

Politechnika Gdańska
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
Katedra Fizyki Teoretycznej i Informatyki Kwantowej

Rozprawa doktorska

Ogrzewanie wywołane przez
nieliniowe straty energii dźwięku w płynach

Weronika Pelc-Garska

dr hab. Anna Perelomova, prof. nadz. PG

Gdańsk 2013

Pragnę podziękować wszystkim bez których niniejsza praca nie mogła by powstać.

*Przede wszystkim mojej pani promotor,
doktor habilitowanej Annie Perelomovej
za wszelką pomoc jaką mi udzieliła w czasie dotychczasowej współpracy,
a zwłaszcza za cenne uwagi merytoryczne.*

*Składam serdeczne podziękowania profesorowi Sergiejowi Leble za wszelkie
wskazówki i okazaną pomoc.*

Spis treści

Spis tablic	4
Spis rysunków	6
1 Wstęp	7
1.1 Podstawowe prawa zachowania	7
1.2 Podstawowe równania akustyki	12
1.2.1 Fale proste	12
1.2.2 Równanie Earnshawa	13
1.2.3 Równanie Burgersa	14
2 Metoda matematyczna	17
3 Ogrzewanie akustyczne w płynie z maxwellowskim lepkiem tensorem naprężeń	21
3.1 Równania opisujące termolepki przepływ w płynie z relaksacją .	21
3.2 Definicje modów w przepływie płaskim o infinitezymalnej amplitudzie	24
3.3 Równania dynamiczne w przepływie słabo nieliniowym	28
3.3.1 Słabo nieliniowe równanie dynamiczne dla dźwięku	28
3.3.2 Generacja modu entropowego przez dźwięk dominujący. Ogrzewanie akustyczne.	29
3.4 Przykłady	30
3.4.1 Ogrzewanie akustyczne spowodowane dźwiękiem stacjonarnym	31
3.4.2 Efektywność ogrzewania akustycznego, spowodowanego przez impulsy falowe	31
4 Ogrzewanie akustyczne w gazie, w którym zachodzi reakcja chemiczna	36
4.1 Podstawowe równania	36

4.2	Związki dyspersyjne w jednowymiarowym przepływie	37
4.3	Przypadek wysokoczęstotliwościowy	39
4.3.1	Seperacja równań	40
4.4	Przypadek niskoczęstotliwościowy	44
4.4.1	Separacja równań	45
4.5	Przykłady	46
4.5.1	Zmiany temperatury związane z modem entropowym wywołanym przez okresowy, wysokoczęstotliwościowy dźwięk	46
4.5.2	Zmiany temperatury związane z modem entropowym wywołanym przez impulsy o równej energii	49
4.5.3	Zmiany temperatury związane z modem chemicznym	50
4.6	Wnioski	51
5	Ogrzewanie (chłodzenie) akustyczne w rezonatorze wypełnionym gazem chemicznie reaktywnym	53
5.1	Podstawowe równania. Definicje modów w przepływie liniowym	53
5.2	Równania dynamiczne w słabo nieliniowym przepływie	54
5.3	Pole akustyczne i związane z nim zjawiska nieliniowe	55
5.3.1	Fale stojące i związane z nimi ogrzewanie przed formowaniem się nieciągłości fali	56
5.3.2	Fale w kształcie "zębów piły" i związane z nimi ogrzewanie	58
5.4	Podsumowanie	60
6	Płyn z pęcherzami. Nieliniowy wzrost promieni pęcherzy wywołany dźwiękiem	62
6.1	Równania opisujące płyn z pęcherzami	62
6.2	Rozdzielenie dźwięku i modu entropowego w przepływie o nieskończenie małej wielkości	64
6.3	Sprężone równania dynamiczne w przepływie nieliniowym	66
6.4	Wzrost promienia pęcherza spowodowany dźwiękiem	68
6.5	Wnioski	72
7	Podsumowanie	75
	Bibliografia	75

Spis tablic

6.1	Współczynniki $\beta_{i,j}^n$ w równaniu fali akustycznej propagującej w płynie z pęcherzami	67
6.2	Współczynniki $\eta_{i,j}^n$ w równaniu fali akustycznej propagującej w płynie z pęcherzami	68

Spis rysunków

3.1	Fala stacjonarna (linia pogrubiona) i odpowiadający jej wzrost temperatury (linia normalna).	32
3.2	a) Początkowe kształty fali (Na podstawie równania 3.51). b),c),d) Zmiany temperatury, wywołane przez fale z punktu a), dla różnych wartości współczynnika $\tau = \omega\tau_R$	34
3.3	a), c), e) Początkowe kształty fal, wyznaczone na podstawie równania (3.52). b), d), e) Zmiany temperatury spowodowane przez fale z przykładów a), c), e), dla różnych wartości współczynnika $\tau = \omega\tau_R$	35
4.1	Bezwymiarowe zmiany temperatury dla dodatnich i ujemnych wartości B_∞^*	48
4.2	a) Początkowe kształty fal zgodne z równaniem (4.45) i b) bezwymiarowe zmiany temperatury otoczenia, wywołany przez trzy impulsy z równania (4.45), kiedy $B_\infty^* = -0.005$	49
5.1	Prędkość i zmiany gęstości w fali stojącej powstającej w rezonatorze wypełnionym gazem, w którym zachodzi reakcja chemiczna, dla różnych czasów mniejszych od charakterystycznego czasu powstania nieciągłości.	57
5.2	Fale w kształcie "zębów piły" wyznaczone na podstawie równań (5.17)	58
5.3	Prędkość i zmiany gęstości w fali stojącej powstającej w rezonatorze wypełnionym gazem, w którym zachodzi reakcja chemiczna, dla różnych czasów większych od charakterystycznego czasu powstania nieciągłości i dla różnych wartości współczynnika b	59
5.4	Ewolucja bezwymiarowej energii dla różnych współczynników b	60
6.1	a) Rozwiązanie równania (6.17), dla $t = 0.01$. b) Zmiany gęstości modu entropowego opisany przez równanie (6.20), dla $t = 0.01$	71

6.2 a) Stacjonarne rozwiązanie równania (6.17), $\frac{\varepsilon}{3D}\rho_1(\xi) \equiv \phi(\xi)$, b) zmiany gęstości modu entropowego, $\frac{\varepsilon^2}{9D^3(\varepsilon-2)}\rho_3(\xi) \equiv \int_{\infty}^{\xi} \phi \frac{d^3\phi}{d\xi^3} d\xi$ (równanie 6.24). 71

Rozdział 1

Wstęp

1.1 Podstawowe prawa zachowania

Tematem niniejszej rozprawy doktorskiej jest ogrzewanie wywołane przez nieliniowe straty energii dźwięku w płynach. Ogrzewanie akustyczne będzie tu rozumiane jako wzrost temperatury ośrodka, spowodowany stratami energii fali dźwiękowej w nim się rozchodzącej. Punktem wyjścia do wszystkich analitycznych rozważań, które zostaną przedstawione w niniejszej pracy będą podstawowe równania zachowania. W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione prawa zachowania masy, pędu i energii, a także zostaną wyprowadzone równania zachowania w postaci różniczkowej, które będą używane w dalszej części pracy.

Masę zawartą w pewnej ustalonej objętości płynnej V można zdefiniować jako następującą całkę:

$$M = \int_V \rho dV, \quad (1.1)$$

gdzie ρ jest gęstością płynu, będącą funkcją promienia wodzącego opisującego obszar zajmowany przez płyn \vec{r} i czasu t , $\rho(\vec{r}, t)$. Można wówczas sformułować następujące prawo [46]:

„Zmiana w czasie masy w objętości płynnej jest równa zero”

które można zapisać:

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) dV = 0, \quad (1.2)$$

W równaniu (1.2) operator d/dt jest operatorem pochodnej substancjalnej:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}, \quad (1.3)$$

gdzie \vec{v} jest wektorem prędkości płynu. Korzystając z (1.3) i prostych przekształceń matematycznych, otrzymano różniczkową postać zachowania masy:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.4)$$

Prawo zachowania pędu można sformułować następująco [46]:

„Szybkość zmian pędu w dowolnej ustalonej objętości płynnej V jest równa sumie sił masowych, działających na tę objętość oraz sił powierzchniowych, działających na powierzchnię płynną S .”

Prawo to można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \vec{F}_V + \vec{F}_S. \quad (1.5)$$

Symbolem \vec{F}_V w równaniu (1.5) oznaczono siły masowe działające na objętość płynną. Do takich sił zalicza się siły działające na elementy płynu i proporcjonalne do masy płynu, np. siły grawitacyjne. Jeżeli wyrazić je gęstością rozkładu sił [46]:

$$\vec{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_V}{\Delta m} = \frac{1}{\rho} \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_V}{\Delta V} = \frac{1}{\rho} \frac{d\vec{F}_V}{dV}, \quad (1.6)$$

to otrzymujemy:

$$\vec{F}_V = \int_V \rho \vec{f} dV. \quad (1.7)$$

Z kolei symbol \vec{F}_S w równaniu (1.5) oznacza siły powierzchniowe działające na powierzchnię płynną S , których gęstość można zdefiniować następująco [46]:

$$\vec{p}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_S}{\Delta S} = \frac{d\vec{F}_S}{dS}, \quad (1.8)$$

czyli

$$\vec{F}_S = \int_S \vec{p}_n dS. \quad (1.9)$$

Wektor \vec{p}_n zależy nie tylko od punktu w przestrzeni, ale również od zorientowania elementu powierzchni wektorem normalnym \vec{n} . Przez dany punkt w przestrzeni może przechodzić nieskończenie wiele elementów powierzchni ΔS , którym będą odpowiadały różne wektory \vec{p}_n . Jeśli za element płynu przyjmiemy się element płynu w kształcie czworościanu o wymiarach dx , dy , dz we współrzędnych kartezjańskich na tyle małych, że można gęstość rozkładu sił

powierzchniowych na każdej ze ścian potraktować jako stałe, to wówczas oznaczając objętość czworościanu jako dV , jego masę jako ρdV , można równanie (1.5) zapisać w postaci:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \rho \vec{f} dV + \vec{p}_n dS_n - \vec{p}_x dS_x - \vec{p}_y dS_y - \vec{p}_z dS_z. \quad (1.10)$$

Ujemne wartości wektorów \vec{p}_x , \vec{p}_y , \vec{p}_z wynikają ze skierowania wektorów normalnych \vec{n}_x , \vec{n}_y , \vec{n}_z odpowiednich elementów powierzchni S_x , S_y , S_z przeciwie do kierunku osi x , y , z . W granicy $dV \rightarrow 0$ otrzymano lokalną zależność:

$$\vec{p}_n dS_n = \vec{p}_x dS_x + \vec{p}_y dS_y + \vec{p}_z dS_z. \quad (1.11)$$

Wektor \vec{p}_n można zapisać w postaci:

$$\vec{p}_n = \vec{p}_x n_x + \vec{p}_y n_y + \vec{p}_z n_z = \mathbf{T} \vec{n}, \quad (1.12)$$

gdzie \mathbf{T} jest tensorem naprężenia, $\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k}$ jest wektorem normalnym do powierzchni. Zatem równanie (1.5) można zapisać w postaci:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \vec{f} dV + \int_S \vec{p}_n dS. \quad (1.13)$$

Następnie korzystając z twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego:

$$\int_S \vec{p}_n dS = \int_S \mathbf{T} \vec{n} dS = \int_V \text{Div} \mathbf{T} dV, \quad (1.14)$$

gdzie przez Div oznaczono dywergencję tensora, otrzymujemy:

$$\int_V \left(\rho \frac{d\vec{v}}{dt} - \rho \vec{f} - \text{Div} \mathbf{T} \right) dV = 0, \quad (1.15)$$

co prowadzi do różniczkowej postaci równania zachowania pędu:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} + \text{Div} \mathbf{T}. \quad (1.16)$$

Gdy nie ma naprężeń stycznych, a istnieje tylko naprężenie normalne, tensor naprężeń ma wartości niezerowe tylko na głównej przekątnej i można zapisać następującą równość:

$$\vec{p}_n = -p \vec{n}, \quad (1.17)$$

gdzie przez p oznaczano ciśnienie. Wówczas równanie (1.16) przybiera postać:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \vec{\nabla} p, \quad (1.18)$$

znane jako *równanie Eulera* [4].

W modelu płynu lepkiego newtonowskiego występuje „lepki tensor naprężeń” w następującej postaci [19], zapisany w konwencji Einteina:

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \quad (1.19)$$

gdzie η , ζ to odpowiednio współczynniki lepkości kinetycznej i dynamicznej. Uwzględniając, że: $\partial v_l / \partial x_l \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v}$, $\partial^2 v_i / \partial x_k^2 \equiv \Delta v_i$, równanie (1.16) przyjmuje następującą postać dla płynu lepkiego newtonowskiego:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}). \quad (1.20)$$

Przy założeniu nieściśliwości cieczy, otrzymuje się dobrze znane równanie *Naviera-Stokesa*:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \eta \Delta \vec{v}. \quad (1.21)$$

Lepki tensor naprężeń dla cieczy nieściśliwej przybiera następującą postać:

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \quad (1.22)$$

Oczywiście istnieje szereg płynów, których tensorów naprężeń lepkich nie da się opisać za pomocą wzorów (1.22) czy (1.19), np. płyny reologiczne takie jak krew, czy tkanki biologiczne. W rozdziale 3 niniejszej pracy rozważono przykład takiego nienewtonowskiego płynu, który jest dobrym modelem tkanek biologicznych.

Prawo zachowania energii można sformułować następująco [46]:

Zmiana w czasie całkowitej energii wewnętrznej w objętości płynnej V jest równa sumie mocy sił masowych, mocy sił powierzchniowych oraz strumieniowi energii wypływającemu z objętości płynnej,

co można zapisać w postaci następującego *równania zachowania energii*:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + e \right) dV = \int_V \rho \vec{f} \vec{v} dV + \int_S \vec{p}_n \vec{v} dS - \int_S \vec{J} \vec{n} dS, \quad (1.23)$$

gdzie wektor \vec{J} jest natężeniem strumienia ciepła, przez e oznaczono energię wewnętrzną. Po zamianie całek powierzchniowych na objętościowe:

$$\int_S \vec{p}_n \vec{v} dS = \int_S (\mathbf{T} \vec{n}) \vec{v} dS = \int_S (\mathbf{T} \vec{v}) \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \vec{v}) dV,$$

$$\int_S \vec{J} \vec{n} dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV,$$

możemy równanie (1.23) zapisać w następującej postaci:

$$\int_V \left[\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + e \right) - \rho \vec{f} \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \right] dV = 0, \quad (1.24)$$

co prowadzi do różniczkowej postaci równania zachowania energii:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} + e \right) = \rho \vec{f} \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \vec{v}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}. \quad (1.25)$$

Po pomnożeniu skalarnie przez \vec{v} równania (1.16) i odjęciu go stronami od równania (1.25) otrzymuje się:

$$\rho \frac{de}{dt} = \vec{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \vec{v}) - \vec{v} \text{Div} \mathbf{T} - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}, \quad (1.26)$$

przy czym:

$$\vec{\nabla} \cdot (\mathbf{T} \vec{v}) - \vec{v} \text{Div} \mathbf{T} \equiv \mathbf{T} : \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{v} \text{Div} \mathbf{T} - \vec{v} \text{Div} \mathbf{T} = \mathbf{T} : \vec{\nabla} \vec{v},$$

gdzie symbolem „:” oznaczono iloczyn wewnętrzny Frobeniusa. Korzystając z prawa Fouriera dla strumienia cieplnego:

$$\vec{J} = -\chi \vec{\nabla} T, \quad (1.27)$$

gdzie χ jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego, a T oznacza temperaturę, można równanie (1.26) zapisać w następującej postaci:

$$\rho \frac{de}{dt} = \mathbf{T} : \vec{\nabla} \vec{v} + \chi \Delta T, \quad (1.28)$$

gdzie Δ oznacza operator Laplace’a. Równanie zachowania energii w formie (1.28) zostało wykorzystane na przykład w rozdziale 3. Ostatecznie układ równań zachowania przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) &= 0, \\ \rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= \rho \vec{f} + \text{Div} \mathbf{T}, \\ \rho \frac{de}{dt} &= \mathbf{T} : \vec{\nabla} \vec{v} + \chi \Delta T. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Układ równań (1.29) należy uzupełnić o termiczne i kaloryczne równania stanu:

$$\begin{aligned} T &= T(\rho, p), \\ e &= e(\rho, p). \end{aligned} \quad (1.30)$$

1.2 Podstawowe równania akustyki

1.2.1 Fale proste

Pojęciem „fali prostej” definiuje się jednowymiarową falę rozchodzącą się w gazie doskonałym, bez lepkości. Zatem w niniejszym rozdziale będzie rozważany nielepki, jednowymiarowy przepływ wzdłuż osi OX . Wówczas pierwsze dwa równania z układu równań (1.29) przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{1.31}$$

Energię wewnętrzną gazu doskonałego można wyrazić wzorem:

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)},\tag{1.32}$$

gdzie γ oznacza wykładnik adiabaty. Zatem:

$$de = \frac{dp}{\rho(\gamma - 1)} - \frac{pd\rho}{\rho^2(\gamma - 1)}.\tag{1.33}$$

W przemianie adiabatycznej zachodzi równość:

$$0 = Tds = de + pdv = de - \frac{pd\rho}{\rho^2},\tag{1.34}$$

gdzie s oznacza entropię. Z równań (1.33) oraz (1.34) otrzymano następującą zależność na prędkość dźwięku w gazie doskonałym:

$$c_0^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=const} = \frac{p_0}{\rho_0} \gamma.\tag{1.35}$$

Definiując następującą funkcję [47]:

$$\phi = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c_0}{\rho} d\rho = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho c_0},\tag{1.36}$$

z równania (1.36) otrzymano następujące równości:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\rho}{c_0} \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\rho}{c_0} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho c_0 \frac{\partial \phi}{\partial x}.\tag{1.37}$$

Wstawiając te równości do (1.31) otrzymano układ dwóch równań:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi}{\partial t} + v\frac{\partial\phi}{\partial x} + c_0\frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + c_0\frac{\partial\phi}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{1.38}$$

Następnie, zastosowanie następujących wielkości:

$$\psi_+ = \frac{1}{2}(\phi + c_0), \quad \psi_- = \frac{1}{2}(\phi - c_0),\tag{1.39}$$

proceedzi do następujących równań:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi_+}{\partial t} + (v + c_0)\frac{\partial\psi_+}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial\psi_-}{\partial t} + (v - c_0)\frac{\partial\psi_-}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\tag{1.40}$$

Równania (1.40) są to równania opisujące fale proste propagujące bez zmiany kształtu wzdłuż osi x z prędkościami $v + c_0$ i $v - c_0$. Wielkości ψ_+ , ψ_- przedstawione równościami (1.39) zostały wprowadzone przez Riemanna w roku 1860 (stosował on oznaczenia r i s) [47] i noszą nazwę *niezmienników Riemanna*.

1.2.2 Równanie Earnshawa

Dla gazów doskonałych z adiabatycznym równaniem stanu:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,\tag{1.41}$$

funkcja ϕ przedstawiona przez Riemanna [47] przyjmuje następującą postać:

$$\phi = \int_{\rho_0}^{\rho} c_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{d\rho}{\rho} = \int_{p_0}^p \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{\gamma-1}{2}} \frac{dp}{c_0\rho},\tag{1.42}$$

gdzie c_0 zdefiniowane równaniem (1.35) jest prędkością dźwięku o nieskończenie małej amplitudzie (tak zwaną liniową prędkością dźwięku). Z równania (1.42) otrzymuje się następujące równości:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\rho}{c_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{\gamma-1}{2}} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\rho}{c_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{-\frac{\gamma-1}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho c_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Wstawiając te równości do (1.31) otrzymuje się układ dwóch równań:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + c_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (1.43)$$

Można założyć, że gęstość płynu zmienia się o niewielką wartość ρ' w porównaniu do wielkości stacjonarnej ρ_0 ($\rho' \ll \rho_0$): $\rho = \rho_0 + \rho'$. Wówczas:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \approx 1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{\rho'}{\rho_0}.\quad (1.44)$$

Ponadto również ciśnienie zmienia się o niewielką wielkość p' ($p' \ll p_0$), zatem z (1.41) otrzymano:

$$p = p_0 + p' \approx p_0 (1 + c_0^2 \rho').\quad (1.45)$$

Korzystając z zależności: $p' \approx \rho_0 c_0 v$ i z (1.45, 1.44) otrzymano z układu (1.43):

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + c_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} v \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + c_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} v \frac{\partial f}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (1.46)$$

Przy zastosowaniu niezmienników Riemanna (1.39) układ (1.46) prowadzi do:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_+}{\partial t} + \left(v + c_0 + \frac{\gamma-1}{2} v \right) \frac{\partial \psi_+}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \psi_-}{\partial t} + \left(v - c_0 - \frac{\gamma-1}{2} v \right) \frac{\partial \psi_-}{\partial x} &= 0.\end{aligned}\quad (1.47)$$

Gdy jeden z niezmienników Riemanna jest stały, na przykład, jeśli płyn w obszarze $x > x_0$ jest wolny od wszelkich zaburzeń dla wszystkich czasów $t < t_0$, wówczas $\psi_- = 0$. Wówczas $\psi_+ = f = v$ i układ (1.47) prowadzi do *równania Earnshawa* [8]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\gamma+1}{2} v \frac{\partial v}{\partial x} = 0.\quad (1.48)$$

1.2.3 Równanie Burgersa

W tym podrozdziale rozważony zostanie bardziej fizyczny przypadek, który zakłada absorpcję fali spowodowaną lepkością płynu i przewodnością cieplną. Rozważany płyn jest newtonowski i jednorodny, to znaczy, że niezaburzone

wielkości gęstości i ciśnienia (ρ_0 , p_0) są stałe.

Ogólne równanie przenoszenia ciepła dla płynu lepkiego, wyprowadzone dokładnie w [20], ma następującą postać:

$$\rho T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \nabla s \right) = \chi \Delta T + \frac{\eta}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 + \zeta \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right)^2 \quad (1.49)$$

Równania zachowania pędu i masy z układu (1.29) w przypadku jednowymiarowym, przy uwzględnieniu ich członów nieliniowych można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[\rho v^2 + p - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Następnie różniczkując pierwsze równanie w układzie (1.50) po x , a drugie po t otrzymano

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho v}{\partial t \partial x} &= -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\rho v^2 + p - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} &= -\frac{\partial \rho v}{\partial t \partial x}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Natomiast rozwijając w szereg Taylora równanie stanu $p(s, \rho)$ względem stanu stacjonarnego (ρ_0 , s_0) otrzymano [13, 29]:

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\gamma - 1}{2} \rho'^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (1.52)$$

Po dodaniu równań (1.51) i wstawieniu za p równania (1.52), otrzymano:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho_0 v^2) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\gamma - 1}{2} \rho'^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial s}{\partial x} - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (1.53)$$

Aby wyprowadzić człon $\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial s}{\partial x}$ z równania (1.53) wykorzystano liniowe przybliżenie równania (1.49) (w jednym wymiarze) prowadzi do następującej zależności [13]:

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s'}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (1.54)$$

Dla małych zaburzeń entropii, rozważając tylko falę propagującą w dodatnim kierunku osi OX , można zamienić pochodną cząstkową względem czasu na pochodną cząstkową względem x , zatem:

$$-c_0 \rho_0 T_0 \frac{\partial s'}{\partial x} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (1.55)$$

Następnie użycie następującej relacji termodynamicznej [29]:

$$T' = \frac{T_0 \beta c_0^2}{\rho_0 c_p} \rho', \quad (1.56)$$

(gdzie β to współczynnik rozszerzalności cieplnej, a c_p ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu) prowadzi do:

$$\frac{\partial s'}{\partial x} = -\frac{\chi \beta c_0}{\rho_0^2 c_p} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}. \quad (1.57)$$

Przy pomocy następującej relacji termodynamicznej:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho = \frac{c_p / c_V - 1}{\beta} \rho_0,$$

gdzie c_V to ciepło właściwe przy stałej objętości, ostatecznie otrzymano:

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho \frac{\partial s'}{\partial x} = \chi \frac{c_0}{\rho_0} \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p} \right) \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2}. \quad (1.58)$$

Wstawiając (1.58) do (1.53) i korzystając z $v = c_0 \rho' / \rho_0$ przy założeniu, że fala propaguje w kierunku dodatnim osi OX , otrzymano:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = \frac{c_0}{\rho_0} b \frac{\partial^3 \rho'}{\partial x^3}, \quad (1.59)$$

gdzie:

$$b = \frac{4}{3} \eta + \zeta + \chi \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p} \right).$$

Zastosowanie nowych zmiennych: $t' = \mu t$, $\xi = x - c_0 t$ (gdzie $\mu = \max(M, b) \ll 1$) prowadzi do następującego równania:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{c_0}{\rho_0} \frac{\gamma + 1}{2} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \xi} = \frac{b}{2\rho_0} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial \tau^2}. \quad (1.60)$$

zaś zastosowanie zmiennych: $\tau = t' - x/c_0$, $x' = \mu x$ do:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial x'} - \frac{1}{c_0 \rho_0} \frac{\gamma + 1}{2} \rho' \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} = \frac{b}{2\rho_0 c_0^3} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial \xi^2}. \quad (1.61)$$

Równania (1.60, 1.61) są znane jako *równanie Burgersa*.

Rozdział 2

Metoda matematyczna

W niniejszym rozdziale zostanie pokrótce przedstawiona metoda matematyczna, zastosowana w rozprawie doktorskiej. Metoda ta pozwala na wyprowadzenie równań opisujących różne typy ruchu np. akustyczny, entropowy lub wirowy. Co więcej, dzięki tej metodzie możliwe jest wyprowadzenie równania opisującego oddziaływanie pomiędzy tymi typami. Wyprowadzenie równania opisującego interakcję pomiędzy akustycznym i entropowym typem ruchu jest głównym tematem rozprawy doktorskiej. Jest to równanie opisujące ogrzewanie akustyczne.

Poniżej przedstawiono układ równań, opisujący zaburzenia zmiennych hydrodynamicznych w ogólnej formie:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi + L\psi = \varphi, \quad (2.1)$$

gdzie ψ jest wektorem zawierającym zmienne hydrodynamiczne, L jest liniowym, macierzowym operatorem działającym na wektor ψ , zaś φ jest wektorem zawierającym człony nieliniowe układu równań. Dla liniowej wersji układu równań (2.1):

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi + L\psi = 0, \quad (2.2)$$

możliwe jest znalezienie rozwiązania w postaci sumy fal płaskich:

$$f(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\vec{k}, t) \exp(-i\vec{k}\vec{x}) d\vec{k} + cc, \quad (2.3)$$

gdzie $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ jest liczbą falową, $\tilde{f}(\vec{k})e^{i\omega t}$ jest transformata Fourier'a. Wartości własne operatora L z (2.2) wyznaczają związki dyspersyjne: $\omega_i(\vec{k})$ i determinują odpowiadające im wektory własne ψ_i . Wektor własny odpowiadający danej wartości własnej nazywamy modem. W przypadku jednowymiarowym można wyróżnić dwa mody akustyczne, odpowiadające fali propagującej zgodnie ze zwrotem osi i fali propagującej przeciwnie do zwrotu osi, a także

mody niefalowe, np. mod entropowy.

Za pomocą wektorów własnych definiuje się macierzowe operatory rzutowe, czyli projektory. Po działaniu projektorem na ogólny wektor ψ otrzymuje się określony wektor własny:

$$P_i \psi = \psi_i. \quad (2.4)$$

Macierzowe operatory rzutu spełniają następujące właściwości:

$$P_i P_j = 0 \quad (i \neq j), \quad P_i^2 = P_i, \quad \sum_i P_i = \mathbb{I}, \quad (2.5)$$

gdzie przez \mathbb{I} oznaczono macierz jednostkową. Działając określonym projektorem na liniowy układ równań (2.2), otrzymuje się równanie dla poszczególnych modów:

$$P_i \left(\frac{\partial}{\partial t} \psi + L \psi \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + L \right) P_i \psi = \left(\frac{\partial}{\partial t} + L \right) \psi_i. \quad (2.6)$$

Wyżej wymienioną metodę można przedstawić na prostym przykładzie. Rozważono układ dwóch równań:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Układ równań (2.7) można przedstawić w ogólnej formie:

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi + L \psi = 0, \quad (2.8)$$

gdzie:

$$\psi = \begin{pmatrix} v \\ \rho \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial x \\ \partial/\partial x & 0 \end{pmatrix}.$$

Należy szukać rozwiązania w postaci fal płaskich $\sim \exp(i\omega t - ikx)$ z amplitudami $\tilde{v}(k)$, $\tilde{\rho}(k)$. Wartości własne operatora L w przestrzeni Fouriera, spełniają następujące równanie:

$$\begin{vmatrix} i\omega & -ik \\ -ik & i\omega \end{vmatrix} = 0, \quad (2.9)$$

i wynoszą odpowiednio:

$$\omega_1 = k, \quad \omega_2 = -k \quad (2.10)$$

Są to relacje dyspersji dla fal propagujących w kierunku dodatnim i ujemnym osi x z prędkością równą 1. Relacjom dyspersji odpowiadają następujące wektory własne:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rho_1, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rho_2. \quad (2.11)$$

Zatem można zapisać następujące relacje dla nowych zmiennych:

$$v = v_1 + v_2 = \rho_1 - \rho_2, \quad \rho = \rho_1 + \rho_2. \quad (2.12)$$

Korzystając z definicji projektora (2.4) i używając relacji (2.12), określono operatory rzutu:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Projektory P_1 i P_2 spełniają własności 2.5. Następnie działając określonym projektorem na układ równań (2.7) otrzymano równania dla poszczególnych modów:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} - \frac{\partial \rho_2}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pierwsze równanie z układu (2.14) opisuje falę akustyczną propagującą się bez zmiany kształtu w kierunku dodatnim osi $0X$ ze stałą prędkością równą 1, zaś drugie falę akustyczną propagującą w kierunku przeciwnym.

W wyżej wymienionym przykładzie występowały tylko dwie gałęzie akustyczne. Jednakże w przypadku bardziej ogólnym, gdy rozważa się trzy równania zachowania, otrzymuje się oprócz modów akustycznych również mod niefalowy (nazywany entropowym) odpowiadający stacjonarnym, izobarycznym zmianom gęstości i odpowiednio zmianom temperatury. Działanie projektorami na liniowy układ równań pozwala uzyskać równania dla poszczególnych modów. Aby wyprowadzić równanie opisujące interakcję pomiędzy modami należy rozważyć przepływ słabo nieliniowy. Każdą ze zmiennych hydrodynamicznych można przedstawić jako sumę pewnej stałej wielkości w stanie równowagi (oznaczonej indeksem „0”) i niewielkiego zaburzenia owej zmiennej (oznaczonej „primem”), np: $\rho = \rho_0 + \rho'$, itd. Wówczas człony nieliniowe w prawej części układu równań (2.1) można rozwinąć w szereg względem potęg małych zaburzeń. Następnie pozostawia się człony słabonieliniowe, czyli rzędu kwadratu liczby Macha ($M = v_0/c_0$, gdzie v_0 jest amplitudową prędkością cząsteczek płynu, a c_0 jest prędkością dźwięku o nieskończonej małej amplitudzie i częstotliwości (liniową prędkością dźwięku)). Działanie wybranym operatorem rzutu na ogólny układ równań (2.1) ze słabo nieliniowymi członami pozwala uzyskać z lewej strony równanie dla określonego modu, zaś z prawej kombinację nieliniowych członów wszystkich modów. Przy założeniu, że modem dominującym jest mod akustyczny, propagujący w kierunku dodatnim osi $0X$, działając projektorem wyodrębniającym w części liniowej mod entropowy, w części nieliniowej zostają tylko człony odpowiadające modowi akustycznemu, określane jako

źródło akustyczne. Mod entropowy można powiązać z temperaturą i otrzymać w ten sposób równanie opisujące ogrzewanie akustyczne, którego wyprowadzenie i zbadanie w różnych ośrodkach jest głównym tematem niniejszej rozprawy doktorskiej.

Rozdział 3

Ogrzewanie akustyczne w płynie z maxwellowskim lepkiem tensorem naprężeń

W niniejszym rozdziale wyprowadzono i zbadano równanie, opisujące ogrzewanie akustyczne w termolepkim płynie, w którym zachodzą procesy relaksacyjne. Do takich płynów należą, między innymi, ośrodki biologiczne opisywane przez maxwellowski tensor naprężeń lepkich. Przedstawione w niniejszym rozdziale wyniki zostały opublikowane w [40].

3.1 Równania opisujące termolepki przepływ w płynie z relaksacją

Równania ciągłości, bilansu pędu i energii w termolepkim przepływie bez sił masowych, przybierają postać:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= \frac{1}{\rho} \left(-\vec{\nabla} p + Div \mathbf{P} \right), \\ \frac{\partial e}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) e &= \frac{1}{\rho} \left(-p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \chi \Delta T + \mathbf{P} : Grad \vec{v} \right).\end{aligned}\quad (3.1)$$

\vec{v} oznacza prędkość płynu, ρ, p są odpowiednio gęstością i ciśnieniem płynu, e, T oznaczają energię wewnętrzną na jednostkę masy i temperaturę, χ jest przewodnością cieplną, a x_i, t oznaczają współrzędne przestrzenne i czas. Operator Grad oznacza gradient pola wektorowego. Literą \mathbf{P} oznaczono lepki

tensor naprężen. W niniejszym rozdziale do opisu lepkiego tensora naprężen zastosowano model Maxwell'a, który jest najbardziej powszechnym modelem stosowanym w akustyce medycznej [16]. Równanie łączące lepki tensor naprężen z przemieszczeniem cząsteczki w ośrodku w danym punkcie przestrzeni i czasu, można zapisać w dwóch równoważnych formach [1], [20]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{P}_{i,k}}{\partial t} + \frac{1}{\tau_R} \mathbf{P}_{i,k} &= \mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \\ \mathbf{P}_{i,k} &= \mu \int_{-\infty}^t \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) e^{-(t-t')/\tau_R} dt'.\end{aligned}\quad (3.2)$$

W równaniu (3.2) τ_R nazywano makswelewskim czasem relaksacji, zaś μ oznacza moduł ściskania, u to przesunięcie płynu. W przypadku, gdy $\omega\tau_R \rightarrow \infty$ to tensor naprężen lepkich z równania (3.2) przybiera postać lepkiego tensora naprężen dla nieściśliwego, lepkiego płynu newtonowskiego (równanie (1.22) z rozdziału 1).

Układ równań (3.1) należy uzupełnić o funkcje stanu termodynamicznego, kaloryczną i termiczną $e(p, \rho)$ i $T(p, \rho)$. Energia wewnętrzna i temperatura płynu zmieniają się o małe zmiany ($e = e_0 + e'$, $T = T_0 + T'$), które można rozwinąć w szereg względem potęg zmian ciśnienia i gęstości ($p' = p - p_0$, $\rho' = \rho - \rho_0$):

$$e' = \frac{E_1}{\rho_0} p' + \frac{E_2 p_0}{\rho_0^2} \rho' + \frac{E_3}{p_0 \rho_0} p'^2 + \frac{E_4 p_0}{\rho_0^3} \rho'^2 + \frac{E_5}{\rho_0^2} \rho' p' + \dots, \quad (3.3)$$

$$T' = \frac{\Theta_1}{\rho_0 c_V} p' + \frac{\Theta_2 p_0}{\rho_0^2 c_V} \rho' + \frac{\Theta_3}{p_0 \rho_0 c_V} p'^2 + \frac{\Theta_4 p_0}{\rho_0^3 c_V} \rho'^2 + \frac{\Theta_5}{\rho_0^2 c_V} \rho' p' + \dots, \quad (3.4)$$

gdzie $E_1 \dots \Theta_5$ są bezwymiarowymi współczynnikami, c_V oznacza pojemność cieplną przy stałej objętości. Równania (3.3, 3.4) pozwalają opisać w ogólnej formie szeroki zakres płynów. Za rozbieżność w termodynamicznych własnościach płynów odpowiedzialne są właśnie bezwymiarowe współczynniki różne dla różnych płynów. Poniżej wyprowadzono zależności dla współczynników E_1 i E_2 . Zgodnie z (3.3):

$$E_1 = \rho_0 \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)_\rho, \quad \frac{p_0}{\rho_0^2} E_2 = \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} \right)_p. \quad (3.5)$$

Korzystając z definicji pojemności cieplnej przy stałej objętości:

$$c_V dT = \delta q = de, \quad (3.6)$$

otrzymano następującą relację ($V = 1/\rho$):

$$\left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_V = c_V = \left(\frac{\partial e}{\partial p} \right)_\rho \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_\rho. \quad (3.7)$$

Funkcje termodynamiczne spełniają następującą tożsamość:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T = -1. \quad (3.8)$$

Wprost z równań:(3.7), (3.8) i (3.5) uzyskano:

$$E_1 = \frac{\rho_0 c_V}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho} = -\rho_0 c_V \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T. \quad (3.9)$$

W ten sposób uzyskano ostateczne wyrażenie dla współczynnika E_1 :

$$E_1 = \frac{\rho_0 c_V \kappa}{\beta}, \quad (3.10)$$

gdzie κ i β są odpowiednio: współczynnikami ściśliwości izotermicznej i rozszerzalności izobarycznej:

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_T, \\ \beta &= \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Aby obliczyć postać drugiego współczynnika E_2 skorzystano z definicji pojemności cieplnej przy stałym ciśnieniu:

$$c_p dT = \left(de + d\left(\frac{p}{\rho}\right) \right)_p, \quad (3.12)$$

z czego wynika, że:

$$c_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_p - \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p. \quad (3.13)$$

Korzystając z równaniem (3.13) uzyskano:

$$\left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_p = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p = \left(c_p + \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p\right) \left(\frac{\partial T}{\partial \rho}\right)_p = -\frac{c_p}{\beta \rho} + \frac{p}{\rho^2}, \quad (3.14)$$

gdzie β jest współczynnikiem rozszerzalności termicznej opisanym równaniem (3.11). Korzystając z:

$$\frac{p_0}{\rho_0^2} E_2 = \left(\frac{\partial e}{\partial \rho}\right)_p, \quad (3.15)$$

wyprowadzono ostateczną zależność dla współczynnika E_2 :

$$E_2 = -\frac{c_p \rho_0}{\beta p_0} + 1. \quad (3.16)$$

Dokładne zmiany entropii są różniczką zupełną:

$$Tds = de + pdV = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (3.17)$$

Korzystając bezpośrednio z definicji różniczki zupełnej i wybierając za niezależne wielkości termodynamiczne p i ρ otrzymano:

$$\frac{\partial s}{\partial p} dp + \frac{\partial s}{\partial \rho} d\rho = \frac{1}{T} \frac{\partial e}{\partial p} dp + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2} \right) d\rho \quad (3.18)$$

Wyliczając pochodną mieszaną z (3.18):

$$\frac{\partial^2 s}{\partial p \partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{T} \frac{\partial e}{\partial p} \right) = \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{p}{\rho^2} \right) \right). \quad (3.19)$$

i korzystając z szeregów (3.3) i (3.4), otrzymano:

$$-\frac{1}{T_0} \frac{\Theta_2 p_0}{\rho_0^2 c_V} \cdot \frac{E_1}{\rho_0} = -\frac{1}{T_0^2} \frac{\Theta_1}{\rho_0 c_V} \cdot \frac{E_2 p_0}{\rho_0^2} - \frac{1}{T_0 \rho_0^2} + \frac{1}{T_0^2} \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{\Theta_1}{\rho_0 c_V}, \quad (3.20)$$

co po uproszczeniach prowadzi do ostatecznej zależności między współczynnikami Θ_2 i Θ_1 :

$$\Theta_2 = \frac{c_V \rho_0 T_0}{E_1 p_0} - \frac{(1 - E_2) \Theta_1}{E_1}. \quad (3.21)$$

3.2 Definicje modów w przepływie płaskim o in- finitesimalnej amplitudzie

Rozważono jednowymiarowy przepływ wzdłuż osi OX . Następnie przedstawiono nowe, bezwymiarowe zmienne:

$$p^* = \frac{p'}{c_0^2 \cdot \rho_0}, \rho^* = \frac{\rho'}{\rho_0}, v^* = \frac{v}{c_0}, x^* = \frac{\omega x}{c_0}, t^* = \omega t, \tau^* = \omega \tau_R. \quad (3.22)$$

Powszechną praktyką stosowaną w akustyce nieliniowej, jest koncentrowanie się na przybliżonych równaniach drugiego rzędu względem liczby Macha, $c_0 = \sqrt{\frac{(1-E_2)p_0}{E_1 \rho_0}} = \sqrt{\frac{c_p}{c_V \kappa \rho_0}}$ jest prędkością dźwięku o nieskończenie małej amplitudzie i częstotliwości (liniową prędkością dźwięku), ω jest charakterystyczną

częstotliwością dźwięku. Również w niniejszej rozprawie przybliżone równania będą wyprowadzone z taką dokładnością, dlatego człony w prawej części układu równań rozwinięto w szeregi Taylora względem potęg wielkości zaburzonych i zachowano tylko człony nieliniowe drugiego rzędu względem liczby Macha. Uwzględniając zależności (3.2), (3.3), (3.4) można przedstawić kompletny układ równań (3.1) w zmiennych bezwymiarowych (dla klarowności zapisu pominięto w dalszej części tekstu gwiazdki przy zmiennych bezwymiarowych):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial x}, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - 2\hat{A} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= -v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial p}{\partial x} - 2\rho \hat{A} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} - \delta_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \delta_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} &= -v \frac{\partial p}{\partial x} + (D_1 p + D_2 \rho) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{E_1} \frac{\partial v}{\partial x} \hat{A} \frac{\partial v}{\partial x} \\
&+ \delta_3 \frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} + \delta_4 \frac{\partial^2 \rho^2}{\partial x^2} + \delta_5 \frac{\partial^2 (\rho p)}{\partial x^2}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Gdzie \hat{A} oznacza bezwymiarowy operator działający na funkcję skalarną $\phi(x, t)$:

$$\hat{A}\phi = m \int_{-\infty}^t \phi e^{-(t-t')/\tau} dt'. \tag{3.24}$$

$m = \mu/(\rho_0 c_0^2) = c_\infty^2/c_0^2 - 1$ jest bezwymiarową dyspersją (c_∞ jest prędkością dźwięku o nieskończenie małej amplitudzie przy infinitezymalnie dużej częstotliwości, $\omega\tau_R \gg 1$), a układ równań w zmiennych bezwymiarowych (3.23) zawiera również następujące bezwymiarowe współczynniki:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \frac{\chi\Theta_1\omega}{\rho_0 c_0^2 c_V E_1}, \delta_2 = \frac{\chi\Theta_2\omega}{\rho_0 c_0^2 c_V (1 - E_2)}, \\
\delta_3 &= \frac{\Theta_3 \chi \omega}{E_1 \rho_0 c_0^2 c_v} \frac{1 - E_2}{E_1}, \delta_4 = \frac{\Theta_4 \chi \omega}{(1 - E_2) \rho_0 c_0^2 \lambda c_v}, \delta_5 = \frac{\Theta_5 \chi \omega}{E_1 \rho_0 c_0^2 c_V}, \\
D_1 &= \frac{1}{E_1} \left(-1 + 2 \frac{1 - E_2}{E_1} E_3 + E_5 \right), D_2 = \frac{1}{1 - E_2} \left(1 + E_2 + 2E_4 + \frac{1 - E_2}{E_1} E_5 \right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Ponieważ:

$$\Theta_2 = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_p \cdot \frac{\rho_0 c_V}{p_0} = - \left(\frac{\partial T}{\partial V} \right)_p \cdot V \cdot \frac{\rho_0 c_V}{p_0} = - \frac{\rho_0 c_V}{p_0 \beta}, \tag{3.26}$$

współczynnik δ_2 przyjmuje postać:

$$\delta_2 = - \frac{\chi \omega}{\rho_0 c_0^2 c_p}, \tag{3.27}$$

i jest ujemny dla każdego płynu. Suma dwóch pierwszych współczynników w (3.25), jest współczynnikiem liniowego tłumienia, spowodowanego przewodnością cieplną:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{\chi\omega}{\rho_0 c_0^2} \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p} \right).$$

Rozważono zlinearyzowaną wersję układu (3.23), opisującą przepływ o infintezymalnie małej amplitudzie, gdy $M \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} - 2\hat{A} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} - \delta_1 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \delta_2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Jak zostało zreferowane w rozdziale (2), należy szukać rozwiązania w postaci superpozycji fal płaskich:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(\omega) \exp(i\omega t - ikx) d\omega + cc, \\ p(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}(\omega) \exp(i\omega t - ikx) d\omega + cc, \\ \rho(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(\omega) \exp(i\omega t - ikx) d\omega + cc, \end{aligned} \quad (3.29)$$

gdzie $cc.$ oznacza sprzężenie zespolone. Dla operatora \hat{A} otrzymano:

$$\begin{aligned} \hat{A}v &= m \int_{-\infty}^t v(x, t) e^{-(t-t')/\tau} dt' = m \int_{-\infty}^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(\omega) e^{i\omega t - ikx} d\omega \right) e^{-(t-t')/\tau} dt' = \\ &= m \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(\omega) e^{-ikx} d\omega \left(\int_{-\infty}^t e^{i\omega t'} e^{-(t-t')/\tau} dt' \right) = m \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v}(\omega) e^{-ikx} \frac{e^{i\omega t \tau}}{1 + i\omega \tau} d\omega \end{aligned}$$

Wartości własne wyznaczono przyrównując wyznacznik macierzy do zera:

$$\begin{vmatrix} i\omega & -ik & 0 \\ 0 & i\omega - \frac{2m\tau}{1+i\omega\tau}(-ik)^2 & -ik \\ -\delta_2(-ik)^2 & -ik & i\omega - \delta_1(-ik)^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.30)$$

Liniowe, hydrodynamiczne pole reprezentują dwa mody akustyczne, propagujące w kierunku dodatnim i ujemnym osi $0X$ i mod entropowy. Każdy typ ruchu jest zdeterminowany przez jeden ze związków dyspersyjnych $\omega(k)$. Rozwiązując równanie (3.30) i uwzględniając tylko człony drugiego rzędu względem

liczby Macha, otrzymano relacje dyspersyjne dla modu akustycznego propagującego w kierunku dodatnim osi $0X$ (oznaczony indeksem $a, 1$), propagującego w kierunku ujemnym osi $0X$ (oznaczony indeksem $a, 2$) i dla modu entropowego (oznaczonego indeksem e):

$$\begin{aligned}\omega_{a,1} &= k + \frac{mk^3\tau^2}{1 + (\tau k)^2} + \frac{ik^2}{2}\delta + i\frac{mk^2\tau}{1 + (\tau k)^2}, \\ \omega_{a,2} &= -k - \frac{mk^3\tau^2}{1 + (\tau k)^2} + \frac{ik^2}{2}\delta + i\frac{mk^2\tau}{1 + (\tau k)^2}, \quad \omega_e = -ik^2\delta_2.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Wartości własne (3.31) wyznaczają jednoznacznie wektory własne, wyznaczone dla dowolnego czasu:

$$\begin{aligned}\psi_{a,1} &= \begin{pmatrix} \rho_{a,1} \\ v_{a,1} \\ p_{a,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\delta + \hat{A}\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ 1 - \delta\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \rho_{a,1}, \\ \psi_{a,2} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \left(\frac{1}{2}\delta + \hat{A}\frac{\partial}{\partial x}\right) \\ 1 + \delta\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \rho_{a,2}, \\ \psi_e &= \begin{pmatrix} 1 \\ \delta_2\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \rho_e.\end{aligned}\quad (3.32)$$

Za pomocą wektorów własnych (3.32) zdefiniowano macierzowe operatory rzutu P_1 , P_2 , P_3 :

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\delta - \hat{A}\right) \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2} (1 + \delta_2\frac{\partial}{\partial x}) & -\frac{1}{2}\delta_2\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\hat{A} - \frac{1}{2}\delta + \delta_2\right) \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2}\delta_2\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{2} (1 + \delta\frac{\partial}{\partial x}) & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\hat{A} + \frac{1}{2}\delta + \delta_2\right) \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2}\delta_2\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\delta - \hat{A}\right) \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2} (1 + \delta_2\frac{\partial}{\partial x}) & -\frac{1}{2}\delta_2\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\hat{A} - \frac{1}{2}\delta + \delta_2\right) \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2}\delta_2\frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{1}{2} (1 + \delta\frac{\partial}{\partial x}) & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\hat{A} + \frac{1}{2}\delta + \delta_2\right) \frac{\partial}{\partial x} & \frac{1}{2}\delta_2\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_2\frac{\partial}{\partial x} & \delta_2\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\delta\frac{\partial}{\partial x} & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.35)$$

Rzutując układ równań (3.23) na odpowiednie podprzestrzenie otrzymano równania dla poszczególnych typów ruchów. I tak równanie opisujące akustyczną

zmianę gęstości w fali, propagującej w kierunku dodatnim osi OX wygląda następująco:

$$\frac{\partial \rho_{a,1}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_{a,1}}{\partial x} - \left(\hat{A} + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial^2 \rho_{a,1}}{\partial x^2} = 0, \quad (3.36)$$

zaś zaburzenia gęstości dla ruchu entropowego spełniają równanie dyfuzji:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \delta_2 \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial x^2} = 0. \quad (3.37)$$

3.3 Równania dynamiczne w przepływie słabo nieliniowym

3.3.1 Słabo nieliniowe równanie dynamiczne dla dźwięku

W słabo nieliniowym przepływie nieliniowe człony, rzędu drugiego względem liczby Macha, w każdym równaniu zachowania z prawej strony układu (3.23), zawierają w ogólności poprawki od każdego modu. Należałoby poprawić wielkości $v_{a,1}$ i $p_{a,1}$ określające mod akustyczny (3.32), tak aby uwzględnić człony nieliniowe rzędu M^2 . Założono zatem, że:

$$v_{a,1} = \rho_{a,1} - \left(\hat{A} + \frac{\delta}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x} \rho_{a,1} + A \rho_{a,1}^2, \quad p_{a,1} = \rho_{a,1} - \delta \frac{\partial}{\partial x} \rho_{a,1} - B \rho_{a,1}^2, \quad (3.38)$$

gdzie A , B są poszukiwanymi stałymi współczynnikami. Wstawiono rozwiązania (3.38) do układu równań (3.23), przy czym z prawej strony układu zostawiono tylko człony tego samego rzędu $\sim \rho_{a,1}^2$. Następnie tak dobrano współczynniki A , B , aby otrzymać trzy tożsamości. W ten sposób otrzymano stosowne poprawki dla poszczególnych modów:

$$\begin{aligned} v_{a,1} &= \rho_{a,1} - \hat{A} \frac{\partial}{\partial x} \rho_{a,1} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \rho_{a,1} - \frac{1}{4} (3 + D_1 + D_2) \rho_{a,1}^2, \\ p_{a,1} &= \rho_{a,1} - \delta \frac{\partial}{\partial x} \rho_{a,1} - \frac{1}{2} (1 + D_1 + D_2) \rho_{a,1}^2. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Równości (3.39) podobne są do tych, określających fale Riemanna w gazie doskonałym. Można to łatwo wykazać dokonując przejścia do gazu doskonałego. Energię wewnętrzną gazu doskonałego (1.32) można zapisać następująco:

$$e = e_0 + e' = \frac{p_0 \left(1 + \frac{p'}{p_0} \right)}{\rho_0 (\gamma - 1) \left(1 + \frac{p'}{\rho_0} \right)}, \quad (3.40)$$

a następnie rozwijając w szereg względem potęg ρ'/ρ_0 i p'/p_0 otrzymać:

$$e = \frac{p_0}{\rho_0(\gamma - 1)} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0} + \frac{\rho'^2}{\rho_0^2} + \frac{p'}{p_0} - \frac{p'\rho'}{p_0\rho_0} + \dots \right). \quad (3.41)$$

Porównanie (3.41) z (3.3) prowadzi do następujących zależności:

$$E_1 = \frac{1}{\gamma - 1}, \quad E_2 = -\frac{1}{\gamma - 1}, \quad E_3 = 0, \quad E_4 = \frac{1}{\gamma - 1}, \quad E_5 = -\frac{1}{\gamma - 1}, \quad (3.42)$$

które po wstawieniu do (3.25) dają następujące relacje: $D_1 = -\gamma$, $D_2 = 0$. Dla $D_1 = -\gamma$, $D_2 = 0$ i $\omega\tau_R \rightarrow \infty$ relacje dla zaburzeń w fali mają postać [49]:

$$\begin{aligned} v_{a,1} &= \rho_{a,1} - m \frac{\partial}{\partial x} \rho_{a,1} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \rho_{a,1} + \frac{1}{4} (\gamma - 3) \rho_{a,1}^2, \\ p_{a,1} &= \rho_{a,1} - \delta \frac{\partial}{\partial x} \rho_{a,1} + \frac{1}{2} (\gamma - 1) \rho_{a,1}^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Rzutując układ równań (3.23) z uwzględnieniem tych poprawek, i zatrzymując w prawej części układu tylko człony związane z modem akustycznym propagującym w kierunku dodatnim osi OX , jako modem dominującym, można łatwo wyprowadzić równanie uzupełnione o człon związany z dyspersją:

$$\frac{\partial \rho_{a,1}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{a,1}}{\partial t} - \hat{A} \frac{\partial^2 \rho_{a,1}}{\partial x^2} - \frac{\delta}{2} \frac{\partial^2 \rho_{a,1}}{\partial x^2} = -\frac{1 - D_1 - D_2}{2} \rho_{a,1} \frac{\partial}{\partial x} \rho_{a,1}. \quad (3.44)$$

Powyższa procedura jest poszerzeniem liniowej metody rzutowania. Poprawiając liniowe relacje, można uzyskać równania nieliniowe z coraz większą dokładnością.

3.3.2 Generacja modu entropowego przez dźwięk dominujący. Ogrzewanie akustyczne.

Stosowana metoda matematyczna pozwala na wyliczenie nieliniowych równań dla poszczególnych modów. W przypadku ogrzewania akustycznego, wielkości zmian gęstości właściwe dla modu entropowego są niewielkie w porównaniu z tymi właściwymi dla dźwięku. Działając na układ równań (3.23) projektorem P_3 , otrzymano z lewej strony równanie dla modu entropowego, a z prawej zachowano tylko człony nieliniowe, związane z modem akustycznym propagującym w kierunku dodatnim osi OX , ponieważ ten mod jest dominujący w porównaniu z innymi modami. Dla ułatwienia, wielkości związane

z dźwiękiem propagującym w kierunku dodatnim osi $0X$, oznaczono następująco: $p_a = p_1, \rho_a = \rho_1, v_a = v_1$, a wielkości związane z modem entropowym, będą indeksowane przez *ent*. W wyniku rzutowania otrzymano równanie opisujące dynamikę modu entropowego, pobudzonego przez dźwięk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_e + \delta_2 \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial x^2} - \frac{\delta}{4} (3 + D_1 + D_2) \frac{\partial^2 \rho_a^2}{\partial x^2} + (1 + D_1 + D_2) \left(-\rho_a \frac{\partial \rho_a}{\partial x} + \frac{\delta_2}{2} \frac{\partial^2 \rho_a^2}{\partial x^2} \right) = \\ -(1 + D_1 + D_2) \left(\rho_a \frac{\partial \rho_a}{\partial x} - \frac{2}{E_1} \frac{\partial}{\partial x} \rho_a \hat{A} \frac{\partial}{\partial x} \rho_a + \delta \left(D_1 \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial x} \right)^2 - \rho_a \frac{\partial^2 \rho_a}{\partial x^2} \right) \right) \\ - (\delta_3 + \delta_4 + \delta_5) \left(\frac{\partial^2 \rho_a^2}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.45)$$

i tak po pewnych uproszczeniach otrzymano równanie opisujące ogrzewanie akustyczne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho_e + \delta_2 \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial x^2} = -\frac{2}{E_1} \frac{\partial}{\partial x} \rho_a \hat{A} \frac{\partial}{\partial x} \rho_a \\ + \left(\left(\frac{\delta}{2} - \delta_2 \right) (1 + D_1 + D_2) - 2(\delta_3 + \delta_4 + \delta_5) \right) \rho_a \frac{\partial^2 \rho_a}{\partial x^2} \\ + \left(\frac{\delta}{2} (3D_1 + D_2 + 3) - \delta_2 (1 + D_1 + D_2) - 2(\delta_3 + \delta_4 + \delta_5) \right) \left(\frac{\partial \rho_a}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

Równanie ogrzewania akustycznego (3.46) jest rezultatem kombinacji równania transportu ciepła i ciągłości. Człony w prawej części równania nazywane są źródłem akustycznym.

3.4 Przykłady

Rozwiązanie równania (3.46) jest bardzo skomplikowane, zwłaszcza że zmiana gęstości akustycznej ρ_a powinna spełniać równanie (3.44), które jest nieliniowe. Warto przypomnieć, że ρ_e nie jest wielkością falową. Człony akustyczne pełnią rolę nieliniowego źródła ogrzewania i odzwierciedlają fakt, że zjawisko jest spowodowane nieliniowością i lepkością. W istocie, równanie dyfuzji (3.46) zawiera po prawej stronie źródło akustyczne. Opisuje ono dynamikę modu cieplnego w każdym czasie i opisuje ogrzewanie powstające na skutek lepkości, przewodności cieplnej i relaksacji. Niech w równaniu (3.46) zostaną rozważone tylko człony dyspersyjne, aby zbadać ogrzewanie powstające wyłącznie na skutek relaksacji. Bezwymiarowe równanie ogrzewania akustycznego, obliczone na podstawie równań (3.4) i (3.46) wygląda następująco:

$$\frac{\partial \mathbf{T}_e}{\partial t} = \frac{\Theta_2 p_0}{\rho_0 C_v} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = -\frac{2\Theta_2 p_0 m}{\rho_0 C_v E_1} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \rho_a}{\partial x} \exp(-(t-t')/\tau) dt'. \quad (3.47)$$

Uwzględniając, że:

$$\Theta_2 = \frac{\rho_0^2 C_v}{p_0} \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_p = -\frac{\rho_0 C_v}{p_0 \beta}, \quad (3.48)$$

równanie (3.47) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{T}_e}{\partial t} &= \frac{2m}{\beta E_1} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \rho_a}{\partial x} \exp(-(t-t')/\tau) dt' = \\ &= \frac{2m}{\rho_0 C_v \kappa} \frac{\partial \rho_a}{\partial x} \int_{-\infty}^t \frac{\partial \rho_a}{\partial x} \exp(-(t-t')/\tau) dt'. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Równanie ogrzewania akustycznego (3.49), wraz z równaniem dla modu akustycznego propagującego w kierunku dodatnim osi OX (3.44), wyprowadzone dla płynów opisanych maxwellowskim tensorem naprężeń, jest jednym z głównych rezultatów przedstawionych w niniejszej rozprawie doktorskiej.

3.4.1 Ogrzewanie akustyczne spowodowane dźwiękiem stacjonarnym

Stacjonarne rozwiązanie równania (3.44) z $\delta = 0$ przyjmuje następującą postać[13]:

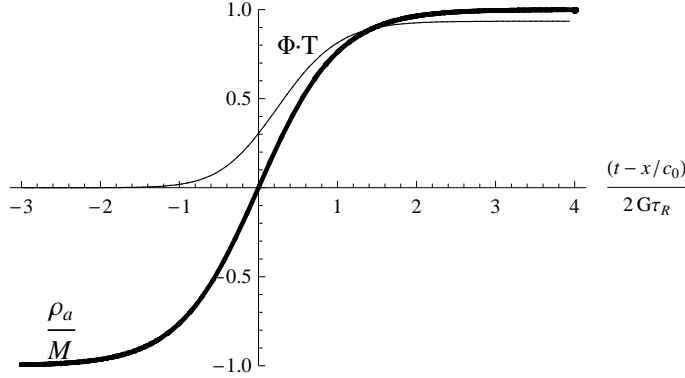
$$\rho_a(\eta) = M \tanh(\eta/2G\tau), \quad (3.50)$$

gdzie $\eta = t - x$ jest czasem opóźnionym, $G = \frac{2m}{(1-D_1-D_2)M}$ jest współczynnikiem określającym stosunek efektów relaksacyjnych do efektów nieliniowych. Na rys.(3.1) przedstawiono fale stacjonarną i bezwymiarową temperaturę $\Phi \mathbf{T}_e$ ($\Phi = \frac{\rho_0 C_v \kappa}{2M^2 m} = \frac{\beta E_1}{2M^2 m}$ jest mierzona w K^{-1}), obliczoną przy pomocy programu *Mathematica*, jako funkcję $(\eta/2G\tau)$ (lub $(t - x/c_0)/2G\tau_R$ w zmiennych wymiarowych t, x, τ_R). Stała wartość, jaka przyjmuje temperatura dla nieskończenie dużych wartości η jest śladem, jaki po swoim przejściu, zostawia fala. Jest to wartość dodatnia, spowodowana nieliniowymi przepływami akustycznej energii do modu cieplnego.

3.4.2 Efektywność ogrzewania akustycznego, spowodowanego przez impulsy falowe

Niech ρ_a zostanie rozważona w postaci trzech pojedynczych impulsów stacjonarnych:

$$\begin{aligned} \rho_a(\eta) &= \sqrt{2}M \exp(-\eta^2), \quad \rho_a(\eta) = M \exp(-\eta^2/4), \\ \rho_a(\eta) &= 2\sqrt{2}M\eta \exp(-\eta^2). \end{aligned} \quad (3.51)$$



Rysunek 3.1: Fala stacjonarna (linia pogrubiona) i odpowiadający jej wzrost temperatury (linia normalna).

Zależności (3.51) są rozwiązaniem liniowego równania falowego (3.36) z $\delta = 0$. Energia dla każdego kształtu fali, proporcjonalna do $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_a(\eta)^2 d\eta$, jest równa dla wszystkich trzech impulsów. Na rysunkach (3.2b, 3.2c, 3.2d) pokazano temperaturę, wyliczoną na podstawie równania (3.49), dla różnych czasów relaksacji. Na rysunku (3.2a) pokazano początkowe formy impulsów, określone równaniem (3.51). Na rysunku (3.2) zaprezentowano bezwymiarowy czas i temperaturę, ω oznacza charakterystyczny, odwrotny czas trwania początkowego kształtu fali. Pomimo faktu, że wszystkie fale opisane równaniami (3.51) mają tę samą energię, trzeci impuls wywołuje najbardziej efektywne ogrzewanie, powodując powstanie najwyższej temperatury po przejściu fali.

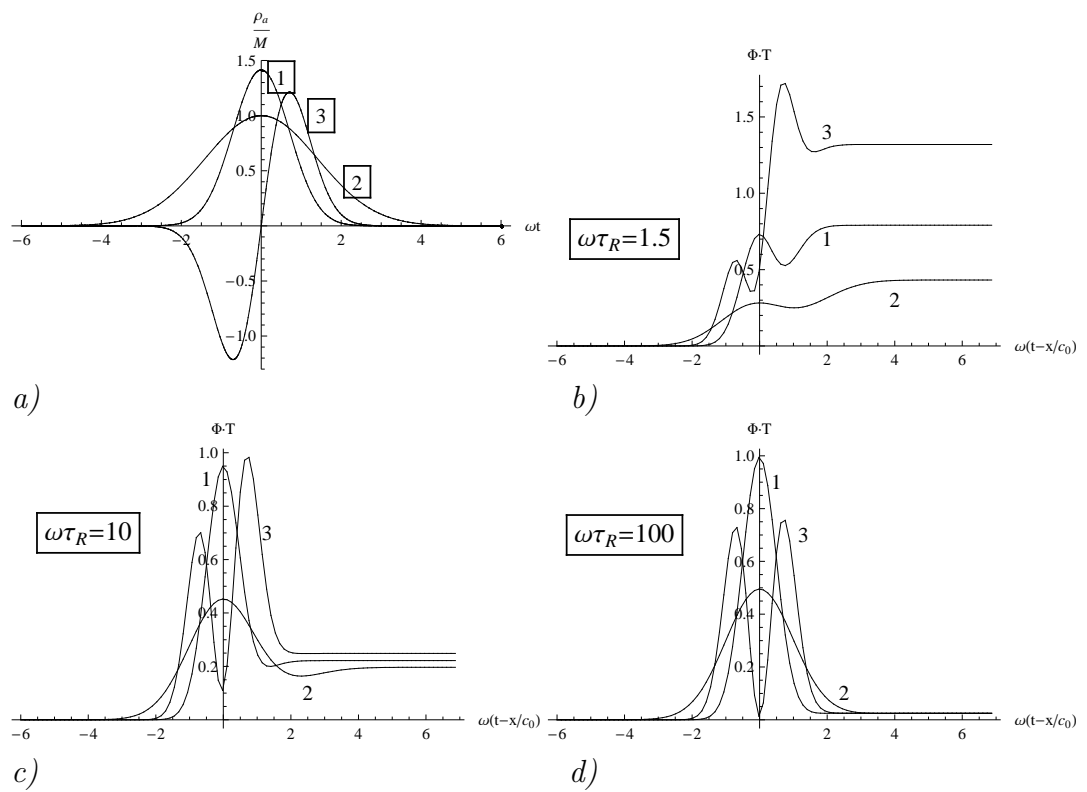
Następnie niech fale zostaną przedstawione w postaci paczek falowych:

$$\begin{aligned} \rho_a(\eta) &= 1.3511M \exp(-n_1 \cdot \eta^2) \sin(\eta), & \rho_a(\eta) &= M \exp(-n_2 \cdot \eta^2) \sin(\eta), \\ \rho_a(\eta) &= 0.6815M \exp(-n_3 \cdot \eta^2) \sin(\eta), & & \end{aligned} \quad (3.52)$$

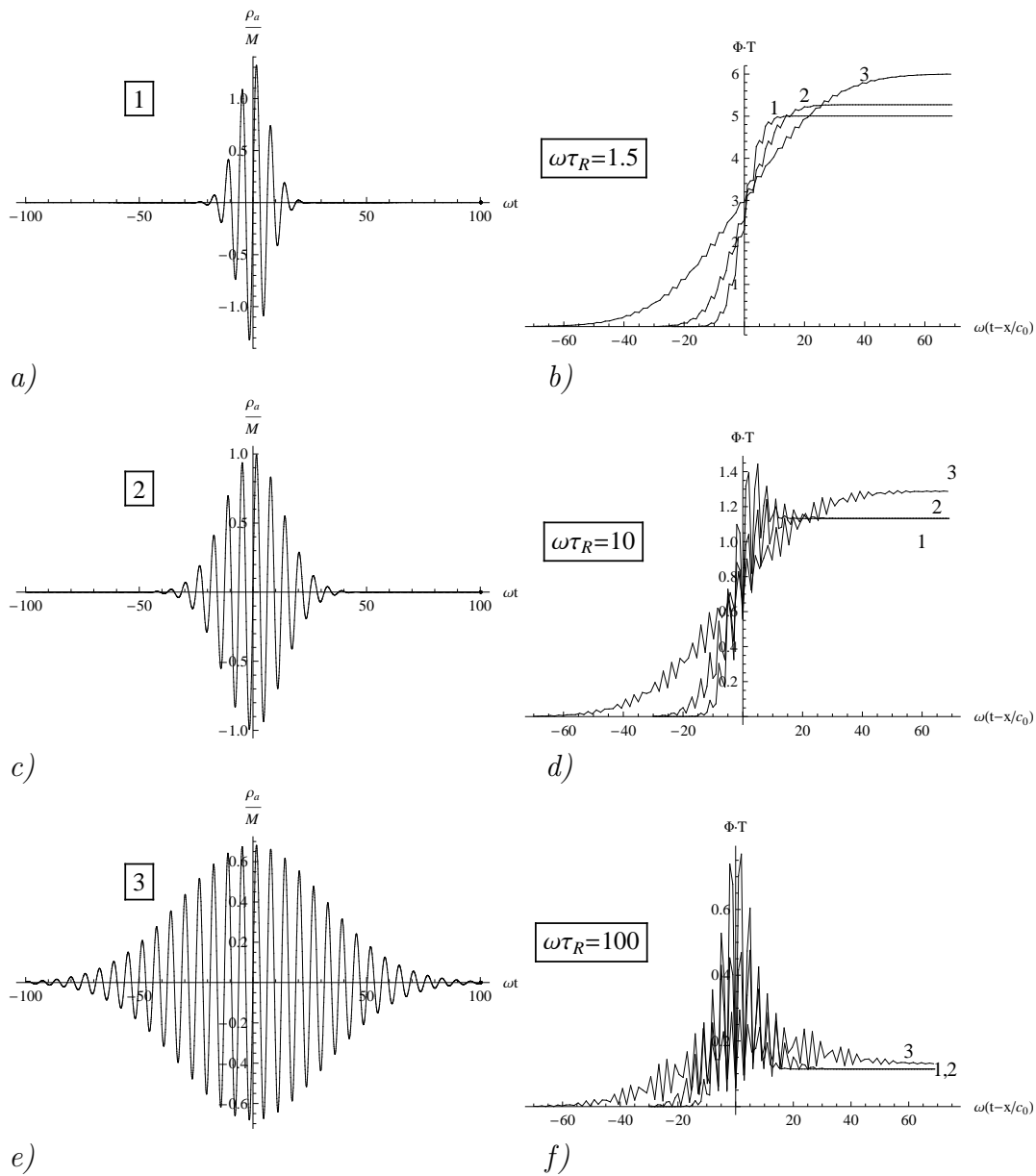
gdzie: $n_1 = 0.01$, $n_2 = 0.003$, $n_3 = 0.0005$, aby energia wszystkich fal była taka sama, bez względu na kształt. Początkowe kształty fal przedstawione są na rysunkach (3.3a, 3.3c, 3.3e). Na rysunkach (3.3b, 3.3d, 3.3f) przedstawiono bezwymiarową temperaturę $\Phi\mathbf{T}_e$, dla różnych czasów relaksacji. Można zaobserwować wzrastanie ogrzewania akustycznego wraz ze zmniejszaniem się wartości współczynnika n . Konkretnie wartości zmian temperatury są zależne od liczby Macha M , parametru dyspersyjnego m , odwrotnego czasu trwania impulsu ω i własności termodynamicznych płynu. W przypadku gazu doskonałego $\beta E_1 = 1/(T_0(\gamma - 1))$, natomiast dla cieczy (za wyjątkiem metalicznych) jest to wielkość dużo mniejsza niż w przypadku gazów. Współczynnik

$\Phi \cdot M^2 = \frac{\rho_0 C_v k}{2m}$ zależy od molekularnych własności płynu. Na przykład lepko-elastyczny płyn gliceryna, która może być opisana za pomocą maxwellowskiego tensora naprężeń, ma $\Phi \cdot M^2 = 22207 K^{-1}$. Współczynnik ten został obliczony na podstawie danych eksperymentalnych [10], [15], [23]. Trudno oczekiwać, aby pojedynczy impuls powodował duży wzrost temperatury, jednakże jego krzywizna gra znaczącą rolę w efektywności akustycznego ogrzewania.

Podsumowując, ogrzewanie akustyczne wzrasta wraz ze zwiększeniem się akustycznej liczby Macha M i parametru dyspersyjnego m . Wzrasta również wraz ze spadkiem bezwymiarowego czasu relaksacji $\omega\tau_R$. Mniejsza wartość $\omega\tau_R$ powoduje większą efektywność ogrzewania. Problem efektywności ogrzewania akustycznego, wywołanego przez różne impulsy o tej samej energii, ma znaczenie w medycznych i technicznych zastosowaniach ultradźwięków, gdzie stosuje się różne typy fal, także fale w kształcie impulsów [14, 48]. W niniejszej pracy badanie owej efektywności zostało przeprowadzone na podstawie chwilowego równania ogrzewania akustycznego (3.46). Rysunki (3.2) oraz (3.3) pokazują, że efektywność ogrzewania akustycznego zależy od kształtu fali. Co istotne, obliczenia mogą być powtórzone dla innych typów fal przyjętych jako źródło ogrzewania. Ponadto zastosowanie w niniejszym rozdziale modelu Maxwella do opisu lepkiego tensora naprężeń przybliża otrzymane wyniki analityczne do rzeczywistości. Model ten opisuje bowiem dobrze tkanki biologiczne i lepkie płyny takie jak krew.



Rysunek 3.2: a) Początkowe kształty fali (Na podstawie równania 3.51). b),c),d) Zmiany temperatury, wywołane przez fale z punktu a), dla różnych wartości współczynnika $\tau = \omega\tau_R$.



Rysunek 3.3: a), c), e) Początkowe kształty fal, wyznaczone na podstawie równania (3.52). b), d), e) Zmiany temperatury spowodowane przez fale z przykładów a), c), e), dla różnych wartości współczynnika $\tau = \omega\tau_R$.

Rozdział 4

Ogrzewanie akustyczne w gazie, w którym zachodzi reakcja chemiczna

W niniejszym rozdziale omówiono słabo nieliniową generację modów nieakustycznych w gazie, w którym zachodzi reakcja chemiczna. Jest ona typu $A \rightarrow B$, co oznacza reakcję, w której substrat A tworzy produkt B , przy czym może być odwracalna lub nie. Przykładem takiej reakcji pierwszego rzędu jest: Cyklopropan \rightarrow propen [2]. Rozważono dwa przypadki dźwięku: wysoko i niskoczęstotliwościowy. Dla obydwu tych przypadków wyprowadzono równania opisujące oddziaływanie modów nieakustycznych z dźwiękiem, jak również wyciągnięto wnioski na temat efektywności nieliniowej generacji modów nieakustycznych. Zawarte w niniejszym rozdziale wyniki zostały opublikowane w [41].

4.1 Podstawowe równania

Poniżej przedstawiono równania zachowania pędu, energii i ciągłości w gazie, w którym zachodzi reakcja chemiczna typu $A \rightarrow B$:

$$\begin{aligned}\rho \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\vec{\nabla} p, \\ \frac{C_{V,\infty}}{R} \frac{dT}{dt} - \frac{T}{\rho} \frac{d\rho}{dt} &= Q, \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Gdzie:

- \vec{v}, ρ, p oznaczają odpowiednio: prędkość, gęstość i ciśnienie gazu;
- T jest temperaturą mierzoną w dżulach na cząsteczkę;
- $C_{V,\infty}, C_{P,\infty}$ są odpowiednio pojemnością cieplną przy stałej objętości i przy stałym ciśnieniu, dla przypadku nieskończenie wysokiej częstotliwości dźwięku, to znaczy gdy iloczyn częstotliwości dźwięku i charakterystycznego czasu trwania reakcji chemicznej jest dużo większy od jeden;
- $R = C_{P,\infty} - C_{V,\infty}$ to uniwersalna stała gazowa dla gazu doskonałego;
- $Q = HmW/\rho$ jest ciepłem wytworzonym w ośrodku w czasie reakcji chemicznej, przypadającym na jedną cząsteczkę;
- W jest szybkością reakcji pomnożoną przez masę molową;
- H oznacza entalpię reakcji na jednostkę masy reagenta A ;
- m jest średnią masą molową gazu.

Równanie dynamiczne dla ułamka masowego Y reagenta A i równanie stanu, uzupełniają układ równań (4.1):

$$\frac{dY}{dt} = -\frac{W}{\rho}, \quad p = \frac{\rho T}{m}. \quad (4.2)$$

4.2 Związki dyspersyjne w jednowymiarowym przepływie

W niniejszym rozdziale rozważono jednowymiarowy przepływ wzdłuż osi $0X$. Każdą zmienną w układzie równań (4.1), można przedstawić jako sumę dwóch wielkości: pierwsza, oznaczona indeksem "0", to dana wielkość w stanie równowagi, tak zwany parametr tła, natomiast wielkość indeksowana "primem" oznacza niewielkie zaburzenie z tego stanu równowagi, na przykład: $T = T_0 + T'$ (gdzie w słabo nieliniowym przepływie $|T'| \ll T_0$), itd. Podobnie jak w [25, 26], założono, że stacjonarne wielkości $Y_0, T_0, P_0, \rho_0, v_0 = 0$ są utrzymywane poprzez poprzeczne pompowanie energii, tak że w podłużnym kierunku wskazanym przez oś $0X$, stacjonarny ośrodek jest jednorodny. Układ równań (4.1), wraz z (4.2), z dokładnością do członów drugiego rzędu względem

liczby Macha, przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{T_0}{m\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + \frac{1}{m} \frac{\partial T'}{\partial x} &= -v' \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{T_0 \rho'}{m\rho_0^2} \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \frac{T'}{m\rho_0} \frac{\partial \rho'}{\partial x}, \\
\frac{\partial T'}{\partial t} + (\gamma_\infty - 1) \left(T_0 \frac{\partial v'}{\partial x} - Q_T \frac{Q_0}{T_0} T' - Q_\rho \frac{Q_0}{\rho_0} \rho' - Q_Y \frac{Q_0}{Y_0} Y' \right) &= \\
-v' \frac{\partial T'}{\partial x} - (\gamma_\infty - 1) T' \frac{\partial v'}{\partial x}, \\
\frac{\partial Y'}{\partial t} + \frac{1}{Hm} \left(Q_T \frac{Q_0}{T_0} T' + Q_\rho \frac{Q_0}{\rho_0} \rho' + Q_Y \frac{Q_0}{Y_0} Y' \right) &= -v' \frac{\partial Y'}{\partial x}, \\
\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v'}{\partial x} &= -v' \frac{\partial \rho'}{\partial x} - \rho' \frac{\partial v'}{\partial x},
\end{aligned} \tag{4.3}$$

gdzie $\gamma_\infty = \frac{C_{P,\infty}}{C_{V,\infty}}$ oznacza wykładnik adiabaty, dla przypadku wysokoczęstotliwościowego. Bezwymiarowe wielkości Q_T , Q_ρ , Q_Y są zdefiniowane przez następujące równości:

$$Q_T = \frac{T_0}{Q_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_{T_0, \rho_0, Y_0}, \quad Q_\rho = \frac{\rho_0}{Q_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} \right)_{T_0, \rho_0, Y_0}, \quad Q_Y = \frac{Y_0}{Q_0} \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_{T_0, \rho_0, Y_0}. \tag{4.4}$$

Aby wyprowadzić związki dyspersyjne $\omega(k)$, należy rozważyć liniową wersję układu równań (4.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi + L\psi = 0, \tag{4.5}$$

gdzie:

$$\psi = \begin{pmatrix} v' \\ T' \\ Y' \\ \rho' \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{T_0}{m\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \\ (\gamma_\infty - 1) T_0 \frac{\partial}{\partial x} & (\gamma_\infty - 1) - Q_T \frac{Q_0}{T_0} & -(\gamma_\infty - 1) Q_Y \frac{Q_0}{Y_0} & -(\gamma_\infty - 1) Q_\rho \frac{Q_0}{\rho_0} \\ 0 & \frac{1}{Hm} Q_T \frac{Q_0}{T_0} & \frac{1}{Hm} Q_Y \frac{Q_0}{Y_0} & \frac{1}{Hm} Q_\rho \frac{Q_0}{\rho_0} \\ \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jak zostało zreferowane w rozdziale 2, poszukiwane są rozwiązania w postaci superpozycji fal płaskich. Z równania trzeciego, w układzie równań (4.5), otrzymano następujące równości:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial Y}{\partial T} \right)_V &= -\frac{Q_T}{Q_Y(1 + i\omega\tau_c)} \frac{Y_0}{T_0}, \\
\left(\frac{\partial Y}{\partial \rho} \right)_T &= -\frac{1}{\rho_0^2} \left(\frac{\partial Y}{\partial V} \right)_T = -\frac{Q_\rho}{Q_Y(1 + i\omega\tau_c)} \frac{Y_0}{\rho_0},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

gdzie $V = 1/\rho$ oznacza objętość właściwą gazu, a

$$\tau_c = \frac{HmY_0}{Q_0Q_Y} \quad (4.8)$$

jest charakterystycznym czasem trwania reakcji chemicznej mierzonym w sekundach. Z równania stanu (drugie z równań(4.2)) otrzymano:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{m\rho_0}, \quad (4.9)$$

zaś wraz z tożsamością termodynamiczną:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_P = \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial Y}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P, \quad (4.10)$$

otrzymano następujące wyrażenie:

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_P = \frac{(Q_\rho - Q_T) Y_0}{Q_Y(1 + i\omega\tau_c) T_0}. \quad (4.11)$$

Obliczając wartości własne operatora L z (4.5), otrzymano relacje dyspersji dla trzech nietermicznych modów (dwa akustyczne i jeden nie-akustyczny) i dla modu entropowego:

$$\omega^2 = k^2 \frac{T_0 C_P}{m C_V} = k^2 \frac{T_0}{m} \left(\frac{C_{P,\infty} + mH \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_P}{C_{V,\infty} + mH \left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_V} \right) = k^2 \frac{T_0}{m} \left(\frac{C_{P,\infty} + \frac{(Q_\rho - Q_T)\tau_c Q_0}{1 + i\omega\tau_c} \frac{Q_0}{T_0}}{C_{V,\infty} - \frac{Q_T\tau_c Q_0}{1 + i\omega\tau_c} \frac{Q_0}{T_0}} \right), \quad (4.12)$$

$$\omega = 0.$$

Po raz pierwszy przybliżone równania opisujące relacje dyspersji dla dwóch akustycznych modów, zostały wyprowadzone w [26]. W niniejszej pracy, zostaną wyprowadzone cztery pierwiastki dyspersyjne w dwóch skrajnych przypadkach: kiedy częstotliwość dźwięku jest duża, czyli iloczyn częstotliwości dźwięku i charakterystycznego czasu trwania reakcji chemicznej τ_c jest dużo większy od 1: $\omega\tau_c \approx |k|u_\infty\tau_c \gg 1$ i kiedy częstotliwość dźwięku jest mała: $\omega\tau_c \approx |k|u_0\tau_c \ll 1$ (u_∞, u_0 to odpowiednio: prędkość dźwięku przy nieskończenie dużej i małej częstotliwości). W obydwu przypadkach założono powolną zależność, wydzielanego w czasie reakcji chemicznej, ciepła od temperatury i gęstości ($|Q_\rho| \ll 1$, $|Q_T| \ll 1$).

4.3 Przypadek wysokoczęstotliwościowy

W niniejszym paragrafie, będzie rozważany przypadek gdy częstotliwość dźwięku jest wysoka: $\omega\tau_c \approx |k|u_\infty\tau_c \gg 1$. Przy takim założeniu można z równań (4.12)

wyprowadzić przybliżone równania dla relacji dyspersji. Z dokładnością do członów drugiego rzędu, względem Q_ρ i Q_T , przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= u_\infty(k - iB_\infty), \quad \omega_2 = u_\infty(-k - iB_\infty), \quad \omega_3 = i \left(\frac{1}{\tau_c} + \frac{(\gamma_\infty - 1)Q_0(Q_\rho - Q_T)}{u_\infty^2 m} \right), \\ \omega_4 &= 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

gdzie

$$B_\infty = \frac{Q_0(\gamma_\infty - 1)(Q_\rho + (\gamma_\infty - 1)Q_T)}{2u_\infty^3 m}, \quad (4.14)$$

a $u_\infty = \sqrt{\gamma_\infty \frac{T_0}{m}}$ jest prędkością dźwięku przy nieskończenie dużych częstotliwościach, która będzie w dalszej części pracy nazywana "zamrożoną" prędkością dźwięku. W procesach falowych, wzmocnienie lub tłumienie dźwięku jest małe w porównaniu z liczbą falową, $|B_\infty| \ll |k|$, to z kolei determinuje fakt, że $|Q_\rho|, |Q_T| \ll 1$. Pierwsze dwie relacje dyspersji występujące w układzie równań (4.13) ω_1, ω_2 dotyczą modów akustycznych, zaś czwarty ω_4 związany jest z modem entropowym. Te rodzaje modów obserwowaliśmy również w płynach o maksweleskim tensorze naprężeń (rozdział 3.). Natomiast wartość własna ω_3 jest charakterystyczna dla ośrodka, jakim jest gaz, w którym występuje reakcja chemiczna i opisuje nie-falowe zmiany w ułamku masowym reagenta A . Istnienie modu trzeciego wynika z obecności relaksacji termodynamicznej ośrodka. Ten mod można nazwać modem relaksacyjnym. Z dwóch pierwszych równości z (4.13) wynika między innymi, że w zależności od znaku współczynnika B_∞ można mieć do czynienia nie tylko z tłumieniem dźwięku (gdy B_∞ jest ujemną wielkością), co jest typowe dla płynów newtonowskich, ale również ze wzmocnieniem dźwięku (gdy B_∞ jest wielkością dodatnią). Zjawisko wzmocnienia dźwięku występuje w nierównowagowych ośrodkach, między innymi takimi jak rozważany tutaj gaz, w którym ma miejsce reakcja chemiczna, ale również np. w gazach z pobudzonymi wewnętrznymi stopniami swobody cząsteczek.

4.3.1 Seperacja równań

Równania liniowe opisujące akustyczne i nieakustyczne mody

Relacje dyspersji (4.13) wyznaczają jednoznacznie cztery wektory własne: $\psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4$. Pamiętając, że $(-ik)^{-1}$ odpowiada operatorowi $\int dx$, wyprowadzono przybliżone wartości własne operatora L z (4.5), z dokładnością do potęg drugiego rzędu względem $|Q_\rho|$ i $|Q_T|$ i otrzymano następujące wektory

własne:

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= \begin{pmatrix} v'_1 \\ T'_1 \\ Y'_1 \\ \rho'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_\infty - \frac{u_\infty B_\infty}{\rho_0} \int dx}{(\gamma_\infty - 1)T_0 - \frac{2\gamma_\infty T_0 B_\infty}{\rho_0} \int dx} \\ \frac{2B_\infty u_\infty^2}{(\gamma_\infty - 1)H\rho_0} \int dx \\ 1 \end{pmatrix} \rho'_1, \\
\psi_2 &= \begin{pmatrix} -\frac{u_\infty - \frac{u_\infty B_\infty}{\rho_0} \int dx}{(\gamma_\infty - 1)T_0 + \frac{2\gamma_\infty T_0 B_\infty}{\rho_0} \int dx} \\ -\frac{2B_\infty u_\infty^2}{(\gamma_\infty - 1)H\rho_0} \int dx \\ 1 \end{pmatrix} \rho'_2, \\
\psi_3 &= \begin{pmatrix} \left(\frac{(\gamma_\infty - 1)Q_0(Q_\rho - Q_T)}{\rho_0 T_0 \gamma_\infty} + \frac{1}{\tau_c \rho_0} \right) \int dx \\ -\frac{T_0}{u_\infty^2 \rho_0} \\ \frac{u_\infty^2 \rho_0}{H(\gamma_\infty - 1)\rho_0} \\ 1 \end{pmatrix} \rho'_3, \\
\psi_4 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{T_0}{\tau_c Q_0 \left(\frac{Q_\rho - Q_T}{Hm\rho_0} \right)} \\ -\frac{T_0}{\tau_c Q_0 \left(\frac{Q_\rho - Q_T}{Hm\rho_0} \right)} \\ 1 \end{pmatrix} \rho'_4. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Przedziały całkowania dla całek występujących w (4.15) muszą być wyznaczone z konkretnych warunków zagadnienia. Z kolei wektory własne wyznaczają projektory: P_1 , P_2 , P_3 , P_4 . Rzutując zatem liniowy układ równań (4.5) na odpowiednie podprzestrzenie otrzymano liniowe równania dla poszczególnych modów. Równania opisujące zmiany gęstości w fali akustycznej propagującej w kierunku dodatnim osi OX , mod entropowy i mod chemiczny, przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + u_\infty \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} - B_\infty \rho'_1 &= 0, \\
\frac{\partial \rho'_4}{\partial t} &= 0, \\
\frac{\partial \rho'_3}{\partial t} + \left(\frac{Q_0(\gamma_\infty - 1)(Q_\rho - Q_T)}{T_0 \gamma_\infty} + \frac{1}{\tau_c} \right) \rho'_3 &= 0. \tag{4.16}
\end{aligned}$$

Równania (4.16) zgadzają się z relacjami dyspersyjnymi (4.13).

Nieliniowe poprawki do modu akustycznego

Analogicznie jak w rozdziale 3 należy uzupełnić liniowe relacje dla fali akustycznej rozchodzącej się w kierunku dodatnim osi OX o człony słabo nieliniowe.

Postępując analogicznie jak w przypadku płynów o maxwelowskim tensorze naprężeń, otrzymano następujące, największe (rzędu M^2) nieliniowe poprawki do pierwszego modu:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{u_\infty}{\rho_0} \rho_1' - \frac{u_\infty B_\infty}{\rho_0} \int \rho_1' dx + \frac{(\gamma_\infty - 3)u_\infty}{4\rho_0^2} \rho_1'^2 \\ T_1' &= \frac{(\gamma_\infty - 1)T_0}{\rho_0} \rho_1' - \frac{2u_\infty^2 m B_\infty}{\rho_0} \int \rho_1' dx + \frac{(\gamma_\infty - 1)(\gamma_\infty - 2)T_0}{2\rho_0^2} \rho_1'^2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Uwzględnienie nieliniowych poprawek w równościach (4.17) ustanawia relacje charakterystyczne dla fali płaskiej Riemann'a [49], [47], propagującej w gazie idealnym. Biorąc pod uwagę nieliniowe człony w równaniu dla dźwięku, można łatwo wykazać, że zaburzenie gęstości fali akustycznej spełnia następujące równanie:

$$\frac{\partial \rho_1'}{\partial t} + u_\infty \frac{\partial \rho_1'}{\partial x} + \frac{(\gamma_\infty + 1)u_\infty}{2\rho_0} \rho_1' \frac{\partial \rho_1'}{\partial x} - B_\infty \rho_1' = 0, \quad (4.18)$$

które wygląda analogicznie do równania Earnshaw'a [49], za wyjątkiem członu: $-B_\infty \rho_1'$, który jest odpowiedzialny za tłumienie bądź wzmocnienie dźwięku, w zależności od znaku B_∞ . Analogiczne do równania (4.18) wygląda równanie dla modu akustycznego w gazach, gdzie zachodzą inne nierównowagowe procesy termodynamiczne, na przykład w gazach z pobudzonymi stopniami swobody cząsteczek [39]. Występujący w tym równaniu człon odpowiedzialny za tłumienie bądź wzmocnienie dźwięku zawiera następujący współczynnik B :

$$B = -\frac{(\gamma - 1)^2 T_0}{2c^3} \left(\frac{C_v}{\tau} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_{eq}}{\tau^2} \frac{d\tau}{dT} \right), \quad (4.19)$$

gdzie: γ jest wykładnikiem adiabaty (odpowiada γ_∞ w równaniu 4.18), c jest prędkością dźwięku przy nieskończonej małej amplitudzie, ε jest energią wibracyjną, ε_{eq} jest wartością w stanie równowagowym energii wibracyjnej, τ oznacza czas relaksacji oscylacyjnych stopni swobody cząsteczek, $C_v = \frac{d\varepsilon_{eq}}{dT}$.

Zmiany w temperaturze wywołane wysokoczęstotliwościowym dźwiękiem

Aby wyznaczyć równanie opisujące zmiany temperatury, wywołane dźwiękiem, należy podzielić odpowiednim projektorem na ogólny układ równań (4.3). Innymi słowy, należy pomnożyć pierwsze równanie układu równań (4.3) przez zero, a odpowiednio drugie, trzecie i czwarte równanie przez następujące czyn-

niki:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\rho_0}{mu_\infty^2} + \frac{\rho_0 Q_0 (Q_\rho - Q_T) (\gamma_\infty - 1) \tau_c}{m^2 u_\infty^4}, \\
& \frac{\rho_0 H (\gamma_\infty - 1) (-mu_\infty^2 + Q_0 (Q_\rho - Q_T) (\gamma_\infty - 1) \tau_c)}{mu_\infty^4}, \\
& 1 - \frac{1}{\gamma_\infty} - \frac{(\gamma_\infty - 1)^2 Q_0 (Q_\rho - Q_T) \tau_c}{mu_\infty^2 \gamma_\infty},
\end{aligned}$$

(te czynniki tworzą czwarty wers projektora P_4), a następnie zsumować wszystkie równania, redukując tym samym wszystkie człony związane z modami innymi niż entropowy, w liniowej części ostatecznego równania. Zaś w nieliniowej części końcowego równania uwzględniono tylko akustyczne człony pierwszego rzędu. To prowadzi do ostatecznego równania opisującego zmiany temperatury, związany z modem entropowym:

$$\frac{\partial T'_4}{\partial t} = 2u_\infty (\gamma_\infty - 1) B_\infty \frac{T_0}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} \int \rho'_1 dx. \quad (4.20)$$

Równanie (4.20) opisuje ogrzewanie bądź chłodzenie akustyczne. Wywołane jest ono źródłem akustycznym, które reprezentują nieliniowe człony w prawej części równania (4.20). Analogicznie wygląda równanie ogrzewania akustycznego w gazach z pobudzonymi stopniami swobody, różni się ono tylko postacią współczynnika B_∞ (patrz równanie 4.19). Podobną do równania (4.20) postać przyjmuje równanie ogrzewania akustycznego w gazach z pobudzonymi stopniami swobody cząsteczek [38]:

$$-\frac{\rho_0}{T_0} \frac{\partial T'_4}{\partial t} = 2u_\infty (\gamma_\infty - 1) B_\infty \frac{T_0}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} \int \rho'_1 dx. \quad (4.21)$$

Natomiast aby zredukować wszystkie człony, poza tymi związanymi z trzecim modem, w liniowej części, należy na układ równań (4.3) podzielić trzecim wersetem projektora P_3 :

$$\begin{aligned}
& \frac{Q_0 (\gamma_\infty - 1) (Q_\rho + (\gamma_\infty - 1) Q_T)}{\gamma_\infty u_\infty^2} \int dx, \quad \frac{\tau_c Q_0 (\gamma_\infty - 1) (Q_T - Q_\rho)}{\gamma_\infty^2 T_0}, \\
& -\frac{H m (\gamma_\infty - 1)}{\gamma_\infty} - \frac{\tau_c Q_0 H (\gamma_\infty - 1)^2 (Q_T - Q_\rho)}{\gamma_\infty u_\infty^2}, \quad \frac{\tau_c Q_0 (\gamma_\infty - 1)^2 (Q_T - Q_\rho)}{\gamma_\infty^2 \rho_0}.
\end{aligned}$$

Ponownie sumując równania i zatrzymując tylko akustyczne, kwadratowe człony w nieliniowej części ostatecznego równania, otrzymano:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial T'_3}{\partial t} + \left(\frac{1}{\tau_c} + \frac{Q_0 (\gamma_\infty - 1) (Q_\rho - Q_T)}{\gamma_\infty T_0} \right) T'_3 = \\
& -\frac{Q_0 (\gamma_\infty - 1) [(\gamma_\infty - 3) Q_\rho - (\gamma_\infty - 1)^2 Q_T]}{4 \gamma_\infty \rho_0^2} \rho_1'^2. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Równanie (4.22) opisuje relaksację temperatury z czasem relaksacji około τ_c .

4.4 Przypadek niskoczęstotliwościowy

W tym podrozdziale, relacje dyspersji, mody i wszystkie dotyczące ich równania, wyznaczone będą w sposób analogiczny jak w podrozdziale 4.3, z tym że rozważając przypadek niskoczęstotliwościowy, przyjęto następujące założenie: $\omega\tau_c \approx |k|u_0\tau_c \ll 1$. Przybliżone równania dyspersji dla przypadku niskoczęstotliwego dźwięku, przyjmują następującą postać:

$$\omega_1 = u_0(k - iB_0), \quad \omega_2 = u_0(-k - iB_0), \quad \omega_3 = \frac{i}{\tau_c} - \frac{iRQ_0Q_T}{C_{V,0}T_0}, \quad \omega_4 = 0, \quad (4.23)$$

gdzie:

$$B_0 = \frac{k^2 R \tau_c^2 Q_0 (Q_\rho + (\gamma_0 - 1)Q_T) u_0}{2C_{P,0}T_0}, \quad (4.24)$$

gdzie $u_0 = \sqrt{\gamma_0 \frac{T_0}{m}}$ jest prędkością dźwięku, przy nieskończenie małej częstotliwości, gdzie:

$$\gamma_0 = \frac{C_{P,0}}{C_{V,0}} \approx \gamma_\infty + \frac{2u_\infty B_\infty \tau_c}{\gamma_\infty}. \quad (4.25)$$

zaś $C_{P,0}$, $C_{V,0}$ to odpowiednio równowagowe (niskoczęstotliwościowe) ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu i stałej objętości. Do wyliczenia $C_{P,0}$ oraz $C_{V,0}$ skorzystano z równości przedstawionych w [26]:

$$C_V = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_V = C_{V,\infty} + mH \left(\frac{\partial Y}{\partial T} \right)_V, \quad C_P = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_P = C_{P,\infty} + mH \left(\frac{\partial Y}{\partial T} \right)_P, \quad (4.26)$$

gdzie e i $h = e + p/\rho$ to odpowiednio energia wewnętrzna i entalpia ośrodka na jedną cząsteczkę. Wstawiając do (4.26) zależności (4.7) oraz (4.11) otrzymano następujące relacje:

$$C_V = C_{V,\infty} - \frac{Q_0 \tau_c Q_T}{T_0(1 + i\omega\tau_c)} \quad C_P = C_{P,\infty} + \frac{Q_0 \tau_c (Q_\rho - Q_T)}{T_0(1 + i\omega\tau_c)}, \quad (4.27)$$

co przy założeniu $\omega\tau_c \rightarrow 0$ prowadzi do następujących zależności:

$$C_{P,0} = C_{P,\infty} + \frac{RQ_0\tau_c(Q_\rho - Q_T)}{T_0}, \quad C_{V,0} = C_{V,\infty} - \frac{RQ_0\tau_c Q_T}{T_0}. \quad (4.28)$$

Wówczas relacje z (4.27) są równoważne do tych przedstawionych w [26]:

$$C_V = \frac{C_{V,0} + i\omega\tau_c C_{V,\infty}}{1 + i\omega\tau_c} \quad C_P = \frac{C_{P,0} + i\omega\tau_c C_{P,\infty}}{1 + i\omega\tau_c}. \quad (4.29)$$

4.4.1 Separacja równań

Równania liniowe opisujące akustyczne i nieakustyczne mody

Relacje dyspersji, opisane równaniami (4.23), wyznaczają liniowe równania dla poszczególnych modów. Wobec tego można od razu zapisać równania opisujące zaburzenie gęstości w modzie akustycznym (propagującym się w kierunku dodatnim osi OX) i w modach nieakustycznych:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \rho'_4}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \rho'_3}{\partial t} + \left(\frac{1}{\tau_c} - \frac{RQ_0Q_T}{C_{V,0}T_0} \right) \rho'_3 &= 0, \end{aligned} \quad (4.30)$$

lub uzyskać te równania metodą rzutowania.

Nieliniowe poprawki do modu akustycznego

Analogicznie jak w podrozdziale 4.3, uzupełniono pierwszy mod akustyczny o poprawki słabo nieliniowe:

$$v'_1 = \frac{u_0}{\rho_0} \rho'_1 + \frac{u_0(\gamma_0 - 3)}{4\rho_0^2} \rho_1'^2, \quad T'_1 = \frac{mu_0^2(\gamma_0 - 1)}{\gamma_0\rho_0} \rho'_1 + \frac{(\gamma_0 - 1)(\gamma_0 - 2)T_0}{2\rho_0^2} \rho_1'^2 \quad (4.31)$$

i otrzymano słabo nieliniowe równanie opisujące zaburzenie gęstości w modzie akustycznym:

$$\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} + \frac{(\gamma_0 + 1)u_0}{2\rho_0} \rho'_1 \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} = 0. \quad (4.32)$$

Zmiany w temperaturze wywołane niskoczęstotliwościowym dźwiękiem

Aby wyprowadzić równanie dla zmian temperatury modu entropowego w przypadku niskoczęstotliwościowym, należy podzielać na układ równań (4.3) odpowiednim wierszem projektora P_4 , wyznaczonego na podstawie wektorów własnych. Czwarty wiersz projektora P_4 dla przypadku niskoczęstotliwościowego ma następującą postać:

$$0, \quad -\frac{\rho_0}{T_0\gamma_0} - \frac{\rho_0 Q_0 Q_T R \tau_c}{C_{P0} T_0^2}, \quad -\frac{\rho_0 H m R}{T_0 C_{P0}}, \quad \frac{R}{C_{P0}}.$$

Postępując analogicznie jak dla przypadku wysokoczęstotliwościowego, otrzymano następujące, przybliżone równanie opisujące ogrzewanie (bądź chłodzenie, w zależności od znaku prawej części równania):

$$\frac{\partial T'_4}{\partial t} = -\frac{R\tau_c Q_0 u_0 [(\gamma_0 + 3)Q_\rho + (\gamma_0 - 1)(\gamma_0 - 3)Q_T]}{2\rho_0^2 C_{P,0}} \rho'_1 \frac{\partial \rho'_1}{\partial x}. \quad (4.33)$$

Na podstawie równania (4.33) od razu można wyciągnąć wniosek, że generacja modu entropowego przez niskoczęstotliwościowy dźwięk (zarówno okresowy, jak i nieokresowy) jest nieefektywna, ponieważ źródło akustyczne (prawa część równania (4.33)) jest rzędu $M \cdot \max(|Q_\rho|, |Q_T|) \cdot k u_0 \tau_c$. Ponadto, dla okresowych fal, proporcjonalnych do $\sin(\omega(t - x/u_0))$, człon $\rho'_1 \frac{\partial \rho'_1}{\partial x}$ wyniesie zero, po uśrednieniu po okresie dźwięku $2\pi/\omega$. W gazach z pobudzonymi wewnętrznymi stopniami swobody cząsteczek równanie ogrzewania akustycznego przyjmuje następującą postać [38]:

$$\frac{\partial \rho'_4}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{T_0} \frac{\partial T'_4}{\partial t} = \frac{(\gamma_\infty - 1)^2 T_0 \phi_1}{\rho_0 c_0^2 \tau} p'_1 \int p'_1 dx, \quad (4.34)$$

gdzie:

$$\phi_1 = \left(\frac{C_v}{\tau} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_{eq}}{\tau^2} \frac{d\tau}{dT} \right)_0$$

Co do modu trzeciego, wykorzystując odpowiedni wiersz projektora P_3 :

$$0, \quad -\frac{R\tau_c Q_0 Q_T}{C_{V,0} T_0}, \quad -\frac{RHm}{C_{V,0}}, \quad -\frac{R\tau_c Q_0 Q_\rho}{C_{V,0} \rho_0},$$

otrzymano następujące równanie:

$$\frac{\partial T'_3}{\partial t} + \left(\frac{1}{\tau_c} - \frac{RQ_0 Q_T}{C_{V,0} T_0} \right) T'_3 = \frac{Q_T Q_0 (\gamma_0 - 1)^2 (\gamma_0 - 2)}{2\rho_0^2} \rho'_1{}^2. \quad (4.35)$$

Źródło akustyczne w prawej części równania (4.35) jest rzędu $M \cdot Q_T$. Na przykładzie równania (4.35) można wyciągnąć wniosek, że również niskoczęstotliwościowy dźwięk może wywołać efektywnie ogrzewanie.

4.5 Przykłady

4.5.1 Zmiany temperatury związane z modem entropowym wywołanym przez okresowy, wysokoczęstotliwościowy dźwięk

Równanie (4.20) można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial T'_4}{\partial(\omega t)} = 2(\gamma_\infty - 1) B_\infty^* \frac{T_0}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} \int \rho'_1 dx, \quad (4.36)$$

gdzie indeksem " * " oznaczono wielkości bezwymiarowe: $B_\infty^* = \frac{B_\infty u_\infty}{\omega}$, a przedziały całkowania muszą być wyznaczone z konkretnych warunków zagadnienia. Występujące w równaniu (4.36) zaburzenie gęstości ρ_1' spełnia równanie (4.18). Przy zastosowaniu zmiennych $\tau = t - x/u_\infty$ i $x_1 = \mu x$ (gdzie μ jest małym parametrem), równanie (4.18) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial \rho_1'}{\partial x_1} - \frac{\gamma_\infty + 1}{2\rho_0 u_\infty} \rho_1' \frac{\partial \rho_1'}{\partial \tau} - B_\infty \rho_1' = 0, \quad (4.37)$$

które z kolei, przy zastosowaniu podstawienia $Z = \rho_1' \exp(-B_\infty x_1)$, można doprowadzić do następującej postaci:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} - \frac{\gamma_\infty + 1}{2\rho_0 u_\infty} e^{B_\infty x} Z \frac{\partial Z}{\partial \tau} = 0. \quad (4.38)$$

Stosując kolejne podstawienie: $X = e^{B_\infty x} - 1$ otrzymujemy równanie:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} - \frac{\gamma_\infty + 1}{2\rho_0 u_\infty B_\infty} Z \frac{\partial Z}{\partial \tau} = 0, \quad (4.39)$$

które posiada rozwiązanie Bessela-Fubinięgo dla przypadku przed kształtowaniem się fali uderzeniowej [49]:

$$\frac{Z}{\rho_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n \left(n \frac{(\gamma_\infty + 1)\omega M}{2u_\infty B_\infty} X \right)}{n \frac{(\gamma_\infty + 1)\omega M}{2u_\infty B_\infty} X} \sin(n\omega\tau), \quad (4.40)$$

gdzie M oznacza akustyczną liczbę Macha. Na podstawie (4.40), po przejściu do podstawowych zmiennych x , τ , otrzymano rozwiązanie równania (4.18) w zmiennych bezwymiarowych przy założeniu okresowego dźwięku na nadajniku $\rho_1'(x=0, t) = M\rho_0 \sin(\omega t)$, w postaci następującej sumy:

$$\rho_1'(x, t) = M\rho_0 \exp(B_\infty^* x^*) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(nK(\exp(B_\infty^* x^*) - 1)) \sin(n\theta_\infty)}{nK(\exp(B_\infty^* x^*) - 1)}, \quad (4.41)$$

gdzie:

$$K = \frac{(\gamma_\infty + 1)M}{2B_\infty^*}, \quad \theta_\infty = \omega(t - x/u_\infty), \quad x^* = \omega x/u_\infty \quad (4.42)$$

Przy warunku $Kx_b = 1$ następuje kształtowanie się czoła fali, dlatego równanie (4.41) jest prawidłowe dla pewnej odległości od nadajnika, mniejszej od charakterystycznej odległości x_b :

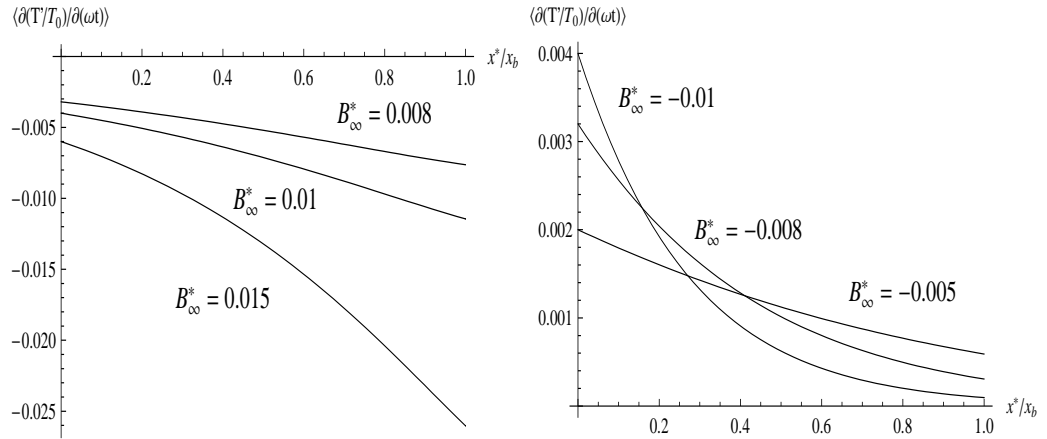
$$x_b = \frac{1}{B_\infty^*} \ln(1 + 1/K), \quad (4.43)$$

przy której następuje "złamanie" fali i powstanie nieciągłości. W związku z tym, że B_∞ jest małym parametrem w porównaniu z akustyczną liczbą falową k , rozsądnie jest zapisać całkę z równania (4.36) w następujący, przybliżony sposób:

$$\int f(B_\infty^* x^*) F(\theta_\infty) dx^* \approx f(B_\infty^* x^*) \int F(\theta_\infty) dx^*. \quad (4.44)$$

Ponadto źródło akustyczne z równania (4.36) uśredniono po okresie dźwięku. Na rysunku (4.1) przedstawiono zmiany temperatury $\langle \partial(T'/T_0)/\partial(\omega t) \rangle$ przy różnych wartościach B_∞^* . Nawiasami typu: " $\langle \rangle$ " oznaczono uśrednianie po okresie dźwięku, $\langle f \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+2\pi/\omega} f dt$. Przy obliczaniu zmian w temperaturze, zaprezentowanych na Rys.(4.14), użyto następujących współczynników: $M = 0.01$, $\gamma_\infty = 1.4$.

Na podstawie rysunku(4.1) wywnioskowano, że temperatura ośrodka rośnie



Rysunek 4.1: Bezwymiarowe zmiany temperatury dla dodatnich i ujemnych wartości B_∞^* .

z czasem, gdy B_∞^* jest ujemną wielkością, a w przeciwnym wypadku, maleje. Tempo wzrostu (lub spadku) temperatury zależy od wartości B_∞^* i od odległości od nadajnika. W przypadku ujemnych B_∞^* , energia akustyczna fali maleje i nieliniowe tłumienie dźwięku powoduje powstanie modu termicznego, podobnie jak ma to miejsce w standardowych, termo-lepkich płynach. Jednakże, $B_\infty^* > 0$ umożliwia chłodzenie akustyczne. Po raz pierwszy o możliwości występowania chłodzenia akustycznego, zamiast ogrzewania, wspomniała Molevich [26], w odniesieniu do innego przepływu w gazie z pobudzonymi stopniami swobody cząsteczek.

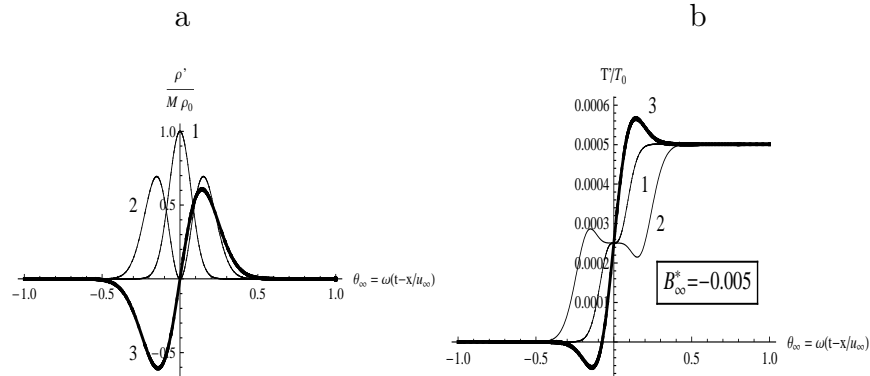
4.5.2 Zmiany temperatury związane z modem entropowym wywołanym przez impulsy o równej energii

Za przybliżone rozwiązanie równania (4.18) (kiedy pominięte zostaną dwa jego ostatnie człony, odpowiedzialne za nieliniowość i tłumienie, bądź wzmocnienie dźwięku) można przyjąć falę akustyczną, poruszającą się ze stałą prędkością u_∞ bez zmiany kształtu. Rozważono zatem następujące trzy impulsy akustyczne:

$$\begin{aligned} \rho'_1 &= M\rho_0 \exp(-\theta_\infty^2/0.1^2), & \rho'_2 &= 1.8857M\rho_0\theta_\infty^2/0.15^2 \exp(-\theta_\infty^2/0.15^2), \\ \rho'_3 &= 1.414M\rho_0\theta_\infty/0.2 \exp(-\theta_\infty^2/0.2^2). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Energia kinetyczna wszystkich trzech impulsów, proporcjonalna do $\int_{-\infty}^{\infty} (\rho'(\theta_\infty))^2 d\theta_\infty$, jest jednakowa. Na rysunku(4.2a) przedstawiono początkowe kształty tych fal. Na Rys.(4.2b) pokazany jest wzrost temperatury dla $B_\infty^* = -0.005$, wyliczony na podstawie równania (4.36).

Na podstawie rysunków (4.2) można wyciągnąć wniosek, że efektywność



Rysunek 4.2: a) Początkowe kształty fal zgodne z równaniem (4.45) i b) bezwymiarowe zmiany temperatury otoczenia, wywołany przez trzy impulsy z równania (4.45), kiedy $B_\infty^* = -0.005$.

ogrzewania (bądź chłodzenia) akustycznego, niezależnie od znaku B_∞ , nie zależy od kształtu fali akustycznej związanej z modem entropowym, jeśli energia fal jest taka sama. Wynika to z kształtu źródła akustycznego i może być łatwo udowodnione. Aby wyznaczyć temperaturę scałkowano po czasie równanie (4.36):

$$T_4' = 2(\gamma_\infty - 1) \frac{B_\infty}{u_\infty} \frac{T_0}{\rho_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \rho'_1 dx, \quad (4.46)$$

następnie korzystając z zależności: $\int dt \sim -(1/u_\infty) \int dx$ zapisano równanie (4.46) w następującej postaci:

$$\begin{aligned} T'_4 &= 2(\gamma_\infty - 1)B_\infty \frac{T_0}{\rho_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} -dx \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \rho'_1 dx = \\ &= -2(\gamma_\infty - 1)B_\infty \frac{T_0}{\rho_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\rho'_1 \int_{-\infty}^{\infty} \rho'_1 dx. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Po scałkowaniu przez części równania (4.47) otrzymano:

$$T'_4 = -2(\gamma_\infty - 1)B_\infty \frac{T_0}{\rho_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho'_1 dx \cdot \rho_1 \Big|_{-\infty}^{\infty} + 2(\gamma_\infty - 1)B_\infty \frac{T_0}{\rho_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1'^2 dx. \quad (4.48)$$

Ponieważ pierwszy człon z prawej strony równania (4.48) zawsze zeruje się dla fal w kształcie impulsów, natomiast drugi człon odpowiada energii fali akustycznej, otrzymano następującą zależność dowodzącą, że temperatura zawsze jest proporcjonalna do energii fali akustycznej:

$$T'_4 = 2(\gamma_\infty - 1)B_\infty \frac{T_0}{\rho_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_1'^2 dx \implies T'_4 \sim E_{imp}. \quad (4.49)$$

Jednakże, jak wykazano w rozdziale 3, w ośrodkach, w których zachodzą inne procesy relaksacyjne, np. lepko-elastycznych, biologicznych ośrodkach, efektywność ogrzewania może zależeć od kształtu fali [40].

4.5.3 Zmiany temperatury związane z modem chemicznym

Obydwa równania (4.22), (4.35), opisujące efekty niskoczęstotliwościowego i wysokoczęstotliwościowego dźwięku, mają następującą formę:

$$\frac{\partial T'_3}{\partial t} + \beta T'_3 = \alpha T_0 \frac{\rho_1'^2}{\rho_0^2}, \quad (4.50)$$

gdzie w przypadku niskoczęstotliwościowym:

$$\beta = \beta_0 = \frac{1}{\tau_c} - \frac{RQ_0Q_T}{C_{V,0}T_0} \approx \frac{1}{\tau_c} - \frac{Q_0Q_T(\gamma_0 - 1)}{T_0}, \quad \alpha = \alpha_0 = \frac{Q_TQ_0(\gamma_0 - 1)^2(\gamma_0 - 2)}{2T_0}, \quad (4.51)$$

a dla przypadku wysokoczęstotliwościowego:

$$\begin{aligned} \beta &= \beta_\infty = \frac{1}{\tau_c} + \frac{Q_0(\gamma_\infty - 1)(Q_\rho - Q_T)}{\gamma_\infty T_0}, \\ \alpha &= \alpha_\infty = -\frac{Q_0(\gamma_\infty - 1)[(\gamma_\infty - 3)Q_\rho - (\gamma_\infty - 1)^2Q_T]}{4\gamma_\infty T_0}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Poniżej przedstawiono równanie (4.50) po scałkowaniu:

$$T'_3 = \frac{\alpha^* T_0}{\rho_0^2} \exp(-\beta^* t^*) \int_{-\infty}^{t^*} \exp(\beta^* t^*) \rho_1'^2(t^*, x^*) dt^*, \quad (4.53)$$

gdzie: $\alpha^* = \alpha/\omega$, $\beta^* = \beta/\omega$, $t^* = \omega t$ są bezwymiarowymi wielkościami, $x^* = x\omega/u_\infty$ lub $x^* = x\omega/u_0$. W przypadku wysokoczęstotliwościowym ($\beta^* \ll 1$), równanie (4.53) przyjmuje następującą postać:

$$T'_3 \approx \frac{\alpha^* T_0}{\rho_0^2} \int_{-\infty}^{t^*} \rho_1'^2(t^*, x^*) dt^*, \quad (4.54)$$

a w przypadku niskoczęstotliwościowym ($\beta^* \gg 1$):

$$T'_3 \approx \frac{\alpha^* T_0}{\beta^* \rho_0^2} \rho_1'^2(t^*, x^*). \quad (4.55)$$

Głównym wnioskiem, płynącym z powyższych równań jest to, że zmiany temperatury powodowane niskoczęstotliwościowym dźwiękiem są znacznie mniej efektywne niż te powodowane dźwiękiem wysokoczęstotliwościowym.

4.6 Wnioski

Powstawanie nieliniowych modów (takich jak entropowy) w gazie doskonałym ze standardową absorpcją zostało przestudiowane między innymi w [24, 49]. Natomiast przebadanie nieliniowych efektów dźwięku w gazie, w którym zachodzi reakcja chemiczna jest oryginalnym efektem niniejszej pracy. Badanie owych efektów w gazach, w których zachodzą nierównowagowe procesy termodynamiczne, jest istotne ze względu na ich zastosowanie w medycynie i technice.

Omawiana w tym rozdziale reakcja chemiczna zachodząca w gazie, powoduje nie tylko liniowe wzmocnienie ($B_\infty > 0$) lub tłumienie się dźwięku ($B_\infty < 0$), ale również wpływa na charakter nieliniowej interakcji pomiędzy dźwiękiem i nie-akustycznymi modami. Co do modu termicznego, to zmiany temperatury z nim związane, zawsze rośnie w płynach ze standardowym tłumieniem. Natomiast nieodwracalność reakcji chemicznej prowadzi nie tylko do wzmocnienia dźwięku, czego nie obserwuje się w płynach newtonowskich, lecz również powoduje chłodzenie ośrodka, w którym rozchodzi się dźwięk. Zjawisko chłodzenia obserwujemy również w gazach, w których zachodzą inne nierównowagowe procesy termodynamiczne, na przykład pobudzenie wewnętrznych stopni swobody cząsteczek [38, 44, 39]. Efektywność ogrzewania bądź

chłodzenia akustycznego powodowanego niskoczęstotliwościowym dźwiękiem jest znikoma. Również liniowe tłumienie się niskoczęstotliwościowego dźwięku jest słabe. Obliczenia wykonane dla pewnych kształtów fal o tej samej energii, wykazały niezależność akustycznego ogrzewania (bądź chłodzenia) od kształtu fali. Co do modu chemicznego, to ten nie-akustyczny mod istnieje z powodu obecności reakcji chemicznej. Charakterystyczny czas trwania reakcji chemicznej zależy od Q_ρ i Q_T , i nieco różni się od τ_c , patrz równanie (4.51) dla przypadku niskoczęstotliwościowego i równanie (4.52) dla przypadku wysokoczęstotliwościowego. W niniejszej pracy nie wzięto pod uwagę ani standardowego tłumienia, ani przewodności cieplnej gazu. Równanie opisujące zmiany temperatury związane z modem chemicznym, wygląda podobnie dla obydwu rozważanych tu przypadków, niskoczęstotliwościowego i wysokoczęstotliwościowego dźwięku. Znak zmiany temperatury zależy od Q_ρ i Q_T w przypadku wysokoczęstotliwościowym, a tylko od Q_T dla przypadku niskoczęstotliwościowego dźwięku. Możliwość sterowania temperaturą otoczenia przez dźwięk niskoczęstotliwościowy jest znacznie słabsza, niż w przypadku dźwięku wysokoczęstotliwościowy.

Rozdział 5

Ogrzewanie (chłodzenie) akustyczne w rezonatorze wypełnionym gazem chemicznie reaktywnym

Własności środowiska, jakim jest gaz, w którym zachodzi reakcja chemiczna typu $A \rightarrow B$, a także występujące w nim ogrzewanie (chłodzenie) akustyczne omówiono już w rozdziale 4. W niniejszym rozdziale zagadnienie z rozdziału 4 zostanie poszerzone o uwzględnienie warunków brzegowych. Przedmiotem rozważań zostaną fale stojące i ogrzewanie (chłodzenie) akustyczne w jednowymiarowym rezonatorze. Przebadanie akustycznych oscylacji w takim rezonatorze ma duże znaczenie, ponieważ w rzeczywistości fale akustyczne zawsze propagują w ograniczonych przestrzeniach. W poniższych wyliczeniach rozważono tylko przypadek wysokoczęstotliwościowy z rozdziału 4, jako że efektywność ogrzewania (chłodzenia) przy tym założeniu przewyższała znacznie efektywność ogrzewania (chłodzenia) w przypadku niskoczęstotliwościowym.

5.1 Podstawowe równania. Definicje modów w przepływie liniowym

Równania zachowania pędu, energii i ciągłości dla gazu, w którym zachodzi reakcja chemiczna typu $A \rightarrow B$ zostały już przedstawione w rozdziale 4. Ponieważ w niniejszym rozdziale rozważono tylko przypadek wysokoczęstotliwościowym, wszystkie wielkości odnoszące się do tego przypadku i oznaczone indeksem dolnym " ∞ " w rozdziale 4, będą tutaj przedstawione bez żadnego

indeksu. Na przykład γ w niniejszym rozdziale to γ_∞ w układzie równań (4.3), itd.

Przypomnijmy, że wzmocnienie lub tłumienie dźwięku powinno być małe w porównaniu z liczbą falową, $|B| \ll |k|$, to z kolei determinuje fakt, że $|Q_\rho|, |Q_T| \ll 1$. Wyliczone na podstawie relacji dyspersji wektory własne i projektor, przybierają tę samą postać, co w rozdziale 4. Równania opisujące zmiany gęstości w fali akustycznej propagującej w kierunku dodatnim i ujemnym osi OX , mod entropowy i mod chemiczny, przyjmują następującą, znaną już postać:

$$\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + u \frac{\partial \rho'_1}{\partial x} - uB\rho'_1 = 0, \quad \frac{\partial \rho'_2}{\partial t} - u \frac{\partial \rho'_2}{\partial x} - uB\rho'_2 = 0. \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \rho'_4}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \rho'_3}{\partial t} + \left(\frac{Q_0(\gamma - 1)(Q_\rho - Q_T)}{T_0\gamma} + \frac{1}{\tau_c} \right) \rho'_3 = 0. \quad (5.2)$$

5.2 Równania dynamiczne w słabo nieliniowym przepływie

Do tej pory używano do obliczeń metody projektorów. W niniejszym rozdziale, aby opisać pole dźwiękowe w rezonatorze, zostanie ona uzupełniona o metodę "różnych skali" [17, 49]. Metoda ta wykorzystuje ideę słabej zmiany z czasem kształtu modów akustycznych, powodowanej nieliniowością i tłumieniem. Zatem pole akustyczne zostanie przedstawione w nowych zmiennych: $\eta = x - ut$, $\xi = x + ut$, (odpowiadającym falam propagującym w kierunku dodatnim i ujemnym osi OX) i w zmiennej μt , gdzie $\mu = \max(B, M)$ (M - liczba Macha). W linowym, nielepkim przepływie zaburzenia akustyczne są wyłącznie funkcjami zmiennych opóźnionych $\rho'_1(\eta)$, $\rho'_2(\xi)$. Uwzględniając nieliniowe poprawki do dwóch modów akustycznych, a następnie działając odpowiednimi projektorami na układ równań (4.3) otrzymano równania dla dwóch modów akustycznych (patrz rozdział 4). Ponadto założono, że mody akustyczne są dominujące w porównaniu z modami nie-akustycznymi i ich amplitudy są jednakowe. Dlatego w nieliniowej części równań zostawiamy człony związane z modami akustycznymi, także te mieszane. Równania dynamiczne dla oby-

dwu akustycznych gałęzi przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} - uB\rho'_1 &= -\frac{u(\gamma+1)}{2\rho_0}\rho'_1\frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} - \frac{u(\gamma-3)}{2\rho_0}\rho'_2\frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} \\
&+ \frac{u(\gamma^2-3\gamma+4)}{2\gamma\rho_0}\left(\rho'_1\frac{\partial \rho'_2}{\partial \xi} + \rho'_2\frac{\partial \rho'_1}{\partial \xi}\right), \\
\frac{\partial \rho'_2}{\partial t} - uB\rho'_2 &= \frac{u(\gamma+1)}{2\rho_0}\rho'_2\frac{\partial \rho'_2}{\partial \xi} + \frac{u(\gamma-3)}{2\rho_0}\rho'_1\frac{\partial \rho'_2}{\partial \xi} \\
&- \frac{u(\gamma^2-3\gamma+4)}{2\gamma\rho_0}\left(\rho'_2\frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} + \rho'_1\frac{\partial \rho'_2}{\partial \eta}\right). \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Niech ρ'_1 i ρ'_2 będą funkcjami okresowymi zmiennych η i ξ . Ponadto niech ich uśrednienie po okresie daje zero: $\overline{\rho'_1(\eta)} = 0$, $\overline{\rho'_2(\xi)} = 0$. Wówczas łatwo wykazać, że uśrednienie pierwszego równania po okresie ξ , a drugiego po okresie η , prowadzi do równań opisujących nieoddziaływające ze sobą akustyczne mody rozchodzące się w różnych kierunkach,

$$\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} - uB\rho'_1 + \frac{u(\gamma+1)}{2\rho_0}\rho'_1\frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \rho'_2}{\partial t} - uB\rho'_2 - \frac{u(\gamma+1)}{2\rho_0}\rho'_2\frac{\partial \rho'_2}{\partial \xi} = 0. \tag{5.4}$$

5.3 Pole akustyczne i związane z nim zjawiska nieliniowe

W nieliniowym rezonatorze akustycznym, zaburzenia gęstości i prędkości są sumą części właściwych dla dwóch akustycznych fal:

$$\rho' = \rho'_1 + \rho'_2, \tag{5.5}$$

$$v' = v'_1 + v'_2 \approx \frac{u}{\rho_0}(\rho'_1 - \rho'_2), \tag{5.6}$$

gdzie ρ'_1 , ρ'_2 są rozwiązaniami równań (5.4). Założono zerowe początkowe zaburzenie gęstości $\rho'_1(x, t=0) = 0$, a początkowe zaburzenie prędkości wynosi: $v'(x, t=0) = 2Mu \sin(\omega x/u)$. Można przedstawić równania w zmiennych bezwymiarowych:

$$b = Bu/\omega, X = \omega x/u, \tau = \omega t, \eta = X - \tau, \xi = X + \tau, \theta = \exp(b\tau) - 1, \tag{5.7}$$

$$R_1 = \frac{\rho'_1}{M\rho_0} \exp(-b\tau), R_2 = \frac{\rho'_2}{M\rho_0} \exp(-b\tau), K = \frac{(\gamma+1)M}{2b}.$$

W nowych zmiennych (5.7), równania (5.4) przyjmują następującą formę:

$$\frac{\partial R_1}{\partial \theta} + KR_1\frac{\partial R_1}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial R_2}{\partial \theta} - KR_2\frac{\partial R_2}{\partial \xi} = 0. \tag{5.8}$$

Oczywistym jest fakt, że skoro $R_1(\theta, \eta)$ jest rozwiązaniem pierwszego z wyżej wymienionych równań, to $R_2 = -R_1(\theta, \xi)$ jest również rozwiązaniem drugiego z równań w układzie (5.8). Prędkość w płaskim rezonatorze spełnia następujące warunki brzegowe: $v'|_{X=0} = v'|_{X=L} \equiv 0$. Zatem bezwymiarowa długość rezonatora L jest π -krotna.

Działając czwartym wierszem projektora P_4 na układ równań (4.3) i zostawiając z prawej strony tylko kwadratowe człony akustyczne otrzymano równanie opisujące ogrzewanie akustyczne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'_4}{\partial t} = & \left(\frac{u(\gamma-1)(\gamma-2)}{\gamma\rho_0} - \frac{\tau_c Q_0(Q_\rho - Q_T)(\gamma-1)^2(\gamma-2)}{mu\gamma\rho_0} \right) \times \\ & \left(\rho'_1 \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} - \rho'_1 \frac{\partial \rho'_2}{\partial \xi} + \rho'_2 \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} - \rho'_2 \frac{\partial \rho'_2}{\partial \xi} \right) - \\ & - \frac{2Bu(\gamma-1)}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} \int \rho'_1 d\eta - \frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} \int \rho'_2 d\xi - \frac{\partial \rho'_2}{\partial \xi} \int \rho'_1 d\eta + \frac{\partial \rho'_2}{\partial \xi} \int \rho'_2 d\xi \right) - \\ & - \frac{uB(\gamma-1)(\gamma-2)}{\rho_0\gamma} \left(\rho_1'^2 + 2\rho_1'\rho_2' + \rho_2'^2 \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Po uśrednieniu po okresie η i ξ , równanie (5.9) upraszcza się do:

$$\frac{\partial \rho'_4}{\partial t} = -\frac{2Bu(\gamma-1)}{\rho_0} \left(\overline{\frac{\partial \rho'_1}{\partial \eta} \int \rho'_1 d\eta} + \overline{\frac{\partial \rho'_2}{\partial \xi} \int \rho'_2 d\xi} \right) - \frac{uB(\gamma-1)(\gamma-2)}{\rho_0\gamma} \left(\overline{\rho_1'^2} + \overline{\rho_2'^2} \right). \quad (5.10)$$

W zmiennych bezwymiarowych (5.7) równanie (5.10) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \rho'_4}{\partial \tau} = \frac{\partial T'_4/T_0}{\partial \tau} = & \quad (5.11) \\ bM^2(\gamma-1) \exp(2b\tau) \left(2 \left(\overline{\frac{\partial R_1}{\partial \eta} \int R_1 d\eta} + \overline{\frac{\partial R_2}{\partial \xi} \int R_2 d\xi} \right) + \frac{\gamma-2}{\gamma} \left(\overline{R_1^2} + \overline{R_2^2} \right) \right), \end{aligned}$$

co dla dźwięku okresowego prowadzi do:

$$\frac{\partial T'_4/T_0}{\partial \tau} = -bM^2 \exp(2b\tau) \left(\frac{(\gamma-1)(\gamma+2)}{\gamma} \left(\overline{R_1^2} + \overline{R_2^2} \right) \right). \quad (5.12)$$

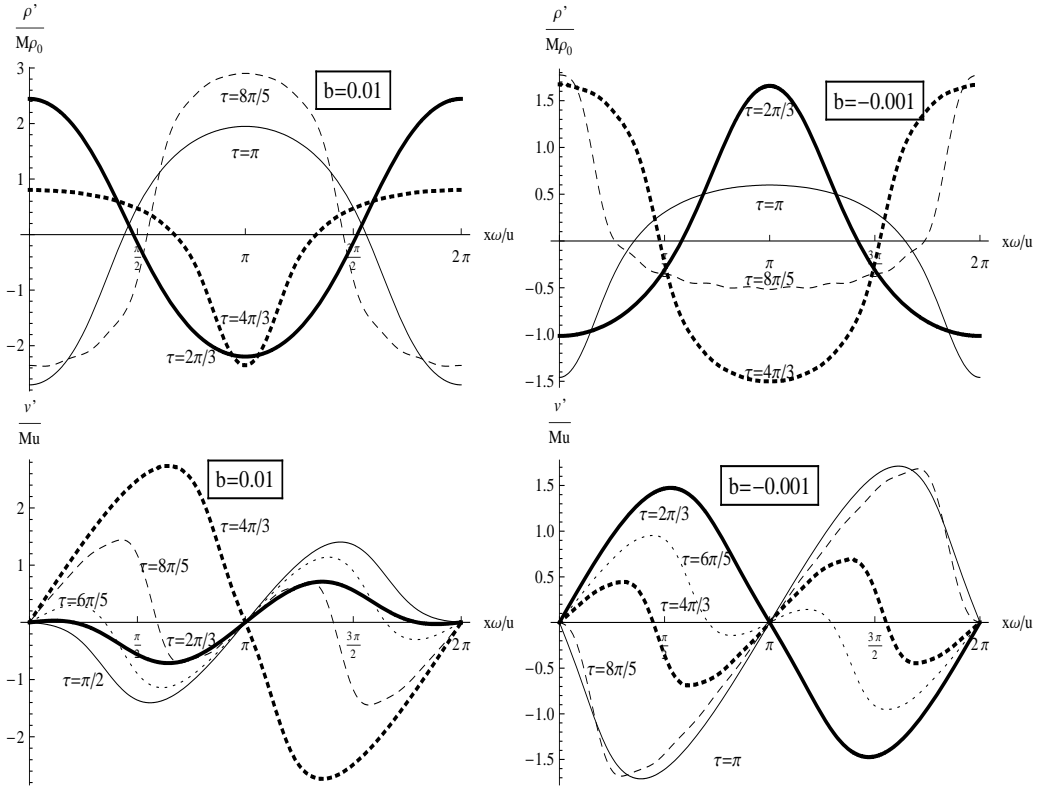
5.3.1 Fale stojące i związane z nimi ogrzewanie przed formowaniem się nieciągłości fali

Aby wyznaczyć rozwiązanie równania (5.4) dla czasów mniejszych niż charakterystyczny czas formowania się nieciągłości \tilde{T} : $\tilde{T} = \frac{1}{b} \ln(1+1/K)$, analogicznie jak w rozdziale 4 sprowadzono równanie (5.4) do równania, które posiada rozwiązanie Bessela-Fubiniego, równanie (5.8). Wówczas okresowe rozwiązania

równań (5.8) przyjmują postać:

$$R_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(nK\theta) \sin(n\eta)}{nK\theta}, R_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_n(nK\theta) \sin(n\xi)}{nK\theta}, \quad (5.13)$$

gdzie J_n jest funkcją Bessela n -tego rzędu. Pola zaburzeń prędkości i gęstości w rezonatorze dla różnych czasów mniejszych od \tilde{T} są zaprezentowane na rysunku (5.1). Gęstość całkowitej energii sumy fal Riemann'a (5.8) jest stała, a jej



Rysunek 5.1: Prędkość i zmiany gęstości w fali stojącej powstającej w rezonatorze wypełnionym gazem, w którym zachodzi reakcja chemiczna, dla różnych czasów mniejszych od charakterystycznego czasu powstania nieciągłości.

bezwymiarowa wartość równa się $0.5L^{-1} \int_0^L ((R_1 + R_2)^2 + (V_1 + V_2)^2) dX = 0.5L^{-1} \int_0^L ((R_1 + R_2)^2 + (R_1 - R_2)^2) dX = L^{-1} \int_0^L (R_1^2 + R_2^2) dX = 1$. Zatem akustyczna energia w rezonatorze E zmienia się z czasem jak $\exp(2b\tau)$. Równanie (5.12) może być zmienione na:

$$\frac{\partial T_4'/T_0}{\partial(b\tau)} = - \frac{M^2(\gamma - 1)(\gamma + 2)}{\gamma} \exp(2b\tau). \quad (5.14)$$

Scałkowanie go z następującym warunkiem początkowym $T_4'(\tau = 0) = 0$, daje:

$$M^{-2} \frac{T_4'}{T_0} = \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 2)}{2\gamma} (\exp(2b\tau) - 1). \quad (5.15)$$

Ważną wielkością charakteryzującą rezonator, która opisuje straty energii akustycznej, jest dobroć:

$$q = \frac{E}{|\partial E / \partial \tau|}. \quad (5.16)$$

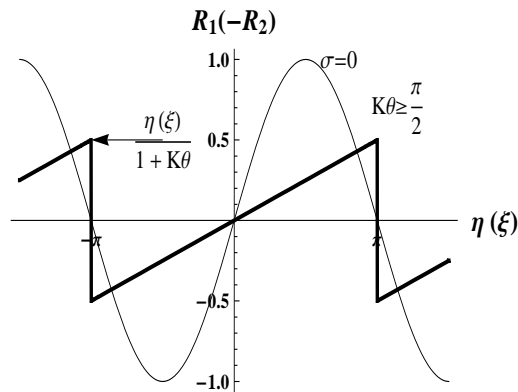
Dobroć przed formowaniem się nieciągłości przyjmuje prostą formę $q = |2b|^{-1}$.

5.3.2 Fale w kształcie "zębów piły" i związane z nimi ogrzewanie

Dla czasów większych niż charakterystyczny czas, przy którym formuje się fala o kształcie "zębów piły", $K\theta > \pi/2$, R_1 i R_2 przybierają kształty "zębów piły"

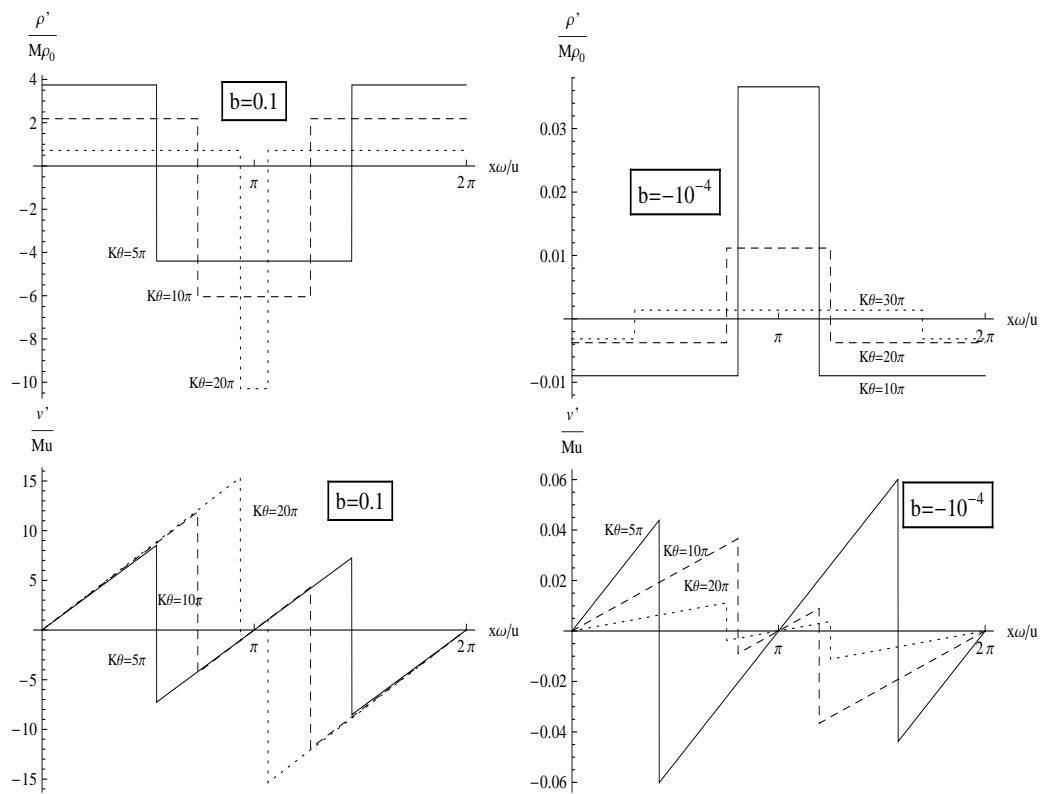
$$R_1 = \frac{\eta}{1 + K\theta}, \text{ jeśli } -\pi \leq \eta < \pi, \quad R_2 = -\frac{\xi}{1 + K\theta}, \text{ jeśli } -\pi \leq \xi < \pi, \quad (5.17)$$

i są okresowe odpowiednio w η lub ξ . Fale w kształcie "zębów piły" R_1 i R_2 są pokazane na rysunku 5.2. Pola zaburzeń prędkości i gęstości w rezonatorze



Rysunek 5.2: Fale w kształcie "zębów piły" wyznaczone na podstawie równań (5.17)

dla różnych czasów większych od czasu wystąpienia nieciągłości są zaprezentowane na rysunku 5.3. Dla dodatnich wartości współczynnika b , wzrasta



Rysunek 5.3: Prędkość i zmiany gęstości w fali stojącej powstającej w rezonatorze wypełnionym gazem, w którym zachodzi reakcja chemiczna, dla różnych czasów większych od charakterystycznego czasu powstania nieciągłości i dla różnych wartości współczynnika b .

wartość piku fali, a zmniejsza się dla $b < 0$. Ogrzewanie akustyczne opisane jest następującym równaniem:

$$\frac{\partial T_4'/T_0}{\partial(b\tau)} = -\frac{2M^2\pi^2(\gamma-1)(\gamma+2)}{3\gamma(1+K(\exp(b\tau)-1))^2} \exp(2b\tau). \quad (5.18)$$

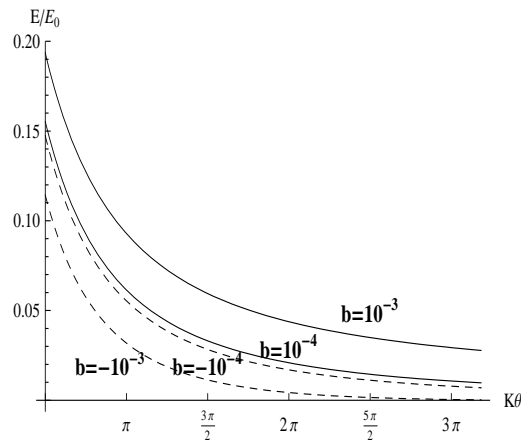
Dobroć Q po formowaniu się fali w kształcie "zębów piły" jest zależna od czasu i równa się $\left| \frac{1}{2b} \left(1 + \frac{K \exp(b\tau)}{1-K} \right) \right|$. Energia akustyczna w rezonatorze dla czasów większych od charakterystycznego czasu formowania się nieciągłości, przyjmuje następującą formę:

$$\frac{E}{E_0} = \frac{e^{2b\tau}}{(1+K(e^{b\tau}-1))^2}, \quad (5.19)$$

gdzie

$$E_0 = E(0) = \frac{2}{3}M^2.$$

Rysunek 5.4 przedstawia bezwymiarową energię dla różnych wartości współczynników b .



Rysunek 5.4: Ewolucja bezwymiarowej energii dla różnych współczynników b .

5.4 Podsumowanie

W akustyce teoretycznej i doświadczalnej dokładnie zbadano pole akustyczne w rezonatorach wypełnionych płynem newtonowskim, na przykład w [3, 27]. Pokazano, że nieliniowość dla intensywnych zaburzeń w rezonatorach, może

prowadzić do powstania okresowych fal uderzeniowych [6], Ockenendon *i in.* [33]). Kaner *i in.* [17] jako pierwsi przedstawili analityczną metodę "różnych skali" do opisu pola akustycznego w zamkniętych przestrzeniach. Jednakże większość wcześniejszych analitycznych rozważań wymagała okresowości dźwięku [17, 32]. Również fale stojące w nierównowagowym ośrodku, takim jak gaz z reakcją chemiczną, nie były dotąd przedmiotem rozważań.

W niniejszym rozdziale zbadano płaski rezonator wypełniony gazem, w którym zachodzi reakcja chemiczna. Metodę projektorów, używaną w poprzednich rozdziałach uzupełniono tu o metodę "różnych skali". Aby wykluczyć interakcję pomiędzy modami akustycznymi założono okresowość zaburzeń akustycznych, jak również, że ich wartość wynosi zero po uśrednieniu. Jednakże wyznaczone za pomocą projektorów główne równania (5.3) nie wymagają w ogólności zastosowania dźwięku okresowego. W ośrodku opisanym w niniejszym rozdziale krzywe prędkości w falach stojących mają węzły rozmieszczone w bezwymiarowej odległości π od siebie nawzajem. Zaobserwowano również, że krzywe prędkości posiadają dodatkowe węzły, które przemieszczają się pomiędzy tymi stałymi (patrz rysunek 5.1). Kształt fal prędkości po utworzeniu się nieciągłości wygląda podobnie do krzywych obserwowanych doświadczalnie w płynie newtonowskim [3]. W niniejszej pracy wyprowadzono również równania (5.14) and (5.18), które opisują ogrzewanie (bądź chłodzenie) akustyczne przed i po utworzeniu fali w kształcie "zębów piły". W przypadku nieodwracalności reakcji chemicznej $A \rightarrow B$ w gazie, następuje wzmocnienie dźwięku przed utworzeniem się nieciągłości ($b > 0$) i środowisko ochładza się. Nie obserwuje się takiego zjawiska w rezonatorach wypełnionych płynem newtonowskim. Po utworzeniu się nieciągłości, tłumienie czoła fali uderzeniowej powoduje, że pik ciśnienia zmniejsza się albo zwiększa zależnie od znaku b . Energia akustyczna w rezonatorze, dla czasów większych od charakterystycznego czasu tworzenia się fali w kształcie "zębów piły", dąży do zera dla ujemnych wartości współczynnika b . Dla $b > 0$, energia dąży do wartości $\frac{4b^2}{(\gamma+1)^2 M^2} E_0$, równanie (5.19). Odzwierciedla to równowagę pomiędzy nieliniowym tłumieniem czoła fali w kształcie "zębów piły" a zwiększeniem jej wartości. Temperatura związana z modem entropowym wzrasta dla $b < 0$ i zmniejsza się dla $b > 0$. Dobroć rezonatora wypełnionego gazem, w którym zachodzi reakcja chemiczna również zależy od bezwymiarowego współczynnika b . Jest stała przed utworzeniem się nieciągłości, a potem zależy od czasu. Efektywność ogrzewania (bądź chłodzenia) akustycznego zależy od liczby Macha i współczynnika b , równania (5.14), (5.18).

Rozdział 6

Płyn z pęcherzami. Nieliniowy wzrost promieni pęcherzy wywołany dźwiękiem

W niniejszym rozdziale przedstawiono nieliniową interakcję pomiędzy entropowym i akustycznymi modami w płynie z pęcherzami gazowymi. Wyróżniono dwa czynniki tej interakcji, nieliniowość i dyspersję. Wykazano, że nieliniowa interakcja pomiędzy modami powoduje wzrost promieni pęcherzy spowodowanego dźwiękiem. Przedyskutowano przykład zmiany w gęstości mieszaniny i promieni pęcherzy na skutek propagacji solitonu akustycznego. Opisane w niniejszym rozdziale wyniki zostały opublikowane w [43] oraz w [42].

6.1 Równania opisujące płyn z pęcherzami

W niniejszym rozdziale rozważany będzie przypadek jednowymiarowy, czyli propagacja fali akustycznej wzdłuż osi OX . Rozważana mieszanina składa się ze ściśliwej cieczy zawierającej identyczne, sferyczne pęcherze idealnego gazu. W stanie równowagi, wszystkie pęcherze mają ten sam promień i nie ma wymiany ciepła i masy pomiędzy cieczą a gazem. Ponadto założono, że pęcherze są dobrze rozdzielone, czyli ich ruchy nie wpływają na siebie nawzajem i pulsują one w ich najniższym, radialnie symetrycznym modzie, a natężenie pęcherzy jest jednorodne. Ponieważ charakterystyczna skala zaburzeń w mieszaninie jest znacznie większa niż promień pęcherzy, w związku z tym mieszanina jako całość może być traktowana jako ośrodek jednorodny ciągły. Ciśnienie w mieszaninie równa się ciśnieniu cieczy [51, 45]. Indeksami dolnymi: g , l i m oznaczane będą odpowiednio wielkości związane z gazem, cieczą i całą mieszaniną. Z kolei wielkości niezaburzone oznaczane będą indeksem dolnym zero,

a te zaburzone indeksem górnym, tak zwanym "primem". Gęstość mieszanki opisuje następująca równość:

$$\rho_m = \frac{\rho_g \rho_l}{s_m \rho_l + (1 - s_m) \rho_g}, \quad (6.1)$$

gdzie s_m jest stałym stężeniem masowym gazu w mieszaninie. Może być ono również wyrażone przy pomocy początkowego objętościowego stężenia gazu w mieszaninie, α_0 ,

$$s_m = \alpha_0 \frac{\rho_{g0}}{\rho_{m0}}. \quad (6.2)$$

Akustyka nieściśliwych cieczy zawierających pęcherze została przebadana przez Wijngaarden'a [51]. Rozważenie ściśliwości cieczy pozwala uwzględnić wpływ skończonej prędkości dźwięku w czystej cieczy c_l na nieliniowe zjawiska związane z dźwiękiem. W szczególności koryguje to nieliniowy parametr dźwięku [13, 35]. Założenie, że mieszanina jako całość jest ośrodkiem jednorodnym ciągłym pozwala na użycie równań zachowania w formie różniczkowej. Równania zachowania pędu, energii i masy przedstawiają się następująco:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p'}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p'}{\partial t} - c_l^2 \frac{\partial \rho'_l}{\partial t} - \frac{c_l^2 (\gamma_l - 1)}{\rho_{l0}} \rho'_l \frac{\partial \rho'_l}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial \rho'_m}{\partial t} + \frac{\partial (v \rho'_m)}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

gdzie v , p oznaczają prędkość i ciśnienie w mieszaninie. Drugie równanie w 6.3 jest właściwie rezultatem liniowej kombinacji równań ciągłości i energii dla czystej cieczy, z $\gamma_l = \frac{C_{p,l} \rho_{l0}}{C_{V,l} p_{l0}} \left(\frac{\partial p_l}{\partial \rho_l} \right)_{T=const}$, C_p i C_V oznaczają pojemności cieplne przy stałym ciśnieniu i gęstości. Dla wody w warunkach normalnych, γ_l wynosi w przybliżeniu 7. Układ równań (6.3) należy uzupełnić kolejnymi równaniami. Pierwsze z nich odzwierciedla zachowanie masy wewnątrz sferycznego pęcherza:

$$R^3 \rho_g = R_0^3 \rho_{g0}, \quad (6.4)$$

kolejne opisuje adiabatyczne zachowanie gazu:

$$p_g \rho_g^{-\gamma_g} = p_{g0} \rho_{g0}^{-\gamma_g}, \quad (6.5)$$

gdzie $\gamma_g = \frac{C_{p,g}}{C_{V,g}}$. Równanie (6.4) narzuca również stałą gęstość w objętości pęcherza, a równanie (6.5) narzuca, pomiędzy przestrzenie jednorodnego

rozkładu gęstości i ciśnienia w pęcherzu, brak wymiany energii pomiędzy pęcherzem, a otaczającą go cieczą. Pulsowanie każdego pęcherza opisane jest równaniem Rayleigh'a-Plesset'a:

$$R \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{c_l^2} \left(R^2 \frac{\partial^3 R}{\partial t^3} + 6R \frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial^2 R}{\partial t^2} + 2 \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 \right) = \frac{p'_g - p'_l}{\rho_l}. \quad (6.6)$$

Przy pomocy równań (6.4), (6.5), (6.6) można przeliczyć drugie równanie z układu (6.3) tak, aby zawierało wielkości związane z mieszaniną p , ρ_m , v . Układ równań (6.3) w zmiennych bezwymiarowych:

$$v^d = \frac{v'}{c_m}, \quad p^d = \frac{p'}{c_m^2 \rho_{m0}}, \quad \rho^d = \frac{\rho'_m}{\rho_{m0}}, \quad x^d = \frac{x}{\lambda}, \quad t^d = \frac{t c_m}{\lambda}, \quad (6.7)$$

gdzie λ oznacza charakterystyczną skalę zaburzenia, a c_m jest prędkością dźwięku w płynie z pęcherzami [51],

$$\frac{1}{c_m^2} = \frac{(1 - \alpha_0)^2}{c_l^2} + \frac{\alpha_0(1 - \alpha_0)\rho_{l0}}{\gamma_g p_{g0}}, \quad (6.8)$$

przyjmuje następującą postać [35]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} &= -v \frac{\partial v}{\partial x} + \rho \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\alpha_0(1 - \alpha_0)R_0^2 \rho_{l0}^2 c_m^4}{3(\gamma_g p_{g0})^2} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} &= \\ (1 - \alpha_0)c_m^2 \left(-\frac{\gamma_l + 1}{c_l^2} \rho \frac{\partial v}{\partial x} - c_m^2 \frac{\alpha_0(1 - \alpha_0)\rho_{l0}^2(\gamma_g + 1)}{(\gamma_g p_{g0})^2} p \frac{\partial v}{\partial x} \right) - v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} &= -v \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Począwszy od układu równań (6.9) zostaną pominięte w tekście indeksy górne "d", oznaczające wielkości bezwymiarowe. W prawej części układu (6.9) zatrzymano tylko największe, kwadratowe człony. Równania (6.9) opisują dynamikę czystej cieczy gdy $\alpha_0 \rightarrow 0$.

6.2 Rozdzielenie dźwięku i modu entropowego w przepływie o nieskończenie małej wielkości

Liniową wersję układu równań (6.9) można przedstawić w następującej formie:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + L\Psi = 0, \quad (6.10)$$

gdzie $\Psi = (v \ p \ \rho)^T$, a

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} + D \frac{\partial^3}{\partial x^3} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.11)$$

to liniowy operator macierzowy, zawierający pochodne cząstkowe, natomiast

$$D = \frac{\alpha_0(1 - \alpha_0)R_0^2\rho_{l0}^2c_m^2}{3(\gamma_g p_{g0})^2\lambda^2} \quad (6.12)$$

to niewielki parametr odpowiedzialny za dyspersję. W przybliżeniu zastąpiono $D \frac{\partial^3 p}{\partial t^3}$ przez $-D \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$ zgodnie z pierwszym i drugim równaniem w układzie (6.9). Jak zostało przedstawione w rozdziale 2, należy teraz wyznaczyć związki dyspersyjne. Dwie z nich związane są z propagacją dźwięku w kierunku dodatnim i ujemnym osi OX (oznaczono je indeksami 1 i 2), a trzeci pierwiastek dyspersyjny opisuje stacjonarny (lub "entropowy") mod:

$$\omega_1 = k\sqrt{1 - Dk^2}, \quad \omega_2 = -k\sqrt{1 - Dk^2}, \quad \omega_3 = 0. \quad (6.13)$$

Określają one jednoznacznie relacje zaburzeń charakterystyczne dla poszczególnych modów:

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - Dk^2} \\ 1 - Dk^2 \\ 1 \end{pmatrix} \rho_1, \quad \Psi_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{1 - Dk^2} \\ 1 - Dk^2 \\ 1 \end{pmatrix} \rho_2, \quad \Psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rho_3, \quad (6.14)$$

gdzie ρ_n ($n = 1, 2, 3$) są zaburzeniami gęstości cieczy z pęcherzami odpowiadającymi poszczególnym modom. Równania (6.13), (6.14) mogą być rozwinięte w szereg względem parametru D , jako że założono, że jest niewielki. To znacznie upraszcza obliczenie projektorów. Wyliczone przy tym założeniu projektory dla cieczy z pęcherzami, przyjmują następującą, przybliżoną postać:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \frac{D}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{D}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} - \frac{D}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{1}{2} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{D}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \\ -\frac{1}{2} - \frac{D}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{D}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{1}{2} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.15)$$

W projektorach (6.15) zatrzymano tylko dwa pierwsze człony w szeregu Taylor'a względem parametru D (tzn. te proporcjonalne do D^0 i D^1).

6.3 Sprzężone równania dynamiczne w przepływie nieliniowym

Nieliniowe poprawki do modów akustycznych mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \rho_1 + \frac{1}{2}D \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} + \left(\frac{(1 - \alpha_0)c_m^2(\gamma_l + 1)}{4c_l^2} + \frac{c_m^4 \alpha_0(1 - \alpha_0)^2 \rho_{l0}^2(\gamma_g + 1)}{4(\gamma_g p_{g0})^2} - 1 \right) \rho_1^2, \\
 p_1 &= \rho_1 + D \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} + \left(\frac{(1 - \alpha_0)c_m^2(\gamma_l + 1)}{2c_l^2} + \frac{c_m^4 \alpha_0(1 - \alpha_0)^2 \rho_{l0}^2(\gamma_g + 1)}{2(\gamma_g p_{g0})^2} - 1 \right) \rho_1^2, \\
 v_2 &= -\rho_2 - \frac{1}{2}D \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2} - \left(\frac{(1 - \alpha_0)c_m^2(\gamma_l + 1)}{4c_l^2} + \frac{c_m^4 \alpha_0(1 - \alpha_0)^2 \rho_{l0}^2(\gamma_g + 1)}{4(\gamma_g p_{g0})^2} - 1 \right) \rho_2^2, \\
 p_2 &= \rho_2 + D \frac{\partial^2 \rho_2}{\partial x^2} + \left(\frac{(1 - \alpha_0)c_m^2(\gamma_l + 1)}{2c_l^2} + \frac{c_m^4 \alpha_0(1 - \alpha_0)^2 \rho_{l0}^2(\gamma_g + 1)}{2(\gamma_g p_{g0})^2} - 1 \right) \rho_2^2. \tag{6.16}
 \end{aligned}$$

Relacje (6.16) prowadzą, między innymi, do równania opisującego dźwięk rozchodzący się w kierunku dodatnim osi $0X$:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \varepsilon \rho_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} + \frac{D}{2} \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial x^3} = 0, \tag{6.17}$$

gdzie przez ε :

$$\varepsilon = \left(\frac{(1 - \alpha_0)c_m^2(\gamma_l + 1)}{2c_l^2} + \frac{c_m^4 \alpha_0(1 - \alpha_0)^2 \rho_{l0}^2(\gamma_g + 1)}{2(\gamma_g p_{g0})^2} \right) \tag{6.18}$$

oznaczono parametr nieliniowości dźwięku w cieczy z pęcherzami. W równaniu (6.17) założono, że mod akustyczny propagujący w dodatnim kierunku osi $0X$, jest dominujący w porównaniu z innymi modami. To równanie jest dobrze znane jako równanie Kortewega-de Vries'a i dla cieczy z pęcherzami zostało dokładnie przedyskutowane między innymi w [28, 31, 51]. Jak już zostało wspomniane w poprzednich rozdziałach, układ równań, który opisuje interakcję pomiędzy poszczególnymi modami, może zostać wyprowadzony bezpośrednio z układu (6.9) przy użyciu projektorów (6.15). Podziałanie projektorem na układ równań spowoduje redukcję wszystkich pozostałych modów w części liniowej równań, a w części nieliniowej pozostaną nieliniowe człony związane z poszczególnymi modami. W poprzednich rozdziałach, z prawej części równania pozostawiono tylko człony związane z modem akustycznym propagującym w kierunku dodatnim osi $0X$, jako modem dominującym. W ogólności jednak możliwe jest wyprowadzenie słabo nieliniowych członów, uwzględniających poprawne oddziaływanie wszystkich modów. W ten sposób otrzymano układ równań, uwzględniający słabo nieliniowe dodatkowe człony dla każdego

modu:

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial t} + c_n \frac{\partial \rho_n}{\partial x} + \sum_{i,j=1}^3 \beta_{i,j}^n \rho_i \frac{\partial \rho_j}{\partial x} + \sum_{i,j=1}^3 \eta_{i,j}^n \rho_i \frac{\partial^3 \rho_j}{\partial x^3} + \frac{M_n}{2} \frac{\partial^3 \rho_n}{\partial x^3} = 0. \quad (6.19)$$

Współczynniki $\beta_{i,j}^n$ i $\eta_{i,j}^n$ zostały przedstawione w tabelach: (6.1) i (6.2), gdzie $c_1 = -c_2 = 1$, $c_3 = 0$, $F = -(1 - \alpha_0)c_m^2 \frac{\gamma+1}{c_1^2}$, i $M_1 = -M_2 = D$, $M_3 = 0$. Rozsądnie jest założyć, że mod akustyczny jest dominujący w porównaniu z innymi modami przy rozważaniu nieliniowej generacji nie-akustycznych modów w polu dźwiękowym, takich jak ogrzewanie akustyczne. Wówczas rozchodzenie się fali akustycznej opisuje równanie (6.17), które jest przybliżeniem pierwszego równania z układu (6.19) gdy ignorujemy człony związane z innymi modami poza pierwszym.

Tablica 6.1: Współczynniki $\beta_{i,j}^n$ w równaniu fali akustycznej propagującej w płynie z pęcherzami

$\beta_{i,j}^1$				$\beta_{i,j}^2$					
i	j	1	2	3	i	j	1	2	3
1		ε	$-\varepsilon$	$\frac{1}{2}$	1		0	$2 - \varepsilon$	$\frac{1}{2}$
2		$\varepsilon - 2$	0	$\frac{1}{2}$	2		ε	$-\varepsilon$	$-\frac{1}{2}$
3		$-\frac{1}{2}(F + 2)$	$\frac{1}{2}F$	0	3		$-\frac{1}{2}F$	$\frac{1}{2}(F + 2)$	0

$\beta_{i,j}^3$				
i	j	1	2	3
1		0	$2\varepsilon - 2$	0
2		$2 - 2\varepsilon$	0	0
3		$F + 2$	$-(F + 2)$	0

Tablica 6.2: Współczynniki $\eta_{i,j}^n$ w równaniu fali akustycznej propagującej w płynie z pęcherzami

$\eta_{i,j}^1$			$\eta_{i,j}^2$				
i	j		i	j			
	1	2	1	2	3		
1	$\frac{1}{4}D(\varepsilon - 6)$	$\frac{1}{2}D(\varepsilon - 2)$	$-\frac{1}{2}D$	1	$\frac{1}{4}D(3\varepsilon - 4)$	$\frac{1}{2}D(\varepsilon - 1)$	$-\frac{1}{2}D$
2	$\frac{1}{2}D(1 - \varepsilon)$	$\frac{1}{4}D(4 - 3\varepsilon)$	$\frac{1}{2}D$	2	$\frac{1}{2}D(2 - \varepsilon)$	$\frac{1}{4}D(6 - \varepsilon)$	$\frac{1}{2}D$
3	$\frac{1}{4}DF$	$-\frac{1}{4}D(F + 2)$	0	3	$\frac{1}{4}D(F + 2)$	$-\frac{1}{4}DF$	0

$\eta_{i,j}^3$				
i	j	1	2	3
1		$D(2 - \varepsilon)$	$\frac{1}{2}D(3 - 4\varepsilon)$	D
2		$\frac{1}{2}D(4\varepsilon - 3)$	$D(\varepsilon - 2)$	$-D$
3		$-\frac{1}{2}D(2F + 1)$	$\frac{1}{2}D(2F + 1)$	0

6.4 Wzrost promienia pęcherza spowodowany dźwiękiem

Aby wyprowadzić równanie opisujące generację modu entropowego w polu intensywnego dźwięku, należy podzielać trzecim wierszem projektora P_3 na układ równań (6.9), co prowadzi do redukcji wszystkich członów związanych z modami akustycznymi w linowej części równania. Pozostawienie w części nieliniowej tylko największych członów związanych z falą akustyczną propagującą w kierunku dodatnim osi OX , prowadzi do ostatecznej postaci równania opisującego zmiany gęstości modu entropowego:

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} = -D(\varepsilon - 2)\rho_1 \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial x^3}, \quad (6.20)$$

gdzie ε i D są stałymi opisanymi odpowiednio przez równości: (6.18) i (6.12). Zaburzenie gęstości fali akustycznej w prawej części równania (6.20) musi być rozwiązaniem równania (6.17). Forma równania (6.20) wskazuje, że powodem ekscytacji modu entropowego przez dźwięk jest zarówno nieliniowość jak i dyspersja. W przypadku standardowych termolepkich płynów przyczyną ograniczenia akustycznego są nieliniowość i całkowite tłumienie, które powodują nieliniowe straty w energii akustycznej. W ośrodkach dyspersyjnych takich jak ciecz z pęcherzami, to dyspersja jest warunkiem interakcji pomiędzy modami

oprócz tłumienia. W niniejszej pracy nie uwzględniono ani lepkości obydwu czystych faz, ani przewodności cieplnej gazu (co jest istotne w przypadku małych pęcherzy)[18], [22], ani tłumienia promieniowania związanego z dynamiką pęcherza, a uwzględniono tylko dyspersję.

Zmiany gęstości w prawej części równania (6.20) musi być rozwiązaniem równania (6.17). Można skorzystać z metody zaburzeń [29] aby wyznaczyć rozwiązanie równania (6.17) przy warunku początkowym $\rho_1(t = 0, x) = M \sin(\omega x)$ (M - liczba Macha):

$$\rho_1 = M \sin \left(\omega x + \left(\frac{D\omega^3}{2} - \omega \right) t \right) + \frac{\varepsilon M^2}{3D\omega^2} \sin \left(\frac{3D\omega^3}{2} t \right) \sin \left(2\omega x + \left(\frac{5D\omega^3}{2} - 2\omega \right) t \right). \quad (6.21)$$

Na rysunku (6.1 a) przedstawiono kształt fali opisany równaniem (6.21), wyliczony dla $t = 0.01$. Zmiany gęstości dla modu entropowego wyznaczone na podstawie równania (6.20) przedstawiono na rysunku (6.1 b). Widać, że zaburzenia gęstości ρ_3 są ujemne. W obliczeniach użyto następujących wartości zmiennych: $R_0 = 0.002m$, $\rho_{10} = 10^3 kg/m^3$, $p_{g0} = 10^5 Pa$, $\gamma_g = 1.4$, $\gamma_l = 7$, $c_l = 1500m/s$, $\omega = 10kHz$, $\alpha_0 = 10^{-4}$.

Interesujące rezultaty uzyskuje się również stosując stacjonarne rozwiązanie równania (6.17), które dąży do zera przy x dążącym do nieskończoności (i minus nieskończoności), przybierają dobrze znaną postać solitonów zależnych od \tilde{c}_1 :

$$\rho_1(\xi) = \frac{6(\tilde{c}_1 - 1)}{\varepsilon} \left[1 + \cosh \left(\sqrt{\frac{2(\tilde{c}_1 - 1)}{D}} \xi \right) \right]^{-1}, \quad (6.22)$$

gdzie \tilde{c}_1 jest prędkością fali stacjonarnej $\tilde{c}_1 > 1$, $\xi = x - \tilde{c}_1 t$. Zmienne bezwymiarowe są dobierane tak, aby bezwymiarowa szerokość impulsu wynosiła jeden, co determinuje \tilde{c}_1 :

$$\tilde{c}_1 = 1 + \frac{D}{2}. \quad (6.23)$$

Równania (6.20), (6.22) można przekształcić na:

$$\rho_1(\xi) = \frac{3D}{\varepsilon} \phi(\xi), \quad \rho_3(\xi) = \frac{9D^3(\varepsilon - 2)}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\xi} \phi \frac{d^3 \phi}{d\xi^3} d\xi, \quad \phi(\xi) \equiv [1 + \cosh(\xi)]^{-1}. \quad (6.24)$$

Na rysunku (6.2) przedstawiono akustyczny soliton i wywołany przez niego mod entropowy. Zaburzenia gęstości ρ_3 są ujemne (w wodzie z pęcherzami, ε może osiągać wartość 10^4 przy $\alpha_0 \approx 10^{-4}$, zaś wartości mniejsze od 10 przyjmuje tylko przy bardzo wysokich stężeniach objętościowych gazu w mieszaninie

$\alpha_0 \approx 1$ [12], dlatego czynnik przed całką jest dodatni). Ponieważ ciecz ma niską ściśliwość w porównaniu z gazem, promień pęcherzy wzrasta. Przyrost stężenia objętościowego pęcherzy $\Delta\alpha$ można wyliczyć korzystając z następującej zależności:

$$\rho_m = (1 - \alpha)\rho_l, \quad (6.25)$$

gdzie α to stężenie objętościowe pęcherzy. Początkowa gęstość mieszaniny połączona jest z początkową gęstością cieczy następującą zależnością:

$$\rho_{m,0} = (1 - \alpha_0)\rho_{l,0}. \quad (6.26)$$

Następnie korzystając z:

$$\rho_{m,0} + \rho_3 = (1 - (\alpha_0 + \Delta\alpha))\rho_{l,0}, \quad (6.27)$$

otrzymano:

$$1 + \frac{\rho_3}{\rho_{m,0}} = \frac{1 - (\alpha_0 + \Delta\alpha)}{1 - \alpha_0} \approx 1 - \Delta\alpha, \quad (6.28)$$

co prowadzi do wyrażenia na stężenie objętościowe pęcherzy:

$$\Delta\alpha \approx -\frac{\rho_3}{\rho_{m,0}}. \quad (6.29)$$

Następnie korzystając z równości:

$$\frac{\alpha_0}{(R_0)^3} = \frac{\alpha_0 + \Delta\alpha}{(R_0 + \Delta R)^3} \Rightarrow \left(1 + \frac{\Delta R}{R_0}\right)^3 = \frac{\alpha_0 + \Delta\alpha}{\alpha_0}, \quad (6.30)$$

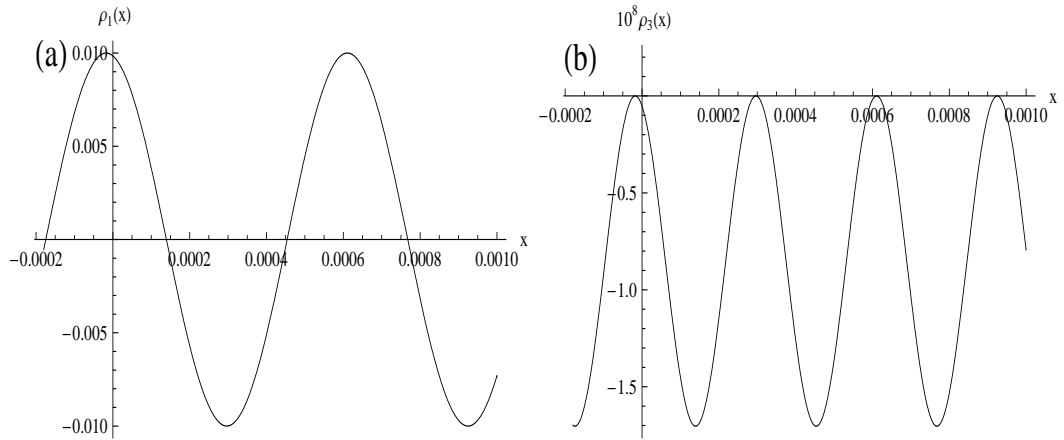
i rozwijając obie jej strony w szeregi względem potęg małych zaburzeń, otrzymano:

$$3\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\Delta\alpha}{\alpha_0}. \quad (6.31)$$

Zatem przyrost stężenia objętościowego pęcherzy $\Delta\alpha$ i promienia pęcherzy ΔR wynosi w przybliżeniu

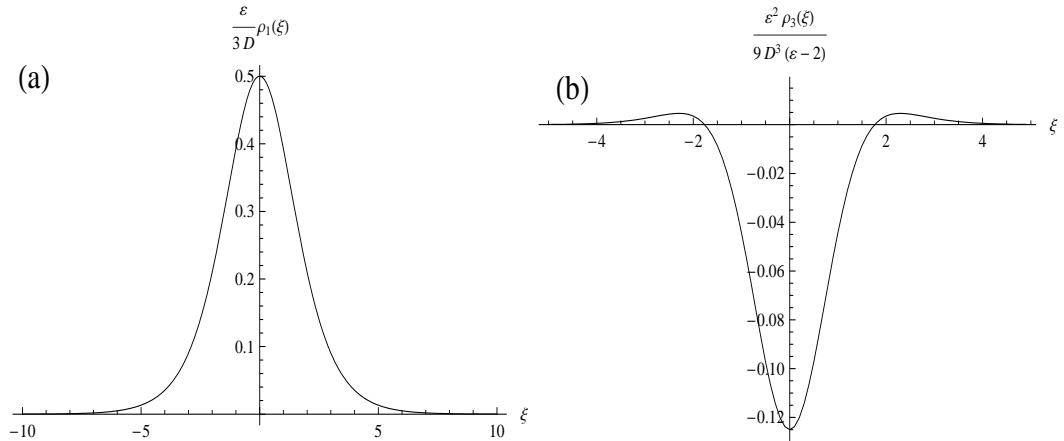
$$\Delta\alpha \approx -\rho_3, \quad \Delta R \approx -\frac{1}{3}\frac{\rho_3}{\alpha_0}R_0. \quad (6.32)$$

Powyższe oszacowania są dokładne w przypadku nieściśliwej cieczy. Pomimo że efektywność powstawania modu entropowego w polu akustycznego solitonu jest niska (amplituda modu entropowego jest w przybliżeniu D^2 razy większa w porównaniu z solitonem), przypadek akustycznego solitonu jest znaczący gdyż jest dokładnym rozwiązaniem równania (6.17). W ogólności trudno oczekiwać aby efekty nieliniowe były duże, jeśli są powodowane pojedynczą falą.



Rysunek 6.1: a) Rozwiązanie równania (6.17), dla $t = 0.01$. b) Zmiany gęstości modu entropowego opisany przez równanie (6.20), dla $t = 0.01$.

Natomiast mogą być zauważalne w przypadku gdy źródło akustyczne jest dość poszerzone w czasie, jak na przykład paczki falowe. Przypadek akustycznego solitonu jest również ważny ze względu na to, że w ośrodku dyspersyjnym każdy początkowy kształt fali przekształca się z czasem w zbiór solitonów [18], [21], [49].



Rysunek 6.2: a) Stacjonarne rozwiązanie równania (6.17), $\frac{\epsilon}{3D} \rho_1(\xi) \equiv \phi(\xi)$, b) zmiany gęstości modu entropowego, $\frac{\epsilon^2}{9D^3(\epsilon-2)} \rho_3(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{\xi} \phi \frac{d^3 \phi}{d\xi^3} d\xi$ (równanie 6.24).

6.5 Wnioski

W niniejszym rozdziale przedstawiono powstawanie nieliniowych modów w płynie z pęcherzami gazowymi. Nawet niewielka koncentracja pęcherzy w płynie znacznie zwiększa ściśliwość cieczy i redukuje prędkość dźwięku. Nieliniowe efekty dźwięku w takich ośrodkach znacznie się różnią od standardowych płynów Newtonowskich. Rezultaty niniejszych badań mogą znaleźć zastosowanie w diagnostyce, np. metody diagnostyczne wykorzystujące środki kontrastowe w postaci pęcherzyków gazowych w solance, które wstrzykuje się do naczyń krwionośnych [11, 48].

Równanie (6.20) ujawnia nową przyczynę wzrostu pęcherzy w polu akustycznym, mianowicie nieliniową generację modu "entropowego" w polu dźwiękowym. Powiększanie się pęcherzy zostało dokładnie przebadane eksperymentalnie [18]. Dyfuzja gazu rozpuszczonego w cieczy następuje do wnętrza pęcherza podczas jego rozszerzania i w kierunku na zewnątrz podczas jego zmniejszania. Skoro powierzchnia pęcherza jest mniejsza, a grubość warstwy cieczy jest większa podczas jego kompresji w porównaniu z ekspansją, to uśredniony po okresie przepływ gazu odbywa się do wnętrza pęcherza. To powoduje jego wzrost. Okazuje się, że prędkość wzrostu masy pęcherza jest proporcjonalna do kwadratu ciśnienia dźwięku. Jednakże odkryty w niniejszych badaniach wzrost promienia pęcherza w polu akustycznym ma odmienne źródło od wyjaśnionej wyżej dyfuzji. Powodem owego wzrostu jest nieliniowa interakcja modów entropowego i dźwiękowego, która może mieć miejsce nawet bez dyfuzji i nie jest powiązana ze wzrostem masy pęcherza. Jest to zjawisko analogiczne do występującego w standardowych termolepkich płynach izobarycznego ogrzewania akustycznego. Wzrost masy pęcherza m w jednostce czasu $\frac{dm}{dt}$ jest spowodowany dyfuzją i został wyliczony przez Neppiras'a [30]. Jest on proporcjonalny do promienia pęcherza R_0 , kwadratu akustycznego ciśnienia i do czynnika zależącego od częstotliwości dźwięku, $((1 - \Omega^2)^2 + \Omega^2 d^2)^{-1}$, gdzie Ω jest ilorazem częstotliwości dźwięku i częstotliwości własnej pęcherza $\omega_0 = \sqrt{\frac{3\gamma_g P_{g0}}{\rho_{l0} R_0^2}}$, $\Omega = \omega/\omega_0$, d jest odwrotnością dobroci pęcherza jako oscylatora i zazwyczaj wynosi około 10. Zatem, tempo wariacji masy osiąga maksimum w przybliżeniu przy częstotliwości rezonansowej. Zaś jeśli chodzi o nieliniową generację modu entropowego, to jej efektywność również jest proporcjonalna do promienia pęcherza i kwadratu ciśnienia akustycznego. Warto zwrócić uwagę, że jest również proporcjonalna do ω^3 , podczas gdy w standardowych, termolepkich płynach, efektywność ogrzewania akustycznego jest proporcjonalna do ω^2 . To zgadza się z ogólnym wnioskiem akustyki nieliniowej, że nieliniowe efekty dźwięku są większe przy dużych częstotliwościach.

Mod entropowy w jednolitych płynach określa się przez izobaryczne zmiany

gęstości i przez odpowiednie zmiany w temperaturze. W przypadku cieczy z pęcherzami, wariacje temperatury są różne wewnątrz pęcherza w porównaniu z tymi w otaczającej go cieczy. W niniejszej pracy nie uwzględniono strumieni ciepła przez ścianę pęcherza. Jednakże, mod "entropowy" istnieje w cieczy z pęcherzami nawet jeśli sama ciecz jest nieściśliwa i nie obserwuje się w niej żadnych zmian temperatury. W takim przypadku, gęstość całej mieszaniny zależy wyłącznie od stężenia objętościowego pęcherzy. W przepływie liniowym bez zewnętrznego źródła ciepła mod entropowy jest stacjonarny. To nieliniowość i dyspersja są powodem powolnego wzbudzenia tego modu. Następstwem tego jest zmniejszenie gęstości mieszaniny i związane z tym zwiększenie promienia pęcherzy. W rozdziale 6.4 rozważono między innymi, przykład akustycznego solitonu i nieliniowego wzbudzenia modu entropowego w jego polu. Zauważono niską efektywność modu entropowego wygenerowanego przez dźwięk okresowy. Proste obliczenia, polegające na uśrednieniu po okresie dźwięku (2π w zmiennych bezwymiarowych) zaburzeń gęstości, prowadzą z równania (6.20):

$$\left\langle \frac{\partial \rho_3}{\partial t} \right\rangle \approx D(\varepsilon - 2) \left\langle \rho_1 \frac{\partial^3 \rho_1}{\partial t^3} \right\rangle = -D \frac{(\varepsilon - 2)}{4\pi} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \right)^2 \Big|_t^{t+2\pi} = 0, \quad (6.33)$$

gdzie nawiasy typu " $\langle \rangle$ " oznaczają uśrednienie po okresie dźwięku, $\langle f \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_t^{t+2\pi} f dt$. W jednolitych płynach ze standardowym tłumieniem, dźwięk okresowy produkuje pewną niezerową, ujemną wartość. Prawa strona odpowiedniego równania zawiera przy całkowitym tłumieniu człon $\rho_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} \approx \rho_1 \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}$ [36] jak zaobserwowano również w rozdziale 3. Wówczas uśrednienie po okresie dźwięku zmniejszające gęstość w ośrodku prowadzi do zwiększenia jego temperatury, czyli ogrzewania akustycznego.

Wyniki niniejszych badań wyliczono przy założeniu ściśliwości cieczy. Granica nieściśliwości ($c_l \rightarrow \infty$) nie pozwala, między innymi, na wyliczenie nieliniowych własności ruchu fal w cieczy. Natomiast nie uwzględniono ani przepływu masy i ciepła między pęcherzem i otaczającą go cieczą, ani niejednorodności ciśnienia i temperatury wewnątrz pęcherza, ani również parowania w przypadku pęcherzy zawierających parę. Istnieją jednakże badania numeryczne, które biorą pod uwagę wszystkie te zjawiska [31], [22] i doskonale objaśniają wywołane przez nie własności. Uwzględnienie ich zaś w niniejszej pracy znacznie skomplikowałoby obliczenia matematyczne bez znaczącego udoskonalenia wyników. Ponieważ przewodność cieplna powinna zostać uwzględniona w przypadku małych pęcherzy (których promień jest mniejszy od rezonansowego) [18, 22], ale nie została wzięta pod uwagę w niniejszych badaniach, należy w konkretnych obliczeniach zastosować odpowiednio duże wielkości promieni. Jeśli charakterystyczna długość fali cieplnej w gazie jest większa niż pro-

mień pęcherza, $\sqrt{\frac{2\chi}{\rho_{g0}C_{p,g}\omega}} > R_0$, to zaczynają być ważne straty lepkości (χ jest przewodnością cieplną gazu). W przypadku dużych pęcherzy, $R_0 > \sqrt{\frac{2\chi}{\rho_{g0}C_{p,g}\omega}}$, zaczynają być ważne zarówno straty lepkości jak i promieniowanie powodowane ściśliwością płynu. Udowodniono doświadczalnie, że ściśliwość płynu zaczyna być dominująca w porównaniu z lepkością przy częstotliwościach 10 KHz i $R_0 > 2mm$. Dla prostych obliczeń wody z pęcherzami mogą być użyte następujące dane: $R_0 = 2mm$, $\rho_{l0} = 10^3 kg/m^3$, $p_{g0} = 10^5 Pa$, $\gamma_g = 1.4$, $\gamma_l = 7$, $c_l = 1500m/s$. Wartość początkowej, objętościowej koncentracji gazu w mieszaninie $\alpha_0 = 10^{-4}$ powoduje około szesnastoprocentowe zwiększenie promieni pęcherzy, spowodowane akustycznym solitonem. Z kolei $\alpha_0 = 10^{-5}$ prowadzi do 3.6% zwiększenia.

Rozdział 7

Podsumowanie

Zainteresowanie akustyką nieliniową znacznie wzrosło w ostatnich latach, ze względu na jej szerokie zastosowania w medycynie, zarówno w diagnostyce [5, 14, 34] jak i w terapii [7, 9, 48]. Głównym tego powodem jest zdolność fal ultradźwiękowych do głębokiej penetracji ludzkiego ciała. Ponadto charakterystyki pola można łatwo kontrolować poprzez skupianie fal na wybranym organie, modulację ciągłego sygnału, czy zmianę parametrów akustycznych impulsu. W dodatku urządzenia akustyczne są z reguły bezpieczne i tanie. Jak pisze Rudenko [48], około roku 2000 akustyczne techniki diagnostyczne zajęły drugie miejsce na światowym rynku pod względem wielkości sprzedaży. Fale ultradźwiękowe o dużej mocy mogą również wytwarzać lokalne ogrzewanie, które może okazywać działanie lecznicze, a nawet być wykorzystane do niszczenia tkanek, czy nawet pojedynczych komórek [7, 9].

Ogrzewanie akustyczne w standardowych, lepkich przepływach, gdzie źródłem jest dźwięk okresowy, było już dobrze zbadane teoretycznie i eksperymentalnie [24, 29, 49]. Wymienione prace dotyczą uśrednionych w czasie charakterystyk ogrzewania, to znaczy, że nie można za pomocą przedstawionych w nich równań opisać powstawania ogrzewania w czasie. W niniejszej rozprawie zastosowano opracowaną przez Annę Perelomovą metodę operatorów rzutowych pozwalającą wyprowadzić równania spełnione dla każdego typu fali, nie tylko dla fal okresowych [36, 37]. Podstawą metody jest rozdzielenie równań zachowania na podstawie własności wszystkich modów istniejących w ośrodku. Metoda była sprawdzona w wypadku płynów ze standardową lepkością, w wypadku okresowego dźwięku na tle gazu doskonałego doprowadza ona do znanych równań akustyki nieliniowej. W niniejszej pracy zastosowano ową metodę w ośrodkach różniących się od płynów newtonowskich, jakimi jest większość płynów biologicznych i technicznych.

W rozdziale 3 przedstawiono równanie ogrzewania akustycznego, a także jego efektywność w zależności od kształtu fali, w ośrodkach opisanych maxwe-

lowskim tensorem naprężeń lepkich. Jest to dobry model tkanek biologicznych. Rezultaty przedstawione w wyżej wymienionym rozdziale mogą być przydatne w medycynie również ze względu na wykorzystanie fal w kształcie impulsów [14, 48]. Ponadto zbadanie efektywności ogrzewania w płynach nienewtonowskich pozwala określić możliwość kontrolowania procesu za pomocą kształtu fali. Może to znaleźć zastosowanie zarówno w terapii ("ultrasonic thermal surgery") [9], jak i w diagnostyce, bo ogrzewanie zależy od lepkości płynu, to znaczy, od jego zawartości [14]. Wiązki ultradźwięków o wysokiej energii stosuje się między innymi do nieinwazyjnych operacji guzów mózgu, do operacji łagodnych nowotworów nerek czy wątroby, do zatrzymania wewnętrznego krwawienia („acoustic hemostasis”) [50]. Jak również do kardiochirurgii, w chirurgii plastycznej czy w dostarczeniu leku do konkretnego organu przy użyciu środków kontrastowych.

W rozdziale 4 rozważono gaz, w którym zachodzi reakcja chemiczna. Zastosowana metoda projektorów pozwoliła między innymi na wyprowadzenie równania opisującego oddziaływanie fali akustycznej z modelem odpowiedzialnym za rozpad reagenta. Ten problem wychodzi poza ramy ogrzewania akustycznego. Badanie równania pozwala określić, jaki wpływ na przebieg reakcji ma wybór kształtu lub częstotliwości fali akustycznej. Na podstawie równania ogrzewania akustycznego wyciągnięto wniosek, że w pewnym nierównowagowym obszarze wydzielania się ciepła podczas reakcji chemicznej, ośrodek się ochładza, zamiast się ogrzewać. Równania i odpowiednie rozwiązania mogą znaleźć zastosowanie w inżynierii laserowej i aerodynamice plazmy.

Zagadnienie z rozdziału 4 poszerzono w rozdziale 5 o uwzględnienie warunków brzegowych. Rozważono rezonator wypełniony gazem, w którym zachodzi reakcja chemiczna. Przedstawiono pole akustyczne w takim ośrodku, zbadano równanie ogrzewania (bądź chłodzenia) akustycznego. W rozdziale 5 uwzględnienie warunków brzegowych przybliżyło rozważane zagadnienie do rzeczywistości, jako że fale akustyczne rozchodzą się w zamkniętej przestrzeni.

Tematem poruszonym w rozdziale 6 jest badanie oddziaływania między modami w płynach z pęcherzykami gazowymi. Dotychczasowe badania nad płynem z pęcherzami dotyczyły rozpraszania się fali akustycznej na pęcherzach w cieczy nieściśliwej [45, 51]. W niniejszej pracy uwzględniono ściśliwość cieczy. Wyprowadzanie równań opisujących poruszanie się fali akustycznej w takim ośrodku, czy równania opisującego ogrzewanie znajdzie zastosowanie w diagnostyce. Istnieją metody diagnostyczne wykorzystujące do wizualizacji środki kontrastowe w postaci pęcherzyków gazowych w solance, które wstrzykuje się do naczyń krwionośnych. Wówczas wykorzystując rozpraszanie ultradźwięków otrzymuje się obrazy przepływu krwi [11]. Jak tłumaczy Rudenko w [48], w przypadku tej metody nieliniowość zaczyna odgrywać znaczącą rolę.

Ponadto zawartość nawet małej ilości pęcherzyków w płynie gwałtownie zmienia cechy propagacji dźwięku, co jest wskaźnikiem koncentracji fazy gazowej w cieczy. Ciecz z pęcherzami modeluje niektóre płyny biologiczne, więc zakres zastosowań metody jest taki sam, jak w płynach nie-newtonowskich. Ciecz z pęcherzami modeluje również produkty przemysłu spożywczego. Efektywność ogrzewania spożywczego, lub badanie akustyczne zawartości produktu też należą do dziedzin zastosowania metody.

Bibliografia

- [1] V. N. Alekseev, S. A. Rybak. Equations of state for viscoelastic biological media. *Acoustical Physics*, 48(5), 2002.
- [2] P. W. Atkins. *Chemia fizyczna*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 2007.
- [3] T. Biwa, T. Yazaki. Observation of energy cascade creating periodic shock waves in a resonator (1). *Journal of the Acoustical Society of America*, 127(3), 2010.
- [4] J. Bukowski, P. Kijowski. *Kurs mechaniki płynów*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1980.
- [5] E. L. Carstensen, D. R. Bacon. Biomedical applications. M. Hamilton, Blackstock D., redaktorzy, *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, 1998.
- [6] W. Chester. Resonant oscillations in closed tubes. *Journal of Fluid Mechanics*, 18(1), 1964.
- [7] R. L. Clarke, N. L. Bush, G. R. Ter Haar. The changes in acoustic attenuation due to in vitro heating. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 29, 2003.
- [8] S. Earnshaw. On the mathematical theory of sound. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 150, 1860.
- [9] J. L. Foley, S. Vaezy, L. A. Crum. Applications of high-intensity focused ultrasound in medicine: Spotlight on neurological applications. *Applied Acoustics*, 68, 2007.
- [10] I. Gajewska, H. Najberg, I. Senderacka. *Poradnik fizykochemiczny*. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1974.
- [11] B. B. Goldberg, J. B. Liu, F. Forsberg. Ultrasound contrast agents: A review. *Ultrasound in Medicine and Biology*, 20(4), 1994.

- [12] M. Hamilton, Y. Il'inskii, E. Zabolotskaya. Dispersion. M. Hamilton, Blackstock D., redaktorzy, *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, 1998.
- [13] M. Hamilton, C. Morfey. Model equation. M. Hamilton, Blackstock D., redaktorzy, *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, 1998.
- [14] C. L. Hartman, S. Z. Child, D. P. Penney, E. L. Carstensen. Ultrasonic heating of lung-tissue. *Journal of the Acoustical Society of America*, 91(1), 1992.
- [15] K.H. Herzfeld, T.A. Litovitz. *Absorption and dispersion of ultrasonic waves*. Academic Press Inc., 1959.
- [16] C. R. Hill, J. C. Bamber, G. R. ter Haar. *Physical Principles of Medical Ultrasonics*. Wiley, Chichester, 2004.
- [17] V. A. Kaner, R. V. Rudenko, Khokholov. Theory of nonlinear oscillations in acoustic resonators. *Soviet Physics - Acoustics*, 23(5), 1977.
- [18] V. A. Krasilnikov, V. V. Krylov. *Introduction to Physical Acoustics*. Nauka, Moscow, 1984.
- [19] L. Landau, E. Lifszic. *Mechanika ośrodków ciągłych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1958.
- [20] L.D. Landau, E. M. Lifshitz. *Course of Theoretical Physics, Vol.6: Fluid Mechanics, 4th edition*. Nauka, Moscow, 1988.
- [21] S. B. Leble. *Nonlinear waves in waveguides: with stratification*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [22] T. G. Leighton. *The Acoustic Bubble*. Academic Press, New York, 1994.
- [23] D. R. Lide, et al. *Handbook of Chemistry and Physics, 87th Edition*. Taylor & Francis Group, 2006.
- [24] S. Makarov, M. Ochmann. Nonlinear and thermoviscous phenomena in acoustics, part 1. *Acustica*, 82, 1996.
- [25] N. E. Molevich. Nonstationary self-focusing of sound beams in a vibrationally excited molecular gas. *Acoustical Physics*, 48(2), 2002.
- [26] N.E. Molevich. Sound velocity dispersion and second viscosity in media with nonequilibrium chemical reactions. *Acoustical Physics*, 49(2), 2003.

- [27] M. P. Mortell, K. F. Mulchrone, B. R. Seymour. The evolution of macrosonic standing waves in a resonator. *International Journal of Engineering Science*, 47(11-12), 2009.
- [28] V.E. Nakoryakov, B. G. Pokusaev, I. R. Shreiber. *Wave propagation in gas-liquid media*. CRC Press, Boca Raton, 1993.
- [29] K. Naugolnykh, L. Ostrovsky. *Nonlinear wave processes in acoustics*. Cambridge University Press, 1998.
- [30] E. A. Neppiras. Acoustic cavitation thresholds and cyclic processes. *Ultrasonics*, 18, 1980.
- [31] R. Nigmatulin. *Dynamics of Multiphase media*. Hemisphere, New York, 1991.
- [32] M. Ochmann. Nonlinear resonant oscillations in closed tubes—an application of the averaging method. *Journal of the Acoustical Society of America*, 77(1), 1985.
- [33] H. Ockendon, J. R. Ockendon, M. R. Peake, W. Chester. Geometrical effects in resonant gas oscillations. *Journal of Fluid Mechanics*, 257, 1993.
- [34] L. A. Ostrovsky, O. V. Rudenko. What problems of nonlinear acoustic seem to be important and interesting today? B. O. Enflo, C. M. Hedberg, L. Kari, redaktorzy, *Nonlinear acoustics - fundamentals and applications*, wolumen 1022, 2008.
- [35] A. Perelomova. Projectors in nonlinear evolution problem: Acoustic solitons of bubbly liquid. *Applied Mathematical Letters*, 13, 2000.
- [36] A. Perelomova. Development of linear projecting in studies of non-linear flow. acoustic heating induced by non-periodic sound. *Physics Letters A*, 42, 2006.
- [37] A. Perelomova. Acoustic heating in a weakly dispersive fluid flow,. *Acta Acustica*, 94(3), 2008.
- [38] A. Perelomova. Nonlinear generation of non-acoustic modes by low-frequency sound in a vibrationally relaxing gas. *Canadian Journal of Physics*, 88(4), 2010.
- [39] A. Perelomova. Acoustic field and the entropy mode induced by it in a waveguide filled with some non-equilibrium gases. *Central European Journal of Physics*, 11(3), 2013.

- [40] A. Perelomova, W. Pelc-Garska. Efficiency of acoustic heating produced in the thermoviscous flow of a fluid with relaxation. *Central European Journal of Physics*, 8(6), 2010.
- [41] A. Perelomova, W. Pelc-Garska. Non-wave variations in temperature caused by sound in a chemically reacting gas. *Acta Physica Polonica A*, 120(3), 2011.
- [42] A. Perelomova, W. Pelc-Garska. Interaction between acoustic and non-acoustic mode in a bubbly liquid. B.B.J. Linde, J. Paczkowski, N. Poni-kwicki, redaktorzy, *International Congress On Ultrasonics*, wolumen 1433, 2012.
- [43] A. Perelomova, W. Pelc-Garska. Nonlinear increase in bubbles radii caused by sound in a bubbly liquid. *Central European Journal of Physics*, 10(1), 2012.
- [44] A. Perelomova, P. Wojda. Generation of the vorticity mode by sound in a vibrationally relaxing gas. *Central European Journal of Physics*, 10(5), 2012.
- [45] A. Prosperetti. Bubble dynamics in a compressible liquid .1. 1st-order theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 168, 1986.
- [46] R. Puzyrewski, J. Sawicki. *Podstawy mechaniki płynów i hydrauliki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2000.
- [47] B. Riemann. The propagation of sound waves of finite amplitude. Robert T. Beyer, redaktor, *Nonlinear acoustic in fluids*. Van Nostrand Reinhold Company, 1984.
- [48] O. V. Rudenko. Nonlinear waves: some biomedical applications. *Physics-Uspekhi*, 50(4), 2007.
- [49] O.V. Rudenko, S.I. Soluyan. *Theoretical foundations of nonlinear acoustic*. Plenum, 1977.
- [50] S. Vaezy, L. Crum, S. Carter, G. O’Keefe, V. Zderic, R. Martin, Karmy-Jones R. Acoustic hemostasis: Underlying mechanisms. *Journal of the Acoustical Society of America*, 122(5), 2007.
- [51] L. Wijngaarden. One-dimensional flow of liquids containing small gas bubbles. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 4, 1972.