzięty przez inżyniera tok myślenia wkracza w zakres analizy czerpiącej informację z probabilistycznych momentów odpowiedzi (wartość średnia, odchylenie standardowe, skośność, kurtoza itp.) lub pełnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa, jeżeli myślenie inżynierskie przestaje ograniczać się wyłącznie do uwzględniania arbitralności częściowych współczynników bezpieczeństwa, to przechodzi się w szerokie spektrum metod szacowania niezawodności, prowadzących do pełnej probabilistycznej oceny bezpieczeństwa konstrukcji inżynierskich [Haugen, 1968; Lind, 1970].

Wstępna klasyfikacja metod, technik i teorii probabilistycznych jest trudna do wykonania i poszczególni autorzy dokonują jej zazwyczaj w zależności wyłącznie od uzyskiwanych przez nich wyników końcowych analiz, lub drogi, którą postępuje prezentowane przez nich rozwiązanie problemu inżynierskiego. Argumentem za takim postępowaniem jest fakt, iż wiele z tych metod jest uniwersalnych, stosowanych we wszystkich polach inżynierii, począwszy od ekonomiki, przez konstrukcje inżynierskie i budowlane, a kończąc na chemii i biotechnologii [Madsen i inni, 1986; Melchers, 1999; Sudret i Der Khuregian, 2000; Ang i Tang, 2007].

Podstawowymi narzędziami do pracy z parametrami, które można opisać jako zmienne losowe są statystyka i rachunek prawdopodobieństwa. W praktyce inżynierskiej najczęściej czerpie się z tego ostatniego. Rachunek prawdopodobieństwa pozwala nam bowiem wywnioskować, w jaki sposób doszukać się można możliwości wystąpienia interesujących nas zdarzeń (przykładowo, w procesach określania niezawodności będzie to prawdopodobieństwo zdarzenia się awarii konstrukcji lub jej elementu) oraz obliczać prawdopodobieństwa zbudowanych z nich zdarzeń pochodnych (żywność lub podatność na uszkodzenia, które nie zagrażają konstrukcji, takie jak czasowe wyłączenia z użytku, konieczność modernizacji) [Bołotin, 1968; Hart, 1982; Srivastava i Carter, 1983; Gwóźdź i Machowski, 2011].

Literatura traktująca o matematycznych i inżynierskich sposobach oceny niezawodności jest bardzo bogata, obejmuje tysiące monografii, rozpraw oraz publikacji, stąd w niniejszej rozprawie zostaną wspomniane jedynie te z nich, które miały największy wpływ na jej końcowy kształt, a także te najpełniej opisujące pola działania, w których się poruszano. Są one postrzegane przez pryzmat niniejszej rozprawy jako fundamentalne, a nierzadko są to absolutnie prekursorskie prace w temacie rozważania niezawodności konstrukcji jako zagadnienia probabilistycznego [Weibull, 1939; Freudenthal, 1954; Lin, 1967; Cornell, 1969; Hasofer i Lind, 1974; Lind, 1977; Ditlevsen, 1981; Biegus, 1999 i wiele innych].

Na podstawie tych prac można spróbować wprowadzić ramowy podział rzeczonych metod na dostrzegalnie rozróżnione trzy główne gałęzie. Podczas, gdy niektóre ich koncepcje zostaną zilustrowane w niniejszej dysertacji ze względu na chęć jak najpełniejszego zobrazowania złożoności projektowania probabilistycznego, nie wszystkie zostaną w niej wykorzystywane.

Pierwszą z gałęzi jest szereg metod, które skupiają się na obliczeniach momentów odpowiedzi probabilistycznej konstrukcji poddanej analizie, zwane **metodami perturbacyjnymi**. Metody te przeważnie skupiają się na obliczeniach jedynie pierwszych dwóch momentów odpowiedzi – wartości średniej zmiennej losowej i jej wariancji (bądź pochodnie – odchylenia kwadratowego), wraz z załączoną analizą korelacji pomiędzy poszczególnymi zmiennymi [Thoft–Christensen i Baker, 1982; Melchers, 1999].

Drugą gałęzią są **metody szacowania niezawodności**, zwane też **teorią niezawodności**, które skupiają się przede wszystkim na oszacowaniu prawdopodobieństwa awarii konstrukcji na skutek zaistnienia sumy współgrających, niekorzystnych wartości niepewności obrazowanych poprzez zmienne losowe [Hart, 1982; Thoft–Christensen i Baker, 1982; Ditlevsen i Madsen, 1996; Melchers, 1999; Ang i Tang, 2007].

Aby oszacować niezawodność konstrukcji stosuje się liczną grupę podejść teoretycznych z zakresu metod statystycznych, symulacyjnych i probabilistycznych. Dominującymi gatunkami tychże podejść są omówione bądź wspomniane w późniejszych rozdziałach: metoda Monte Carlo [Kahn, 1956; Hammersley i Handscomb, 1964; Pradlwarter i Schuëller, 1997; Hurtado i Barbat, 1998; Johnson i inni, 1999; Schuëller, 2001], metody analizy niezawodności pierwszego i drugiego rzędu (First i Second Order Reliability Methods – FORM i SORM) [Rackwitz i Fiessler, 1978; Ditlevsen, 1982; Chen i Lind, 1983; Ditlevsen i Madsen, 1996], metoda powierzchni odpowiedzi (Response Surface Method – RSM) [Thoft–Christensen i Baker, 1982; Myers i Montgomery, 1995; Melchers, 1999; Miller i Sa, 2003; Whitcomb i Anderson, 2004] oraz zyskujące rosnącą popularność metody sztucznych sieci neuronowych (Neural Network Methods – NNM) [Sudret i Der Khuregian, 2000].

Osobnym problemem jest generacja zmiennych losowych potrzebnych do analizy niezawodności. Szczegółowy przegląd technik generacyjnych zmiennych losowych można znaleźć w większości publikacji książkowych zajmujących się teorią niezawodności konstrukcji inżynierskich [Kahn, 1956; Devroye, 1986; Ditlevsen i Madsen, 1996; Melchers, 1999].

Trzecią istotną gałęzią metod probabilistycznych jest **stochastyczna metoda elementów skończonych** (Stochastic Finite Element Method – SFEM), która pozwala rozważyć wielkości odpowiedzi konstrukcji inżynierskiej poddanej działaniom procesów losowych [Skalmierski i Tylikowski, 1982; Shinozuka i Yamazaki, 1988; Sudret i Der Khuregian, 2000].

W analizach stochastycznych konieczne jest odwzorowanie wspomnianych procesów losowych, tj. zachowań będących różnymi w zależności od czasu i przestrzeni parametrów wejściowych analizy [Cheng i Young, 1993; Grigoriu, 1999].

Istnieje także cała gama metod zajmująca się dyskretyzacją stochastycznych pól losowych [Li i Der Kiureghian, 1993; Sudret i Der Khuregian, 2000].

2.3.1. Podstawowe pojęcia teorii niezawodności

Główny nacisk niniejszej dysertacji został położony na drugą z opisanych gałęzi metod i technik probabilistycznych, tj. na **teorię niezawodności konstrukcji**.

Jej główną zasadę można sformułować, jak wspomniano przy okazji wymieniania grup metod poziomu pierwszego, jako próbę oszacowania prawdopodobieństwa awarii układu, którego model matematyczny bierze pod uwagę pełne probabilistyczne dane ilościowe i jakościowe dotyczące niepewności parametrów wytrzymałości materiału oraz efektów działania obciążenia [Zubrzycki, 1961; Thoft–Christensen i Murotsu, 1986; Woliński i Wróbel, 2001].

W podejściu klasycznym teorii niezawodności konstrukcja rozkładana jest myślowo na poszczególne komponenty (parametry), które zostają potraktowane jako niezależne od czasu **zmienne losowe** (wyraźnie należy zaznaczyć ten fakt, jako odróżnienie od procesów losowych, przedmiot działania SFEM). Zmienne losowe mogą reprezentować każde (bądź też wybrane przez projektanta) niepewności, mogące zaistnieć w konstrukcji lub w jej elemencie.

Wówczas, zdefiniować można pewien wielowymiarowy zestaw (wektor kolumnowy) tychże zmiennych, tzw. **wektor losowy**

$$\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\} \quad (2.10)$$

gdzie $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ są kolejnymi zmiennymi (o ich całkowitej liczbie równej n), wyrażonymi w postaci jednowymiarowych zmiennych losowych, tzw. podstawowych (bazowych) zmiennych losowych.

W tak zdefiniowanej, n – wymiarowej przestrzeni rzeczywistej \mathbf{R}^n wektor losowy przyjmuje nieskończenie wiele pojedynczych zbiorów wartości poszczególnych zmiennych podstawowych, równych odpowiednio: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Pojedynczy zbiór $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ nazywamy **realizacją** zmiennej losowej \mathbf{X} .

Awarię konstrukcji definiuje się zatem jako pewien zbiór realizacji zmiennej losowej \mathbf{X} , dla którego następuje uzyskanie lub przekroczenie pewnego zdefiniowanego stanu granicznego konstrukcji lub jej elementu [Freudenthal, 1956; Thoft–Christensen i Sørensen, 1987].

Stan graniczny należy rozumieć jako odpowiednio nakreślone przez projektanta ograniczenie nałożone na konstrukcję, analogiczne do kwestii wspomnianych przy wymiarowaniu konstrukcji z użyciem metod deterministycznych. W myśl takiego zdefiniowania problemu, można mówić więc o jedynie dwóch stanach konstrukcji, które rozgranicza n -wymiarowa powierzchnia graniczna: o **stanie bezpiecznym**, gdy konstrukcja spełnia wymogi projektowe oraz o **stanie niebezpiecznym**, tzw. **stanie awaryjnym**, kiedy ograniczenia projektowe zostają naruszone. Zaznaczyć powinno się, iż poprzez pojęcie awarii konstrukcji, w niektórych przypadkach wymiarowania, mówimy także o możliwości zaistnienia pełnego zniszczenia konstrukcji, katastrofy budowlanej.

W teorii niezawodności stan graniczny w n -wymiarowej przestrzeni realizacji zmiennej losowej \mathbf{X} wyraża się poprzez funkcję określoną na n zmiennych, tzw. **uogólnioną losową funkcję graniczną (awaryjną) $g(\mathbf{X})$** . Wówczas stan bezpieczny występuje oczywiście wtedy, gdy $g(\mathbf{X}) > 0$, a stan awaryjny zachodzi przy $g(\mathbf{X}) \leq 0$.

Przyjmując powyższy podział zdefiniować można **obszar bezpieczny** $\Omega_s = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) > 0\}$ (s – safe domain) oraz analogicznie **obszar awarii** $\Omega_f = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) < 0\}$ (f – failure domain).

Co za tym idzie, przez równanie $g(\mathbf{x}) = 0$ reprezentowana jest wspomniana n -wymiarowa **powierzchnia graniczna**. W niektórych pozycjach literatury spotkać można się z zapisem **obszaru granicznego** $\Omega_0 = \{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = 0\}$, dla którego zachodzi $P(\mathbf{X} \in \Omega_0) = 0$.

Korzystając z przyjętej powyżej definicji warunku stanu niebezpiecznego (awaryjnego), można zdefiniować **prawdopodobieństwo awarii (zawodność, awaryjność) P_f** , jako prawdopodobieństwo zdarzenia losowego określonego na obszarze awarii

$$P_f = P(\Omega_f) = P(g(\mathbf{X}) \leq 0) \quad (2.11)$$

lub, jeśli istnieje dla danego rozkładu funkcja gęstości prawdopodobieństwa, to uwzględniając zapis w postaci całkowej, jako

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{g(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.12)$$

gdzie $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ oznacza funkcję gęstości rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych podstawowych. W ogólnym przypadku $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n)$, a dla zmiennych podstawowych niezależnych $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)$.

Przeciwstawieństwem prawdopodobieństwa awarii zdefiniowanego w powyższy sposób jest tzw. **bezawaryjność P_s** , którą można w prosty sposób wyrazić w postaci

$$P_s = 1 - P_f = P(\Omega_s) = 1 - P(\Omega_f) = P(g(\mathbf{X}) > 0) \quad (2.13)$$

Obszar całkowania $g(\mathbf{X}) \leq 0$ idealnie opisuje interesującą inżyniera przestrzeń naruszenia stanu granicznego. Jednakże (poza pewnymi przypadkami szczególnymi), całkowanie potrzebne do wyznaczenia prawdopodobieństwa awarii P_f na tymże obszarze jest analitycznie niewykonalne. Jest to związane z trzema głównymi przyczynami – po pierwsze, nawet mając pełną wiedzę matematyczną o funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ bądź o uogólnionej losowej funkcji granicznej $g(\mathbf{X})$, całkowanie numeryczne wyrażenia jest bardzo trudne (przyjmuje się, że dla $n > 5$ obliczenia numeryczne są wysoce nieefektywne lub wręcz niewykonalne); po drugie – gęstość rozkładu prawdopodobieństwa $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ może nie być dobrze opisana (przykładowo z powodu braku, niekompletności lub niewystarczalności danych statystycznych bądź eksperymentalnych) oraz po trzecie – losowa funkcja graniczna $g(\mathbf{X})$ również może być obciążona pewnym błędem, powstającym przy odwzorowywaniu rzeczywistej konstrukcji inżynierskiej do modelu matematycznego [Melchers, 1999].

Rozwiązanie problemu skalkulowania prawdopodobieństwa awarii P_f może być wówczas osiągalne tylko na drodze pewnych uproszczeń lub operacji matematycznych (lub też – obu działań naraz), wykonanych na każdym z powyższej wymienionych zakresów problemu, z czego najistotniejsze są dwie zasygnalizowane poniżej techniki postępowania, które zostaną szerzej omówione będą w niniejszej pracy w rozdziałach kolejnych.

Pierwszą z nich jest używanie aproksymacji numerycznych, tzw. **symulacji**, które pozwalają na wykonanie wymaganego całkowania wielowymiarowego poprzez przeprowadzanie go na odpowiednio dużej próbie realizacji $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ dobranych w sposób losowy lub pseudo – losowy. Podejście takie jest zbiorczo określane mianem **metody Monte Carlo**.

Drugą z nich jest metoda omijająca całkowicie proces całkowania, co da się uzyskać zastępując łączną gęstość rozkładu prawdopodobieństwa $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ poprzez zasygnalizowaną powyżej prostszą postać gęstości rozkładu. Można tego dokonać przez użycie jej właściwości szczególnych tak, aby przybliżenie prawdopodobieństwa awarii P_f było satysfakcjonujące. Podejście takie jest zbiorczo określane mianem **metody pierwszego rzędu – drugiego momentu odpowiedzi (First Order – Second Moment)** [Melchers, 1999].

2.3.2. Problem podstawowy analizy niezawodności

Na wstępie poniższych rozważań zaznaczyć można, iż w wielu pozycjach literatury dokonuje się wprowadzenia dodatkowej zmiennej losowej, uzyskiwanej przez podmianę w równaniu opisanej na obszarze granicznym Ω_0 n -wymiarowej powierzchni granicznej $g(\mathbf{x}) = 0$ wektora realizacji $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ na odpowiadającą zmienną losową $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$.

Tę dodatkową zmienną losową nazywa się **zapasem (marginesem) bezpieczeństwa** i oznacza się ją poprzez M , gdzie $M = g(\mathbf{X})$. Tak zdefiniowany margines bezpieczeństwa z definicji odzwierciedla arbitralność, jaką wprowadza się do zadania poprzez dobór określonego typu uogólnioną losową funkcję graniczną (awaryjną) $g(\mathbf{X})$.

Przyjęcie zmiennej losowej marginesu bezpieczeństwa prowadzi za sobą logiczne rozwinięcie upraszczającego podejścia do konstruowania funkcji granicznej $g(\mathbf{X})$. Bardzo często przyjmuje się bowiem, iż w modelu probabilistycznym konstrukcji inżynierskiej istnieją jedynie dwie reprezentatywne zmienne losowe, reprezentujące kolejno **całkowitą wytrzymałość materiałów** (X_R), z jakich wykonana jest dana konstrukcja lub jej element (całościowo) oraz **efekt (sumę) obciążeń** (X_S) działających na konstrukcję bądź jej element.

Zapis zmiennej losowej marginesu bezpieczeństwa można przedstawić wówczas następująco

$$M = g(\mathbf{X}) = g(X_R, X_S) = g(R, S) \quad (2.14)$$

W wielu przypadkach reprezentatywne zmienne losowe (X_R, X_S) są przyjmowane jako zmienne nieujemne i niezależne, konieczne też należy je dyskretyzować w jednakowych jednostkach. Zmienne te opisywane są za pomocą odpowiednich reprezentatywnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa – kolejno $f_R(x_R)$ oraz $f_S(x_S)$.

W tak uproszczonym rozumowaniu przyjmuje się, iż konstrukcja lub jej element przekroczy stan graniczny (znajdzie się w stanie awarii) wtedy i tylko wtedy, gdy jej zmienna losowa całkowitej wytrzymałości $X_R = R$ osiągnie mniejszą wartość niż powstałe w niej naprężenia bądź przemieszczenia spowodowane działającą na nią sumą obciążeń $X_S = S$.

Pozwala to na prostsze przedstawienie zależności pozwalającej obliczyć prawdopodobieństwo awarii takiej konstrukcji, które teraz prezentuje się następująco

$$P_f = P(g(\mathbf{X}) \leq 0) = P(g(R, S) \leq 0) = P(R - S \leq 0) \quad (2.15)$$

lub też, w postaci równoważnej

$$P_f = P(R \leq S) = P(R/S \leq 1) \quad (2.16)$$

Wprowadzając wspomniane pojęcia reprezentatywnych funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_R(x_R)$ oraz $f_S(x_S)$, prawdopodobieństwo awarii konstrukcji zapisać można następująco

$$P_f = P(X_R - X_S \leq 0) = \iint_{\Omega} f_{RS}(x_R, x_S) dr ds \quad (2.17)$$

lub też, jeśli reprezentatywne zmienne losowe (X_R, X_S) są rzeczywiście niezależne, w postaci

$$P_f = P(X_R - X_S \leq 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{s \geq r} f_R(x_R) f_S(x_S) dx_R dx_S \quad (2.18)$$

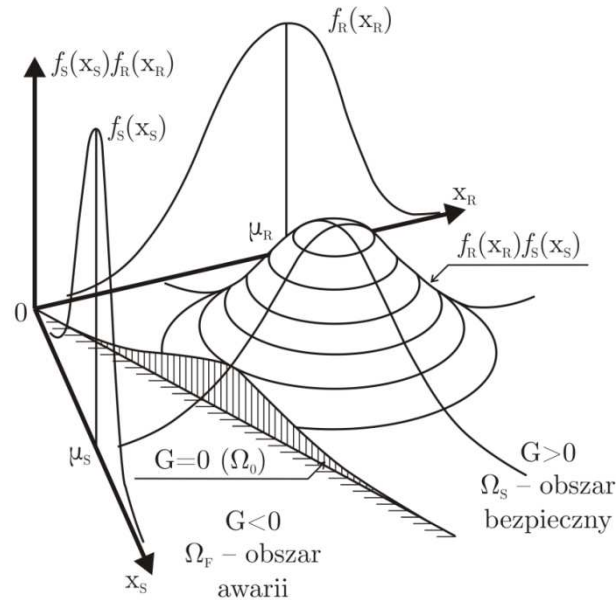
Reprezentatywne funkcje gęstości prawdopodobieństwa $f_R(x_R)$ oraz $f_S(x_S)$, łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f_{RS}(x_R, x_S)$ (zakładając, że X_R, X_S są niezależne) oraz obszar przekroczenia stanu granicznego są zaprezentowane na rys. 2.3.

Ponadto, dla dowolnej zmiennej losowej X , dystrybuanta rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej w chwili t ma wartość

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt \quad (2.19)$$

i podać można postaci dystrybuant reprezentatywnych zmiennych losowych (X_R, X_S)

$$F_R(x_R) = \int_{-\infty}^{x_R} f_R(t) dt \quad \text{oraz} \quad F_S(x_S) = \int_{-\infty}^{x_S} f_S(t) dt \quad (2.20);(2.21)$$



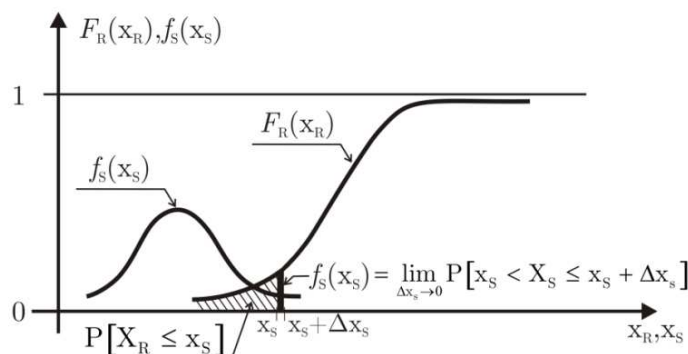
Rys. 2.3. Reprezentatywne funkcje gęstości prawdopodobieństwa $f_R(x_R)$ oraz $f_S(x_S)$, łączna funkcja gęstości prawdopodobieństwa $f_{RS}(x_R, x_S)$ (zakładając, że X_R, X_S są niezależne) oraz obszar przekroczenia stanu granicznego (zakreskowany).

Prawdopodobieństwo awarii konstrukcji zapisać można zatem także przy wykorzystaniu pojęcia dystrybuanty rozkładów prawdopodobieństwa (jeśli reprezentatywne zmienne losowe X_R, X_S są rzeczywiście niezależne), w postaci

$$P_f = P(X_R - X_S \leq 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_R(x_R) f_S(x_S) dx_S \quad (2.22)$$

która nazywana jest powszechnie **całką splotu**, a zobrazować ją można ja na rys. 2.4.

W przypadku większości rozkładów prawdopodobieństwa obliczenia całki splotu można dokonać prostymi procedurami numerycznymi [Murzewski, 1997; Gwóźdź, 1998]

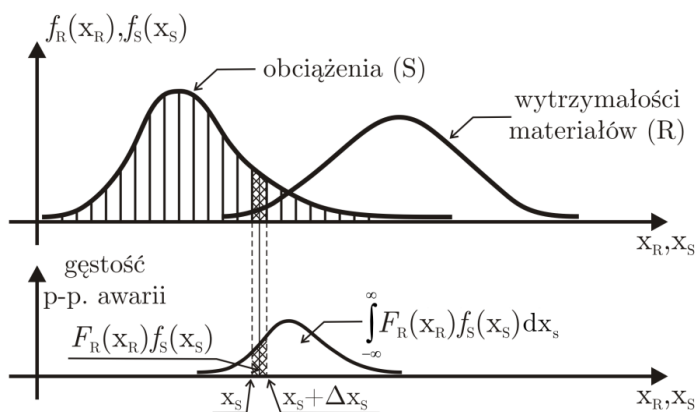


Rys. 2.4. Problem podstawowy analizy niezawodności (poszukiwanie prawdopodobieństwa awarii) rozwiązywany za pomocą całki splotu.

Taki zapis jest jednak rozważany jedynie w przypadku niezależności reprezentatywnych zmiennych losowych (X_R, X_S) . W przypadku, gdy powinno się rozpatrzyć związek pomiędzy obiema zmiennymi, używa się bardziej ogólnego zapisu, który przedstawia się następująco

$$P_f = P(X_R - X_S \leq 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1 - F_S(x_S)] f_R(x_R) dx_R \quad (2.23)$$

Przedstawić można także związek, jaki istnieje między dwoma przedstawionymi podejściami, między równaniem używającym funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f_R(x_R)$ oraz $f_S(x_S)$, a równaniem używającym pojęcia dystrybuanty rozkładów prawdopodobieństwa $F_R(x_R)$ oraz $F_S(x_S)$. Stwierdzić można, iż jest to pewna suma cząstkowych prawdopodobieństw awarii dla nieskończenie małych przedziałów zmienności wytrzymałości całkowitej materiałów, w których suma obciążeń (efektów obciążeń) konstrukcji przekracza daną całkowitą wytrzymałość materiałów. Graficzne przedstawienie tej zależności znajduje się na rys. 2.5.



Rys. 2.5. Problem podstawowy analizy niezawodności (poszukiwanie prawdopodobieństwa awarii) rozwiązywany przy użyciu informacji o funkcjach gęstości prawdopodobieństwa.

2.4. Wybrane miary niezawodności

Wskaźnik niezawodności jest prostym identyfikatorem stanu bezpieczeństwa konstrukcji w sensie teorii probabilistycznych. Na jego podstawie można wprowadzić pewne ustalone przez normatywy wymagane poziomy bezpieczeństwa konstrukcji, różnicując wymogi w zależności od skutków ewentualnej awarii bądź zniszczenia konstrukcji, kosztów jej konserwacji i napraw, skutków społeczno – ekonomicznych awarii itp., analogicznie do założeń przestrzegania bezpieczeństwa dla metod poziomu pierwszego [Ben-Haim, 1996].

Uzyskanie pewnego poziomu niezawodności konstrukcji jest szczególnie ważne wówczas, gdy w razie jej awarii lub zniszczenia zginąć lub ulec obrażeniom może człowiek. W przypadkach konstrukcji budowlano – inżynierskich zaleca się, aby dodatkową procedurą było porównanie, jeśli to możliwe, wskaźnika niezawodności uzyskanego technikami analizy probabilistycznej z możliwymi do wyszukania danymi statystycznymi odnośnie powstawania określonego stanu awarii czy zniszczenia konstrukcji, z jakim ma się do czynienia w projekcie, w przeciągu określonego czasu pracy konstrukcji (często na przestrzeni roku, na przestrzeni tzw. czasu powrotu obciążenia) lub na przestrzeni zakładanego w projekcie czasu jej użytkowania.

Z ekonomicznego punktu widzenia, docelowy poziom niezawodności zadania powinien zależeć od równowagi między skutkami zniszczeń, a kosztem środków zabezpieczających, jakie trzeba ponieść, aby niebezpieczeństwo to zredukować możliwie najbardziej.

Pamiętać należy, że wspomniane w poprzednim rozdziale techniki matematyczne bardzo trudno stosować bezpośrednio w codziennej praktyce inżynierskiej. Istnieje bowiem zasadnicza różnica między probabilistyczną miarą możliwości zaistnienia sytuacji awaryjnej, a rzeczywistą częstością awarii, będącą czasem skutkiem nieprzewidywalnych błędów i zaniedbań projektantów i wykonawców konstrukcji. Opis tej ostatniej można odnaleźć m.in. w PN-ISO 2394:2000.

Projekt konstrukcji inżynierskiej musi być sporządzony tak, aby prawdopodobieństwo awarii P_f było znikome, możliwie jak najmniejsze. Zaznaczyć należy w tym miejscu, iż o wystąpieniu (bądź niewystąpieniu) awarii konstrukcji decydują tzw. **marginesy** (ogony) **rozkładów prawdopodobieństwa**, co powoduje, iż obliczane wartości P_f są zwyczajowo bardzo małe, mające rząd setnych do milionowych części jednośc (czyli jednocześnie wymagające stosowania obliczeń o dużej dokładności, aby oszacować je należycie i poprawnie), co dla próby opisu normowego sprawiłoby niemałą trudność.

Alternatywą dla prawdopodobieństwa awarii P_f przy określaniu bezpieczeństwa konstrukcji stał się więc wspomniany **wskaźnik niezawodności** β , którego podejścia wyznaczania będą szerzej omawiane w późniejszych rozdziałach rozprawy.

Wartości numeryczne szacujące niezawodność są często opisane na podstawie wskaźnika niezawodności β . Jego relacja wobec prawdopodobieństwa awarii P_f przedstawiona jest w Tabelicy 2.1.

Tablica 2.1. Relacja pomiędzy prawdopodobieństwem awarii P_f , a wartością wskaźnika niezawodności β wg [PN-ISO 2394:2000].

Prawdopodobieństwo awarii P_f	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
Wskaźnik niezawodności β	~ 1,3	~ 2,3	~ 3,1	~ 3,7	~ 4,2	~ 4,7	~ 5,2

Wskazać można także przyjmowane przez normatywy przykłady docelowych poziomów wskaźnika niezawodności β w zagadnieniach związanych z okresem użytkowania konstrukcji, zależnie od skutków jej awarii lub zniszczenia oraz zależnie od względnego kosztu konserwacji czy naprawy konstrukcji. Proponowane poziomy wskaźnika przedstawiono w Tabelicy 2.2.

Tablica 2.2. Przykłady docelowych poziomów wskaźnika niezawodności β , w zależności od kosztów zapewnienia bezpieczeństwa i skutków awarii konstrukcji wg [PN-ISO 2394:2000].

Względne koszty zapewnienia bezpieczeństwa konstrukcji	Skutki społeczno – ekonomiczne awarii bądź zniszczenia konstrukcji inżynierskiej			
	małe	odczuwalne	umiarkowane	wielkie
wysokie	0,0	1,5 (a)	2,3	3,1 (b)
umiarkowane	1,3	2,3	3,1	3,8 (c)
niskie	2,3	3,1	3,8	4,3

przy czym:

- (a) – w stanach granicznych użyteczności można stosować $\beta = 0,0$ w przypadku stanów odwracalnych i $\beta = 1,5$ w przypadku stanów nieodwracalnych,
- (b) – w stanach granicznych zmęczenia można stosować $\beta = 2,3 \div 3,1$, zależnie od możliwości przeprowadzenia nieniszczącej inspekcji konstrukcji lub jej elementu,
- (c) – w stanach granicznych nośności można stosować wydzielenie klas bezpieczeństwa, dla których $\beta = 3,1$, $\beta = 3,8$ lub też $\beta = 4,3$.

Powyższe wartości zostały wyprowadzone przy założeniu modelu logarytmiczno – normalnego lub rozkładów: Weibulla do wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych, Gaussa do obciążeń stałych oraz Gumbella do obciążeń zmiennych w czasie. Bardzo istotne jest, aby stosować te same (lub bliskie do nich) założenia podczas prowadzenia probabilistycznych obliczeń teorii niezawodności konstrukcji.

Należy również podkreślić, że za [PN-ISO 2394:2000], że wartość wskaźnika niezawodności β i odpowiadające mu prawdopodobieństwo awarii P_f są wartościami liczbowymi, mającymi formalny i podstawowy charakter i są przeznaczone wyłącznie jako narzędzie do sformułowania spójnych zasad teorii niezawodności, a nie są parametrami dającymi pewny opis częstości awarii lub zniszczeń konstrukcji inżynierskich.

2.4.1. Wskaźnik niezawodności Cornella

Oryginalne sformułowanie wskaźnika niezawodności Cornella zawierało zapis funkcji stanu granicznego w postaci różnicy między całkowitym wkładem niepewności wytrzymałości materiałów r , a całkowitym wkładem niepewności obciążeń działających na konstrukcję s

$$g(r, s) = r - s \quad (2.24)$$

Przyjmując, iż wkłady te również można wyrazić za pomocą reprezentatywnych zmiennych losowych R, S , co wskazano w rozdziale 2.3.2. rozprawy, margines bezpieczeństwa wynosi

$$M = g(R, S) = R - S \quad (2.25)$$

Rozważyć należy sytuację pewnego uproszczenia, w którym to składowe zmiennej losowej zapasu bezpieczeństwa M (całkowita wytrzymałość materiałów konstrukcji R oraz suma obciążeń S na nią działających) są zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym.

Margines (zapas) bezpieczeństwa ma wówczas momenty probabilistyczne wynikające bezpośrednio z prostych działań arytmetycznych na momentach probabilistycznych składowych zmiennych reprezentatywnych, tak więc całka spłotu (2.22), wyznaczona w rozdziale 2.3.2. rozprawy, może być uproszczona następująco

$$P_f = P(R - S \leq 0) = P(M \leq 0) = \Phi\left(\frac{0 - E[M]}{D[M]}\right) \quad (2.26)$$

gdzie $\Phi(\bullet)$ jest funkcją dystrybuanty rozkładu normalnego o zerowej wartości średniej i jednostkowym odchyleniu standardowym.

Zaproponowano więc, aby miarę niezawodności konstrukcji inżynierskiej ująć w pewien ściśle przyjęty wskaźnik (**wskaźnik niezawodności** β), który ma być stanowiony wg [Cornell, 1969] przez odwrotność współczynnika zmienności zapasu bezpieczeństwa

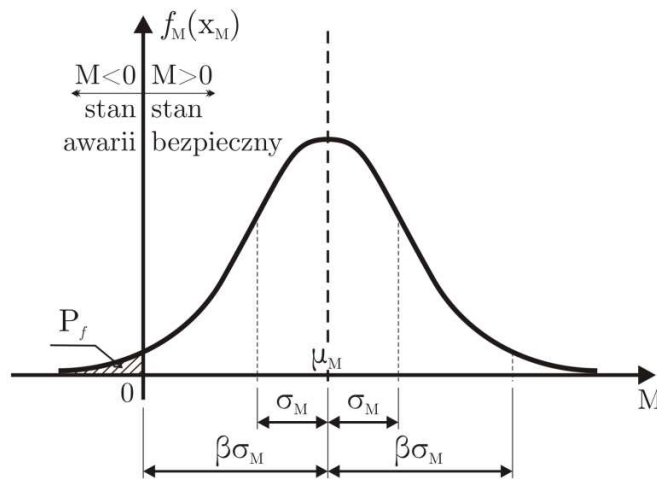
$$\beta = \frac{1}{V_M} = \frac{E[M]}{D[M]} \quad (2.27)$$

gdzie: V_M to współczynnik zmienności zapasu bezpieczeństwa, $E[M]$ reprezentuje wartość oczekiwaną (średnią) zapasu bezpieczeństwa, a $D[M]$ – jego odchylenie standardowe.

Wskaźnikiem niezawodności β można w takim układzie nazwać odwrotność współczynnika zmienności zapasu bezpieczeństwa M , miarę oddalenia średniego stanu interakcji całkowitej wytrzymałości materiałów oraz efektów obciążeń konstrukcji od krawędzi stanu granicznego konstrukcji, możliwego do sprecyzowania całą splotu.

Takie sprecyzowanie oszacowania niezawodności konstrukcji odpowiada idei wskaźnika niezawodności wg Cornella – wskaźnik ma mierzyć odległość od lokalizacji punktu pomiarowego podstawowych zmiennych losowych zadania ($E[M]$) do granicy powierzchni stanu granicznego, mierzonej w jednostkach parametrów skali niepewności ($D[M]$).

Ilustrację sensu wskaźnika niezawodności wg Cornella przedstawia rys. 2.6.



Rys. 2.6. Graficzna interpretacja wskaźnika niezawodności wg Cornella, naniesiona na reprezentatywną funkcję gęstości prawdopodobieństwa zapasu bezpieczeństwa $f_M(x_M)$.

Wskaźnik niezawodności β można także zamiennie związać bezpośrednio z obliczanym numerycznie (na bazie całki splotu) prawdopodobieństwem awarii, poprzez zależność odwrotną, przedstawianą w postaci

$$\beta = -\Phi^{-1}(P_f) \quad (2.28)$$

gdzie $\Phi^{-1}(\cdot)$ jest funkcją **odwrotną** dystrybuanty rozkładu normalnego o zerowej wartości średniej i jednostkowym odchyleniu standardowym.

Jeżeli zmienne R, S są nieskorelowane, to wskaźnik niezawodności β , oznaczany dalej jako wskaźnik niezawodności Cornella β_C (dla rozróżnienia jego wartości od wartości wskaźników niezawodności wyznaczanych później według innych podejść), można zapisać w postaci

$$\beta = \beta_C = \frac{E[M]}{D[M]} = \frac{E[R] - E[S]}{D[R; S]} = \frac{\mu_R - \mu_s}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_s^2}} \quad (2.29)$$

lub też, jeżeli zmienne R, S są skorelowane, to w postaci

$$\beta_C = \frac{E[M]}{D[M]} = \frac{E[R] - E[S]}{D[R; S]} = \frac{\mu_R - \mu_s}{\sqrt{\sigma_R^2 - 2\rho_{RS} \cdot \sigma_R \sigma_s + \sigma_s^2}} \quad (2.30)$$

gdzie kolejno: μ_R to wartość oczekiwana zmiennej losowej wyrażającej wytrzymałości materiałów, μ_s to wartość oczekiwana zmiennej losowej wyrażającej obciążenia, σ_R oraz σ_s to odchylenia standardowe wyżej wymienionych zmiennych, natomiast ρ_{RS} jest współczynnikiem korelacji obu zmiennych losowych.

Wskaźnik niezawodności Cornella można obliczyć także w stosunkowo prosty sposób, kiedy zapas bezpieczeństwa jest funkcją liniową (powierzchnia graniczna $g(\mathbf{x}) = 0$ jest hiperpłaszczyzną). Można wówczas zapisać funkcję marginesu bezpieczeństwa w notacji

$$g(x_i) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i = a_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{x} = g(\mathbf{x}) \quad (2.31)$$

gdzie: a_0 to wyraz wolny n – wymiarowej powierzchni, $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ to wektor kolumnowy zbierający współczynniki kierunkowe n – wymiarowej powierzchni, a $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ to wektor kolumnowy realizacji.

Dodatkową zmienną losową zapasu (marginesu) bezpieczeństwa, odpowiadającą powyższej funkcji marginesu bezpieczeństwa można zatem przedstawić jako

$$M = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i = a_0 + \mathbf{a}^T \mathbf{X} \quad (2.32)$$

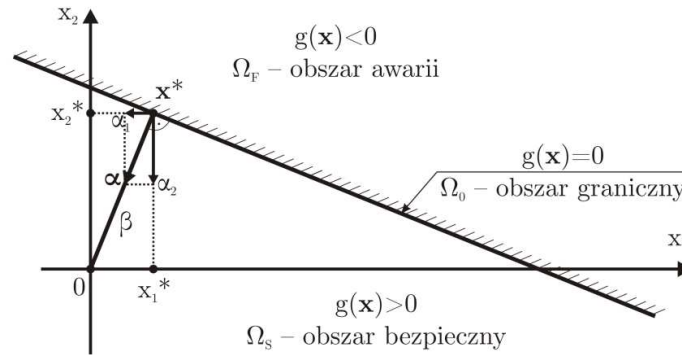
Przyjęty przez Cornella wskaźnik niezawodności przybiera wówczas postać

$$\beta_C = \frac{a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i}{\sqrt{\mathbf{a}^T C_{\mathbf{X}} \mathbf{a}}} = \frac{a_0 + \mathbf{a}^T E[\mathbf{X}]}{\sqrt{\mathbf{a}^T C_{\mathbf{X}} \mathbf{a}}} \quad (2.33)$$

gdzie: $E[\mathbf{X}]$ to wektor kolumnowy zbierający wartości oczekiwane zmiennej losowej \mathbf{X} , natomiast $C_{\mathbf{X}}$ to macierz kowariancyjna zmiennej losowej \mathbf{X} .

Postać problemu wyznaczania wskaźnika niezawodności dla liniowej hiperpowierzchni funkcji stanu granicznego $g(\mathbf{x}) = 0$ w przestrzeni realizacji przedstawia rys. 2.7. Przywołuje się ją, gdyż pełni bardzo istotną rolę w niniejszej dysertacji.

Ważną obserwacją jest także fakt, iż wskaźnik niezawodności Cornella β_C jest niezmienny w obliczu dowolnej liniowej transformacji podstawowej zmiennej losowej \mathbf{X} .



Rys. 2.7. Liniowa, n -wymiarowa (dla uproszczenia wskazana dla $n = 2$) powierzchnia funkcji stanu granicznego $g(\mathbf{x}) = 0$ w przestrzeni realizacji zmiennych podstawowych, wraz z zaznaczeniem znaczenia wskaźnika niezawodności Cornella β_C oraz jednostkowego wektora normalnego do powierzchni granicznej α .

Jeżeli powierzchnia graniczna $g(\mathbf{x}) = 0$ nie jest hiperpłaszczyzną, to nie jest możliwe sformułowanie zapasu bezpieczeństwa jako funkcji liniowej przy użyciu podstawowej zmiennej losowej. Wówczas sugestią Cornella jest rozwinięcie jej w szereg Taylora wokół wartości oczekiwanych $E[\mathbf{X}]$ w przestrzeni bazowej zmiennej, z dokładnością do wyrazów liniowych.

2.4.2. Wskaźnik niezawodności Rosenbluetha – Estevy / FOSM

Zapis funkcji stanu granicznego $g(r, s)$ z użyciem całkowitego wkładu niepewności wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych r i całkowitego wkładu niepewności obciążeń działających na konstrukcję s może przyjmować różne formy, w zależności od natury reprezentatywnych zmiennych losowych R, S . Z powodów czysto fizycznych, obie wymienione zmienne często przyjmują jedynie wartości dodatnie. Wówczas logiczną, prostą alternatywą dla równania (2.24) staje się zapis

$$g(r, s) = \ln\left(\frac{r}{s}\right) \quad (2.34)$$

który doskonale odzwierciedla istotę fizycznego ograniczenia zmiennych R, S .

Odpowiadający temu zapisowi zapas (margines) bezpieczeństwa wyrazić można poprzez zapis

$$M = \ln\left(\frac{R}{S}\right) \quad (2.35)$$

Równanie to zostało użyte w [Rosenblueth i Esteva, 1972] do przekształcenia wskaźnika niezawodności Cornella w postać

$$\beta_{RE} = \frac{E[M]}{D[M]} = \frac{E[M]}{\sqrt{V[M]}} = \frac{E\left[\ln\left(\frac{R}{S}\right)\right]}{\sqrt{V\left[\ln\left(\frac{R}{S}\right)\right]}} \quad (2.36)$$

lub też, jeżeli zmienne R, S są skorelowane, to wykorzystując właściwości $\ln(\cdot)$, w postaci

$$\beta_{RE} = \frac{E[M]}{D[M]} = \frac{E[R] - E[S]}{\sqrt{V[R; S]}} = \frac{E[\ln R] - E[\ln S]}{\sqrt{V[\ln R] - 2 \cdot Cov[\ln R; \ln S] + V[\ln S]}} \quad (2.37)$$

Zapas bezpieczeństwa wyrażony w postaci (2.35) jest funkcją nieliniową, a co za tym idzie, nie można w prosty sposób oszacować wartości oczekiwanej oraz odchylenia standardowego reprezentatywnych zmiennych losowych R, S . Należy wówczas dokonać linearyzacji zmiennej marginesu bezpieczeństwa poprzez rozwinięcie jej w szereg Taylora wokół wartości oczekiwanych $E[R]$ oraz $E[S]$ w przestrzeni bazowych zmiennych losowych. Linearyzacja dokonana w otoczeniu punktu pojedynczej realizacji wektora zmiennej losowej, zawierającego wartości oczekiwane (μ_R, μ_S) daje zapas bezpieczeństwa M_{FO} wyrażony wzorem

$$M_{FO} = \ln \mu_R + \frac{R - \mu_R}{\sigma_R} - \ln \mu_S - \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (2.38)$$

Na skutek linearyzacji wskaźnik niezawodności Rosenbluetha i Estevy β_{RE} przybiera postać

$$\beta_{RE} = \frac{\ln E[R] - \ln E[S]}{\sqrt{V_R^2 - 2 \cdot Cov[R; S] + V_S^2}} = \frac{\ln \mu_R - \ln \mu_S}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{\mu_R}\right)^2 - 2Q_{RS} \cdot \frac{\sigma_R}{\mu_R} \frac{\sigma_S}{\mu_S} + \left(\frac{\sigma_S}{\mu_S}\right)^2}} \quad (2.39)$$

gdzie: μ_R to wartość oczekiwana zmiennej losowej wyrażającej wytrzymałości materiałów, μ_S to wartość oczekiwana zmiennej losowej wyrażającej obciążenia, σ_R oraz σ_S to odchylenia standardowe w/w zmiennych, V_R oraz V_S to ich współczynniki zmienności, natomiast Q_{RS} jest współczynnikiem korelacji tychże zmiennych.

Jeżeli reprezentatywne zmienne bazowe R, S są nieskorelowane, wzór (2.39) upraszcza się do

$$\beta_{RE} = \frac{\ln E[R] - \ln E[S]}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}} = \frac{\ln \mu_R - \ln \mu_S}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_R}{\mu_R}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_S}{\mu_S}\right)^2}} \quad (2.40)$$

Przedstawiony wskaźnik niezawodności Rosenbluetha i Estevy β_{RE} bardzo mocno zależy od doboru i opisu matematycznego funkcji stanu granicznego, a nie tylko od kształtu uzyskiwanej dla zadania hiperpowierzchni granicznej, co może prowadzić do faktu, iż uzyskany powyższym równaniem wskaźnik będzie zdecydowanie różny od wyniku obliczeń wskaźnika niezawodności Cornella β_C [Ditlevsen, 1973].

Dla innej linearyzacji nieliniowej funkcji granicznej, zapisanej w otoczeniu dowolnego punktu pojedynczej realizacji podstawowej zmiennej losowej (używając zapisu wyjściowego wektora n -wymiarowej zmiennej losowej \mathbf{x}), otrzymuje się linearyzowany zapas bezpieczeństwa M_{FO} wyrażony wzorem

$$M_{FO} = g(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot (X_i - x_i) \quad (2.41)$$

Odpowiadający temu punktowi wskaźnik niezawodności określa się często mianem **wskaźnika niezawodności pierwszego rzędu – drugiego momentu** β_{FOSM} i wyrazić można go wzorem

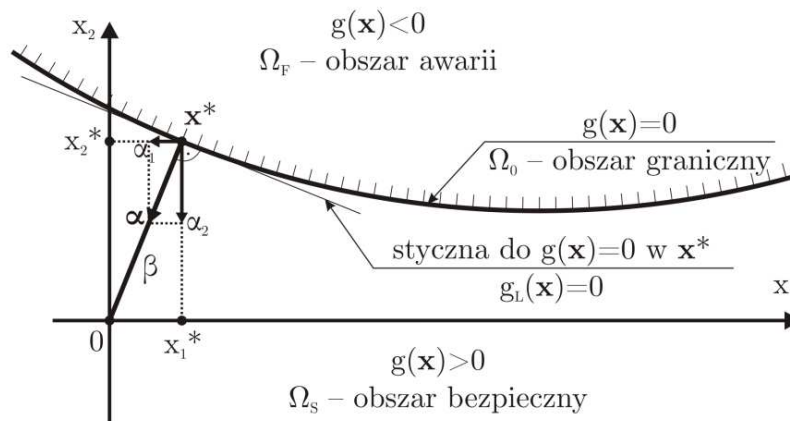
$$\beta_{FOSM} = \frac{g(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \cdot (E[X_i] - x_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\partial g}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \cdot (Cov[X_i; X_j])}} \quad (2.42)$$

2.4.3. Wskaźnik niezawodności Hasofera – Linda

Aby uniknąć arbitralności wyniku liczbowego wskaźnika niezawodności Rosenbluetha i Estevy β_{RE} należy oprócz bardzo dobrego opisu matematycznego funkcji stanu granicznego wprowadzić także odpowiednio dokładnie dobrany **punkt linearyzacji** zmiennej marginesu bezpieczeństwa w przestrzeni realizacji. Arbitralność ta znika, jeśli dokonamy wyboru punktu linearyzacji leżącego dokładnie na powierzchni granicznej.

Z nieskończonej ilości punktów realizacji, jakie na niej leżą, naturalnym wyborem jest taki, który znajduje się w najmniejszej odległości od punktu realizacji zawierającego wartości średnie wszystkich zmiennych zadania. Wynika to oczywiście z sensu wskaźnika niezawodności, który został przytoczony w poprzednich rozdziałach, tj. pomiaru minimalnej odległości od lokalizacji punktu pomiarowego do granicy powierzchni stanu granicznego.

Graficzna postać problemu wyznaczania wskaźnika niezawodności dla nieliniowej hiperpowierzchni funkcji stanu granicznego $g(\mathbf{x})=0$ w przestrzeni realizacji podstawowych zmiennych losowych przedstawiona jest na rys. 2.8.



Rys. 2.8. Nieliniowa, n -wymiarowa (dla uproszczenia wskazana dla $n = 2$) powierzchnia funkcji stanu granicznego $g(\mathbf{x}) = 0$ w przestrzeni realizacji zmiennych podstawowych, wraz z zaznaczeniem linearyzacji powierzchni funkcji stanu granicznego, znaczenia wskaźnika niezawodności Rosenbluetha i Estevy β_{RE} oraz jednostkowego wektora normalnego do powierzchni granicznej α .

Aby uwypuklić sens wskaźnika niezawodności oraz aby jak najbardziej zbliżyć ideologicznie obliczenia n -wymiarowe do zagadnienia jednowymiarowego, Hasofer i Lind zaproponowali niejednorodne liniowe odwzorowanie zbioru podstawowych zmiennych losowych \mathbf{X} w zbiór zmiennych losowych znormalizowanych i nieskorelowanych, który oznaczony zostanie w niniejszej pracy jako \mathbf{Z} . Zmienna ta ma zerowy wektor wartości własnych ($E[\mathbf{Z}] = \mathbf{0}$) oraz jednostkową macierz kowariancji ($\mathbf{C}_Z = Cov[\mathbf{Z}; \mathbf{Z}^T] = \mathbf{I}$) [Hasofer i Lind, 1974].

Transformacja pomiędzy bazową zmienną losową \mathbf{X} , a zmienną losową znormalizowaną \mathbf{Z} przedstawia się równością

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]) \quad (2.43)$$

gdzie \mathbf{A} jest macierzą transformacyjną, możliwą do wyznaczenia przy zastosowaniu szeregu standardowych technik algebry liniowej.

Macierz kowariancji zmiennej losowej bazowej \mathbf{X} można zapisać wzorem

$$\mathbf{C}_X = Cov[\mathbf{X}; \mathbf{X}^T] = E[(\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]) \cdot (\mathbf{X} - E[\mathbf{X}])^T] \quad (2.44)$$

Macierz kowariancji zmiennej losowej znormalizowanej \mathbf{Z} można wówczas wyprowadzić, łącząc zapisy (2.43) oraz (2.44). Wynik wyprowadzenia przedstawić można wzorem

$$\mathbf{C}_Z = Cov[\mathbf{Z}; \mathbf{Z}^T] = \mathbf{A}\mathbf{C}_X\mathbf{A}^T = \mathbf{A}Cov[\mathbf{X}; \mathbf{X}^T]\mathbf{A}^T = \mathbf{I} \quad (2.45)$$

Warunek graniczny, po uwzględnieniu powyższych transformacji, przyjmuje końcowo postać

$$g(\mathbf{Z}) = g(\mathbf{X}(\mathbf{Z})) = g(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z} + E[\mathbf{X}]) = 0 \quad (2.46)$$

Przez identyczne odwzorowanie, jakie opisano powyżej, zapisać można iż

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - E[\mathbf{X}]) \quad (2.47)$$

przy czym zauważyć można, iż punkt pojedynczej realizacji, zawierający wartości oczekiwane w przestrzeni realizacji \mathbf{x} odwzorowywany jest w punkt początku układu współrzędnych w przestrzeni realizacji \mathbf{z} , a powierzchnia graniczna Ω_0 wektora realizacji \mathbf{x} przekształca się we współrzędne powierzchni granicznej Ω_0 wektora realizacji \mathbf{z} .

Geometryczna odległość od początku układu współrzędnych w przestrzeni realizacji \mathbf{z} do dowolnego punktu powierzchni granicznej Ω_0 wektora realizacji \mathbf{z} jest prostą miarą odchylenia standardowego od punktu realizacji wartości oczekiwanych w przestrzeni realizacji \mathbf{x} do odpowiadającego punktu powierzchni granicznej Ω_0 wektora realizacji \mathbf{x} .

Dystans od punktu pojedynczej realizacji, będącego początkiem układu współrzędnych w przestrzeni realizacji \mathbf{z} , zwanego **punktem początkowym analizy niezawodności**, do powierzchni granicznej może być pomierzony tzw. **funkcją Veneziano (funkcją wskaźnika niezawodności)** [Veneziano, 1974], którą wyrazić można w przestrzeni realizacji \mathbf{z} wzorem

$$\beta(\mathbf{z}) = \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} ; \quad \mathbf{z} \in \Omega_0^{(z)} \quad (2.48)$$

lub równoważnie, w przestrzeni realizacji \mathbf{x}

$$\beta(\mathbf{x}) = \sqrt{(\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])^T \mathbf{C}_X^{-1} (\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])} ; \mathbf{x} \in \Omega_0^{(x)} \quad (2.49)$$

Najkrótsza odległość od punktu początkowego analizy niezawodności do wybranego punktu na powierzchni granicznej została wybrana jako miara wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} . Może ona być zapisana zamkniętym wzorem jako

$$\beta_{HL} = \min_{g(\mathbf{z})=0} \beta(\mathbf{z}) = \min_{g(\mathbf{z})=0} \sqrt{\mathbf{z}^T \mathbf{z}} ; \mathbf{z} \in \Omega_0^{(z)} \quad (2.50)$$

lub równoważnie

$$\beta_{HL} = \min_{g(\mathbf{x})=0} \beta(\mathbf{x}) = \min_{g(\mathbf{x})=0} \sqrt{(\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])^T \mathbf{C}_X^{-1} (\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])} ; \mathbf{x} \in \Omega_0^{(x)} \quad (2.51)$$

Leżący na powierzchni granicznej punkt realizacji \mathbf{x} uzyskiwany w procesie poszukiwania wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} oznacza się symbolem \mathbf{x}^* i nazywa się go **punktem projektowym** (obliczeniowym) **analizy niezawodności** [Hasofer i Lind, 1974].

Jeżeli mamy do czynienia z powierzchnią graniczną w postaci n -wymiarowej płaszczyzny, to wartości liczbowe wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} oraz wskaźnika niezawodności Cornella β_C są jednakowe. Wskaźnik niezawodności Hasofera – Linda jest więc uogólnieniem wskaźnika niezawodności Cornella dla nieliniowych powierzchni granicznych.

Jeśli natomiast założymy się punkt projektowy analizy niezawodności według Hasofera i Linda jako punkt linearyzacji podstawowej zmiennej losowej, to wartość wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda pokryje się dokładnie z wartością wskaźnika niezawodności pierwszego rzędu – drugiego momentu β_{FOSM} obliczoną dla tegoż punktu linearyzacji (jednocześnie drugi wskaźnik utraci także swoją niepożądaną arbitralność).

Wskaźnik niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} jest rozwiązaniem nieliniowego procesu optymalizacji z jedną funkcją celu. Rozwiązania tego problemu dostarcza szeroka gama algorytmów iteracyjnych. Nie ma jednak pewności, iż algorytmy te będą zbieżne we wszystkich przypadkach funkcji stanów granicznych. Celem optymalizacji jest oczywiście znalezienie najlepszego (spełniającego sens metody) punktu projektowego \mathbf{x}^* .

Algorytm wyszukiwania punktu projektowego \mathbf{x}^* analizy niezawodności, zaproponowany przez Hasofera i Linda zostanie zobrazowany dla uproszczenia w przestrzeni realizacji \mathbf{z} . Wówczas zamiennie poszukuje się punktu projektowego \mathbf{z}^* odpowiadającego punktowi \mathbf{x}^* oraz jednostkowego wektora normalnego do powierzchni granicznej $\boldsymbol{\alpha}^*$ wyznaczanego w punkcie \mathbf{z}^* , będącego proporcjonalnym do wektora śledzącego punkt \mathbf{z}^* względem początku układu współrzędnych przestrzeni realizacji \mathbf{z} .

Przy takiej definicji wektorów wskaźnik niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} jest stałą proporcjonalności między wektorami realizacji i powierzchni granicznej:

$$\mathbf{z}^* = \boldsymbol{\alpha}^* \cdot \beta_{HL} \quad (2.52)$$

Punkt \mathbf{z}^* jest granicą sekwencji algorytmu $\mathbf{z}^{(0)} \gg \mathbf{z}^{(1)} \gg \dots \gg \mathbf{z}^{(m)} \gg \dots \gg \mathbf{z}^*$.

Jednostkowy wektor normalny do trajektorii prowadzonej przez algorytm $g(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}^{(m)})$ zdefiniowany w punkcie $\mathbf{z}^{(m)}$ oznacza się przez $\boldsymbol{\alpha}^{(m)}$, tak więc wektor $\boldsymbol{\alpha}^{(m)}$ jest równoległy do wektora gradientu trajektorii prowadzonej przez algorytm, zdefiniowanej w punkcie $\mathbf{z}^{(m)}$ i jest skierowany w stronę obszaru awarii $\Omega_f = \{\mathbf{z} : g(\mathbf{z}) < 0\}$.

Przedstawić go można następująco

$$\boldsymbol{\alpha}^{(m)} = -\frac{\nabla g(\mathbf{z}^{(m)})}{|\nabla g(\mathbf{z}^{(m)})|} \quad (2.53)$$

gdzie $\nabla g(\mathbf{z}^{(m)})$ jest gradientem funkcji granicznej, zdefiniowanym w punkcie $\mathbf{z}^{(m)}$, w postaci

$$\nabla g(\mathbf{z}^{(m)}) = \left(\frac{\partial g}{\partial z_1}(\mathbf{z}^{(m)}); \frac{\partial g}{\partial z_2}(\mathbf{z}^{(m)}); \dots; \frac{\partial g}{\partial z_n}(\mathbf{z}^{(m)}) \right) \quad (2.54)$$

Punkt startowy algorytmu (punkt początkowy) może być przyjęty w punkcie początku układu współrzędnych przestrzeni realizacji \mathbf{z} , o współrzędnych $\mathbf{z}^{(0)} = \{0; 0; 0; \dots; 0\}$, lub też w tzw. **punkcie podporowym** w przestrzeni realizacji \mathbf{x} , o współrzędnych

$$\mathbf{x}^{(p)} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{n}}; \frac{1}{\sqrt{n}}; \frac{1}{\sqrt{n}}; \dots; \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \quad (2.55)$$

Metoda iteracji jest w każdym kroku algorytmu oparta na linearyzacji. W m -tym kroku algorytmu punktem startowym jest punkt $\mathbf{z}^{(m)}$, a powierzchnia $z_{n+1} = g(\mathbf{z})$ jest zastępowana przez odpowiadającą jej n -wymiarową płaszczyznę styczną w punkcie $\mathbf{z}^{(m)}$. Obraz przecięcia pomiędzy tą n -wymiarową płaszczyzną, a płaszczyzną $z_{n+1} = 0$ można zapisać równaniem

$$g(\mathbf{z}) = g(\mathbf{z}^{(m)}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial z_i}(\mathbf{z}^{(m)})(z_i - z_i^{(m)}) = 0 \quad (2.56)$$

W rezultacie, kolejny punkt sekwencji algorytmu $\mathbf{z}^{(m+1)}$ znajdujący się na przecięciu (2.56) jako punkt najbliższy do punktu kroku początkowego. Zapisuje się to równaniem

$$\mathbf{z}^{(m+1)} = \left(\mathbf{z}^{(m)T} \boldsymbol{\alpha}^{(m)} \right) \boldsymbol{\alpha}^{(m)} + \frac{g(\mathbf{z}^{(m)})}{|\nabla g(\mathbf{z}^{(m)})|} \boldsymbol{\alpha}^{(m)} \quad (2.57)$$

Jeśli cała sekwencja algorytmu jest zbieżna do punktu \mathbf{z}^* , to dla tego punktu ma miejsce spełnienie zapisu (2.52), co odpowiada znalezieniu ustalonej wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} .

Szkic procedury iteracyjnego poszukiwania wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} w przestrzeni realizacji \mathbf{z} przedstawiony jest na rys. 2.9.

Powierzchnia graniczna może jednak zawierać kilka istotnych punktów projektowych, dla których algorytm znajdzie odpowiadające im ustalone wartości wskaźnika niezawodności. Wówczas konieczne jest odnalezienie wszystkich takich punktów (poprzez założenie kilku

różnych punktów startowych algorytmu) i obliczenie w każdym miejscu odrębnej wartości wskaźnika niezawodności.

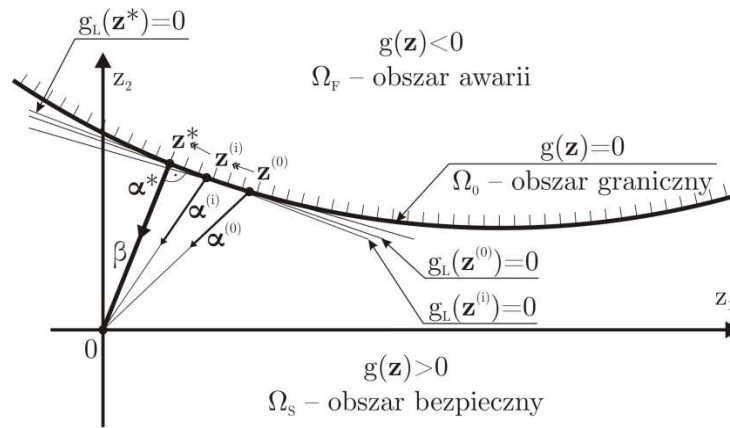
Wskaźnik niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} jest wówczas zdefiniowany jako:

$$\beta_{HL} = \min(\beta_{HL}^1; \beta_{HL}^2; \beta_{HL}^3; \dots; \beta_{HL}^k) \quad (2.58)$$

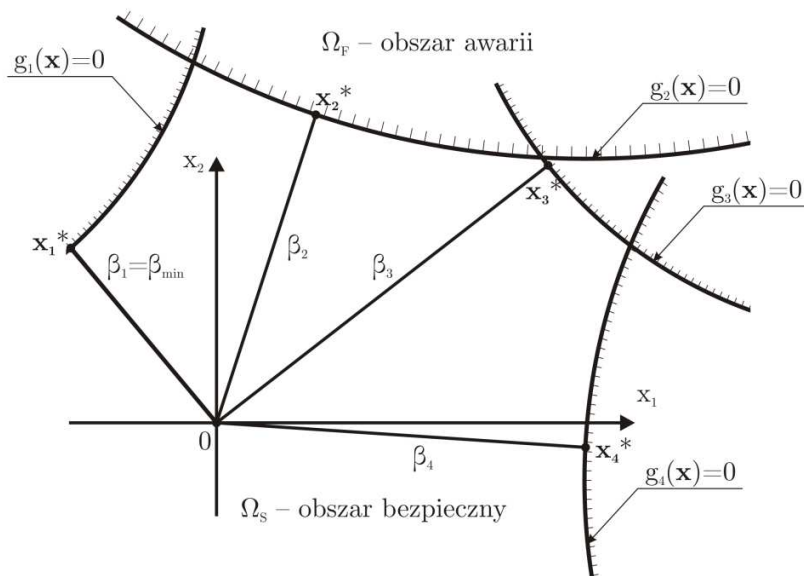
Przykładowa powierzchnia graniczna zawierająca kilka punktów projektowych (przykładowo sporządzana dla systemu szeregowego) zaprezentowana jest na rys. 2.10.

Natomiast, przywołując transformację (2.47), można sformułować algorytm iteracyjny Hasofera i Linda w wyjściowej przestrzeni realizacji \mathbf{x} . Jego krok iteracyjny oblicza się jako

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = E[\mathbf{X}] + \mathbf{C}_X \nabla g(\mathbf{x}^{(m)}) \cdot \frac{(\mathbf{x}^{(m)} - E[\mathbf{X}])^T \nabla g(\mathbf{x}^{(m)}) - g(\mathbf{x}^{(m)})}{\nabla g(\mathbf{x}^{(m)})^T \mathbf{C}_X \nabla g(\mathbf{x}^{(m)})} \quad (2.59)$$



Rys. 2.9. Ilustracja poszukiwania wskaźnika niezawodności w przestrzeni realizacji \mathbf{z} .



Rys. 2.10. Ilustracja powierzchni granicznej systemu szeregowego, wymagającej wyszukania wskaźnika niezawodności β jako minimum wszystkich wyznaczalnych wskaźników.

Z definicji funkcji Veneziano (2.48) (funkcji wskaźnika niezawodności), którą można także wyrazić jako długość wektora realizacji \mathbf{z} , zapisać można także, iż

$$\frac{\partial \beta(\mathbf{z})}{\partial z_i} = \frac{\partial}{\partial z_i} \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = a_i \quad (2.60)$$

Zebrane n wartości a_i , oszacowanych w punkcie projektowym analizy \mathbf{z}^* , który oznaczyć można przez a_i^* , jest miarą wrażliwości wskaźnika niezawodności na niepewności pojawiające się w zadaniu za pomocą wartości składowych z_i realizacji punktu projektowego \mathbf{z}^* .

Wartości a_i^* są często nazywane **współczynnikami wrażliwości** (patrz: rozdział 2.8.2.).

2.4.4. Wskaźnik niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera

W ogólnym, przedstawionym w powyższych rozdziałach przypadku, podstawowe zmienne losowe nie są zmiennymi o rozkładzie normalnym. Jednakże, ze względu na fakt, że wiele zmiennych można w dobrym przybliżeniu przedstawić jako zmienne losowe o rozkładzie normalnym, można zapisać pewną transformację \mathbf{T} , przekształcającą zmienną losową o dowolnym rozkładzie na zmienną o rozkładzie gaussowskim, definiowaną jako

$$\mathbf{T}: \mathbf{X} = (X_1; X_2; X_3; \dots; X_n) \gg \mathbf{U} = (U_1; U_2; U_3; \dots; U_n) \quad (2.61)$$

gdzie podstawowe zmienne losowe $\mathbf{U} = (U_1; U_2; U_3; \dots; U_n)$ są nieskorelowane i charakteryzują się standaryzowanym rozkładem normalnym.

Powierzchnia graniczna w przestrzeni realizacji \mathbf{x} może być wówczas odwzorowana w odpowiednią powierzchnię graniczną w przestrzeni realizacji \mathbf{u} , w której również można znaleźć minimalną odległość β od początku układu współrzędnych przestrzeni do określonego punktu na powierzchni granicznej.

Macierz transformacyjną \mathbf{T} najprościej zapisać wtedy, gdy podstawowe zmienne losowe są niezależne, a ich funkcje rozkładu gęstości prawdopodobieństwa można zapisać rozdzielnie: $F_{X_1}; F_{X_2}; F_{X_3}; \dots; F_{X_n}$. Każda zmienna losowa może być wówczas transformowana oddzielnie, gdzie każde równanie transformacyjne przedstawić można następująco

$$\Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i); \quad i = 1; \dots; n \quad (2.62)$$

Macierz transformacyjna \mathbf{T} ma zatem elementy postaci

$$\mathbf{T}: u_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)); \quad i = 1; \dots; n \quad (2.63)$$

lub też, dla odwrotności macierzy transformacyjnej \mathbf{T}^{-1} , postaci

$$\mathbf{T}^{-1}: x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i)); \quad i = 1; \dots; n \quad (2.64)$$

Funkcja stanu granicznego g_u w przestrzeni realizacji \mathbf{u} może być również podana w odniesieniu do funkcji stanu granicznego g w przestrzeni realizacji \mathbf{x} , co zapisuje się

$$g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u})) = g_u(\mathbf{u}) \quad (2.65)$$

Punkt projektowy analizy niezawodności \mathbf{u}^* w przestrzeni realizacji \mathbf{u} jest rozwiązaniem nieliniowego procesu optymalizacji z jedną funkcją celu

$$\mathbf{u}^* = \min_{g_u(\mathbf{u})=0} |\mathbf{u}| \gg \min_{g(\mathbf{x})=0} |T(\mathbf{x})| = \mathbf{x}^* \quad (2.66)$$

Związek wartości funkcji stanu granicznego pomiędzy przestrzeniami realizacji można natomiast przestawić za pomocą rozwiniętych pochodnych cząstkowych

$$\frac{\partial g_u}{\partial u_i} = \frac{\partial g_u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial u_i} = \frac{\partial g_u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\varphi(u_i)}{f_{x_i}(x_i)} = \frac{\partial g_u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \frac{\varphi(\Phi^{-1}(F_{x_i}(x_i)))}{f_{x_i}(x_i)} \quad (2.67)$$

Oznaczając przez u_i^* współrzędne punktu na powierzchni granicznej, położonego najbliżej początku układu współrzędnych realizacji \mathbf{u} , można przedstawić równanie n -wymiarowej płaszczyzny stycznej do powierzchni granicznej w tym punkcie, w postaci

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_u}{\partial x_i}(\mathbf{u}^*)(u_i - u_i^*) = 0 \quad (2.68)$$

a przybliżenie pierwszego rzędu prawdopodobieństwa awarii P_f jako

$$P_f \approx \Phi(-\beta) = \Phi(-|\mathbf{u}^*|) \quad (2.69)$$

Przywołując te informacje, przedstawić można ulepszenie zapisanego w rozdziale 2.4.3. algorytmu poszukiwania optymalnego punktu projektowego analizy niezawodności Hasofera i Linda, zaproponowane przez Rackwitz i Fiesslera [Rackwitz i Fiessler, 1978]. Zostanie ono, zgodnie z oryginalnym sformułowaniem, przedstawione dla punktu projektowego \mathbf{u}^* leżącego na powierzchni granicznej w przestrzeni realizacji \mathbf{u} .

Można wykonać tzw. aproksymacyjne liniowe podstawienie zwrotne $\mathbf{u}^{(m+1)}$ do zapisu $\mathbf{x}^{(m+1)}$

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} + \mathbf{J}(\mathbf{u}^{(m+1)} - \mathbf{u}^{(m)}) \quad (2.70)$$

gdzie \mathbf{J} jest jacobianem transformacji wyrażonej macierzą \mathbf{T} [Rosenblatt, 1952].

Łącząc równanie aproksymacyjne Hasofera i Linda z przedstawionym powyżej aproksymacyjnym liniowym podstawieniem zwrotnym uzyskuje się schemat aproksymacyjny nazywany **regułą aproksymacyjną ogonów rozkładów normalnych** [Ditlevsen, 1981]

$$\mathbf{z}^{(m+1)} = \left(\mathbf{z}^{(m)T} \boldsymbol{\alpha}^{(m)} \right) \boldsymbol{\alpha}^{(m)} + \frac{g(\mathbf{z}^{(m)})}{|\nabla g(\mathbf{z}^{(m)})|} \boldsymbol{\alpha}^{(m)} \gg \mathbf{u}^{(m+1)} = \left(\mathbf{u}^{(m)T} \boldsymbol{\alpha}^{(m)} \right) \boldsymbol{\alpha}^{(m)} + \frac{g_u(\mathbf{u}^{(m)})}{|\nabla g_u(\mathbf{u}^{(m)})|} \boldsymbol{\alpha}^{(m)} \quad (2.71)$$

Jednostkowy wektor normalny do trajektorii prowadzonej przez algorytm $g_u(\mathbf{u}^{(m)})$ przedstawić można następująco

$$\boldsymbol{\alpha}^{(m)} = -\frac{\nabla g_u(\mathbf{u}^{(m)})}{|\nabla g_u(\mathbf{u}^{(m)})|} \quad (2.72)$$

Aproksymacyjne liniowe podstawienie zwrotne $\mathbf{u}^{(m+1)}$ do zapisu $\mathbf{x}^{(m+1)}$ można zatem zapisać z użyciem pochodnych cząstkowych transformacji

$$x_i^{(m+1)} = x_i^{(m)} + \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}\left(F_{X_i}\left(x_i^{(m)}\right)\right)\right)}{f_{X_i}\left(x_i^{(m)}\right)}\left(u_i^{(m+1)} - u_i^{(m)}\right) \quad (2.73)$$

w którym to zapisie, wg reguły aproksymacyjnej ogonów rozkładów normalnych

$$F_{X_i}(x_i) = \Phi\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) \quad (2.74)$$

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\sigma_i} \varphi\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) \quad (2.75)$$

lub przekształcając

$$\sigma_i = \frac{\varphi\left(\Phi^{-1}\left(F_{X_i}(x_i)\right)\right)}{f_{X_i}(x_i)} \quad (2.76)$$

$$\mu_i = x_i - \sigma_i \Phi^{-1}\left(F_{X_i}(x_i)\right) \quad (2.77)$$

Wprowadzić można wówczas realizacje zmiennych losowych algorytmu z_i w postaci

$$z_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad (2.78)$$

Wskaźnik niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} zaadaptowany przez Rackwitza i Fiesslera tak, aby stosował powyżej skonstruowane (2.78) realizacje zmiennych losowych z_i w algorytmie wyszukującym punktu \mathbf{z}^* (wyznaczanego jako granica sekwencji algorytmu $\mathbf{z}^{(0)} \gg \mathbf{z}^{(1)} \gg \dots \gg \mathbf{z}^{(m)} \gg \dots \gg \mathbf{z}^*$) leżącego w najmniejszej odległości od punktu początkowego nazywany jest wskaźnikiem niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera β_{HLRF} .

2.5. Metoda perturbacyjna

Teoria probabilistycznego szacowania niezawodności konstrukcji inżynierskich została wprowadzona w celu wskazania projektantowi szacowanej miary zmienności odpowiedzi konstrukcji, czyli zachowania się konstrukcji na skutek zaistnienia lub zmiany określonych jej parametrów (bądź współczynników analizy, jeśli mówi się o eksperymencie numerycznym).

Przywołane pojęcie **odpowiedzi konstrukcji inżynierskiej** jest szeroko rozpowszechnione w analizach probabilistycznych i używa się go jako myślowego, zbiorczego określenia miary rezultatów pracy konstrukcji inżynierskiej, które brane są przez projektanta do dalszych analiz lub oceny realizacji procesu projektowego [Sudret i Der Kiureghian, 2000].

Z punktu widzenia mechaniki konstrukcji jedną z najbardziej rozpowszechnionych metod analizy, jakie przedstawia się w literaturze ukierunkowanej na stosowanie probabilistycznych miar bezpieczeństwa konstrukcji i dopuszczalności jej odpowiedzi jest gałąź **technik i metod perturbacyjnych** [Nayfeh, 1973; Hurtado i Barbat, 1998].

Zachowanie się konstrukcji można opisać jako wielkość rozrzutu wynikowej odpowiedzi konstrukcji (której parametry są obciążone pewnymi ściśle sprecyzowanymi niepewnościami) względem punktu wartości średniej tejże odpowiedzi (obliczonej zazwyczaj dla układu idealnego, czyli takiego, gdzie wszystkie niepewności są reprezentowane przez wartości średnie swoich parametrów). Przyjęcie takiego podejścia stanowi istotę metod perturbacyjnych.

Metody perturbacyjne polegają na używaniu rozwinięć wielkości zawiązanych w równanie równowagi konstrukcji inżynierskiej w szeregi Taylora – w kontekście metody elementów skończonych dla problemów liniowo – sprężystych będą to przykładowo wyrażające niepewności parametrów losowe składniki macierzy sztywności, wektora obciążeń zewnętrznych oraz wektora przemieszczeń wynikowych ($\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}$).

Rozwinięcia tychże wielkości dokonuje się względem ich wartości średnich. Współczynniki wyrażające wkład zmienności, będące związane z rozwinięciami w szereg Taylora wielkości strony lewej i prawej równania równowagi, są podczas przebiegu metody wyznaczane na bazie analizy perturbacji (skąd wywodzi się nazwa metody). Rozwinięcie w szereg wspomnianych wartości zapewnia projektantowi złożony układ równań, z którego wyznaczyć można zdefiniowaną wcześniej liczbę (najczęściej poprzestaje się na pierwszych dwóch) probabilistycznych momentów odpowiedzi [Kleiber i Hien, 1992; Ang i Tang, 2007].

W inżynierii istotne jest także zrozumienie, w jaki sposób niepewności przenoszą się pomiędzy danymi wejściowymi, a odpowiedzią konstrukcji. Metoda perturbacyjna bardzo dobrze wyraża wrażliwość odpowiedzi konstrukcji na zmiany wartości ustalonych parametrów niepewności, co powoduje, iż na jej podstawie zaproponować można szereg procesów optymalizacyjnych dla rozwiązania projektowego w wielu dziedzinach inżynierii lądowej [Shinozuka i Yamazaki, 1988; Sudret i Der Kiureghian, 2000].

Wadą metod perturbacyjnych jest fakt, iż uzyskanie zadowalającej dokładności oszacowania momentów probabilistycznych wymaga uwzględnienia dużej ilości kolejnych wyrazów rozwinięcia w szereg Taylora. Zatem, rozwinięcie w szereg potrzebne do uzyskania jedynie dwóch pierwszych momentów odpowiedzi (czyli wykonywane za pomocą rozpisania jedynie dwóch pierwszych wyrazów szeregu) determinuje fakt, iż dokładność metody perturbacyjnej jest ograniczona. Daje ona zadowalające wyniki jedynie w tych przypadkach analizy, w których wejściowe zmienne losowe mają bardzo małe współczynniki zmienności c_v ($c_v = \sigma/\mu$), przy czym w większości analiz nie mogą one przekraczać wartości $c_{v,\max} = 0,15$ [Hurtado i Barbat, 1998].

Stosowalność metody perturbacyjnej jest ponadto ograniczona tylko do tej grupy problemów inżynierskich, w których projektowanie odbywa się wyłącznie przy użyciu opisu

matematycznego przedstawiającego zmienności najbardziej wpływające na rezultat (wyłącznie na ich podstawie analizowane jest nieprzekroczenie stanu granicznego konstrukcji), a nie wszystkich zmienności występujących w konstrukcji, możliwych do opisanania.

Dodatkowo, w przypadku konstrukcji nieliniowych, oba wspomniane wyżej obostrzenia przybierają na restrykcyjności (przykładowo współczynniki zmienności wejściowych zmiennych losowych nie mogą przekroczyć wartości $c_{v,\max} = 0,10$), co powoduje, iż bardzo często metoda ta uważana jest przy projektowaniu tego typu konstrukcji inżynierskich za nieefektywną bądź nieoptymalną.

W świetle wyżej wymienionych ograniczeń metoda perturbacyjna jest w dysertacji jedynie przywoływana, nie podaje się szczegółów algorytmu jej implementacji. Nie jest ona wykorzystana w późniejszych rozdziałach rozprawy, jednakże jej założenia i fragmenty jej metodologii są przytaczane przy okazji prezentacji innych technik probabilistycznych.

2.6. Metody oparte na miarach prawdopodobieństwa

Jak wspomniano w rozdziałach poprzedzających, alternatywną do przywołanych wcześniej metod perturbacyjnych gałęzią technik szacowania bezpieczeństwa konstrukcji są wszelkiego rodzaju techniki i metody symulacyjne i probabilistyczne, opierające się na informacjach płynących nie tylko z wyznaczonych probabilistycznych momentów odpowiedzi, ale przede wszystkim z funkcji rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych losowych związanych w problemie inżynierskim. W niniejszej rozprawie wybrano posługiwanie się dwiema grupami wyżej wymienionych metod – metodą Monte Carlo jako narzędziem reprezentującym podejście symulacyjne oraz metodą powierzchni odpowiedzi jako narzędziem reprezentującym podejście probabilistyczne.

W otaczającym nas świecie wiele zjawisk i procesów przebiega w sposób w znacznym stopniu losowy. Czasami przebieg danego procesu jest uzależniony od tak wielu parametrów obarczonych zmiennościami, że w uproszczeniu można przyjąć, iż zachodzi on w sposób całkowicie przypadkowy. Właśnie w celu ułatwienia obserwacji i analizy takich procesów powstał dział technik i metod symulacyjnych, pozwalający próbować opisać dane zjawisko przy użyciu prawdopodobieństwa [Metropolis i Ulam, 1949; Ulam, 1961].

Metody symulacyjne są szeroko stosowane w różnych działach matematyki numerycznej oraz w wielu dyscyplinach inżynierii, gdzie obejmują obszar projektowania powiązany z badaniami numerycznymi wykonywanymi na dyskretnych realizacjach zmiennych losowych projektu inżynierskiego. Używane są także tam, gdzie problem ten jest zbyt złożony (obliczenia całek lub łańcuchów procesów statystycznych są niemożliwe do opisanania matematycznie), aby można było przewidzieć jego rezultaty za pomocą podejścia analitycznego.

Przyjęto, iż podejście tych metod opiera się na obserwacji zachowania się (różnicowania) odpowiedzi sprecyzowanego przez inżyniera problemu inżynierskiego na wybraną liczbę sztucznie wygenerowanych zestawów realizacji zmiennych losowych, nazywanych **próbkami losowymi**, dobranych do symulacji zadanego problemu w sposób ukierunkowany na osiągnięcie optymalnego działania procesu lub pożądanej odpowiedzi.

We wszystkich metodach symulacyjnych wyróżnić można kilka wspólnych, głównych kroków postępowania, do których zaliczyć można sformułowanie modeli stochastycznych badanych procesów realnych, modelowanie numeryczne zmiennych losowych o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa, nazywane **generacją próbek losowych** oraz rozwiązywanie problemu statystycznego z zakresu teorii estymacji [Hammersley i Handscomb, 1964].

Przez dziesiątki lat metody symulacyjne były odrzucane z powodu braku narzędzi obliczeniowych, mogących sprostać złożoności procesu generacji danych, a wymagana wielkość populacji zestawów realizacji nie mogła być wpisana w ramy parametrów dostępnego sprzętu komputerowego. Jednakże wraz ze wzrostem możliwości komputerów w obszarze przeprowadzania szybkich i równoległych obliczeń, nawet dla złożonych konstrukcji inżynierskich, odrzucanie technik symulacyjnych spotykane w literaturze w poprzednich dekadach stało się nieaktualne, a metody te, odpowiednio rozwijane i modyfikowane, stały się popularne w analizach niemalże każdej konstrukcji [Hurtado i Barbat, 1998; Topping, 2002].

W czasach obecnych podejście symulacyjne jest już szeroko rozpowszechnione i z całą pewnością można stwierdzić, iż stało się podstawową techniką kalkulacji określonej grupy problemów inżynierskich. Dzieje się tak głównie ze względu na wszystkie zalety podejścia, przede wszystkim relatywnie prosty opis matematyczny (w odniesieniu do innych metod teorii szacowania bezpieczeństwa) i łatwość implementacji do narzędzi komputerowego wspomagania projektowania. Ceni się także łatwość obróbki wyników uzyskiwanych na drodze symulacji, prostotę analizy wrażliwości dokonywanej za pomocą tego podejścia i wszechstronność przyszłych eksperymentów numerycznych, jakie można dzięki technice symulacyjnej podjąć w temacie analizowanego problemu [Marek i inni, 1996; Liu, 2001].

Do wad podejścia symulacyjnego należy zaliczyć znaczną czasochłonność obliczeń, małą kontrolę nad produktem generacji dla złożonych konstrukcji inżynierskich oraz trudność sprecyzowania optymalnego, szybko zbieżnego zbioru wygenerowanych realizacji bez posilkowania się technikami redukcji populacji realizacji zmiennych losowych.

Zauważyć należy także, iż podczas rozwiązywania zadań inżynierskich pojawiają się problemy w obszarze określania rozkładów prawdopodobieństw dowolnych zdarzeń w taki sposób, aby odzwierciedlały właściwie naturę opisywanych zmienności parametrów konstrukcji. Trudne jest także określanie wartości momentów probabilistycznych używanych zmiennych losowych oraz sama metodologia generacji realizacji zmiennych.

2.6.1. Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo została opracowana przez zespół Johna von Neumanna podczas II wojny światowej, w trakcie prac nad arsenałem jądrowym w Los Alamos. Von Neumann wykorzystał zaadaptowane przez niego podejście symulacyjne, aby opisać losową naturę ruchu cząstek (dyfuzji neutronów). Termin Monte Carlo został zaczerpnięty z nazwy pobliskiego kasyna – skojarzenie z hazardem miało wskazywać nie tylko na przypadkowy (losowy) charakter symulowanych zjawisk, ale także na świadomość niebezpieczeństwa kryjącego się za militarnymi eksperymentami nuklearnymi [Hammersley i Handscomb, 1964].

Metoda Monte Carlo od dawna jest uznawana za technikę cechującą się największą dokładnością spośród wszystkich metod wymagających wiedzy o rozkładzie prawdopodobieństwa funkcji odpowiedzi konstrukcji opisanej za pomocą parametrów obarczonych losowymi niepewnościami. Pierwsze powojenne próby opisanie podstaw teoretycznych metody Monte Carlo w odniesieniu do inżynierii lądowej datuje się już na początek drugiej połowy ubiegłego stulecia [Kahn, 1955; Hammersley i Handscomb, 1964; Rubinstein, 1981; Hurtado i Barbat, 1988; Zio, 2008].

Metoda Monte Carlo znajduje zastosowanie w prawie wszystkich dziedzinach techniki, zajmujących się teorią niezawodności. Szczególną pozycję zajmuje w badaniach eksperymentalnych i numerycznych elementów żelbetowych [Hurtado i Barbat, 1988; Pradlwarter i Schuëller, 1997; Johnson i inni, 1999; Wang, 1999; Schuëller, 2001].

Na przestrzeni czasu metoda ta jest w sposób ciągły udoskonalana i dopracowywana. Najważniejszym obszarem precyzowania metody jest w czasach obecnych podejmowanie prób optymalizacji matematycznego opisu generowania wartości losowych, przy równoczesnej minimalizacji nakładu obliczeń, prowadzonej w celu ułatwienia modelowania lub symulacji złożonych konstrukcji, procesów i zjawisk, które zachodzą w sposób w pełni losowy.

Teoretyczne podwaliny metody Monte Carlo można przedstawić, opierając się na rozwinięciu informacji o stanie granicznym konstrukcji inżynierskiej obciążonej niepewnościami jej parametrów. Prawdopodobieństwo awarii takiej konstrukcji P_f można określić w sposób przedstawiony wcześniej, jako funkcję spełnienia marginesu bezpieczeństwa:

$$P_f = P[g(R, S) \leq 0] \quad (2.79)$$

gdzie funkcja $g(R, S)$ jest funkcją stanu granicznego konstrukcji inżynierskiej, w której niepewności wyrażone są dwiema reprezentatywnymi podstawowymi zmiennymi losowymi wytrzymałości materiału i obciążenia.

Prosta postać funkcji stanu granicznego z powyższego zapisu może w przypadku ogólnym zostać wyrażona bezpośrednio jako zależność wszystkich zmiennych podstawowych i ich rozkładów prawdopodobieństwa, co można zapisać równaniem

$$P_f = P[g(\mathbf{X}) \leq 0] = \int_{g(\mathbf{X}) \leq 0} \dots \int f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.80)$$

gdzie: $g(\mathbf{X})$ oznacza funkcję stanu granicznego konstrukcji, a $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa n -wymiarowego wektora podstawowych zmiennych losowych.

Jeśli zmienne podstawowe $\mathbf{X} = \{X_1; X_2; X_3; \dots; X_n\}$ są niezależne, to zapis funkcji gęstości prawdopodobieństwa można uprościć do postaci

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \cdot f_{X_3}(x_3) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n) \quad (2.81)$$

gdzie funkcje $f_{X_i}(x_i)$ są kolejnymi cząstkowymi funkcjami gęstości prawdopodobieństwa podstawowych zmiennych X_i .

Założyć można następującą całkę, będącą uogólnioną formą zapisu funkcji stanu granicznego

$$I = \int_D g(\mathbf{x}) dx \quad (2.82)$$

gdzie D jest obszarem w przestrzeni n -wymiarowej, a $g(\mathbf{x})$ jest funkcją realizacji zmiennych losowych problemu inżynierskiego.

Jeżeli zostaną wygenerowane symulacyjnie (z obszaru D) niezależne i pochodzące z rozkładu równomiernego realizacje zmiennych losowych $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_n$, to przybliżenie przedstawionej powyżej wartości I może być zapisane w postaci

$$\hat{I}_{MC} = \frac{1}{n} \cdot [g(\mathbf{x}_1) + g(\mathbf{x}_2) + g(\mathbf{x}_3) + \dots + g(\mathbf{x}_n)] \quad (2.83)$$

Zgodnie z prawem wielkich liczb, średnia wielu niezależnych zmiennych losowych z jednakową wartością średnią i skończonymi wariancjami stabilizuje się w ich wspólnej średniej $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{I}_{MC} = I$, z prawdopodobieństwem równym jedności.

Stopień zbieżności rozwiązania tego problemu może być obliczony na podstawie centralnego twierdzenia granicznego

$$\sqrt{m} (\hat{I}_{MC,m} - I) \rightarrow N(0, \sigma^2) \quad (2.84)$$

gdzie wariancja rozkładu jest związana z funkcją stanu granicznego – $\sigma^2 = \text{Var}[g(\mathbf{x})]$.

W przypadku analizy niezawodności konstrukcji inżynierskich powyższa procedura oznacza, iż każdy wektor realizacji zmiennych losowych \mathbf{x}_i jest generowany losowo, aby otrzymać pojedynczą wartość realizacji tzw. **próbki losowej** $\hat{\mathbf{x}}_i$, dla której sprawdza się później spełnienie równania stanu granicznego konstrukcji inżynierskiej $g(\hat{\mathbf{x}}_i) = 0$.

Jeśli stan graniczny jest przekroczony, tj. jeśli $g(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0$, to zakłada się wówczas, że dla danej próbki konstrukcja uległa awarii.

Eksperyment z pojedynczą próbką powtarza się wielokrotnie, zależnie od założeń procesu projektowego określonego przez inżyniera. Jeśli przeprowadzony zostanie on N razy, prawdopodobieństwo całkowite awarii jest w przybliżeniu równe

$$P_f \cong \frac{n(g(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0)}{N} = J_{MC} \quad (2.85)$$

gdzie $n(g(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0)$ oznacza liczbę prób symulacji dla których konstrukcja inżynierska uległa awarii, czyli dla których $g(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0$, a N oznacza całkowitą liczbę prób w symulacji. Liczba ta ma bardzo duży wpływ na dokładność oszacowania całkowitego prawdopodobieństwa awarii konstrukcji P_f , zatem musi być dobrana z należąca odpowiedzialnością.

Wartość P_f oszacowana metodą Monte Carlo jest często zwana **wartością estymowaną** lub **estymatorem prawdopodobieństwa awarii** J_{MC} , dla odróżnienia tejże wartości od prawdopodobieństwa awarii obliczonego za pomocą zamkniętych procedur.

Bardzo często w literaturze spotyka się zapis estymatora prawdopodobieństwa awarii dokonany za pomocą wprowadzonej zewnętrznie dwupunktowej funkcji charakterystycznej, przedstawiany w następujący sposób:

$$P_f \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{0/1}(g(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0) = J_{MC} \quad (2.86)$$

gdzie funkcja charakterystyczna wyrażana jest wzorem

$$I_{0/1}(g(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0) = \begin{cases} 1, & \text{gdym } g(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0 \\ 0, & \text{gdym } g(\hat{\mathbf{x}}_i) > 0 \end{cases} \quad (2.87)$$

Błąd estymatora prawdopodobieństwa awarii wyraża się za pomocą jego wariancji, którą w przypadku zastosowania zapisu z użyciem funkcji charakterystycznej obszaru awarii zapisać można równością

$$V_{P_f} = \text{Var}(J_{MC}) = \text{Var}(P_f) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{Var}[I_{0/1}(g(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0)] = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N ([I_{0/1}(g(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0)] - P_f)^2 \quad (2.88)$$

lub w postaci uproszczonej jako

$$V_{P_f} = \frac{1}{N} \cdot P_f (1 - P_f) \quad (2.89)$$

Wówczas, dokładność oszacowania wykonanego metodą Monte Carlo może zostać wyrażona za pomocą współczynnika zmienności estymatora, który można przedstawić jako

$$\hat{e}_{MC} = \frac{\sqrt{V_{P_f}}}{P_f} \quad (2.90)$$

lub odwrotnie, na podstawie przekształcenia równania – liczbę symulacji, jaką należy wykonać, aby otrzymać estymator o żądanym współczynniku zmienności (odpowiadający oczekiwanemu przez projektanta zadanemu prawdopodobieństwu awarii) można określić jako

$$\hat{e}_{MC} = \sqrt{\frac{1 - P_f}{N \cdot P_f}} \quad (2.91)$$

Jak widać z powyższych zapisów, błąd aproksymacji metodą Monte Carlo jest niezależny od wymiaru zmiennej losowej \mathbf{X} . Ta właśnie cecha stanowi główną zaletę stosowania metodologii Monte Carlo w szeroko pojętej inżynierii.

Podsumowując – aby stosować metodę Monte Carlo w praktyce inżynierskiej, konieczne należy rozwinąć technikę symulacji próbek podstawowych zmiennych losowych $\hat{\mathbf{x}}_i$, określić szacunkową liczbę próbek potrzebnych do poprawnego oszacowania wspomnianego powyżej prawdopodobieństwa awarii konstrukcji P_f (co w niektórych przypadkach wiąże się z celową i zaplanowaną redukcją populacji próbek, mającą zaoszczędzić czasu i mocy obliczeniowej narzędzia komputerowego, poprzez tzw. **techniki redukcyjne**) oraz uwzględnić efekt złożoności tego wyboru na obliczenie funkcji stanu granicznego $g(\hat{\mathbf{x}}_i)$ [Melchers, 1999].

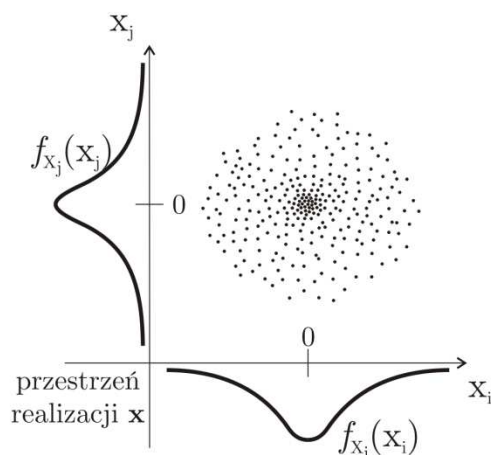
2.6.2. Metoda Monte Carlo z użyciem technik redukcyjnych

Najprostszym podejściem używającym metodologii Monte Carlo w zastosowaniu do obliczania niezawodności konstrukcji inżynierskich jest tzw. **próbkowanie bezpośrednie**, znane też pod nazwą **prostego próbkowania losowego** (direct sampling, simple random sampling) lub jako **próbkowanie surowe** (crude sampling) [Hurtado i Barbat, 1988].

Podejście takie nie zawiera żadnej techniki redukcyjnej wobec pierwotnie wygenerowanej liczby próbek, co pozwala na opis statystyczny zachowania konstrukcji lub jej elementu bez spadku jakości statystycznej tegoż opisu. Jednakże metoda próbkowania bezpośredniego może nie być wystarczająco szybka dla analizy konstrukcji o wielu stopniach swobody.

Ilustrację przykładowej populacji próbek przedstawia rys. 2.11.

Populację uzyskaną przez próbkowanie surowe można ograniczyć w prosty sposób, bez zawiązywania w proces generacji zazwyczaj złożonych operacji matematycznych, przykładowo losowo wybierając przyjęcie lub odrzucenie wygenerowanej próbki. Takie podejście jest nazywane **próbkowaniem chybił-trafił** (hit-or-miss sampling), ale jest rzadko stosowane w problemach szacowania niezawodności konstrukcji inżynierskich, ze względu na rzeczoną brak opisu matematycznego i zbyt dużą dowolność redukcji populacji.



Rys. 2.11. Przykładowa populacja próbek, wygenerowanych za pomocą próbkowania bezpośredniego (dla uproszczenia wielowymiarowe zagadnienie przedstawione jest tutaj na płaszczyźnie dwóch wymiarów probabilistycznych wektora zmiennych losowych zadania).

Obecnie, dużo bardziej popularne stają się techniki redukcji rozmiaru populacji próbek wygenerowanych metodą Monte Carlo, opisane w sposób ścisły. Bardzo trudno jest jednak dokonać zamkniętego podziału technik redukcji na odpowiednie grupy – duża możliwość manipulacji algorytmami generacyjnymi powoduje, że granice pomiędzy poszczególnymi gałęziami redukcji populacji są przesuwane lub zacierane. W niniejszej dysertacji zdecydowano się na podział technik redukcji na podejście warstwowe i podejście wagowe.

Pierwszym rodzajem technik generacji zredukowanej populacji próbek, mającą poprawić czas i koszt obliczeń przy jednoczesnym zachowaniu dokładności obliczeń jest **próbkowanie warstwowe**, nazywane także próbkowaniem uwarstwionym (stratified sampling), gdzie

wielowymiarową przestrzeń realizacji dzieli się na podsektory, z których wybiera się jedną losową próbkę realizacji niezależnie od ich początkowej ilości w sektorze. Rozwinięciem próbkowania warstwowego, stosowanym przede wszystkim w konstrukcjach o dużym stopniu skomplikowania jest **próbkowanie hipersześcianu łacińskiego** (latin hypercube sampling), gdzie z odpowiedniego podziału na sektory uproszczone do jednej próbki, wybiera się jedynie odpowiednio ulokowane w przestrzeni realizacji próbki reprezentatywne. Zaletą tego podejścia jest bardzo szybkie uzyskiwanie zbieżności rezultatów oraz zwyczajowo bardzo duże zyski co do wymaganej liczby koniecznych realizacji zmiennych losowych.

Drugim rodzajem technik redukcji populacji próbek jest **próbkowanie wagowe**, nazywane także próbkowaniem ważonym lub ważnościowym (importance sampling), które w celu wybrania określonej ilości próbek rozdziela nie przestrzeń, ale wybrane realizacje, niezależnie od ich dystrybucji w przestrzeni n -wymiarowej. Podejście to jest bardzo użyteczne w analizach niezawodności, można bowiem tak sterować doбором próbek, aby próbki wybrane przez użytkownika zbierały realizacje podstawowych zmiennych losowych otaczające lub wypełniające ogony rozkładów prawdopodobieństwa tychże zmiennych. Jedną z bardziej rozpoznawanych technik reprezentujących to podejście jest **próbkowanie rosyjskiej ruletki i rozdzielania** (russian roulette and splitting), które jest procesem wykonywanym sekwencyjnie, w pewnej liczbie etapów. Pierwszym z nich jest podział próbek na zasadzie gry w rosyjską ruletkę na próbki istotne i nieistotne, z jednoczesnym nadaniem im odpowiednich wag. Próbka istotna rozbita zostaje na kilka identycznych realizacji, natomiast próbka nieistotna może być wyeliminowana, z zadaniem prawdopodobieństwem. Po przeprowadzeniu obu operacji następuje aktualizacja wag poszczególnych próbek, dla zachowania warunku normalizacji (suma wszystkich wag równa jedności), po czym proces sekwencyjny zostaje powtórzony [Hurtado i Barbat, 1988].

Wyróżnione techniki próbkowania – próbkowanie warstwowo, próbkowanie hipersześcianu łacińskiego, próbkowanie wagowe oraz próbkowanie rosyjskiej ruletki i rozdzielania – zostaną szerzej opisane w niniejszej rozprawie, a ich działanie zostanie zaprezentowane w kolejnym rozdziale na prostych prętowych nieliniowych modelach konstrukcji masztowych.

Populacje zestawów realizacji zmiennych losowych można także zredukować czysto matematycznie (co nie zostanie szerzej poruszone w niniejszej dysertacji), przykładowo **technikami kontroli wariancji** lub **technikami wariancji przeciwstawnej**. Dzięki tym technikom eksperymentator jest w stanie dokonać popraw w funkcjonowaniu algorytmu próbkowania, zastosowania przeszukiwania przestrzeni realizacji zadania lub technik adaptacyjnych oraz ma możliwość wskazania wpływu zmian populacji próbek lub określonych zmiennych losowych na prawdopodobieństwo prawidłowego oszacowania szukanych wartości. Symulacje mające na celu optymalizację wyniku poprzez takie właśnie działania nazywa się **symulacjami ukierunkowanymi** (directional simulations) [Kahn, 1955].

2.6.2.1. Próbkowanie warstwowo

Próbkowanie warstwowo (stratified sampling) jest pierwszą z dwóch podstawowych technik redukcji wariancji symulacji metodą Monte Carlo, jakie wyróżnia się w literaturze jako główne gałęzie dokonywania ograniczeń wielkości populacji próbek.

W technice próbkowania warstwowego przestrzeni zmiennych losowych Ω zadania dzieli się na kilka rozłącznych podprzestrzeni Ω_l ($l = 1; 2; 3; \dots; L$), nazywanych **warstwami** (stąd nazwa próbkowania), które to podprzestrzenie spełniają podstawowe geometryczne zależności:

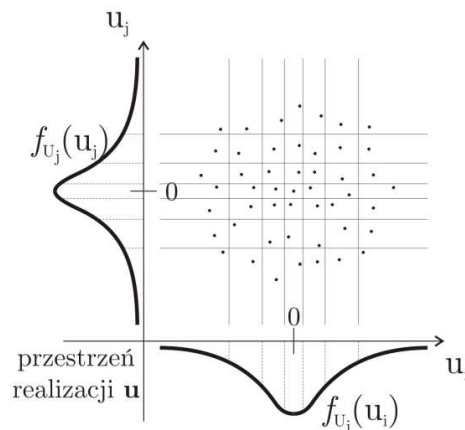
$$\Omega = \bigcup_{l=1}^L \Omega_l, \quad \Omega_i \cap \Omega_l = \emptyset, \quad (l = 1, 2, 3, \dots, L; i \neq j; i, j = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (2.92)$$

gdzie liczba L określa ilość wydzielonych rozłącznych podprzestrzeni zmiennych losowych, do każdej l -tej podprzestrzeni przypisana jest odpowiednia wielkość populacji próbek, zależnie od wkładu podprzestrzeni w całkowite prawdopodobieństwo awarii [Rubinstein, 1981].

Ilustracja przykładowej populacji próbek, jaką uzyskuje się w wyniku działania procesu generacyjnego metody Monte Carlo, wzbogaconej o użycie techniki próbkowania warstwowego, przedstawiona jest na rys. 2.12.

Zakładając, że P_l , ($l = 1; 2; 3; \dots; L$) oznacza prawdopodobieństwo znalezienia się w obszarze danej l -tej podprzestrzeni Ω_l , a P_f oznacza prawdopodobieństwo awarii realizacji pochodzącej z tej podprzestrzeni, to całkowite prawdopodobieństwo awarii powodowane przez realizacje z danej podprzestrzeni może być wyrażone jako

$$P_l = \int_{\Omega_l} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.93)$$



Rys. 2.12. Populacja próbek, wygenerowana z zastosowaniem próbkowania warstwowego (wielowymiarowe zagadnienie przedstawione jest tutaj na płaszczyźnie dwóch wymiarów probabilistycznych wektora standaryzowanych zmiennych losowych).

Dla obszaru danej l -tej podprzestrzeni Ω_l zaproponować można dystrybuantę rozkładu prawdopodobieństwa $f_l(\mathbf{x})$, która ma być realizowana przez losowo wygenerowaną próbkę losową. Ma ona postać

$$f_l(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \mathbf{x} \notin \Omega_l \\ \frac{f(\mathbf{x})}{P_l} & \text{dla } \mathbf{x} \in \Omega_l \end{cases}, \quad (l = 1; 2; 3; \dots; L) \quad (2.94)$$

Przy tak sporządzonym opisie funkcji $f_l(\mathbf{x})$ można oszacować prawdopodobieństwo awarii P_{f_l} realizacji pochodzącej z l -tej podprzestrzeni Ω_l

$$\hat{P}_{f_l} = \sum_{l_j=1}^{N_l} \frac{I_{0/1}(g(\mathbf{x}_{l_j}) \leq 0) \cdot f(\mathbf{x}_{l_j})}{f_l(\mathbf{x}_{l_j}) \cdot N_l} \quad (2.95)$$

gdzie: \mathbf{x}_{l_j} jest l_j -tą wygenerowaną próbką wektora realizacji zaczerpniętą z l -tej podprzestrzeni Ω_l poprzez dobranie $f_l(\mathbf{x})$ jako dystrybuanty generacyjnej, N_l jest całkowitą liczbą próbek wylosowanych za pomocą dobranej dystrybuanty generacyjnej $f_l(\mathbf{x})$, a $I_{0/1}(g(\mathbf{x}_{l_j}) \leq 0)$ jest wprowadzoną zewnątrz dwupunktową funkcją charakterystyczną zapisaną na obszarze awarii Ω_{f_l} , zaobserwowanym w Ω_l .

Szacowane prawdopodobieństwo awarii \hat{P}_f realizacji pochodzącej z całości przestrzeni Ω_f można zatem przedstawić jako sumę wszystkich częściowych prawdopodobieństw awarii P_{f_l}

$$\hat{P}_f = \sum_{l=1}^L \hat{P}_{f_l} = \sum_{l=1}^L \left[\sum_{l_j=1}^{N_l} \frac{I_{0/1}(g(\mathbf{x}_{l_j}) \leq 0) \cdot f(\mathbf{x}_{l_j})}{f_l(\mathbf{x}_{l_j}) \cdot N_l} \right] = J_{MC,SS} \quad (2.96)$$

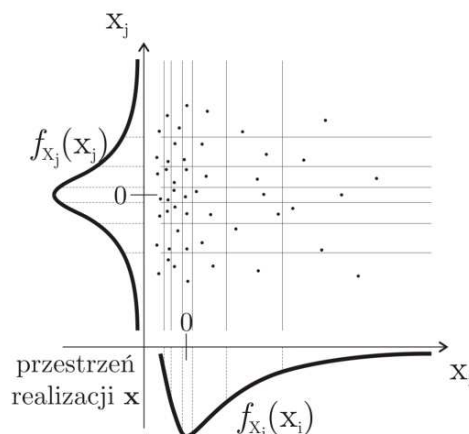
Wartość wyniku powyższego równania jest często zwana **estymatorem warstwowym** (próbkowanym warstwowo) **prawdopodobieństwa awarii** $J_{MC,SS}$.

Dysponując oszacowanym estymatorem można, za pomocą jego wariancji, identycznie jak w przypadku metody Monte Carlo, wyrazić błąd estymacji prawdopodobieństwa awarii. Również współczynnik zmienności estymatora może być skalkulowany analogicznie.

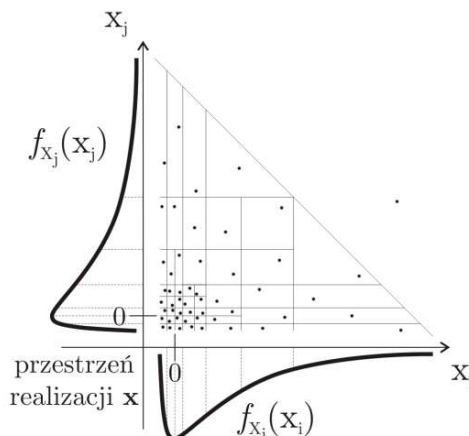
Próbkowanie warstwowo jest doskonałą techniką redukcyjną dla metody Monte Carlo, gdyż powoduje zauważalny spadek kosztu i czasu obliczeń numerycznych dla praktycznie wszystkich konstrukcji inżynierskich. Wadą tego typu próbkowania jest fakt, iż w przypadku złożonych konstrukcji inżynierskich wymaga ona dobrania odpowiedniej strategii warstwowania przestrzeni Ω_l a jej efektywność jest wówczas bardzo mocno zależna od dobranych funkcji dystrybuant generacyjnych $f_l(\mathbf{x})$ [Feng i inni, 2010].

To, jak mają być dobrane warstwy (podprzestrzenie Ω_l) mocno zależy od klasy problemu inżynierskiego. Jednakże, dla dowolnie przyjętego podziału można w łatwy sposób oszacować optymalną liczbę próbek koniecznych do wygenerowania w obrębie danej podprzestrzeni Ω_l , aby obliczenia były efektywne. Wymaga to jedynie niewielkiej liczby testowych obliczeń wstępnych, pomagających znaleźć momenty odpowiedzi probabilistycznych zmiennych losowych związanych w zadaniu. Takie obliczenia nazywane są **przedbiegami** lub **przebiegami próbnymi** (trial runs). Tę cechę próbkowania również należy zaliczyć do jego zalet, popularyzujących tę technikę w projektowaniu inżynierskim [Rubinstein, 1981].

Ilustrację przykładowej populacji próbek, jaką uzyskuje się w procesie generacyjnym z użyciem próbkowania warstwowego, o arbitralnie dobranych warstwach (podprzestrzeniach Ω_l), przedstawiają rys. 2.13. oraz rys. 2.14.



Rys. 2.13. Populacja próbek, wygenerowanych przy użyciu próbkowania warstwowego o podprzestrzeniach o nierównym podziale pola funkcji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa (wielowymiarowe zagadnienie przedstawione jest tutaj na płaszczyźnie dwóch wymiarów probabilistycznych wektora zmiennych losowych).



Rys. 2.14. Populacja próbek, wygenerowanych przy użyciu próbkowania warstwowego o podprzestrzeniach o nierównej wadze składowych funkcji rozkładu gęstości prawdopodobieństwa (wielowymiarowe zagadnienie przedstawione jest tutaj na płaszczyźnie dwóch wymiarów probabilistycznych wektora standaryzowanych zmiennych losowych).

2.6.2.2. Próbkowanie hipersześcianu łacińskiego

Próbkowanie hipersześcianu łacińskiego (latin hypercube sampling) jest rozwinięciem idei jaka stoi za próbkowaniem wagowym. Próbkowanie tego typu jest jedną z najbardziej efektywnych metod generowania próbek losowych możliwych do uzyskania z funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa składowych n – wymiarowego wektora losowego.

Metoda ta jest obecnie szeroko stosowana w analizie niezawodności konstrukcji inżynierskich.

W technice próbkowania łacińskiego hipersześciennej przestrzeni zmiennych losowych Ω zadania również dzieli się na kilka rozłącznych podprzestrzeni Ω_l ($l = 1; 2; 3; \dots; L$), jednakże istnieje pewne ograniczenie odnośnie generacji próbek z danych podprzestrzeni.

W próbkowaniu warstwowym, w pojedynczej generacji, z każdego zaproponowanego przez projektanta l -tego podprzedziału określonego dla pojedynczego i -tego wymiaru składowej wektora zmiennych losowych (X_i), generowana jest określona ilość próbek w ten sposób, aby zachowana była wzajemność relacji między wszystkimi n wymiarami, a wygenerowane próbki zawierały losowe realizacje wszystkich pozostałych wymiarów wektora \mathbf{X} .

W próbkowaniu łańciskim hipersześciennym natomiast, w pojedynczej generacji z każdego l -tego podprzedziału określonego dla pojedynczego i -tego wymiaru składowej wektora zmiennych losowych, generowana jest jedynie jedna próbka, stworzona na zasadzie kombinatoryki pomiędzy wszystkimi n wymiarami wektora \mathbf{X} [McKay i inni, 1979].

Działanie takie może być zobrazowane podobieństwem do tzw. **kwadratu łańciskiego Eulera**, który jest l -poziomą, dwuwymiarową tablicą liczbową wypełnioną liczbą L różnych wartości (w oryginalnym sformułowaniu Eulera były to litery alfabetu łańciskiego, została stąd zaczerpnięta nazwa techniki), w ten sposób, że w danym i -tym wierszu oraz kolumnie i -ty element występuje tylko na jednym miejscu (przecięciu kolumny i wiersza). Możliwości stworzenia kwadratu łańciskiego jest skończenie wiele, liczba ta jednak (pośrednio w zależności od wymiaru l podpodziału tablicy liczbowej) jest satysfakcjonująco duża, aby zaanektować ją jako liczbę generowanych próbek dla metod symulacyjnych.

Przykład kwadratu łańciskiego, którego wartością jest kolor, zaprezentowano na rys. 2.15.



Rys. 2.15. Witraż upamiętniający R.A. Fishera, twórcę eksperymentalnego projektowania probabilistycznego, przedstawiający pomysł wykorzystania wzoru kwadratu łańciskiego w technikach redukcji populacji próbek, zaprojektowany przez jego studenta, A.W.F. Edwardsa. Witraż znajduje się w Caius College, w Cambridge. Jest wykonany jako kwadrat łańciski o wymiarach 7×7 , którego tworzącą jest kolor (w tym przypadku barwa szkła).

Hipersześcián łaciński Eulera jest uogólnieniem pojęcia kwadratu łacińskiego na dowolną liczbę wymiarów (w ogólności na n wymiarów przestrzeni realizacji wektora zmiennych losowych \mathbf{X}). W celu pobrania próbki losowej z funkcji n -wymiarowej zmiennej losowej, zakres zmienności każdego wymiaru realizacji zmiennej losowej rozdziela się na l równie prawdopodobnych do zaistnienia podprzedziałów, z których generuje się tylko jedną próbkę, leżącą na każdej krawędzi przecięcia się podprzedziałów Ω_i każdego z n wymiarów. Wylosowane próbki mogą być podjęte z jednego punktu przecięcia krawędzi tylko raz, pamiętając jednak, iż kombinacji rozłożenia punktów realizacji zmiennych losowych na krawędziach przecięcia jest wiele [Iman i Conover, 1980; Iman i inni, 1981].

Maksymalną liczbą kombinacji (a co za tym idzie – maksymalną, możliwą do pobrania liczbę próbek) dla próbkowania hipersześciánu łacińskiego n – wymiarowej przestrzeni zmiennych losowych Ω , z których każdy z wymiarów został podzielony na l równie prawdopodobnych podprzedziałów, można obliczyć następująco

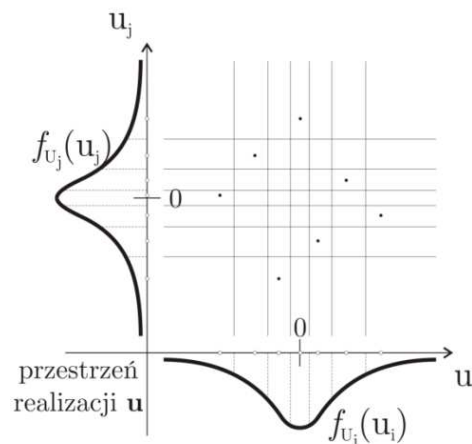
$$L_x = \left(\prod_{j=0}^{l-1} (l-j) \right)^{n-1} = (l!)^{n-1} \quad (2.97)$$

Próbki na danym podprzedziale Ω_i każdego z n wymiarów są najczęściej dobierane za pomocą odwrotności dystrybuanty rozkładu prawdopodobieństwa pojedynczej składowej wektora zmiennej losowej (X_i), w sposób określony wzorem

$$x_{i_k} = F_i^{-1} \left(\frac{k-0,5}{L} \right) \quad (2.98)$$

gdzie: x_{i_k} jest k -tą próbką i -tej składowej zmiennej losowej, $F_i^{-1}(\bullet)$ jest odwrotnością dystrybuanty jej rozkładu prawdopodobieństwa, a L jest maksymalną liczbą próbek, jakie można uzyskać na pojedynczym wymiarze n -wymiarowej przestrzeni realizacji Ω [Helton i Davis, 2003; Olsson i inni, 2003].

Ilustrację przykładowej populacji próbek, jaką uzyskuje się w procesie generacyjnym z użyciem próbkowania hipersześciánu łacińskiego, przedstawia rys. 2.16.



Rys. 2.16. Populacja próbek, wygenerowanych przy użyciu próbkowania hipersześciánu łacińskiego (wielowymiarowe zagadnienie przedstawione jest tutaj na płaszczyźnie dwóch wymiarów probabilistycznych wektora standaryzowanych zmiennych losowych).

Dla tak przygotowanej liczby L_x próbek realizacji wektora zmiennych losowych \mathbf{X} podając można estymację prawdopodobieństwa awarii konstrukcji w sposób analogiczny do tej, proponowanej przez metodę Monte Carlo. Zapisać ją można równaniem

$$P_f \cong \frac{n(g(\hat{\mathbf{x}}_k) \leq 0)}{N_x} = J_{MC,LHS} \quad (2.99)$$

gdzie $n(g(\hat{\mathbf{x}}_k) \leq 0)$ oznacza liczbę prób symulacji dla których konstrukcja inżynierska uległa awarii, a N_x oznacza całkowitą liczbę prób użytych w symulacji (przy czym $N_x \leq L_x$).

2.6.2.3. Próbkowanie wagowe

Próbkowanie wagowe, ważone lub ważnościowe (importance sampling) jest drugą z podstawowych technik redukcji wariancji symulacji metodą Monte Carlo, jakie wyróżnia się w literaturze jako główne gałęzie technik dokonywania ograniczeń wielkości populacji próbek. W technice próbkowania wagowego przestrzeń zmiennych losowych Ω zadania zostaje tak zaaranżowana, aby móc wydzielić z niej obszary mające największe znaczenie w analizie probabilistycznej, bądź też mają największy wpływ na interesujący inżyniera rezultat. Najbardziej istotnym pojęciem tejże techniki jest pojęcie **wagi** (ważności) funkcji doboru realizacji, określającym znaczenie wygenerowanej wartości dla kształtowania się uzyskiwanego wyniku [Ziha, 1995].

Zapisać można ponownie wyjściowy estymator prawdopodobieństwa awarii wg metody Monte Carlo z użyciem funkcji charakterystycznej:

$$P_f \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{0/1}(g(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0) = J_{MC} \quad (2.86)$$

Wprowadzić można za wektor realizacji zmiennych losowych przestrzeni realizacji \mathbf{X} nowy wektor realizacji zmiennych losowych, ulokowany w przestrzeni realizacji \mathbf{W} , o znanej funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $f_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}_i)$, dobranej w ten sposób, aby wariancja oszacowanego prawdopodobieństwa awarii uległa widocznej redukcji [Kahn i Marshall, 1953].

Poprawiony techniką próbkowania wagowego estymator prawdopodobieństwa awarii wyrazić można wówczas równaniem

$$P_f \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{0/1}(g(\mathbf{w}_i) \leq 0) \cdot \left(\frac{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{w}_i)}{f_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}_i)} \right) = J_{MC,IS} \quad (2.100)$$

Użyty w równaniu iloraz funkcji gęstości $W(\mathbf{w}_i) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{w}_i) / f_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}_i)$ nazywany jest **wagą** lub też **współczynnikiem podobieństwa gęstości rozkładów**. W przypadku, gdy między funkcjami gęstości nie zachodzi żadna zmiana, to wówczas $W(\mathbf{w}_i) = 1$, co oznacza redukcję techniki do podjęcia bezpośredniego metody Monte Carlo.

Zbieżność estymatora jest zapewniona dla prawie dowolnego rozkładu prawdopodobieństwa $f_{\mathbf{W}}(\mathbf{w}_i)$, jednakże tylko niektóre rozkłady zapewniają oszacowanie efektywniejsze niż to, jakie można uzyskać bezpośrednią metodą Monte Carlo. Dobór odpowiedniej wagi jest kluczową

kwestią sprawności techniki w obliczeniach numerycznych. Stosunek ten musi koniecznie być ograniczony, inaczej projektant naraża się na nieprawidłowe wyróżnienie takiej grupy elementów próby losowej, dla których rezultaty są niekonsystentne lub nieprawidłowe.

Prawidłowość działania techniki pozwala kontrolować wariancja estymatora prawdopodobieństwa awarii, którą można zapisać równością:

$$V_{P_f} = Var(J_{MC,IS}) = Var(P_f) = Var \left[I_{0/1}(g(\mathbf{w}_i) \leq 0) \cdot \left(\frac{f_X(\mathbf{w}_i)}{f_W(\mathbf{w}_i)} \right) \right] \quad (2.101)$$

co można również zapisać jako

$$V_{P_f} = E_W \left[I_{0/1}(g(\mathbf{w}_i) \leq 0) \cdot \left(\frac{f_X(\mathbf{w}_i)}{f_W(\mathbf{w}_i)} \right) \cdot f_X(\mathbf{w}_i) \right] - \left(E_W \left[I_{0/1}(g(\mathbf{w}_i) \leq 0) \cdot \left(\frac{f_X(\mathbf{w}_i)}{f_W(\mathbf{w}_i)} \right) \right] \right)^2 \quad (2.102)$$

Należy pamiętać, iż zapisana powyżej wariancja musi mieć skończoną wartość, inaczej technika redukcyjna nie będzie efektywna. Pomocnicze w tym zakresie są wszystkie **techniki i metody adaptacyjne**, które jednak nie zostaną przywołane w niniejszej rozprawie.

2.6.2.4. Próbkowanie rosyjskiej ruletki i rozdzielania

Próbkowanie wagowe dopuszcza w swoim założeniu istnienie próbek o małym znaczeniu dla osiągnięcia pożądanego rozwiązania, a sensem poprawnego posługiwania się techniką jest zapewnienie jak najmniejszego udziału tych próbek w osiąganiu końcowego rezultatu. Każda próbka o małej wadze wprowadzona do obliczeń metody Monte Carlo doprowadza bowiem do wydłużenia czasu obliczeniowego, jednocześnie nie pomagając w osiągnięciu zbieżności przez rozwiązanie, a często nawet powodując odbieganie od docelowej wartości wynikowej.

Istnieją jednakże podejścia, które proponują „ekstremalne” postępowanie z próbkami o małej wadze. W metodologii symulacji losowych procesów dynamicznych stosowane są techniki, które sztucznie zwielokrotniają liczbę próbek o dużej wadze dla osiągnięcia pożądanego rozwiązania, a ograniczają wpływ próbek o małej wadze, przykładowo używana w fizyce molekularnej **technika podwajania i zbijania** (double-and-clump sampling).

Podejście to można końcowo rozwinąć do sytuacji, w której próbki o małej wadze nie są jedynie zbijane (ich wkład jest sztucznie minimalizowany), a są wprost „zabijane” (są całkowicie wyrzucane z obliczeń). Technika ta jest znana pod pojęciem **próbkowania rosyjskiej ruletki i rozdzielania** (russian roulette and splitting sampling).

Termin „rosyjska ruletka” jest nieprzypadkowym odniesieniem do „zabójczej” eliminacji (gry z wysokim prawdopodobieństwem wystąpienia eliminacji), prowadzącej do przeredzenia populacji próbek realizacji zmiennych losowych. Termin „rozdzielanie” wiąże się natomiast z pomnażaniem przez podział liczby próbek pozostałych w procesie, tak, aby ich całkowita ilość utrzymywała się na stałym poziomie. Fakt, iż wyrzucanie próbek z symulacji bez zmiany momentów odpowiedzi rozkładu próbkowania jest niemożliwe, prowadzi do stwierdzenia poważnej wady metody, jaką jest spadek ilości informacji statystycznej o procesie projektowym, którą inżynier może dysponować [Pradlwarter i Schueller, 1997].

Pojedyncza gra rosyjskiej ruletki oznacza, że w pewnym kroku algorytmu, dla każdego wektora realizacji zmiennych losowych $\mathbf{x}_n(t)$, $n = 1; 2; 3; \dots; N$ (N to początkowa liczba próbek w populacji) zostanie przypisane prawdopodobieństwo przetrwania $P_n(t)$, mieszczące się w zakresie $\langle 0; 1 \rangle$. Technika rosyjskiej ruletki i rozdzielania operuje zasugerowanym powyżej pojęciem zależności od **czasu gry** t – nie jest to jednak czas w sensie stricte, a tylko umówione zagęszczenie kroków algorytmu generacji, w których dokonuje się na populacji próbek pojedyncza gra w rosyjską ruletkę. Taka gra sprawia, iż każda próbka realizacji wektora zmiennych losowych może „przetrwać” z prawdopodobieństwem równym ($P_n(t)$) lub też „zginąć” z prawdopodobieństwem równym ($1 - P_n(t)$).

Przywołać można ponownie wyjściowy estymator prawdopodobieństwa awarii wg metody Monte Carlo (2.86), modyfikując jedynie postać jego funkcji charakterystycznej, tak, aby zawarte w niej sprawdzenie spełnienia stanu granicznego wyrazić za pomocą zapisu dopuszczalnego przebiegu symulacji realizacji wektora zmiennej losowej w czasie t

$$P_f \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{0/1}(g(\hat{\mathbf{x}}_i) \leq 0) \rightarrow \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{0/1}(\mathbf{X}_n(t), \mathbf{x}) \cdot w_n(t) = J_{MC} \quad (2.103)$$

gdzie: $w_n(t)$ oznacza wagę danej n – tej próbki losowej w określonym czasie (kroku redukcji populacji próbek) **przed** dokonaniem pojedynczej gry rosyjskiej ruletki, a funkcja charakterystyczna $I_{0/1}(\mathbf{X}_n(t), \mathbf{x})$ przyjmuje wartości

$$I_{0/1}(\mathbf{X}_n(t), \mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } X_{nk} \geq x_k \\ 1 & \text{dla } X_{nk} < x_k \end{cases}, \quad (k = 1; 2; 3; \dots; n_t) \quad (2.104)$$

gdzie: $\mathbf{X}_n(t)$ to wektor stanu zmiennej losowej, \mathbf{x} to wektor początkowy realizacji zmiennej losowej, a k to liczba kroków czasowych (stanów) procesu.

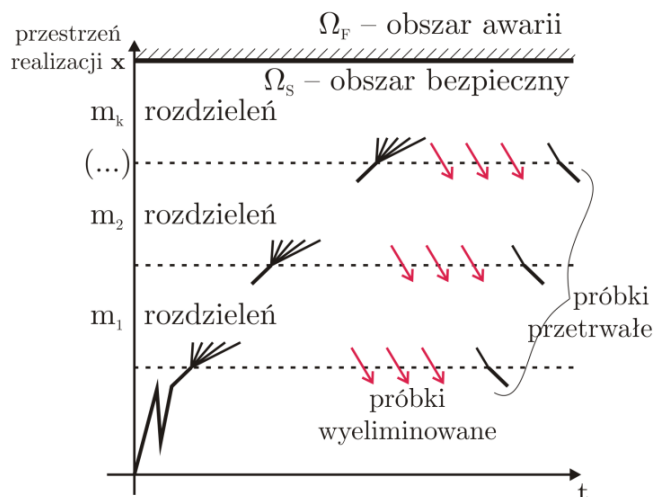
W momencie osiągnięcia określonego kroku algorytmu następuje pojedyncza gra rosyjskiej ruletki i te próbki, które zostały wskazane jako nieważne (nie leżące w interesującym inżyniera obszarze) zostają całkowicie wyeliminowane. Aby poziom liczby próbek pozostał niezmienny (mimo całkowitej eliminacji niektórych z nich, dokonanej w trakcie pojedynczej gry) te, które przetrwały grę, zostają rozdzielone na określoną liczbę takich samych realizacji wektora zmiennych losowych o równomiernie rozdzielonej pomiędzy nowe próbki wadze.

Ilustrację schematu działania algorytmu doboru próbek techniką rosyjskiej ruletki i rozdzielania przedstawia rys. 2.17.

Dzięki wskazanej powyżej idei techniki próbkowania rosyjskiej ruletki i rozdzielania można zaproponować równanie wyrażające zmodyfikowany po dokonaniu pojedynczej gry rosyjskiej ruletki estymator prawdopodobieństwa, zapisywany w postaci

$$P_f(t) \cong \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{0/1}(X_n(t), x) \cdot J_n(t) \cdot \bar{w}_n(t) = J_{MC,RR\&S} \quad (2.105)$$

gdzie $\bar{w}_n(t)$ jest wagą danej n – tej próbki losowej w określonym kroku redukcji populacji próbek **po** dokonaniu pojedynczej gry rosyjskiej ruletki.



Rys. 2.17. Schemat działania algorytmu doboru próbek obliczeniowych techniką rosyjskiej ruletki i rozdzielania.

Zapisana w poprzedniej równości zmienna $J_n(t)$ jest niezależną zmienną losową wyrażającą wynik gry dla n – tej próbki losowej, przyjmującą wartości

$$J_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } P = 1 - P_n(t) \text{ } \langle \text{eliminacja próbki} \rangle \\ 1 & \text{dla } P = P_n(t) \text{ } \langle \text{przetrwanie próbki} \rangle \end{cases} \quad (2.106)$$

Związek między wagą danej n – tej próbki losowej w określonym kroku redukcji populacji próbek przed i po grze w rosyjską ruletkę można wyrazić jako

$$w_n(t) = \bar{w}_n(t) \cdot P_n(t) \quad (2.107)$$

Takie postępowanie powoduje, iż rozkład próbkowania ma takie same wartości oczekiwane przed pojedynczą grą, jak i po niej, ale ma różne wariancje, co jest jednym z kosztów rozdzielania wektora realizacji w kilka niezależnych próbek w obszarach zainteresowania analizy (zupełnie tak samo dzieje się przy posługiwaniu się próbkowaniem wagowym).

Technika rosyjskiej ruletki i rozdzielania jest dość prosta w stosowaniu i doskonale nadaje się do złożonych procesów i konstrukcji inżynierskich, szczególnie nieliniowych. Dla konstrukcji prostych również potrafi osiągać zadowalające rezultaty, gdyż ze względu na całkowitą eliminację próbek, koszt zwiększenia wariancji jest często wyrównywany zyskiem czasu obliczeń. Procedura ta jest także niezależna od wymiaru wektora zmiennych losowych.

Ważnym elementem generacji przy użyciu techniki rosyjskiej ruletki i rozdzielania jest odpowiednie dobranie kroku czasowego dokonywania „gry” na populacji. Z racji tego, iż próbki są na skutek gry całkowicie odrzucane (co zmienia wariancję rozkładu generacji) efekt stosowania techniki redukcyjnej na wariancję musi być ściśle kontrolowany na każdym z kroków. Nieumiejętne sterowanie krokiem czasowym może spowodować, iż wariancja rozkładu generacji próbek nie będzie skończona [Melnik–Melnikow i Dechtiaruk, 2000].

2.6.3. Ilustracja numeryczna wpływu technik redukcyjnych na obliczenia metodą Monte Carlo

Podejścia symulacyjne i probabilistyczne, co zostało już podkreślone w rozprawie, dostarczają interesujących inżyniera wyników w sposób bardzo łatwy do realizacji i są obecnie jedną z podstawowych strategii szacowania niezawodności problemów inżynierskich. Jednakże zgodzić trzeba się z ogólnie utrwalonym stwierdzeniem, iż mimo wszystkich zalet bezpośredniego podejścia metody Monte Carlo, kwestią pożądaną w obliczeniach numerycznych jest zredukowanie liczby próbek losowych, jakie trzeba włączyć do analizy. Trudno jest jednak przewidzieć, która z zasygnalizowanych technik redukcji wariancji jest najbardziej skuteczna, zależy to głównie od klasy problemu jaki jest rozważany.

Ilustracja tego wpływu zostanie wskazana w niniejszym rozdziale na numerycznym przykładzie poszukiwania stanu granicznego geometrycznie nieliniowego modelu prętowego masztu. Wpierw, w celu wprowadzenia w problematykę obliczeń przedstawiony zostanie model geometrycznie dwuwymiarowy z jednym stopniem swobody, a następnie, w celu wskazania wpływu technik redukcyjnych – model geometrycznie trójwymiarowy z dwoma stopniami swobody. W obu przypadkach, w modelach zakłada się wstępne imperfekcje odchylenia masztu od pionu i niepewności materiałowe stałej sprężystości odciągów. Odchylenia te są traktowane jako początkowe zmienne losowe.

W pierwszej kolejności zostanie zaprezentowana skuteczność działania zarówno bezpośrednio metody Monte Carlo, jak i dobranych do zadań technik redukcji wariancji generowanych próbek. Analizowany jest wpływ redukcji populacji na szybkość osiągania zbieżności pierwszych trzech probabilistycznych momentów odpowiedzi: wartości oczekiwanej, odchylenia standardowego (badanie pierwszych dwóch momentów jest zadaniem obligatoryjnym w analizie niezawodności) oraz skośności (zadanie wykonywane kontrolnie).

Zbadana zostanie także zmienność wartości krytycznego obciążenia ściskającego masztu (podawanego jako mnożnik wyjściowego poziomu obciążenia), prowadzącego do awarii konstrukcji. Zadanie to wykonuje się ustalając wartość jednej wybranej imperfekcji, a następnie odczytując zakres zmienności odpowiedzi modelu konstrukcji (zachowania się ścieżek równowagi) dla najbardziej skrajnych przypadków wartości pozostałych zmiennych.

Jest to badanie wskazujące wpływ imperfekcji na uzyskiwane przez inżyniera rezultaty. Pamiętać należy, że duże zróżnicowanie rezultatów płynących z modeli o małym stopniu skomplikowania może posłużyć jako wskaźnik skali problemu, z jakim można spotkać się w rzeczywistej inżynierii, posługującej się dużo bardziej skomplikowanymi modelami.

W literaturze dostrzec można dużą dostępność wielu różnorodnych, doskonale opisanych matematycznie, prostych modeli nieliniowych konstrukcji inżynierskich. Dwa przykłady, które zostały przedstawione w rozdziałach 2.6.3.1 oraz 2.6.3.2 [Bażant i Cedolin, 1991; Hjeltnad, 2005] wybrane zostały z dostępnej puli modeli głównie ze względu na ich ścisłe nawiązanie do rzeczywistych konstrukcji inżynierskich, konkretnie do masztów z odciągami.

W obu przedsięwziętych do analizy modelach należy także wskazać ich stosunkowo nieskomplikowany ścisły opis matematyczny, co jest bardzo korzystne przy późniejszym porównawczym zestawianiu jawnie obliczonych krytycznych mnożników siły obciążającej z rezultatami otrzymanymi symulacyjnie.

Poza tym, oba przykłady wykazują ciekawe zachowania niestateczne, prezentują bardzo interesujące z punktu widzenia inżyniera postkrytyczne ścieżki równowagi, co po pierwsze znacznie ułatwia precyzowanie interesujących rezultatów maksymalnych sił obciążenia, a po drugie bardzo widocznie różnicuje zachowanie się konstrukcji po przekroczeniu wartości krytycznej przez siłę ściskającą. Warto jednak w tym momencie wyraźnie odnotować, iż w zakresie możliwych do wystąpienia zmienności parametrów losowych, rozdzielić można regiony realizacji zmiennych generujące stabilne i niestabilne ścieżki rozwiązania (takie, dla których druga pochodna z energii modelu obliczana względem stopni swobody modelu kolejno jest albo nie jest skończona). W niniejszej analizie ograniczono się jedynie do rozwiązań, dla których wspomniana druga pochodna z energii jest skończona (ścieżek stabilnych) oraz założono dodatkowo, iż parametry zmienne nie mogą przybrać wartości ujemnych [Nemat–Nasser i inni, 1980; Ikeda i Murota, 1991; Tylikowski, 1991].

2.6.3.1. Model 2-D

W pierwszej kolejności podejmuje się w rozprawie analizę modelu dwuwymiarowego geometrycznie, o jednym stopniu swobody

Rozważa się nieskończenie sztywny (EA [kN] = ∞ ; EJ [kNm²] = ∞) pionowy element prętowy o długości l [m] (**maszt**), który u dołu jest zamocowany przegubowo w podłożu, a u szczytu podparty liniową, poprowadzoną pod kątem a [rad] sprężyną (**odciąg**), zaczepioną przegubowo zarówno do podłoża, jak i do samego elementu prętowego. Sprężyna ma zadaną sztywność liniową, równą k [kN/m]. Punkty podparcia sprężyny i elementu prętowego są oddalone od siebie o dystans równy a [m]. Maszt obciążony jest u szczytu siłą pionową o wartości P [kN].

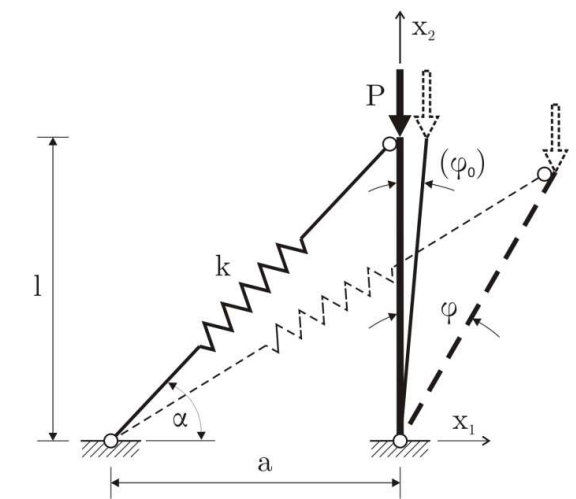
Konstrukcję przedstawiono na rys. 2.18.

Pozycję sztywnego elementu prętowego masztu można zdefiniować wyłącznie jednym stopniem swobody – kątem obrotu elementu względem kierunku pionu, oznaczanego φ [rad].

Zakłada się jednak, że maszt ma pewną niezamierzoną niedoskonałość wykonania, która objawia się utratą jego pionowości. Imperfekcję tą opisuje się za pomocą kąta początkowego pochylenia elementu φ_0 [rad]. Jest ona jedną z imperfekcji losowych w układzie, obok wspomnianej sztywności liniowej sprężyny odciagu k .

W modelu zakłada się, iż nie dopuszcza się powstawania w sprężynie sił ściskających, co powoduje, iż rzeczywiście można mówić o sprężynach jako o typowych odciągach masztów. Ponadto założyć można bliźniaczy model, gdzie u szczytu zamocowane są dwie sprężyny, a nie jedna, jak w tym przypadku (przy czym całość układu pozostaje w płaszczyźnie geometrycznie dwuwymiarowej), co dawałoby pełen, rzeczywisty obraz masztu poprawnego w sensie inżynierskim. Zaprezentowany w pracy przypadek jest w tym świetle pewnego rodzaju uproszczeniem dla modelu z dwiema sprężynami, wykorzystującym symetrię rzeczywistej pracy tychże konstrukcji (zakładając ich dwuwymiarowość).

Przykład ten posłuży wyłącznie prezentacji toku obliczeń, jakie muszą być wykonane, aby możliwe było szacowanie interesującej odpowiedzi konstrukcji, w zależności od przyjętych wartości realizacji zmiennych losowych imperfekcji modelu oraz zasygnalizowanie, jaka wartość wynikowa jest uważana za odpowiedź konstrukcji.



Rys.2.18. Dwuwymiarowy geometrycznie nieskończenie sztywnego elementu prętowego (masztu), podpartego za pomocą jednej sprężyny (odciągu).

Najistotniejszą wartością liczbową analizy jest krytyczna siła ściskająca N_{cr} , którą można obliczyć z prostego równania równowagi momentów względem punktu zamocowania (A).

Równość ta ma postać

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow P \cdot \Delta x - k \cdot \Delta s \cdot r = 0 \quad (2.108)$$

gdzie: $\Delta x = l \cdot \sin \varphi$ jest przemieszczeniem poziomym szczytu masztu (ramieniem siły P), r jest ramieniem siły panującej w sprężynie odciągu, a Δs – osiowym wydłużeniem odciągu.

Wydłużenie sprężyny Δs można opisać równaniem

$$\Delta s = s_\varphi - s_{\varphi_0} \quad (2.109)$$

gdzie s_φ jest długością sprężyny rozciągniętej obrotem o kąt φ , a s_{φ_0} jest długością sprężyny rozciągniętej niezamierzonym obrotem o kąt φ_0 .

Zakładając trygonometryczne zależności $a^2 + l^2 = s^2$ dla obu stanów wychylenia masztu:

$$(a + \Delta a_{\varphi_0})^2 + (l - \Delta l_{\varphi_0})^2 = s_{\varphi_0}^2 ; (a + \Delta a_\varphi)^2 + (l - \Delta l_\varphi)^2 = s_\varphi^2 \quad (2.110);(2.111)$$

otrzymać można równość

$$\Delta s = \sqrt{(a + \Delta a_\varphi)^2 + (l - \Delta l_\varphi)^2} - \sqrt{(a + \Delta a_{\varphi_0})^2 + (l - \Delta l_{\varphi_0})^2} \quad (2.112)$$

Rozwijając kolejno składniki przyrostów długości rzutów sprężyny: $\Delta a_{\varphi_0} = l \cdot \sin \varphi_0$, $\Delta a_{\varphi} = l \cdot \sin \varphi$; $l - \Delta l_{\varphi_0} = l \cdot \cos \varphi_0$ oraz $l - \Delta l_{\varphi} = l \cdot \cos \varphi$, otrzymać można prostszy zapis

$$\Delta s = \sqrt{(a + l \cdot \sin \varphi)^2 + (l \cdot \cos \varphi)^2} - \sqrt{(a + l \cdot \sin \varphi_0)^2 + (l \cdot \cos \varphi_0)^2} \quad (2.113)$$

co można zapisać równoważnie, wykorzystując związek $\sin^2(\bullet) + \cos^2(\bullet) = 1$, jako

$$\Delta s = \sqrt{a^2 + 2 \cdot a l \cdot \sin \varphi + l^2} - \sqrt{a^2 + 2 \cdot a l \cdot \sin \varphi_0 + l^2} \quad (2.114)$$

lub, w uproszczeniu, podstawiając wyjściowy kąt pochylenia sprężyny ($a = a/l$), jako

$$\Delta s = l \cdot \left(\sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi + 1} - \sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi_0 + 1} \right) \quad (2.115)$$

Ramię siły panującej w sprężynie podczas jej rozciągnięcia obrotem o kąt φ można obliczyć wykorzystując funkcje trygonometryczne kąta kierunkowego sprężyny:

$$\frac{l - \Delta l_{\varphi}}{s_{\varphi}} = \sin a_{\varphi} \quad ; \quad \frac{r}{a} = \sin a_{\varphi} \quad (2.116);(2.117)$$

otrzymując w wyniku równanie

$$r = \frac{a}{s_{\varphi}} \cdot (l - \Delta l_{\varphi}) \quad (2.118)$$

co można, podstawiając wspomniany powyżej związek trygonometryczny $l - \Delta l_{\varphi} = l \cdot \cos \varphi$ oraz zależność (2.111), rozwinąć kolejno do postaci

$$r = \frac{a}{\sqrt{(a + \Delta a_{\varphi})^2 + (l - \Delta l_{\varphi})^2}} \cdot l \cdot \cos \varphi = \frac{a \cdot l \cdot \cos \varphi}{l \cdot \left(\sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi + 1} \right)} = \frac{a \cdot \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi + 1}} \quad (2.119)$$

Podstawiając przedstawione powyżej wyprowadzone równości do wyjściowego równania równowagi układu (2.108), otrzymuje się

$$P = k \cdot l \cdot \left(\sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi + 1} - \sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi_0 + 1} \right) \cdot \frac{a \cdot \cos \varphi}{\sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi + 1}} \cdot \frac{1}{l \cdot \sin \varphi} \quad (2.120)$$

który to zapis można przedstawić w najprostszej postaci, jako

$$P(\varphi) = k \cdot a \cdot \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi_0 + 1}{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi + 1}} \right) \quad (2.121)$$

Ważnym elementem rozwiązania jest także kalkulacja energii wewnętrznej modelu, którą obliczyć można, zapisując bilans energii kinematycznej i potencjalnej

$$V = E_k - E_p = \frac{k \cdot \Delta s^2}{2} - P \cdot h \quad (2.122)$$

gdzie h jest wysokością punktu przyłożenia siły ponad poziom podparcia

$$h = l_{\varphi_0} - l_{\varphi} = (l - \Delta l_{\varphi_0}) - (l - \Delta l_{\varphi}) = l \cdot \cos \varphi_0 - l \cdot \cos \varphi = l \cdot (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \quad (2.123)$$

Podstawiając wyprowadzoną wysokość punktu przyłożenia siły (2.123) do wzoru na energię modelu (2.122), otrzymuje się

$$V = \frac{k}{2} \cdot l \cdot \left(\sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi + 1} - \sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi_0 + 1} \right)^2 - P \cdot l \cdot (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \quad (2.124)$$

z której to równości wyznaczyć można przebieg krzywej (oznaczanej przez $s(\varphi)$), rozgraniczającej (wspomniane w rozdziale poprzedzającym) stabilne i niestabilne ścieżki rozwiązania zależności kąta wstępnej imperfekcji utraty pionowości elementu φ_0 od siły P .

Jeśli druga pochodna cząstkowa z energii modelu, obliczana względem stopni swobody modelu (w tym przypadku względem jednego stopnia – kąta φ) jest skończona, to rozwiązanie jest stabilne – wyłącznie takie przypadki są rozważane w niniejszej rozprawie. Pochodną cząstkową energii można zapisać równaniem

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{k \cdot l}{2} \cdot \left(\sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi + 1} - \sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi_0 + 1} \right)^2 - P \cdot l \cdot (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \right) = 0 \quad (2.125)$$

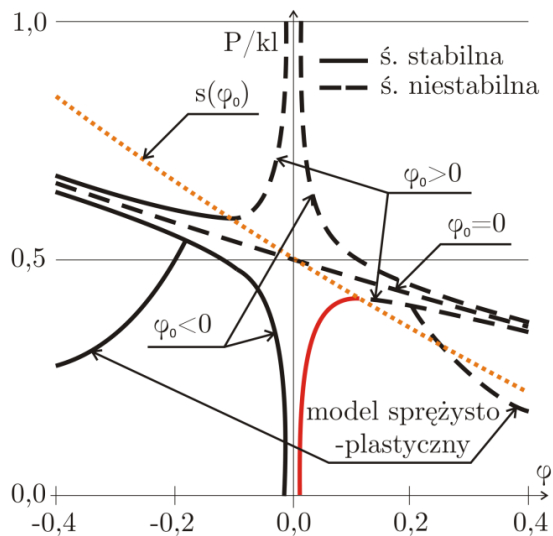
tak więc wzór krzywej rozgraniczającej można sformułować w postaci

$$s(\varphi) = \frac{k \cdot l}{\cos \varphi} \cdot \left(a^2 \cdot \cos^2 \varphi \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi_0 + 1}}{\left(\sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi + 1} \right)^3} + a \cdot \sin \varphi \cdot \frac{\sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi_0 + 1}}{\sqrt{a^2 + 2a \cdot \sin \varphi + 1}} - a \cdot \sin \varphi \right) \quad (2.126)$$

Zakładając, iż $a = l$ ($a = 1$), zaprezentować można przykładowo zachowanie się zależności wartości siły śledzącej P od kąta obrotu elementu względem pionu φ (rys. 2.19). Przypomnieć należy, iż zadecydowano przyjąć, że wartość imperfekcji kąta początkowego pochylenia elementu φ_0 nie może przybrać wartości ujemnych. Dzięki temu stanem granicznym jest osiągnięcie granicznego kąta obrotu elementu φ równoważne z osiągnięciem punktu granicznego na ścieżce postkrytycznej w zakresie sprężystym pracy konstrukcji.

W sytuacji prowadzenia obliczeń na wielowymiarowej zmiennej losowej wyznaczenie zbioru punktów granicznych wszystkich ścieżek postkrytycznych, wygenerowanych z towarzyszących zbiorów realizacji wartości imperfekcji konstrukcji, może być w prosty sposób wykonywalne za pomocą metody powierzchni odpowiedzi. Ze względu na spektrum zainteresowań w pracy, możliwości metody zostaną szerzej zaprezentowane w kolejnych przykładach numerycznych.

Ponadto, jeżeli zdefiniowana jest funkcja rozkładu prawdopodobieństwa kąta początkowego pochylenia elementu φ_0 , a granice możliwych do zaistnienia wartości imperfekcji są wyraźnie określone, to możliwe jest uzyskanie rozkładu gęstości prawdopodobieństwa wynikowej odpowiedzi konstrukcji, czyli nośności granicznej elementu N_{cr} . Jeżeli dana jest także rzeczywista, inżyniersko zweryfikowana funkcja rozkładu prawdopodobieństwa możliwych do zaistnienia wartości obciążenia P , to dodatkowo oszacować można realną niezawodność konstrukcji.



Rys.2.19. Dopuszczalny zakres wartości siły śledzącej P w zależności od kąta obrotu elementu względem pionu φ oraz znaku kąta początkowego pochylenia elementu φ_0 . Przerwaną linią zaznaczono ścieżki niestabilne, linią ciągłą oznaczono ścieżki stabilne. Linią czerwoną zaznaczono ten fragment ścieżki stabilnej, jaki rozważany jest w zadaniu. Linią pomarańczową oznaczono krzywą rozgraniczającą (2.126).

2.6.3.2. Model 3-D

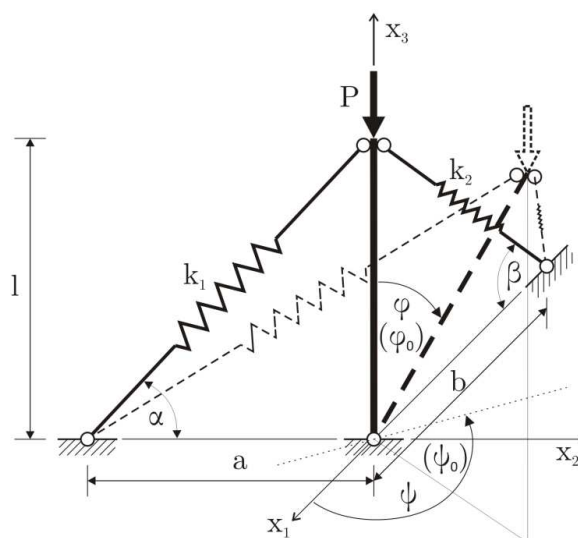
W dalszej kolejności podejmuje się w rozprawie analizę modelu trójwymiarowego geometrycznie, o dwóch stopniach swobody. Ponownie rozważa się nieskończenie sztywny ($EA \text{ [kN]} = \infty$; $EJ \text{ [kNm}^2] = \infty$) pionowy element prętowy o długości $l \text{ [m]}$ (**maszt**), który jest u dołu zamocowany przegubowo w podłożu, jednakże tym razem u szczytu podparty jest dwiema liniowymi, poprowadzonymi po skosie sprężynami (**odciągami**), zaczepionymi jak poprzednio – przegubowo zarówno do podłoża, jak i elementu prętowego. Sprężyny przebiegają w stosunku do poziomu odpowiednio pod kątami $\alpha \text{ [rad]}$ oraz $\beta \text{ [rad]}$. Obie sprężyny mają zadaną sztywność liniową, która może dla obu tych elementów być różna – wynoszą one odpowiednio $k_1 \text{ [kN/m]}$ dla sprężyny działającej w płaszczyźnie pierwszego ze stopni swobody oraz $k_2 \text{ [kN/m]}$ dla sprężyny działającej w płaszczyźnie wzajemnie prostopadłej. Punkty podparcia sprężyny i elementu prętowego są oddalone od siebie o dystans równy $a \text{ [m]}$ na kierunku podłużnym oraz $b \text{ [m]}$ na kierunku poprzecznym płaszczyzny podparcia układu. Maszt obciążony jest u szczytu siłą pionową o wartości $P \text{ [kN]}$. Konstrukcję przedstawiono na rys. 2.20.

Pozycję sztywnego elementu prętowego masztu można zatem zdefiniować analogicznie do poprzedniego zadania, za pomocą dwóch stopni swobody – kąta obrotu elementu względem kierunku pionu, oznaczanego symbolem $\varphi \text{ [rad]}$ oraz kąta obrotu elementu względem konfiguracji początkowej, mierzonego w płaszczyźnie podstawy układu $\psi \text{ [rad]}$.

W modelu tym zakłada się, zgodnie z geometrią układu, iż maszt ma dwie niezamierzone niedoskonałości wykonania – jedną, która objawia się utratą jego pionowości oraz drugą, skutkującą pewnym niepożądanym obrotem w płaszczyźnie podparcia, względem konfiguracji początkowej układu. Imperfekcje te opisuje się za pomocą kąta początkowego pochylenia φ_0 [rad] oraz kąta początkowego obrócenia ψ_0 [rad] masztu. Trzecią zmienną losową w modelu trójwymiarowym, analogicznie do poprzedniego przykładu numerycznego, jest sztywność liniowa sprężyny k_2 .

Powinno się w tym miejscu zaznaczyć, iż zdecydowano się ustalić wartość sztywności liniowej sprężyny k_1 jako jednostkową, celowo pomijając jej teoretyczną losowość (dokonano tego mając świadomość, iż w rzeczywistości inżynierskiej oba odcigi są zapewne wykonywane z identycznego materiału, więc jeśli są traktowane jako obarczone losowymi niepewnościami, to niepewności te powinny być równoważne), tracąc przy tym inżynierską naturę zagadnienia. Działaniem takim posłużono się w celu bardziej wyraźnego uwidocznienia wkładu różnicy sztywności obu wprowadzonych do układu sprężyn na ścieżki równowagi układu oraz na siłę krytyczną, jaką element masztu jest w stanie przenieść bez wystąpienia jego dużych obrotów i przemieszczeń. Różnica ta w bardzo znaczący sposób rysuje się w odpowiedzi konstrukcji i została by zatarta w rezultatach numerycznych, gdyby obie sprężyny zostały potraktowane jako obarczone równoprawnymi losowymi niepewnościami. Możliwość dostrzeżenia zróżnicowania odpowiedzi konstrukcji wzrasta bowiem wraz ze zmianą odległości między wartościami oczekiwanymi losowych zmiennych podstawowych sztywności liniowych sprężyn k_1 oraz k_2 w przestrzeni realizacji.

Stałą sprężystości sprężyny k_2 przyjęto zatem jako jedyną materiałową zmienną losową, a jej wartości są dobierane z rozkładu równomiernego opisanego na przedziale $k_2 \in \langle 0,075; 1,0 \rangle$ kN/m, przy czym podkreślić należy, iż dolna granica przedziału została ustalona jako różna od zera arbitralnie, ponieważ rozwiązanie przedstawionego problemu przy skrajnych (bliskich zeru) danych liczbowych jest numerycznie bardzo trudne do przeprowadzenia.



Rys.2.20. Trójwymiarowy geometryczny model nieskończenie sztywnego elementu prętowego (masztu), podpartego za pomocą dwóch sprężyn (odciągów).

W modelu tym także zakłada się brak dopuszczania powstawania sił ściskających w sprężynie. Gdyby założyć bliźniaczy model, gdzie u szczytu zamocowane są kolejne dwie sprężyny, w obu pionowych płaszczyznach obecnych sprężyn, usytuowanych symetrycznie względem osi masztu do istniejących, to można by mówić o w pełni rzeczywistym maszcie. Model ten jest więc, mimo swojej prostoty, dobrym obrazem realnej konstrukcji inżynierskiej.

Elementem rozwiązania, prowadzącym do uzyskania zamkniętej formuły na obliczenie zależności wartości siły śledzącej P od kąta wstępnej imperfekcji utraty pionowości elementu φ_0 oraz kąta obrotu elementu względem konfiguracji początkowej ψ_0 jest w ogólnym przypadku kalkulacja energii wewnętrznej modelu konstrukcji masztu, którą dla tego zadania zapisać można równaniem

$$V = E_k - E_p = \frac{k \cdot \Delta s_1^2}{2} + \frac{k \cdot \Delta s_2^2}{2} - P \cdot h \quad (2.127)$$

gdzie h jest wysokością punktu przyłożenia siły ponad poziom podparcia

$$h = l \cdot (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \quad (2.128)$$

Punktem wyjścia do obliczeń interesującej odpowiedzi konstrukcji są kalkulacje podstawowych równań równowagi, które w tym przypadku można wyrazić za pomocą odpowiednich równości zawierających pochodne cząstkowe pierwszego rzędu z energii układu, obliczane względem poszczególnych stopni swobody elementu. Problem podstawowy zachowania równowagi modelu można wyrazić za pomocą następującej równości:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial V}{\partial \psi} = 0 \quad (2.129); (2.130)$$

Obliczenie osiowych wydłużeń odcinków $\Delta s_1, \Delta s_2$ oraz przedstawienie wyprowadzenia zależności wartości siły śledzącej od kątów obrotu elementu $P(\varphi, \psi)$ są dość skomplikowanymi procedurami matematycznymi i przedstawienie ich w tekście rozprawy mogłoby przysłonić właściwe cele analizy, zostaną zatem pominięte.

Dzięki wyznaczeniu energii modelu V , wyznaczyć można ponownie przebieg krzywej $s(\varphi, \psi)$, rozgraniczającej stabilne i niestabilne ścieżki rozwiązania problemu. Prowadząca do wskazania zależności druga pochodna cząstkowa z energii modelu, obliczana względem stopni swobody modelu ma wówczas następującą postać:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \psi} \right)^2 = 0 \quad (2.131)$$

Następny krok analizy dotyczy problemu losowości parametrów konstrukcji.

Oprócz wspomnianej i opisaną zmienności losowej stałej sprężystości odcinka k_2 , w modelu pojawiają się również imperfekcje w postaci kątów początkowego pochylenia φ_0 oraz początkowego obrócenia ψ_0 masztu, które także zakładane są jako zmienne losowe.

Obie imperfekcje (oba kąty), analogicznie do zmiennej losowej stałej sprężystości, przybierają swoje wartości z rozkładu równomiernego, z narzuconych przedziałów:

$$\varphi_0 \in \left\langle 0, 0000001; \frac{\pi}{32} \right\rangle \text{rad} \quad \text{oraz} \quad \psi_0 \in \left\langle \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{40}; \pi - \frac{\pi}{40} \right\rangle \text{rad},$$

przy czym ponownie górne i dolne granice przedziałów zostały ustalone arbitralnie, w taki sposób, aby prowadziły do uniknięcia możliwych do wystąpienia trudności numerycznych przy kalkulacji rozwiązania (w przypadku granic dolnych) lub zapewniały odnalezienie punktu maksymalnego ścieżki równowagi (w przypadku granic górnych).

1. Badanie zachowania się zależności $P(\varphi, \psi)$ oraz wartości sił krytycznych N_{cr} .

O tym, jak złożony zarówno numerycznie, jak i inżyniersko staje się przedstawiony model, jeśli wskazane parametry konstrukcji (k_2, φ_0, ψ_0) przyjmie się jako losowe, świadczy najlepiej wpływ, jaki poszczególne niepewności mają na zachowanie się zależności $P(\varphi, \psi)$. Ścieżki równowagi modelu stają się w tym przypadku skomplikowanymi krzywymi przestrzennymi.

Jedynym sposobem, w jaki można poglądowo zilustrować oddziaływanie imperfekcji na przebieg rozwiązania jest obranie jednej ze zmiennych losowych jako faktyczną zmienność i zachowanie wszystkich jej charakterystyk probabilistycznych, natomiast dla wszystkich pozostałych zmiennych losowych dokonanie ich chwilowego ustalenia poprzez nadpisanie zamiast odpowiednich losowości wartości średnich tych zmiennych lub wartości wybranych przez projektanta, z czego w niniejszej pracy będzie się korzystało znacznie częściej.

Poniżej, w trójwymiarowym układzie zależności $P(\varphi, \psi)$, przedstawiono trzy rozwiązania ścieżek równowagi zadania, sporządzone dla trzech wariantów – w pierwszej kolejności ustala się jako zmienną losową stałą sprężystości drugiego odciągu k_2 , ustalając wartości niezamierzonych obrotów (φ_0, ψ_0) jako wartości średnie ich rozkładów prawdopodobieństwa. Następnie, w analogiczny sposób przyjmuje się jako podstawową zmienną losową kąt początkowego pochylenia φ_0 , a ustala się wartości parametrów (k_2, ψ_0) . Końcowo, jako zmienną przyjmuje się kąt obrotu elementu ψ_0 , a ustala wartości parametrów (k_2, φ_0) .

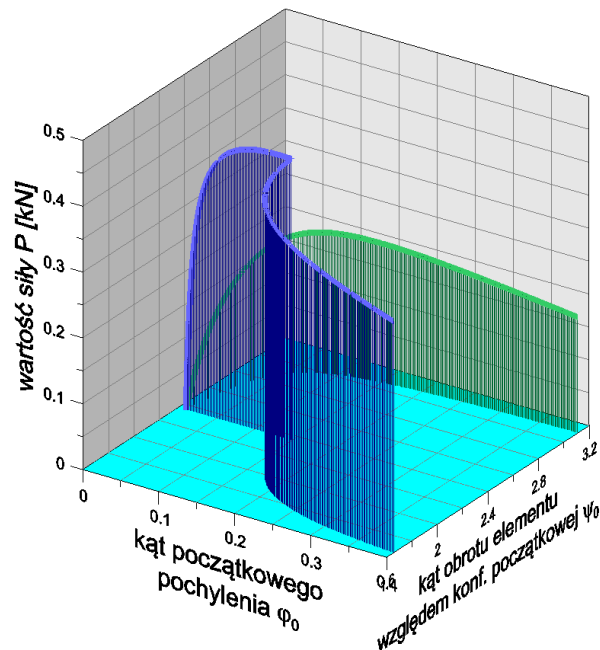
1.1. Zmienność stałej sprężystości odciągu.

Ścieżki równowagi wyznaczone dla pierwszego przypadku analizy (zmienne k_2 , stałe φ_0, ψ_0) zaprezentowano na rys. 2.21.

Na podstawie rysunku zauważyć można, iż efekt zmiany stałej sprężystości odciągu jest bardzo widoczny. Pierwsza ścieżka równowagi zaznaczona jest na rys. 2.21 kolorem zielonym i sporządzona jest dla $k_2 = 0,5$ kN/m, natomiast druga ścieżka równowagi zaznaczona jest na rys. 2.21 kolorem niebieskim i jest sporządzona dla $k_2 = 1,0$ kN/m.

Między zaprezentowanymi przebiegami ścieżek równowagi widoczna jest nie tylko różnica dzielącego je dystansu w przestrzeni realizacji, ale przede wszystkim różnica charakteru ich przebiegu. Pierwsza ze ścieżek ($k_2 = 0,5$) prowadzi do uzyskania zdecydowanie niższej siły

krytycznej N_{cr} , a jej przebieg w przestrzeni realizacji jest stosunkowo gładki – jej kąt obrotu względem konfiguracji początkowej ψ przyrasta w zgodzie z przyrostem kąta pochylenia φ . Druga ze ścieżek ($k_2 = 1,0$) przejawia natomiast zdecydowanie wyższą siłę krytyczną N_{cr} , a po jej osiągnięciu cechuje się wystąpieniem nagłego obrotu ψ .



Rys.2.21. Ścieżki równowagi dla modelu trójwymiarowego, geometrycznie nieliniowego, pierwszy przypadek analizy: $k_2 \in \langle 0,075;1,0 \rangle$ kN/m, $\varphi_0 = 0,01$ rad oraz $\psi_0 = 0,75\pi$ rad.

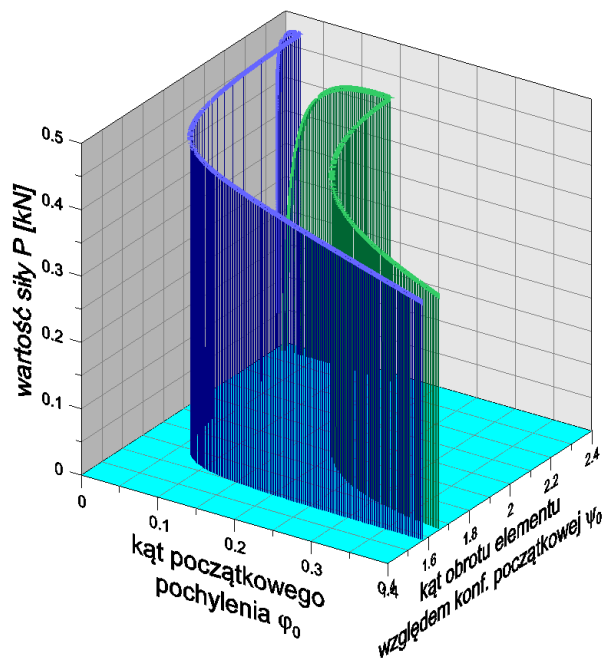
1.2. Zmienność kąta początkowego pochylenia masztu.

Ścieżki równowagi wyznaczone dla drugiego przypadku analizy (zmienne φ_0 , stałe k_2, ψ_0) zaprezentowano na rys. 2.22.

Na podstawie rysunku zauważyć można, iż efekt zmiany kąta początkowego pochylenia masztu jest również widoczny, lecz nie jest on tak wyraźny, jak w przypadku poprzedzającym. Pierwsza ścieżka równowagi zaznaczona jest na rys. 2.22 kolorem niebieskim i sporządzona jest dla $\varphi_0 = 0,00005$ rad, natomiast druga ścieżka zaznaczona jest na rys. 2.22 kolorem zielonym i jest sporządzona dla $\varphi_0 = 0,01$ rad.

Między obiema granicami obwiedni przebiegu ścieżek równowagi widoczna jest przede wszystkim różnica dystansu w przestrzeni realizacji. Pierwsza ze ścieżek ($\varphi_0 = 0,00005$) bardzo szybko doprowadza do osiągnięcia siły krytycznej N_{cr} , przy towarzyszącym jej niewielkim wychyleniu φ . Po osiągnięciu tejże wartości następuje taki sam efekt, jaki obserwowano poprzednio dla przypadku ($k_2 = 1,0$), tj. wystąpienie nagłego obrotu względem konfiguracji początkowej ψ . Identyczny efekt występuje dla drugiego z przebiegów ($\varphi_0 = 0,01$), tutaj jednak zaobserwować można siłę krytyczną N_{cr} nieco niższą, niż poprzednio i występującą przy znacznie większym wychyleniu φ . Przy dalszym przyroście kąta pochylenia φ obie ścieżki wykazują niemalże identyczne zachowanie.

Na podstawie tego przykładu można z całą stanowczością stwierdzić, iż fakt pojawiania się nagłego obrotu ψ przypisany jest identyczności sztywności obu sprężyn podtrzymujących maszt, jako, że w zadaniu tym wartość stałej sprężystości k_2 ustalono na jednostkową, identyczną z $k_1 = 1,0$, a w zadaniu poprzedzającym krzywa zachowująca się w jednakowy sposób została sporządzona dla sytuacji, w której $k_2 = 1,0$ kN/m.



Rys.2.22. Ścieżki równowagi dla modelu trójwymiarowego, geometrycznie nieliniowego, drugi przypadek analizy: $k_2 = 1,0$ kN/m, $\varphi_0 \in \langle 10^{-7}; \pi/32 \rangle$ rad oraz $\psi_0 = 0,75\pi$ rad.

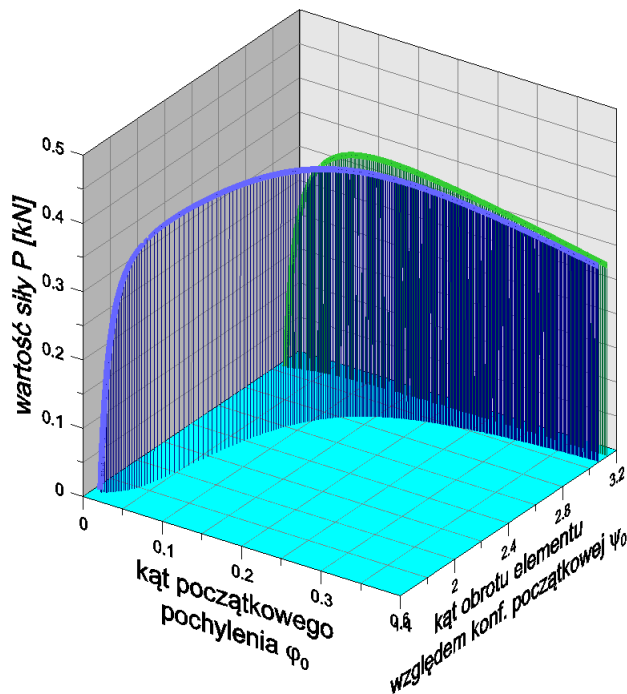
1.3. Zmienność kąta początkowego obrócenia masztu.

Ścieżki równowagi wyznaczone dla drugiego przypadku analizy (zmiennie ψ_0 , stałe k_2, φ_0) zaprezentowano na rys. 2.23.

Na podstawie rysunku zauważyć można, iż efekt zmiany kąta początkowego obrócenia masztu zdaje się mieć najmniejsze znaczenie dla pracy konstrukcji. Pierwsza zaprezentowana ścieżka równowagi zaznaczona jest na rys. 2.23 kolorem niebieskim i sporządzona jest dla $\psi_0 = (\pi/2 + 0,1)$ rad, natomiast druga zaznaczona jest na rys. 2.23 kolorem zielonym i jest sporządzona dla $\psi_0 = (\pi - 0,1)$ rad.

Dla tego przypadku widoczne stają się przede wszystkim zbliżenie wartości liczbowych sił krytycznych N_{cr} dla masztu, niezależnie od tego jaką imperfekcję obrotu elementu wprowadzono do zadania. W początkowej fazie pracy konstrukcji, po osiągnięciu punktu siły krytycznej, następuje szybkie zejście się ścieżek postkrytycznych wytyczonych dla obu skrajnych wartości kąta obrotu elementu ψ_0 . Ścieżki bowiem wyraźnie dążą do sprecyzowanej wartości obrotu ($\psi_0 = \pi$), a więc drugi z przebiegów, rozpoczynający się od inicjującej wartości ($\psi_0 = \pi - 0,1$) jest bardzo przybliżony do wartości docelowej, przez co nie wykazuje przyrostu obrotu cechującego pierwszy z przebiegów ($\psi_0 = \pi/2 + 0,1$).

Na podstawie tego przykładu można potwierdzić brak pojawiania się nagłego obrotu ψ w przypadku braku identyczności sztywności sprężyn. W zadaniu tym wartość stałej sprężystości k_2 ustalono na $k_2 = 0,8 \text{ kN/m}$, co wyraźnie w obu przypadkach wygładziło przebieg rozwiązania w przestrzeni realizacji zmiennych losowych.



Rys.2.23. Ścieżki równowagi dla modelu trójwymiarowego, geometrycznie nieliniowego, trzeciego przypadku analizy: $k_2 = 0,8 \text{ kN/m}$, $\varphi_0 = 0,01 \text{ rad}$ oraz $\psi_0 \in \left\langle \frac{21}{40} \pi; \frac{39}{40} \pi \right\rangle \text{ rad}$.

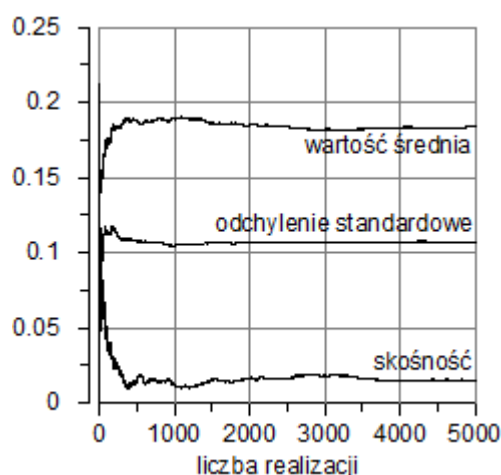
2. Badanie zbieżności wartości probabilistycznych momentów odpowiedzi siły krytycznej N_{cr} masztu, przy wykorzystaniu różnych technik redukcji wariancji.

Na podstawie powyższych przykładów potwierdzić można tezę, iż obliczenia wprowadzające elementy podejścia losowego do wartości liczbowych parametrów konstrukcji mogą dawać dość nieprzewidywalne i skomplikowane rezultaty, nawet w przypadku tak prostego modelu. Widoczne w przedstawionych w powyższych ustępach przykładach numerycznych zmiany położenia punktu osiągnięcia siły krytycznej N_{cr} w przestrzeni realizacji zmiennych losowych oraz sama zmienność tejże wartości wskazują wyraźnie, iż obliczenia te nie mogą zostać wykonane na pojedynczych wektorach realizacji, ale muszą być przeprowadzone bardziej zaawansowanymi metodami probabilistycznymi, na dużo większej populacji próbek losowych. Takie podejścia są z reguły czasochłonne, a duża ilość niezbędnych symulacji lub złożoność metod zamkniętych powodują trudności w posługiwaniu się tymi operacjami.

W niniejszej rozprawie zdecydowano się przedsięwziąć podejście symulacyjne metody Monte Carlo, głównie aby wskazać, iż symulacje nie powinny być z góry klasyfikowane jako nieefektywne lub czasochłonne, a techniki redukcji wariancji populacji, jakich opisy matematyczne są dostępne w literaturze mogą rzeczywiście posłużyć do wyraźnego polepszenia skuteczności działania metody.

2.1. Metoda Monte Carlo z próbkowaniem bezpośrednim

W analizie tej, za pomocą bezpośredniej metody Monte Carlo, bez użycia jakichkolwiek technik redukcyjnych, dokonano w pierwszej kolejności generacji populacji 5000 próbek, czyli realizacji wektorów losowych trzech zmiennych parametrów konstrukcji (k_2, φ_0, ψ_0) , używanych w modelu. Następnie, dla każdej pojedynczej realizacji dokonano kalkulacji wartości siły krytycznej N_{cr} oraz towarzysząco, obliczeń trzech pierwszych probabilistycznych momentów odpowiedzi modelu: wartości oczekiwanej, odchylenia standardowego oraz skośności, wraz z wykonaniem analizy ich zbieżności. Zachowanie się momentów probabilistycznych, obliczanych po kalkulacji siły krytycznej dla każdej kolejnej realizacji z wygenerowanej techniką bezpośrednią populacji, zostało zilustrowane na rys. 2.24.



Rys.2.24. Podejście bezpośrednio metody Monte Carlo – analiza zbieżności kalkulacji trzech pierwszych probabilistycznych momentów odpowiedzi modelu.

Na podstawie analizy zilustrowanych na rys. 2.24 rezultatów poszukiwania zbieżności wymienionych probabilistycznych momentów odpowiedzi można wywnioskować, iż zaproponowana populacja o liczebności $NR = 5000$ próbek wydaje się wystarczająca. W zależności od rygorystyczności kryterium przyjęcia dopuszczalnego poziomu zbieżności stwierdzić można, iż około 3000 – 3500 realizacji wektorów zmiennych losowych wystarcza, aby uzyskać satysfakcjonującą wartość średnią siły krytycznej N_{cr} . Warto zaznaczyć, iż jest to całkiem zadowalająca ilość próbek, gdyż nie jest ona nazbyt czasochłonna dla procedury obliczeniowej. Dużo korzystniej wygląda osiągnięcie zbieżności wartości odchylenia standardowego, które uzyskuje satysfakcjonującą zbieżność już po około 1500 – 2000 realizacji. Wykonane obliczenia zbieżności skośności prezentują się natomiast najgorzej, wykazując ustalenie wartości skośności odpowiedzi konstrukcji po około 4000 – 4500 realizacji. Stabilizacja wyniku obliczeń skośności, wykonywana jedynie kontrolnie, jest bardzo interesującym rezultatem. Na podstawie przeprowadzonych doświadczeń numerycznych można stwierdzić, iż osiąga ona zwykle zadowalającą zbieżność dla znacznie większej liczby użytych próbek, niż ma to miejsce w przypadku dwóch podstawowych momentów odpowiedzi probabilistycznej. Zaleca się zatem obserwację także i jej zbieżności, gdyż wartości średnia i wariancja przyjęte za ostatecznie skalkulowane w momencie ustalenia się wartości skośności zazwyczaj spełniają przyjęte kryterium dopuszczalności dokładności oszacowania.

2.2. Metoda Monte Carlo z użyciem techniki próbkowania warstwowego

W dalszej kolejności, na potrzeby generacji populacji próbek z wykorzystaniem technik redukcji wariancji populacji, każdy z wymiarów przestrzeni realizacji zmiennych losowych podzielono równomiernie na pewną ilość przedziałów, począwszy od dwóch (ograniczono się do tych obszarów wymiarów przestrzeni probabilistycznej, w których możliwa jest zmienność danych parametrów losowych – k_2, φ_0 oraz ψ_0 , niejako odrzucając istnienie przestrzeni o zerowej gęstości prawdopodobieństwa). Oznacza to dyskretyzację przestrzeni wyjściowej na określoną liczbę podprzestrzeni, z których jedynie punkt centralny danej podprzestrzeni (wektor realizacji zmiennej losowej przyjmujący wartości średnie z danego wymiaru zmiennej na określonym podprzedziale) jest pobierany jako próbka losowa. Warto zauważyć, że dla potrzeb badania numerycznego kolejność pobierania próbek do obliczeń nie jest narzucana, gdyż rezultaty analizy nie są przez ten fakt zniekształcane.

W pierwszej kolejności została wykonana symulacja metodą Monte Carlo z użyciem techniki redukcyjnej zwanej próbkowaniem warstwowym. Technika ta została szerzej opisana w rozdziale 2.6.2.1 niniejszej rozprawy.

Ilość próbek wykorzystywanych w pojedynczym kroku analizy z użyciem próbkowania warstwowego można skalkulować równością

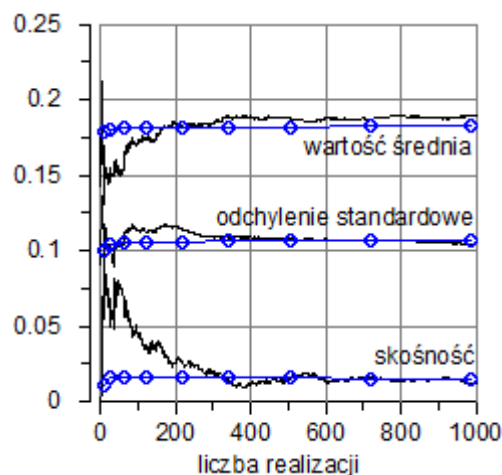
$$NR = S^n \quad (2.132)$$

gdzie S oznacza liczbę podprzedziałów wyznaczonych na danej osi n – wymiarowej przestrzeni realizacji zmiennych losowych, a n oznacza liczbę wymiarów przestrzeni.

W rozpatrywanym przypadku $n = 3$, gdyż jako losowe są przyjmowane trzy wyżej wymienione parametry – stała sprężystości k_2 oraz kąty φ_0, ψ_0 . Oznacza to, że pierwsza przyjęta do obliczeń populacja złoży się z $NR = 2^3 = 8$ próbek, kolejna z $NR = 3^3 = 27$ próbek, następna z $NR = 4^3 = 64$ próbek, aż do końcowej, dziewiątej populacji, składającej się z liczby $NR = 10^3 = 1000$ próbek.

Dla każdej populacji realizacji wykonuje się, jak poprzednio, kalkulację wartości siły krytycznej N_{cr} oraz trzech momentów probabilistycznych wartości siły krytycznej, wraz z analizą ich zbieżności. Zachowanie się obliczonych momentów probabilistycznych zostało zilustrowane na rys. 2.25. Niebieską linią został na rysunku naszkicowany rezultat uzyskany metodą Monte Carlo z użyciem techniki próbkowania warstwowego, a czarna linia na rysunku przedstawia uzyskany w poprzedniej analizie rezultat obliczeń wykorzystujących próbkowanie bezpośrednie.

Na podstawie analizy zilustrowanych na rys. 2.25 rezultatów poszukiwania zbieżności probabilistycznych momentów odpowiedzi z zastosowaniem techniki próbkowania warstwowego można stwierdzić, iż dla tego typu modelu, charakteryzującego się małym stopniem złożoności, zaproponowana technika redukcji wariancji populacji przynosi idealne efekty, zarówno pod względem dokładności rozwiązania, jak i czasochłonności obliczeń.



Rys.2.25. Metoda Monte Carlo z użyciem próbkowania warstwowego – analiza zbieżności kalkulacji trzech pierwszych probabilistycznych momentów odpowiedzi modelu.

Stwierdzić można, że już populacja o liczebności realizacji wektorów zmiennych losowych równej $NR = 3 \times 3 \times 3 = 27$ próbek zapewnia satysfakcjonującą zbieżność obliczanej wartości średniej siły krytycznej N_{cr} , a przy przyjęciu bardziej rygorystycznego kryterium akceptacji dopuszczalnego poziomu różnicy rezultatów, jest to liczebność równa $NR = 5 \times 5 \times 5 = 125$ próbek. Bardzo podobny wniosek można wysnuć dla badania zbieżności wartości odchylenia standardowego, które uzyskuje satysfakcjonującą zbieżność także dla populacji o liczebności $NR = 3 \times 3 \times 3 = 27$ próbek, a niemalże w pełni ustabilizowaną wartość dla populacji o liczebność równą $NR = 7 \times 7 \times 7 = 343$ próbek. Obliczenia zbieżności skośności można opisać dokładnie takim samym wnioskiem, jak w przypadku opisu odchylenia standardowego.

Wskazane niewielkie liczebności populacji każą podkreślić idealne działanie techniki dla liczebności populacji na poziomie około $NR = 500$ próbek. Można zatem zaobserwować wyraźny zysk czasu i nakładu obliczeń w porównaniu z próbkowaniem bezpośrednim. Tak niewielka ilość próbek potrzebna do finalizacji odpowiedzi konstrukcji jest dla procedury obliczeniowej niemalże marginalna. Należy zwrócić uwagę, iż efektywność działania techniki jest uzależniona od złożoności i kształtu modelu, jaki jest kalkulowany.

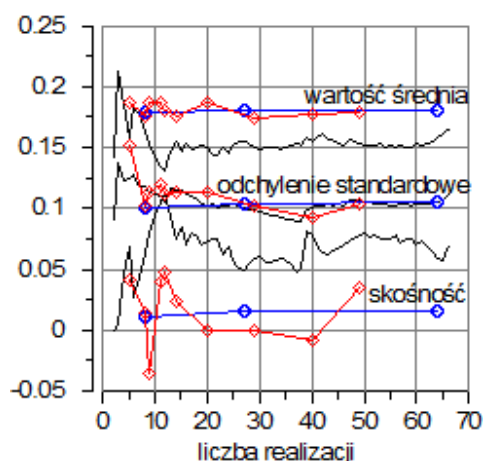
Końcowo zaznaczyć należy, że w przyjętym zakresie liczebności populacji próbek ($NR = 10^3 = 1000$) osiąga się pełną stabilizację wyniku obliczeń wszystkich trzech momentów probabilistycznych. Na podstawie przeprowadzonego doświadczenia numerycznego można stwierdzić, iż wyniki uzyskane można uznać za w pełni dokładne. Ponadto, wartości obliczone przy użyciu techniki próbkowania warstwowego pokrywają się dokładnie z wartościami przyjętymi za dokładne w drodze symulacji podejściem bezpośrednim metody Monte Carlo (podczas gdy ich osiągnięcie dzieli pięciokrotność liczebności populacji próbek).

2.3. Metoda Monte Carlo z użyciem techniki próbkowania łańciskowego hipersześciennego

Kolejno, wykonana została symulacja metodą Monte Carlo z użyciem techniki redukcyjnej zwanej próbkowaniem łańciskowym hipersześcienne. Technika ta została szerzej opisana w rozdziale 2.6.2.2 niniejszej rozprawy.

Ilość próbek wykorzystywanych w pojedynczym kroku analizy z użyciem próbkowania łącińskiego hipersześciennego można skalkulować na bazie równań zapisanych w rozdziale 2.6.2.2. Przypomnieć jednak należy, iż może być ona określona w pojedynczej populacji na przestrzeni realizacji zależnie od uznania eksperymentatora prowadzącego daną analizę. Istnieje bowiem, jak wspomniano, skończenie wiele kombinacji, w jakie przy określonym podziale na podprzestrzenie można ułożyć wybrane realizacje, aby spełniały założenia hipersześciannu łącińskiego. Korzystając z tej prawidłowości, w niniejszym problemie zdecydowano się użyć kilku możliwych do wytworzenia liczebności populacji dla pojedynczej, określonej fragmentacji przestrzeni realizacji, skąd bierze się zastosowana nieregularna liczba próbek zadania: $NR = 5, 8, 9, 11, 12, 14$, itd.

Dla każdej populacji realizacji zostaje jak poprzednio wykonana kalkulacja wartości siły krytycznej N_{cr} oraz trzech momentów probabilistycznych wartości siły krytycznej, wraz z analizą ich zbieżności. Zachowanie się momentów probabilistycznych zostało zilustrowane na rys. 2.26. Czerwoną linią został na rys. 2.26 podkreślony rezultat uzyskany techniką próbkowania łącińskiego hipersześciennego, a dla łatwości porównania z poprzednimi podejściami niebieską linią zaznaczono na rys. 2.26 rezultaty otrzymane dzięki technice próbkowania warstwowego, a czarną linią – dzięki próbkowaniu bezpośredniemu.



Rys.2.26. Metoda Monte Carlo z użyciem próbkowania hipersześciannu łącińskiego – analiza zbieżności kalkulacji trzech pierwszych probabilistycznych momentów odpowiedzi modelu.

Stwierdzić można, że populacja o liczebności realizacji wektorów zmiennych losowych równej $NR = 50$ próbek zapewnia dość zadowalającą zbieżność obliczanej wartości średniej siły krytycznej N_{cr} , stwierdzenie to jednak bardziej uprawomocnia fakt, iż podobny wynik został wskazany wcześniej przez technikę próbkowania warstwowego, a nie faktyczne osiągnięcie zbieżności przez procedurę kalkulacji. Identyczny wniosek można przedstawić dla badania zbieżności wartości odchylenia standardowego. Fakt pewniejszego bazowania na wynikach płynących z użycia techniki próbkowania warstwowego, zamiast na wynikach uzyskanych dzięki technice hipersześciannu łącińskiego, powinien skłaniać do przyznania pierwszeństwa pierwszej z technik redukcji.

Ponadto, technika próbkowania hipersześciannu łącińskiego wymaga bardzo złożonego matematycznie przygotowania odpowiednich populacji próbek. Dzięki tej obserwacji można poprzeć stwierdzenie, iż mimo prowadzenia do osiągnięcia poprawnych wyników, technika ta jest dla używanego w zadaniu modelu zdecydowanie mniej efektywna niż techniki poprzednie.

W ramach przyjętej liczności populacji próbek zbieżność skośności nie została w ogóle osiągnięta. Osiąga się ją dopiero na skutek użycia większej ilości próbek, pochodzących z dalszych generacji, aczkolwiek nakład czasu obliczeniowego, wymagany do przygotowania na ich podstawie kolejnych populacji, zrównuje się z czasochłonnością obliczeń za pomocą podejścia bezpośredniego. Można więc stwierdzić, iż liczebność populacji wynosząca około $NR = 50$ próbek nie jest wystarczająca, aby dorównać skuteczności próbkowania warstwowego (liczebność populacji jest podyktowana równowagą czasu obliczeń równoległych przy użyciu obu technik redukcyjnych), aczkolwiek nadal można zaobserwować zysk nakładu obliczeniowego w porównaniu z próbkowaniem bezpośrednim.

Na podstawie analizy zilustrowanych powyżej rezultatów poszukiwania zbieżności trzech probabilistycznych momentów odpowiedzi z zastosowaniem techniki próbkowania hipersześcianu łacińskiego można stwierdzić, iż technika ta nie znajduje poparcia w wynikach uzyskiwania zbieżności. Wniosek taki nie może dziwić – w literaturze rozpowszechnione jest przekonanie, iż technika ta osiąga wymierne skutki jedynie w przypadku operacji na bardzo skomplikowanych modelach obliczeniowych, podczas gdy model zaproponowany w zadaniu jest stosunkowo prosty. Opisana nieefektywność tej techniki wynika zatem prawdopodobnie z bardzo mocnego uzależnienia parametrów losowych od siebie nawzajem, które narzucane jest na parametry przez geometrię zadania. Technika ta jest bowiem przystosowana ściśle do operowania na wielowymiarowej zmiennej losowej, gdzie kombinatoryka pomiędzy poszczególnymi wymiarami przestrzeni realizacji jest bardziej istotna i gdzie daje ona dużo pełniejszy obraz zachowania się konstrukcji. Dysponowanie jedynie trzema wymiarami losowymi poważnie ogranicza wskazywane przez literaturę zalety metody.

2.7. Metoda powierzchni odpowiedzi

W ogólności, metodologia powierzchni odpowiedzi (Response Surface Methodology – RSM) jest zbiorem technik matematycznych wykorzystywanych w procesach eksperymentalnych i przy obróbce ich wyników, a także przy projektowaniu statystycznym oraz poprawianiu jego działania. Metodologia powierzchni odpowiedzi została sformułowana przez Boxa i Wilsona, w pracach badawczych na temat eksperymentalnego poszukiwania optymalnych warunków rozwoju biologicznego mikroorganizmów [Box i Wilson, 1951].

Metoda ta używana jest w szczególności do modelowania i analizy problemów inżynierskich, w których interesująca miara skuteczności działania procesu (w projektowaniu konstrukcji będzie to skuteczna minimalizacja prawdopodobieństwa awarii) lub miara jakości przeprowadzania tego procesu jest mocno zależna od fluktuacji pewnych sprecyzowanych zmiennych, nakreślonych inżynierowi już przed początkiem procesu projektowego [Hill i Hunter, 1966; Khuri i Cornell, 1996].

W projektowaniu konstrukcji budowlanych i inżynierskich metoda powierzchni odpowiedzi pozwala wyznaczyć dopuszczalne poziomy (zakresy) **współczynników odpowiedzi** (zmiennych losowych występujących w projekcie konstrukcji), które są w stanie spełnić wymagania specyfikacji konstrukcyjnych i projektowych. Pozwala ona także na wyznaczenie optymalnej kombinacji współczynników, które wywołują określoną odpowiedź konstrukcji i opisują tę odpowiedź w sposób najbardziej zbliżony do rzeczywistości [Bradley, 2007].

Dzięki metodzie powierzchni odpowiedzi można także oszacować, jak określona odpowiedź konstrukcji zmienia się pod wpływem dokonania zmian poziomów użytych współczynników analizy w odpowiednich obszarach zainteresowania oraz osiągnąć ilościowe (deterministyczne) zrozumienie zachowania konstrukcji w testowanym obszarze, tj. umieć określić na bazie wygenerowanej powierzchni odpowiedzi poprawność działania obliczeń i poczynionych założeń. Przede wszystkim jednak metoda powierzchni odpowiedzi pozwala uzyskać kompletną wiedzę o właściwościach konstrukcji na testowanym obszarze zmienności jej parametrów, nawet dla współczynników analizy, które nie zostały brane pod uwagę przy tworzeniu funkcji stanu granicznego [Melchers, 1999].

Wykorzystywanie metodologii powierzchni odpowiedzi można podzielić na trzy zasadnicze gałęzie. Pierwsza z nich traktuje metodę jako strategię przeglądu przestrzeni realizacji podstawowych zmiennych losowych zadania eksperymentalnego, dokonywanego w celu zapewnienia maksymalnej ilości informacji o procesie inżynierskim, przy równoczesnej minimalizacji nakładu kosztów eksperymentu. Druga z gałęzi skupia się na wykorzystaniu metody do modelowania statystycznego, mającego na celu stworzenie odwzorowania poprawnie przybliżającego rzeczywistą konstrukcję, w taki sposób, aby odpowiedź modelu konstrukcji (oznaczana symbolem \hat{y}) na zmiany jej niepewności (wyrażane jako realizacje niezależnych zmiennych losowych \mathbf{x}) dążyła do pełnej zgodności z odpowiedzią rzeczywistą. Trzecia z nich poszukuje w metodzie założeń do procesu optymalizacyjnego, które mają pomóc wyszukać pojedyncze realizacje zmiennych losowych, dające pożądaną wartość odpowiedzi konstrukcji [Hill i Hunter, 1966].

Metoda powierzchni odpowiedzi jest bardzo ceniona przy obliczaniu niezawodności konstrukcji, głównie za swoją efektywność numeryczną. Jednakże fakt, iż jest ona przeprowadzana nie na wyznaczonej ściśle funkcji stanu granicznego, a na odpowiednio aproksymacyjnie wygenerowanej powierzchni odpowiedzi wyraźnie wskazuje, iż szacowanie niezawodności z użyciem metody powierzchni odpowiedzi jest projektowaniem w pewnym sensie przybliżonym.

Ponadto, metoda może być czasochłonna przy zastosowaniach do większych konstrukcji inżynierskich, o większej ilości początkowych zmiennych losowych, dla których potrafi wykazać duże błędy statystyczne przy kalkulacji wskaźnika niezawodności. Aby pokonać te problemy, używa się technik wspomagających wyznaczenie współczynników w modelu matematycznym aproksymującym powierzchnię odpowiedzi [Kang i inni, 2010].

Metodę powierzchni odpowiedzi włączyć można do współpracy z programami metody elementów skończonych. Wskazano, że nawet dla konstrukcji inżynierskich o bardzo dużej skali (przykładowo, dla mostu żelbetowego), modelowanie metodą elementów skończonych z uwzględnieniem parametrów zaczerpniętych z metody powierzchni odpowiedzi jest dokładniejsze, a problemy niezawodnościowe mogą być jawnie formułowane.

Dodatkowo, obliczenia MES mogą być wykonywane tylko na aproksymowanej powierzchni odpowiedzi, a nie na wyjściowym stanie granicznym konstrukcji, przy całkowitym zachowaniu zgodności rezultatów uzyskanych na drodze obu podejść. Ponadto proces uaktualniania modelu MES o dane z metody powierzchni odpowiedzi jest efektywny i wykazuje szybką zbieżność przy uzyskiwaniu rozwiązań, co powoduje, iż model taki może być z powodzeniem implementowany w programach komercyjnych [Schuëller, 2001].

Zupełnie nowym horyzontem dla metody powierzchni odpowiedzi jest technika zwana stochastyczną metodą powierzchni odpowiedzi (SRSM). Stworzona została ona dla konstrukcji o wyjątkowo niskich prawdopodobieństwach awarii, dla których symulacje Monte Carlo są wysoce nieefektywne lub wręcz niedokładne. SRSM przybliża funkcję stanu granicznego za pomocą wielowymiarowych wielomianów kwadratowych poprzez dopasowanie tych wielomianów do zaproponowanych w rozwiązaniu punktów projektowych, aby zwiększyć prawidłowość i dokładność odwzorowania funkcji stanu granicznego również w obszarach słabo kontrolowanych przez punkty projektowe. Takie działanie jest także w stanie odnaleźć numerycznie wszystkie nieliniowości funkcji stanu granicznego [Gavin i Yau, 2009].

Korzystając z metody powierzchni odpowiedzi należy być jednak świadomym zagrożeń, jakie nasuwają się podczas korzystania z niej i jej niedoskonałości. Należy mieć również na uwadze wszystkie jej matematyczne i myślowe ograniczenia.

W metodzie tej koniecznie należy znać wartości krytyczne zmiennych losowych X_i , będące niebezpieczne dla konstrukcji. Ponadto, projekt zadania inżynierskiego musi być sporządzony z całkowitą pewnością i poprawnością, tj. musi być dzięki niemu ustalony jawny obszar zainteresowania analizy, gdzie poziomy parametrów analizy zmienności wpływających na konstrukcję są jasno sprecyzowane i znane. Należy bowiem pamiętać, że współczynniki powierzchni odpowiedzi β różnią się w różnych punktach testowanego obszaru zainteresowania analizy. Metodą najmniejszych kwadratów lub metodą elementów skończonych musi być zatem wytworzona sprecyzowana, unikatowa funkcja, która zwiąże współczynniki analizy z aproksymowaną, rzeczywistą odpowiedzią konstrukcji, a odpowiedź zdefiniowana przez funkcję lub opis musi być krzywą gładką [Surdet i Der Khuregian, 1988].

Przy tworzeniu wielomianowej powierzchni odpowiedzi duże zmienności współczynników analizy mogą powodować mylne odczyty odpowiedzi (mogą pojawiać się błędy numeryczne oraz brak powtarzalności uzyskiwanych odpowiedzi konstrukcji). W zależności od danych eksperymentalnych współczynniki powierzchni odpowiedzi mogą być określone niepoprawnie lub źle wywnioskowane, a przy wynikającym z projektu złym doborze zakresu zmienności współczynników analizy (zakres jest zbyt wąski lub zbyt szeroki) można nie osiągnąć pożądanego w procesie inżynierskim optimum projektowego konstrukcji [Mason i inni, 1989].

Należy również być świadomym, iż nie można w metodzie tej zastosować niektórych podstawowych praw i reguł statystycznych [Myers i Montgomery, 1995].

Ponadto, RSM połączone z metodą elementów skończonych niewprawnie, pozostawia użytkownikowi poleganie na współczynnikach i funkcjach granicznych dopasowanych przez narzędzie obliczeniowe, a więc wadliwe zaprogramowanie algorytmu obliczeniowego i/lub procesów sterowania rozwiązaniem może dać w odpowiedzi całkowicie nieprawidłową powierzchnię odpowiedzi [Whitcomb i Anderson, 2004].

2.7.1. Metoda powierzchni odpowiedzi z użyciem aproksymacji wielomianem

Jak wskazano w rozdziale poprzedzającym, celem metody powierzchni odpowiedzi jest ustalenie matematycznej postaci aproksymacji interesującej inżyniera **odpowiedzi**

konstrukcji y , której dokonuje się przy założeniu, że istotny wpływ na konstrukcję ma określona ilość n parametrów opisujących wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych oraz wartości obciążeń, o możliwym do sformułowania zakresie realizacji niepewności.

Niech rzeczywista odpowiedź konstrukcji (n – wymiarowa powierzchnia stanu granicznego) będzie oznaczona jako $y(\mathbf{X}) = g(\mathbf{X})$. Jednakże, nie jest ona w tym przypadku zapisana w postaci jawnej zależności od zbioru zmiennych losowych \mathbf{X} . Może być więc wyznaczona tylko w przypadku posłużenia się dyskretnymi wartościami realizacji \mathbf{x} wektora tej zmiennej.

Przyjąć można wówczas, iż zbiór punktów $\hat{\mathbf{x}}$ osadzonych w n – wymiarowej przestrzeni odpowiedzi reprezentuje zbiór punktów w n – wymiarowej wyjściowej przestrzeni realizacji \mathbf{x} , dla których obliczana jest rzeczywista odpowiedź konstrukcji $y(\mathbf{x})$. Matematyczną zasadą funkcjonowania metody powierzchni odpowiedzi jest znalezienie takiej funkcji $\hat{y}(\mathbf{x})$, która w najlepszy sposób odwzorowuje dyskretny zbiór wartości funkcji $y(\hat{\mathbf{x}})$.

Aproksymowaną odpowiedź konstrukcji można zapisać w postaci ogólnej jako funkcję miary jej zależności od przyjętych w zadaniu realizacji podstawowych zmiennych losowych

$$\hat{y} \equiv \hat{y}(\mathbf{x}) = f(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n) + \varepsilon \quad (2.133)$$

gdzie: $x_1; x_2; x_3; \dots; x_n$ są realizacjami podstawowych zmiennych losowych, y jest odpowiedzią konstrukcji na daną realizację zmiennych, a ε jest pewnym szacunkowym statystycznym błędem eksperymentalnym, obrazującym niedokładność odczytu odpowiedzi konstrukcji, charakteryzującym się rozkładem normalnym o średniej $\mu_\varepsilon = 0$ i wariancji równej σ_ε^2 .

Jak wspomniano powyżej, w zdecydowanej większości przypadków problemów inżynierskich rozpatrywanych za pomocą metody powierzchni odpowiedzi rzeczywista funkcja odpowiedzi konstrukcji $f(\bullet)$ nie jest znana. Aby rozwinąć pożądane przybliżenie tejże funkcji, lub funkcji obrazującej równanie stanu granicznego konstrukcji, inżynier zaczyna zazwyczaj od doboru metodologii opisu. Najczęściej stosowaną i stosunkowo najłatwiejszą postacią opisu jest **wielomian niskiego stopnia**. Należy jednak pamiętać, iż wielomian ten nie musi opisywać dokładnie całej powierzchni odpowiedzi konstrukcji, a zapewniać przybliżenie bliskie idealnemu jedynie w pewnym obszarze tejże odpowiedzi, dokładnie rzecz biorąc w pobliżu stanu granicznego odpowiedzi konstrukcji oraz na obszarze jego przekroczenia.

Jeśli odpowiedź konstrukcji inżynierskiej jest poszukiwana jedynie na bardzo wąskim obszarze n – wymiarowej przestrzeni realizacji \mathbf{x} lub też obszar poszukiwania jest szeroki, ale charakteryzuje się bardzo niskim współczynnikiem skośności, to powierzchnia odpowiedzi może zostać aproksymowana funkcją liniową niezależnych zmiennych losowych (wielomianem stopnia pierwszego) i wówczas model taki nazywamy **modelem pierwszego rzędu**.

Model ten może być zapisany przykładowo w postaci

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \varepsilon \quad (2.134)$$

Ta forma zapisu jest często nazywana **modelem efektów głównych n zmiennych**, ze względu na zakładany brak powiązań pomiędzy poszczególnymi zmiennymi losowymi x_i wektora realizacji tychże zmiennych $\mathbf{x} = \{x_1; x_2; x_3; \dots; x_n\}$ [Carley i inni, 2004].

Jeśli natomiast między poszczególnymi realizacjami zmiennych losowych x_i występuje **interakcja**, to model pierwszego rzędu można rozszerzyć o **człony interakcyjne drugiego rzędu** (wprowadzające krzywiznę powierzchni).

Model powierzchni odpowiedzi można wówczas wyrazić równaniem

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i<j}^n \sum_{j=2}^n \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (2.135)$$

Jeśli natomiast krzywizna rzeczywistej powierzchni odpowiedzi konstrukcji jest na tyle duża, iż nawet model pierwszego rzędu zawierający człony interakcyjne daje niedokładny obraz odwzorowania, to należy wówczas dla zadania użyć wielomianów stopnia drugiego. Zapisać można zatem za ich pomocą funkcję aproksymującą stopnia drugiego.

Model taki nazywamy **modelem drugiego rzędu** i zapisuje się go równaniem

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i<j}^n \sum_{j=2}^n \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (2.136)$$

Większość rozwiązań metodą powierzchni odpowiedzi stosuje jedynie dwa powyższe modele ((2.134),(2.136)) lub dowolne ich kombinacje [Box i Wilson, 1951].

Model drugiego rzędu jest bardzo elastyczny, może przybrać naprawdę szeroką gamę kształtów i topografii, co zazwyczaj skutkuje bardzo wysokim współczynnikiem dopasowania do powierzchni wyjściowej. W dotychczasowej literaturze można znaleźć też wiele odniesień do rzeczywistych badań i pomiarów, które wskazują na dużą sprawność, dokładność i poprawność metody, kiedy używa się modelu drugiego rzędu [Myers i Montgomery, 1995].

Aby osiągnąć najbardziej efektywny rezultat przybliżenia funkcji odpowiedzi konstrukcji za pomocą wielomianów, należy zebrać odpowiednią ilość danych numerycznych z procesu projektowania eksperymentu. Kiedy już zostaną one odpowiednio zebrane i zapewniona jest poprawność przeprowadzenia tworzenia modelu, przystępuje się do szacowania współczynników β wielomianu, najczęściej za pomocą metody najmniejszych kwadratów [Benjamin i Cornell, 1977].

W niektórych, bardziej rozległych analizach należy dla zadania użyć modelu korzystającego z wielomianów stopnia wyższego niż drugi lub też ze specjalnych technik (przykładowo z rozwinięcia powierzchni w szereg Taylora względem tzw. **punktu centralnego planu eksperymentalnego** $\mathbf{x}_{0} = \{x_{1,0}; x_{2,0}; x_{3,0}; \dots; x_{n,0}\}$ – technika taka nosi nazwę **iteracyjnej metody powierzchni odpowiedzi**), jednakże są to przypadki bardzo rzadko występujące w analizach konstrukcji inżynierskich [Rajashekhar i Ellingwood, 1993; Gavin i Yau, 2009].

Procedurę iteracyjną można przedstawić jako

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i (x_i - x_{i,0}^{(k)}) + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} (x_i - x_{i,0}^{(k)})^2 + \varepsilon \quad (2.137)$$

gdzie $x_{i,0}^{(k)}$ jest kolejną, k – tą iteracją i – tej współrzędnej realizacji wektora zmiennych losowych punktu centralnego planu eksperymentu $\mathbf{x}_{,0} = \{x_{1,0}; x_{2,0}; x_{3,0}; \dots; x_{n,0}\}$.

Sporządzony dowolną techniką model aproksymacyjny powierzchni odpowiedzi konstrukcji $\hat{y}(\mathbf{x})$ można także zobrazować graficznie w przestrzeni realizacji zmiennych losowych. Takie przedstawienie powierzchni pozwala na sprawdzenie, czy zawiera ona widoczne wzniesienia i obniżenia topografii oraz tzw. przełęcze i siodła. Należy mieć jednak na uwadze fakt, iż sensownym rozwiązaniem jest jedynie prezentacja modelu z dwiema zmiennymi (najczęściej z realizacją zmiennej podstawowej całkowitego wkładu niepewności wytrzymałości materiałów konstrukcyjnych r oraz realizacją zmiennej podstawowej całkowitego wkładu niepewności obciążeń działających na konstrukcję s).

2.7.2. Metoda powierzchni odpowiedzi z użyciem aproksymacji ilorazem wielomianów

W rozdziale poprzedzającym wskazano, iż bardzo dobrą aproksymację powierzchni odpowiedzi zapewniają modele matematyczne oparte na wielomianach, głównie pierwszego i drugiego stopnia. Istnieją jednak techniki, które nie podnosząc stopnia wielomianu, poprawiają jednocześnie wykonywaną aproksymację. Jedną z nich jest udoskonalenie, które jest w dysertacji przedstawione jako podejście reprezentujące alternatywę dla klasycznych modeli aproksymacyjnych.

Wybrane podejście proponuje wyznaczyć równanie powierzchni odpowiedzi $\hat{y}(\mathbf{x}) = \hat{g}(\mathbf{x})$ na podstawie ilorazu wielomianów dowolnego stopnia. Proponowany wariant metody powierzchni odpowiedzi spotyka się w literaturze pod nazwą **metody powierzchni stosunku wielomianów (Ratio of Polynomials Surface - RPS)**, bądź też pod pełną nazwą, jako **metoda powierzchni odpowiedzi z użyciem aproksymacji ilorazem wielomianów** [Alibrandi i inni, 2009; Alibrandi i inni, 2010].

Powierzchnię stosunku wielomianów podaje się w formie superpozycji n wielomianów odwrotnych pierwszego stopnia, nie zawierających składników interakcyjnych. Powierzchnię tę można opisać równaniem

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \hat{g}_{RPS}(\mathbf{x}) = a_0 + \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i + b_i x_i} \quad (2.138)$$

gdzie $a_0 = \hat{g}_{RPS}(\mathbf{0}) = \hat{g}_{RPS}(0; 0; 0; \dots; 0)$, natomiast a_i i b_i (dla $i = 1, 2, \dots, n$) są współczynnikami kierunkowymi powierzchni stosunku wielomianów, koniecznymi do wyznaczenia numerycznie.

Tak skonstruowana powierzchnia odpowiedzi ma wiele pożądaných właściwości, w porównaniu z oryginalnym sformułowaniem modelu pierwszego rzędu. Metoda powierzchni odpowiedzi z użyciem aproksymacji ilorazem wielomianów nie jest wrażliwa na dobór punktu centralnego analizy niezawodności i przynosi większą dokładność jego iteracyjnego wyznaczenia. Zazwyczaj, dla modeli konstrukcji o małym stopniu złożoności, już pierwsza iteracja algorytmu obliczającego powierzchnię stosunku wielomianów daje satysfakcjonujące dopasowanie do rzeczywistej powierzchni granicznej.

Mając za podstawę zapis powierzchni stosunku wielomianów można wskazać postać, jaką uzyskuje przy takim podejściu równanie powierzchni granicznej $\hat{g}(\mathbf{x}) = 0$, wyprowadzone z tegoż zapisu. Może być ono być wówczas przedstawione zapisem

$$\hat{g}_{RPS}(\mathbf{x}) = \frac{a_0 \prod_{i=1}^n (a_i + b_i x_i) + \sum_{i=1}^n \left\{ x_i \prod_{j=1, j \neq i}^n (a_j + b_j x_j) \right\}}{\prod_{i=1}^n (a_i + b_i x_i)} = \frac{\hat{p}_{RPS}^{(n)}(\mathbf{x})}{\hat{q}_{RPS}^{(n)}(\mathbf{x})} = 0 \quad (2.139)$$

gdzie $\hat{p}_{RPS}^{(n)}(\mathbf{x})$ oraz $\hat{q}_{RPS}^{(n)}(\mathbf{x})$ są wielomianami stopnia n – tego reprezentującymi zachowanie się składników wektora realizacji zmiennej losowej x_i .

Poprzez fakt, iż metoda ta prowadzi do otrzymania powierzchni granicznej o bardzo dobrym współczynniku dopasowania, prawdopodobieństwo awarii konstrukcji, jakie można dzięki niej oszacować jest bardzo dokładne i może stanowić źródło kontroli wyników zaprezentowanych techniką regresji liniowej pierwszego rzędu.

2.8. Wrażliwość probabilistyczna modeli konstrukcji inżynierskich

Probabilistyczna analiza wrażliwości używana jest do określania wielkości wpływu, jaki na kształtowanie się odpowiedzi modelu obliczeniowego wywierają zmiany jego odpowiednich parametrów składowych, bądź też zmiany w konstrukcji (definicji) układu. Dużo częściej stosowanym i bardziej rozpowszechnionym typem analizy wrażliwości jest pierwsza z wyżej wymienionych gałęzi (tzw. **parametryczna analiza wrażliwości**) i to na niej skupi się niniejsze opracowanie. Podstawą do analizy wrażliwości jest w tym podejściu dokładne studiowanie niepewności, którymi obciążone są parametry materiałowe i obciążeniowe modelu konstrukcji inżynierskiej [Kleiber i inni, 1997].

Kwestia poprawnego stworzenia modelu matematycznego dla celów parametrycznej analizy wrażliwości jest w znakomitej większości przypadków bardzo skomplikowana, gdyż nie można zazwyczaj oprzeć się przy jego definiowaniu na wynikach badań rzeczywistych konstrukcji inżynierskich (przykładowo wtedy, kiedy nieniszczący pomiar niepewności budowli istniejącej jest niemożliwy do przeprowadzenia) lub kiedy same modele numeryczne mają tendencję do zmienności stochastycznej. Podczas budowy modelu układu, projektant powinien więc dysponować przynajmniej szcążkową wiedzą o wartościach oczekiwanych wszystkich parametrów, lub umieć rozsądnie dobierać ich szacunkowe wartości (przykładowo na bazie kodów projektowych, normatyw lub ekspertyz) [Der Kiureghian i Ditlevsen, 2009].

W modelach obejmujących znaczną ilość wejściowych zmiennych losowych, analiza wrażliwości jest **podstawowym składnikiem** tworzenia modelu obliczeniowego oraz zapewniania jego jakości, jej przeprowadzenie jest w procesie projektowym z góry wymagane. Testy wrażliwości mogą pomóc wskazać, które z wartości parametrów obciążonych niepewnościami rozsądnie jest zastosować w modelu (lub obserwować ze zwiększoną uwagą) lub też pomóc sformułować wymagany do rozważenia zakres problemu inżynierskiego.

Pozwala ona także określić odpowiedni (zapewniający kalkulację użytecznej i poprawnej odpowiedź konstrukcji), konieczny do przyjęcia poziom dokładności parametrów modelu. Dodatkowo, jeżeli wstępne testy numeryczne wykażą, że model na zmiany określonych, najistotniejszych parametrów jest całkowicie niewrażliwy, to może być wówczas możliwe oszacowanie wartości odpowiedzi z większą precyzją, lub też celowe zmniejszenie rozciągłości analizy niezawodności modelu. Z drugiej strony – duża populacja sytuacji projektowych, tj. przeanalizowanie wielu wartości kombinacji parametrów modelu, pozwala poprawnie określić zachowanie układu w sytuacjach ekstremalnych.

Poprzez umiejętne wskazanie, jak odpowiedź modelu reaguje na zmiany wartości poszczególnych parametrów, uzyskać można nie tylko wiele informacji o samym modelu, ale można zbudować inżynierskie zaufanie do sporządzonego modelu i jest to jeden z podstawowych celów przeprowadzania takiej analizy (tzw. **kryterium ufności**). Model konstrukcji inżynierskiej powinien w trakcie przeprowadzania badań testowych zachowywać się zgodnie z oczekiwaniami i obserwacjami konstrukcji rzeczywistych, lub co najmniej dawać wystarczającą jakość wskazówki, które z wartości parametrów odzwierciedlają rzeczywistą pracę konstrukcji, a które dostarczają rezultatów rozbieżnych z praktyką inżynierską. Na tejże podstawie, analiza wrażliwości stosowana jest także aby wskazywać proste metody modyfikacji modelu konstrukcji, jego kalibracji oraz optymalizacji.

Wybór odpowiedniej metody analizy wrażliwości uwarunkowany jest od wielu różnego rodzaju czynników, wśród których wyróżnić można pewne ściśle określone **problemy podstawowe**, przykładowo: problem nadmiernych kosztów obliczeniowych zadania, problem określenia korelacji (niezależności) zmiennych modelu, bądź jego interakcji, problemy z nieliniowością modeli, a także wszelkie problemy z obróbką danych wejścia i wyjścia dla danego typu analizy niezawodności.

Analiza wrażliwości przeprowadzana jest w większości przypadków jako określona, zazwyczaj duża liczba pojedynczych przebiegów realizacji zadania, w podejściu przypominającym bezpośrednio próbkowanie metodą Monte Carlo. Czas potrzebny do ich przeprowadzenia, czyli wyżej wspomniany **koszt obliczeniowy zadania** okazać się znaczącym problemem dla eksperymentatora, jeżeli pojedyncza próba obliczeniowa modelu ma bardzo duży czas realizacji (co skutkuje ogromnym czasem całkowitym analizy) lub gdy model ma dużą ilość wprowadzonych niepewności (co skutkuje stworzeniem wielowymiarowej przestrzeni realizacji, liczba zależności pomiędzy wymiarami przestrzeni rośnie eksponentalnie z ilością wymiarów). Redukcję kosztu obliczeniowego można przeprowadzić za pomocą odrębnych technik, do których można zaliczyć **technikę emulowania** (dla modeli o znacznym czasie analizy) oraz **technikę obrazowania** (dla modeli o znacznym rozmiarze przestrzeni realizacji).

Niektóre z podejść analizy wrażliwości mogą napotkać problemy obliczeniowe związane z **nieliniowością** problemu, przykładowo te spośród nich, które mają za podstawę analizę regresji (jak chociażby analiza wrażliwości przy użyciu metodologii powierzchni odpowiedzi). Techniki te mogą doprowadzić do błędnych rezultatów i wniosków płynących z analizy, jeśli zostanie dobrany niewłaściwej postaci model aproksymacyjny powierzchni odpowiedzi (problem ten sygnalizowano także w rozdziale 2.7. pracy, poświęconym wyżej wspomnianemu zagadnieniu). Problemu tego można uniknąć kontrolując powierzchnię odpowiedzi poprzez obliczenia testowe lub posługując się innymi metodami, jak na przykład pomiarami polegającymi na **śledzeniu wariacji odpowiedzi**.

Kolejnym ważnym problemem wpływającym na wybór techniki analizy wrażliwości jest kwestia danych, jakimi posługuje się analiza. W niektórych przypadkach, co zasygnalizowano powyżej, eksperymentator nie ma dostępu do danych źródłowych modelu, lub dane wejściowe są mu narzucone w postaci mało uporządkowanej (przykładowo w formie zbiorów wartości dyskretnych nieodpowiednich z punktu widzenia eksperymentatora). Wówczas analizę trzeba wzbogacić technikami szacującymi źródło powstania danych wejściowych, wykonując tzw. **analizę retrospektywną**.

Dane wejściowe mogą też okazać się zależne od siebie nawzajem, podczas gdy standardowe założenia analizy zakładają ich pełną niezależność. Taka sytuacja również wymaga doboru wzbogacającej analizy pomocniczej, a spowodowana być może chociażby narzuceniem eksperymentatorowi pewnych zmiennych do procesu analizy wrażliwości, które są skorelowane na mocy określonej natury zjawiska (obciążenia towarzyszące, prawidłowości struktury materiału itp.).

Problem z danymi wyjściowymi pojawia się natomiast wtedy, gdy wynikiem analizy jest zbiór pewnych równie prawdopodobnych różnych sytuacji projektowych (problem taki może pojawić się w przypadku analiz układów czasowo i przestrzennie zmiennych), lub gdy standardowo proponowane pojedyncze rozwiązanie problemu jest czasowo i przestrzennie zmienne. Dodatkowo, jeżeli dokłada się do tego powyżej wymieniony problem z zależnością zmiennych wejściowych, zmienna wyjściowa może być całkowicie nieinterpretowalna. W takim przypadku również wymaga się wykonania szeregu pomocniczych obliczeń towarzyszących, aby z otrzymanych danych wybrać rozwiązanie optymalne.

Ostatnim z czynników wpływających na wybór techniki analizy wrażliwości jest kwestia **interakcyjności modelu**. Powstaniem interakcji w modelu nazywa się sytuację, gdzie jednoczesna perturbacja dwóch lub więcej danych początkowych powoduje wytworzenie się zmienności danej wyjściowej większej, niż zmienność jakiegokolwiek danej wejściowej. Interakcje powstają we wszystkich klasach modeli nieaddytywnych, jednakże podejścia przeszukiwania mające za podstawę metodę Monte Carlo, doskonale ten problem rozwiązują. Wielkość interakcji jest mierzalna, przy użyciu analizy wrażliwości posługującej się obliczoną wariancją danych, za pomocą **wskaźnika wrażliwości rzędu n** [Saltelli i Annoni, 2010].

Podejścia obliczeniowe metodologii analizy wrażliwości probabilistycznej nie są rozróżniane jedynie przez czynniki, które odgrywają w nich ważną rolę lub których wpływ należy zminimalizować, ale także przez pomocne przy danym pomiarze wrażliwości **operacje matematyczne**, takie jak technika dekompozycji wariancji, wyznaczanie pochodnych cząstkowych odpowiedzi czy poszukiwanie jej efektów głównych [Saltelli i inni, 2008].

Wszystkie techniki analizy wrażliwości działają w zbliżonym do siebie cyklu podstawowych kroków, do których zaliczyć można: **wprowadzenie danych wejściowych do analizy** (z określeniem ich parametrów probabilistycznych, niepewności, zakresów zmienności), **identyfikacji pożądaných danych wyjściowych stworzonego modelu** (takie ukierunkowanie modelu obliczeniowego, aby wykazywał on rezultaty o jak najlepszej relacji w stosunku do danych wprowadzonych), **obliczenia numeryczne modelu** (zależne od wspomnianych powyżej technik matematycznych, czynników niekorzystnie wpływających na rezultaty) oraz końcowo – **kalkulacja miar wrażliwości na podstawie danych wyjściowych modelu** (ukierunkowana na informacje przydatne eksperymentatorowi).

W przypadku metod posługujących się założeniami próbkowania bezpośredniego oraz w przypadku obliczeń problemów wielowymiarowych, konieczne jest wielokrotne wykonanie obliczeń modelu, opierające się na założeniach **projektowania eksperymentalnego** (DOE – design of experiments), traktujących o odpowiednim rozdzieleniu zmienności mniej istotnych od tych najważniejszych i usunięciu ich z analizy, bez wywoływania utraty jakości matematycznej przeprowadzonych obliczeń [Sacks i inni, 1989; Montgomery, 2004; Whitcomb i Anderson, 2004].

W rozdziale tym omówione zostaną główne techniki podstawowe analizy wrażliwości, wyróżniające się różnymi miarami czułości, które są w ich trakcie obliczane (należy mieć na uwadze fakt, iż niektóre z tych kategorii nakładają się). Poniższy rozdział koncentruje się na sposobach uzyskania tychże miar, posługując się rozgraniczeniem na techniki wywodzące się z metodologii próbkowania bezpośredniego zmienności użytych w modelu i założeniach metody Monte Carlo (rozdział 2.8.1) oraz na techniki mające za podstawę poszukiwanie pochodnych cząstkowych i efektów głównych powierzchni odpowiedzi problemu rozpatrywanego w modelu obliczeniowym (rozdział 2.8.2).

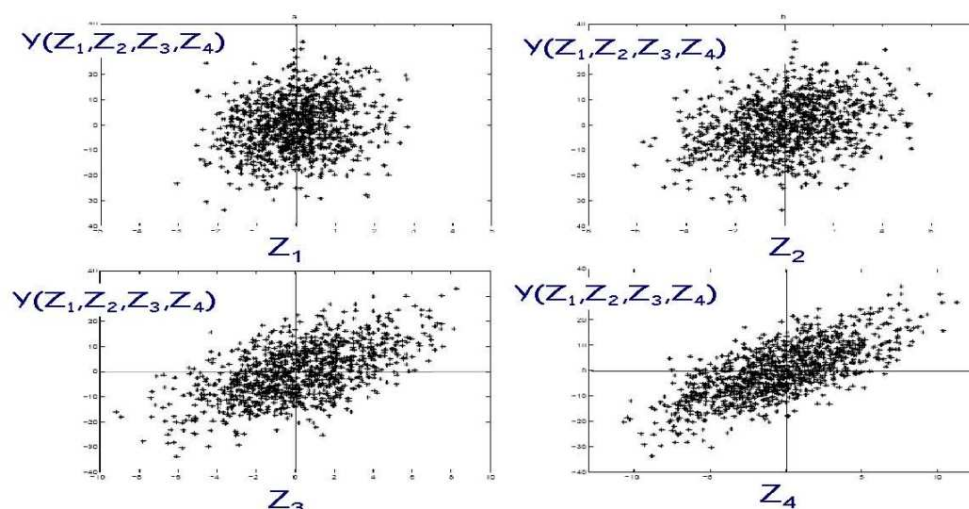
2.8.1. Techniki określania wrażliwości mające za podstawę metodę Monte Carlo

Pierwszą znaczącą grupą metod probabilistycznej analizy wrażliwości jest rodzina technik, które mają u swoich podstaw założenia próbkowania bezpośredniego metody Monte Carlo, lub które odwołują się do technik redukcji wariancji próbek, stowarzyszonych ideowo z bezpośrednim Monte Carlo. Podejście takie nazywa się zbiorczo terminem **technik oceny wrażliwości metodą próbkowania losowego**.

Najpopularniejszym narzędziem obliczeniowym, klasyfikowanym do tejże grupy technik analizy wariancji jest **metoda obrazu (chmury) rozproszenia**. Jest to prosta i bardzo użyteczna metoda, w której kreśli się zależność między zmienną końcową (zmienną odpowiedzi) y , a poszczególnymi zmiennymi wejściowymi x_i . Punkty obliczeniowe wybiera się z rezultatów zmiennej odpowiedzi w sposób losowy, zgodnie z techniką próbkowania bezpośredniego. Przykładowy obraz chmur rozproszenia przedstawiono na rys. 2.27.

W zadaniu, rozpatrywanym na rys. 2.27, zmienna odpowiedzi y jest uzależniona od czterech znormalizowanych zmiennych wejściowych z_i [Saltelli i inni, 2004].

Punkty obliczeniowe są w każdym z wykresów dobrane jako jednakowe, są natomiast wykreślane na odpowiednich rzutniach w zależności od różnych zmiennych wejściowych. Jako najbardziej istotne dla zadania są uważane zmienne, charakteryzujące się najbardziej jednolitym uporządkowaniem oraz największym zakresem zmienności względem osi zmiennej wejściowej. W tym przypadku zmienna, na którą zmienna odpowiedzi y jest najbardziej wrażliwa, to zmienna z_4 . Spełnia ona bowiem jednocześnie oba wspomniane warunki.



Rys. 2.27. Analiza wrażliwości wykonana za pomocą chmur rozproszenia, podejście wywodzące się z próbkowania bezpośredniego [Saltelli i inni, 2004].

Zaletą podejścia chmury rozproszenia jest także fakt, iż można w nim operować wspomnianym we wstępie do rozdziału zbiorem danych narzuconych, co w wielu przypadkach analizy wrażliwości jest dużym ograniczeniem, a w tym przypadku jest zaledwie równoznaczne z losowym próbkowaniem. Interesujące projektanta rezultaty miar wrażliwości mogą być wyznaczone bezpośrednio z przedstawionych powyżej zależności między y i x_i (z_i), lub też, w połączeniu z analizą regresji pomiarów polegających na śledzeniu wariancji powierzchni odpowiedzi (czyli w połączeniu z drugą gałęzią technik analizy wrażliwości).

Inną popularną techniką analizy wrażliwości metodami próbkowania bezpośredniego jest **metoda obrazowania**, polegająca raczej na ocenie, czy dana zmienna wejściowa wpływa znacząco na kształt odpowiedzi modelu, niż na faktycznym określeniu miar wrażliwości rozpatrywanego zadania. Stosowana jest ona najczęściej w przypadku modeli probabilistycznie wielowymiarowych. Obrazowanie charakteryzuje się bowiem stosunkowo niskim kosztem obliczeniowym, w porównaniu z innymi podejściami do analizy wrażliwości, może więc być używane przykładowo do wstępnych analiz testowych, służących do wyróżnienia zmiennych wejściowych o większym wpływie na odpowiedź modelu niż pozostałe, przeprowadzonych zanim wykonana zostanie bardziej szczegółowa analiza. Jedną z najpopularniejszych technik obrazowania jest **metoda efektów głównych**, szczególnie w tej klasie problemów, gdzie metody śledzenia wariancji są obliczeniowo niemożliwe z powodu założeń narzuconych na zadanie lub jego przewidywanego czasu obliczeniowego.

Ostatnią z popularnych metod mających za podstawę technikę próbkowania bezpośredniego jest **metoda filtrowania Monte Carlo**. Celem tej metody jest identyfikacja regionów w przestrzeni probabilistycznej zmiennych wejściowych, odpowiadających ustalonym przez eksperymentatora wartościom lub zachowaniom szczególnym zmiennej odpowiedzi (przykładowo poszukiwane mogą być maksima i minima zmiennej wyjściowej lub też obszary nagłej, istotnej zmiany jej wartości) [Hornberger i Spear, 1981].

2.8.2. Techniki określania wrażliwości mające za podstawę metodę powierzchni odpowiedzi

Drugą znaczącą grupą metod probabilistycznej analizy wrażliwości jest rodzina technik, które mają u swoich podstaw założenia metody powierzchni odpowiedzi, lub które odwołują się do technik matematycznych używanych przy dopasowywaniu powierzchni odpowiedzi: standardowej regresji liniowej, procedur aproksymacji kwadratowej oraz analizy pochodnych cząstkowych funkcji powierzchni odpowiedzi. Podejście takie nazywa się zbiorczo terminem **technik oceny wrażliwości wywodzących się z analizy wariancji**.

Jednym z najprostszych i najbardziej rozpowszechnionych podejść zaliczanych do tej grupy jest **technika OAT (one-at-a-time)**, polegająca na przeprowadzaniu serii badań numerycznych biorących pod uwagę zmienność tylko pojedynczego czynnika na wynikową odpowiedź konstrukcji (pozostawiając resztę czynników niezmienną). Wrażliwość jest przy takim podejściu definiowana jako obserwowana (na drodze kalkulacji pochodnych cząstkowych lub regresji liniowej) zmiana danych wyjściowych, zachodząca na skutek zmiany poszczególnych danych wejściowych.

Takie podejście gwarantuje równocześnie możliwość porównania wyników obliczeń wrażliwości dla różnych niepewności, jako że wszystkie efekty dokonywania zmian w danych wejściowych można w prosty sposób odnieść do punktu centralnego przestrzeni realizacji.

Procedura OAT jest rozpowszechniona także z powodów czysto praktycznych, gdyż jej koszt obliczeniowy jest relatywnie niski, unika się efektów sprzęgania wpływu kilku niepewności, a także osiąga się pełną wiedzę na temat poziomu odchylenia zmiennych od średniej, które spowoduje przekroczenie określonego stanu granicznego modelu. Procedura OAT nie może być zastosowana, jak zasygnalizowano powyżej, jeśli sensem przeprowadzania analizy wrażliwości jest przeszukiwanie przestrzeni realizacji zmiennych pod kątem możliwości zaistnienia interakcji zmiennych wejściowych.

Techniki składowe procedury OAT mogą być równocześnie osobnymi metodami analizy wrażliwości. Kalkulacja wrażliwości modelu w jego określonym punkcie przestrzeni probabilistycznej $\mathbf{x}^{(0)}$ za pomocą pochodnych cząstkowych funkcji stanu modelu $|\partial y / \partial x_i|_{\mathbf{x}^{(0)}}$ nazywana jest często **metodą lokalną** (podobnie do techniki OAT, metoda ta nie przeszukuje całej przestrzeni realizacji, a jedynie rozważa **lokalne** wpływy zmiennych wejściowych na zachowania się powierzchni odpowiedzi), natomiast technika polegająca na dopasowywaniu za pomocą regresji liniowej n – wymiarowej płaszczyzny do powierzchni odpowiedzi, używająca współczynników standardowej regresji liniowej jako wskaźników wrażliwości, nazywana jest **metodą analizy regresji** (działa ona najlepiej, jeśli powierzchnia odpowiedzi modelu jest liniowa lub wartości jej wielowymiarowych współczynników kierunkowych są pomijalnie małe).

Metody ściśle wynikające z analizy wariancji zmiennej wyjściowej to klasa podejść probabilistycznych, które po ilościowym określeniu niepewności wejściowej i wyjściowej modelu jako odpowiednie rozkłady prawdopodobieństwa są w stanie rozłożyć wariancję zmiennej wyjścia (dokonać jej dekompozycji) na części przypisane do poszczególnych zmiennych wejściowych i poszczególnych kombinacji tychże zmiennych. Wrażliwość zmiennej wyjścia na zmianę w niepewności wejściowej mierzona jest poprzez kalkulację wartości fragmentarycznej

wariancji powstałej wskutek zmiany tejże danej początkowej. Zmiany te, nazywane **częstkową wrażliwością odpowiedzi na zmianę danej wejściowej** x_i mogą być wyrażone, jeśli przyjmie się model powierzchni odpowiedzi zadania w postaci $y \equiv y(\mathbf{x}) = f(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n)$, za pomocą wzoru

$$\text{Var}_{x_i} \left[E_{x_i} (y|x_i) \right] \quad (2.140)$$

gdzie: $\text{Var}[\bullet]$ oraz $E[\bullet]$ oznaczają kolejno operatory wariancji i wartości oczekiwanej.

Wyrażenie to mierzy wkład pojedynczej niepewności x_i na całkowitą wariancję zmiennej odpowiedzi y (zakładając uśrednione wartości zmienności pozostałych zmiennych początkowych) i znane jest także pod nazwą **wskaźnika wrażliwości pierwszego rzędu** lub też **wskaźnika efektu głównego** zmiennej x_i . Co ważne, tak skalkulowany wskaźnik nie mierzy wrażliwości zmiennej odpowiedzi na interakcje pomiędzy niepewnościami. Dopiero **całkowity wskaźnik efektu głównego**, obliczany jako suma wskaźników pierwszego rzędu oraz wskaźników interakcji daje w rezultacie całkowitą wariancję zmiennej odpowiedzi y (dokonuje jej ponownej kompozycji). Obie te wartości mogą być także standaryzowane, co odbywa się poprzez podzielenie ich przez $\text{Var}[y]$.

Należy jednakże pamiętać, że wykonanie pełnego procesu dekompozycji wariancji ma sens tylko wtedy, gdy zmienne wejściowe są od siebie niezależne.

Metody wyprowadzone z analizy wariancji umożliwiają pełne przeszukanie przestrzeni realizacji zmiennych wejściowych, co pozwala na znalezienie wszystkich interakcji i nieliniowych zachowań modelu obliczeniowego. Z tych względów metody te są szeroko stosowane tam, gdzie tylko jest to obliczeniowo możliwe. Jednakże, ponieważ metoda ta może obejmować konieczność rozważenia bardzo dużej ilości kombinacji wartości zmiennych podstawowych modelu, obliczenia takie mogą wymagać zastosowania podejścia Monte Carlo, co może nie być korzystne z punktu widzenia czasu i kosztu obliczeniowego. Redukcję kosztów obliczeniowych przynosi wówczas stosowanie innych technik, na czele z **podejściem emulatorowym** [Saltelli i inni, 2004].

Emulatory (znane również jako meta-modele, modele zastępcze lub powierzchnie odpowiedzi) są to stosunkowo prostej budowy funkcje matematyczne (emulatorowe), które jak najdokładniej przybliżają realne relacje zmiennych wejścia i wyjścia modelu. W następstwie ich zastosowania tworzony jest całkowicie nowy model obliczeniowy (stąd nazwa **meta-model**, „model modelu”), który zamiast być reprezentowany przez bardzo złożony układ zależnych od siebie równań, bardzo kosztowny czasowo do rozwiązania, może być przybliżony jako jedna funkcja zmiennych wejściowych $y \equiv y(\mathbf{x})$, utworzona na bazie wyników skalkulowanych poprzez uruchomienie modelu dla zaledwie kilku losowo dobranych punktów przestrzeni realizacji zmiennych wejściowych (najczęściej na drodze próbkowania warstwowego lub próbkowania hipersześcianu łacińskiego). Funkcja emulatorowa, oznaczana jako $\eta(\mathbf{x})$ ($\eta(\mathbf{x}) \equiv y(\mathbf{x})$), pozwala na proste i szybkie obliczenie **całkowitego wskaźnika wrażliwości**, gdyż ilość realizacji meta-modelu potrzebnych do oceny tegoż wskaźnika jest zazwyczaj dużo mniejsza niż wymagana ilość realizacji modelu podstawowego.

Podstawowymi typami emulatorów stosowanych w analizie wrażliwości są między innymi: procesy gaussowskie (**kriging**), środowisko drzew decyzyjnych (**random forests**), powierzchnie gradientowo ulepszone (**gradient boosting**), powierzchnie chaosu wielomianowego lub powierzchnie złożone z krzywych wygładzających (**splining**).

Rozdział 3

Autorski program do obliczeń wskaźników niezawodności i prawdopodobieństwa awarii konstrukcji inżynierskich – RSM–Win

3.1. Wprowadzenie

Metodologia powierzchni odpowiedzi jest szeroko stosowana w zagadnieniach inżynierskich. Istnieje wiele rozwiniętych programów komputerowych, o początkach rozwoju datowanych już na lata siedemdziesiąte poprzedniego wieku, które posługują się wspomnianą metodologią. Jednakże zaledwie znikoma część z nich jest odpowiednia do używania w zastosowaniu do inżynierii lądowej, gdzie metoda ta jest nadal umiarkowanie rozpropagowana. W zdecydowanej większości przypadków programów pole ich stosowalności jest bardzo często zawężane do sprecyzowanej dziedziny inżynierii, dla której potrzeb program został stworzony, przykładowo do obróbki efektywności działania równań chemicznych o formułach tworzonych w sposób losowy na bazie powierzchni odpowiedzi, tudzież do ustalania postępowania ekonomicznego na ich podstawie przesłanek płynących z parametrów wywnioskowanych z topografii powierzchni. Niekiedy są to też programy niepełne z punktu widzenia inżynierii lądowej – albo programy metodologii powierzchni odpowiedzi kończą swoją pracę na kalkulacji parametrów i współczynników powierzchni albo też prezentują dalsze opcje obróbki wyników stowarzyszone tylko z danym przedmiotem wiedzy, rozbieżnym z inżynierią lądową.

Z obserwacji tych zrodził się pomysł, aby stworzyć prosty autorski program do modelowania i analizy problemów inżynierskich za pomocą metodologii powierzchni odpowiedzi, który ograniczy się do rozwiązywania procesu poszukiwania powierzchni odpowiedzi konstrukcji wyłącznie w narzucony, dobrze opisany sposób, adekwatny do potrzeb prostych modeli konstrukcji inżynierskich. Założono, iż musi być to program pozwalający na otwarte wprowadzanie i wyprowadzanie danych w formacie pozwalającym na ich dalszą obróbkę w dowolnym programie modelowania metodą elementów skończonych.

Ponadto, ze względu na obszar zainteresowań rozprawy doktorskiej, postanowiono wzbogacić zaprojektowany kalkulator powierzchni odpowiedzi o proste narzędzie szacujące podstawowe wskaźniki niezawodności pierwszego i drugiego rzędu, na bazie informacji numerycznej płynącej z powierzchni odpowiedzi. Zakładano bowiem, iż program autorski ma również posłużyć jako pewnego rodzaju przewodnik po krokach postępowania metodologii (również akademicki), czemu sprzyjać ma zarówno otwartość kodu, jak i pełnia opisu, jaki zostanie zaprezentowany użytkownikowi podczas pojedynczego przebiegu programu.

Założono także, iż program ma pozwalać na analizę wyników nie będących w prostej linii rezultatem jego działania. Wyprowadzanie danych w specyficzny sposób, poparte dobrym opisem tekstowym, pozwalać ma na późniejsze wnioskowanie o wrażliwości odpowiedzi na poszczególne zmienne losowe, inkorporowane w rozpatrywanym zadaniu inżynierskim oraz na poszukiwanie punktu optymalnego rozwiązania danego problemu losowego.

Stworzony program zostanie postawiony przed podstawowym celem swojego istnienia – oceną niezawodności i trwałości elementów konstrukcji inżynierskich, których wejściowe dane do analizy będą pochodziły z przeprowadzonych wcześniej eksperymentów numerycznych i prac zespołu badawczego, do którego zalicza się autor rozprawy.

Podjęto zatem próby stworzenia pliku typu wykonywalnego (executable), który roboczo nazwano **RSM–Win**. Człon RSM jest angielskim skrótowcem oznaczającym metodologię powierzchni odpowiedzi, a człon Win wskazuje bezpośrednio na nazwisko autora programu. Program zaprogramowany jest w środowisku języka Fortran 90, który doskonale sprawdza się ze względu na oferowaną składnię programowania i na właściwe odwzorowywanie aproksymacyjnej natury metody powierzchni odpowiedzi.

Program wczytuje w pierw parametry wzięte z przeprowadzonych badań eksperymentalnych lub matematyczne procedury opisujące funkcje zależności zmiennej wynikowej od proponowanego zestawu zmiennych podstawowych. Następnie zebrane dane poddaje obróbce, aby uszeregować je w postaci zdatnej do dalszych kalkulacji. Dla podanej przez użytkownika liczby zmiennych wejściowych program zwraca użytkownikowi możliwość wyboru rzędu obliczanej odpowiedzi (pierwszy lub drugi).

Kolejnym krokiem, wykonywanym przez program, jest rozpoznanie punktu startowego analizy, po czym następuje interaktywne pobranie od użytkownika siatki reszty punktów obliczeniowych metody. Program pozwala na wprowadzenie współrzędnych tych punktów w sposób manualny i półautomatyczny (parametryczny). Po prezentacji uporządkowanych danych wejściowych program kontynuuje aproksymacyjne transformacje macierzowe aż do stworzenia oczekiwanej przez użytkownika tabeli ANOVA (ang.: ANalysis Of VAriance, analiza wariancji metodą tabelaryczną). Na jej podstawie użytkownik jest w stanie dokonać poprawnej oceny zaprezentowanego rozwiązania.

W obliczeniach metodą powierzchni odpowiedzi z wykorzystaniem algorytmu aproksymacyjnego, wykorzystywany jest szereg standardowych technik statystycznych, z czego główne z nich to techniki regresji liniowej, standardowa analiza wariancji (kryjąca się w tworzeniu wspomnianej powyżej tabeli ANOVA) oraz transformacje macierzowe. Na ich podstawie wykonane jest nie tylko obliczenie współczynników zamkniętego wzoru na powierzchnię odpowiedzi, ale także obliczenie najbardziej korzystnej (lub niekorzystnej) dla zadania kombinacji wartości wyjściowych zmiennych losowych.

Jeśli użytkownik jest zadowolony z uzyskanych współczynników powierzchni odpowiedzi, program zwraca je użytkownikowi na ekran i do osobnego tekstowego pliku wyjściowego. W przeciwnym przypadku program pozostawia użytkownikowi możliwość manualnego powrotu do obliczeń i rozpoczęcia ich na nowo, włącznie z wyborem rzędu rozwiązania, jakie użytkownik pragnie uzyskać. Po wykonaniu kalkulacji powierzchni odpowiedzi użytkownik może przejść do modułu szacującego niezawodność opisanej powierzchnią konstrukcji.

Obliczenia wskaźników niezawodności przeprowadzane są procedurami iteracyjnymi. Na każdym poziomie iteracji użytkownik otrzymuje skalkulowaną wartość zarówno wskaźnika, jak i wszystkich istotnych wartości kalkulowanych podczas prowadzenia obliczeń. Zestawiane są także błędy względne i bezwzględne obliczanych wartości, co ma pomagać śledzić kryterium zbieżności otrzymywanych wartości.

Implementacja tablic rozkładu normalnego do programu autorskiego pozwala także na wykonanie modułu obliczania prawdopodobieństwa awarii konstrukcji, charakteryzującej się skalkulowaną powierzchnią odpowiedzi. Prawdopodobieństwo to oblicza się bezpośrednio z osiągniętego oszacowania wskaźnika niezawodności według wzoru $P_f = \Phi(-\beta)$.

Dowolną powierzchnię odpowiedzi konstrukcji można również zobrazować graficznie. Rysunek powierzchni odpowiedzi pozwala na sprawdzenie, czy zawiera ona widoczne, istotne wzniesienia i obniżenia topografii. Program autorski w chwili obecnej nie pozwala na taką operację, jednakże prezentowany plik tekstowy zawiera wszelkie potrzebne dane, aby wyrysować rozwiązanie w dowolnym innym programie matematycznym, statystycznym lub graficznym. Postanowiono tak, aby dać możliwość użytkownikowi obróbki danych liczbowych w dowolny sposób, zamiast prezentować gotową, a być może nieatrakcyjną lub nieoptymalną dla użytkownika ilustrację rezultatów.

Należy podkreślić, iż czas i koszt obliczeń komputerowych wykonywanych w programie dla całości problemu jest bardzo niski, co jest jego niewątpliwą zaletą.

Zakłada się, iż program **RSM-Win** jest cały czas w fazie rozbudowy – dokonano celowego otwarcia kodu, aby w przyszłości każda dodatkowa funkcja, uważana za rozwojową, mogła zostać dodana, bez konieczności ingerencji osoby modyfikującej skrypt w jądro programu.

W chwili składania rozprawy doktorskiej, jądro stanowią zaimplementowane podwaliny matematyczne metodologii powierzchni odpowiedzi (opisane w rozdziale 2.7.), wykorzystanie tablicy ANOVA (opisanej w rozdziale 3.2.) oraz operacje matematyczne wyznaczania wskaźników niezawodności Cornella oraz Hasofera – Linda, a także towarzyszącego im szacowanego prawdopodobieństwa awarii konstrukcji (opisane w rozdziale 2.4.).

3.2. Technika analizy wariancji metodą tabelaryczną

Procedura ANOVA jest techniką szeroko rozpowszechnioną w statystyce, polegającą na przeprowadzeniu szeregu testów statystycznych, które pozwalają użytkownikowi analizy wyznaczyć, czy dwie populacje (lub więcej) realizacji wektorów zmiennych losowych w przestrzeni probabilistycznej wykazują podobne cechy statystyczne. Testy używają do wykonywania porównań populacji funkcji rozkładu prawdopodobieństwa poszczególnych zmiennych losowych związanych w stworzenie danej populacji oraz informacji o wariancji całości danej populacji, aby pomóc zdecydować eksperymentatorowi, czy podobieństwa pomiędzy poszczególnymi populacjami (zarówno zewnętrzne – między nimi, jak i wewnętrzne – populacji samej w sobie) są wyraźnie zaznaczone. Procedura analizy wariancji poszczególnych parametrów populacji została sformalizowana, w latach trzydziestych ubiegłego wieku [Fisher, 1925].

Fisher narzucił analizie wariancji formę tabelaryczną, którego to rozwiązania używa się w wielu dziedzinach inżynierii po dzień dzisiejszy. Przykładowo, w statystyce używa się tablicy procedury ANOVA niemalże identycznej do zaczerpniętej z oryginalnej idei Fishera.

Tabela taka składa się z następujących czterech kolumn:

- 1. Źródła zmienności (Sources)**, w której to kolumnie zostają zebrane i wypisane wszystkie składniki tabeli – w przypadku metodologii powierzchni odpowiedzi źródłami zmienności są punkty poszukiwania wartości współczynników kierunkowych określonego typu powierzchni odpowiedzi, pierwszego lub drugiego rzędu.
- 2. Stopnie swobody (DOF – Degrees of Freedom)**, w której to kolumnie zostają wypunktowane liczby wskazujące na ilość możliwego wariantowania wszystkich podstawowych zmienności wejściowych.
- 3. Sumy kwadratów (SS – Sum of Squares)**, w której to kolumnie zostają zebrane sumy kwadratów wartości pochodzących z kolumny źródeł wejściowych.
- 4. Wartości średnie sumy kwadratów (MS – Mean of Sum of Squares)**, w której to kolumnie zostają zebrane wartości średnie wartości kolumny sumy kwadratów [Fisher, 1925].

Obecnie, często przyjmuje się założenie, aby powiększać wyjściowy układ tabeli Fishera o dwie dodatkowe, bardzo istotne z punktu widzenia weryfikacji poprawności zastosowanej metody aproksymacji powierzchni odpowiedzi, kolumny:

- 5. Współczynnik F (F-Ratio)**, w której to kolumnie zostają obliczone tzw. współczynniki dopasowania (jednakowości) wartości parametrów, jako stosunki zmienności pojedynczego źródła do zmienności całości populacji.
- 6. Wartości odpowiadające P (P-Values)**, w której to kolumnie zostają obliczone (skorelowane ze wszystkimi powyżej skalkulowanymi wartościami) wartości liczbowe przewidywane finalnie dla wszystkich wejściowych źródeł zmienności [Bower, 2010].

Procedura ANOVA dąży do rozkładu całkowitej wariancji populacji próbek losowych wektorów realizacji zmiennych losowych na odpowiednie źródła zmienności, z uwzględnieniem wkładu, jakie poszczególne źródła wnoszą w końcowe rozwiązanie rozważanego problemu.

Zakładając, iż w procedurze używa się liczby n źródeł zmienności, to w pojedynczym cyklu obliczeniowym, przeprowadzonym metodą ANOVA otrzymuje się $n + 1$ wartości obliczonych na bazie poszczególnych składników eksperymentu (w przypadku metodologii powierzchni odpowiedzi – współczynników kierunkowych odpowiedniego modelu powierzchni odpowiedzi), tzw. **obserwacji**. Ta dodatkowa wartość jest miarą całości działania procedury, średnim wyrażeniem podobieństwa między populacją porównawczą, a populacją wygenerowaną.

Warto też przywołać podstawowe prawo analizy wariancji, które mówi, że kiedy fluktuacja dowolnej ilości zmiennych powstaje w wyniku działania dwóch lub więcej niezależnych przyczyn, to wiadomo, że wariancja produkowana przez wszystkie przyczyny jednocześnie w danym eksperymencie jest bezpośrednio sumą wartości wariancji powodowaną przez poszczególne przyczyny oddzielnie. Ta własność wariancji (każda niezależna zmienna ma swój indywidualny wkład w całość zmiennej odpowiedzi) pozwala na pełną analizę danych, a także przypisanie, z większą lub mniejszą dokładnością, wpływu fluktuacji odpowiedniej zmiennej wejściowej lub grupy tych zmiennych na zachowanie całości konstrukcji [Fisher, 1925].

W programie autorskim procedura ANOVA znajduje zastosowanie po wykonaniu kalkulacji współczynników regresji, na każdym kroku iteracyjnym programu. Używa się jej we wskazanym momencie prowadzenia obliczeń w dwóch istotnych dla oceny sprawności działania programu celach. Po pierwsze, analiza taka jest konieczna, aby poprawnie określić efektywność działania regresji, a po drugie, konieczne jest na jej podstawie ocenienie poprawności przyjęcia modelu aproksymacji powierzchni odpowiedzi.

Tabelę analizy regresji ANOVA tworzy się w programie autorskim **RSM–Win** w sposób ściśle nawiązujący do układu kolumn Fishera (wzbogaconych o kryterium współczynnika F). Używaną w programie tabelę ANOVA odwzorowano w Tabelicy 3.1.

Tablica 3.1. Tabela analizy regresji ANOVA zaimplementowana w programie autorskim.

Źródło zmienności	Stopnie swobody	Suma kwadratów	Średnie sumy kwadratów	Współczynnik F
Suma	n	$SK(\text{Suma})$	$SK(\text{Suma})/n$	----
β_0	1	$SK(\beta_0)$	$SK(\beta_0)$	$\frac{SK(\beta_0)}{SSK(\text{BE})}$
β_i	$n_i \times 1$	$SK(\beta_i)$	$SK(\beta_i)$	$\frac{SK(\beta_i)}{SSK(\text{BE})}$
β_{ii}	$n_{ii} \times 1$	$SK(\beta_{ii})$	$SK(\beta_{ii})$	$\frac{SK(\beta_{ii})}{SSK(\text{BE})}$
β_{ij}	$n_{ij} \times 1$	$SK(\beta_{ij})$	$SK(\beta_{ij})$	$\frac{SK(\beta_{ij})}{SSK(\text{BE})}$
Rezyduum	$n_{rezy} =$ $n - 1 - n_i - n_{ii} - n_{ij}$	$SK(\text{R})$	$\frac{SSK(\text{R})}{n_{rezy}}$	$F_R = \frac{SSK(\text{R})}{SSK(\text{BE})}$
Brak dopasowania	$n_{bd} = n_{rezy} +$ $-\sum_{i=1}^n (h_{rep,i} - 1) \times 1$	$SK(\text{BD})$	$\frac{SSK(\text{BD})}{n_{bd}}$	$F_{BD} = \frac{SSK(\text{BD})}{SSK(\text{BE})}$
Błąd eksperymentalny	n_{be} $= \sum_{i=1}^n (h_{rep,i} - 1) \times 1$	$SK(\text{BE})$	$\frac{SSK(\text{BE})}{n_{be}}$	----

gdzie: n to całkowita ilość punktów obliczeniowych zadania (przypomnieć należy, iż każdy pojedynczy punkt poszukiwania z całkowitej liczby h punktów może składać się z liczby h_{rep} punktów obliczeniowych), n_i to ilość współczynników pierwszego rzędu równania powierzchni odpowiedzi, n_{ii} to ilość współczynników drugiego rzędu równania powierzchni odpowiedzi, n_{ij} to ilość współczynników interakcyjnych równania powierzchni odpowiedzi, $h_{rep,i}$ to ilość repetycji obliczeniowych w i – tym danym punkcie poszukiwania, a wartości $SK(\bullet)$ to sumy kwadratów poszczególnych składników tabeli.

Sumy kwadratów poszczególnych wartości, używane w analizie wariancji populacji są obliczane w następujący sposób:

(1) Suma całkowita $SK(\text{Suma})$ jest równa sumie kwadratów wszystkich wartości wynikowych z powierzchni odpowiedzi, kalkulowanych we wszystkich n punktach obliczeniowych. Oblicza się ją równością

$$SK(\text{Suma}) = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i(\mathbf{x}))^2 \quad (3.1)$$

(2) Suma współczynnika zerowego rzędu $SK(\beta_0)$, często nazywana także **współczynnikiem korekcyjnym**, jest równa średniej sumie kwadratów wszystkich wartości wynikowych z powierzchni odpowiedzi, obliczanych w n punktach obliczeniowych, zapisywana równością

$$SK(\text{Suma}) = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i(\mathbf{x}))^2}{n} \quad (3.2)$$

(3) Suma współczynnika pierwszego rzędu $SK(\beta_i)$ jest składową sumą kwadratów obliczaną dla każdego kolejnego współczynnika pierwszego rzędu β_i , zakładając jego współdziałanie w całkowitej zmienności modelu problemu. Suma ta jest często nazywana współczynnikiem wkładu i – tej zmiennej w całkowitą sumę kwadratów regresji. Oblicza się ją równaniem

$$SK(\beta_i) = \frac{(\beta_i)^2}{\left[\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right]^{-1}} \quad (3.3)$$

(4) Suma współczynnika drugiego rzędu $SK(\beta_{ii})$ jest składową sumą kwadratów obliczaną dla każdego kolejnego współczynnika drugiego rzędu β_{ii} , zakładając jego współdziałanie w całkowitej zmienności modelu problemu. Suma ta jest często nazywana współczynnikiem istotności i – tej zmiennej dla całkowitej sumy kwadratów regresji.

(5) Suma współczynnika drugiego rzędu $SK(\beta_{ij})$ jest składową sumą kwadratów obliczaną dla każdego kolejnego współczynnika drugiego rzędu β_{ij} , zakładając jego współdziałanie w całkowitej zmienności modelu problemu. Jest ona często nazywana współczynnikiem wkładu korelacji i – tej oraz j – tej zmiennej dla całkowitej sumy kwadratów regresji.

(6) Suma rezydualna $SK(R)$ odpowiada za wpływ błędu eksperymentalnego oraz za istnienie błędu pochodzącego z nieadekwatności przyjętego modelu aproksymacyjnego powierzchni odpowiedzi. Oblicza się ją równością

$$SK(R) = SK(\beta_0) - \sum SK(\beta_i) - \sum SK(\beta_{ii}) - \sum SK(\beta_{ij}) \quad (3.4)$$

(7) Suma błędu eksperymentalnego $[SK(\text{BE})]$ jest zadedykowana podanemu w zadaniu dopuszczalnemu błędowi eksperymentu numerycznego, który nakłada się na generowane repetycje wartości wynikowych oszacowywanych na powierzchni odpowiedzi.

Oblicza się ją za pomocą równania

$$SK(\text{BE}) = \sum_{i=1}^n \sum_{i=1}^h \left(\hat{y}_i(\mathbf{x}) - \frac{1}{h_{rep}} \sum_{i=1}^h \hat{y}_i(\mathbf{x}) \right)^2, \quad i = 1, 2, 3, \dots, h \quad (3.5)$$

gdzie h jest wybranym punktem poszukiwania wartości wynikowych z powierzchni odpowiedzi, a liczba h_{rep} jest liczbą repetycji (punktów obliczeniowych) na poszczególnym, pojedynczym h – tym punkcie projektowym.

Istotną uwagą odnośnie błędu eksperymentalnego jest fakt, iż błąd ten jest przewidywany skutecznie wtedy i tylko wtedy, gdy pozostała do jego dyspozycji liczba wolnych dla operacji matematycznych stopni swobody n_{be} jest większa od pięciu. Tylko wówczas przeprowadzić można skuteczne testy z użyciem współczynnika F.

(8) Suma braku dopasowania odpowiedzi konstrukcji $SK(\text{BD})$ jest błędem zadedukowanym ocenie poprawności przyjęcia modelu pierwszego lub drugiego rzędu przy aproksymacji powierzchni odpowiedzi. Oblicza się ją równością

$$SK(\text{BD}) = SK(\text{R}) - SK(\text{BE}) \quad (3.6)$$

3.3. Techniki i algorytmy działania programu autorskiego

Metoda powierzchni odpowiedzi jest techniką iteracyjną i może wymagać wielu powtórzeń lub zapętlen cyklu obliczeniowego, tzw. **repetycji**, zanim za jej pomocą znajdzie się właściwe optimum zmiennej odpowiedzi konstrukcji [Wong i inni, 2005].

Z tego też powodu program autorski jest niejako zmuszony obrać strukturę modułową, gdzie najważniejsze algorytmy zostają przedstawione jako człony jądra programu, zwartych jedynie siecią warunków transmisji danych i rezultatów pomiędzy poszczególnymi modułami. W rozdziale tym postanowiono przybliżyć zarówno zarys programu, wskazujący na wzajemne rozmieszczenie modułów, a także wypisać i opisać wszystkie algorytmy programu służące do otrzymania określonego rodzaju wyników, zamieszczone we wspomnianych modułach.

1. Przedstawienie modułów (kroków postępowania) programu autorskiego.

(Moduł 1) **Moduł wprowadzania danych wejściowych** – w module tym możliwe jest wprowadzenie zarówno opisu współczynnиковego powierzchni wejściowej (jeżeli pierwotna funkcja stanu granicznego jest opisana matematycznie wielomianem stopnia drugiego lub też jeżeli ze wcześniejszych obliczeń znana jest powierzchnia odpowiedzi opisana modelem pierwszego lub drugiego rzędu), jak i możliwe jest wprowadzenie opisu dyskretnego powierzchni wejściowej (jeżeli wejściowa funkcja stanu granicznego jest funkcją nieciągłą lub jest funkcją o większym stopniu skomplikowania matematycznego niż wielomian stopnia drugiego), co w pełni wystarcza na potrzeby zadań typowo inżynierskich.

Wprowadzane przez użytkownika dane mogą być zaczerpnięte zarówno z wprowadzenia manualnego, któremu program asystuje na każdym etapie, bądź też wprowadzone z pliku zewnętrznego, jednakże plik zewnętrzny musi być uprzednio poprawnie sformatowany, wedle wskazówek pochodzących z programu. Dane liczbowe muszą zawierać odpowiednią liczbę punktów obserwacji odpowiedzi, aby program w swoim dalszym przebiegu mógł poprawnie obliczyć kolejno współczynniki regresji, błąd eksperymentu oraz poprawność dopasowania powierzchni odpowiedzi. Program reaguje wyraźnymi ostrzeżeniami na niedostatek wprowadzonych danych, a jeżeli ich liczba jest satysfakcjonująca i pozwala na wyszukanie powierzchni odpowiedzi, wówczas na potrzeby użytkownika program zestawia ponownie wszystkie wprowadzane dane, z możliwością ich zrzutu do pliku o formacie tekstowym.

(Moduł 2) **Moduł wyboru rzędu pożądanego powierzchni odpowiedzi** – w module tym następuje zapytanie się użytkownika o zdefiniowanie sposobu aproksymacji odpowiedzi, którą w programie wykonać można za pomocą funkcji liniowej (wielomianem stopnia pierwszego) lub funkcji kwadratowej (wielomianem stopnia pierwszego ze składnikami interakcyjnymi lub wielomianem stopnia drugiego).

(Moduł 3) **Moduł wprowadzania danych o parametrach losowych** – w module tym następuje zapytanie się użytkownika o liczbę niezależnych zmiennych losowych używanych w zadaniu, program pyta też o przyszłe informacje istotne dla procesu generowania powierzchni odpowiedzi oraz poszukiwania wskaźników niezawodności, takie jak przykładowo ilość punktów obliczeniowych, w których mają nastąpić obliczenia powierzchni odpowiedzi. Program ponownie pozostawia użytkownikowi wybór pomiędzy wprowadzeniem manualnym (w przypadku, jeśli liczba punktów obliczeniowych wymaganych do poprawnego skonstruowania środowiska obliczeń numerycznych jest mała), a wprowadzeniem danych dzięki wygodnej generacji komputerowej punktów obliczeniowych (w przypadku, jeśli liczba punktów obliczeniowych wymaganych do poprawnego działania programu jest duża).

(Moduł 4) **Moduł szacowania powierzchni odpowiedzi problemu** – w module tym program szacuje optymalną wartość wszystkich potrzebnych parametrów zmiennej odpowiedzi problemu inżynierskiego za pomocą techniki analizy wariancji ANOVA. Program dokonuje aproksymacji powierzchni odpowiedzi na bazie wprowadzonych informacji o wejściowej powierzchni stanu granicznego lub też na podstawie wprowadzonych pojedynczych wartości zmiennych wejściowych, dla której następuje odpowiedź optymalna. W zadaniu użyta zostaje postać ogólna **modelu drugiego rzędu**, mającego u podstaw wielomian stopnia drugiego (funkcji aproksymacyjnej stopnia drugiego), która w razie odmiennego wyboru użytkownika zostaje uproszczona do modelu pierwszego rzędu poprzez wyzerowanie odpowiednich składników wielomianu.

Model ogólnego równania powierzchni wyjściowej przedstawia się równaniem:

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^n \sum_{j=2}^n \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (3.7)$$

Po zakończeniu działania moduł szacowania powierzchni odpowiedzi wyrzuca do pliku tekstowego wszystkie informacje numeryczne, jakie są potrzebne do sporządzenia obrazu powierzchni odpowiedzi w dowolnie wybranym przez użytkownika programie graficznym.

(Moduł 5) Moduł szacowania wartości optymalnych i wartości krytycznych z powierzchni odpowiedzi problemu inżynierskiego – w module tym program dokonuje przeszukania skalkulowanej powierzchni odpowiedzi w celu znalezienia najbardziej i najmniej korzystnego wektora realizacji zmiennej losowej dla danej powierzchni.

Po zakończeniu swojego działania moduł wyrzuca do pliku tekstowego informacje numeryczne o znalezionych przez program wartościach krytycznych oszacowanej powierzchni odpowiedzi.

(Moduł 6) Moduł opcjonalny szacowania niezawodności problemu, wykorzystujący aproksymowaną powierzchnię odpowiedzi – w module tym następuje zapytanie się użytkownika o chęć obliczeń niezawodności i ich wykonanie w razie odpowiedzi twierdzącej.

Program proponuje obliczenie na bazie współczynników modelu powierzchni odpowiedzi wskaźnika niezawodności Cornella (jeśli wcześniej wybrało się obliczenia powierzchni rzędu pierwszego) bądź też wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda lub Hasofera – Linda – Rackwitsza – Fiesslera (jeśli wcześniej wybrało się obliczenia powierzchni rzędu drugiego).

Do rozpoczęcia obliczeń potrzebne jest manualne wprowadzenie wartości oczekiwanych oraz odchyłeń standardowych zmiennych losowych. Zmienne losowe użyte do tego zadania mogą być jednakże wyłącznie zmiennymi o ciągłym rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa, nie muszą natomiast charakteryzować się symetrycznym rozkładem prawdopodobieństwa.

W module używane są dwa wewnętrzne algorytmy iteracyjne – do uzyskania wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda używana jest procedura równań symultanicznych, natomiast do uzyskania wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitsza – Fiesslera używana jest procedura równań macierzowych.

Po zakończeniu swojego działania moduł szacowania niezawodności wyrzuca do pliku tekstowego wszystkie informacje numeryczne, jakie zostały zgromadzone w pętłach prowadzenia obliczeń dla pełnego poinformowania użytkownika o postępowaniu iteracji.

(Moduł 7) Moduł opcjonalny szacowania prawdopodobieństwa awarii, wykorzystujący obliczoną niezawodność problemu inżynierskiego – w module tym następuje zapytanie się użytkownika o chęć obliczeń prawdopodobieństwa awarii i ich wykonanie w razie odpowiedzi twierdzącej.

Program oblicza prawdopodobieństwo awarii bezpośrednio z oszacowanego w module poprzedzającym, dowolnie wybranego wskaźnika niezawodności.

Po zakończeniu swojego działania moduł wyrzuca do pliku tekstowego wszystkie informacje numeryczne, jakie zostały zgromadzone podczas obliczeń.

2. Przedstawienie zalecanej kolejności postępowania obliczeń za pomocą Modułu 4 programu w przypadku poszukiwania optymalnej powierzchni odpowiedzi konstrukcji.

Podczas procesu przeprowadzania eksperymentu numerycznego wartości liczbowe pobrane z powierzchni odpowiedzi mogą różnić się od wskazań wejściowych ze względu na możliwy do pojawienia się błąd eksperymentalny ε . Zakłada się, iż błąd ten ma postać rozkładu normalnego, o wartości średniej równej zeru. Z racji faktu, iż metodologia powierzchni odpowiedzi jest metodą iteracyjną, odpowiednim tokiem postępowania można wpłynąć znacząco na kształt rozkładu prawdopodobieństwa błędu oraz na zniwelowanie jego wielkości. Wówczas odpowiednie posługiwanie się kolejnymi repetycjami procesu może prowadzić do faktycznego szybkiego znalezienia optymalnej powierzchni odpowiedzi [Treharne, 1991].

Przy przeprowadzaniu obliczeń za pomocą Modułu 4 w programie autorskim zaleca się następującą kolejność kroków, zgodną zarówno z założeniami metody powierzchni odpowiedzi, jak i z oryginalnymi wytycznymi przeprowadzania obliczeń [Box i Wilson, 1951]:

(Krok 1) Zaproponowanie aproksymacji powierzchni odpowiedzi modelem liniowym (modelem pierwszego rzędu). Dane do wstępnej aproksymacji muszą zawierać odpowiednią liczbę punktów obserwacji odpowiedzi, aby poprawnie obliczyć współczynniki regresji, błąd eksperymentalny oraz by móc poprawnie ocenić jakość dopasowania powierzchni odpowiedzi. Dane muszą też być odpowiednio rozłożone w przestrzeni realizacji, aby poprawnie odzwierciedlić naturę stanu granicznego i zapewnić jego najlepsze odwzorowanie poprzez powierzchnię odpowiedzi.

(Krok 2) Przeprowadzenie obliczeń modelem pierwszego rzędu.

(Krok 3) Oszacowanie, czy obliczenia aproksymacyjne przeprowadzone modelem pierwszego rzędu są poprawne i wystarczająco dokładne. Jeżeli dopasowanie powierzchni do eksperymentu jest dosyć dobre, acz nie do końca zadowalające, należy zaproponować inne rozstawienie punktów obserwacji w przestrzeni realizacji. Jeśli dopasowanie jest częściowo dobre, można zaproponować inny punkt startowy, na linii najbardziej stromego wznoszenia się lub opadania powierzchni odpowiedzi (poszukiwanie innego ekstremum lokalnego). Jeśli dopasowanie jest w większości złe lub wręcz niemożliwe do osiągnięcia w kilku seriach obliczeń, to należy przejść do obliczeń drugiego rzędu.

(Krok 4) Zaproponowanie aproksymacji powierzchni odpowiedzi modelem kwadratowym (modelem drugiego rzędu). Dane również muszą zostać dobrane z odpowiednią starannością, przy założeniach identycznych, jak przy poprzednim doborze, dla modelu pierwszego rzędu.

(Krok 5) Przeprowadzenie obliczeń modelem drugiego rzędu.

(Krok 6) Oszacowanie, czy obliczenia aproksymacyjne przeprowadzone modelem drugiego rzędu są poprawne i wystarczająco dokładne. Jeżeli dopasowanie powierzchni do eksperymentu jest dosyć dobre i zadowalające, należy zaproponować rozszerzenie obszaru punktów obserwacji, tak, aby błąd dopasowania był dla eksperymentatora jeszcze bardziej zadowalający. Jeśli dopasowanie jest częściowo dobre, należy zaproponować zwięźlenie obszaru punktów obserwacji w przestrzeni realizacji. Jeśli dopasowanie jest w większości złe lub niemożliwe w kilku seriach obliczeń, to należy całkowicie poprawić założenia eksperymentu numerycznego [Whitcomb i Anderson, 2004].

(Krok 7) Oszacowanie optymalnej wartości zmiennej odpowiedzi na bazie wyznaczonej aproksymacyjnie powierzchni odpowiedzi oraz znalezienie wartości zmiennej odpowiedzi problemu inżynierskiego, dla której następuje odpowiedź optymalna.

(Krok 8) Wykonanie zobrazowania graficznego oszacowanej powierzchni odpowiedzi w celu wizualnej analizy jakościowej uzyskanego rozwiązania i dokonania jego ewaluacji, mając w pamięci założenia eksperymentu [Wong i inni, 2005].

3. Przedstawienie algorytmu obliczania wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda (procedury równań symultanicznych).

(Krok 1) Sformułowanie równania stanu granicznego $G(\mathbf{X}) = 0$ i wszystkich jego parametrów potrzebnych do obliczeń niezawodności, w zależności od wyjściowych zmiennych losowych X_i .

(Krok 2) Wyrażenie równania stanu granicznego w zależności od znormalizowanych zmiennych losowych Z_i .

(Krok 3) Wyrażenie równania stanu granicznego w zależności od współczynników wrażliwości a_i oraz wskaźnika niezawodności β_s , korzystając z zależności $Z_i = a_i \cdot \beta_s$.

W wyjściowej, zerowej iteracji podstawia się następujące wartości:

$$a_i = -\frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \beta_s = n \quad (3.8);(3.9)$$

(Krok 4) Wyprowadzenie zależności pozwalających obliczyć nowe wartości współczynników wrażliwości a_i , jako funkcję początkowych współczynników wrażliwości a_i oraz początkowego wskaźnika niezawodności β_s , zawiązanych w równaniu $Z_i = a_i \cdot \beta_s$.

Korzysta się przy tym ze wzoru

$$a_i = \frac{-\frac{\partial G}{\partial Z_i}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial G}{\partial Z_k}\right)^2}} \quad (3.10)$$

Nowo skalkulowane współczynniki wrażliwości muszą spełniać warunek: $\sum_{i=1}^n (a_i)^2 = 1$.

(Krok 5) Wyprowadzenie zależności pozwalającej obliczyć wskaźnik niezawodności β_s na podstawie obliczonych w poprzednim kroku wartości a_i .

(Krok 6) Użycie wyliczonych w dwóch powyższych krokach nowych wartości a_i oraz β_s w prawej stronie równości $Z_i = a_i \cdot \beta_s$ i wyznaczenie na jej podstawie nowej wartości Z_i .

(Krok 7) Rozwiązanie liczby $n + 1$ równań symultanicznych $Z_i = a_i \cdot \beta_s$ zdefiniowanych w poprzednim kroku, uzyskując wartości po pierwszej iteracji: a_i oraz β_s .

(Krok 8) Powrót do Kroku 6 i powtórzenie go.

Iterowanie aż do uzyskania pożądanej zbieżności wartości współczynników wrażliwości a_i oraz początkowego wskaźnika niezawodności β_s .

4. Przedstawienie algorytmu obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitz – Fiesslera (procedury równań macierzowych).

(Krok 1) Sformułowanie równania stanu granicznego $G(\mathbf{X}) = 0$ i wszystkich jego parametrów potrzebnych do obliczeń niezawodności, w zależności od wyjściowych zmiennych losowych X_i .

(Krok 2) Uzyskanie początkowego punktu projektowego $\{\mathbf{X}\} = \{X_i\}$ poprzez założenie wartości oczekiwanych jako wartości $n - 1$ wyjściowych zmiennych losowych.

Rozwiązanie równania stanu granicznego dla pozostałej wyjściowej zmiennej losowej.

(Krok 3) Wyznaczenie zestawu znormalizowanych zmiennych losowych $\{\mathbf{Z}\} = \{Z_i\}$, odpowiadających początkowemu punktowi projektowemu $\{\mathbf{X}\} = \{X_i\}$.

Korzysta się przy tym ze wzoru

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (3.11)$$

(Krok 4) Wyznaczenie w danym punkcie projektowym wektora gradientu funkcji stanu granicznego $\{\mathbf{G}\} = \{G_i\}$.

Korzysta się przy tym z zależności

$$G_i = \frac{\partial G}{\partial Z_i} \quad (3.12)$$

(Krok 5) Obliczenie przybliżonej wartości wskaźnika niezawodności β_s .

Korzysta się przy tym ze wzoru

$$\beta_s = \frac{\{\mathbf{G}\}^T \{\mathbf{Z}\}}{\sqrt{\{\mathbf{G}\}^T \{\mathbf{G}\}}} \quad (3.13)$$

(Krok 6) Wyznaczenie wektora współczynników wrażliwości a_i .

Korzysta się przy tym z równania

$$\{\boldsymbol{\alpha}\} = \frac{\{\mathbf{G}\}}{\sqrt{\{\mathbf{G}\}^T \{\mathbf{G}\}}} \quad (3.14)$$

(Krok 7) Uzyskanie nowego punktu projektowego względem znormalizowanych zmiennych losowych $\{\mathbf{Z}\} = \{Z_i\}$, dla $n - 1$ wyjściowych zmiennych losowych, używając zależności

$$Z_i = a_i \cdot \beta_s.$$

(Krok 8) Wyznaczenie odpowiednika nowego punktu projektowego, uzyskanego w kroku 7 w zależności od wyjściowych zmiennych losowych $\{\mathbf{X}\} = \{X_i\}$.

Używa się przy tym zależności $X_i = \mu_{X_i} + Z_i \cdot \sigma_{X_i}$.

(Krok 9) Wyznaczenie wartości losowej pozostałej po procesie iteracyjnym zmiennej losowej (wartości nieużytej w krokach 7 i 8), poprzez rozwiązanie równania stanu granicznego $G(\mathbf{X}) = 0$.

(Krok 10) Powtarzanie kroków od 3 do 9, aż do uzyskania zbieżności wartości β_s oraz współrzędnych punktu projektowego $\{\mathbf{X}\} = \{X_i\}$.

Rozdział 4

Imperfekcje geometryczne konstrukcji inżynierskich

4.1. Imperfekcje w konstrukcjach rzeczywistych w świetle podejścia normowego

Jak wskazano w rozdziałach poprzedzających, wykonanie idealnej konstrukcji inżynierskiej, jaką często zakłada się w modelach numerycznych lub przy prostych kalkulacjach projektowych, jest praktycznie nierealne. Każda konstrukcja posiada bowiem szereg odchyłek wykonawczych, materiałowych i montażowych, zbiorczo określanymi pojęciem **imperfekcji**, które przyczyniają się do zdeformowania pierwotnie zamierzonego kształtu lub zakładanych w projekcie parametrów materiałowych i wytrzymałościowych. Należy zatem szczegółowo rozważyć ich wpływ na końcową odpowiedź konstrukcji, na każdym poziomie metod szacowania bezpieczeństwa konstrukcji.

Na poziomie pierwszym metod szacowania niezawodności (deterministycznym, normowym) spośród wszystkich powyżej wskazanych grup imperfekcji, dwie z nich – **imperfekcje materiałowe** oraz **imperfekcje obciążeniowe** – są jedynie sztywno przypisywane w ramy częściowych współczynników bezpieczeństwa. Wszelkie metody postępowania z odchyleniami w obrębie tych grup zauważane są w normach jedynie w postaci narzuconych procedur, wzorów i schematów postępowania, zaprezentowanych w rozdziale 2.2. niniejszej rozprawy.

Na zupełnie innym poziomie dokładności traktowana jest w normach i kodach projektowych grupa **imperfekcji geometrycznych**, która swoim zaistnieniem w konstrukcji może wywołać efekty niemożliwe do przewidzenia nawet dokładnie wykalibrowanymi współczynnikami bezpieczeństwa materiału i obciążenia.

Wśród wielu czynników, które mają wpływ na kształt i wielkość nowopowstałej deformacji konstrukcji, najważniejszym jest technologia jej wykonania. Deformacje powstałe podczas realizacji (montażu) mogą zmniejszać projektowaną nośność i sztywność konstrukcji w kierunku podłużnym, z uwagi na pojawienie się dodatkowych momentów zginających w miejscach lokalnych wgnieceń i innych deformacji. Wstępne imperfekcje geometryczne zmniejszają wartość naprężeń krytycznych.

Wytworzenie się imperfekcji geometrycznych nie musi jednak dokonać się podczas procesu montażu lub wznoszenia konstrukcji, bądź jej elementu. Mogą się one pojawić również już podczas użytkowania konstrukcji, w sposób nieprzewidywalny czasowo i lokalizacyjnie. Ich nagłe wystąpienie spowodowane być może przykładowo dokonaniem uszkodzenia mechanicznego (na skutek uderzenia w konstrukcję, czy też użytkowania niezgodnego z przeznaczeniem, itp.), ale także przykładowo przez wystąpienie postępowej korozji.

Zaistniałe imperfekcje geometryczne cechuje znaczne zróżnicowanie pod względem ich kształtu, zasięgu (wielkości), ilości, rozkładu oraz amplitudy. Z tego względu bardzo trudne jest normowe przewidywanie, jakie imperfekcje z tejże grupy mają możliwość zaistnienia na projektowanej konstrukcji. Co więcej, w przepisach kodów projektowych trudno jednoznacznie ustalić poziom niebezpieczny tychże imperfekcji, jako że dla różnych typów obciążenia konstrukcji, różne imperfekcje mogą być mniej lub bardziej niebezpieczne dla funkcjonowania ogółu budowli.

Jednakże, próby kodyfikacji imperfekcji są podejmowane, ich dopuszczalne parametry są określane w rozmaitych certyfikacjach, dyrektywach i normach projektowych, z których najważniejszymi są: PN-EN 1090-2 (wytyczne dotyczące wykonywania i montażu konstrukcji), PN-B-03202:1996 (Polska Norma do projektowania konstrukcji stalowych, zdezaktualizowana przez wprowadzone zapisy norm europejskich), PN-EN 1993-1-6:2009 (Eurokod 3, zastępujący w/w Polską Normę) oraz PN-EN 1994-1-1:2003 (Eurokod 4, do projektowania konstrukcji kompozytowych).

PN-EN 1994-1-1:2003 wskazuje na konieczność projektowego uwzględnienia możliwości powstania efektów drugiego rzędu w poszczególnych elementach konstrukcji na skutek zaistnienia niezamierzonych odchyłek i deformacji geometrycznych. Pod uwagę muszą być brane wszystkie wpływy niedoskonałości – brak pionowości, brak prostoliniowości, brak płaskości lub brak owalności, brak zgodności elementu z jego zamierzeniem projektowym oraz mimośrodowość powstałe w węzłach i złączach konstrukcji. Norma ta zaznacza jednak, iż jeżeli już na etapie projektowania dokonano losowej globalnej analizy stateczności konstrukcji, uwzględniającej imperfekcje geometryczne, to stateczność poszczególnych elementów nie musi być dodatkowo kontrolowana.

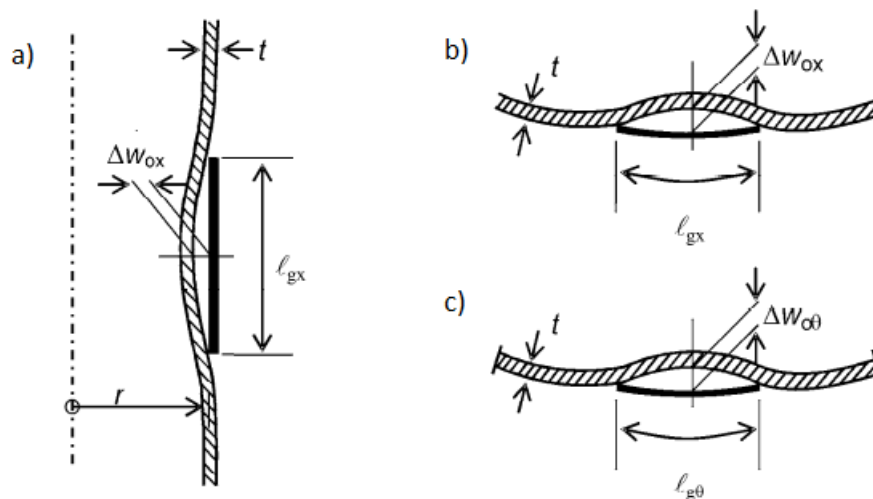
W niniejszej analizie **pominięte zostaną wszystkie niedoskonałości wykonania konstrukcji poza wgłębieniami** i to one właśnie jedyne będą rozumiane pod pojęciem imperfekcji geometrycznych. Najważniejszą z pomijanych imperfekcji są wszystkie niedoskonałości **spowodowane poprzez spoiny lub poprzez proces spawalniczy**, poniżej podane formuły odrzucają zatem wszystkie zapisy zawierające konieczność zdefiniowania spoiny, jej zasięgu i wpływu na konstrukcję.

W obu przypadkach (zarówno w losowej analizie globalnej konstrukcji, jak i w normatywnej analizie jej elementu), kluczową kwestią w postępowaniu z imperfekcjami w postaci wgłębień jest odpowiedni dobór ich amplitudy (wielkości), który poprawnie odzwierciedli możliwą do powstania deformację wykonawczą, czy mechaniczną oraz prawidłowy, inżyniersko uzasadniony jej zasięg. Pierwszym krokiem przy wprowadzaniu jakichkolwiek imperfekcji konstrukcji jest zatem dokonanie wstępnych założeń ich wymiarów, w odniesieniu do grubości elementu z imperfekcją lub do klasy precyzji wykonania elementu konstrukcyjnego.

Zgodnie z PN-EN 1993-1-6:2009, do pomiaru wgłębień stosuje się przymiary w określonych położeniach w obu głównych kierunkach powierzchni bocznych konstrukcji – południkowym i obwodowym.

Przymiary w kierunku południkowym powinny być prostoliniowe, natomiast przymiary w kierunku obwodowym powinny mieć krzywiznę o promieniu równym nominalnemu promieniowi krzywizny r powierzchni środkowej konstrukcji powłokowej.

Głębokości $\Delta\omega_0$ początkowych wgłębień ścianki powłoki mierzy się za pomocą przymiarów o długości ℓ_g , którą ustala się w dwojaki sposób. Ilustrację wykonywania przymiarów przedstawia rys. 4.1.



Rys. 4.1. Pomiary głębokości $\Delta\omega_0$ wgłębień początkowych, wg PN-EN 1993-1-6:2009:

- pomiar w kierunku południkowym ℓ_{gx} ,
- pierwszy pomiar po obwodzie koła ℓ_{gx} ,
- drugi pomiar po obwodzie koła $\ell_{g\theta}$.

W przypadku stref, gdzie występują południkowe naprężenia ściskające, pomiary wgniecenia wzdłuż tworzącej walca (południkowe) przeprowadza się w obu kierunkach głównych za pomocą przymiarów o długości ℓ_{gx} , określonej wzorem

$$\ell_{gx} = 4\sqrt{rt} \quad (4.1)$$

gdzie r jest promieniem zakrzywienia powierzchni środkowej powłoki, a t jest jej grubością w miejscu dokonania przymiaru.

Natomiast w przypadku stref, gdzie występują obwodowe naprężenia ściskające lub naprężenia ścinające, pomiary wgniecenia wzdłuż obwodowej walca (obwodowe) przeprowadza się za pomocą przymiarów o długości $\ell_{g\theta}$ określonej wzorem

$$\ell_{g\theta} = 2,3 \cdot (\ell^2 \cdot rt)^{0,25}, \text{ lecz: } \ell_{g\theta} \leq r \quad (4.2)$$

gdzie: ℓ jest długością południkową segmentu powłoki, reszta oznaczeń – jak wyżej.

W normie wcześniejszej, PN-B-03202:1996, wzór ten można znaleźć w formie przekształconej, oczywiście upraszczającej się do zapisu tożsamego z (4.2), w postaci

$$\ell_m = \frac{2,3 \cdot r}{\sqrt{\frac{r}{\ell}} \cdot \sqrt{\frac{r}{t}}} \leq r \quad (4.3)$$

Na bazie powyższych wzorów i możliwych do wyprowadzenia z nich wartości, zdefiniować można ostatecznie normatywnie zakładaną **głębokość początkowego wgłębienia**. Głębokość tę szacuje się zależnie od względnych parametrów wgłębień U_{0X} oraz $U_{0\theta}$, określanych kolejno wzorami

$$U_{0X} = \frac{\Delta w_{0X}}{\ell_{gX}} \leq U_{0,\max} \quad \text{oraz} \quad U_{0\theta} = \frac{\Delta w_{0\theta}}{\ell_{g\theta}} \leq U_{0,\max} \quad (4.4);(4.5)$$

gdzie: $U_{0,\max}$ jest normową wartością tolerancji dotyczącą parametru wgłębienia, odpowiednią dla odpowiedniej klasy jakości wytwarzania powłoki, ustaloną zgodnie z Tablicą 4.1.

Tablica 4.1. Zalecane wartości tolerancji parametru wgłębienia $U_{0,\max}$ [PN-EN 1993-1-6:2009]

klasa jakości wytwarzania	opis klasy	zalecane wartości parametru wgłębienia $U_{0,\max}$
klasa A	najwyższa	0,006
klasa B	wysoka	0,010
klasa C	normalna	0,016

Dysponując powyższymi zapisami można wówczas obliczyć głębokości początkowego wgłębienia Δw_{0X} oraz $\Delta w_{0\theta}$, otrzymując kolejno

$$\Delta w_{0X} \leq U_{0,\max} \cdot \ell_{gX} \quad \text{oraz} \quad \Delta w_{0\theta} \leq U_{0,\max} \cdot \ell_{g\theta} \quad (4.6);(4.7)$$

gdzie ℓ_{gX} to długość przymiaru w przypadku występowania naprężeń południkowych, a $\ell_{g\theta}$ to długość przymiaru w przypadku występowania naprężeń obwodowych.

Warto także nadmienić, iż w obliczeniach normowych wg PN-B-03202:1996 dopuszcza się także, aby wstępnie przyjąć, iż graniczna strzałka wgniecenia t_{v0} wynosi 2 cm, natomiast maksymalna długość zasięgu tego wgniecenia ℓ_m wynosi 2 m, jak zasugerowano wzorem

$$t_{v0} = 0.01 \cdot \ell_m \quad (4.8)$$

Zatem, wg obliczeń proponowanych w PN-EN 1993-1-6:2009, ustalić można maksymalne wgłębienie południkowe lub równoleżnikowe dla dowolnej klasy wykonania danej konstrukcji powłokowej lub jej elementu. Zauważyć należy, iż we wskazanym, obecnie używanym kodzie projektowym pojawiają się warunki, które zwiększają głębokości wgniecen proponowane starszymi zapisami norm. Wskazują one jednak równocześnie na zgodność z realiami inżynierskimi dotychczasowo przyjmowanych wgniecen.

4.2. Identyfikacja inżynierska pól imperfekcji geometrycznych modeli rzeczywistych konstrukcji inżynierskich

Na wstępie poniższych rozważań, warto zauważyć, iż przedstawione w rozdziale powyższym głębokości i przymiary imperfekcji dotyczą jedynie pojedynczych, skupionych i ograniczonych lokalizacyjnie imperfekcji. Eurokod 3 (PN-EN 1993-1-6:2009) dopuszcza jednak także przyjęcie do analiz projektowych imperfekcji w postaci nieograniczonej, tj. pojawiającej się na całości konstrukcji, bądź jej analizowanego elementu. Imperfekcje rozpatrywane w takich zadaniach muszą jednak według normy przyjmować kształt odpowiedniej, najbardziej niekorzystnej postaci własnej wyboczenia, pod względem jej kształtu, zasięgu i kierunku.

Mimo, iż przyjmując tego typu imperfekcję powierzchniową, w znakomitej większości obliczeniowych przypadków obciążeń, rzeczywiście otrzymuje się najmniejsze wartości krytyczne i graniczne obciążenia prowadzącego do utraty stateczności układu, to jednak w wielu przypadkach podejście to spotyka się z zarzutem nieekonomiczności oraz bezzasadności w świetle rzeczywistych problemów inżynierskich, gdzie stwierdzono, iż prawdopodobieństwo wystąpienia imperfekcji w kształcie najbardziej niekorzystnej postaci własnej wyboczenia jest marginalne [Godoy, 1998].

Przy takim spojrzeniu na przyjmowanie imperfekcji powierzchniowych zaznacza się wyraźnie, iż równoprawnym podejściem do analizy zadania inżynierskiego, unikającym powyższych zarzutów, jest dokładne odwzorowanie rzeczywistej topografii imperfekcji geometrycznych, zaczerpniętej bezpośrednio z badań terenowych lub laboratoryjnych konstrukcji już istniejących, poddanych użytkowaniu przez czas określony (bądź też poprawne zasymulowanie tejże topografii). Oczywiście, imperfekcje muszą być dobrane tak, aby interesujące inżyniera rezultaty uzyskane z prowadzonych obliczeń teoretycznych (lub numerycznych) cechowała doskonała zgodność z wynikami zebranymi „in situ”. Poprawne określenie wpływu wstępnych imperfekcji powierzchniowych na wartość obciążenia prowadzącego do utraty stateczności, jeśli imperfekcje opisane są polami wartości dyskretnych (polami rzeczywistymi) lub polami losowymi jest jednym z najważniejszych problemów, z jakimi zmagają się dzisiejsza inżynieria [Babcock, 1974].

Literatura traktująca o takich działaniach jest bardzo bogata i przegląda szerokie spektrum przypadków obciążeń oraz typów konstrukcji i materiałów ich wykonania. Mimo tego, określenie zależności pomiędzy podejściem normowym, teorią konstrukcji, pomiarem imperfekcji (w postaci powierzchniowej lub przestrzennej), a wartościami obciążenia prowadzącego do utraty stateczności jest nadal niekompletne i powinno być ciągle udoskonalane [Hutchinson i Koiter, 1971; Babcock, 1974; Orlik, 1976; Wilde, 1981; Singer, 1982; Arbocz, 1983; Elishakoff i Arbocz, 1985].

Ze względu na złożoność zagadnienia, sformułowanie praktycznych wytycznych projektowania, które przynosiłyby wyraźny zysk (projektowy, obliczeniowy lub ekonomiczny) w odniesieniu do dyrektyw normowych jest zatem niemalże niemożliwe do wykonania, co uzasadnia krytyczne głosy pod kierunkiem tych ostatnich [Singer i Abramovich, 1995].

W związku z powyższym, już od lat siedemdziesiątych minionego wieku rozwijać zaczęto wiedzę inżynierską z zakresu zachowania się konstrukcji powłokowych z przestrzennymi imperfekcjami geometrycznymi.

Pierwsze próby wprowadzenia kompletnie zautomatyzowanych pomiarów pól losowych wstępnych imperfekcji podjęto w Kalifornijskim Instytucie Technologicznym (CIT) w Pasadenie oraz na Stanford University, w 1968 roku. Bez wątplenia, metody i techniki wypracowane w tym okresie są fundamentem wszystkich późniejszych propozycji fizycznego pomiaru pól imperfekcji geometrycznych. CIT zaproponowało zmechanizowany obmiar imperfekcji, których wszystkie parametry zostawały zaprogramowane na kartach perforowanych, a później komputerowo przetwarzane na referencyjne matematyczne powierzchnie imperfekcji, wykonywane poprzez aproksymację metodą najmniejszych kwadratów (a w czasach późniejszych także za pomocą aproksymacji szeregiem Fouriera). Inżynierowie ze Stanford University zaproponowali natomiast geodezyjny, w pełni analogowy obmiar imperfekcji, które później zostawały przy użyciu konwerterów A/D przekształcane na dane komputerowe (z odpowiednią redukcją wejściowych danych analogowych), przechowywane i prezentowane w postaci map konturowych.

Co ciekawe, naukowcy z CIT uważali wygenerowane przez siebie matematyczne powierzchnie imperfekcji jako naturalny stan wyjściowy konstrukcji, w związku z czym rozważane przez nich modele obliczeniowe obciążone tego typu polami wstępnych zniekształceń nazywali „modelami o geometrii idealnej” [Singer i inni, 1971; Singer i Abramovich, 1995].

Pomiary wstępnych imperfekcji geometrycznych mogą być przeprowadzone zarówno dla powłoki konstrukcji obciążonej, podczas jej użytkowania, jak i dla powłoki nieobciążonej. W przypadku pierwszym, można dodatkowo wykonać badania pod określonym obciążeniem osiowym, uzyskując obraz przyrostu amplitudy imperfekcji geometrycznych pod tego typu obciążeniem. W przypadku drugim zastrzec należy natomiast, iż powłoki nieobciążone powinny być obmierzone w specjalnie przygotowanym stanowisku badawczym, o warunkach brzegowych tak bardzo zbliżonych do rzeczywistych warunków późniejszej pracy konstrukcji, jak to tylko możliwe [De Paor i inni, 2012].

Odrębnym problemem jest stosowanie wyników pomiarów pól imperfekcji geometrycznych przeprowadzonych na modelu w skali laboratoryjnej jako prognozy dla rzeczywistej skali konstrukcji inżynierskich i skorelowanie zależnych od nich laboratoryjnych rezultatów wartości obciążenia prowadzącego do utraty stateczności z zastosowaniami praktyki inżynierskiej. W takim przypadku bardzo istotnym elementem analizy jest także zbadanie tzw. efektu skali, który może doprowadzić inżyniera do nieprawidłowej transformacji amplitudy mapy imperfekcji geometrycznych modelu do późniejszych rozważań projektowych oraz wyprowadzenia błędnych wartości obciążenia wyboczeniowego [Arbocz i Babcock, 1969; Ferson i Ginzburg, 1996; Korol, 2012].

W przypadku absolutnego braku danych dotyczących rzeczywistych pól imperfekcji, powołać się można na tzw. międzynarodowe bazy pomiaru imperfekcji, wypracowane na podstawie wieloletnich badań geodezyjnych i laboratoryjnych. Dekady pomiarów, wykonanych najprostszymi metodami analogicznymi zbierano także w dużo bardziej dalekowzrocznym celu. Na ich podstawie proponuje się zastępczo cały szereg parametrów probabilistycznych i stochastycznych, skalibrowanych dla potrzeb losowych symulacji inżynierskich.

Dzięki temu, funkcje rozkładu gęstości prawdopodobieństwa zmiennych losowych pojedynczych imperfekcji czy też funkcje korelacyjne dla pola losowego (przykładowo) mogą zostać dobrane w nawiązaniu do wyżej wskazanych przedziałów wartości rzeczywistych.

Co za tym idzie, można w czasach dzisiejszych podjąć się pełnego **matematycznego procesu generacji inżyniersko realistycznego pola losowego, modelującego poprawnie przestrzenny rozkład imperfekcji geometrycznych** na powierzchni konstrukcji powłokowej [Fisher, 1993; Arbocz i Starnes, 2002].

Współtworzone przez autora niniejszej rozprawy algorytmy generacji pola losowego imperfekcji geometrycznych **zostaną szerzej przedstawione w rozdziale 5.**

Generowanie pól losowych w celu wymodelowania nimi pól imperfekcji geometrycznych jest samo w sobie procesem bardzo skomplikowanym i matematycznie złożonym. Równocześnie, ze względu na losową naturę samych imperfekcji powierzchniowych lub przestrzennych, używanie podejścia probabilistycznego jest niemalże naturalne [Bendat i Piersol, 1971; Augusti i inni, 1984].

Co więcej, zbiorcza analiza imperfekcji powierzchniowych, jaką pociąga za sobą aparat losowy, może w niektórych przypadkach znacznie polepszyć wspomnianą już efektywność procesu projektowego i wyraźnie zwiększyć jego zysk ekonomiczny. Wiąże się to jednak zawsze z odrzuceniem zaleceń normowych [Arbocz, 1998].

Niestety, rozwiązania analityczne problemów probabilistycznych i stochastycznych istnieją tylko dla najprostszych przypadków obciążeń. Jeżeli włączy się do analizy zagadnienia nieliniowości geometrycznej i materiałowej, to rozwiązania problemu utraty stateczności można uzyskać jedynie na drodze obliczeń numerycznych. Do obliczeń stateczności konstrukcji powłokowych dopasowano zatem szereg wspomnianych i opisanych w rozdziałach poprzednich metod i technik probabilistycznych (metodę Monte Carlo, FORM, SORM, techniki powierzchni odpowiedzi) oraz stochastyczną metodę elementów skończonych (SFEM) [Winkler, 1995].

Techniki probabilistyczne są także niezbędne do optymalizacji ilości potrzebnego nakładu obliczeń numerycznych i interpretacji ich wyników, jako że rozrzuty wartości rezultatów mogą być znaczne – imperfekcje geometryczne mogą bowiem drastycznie zmienić wartości obciążeń krytycznych i granicznych konstrukcji, nawet w obrębie jednego typu obciążenia [Bendat, 1990; Melchers, 1999; Hotała, 2003].

Problem obliczeń nośności konstrukcji powłokowych z imperfekcjami geometrycznymi w postaci wygenerowanych komputerowo pól losowych był już realizowany przez zespoły badawcze, których autor pracy czuje się kontynuatorem, przy użyciu metody Monte Carlo, wzbogaconej technikami redukcji populacji próbek (w sprzężeniu z programami komercyjnymi). [Bielewicz i inni, 1994; Walukiewicz i inni, 1997; Bielewicz i Górski, 2002; Górski, 2006; Górski i Mikulski, 2008; Gołota i inni, 2011]

Mimo wszystko, próby wiarygodnego obliczania wartości obciążenia prowadzącego do utraty stateczności konstrukcji powłokowej z imperfekcjami geometrycznymi, obróbka wyników takiej analizy, a w dalszej linii także i szacowanie poziomu awaryjności (lub niezawodności)

konstrukcji lub jej elementu na poziomie „wyższym od pierwszego” metod szacowania bezpieczeństwa konstrukcji nadal zalicza się do najbardziej złożonych i stosunkowo słabo rozpoznanych problemów współczesnej mechaniki stosowanej [Górski i Mikulski, 2008].

Rozdział 5

Generacja dwuwymiarowych i trójwymiarowych pól losowych

5.1. Generacja pól losowych za pomocą metody warunkowej akceptacji i odrzucania

Jak zauważono w rozdziale poprzedzającym, symulacja pól losowych jest ważnym elementem analizy niezawodności konstrukcji inżynierskich. Teoretyczne podstawy generacji pól losowych można znaleźć między innymi w pracach Adlera [Adler, 1981], Matherona [Matheron, 1975] oraz Shinozuki i współautorów [Shinozuka, 1987; Yamazaki i Shinozuka, 1990; Shinozuka i Deodatis, 1996], a implementacje tychże podstaw znajdują zastosowanie w zagadnieniach dyskretyzacji w szeregu różnych prac, m.in. w [Mignolet i Spanos, 1992] oraz [Grigoriu i Balopoulou, 1993]. Rozwijane metody pozwalają zazwyczaj na generację pól jednorodnych i pól gaussowskich, wykorzystywanych w wielu różnorodnych zagadnieniach, takich jak akustyka, trybologia, nauki o ziemi i wielu innych. Jednakże w literaturze światowej proponowane są także metody generacji pól niejednorodnych [Popescu i inni, 1998] i pól niegaussowskich [Gomes i Awruch, 2002].

W niniejszej pracy stosowana jest **warunkowa metoda generacji**, opisana w licznych pracach Bielewicza, Walukiewicza i innych [Bielewicz i inni, 1985; Bielewicz i inni, 1987; Bielewicz i inni, 1994; Walukiewicz i inni, 1995; Walukiewicz i inni, 1997]. Podsumowanie możliwości tej specyficznej metody generacji można znaleźć w pracy [Górski, 2006].

Metoda ta umożliwia generację dowolnych dwuwymiarowych i trójwymiarowych gaussowskich pól losowych. Wszechstronne analizy wykazały uniwersalność i przydatność warunkowej metody w generacji zarówno pól jednorodnych, jak i pól niejednorodnych. Skuteczność tejże metody wykazały wszelkie przeprowadzone w wymienionych wyżej pracach testy, przeprowadzone dla pól opisanych nawet zaawansowanymi funkcjami korelacyjnymi Wienera lub Brauna. Specyfika metody warunkowej polega na wykorzystaniu w obliczeniach tylko pewnego fragmentu generowanego pola. W sposób warunkowy generowany jest zawsze tylko jeden punkt wspomnianego pola, opisany przez niewiadomą losową wartość. Algorytm pozwala na symulację pól o dowolnych rozmiarach.

Poniżej przedstawiono krótki zarys metody, przedstawiony w pracy [Górski, 2006].

W metodzie wykorzystywane jest dyskretne pole losowe, opisane w postaci wielowymiarowych zmiennych losowych zdefiniowanych w węzłach siatki definiowanego pola. Pole to reprezentowane jest przez wektor losowy m zmiennych losowych, $\mathbf{X}_{(m \times 1)}$, o średniej $\bar{\mathbf{X}}_{(m \times 1)}$. Funkcja kowariancyjna pola reprezentowana jest macierzą kowariancyjną $\mathbf{K}_{(m \times m)}$.

Wektor losowy $\mathbf{X}_{(m \times 1)}$ jest w metodzie generacji warunkowej rozdzielany na dwa bloki, składające się odpowiednio z elementów nieznanymi $\mathbf{X}_{u(n \times 1)}$ oraz elementów znanych $\mathbf{X}_{k(p \times 1)}$, gdzie oczywiście $n + p = m$.

Wektor losowy pola można wówczas przedstawić w postaci

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_k \end{Bmatrix} \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \quad (5.1)$$

oraz opisać go następującą łączną funkcją gęstości prawdopodobieństwa $f(\mathbf{X})$, daną wzorem

$$f(\mathbf{X}) = (\det \mathbf{K})^{-\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})\right) \quad (5.2)$$

Korzystając z założenia podziału wektora losowego $\mathbf{X}_{(m \times 1)}$ na blok nieznanymi i znany, analogiczne założenie można przedsięwziąć w odniesieniu do macierzy kowariancyjnej $\mathbf{K}_{(m \times m)}$ i wektora wartości oczekiwanych $\bar{\mathbf{X}}_{(m \times 1)}$ i je także podzielić na odpowiednie bloki:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \quad ; \quad \bar{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_u \\ \bar{\mathbf{X}}_k \end{Bmatrix} \begin{matrix} n \\ p \end{matrix} \quad (5.3);(5.4)$$

Wektor nieznanymi wartości losowych \mathbf{X}_u wyznaczany jest na podstawie rozkładu warunkowego [Devroye, 1986]

$$f(\mathbf{X}_u / \mathbf{X}_k) = \frac{f(\mathbf{X})}{f(\mathbf{X}_k)} \quad (5.5)$$

gdzie $f(\mathbf{X}_k)$ jest łączną funkcją gęstości prawdopodobieństwa opisującą znane wartości zmiennych losowych \mathbf{X}_k , wyrażaną wzorem

$$f(\mathbf{X}_k) = (\det \mathbf{K}_{22})^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{p}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}_k)^T \mathbf{K}_{22}^{-1}(\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}_k)\right) \quad (5.6)$$

Podstawiając równości funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(\mathbf{X})$ (5.2) i $f(\mathbf{X}_k)$ (5.6) do wzoru na rozkład warunkowy Devroye'a $f(\mathbf{X}_u / \mathbf{X}_k)$ (5.5), otrzymuje się równość

$$f(\mathbf{X}_u / \mathbf{X}_k) = \left(\frac{\det \mathbf{K}}{\det \mathbf{K}_{22}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_u \\ \bar{\mathbf{X}}_k \end{Bmatrix}\right)^T \left(\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}^{-1} - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}^{-1}\right)\left(\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_u \\ \mathbf{X}_k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{X}}_u \\ \bar{\mathbf{X}}_k \end{Bmatrix}\right)\right) \quad (5.7)$$

gdzie podmacierz $\mathbf{0}$ oznacza macierz zerową.

W wyniku zastosowania uproszczeń, proponowanych w [Jankowski i Walukiewicz, 1997], otrzymuje się ostatecznie równość Devroye'a (5.7) w postaci

$$f(\mathbf{X}_u/\mathbf{X}_k) = (\det \mathbf{K}_c)^{-\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \times \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X}_u - \bar{\mathbf{X}}_c)^T \mathbf{K}_c^{-1}(\mathbf{X}_u - \bar{\mathbf{X}}_c)\right) \quad (5.8)$$

gdzie \mathbf{K}_c oznacza warunkową macierz kowariancyjną, natomiast $\bar{\mathbf{X}}_c$ oznacza warunkowy wektor wartości oczekiwanych, które to wartości przedstawić można zależnościami

$$\mathbf{K}_c = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}\mathbf{K}_{21} \quad (5.9)$$

$$\text{oraz } \bar{\mathbf{X}}_c = \bar{\mathbf{X}}_u + \mathbf{K}_{12}\mathbf{K}_{22}^{-1}(\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}_k) \quad (5.10)$$

W przypadku zastosowań inżynierskich wartości zmiennych losowych określone są zazwyczaj ściśle zdefiniowanym przedziałem. Na przykład moduł Younga nie może przyjmować wartości ujemnych, a wstępne imperfekcje geometryczne rzeczywistych konstrukcji nie powinny przekraczać wartości dopuszczanych przez normy.

Aby spełnić ten warunek, zastosować należy **ucięty rozkład normalny**, opisany równością

$$f_t(x) = \frac{f(x)}{P} \quad (5.11)$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją gęstości rozkładu prawdopodobieństwa Gaussa jednej zmiennej losowej x , opisanej odchyleniem standardowym σ i wartością średnią \bar{x} , opisaną równością

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) \quad (5.12)$$

a P jest polem rozkładu, ograniczonym przez **parametr ograniczenia odchylenia standardowego** s , przedstawianym zapisem

$$P = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\bar{x}-s\sigma}^{\bar{x}+s\sigma} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right) dx \quad (5.13)$$

Podstawiając zmienną znormalizowaną $z = (x - \bar{x}) / \sigma$ do powyższego wzoru otrzymuje się:

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^s \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = 2\text{erf}(s) \quad (5.14)$$

gdzie wprowadzona funkcja $\text{erf}(s)$ nazywana jest funkcją błędu:

$$\text{erf}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^s \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz, \quad s \geq 0 \quad (5.15)$$

Wariancję zmiennej losowej x opisuje ostatecznie następujący wzór:

$$\sigma_t^2 = \int_{\bar{x}-s\sigma}^{\bar{x}+s\sigma} (x - \bar{x})^2 f_t(x) dx \quad (5.16)$$

Podstawiając do powyższego zapisu wyprowadzone wzory na $f_t(x)$ oraz P otrzymać można zapis proponowany w pracy [Jankowski i Walukiewicz, 1997], w postaci

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 (1 - t) \quad (5.17)$$

gdzie wartość t nazywana jest **parametrem ucięcia** i wyrażana jest wzorem

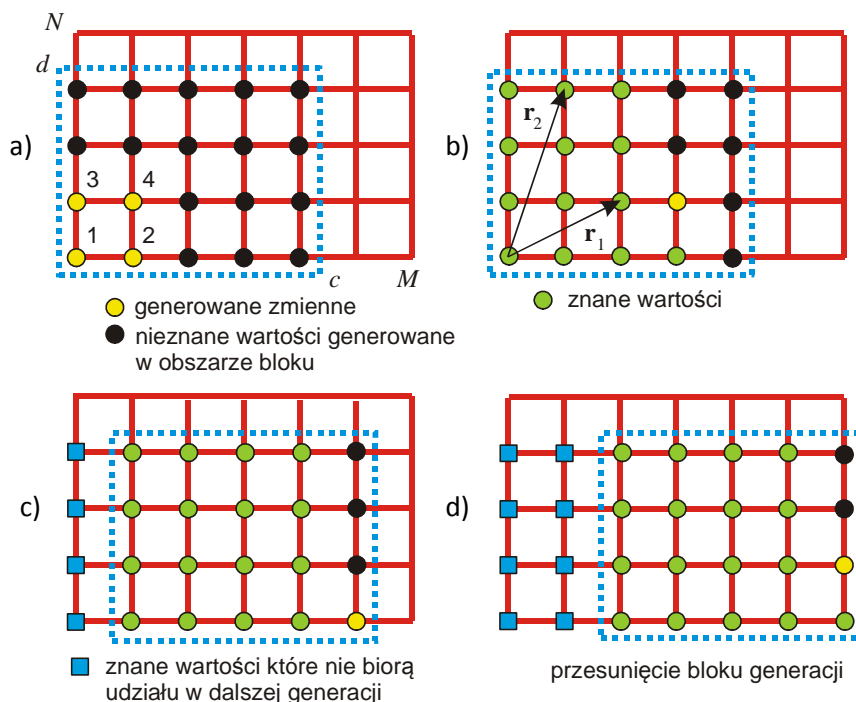
$$t = \frac{s \cdot \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi} \cdot \operatorname{erf}(s)} \quad (5.18)$$

Ostatecznie, podstawienie wyprowadzonych wartości opisujących ucięty rozkład normalny, prowadzi do otrzymania wzoru na łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa uciętego rozkładu Gaussa w postaci

$$f_t(\mathbf{X}_u / \mathbf{X}_k) = (1 - t)^{\frac{m}{2}} (\det \mathbf{K}_c)^{\frac{1}{2}} (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-t)} (\mathbf{X}_u - \bar{\mathbf{X}}_c)^T \mathbf{K}_c^{-1} (\mathbf{X}_u - \bar{\mathbf{X}}_c)\right) \quad (5.19)$$

Algorytm generacyjny wykorzystuje w swoim działaniu bazowe pole zmiennych losowych, opisanych na regularnej lub nieregularnej siatce.

Algorytm ten postępuje zgodnie ze schematem przedstawionym obrazowo na rys. 5.1.



Rys. 5.1. Proces symulacji pola – nadawanie wartości punktom pola za pomocą techniki przesuwania bloku generacji [Górski, 2006].

W procesie generacyjnym **pole bazowe** o zdefiniowanym rozmiarze, zwane także **blokiem generacji**, jest sukcesywnie przesuwane w taki sposób, aby pokryć ostatecznie cały obszar generowanego pola ($M \times N$), jak pokazano na rys. 5.1. Rozmiar pola bazowego ($c \times d$) wynika z przyjętego algorytmu obliczeń (na rysunku $c \times d = 5 \times 4 = 20$). Zgodnie z przyjętą

metodą generacji, maksymalny wymiar macierzy kowariancji zdefiniowany jest przez wymiar pola bazowego. Nieznane wartości zmiennych generowane są przy założeniu, że znane są jedynie dane w punktach obszaru pola bazowego. Generacja przebiega w trzech etapach.

W pierwszym etapie działania algorytmu generowane są cztery punkty wyjściowe (rys. 5.1.a). Następnie, w drugim etapie generowane są kolejne punkty z pola bazowego (rys. 5.1.b), w nawiązaniu do czterech punktów wyjściowych. Kolejny etap działania powtarzany jest wielokrotnie. Pole bazowe jest przesuwane i generowane są kolejne pojedyncze punkty pola (rys. 5.1.c oraz rys. 5.1.d). Zauważyć należy, iż dla każdego kolejnego punktu pola i ($5 \leq i \leq (c \times d)$) jedyną nieznaną zmienną jest X_i , podczas gdy wszystkie wcześniej wygenerowane zmienne $X_1 \div X_{i-1}$ są już znane. Generacja pojedynczych zmiennych losowych znacznie upraszcza wzory traktujące o rozdziale wektora losowego oraz macierzy kowariancji na elementy znane i nieznanne – należy w nich wówczas podstawić kolejno: $m = i$, $n = 1$ oraz $p = i - 1$. Dokonana w ten sposób redukcja algorytmu do jednego wymiaru ($\mathbf{K}_c \equiv K_c$, $\bar{\mathbf{X}}_c \equiv \bar{X}_c$) w znaczny sposób przyspiesza obliczenia.

W procesie generacyjnym wykonywane są kolejno następujące operacje [Górski, 2006]:

1. Określenie lokalnej macierzy kowariancyjnej $\mathbf{K}_{(i \times i)}$, znanego wektora zmiennych losowych $\mathbf{X}_{k((i-1) \times 1)}$ oraz wektora wartości oczekiwanych $\bar{\mathbf{X}}_{(i \times 1)}$.

2. Obliczenie warunkowej wariancji K_c i wartości średniej \bar{X}_c

$$K_c = K_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \quad (5.20)$$

$$\text{oraz } \bar{X}_c = \bar{X}_u + \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} (\mathbf{X}_k - \bar{\mathbf{X}}_k) \quad (5.21)$$

3. Generacja zmiennej losowej X_i , dokonywana za pomocą równości

$$X_i = a_i + (b_i - a_i) \cdot u_i \quad (5.22)$$

4. Generacja zmiennej losowej u z rozkładu równomiernego $u \in [0; 1]$ i wyznaczenie

$$f_{\max} = u \cdot \Phi, \quad \Phi = (1 - t)^{-(i-1)/2} (2\pi \cdot K_c)^{-1/2} \quad (5.23); (5.24)$$

5. Obliczenie funkcji gęstości prawdopodobieństwa $f(X_i)$

$$f(X_i) = \Phi \cdot \exp\left(-\frac{1}{2(1-t)} \cdot J(X_i)\right) \quad (5.25)$$

$$\text{gdzie } J(X_i) = \frac{(X_i - \bar{X}_c)^2}{K_c} \quad (5.26)$$

6. Sprawdzenie warunku generacji zmiennej losowej:

$$f_{\max} \leq f(X_i) \quad (5.27)$$

Jeżeli powyższy warunek jest spełniony, to wówczas wygenerowana zmienna losowa X_i jest akceptowana. W przeciwnym wypadku, obliczenia wykonywane są ponownie, począwszy od punktu 3 podanego powyżej algorytmu. Z działaniem tym **związana jest nazwa metody (algorytmu) – warunkowej akceptacji** (gdy warunek punktu 6 jest spełniony) i **odrzućcia** (gdy warunek punktu 6 nie jest spełniony).

Ważną rolę w powyższym procesie generacyjnym spełnia przedział (a_i, b_i) , definiowany dla każdego punktu z osobna i ograniczający wygenerowane wartości zmiennych losowych. Przedział jest powiązany z odchyleniem standardowym zdefiniowanym w i – tym punkcie

$$\left(\int_{a_i}^{b_i} (x_i - \bar{x}_i)^2 f(x_i) dx_i \right)^{1/2} = \sigma_i \quad (5.28)$$

Wszechstronne testy działania, skuteczności i optymalności zaproponowanego algorytmu, przedsięwzięte i przedstawione przykładowo w pracy [Górski, 2006] udowodniły poprawność i efektywność jego działania.

Podsumowując, najważniejszym czynnikiem, zdecydowanie wyróżniającym generację pól losowych za pomocą metody warunkowej jest możliwość generacji pól losowych opisanych **dowolną funkcją korelacyjną** (jednorodną lub niejednorodną, o silnej lub słabej korelacji). Dodatkowo, wprowadzenie **obwiedni pola** pozwala na realizację nawet najbardziej skomplikowanych warunków brzegowych (warunków podporowych), zakładanych odpowiednio do wymagań rozpatrywanych konstrukcji inżynierskich. Obwiednia pola umożliwia także generację pól opisanych funkcjami korelacyjnymi, zdefiniowanymi na podstawie danych doświadczalnych, np. rzeczywistych, pomierzonych imperfekcji geometrycznych konstrukcji (o których mowa jest w rozdziale 4.2 niniejszej rozprawy). Warto także zauważyć, iż pomimo faktu, że metoda dotyczy jedynie symetrycznych pól gaussowskich, to przyjęcie w obliczeniach obwiedni pola losowego będących niesymetrycznymi umożliwia w następstwie generację niesymetrycznych pól losowych. Pola te mają ogromne znaczenie w wielu zagadnieniach inżynierskich.

Wprowadzenie generacji pola losowego za pomocą ograniczonego pola bazowego umożliwia generację pól o praktycznie dowolnych rozmiarach. Co bardziej istotne, blok generacyjny w postaci pola bazowego pozwala na generację pól opisanych na powierzchniach cylindrycznych (pole losowe ma charakter obszaru zamkniętego). Właśnie tę cechę generacji wskazuje się jako najbardziej istotną oraz unikatową w stosunku do innych metod generacji.

Warunkową generację pól losowych wykorzystano między innymi w analizie stalowych zbiorników na paliwa płynne [Górski i Mikulski, 2008], silosów [Gołota i inni, 2011], przy okazji badania efektu skali w elementach betonowych [Tejchman i inni, 2009], w analizie zachowania się materiałów granulowanych [Tejchman i Górski, 2009], przy szacowaniu nośności fundamentów żelbetowych [Tejchman i Górski, 2011] oraz przy symulacji trzęsień ziemi [Jankowski, 2002; Jankowski, 2006].

Generację losowych pól przestrzennych wykorzystano między innymi w analizach wykonanych w pracy [Przewłócki i Górski, 2001].

5.2. Generacja pól losowych za pomocą rozwinięcia Karhunen – Loève’a

Zdecydowana większość programów generujących pola losowe wykorzystuje rozwinięcie Karhunen – Loève’a. Poniżej przedstawiono uproszczoną wersję tejże metody, pozwalającą na jej optymalne wykorzystanie [Ghanem i Spanos, 1991].

Głównym celem stosowania rozwinięcia Karhunen – Loève’a [Karhunen, 1947; Loève, 1948] jest generowanie (rozwijanie) wstępnych wartości pola losowego, o podanych zależnościach korelacyjnych, w sposób obliczeniowo efektywny. Rozwinięcie to opiera się na technice przestrzennej dekompozycji funkcji kowariancyjnej danego pola losowego drugiego rzędu.

Ortogonalne rozwinięcie Karhunen – Loève’a stosuje się do wyznaczania wartości pól losowych, które opisać można w postaci

$$w = \bar{w} \cdot (1 + a) \quad (5.29)$$

gdzie w reprezentuje dowolną zmienną losową (np. imperfekcję geometryczną lub materiałową), \bar{w} jest wartością średnią tejże zmiennej, natomiast a opisuje wahanie się wartości tej zmiennej względem jej średniej. Twierdzenie Karhunen z 1947 roku postuluje (porównaj np. [Adler, 1981; Sobczyk, 1991; Anders, 2000]), że jeżeli pole losowe drugiego rzędu, o zerowej wartości średniej jest zdefiniowane funkcją korelacyjną $C_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ to wtedy

$$a(\mathbf{x}, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_m} \cdot \xi_m(\omega) \cdot \phi_m(\mathbf{x}) \quad (5.30)$$

$$\text{oraz } C_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \cdot \phi_m(\mathbf{x}_1) \cdot \phi_m(\mathbf{x}_2) \quad (5.31)$$

gdzie

$$\lambda_m \phi_m(\mathbf{x}_1) = \int_V C_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cdot \phi_m(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (5.32)$$

przy czym w powyższych równaniach ϕ_1, ϕ_2, \dots są kolejnymi funkcjami własnymi dla $C_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, tworzącymi ortogonalną bazę $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn}$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$, następnie $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ są odpowiadającymi wartościami własnymi tychże funkcji ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > 0$), natomiast funkcje ξ_1, ξ_2, \dots , można zdefiniować wzorem

$$\xi_m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \int_V a(\mathbf{x}, \omega) \cdot \phi_m(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.33)$$

Powyższe równania wskazują, iż rozwinięcie Karhunen – Loève’a jest de facto rozwinięciem szeregu Fouriera fluktuacji zmiennej losowej a w ortogonalnej bazie $(\phi_m, \phi_n) = \delta_{mn}$, tworzonej przez wspomniane powyżej funkcje własne funkcji korelacyjnej $C_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

Rozwinięcie Karhunen – Loève’a pozwala przede wszystkim na generację gaussowskich pól losowych $a(\mathbf{x}, \omega)$. Zmienne losowe ξ_1, ξ_2, \dots są wówczas także przyjmowane jako zmienne losowe o rozkładzie normalnym. W takim podejściu jest jedną z najbardziej efektywnych

metod dyskretyzacji pól losowych, wymagającej bardzo małej liczby zmiennych losowych aby móc przedstawić za ich pomocą pole losowe przy zachowaniu dobrego poziomu dokładności odwzorowania [Zhang i Ellingwood, 1995].

W celu uproszczenia obliczeń, w dalszej części rozdziału przyjmuje się, że pole opisane jest następującą **jednorodną funkcją korelacyjną** [Anders, 2000]

$$C_a(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \sigma_a^2 \left(-\frac{|x_2 - x_1|}{b_x} - \frac{|y_2 - y_1|}{b_y} \right) \quad (5.34)$$

gdzie: σ jest odchyleniem standardowym a , parametry b_x oraz b_y definiują zasięg korelacji.

Należy podkreślić, że tak zdefiniowana funkcja **nie jest** funkcją izotropową. Ponadto, w przypadku gdy $b_x = b_y = b$, a położenie punktu opisane jest wektorem jednostkowym (n_x, n_y) , wzór ten powinno się zastąpić związkiem [Anders, 2000]

$$C_a(s) = \sigma_a^2 \left(-\frac{|s|}{b} (|n_x| + |n_y|) \right) \quad (5.35)$$

gdzie s jest współrzędną lokalizacyjną punktu.

Przyjęcie jednorodnej funkcji korelacyjnej C_a pozwala na uzyskanie łatwych w realizacji numerycznej, zamkniętych wzorów. Zgodnie ze związkami Wienera – Khinchine'a [Vanmarcke, 1983] **gęstość widmowa** jednorodnej funkcji korelacyjnej C_a można przedstawić równością

$$S(v_x, v_y, v_z) = \sigma_a^2 \frac{b_x b_y b_z}{\pi^3 (b_x^2 v_x^2 + 1)(b_y^2 v_y^2 + 1)(b_z^2 v_z^2 + 1)} \quad (5.36)$$

Funkcja korelacyjna C_a pozwala na rozwiązanie równania w obszarze prostokątnym

$$A = \left[-\frac{l_x}{2}, \frac{l_x}{2} \right] \times \left[-\frac{l_y}{2}, \frac{l_y}{2} \right] \quad (5.37)$$

Równanie prowadzące do wyznaczenia funkcji $\lambda_m \phi_m(\mathbf{x}_1)$ można wówczas w obszarze A zapisać w postaci

$$\lambda_m \phi_m(\mathbf{x}_1) = \int_V C_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \cdot \phi_m(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_2 = \int_{-l_x/2}^{l_x/2} \int_{-l_y/2}^{l_y/2} C_a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \phi_m(\mathbf{x}_2) dx_2 dy_2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.38)$$

gdzie $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ oraz $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$.

Ponadto przyjmując w powyższym równaniu, że

$$\phi_m(x, y) = \phi_i^x(x) \phi_j^y(y) \quad (5.39)$$

$$\text{oraz } \lambda_m = \lambda_i^x \lambda_j^y, \quad m, i, j = 1, 2, \dots \quad (5.40)$$

problem dwuwymiarowy można sprowadzić do **zagadnienia jednowymiarowego**:

$$\int_{-l_x/2}^{l_x/2} \exp\left(-\frac{|t_2 - t_1|}{b_s}\right) \phi_i^s(t_2) dt_2 = \lambda_i^s \phi_i^s(t_1), \quad s = x, y, \dots \quad i = 1, 2, \dots \quad (5.41)$$

Rozwiązanie powyższego równania można przedstawić następująco [Ghanem i Spanos, 1991]:

$$\phi_i^s = \left[\frac{l_s}{2} \left(1 + \frac{\sin(w_i^s l_s)}{w_i^s l_s} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \cos(w_i^s t), \quad t \in [-l_s / 2, l_s / 2], \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (5.42)$$

$$\phi_i^s = \left[\frac{l_s}{2} \left(1 - \frac{\sin(w_i^s l_s)}{w_i^s l_s} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \cos(w_i^s t), \quad t \in [-l_s / 2, l_s / 2], \quad i = 1, 3, 5, \dots \quad (5.43)$$

$$\lambda_i^s = \frac{2b_s^2}{1 + b_s^2 (w_i^s)^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.44)$$

gdzie parametry w_i^s , $i = 1, 2, 3, \dots$ otrzymuje się rozwiązując równanie

$$\left(\tan w_i^s \frac{l_s}{2} + w_i^s b_s \right) \left(\tan w_i^s \frac{l_s}{2} - \frac{1}{w_i^s b_s} \right) = 0 \quad (5.45)$$

W przypadku gdy $l_x = l_y$ oraz $b_x = b_y$ wzór (5.39) przyjmie postać

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\phi_i^x(x) \phi_j^x(y) + \phi_j^x(x) \phi_i^x(y) \right] \quad (5.46)$$

Bardzo interesującą propozycją jest także podjęta próba połączenia ortogonalnego rozwinięcia Karhunen – Loève'a z falkami Haara, którą znaleźć można w pracy [Korol, 2012].

5.3. Przykład symulacji pola losowego za pomocą przedstawionych technik generacji

Wykorzystując przedstawione w rozdziałach poprzedzających wzory (dla symulacji metodą warunkowej akceptacji i odrzucania w rozdziale 5.1 oraz dla symulacji metodą rozwinięcia Karhunen – Loève'a w rozdziale 5.2) zbudowano program własny w języku Fortran 90.

Poniżej przedstawiony zostanie przykład symulacji pola losowego, wygenerowanego w programie własnym, mający na celu nie tylko sprawdzenie działania utworzonego programu, ale jednocześnie dokonujący porównania wyników obu technik generacji.

Do obliczeń przyjęto pole opisane równaniem

$$C_a(x_2 - x_1, y_2 - y_1) = \sigma_a^2 \left(-\frac{|x_2 - x_1|}{b_x} - \frac{|y_2 - y_1|}{b_y} \right) \quad (5.47)$$

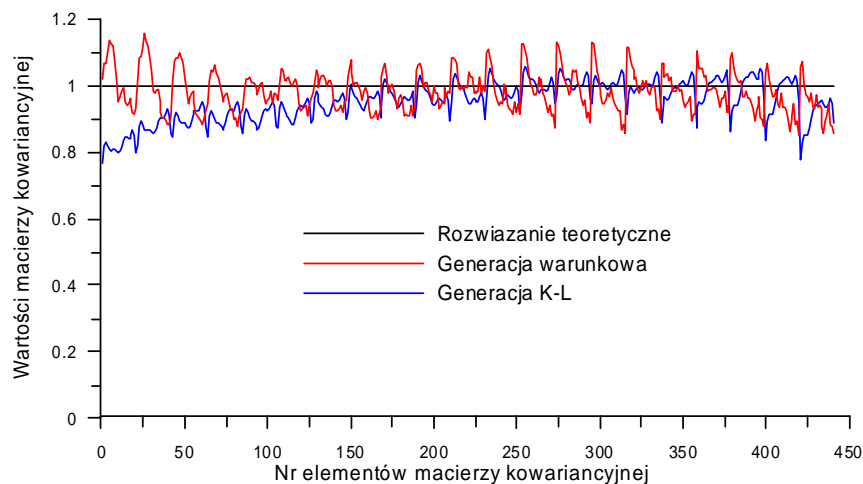
podstawiając do równania: $l_x = l_y = 1,0$ m, $b_x = b_y = 1,0$ m, $\sigma_a = 1,0$ m oraz przyjmując zakładany podział pola losowego na kolejno 20 i 40 elementów.

Wymiary elementów siatki pola losowego wynoszą zatem odpowiednio $\Delta_x = \Delta_y = 1,0$ m / 20 = 0,05 m oraz $\Delta_x = \Delta_y = 1,0$ m / 40 = 0,025 m. Rozmiar macierzy kowariancyjnej dla poszczególnych przypadków wynosi: 441×441 oraz 1681×1681 elementów. Przyjęta liczba wyrazów rozwinięcia szeregu wynosi: $m = 4$.

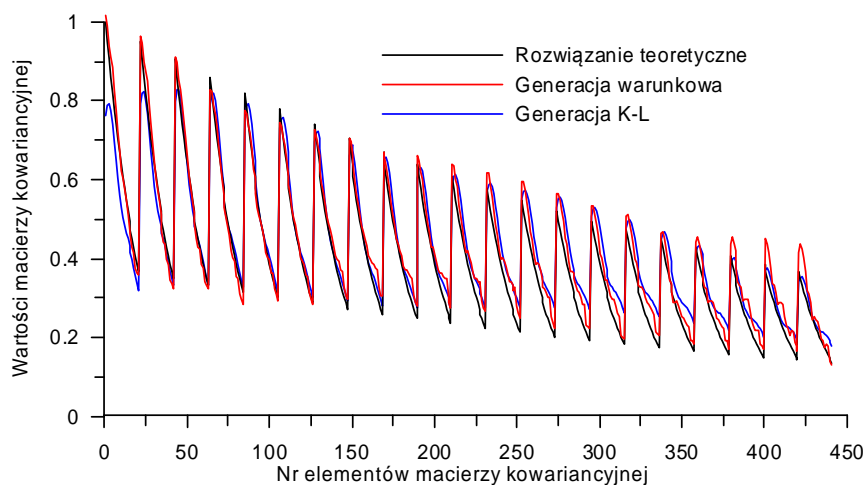
Wygenerowano 500 realizacji dla każdej z siatek elementów.

Podobne obliczenia, zakładając te same parametry liczbowe generowanego pola, wykonano stosując metodę warunkowej akceptacji i odrzucania (oznaczaną w przykładzie nazwą **generacji warunkowej**). Następnie dokonano porównania wyników dla obu generacji.

Na rys. 5.2. przedstawiono graficzne porównanie wartości elementów diagonalnych kowariancyjnej macierzy teoretycznej dla wariantu liczby 441×441 elementów macierzy z rezultatami generacji obu metod, a na rys. 5.3. przedstawiono szczegółowo porównanie wartości elementów pierwszego wiersza tejże macierzy.

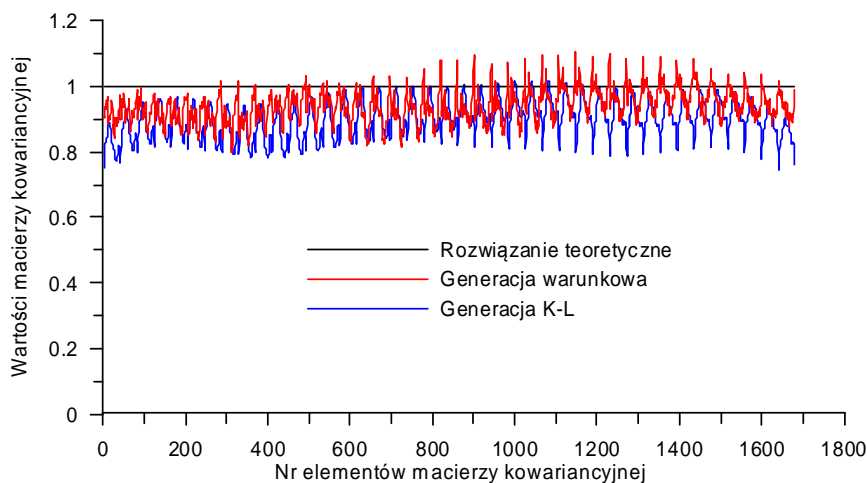


Rys. 5.2. Porównanie wartości elementów diagonalnych macierzy kowariancyjnej (wariant dla liczby 441×441 elementów macierzy).

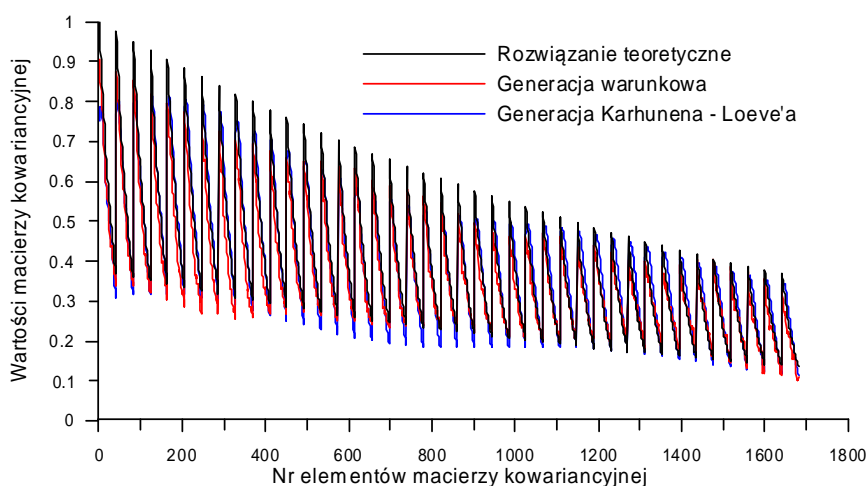


Rys.5.3. Porównanie wartości elementów pierwszego wiersza macierzy kowariancyjnej (wariant dla liczby 441×441 elementów macierzy).

Na rys. 5.4. przedstawiono natomiast graficzne porównanie wartości elementów diagonalnych kowariancyjnej macierzy teoretycznej dla wariantu liczby 1681×1681 elementów macierzy z rezultatami generacji obu metod, a na rys. 5.5. przedstawiono szczegółowo porównanie wartości elementów pierwszego wiersza tejże macierzy.



Rys. 5.4. Porównanie wartości elementów diagonalnych macierzy kowariancyjnej (wariant dla liczby 1681×1681 elementów macierzy).



Rys.5.5. Porównanie wartości elementów pierwszego wiersza macierzy kowariancyjnej (wariant dla liczby 1681×1681 elementów macierzy).

Dodatkowo, obliczono **globalny błąd macierzy kowariancyjnej**, stosując do tego celu równość [Górski, 2006]

$$G_{bl} = \frac{(\|\mathbf{K}\| - \|\hat{\mathbf{K}}\|)}{(\|\mathbf{K}\|)} \times 100\% \quad (5.48)$$

gdzie $\hat{\mathbf{K}}$ jest estymatorem macierzy kowariancyjnej, a $\hat{\mathbf{w}}$ jest estymatorem wektora wartości oczekiwanej, gdzie obie wartości wyrażane są wzorami

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{1}{NR-1} \sum_{i=1}^{NR} (\mathbf{w}_i - \hat{\mathbf{w}})(\mathbf{w}_i - \hat{\mathbf{w}})^T \quad \text{oraz} \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{NR} \sum_{i=1}^{NR} \mathbf{w}_i \quad (5.49);(5.50)$$

gdzie wartość NR oznacza liczbę realizacji, a symbol $\|\cdot\|$ oznacza normę macierzy.

W przypadku pola 20×20 elementów, globalny błąd macierzy kowariancyjnych $\hat{\mathbf{K}}$ uzyskanych z obu typów przedstawionych generacji, odniesiony w stosunku do macierzy teoretycznej \mathbf{K} wynosi odpowiednio 1,76% dla generacji warunkowej oraz 0,08% dla generacji Karhunenena – Loève'a.

Błędy w estymacji wariancji wynoszą odpowiednio 1,59% oraz 11,37%.

W przypadku pola 40×40 elementów, błędy te wynoszą odpowiednio 9,39% i 0,06% dla globalnych macierzy kowariancyjnych oraz odpowiednio 5,94% i 9,01% dla błędów wariancji.

Porównując błędy generacji pól, wykonanych obiema metodami, należy stwierdzić, iż obie metody generacji charakteryzują błędy o podobnych rzędach. Czasy generacji są także bardzo podobne, dlatego iż w obu metodach nie są wyznaczane pełne globalne macierze kowariancyjne, nie są też wykonywane żadne czasochłonne obliczenia, jak przykładowo poszukiwanie wartości własnych czy też odwracanie pełnych macierzy.

Jednakże metoda generacji warunkowej ma bardziej ogólny charakter, za jej pomocą można realizować generacje pól charakterystycznych dla zagadnień inżynierskich. Można zatem stanowczo stwierdzić, iż dla zadań sformułowanych w niniejszej pracy, nawiązujących ściśle do nieliniowych modeli numerycznych rzeczywistych konstrukcji inżynierskich, **bardziej zasadne wydaje się użycie metody generacji warunkowej akceptacji i odrzucania** i właśnie z takim założeniem przystąpi się do analiz autorskich wykonywanych w rozdziale następującym, w szczególności w rozdziale 6.2. niniejszej rozprawy, gdyż użyte tam dwuwymiarowe pole losowe zostało zasymulowane techniką generacji warunkowej.

Rozdział 6

Przykłady zastosowań podejścia probabilistycznego w rzeczywistych problemach inżynierskich

6.1. Proste modele prętowe

Jak podkreślano we wcześniejszych rozdziałach poświęconych procedurze autorskiej, powstawaniu programu **RSM-Win** przyświecała idea wytworzenia wygodnego i łatwego w obsłudze (nawet na poziomie dydaktycznym) narzędzia obliczeniowego, służącego do aproksymacji powierzchni odpowiedzi dla zadań inżynierskich. Założono, iż narzędzie to będzie bezpośrednio sprzężone z algorytmami poszukiwania wskaźników niezawodności dla skalkulowanej uprzednio powierzchni odpowiedzi, a w dalszej kolejności także prawdopodobieństwa awarii konstrukcji, co w zupełności pokrywa się z celem postawionym przed niniejszą rozprawą.

Zdecydowano się na stworzenie programu własnego (zamiast korzystania z dostępnych programów komercyjnych), aby móc w przyszłości rozbudowywać program wedle własnego uznania, w celu służącym wyłącznie jasno sprecyzowanej grupie zadań. Postawiono także wymóg możliwości przeprowadzania późniejszych modyfikacji jądra programu, przy których należało będzie zachować pełną świadomość działania programu w obecnej postaci oraz utrzymać pełną kontrolę nad zapisanymi procedurami, jakie wybierze się dla uzyskania określonej grupy wyników.

Zauważono bowiem, iż dysponując wykonanym własnoręcznie programem można dużo lepiej wejrzieć w uzyskiwany progres czasowy i obliczeniowy jego działania, a także obserwować rozwiązania towarzyszące metodologii powierzchni odpowiedzi. Do tych ostatnich zaliczyć można chociażby wrażliwość danej konstrukcji – nie tylko definiowaną jako czułość wynikowej powierzchni odpowiedzi na zmiany składowych wektora zmiennych losowych zadania, ale także jako wrażliwość na tzw. niepewność modelową lub niepewność obliczeniową modelu, jakie mogłyby się pojawić (lub nie zostać zauważone) przy bezkrytycznym posługiwaniu się programami komercyjnymi.

Dodatkowo, wykonanie programu autorskiego ma nad programem komercyjnym znaczną przewagę ekonomiczną. Wszelkie wymienione powyżej modyfikacje, zmiany i aktualizacje odbywają się jedynie nakładem pracy autora, ponadto są planowane i przemyślane jedynie przez niego. Nie wymagają one ani zmiany uzyskanej licencji komercyjnej (zmiany te są często dodatkowo płatne), ani też zdawania się jedynie na te modyfikacje i aktualizacje, jakie dostawca oprogramowania komercyjnego wykona w danej wersji.

Stworzenie własnej procedury obliczeniowej wymaga jednak wykonania dodatkowego szeregu testów numerycznych, mającymi między innymi dokonać sprawdzenia sprawności (nakładu czasowego) obliczeń, szybkości uzyskiwania zbieżności dla zaimplementowanych algorytmów oraz weryfikacji poprawności i adekwatności rezultatów, jakie można daną procedurą uzyskać. Przeprowadzono w tym celu szereg prostych analiz, wykazujących całkowitą sprawność i prawidłowość działania zaproponowanego programu autorskiego **RSM–Win**.

Testy wykonano na zróżnicowanych przykładach, pokrywających większość pól planowanego „poruszania się” programu, zarówno w odniesieniu do algorytmów szacowania bezpieczeństwa konstrukcji na poziomie drugim, jak i do tematyki przykładów, jakie postawiono przed niniejszą rozprawą, czyli modelami geometrycznie i materiałowo nieliniowymi. Problemy testowe dobrano z szerokiej bazy przykładów dostępnych w literaturze światowej, w taki sposób, aby móc szybko i bez wątpliwości zweryfikować zgodność rozwiązania proponowanego przez program autorski z wynikami zaprezentowanymi w określonym przykładzie.

6.1.1. Dobór optymalnej powierzchni odpowiedzi do zadania początkowego

W pierwszej kolejności, najistotniejszym elementem rozwiązania wykonywanego za pomocą programu autorskiego **RSM–Win** jest poprawny dobór powierzchni odpowiedzi dla wymogów zadania. Dobór ten jest wykonywany za pomocą standardowej analizy regresji, która to technika jest stosunkowo często spotykana, zarówno w przykładach zaczerpniętych w literaturze, jak i w programach komercyjnych. Uzupełnieniem analizy regresji jest wykorzystanie analizy wariancji metodą tabelaryczną (ANOVA), która w przejrzysty sposób prezentuje wymagane miary dopasowania zarówno współczynników kierunkowych powierzchni, jak i całościowe miary dopasowania powierzchni odpowiedzi dla danego zadania.

Na podstawie pracy Treharne’a dokonano sprawdzenia poprawności i jakości matematycznej doboru powierzchni odpowiedzi do danych początkowych zadania [Treharne, 1991].

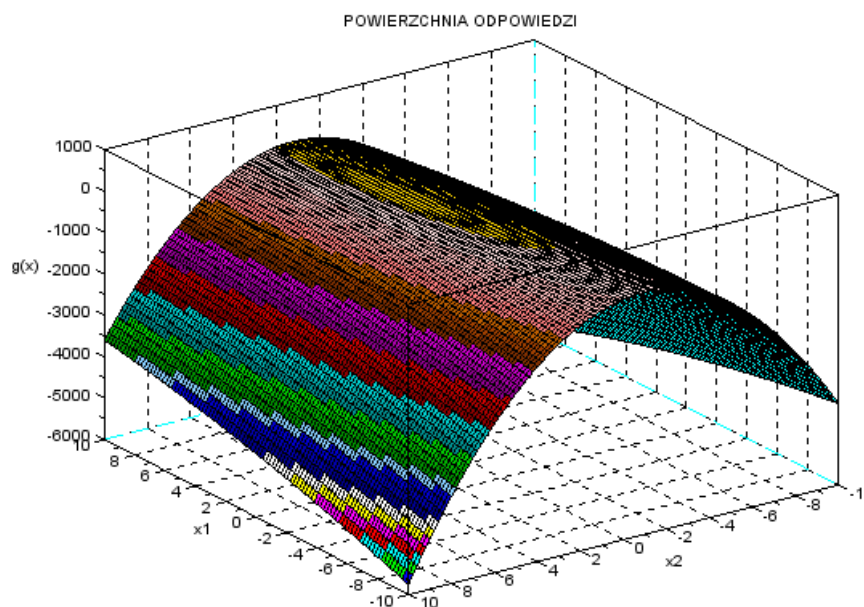
W pracy [Treharne, 1991] zdefiniowano wyjściową funkcję stanu granicznego jako powierzchnię rzędu drugiego, dwóch zmiennych niezależnych, wyrażoną wielomianem stopnia drugiego z członami interakcyjnymi

$$\begin{aligned}
 y(\mathbf{x}) &= \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^n \sum_{j=2}^n \beta_{ij} x_i x_j \\
 &= 81 + 8 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1^2 - 47 \cdot x_2^2 + 10 \cdot x_1 x_2
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

Powierzchnia ta przedstawiona została na rys. 6.1.

Ze względu na zawarte w pracy [Treharne, 1991] wyraźne wskazanie na przyjęty model aproksymacyjny powierzchni zdecydowano się nie pokazywać w niniejszej rozprawie aproksymacji wykonanych w początkowym stadium analizy „słabszymi” modelami (wielomianami stopnia pierwszego oraz stopnia drugiego bez członów interakcji). Analizy takie zostały sporządzone, aby potwierdzić możliwość aproksymacji w takim podejściu, jednakże dla zadania sformułowanego w ten sposób, iż punkty pomiarowe są rozłożone foremnie w przestrzeni realizacji (bez celowego rozmieszczania punktów obliczeniowych

w sąsiedztwie równania funkcji granicznej), każde z osiągniętych przybliżeń miało gorszy współczynnik całkowitego dopasowania niż najgorszy wariant dopasowania dla modelu wyrażonego wielomianem stopnia drugiego z członami interakcyjnymi, co zdaje się potwierdzać zarówno słuszność działania programu, jak i skłaniać się do ustalonej w literaturze drogi postępowania aproksymacji powierzchni odpowiedzi (przedstawionej chociażby w rozdziale 3.3. niniejszej rozprawy).



Rys. 6.1. Wyjściowa powierzchnia rzędu drugiego zadania, dla dwóch zmiennych niezależnych, wyrażona wielomianem stopnia drugiego z członami interakcyjnymi, o równaniu $\hat{y}(\mathbf{x}) = 81 + 8 \cdot x_1 + 14 \cdot x_2 - 2 \cdot x_1^2 - 47 \cdot x_2^2 + 10 \cdot x_1 x_2$, wg [Treharne, 1991].

Poniżej zostaną zatem przedstawione jedynie wyniki analizy wykonanej za pomocą „bogatszej” funkcji aproksymacyjnej, tzn. wielomianu stopnia drugiego z członami interakcyjnymi. Analizę podjęto w zależności od dwóch ustalonych wcześniej parametrów – ilości punktów obliczeniowych rozmieszczonych regularnie w dwuwymiarowej przestrzeni realizacji zadania oraz parametru rozrzedzenia siatki (odległości pomiędzy punktami obliczeniowymi mierzonej względem osi wymiaru przestrzeni probabilistycznej). Wyniki tejże analizy można znaleźć w Tabelicy 6.1.

W Tabelicy 6.1. zakreślono kolorem czerwonym pole prezentujące najgorsze dopasowanie powierzchni odpowiedzi do danych początkowych zadania, a kolorem zielonym zakreślono pole prezentujące najlepsze dopasowanie.

Na podstawie Tabelicy 6.1. zaobserwować można także, iż siatka prowadząca do najgorszej aproksymacji powierzchni odpowiedzi, spośród dwunastu zrealizowanych wariantów siatkowania, to siatka charakteryzująca się ilością punktów siatki na osi wymiaru równą 5 oraz odległością między punktami siatki na osi wymiaru wynoszącą jedną jednostkę wymiaru. Powierzchnia aproksymowana przy użyciu takiego rozłożenia punktów obliczeniowych zadania przedstawia się równaniem

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 61,489 + 6,677 \cdot x_1 + 18,148 \cdot x_2 - 1,996 \cdot x_1^2 - 47,224 \cdot x_2^2 + 10,143 \cdot x_1 x_2 \quad (6.2)$$

Dla tak wykonanej aproksymacji powierzchni odpowiedzi przywołać można wyciąg z tablicy analizy wariancji ANOVA (Tablica 6.2.), który wyraźnie potwierdza słabą jakość dopasowania. W tabeli **wytłuszczono** odpowiedni element (F_{BD}), który podkreśla, iż aproksymacja ta cechuje się bardzo dużym błędem (w tym przypadku $e_F = 0,1092437$). Całkowity błąd dopasowania określa średnią wartość błędu dopasowania obliczoną we wszystkich punktach obliczeniowych pomiędzy wartościami równania powierzchni zadania pochodzącymi z manualnego wprowadzenia na starcie pracy programu, a wartościami obliczonymi z równania powierzchni odpowiedzi, zaproponowanej po aproksymacji.

Tablica 6.1. Wyniki analizy sprawdzenia poprawności i jakości matematycznej doboru powierzchni odpowiedzi do danych początkowych zadania w zależności od ilości punktów obliczeniowych w dwuwymiarowej przestrzeni realizacji oraz parametru rozrzedzenia siatki.

ilość pkt. siatki na osi jednego wymiaru	odległość między punktami siatki na osi jednego wymiaru przestrzeni realizacji		
	100 (szeroki rozstaw)	10 (umiarkowany rozstaw)	1 (ciasny rozstaw)
5 (suma = 5^2 = 25)	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 81,083$ $+7,998 \cdot x_1 + 14,000 \cdot x_2$ $-2,000 \cdot x_1^2 - 47,000 \cdot x_2^2$ $+10,000 \cdot x_1x_2$	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 80,831$ $+7,968 \cdot x_1 + 14,040 \cdot x_2$ $-2,000 \cdot x_1^2 - 47,002 \cdot x_2^2$ $+10,001 \cdot x_1x_2$	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 61,489$ $+6,677 \cdot x_1 + 18,148 \cdot x_2$ $-1,996 \cdot x_1^2 - 47,224 \cdot x_2^2$ $+10,143 \cdot x_1x_2$
11 (suma = 11^2 = 121)	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 80,905$ $+8,001 \cdot x_1 + 13,999 \cdot x_2$ $-2,000 \cdot x_1^2 - 47,000 \cdot x_2^2$ $+10,000 \cdot x_1x_2$	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 81,385$ $+8,069 \cdot x_1 + 13,914 \cdot x_2$ $-1,995 \cdot x_1^2 - 46,996 \cdot x_2^2$ $+9,996 \cdot x_1x_2$	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 81,082$ $+8,048 \cdot x_1 + 13,972 \cdot x_2$ $-1,993 \cdot x_1^2 - 46,998 \cdot x_2^2$ $+10,000 \cdot x_1x_2$
25 (suma = 25^2 = 625)	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 80,996$ $+7,998 \cdot x_1 + 14,000 \cdot x_2$ $-2,000 \cdot x_1^2 - 47,000 \cdot x_2^2$ $+10,000 \cdot x_1x_2$	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 81,007$ $+8,000 \cdot x_1 + 14,001 \cdot x_2$ $-2,000 \cdot x_1^2 - 47,000 \cdot x_2^2$ $+10,000 \cdot x_1x_2$	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 81,005$ $+8,001 \cdot x_1 + 14,000 \cdot x_2$ $-2,000 \cdot x_1^2 - 47,000 \cdot x_2^2$ $+10,000 \cdot x_1x_2$
101 (suma = 101^2 = 10201)	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 81,007$ $+8,000 \cdot x_1 + 14,000 \cdot x_2$ $-2,000 \cdot x_1^2 - 47,000 \cdot x_2^2$ $+10,000 \cdot x_1x_2$	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 81,002$ $+8,000 \cdot x_1 + 14,000 \cdot x_2$ $-2,000 \cdot x_1^2 - 47,000 \cdot x_2^2$ $+10,000 \cdot x_1x_2$	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 80,999$ $+8,000 \cdot x_1 + 14,000 \cdot x_2$ $-2,000 \cdot x_1^2 - 47,000 \cdot x_2^2$ $+10,000 \cdot x_1x_2$

Natomiast, siatka prowadząca do najlepszej aproksymacji powierzchni odpowiedzi, spośród zrealizowanych wariantów siatkowania, to siatka charakteryzująca się ilością punktów siatki na osi wymiaru równą 101 oraz odległością między punktami siatki na osi wymiaru wynoszącą jedną jednostkę wymiaru. Powierzchnia aproksymowana przy użyciu takiego rozłożenia punktów obliczeniowych zadania przedstawia się równaniem

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 80.999 + 8.000 \cdot x_1 + 14.000 \cdot x_2 - 2.000 \cdot x_1^2 - 47.000 \cdot x_2^2 + 10.000 \cdot x_1x_2 \quad (6.3)$$

Dla tak wykonanej aproksymacji powierzchni odpowiedzi ponownie przywołać można wyciąg z tablicy analizy wariancji ANOVA (Tablica 6.3.), który tym razem wyraźnie potwierdza doskonałą jakość dopasowania. W tabeli ponownie **wytłuszczono** element (F_{BD}), wskazujący na pomijalnie mały błąd aproksymacji (w tym przypadku $e_F = 0,00009447$).

Tablica 6.2. Wyciąg z tablicy analizy wariancji ANOVA dla powierzchni odpowiedzi aproksymowanej przy użyciu siatkowania dwuwymiarowego z liczbą 5 punktów obliczeniowych na osi pojedynczego wymiaru oraz odległością między punktami siatki na osi wymiaru wynoszącą jednostkę. Wytluszczone całkowity współczynnik dopasowania (F_{BD}).

TABELA ANALIZY WARIANCJI					
ZRODŁO	SS	SK	SSK	FIT-RATIO	WSPOLCZYNNIK
TOTAL	25	0.2587361E+09	0.1034945E+08		
WEDLUG B0	1	0.2568103E+09	0.2568103E+09	0.2408807E+00	0.6148866E+02
WEDLUG B1	1	0.1119582E+00	0.1119582E+00	0.1653625E+00	0.6677100E+01
WEDLUG B2	1	0.3369305E+00	0.3369305E+00	0.2285681E+00	0.1814807E+02
WEDLUG B11	1	0.1089826E+01	0.1089826E+01	0.1795500E-02	-0.1996409E+01
WEDLUG B22	1	0.6098007E+03	0.6098007E+03	0.4748198E-02	-0.4722423E+02
WEDLUG B12	1	0.4018840E+02	0.4018840E+02	0.1410714E-01	0.1014309E+02
REZYDUUM	19	0.6406903E+00	0.3372054E-01		
BRAK DOPAS.	19	0.6406903E+00	0.3372054E-01	0.1092437E+00	

Tablica 6.3. Wyciąg z tablicy analizy wariancji ANOVA dla powierzchni odpowiedzi aproksymowanej przy użyciu siatkowania dwuwymiarowego z liczbą 101 punktów obliczeniowych na osi pojedynczego wymiaru oraz odległością między punktami siatki na osi wymiaru wynoszącą jednostkę. Wytluszczone całkowity współczynnik dopasowania (F_{BD}).

TABELA ANALIZY WARIANCJI					
ZRODŁO	SS	SK	SSK	FIT-RATIO	WSPOLCZYNNIK
TOTAL	10201	0.1051992E+12	0.1031263E+08		
WEDLUG B0	1	0.1046648E+12	0.1046648E+12	0.1555556E-04	0.8099874E+02
WEDLUG B1	1	0.3108514E+02	0.3108514E+02	0.2703019E-03	0.8002163E+01
WEDLUG B2	1	0.4217620E+02	0.4217620E+02	0.5714253E-05	0.1400008E+02
WEDLUG B11	1	0.2386025E+03	0.2386025E+03	0.2224505E-03	-0.2000445E+01
WEDLUG B22	1	0.1301443E+06	0.1301443E+06	0.9787138E-05	-0.4700046E+02
WEDLUG B12	1	0.7391515E+04	0.7391515E+04	0.4299982E-04	0.1000043E+02
REZYDUUM	10195	0.5112657E+03	0.5014867E-01		
BRAK DOPAS.	10195	0.5112657E+03	0.5014867E-01	0.9446820E-04	

Uzyskane rezultaty są w uznaniu autora potwierdzeniem poprawności działania programu. Dla regularnego ułożenia punktów obliczeniowych siatki na planie kwadratu (co nie jest rozwiązaniem optymalnym, ale bardzo często wykorzystywanym w praktyce inżynierskiej) rzeczywiście powinno się uzyskiwać najgorsze rezultaty, jeśli założy się zbyt mało punktów obliczeniowych oraz nie zapewni się im należytego rozgęszczenia. Zauważyć też można, że taka sama liczba punktów założonych w szerszym rozstawie powoduje wzrost dokładności aproksymacji powierzchni. W przypadku średniego lub dużego pola rozmieszczenia większej ilości punktów obliczeniowych względem osi pojedynczego wymiaru przestrzeni realizacji można zauważyć jeszcze większą poprawę aproksymacji, w zupełności wystarczającą do szacowania późniejszych parametrów rozwiązania. Najdokładniejsze odwzorowanie uzyskuje się dla największej liczby punktów obliczeniowych na siatce, ale zaskakująco, wraz z przyrostem liczby punktów, poprawie aproksymacji sprzyja zmniejszanie się odległości między punktami siatki na osi pojedynczego wymiaru. Taki efekt jest wytłumaczalny ze względu na topografię powierzchni zadania. Krzywizna w obrębie szerokiego piku wierzchołkowego może być precyzyjnie aproksymowana tylko w przypadku zapewnienia dobrego obsadzenia jej punktami projektowymi. Zauważyć należy, iż dla powierzchni o innej topografii tendencja ta mogłaby być inna.

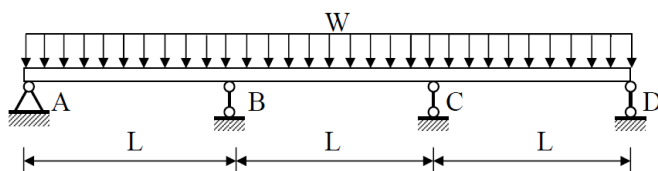
Zasugerowane powyżej wnioski powinny przyświecać doborowi punktów obliczeniowych (tudzież wyborowi próbek metody Monte Carlo) we wszystkich późniejszych działaniach w środowisku programu. Powyższą analizą potwierdzono obostrzenie, jakie nakłada się na proces poszukiwania powierzchni odpowiedzi, tj. wymóg ścisłej kontroli procesu aproksymacji, wpraw w świetle przyjęcia prawidłowego (wystarczającego) modelu aproksymacyjnego, a później właściwego doboru geometrycznego i ilościowego liczby obserwacji (próbek).

6.1.2. Kalkulacja i porównanie wskaźników niezawodności dla trójprzęsłowej belki ciągłej Lemaitre'a

W dalszej kolejności, bardzo ważnym elementem rozwiązania dokonywanego za pomocą programu autorskiego **RSM-Win** jest obliczanie wskaźników niezawodności problemu inżynierskiego, wykonywane przy użyciu wprowadzonych do pamięci procedury algorytmów. Program zakodowane ma trzy różne algorytmy wyszukiwania wskaźnika niezawodności: algorytm szukania wskaźnika Cornella (wskaźnika liniowego), możliwego do obliczenia tylko w przypadku wcześniejszego wyboru modelu wielomianu stopnia pierwszego jako bazy aproksymacyjnej oraz algorytmy szukania wskaźnika Hasofera – Linda (wskaźnika kwadratowego) i wskaźnika Hasofera – Linda – Rackwitz – Fiesslera (wskaźnika kwadratowego, iterowanego macierzowo), w przypadku wcześniejszego wyboru jako bazy aproksymacyjnej modelu wielomianu stopnia drugiego.

Na podstawie pracy [Lemaitre, 1986] dokonano sprawdzenia poprawności i zbieżności obliczania kwadratowych wskaźników niezawodności β_{HL} oraz β_{HLRF} .

W pracy [Lemaitre, 1986] zdefiniowano proste zadanie statycznie niewyznaczalnej trójprzęsłowej belki ciągłej, o schemacie przedstawionym na rys. 6.2.



Rys. 6.2. Statycznie niewyznaczalna trójprzęsłowa belka ciągła wg [Lemaitre, 1986].

Zmiennymi losowymi w tymże problemie inżynierskim są wartość obciążenia równomiernie rozłożonego $q = const$, moduł sprężystości Younga E oraz moment bezwładności przekroju poprzecznego J . Długość L pojedynczego przęsła belki jest stała i wynosi $L = 5$ m.

Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe zmiennych zadania, przyjęte wg pracy [Lemaitre, 1986], zostały zbiorczo zestawione w Tablicy 6.4.

Dla tak sformułowanego zadania metodami statycznymi można dokonać kalkulacji ugięcia maksymalnego, które wynosi $4,3125 \cdot q/EJ$.

Funkcją stanu granicznego jest kryterium stanu użytkowania, wyrażone jako zdefiniowany dopuszczalny poziom ugięć $w(l)$, ustalony jako wartość wynosząca $w(l)_{dop} = L/360$.

Funkcję stanu granicznego konstrukcji można więc zapisać jako

$$g(w, E, J) = \frac{5}{360} - 4,3125 \cdot \frac{q}{EJ} = 0,01388888 - 4,3125 \cdot \frac{q}{EJ} \quad (6.4)$$

Wyliczony w monografii kwadratowy wskaźnik niezawodności wyniósł $\beta = 3,1730$.

Tablica 6.4. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe zmiennych losowych zadania, przyjęte wg pracy [Lemaitre, 1986].

Wartość	Zmienna losowa	Wartość średnia	Odchylenie standardowe
q	x_1	$\mu_q = \mu_{x_1} = 10,0 \text{ kN/m}$	$\sigma_q = \sigma_{x_1} = 0,4 \text{ kN/m}$
E	x_2	$\mu_E = \mu_{x_2} = 20000000 \text{ kN/m}^2$	$\sigma_E = \sigma_{x_2} = 5000000 \text{ kN/m}^2$
J	x_3	$\mu_J = \mu_{x_3} = 0,0008 \text{ m}^4$	$\sigma_J = \sigma_{x_3} = 0,00015 \text{ m}^4$

Rozwiązanie programem autorskim nie wymaga w tym przypadku użycia modułu programu **RSM-Win** potrzebnego do aproksymacji powierzchni odpowiedzi konstrukcji. Jak można zauważyć, funkcja stanu granicznego ma w rozpatrywanym zadaniu postać wielomianu stopnia drugiego ze składnikami interakcyjnymi, a więc dokładnie taką samą, jaką proponowany wielomian aproksymacyjny. Można więc przyjąć, że dane wprowadzone do programu są tożsame z odpowiedzią konstrukcji.

Program autorski dostosowano do możliwości pojawienia się takiej sytuacji i zawarto w nim opcję rezygnacji z aproksymacji powierzchni na rzecz manualnego lub zewnętrznego wprowadzenia współczynników kierunkowych $(\beta_0, \beta_i, \beta_{ij})$ dla wielomianu modelowego.

Funkcję stanu granicznego przedstawić można zatem bezpośrednio w postaci proponowanej przez program autorski, jako wyrażenie

$$g(\mathbf{x}) = \hat{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i \neq j} \sum_{i=1}^n \beta_{ij} x_i x_j = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{33} x_3^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 \quad (6.5)$$

lub, podstawiając wartości liczbowe, jako

$$g(w, E, J) = 0,01388888 - 4,3125 \cdot \frac{q}{EJ} \Rightarrow 0,01388888 \cdot EJ - 4,3125 \cdot q \quad (6.6)$$

$$\Rightarrow g(\mathbf{x}) = \hat{g}(\mathbf{x}) = -4,3125 \cdot x_1 + 0,01388888 \cdot x_2 x_3$$

Dla powierzchni odpowiedzi zadanej tym wzorem, o tak wyznaczonym zbiorze współczynników kierunkowych wielomianu $(\beta_0, \beta_i, \beta_{ij} \Rightarrow \beta_1 = -4,3125; \beta_{23} = 0,01388888)$ przystąpić można do wyznaczania w programie autorskim kwadratowych wskaźników niezawodności β_{HL} oraz β_{HLRF} dla wyżej postawionego prostego problemu inżynierskiego.

Wykonując za pomocą autorskiego oprogramowania iteracyjną procedurę obliczania wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda otrzymuje się wynik $\beta_{HL} = 3,1805$.

Bardzo ciekawym elementem rozwiązania algorytmu Hasofera – Linda jest towarzyszące każdej iteracji wyznaczanie współczynników wrażliwości a_i , które są miarą zależności końcowego rozwiązania od poszczególnych zmiennych.

Im większa (co do wartości bezwzględnej) jest wartość współczynnika wrażliwości, tym bardziej zmiana danej zmiennej losowej będzie miała wyraźniejszy wpływ na zmienną całkowitą odpowiedzi. Współczynniki wrażliwości można bowiem rozumieć jako wektory kierunkowe (rozkłady na poszczególne osie przestrzeni realizacji \mathbf{x}) wektora łączącego punkt początkowy analizy (gdzie $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) z punktem projektowym zadania (miejszem kalkulacji wskaźnika niezawodności β). Co za tym idzie, im większa jest wartość danego j – tego współczynnika wrażliwości, tym wymagane przemieszczenie się względem j – tego wymiaru przestrzeni realizacji, potrzebne do osiągnięcia punktu projektowego zadania jest większe.

Szczegóły iteracyjnych obliczeń wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} oraz współczynników wrażliwości a_i , wraz z obliczonymi różnicami pomiędzy otrzymywanymi w kolejnych krokach iteracji wynikami, przedstawiono w Tablicy 6.5.

Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń i spadek różnic pomiędzy otrzymywanymi w kolejnych krokach iteracji wynikami przedstawiono na rys. 6.3 oraz na rys. 6.4.

Jak zauważyć można na obu rysunkach, bardzo dobrą zbieżność uzyskiwanych wyników osiąga się już dla szóstej iteracji, co pozwala na określenie obliczeń jako szybko zbieżne i ekonomiczne pod względem czasu obliczeniowego. Wszystkie wyniki, uzyskane na drodze wykonywania procedury programu autorskiego, bardzo szybko się stabilizują i końcowo osiągają wyniki, które pokrywają się z rozwiązaniem monograficznym.

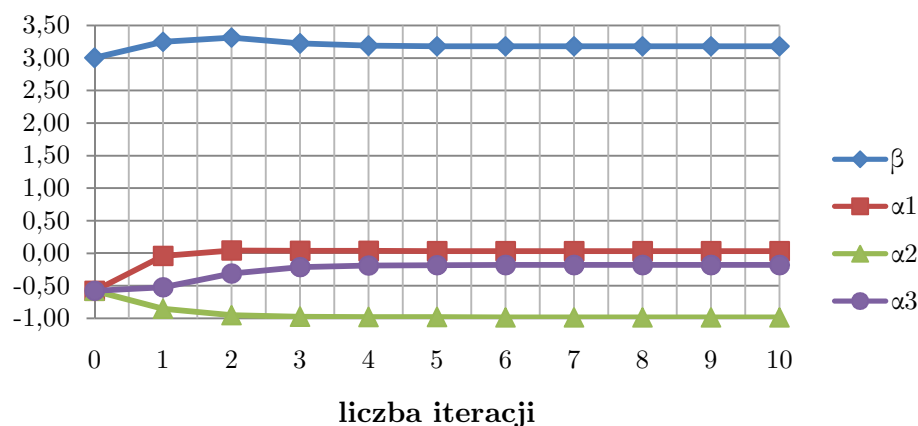
Błąd bezwzględny oszacowania wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} wynosi

$$e_{\beta_{HL}} = \frac{\beta_{HL,obl} - \beta_{HL,mono}}{\beta_{HL,mono}} \cdot 100\% = \frac{3,1805 - 3,1730}{3,1730} \cdot 100\% = 0,2364\% \quad (6.7)$$

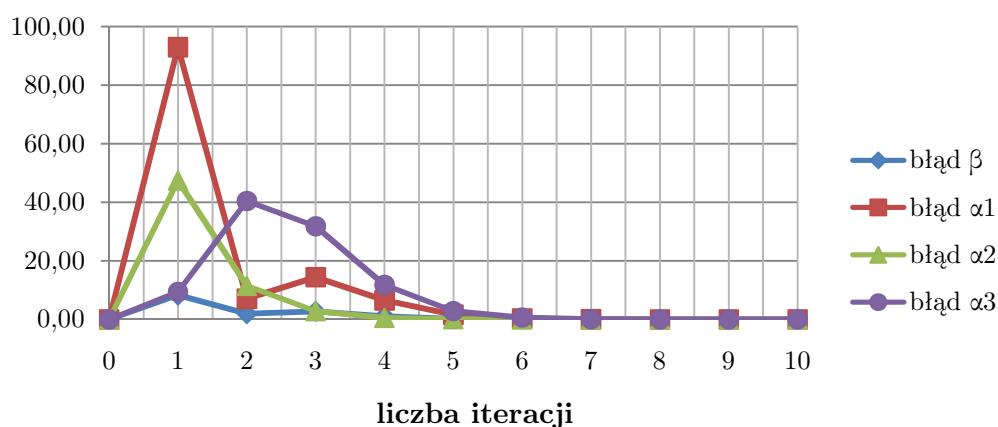
co jest wynikiem jakościowym bardzo dobrym, mniejszym od akceptowalnego poziomu 3,0%.

Tablica 6.5. Szczegóły iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} oraz współczynników wrażliwości a_i , wraz z obliczonymi różnicami pomiędzy wynikami otrzymywanymi w kolejnych krokach iteracji.

	Liczba iteracji										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β	3,0000	3,2480	3,3108	3,2216	3,1866	3,1812	3,1805	3,1805	3,1805	3,1805	3,1805
α_1	-0,5774	-0,0407	0,0436	0,0373	0,0349	0,0344	0,0342	0,0342	0,0342	0,0342	0,0342
α_2	-0,5774	-0,8513	-0,9493	-0,9765	-0,9817	-0,9827	-0,9829	-0,9830	-0,9830	-0,9830	-0,9830
α_3	-0,5774	-0,5231	-0,3114	-0,2124	-0,1873	-0,1819	-0,1807	-0,1805	-0,1805	-0,1804	-0,1804
błąd β	-	8,2667	1,9335	2,6963	1,0846	0,1709	0,0202	0,0022	0,0002	0,0000	0,0000
błąd α_1	-	92,9516	7,0593	14,4436	6,5123	1,6077	0,3382	0,0727	0,0163	0,0037	0,0008
błąd α_2	-	47,4402	11,5068	2,8646	0,5340	0,1044	0,0222	0,0050	0,0011	0,0003	0,0000
błąd α_3	-	9,4111	40,4676	31,7941	11,8212	2,8557	0,6370	0,1441	0,0332	0,0077	0,0018



Rys. 6.3. Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} oraz współczynników wrażliwości α_i .



Rys. 6.4. Uzyskiwanie niwelacji różnic między otrzymanymi w kolejnych krokach iteracji wynikami wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda β_{HL} i współczynników wrażliwości α_i .

Wykonując natomiast za pomocą autorskiego oprogramowania iteracyjną procedurę obliczania **wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera** otrzymuje się wynik $\beta_{HLRF} = 3,1805$, identyczny jak dla obliczeń wg Hasofera – Linda.

Ciekawym elementem rozwiązania algorytmu Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera jest natomiast kontynuowane w każdej iteracji bezpośrednie wyznaczanie wartości zmiennych losowych zadania x_i , które wyraźnie wskazują przemieszczanie się punktu projektowego w przestrzeni realizacji zadania. Jest to działanie analogiczne do wyznaczania współczynników wrażliwości, lecz w procesie stricte inżynierskim jest to technika bardziej otwarta dla eksperymentatora, dużo łatwiejsza w interpretacji.

Szczegóły obliczeń wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera β_{HLRF} oraz wartości zmiennych losowych zadania x_i , wraz z obliczonymi różnicami pomiędzy otrzymanymi w kolejnych krokach iteracji wynikami, przedstawiono w Tabelicy 6.6.

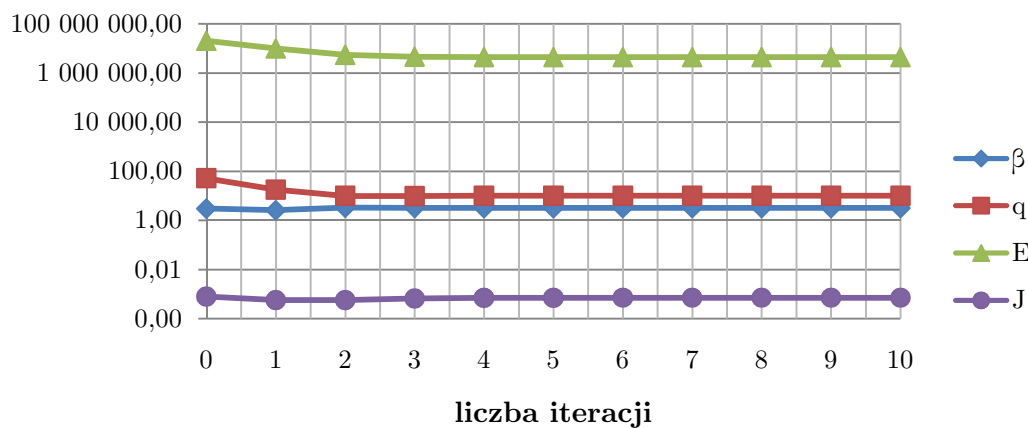
Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń i spadek różnic pomiędzy otrzymywanymi w kolejnych krokach iteracji wynikami przedstawiono na rys. 6.5 oraz na rys. 6.6.

Jak zauważyć można na obu rysunkach, bardzo dobrą zbieżność uzyskiwanych wyników osiąga się już dla piątej iteracji, co także pozwala na określenie obliczeń jako szybko zbieżne i ekonomiczne pod względem czasu obliczeniowego. Wszystkie wyniki pokrywają się z rozwiązaniem monograficznym.

Błąd bezwzględny oszacowania wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera β_{HLRF} wynosi $e_{\beta_{HLRF}} = 0,2364\%$ i z racji identyczności wyników β_{HL} oraz β_{HLRF} jest tożsamy z błędem bezwzględnym kalkulacji $e_{\beta_{HL}}$.

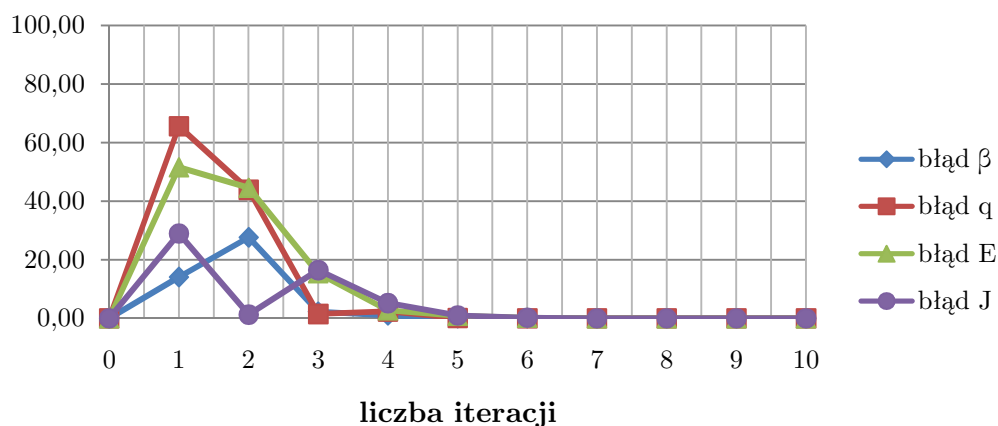
Tablica 6.6. Szczegóły iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera β_{HLRF} oraz wartości zmiennych losowych zadania x_i , wraz z obliczonymi różnicami pomiędzy wynikami otrzymywanymi w kolejnych krokach iteracji.

	Liczba iteracji										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β	3,0000	2,5782	3,2896	3,2135	3,1821	3,1805	3,1805	3,1805	3,1805	3,1805	3,1805
q	51,5298	17,7277	9,9492	9,8005	10,0325	10,0432	10,0436	10,0435	10,0435	10,0435	10,0435
E	20000000	9690365	5369144	4540748	4418672	4380462	4371076	4368840	4368314	4368191	4368160
J	0,000800	0,000568	0,000575	0,000670	0,000705	0,000712	0,000713	0,000714	0,000714	0,000714	0,000714
błąd β	-	14,0600	27,5933	2,3139	0,9774	0,0481	0,0028	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
błąd q	-	65,5972	43,8779	1,4944	2,3677	0,1063	0,0040	0,0005	0,0002	0,0000	0,0001
błąd E	-	51,5482	44,5930	15,4289	2,6884	0,8648	0,2143	0,0511	0,0120	0,0028	0,0007
błąd J	-	28,9959	1,2906	16,4766	5,1958	0,9795	0,2187	0,0507	0,0119	0,0028	0,0007



Rys. 6.5. Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera β_{HLRF} oraz wartości zmiennych zadania x_i .

Dla przejrzystości rysunku posłużono się skalą logarymiczną na osi wartości liczbowych.



Rys. 6.6. Uzyskiwanie niwelacji różnic pomiędzy otrzymywanymi w kolejnych krokach iteracji wynikami wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitz – Fiesslera β_{HLRF} oraz wartości zmiennych losowych zadania x_i .

6.1.3. Pełne rozwiązanie problemu niezawodności dla kolumny Zieglera (słupa idealnie sprężystego z dwiema sprężynami o losowych sztywnościach)

a) Przedstawienie modelu

Analizuje się model słupa, utwierdzonego u podstawy, osiowo ściskanego siłą λP .

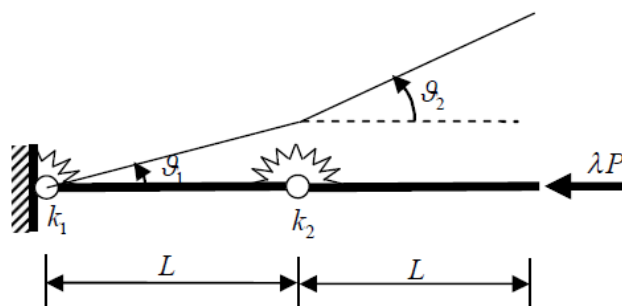
Słup ma dwa przeguby wewnętrzne – jeden u podstawy i jeden w połowie wysokości. Oba przeguby wewnętrzne są wzmocnione sprężynami o stałych sprężystości $k_1; k_2$.

Sztywności są modelowane jako dwie zmienne losowe: $k_1 = \mu_{X_1}(1 + x_1)$ i $k_2 = \mu_{X_2}(1 + x_2)$.

Zatem, X_1 i X_2 są podstawowymi zmiennymi losowymi problemu określenia niezawodności.

Założono, iż obie te zmienności cechują się rozkładem normalnym, średnie tych rozkładów są równe 0, a odchylenia standardowe obu parametrów są jednakowe i wynoszą 0,20.

Model układu przedstawiony jest na rys. 6.7.



Rys. 6.7. Model kolumny Zieglera wg [Alibrandi i inni, 2010].

Energię modelu w formie jawnej można zapisać wzorem:

$$\Pi_2 = \frac{1}{2} \cdot [\mu_{x_1}(1+x_1)] \cdot (\vartheta_1)^2 + \frac{1}{2} \cdot [\mu_{x_2}(1+x_2)] \cdot (\vartheta_2 - \vartheta_1)^2 - \frac{1}{2} \cdot \lambda P \cdot L \cdot (\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2) \quad (6.8)$$

Model niniejszego słupa wymaga rozpatrzenia energii potencjalnej jedynie drugiego rzędu.

Dla podanego modelu wyprowadzić można także jawny zapis funkcji granicznej, który przedstawić można równaniem

$$g(\mathbf{x}) = G(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \mu_{x_1}(1+x_1) + \mu_{x_2}(1+x_2) - \frac{1}{2} \sqrt{\mu_{x_1}^2(1+x_1)^2 + 4\mu_{x_2}^2(1+x_2)^2} - \lambda \quad (6.9)$$

W zaproponowanej analizie prawdopodobieństwo wybożenia słupa jest obliczane przy założeniu, iż $k_1 = k_2 = \mu_{x_1} = \mu_{x_2} = 1 \text{ kNm}$, $L = 1 \text{ m}$, $P = 1 \text{ kN}$, zatem konstrukcja idealna ($x_1 = x_2 = 0$) wykazuje obciążenie wybaczące równe: $\lambda = 0,5 \cdot (3 - \sqrt{5}) = \lambda_E$.

W pierwszym podejściu, w analizie niezawodności współczynnik krytyczny obciążenia został dobrany jako $\lambda = 0,5 \cdot \lambda_E = 0,25 \cdot (3 - \sqrt{5})$, a podstawowe zmienne losowe ($X_1; X_2$) założono jako nieskorelowane ($\varrho_0 = 0$).

Prawdopodobieństwo awarii zostało obliczone w publikacji odniesienia metodą symulacji Monte Carlo za pomocą miliona próbek i wyniosło $P_f = 2,390 \cdot 10^{-3}$.

Wyliczony za pomocą algorytmu HLRF wskaźnik niezawodności wyniósł $\beta = 2,8599$.

b) Dobór własny powierzchni odpowiedzi do zadania początkowego, skalkulowanie wskaźnika Hasofera – Linda – Rackwitz – Fiesslera β_{HLRF}

Zakładając, iż krzywizna rzeczywistej powierzchni odpowiedzi konstrukcji jest duża, dla zadania używa się modelu drugiego rzędu z członami interakcyjnymi, którego postać przedstawia się wzorem

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^n \sum_{j=2}^n \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (6.10)$$

Dla niniejszego zadania (dwie zmienne losowe), wzór ten można rozpisać jako

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 \quad (6.11)$$

Założono, iż aproksymowana powierzchnia odpowiedzi będzie obliczana w trzech wariantach: przy użyciu 25, 121 oraz 10201 punktów obliczeniowych.

Punkty obliczeniowe są generowane analogicznie do zasad wspomnianych w punkcie 6.1.1. niniejszej rozprawy, tj. zostają rozpięte na siatce wygenerowanej w zależności od dwóch ustalonych wcześniej parametrów – od ilości punktów obliczeniowych rozmieszczonych regularnie na osiach przestrzeni realizacji zadania oraz od parametru rozrzedzenia siatki, przy narzuconym jednocześnie zasięgu dyskretyzacji wynoszącym $s_{x_1} = s_{x_2} = \langle -1, 0; 1, 0 \rangle$ jednostki.

Oznacza to, że dla 25 punktów obliczeniowych ilość punktów na osi jednego wymiaru $p_{x_1} = p_{x_2} = 5$, a odległość między punktami $d_{x_1} = d_{x_2} = 0,5$ jednostki; dla 121 punktów obliczeniowych ilość punktów na osi jednego wymiaru $p_{x_1} = p_{x_2} = 11$, a odległość między punktami $d_{x_1} = d_{x_2} = 0,2$ jednostki; a dla 10201 punktów obliczeniowych ilość punktów na osi jednego wymiaru $p_{x_1} = p_{x_2} = 101$, a odległość między punktami $d_{x_1} = d_{x_2} = 0,02$ jednostki.

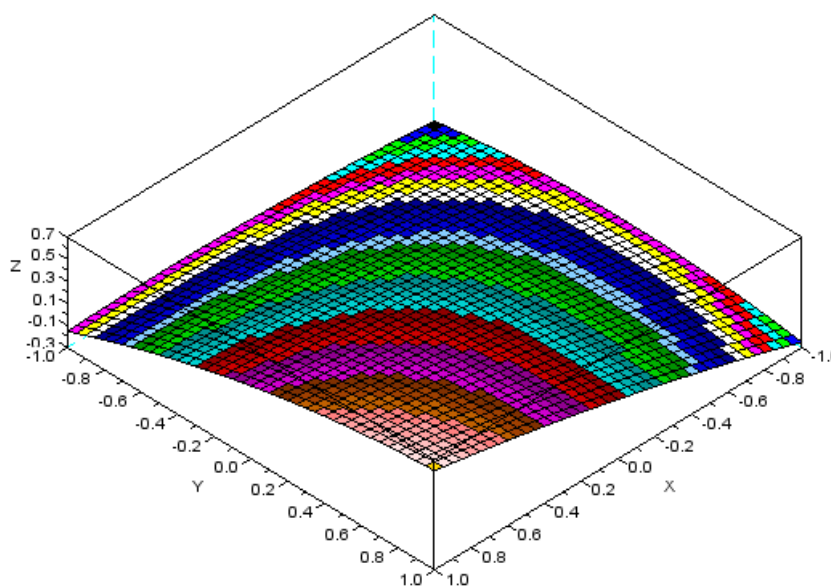
W każdym przypadku analizy oceniany jest także globalny współczynnik dopasowania powierzchni odpowiedzi w obrębie linii równania stanu granicznego (F_{BD}).

Dla 25 punktów kontrolnych, uzyskano powierzchnię odpowiedzi daną wzorem

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 0,184 + 0,241 \cdot x_1 + 0,192 \cdot x_2 - 0,064 \cdot x_1^2 - 0,137 \cdot x_2^2 + 0,185 \cdot x_1 x_2 \quad (6.12)$$

której szczegóły aproksymacji przedstawione są poglądowo w Tablicy 6.7. Poglądowy szkic powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowanej przy użyciu 25 punktów obliczeniowych ($p_{x_1} = p_{x_2} = 5; d_{x_1} = d_{x_2} = 0,5$) przedstawia rys. 6.8.

Globalny współczynnik dopasowania powierzchni odpowiedzi wyniósł $F_{BD} = \mathbf{0,037}$.



Rys. 6.8. Powierzchnia odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, obliczana przy użyciu 25 punktów obliczeniowych (ilość punktów na osi = 5, odległość między punktami = 0,5 jednostki).

Wskaźnik niezawodności obliczany według podejścia Hasofera – Linda – Rackwitz – Fiesslera, skalkulowany przy użyciu 25 punktów obliczeniowych wyniósł: $\beta_{HLRF} = \mathbf{3,11}$.

Szczegóły iteracyjnych obliczeń wskaźnika niezawodności β_{HLRF} zebrano w Tablicy 6.8.

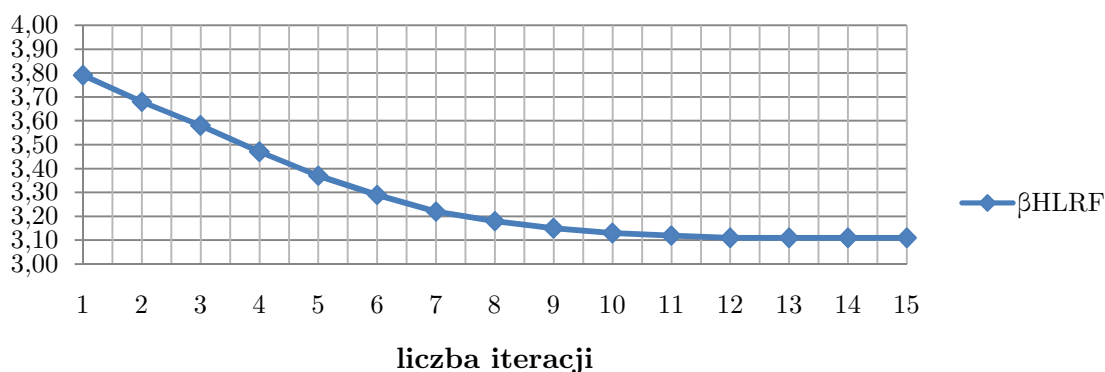
Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń przedstawiono na rys. 6.9.

Tablica 6.7. Wyciąg z tablicy analizy wariancji ANOVA dla powierzchni odpowiedzi aproksymowanej przy użyciu siatkowania dwuwymiarowego z liczbą 25 punktów obliczeniowych (ilość punktów na osi = 5, odległość między punktami = 0,5 jednostki).

TABELA ANALIZY WARIANCJI				
ZRODLO	SS	SK	SSK	WSPOLCZYNNIK
TOTAL	25	0.1714518E+01	0.6858073E-01	
WEDLUG B0	1	0.1757353E+00	0.1757353E+00	0.1844450E+00
WEDLUG B1	1	0.7246635E+00	0.7246635E+00	0.2407760E+00
WEDLUG B2	1	0.4618566E+00	0.4618566E+00	0.1922200E+00
WEDLUG B11	1	0.1779287E-01	0.1779287E-01	-0.6377257E-01
WEDLUG B22	1	0.8263580E-01	0.8263580E-01	-0.1374343E+00
WEDLUG B12	1	0.2144977E+00	0.2144977E+00	0.1852556E+00
REZYDUUM	19	0.3733633E-01	0.1965070E-02	
BRAK DOPAS.	19	0.3733633E-01	0.1965070E-02	

Tablica 6.8. Szczegóły iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera β_{HLRF} obliczonego przy użyciu 25 punktów obliczeniowych.

	Liczba porządkowa iteracji														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
β_{HLRF}	3,79	3,68	3,58	3,47	3,37	3,29	3,22	3,18	3,15	3,13	3,12	3,11	3,11	3,11	3,11



Rys. 6.9. Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera β_{HLRF} skalkulowanego za pomocą 25 punktów obliczeniowych.

Dla 121 punktów kontrolnych, uzyskano powierzchnię odpowiedzi daną wzorem

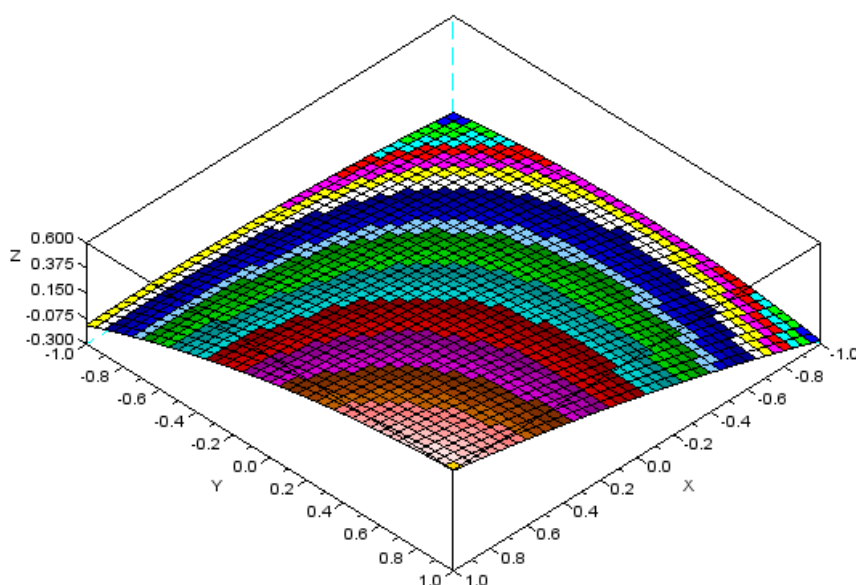
$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 0,191 + 0,248 \cdot x_1 + 0,179 \cdot x_2 - 0,072 \cdot x_1^2 - 0,137 \cdot x_2^2 + 0,184 \cdot x_1 x_2 \quad (6.13)$$

której szczegóły aproksymacji przedstawione są poglądowo w Tablicy 6.9. Poglądowy szkic powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowanej przy użyciu 121 punktów obliczeniowych ($p_{x_1} = p_{x_2} = 11; d_{x_1} = d_{x_2} = 0,2$) przedstawia rys. 6.10.

Globalny współczynnik dopasowania powierzchni odpowiedzi wyniósł $F_{BD} = \mathbf{0,121}$.

Tablica 6.9. Wyciąg z tablicy analizy wariancji ANOVA dla powierzchni odpowiedzi aproksymowanej przy użyciu siatkowania dwuwymiarowego z liczbą 121 punktów obliczeniowych (ilość punktów na osi = 11, odległość między punktami = 0,2 jednostki).

TABELA ANALIZY WARIANCJI				
ZRODŁO	SS	SK	SSK	WSPOLCZYNNIK
TOTAL	121	0.7036892E+01	0.5815613E-01	
WEDŁUG B0	1	0.1379307E+01	0.1379307E+01	0.1907426E+00
WEDŁUG B1	1	0.2966732E+01	0.2966732E+01	0.2475805E+00
WEDŁUG B2	1	0.1549281E+01	0.1549281E+01	0.1789132E+00
WEDŁUG B11	1	0.7926765E-01	0.7926765E-01	-0.7245160E-01
WEDŁUG B22	1	0.2854454E+00	0.2854454E+00	-0.1374870E+00
WEDŁUG B12	1	0.6560206E+00	0.6560206E+00	0.1840798E+00
REZYDUUM	115	0.1208377E+00	0.1050762E-02	
BRAK DOPAS.	115	0.1208377E+00	0.1050762E-02	



Rys. 6.10. Powierzchnia odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, obliczana przy użyciu 121 punktów obliczeniowych (ilość punktów na osi = 11, odległość między punktami = 0,2 jednostki).

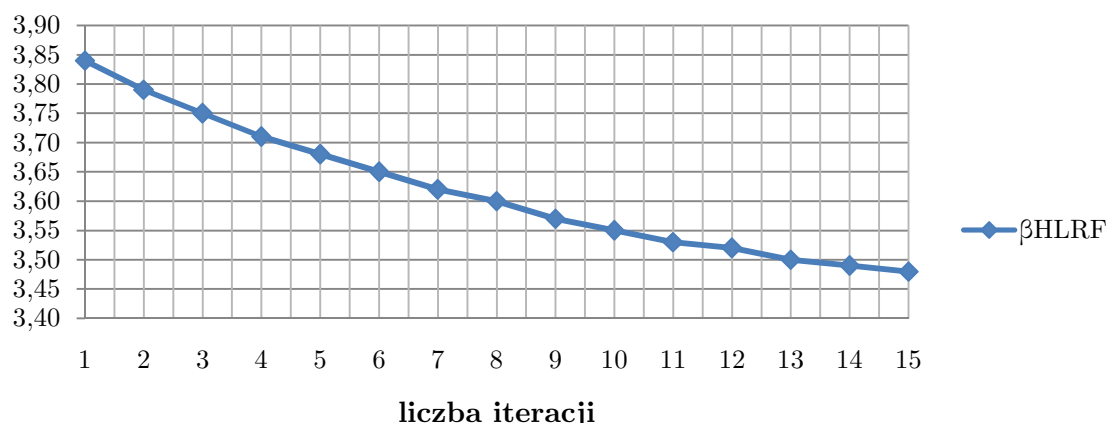
Wskaźnik niezawodności obliczony według podejścia Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera, skalkulowany przy użyciu 121 punktów obliczeniowych wyniósł: $\beta_{HLRF} = 3,48$.

Szczegóły iteracyjnych obliczeń wskaźnika niezawodności β_{HLRF} zebrano w Tablicy 6.10.

Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń przedstawiono na rys. 6.11.

Tablica 6.10. Szczegóły iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera β_{HLRF} obliczonego przy użyciu 121 punktów obliczeniowych.

	Liczba porządkowa iteracji														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
β_{HLRF}	3,84	3,79	3,75	3,71	3,68	3,65	3,62	3,60	3,57	3,55	3,53	3,52	3,50	3,49	3,48



Rys. 6.11. Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitz – Fiesslera β_{HLRF} skalkulowanego przy użyciu 121 punktów obliczeniowych.

Dla 10201 punktów kontrolnych, uzyskano powierzchnię odpowiedzi daną wzorem

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 0,191 + 0,269 \cdot x_1 + 0,120 \cdot x_2 - 0,087 \cdot x_1^2 - 0,100 \cdot x_2^2 + 0,184 \cdot x_1 x_2 \quad (6.14)$$

której szczegóły aproksymacji przedstawione są poglądowo w Tablicy 6.11. Szkic powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowanej przy użyciu 10201 punktów obliczeniowych ($p_{x_1} = p_{x_2} = 121$; $d_{x_1} = d_{x_2} = 0,02$) przedstawia rys. 6.12.

Globalny współczynnik dopasowania powierzchni odpowiedzi wyniósł $F_{BD} = 0,108$.

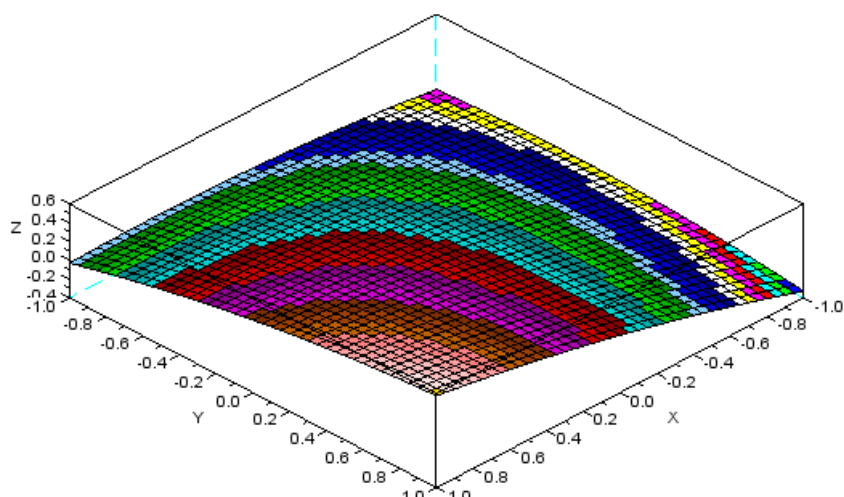
Tablica 6.11. Wyciąg z tablicy analizy wariancji ANOVA dla powierzchni odpowiedzi aproksymowanej przy użyciu dyskretyzacji dwuwymiarowej z liczbą 10201 punktów obliczeniowych (ilość punktów na osi = 101, odległość między punktami = 0,02 jednostki).

TABELA ANALIZY WARIANCJI				
ZRODŁO	SS	SK	SSK	WSPÓLCZYNNIK
TOTAL	10201	0.3918601E+03	0.3841389E-01	
WEDŁUG B0	1	0.3131675E+03	0.3131675E+03	0.1911059E+00
WEDŁUG B1	1	0.6259555E+02	0.6259555E+02	0.2686834E+00
WEDŁUG B2	1	0.1247017E+02	0.1247017E+02	0.1199238E+00
WEDŁUG B11	1	0.4497810E+00	0.4497810E+00	-0.8735326E-01
WEDŁUG B22	1	0.5849543E+00	0.5849543E+00	-0.9961840E-01
WEDŁUG B12	1	0.2484154E+01	0.2484154E+01	0.1835900E+00
REZYDUUM	10195	0.1079875E+00	0.1059220E-04	
BRĄK DOPAS.	10195	0.1079875E+00	0.1059220E-04	

Wskaźnik niezawodności obliczany według podejścia Hasofera – Linda – Rackwitz – Fiesslera, skalkulowany przy użyciu 10201 punktów obliczeniowych wyniósł: $\beta_{HLRF} = 2,95$.

Szczegóły iteracyjnych obliczeń wskaźnika niezawodności β_{HLRF} zebrano w Tablicy 6.12.

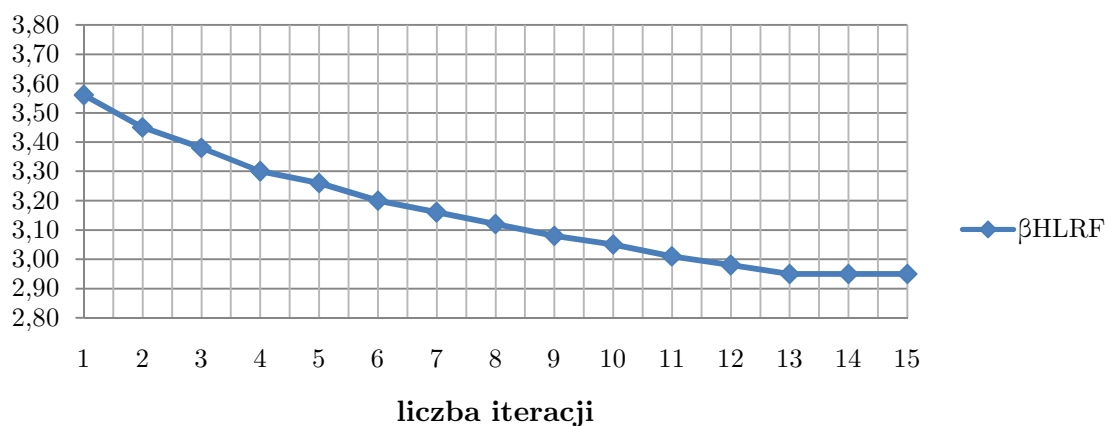
Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń przedstawiono na rys. 6.13.



Rys. 6.12. Powierzchnia odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, obliczana przy użyciu 10201 punktów obliczeniowych (ilość punktów na osi = 101, odległość między punktami = 0,02 jednostki).

Tablica 6.12. Szczegóły iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitz – Fiesslera β_{HLRF} skalkulowanego przy użyciu 10201 punktów obliczeniowych.

	Liczba porządkowa iteracji														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
β_{HLRF}	3,56	3,45	3,38	3,30	3,26	3,20	3,16	3,12	3,08	3,05	3,01	2,98	2,95	2,95	2,95



Rys. 6.13. Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitz – Fiesslera β_{HLRF} skalkulowanego przy użyciu 10201 punktów obliczeniowych.

c) Skalkulowanie wskaźnika niezawodności metodą symulacji Monte Carlo

Prawdopodobieństwo awarii obliczone metodą symulacji Monte Carlo za pomocą miliona próbek w przypadku wygenerowanej powierzchni odpowiedzi wyniosło $P_f = 2,386 \cdot 10^{-3}$, dając błąd rzędu $e = 1,39\%$, co jest wynikiem jakościowo zadowalającym.

Wskaźnik niezawodności obliczany przy użyciu zamiany prawdopodobieństwa awarii obliczonego metodą symulacji Monte Carlo (na bazie tablic rozkładu normalnego) wynosi $\beta = 2,82$.

d) Podsumowanie

Wszystkie wyniki powyższych analiz numerycznych prawdopodobieństwa awarii P_f oraz wskaźników niezawodności β_{HLRF} , wykonanych w zależności od liczby zastosowanych punktów obliczeniowych, wraz z odniesieniem ich do rezultatów uzyskanych w [Alibrandi i inni, 2010] i oceną zgodności pomiędzy rezultatami, zostały zebrane w Tablicy 6.13.

Tablica 6.13. Zbiorcze podsumowanie wyników wszystkich powyższych analiz numerycznych, wraz z odniesieniem ich do rezultatów uzyskanych w [Alibrandi i inni, 2010].

	Alibrandi i inni, MMC [2010]	Autorskie, 25 pkt. oblicz.	Autorskie, 121 pkt. oblicz.	Autorskie, 10201 pkt. oblicz.	Autorskie, MMC
P_f	$P_f = 2,390 \cdot 10^{-3}$	$P_f = 0,94 \cdot 10^{-3}$	$P_f = 0,25 \cdot 10^{-3}$	$P_f = 1,59 \cdot 10^{-3}$	$P_f = 2,39 \cdot 10^{-3}$
β	$\beta = 2,8599$	$\beta = 3,11$	$\beta = 3,48$	$\beta = 2,95$	$\beta = 2,82$
e_β	-----	$e = 8,04\%$	$e = 17,82\%$	$e = 3,05\%$	$e = 1,39\%$

Na podstawie przeprowadzonej analizy zauważyć należy dość duże niezgodności nie tylko pomiędzy wynikami zaprezentowanymi w pracy referencyjnej [Alibrandi i inni, 2010], a wynikami skalkulowanymi programem autorskim RSM-Win, ale także na braki zgodności pomiędzy wynikami uzyskanymi programem własnym dla różnych podjętych wariantów obsadzenia przestrzeni realizacji punktami obliczeniowymi. Zgodność ta, po wykonaniu 15-tu iteracji, nie jest zadowalająca – nie mieści się ona w standardowo zakładanych w obliczeniach inżynierskich ramach 3%.

Największą zgodność ($e = 3,05\%$) obliczonego iteracyjnie wskaźnika niezawodności β_{HLRF} uzyskano oczywiście dla największej liczby punktów obliczeniowych (10201 punktów), jednakże tym razem nie wiąże się to wcale z kwestią dobrego dopasowania powierzchni odpowiedzi, bo dopasowanie to jest matematycznie lepsze dla zaledwie 25 punktów obliczeniowych (gdzie zgodność rozwiązań jest diametralnie słabsza i wynosi aż $e = 8,04\%$).

Zastanawiająca jest też bardzo wolna zbieżność algorytmów, które w poprzednich analizach spisywały się pod tym względem bez zarzutu. Po wykonaniu 15-tej iteracji wykazują one co prawda różnice pomiędzy iteracjami mniejsze od 1%, co pozwala na przyjęcie ich wyniku jako końcowego, jednakże widać w ich zachowaniu tendencję do dalszego pomniejszania wartości wskaźnika niezawodności β_{HLRF} . Stabilizacja jego końcowego rezultatu następuje bardzo późno, około 30-tej iteracji (dla wszystkich przypadków analizy), podając wyniki znacznie lepiej dopasowane do rozwiązania referencyjnego wg [Alibrandi i inni, 2010] niż zdecydowano się to zaprezentować. Wolną zbieżnością można więc wytłumaczyć wspomniane powyżej braki zgodności pomiędzy rozwiązaniami, niemniej jednak przyrost czasu iterowania bez widocznego przyrostu matematycznej trudności zagadnienia jest niepokojący.

Przyczyny takiego stanu można upatrywać w błędnie przyjętej dyskretyzacji. Powierzchnia odpowiedzi nie ma być bowiem idealnym odwzorowaniem (wykonanym za pomocą prostszej matematycznie postaci wyrażenia) powierzchni stanu granicznego w każdym punkcie przestrzeni realizacji, ale tylko w pobliżu równania stanu granicznego. Przykład ten przedstawiono w powyższej postaci (z tak dużymi niezgodnościami) aby pokazać trudności i pułapki, jakie inżynier napotkać może przy nietrafnym podejściu do metodologii powierzchni odpowiedzi lub niewłaściwym jej zrozumieniu.

Doskonałą zbieżność z rozwiązaniem referencyjnym wykazuje natomiast wynik zaczerpnięty z symulacji metodą Monte Carlo. Metoda ta ma jednak znacznie dłuższy czas realizacji niż nawet 30-krotna iteracja wykonywana przy użyciu algorytmów programu autorskiego RSM–Win. Wysnuć można zatem wniosek, iż prawidłowo przeprowadzone poszukiwanie powierzchni odpowiedzi przynosi ewidentny zysk czasowy i może być rekomendowane inżynierowi w procesie projektowania.

6.1.4. Pełne rozwiązanie problemu niezawodności dla ramy Roordy (ramy idealnie sprężystej z dwiema sprężynami o losowych sztywnościach)

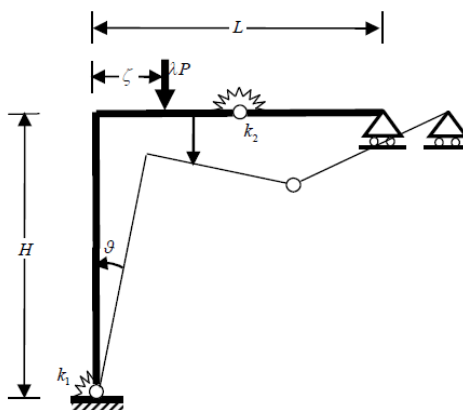
a) Przedstawienie modelu

Analizuje się model ramy o prostokątnej siatce prętów, poddanej obciążeniu ściskającemu λP . Rama składa się z jednego słupa, zamocowanego u podstawy i jednego rygla, swobodnie podpartego na jego prawym końcu. Połączenie słupa i rygla jest w pełni monolityczne. Rama ma wmontowane dwa przeguby wewnętrzne – jeden u podstawy słupa ramy i jeden w połowie rozpiętości rygla. Oba przeguby wewnętrzne są wzmocnione sprężynami.

Sztywności sprężyn są modelowane jako dwie zmienne losowe: $k_1 = \mu_{X_1}(1 + x_1)$ i $k_2 = \mu_{X_2}(1 + x_2)$. X_1 i X_2 są zmiennymi losowymi problemu określenia niezawodności.

Założono, iż obie te zmienności cechują się rozkładem normalnym, ich wartości średnie są równe 0, a odchylenia standardowe obu parametrów są jednakowe i wynoszą 0,20.

Model układu przedstawiony jest na rys. 6.14.



Rys. 6.14. Model ramy Roordy wg [Alibrandi i inni, 2009].

Energię modelu w formie jawnej można zapisać wzorem:

$$\Pi_4 = \frac{1}{2} \cdot [\mu_{x_1}(1+x_1)] \cdot (\vartheta)^2 + \frac{1}{2} \cdot [\mu_{x_2}(1+x_2)] \cdot \left(2\vartheta + \frac{H}{L}\vartheta^2\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \lambda P \cdot H \cdot \left(\vartheta^2 + \frac{\zeta}{H} \cdot \vartheta\right) \quad (6.15)$$

Model ramy wymaga rozpatrzenia energii potencjalnej czwartego rzędu, gdyż cechuje się on asymetryczną bifurkacją, co powoduje także jego wrażliwość na imperfekcje obciążeniowe.

W zaproponowanej analizie prawdopodobieństwo wyboczenia ramy jest obliczane przy założeniu, iż $k_1 = k_2 = \mu_{x_1} = \mu_{x_2} = 1 \text{ kNm}$, $H = 1 \text{ m}$, $L = 1 \text{ m}$, $P = 1 \text{ kN}$, zatem konstrukcja idealna ($x_1 = x_2 = 0$) wykazuje obciążenie wybaczące równe: $\lambda = 5,0 = \lambda_E$. Dobrano także wstępną imperfekcję obciążeniową na poziomie $\zeta = 0,05$. W pierwszym podejściu, w analizie niezawodności współczynnik krytyczny obciążenia został dobrany jako $\lambda = 0,5 \cdot \lambda_E = 2,5$, a podstawowe zmienne losowe (x_1, x_2) założono jako nieskorelowane ($\rho_0 = 0$).

Prawdopodobieństwo awarii zostało obliczone w publikacji odniesienia metodą symulacji Monte Carlo za pomocą stu tysięcy próbek i wyniosło $P_f = 2,780 \cdot 10^{-2}$.

Wyliczony za pomocą algorytmu HLRF wskaźnik niezawodności wyniósł $\beta = 1,9877$.

b) Dobór własny powierzchni odpowiedzi do zadania początkowego, skalkulowanie wskaźnika Hasofera – Linda – Rackwitza – Fiesslera β_{HLRF}

Zakładając, iż krzywizna rzeczywistej powierzchni odpowiedzi konstrukcji jest duża, dla zadania używa się (jak w zadaniu rozdziału 8.1.3.) **modelu drugiego rzędu z członami interakcyjnymi**, którego postać przedstawia się następująco:

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i + \sum_{i=1}^n \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{i < j}^n \sum_{j=2}^n \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon \quad (6.10)$$

Dla niniejszego zadania (dwie zmienne losowe), wzór ten można rozpisać jako

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 \quad (6.11)$$

Założono, iż aproksymowana powierzchnia odpowiedzi będzie obliczana w dwóch wariantach: przy użyciu 25 oraz 121 punktów obliczeniowych.

Punkty obliczeniowe są tym razem generowane za pomocą metody Monte Carlo z początkowo założonego pasma otaczającego geometrycznie linię równania stanu granicznego. Ze względu na rezultaty otrzymane dla poprzednich zadań (rozdziały 6.1.1. – 6.1.3.) dla prostokątnej siatki punktów obliczeniowych uznano, iż rozwiązanie takie może być nadal dobre do aproksymacji powierzchni odpowiedzi z zadowalającą dokładnością, a powinno być lepsze dla kalkulacji wskaźników niezawodności, głównie pod kątem poprawy szybkości zbieżności osiągania ich ostatecznych wartości. Dzięki takiemu podejściu otrzymuje się również lepiej dopasowaną powierzchnię w zakresie równania stanu granicznego, pomijając te obszary powierzchni, które nie są istotne dla kalkulacji wskaźnika niezawodności.

Liczba 25 oraz 121 punktów obliczeniowych została utrzymana wyłącznie dla pokazania ewentualnej poprawy wyżej wymienionych wartości w stosunku do zadania z rozdziału 6.1.3.

W obu przypadkach analizy oceniany jest także globalny współczynnik dopasowania powierzchni odpowiedzi w obrębie linii równania stanu granicznego (F_{BD}).

Dla 25 punktów kontrolnych, uzyskano powierzchnię odpowiedzi dano wzorem

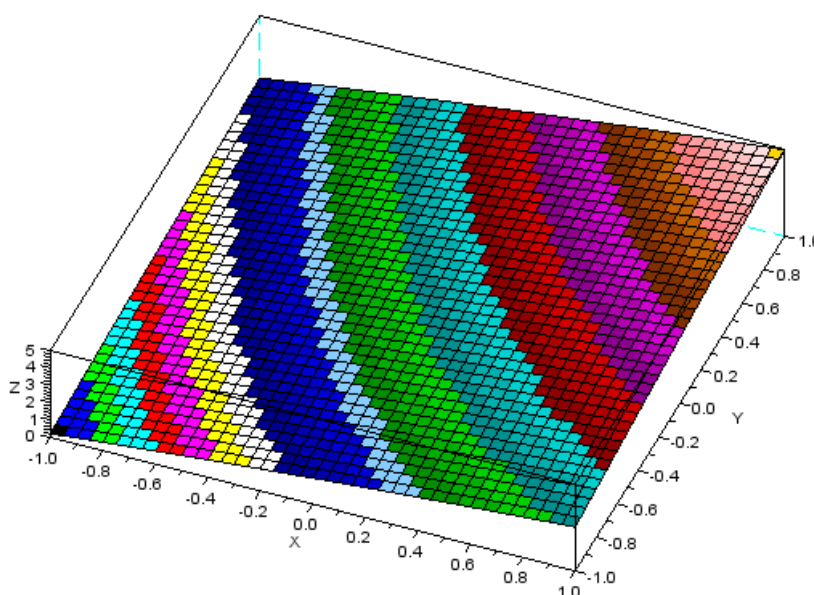
$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 2,465 + 1,469 \cdot x_1 + 0,915 \cdot x_2 - 0,130 \cdot x_1^2 - 0,049 \cdot x_2^2 + 0,314 \cdot x_1 x_2 \quad (6.16)$$

której szczegóły aproksymacji przedstawione są poglądowo w Tablicy 6.14. Poglądowy szkic powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowanej przy użyciu 25 punktów obliczeniowych przedstawia rys. 6.15.

Globalny współczynnik dopasowania powierzchni odpowiedzi wyniósł $F_{BD} = 0,087$.

Tablica 6.14. Wyciąg z tablicy analizy wariancji ANOVA dla powierzchni odpowiedzi aproksymowanej przy użyciu 25 punktów obliczeniowych, wygenerowanych za pomocą metody Monte Carlo w obrębie równania stanu granicznego.

TABELA ANALIZY WARIANCJI				
ZRODŁO	SS	SK	SSK	WSPÓLCZYNNIK
TOTAL	25	0.6250000E+01	0.3906250E+00	
WEDŁUG B0	1	0.3906250E+00	0.3906250E+00	0.2465191E+01
WEDŁUG B1	1	0.5063792E+00	0.5063792E+00	0.1469314E+01
WEDŁUG B2	1	0.6795171E+00	0.6795171E+00	0.9150694E+00
WEDŁUG B11	1	0.1816039E-01	0.1816039E-01	-0.1304617E+00
WEDŁUG B22	1	0.3077122E-01	0.3077122E-01	-0.4925359E-01
WEDŁUG B12	1	0.1164504E+00	0.1164504E+00	0.3142906E+00
REZYDUUM	19	0.8702236E-01	0.8702236E-02	
BRAK DOPAS.	19	0.8702236E-01	0.8702236E-02	



Rys. 6.15. Powierzchnia odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowana przy użyciu 25 punktów obliczeniowych wygenerowanych za pomocą metody Monte Carlo.

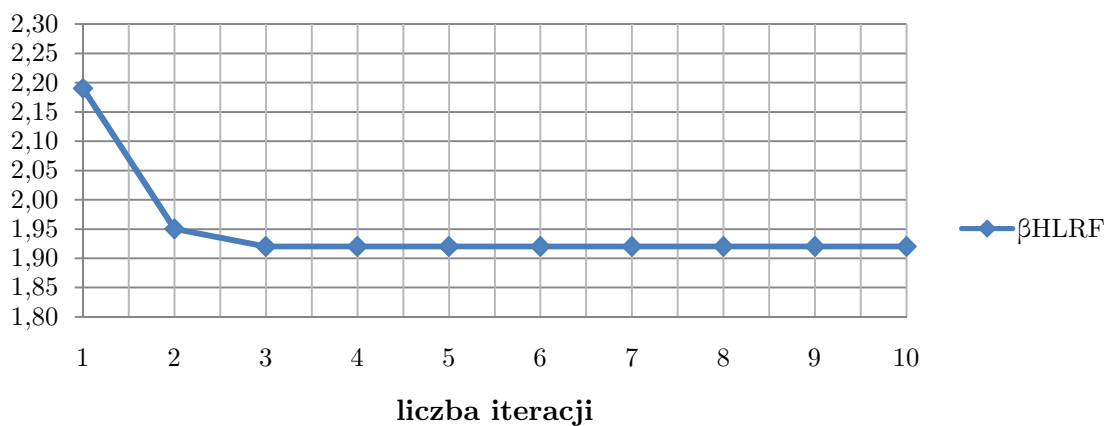
Wskaźnik niezawodności obliczany według podejścia Hasofera – Linda – Rackwizta – Fiesslera, skalkulowany przy użyciu 25 punktów obliczeniowych wyniósł: $\beta_{HLRF} = 1,92$.

Szczegóły iteracyjnych obliczeń wskaźnika β_{HLRF} , przedstawiono w Tabelicy 6.15.

Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń przedstawiono na rys. 6.16.

Tabcica 6.15. Szczegóły iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwizta – Fiesslera β_{HLRF} skalkulowanego dla 25 punktów obliczeniowych MC.

	Liczba porządkowa iteracji									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β_{HLRF}	2,19	1,95	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92	1,92



Rys. 6.16. Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwizta – Fiesslera β_{HLRF} skalkulowanego przy użyciu 25 punktów obliczeniowych Monte Carlo.

Dla 121 punktów kontrolnych, uzyskano powierzchnię odpowiedzi dano wzorem

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 2,501 + 1,501 \cdot x_1 + 0,902 \cdot x_2 - 0,130 \cdot x_1^2 - 0,050 \cdot x_2^2 + 0,312 \cdot x_1 x_2 \quad (6.17)$$

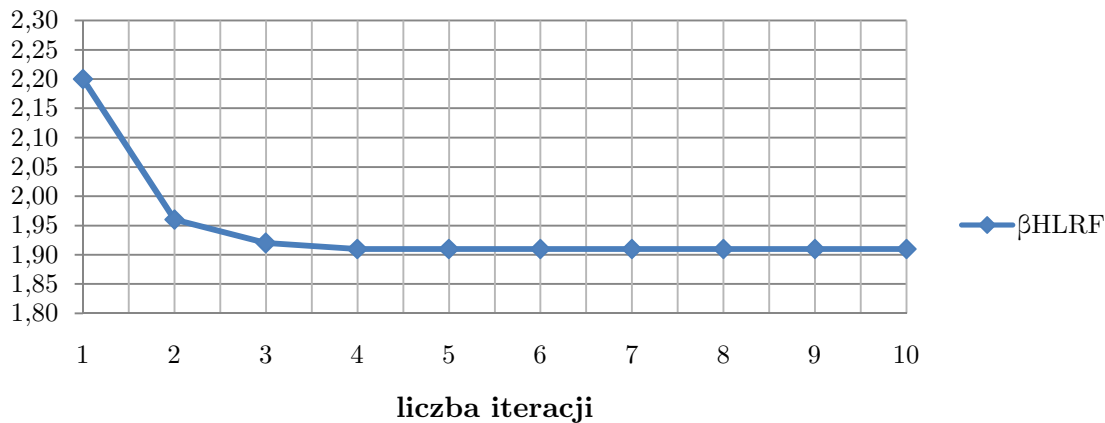
której szczegóły aproksymacji przedstawione są poglądowo w Tabelicy 6.16. Poglądowy szkic powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowanej przy użyciu 121 punktów obliczeniowych przedstawia rys. 6.17.

Globalny współczynnik dopasowania powierzchni odpowiedzi wyniósł $F_{BD} = 0,056$.

Wskaźnik niezawodności obliczany według podejścia Hasofera – Linda – Rackwizta – Fiesslera, skalkulowany przy użyciu 121 punktów obliczeniowych wyniósł: $\beta_{HLRF} = 1,91$.

Szczegóły iteracyjnych obliczeń wskaźnika niezawodności β_{HLRF} zestawiono w Tabelicy 6.17.

Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń przedstawiono na rys. 6.18.



Rys. 6.18. Uzyskiwanie zbieżności iteracyjnych obliczeń wartości wskaźnika niezawodności Hasofera – Linda – Rackwitz – Fiesslera β_{HLRF} skalkulowanego przy użyciu 121 punktów obliczeniowych Monte Carlo.

c) Skalkulowanie wskaźnika niezawodności metodą symulacji Monte Carlo

Prawdopodobieństwo awarii obliczone metodą symulacji Monte Carlo za pomocą miliona próbek w przypadku wygenerowanej powierzchni odpowiedzi wyniosło $P_f = 2,169 \cdot 10^{-2}$, co daje błąd rzędu $e = 1,59\%$, co jest wynikiem jakościowo bardzo dobrym.

Wskaźnik niezawodności obliczany przy użyciu zamiany prawdopodobieństwa awarii obliczonego metodą Monte Carlo (na bazie tablic rozkładu normalnego) wynosi $\beta = 2,02$.

d) Podsumowanie

Wszystkie wyniki powyższych analiz numerycznych prawdopodobieństwa awarii P_f oraz wskaźników niezawodności β_{HLRF} , wykonanych w zależności od liczby zastosowanych punktów obliczeniowych, wraz z odniesieniem ich do rezultatów uzyskanych w [Alibrandi i inni, 2009] i oceną zgodności pomiędzy rezultatami, zostały zebrane w Tablicy 6.18.

Tablica 6.18. Zbiorcze podsumowanie wyników wszystkich powyższych analiz numerycznych, wraz z odniesieniem ich do rezultatów uzyskanych w [Alibrandi i inni, 2009].

	Alibrandi i inni, MMC [2010]	Autorskie, 25 pkt. oblicz.	Autorskie, 121 pkt. oblicz.	Autorskie, MMC
P_f	$P_f = 2,780 \cdot 10^{-2}$	$P_f = 2,74 \cdot 10^{-2}$	$P_f = 2,81 \cdot 10^{-2}$	$P_f = 2,169 \cdot 10^{-2}$
β	$\beta = 1,9877$	$\beta = 1,92$	$\beta = 1,91$	$\beta = 2,02$
e_β	-----	$e = 3,52\%$	$e = 4,02\%$	$e = 1,59\%$

Na podstawie przeprowadzonej analizy zauważyć należy, iż droga jaka została podjęta wskutek wniosku opisanego w ostatnim punkcie rozdziału 8.1.3. była słuszną. Wykazano, iż odwzorowanie powierzchni stanu granicznego w przestrzeni realizacji tylko w pobliżu równania stanu granicznego jest właściwą drogą postępowania z tego typu

problemami inżynierskimi. Pozwala ono kolejno na znaczną redukcję koniecznych do wprowadzenia do zadania punktów obliczeniowych, szybsze odnalezienie punktu projektowego analizy, szybką stabilizację wartości odpowiedzi probabilistycznej konstrukcji i dużą pewność eksperymentatora co do poprawności i wiarygodności osiągniętego rezultatu.

Niezgodności pomiędzy wynikami zaprezentowanymi w pracy referencyjnej [Alibrandi i inni, 2009], a wynikami skalkulowanymi programem autorskim RSM–Win są w przypadku zadania sformułowanego w niniejszym rozdziale nieznaczne, a różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi programem własnym dla różnych podjętych wariantów obsadzenia przestrzeni realizacji punktami obliczeniowymi są niemalże niezauważalne.

Przy użyciu 25 punktów obliczeniowych, odpowiednio ułożonych w przestrzeni realizacji, uzyskuje się dobrą zgodność ($e = 3,52\%$) obliczonego iteracyjnie wskaźnika niezawodności β_{HLRF} , lepszą nawet niż w przypadku użycia większej ilości punktów obliczeniowych (121 punktów). Ponadto, wygenerowane powierzchnie pozostają w dużej zgodności z próbkami metody Monte Carlo punktów obliczeniowych zadania, z globalnym współczynnikiem dopasowania powierzchni odpowiedzi F_{BD} nie przekraczającym wartości 0,1.

Algorytmy ponownie przejawiają szybką zbieżność, co również potwierdza dobry dobór danych wejściowych do zadania i poprawną aproksymację powierzchni odpowiedzi. W obu przypadkach wynik już piątej iteracji mógłby być przyjęty jako zaproponowana wartość wskaźnika niezawodności, różnice pomiędzy kolejnymi iteracjami stają się mniejsze od 0,1%.

Wynik zaczerpnięty z symulacji metodą Monte Carlo jak poprzednio wykazuje doskonałą zbieżność z rozwiązaniem referencyjnym [Alibrandi i inni, 2009], jednakże czas symulacji wymaganej do osiągnięcia zbieżności rozwiązania, podjętej bez technik redukcji populacji próbek, jest niewspółmiernie dłuższy do czasu zajmowanego przez obliczenia prowadzone za pomocą programu autorskiego RSM–Win.

Można zatem z dużą dozą pewności potwierdzić sprawność, prawidłowość i niezawodność działania stworzonego programu autorskiego RSM–Win dla większości typów prostych zadań prętowych. Odpowiednia analiza, poparta symulacjami testowymi, pomagającymi kolejno: rozpoznać analizowane zagadnienie, poznać odpowiedź programu na sformułowanie wprowadzanych danych wejściowych, dokonać przyjęcia właściwego typu modelu aproksymacyjnego oraz wybrać odpowiedni dla zadania wskaźnik niezawodności jest w połączeniu z programem autorskim pewnym źródłem informacji o poziomie bezpieczeństwa danej konstrukcji w ujęciu probabilistycznym poziomem drugim metod szacowania niezawodności projektowych problemów inżynierskich.

6.2. Mało wyniosła powłoka kompozytowa

Jak wskazano w rozdziale 6.1, szacowanie niezawodności na poziomie drugim metod oceny bezpieczeństwa konstrukcji inżynierskiej jest możliwe do wykonania przy odpowiednim zastosowaniu programu autorskiego **RSM–Win**, wykorzystując zaimplementowane do jego pamięci standardowe techniki probabilistyczne. Jednakże przeprowadzone w rozdziale tym wstępne analizy dotyczyły jedynie prostych modeli prętowych konstrukcji inżynierskich.

Zasadne wydaje się zatem przeprowadzenie (w celu potwierdzenia poprawności pracy programu) szeregu dalszych analiz, tym razem dla konstrukcji o większej złożoności.

Spośród dostępnych przykładów zdecydowano wybrać grupę konstrukcji powłokowych opisanych modelami nieliniowymi geometrycznie, a w obrębie wskazanej grupy skupić szczególną uwagę na zagadnieniu utraty stateczności, spowodowanej przekroczeniem odpowiedniej wartości obciążenia – krytycznej (punkt bifurkacji) lub granicznej (maksimum obciążenia). Jak wcześniej zaznaczono, rozwiązania problemu utraty stateczności tego typu konstrukcji można uzyskać jedynie na drodze obliczeń numerycznych, tak więc główna część wymaganych obliczeń zostanie przeniesiona na komercyjne programy obliczeniowe, a program autorski zostanie wykorzystany jedynie do dalszej obróbki probabilistycznej rezultatów, zaczerpniętych z zewnętrznych obliczeń numerycznych.

Do zmian wartości krytycznej lub granicznej obciążenia powodujących utratę stateczności konstrukcji może przyczynić się w znacznym stopniu wystąpienie imperfekcji geometrycznych, co zostało dużo szerzej omówione w rozdziale 4. niniejszej rozprawy oraz w między innymi w [Barbero i inni, 2000].

Imperfekcje te modelowane są za pomocą pola losowego. Teoretyczne podstawy i sposoby generacji pól losowych celem użycia ich jako modelu siatki imperfekcji zostały przedstawione w rozdziale 5. niniejszej rozprawy.

Celem przedstawionego poniżej zadania jest zbadanie wpływu wygenerowanych, losowych pól imperfekcji na wynikowe rozkłady odpowiedzi oraz zbadanie niezawodności konstrukcji powłokowej obciążonej tego typu imperfekcjami. Ostatni punkt zostanie zrealizowany za pomocą programu autorskiego **RSM–Win**, aby pokazać prawidłowość działania procedur programu oraz możliwość i sensowność prowadzenia tego typu analiz za jego pomocą.

a) Przedstawienie modelu

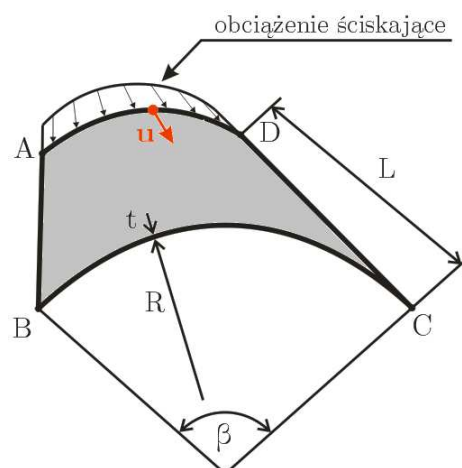
W zadaniu rozważa się przykład mało wyniosłej, 16-warstwowej powłoki kompozytowej z włókien węglowych w spoiwie z żywicy epoksydowej, poddanej obciążeniu ściskającemu wzdłuż tworzącej, przedstawionej na rys. 6.19. Szczegółową analizę numeryczną problemu utraty stateczności przykładu opisano we wcześniejszych pracach [Snell i Morley, 1985; Jun i Hong, 1988; Kreja, 2005; Sabik i Kreja, 2010; Sabik, 2012].

Krawędzie proste AB i CD wspomnianego modelu są krawędziami swobodnie podpartymi, mającymi możliwość przemieszczania się względem tworzącej powłoki. Krawędzie zakrzywione AD i BC są natomiast w pełni zamocowane, przy czym krawędź AD, obciążona czynnie, również ma możliwość przemieszczania się względem tworzącej.

Geometria paneli charakteryzowana jest poprzez jej grubość $t = 16 \times 0,125 \text{ mm} = 2,0 \text{ mm}$, promień zakrzywienia $R = 250,0 \text{ mm}$, długość krawędzi prostych $L = 540,0 \text{ mm}$ oraz przez kąt rozwarcia pomiędzy jej krawędziami prostymi $\beta = 1,6848 \text{ rad}$ (co daje długość krawędzi zakrzywionych wynoszącą $S = 421,2 \text{ mm}$).

Schemat uwarstwienia kompozytu można przedstawić za pomocą zapisu $[45|-45_2|45|0_4]_S$.

Panela wykonana jest z kompozytu XAS-914C, którego parametry materiałowe (dla pojedynczej laminy) wynoszą kolejno: $E_a = 130 \cdot 10^6$ kPa, $E_b = 10 \cdot 10^6$ kPa, $\nu_{ab} = 0,3$ oraz $G_{ab} = G_{ac} = G_{bc} = 5 \cdot 10^6$ kPa. Na bazie przedstawionego wyżej zapisu warstwowego i parametrów każdej z lamin obliczyć można całkowite parametry materiałowe paneli, przykładowo na podstawie równań fizycznych dla kompozytów wykonywanych w układzie "off-axis", przedstawionych m.in. w [Christensen, 1979; German, 2001; Woźniak, 2001].



Rys.6.19. Mała wzniosła powłoka kompozytowa, poddana obciążeniu ściskającemu wzdłuż tworzącej, rozważana w niniejszym przykładzie, wg [Kreja, 2005].

Do analizy powłoki zastosowano komercyjny program obliczeniowy **NX Nastran v.10.1.1**. Do zdefiniowania w programie modelu numerycznego użyto 1600 czterowęzłowych elementów powłokowych QUAD (40x40), opisanych na siatce 1681 węzłów (41x41), zdefiniowanych w układzie biegunowym. Podstawy teoretyczne użytej metodologii elementów skończonych w odniesieniu do poruszanej tematyki można znaleźć m. in. w [Oden, 1972; Crisfield, 1991; Bathe, 1996; Zienkiewicz i Taylor, 2005].

Definicja modelu korzysta z teorii dużych obrotów, w sformułowaniu korotacyjnym. Obliczenia przeprowadzono w zakresie geometrycznie i materiałowo nieliniowym. Takie rozwiązanie jest motywowane wskazaniem zawartymi m. in. w [Woźniak i Kleiber, 1982].

Wygenerowane pole losowe jest wcielane jako do modelu numerycznego wykonanego w programie NX Nastran jako pole imperfekcji geometrycznych. Definiowane jest ono jako zaburzenie węzłów siatki MES, wykonane jeszcze **przed** generacją siatki MES.

b) Pole losowe modelujące imperfekcje geometryczne

Ze wszystkich parametrów, które mogą opisać losowość modelu powłoki, do analizy przyjęto, jak zasugerowano na początku niniejszego rozdziału, **jedynie imperfekcje geometryczne powłoki**. W zadaniu pominięto losowość obciążenia, podparcia paneli, odchyłek ułożenia warstw materiału i parametrów materiałowych lamin kompozytu, tak więc zastosowany losowy opis modelu jest dość uproszczony, ale równocześnie nawiązujący do metodologii wymiarowania konstrukcji i szacowania jej niezawodności, jaka sugerowana jest kodami projektowymi, co przywołano już w Rozdziale 4 niniejszej rozprawy.

Danymi wejściowymi do analiz numerycznych są wygenerowane programem autorskim pola losowe, opisujące imperfekcje geometryczne w . Zastosowano do nich ucięty rozkład Gaussa. Losowość odchyłek jest opisana funkcją korelacyjną jednorodnego pola losowego, wyrażoną równaniem

$$K(x_1, x_2) = s_w^2 \times e^{-\lambda_{x_1} \Delta x_1} (1 + \lambda_{x_1} \Delta x_1) e^{-\lambda_{x_2} \Delta x_2} (1 + \lambda_{x_2} \Delta x_2) \quad (6.18)$$

gdzie Δx_1 i Δx_2 są odległościami pomiędzy punktami pola wzdłuż osi poziomej x_1 i pionowej x_2 , współczynniki λ_{x_1} oraz λ_{x_2} są parametrami opisującymi zasięg korelacji na obu kierunkach, a odchylenie standardowe s_w^2 reprezentuje zmienność pola.

Odległości pomiędzy punktami pola dobrano tak, aby pokrywały się z rzeczywistymi wymiarami paneli. Wynoszą one zatem kolejno $\Delta x_1 = L/40 = 540,0 \text{ mm}/40 = 13,5 \text{ mm}$ dla wymiaru poziomego x_1 oraz $\Delta x_2 = S/40 = 421,2 \text{ mm}/40 = 10,53 \text{ mm}$ dla wymiaru pionowego x_2 . Odchylenie standardowe s_w^2 przyjęto jako równe jedności.

Współczynniki λ_{x_1} oraz λ_{x_2} nie mają natomiast pojedynczej wartości, gdyż zdecydowano się je przyjąć w późniejszej analizie jako zmienną losową probabilistycznej przestrzeni realizacji \mathbf{x} .

Do generacji pól imperfekcji geometrycznych według sformułowanej powyżej funkcji korelacyjnej zastosowano **algorytm warunkowej symulacji wykorzystującej metodę akceptacji i odrzucania**, zaprezentowany szerzej w rozdziale 5.2. niniejszej rozprawy.

Zastosowanie elementów skończonych wymaga wprowadzenia odpowiedniego uśrednienia wartości wygenerowanego pola losowego imperfekcji, uwzględniającego przyjęty w rozwiązaniu numerycznym rozmiar elementów skończonych. Zastosowano w tym celu procedurę zaproponowaną w [Vanmarcke, 1983], a we wzorach definiujących elementy macierzy kowariancyjnej wykorzystano wyniki pracy [Knabe i inni, 1998]:

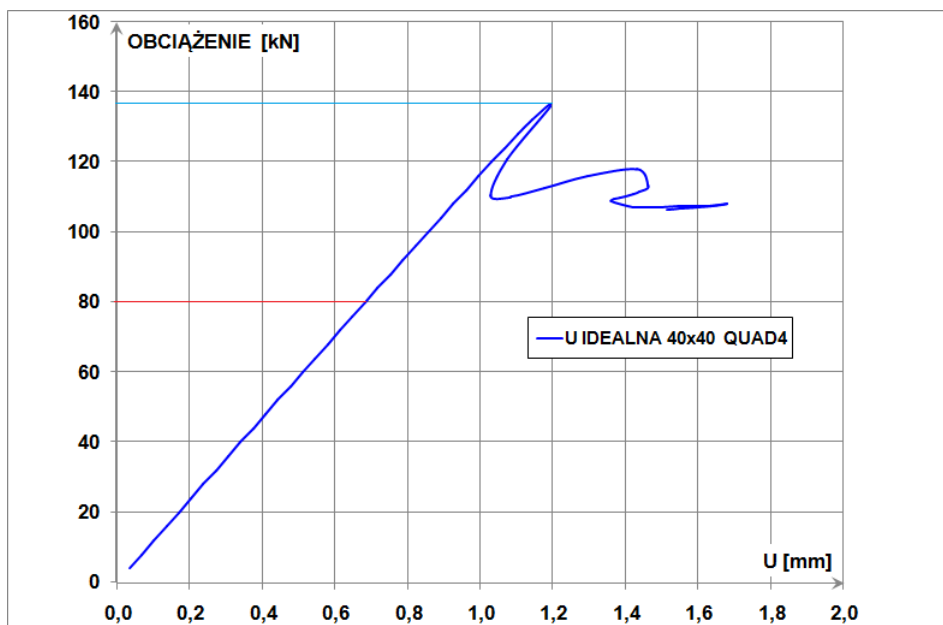
$$D_w(\Delta x, \Delta y) = \frac{2}{\lambda_x \Delta x} \left[2 + e^{-\lambda_x \Delta x} - \frac{3}{\lambda_x \Delta x} (1 - e^{-\lambda_x \Delta x}) \right] \frac{2}{\lambda_y \Delta y} \left[2 + e^{-\lambda_y \Delta y} - \frac{3}{\lambda_y \Delta y} (1 - e^{-\lambda_y \Delta y}) \right] \quad (6.19)$$

$$K_w(\Delta x, \Delta y) = \frac{e^{\lambda_x \Delta x}}{(\lambda_x \Delta x)^2} \left\{ \left[\cos(\lambda_x \Delta x) - \sin(\lambda_x \Delta x) \right] + 2\lambda_x \Delta x - 1 \right\} \cdot \frac{e^{\lambda_y \Delta y}}{(\lambda_y \Delta y)^2} \left\{ \left[\cos(\lambda_y \Delta y) - \sin(\lambda_y \Delta y) \right] + 2\lambda_y \Delta y - 1 \right\} \quad (6.20)$$

c) Obliczenia numeryczne

Wynikiem pojedynczej serii obliczeniowej jest wykreślona ścieżka równowagi przemieszczenia osiowego U , zaznaczonego symbolicznie na rys. 6.19. kolorem czerwonym. Na rzeczonyj ścieżce równowagi rozpatrywane są dwa punkty szczególne. Pierwszym z nich jest **przemieszczenie węzła środkowego krawędzi zakrzywionej U_{101} dla poziomu wypadkowej siły obciążającej równej 80kN** (gwarantującej uniknięcie utraty stateczności, niezależnie od poziomu zastosowanego w analizie zniekształcenia geometrii elementu), drugim jest natomiast **punkt utraty stateczności, w którym osiągnięta zostaje odpowiednia krytyczna lub graniczna wartość obciążenia**.

Referencyjnie przedstawić można rozwiązanie uzyskane w programie NX Nastran dla modelu paneli o geometrii idealnej. Ścieżka równowagi przemieszczenia osiowego U dla przypadku wyjściowego zilustrowana jest na rys. 6.20. Na rysunek naniesiono oba wyżej wymienione progi (punkty szczególne: przemieszczenie U_{101} osiągnięte przy poziomie $80kN$ (kolorem czerwonym) oraz obciążenie prowadzące do utraty stateczności (kolorem jasnoniebieskim).



Rys.6.20. Ścieżka równowagi przemieszczenia osiowego U , wykreślona dla modelu paneli o geometrii idealnej.

Szacowanie niezawodności na poziomie drugim postanowiono dla niniejszego przykładu wykonać za pomocą metodologii powierzchni odpowiedzi. Odrębnym problemem pozostało zagadnienie prawidłowego i inżyniersko usprawiedliwionego doboru zmiennych losowych przestrzeni realizacji zadania oraz właściwego oszacowania ich momentów probabilistycznych. Dodatkowo, ze szczególną uwagą należy przyjąć punkt startowy analizy (punkt zerowy zmiennych), względem którego obliczane będą wskaźniki niezawodności.

Na bazie wcześniejszego studium literatury w temacie zagadnienia (opierając się m. in. na pracach [Kamiński, 2002; Frangopol i Recek, 2003; Hien, 2003]), wniosków płynących z rozważań zebranych w rozdziale 4 niniejszej rozprawy oraz wstępnych testów numerycznych (przeprowadzono je m.in. dla pól regularnych, tj. modelujących paraboloidę oraz dwie parabole rozpięte na całej długości krawędzi paneli oraz dla pól losowych nieskorelowanych) zauważono, iż największy wpływ na zmiany poziomu obciążenia, przy którym następuje utrata stateczności paneli, mają **dwa czynniki**.

Pierwszym z nich, naturalnym z punktu widzenia inżynierskiego, jest głębokość imperfekcji, co w przypadku pola losowego można zamienić myślowo na **wielkość amplitudy pola**. Na podstawie wcześniejszych prób numerycznych założono, iż dla każdego wygenerowanego pola losowego przeprowadzi się jego późniejszą normalizację, tak, aby pole to zyskało wyłącznie jeden punkt maksymalnej amplitudy, równej jedności. Przyjęto następnie, iż uzyskana wartość jednostkowa zostanie wyrażona w [cm]. Końcowo, ustalono, iż pierwsza zmienna losowa przestrzeni realizacji x_1 (zwana **zmienną amplitudy** $m = m_{x_1} = m_{x_2}$)

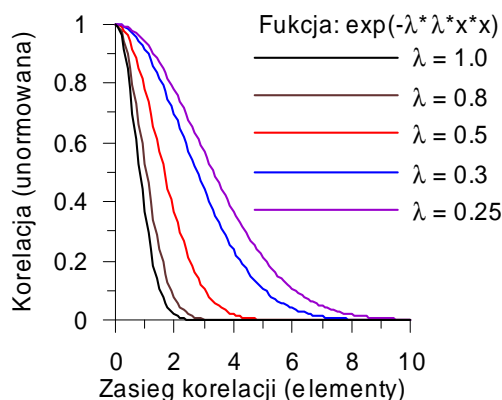
zostanie dobrana z rozkładu równomiernego z przedziału $x_1 \in \langle 0,0;1,0 \rangle$, przy czym wartość liczbowa zaczerpnięta z przedziału oznaczać będzie redukcyjny mnożnik, jaki zostanie nałożony na pole znormalizowane. Oznacza to, że punkt maksymalnej amplitudy pola imperfekcji będzie losowany z przedziału pomiędzy 0cm (powłoka o idealnej geometrii), a 1cm (powłoka o największej amplitudzie pola imperfekcji, z punktem maksymalnym osiągającym w/w odchylenie od wartości zamierzonej projektowo).

Drugim z czynników, naturalnym z punktu widzenia zastosowanego podejścia generacji pola, jest **wartość parametrów opisujących zasięg korelacji w obu kierunkach**. Ze względu na próbę ograniczenia złożoności analizy, a także na możliwość graficznej prezentacji jej wyników w trójwymiarowej rzutni graficznej, założono, iż parametry te będą stanowiły jedną zmienną losową, tj. będą miały dokładnie taką samą wartość dla wymiaru poziomego oraz dla wymiaru pionowego. Na podstawie wcześniejszych prób numerycznych założono, iż druga zmienna losowa przestrzeni realizacji x_2 (zwana **zmienną korelacji** $\lambda = \lambda_{x_1} = \lambda_{x_2}$) zostanie dobrana z rozkładu równomiernego z przedziału $x_2 \in \langle 0,0;1,0 \rangle$, przy czym wartość liczbowa zaczerpnięta z przedziału oznaczać będzie bezpośrednio parametr zasięgu korelacji.

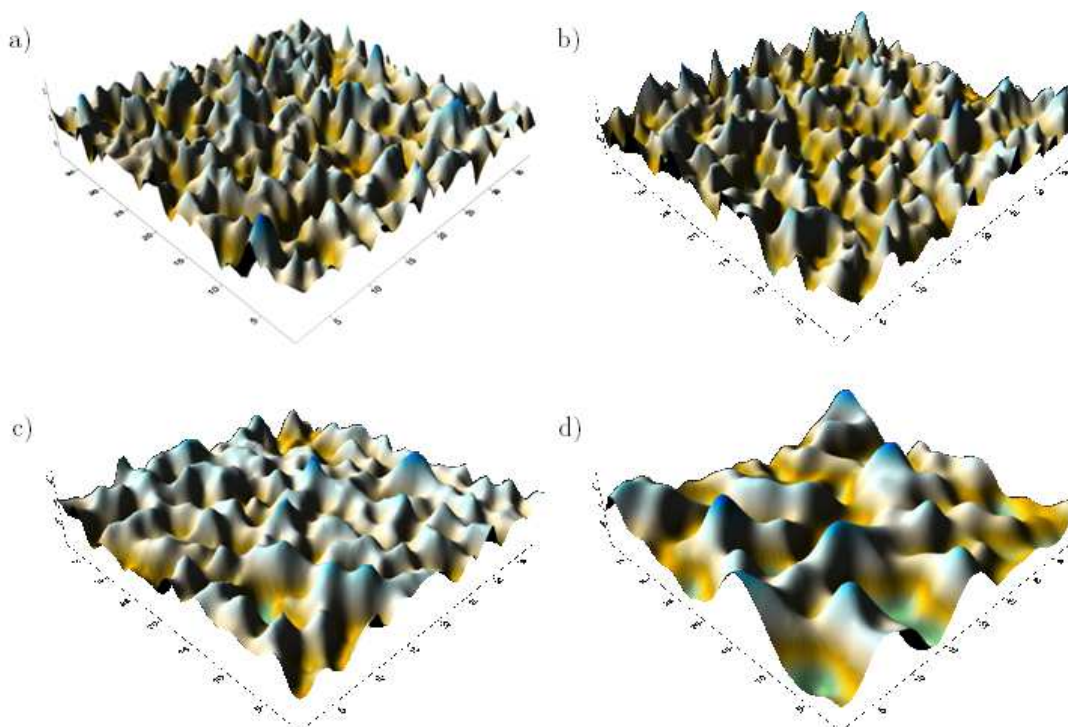
Zakładając znormalizowane pole losowe, używane w niniejszej analizie, wskazać można wpływ, jaki parametr zasięgu korelacji ma na kształt danego pola losowego. Na rys. 6.21. przedstawiono związek pomiędzy stopniem zasięgu korelacji (na osi pionowej), a wpływem na określoną liczbę elementów skończonych paneli kompozytowej rozważanej w tej analizie, w zależności od przyjętego w procesie generacji pola losowego parametru zasięgu korelacji λ .

Na rys. 6.22. przedstawiono natomiast obraz kilku przykładowo wygenerowanych pól losowych o zróżnicowanych wartościach parametru zasięgu korelacji λ .

Po przyjęciu danych wejściowych analizy w sposób opisany powyżej, wykonano szereg obliczeń numerycznych, prowadzących do uzyskania ścieżek równowagi dla przemieszczenia osiowego krawędzi obciążonej U . Przeprowadzono 24 przebiegi rozwiązania, w trzech etapach dopasowanych do zakładanej później analizy przy użyciu metody powierzchni odpowiedzi. Dla każdego z przebiegów zapisywano rezultaty przemieszczenia U_{101} osiągniętego przy poziomie $80kN$ oraz obciążenia prowadzącego do utraty stateczności.



Rys. 6.21. Związek pomiędzy stopniem korelacji, a wpływem na określoną liczbę elementów skończonych paneli kompozytowej, w zależności od przyjętego parametru zasięgu korelacji λ .



Rys. 6.22. Przykładowe pola losowe o różnych wartościach parametru zasięgu korelacji λ :

a) pole o bardzo słabej korelacji, $\lambda = \lambda_{x_1} = \lambda_{x_2} = 1,00$

b) pole o słabej korelacji, $\lambda = \lambda_{x_1} = \lambda_{x_2} = 0,80$

c) pole o średniej korelacji, $\lambda = \lambda_{x_1} = \lambda_{x_2} = 0,50$

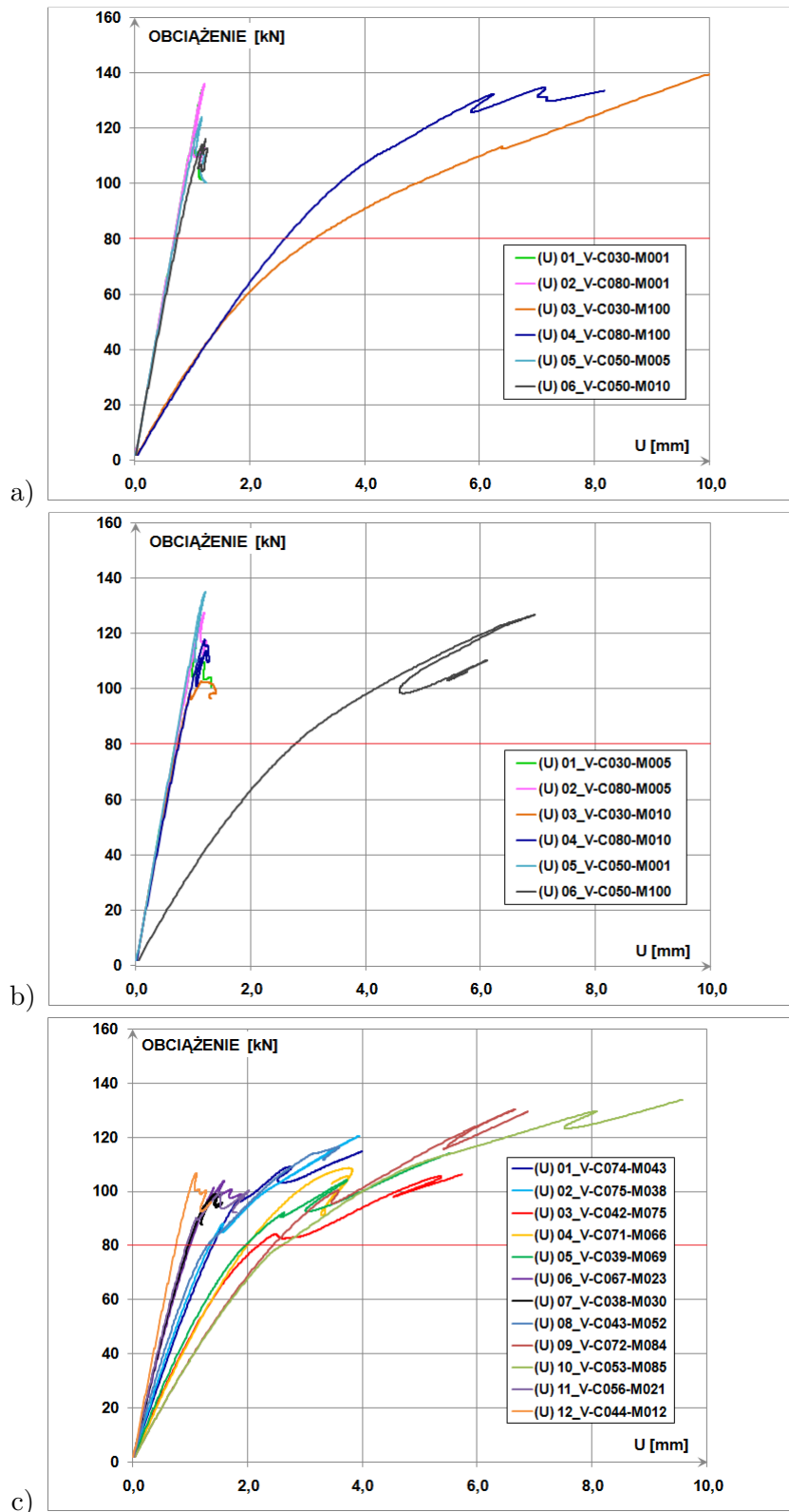
d) pole o silnej korelacji, $\lambda = \lambda_{x_1} = \lambda_{x_2} = 0,30$.

W etapie pierwszym przeanalizowano 6 próbek wybranych z przestrzeni realizacji w taki, sposób, aby móc oprzeć na nich pierwszą aproksymację powierzchni odpowiedzi. Wybrano zatem cztery punkty bliskie narożom powierzchni, o współrzędnych $(m; \lambda)$ wynoszących kolejno: $(0,01; 0,30)$, $(0,01; 0,80)$, $(1,00; 0,30)$ oraz $(1,00; 0,80)$, pomagające rozpostrzeć powierzchnię w przestrzeni realizacji, a także dwa punkty środkowe, o współrzędnych $(m; \lambda)$ wynoszących kolejno $(0,05; 0,50)$ oraz $(0,10; 0,50)$, pomagające aproksymować powierzchnię w środku jej rozpiętości.

W etapie drugim przeanalizowano kolejnych 6 próbek wybranych z przestrzeni realizacji w taki, sposób, aby zagęścić informacje o powierzchni odpowiedzi konstrukcji w pobliżu jej krawędzi. Wybrano punkty o współrzędnych $(m; \lambda)$ wynoszących kolejno: $(0,05; 0,30)$, $(0,10; 0,30)$, $(0,05; 0,80)$, $(0,10; 0,80)$, $(0,01; 0,50)$ oraz $(1,00; 0,50)$.

W etapie trzecim przeanalizowano kolejnych 12 próbek wybranych z przestrzeni realizacji całkowicie losowo (za pomocą bezpośredniego próbkowania metodą Monte Carlo), tak, aby zagęścić informacje o powierzchni odpowiedzi konstrukcji w pobliżu jej środka. Wybrano punkty o współrzędnych $(m; \lambda)$ wynoszących kolejno: $(0,43; 0,74)$, $(0,38; 0,75)$, $(0,75; 0,42)$, $(0,66; 0,71)$, $(0,69; 0,39)$, $(0,23; 0,67)$, $(0,30; 0,38)$, $(0,52; 0,43)$, $(0,84; 0,72)$, $(0,85; 0,53)$, $(0,21; 0,56)$ oraz $(0,12; 0,44)$.

Ścieżki równowagi uzyskane w programie NX Nastran dla przemieszczenia osiowego U dla wszystkich punktów obliczeniowych analizy zilustrowane są na rys. 6.23. Na rysunek naniesiono próg przemieszczenia U_{101} przy poziomie 80 kN obciążenia (kolorem czerwonym).



Rys. 6.23. Ścieżki równowagi dla przemieszczenia U dla modelu paneli z imperfekcjami: a) etap pierwszy analizy, b) etap drugi analizy, c) etap trzeciej analizy.

Przed przystąpieniem do procedur aproksymacji powierzchni odpowiedzi dla zagadnienia oraz oszacowania niezawodności paneli, sformułować należy stan graniczny, jaki narzuca się dla poszczególnych przypadków paneli. W niniejszym zadaniu przyjęto, iż w pierwszym przypadku analizy – przemieszczenie węzła środkowego krawędzi zakrzywionej U_{101} dla poziomu wypadkowej siły obciążającej równej 80kN **nie może przekroczyć wartości granicznej** $U_{101,\text{lim}} = 2,0\text{ mm}$, czyli poziomu grubości całego elementu kompozytowego. W drugim przypadku analizy – punkt utraty stateczności, w którym osiągnięta zostaje odpowiednia krytyczna lub graniczna wartość obciążenia **nie może nastąpić poniżej poziomu wypadkowej siły obciążającej równej 100 kN** .

Zebrania wyników trzech przeprowadzonych etapów obliczeń dokonano w Tabelicy 6.19. Tabelicę wzbogacono dodatkowo o zero-jedynkowy indeks $I_{0/1}$ spełnienia warunku granicznego w danym przypadku analizy. Indeks ten przybiera wartość 1 w przypadku spełnienia warunku, a wartość 0 w przypadku odwrotnym.

Wskaźnik taki będzie pomocny przy szacowaniu prawdopodobieństwa awarii paneli kompozytowej przy użyciu bezpośredniego podejścia metody Monte Carlo.

Tablica 6.19. Zebranie wyników przeprowadzonych etapów obliczeń paneli kompozytowej.

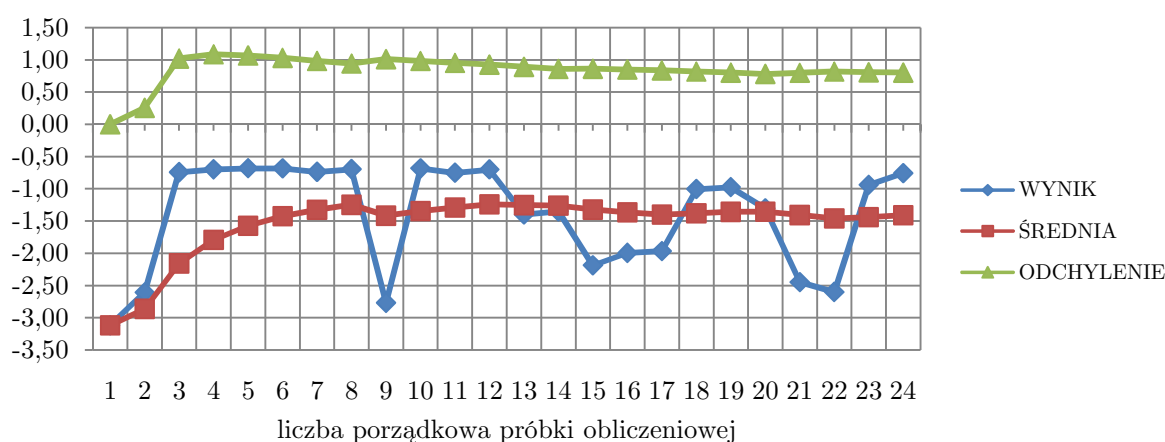
Lp.	RSM - PANELA		U ₁₀₁ [mm]		N _{crit} [kN]	
	λ	m	(limit = -2,00)		(limit = 100,00)	
			przy 80kN	I _{0/1}	przy u _{crit}	I _{0/1}
1.	0,30	1,00	-3,12008	0	113,120	1
2.	0,80	1,00	-2,60901	0	109,862	1
3.	0,50	0,10	-0,74544	1	114,164	1
4.	0,50	0,05	-0,69972	1	124,132	1
5.	0,30	0,01	-0,68375	1	134,790	1
6.	0,80	0,01	-0,68416	1	136,134	1
7.	0,30	0,10	-0,73906	1	98,824	0
8.	0,30	0,05	-0,69677	1	116,130	1
9.	0,50	1,00	-2,77036	0	82,708	0
10.	0,50	0,01	-0,68412	1	134,954	1
11.	0,80	0,10	-0,75164	1	117,732	1
12.	0,80	0,05	-0,70149	1	127,574	1
13.	0,74	0,43	-1,40191	1	96,490	0
14.	0,75	0,38	-1,35024	1	87,960	0
15.	0,42	0,75	-2,18863	0	84,114	0
16.	0,71	0,66	-1,99699	1	108,550	1
17.	0,39	0,69	-1,96836	1	92,106	0
18.	0,67	0,23	-1,00521	1	101,214	1
19.	0,38	0,30	-0,97521	1	90,574	0
20.	0,43	0,52	-1,30618	1	81,818	0
21.	0,72	0,84	-2,45007	0	100,184	1
22.	0,53	0,85	-2,60283	0	77,364	0
23.	0,56	0,21	-0,94040	1	90,188	0
24.	0,44	0,12	-0,76001	1	106,556	1

d) Analiza zbieżności uzyskanych rezultatów

Kluczową kwestią w ocenie prawidłowości szacowania prawdopodobieństwa awarii paneli kompozytowych przy użyciu bezpośredniego podejścia metody Monte Carlo jest obserwacja zbieżności rezultatów probabilistycznych momentów odpowiedzi konstrukcji przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek wykorzystanych do analizy. Wykonano zatem prostą analizę zbieżności dla obu wariantów zadania.

1. Przemieszczenie krawędzi zakrzywionej dla poziomu siły obciążającej równej 80kN.

Obserwacja zbieżności rezultatów probabilistycznych momentów odpowiedzi przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek dla wariantu zadania śledzącego przemieszczenie krawędzi zakrzywionej dla poziomu siły obciążającej równej 80 kN przedstawiona jest na rys. 6.24.



Rys. 6.24. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń momentów odpowiedzi dla wariantu zadania śledzącego przemieszczenie U_{101} dla całkowitej siły obciążającej równej 80 kN.

Na podstawie rys. 6.24 stwierdzić można, iż po pierwszym etapie analizy (rozpatrzeniu tylko 6 próbek) zadowalająca zbieżność nie została osiągnięta. Wiąże się to ze znaczną rozbieżnością przemieszczeń obserwowanych dla punktów środkowych powierzchni, a tych zaobserwowanych dla punktów narożnych powierzchni. Jest to bardzo ciekawa obserwacja, gdyż świadczy ona o fakcie, że dla punktów o średniej korelacji i stosunkowo małej amplitudzie ścieżki równowagi przyrastają dużo bardziej w kierunku osi przemieszczenia U_{101} , niż przykładowo ścieżki równowagi dla punktów o małej bądź silnej korelacji i bardzo dużej amplitudzie. Może się to wiązać z faktem, iż bardzo duży poziom amplitudy imperfekcji (wynoszący pięciokrotność grubości całej paneli) jest de facto zupełnie inną geometrią dla zadania, pracującą analogicznie do powłoczki falistej bardziej niż analogicznie do płaskiej.

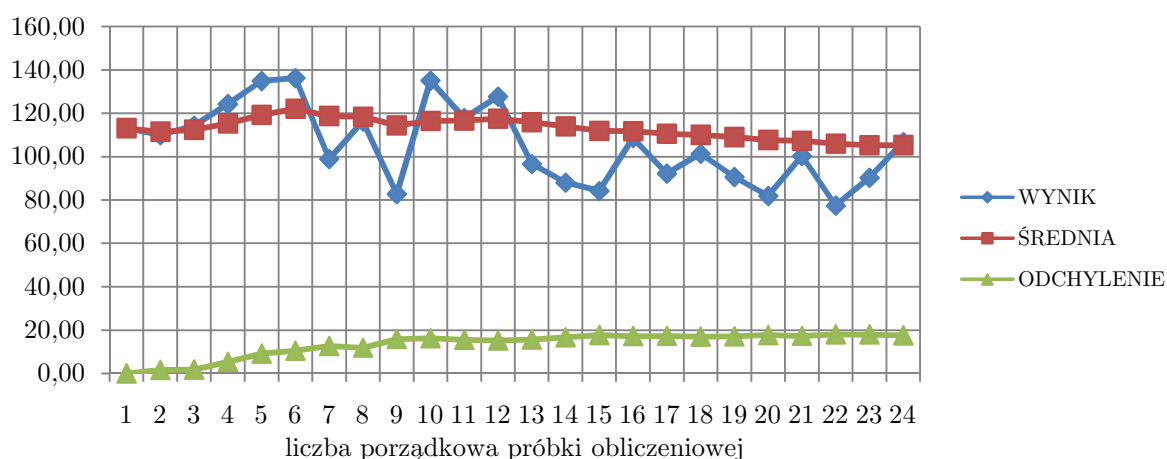
Ze względu na dobór punktów w drugim etapie analizy, zaobserwowana zbieżność po jego zakończeniu (po rozpatrzeniu 12 próbek) jest już zadowalająca – różnica rezultatu średniego przemieszczenia U_{101} pomiędzy wynikiem przedostatnim, a ostatnim wynosi zaledwie 3,80%. Jednakże ze względu na sposób rozmieszczenia próbek na powierzchni odpowiedzi trudno jest powiedzieć, iż wybór ten odpowiada ściśle założeniom metody Monte Carlo. Rozpatrzenie kolejnych próbek, wybranych z przedziałów zmienności zmiennych probabilistycznych w sposób ściśle losowy wydaje się zatem konieczne, aby dowieść o możliwości zastosowania predykcji prawdopodobieństwa awarii konstrukcji metodą Monte Carlo.

Na podstawie trzeciego etapu analizy (po rozpatrzeniu 24 próbek), zaobserwować można niemalże całkowitą zbieżność momentów probabilistycznych. Różnica pomiędzy przedostatnim, a ostatnim wynikiem średniego przemieszczenia U_{101} w serii trzeciej wynosi zaledwie 2,01%, natomiast analogiczna różnica między przedostatnim, a ostatnim wynikiem odchylenia standardowego przemieszczenia U_{101} wynosi jedynie 0,68%. Obie różnice kwalifikują obliczenia jako zbieżne, a ich wyniki jako miarodajne, nawet pomimo znacznego rozrzutu wartości przemieszczenia U_{101} wykazanego przy poziomie siły równym 80 kN, jakie wprowadzają różnorodnie lokalizacyjnie punkty obliczeniowe serii trzeciej.

Taki stan rzeczy dowodzi więc możliwości wiarygodnego szacowania prawdopodobieństwa awarii konstrukcji metodą Monte Carlo za pomocą bardzo małej ilości punktów obliczeniowych, nawet dla złożonych konstrukcji inżynierskich, jeśli tylko ich rozmieszczenie jest dobrane w sposób odpowiedni. Ten odpowiedni dobór punktów obliczeniowych jest myślowo tożsamy z technikami redukcji populacji próbek, a w przypadku tego zadania jest bliźniaczy wobec metodologii próbkowania wagowego (importance sampling) i zbliżony z poruszoną w poprzednim rozdziale kwestią odpowiedniego doboru punktów obliczeniowych w pobliżu stanu granicznego powierzchni odpowiedzi danego problemu inżynierskiego.

2. Poziom całkowitej siły obciążającej odpowiadający osiągnięciu utraty stateczności.

Obserwacja zbieżności rezultatów probabilistycznych momentów odpowiedzi przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek dla wariantu zadania śledzącego poziom całkowitej siły obciążającej powodujący utratę stateczności przedstawiona jest na rys. 6.25.



Rys. 6.25. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń probabilistycznych momentów odpowiedzi dla wariantu zadania śledzącego poziom siły obciążającej powodujący utratę stateczności N_{crit} .

Na podstawie rys. 6.25. stwierdzić można, iż po pierwszym etapie analizy (rozpatrzeniu tylko 6 próbek) zadowalająca zbieżność także i w tym przykładzie nie została osiągnięta. Po drugim etapie (analiza 12 próbek) zbieżność średniej wartości obciążenia prowadzącego do utraty stateczności N_{crit} oraz odchylenia standardowego tejże wartości znacznie się poprawiła, jednakże pamiętać należy, iż nie włączono dotąd do analizy punktów obliczeniowych wygenerowanych za pomocą bezpośredniego podejścia Monte Carlo. Włączając rezultaty otrzymane z w/w punktów, po zakończeniu serii trzeciej (analiza

24 próbek) zbieżność średniego przemieszczenia wyraźnie koryguje się na poziomie wartości innej (o 10,4%) niż po serii drugiej, co ponownie zwraca uwagę na konieczność analizy jak najbardziej zróżnicowanego spektrum punktów obliczeniowych. Zbieżność odchylenia standardowego wartości obciążenia prowadzącego do utraty stateczności N_{crit} pozostała natomiast na poziomie prezentowanym po poprzednich dwóch seriach (podobnie jak w pierwszym przypadku analizy), co zdaniem autora popiera dokonanie wyboru punktów obliczeniowych w opisanym powyżej sposób.

e) Dobór własny powierzchni odpowiedzi do zadania początkowego

Zakładając, iż krzywizna rzeczywistej powierzchni odpowiedzi konstrukcji jest duża, dla zadania używa się **modelu drugiego rzędu z członami interakcyjnymi**, którego postać dla niniejszego zadania (dwie zmienne losowe) przedstawia się następująco:

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 \quad (6.11)$$

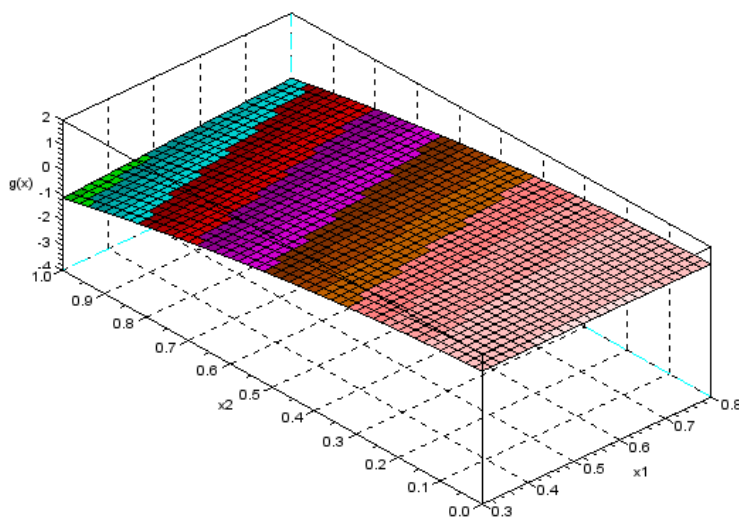
Założono, iż aproksymowana powierzchnia odpowiedzi będzie obliczana w trzech, podjętych w poprzednich punktach wariantach: przy użyciu 6, 12 oraz 24 punktów obliczeniowych. Aproksymację powierzchni wykonano osobno dla obu wariantów zadania.

1. Przemieszczenie krawędzi zakrzywionej dla poziomu siły obciążającej równej 80kN.

Dla 6 punktów obliczeniowych, uzyskano powierzchnię odpowiedzi daną wzorem

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 1,268 + 0,267 \cdot x_1 - 1,197 \cdot x_2 - 0,253 \cdot x_1^2 - 1,558 \cdot x_2^2 + 1,033 \cdot x_1 x_2 \quad (6.21)$$

Poglądowy szkic powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowanej przy użyciu 6 punktów obliczeniowych przedstawia rys. 6.26.

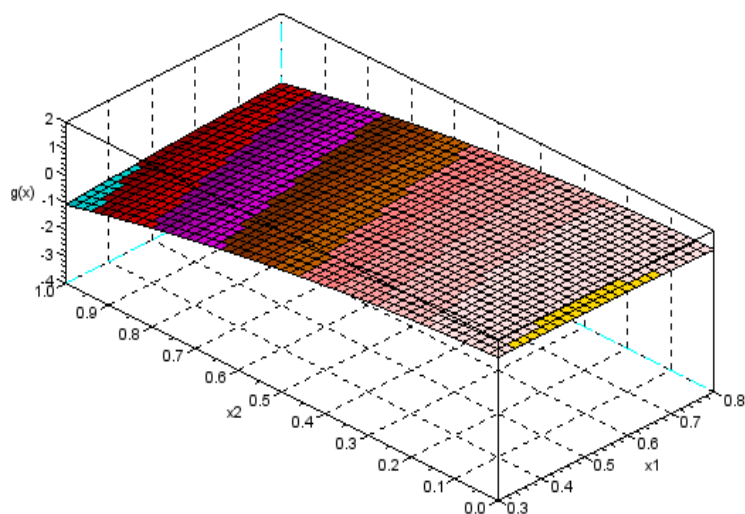


Rys. 6.26. Powierzchnia odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, obliczana przy użyciu 6 punktów obliczeniowych.

Dla 12 punktów obliczeniowych, uzyskano powierzchnię odpowiedzi daną wzorem

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 1,200 + 0,598 \cdot x_1 - 1,061 \cdot x_2 - 0,594 \cdot x_1^2 - 1,653 \cdot x_2^2 + 1,044 \cdot x_1 x_2 \quad (6.22)$$

Poglądowy szkic powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowanej przy użyciu 6 punktów obliczeniowych przedstawia rys. 6.27.

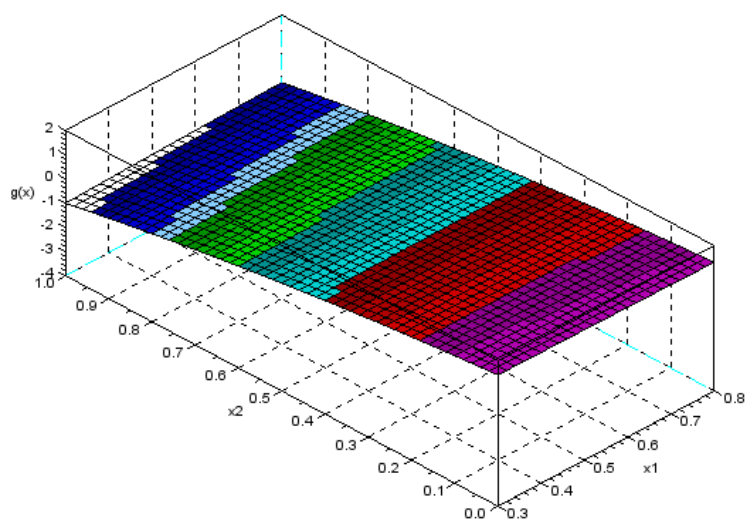


Rys. 6.27. Powierzchnia odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, obliczana przy użyciu 12 punktów obliczeniowych.

Dla 24 punktów obliczeniowych, uzyskano powierzchnię odpowiedzi daną wzorem

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 1,447 - 0,061 \cdot x_1 - 1,634 \cdot x_2 - 0,145 \cdot x_1^2 - 0,990 \cdot x_2^2 + 0,674 \cdot x_1x_2 \quad (6.23)$$

Poglądowy szkic powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowanej przy użyciu 6 punktów obliczeniowych przedstawia rys. 6.28.



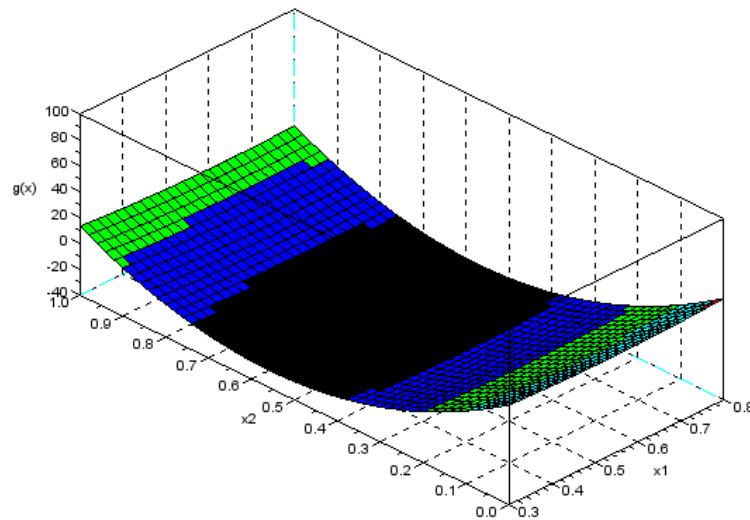
Rys. 6.28. Powierzchnia odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, obliczana przy użyciu 24 punktów obliczeniowych.

2. Poziom całkowitej siły obciążającej odpowiadający osiągnięciu utraty stateczności.

Dla 6 punktów obliczeniowych, uzyskano powierzchnię odpowiedzi daną wzorem

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 46,161 - 42,797 \cdot x_1 - 225,341 \cdot x_2 + 41,435 \cdot x_1^2 + 204,200 \cdot x_2^2 - 9,297 \cdot x_1x_2 \quad (6.24)$$

Poglądowy szkic powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowanej przy użyciu 6 punktów obliczeniowych przedstawia rys. 6.29.

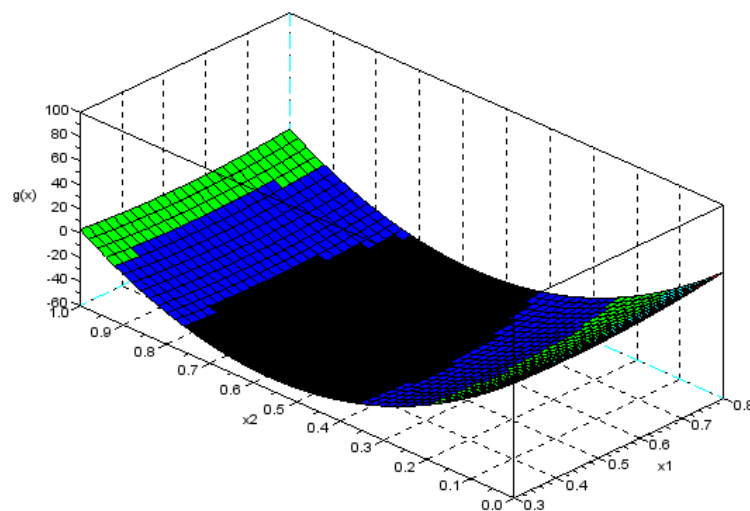


Rys. 6.29. Powierzchnia odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, obliczana przy użyciu 6 punktów obliczeniowych.

Dla 12 punktów obliczeniowych, uzyskano powierzchnię odpowiedzi daną wzorem

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 47,455 - 64,406 \cdot x_1 - 298,278 \cdot x_2 + 76,172 \cdot x_1^2 + 271,685 \cdot x_2^2 - 17,807 \cdot x_1 x_2 \quad (6.25)$$

Poglądowy szkic powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowanej przy użyciu 12 punktów obliczeniowych przedstawia rys. 6.30.

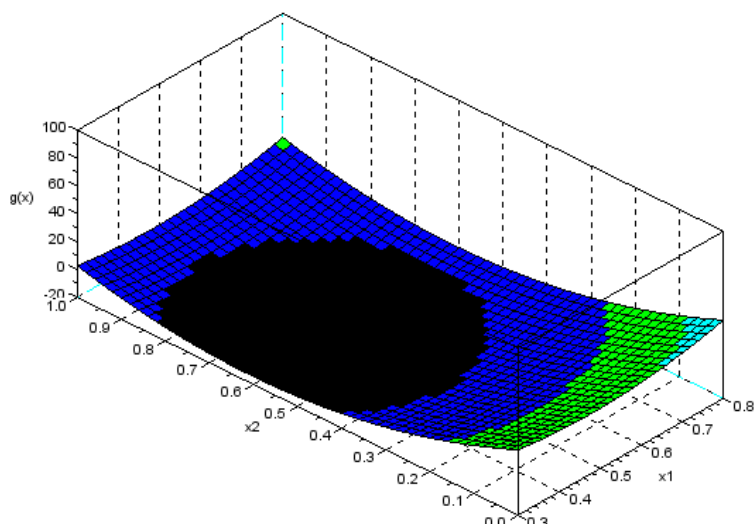


Rys. 6.30. Powierzchnia odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, obliczana przy użyciu 12 punktów obliczeniowych.

Dla 24 punktów obliczeniowych, uzyskano powierzchnię odpowiedzi daną wzorem

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = 51,189 - 118,460 \cdot x_1 - 134,889 \cdot x_2 + 124,706 \cdot x_1^2 + 111,401 \cdot x_2^2 - 2,052 \cdot x_1 x_2 \quad (6.26)$$

Poglądowy szkic powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowanej przy użyciu 24 punktów obliczeniowych przedstawia rys. 6.31.



Rys. 6.31. Powierzchnia odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, obliczana przy użyciu 24 punktów obliczeniowych.

Na bazie wykreślonych powierzchni odpowiedzi dla obu przypadków analizy zadania można jednoznacznie stwierdzić, iż zaproponowane początkowe stadia analizy (dla 6 oraz 12 punktów obliczeniowych), w których punkty obliczeniowe zostały zgrupowane w dużej mierze na krawędziach rozpatrywanego wycinka powierzchni, w dosyć dobry sposób odwzorowują globalne zachowanie powierzchni odpowiedzi. Jednakże do pełnego rozpoznania topografii powierzchni niezbędne jest dodanie pewnej ilości punktów obliczeniowych (w tym przypadku było to jedynie 12 punktów, co wskazuje, że ilość ta może być niewielka, jeśli zostanie wybrana we właściwy sposób). W pierwszym przypadku analizy, po dwóch seriach obliczeniowych znaleziono właściwą topografię powierzchni, ale mylnie określono jej wyniesienie ponad poziom odniesienia. W drugim przypadku analizy znaleziono po dwóch seriach obliczeniowych właściwe wyniesienie powierzchni ponad poziom odniesienia, ale mylnie oceniono topografię (wykazano „siodło” zamiast „leja”). Obie wyżej wymienione nieprawidłowości mogłyby doprowadzić w późniejszej kolejności do niewłaściwej oceny probabilistycznej bezpieczeństwa konstrukcji, jeżeliby zakończono obliczenia po rozważeniu zbyt małej liczby punktów realizacji zmiennych losowych.

Całkowita liczba 24 punktów obliczeniowych wydaje się być wystarczająca dla tak sformułowanego zadania inżynierskiego. Ocenia się, iż wiążącymi rezultatami prawdopodobieństwa awarii P_f oraz wskaźników niezawodności β_{HL} i β_{HLRF} **powinny być wyniki zaproponowane po trzeciej serii obliczeniowej** (dla obu przypadków analizy).

f) Skalkulowanie prawdopodobieństwa awarii paneli P_f oraz wskaźników niezawodności Hasofera–Linda β_{HL} i Hasofera–Linda–Rackwitz–Fiesslera β_{HLRF}

Założono, iż w ramach analizy przykładu numerycznego paneli kompozytowych poddanej obciążeniu ściskającemu wzdłuż tworzącej zbadanych zostanie dziewięć różnych parametrów probabilistycznej oceny niezawodności powłoki.

Parametry te obliczane będą w następującej kolejności:

- prawdopodobieństwo awarii paneli wg podejścia bezpośredniego Monte Carlo $P_{f,MC}$, jako stosunek liczby próbek spełniających warunek graniczny do ich całkowitej liczby,
- bezawaryjność paneli wg podejścia bezpośredniego Monte Carlo $P_{s,MC}$, jako przeciwstawieństwo $P_{f,MC}$ zdefiniowanego powyżej ($P_{s,MC} = 1 - P_{f,MC}$),
- wskaźnik niezawodności obliczany wg podejścia bezpośredniego Monte Carlo, według podejścia Cornella, jako $\beta_{C,MC} = -\Phi^{-1}(P_f)$,
- wskaźnik niezawodności według podejścia Hasofera–Linda β_{HL} , poszukiwany na aproksymowanej powierzchni odpowiedzi za pomocą programu **RSM–Win**,
- prawdopodobieństwo awarii paneli $P_{f,HL,RSM}$ obliczane jako: $P_{f,HL,RSM} = \Phi(-\beta_{HL,RSM})$,
- bezawaryjność paneli $P_{s,HL,RSM}$ obliczana jako: ($P_{s,HL,RSM} = 1 - P_{f,HL,RSM}$),
- wskaźnik niezawodności według podejścia Hasofera–Linda–Rackwitz–Fiesslera β_{HLRF} , poszukiwany na aproksymowanej powierzchni odpowiedzi programem **RSM–Win**,
- prawdopodobieństwo awarii $P_{f,HLRF,RSM}$ obliczane jako: $P_{f,HLRF,RSM} = \Phi(-\beta_{HLRF,RSM})$,
- bezawaryjność paneli $P_{s,HLRF,RSM}$ obliczana jako: ($P_{s,HLRF,RSM} = 1 - P_{f,HLRF,RSM}$).

W działaniach programu autorskiego założono, iż wartości obliczanych wskaźników niezawodności będą pobierane jako wiążące po wykonaniu 20 iteracji.

Wszystkie parametry probabilistycznej oceny niezawodności powłoki będą obliczane w trzech, podjętych w poprzednich punktach wariantach: przy użyciu 6, 12 oraz 24 punktów obliczeniowych. Oszacowania zostaną wykonane osobno dla obu wariantów zadania.

Rezultaty probabilistycznych parametrów oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek dla wariantu zadania śledzącego przemieszczenie krawędzi zakrzywionej dla poziomu całkowitej siły obciążającej równej 80kN przedstawiono w tablicy 6.20.

Analogiczne rezultaty dla wariantu zadania śledzącego poziom całkowitej siły obciążającej powodujący utratę stateczności przedstawione są zbiorczo w tablicy 6.21.

Na podstawie danych zebranych w tablicach 6.20 i 6.21 wykonano (osobno dla obu wariantów zadania) analizę zbieżności wartości parametrów probabilistycznej oceny niezawodności powłoki w trzech kolejnych etapach analizy.

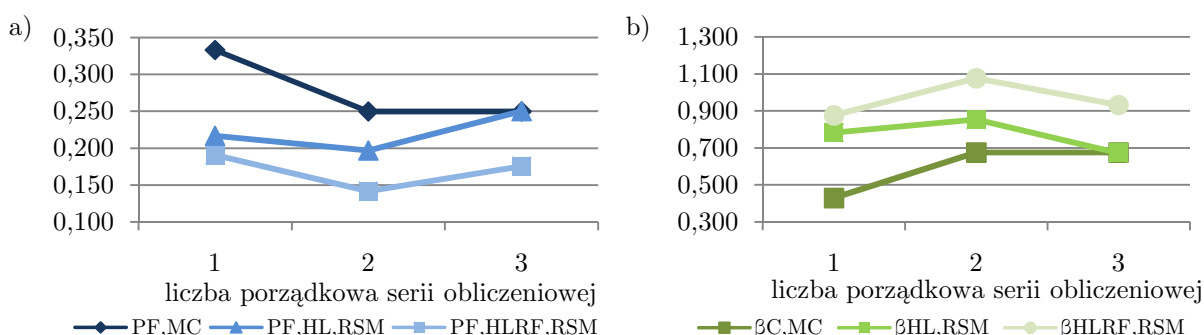
Tablica 6.20. Zebranie wyników przeprowadzonych etapów obliczeń paneli kompozytowej dla wariantu zadania śledzącego przemieszczenie U_{101} dla siły obciążającej równej 80 kN.

U_{101} przy 80kN	SERIA 1	SERIA 2	SERIA 3
	6 próbek	12 próbek	24 próbki
$P_{f,MC}$	0,333	0,250	0,250
$P_{s,MC}$	0,667	0,750	0,750
$\beta_{C,MC}$	0,430	0,675	0,675
$P_{f,HL,RSM}$	0,217	0,197	0,250
$P_{s,HL,RSM}$	0,783	0,803	0,750
$\beta_{HL,RSM}$	0,783	0,853	0,673
$P_{f,HLRF,RSM}$	0,191	0,142	0,176
$P_{s,HLRF,RSM}$	0,809	0,858	0,824
$\beta_{HLRF,RSM}$	0,875	1,076	0,932

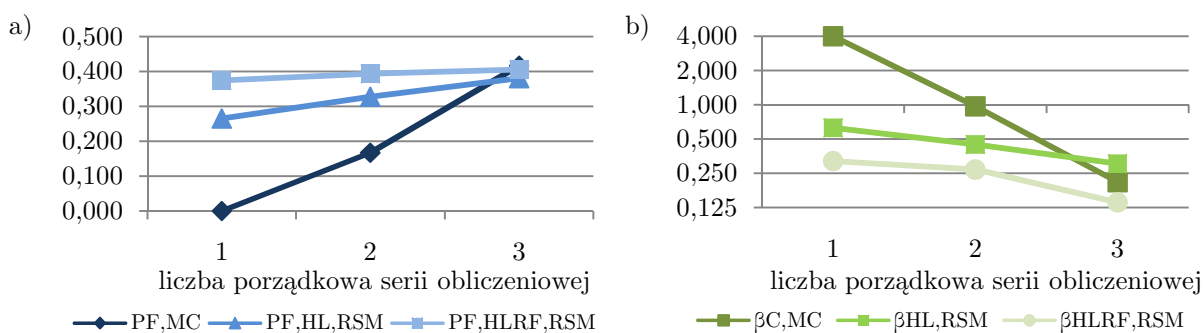
Tablica 6.21. Zebranie wyników przeprowadzonych etapów obliczeń paneli kompozytowej dla wariantu zadania śledzącego poziomu siły obciążającej powodujący utratę stateczności.

N_{CRIT}	SERIA 1	SERIA 2	SERIA 3
	6 próbek	12 próbek	24 próbki
$P_{F,MC}$	0,000	0,167	0,417
$P_{S,MC}$	1,000	0,833	0,583
$\beta_{C,MC}$	3,999	0,970	0,210
$P_{F,HL,RSM}$	0,265	0,327	0,381
$P_{S,HL,RSM}$	0,735	0,673	0,619
$\beta_{HL,RSM}$	0,627	0,447	0,304
$P_{F,HLLRF,RSM}$	0,374	0,394	0,406
$P_{S,HLLRF,RSM}$	0,626	0,606	0,594
$\beta_{HLLRF,RSM}$	0,320	0,270	0,139

Kalkulację prawdopodobieństwa awarii paneli P_f oraz jej wskaźnika niezawodności β (trzema różnymi podejściami) w kolejnych etapach analizy, dla wariantu zadania śledzącego przemieszczenie krawędzi zakrzywionej dla poziomu całkowitej siły obciążającej równej 80 kN przedstawiono na rys. 6.32, a analogiczną kalkulację dla wariantu zadania śledzącego poziom całkowitej siły obciążającej powodujący utratę stateczności przedstawiono na rys. 6.33.

**Rys. 6.32.** Uzyskiwanie zbieżności po kolejnych etapach analizy wariantu zadania śledzącego przemieszczenie U_{101} dla siły obciążającej równej 80 kN:

a) przez wartości prawdopodobieństwa awarii paneli P_f ; b) przez wskaźniki niezawodności β .

**Rys. 6.33.** Uzyskiwanie zbieżności po kolejnych etapach analizy wariantu zadania śledzącego przemieszczenie U_{101} dla siły obciążającej powodującej utratę stateczności N_{crit} :

a) przez wartości prawdopodobieństwa awarii paneli P_f ; b) przez wskaźniki niezawodności β .

Dla pierwszego wariantu zadania, tj. kiedy bada się, czy przemieszczenie węzła środkowego krawędzi zakrzywionej U_{101} dla poziomu siły obciążającej równej 80 kN przekracza wartość graniczną $U_{101,lim} = 2,0$ mm, wyszukiwanie parametrów probabilistycznej oceny niezawodności powłoki (zarówno prawdopodobieństwa awarii paneli P_f , jak i wskaźnika niezawodności β) zostało zakończone po trzech seriach obliczeniowych (po kalkulacji powierzchni odpowiedzi przy użyciu 24 punktów obliczeniowych) niewystarczającą zbieżnością rozwiązań. Pomiedzy etapem z 12 punktami, a etapem z 24 punktami obliczeniowymi wykryto znaczne obniżenie całości powierzchni odpowiedzi względem osi x_3 (prezentującej wartość funkcji granicznej $\hat{g}(\mathbf{x})$ dla realizacji zmiennych x_1, x_2), co jest zmianą odpowiadającą za to, że wskaźniki niezawodności obliczone na jej podstawie (programem autorskim) między drugą, a trzecią serią rosną niemalże równoległe do siebie, zamiast przejawiać zbieganie się ich wartości (konsekwentnie takie samo zachowanie przejawia prawdopodobieństwo awarii liczone za ich pomocą). Referencyjnie podane parametry probabilistycznej oceny niezawodności powłoki, obliczane metodą Monte Carlo, mają za to dużą zbieżność z rozwiązaniem wskaźnika niezawodności według podejścia Hasofera – Linda β_{HL} . Można więc oczekiwać, że w przypadku ustalenia się poziomu powierzchni odpowiedzi w przestrzeni realizacji zmiennych losowych w kolejnych seriach obliczeniowych, wykonywanych przy użyciu większej liczby próbek niż 24, wyniki te osiągną jeszcze bardziej zadowalającą zbieżność.

Dla drugiego wariantu zadania, tj. kiedy bada się, czy punkt utraty stateczności, w którym osiągnięta zostaje odpowiednia krytyczna lub graniczna wartość obciążenia następuje powyżej poziomu wypadkowej siły obciążającej równej 100 kN, wyszukiwanie parametrów probabilistycznej oceny niezawodności powłoki zostało zakończone po trzech seriach obliczeniowych niemalże doskonałą zbieżnością rozwiązań.

Pomiedzy etapem z 12 punktami, a etapem z 24 punktami obliczeniowymi znacznie poprawiło się rozeznanie topografii powierzchni, a linia nakreślona przez równanie stanu granicznego została wygładzona i lepiej przybliżona numerycznie, co jest zmianą odpowiadającą za szybką i zadowalającą zbieżność parametrów probabilistycznej oceny niezawodności powłoki obliczonych na jej podstawie. Referencyjnie podane parametry probabilistycznej oceny niezawodności powłoki obliczane metodą Monte Carlo także mają po trzeciej serii obliczeniowej zadowalającą zbieżność z rozwiązaniem programem RSM–Win.

Powyższe wyniki potwierdzają tezę, że już niewielka ilość intuicyjnie dobranych punktów obliczeniowych prowadzi do dobrych rozwiązań. Braku zbieżności pomiędzy seriami 2 i 3 w pierwszym przypadku analizy dałoby się prawdopodobnie uniknąć, gdyby dokonać wymieszania kolejności rozpatrywania punktów obliczeniowych (dwie pierwsze serie modelują tylko krawędzie powierzchni, trzecia modeluje środek – takie działanie okazało się docelowo skuteczne, ale nie wydaje się być optymalne). Ważną kwestią jest także wyczerpująca analiza, wykonywana wszystkimi możliwymi procedurami, jakie zostały zaimplementowane do programu autorskiego. W tak zaawansowanych problemach inżynierskich nie można ograniczyć się jedynie do jednego wybranego arbitralnie wskaźnika niezawodności, ale powinno się zalecać kalkulacje wskaźników wszystkimi metodami i podejściami, aby zaprezentowana wartość końcowa była uprawomocniona przez każde możliwe podejście, co jak widać w drugim przypadku analizy, jest równocześnie miernikiem poprawności aproksymacji powierzchni odpowiedzi i dobrego rozpoznania jej topografii.

g) Podsumowanie

W zadaniu, do przedstawienia powierzchni odpowiedzi na zmienne losowe parametrów imperfekcji, wyznaczanej za pomocą standardowej analizy regresji, wzbogaconej zastosowaniem techniki tabelarycznej analizy wariancji (ANOVA) używa się dedykowanego zagadnieniu programu autorskiego **RSM–Win**, a następnie stosując dwa podejścia matematyczne – określa się dla powłoki kompozytowej wskaźnik niezawodności. Ponadto stosuje się metodę Monte Carlo do oszacowania prawdopodobieństwa awarii i obliczenia kolejnego wskaźnika niezawodności.

Na podstawie zadania wykazano, iż obliczenia obejmujące losowy charakter modelu powłoki kompozytowej (w tym przypadku – przy założeniu pola losowego modelującego imperfekcje geometryczne rozłożone na powierzchni paneli) są zasadne i mogą mieć odzwierciedlenie także w projektowych obliczeniach inżynierskich. Możliwe jest więc podejmowanie prób szacowania niezawodności tego typu konstrukcji i sformułowania w szerszym zakresie metody obliczania niezawodności problemów geometrycznie nieliniowych.

W trakcie przebiegu obliczeń potwierdzono również wyraźnie ważny fakt, iż imperfekcje, mogące faktycznie wystąpić w takich rozmiarach i konfiguracjach na konstrukcjach powłokowych widocznie różnicują ich odpowiedzi (parametry nośności oraz użyteczności).

6.3. Obrotowosymetryczny metalowy dźwigar powierzchniowy

Kolejnym przykładem konstrukcji inżynierskich, w których zasadne wydaje się poszukiwanie wiarygodnych metod oceny bezpieczeństwa (przykładowo za pomocą rozważanego szerzej w rozprawie szacowania niezawodności na poziomie drugim) są wielkogabarytowe zbiorniki metalowe (najczęściej stalowe i aluminiowe). Konstrukcje te są bowiem bardzo wrażliwe na pojawiające się losowo imperfekcje geometryczne, co szeroko zostało opisane w rozdziale 4 niniejszej rozprawy.

Przy ocenie nośności tychże konstrukcji, inżynier posługuje się najczęściej obliczeniami numerycznymi, które w zależności od stopnia skomplikowania, szczegółowości siatki dyskretyzacyjnej oraz ilości i typu elementów skończonych, jakie używane są w analizie, może stać się bardzo czasochłonne. Ponadto, powszechne (i uzasadnione) jest wykorzystywanie modeli obliczeniowych o wyidealizowanej geometrii, jako iż zakłada się, że zbiorniki będą wykonywały swoją pracę przez zamierzony czas użytkowania wyłącznie w zakresie liniowym, zarówno geometrycznie i materiałowo. Konieczne jest jednak podkreślenie, że rezultaty pochodzące z obliczeń zbiornika o idealizowanej geometrii mogą nie odwzorowywać stanu rzeczywistego, gdyż wstępne imperfekcje mogą zmienić szacowaną nośność konstrukcji [Hotała, 2003; Górski i Mikulski, 2008; Gołota i inni, 2011].

Kody projektowe zmuszają więc projektanta do rozpatrzenia przypadków analizy, w których zadaje się określone przepisami normowymi imperfekcje, sugerowane jako najbardziej niekorzystne. Biorąc pod uwagę towarzyszący zapis, traktujący o tym, iż dla różnych obciążeń, różne mogą być wartości obciążenia krytycznego dla zbiornika obciążonego określoną imperfekcją, sytuacja projektowa komplikuje się znacząco. Sensowne byłoby zatem

przeprowadzenie szeregu dodatkowych obliczeń numerycznych, wprowadzających do analizy modele numeryczne zbiornika obciążonego normową imperfekcją ulokowaną w różnych położeniach na ścianie zbiornika i najbardziej niekorzystnymi obciążeniami czynnymi. Wiadomo jednak, iż liczba takich modeli musi być racjonalna, głównym kryterium projektowania jest bowiem koszt czasowy obliczeń – należy zatem znaleźć taką metodę, która ograniczając liczbę próbek obliczeniowych (pojedynczych modeli obliczeniowych), pozostawia na wysokim poziomie stan wiedzy o danym problemie inżynierskim, tj. zapewnia dobrą zbieżność rezultatów, szybkie jej osiągnięcie, zapewnia prawidłowość końcowego wyniku i możliwość wyciągnięcia z niego wiążących i słusznych wniosków. W niniejszej rozprawie, do osiągnięcia tejsze oszczędności, proponuje się **metodę Monte Carlo**, zarówno przy zastosowaniu podejścia bezpośredniego (CMC), jak i technik redukcyjnych – próbkowania warstwowego (SS), próbkowania hipersześcianu łacińskiego (LHS) oraz próbkowania wagowego (IS) oraz **metodę powierzchni odpowiedzi** (RSM).

a) Przedstawienie modelu

W zadaniu rozważa się stan wyętwienia modelu osiowosymetrycznego walcowego silosu aluminiowego, przedstawionego na rys. 6.34, obciążonego określoną imperfekcją geometryczną jego powierzchni bocznej. Wyętwienie to wywołane jest działającym na zbiornik normowym obciążeniem wiatrem. Jako wartości kluczowej w zadaniu poszukuje się zatem odpowiedniej **krytycznej lub granicznej wartości ciśnienia wiatru** (nazywanej w normach zbiorczo pojęciem tzw. **ciśnienia krytycznego**), które prowadzi do **utruty stateczności zbiornika**.

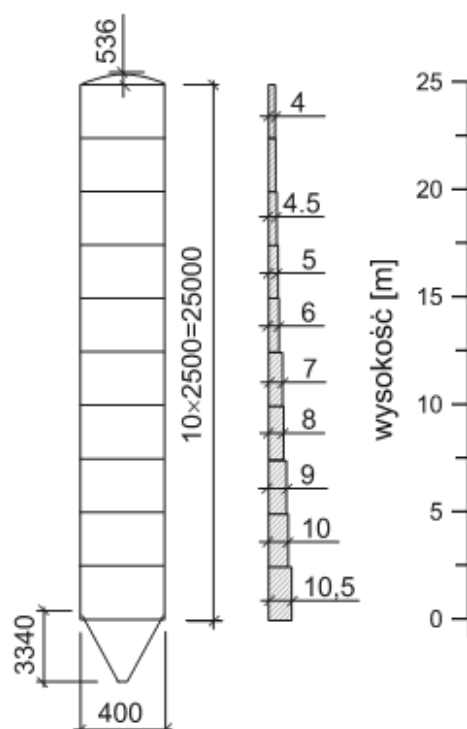
Motywacją do wyboru obciążenia wiatrem, jako obciążenia nieprzewidywalnego i niekorzystnie współdziałającego z imperfekcjami geometrycznymi silosu, a równocześnie obciążenia będącego całkowicie kwantyfikowalnym probabilistycznie, były m.in. prace [Wen, 1983; Wen, 1984].

Analizy numerycznej tegoż problemu inżynierskiego podjęto się we wcześniejszych pracach zespołu, którego autor rozprawy jest członkiem [Górski i Mikulski, 2008; Gołota i inni, 2011].

Płaszcz silosu składa się z 10 pierścieni z arkuszy blach aluminiowych, z których każdy ma wysokość wynoszącą $h_i = 2500 \text{ mm} = 2,5 \text{ m}$. Łączna wysokość płaszcza silosu wynosi zatem $h = 25 \text{ m}$. Blachy, z których zbudowane są pierścienie, mają różną grubość. Najwyżej znajduje się pierścień o najmniejszej grubości ($t_1 = 4 \text{ mm}$), a najniżej pierścień o największej grubości ($t_{10} = 10,5 \text{ mm}$). Szczegółowe informacje na temat grubości poszczególnych pierścieni zamieszczone są poglądowo na rys. 6.34.

Średnica wewnętrzna płaszcza jest stała i wynosi $d_w = 4000 \text{ mm}$, zmienia się natomiast średnica zewnętrzna, co uwarunkowane jest zmianą grubości blach pierścieni płaszcza. Takie podejście projektowe (licowanie powierzchni wewnętrznej silosu) sprawia, iż całkowita objętość użytkowa zbiornika (doliczając przestrzeń leja i dachu) wynosi $V = 324 \text{ m}^3$.

Dach konstrukcji ma kształt kopuły o strzałce równej $h_d = 536 \text{ mm}$ i grubości $t_d = 5,5 \text{ mm}$. Lej wieńczący zbiornik od spodu ma wysokość równą $h_l = 3340 \text{ mm}$ i grubości $t_l = 10,5 \text{ mm}$. Pasma podporowe jest wzmocnione dodatkowym kołnierzem. Silos jest ustawiony na konstrukcji wsporczej, podpierającej silos w ośmiu punktach, rozmieszczonych cyklicznie.



Rys.6.34. Osiowosymetryczny walcowy pionowy silos aluminiowy, analizowany w niniejszym przykładzie, wg [Górski i Mikulski, 2008].

Płaszcz oraz kopuła dachu silosu wykonane są z aluminium $AlMg_3$, którego parametry materiałowe wynoszą kolejno: moduł Younga $E = 69$ GPa, współczynnik Poissona $\nu = 0,3$, moduł Kirchhoffa $G = 26,5$ GPa, granica plastyczności $f_y = 78$ MPa, granica wytrzymałości $f_{ulti} = 190$ MPa. Lej silosu oraz podporowe pasmo wzmacniające wykonane są natomiast z bardziej wytrzymałego aluminium $AlMgSi_1$, którego parametry materiałowe wynoszą kolejno: moduł Younga $E = 69$ GPa, współczynnik Poissona $\nu = 0,3$, moduł Kirchhoffa $G = 26,5$ GPa, granica plastyczności $f_y = 120$ MPa, granica wytrzymałości $f_{ulti} = 250$ MPa.

Analizę statyczną silosu przeprowadzono za pomocą komercyjnego programu **SOFiSTiK FEA Version 2010**. Do zdefiniowania modelu numerycznego użyto proponowanych w programie trójwęzłowych i czterowęzłowych elementów powłokowych QUAD.

Podstawy teoretyczne użytej metodologii elementów skończonych w odniesieniu do poruszanej tematyki można znaleźć m. in. w [Oden, 1972; Crisfield, 1991; Bathe, 1996; Zienkiewicz i Taylor, 2005].

Ze względu na specyfikę programu, wprowadzenie imperfekcji geometrycznej na płaszcz silosu wymagało użycia do jego wymodelowania wyłącznie elementów trójkątnych prostokątnych, mających w sumie osiemnaście stopni swobody.

W modelu konstrukcji użyto siatki 17569 węzłów, pomiędzy które rozpięto całkowitą sumę 31446 elementów powłokowych QUAD. Model zdefiniowany jest w układzie biegunowym, posłużono się przy jego budowie założeniem osiowej symetrii konstrukcji.

Elementy skończone tworzące siatkę płaszcza silosu mają wymiar $125 \text{ mm} \times 174,5 \text{ mm}$, przy czym pierwszy wymiar dotyczy kierunku pionowego (wysokość elementu trójkątnego), a drugi – kierunku obwodowego (podstawa trójkąta prostokątnego). Na długości obwodu znajdują się 72 elementy, natomiast na wysokości poszczególnego pierścienia – 20 elementów. Siatka dyskretyzacyjna kopuły dachu, leja oraz przypodporowego pasma wzmacniającego została wygenerowana w sposób nieregularny.

Imperfekcja zbiornika modelowana jest jako zaburzenie węzłów siatki MES, wykonane jeszcze **przed** generacją siatki elementów skończonych. Przyjmowana jest ona jako wgniecenie o głębokości dobranej według zaleceń Eurokodu PN-EN 1993-1-6:2009, o kształcie elipsy o długościach osi ustalonych na mocy przepisów tej samej normatywy.

b) Imperfekcje geometryczne modelu

Ze wszystkich parametrów, które mogą opisać losowość modelu silosu jako obrotowosymetrycznego dźwigara powierzchniowego, przyjęto do analizy (jak w przypadku zadania z rozdziału poprzedniego) **jedynie imperfekcje geometryczne powłoki**. W zadaniu pominięto imperfekcje podparcia konstrukcji, niepewności parametrów materiałowych materiałów oraz losowość obciążenia wiatrem, tak więc i tym razem zastosowany losowy opis modelu jest uproszczony. Jednakże, tak samo jak w poprzedniej analizie, stwierdzić można, iż znajduje się on w pełnej zgodności z podejściem inżynierskim stosowanym w projektowaniu, a także iż spełnia on postulaty metodologii wymiarowania konstrukcji i szacowania jej niezawodności, jaka sugerowana jest używanymi obecnie kodami projektowymi, co przywołano już w Rozdziale 4 niniejszej rozprawy, a co można także potwierdzić na mocy stwierdzeń zawartych m. in. w pracy [Biegus, 1999].

Pierwszym krokiem w generacji imperfekcji geometrycznych konstrukcji jest przedsięwzięcie wstępnych założeń co do ich wymiarów. Przyjęcie imperfekcji na wyidealizowanej powierzchni bocznej silosu wymaga powołania się na zestaw normatyw, które ustalają, jakich wymiarów indentacje mogą pojawić się na obliczanej konstrukcji. Przyjęcie ich bez powołania się na sugerowane w kodach projektowych progi skutkować mogłoby uzyskaniem mylnych rezultatów obliczeń i prowadzić do błędnych wniosków. Pierwsze założenia do obliczeń numerycznych trzeba dobrać na podstawie wzorów podanych w PN-EN 1993-1-6:2009 [Gołota i inni, 2011].

Przypomnieć należy, iż w przywołanym powyżej kodzie projektowym nakazuje się zastosować do pomiaru wgłębień przymiary w określonych położeniach w obu głównych kierunkach powierzchni bocznych silosu. Jednakże, postępując w zgodzie z wytycznymi PN-B-03202:1996 postanowiono wstępnie przyjąć, iż obwodowa długość zasięgu wgniecenia ℓ_m zostanie dobrana jako maksymalna z możliwych do zaistnienia i wyniesie $\ell_m = 2 \text{ m}$, tak więc graniczna strzałka wgniecenia wyniesie $t_{v0} = 0,01 \cdot \ell_m = 0,01 \cdot 2 \text{ m} = 0,02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$.

Pomiary wgniecenia wzdłuż tworzącej walca (południkowe) przeprowadza się za pomocą przymiaru o długości $\ell_{gX} = 4\sqrt{rt}$, zatem długość ta wynosi w rozpatrywanym przypadku

$$\ell_{gX} = 4\sqrt{rt} = 4 \cdot \sqrt{2 \text{ m} \cdot t_{1-10}} \quad (6.27)$$

co, uwzględniając zmienną grubość blach ($t_1 = 4 \text{ mm}$, $t_{10} = 10,5 \text{ mm}$) daje przedział wartości

$$\ell_{gX} = (\ell_{gX,\min}; \ell_{gX,\max}) = (4 \cdot \sqrt{2 \text{ m} \cdot 0,0040 \text{ m}}; 4 \cdot \sqrt{2 \text{ m} \cdot 0,0105 \text{ m}}) = (0,358 \text{ m}; 0,580 \text{ m})$$

Tak więc, przyjmując wariant najbardziej niekorzystny, ustalono długość przymiaru południkowego na $\ell_{gX} = 0,60 \text{ m} = 60 \text{ cm}$.

Pomiary wgniecenia wzdłuż obwodowej walca (obwodowe) przeprowadza się za pomocą przymiaru o długości $\ell_{g\theta} = 2,3 \cdot (\ell^2 \cdot rt)^{0,25}$, zatem długość ta wynosi w tym przypadku

$$\ell_{g\theta} = 2,3 \cdot (\ell^2 \cdot rt)^{0,25} = 2,3 \cdot [(2\pi r)^2 \cdot rt]^{0,25} = 2,3 \cdot [(2\pi \cdot 2 \text{ m})^2 \cdot 2 \text{ m} \cdot t_{1-10}]^{0,25} \quad (6.28)$$

$$\text{lecz: } \ell_{g\theta} \leq 2 \text{ m}$$

co, uwzględniając zmienną grubość blach ($t_1 = 4 \text{ mm}$, $t_{10} = 10,5 \text{ mm}$) daje przedział wartości

$$\begin{aligned} \ell_{g\theta} &= (\ell_{g\theta,\min}; \ell_{g\theta,\max}) = \\ &= (2,3 \cdot [32\pi^2 \text{ m}^3 \cdot 0,0040 \text{ m}]^{0,25}; 2,3 \cdot [32\pi^2 \text{ m}^3 \cdot 0,0105 \text{ m}]^{0,25}) = (2,438 \text{ m}; 3,104 \text{ m}) \end{aligned}$$

Tak więc, przyjmując wariant odpowiednio zminimalizowany, według sygnalizowanego w normie warunku ($\ell_{g\theta} \leq r$), ustalono długość przymiaru obwodowego na $\ell_{g\theta} = 2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$.

Na tej podstawie, dysponując powyższymi wynikami obliczeń przymiarów wgniecenia ($\ell_{gX} = 60 \text{ cm}$; $\ell_{g\theta} = 200 \text{ cm}$) obliczyć można sugerowaną przez PN-EN 1993-1-6:2009 głębokości początkowego wgłębienia (w obu wariantach) Δw_{0X} oraz $\Delta w_{0\theta}$, otrzymując kolejno wyniki przedstawione w Tabelicy 6.22.

Tabelica 6.22. Obliczenia głębokości początkowego wgłębienia, wg PN-EN 1993-1-6:2009.

klasa jakości	zalecane $U_{0,\max}$	przymiar $\Delta w_{0X} \leq U_{0,\max} \cdot \ell_{gX}$	przymiar $\Delta w_{0\theta} \leq U_{0,\max} \cdot \ell_{g\theta}$
klasa A	0,006	$\Delta w_{0X} \leq 0,006 \cdot 60 \text{ cm} = 0,36 \text{ cm}$	$\Delta w_{0\theta} \leq 0,006 \cdot 200 \text{ cm} = 1,20 \text{ cm}$
klasa B	0,010	$\Delta w_{0X} \leq 0,010 \cdot 60 \text{ cm} = 0,60 \text{ cm}$	$\Delta w_{0\theta} \leq 0,010 \cdot 200 \text{ cm} = 2,00 \text{ cm}$
klasa C	0,016	$\Delta w_{0X} \leq 0,016 \cdot 60 \text{ cm} = 0,96 \text{ cm}$	$\Delta w_{0\theta} \leq 0,016 \cdot 200 \text{ cm} = 3,20 \text{ cm}$

Wyniki zgromadzone w Tabelicy 6.22 wskazują wyraźnie na zgodność przyjętego początkowo wgniecenia z realiami inżynierskimi dla niektórych typów silosów. Można więc pierwsze oszacowanie, wykonane na bazie sugestii PN-B-03202:1996, tj. strzałkę wgniecenia $t_{v0} = 2 \text{ cm}$ przyjąć jako rzeczywistą głębokość imperfekcji, która zostanie wprowadzona do modelu. Towarzysząco, można także na podstawie powyższych obliczeń przyjąć przy generacji modeli obliczeniowych w programie komercyjnym odpowiednie długości przymiaru południkowego $\ell_{gX} = 0,60 \text{ m} = 60 \text{ cm}$ oraz obwodowego $\ell_{g\theta} = 2 \text{ m} = 200 \text{ cm}$. W taki sposób, ustalając zgodne z normami wielkości strzałki i zasięgów wgniecenia, przejść można do opisów ich położenia.

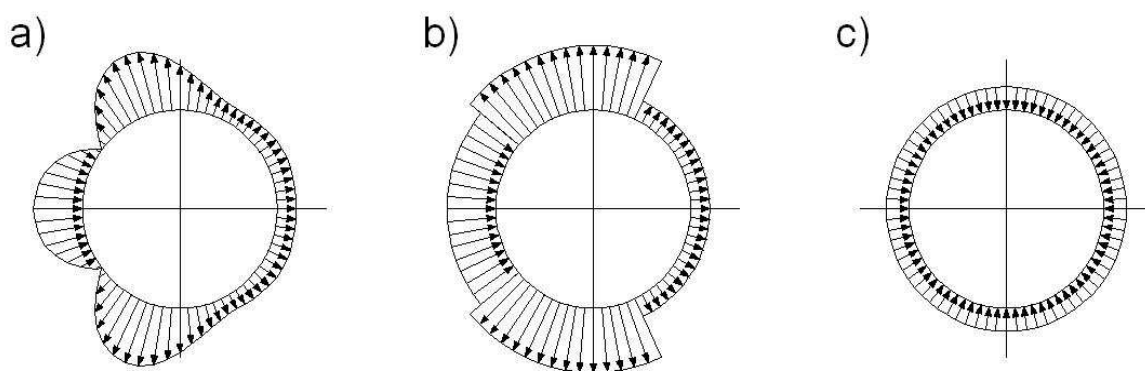
Warto jednak wyraźnie zaznaczyć, iż model z tak przyjętymi parametrami geometrycznymi imperfekcji (mimo, iż są one normatywnie dopuszczalne) ma charakter czysto teoretyczny, gdyż w rzeczywistości płaszcz silosu, obarczony takiej intensywności deformacją powinien być natychmiastowo wyłączony z eksploatacji i naprawiony (bądź zdemontowany). Obwarowanie normowe ma bowiem w tym wypadku jedynie zapewnić brak katastrofy obiektu oraz bezpieczeństwo robotników dokonujących jego naprawy, rozbiórki [Górski i Mikulski, 2008].

c) Obciążenie silosu normowym wiatrem

Jak już wspomniano, obciążeniem brany pod uwagę w niniejszym zadaniu jest **obciążenie parciem/ssaniem wiatru**. Obciążenie to zostanie ujęte w świetle zapisów narzucanych przez PN-EN-1993-1-6:2009 (wytyczne projektowania silosów pod określonym typem obciążenia) oraz PN-EN-1991-1-4:2007 (kalkulacja postaci i wartości obciążenia wiatrem).

Obciążenie wiatrem może być, według zapisów PN-EN-1993-1-6:2009, przyjmowane do obliczeń numerycznych w trzech różnych postaciach, przedstawionych schematycznie na rys. 6.35. Może być ono przyjmowane jako obciążenie dokładne, wyrażone wzorem rozwinięcia szeregu funkcji trygonometrycznych (rys. 6.35a), jako obciążenie segmentowe, gdzie poprzedni wariant uprasza się do trzech stref oddziaływania obciążenia wiatru o różnych wartościach parcia p_i (rys. 6.35b), lub też jako obciążenie uproszczone, gdzie całość obciążenia wiatrem, niezależnie od kierunku jego natarcia, wyrażane jest tylko jedną wartością parcia p_o (rys. 6.35c).

W niniejszej rozprawie zdecydowano się odwzorować obciążenie wiatrem za pomocą równań jawnych (funkcji trygonometrycznych), jako iż kształt funkcji obciążenia zdaje się być bardzo ważnym czynnikiem wpływającym na osiągnięte rezultaty ciśnienia krytycznego wiatru dla konstrukcji obciążonej wcześniej zdefiniowaną, normową imperfekcją [Gołota i inni, 2011].



Rys. 6.35. Trzy sposoby przyjmowania oddziaływania wiatrem na silos wg EC: obciążenie dokładne, wg wzoru trygonometrycznego (a), obciążenie sektorowe (b) i uproszczone (c).

Obciążenie wiatrem p_k jest to obciążenie wywołane oddziaływaniem na budowlę wiatru o prędkości charakterystycznej V_k (średniej dziesięciminutowej prędkości wiatru na wysokości 10 m nad poziomem gruntu w terenie otwartym), uwzględniające ekspozycję tejże budowli, jej kształt i właściwości aeroelastyczne oraz wpływ porywistości wiatru.

Obciążenie charakterystyczne wywołane działaniem wiatru należy wyznaczać jako

$$p_k = q_k \cdot \beta \cdot C_e \cdot C \quad (6.29)$$

gdzie: q_k to charakterystyczne ciśnienie prędkości wiatru dla poszczególnych stref obciążenia wiatrem, β to współczynnik działania porywów wiatru, C_e to współczynnik ekspozycji budowli (uwzględniający wpływ terenu i rozpatrywanej wysokości nad nim na ciśnienie prędkości wiatru), natomiast C to współczynnik aerodynamiczny. Wartości wszystkich wyżej wymienionych współczynników należy przyjąć zgodnie z zaleceniami PN-EN-1991-1-4:2007.

Obciążenie obliczeniowe wywołane działaniem wiatru, przyjmowane przy sprawdzaniu stanów granicznych nośności wyznacza się, zgodnie z PN-76/B-03001, wg wzoru

$$p = p_k \cdot \gamma_f \quad (6.30)$$

gdzie p_k to sformułowane powyżej obciążenie charakterystyczne wywołane działaniem wiatru, natomiast γ_f to współczynnik obciążenia, którego wartość przyjmuje się równą 1,30.

Zakłada się, iż silos znajduje się w drugiej strefie obciążenia wiatrem, zatem prędkość charakterystyczna wiatru wynosi $V_k = 24 \text{ m/s}$ (wg PN-EN-1991-1-4:2007), co daje kolejno charakterystyczne ciśnienie prędkości wiatru równe $q_k = 0,35 \text{ kPa}$ (wg PN-EN-1991-1-4:2007).

Wartość współczynnika działania porywów wiatru β zależy od podatności budowli na dynamiczne działanie wiatru. Za podatne uważa się takie budowle, które pod wpływem porywów wiatru mogą być wprowadzone w drgania powodujące wzrost wyężenia ponad wartość wynikającą z wartości obciążenia statycznego. Na podstawie nomogramów dostępnych w PN-EN-1991-1-4:2007 silos rozpatrywany w niniejszym zadaniu jest klasyfikowany jako budowla podatna.

Wartości współczynnika β do obliczeń budowli podatnych na dynamiczne działanie wiatru należy obliczać wg wzoru

$$\beta = 1,0 + \Psi \cdot \sqrt{\frac{r}{C_e} (k_b + k_r)} \quad (6.31)$$

gdzie kolejno: Ψ to współczynnik szczytowej wartości obciążenia, r to współczynnik chropowatości terenu, C_e to współczynnik ekspozycji, k_b to współczynnik oddziaływania turbulentnego o częstotliwościach pozarezonansowych, a k_r to współczynnik oddziaływania turbulentnego o częstotliwościach rezonansowych.

Na podstawie PN-EN-1991-1-4:2007 równanie to można uzupełnić współczynnikami: szczytowej wartości obciążenia $\Psi = 4,00$ (dla pierwszej częstości drgań własnych silosu równej $n = 4,82 \text{ Hz}$); chropowatości terenu dla terenu płaskiego, otwartego, z nielicznymi przeszkodami (klasy A) $r = 0,08$; ekspozycji (obliczony dla szczytu silosu na konstrukcji wsporczej) $C_e = 0,9 + 0,015 \cdot 32 \text{ m} = 0,9 + 0,48 = 1,38$; oddziaływania turbulentnego o częstotliwościach pozarezonansowych $k_b = 1,265$ oraz oddziaływania turbulentnego o częstotliwościach rezonansowych $k_r = 0,097$.

Zatem współczynnik (6.31) ma wartość $\beta = 1,00 + 4,00 \cdot \sqrt{\frac{0,08}{1,38}} \cdot (1,265 + 0,097) = 2,124$.

Zestaw równań potrzebnych do poprawnego wymodelowania kierunku obciążenia wiatru ukryty jest w zapisie tzw. **funkcji aerodynamicznej**. Wyraża się ją jako iloczyn współczynnika aerodynamicznego C i współczynnika ekspozycji C_e , obliczany zależnie od wysokości z położenia punktu w którym przykłada się dany pojedynczy wektor składowy obciążenia wiatrem i kierunku zorientowania tegoż wektora względem osi kierunku głównego natarcia wiatru a .

a) Jeśli $z \in \langle 0 \text{ m}; 10 \text{ m} \rangle$, to równanie funkcji aerodynamicznej ma postać

$$C_e C(z, a) = (1,00) \cdot (-0,356 + 0,322 \cos a + 0,636 \cos 2a + 0,501 \cos 3a + \dots \\ \dots + 0,058 \cos 4a - 0,128 \cos 5a - 0,034 \cos 6a) \quad (6.32)$$

b) Jeśli $z \in \langle 10 \text{ m}; 20 \text{ m} \rangle$, to równanie funkcji aerodynamicznej ma postać

$$C_e C(z, a) = (0,80 + 0,02 \cdot z) \cdot (-0,356 + 0,322 \cos a + 0,636 \cos 2a + 0,501 \cos 3a + \dots \\ \dots + 0,058 \cos 4a - 0,128 \cos 5a - 0,034 \cos 6a) \quad (6.33)$$

c) Jeśli $z \in \langle 20 \text{ m}; 30 \text{ m} \rangle$, to równanie funkcji aerodynamicznej ma postać

$$C_e C(z, a) = (0,90 + 0,015 \cdot z) \cdot (-0,356 + 0,322 \cos a + 0,636 \cos 2a + 0,501 \cos 3a + \dots \\ \dots + 0,058 \cos 4a - 0,128 \cos 5a - 0,034 \cos 6a) \quad (6.34)$$

gdzie powyższe zapisy są poprawne dla założenia o terenie płaskim, otwartym, z nielicznymi przeszkodami, zgodnie z zapisem klasy A współczynnika ekspozycji.

Powyższe zapisy mają bardzo skomplikowaną postać, umożliwiła ona jednak projektantowi łatwą implementację przedstawionego za ich pomocą obciążenia wiatrem do modelu numerycznego, w szczególności jeśli model został wykonany jako obrotowosymetryczny. Wówczas, traktując wysokość z położenia wektora składowego i kierunku zorientowania wektora a jako parametry generacji tegoż obciążenia, wystarczy zebrać resztę współczynników jako mnożnik startowy obciążenia, a następnie wykonując powtarzalne generacje, stworzyć obraz obciążenia na powierzchni bocznej silosu. Obciążenie tego typu można także w łatwy sposób rzutować na pochyłe powierzchnie kopuły dachu i leja silosu. Wykorzystując tę obserwację, można zaproponować zapis obciążenia obliczeniowego wywołanego działaniem wiatru w postaci

$$p = q_k \cdot \beta \cdot C_e \cdot C \cdot \gamma_f = (q_k \cdot \beta \cdot \gamma_f) \cdot (C_e \cdot C(z, a)) = m_w \cdot (C_e \cdot C(z, a)) \quad (6.35)$$

gdzie wartość mnożnika startowego obciążenia wiatrem wynosi

$$m_w = q_k \cdot \beta \cdot \gamma_f = 0,35 \text{ kPa} \cdot 2,124 \cdot 1,30 = 0,996 \text{ kPa} \cong 1,0 \text{ kPa} \quad (6.36)$$

Jednakże, na drodze późniejszych obliczeń okazało się, iż wyszukanie mnożnika **ciśnienia krytycznego wiatru** jest niemożliwe w wykorzystywanym programie komercyjnym, jeśli przyjmie się wspomniany mnożnik jako $m_w = 1 \text{ kPa}$, gdyż program, po przyłożeniu obciążenia

z przywołanym mnożnikiem nie kontynuował obliczeń, pozostając w zakresie sprężystym. Zdecydowano się więc uciec do zabiegu, jaki został zastosowany w przykładzie mało wyniosłej powłoki kompozytowej (rozdział 6.2), tj. na podniesienie wartości mnożnika startowego obciążenia do poziomu, który zagwarantuje, iż rozwiązanie zostanie osiągnięte dla każdej próbki obliczeniowej (pojedynczego modelu), czyli że każda rozpatrywana konstrukcja znajdzie się w zakresie nieliniowym swojej pracy.

Końcowo przyjętą, wprowadzoną do modelu wartością mnożnika startowego obciążenia wiatrem została wartość $p_{w,max} = 5 \text{ kPa}$. Jak się okazało, jest to wartość wystarczająca.

Przy tak zdefiniowanym modelu, postanowiono, iż w późniejszych analizach rezultat obliczeń numerycznych nie będzie podawany bezpośrednio jako wartość ciśnienia krytycznego parcia/ssania wiatru wyrażanego w [kPa], ale jako **wartość krytyczną zwiększonego mnożnika startowego obciążenia wiatrem** m_{crit} , wyrażaną w wielkości niemianowanej.

d) Analiza silosu o wyidealizowanej geometrii

Referencyjnie, jako punkt odniesienia dla wszystkich dalszych rozważań, powinno się przedstawić rezultaty obliczenia ciśnienia krytycznego wiatru dla modelu odpowiadającego konstrukcji docelowo projektowanej, tj. silosu o geometrii idealnej. Jak już podkreślono wcześniej, obliczenia są prowadzone w programie SOFiSTiK, nieliniowo geometrycznie i materiałowo, co jest przez program rozumiane jako: zastosowanie nieliniowej pracy materiału, dopuszczenie możliwości zerwania zależności kinematycznych w węzłach łączących dwa rozciągane elementy powierzchniowe QUAD, uwzględnienia możliwych do wystąpienia modyfikacji modelu, takich jak efekt „snap through”, zmianę długości elementu QUAD dla dużych deformacji oraz rozpatrzenia i obserwacji efektów postwyboczeniowych w modelu.

Wynikiem działania programu jest zaprezentowanie projektantowi **wartości krytycznej mnożnika startowego obciążenia** m_{crit} , odwołującego się do wartości obciążenia, jaka została zdefiniowana dla rozpatrywanego przypadku. Uzyskane ścieżki równowagi przemieszczenia osiowego U nie będą w niniejszych rozważaniach prezentowane.

W przypadku obliczeń ciśnienia krytycznego wiatru dla modelu silosu o geometrii idealnej uzyskano w zadaniu wartość krytyczną mnożnika startowego obciążenia $m_{crit} = 0,518$, co odpowiada wartości ciśnienia krytycznego wiatru równej

$$p_{crit} = m_{crit} \cdot p_{w,max} = 0.518 \cdot 5 \text{ kPa} = 2.590 \text{ kPa} \quad (6.37)$$

e) Wstęp do obliczeń numerycznych silosu z imperfekcjami geometrycznymi

Szacowanie niezawodności na poziomie drugim postanowiono dla niniejszego przykładu wykonać dwoma sposobami – nie tylko za pomocą metodologii powierzchni odpowiedzi, która jest meritum pracy, ale także za pomocą metody Monte Carlo, wzbogaconej o szereg najczęściej stosowanych technik redukcji wielkości populacji próbek.

Jak poprzednio, problemem staje się prawidłowe i inżyniersko usprawiedliwione dobranie zmiennych losowych przestrzeni realizacji zadania, właściwego oszacowania ich momentów probabilistycznych oraz wybór punktu startowego analizy, względem którego obliczane będą

wskaźniki niezawodności. Ograniczono się, jak poprzednio, do wyboru jedynie **dwóch zmiennych**, co umożliwi czytelne sporządzenie grafik w opracowaniu. Postąpiono tak dzięki wcześniejszemu studium literatury na temat danego problemu (opierając się m. in. na pracach [Woźniak i Kleiber, 1982; Woźniak 2001; Hien, 2003]), a przede wszystkim ze względu na interesujące z punktu widzenia inżynierskiego rezultaty dwóch wstępnych testów numerycznych, jakie autor rozprawy sporządził w ramach pracy zespołu badawczego, którego jest członkiem, a których wyniki znaleźć można m.in. w [Gołota i inni, 2011].

Jako pierwszą zmienną losową rozważanego problemu inżynierskiego przyjęto w rozprawie **kąt zorientowania kierunku głównego działania wiatru względem osi głównej (prostopadłej osi symetrii) imperfekcji powierzchni bocznej silosu**. Imperfekcja ta ma oczywiście zaproponowany wcześniej kształt eliptycznego wgniecenia o ustalonej strzałce ($t_{v0} = 2$ cm) oraz o ustalonym zasięgu ($\ell_{gx} = 60$ cm wysokości, $\ell_{gy} = 200$ cm szerokości), według zaleceń PN-EN 1993-1-6:2009.

Intuicyjnie, pierwsza zmienna losowa przestrzeni realizacji x_1 (zwana w skrócie **zmienną kąta zorientowania** a) zostanie dobrana z rozkładu równomiernego z przedziału $x_1 \in \langle 0, 0; 180, 0 \rangle$ deg, wartości liczbowe będą więc ograniczone do zagadnienia symetrycznego.

Obliczenia wskaźników niezawodności wg metody Monte Carlo i metody powierzchni odpowiedzi dokonano jednakże nie na przedziale w postaci ciągłej, a na wybranych z niego **12 pozycjach obliczeniowych**, których dobór jest podyktowany wcześniejszymi obserwacjami inżynierskimi. Kąt zorientowania kierunku działania wiatru względem osi głównej imperfekcji przyjęto zatem kolejno jako: 0° (kierunek wiatru pokrywa się idealnie z osią środka imperfekcji), 10° , 20° , 30° , 45° , 60° , 75° , 90° (kierunek wiatru jest prostopadły do kierunku osi środka imperfekcji), 105° , 120° , 150° oraz 180° (kierunek wiatru pokrywa się z kierunkiem osi środka imperfekcji, ale ich zwroty są przeciwne).

Na podstawie wstępnych testów numerycznych, jakie przeprowadzono dla tegoż przykładu (dla wysokości położenia imperfekcji równej 3,50 m) wykazano, iż na konstrukcji znajdują się dwa istotne rejony na osi realizacji zmiennej losowej kąta zorientowania a , w których działanie wiatru wyraźnie współgra z osadzoną pod innym kątem wgnieceniem. Te fragmenty to zakres $0^\circ - 45^\circ$, czyli obszar, gdzie wiatr napiera centralnie we wgniecenie, na jego krawędź lub niedaleko poza nią, co skutkuje **znacznym obniżeniem** wartości ciśnienia krytycznego oraz zakres $45^\circ - 75^\circ$, czyli obszar, gdzie w miejscu położenia wgniecenia drastycznie zwiększone jest ssanie wiatru, co skutkuje **nieznacznym zwiększeniem** wartości ciśnienia krytycznego [Gołota i inni, 2011].

Obserwację tę uważa się za fakt utwierdzający w przekonaniu prawidłowości przyjęcia kąta zorientowania kierunku głównego działania wiatru względem osi symetrii imperfekcji jako pierwszej zmiennej losowej problemu niezawodności silosu.

Jako drugą zmienną losową rozważanego problemu inżynierskiego przyjęto natomiast **wysokość położenia zadanej imperfekcji na powierzchni bocznej silosu**.

Biorąc pod uwagę, iż zbiornik ma 25 m wysokości, druga zmienna losowa przestrzeni realizacji x_2 (zwana w skrócie **zmienną wysokości** h) zostanie dobrana z rozkładu

równomiernego z przedziału $x_2 \in \langle 0, 0; 25, 0 \rangle$ m, przy czym wartość liczbową zaczerpnięta z przedziału oznaczać będzie odległość centrum imperfekcji (punktu osiągnięcia maksymalnej strzałki $t_{v0} = 2$ cm wgniecenia) od górnej krawędzi powierzchni bocznej, mierzonej równoległe do osi symetrii budowli (do osi grawitacyjnej).

Należy jednak podkreślić, iż jest to pewne nadużycie, gdyż ze względu na gabaryty pionowe imperfekcji, od obu krawędzi powierzchni bocznej należałoby odjąć wartość półosi mniejszej elipsy, tj. $0,5 \cdot \ell_{gX} = 30$ cm. Zauważono jednakże, iż w przypadku losowania Monte Carlo można odrzucić wartości zmiennej x_2 wybrane z „marginesów” płaszcza, a w przypadku metody powierzchni odpowiedzi fakt ten jest całkowicie pomijalny.

Na odliczanie wysokości położenia imperfekcji od górnej krawędzi silosu zdecydowano się z powodu znacznego wyniesienia dźwigara tarczowego ponad poziom terenu, co mogłoby wprowadzać niejednoznaczność terminu „dolnego poziomu zerowego” (można byłoby pomylić poziom zerowy terenu z poziomem zerowym powierzchni dolnej silosu). Przyjęcie odliczania od krawędzi górnej jest mniej mylące, mimo iż nie jest do końca intuicyjne.

Również i w tym przypadku, dla zachowania równoważności obu zmiennych, obliczenia wskaźników niezawodności dokonano także nie na przedziale w postaci ciągłej, a na wybranych **12 pozycjach obliczeniowych**, których położenie jest także zaproponowane na bazie obserwacji inżynierskich. Środek wgniecenia umieszczono zatem kolejno na wysokościach: 2,50 m, 3,50 m, 5,00 m, 6,25 m, 7,50 m, 8,75 m, 10,00 m, 11,25 m, 13,75 m, 16,25 m, 18,75 m oraz 22,25 m poniżej górnej krawędzi poboczniczy silosu.

Na podstawie wstępnych testów numerycznych, jakie przeprowadzono dla tegoż przykładu (dla kąta zorientowania natarcia wiatru względem osi głównej imperfekcji równego 0°) wykazano, iż istnieje istotny rejon na osi realizacji zmiennej losowej wysokości położenia imperfekcji h , w których działanie wiatru wyraźnie niekorzystnie współgra z lokalizacją wgniecenia. Fragment konstrukcji, znajdujący się w obszarze 2,50 m – 5,00 m poniżej górnej krawędzi płaszcza jest najbardziej wrażliwy na początkowe zniekształcenia, prawdopodobnie z powodu występowania w tym obszarze blach o najmniejszej grubości spośród wszystkich w konstrukcji, a także z faktu, iż wiatr na takim wyniesieniu przyjmuje największe wartości obciążenia, zgodnie z zapisem równań funkcji aerodynamicznej [Gołota i inni, 2011].

Tę z kolei obserwację uważa się za fakt utwierdzający w przekonaniu prawidłowości przyjęcia wysokości położenia imperfekcji jako drugiej zmiennej losowej problemu niezawodności silosu.

Jako, iż z obu przedziałów zmienności zmiennych losowych x_1 oraz x_2 dobrano po 12 pozycji obliczeniowych, to ich parowanie w systemie „każdy z każdym” powoduje otrzymanie **144 punktów (próbek) obliczeniowych**. Oznacza to, że dla przeprowadzenia analizy podjęto konieczność wygenerowania 144 modeli obliczeniowych w środowisku programu komercyjnego SOFiSTiK oraz obliczenia w nim wartości krytycznych mnożnika startowego obciążenia m_{crit} dla każdego ze stworzonych modeli numerycznych silosu.

f) Analiza niezawodności metodą Monte Carlo wraz z technikami redukcji populacji próbek

Po przyjęciu danych wejściowych analizy w sposób opisany powyżej, wykonano szereg obliczeń numerycznych, prowadzących do uzyskania wartości krytycznych mnożnika startowego obciążenia o znacznym rozrzucie, wahającym się pomiędzy $m_{crit} = 0,194$ (co daje $p_{crit} = 0,970$ kPa – dla $a = 0^\circ$ oraz dla $h = 3,50$ m, co jest wartością **mniejszą nawet od normowo zakładanej mocy obciążenia wiatrem**), a pomiędzy $m_{crit} = 0,551$ (co daje $p_{crit} = 2,755$ kPa – dla $a = 60^\circ$ oraz dla $h = 10,00$ m, co jest wartością **większą od ciśnienia krytycznego zbiornika idealnego**).

Przed przystąpieniem do procedur szacowania niezawodności silosu, sformułować należy stan graniczny, jaki narzuca się dla poszczególnych przypadków. W niniejszym zadaniu przyjęto, iż w pierwszym przypadku analizy stan graniczny zostanie zdefiniowany jako **75% wartości ciśnienia krytycznego wiatru obliczonego dla zbiornika idealnego**, tzn. za model awaryjny uzna się silos niezdolny do przeciwstawienia się ciśnieniu wiatru o wartości $p_{crit} \leq 0,75 \cdot 0,518 \cdot 5 \text{ kPa} = 0,389 \cdot 5 \text{ kPa} = 1,945 \text{ kPa}$, a w drugim przypadku analizy stan graniczny zostanie zdefiniowany jako **50% wartości ciśnienia krytycznego wiatru obliczonego dla zbiornika idealnego** (co stanowi wymóg mniej restrykcyjny, który powinien charakteryzować się mniejszym prawdopodobieństwem awarii i większym wskaźnikiem niezawodności), tzn. za awaryjny uzna się silos niezdolny do przeciwstawienia się ciśnieniu wiatru o wartości $p_{crit} \leq 0,50 \cdot 0,518 \cdot 5 \text{ kPa} = 0,259 \cdot 5 \text{ kPa} = 1,295 \text{ kPa}$.

Założono także, iż w ramach analizy przykładu numerycznego obrotowosymetrycznego aluminiowego silosu zbadane zostaną kolejno: prawdopodobieństwo awarii silosu wg metody Monte Carlo $P_{f,MC}$ (jako stosunek liczby próbek spełniających warunek graniczny do całkowitej liczby próbek), bezawaryjność silosu wg metody Monte Carlo $P_{s,MC} = 1 - P_{f,MC}$ oraz wskaźnik niezawodności obliczany wg podejścia Cornella, jako $\beta_{C,MC} = -\Phi^{-1}(P_f)$.

1) Analiza przy użyciu bezpośredniego podejścia metody Monte Carlo (CMC, Crude Monte Carlo).

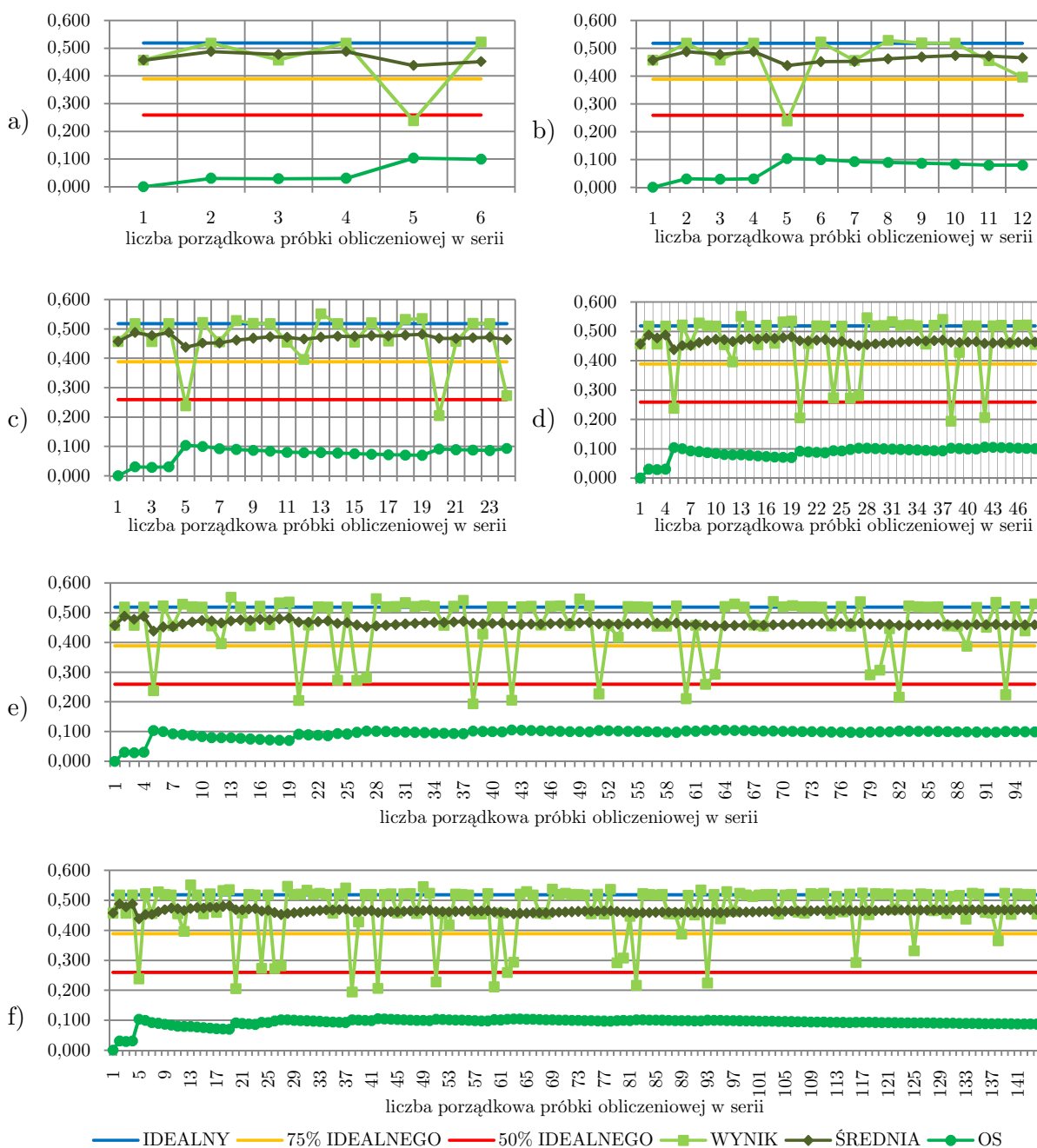
Analiza podejściem bezpośrednim metody Monte Carlo podzielona została na sześć serii. W serii pierwszej rozpatrzono jedynie 6 punktów obliczeniowych. W serii drugiej liczba ta wzrosła do wartości 12 punktów obliczeniowych. Analogicznie, w serii trzeciej ujęto 24 punkty obliczeniowe, w serii czwartej – 48 punktów, a w serii piątej – 96 punktów. W finałowej, szóstej serii rozpatrzono wszystkie wygenerowane punkty obliczeniowe, zatem ich liczba w zadaniu wyniosła 144. Warto jednakże nadmienić, iż wygenerowane punkty obliczeniowe nie zostawały w poszczególnych seriach ustawione w kolejności, jaką mogłyby sugerować system ich generacji, ale **zostały ustawione w sposób całkowicie losowy**.

Zbieżność rezultatów probabilistycznych momentów odpowiedzi (średniej arytmetycznej mnożnika krytycznego i jego odchylenia standardowego w danej serii) dla wariantu zadania używającego bezpośredniego podejścia Monte Carlo, przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek obliczeniowych (w sześciu kolejnych etapach analizy), przedstawiona jest na rys. 6.36.

Na każdym z wykresów zaznaczono kluczowe poziomy ciśnienia krytycznego wiatru – poziom ciśnienia krytycznego prowadzący do awarii silosu idealnego, a następne 75% i 50% kwantyle tego poziomu. Dzięki temu na rysunkach można śledzić punkty „wynikowe”, które nie spełniają wymogów stanów granicznych, jakie zostały założone w niniejszym zadaniu.

Na rys. 6.36 linią jasnozieloną zostały zaznaczone wartości mnożnika krytycznego obciążenia wiatrem dla poszczególnych punktów obliczeniowych, kolorem ciemnozielonym – zachowanie się średniej arytmetycznej serii, a kolorem zielonym – odchylenia standardowego.

Taki klucz kolorów jest stosowany w wykresach każdej kolejnej analizy niniejszego przykładu.



Rys. 6.36. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń probabilistycznych momentów odpowiedzi dla wariantu zadania używającego bezpośredniego podejścia Monte Carlo, przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek obliczeniowych – kolejno: a) dla 6 próbek, b) dla 12 próbek, c) dla 24 próbek, d) dla 48 próbek, e) dla 96 próbek oraz f) dla 144 próbek.

Na podstawie rys. 6.36. stwierdzić można, iż po pierwszej serii analizy (rozpatrzeniu tylko 6 próbek) zadowalająca zbieżność nie została osiągnięta. Dużo lepiej przedstawia się sytuacja w serii drugiej (dla 12 próbek), lecz już rezultaty serii trzeciej i czwartej ponownie nie prezentują zadowalającej zbieżności. Dopiero seria piąta i szosta pozwalają przyjąć określone po ich zakończeniu wartości jako miarodajne, jednakże zauważyć należy, iż seria finałowa prezentuje znacznie różne wartości średniej i odchylenia standardowego, aniżeli te wypracowane po serii piątej (różnica 2,06% między wynikami średniej i aż 13,74% między wynikami odchylenia). Oczywiście, jako wyniki referencyjne powinno się przyjąć wyniki po szóstej serii, także stwierdzić można, iż **do poprawnej kalkulacji średniego mnożnika krytycznego obciążenia wiatrem i znalezienia jego prawidłowej wariancji, potrzeba wykonać aż 144 obliczenia modeli – próbek.**

Dysponując wynikami poszczególnych obliczeń próbek, obliczyć można dla każdej z serii wskazywane przez nią prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności, w dwóch przyjętych wariantach analizy – dla kwantyli 75% i dla 50%.

Wyniki te zgromadzono w Tablicy 6.23. Zgromadzono w niej także informacje o różnicy pomiędzy wynikiem danej wartości uzyskanym w danej serii, a wynikiem serii ostatniej, uznanej za referencyjną.

Tablica 6.23. Prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności obliczone dla każdej z serii obliczeniowych dla wariantu zadania używającego bezpośredniego podejścia Monte Carlo, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50%).

	MC - 6 punktów		MC - 12 punktów		MC - 24 punkty		MC - 48 punktów		MC - 96 punktów		MC - 144 punkty	
ŚREDNIA	0,45167	-3,62%	0,46517	-0,74%	0,46358	-1,07%	0,46373	-1,04%	0,45895	-2,06%	0,46861	0,00%
OS	0,09217	5,96%	0,07914	-9,02%	0,09314	7,07%	0,09977	14,69%	0,09894	13,74%	0,08699	0,00%
PF,75%	0,16667	26,32%	0,08333	-36,84%	0,12500	-5,26%	0,14583	10,53%	0,16667	26,32%	0,13194	0,00%
PS,75%	0,83333	-4,00%	0,91667	5,60%	0,87500	0,80%	0,85417	-1,60%	0,83333	-4,00%	0,86806	0,00%
β_C ,75%	0,96742	-13,41%	1,38298	23,78%	1,15034	2,96%	1,05448	-5,62%	0,96742	-13,41%	1,11727	0,00%
PF,50%	0,16667	166,67%	0,08333	33,33%	0,08333	33,33%	0,08333	33,33%	0,09375	50,00%	0,06250	0,00%
PS,50%	0,83333	-11,11%	0,91667	-2,22%	0,91667	-2,22%	0,91667	-2,22%	0,90625	-3,33%	0,93750	0,00%
β_F ,50%	0,96742	-36,94%	1,38298	-9,85%	1,38298	-9,85%	1,38298	-9,85%	1,31804	-14,09%	1,53415	0,00%

Na podstawie Tablicy 6.23 stwierdzić można, iż wyniki miar oceny bezpieczeństwa konstrukcji uzyskane w pierwszej serii analizy są niedopuszczalne. Wyniki serii kolejnych (od drugiej do piątej) są dość zbliżone, przy czym przyznać należy, iż seria druga nadal zawiera zbyt mało informacji o zjawisku, aby móc polegać na jej wynikach. Niepokojący jest też fakt, iż przy dość wiernych rozwiązaniu referencyjnym wynikach poprzednich serii, seria piąta prezentuje zwiększenie się błędów aproksymacji. Sytuacja ta jest może jednak powiązana z losowaniem próbek obliczeniowych i przy innym rozkładzie próbek w seriach efekt ten mógłby zniknąć (niemniej jednak, jest to przesłanka, aby podchodzić z ostrożnością do wyników prób losowych z małą liczbą realizacji).

Obserwując powyższe wyniki można jednak z całą pewnością stwierdzić, iż metoda Monte Carlo doskonale sprawdza się przy rozpoznawaniu zmian obciążenia krytycznego zbiornika, a wyprowadzenie podstawowych miar niezawodności nie jest skomplikowane. Odpowiednio duża liczba realizacji obliczeń modeli – próbek zapewnia dużą pewność, co do końcowego

wyniku. Należy również wyraźnie podkreślić, iż nawet duże rozbieżności (5%–10%) pomiędzy rozwiązaniem referencyjnym, a wynikiem serii nie są czynnikiem dyskredytującym metodę. Pamiętać należy, iż operuje się na bardzo małych wartościach, a więc różnica, która bezwzględnie nie wydaje się wielka, w obliczeniu błędu względnego może okazać się znaczna.

2) Analiza przy użyciu metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania warstwowego (SS, Stratified Sampling Monte Carlo).

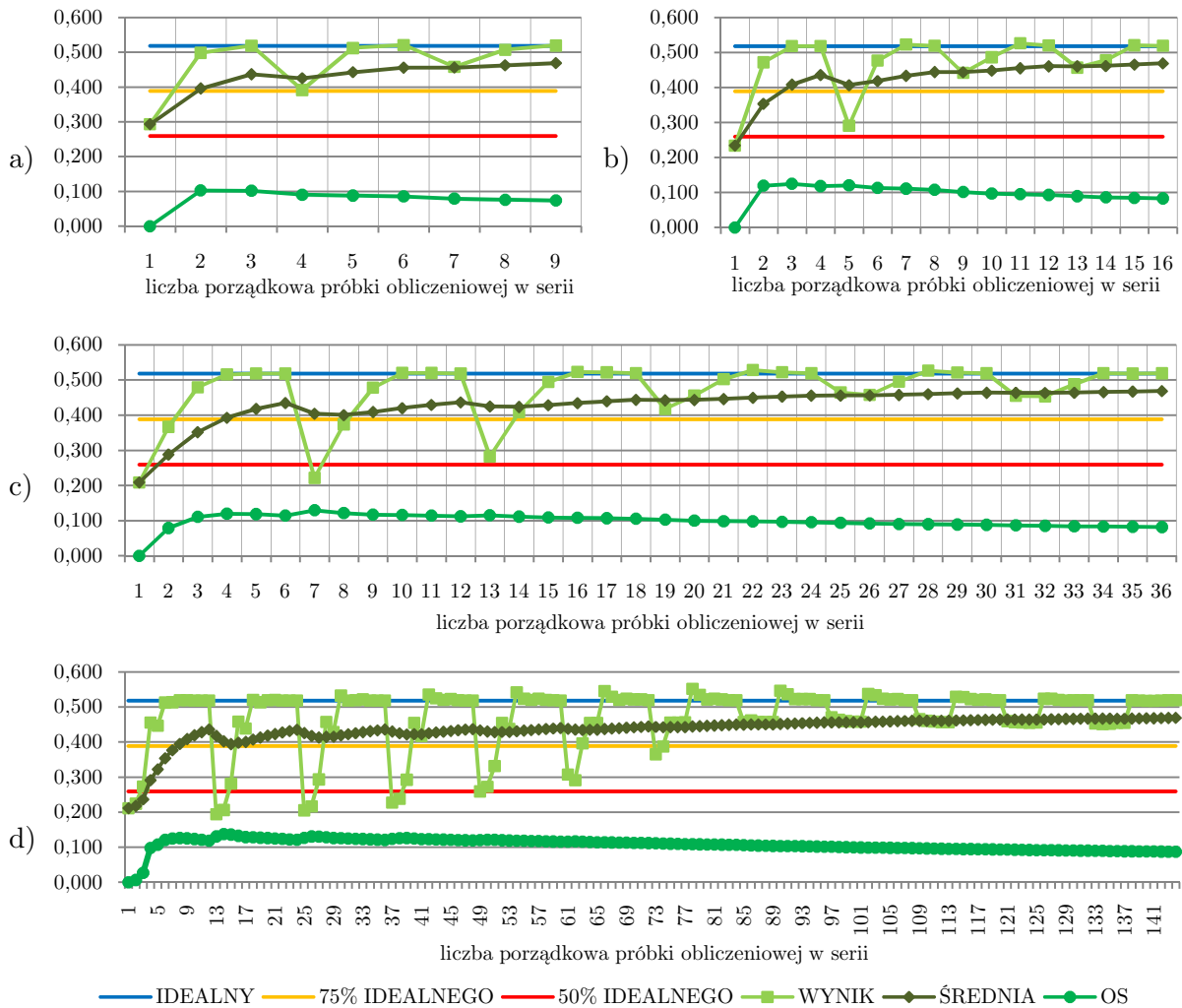
Analiza przy użyciu metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania warstwowego podzielona została na cztery serie. W serii pierwszej dokonano podziału przestrzeni realizacji na trzy pasma równego zasięgu, wzdłuż każdej z osi wymiarów probabilistycznych (x_1, x_2) , co spowodowało odseparowanie $3 \times 3 = 9$ podprzestrzeni zdarzeń losowych. Z każdej z tych podprzestrzeni wybrano tylko jedną próbkę, którą starano się dobrać w ten sposób, aby jak najlepiej reprezentowała wszystkie próbki znajdujące się w danej podprzestrzeni (tzw. próbkę środkową). Tak przygotowaną populację 9 próbek obliczeniowych przyjęto za 9 punktów obliczeniowych serii. W serii drugiej każdą z osi wymiarów probabilistycznych przestrzeni podzielono na cztery pasma, w serii trzeciej na sześć pasm, a w serii czwartej – na dwanaście. Respektując metodologię próbkowania warstwowego, nakreśloną powyżej, w serii drugiej uzyskano 16 punktów obliczeniowych z $4 \times 4 = 16$ podprzestrzeni zdarzeń losowych, w serii trzeciej – 36 punktów obliczeniowych z 36 podprzestrzeni, a w serii czwartej – 144 punktów obliczeniowych z takiej samej ilości podprzestrzeni.

Szczegóły tej techniki zostały przywołane w punkcie 2.6.2.1. niniejszej rozprawy.

Definicja zadania wskazuje więc na to, iż szósta seria obliczeń prowadzonych za pomocą bezpośredniego podejścia Monte Carlo i czwarta seria obliczeń prowadzonych przy użyciu próbkowania warstwowego powinny dać identyczne wyniki, korzystają bowiem ze wszystkich 144 próbek obliczeniowych przygotowanych na potrzeby tejże analizy. Co ważne, w poszczególnych seriach próbki **były tym razem ustawione w kolejności, jaką sugerował system przeszukiwania** podzielonej przestrzeni realizacji. Zrobiono tak, aby zaobserwować różnicę między losowym, a celowym doбором kolejności próbek.

Zbieżność rezultatów probabilistycznych momentów odpowiedzi (średniej arytmetycznej mnożnika krytycznego i jego odchylenia standardowego w danej serii) dla wariantu zadania używającego metody Monte Carlo wzbogaconej o technikę próbkowania warstwowego, przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek obliczeniowych (w czterech kolejnych etapach analizy), przedstawiono na rys. 6.37.

Na podstawie rys. 6.37. stwierdzić można, iż technika ta doskonale aproksymuje wartości liczbowe momentów odpowiedzi probabilistycznej, wymaga ona jednakże rozpatrzenia całej liczby punktów dobranych z podprzestrzeni realizacji. Obliczeń nie można zakończyć dla ilości próbek mniejszej, aniżeli liczba podprzestrzeni realizacji, gdyż specyfika techniki próbkowania powoduje, iż działanie takie odbyłoby się ze szkodą dla rezultatów. Trudno też mówić w tym przypadku o zbieżności rezultatów średniej i odchylenia standardowego, a raczej o pewnej tendencji, którą dla tychże momentów można zaobserwować. Ten fakt może być związany z celowym doбором kolejności próbek, który sprawdza się widocznie słabiej, niż proponowany przez bezpośrednią metodę Monte Carlo układ losowy.



Rys. 6.37. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń probabilistycznych momentów odpowiedzi dla wariantu zadania używającego metody Monte Carlo wzbogaconej o technikę SS, przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek obliczeniowych – kolejno dla: a) 9 próbek, b) 16 próbek, c) 36 próbek, d) 144 próbek.

Wielką zaletą tego typu próbkowania jest fakt, iż poprzez dobieranie tzw. próbek środkowych z podprzestrzeni, już w pierwszej serii obliczeniowej średnia jest niemalże identyczna z wynikiem referencyjnym, co dzieje się także w serii drugiej i trzeciej. Odchylenie standardowe również jest bardzo wierne rozwiązaniu referencyjnemu, jednakże tylko dla serii drugiej (4,76% różnicy) i trzeciej (5,93% różnicy). Przyjmując zatem ponownie jako wyniki referencyjne rezultaty osiągnięte po serii ostatniej, stwierdzić można z całą stanowczością, że **do poprawnej kalkulacji średniego mnożnika krytycznego obciążenia wiatrem i znalezienia jego prawidłowej wariancji, potrzeba wykonać jedynie 16 obliczeń modeli – próbek**, jeśli zostaną one dobrane z przestrzeni realizacji przy użyciu techniki próbkowania warstwowego (stratified sampling).

Dysponując wynikami poszczególnych obliczeń próbek, obliczyć można dla każdej z serii wskazywane przez nią prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności, w dwóch przyjętych wariantach analizy – dla kwantyli 75% i dla 50%.

Wyniki te zgromadzono w Tabelcy 6.24. Zgromadzono w niej także informacje o różnicy pomiędzy wynikiem danej wartości uzyskanym w danej serii, a wynikiem serii uznanej za referencyjną.

Tablica 6.24. Prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności obliczone dla każdej z serii dla wariantu zadania używającego metody Monte Carlo wzbogaconej o technikę SS, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50%).

	SS - 3x3 = 9 punktów		SS - 4x4 = 16 punktów		SS - 6x6 = 36 punktów		SS - 12x12 = 144 punkty	
ŚREDNIA	0,46861	0,00%	0,46861	0,00%	0,46861	0,00%	0,46861	0,00%
OS	0,07384	-15,12%	0,08285	-4,76%	0,08183	-5,93%	0,08699	0,00%
PF,75%	0,11111	-15,79%	0,12500	-5,26%	0,13889	5,26%	0,13194	0,00%
PS,75%	0,88889	2,40%	0,87500	0,80%	0,86111	-0,80%	0,86806	0,00%
β C,75%	1,22063	9,25%	1,15034	2,96%	1,08534	-2,86%	1,11727	0,00%
PF,50%	0,00000	-100,00%	0,06250	0,00%	0,05556	-11,11%	0,06250	0,00%
PS,50%	1,00000	6,67%	0,93750	0,00%	0,94444	0,74%	0,93750	0,00%
β F,50%	3,99999	160,73%	1,53415	0,00%	1,59325	3,85%	1,53415	0,00%

Na podstawie Tabelcy 6.24 stwierdzić można, iż wyniki miar oceny bezpieczeństwa konstrukcji uzyskane w pierwszej serii analizy także i w tym przypadku są niedopuszczalne. Natomiast wyniki serii kolejnych (od drugiej do czwartej) są natomiast bardzo zadowalające i modelowo zbliżone do rozwiązania referencyjnego, jakim jest szósta seria obliczeń przy użyciu bezpośredniej metody Monte Carlo. Największe błędy pojawiają się dla obliczeń prawdopodobieństwa awarii, lecz także w tym przypadku podkreślić należy, iż dla tak małych wartości błąd względny na poziomie 10% przekłada się na minimalną zaledwie różnicę bezwzględną, co również można zaobserwować w Tabelcy 6.24.

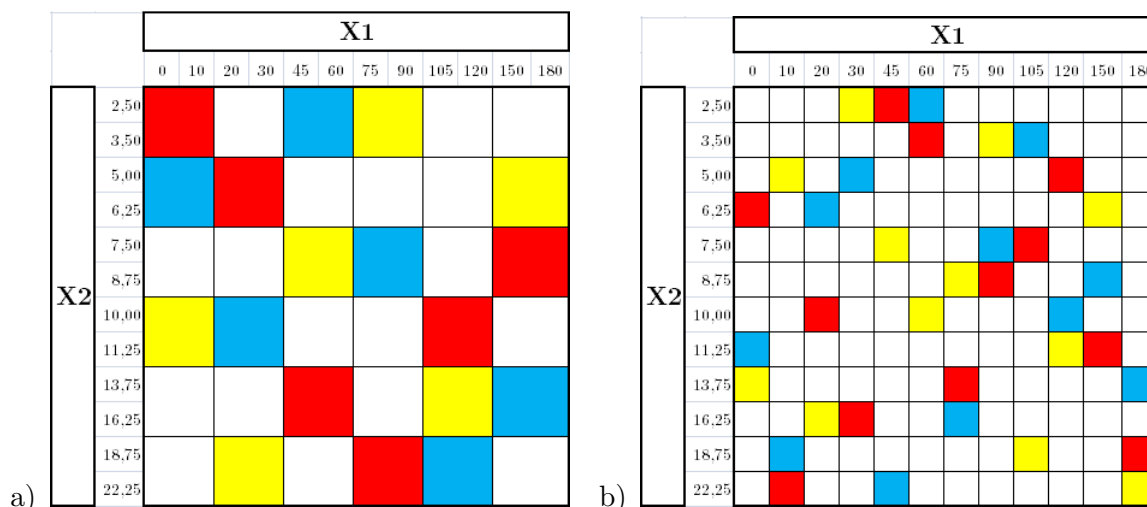
Zauważyć można z pełną stanowczością, iż metoda Monte Carlo, której liczba próbek w populacji została celowo i metodycznie zmniejszona techniką próbkowania warstwowego także doskonale sprawdza się przy rozpoznawaniu zmian obciążenia krytycznego zbiornika, a obliczone na jej podstawie podstawowe miary niezawodności stają się bliskie faktycznym miarom zjawiska już dla bardzo małej liczby zastosowanych próbek, w porównaniu do podejścia bezpośredniego MC (MC wymaga 144 próbek, SS zaledwie 16 próbek). Wniosek taki potwierdza sformułowane w punkcie 2.6.3. niniejszej rozprawy obserwacje, jakoby technika próbkowania warstwowego dla problemów inżynierskich o małym stopniu skomplikowania i o małej liczbie zmiennych losowych daje znakomite efekty i rzeczywiście powinna być opisywana jako metoda najbardziej sprawna i efektywna pod względem czasu i kosztu obliczeniowego oraz zalecana do stosowania w tego typu analizach.

3) Analiza przy użyciu metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania hipersześcianu łącińskiego (LHS, Latin Hypercube Sampling Monte Carlo).

Analiza przy użyciu metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania hipersześcianu łącińskiego podzielona została na dwie serie, jednak w każdej z nich wyodrębniono trzy osobne schematy próbkowania, co spowodowało iż całość zadania ma de facto sześć przypadków obliczeniowych. W serii pierwszej dokonano podziału przestrzeni realizacji na sześć pasm równego zasięgu, wzdłuż każdej z osi wymiarów probabilistycznych (x_1, x_2),

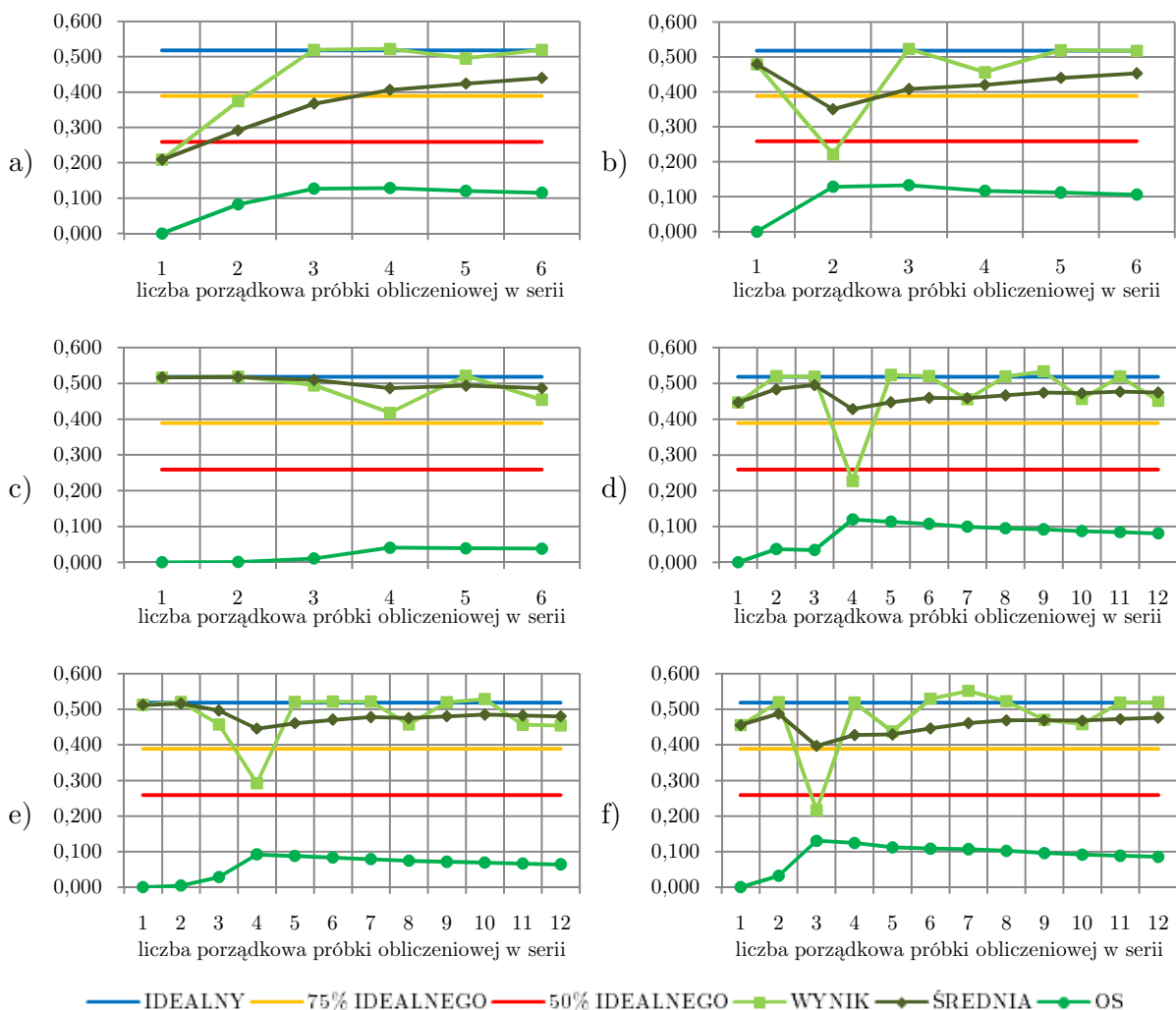
co spowodowało odseparowanie $6 \times 6 = 36$ podprzestrzeni zdarzeń losowych. Z podprzestrzeni tych próbki losowe zostały wybrane na mocy idei kwadratu łacińskiego (hipersześcian upraszcza się w dwóch wymiarach do kwadratu), tj. w ten sposób, iż z każdego jednego pasma osi x_1 i każdego jednego pasma osi x_2 może być dobrana tylko jedna próbka (która wyszukiwana jest tak, aby jak najlepiej reprezentować wszystkie próbki znajdujące się w danej podprzestrzeni). Oznacza to, że przy takim podziale na podprzestrzenie wybrać można jedynie 6 próbek (a nie 36, jak w przypadku techniki SS), jednakże można zrobić to na bardzo dużą liczbę sposobów. Z liczby tej wybrano zatem pokazowo trzy różne sposoby doboru próbek (nazwane kolejno: „czerwonym” – Cz, „niebieskim” – Nb oraz „żółtym” – Żt), respektujące założenia metody. Schemat doboru próbek w zilustrowano na rys. 6.38a. W serii drugiej dokonano natomiast podziału przestrzeni realizacji na dwanaście pasm równego zasięgu, wzdłuż każdej z osi wymiarów probabilistycznych (x_1, x_2), co spowodowało odseparowanie $12 \times 12 = 144$ podprzestrzeni zdarzeń losowych, pozwalające na wybranie 12 próbek (co również można zrobić to na bardzo dużą liczbę sposobów). Tak jak i w serii poprzedniej – z liczby tej wybrano pokazowo trzy różne sposoby doboru, również rozróżnione wyżej wymienionym kluczem kolorów. Schemat doboru próbek zilustrowano na rys. 6.38b. W poszczególnych seriach próbki są ustawione **w kolejności, jaką sugerował system przeszukiwania** podzielonej przestrzeni realizacji.

Szczegóły techniki próbkowania LHS zostały przywołane w punkcie 2.6.2.2. rozprawy.



Rys. 6.38. Ilustracja hipersześcianów łacińskich (w zagadnieniu dwuwymiarowym probabilistycznie – kwadratów), użytych w analizowanym zadaniu, wraz z zaznaczeniem użytych trzech różnych sposobów doboru próbek.

Zbieżność rezultatów probabilistycznych momentów odpowiedzi (średniej arytmetycznej mnożnika krytycznego i jego odchylenia standardowego w danej serii) dla wariantu zadania używającego metody Monte Carlo wzbogaconej o technikę próbkowania hipersześcianem łacińskim, przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek obliczeniowych (w sześciu kolejnych wariantach analizy), przedstawiono na rys. 6.39.



Rys. 6.39. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń probabilistycznych momentów odpowiedzi dla wariantu zadania używającego metody Monte Carlo wzbogaconej o technikę LHS, przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek obliczeniowych – kolejno dla 6 próbek: a) war. „czerwony”, b) war. „niebieski”, c) war. „żółty” oraz dla 12 próbek: d) war. „czerwony”, e) war. „niebieski”, f) war. „żółty”.

Na podstawie rys. 6.39 stwierdzić można, iż technika próbkowania hipersześcianu łacińskiego nie jest dla zadania optymalna. W przypadku analiz serii pierwszej, w każdym z trzech wariantów nie została ani zbieżność rezultatów średniej, ani odchylenia standardowego próby. Co więcej, w jednym z wariantów (wariantie „żółty”) nie znaleziono za pomocą tego podejścia ani jednej realizacji zadania przekraczającą narzucone stany graniczne kwantyli 75% i 50% obciążenia, a zatem wyniki nie mogą być na pewno uznane za wiarygodne, mogą wprowadzać eksperymentatora w przekonanie, iż silos nie jest wrażliwy na imperfekcję geometryczną. Dużo lepiej prezentują się rezultaty serii drugiej, gdzie można mówić o pewnej zbieżności średniej wyników, jednakże odchylenie standardowe próby nadal nie wykazuje zbieżności. Co więcej, tu również mogłoby zdarzyć się takie losowanie wariantu, które nie wskazałoby ani jednej realizacji przekraczającą równanie stanu granicznego. Fakt ten jest nieodłącznym ryzykiem posługiwania się techniką LHS bez dodatkowych technik wspomagających, jak przykładowo próbkowanie ważnościowe.

Wyniki odchylenia standardowego serii są obarczone sporą rozbieżnością w stosunku do rozwiązania referencyjnego, jakim ponownie mianowano rezultaty osiągnięte po serii ostatniej analizy bezpośrednią metodą Monte Carlo. Równocześnie, jedną z nielicznych zalet tego typu próbkowania jest dobieranie próbek środkowych z podprzestrzeni, co dla obu serii daje dość dobrą zgodność ustalonej wartości średniej próby z wartością referencyjną.

Mimo wszystko, stwierdzić można z całą stanowczością, że jeśli próbki obliczeniowe zostaną dobrane z przestrzeni realizacji przy użyciu techniki próbkowania hipersześcianu łacińskiego (latin hypercube sampling), to **do poprawnej kalkulacji średniego mnożnika krytycznego obciążenia wiatrem i znalezienia jego prawidłowej wariancji, potrzeba albo wykonać więcej niż 12 obliczeń modeli – próbek** (co oznaczałoby bardziej szczegółowy podział przestrzeni realizacji na podprzestrzenie), **albo też złączyć jako jedną kalkulację wyniki kilku wariantów obliczeń 12 modeli – próbek**, co zdecydowanie byłoby rozwiązaniem **niekonkurencyjnym** dla obliczeń podejściem bezpośrednim metody Monte Carlo, czy techniką SS.

Dysponując wynikami poszczególnych obliczeń próbek, obliczyć można dla każdej z serii wskazywane przez nią prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności, w dwóch przyjętych wariantach analizy – dla kwantyli 75% i dla 50%.

Wyniki te zgromadzono w Tabelicy 6.25. Zgromadzono w niej także informacje o różnicy pomiędzy wynikiem danej wartości uzyskanym w danej serii, a wynikiem serii uznanej za referencyjną.

Tablica 6.25. Prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności obliczone dla każdej z serii dla wariantu zadania używającego metody Monte Carlo wzbogaconej o technikę LHS, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50%).

	LHS - 6x6 = 6 punktów (Cz)		LHS - 6x6 = 6 punktów (Nb)		LHS - 6x6 = 6 punktów (Żt)		LHS - 12x12 = 12 punktów (Cz)		LHS - 12x12 = 12 punktów (Nb)		LHS - 12x12 = 12 punktów (Żt)	
ŚREDNIA	0,43975	-6,16%	0,45275	-3,38%	0,48675	3,87%	0,47392	1,13%	0,47975	2,38%	0,47600	1,58%
OS	0,11560	32,89%	0,10627	22,16%	0,03861	-55,61%	0,08119	-6,67%	0,06394	-26,50%	0,08549	-1,73%
PF,75%	0,33333	152,63%	0,16667	26,32%	0,00000	-100,00%	0,08333	-36,84%	0,08333	-36,84%	0,08333	-36,84%
PS,75%	0,66667	-23,20%	0,83333	-4,00%	1,00000	15,20%	0,91667	5,60%	0,91667	5,60%	0,91667	5,60%
βC,75%	0,43073	-61,45%	0,96742	-13,41%	3,99999	258,01%	1,38298	23,78%	1,38298	23,78%	1,38298	23,78%
PF,50%	0,16667	166,67%	0,16667	166,67%	0,00000	-100,00%	0,08333	33,33%	0,00000	-100,00%	0,08333	33,33%
PS,50%	0,83333	-11,11%	0,83333	-11,11%	1,00000	6,67%	0,91667	-2,22%	1,00000	6,67%	0,91667	-2,22%
βF,50%	0,96742	-36,94%	0,96742	-36,94%	3,99999	160,73%	1,38298	-9,85%	3,99999	160,73%	1,38298	-9,85%

Na podstawie Tabelicy 6.25 stwierdzić można, iż wyniki miar oceny bezpieczeństwa konstrukcji uzyskane w obu seriach analizy są niedopuszczalne. Poza pojedynczymi przypadkami obliczeń bezawaryjności zbiornika, wszystkie wyniki wykazują bardzo znaczące błędy względne, które trudno wytłumaczyć nawet faktem małych wartości liczbowych rezultatów obliczeń. W aż trzech przypadkach analizy (seria 1, wariant „żółty”, kryterium 75%; seria 1, wariant „żółty”, kryterium 50%; seria 2, wariant „niebieski”, kryterium 50%) otrzymano zerowe prawdopodobieństwa awarii, co jest oczywistym i niepokojącym błędem. Wiele błędów ma wartości przewyższające 50% wartości obliczonej, co wskazuje na niepokojąco słabe działanie próbkowania dla rozważanego przykładu. Między obiema

seriami widać jednak znaczne zmniejszenie błędu na korzyść serii bardziej licznej w punkty obliczeniowe, co potwierdza postawiony powyżej wniosek, iż dla bardziej szczegółowego podziału na podprzestrzenie realizacji (większej liczbie próbek) technika ta mogłaby w końcu wskazać dużo bardziej zadowalające rezultaty.

Zauważyć można z pełną stanowczością, iż metoda Monte Carlo, której liczba próbek w populacji została celowo zmniejszona techniką hipersześcianu łacińskiego nie sprawdza się przy rozpoznawaniu zmian obciążenia krytycznego zbiornika. Co więcej, nawet poprawienie jakości jej pracy (przykładowo w sposób zasugerowany powyżej) absolutnie nie jest konkurencyjne wobec metodologii podejścia bezpośredniego Monte Carlo, a tym bardziej dla wzbogacenia metody próbkowaniem warstwowego. Wniosek taki potwierdza sformułowane w punkcie 2.6.3. niniejszej rozprawy obserwacje, jakoby taka technika próbkowania dla problemów inżynierskich o małym stopniu skomplikowania nie dawała wyraźnych efektów i musiała być wspomagana innymi działaniami, przykładowo próbkowaniem wagowym.

4) Analiza przy użyciu metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania wagowego (IS, Importance Sampling Monte Carlo).

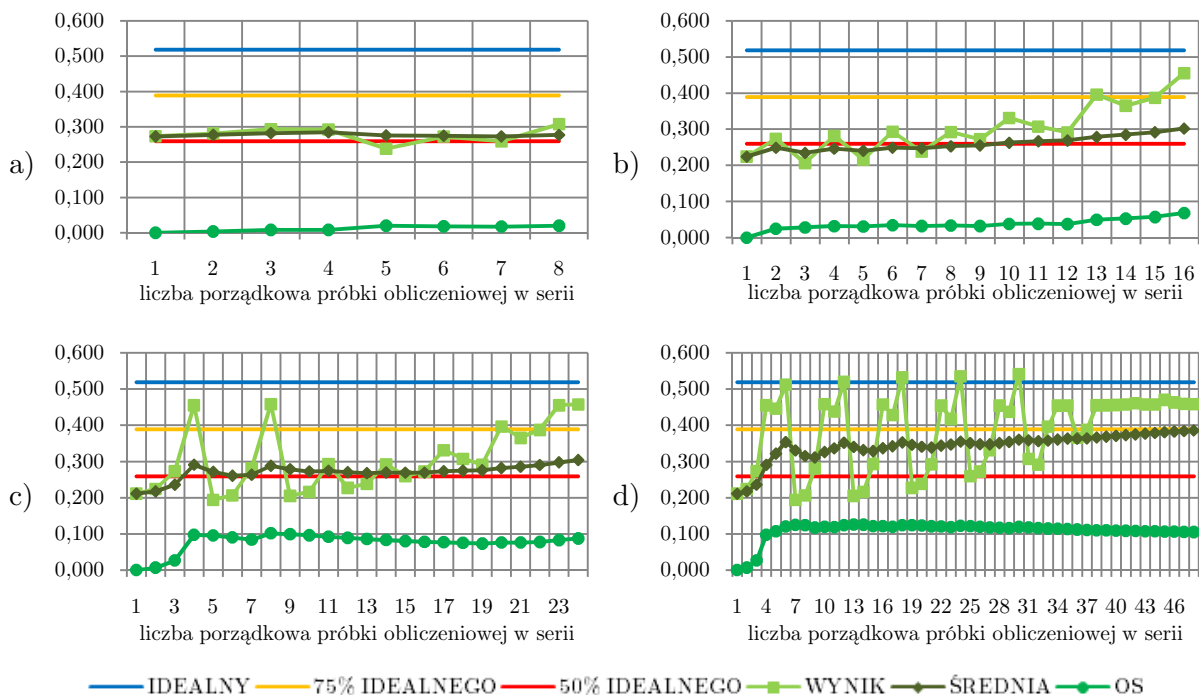
Analiza przy użyciu metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania wagowego podzielona została na cztery serie. W serii pierwszej rozpatrzono jedynie 8 punktów obliczeniowych, które na bazie wstępnych testów numerycznych zdawały się znajdować w przestrzeni realizacji najbardziej stanu granicznego przypadku analizy 50% kwantyla obciążenia wiatrem. W serii drugiej rozpatrzono natomiast 16 punktów obliczeniowych, które na bazie wstępnych testów numerycznych zdawały się znajdować w przestrzeni realizacji najbardziej stanu granicznego przypadku analizy 75% kwantyla obciążenia wiatrem. Seria trzecia to obliczenia 24 punktów obliczeniowych, które stanowią połączenie obu pierwszych serii. W serii czwartej rozpatrzono 48 punktów obliczeniowych, gdzie do punktów serii trzeciej dopisano 24 punkty spełniające równanie stanu granicznego, ale od niego w nieco dalszej odległości. Wygenerowane punkty obliczeniowe zostawały w poszczególnych seriach ustawione w **kolejności całkowicie losowej**.

Szczegóły techniki próbkowania IS zostały przywołane w punkcie 2.6.2.3. niniejszej rozprawy.

Zbieżność rezultatów probabilistycznych momentów odpowiedzi (średniej arytmetycznej mnożnika krytycznego i jego odchylenia standardowego w danej serii) dla wariantu zadania używającego metody Monte Carlo wzbogaconej o technikę próbkowania wagowego, przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek obliczeniowych (w sześciu kolejnych wariantach analizy), przedstawiono na rys. 6.40.

Na podstawie rys. 6.40 stwierdzić można, iż technika próbkowania hipersześcianu łacińskiego nie jest dla zadania optymalna. Jednakże obliczeniom z wykorzystaniem tej techniki przyświecał inny cel – nie miała być ona rzeczywistym miernikiem momentów probabilistycznych próby, ani też wytyczną do kalkulacji miar niezawodności modelu, ale tylko pewnym wprowadzeniem i rozpoznaniem, wykonywanym przed analizą metodą powierzchni odpowiedzi. W przypadku wszystkich analiz tej serii ani zbieżność rezultatów średniej, ani odchylenia standardowego próby nie została osiągnięta, a skalkulowane końcowo wartości są błędne, różniące się od rozwiązania referencyjnego o wielkość błędu względnego wynoszącą od 17.72% (48 próbek) do 40.92% (8 próbek). Próbki wagowe

ma bowiem wiele zalet nie w przypadku analizy Monte Carlo, ale w przypadku przetwarzania rezultatów punktów obliczeniowych za pomocą innych narzędzi stochastycznych. W metodzie powierzchni odpowiedzi, dla bardzo skomplikowanych modeli, powinno być gwarantem dobrego odwzorowania powierzchni w obrębie jej stanu granicznego.



Rys. 6.40. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń probabilistycznych momentów odpowiedzi dla wariantu zadania używającego metody Monte Carlo wzbogaconej o technikę IS, przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek obliczeniowych – kolejno dla: a) 8 próbek, b) 16 próbek, c) 24 próbek, d) 48 próbek.

Można więc stwierdzić, iż jeśli próbki obliczeniowe zostaną dobrane z przestrzeni realizacji przy użyciu techniki próbkowania wagowego (importance sampling), to **do poprawnej kalkulacji średniego mnożnika krytycznego obciążenia wiatrem i znalezienia jego prawidłowej wariancji, trzeba sprzęgnąć technikę z inną metodą szacowania niezawodności lub inną techniką redukcji populacji próbek**, z czego to ostatnie również byłoby rozwiązaniem **niekonkurencyjnym** dla obliczeń podejściem bezpośrednim metody Monte Carlo.

Dysponując wynikami poszczególnych obliczeń próbek, obliczyć można dla każdej z serii wskazywane przez nią prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności, w dwóch przyjętych wariantach analizy – dla kwantyli 75% i dla 50%, choć w tym przypadku z góry wiadomo, iż rozbieżności z rozwiązaniem referencyjnym będą ogromne. Analizę taką wykonuje się po to, aby podkreślić, iż próbkowanie wagowe dla prostych modeli inżynierskich nie jest techniką samo stanowiącą się i wymaga wsparcia innych procedur matematycznych.

Wyniki tychże obliczeń zgromadzono w Tablicy 6.26. Zebrano w niej także informacje o różnicy między wynikiem danej wartości uzyskanym w serii, a wynikiem serii referencyjnej.

Tablica 6.26. Prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności obliczone dla każdej z serii dla wariantu zadania używającego metody Monte Carlo wzbogaconej o technikę IS, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50%).

	IS - 8 punktów		IS - 16 punktów		IS - 24 punkty		IS - 48 punktów	
ŚREDNIA	0,27688	-40,92%	0,30169	-35,62%	0,30388	-35,15%	0,38558	-17,72%
OS	0,02026	-76,71%	0,06781	-22,05%	0,08710	0,13%	0,10502	20,72%
PF,75%	1,00000	657,89%	0,87500	563,16%	0,79167	500,00%	0,39583	200,00%
PS,75%	0,00000	-100,00%	0,12500	-85,60%	0,20833	-76,00%	0,60417	-30,40%
$\beta_C,75\%$	-2,00000	-279,01%	-1,15035	-202,96%	-0,81222	-172,70%	0,26415	-76,36%
PF,50%	0,25000	300,00%	0,25000	300,00%	0,37500	500,00%	0,18750	200,00%
PS,50%	0,75000	-20,00%	0,75000	-20,00%	0,62500	-33,33%	0,81250	-13,33%
$\beta_F,50\%$	0,67450	-56,03%	0,67450	-56,03%	0,31863	-79,23%	0,88715	-42,17%

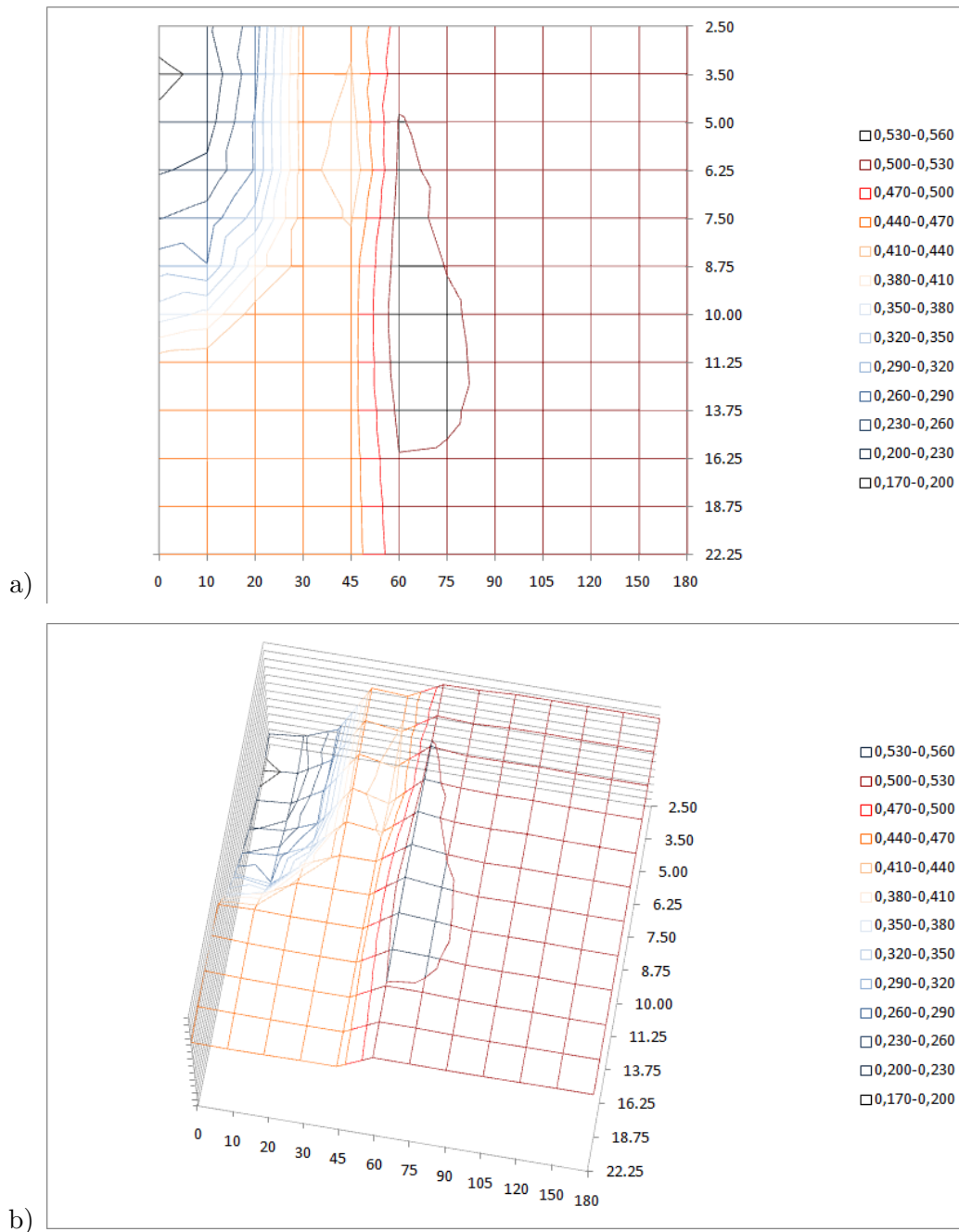
Na podstawie Tablicy 6.26 stwierdzić można, iż wyniki miar oceny bezpieczeństwa konstrukcji uzyskane we wszystkich seriach analizy są absolutnie niedopuszczalne. Pojedynczy względnie idealnie poprawny wynik musi być w tym przypadku paradoksalnie potraktowany jako zupełnie przypadkowy. Poza obliczeniami bezawaryjności zbiornika, wszystkie wyniki wykazują bardzo znaczące błędy względne, wszystkie one przewyższają 50% wartości obliczonej, co potwierdza oczekiwane bardzo słabe działanie próbkowania dla rozważanego przykładu. Między poszczególnymi seriami trudno dostrzec jakiegokolwiek logiczne zmniejszenia błędu, co wiąże się z faktem, iż dobór punktów obliczeniowych jest arbitralny i nie uwzględnia globalnej natury zjawiska osiągnięcia wartości krytycznych ciśnienia wiatru na ścianie silosu (lub przeciwnie – nadmiernym skupieniu się na naturze lokalnego obniżenia się wartości tegoż ciśnienia).

Zauważyć można, iż metoda Monte Carlo, której liczba próbek w populacji została celowo zmniejszona techniką próbkowania wagowego, zdecydowanie nie sprawdza się przy rozpoznawaniu zmian obciążenia krytycznego zbiornika. Wniosek taki potwierdza tylko sformułowane w punkcie 2.6.3. niniejszej rozprawy zastrzeżenie, jakoby taka technika próbkowania musiała być wspomagana przykładowo metodologią powierzchni odpowiedzi.

g) Analiza niezawodności metodą powierzchni odpowiedzi

Jeżeli weźmie się pod uwagę rozwiązanie referencyjne, przedstawiające wyniki obliczeń wartości krytycznej zwiększonego mnożnika startowego obciążenia wiatrem m_{crit} , lub też wartość ciśnienia krytycznego parcia/ssania wiatru wyrażanego w kPa, skalkulowane w 144 punktach obliczeniowych dobranych dla bezpośredniej metody Monte Carlo, to jeszcze przed doбором powierzchni odpowiedzi, można dostać nieciągły, wstępny obraz powierzchni zależności ciśnienia krytycznego od zmiennych przyjętych w analizie (zmiennej kąta zorientowania $a = x_1$ oraz zmienną wysokości $h = x_2$). Takie wstępne rozpoznanie topografii wydaje się być przydatne do wyboru właściwego modelu aproksymacyjnego równania powierzchni odpowiedzi.

Poglądowy szkic topografii został przedstawiony na rys. 6.41, na dwóch wizualizacjach.



Rys. 6.41. Wizualizacje wstępnego rozpoznania topografii powierzchni zależności ciśnienia krytycznego od zmiennych przyjętych w analizie, kolejno: a) w widoku 2D, b) w widoku 3D.

Jak widać na przywołanych na rys. 6.41 wizualizacjach, krzywizna rzeczywistej powierzchni odpowiedzi konstrukcji nie jest jednoznacznie określona. Powierzchnia ta ma jedno wgłębienie w swoim narożu i delikatne wybrzuszenie w strefie środkowej. Dostrzegając jej skomplikowanie odrzucono zastosowanie modelu pierwszego rzędu i w końcowym etapie analizy przyjęto dla zadania **model aproksymacyjny drugiego rzędu z członami interakcyjnymi** (którego poprawność i sprawność działania została już udowodniona w analizach poprzedzających), dla dwóch zmiennych losowych, w postaci

$$\hat{g}(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 \quad (6.11)$$

Założono, iż aproksymowana powierzchnia odpowiedzi będzie obliczana w całkowitym nawiązaniu do poprzednich analiz – to jest: w dwóch przypadkach obliczeniowych (stan graniczny zdefiniowany jako 75% lub 50% wartości ciśnienia krytycznego wiatru obliczonego dla zbiornika idealnego) dla czterech różnych wariantów metody Monte Carlo – w sześciu seriach dla podejścia bezpośredniego, w czterech seriach dla próbkowania SS, w dwóch trójdzielnych seriach dla próbkowania LHS oraz w czterech seriach dla próbkowania IS. Jest to ilość wystarczająca do celów poprawnej analizy problemu.

Dla każdego z tych wariantów powierzchnia odpowiedzi zostanie aproksymowana za pomocą programu autorskiego **RSM–Win**, korzystającego ze standardowych technik statystycznych. Za pomocą programu autorskiego zostaną na podstawie aproksymowanych powierzchni odpowiedzi obliczone podstawowe miary niezawodności rozpatrywanego problemu – wskaźnik niezawodności wg podejścia HLRF (β_{HLRF}) oraz prawdopodobieństwo awarii $P_{f,RSM}$.

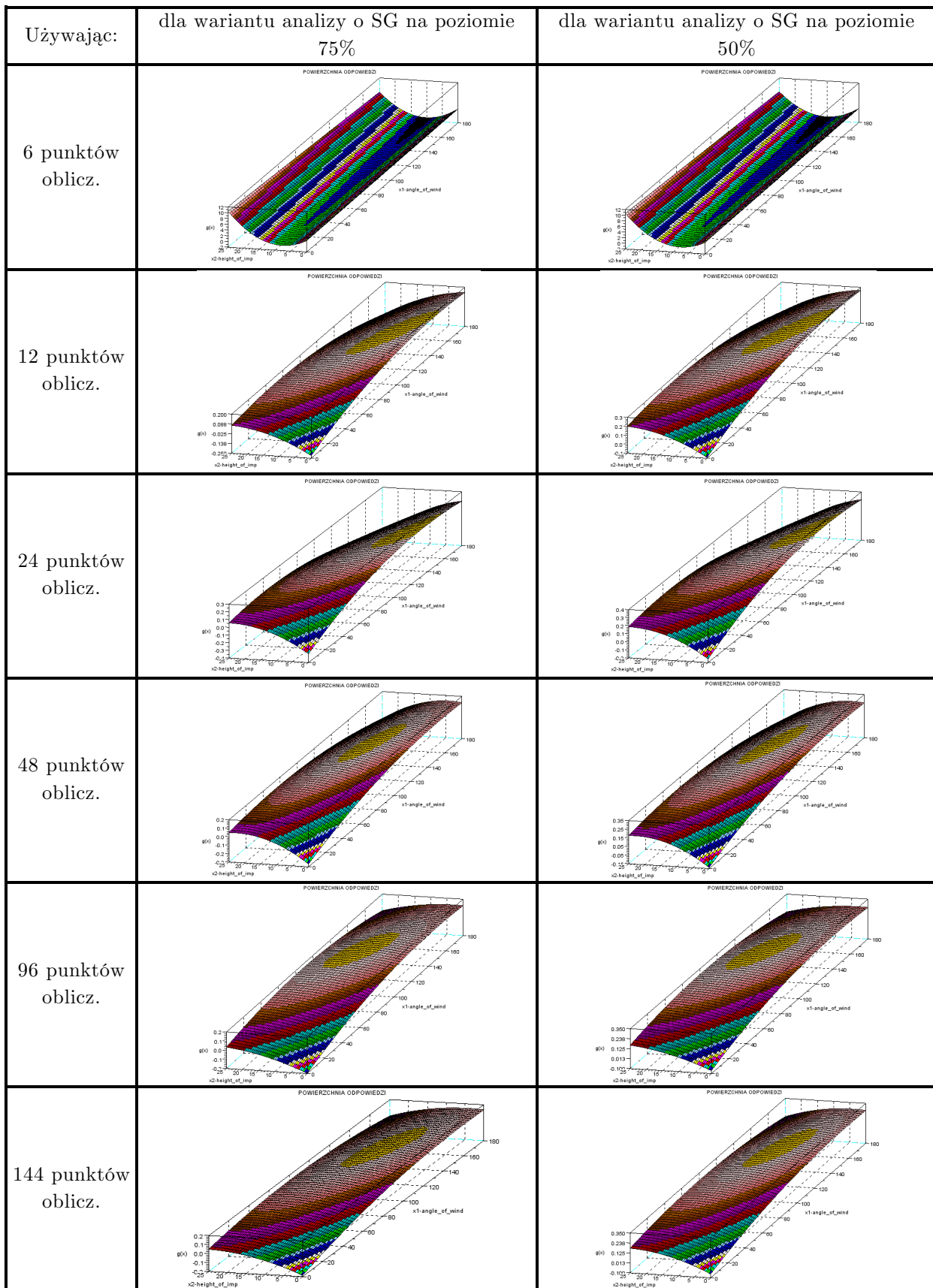
Rezultaty wymienionych miar niezawodności będą porównywane z rozwiązaniem referencyjnym, tj. tymi samymi miarami skalkulowanymi na ostatnim, szóstym etapie analizy za pomocą bezpośredniej metody Monte Carlo.

1) Analiza przy użyciu bezpośredniego podejścia metody Monte Carlo (**CMC, Crude Monte Carlo**).

Wzory postaci aproksymowanych w analizie powierzchni odpowiedzi, wykonane na podstawie punktów obliczeniowych użytych dla analiz za pomocą bezpośredniego podejścia metody Monte Carlo, zostały zbiorczo przedstawione w Tablicy 6.27. Na rys. 6.42. znajdują się natomiast poglądowe szkice powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowane przy użyciu odpowiedniej dla danej serii liczby punktów obliczeniowych.

Tablica 6.27. Wzory postaci aproksymowanych powierzchni odpowiedzi, wykonane na podstawie punktów obliczeniowych użytych do analiz za pomocą bezpośredniego podejścia MC, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50%).

Przy użyciu:	dla war. SG:	uzyskano powierzchnię odpowiedzi przedstawioną wzorem:
6 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 1,915647 + 0,006055x_1 - 0,555451x_2 - 0,000003x_1^2 + 0,036004x_2^2 - 0,000987x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 2,035272 + 0,006030x_1 - 0,552676x_2 - 0,000003x_1^2 + 0,035824x_2^2 - 0,000982x_1x_2$
12 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,221151 + 0,005246x_1 + 0,021042x_2 - 0,000018x_1^2 - 0,000373x_2^2 - 0,000132x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,090963 + 0,005229x_1 + 0,020932x_2 - 0,000018x_1^2 - 0,000370x_2^2 - 0,000132x_1x_2$
24 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,286679 + 0,007074x_1 + 0,027172x_2 - 0,000025x_1^2 - 0,000537x_2^2 - 0,000187x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,156145 + 0,007053x_1 + 0,027029x_2 - 0,000025x_1^2 - 0,000533x_2^2 - 0,000186x_1x_2$
48 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,267552 + 0,005063x_1 + 0,027461x_2 - 0,000016x_1^2 - 0,000594x_2^2 - 0,000125x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,137115 + 0,005048x_1 + 0,027328x_2 - 0,000016x_1^2 - 0,000591x_2^2 - 0,000125x_1x_2$
96 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,197122 + 0,004690x_1 + 0,014950x_2 - 0,000016x_1^2 - 0,000228x_2^2 - 0,000076x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,067063 + 0,004674x_1 + 0,014904x_2 - 0,000016x_1^2 - 0,000227x_2^2 - 0,000075x_1x_2$
144 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,186594 + 0,004170x_1 + 0,017220x_2 - 0,000013x_1^2 - 0,000312x_2^2 - 0,000080x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,056524 + 0,004155x_1 + 0,017159x_2 - 0,000013x_1^2 - 0,000312x_2^2 - 0,000080x_1x_2$



Rys. 6.42. Szkice powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowane przy użyciu odpowiedniej dla danej serii liczby punktów obliczeniowych, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50%).

Jak zaobserwować można na podstawie Tablicy 6.27 oraz rys. 6.42, pierwsza seria obliczeniowa, wykorzystująca 6 punktów, nie odzwierciedla prawidłowo powierzchni stanu granicznego zagadnienia. Jednakże każda następna seria obliczeniowa przynosi dobre oszacowanie powierzchni odpowiedzi, a zbieżność jej topografii znacznie stabilizuje się. Dla serii drugiej, trzeciej i czwartej szczyt wypukłości jest bardziej wyniesiony ponad powierzchnię zerową, nie stanowi to jednak błędu aproksymacji, gdyż powierzchnia w obrębie równania stanu granicznego odzwierciedlona jest poprawnie. Można zatem z całą stanowczością stwierdzić, iż transformacja próbek bezpośredniej metody Monte Carlo na punkty obliczeniowe powierzchni odpowiedzi jest trafna i poprawna.

Dysponując wynikami poszczególnych aproksymacji powierzchni odpowiedzi, obliczyć można dla każdej z serii wskazywane przez nią prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności, w dwóch przyjętych wariantach analizy – dla kwantyli 75% i 50%. Wyniki te zgromadzono w Tablicy 6.28.

Tablica 6.28. Prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności obliczone dla każdej z serii obliczeniowych dla powierzchni odpowiedzi aproksymowanych przy użyciu próbek wygenerowanych dla bezpośredniego podejścia Monte Carlo, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50% obciążenia krytycznego dla zbiornika idealnego).

	MC - 6 punktów		MC - 12 punktów		MC - 24 punkty		MC - 48 punktów		MC - 96 punktów		MC - 144 punkty	
PF,75%	0,34236	159,47%	0,13720	3,98%	0,14084	6,74%	0,13716	3,96%	0,14995	13,65%	0,14026	6,30%
PS,75%	0,65764	-24,24%	0,86280	-0,61%	0,85916	-1,03%	0,86284	-0,60%	0,85005	-2,07%	0,85974	-0,96%
β_C ,75%	0,40604	-63,66%	1,09298	-2,17%	1,07654	-3,65%	1,09315	-2,16%	1,03664	-7,22%	1,07914	-3,41%
PF,50%	0,33648	438,37%	0,10197	63,16%	0,11030	76,48%	0,10360	65,76%	0,10856	73,70%	0,09783	56,52%
PS,50%	0,66352	-29,22%	0,89803	-4,21%	0,88970	-5,10%	0,89640	-4,38%	0,89144	-4,91%	0,90217	-3,77%
β_F ,50%	0,42209	-72,49%	1,27039	-17,19%	1,22492	-20,16%	1,26130	-17,78%	1,23422	-19,55%	1,29403	-15,65%

Na podstawie Tablicy 6.28 stwierdzić można, iż wyniki miar oceny bezpieczeństwa konstrukcji uzyskane w pierwszej serii analizy są absolutnie niedopuszczalne, w obu przyjętych wariantach analizy (75%, 50%), co związane jest najpewniej z mylną aproksymacją topografii powierzchni odpowiedzi. Wyniki serii kolejnych (od drugiej do szóstej) są do siebie dość zbliżone i dużo lepiej określają miary oceny bezpieczeństwa konstrukcji, w szczególności dla wariantu stanu granicznego ustanowionego na 75% obciążenia krytycznego dla zbiornika idealnego. Oznacza to, że rozwiązanie proponowane przez metodę powierzchni odpowiedzi (RSM) jest bardzo dobre i bardzo pewne. Może być ono wyprowadzone już po de facto dwóch seriach obliczeniowych, czyli po wykorzystaniu jedynie 12 punktów obliczeniowych (z puli wygenerowanych 144 punktów), co jest dużym zyskiem obliczeniowym.

Należy ponownie zwrócić uwagę, iż w zadaniu operuje się na bardzo małych wartościach, a więc nawet duże rozbieżności błędu względnego mogą stanowić różnicę, która bezwzględnie nie jest duża.

2) Analiza przy użyciu metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania warstwowego (**SS, Stratified Sampling Monte Carlo**).

Wzory postaci aproksymowanych w analizie powierzchni odpowiedzi, wykonane na podstawie punktów obliczeniowych użytych dla analiz za pomocą metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania warstwowego, zostały zbiorczo przedstawione w Tablicy 6.29.

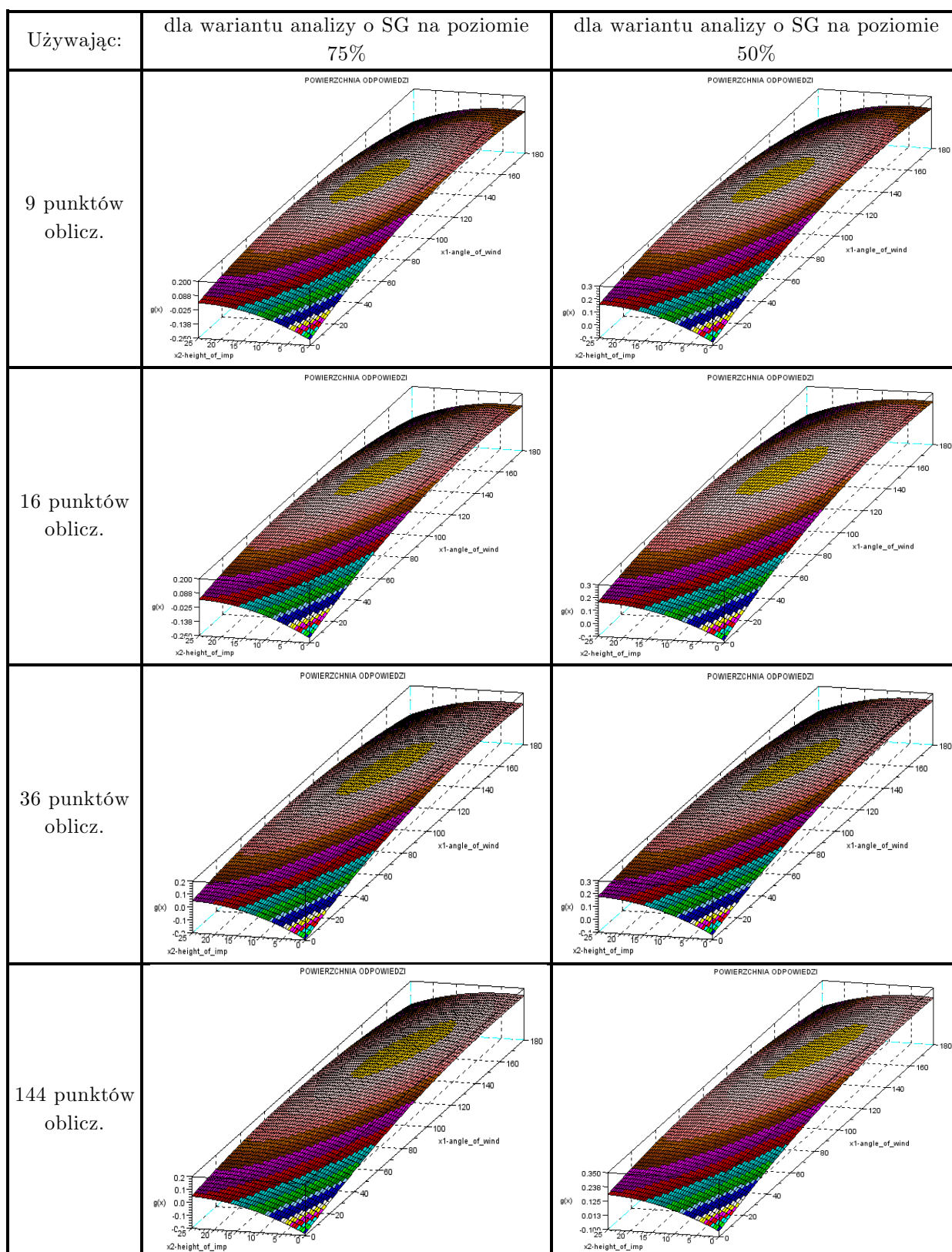
Na rys. 6.43. znajdują się natomiast poglądowe szkice powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowane przy użyciu odpowiedniej dla danej serii liczby punktów obliczeniowych.

Tablica 6.29. Wzory postaci aproksymowanych powierzchni odpowiedzi, wykonane na podstawie punktów obliczeniowych użytych do analiz za pomocą metody MC, z zastosowaniem próbkowania SS, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50%).

Przy użyciu:	dla war. SG:	uzyskano powierzchnię odpowiedzi przedstawioną wzorem:
9 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,206369 + 0,004827x_1 + 0,018481x_2 - 0,000018x_1^2 - 0,000361x_2^2 - 0,000083x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,076219 + 0,004808x_1 + 0,018407x_2 - 0,000018x_1^2 - 0,000357x_2^2 - 0,000084x_1x_2$
16 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,212079 + 0,004797x_1 + 0,019032x_2 - 0,000017x_1^2 - 0,000365x_2^2 - 0,000089x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,082009 + 0,004797x_1 + 0,018969x_2 - 0,000017x_1^2 - 0,000362x_2^2 - 0,000089x_1x_2$
36 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,193208 + 0,004226x_1 + 0,018218x_2 - 0,000014x_1^2 - 0,000342x_2^2 - 0,000085x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,063549 + 0,004223x_1 + 0,018188x_2 - 0,000014x_1^2 - 0,000339x_2^2 - 0,000085x_1x_2$
144 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,186594 + 0,004170x_1 + 0,017220x_2 - 0,000013x_1^2 - 0,000312x_2^2 - 0,000080x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,056524 + 0,004155x_1 + 0,017159x_2 - 0,000013x_1^2 - 0,000312x_2^2 - 0,000080x_1x_2$

Jak zaobserwować można na podstawie Tablicy 6.29 oraz rys. 6.43, wszystkie serie obliczeniowe, odzwierciedlają prawidłowo powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, zbieżność jej topografii stabilizuje się począwszy od pierwszej aproksymacji. Szczyt wypukłości nie jest wyniesiony znacznie ponad powierzchnię zerową w żadnej serii obliczeniowej, wszystkie współczynniki kierunkowe powierzchni mają doskonałe podobieństwo do siebie nawzajem. Można zatem stwierdzić, iż transformacja próbek metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania warstwowego na punkty obliczeniowe powierzchni odpowiedzi jest doskonałym rozwiązaniem wobec wszystkich innych podejść prezentowanych dla niniejszego zadania w tej rozprawie.

Dysponując wynikami poszczególnych obliczeń próbek, obliczyć można dla każdej z serii wskazywane przez nią prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności, w dwóch przyjętych wariantach analizy – dla kwantyli 75% i dla 50%. Wyniki te zgromadzono w Tablicy 6.30. Zgromadzono w niej także informacje o różnicy pomiędzy wynikiem danej wartości uzyskanym w danej serii, a wynikiem serii uznanej za referencyjną.



Rys. 6.43. Szkice powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowane przy użyciu odpowiedniej dla danej serii liczby punktów obliczeniowych, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50%).

Tablica 6.30. Prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności obliczone dla każdej z serii dla powierzchni odpowiedzi aproksymowanych przy użyciu próbek wygenerowanych dla metody MC z zastosowaniem próbkowania SS, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50% obciążenia krytycznego dla zbiornika idealnego).

	SS - 3x3 = 9 punktów		SS - 4x4 = 16 punktów		SS - 6x6 = 36 punktów		SS - 12x12 = 144 punkty	
PF,75%	0,14635	10,92%	0,14473	9,69%	0,13958	5,79%	0,14026	6,30%
PS,75%	0,85365	-1,66%	0,85527	-1,47%	0,86042	-0,88%	0,85974	-0,96%
β C,75%	1,05223	-5,82%	1,05931	-5,19%	1,08219	-3,14%	1,07914	-3,41%
PF,50%	0,10432	66,92%	0,10391	66,26%	0,09789	56,63%	0,09783	56,52%
PS,50%	0,89568	-4,46%	0,89609	-4,42%	0,90211	-3,78%	0,90217	-3,77%
β F,50%	1,25729	-18,05%	1,25958	-17,90%	1,29365	-15,68%	1,29403	-15,65%

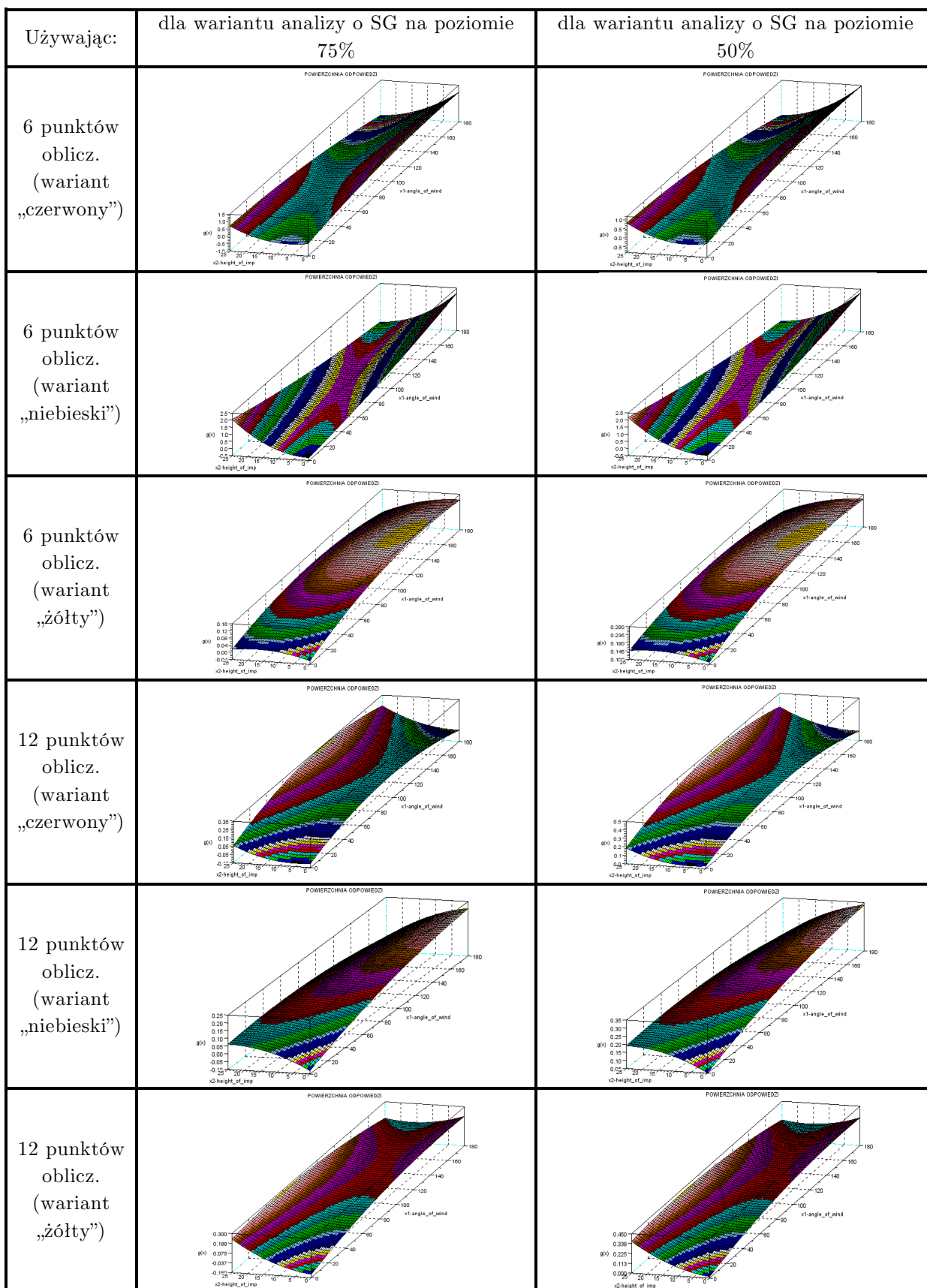
Na podstawie Tablicy 6.30 stwierdzić można, iż wyniki miar oceny bezpieczeństwa konstrukcji uzyskane w każdej serii obliczeniowej są do siebie dość zbliżone i niemalże idealnie określają miary oceny bezpieczeństwa konstrukcji, w szczególności dla wariantu stanu granicznego ustanowionego na 75% obciążenia krytycznego dla zbiornika idealnego (zupełnie jak w przykładzie poprzednim). Oznacza to, że rozwiązanie proponowane przez metodę powierzchni odpowiedzi (RSM) jest w tym przypadku równie dobre, jak i rozwiązanie referencyjne. Może być ono wyprowadzone już praktycznie po jednej serii obliczeniowej, czyli po wykorzystaniu jedynie 9 punktów obliczeniowych (z puli wygenerowanych 144 punktów). Jest to niespotykany zysk obliczeniowy, największy jaki został osiągnięty we wszystkich badaniach numerycznych w niniejszej rozprawie.

Potrzeba jedynie 6.25% populacji wygenerowanych próbek, aby sformułować rezultaty o bardzo zadowalającej dla eksperymentatora (projektanta) jakości.

3) Analiza przy użyciu metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania hipersześcianu łacińskiego (LHS, Latin Hypercube Sampling Monte Carlo).

Wzory postaci aproksymowanych w analizie powierzchni odpowiedzi, wykonane na podstawie punktów obliczeniowych użytych dla analiz za pomocą metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania hipersześcianu łacińskiego, zostały zbiorczo przedstawione w Tablicy 6.31. Na rys. 6.44. znajdują się natomiast poglądowe szkice powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowane przy użyciu odpowiedniej dla danej serii liczby punktów obliczeniowych.

Jak zaobserwować można na podstawie Tablicy 6.31 oraz rys. 6.44, serie obliczeniowe prezentują rozbieżne odzwierciedlenia powierzchni stanu granicznego zagadnienia. Z sześciu przeanalizowanych przypadków, tylko w jednym z nich (seria 1, wariant „żółty”) odwzorowano poprawnie naturę zjawiska, wydarzyło się to jednak przypadkowo, niezależnie od losowania próbek. Typowe dla prawidłowego rozwiązania pojedyncze wybrzuszenie pojawiło się także w serii 2, w wariantcie „niebieskim”, ale jest ono ulokowane w przestrzeni realizacji w niewłaściwym sektorze powierzchni. Cztery z powierzchni mają kształt paraboloidy hiperbolicznej, a więc nie odwzorowują zbyt dobrze natury zjawiska, ale mają zaskakującą zgodność w obrębie równania stanu granicznego powierzchni, w szczególności dla wariantu zadania z doбором stanu granicznego na poziomie 75% obciążenia krytycznego.



Rys. 6.44. Szkice powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowane przy użyciu odpowiedniej dla danej serii liczby punktów obliczeniowych, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50%).

Tablica 6.31. Wzory postaci aproksymowanych powierzchni odpowiedzi, wykonane na podstawie punktów obliczeniowych użytych do analiz za pomocą metody MC, z zastosowaniem próbkowania LHS, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50%).

Przy użyciu:	dla war. SG:	uzyskano powierzchnię odpowiedzi przedstawioną wzorem:
6 punktów oblicz. (Cz)	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,166307 + 0,014678x_1 - 0,033793x_2 - 0,000045x_1^2 + 0,002740x_2^2 - 0,000616x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,034141 + 0,014799x_1 - 0,034840x_2 - 0,000045x_1^2 + 0,002791x_2^2 - 0,000621x_1x_2$
6 punktów oblicz. (Nb)	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,302178 + 0,007790x_1 + 0,002399x_2 + 0,000032x_1^2 + 0,003668x_2^2 - 0,001044x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,173178 + 0,007790x_1 + 0,002399x_2 + 0,000032x_1^2 + 0,003668x_2^2 - 0,001044x_1x_2$
6 punktów oblicz. (Żt)	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,020530 + 0,002449x_1 + 0,005350x_2 - 0,000009x_1^2 - 0,000155x_2^2 - 0,000030x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 0,111098 + 0,002410x_1 + 0,005117x_2 - 0,000009x_1^2 - 0,000146x_2^2 - 0,000029x_1x_2$
12 punktów oblicz. (Cz)	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,101574 + 0,004799x_1 - 0,003771x_2 - 0,000024x_1^2 + 0,000405x_2^2 + 0,000017x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 0,028028 + 0,004783x_1 - 0,003743x_2 - 0,000024x_1^2 + 0,000403x_2^2 + 0,000016x_1x_2$
12 punktów oblicz. (Nb)	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,078868 + 0,002654x_1 + 0,011170x_2 - 0,000006x_1^2 - 0,000221x_2^2 - 0,000078x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 0,050770 + 0,002646x_1 + 0,011138x_2 - 0,000006x_1^2 - 0,000221x_2^2 - 0,000078x_1x_2$
12 punktów oblicz. (Żt)	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,112996 + 0,003846x_1 + 0,004207x_2 - 0,000012x_1^2 + 0,000389x_2^2 - 0,000095x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 0,016585 + 0,003835x_1 + 0,004207x_2 - 0,000012x_1^2 + 0,000386x_2^2 - 0,000095x_1x_2$

Mimo powyższych pozytywnych wyników, stwierdzić można jednak, iż transformacja próbek metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania hipersześcianu łącińskiego na punkty obliczeniowe powierzchni odpowiedzi jest rozwiązaniem nieoptymalnym, które wymagałoby zwiększenia liczby próbek w analizie, lub sprzężenia różnych typów próbkowania.

Dysponując wynikami poszczególnych obliczeń próbek, obliczyć można dla każdej z serii wskazywane przez nią prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności, w dwóch przyjętych wariantach analizy – dla kwantyli 75% i dla 50%.

Wyniki te zebrano w Tablicy 6.32. Zgromadzono w niej także informacje o różnicy pomiędzy wynikiem danej wartości uzyskanym w danej serii, a wynikiem serii uznanej za referencyjną.

Tablica 6.32. Prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności obliczone dla każdej z serii obliczeniowych dla powierzchni odpowiedzi aproksymowanych przy użyciu próbek wygenerowanych dla metody MC z zastosowaniem próbkowania LHS, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50% obciążenia krytycznego dla zbiornika idealnego).

	LHS - 6x6 = 6 punktów (Cz)		LHS - 6x6 = 6 punktów (Nb)		LHS - 6x6 = 6 punktów (Żt)		LHS - 12x12 = 12 punktów (Cz)		LHS - 12x12 = 12 punktów (Nb)		LHS - 12x12 = 12 punktów (Żt)	
PF,75%	0,37974	187,81%	0,18971	43,78%	0,15166	14,94%	0,16110	22,10%	0,16573	25,61%	0,15473	17,27%
PS,75%	0,62026	-28,55%	0,81029	-6,65%	0,84834	-2,27%	0,83890	-3,36%	0,83427	-3,89%	0,84527	-2,62%
βC,75%	0,30615	-72,60%	0,87897	-21,33%	1,02935	-7,87%	0,98994	-11,40%	0,97118	-13,08%	1,01637	-9,03%
PF,50%	0,36551	484,81%	0,16381	162,09%	0,06868	9,89%	0,12817	105,08%	0,13279	112,47%	0,12789	104,62%
PS,50%	0,63449	-32,32%	0,83619	-10,81%	0,93132	-0,66%	0,87183	-7,01%	0,86721	-7,50%	0,87211	-6,97%
βF,50%	0,34377	-77,59%	0,97892	-36,19%	1,48567	-3,16%	1,13507	-26,01%	1,11328	-27,43%	1,13642	-25,92%

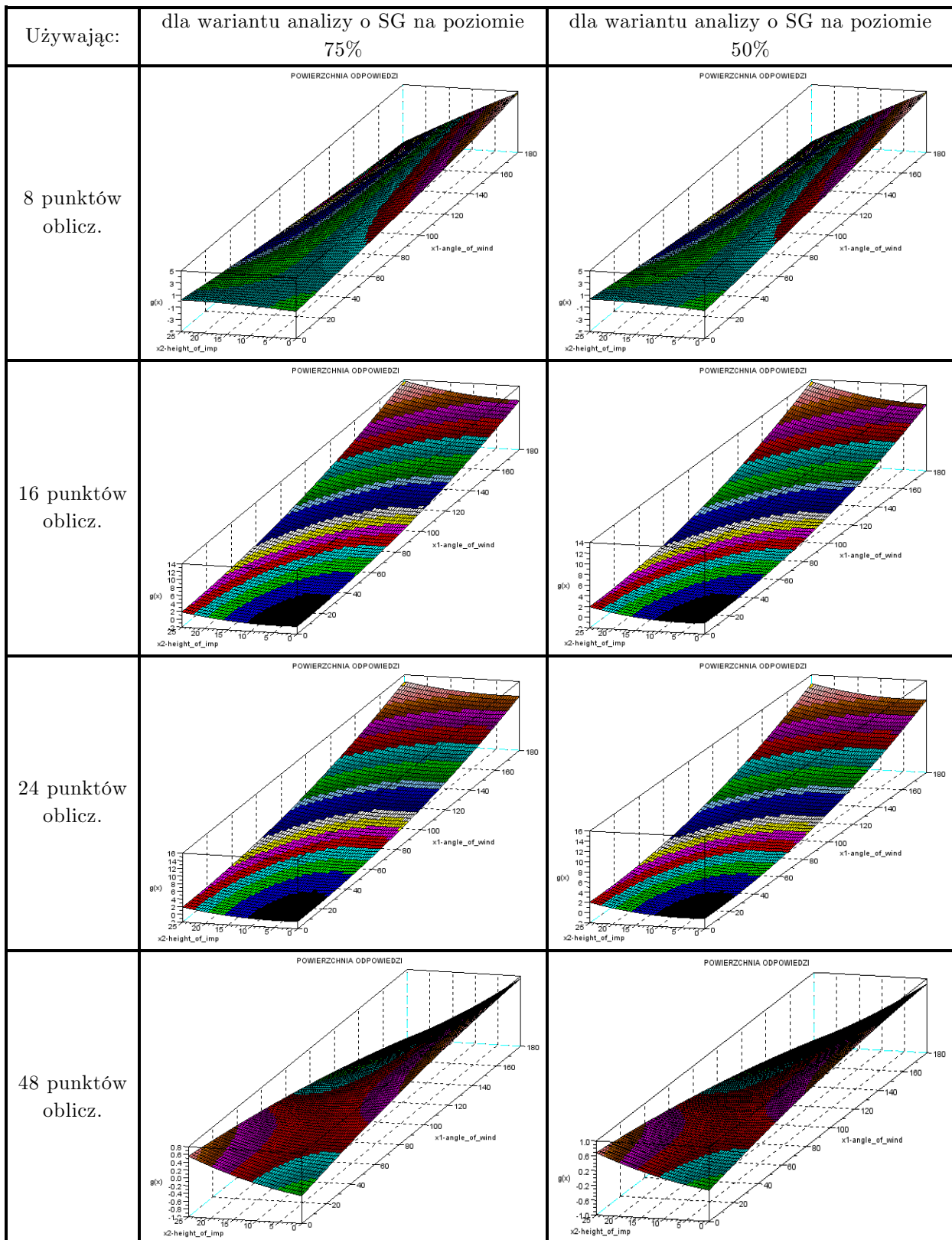
Na podstawie Tablicy 6.32 stwierdzić można, iż wyniki miar oceny bezpieczeństwa konstrukcji uzyskane w pierwszej serii obliczeniowej są nie do przyjęcia (za wyjątkiem wprowadzającego w błąd „przypadkowo” wylosowanego wariantu „żółtego”, który jednak zwraca uwagę na konieczność ostrożnego postępowania z próbkowaniem tego typu i wyciąganiem z niego danych dla innych procedur stochastycznych) i powinny zostać bezwarunkowo opuszczone. Jednakże, w serii drugiej, rozpatrującej 12 punktów, warianty „kolorowe” są do siebie dość zbliżone rezultatami, a błędy z jakimi szacują miary oceny bezpieczeństwa konstrukcji, w szczególności dla wariantu stanu granicznego ustanowionego na 75% obciążenia krytycznego dla zbiornika, nie są dyskredytująco wielkie. Oznacza to, że rozwiązanie proponowane przez metodę powierzchni odpowiedzi (RSM) jest w tym przypadku dość dobre, a zatem można byłoby oczekiwać, iż dla zwiększenia ilości pasm, na które rozdzielane są wymiary probabilistyczne, aproksymacje miar niezawodności za pomocą RSM mogłyby okazać się poprawne. Zasadne byłoby też połączenie tego typu próbkowania np. z próbkowaniem wagowym, które poprawnie aproksymuje okolicę stanu granicznego. Poddaje się jednak pod wątpliwość fakt, czy obliczenia metodą RSM pozostałyby wówczas ekonomiczne obliczeniowo, analogicznie do wniosku podniesionego po analizie wyników zawartych w poprzednim punkcie rozdziału.

4) Analiza przy użyciu metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania wagowego (IS, Importance Sampling Monte Carlo).

Wzory postaci aproksymowanych w analizie powierzchni odpowiedzi, wykonane na podstawie punktów obliczeniowych użytych dla analiz za pomocą metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania wagowego, zostały zbiorczo przedstawione w Tablicy 6.33. Na rys. 6.45. znajdują się natomiast poglądowe szkice powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowane przy użyciu odpowiedniej dla danej serii liczby punktów obliczeniowych.

Tablica 6.33. Wzory postaci aproksymowanych powierzchni odpowiedzi, wykonane na podstawie punktów obliczeniowych użytych do analiz za pomocą metody MC, z zastosowaniem próbkowania IS, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50%).

Przy użyciu:	dla war. SG:	uzyskano powierzchnię odpowiedzi przedstawioną wzorem:
8 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,520628 + 0,017213x_1 + 0,061097x_2 + 0,000067x_1^2 - 0,001232x_2^2 - 0,002233x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,390628 + 0,017213x_1 + 0,061097x_2 + 0,000067x_1^2 - 0,001232x_2^2 - 0,002233x_1x_2$
16 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,081108 - 0,005410x_1 - 0,041588x_2 + 0,000353x_1^2 + 0,004735x_2^2 + 0,000290x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 0,047042 - 0,005254x_1 - 0,041208x_2 + 0,000350x_1^2 + 0,004715x_2^2 + 0,000276x_1x_2$
24 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,112159 - 0,003881x_1 - 0,038235x_2 + 0,000401x_1^2 + 0,004793x_2^2 - 0,000003x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = 0,017076 - 0,003817x_1 - 0,037943x_2 + 0,000399x_1^2 + 0,004768x_2^2 - 0,000007x_1x_2$
48 punktów oblicz.	na poz. 75%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,288705 + 0,009308x_1 + 0,018474x_2 - 0,000020x_1^2 + 0,000616x_2^2 - 0,000566x_1x_2$
	na poz. 50%	$\hat{g}(\mathbf{x}) = -0,158418 + 0,009267x_1 + 0,018490x_2 - 0,000020x_1^2 + 0,000609x_2^2 - 0,000564x_1x_2$



Rys. 6.45. Szkice powierzchni odpowiedzi na powierzchnię stanu granicznego zagadnienia, aproksymowane przy użyciu odpowiedniej dla danej serii liczby punktów obliczeniowych, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50%).

Jak zaobserwować można na podstawie Tablicy 6.33 oraz rys. 6.45, także i dla tej techniki próbkowania serie obliczeniowe prezentują zdecydowanie rozbieżne odzwierciedlenia powierzchni stanu granicznego zagadnienia. Z czterech przeanalizowanych przypadków, w żadnym nie odwzorowano poprawnie natury zjawiska, pamiętać należy jednak, iż nie było to wyjściowym celem próbkowania. Dwie z powierzchni (seria pierwsza i czwarta) mają kształt bardzo skręconej paraboloidy hiperbolicznej i wykazują dość dobrą zgodność w obrębie równania stanu granicznego powierzchni dla wariantu zadania z doborem stanu granicznego na poziomie 50% obciążenia krytycznego dla zbiornika idealnego. Dwie pozostałe powierzchnie (seria druga i trzecia) mają kształt paraboloidy skierowanej ku dołowi (zakończony pojedynczym wgnieceniem) i wykazują dość dobrą zgodność w obrębie równania stanu granicznego powierzchni dla wariantu zadania z doborem stanu granicznego na poziomie 75% obciążenia krytycznego dla zbiornika idealnego.

Mimo powyższych pozytywnych rezultatów, stwierdzić można jednak, iż transformacja próbek metody Monte Carlo z zastosowaniem próbkowania wagowego na punkty obliczeniowe powierzchni odpowiedzi również jest rozwiązaniem nieoptymalnym i także wymagałoby albo zwiększenia liczby próbek w analizie, albo sprzężenia różnych typów próbkowania.

Dysponując wynikami poszczególnych obliczeń próbek, obliczyć można dla każdej z serii wskazywane przez nią prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności, w dwóch przyjętych wariantach analizy – dla kwantyli 75% i dla 50%.

Wyniki te zebrano w Tablicy 6.34. Zgromadzono w niej także informacje o różnicy pomiędzy wynikiem danej wartości uzyskanym w danej serii, a wynikiem serii uznanej za referencyjną.

Tablica 6.34. Prawdopodobieństwo awarii silosu, jego bezawaryjność oraz wskaźnik niezawodności obliczone dla każdej z serii dla powierzchni odpowiedzi aproksymowanych przy użyciu próbek wygenerowanych dla metody MC z zastosowaniem próbkowania IS, w dwóch przyjętych wariantach analizy (75%, 50% obciążenia krytycznego dla zbiornika idealnego).

	IS - 8 punktów		IS - 16 punktów		IS - 24 punkty		IS - 48 punktów	
PF,75%	0,85000	544,21%	0,82271	523,52%	0,83947	536,23%	0,36092	173,54%
PS,75%	0,15000	-82,72%	0,17729	-79,58%	0,16053	-81,51%	0,63908	-26,38%
$\beta C,75\%$	-1,03644	-192,77%	-0,92573	-182,86%	-0,99227	-188,81%	0,35600	-68,14%
PF,50%	0,70067	1021,1%	0,43034	588,55%	0,51696	727,14%	0,30501	388,02%
PS,50%	0,29933	-68,07%	0,56966	-39,24%	0,48304	-48,48%	0,69499	-25,87%
$\beta F,50\%$	-0,52632	-134,31%	0,17550	-88,56%	-0,04253	-102,77%	0,51004	-66,75%

Na podstawie Tablicy 6.34 stwierdzić można, iż wyniki miar oceny bezpieczeństwa konstrukcji uzyskane we wszystkich seriach obliczeniowych są zaskakująco niedokładne. Mimo, iż badanie numeryczne nastawione było na dobre rozpoznanie stanów granicznych w obu przypadkach analizy, to jednak zniekształcenie reszty powierzchni nie pozwala procedurze obliczającej wskaźniki niezawodności na zbieżność w zadowalającym rezultacie. Błędy względne, z jakimi zostają oszacowane miary oceny bezpieczeństwa są zbyt wielkie. Oznacza to, że rozwiązanie proponowane przez metodę powierzchni odpowiedzi (RSM) nie jest dobre i że należałoby całkowicie zmienić metodologię doboru próbek obliczeniowych. Potwierdza się sygnalizowana wcześniej zasadność połączenia tego typu próbkowania np. z próbkowaniem hipersześcianu łącińskiego. Jednakże, tu również nie przeprowadzono testów numerycznych na potwierdzenie tej tezy.

h) Analiza porównawcza rezultatów metody Monte Carlo i metody powierzchni odpowiedzi dla analizowanego zadania

Założono, iż w ramach analizy porównawczej pomiędzy metodą Monte Carlo, a metodą powierzchni odpowiedzi, sporządzanej dla rozważanego przykładu, porównanych zostanie sześć różnych parametrów probabilistycznej oceny niezawodności dźwigara powierzchniowego, w obu przypadkach analizy, tj. przyjmując za stan graniczny 75% i 50% kwantyle mnożnika krytycznego obciążenia parciem/ssaniem wiatru oraz niezależnie – w każdym wariancie doboru techniki generacji próbek obliczeniowych dla zadania.

Parametry te, to kolejno:

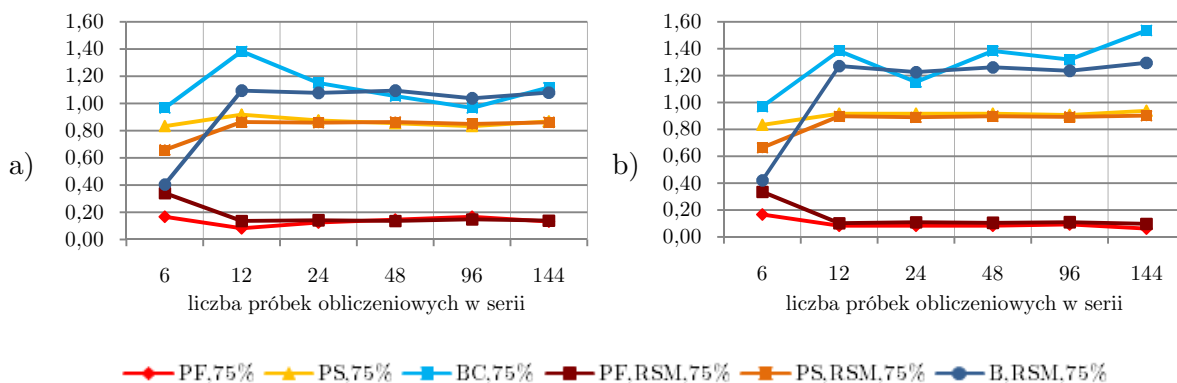
- prawdopodobieństwo awarii wg podejścia metody Monte Carlo, oznaczane jako P_f ,
- bezawaryjność wg podejścia metody Monte Carlo, oznaczana jako P_s ,
- wskaźnik niezawodności obliczany wg podejścia Cornella, oznaczany jako β_C ,
- prawdopodobieństwo awarii wg powierzchni odpowiedzi, oznaczane jako $P_{f,RSM}$,
- bezawaryjność wg powierzchni odpowiedzi, oznaczana jako $P_{s,RSM}$,
- wskaźnik niezawodności wg powierzchni odpowiedzi, obliczany według podejścia Hasofer – Lind – Rackwitz – Fiesslera, oznaczany jako $\beta_{,RSM}$.

Dla próbkowania bezpośredniego (CMC) wartości probabilistycznych parametrów oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek dla metody Monte Carlo i metody powierzchni odpowiedzi, zebrane są w Tabelicy 6.35.

Uzyskiwanie zbieżności obliczeń tychże parametrów po wykonaniu kolejnych serii analizy zaprezentowano na rys. 6.46.

Tablica 6.35. Wartości parametrów probabilistycznej oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek wygenerowanych za pomocą podejścia Crude Monte Carlo (CMC).

MC	6 próbek	12 próbek	24 próbki	48 próbek	96 próbek	144 próbki
$P_{f,75\%}$	0,16667	0,08333	0,12500	0,14583	0,16667	0,13194
$P_{s,75\%}$	0,83333	0,91667	0,87500	0,85417	0,83333	0,86806
$\beta_{C,75\%}$	0,96742	1,38298	1,15034	1,05448	0,96742	1,11727
$P_{f,RSM,75\%}$	0,34236	0,13720	0,14084	0,13716	0,14995	0,14026
$P_{s,RSM,75\%}$	0,65764	0,86280	0,85916	0,86284	0,85005	0,85974
$\beta_{HLRF,RSM,75\%}$	0,40604	1,09298	1,07654	1,09315	1,03664	1,07914
$P_{f,50\%}$	0,16667	0,08333	0,08333	0,08333	0,09375	0,06250
$P_{s,50\%}$	0,83333	0,91667	0,91667	0,91667	0,90625	0,93750
$\beta_{C,50\%}$	0,96742	1,38298	1,15034	1,38298	1,31804	1,53415
$P_{f,RSM,50\%}$	0,33648	0,10197	0,11030	0,10360	0,10856	0,09783
$P_{s,RSM,50\%}$	0,66352	0,89803	0,88970	0,89640	0,89144	0,90217
$\beta_{HLRF,RSM,50\%}$	0,42209	1,27039	1,22492	1,26130	1,23422	1,29403



Rys. 6.46. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń parametrów probabilistycznej oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek wygenerowanych za pomocą podejścia CMC, w dwóch wariantach analizy – a) stan graniczny ustawiony na 75%, b) 50%.

Analizując dane zgromadzone w Tabelicy 6.35 oraz wykresy przedstawione na rys. 6.46, stwierdzić można, iż stabilizacja wskaźnika niezawodności obliczanego wg podejścia Cornella jest de facto bardzo powolna i rzeczywiście trudno jest przez to zdecydować, po jakiej serii należałoby skończyć obliczenia (szczególnie jest to widoczne dla drugiego przypadku analizy, rys. 6.46b), aby uzyskać w ich następstwie wiarygodny rezultat wskaźnika. Natomiast odrzucając wyniki pierwszej serii obliczeń wskaźnik niezawodności skalkulowany wg metody powierzchni odpowiedzi uzyskuje tę zbieżność od razu, już w drugiej serii obliczeniowej. Jego wahania w późniejszych seriach są niewielkie, a zbliżenie do linii trendu wykresu zbieżności wskaźnika niezawodności Cornella jest wyraźnie obserwowalne.

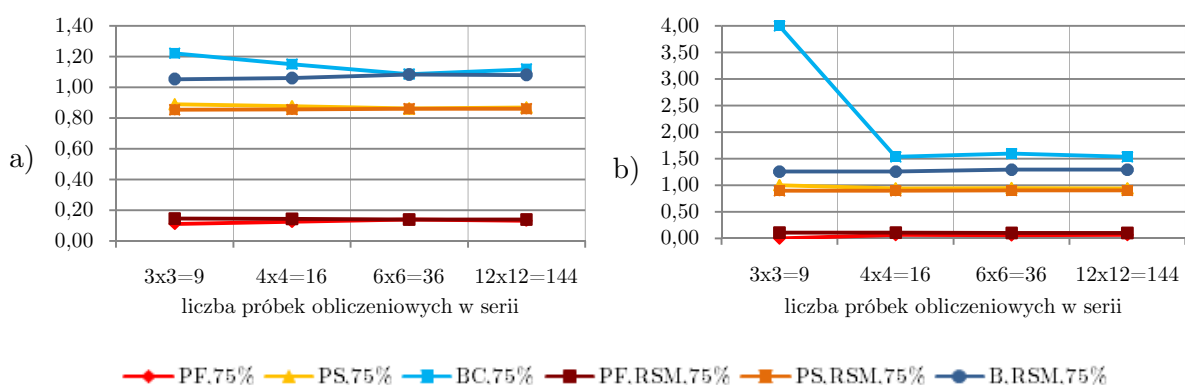
Natomiast ze względu na małe wartości liczbowe prawdopodobieństwa awarii oraz bezawaryjności, zbieżność pomiędzy ich rezultatami pochodzącymi z obu metodologii jest niemalże idealna. Potwierdza to podany wcześniej fakt, iż błędy względne są prostym i intuicyjnym miernikiem różnicy pomiędzy rozwiązaniami, ale niekoniecznie oddają one faktyczną jej wielkość liczbową.

Dla próbkowania warstwowego (SS) wartości probabilistycznych parametrów oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek dla metody Monte Carlo i metody powierzchni odpowiedzi, zebrane są w Tabelicy 6.36. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń tychże parametrów po wykonaniu kolejnych serii analizy zaprezentowano na rys. 6.47.

Analizując dane zgromadzone w Tabelicy 6.36 oraz wykresy przedstawione na rys. 6.47, stwierdzić można, iż dla techniki SS stabilizacja wskaźnika niezawodności obliczanego wg podejścia Cornella jest dużo szybsza i wskazuje wyraźnie, po jakiej serii należałoby skończyć obliczenia (szacuje się, że można byłoby dokonać tego po drugiej serii obliczeniowej), aby uzyskać w ich następstwie wiarygodny rezultat wskaźnika. Natomiast wskaźnik niezawodności skalkulowany wg metody powierzchni odpowiedzi uzyskuje tę zbieżność już dla pierwszej serii obliczeniowej, a jego fluktuacje w późniejszych seriach są pomijalnie. Zbliżenie do linii trendu wykresu zbieżności wskaźnika niezawodności Cornella jest jednak wyraźnie obserwowalne tylko dla pierwszego przypadku analizy (rys. 6.47a), co może oznaczać, iż powinno się zapewnić jeszcze lepsze dopasowanie powierzchni odpowiedzi do punktów obliczeniowych.

Tablica 6.36. Wartości parametrów probabilistycznej oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek wygenerowanych za pomocą podejścia techniki próbkowania warstwowego (SS).

SS	9 próbek	16 próbek	36 próbek	144 próbki
$P_{f,75\%}$	0,11111	0,12500	0,13889	0,13194
$P_{s,75\%}$	0,88889	0,87500	0,86111	0,86806
$\beta_{C,75\%}$	1,22063	1,15034	1,08534	1,11727
$P_{f,RSM,75\%}$	0,14635	0,14473	0,13958	0,14026
$P_{s,RSM,75\%}$	0,85365	0,85527	0,86042	0,85974
$\beta_{HLRF,RSM,75\%}$	1,05223	1,05931	1,08219	1,07914
$P_{f,50\%}$	0,00000	0,06250	0,05556	0,06250
$P_{s,50\%}$	1,00000	0,93750	0,94444	0,93750
$\beta_{C,50\%}$	3,99999	1,53415	1,59325	1,53415
$P_{f,RSM,50\%}$	0,10432	0,10391	0,09789	0,09783
$P_{s,RSM,50\%}$	0,89568	0,89609	0,90211	0,90217
$\beta_{HLRF,RSM,50\%}$	1,25729	1,25958	1,29365	1,29403



Rys. 6.47. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń parametrów probabilistycznej oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek wygenerowanych za pomocą techniki SS, w dwóch wariantach analizy – a) stan graniczny ustawiony na 75%, b) 50%.

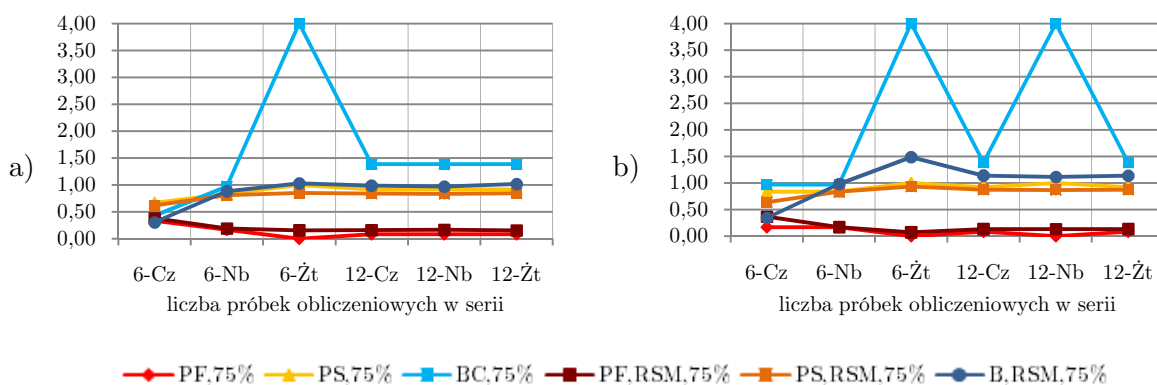
Ciekawą, godną do podkreślenia przy okazji obserwacji drugiego przypadku analizy (rys. 6.47b) kwestią jest fakt, iż metoda powierzchni odpowiedzi jest całkowicie odporna na efekt „przypadkowego dobrego/złego losowania”, czyli dobrania takich punktów obliczeniowych w metodzie MC, spośród których wszystkie spełniają (bądź też nie spełniają) warunek stanu granicznego. Stało się tak w przypadku pierwszej serii drugiego przypadku obliczeń – zniekształcona, niepoprawna wartość wskaźnika niezawodności Cornella jest efektem doświadczenia całkowitej bezawaryjności, jaką sugeruje pobrana populacja.

Ponownie, ze względu na małe wartości liczbowe prawdopodobieństwa awarii oraz bezawaryjności, obserwowana zbieżność pomiędzy ich rezultatami pochodzącymi z obu metodologii jest idealna, dzięki niej można usprawiedliwić wybór rozwiązania referencyjnego.

Dla próbkowania hipersześcianu łacińskiego (LHS) wartości probabilistycznych parametrów oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek dla metody Monte Carlo i metody powierzchni odpowiedzi, zebrane są w Tablicy 6.37. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń tychże parametrów po wykonaniu kolejnych serii analizy zaprezentowano na rys. 6.48.

Tablica 6.37. Wartości parametrów probabilistycznej oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek wygenerowanych za pomocą podejścia techniki próbkowania LHS.

LHS	6 próbek Cz	6 próbek Nb	6 próbek Żt	12 próbek Cz	12 próbek Nb	12 próbek Żt
$P_{f,75\%}$	0,33333	0,16667	0,00000	0,08333	0,08333	0,08333
$P_{s,75\%}$	0,66667	0,83333	1,00000	0,91667	0,91667	0,91667
$\beta_{C,75\%}$	0,43073	0,96742	3,99999	1,38298	1,38298	1,38298
$P_{f,RSM,75\%}$	0,37974	0,18971	0,15166	0,16110	0,16573	0,15473
$P_{s,RSM,75\%}$	0,62026	0,81029	0,84834	0,83890	0,83427	0,84527
$\beta_{HLRF,RSM,75\%}$	0,30615	0,87897	1,02935	0,98994	0,97118	1,01637
$P_{f,50\%}$	0,16667	0,16667	0,00000	0,08333	0,00000	0,08333
$P_{s,50\%}$	0,83333	0,83333	1,00000	0,91667	1,00000	0,91667
$\beta_{C,50\%}$	0,96742	0,96742	3,99999	1,38298	3,99999	1,38298
$P_{f,RSM,50\%}$	0,36551	0,16381	0,06868	0,12817	0,13279	0,12789
$P_{s,RSM,50\%}$	0,63449	0,83619	0,93132	0,87183	0,86721	0,87211
$\beta_{HLRF,RSM,50\%}$	0,34377	0,97892	1,48567	1,13507	1,11328	1,13642



Rys. 6.48. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń parametrów probabilistycznej oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek wygenerowanych za pomocą techniki LHS, w dwóch wariantach analizy – a) stan graniczny ustawiony na 75%, b) 50%.

Na wstępie analizy wyników dla techniki LHS podkreślić należy, iż wykresy zamieszczone na rys. 6.48 są raczej infografiką, niż rzeczywistą krzywą obrazującą zbieżność obliczeń. Przez ograniczenie dyskretyzacji przestrzeni realizacji nie można było przeprowadzić więcej niż dwóch serii obliczeń, a więc każdą z serii podzielono na trzy warianty, które nie powinny stanowić odrębnego etapu na wykresie umieszczonym na rys. 6.48.

Analizując dane zgromadzone w Tablicy 6.37 oraz wykresy przedstawione na rys. 6.48, stwierdzić można, iż dla techniki LHS stabilizacja wskaźnika niezawodności obliczanego wg podejścia Cornella następuje dopiero na drodze drugiej serii obliczeniowej (obliczone w różnych wariantach wskaźniki mają bardzo podobną wartość, jeżeli tylko w danym wariancie uniknie się opisanego powyżej efektu „przypadkowego losowania”, które, jak widać na rys. 6.48, jest często napotykanym przy tym próbkowaniu problemem. Wskaźnik niezawodności skalkulowany wg metody powierzchni odpowiedzi uzyskuje tę zbieżność również dopiero dla serii obliczeniowej, ale jego fluktuacje są pomijalnie małe, co oznacza jego odporność na efekt „przypadkowości losowania”.

Ponownie, ze względu na małe wartości liczbowe prawdopodobieństwa awarii oraz bezawaryjności, obserwowana zbieżność pomiędzy ich rezultatami pochodzącymi z obu metodologii jest idealna, jeżeli przyjmie się obserwacje z drugiej serii obliczeń.

Z dużą dozą pewności można na podstawie rys. 6.48 zdecydować, iż seria pierwsza powinna być całkowicie odrzucona, a przestrzeń realizacji powinna być podzielona dużo gęściej.

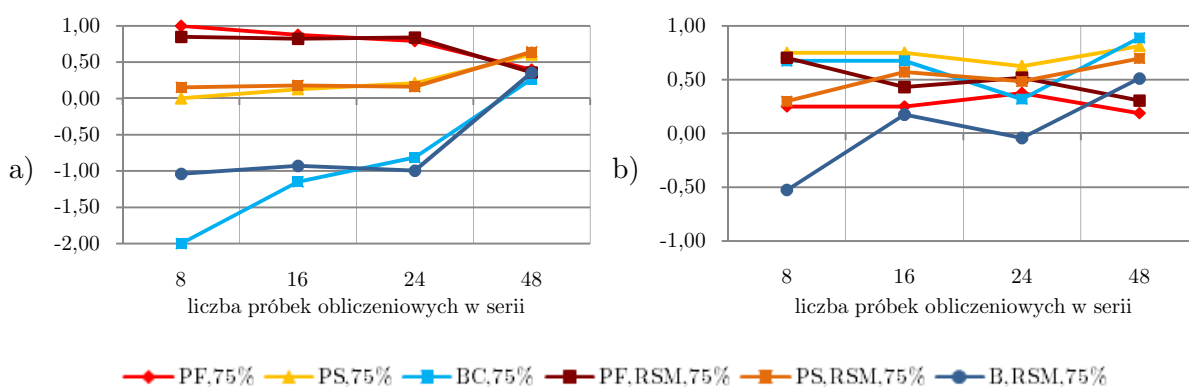
Dla próbkowania wagowego (IS) wartości probabilistycznych parametrów oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek dla metody Monte Carlo i metody powierzchni odpowiedzi, zebrane są w Tablicy 6.38. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń tychże parametrów po wykonaniu kolejnych serii analizy zaprezentowano na rys. 6.49.

Tablica 6.38. Wartości parametrów probabilistycznej oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek wygenerowanych za pomocą podejścia techniki próbkowania warstwowego (SS).

IS	8 próbek	16 próbek	24 próbki	48 próbek
$P_{f,75\%}$	1,00000	0,87500	0,79167	0,39583
$P_{s,75\%}$	0,00000	0,12500	0,20833	0,60417
$\beta_{C,75\%}$	-2,00000	-1,15035	-0,81222	0,26415
$P_{f,RSM,75\%}$	0,85000	0,82271	0,83947	0,36092
$P_{s,RSM,75\%}$	0,15000	0,17729	0,16053	0,63908
$\beta_{HLRF,RSM,75\%}$	-1,03644	-0,92573	-0,99227	0,35600
$P_{f,50\%}$	0,25000	0,25000	0,37500	0,18750
$P_{s,50\%}$	0,75000	0,75000	0,62500	0,81250
$\beta_{C,50\%}$	0,67450	0,67450	0,31863	0,88715
$P_{f,RSM,50\%}$	0,70067	0,43034	0,51696	0,30501
$P_{s,RSM,50\%}$	0,29933	0,56966	0,48304	0,69499
$\beta_{HLRF,RSM,50\%}$	-0,52632	0,17550	-0,04253	0,51004

Analizując dane zgromadzone w Tablicy 6.38 oraz wykresy przedstawione na rys. 6.49, stwierdzić można, iż dla techniki IS stabilizacja wskaźnika niezawodności obliczanego wg podejścia Cornella jest obserwowana dla serii obliczeniowych, które skupiają się w pobliżu funkcji równania stanu granicznego. Po rozpatrzeniu jakichkolwiek innych punktów obliczeniowych, o wartości zmiennej odpowiedzi jak dla silosu idealnego, zbieżność ta jest

błyskawicznie tracona, ale wskaźnik wykazuje tendencję do poszukiwania swojej realnej wartości – wartości określone w pierwszych trzech etapach są bowiem wyraźnie nieprawidłowe i wskazują na całkowitą awaryjność konstrukcji, co jak wiadomo, mija się z prawdą inżynierską. Wskaźnik niezawodności skalkulowany wg metody powierzchni odpowiedzi natomiast jedynie „naśladuje” tę zbieżność, nie wykazując ani zbliżenia do linii trendu wykresu zbieżności wskaźnika niezawodności Cornella, ani dążenia do swojej prawidłowej wartości.



Rys. 6.49. Uzyskiwanie zbieżności obliczeń parametrów probabilistycznej oceny bezpieczeństwa przy kolejno zwiększającej się liczbie próbek wygenerowanych za pomocą techniki IS, w dwóch wariantach analizy – a) stan graniczny ustawiony na 75%, b) 50%.

O ile dla pierwszego przypadku analizy (rys. 6.49a), rozwiązania obu metodologii są jeszcze do siebie zbliżone, tak dla drugiego przypadku analizy (rys. 6.49b) są one całkowicie inne, co wyraźnie pokazuje, iż zbytne skupienie się na małej populacji punktów leżących w pobliżu położonego marginalnie w przestrzeni realizacji równania stanu granicznego i odtrącenie informacji kierunkowej zapewnianej przez inne punkty przestrzeni probabilistycznej jest niewłaściwe w świetle obu metod.

Ponownie, ze względu na małe wartości liczbowe prawdopodobieństwa awarii i bezawaryjności, obserwowana zbieżność pomiędzy ich rezultatami pochodzącymi z obu metodologii jest idealna, jednakże tym razem tylko dla pierwszego przypadku analizy (rys. 6.49a). Może to oznaczać, iż powinno się lepiej dopasować powierzchnię odpowiedzi do punktów obliczeniowych.

Rozdział 7

Ocena rezultatów i wnioski z pracy

Przedmiotem rozważań niniejszej pracy jest obliczanie niezawodności nieliniowych modeli konstrukcji inżynierskich, ze szczególnym uwzględnieniem metody Monte Carlo oraz metody powierzchni odpowiedzi jako technik doprowadzających do uzyskania wiarygodnych probabilistycznych miar bezpieczeństwa konstrukcji. Aby osiągnąć wspomniane powyżej cele, zbudowano program autorski.

W drodze do uzyskania interesujących inżyniera wyników dokonano również istotnej analizy działania metody Monte Carlo, gdy zastosuje się do niej technika redukcji populacji próbek obliczeniowych oraz krytycznej oceny poszczególnych próbkowań.

W analizowanych przykładach numerycznych nieliniowych modeli konstrukcji ściśle inżynierskich odnoszono się przede wszystkim do niepewności geometrycznych, dostrzegając w nich po pierwsze ich duży wpływ na nośność i/lub stateczność konstrukcji, stwarzający wielką trudność właściwego oszacowania ich wpływu na bezpieczeństwo projektowe i użytkowe konstrukcji, a po drugie – widząc trudność właściwego ich odwzorowania i znaczną ilość koniecznych do rozpatrzenia przypadków ich wielkości i położenia na konstrukcji. Konieczne przez to okazało się stworzenie dodatkowych procedur pozwalających tworzyć pola losowe, modelujących pola imperfekcji geometrycznych. W badaniach numerycznych generowano dwuwymiarowe pola losowe.

Rozpatrywano różne typy warunków granicznych, między innymi warunek odpowiedniego poziomu przemieszczeń, warunek odpowiedniego poziomu przyłożonego obciążenia, warunek stateczności lokalnej i globalnej oraz warunek nośności granicznej. Okazało się, że w niektórych przypadkach, odpowiednie zdefiniowanie funkcji granicznej jest trudne i może być inżyniersko niejednoznaczne. Również zmienne losowe przyjmowane jako probabilistyczna przestrzeń realizacji zadania były trudne do zdefiniowania i wymagały dużej biegłości w posługiwaniu się ich funkcjami rozkładu gęstości oraz ich momentami probabilistycznymi.

W opinii autora, wkładem własnym w rozpoznanie tematów poruszanych w rozprawie jest kolejno:

- stworzenie programu autorskiego do obliczania niezawodności konstrukcji inżynierskich za pomocą metody Monte Carlo oraz metody powierzchni odpowiedzi, określanego roboczą nazwą RSM–Win,
- stworzenie własnej metodologii zastosowania programu do obliczeń niezawodności problemów nieliniowych modeli konstrukcji, gdzie funkcja stanu granicznego zadania nie jest podana w formie zamkniętej,
- stworzenie procedury autorskiej do generacji pól losowych metodą rozwinięcia Karhunen – Loève’a,

- wnikliwe i usystematyzowane porównanie technik redukcji populacji próbek obliczeniowych metody Monte Carlo, co pozwala na sformułowanie istotnych wniosków odnośnie technik zalecanych dla pewnej klasy problemów inżynierskich,
- wstępne wskazanie i próba budowy algorytmu optymalnego doboru punktów obliczeniowych w przestrzeni realizacji zmiennych losowych zadania w analizie modeli nieliniowych, ze szczególnym wskazaniem konsekwencji niewłaściwego dobrania tychże punktów obliczeniowych.

Poniżej, zamieszczone zostały wnioski nasuwające się autorowi po zrealizowaniu pracy, zaproponowane na podstawie przeprowadzonych i zawartych w pracy rozważań oraz badań numerycznych autorskich i komercyjnych.

Potwierdza się, iż obecnie, przy zwiększaniu możliwości obliczeniowych narzędzi komputerowego wspomaganie projektowania, stosowanie się jedynie do przepisów normowych może prowadzić w niektórych przypadkach do przewymiarowania elementów konstrukcyjnych, niepożądanego wzrostu kosztu i czasu wykonania konstrukcji lub braku optymalności przyjętego rozwiązania.

Obecny stan wiedzy inżynierskiej, a także stan zaawansowania teorii niezawodności w ujęciu symulacyjnym (probabilistycznym) i ciągle doskonalenie warsztatu metod obliczeniowych, wręcz motywuje do wykorzystania w procesie projektowym dużo bardziej racjonalnych podejść do kwestii szacowania bezpieczeństwa konstrukcji inżynierskich w planowanym czasie ich funkcjonowania.

Istnieją doskonale rozpoznane i opisane wskaźniki, jakimi może być szacowania niezawodność probabilistyczna konstrukcji inżynierskich. Ważne jest jednakże umiejętne posługiwanie się tymi wskaźnikami, jako że w przypadku różnych modeli konstrukcji, różne miary niezawodności konstrukcji są im dedykowane i wykazują zupełnie różną zbieżność i łatwość obliczeń algorytmów prowadzonych do ich wyznaczenia.

Z wielu metod służących do szacowania niezawodności probabilistycznej konstrukcji inżynierskich jedną z najdoskonalszych technik jest metoda Monte Carlo. Przy zwiększaniu się możliwości obliczeniowych narzędzi komputerowych metody symulacyjne, do których metoda ta przynależy, stają się podstawowym wyborem eksperymentatora. W przypadku wzbogacenia metody o właściwe techniki dobierania próbek obliczeniowych z wielowymiarowej przestrzeni realizacji zadania, skuteczność działania metody może być zwielokrotniona i być konkurencyjna wobec procesów samouczących się i adaptacyjnych.

Spośród wszystkich typów próbkowania metody Monte Carlo, dla modeli rzeczywistych konstrukcji inżynierskich zaleca się zdecydowanie technikę bezpośrednią (próbkowania bezpośrednio) oraz doskonale działającą technikę próbkowania warstwowego. Wykazano, iż w przypadku rozważanych modeli konstrukcji inżynierskich, metoda Monte Carlo z użyciem próbkowania warstwowego prezentuje około dziesięciokrotny spadek kosztu numerycznego generacji próbek obliczeniowych i spadek czasu realizacji zadania w stosunku do bezpośredniej metody Monte Carlo. Natomiast pozostałe techniki redukcji populacji próbek obliczeniowych rozważane w pracy są albo zdecydowanie nieefektywne w przypadku rozważania problemów ściśle inżynierskich (próbkowanie hipersześcianu łącińskiego oraz próbkowanie rosyjskiej ruletki) albo też wymagają połączenia z inną techniką próbkowania

zredukowanego (próbkiowanie wagowe). Dobór techniki musi więc wymagać od inżyniera dobrego wstępnego rozpoznania problemu postawionego przed nim.

Metoda Monte Carlo w postaci bezpośredniej lub z użyciem próbkowania warstwowego doskonale sprawdza się dla bardzo prostych modeli nieliniowych geometrycznie i materiałowo. Pozwala w bardzo łatwy sposób zidentyfikować wrażliwość rozwiązania na zmiany w zmiennych losowych i pozwala na bezbłędne odnalezienie momentów probabilistycznych zmiennej odpowiedzi.

Metoda powierzchni odpowiedzi jest doskonałym, stosunkowo nowym narzędziem służącym do szacowania niezawodności probabilistycznej konstrukcji inżynierskich. Jest bardzo łatwa do implementacji, jako że wywodzi się ze standardowych technik aproksymacyjnych, takich jak standardowa regresja liniowa i analiza rezydualnej wariancji zmiennej odpowiedzi. Modele powierzchni odpowiedzi, jakimi aproksymuje się stan graniczny są doskonałym punktem wyjściowym dla analizy niezawodności, na podstawie wyznaczonych współczynników kierunkowych powierzchni, algorytmy wyznaczania wskaźników niezawodności modelu konstrukcji inżynierskich ulegają znacznemu uproszczeniu, a ich zbieżność zostaje polepszona.

Potwierdzona zostaje zatem teza, iż obliczenia obejmujące losowy charakter modeli konstrukcji inżynierskich są zasadne i powinny mieć oddźwięk w obliczeniach inżynierskich.

Wyniki pracy i przedsięwzięte studium literatury ewidentnie wskazują na fakt, iż najbardziej istotnym czynnikiem różnicującym miary probabilistycznego bezpieczeństwa konstrukcji w stosunku do miar poczynionych na konstrukcji idealnej, powodują imperfekcje geometryczne. Wskazuje się, iż problem ten jest przedstawiony w normach dosyć asekuracyjnie, i że otrzymuje się znaczące różnice pomiędzy wartościami obciążeń krytycznych szacowanych na podstawie obliczeń całkowicie zgodnych z normą, a tymi, jakie wykonuje się metodami losowego modelowania imperfekcji.

Potwierdzona zostaje zatem teza, iż imperfekcje geometryczne i materiałowe, ustalone zgodnie z zapisami kodu projektowego, widocznie różnicują odpowiedzi konstrukcji. Zasadne jest stwierdzenie, iż w przypadku niektórych konstrukcji inżynierskich nie można rozpatrywać jedynie modeli o geometrii idealnej, ale także nie można ograniczać się do jednego typu imperfekcji – przy różnych typach obciążeń, różne imperfekcje prowadzą do obliczenia najbardziej niekorzystnego obciążenia krytycznego/granicznego.

Możliwe jest generowanie pól imperfekcji geometrycznych przy zastosowaniu technik generowania pól losowych imitujących imperfekcje rzeczywiste. Rozwiązanie symulacyjne problemu zdecydowanie umożliwia uwzględnienie imperfekcji geometrycznych i/lub materiałowych w nieliniowych obliczeniach konstrukcji. Proponowana w pracy innowacyjna metoda generacji warunkowej jest równie dobra, jak wcześniej sformułowane procedury, pozwala także na dokonywanie bardzo istotnych akomodacji do warunków brzegowych pola, jakie dyktuje geometria danej konstrukcji inżynierskiej.

Rzeczywiście, stosując metodę Monte Carlo i/lub metodę powierzchni odpowiedzi można efektywnie oszacować niezawodność konstrukcji. Dla prostych modeli prętowych odpowiednia aproksymacja powierzchni odpowiedzi prowadzi do skutecznej oceny niezawodności dyskretnymi wskaźnikami, w minimalnym czasie obliczeniowym. Zastrzega się jednak, na

podstawie przeprowadzonych badań, iż powinno przestrzegać się przy posługiwaniu się obiema metodami: odpowiedniego typu próbkowania, rozmieszczenia próbek w przestrzeni realizacji problemu, właściwego doboru zmiennych wejścia, poprawnej definicji stanu granicznego oraz odpowiednio analizowania zmiennej wyjścia. Odpowiednia analiza może prowadzić do właściwego wnioskowania na temat przyszłych projektowych procesów optymalizacyjnych, na podstawie zapewnianych przez obie metody miar niezawodności.

Dla dużo bardziej skomplikowanych modeli konstrukcji inżynierskich, przez co rozumie się konstrukcje powierzchniowe nieliniowe geometrycznie i materiałowo również w łatwy sposób można efektywnie oszacować niezawodność konstrukcji stosując metodę Monte Carlo i/lub metodę powierzchni odpowiedzi. Wymaga to jednak połączenia tychże metod z obliczeniami przeprowadzonymi przy użyciu komercyjnych programów obliczeniowych. Jednakże wskazano, iż zaproponowane procedury autorskie doskonale sprawdzają się przy implementacji imperfekcji geometrycznych do modeli komputerowych konstrukcji inżynierskich, a techniki redukcji populacji punktów obliczeniowych (które w tym przypadku są jednoznaczne z kolejnymi realizacjami modelu z zadaną imperfekcją) rzeczywiście pozwalają na znaczne oszczędności kosztu i czasu obliczeń numerycznych. Największe zyski uzyskuje się ponownie dla techniki próbkowania warstwowego.

Wyniki otrzymywane dzięki metodzie powierzchni odpowiedzi są bardzo czytelne i intuicyjne, a wyrysowanie powierzchni odpowiedzi w dowolnym programie graficznym i obserwacja zmiany topografii powierzchni po każdej serii obliczeniowej daje inżynierowi doskonały przegląd formowania się zachowania konstrukcji w określonych przypadkach projektowych. Bardzo łatwo jest inżynierowi zdefiniować wrażliwość konstrukcji na niepewności w parametrach projektowych (zmiennych podstawowych) oraz dostrzec zależności i sprzężenia pomiędzy poszczególnymi zmiennościami. Zdecydowanie podkreśla się, że dla nieliniowych modeli konstrukcji inżynierskich posługiwanie się metodą powierzchni odpowiedzi jest słusznym, uzasadnionym i polecanym działaniem.

Zauważa się, iż za pomocą zaprezentowanych procedur i programu autorskiego możliwe jest szacowanie niezawodności konstrukcji nie tylko w trakcie projektowania, ale na każdym etapie jej funkcjonowania, jeżeli podejmie się analizę zmiany poszczególnych parametrów losowych w czasie, przykładowo tworząc funkcje degradacji materiałów konstrukcyjnych, które mogą sterować obniżaniem się wartości podstawowych zmiennych losowych wytrzymałości w czasie.

Ostatecznie, zdecydowanie potwierdza się tezę pracy, iż faktycznie możliwe jest szacowanie niezawodności konstrukcji inżynierskich z losowymi imperfekcjami geometrycznymi i materiałowymi (na każdym etapie procesu projektowania) opisanych nieliniowymi modelami MES, przy zastosowaniu zoptymalizowanego podejścia probabilistycznego.

Co więcej, uważa się z całą stanowczością, że przedstawione w rozprawie analizy są doskonałym punktem wyjścia do dalszych badań w tymże temacie, przykładowo jako podstawa do zajęcia się **optymalizacją niezawodnościową konstrukcji inżynierskich**. Pamiętać należy, iż istotą technik szacowania niezawodności poziomu trzeciego jest dokładne poznawanie marginesów rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych zadania i w tym kierunku muszą zdecydowanie postępować dalsze prace w rozważanej tematyce.

Rozdział 8

Literatura

W tekście rozprawy odwołano się do następujących monografii, artykułów oraz innych publikacji:

1. [Adler, 1981] Adler R.J.: *The geometry of random fields*. John Wiley and Sons, Chichester (1981)
2. [Alibrandi i inni, 2009] Alibrandi U., Impollonia N., Ricciardi G.: *Probabilistic buckling analysis of frame structures with uncertain parameters*. Proceedings of the 19th AIMETA Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Ancona, Włochy (2009), str. 337–346
3. [Alibrandi i inni, 2010] Alibrandi U., Impollonia N., Ricciardi G.: *Probabilistic eigenvalue buckling analysis solved through the ratio of polynomial response surface*. Computer methods in applied mechanics and engineering, 199 (2010), str. 450–464
4. [Anders, 2000] Anders M.: *Application of stochastic finite element method to non-linear elasto-plastic problem*. University of Tokyo, Tokio (2000)
5. [Ang i Tang, 2007] Ang A.H-S., Tang W.H.: *Probability Concepts in Engineering. Emphasis on Applications in Civil and Environmental Engineering*. John Wiley and Sons, Londyn (2007)
6. [Arbocz i Babcock, 1969] Arbocz J. and Babcock C. D.: *The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells*. ASME Journal of Applied Mechanics, 36 (1969) str. 28–38
7. [Arbocz i Starnes, 2002] Arbocz J., Starnes J.H.: *Future directions and challenges in shell stability analysis*. Thin-Walled Structures, 40 (2002), str. 729–754
8. [Arbocz, 1983] Arbocz J.: *Shell stability analysis: Theory and practice, in Collapse: The buckling of structures in theory and practice*. Cambridge University Press, Cambridge (1983)
9. [Arbocz, 1998] Arbocz J.: *On accuracy of numerical buckling load predictions*. Proceedings of the 6th Conference: Shell Structures. Theory and Applications, Gdańsk, Poland (1998), str. 19–23
10. [Augusti i inni, 1984] Augusti G., Baratta A., Casciati F.: *Probabilistic Methods in Structural Engineering*. Chapman and Hall, Nowy Jork (1984)
11. [Babcock, 1974] Babcock C.D.: *Experiments in shell buckling. Thin Shell Structures. Theory, Experiment, and Design*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1974), str. 345–369

12. [Baoping i inni, 2011] Baoping C., Yonghong L., Zengkai L., Xiaojie T., Renjie J., Hang L.: *Reliability-based load and resistance factor design of composite pressure vessel under external hydrostatic pressure*. Composite Structures, 93 (2011), str. 2844–2852
13. [Barbero i inni, 2000] Barbero E., Fernandez-Saez J., Navarro C.: *Statistical analysis of the mechanical properties of composite materials*. Composites Part B: Engineering, 31 (2000), str. 375–381
14. [Bathe, 1996] Bathe K.J.: *Finite Elements Procedures*. Prentice-Hall, Nowy Jork (1996)
15. [Bażant i Cedolin, 1991] Bażant Z.P., Cedolin L.: *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories*. Oxford University Press, Nowy Jork (1991)
16. [Bendat i Piersol, 1971] Bendat J.S., Piersol A.G.: *Random data: analysis and measurement procedures*. John Wiley and Sons, Londyn (1971)
17. [Bendat, 1990] Bendat J.S.: *Nonlinear system analysis and identification from random data*. John Wiley and Sons, Nowy Jork (1990)
18. [Ben-Haim, 1996] Ben-Haim Y.: *Robust reliability in the mechanical sciences*. Springer-Verlag, Berlin (1996)
19. [Benjamin i Cornell, 1977] Benjamin J.R., Cornell C.A.: *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*. Wydawnictwa Naukowo Technologiczne (wyd. polskie), Warszawa (1977)
20. [Bethea i inni, 1984] Bethea R.M., Duran B.S., Boulion T.L.: *Statistical methods for engineers and scientists*. Marcel Dekker Incorporated, Nowy Jork (1984)
21. [Biegus, 1999] Biegus A.: *Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (1999)
22. [Bielewicz i Górski, 2002] Bielewicz E., Górski J.: *Shell with random geometric imperfections. Simulation-based approach*. International Journal of Non-linear Mechanics, 37 (2002), str. 777–784
23. [Bielewicz i inni, 1985] Bielewicz E., Górski J., Skowronek M.: *Program generacji dwuwymiarowych, dyskretnych pól losowych*. Materiały z II Konferencji – Problemy Losowe w Mechanice Konstrukcji. Gdańsk, Polska (1985), str. 23–30
24. [Bielewicz i inni, 1987] Bielewicz E., Górski J., Skowronek M.: *Redukcja zbioru realizacji w symulacji dwuwymiarowego pola losowego*. Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Budownictwo Lądowe 44/408 (1987), str. 7–15
25. [Bielewicz i inni, 1994] Bielewicz E., Górski J., Schmidt R., Walukiewicz H.: *Random fields in the limit analysis of elastic-plastic shell structures*. Computers and Structures, 51 (1994), str. 267–275
26. [Bołotin, 1968] Bołotin W.W.: *Metody statystyczne w mechanice budowlanej*. Arkady, Warszawa (1968)
27. [Bower, 2010] Bower K.M.: *Help for Practitioners Trying to Understand ANOVA Table*. Six Sigma Tools & Templates, Nowy Jork (2010)

28. [Box i Wilson, 1951] Box G.E.P., Wilson K.B.: *On the Experimental Attainment of Optimum Conditions (with discussion)*. Journal of the Royal Statistical Society Series B 13 (1951), str. 1–45
29. [Bradley, 2007] Bradley N.: *The Response Surface Methodology*. Indiana University, South Bend (2007)
30. [Bucinell, 1998] Bucinell R.B.: *Development of a Stochastic Delamination Model for Laminated Composite Materials Subjected to Constant Amplitude Fatigue Loading*. Journal of Composite Materials, 32/12 (1998), str. 1138–1156
31. [Caflish, 1998] Caflish R.E.: *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods*. Cambridge University Press, Acta Numerica, 7 (1998), str. 1–49
32. [Carley i inni, 2004] Carley K.M., Kamneva N.Y., Reminga J.: *Response Surface Methodology. CASOS Technical Report*. Carnegie Mellon University, Carnegie Mellon (2004)
33. [Chen i Lind, 1983] Chen X., Lind N.C.: *Fast probability integration by three-parameter normal tail approximation*. Structural Safety, 1 (1983), str. 269–276
34. [Cheng i Young, 1993] Cheng A.H.-D., Young C.Y.: *Computational stochastic mechanics*. Elsevier, Londyn (1993)
35. [Christensen, 1979] Christensen R.M.: *Mechanics of Composite Materials*. John Wiley and Sons, Nowy Jork (1979)
36. [Cornell, 1969] Cornell, C.A.: *A Probability-Based Structural Code*. American Concrete Institute Journal, 66 (1969), str. 974–985.
37. [Crisfield, 1991] Crisfield M.A.: *Non-linear Finite Elements Analysis of Solids and Structures*. John Wiley and Sons, Nowy Jork (1991)
38. [De Paor i inni, 2012] De Paor C., Cronin K., Gleeson J.P., Kelliher D.: *Statistical characterisation and modelling of random geometric imperfections in cylindrical shells*. Thin-Walled Structures, 58 (2012), str. 9–17
39. [Der Kiureghian i Ditlevsen, 2009] Der Kiureghian A., Ditlevsen O.: *Aleatory or epistemic? Does it matter?* Structural Safety, 31 (2009), str. 105–112
40. [Devroye, 1986] Devroye L.: *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, Nowy Jork (1986)
41. [Ditlevsen i Madsen, 1996] Ditlevsen O., Madsen H.O.: *Structural reliability methods*. John Wiley and Sons, Chichester (1996)
42. [Ditlevsen, 1973] Ditlevsen O.: *Structural Reliability and the Invariance Problems. Report No. 22*. University of Waterloo, Waterloo, Kanada (1973)
43. [Ditlevsen, 1981] Ditlevsen O.: *Uncertainty Modelling*. McGraw-Hill, Nowy Jork (1981)
44. [Ditlevsen, 1982] Ditlevsen O.: *Model uncertainty in structural reliability*. Structural Safety, 1 (1982), str. 73–86
45. [Elishakoff i Arbocz, 1985] Elishakoff I., Arbocz J.: *Reliability of axially compressed cylindrical shells with general nonsymmetric imperfections*. Journal of Applied Mechanics, 52 (1985), str. 122–128.

46. [Elishakoff, 1983] Elishakoff I.: *Probabilistic methods in the theory of structures*. John Wiley and Sons, Chichester (1983)
47. [Ellingwood i inni, 1982] Ellingwood B., MacGregor G., Galambos T.V., Cornell C.A.: *Probability based load criteria: load factors and load combinations*. ASCE Journal of Structural Division, 108 (1982), str. 978–997.
48. [Ellingwood, 2001] Ellingwood B.R.: *Acceptable Risk Bases for Design of Structures*. Progress in Structural Engineering and Materials, 3 (2001), str. 170–179
49. [Feng i inni, 2010] Feng Z., Lu Z., Cui L., Song S.: *Reliability Sensitivity Algorithm Based on Stratified Importance Sampling Method for Multiple Failure Modes Systems*. Chinese Journal of Aeronautics, 23(2010), str. 660–669
50. [Person i Ginzburg, 1996] Person S., Ginzburg L.R.: *Different methods are needed to propagate ignorance and variability*. Reliability Engineering and System Safety, 54 (1996), str. 133–144
51. [Fisher, 1925] Fisher R.A.: *Statistical Methods For Research Workers*. Oliver and Boyd, Edynburg (1925)
52. [Fisher, 1993] Fisher N.I.: *Statistical analysis of circular data*. Cambridge University Press, Cambridge (1993)
53. [Frangopol i Recek, 2003] Frangopol D.M., Recek S.: *Reliability of fiber-reinforced composite laminate plates*. Probabilistic Engineering Mechanics, 18 (2003), str. 119–137
54. [Freudenthal, 1954] Freudenthal A.M.: *Safety and the probability of Structural Failure*. ASCE Transactions, 2843 (1954), str. 1337–1397
55. [Freudenthal, 1956] Freudenthal A.M.: *Safety and the probability of structure failure*. Journal of Engineering Mechanics, Trans. ASCE, 121 (1956), str. 1337
56. [Fu i Hu, 1997] Fu M., Hu J.-Q.: *Conditional Monte Carlo. Gradient estimation and optimization application*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997)
57. [Galambos i inni, 1982] Galambos T.V., Ellingwood B., MacGregor G., Cornell C.A.: *Probability based load criteria: assessment of current design practice*. ASCE Journal of Structural Division, 108 (1982), str. 959–977.
58. [Gavin i Yau, 2009] Gavin H.P., Yau S.C.: *High-order limit state functions in the response surface method for structural reliability analysis*. Structural Safety, 30 (2008), str. 162–179
59. [Gayton i inni, 2004] Gayton N., Mohamed A., Sorensen J.D., Pendola M., Lemaire M.: *Calibration methods for reliability-based design codes*. Structural Safety, 26 (2004), str. 91–121
60. [Ghanem i Spanos, 1991] Ghanem R.G., Spanos P.D.: *Stochastic finite elements: a spectra approach*. Springer, Nowy Jork (1991)
61. [Godoy, 1998] Godoy L.A.: *Stresses and pressures in thin-walled structures with damage and imperfections*. Thin-Walled Structures, 32 (1998), str. 181–206
62. [Gołota i inni, 2011] Gołota M., Winkelmann K., Górski J., Mikulski T.: *Wpływ wstępnych imperfekcji geometrycznych na nośność silosu obciążonego podciśnieniem i wiatrem*. Inżynieria i Budownictwo, 2 (2011), str. 113–117

63. [Gomes i Awruch, 2002] Gomes H.M., Awruch A.M.: **Reliability of reinforced concrete structures using stochastic finite elements**. Engineering Computations, 19 (2002), str. 764–786
64. [Górski i Mikulski, 2005] Górski J., Mikulski T.: *Statistical description and numerical calculations of cylindrical vertical tanks with initial geometric imperfections*. Proceedings of the 7th Conference: Shell Structures. Theory and Applications, Gdańsk-Jurata, Poland (2005), str. 547–551
65. [Górski i Mikulski, 2008] Górski J., Mikulski T.: *Identification and simulation of initial geometrical imperfections of steel cylindrical tanks*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 46 (2008), str. 413–434
66. [Górski, 2006] Górski J.: *Non-linear models of structures with random geometric and material imperfections. Simulation-based approach*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk (2006)
67. [Grigoriu i Balopoulou, 1993] Grigoriu M., Balopoulou S.: *A simulation method for stationary Gaussian random function based on the sampling theorem*. Probabilistic Engineering Mechanics, 8 (1993), str. 239–254
68. [Grigoriu, 1999] Grigoriu M.: *Stochastic Mechanics*. International Journal of Solids and Structures, 37 (1999), str. 197–214
69. [Gwóźdź, 1998] Gwóźdź M.: *Zagadnienia nośności losowej prętów metalowych*. Zeszyt Naukowy Inżynierii Lądowej 4/1997, Politechnika Krakowska, Kraków (1998)
70. [Gwóźdź i Machowski, 2011] Gwóźdź M., Machowski A.: *Wybrane badania i obliczenia konstrukcji budowlanych metodami probabilistycznymi*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków (2011)
71. [Hammersley i Handscomb, 1964] Hammersley J.M., Handscomb D.C.: *Monte Carlo Methods*. Fletcher & Son Limited, Norwich (1964)
72. [Hart, 1982] Hart G.C.: *Uncertainty analysis, loads and safety in Structural Engineering*. Prentice-Hall, New Jersey (1982)
73. [Hasofer i Lind, 1974] Hasofer A.M., Lind N.C.: *An Exact and Invariant First-Order Reliability Format*. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 100 (1974), str. 111–121
74. [Haugen, 1968] Haugen E.B.: *Probabilistic approach to design*. John Wiley and Sons, Chichester (1968)
75. [Helton i Davis, 2003] Helton J.C., Davis F.J.: *Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems*. Reliability Engineering and System Safety, 81 (2003), str. 23–69
76. [Hien, 2003] Hien T.D.: *Numerical analysis of stochastic systems*. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin (2003)
77. [Hill i Hunter, 1966] Hill W.J., Hunter W.G.: *A review of response surface methodology: a literature review*. Technometrics, 8 (1966), str. 571–590
78. [Hjelmstad, 2005] Hjelmstad K.D.: *Fundamentals of Structural Mechanics*. Springer-Verlag, Nowy Jork (2007)

79. [Hornberger i Spear, 1981] Hornberger G.M., Spear R.C.: *An approach to the preliminary analysis of environmental systems*. Journal of Environmental Management, 12 (1981), str. 7–18
80. [Hotała, 2003] Hotała E.: *Nośność graniczna nieuzębrowanych cylindrycznych płaszczyz silosów stalowych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław (2003)
81. [Hurtado i Barbat, 1998] Hurtado J.E., Barbat A.H.: *Monte Carlo techniques in computational stochastic mechanics*. Archives of Computational Methods in Engineering, 5 (1998), str. 3–30
82. [Hutchinson i Koiter, 1971] Hutchinson J.W., Koiter W.T.: *Post buckling theory*. Applied Mechanics, 24 (1971), str. 1353–1366
83. [Ikeda i Murota, 1991] Ikeda K., Murota K.: *Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 86 (1991), str. 215–243
84. [Iman i Conover, 1980] Iman R.L., Conover W.J.: *Small Sample Sensitivity Analysis Techniques for Computer Models, With an Application to Risk Assessment*. Communications in Statistics - Theory and Methods, A9 (1980), str. 1749–1842
85. [Iman i inni, 1981] Iman R.L., Helton J.C., Campbell J.E.: *An Approach to Sensitivity Analysis of Computer Models*. Journal of Quality Technology, 13 (1981), str. 174–183, 232–240
86. [Jankowski i Walukiewicz, 1997] Jankowski R., Walukiewicz H.: *Modeling of two-dimensional random fields*. Probabilistic Engineering Mechanics, 12 (1997), str. 115–121
87. [Jankowski, 2002] Jankowski R.: *Conditional random field simulation of ground motions for large shell structures*. Proceedings of the 6th Conference: Shell Structures. Theory and Applications, Gdańsk-Jurata, Poland (2002), str. 115–116
88. [Jankowski, 2006] Jankowski R.: *Conditional simulation of spatiotemporal earthquake random field*. Abstract Book of 13th European Conference on Earthquake Engineering & 30th General Assembly of the European Seismological Commission, Genewa, Szwajcaria (2006)
89. [Johnson i inni, 1999] Johnson E.A., Bergman L.A., Spencer Jr B.F.: *Intelligent Monte Carlo simulation and discrepancy sensitivity*. Computational Stochastic Mechanics, 1 (1999), str. 31–39
90. [Johnson, 2010] Johnson S.M.: *Computational modeling, stochastic and experimental analysis with thermoelastic stress analysis for fiber reinforced polymeric composite material systems*. Georgia Institute of Technology, Atlanta (2010)
91. [Jun i Hong, 1988] Jun S.M., Hong C.S.: *Buckling behavior of laminated composite cylindrical panels under axial compression*. Computers and Structures, 29 (1988), str. 479–490.
92. [Kahn i Marshall, 1953] Kahn H., Marshall A.W.: *Methods of reducing sample size in Monte Carlo computations*. Journal of the Operations Research Society of America 5 (1953), str. 263–278

93. [Kahn, 1956] Kahn H.: *Use of different Monte Carlo sampling techniques*. Proceedings of the Symposium on Monte Carlo Methods, John Wiley and Sons, Nowy Jork (1956), str. 149–190
94. [Kamiński, 2002] Kamiński M.M.: *On probabilistic fatigue models for composite materials*. International Journal of Fatigue, 24 (2002), str. 477–495
95. [Kamiński, 2005] Kamiński M.M.: *Computational Mechanics of Composite Materials. Sensitivity, Randomness and Multiscale Behaviour*. Springer-Verlag, Londyn (2005)
96. [Kang i inni, 2010] Kang S.-C., Koh H.-M., Choo J.F.: *An efficient response surface method using moving least squares approximation for structural reliability analysis*. Probabilistic Engineering Mechanics, 25 (2010), str. 365–371
97. [Karhunen, 1947] Karhunen K.: *Über lineare Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (On linear methods in probability and statistics.)* Annales Academiae Scientiarum Fennicae. Series A I. Mathematica-Physica, 37 (1947), str. 1–79
98. [Kharmanda i inni, 2002] Kharmanda G., Mohamed A., Lemaire M.: *CAROD: Computer-Aided Reliable and Optimal Design as a concurrent system for real structures*. International Journal of CAD/CAM, 2 (2002), str. 1–22
99. [Khuri i Cornell, 1996] Khuri A.I., Cornell J.A.: *Response Surfaces*. Dekker, Nowy Jork (1996)
100. [King i inni, 2012] King L., Toutanji H., Vuddandam R.: *Load and resistance factor design of fiber reinforced polymer composite bridge deck*. Composites: Part B, 43 (2012), str. 673–680
101. [Kleiber i Hien, 1992] Kleiber M., Hien T.D.: *The Stochastic Finite Elements Method: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation*. John Wiley and Sons, Chichester (1992)
102. [Kleiber i inni, 1997] Kleiber M., Antúnez H., Hien T.D., Kowalczyk P.: *Parameter sensitivity in nonlinear mechanics*. John Wiley and Sons, Londyn (1997)
103. [Knabe i inni, 1998] Knabe W., Przewłócki J., Różyński G.: *Spatial averages for linear elements for two-parameter random field*. Probabilistic Engineering Mechanics, 13 (1998), str. 147–167
104. [Kolanek, 2007] Kolanek K.: *Analiza i optymalizacja niezawodnościowa konstrukcji za pomocą adaptacyjnych metod symulacyjnych*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa (2007)
105. [Korol, 2012] Korol E.: *Theoretical and experimental study on size effect in concrete beams reinforced with steel or basalt bars*. Politechnika Gdańska, Gdańsk (2012)
106. [Kreja, 2005] Kreja I.: *Stability analysis of cylindrical composite shells in MSC/Nastran*. Archives of Civil and Mechanical Engineering, 3 (2005), str. 31–41
107. [Lemaitre, 1986] Lemaitre J.: *Local approach of fracture*. Engineering Fracture Mechanics, 25 (1986), str. 523–537
108. [Li i Der Kiureghian, 1993] Li C.C., Der Kiureghian A.: *Optimal discretization of random fields*. Journal of Engineering Mechanics, 119 (1993), str. 1136–1154

109. [Lin, 1967] Lin Y.K.: *Probabilistic Theory of Structural Dynamics*. McGraw-Hill, Nowy Jork (1967)
110. [Lind, 1970] Lind N.C.: *Structural reliability and codified design*. University of Waterloo, Waterloo (1970)
111. [Lind, 1977] Lind N.C.: *Formulation of probabilistic design*. ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, 103 (1977), str. 273–284
112. [Liu, 2001] Liu J.S.: *Monte Carlo strategies in scientific computing*. Springer-Verlag, Nowy Jork (2001)
113. [Loève, 1948] Loève M.: *Functions aleatoires du second ordre*. Gauthier Vilares, Paryż (1948)
114. [Lundberg i Galambos, 1996] Lundberg J.E., Galambos T.V.: *Load and resistance factor design of composite columns*. Structural Safety, 18 (1996), str. 169–177
115. [Murzewski, 1997] Murzewski J.: *Podstawy probabilistyczne projektowania konstrukcji w ujęciu macierzowym*. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław (1997)
116. [Murzewski, 1999] Murzewski J.: *Podstawy projektowania i niezawodność konstrukcji*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków (1999)
117. [Madsen i inni, 1986] Madsen H.O., Krenk S., Lind N.C.: *Methods of Structural Safety*. Prentice-Hall, New Jersey (1986)
118. [Marek i inni, 1996] Marek P., Guštar M., Anagnos T.: *Simulation-based reliability assessment for structural engineers*. CRC Press, Nowy Jork (1996)
119. [Mason i inni, 1989] Mason R.L., Gunst R.F., Hess J.L.: *Statistical Design and Analysis of Experiments with Applications to Engineering and Science*. John Wiley and Sons, Chichester (1989)
120. [Matheron, 1975] Matheron G.: *Random sets and integral geometry*. John Wiley and Sons, Nowy Jork (1975)
121. [McKay i inni, 1979] McKay M.D., Beckman R.J., Conover W.J.: *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code*. Technometrics (American Statistical Association), 21 (1979), str. 239–245
122. [Melchers, 1999] Melchers R.E.: *Structural Reliability Analysis and Prediction*. John Wiley and Sons, Chichester (1999)
123. [Melnik–Melnikow i Dechtiaruk, 2000] Melnik-Melnikow P.G., Dechtiaruk E.S.: *Rare events probabilities estimation by Russian Roulette and Splitting simulation technique*. Probabilistic Engineering Mechanics, 15 (2000), str. 125–129
124. [Metropolis i Ulam, 1949] Metropolis N., Ulam S.M.: *The Monte Carlo method*. Journal of the American Statistical Association, 44 (1949), str. 335–341
125. [Mignolet i Spanos, 1992] Mignolet M.P., Spanos P.D.: *Simulation of homogeneous two-dimensional random fields: Part I – AR and ARMA models*. ASME Journal of Applied Mechanics, 59 (1992), str. 260–269
126. [Montgomery, 2004] Montgomery D.C.: *Design and Analysis of Experiments*. John Wiley and Sons, Nowy Jork (2004)

127. [Myers i Montgomery, 1995] Myers R.H., Montgomery D.C.: *Response Surface Methodology: Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. John Wiley and Sons, Nowy Jork (1995)
128. [Myers, 2002] Miller L.K., Sa P.: *Improved Multiple Comparisons Withe the Best in Response Surface Methodology*. Journal of Modern Applied Statistics, 2 (2003), str. 247–255
129. [Nayfeh, 1973] Nayfeh A.H.: *Perturbation methods*. John Wiley and Sons, Nowy Jork (1973)
130. [Nemat-Nasser i inni, 1980] Nemat-Nasser S., Sumi Y., Keer L.M.: *Unstable growth of tension cracks in brittle solids: Stable and unstable bifurcations, snap-through, and imperfection sensitivity*. International Journal of Solids and Structures, 16 (1980), str. 1017–1035
131. [Nowak i Collins, 1976] Nowak A.S., Collins K.R.: *Reliability of structures*. McGraw-Hill, Nowy Jork (1976)
132. [Oden, 1972] Oden J.T.: *Finite Elements of Nonlinear Continua*. McGraw-Hill, Berkshire (1972)
133. [Olsson i inni, 2003] Olsson A., Sandberg G., Dahlblom O.: *On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis*. Structural Safety, 25 (2003), str. 47–68
134. [Orlik, 1976] Orlik G.: *Deformation of shapes of cylindrical steel shells, statistical analysis and numerical simulations*. Politechnika Gdańska, Gdańsk (1976)
135. [Popescu i inni, 1998] Popescu R., Deodatis G., Prevost J.H.: *Simulation of homogeneous non Gaussian stochastic vector fields*. Probabilistic Engineering Mechanics, 13 (1998), str. 1–13
136. [Pradlwarter i Schuëller, 1997] Pradlwarter H.J., Schuëller G.I.: *On advanced Monte Carlo simulation procedures in stochastic structural dynamics*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 32 (1997), str. 735–744
137. [Przewłócki i Górski, 2001] Przewłócki J., Górski J.: *Strip foundation on 2-D and 3-D random subsoil*. Probabilistic Engineering Mechanics, 16 (2001), str. 121–136
138. [Rackwitz i Fiessler, 1978] Rackwitz R., Fiessler B.: *Structural reliability under combined random load sequences*. Computers and Structures, 9 (1978), str. 489–494
139. [Rackwitz, 2000] Rackwitz R.: *Optimization - The Basis of Code-Making and Reliability Verification*. Structural Safety, 22 (2000), str. 27–60
140. [Rajashankar i Ellingwood, 1993] Rajashankar M.R., Ellingwood B.: *A new look at the response surface approach for reliability analysis*. Structural Safety, 12 (1993), str. 205–220
141. [Razzaq i inni, 1996] Razzaq Z., Prabhakaran R.: *Load and resistance factor design (LRFD) approach for reinforced-plastic channel beam buckling*. Composites: Part B, 27B (1996), str. 361–369
142. [Rosenblatt, 1952] Rosenblatt M.: *Remarks on multivariate transformation*. The Annals of Mathematical Statistics, 23 (1952), str. 470–472
143. [Rosenblueth i Esteva, 1972] Rosenblueth E., Esteva L.: *Reliability basis for some Mexico codes*. Special Publication SP-31 of American Concrete Institute, Detroit (1972), str. 141–155.

144. [Rosenblueth i Mendoza, 1971] Rosenblueth E., Mendoza E.: *Reliability Optimization in Isostatic Structures*. ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, 97 (1971), str. 1625–1642
145. [Rubinstein, 1981] Rubinstein R.Y.: *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley and Sons, Chichester (1981)
146. [Ruiz i Aguilar, 1994] Ruiz S.E., Aguilar J.C.: *Reliability of Short and Slender Reinforced-Concrete Columns*. Journal of Structural Engineering, 120 (1994), str. 1850–1865
147. [Sabik i Kreja, 2010] Sabik A., Kreja I.: *Imperfection sensitivity of multilayered composite shells*. Shell Structures: Theory and Applications. Vol. 2, CRC Press/Balkema, Londyn (2010), str. 137–140
148. [Sabik, 2012] Sabik A.: *Analiza stateczności powłok warstwowych obciążonych termicznie*. Politechnika Gdańska, Gdańsk (2012)
149. [Sacks i inni, 1989] Sacks J., Welch W.J., Mitchell T.J., Wynn H.P.: *Design and analysis of computer experiments*. Statistical Science, 4 (1989), str. 409–435
150. [Saltelli i Annoni, 2010] Saltelli A., Annoni P.: *How to avoid a perfunctory sensitivity analysis*. Environmental Modeling and Software, 25 (2010), str. 1508–1517
151. [Saltelli i inni, 2004] Saltelli A., Tarantola S., Campolongo F., Ratto M.: *Sensitivity Analysis in Practice: A Guide to Assessing Scientific Models*. John Wiley and Sons, Nowy Jork (2004)
152. [Saltelli i inni, 2008] Saltelli A., Ratto M., Andres T., Campolongo F., Cariboni J., Gatelli D., Saisana M., Tarantola S.: *Global Sensitivity Analysis*. John Wiley and Sons, Nowy Jork (2008)
153. [Sawilowski i Fahome, 2003] Sawilowski S.S., Fahome G.C.: *Statistics via Monte Carlo Simulation with Fortran*. Stoney Creek University, Rochester Hills (2003)
154. [Schuëller, 2001] Schuëller G.: *Computational stochastic mechanics – recent advances*. Computers and Structures, 79 (2001), str. 2225–2234
155. [Shinozuka i Deodatis, 1996] Shinozuka M., Deodatis G.: *Simulation of multidimensional Gaussian stochastic fields by spectral representation*. Applied Mechanics, 49 (1996), str. 29–53
156. [Shinozuka i Yamazaki, 1988] Shinozuka M., Yamazaki F.: *Stochastic finite element analysis, an introduction*. Stochastic Structural Dynamics. Elsevier Science, Amsterdam (1988), str. 241–291
157. [Shinozuka, 1987] Shinozuka M.: *Stochastic Mechanics. Vol. I & II*. Columbia University, Nowy Jork (1987)
158. [Simonnet, 1996] Simonnet M.: *Measures and probabilities*. Springer-Verlag, Nowy Jork (1996)
159. [Singer i Abramovich, 1995] Singer J., Abramovich H.: *The Development of Shell Imperfection Measurement Techniques*. Thin-Walled Structures, 23 (1995), str. 379–398
160. [Singer i inni, 1971] Singer J., Arbocz J., Babcock C.D.: *Buckling of imperfect stiffened cylindrical shells under axial compression*. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 9 (1971), str. 68–75

161. [Singer, 1982] Singer J.: *Buckling experiments on shells - a review of recent developments*. Solid Mechanics Arcives, 7 (1982), str. 213–313
162. [Skalmierski i Tylikowski, 1982] Skalmierski B., Tylikowski A.: *Stochastic processes in dynamics*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (1982)
163. [Snell i Morley, 1985] Snell M., Morley N.: *The compression buckling behaviour of highly curved panels of carbon fibre reinforced plastic*. Proceedings of the 5th International Conference on Composite Materials, San Diego (1985), str. 1327–1354
164. [Sobczyk, 1991] Sobczyk K.: *Stochastyczne równania różniczkowe*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa (1991)
165. [Sørensen i inni, 1994] Sørensen J.D., Kroon I.B., Faber M.H.: *Optimal reliability-based code calibration*. Structural Safety, 15 (1994), str. 197–208
166. [Srivastava i Carter, 1983] Srivastava M.S., Carter E.M.: *An introduction to applied multivariate statistics*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1983)
167. [Stocki, 1999] Stocki R.: *Niezawodnościowa optymalizacja konstrukcji prętowych w zakresie dużych przemieszczeń - teoria i program komputerowy*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa (1999)
168. [Stocki, 2010] Stocki R.: *Analiza niezawodności i optymalizacja odpornościowa złożonych konstrukcji i procesów technologicznych*. Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk, Warszawa (2010)
169. [Sudret i Der Khureghian, 2000] Sudret B., Der Kiureghian A.: *Stochastic Finite Element Methods and Reliability. A State-of-the-Art Report*. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, Berkeley (2000)
170. [Tejchman i Górski, 2009] Tejchman J., Górski J.: *Finite Element study of patterns of shear zones in granular bodies during plane strain compression*. Acta Geotechnica, 5 (2009), str. 95–112
171. [Tejchman i Górski, 2011] Tejchman J., Górski J.: *Modeling of bearing capacity of footings on sand within stochastic micro-polar hypoplasticity*. International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 35 (2011), str. 226–243
172. [Tejchman i inni, 2009] Tejchman J., Bobiński J., Górski J.: *Notched concrete beams under bending – calculations of size effects within stochastic elasto-plasticity with non-local softening*. Archives of Mechanics, 61 (2009), str. 1–25
173. [Thoft–Christensen i Baker, 1982] Thoft–Christensen P., Baker M.J.: *Structural Reliability Theory and Its Applications*. Springer-Verlag, Berlin (1982)
174. [Thoft–Christensen i Murotsu, 1986] Thoft–Christensen P., Murotsu Y.: *Application of structural systems reliability theory*. Springer-Verlag, Berlin (1986)
175. [Thoft–Christensen i Sørensen, 1987] Thoft–Christensen P., Sørensen J.D.: *Optimal Strategy for Inspection and Repair of Structural Systems*. Civil Engineering Systems, 4 (1987), str. 94–100
176. [Topping, 2002] Topping B.H.V.: *Computational mechanics using high performance computing*. Saxe-Coburg Publications, Stirling (2002)

177. [Treharne, 1991] Treharne J.: *RSSP – a Fortran Simulation Package for use in teaching Response Surface Methodology*. Auburn University Publishing Office, Auburn (1991)
178. [Tylikowski, 1991] Tylikowski A.: *Stochastyczna stateczność układów ciągłych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (1991)
179. [Ulam, 1961] Ulam S.M.: *On Some Statistical Properties of Dynamical Systems*. Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 3 (1961), str. 315
180. [Vanmarcke, 1983] Vanmarcke E.-H.: *Random Fields: Analysis and Synthesis*. MIT Press, Cambridge (1983)
181. [Veneziano, 1974] Veneziano D.: *Contributions to Second Moment Reliability Theory*. MIT Press, Cambridge (1974)
182. [Vrouwenvelder, 2002] Vrouwenvelder A.C.W.M.: *Developments towards full probabilistic design codes*. Structural Safety, 24 (2002), str. 417–432
183. [Walukiewicz i inni, 1995] Walukiewicz H., Bielewicz E., Górski J.: *Statistical analysis of simulated random fields*. Proceedings of the ICASP7 Conference: Applications of Statistics and Probability, Vol. 2, Balkema, Rotterdam (1995), str. 126–127
184. [Walukiewicz i inni, 1997] Walukiewicz, H., Bielewicz, E., Górski, J.: *Simulation of nonhomogeneous random fields for structural applications*. Computers and Structures, 64 (1997), str. 491–498
185. [Weibull, 1939] Weibull, W.: *A Statistical Theory of Strength of Materials*. Ingeniör Vetenskaps Akademin Proceedings, Sztokholm (1939)
186. [Wen, 1983] Wen Y.K.: *Wind direction and structural reliability. Part 1*. ASCE Journal of Structural Engineering, 109 (1983), str. 1028–1041
187. [Wen, 1984] Wen Y.K.: *Wind direction and structural reliability. Part 2*. ASCE Journal of Structural Engineering, 110 (1984), str. 1253–1264
188. [Whitcomb i Anderson, 2004] Whitcomb P. J., Anderson M. J.: *RSM Simplified: Optimizing Processes Using Response Surface Methods for Design of Experiments*. Productivity Press, Londyn (2004)
189. [Wilde, 1981] Wilde P.: *Random Fields Discretization in Engineering Calculations*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (1981)
190. [Winkler, 1995] Winkler G.: *Image analysis, random fields and dynamic Monte Carlo methods*. Springer-Verlag, Berlin (1995)
191. [Woliński i Wróbel, 2001] Woliński Sz., Wróbel K.: *Niezawodność konstrukcji budowlanych*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów (2001)
192. [Woliński, 2011a] Woliński Sz.: *Probabilistyczne podstawy współczesnych norm projektowania*. Materiały 57 Konferencji Naukowej KILiW PAN oraz KN PZITB, Krynica, Polska (2011)
193. [Woliński, 2011b] Woliński Sz.: *Kalibracja współczynników częściowych dla istniejących konstrukcji*. Materiały 57 Konferencji Naukowej KILiW PAN oraz KN PZITB, Krynica, Polska (2011)

194. [Wong i inni, 2005] Wong S.M., Hobbs R.E., Onof C.: *An adaptive response surface method for reliability analysis of structures with multiple loading sequences*. Structural Safety, 27 (2005), str. 287–308
195. [Woźniak i Kleiber, 1982] Woźniak Cz., Kleiber M.: *Nieliniowa mechanika konstrukcji*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (1982)
196. [Woźniak, 2001] Woźniak Cz.: *Mechanika sprężystych płyt i powłok*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa (2001)
197. [Yamazaki i Shinozuka, 1990] Yamazaki F., Shinozuka M.: *Simulation of Stochastic Fields by Statistical Preconditioning*. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 116 (2000), str. 268–287
198. [Zhang i Ellinwood, 1994] Zhang J., Ellinwood B.: *Error measure for reliability studies using reduced variable set*. ASCE Journal of Engineering Mechanics, 121 (1995), str. 935–937
199. [Zienkiewicz i Taylor, 2005] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.: *The Finite Element Method Set*. Butterworth-Heinemann, Londyn (2005)
200. [Ziha, 1995] Ziha K.: *Descriptive sampling in structural safety*. Structural Safety, 17 (1995), str. 33–41
201. [Zio, 2008] Zio E.: *Computational Methods for Reliability and Risk Analysis*. World Scientific, Mediolan (2008)
202. [Zubrzycki, 1961] Zubrzycki S.: *Skrypt z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*. Uniwersytet Wrocławski, Wrocław (1961)

W tekście rozprawy odwołano się do następujących kodów projektowych, norm oraz specyfikacji:

1. [PN-76/B-03001] Konstrukcje i podłoża budowli. Ogólne zasady obliczeń.
2. [PN-77/B-02011] Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie wiatrem.
3. [PN-80/B-02010] Obciążenia w obliczeniach statycznych. Obciążenie śniegiem.
4. [PN-82/B-02000] Obciążenia budowli. Zasady ustalania wartości.
5. [PN-82/B-02001] Obciążenia budowli. Obciążenia stałe.
6. [PN-82/B-02003] Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne technologiczne. Podstawowe obciążenia technologiczne i montażowe.
7. [PN-82/B-02004] Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne technologiczne. Obciążenia pojazdami.
8. [PN-86/B-02005] Obciążenia budowli. Obciążenia suwnicami pomostowymi, wciągarkami i wciągnikami.
9. [PN-86/B-02015] Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne środowiskowe. Obciążenie temperaturą.
10. [PN-87/B-02013] Obciążenia budowli. Obciążenia zmienne środowiskowe. Obciążenie oblodzeniem.
11. [PN-88/B-02014] Obciążenia budowli. Obciążenie gruntem.
12. [PN-B-03202:1996] Konstrukcje stalowe. Silosy na materiały sypkie. Obliczenia statyczne i projektowanie.
13. [PN-EN 1090-2] Wykonanie konstrukcji stalowych i aluminiowych. Część 2: Wymagania techniczne dotyczące konstrukcji stalowych.
14. [PN-EN 1991-1-1] Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-1: Oddziaływania ogólne. Ciężar objętościowy, ciężar własny, obciążenia użytkowe w budynkach.
15. [PN-EN 1991-1-2] Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-2: Oddziaływania ogólne. Oddziaływania na konstrukcje w warunkach pożaru.
16. [PN-EN 1991-1-3] Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-3: Oddziaływania ogólne. Obciążenie śniegiem.

17. [PN-EN 1991-1-4] Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-4: Oddziaływania ogólne. Oddziaływania wiatru.
18. [PN-EN 1991-1-5] Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 1-5: Oddziaływania ogólne. Oddziaływania termiczne.
19. [PN-EN 1993-1-1] Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
20. [PN-EN 1993-1-6:2009] Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych. Część 1-6: Wytrzymałość i stateczność konstrukcji powłokowych.
21. [PN-EN 1994-1-1] Eurokod 4: Projektowanie zespolonych konstrukcji stalowo-betonowych. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
22. [PN-ISO 2394:2000] Ogólne zasady niezawodności konstrukcji budowlanych.

Praca została sporządzona w ramach projektu
**„Innowacyjne środki i efektywne metody poprawy bezpieczeństwa i trwałości obiektów
budowlanych i infrastruktury transportowej w strategii zrównoważonego rozwoju”**,
w ramach umowy nr **POIG.01.01.02-10-106/09-00**, zadanie **PT-2.4**.

