

POLITECHNIKA GDAŃSKA  
WYDZIAŁ INŻYNIERII LĄDOWEJ I ŚRODOWISKA  
KATEDRA MECHANIKI BUDOWLI I MOSTÓW

**ROZPRAWA DOKTORSKA**

**ODDZIAŁYWANIA TABORU NA MOSTY KOLEJOWE  
PRZY ZMIENNYCH PARAMETRACH RUCHU**

MGR INŻ. MAREK SZAFRAŃSKI

PROMOTOR

DR HAB. INŻ. KRZYSZTOF ŻÓŁTOWSKI, PROF. PG

GDAŃSK 2013



*...mojej żonie i synowi...*



# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b> .....	1
<b>Rozdział 1 Prace z dziedziny dynamiki mostów kolejowych pod działaniem obciążeń ruchomych</b> .....	7
1.1. Uwagi wstępne .....	7
1.2. Kolejowe obiekty mostowe pod obciążeniem eksploatacyjnym.....	8
1.2.1. Modele teoretyczne pojazdów szynowych, nawierzchni kolejowej oraz przęseł mostowych w analizach dynamicznych .....	10
1.2.2. Modele numeryczne przęseł mostowych w analizach dynamicznych .....	20
1.2.3. Badania eksploatacyjne obiektów mostowych.....	23
1.2.4. Wytyczne i przepisy normowe .....	26
<b>Rozdział 2 Tabor kolejowy – podstawowe cechy konstrukcyjne</b> .....	39
2.1. Uwagi wstępne .....	39
2.2. Ogólna charakterystyka konstrukcji taboru kolejowego .....	40
2.3. Jednostki trakcyjne serii EN57.....	43
<b>Rozdział 3 Podstawy teoretyczne identyfikacji liniowych układów dynamicznych</b> .....	51
3.1. Uwagi wstępne .....	51
3.2. Przygotowanie badań.....	52
3.3. Metody identyfikacji parametrów modalnych.....	52
3.4. Podstawowe sformułowania z zakresu dynamiki i identyfikacji układów liniowych.....	54
3.4.1. Liniowy model dynamiczny w przestrzeni stanów.....	55
3.4.2. Odpowiedź impulsowa układu w przestrzeni stanów – parametry Markowa .....	57
3.4.3. Macierz Hankela.....	59
3.4.4. Sterowalność i obserwowalność układu dynamicznego.....	60
3.4.5. Minimalna realizacja dyskretnego, liniowego układu w przestrzeni stanów .....	62
3.5. Metoda PP ( <i>Peak-Picking</i> ) .....	63
3.5.1. Dyskretna transformacja Fouriera (DFT).....	63
3.5.2. Widmowa gęstość mocy (PSD).....	63
3.5.3. Uśredniona, znormalizowana widmowa gęstość mocy (ANPSD) .....	64
3.6. Metoda realizacji własnej ERA ( <i>Eigensystem Realization Algorithm</i> ).....	64
3.6.1. Wyznaczenie macierzy dynamicznych (minimalna realizacja układu).....	64
3.6.2. Wyznaczenie parametrów modalnych.....	68
3.6.3. Parametry projektowe $\alpha$ i $\beta$ .....	70
3.6.4. Kryteria i sposoby oceny poprawności rozwiązania .....	70
3.6.5. Algorytm metody.....	74
3.7. Testy numeryczne metody ERA .....	76
3.8. Podsumowanie i wnioski.....	85
<b>Rozdział 4 Identyfikacja parametrów modalnych jednostki EN57</b> .....	89
4.1. Uwagi wstępne .....	89
4.2. Studium mechaniczno-konstrukcyjne jednostki EN57.....	89
4.3. Badania odpowiedzi jednostki EN57 na wymuszenie typu „zeskok z progu” .....	90

4.3.1. Metodyka badań .....	90
4.3.2. Aparatura pomiarowa .....	92
4.3.3. Wstępny model MES wagonu. Symulacje numeryczne „zeskoku” .....	93
4.3.4. Rezultaty badań .....	98
4.4. Parametry modalne jednostki EN57 .....	99
4.4.1. Wymuszenie drgań pionowych .....	102
4.4.2. Wymuszenie drgań wahaniowych (wariant bez zamontowanego amortyzatora) .....	107
4.4.3. Wymuszenie drgań wahaniowych (wariant z zamontowanym amortyzatorem) .....	110
4.4.4. Podsumowanie .....	113
<b>Rozdział 5 Uproszczony model obciążenia kolejowego.</b>	
<b>Symulacje przejazdu obciążenia po konstrukcji .....</b>	<b>115</b>
5.1. Uwagi wstępne .....	115
5.2. Złożony, dyskretny model mechaniczny wagonu jednostki EN57 .....	115
5.3. Uproszczony model obciążenia kolejowego .....	117
5.4. Symulacje przejazdu obciążenia po konstrukcji .....	124
5.4.1. Weryfikacja procedur numerycznych programu SOFiSTiK .....	125
5.4.2. Przykład 1 – konstr. odciążająca typu mostowego o rozpiętości 30 m (KO30) .....	130
5.4.2.1. Charakterystyka konstrukcji .....	130
5.4.2.2. Badania dynamiczne konstrukcji in-situ .....	132
5.4.2.3. Model obliczeniowy konstrukcji .....	134
5.4.2.4. Cechy dynamiczne konstrukcji .....	135
5.4.2.5. Rezultaty analiz numerycznych .....	142
5.4.3. Przykład 2 – Most nad rzeką Radunią .....	147
5.4.3.1. Charakterystyka konstrukcji .....	147
5.4.3.2. Badania dynamiczne konstrukcji in-situ .....	148
5.4.3.3. Model obliczeniowy konstrukcji .....	149
5.4.3.4. Cechy dynamiczne konstrukcji .....	150
5.4.3.5. Rezultaty analiz numerycznych .....	154
5.4.4. Wnioski z przeprowadzonych symulacji .....	159
<b>Podsumowanie .....</b>	<b>161</b>
<b>Załącznik 1 Szczegółowe rezultaty testów metody ERA</b>	
<b>Załącznik 2 Sformułowanie równań ruchu liniowego, jednomasowego oscylatora poruszającego się po belce Bernoulliego-Eulera</b>	
<b>Bibliografia</b>	
<b>Abstract</b>	

# Wprowadzenie

W dniu 10 października 1825 roku dokonano prezentacji parowozu „Rakieta”, zbudowanego dla linii Liverpool – Manchester przez brytyjskiego inżyniera Georga Stephensona. Rok później, 15 września 1825, nastąpiło otwarcie pierwszej na świecie linii kolejowej o trakcji wyłącznie parowej, łączącej wspomniane miasta. Wydarzenia te dały początek ery kolejnictwa na świecie.

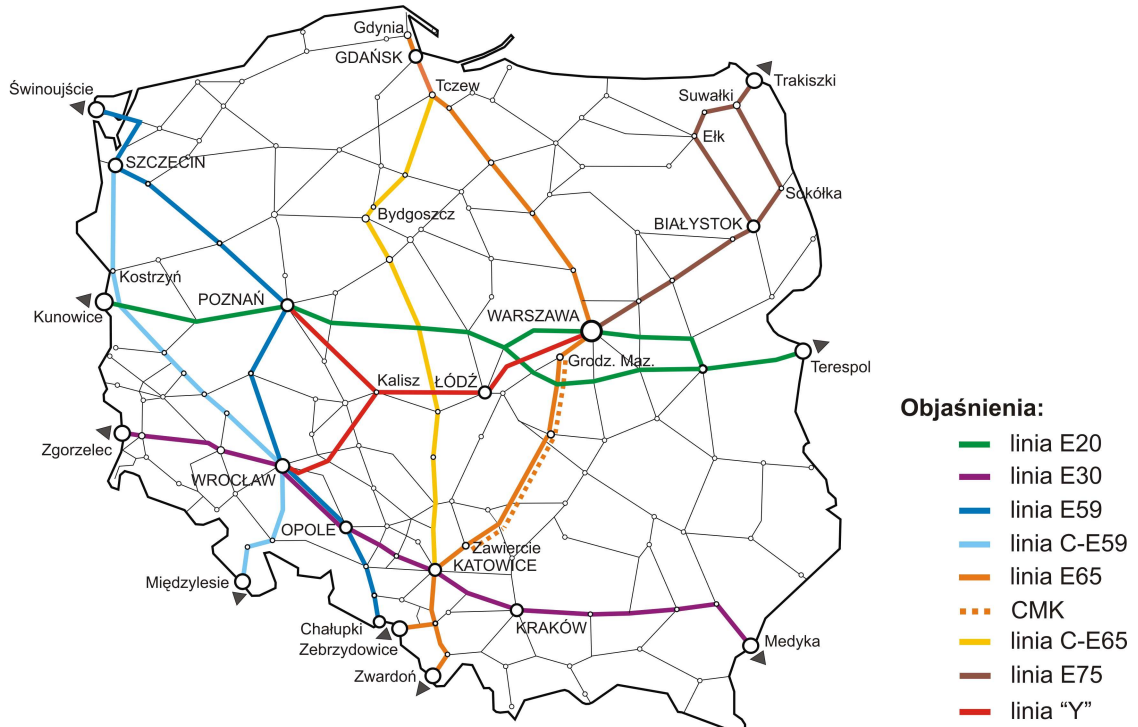
W okresie międzywojennym maksymalne prędkości pociągów parowych nie przekraczały 120 km/h. Nieznacznie wyższe prędkości osiągały jedynie niektóre lekkie składy spalinowe. Gwałtowny rozwój transportu szynowego nastąpił w latach powojennych ubiegłego stulecia. Od tego czasu obserwuje się ciągle zwiększanie prędkości ruchu. Związane jest to ze zmieniającym się stylem życia i pracy ludności, potrzebami przemieszczania się oraz stałym dążeniem człowieka do podnoszenia komfortu życia. Pierwszy pociąg dużych prędkości został wprowadzony do ruchu w Japonii w 1959 roku. Osiągał prędkość 210 km/h i kursował na magistrali Shinkansen pomiędzy miastami Tokio i Osaka. Od tego czasu rozwój pociągów dużych prędkości wykazuje nadzwyczajną dynamikę. Trudno jest sobie dzisiaj wyobrazić funkcjonowanie w Europie nowoczesnego państwa bez sprawnej kolei, w tym stosującej technologię dużych prędkości (ŻURKOWSKI [2005]). Obecnie pociągi dużych prędkości (o prędkości eksploatacyjnej powyżej 200 km/h) stanowią podstawę kolejowego transportu pasażerskiego w wielu krajach, m.in. w Japonii, USA, Francji, Niemczech, Wielkiej Brytanii, Włoszech czy Hiszpanii. Ich duża niezawodność i komfort podróży sprawia, że stały się one synonimem nowoczesnej kolei. Liczne światowe linie dopuszczają prędkości nawet do 350 km/h. Wprowadzenie dużych prędkości w ruchu pasażerskim powoduje, że koleje stają się konkurencyjne w stosunku do transportu samochodowego już przy odległościach przekraczających 100 km, a dla komunikacji lotniczej przy odległościach do 1000 km (TOWPIK [2009]). Wzrost prędkości ruchu wymaga jednak rozwiązania wielu złożonych zagadnień technicznych, między innymi z zakresu:

- konstrukcji pojazdów szynowych,
- konstrukcji nawierzchni kolejowej,
- współdziałania taboru, nawierzchni i konstrukcji mostowej w celu zapewnienia bezpieczeństwa i komfortu,
- zjawisk aerodynamicznych,
- oddziaływania pojazdów szynowych na środowisko.

W Polsce największą inwestycją okresu powojennego była Centralna Magistrala Kolejowa (CMK), łącząca Grodzisk Mazowiecki z Zawierciem. Budowę rozpoczęto w 1971 roku a ukończono w roku 1978. Przystosowano ją do ruchu pociągów pasażerskich z prędkościami do 160 km/h. Obecnie na terytorium kraju prowadzi się modernizacje szeregu linii kolejowych, które stanowią element europejskiej sieci transportowej i mają istotne znaczenie dla międzynarodowych tranzytów kolejowych. Linie te objęte są międzynarodowymi umowami AGC (umowa europejska o głównych międzynarodowych liniach kolejowych) i AGTC (umowa europejska o ważniejszych międzynarodowych liniach transportu kombinowanego i obiektach towarzyszących). Rozważa się również budowę nowej linii dużych prędkości mającej połączyć Warszawę,

Łódź, Poznań i Wrocław. Ważniejsze, modernizowane i planowane odcinki sieci kolejowych przebiegające przez terytorium Polski to (rys. 1):

- LINIA E20 (Kunowice – Poznań – Warszawa – Terespol)  
Należy do II Paneuropejskiego Korytarza Transportowego „Zachód – Wschód” łączącego Berlin z Moskwą. Celem modernizacji jest dostosowanie parametrów linii do wymogów AGC i AGTC. Modernizacja umożliwić ma prowadzenie ruchu pasażerskiego z prędkością 160 km/h oraz ruchu towarowego z prędkością 120 km/h.
- LINIA E30 (Zgorzelec – Wrocław – Katowice – Kraków – Medyka)  
Należy do III Paneuropejskiego Korytarza Transportowego łączącego Drezno z Lwowem. Celem modernizacji jest dostosowanie parametrów linii do standardów AGC i AGTC. Modernizacja ma umożliwić prowadzenie ruchu pasażerskiego z prędkością 160 km/h oraz ruchu towarowego z prędkością 120 km/h.
- LINIA E59 (Świnoujście – Szczecin – Poznań – Wrocław – Chałupki)  
Stanowi fragment międzynarodowego ciągu transportowego mającego połączyć Skandynawię z Europą Środkowo-Wschodnią. Linia E59 jest objęta umową AGC, a także stanowi element Transeuropejskiej Sieci Transportowej (TEN), w skład której wchodzi drogi i linie kolejowe, porty lotnicze, porty morskie, rzecznice, a także drogi wodne oraz terminale przeładunkowe. Prowadzona modernizacja ma umożliwić prowadzenie ruchu pasażerskiego z prędkością 160 – 200 km/h oraz ruchu towarowego z prędkością 120 km/h. Odgańlenie dla ruchu towarowego stanowi linia C-E59 (Szczecin – Kostrzyn – Wrocław – Międzyzlesie).



Rys. 1. Sieć modernizowanych i planowanych linii kolejowych w Polsce (na podstawie informacji PKP-PLK)

- LINIA E65 (Gdynia – Gdańsk – Warszawa – Katowice – Zebrzydowice)  
Należy do VI Paneuropejskiego Korytarza Transportowego łączącego regiony nadbałtyckie z obszarami położonymi nad Morzem Adriatyckim i Bałkanami. Elementem linii jest



również CMK. Celem modernizacji jest dostosowanie parametrów linii do standardów unijnych oraz wymogów AGC i AGTC. Modernizacja ma umożliwić prowadzenie ruchu pasażerskiego z prędkością 160 – 250 km/h oraz ruchu towarowego z prędkością 120 km/h. Odgałęzienie linii E65 stanowi linia C-E65 (Tczew – Bydgoszcz – Katowice – Zebrzydowice).

- LINIA E75 (Warszawa – Białystok – Sokółka – Suwałki – Trakiszki)  
Należy do I Paneuropejskiego Korytarza Transportowego zdefiniowanego jako „Kolej Bałtycka” (Rail Baltica), łączącego kraje nadbałtyckie z Polską (Helsinki, Tallin, Ryga, Kowno, Warszawa) i pozostałymi krajami Europy. Celem modernizacji jest dostosowanie parametrów linii do standardów unijnych oraz wymogów AGC. Modernizacja ma umożliwić prowadzenie ruchu pasażerskiego z prędkością 160 – 200 km/h oraz ruchu towarowego z prędkością 120 km/h. Alternatywnie rozważa się przeprowadzenie fragmentu linii od Białegostoku do Trakiszek przez Ełk.
- LINIA „Y”  
Rozważa się budowę linii dużych prędkości łączącej Warszawę, Łódź, Poznań i Wrocław. Linia ma umożliwić prowadzenie ruchu pasażerskiego z prędkościami powyżej 250 km/h.

Rozwój transportu szynowego powoduje jednocześnie wzrost nakładów na budownictwo komunikacyjne. Rozwój w dziedzinie materiałoznawstwa i coraz bardziej rygorystyczne wymagania dotyczące ekonomii projektowania, niosą za sobą tendencję do stosowania coraz lżejszych a zarazem bardziej wytrzymałych materiałów. Efektem tego są coraz smuklejsze przekroje pomostów, znacznie bardziej narażone na oddziaływania dynamiczne.

Głównym celem działań naukowych, projektowania i budowy konstrukcji inżynierskich jest zapewnienie im należytej nośności, odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa i właściwych kryteriów użytkowania. Zasada ta dotyczy fazy projektowania, budowy i eksploatacji. Dane wyjściowe do prac projektowych określają stosowne normy. Analizy pracy konstrukcji w czasie eksploatacji są przedmiotem badań obiektów w rzeczywistych warunkach użytkowych. Wzrost prędkości ruchu powoduje eskalację oddziaływań przekazywanych przez tabor na konstrukcję i w sposób naturalny pobudza środowisko naukowe do prac badawczych. Oprócz problemów związanych z projektowaniem nowych obiektów mostowych, istotne jest również określenie przydatności istniejących konstrukcji do nowych warunków eksploatacyjnych. Ważne jest ponadto zapewnienie odpowiedniego poziomu bezpieczeństwa i komfortu jazdy. Wszystkie te uwarunkowania odnoszą się do zagadnienia ruchu pojazdu po obiekcie mostowym i związanych z tym efektów dynamicznych.

W projektowaniu i analizie obiektów mostowych dążymy do stworzenia modeli teoretycznych możliwie bliskich rzeczywistości. Istotnym elementem tych modeli jest prawidłowo zdefiniowane obciążenie twarem. O ile określenie obciążeń statycznych nie stanowi obecnie problemu, o tyle precyzyjne zdefiniowanie oddziaływań dynamicznych, jest zagadnieniem dużo bardziej skomplikowanym. Pojazd szynowy stanowi złożony system mechaniczny, a jego masa jest często porównywalna z masą przęsła. Wielkość i rozkład mas, resorowanie i tłumienie w pojeździe wpływają istotnie na jakość analizy układu przęsło-pojazd. Tabor kolejowy poruszający się z pewną, często dużą prędkością, wywołuje drgania konstrukcji mostowej. Odpowiedź mostu wpływa jednocześnie na drgania pojazdu. Dodatkowym źródłem drgań są czynniki związane ze stanem technicznym nawierzchni kolejowej, konstrukcją oraz stanem technicznym samego pojazdu. Mamy zatem złożony, wzajemnie sprzężony układ dynamiczny, którego dokładna analiza

jest zadaniem niezwykle skomplikowanym. Na ogół w praktyce projektowej efekty dynamiczne obciążenia taboru są uwzględniane w sposób uproszczony. Powszechnie stosowane uproszczenia traktujące tabor jako układ poruszających się sił, nie pozwalają na pełną ocenę zjawiska.

W kontekście przedstawionych problemów, ważnym elementem procesu projektowania, budowy i utrzymania mostów jest zdefiniowanie zintegrowanego modelu konstrukcji i taboru. Od celu analizy zależy stopień szczegółowości tego modelu. Współczesne narzędzia numeryczne dają możliwość budowy bardzo złożonych modeli konstrukcji oraz pozwalają na ich zaawansowane analizy teoretyczne. Poprawność tych analiz zależy jednak wprost od prawidłowych założeń wstępnych, w tym poprawie przyjętych obciążeń. Praktyczne zastosowanie wypracowanych procedur i modeli w analizie dynamicznej konstrukcji pod obciążeniem ruchomym, wymaga określenia rzeczywistych parametrów dynamicznych pojazdu. W niniejszej pracy poruszono wybrane zagadnienia związane z identyfikacją oraz modelowaniem układu dynamicznego most-pojazd ruchomy. Z uwagi na obszerność problematyki w pracy nie rozważano:

- wpływu nawierzchni kolejowej na dynamikę układu,
- zjawisk zachodzących w obszarze bezpośredniego kontaktu koła i szyny,
- wpływu warunków posadowienia obiektów mostowych.

Za element szczególnie istotny uznano czynnik obciążający. Opracowanie metodyki identyfikacji cech dynamicznych pojazdu jest istotnym elementem prowadzącym do poprawnej definicji obciążenia kolejowego.

#### CEL PRACY

Celem pracy jest stworzenie procedury modelowania przejazdu taboru kolejowego po obiekcie mostowym przy uwzględnieniu interakcji dynamicznej pojazdu i konstrukcji. W szczególności prace autora mają na celu:

- 1) opracowanie metodyki identyfikacji parametrów dynamicznych rzeczywistego pojazdu szynowego,
- 2) zdefiniowanie uproszczonego, sprowadzonego do małej liczby stopni swobody modelu pojazdu szynowego, przydatnego w analizie dynamicznej układu most-tabor,
- 3) ocena efektywności normowego modelu dynamicznego obciążenia kolejowego.

#### TEZA PRACY

*Można sformułować model mechaniczny typowych pojazdów szynowych na podstawie danych eksperymentalnych, znacznie ograniczając jego stopień złożoności. Model taki może stanowić skuteczne narzędzie w analizie pracy konstrukcji pod rzeczywistym obciążeniem eksploatacyjnym.*

#### STRUKTURA DYSERTACJI

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów, podsumowania, dwóch załączników oraz zestawienia bibliograficznego.

W ROZDZIALE 1 dokonano przeglądu prac z zakresu analiz teoretycznych oraz badań in-situ kolejowych obiektów mostowych pod obciążeniem ruchomym.

W ROZDZIALE 2 scharakteryzowano konwencjonalny tabor kolejowy pod kątem budowy jego modelu mechanicznego. W sposób szczegółowy omówiono konstrukcję jednostki trakcyjnej serii EN57, którą w dalszej części pracy wykorzystano jako szynowy pojazd testowy.

ROZDZIAŁ 3 poświęcono zagadnieniom teoretycznym z zakresu identyfikacji parametrów modalnych konstrukcji inżynierskich. Dokonano ogólnej charakterystyki oraz podano przykłady praktycznego zastosowania wybranych metod. W sposób szczegółowy omówiono metodę realizacji własnej ERA, którą wykorzystano do identyfikacji parametrów modalnych rzeczywistego pojazdu szynowego.

Rezultaty identyfikacji przedstawiono w ROZDZIALE 4. Omówiono metodykę identyfikacji, przedstawiono wyniki badań eksperymentalnych oraz wyniki analiz teoretycznych.

ROZDZIAŁ 5 jest ostatnim rozdziałem pracy. Zdefiniowano w nim uproszczony model obciążenia kolejowego, bazując na zidentyfikowanych parametrach modalnych wzbudzonych postaci drgań wagonu. Na przykładzie dwóch rzeczywistych przęseł mostowych, przeprowadzono symulacje numeryczne przejazdu obciążenia po konstrukcji. Wyniki symulacji numerycznych porównano z rezultatami przeprowadzonych badań eksploatacyjnych.

Rozprawę kończy PODSUMOWANIE. Zawarto w nim główne wnioski płynące z przeprowadzonych prac oraz podano zamierzenia dalszych studiów autora.

Uzupełnieniem właściwego tekstu rozprawy są dwa załączniki. W ZAŁĄCZNIKU 1 zestawiono szczegółowe rezultaty przeprowadzonych testów metody ERA. W ZAŁĄCZNIKU 2 przedstawiono sformułowanie równań ruchu liniowego oscylatora poruszającego się po belce Eulera. Na bazie tego modelu, w rozdziale 5, zweryfikowano procedury obliczeniowe oprogramowania SOFiSTiK.



## Rozdział 1

# Prace z dziedziny dynamiki mostów kolejowych pod działaniem obciążeń ruchomych

*STRESZCZENIE.* W niniejszym rozdziale dokonano przeglądu prac z dziedziny dynamiki kolejowych obiektów mostowych pod działaniem obciążeń ruchomych. Przedstawiono rozwój modeli teoretycznych pojazdów szynowych, nawierzchni kolejowej oraz przęseł mostowych. Zwrócono uwagę na współczesne możliwości modelowania numerycznego konstrukcji przy wykorzystaniu MES. Przedstawiono wybrane prace poświęcone badaniom in-situ obiektów mostowych. W końcowej części rozdziału omówiono wytyczne normowe dotyczące analizy dynamicznej obiektów mostowych, ze szczególnym uwzględnieniem wymogów dla dużych prędkości ruchu. Szczególną uwagę zwrócono na czynnik obciążający.

### 1.1. UWAGI WSTĘPNE

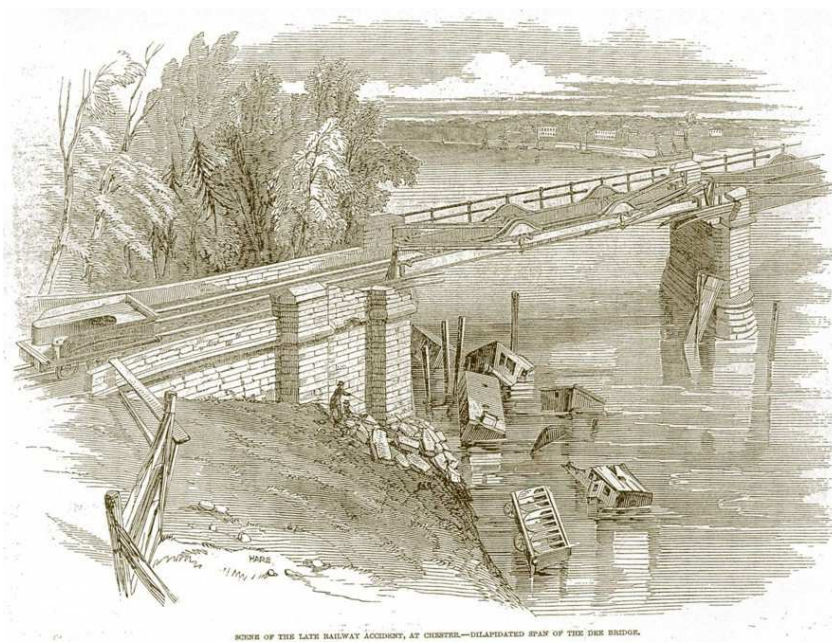
Dynamika to zagadnienie, którym zajmuje się wielu badaczy. Istnieje ogromny zasób wiedzy z tej dziedziny mechaniki, zebranej w wielu grupach tematycznych. Aparat matematyczny, teorie klasycznej mechaniki konstrukcji oraz metody numeryczne posłużyły autorowi jako narzędzie do osiągnięcia celów pracy, ale same w sobie nie były przedmiotem badań. Spośród szerokiego zbioru prac poświęconych dynamice konstrukcji, przytoczono jedynie reprezentatywne pozycje, które były przedmiotem prac studyjnych oraz pomogły autorowi w zrozumieniu podstaw teoretycznych i stworzeniu aparatu badawczego. Szerokie kompendium wiedzy z dziedziny dynamiki konstrukcji podali między innymi SOLECKI I SZYMKIEWICZ [1964], BRANICKI I WIZMUR [1980], CHMIELEWSKI I ZEMBATY [1998], LEWANDOWKI [2006], a także CLOUGH I PENZIEN [1993] oraz CHOPRA [1995]. Praktyczne zagadnienia związane z przygotowaniem eksperymentu oraz podstawy teoretyczne analizy i obróbki sygnałów pomiarowych, autor studiował w oparciu o pozycje SZABATIN [1982], KUCHARSKI [2002], STABROWSKI [2002], ZIELIŃSKI [2005] oraz LYONS [2003].

Dynamiką mostów interesowano się od początku XIX wieku. Szerokie spektrum oddziaływań zewnętrznych jakim poddawane są obiekty mostowe, czyni wspomnianą dyscyplinę wielo problemową. Mimo dużej zbieżności w opisie teoretycznym dynamiki mostów drogowych i kolejowych pod obciążeniem ruchomym, istnieje spore zróżnicowanie czynników mających wpływ na dynamiczne zachowanie się tych dwóch grup mostów (KLASZTORNY [1987]). Obciążenia użytkowe w mostach kolejowych mają charakter powtarzalny. Określona prędkość i rozstaw osi wagonów powodują, że przejeżdżający pociąg stanowi źródło cyklicznego wymuszenia o ustalonej częstotliwości. W przypadku mostów drogowych, stopień zagęszczenia, częstotliwość obciążania, rozstawy osi, ciężar i prędkości eksploatacyjne taboru mają charakter bardziej przypadkowy. Współczynnik masy pojazdu do ciężaru jednostkowego przęsła jest większy w przypadku obiektów kolejowych. Różnica występuje także w osiągniętych prędkościach eksploatacyjnych. Działanie dynamiczne pochodzące od taboru jest zatem bardziej istotne dla mostów kolejowych. Ważnym czynnikiem jest również konstrukcja i stan techniczny nawierzchni. Niedokładności geometryczne toru są źródłem dodatkowych drgań przestrzennych.

Ze względu na złożoność problemu oraz mnogość czynników mających wpływ na opis zjawiska, jest rzeczą niezwykle trudną, a wręcz niemożliwą, przedstawienie wszystkich prac poruszających tematykę ruchu pojazdu po konstrukcji mostu. Wymieniono jedynie te pozycje, które były przedmiotem prac studyjnych, pozwoliły zorientować się w aktualnym stanie wiedzy lub, zdaniem autora, miały istotny wpływ na rozwój poruszanej tematyki. Wśród wielu opracowań poświęconych analizie i badaniom dynamiki konstrukcji pod obciążeniem ruchomym, na uwagę zasługują prace polskich uczonych. Zagadnieniem zajmowali się m. in.: BIELEWICZ, BIENIŃSKI, BOROWICZ, CHUDZIKIEWICZ, GŁOMB, JENDRZEJEK, KĄCZKOWSKI, KISIŁOWSKI, KLASZTORNY, LANGER, NALESZKIEWICZ, PODWÓRNA, SOLECKI, SZYMKIEWICZ, SZCZEŚNIAK, ŚNIADY i wielu innych.

## 1.2. KOLEJOWE OBIEKTY MOSTOWE POD OBCIĄŻENIEM EKSPLOATACYJNYM

Początek praktycznych rozważań o dynamice mostów kolejowych pod obciążeniem ruchomym dał udany projekt parowozu Stephensona (1829 r.). Ważnym wydarzeniem była pierwsza w historii i tragiczna w skutkach katastrofa żeliwnego, kolejowego mostu w 1847 roku w Anglii (rys. 1.1.). Obiekt przekraczał rzekę Dee w miejscowości Chester i stanowił element szlaku kolejowego prowadzącego do portu Holyhead.



Rys. 1.1. Rycina przedstawiająca katastrofę mostu kolejowego nad rzeką Dee w mieście Chester (Anglia 1847 r.)  
(źródło fot. [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org))

Zdarzenie pochłonęło pięć ofiar, a jego skutkiem była szeroka analiza przyczyn katastrofy. Jednym z elementów dochodzenia było określenie wpływu przejeżdżającego pociągu na wielkość przemieszczeń i naprężeń w belkach przęsła. Niektórzy inżynierowie twierdzili, że poruszające się z dużą prędkością obciążenie działa na przęsło jak obciążenie nagle przyłożone (impulsowe) i powoduje znacznie większe przemieszczenia w porównaniu do statycznych. Druga grupa inżynierów była zdania, że na skutek ruchu ze znaczną prędkością, obciążenie „nie zaistnieje” na konstrukcji na tyle długo, aby mogło wywołać większe od statycznych przemieszczenia dynamiczne. Prace WILLIS’A [1849] i STOKES’A [1849] wykonane na potrzeby ekspertyzy, są z histo-

rycznego punktu widzenia zaliczane do pionierskich w dziedzinie dynamiki konstrukcji pod obciążeniem ruchomym. Autorzy badali maksymalne ugięcia oraz trajektorie ruchu obciążenia dla dwóch przypadków: przy uwzględnieniu masy obciążenia i pominięciu masy przęsła oraz przy pominięciu masy obciążenia i uwzględnieniu masy przęsła. Opis wykonanych doświadczeń, założenia oraz przybliżone rozwiązania teoretyczne podane przez autorów, można znaleźć w pracy TIMOSHENKO [1953]. Autorzy stwierdzili ostatecznie, że dla istniejących mostów wpływy dynamiczne obciążenia będą stosunkowo niewielkie.

W tym samym czasie, w Niemczech, prowadzone były badania na rzeczywistych obiektach mostowych. Ich celem było określenie wpływu prędkości ruchu lokomotywy na przemieszczenia pionowe przęseł (TIMOSHENKO [1953]). Badania potwierdziły wnioski wyciągnięte przez WILLIS'A i STOKES'A. Wyniki pokazały co prawda wzrost przemieszczeń przęseł przy wzroście prędkości ruchu, jednak efekt ten był mały z uwagi na nieznaczne prędkości osiągnięte przez ówczesny tabor kolejowy.

Na przestrzeni kolejnych dziesięcioleci tematyka ruchu pojazdu po konstrukcji mostu była przedmiotem prac wielu badaczy. W dalszym ciągu dziedzina ta jest rozwijana, a praktyczne wnioski płynące z prac, są wykorzystywane przy projektowaniu i budowie szybkiego taboru i magistral kolejowych.

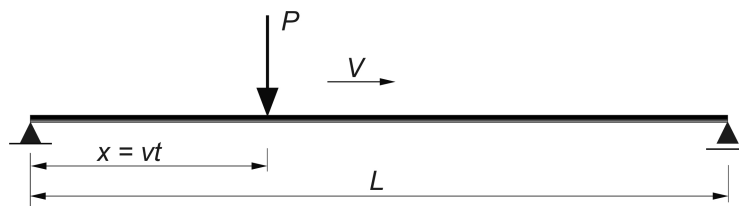
SOLECKI I SZYMKIEWICZ [1964] przedstawili analityczne rozwiązania niektórych zagadnień podstawowych. Analizowali ruch siły skupionej, siły harmoniczej, układu sił skupionych oraz masy skupionej po belce swobodnie podpartej oraz belce dwuprzęsłowej. Szeroki opis zagadnień związanych z dynamiką mostów kolejowych można znaleźć w monografii FRYBY [1996]. KLASZTORNY [2005] przedstawił sformułowania i rozwiązania podstawowych zagadnień związanych z dynamiką belkowych, jednorowowych mostów kolejowych, poddanych działaniu pociągów szybkojeznych. Rozważania oparł na przestrzennych modelach mostów, toru kolejowego i pojazdu szynowego. Analizę drgań konstrukcji dla różnych, płaskich modeli obciążenia kolejowego przedstawił FRYBA [1972]. Szczególnie szeroko omówił rozwiązania dla jednowymiarowych elementów belkowych. Rozwiązania dla dwuwymiarowych elementów płytowych oraz półprzestrzeni sprężystej, ograniczył dla przypadku obciążenia ruchomą siłą skupioną oraz obciążeniem liniowym. YANG, YAU I WU [2004] przedstawili modele trójwymiarowe obciążenia oraz zagadnienia związane z interakcją dynamiczną pojazdu i konstrukcji mostu. Warta podkreślenia jest analiza zjawiska rezonansu w odniesieniu do ruchu strumieni obciążeń skupionych, symulujących rzeczywisty pojazd kolejowy. Poruszono również zagadnienia stabilności ruchu pojazdu po obiekcie mostowym, poddanym wymuszeniu sejsmicznemu. Na uwagę zasługuje również monografia KISIŁOWSKI [1991] będąca rozwinięciem książki CHUDZIKIEWICZ I INNI [1982]. Pozycje te opisują wybrane zjawiska dynamiczne występujące w układzie mechanicznym pojazd szynowy-tor i powstały głównie w oparciu o prace badawcze prowadzone przez autorów w latach 1980 – 1987. W książkach przedstawiono zagadnienia dotyczące budowy i analizy liniowych i nieliniowych modeli matematycznych pojazdu szynowego oraz toru kolejowego. Oprócz rozważań teoretycznych, zaprezentowano założenia i rezultaty badań eksperymentalnych mających na celu identyfikację wybranych parametrów pojazdu i toru kolejowego. Kompendium wiedzy dotyczącej dynamiki pojazdów szynowych i toru kolejowego zawiera monografia IWNICKI [2006]. Autorzy dokonali ogólnego przeglądu problemów i zjawisk występujących podczas ruchu pojazdu po torze oraz budowy i modelowania wspomnianych układów mechanicznych. Podsumowali aktualny stan wiedzy i dotychczasowe dokonania w zakresie teoretycznym, eksperymentalnym i pomiarowym. ESVELD [1989] przedstawił zagadnienia związane z budową,

eksploatacją i utrzymaniem toru kolejowego. Opisał zjawiska zachodzące w torze na skutek działania obciążeń eksploatacyjnych.

We wszystkich wspomnianych powyżej, zbiorczych monografiach można znaleźć bogatą bibliografię przedmiotu.

### 1.2.1. Modele teoretyczne pojazdów szynowych, nawierzchni kolejowej oraz przęseł mostowych w analizach dynamicznych

Do momentu wynalezienia komputera cyfrowego w latach 50-tych ubiegłego wieku, prace z dziedziny dynamiki mostów pod obciążeniem ruchomym koncentrowały się na rozwiązywaniu zagadnień podstawowych. Rozwiązania i wnioski formułowano w oparciu o metody analityczne ścisłe lub przybliżone (KLASZTORNY [2005]). Pierwsze rozwiązania dotyczyły przypadku siły skupionej poruszającej się ze stałą prędkością po belce Bernoulliego-Eulera (rys. 1.2).



Rys. 1.2. Model siły o stałej wartości poruszającej się po belce ze stałą prędkością

Ten najprostszy model znajduje swoje zastosowanie przy założeniu, że masa obciążenia jest mała w porównaniu z masą jednostkową belki. W rozwiązaniu pomija się zatem czynnik bezwładnościowy obciążenia a uwzględnia jedynie masę belki. Zagadnienie to po raz pierwszy przedstawili KRYŁOW [1905] oraz TIMOSHENKO [1908]. Założenia, równanie różniczkowe ruchu oraz przybliżone rozwiązanie przy wykorzystaniu transformacji całkowitej Fourier'a, można znaleźć w pozycji FRYBA [1972].

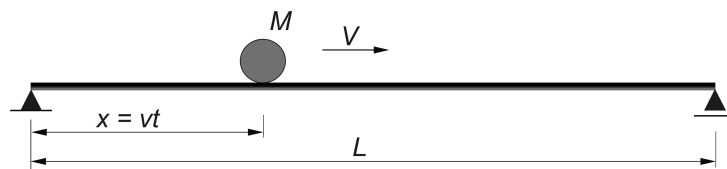
Szczególnym przypadkiem okazała się lokomotywa parowa, która nie tylko oddziaływała na most jako poruszające się obciążenie, ale z racji swojej konstrukcji była źródłem dodatkowych, poziomych drgań cyklicznych. Badania naukowe tego problemu zapoczątkował TIMOSHENKO [1922], który rozważył przypadek siły harmonicznego poruszającej się po belce ze stałą prędkością. W pracach INGLIS [1934] oraz TIMOSHENKO I YOUNG [1955] zagadnienie to zostało rozszerzone o przypadek oscylatora harmonicznego. OLSSON [1991] rozważył drgania swobodnie podpartej belki wywołane siłą skupioną poruszającą się ze stałą prędkością. Rozwiązanie analityczne porównał z rozwiązaniem MES. W pracy MICHALTSOS [2002] autor analizował dynamiczną odpowiedź swobodnie podpartej belki Euler'a pod wpływem poruszającej się ze zmienną prędkością siły skupionej. Równanie ruchu zapisał we współrzędnych modalnych a rozwiązanie uzyskał za pomocą całki Duhamel'a. GARINEI [2006] rozważył dynamikę przęsła belkowego pod wpływem ruchomej siły skupionej oraz ruchomej siły harmonicznego. Analizował wpływ prędkości ruchu, tłumienia w konstrukcji oraz fazy i częstości siły harmonicznego na przemieszczenia dynamiczne belki. Podobne rozważania przedstawili ABU-HILAL I MOHSEN [2000] dla belek o różnych schematach statycznych.

Dzięki swojej prostocie, model ruchomej siły skupionej znalazł swoje zastosowanie w analizach bardziej złożonych układów dynamicznych. Na jego podstawie, w wielu pracach autorzy testowali i weryfikowali przyjęte algorytmy obliczeniowe, m. in. YANG I LIN [1995].

W przypadku znaczącej masy pojazdu w stosunku do masy jednostkowej przęsła, istotna staje się inercja obciążenia. Rozważając ten przypadek, badacze zastąpili bezmasową siłę sku-



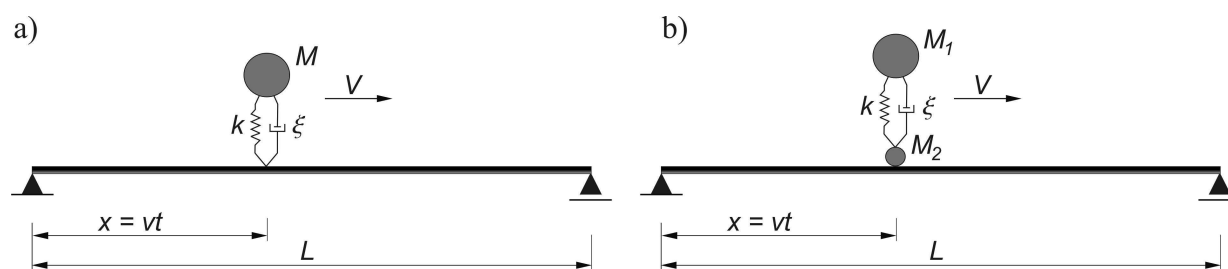
pioną obciążeniem w postaci masy skupionej (rys. 1.3). Pionierskie rozwiązania podane przez wspomnianych już WILLIS'A i STOKES'A dotyczyły przypadku ruchu masy skupionej po bezmasowej belce. Podobne założenia zastosował ZIMMERMANN [1896]. Pierwsze rozwiązania przy uwzględnieniu masy belki przedstawił SALLER [1921] oraz JEFFCOTT [1929]. NALESZKIEWICZ [1953] wychodząc z zależności na energię potencjalną i kinetyczną dla układu pojazd-most, rozważył drgania belki swobodnie podpartej obciążonej ruchomą siłą skupioną i masą skupioną. W obu przypadkach uwzględnił masę belki i pominął tłumienie w układzie.



Rys. 1.3. Model masy skupionej poruszającej się po belce ze stałą prędkością

Zagadnienie ruchu masy skupionej przedstawili również AKIN i MOFID [1989], analizując dynamikę belki o różnych schematach podparcia. Wykorzystując rozkład modalny wektora przemieszczeń, różniczkowe równanie ruchu przetransformowali do układu sprzężonych równań zwyczajnych i scałkowali numerycznie. Otrzymane rezultaty porównali z rozwiązaniem MES. MICHALTSOS, SOPHANOPOULOS, KOUNADIS [1996] porównali model masy skupionej z modelem siły skupionej poruszającej się po belce Euler'a. Badali przemieszczenia środka przęsła dla różnych wartości prędkości, masy obciążenia oraz masy jednostkowej belki. Podobne studia przeprowadzili FODA i ABDULJABBAR [1998]. LEE [1996<sup>1</sup>], analizując zmienność siły kontaktu pomiędzy masą i belką, badał możliwość separacji obu elementów modelu. Do rozważań przyjął belkę Euler'a o schemacie swobodnie podpartym oraz obustronnie utwierdzonym. Macierzowe równanie ruchu sprowadził do postaci bezwymiarowej i scałkował numerycznie przy wykorzystaniu metody Rungego-Kutty. Rozwiązania przedstawił dla różnych prędkości oraz masy obciążenia. Analogiczne studia autor przeprowadził w pracy LEE [1996<sup>2</sup>] dla belki Tomoszenki. Wykorzystując model ruchomej masy skupionej, ICHIKAWA, MIYAKAWA i MATSUDA [2000] rozważyli drgania belki ciągłej.

Modele dynamiczne przedstawione na rys. 1.2 oraz 1.3 pozwalają na analizowanie odpowiedzi konstrukcji, nie dają jednak możliwości analizy drgań samego pojazdu oraz wzajemnej interakcji obu podukładów. Pierwsze resorowane pojazdy modelowano w postaci skupionej masy i więzów sprężystych lub lepko-sprężystych (oscylator jednomasowy). Rozwinięciem tego modelu jest uwzględnienie nieresorowanej masy zestawu kołowego (oscylator dwumasowy). Wspomniane układy pokazano na rys. 1.4.



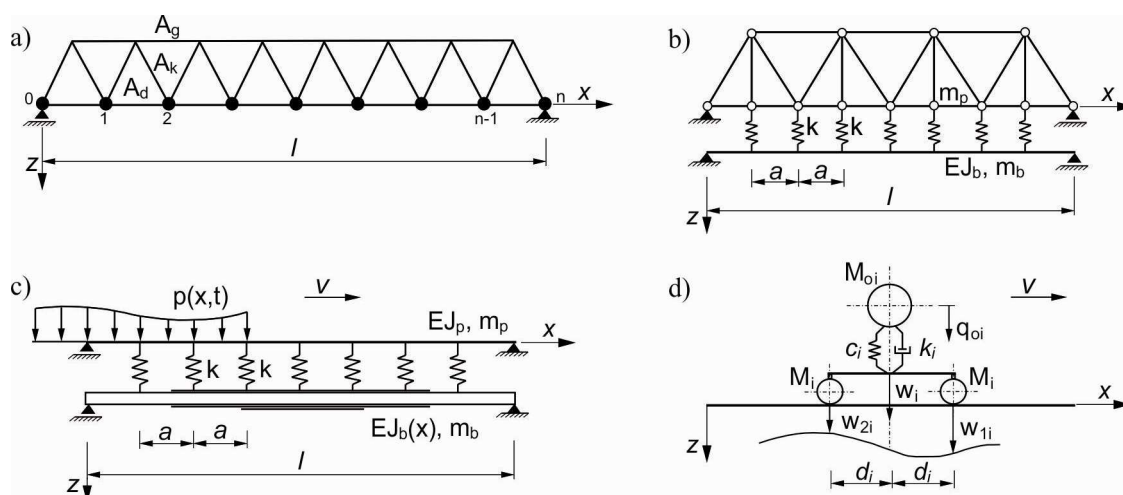
Rys. 1.4. Model jednomasowego (a) i dwumasowego (b) lepko-sprężystego oscylatora poruszającego się po belce. Oznaczenia:  $V$  – prędkość ruchu oscylatora,  $M$  – masa całego pojazdu,  $M_1$  – masa nadwozia,  $M_2$  – masa zestawu kołowego,  $k$  – sztywność resorowania,  $\xi$  – liczba tłumienia resorowania

KĄCZKOWSKI [1967] rozważył zagadnienie drgań belki swobodnie podpartej pod wpływem poruszającej się ze stałą prędkością masy resorowanej. W rozważaniach pominął tłumienie belki i resorowania. Równanie równowagi dynamicznej sformułował w postaci niejednorodnego równania całkowego typu Voltery drugiego rodzaju<sup>1</sup>, a przybliżone rozwiązanie uzyskał na drodze numerycznej. Ciekawą pozycją, opartą na analogicznych modelach pojazdu i przęsła, jest praca JENDRZEJEK [1971]. Autor analizował wpływ różnych parametrów mostu i pojazdu na wielkość sprzężenia dynamicznego pomiędzy pojazdem i mostem. Za miernik współpracy pojazdu i konstrukcji mostu przyjął przyrost siły w sprzężynie resoru. Analizę przeprowadził w zależności od rodzaju konstrukcji mostu, rozpiętości przęsła, prędkości przejazdu oraz sztywności zawieszenia. Podobne rozważania autor przeprowadził w pracy JENDRZEJEK [1973] przy uwzględnieniu tłumienia w pojeździe i konstrukcji. PASTEREV I BERGMAN [1997] analizowali odpowiedź dynamiczną dowolnych elementów sprężystych obciążonych ruchomym, liniowym oscylatorem oraz zewnętrznym obciążeniem statycznym o dowolnym rozkładzie. SZCZEŚNIAK, ATAMAN, ZBICIAK [2002] rozważyli model jednomasowego oscylatora lepko-sprężystego, poruszającego się po belce Bernoulliego-Euler'a. Autorzy analizowali zmienność przemieszczeń środka przęsła oraz masy pojazdu dla różnych wartości tłumienia, masy obciążenia i prędkości ruchu. Drgania wymuszone układu oscylator – belka opisali układem równań różniczkowych sprzężonych o zmiennych współczynnikach. Matematyczne rozwiązanie uzyskali metodą Bubnowa-Galernika<sup>2</sup>. Drgania swobodne od momentu zjazdu oscylatora z belki opisali dwoma niezależnymi równaniami różniczkowymi o stałych współczynnikach. Ostatecznie, równania ruchu sprowadzili do postaci bezwymiarowej i rozwiązali numerycznie metodą Rungego-Kutty (patrz. zał. 2). Model masy resorowanej wykorzystali również YANG I LIN [2005], rozważając interakcję dynamiczną pojazdu i belkowego przęsła. Pominęli tłumienie resoru oraz belki. Do zapisu równań ruchu wykorzystali zasadę superpozycji modalnej. Rozwiązanie uzyskane przy wykorzystaniu całki Duhamel'a porównali z rozwiązaniem MES.

Na przestrzeni lat zagadnienie drgań mostu wywołane ruchomym pojazdem było rozwijane i adaptowane do bardziej złożonych modeli konstrukcji. Analizie poddawano struktury belkowe o różnych schematach statycznych, proste i zakrzywione w planie (KLASZTORNY [2005]). Pojawiły się również rozwiązania dla płyt swobodnie podpartych, dźwigarów kratownicowych, łukowych oraz mostów wiszących i podwieszonych. Przyjmowano coraz bardziej złożone modele pojazdów, rozbudowując układ jednomasowy w systemy o wielostopniowym resorowaniu i rozkładzie masy. W modelach uwzględniano parametry mechaniczne nawierzchni kolejowej. Rozwijano teorie pozwalające na opis zjawisk zachodzących w obszarze kontaktu koła i szyny. Analizowano struktury płaskie i przestrzenne. Szczególny postęp w omawianej dziedzinie nastąpił wraz z rozwojem maszyn cyfrowych i technik numerycznych.

LANGER [1973] rozważył zagadnienie ruchu dwumasowego, lepko-sprężystego oscylatora po dźwigarze powierzchniowym o dowolnym rozkładzie masy i sztywności. Uwzględnił resorowaną i nieresorowaną masę pojazdu oraz możliwość dodatkowego wzbudzenia bezwładnościowego każdej z mas. Ostateczne równanie ruchu sformułował w postaci macierzowego, niejednorodnego równania różniczkowego o zmiennych współczynnikach. W pracy LANGER [1974] przedstawione zostało przybliżone rozwiązanie numeryczne równania dla konkretnego przypadku przęsła mostowego. RAKOWSKI I ŚWITKA [1973], wykorzystując metodę równań różnicowych, rozważyli drgania pionowe kratownicy płaskiej wymuszone siłą skupioną poruszającą się ze stałą prędkością (rys. 1.5a). Masę kratownicy skupili w węzłach pasa, po którym porusza się obciążenie. Bardziej złożony model przedstawili LANGER I KLASZTORNY [1982] (rys. 1.5b). Autorzy

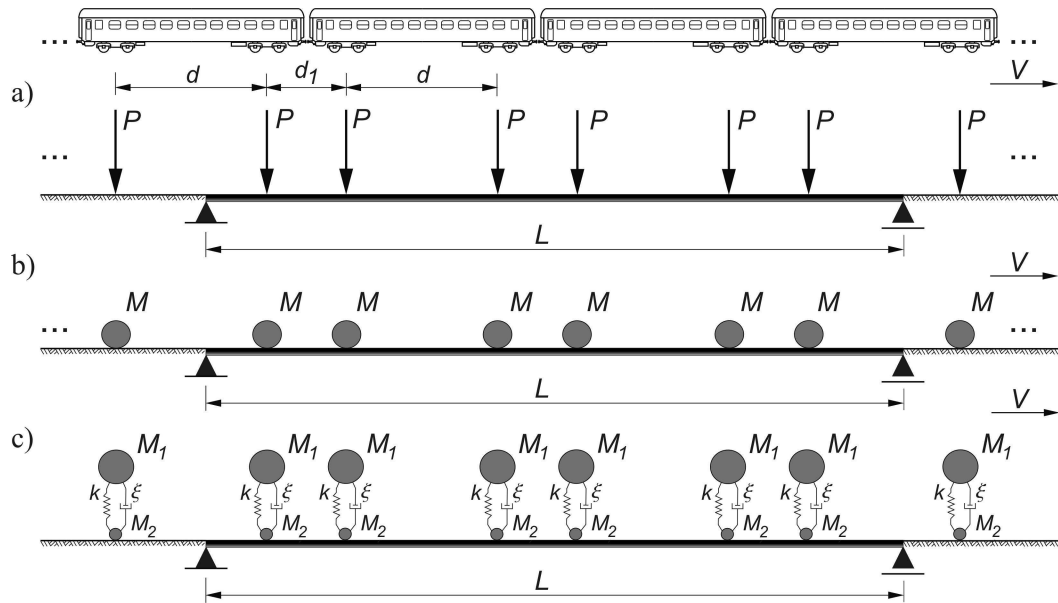
podjęli próbę uwzględnienia współpracy pomostu i dźwigara kratowego. Rozważyli przypadek kratownicy swobodnie podpartej o masie rozłożonej wzdłuż pasa dolnego, współpracującego ze zginanym, pełnościennym dźwigarem pomostowym (podłużnica jezdni kolejowej). Współpraca została zapewniona poprzez więzi sprężyste odwzorowujące odkształcalne poprzecznice. Jako model obciążenia przyjęli masę skupioną poruszającą się po dźwigarze pomostowym ze stałą prędkością. Równania ruchu sformułowali w oparciu o równania Lagrange'a drugiego rodzaju, a przybliżone rozwiązania uzyskali metodą Newmark'a. Podobną analizę przeprowadzili LANGER I KLASZTORNY [1981] w odniesieniu do mostu kolejowego o pełnościennych dźwigarach głównych oraz zmiennego w czasie obciążenia ruchomego (rys. 1.5c). W pracy LANGER I KLASZTORNY [1983] autorzy rozbudowali model obciążenia kolejowego do dwóch niezależnych, trójmasowych oscylatorów wózkowych (rys. 1.5d).



Rys. 1.5. Modele dynamiczne analizowane w pracach: a) RAKOWSKI I ŚWITKA [1973], b) LANGER I KLASZTORNY [1982], c) LANGER I KLASZTORNY [1981], d) LANGER I KLASZTORNY [1983]

WANG, LIN I CHEN [2003] badali wpływ tłumika PTMD (Passive Tuned Mass Damper) na dynamikę układu most-tabor. W analizie przyjęli belkowy model mostu oraz trzy modele obciążenia ruchomego – układ sił skupionych, mas skupionych i oscylatorów dwumasowych. Analizowali efektywność zastosowania absorbera pod kątem zmiany parametrów dynamicznych pręśła i redukcji efektów rezonansowych. Podobne studia przeprowadzili SZCZEŚNIAK, JURKOWSKI I WINNICKI [2004]. Autorzy rozważyli drgania pionowe swobodnie podpartej belki z podwieszonym, jednomasowym, lepko-sprężystym absorberem. Jako model obciążenia przyjęli trójmasowy oscylator poruszający się ze stałą prędkością. Uwzględnili tłumienie oscylatora i belki oraz nierówności geometryczne belki w postaci funkcji harmonicznej. Otrzymane rezultaty porównali z przypadkiem belki bez podwieszonego tłumika.

Pierwsze symulacje obciążenia rzeczywistymi pojazdami szynowymi polegały na rozwinięciu modeli pojedynczych obciążeń skupionych w układy o strukturze cyklicznej (strumienie obciążeń). Rozstawy poszczególnych składowych przyjmowano w sekwencji regularnej (stały rozstaw) bądź odpowiadającej rozstawom osi wózków lub zestawów kołowych (rys. 1.6). Cykliczny charakter obciążenia może wywoływać niebezpieczne zjawiska rezonansowe. Wiele prac poświęcono badaniom tego problemu.

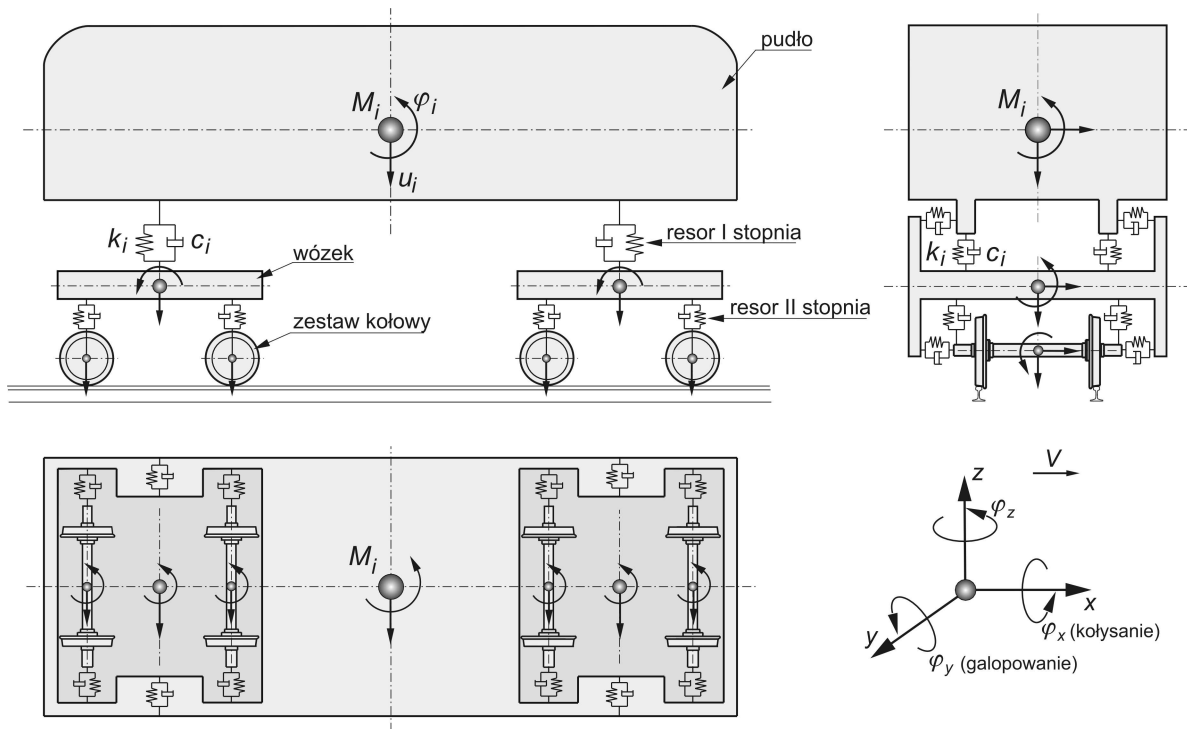


Rys. 1.6. Przykładowe strumienie obciążeń ruchomych: a) strumień sił skupionych, b) strumień mas skupionych, c) strumień lepko-sprężystych oscylatorów dwumasowych

BOROWICZ [1978] rozważył drgania belek jedno i wiele przęsłowych o różnych schematach podparcia. Rozwiązania przedstawił dla różnych modeli obciążenia ruchomego (siła skupiona, masa skupiona, jednomasowy oscylator lepko-sprężysty, strumień oscylatorów). KLASZTORNY [1990] oraz KLASZTORNY I LANGER [1990] analizowali drgania jednoprzęsłowej belki przenoszącej regularne strumienie obciążeń ruchomych. Przeprowadzili szeroką analizę możliwości wystąpienia rezonansów. W modelu belki założyli równomierny rozkład masy, stały przekrój i tłumienie wiskotyczne. Uwzględnili trzy przypadki obciążenia: strumień sił skupionych, mas skupionych oraz strumienie jedno i dwumasowych oscylatorów lepko-sprężystych. WU I DAI [1987] rozważyli przypadek belki ciągłej o różnych przekrojach przęseł poddanej obciążeniu w postaci strumienia sił skupionych. Do określenia odpowiedzi konstrukcji zastosowali metodę superpozycji modalnej. Rozwiązania porównali z modelem MES. Ciekawym elementem pracy jest uwzględnienie zmiennej prędkości ruchu i stałego przyspieszenia oraz wpływu tych wielkości na przemieszczenia przęsła. Dynamikę belki ciągłej o stałym i zmiennym przekroju analizowali również HENCHI I INNI [1997] przy wykorzystaniu MES. Jako obciążenie przyjęli układ sił skupionych w jednakowym rozstawie, poruszający się ze stałą prędkością. YANG, YAU I HSU [1997] rozważyli dynamikę przęsła belkowego obciążonego strumieniem sił oraz mas skupionych. Dokonali analizy wpływu tłumienia, rozpiętości belki oraz prędkości ruchu na wielkość współczynnika przeciążenia dynamicznego. Podali warunki zaistnienia rezonansu w konstrukcji. Drgania rezonansowe swobodnie podpartego dźwigara mostowego badali również LI I SU [1999]. Porównali model, w którym obciążenie stanowił strumień sił skupionych z modelem w postaci sekwencji pojazdów resorowanych. Podobnego porównania dla krótkich przęseł mostowych dokonali MUSEROS I INNI [2002]. Uwzględnili dodatkowo wpływ nawierzchni kolejowej typu zamkniętego. YANG I YAU [1997] analizowali interakcję dynamiczną belkowego, swobodnie podpartego przęsła i pojazdu szynowego w postaci układu dwumasowych oscylatorów lepko-sprężystych. Uwzględnili nierówności toru kolejowego oraz podatność tłuczni, modelując nawierzchnię dyskretnymi elementami sprężystymi. Rezultaty otrzymali na drodze numerycznej i porównali z wynikami dla ruchomej masy skupionej oraz jednomasowego oscylatora sprężystego. W pracy YAU, YANG I KUO [1999], bazując na analogicznym modelu obciążenia i toru kole-

jowego, autorzy rozbudowali model konstrukcji do trójprzęsłowej belki ciągłej. Badali wpływ sztywności podsypki, nierówności toków szynowych oraz sztywności i tłumienia zawieszenia pojazdu, na przyspieszenia konstrukcji przęsła i pojazdu. YANG I FONDER [1998] analizowali drgania przestrzenne kabli dwupylonowego mostu podwieszonoego wywołane przejazdem pojazdu kolejowego. Jako obciążenie przyjęli strumień sił skupionych o parametrach odpowiadających szybkobieżnemu pociągowi TGV. Uwzględnili nieliniowość geometryczną kabli w zakresie dużych przemieszczeń i małych odkształceń. Przebiegi drgań kabli otrzymali w procesie iteracyjnym Newmark'a. YAU, WU I YANG [2001] badali drgania rezonansowe belki sprężysto podpartej, poddanej działaniu strumienia sił skupionych. Analizy prowadzili dla różnych wartości tłumienia belki. Wykazali dużą zgodność rozwiązania analitycznego z rozwiązaniem metodą elementów skończonych. Mechanizm powstawania rezonansu w układzie pojazd-most badali również XIA, ZHANG I GUO [2006]. Analizie poddali przęsła o różnych schematach statycznych. Jako obciążenie przyjęli strumienie sił skupionych, symulujące wybrane pociągi szybkobieżne (francuski TGV, niemiecki ICE3, japoński E500 i chiński CHT). CHENG, AU I CHEUNG [2001] analizowali wpływ nawierzchni kolejowej typu zamkniętego na współczynnik przeciążenia dynamicznego przęsła belkowego, obciążonego strumieniem sił skupionych oraz dwumasowych oscylatorów lepko-sprężystych. Model nawierzchni przyjęli w postaci belki na lepko-sprężystym, dyskretnym lub ciągłym podłożu. Uwzględnili nierówności szyn tocznych. Porównali wartości współczynników przeciążenia dynamicznego w zależności od prędkości, modelu obciążenia oraz modelu nawierzchni kolejowej. YAU I YANG [2006] badali przyspieszenia swobodnie podpartej belki pod wpływem układu sił skupionych poruszających się z prędkością rezonansową. Wykazali istotny wpływ wyższych modów w układach o małym tłumieniu na wielkość maksymalnego przyspieszenia przęsła. FRYBA [2001] analizował prędkości rezonansowe wybranych pociągów szybkobieżnych dla różnych rozpiętości przęseł. Analizie poddał przęsła belkowe o rozpiętościach od 5 do 40 m. Obciążenie ruchome stanowił układ sił skupionych w sekwencji odpowiadającej rozstawom osi wózków bądź zestawów kołowych wybranych pociągów.

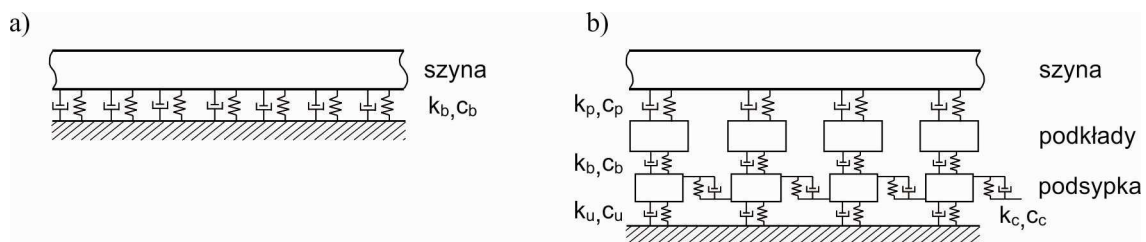
Wymagania stawiane projektowanym liniom dużych prędkości dotyczą przede wszystkim bezpieczeństwa i stabilności jazdy oraz komfortu pasażerów. Z punktu widzenia bezpieczeństwa ruchu (możliwości wykolejenia taboru), ważnym czynnikiem jest wzajemna relacja sił pionowych i poziomych powstających w obszarze kontaktu koła i szyny. Określenie kryteriów komfortu możliwe jest przy uwzględnieniu interakcji pojazdu i przęsła. Uwarunkowania te są przyczyną tworzenia złożonych, płaskich lub przestrzennych modeli mechanicznych pojazdów o wielu stopniach swobody. Modele dyskretne składają się najczęściej z tarcz lub brył sztywnych odwzorowujących pudła, wózki jezdne i zestawy kołowe. Elementy te połączone są lepko-sprężystym resorowaniem pionowym i poziomym. Masy poszczególnych elementów skupione są w środkach ich ciężkości. Wiele prac badawczych oparto na złożonych modelach dynamicznych taboru, a omówione wcześniej układy uproszczone służyły do weryfikacji otrzymywanych rozwiązań. Przykładowy, przestrzenny model jednostki pojazdu (wagon, lokomotywa) pokazano na rys. 1.7. Stanowi go układ brył sztywnych połączonych dwustopniowym resorowaniem lepko-sprężystym. Resorowanie między pudłem i wózkiem nazwano resorowaniem pierwszego stopnia. Resorowanie między wózkiem i zestawem kołowym nazwano resorowaniem drugiego stopnia. Model ma ogółem 31 uogólnionych stopni swobody. Uwzględnia przemieszczenia pionowe i poprzeczne poszczególnych mas, obroty pudła i wózków wokół trzech osi układu współrzędnych oraz dwa obroty każdego z zestawów kołowych.



Rys. 1.7. Przestrzenny model dynamiczny wagonu pojazdu szynowego o 31 stopniach swobody (na podstawie DINH, KIM, WARNITCHAI [2009])

W literaturze istnieją dwie zasadnicze metody opisywania wzajemnej interakcji układu pojazd-most (AU, WANG, CHEUNG [2001]). Najbardziej powszechny sposób polega na sformułowaniu sprzężonego układu równań ruchu jednocześnie dla całego systemu, a następnie rozwiązaniu go metodami całkowania bezpośredniego. Najczęściej stosowanymi algorytmami są tutaj metoda Newmark'a oraz  $\theta$ -Wilson'a (CLOUGH I PENZIEN [1993], LUBOWIECKA [2004], LEWANDOWSKI [2006]). Inny sposób polega na niezależnym sformułowaniu równań ruchu dla pojazdu i mostu. Równania te są następnie rozwiązywane w sposób iteracyjny do momentu zapewnienia geometrycznej zgodności i zrównoważenia sił w obszarze wzajemnego kontaktu pojazdu i mostu.

Obecność nawierzchni kolejowej wpływa na parametry dynamiczne konstrukcji oraz efekty wzajemnego oddziaływania taboru i przęśla. Wiele prac poświęcono analizie dynamicznej układu tor kolejowy – pojazd ruchomy. Stosowano modele jedno lub wielowarstwowe toru kolejowego (rys. 1.8).



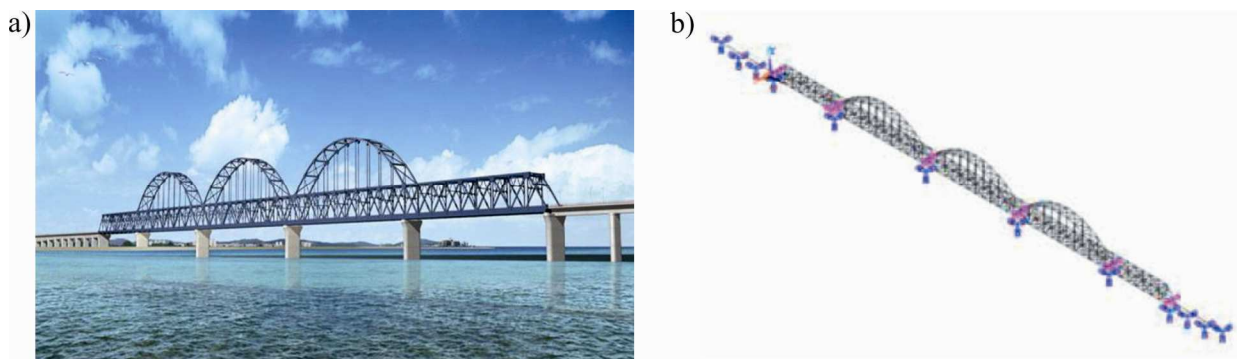
Rys. 1.8. Przykładowe modele toru kolejowego: a) model jednowarstwowy, b) model trójwarstwowy (na podstawie KNOTHE I WU [1998])

W modelach jednowarstwowych szyny kolejowe modelowano za pomocą belki Bernouliego-Euler'a lub belki Timoszenki, zaś podsypkę i przytwierdzenia odwzorowywano za pomocą dyskretnych elementów lepko-sprężystych. Modele wielowarstwowe uwzględniają wewnętrzną strukturę nawierzchni kolejowej poprzez dodatkowe masy podkładów, tłucznia i podbudowy.

Przykłady modeli dyskretno-ciągłych toru kolejowego oraz analizy wzajemnego oddziaływania pojazdu i toru można znaleźć m. in. w pracach ZICHA [1989], ZHAI I CAI [1997], KNOTHE I WU [1998], SUN I DHANASEKAR [2002], LEI I NODA [2002], BAEZA, RODA I NIELSEN [2006]. Analogiczne modele nawierzchni adoptowano do analiz przęseł mostowych pod obciążeniem ruchomym.

AU, WANG I CHEUNG [2001] badali dynamikę dwupylonowego mostu podwieszzonego. Przyjęli płaski model układu. Do dyskretyzacji MES mostu wykorzystali elementy prętowe. Uwzględnili nierówności geometryczne nawierzchni w postaci funkcji harmoniczej. Przyjęli złożony, płaski model pojazdu o 10-ciu stopniach swobody. Przeprowadzili analizę porównawczą otrzymanych wyników z rezultatami dla uproszczonych modeli obciążenia (układu sił skupionych, układ mas skupionych oraz układ dwumasowych oscylatorów lepko-sprężystych). Analogiczne modele mostu i pojazdu wykorzystano w pracy AU, WANG I CHEUNG [2002]. Przedstawiono analizę wpływu tłumienia w konstrukcji i pojeździe oraz wpływu nierówności toru na współczynnik przeciążenia dynamicznego przęsła i wybranych want. Funkcje nierówności generowano poprzez odwrotne przekształcenie Fouriera ich rozkładu widmowej gęstości mocy (ang. *Power Spectral Density* – PSD). Amplitudy i częstości rozkładu przyjmowano w zależności od klasy nawierzchni kolejowej według standardów amerykańskich. Podobny, płaski model obciążenia przyjęli WU I YANG [2003]. Autorzy analizowali dynamikę swobodnie podpartych przęseł belkowych. Uwzględnili jednowarstwowy model nawierzchni kolejowej oraz nierówności toru w postaci deterministycznych funkcji generowane na podstawie rozkładu PSD. Autorzy badali przemieszczenia i przyspieszenia przęseł, szyn kolejowych oraz taboru w zależności od prędkości ruchu (0 – 400 km/h). Na podstawie zmian indeksu Sperlinga<sup>3</sup>, przeprowadzili analizę komfortu jazdy. Procedury zweryfikowali w oparciu o model jednomasowego oscylatora sprężystego. KLASZTORNY [2003] badał dynamikę belkowych, jednotorowych mostów zespolonych na Centralnej Magistrali Kolejowej obciążonych pociągami dużych prędkości. Analizy prowadził w oparciu o dwuwymiarowe modele mostów, nawierzchni kolejowej i pojazdu szynowego. Zakres prędkości przyjął w przedziale 160 – 250 km/h. Model pojazdu składał się z czterech nierezorowanych mas skupionych reprezentujących zestawy kołowe, dwóch sztywnych tarcz masowych reprezentujących wózki jezdne oraz jednej tarczy masowej reprezentującej pudło wagonu (ogółem 10 stopni swobody). Model przęsła przyjął w postaci belki Timoszenki o skokowo zmiennym przekroju. Uwzględnił dwuwarstwowy model nawierzchni kolejowej o nieliniowych własnościach sprężysto-tłumiących. W rezultacie przedstawił czasowe przebiegi drgań oraz naprężeń przęseł dla różnych prędkości ruchu. Analogiczny model obciążenia przyjęli MAJKA, HARTNETT I O'DWYER [2004], analizując drgania głównego przęsła kratowego mostu Boyne, położonego wzdłuż linii kolejowej pomiędzy Dublinem i Belfastem w Irlandii. GYÖRGYI [2005] porównywał przebiegi drgań swobodnie podpartego przęsła dla trzech przypadków obciążenia: siły skupionej, strumienia sił skupionych oraz płaskiego modelu dynamicznego o 10-ciu stopniach swobody. Prace KLASZTORNY [2004<sup>1</sup>] oraz KLASZTORNY [2004<sup>2</sup>] dotyczą przestrzennego modelowania i analizy stalowych, jednotorowych mostów belkowych o jezdni zamkniętej w warunkach dużych prędkości. Model fizyczny pojazdu przyjęto o 23 stopniach swobody (w porównaniu z rys. 1.7 pominięto przemieszczenia pionowe zestawów kołowych oraz ich obroty wokół osi x). Uwzględniono wężykowanie i uderzenia boczne zestawów kołowych. Wężykowanie opisano stosując teorię mikro-poślizgów de'Patera<sup>4</sup>. Uderzenia boczne przyjęto o charakterze impulsowym. Model fizyczny toru przyjęto jako jednowarstwowy (belka na podłożu lepko-sprężystym). Przęsło zdyskretyzowano prętowymi elementami skończonymi o 12-tu stopniach

swobody. Autor analizował drgania oraz współczynniki przeciążenia dynamicznego przęsła, a także stabilność ruchu wężykowego zestawów kołowych w zakresie prędkości 160 – 270 km/h. Rozszerzeniem tych prac jest wspomniana już wcześniej monografia KLASZTORNY [2005]. LOU [2005], analizując dynamikę płaskiego układu most-tor-pojazd ruchomy, przyjął ciągły, jednowarstwowy model nawierzchni kolejowej. Równanie ruchu wyprowadził w oparciu o zasadę wariacyjną Hamilton'a. Model pojazdu przyjął w postaci sztywnej, masowej tarczy opartej lepko-sprężystości na dwóch zestawach kołowych (łącznie 4 stopnie swobody). Do dyskretyzacji przęsła zastosował elementy belkowe. W równaniu ruchu uwzględnił nierówności toków szynowych w postaci funkcji harmoniczej. Autor analizował przebiegi drgań środka przęsła oraz masy pułta, badając jednocześnie wpływ nawierzchni kolejowej na wspomniane wielkości. ZHANG, XIA I SUN [2005] analizowali interakcję dynamiczną taboru oraz łukowego, wieloprzęsłowego mostu Jinan Yellow (rys. 1.9). Obiekt ten stanowi ważne ogniwo linii kolejowej pomiędzy Pekinem i Szanghajem. Symulacje prowadzili dla trzech rodzajów taboru dużych prędkości: niemieckiego ICE3, japońskiego Seria 500 oraz chińskiego składu dużych prędkości. Jednostkę pojazdu (wagon, lokomotywa) wymodelowali w postaci dyskretnego układu o 31 stopniach swobody (por. rys. 1.7.). W celu określenia pionowych sił pomiędzy kołem i szyną, zastosowali teorię kontaktu Hertz'a (JOHNSON [1985]). Siły poziome pomiędzy kołem i szyną określili na podstawie teorii mikro-poślizgów Kalker'a (KALKER [1990]). Model MES mostu wykonali przy zastosowaniu elementów belkowych. Analizowany zakres prędkości przyjęli w przedziale 250 – 420 km/h. Autorzy badali przemieszczenia i przyspieszenia mostu i pojazdu oraz siły powstające pomiędzy kołem i szyną. W efekcie określili parametry pozwalające na ocenę bezpieczeństwa konstrukcji oraz stabilności ruchu taboru i komfortu jazdy.



Rys. 1.9. Most Janin Yellow: a) widok ogólny (źródło: <http://www.whatsonjinan.com>), b) prętowy model MES wykonany w programie ANSYS na potrzeby analizy (ZHANG, XIA I SUN [2005])

XIA, XU I CHAN [2000] analizowali dynamikę mostu wiszącego pod kątem bezpieczeństwa i komfortu. Przyjęli trójwymiarowy model MES mostu oraz przestrzenny, dyskretny model pojazdu o 27 stopniach swobody (w porównaniu z rys. 1.7 pominęli wężykowanie zestawów kołowych). W analizie uwzględnili pionowe i poziome nierówności szyn kolejowych uzyskane na podstawie pomiarów oraz nierówności zestawów kołowych w postaci funkcji harmoniczej. Analizowali drgania przestrzenne mostu i pojazdu oraz pionowe i poziome siły działające na zestawy kołowe. Analogiczny model pojazdu wykorzystali również ZHANG, VROUWENVELDER I WARDENIER [2001]. Autorzy analizowali dynamiczną interakcję belkowego przęsła i pojazdu szynowego. Uwzględnili jednowarstwowy model nawierzchni (belka na podłożu sprężystym) oraz pionowe i poziome nierówności toru. Deterministyczne funkcje nierówności otrzymali przez odwrotną transformację Fourier'a funkcji PSD. Pionową i poziomą interakcję pomiędzy



pojazdem i torem zapewnili poprzez wprowadzenie dodatkowych więzi sprężystych między kołem i szyną. Przedstawioną procedurę modelowania zweryfikowali w oparciu o przypadek masy sprężyste podpartej poruszającej się po belce Euler'a. XIA I INNI [2001] analizowali efektywność różnych sposobów wzmocnienia blachownicowych, jednoprzęsłowych mostów dwudźwigarowych z jazdą górą. Badali zmienność amplitud drgań dźwigarów dla różnych wariantów wzmocnienia w odniesieniu do konstrukcji pierwotnej. Analizy prowadzili dla taboru towarowego i pasażerskiego w zakresie prędkości odpowiednio 60 – 90 km/h oraz 80 – 160 km/h. W analizach numerycznych przyjęli złożony, przestrzenny model pojazdu o trójosiowych wózkach i liniowym zawieszeniu. Ciekawym elementem pracy jest uwzględnienie losowych funkcji wymuszających drgania układu, otrzymanych na podstawie pomierzonych przyspieszeń zestawów kołowych podczas ruchu pojazdu. W oparciu o zrealizowany wariant wzmocnienia, porównali rezultaty analiz teoretycznych z badaniami in-situ. GAO I PAN [2005] analizowali dynamikę układu most-tor-tabor, przyjmując belkowy model mostu, dwuwarstwowy, model nawierzchni oraz przestrzenny model pojazdu o 27 stopniach swobody. Pionową i poziomą interakcję pomiędzy kołem i szyną zapewnili stosując teorię kontaktu Hertz'a oraz teorię poślizgów Kalker'a. Uwzględnili możliwość utraty kontaktu pionowego na styku koła i szyny. MAJKA I HARNETT [2008] przeprowadzili parametryczną analizę wpływu rodzaju obciążenia, prędkości ruchu oraz tłumienia, na dynamiczną odpowiedź mostu i pojazdu. Analizowali ruch siły skupionej, masy skupionej, masy resorowanej oraz przestrzennego modelu obciążenia o 27 stopniach swobody. Konstrukcję mostu modelowali przestrzennymi elementami belkowymi stosując MES. Poprzez sprzężenie przemieszczeń zestawów kołowych z przemieszczeniami mostu, dokonali redukcji stopni swobody pojazdu. Bezwładność zestawów kołowych uwzględnili poprzez modyfikację macierzy w równaniu ruchu mostu. W efekcie otrzymali nieliniowe równanie ruchu mostu o czasowo zależnych macierzach. Rozwiązania otrzymali w oparciu o metodę całkowania bezpośredniego Newmark'a połączoną z procedurą iteracyjną Newtona-Raphsona<sup>5</sup>. BRUNI, COLLINA I CORRADI [2005] badali wpływ rodzaju nawierzchni kolejowej na lokalne efekty dynamiczne przęseł mostowych. Do analizy przyjęli cztery rodzaje nawierzchni kolejowej: dwa rodzaje prefabrykowanej nawierzchni rozważane przy projekcie mostu wiszącego nad Cieśniną Mesyńską, klasyczną nawierzchnię podsypkową oraz nawierzchnię podsypkową z dodatkowymi, gumowymi przekładkami pod podkładami. Dwa ostatnie rodzaje nawierzchni badali dla prefabrykowanych wiaduktów skrzynkowych usytuowanych wzdłuż linii szybkiego ruchu Rzym – Florencja. Analizowali przyspieszenia oraz siły przekazywane z nawierzchni na płytę pomostową podczas przejazdu pociągu dużych prędkości ETR500. Symulacje prowadzili w oparciu o dyskretny, przestrzenny model pojazdu, dwuwarstwowy model nawierzchni oraz powłokowe modele MES przęseł. Zaawansowaną teoretyczną pracą jest pozycja DINH, KIM I WARNITCHAI [2009]. Autorzy analizowali dynamikę dwuprzęsłowego mostu belkowego pod obciążeniem eksploatacyjnym. Do rozważań przyjęli przestrzenny model jednostki pojazdu o 31 stopniach swobody (por. rys. 1.7). Interakcję pomiędzy mostem i pojazdem uwzględnili przez wprowadzenie zastępczych więzi lepko-sprężystych pomiędzy kołem i szyną, na kierunku pionowym i poziomym. Do opisu pionowej interakcji wykorzystali teorię kontaktu Hertz'a. Kontakt stykowy pomiędzy kołem i szyną opisali za pomocą siły wzdłużnej i poprzecznej oraz momentu wiertnego związanego z ruchem wężykowym zestawów kołowych. Wielkości te określili stosując teorię mikro-poślizgów Kalker'a. Do generacji funkcji nierówności wykorzystali rozkłady widmowej gęstości mocy (PSD) dla różnych klas nawierzchni kolejowej wg FRA (*Federal Railroad Administration, USA*). Autorzy badali dynamiczną odpowiedź mostu, pudła wagonu oraz zestawów kołowych, przyjmując prędkości taboru w zakresie

50 – 400 km/h. Szczególną uwagę zwrócili na drgania mostu przy prędkościach rezonansowych obciążenia. Zakładając w analizie możliwość utraty kontaktu między kołem i szyną, badali możliwość wykolejenia się taboru. Dodatkowo, analizując przyspieszenia pudła, przeprowadzili dyskusję komfortu jazdy. Złożony model pojazd-prześło zweryfikowali przypadkiem jednomasowego oscylatora sprężystego.

### 1.2.2. Modele numeryczne prześel mostowych w analizach dynamicznych

Analityczna dynamika konstrukcji ma obecnie małe możliwości zastosowania z uwagi na rozbudowane systemy statyczne współczesnych mostów. W praktyce zatem, skazani jesteśmy na analizę numeryczną z wykorzystaniem oprogramowania MES. Modele numeryczne prześel wykonane na potrzeby analiz statycznych mogą być wykorzystane do dynamiki. Należy jednak pamiętać o istotnych parametrach i wielkościach, które są pomijalne (niepotrzebne) w analizach statycznych. Chodzi tu przede wszystkim o tłumienie oraz rzeczywistą masę (konstrukcyjną i niekonstrukcyjną). Masa w analizach dynamicznych jest kluczowym elementem, który decyduje o parametrach modalnych konstrukcji. Dlatego należy pamiętać o korygowaniu „modeli statycznych” o masy elementów, których tam nie uwzględniono (np. uźebrowania dźwigarów, poprzecznice, stężenia i inne drugorzędne elementy konstrukcyjnie). Podsypka, torowisko i wyposażenie drogowe mostu kolejowego to masy niekonstrukcyjne, które muszą zostać również uwzględnione.

Jednym z podstawowych elementów analizy dynamicznej konstrukcji jest rozwiązanie problemu własnego, zwanego potocznie analizą modalną. Zagadnienie to jest istotne z wielu powodów (SZAFRĄŃSKI, ŻÓŁTOWSKI [2013]):

- pozwala na identyfikację błędów strukturalnych w modelu, poprzez wskazanie miejsc kinematycznych,
- określa częstotliwości własne i stowarzyszone z nimi postacie drgań, dając jednocześnie podstawowe informacje o ewentualnej odpowiedzi konstrukcji w przypadku jej wzbudzenia oraz o ryzyku zaistnienia rezonansu,
- jest podstawą analizy dynamicznej w oparciu o superpozycję stanów modalnych,
- postacie własne mogą być źródłem wstępnych imperfekcji, przydatnych w nieliniowych analizach stateczności.

Systemy MES oferują zasadniczo dwie możliwości analizy dynamicznej struktur pod dowolnym obciążeniem:

- superpozycja modalna,
- ogólna metoda „time-step” oparta na procedurze Newmark’a-Wilsona.

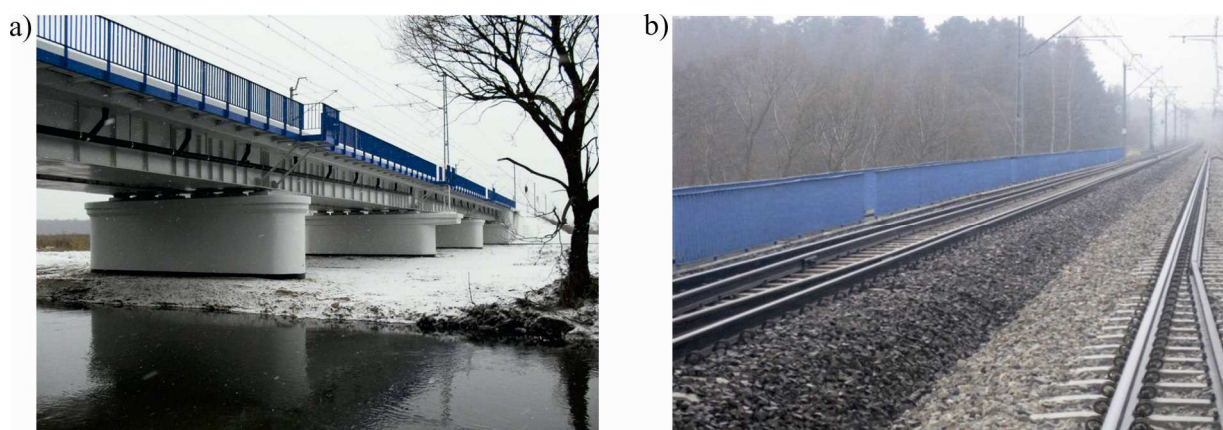
Superpozycja modalna polega na zastąpieniu rzeczywistego, często bardzo skomplikowanego układu o wielu stopniach swobody, układem zredukowanym, będącym kombinacją małej liczby modów. Taki zabieg istotnie zmniejsza zadanie numeryczne i może być równie skutecznym środkiem do uzyskania wystarczająco dokładnych wyników. Jednakże taka analiza wyklucza efekty nieliniowe z uwagi na przyjęte założenie o superpozycji. Ogranicza również analizę do zakresu częstotliwości, odpowiadającego liczbie przyjętych modów.

Ogólna metoda „time-step” oparta na procedurze Newmark’a-Wilsona jest znacznie bardziej uniwersalna, ponieważ umożliwia analizowanie dowolnych modeli pod dowolnym, opisanym dyskretnie obciążeniem. Uwzględnia, gdy zachodzi taka potrzeba, duże przemieszczenia, zagadnienia kontaktu oraz nieliniowość materiałową.

Współczesne systemy analizy MES dają szansę (z małym nakładem pracy) bardzo dokładnego symulowania badanych struktur przy wykorzystaniu modeli prętowych, powierzchniowych oraz bryłowych. Precyzyjna dyskretyzacja może pomóc w rozwiązaniu wielu istotnych problemów dotyczących pracy i wytrzymałości elementów mostu. Niestety analiza dynamiczna tak złożonych modeli jest zbyt czasochłonna i z powodu wielkości przetwarzanych plików, często niemożliwa do wykonania przy pomocy standardowych komputerów.

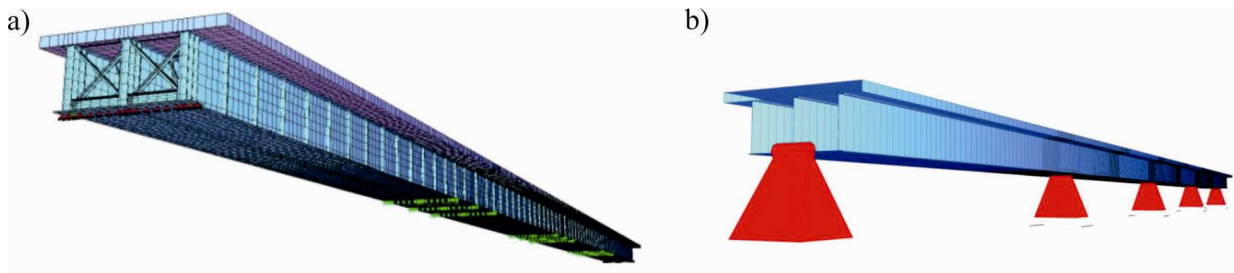
Wybór sposobu modelowania zależy od celu analizy. Jeżeli celem prac jest rozkład sił i wytrzymałość elementów konstrukcji (stan graniczny nośności), to model musi być wykonany z uwzględnieniem szczegółów strukturalnych. Wtedy gdy interesują nas wzbudzone drgania i ugięcia (stan graniczny użytkowania) model może być znacznie uproszczony. Często modele uproszczone tworzone do analiz dynamicznych są weryfikowane przez porównanie z modelami złożonymi służącymi do analiz statycznych. Standardową weryfikację przeprowadza się przez porównanie postaci i częstości własnych obu modeli. Sprawdza się w ten sposób poprawność rozkładu mas i sztywności.

Takie postępowanie zostało wdrożone przy realizacji projektu przebudowy mostu przez rzekę Pilicę na CMK pod Częstochową (rys. 1.10). Most przebudowano z dostosowaniem do prędkości 300 km/h (ŻÓŁTOWSKI I INNI [2010]).



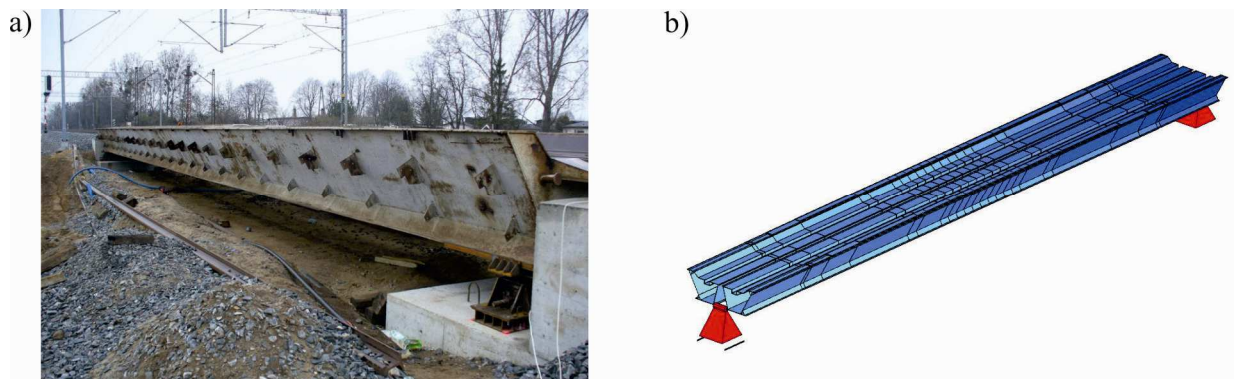
Rys. 1.10. Most nad rz. Pilicą na linii CMK na odcinku Zawiercie – Grodzisk Mazowiecki: a) widok ogólny mostu po przebudowie, b) nawierzchnia kolejowa na obiekcie (fot.: Rafał Falkiewicz – POLWAR S.A.)

W pierwszej fazie analiz wykonano złożony, powłokowo-belkowy model numeryczny uwzględniający fazy budowy i szczegóły konstrukcyjne (rys. 1.11a). Obliczenia dynamiczne prowadzono zgodnie z zaleceniami CNTK [2002] oraz PN-EN 1991-2 [2007]. Symulacje przejazdów obciążenia po konstrukcji prowadzono w oparciu o model HSLM-A (typy od A1 do A10). Zakres prędkości wynosił 160 - 360 km/h z podziałem co 10 km/h. Z racji dużej ilości obliczeń jakie należało wykonać (21 prędkości x 10 typów pociągów – każdy z przejazdów trwa 7 ÷ 14 s, krok czasowy dobrano równy 0,01 s), wykonano odrębny model składający się wyłącznie z elementów belkowych (rys. 1.11b). Parametry uproszczonego modelu (sztywność, masa, częstości drgań własnych) zostały skalibrowane z modelem szczegółowym, użytym do analizy statyczno-wytrzymałościowej. Szacunkowa wartość tłumienia konstrukcyjnego została dobrana zgodnie z zaleceniami pkt. 6.4.6.3.1. normy PN-EN 1991-2 [2007].

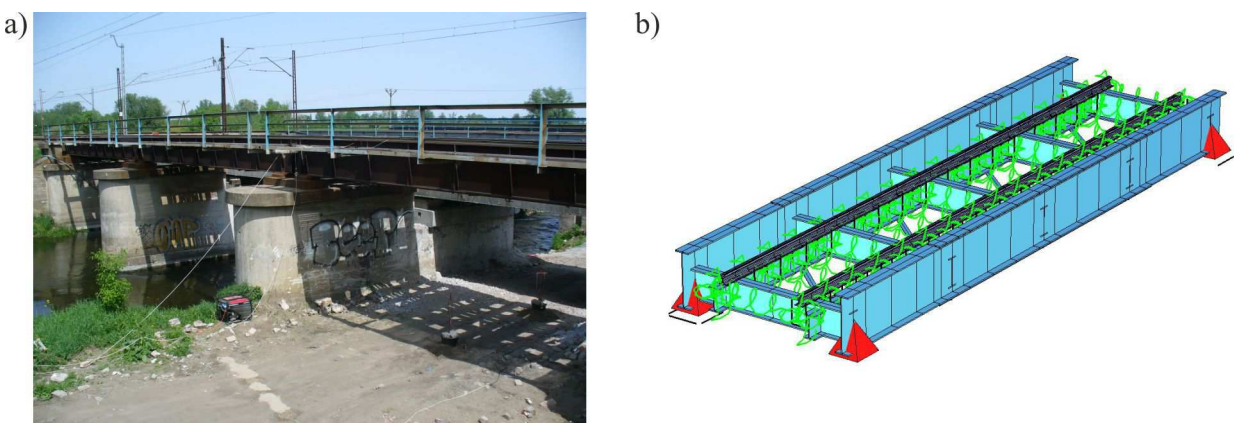


Rys. 1.11. Modele numeryczne mostu nad rzeką Pilicą: a) model powłokowo-prętowy do analiz statyczno-wytrzymałościowych, b) model belkowy do analiz dynamicznych przejazdu obciążenia po konstrukcji

Inne podejście zastosowano podczas symulacji efektów dynamicznych na przęśle konstrukcji odciążającej KO30 (rys. 1.12) oraz przęśle mostu nad rzeką Radunią (rys. 1.13). Na potrzeby analiz wykonano uproszczone modele belkowe a ich parametry skalibrowano w oparciu o przeprowadzone badania „in-situ”. Założenia teoretyczne zastosowanych metod identyfikacji zamieszczono w rozdziale 3. Charakterystykę obu konstrukcji, opis przeprowadzonych badań oraz rezultaty analiz teoretycznych przedstawiono w rozdziale 5.

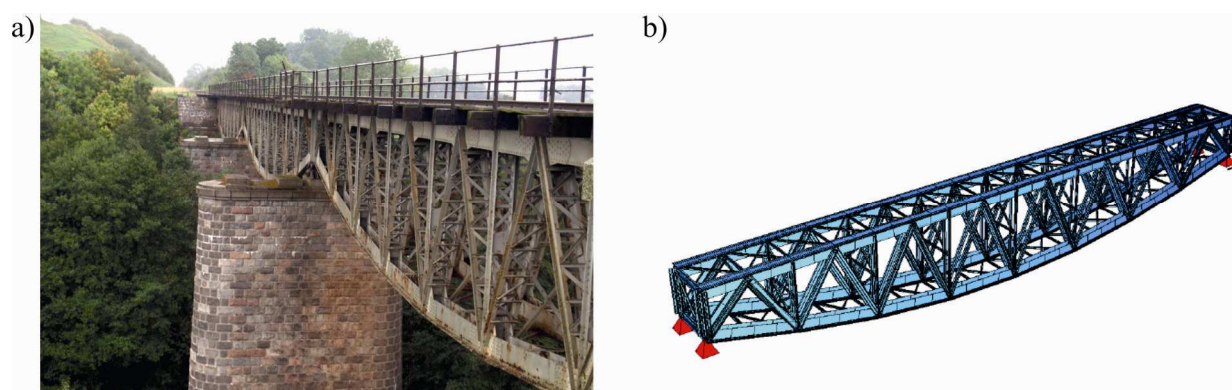


Rys. 1.12. Tymczasowa konstrukcja odciążająca KO30: a) widok ogólny wbudowanego przęsła, b) belkowy model numeryczny (SOFiSTiK)



Rys. 1.13. Most nad rzeką Radunią w Gdańsku (km 321,153 linii nr 009): a) widok ogólny, b) belkowy model numeryczny pojedynczego przęsła (SOFiSTiK)

Kolejny przykład analiz dynamicznych dotyczył historycznego mostu kolejowego w ciągu linii kolejowej Gdynia – Kościerzyna (magistrala węglowa) w Żukowie (rys. 1.14a). Linia jest w ciągłej eksploatacji i często obsługuje transporty ponadnormatywne.



Rys. 1.14. Most kolejowy w Żukowie: a) widok ogólny, b) prętowy model przęsła wykorzystany do analiz statycznych i dynamicznych (SOFiSTiK)

Analiza dynamiczna przejazdu obciążenia po konstrukcji została wykonana dla lokomotywy spalinowej ST44 oraz pojazdu Norca-32 (MÜLLER [2012]). W obu przypadkach zastępcze modele obciążenia przyjęto w postaci układu sił skupionych odpowiadających naciskom i rozstawom osi pojazdów. Model przęsła przyjęto w postaci przestrzennej kratownicy o sztywnych połączeniach prętów w węzłach (rys. 1.14b). Do dyskretyzacji wykorzystano elementy belkowe. Model ten wykorzystywano zarówno w analizach statyczno-wytrzymałościowych jak i analizach dynamicznych.

Przy współczesnych narzędziach MES, modelowanie przęseł mostowych do analiz dynamicznych jest zatem stosunkowo prostym zadaniem. Zasadnicza trudność polega na poprawnym przyjęciu tłumienia w konstrukcji oraz cech mechanicznych toru.

### 1.2.3. Badania eksploatacyjne obiektów mostowych

Długotrwała eksploatacja oraz czynniki środowiskowe, wpływają na stan techniczny obiektów mostowych. Ponadto ryzyko uszkodzenia konstrukcji rośnie wraz z czasem jej użytkowania ze względu na efekty zmęczeniowe. Ocena aktualnej nośności konstrukcji wobec zaistniałych uszkodzeń lub czasowej degradacji, stanowi częste zagadnienie badawcze. Przykładami mogą być prace CHRÓSCIELEWSKI, SZAFRAŃSKI, ŻÓŁTOWSKI [2004], SIWOWSKI, SOBALA, ŻÓŁTOWSKI [2005], ŻÓŁTOWSKI, SZAFRAŃSKI [2009]. Autorzy prowadzili badania numeryczne w oparciu o szerokie studium dokumentacji technicznej oraz szczegółową inwentaryzację uszkodzeń konstrukcji.

W wielu przypadkach modele teoretyczne są trudne do zdefiniowania z uwagi na brak dokumentacji, trudności w określeniu rzeczywistych parametrów materiałowych oraz stopnia degradacji konstrukcji. W tej sytuacji, potrzebną wiedzę na temat aktualnego stanu konstrukcji dostarczają badania in-situ.

Ważną rolę badań in-situ jest weryfikacja założeń projektowych i poprawności wykonania konstrukcji po wybudowaniu nowego lub modernizacji istniejącego obiektu. Na przykładzie wybranych obiektów drogowych i kolejowych, CHRÓSCIELEWSKI I INNI [2005] oraz CHRÓSCIELEWSKI I INNI [2007] zaprezentowali wypracowane koncepcje obliczeniowe oraz sposoby modelowania przęseł mostowych na potrzeby próbných obciążeń. Wykazali dużą zgodność rezultatów uzyskanych dla przestrzennych modeli MES z wynikami badań in-situ.

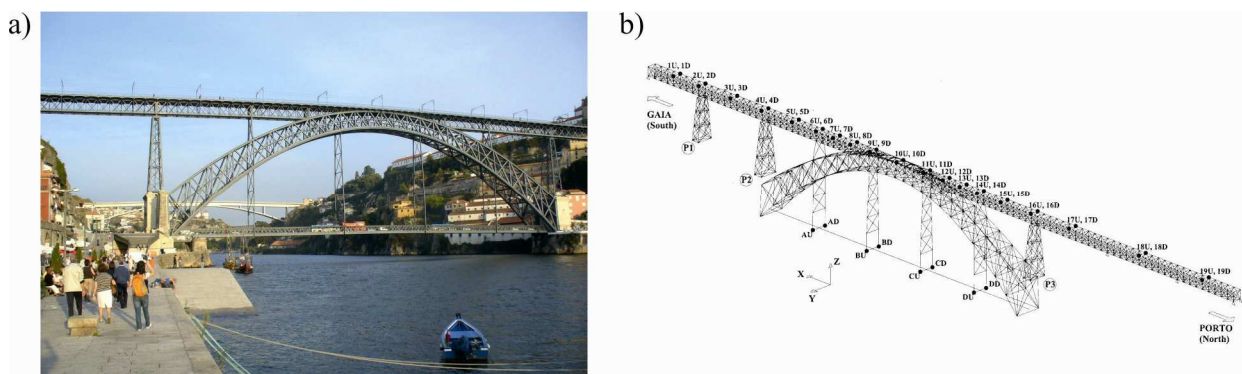
Wobec modernizacji istniejących szlaków kolejowych, częstym zadaniem jest określenie przydatności istniejących obiektów do nowych wymogów eksploatacyjnych (ŻÓŁTOWSKI I INNI [2010]). W większości przypadków problem dotyczy zwiększenia obciążenia użytkowego lub

prędkości ruchu taboru. Oprócz kontroli wielkości statycznych, konieczne jest również określenie odpowiedzi dynamicznej konstrukcji pod ruchem. Służą temu badania eksploatacyjne (dynamiczne) w warunkach rzeczywistego obciążenia użytkowego. Metodyka tych badań opiera się na określeniu odpowiedzi konstrukcji poddanej działaniu wymuszenia w postaci przejeżdżającego pojazdu. Wielkościami mierzonymi są najczęściej odkształcenia, przemieszczenia i przyspieszenia w wybranych punktach konstrukcji. Analiza i odpowiednia obróbka uzyskanych sygnałów, pozwala na określenie żądanych parametrów dynamicznych przęsła. Ich porównanie z wartościami teoretycznymi, pozwala na ocenę poprawności pracy oraz bezpieczeństwa eksploatacyjnego obiektu.

Dla obiektów o szczególnym znaczeniu komunikacyjnym, stawia się często wymogi stałej kontroli w postaci systemów monitoringu. Monitorowanie konstrukcji pozwala w dłuższym okresie czasu na ocenę poprawności jej pracy, detekcję i ocenę zaistniałych uszkodzeń, zmian parametrów dynamicznych, prognozowanie żywotności oraz ocenę wielkości oddziaływań zewnętrznych. Monitorowanie konstrukcji może odbywać się w sposób ciągły lub okresowy. Przykład pierwszego rozwiązania przedstawiono w pracach MALINOWSKI, RUTKOWSKI [2005] oraz HILDEBRAND, MALINOWSKI, ŻÓŁTOWSKI [2009]. Autorzy scharakteryzowali zainstalowane systemy pomiarowe, umożliwiające „ciągłe” badanie zachowania się konstrukcji mostu III Tysiąclecia im Jana Pawła II w Gdańsku oraz mostu podwieszonoego przez Wisłę w Płocku. W pracach BIEŃ I INNI [2004] oraz ZWOLSKI I INNI [2007] przedstawiono możliwości okresowego monitorowania cech dynamicznych konstrukcji przez zastosowanie przenośnych wzbudników drgań. Podano przykłady badań prowadzonych na mostach drogowych i kolejowych oraz rezultaty identyfikacji parametrów dynamicznych badanych obiektów (częstotliwości i postaci drgań). Zwrócono uwagę na możliwość wykrywania uszkodzeń w konstrukcji poprzez śledzenie zmian jej parametrów dynamicznych.

Badania eksploatacyjne służą również weryfikacji i kalibracji modeli numerycznych. Zaawansowane narzędzia analizy MES pozwalają na technicznie wystarczające odwzorowanie konstrukcji (ŻÓŁTOWSKI [2009]). Zasadniczą trudnością jest jednak poprawne określenie tłumienia. Obecność elementów drugorzędnych, w szczególności nawierzchni kolejowej (masy niekonstrukcyjne), wpływa istotnie na parametry dynamiczne przęsła. Wiele prac poświęcono badaniom zachowania się konstrukcji w rzeczywistych warunkach eksploatacyjnych.

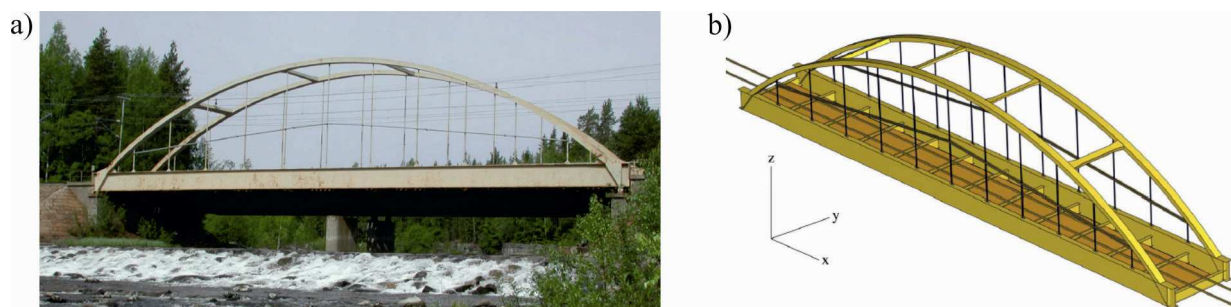
FRYBA I PIRNER [2001] zaprezentowali doświadczenia z zakresu monitorowania oraz badań statycznych i dynamicznych wybranych obiektów mostowych prowadzonych od 1968 r. w Czechach i na Słowacji. CALCADA, CUNHA I DELGADO [2002] analizowali interakcję dynamiczną pojazdu metra oraz drogowo-kolejowego mostu Luiza I w Porto (rys. 1.15).



Rys. 1.15. Most Luiza I nad rzeką Douro w Porto (Portugalia): a) widok ogólny, b) prętowy model MES (CALCADA, CUNHA I DELGADO [2002])

Badania prowadzili pod kątem bezpieczeństwa konstrukcji mostu oraz komfortu jazdy pasażerów. W analizach numerycznych przyjęli złożony model pojazdu, składający się z trzech połączonych ze sobą wagonów o dwustopniowym, liniowym zawieszeniu oraz przestrzenny, prętowy model MES mostu. Parametry dynamiczne przęśla (częstotliwości drgań, postacie drgań) uzyskali na podstawie badań in-situ.

Podobne badania przeprowadzili MARQUES I INNI [2007] dla kolejowego, kratowego mostu Trezoi w Portugalii. W symulacjach numerycznych wykorzystali model obciążenia w postaci strumienia jednomasowych oscylatorów lepko-sprężystych. Rezultaty analiz teoretycznych porównali z wynikami badań in-situ. SU I INNI [2007] analizowali dynamikę typowych mostów RC położonych na magistrali Shinkansen w Japonii. W analizach numerycznych przyjęli dyskretny model pojazdu (każdy z wagonów o 27 stopniach swobody) oraz model MES przęseł. Analizowali wpływ prędkości ruchu oraz nierówności toru kolejowego na przyspieszenia konstrukcji przęśla. Rezultaty analiz numerycznych zweryfikowali podczas badań in-situ. XIA I INNI [2003] badali dynamikę mostu Antoining, położonego w ciągu linii dużych prędkości Bruksela – Paryż. Badania prowadzili w dwóch etapach. W pierwszym etapie, na podstawie pomierzonych drgań środowiskowych, wyznaczyli parametry modalne konstrukcji (częstości i postacie drgań swobodnych). W drugim etapie badali odpowiedź konstrukcji na wymuszenie pociągiem dużych prędkości Thalys. Mierzyli odkształcenia, przemieszczenia oraz przyspieszenia konstrukcji dla prędkości przejazdu w zakresie  $265 \div 310$  km/h. W pracy XIA, ZHANG, DE ROECK [2003] porównano rezultaty powyższych badań z wynikami analiz teoretycznych. ERMOPOULOS I SPYRAKOS [2006] przedstawili rezultaty analiz numerycznych MES oraz rezultaty badań in-situ stalowego przęśla kratowego z jazdą górą. Celem prowadzonych prac było określenie aktualnej nośności oraz sposobu wzmocnienia konstrukcji pod kątem zwiększenia obciążenia użytkowego. XIA, ZHANG I SUN [2005] prowadzili złożone badania eksploatacyjne betonowego, skrzynkowego mostu nad rzeką Gouhe. Obiekt położony jest w ciągu testowego odcinka szybkiej magistrali kolejowej Qin – Shen w Chinach. Konstrukcję mostu stanowi 28 swobodnie podpartych, prefabrykowanych przęseł sprężonych. Nawierzchnię wykonano z betonowych prefabrykatów z zamocowanymi szynami kolejowymi. Podczas badań mierzono pionowe i poziome przemieszczenia, przyspieszenia oraz odkształcenia przęseł, poziome i pionowe siły w szynach oraz przyspieszenia pudeł wagonów. Prędkości ruchu mieściły się w przedziale  $160 - 307$  km/h. Szczególną uwagę zwrócono na wielkości, które warunkują bezpieczeństwo i stabilność jazdy oraz komfort pasażerów (współczynniki wykolejenia, współczynniki przeciążenia dynamicznego, siły poziome między kołem i szyną, przyspieszenia nadwozia). W pracach XIA I ZHANG [2005] oraz ZHANG, XIA I GUO [2008] przeprowadzono obszerne studia teoretyczne. Ich rezultaty porównano z wynikami badań in-situ. MALM I ANDERSSON [2006] badali dynamikę stalowego, łukowego mostu kolejowego z jazdą dołem (rys 1.16a).



Rys. 1.16. Analizowany most (MALM I ANDERSSON [2006]): a) widok ogólny, b) prętowy model MES (ABAQUS)

Przyczyną badań były znaczne drgania wieszaków, zaobserwowane podczas przejazdu taboru po przęśle. Na podstawie pomierzonych przyspieszeń i odkształceń wieszaków, określono ekstremalne amplitudy drgań, częstości drgań, współczynniki dynamiczne oraz liczby tłumienia. Rezultaty badań in-situ porównano z wynikami symulacji numerycznych, opartych na przestrzennym modelu MES mostu i pojazdu kolejowego (rys 1.16b). Na podstawie hipotezy Palmgrena-Minersa<sup>6</sup> przedstawiono prognozę pojawienia się spękań zmęczeniowych w wieszakach, w zależności od dobowego obciążenia eksploatacyjnego mostu.

RIGUEIRO, REBELO I DA SILVA [2007] analizowali dynamikę płytowych wiaduktów sprężonych, położonych w ciągu linii kolejowej Linz – Wels w Austrii. Przeprowadzili analizę porównawczą wpływu różnych typów nawierzchni kolejowej na odpowiedź czasową i częstotliwościową przęseł. Weryfikację modeli teoretycznych przeprowadzili w oparciu o przeprowadzone badania eksploatacyjne. Dla tych samych obiektów, REBELO I INNI [2005] przeprowadzili identyfikację częstości drgań, postaci drgań oraz liczb tłumienia, na podstawie zapisu drgań swobodnych, rejestrowanych bezpośrednio po zjeździe taboru z konstrukcji. W pracach KWARK I INNI [2004] oraz KWARK I INNI [2005] autorzy analizowali dynamikę betonowego mostu Yeon-Jae, położonego w ciągu testowego odcinka koreańskiej magistrali kolejowej dużych prędkości KHSR. Porównali maksymalne przemieszczenia i przyspieszenia przęseł uzyskane podczas badań eksploatacyjnych z wynikami symulacji numerycznych. WOŁOWICKI, STURZBECHER I APANAS [2005] prowadzili badania eksploatacyjne wybranych obiektów mostowych linii kolejowej Knapówka – Góra Włodowska. Celem badań była ocena możliwości dostosowania badanych konstrukcji do ruchu pojazdów z dużymi prędkościami. Autorzy analizowali przemieszczenia i przyspieszenia przęseł podczas przejazdu lokomotywy testowej z zadaną prędkością. Oceny dokonali w oparciu o stosowne przepisy normatywne. Podobne badania prowadzili HEIDEN I STADLER [2009] dla wybranych wiaduktów linii kolejowej pomiędzy Wiedniem i Salzburgiem. Celem badań była ocena możliwości dopuszczenia ruchu pociągów z prędkościami przekraczającymi 250 km/h. Zidentyfikowane na podstawie badań częstości drgań oraz liczby tłumienia, wykorzystali do aktualizacji modeli numerycznych stworzonych na potrzeby projektu badawczego. W pracach LIU I INNI [2009<sup>1</sup>] oraz LIU I INNI [2009<sup>2</sup>] przedstawiono rezultaty badań eksploatacyjnych oraz analiz numerycznych zespolonego wiaduktu Sesia, położonego w ciągu linii kolejowej dużych prędkości Turyn – Mediolan. Podczas badań mierzono drgania środowiskowe konstrukcji oraz odpowiedź mostu na wymuszenie pociągiem dużych prędkości ETR500Y. Na podstawie drgań środowiskowych zidentyfikowano współczynniki tłumienia oraz postaci i częstości drgań swobodnych mostu. Podczas przejazdów pociągu rejestrowano przebiegi odkształceń i przyspieszeń w wybranych punktach konstrukcji. Otrzymane wyniki porównano z rezultatami analiz numerycznych, prowadzonych dla dwóch przypadków: bez uwzględnienia interakcji pojazd-most (model pojazdu w postaci sił skupionych) oraz przy uwzględnieniu interakcji (model dynamiczny pojazdu o 15-tu stopniach swobody). Rozszerzeniem prac jest pozycja GUO I INNI [2012], w której autorzy rozbudowali model pojazdu do układu o 27 stopniach swobody oraz uwzględnili trójwarstwowy model nawierzchni kolejowej (por. rys. 1.8b).

#### 1.2.4. Wytyczne i przepisy normowe

Normy i wytyczne do projektowania konstrukcji mostowych określają obciążenie taborem kolejowym w sposób uproszczony. Stosowane modele obciążeń pomijają efekty współdziałania masy pojazdu i przęśla. Złożoność układów mechanicznych wagonów i lokomotyw sprawia duże trudności w matematycznym ich odwzorowaniu. Dlatego mimo ogromnych możliwości maszyn



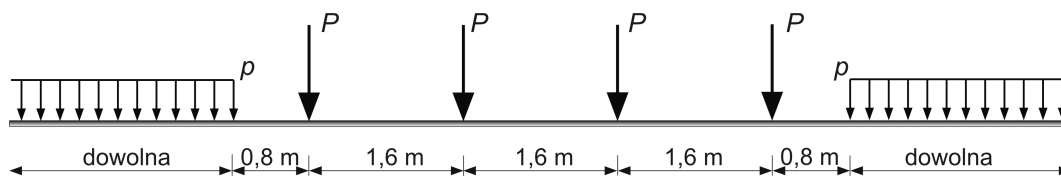
cyfrowych i procedur MES, trudno uzyskać zgodność techniczną z rzeczywistością. Z tego powodu w wytycznych do projektowania zaleca się stosowanie konserwatywnych modeli uproszczonych, sprowadzających pojazd do strumienia niezależnych sił skupionych.

Polska norma PN-85/S-1030 [1985] uwzględnia następujące rodzaje obciążeń, związanych z ruchem taboru po konstrukcji przęsła:

- obciążenie pionowe,
- obciążenie siłami hamowania i przyspieszania taboru,
- obciążenie siłami odśrodkowymi,
- obciążenie siłami wynikającymi z uderzeń bocznych zestawów kołowych o główki szyn.

Obciążenia siłami hamowania i przyspieszania oraz uderzeń bocznych, przyjmuje się w postaci zastępczych sił skupionych, działających odpowiednio podłużnie i poprzecznie do osi toru na poziomie główki szyny.

Schemat podstawowego, pionowego obciążenia statycznego przedstawia rys. 1.17. Stanowi go układ czterech sił skupionych o wartości charakterystycznej 250 kN każda i rozstawie 1,6 m oraz obciążenie równomiernie rozłożone o wartości 80 kN/m i dowolnej długości. Należy zaznaczyć, iż schemat ten jest przyjmowany umownie i znacznie odbiega od rzeczywistego obciążenia kolejowego.



Rys. 1.17. Model pionowego obciążenia taborem kolejowym wg PN-85/S-1030 [1985]

Efekty dynamiczne uwzględnia się mnożąc obciążenie statyczne przez współczynnik dynamiczny zdefiniowany empirycznie:

$$\begin{aligned} \varphi &= 1,67, \quad \text{dla } L \leq 3,6m, \\ \varphi &= \frac{1,44}{\sqrt{L} - 0,2} + 0,82, \quad \text{dla } 3,6m \leq L \leq 65m, \\ \varphi &= 1,0, \quad \text{dla } L \geq 65m, \end{aligned} \quad (1.1)$$

gdzie  $L$  oznacza długość obliczeniową analizowanego elementu. Współczynnik dynamiczny wg (1.1) obowiązuje dla prędkości ruchu  $v \leq 160$  km/h. Stosuje się go niezależnie od rodzaju konstrukcji mostu, dla nawierzchni bezpodsytkowych oraz podsytkowych o grubości podsypki do 0,5 m. Współczynnika dynamicznego nie stosuje się przy obliczaniu ugięć, sił od hamowania i przyspieszania taboru, sił odśrodkowych i uderzeń bocznych. Ze względu na właściwości tłumiące podsypki, w sytuacji gdy tor ułożony jest na warstwie podsypki o grubości  $0,5m < h \leq 1,0m$ , można przyjmować bardziej korzystne wartości współczynnika dynamicznego:

$$\varphi(h) = 1 + \frac{(1-h)(\varphi-1)}{0,5}, \quad (1.2)$$

gdzie  $\varphi$  oblicza się zgodnie z (1.1). Dla grubości podsypki  $h > 1,0$  m, współczynnik dynamiczny przyjmuje się równy jedności.

W latach 1955 – 1959 Międzynarodowy Urząd Badań i Prób (ORE) przeprowadził badania doświadczalne na 37 stalowych mostach kolejowych w celu określenia efektów dynamicznych

wywołanych ruchomym obciążeniem (KĘDZIERSKI [1972], KLASZTORNY [1987]). W efekcie, dla trakcji elektrycznej, wyznaczono empiryczne wzory określające współczynniki dynamiczne przy prędkościach do 200 km/h:

- dla dźwigarów głównych:

$$\varphi_b = 1 + \frac{120 + 9L}{L(\sigma_s + 12,5)} \cdot \frac{1,5v}{v + 50}, \quad (1.3)$$

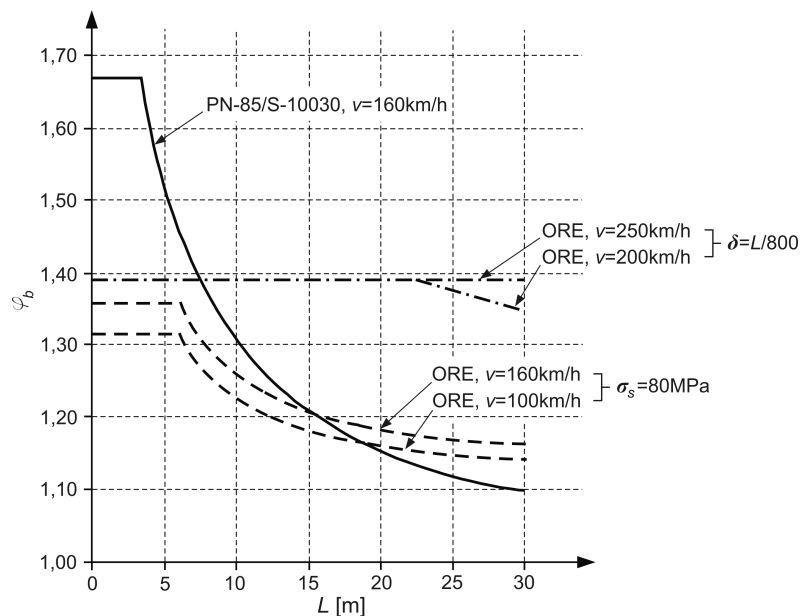
- dla podłużnic:

$$\varphi_p = 1 + \frac{150 + 20a}{2a(\sigma_s + 12,5)} \cdot \frac{1,5v}{v + 50}, \quad (1.4)$$

gdzie  $\sigma_s$  [MPa] oznacza naprężenie od obciążenia ruchomego w warunkach quasi-statycznych,  $v$  [km/h] – prędkość,  $L$  [m] – długość, natomiast  $a$  [m] – rozstaw poprzecznic. ORE podała również empiryczny wzór określający średni współczynnik dynamiczny dla dźwigarów głównych przy prędkościach  $v = 200 \div 300$  km/h:

$$\varphi_b = \frac{1 + 65\kappa}{1 - \kappa + \kappa^2}, \quad (1.5)$$

gdzie  $\kappa = v/2Lf$ ,  $f$  [Hz] – podstawowa częstość drgań własnych przęsła obciążonego. Na rys. 1.18. przedstawiono przebieg współczynnika dynamicznego dla dźwigarów głównych według polskiej normy PN-85/S-1030 [1985] na tle wykresów odpowiadających zaleceniom ORE. Wykresy różnią się znacznie.



Rys. 1.18. Wykresy współczynników dynamicznych dla dźwigarów głównych stalowych mostów kolejowych gg wytycznych ORE i PN (źródło KĘDZIERSKI [1972])

Przykład ten pokazuje, iż na przestrzeni lat brak było jednoznacznego podejścia w określaniu efektów dynamicznych obciążenia. Normy i wytyczne krajów europejskich różniły się między sobą w sposobie wyznaczania współczynników dynamicznych, uzależniając ich wartości od różnych parametrów konstrukcji i obciążenia.

Wzrost prędkości ruchu powoduje zwiększenie efektów oddziaływania taboru na konstrukcję mostu. Budowa nowych lub dostosowanie istniejących obiektów mostowych do ruchu pociąg-

gów z dużymi prędkościami wymaga bardziej precyzyjnych analiz dynamicznych, które powinny uwzględniać (WOŁOWICKI, STURZBECHER I APANAS [2005]):

- określenie wpływu zwiększonych efektów dynamicznych na stany graniczne nośności (bezpieczeństwo konstrukcji),
- poszerzenie zakresu analizy stanów granicznych użyteczności o stany związane z bezpieczeństwem jazdy i komfortem pasażerów.

W pierwszym przypadku szczególnie ważne jest określenie współczynników przeciążeń dynamicznych oraz warunków wystąpienia rezonansu. Analiza stanów granicznych użyteczności powinna dodatkowo zawierać:

- ze względu na bezpieczeństwo jazdy – sprawdzenie pionowych przyspieszeń przęseł, skręcania przęseł, obrotów przęseł nad łożyskami, wygięcia poziomego przęseł,
- ze względu na komfort jazdy pasażerów – sprawdzenie pionowych ugięć i przyspieszeń drgań przęseł.

Zalecenia dotyczące obliczeń dynamicznych oraz wyznaczania powyższych parametrów podano w przepisach PN-EN 1991-2 [2007]. Stanowią one polski odpowiednik europejskiej normy EN 1991-2:2002 [2002]. Wytyczne te definiują m.in. rodzaje oddziaływań taboru przy uwzględnieniu czynników mających wpływ na zachowanie dynamiczne mostu. Wspomniane czynniki to:

- prędkość ruchu po moście,
- rozpiętość elementu i długość linii wpływu ugięcia rozpatrywanego elementu,
- masa konstrukcji,
- częstotliwość drgań własnych całej konstrukcji i związanych z nią elementów oraz powiązane z nimi postacie drgań własnych wzdłuż linii toru,
- liczba osi, obciążenie osi oraz rozstaw osi pojazdu,
- tłumienie konstrukcyjne,
- nierówności pionowe toru,
- masa resorowana/nieresorowana i charakterystyki zawieszenia pojazdu,
- niedoskonałości pojazdu (spłaszczenia kół, deformacje krągłości, defekty zawieszenia itd.),
- dynamiczne charakterystyki toru (podsypka, podkłady, itd.).

Pionowe obciążenie taborem określone jest za pomocą pięciu modeli obciążenia:

- Model obciążenia 71 (LM71) przedstawiający normalny ruch kolejowy na głównych liniach kolejowych (model zgodny z rysunkiem 1.17),
- Model obciążenia SW/0 przedstawiający normalny ruch kolejowy na głównych liniach kolejowych i stosowany dodatkowo dla mostów ciągłych,
- Model obciążenia SW/2 przedstawiający ciężki ruch towarowy,
- Model obciążenia HSLM przedstawiający obciążenie od pociągów pasażerskich przy prędkościach przekraczających 200 km/h,
- Model obciążenia „pociągiem bez ładunku” przedstawiający efekt pociągu nieobciążonego.

Efekty dynamiczne powyższych obciążeń uwzględnia się w zakresie prędkości do 350 km/h. W przypadku trzech pierwszych modeli (LM71, SW/0 oraz SW/2), stosuje się współczynnik dynamiczny  $\Phi$ , który w przypadku toru starannie utrzymanego wyznacza się z zależno-

ści (1.1). W przypadku standardowego utrzymania toru, współczynnik dynamiczny  $\Phi$  określa zależność:

$$\Phi = \frac{2,16}{\sqrt{L_\phi} - 0,2} + 0,73, \quad (1.6)$$

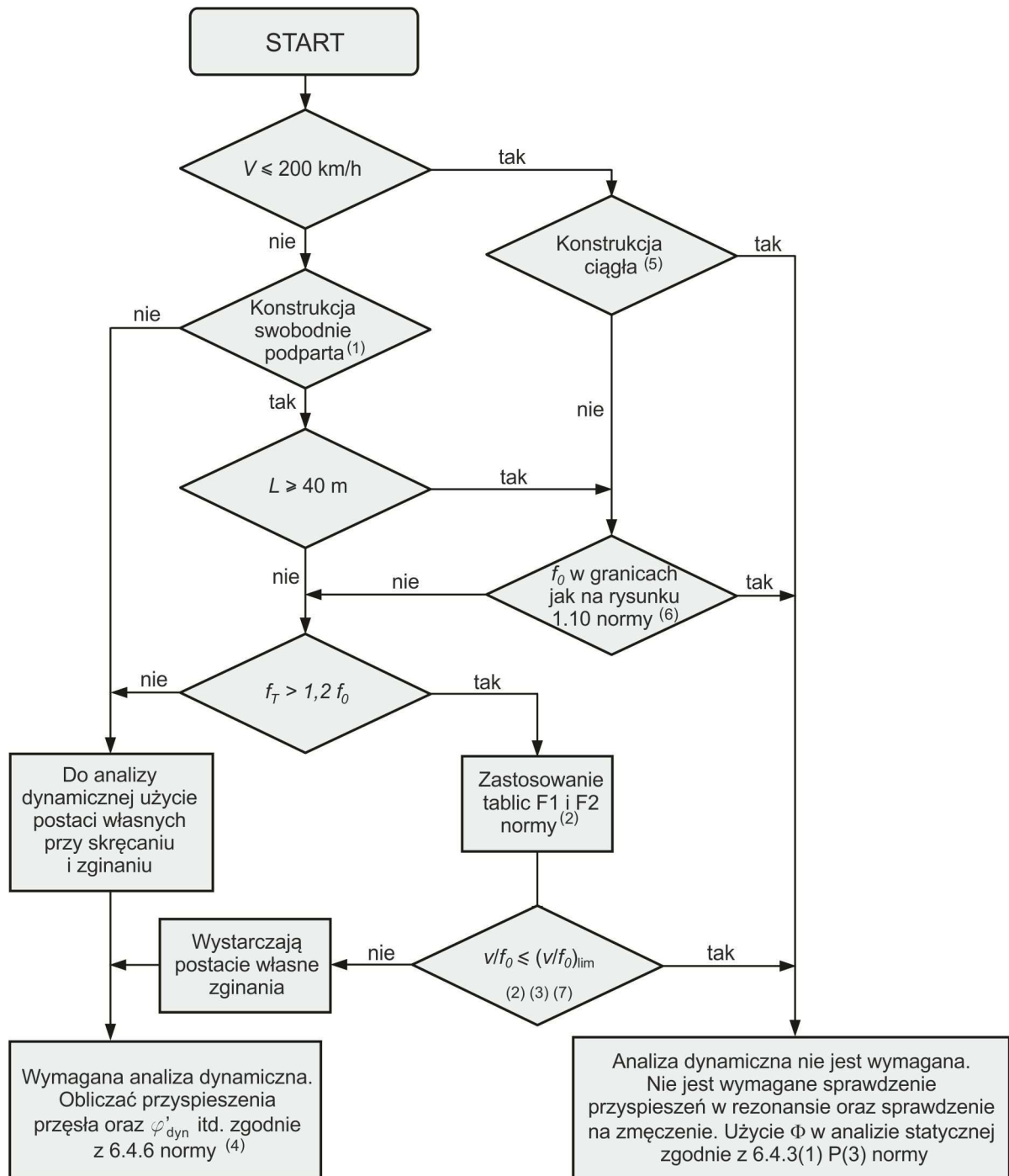
gdzie miarodajną długość  $L_\phi$  [m] zdefiniowano w tabelicy 6.2. normy PN-EN 1991-2 [2007]. W przypadku mostów łukowych i mostów betonowych wszystkich rodzajów z łączną grubością warstwy nadsypki<sup>7</sup> i podsypki większą od 1 m, współczynnik dynamiczny może być zredukowany wg przepisu:

$$\Phi_{red} = \Phi - \frac{h-1,00}{10} \geq 1,0, \quad (1.7)$$

przy czym wysokość  $h$  [m] mierzyć należy od wierzchu pomostu do wierzchu podkładu.

Współczynnik dynamiczny  $\Phi$  pozwala na określenie dynamicznego przyrostu naprężeń i przemieszczeń konstrukcji, natomiast nie uwzględnia skutków rezonansu.

Przy określonych parametrach konstrukcji oraz prędkości ruchu, współczynnik przeciążenia dynamicznego wyznacza się dodatkowo na podstawie analizy przejazdu obciążenia po konstrukcji mostu. Celem tych obliczeń jest sprawdzenie, czy obciążenie poruszające się z dużą prędkością nie spowoduje bardziej niekorzystnych efektów niż obciążenie statyczne, przemnożone przez współczynnik dynamicznym wg (1.1) lub (1.6). Ważne jest również sprawdzenie maksymalnych przyspieszeń pionowych konstrukcji ze względu na stabilność przemy tuczni (bezpieczeństwo jazdy) i komfort pasażerów. Algorytm pozwalający określić czy wymagana jest dodatkowa analiza dynamiczna przedstawiono na rys. 1.19. i 1.20.



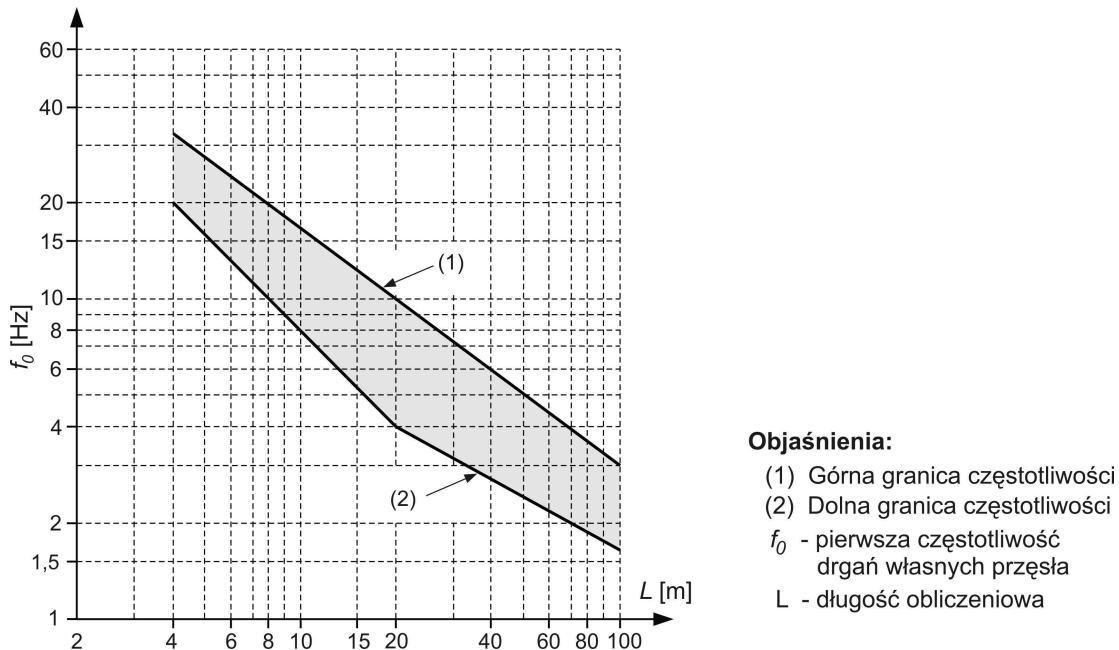
Rys. 1.19. Algorytm, wg którego sprawdza się czy wymagana jest analiza dynamiczna (na podstawie PN-EN 1991-2 [2007])

Oznaczenia na rysunkach to:

- $V$  - miejscowa maksymalna prędkość na linii [km/h],
- $L$  - rozpiętość przęsła [m],
- $f_0$  - pierwsza częstotliwość giętych drgań własnych mostu [Hz],
- $f_T$  - pierwsza częstotliwość skrętnych drgań własnych mostu [Hz],
- $v$  - maksymalna prędkość nominalna<sup>8</sup> [m/s],
- $(v/f_0)_{lim}$  - podano w załączniku F normy PN-EN 1991-2 [2007].

## Uwagi:

- (1) Ważna w przypadku mostów swobodnie podpartych zachowujących się tylko jak prosta belka podłużna lub prosta płyta, z pomijalnymi efektami skosu na podporach niepodatnych.
- (2) Tablice F1 i F2 oraz wartości dopuszczalne znajdują się w załączniku F normy PN-EN 1991-2 [2007].
- (3) Analiza dynamiczna jest wymagana, jeśli częsta prędkość eksploatacyjna pociągu rzeczywistego równa jest prędkości rezonansowej konstrukcji (6.4.6.6 i załącznik F normy).
- (4)  $\varphi'_{dyn}$  jest składową dynamiczną oddziaływania pociągów rzeczywistych na konstrukcję podaną w 6.4.6.5.(3) normy PN-EN 1991-2 [2007].
- (5) Ważna pod warunkiem, że most spełnia wymagania wytrzymałościowe odkształceń granicznych podanych w EN 1990, A2.4.4 i maksymalnego przyspieszenia pudła wagonu (lub związanych ugięć granicznych), odpowiadające bardzo dobremu standardowi komfortu pasażerów podanemu w EN 1990, A.2.
- (6) W przypadku mostów charakteryzujących się pierwszą częstotliwością drgań własnych  $f_0$  mieszczącą się w granicach podanych na rys. 1.19 i przy miejscowej maksymalnej prędkości liniowej nie przekraczającej 200 km/h, analiza dynamiczna nie jest wymagana.
- (7) W przypadku mostów charakteryzujących się pierwszą częstotliwością drgań własnych  $f_0$  przekraczającą górną granicę jak na rys. 1.19, analiza dynamiczna jest wymagana.



Rys. 1.20. Granice częstotliwości drgań własnych przęseł  $f_0$  do określenia, czy wymagana jest analiza dynamiczna (na podstawie PN-EN 1991-2 [2007])

Na rys. 1.20 górna granica częstotliwości (1) jest wynikiem nadwyżek dynamicznych związanych z nierównościami toru i dana jest jako:

$$f_0^g = 94,76L^{-0,748}, \quad (1.8)$$

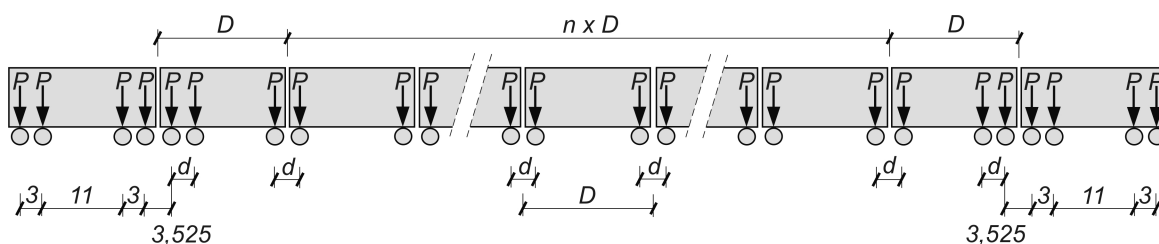
natomiast dolna granica częstotliwości (2) jest wynikiem kryteriów dynamicznego oddziaływania i dana jest jako:

$$f_0^d = 80 / L, \quad \text{dla } 4m \leq L \leq 20m, \quad (1.9)$$

$$f_0^d = 23,58L^{-0,592}, \quad \text{dla } 20m < L \leq 100m,$$

gdzie  $L$  oznacza rozpiętość przęseł mostów swobodnie podpartych lub rozpiętość miarodajną  $L_\phi$  w przypadku innych rodzajów mostów (tabl. 6.2 normy PN-EN 1991-2 [2007]).

Analizę dynamiczną przejazdu taboru po konstrukcji mostu należy prowadzić dla pociągów rzeczywistych przewidzianych do ruchu na danej magistrali oraz pociągów zastępczych HSLM. W obydwu przypadkach pomija się efekty współdziałania mas pojazdu i konstrukcji przęsła, przyjmując obciążenie w postaci strumienia sił skupionych. Rozstawy i naciski osi pojazdów rzeczywistych można określić na podstawie stosownych dokumentacji technicznych. Model obciążenia HSLM stanowią dwa niezależne pociągi uniwersalne: HSLM-A (rys. 1.21) i HSLM-B (rys. 1.22). Parametry obciążenia HSLM-A wyszczególniono w tabl. 1.1.

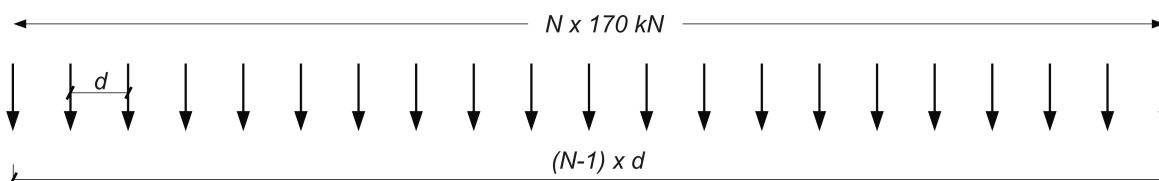


Rys. 1.21. Model pociągu uniwersalnego HSLM-A (na podstawie PN-EN 1991-2 [2007])

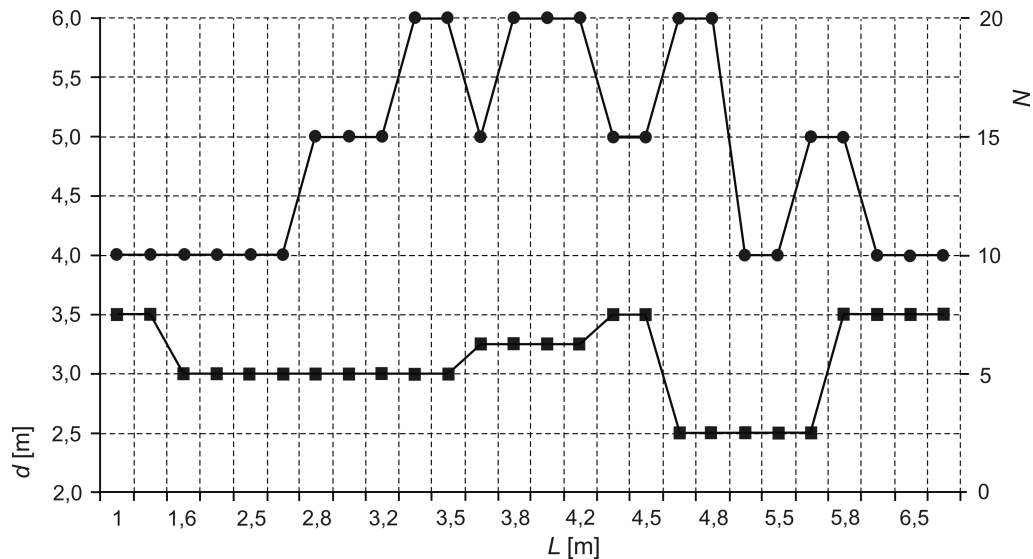
Tabl. 1.1. Parametry pociągu uniwersalnego HSLM-A (na podstawie PN-EN 1991-2 [2007])

Pociąg uniwersalny	Liczba pośrednich wagonów pasażerskich $N$	Długość wagonu pasażerskiego $D$ [m]	Rozstaw osi wózków $d$ [m]	Wartość siły skupionej $P$ [kN]
A1	18	18	2,0	170
A2	17	19	3,5	200
A3	16	20	2,0	180
A4	15	21	3,0	190
A5	14	22	2,0	170
A6	13	23	2,0	180
A7	13	24	2,0	190
A8	12	25	2,5	190
A9	11	26	2,0	210
A10	11	27	2,0	210

Model HSLM-B składa się z  $N$  sił skupionych o wartości 170 kN każda w równomiernym rozstawie  $d$ . Wielkości  $N$  i  $d$  określono na rys. 1.23. Model ten stosuje się dla przęseł swobodnie podpartych o rozpiętościach do 7 m.



Rys. 1.22. Model pociągu uniwersalnego HSLM-B (na podstawie PN-EN 1991-2 [2007])



Rys. 1.23. Parametry dla modelu pociągu uniwersalnego HSLM-B z rys. 1.22 (na podstawie PN-EN 1991-2 [2007])

Analizy dynamiczne na pociągach rzeczywistych oraz pociągach uniwersalnych HSLM należy prowadzić dla przedziału prędkości od 40 m/s do maksymalnej prędkości obliczeniowej. Maksymalną prędkość obliczeniową należy przyjmować o 20% większą od maksymalnej miejscowej prędkości na danej linii.

Analizę dynamiczną prowadzi się w celu wyznaczenia przyrostu dynamicznego:

$$\varphi'_{dyn} = \max |y_{dyn} / y_{stat}| - 1, \quad (1.10)$$

gdzie  $y_{dyn}$  to maksymalna odpowiedź dynamiczna, natomiast  $y_{stat}$  to odpowiadająca, maksymalna odpowiedź statyczna wywołana pociągiem rzeczywistym lub modelem obciążenia HSLM. Wyniki analizy dynamicznej należy porównywać z wynikami analizy statycznej, przemnożonej przez współczynnik  $\Phi$  (dla modeli obciążenia LM71 i/lub SW/0). W efekcie do dalszych analiz należy przyjmować bardziej niekorzystną z poniższych wartości:

$$(1 + \varphi'_{dyn} + \varphi''/2) \times \left\{ \begin{array}{c} \text{HSLM} \\ \text{lub} \\ \text{Pociąg rzeczywisty} \end{array} \right\}, \quad (1.11)$$

lub

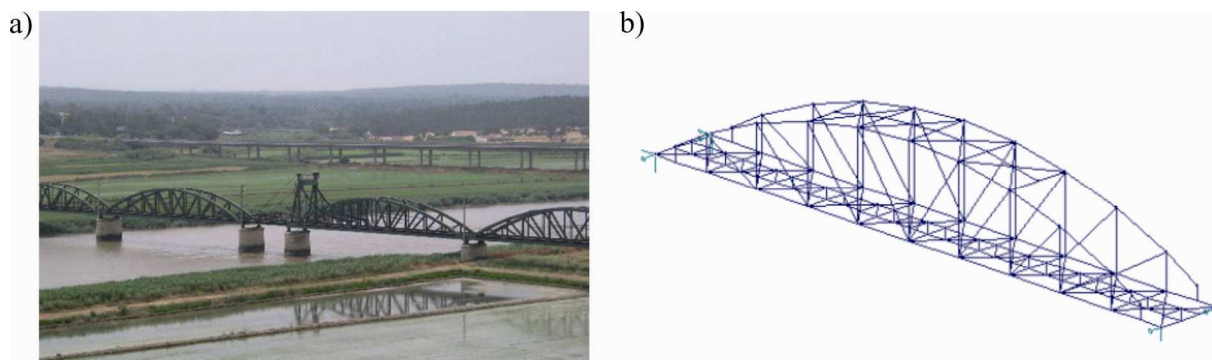
$$\Phi \times (\text{LM71 i jeli trzeba SW/0}), \quad (1.12)$$

przy czym  $\varphi''/2$  jest przyrostem efektów obciążenia dynamicznego spowodowanym defektami toru i obręczy kół pojazdu dla toru starannie utrzymanego. W przypadku standardowego utrzymania toru norma podaje sposób obliczenia współczynnika  $\varphi''$ .

W normie EN 1990-A2 [2002] określono kryteria oraz graniczne wartości parametrów związanych z bezpieczeństwem ruchu oraz komfortem pasażerów (skręcanie przęseł, pionowe i poziome odkształcenia przęseł, pionowe przyspieszenia przęseł, kąty obrotu przęseł nad podpórnikami). Wytyczne CNTK [2002] oparte na normach PN-EN 1991-2 [2007] oraz EN 1990-A2 [2002] określają wymagania dotyczące modernizacji linii CMK do prędkości 200 km/h lub do prędkości 250 km/h.



RIBEIRO, CALCADA I DELGADO [2005] przedstawili rezultaty analiz dynamicznych mostu Alcácer do Sal w Portugalii (rys. 1.24a) w aspekcie spełnienia wymogów zawartych w normach EN 1990-A2 [2002] oraz EN 1991-2:2002 [2002]. Zastępcze modele pociągów rzeczywistych przyjęli w oparciu o szybki tabor kursujący na głównych magistralach europejskich (Virgin, Talgo, TGV, Eurostar, Thalys, ICE2, ETR-Y). Jako pociąg uniwersalny przyjęli model HSLM-A1. Obliczenia prowadzili na prętowym modelu MES przęsła (rys. 1.24b)



Rys. 1.24. Kolejowy most Alcácer do Sal: a) widok ogólny (źródło fot.: <http://python.rice.edu/~brooks>), b) prętowy model MES wykonany na potrzeby analizy (RIBEIRO, CALCADA I DELGADO [2005])

Analogiczne modele pociągów rzeczywistych zastosowali GOICOLEA I INNI [2002]. Autorzy analizowali dynamikę belek swobodnie podpartych oraz ram portalowych poddanych działaniu obciążeń ruchomych. Dokonali porównania rezultatów otrzymanych zgodnie z wytycznymi EN 1991-2:2002 [2002] z rezultatami dla modelu obciążenia, uwzględniającego interakcję pojazd-przęsło (strumień oscylatorów dwumasowych). APANAS I STURZBECHER [2009] analizowali możliwość dopuszczenia ruchu pociągów z prędkościami do 350 km/h na stalowym, jednoprzęsłowym wiadukcie kratownicowym. Analizowali zmienność momentów zginających, przemieszczeń i przyspieszeń konstrukcji przęsła w zależności od prędkości ruchu pociągów uniwersalnych HSLM-A. Dodatkowo przeprowadzili badania eksploatacyjne, analizując zmienność współczynnika przeciążenia dynamicznego konstrukcji dla prędkości ruchu do 128 km/h. ŻÓŁTOWSKI I INNI [2010] opisali proces projektowania i przebudowy mostu nad rzeką Pilicą (odcinek CMK Zawiercie – Grodzisk Mazowiecki). Celem modernizacji było dostosowanie konstrukcji do dużych prędkości ruchu. Analizy dynamiczne prowadzili w oparciu o model HSLM-A (typy od A1 do A10) w zakresie prędkości 160 – 360 km/h. Podali rezultaty przeprowadzonych badań eksploatacyjnych (próbne obciążenie dynamiczne) w porównaniu z wartościami teoretycznymi.

## PRZYPISY

<sup>1</sup> Równanie całkowe typu (klasy) Voltery to równanie postaci:  $\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt$ . Nazwa pochodzi

od włoskiego matematyka Vito Voltery (1860-1940). W równaniu całkowym Voltery tylko jedna z granic całkowania jest stała. W przypadku, gdy niewiadoma funkcja  $\phi(x)$  występuje zarówno w wyrażeniu podcałkowym jak i poza nim, równanie całkowe jest drugiego rodzaju. Znana funkcja  $K(x,t)$  stanowi jądro równania całkowego. Jeżeli ponadto zachodzi  $f(x) \neq 0$ , mówimy o równaniu niejednorodnym, w przeciwnym wypadku mówimy o równaniu jednorodnym. Więcej na ten temat znaleźć można m. in. w POGORZELSKI [1953] oraz SMIRNOW [1962].

<sup>2</sup> Metoda pozwalająca na znalezienie przybliżonego rozwiązania równania różniczkowego, będąca szczególnych przypadkiem metody reziduoów ważonych. Więcej na temat można znaleźć m. in. w ŁODYGOWSKI I KAŁOL [1994] oraz KINCAID I CHENEY [2006].

<sup>3</sup> Indeks Sperlinga (ozn.  $W_z$ ) określa poziom komfortu w zależności od wartości amplitud i częstotliwości drgań (przyspieszeń) pudła. Im większa wartość indeksu tym mniejszy komfort. Pośrednio indeks odniesiony jest do stanu nawierzchni kolejowej – im gorszy stan nawierzchni (niższa klasa nawierzchni wg FRA), tym większe drgania pudła a tym samym mniejszy poziom komfortu.

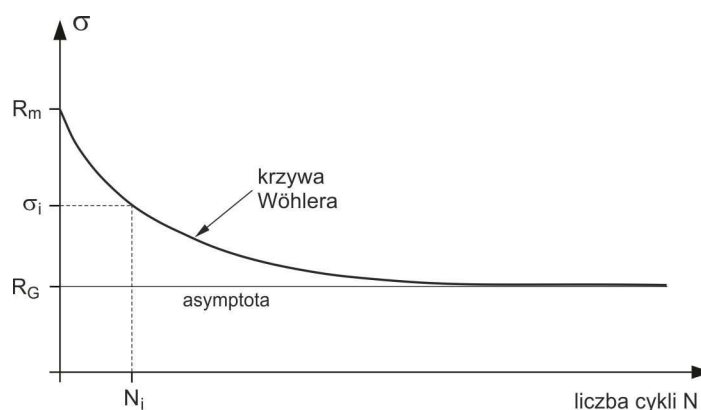
<sup>4</sup> Podczas jazdy po torze, pojazd szynowy wykonuje szereg dodatkowych ruchów, które zakłócają jego bieg i są efektem współpracy nawierzchni i zestawów kołowych. Składowe tych ruchów to przemieszczenia pionowe, poprzeczne i podłużne oraz obroty wokół osi pionowej, poprzecznej i podłużnej. Wypadkową ruchów poprzecznego i obrotowego określa się mianem wężykowania. Mechanizm powstawania i matematyczny opis zjawiska podał m.in. DE PATER [1982], formułując teorię mikropoślizgów w oparciu o model tarcia Coulomba. Założył prostoliniowy tor i stożkową powierzchnię obręczy tocznej koła. Więcej na temat można znaleźć m.in. we wspomnianej pozycji DE PATER A.D. [1982], oraz KLASZTORNY [2004]. Rozwój teorii opisujących zjawiska w obszarze kontaktu koła i szyny można znaleźć m.in. w pracach KALKER [1980], KALKER [1990], KISIŁOWSKI [1991].

<sup>5</sup> Algorytm Newtona-Rapshona to proces iteracyjny stosowany do wyznaczania przybliżonego rozwiązania nieliniowych problemów mechaniki i dynamiki konstrukcji. W przypadku numerycznego całkowania równań ruchu metodami typu „time-step” (np. metoda Newmark’a), iteracja wykonywana jest dodatkowo na długości kroku całkowania  $\Delta t$  w celu udokładnienia rozwiązania i uniknięcia akumulacji błędów mogących pojawić się w toku obliczeń. Istnieją dwie odmiany metody: klasyczna metoda Newtona-Rapsona oraz zmodyfikowana metoda Newtona-Rapsona. Więcej na ten temat, tj. możliwych przyczyn błędów, sformułowania algorytmu oraz różnic pomiędzy obiema wersjami metody można znaleźć m.in. w CHMIELEWSKI, ZEMBATY [1998].

<sup>6</sup> Uznawana powszechnie za najstarszą, metoda oceny trwałości zmęczeniowej oparta na hipotezie sumowania uszkodzeń zmęczeniowych. W tego typu hipotezach wprowadza się pewną funkcję uszkodzenia  $D$ , której wartość zależy np. od poziomu naprężenia, liczby cykli zmęczeniowych, częstotliwości zmian obciążenia, temperatury, wilgotności itp.:  $D = F(\sigma, n, f, T, w, \dots)$ . W większości przypadków zakłada się niezmienność czynników środowiskowych oraz stałą częstotliwość obciążania. Funkcja uszkodzenia redukuje się zatem do postaci  $D = F(\sigma, n)$ , a więc zależy jedynie od poziomu obciążenia i zrealizowanej na tym poziomie liczby cykli obciążeniowych. Często spotykanym zapisem jest postać  $D = F(n/N)$ , gdzie  $N$  jest liczbą cykli możliwą do zrealizowania dla danej, granicznej wartości naprężenia  $\sigma$ . W hipotezie Palmgren-Minera (P-M), funkcja uszkodzenia dana jest jako:

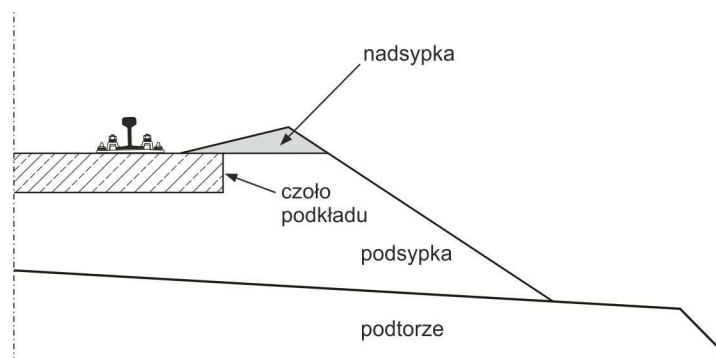
$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} \leq 1,$$

gdzie  $k$  – liczba zrealizowanych poziomów obciążenia,  $n_i$  – liczba cykli na  $i$ -tym poziomie obciążenia,  $N_i$  – maksymalna możliwa liczba cykli dla  $i$ -tego poziomu obciążenia. Hipoteza ta wymaga znajomości krzywej zmęczeniowej – zależności pomiędzy naprężeniem a odpowiadającą mu liczbę cykli obciążenia (np. wykres Wöhlera – patrz rysunek poniżej) oraz znajomości wytrzymałości zmęczeniowej materiału konstrukcji  $R_G$  (stosowanie każdej tego typu metody ma sens jedynie w zakresie naprężeń  $\sigma_i > R_G$ ). Prostota hipotezy P-M powoduje, że jest ona chętnie i powszechnie stosowaną metodą prognozowania trwałości zmęczeniowej konstrukcji. Więcej na ten temat można znaleźć m.in. w TOPOLIŃSKI [1997].



<sup>7</sup> Warstwa tłuczni usypywana (jeśli zachodzi taka potrzeba) u czoła podkładu kolejowego, od strony toku zewnętrznego, mająca na celu zwiększenie oporu poprzecznego podkładów kolejowych (patrz rysunek poniżej). Stosuje się

w przypadku torów ułożonych w łukach, w których występują zwiększone siły boczne (SANCEWICZ [2010]) lub gdy nie ma możliwości zagęszczenia tłucznia od czoła podkładów kolejowych (D1 [2002]).



<sup>8</sup> W normie PN-EN 1991-2 [2007], maksymalna prędkość nominalna rozumiana jest jako maksymalna miejscowa prędkość na danej linii kolejowej.



## Rozdział 2

# Tabor kolejowy – podstawowe cechy konstrukcyjne

*STRESZCZENIE. W niniejszym rozdziale dokonano charakterystyki konwencjonalnego taboru kolejowego. Podano wymagania dotyczące budowy i eksploatacji pociągów dużych prędkości w odniesieniu do aktualnych przepisów i norm. Bardziej szczegółowo omówiono konstrukcję jednostki trakcyjnej serii EN57, którą wykorzystano jako szynowy pojazd testowy. Znajomość budowy i zasady pracy taboru podczas ruchu po torze, stanowi podstawę do zdefiniowania zastępczego modelu numerycznego pojazdu.*

### 2.1. UWAGI WSTĘPNE

Podstawowym zadaniem transportu kolejowego jest przemieszczanie osób lub towarów. Przemieszczanie to odbywa się pociągami pasażerskimi lub towarowymi, które w tym celu wykonują ruch postępowy po torze kolejowym (KOWALSKI [1987]).

Każdy pojazd szynowy stanowi złożony system mechaniczny. Konstrukcja pojazdu musi zapewniać bezpieczeństwo, stabilność jazdy oraz odpowiedni poziom komfortu. Wszystkie te aspekty są szczególnie istotne w przypadku pociągów dużych prędkości (tabl. 2.1).

Tabor kolejowy dużych prędkości coraz bardziej wypiera pociągi tradycyjne, których rola sukcesywnie ogranicza się do obsługi ruchu lokalnego. W wielu państwach trudno jest sobie dzisiaj wyobrazić sprawne funkcjonowanie transportu pasażerskiego bez szybkiej kolei. W Polsce prowadzi się obecnie modernizację szeregu linii kolejowych, a budowa szybkiego połączenia pomiędzy Warszawą, Wrocławiem i Poznaniem (linia „Y”) stanowi ważny element w planach rozwoju infrastruktury komunikacyjnej kraju.

Tabl. 2.1. Niektóre pociągi dużych prędkości w Europie i na świecie

Kraj	Seria Pociągu	Typ pociągu	Przykładowe relacje	Rok rozpoczęcia eksploatacji	Prędkość maks. [km/h]
Francja	TGV Sud-Est	Zespołowy	Paryż – Lyon	1983	300
	TGV Atlantique	Zespołowy	Paryż – Le Mans	1989	300
	TGV Duplex	Zespołowy (piętrowy)	Paryż – Lyon Marsylia – Montpellier	1995	320
Niemcy	ICE 2	Zespół trakcyjny	Hanower – Wurzburg	1995	280
	ICE 3	Zespół trakcyjny	Kolonia – Frankfurt	2002	330
Hiszpania	AVE	Zespołowy	Madryt – Sewilla	1992	300
			Madryt – Barcelona	2008	350
Włochy	ETR 500	Zespołowy	Rzym – Florencja	1992	300
Japonia	Shinkansen seria 500	Zespół trakcyjny	Tokio – Osaka	1997	300
Korea	TGV KTX	Zespołowy	Seul – Pusan	2002	300
USA	Acela Express	Zespołowy	Waszyngton – Nowy York – Boston	2000	240
Międzynarodowe	TGV Eurostar	Zespołowy	Londyn – Paryż	1994	300
	TGV Thalys	Zespołowy	Paryż – Amsterdam	1997	300

Linie dużych prędkości obejmują trzy następujące typy (ŻURKOWSKI [2005]):

- 1) nowe linie, zbudowane i wyposażone w urządzenia pozwalające na rozwijanie prędkości 250 km/h i większych,
- 2) linie zmodernizowane do prędkości 200 km/h,
- 3) linie zmodernizowane z zamiarem prowadzenia szybkiego ruchu, które z uwagi na przebieg po terenach silnie zurbanizowanych lub trudnych topograficznie, pozwalają na osiągnięcie nieco mniejszych prędkości.

Tabor kolejowy szybkiego ruchu określa się jako nowoczesne pociągi zaprojektowane w taki sposób, aby zagwarantowały bezpieczny i niezakłócony przewóz przy prędkościach:

- 1) co najmniej 250 km/h na liniach specjalnie zbudowanych do dużych prędkości i umożliwiających osiągnięcie w odpowiednich warunkach prędkości ponad 300 km/h,
- 2) 200 km/h na istniejących, specjalnie przystosowanych liniach,
- 3) możliwie największej – na pozostałych liniach.

## 2.2. OGÓLNA CHARAKTERYSTYKA KONSTRUKCJI TABORU KOLEJOWEGO

W skład konwencjonalnego pociągu wchodzi pojazdy trakcyjne oraz wagony.

Pojazdy trakcyjne, w odróżnieniu od wagonów, posiadają urządzenia umożliwiające wytwarzanie siły pociągowej. Są to lokomotywy, samodzielne wagony silnikowe, autobusy szynowe, zespoły trakcyjne (spalinowe, parowe, elektryczne).

Wagony przeznaczone są do transportu ludzi lub towarów i wraz z pojazdami trakcyjnymi tworzą zespół sprzęgniętych ze sobą „jednostek” kolejowych.

Rozwiązania konstrukcyjne stosowane w pociągach konwencjonalnych są do siebie podobne. Na przestrzeni lat w konstrukcji pojazdów szynowych opracowano i wdrożono standardy, które stały się podstawą budowy taboru dużych prędkości. Podstawowe cechy i wymagania dotyczące konstrukcji pociągów dużych prędkości zawiera DECYZJA KOMISJI 2008/232/WE [2008]. Jest to jedna z technicznych dokumentacji interoperacyjności (TSI) odnosząca się do podsystemu „Tabor” transeuropejskiego systemu kolei dużych prędkości. Specyfikacja ta dotyczy następujących klas taboru kolejowego:

- klasa 1 – tabor o maksymalnej prędkości wynoszącej co najmniej 250 km/h,
- klasa 2 – tabor o maksymalnej prędkości wynoszącej co najmniej 190 km/h lecz nie większej niż 250 km/h.

Do powyższego dokumentu odnoszą się również opracowane przez PKP PLK S.A. oraz CNTK STANDARDY TECHNICZNE [2009]. Opis konstrukcji wybranych europejskich pociągów dużych prędkości można znaleźć m. in. w pracach ROMANISZYN [1999], RACZYŃSKI [2005] oraz WOLFRAM [2007].

Pociągi dużych prędkości budowane są jako jednolite składy o specjalnej konstrukcji i trakcji elektrycznej. Ze względu na znaczne zapotrzebowanie mocy, składy zaopatrzone są w dwa lub kilka pojazdów trakcyjnych. Skutkuje to dodatkowo obniżeniem nacisków osi napędowych, co przy znacznych prędkościach jest szczególnie korzystne ze względu na zmniejszenie oddziaływań dynamicznych na tor. W tablicy 2.2 przedstawiono maksymalne, dopuszczalne statyczne obciążenie toru przez zestaw kołowy dla pojazdów klasy 1 i 2. W tablicy 2.3 podano graniczne wartości nacisków dynamicznych koła na szynę. Przykładowo, osiągnięcie prędkości eksploatacyjnej powyżej 250 km/h ogranicza wartość statycznego nacisku osi na tor do 170 kN. Wymaganie to spełnia większość współczesnych pociągów dużych prędkości (WOLFRAM [2007]).

Tabl. 2.2. Dopuszczalne statyczne naciski osi na tor (na podstawie DECYZJA KOMISJI 2008/232/WE [2008])

		Maksymalna prędkość eksploatacyjna V [km/h]				
		190 < V ≤ 200	200 < V ≤ 230	230 < V ≤ 250	= 250	> 250
klasa 1	[kN]	-	-	-	≤ 180	≤ 170
klasa 2 – lokomotywy i pojazdy czołowe napędowe	[kN]	≤ 225		≤ 180	-	-
klasa 2 – zespoły trakcyjne	[kN]	≤ 200	≤ 180		-	-
klasa 2 – wagony osobowe ciągnięte przez lokomotywę	[kN]	≤ 180			-	-

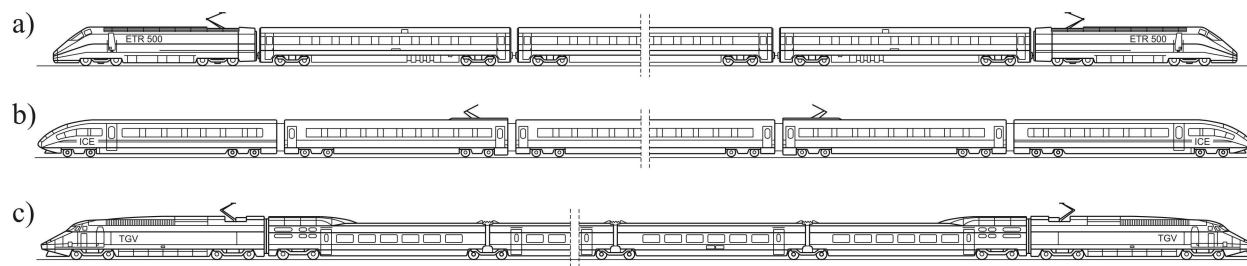
Tabl. 2.3. Maksymalne dynamiczne naciski koła na szynę (na podstawie DECYZJA KOMISJI 2008/232/WE [2008])

Prędkość V [km/h]	Nacisk dynamiczny Q [kN]
190 < V ≤ 250	180
250 < V ≤ 300	170
V > 300	160

W istniejących pociągach dużych prędkości wyróżnia się dwie zasadnicze konfiguracje: pociąg zespołowy i zespół trakcyjny.

Pociąg zespołowy składa się z dwóch jednakowych pojazdów trakcyjnych na obu końcach (lokomotywy w układzie osi Bo'Bo'<sup>1</sup>) oraz od kilku do kilkunastu wagonów pasażerskich (rys. 2.1a).

Zespół trakcyjny to układ wagonów silnikowych, sterowniczych i doczepnych, zestawionych w różnych konfiguracjach (rys. 2.1b).



Rys. 2.1. Schematy wybranych pociągów dużych prędkości: a) pociąg zespołowy serii ETR 500, b) elektryczny zespół trakcyjny serii ICE 3, c) pociąg zespołowy serii TGV Atlantique

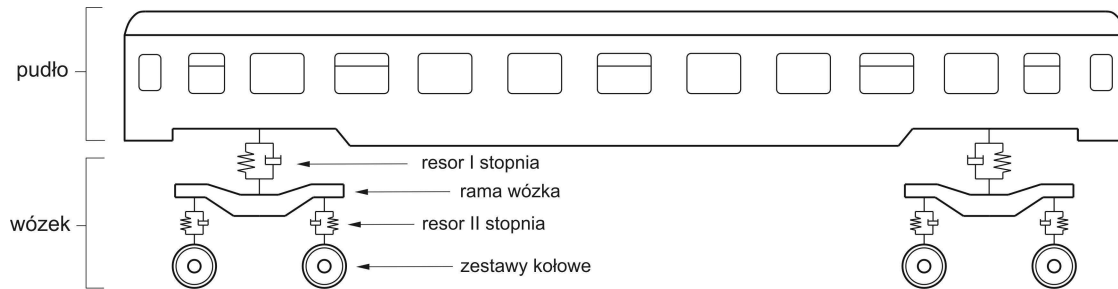
Zasadniczymi elementami składowymi wagonów i pojazdów trakcyjnych są pudła (nadwozie) oraz wózki jezdne (rys. 2.2 i 2.3a).

Pudła to stalowe konstrukcje modułowe, składające się z ramy, ścian bocznych, ścian czołowych oraz dachu. W pociągach dużych prędkości pudła skrajnych pojazdów ukształtowane w sposób umożliwiający znaczną redukcję oporów aerodynamicznych. W przypadku lokomotyw, na obu końcach pudła znajdują się kabiny maszynisty wyposażone w aparaturę sterującą. Za kabinami znajduje się przedział maszynowy. Pudła wagonów wyposażone są w przedziały pasażerskie, rzędy siedzeń oraz sanitariaty.

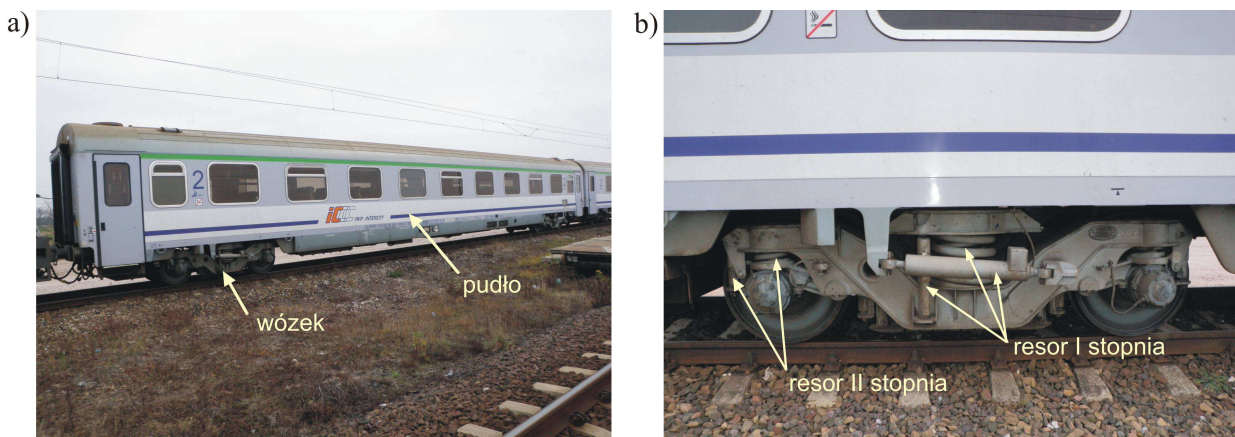
Komfort i stabilna jazda w dużym stopniu zależą od współpracy wózków z torem oraz nadwoziem. Układy biegowe (wózki) mają zasadniczy wpływ na drgania nadwozia, poziom hałasu oraz oddziaływanie na tor (SUWALSKI [1996]). We wszystkich pociągach dużych prędkości stosowane są wózki dwuosiowe o stosunkowo prostej i lekkiej konstrukcji. Zasadniczymi elementami składowymi każdego wózka są: rama, zestawy kołowe, resory (układ tłumików i sprężyn). W większości pociągów każdy z pojazdów trakcyjnych i wagonów posiada dwa wózki. W

przypadku pociągów zespołowych serii TGV, wózki toczne są wspólne dla sąsiednich wagonów (rys. 2.1c). Rozwiązanie to ogranicza względne ruchy sąsiednich wagonów, przez co poprawia „spokojność” jazdy.

Układ resorowania pojazdu jest dwustopniowy (rys. 2.2 i 2.3b). Resor pierwszego stopnia znajduje się pomiędzy pudłem a ramą wózka, zaś resor drugiego stopnia pomiędzy ramą wózka i zestawami kołowymi.



Rys. 2.2. Schemat konstrukcji pojazdu szynowego (wagon, pojazd trakcyjny)



Rys. 2.3. Wagon typu 154A: a) widok ogólny, b) szczegół wózka

W układ zawieszenia pierwszego stopnia wchodzi sprężyny zwojowe, współdziałające z pionowymi i poziomymi tłumikami hydraulicznymi. Charakterystyka sprężyn pozwala na amortyzowanie drgań (przemieszczeń) o dużej amplitudzie i małej częstotliwości. Tłumiki hydrauliczne redukują drgania o małej amplitudzie i dużej częstotliwości. W pociągach dużych prędkości, pomiędzy budą i wózkiem, stosuje się dodatkowo tłumiki podłużne. Ich zadaniem jest przeciwdziałanie ruchom wężkowym wózków.

Drugi stopień resorowania zlokalizowany jest pomiędzy ramą wózka a zestawami kołowymi. Amortyzuje on drgania pochodzące od bezpośredniej współpracy koła i szyny.

Siły pociągowe i siły od hamowania taboru przenoszone są z wózków na pudło poprzez czop skrzytu, stanowiący dodatkowe, przegubowe połączenie tych elementów.

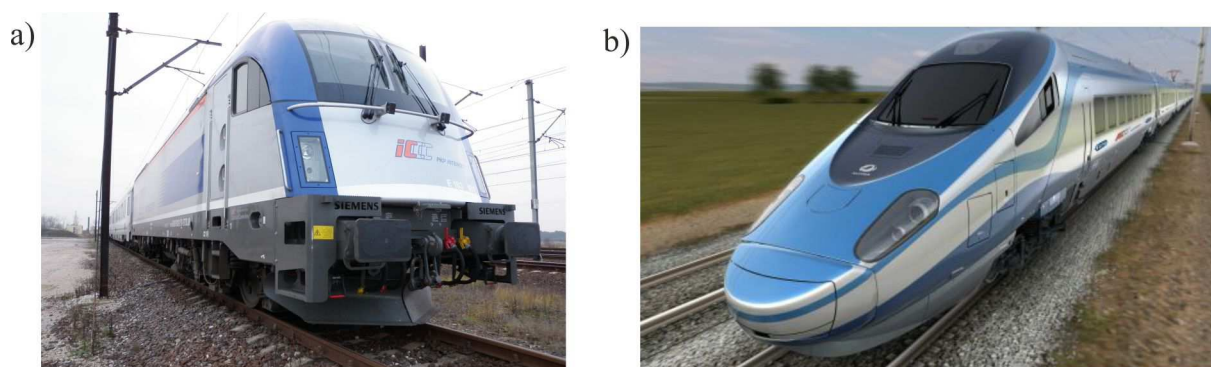
Osobną grupę stanowią pociągi z wychylnym nadwoziem (RUSAK [2008]). Rozwiązanie to stosuje się w przypadku linii szybkiego ruchu o dużej liczbie łuków z małymi promieniami. Pojazdy te budowane są najczęściej w konfiguracji zespołów trakcyjnych. Przykładem może być pociąg Pendolino ETR 460, kursujący po liniach włoskich lub ICE-T, kursujący po liniach niemieckich. Mechanizm wychyłu nadwozia umożliwia zwiększenie prędkości w łukach nawet o 35%.



W Polsce technologia dużych prędkości w dalszym ciągu znajduje się w fazie planowania. W sierpniu 2008 roku spółka PKP Intercity podpisała umowę na zakup dziesięciu lokomotyw ES64U4 firmy Siemens (SIEDLECKI [2009]). Są to uniwersalne lokomotywy wielosystemowe mogące rozwijać prędkość do 230 km/h (rys. 2.4a). W maju 2011 roku podpisano umowę z firmą Alstom na dostawę 20 zespołów trakcyjnych Pendolino ETR 610, mogących rozwijać prędkość do 250 km/h. Przeznaczono je do obsługi ruchu pasażerskiego pomiędzy większymi ośrodkami miejskimi (Warszawa, Gdynia, Wrocław, Katowice, Kraków). Pierwsze egzemplarze mają zacząć kursować regularnie w 2014 r.

Niestety obecny stan infrastruktury nie nadąża za możliwościami zakupionego taboru. Nawet po zakończeniu trwającej obecnie modernizacji linii kolejowych, składy te pojadą zaledwie odcinkami maksymalnie 200 km/h (CMK) i 160 km/h (E65, E59, E75, E30).

Warto w tym miejscu nadmienić, iż Nowosądecka firma NEWAG wyprodukowała pierwszy polski pociąg, który pokonał granicę 200 km/h. EZT 31WE zamówiony przez Koleje Dolnośląskie, osiągnął podczas testów na CMK prędkość 201,4 km/h.



Rys. 2.4. a) lokomotywa ES64U4 na stacji Psary (woj. dolnośląskie), b) Pendolino ETR 610 (źródło: [www.euroinfrastructure.eu](http://www.euroinfrastructure.eu))

### 2.3. JEDNOSTKI TRAKCYJNE SERII EN57

Elektryczne zespoły trakcyjne serii EN57 (rys. 2.5) pojawiły się na szlakach sieci PKP na początku 1962 r. jako unowocześnione i zmodyfikowane jednostki w stosunku do wcześniejszej serii EW55. Zostały zaprojektowane przez ówczesne Centralne Biuro Konstrukcyjne Przemysłu Taboru Kolejowego w Poznaniu a wykonane przez wrocławski PAFAWAG.

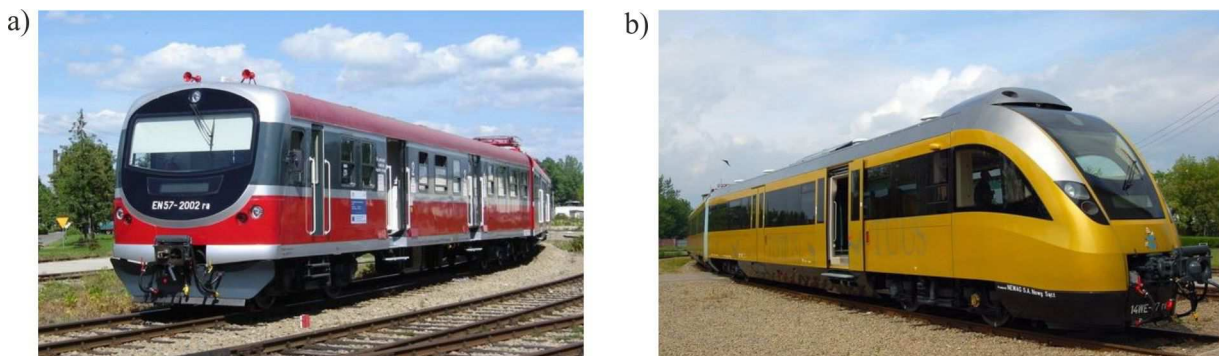


Rys. 2.5. Jednostka trakcyjna serii EN57 (lata produkcji 1962 – 1994)

Zespoły te przeznaczono do obsługi pasażerskiego ruchu lokalnego pomiędzy większymi ośrodkami miejskimi oraz ruchu podmiejskiego. Kursują po większości lokalnych szlaków, często po torach o złych parametrach technicznych. W wielu przypadkach skutkuje to obniżeniem prędkości eksploatacyjnej, w celu zmniejszenia niekorzystnych efektów wzajemnego oddziaływania pojazdu i konstrukcji toru.

Produkcja zespołów serii EN57 została zakończona w 1994 roku. Wyprodukowano łącznie 1429 sztuk. Dzisiaj są to konstrukcje przestarzałe. Wprowadzane w ponad trzydziestoletnim okresie produkcji modyfikacje, nie nadążały za potrzebami i poziomem techniki na świecie. Pomimo to, zespoły te stanowią podstawę kolejowego transportu pasażerskiego w wielu aglomeracjach miejskich, m. in. w Trójmieście (MASSEL [2002]).

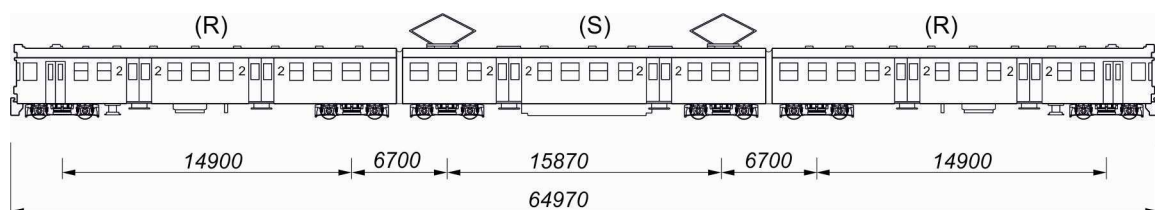
W ostatnich latach powstało kilka nowych zespołów wyprodukowanych na bazie jednostek EN57. W latach 2006 – 2007 na zlecenie „PKP Przewozy Regionalne” nowosądecka firma NEWAG wykonała modernizację tych zespołów o najszerszym jak do tej pory zakresie (rys. 2.6a). Unowocześniono m.in. czoło pojazdu, zmodernizowano kabiny maszynisty, przedziały pasażerskie oraz wymieniono wózki silnikowe i toczne. Dla potrzeb warszawskiej Szybkiej Kolei Miejskiej w 2005 roku rozpoczęto produkcję jednostki trakcyjnej serii 14WE (rys. 2.6b). Są to składy zbudowane na podzespołach jezdnych i napędowych jednostki EN57, z zupełnie nowym nadwoziem i wnętrzem. Zmodernizowane zespoły wykorzystywane są również przez PKP SKM w Trójmieście oraz Koleje Mazowieckie.



Rys. 2.6. Przykłady zmodernizowanych jednostek trakcyjnych EN57: a) jednostka EN57-2002, b) jednostka 14WE, (źródło – [www.newag.pl](http://www.newag.pl))

Historię rozwoju elektrycznych zespołów trakcyjnych w Polsce przedstawił DOBROWOLSKI [1996]. Obszerną charakterystykę konstrukcji jednostki EN57 można znaleźć m. in. w książce DOMAŃSKI, KOWALCZYK I SKONIECKI [1974].

Jednostki EN57 to pojazdy trakcji elektrycznej o maksymalnej prędkości konstrukcyjnej wynoszącej 110 km/h. Każda jednostka trakcyjna serii EN57 składa się z trzech wagonów w układzie osi 2'2'+Bo'Bo'+2'2' (rys. 2.7). Według oznaczeń przemysłowych noszą one symbol 5B+6B+5B, gdzie 5B to wagon rozrządczy (R), natomiast 6B to wagon silnikowy (S).



Rys. 2.7. Układ wagonów jednostki trakcyjnej serii EN57

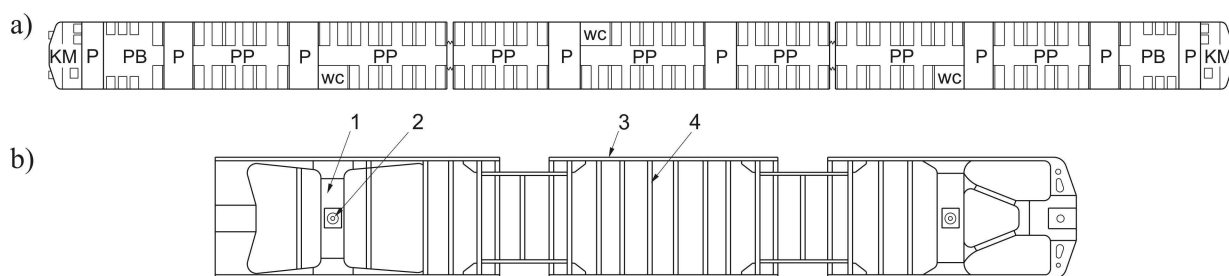
Każdy z wagonów przystosowany jest do przewozu ludzi. Wagon rozrządczy zaopatrzone jest dodatkowo w kabinę maszynisty i aparaturę sterującą, umożliwiającą uruchomienie i prowadzenie pociągu. Wagon silnikowy grupuje urządzenia i aparaturę wysokiego napięcia. Podstawowe parametry techniczne omawianego pojazdu przedstawiono w tabelicy 2.4.

Tablica 2.4. Podstawowe parametry techniczne jednostki trakcyjnej serii EN57

Rodzaj parametru	Wielkość	Rodzaj parametru	Wielkość
Długość całkowita	64,970 m	Masa wózka silnikowego (S)	12,160 t
Rozstaw wózków w wagonie (R)	14,900 m	Masa zestawu kołowego tocznego (R)	1,320 t
Rozstaw wózków w wagonie (S)	15,870 m	Masa zestawu kołowego napędnego (S)	1,720 t
Rozstaw zestawów kołowych	2,700 m	Masa całego zespołu	125 t
Masa całkowita wagonu (R)	34,000 t	Liczba miejsc siedzących w wagonie (R)	62
Masa całkowita wagonu (S)	57,000 t	Liczba miejsc siedzących w wagonie (S)	96
Masa wózka tocznego (R)	6,300 t	Łączna liczba miejsc stojących (R+S+R)	468

Pudła każdego wagonu zawierają po dwa przedsionki, umożliwiające wsiadanie i wysiadanie pasażerów, przedziały pasażerskie z siedziskami oraz WC (rys. 2.8a). Wagony skrajne (R) wyposażono w dodatkowe przedsionki dla obsługi pociągu, kabinę maszynisty oraz przedziały bagażowe.

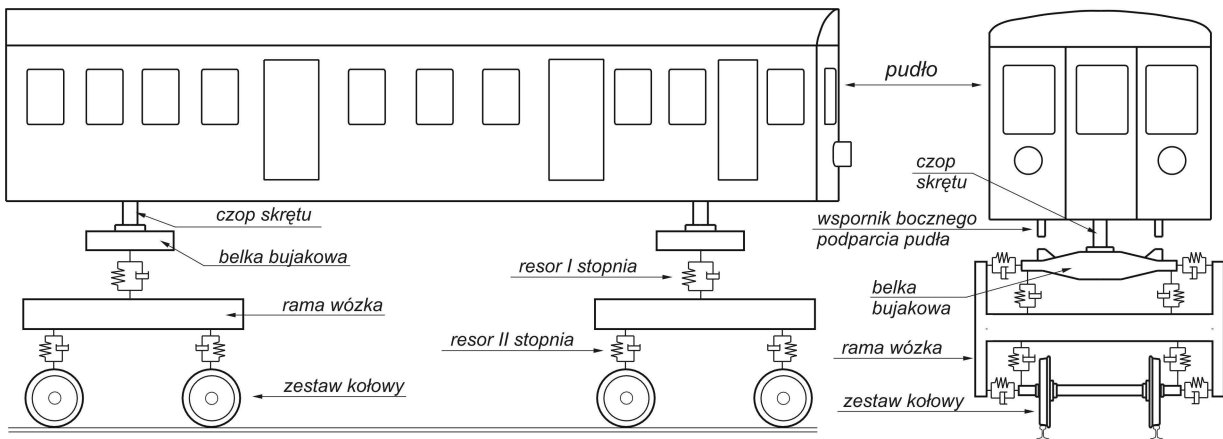
Najistotniejszym elementem konstrukcyjnym pudła jest ostoja – konstrukcja podpodłogowa (rys. 2.8b). Wykonano ją z profili walcowanych i zinnogiętych. Tworzą one ruszt płaski złożony z podłużnic (zwanych też ostojniami) i poprzecznic. Szczególne miejsce w ostoi zajmują belki skrętowe z zamocowanymi czopami skrętu. Za ich pomocą pudło opiera się na konstrukcji wózków. Podłoga współpracuje konstrukcyjnie z rusztem ostoi. Wykonana jest z blachy falistej i przyspawana do belek rusztu. Konstrukcję ścian bocznych, ścian czołowych oraz dachu stanowi szkielet z profili walcowanych pokrytych blachą.



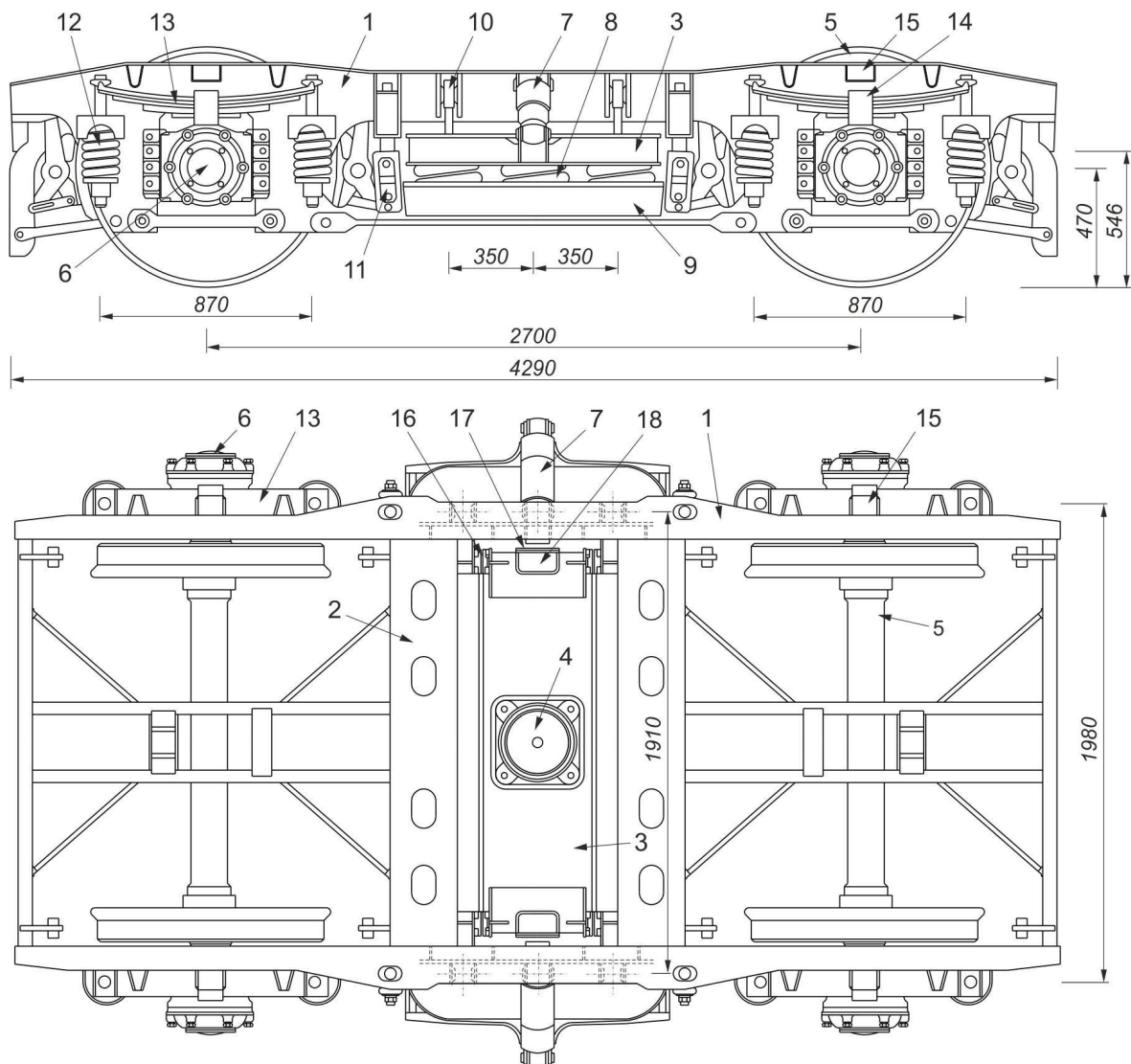
Rys. 2.8a. Schemat rozmieszczenia pomieszczeń w wagonach jednostki trakcyjnej EN57, ozn.: P – przedsionek, PP – przedział pasażerski, PB – przedział bagażowy, KM – kabina maszynisty

Rys. 2.8b. Konstrukcja ostoi pudła wagonu rozrządczego: 1 – belka skrętowa, 2 – czop skrętu, 3 – podłużnica, 4 – poprzecznica

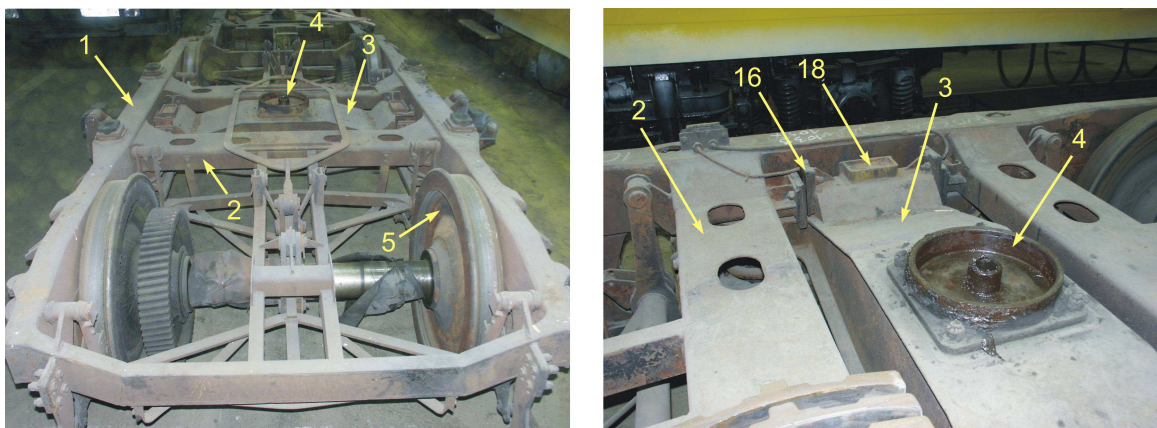
W omawianym zespole trakcyjnym znajdują się dwa rodzaje wózków: silnikowe i toczne. Są one zbliżone konstrukcyjnie. Różnice wynikają jedynie z umieszczenia silników trakcyjnych w wózkach silnikowych. Wózki silnikowe znajdują się w wagonie silnikowym (S) natomiast wózki trakcyjne w wagonach rozrządczych (R). Na rys. 2.9 pokazano ideowy schemat mechaniczny wagonu jednostki. Podstawowe elementy konstrukcyjne wózków tocznych zaznaczono i opisano na rys. 2.10 oraz rys. 2.11, 2.12 i 2.13.



Rys. 2.9. Ideowy model mechaniczny wagonu jednostki EN57

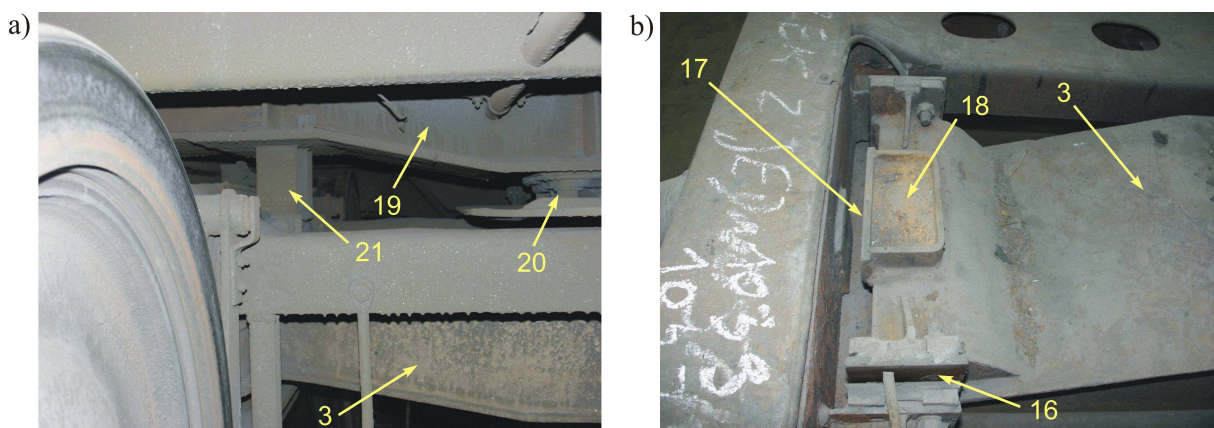


Rys. 2.10. Widok z boku oraz widok z góry wózka tocznego: 1 – podłużnica ramy wózka, 2 – poprzecznicę środkową ramy wózka, 3 – belka bujakowa, 4 – czop skrzętu belki bujakowej, 5 – zestaw kołowy, 6 – maźnica, 7 – tłumik hydrauliczny, 8 – sprężyna śrubowa resora I stopnia, 9 – kołyska, 10 – wieszak, 11 – ogniwo łańcuchowe, 12 – sprężyna śrubowa resora II stopnia, 13 – resor piórowy, 14 – opaska resora piórowego, 15 – odbijak ramy wózka, 16 – ślizg stabilizacyjny belki bujakowej, 17 – odbijak belki bujakowej, 18 – wspornik belki bujakowej do oparcia wspornika belki skrzętowej pudła



Rys. 2.11. Konstrukcja wózka: 1 – rama wózka (podłużnica), 2 – rama wózka (poprzecznicą środkową), 3 – belka bujakowa, 4 – czop skrótu belki bujakowej, 5 – zestaw kołowy, 16 – ślizg stabilizacyjny belki bujakowej, 18 – wspornik belki bujakowej do oparcia wspornika belki skrętowej pudła

Rozstaw osi w wózku wynosi  $2700\text{ mm}$ . Zestawy kołowe połączone są z ramą wózka za pomocą osiowych łożysk ślizgowych (maźnic). Rama wózka składa się z dwóch skrzynkowych podłużnic połączonych poprzecznymi. Pomiędzy poprzecznymi środkowymi osadzona jest belka bujakowa oparta sprężysto na ramie wózka. Na belce bujakowej, poprzez płaski czop skrótu, opiera się belka skrętowa pudła. Do belki skrętowej pudła przyspawane są również wsporniki bocznego podparcia pudła, które przy niesymetrycznym obciążeniu lub jeździe po łukach opierają się na belce bujakowej wózka (rys. 2.12a). Zarówno belka bujakowa jak i poprzecznicę środkowe mają zamocowane wymienne ślizgi stabilizacyjne. Na końcach belki bujakowej, od strony podłużnic wózka, znajdują się odbijaki umożliwiające ruch poprzeczny belki względem osi podłużnej wózka w zakresie  $25\text{ mm}$  (rys. 2.12b).



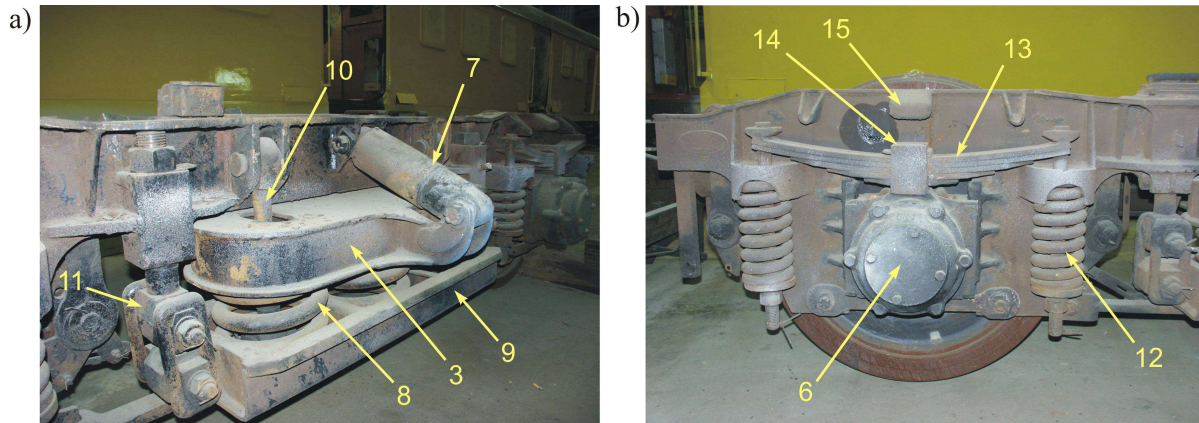
Rys. 2.12a. Oparcie pudła na belce bujakowej: 3 – belka bujakowa, 19 – belka skrętowa pudła, 20 – czop skrótu belki skrętowej, 21 – wspornik belki skrętowej bocznego oparcia pudła

Rys. 2.12b. Szczegóły belki bujakowej: 3 – belka bujakowa, 16 – ślizgi stabilizacyjne, 17 – odbijak, 18 – wspornik belki bujakowej do oparcia wspornika belki skrętowej

Resorowanie każdego z wagonów jest dwustopniowe. Pierwszy stopień resorowania stanowi łącznie sześć sprężyn zwojowych (po trzy z każdej strony) oraz dwa ukośne tłumiki hydrauliczne – po jednym z każdej strony (rys. 2.13a). Na sprężynach oparta jest belka bujakowa. Sprężyny umieszczone są w tzw. kołyskach, które podwieszono do ramy wózka za pomocą dwóch wieszaków głównych i ogniów łańcuchowych. Rozwiązanie to pozwala na łagodzenie po-

przeznaczonych do osi toru drgań i wychyleń belki bujkowej. Rozstaw sprężyn wynosi  $350\text{ mm}$  a maksymalne skrócenie  $60\text{ mm}$ .

Tłumik hydrauliczny umiejscowiony jest pomiędzy belką bujkową a podłużnicą ramy wózka. W nowszych modelach, zamiast jednego tłumika ukośnego zainstalowano dwa – pionowy i poziomy.



Rys. 2.13a) Oparcie belki bujkowej na ramie wózka (resor I stopnia): 3 – belka bujkowa, 7 – amortyzator hydrauliczny, 8 – sprężyna śrubowa, 9 – kołyska, 10 – wieszak główny, 11 – ogniwo łańcuchowe

Rys. 2.13b) Oparcie ramy wózka na zestawie kołowym (resor II stopnia): 6 – maźnica, 12 – sprężyna śrubowa, 13 – sprężyna piórowa, 14 – opaska sprężyny piórowej, 15 – odbijak ramy wózka

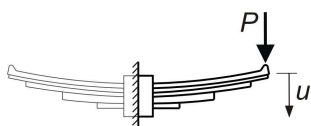
Drugi stopień resorowania stanowi jedna sprężyna piórowa i dwie sprężyny śrubowe przy każdej maźnicy (rys. 2.13b). Maksymalne ugięcie tego resora wynosi  $40\text{ mm}$  i jest ograniczone odległością między górną krawędzią opaski sprężyny piórowej, a odbijakiem na ramie wózka.

Obydwa stopnie resorowania dopuszczają ugięcie  $0,0042\text{ m/kN}$ , maksymalne zaś możliwe ugięcie wynosi  $100\text{ mm}$  ( $60\text{ mm}$  – resor I stopnia +  $40\text{ mm}$  – resor II stopnia). Charakterystyki poszczególnych resorów wg specyfikacji technicznej zamieszczono w tabeli 2.5.

Tablica 2.5. Charakterystyki elementów resorów jednostki trakcyjnej serii EN57 wg specyfikacji technicznej

Rodzaj	Parametry techniczne			
	Siła $P$ [kN]	Przemieszczenie $u$ [mm]	Sztywność $k$ [kN/m]	Wsp. tłumienia $c$ [kNs/m]
Sztywność podłużna sprężyny śrubowej (resor I stopnia)	10,0	25,7	388,4	-
Sztywność podłużna sprężyny śrubowej (resor II stopnia)	10,0	8,7	2111,2	-
Sztywność sprężyny piórowej (resor II stopnia) *)	15,9	13,0	1223,1	-
Tłumienie amortyzatora hydraulicznego (resor I stopnia) – wózek silnikowy	-	-	-	165,0
Tłumienie amortyzatora hydraulicznego (resor I stopnia) – wózek rozrządczy	-	-	-	125,0

\*) wartości dla jednego końca sprężyny



Jednostki EN57 należą do najdłużej produkowanych pojazdów szynowych na świecie (DOBROWOLSKI [1996]). Pomimo przestarzałej konstrukcji, w dalszym ciągu stanowią najpopularniejsze pod względem ilości i gęstości występowania składy PKP w kraju. Opracowane w ostatnich latach projekty modernizacji pokazały skuteczną możliwość wykorzystania podzespołów jednostki do budowy nowoczesnego taboru komunikacji miejskiej.

Jednostkę EN57 wykorzystano w niniejszej pracy jako szynowy pojazd testowy. Wykonano badania polegające na impulsowym wzbudzeniu i pomiarze drgań swobodnych wagonu. Uzyskane wyniki posłużyły do identyfikacji parametrów modalnych pojazdu szynowego oraz budowy jego uproszczonego modelu dynamicznego. Opis doświadczenia oraz otrzymane rezultaty przedstawiono w rozdziale 4.

## PRZYPISY

---

<sup>1</sup> Do przedstawienia rodzaju i układu osi w pojazdach trakcyjnych i wagonach używa się oznaczeń literowych, cyfrowych oraz znaków. Oznaczenie *Bo'Bo'* określa lokomotywę dwuwózkową, czterosiową po dwie osie napędowe w każdym wózku. Każda z osi napędzana jest osobnym silnikiem (lokomotywa czterosilnikowa). Dwuwózkowe wagony, posiadające po dwie osie toczne w każdym wózku oznacza się symbolem 2'2'.





## Rozdział 3

# Podstawy teoretyczne identyfikacji liniowych układów dynamicznych

*STRESZCZENIE. Niniejszy rozdział poświęcono zagadnieniom teoretycznym z zakresu identyfikacji parametrów modalnych konstrukcji inżynierskich. Rozdział rozpoczyna krótki przegląd i klasyfikacja podstawowych metod. W dalszej części przedstawiono ogólne sformułowania z zakresu dynamiki oraz identyfikacji liniowych układów dynamicznych. W sposób bardziej szczegółowy omówiono metodę realizacji własnej ERA (Eigensystem Realization Algorithm), którą zastosowano do identyfikacji parametrów modalnych rzeczywistego pojazdu szynowego. Podano kryteria oraz sposoby oceny poprawności otrzymanych rezultatów. Rozdział kończą testy numeryczne weryfikujące efektywność metody ERA.*

### 3.1. UWAGI WSTĘPNE

Modelowanie teoretyczne oddziaływania taboru kolejowego na most, wymaga znajomości charakterystyki dynamicznej pojazdu szynowego. Z tego powodu istotną część pracy poświęcono zagadnieniom związanym z identyfikacją parametrów modalnych układów mechanicznych.

Pojęcie „identyfikacja” w niniejszej pracy związane jest ściśle z modelowaniem układu mechanicznego jakim jest pojazd szynowy. Poprzez „identyfikację” rozumie się proces poszukiwania, który na podstawie zarejestrowanego zbioru danych pomiarowych (sygnałów), pozwala na określenie wartości zbioru parametrów dynamicznych układu. W układach mechanicznych sens identyfikacji przedstawia następująca definicja (WICHER [1977], CHUDZIKIEWICZ I INNI [1982]): „*Identyfikacja układu mechanicznego jest pewnym procesem, w wyniku którego powstaje model matematyczny, uznany zgodnie z przyjętym kryterium jakości za dostatecznie dobrze opisujący zachowanie się tego układu i jednocześnie na tyle prosty, że jest możliwa jego analiza dostępnymi środkami.*”

Zastosowaną w pracy metodę identyfikacji należy traktować jako narzędzie służące osiągnięciu określonego celu – wyznaczenia parametrów modalnych rzeczywistego pojazdu szynowego. Autor podjął próbę bezpośredniego wykorzystania pomierzonych odpowiedzi swobodnych wagonu, jako danych wejściowych do przyjętego algorytmu teoretycznego. Dane te uzyskano w oparciu o przeprowadzone badania eksperymentalne. Szczegółowy opis badań przedstawiono w rozdziale 4. Założono, że zidentyfikowane parametry modalne pozwolą na zdefiniowanie efektywnego modelu numerycznego. Model taki, pomimo znacznych uproszczeń, powinien posiadać podobne do pierwowzoru cechy dynamiczne.

W procesie identyfikacji wyróżnić można trzy zasadnicze etapy:

- 1) gromadzenie danych – badania eksperymentalne,
- 2) przetwarzanie danych – zastosowanie przyjętych algorytmów do wyznaczenia poszukiwanych parametrów układu,
- 3) weryfikacja rezultatów – kryteria wyboru i oceny poprawności wyników.

### 3.2. PRZYGOTOWANIE BADAŃ

Badania eksperymentalne służą gromadzeniu danych pomiarowych. Ważne jest odpowiednie przygotowanie badań. Błędy popełnione na tym etapie prowadzić mogą do niepoprawnych lub niekompletnych rezultatów i w efekcie konieczności ich powtórzenia. Podstawowym elementem przygotowań jest zaznajomienie się z budową i specyfiką pracy badanej struktury. Pozwala to na przyjęcie metody badawczej (sposobu wymuszenia, określenia rodzaju i lokalizacji czujników pomiarowych, kierunków pomiaru, doboru odpowiedniego zakresu i czułości aparatury pomiarowej, czasu pomiaru, częstotliwości próbkowania, itp.). Można tego dokonać wykorzystując wcześniejsze doświadczenia, analizując modele numeryczne lub – o ile to możliwe – przeprowadzając badania pilotażowe (wstępne). Aparatura pomiarowa i oprogramowanie sterujące, gwarantować musi skuteczną rejestrację i gromadzenie danych. „Jakość” sygnałów pomiarowych oraz poprawność identyfikacji zależą wprost od prawidłowego doboru powyższych parametrów.

### 3.3. METODY IDENTYFIKACJI PARAMETRÓW MODALNYCH

Warunkiem skutecznej identyfikacji jest wybór odpowiedniej metody, której założenia odpowiadająby analizowanej strukturze oraz przyjętej metodyce badawczej. Wybór metody identyfikacji uzależniony jest m. in. od rodzaju informacji możliwych do uzyskania na podstawie badań. Znaczna grupa metod umożliwia wyznaczenie modelu modalnego konstrukcji w postaci zbioru częstości własnych oraz odpowiadających im postaci drgań własnych. Bardziej zaawansowane techniki umożliwiają dodatkowo zidentyfikowanie tłumienia, masy i sztywności modalnej. Metody prowadzące do wyznaczenia wspomnianych parametrów należą do grupy *metod analizy modalnej*. Stosowalność tego rodzaju analiz obwarowana jest następującymi założeniami (ŻÓŁTOWSKI [2002]):

- analizowany układ jest liniowy i jego parametry są niezmiennie w czasie – dynamikę układu opisać można za pomocą liniowego układu równań różniczkowych o stałych współczynnikach (ang. *Linear Time Invariant System* – LTI),
- obowiązuje zasada superpozycji,
- układ jest obserwowalny (por. p. 3.4.4),
- układ spełnia zasadę wzajemności Maxwella<sup>1</sup>,
- tłumienie w układzie jest małe lub proporcjonalne.

ZHANG [2004] dokonał zwięzłej klasyfikacji wybranych metod identyfikacji w zależności od dziedziny analizy, przestrzeni analizy, liczby „wejść” i „wyjść” (liczby punktów wymuszenia drgań oraz liczby punktów pomiaru odpowiedzi) oraz metodyki badawczej. Szeroki przegląd i charakterystykę algorytmów identyfikacji przedstawili m. in. MAIA I SILVA [1997].

Główny podział metod związany jest z dziedziną analizy. Wyróżnia się metody w dziedzinie czasu i częstotliwości. Pierwsza grupa metod wykorzystuje odpowiedzi czasowe układu na wymuszenie impulsowe lub środowiskowe, druga zaś bazuje na charakterystykach częstotliwościowych układu. Spośród najbardziej znaczących metod identyfikacji w dziedzinie czasu wymienić można: *Ibrahim Time Domain* (ITD), *Complex Exponential* (CE), *Least-Squares Complex Exponential* (LSCE), *Polyreference Complex Exponential* (PRCE), *Direct System Parameter Identification* (DSPI) (MAIA I SILVA [1997]), *Extended Ibrahim Time Domain* (EITD) (ZHANG, BRINCKER I ANDERSEN [2005]), *Eigensystem Realization Algorithm* (ERA) (JUANG I PAPPA [1985], JUANG [1994]), *Natural Excitation Technique* (NExT) (JAMES, CARNE I LAUFFER [1993]), *Canonical Variate Analysis* (CVA), *Stochastic Subspace Identification* (SSI) (VAN OVERSCHEE

I DE MOOR [1996]). Do metod realizowanych w dziedzinie częstotliwości zaliczyć można m. in.: *Rational Fraction Polynomial* (RFP), *Eigensystem Realization Algorithm in the Frequency Domain* (ERA-FD) (MAIA I SILVA [1997]), *Polyreference Frequency Domain* (PRFD) (ZHANG I INNI [1985]), *Peak-Picking* (PP) (BENDAT I PIERSOL [1976]), *Complex Mode Indicator Function* (CMIF) (SHIH I INNI [1989], ALLEMANG I BROWN [2006]), *Frequency Domain Decomposition* (FDD) (BRINCKER, ZHANG, ANDERSON [2000], CHAUHAN I INNI [2006]).

Dalsza klasyfikacja wprowadza rozróżnienie na metody bezpośrednie i pośrednie (MAIA I SILVA [2001]). Do pierwszej grupy można zaliczyć metody DSPI, SSI, CVA. Z kolei do grupy metod pośrednich należą: CE, LSCE, PRCE, ITD, ERA, RFP, PP, PRFD, FDD.

Zarówno metody bezpośrednie jak i pośrednie można podzielić ze względu na liczbę „wejść” i „wyjść”. Najczęściej stosuje się metody bazujące na pojedynczym wejściu i pojedynczym wyjściu (np. CE, RFP), pojedynczym wejściu i wielu wyjściach (np. LSCE, ITD) oraz wielu wejściach i wielu wyjściach (np. EITD, PRCE, ERA, CMIF, SSI, PRFD).

Klasyczny algorytm identyfikacji bazuje na znajomości historii obciążenia i odpowiedzi konstrukcji. W tym przypadku konieczne jest zastosowanie sterowanego eksperymentu, w którym wzbudza się drgania konstrukcji znanym wymuszeniem (zastosowanie młotka modalnego lub wzbudników drgań) oraz mierzy jego odpowiedź w określonych punktach pomiarowych. Na podstawie zarejestrowanych sygnałów wymuszenia i odpowiedzi, wyznacza się model funkcjonalny<sup>2</sup> w postaci charakterystyk czasowych lub częstotliwościowych i na tej podstawie dokonuje estymacji parametrów modelu modalnego (ŻÓŁTOWSKI [2002]). Podejście to nosi nazwę *eksperymentalnej analizy modalnej* (EMA). Do tej grupy metod zaliczyć można m. in.: CE, ITD, LSCE, PRCE, ERA, RFP, CMIF, ERA-FD, PRFD. Opisane podejście zastosowali HIRSZ I WILDE [2005] do identyfikacji parametrów modalnych płyty stalowej (masa i sztywność modalna, częstości i postacie drgań, tłumienie modalne). Badania przeprowadzili w warunkach laboratoryjnych. Wymuszenia drgań płyty dokonali wykorzystując młotek modalny. CUNHA I INNI [2006] przedstawili przykłady zastosowania EMA z wykorzystaniem wzbudników drgań. Pokazali testy przeprowadzone na modelach laboratoryjnych oraz testy wykonane na rzeczywistych obiektach inżynierskich (badania in-situ).

Inna koncepcja identyfikacji oparta jest jedynie na pomiarze odpowiedzi układu. W tym przypadku nie jest konieczna znajomość wielkości i rodzaju wymuszenia. Wymuszenie ma charakter losowy, a jego źródłem może być normalna eksploatacja oraz siły związane z oddziaływaniem otoczenia (wymuszenia środowiskowe). Ten rodzaj podejścia nosi nazwę *eksploatacyjnej analizy modalnej* (OMA)<sup>3</sup>. Podstawowe algorytmy OMA w dziedzinie czasu opierają się na analizie korelacyjnej pomierzonych sygnałów (np. NExT) lub algorytmach realizowanych w przestrzeni stochastycznej (np. SSI, CVA). Analiza korelacyjna umożliwia „transformację” danych wyjściowych o charakterze stochastycznym do formy deterministycznej (odpowiedzi impulsowej), co umożliwia ich dalsze wykorzystanie w tradycyjnych metodach identyfikacji. Przykład takiego podejścia można znaleźć m. in. w pracach: DUDEK I WILDE [2005], SIRINGORINGO I FUJINO [2008] oraz NAYERI I INNI [2009]. W podejściu stochastycznym przyjmuje się założenie, że zarejestrowana odpowiedź konstrukcji jest realizacją pewnego procesu stochastycznego, wywołanego wymuszeniem w postaci białego szumu<sup>4</sup> (PEETERS I DE ROECK [2001], DUDEK I WILDE [2007]). Metody OMA realizowane w dziedzinie częstotliwości opierają się na estymacji amplitud funkcji gęstości widmowej mocy (np. metoda PP) lub dekompozycji tej funkcji przy użyciu algorytmu SVD (np. metoda FDD).

Eksplatacyjna analiza modalna (OMA) w porównaniu z metodami klasycznymi (EMA) ma wiele zalet. Ważniejsze z nich to (KROMULSKI, PAWŁOWSKI, SZCZEPANIAK [2006]):

- zidentyfikowany model lepiej opisuje rzeczywistą konstrukcję, gdyż uwzględnia rzeczywiste warunki brzegowe i charakter wymuszenia,
- daje dobre przybliżenie dla układów nieliniowych,
- umożliwia analizę konstrukcji wielkogabarytowych i o dużej masie, dla których test laboratoryjny byłby niemożliwy lub trudny do zrealizowania,
- generuje znacznie mniejsze koszty przeprowadzenia eksperymentu.

Niewątpliwą zaletą badań eksploatacyjnych jest możliwość gromadzenia danych w warunkach normalnej eksploatacji (nie ma konieczności wstrzymania, bądź czasowego wyłączenia ruchu na obiekcie). OMA daje ponadto możliwość monitorowania stanu konstrukcji poprzez śledzenie zmian jej parametrów dynamicznych. Informacji takich dostarczać mogą stałe, bądź okresowe monitoringi.

Jak już wspomniano, funkcja korelacji określona na podstawie pomiarów eksploatacyjnych (sygnały o charakterze stochastycznym), daje się przedstawić za pomocą sumy zanikających sinusoid. Każda składowa harmoniczna dostarcza informacji o częstości drgań i współczynniku tłumienia, które odpowiadają danej postaci drgań. Wobec powyższego, większość klasycznych algorytmów w dziedzinie czasu (np. EITD, PRCE, LSCE, ERA), można wykorzystać w analizie eksploatacyjnej, poprzez zastąpienie funkcji odpowiedzi impulsowych (IRF) funkcjami korelacji (HERMANS I VAN DER AUWERAER [1999], ZHANG [2004]). Co więcej, efektywne rezultaty daje wykorzystanie przebiegów drgań swobodnych tłumionych (CLAYTON [2002], HOLLKAMP I GORDON [2001]). Odpowiedź swobodną konstrukcji otrzymać można np. poprzez nagłe i krótkotrwałe wymuszenie drgań (KOZAKIEWICZ I WILDE [2003]), bądź nagłe przerwanie działającego wymuszenia o dowolnym charakterze (ZHANG, BRINCKER, ANDERSEN [2005]).

W przypadku pojazdu szynowego i przyjętej metodyki badawczej (stacjonarny eksperyment typu „zeskok z progę”) napotkano na obiektywne trudności związane z pomiarem sił wymuszających drgania. Podjęto więc próbę zastosowania jednej z metod umożliwiających identyfikację parametrów dynamicznych jedynie na podstawie zmierzonych odpowiedzi. W efekcie, dalsze prace oparto na metodzie realizacji własnej ERA zakładając, że uzyskane na podstawie badań przebiegi drgań swobodnych, mogą zostać bezpośrednio wykorzystane w algorytmie metody. Poprawność rozwiązania zweryfikowano metodą PP, oceniając stopień wpasowania zidentyfikowanych częstotliwości w piki znormalizowanej funkcji gęstości widmowej mocy ANPSD (ang. *averaged normalized power spectral density*).

### **3.4. PODSTAWOWE SFORMUŁOWANIA Z ZAKREU DYNAMIKI I IDENTYFIKACJI UKŁADÓW LINIOWYCH**

Dynamika zajmuje się opisem i analizą konstrukcji poddanych działaniu procesów zmiennych w czasie. Jest to więc nauka o procesach, w których badana wielkość (np. siła, przemieszczenie) zależy od czasu, a w przypadku ruchów drgających, oscyluje wokół położenia równowagi statycznej.

Dynamiczne modele konstrukcji można otrzymać na drodze praw fizyki (zasada Newton’a, D’Alambert’a, Lagrange’a, obecnie najczęściej jako modele MES) lub na podstawie danych pomiarowych, wykorzystując techniki identyfikacji (GAWRONSKI [1998]).

Modele liniowe reprezentowane są przez liniowe równania różniczkowe ruchu. Są to macierzowe równania drugiego rzędu lub, w formie pierwszego rzędu, równania przestrzeni stanu.

W pierwszym przypadku dynamika układu opisana jest za pomocą stopni swobody, a w drugim, za pomocą stanów układu.

### 3.4.1. Liniowy model dynamiczny w przestrzeni stanów

Klasyczne, macierzowe równanie różniczkowe drugiego rzędu, opisujące ruch dyskretnego układu o  $n_2$  stopniach swobody ma postać:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_2\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (3.1)$$

w którym  $\mathbf{M}, \mathbf{C}_2, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  są odpowiednio macierzą mas, tłumienia i sztywności, natomiast  $\mathbf{F}(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$  jest wektorem wymuszenia zewnętrznego. Ciągłe w czasie, kolumnowe wektory  $\ddot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n_2 \times 1}$  zawierają odpowiednio wartości przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń poszczególnych stopni swobody układu.

Dla rzeczywistych struktur inżynierskich, równanie (3.1) otrzymuje się przez dyskretyzację<sup>5</sup>, sprowadzając układ ciągły do układu o skończonej liczbie stopni swobody. Pomimo, iż równanie to bardzo dobrze opisuje zachowanie się konstrukcji, jego bezpośrednie wykorzystanie w identyfikacji jest trudne z kilku powodów (PEETERS I DE ROECK [1999]). Po pierwsze jest ono zapisane dla czasu ciągłego, podczas gdy dane pomiarowe są zapisywane w dyskretnych chwilach czasowych. Ponadto równanie to ujmuje jednocześnie wszystkie stopnie swobody układu, a w wielu przypadkach ich całościowy pomiar nie jest możliwy. I w końcu obok znanego wymuszenia  $\mathbf{F}(t)$ , w sygnale występuje szereg szumów i zakłóceń, które zniekształcają jego przebieg.

Równanie (3.1) można przekształcić do bardziej użytecznej formy – dyskretnego w czasie równania stanu. Model przestrzeni stanu bierze swój początek z teorii sterowania i jest powszechnie stosowany w identyfikacji parametrów modalnych liniowych układów o wiskotycznym tłumieniu.

Wektor wymuszenia  $\mathbf{F}(t)$  można przedstawić w postaci iloczynu macierzy  $\mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times r}$ , opisującej lokalizację wymuszeń w przestrzeni oraz wektora  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ , opisującego ich przebieg w czasie, tj.:

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{B}_2\mathbf{u}(t), \quad (3.2)$$

gdzie  $r$  oznacza liczbę miejsc wymuszeń układu. Równanie stanu otrzymuje się traktując oczywistą równość  $\dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{q}}(t)$  oraz przekształcone względem  $\ddot{\mathbf{q}}(t)$  równanie (3.1), jako układ równań (LEWANDOWSKI [2006]):

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}(t) &= \mathbf{0}\mathbf{q}(t) + \mathbf{I}\dot{\mathbf{q}}(t), \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) &= -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_2\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_2\mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Wprowadzając nową zmienną:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix}, \quad (3.4)$$

układ równań (3.3) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t), \quad (3.5)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad n = 2n_2.$$

Równanie (3.5) jest macierzowym, różniczkowym równaniem pierwszego rzędu i jest nazywane *równaniem stanu*. Macierze  $\mathbf{A}_c$  i  $\mathbf{B}_c$  to odpowiednio macierz stanu i macierz wejścia,  $\mathbf{x}(t)$  to wektor stanu, natomiast  $\mathbf{u}(t)$  to wektor wejścia (sterowania). Liczba elementów w wektorze stanu określa liczbę niezależnych zmiennych potrzebnych do opisanego stanu systemu.

Dokonyując pomiarów odpowiedzi konstrukcji, bardzo często nie jesteśmy w stanie monitorować wszystkich stopni swobody. Jeżeli założymy, że pomiary wykonywane są w  $m$  punktach pomiarowych ( $m$  lokalizacji czujników), a wielkościami mierzonymi są przyspieszenia, prędkości lub przemieszczenia, możemy zapisać następujące *równanie obserwacji* (PEETERS I DE ROECK [1999]):

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{q}(t), \quad (3.6)$$

w którym  $\mathbf{y}(t)$  to wektor odpowiedzi, natomiast  $\mathbf{C}_a, \mathbf{C}_v, \mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{m \times n}$  to macierze odpowiedzi odpowiednio dla przyspieszeń, prędkości i przemieszczeń.

Równanie (3.6) można przekształcić następująco:

- drugie równanie układu (3.3) mnożymy obustronnie przez macierz  $\mathbf{C}_a$ :

$$\mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{q}}(t) = -\mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{q}(t) - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_2 \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t), \quad (3.7)$$

- równanie (3.7) podstawiamy do równania (3.6) i grupujemy wyrażenia zawierające te same zmienne otrzymując:

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{q}(t) + (\mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_2) \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_2 \mathbf{u}(t), \quad (3.8)$$

- następnie definiując nowe macierze:

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{D}_c = \mathbf{C}_a \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_2,$$

równanie (3.8) możemy zapisać w zwartej formie:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t), \quad (3.9)$$

gdzie  $\mathbf{C}_c \in \mathbb{R}^{m \times n}$  jest macierzą wyjścia, natomiast  $\mathbf{D}_c \in \mathbb{R}^{m \times r}$  określana jest jako macierz transmisyjna. Równania (3.5) i (3.9) opisują ciągły w czasie, deterministyczny model przestrzeni stanu:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (3.10)$$

Rozwiązanie pierwszego z równań układu (3.10) dla dowolnej chwili czasowej  $t > t_0$  oraz danych warunkach początkowych  $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0$  wyraża się następująco (JUANG [1994]):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_c(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_c(t-\tau)} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(\tau) d\tau. \quad (3.11)$$

W rzeczywistości pomiary wykonywane są w dyskretnych chwilach czasowych  $t_k = k\Delta t$ , gdzie  $\Delta t$  jest krokiem czasowym, natomiast  $k \in N$ . Do celów praktycznych konieczna jest zatem transformacja układu ciągłego do układu dyskretnego. Przy założeniu, że czas początkowy wynosi zero, tj.  $t_0 = 0$ , rozwiązanie dla chwili czasowej  $t_k$  można zapisać:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}(k\Delta t) &= e^{\mathbf{A}_c(t_k-0)}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_k} e^{\mathbf{A}_c(t_k-\tau)}\mathbf{B}_c\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{x}_k &= e^{\mathbf{A}_c k\Delta t}\mathbf{x}_0 + \int_0^{k\Delta t} e^{\mathbf{A}_c(k\Delta t-\tau)}\mathbf{B}_c\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (3.12)$$

natomiast dla chwili  $t_{k+1}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}((k+1)\Delta t) &= e^{\mathbf{A}_c(t_{k+1}-t_k)}\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}_c(t_{k+1}-\tau)}\mathbf{B}_c\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ \mathbf{x}_{k+1} &= e^{\mathbf{A}_c\Delta t}\mathbf{x}_k + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{\mathbf{A}_c((k+1)\Delta t-\tau)}\mathbf{B}_c\mathbf{u}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (3.13)$$

Zakładając, że wszystkie elementy wektora  $\mathbf{u}(t)$  są stałe na długości kroku, tj.  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k$  dla  $t \in [k\Delta t, (k+1)\Delta t]$ , po scałkowaniu równania (3.13) otrzymamy dyskretne równanie stanu dla kroku  $k+1$ :

$$\mathbf{x}_{k+1} = e^{\mathbf{A}_c\Delta t}\mathbf{x}_k + (e^{\mathbf{A}_c\Delta t} - \mathbf{I})\mathbf{A}_c^{-1}\mathbf{B}_c\mathbf{u}_k \quad (3.14)$$

Przywołując następnie równanie obserwacji (3.9) oraz definiując w równaniu (3.14):

$$\mathbf{A} = e^{\mathbf{A}_c\Delta t}, \quad \mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{A}_c^{-1}\mathbf{B}_c, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_c, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_c, \quad (3.15)$$

dyskretny model przestrzeni stanu można ostatecznie zapisać:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (3.16)$$

gdzie  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$  to odpowiednio macierze stanu, wejścia, wyjścia i transmisyjna, w dyskretnej reprezentacji przestrzeni stanu.

### 3.4.2. Odpowiedź impulsowa w przestrzeni stanów – parametry Markowa

Dany jest dyskretny, liniowy układ dynamiczny opisany parą równań (3.16) i warunku początkowym  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ . W chwili  $k = 0$  układ doznaje jednostkowego wymuszenia impulsowego:

$$\begin{cases} u^i(k) = u_k^i = 1, & \text{dla } k = 0 \text{ oraz } i = 1, 2, 3, \dots, r \\ u^i(k) = u_k^i = 0, & \text{dla } k > 0 \text{ oraz } i = 1, 2, 3, \dots, r \end{cases} \quad (3.17)$$

Przy założeniu braku szumów w sygnale, dla kolejnych chwil czasowych możemy zapisać:

$$k = 0:$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{B}\mathbf{u}_0 = \mathbf{B} \\ \mathbf{y}_0 &= \mathbf{C}\mathbf{x}_0 + \mathbf{D}\mathbf{u}_0 = \mathbf{D} \end{aligned}$$

$k = 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = \mathbf{A}\mathbf{B} \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}\mathbf{x}_1 + \mathbf{D}\mathbf{u}_1 = \mathbf{C}\mathbf{B} \end{aligned}$$

$k = 2$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}\mathbf{u}_2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B} \\ \mathbf{y}_2 &= \mathbf{C}\mathbf{x}_2 + \mathbf{D}\mathbf{u}_2 = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B} \end{aligned}$$

$k = 3$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_4 &= \mathbf{A}\mathbf{x}_3 + \mathbf{B}\mathbf{u}_3 = \mathbf{A}^3\mathbf{B} \\ \mathbf{y}_3 &= \mathbf{C}\mathbf{x}_3 + \mathbf{D}\mathbf{u}_3 = \mathbf{C}\mathbf{A}^2\mathbf{B} \end{aligned}$$

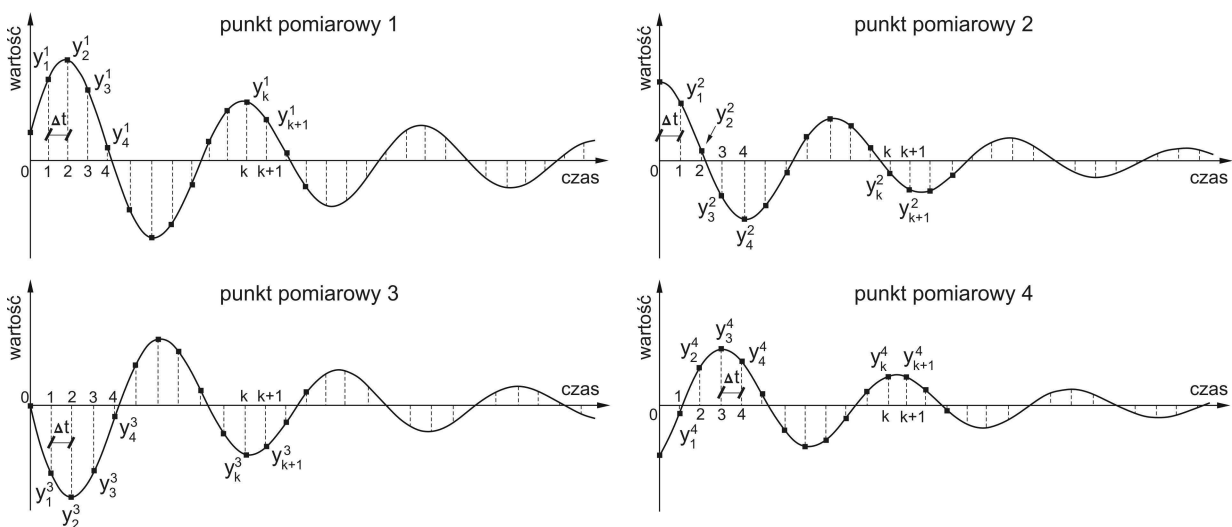
...itd.

Ogólnie zatem, dla dowolnej chwili czasowej, odpowiedź układu (3.16) na wymuszenie (3.17) wyraża się następująco<sup>6</sup>:

$$\mathbf{Y}_k^{(m \times r)} = \begin{cases} \mathbf{D}, & \text{dla } k = 0 \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}, & \text{dla } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (3.18)$$

Wyrażenia (3.18) noszą nazwę *parametrów Markowa* i stanowią kluczową rolę w identyfikacji dyskretnego modelu w przestrzeni stanów, opisanego macierzami systemu  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ .

W praktyce, identyfikując układ dynamiczny na podstawie badań, dysponujemy jedynie sygnałami pomiarowymi odpowiedzi konstrukcji na znane bądź nie wymuszenie. Macierze systemu są zatem nieznanne i stanowią rezultat procesu identyfikacji. W takim przypadku parametry Markowa można otrzymać bezpośrednio z danych pomiarowych. Stanowią one odpowiednią kombinację wartości chwilowych odpowiedzi układu na wymuszenie impulsowe w różnych punktach pomiarowych (rys. 3.1).



Rys. 3.1. Ilustracja zasady generacji parametrów Markowa na bazie danych pomiarowych (opis w tekście)



Niech wartość  $y_k^m$  będzie wartością odpowiedzi konstrukcji w chwili czasowej  $k$  i punkcie pomiarowym  $m$ . Wartości odpowiedzi dla wszystkich punktów pomiarowych w danej chwili czasowej można zestawić w wektor:  $\mathbf{y}_k = \text{col}\{y_k^1, y_k^2, y_k^3, y_k^4, \dots, y_k^m\}$ . Dla przykładu pokazanego na rys. 3.1 ( $m = 4$ ), kolejne parametry Markowa wynoszą:

$$\mathbf{y}_1 = \begin{Bmatrix} y_1^1 \\ y_1^2 \\ y_1^3 \\ y_1^4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{Bmatrix} y_2^1 \\ y_2^2 \\ y_2^3 \\ y_2^4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y}_3 = \begin{Bmatrix} y_3^1 \\ y_3^2 \\ y_3^3 \\ y_3^4 \end{Bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{y}_k = \begin{Bmatrix} y_k^1 \\ y_k^2 \\ y_k^3 \\ y_k^4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y}_{k+1} = \begin{Bmatrix} y_{k+1}^1 \\ y_{k+1}^2 \\ y_{k+1}^3 \\ y_{k+1}^4 \end{Bmatrix}, \quad \dots \quad (3.19)$$

### 3.4.3. Macierz Hankela

Parametry Markowa  $\mathbf{Y}_k$  można zestawić w macierz według następującego porządku:

$$\mathbf{H}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_k & \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\beta-1} \\ \mathbf{Y}_{k+1} & \mathbf{Y}_{k+2} & \mathbf{Y}_{k+3} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\beta} \\ \mathbf{Y}_{k+2} & \mathbf{Y}_{k+3} & \mathbf{Y}_{k+4} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\beta+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_{k+\alpha-1} & \mathbf{Y}_{k+\alpha} & \mathbf{Y}_{k+\alpha+1} & \dots & \mathbf{Y}_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta r}, \quad (3.20)$$

a po podstawieniu zależności (3.18):

$$\mathbf{H}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{CA}^{k-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^k\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{k+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{k+\beta-2}\mathbf{B} \\ \mathbf{CA}^k\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{k+1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{k+2}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{k+\beta-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{CA}^{k+1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{k+2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{k+3}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{k+\beta}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{k+\alpha-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{k+\alpha-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{k+\alpha}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{k+\alpha+\beta-3}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta r}. \quad (3.21)$$

Macierz (3.20) lub (3.21) nosi nazwę uogólnionej, blokowej *macierzy Hankela* dyskretnego układu dynamicznego. Parametry  $\alpha$  i  $\beta$ , nazywane „parametrami projektowymi”, decydują o wymiarze macierzy  $\mathbf{H}(k-1)$  (patrz p. 3.6.3). Niech  $n$  oznacza rząd rozpatrywanego układu<sup>7</sup>. Jeżeli  $\alpha \geq n$  i  $\beta \geq n$ , wówczas rząd macierzy Hankela  $\mathbf{H}(k-1)$  wynosi  $n$  (JUANG [1994]).

W przypadku szczególnym, dla  $k = 1$ , macierz Hankela przyjmuje postać:

$$\mathbf{H}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 & \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \dots & \mathbf{Y}_\beta \\ \mathbf{Y}_2 & \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \dots & \mathbf{Y}_{\beta+1} \\ \mathbf{Y}_3 & \mathbf{Y}_4 & \mathbf{Y}_5 & \dots & \mathbf{Y}_{\beta+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Y}_\alpha & \mathbf{Y}_{\alpha+1} & \mathbf{Y}_{\alpha+2} & \dots & \mathbf{Y}_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta r}, \quad (3.22)$$

a przy wykorzystaniu zależności (3.18):

$$\mathbf{H}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{\beta-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \mathbf{CA}^3\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{\beta}\mathbf{B} \\ \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \mathbf{CA}^3\mathbf{B} & \mathbf{CA}^4\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{\beta+1}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\alpha}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{\alpha+1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{CA}^{\alpha+\beta-2}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta r}. \quad (3.23)$$

Widać z tego, że składnik  $\mathbf{y}_0 = \mathbf{D}$ , nie jest uwzględniony w macierzy  $\mathbf{H}(0)$ .

Macierz Hankela  $\mathbf{H}(0)$  zbudować można również w oparciu o sekwencję parametrów Markowa  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \dots$  uzyskanych na podstawie pomierzonej odpowiedzi układu (por. (3.19)), tj.:

$$\mathbf{H}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_k & \mathbf{y}_{k+1} & \mathbf{y}_{k+2} & \dots & \mathbf{y}_{k+\beta-1} \\ \mathbf{y}_{k+1} & \mathbf{y}_{k+2} & \mathbf{y}_{k+3} & \dots & \mathbf{y}_{k+\beta} \\ \mathbf{y}_{k+2} & \mathbf{y}_{k+3} & \mathbf{y}_{k+4} & \dots & \mathbf{y}_{k+\beta+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{k+\alpha-1} & \mathbf{y}_{k+\alpha} & \mathbf{y}_{k+\alpha+1} & \dots & \mathbf{y}_{k+\alpha+\beta-2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta}. \quad (3.24)$$

W przypadku szczególnym, gdy  $k = 1$ :

$$\mathbf{H}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \dots & \mathbf{y}_{\beta} \\ \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & \dots & \mathbf{y}_{\beta+1} \\ \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & \mathbf{y}_5 & \dots & \mathbf{y}_{\beta+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{\alpha} & \mathbf{y}_{\alpha+1} & \mathbf{y}_{\alpha+2} & \dots & \mathbf{y}_{\alpha+\beta-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta}, \quad (3.25)$$

natomiast gdy  $k = 2$ :

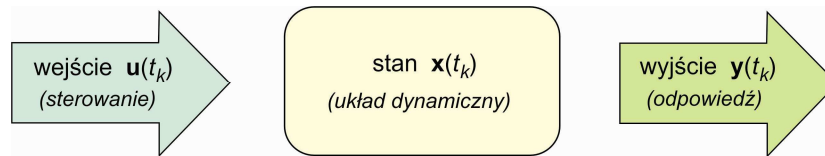
$$\mathbf{H}(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_2 & \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & \dots & \mathbf{y}_{\beta+1} \\ \mathbf{y}_3 & \mathbf{y}_4 & \mathbf{y}_5 & \dots & \mathbf{y}_{\beta+2} \\ \mathbf{y}_4 & \mathbf{y}_5 & \mathbf{y}_6 & \dots & \mathbf{y}_{\beta+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{\alpha+1} & \mathbf{y}_{\alpha+2} & \mathbf{y}_{\alpha+3} & \dots & \mathbf{y}_{\alpha+\beta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta}. \quad (3.26)$$

Macierz  $\mathbf{H}(1)$  nosi nazwę *przesuniętej macierzy Hankela*.

Sformułowanie macierzy Hankela w oparciu o dane sygnały pomiarowe, stanowi podstawę wielu algorytmów identyfikacji (np. ERA) i prowadzi do wyznaczenia macierzy systemu  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  oraz  $\mathbf{C}$ .

### 3.4.4. Sterowalność i obserwowalność układu dynamicznego

W modelu dynamicznym rzędu  $n$  opisanym równaniami (3.16), stan układu w danej chwili czasowej  $t_k$  charakteryzują zmienne stanu zestawione w wektor  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k)$ . Działanie zewnętrzne (sterowanie) opisane jest wektorem wejścia  $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$ . Efekt tego działania (odpowiedź układu) zestawiona jest w wektorze wyjścia  $\mathbf{y}_k = \mathbf{y}(t_k)$  (rys. 3.2).



Rys. 3.2. Schemat blokowy modelu dynamicznego w przestrzeni stanu

Zależność pomiędzy wejściem i stanem układu dynamicznego określa się mianem *sterowalności*. Sterowalność określa możliwości wpływania (poprzez określone sterowanie) na stan badanego układu. Dany stan  $\mathbf{x}(t_k)$  określony przez zmienne stanu  $x_i(t_k)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) jest sterowalny, jeżeli poczynając od dowolnego stanu początkowego  $\mathbf{x}(t_0)$ , można go osiągnąć w skończonym czasie poprzez odpowiedni ciąg sterowań  $\{\mathbf{u}(t_0), \mathbf{u}(t_1), \mathbf{u}(t_2), \dots, \mathbf{u}(t_{k-2}), \mathbf{u}(t_{k-1})\}$ . Jeżeli wszystkie stany układu są sterowalne, wówczas mówimy o *układzie sterowalnym*.

*Obserwowalność* jest zależnością pomiędzy stanem układu dynamicznego a wyjściem. Obserwowalność mówi o możliwości określenia stanu badanego układu (przy określonym sterowaniu) na podstawie obserwacji jego odpowiedzi (wyjścia). Dany stan  $\mathbf{x}(t_k)$  określony przez zmienne stanu  $x_i(t_k)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) jest obserwowalny, jeżeli można go wyznaczyć na podstawie znajomości historii odpowiedzi  $\{\mathbf{y}(t_0), \mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2), \dots, \mathbf{y}(t_{k-2}), \mathbf{y}(t_{k-1}), \mathbf{y}(t_k)\}$ . Jeżeli wszystkie stany układu są obserwowalne, wówczas mówimy o *układzie obserwowalnym*.

Znajomość macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  dyskretnego układu dynamicznego rzędu  $n$ , pozwala na zbudowanie *macierzy sterowania* i *obserwacji*. Macierz sterowania zależy od macierzy stanu  $\mathbf{A}$  oraz macierzy wejścia  $\mathbf{B}$  i dana jest jako:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}] \in \mathbb{R}^{n \times kr}. \quad (3.27)$$

Macierz obserwacji zależy od macierzy stanu  $\mathbf{A}$  oraz macierzy wyjścia  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^2 \\ \dots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{km \times n}. \quad (3.28)$$

➤ Twierdzenie o sterowalności układu (kryterium Kalmana)

Liniowy, skończenie wymiarowy, dyskretny układ dynamiczny (3.16) rzędu  $n$  jest sterowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz sterowania  $\mathbf{Q}$  dana zależnością (3.27) jest rzędu  $n$  (rzęd macierzy  $\mathbf{Q}$  równy jest rzędowi systemu), tj.:

$$\text{rank } \mathbf{Q} = n.$$

➤ Twierdzenie o obserwowalności układu (kryterium Kalmana)

Liniowy, skończenie wymiarowy, dyskretny układ dynamiczny (3.16) rzędu  $n$  jest obserwowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz obserwacji  $\mathbf{P}$  dana zależnością (3.28) jest rzędu  $n$  (rzęd macierzy  $\mathbf{P}$  równy jest rzędowi systemu), tj.:

$$\text{rank } \mathbf{P} = n.$$

Dowody powyższych twierdzeń przedstawili m. in. JUANG [1994] i KATAYAMA [2005].

Znajomość macierzy sterowania i obserwacji dyskretnego układu dynamicznego rzędu  $n$ , umożliwia przedstawienie macierzy Hankela  $\mathbf{H}(k-1)$  w postaci iloczynu:

$$\mathbf{H}(k-1) = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_\beta, \quad (3.29)$$

gdzie:

$$\mathbf{P}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{\alpha-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times n} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{Q}_\beta = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{\beta-1}\mathbf{B}] \in \mathbb{R}^{n \times \beta r}, \quad (3.30)$$

to odpowiednio blokowa macierz obserwacji oraz blokowa macierz sterowania. Ponieważ rozpatrywany układ jest sterowalny i obserwowalny (por. p. 3.3), to zgodnie z twierdzeniami o sterowalności i obserwowalności Kalmana  $\text{rank } \mathbf{Q}_\beta = n$  oraz  $\text{rank } \mathbf{P}_\alpha = n$ . Układ jest stopnia  $n$ , zatem macierz stanu  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  i macierz Hankela  $\mathbf{H}(k-1)$  mają również rząd równy  $n$ .

### 3.4.5. Minimalna realizacja dyskretnego, liniowego modelu w przestrzeni stanów

Wyznaczenie realizacji dyskretnego, liniowego układu dynamicznego opisanego zależnością (3.16) sprowadza się do znalezienia macierzy dynamicznych  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$  na podstawie parametrów Markowa. W praktyce, ponieważ zachodzi zależność  $\mathbf{D} = \mathbf{Y}_0$  (por. (3.18)), do wyznaczenia pozostają jedynie macierze  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  oraz  $\mathbf{C}$ .

Każdy układ ma nieskończenie wiele realizacji, tzn. możliwe jest wyznaczenie nieskończenie wielu „zestawów” macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{C}$ , które przy założeniu braku szumów w sygnale, dadzą tę samą odpowiedź dla określonego wymuszenia (DUDEK [2008]). Z praktycznego punktu widzenia oczekujemy, aby zidentyfikowany model był możliwie jak najmniejszego rzędu, a jednocześnie jak najwierniej opisywał rzeczywistość. Istotą procesu identyfikacji jest zatem znalezienie tzw. *realizacji minimalnej*, czyli realizacji, dla której macierze dynamiczne  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{C}$  będą miały najmniejsze możliwe wymiary.

Ponieważ w praktyce sygnały pomiarowe obarczone są szumem pomiarowym, nie jest możliwe uzyskanie „czystych” parametrów Markowa. W efekcie rząd modelu jest zwykle większy od rzędu „czystego” układu dynamicznego. Znalezienie realizacji najmniejszego rzędu sprowadza się zatem do rozwiązania następującego problemu: *dysponując zbiorem pomierzonych odpowiedzi rzeczywistej konstrukcji, należy przedstawić jej opis w formie jak najmniejszej liczby równań przestrzeni stanów, które jednocześnie jak najwierniej (zgodnie z przyjętym kryterium błędu) będą reprezentowały rzeczywistość.*

Pionierskie rozwiązanie problemu minimalnej realizacji liniowego układu dynamicznego na podstawie parametrów Markowa przedstawili Ho i Kalman w 1965 r. (DE SCHUTTER [2000]). W pracy HO I KALMAN [1966] autorzy podali teoretyczne rozwiązanie zagadnienia w oparciu o założenie, iż odpowiedź impulsowa układu jest wolna od zakłóceń oraz nieskończenie długa w czasie. Rozwinięciem algorytmu Ho-Kalmana jest metoda realizacji własnej ERA (ang. *Eigen-system Realization Algorithm*), która umożliwia wyznaczenie macierzy dynamicznych na podstawie skończonych, „czystych” bądź „zaszumionych” danych pomiarowych. Algorytm metody

przedstawiony został po raz pierwszy w pracy JUANG I PAPPÀ [1985]. Założenia oraz obszerny opis teoretyczny można znaleźć również w monografii JUANG [1994]. Praktyczne zastosowanie metody pokazali m.in. DOEBLING, FARRAR I GOLDMAN [1997], LUSCHER I INNI [2001], BROWNJOHN [2003], DUDEK [2008] oraz wspomniani już CLAYTON [2002], DUDEK I WILDE [2005], SIRINGORINGO I FUJINO [2008] oraz wielu innych.

### 3.5. METODA PP (*Peak-Picking*)

Metoda PP (ang. *Peak-Picking*) jest jedną z najprostszych metod identyfikacji częstotliwości drgań własnych. Opiera się na analizie widmowej zarejestrowanych sygnałów pomiarowych (CRAWFORD I WARD [1964], REN I ZONG [2004], ZHAO, SUN, ZHENG [2009]) W przypadku układów o wielu wyjściach (wielu punktach pomiarowych), częstotliwości drgań określić można na podstawie pików uśrednionej, znormalizowanej funkcji widmowej gęstości mocy (ang. *Averaged Normalized Power Spectral Density – ANPSD*).

Jeżeli pomiary realizowane są w  $m$  punktach pomiarowych, to dla sygnałów deterministycznych, algorytm metody streścić można w następujących krokach:

- 1) zebranie danych pomiarowych z każdego punktu pomiarowego  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ,
- 2) transformacja każdego ( $i$ -tego) sygnału z dziedziny czasu do dziedziny częstotliwości (*Dyskretna Transformacja Fouriera – DFT*) – p. 3.5.1.,
- 3) obliczenie funkcji widmowej gęstości mocy dla każdego ( $i$ -tego) sygnału (ang. *Power Spectral Density – PSD*) – p. 3.5.2.,
- 4) obliczenie i wykreślenie uśrednionej, znormalizowanej funkcji widmowej gęstości mocy (ANPSD) dla całego zbioru zarejestrowanych sygnałów – p. 3.5.3.,
- 5) określenie częstotliwości drgań na podstawie pików ANPSD.

#### 3.5.1. Dyskretna transformacja Fouriera (DFT)

Transformację Fouriera  $i$ -tego, dyskretnego sygnału okresowego o całkowitej liczbie  $N$  próbek przedstawia następująca zależność (LYONS [2003]):

$$DFT_i(f_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_i(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (3.31)$$

gdzie  $j = \sqrt{-1}$ ,  $DFT_i(f_k)$  to  $k$ -ta składowa (częstotliwość) wyjściowego ciągu DFT, obliczane dla  $i$ -tego sygnału ( $k = 1, 2, 3, \dots, N-1$ ),  $x_i(n)$  to ciąg próbek wejściowych  $i$ -tego sygnału pomiarowego w dziedzinie czasu ( $n = 1, 2, 3, \dots, N-1$ ). W praktyce, z uwagi na dużą efektywność procedury, do wyznaczenia dyskretnnej transformacji Fouriera wykorzystuje się algorytm szybkiej transformacji Fouriera (FFT).

#### 3.5.2. Widmowa gęstość mocy (PSD)

Funkcja widmowej gęstości mocy  $i$ -tego sygnału deterministycznego, określona jest jako iloczyn transformaty Fouriera tego sygnału i jej wartości sprzężonej (KUCHARSKI [2002]):

$$PSD_i(f_k) = \frac{2\Delta t}{N} [DFT_i(f_k)] [DFT_i^*(f_k)], \quad (3.32)$$

gdzie  $DFT_i$  to transformata Fouriera  $i$ -tego sygnału pomiarowego, „\*” oznacza sprzężenie hermitowskie, natomiast  $\Delta t$  to krok czasowy.

### 3.5.3. Uśredniona, znormalizowana widmowa gęstość mocy (ANPSD)

Funkcja uśrednionej, znormalizowanej widmowej gęstości mocy określona dla zbioru  $m$  sygnałów pomiarowych dana jest zależnością (ZHAO, SUN, ZHENG [2009]):

$$ANPSD(f_k) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{PSD_i(f_k)}{\sum_{k=1}^N PSD_i(f_k)}, \quad (3.33)$$

gdzie  $PSD_i$  to funkcja widmowej gęstości mocy  $i$ -tego sygnału wg (3.32).

Przykład obliczeniowy z wykorzystaniem metody PP przedstawiono w punkcie 3.7.

## 3.6. METODA REALIZACJI WŁASNEJ ERA (*Eigensystem Realization Algorithm*)

Podstawą algorytmu metody ERA jest sformułowanie macierzy Hankela w oparciu o pomierzone sygnały odpowiedzi impulsowej lub odpowiedzi swobodnej układu. Wyznaczenie macierzy dynamicznych  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{C}$  możliwe jest poprzez dekompozycję wg wartości osobliwych (ang. *Singular Value Decomposition*) macierzy  $\mathbf{H}(0)$  oraz własności uogólnionej macierzy odwrotnej (w sensie Moore-Penrose’a)<sup>8</sup>.

Zależność (3.29) dla  $k = 1$  daje:

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta, \quad (3.34)$$

natomiast dla  $k = 2$ :

$$\mathbf{H}(1) = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A} \mathbf{Q}_\beta. \quad (3.35)$$

Założmy, że istnieje macierz  $\mathbf{H}^\dagger$  spełniająca zależność:

$$\mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^\dagger \mathbf{P}_\alpha = \mathbf{I}, \quad (3.36)$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową. Mnożąc lewostronnie równanie (3.36) przez  $\mathbf{P}_\alpha$  oraz prawostronnie przez  $\mathbf{Q}_\beta$  otrzymujemy:

$$\mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^\dagger \mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta = \mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta. \quad (3.37)$$

Następnie wykorzystując zależność (3.34) możemy zapisać:

$$\mathbf{H}(0) \mathbf{H}^\dagger \mathbf{H}(0) = \mathbf{H}(0), \quad (3.38)$$

co pokazuje, że macierz  $\mathbf{H}^\dagger$  może być traktowana jako uogólniona macierz odwrotna (w sensie Moore-Penrose’a) macierzy  $\mathbf{H}(0)$ .

### 3.6.1. Wyznaczenie macierzy dynamicznych (minimalna realizacja układu)

Dekompozycja SVD blokowej macierzy Hankela dla  $k = 1$  daje:

$$SVD \mathbf{H}(0) = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T, \quad (3.39)$$

gdzie  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \beta}$ , to prostokątna macierz diagonalna zawierająca wartości osobliwe macierzy  $\mathbf{H}(0)$  rozmieszczone na diagonalu w porządku malejącym ( $\mathbf{S} = \text{diag}[\sigma_i]$ , gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, \beta$  oraz  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_\beta$ ). Wartości osobliwe  $\sigma_i$  są liczbami rzeczywistymi dodatnimi bądź lub równymi zero (bliskimi zero). Kolumny macierzy  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{\alpha m \times \alpha m}$  oraz  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{\beta \times \beta}$  stanowią odpowiednio lewo i prawostronne wektory osobliwe, odpowiadające poszczególnym wartościom  $\sigma_i$  i spełniające warunki ortonormalności<sup>9</sup>. W tym miejscu następuje ważny etap rozwiązania – określenie rzędu identyfikowanego układu poprzez wybór  $n$  największych („znaczących”) wartości osobliwych. „Znaczące” wartości  $\sigma_i$  niosą ze sobą informacje o parametrach układu, natomiast „bliskie zero” wartości  $\hat{\sigma}_i$  mogą być efektem zakłóceń oraz szumów pomiarowych i należy je odrzucić. Należy zaznaczyć, iż liczba „znaczących” wartości  $\sigma_i$  jest zawsze dwukrotnie większa niż liczba modów identyfikowanego układu.

Macierz  $\mathbf{S}$  przedstawić można zatem za pomocą kwadratowej podmacierzy  $\mathbf{S}_n$ , zawierającej „znaczące” wartości osobliwe oraz podmacierzy  $\hat{\mathbf{S}}$ , zawierającej wartości „bliskie zero”:

$$\mathbf{S}_{(\alpha m \times \beta)} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_n \end{bmatrix} & & & \\ & \mathbf{0} & & \\ & & \hat{\sigma}_{n+1} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & \hat{\sigma}_{n+2} & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & \hat{\sigma}_\beta \\ & & & & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} & & & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}} \end{bmatrix}, \quad (3.40)$$

gdzie  $\mathbf{S}_n = \text{diag}[\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Podobnego podziału dokonać można w macierzach  $\mathbf{U}$  oraz  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{U}_{(\alpha m \times \alpha m)} = [\mathbf{U}_n \hat{\mathbf{U}}]; \quad \mathbf{V}_{(\beta \times \beta)} = [\mathbf{V}_n \hat{\mathbf{V}}], \quad (3.41)$$

gdzie  $\mathbf{U}_n = [\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \dots \mathbf{u}_n] \in \mathbb{R}^{\alpha m \times n}$  oraz  $\mathbf{V}_n = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_n] \in \mathbb{R}^{\beta \times n}$ , zawierają odpowiednio lewe i prawe wektory osobliwe odpowiadające „znaczącym” wartościom  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Zauważyć można, że zredukowane macierze  $\mathbf{U}_n$ ,  $\mathbf{S}_n$ , i  $\mathbf{V}_n$  nadal umożliwiają aproksymację (przybliżenie) pełnowymiarowej macierzy Hankela:

$$\tilde{\mathbf{H}}(0) = \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n^T \cong \mathbf{H}(0). \quad (3.42)$$

$(\alpha m \times \beta)$      $(\alpha m \times n)$      $(n \times n)$      $(n \times \beta)$      $(\alpha m \times \beta)$

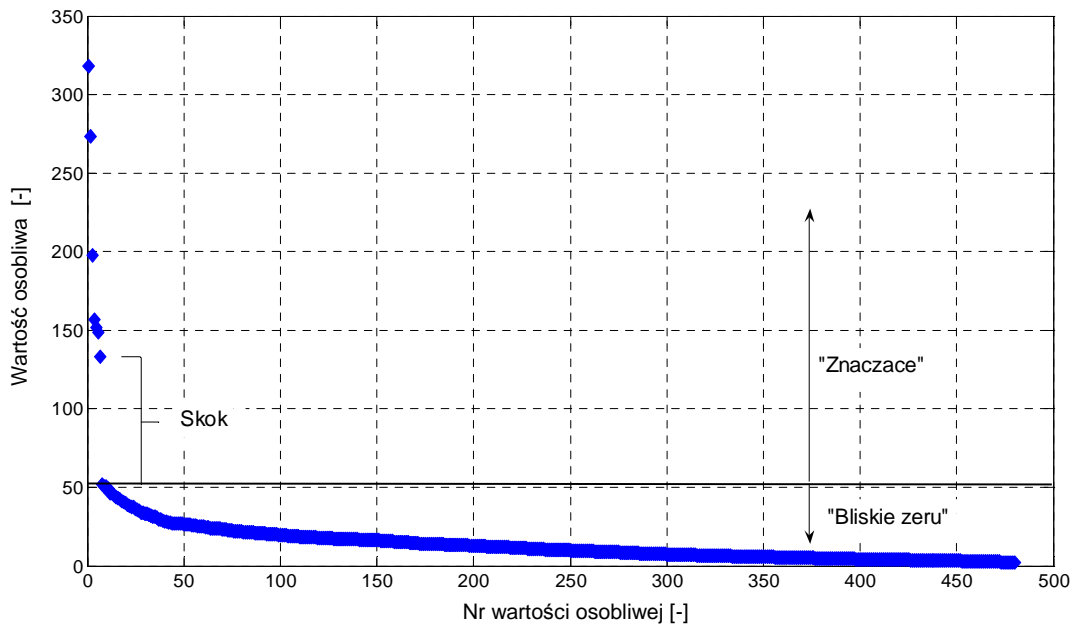
Zachodzą również zależności:

$$\mathbf{U}_n^T \mathbf{U}_n = \mathbf{V}_n^T \mathbf{V}_n = \mathbf{I}_n \quad \text{oraz} \quad \mathbf{U}_n^T = \mathbf{U}_n^\dagger, \quad \mathbf{V}_n^T = \mathbf{V}_n^\dagger. \quad (3.43)$$

Przy wyborze „znaczących” wartości osobliwych, a co za tym idzie rzędu identyfikowanego modelu, pomocne może być sporządzenie i analiza wykresu wartości osobliwych (HOLLKAMP I GORDON [2001], PETSOUNIS I FASSOIS [2001], HUNG I KO [2002], FAN, ZHANG I HUA [2007]). Wyraźny uskok na wykresie może wskazywać na granicę oddzielającą wartości „znaczące”, za-

wierające informację o identyfikowanej strukturze, od wartości „bliskich zeru” – stanowiących wielkości obliczeniowe lub będących efektem szumów pomiarowych. Przykładowy wykres wartości osobliwych pokazano na rys. 3.3.

Należy w tym miejscu zaznaczyć, że wybór „znaczących” i odrzucenie „bliskich zeru” wartości osobliwych wymaga często dużej uwagi i ostrożności. Nie zawsze bowiem istnieje wyraźna granica pomiędzy „małymi”, a „bliskimi zeru” wartościami osobliwymi. Dodatkowo, aby uniknąć pominięcia rzeczywistych wielkości modalnych kosztem wielkości obliczeniowych, zaleca się nieznaczne zawyżanie rzędu modelu (ALVIN I INNI [2003]). Ma to szczególne znaczenie w przypadku obiektów o złożonej konstrukcji i wrażliwych dynamicznie, dla których oszacowanie spodziewanych rezultatów jest trudne.



Rys. 3.3. Przykładowy wykres wartości osobliwych macierzy  $\mathbf{H}(0)$  dla sygnałów odpowiedzi swobodnej, zarejestrowanych podczas jednego z testów „zeskoku” wagonu jednostki EN57 – patrz rozdział 4

Porównanie zależności (3.34) i (3.42) umożliwia zapis:

$$\mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta \cong \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n^T = \underbrace{\mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2}}_{\mathbf{P}_\alpha} \underbrace{\mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T}_{\mathbf{Q}_\beta}, \quad (3.44)$$

co pozwala zdefiniować przesuniętą macierz Hankela jako:

$$\mathbf{H}(1) \cong \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{A} \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T. \quad (3.45)$$

Z powyższego wyznaczyć można macierz stanu  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}_n^{-1/2} \mathbf{U}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{V}_n \mathbf{S}_n^{-1/2}. \quad (3.46)$$

Wykorzystując definicję pseudoodwrotności oraz zależności (3.42) i (3.43), można wyrazić uogólnioną macierz odwrotną  $\mathbf{H}^\dagger$  jako:

$$\mathbf{H}^\dagger = \left[ (\mathbf{U}_n \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n^T) \right]^\dagger = (\mathbf{V}_n^T)^\dagger \mathbf{S}_n^\dagger \mathbf{U}_n^\dagger = \mathbf{V}_n \mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{U}_n^T. \quad (3.47)$$



Jeżeli przez  $p$  oznaczymy liczbę punktów pomiarowych ( $p = r = m$ ), to na podstawie zależności (3.30) widać, że  $p$  pierwszych kolumn macierzy sterowania  $\mathbf{Q}_\beta$  określa dynamiczną macierz wejścia  $\mathbf{B}$  o wymiarach ( $n \times p$ ), natomiast  $p$  pierwszych wierszy macierzy obserwacji  $\mathbf{P}_\alpha$  określa dynamiczną macierz wyjścia  $\mathbf{C}$  o wymiarach ( $p \times n$ ). Wykorzystując to spostrzeżenie oraz definiując pomocnicze macierze:

$$\mathbf{E}_m^T = [\mathbf{I}_p \ \mathbf{0}_p \ \cdots \ \mathbf{0}_p] \in \mathbb{R}^{p \times \alpha p} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{E}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p \\ \mathbf{0}_p \\ \vdots \\ \mathbf{0}_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\beta \times p}, \quad (3.48)$$

Gdzie  $\mathbf{I}_p$  i  $\mathbf{0}_p$  oznaczają odpowiednio macierz jednostkową oraz macierz zerową rzędu  $p$ , realizację najmniejszego rzędu w metodzie ERA przedstawić można następująco:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{H}(k-1) \mathbf{E}_r = && \text{(wyk. zal. (3.29))} \\ &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_\beta \mathbf{E}_r = && \text{(wyk. zal. (3.36))} \\ &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{P}_\alpha \underbrace{[\mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^T \mathbf{P}_\alpha]}_{\mathbf{I}} \mathbf{A}^{k-1} \underbrace{[\mathbf{Q}_\beta \mathbf{H}^T \mathbf{P}_\alpha]}_{\mathbf{I}} \mathbf{Q}_\beta \mathbf{E}_r = && \text{(wyk. zal. (3.34) i (3.47))} \\ &= \mathbf{E}_m^T \underbrace{\mathbf{H}(0)}_{\mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta} \underbrace{\mathbf{V}_n \mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{U}_n^T}_{\mathbf{H}^T} \mathbf{P}_\alpha \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{Q}_\beta \underbrace{\mathbf{V}_n \mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{U}_n^T}_{\mathbf{H}^T} \underbrace{\mathbf{H}(0)}_{\mathbf{P}_\alpha \mathbf{Q}_\beta} \mathbf{E}_r = && \text{(wyk. zal. (3.42) i (3.44))} \\ &= \mathbf{E}_m^T \underbrace{\mathbf{U}_n \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n^T}_{\mathbf{H}(0)} \mathbf{V}_n \mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{U}_n^T \underbrace{\mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2}}_{\mathbf{P}_\alpha} \mathbf{A}^{k-1} \underbrace{\mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T}_{\mathbf{Q}_\beta} \mathbf{V}_n \mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{U}_n^T \underbrace{\mathbf{U}_n \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n^T}_{\mathbf{H}(0)} \mathbf{E}_r = && \text{(wyk. zal. (3.43))} \\ &= \mathbf{E}_m^T \underbrace{\mathbf{U}_n \mathbf{S}_n}_{\mathbf{I}_n} \underbrace{\mathbf{V}_n^T \mathbf{V}_n}_{\mathbf{I}_n} \mathbf{S}_n^{-1} \underbrace{\mathbf{U}_n^T \mathbf{U}_n}_{\mathbf{I}_n} \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{A}^{k-1} \mathbf{S}_n^{1/2} \underbrace{\mathbf{V}_n^T \mathbf{V}_n}_{\mathbf{I}_n} \mathbf{S}_n^{-1} \underbrace{\mathbf{U}_n^T \mathbf{U}_n}_{\mathbf{I}_n} \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n^T \mathbf{E}_r = && \text{(wyk. zal. (3.46))} \\ &= \mathbf{E}_m^T \underbrace{\mathbf{U}_n \mathbf{S}_n \mathbf{S}_n^{-1}}_{\mathbf{I}_n} \mathbf{S}_n^{1/2} \left[ \mathbf{S}_n^{-1/2} \mathbf{U}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{V}_n \mathbf{S}_n^{-1/2} \right]^{k-1} \mathbf{S}_n^{1/2} \underbrace{\mathbf{S}_n^{-1} \mathbf{S}_n}_{\mathbf{I}_n} \mathbf{V}_n^T \mathbf{E}_r = \\ &= \left[ \mathbf{E}_m^T \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2} \right] \left[ \mathbf{S}_n^{-1/2} \mathbf{U}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{V}_n \mathbf{S}_n^{-1/2} \right]^{k-1} \left[ \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T \mathbf{E}_r \right]. \end{aligned}$$

Przywołując zależność (3.18) oraz powyższe, minimalna, dyskretna realizacja liniowego układu dynamicznego rzędu  $n$  wyraża się następująco:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}} &= \mathbf{S}_n^{-1/2} \mathbf{U}_n^T \mathbf{H}(1) \mathbf{V}_n \mathbf{S}_n^{-1/2}, \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T \mathbf{E}_r, \\ \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{E}_m^T \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Macierze (3.49) zależą od zredukowanych macierzy  $\mathbf{U}_n$ ,  $\mathbf{S}_n$ , oraz  $\mathbf{V}_n$  i stanowią wielkości estymowane w sensie metody najmniejszych kwadratów (JUANG [1994], MAIA I SILVA [1997]). Stąd dla odróżnienia od wielkości rzeczywistych użyto oznaczenia „ $\hat{\cdot}$ ”. Ich wyznaczenie jest możliwe dzięki własnościom uogólnionej macierzy odwrotnej oraz wykorzystaniu dekompozycji SVD macierzy  $\mathbf{H}(0)$ .

Estymowane macierze  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}$  umożliwiają rekonstrukcję parametrów Markowa i odbudowę (aproksymację) sygnałów pomiarowych. Dokładność wpasowania odpowiedzi rzeczywi-

stego układu i zidentyfikowanego modelu, jest jedną z możliwości oceny poprawności otrzymanych rezultatów (por. p. 3.6.4).

### 3.6.2. Wyznaczenie parametrów modalnych

Dany jest dyskretny, liniowy układ dynamiczny rzędu  $n$  określony macierzami (3.49):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \hat{\mathbf{A}}\mathbf{x}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \hat{\mathbf{C}}\mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (3.50)$$

Macierze  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$  opisane są we współrzędnych fizycznych. W celu wyznaczenia częstości, postaci drgań oraz liczb tłumienia, konieczna jest transformacja tych macierzy do współrzędnych modalnych.

Pierwszym krokiem jest wyznaczenie wartości i wektorów własnych macierzy  $\hat{\mathbf{A}}$ , poprzez rozwiązanie problemu własnego postaci (ALVIN I INNI [2003]):

$$\hat{\mathbf{A}}\Phi = \Phi\hat{\Lambda}, \quad (3.51)$$

gdzie  $\Phi$  to zespolona macierz własna, której kolumny stanowią wektory własne macierzy  $\hat{\mathbf{A}}$ :

$$\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \dots \ \phi_n] = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \dots & \phi_{2n} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \dots & \phi_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \phi_{n3} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

natomiast  $\hat{\Lambda}$  to zespolona macierz diagonalna, zawierająca odpowiadające wartości własne w postaci par sprzężonych:

$$\hat{\Lambda} = \begin{bmatrix} \hat{\lambda}_1 & & & & & \\ & \hat{\lambda}_1^* & & & & \\ & & \hat{\lambda}_2 & & & \\ & & & \hat{\lambda}_2^* & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \hat{\lambda}_n \\ & & & & & & \hat{\lambda}_n^* \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

Wektor stanu  $\mathbf{x}_k$  można przedstawić we współrzędnych modalnych:

$$\mathbf{x}_k = \Phi\mathbf{z}_k. \quad (3.54)$$

Wykorzystując zapis (3.54) oraz problem (3.51), model dynamiczny (3.50) można przekształcić następująco:

$$\begin{cases} \Phi\mathbf{z}_{k+1} = (\Phi\hat{\Lambda}\Phi^{-1})\Phi\mathbf{z}_k + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k = \hat{\mathbf{C}}\Phi\mathbf{z}_k \end{cases},$$

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{\Phi} \hat{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{\Phi} \mathbf{z}_k + \mathbf{\Phi}^{-1} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k = \hat{\mathbf{C}} \mathbf{\Phi} \mathbf{z}_k \end{cases},$$

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{k+1} = \hat{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{z}_k + \mathbf{\Phi}^{-1} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k = \hat{\mathbf{C}} \mathbf{\Phi} \mathbf{z}_k \end{cases},$$

$$\begin{cases} \mathbf{z}_{k+1} = \hat{\mathbf{\Lambda}} \mathbf{z}_k + \hat{\mathbf{B}}_m \mathbf{u}_k, \\ \mathbf{y}_k = \hat{\mathbf{C}}_m \mathbf{z}_k \end{cases}. \quad (3.55)$$

Realizacji  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$  (we współrzędnych fizycznych) odpowiada zatem realizacja  $\hat{\mathbf{\Lambda}}, \hat{\mathbf{B}}_m, \hat{\mathbf{C}}_m$  (we współrzędnych modalnych):

$$\hat{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Phi}^{-1} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{\Phi}, \quad \hat{\mathbf{B}}_m = \mathbf{\Phi}^{-1} \hat{\mathbf{B}}, \quad \hat{\mathbf{C}}_m = \hat{\mathbf{C}} \mathbf{\Phi}. \quad (3.56)$$

Macierz  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  zawiera informacje o liczbach tłumienia oraz częstościach drgań własnych. Macierz  $\hat{\mathbf{B}}_m$  zawiera informacje o amplitudach modalnych, natomiast macierz  $\hat{\mathbf{C}}_m$  umożliwia określenie postaci drgań.

W celu wyznaczenia tłumienia i częstości drgań, konieczna jest uprzednia transformacja macierzy  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$  z formy dyskretniej do ciągłej  $\hat{\mathbf{\Lambda}}_c$  (JUANG [1994]). Na podstawie (3.15) można zapisać:

$$\hat{\mathbf{\Lambda}}_c = \frac{1}{\Delta t} \ln(\hat{\mathbf{\Lambda}}) = f_s \ln(\hat{\mathbf{\Lambda}}), \quad (3.57)$$

gdzie  $f_s$  – częstotliwość próbkowania. Poszczególne pary wartości sprzężonych w macierzy  $\hat{\mathbf{\Lambda}}_c$  wyrażają się następująco (GAWRONSKI [1998]):

$$\hat{\lambda}_{ci}, \hat{\lambda}_{ci}^* = -\xi_i \omega_{ni} \pm j \omega_{Di} = -\xi_i \omega_{ni} \pm j \omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2}, \quad (3.58)$$

gdzie  $j = \sqrt{-1}$ ,  $\xi_i$ ,  $\omega_{ni}$ ,  $\omega_{Di}$  to odpowiednio liczba tłumienia, naturalna oraz tłumiona częstość drgań  $i$ -tego modu. Szukane parametry modalne  $i$ -tego modu wyznaczyć można na podstawie (3.58) jako:

$$\triangleright \text{naturalna częstość drgań: } \omega_{ni} = |\hat{\lambda}_{ci}| = \sqrt{\operatorname{Re}(\hat{\lambda}_{ci})^2 + \operatorname{Im}(\hat{\lambda}_{ci})^2}, \quad (3.59)$$

$$\triangleright \text{liczba tłumienia: } \xi_i = -\frac{\operatorname{Re}(\hat{\lambda}_{ci})}{\omega_{ni}}, \quad (3.60)$$

gdzie  $|\cdot|$  oznacza moduł liczby zespolonej,  $\operatorname{Re}(\cdot)$  – część rzeczywistą, natomiast  $\operatorname{Im}(\cdot)$  – część urojoną liczby zespolonej.

Postacie drgań własnych określić można na podstawie kolumnowych wektorów macierzy  $\hat{\mathbf{C}}_m$ . Poszczególne współrzędne wynoszą (ALVIN I INNI [2003]):

$$\varphi_{ij} = |c_m^{ij}| \operatorname{sign}\{\operatorname{Re}(c_m^{ij})\}, \quad (3.61)$$

gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, p$  ( $p$  – liczba punktów pomiarowych),  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  ( $n$  – rząd modelu).

### 3.6.3. Parametry projektowe $\alpha$ i $\beta$

Parametry  $\alpha$  i  $\beta$  decydują o rozmiarze macierzy Hankela (por. p. 3.4.3). Parametr  $\alpha$  określa liczbę blokowych wierszy, natomiast parametr  $\beta$  liczbę kolumn macierzy  $\mathbf{H}(0)$ . Zauważyć można, iż liczba kolumn w macierzy Hankela determinuje maksymalną liczbę modów możliwych do zidentyfikowania metodą ERA.

Dobór parametrów  $\alpha$  i  $\beta$  zależy od indywidualnych kryteriów (np. jakości sygnałów pomiarowych, czasu obliczeń) oraz spodziewanego rzędu identyfikowanego układu (powinno zachodzić  $\alpha \geq n$  oraz  $\beta \geq n$ ). Jednocześnie należy pamiętać o zawiązaniu rozmiarów macierzy  $\mathbf{H}(0)$  ze względu na obecność zakłóceń w sygnale pomiarowym. Na podstawie zał. (3.19) i (3.25) widać, że parametry  $\alpha$  i  $\beta$  decydują o zakresie (długości) sygnałów pomiarowych przyjętych do analizy.

W literaturze brak jest jednoznacznego kryterium doboru wspomnianych parametrów. Spotykane przykłady opierają się często na doświadczeniu i intuicji badacza, bądź stanowią przedmiot dodatkowych analiz porównawczych. Przykładowo, DUDEK I WILDE [2005] podali, iż zaleca się przyjmowanie następujących wartości:

$$\begin{aligned} \alpha &= (10 \div 20)l_p \\ \beta &= (2 \div 3)\alpha \end{aligned} \quad (3.62)$$

gdzie  $l_p$  – spodziewana liczba identyfikowanych modów. Z kolei NAYERI I INNI [2009] przedstawili następujący przepis:

$$\begin{aligned} \alpha &> 10(2l_p / p) \\ \beta &= (2/3)N_p - \alpha - 2 \end{aligned} \quad (3.63)$$

gdzie  $p$  – liczba punktów pomiarowych, natomiast  $N_p$  oznacza liczbę wyraźnych próbek sygnałów pomiarowych. HOLLKAMP I GORDON [2001] podali, że liczba kolumn macierzy Hankela powinna być przynajmniej dwukrotnie większa od spodziewanej liczby identyfikowanych modów, natomiast liczbę wierszy uzależnili od wyraźnego zakresu sygnałów pomiarowych. Z kolei SIRINGORINGO I FUJINO [2008] przyjęli  $\alpha = \beta$ .

### 3.6.4. Kryteria i sposoby oceny poprawności rozwiązania

#### ➤ Kryterium koherencji amplitud modalnych MAC

Odpowiedź zidentyfikowanego modelu w kolejnych chwilach czasowych można zapisać we współrzędnych modalnych kolejnymi parametrami Markowa:

$$\hat{\mathbf{Y}}_1 = \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\mathbf{B}}_m, \quad \hat{\mathbf{Y}}_2 = \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\Lambda} \hat{\mathbf{B}}_m, \quad \hat{\mathbf{Y}}_3 = \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\Lambda}^2 \hat{\mathbf{B}}_m, \quad \dots, \quad \hat{\mathbf{Y}}_k = \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\Lambda}^{k-1} \hat{\mathbf{B}}_m, \quad (3.64)$$

gdzie  $k = 1, 2, 3, \dots, \beta, p$  – liczba punktów pomiarowych. Macierze  $\mathbf{C}_m$  i  $\mathbf{B}_m$  podzielić można na składowe odpowiadające poszczególnym wartościom modalnym  $\hat{\lambda}_i$ :

$$\hat{\mathbf{C}}_m = [\hat{\mathbf{c}}_1 \ \hat{\mathbf{c}}_2 \ \dots \ \hat{\mathbf{c}}_n]; \quad \hat{\mathbf{B}}_m = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 \\ \hat{\mathbf{b}}_2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_n \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{c}}_i (i=1, 2, \dots, n)$  jest wektorem kolumnowym o długości  $p$ , natomiast  $\hat{\mathbf{b}}_i (i=1, 2, \dots, n)$  to wektor wierszowy również o długości  $p$ . Dowolny parametr Markowa zapisać można teraz w postaci sumy składników odpowiadających poszczególnym wartościom modalnym:

$$\hat{\mathbf{Y}}_k = \hat{\mathbf{C}}_m \hat{\mathbf{\Lambda}}^{k-1} \hat{\mathbf{B}}_m = \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i^{k-1} \hat{\mathbf{b}}_i. \quad (3.66)$$

Z powyższego można wydzielić i zestawić w wektor odpowiedź przynależną  $i$ -tej współrzędnej modalnej:

$$\left[ \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\mathbf{b}}_i \quad \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{b}}_i \quad \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i^2 \hat{\mathbf{b}}_i \quad \dots \quad \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i^{\beta-1} \hat{\mathbf{b}}_i \right]; \quad i=1, 2, 3, \dots, n. \quad (3.67)$$

Definiując następnie nowy wektor:

$$\hat{\mathbf{q}}_i = \left[ \hat{\mathbf{b}}_i \quad \hat{\lambda}_i \hat{\mathbf{b}}_i \quad \hat{\lambda}_i^2 \hat{\mathbf{b}}_i \quad \dots \quad \hat{\lambda}_i^{\beta-1} \hat{\mathbf{b}}_i \right]; \quad i=1, 2, 3, \dots, n, \quad (3.68)$$

sekwencję parametrów Markowa zapisać można w postaci:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \left[ \hat{\mathbf{Y}}_1 \quad \hat{\mathbf{Y}}_2 \quad \hat{\mathbf{Y}}_3 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{Y}}_{\beta-1} \right] = \left[ \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\mathbf{q}}_i \right]. \quad (3.69)$$

Z kolei definicja:

$$\hat{\mathbf{p}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{c}}_i \\ \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i \\ \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i^2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{c}}_i \hat{\lambda}_i^{\alpha-1} \end{bmatrix}; \quad i=1, 2, 3, \dots, n, \quad (3.70)$$

daje:

$$\hat{\mathbf{Y}} = \text{col} \left[ \hat{\mathbf{Y}}_1 \quad \hat{\mathbf{Y}}_2 \quad \hat{\mathbf{Y}}_3 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{Y}}_{\alpha-1} \right] = \left[ \sum_{i=1}^n \hat{\mathbf{p}}_i \hat{\mathbf{b}}_i \right]. \quad (3.71)$$

Zdefiniowany zał. (3.68) wektor  $\hat{\mathbf{q}}_i$  zawiera historię przebiegu w czasie amplitud  $i$ -tej składowej modalnej zidentyfikowanego modelu, natomiast wektor  $\hat{\mathbf{p}}_i$  (zał. (3.70)), stanowi zbiór wartości odpowiedzi modalnej tegoż modelu w kolejnych chwilach czasowych.

Wektory  $\mathbf{p}_i$  oraz  $\mathbf{q}_i$  można również otrzymać bezpośrednio z danych pomiarowych. Wykorzystanie zał. (3.42), (3.44) oraz macierzy własnej  $\Phi$  (zał. (3.52)), pozwala dekomponować macierz Hankela w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(0) &\cong \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n \mathbf{V}_n^T = \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T = \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2} \Phi \Phi^{-1} \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T \\ &= \left[ \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2} \Phi \right] \left[ \Phi^{-1} \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T \right] = \mathbf{P}_{m\alpha} \mathbf{Q}_{m\beta}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Macierze  $\mathbf{P}_{m\alpha}$  oraz  $\mathbf{Q}_{m\beta}$  to odpowiednio macierz obserwacji i sterowania zapisane we współrzędnych modalnych. Można je podzielić wg schematów:

$$\mathbf{P}_{m\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_m \\ \mathbf{C}_m \Lambda \\ \mathbf{C}_m \Lambda^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_m \Lambda^{\alpha-1} \end{bmatrix} = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \dots \ \mathbf{p}_n] = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_1 \lambda_1 \\ \mathbf{c}_1 \lambda_1^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_1 \lambda_1^{\alpha-1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_2 \lambda_2 \\ \mathbf{c}_2 \lambda_2^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_2 \lambda_2^{\alpha-1} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} \mathbf{c}_n \\ \mathbf{c}_n \lambda_n \\ \mathbf{c}_n \lambda_n^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n \lambda_n^{\alpha-1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

oraz

$$\mathbf{Q}_{m\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & \Lambda \mathbf{B}_m & \Lambda^2 \mathbf{B}_m & \dots & \Lambda^{\beta-1} \mathbf{B}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \lambda_1 \mathbf{b}_1 & \dots & \lambda_1^{\beta-1} \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2 & \lambda_2 \mathbf{b}_2 & \dots & \lambda_2^{\beta-1} \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} \mathbf{b}_n & \lambda_n \mathbf{b}_n & \dots & \lambda_n^{\beta-1} \mathbf{b}_n \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

A zatem każdy z wektorów  $\mathbf{p}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) stanowi  $i$ -tą kolumnę macierzy obserwacji:

$$\mathbf{P}_{m\alpha} = \mathbf{U}_n \mathbf{S}_n^{1/2} \Phi, \quad (3.75)$$

natomiast poszczególne wektory  $\mathbf{q}_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) to  $i$ -te wiersze macierzy sterowania:

$$\mathbf{Q}_{m\alpha} = \Phi^{-1} \mathbf{S}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T. \quad (3.76)$$

Kryterium koherencji amplitud modalnych MAC (ang. *Modal Amplitude Coherence*) pozwala na sprawdzenie wzajemnej zgodności przebiegu w czasie poszczególnych składowych odpowiedzi modalnej układu rzeczywistego (wektory  $\mathbf{q}_i$ ) oraz zidentyfikowanego modelu (wektory  $\hat{\mathbf{q}}_i$ ). Współczynnik *MAC* zdefiniowany jest jako unormowany iloczyn skalarny wspomnianych wektorów (JUANG [1994]):

$$MAC_i = \frac{|\mathbf{q}_i \hat{\mathbf{q}}_i^*|}{\sqrt{(|\mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^*| |\hat{\mathbf{q}}_i \hat{\mathbf{q}}_i^*|)}}, \quad (3.77)$$

gdzie „\*” oznacza sprzężenie hermitowskie. Podobną zależność zapisać można dla wektorów  $\hat{\mathbf{p}}_i$  oraz  $\hat{\mathbf{p}}_i$ . Wartości *MAC* zawierają się w przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$ . Wartości bliskie jedności oznaczają, iż porównywane przebiegi są zgodne, a więc odpowiadające im parametry modalne (częstość drgań, liczba tłumienia) charakteryzują identyfikowany układ dynamiczny. Pozostałe rozwiązania można traktować jako obliczeniowe (nie fizyczne). Należy zaznaczyć, że pary wektorów  $\mathbf{q}_i, \hat{\mathbf{q}}_i$  oraz  $\mathbf{p}_i, \hat{\mathbf{p}}_i$  będą całkowicie zgodne ( $MAC = 1$ ) jeżeli sygnały pozbawione będą szumów pomiarowych. W praktyce dane obarczone są zawsze określonym poziomem zakłóceń. W tej sytuacji osiągnięcie wartości  $MAC = 1$  jest niemożliwe, bowiem obcięcie wartości osobliwych „bliskich zeru” powoduje, iż rozwiązanie teoretyczne jest zawsze pewną aproksymacją rzeczywistości (ZHANG, BRINCKER, ANDERSEN [2001]). W literaturze akceptowalny poziom zgodności zawiera się najczęściej w przedziale  $0,95 \div 1,0$  (np. PETSOUNIS I FASSOIS [2001], DUDEK [2008]).

Podsumowując, kryterium *MAC* pozwala na wskazanie rozwiązań, które z dużym przybliżeniem charakteryzują badany układ dynamiczny. Na tej podstawie możliwe jest zbudowanie zredukowanego modelu teoretycznego i aproksymacja zarejestrowanych sygnałów pomiarowych. Ocena wpasowania przebiegów teoretycznych i pomierzonych daje pogląd na poprawność rozwiązania.

➤ Diagram stabilizacyjny

Diagram stabilizacyjny umożliwia wizualną prezentację oraz ocenę otrzymanych rozwiązań. W procesie identyfikacji metodą ERA, obliczenia prowadzić można wielokrotnie, zwiększając w każdym kroku rząd modelu ( $n = 2, 4, 6, 8, \dots$ ). Dla każdego kolejnego kroku (rzędu modelu) wyznacza się rozwiązanie i otrzymane rezultaty nanosi na diagram stabilizacyjny. Na osi rzędnych zaznacza się zidentyfikowane częstości (częstotliwości) drgań, natomiast na osi odciętych odpowiadający im rząd modelu. Jeżeli dana częstość (częstotliwość) pojawia się na wykresie niezależnie od rzędu modelu (w zakresie przyjętego, dopuszczalnego błędu), uznaje się ją za „stabilną” i przyjmuje jako rezultat procesu identyfikacji. Nałożenie na otrzymany zbiór rozwiązań kryterium MAC, pozwala na odróżnienie wielkości fizycznych (odpowiadających rzeczywistej konstrukcji) od wartości nie fizycznych (obliczeniowych). Wykreślenie na diagramie dodatkowo funkcji ANPSD, pozwala ocenić stopień wpasowania zidentyfikowanych częstości w piki wykresu widma.

Diagram stabilizacyjny metody ERA wraz z naniesioną funkcją ANPSD dla testowych sygnałów odpowiedzi swobodnej pokazano w p. 3.7. W rozdziale 4 przedstawiono rezultaty identyfikacji parametrów modalnych rzeczywistego pojazdu szynowego otrzymane metodą ERA i PP.

➤ Ocena wpasowania odpowiedzi zidentyfikowanego modelu i układu rzeczywistego

Macierze dynamiczne  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}$  otrzymane na podstawie (3.49), umożliwiają odtworzenie sekwencji parametrów Markowa (odpowiedzi układu):

$$\hat{\mathbf{Y}}_1 = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}}, \quad \hat{\mathbf{Y}}_2 = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{B}}, \quad \hat{\mathbf{Y}}_3 = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^2\hat{\mathbf{B}}, \quad \dots, \quad \hat{\mathbf{Y}}_{k-1} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{k-2}\hat{\mathbf{B}}, \quad \hat{\mathbf{Y}}_k = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{k-1}\hat{\mathbf{B}}, \quad (3.78)$$

( $p \times p$ )            ( $p \times p$ )            ( $p \times p$ )            ( $p \times p$ )            ( $p \times p$ )            ( $p \times p$ )

gdzie  $k = 1, 2, 3, \dots, \beta$ ,  $p$  – liczba punktów pomiarowych.

Spośród otrzymanego zbioru  $n$  rozwiązań można wyselekcjonować jedynie te, które spełniają kryterium MAC. Rozwiązania nie spełniające kryterium MAC można wyeliminować poprzez wykreślenie odpowiednich wierszy i kolumn z macierzy  $\hat{\mathbf{A}}$  oraz odpowiednich kolumn z macierzy  $\Phi$ . W efekcie otrzymujemy zredukowane macierze  $\hat{\mathbf{A}}^{red}$  i  $\Phi^{red}$ , które umożliwiają określenie zredukowanej macierzy stanu  $\hat{\mathbf{A}}^{red}$ :

$$\hat{\mathbf{A}}^{red} = \Phi^{red} \hat{\mathbf{A}}^{red} (\Phi^{red})^\dagger = \Phi^{red} \hat{\mathbf{A}}^{red} \left[ ((\Phi^{red})^T \Phi^{red})^{-1} (\Phi^{red})^T \right]. \quad (3.79)$$

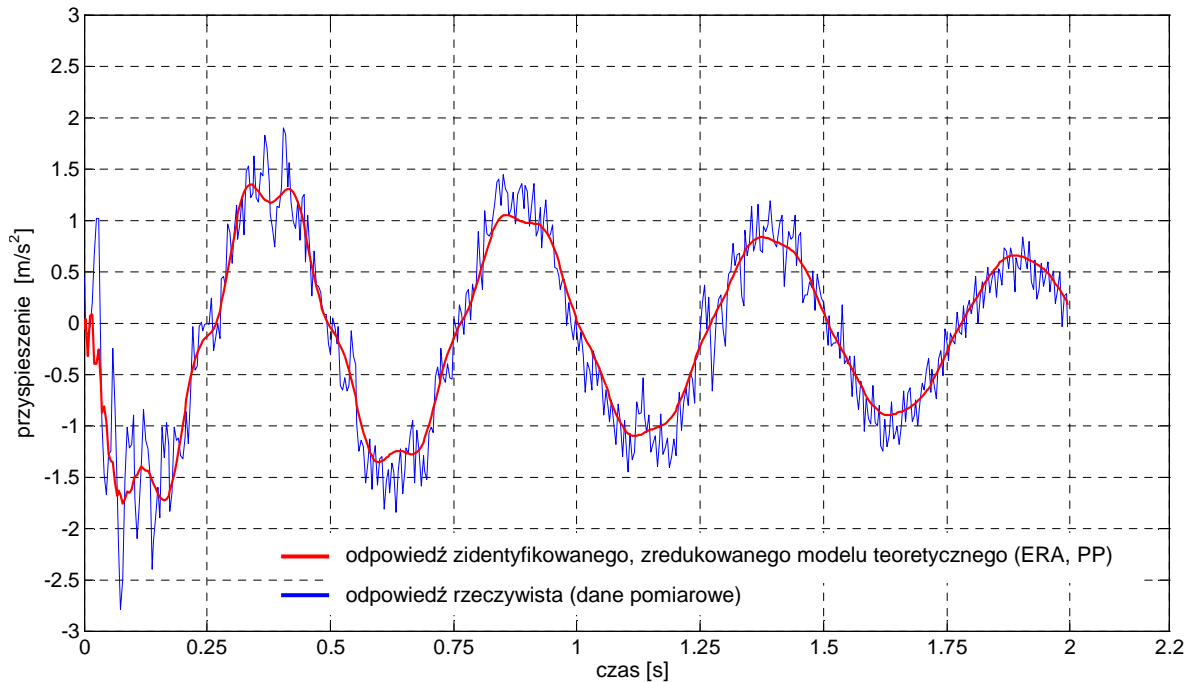
Odpowiedź zredukowanego modelu teoretycznego można zatem przedstawić jako:

$$\hat{\mathbf{Y}}_1^{red} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{B}}, \quad \hat{\mathbf{Y}}_2^{red} = \hat{\mathbf{C}}\hat{\mathbf{A}}^{red}\hat{\mathbf{B}}, \quad \hat{\mathbf{Y}}_3^{red} = \hat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{A}}^{red})^2\hat{\mathbf{B}}, \quad \dots, \quad \hat{\mathbf{Y}}_k^{red} = \hat{\mathbf{C}}(\hat{\mathbf{A}}^{red})^{k-1}\hat{\mathbf{B}}. \quad (3.80)$$

( $p \times p$ )            ( $p \times p$ )            ( $p \times p$ )            ( $p \times p$ )

Kolejne kolumny macierzy  $\hat{\mathbf{Y}}_k^{red}(:, p)$  zawierają amplitudy drgań poszczególnych punktów pomiarowych w  $k$ -tej chwili czasowej od wymuszenia impulsowego przyłożonego w  $p$ -tym punkcie pomiarowym. Przebiegi te aproksymują zarejestrowane sygnały pomiarowe (rys. 3.4).

Ocena zgodności (wpasowania) zredukowanego modelu teoretycznego z zarejestrowanymi sygnałami pomiarowymi, pozwala na wizualną ocenę poprawności otrzymanego rozwiązania.



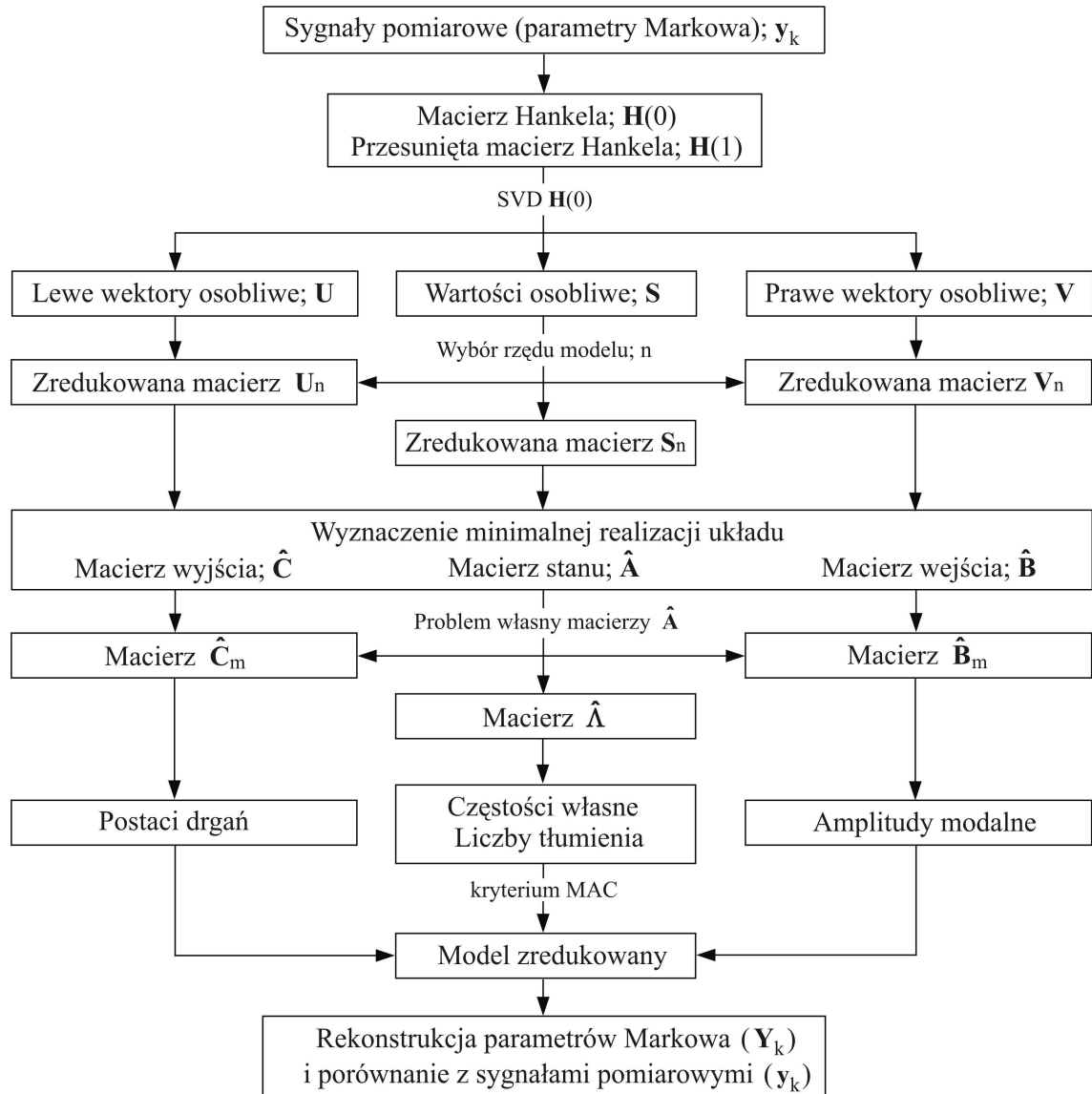
Rys. 3.4. Porównanie rzeczywistej (dane pomiarowe) i teoretycznej (ERA, PP) odpowiedzi swobodnej pudła wozu jednostki trakcyjnej serii EN57 na wymuszenie typu „zeskok z progu” – patrz rozdział 4

### 3.6.5. Algorytm metody

Algorytm obliczeniowy metody ERA można przedstawić graficznie (rys. 3.5) oraz streścić w następujących krokach:

- 1) Zestawienie blokowej macierzy Hankela  $\mathbf{H}(0)$  oraz przesuniętej blokowej macierzy Hankela  $\mathbf{H}(1)$  na podstawie danych pomiarowych – zal. (3.25) oraz (3.26).
- 2) Dekompozycja macierzy  $\mathbf{H}(0)$  wg wartości osobliwych (SVD) – zal. (3.39).
- 3) Określenie rzędu zidentyfikowanego modelu poprzez wybór  $n$  „znaczących” wartości osobliwych macierzy  $\mathbf{S}$ .
- 4) Utworzenie zredukowanych macierzy  $\mathbf{S}_n$ ,  $\mathbf{U}_n$ , i  $\mathbf{V}_n$  – zal. (3.40) oraz (3.41).
- 5) Wyznaczenie minimalnej realizacji – estymowane macierze  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\hat{\mathbf{C}}$  – zal. (3.49).
- 6) Rozwiązanie problemu własnego macierzy  $\hat{\mathbf{A}}$  (zal. (3.51)) oraz transformacja układu do współrzędnych modalnych (macierze  $\hat{\mathbf{A}}_m$ ,  $\hat{\mathbf{B}}_m$ ,  $\hat{\mathbf{C}}_m$ ) – zal. (3.56).
- 7) Wyznaczenie parametrów modalnych (częstości drgań, liczby tłumienia, postacie drgań) – zal. (3.59), (3.60) oraz (3.61).
- 8) Rozróżnienie wartości fizycznych (rzeczywistych) od nie fizycznych (obliczeniowych) – zastosowanie jednego z kryteriów oceny, np. MAC – zal. (3.77).
- 9) Określenie modelu zredukowanego na podstawie modów spełniających kryterium MAC (zal. 3.79), rekonstrukcja parametrów Markowa (zal. (3.80)) i porównanie ich z pomierzonymi sygnałami.





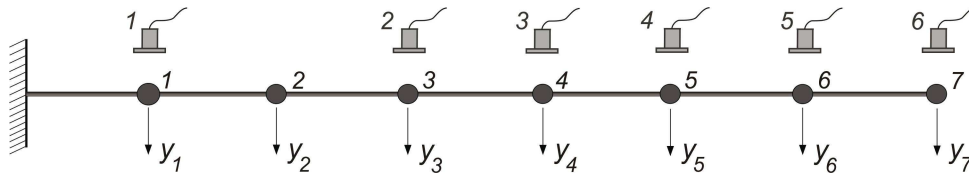
Rys. 3.5. Algorytm obliczeniowy metody ERA (w oparciu o JUANG [1994])

### 3.7. TESTY NUMERYCZNE METODY ERA

Skuteczność metody ERA w świetle przyjętych założeń, zweryfikowano w oparciu o testy numeryczne. W tym celu wygenerowano sześć sygnałów testowych o znanych parametrach i poddano je procesowi identyfikacji metodą ERA. Każdy z sygnałów stanowi określoną kombinację liniową siedmiu, ściśle zdefiniowanych funkcji bazowych. Każda z funkcji odpowiada teoretycznej odpowiedzi układu tłumionego o jednym stopniu swobody (CHMIELEWSKI I ZEMBATY [1998]):

$$\mathbf{y}_i(t) = e^{-\xi_i \omega_{ni} t} \left( y_{0i} \cos \omega_{di} t + \frac{\dot{y}_{0i} + \xi_i \omega_{ni} y_{0i}}{\omega_{di}} \sin \omega_{di} t \right), \quad i = 1, 2, \dots, 7. \quad (3.81)$$

W praktyce oznacza to, że każdy sygnał testowy określa odpowiedź układu mechanicznego o siedmiu stopniach swobody w jednym z sześciu punktów pomiarowych (rys. 3.6).



Rys. 3.6. Przykładowy układ mechaniczny o 7 stopniach swobody, mierzony w 6 punktach pomiarowych (ilustracja przykładu testowego)

Wielkości występujące we wzorze (3.81) to:  $\xi_i$  – liczba tłumienia [-],  $\omega_{ni}$  – naturalna częstość drgań własnych [rad/s],  $\omega_{di} = \omega_{ni} \sqrt{1 - \xi_i^2}$  – tłumiona częstość drgań własnych [rad/s],  $y_{0i}$  – wychylenie początkowe dla  $i$ -tej funkcji bazowej [m],  $\dot{y}_{0i}$  – prędkość początkowa dla  $i$ -tej funkcji bazowej [m/s],  $t$  – zmienna czasowa.

Dodatkowo, na sygnały testowe nałożono szumy pomiarowe – pseudo losowe przebiegi o przypadkowo zmieniających się amplitudach i płaskim widmie:

$$\mathbf{rand}_i = \mathit{rand} \langle 0, 1 \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \quad (3.82)$$

Do generacji szumów wykorzystano generator liczb pseudo losowych dostępny w pakiecie MATLAB (funkcja „rand”). Testy prowadzono przy różnych poziomach szumów. Poziomy te odniesiono do wartości skutecznych<sup>10</sup> (Sygnał<sub>RMS</sub>) nietłumionych sygnałów testowych. Generowano szumy o maksymalnej amplitudzie na poziomie 0%, 10%, 20%, 30%, 50% i 100% Sygnał<sub>RMS</sub>, stosując odpowiednie przeliczniki zależności (3.82). W ten sposób otrzymano sygnały testowe o znanych parametrach modalnych i określonym poziomie szumów:

$$\mathbf{Sygnał}_j = \sum_{i=1}^7 \alpha_{ij} \mathbf{y}_i(t) + \mathbf{rand}_i, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 6. \quad (3.83)$$

Sygnały wygenerowano przyjmując krok czasowy  $\Delta t = 0,004$  s. Parametry funkcji bazowych (3.81) podano w tabl. 3.1, współczynniki  $\alpha_{ij}$  sygnałów testowych zestawiono w tabl. 3.2. Liczby tłumienia  $\xi_i$  przyjęto z przedziału 0,5% ÷ 5%. Rozważono trzy warianty rozkładu tłumienia:

- Wariant 1 – malejąco względem częstotliwości poszczególnych funkcji bazowych (im większa częstotliwość tym mniejsza liczba tłumienia),
- Wariant 2 – rosnąco względem częstotliwości poszczególnych funkcji bazowych (im większa częstotliwość tym większa liczba tłumienia),
- Wariant 3 – stała wartość tłumienia dla każdej funkcji bazowej.

W dalszej części przedstawiono rezultaty przeprowadzonych testów. Pokazano skuteczność identyfikacji częstotliwości drgań  $f_{ni}$  oraz liczb tłumienia  $\xi_i$  w zależności od poziomu szumów oraz wariantu rozkładu tłumienia. W sposób graficzny przedstawiono jedynie wybrane, reprezentatywne przypadki. Szczegółowe, kompleksowe wyniki zestawiono tabelarycznie w załączniku 1. W każdym przypadku obliczono procentową różnicę ( $\Delta f_n$ ,  $\Delta \xi$ ) wartości parametrów zidentyfikowanych, w stosunku do wartości wejściowych (zdefiniowanych). Dla każdego zidentyfikowanego modu określono również wartości *MAC* (patrz p. 3.6.4).

Analizy przeprowadzono w środowisku MATLAB. Program napisano zgodnie z algorytmem metody ERA, przedstawionym w p. 3.6.5. Częstotliwość próbkowania przyjęto równą  $f_s = 250$  Hz (krok czasowy  $\Delta t = 0,004$  s). Rozmiary macierzy Hankela ( $\alpha p \times \beta$ ) dobierano tak, aby uwzględnić przedział odpowiedzi o wyraźnym przebiegu. W wariacie podstawowym zastosowano macierz Hankela o wymiarach  $1440 \times 720$ , którą zestawiono z 240 blokowych wierszy ( $\alpha = 240$ ,  $p = 6$ ) oraz 720 kolumn ( $\beta = 3\alpha = 720$ ). W tym przypadku zatem, przedział czasowy sygnałów uwzględniony w algorytmie wyniósł 3,84 s. Ponadto aby zbadać wpływ rozmiaru macierzy Hankela na identyfikowane wielkości, rozważono następujące przypadki:

- sygnały o rozkładzie tłumienia wg wariantu 1:
  - rozmiar macierzy  $2880 \times 1440$  (zakres czasowy sygnałów 7,68 s),
  - rozmiar macierzy  $720 \times 360$  (zakres czasowy sygnałów 1,92 s),
- sygnały o rozkładzie tłumienia wg wariantu 2 i 3:
  - rozmiar macierzy  $720 \times 360$  (zakres czasowy sygnałów 1,92 s),
  - rozmiar macierzy  $360 \times 180$  (zakres czasowy sygnałów 0,96 s).

Dodatkowo, dla każdego analizowanego przypadku wyznaczono funkcję ANPSD (por. p. 3.5).

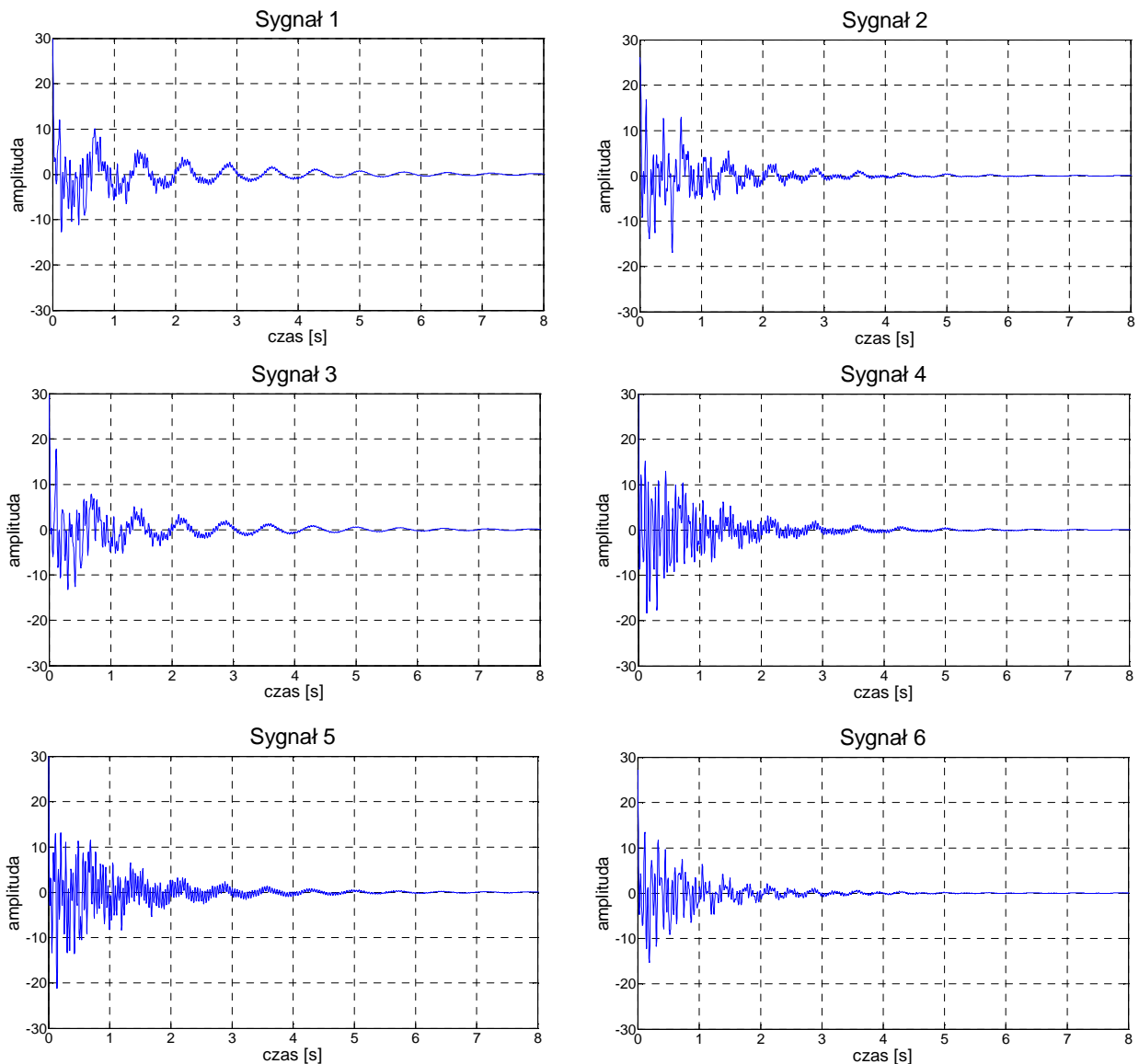
Tabl. 3.1. Parametry funkcji bazowych (3.81)

Funkcja bazowa $\mathbf{y}_i(t)$	$f_{ni}$ [Hz]	$\omega_{ni}$ [rad/s]	$\xi_i$ [-]			$y_{0i}$ [m]	$\dot{y}_{0i}$ [m/s]
			Wariant 1	Wariant 2	Wariant 3		
$\mathbf{y}_1(t)$	1,4	8,796	0,0500	0,0050	0,025	6,00	2,00
$\mathbf{y}_2(t)$	2,8	17,593	0,0428	0,0124	0,025	3,00	-1,00
$\mathbf{y}_3(t)$	4,5	28,274	0,0365	0,0241	0,025	2,10	2,00
$\mathbf{y}_4(t)$	8,6	54,035	0,0312	0,0312	0,025	5,25	-0,50
$\mathbf{y}_5(t)$	10,4	65,345	0,0241	0,0365	0,025	6,75	0,00
$\mathbf{y}_6(t)$	18,0	113,097	0,0124	0,0428	0,025	4,80	1,20
$\mathbf{y}_7(t)$	24,6	154,566	0,0050	0,0500	0,025	3,75	0,00

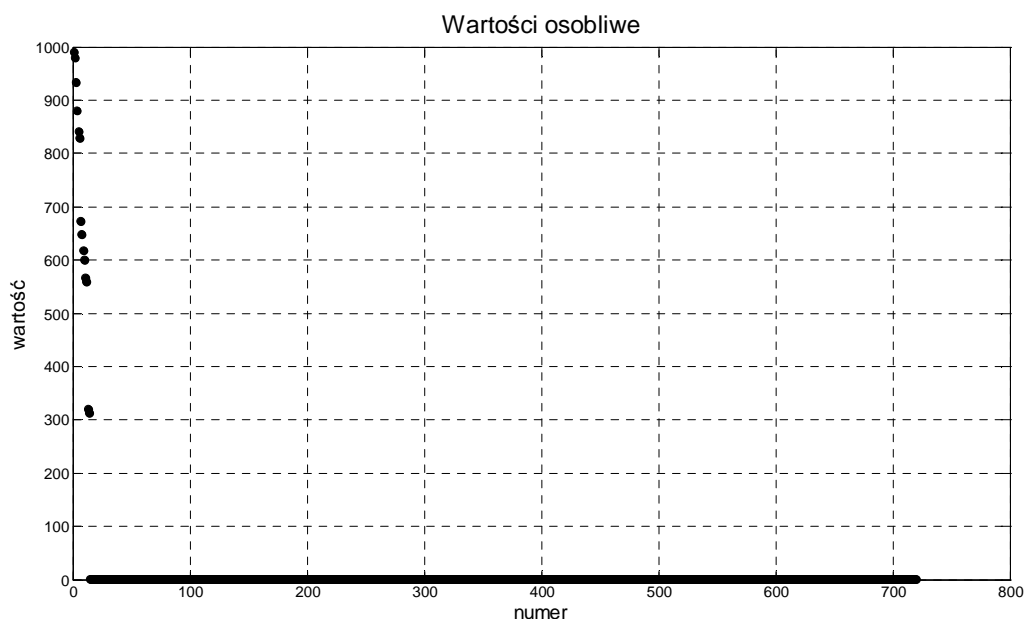
Tabl. 3.2. Parametry  $\alpha_{ij}$  sygnałów testowych (3.83)

Sygnal testowy $j$	$\alpha_{1j}$	$\alpha_{2j}$	$\alpha_{3j}$	$\alpha_{4j}$	$\alpha_{5j}$	$\alpha_{6j}$	$\alpha_{7j}$
<b>Sygnal 1</b>	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
<b>Sygnal 2</b>	0,35	2,00	0,80	1,00	1,60	1,00	-1,20
<b>Sygnal 3</b>	0,80	0,50	0,00	2,00	0,50	1,20	1,00
<b>Sygnal 4</b>	0,40	1,00	1,30	0,90	0,00	2,80	1,80
<b>Sygnal 5</b>	0,50	0,40	2,00	1,00	1,50	1,00	2,50
<b>Sygnal 6</b>	0,10	1,40	0,50	1,60	0,00	2,00	0,90

Na rys. 3.7 pokazano sygnały testowe pozbawione szumów pomiarowych w wariancie 1 rozkładu tłumienia. Dla tego przypadku na rys. 3.8 przedstawiono wykres wartości osobliwych macierzy Hankela. Na wykresie widać 14 różnych od zera wartości osobliwych, które odpowiadają 7 modom występującym w sygnałach testowych (7 funkcji bazowych). Ze względu na brak szumów, pozostałe 706 wartości osobliwych jest równa zero.



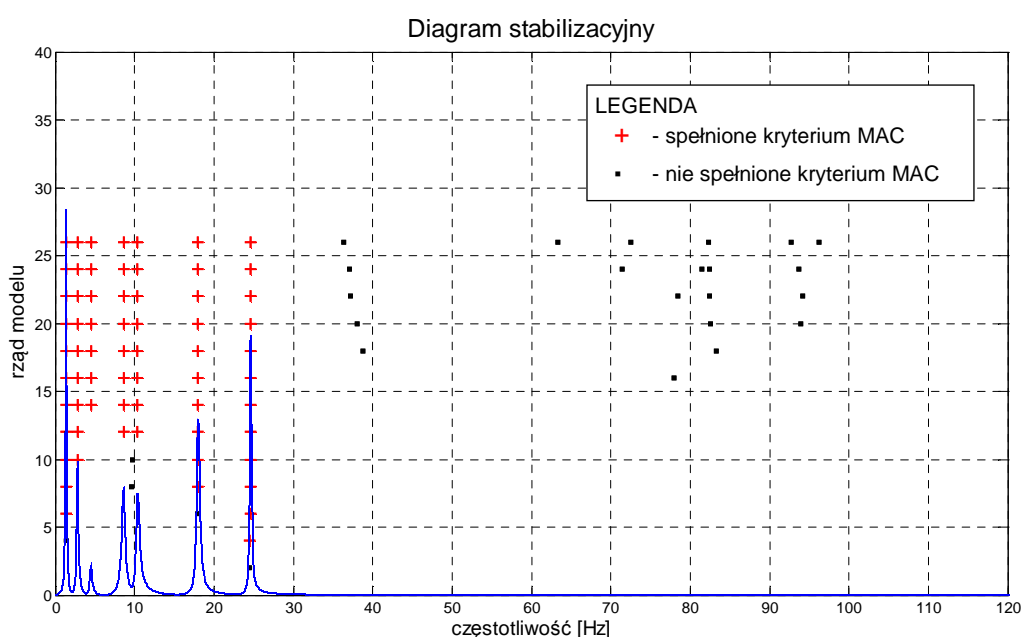
Rys. 3.7. Sygnały testowe – poziom szumów 0%, wariant 1 rozkładu tłumienia



Rys. 3.8. Wykres wartości osobiwych macierzy Hankela dla sygnałów testowych – poziom szumów 0%, wariant 1 rozkładu tłumienia

Na rys. 3.9 przedstawiono diagram stabilizacyjny metody ERA dla rozważanego przypadku sygnałów (sygnały pozbawione szumów, w wariancie 1 rozkładu tłumienia). Na wykres naniesiono odpowiednio przeskalowany wykres ANPSD. Algorytm metody ERA realizowano stopniowo, zwiększając w każdym kroku rząd modelu ( $n = 2, 4, 6, \dots, 26$ ). Częstotliwości oznaczone czerwonym krzyżykiem odpowiadają modom spełniającym kryterium MAC (minimalny poziom zgodności MAC przyjęto równy 98%). Częstotliwości oznaczone czarnym punktem nie spełniają kryterium MAC.

Widać wyraźnie, że wszystkie częstotliwości obecne w sygnałach są identyfikowane metodą ERA oraz spełniają kryterium MAC. Częstotliwości te wpisują się również w piki funkcji ANPSD.



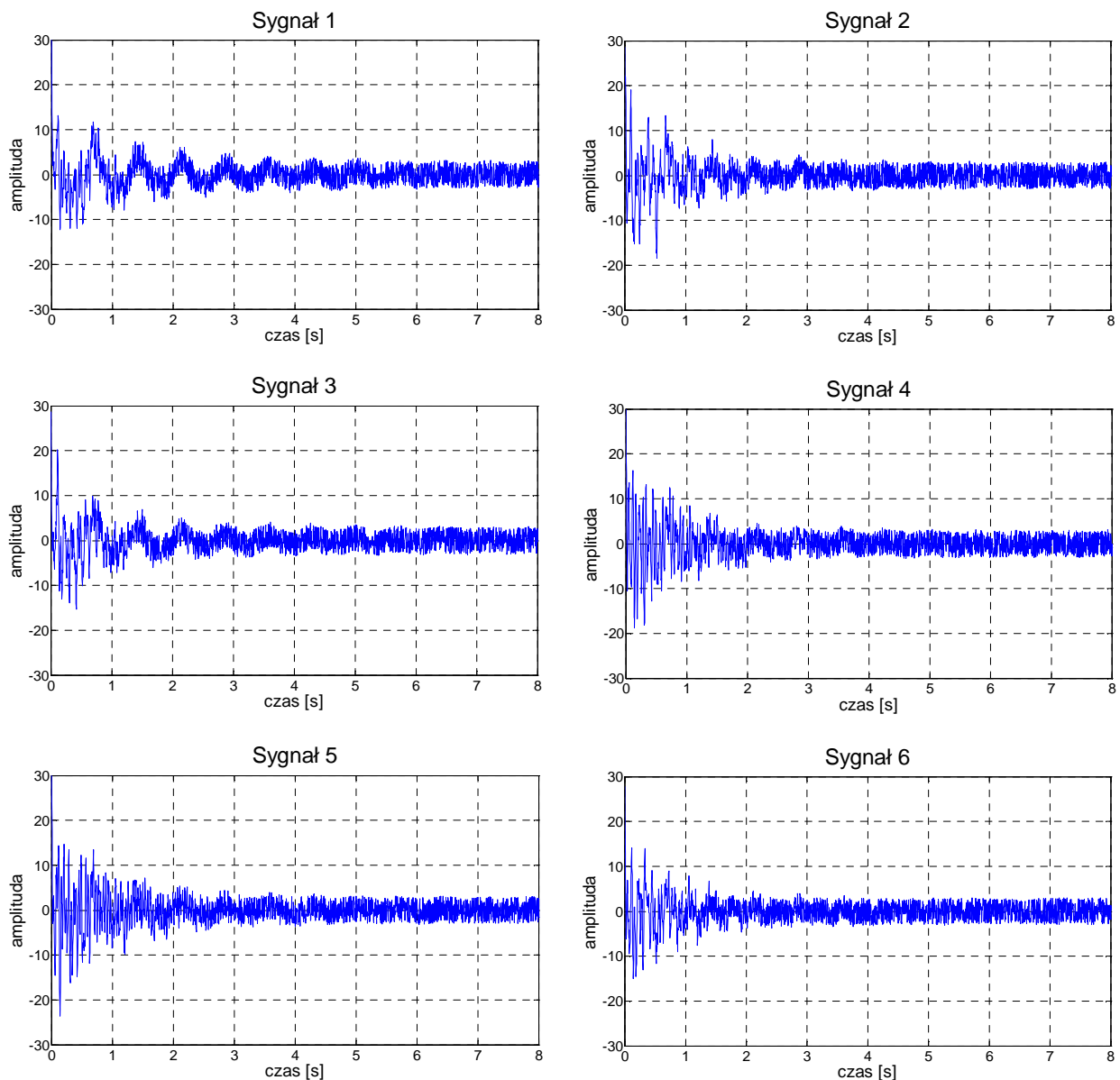
Rys. 3.9. Diagram stabilizacyjny metody ERA wraz z naniesionym wykresem ANPSD sygnałów testowych – poziom szumów 0%, wariant 1 rozkładu tłumienia

Analizując powyższy diagram można stwierdzić, że minimalny rząd modelu, umożliwiający odtworzenie identyfikowanego układu (sygnały testowe), wynosi 14. Potwierdza to teoretyczną prawidłowość, iż w przypadku sygnałów pozbawionych szumów pomiarowych, minimalna realizacja układu będzie zawsze dwukrotnie większa od liczby modów obecnych w sygnałach pomiarowych (por. p. 3.6.1 oraz 3.6.2).

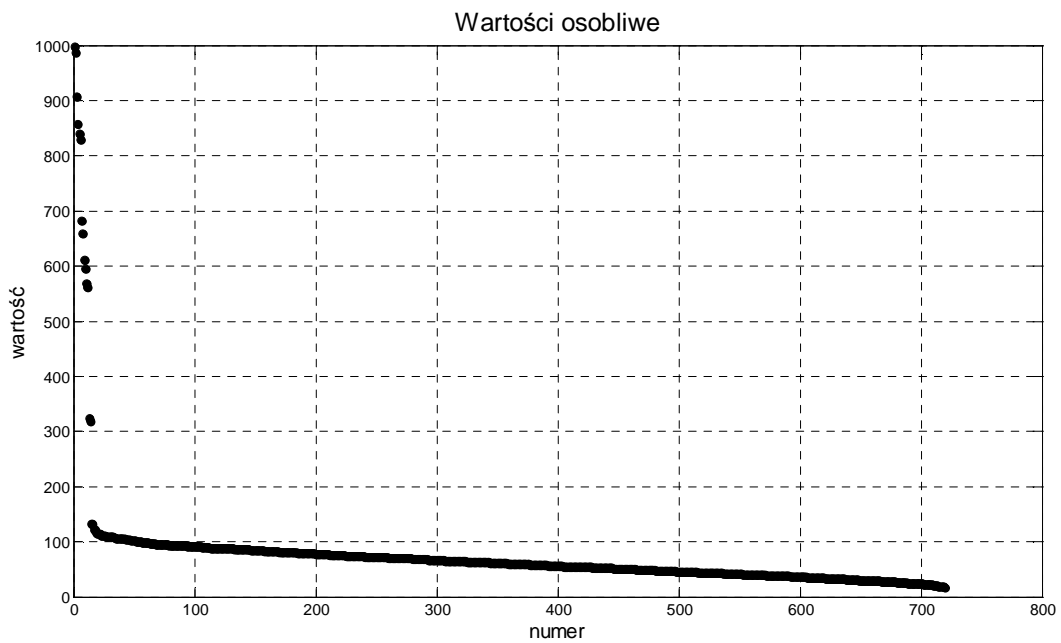
Na rys. 3.10 przedstawiono z kolei przypadek „zaszumionych” sygnałów testowych (poziom szumów 30%) w wariancie 1 rozkładu tłumienia. Wykres wartości osobliwych dla tego przypadku pokazano na rys. 3.11. Ostatni uskok na wykresie pozwala odróżnić wartości „znaczące” od wartości „bliskich zeru”, których pojawienie się związane jest z obecnością szumów pomiarowych.

Na rys. 3.12 pokazano diagram stabilizacyjny z naniesionym wykresem ANPSD. Widać dużą efektywność metody ERA dla rozważanego przypadku sygnałów.

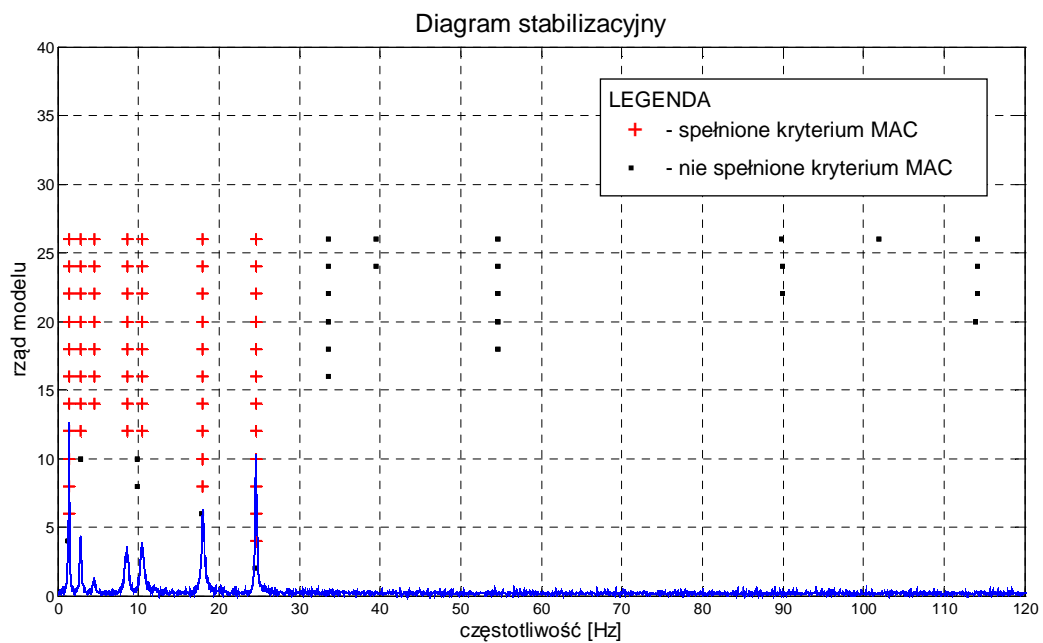
Tabele Z1.1 ÷ Z1.6 (zał. 1) przedstawiają szczegółowe rezultaty przeprowadzonych testów dla wariantu 1 rozkładu tłumienia, w zależności od poziomu szumów i rozmiarów macierzy Hankela.



Rys. 3.10. Sygnały testowe – poziom szumów 30%, wariant 1 rozkładu tłumienia

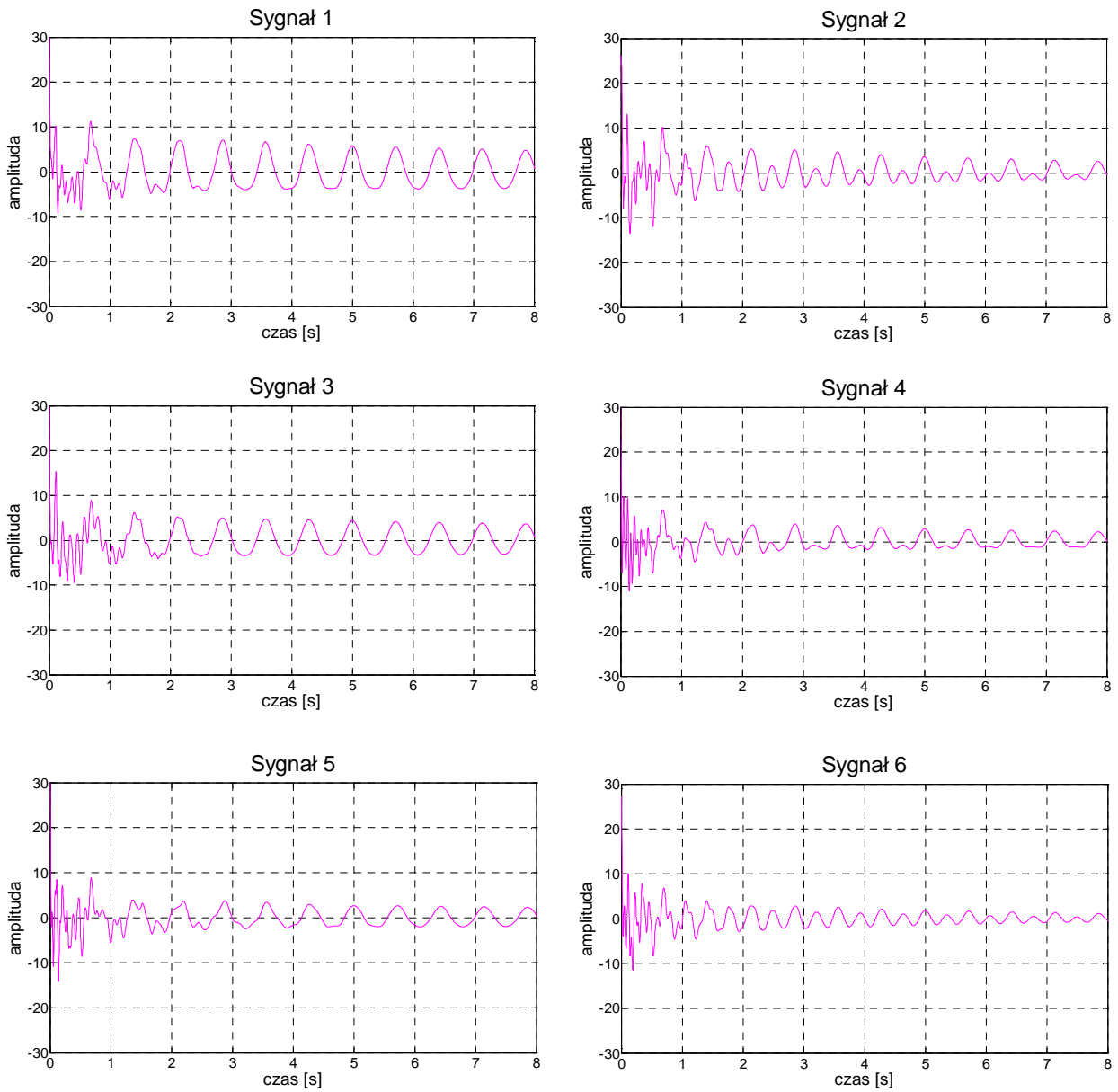


Rys. 3.11. Wykres wartości osobiwych macierzy Hankela dla sygnałów testowych – poziom szumów 30%, wariant 1 rozkładu tłumienia



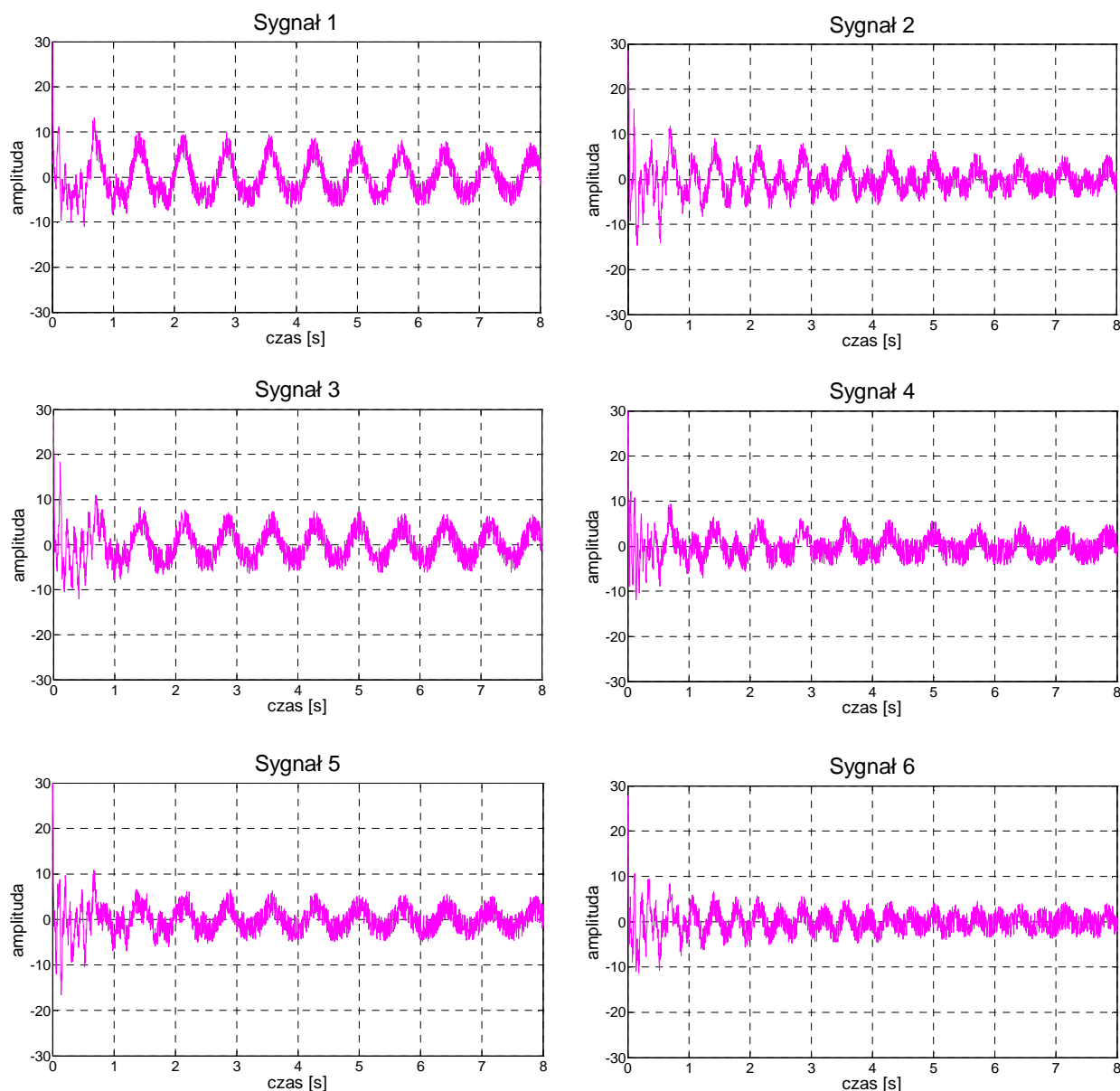
Rys. 3.12. Diagram stabilizacyjny metody ERA wraz z naniesionym wykresem ANPSD sygnałów testowych – poziom szumów 30%, wariant 1 rozkładu tłumienia

Na rys. 3.13 wykreślono sygnały testowe dla wariantu 2 rozkładu tłumienia (poziom szumów 0%). Rys. 3.14 obrazuje te same przebiegi z uwzględnieniem szumów o poziomie 30%.



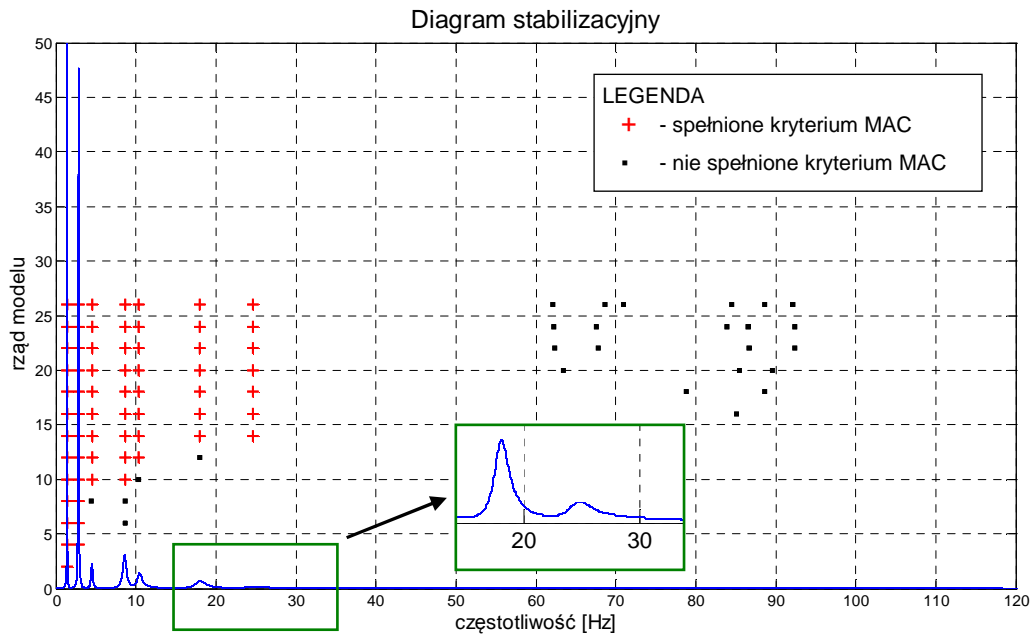
Rys. 3.13. Sygnały testowe – poziom szumów 0%, wariant 2 rozkładu tłumienia





Rys. 3.14. Sygnały testowe – poziom szumów 30%, wariant 2 rozkładu tłumienia

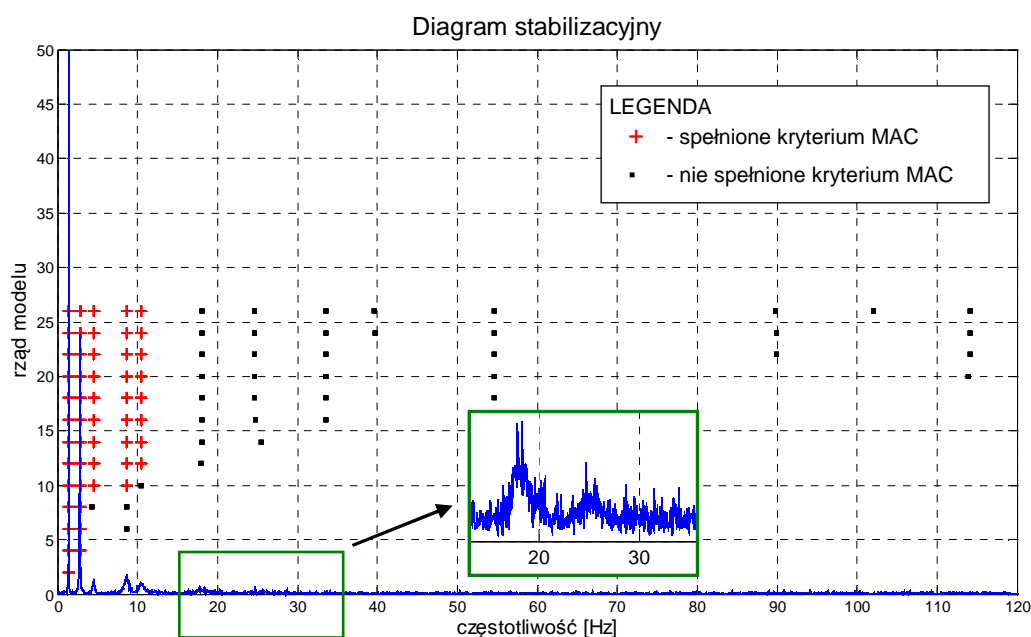
Na rys. 3.15 przedstawiono diagram stabilizacyjny metody ERA uzyskany dla sygnałów z rys. 3.13. Naniesiony wykres ANPSD pokazuje duże zróżnicowanie mocy poszczególnych częstotliwości w porównaniu z wariantem 1, gdzie udział poszczególnych wielkości w widmie był bardziej równomierny (por. rys. 3.9 i rys. 3.12). Również jednak w tym przypadku ERA identyfikuje parametry wszystkich funkcji bazowych.



Rys. 3.15. Diagram stabilizacyjny metody ERA oraz funkcja ANPSD sygnałów testowych – poziom szumów 0%, wariant 2 rozkładu tłumienia

Rys. 3.16 przedstawia z kolei diagram stabilizacyjny uzyskany dla „zaszumionych” sygnałów testowych w wariant 2 rozkładu tłumienia (poziom szumów 30%). W tym przypadku ERA również identyfikuje wszystkie częstotliwości drgań, jednak mody odpowiadające częstotliwościom 18 Hz i 24,6 Hz (najmniejszy udział w widmie) nie są wskazywane przez kryterium MAC. W sytuacji bardzo dużego poziomu szumów (50 % i więcej), częstotliwość 24,6 Hz nie jest w ogóle identyfikowana. Zwiększa się również liczba modów nie spełniających kryterium MAC (por. tabl. Z1.11 i Z1.12 w zał. 1).

Kompletne rezultaty testów dla wariantu 2 i 3 rozkładu tłumienia przedstawiono w zał. 1 (odpowiednio tabl. Z1.7 ÷ Z1.12 oraz tabl. Z1.13 ÷ Z1.18).



Rys. 3.16. Diagram stabilizacyjny metody ERA oraz funkcja ANPSD sygnałów testowych – poziom szumów 30%, wariant 2 rozkładu tłumienia

### 3.8. PODSUMOWANIE I WNIOSKI

Niniejszy rozdział poświęcono zagadnieniom teoretycznym z zakresu dynamiki i identyfikacji liniowych układów dynamicznych o niezmiennych w czasie parametrach i wiskotycznym tłumieniu. Omówione zagadnienia stanowią teoretyczne podstawy zastosowanych w pracy algorytmów identyfikacji (ERA, PP) i były przedmiotem szczegółowych studiów autora. Skuteczność zastosowanych metod w świetle przyjętych założeń zweryfikowano w oparciu o przeprowadzone testy numeryczne. Na podstawie wyników testów sformułować można kilka praktycznych wniosków.

Metoda ERA umożliwia identyfikację parametrów modalnych na podstawie odpowiedzi swobodnej układu, wywołanej dowolnym wymuszeniem początkowym. Identyfikacja jest możliwa dla „zaszumionych” sygnałów o skończonej długości. Nie można jednak stosować metody bezkrytycznie, ponieważ jej dokładność zależy w istotny sposób od trzech przeanalizowanych w testach czynników:

- poziomu szumów,
- rozmiaru macierzy Hankela,
- udziału poszczególnych modów (widmowa gęstość mocy) w sygnałach.

Im mniejszy poziom szumów tym większa skuteczność identyfikacji. Wraz ze wzrostem poziomu szumów, w pierwszej kolejności maleje skuteczność identyfikacji modów, których udział w widmie jest najmniejszy. Metoda wykazuje dobrą skuteczność dla sygnałów o poziomie szumów do 30%, a w przypadku równomiernego rozkładu widma, nawet do poziomu 50%. Poziom szumów nie wpływa istotnie na poprawność identyfikacji częstotliwości drgań, ma jednak istotne znaczenie dla prawidłowego określenia tłumienia.

Im bardziej równomierny rozkład widma, tym większa skuteczność identyfikacji wszystkich modów. Przez równomierny rozkład widma rozumie się taki rozkład, w którym moce poszczególnych częstotliwości na wykresie ANPSD są porównywalne (por. rys. 3.9 i rys. 3.12). Rozkład nierównomierny to taki, w którym występują duże dysproporcje pomiędzy poszczególnymi pikami częstotliwości (por. rys. 3.15 i 3.16). Rozkład widma zależy od poziomu wymuszenia oraz wielkości tłumienia poszczególnych modów. Im większe tłumienie i mniejsze wzbudzenie danego modu, tym mniejszy jest jego udział w sygnale oraz widmie.

Rozmiar macierzy Hankela nie wpływa znacząco na identyfikację częstotliwości drgań. Dużą wrażliwość wykazuje natomiast wynik określający tłumienie. Ważnym czynnikiem w tym przypadku jest wybór do analizy reprezentatywnej części sygnału zawierającej wszystkie mody o możliwie zrównoważonej widmowej gęstości mocy.

Ze względu na dużą wrażliwość wyników tłumienia, należy wykonać analizę zbieżności rozwiązania względem rozmiarów macierzy Hankela.

Brak pozytywnego warunku MAC ustalonego na poziomie 98%, nie oznacza błędnych lub technicznie nieprzydatnych wyników. Zestawienie przedstawione w tabelach (np. tabl. Z1.10 i Z1.17), wskazuje na technicznie poprawne wyniki przy wartości  $MAC < 90\%$ . Kryterium MAC należy zatem traktować jako wskaźnik pomocniczy.

## PRZYPISY

<sup>1</sup> Sformułowane w 1864 roku przez J.C. Maxwella twierdzenie o wzajemności przemieszczeń, ma podstawowe znaczenie w teorii układów liniowo-sprężystych. Mówi ono, że odpowiedź układu mierzona w punkcie  $j$  spowodowana wymuszeniem przyłożonym w punkcie  $i$ , jest identyczna z odpowiedzią punktu  $i$  na identyczne wymuszenie przyłożone w punkcie  $j$ .

<sup>2</sup> Z punktu widzenia procesu identyfikacji modele układów możemy podzielić na *funkcjonalne* i *strukturalne* (KISIŁOWSKI [1991]). W modelach funkcjonalnych nie jest istotna ich struktura wewnętrzna (budowa). Ich zadaniem jest realizacja określonej transformacji sygnałów wejściowych (wymuszeń) na sygnały wyjściowe (odpowiedzi). Modele funkcjonalne charakteryzują pewne własności układu w postaci np. charakterystyk dynamicznych. W przypadku identyfikacji w dziedzinie częstotliwości, na podstawie sygnałów wejścia i wyjścia wyznacza się funkcję odpowiedzi częstotliwościowej (ang. *Frequency Response Function (FRF)*) i na jej podstawie wyznacza parametry modalne. Odpowiednikami FRF w dziedzinie czasu są: funkcja odpowiedzi impulsowej (ang. *Impuls Response Function (IRF)*), funkcja korelacji (ang. *correlation function*), odpowiedź swobodna tłumiona (ang. *free decay response*).

<sup>3</sup> Równoważne określenia spotykane często w literaturze to: „operacyjna analiza modalna” (ang. *operational modal analysis*), analiza bazująca jedynie na odpowiedzi układu (ang. *output-only analysis*).

<sup>4</sup> *Biały szum* to rodzaj sygnału o przypadkowo zmieniających się parametrach i całkowicie płaskim widmie (częstotliwości wszystkich składowych sygnału mają ten sam udział w jego widmie – sygnał o charakterze zakłócenia). W odniesieniu do procesów stochastycznych, biały szum to sygnał stacjonarny o zerowej wartości średniej, stałej wariancji i stałej funkcji gęstości widmowej mocy.

<sup>5</sup> Równania opisujące ruch modeli dyskretnych są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Są one znacznie prostsze do rozwiązania niż równania różniczkowe cząstkowe opisujące ruch modeli ciągłych (modele rzeczywiste). Z tego względu, do celów obliczeniowych, modele ciągłe zastępuje się (przybliża) modelami dyskretnymi, wykorzystując techniki dyskretyzacji. Wyróżnia się trzy zasadnicze metody dyskretyzacji konstrukcji (CHMIELEWSKI I ZEMBATY [1998]): a) metodę mas skupionych, b) metodę współrzędnych uogólnionych, c) metodę elementów skończonych.

<sup>6</sup> Dużą literę  $\mathbf{Y}$  wprowadzono dla odróżnienia od parametrów Markowa generowanych na podstawie sygnałów pomiarowych – oznaczenie małą literą  $\mathbf{y}$ .

<sup>7</sup> Przez rząd układu rozumie się liczbę niezależnych zmiennych stanu potrzebnych do opisu danego układu. Układ jest rzędu  $n$ , jeżeli jego zachowanie opisuje  $n$  niezależnych zmiennych stanu  $x_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ).

<sup>8</sup> Pojęcie uogólniona macierz odwrotna (inaczej macierz pseudoodwrotna) opracowali niezależnie Eliakim Hastings Moore (1862-1932) – matematyk amerykański oraz Roger Penrose (1931- ) – matematyk i fizyk angielski. Pseudoodwrotność dotyczy macierzy prostokątnych. Dana macierz  $\mathbf{A}^\dagger$  o wymiarach  $m \times n$  stanowi uogólnioną macierz odwrotną w sensie Moore-Penrose’a (macierz pseudoodwrotną) do danej rzeczywistej macierzy  $\mathbf{A}$ , jeśli spełnione są następujące warunki (MAIA I SILVA [1997]):

- ◆  $\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{A}$ ,
- ◆  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger$ ,
- ◆  $\mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$  jest symetryczna,
- ◆  $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$  jest symetryczna.

Jeżeli macierz  $\mathbf{A}$  jest kwadratowa i nieosobliwa, wówczas zachodzi  $\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^{-1}$ . W przypadku, gdy macierz  $\mathbf{A}$  jest prostokątna i pełnego rzędu, wówczas macierz pseudoodwrotna  $\mathbf{A}^\dagger = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T$ .

<sup>9</sup> Dwa wektory  $x_i$  oraz  $x_j$  są ortonormalne, jeżeli ich iloczyn skalarny  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  jest równy:

$$\langle x_i, x_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j \\ 1 & \text{dla } i = j \end{cases}$$

oraz każdy z nich jest wersorem (ma jednostkową długość). W przypadku macierzy  $\mathbf{U}$  oraz  $\mathbf{V}$  będących rezultatem dekompozycji macierzy Hankela:  $\text{SVD } \mathbf{H}(0) = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T$ , ortonormalność dotyczy dwóch dowolnych wierszy lub kolumn tych macierzy.

<sup>10</sup> Wartość skuteczna (ang. *root mean square* – RMS) jest miarą energii przenoszonej przez dany sygnał. Wartość skuteczną w przedziale  $\langle t_1, t_2 \rangle$  sygnału  $y(t)$  obliczyć można z zależności (KUCHARSKI [2002]):

$$y_{rms} = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [y(t) - y_{sr}]^2 dt},$$

gdzie  $y_{sr}$  oznacza wartość średnią sygnału. W przypadku sygnałów dyskretnych o wartości średniej równej zero, wartość skuteczna ciągu  $N$  próbek zdefiniowana jest jako:

$$y_{rms} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k)^2}.$$



## Rozdział 4

# Identyfikacja parametrów modalnych jednostki EN57

*STRESZCZENIE. W niniejszym rozdziale przedstawiono rezultaty identyfikacji parametrów modalnych jednostki trakcyjnej serii EN57. Identyfikację przeprowadzono w oparciu o algorytm metody ERA, wykorzystując sygnały odpowiedzi swobodnej uzyskane z eksperymentu. Omówiono metodykę badań. Przedstawiono również rezultaty symulacji numerycznych „zeskoku”, których celem było sprawdzenie skuteczności przyjętego sposobu wzbudzenia drgań wagonu.*

### 4.1. UWAGI WSTĘPNE

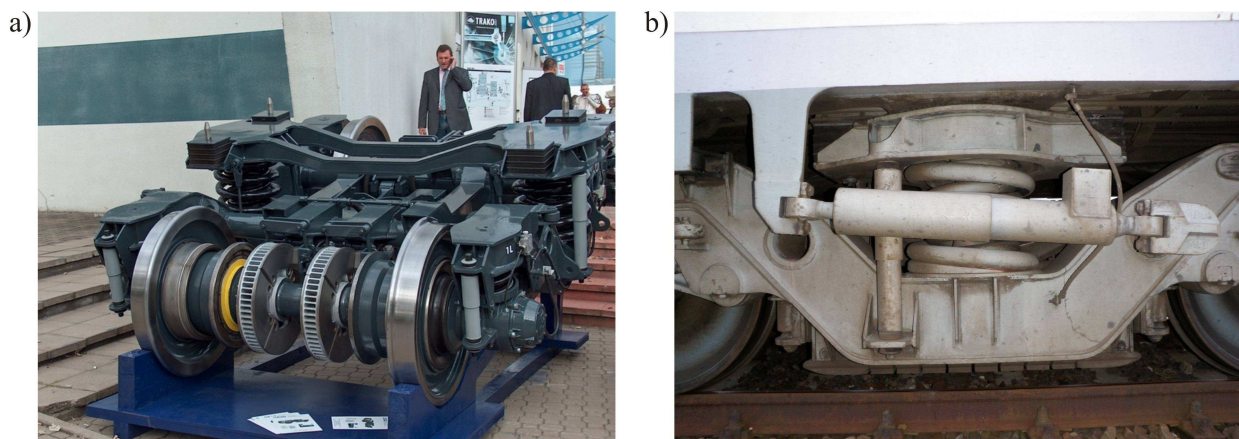
Pomimo wiekowej konstrukcji, jednostki trakcyjne serii EN57 są jednym z najpopularniejszych składów kolejowych w kraju. Użytkowane są przez wielu przewoźników, w tym spółkę PKP SKM w Trójmieście. Możliwość przeprowadzenia badań oraz brak istotnych różnic jakościowych w budowie i schemacie pracy jednostki w porównaniu z większością konwencjonalnego taboru, skłoniły autora do wyboru tej właśnie konstrukcji jako szynowego pojazdu testowego.

W oparciu o przeprowadzone badania oraz przyjęty algorytm teoretyczny, przeprowadzono identyfikację parametrów modalnych jednostki. Podstawy teoretyczne zastosowanych metod omówiono w rozdziale 3.

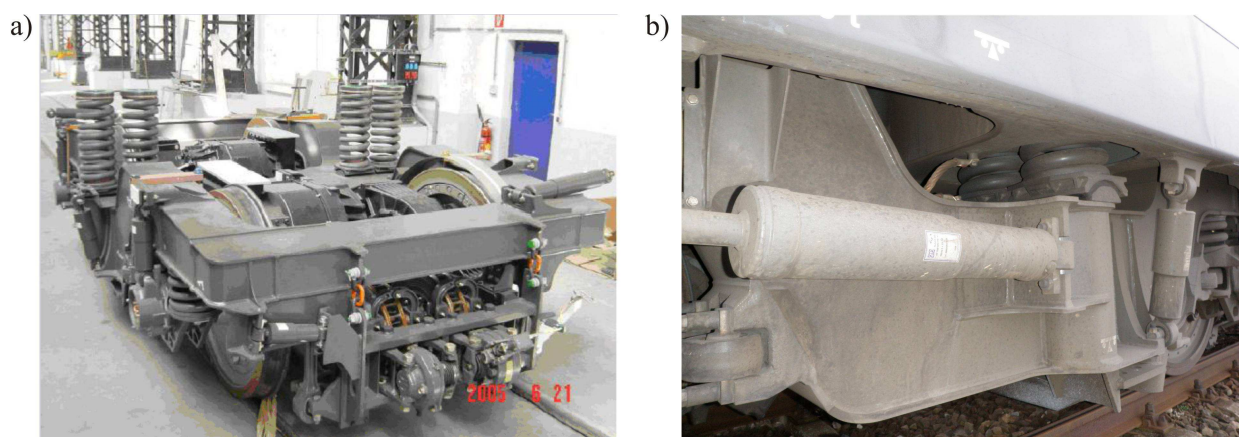
Badania poprzedzono obszernym studium mechaniczno-konstrukcyjnym pojazdu oraz dyskusją możliwości wyboru metody badawczej. W efekcie zdecydowano się na metodę polegającą na impulsowym wzbudzeniu i pomiarze odpowiedzi swobodnej wagonu.

### 4.2. STUDIUM MECHANICZNO-KONSTRUKCYJNE JEDNOSTKI EN57

Szczegółowy opis konstrukcji jednostki EN57 przedstawiono w rozdziale 2. Zasadniczymi elementami składowymi każdego z wagonów są dwuosiowe wózki oraz pudło. Poszczególne elementy połączone są między sobą dwustopniowym resorowaniem lepko-sprężystym. Pudło opiera się sprężysto na ramie wózków, te z kolei na zestawach kołowych. Konstrukcja jednostki nie odbiega od powszechnie stosowanych rozwiązań. Zasadniczą różnicą jest bujakerowe oparcie pudła na ramie wózka (sprężyste oparcie za pośrednictwem niezależnie wykształconej belki bujakerowej oraz kołysek, podwieszonych do ramy wózka systemem ogniów i wieszaków – por. rys. 2.10 oraz 2.13a w rozdziale 2). Rozwiązanie to nie jest stosowane powszechnie i występuje jedynie w niektórych rodzajach taboru (np. EZT EN71, lokomotywa EU07). Obecnie częściej stosowanym rozwiązaniem jest bezpośrednie oparcie pudła na ramie wózka poprzez system sprężyn zwojowych oraz tłumików (rys. 4.1 i 4.2). Pozostałe różnice występują m. in. w masie i ukształtowaniu poszczególnych elementów, konstrukcji resorowania a także liczbie i charakterystykach sprężyn oraz tłumików. Czynniki te nie wpływają jednak na ogólny schemat pracy układu.



Rys. 4.1. a) wózek typu 25ANa (fot.: [www.inforail.pl](http://www.inforail.pl)), b) oparcie pudła wagonu 154A na wózku typu 25ANa



Rys. 4.2. a) wózek lokomotywy Siemens ES64U4 (fot.: [www.robeyama.za.pl](http://www.robeyama.za.pl)), b) oparcie pudła lokomotywy Siemens ES64U4 na wózku

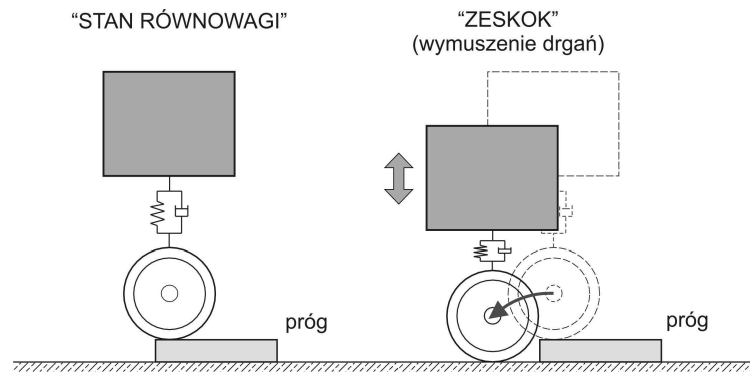
### 4.3. BADANIA ODPOWIEDZI JEDN. EN57 NA WYMUSZENIE TYPU „ZESKOK Z PROGU”

Badania przeprowadzono w lokomotywowni PKP SKM w Trójmieście w Gdyni Cisowej. Testom poddano pojedynczy wagon rozrządczy jednostki EN57. Celem badań było zebranie danych wejściowych (sygnałów odpowiedzi swobodnej) do przyjętych algorytmów teoretycznych identyfikacji (ERA, PP).

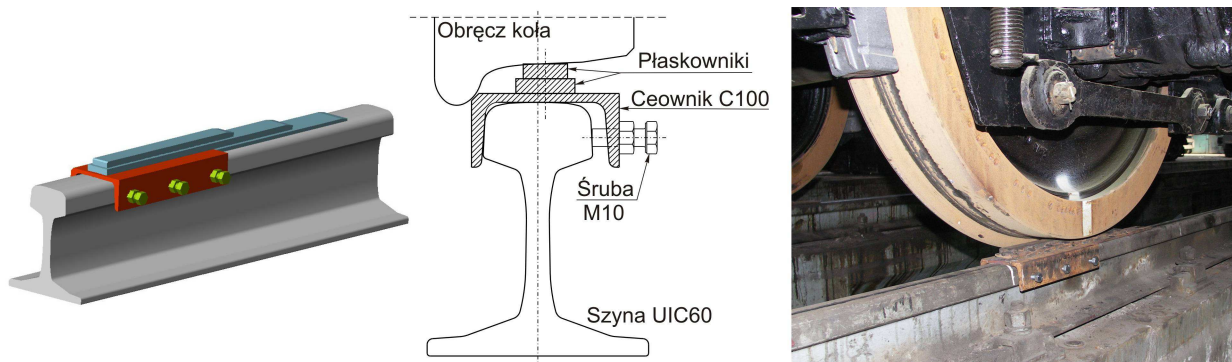
#### 4.3.1. Metodyka badań

Metoda badawcza polegała na impulsowym wzbudzeniu i pomiarze drgań swobodnych wagonu. Wzbudzenia drgań dokonywano poprzez „zeskok” (impulsowy zjazd) wagonu ze specjalnie zaprojektowanych, stalowych progów, mocowanych do szyn kanału diagnostycznego. Wysokość progu wynosiła 26 mm (określona jako maksymalna możliwa ze względów bezpieczeństwa). Ideowy schemat wzbudzenia zilustrowano na rysunku 4.3. Konstrukcję progów oraz sposób ich mocowania pokazano na rysunku 4.4.





Rys. 4.3. Idea wymuszenia drgań typu „zeskok z progów”



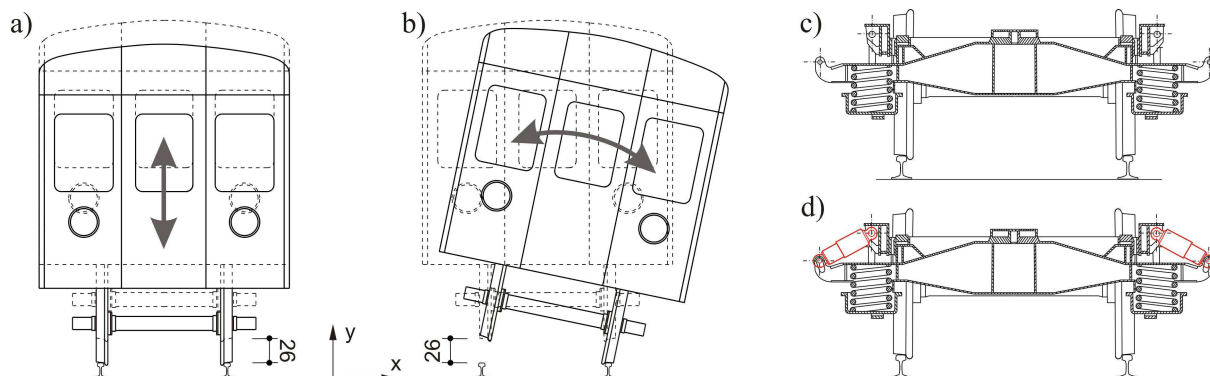
Rys. 4.4. Konstrukcja progów testowych

Badania przeprowadzono na sztywnym podłożu (żelbetowy kanał diagnostyczny), do którego bezpośrednio zamocowane były szyny toczne. Fakt ten praktycznie eliminował wpływ podatności podłoża na otrzymane rezultaty.

Badania wykonano dla dwóch kierunków wymuszeń:

- wymuszenie drgań pionowych – jednoczesny zeskok wszystkich 8 kół z progów testowych (rys. 4.5a),
- wymuszenie drgań wahaniowych (ruch kaczkowy) – jednoczesny zeskok 4 kół z jednej strony osi (rys. 4.5b).

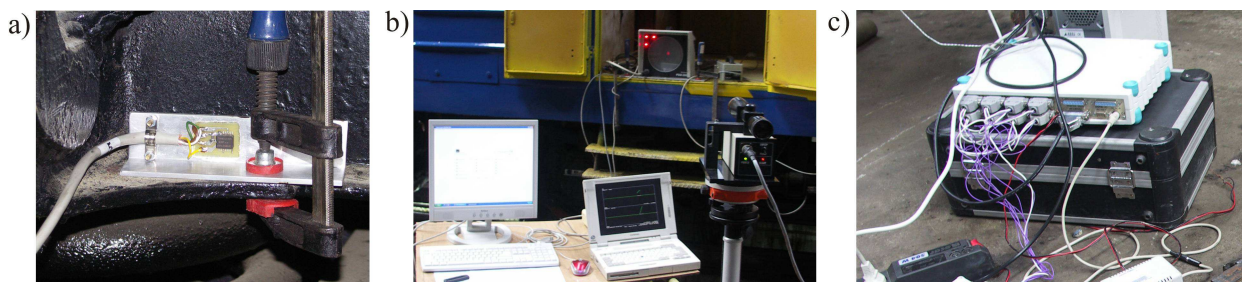
W przypadku wymuszenia drgań pionowych, testy wykonano bez zamontowanego amortyzatora hydraulicznego (rys. 4.5c), w celu wyeliminowania z układu zewnętrznego tłumienia (nie wiadomy wpływ tłumika na poziom tłumienia). W przypadku wymuszenia drgań wahaniowych, testy prowadzono zarówno bez zamontowanego amortyzatora jak i z zamontowanym amortyzatorem hydraulicznym (rys. 4.5d).



Rys. 4.5. Kierunki wymuszenia drgań oraz warianty testów: a) wymuszenie drgań pionowych, b) wymuszenie drgań wahaniowych (ruch kaczkowy), c) wariant 1 testów – zdemontowane tłumiki hydrauliczne, d) wariant 2 testów – zamontowane tłumiki hydrauliczne

### 4.3.2. Aparatura pomiarowa

Do pomiarów wykorzystano zestaw składający się z 8 potencjometrycznych czujników przyspieszeń ADXL321 firmy ANALOG (rys. 4.6a), wzmacniacza pomiarowego SPIDER 8 firmy HBM (rys. 4.6c) oraz komputera typu PC z oprogramowaniem rejestrująco-sterującym CATMAN. Do określenia trajektorii zeskoku wykorzystano zestaw pomiarowy NOPTEL OY PSM200 (rys. 4.6b). Czujniki pomiarowe wyskalowano w polu grawitacyjnym (tabl. 4.2).



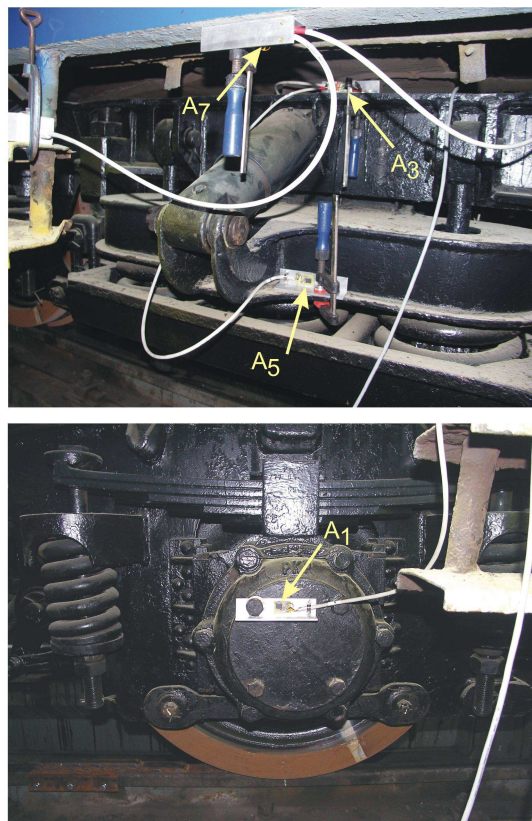
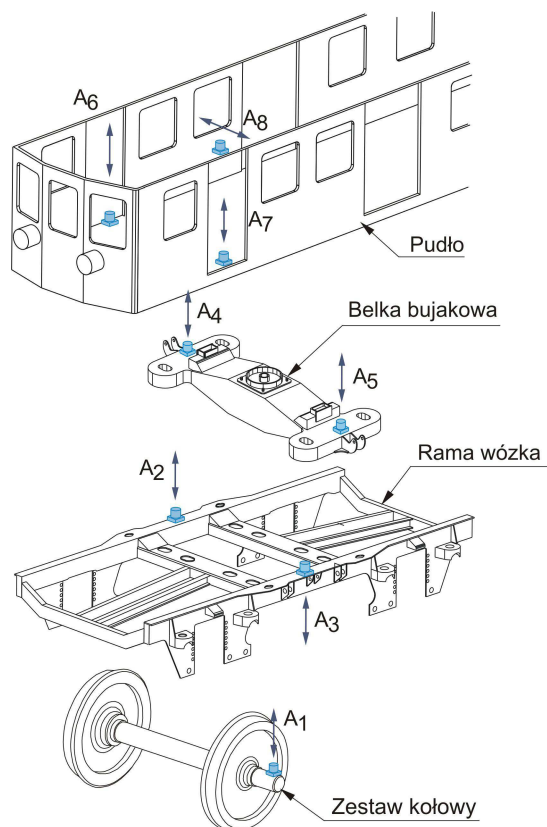
Rys. 4.6. Aparatura pomiarowa: a) czujnik ADXL321, b) Noptel OY PSM200, c) wzmacniacz SPIDER 8

Tablica 4.2. Zakresy czujników pomiarowych (czujniki ADXL321)

Czujnik	Umiejscowienie	Przelicznik	Zakres
A1	maźnica	1V – 47,16m/s <sup>2</sup>	± 50 g
A2	rama wózka	1V – 18,50m/s <sup>2</sup>	± 18 g
A3	rama wózka	1V – 49,05m/s <sup>2</sup>	± 50 g
A4	belka bujakowa	1V – 18,50m/s <sup>2</sup>	± 18 g
A5	belka bujakowa	1V – 49,05m/s <sup>2</sup>	± 50 g
A6	pułko	1V – 4,90m/s <sup>2</sup>	± 5 g
A7	pułko	1V – 4,95m/s <sup>2</sup>	± 5 g
A8	pułko	1V – 4,60m/s <sup>2</sup>	± 5 g

g – przyspieszenie ziemskie

Z przyczyn technicznych, pomiary przyspieszeń ograniczono do ośmiu punktów (kierunków) pomiarowych. Nie monitorowano zatem wszystkich stopni swobody wagonu (por. rys. 5.1 w rozdziale 5). Pomiarów dokonano w wybranych lokalizacjach, po jednej stronie wagonu, w obrębie jednego wózka (rys. 4.7).

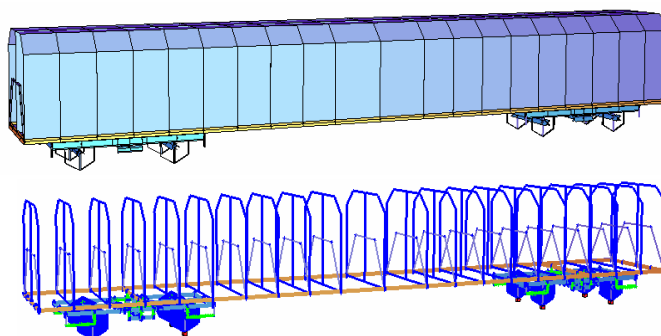


Rys. 4.7. Rozmieszczenie czujników pomiarowych wraz z kierunkami pomiaru drgań (przyspieszeń)

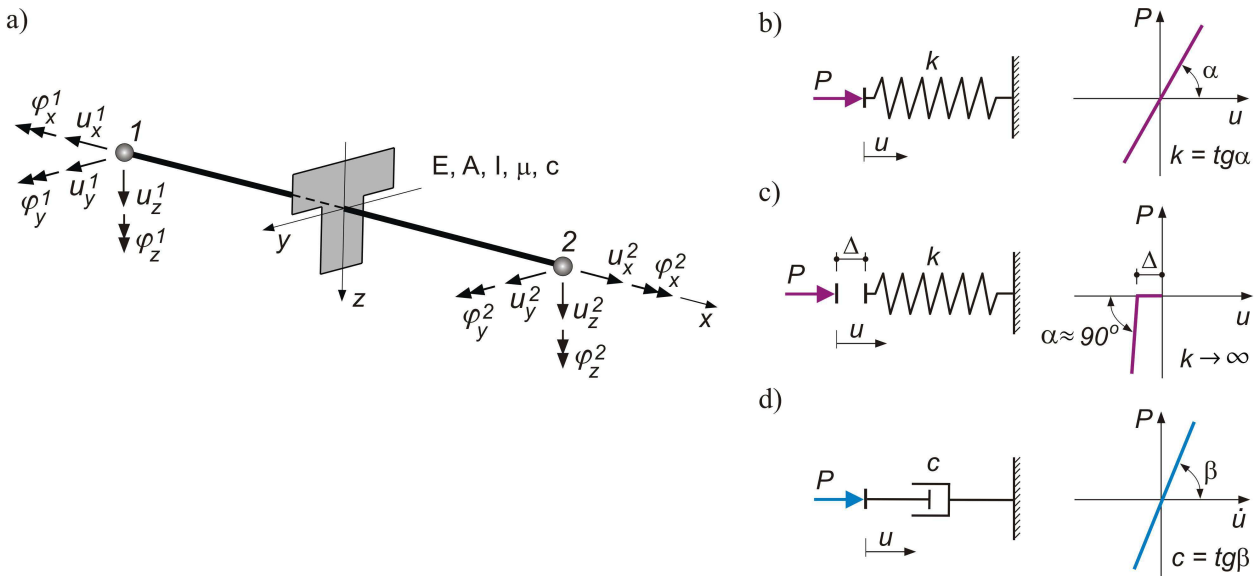
#### 4.3.3. Wstępny model MES wagonu. Symulacje numeryczne „zeskoku”

Na etapie przygotowania eksperymentu pojawiły się pewne niewiadome, których oszacowanie okazało się trudne (np.: skuteczność przyjętej metody wzbudzenia, dobór zakresu czujników pomiarowych). Podjęto więc próbę numerycznego zasymulowania eksperymentu. Do tego celu zbudowano przestrzenny model MES wagonu (rys. 4.8). Jego geometrię odwzorowano przy pomocy elementów belkowych (rys. 4.9a). Oba stopnie resorowania zdefiniowano za pomocą liniowych elementów sprężystych (rys. 4.9b) oraz tłumiących (rys. 4.9d).

Liczba węzłów:	275
Liczba elementów belkowych:	383
Liczba sprężyn liniowych:	36
Liczba sprężyn kontaktowych:	16
Liczba elementów tłumiących:	8



Rys. 4.8. Wizualizacja modelu MES wagonu jednostki EN57 (SOFiSTiK)



Rys. 4.9. Elementy zastosowane w modelu MES wagonu: a) element belkowy, b) element sprężysty liniowy, c) element sprężysty nieliniowy (kontaktowy), d) element tłumiący

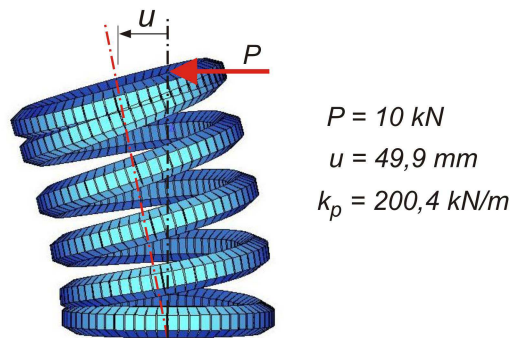
Sztywności podłużne sprężyn śrubowych, sztywność sprężyny piórowej oraz współczynnik tłumienia amortyzatora hydraulicznego, przyjęto na podstawie dokumentacji technicznej (por. tabl. 2.5 w rozdziale 2). Sztywność poprzeczną sprężyny śrubowej w resorowaniu I stopnia oszacowano, posługując się modelem numerycznym (rys. 4.10).

Tłumienie w układzie przyjęto odpowiadające modelowi Rayleigh'a. Współczynniki proporcjonalności określono na podstawie przyjętej liczby tłumienia ( $\xi = 2\%$ ) oraz pierwszych dwóch częstości drgań własnych wagonu (LEWANDOWSKI [2006]).

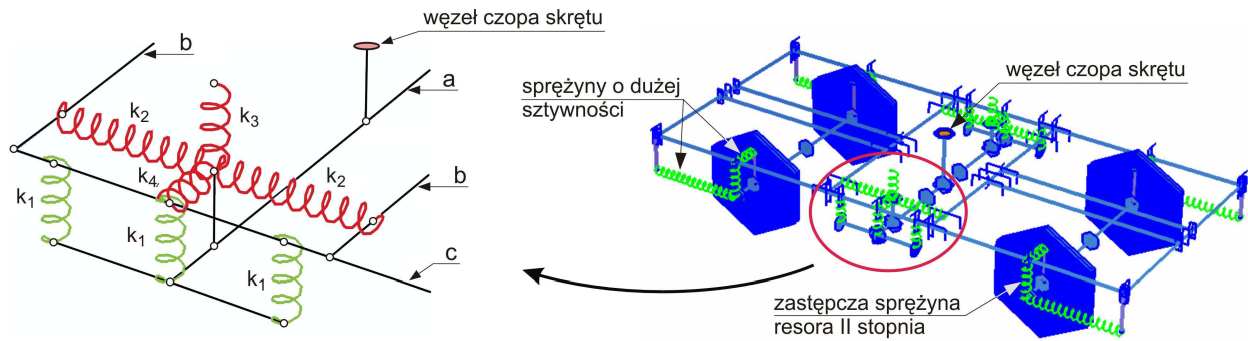
Rzeczywisty układ sprężyn w resorowaniu II stopnia (sprężyna piórowa + dwie sprężyny śrubowe) sprowadzono do pojedynczej, zastępczej więzi, wykorzystując techniki redukcji dla równoległego i szeregowego układu sprężyn.

Geometryczną niezmienność układu na kierunku poprzecznym i podłużnym zapewniono przez dodatkowe więzi sprężyste pomiędzy zestawami kołowymi i ramą wózka o bardzo dużej sztywności ( $k_i = 2 \cdot 10^9 \text{ kN/m}$ ). Zasympulowano w ten sposób oparcie ramy wózka na zestawach kołowych za pomocą gniazd maźnicowych. (por. rys. 2.10 i 2.13b w rozdziale 2).

W modelu zastosowano również szereg sprężyn kontaktowych (rys. 4.9c). Przy ich pomocy uwzględniono luzy występujące pomiędzy belką bujawkową i ramą wózka a także pomiędzy belką bujawkową i wspornikami bocznego oparcia pudła. Układ sprężyn w modelu wózka pokazano na rysunku 4.11.



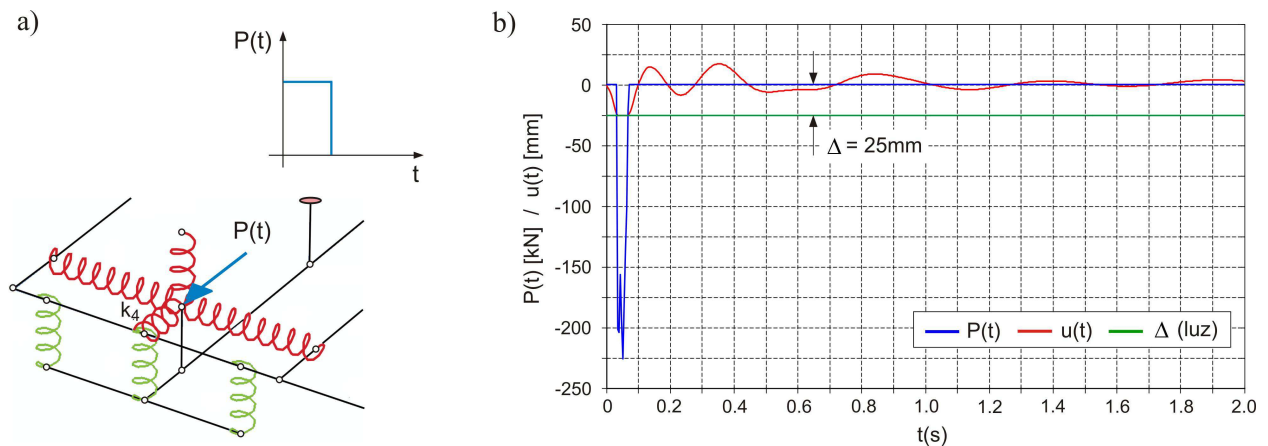
Rys. 4.10. Sposób oszacowania sztywności poprzecznej sprężyny śrubowej resora I stopnia (model MES – SOFiSTiK)



Rys. 4.11. Układ więzów sprężystych w modelu MES wózka tocznego (SOFiSTiK):

- a) oś belki bujawkowej, b) oś poprzecznic środkowej ramy wózka, c) oś podłużnicy (belki ostoi) ramy wózka,  
 $k_1$  – liniowe sprężyny śrubowe resorowania I stopnia,  
 $k_2$  – sprężyny kontaktowe podłużne pomiędzy belką bujawkową a ramą wózka ( $\Delta = 3\text{mm}$ ),  
 $k_3$  – sprężyny kontaktowe pionowe bocznego podparcia pudła na belce bujawkowej ( $\Delta = 1,5\text{mm}$ ),  
 $k_4$  – sprężyny kontaktowe poprzeczne pomiędzy belką bujawkową a ramą wózka ( $\Delta = 25\text{mm}$ )

Symulacje „zeskoków” poprzedzono szeregiem testów sprawdzających poprawność pracy mechanicznej modelu. Na rys. 4.12b pokazano wykresy zmienności przemieszczeń oraz siły normalnej w sprężynie kontaktowej  $k_4$  (rezultat analizy nieliniowej), otrzymane w wyniku wymuszenia impulsowego przyłożonego zgodnie z rys. 4.12a.



Rys. 4.12. Test sprawdzający działanie sprężyny kontaktowej  $k_4$ : a) lokalizacja i charakter wymuszenia, b) wykresy siły w sprężynie  $P(t)$  oraz przemieszczenia sprężyny  $u(t)$

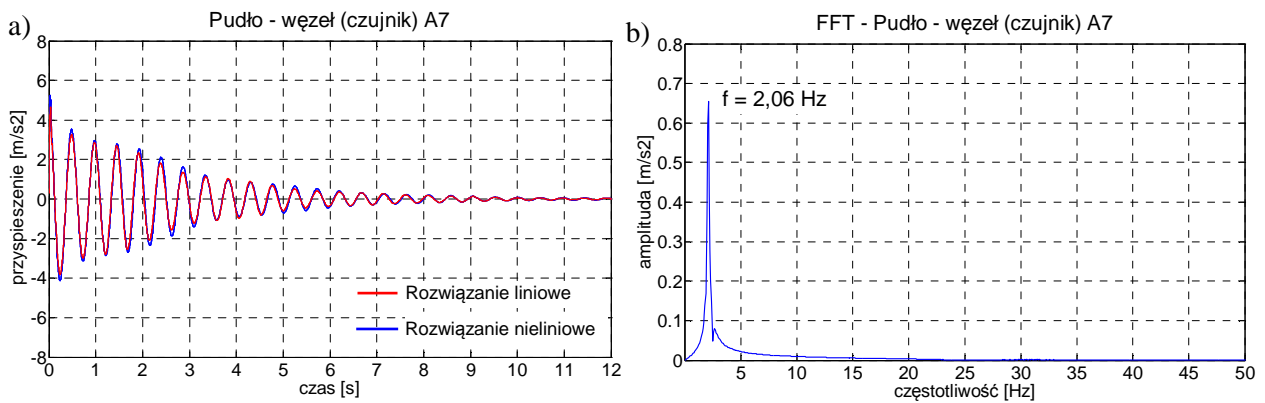
Właściwe symulacje przeprowadzono dla następujących przypadków wymuszenia:

- wymuszenie drgań pionowych – zeskok wszystkimi kołami,
- wymuszenie drgań wahaniowych – zeskok kołami z jednej strony osi,
- wymuszenie ruchu galopowego – zeskok zestawami kołowymi jednego wózka.

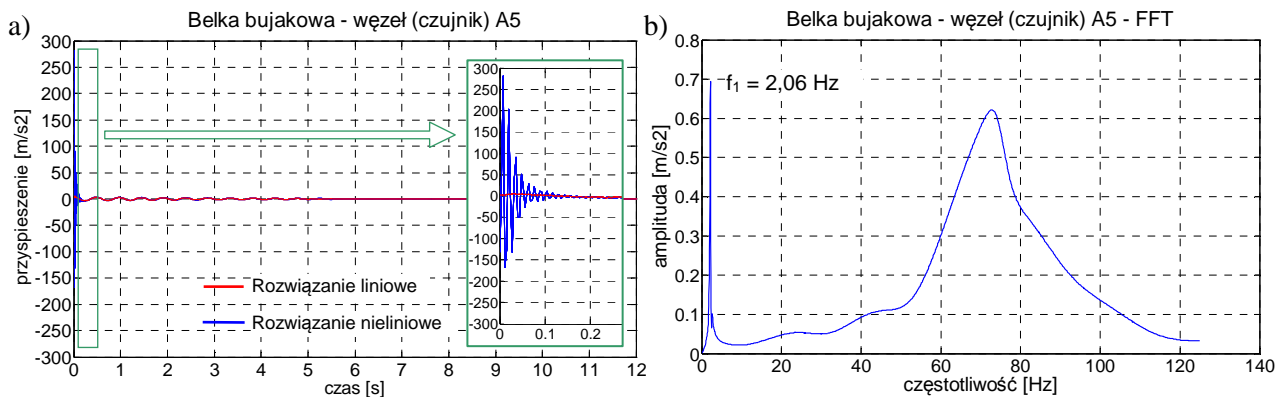
Analizowano drgania węzłów modelu, odpowiadających późniejszemu rozmieszczeniu czujników pomiarowych. Analizy przeprowadzono w programie SOFiSTiK. Do całkowania równań ruchu wykorzystano algorytm metody Newmark’a (CLOUGH I PENZIEN [1993]).

Na rys. 4.13 porównano odpowiedzi pudła uzyskane dla rozwiązania liniowego i nieliniowego oraz pokazano rezultat przekształcenia Fouriera (FFT) „sygnału nieliniowego”. Widać dobrą zgodność obu rozwiązań.

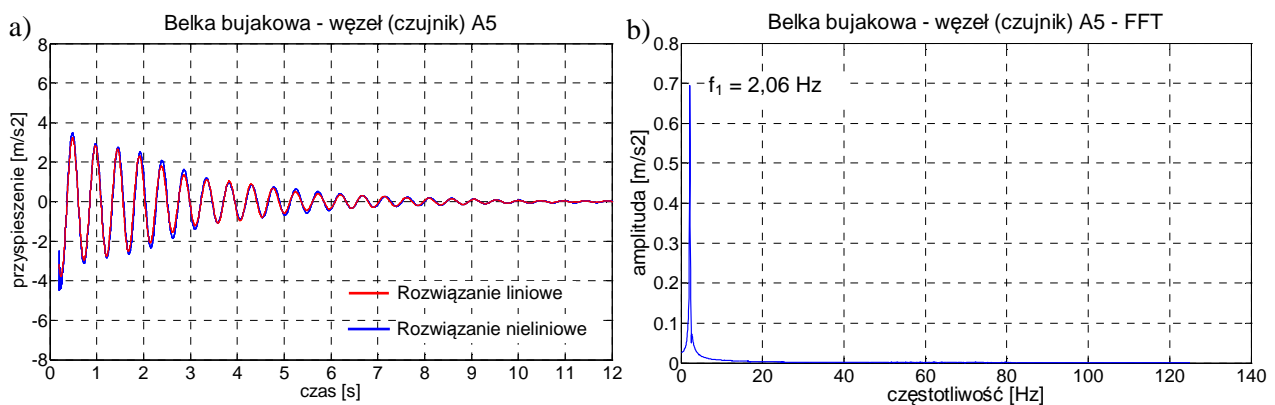
Podobne porównanie dla belki bujkowej (rys. 4.14) pokazuje wyraźną różnicę jedynie w początkowej fazie drgań (przedział czasu  $0 \div 0,15$ s). Przyspieszenia uzyskane z rozwiązania nieliniowego mają bardzo wysoką częstotliwość oraz amplitudę i są efektem lokalnym. „Wycięcie” tego zakresu drgań pozwala na obiektywne porównanie przebiegów (rys. 4.15). Wspomniany efekt lokalny wystąpił również w przypadku drgań ramy wózka, zarówno w rozwiązaniu liniowym jak i nieliniowym (rys. 4.16). Porównania rozwiązań dokonano po odrzuceniu początkowej fazy drgań w zakresie  $0 \div 0,20$  s (rys. 4.17).



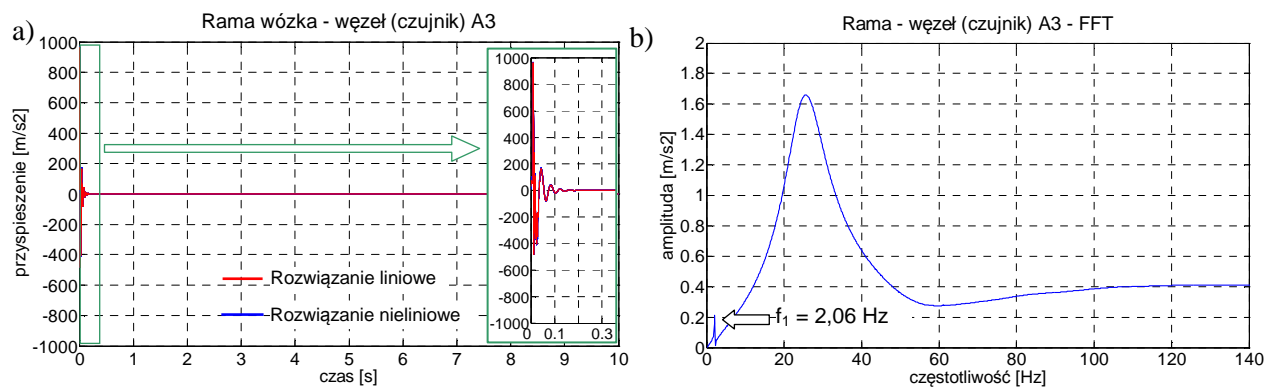
Rys. 4.13. Odpowiedź swobodna węzła modelu numerycznego odpowiadającego lokalizacji czujnika A7 (pudło) – drgania pionowe: a) porównanie przebiegów dla rozwiązania liniowego i nieliniowego, b) FFT sygnału nieliniowego



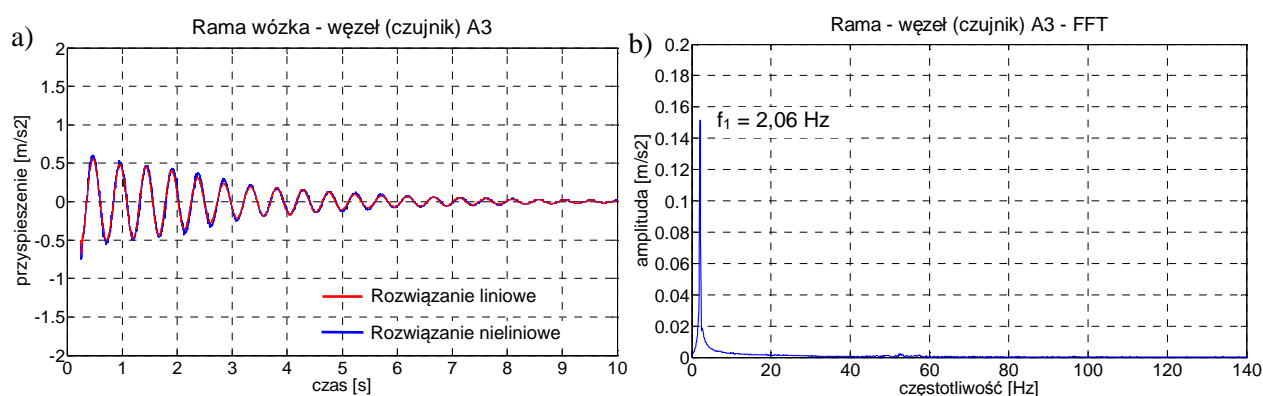
Rys. 4.14. Odpowiedź swobodna węzła modelu numerycznego odpowiadającego lokalizacji czujnika A5 (belka bujkowa) – drgania pionowe: a) porównanie przebiegów dla rozwiązania liniowego i nieliniowego, b) FFT sygnału nieliniowego



Rys. 4.15. Odpowiedź swobodna węzła modelu numerycznego odpowiadającego lokalizacji czujnika A5 (belka bujkowa) – drgania pionowe: a) porównanie przebiegów dla rozwiązania liniowego i nieliniowego po „wycięciu” początkowej fazy drgań w przedziale czasu  $0 \div 0,15$  s, b) FFT sygnału uzyskanego z rozwiązania nieliniowego



Rys. 4.16. Odpowiedź swobodna węzła modelu numerycznego odpowiadającego lokalizacji czujnika A3 (rama wózka) – drgania pionowe: a) porównanie przebiegów dla rozwiązania liniowego i nieliniowego, b) FFT sygnału nieliniowego



Rys. 4.17. Odpowiedź swobodna węzła modelu numerycznego odpowiadającego lokalizacji czujnika A3 (rama wózka) – drgania pionowe: a) porównanie przebiegów drgań dla rozwiązania liniowego i nieliniowego po „wycięciu” początkowej fazy drgań w przedziale czasu  $0 \div 0,20$  s, b) FFT sygnału nieliniowego

Główne wnioski płynące z przeprowadzonych symulacji to:

- istnieje możliwość skutecznego wzbudzenia drgań metodą „zeskok z progę”,
- odpowiedzi belki bujawkowej i pudła są podobne – wniosek ten zweryfikowano w oparciu o późniejsze badania eksperymentalne,
- porównanie rezultatów analizy liniowej i nieliniowej pokazuje znikomy wpływ luzów pomiędzy belką bujawkową i ramą wózka na otrzymane wyniki.

Ostatni wniosek jest szczególnie istotny z punktu widzenia teorii identyfikacji. Założenie liniowości umożliwia bowiem zastosowanie algorytmów należących do grupy metod analizy modalnej.

Należy w tym miejscu stwierdzić, iż przedstawione podejście tworzenia modelu obciążenia wymaga dużego nakładu pracy. Każdorazowo konieczne są bowiem obszerne studia dokumentacji technicznej. Z praktycznego punktu widzenia, trudno uznać tę drogę za uniwersalną i efektywną. Dlatego w dalszym etapie pracy modelu tego nie rozwijano, decydując się na definicję znacznie bardziej uproszczonego, dyskretnego modelu dynamicznego. Model ten zdefiniowano na podstawie wyników badań eksperymentalnych oraz przyjętych uproszczeń i założeń omówionych w rozdziale 5.

Pomimo, iż symulacje numeryczne dały odpowiedź na kilka istotnych pytań, szczegółowe rezultaty (np. częstotliwości drgań, amplitudy drgań) potraktowano jako przybliżone z uwagi na niedoskonałości modelu i konieczność aktualizacji szeregu parametrów (np. wielkości i rozkłady

mas, tłumienie). Z tego też powodu znacznie zawyżono zakresy czujników pomiarowych (tabl. 4.2), a częstotliwość próbkowania  $f_p$  przyjęto równą 1200 Hz.

#### 4.3.4. Rezultaty badań

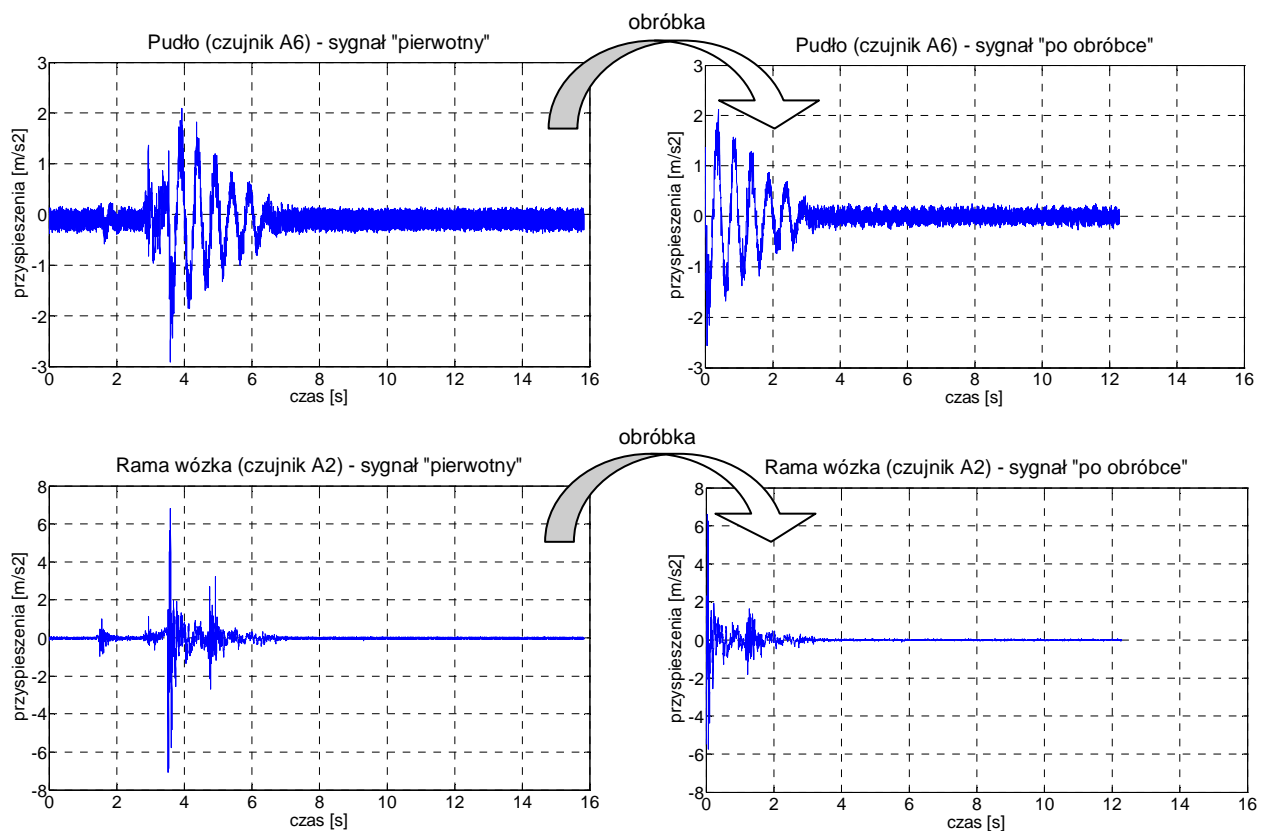
Wszystkie próby prowadzono wg następującego schematu:

- montaż progów,
- najazd i ustabilizowanie wagonu na progach (wciągarka mechaniczna),
- rozpoczęcie pomiaru,
- wzbudzenie drgań – „zeskok” (dynamiczny zjazd) wagonu z progów,
- zakończenie pomiaru z chwilą wy tłumienia się drgań,
- demontaż progów, wycofanie wagonu i przygotowanie do ponownego testu.

Dla przypadku wymuszenia drgań pionowych wykonano cztery próby. Dla każdego z wariantów wymuszenia drgań wahaniowych (wariant z zamontowanym amortyzatorem hydraulicznym oraz wariant bez zamontowanego amortyzatora) wykonano po trzy próby. Zarejestrowane sygnały pomiarowe poddano wstępnej obróbce polegającej na:

- usunięciu „zerowego” fragmentu przed wzbudzeniem (zeskokiem),
- 5-cio krotnym „rozrzedzeniem” sygnałów (wybór co piątego elementu),
- usunięciu czynnika stałego („dc-offset”).

Obróbka sygnału (rys. 4.18) nie mogła wpłynąć znacząco na jego „jakość”. Jako kryterium porównawcze przyjęto zmianę wartości skutecznej sygnału „po obróbce” względem sygnału „pierwotnego”. Dla wszystkich zarejestrowanych sygnałów zmiana wartości skutecznych nie przekroczyła 2%.



Rys. 4.18. Przykładowe sygnały pomiarowe (wymuszenie drgań pionowych) – sygnały pierwotne i „po obróbce”



#### 4.4. PARAMETRY MODALNE JEDNOSTKI EN57

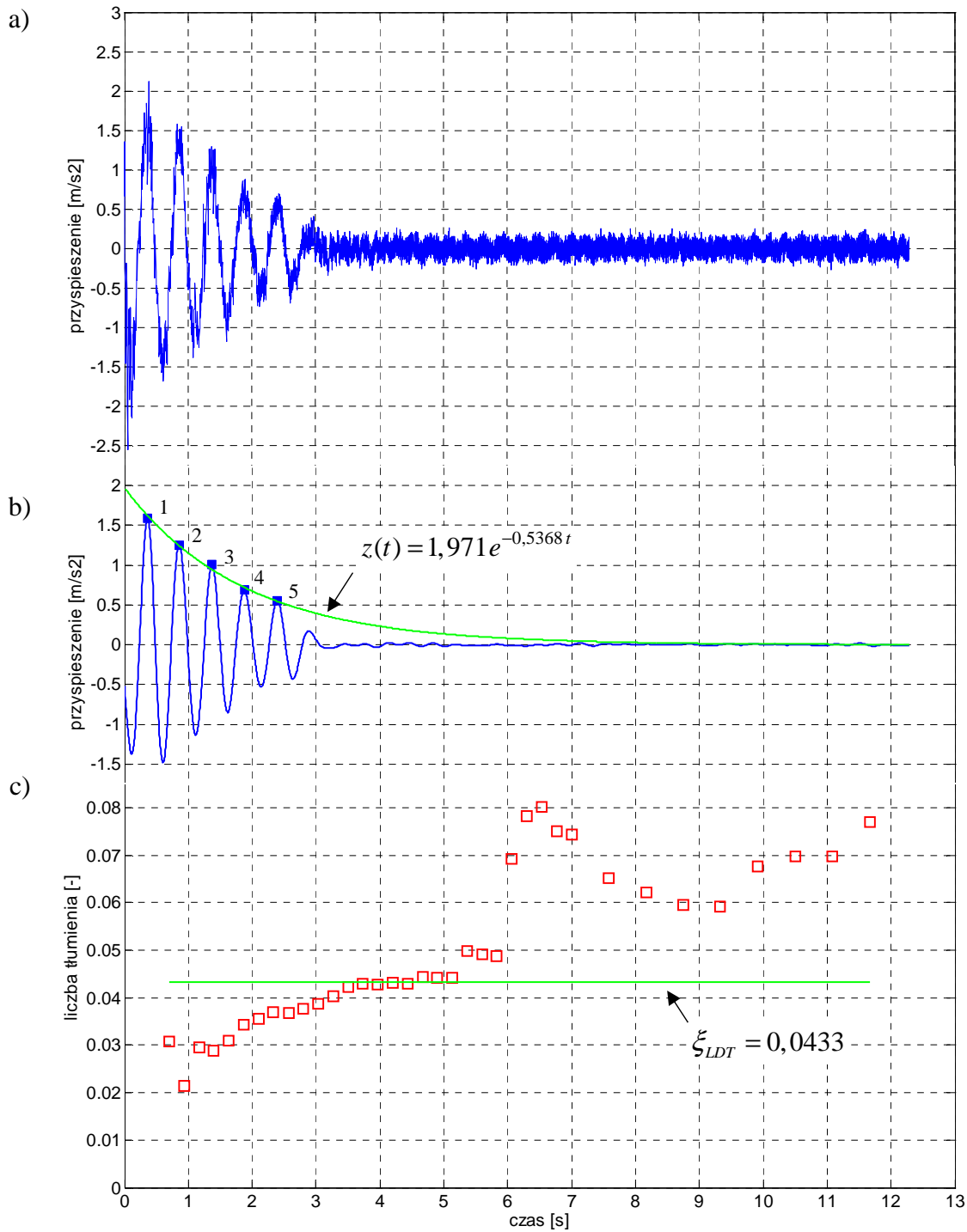
Na podstawie zarejestrowanych sygnałów odpowiedzi swobodnej, zidentyfikowano częstotliwości, liczby tłumienia oraz postacie drgań własnych wagonu. Wykorzystano algorytmy metod ERA oraz PP. Założenia teoretyczne zastosowanych metod przedstawiono w rozdziale 3.

Z uwagi na wrażliwość identyfikacji tłumienia na rozmiar macierzy Hankela (por. rozdz. 3), przeprowadzono analizę zbieżności rozwiązania (rys. 4.19). Sterując rozmiarem macierzy, badano zmianę liczby tłumienia  $\xi$  pierwszego modu. Kształt macierzy przyjmowano wg proporcji podanych zależnością 3.62 (rozdział 3). Generowano macierze Hankela o wymiarach  $\alpha_p \times \beta$ , gdzie  $l_p$  to liczba sygnałów pomiarowych.

Wartość porównawczą  $\xi_{LDT}$ , określono metodą logarytmicznego dekrementu tłumienia (SALAMAK [2003]), wykorzystując pojedynczy sygnał odpowiedzi swobodnej. Po odfiltrowaniu sygnału w paśmie obejmującym pierwszą częstotliwość drgań swobodnych, dokonano estymacji tłumienia poprzez dopasowanie metodą najmniejszego błędu średniokwadratowego krzywej wykładniczej  $z(t) = ae^{bt}$  ( $a, b$  – parametry funkcji).

Przykładowo, dla jednego z testów wymuszenia drgań pionowych, pierwsza zidentyfikowana częstotliwość drgań swobodnych wyniosła 1,998 Hz. Wykorzystując pierwsze pięć ekstremów odfiltrowanego sygnału odpowiedzi pudła (pasmo filtru:  $0 \div 2,5$  Hz), dopasowano krzywą wykładniczą o równaniu:

$$z(t) = 1,971e^{-0,5368t} . \quad (4.1)$$



Rys. 4.19. Analiza zbieżności identyfikacji tłumienia: a) zarejestrowany sygnał pomiarowy (czujnik A6) – wymuszenie drgań pionowych, b) sygnał odfiltrowany (filtr dolnoprzepustowy  $0 \div 2,5$  Hz) wraz z dopasowaną krzywą wykładniczą, c) wartości liczb tłumienia  $\xi$  zidentyfikowane metodą ERA, w zależności od zakresu czasowego sygnałów pomiarowych przyjętych do analizy

Logarytmiczny dekrement tłumienia (LDT) wyznaczono na podstawie funkcji (4.1) dla chwil czasowych, odpowiadających pierwszemu i piątym ekstremum odpowiedzi:

$$LDT = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{z_1}{z_5} \right). \quad (4.2)$$

Ostatecznie, porównawczą wartość  $\xi_{LDT}$  wyznaczono z zależności:

$$\xi_{LDT} = \frac{LDT}{\sqrt{LDT^2 + 4\pi^2}}. \quad (4.3)$$

Na rys. 4.19c pokazano rezultat przeprowadzonej analizy zbieżności dla przypadku wymuszenia drgań pionowych. Wykres obrazuje zależność identyfikowanej liczby tłumienia  $\xi$  od zakresu czasowego sygnałów, uwzględnionych w algorytmie metody ERA. Zaznaczono również wartość porównawczą  $\xi_{LDT}$ . Szczegółowe wyniki zestawiono w tabl. 4.3.

Tabl. 4.3. Rezultaty identyfikacji tłumienia w zależności od rozmiarów macierzy Hankela w przeprowadzonej analizie zbieżności (opis w tekście)

Przypadek	$a$	$l_p$	$\alpha = a \cdot l_p$	$\beta = 3 \cdot \alpha$	$H(0)$ ( $\alpha l_p \times \beta$ )	Czas [s]	Wynik $\xi$ [-]
1	6	7	42	126	294 x 126	0,700	0,0308
2	8	7	56	168	392 x 168	0,933	0,0214
3	10	7	70	210	490 x 210	1,167	0,0296
4	12	7	82	252	588 x 252	1,400	0,0289
5	14	7	98	294	686 x 294	1,630	0,0309
6	16	7	112	336	784 x 336	1,867	0,0343
7	18	7	126	378	882 x 378	2,100	0,0355
8	20	7	140	420	980 x 420	2,330	0,037
9	22	7	154	462	1078 x 462	2,570	0,0368
10	24	7	168	504	1176 x 504	2,800	0,0376
11	26	7	182	546	1274 x 546	3,030	0,0388
12	28	7	196	588	1372 x 588	3,270	0,0403
13	30	7	210	630	1470 x 630	3,500	0,0423
14	32	7	224	672	1568 x 672	3,730	0,0429
15	34	7	238	714	1666 x 714	3,967	0,0427
16	36	7	252	756	1764 x 756	4,200	0,0431
17	38	7	266	798	1862 x 798	4,430	0,0429
18	40	7	280	840	1960 x 840	4,670	0,0444
19	42	7	294	882	2058 x 882	4,900	0,0441
20	44	7	308	924	2156 x 924	5,133	0,0442
21	46	7	322	966	2254 x 966	5,367	0,0498
22	48	7	336	1008	2352 x 1008	5,600	0,0491
23	50	7	350	1050	2450 x 1050	5,830	0,0488
24	52	7	364	1092	2548 x 1092	6,067	0,0693
25	54	7	378	1134	2646 x 1134	6,300	0,0782
26	56	7	392	1176	2744 x 1176	6,533	0,0802
27	58	7	406	1218	2842 x 1218	6,767	0,075
28	60	7	420	1260	2940 x 1260	7,000	0,0744
29	65	7	455	1365	3185 x 1365	7,583	0,0652
30	70	7	490	1470	3430 x 1470	8,167	0,0621
31	75	7	525	1575	3675 x 1575	8,750	0,0595
32	80	7	560	1680	3920 x 1680	9,330	0,0592
33	85	7	595	1785	4165 x 1785	9,917	0,0676
34	90	7	630	1890	4410 x 1890	10,500	0,0697
35	95	7	665	1995	4655 x 1995	11,083	0,0698
36	100	7	700	2100	4900 x 2100	11,670	0,0769

$l_p$  – liczba sygnałów odpowiedzi uwzględnionych w analizie

Otrzymane rezultaty pozwalają na sformułowanie następujących wniosków:

- wyniki identyfikacji tłumienia zależą od rozmiarów macierzy Hankela i są najbliższe wartości  $\xi_{LDT}$  (zbiegają do wartości  $\xi_{LDT}$ ) dla zakresu czasowego sygnałów z przedziału  $3,27 \text{ s} \div 5,13 \text{ s}$ ,
- przyjęcie zbyt małej liczby próbek do analizy (zbyt małej liczby okresów drgań danego modu), a także zbyt dużej liczby próbek (zbyt duży udział szumów w stosunku do istotnego zakresu sygnału), powoduje rozbieżne wyniki identyfikacji tłumienia.

Ostatecznie, rozmiary macierzy Hankela w metodzie ERA dobierano tak, aby uwzględnić jak najdłuższy przedział wyraźnego zakresu odpowiedzi, przy jednoczesnym zachowaniu proporcji kształtu macierzy zgodnie z zał. 3.62. Dla poszczególnych testów wymuszenia drgań pionowych, przyjęto następujące rozmiary macierzy:

- test 1 – macierz  $1960 \times 840$  (zakres czasowy sygnałów  $4,67 \text{ s}$ ),
- test 2 – macierz  $1960 \times 840$  (zakres czasowy sygnałów  $4,67 \text{ s}$ ),
- test 3 – macierz  $1764 \times 756$  (zakres czasowy sygnałów  $4,2 \text{ s}$ ),
- test 4 – macierz  $1666 \times 714$  (zakres czasowy sygnałów  $3,97 \text{ s}$ ).

Dla wszystkich testów wymuszenia drgań wahaniowych (zarówno wariant bez zamontowanego amortyzatora jak i z zamontowanym amortyzatorem), przyjęto macierze o rozmiarach  $2450 \times 1050$  (zakres czasowy sygnałów  $5,83 \text{ s}$ ), które zestawiano z 1400 kolejnych parametrów Markowa (350 blokowych wierszy i 1050 kolumn).

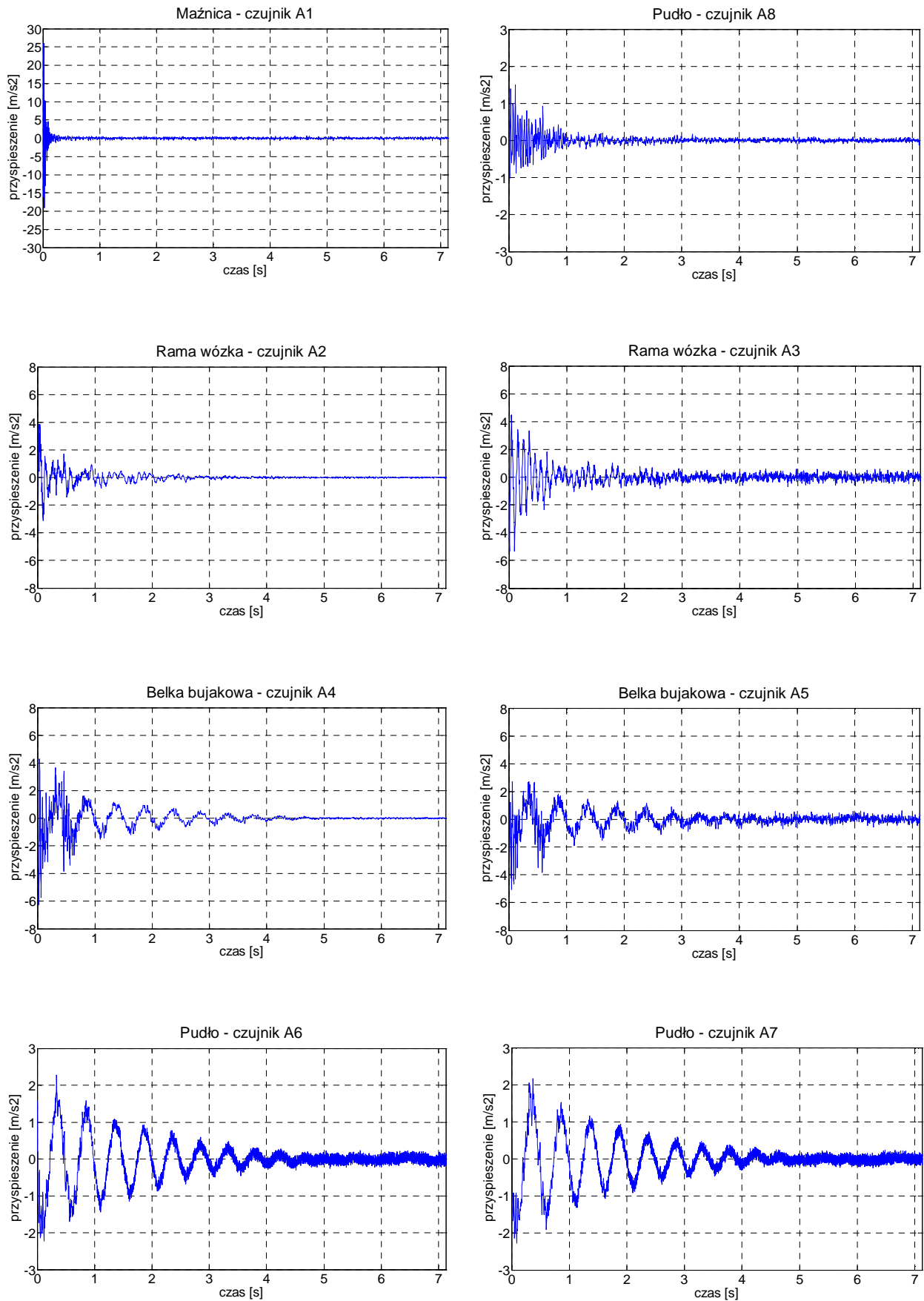
Dla wszystkich analizowanych przypadków, minimalny poziom zgodności MAC przyjęto równy 98%. Parametry Markowa generowano na bazie siedmiu sygnałów odpowiedzi (czujniki A2 ÷ A8). Pominięto odpowiedź maźnicy z uwagi na krótkotrwały charakter oraz wysoką (w porównaniu z resztą układu) częstotliwość drgań – ok. 70 Hz.

W dalszej części rozdziału przedstawiono reprezentatywne wyniki badań oraz rezultaty przeprowadzonej identyfikacji.

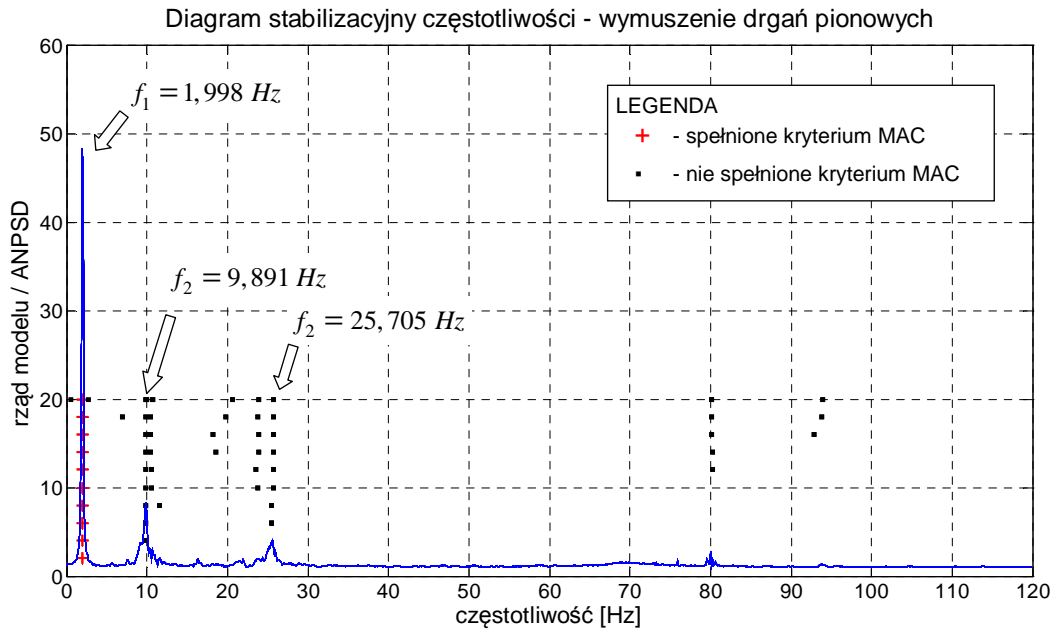
#### 4.4.1. Wymuszenie drgań pionowych

Na rys. 4.20 pokazano przebiegi drgań swobodnych zarejestrowane podczas testu nr 1 wymuszenia drgań pionowych. Dla tego przypadku, na rys. 4.21 wykreślono diagram stabilizacyjny metody ERA. Naniesiono również odpowiednio przeskalowany wykres ANPSD.

Analiza diagramu wskazuje na obecność trzech stabilnych częstotliwości, które pojawiają się niezależnie od rzędu modelu ( $n \geq 6$ ), tj.  $f_1 = 1,998 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 9,891 \text{ Hz}$ ,  $f_3 = 25,705 \text{ Hz}$ . Dla modów o częstotliwości  $f_2$  i  $f_3$  nie jest spełnione kryterium MAC. Obecność tych częstotliwości w odpowiedzi pokazują jednak wyraźne piki na wykresie ANPSD. Widoczny również nieznaczny pik w okolicy częstotliwości 80 Hz, odpowiada szumom występującym w sygnałach pomiarowych (szczególnie czujniki A6 oraz A7).

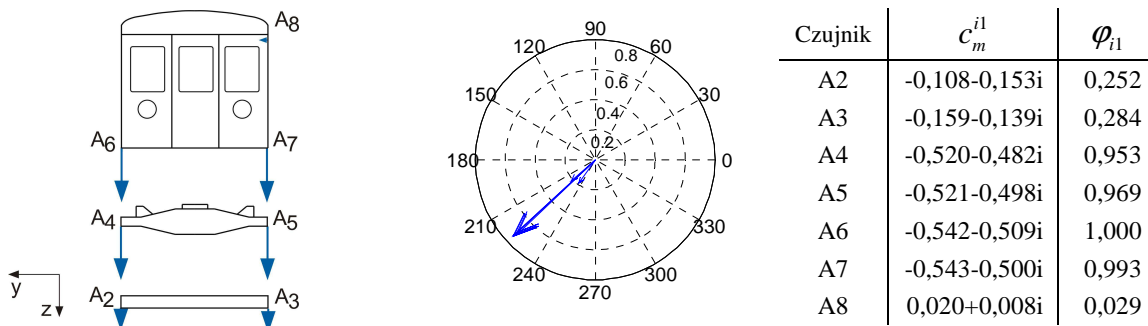


Rys. 4.20. Sygnały pomiarowe „po obróbce” – wymuszenie drgań pionowych, test 1 (oznaczenia czujników wg rys. 4.7)



Rys. 4.21. Diagram stabilizacyjny częstotliwości – wymuszenie drgań pionowych, test 1

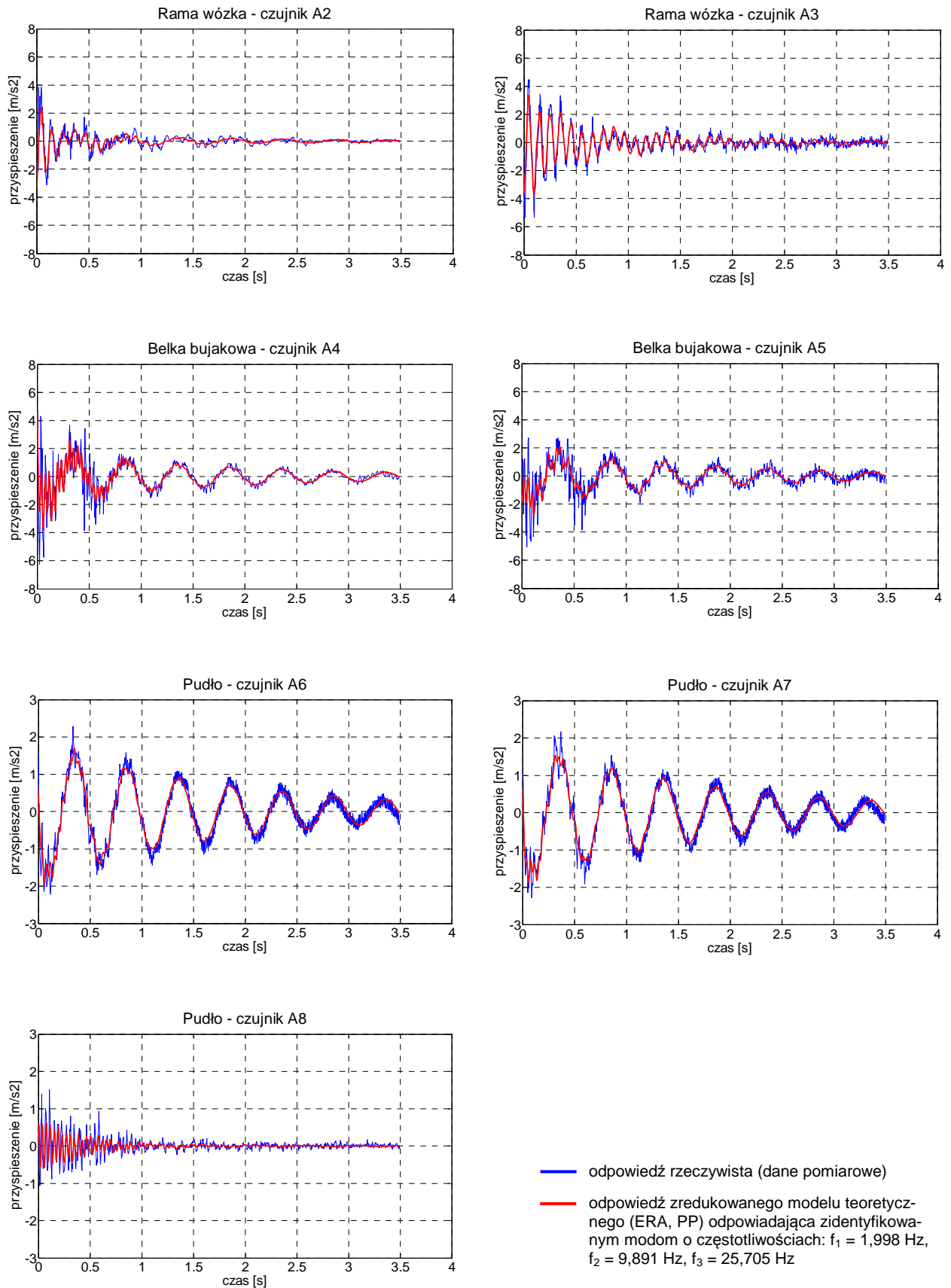
Podstawowa częstotliwość drgań wynosi 1,998 Hz (drżania pionowe zgodne z kierunkiem wzbudzenia). Pozostałe dwie częstotliwości wskazane przez piki wykresu ANPSD (9,891 Hz i 25,705 Hz) związane są z lokalnymi drżaniami ramy wózka i belki bujawkowej. Na rys. 4.22 pokazano pierwszą postać drgań (drżania pionowe o częstotliwości 1,998 Hz). Współrzędne wektora  $\phi_i$  obliczono na podstawie zależności (3.61) i unormowano tak, aby największa składowa była równa jedności. Ponieważ w ogólnym przypadku wektory własne są liczbami zespolonymi, wygodne jest ich przedstawienie na płaszczyźnie zespolonej we współrzędnych biegunowych. W przypadku realnych postaci drgań oraz proporcjonalnego tłumienia, fazy drgań poszczególnych punktów powinny być zgodne bądź przeciwne.



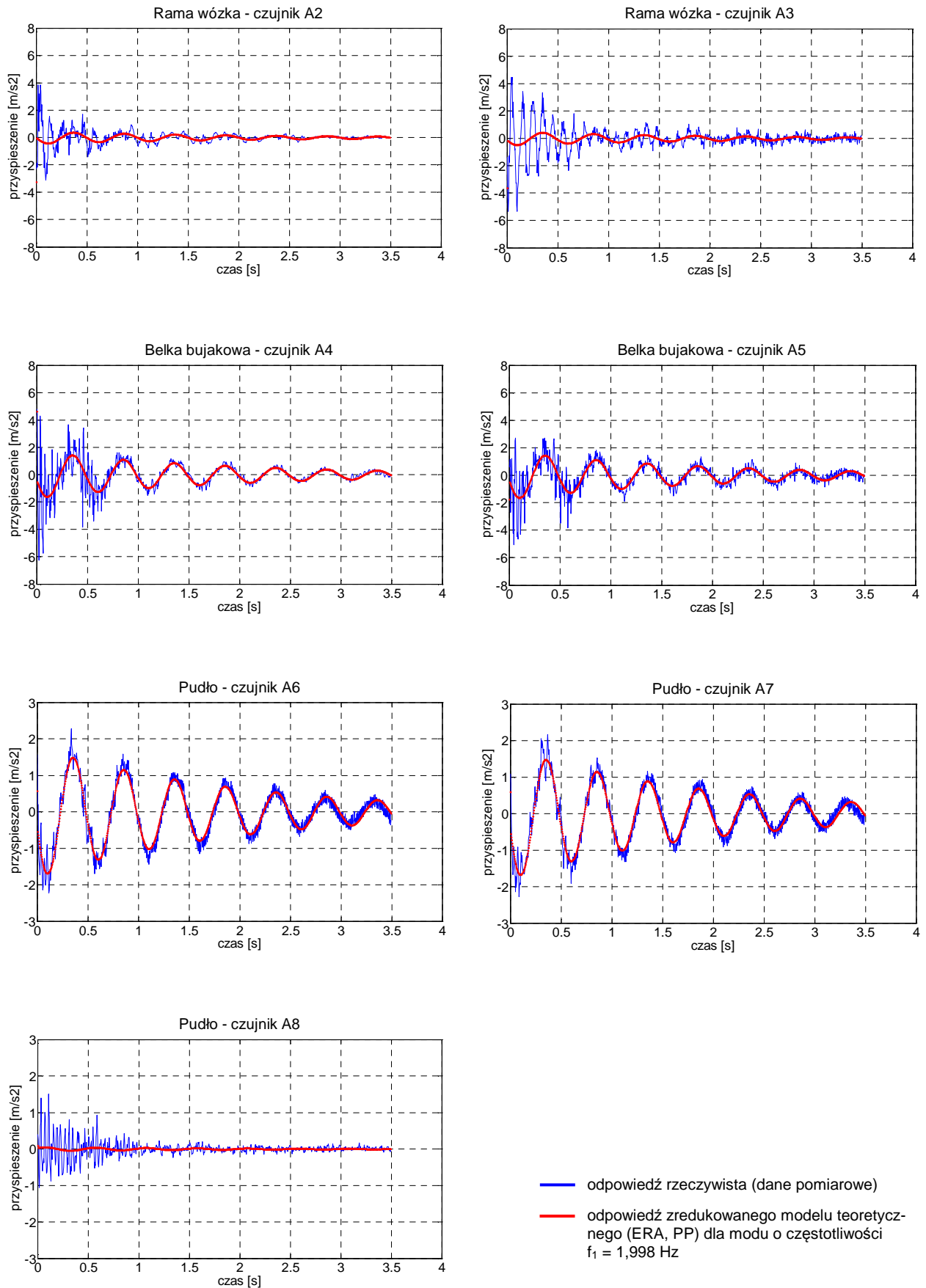
Rys. 4.22. Postać drgań własnych odpowiadająca częstotliwości  $f_1 = 1,998$  Hz – wymuszenie drgań pionowych

Na rys. 4.23 oraz 4.24 porównano odpowiedź rzeczywistą (dane pomiarowe) z odpowiedzią teoretyczną (ERA, PP). W pierwszym przypadku odpowiedź modelu stanowią trzy zidentyfikowane mody. W drugim przypadku, przebieg teoretyczny uwzględnia jedynie pierwszą częstotliwość drgań.

W tabl. 4.4 (str. 113) zestawiono wyniki dla wszystkich testów, zrealizowanych w tym wariancie wzbudzenia.



Rys. 4.23. Porównanie rzeczywistej (dane pomiarowe) oraz teoretycznej (ERA, PP) odpowiedzi swobodnej wagonu dla trzech zidentyfikowanych częstotliwości – wymuszenie drgań pionowych (test 1) (oznaczenia czujników wg rys. 4.7)

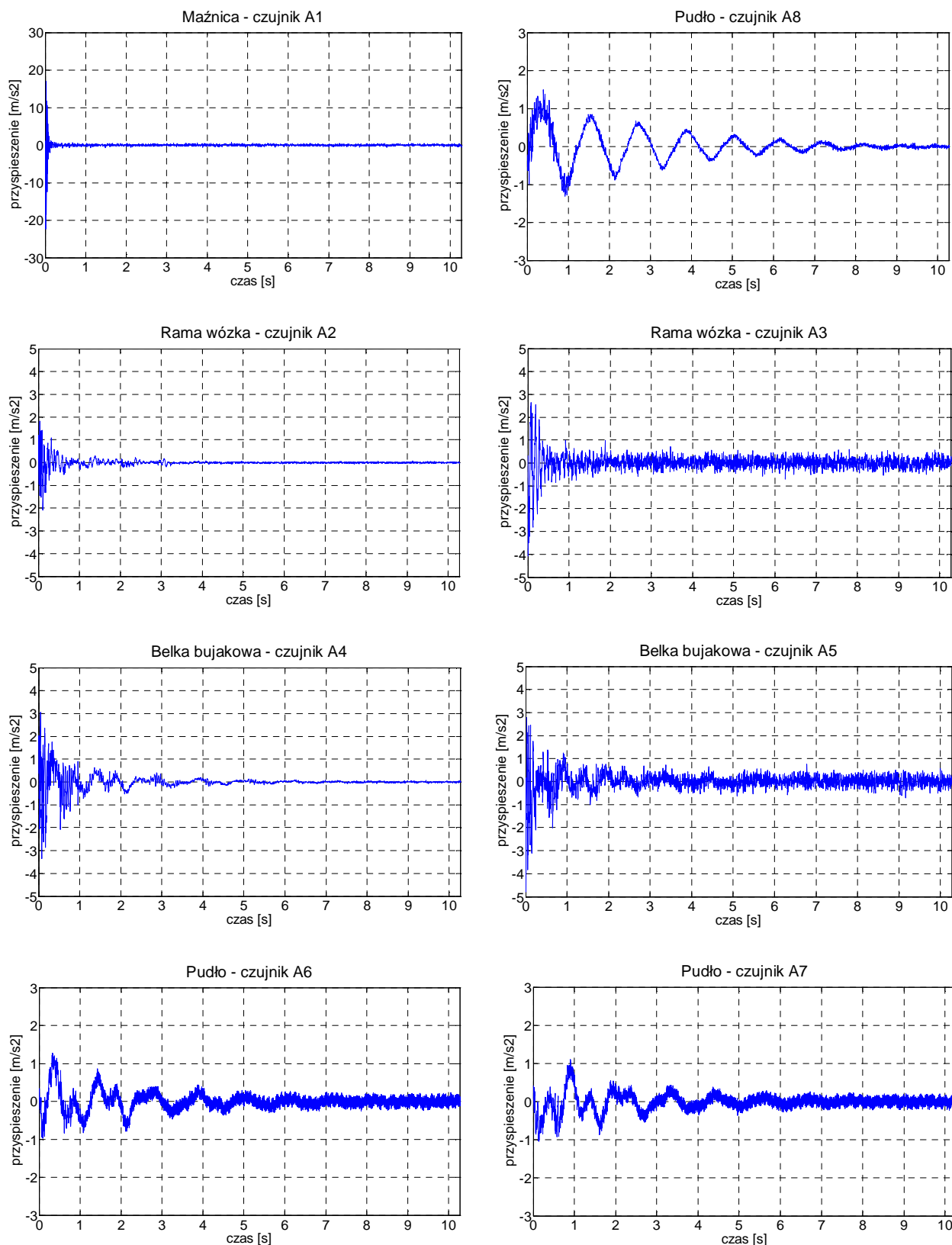


Rys. 4.24. Porównanie rzeczywistej (dane pomiarowe) oraz teoretycznej (ERA, PP) odpowiedzi swobodnej wagonu dla pierwszej częstotliwości drgań – wymuszenie drgań pionowych, test 1 (oznaczenia czujników wg rys. 4.7)



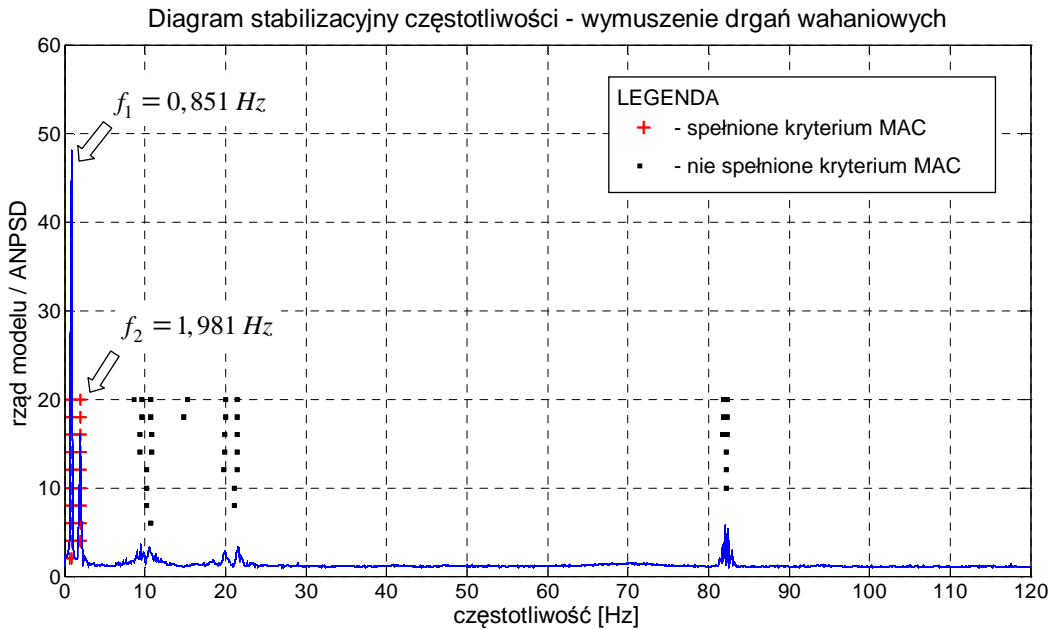
#### 4.4.2. Wymuszenie drgań wahaniowych (wariant bez zamontowanego amortyzatora)

Na rys. 4.25 pokazano przebiegi drgań swobodnych zarejestrowane podczas testu nr 1 wymuszenia drgań wahaniowych (wariant bez zamontowanego amortyzatora hydraulicznego).

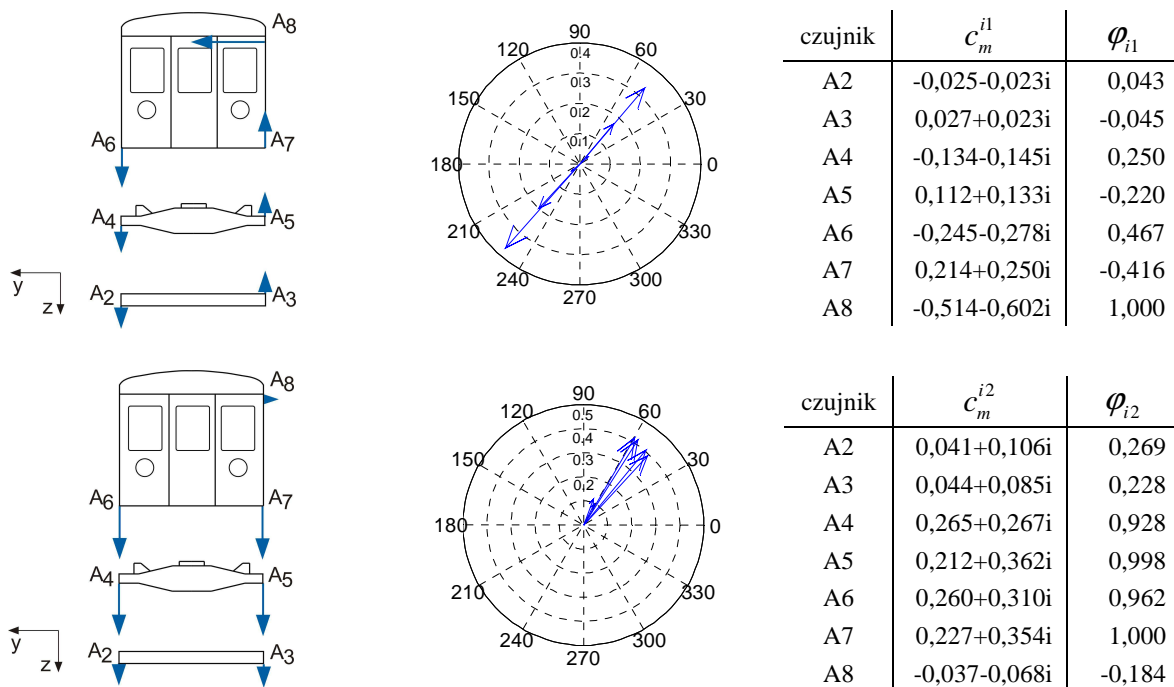


Rys. 4.25. Sygnały pomiarowe „po obróbce” – wymuszenie drgań wahaniowych, wariant **bez zamontowanego amortyzatora hydraulicznego**, test 1 (oznaczenia czujników wg rys. 4.7)

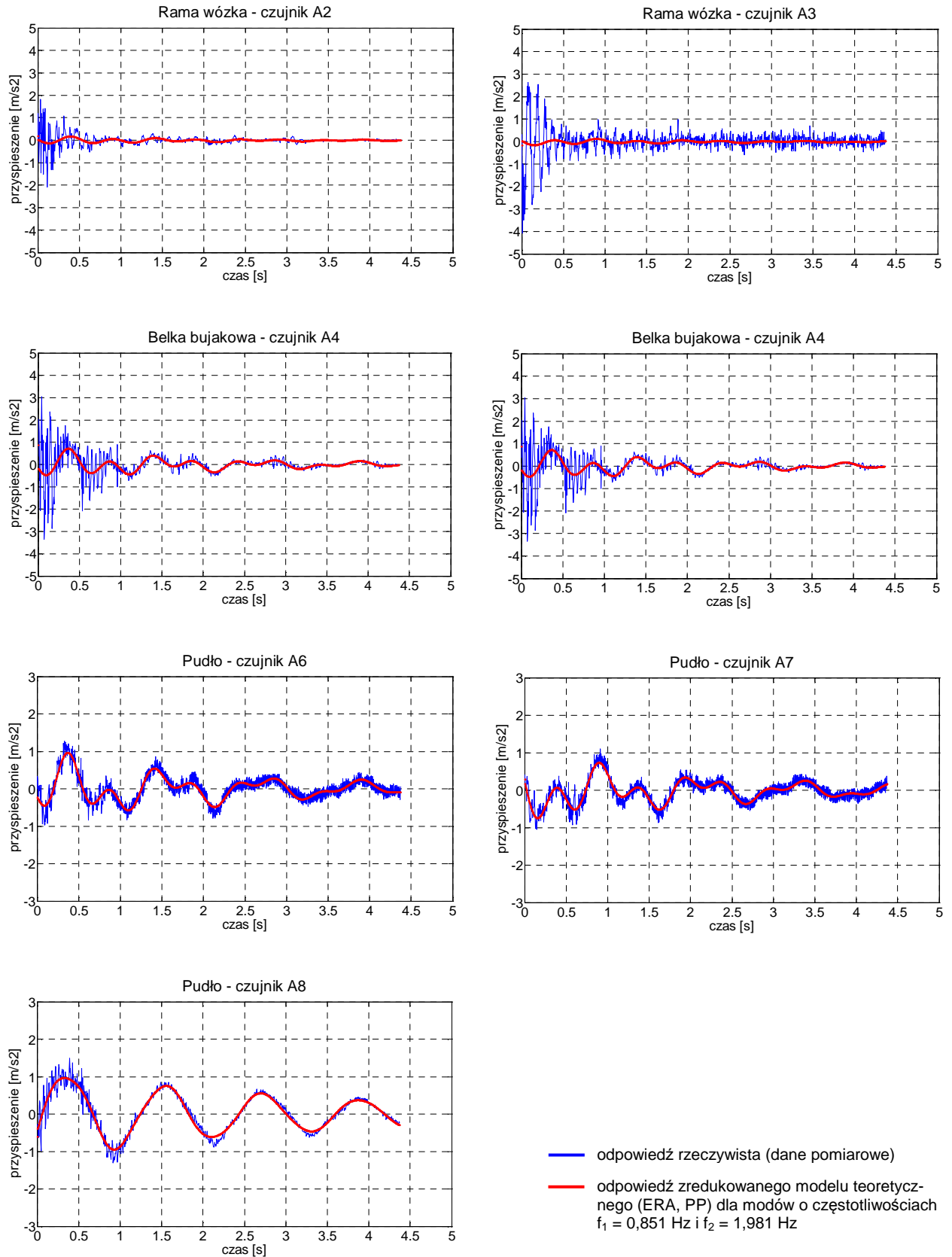
Na rys. 4.26 wykreślono diagram stabilizacyjny metody ERA. Diagram wskazuje dwie zasadnicze częstotliwości:  $f_1 = 0,851$  Hz (drżania wahanio-we) oraz  $f_2 = 1,981$  Hz (drżania pionowe). Podobnie jak w przypadku wcześniejszym, piki w okolicy częstotliwości 10 i 20 Hz związane są z lokalnymi drżaniami belki bujawkowej i ramy wózka, natomiast wyraźne piki w okolicy częstotliwości 83 Hz są efektem występowania szumów. Na rysunku 4.27 pokazano zidentyfikowane postacie drgań, natomiast na rys. 4.28 porównano odpowiedź rzeczywistą i teoretyczną (mody odpowiadające częstotliwościom  $f_1$  i  $f_2$ ). W tabl. 4.5 (str. 113) zestawiono wyniki dla wszystkich testów, zrealizowanych w tym wariancie wzbudzenia.



Rys. 4.26. Diagram stabilizacyjny częstotliwości – wymuszenie drgań wahanio- wych, wariant **bez zamontowanego amortyzatora** hydraulicznego, test 1



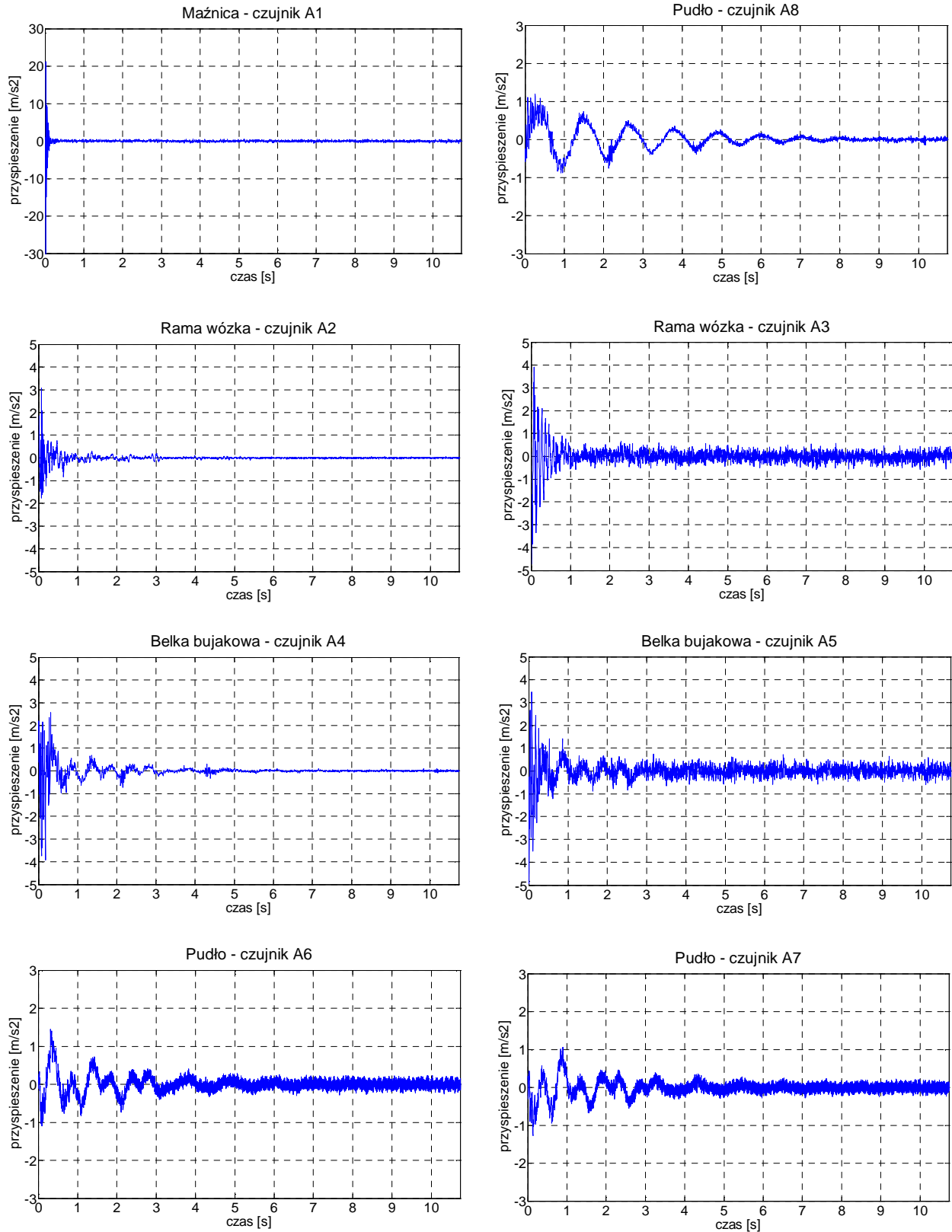
Rys. 4.27. Postacie drgań własnych odpowiadające częstotliwościom  $f_1$  oraz  $f_2$  – wymuszenie drgań wahanio- wych, wariant **bez zamontowanego amortyzatora** hydraulicznego



Rys. 4.28. Porównanie rzeczywistej (dane pomiarowe) oraz teoretycznej (ERA, PP) odpowiedzi swobodnej wagonu dla dwóch podstawowych, zidentyfikowanych częstotliwości – wymuszenie drgań wahaniowych, wariant **bez zamontowanego amortyzatora** hydraulicznego, test 1 (oznaczenia czujników wg rys. 4.7)

### 4.4.3. Wymuszenie drgań wahaniowych (wariant z zamontowanym amortyzatorem)

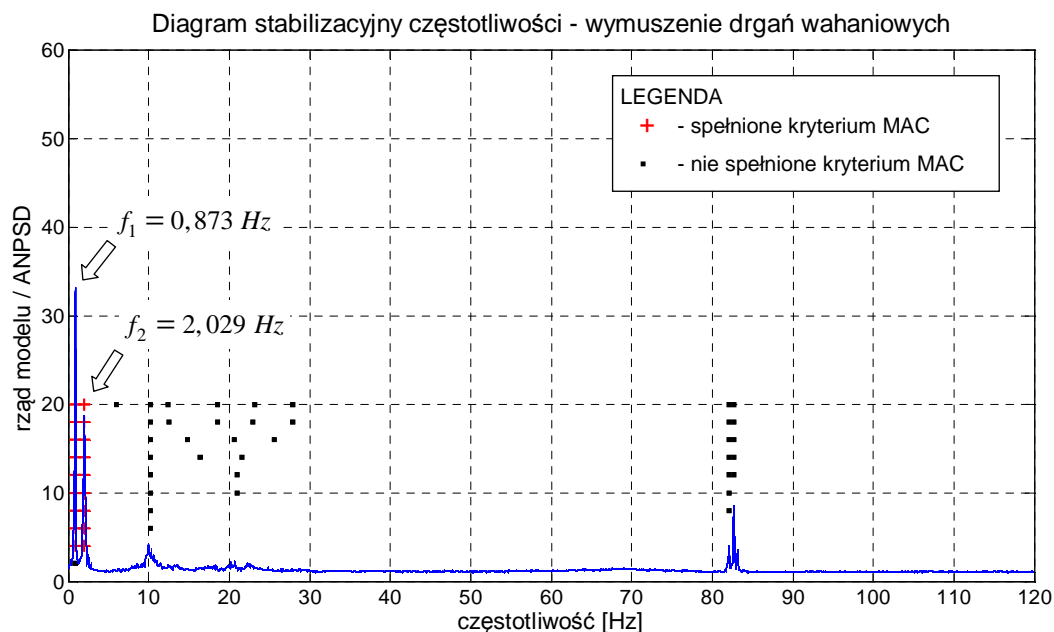
Na rys. 4.29 pokazano przebiegi drgań swobodnych zarejestrowane podczas testu nr 1 wymuszenia drgań wahaniowych (wariant z zamontowanym amortyzatorem hydraulicznym).



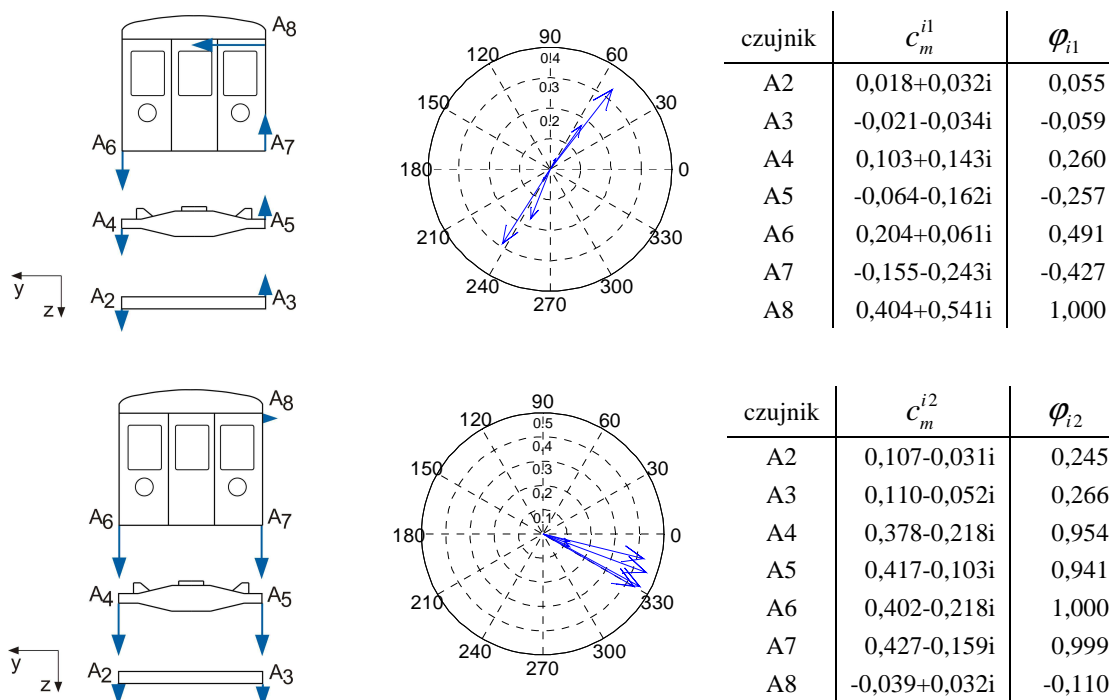
Rys. 4.29. Zarejestrowane sygnały pomiarowe „po obróbce” – wymuszenie drgań wahaniowych, wariant z zamontowanym amortyzatorem hydraulicznym, test 1 (oznaczenia czujników wg rys. 4.7)

Diagram stabilizacyjny pokazano na rys. 4.30. Wskazuje on na dwie główne częstotliwości drgań:  $f_1 = 0,875$  Hz (drżania wahaniowe) oraz  $f_2 = 2,026$  Hz (drżania pionowe). Pik na wykresie ANPSD w okolicy częstotliwości 10 Hz odpowiada lokalnym drżaniom ramy wózka. Szumy w sygnale uwiadcniają piki w okolicy częstotliwości 83 Hz. Na rysunku 4.31 wykreślono postacie drgań odpowiadające zidentyfikowanym częstotliwościom.

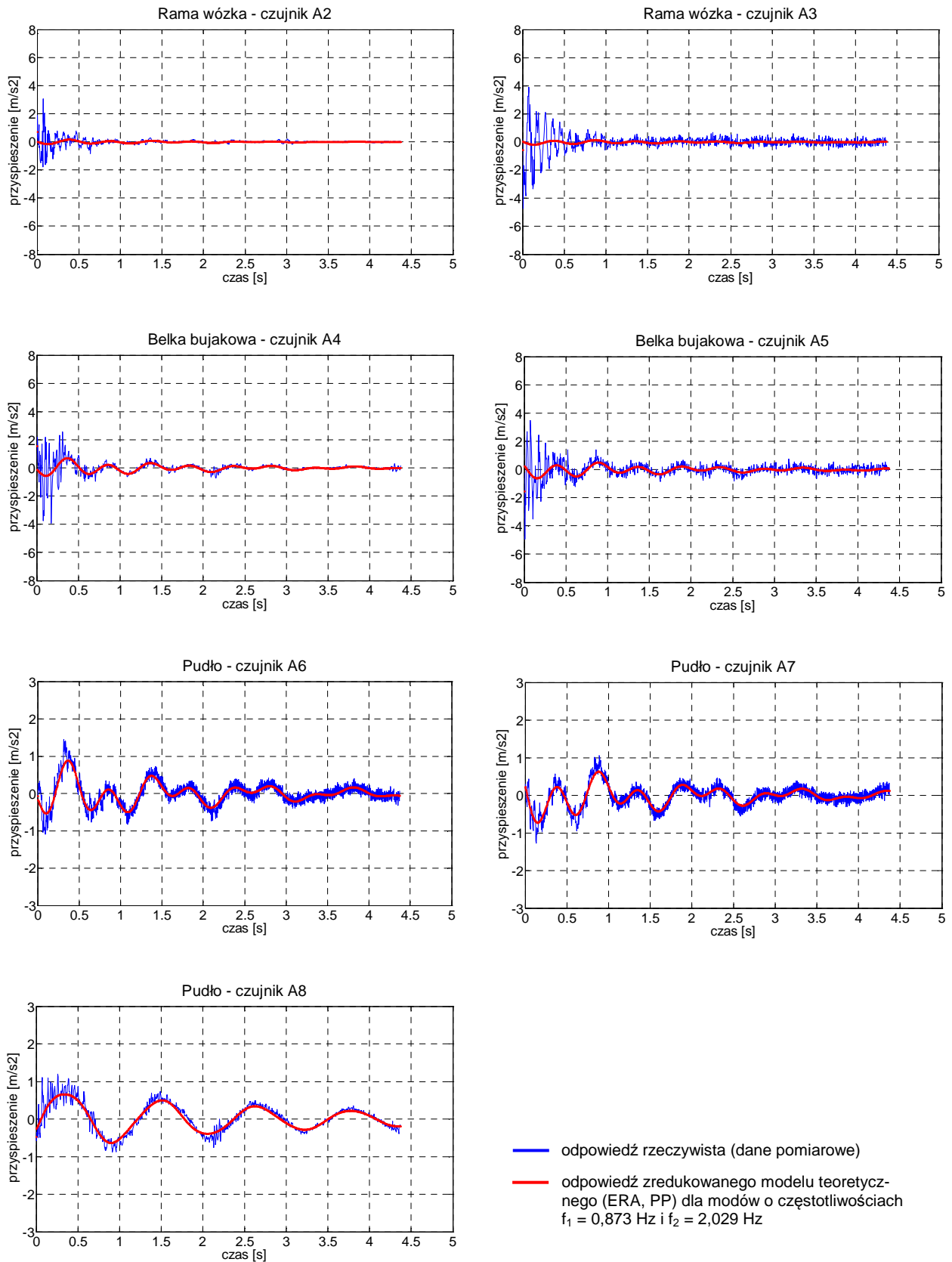
W tabl. 4.6 (str. 113) zestawiono wyniki dla wszystkich trzech zrealizowanych testów w tym wariancie wzbudzenia. Efekt wpasowania zidentyfikowanego modelu w pomierzone sygnały pokazuje rys. 4.32.



Rys. 4.30. Diagram stabilizacyjny częstotliwości – wymuszenie drgań wahaniowych, wariant z zamontowanym amortyzatorem hydraulicznym, test 1



Rys. 4.31. Postacie drgań własnych odpowiadające częstotliwościom  $f_1$  oraz  $f_2$  – wymuszenie drgań wahaniowych, wariant z zamontowanym amortyzatorem hydraulicznym



Rys. 4.32. Porównanie rzeczywistej (dane pomiarowe) oraz teoretycznej (ERA, PP) odpowiedzi swobodnej wagonu dla dwóch podstawowych, zidentyfikowanych częstotliwości – wymuszenie drgań wahaniowych, wariant z zamontowanym amortyzatorem hydraulicznym, test 1 (oznaczenia czujników wg rys. 4.7)

#### 4.4.4. Podsumowanie

W poniższych tabelach zestawiono wyniki dla wszystkich zrealizowanych testów. Przyjmując za wartość końcową średnią z poszczególnych prób, parametry odpowiadające zidentyfikowanym modom wynoszą:

- a) układ ze zdemontowanym amortyzatorem hydraulicznym
  - MOD 1 (drgania wahaniowe):  $f_1 = 0,847$  [Hz];  $\xi_1 = 0,0525$  [-],
  - MOD 2 (drgania pionowe):  $f_2 = 1,996$  [Hz];  $\xi_2 = 0,0396$  [-],
- b) układ z zamontowanym amortyzatorem hydraulicznym
  - MOD 1 (drgania wahaniowe):  $f_1 = 0,875$  [Hz];  $\xi_1 = 0,0618$  [-],
  - MOD 2 (drgania pionowe):  $f_2 = 2,029$  [Hz];  $\xi_2 = 0,0497$  [-],

Tabl. 4.4. Zidentyfikowane częstotliwości i liczby tłumienia wagonu – wymuszenie drgań pionowych

Test 1			Test 2			Test 3			Test 4		
$f$ [Hz]	$\xi$ [-]	MAC [%]	$f$ [Hz]	$\xi$ [-]	MAC [%]	$f$ [Hz]	$\xi$ [-]	MAC [%]	$f$ [Hz]	$\xi$ [-]	MAC [%]
1,998	0,0405	99,97	1,988	0,0352	99,96	1,976	0,0426	99,96	1,980	0,0381	99,95
9,891	0,0265	94,76	9,770	0,0472	96,82	9,762	0,0250	96,81	9,927	0,0267	97,12
25,705	0,0153	88,83	-	-	-	-	-	-	26,004	0,0139	89,90

Tablica 4.5. Zidentyfikowane częstotliwości i liczby tłumienia wagonu – wymuszenie drgań wahaniowych (wariant **bez zamontowanym amortyzatora** hydraulicznego)

Test 1			Test 2			Test 3		
$f$ [Hz]	$\xi$ [-]	MAC [%]	$f$ [Hz]	$\xi$ [-]	MAC [%]	$f$ [Hz]	$\xi$ [-]	MAC [%]
0,851	0,0527	99,89	0,847	0,0525	99,88	0,844	0,0524	99,91
1,981	0,0429	99,52	2,019	0,0415	99,45	2,029	0,0364	99,70

Tablica 4.6. Zidentyfikowane częstotliwości i liczby tłumienia wagonu – wymuszenie drgań wahaniowych (wariant **z zamontowanym amortyzatorem** hydraulicznym)

Test 1			Test 2			Test 3		
$f$ [Hz]	$\xi$ [-]	MAC [%]	$f$ [Hz]	$\xi$ [-]	MAC [%]	$f$ [Hz]	$\xi$ [-]	MAC [%]
0,873	0,0614	99,67	0,878	0,0631	99,77	0,875	0,0611	99,68
2,029	0,0489	99,41	2,032	0,0512	99,03	2,026	0,0491	99,41





## Rozdział 5

# Uproszczony model obciążenia kolejowego. Symulacje przejazdu obciążenia po konstrukcji

*STRESZCZENIE.* W niniejszym rozdziale zdefiniowano uproszczony model obciążenia kolejowego, w oparciu o zidentyfikowane parametry modalne jednostki trakcyjnej EN57. Na przykładzie dwóch rzeczywistych konstrukcji mostowych, przedstawiono wyniki symulacji numerycznych przejazdu obciążenia po przęśle. Symulacje przeprowadzono dla modeli obciążenia w postaci strumienia sił skupionych, mas skupionych oraz zdefiniowanego modelu dyskretnego. Wyniki porównano z rezultatami przeprowadzonych badań eksploatacyjnych. Analizy dynamiczne prowadzono w środowisku MES SOFiSTiK.

### 5.1. UWAGI WSTĘPNE

Znajomość budowy i charakteru pracy pojazdu szynowego, umożliwia poprawne przyjęcie jego modelu mechanicznego. Założenia i uproszczenia przyjmowane na etapie tworzenia modelu, zależą od stopnia złożoności i celu prowadzonych analiz, a także od oczekiwanych rezultatów. Zaproponowany w niniejszym rozdziale uproszczony model obciążenia uważa się za pewien kompromis pomiędzy złożonym układem dynamicznym o wielu stopniach swobody, a uproszczonym „modelem siłowym”. Parametry zdefiniowanego modelu dobrano na podstawie wyników identyfikacji cech dynamicznych rzeczywistego pojazdu szynowego przedstawionych w rozdziale 4.

### 5.2. ZŁOŻONY, DYSKRETNY MODEL MECHANICZNY WAGONU JEDNOSTKI EN-57

Na rys. 5.1 pokazano dyskretny model mechaniczny wagonu, zdefiniowany na postawie studium mechaniczno-konstrukcyjnego jednostki EN57 oraz przyjętych, opisanych poniżej założeń.

Na etapie studium stwierdzono, że osadzenie pudła na czopie skrzytła belki bujaka, a także zastosowany system cięgieł, ślizgów i odbijaków, znacznie ogranicza ruchy względne belki i pudła oraz belki i ramy wózka. Ponadto masa belki bujaka w porównaniu z masą pudła jest mała (masa belki stanowi zaledwie 1,5 % masy pudła w przypadku wagonu rozrządczego i 1,0 % w przypadku wagonu silnikowego). Także rezultaty badań pokazują duże podobieństwo w odpowiedzi tych elementów. W efekcie, finalny, złożony model mechaniczny wagonu zdefiniowano w oparciu o następujące założenia (uproszczenia):

- poszczególne elementy modelu (zestawy kołowe, ramy wózków, pudło) potraktowano jako bryły sztywne o masach skupionych w środkach ich ciężkości,
- przyjęto symetrię podłużną i poprzeczną wagonu jako całości oraz symetrię podłużną i poprzeczną poszczególnych elementów składowych (zestawy kołowe, ramy wózków, pudło),
- masę belki bujaka oraz masę elementów wyposażenia pudła uwzględniono w masie pudła,

- masę sprężyn, tłumików, silników trakcyjnych oraz pozostałych elementów wyposażenia technicznego wózków, uwzględniono w masie ramy wózka,
- oba stopnie resorowania przyjęto jako liniowe, lepko-sprężyste,
- rozkład charakterystyk sprężysto-tłumiących resorów przyjęto symetryczny w przekroju poprzecznym i podłużnym wagonu,
- pominięto luzy w układzie,
- pominięto względne ruchy wzdłużne poszczególnych mas.

Przy uwzględnieniu powyższych założeń, model wagonu opisać można za pomocą dyskretnego układu o 31 stopniach swobody. Stopniom tym odpowiadają przemieszczenia uogólnione pokazane na rys. 5.1. Wyodrębniono cztery zestawy kołowe, dwie ramy wózków oraz pudło (nadwozie). Poszczególne elementy połączono dwustopniowym resorowaniem.

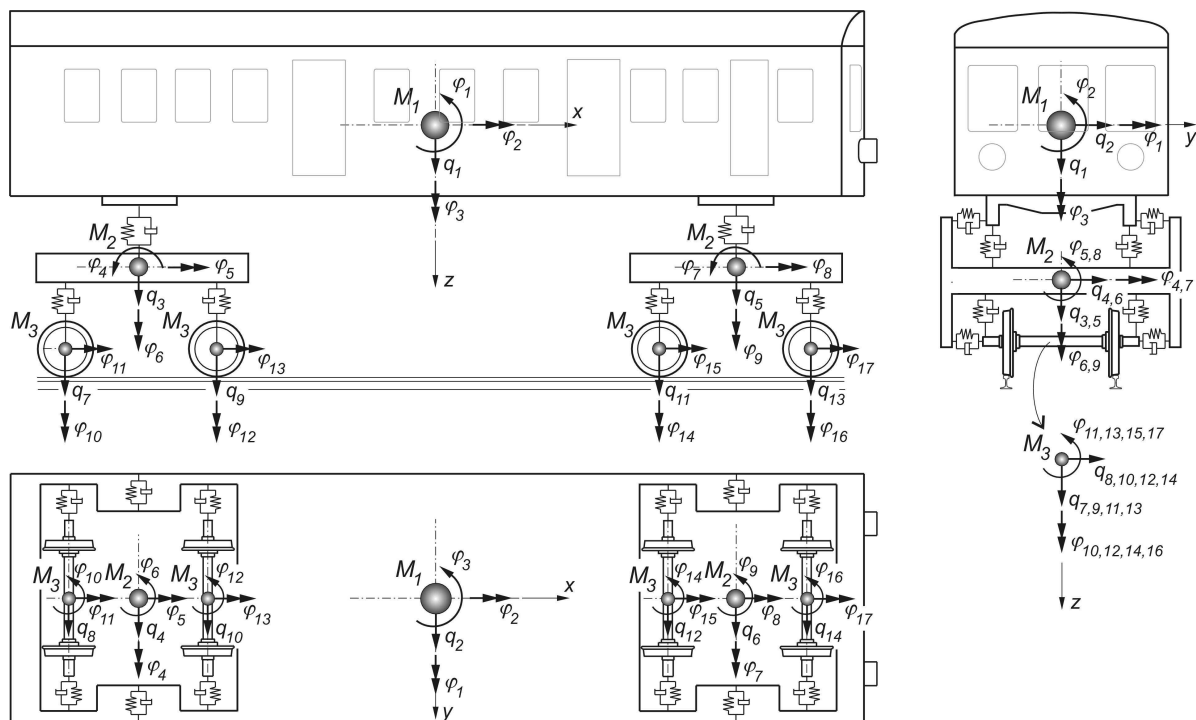
Pudło oraz każda rama wózka mają po 5 stopni swobody, z kolei każdy z zestawów kołowych posiada po 3 stopnie swobody. Poszczególne przemieszczenia uogólnione to:

- przemieszczenia pionowe:  $q_1, q_3, q_5, q_7, q_9, q_{11}, q_{13}$ ;
- przemieszczenia poziome (poprzeczne):  $q_2, q_4, q_6, q_8, q_{10}, q_{12}, q_{14}$ ;
- kąty wężykowania:  $\varphi_3, \varphi_6, \varphi_9, \varphi_{10}, \varphi_{12}, \varphi_{14}, \varphi_{16}$ ;
- kąty kaczkania:  $\varphi_2, \varphi_5, \varphi_8, \varphi_{11}, \varphi_{13}, \varphi_{15}, \varphi_{17}$ ;
- kąty galopowania:  $\varphi_1, \varphi_4, \varphi_7$ .

Nazewnictwo poszczególnych przemieszczeń zaadoptowano od KLASZTORNY [2005]. Masy poszczególnych elementów modelu oznaczono odpowiednio:

- pudło –  $M_1$ ;
- ramy wózków –  $M_2$ ;
- zestawy kołowe –  $M_3$ .

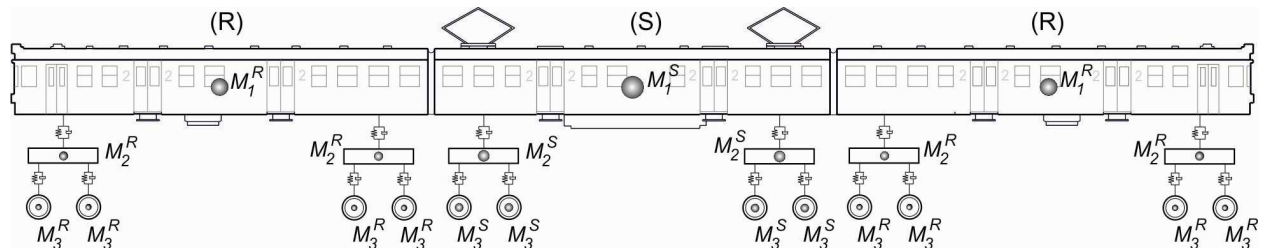
W tabelicy 5.1 podano wartości poszczególnych mas dla wagonu rozrządczego i silnikowego. Rozkład mas na długości składu zilustrowano na rys. 5.2.



Rys. 5.1. Dyskretny, złożony model mechaniczny wagonu jednostki EN57 z zaznaczonymi przemieszczeniami uogólnionymi

Tablica 5.1. Wartości mas dyskretnego, złożonego modelu mechanicznego wagonów jednostki EN57

Element		Masa
Pudło	wagon rozrządowy (R): $M_1^R$	22,080 t
	wagon silnikowy (S): $M_1^S$	33,360 t
Rama wózka	wózek toczny (R): $M_2^R$	3,320 t
	wózek silnikowy (S): $M_2^S$	8,380 t
Zestaw kołowy	toczny (R): $M_3^R$	1,320 t
	napędny (S): $M_3^S$	1,720 t



Rys. 5.2. Rozmieszczenie mas na długości modelu mechanicznego jednostki EN57 (oznaczenia wg tabl. 5.1.)

### 5.3. UPROSZCZONY MODEL OBCIĄŻENIA KOLEJOWEGO

Model pokazany na rys. 5.1 nie jest łatwy do zdefiniowania. Wymaga bowiem określenia szeregu parametrów (charakterystyki sprężysto-tłumiące resorów, rozkłady mas, masowe momenty bezwładności), do czego, wobec braku stosownych danych technicznych, konieczne są obszerne badania eksperymentalne. Trudno zatem uznać tę drogę za efektywną. Powstaje również pytanie o celowość budowy tak złożonych modeli obciążenia oraz korzyści jakościowe płynące z analizy tak złożonych układów dynamicznych.

Wobec powyższego, zaproponowano alternatywny, zastępczy model uproszczony, którego parametry określono na podstawie zidentyfikowanych cech dynamicznych wagonu rozrządowego jednostki EN57. Ponieważ masa zestawów kołowych stanowi łącznie ok. 15% masy całego wagonu, w celach porównawczych model wykonano w dwóch wariantach:

- **MODEL A** (rys. 5.3) – wariant, w którym uwzględniono dwustopniowy podział masy na masy nieresorowane (zestawy kołowe) oraz masy resorowane (pozostała masa wózków + nadwozie),
- **MODEL B** (rys. 5.9) – wariant, w którym cała masa wagonu stanowi masę resorowaną.

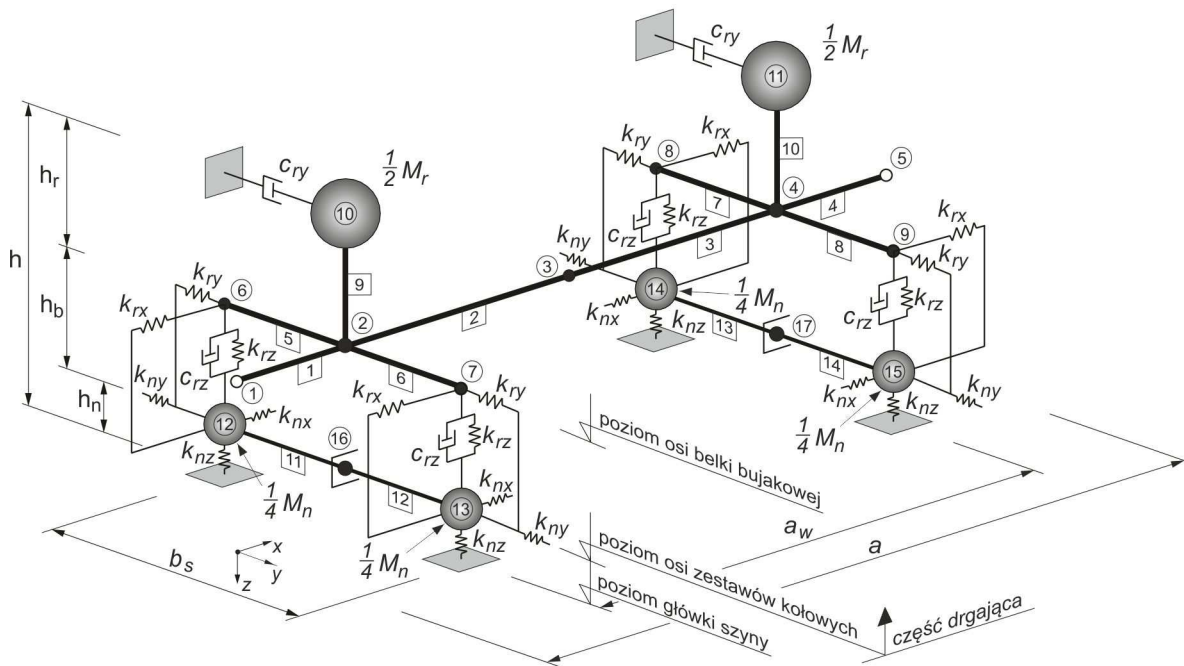
Za główne kryterium budowy modelu przyjęto zgodność parametrów modalnych odpowiedzi pomierzonej i teoretycznej dla wzbudzonych postaci drgań. Ponieważ w obu wariantach (Model A i Model B) masy drgające (resorowane) są inne, zatem inne będą również charakterystyki sprężysto-tłumiące resorów. Z podobnych względów analogiczne różnice (w każdym z wariantów) występują pomiędzy wagonem rozrządowym i silnikowym. We wszystkich przypadkach jednak, założenia i ogólna zasada definicji modelu były takie same.

Elementami składowymi obu modeli są:

- masy skupione,
- nieważkie elementy belkowe o bardzo dużej sztywności<sup>1</sup>,
- elementy lepko-sprężyste,
- elementy sprężyste o bardzo dużej sztywności.

## MODEL A

W Modelu A (rys. 5.3) uwzględniono dwustopniowy podział masy na masę resorowaną ( $M_r$ ) i masę nieresorowaną ( $M_n$ ). Obie masy połączone są ze sobą resorowaniem lepko-sprężystym. Masę resorowaną stanowi masa pułta oraz wózków jezdnych (bez zestawów kołowych) i skupiona jest w dwóch węzłach umieszczonych na wysokości  $h$  względem poziomu główki szyny. Masę nieresorowaną (zestawy kołowe) rozmieszczono w czterech węzłach na wysokości  $h_n$  względem poziomu główki szyny.



Rys. 5.3. Uproszczony model mechaniczny wagonu jednostki EN57 (**Wariant A**) – opis w tekście

Masy resorowane podtrzymuje nieważka, przestrzenna konstrukcja ramowa, złożona z elementów belkowych o dużej („nieskończonyj”) sztywności. Rama oparta jest za pomocą dyskretnych elementów sprężystych i lepko-sprężystych na węzłach skupiających masy zestawów kołowych. Rozstaw resorów na długości wagonu ( $a_w$ ) odpowiada rozstawowi osi wózków. Rozstaw resorów w przekroju poprzecznym ( $b_s$ ) odpowiada rozstawowi szyn kolejowych. Sztywność pionową resorowania oznaczono jako  $k_{rz}$ , sztywność poziomą na kierunku podłużnym i poprzecznym odpowiednio jako  $k_{rx}$  oraz  $k_{ry}$ . Stała tłumienia na kierunku pionowym wynosi  $c_{rz}$ , a na kierunku poprzecznym  $c_{ry}$ .

Sztywność i tłumienie resorów na kierunku pionowym, tłumienie na kierunku poprzecznym oraz wysokość  $h_r$  umiejscowienia masy resorowanej względem poziomu belki bujawkowej, dobrano w oparciu o zidentyfikowane wielkości modalne wzbudzonych postaci drgań. Wysokości  $h_b$  (odległość między osią zestawów kołowych a osią belki bujawkowej) oraz  $h_n$  (odległość między osią zestawów kołowych a główką szyny) przyjęto na podstawie dokumentacji technicznej. Wszystkie poziome więzi sprężyste przyjęto o bardzo dużej sztywności, blokując w ten sposób związane z nimi kierunki (postacie) drgań. Interakcję pomiędzy konstrukcją mostu a masami nieresorowanymi zapewniono poprzez dodatkowe więzi sprężyste  $k_{nx}$ ,  $k_{ny}$ , oraz  $k_{nz}$ , także o bardzo dużej sztywności. Dodatkowo, w celu eliminacji niestabilności układu, wprowadzono blokadę obrotów wokół osi  $y$  węzłów wałów zestawów kołowych (węzły nr 16 i 17).

Przy tak przyjętych warunkach, możliwe są następujące uogólnione kierunki drgań nadwozia (w zakresie racjonalnych częstotliwości):

- drgania pionowe – przemieszczenia na kierunku osi  $z$ ,
- drgania wahaniowe (ruch kaczkowy) – obrót wokół osi  $x$ ,
- drgania galopowe – obrót wokół osi  $y$ .

Szczegółowy sposób definicji modelu streszczono w poniższych punktach.

1. Założono symetrię geometrii oraz parametrów w przekroju poprzecznym i podłużnym wagonu.
2. Płaszczyznę węzłów mas nieresorowanych przyjęto na wysokości  $h_n$  względem poziomu główki szyny (poziom osi ciężkości zestawów kołowych).
3. Płaszczyznę belek poziomych ramy nadwozia przyjęto na wysokości  $h_b$  względem poziomu osi zestawów kołowych (odległość osi ciężkości obu elementów).
4. Masę resorowaną  $M_r$  stanowi masa całego wagonu (wraz z elementami wyposażenia technicznego) pomniejszona o łączną masę zestawów kołowych.
5. Masę nieresorowaną  $M_n$  stanowi masa zestawów kołowych.
6. Poszczególne masy oraz potrzebne wymiary geometryczne (całkowita długość  $a$ , rozstaw osi wózków  $a_w$ , wysokości  $h_n$  i  $h_b$ ) przyjęto na podstawie specyfikacji technicznej (por. tabl. 5.1 oraz tabl. 2.4 i rys. 2.10 w rozdz. 2).
7. Założono, iż oba wagony (rozzrządczy i silnikowy) charakteryzują się podobną odpowiedzią dynamiczną – globalne parametry modalne (częstotliwości drgań, postacie drgań, liczby tłumienia) są takie same dla obu wagonów.
8. Założono liniowość modelu pojazdu (superpozycja).
9. Parametry mechaniczne resorów (sztywność, tłumienie) dobrano tak, aby postacie i częstotliwości drgań swobodnych uzyskane z rozwiązania numerycznego, odpowiadały wielkościom zidentyfikowanym oraz aby uzyskać podobną charakterystykę tłumienia w odpowiedzi.
  - ❖ Odpowiedzi swobodne modelu uzyskano na podstawie symulacji numerycznych „zeskoku”. Kierunki wymuszenia przyjęto analogiczne jak podczas badań eksperymentalnych.
  - ❖ Sztywność pionową resorów  $k_{rz}$  określono na podstawie drugiej (pionowej) częstotliwości drgań własnych ( $f_2 = 2,029$  Hz), tj.:

$$k_{rz} = \frac{(2\pi f_2)^2 M_r}{4}. \quad (5.1)$$

- ❖ Sztywności poziome resorów  $k_{rx}$  i  $k_{ry}$  przyjęto jako bardzo duże, tj.  $2 \cdot 10^9$  kN/m.
- ❖ Wysokość  $h_r$  umiejscowienia masy resorowanej określono na podstawie pierwszej (wahaniowej) częstotliwości drgań własnych ( $f_1 = 0,875$  Hz), mając uprzednio zdefiniowaną sztywność  $k_{rz}$ .
- ❖ Współczynnik tłumienia pionowego  $c_{rz}$  wyznaczono na podstawie zidentyfikowanych parametrów modalnych drugiej postaci drgań ( $f_2 = 2,029$  Hz,  $\xi_2 = 0,0497$ ), wykorzystując zależność między liczbą tłumienia a tłumieniem krytycznym:

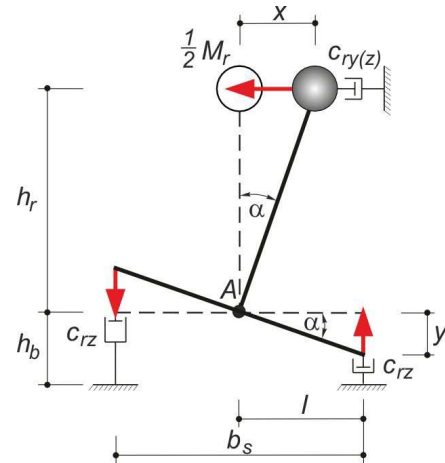
$$\xi_2 = \frac{4c_{rz}}{c_{rz}^{kr}} \Rightarrow c_{rz} = \frac{\xi_2 c_{rz}^{kr}}{4} = \frac{\xi_2 2M_r (2\pi f_2)}{4}. \quad (5.2)$$

- ❖ Współczynnik tłumienia poziomego  $c_{ry}$  wyznaczono na podstawie zidentyfikowanych parametrów modalnych pierwszej postaci drgań ( $f_1 = 0,875$  Hz,  $\xi_1 = 0,0618$ ) oraz współczynnika tłumienia pionowego  $c_{rz}$ . Ponieważ amortyzatory pionowe tłumią również drgania wahaniowe (rys. 5.4), zatem składowa pozioma  $c_{ry}$  wyniesie:

$$c_{ry} = \kappa \left( \frac{c_{ry(tot)}}{2} - c_{ry(z)} \right), \quad (5.3)$$

gdzie  $c_{ry(tot)}$  jest globalnym współczynnikiem tłumienia drgań wahaniowych wyznaczonym na podstawie zidentyfikowanej liczby tłumienia  $\xi_1$  oraz tłumienia krytycznego  $c_{ry(tot)}^{kr}$ ,  $c_{ry(z)}$  jest składową poziomą tłumienia pochodzącą od amortyzatorów pionowych, natomiast  $\kappa$  jest współczynnikiem poprawkowym. Przy założeniu, że drgania wahaniowe odbywają się wokół punktu A (środek ciężkości belki bujawkowej – rys. 5.4) oraz że kąt obrotu  $\alpha$  jest mały, składową  $c_{ry(z)}$  wyznaczyć można następująco:

$$\begin{aligned} x &= h_r \cdot \alpha, & y &= l \cdot \alpha = \frac{b_s}{2} \cdot \alpha, \\ c_{ry(z)} x h_r &= 2 c_{rz} y l, \\ &\Downarrow \\ c_{ry(z)} (h_r \cdot \alpha) h_r &= 2 c_{rz} (l \cdot \alpha) l, \\ &\Downarrow \\ c_{ry(z)} &= \frac{2 c_{rz} l^2}{h_r^2} = \frac{c_{rz} b_s^2}{2 h_r^2} \end{aligned}$$



Rys. 5.4.

W efekcie, zgodnie z zależnością (5.3), składowa  $c_{ry}$  wyniesie:

$$c_{ry} = \kappa \left( \frac{\xi_1 c_{ry(tot)}^{kr}}{2} - c_{ry(z)} \right) = \kappa \left( \frac{\xi_1 2 M_r (2\pi f_1)}{2} - \frac{c_{rz} b_s^2}{2 h_r^2} \right). \quad (5.4)$$

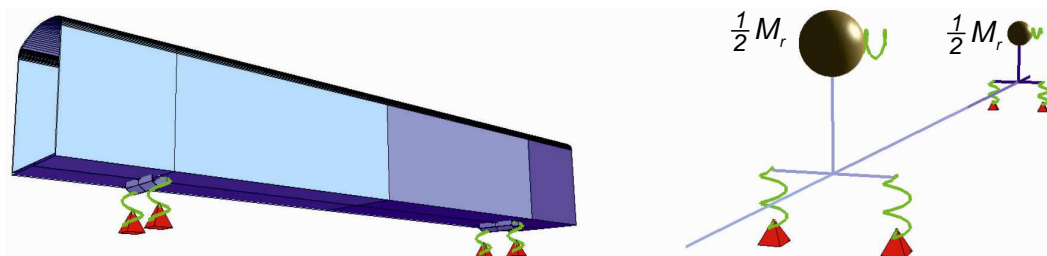
W tabl. 5.2. zestawiono wszystkie parametry zdefiniowanego modelu z rys. 5.3. Zestawienia dokonano dla obu wagonów – rozrządczego i silnikowego.

W celu sprawdzenia poprawności przyjęcia parametrów modelu, wykonano symulacje numeryczne „zeskoku” (SOFiSTiK). Wykorzystano zaimplementowany algorytm metody Newmark’a (weryfikację procedury omówiono w dalszej części rozdziału – patrz p. 5.4.1). Częstotliwość próbkowania przyjęto równą  $f_s = 240$  Hz. Na potrzeby symulacji model ograniczono jedynie do części resorowanej, nakładając na węzły mas nieresorowanych więzy blokujące przemieszczenia translacyjne (podpory nieprzesuwne). Na rys. 5.5 pokazano wizualizację modelu numerycznego. Wymuszenia dokonywano poprzez pionowe przemieszczenia węzłów podporowych zgodnie z teoretyczną trajektorią zeskoku (rys. 5.6a). Funkcję wymuszenia przyjęto zgodnie z rys. 5.6b (czas zeskoku z wysokości 26 mm (spadek swobodny) wynosi 0,0728 s (~18/240 s)).

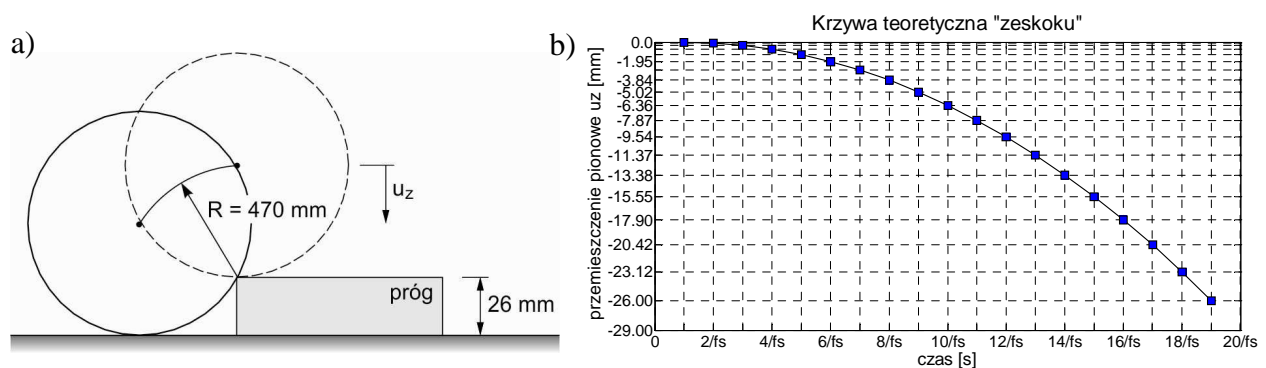
Na rys. 5.7 porównano odpowiedzi czasowe i częstotliwościowe wagonu rozrządczego, uzyskane z badań oraz symulacji numerycznych. Porównania dokonano dla przypadku wzbudzenia drgań wahaniowych. Należy zaznaczyć, że dokładne porównywanie obu wykresów nie jest do końca możliwe z powodu różnicy pomiędzy wzbudzeniem rzeczywistym a teoretycznym, wynikającym głównie z faktu nieuwzględnienia w modelu II stopnia resorowania i w konsekwencji zaliczenia masy wózków do masy pudła. Łączna masa wózków (bez zestawów kołowych) stanowi blisko 25% masy całego nadwozia.

Pomimo tych różnic, istotna z punktu widzenia definicji modelu jest jakościowa zgodność obu odpowiedzi (zgodność globalnych parametrów modalnych modelu teoretycznego oraz rzeczywistego wagonu). Na rys. 5.8 porównano wspomniane parametry odpowiadające zidentyfikkowanym postaciom drgań. Wartości „pomiarowe” ( $f_i^{pomiar}$ ,  $\xi_i^{pomiar}$ ) zestawiono w punkcie 4.4.4 w rozdziale 4. Wartości teoretyczne ( $f_i^{model}$ ,  $\xi_i^{model}$ ) określono w sposób następujący:

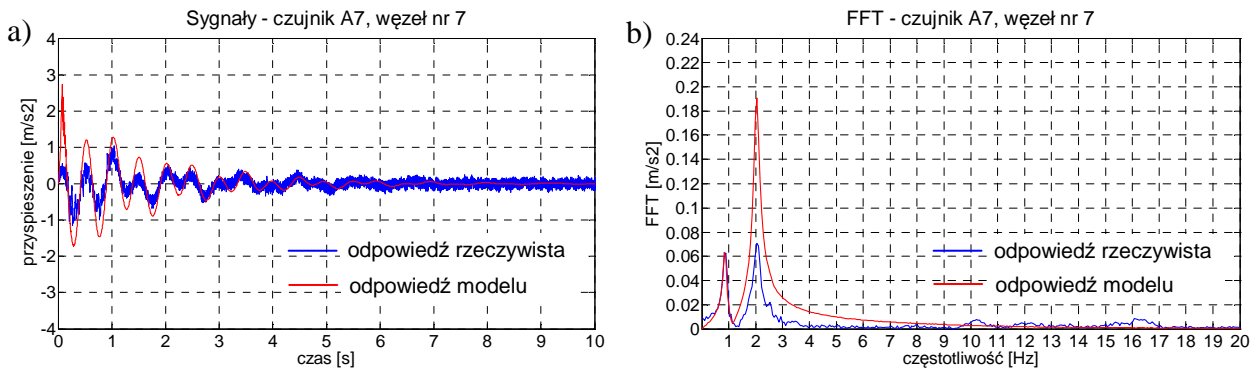
- częstotliwości  $f_i^{model}$  wyznaczono na podstawie rozwiązania problemu własnego – SOFiSTiK,
- liczbę tłumienia pierwszego modu  $\xi_1^{model}$  wyznaczono metodą logarytmicznego dekrementu tłumienia (LDT), wykorzystując odfiltrowany sygnał odpowiedzi swobodnej modelu (pasmo filtru 0,1 ÷ 1,1 Hz), wywołany wymuszeniem drgań wahaniowych (rys. 5.8a),
- liczbę tłumienia drugiego modu  $\xi_2^{model}$  wyznaczono analogicznie metodą LDT, na podstawie sygnału odpowiedzi pionowej modelu (rys. 5.8b).



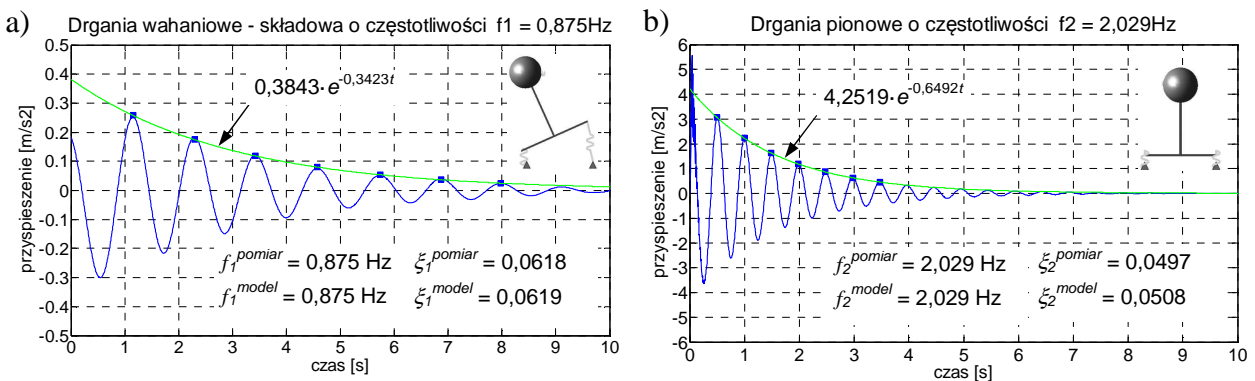
Rys. 5.5. Wizualizacja modelu numerycznego do symulacji zeskoku (SOFiSTiK)



Rys. 5.6. Definicja „zeskoku”: a) trajektoria, b) krzywa wymuszenia pionowego ( $f_s = 240\text{Hz}$  – próbkowanie)



Rys. 5.7. Porównanie teoretycznej (symulacje numeryczne) oraz pomierzonej (badania eksperymentalne) odpowiedzi czasowej (a) i częstotliwościowej (b) wagonu rozrządczego jednostki EN57



Rys. 5.8. Składowe odpowiedzi modelu z rys. 5.3 (**wagon rozrządczy** – węzeł nr 7) wraz z krzywymi wykładniczymi tłumienia: a) składowa o częstotliwości  $f_1 = 0,875$  Hz (odfiltrowany sygnał odpowiedzi na wymuszenie drgań wahaniowych – pasmo filtra  $0,1 \div 1,1$  Hz), b) odpowiedź na wymuszenie drgań pionowych (drgania o częstotliwości  $f_2 = 2,029$  Hz)

Na podobnej zasadzie określono parametry modelu wagonu silnikowego (tabl. 5.2). Masę wagonu przyjęto zgodnie z dokumentacją techniczną. Charakterystyki sprężysto-tłumiące dobrano przy założeniu, że globalne parametry modalne (częstotliwości drgań, postacie drgań, liczby tłumienia) są takie same jak w wagonie rozrządczym. Weryfikacją poprawności doboru parametrów są wartości częstotliwości i liczb tłumienia, odpowiadające obu postaciom drgań wagonu:

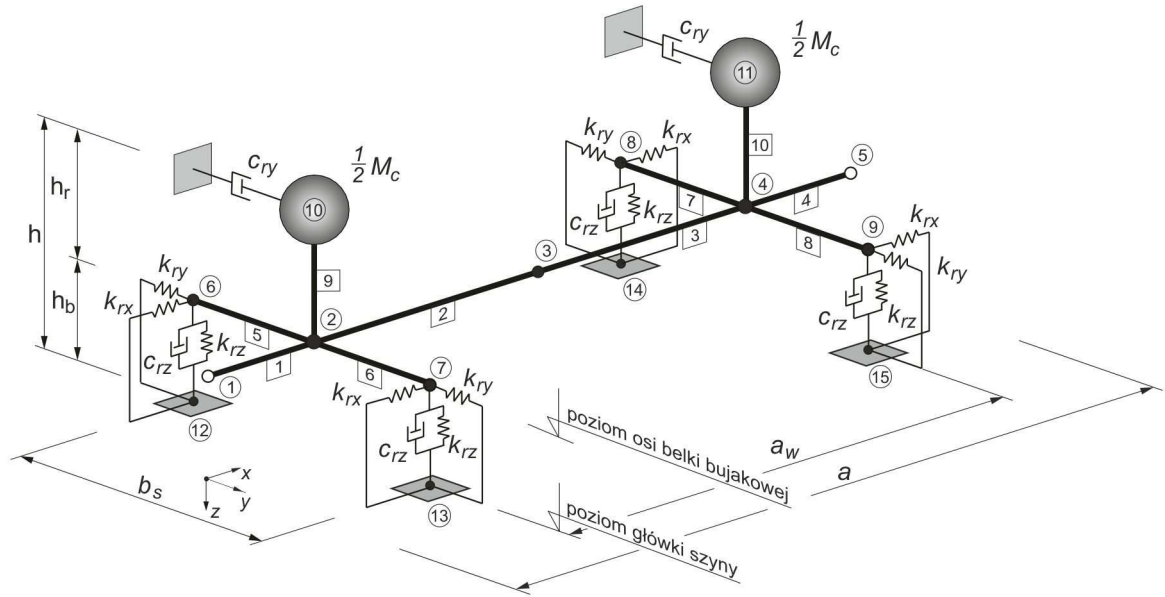
POSTAĆ 1:  $f_1^{model} = 0,875$  Hz,  $\xi_1^{model} = 0,0619$  (krzywa wykł. tłumienia:  $0,3843 \cdot e^{-0,3423t}$ )

POSTAĆ 2:  $f_2^{model} = 2,029$  Hz,  $\xi_2^{model} = 0,0508$  (krzywa wykł. tłumienia:  $4,2518 \cdot e^{-0,6492t}$ )

## MODEL B

Model B (rys. 5.9) zredukowano do jednego poziomu mas ( $M_c$ ) poprzez włączenie masy zestawów kołowych do masy nadwozia. Brak jest zatem niezależnych mas nieresorowanych, a co za tym idzie więzów  $k_{nx}$ ,  $k_{ny}$ , oraz  $k_{nz}$ . Rola i umiejscowienie pozostałych elementów, a także sposób definicji parametrów modelu pozostały bez zmian. Z uwagi na zwiększoną masę nadwozia, zmianie uległy również charakterystyki sprężysto-tłumiące resorów (tabl. 5.2).





Rys. 5.9. Uproszczony model mechaniczny wagonu jednostki EN57 (**Wariant B**) – opis w tekście

Tabl. 5.2. Parametry dwóch rozważanych modeli obciążenia:  
Model A (wg rys. 5.3), Model B (wg rys. 5.9)

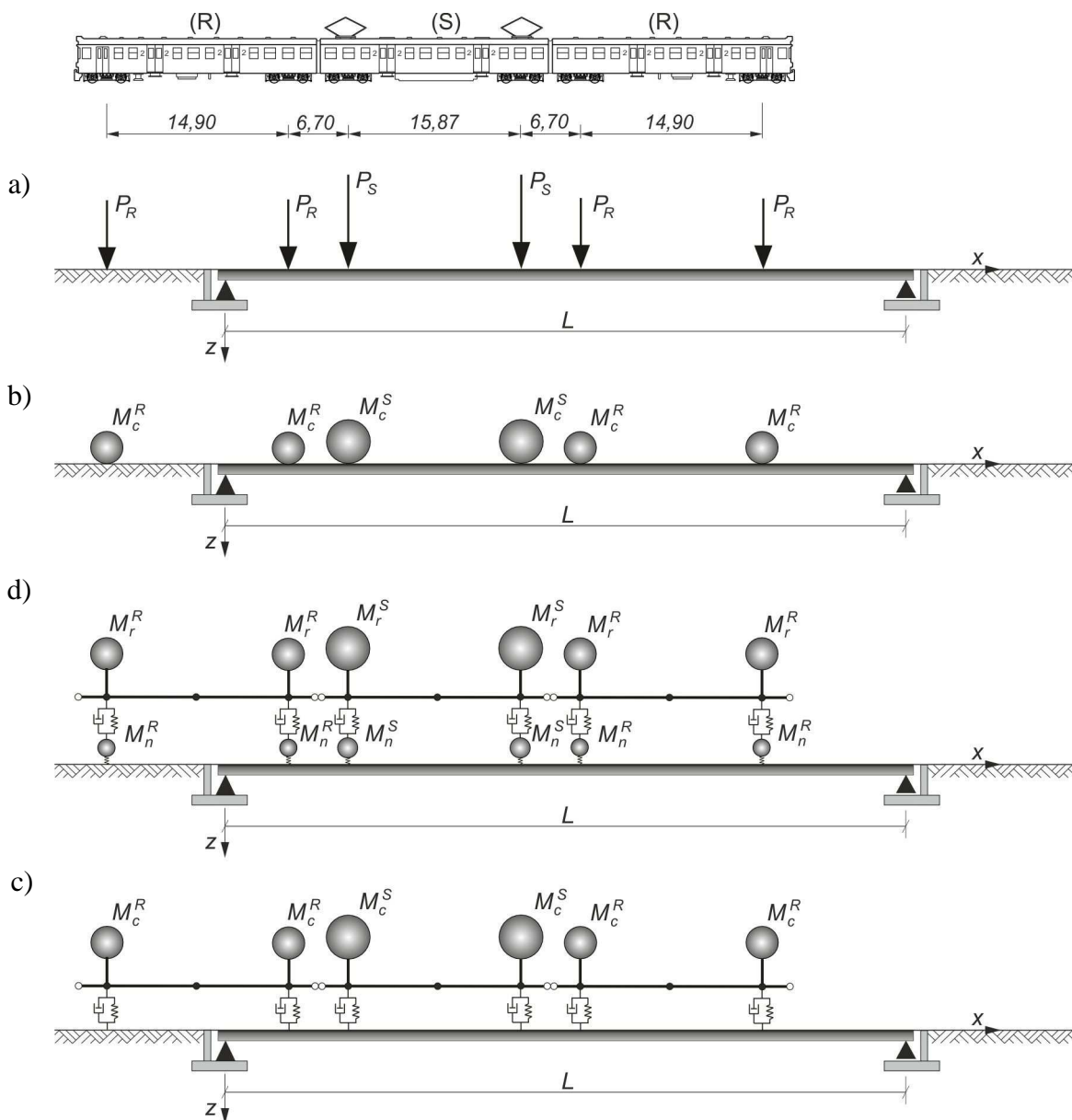
RODZAJ PARAMETRU	WARTOŚĆ PARAMETERU			
	Model A		Model B	
	wagon R	wagon S	wagon R	wagon S
a [m]	20,80	21,77	20,80	21,77
aw [m]	14,90	15,87	14,90	15,87
bs [m]	1,435	1,435	1,435	1,435
hb [m]	0,076	0,076	0,076	0,076
hr [m]	1,625	1,625	1,665	1,665
hn [m]	0,47	0,47	--	--
Mr [t]	5,28	6,88	--	--
Mn [t]	28,720	50,12	--	--
Mc [t]	--	--	34,00	57,00
k <sub>rx</sub> [kN/m]	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>
k <sub>ry</sub> [kN/m]	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>
k <sub>rz</sub> [kN/m]	1166,94	2036,45	1381,474	2316,00
c <sub>ry</sub> [kNs/m]	6,21036	10,83785	7,35209	12,32557
c <sub>rz</sub> [kNs/m]	9,09856	15,87813	10,77128	18,05773
k <sub>nx</sub> [kN/m]	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>
k <sub>ny</sub> [kN/m]	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>
k <sub>nz</sub> [kN/m]	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>	2·10 <sup>9</sup>
κ [-]	1,07	1,07	1,07	1,07

#### 5.4. SYMULACJE PRZEJAZDU OBCIĄŻENIA PO KONSTRUKCJI

Symulacje przejazdu obciążenia po konstrukcji przeprowadzono w programie SOFiSTiK. Rozważono cztery modele obciążenia ruchomego (rys. 5.10):

- model sił skupionych,
- model mas skupionych,
- model A zgodnie z rys. 5.3,
- model B zgodnie z rys. 5.9.

Model sił skupionych jest stosowany w projektowaniu konstrukcji mostowych. Model mas skupionych uwzględnia dodatkowo siły masowe, z kolei modele resorowane uwzględniają również efekty wzajemnej interakcji pojazdu i przęsła. We wszystkich przypadkach, parametry każdego z modeli przyjęto odpowiadające pojazdowi testowemu – jednostce trakcyjnej serii EN57.



Rys. 5.10. Modele obciążenia ruchomego w symulacjach numerycznych: a) model sił skupionych, b) model mas skupionych, c) model resorowany A, d) model resorowany B; (ozn.:  $P_R$ ,  $P_S$  – siły odpowiadające naciskom wózków odpowiednio wagonu rozrządowego i silnikowego;  $M_c^R$ ,  $M_c^S$  – masy całkowite odpowiednio wagonu rozrządowego i silnikowego;  $M_r^R$ ,  $M_r^S$  – masy resorowane wagonu rozrządowego i silnikowego;  $M_n^R$ ,  $M_n^S$  – masy nieresorowane wagonu rozrządowego i silnikowego)

Celem analiz było porównanie jakościowe rozważanych modeli. Rezultaty analiz numerycznych porównano z wynikami badań eksploatacyjnych, przeprowadzonych na dwóch obiektach mostowych:

- konstrukcji odciążającej typu mostowego o rozpiętości 30 m,
- przęsła mostu nad rzeką Radunią o rozpiętości 10,24 m.

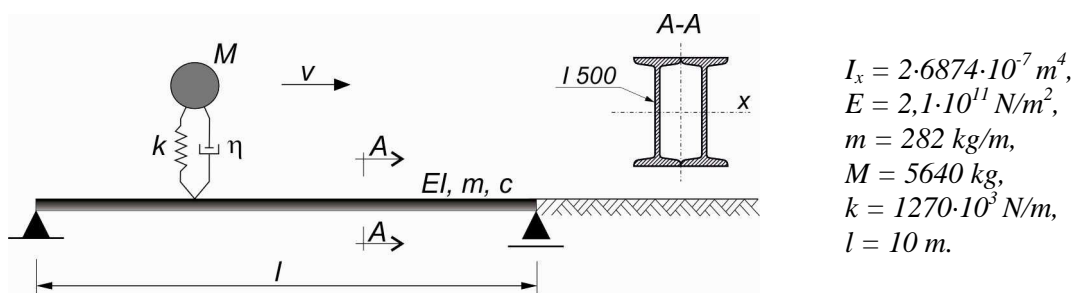
#### 5.4.1. Weryfikacja procedur numerycznych programu SOFiSTiK

Przed przystąpieniem do właściwych symulacji, dokonano weryfikacji procedur obliczeniowych dostępnych w programie SOFiSTiK. Testy wykonano w oparciu o znane rozwiązanie literaturowe, wykorzystując model oscylatora lepko-sprężystego poruszającego się po belce Bernoulliego-Eulera (SZCZEŚNIAK, ATAMAN, ZBICIAK [2002]). Założenia oraz matematyczne sformułowanie równań ruchu przedstawiono w zał. 2.

Rozważono drgania wymuszone układu oscylator-belka podczas przejazdu obciążenia po konstrukcji oraz drgania swobodne obu podukładów po zjeździe oscylatora z belki. Równania różniczkowe ruchu zapisano w dziedzinie czasu  $t$  oraz we współrzędnej bezwymiarowej  $\xi = vt/l$ . W obu przypadkach rozwiązania uzyskano na drodze numerycznej, wykorzystując algorytm Rungego-Kutty (patrz. zał. 2). Posłużono się funkcją *ode45* dostępną w pakiecie MATLAB.

W pierwszej kolejności sprawdzono poprawność algorytmu napisanego w środowisku MATLAB. Przyjmując analogiczne założenia jak w SZCZEŚNIAK, ATAMAN, ZBICIAK [2002], porównano uzyskane przebiegi drgań z wykresami zamieszczonymi w literaturze.

W przykładzie rozważono drgania środka stalowej belki o rozpiętości 10 m i przekroju złożonym z dwóch dwuteowników  $I 500$ . Drgania wywołane są przejeżdżającym oscylatorem jednomasowym ze stałą prędkością  $v$ . Masa jednostkowa belki wynosi  $m$ , moduł Young'a materiału belki wynosi  $E$ , moment bezwładności przekroju belki  $I$ , współczynnik tłumienia belki  $c$ , masa oscylatora  $M$ , sztywność resorowania  $k$  a liczba tłumienia  $\eta$ . Model fizyczny oraz przyjęte parametry układu zilustrowano na rys. 5.11.



Rys. 5.11. Rozważany model jednomasowego oscylatora poruszającego się po belce swobodnie podpartej

Liczbę tłumienia belki przyjęto równą  $\zeta_b = c/c_{kr} = 0,1$ , gdzie  $c_{kr} = 2m\omega_l$  jest współczynnikiem tłumienia krytycznego ( $\omega_l$  oznacza pierwszą częstość drgań własnych belki). Liczbę tłumienia oscylatora przyjęto równą  $\zeta_{os} = \eta/\eta_{kr} = 0,1$ , gdzie  $\eta_{kr} = 2M\omega_{os}$  jest współczynnikiem tłumienia krytycznego oscylatora ( $\omega_{os}$  oznacza częstość drgań własnych oscylatora). Funkcje opisujące drgania oscylatora i belki w zakresie drgań wymuszonych ( $w_I(\xi)$  i  $q(\xi)$ ) oraz funkcje opisujące drgania oscylatora i belki w zakresie drgań swobodnych ( $w_I^*(\xi)$  i  $q^*(\xi)$ ), sprowadzono do postaci bezwymiarowej, dzieląc je przez odpowiednie przemieszczenia statyczne (por. zał. 2):

$$\begin{aligned}
 f_{os}(\xi) &= \frac{w_1(\xi)}{w_{os}^{st}}, & f_{os}^*(\xi) &= \frac{w_1^*(\xi)}{w_{os}^{st}} \\
 f(\xi) &= \frac{q(\xi)}{w_{st}}, & f^*(\xi) &= \frac{q^*(\xi)}{w_{st}}.
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

Wprowadzono bezwymiarowy parametr prędkości  $\zeta_l = v/v_{kr}$ , gdzie  $v_{kr}$  oznacza prędkość krytyczną oscylatora. Przy założeniu, że drgania belki opisuje funkcja sinus, prędkość krytyczna oscylatora odpowiada czasowi jego przejazdu po przęśle równemu połowie okresu drgań belki  $T$ :

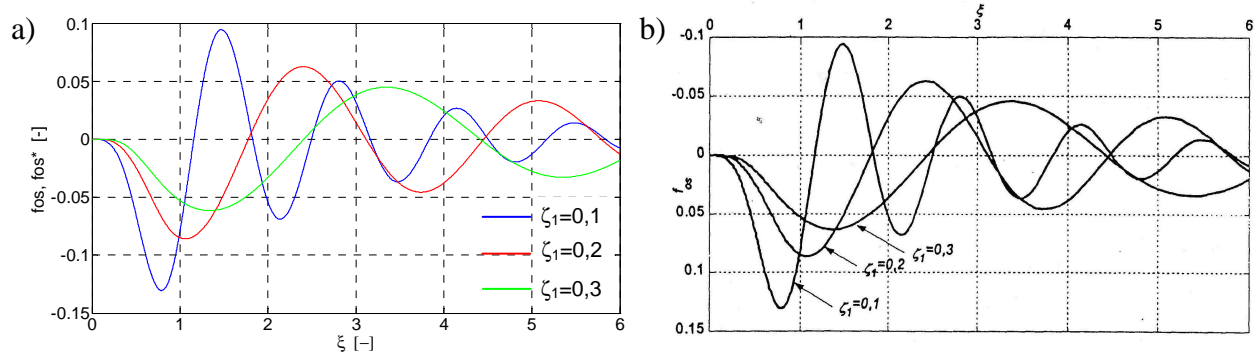
$$v_{kr} = \frac{2l}{T} = \frac{l\omega_1}{\pi} = \frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{EI\pi^4}{ml^4}} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EI}{m}}.
 \tag{5.6}$$

Dla przyjętych parametrów zadania, prędkość krytyczna oscylatora wynosi  $v_{kr} = 318$  m/s.

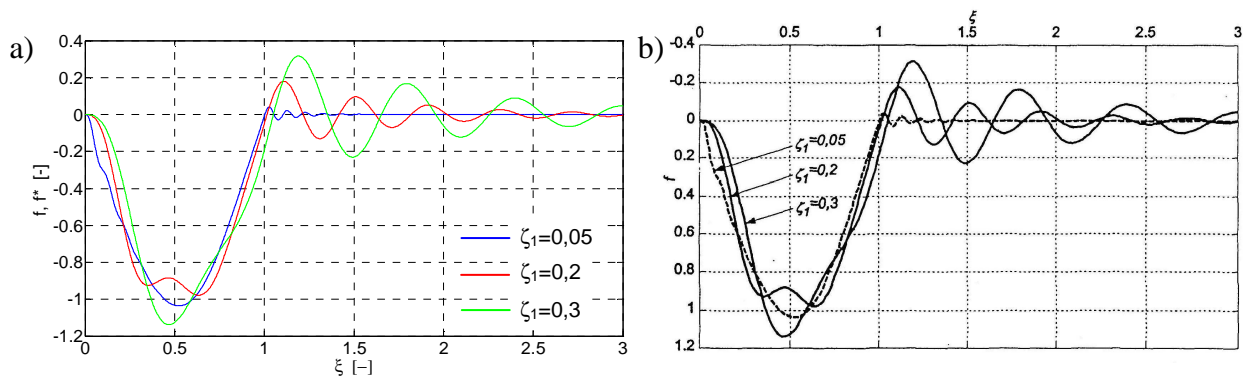
Na rys. 5.12 porównano przebiegi drgań masy oscylatora podczas przejazdu z prędkościami  $\zeta_l = 0,1$  ( $v = 114$  km/h),  $\zeta_l = 0,2$  ( $v = 228$  km/h) oraz  $\zeta_l = 0,3$  ( $v = 343$  km/h). Na rys. 5.13 porównano przebiegi drgań środka belki podczas przejazdu oscylatora z prędkościami  $\zeta_l = 0,05$  ( $v = 57$  km/h),  $\zeta_l = 0,2$  ( $v = 228$  km/h) oraz  $\zeta_l = 0,3$  ( $v = 343$  km/h). Na rys. 5.14 pokazano przypadek quasi-statyczny – ugięcie oscylatora oraz belki dla prędkości przejazdu  $\zeta_l = 0,005$  ( $v = 5,7$  km/h). Bezpośrednie porównanie tych wykresów nie jest możliwe z uwagi na różną skalę przemieszczeń (efekt wprowadzenia współrzędnych bezwymiarowych zgodnie z (5.5)). Obiektywnego porównania dokonać można w dziedzinie czasu (rys. 5.15). Zgodnie z przyjętym założeniem, drgania oscylatora oraz belki mierzone są od położenia ich równowagi statycznej (por. zał. 2). Zatem dla przejazdu quasi-statycznego, maksymalne przemieszczenie masy oscylatora oraz środka belki będą sobie równe i będą odpowiadać ugięciu statycznemu belki, wywołanemu ciężarem masy  $M$ :

$$w_{st}^b = \frac{Pl^3}{48EI} = \frac{Mgl^3}{48EI} = 3,93 \cdot 10^{-3} \text{ m}.
 \tag{5.7}$$

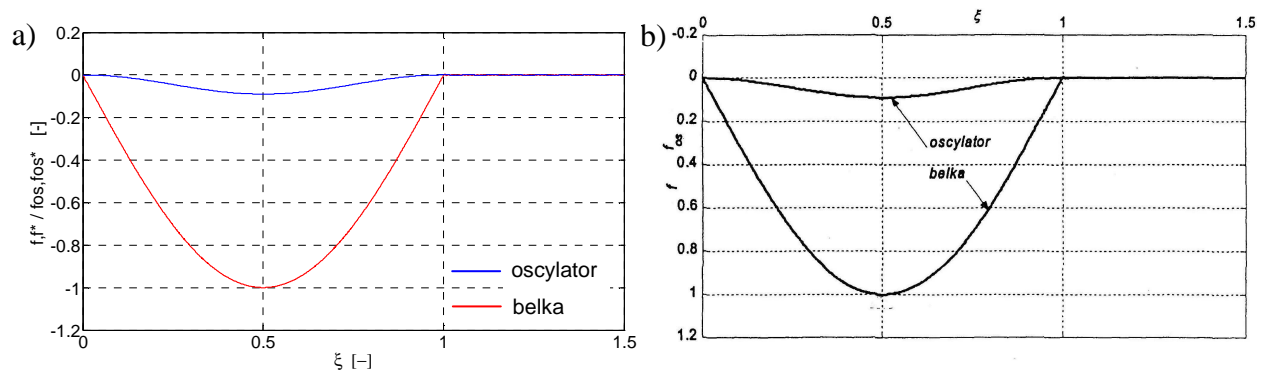
Przy prędkości przejazdu  $v = 5,7$  km/h, zjazd oscylatora z belki powinien nastąpić po upływie 6,29 s.



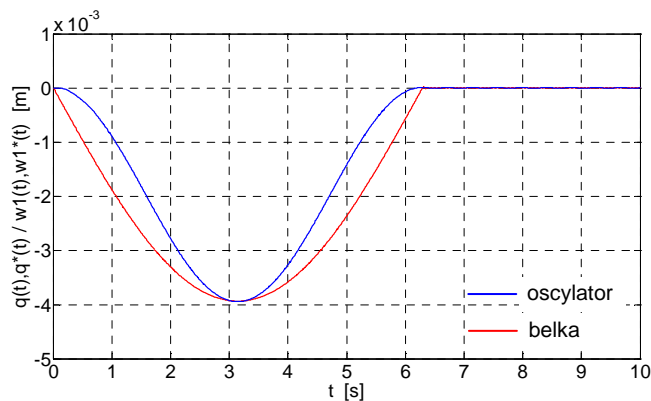
Rys. 5.12. Przebiegi drgań masy oscylatora w funkcji położenia dla trzech prędkości przejazdu: a) rozwiązanie uzyskane w programie MATLAB, b) rozwiązanie literaturowe (SZCZEŚNIAK, ATAMAN, ZBICIAK [2002])



Rys. 5.13. Przebiegi drgań środka belki w funkcji położenia oscylatora dla trzech prędkości przejazdu: a) rozwiązanie uzyskane w programie MATLAB, b) rozwiązanie literaturowe (SZCZEŚNIAK, ATAMAN, ZBICIAK [2002])



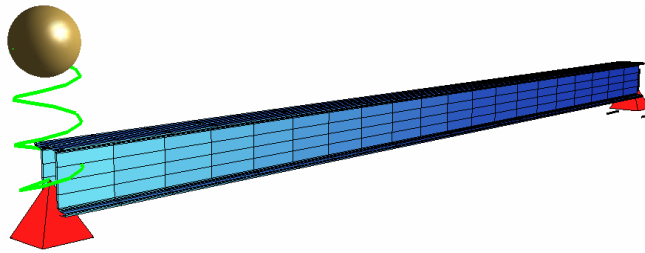
Rys. 5.14. Wykres przemieszczeń masy oscylatora oraz środka przęsła belki w funkcji położenia oscylatora dla prędkości przejazdu  $\zeta_1 = 0,005$  ( $v = 5,7$  km/h): a) rozwiązanie uzyskane w programie MATLAB, b) rozwiązanie literaturowe (SZCZEŚNIAK, ATAMAN, ZBICIAK [2002])



Rys. 5.15. Wykres przemieszczeń masy oscylatora oraz środka przęsła belki w funkcji czasu dla prędkości przejazdu  $v = 5,7$  km/h ( $\zeta_1 = 0,005$ ) – przypadek quasi-statyczny

Wobec pozytywnej weryfikacji algorytmu napisanego w programie MATLAB, w dalszej kolejności zweryfikowano procedury obliczeniowe programu SOFiSTiK. Program umożliwia numeryczne rozwiązywanie równań ruchu postaci 3.1 (patrz rozdz. 3) metodami „krok po kroku” (metody typu „*time-step*”). W szczególności wykorzystywany jest algorytm niejawnej metody Newmark’a - Wilsona<sup>2</sup> (CLOUGH I PENZIEN [1993], LEWANDOWSKI [2006], LUBOWIECKA [2004]). Algorytm zaimplementowany jest w modułach DYNA oraz ASE, przy czym moduł DYNA pozwala na rozwiązywanie zagadnień wyłącznie liniowych, natomiast moduł ASE także zagadnień nieliniowych (w tym drugim przypadku algorytm całkowania połączony jest z procesem iteracyjnym Newtona-Rapsona). Użytkownik wywołuje procedurę komendą *step*, mając przy tym możliwość wyboru typu analizy (liniowa, nieliniowa), a także sterowania czasem analizy, krokiem całkowania oraz parametrami metody.

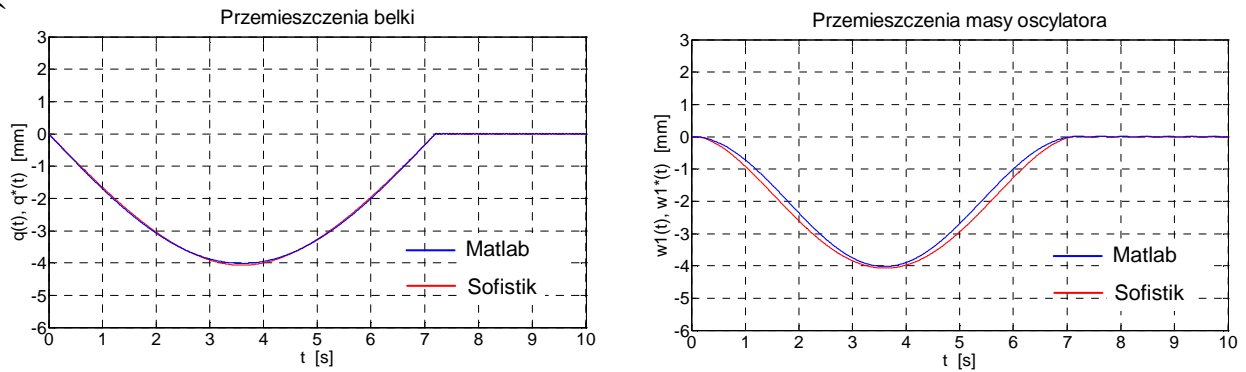
Weryfikacji dokonano na analogicznym jak omówiony wcześniej układzie oscylator-belka. W celu porównania z programem SOFiSTiK, całkowanie numeryczne w programie MATLAB przeprowadzono w dziedzinie czasu (por. zał. 2). Ugięcie belki opisują w tym przypadku niewiadome funkcje  $q(t)$  (zakres drgań wymuszonych) oraz  $q^*(t)$  (zakres drgań swobodnych). Przeszyczenia masy oscylatora opisują z kolei funkcje  $w_I(t)$  (zakres drgań wymuszonych) oraz  $w_I^*(t)$  (zakres drgań swobodnych). Na rysunku 5.16 pokazano wizualizację modelu obliczeniowego programu SOFiSTiK.



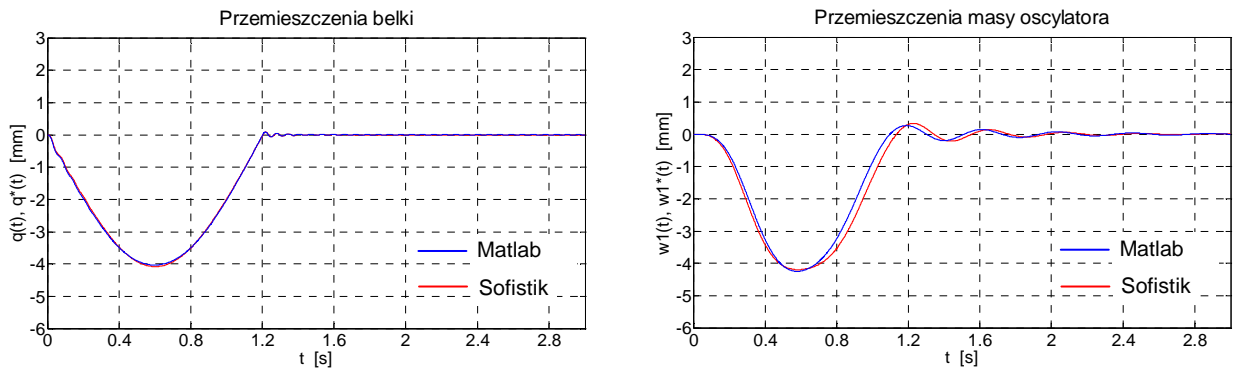
Rys. 5.16. Liniowy oscylator poruszający się po belce swobodnie podpartej – wizualizacja modelu obliczeniowego (SOFiSTiK)

Na rys. 5.17 ÷ 5.20 porównano przebiegi drgań belki oraz masy oscylatora dla wybranych prędkości przejazdu: 5 km/h, 30 km/h, 160 km/h i 250 km/h. Porównanie pokazuje bardzo dobrą zgodność obu rozwiązań. Nieznaczne rozbieżności występują jedynie w osiągniętych amplitudach drgań masy oscylatora.

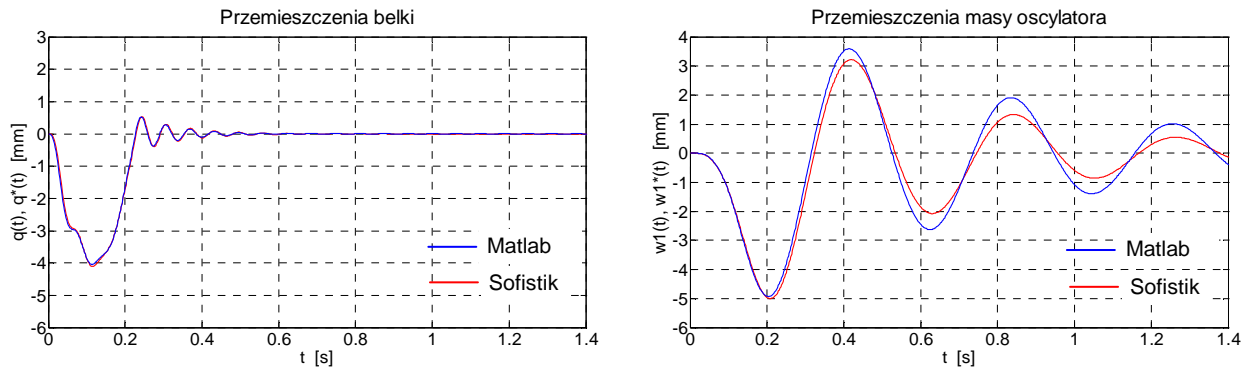
Wobec pozytywnych wniosków z przeprowadzonych testów, symulacje przejazdu obciążenia po konstrukcji dla wszystkich rozważanych modeli obciążenia wykonano przy wykorzystaniu oprogramowania SOFiSTiK.



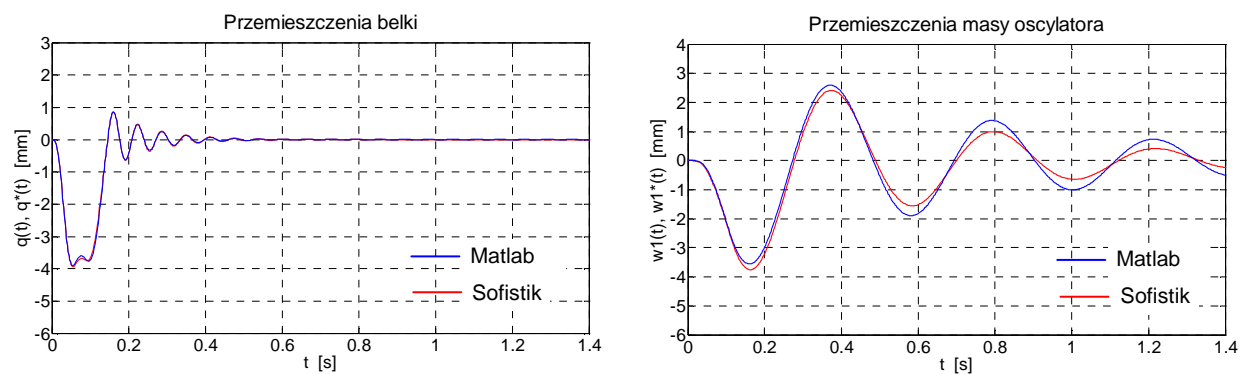
Rys. 5.17. Drgania środka belki oraz masy oscylatora dla prędkości przejazdu oscylatora 5 km/h (przypadek „quasi-statyczny”) – porównanie rozwiązania uzyskanego w programie Matlab z rozwiązaniem programu SOFiSTiK



Rys. 5.18. Drgania środka belki oraz masy oscylatora dla prędkości przejazdu oscylatora 30 km/h – porównanie rozwiązania uzyskanego w programie Matlab z rozwiązaniem programu SOFiSTiK



Rys. 5.19. Drgania środka belki oraz masy oscylatora dla prędkości przejazdu oscylatora 160 km/h – porównanie rozwiązania uzyskanego w programie Matlab z rozwiązaniem programu SOFiSTiK



Rys. 5.20. Drgania środka belki oraz masy oscylatora dla prędkości przejazdu oscylatora 250 km/h – porównanie rozwiązania uzyskanego w programie Matlab z rozwiązaniem programu SOFiSTiK

### 5.4.2. Przykład 1 – konstr. odciążająca typu mostowego o rozpiętości 30 m (KO30)

Zapewnienie ciągłości ruchu kolejowego na modernizowanej linii jest jednym z głównych czynników, warunkującym możliwość prowadzenia prac budowlanych. W przypadku budowy lub przebudowy skrzyżowań przez istniejące nasypy kolejowe, spełnienie tego warunku umożliwia zastosowanie konstrukcji odciążających. Przy małych rozpiętościach (do 5 m) stosuje się powszechnie wiązki z szyn typu szwajcarskiego (KOLPROJEKT [1991]). Przy rozpiętościach powyżej 5 m, konieczne jest zastosowanie konstrukcji typu mostowego. Jeden z typów takich konstrukcji zastosowano podczas budowy „Drogi Zielonej” na odcinku od ul. Grunwaldzkiej do ul. Gospody (okolice hali Ergo Arena) w Gdańsku (BPBK [2008]). Na wspomnianym odcinku trasa ta krzyżuje się z czterotorową linią kolejową – dwa tory należące do PKP SKM w Trójmieście Sp. z o.o. (tory nr 501 i 502) oraz dwa tory linii E65 należące do PKP PLK S.A. (tory nr 1 i 2). Linia ta charakteryzuje się bardzo dużym natężeniem ruchu.

#### 5.4.2.1. Charakterystyka konstrukcji

Przedmiotowa konstrukcja (rys. 5.21) składa się z dwóch skrzynkowych, blachownicowych dźwigarów o pochylonych środnikach i wgłębieniach korytkowych do bezpośredniego mocowania szyn. Segmenty skrzynkowe połączone są ze sobą poprzecznicami, montowanymi do dźwigarów za pomocą śrub. Wysokość i przekrój dźwigarów są zmienne. Zmianę wykonano poprzez skokowe pogrubienie oraz nakładki pasów górnych i dolnych. Zgodnie z PKP BPK [1985], przęsło zostało zaprojektowane na obciążenie użytkowe dla klasy  $k = 0$  wg PN-85/S-10030 „Obiekty mostowe. Obciążenia”.

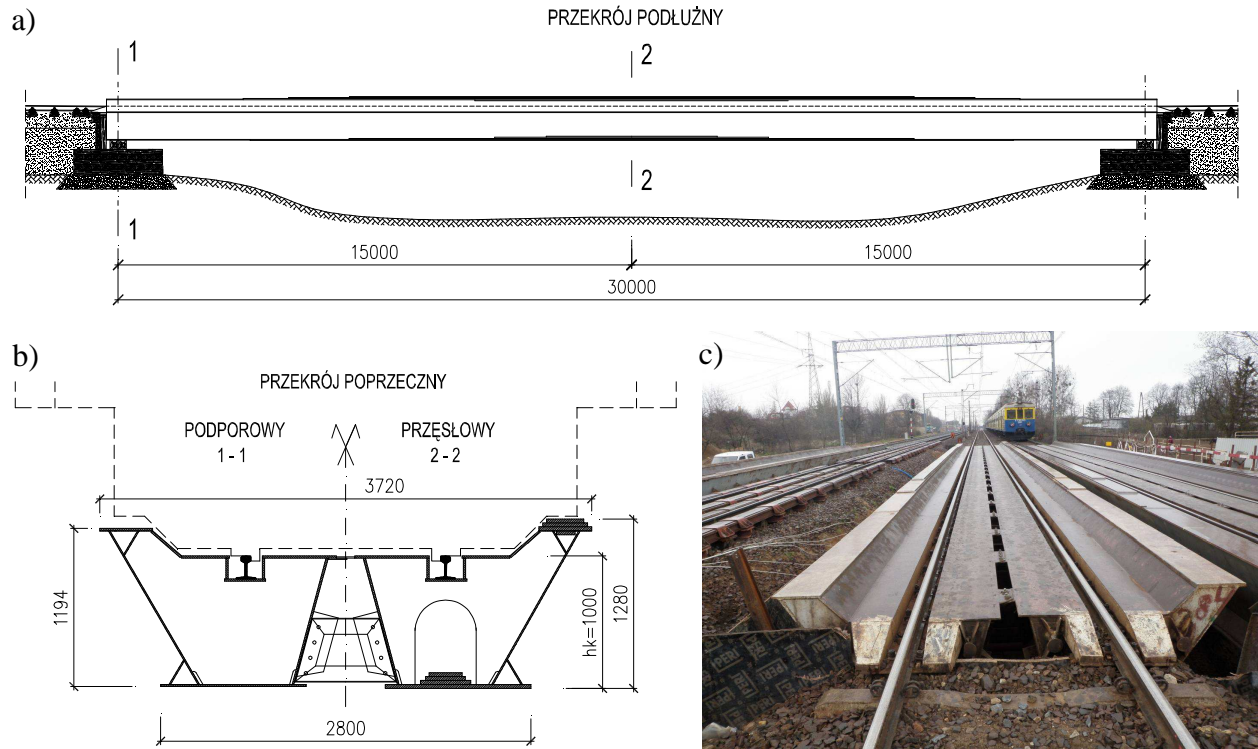
Bezpośrednie mocowanie szyn do konstrukcji (szyny mocowane są jedynie za pośrednictwem podkładek izolacyjnych z polietylenu gr. 6 mm) jest w rozważanym przypadku korzystne, ponieważ eliminuje skomplikowaną problematykę pracy toru na podsypce.

Podstawowe parametry przęsła to:

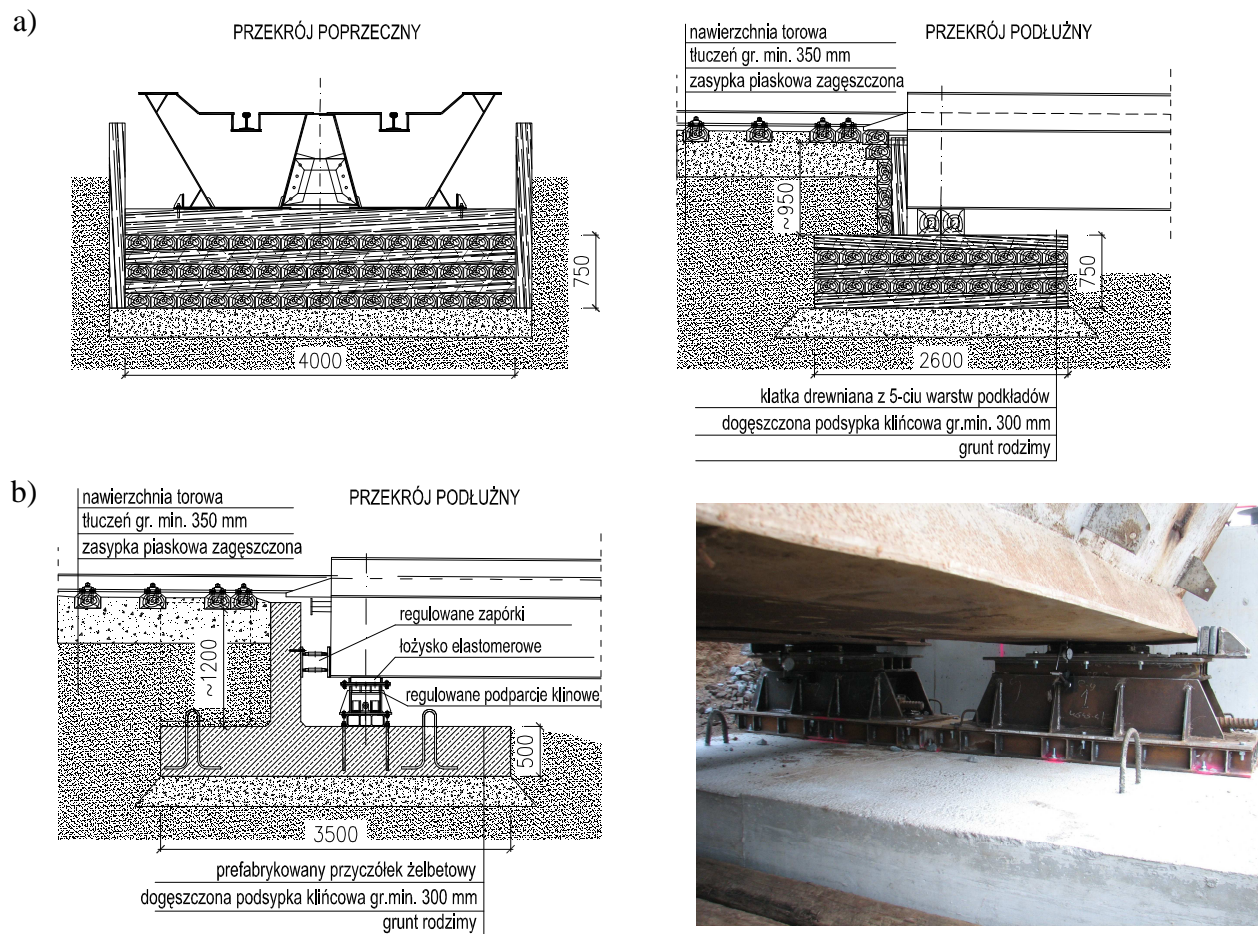
- długość całkowita: 30,70 m,
- rozpiętość teoretyczna: 30,00 m,
- szerokość całkowita: 3,72 m,
- obciążenie użytkowe: klasa  $k = 0$  wg PN-85/S-10030,
- prędkość maksymalna: 60 km/h,
- wysokość konstrukcyjna: 102,3 cm (szyny 60E1); 100,0 cm (szyny S49),
- masa całkowita: 69,8 t,
- stal konstrukcyjna: St3M.

Standardowe posadowienie przęsła wykonuje się na klatkach drewnianych z min. pięciu warstw podkładów kolejowych (rys. 5.22a). Jako łożysko wykorzystuje się zazwyczaj dwie mostownice z twardego drewna. Ten tymczasowy charakter przyczółków oraz ograniczone możliwości regulacji układu torowego na konstrukcji i w bezpośrednim jej sąsiedztwie, skutkują ograniczeniem prędkości taboru do 30 km/h. Należy również zaznaczyć, iż tak ukształtowane posadowienie (klatki drewniane) wykazuje stosunkowo dużą podatność. Przeprowadzone dotychczas badania statyczne konstrukcji (KBP [2009], KBP [2010]) pokazują, iż sprężyste osiadania przyczółków sięgają kilku milimetrów (przy obciążeniu lokomotywą ST44 lub żurawiem kolejowym EDK 300/5).





Rys. 5.21. Analizowana konstrukcja odciążająca KO30: a) schemat przekroju podłużnego, b) schemat przekroju poprzecznego, c) widok wbudowanej konstrukcji w torze SKM nr 502 (budowa „Drogi Zielonej” w Gdańsku)



Rys. 5.22. Oparcie przęsła KO30 na podporach: a) klasyczne rozwiązanie przyczółka z klatek drewnianych – torzy nr 501 i 502, b) rozwiązanie przyczółków żelbetowych w torze nr 2 (wg projektu KBP<sup>1</sup> [2012])

#### 5.4.2.2. Badania dynamiczne konstrukcji in-situ

Rozważane konstrukcje (trzy identyczne przęsła) wbudowane zostały w torach nr 501 i 502 (tory SKM) oraz w torze nr 2 (tor PLK). Przęsła eksploatowane były w całym okresie trwania budowy.

Posadowienie przęseł w torach nr 501 i 502 wykonano na drewnianych klatkach zgodnie z rozwiązaniem przedstawionym na rys. 5.22a. Przed oddaniem do eksploatacji, konstrukcje poddano próbnemu obciążeniu statycznemu (KBP<sup>2</sup> [2012], KBP<sup>3</sup> [2012]). Dopuszczono maksymalną prędkość taboru  $v_{\max} = 30$  km/h. Oba przęsła były intensywnie eksploatowane przez tabor SKM, dlatego jedno z nich wykorzystano jako obiekt testowy i w późniejszym etapie poddano badaniom eksploatacyjnym.

Dla toru nr 2 postawiono warunek zachowania wyższej prędkości maksymalnej, wynoszącej 60 km/h. Z tego powodu przęsło posadowiono na specjalnie zaprojektowanym, żelbetowym przyczółku (rys. 5.22b), gwarantującym bezpieczne odprowadzenie sił wynikających ze zwiększonych oddziaływań dynamicznych (ŻÓŁTOWSKI, SZAFRAŃSKI, KOZAKIEWICZ [2013]).

Z uwagi na wymóg prędkości maksymalnej oraz nietypowe rozwiązanie stref podporowych, oprócz badań statycznych wykonano również badania dynamiczne (KBP<sup>4</sup> [2012]). Wnioski z badań wykorzystano w niniejszej pracy.

W sumie badania przeprowadzono na dwóch bliźniaczych przęsłach:

- przęsło w torze nr 2 w ramach próbnego obciążenia obiektu,
- przęsło w torze nr 502 w warunkach codziennej eksploatacji.

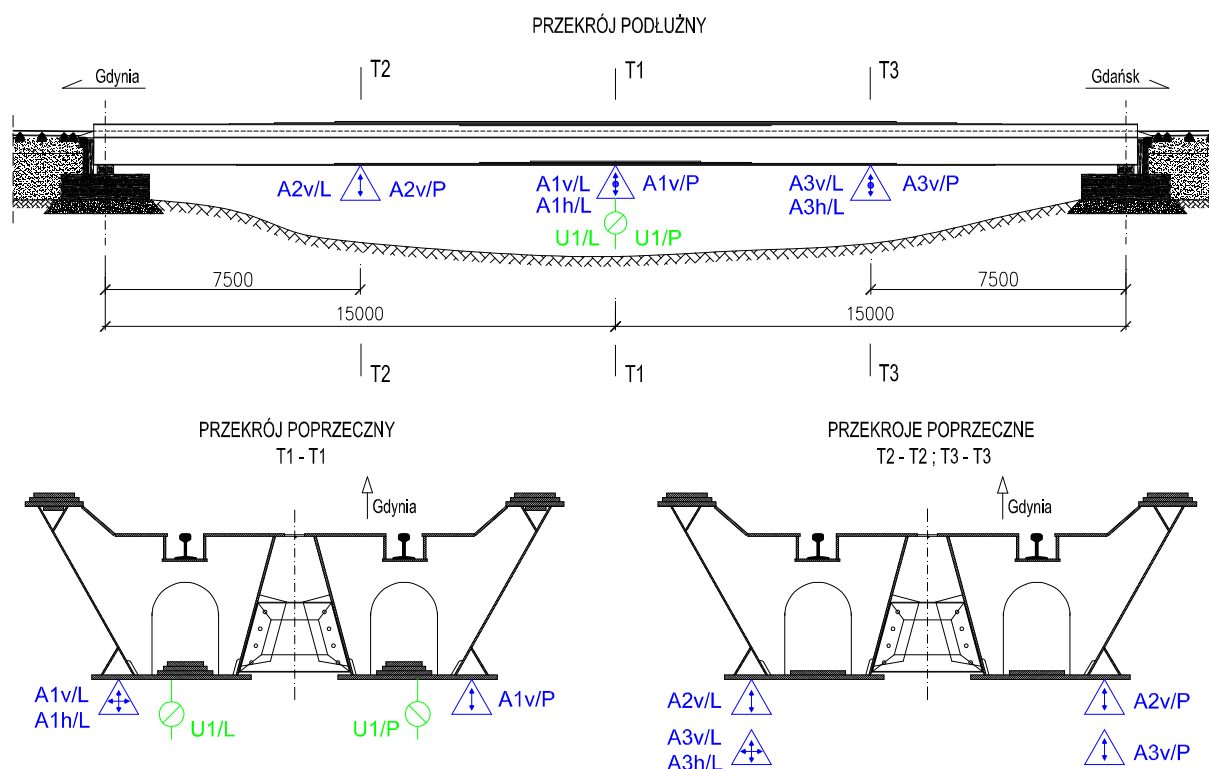
Głównym celem badań było:

- określenie cech dynamicznych przęseł (częstotliwości drgań, liczby tłumienia) – aktualizacja modelu numerycznego przęsła,
- określenie odpowiedzi przęseł wywołanej przejazdem rzeczywistego taboru kolejowego – porównanie wyników badań z wynikami symulacji numerycznych.

Wielkościami mierzonymi były przemieszczenia i przyspieszenia przęseł. W obu przypadkach rozmieszczenie przekrojów i punktów pomiarowych było identyczne (rys. 5.23):

- U1/L, U1/P – punkty pomiaru przemieszczeń pionowych w środku rozpiętości przęsła (przekrój T1-T1),
- A1v/L, A1v/P – punkty pomiaru składowych pionowych przyspieszeń w środku rozpiętości przęsła (przekrój T1-T1),
- A1h/L – punkt pomiaru składowej poziomej (poprzecznej) przyspieszeń w środku rozpiętości przęsła (przekrój T1-T1),
- A2v/L, A2v/P – punkty pomiaru składowych pionowych przyspieszeń w ¼ rozpiętości przęsła (przekrój T2-T2),
- A3v/L, A3v/P – punkty pomiaru składowych pionowych przyspieszeń w ¼ rozpiętości przęsła (przekrój T3-T3),
- A3h/L – punkt pomiaru składowej poziomej (poprzecznej) przyspieszeń w ¼ rozpiętości przęsła (przekrój T3-T3).

Do pomiaru ugięć wykorzystano potencjometryczne przetworniki liniowego przemieszczenia NOVOTECHNIK serii T100 o dokładności pomiaru 0,01 mm (rys. 5.24a). Przyspieszenia mierzono czujnikami akcelerometrycznymi APEK MA-24.01 o dokładności pomiaru  $0,01 \text{ m/s}^2$  (rys. 5.24b). Rejestrator pomiarowy stanowił 16-to kanałowy mostek APEK AV32AKProjekt (rys. 5.24c).



Rys. 5.23. Rozmieszczenie przekrojów i punktów pomiarowych na badanych przęsłach KO30 (opis oznaczeń w tekście)

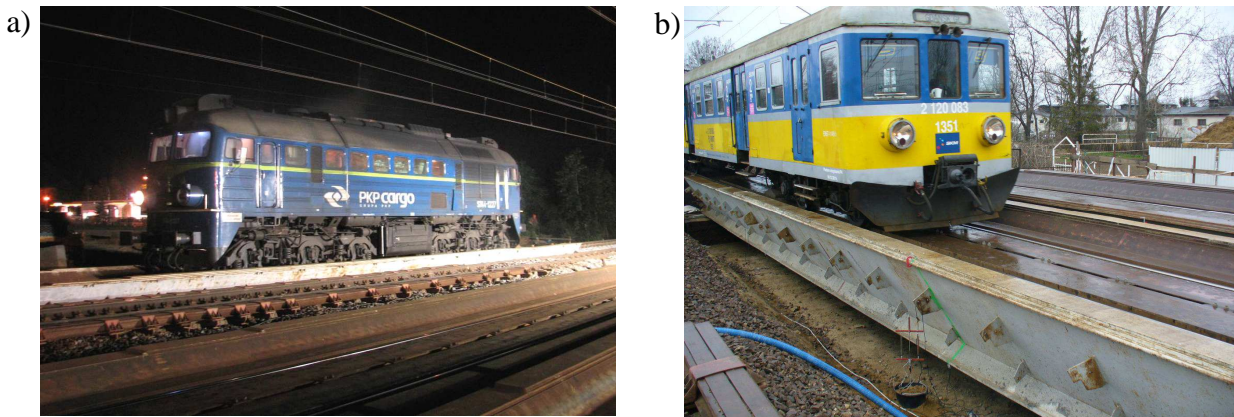


Rys. 5.24. Aparatura pomiarowa wykorzystana podczas badań przęsł KO30: a) przetwornik liniowego przemieszczenia NOVOTECHNIK serii T100, b) akcelerometr APEK MA-24.01, c) 16-to kanałowy mostek pomiarowy APEK AV32AKProjek

Wzbudzenia drgań przęsła w torze nr 2 dokonywano wskutek przejazdu lokomotywy ST44 z określoną prędkością (rys. 5.25a). Kolejne prędkości przyjmowano z przedziału  $10 \div 60$  km/h co 10 km/h. Dla każdej prędkości wykonano po dwa przejazdy (jeden przejazd w kierunku Gdańska oraz jeden przejazd w kierunku Sopotu – łącznie 12 przejazdów). Drgania przęsła wbudowanego w torze nr 502 generowane były wskutek przejeżdżających składów SKM EN57 w kierunku Gdańska (rys. 5.25b). Składy zestawione były w dwóch zasadniczych konfiguracjach:

- R+S+S+R (całkowita długość składu 87,54 m),
- R+S+R+R+S+R (całkowita długość składu 129,94 m),

gdzie R oznacza wagon rozrządowy, natomiast S wagon silnikowy. Wykonano łącznie 19 pomiarów odpowiedzi (19 przejazdów obciążenia). Prędkości przejazdów oscylowały wokół dopuszczalnej na konstrukcji wartości maksymalnej, równej 30 km/h (tabl. 5.3).



Rys. 5.25. Tabor kolejowy wykorzystany podczas badań przęsła KO30: a) lokomotywa ST44 (tor nr 2), b) jednostka trakcyjna serii EN57 (tor nr 502)

Tabl. 5.3. Czasy i prędkości przejazdów składów SKM podczas badań konstrukcji KO30 w torze nr 502

Nr przejazdu	Konfiguracja składu	Czas przejazdu [s]	Prędkość przejazdu [km/h]	Nr przejazdu	Konfiguracja składu	Czas przejazdu [s]	Prędkość przejazdu [km/h]
1	R+S+S+R	15,30	26,3	11	R+S+R+R+S+R	18,13	25,8
2	R+S+R+R+S+R	17,11	27,3	12	R+S+R+R+S+R	16,61	28,2
3	R+S+R+R+S+R	15,96	29,3	13	R+S+R+R+S+R	15,30	30,6
4	R+S+R+R+S+R	18,49	25,3	14	R+S+R+R+S+R	14,14	33,1
5	R+S+S+R	9,81	32,1	15	R+S+S+R	9,88	31,9
6	R+S+S+R	12,25	25,7	16	R+S+R+R+S+R	14,45	32,4
7	R+S+R+R+S+R	16,49	28,4	17	R+S+S+R	10,00	31,5
8	R+S+R+R+S+R	15,03	31,1	18	R+S+R+R+S+R	14,77	31,7
9	R+S+S+R	11,06	28,5	19	R+S+S+R	15,35	20,5
10	R+S+S+R	10,69	29,5				

### 5.4.2.3. Model obliczeniowy konstrukcji

Model MES przęsła wykonano w programie SOFiSTiK. W opisie konstrukcji zastosowano elementy belkowe o 12-tu stopniach swobody (por. rys. 4.9 w rozdziale 4). Parametry geometryczne i materiałowe przyjęto na podstawie projektu PKP BPK [1985]. Ostateczną masę oraz tłumienie przęsła określono na podstawie badań (patrz p. 5.4.2.4.). Elementy przęsła opisano na jednej osi węzłów. Zmianę przekrojów wykonano skokowo (rys. 5.26a). Podpory przyjęto jako punktowe w schemacie wolnopodpartym.

Elementy toru jezdni (pręty o profilu szyny 60E1) opisano na dodatkowych węzłach umieszczonych symetrycznie względem osi przęsła w rozstawie 1435 mm. Tor jezdni poza przęsłem przyjęto o bardzo dużej sztywności ( $E = 205 \cdot 10^9$  MPa). Powiązanie szyn z dźwigarem w obrębie przęsła wykonano przez zastosowanie nieważkich poprzecznic, także o bardzo dużej sztywności – rys. 5.26b. Zwolniono dodatkowo więzy rotacyjne wokół osi podłużnej poprzecznic. Podsumowaniem przyjętej dyskretyzacji jest rys. 5.26c oraz poniższe zestawienie:

całkowita liczba węzłów:	925,
całkowita liczba elementów:	1044,
liczba węzłów dźwigara:	61,
liczba elementów dźwigara:	60,

liczba elementów poprzecznic

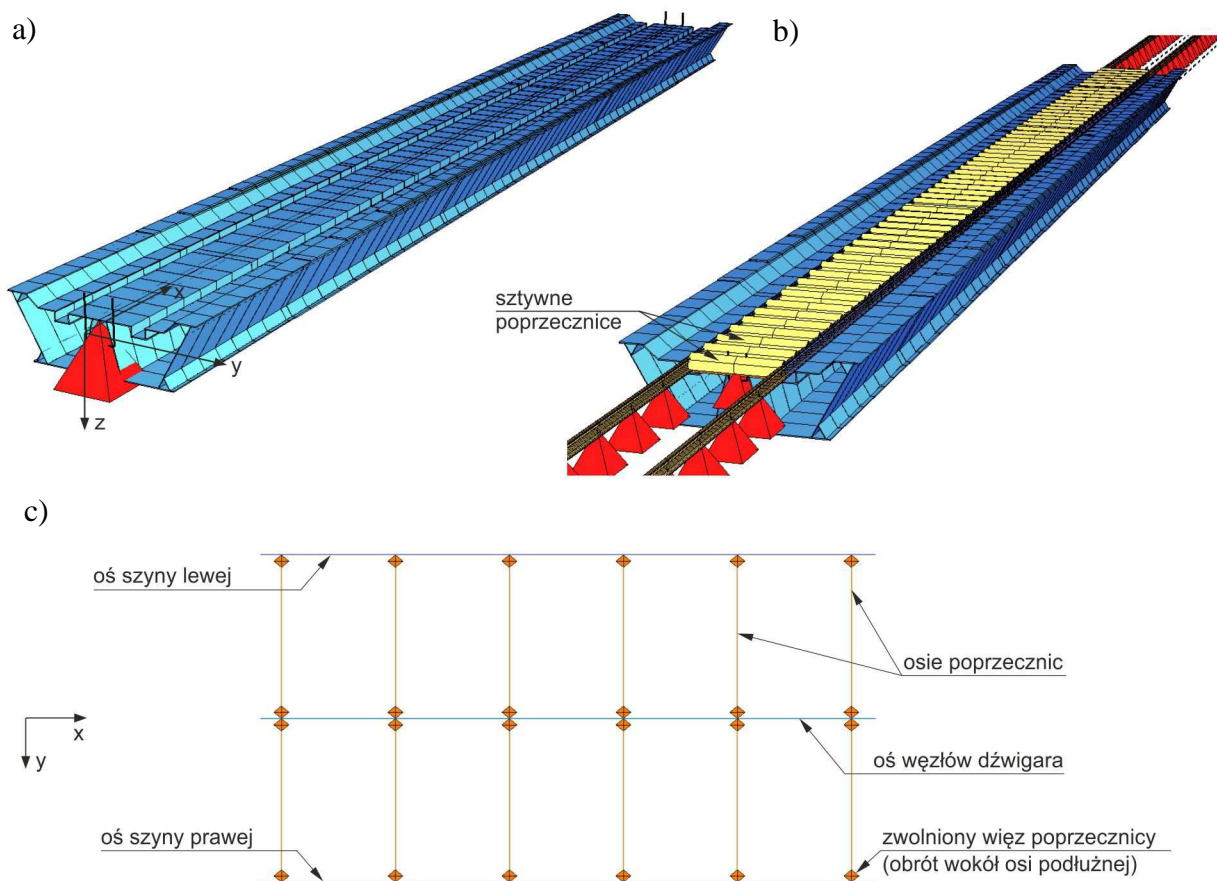
(elementy nieważkie o bardzo dużej sztywności): 122,

liczba elementów szyn w obrębie przęsła (pręty nieważkie): 120,

liczba elementów szyn poza przęsłem

(pręty nieważkie o bardzo dużej sztywności): 742,

liczba zablokowanych węzłów węzłów podporowych: 7.



Rys. 5.26. Model MES przęsła KO30 (SOFiSTiK): a) dźwigar główny, b) tor jezdny oraz sztywne poprzecznice w obrębie przęsła, c) układu osi elementów (wycinek przęsła)

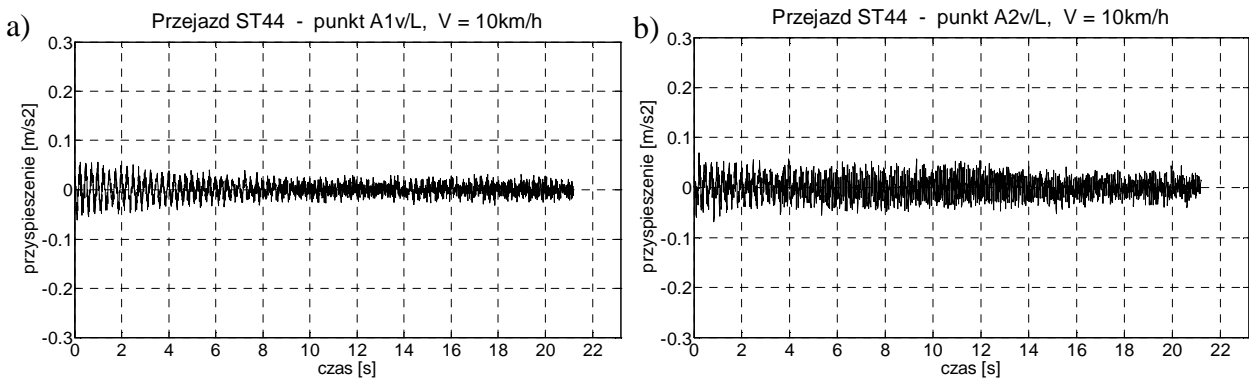
#### 5.4.2.4. Cechy dynamiczne konstrukcji

Cechy dynamiczne konstrukcji (częstotliwości drgań, liczby tłumienia oraz postacie drgań) wyznaczono w celu weryfikacji i aktualizacji modelu numerycznego. Rzeczywiste tłumienie w konstrukcji określić można jedynie na podstawie badań. Pomierzone częstotliwości drgań dają pogląd na poprawność oszacowania masy i sztywności przęsła.

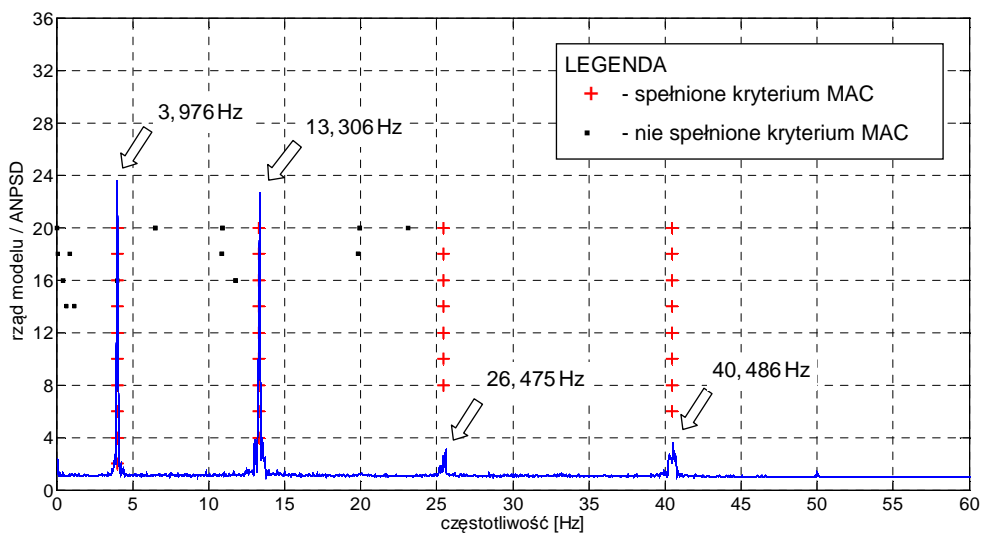
Wspomniane parametry wyznaczono na podstawie odpowiedzi swobodnych przęseł wywołanych przejazdem lokomotywy ST44 (w przypadku konstrukcji w torze nr 2) oraz jednostek EN57 (w przypadku konstrukcji w torze nr 502). Zakres drgań swobodnych obejmował czas liczony od chwili zjazdu obciążenia z konstrukcji do chwili wytłumienia się drgań. Identyfikację przeprowadzono w oparciu o sygnały przyspieszeń wykorzystując algorytm metody ERA oraz PP.

## KONSTRUKCJA W TORZE NR 2

Na rys. 5.27 pokazano wybrane przebiegi przyspieszeń przęsła (zakres drgań swobodnych), zarejestrowane podczas przejazdu lokomotywy z prędkością 10 km/h (dla tej prędkości zidentyfikowano największą liczbę modów). Na rys. 5.28 pokazano diagram stabilizacyjny metody ERA dla wspomnianego przypadku wymuszenia. Na diagram naniesiono przeskalowany wykres ANPSD. Analiza diagramu wskazuje na obecność w sygnałach czterech stabilnych częstotliwości, które identyfikowane są już dla modelu rzędu 8. Przy założonym poziomie zgodności 98%, dla modów odpowiadających tym częstotliwościom spełnione jest również kryterium MAC. Obecność wskazanych częstotliwości w odpowiedzi pokazują dodatkowo wyraźne piki na wykresie ANPSD.



Rys. 5.27. Przebiegi przyspieszeń pionowych przęsła KO30 w torze nr 2 (zakres drgań swobodnych) zarejestrowane po przejeździe lokomotywy ST44 z prędkością 10 km/h w kierunku Gdańska: a) przekrój w środku rozpiętości przęsła (punkt A1v/L), b) przekrój w 1/4 rozpiętości przęsła (punkt A2v/L)

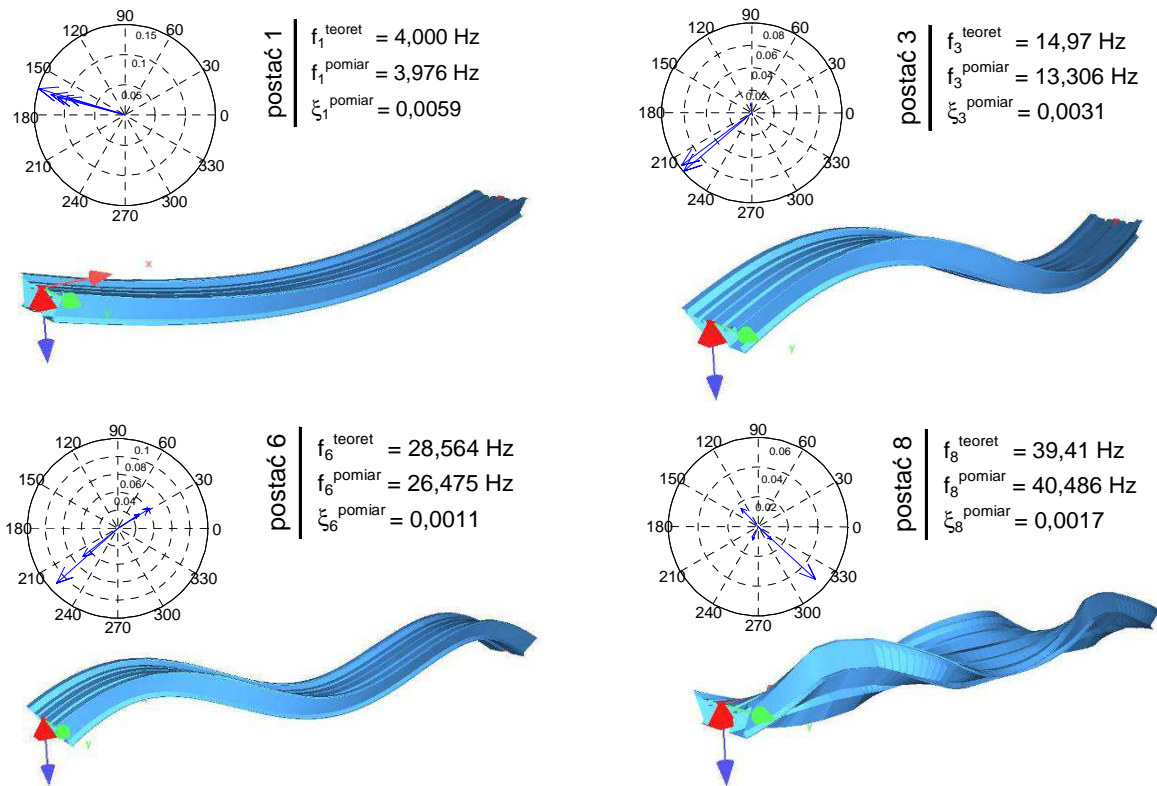


Rys. 5.28. Diagram stabilizacyjny częstotliwości dla przęsła KO30 w torze nr 2 – przejazd lokomotywy ST44 z prędkością 10 km/h w kierunku Gdańska

Na rys. 5.29 porównano rezultaty teoretycznej (SOFiSTiK) oraz eksperymentalnej (pomiar) analizy modalnej. Uwzględniono jedynie zidentyfikowane mody (postacie drgań). Postacie pokazano zarówno w układzie współrzędnych biegunowych jak i w układzie współrzędnych kartezjańskich. Wektory drgań odpowiadające zidentyfikowanym częstotliwościom  $f_i^{pomiar}$  wyznaczono z zależności:

$$\varphi_{ij} = |c_{ij}| \operatorname{sign}\{ \operatorname{Re}(c_{ij}) \} \quad (5.8)$$

gdzie  $\varphi_{ij}$  oznacza  $i$ -tą współrzędną ( $i$ -ty punkt pomiarowy) rzeczywistego wektora  $j$ -tej postaci drgań,  $c_{ij}$  to  $i$ -ta współrzędną zespolonego wektora  $j$ -tej postaci drgań.



Rys. 5.29. Zidentyfikowane mody pręśla KO30 w torze nr 2 – porównanie wyników teoretycznych (SOFiSTiK) i pomierzonych (ERA, PP)

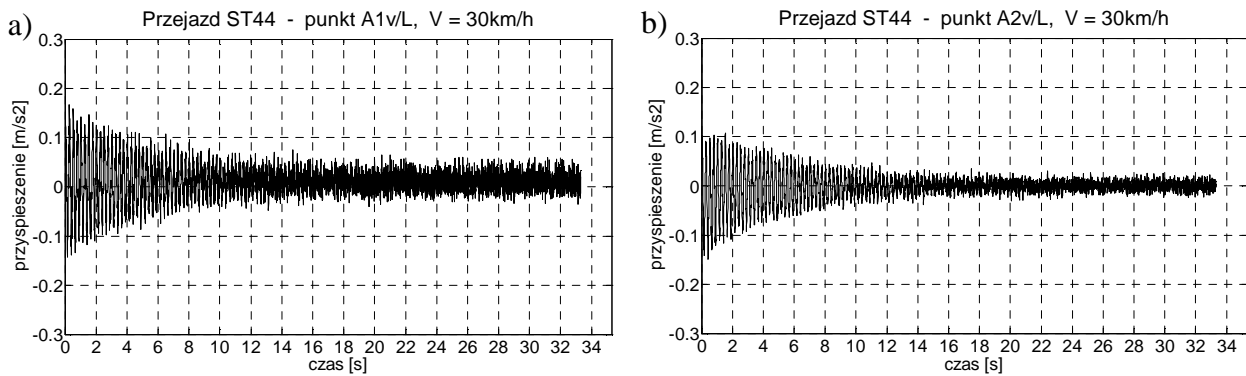
W celu kontroli rozwiązania, liczbę tłumienia pierwszego modu określono metodą logarytmicznego dekrementu tłumienia (por. p. 4.4 w rozdziale 4). Wykorzystano pojedynczy sygnał odpowiedzi pionowej pręśla (czujnik A1v/L). Do wyznaczenia LDT wykorzystano 12 kolejnych ekstremów  $z_i$  odfiltrowanego sygnału odpowiedzi swobodnej:

$$LDT = \frac{1}{12} \ln \left( \frac{z_1}{z_{13}} \right). \quad (5.9)$$

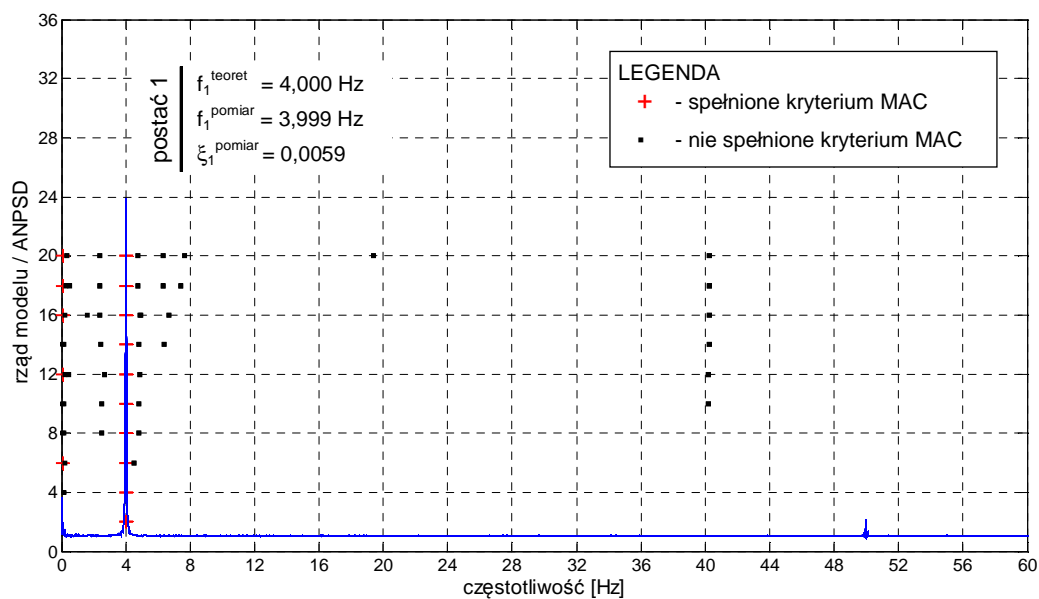
Ostatecznie liczbę tłumienia wyznaczono z zależności:

$$\xi_{LDT} = \frac{LDT}{\sqrt{LDT^2 + 4\pi^2}} = 0,0061. \quad (5.10)$$

Na rys. 5.30 pokazano odpowiedź swobodną pręśla po przejeździe lokomotywy z prędkością 30 km/h. Dla tej prędkości oraz wyższych, oba algorytmy identyfikacji (ERA, PP) wskazywały jedynie na pierwszą postać drgań – drgania giętne o częstotliwości  $\sim 4,0$  Hz (rys. 5.31). W tabl. 5.4 zestawiono pełne rezultaty identyfikacji pierwszej postaci drgań dla poszczególnych prędkości przejazdu. Przykładowy opis w tabeli „Gdańsk 10” oznacza przejazd lokomotywy w kierunku Gdańska z prędkością 10 km/h.



Rys. 5.30. Przebiegi przyspieszeń pionowych przęsła KO30 w torze nr 2 (zakres drgań swobodnych) – przejazd lokomotywy ST44 w kierunku Sopotu z prędkością 30 km/h: a) przekrój w środku rozpiętości przęsła (punkt A1v/L), b) przekrój w 1/4 rozpiętości przęsła (punkt A2v/L)



Rys. 5.31. Diagram stabilizacyjny częstotliwości dla przęsła KO30 w torze nr 2 – przejazd lokomotywy ST44 w kierunku Sopotu z prędkością 30 km/h

Tabl. 5.4. Zidentyfikowane częstotliwości i liczby tłumienia pierwszego modu przęsła KO30 w torze nr 2 dla poszczególnych prędkości przejazdu lokomotywy

Przejazd	Zidentyfikowane parametry		
	$f$ [Hz]	$\xi$ [-] (ERA)	$\xi$ [-] (LDT)
Gdańsk 10	3,976	0,0059	0,0061
Gdańsk 20	3,969	0,0064	0,0060
Sopot 30	3,999	0,0059	0,0055
Sopot 40	3,997	0,0062	0,0066
Sopot 50	3,985	0,0059	0,0057
Sopot 60	3,993	0,0069	0,0062
Średnio	3,989	0,0061	0,0060

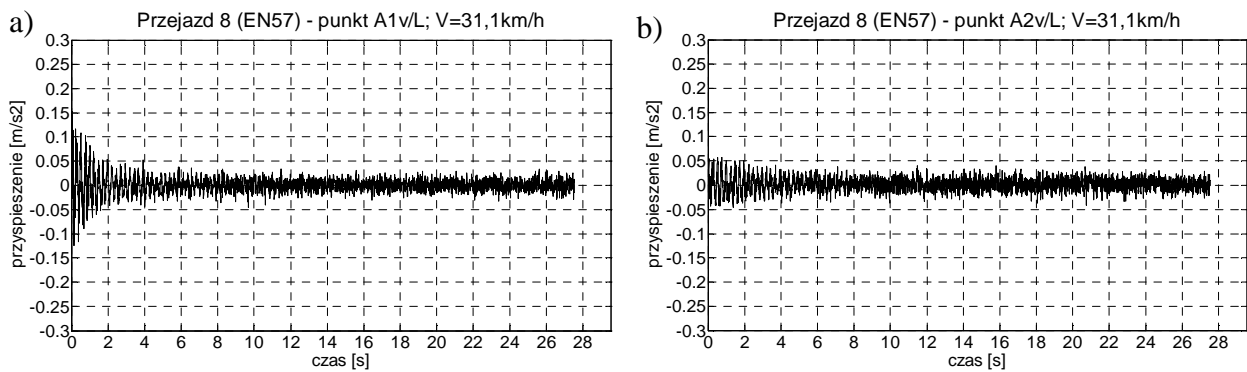


## KONSTRUKCJA W TORZE NR 502

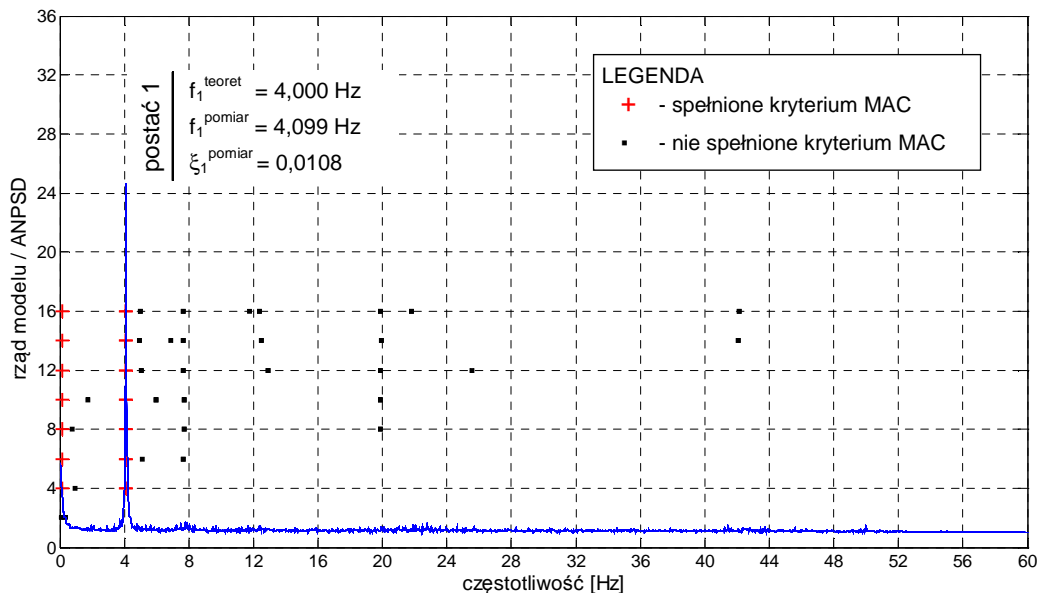
Na rys. 5.32 pokazano wybrane wykresy przyspieszeń przęsła KO30 w torze nr 502 (zakres drgań swobodnych) zarejestrowane po przejeździe jednostki EN57 (przejazd nr 8 wg tabl. 5.3). Diagram stabilizacyjny częstotliwości (rys. 5.33) wskazuje jedynie na pierwszą postać drgań – drgania giętne o częstotliwości  $\sim 4$  Hz.

Średnie wartości częstotliwości i liczby tłumienia obliczone z 15-tu przejazdów (cztery pomiary odrzucono z uwagi zakłócenia i zniekształcenia wywołane przejazdem taboru po sąsiednich torach) wynoszą:

- $f_1^{pomiar} = 4,072$  [Hz],
- $\xi_1^{pomiar} = 0,0117$  [-].



Rys. 5.32. Przebiegi przyspieszeń pionowych przęsła KO30 w torze nr 502 (zakres drgań swobodnych) zarejestrowane po przejeździe jednostki EN57 (skład R+S+R+R+S+R) z prędkością 31,1 km/h: a) przekrój w środku rozpiętości przęsła (punkt A1v/L), b) przekrój w  $\frac{1}{4}$  rozpiętości przęsła (punkt A2v/L)



Rys. 5.33. Diagram stabilizacyjny częstotliwości dla przęsła KO30 w torze nr 502 – przejazd jednostki EN57 (skład R+S+R+R+S+R) z prędkością 31,1 km/h

## PODSUMOWANIE BADAŃ

- Głównym celem badań było określenie odpowiedzi oraz rzeczywistych cech dynamicznych badanej konstrukcji odciażającej, w celu weryfikacji i aktualizacji jej modelu numerycznego.
- Cechy dynamiczne konstrukcji (częstotliwości drgań, postacie drgań, liczby tłumienia) zidentyfikowano na podstawie drgań swobodnych przęsła. Wykorzystano algorytmy metody ERA oraz PP.
- Podczas przejazdów taboru w zakresie rozważanych prędkości nie zaobserwowano istotnego wzbudzenia drgań poprzecznych oraz skrętnych. Dotyczy to obu badanych przęseł. Przy prędkościach przejazdu w granicach 30 km/h i wyższych, zarówno metoda ERA jak i PP identyfikowały jedynie pierwszą postać drgań (drgania gięte o częstotliwości  $\sim 4$  Hz).
- Wzrost prędkości ruchu powoduje zwiększenie poziomu wzbudzenia drgań swobodnych przęsła. Współczynniki przeciążenia dynamicznego są jednak małe. Wyznaczona na podstawie badań maksymalna wartość współczynnika wyniosła 1,056 (KBP<sup>4</sup>[2012]) i odpowiadała prędkości 50 km/h (wartość teoretyczna wyznaczona na podstawie PN-85/S-1030 [1985] wynosi 1,053). Dla pozostałych prędkości przejazdu „pomierzone” współczynniki różniły się nieznacznie.
- Identyfikacja pierwszej częstotliwości drgań pokazuje prawidłowe oszacowanie w modelu numerycznym masy i sztywności przęsła. Obie częstotliwości (teoretyczna i pomierzona) są bardzo podobne.
- W przypadku konstrukcji w torze nr 2, odpowiedź swobodna przęsła charakteryzuje się małym tłumieniem. Dla podstawowej częstotliwości drgań zidentyfikowana liczba tłumienia wyniosła  $\xi = 0,0061$  (średnio) co daje LDT na poziomie 3,8%.
- W przypadku konstrukcji w torze nr 502, odpowiedź swobodna jest znacznie bardziej tłumiona. Podstawowej częstotliwości drgań odpowiada  $\xi = 0,0117$  (średnio) co daje LDT na poziomie 7,3%. Przypuszczalnym powodem jest sposób posadawienia przęsła, w szczególności zaporcie jego końców o drewniane ścianki żwirowe przyczółków. Mniejszy poziom wzbudzenia drgań oraz niezbyt „czysty” sposób posadawienia przęsła, wpłynął również na jakościowe wyniki identyfikacji tłumienia. O ile w przypadku konstrukcji w torze nr 2 wartości tłumienia dla poszczególnych przejazdów były podobne, o tyle w przypadku konstrukcji w torze nr 502, występowały znaczne rozbieżności (sięgające nawet 50%).

## DEFINICJA TŁUMIENIA W MODELU NUMERYCZNYM PRZĘSŁA

Analiza układu most-pojazd ruchomy wymaga znajomości parametrów dynamicznych obciążenia oraz konstrukcji. Parametry rozważanych modeli obciążenia zostały zdefiniowane w podrozdziale 5.3. W przypadku modelu przęsła, zasadniczą trudnością jest określenie współczynników modelu tłumienia, zaimplementowanego w programie liczącym (w komercyjnych systemach MES, macierze sztywności oraz macierze mas są generowane na podstawie zdefiniowanych przekrojów, charakterystyk materiałowych oraz przyjętej dyskretyzacji).

W programie SOFiSTiK wykorzystywany jest model tłumienia Rayleigh’a (CLOUGH I PENZIEN [1993]). W modelu tym, macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  wyrażona jest za pomocą macierzy mas  $\mathbf{M}$  i sztywności  $\mathbf{K}$ :

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K}, \quad (5.11)$$

gdzie  $a$  i  $b$  to współczynniki proporcjonalności, które należy określić. W zastosowaniach praktycznych często model tłumienia redukuje się do pojedynczych składników sumy, tj.  $\mathbf{C} = a\mathbf{M}$  lub  $\mathbf{C} = b\mathbf{K}$ . Sposoby wyznaczania współczynników  $a$  i  $b$  w oparciu o parametry modalne wybranych postaci drgań podał m. in. LEWANDOWSKI [2006].

Jeżeli dysponujemy informacją o częstościach i liczbach tłumienia dwóch wybranych postaci drgań (identyfikacja), parametry  $a$  i  $b$  wyznaczyć można jako:

$$a = \frac{2\omega_i\omega_j(\xi_i\omega_j - \xi_j\omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} = \frac{4\pi f_i f_j (\xi_i f_j - \xi_j f_i)}{f_j^2 - f_i^2},$$

$$b = \frac{2(\xi_j\omega_j - \xi_i\omega_i)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} = \frac{\xi_j f_j - \xi_i f_i}{\pi(f_j^2 - f_i^2)},$$
(5.12)

gdzie  $\omega_i, \omega_j$  ( $f_i, f_j$ ) to częstości (częstotliwości) drgań odpowiednio  $i$ -tego oraz  $j$ -tego modu, natomiast  $\xi_i, \xi_j$  to odpowiadające im liczby tłumienia.

W praktyce bardzo często współczynniki  $a$  i  $b$  wyznacza się dla podstawowej (pierwszej) postaci drgań z uwagi na jej dominujący (często jedyny identyfikowalny) udział w odpowiedzi. Przy założeniu modelu tłumienia  $\mathbf{C} = a\mathbf{M}$ , współczynnik  $a$  wyznacza się ze wzoru:

$$a = 2\xi_1\omega_1 = 4\pi\xi_1 f_1, \quad (5.13)$$

zaś dla modelu tłumienia  $\mathbf{C} = b\mathbf{K}$ , współczynnik  $b$  można określić jako:

$$b = 2\xi_1/\omega_1 = \xi_1/\pi f_1. \quad (5.14)$$

Powyższe założenia zweryfikowano na podstawie przeprowadzonych testów. Weryfikacji dokonano dla obu przęseł KO30 – przęśła w torze nr 2 oraz przęśła w torze nr 502. W obu przypadkach porównywano liczby tłumienia wyznaczone na podstawie logarytmicznych dekrementów tłumienia pomierzonej i teoretycznej odpowiedzi swobodnej przęśła dla pierwszej postaci drgań. Teoretyczne przebiegi drgań uzyskano wskutek przejazdu obciążenia (strumień sił skupionych) po modelu numerycznym przęśła.

Tłumienie konstrukcji w torze nr 2 dobrano na podstawie zależności (5.12), wykorzystując zidentyfikowane parametry modalne pierwszej i trzeciej postaci drgań (por. rys. 5.29). W przypadku konstrukcji w torze nr 502, zidentyfikowano jedynie pierwszą postać drgań (por. rys. 5.33). W tym przypadku parametry  $a$  i  $b$  określono na podstawie zależności (5.13) i (5.14).

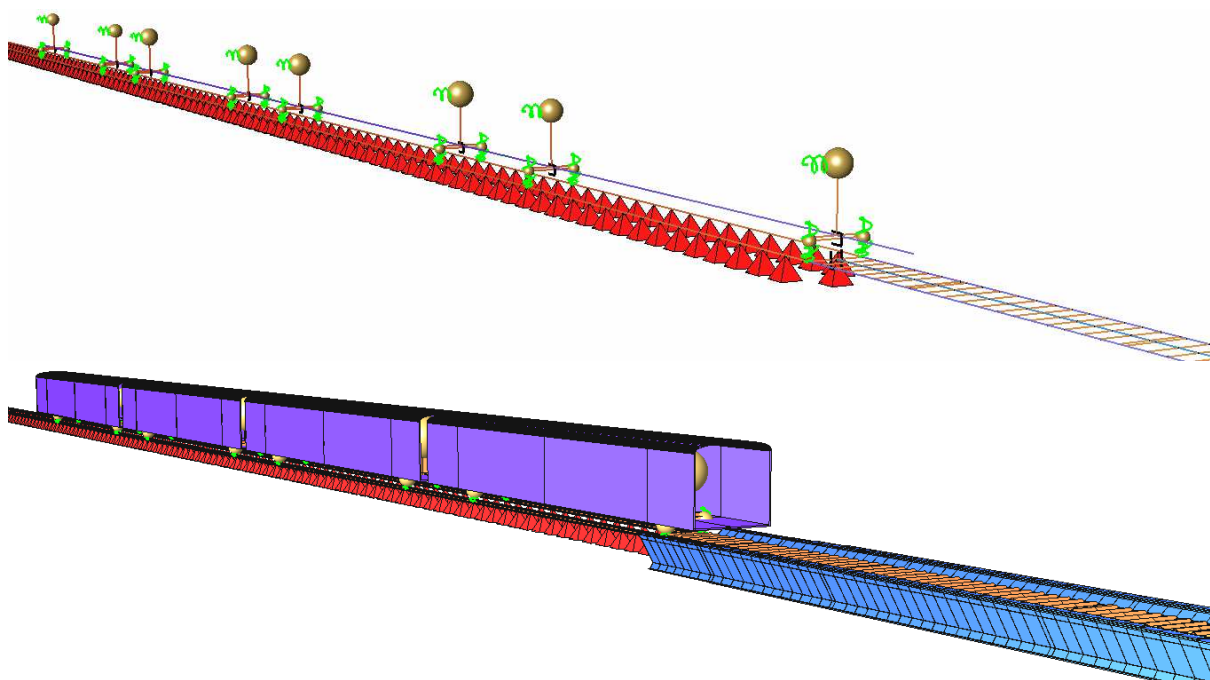
Dla obu przęseł, najlepsze rezultaty uzyskano przy zastosowaniu modelu tłumienia typu  $\mathbf{C} = b\mathbf{K}$  (współczynnik  $a = 0$ ). Podsumowaniem testów jest tabl. 5.5.

Tabl. 5.5. Parametry modalne i współczynniki modelu tłumienia wyznaczone dla przęśła KO30

Przęsło	Model tłumienia	Parametry modalne (ERA)				Tłumienie w konstrukcji			
		$f_1$ [Hz]	$\xi_1$ [-]	$f_3$ [Hz]	$\xi_3$ [Hz]	Zal.	$b$	$\xi_{LDT}^{pom.}$	$\xi_{LDT}^{teor.}$
Tor 2	$\mathbf{C} = b\mathbf{K}$	3,976	0,0059	13,306	0,0031	(5.12) <sup>2</sup>	$3,512 \cdot 10^{-5}$	0,0061	0,0065
Tor 502	$\mathbf{C} = b\mathbf{K}$	4,073	0,0117	-	-	(5.14)	$9,143 \cdot 10^{-4}$	0,0118	0,0124

### 5.4.2.5. Rezultaty analiz numerycznych

Na rys. 5.34 pokazano wizualizację jednego z modeli obliczeniowych (model pojazdu w wariantcie A (rys.5.3) i konfiguracji R+S+S+R). Dla tej konfiguracji oraz prędkości przejazdu 26 km/h dokonano jakościowego porównania wszystkich wcześniej rozważanych modeli obciążenia (strumienie sił, mas i dwa warianty modelu pojazdu torowego) z wynikami badań in-situ (przejazd nr 1 wg tabl. 5.3). Całkowanie numeryczne przeprowadzono z krokiem  $\Delta t = 0,004$  s, przyjmując parametry algorytmu Newmark'a  $\gamma = 0,55$  oraz  $\beta = 0,40$ .



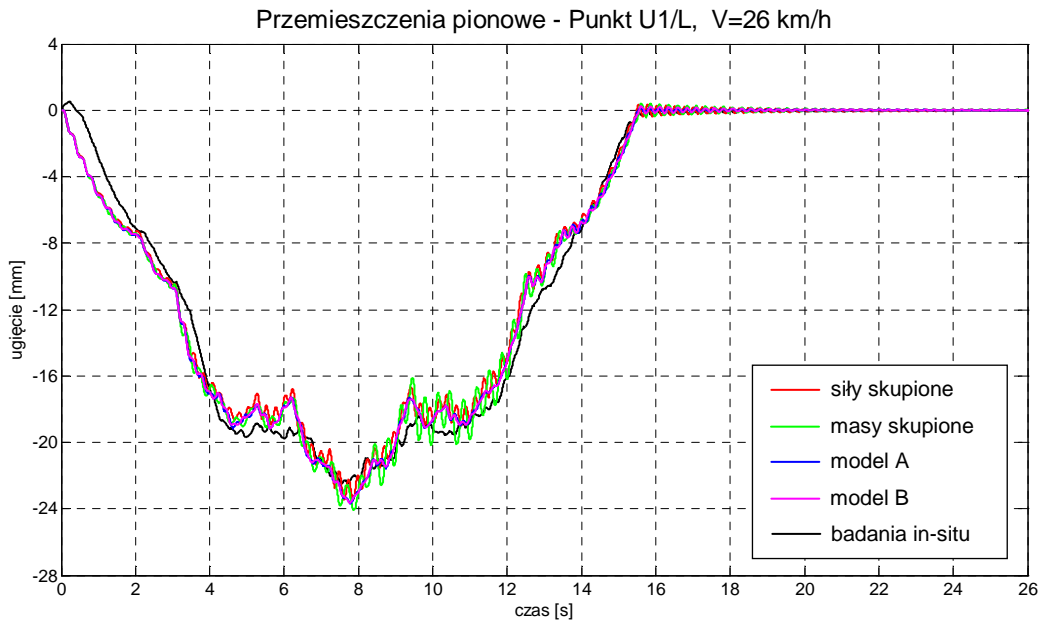
Rys. 5.34. Model obliczeniowy pojazd-most dla przykładu 1 (SOFiSTiK)

Dodatkową, istotną masę poruszającego się taboru stanowi masa pasażerów (ładunku). Według danych technicznych (por. tabl. 2.4 w rozdziale 2) wagon rozrządowy jednostki EN57 posiada 62 miejsca siedzące, wagon silnikowy 96 miejsc, zaś całkowita liczba miejsc stojących wynosi 468 (dla konfiguracji składu R+S+R). Z uwagi na brak możliwości ustalenia liczby podróżnych dla poszczególnych przejazdów, a także ich rozmieszczenia oraz masie, obliczenia dodatkowej masy przeprowadzono przy następujących założeniach:

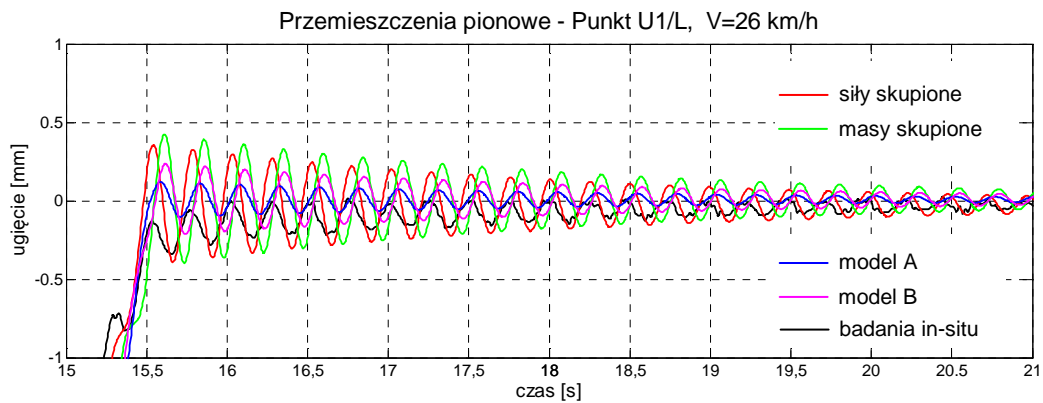
- wszystkie miejsca siedzące są zajęte a miejsca stojące wolne,
- ciężar pasażerów rozłożony jest równomiernie na długości i szerokości wagonu,
- średnia masa człowieka wynosi 80 kg.

Obliczoną masę pasażerów uwzględniono w masie resorowanej (masa  $M_n$  w modelu A oraz masa  $M_c$  w modelu B). W efekcie masa resorowana wagonu rozrządczego zwiększyła się o 4,96 t a wagonu silnikowego o 7,68 t.

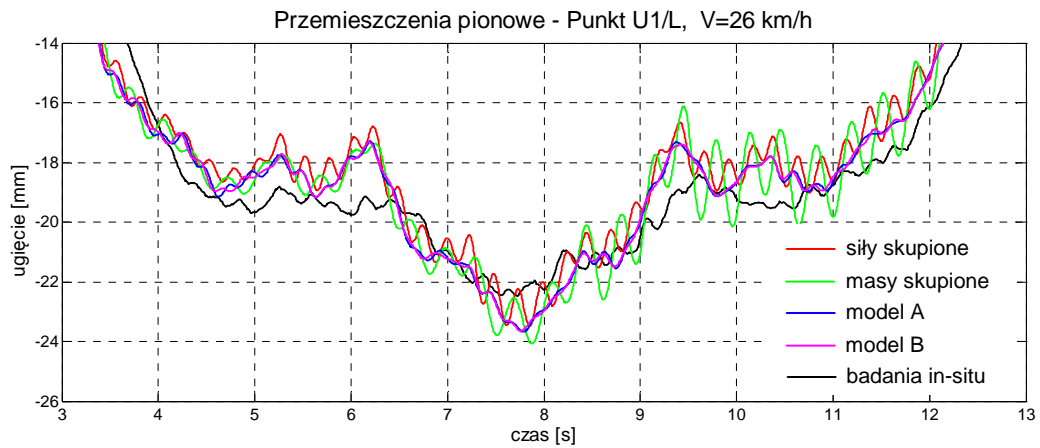
Na rys. 5.35 ÷ 5.37 porównano przebiegi ugięć przęsła uzyskane na drodze numerycznej z wynikami badań eksploatacyjnych. Rys. 5.35 przedstawia wykres całościowy (od chwili najazdu taboru na przęsło do całkowitego wytłumienia się drgań po jego zjeździe), wykres 5.36 obrazuje zakres drgań swobodnych, zaś wykres 5.37 drgania wymuszone w strefie wartości maksymalnych.



Rys. 5.35. Przebiegi zmienności przemieszczeń pionowych środka rozpiętości przęsła KO30 uzyskane dla rozważanych modeli obciążenia oraz badań in-situ (oznaczenia wg rys. 5.23)

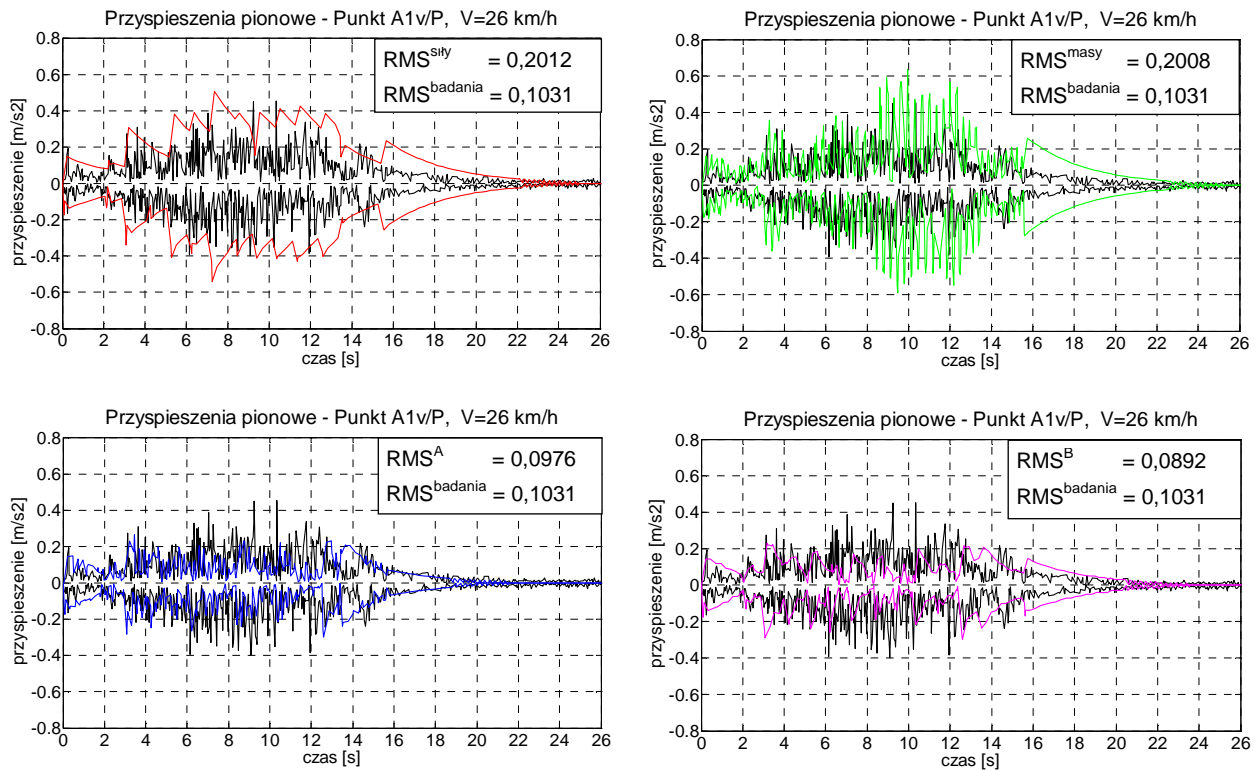


Rys. 5.36. Przebiegi zmienności przemieszczeń pionowych środka rozpiętości przęsła KO30 uzyskane dla rozważanych modeli obciążenia oraz badań in-situ – zakres drgań swobodnych



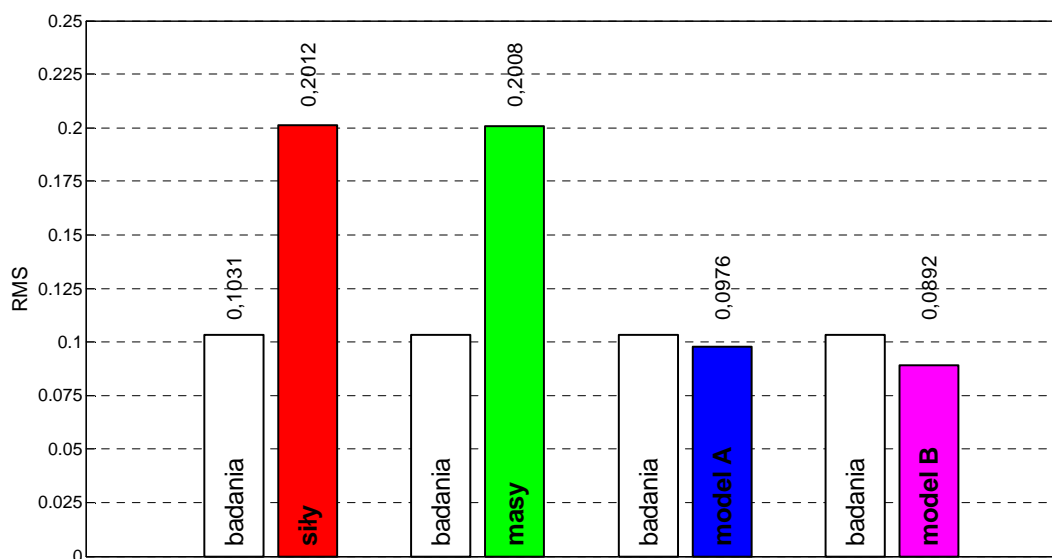
Rys. 5.37. Przebiegi zmienności przemieszczeń pionowych środka rozpiętości przęsła KO30 uzyskane dla rozważanych modeli obciążenia oraz badań in-situ – zakres ugięć maksymalnych

Na rys. 5.38 porównano przebiegi przyspieszeń pionowych przęśla uzyskane dla poszczególnych modeli obciążenia z wynikami badań. Dla większej czytelności, wykreślono jedynie odpowiednie wartości ekstremalnych. Zgodnie z wytycznymi EN 1990-A2 [2002] (punkt A2.4.4.2), sygnały odfiltrowano w paśmie  $0 \div 30$  Hz. Na wykresach podano również wartości skuteczne sygnałów (RMS), obliczone dla przedziału drgań wymuszonych (przedział czasu  $0 \div 15,5$  s). Graficznego porównania RMS dokonano na rys. 5.39.



Rys. 5.38. Przebiegi przyspieszeń pionowych środka przęśla KO30 (punkt A1/P) – porównanie wyników numerycznych z wynikami badań in-situ (oznaczenia wg rys. 5.23)

— model sił skupionych, — model masy skupionych, — model A, — model B, — badania in-situ

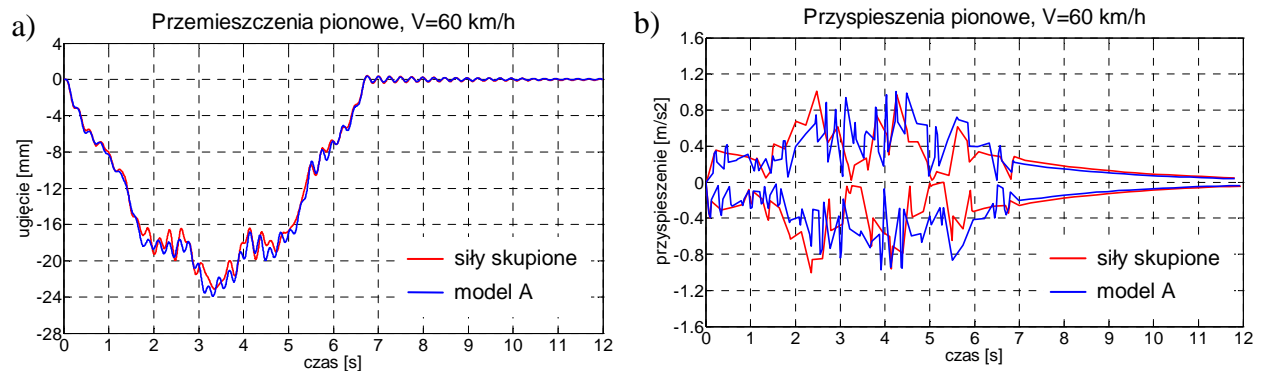


Rys. 5.39. Wartości skuteczne (RMS) sygnałów przyspieszeń pionowych przęśla KO30 – porównanie wyników numerycznych z wynikami badań in-situ

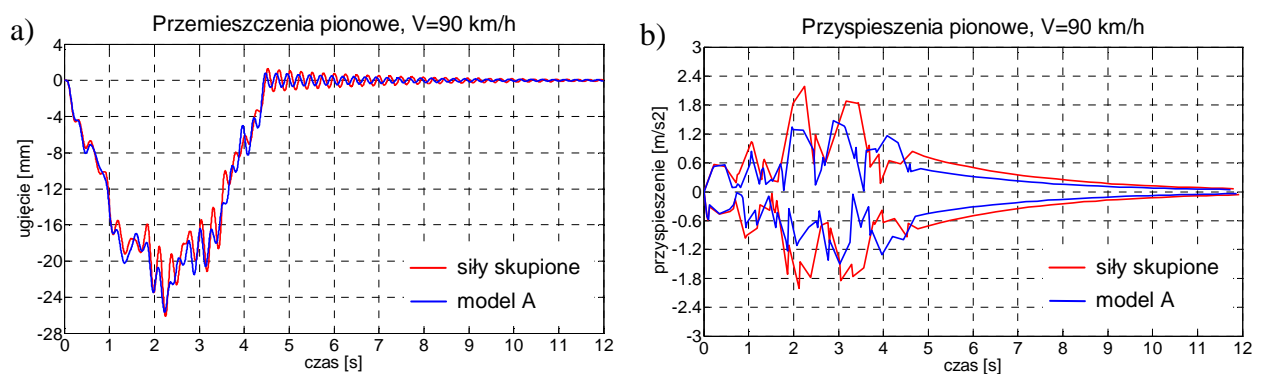
Porównanie symulacji numerycznych z rzeczywistością przeprowadzono dla niewielkich prędkości ruchu wynikających z warunków eksploatacyjnych linii kolejowej, będącej obecnie w przebudowie. Dla większych prędkości (do 200 km/h) wykonano jedynie symulacje numeryczne. Analizy przeprowadzono dla modelu obciążenia w postaci strumienia sił skupionych oraz zdefiniowanego modelu dynamicznego w wariancie A (model uwzględniający masy resorowane i nieresorowane).

W rzeczywistości maksymalna możliwa prędkość jednostki trakcyjnej EN57 wynosi 110 km/h i jest w praktyce nierealna dla badanego przęsła KO30. Dlatego przeprowadzone analizy mają charakter pogładowy, pokazujący tendencje związane z zastosowaniem dwóch różnych modeli obciążenia.

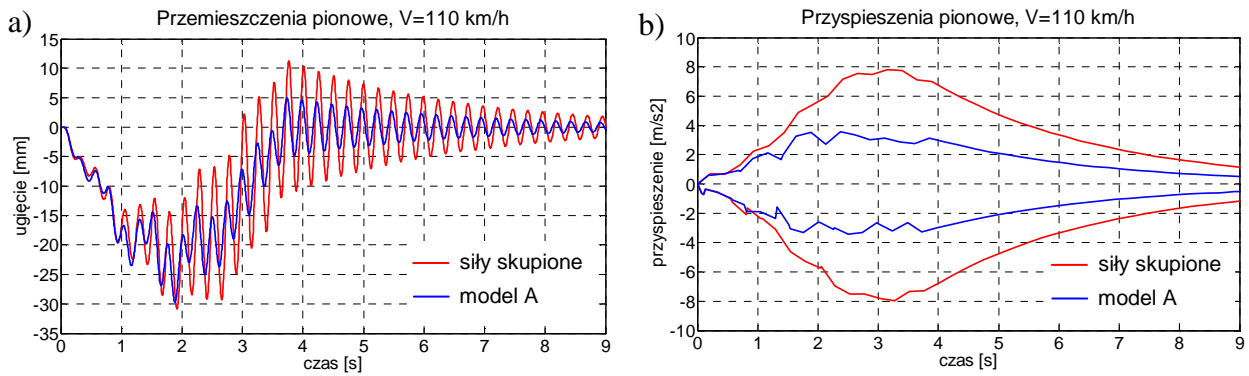
Na kolejnych wykresach (rys. 5.40 ÷ 5.44) przedstawiono rezultaty symulacji numerycznych dla prędkości 60, 90, 110, 160 i 200 km/h. Porównano przebiegi ugięć oraz przyspieszeń pionowych środka rozpiętości przęsła.



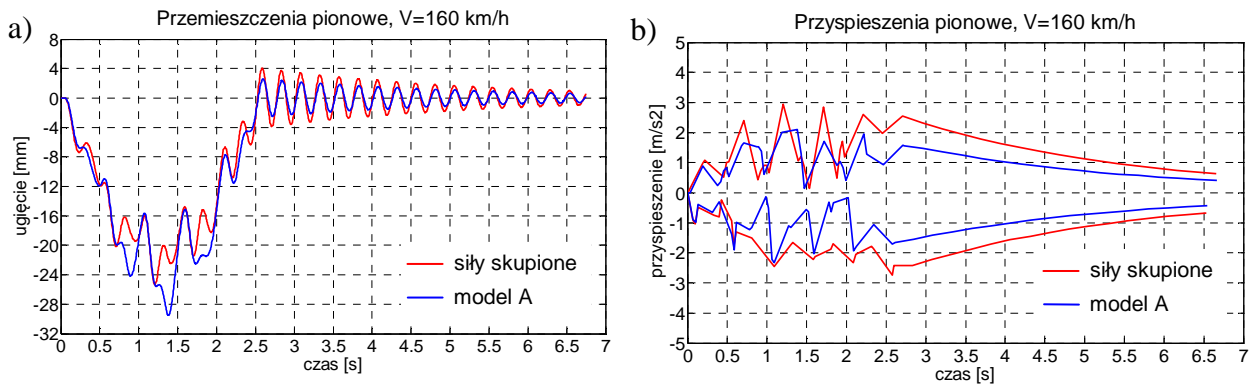
Rys. 5.40. Porównanie przemieszczeń pionowych (a) oraz przyspieszeń pionowych (b) przęsła KO30 (środek rozpiętości) dla **modelu sił skupionych** oraz **modelu A** obciążenia – wyniki symulacji numerycznych, prędkość taboru EN57 równa **60 km/h**, konfiguracja R+S+S+R



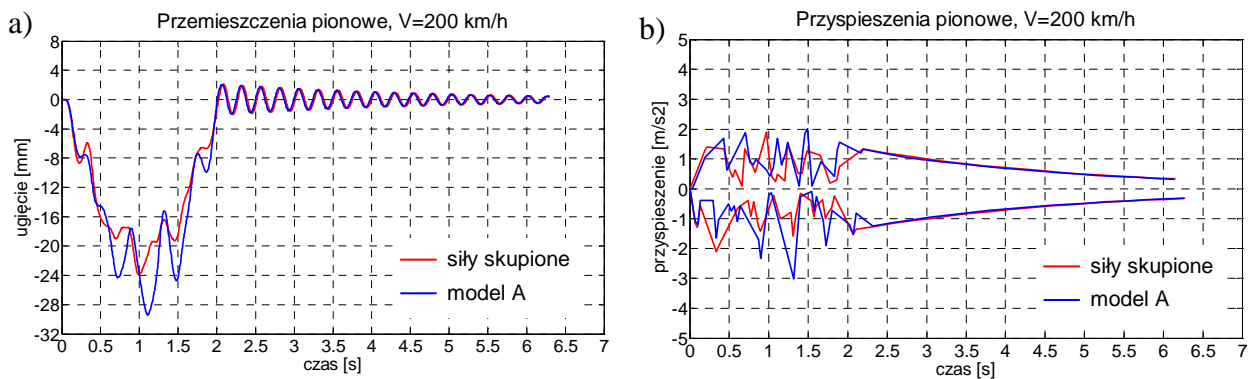
Rys. 5.41. Porównanie przemieszczeń pionowych (a) oraz przyspieszeń pionowych (b) przęsła KO30 (środek rozpiętości) dla **modelu sił skupionych** oraz **modelu A** obciążenia – wyniki symulacji numerycznych, prędkość taboru EN57 równa **90 km/h**, konfiguracja R+S+S+R



Rys. 5.42. Porównanie przemieszczeń pionowych (a) oraz przyspieszeń pionowych (b) przęsła KO30 (środek rozpiętości) dla **modelu sił skupionych** oraz **modelu A** obciążenia – wyniki symulacji numerycznych, prędkość taboru EN57 równa **110 km/h**, konfiguracja R+S+S+R



Rys. 5.43. Porównanie przemieszczeń pionowych (a) oraz przyspieszeń pionowych (b) przęsła KO30 (środek rozpiętości) dla **modelu sił skupionych** oraz **modelu A** obciążenia – wyniki symulacji numerycznych, prędkość taboru EN57 równa **160 km/h**, konfiguracja R+S+S+R



Rys. 5.44. Porównanie przemieszczeń pionowych (a) oraz przyspieszeń pionowych (b) przęsła KO30 (środek rozpiętości) dla **modelu sił skupionych** oraz **modelu A** obciążenia – wyniki symulacji numerycznych, prędkość taboru EN57 równa **200 km/h**, konfiguracja R+S+S+R

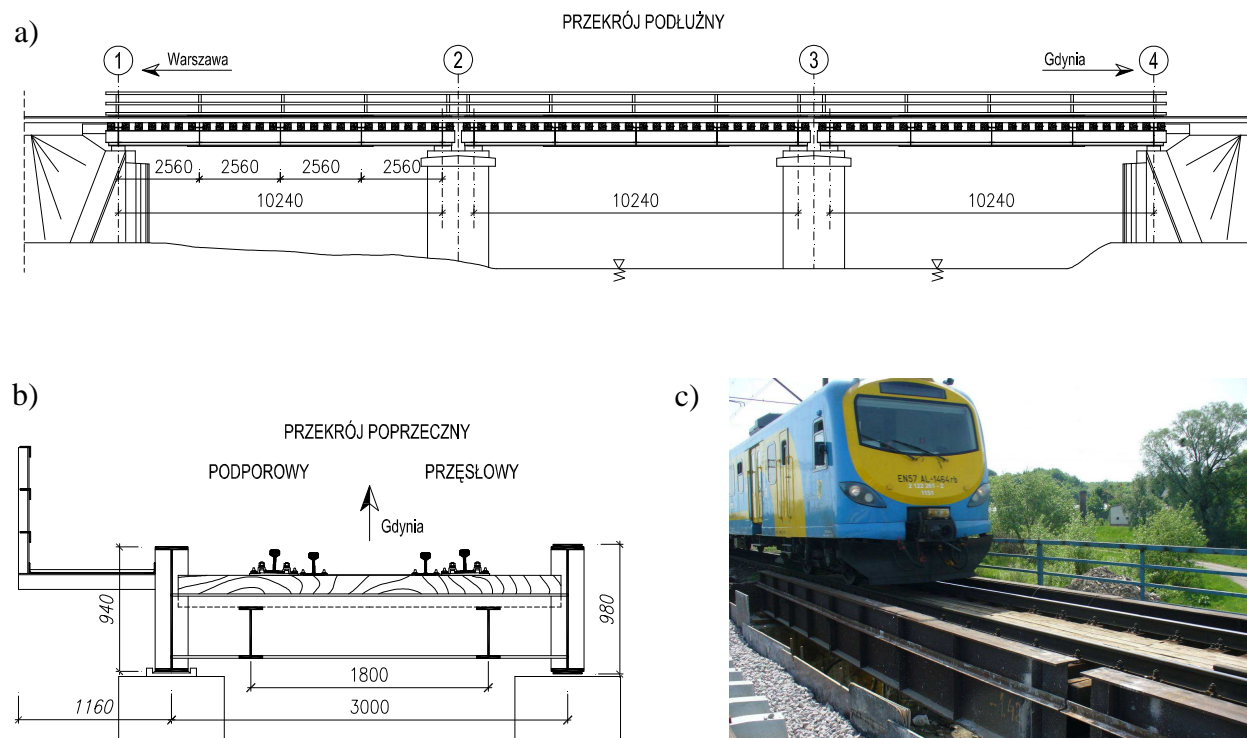


### 5.4.3. Przykład 2 – Most nad rzeką Radunią

Most położony jest w km 321,153 linii kolejowej nr 009 nad rzeką Radunią w Gdańsku [BPK 2009]. Przeprawa jest dwutorowa. Pod każdym torem (tory nr 1 i 2) wykonano niezależną konstrukcję, którą oparto na wspólnych dla obu „nitek” filarach i przyczółkach betonowych. Obiekt stanowi element przebudowywanej obecnie linii E65 Warszawa – Gdynia. Badania przeprowadzono na konstrukcji w torze nr 2.

#### 5.4.3.1. Charakterystyka konstrukcji

Most składa się z trzech swobodnie podpartych przęseł, każde o rozpiętości teoretycznej 10,24 m (rys. 5.45). Jest to konstrukcja blachownicowa, spawana z jazdą pośrednią i jezdnią otwartą. Konstrukcję przęseł stanowią dwa dźwigary dwuteowe w rozstawie 3000 mm i wysokości 940 mm nad podporą oraz 980 mm w przęśle. Zmianę przekroju poprzecznego dźwigarów wykonano poprzez nakładki pasów górnych i dolnych. Dźwigary stężone są poziomym wyratowaniem „typu X” umieszczonym w płaszczyźnie pasów dolnych (kątowniki L 100 x 100 x 10). Pomost stanowi układ dwuteowych poprzecznic i podłużnic. Poprzecznic (wysokość 486 mm) rozmieszczono co 2560 mm, rozstaw podłużnic wynosi 1800 mm, a ich wysokość 386 mm. Nawierzchnię kolejową stanowią szyny na mostownicach. Przy prawym dźwigarze (patrząc w kierunku Warszawy) wykonano wspornikowy chodnik dla obsługi. Przyczółki i filary mostu wykonano jak masywne, betonowe. Przęsła oparte są na przyczółkach za pośrednictwem stalowych łożysk liniowo-stycznych. Konstrukcję zaprojektowano na obciążenie użytkowe dla klasy  $k = 2$  wg PN-85/S-10030 „Obiekty mostowe. Obciążenia”.



Rys. 5.45. Most przez rzeką Radunią: a) schemat przekroju podłużnego, b) schemat przekroju poprzecznego, c) widok przęsła 1-2

Podstawowe parametry przęsła to:

- długości całkowite przęseł: 11,06 m + 11,06 m + 11,06 m,
- rozpiętości teoretyczne przęseł: 10,24 m + 10,24 m + 10,24 m,
- szerokość całkowita konstrukcji: 3,25 m (bez chodnika),
- obciążenie użytkowe: klasa k = 2 wg PN-85/S-10030,
- wysokość konstrukcyjna: 0,91 m,
- stal konstrukcyjna: przyjęto stal St3M.

Z uwagi na dostępność do spodu konstrukcji, badania przeprowadzono na pierwszym przęśle od strony Warszawy (przęsło 1-2 wg rys. 5.45).

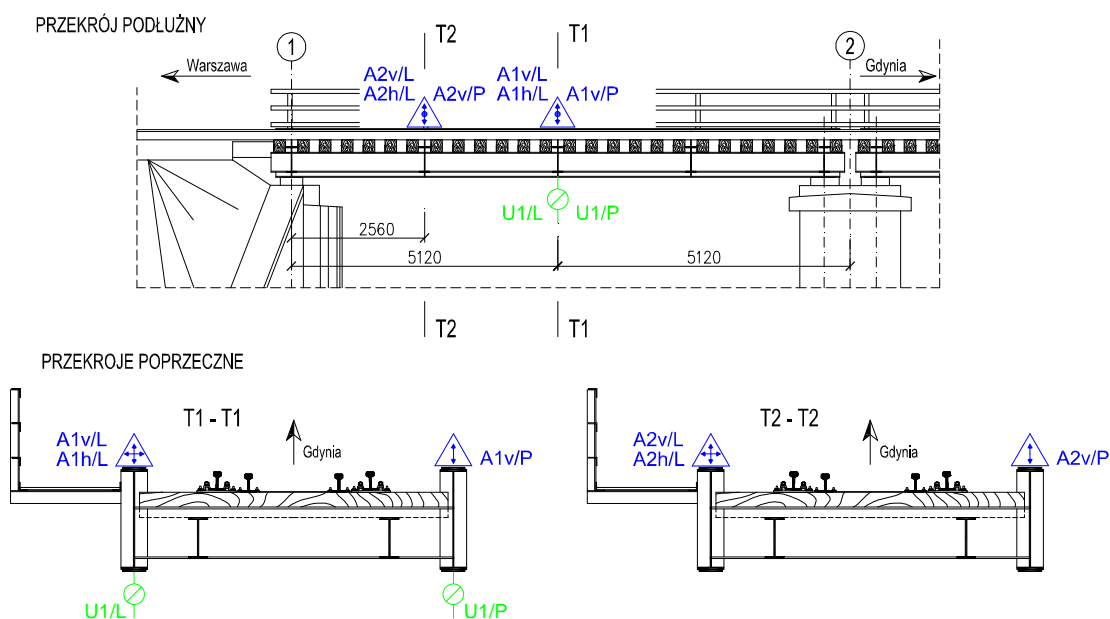
#### 5.4.3.2. Badania dynamiczne konstrukcji in-situ

Podobnie jak poprzednio, badania przeprowadzono w celu określenia cech dynamicznych przęsła oraz jego odpowiedzi na wymuszenie wywołane przejazdem taboru EN57.

Wielkościami mierzonymi były przemieszczenia i przyspieszenia przęsła. Rozmieszczenie przekrojów i punktów pomiarowych pokazano na rys. 5.46. Przyjęto następujące punkty:

- U1/L, U1/P – punkty pomiaru przemieszczeń pionowych w środku rozpiętości przęsła (przekrój T1-T1),
- A1v/L, A1v/P – punkty pomiaru składowych pionowych przyspieszeń w środku rozpiętości przęsła (przekrój T1-T1),
- A1h/L – punkt pomiaru składowej poziomej (poprzecznej) przyspieszeń w środku rozpiętości przęsła (przekrój T1-T1),
- A2v/L, A2v/P – punkty pomiaru składowych pionowych przyspieszeń w ¼ rozpiętości przęsła (przekrój T2-T2),
- A2h/L – punkt pomiaru składowej poziomej (poprzecznej) przyspieszeń w ¼ rozpiętości przęsła (przekrój T2-T2).

Do pomiarów wykorzystano tę samą aparaturę jak w przykładzie 1 (rys. 5.47).



Rys. 5.46. Rozmieszczenie przekrojów i punktów pomiarowych podczas badań mostu nad rzeką Radunią (opis oznaczeń w tekście)



Rys. 5.47. Aparatura pomiarowa: a) przetworniki liniowego przemieszczenia NOVOTECHNIK serii T100, b) akcelerometr APEK MA-24.01, c) laptop i mostek pomiarowy APEK AV32AKProjek

Składy EN57 przejeżdżały w następujących konfiguracjach:

- R+S+R (całkowita długość składu 64,97 m),
- R+S+R+R+S+R (całkowita długość składu 129,94 m).

Wykonano łącznie 11 pomiarów odpowiedzi wywołanych przejazdem taboru EN57. Czasy i prędkości przejazdów zestawiono w tabl. 5.6. Dodatkowy zbiór stanowiły sygnały uzyskane podczas przejazdu taboru towarowego oraz InterCity. Większe naciski osi tego taboru powodowały większy w niektórych przypadkach poziom wzbudzenia drgań swobodnych, co było korzystne z punktu widzenia identyfikacji parametrów dynamicznych przęsła.

Tablica 5.6. Czasy i prędkości przejazdów jednostek EN57 podczas badań mostu nad rzeką Radunią

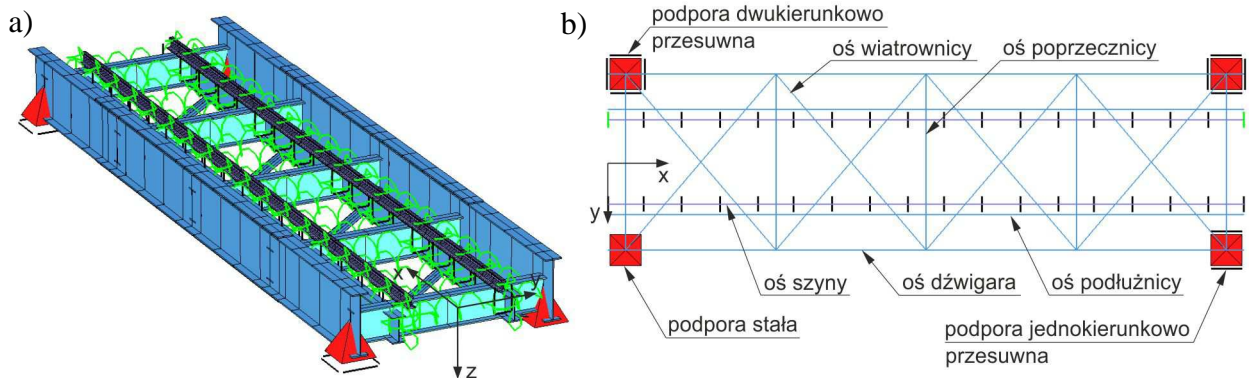
Nr przejazdu	Konfiguracja składu	Czas przejazdu [s]	Prędkość przejazdu [km/h]	Nr przejazdu	Konfiguracja składu	Czas przejazdu [s]	Prędkość przejazdu [km/h]
1	R+S+R+R+S+R	11,15	45,26	7	R+S+R+R+S+R	10,5	48,06
2	R+S+R	5,95	41,94	8	R+S+R	5,6	44,56
3	R+S+R	5,2	47,98	9	R+S+R	6,15	40,57
4	R+S+R	5,92	42,15	10	R+S+R	5,24	47,62
5	R+S+R	5,4	46,21	11	R+S+R+R+S+R	10,7	47,16
6	R+S+R	5,6	44,56				

### 5.4.3.3. Model obliczeniowy konstrukcji

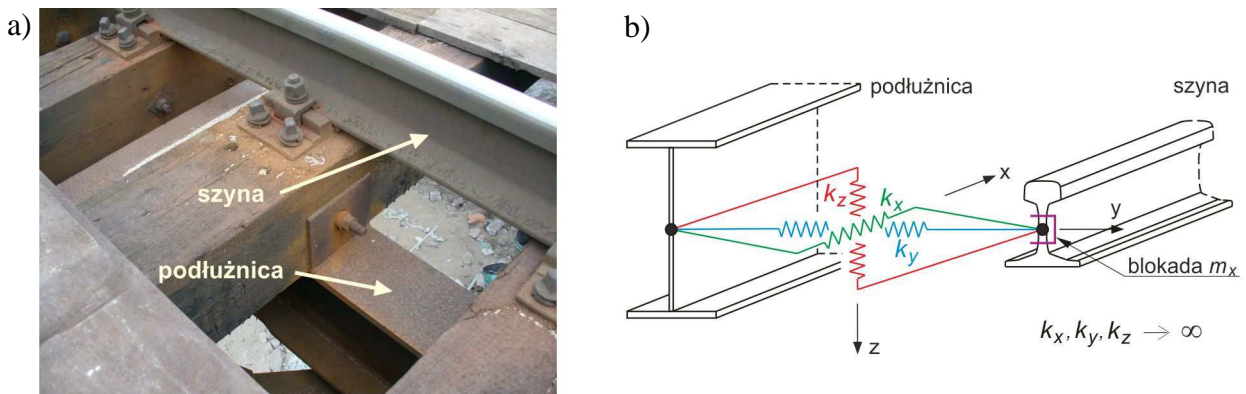
Model MES przęsła wykonano w programie SOFiSTiK (rys. 5.48a). W opisie konstrukcji zastosowano elementy belkowe o 12-tu stopniach swobody. Parametry geometryczne i materiałowe przyjęto na podstawie [BPK 2009]. Ostateczną masę oraz tłumienie określono na podstawie badań (patrz p. 5.4.3.4.). W odróżnieniu od przykładu 1, w tym przypadku wykonano model przestrzenny, opisując poszczególne elementy (dźwigary, podłużnice, szyny) na niezależnej linii węzłów. Podpory przyjęto jako punktowe (rys. 5.48b). Układ opisano na jednej płaszczyźnie węzłów, a właściwe umiejscowienie przekrojów w płaszczyźnie pionowej, uzyskano za pomocą odpowiednich mimośrodów.

Szyny kolejowe przyjęto na podobnej zasadzie jak w przykładzie 1 – nieważkie, poza pręstem o bardzo dużej sztywności ( $E = 205 \cdot 10^9$  MPa). Nawierzchnię kolejową na obiekcie uwzględniono w sposób uproszczony. Nawierzchnia jest typu otwartego (rys. 5.49a). W modelu numerycznym połączenie węzłów szyn z węzłami podłużnic wykonano za pomocą sprężyn translacyjnych (rys. 5.49b). Dodatkowo zablokowano rotację węzłów szyn wokół osi podłużnej mostu. Ponieważ na obecnym etapie pracy nie analizowano wpływu nawierzchni kolejowej, wszyst-

kie sprężyny przyjęto o bardzo dużej sztywności. Warto nadmienić, iż poprzez odpowiedni dobór parametrów sprężyn (identyfikacja) oraz wprowadzenie sprężyn rotacyjnych w miejsce zablokowanych obrotów, można w sposób uproszczony odwzorować rzeczywistą podatność tego typu nawierzchni.



Rys. 5.48. Model MES przęsła mostu nad rzeką Radunią (SOFiSTiK): a) wizualizacja, b) układ podpór i osi konstrukcyjnych



Rys. 5.49. Oparcie szyn na podłużnicy: a) rozwiązanie rzeczywiste, b) rozwiązanie przyjęte w modelu numerycznym

Podsumowaniem przyjętej dyskretyzacji jest poniższe zestawienie:

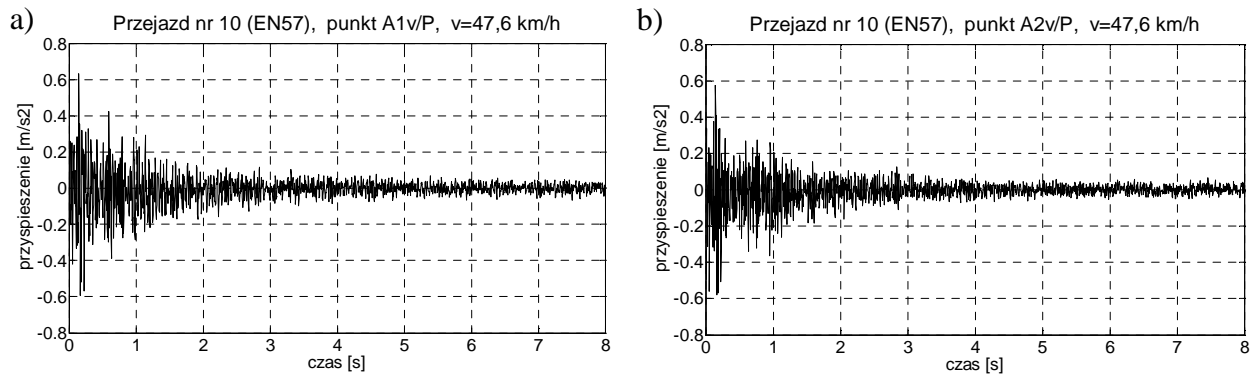
całkowita liczba węzłów:	1301,
całkowita liczba elementów:	1328,
liczba elementów konstrukcji przęsła:	132,
liczba elementów szyn w obrębie przęsła (pręty nieważkie):	48,
liczba elementów szyn poza przęsłem (pręty nieważkie o bardzo dużej sztywności):	1148,
liczba zablokowanych węzłów węzłów podporowych przęsła:	7.

#### 5.4.3.4. Cechy dynamiczne konstrukcji

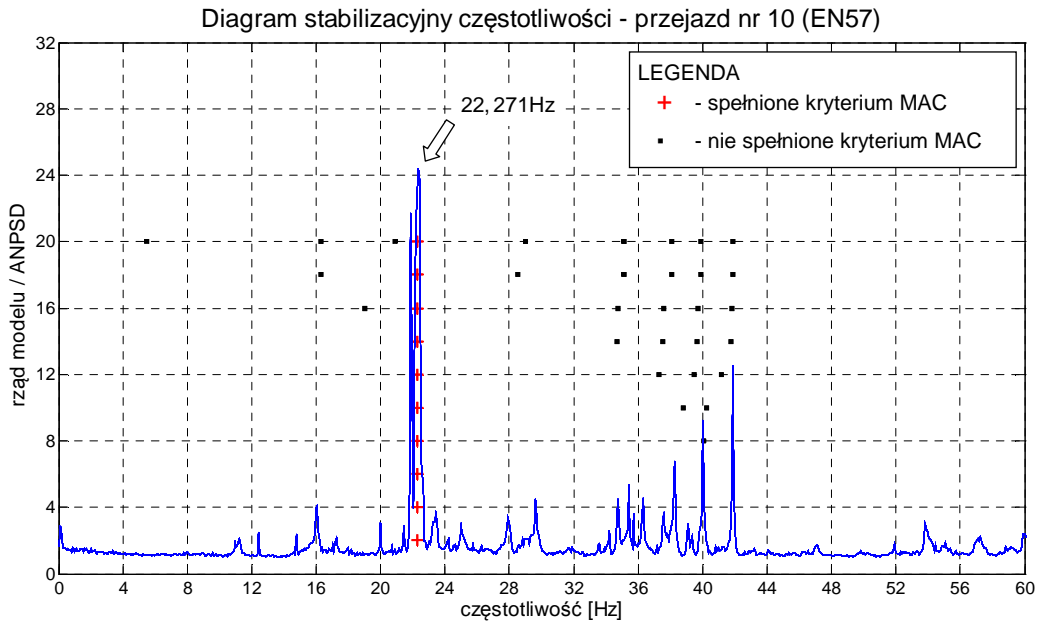
Podobnie jak w przykładzie 1, cechy dynamiczne przęsła określono na podstawie odpowiedzi swobodnych (rys. 5.50 i 5.52). Wykorzystano algorytmy metod ERA oraz PP. Analizowano drgania wywołane przejazdem jednostek EN57 oraz drgania wywołane przejazdem pociągów towarowych oraz InterCity.

W większości przypadków, zdecydowaną dominantą widma była wartość bliska 22 Hz (rys. 5.51 i 5.53). Przy założonym poziomie zgodności  $MAC = 98\%$ , częstotliwość ta była zaw-

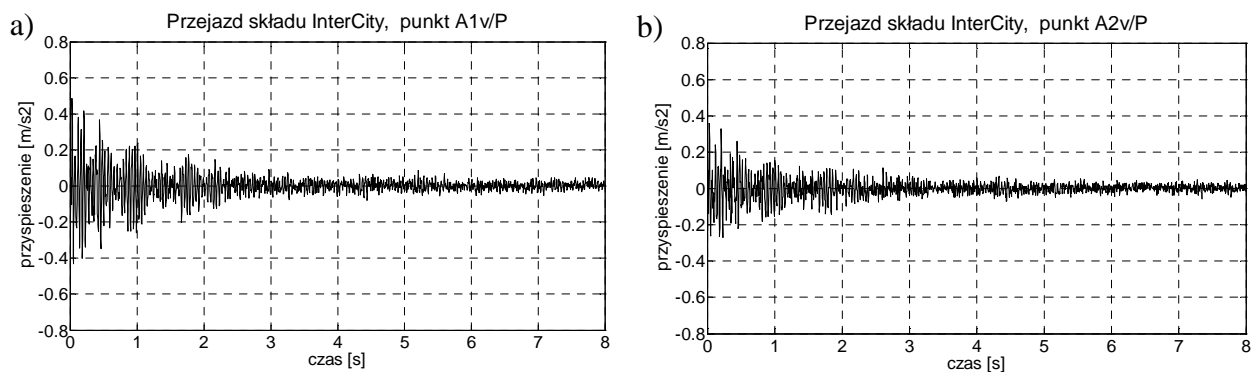
sze wskazywana jako rezultat identyfikacji metodą ERA. W niektórych przypadkach rozkład widma był bardziej równomierny (rys 5.54). Pomimo tego, także i tu konsekwentnie pojawiała się częstotliwość  $\sim 22$  Hz.



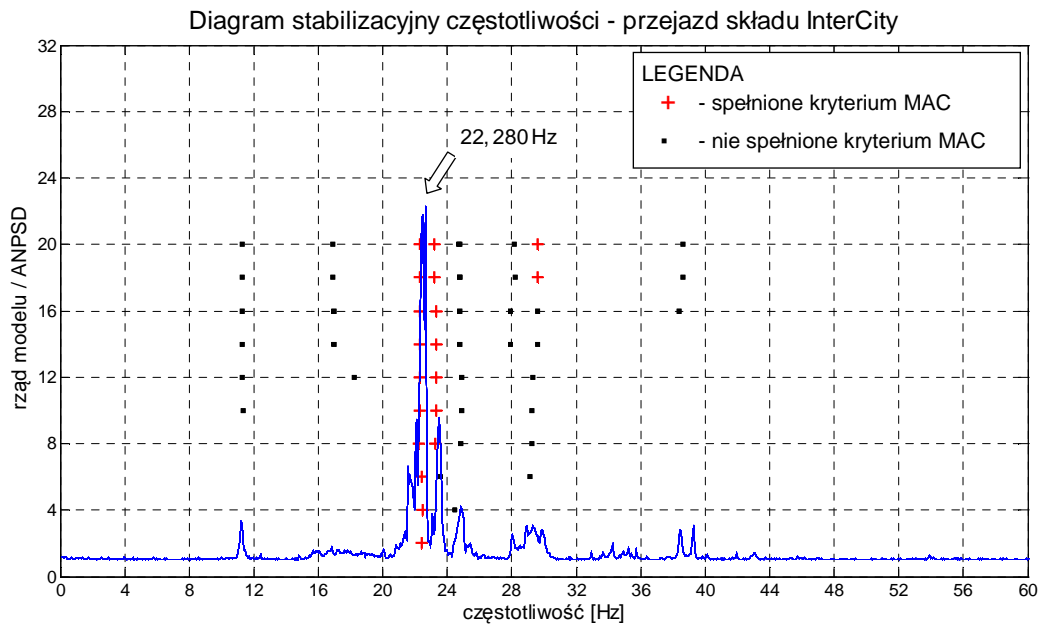
Rys. 5.50. Przebiegi przyspieszeń pionowych przęsła mostu nad rzeką Radunią (zakres drgań swobodnych) – przejazd nr 10 składu EN57: a) przekrój w środku rozpiętości (punkt A1v/P), b) przekrój w  $\frac{1}{4}$  rozpiętości (punkt A2v/P)



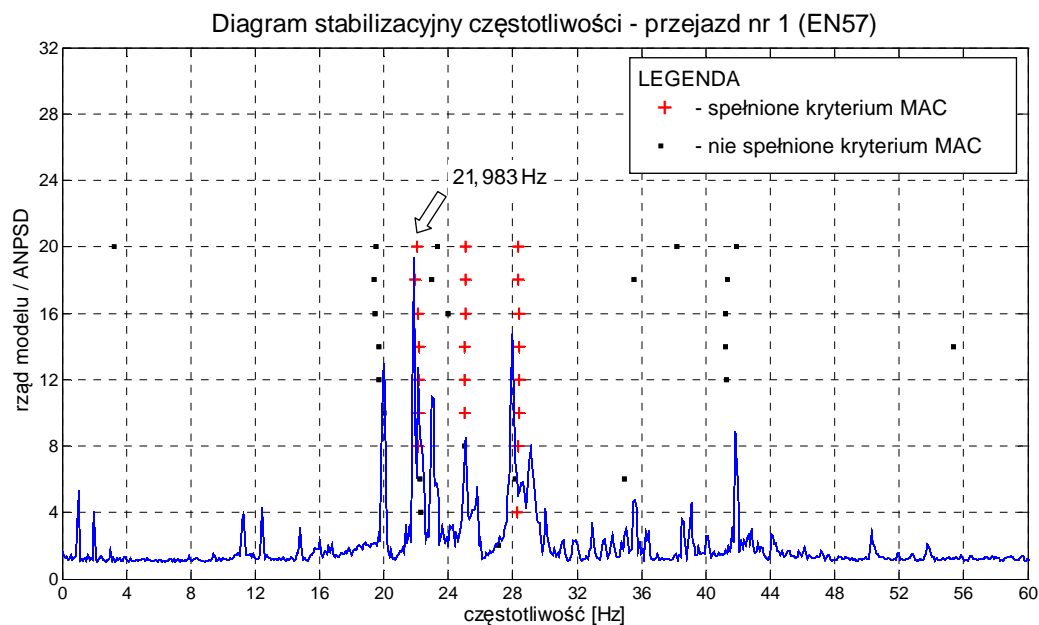
Rys. 5.51. Diagram stabilizacyjny częstotliwości mostu nad rzeką Radunią – przejazd nr 10 składu EN57



Rys. 5.52. Przebiegi przyspieszeń pionowych przęsła mostu nad rzeką Radunią (zakres drgań swobodnych) – przejazd składu IC: a) przekrój w  $\frac{1}{2}$  rozpiętości (punkt A1v/P), b) przekrój w  $\frac{1}{4}$  rozpiętości (punkt A2v/P)



Rys. 5.53. Diagram stabilizacyjny częstotliwości mostu nad rzeką Radunią – przejazd składu InterCity



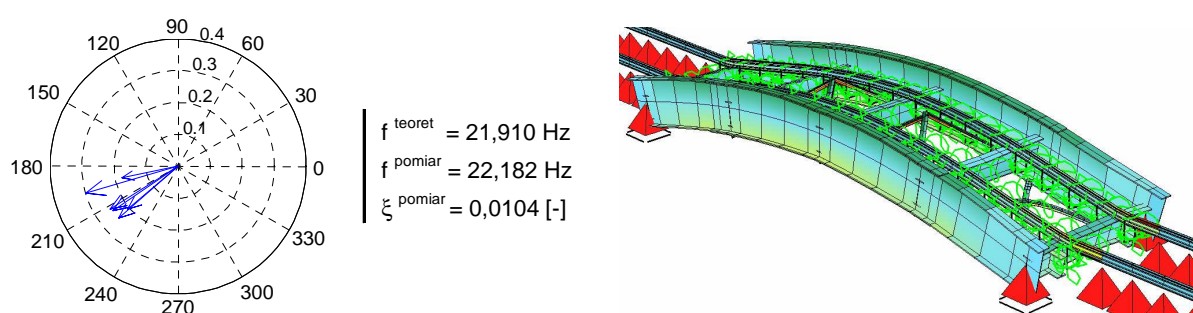
Rys. 5.54. Diagram stabilizacyjny częstotliwości mostu nad rzeką Radunią – przejazd nr 1 składu EN57

Rozmiary macierzy Hankela w metodzie ERA przyjmowano tak, aby uwzględnić znaczące zakresy odpowiedzi oraz zachować proporcje kształtu macierzy zgodnie z zał. 3.62 (rozdział 3). Macierze generowano w oparciu o wszystkie sześć sygnałów. Przyjmowano macierze o rozmiarach  $720 \times 360$  (120 blokowych wierszy i 360 kolumn – zakres czasowy sygnałów 1,92 s) oraz  $1080 \times 540$  (180 blokowych wierszy i 540 kolumn – zakres czasowy sygnałów 2,88 s).

Wspomniana częstotliwość  $\sim 22$  Hz jest pierwszą częstotliwością drgań giętych przęsła. Wskazują na to współrzędne zidentyfikowanych wektorów własnych. Potwierdzeniem tego faktu jest teoretyczna wartość częstotliwości uzyskana z modelu numerycznego  $f^{teoret} = 21,91$  Hz. W teoretycznej analizie modalnej, możliwie dokładnie odwzorowano ciężar i sztywność przęsła. Do masy przęsła wliczono masę konstrukcji stalowej (elementy nośne, żebra, blachy węzłowe,

chodnik roboczy) oraz masę nawierzchni kolejowej (szyny 60E1, mostownice sosnowe o przekroju 24 x 27 cm i długości 2,7 m). Do sztywności przęsła wliczono szyny kolejowe (ich znaczenie rośnie wraz z malejącą rozpiętością przęsła). Podsumowaniem przeprowadzonej identyfikacji jest rys. 5.55. Podane wartości  $f^{\text{pomiar}}$  oraz  $\xi^{\text{pomiar}}$  stanowią wartości średnie z przejazdów, które powodowały najlepsze jakościowo wzbudzenie drgań konstrukcji (niektóre przejazdy charakteryzowały się bardzo niskim poziomem wzbudzenia, co uniemożliwiało identyfikację bądź prowadziło do nieracjonalnych rozwiązań).

Pomimo, iż diagramy stabilizacyjne wskazują także na inne częstotliwości, wartości te nie znalazły potwierdzenia w modelu numerycznym. Ostatecznie, do dalszych prac przyjęto parametry odpowiadające jednej postaci drgań – drgania gięte o częstotliwości 22,182 Hz.



Rys. 5.55. Zidentyfikowana postać drgań przęsła mostu nad rzeką Radunią – porównanie wyników teoretycznych (SOFiSTiK) i pomierzonych (ERA, PP)

#### PODSUMOWANIE BADAŃ KONSTRUKCJI

- Celem badań było określenie odpowiedzi oraz rzeczywistych cech dynamicznych przęsła na potrzeby weryfikacji i aktualizacji jego modelu numerycznego.
- Cechy dynamiczne zidentyfikowano na podstawie drgań swobodnych przęsła (sygnały przyspieszeń). Wykorzystano algorytmy metody ERA oraz PP.
- Podczas przejazdu taboru wzbudzenia przęsła są niewielkie. Odpowiedź swobodna jest krótka i szybko osiąga poziom szumów pomiarowych. Nie jest to korzystne z punktu widzenia identyfikacji i utrudnia kontrolę poprawności rozwiązania (np. metodą LDT).
- Powodem słabego wzbudzenia konstrukcji jest jej mała rozpiętość, przez co stosunkowo niewielka podatność na występujące obciążenie.
- Analiza widm częstotliwości wskazuje na dominującą wartość bliską 22 Hz. W wielu przypadkach widmo miało rozkład równomierny, a bliskie rozmieszczenie pików na wykresie ANPSD (w zakresie 20 ÷ 30 Hz) powodowało, że wybór właściwej wielkości nie był tak oczywisty. Pomocne w tym przypadku okazało się rozwiązanie numeryczne, które uzyskano po wykonaniu możliwie dokładnej inwentaryzacji przęsła (odpowiedni dobór masy i sztywności).
- Niewielkie wzbudzenie konstrukcji utrudniało także identyfikację tłumienia. Otrzymane rezultaty mieściły się w zakresie  $\xi = 0,6\% \div 1,3\%$ . Kilka przypadków odrzucono z uwagi na nieracjonalne rozwiązania.

## DEFINICJA TŁUMIENIA W MODELU NUMERYCZNYM PRZĘŚŁA

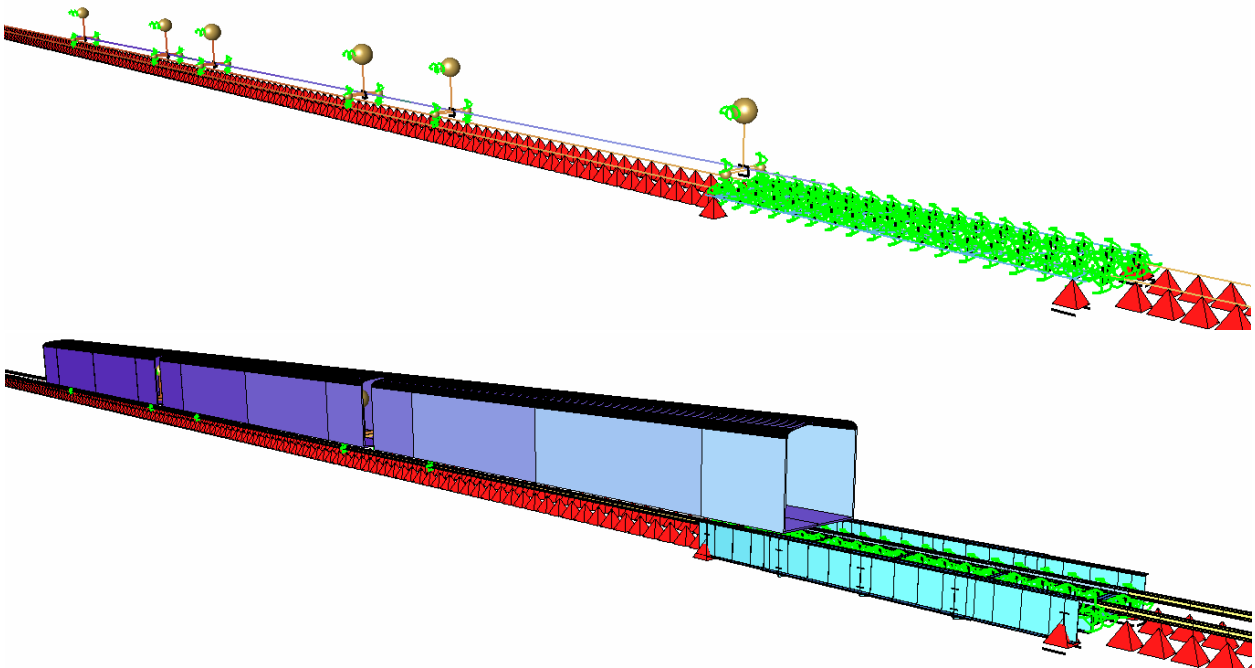
Tłumienie w modelu numerycznym przęsła dobrano podobnie jak w przykładzie 1. Wykorzystano parametry modalne zidentyfikowanej postaci drgań giętych o częstotliwości 22,182 Hz. Przyjęto model tłumienia  $C = b\mathbf{K}$ , współczynnik  $b$  określono na podstawie zależności (5.14). Podsumowaniem analiz jest tabl. 5.7.

Tabl. 5.7. Parametry modalne i współczynniki modelu tłumienia wyznaczone dla przęsła mostu nad rz. Radunią

Model tłumienia	Parametry modalne (ERA)		Tłumienie w konstrukcji			
	$f$ [Hz]	$\xi$ [-]	Zal.	$b$	$\xi_{LDT}^{pom.}$ [-]	$\xi_{LDT}^{teor.}$ [-]
$C = b\mathbf{K}$	22,182	0,0104	(5.14)	$1,4923 \cdot 10^{-4}$	0,0087	0,0111

## 5.4.3.5. Rezultaty analiz numerycznych

Na rys. 5.56 pokazano wizualizację jednego z modeli obliczeniowych (model obciążenia w wariancie A i konfiguracji R+S+R). Dla tej konfiguracji oraz prędkości przejazdu 26 km/h dokonano jakościowego porównania wszystkich wcześniej rozważanych modeli obciążenia (strumienie sił, strumienie mas i dwa warianty modelu pojazdu torowego) z wynikami badań in-situ. Parametry całkowania przyjęto identyczne jak w przykładzie 1 (krok  $\Delta t = 0,004$  s,  $\gamma = 0,55$ ,  $\beta = 0,40$ ). Masę pasażerów uwzględniono podobnie jak w przykładzie 1 (patrz. p. 5.4.2.5).

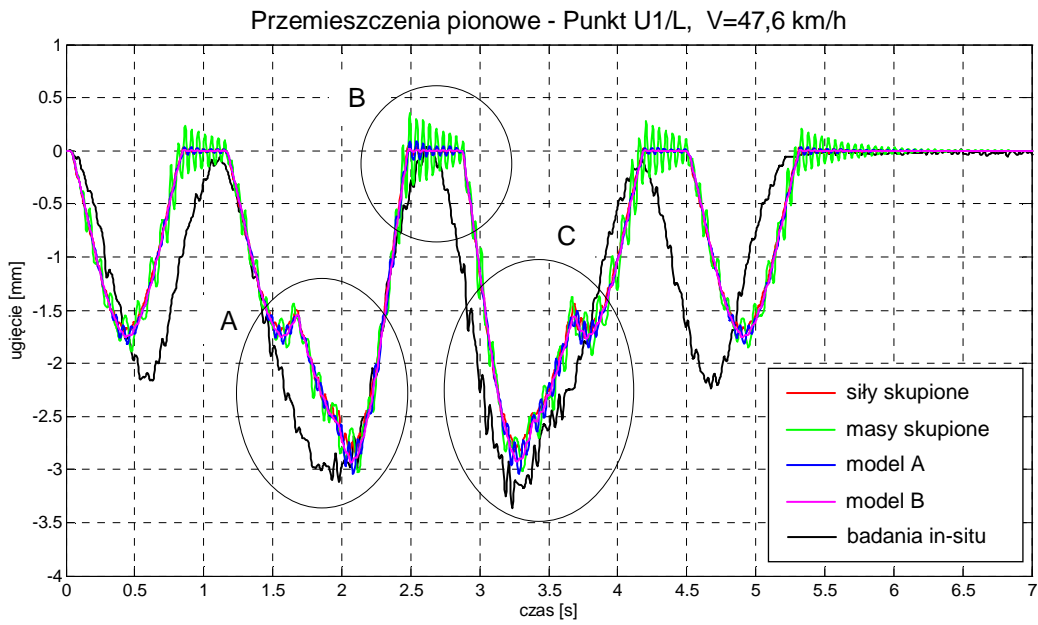


Rys. 5.56. Wizualizacja modelu obliczeniowego pojazd-most dla przykładu 2 (SOFiSTiK)

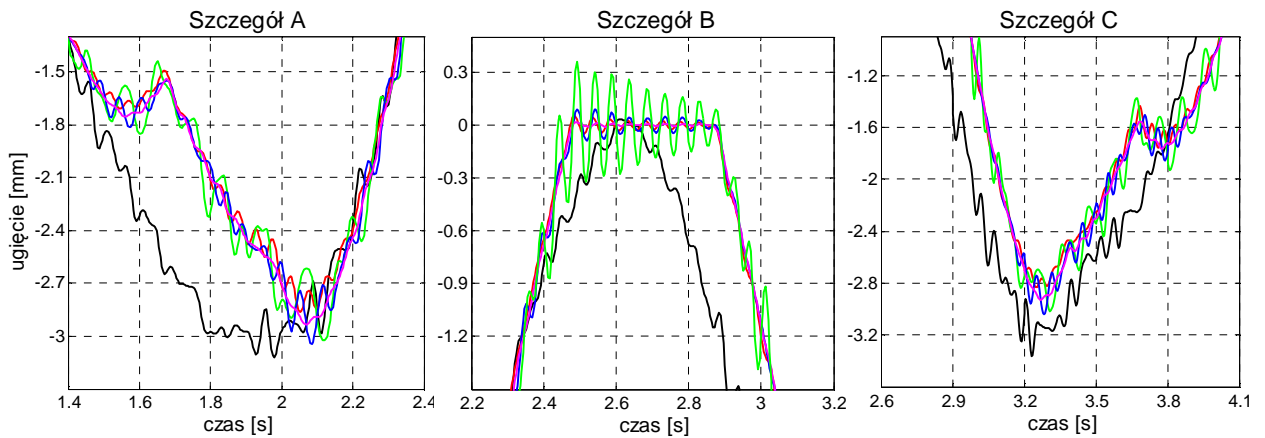
Na rys. 5.57 porównano teoretyczne przebiegi ugięć przęsła uzyskane dla wszystkich modeli obciążenia z wynikami badań eksploatacyjnych. Rys. 5.58 pokazuje wybrane fragmenty tych wykresów, natomiast rys. 5.59 zakres drgań swobodnych.

Na rys. 5.60 ÷ 5.62 porównano wyniki uzyskane odpowiednio dla modelu sił skupionych, modelu mas skupionych oraz modelu B obciążenia z wynikami uzyskanymi dla modelu A oraz wynikami badań eksploatacyjnych.

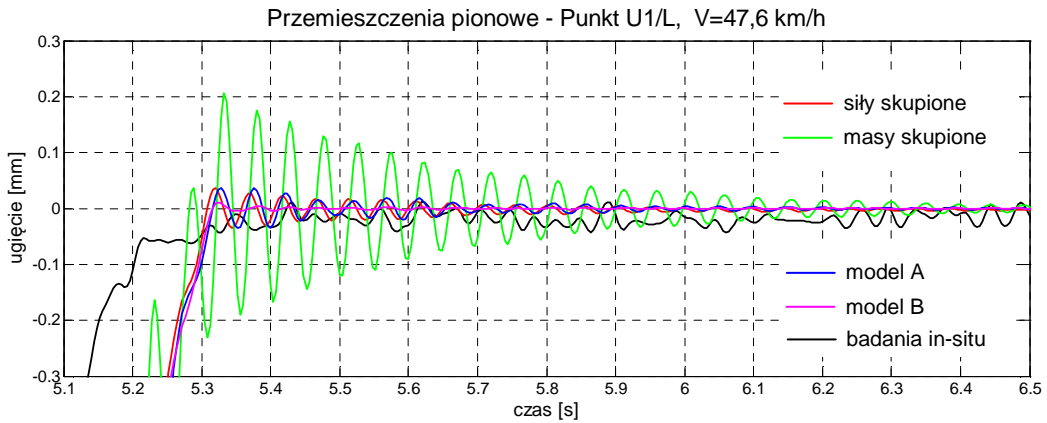




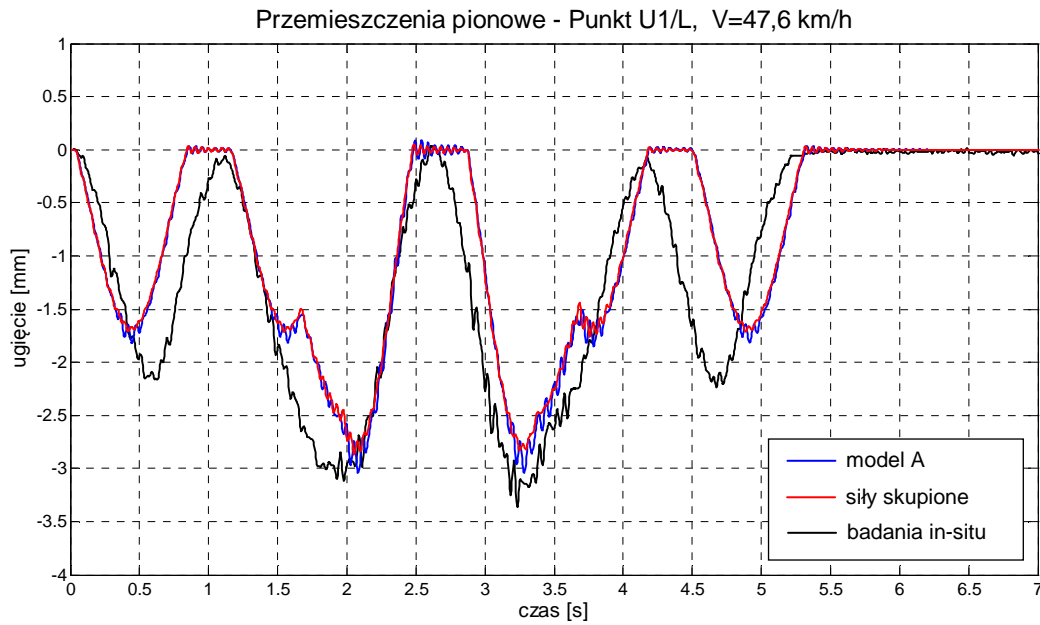
Rys. 5.57. Przebiegi ugięć środka przęsła mostu nad rzeką Radunią uzyskane z analiz numerycznych oraz badań in-situ (opis oznaczeń wg rys. 5.46)



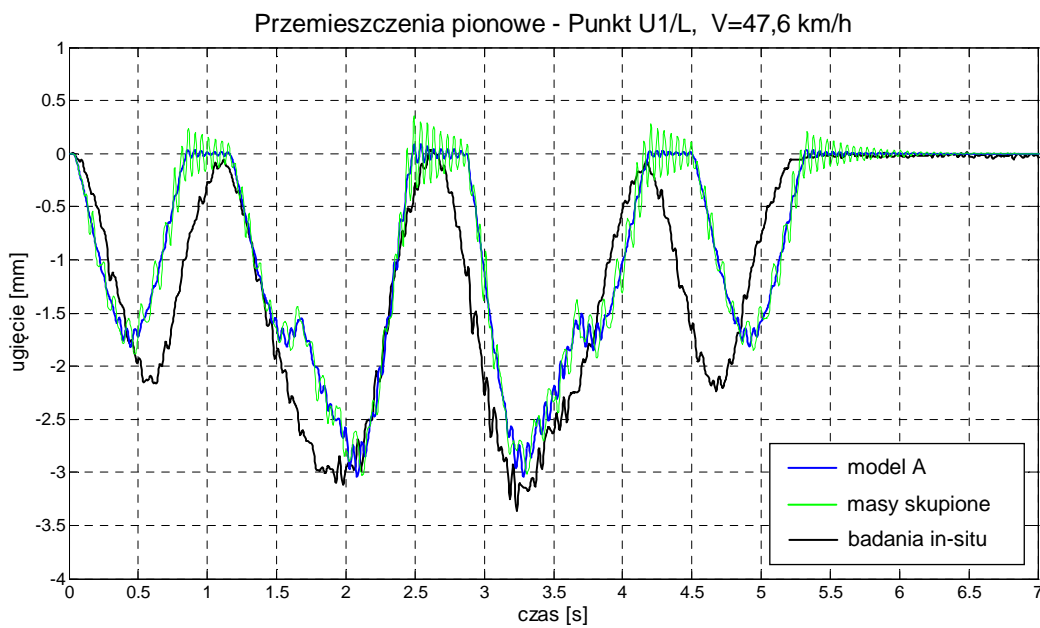
Rys. 5.58. Fragmenty przebiegów ugięć z rys. 5.57 (szczegóły A, B i C)



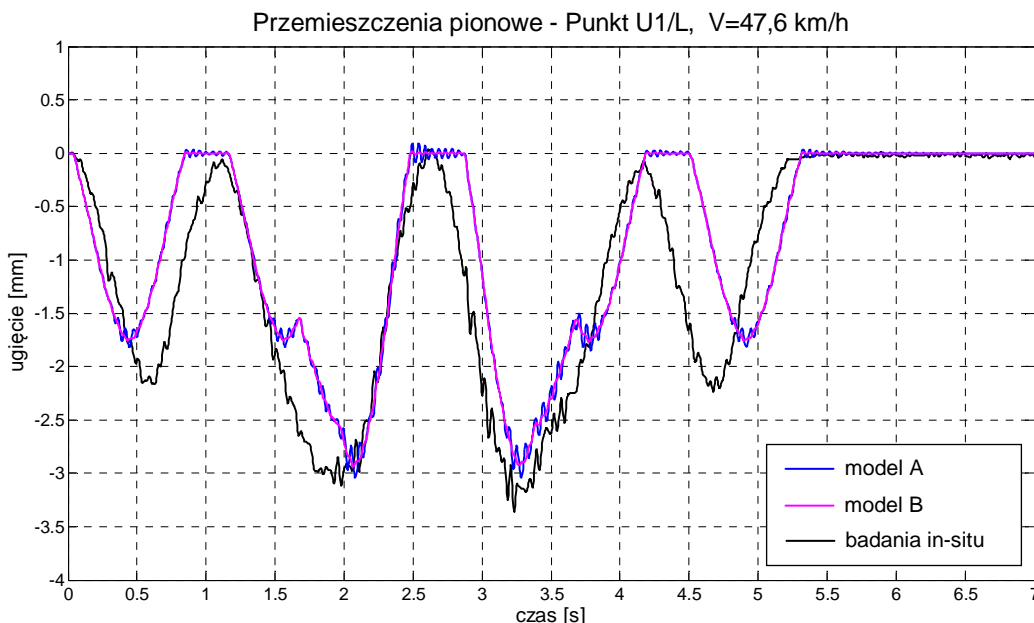
Rys. 5.59. Przebiegi ugięć środka rozpiętości przęsła mostu nad rzeką Radunią uzyskane dla rozważanych modeli obciążenia oraz badań in-situ – zakres drgań swobodnych



Rys. 5.60. Porównanie przebiegów ugięć środka rozpiętości przęsła mostu nad rzeką Radunią uzyskanych dla modelu sił skupionych, modelu A obciążenia oraz wyników badań in-situ

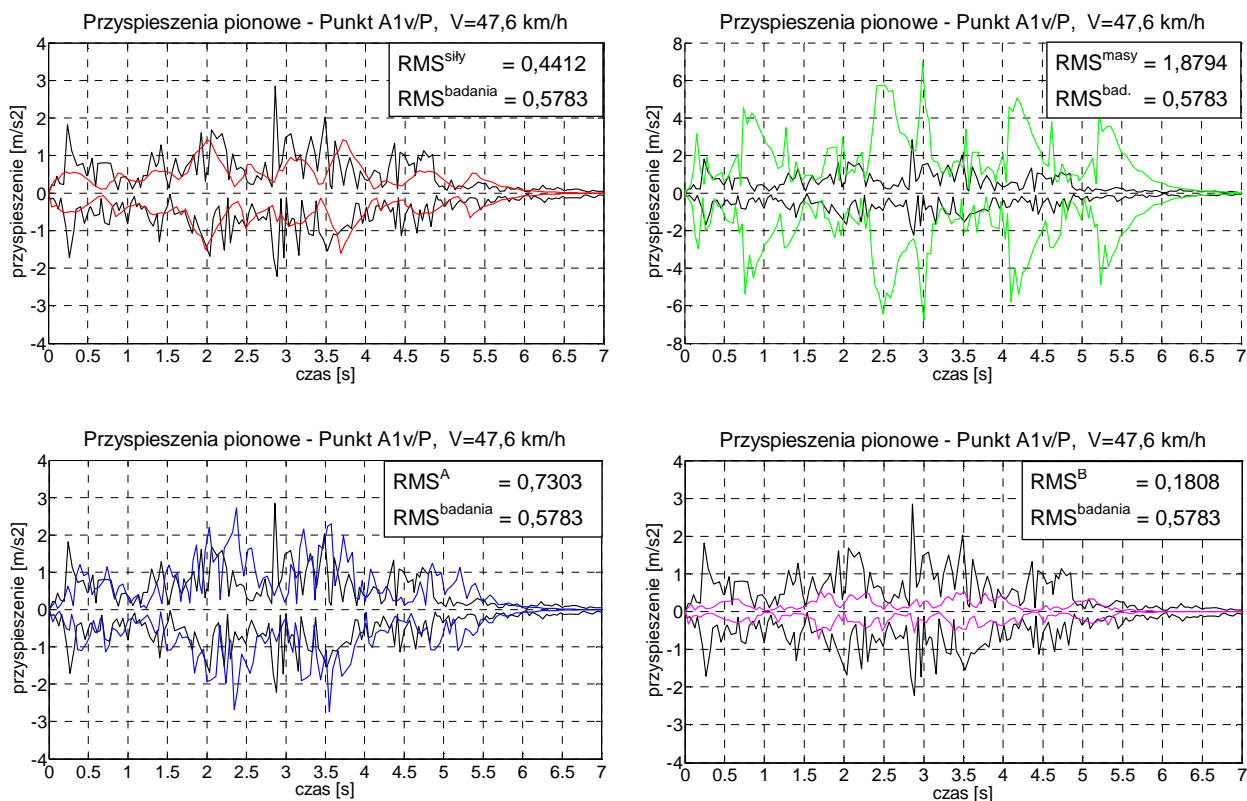


Rys. 5.61. Porównanie przebiegów ugięć środka rozpiętości przęsła mostu nad rzeką Radunią uzyskanych dla modelu mas skupionych, modelu A obciążenia oraz wyników badań in-situ



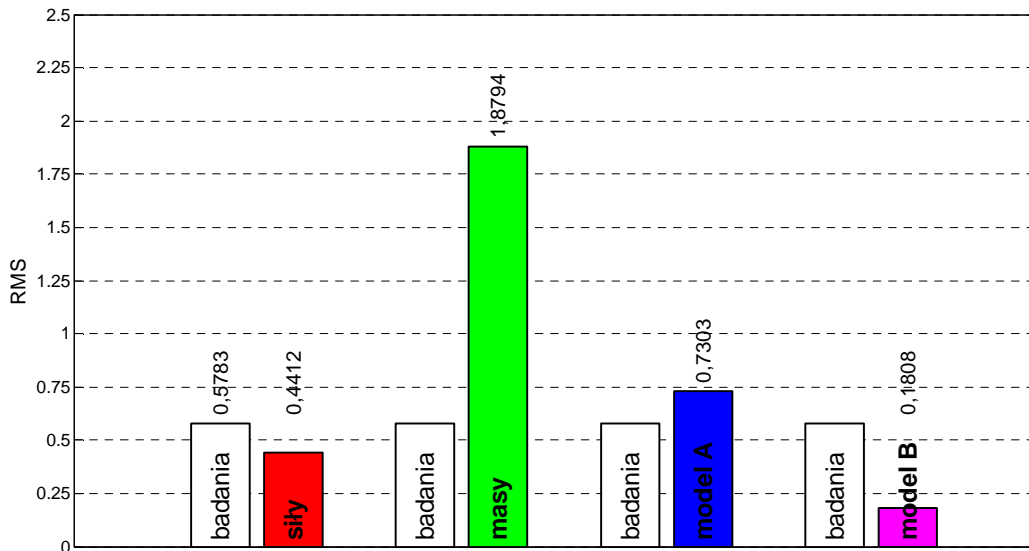
Rys. 5.62. Porównanie przebiegów ugięć środka rozpiętości przęsła mostu nad rzeką Radunią uzyskanych dla modelu A obciążenia, modelu B obciążenia oraz wyników badań in-situ

Wykresy na rys. 5.63 przedstawiają porównanie przyspieszeń pionowych przęsła (środek rozpiętości, punkt A1v/P). Podane na wykresach wartości RMS obliczono dla przedziału drgań wymuszonych (przedział czasu 0 ÷ 5,3 s). Graficznego porównania RMS dokonano na rys. 5.64.



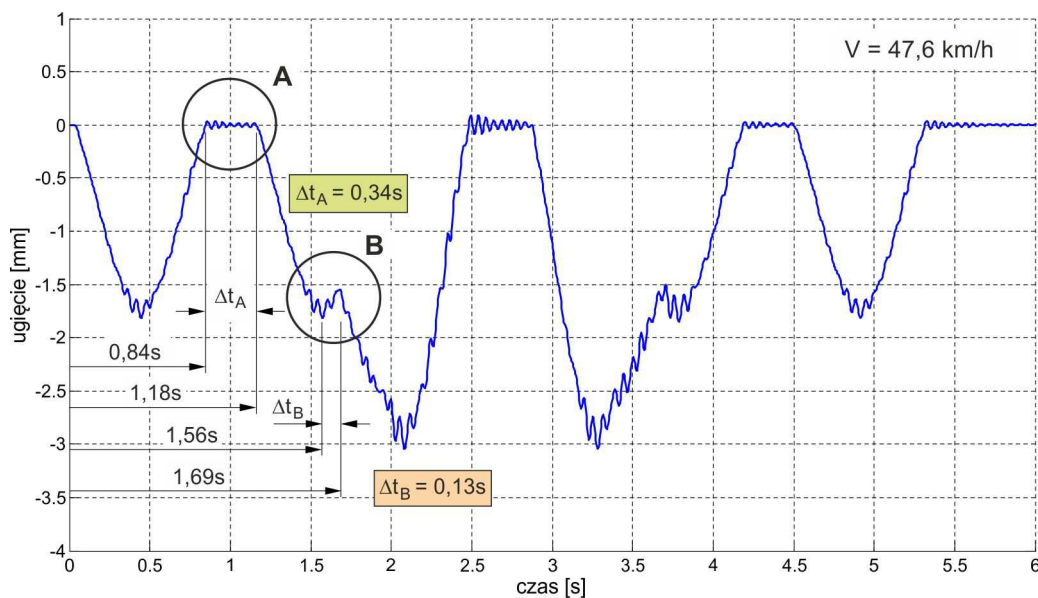
Rys. 5.63. Przebiegi zmienności przyspieszeń pionowych środka przęsła mostu nad rzeką Radunią (punkt A1v/P) – porównanie wyników numerycznych z wynikami badań in-situ (oznaczenia wg rys. 5.46)

— model sił skupionych, — model mas skupionych, — model A, — model B, — badania in-situ

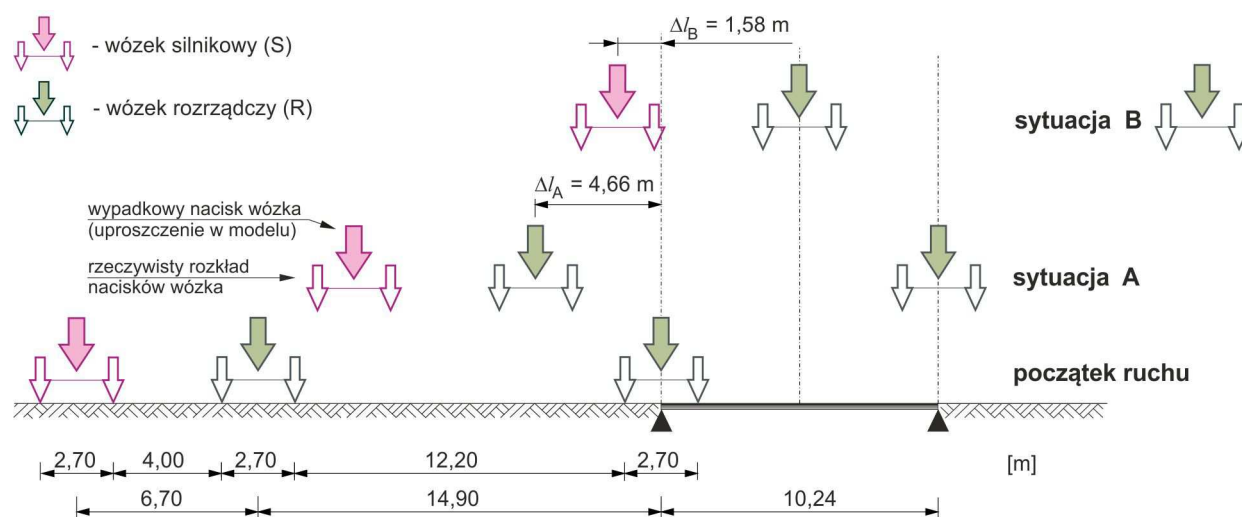


Rys. 5.64. Porównanie wartości skutecznych (RMS) sygnałów przyspieszeń środka przęsła mostu nad rzeką Radunią dla poszczególnych modeli obciążenia oraz sygnału pomiarowego (badania)

Krótkiego komentarza wymagają wykresy przemieszczeń pionowych przęsła. Porównanie sygnałów teoretycznych i pomiarowych uwidacznia pewne różnice w obu odpowiedziach. Na długości przęsła wykresy są wzajemnie przesunięte z powodu lokalnych „zaburzeń” wyników symulacji numerycznych (rys. 5.65 – szczegóły A i B). Jest to efektem uproszczenia modelu numerycznego, w którym oba zestawy kołowe w każdym z wózków sprowadzono do pojedynczej, wypadkowej siły/masy (rys. 5.66).



Rys. 5.65. Przebieg przemieszczeń pionowych środka przęsła mostu nad rzeką Radunią (punkt U1/L, model obciążenia A, prędkość przejazdu  $v = 47,6 \text{ km/h}$ ) – opis w tekście



Rys. 5.66. Rozmieszczenie nacisków zestawów kołowych na przęśle mostu w sytuacjach A i B z rys. 5.65 – opis w tekście

*Sytuacja A* to odpowiedź swobodna przęsła. Czas tej odpowiedzi wynosi  $\Delta t_A = 0,34$  s (por. rys. 5.65). Przy prędkości przejazdu  $v = 47,6$  km/h, czas ten odpowiada drodze  $\Delta l_A = 4,49$  m. Teoretyczna droga, na długości której przęsło pozostaje bez obciążenia wynosi 4,66 m (rys. 5.66).

*Sytuacja B* to przypadek chwilowego odciążenia środka przęsła. Odciążenie to występuje w czasie  $\Delta t_B = 0,13$  s, co odpowiada drodze  $\Delta l_B = 1,72$  m. Droga teoretyczna dla tego przypadku wynosi 1,58 m.

Oba zaburzenia (A i B) powtarzają się na kolejnych fragmentach wykresu i odpowiadają analogicznym sytuacjom dla następnych wózków.

Reasumując można stwierdzić, że dla analizowanego mostu przyjęte uproszczenie jest zbyt duże z uwagi na małą rozpiętość przęsła (rozstaw zestawów kołowych każdego z wózków stanowi blisko 1/3 rozpiętości przęsła). Dokładna analiza krótkich przęseł mostowych, wymaga zatem uszczegółowienia modelu obciążenia poprzez przyjęcie rzeczywistego rozkładu nacisków. Wniosek ten wydaje się być oczywisty, jednak wobec zaistniałych różnic nie mógł być pozostawiony bez weryfikacji i komentarza.

#### 5.4.4. Wnioski z przeprowadzonych symulacji

Celem przeprowadzonych prac jest uzyskanie możliwie realistycznej odpowiedzi konstrukcji pod rzeczywistym obciążeniem dynamicznym. Z tego punktu widzenia można sformułować następujące wnioski:

1. Najlepsze rezultaty numeryczne (w porównaniu z wynikami badań) uzyskano dla modelu A obciążenia (model uwzględniający masy resorowane i nieresorowane). Porównanie to wypada najlepiej zarówno w przypadku analizy sygnałów w czasie (amplitudy drgań) jak i w zestawieniu wartości skutecznych.
2. Model B obciążenia (model uwzględniający tylko masy resorowane) daje rezultaty zaniżone. Widać to szczególnie w przypadku przyspieszeń obu konstrukcji oraz przemieszczeń pionowych mostu nad rzeką Radunią.
3. Model sił skupionych daje nieco zawyżone rezultaty w porównaniu z wynikami badań.

4. Model mas skupionych istotnie zawyża odpowiedź konstrukcji. Widoczne jest to szczególnie w zakresach odpowiedzi swobodnych ugięć oraz w przypadku przyspieszeń obu konstrukcji. Model ten z uwagi na brak resorowania i tłumienia, generuje siły masowe dużo większe od efektów obserwowanych w rzeczywistości.
5. Analiza wykresów w zakresie prędkości do 200 km/h w przypadku konstrukcji KO30, uwidacznia znacznie większy (w porównaniu z pozostałymi) poziom wzbudzenia drgań przy prędkości 110 km/h. Dla tej prędkości, czas pojawiania się osi wózków poszczególnych wagonów na „mierzonej” przekroju, zbliżony jest do okresu drgań swobodnych przęsła. Dla wagonu rozrządczego czas ten wynosi 0,49 s (rozstaw osi 14,90 m), a dla wagonu silnikowego 0,52 s (rozstaw osi 15,87 m). Okres drgań pierwszego modu przęsła wynosi  $T_{prz\acute{e}s\acute{a}}^{teoret} = 1 / f_1^{teoret} = 0,5$  s. Prędkość taboru EN57 wynosząca 110 km/h, jest zatem dla rozważanej konstrukcji prędkością rezonansową. Dla tej prędkości widać również znaczne różnice w poziomie odpowiedzi przęsła dla obu modeli obciążenia (model sił skupionych generuje dwukrotnie większy poziom drgań niż model resorowany A).
6. Przy prędkościach 160 i 200 km/h uwidaczniają się różnice obu modeli w zakresie drgań wymuszonych. Większe amplitudy drgań generuje model resorowany A. Zakres drgań swobodnych charakteryzuje się zbliżonym poziomem odpowiedzi.

Przedstawione analizy obarczone są obiektywnymi błędami wynikającymi m.in. z nieznamości cech dynamicznych konkretnego zestawu szynowego (możliwe są różnice w parametrach poszczególnych pojazdów wynikających m.in. z ich stanu technicznego – wieloletnia eksploatacja). Ponadto w badaniach prowadzonych w rzeczywistych warunkach eksploatacyjnych, trudno jest ustalić aktualną liczbę podróży i ładunków, a także ich masę oraz rozmieszczenie.

## PRZYPISY

<sup>1</sup> Przez określenie „bardzo duża sztywność” rozumie się wartość sztywności która powoduje, że dany element (belka, sprężyna) jest praktycznie niepodatny (sztywność „nieskończona”). Jako bardzo dużą sztywność przyjęto wartość  $2 \cdot 10^9$  kN/m.

<sup>2</sup> Metoda Newmark’a jest jedną z metod numerycznego całkowania równań dynamiki konstrukcji. Metoda jest w zasadzie uogólnieniem kilku metod (np. metody stałego przyspieszenia, metody średniego przyspieszenia, metody liniowego przyspieszenia), które można uzyskać przez szczególny dobór parametrów algorytmu. W procedurze Newmark’a, stan dynamiczny w chwili  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$  ( $\Delta t$  – krok całkowania) wyznacza się z zależności:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_n + (\Delta t)^2 \left[ \frac{1}{2} - \beta \right] \ddot{\mathbf{u}}_n + (\Delta t)^2 \beta \ddot{\mathbf{u}}_{n+1},$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{n+1} = \dot{\mathbf{u}}_n + \Delta t [1 - \gamma] \ddot{\mathbf{u}}_n + \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{n+1}$$

gdzie  $\beta$  i  $\gamma$  to parametry metody. Jednym z wariantów jest również algorytm Wilsona (spotyka się także określenia Newmark’a-Wilsona,  $\theta$ -Wilsona), w którym wprowadza się modyfikację na przedziale zmienności przyspieszenia przez wprowadzenie parametru  $\theta \geq 1$ , tj.  $\theta \Delta t$ .

Więcej informacji na temat wspomnianych metod, m.in. dot. genezy równań, doboru parametrów, kroku całkowania, stabilności rozwiązania (także w odniesieniu do zagadnień nieliniowych) można znaleźć w cytowanych już pozycjach CLOUGH I PENZIEN [1993], CHMIELEWSKI I ZEMBATY [1998], LUBOWIECKA [2004], LEWANDOWSKI [2006].

## Podsumowanie

W pracy poruszono wybrane problemy i zagadnienia związane z dynamiką ruchu pojazdu szynowego po prześle mostowym. W szczególności zwrócono uwagę na:

- a) identyfikację parametrów oraz opis (modelowanie) obciążenia ruchomego,
- b) analizę układu most-pojazd szynowy.

Opracowano i wdrożono metodykę badawczą, która umożliwiła identyfikację parametrów modalnych rzeczywistego pojazdu szynowego. Wyniki pozwoliły na zdefiniowanie uproszczonego modelu numerycznego pojazdu, mającego zastosowanie w dynamicznych analizach konstrukcji mostowych. Skuteczność metody została zweryfikowana na podstawie wyników badań terenowych dwóch różnych prześel mostowych.

Istotnym elementem pracy jest identyfikacja cech dynamicznych pojazdu szynowego. Przeprowadzono rozpoznanie dostępnych metod identyfikacji pod kątem przyjętej procedury badawczej. Ostatecznie zastosowano metody ERA oraz PP. Analiza porównawcza różnych metod identyfikacji nie była przedmiotem szczegółowych analiz. Dla autora ważne było osiągnięcie konkretnego celu – określenia parametrów dynamicznych konstrukcji i taboru. Wybrane i zastosowane metody pozwoliły na osiągnięcie tego celu i okazały się skutecznym narzędziem do identyfikacji parametrów modalnych pojazdu szynowego oraz konstrukcji mostu, na podstawie zapisów drgań swobodnych. Należy jednak podkreślić, że ostateczny wybór metod identyfikacji (szczególnie metody ERA) został poprzedzony obszernymi testami numerycznymi. Opisano je szczegółowo w rozdziale 3. Rezultaty testów oraz wnioski z nich płynące pokazały pewne ograniczenia i mankamenty metody oraz dały podstawę do świadomego jej stosowania. Krytyczne podejście do metody ERA stanowi ważny element studyjny niniejszej rozprawy.

Istotnym elementem dla opisu cech dynamicznych pojazdu szynowego jest wdrożona procedura wzbudzenia drgań pojazdu i ich pomiaru, opracowana specjalnie na potrzeby przyjętych metod identyfikacji. Eksperyment przeprowadzono dla pojazdu typu EN57, jednak nie ma żadnych ograniczeń w stosowaniu metody dla innego, konwencjonalnego taboru szynowego. Opis doświadczenia przedstawiono w rozdziale 4.

Opracowanie modelu numerycznego pojazdu szynowego na podstawie badań rzeczywistej jednostki trakcyjnej, stworzyło możliwość symulacji przejazdu konkretnego taboru po istniejących lub projektowanych obiektach mostowych. Efektywność zaproponowanej metody pokazano poprzez porównanie jakościowe wyników analiz z zastosowaniem także prostszych modeli obciążenia (strumienia sił skupionych, strumienia mas skupionych) oraz badań w warunkach naturalnej eksploatacji. Szczegóły zaprezentowano w rozdziale 5.

W modelowaniu dynamiki mostów kolejowych pod obciążeniem ruchomym, nieresorowana masa zestawów kołowych jest ważnym elementem modelu. Uproszczenie polegające na jej eliminacji i włączeniu do masy resorowanej nadwozia, wpływa niekorzystnie na jakość analizy i znacząco zaniża poziom odpowiedzi konstrukcji.

Ocena efektywności normowych modeli obciążeń wypada pozytywnie. „Model siłowy” jest prostą i skuteczną metodą oceny oddziaływania dynamicznego taboru na most. Z technicznego punktu widzenia, model ten wystarczająco dokładnie opisuje efekty dynamiczne konstrukcji pod obciążeniem ruchomym w zakresie małych prędkości. Dla analiz projektowych model ten jest

wystarczający i bezpieczny, jednocześnie nie zawyża istotnie otrzymanych rezultatów. Należy jednak zaznaczyć, że dla prędkości rezonansowej taboru (częstotliwość najazdu wózków poszczególnych wagonów odpowiada częstotliwości drgań swobodnych przęsła), wystąpiły wyraźne różnice w poziomie odpowiedzi przęsła KO30 w porównaniu z modelem resorowanym A (rys. 5.42).

Dokładna analiza krótkich przęseł mostowych wymaga uszczegółowienia modelu taboru poprzez uwzględnienie rzeczywistego rozkładu nacisków. Uproszczenie polegające na przyjęciu wypadkowego nacisku wózków jest zbyt duże, z uwagi na małą rozpiętość przęsła w porównaniu z rozstawem osi kół.

Autor zdaje sobie sprawę, że przedstawione analizy pomijają kilka istotnych czynników mających wpływ na ich jakość. Pominięto nawierzchnię kolejową, nie uwzględniono geometrii toru, a także zjawisk zachodzących w obszarze bezpośredniego kontaktu koła i szyny (m.in. uderzenia boczne oraz wężykowanie zestawów kołowych). Ponadto w pracy przeanalizowano jedynie dwa przykłady obliczeniowe – przęsła belkowe o małej i średniej rozpiętości. Weryfikacji in-situ dokonano dla niewielkich prędkości przejazdu. Należy jednak podkreślić, że opracowany model numeryczny pojazdu szynowego nadaje się do wykorzystania w różnorodnych warunkach i nie posiada ograniczeń w stosowaniu do analiz konstrukcji o bardziej złożonej strukturze i parametrach. Możliwe jest również zastosowanie modelu przy badaniu wpływu różnych wad torowiska na dynamikę konstrukcji (nierówności geometryczne, zmienna sztywność podłoża, itp.)

Postawiona zatem na początku pracy teza została potwierdzona. Przeprowadzone badania oraz analizy teoretyczne pokazują, że możliwe jest zbudowanie uproszczonego modelu mechanicznego pojazdu szynowego w oparciu o dane eksperymentalne. Model taki pozwala na skuteczną analizę mostów pod obciążeniem ruchomym i prowadzi do bardziej dokładnych wyników w porównaniu z wynikami dla powszechnie stosowanych modeli uproszczonych.

Autor widzi potrzebę kontynuacji badań i analiz dla szerszego zakresu przęseł mostowych (pod względem ich konstrukcji, rozpiętości oraz schematu statycznego), a także innych pojazdów szynowych (szczególnie taboru dużych prędkości). Ważne z uwagi na jakość analizy jest także uwzględnienie zagadnień mechaniki toru, szczególnie w odniesieniu do nawierzchni podsypkowych i niekonwencjonalnych. Nawierzchnie te są obecnie dominujące, a w przypadku obiektów dużych prędkości – jedyne dopuszczalne.

Autor widzi potrzebę opracowania szerszej metodologii identyfikacji parametrów konstrukcji mostowych. Niski poziom wzbudzenia drgań stanowi istotny mankament metod identyfikacji, bazujących na odpowiedziach swobodnych konstrukcji. Odpowiedź swobodna przęsła mostowego wywołana przejazdem taboru, nie zawsze osiąga wyraźny i zadowalający poziom. Z tego punktu widzenia uniwersalnym rozwiązaniem może być zastosowanie wzbudników drgań. Ich zaletą jest możliwość niezależnego wzbudzania poszczególnych postaci drgań. Istotnym ograniczeniem są obiektywne trudności związane z wyłączeniem obiektu z eksploatacji na czas badań. Rozwiązaniem w tym przypadku mogą być metody bazujące na odpowiedziach środowiskowych konstrukcji (*ambient vibrations*).

W zakresie poruszonej tematyki, autor widzi potrzebę prowadzenia dalszych prac związanych z:

- badaniami oraz analizami numerycznymi obiektów mostowych dla szerszej grupy przęseł, taboru oraz zróżnicowanych prędkości przejazdu.



- identyfikacją parametrów dynamicznych nawierzchni kolejowych (szczególnie nawierzchni typu zamkniętego – podsypkowych i niekonwencjonalnych),
- definicją uproszczonego modelu mechanicznego nawierzchni oraz określenia jej wpływu na dynamikę przęsła pod obciążeniem ruchomym,
- uwzględnieniem stanu technicznego nawierzchni kolejowej jako źródła dodatkowych drgań wymuszonych (nierówności toru, rozluźnienia podsypki, itp.),
- identyfikacją parametrów modalnych innych pojazdów szynowych, w tym taboru dużych prędkości,
- uwzględnieniem w modelu pojazdu rzeczywistej pracy zestawów kołowych (tarcie, poślizg, uderzenia boczne, wężykowanie),
- analizą drgań oraz wielkości sił przekazywanych przez tabor na konstrukcję (kierunek pionowy i poprzeczny) pod kątem bezpieczeństwa ruchu i komfortu,
- identyfikacją parametrów dynamicznych przęseł mostowych z wykorzystaniem wzbudników drgań, a także algorytmów wykorzystujących odpowiedzi konstrukcji na wymuszenie środowiskowe (np. NExT-ERA, CVA, SSI).



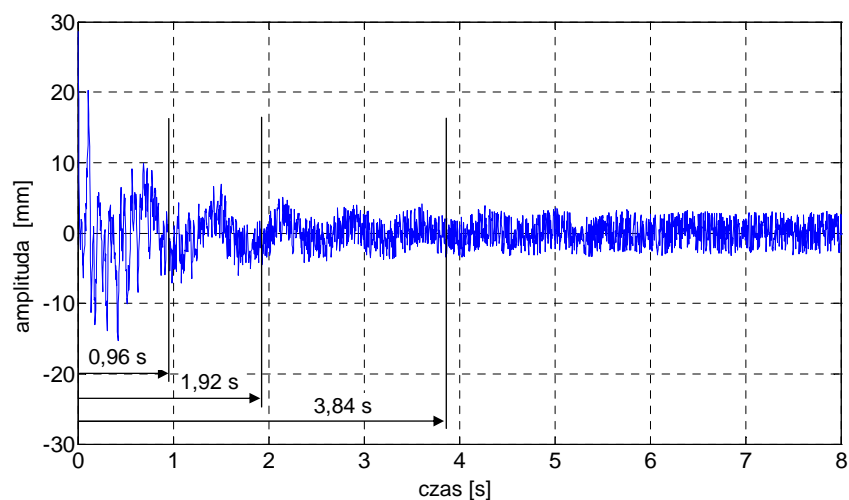
## Załącznik 1

### Szczegółowe rezultaty testów metody ERA

W niniejszym załączniku zestawiono wyniki testów metody ERA przeprowadzonych w rozdziale 3. Porównano zidentyfikowane częstotliwości i liczby tłumienia sygnałów testowych z wartościami teoretycznymi (znane parametry wejściowe). Wyniki podano dla trzech wariantów rozkładu tłumienia (patrz p. 3.7, rozdz. 3):

- Tabl. Z1.1 ÷ Z1.6 – wariant 1 rozkładu tłumienia,
- Tabl. Z1.7 ÷ Z1.12 – wariant 2 rozkładu tłumienia,
- Tabl. Z1.13 ÷ Z1.18 – wariant 3 rozkładu tłumienia.

W każdym z wariantów analizowano sześć poziomów zaszumienia (0%, 10%, 20%, 30%, 50% oraz 100%). Dla każdego poziomu przeanalizowano trzy rozmiary macierzy Hankela, przyjmując do algorytmu różną liczbę próbek (różny zakres czasowy) sygnałów (rys. Z1.1).



Rys. Z1.1. Przykładowy sygnał testowy (wariant 1 rozkładu tłumienia, poziom szumów 30%) – zakresy czasowe sygnałów przyjmowane w testach metody ERA



Tabl. Z1.1. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 1 rozkładu tłumienia, poziom szumów 0%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,400	0,00	0,05000	0,05000	0,00	100,00
	2	2,800	2,800	0,00	0,04280	0,04280	0,00	100,00
	3	4,500	4,500	0,00	0,03650	0,03650	0,00	100,00
	4	8,600	8,600	0,00	0,03120	0,03120	0,00	100,00
	5	10,400	10,400	0,00	0,02410	0,02410	0,00	100,00
	6	18,000	18,000	0,00	0,01240	0,01240	0,00	100,00
	7	24,600	24,600	0,00	0,00500	0,00500	0,00	100,00

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,400	0,00	0,05000	0,05000	0,00	100,00
	2	2,800	2,800	0,00	0,04280	0,04280	0,00	100,00
	3	4,500	4,500	0,00	0,03650	0,03650	0,00	100,00
	4	8,600	8,600	0,00	0,03120	0,03120	0,00	100,00
	5	10,400	10,400	0,00	0,02410	0,02410	0,00	100,00
	6	18,000	18,000	0,00	0,01240	0,01240	0,00	100,00
	7	24,600	24,600	0,00	0,00500	0,00500	0,00	100,00

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 0,96 s	1	1,400	1,400	0,00	0,05000	0,05000	0,00	100,00
	2	2,800	2,800	0,00	0,04280	0,04280	0,00	100,00
	3	4,500	4,500	0,00	0,03650	0,03650	0,00	100,00
	4	8,600	8,600	0,00	0,03120	0,03120	0,00	100,00
	5	10,400	10,400	0,00	0,02410	0,02410	0,00	100,00
	6	18,000	18,000	0,00	0,01240	0,01240	0,00	100,00
	7	24,600	24,600	0,00	0,00500	0,00500	0,00	100,00

Tabl. Z1.2. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 1 rozkładu tłumienia, poziom szumów 10%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,399	0,07	0,05000	0,05042	0,84	99,99
	2	2,800	2,798	0,07	0,04280	0,04381	2,37	99,98
	3	4,500	4,499	0,02	0,03650	0,03685	0,95	99,93
	4	8,600	8,602	0,02	0,03120	0,03114	0,20	99,94
	5	10,400	10,404	0,04	0,02410	0,02420	0,41	99,96
	6	18,000	17,997	0,02	0,01240	0,01254	1,09	99,98
	7	24,600	24,600	0,00	0,00500	0,00500	0,00	99,98

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,397	0,19	0,05000	0,05103	2,05	99,99
	2	2,800	2,797	0,12	0,04280	0,04472	4,48	99,98
	3	4,500	4,494	0,14	0,03650	0,03634	0,44	99,95
	4	8,600	8,602	0,02	0,03120	0,03090	0,95	99,97
	5	10,400	10,403	0,03	0,02410	0,02422	0,49	99,99
	6	18,000	17,999	0,01	0,01240	0,01253	1,01	99,99
	7	24,600	24,599	0,01	0,00500	0,00496	0,80	99,99

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 0,96 s	1	1,400	1,407	0,49	0,05000	0,04036	19,29	100,00
	2	2,800	2,799	0,05	0,04280	0,04701	9,85	99,99
	3	4,500	4,496	0,09	0,03650	0,03524	3,44	99,95
	4	8,600	8,603	0,04	0,03120	0,03067	1,69	99,98
	5	10,400	10,401	0,01	0,02410	0,02406	0,16	99,99
	6	18,000	18,003	0,01	0,01240	0,01263	1,85	99,99
	7	24,600	24,599	0,00	0,00500	0,00506	1,23	99,99

Tabl. Z1.3. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 1 rozkładu tłumienia, poziom szumów 20%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,399	0,06	0,05000	0,05082	1,65	99,98
	2	2,800	2,796	0,13	0,04280	0,04483	4,74	99,91
	3	4,500	4,499	0,03	0,03650	0,03747	2,65	99,71
	4	8,600	8,605	0,06	0,03120	0,03102	0,57	99,77
	5	10,400	10,409	0,09	0,02410	0,02424	0,60	99,86
	6	18,000	17,994	0,03	0,01240	0,01268	2,22	99,93
	7	24,600	24,601	0,00	0,00500	0,00501	0,20	99,94

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,395	0,39	0,05000	0,05226	4,53	99,97
	2	2,800	2,794	0,20	0,04280	0,04683	9,42	99,93
	3	4,500	4,490	0,22	0,03650	0,03676	0,72	99,79
	4	8,600	8,603	0,04	0,03120	0,03062	1,87	99,90
	5	10,400	10,406	0,06	0,02410	0,02431	0,89	99,94
	6	18,000	17,998	0,01	0,01240	0,01265	2,04	99,97
	7	24,600	24,597	0,01	0,00500	0,00492	1,52	99,97

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 0,96 s	1	1,400	1,413	0,92	0,05000	0,03309	33,83	99,98
	2	2,800	2,799	0,02	0,04280	0,05160	20,57	99,96
	3	4,500	4,495	0,11	0,03650	0,03553	2,64	99,78
	4	8,600	8,606	0,07	0,03120	0,03030	2,90	99,93
	5	10,400	10,404	0,04	0,02410	0,02400	0,41	99,96
	6	18,000	18,006	0,03	0,01240	0,01286	3,69	99,98
	7	24,600	24,598	0,01	0,00500	0,00515	2,92	99,98

Tabl. Z1.4. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 1 rozkładu tłumienia, poziom szumów 30%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,399	0,09	0,05000	0,05139	2,79	99,96
	2	2,800	2,795	0,19	0,04280	0,04596	7,39	99,78
	3	4,500	4,499	0,01	0,03650	0,03840	5,22	99,32
	4	8,600	8,609	0,10	0,03120	0,03091	0,93	99,48
	5	10,400	10,414	0,14	0,02410	0,02426	0,67	99,68
	6	18,000	17,992	0,04	0,01240	0,01282	3,37	99,85
	7	24,600	24,601	0,01	0,00500	0,00502	0,30	99,86

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,392	0,58	0,05000	0,05372	7,44	99,93
	2	2,800	2,793	0,26	0,04280	0,04915	14,83	99,84
	3	4,500	4,490	0,23	0,03650	0,03778	3,51	99,52
	4	8,600	8,605	0,05	0,03120	0,03035	2,74	99,77
	5	10,400	10,409	0,09	0,02410	0,02439	1,21	99,87
	6	18,000	17,997	0,02	0,01240	0,01278	3,10	99,93
	7	24,600	24,596	0,02	0,00500	0,00489	2,15	99,94

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 0,96 s	1	1,400	1,418	1,29	0,05000	0,02823	43,54	99,96
	2	2,800	2,802	0,09	0,04280	0,05660	32,25	99,91
	3	4,500	4,498	0,04	0,03650	0,03765	3,16	99,51
	4	8,600	8,609	0,10	0,03120	0,03008	3,60	99,84
	5	10,400	10,408	0,08	0,02410	0,02392	0,76	99,91
	6	18,000	18,010	0,05	0,01240	0,01309	5,53	99,95
	7	24,600	24,597	0,01	0,00500	0,00525	5,08	99,96

Tabl. Z1.5. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 1 rozkładu tłumienia, poziom szumów 50%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,398	0,12	0,05000	0,05292	5,84	99,87
	2	2,800	2,791	0,33	0,04280	0,04846	13,22	99,37
	3	4,500	4,505	0,12	0,03650	0,04143	13,50	97,95
	4	8,600	8,616	0,19	0,03120	0,03062	1,85	98,54
	5	10,400	10,425	0,24	0,02410	0,02420	0,42	99,13
	6	18,000	17,988	0,07	0,01240	0,01312	5,81	99,58
	7	24,600	24,603	0,01	0,00500	0,00503	0,55	99,61

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,387	0,96	0,05000	0,05737	14,73	99,78
	2	2,800	2,793	0,26	0,04280	0,05442	27,14	99,55
	3	4,500	4,498	0,04	0,03650	0,04172	14,31	98,68
	4	8,600	8,607	0,09	0,03120	0,02985	4,31	99,39
	5	10,400	10,417	0,16	0,02410	0,02449	1,60	99,66
	6	18,000	17,997	0,02	0,01240	0,01306	5,29	99,80
	7	24,600	24,594	0,02	0,00500	0,00484	3,15	99,84

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 0,96 s	1	1,400	1,427	1,92	0,05000	0,02600	47,99	99,88
	2	2,800	2,817	0,61	0,04280	0,06818	59,30	99,74
	3	4,500	4,523	0,51	0,03650	0,04915	34,65	98,62
	4	8,600	8,613	0,16	0,03120	0,03019	3,25	99,55
	5	10,400	10,420	0,19	0,02410	0,02364	1,93	99,75
	6	18,000	18,019	0,10	0,01240	0,01353	9,14	99,86
	7	24,600	24,596	0,02	0,00500	0,00554	10,81	99,89

Tabl. Z1.7. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 2 rozkładu tłumienia, poziom szumów 0%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,400	0,00	0,00500	0,00500	0,00	100,00
	2	2,800	2,800	0,00	0,01240	0,01240	0,00	100,00
	3	4,500	4,500	0,00	0,02410	0,02410	0,00	100,00
	4	8,600	8,600	0,00	0,03120	0,03120	0,00	100,00
	5	10,400	10,400	0,00	0,03650	0,03650	0,00	100,00
	6	18,000	18,000	0,00	0,04280	0,04280	0,00	100,00
	7	24,600	24,600	0,00	0,05000	0,05000	0,00	100,00

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 7,68 s	1	1,400	1,400	0,00	0,00500	0,00500	0,00	100,00
	2	2,800	2,800	0,00	0,01240	0,01240	0,00	100,00
	3	4,500	4,500	0,00	0,02410	0,02410	0,00	100,00
	4	8,600	8,600	0,00	0,03120	0,03120	0,00	100,00
	5	10,400	10,400	0,00	0,03650	0,03650	0,00	100,00
	6	18,000	18,000	0,00	0,04280	0,04280	0,00	100,00
	7	24,600	24,600	0,00	0,05000	0,05000	0,00	100,00

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,400	0,00	0,00500	0,00500	0,00	100,00
	2	2,800	2,800	0,00	0,01240	0,01240	0,00	100,00
	3	4,500	4,500	0,00	0,02410	0,02410	0,00	100,00
	4	8,600	8,600	0,00	0,03120	0,03120	0,00	100,00
	5	10,400	10,400	0,00	0,03650	0,03650	0,00	100,00
	6	18,000	18,000	0,00	0,04280	0,04280	0,00	100,00
	7	24,600	24,600	0,00	0,05000	0,05000	0,00	100,00

Tabl. Z1.8. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 2 rozkładu tłumienia, poziom szumów 10%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,400	0,01	0,00500	0,00487	2,54	99,99
	2	2,800	2,799	0,02	0,01240	0,01259	1,56	99,99
	3	4,500	4,499	0,02	0,02410	0,02444	1,40	99,97
	4	8,600	8,603	0,04	0,03120	0,03107	0,42	99,94
	5	10,400	10,407	0,07	0,03650	0,03652	0,07	99,88
	6	18,000	18,014	0,08	0,04280	0,04369	2,08	99,69
	7	24,600	24,555	0,18	0,05000	0,04978	0,45	98,27

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 7,68 s	1	1,400	1,400	0,01	0,00500	0,00496	0,83	99,99
	2	2,800	2,800	0,01	0,01240	0,01239	0,10	99,99
	3	4,500	4,498	0,05	0,02410	0,02485	3,10	99,91
	4	8,600	8,603	0,04	0,03120	0,03113	0,24	99,88
	5	10,400	10,408	0,07	0,03650	0,03648	0,04	99,79
	6	18,000	18,013	0,07	0,04280	0,04378	2,29	99,38
	7	24,600	24,574	0,10	0,05000	0,04949	1,02	96,45

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,398	0,17	0,00500	0,00523	4,68	99,99
	2	2,800	2,798	0,08	0,01240	0,01327	7,03	99,99
	3	4,500	4,495	0,12	0,02410	0,02401	0,38	99,97
	4	8,600	8,602	0,02	0,03120	0,03087	1,05	99,97
	5	10,400	10,404	0,04	0,03650	0,03659	0,25	99,95
	6	18,000	18,017	0,09	0,04280	0,04363	1,95	99,86
	7	24,600	24,544	0,23	0,05000	0,04955	0,89	99,21

Tabl. Z1.9. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 2 rozkładu tłumienia, poziom szumów 20%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,400	0,02	0,00500	0,00476	4,81	99,99
	2	2,800	2,799	0,05	0,01240	0,01281	3,28	99,99
	3	4,500	4,498	0,03	0,02410	0,02491	3,38	99,88
	4	8,600	8,606	0,07	0,03120	0,03090	0,95	99,75
	5	10,400	10,416	0,15	0,03650	0,03636	0,38	99,54
	6	18,000	18,031	0,17	0,04280	0,04456	4,11	98,81
	7	24,600	24,548	0,21	0,05000	0,05016	0,32	93,62

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 7,68 s	1	1,400	1,400	0,02	0,00500	0,00493	1,48	99,99
	2	2,800	2,800	0,02	0,01240	0,01239	0,07	99,99
	3	4,500	4,497	0,07	0,02410	0,02570	6,63	99,62
	4	8,600	8,607	0,09	0,03120	0,03112	0,24	99,49
	5	10,400	10,416	0,15	0,03650	0,03631	0,52	99,17
	6	18,000	18,025	0,14	0,04280	0,04521	5,63	97,44
	7	24,600	24,656	0,23	0,05000	0,04810	3,79	86,22

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,395	0,35	0,00500	0,00553	10,65	99,98
	2	2,800	2,796	0,15	0,01240	0,01419	14,47	99,98
	3	4,500	4,491	0,19	0,02410	0,02426	0,65	99,89
	4	8,600	8,604	0,05	0,03120	0,03052	2,18	99,89
	5	10,400	10,409	0,09	0,03650	0,03660	0,27	99,82
	6	18,000	18,038	0,21	0,04280	0,04439	3,70	99,44
	7	24,600	24,500	0,40	0,05000	0,04932	1,36	97,06

Tabl. Z1.10. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 2 rozkładu tłumienia, poziom szumów 30%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,400	0,03	0,00500	0,00467	6,67	99,98
	2	2,800	2,798	0,08	0,01240	0,01304	5,20	99,97
	3	4,500	4,498	0,05	0,02410	0,02557	6,09	99,73
	4	8,600	8,610	0,11	0,03120	0,03071	1,57	99,44
	5	10,400	10,426	0,25	0,03650	0,03608	1,16	98,99
	6	18,000	18,050	0,28	0,04280	0,04554	6,41	97,39
	7	24,600	24,630	0,12	0,05000	0,05264	5,27	86,27

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 7,68 s	1	1,400	1,400	0,03	0,00500	0,00492	1,60	99,99
	2	2,800	2,799	0,02	0,01240	0,01243	0,21	99,98
	3	4,500	4,497	0,08	0,02410	0,02689	11,58	99,11
	4	8,600	8,613	0,15	0,03120	0,03142	0,70	98,86
	5	10,400	10,422	0,22	0,03650	0,03626	0,67	98,21
	6	18,000	18,033	0,18	0,04280	0,04838	13,05	93,89
	7	24,600	24,769	0,69	0,05000	0,04280	14,40	66,87

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,393	0,53	0,00500	0,00590	18,01	99,96
	2	2,800	2,794	0,21	0,01240	0,01517	22,38	99,95
	3	4,500	4,490	0,23	0,02410	0,02486	3,15	99,76
	4	8,600	8,606	0,07	0,03120	0,03016	3,34	99,75
	5	10,400	10,415	0,14	0,03650	0,03653	0,08	99,61
	6	18,000	18,062	0,34	0,04280	0,04511	5,41	98,74
	7	24,600	24,476	0,50	0,05000	0,04955	0,89	93,84

Tabl. Z1.11. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 2 rozkładu tłumienia, poziom szumów 50%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,401	0,05	0,00500	0,00470	5,97	99,96
	2	2,800	2,796	0,13	0,01240	0,01363	9,89	99,92
	3	4,500	4,496	0,09	0,02410	0,02786	15,62	99,19
	4	8,600	8,615	0,17	0,03120	0,03084	1,17	98,48
	5	10,400	10,444	0,43	0,03650	0,03509	3,85	97,38
	6	18,000	18,024	0,13	0,04280	0,05132	19,92	91,86
	7	24,600	-	-	0,05000	-	-	-

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 7,68 s	1	1,400	1,401	0,06	0,00500	0,00492	1,51	99,97
	2	2,800	2,799	0,04	0,01240	0,01252	0,99	99,94
	3	4,500	4,501	0,01	0,02410	0,02991	24,13	97,25
	4	8,600	8,626	0,30	0,03120	0,03215	3,04	96,82
	5	10,400	10,437	0,35	0,03650	0,03618	0,89	95,58
	6	18,000	18,105	0,58	0,04280	0,05413	26,47	81,99
	7	24,600	-	-	0,05000	-	-	-

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,387	0,92	0,00500	0,00693	38,50	99,89
	2	2,800	2,792	0,28	0,01240	0,01739	40,21	99,85
	3	4,500	4,493	0,16	0,02410	0,02725	13,07	99,33
	4	8,600	8,609	0,11	0,03120	0,02949	5,49	99,33
	5	10,400	10,428	0,27	0,03650	0,03622	0,78	98,99
	6	18,000	18,116	0,65	0,04280	0,04681	9,38	96,56
	7	24,600	24,547	0,22	0,05000	0,05380	7,59	84,30

Tabl. Z1.12. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 2 rozkładu tłumienia, poziom szumów 100%</

Tabl. Z1.13. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 3 rozkładu tłumienia, poziom szumów 0%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,400	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	2	2,800	2,800	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	3	4,500	4,500	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	4	8,600	8,600	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	5	10,400	10,400	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	6	18,000	18,000	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	7	24,600	24,600	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,400	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	2	2,800	2,800	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	3	4,500	4,500	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	4	8,600	8,600	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	5	10,400	10,400	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	6	18,000	18,000	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	7	24,600	24,600	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 0,96 s	1	1,400	1,400	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	2	2,800	2,800	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	3	4,500	4,500	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	4	8,600	8,600	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	5	10,400	10,400	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	6	18,000	18,000	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00
	7	24,600	24,600	0,00	0,02500	0,02500	0,00	100,00

Tabl. Z1.14. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 3 rozkładu tłumienia, poziom szumów 10%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,400	0,00	0,02500	0,02502	0,09	100,00
	2	2,800	2,799	0,04	0,02500	0,02540	1,62	99,99
	3	4,500	4,499	0,02	0,02500	0,02538	1,50	99,97
	4	8,600	8,602	0,02	0,02500	0,02495	0,21	99,97
	5	10,400	10,405	0,05	0,02500	0,02508	0,32	99,96
	6	18,000	18,001	0,01	0,02500	0,02541	1,66	99,92
	7	24,600	24,591	0,04	0,02500	0,02512	0,46	99,61

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,397	0,18	0,02500	0,02555	2,21	99,99
	2	2,800	2,797	0,09	0,02500	0,02624	4,94	99,99
	3	4,500	4,495	0,12	0,02500	0,02490	0,38	99,97
	4	8,600	8,601	0,01	0,02500	0,02475	1,01	99,98
	5	10,400	10,403	0,03	0,02500	0,02509	0,35	99,98
	6	18,000	18,004	0,02	0,02500	0,02538	1,51	99,96
	7	24,600	24,588	0,05	0,02500	0,02515	0,59	99,85

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 0,96 s	1	1,400	1,405	0,37	0,02500	0,01855	25,81	99,99
	2	2,800	2,798	0,07	0,02500	0,02806	12,24	99,99
	3	4,500	4,494	0,13	0,02500	0,02367	5,32	99,96
	4	8,600	8,602	0,02	0,02500	0,02445	2,21	99,99
	5	10,400	10,401	0,01	0,02500	0,02501	0,05	99,99
	6	18,000	18,007	0,04	0,02500	0,02558	2,31	99,98
	7	24,600	24,579	0,09	0,02500	0,02533	1,30	99,94

Tabl. Z1.15. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 3 rozkładu tłumienia, poziom szumów 20%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,400	0,01	0,02500	0,02508	0,34	99,99
	2	2,800	2,798	0,08	0,02500	0,02634	3,40	99,97
	3	4,500	4,498	0,04	0,02500	0,02592	3,66	99,87
	4	8,600	8,604	0,04	0,02500	0,02488	0,46	99,86
	5	10,400	10,410	0,10	0,02500	0,02511	0,42	99,84
	6	18,000	18,003	0,02	0,02500	0,02583	3,32	99,66
	7	24,600	24,587	0,05	0,02500	0,02523	0,93	98,50

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,395	0,37	0,02500	0,02625	5,01	99,98
	2	2,800	2,795	0,17	0,02500	0,02761	10,45	99,96
	3	4,500	4,491	0,20	0,02500	0,02520	0,81	99,89
	4	8,600	8,602	0,02	0,02500	0,02449	2,03	99,93
	5	10,400	10,406	0,06	0,02500	0,02515	0,58	99,94
	6	18,000	18,009	0,05	0,02500	0,02574	2,97	99,84
	7	24,600	24,578	0,09	0,02500	0,02533	1,30	99,42

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 0,96 s	1	1,400	1,410	0,71	0,02500	0,01420	43,19	99,98
	2	2,800	2,797	0,09	0,02500	0,03146	25,85	99,97
	3	4,500	4,491	0,21	0,02500	0,02359	5,64	99,84
	4	8,600	8,604	0,04	0,02500	0,02402	3,92	99,95
	5	10,400	10,405	0,04	0,02500	0,02501	0,02	99,95
	6	18,000	18,016	0,09	0,02500	0,02615	4,62	99,93
	7	24,600	24,555	0,18	0,02500	0,02567	2,69	99,78

Tabl. Z1.16. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 3 rozkładu tłumienia, poziom szumów 30%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,400	0,00	0,02500	0,02519	0,77	99,98
	2	2,800	2,797	0,12	0,02500	0,02634	5,35	99,93
	3	4,500	4,498	0,05	0,02500	0,02664	6,54	99,70
	4	8,600	8,606	0,07	0,02500	0,02481	0,77	99,69
	5	10,400	10,416	0,15	0,02500	0,02508	0,32	99,65
	6	18,000	18,007	0,04	0,02500	0,02626	5,05	99,25
	7	24,600	24,588	0,05	0,02500	0,02542	1,66	96,75

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,392	0,56	0,02500	0,02711	8,43	99,95
	2	2,800	2,794	0,23	0,02500	0,02913	16,53	99,92
	3	4,500	4,489	0,24	0,02500	0,02590	3,60	99,75
	4	8,600	8,603	0,03	0,02500	0,02424	3,04	99,85
	5	10,400	10,410	0,10	0,02500	0,02518	0,72	99,86
	6	18,000	18,016	0,09	0,02500	0,02610	4,42	99,65
	7	24,600	24,569	0,13	0,02500	0,02554	2,18	98,72

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 0,96 s	1	1,400	1,414	1,01	0,02500	0,01194	52,23	99,96
	2	2,800	2,798	0,07	0,02500	0,03524	40,95	99,93
	3	4,500	4,490	0,22	0,02500	0,02495	0,21	99,65
	4	8,600	8,605	0,06	0,02500	0,02373	5,09	99,88
	5	10,400	10,409	0,09	0,02500	0,02497	0,11	99,90
	6	18,000	18,026	0,14	0,02500	0,02672	6,89	99,83
	7	24,600	24,530	0,28	0,02500	0,02603	4,13	99,50

Tabl. Z1.17. Rezultaty identyfikacji metodą ERA parametrów dynamicznych sygnałów testowych; wariant 3 rozkładu tłumienia, poziom szumów 50%

a)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 3,84 s	1	1,400	1,400	0,01	0,02500	0,02555	2,19	99,94
	2	2,800	2,794	0,21	0,02500	0,02744	9,78	99,80
	3	4,500	4,498	0,04	0,02500	0,02872	14,86	99,11
	4	8,600	8,610	0,12	0,02500	0,02461	1,54	99,12
	5	10,400	10,428	0,27	0,02500	0,02492	0,34	99,05
	6	18,000	18,017	0,09	0,02500	0,02724	8,95	97,97
	7	24,600	24,616	0,07	0,02500	0,02640	5,62	91,65

b)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 1,92 s	1	1,400	1,387	0,94	0,02500	0,02934	17,35	99,85
	2	2,800	2,792	0,29	0,02500	0,03266	30,64	98,88
	3	4,500	4,492	0,19	0,02500	0,02853	14,14	99,30
	4	8,600	8,605	0,05	0,02500	0,02375	5,00	99,59
	5	10,400	10,419	0,18	0,02500	0,02517	0,70	99,62
	6	18,000	18,032	0,18	0,02500	0,02685	7,38	99,04
	7	24,600	24,557	0,18	0,05000	0,02618	47,65	96,59

c)	Nr modu	Częstotliwość $f_n$ [Hz]			Liczba tłumienia $\xi$ [-]			MAC [%]
		teoret.	ERA	$\Delta f_n$ [%]	teoret.	ERA	$\Delta \xi$ [%]	
czas: 0,96 s	1	1,400	1,422	1,56	0,02500	0,01363	45,49	99,90
	2	2,800	2,804	0,16	0,02500	0,04421	76,82	99,80
	3	4,500	4,500	0,00	0,02500	0,03304	32,16	99,01
	4	8,600	8,608	0,09	0,02500	0,02358	5,68	99,67
	5	10,400	10,422	0,21	0,02500	0,02481	0,75	99,72
	6	18,000	18,048	0,27	0,02500	0,02781	11,25	99,53
	7	24,600	24,474	0,51	0,02500	0,02676	7,05	98,60

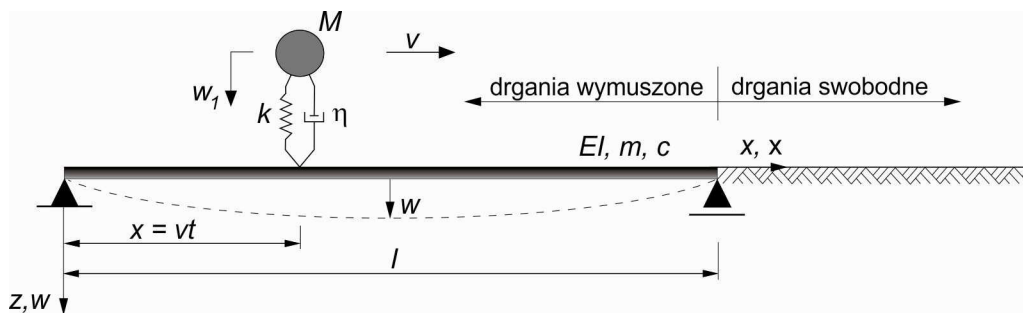
## Załącznik 2

# Sformułowanie równań ruchu liniowego, jednomasowego oscylatora poruszającego się po belce Bernoulliego-Eulera

### 1. Założenia

Matematyczne sformułowanie równań ruchu przedstawiono w oparciu o SZCZEŚNIAK, ATAMAN, ZBICIAK [2002].

Rozważany model dynamiczny przedstawia rys. Z2.1. Oscylator składa się z masy  $M$ , sprężyny o sztywności  $k$  oraz tłumika o lepkości  $\eta$ . Prędkość oscylatora wynosi  $v$ . Sztywność belki na zginanie wynosi  $EI$ , jej masa jednostkowa na metr długości wynosi  $m$ , a współczynnik tłumienia wynosi  $c$ . Drgania masy oscylatora opisuje współrzędna  $w_1$ , drgania belki opisuje współrzędna  $w$ .



Rys. Z2.1. Rozważany, jednomasowy oscylator poruszający się po belce swobodnie podpartej

Przyjęto następujące założenia:

- 1) oscylator porusza się ze stałą prędkością i ma stały kontakt z belką,
- 2) zawieszenie oscylatora (sprężyna i tłumik) jest liniowe,
- 3) w chwili  $t = 0$  ugięcie masy oscylatora wynosi  $w_{st}^{os} = Mg/k$  (drżania masy oscylatora odbywają się wokół położenia równowagi statycznej),
- 4) funkcja ugięcia belki opisana jest w postaci szeregu sinusowego, przy czym rozwiązanie podano dla pierwszego wyrazu szeregu.

### 2. Dynamiczny nacisk oscylatora na belkę

Równanie ruchu masy  $M$  oscylatora zapisać można w postaci:

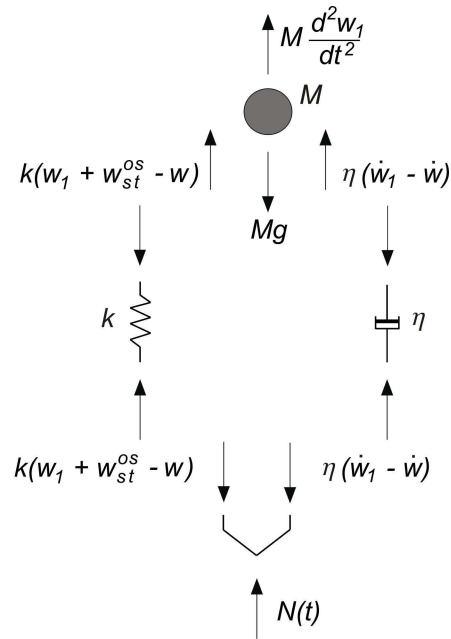
$$M \frac{d^2 w_1}{dt^2} + \eta \left( \frac{dw_1}{dt} - \frac{dw}{dt} \right) + k (w_1 + w_{st}^{os} - w) = Mg. \quad (\text{Z.2.1})$$

Przy założeniu, że drżania masy odbywają się wokół położenia równowagi statycznej, równanie (Z.2.1) sprowadza się do równania jednorodnego:

$$M \frac{d^2 w_1}{dt^2} + \eta \left( \frac{dw_1}{dt} - \frac{dw}{dt} \right) + k (w_1 - w) = 0. \quad (\text{Z.2.2})$$



Na rys. Z2.2 zilustrowano siły działające na elementy oscylatora.



Rys. Z2.2. Siły wewnętrzne i zewnętrzne działające na elementy oscylatora

Siły dynamiczne w sprężynie  $k$ , tłumiku  $\eta$  oraz dynamiczny nacisk na belkę  $N(t)$  wynoszą:

$$N_k = k(w_1 + w_{st}^{os} - w),$$

$$N_\eta = \eta \left( \frac{dw_1}{dt} - \frac{dw}{dt} \right),$$

$$N(t) = N_\eta + N_k = \eta \left( \frac{dw_1}{dt} - \frac{dw}{dt} \right) + k(w_1 + w_{st}^{os} - w), \quad (\text{Z.2.3})$$

co przy wykorzystaniu zależności (Z.2.1) daje:

$$N(t) = Mg - M \frac{d^2 w_1}{dt^2}. \quad (\text{Z.2.4})$$

### 3. Równanie ruchu oscylator-belka

Równanie ruchu belki przy jej obciążeniu dynamicznym  $N(t)$  zapisać można w postaci:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} = N(t) \delta(x - vt). \quad (\text{Z.2.5})$$

Wykorzystanie zależności (Z.2.4) daje:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \frac{\partial w}{\partial t} = \left[ Mg - M \frac{d^2 w_1}{dt^2} \right] \delta(x - vt). \quad (\text{Z.2.6})$$

Wyrażenie  $\delta(x-vt)$  oznacza deltę Dirac'a z przesunięciem (o punkcie osobliwym  $x_0 = vt$ ), spełniająca warunki:

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} \infty, & \text{gd}y \ x = x_0, \\ 0, & \text{gd}y \ x \neq x_0, \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0). \quad (Z.2.7)$$

Założono, że funkcję ugięcia belki  $w(x,t)$  opisuje funkcja sinus, spełniająca zerowe warunki brzegowe:

$$w(x,t) = q(t)\sin\frac{\pi x}{l}, \quad (Z.2.8)$$

Gdzie  $q(t)$  oznacza uogólnioną współrzędną Lagrange'a (nieznana funkcja ruchu belki).

Przemnożenie równania (Z.2.6) stronami przez  $\sin(\pi x/l)$  i scałkowanie po długości belki  $l$  oraz wykorzystanie zależności (Z.2.7) i (Z.2.8), a także zależności na pochodną materialną prędkości  $\frac{dw(vt,t)}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + v\frac{\partial w}{\partial x}$ , prowadzi do układu równań różniczkowych na nieznane funkcje  $q(t)$  oraz  $w_1(t)$ :

$$\begin{cases} \ddot{q} + \frac{c}{m}\dot{q} + \frac{EJ\pi^4}{ml^4}q = \frac{2}{ml}\left(Mg - M\frac{d^2w_1}{dt^2}\right)\sin\frac{\pi vt}{l}, \\ M\frac{d^2w_1}{dt^2} + \eta\frac{dw_1}{dt} + kw_1 = (\eta\dot{q} + kq)\sin\frac{\pi vt}{l} + \eta q\frac{\pi v}{l}\cos\frac{\pi vt}{l}, \end{cases} \quad (Z.2.9)$$

lub w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2M}{ml}\sin\frac{\pi vt}{l} \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{w}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c}{m} & 0 \\ -\eta\sin\frac{\pi vt}{l} & \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{w}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{EJ\pi^4}{ml^4} & 0 \\ -k\sin\frac{\pi vt}{l} - \eta\frac{\pi v}{l}\cos\frac{\pi vt}{l} & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2Mg}{ml}\sin\frac{\pi vt}{l} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Układ równań (Z.2.9) przekształcić można do postaci bezwymiarowej. Po wprowadzeniu bezwymiarowej współrzędnej  $\xi = vt/l$  oraz po przyjęciu oznaczeń:

$$w_{st}^b = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EJ} = \frac{2Mgl^3}{\pi^4 EJ} \approx \frac{Pl^3}{48EJ}, \quad f(\xi) = \frac{q(\xi)}{w_{st}^b} \Rightarrow q(\xi) = f(\xi)w_{st}^b = f(\xi)\frac{2Mgl^3}{\pi^4 EJ},$$

$$w_{st}^{os} = \frac{Mg}{k}, \quad f_{os}(\xi) = \frac{w_1(\xi)}{w_{st}^{os}} \Rightarrow w_1(\xi) = f_{os}(\xi)w_{st}^{os} = f_{os}(\xi)\frac{Mg}{k}, \quad \omega_1 = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{m}},$$

$$\kappa^2 = \frac{v^2}{\omega_1^2 l^2}, \quad \alpha = \frac{2k\eta l^4}{\pi^4 MvEJ} = \frac{2k\eta}{Mvm\omega_1^2}, \quad \beta = \frac{2k^2 l^5}{\pi^4 Mv^2 EJ} = \frac{2k^2 l}{Mv^2 m\omega_1^2}, \quad \delta = \frac{\eta k l^4}{\pi^3 MvEJ} = \frac{\pi\eta k}{Mvm\omega_1^2},$$

otrzymuje się bezwymiarowy układ równań różniczkowych sprzężonych, drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach:

$$\begin{cases} \kappa^2 \frac{d^2 f(\xi)}{d\xi^2} + \frac{vc}{ml\omega_1^2} \frac{df(\xi)}{d\xi} + f(\xi) = \left[ 1 - \frac{Mv^2}{kl^2} \frac{d^2 f_{os}(\xi)}{d\xi^2} \right] \sin \pi\xi, \\ \frac{d^2 f_{os}(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\eta l}{Mv} \frac{df_{os}(\xi)}{d\xi} + \frac{kl^2}{Mv^2} f_{os}(\xi) = \left[ \alpha \frac{df(\xi)}{d\xi} + \beta f(\xi) \right] \sin \pi\xi + 2\delta f(\xi) \cos \pi\xi. \end{cases} \quad (\text{Z.2.10})$$

Równania te opisują drgania układu oscylator-belka w zakresie  $0 \leq \xi \leq 1$  (oscylator znajduje się na belce). Rozwiązanie jest możliwe przy następujących warunkach początkowych:

$$\begin{aligned} \xi = 0 &\Rightarrow f_{os}(0) = 0, \quad \left. \frac{df_{os}(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0, \\ \xi = 0 &\Rightarrow f(0) = 0, \quad \left. \frac{df(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0. \end{aligned} \quad (\text{Z.2.11})$$

#### 4. Drgania swobodne oscylatora i belki

Od momentu zjazdu oscylatora z belki ( $\xi > 1$ ), zarówno oscylator jak i belka wykonują drgania swobodne. Równania ruchu obu tych elementów są następujące:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 w_1^*}{dt^2} + \eta \frac{dw_1^*}{dt} + kw_1^* &= 0, \\ EI \frac{\partial^4 w^*}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2} + c \frac{\partial w^*}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Z.2.12})$$

Są to jednorodne równania różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Dla odróżnienia od zakresu drgań wymuszonych, funkcje ugięcia belki i oscylatora oznaczono symbolem „\*”.

Dzieląc pierwsze z równań (Z.2.12) stronami przez  $M$  oraz zakładając rozwiązanie drugiego z równań w postaci:

$$w^*(x, t) = q^*(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (\text{Z.2.13})$$

otrzymuje się układ równań o niewiadomych funkcjach  $w_1^*(t)$  oraz  $q^*(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w_1^*(t)}{dt^2} + 2h^* \frac{dw_1^*(t)}{dt} + \omega_{os}^2 w_1^*(t) &= 0, \\ \ddot{q}^*(t) + 2h\dot{q}^*(t) + \omega_1^2 q^*(t) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{Z.2.14})$$

Rozwiązanie tych równań przedstawiają znane wyrażenia:

$$\begin{aligned} w_1^*(t) &= e^{-h^* t} \left( A \cos \left( \sqrt{\omega_{os}^2 - h^{*2}} \right) t + B \sin \left( \sqrt{\omega_{os}^2 - h^{*2}} \right) t \right), \\ q^*(t) &= e^{-ht} \left( C \cos \left( \sqrt{\omega_1^2 - h^2} \right) t + D \sin \left( \sqrt{\omega_1^2 - h^2} \right) t \right). \end{aligned} \quad (\text{Z.2.15})$$

Po wprowadzeniu współrzędnej bezwymiarowej  $\xi = vt/l$ , układ równań (Z.2.14) przekształci się do postaci:

$$\begin{cases} \kappa^2 \frac{d^2 f^*(\xi)}{d\xi^2} + \frac{vc}{ml\omega_1^2} \frac{df^*(\xi)}{d\xi} + f^*(\xi) = 0 \\ \frac{d^2 f_{os}^*(\xi)}{d\xi^2} + \frac{\eta l}{Mv} \frac{df_{os}^*(\xi)}{d\xi} + \frac{kl^2}{Mv^2} f_{os}^*(\xi) = 0 \end{cases}, \quad (Z.2.16)$$

a rozwiązanie (Z.2.15) przyjmie postać:

$$\begin{aligned} f_{os}^*(\xi) &= e^{-h^* \frac{l}{v} \xi} \left( A \cos\left(\sqrt{\omega_{os}^2 - h^{*2}}\right) \frac{l}{v} \xi + B \sin\left(\sqrt{\omega_{os}^2 - h^{*2}}\right) \frac{l}{v} \xi \right), \\ f^*(\xi) &= e^{-h \frac{l}{v} \xi} \left( C \cos\left(\sqrt{\omega_1^2 - h^2}\right) \frac{l}{v} \xi + D \cos\left(\sqrt{\omega_1^2 - h^2}\right) \frac{l}{v} \xi \right). \end{aligned} \quad (Z.2.17)$$

Funkcje  $f(\xi)$  (zal. (Z.2.10)) oraz  $f^*(\xi)$  (zal. (Z.2.17)) oraz ich pierwsze pochodne muszą być sobie równe w chwili zjazdu oscylatora z belki, czyli dla  $\xi = 1$ . W celu wyznaczenia stałych C i D zapisać można zatem następujące warunki brzegowe:

$$f(\xi)\Big|_{\xi=1} = f^*(\xi)\Big|_{\xi=1} \quad \text{oraz} \quad \frac{df(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=1} = \frac{df^*(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=1}. \quad (Z.2.18)$$

Podobnie dla  $\xi \geq 1$  zapisać można warunki pozwalające na wyznaczenie stałych A i B:

$$f_{os}(\xi)\Big|_{\xi=1} = f_{os}^*(\xi)\Big|_{\xi=1} \quad \text{oraz} \quad \frac{df_{os}(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=1} = \frac{df_{os}^*(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=1}. \quad (Z.2.19)$$

Ponieważ układ równań (Z.2.10) jest układem sprzężonym, zatem wyznaczenie stałych A, B, C i D jest możliwe jedynie na drodze numerycznej.

Oznaczenia przyjęte w równaniach (Z.2.14) ÷ (Z.2.17) to:

$$h^* = 0,5 \frac{\eta}{M}, \quad h = 0,5 \frac{c}{m}, \quad \omega_{os}^2 = \frac{k}{M}, \quad \omega_1^2 = \frac{EJ\pi^4}{ml^4}, \quad f^*(\xi) = \frac{q^*(\xi)}{w_{st}}, \quad f_{os}^*(\xi) = \frac{w_1^*(\xi)}{w_{os}^{st}}.$$

## 5. Numeryczne rozwiązanie równań metodą Rungego – Kutty

Grupa metod Rungego-Kutty (R-K) umożliwia numeryczne rozwiązywanie równań różniczkowych postaci (COLLATZ [1960], RALSTON [1975]):

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0 \quad (Z.2.20)$$

oraz układów równań postaci:

$$\begin{aligned} y_1' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (Z.2.21)$$

z warunkami początkowymi:  $y_i(t_0) = y_{i,0}$  dla  $i = 1, 2, \dots, n$ .

5.1. ZAPIS W DZIEDZINIE CZASU – WSPÓŁRZĘDNA  $t$  [S]

Aby możliwe było wykorzystanie metod R-K do rozwiązywania problemów (Z.2.9) i (Z.2.14), konieczne jest sprowadzenie tych układów do równań różniczkowych rzędu pierwszego.

Dokonując podstawienia w równaniach (Z.2.9) postaci:

$$\begin{aligned}\dot{q}(t) &= v_1(t) \\ \dot{w}_1(t) &= v_2(t)\end{aligned}\quad (\text{Z.2.22})$$

otrzymuje się układ czterech równań:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{v}_1(t) + \frac{2M}{ml} \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) \dot{v}_2(t) &= -\frac{c}{m} v_1(t) - \frac{EI\pi^4}{ml^4} q(t) + \frac{2Mg}{ml} \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) \\ M\dot{v}_2(t) &= -\eta v_2(t) - kw_1(t) + \eta \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) v_1(t) + \left[ k \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) + \frac{\eta\pi v}{l} \cos\left(\frac{\pi vt}{l}\right) \right] q(t) \\ \dot{q}(t) &= v_1(t) \\ \dot{w}_1(t) &= v_2(t) \end{aligned} \right.$$

lub w postaci macierzowej:

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{y}(t) + \mathbf{C}, \quad (\text{Z.2.23})$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2M}{ml} \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{m} & 0 & -\frac{EI\pi^4}{ml^4} & 0 \\ \eta \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) & -\eta & k \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) + \frac{\eta\pi v}{l} \cos\left(\frac{\pi vt}{l}\right) & -k \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{2Mg}{ml} \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = [\dot{v}_1(t) \quad \dot{v}_2(t) \quad \dot{q}(t) \quad \dot{w}_1(t)]^T,$$

$$\mathbf{y}(t) = [v_1(t) \quad v_2(t) \quad q(t) \quad w_1(t)]^T.$$

Oznaczając  $\mathbf{K} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  oraz  $\mathbf{L} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ , układ równań (Z.2.23) przekształcić można do postaci:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t) + \mathbf{L}, \quad (\text{Z.2.24})$$

gdzie:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{m} - \frac{2\eta}{ml} \sin^2\left(\frac{\pi vt}{l}\right) & \frac{2\eta}{ml} \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) & -\frac{EI\pi^4}{ml^4} - \frac{2k}{ml} \sin^2\left(\frac{\pi vt}{l}\right) - \frac{\eta\pi v}{ml^2} \sin\left(2\frac{\pi vt}{l}\right) & \frac{2k}{ml} \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) \\ \frac{\eta}{M} \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) & -\frac{\eta}{M} & \frac{k}{M} \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) + \frac{\eta\pi v}{Ml} \cos\left(\frac{\pi vt}{l}\right) & -\frac{k}{M} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{2Mg}{ml} \sin\left(\frac{\pi vt}{l}\right) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Podobnie w przypadku układu (Z.2.14) – podstawienie postaci:

$$\begin{aligned} \dot{q}^*(t) &= v_1^*(t) \\ \dot{w}_1^*(t) &= v_2^*(t) \end{aligned} \quad (\text{Z.2.25})$$

daje układ czterech równań:

$$\begin{cases} \dot{v}_1^*(t) = -\frac{c}{m} v_1^*(t) - \frac{EI\pi^4}{ml^4} q^*(t) \\ \dot{v}_2^*(t) = -\frac{\eta}{M} v_2^*(t) - \frac{k}{M} w_1^*(t) \end{cases}, \quad (\text{Z.2.26})$$

$$\begin{cases} \dot{q}^*(t) = v_1^*(t) \\ \dot{w}_1^*(t) = v_2^*(t) \end{cases}$$

lub w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1^*(t) \\ \dot{v}_2^*(t) \\ \dot{q}^*(t) \\ \dot{w}_1^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{m} & 0 & -\frac{EI\pi^4}{ml^4} & 0 \\ 0 & -\frac{\eta}{M} & 0 & -\frac{k}{M} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^*(t) \\ v_2^*(t) \\ q^*(t) \\ w_1^*(t) \end{bmatrix}, \quad (\text{Z.2.27})$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{y}}^*(t) = \mathbf{K}^* \mathbf{y}^*(t)}. \quad (\text{Z.2.28})$$

## 5.2. ZAPIS WE WSPÓŁRZĘDNEJ BEZWYMIAROWEJ $\xi$ [-]

Postępując podobnie jak w punkcie 5.1., podstawienie do układu (Z.2.10) zależności:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\xi) &= v(\xi) \\ \dot{f}_{os}(\xi) &= v_{os}(\xi) \end{aligned} \quad (\text{Z.2.29})$$

daje układ czterech równań postaci:

$$\mathbf{D}\dot{\mathbf{y}}(\xi) = \mathbf{E}\mathbf{y}(\xi) + \mathbf{F}, \quad (\text{Z.2.30})$$

gdzie:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \kappa^2 & \frac{Mv^2}{kl^2} \sin \pi\xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} -\frac{cv}{ml\omega_1^2} & 0 & -1 & 0 \\ \alpha \sin \pi\xi & -\frac{\eta l}{Mv} & \beta \sin \pi\xi + 2\delta \cos \pi\xi & -\frac{kl^2}{Mv^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F} = [\sin \pi\xi \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$\dot{\mathbf{y}}(\xi) = [\dot{v}(\xi) \quad \dot{v}_{os}(\xi) \quad \dot{f}(\xi) \quad \dot{f}_{os}(\xi)]^T,$$

$$\mathbf{y}(\xi) = [v(\xi) \quad v_{os}(\xi) \quad f(\xi) \quad f_{os}(\xi)]^T.$$

Przy oznaczeniach  $\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{E}$  oraz  $\mathbf{S} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}$ , układ równań (Z.2.30) zapisać można w postaci:

$$\dot{\mathbf{y}}(\xi) = \mathbf{R}\mathbf{y}(\xi) + \mathbf{S}, \quad (\text{Z.2.31})$$

gdzie macierze  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{S}$  wynoszą odpowiednio:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -\frac{vc}{\kappa^2 ml\omega^2} - \frac{Mv^2\alpha}{\kappa^2 kl^2} \sin^2 \pi\xi & \frac{v\eta}{\kappa^2 kl} \sin \pi\xi & -\frac{1}{\kappa^2} - \frac{Mv^2\beta}{\kappa^2 kl^2} \sin^2 \pi\xi - \frac{Mv^2\delta}{\kappa k^2 l^2} \sin 2\pi\xi & \frac{1}{\kappa^2} \sin \pi\xi \\ \alpha \sin \pi\xi & -\frac{\eta l}{Mv} & \beta \sin \pi\xi + 2\delta \cos \pi\xi & -\frac{kl^2}{Mv^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S} = \left[ \frac{1}{\kappa^2} \sin \pi\xi \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]^T.$$

W przypadku drgań swobodnych oscylatora i belki (równania (Z.2.16)), podstawienie postaci:

$$\begin{aligned} \dot{f}^*(\xi) &= v^*(\xi) \\ \dot{f}_{os}^*(\xi) &= v_{os}^*(\xi) \end{aligned} \quad (\text{Z.2.32})$$

daje ostatecznie układ równań:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}^*(\xi) \\ \dot{v}_{os}^*(\xi) \\ \dot{f}^*(\xi) \\ \dot{f}_{os}^*(\xi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{cv}{m\omega_1^2 \kappa^2} & 0 & -\frac{1}{\kappa^2} & 0 \\ 0 & -\frac{\eta l}{Mv} & 0 & -\frac{\kappa l^2}{Mv^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^*(\xi) \\ v_{os}^*(\xi) \\ f^*(\xi) \\ f_{os}^*(\xi) \end{bmatrix}, \quad (\text{Z.2.33})$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{y}}^*(\xi) = \mathbf{R}^* \mathbf{y}^*(\xi)}. \quad (\text{Z.2.34})$$

Układy (Z.2.24) oraz (Z.2.31) są liniowymi równaniami różniczkowymi rzędu pierwszego o zmiennych współczynnikach (macierze  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{L}$  zależą od zmiennej  $t$  natomiast macierze  $\mathbf{R}$  i  $\mathbf{S}$  zależą od zmiennej  $\xi$ ). Z kolei układy równań (Z.2.28) oraz (Z.2.34) to układy rzędu pierwszego o stałych współczynnikach. Postacie wszystkich tych układów są zgodne z (Z.2.21), zatem dają się rozwiązać metodami Rungego-Kutty.





## Bibliografia

- ABU-HILAL M., MOHSEN M., [2000]: *Vibration of beams with general boundary conditions due to a moving harmonic load*. Journal of Sounds and Vibration, 232(4), 2000.
- AKIN J.E., MOFID M., [1989]: *Numerical solution for response of beam with moving mass*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 115(1), 1989.
- ALLEMANG R.J., BROWN D.L., [2006]: *A Complete Review of the Complex Mode Indicator Function (CMIF) with Applications*. Proceedings of International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 2006.
- ALVIN K.F., ROBERTSON A.N., REICH G.W., PARK K.C., [2003]: *Structural system identification: from reality to models*. Computer and Structures, no. 81, pp. 1149-1176, 2003.
- APANAS L., STURZBECHER K., [2009]: *Analiza dynamiczna kratowego wiaduktu kolejowego w związku z dostosowaniem do przejazdu pociągów z dużymi prędkościami*. XIX Seminarium „Współczesne Metody Wzmocnienia i Przebudowy Mostów, Poznań – Rosnówko, 2009.
- AU F.T.K., WANG J.J., CHEUNG Y.K., [2001]: *Impact study of cable-stayed bridge under railway traffic using various models*. Journal of Sounds and Vibration, 240(3), 2001.
- AU F.T.K., WANG J.J., CHEUNG Y.K., [2002]: *Impact study of cable-stayed railway bridges with random rail irregularities*. Engineering Structures, 24, 2002, pp. 529-541.
- BAEZA L., RODA A., NIELSEN J.C.O., [2006]: *Railway vehicle/track interaction analysis using a modal substructuring approach*. Journal of Sounds and Vibration, 293, pp. 112-124, 2001.
- BENDAT J., PIERSOL A.G., [1976]: *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*. PWN, Warszawa, 1976.
- BIEŃ J., KRZYŻANOWSKI P., RAWA P., ZWOLSKI J., [2004]: *Dynamic load tests in bridge management*. Archives of Civil and Mechanical Engineering, vol. 4, no 2, 2004,
- BOROWICZ T., [1978]: *Wytyczenie belek pod obciążeniem ruchomym*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 24 (2), PWN, Warszawa, 1973.
- BRANICKI CZ., WIZMUR M., [1980]: *Metody macierzowe w mechanice budowli i dynamice budowli*. Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk, 1980.
- BRINCKER R., ZHANG L.M., ANDERSON P., [2000]: *Modal Identification from Ambient Response Using Frequency Domain Decomposition*. Proceedings of 18-th International Modal Analysis Conference (IMAC), San Antonio, USA, 2000.
- BROWNJOHN J.M.W., [2003]: *Ambient vibration studies for system identification of tall buildings*. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, vol. 32, no. 1, pp. 71-95, 2003.
- BRUNI S., COLLINA A., CORRADI R., [2005]: *Train-track-bridge interaction: Influence of track topology on structure dynamic performance*. EURO DYN 2005, Structural Dynamics, Millpress, Rotterdam, 2005, pp. 1063-1068.
- CALCADA R., CUNHA A., DELGADO R., [2002]: *Dynamic Analysis of Arch Railway Bridge*. Journal of Bridge Engineering, July/August, 2002.
- CHAUHAN S., MARTELL R., BROWN D.L., ALLEMANG R.J., [2006]: *Considerations in the Application of Spatial Domain Algorithms to Operational Modal Analysis*. Proceedings of International Conference on Noise and Vibration Engineering, ISMA, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium, 2006.
- CHENG Y.S., AU F.T.K., CHEUNG Y.K., [2001]: *Vibration of railway bridges under a moving train by using bridge-track-vehicle element*. Engineering Structures, 23, 2001.
- CHMIELEWSKI T., ZEMBATY Z., [1998]: *Podstawy Dynamiki Budowli*. ARKADY, Warszawa, 1998.
- CHOPRA A.K., [1995]: *Dynamics of structures*. Prentice Hall, New Jersey, 1995.

- CHRÓŚCIELEWSKI J., SZAFRAŃSKI M., ŻÓLTOWSKI K., [2004]: *Numeryczna ocena nośności dźwigarów mostu w Kieźmarku*. CURE, International Workshop on Simulations in Urban Engineering, Gdańsk, 2004.
- CHRÓŚCIELEWSKI J., DUDEK M., MALINOWSKI M., MIŚKIEWICZ M., [2005]: *Wybrane mosty kolejowe – obliczenia i weryfikacja „in situ”*. IX konferencja naukowo-techniczna „Programy MES w Komputerowym Wspomaganiu Analizy, Projektowania i Wytwarzania”; materiały konferencyjne, Giżycko, 19-22 października 2005, Warszawa, 2005.
- CHRÓŚCIELEWSKI J., MALINOWSKI M., MIŚKIEWICZ M., DUDEK M., [2007]: *Modelowanie konstrukcji mostowych – obliczenia i weryfikacja „in situ”*. Analizy numeryczne wybranych zagadnień mechaniki/ pod red. T. Niezgody. WAT, Warszawa, 2007.
- CHUDZIKIEWICZ A., DROŹDZIEL J., KISIŁOWSKI J., ŻOCHOWSKI A., [1982]: *Modelowanie i analiza dynamiki układu mechanicznego tor – pojazd szynowy*. PWN, Warszawa, 1982.
- CLAYTON E.H., [2002]: *Modal identification of a full-scale bridge using the Next-Era method*. US-Japan Advance Technology Research Symposium, Tokyo, Japan, 2002.
- CLOUGH R.W., PENZIEN J., [1993]: *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill Inc., 1993.
- COLLATZ L., [1960]: *Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych*. PWN, Warszawa, 1960.
- CRAWFORD R., WARD H.S., [1964]: *Determination of the natural periods of buildings*. Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 54, no. 6, pp. 1743-1756, 1964.
- CUNHA Á., CAETANO E., MAGALHÃES F., MOUTINHO C., [2006]: *From input-output to output-only modal identification of civil engineering structures*. SAMCO Final Report, 2006 ([www.samco.org](http://www.samco.org)).
- DE SCHUTTER B., [2000]: *Minimal state-space realization in linear system theory: an overview*. Journal of Computational and Applied Mathematics, no. 121 (2000), pp. 331-654.
- DIHN V.N., KIM K.D., WARNITCHAI P., [2009]: *Dynamic analysis of three-dimensional bridge – high-speed train interactions using a wheel-rail contact model*. Engineering Structures, 31, 2009, pp. 3090-3106.
- DOBROWOLSKI M., [1996]: *Rozwój produkcji elektrycznych zespołów trakcyjnych w Polsce*. Technika Transportu Szynowego, 5/1996.
- DOEBLING S.W., FARRAR CH.R., GOODMAN R.S., [1997]: *Effects of measurement statistics on the detection of damage in the Alamosa Canyon Bridge*. Proceedings of 15-th International Modal Analysis Conference (IMAC), Orlando, FL, 1997.
- DOMAŃSKI E., KOWALCZYK E., SKONIECKI J., [1974]: *Elektryczne zespoły trakcyjne serii EW55 i EN57*. WKiŁ, Warszawa, 1974.
- DE PATER A.D., [1982]: *Lateral vibrations of railway vehicles systems*. Dynamics of high-speed vehicles, Ed.: W.O. Schiehlen, Springer-Verlag, New York, 1982.
- DUDEK M., [2008]: *Identyfikacja parametrów dynamicznych konstrukcji mostowych na bazie drgań wywołanych obciążeniem środowiskowym*. Praca doktorska, Politechnika Gdańska, WILiŚ, Gdańsk 2008.
- DUDEK M., WILDE K., [2005]: *Identyfikacja postaci drgań obiektów mostowych na podstawie wymuszeń środowiskowych*. LI Konferencja Naukowa Komitetu Inż. Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZiTB: „Problemy naukowo-badawcze budownictwa – Krynica 2005”, Gdańsk – Krynica, 2005.
- DUDEK M., WILDE K., [2007]: *Identyfikacja parametrów dynamicznych mostu zespolonego w warunkach eksploatacji*. Inż. i Bud., 11/2007.
- ESVELD C., [1989]: *Modern railway track*. MRT Productions, Duisburg, Germany, 1989.
- ERMOPOULOS J., SPYRAKOS C.C., [2006]: *Validated analysis and strengthening of a 19<sup>th</sup> century railway bridge*. Engineering Structures, 28, 2006.
- FAN J., ZHANG Z., HUA H., [2007]: *Data processing in subspace identification and modal parameter identification an arch bridge*. Mechanical System and Signal Processing, no. 21, pp. 1674-1689, 2007.
- FODA M.A., ABDULJABBAR Z., [1998]: *A dynamic green function formulation fort the response of a beam structure to a moving mass*. Journal of Sounds and Vibration, 210(3), 1998.

- FRYBA L., [1972]: *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. Thomas Telford, 1972.
- FRYBA L., [1996]: *Dynamics of Railway Bridges*. Thomas Telford, 1996.
- FRYBA L., [2001]: *A rough assessment of railway bridges for high-speed trains*. Engineering Structures, 23, 2001.
- FRYBA L., PIRNER M., [2001]: *Load tests and modal analysis of bridges*. Engineering Structures, 23, 2001.
- GAO M.M., PAN J.Y., [2005]: *Coupling vibration analysis for train-track-bridge system*. EUROODYN 2005, Structural Dynamics, Millpress, Rotterdam, 2005, pp. 1069-1075.
- GARINEI A., [2006]: *Vibrations of simple beam-like modeled bridge under harmonic moving loads*. Int. Journal of Engineering Science 44 (2006), pp. 778-787.
- GAWRONSKI W., [1998]: *Dynamics and control of structures: a modal approach*. Springer-Verlag New York, Inc., 1998.
- GOICOLEA J.M., DOMINGUEZ J., NAVARRO J.A., GABALDON F., [2002]: *New dynamic analysis method for railway bridges in codes IAPF and Eurocod 1*. Railway Bridges. Design, Construction and Maintenance, IABSE, Madrid, 2002.
- GUO W.W., XIA H., DE ROECK G., LIU K., [2012]: *Integral model for train-track-bridge interaction on Sesia viaduct: Dynamic simulation and critical assessment*. Computers and Structures, 112-113 (2012), pp. 205-216.
- GYÖRGYI J., [2005]: *Calculation of train dynamic interaction with different model*. EUROODYN 2005, Structural Dynamics, Millpress, Rotterdam, 2005, pp. 1095-1100.
- HEIDEN M., STADLER C., [2009]: *Vibration of existing railway viaducts in Austria*. Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures, EVANCES'09, Wrocław, 2009.
- HENCHI K., FAFARD M., DHATT G., TABBLOT M., [1997]: *Dynamic behavior of multi-span beams under moving loads*. Journal of Sounds and Vibration, 199(1), 1997, pp. 33-50.
- HILDEBRANDT M., MALINOWSKI M., ŻÓŁTOWSKI K., [2009]: *Monitoring mostów podwieszonych*. Mosty, 3/2009.
- HERMANS L., VAN DER AUWERAER H., [1999]: *Modal testing and analysis of structures under operational conditions: industrial applications*. Mechanical Systems and Signal Processing, 13(2), pp. 193-216, 1999.
- HIRSZ M., WILDE K., [2005]: *Identification of plate dynamic parameters for structural health monitoring*. W: Shell structures: Theory and applications, London: Taylor & Francis/Balkema. Proceedings of the 8-th SSTA Conference, Jurata, Poland, 2005.
- HO B.L., KALMAN R.E., [1966]: *Effective construction of linear, state-variable models from input/output functions*. Regelungstechnik 14(12), 1966, pp. 545-548.
- HOLLKAMP J.J., GORDON R.W., [2001]: *Modal test experiences with a jet engine fan model*. Journal of Sounds and Vibration, no. 248(1), pp. 151-165, 2001.
- HUNG C.F., KO W.J., [2002]: *Identification of modal parameters from measured output data using vector backward autoregressive model*. Journal of Sounds and Vibration, no. 256(2), pp. 249-270, 2002.
- ICHIKAWA M., MIYAKAWA Y., MATSUDA A., [2000]: *Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass*. Journal of Sounds and Vibration, 230(3) 2000, pp. 493-506.
- INGLIS C.E., [1934]: *A Mathematical Treatise on Vibration in Railway Bridges*. The University Press, Cambridge, England, 1934.
- IWNICKI S., [2006]: *Handbook of Railway Vehicle Dynamics*. Monografia zbiorowa, ed. S. Iwnicki, Taylor & Francis, 2006.
- JAMES G.H., CARNE T.G., LAUFFER J.P., [1993]: *The Natural Excitation Technique (NExT) for Modal Parameter Extraction from Operating Wind Turbines*. Sandria Report, SAND92-1666, 1993.
- JEFFCOTT H.H., [1929]: *On the vibration of beams under the action of moving loads*. Phil. Magazine, Ser. 7, 8(48).

- JENDRZEJEK S.W., [1971]: *Analiza współpracy dynamicznej mostu i pojazdu drogowego*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 17 (1), PWN, Warszawa, 1971.
- JENDRZEJEK S.W., [1973]: *O sprzężeniu dynamicznym mostu i pojazdu drogowego*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 19 (3), PWN, Warszawa, 1973.
- JOHNSON K.L., [1985]: *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- JUANG J.N., [1994]: *Applied system identification*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall PTR, New Jersey, Inc. 1994.
- JUANG J.N., PAPPAS R.S., [1985]: *An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction*. Journal of Guidance, Control and Dynamics, no. 8(5), pp. 620-627, 1985.
- KALKER J.J., [1980]: *Review of wheel-rail rolling contact theories. The general problem of rolling contact*. Eds. A.L. Browne, N.T. Tsai, vol. 40, New York, American Society of Mechanical Engineers, 1980.
- KALKER J.J., [1990]: *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*. Kluwer Academic Publishers, 1990.
- KATAYAMA T., [2005]: *Subspace Methods for System Identification*. Springer-Verlag, London, 2005.
- KĄCZKOWSKI Z., [1967]: *O drganiach belki mostowej pod wpływem przesuających się obciążeń*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej nr 201, Budownictwo nr 20, Gliwice, 1967.
- KĘDZIERSKI B., [1972]: *Postęp techniczny w mostownictwie*. WKŁ, Warszawa, 1972.
- KINCAID D., CHENEY W., [2006]: *Analiza numeryczna*. WNT, Warszawa, 2006.
- KISIŁOWSKI J., [1991]: *Dynamika układu mechanicznego pojazd szynowy-tor*. Praca zbiorowa pod redakcją J. Kisiłowskiego, PWN, Warszawa, 1991.
- KLASZTORNY M., [1987]: *Drgania jednorodnych mostów kolejowych wywołane ruchem pociągów z dużymi prędkościami*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław, 1987.
- KLASZTORNY M., [1990]: *Analiza drgań belki mostowej przenoszącej jednorodny strumień obciążeń ruchomych*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 36 (3), PWN, Warszawa, 1990.
- KLASZTORNY M., LANGER J., [1990]: *Warianty sformułowania i analiza równań równowagi dynamicznej konstrukcji mostowych poddanych działaniu strumieni obciążeń inercyjnych*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 36 (1-2), PWN, Warszawa, 1990.
- KLASZTORNY M., [2003]: *Analiza dynamiczna belkowych mostów zespolonych na CMK w warunkach zwiększonych prędkości pociągów (160 – 250) km/h*. Drogi i Mosty, 3/2003.
- KLASZTORNY M., [2004]: *Drgania nieliniowe ruchomego pojazdu szynowego wywołane wężykowaniem i uderzeniami bocznymi zestawów kołowych*. L Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu PZiTb „Krynica 2004”, Warszawa – Krynica, 2004.
- KLASZTORNY M., [2004<sup>1</sup>]: *Drgania przestrzenne belkowych mostów stalowych wywołane przejazdem pociągów z dużymi prędkościami, część 1 – teoria*. V Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna „Problemy projektowania, budowy oraz utrzymania mostów małych i średnich rozpiętości”, Wrocław, 2004.
- KLASZTORNY M., [2004<sup>2</sup>]: *Drgania przestrzenne belkowych mostów stalowych wywołane przejazdem pociągów z dużymi prędkościami, część 2 – analiza numeryczna*. V Krajowa Konferencja Naukowo-Techniczna „Problemy projektowania, budowy oraz utrzymania mostów małych i średnich rozpiętości”, Wrocław, 2004.
- KLASZTORNY M., [2005]: *Dynamika mostów belkowych obciążonych pociągami szybkojeżdżącymi*. WNT, Warszawa, 2005.
- KNOTHE K., WU Y., [1998]: *Receptance behavior of railway track and subgrade*. Archive of Applied Mechanics, 68, pp. 457-470, 1998.
- KRYŁOW A.N., [1905]: *Über die erzwungenen Schwingungen von gleichförmigen elastischen Stäben*. Mathematische Annalen, vol. 61, 1905.
- KOZAKIEWICZ A., WILDE K., [2003]: *Modelowanie testów dynamicznych skokiem z progu wykonanych na moście wawtownym w ciągu ulicy Sucharskiego w Gdańsku*. XLIX Konferencja Naukowa Komitetu

- Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB „Problemy naukowo-badawcze budownictwa”, Warszawa – Krynica, 14-19 września, 2003.
- KOWALSKI E., [1987]: *Pojazdy trakcyjne*. WKŁ, wyd. 5, Warszawa, 1987.
- KROMULSKI J., PAWŁOWSKI T., SZCZEPANIAK J., [2006]: *Eksperymentalna identyfikacja parametrów modalnych niestacjonarnych układów mechanicznych z zastosowaniem eksploatacyjnej analizy modalnej*. Modelowanie Inżynierskie, nr 32, s. 309-316, Gliwice, 2006.
- KUCHARSKI T., [2002]: *System pomiaru drgań mechanicznych*. WNT, Warszawa, 2002.
- KWARK J.W., CHOI E.S., KIM Y.J., KIM B.S., KIM S.I., [2004]: *Dynamic behavior of two-span continuous concrete bridges under moving high-speed train*. Computers and Structures, 82, 2004, pp. 463-474.
- KWARK J.W., CHOI E.S., LEE J.W., KIM B.S., [2005]: *Dynamic responses of high-speed railway bridges in Korea*. EURO DYN 2005, Structural Dynamics, Millpress, Rotterdam, 2005, pp. 1039-1043.
- LANGER J., [1973]: *Studium dynamiki przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 19 (2), PWN, Warszawa, 1973.
- LANGER J., [1974]: *Analiza dynamiczna przęsła mostowego obciążonego ruchomym pojazdem*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 20 (4), PWN, Warszawa, 1974.
- LANGER J., KLASZTORNY M., [1981]: *Drgania złożonego układu belkowego pod ruchomym inercyjnym obciążeniem cyklicznym*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 27 (2), PWN, Warszawa, 1981.
- LANGER J., KLASZTORNY M., [1982]: *Drgania układów kratowo-belkowych pod ruchomym inercyjnym obciążeniem cyklicznym*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 28 (1-2), PWN, Warszawa, 1982.
- LANGER J., KLASZTORNY M., [1983]: *Dynamiczne wyłączenie pomostów w belkowych mostach kolejowych*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 29 (3), PWN, Warszawa, 1983.
- LEE H.P., [1996<sup>1</sup>]: *Dynamic response of a beam with a moving mass*. Journal of Sounds and Vibration, 191(2), 1996.
- LEE H.P., [1996<sup>2</sup>]: *The dynamic response of a Timoshenko beam subjected to a moving mass*. Journal of Sounds and Vibration, 198(2), 1996.
- LEI X., NODA N.A., [2002]: *Analyses of dynamic response of vehicle and track coupling system with random irregularity of track vertical profile*. Journal of Sounds and Vibration, 258(1), 2002.
- LEWANDOWSKI R., [2006]: *Dynamika Konstrukcji Budowlanych*. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, 2006.
- LI J., SU M., [1999]: *The resonant vibration for a simply supported girder bridge under high-speed trains*. Journal of Sounds and Vibration, 224(5), 1999.
- LIU K., REYNDERS E., DE ROECK G., LOMBAERT G., [2009<sup>1</sup>]: *Experimental and numerical analysis of composite bridge for high-speed trains*. Journal of Sounds and Vibration, 320, 2009, pp. 201-220.
- LIU K., LOMBAERT G., DE ROECK G., CHELLINI G., NARDINI L., SALVATORE W., [2009<sup>2</sup>]: *The structural behavior of a composite bridge during the passage of high-speed trains*. Structural Engineering International, 19 (4), 2009.
- LOU P., [2005]: *A vehicle-track-bridge interaction element considering vehicle's pitching effect*. Finite Elements in Analysis and Design, 41, 2005, pp. 397-427.
- LUBOWIECKA I., [2004]: *Całkowanie nieliniowych równań dynamiki ciała sztywnego i powłok sprężystych*. Politechnika Gdańska, monografie nr 48, Gdańsk, 2004.
- LUSCHER D.J., BROWNJOHN J.M.W., SOHN H., FARRAR CH.R., [2001]: *Modal parameter extraction of Z24 bridge data*. Proceedings of 19-th International Modal Analysis Conference (IMAC), Kissimmee, Florida, USA, 2001.
- LYONS R.G., [2003]: *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*. WKŁ, Warszawa, 2003.
- ŁODYGOWSKI T., KĄKOL W., [1994]: *Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji inżynierskich*. Skrypt PP, nr 1779, 1994.
- MAIA N.M.M., SILVA J.M.M., [1997]: *Theoretical and experimental modal analysis*. Research Studies Press Ltd, Baldock, Hertfordshire (England), 1997.

- MAIA N.M.M., SILVA J.M.M., [2001]: *Modal analysis identification techniques*. Philosophical Transaction of the Royal Society A, no. 359, Mathematical, Physical & Engineering Sciences, London, 2001.
- MAJKA M., HARTNETT M., O'DWYER D., [2004]: *A numerical model for analysis of dynamic response of bridge under moving trains*. IABSE, Symposium "Metropolitan Habitats and Infrastructure", Shanghai, China, 2004.
- MAJKA M., HARNETT M., [2008]: *Effects of speed, load and damping on the dynamic response of railway bridges and vehicles*. Computer and Structures, 86, 2008, pp. 556-572.
- MALINOWSKI M., RUTKOWSKI R., [2005]: *Badania mostu III Tysiąclecia im. Jana Pawła II w Gdańsku w trakcie trzyletniej eksploatacji*. Inż. i Bud., 6/2005.
- MALM R., ANDERSSON A., [2006]: *Field testing and simulation of dynamic properties of tied arch railway bridge*. Engineering Structures, 28, pp. 143-152, 2006.
- MARQUES F., CUHNA A., FERNANDES A., CAETANO E., MAGALHAES F., [2007]: *Evaluation of dynamic effects and fatigue of a metallic railway bridge*. Analysis for Civil Engineering Structures, EVANCES'07, Porto, 2007.
- MASSEL A., [2002]: *PKP Szybka Kolej Miejska w Trójmieście jako przewoźnik aglomeracyjny*. Technika Transportu Szybowego, 7-8/2002.
- MICHALTSOS G.T., SOPHIANOPOULOS D., KOUNADIS A.N., [1996]: *The effect of a moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam*. Journal of Sounds and Vibration, 191(3), 1996.
- MICHALTSOS G.T., [2002]: *Dynamic behavior of a single-span beam subjected to loads moving with variable speeds*. Journal of Sounds and Vibration, 258(2), 2002.
- MUSEROS P., ROMERO M.L., POY A., ALARCON E., [2002]: *Advances in the analysis of short span railway bridges for high-speed lines*. Computer and Structures, 80, pp. 2121-2132, 2002.
- MÜLLER M., [2012]: *Analiza możliwości użytkowania kratownicowego mostu kolejowego w Żukowie w świetle obowiązujących przepisów*. Praca dyplomowa, Politechnika Gdańska, WILiŚ, Gdańsk, 2012.
- NALESZKIEWICZ J., [1953]: *Z dynamiki belki mostowej*. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 5, 2, 1953.
- NAYERI R.D., TASBIHGOO F., WAHBEH M., CAFFREY J.P., MASRI S.F., CONTE J.P., ELGAMAL A., [2009]: *Study of Time-Domain Techniques for modal Parameter Identification of Long Suspension Bridge with Dense Sensor Arrays*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, July, 2009.
- OLSSON M., [1991]: *On the fundamental moving load problem*. Journal of Sounds and Vibration, 145 (2), 1991, pp. 299-307.
- PASTEREV A.V., BERGMAN L.A., [1997]: *Response of elastic continuum carrying moving linear oscillator*. Journal of Engineering Mechanics, 123(8), 1997.
- PEETERS B., DE ROECK G., [1999]: *Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis*. Mechanical Systems and Signal Processing, 13(6), 1999.
- PEETERS B., DE ROECK G., [2001]: *Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis: A Review*. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, vol. 123/1, ASME, 2001.
- PETSOUNIS K.A., FASSOIS S.D., [2001]: *Parametric time-domain methods for the identification of vibrating structures – a critical comparison and assessment*. Mechanical System and Signal Processing, no. 15(6), pp. 1031-1060, 2001.
- POGORZELSKI W., [1953]: *Równania całkowite i ich zastosowania, T.1: Własności ogólne równań Fredholma i Volterra*, PWN, Warszawa, 1953.
- RACZYŃSKI J., [2005]: *Pociągi dużych prędkości – kierunki rozwoju*. Technika Transportu Szybowego, 5-6/2005.
- RAKOWSKI J., ŚWITKA R., [1973]: *Drgania kratownicy regularnej pod wpływem siły ruchomej*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 19 (3), PWN, Warszawa, 1973.
- RALSTON A., [1975]: *Wstęp do analizy numerycznej*. PWN, Warszawa, 1975.
- REN W.X., ZONG Z.H., [2004]: *Output-only modal parameter identification of civil engineering structures*. Structural Engineering and Mechanics, vol. 17, no. 3-4, 2004.

- RIBEIRO D., CALCADA R., DELGADO R., [2005]: *Dynamic analysis of Alcácer do Sal railway bridge*. EUROODYN 2005, Structural Dynamics, Millpress, Rotterdam, 2005, pp. 1661-1667.
- REBELO C., HEIDEN M., PIRCHER M., SIMOES DA SILVA L., [2005]: *Vibration measurements on existing single-span concrete railway viaducts in Austria*. EUROODYN 2005, Structural Dynamics, Millpress, Rotterdam, 2005, pp. 1637-1642.
- RIGUEIRO C., REBELO C., SIMOES DA SILVA L., [2007]: *Experimental study of single span railway bridges*. Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures, EVANCES'07, Porto, 2007.
- ROMANISZYN Z., [1999]: *Charakterystyki pociągów dużych prędkości i cechy konstrukcji ich podwozi*. Technika Transportu Szynowego, 5/1999.
- RUSAK R., [2008]: *Pociągi z wychylnym nadwoziem w Europie*. Technika Transportu Szynowego, 11/2008.
- SALAMAK M., [2003]: *Rola tłumienia drgań w kładkach dla pieszych oraz metody jego identyfikacji*. W: Projektowanie, budowa i estetyka kładek dla pieszych, cykl seminariów, Kraków 8.X, 5.XI, 3.XII, 2003.
- SALLER H., [1921]: *Einfluss bewegter Last auf Eisenbahnoberbau und Brücken*. Kreidels Verlag, Berlin, 1921.
- SANCEWICZ S., [2010]: *Nawierzchnia kolejowa*. PKP Polskie Linie Kolejowe S.A., Warszawa, 2010.
- SHIH C.Y., TSUEI Y.G., ALLEMANG R.J., BROWN D.L., [1989]: *Complex Mode Indication Function and it's Spatial Domain Parameter Estimation*. Proceedings of International Modal Analysis Conference (IMAC VII), pp. 533-540, 1989.
- SIEDLECKI J., [2009]: *Lokomotywa ES64U4*. Technika Transportu Szynowego, 12/2009.
- SIRINGORINGO D.M., FUJINO Y., [2008]: *System identification of suspension bridge from ambient vibration response*. Engineering Structures, 30(2), pp. 462-477, 2008.
- SIWOWSKI T., SOBALA D., ŻÓŁTOWSKI K., [2005]: *Ocena nośności uszkodzonego kratownicowego dźwigarostu mostu kolejowego*. XXII Konferencja Naukowo-Techniczna „Awaryjne Budowlane”, Szczecin – Międzyzdroje, 2005.
- SMIRNOW W.I., [1962]: *Matematyka wyższa*. Tom IV, cz. 1: Równania całkowe, rachunek wariacyjny, PWN, 1962.
- SOLECKI R., SZYMKIEWICZ J., [1964]: *Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne*. ARKADY, Warszawa, 1964.
- STABROWSKI M.M., [2002]: *Cyfrowe przyrządy pomiarowe*. PWN, Warszawa, 2002.
- STOKES G.G., [1849]: *Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges*. Trans Cambridge Phil. Soc. 8(5), 1849.
- SU D., HERNANDEZ JR. J., FUJINO Y., OLLINGER E., MIYASHITA T., [2007]: *Local dynamic vibration prediction of interaction between high-speed train and railway bridge*. Experimental Vibration Analysis for Civil Engineering Structures, EVANCES'07, Porto, 2007.
- SUN Y.Q., DHANASEKAR M., [2002]: *A dynamic model for the vertical interaction of the rail track and wagon system*. Int. Journal of Solids and Structures, 39, pp. 1337-1359, 2002.
- SUWALSKI R., [1996]: *Wózki do nowych i modernizowanych elektrycznych zespołów trakcyjnych*. Technika Transportu Szynowego, 5/1996.
- SZABATIN J., [1982]: *Podstawy teorii sygnałów*. WKŁ, Warszawa, 1982.
- SZAFRAŃSKI M., ŻÓŁTOWSKI K., [2013]: *Modelowanie konstrukcji mostów pod kątem dynamicznym*. Seminarium „Mosty Kolejowe”, Warszawa – Jachranka, 2013.
- SZCZEŚNIAK W., ATAMAN M., ZBICIAK A., [2002]: *Drgania belki sprężystej wywołane ruchomym, liniowym oscylatorem jednomasowym*. Drogi i Mosty, nr 2, 2002.
- SZCZEŚNIAK W., JURKOWSKI J., WINNICKI A., [2004]: *Drgania belki Eulera z nierównościami jezdni i tłumikiem mechanicznym, wymuszone ruchem oscylatora trójmasowego*. Theoretical Foundations of Civil Engineering – XII, Warszawa, 2004.



- TIMOSHENKO S.P., [1908]: *Forced vibration of prismatic bars*. Izvestiya Kievskogo Politekhnicheskogo Instituta, 1908.
- TIMOSHENKO S.P., [1922]: *On the forced vibration of bridges*. Philosophic Magazine, Ser. 6, 43 (1922).
- TIMOSHENKO S.P., YOUNG D.H., [1955]: *Vibration Problems in Engineering*. 3<sup>rd</sup> ed., D. Van Nostrand Co., New York, 1955.
- TIMOSHENKO S.P., [1953]: *History of the Strength of Materials*. McGraw-Hill Co., Inc. New York, 1953.
- TOPOLIŃSKI T., [1997]: *Analiza teoretyczna i badania kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych konstrukcyjnych kompozytów polimerowych*. Rozprawy, nr 82, ATR, Bydgoszcz, 1997.
- TOWPIK K., [2009]: *Infrastruktura transportu kolejowego*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, wyd. II, Warszawa, 2009.
- VAN OVERSHEE P., DE MOOR B., [1996]: *Subspace Identification for Linear Systems. Theory, Implementation, Applications*. Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht, 1996.
- WANG J.F., LIN C.C., CHEN B.L., [2003]: *Vibration suppression for high-speed railway bridges using tuned mass dampers*. Int. Journal of Solids and Structures, 40, 2003.
- WICHER J., [1977]: *Problemy identyfikacji systemów technicznych ze szczególnym uwzględnieniem układów mechanicznych*. Prace IPPT PAN, Warszawa, 1977.
- WILLIS R., [1849]: *Appendix to the report of the commissioners appointed to inquire into the application of iron to railway structures*. H. M. Stationary Office, London, 1849.
- WOLFRAM T., [2007]: *Europejskie pociągi dużych prędkości 2006*. Technika Transportu Szynowego, 1-2/2007.
- WOŁOWICKI W., STURZBECHER K., APANAS L., [2005]: *Badania dynamiczne pewnych typów mostów kolejowych związane z ich dostosowaniem do dużych prędkości taboru*. Inż. i Bud., 5/2005.
- WU J.S., DAI C.W., [1987]: *Dynamic responses of multi-span nonuniform beam due to moving loads*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 113(3), 1987.
- WU Y.S., YANG Y.B., [2003]: *Steady-state response and riding comfort of trains moving over a series of simply supported bridges*. Engineering Structures, 25, 2003, pp. 251-265.
- XIA H., DE ROECK G., ZHANG N., MAECK J., [2003]: *Experimental analysis of a high-speed railway bridge under Thalys trains*. Journal of Sounds and Vibration, 268, 2003, pp. 103-113.
- XIA H., DE ROECK G., ZHANG H.R., ZHANG N., [2001]: *Dynamic analysis of train-bridge system and its application in steel girder reinforcement*. Computer and Structures, 79, 2001, pp. 1851-1860.
- XIA H., XU Y.L., CHAN T.H.T., [2000]: *Dynamic interaction of long suspension bridges with running trains*. Journal of Sounds and Vibration, 268(2), 2000, pp. 263-280.
- XIA H., ZHANG N., DE ROECK G., [2003]: *Dynamic analysis of high speed railway bridge under articulated trains*. Computer and Structures, 81, 2003, pp. 2467-2478.
- XIA H., ZHANG N., [2005]: *Dynamic analysis of railway bridge under high-speed trains*. Computer and Structures, 83 (2005), pp. 210-228.
- XIA H., ZHANG N., SUN G.J., [2005]: *Experimental study of railway bridges under high-speed trains*. EURO DYN 2005, Structural Dynamics, Millpress, Rotterdam, 2005, pp. 1083-1088.
- XIA H., ZHANG N., GUO W.W., [2006]: *Analysis of resonance mechanism and conditions of train-bridge system*. Journal of Sounds and Vibration, 297, 2006.
- YANG Y.B., YAU J.D., WU Y.S., [2004]: *Vehicle-Bridge Interaction Dynamics: With Application to High-Speed Railways*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2004.
- YANG F., FONDER A., [1998]: *Dynamic response of cable-stayed bridges under moving loads*. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 214(4), 1998.
- YANG Y.B., LIN B.H., [1995]: *Vehicle-bridge interaction analysis by dynamic condensation method*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 121(11), 1995.
- YANG Y.B., LIN C.W., [2005]: *Vehicle-bridge interaction and potential application*. Journal of Sounds and Vibration, 284, 2001, pp. 205-226.

- YANG Y.B., YAU J.D., [1997]: *Vehicle-bridge interaction element for dynamic analysis*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 123(11), 1997.
- YANG Y.B., YAU J.D., HSU L.C., [1997]: *Vibration of simple beam due to trains moving at high speed*. Engineering Structures, 19 (11), 1997.
- YAU J.D., YANG Y.B., [2006]: *Vertical acceleration of simple beams due to successive loads traveling at resonant speed*. Journal of Sounds and Vibration, 289 (2006), pp. 210-228.
- YAU J.D., YANG Y.B., KUO S.R., [1999]: *Impact response of high speed rail bridges and riding comfort of rail cars*. Engineering Structures, 21, pp. 836-844, 1999.
- YAU J.D., WU Y.S., YANG Y.B., [2001]: *Impact response of bridges with elastic bearings to moving loads*. Journal of Sounds and Vibration, 248(1), 2001, pp. 9-30.
- ZHAI W., CAI Z., [1997]: *Dynamic interaction between a lumped mass vehicle and a discretely supported continuous rail track*. Computer and Structures, vol. 63, no. 5, 1997.
- ZHANG L., [2004]: *An Overview of Major Developments and Issues in Modal Identification*. Proceedings of 22<sup>nd</sup> International Modal Analysis Conference (IMAC), Detroit, USA, 2004.
- ZHANG L., BRINCKER R., ANDERSEN P., [2001]: *Modal Indicators for Operational Modal Identification*. Proceedings of 19-th International Modal Analysis Conference (IMAC), Kissimmee, Florida, pp. 746-752, 2001.
- ZHANG L., BRINCKER R., ANDERSEN P., [2005]: *An Overview of Operational Modal Analysis: Major Developments and Issues*. Proceedings of 1-st International Operational Modal Analysis Conference (IOMAC), Copenhagen, Denmark, 2005.
- ZHANG I., KANDA H., BROWN D.L., ALLEMANG R.J., [1985]: *A Polyreference Frequency Domain Method for Modal Parameter Identification*. ASME, no. 85-DET-106, 1985.
- ZHANG N., XIA H., SUN G.J., [2005]: *Dynamic analysis of continuous arch bridge across the Yellow River under high speed trains*. EURO DYN 2005, Structural Dynamics, Millpress, Rotterdam, 2005, pp. 1027-1032.
- ZHANG N., XIA H., GUO W., [2008]: *Vehicle-bridge interaction analysis under high-speed trains*. Journal of Sounds and Vibration, 309 (2008), pp. 210-228.
- ZHANG Q.L., VROUWENVELDER A., WARDENIER J., [2001]: *Numerical simulation of train- bridge interactive dynamics*. Computer and Structures, 79, 2001, pp. 1059-1075.
- ZHAO X., SUN H.H., ZHENG Y.M., [2009]: *Identification and updating for the three-dimensional finite element model of a long span steel skybridge*. The Structural Design of Tall and Special Buildings, 18, pp. 625-646, 2009.
- ZICHA J.H., [1989]: *High-speed rail track design*. Journal of Transportation Engineering, ASCE, vol. 115, no. 1, January, 1989.
- ZIELIŃSKI T.P., [2005]: *Cyfrowe przetwarzanie sygnałów. Od teorii do zastosowań*. WKŁ, Warszawa, 2005.
- ZIMMERMANN H., [1896]: *Die Schwingungen eines Trägers mit bewegter Last*. Centralblatt der Bauverwaltung, 16 (1896), No. 23, 249-251.
- ZWOLSKI J., RAWA P., GŁADYSZ M., ROSZKOWSKI A., [2007]: *Inertial exciter as a tool for dynamic assessment of railway bridges*. Sustainable Bridges. Assessment for Future Traffic Demands and Longer Lives. Ed.: J. Bień, L. Elfgren, J. Olofsson. DWE, Wrocław, 2007.
- ŻÓŁTOWSKI B., [2002]: *Badania dynamiki maszyn*. ATR, Bydgoszcz 2002.
- ŻÓŁTOWSKI K., [2009]: *O możliwościach analizy mostów stalowych*. Inż. i Bud., 1-2/2005.
- ŻÓŁTOWSKI K., KOZAKIEWICZ A., ROMASZKIEWICZ T., SZAFRAŃSKI M., MADAJ A., FALKIEWICZ R., RADUSZKIEWICZ T., REDZIMSKI K., [2010]: *Przebudowa mostu kolejowego przez rzekę Pilicę z przystosowaniem do dużych prędkości*. Archiwum Instytutu Inżynierii Lądowej 8/2010, XX Seminarium „Współczesne Metody Wzmacniania i Przebudowy Mostów”, Poznań, 2010.
- ŻÓŁTOWSKI K., SZAFRAŃSKI M., [2009]: *Uszkodzenia wiaduktu kolejowego nad drogą krajową nr 7. Analiza nośności i sposób naprawy*. XXIV Konferencja Naukowo-Techniczna „Awary Budowlane”. Szczecin – Międzyzdroje, 2009.

ŻÓŁTOWSKI K., SZAFRAŃSKI M., KOZAKIEWICZ A., [2013]: *Zastosowanie istniejących przęseł odciążających typu mostowego dla prędkości eksploatacyjnych do 60 km/h*. Mosty 2/2013.

ŻURKOWSKI A., [2005]: *Duże prędkości – UIC*, Polska. Technika Transportu Szynowego, 5-6/2005.

#### PRZEPISY I NORMY

CNTK [2002]: *Standardy techniczne – szczegółowe warunki techniczne dla modernizacji linii CMK do prędkości 200/250 km/h. Obiekty inżynierskie*. Warszawa, 2002.

DECYZJA KOMISJI 2008/232/WE [2008]: *Decyzja Komisji z dnia 21 lutego 2008 roku dotycząca specyfikacji technicznej interoperacyjności podsystemu „Tabor” transeuropejskiego systemu kolei dużych prędkości*. Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej, Decyzja 2008/232, WE, 2008.

D1 [2002]: *D1 Warunki techniczne utrzymania nawierzchni na liniach kolejowych*. PKP Polskie Linie Kolejowe S.A., Warszawa, 2002.

EN 1991-2:2002 [2002]: *Eurocod 1: Action on structures – Part 2: Traffic loads on bridges*. CEN, 2002.

EN 1990-A2 [2002]: *Eurocod: Basis of structural design. Annex A2. Application for bridges*. CEN, 2002.

PN-EN 1991-2 [2007]: *Eurokod 1: Oddziaływania na konstrukcje. Część 2: Obciążenia ruchome mostów*. PKN, Warszawa, 2007.

PN-85/S-1030 [1985]: *Polska Norma: Obiekty mostowe. Obciążenia*. PKNMiJ, wyd. 2, Warszawa, 1985.

STANDARDY TECHNICZNE [2009]: *Standardy Techniczne, szczegółowe warunki techniczne dla modernizacji lub budowy linii kolejowych do prędkości  $v_{max} \leq 200$  km/h (dla taboru konwencjonalnego)/ 250 km/h (dla taboru z wychylnym pudłem). Tom XVI – Wymagania dotyczące taboru narzucone przez infrastrukturę kolejową i obowiązujące specyfikacje TSI*. PKP PLK S.A, CNTK, Warszawa, 2009.

#### PROJEKTY I OPRACOWANIA

BPK [2009]: *Przebudowa linii kolejowej E65 na odcinku Warszawa – Gdynia, etap I w Polsce, proj. nr FS 2004/PL/16/C/PT/006-04 – Most na rzece Raduni w km 321,153*. Biuro Projektów Komunalnych w Poznaniu, 2009.

BPBK [2008]: *Projekt wykonawczy: Budowa Drogi Zielonej wraz z przebudową i budową drugiej jezdni ul. Gospody w Gdańsku, etap 2 – tunele na terenie zamkniętym PKP*. Biuro Projektów Budownictwa Komunalnego w Gdańsku, Gdańsk, 2008.

KBP [2009]: *Sprawozdanie z badań podczas próbnego obciążenia konstrukcji odciążających typu KO-30/73 o rozpiętości teoretycznej  $L_t = 30$  m wbudowanych w km 298,655 na szlaku Tczew – Pszczółki w torze nr 1 i 2*. Konsultacyjne Biuro Projektowe „Krzysztof Żółtowski”, maj – czerwiec, 2009.

KBP [2010]: *Sprawozdanie z badań podczas próbnego obciążenia konstrukcji odciążających typu KO-30/73 o rozpiętości teoretycznej  $L_t = 30$  m wbudowanych na czas budowy tunelu przez nasyp kolejowy w rejonie przystanku SKM „Wzgórze św. Maksymiliana” w Gdyni – torze nr 501, 502, 1, 2*. Konsultacyjne Biuro Projektowe „Krzysztof Żółtowski”, luty – maj, 2010.

KBP<sup>1</sup> [2012]: *Projekt wbudowania konstrukcji odciążających typu mostowego o  $L_t = 30$  m. Budowa Drogi Zielonej wraz z przebudową i budową drugiej jezdni ul. Gospody w Gdańsku – etap 2 – tunele na zamkniętym terenie PKP*. Konsultacyjne Biuro Projektowe „Krzysztof Żółtowski”, Gdańsk, 2012.

KBP<sup>2</sup> [2012]: *Sprawozdanie z badań podczas próbnego obciążenia konstrukcji odciążającej o rozpiętości teoretycznej  $L_t = 30,00$  m wbudowanej w torze nr 501 (tor SKM) na czas budowy tunelu przeprowadzającego „Drogę Zieloną” na odcinku od ul. Grunwaldzkiej do ul. Gospody w Gdańsku przez istniejący nasyp kolejowy*. Konsultacyjne Biuro Projektowe „Krzysztof Żółtowski”, Gdańsk, 2012.

KBP<sup>3</sup> [2012]: *Sprawozdanie z badań podczas próbnego obciążenia konstrukcji odciążającej o rozpiętości teoretycznej  $L_t = 30,00$  m wbudowanej w torze nr 502 (tor SKM) na czas budowy tunelu przeprowadzającego „Drogę Zieloną” na odcinku od ul. Grunwaldzkiej do ul. Gospody w Gdańsku przez istniejący nasyp kolejowy*. Konsultacyjne Biuro Projektowe „Krzysztof Żółtowski”, Gdańsk, 2012.

KBP<sup>4</sup> [2012]: *Sprawozdanie z badań podczas próbnego obciążenia konstrukcji odciążającej o rozpiętości teoretycznej  $L_t = 30,00$  m wbudowanej w torze nr 2 (tor PLK) na czas budowy tunelu przeprowadza-*

jącego „Drogę Zieloną” na odcinku od ul. Grunwaldzkiej do ul. Gospody w Gdańsku przez istniejący nasyp kolejowy. Konsultacyjne Biuro Projektowe „Krzysztof Żółtowski”, Gdańsk, 2012.

KOLPROJEKT [1991]: *Projekt techniczny konstrukcji odciążających z wiązek szyn – typ szwajcarski. Centralne Biuro Projektowo-Badawcze Budownictwa Kolejowego „Kolprojekt”*, Warszawa, 1991.

PKP BPK [1985]: *Projekt typowy: konstrukcje odciążające  $L_t = 21\text{ m}$  (KO21/73) i  $L_t = 30\text{ m}$  (KO30/73). Aktualizacja projektu*. PKP Biuro Projektów Kolejowych we Wrocławiu, Wrocław, 1985.

