

P O L I T E C H N I K A G D A Ń S K A

WIESŁAW PUDLIK

WYMIANA I WYMIENNIKI CIEPŁA

**Podręcznik dla studentów
wydziałów mechanicznych specjalizujących się
w technikach cieplnych i chłodniczych**

GDAŃSK 2012

**PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTW POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ**

Roman Kazimierzak

REDAKTOR SKRYPTÓW

Zdzisław Puhaczewski

RECENZENT

Czesław Buraczewski

Wydanie I - 1980 r.

Wydanie II - 1983 r.

Wydanie III - 1988r.

Wydanie IV - 2008 r. – cyfrowe

Wydanie V - 2012r. – cyfrowe

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

© Copyright by
Politechnika Gdańska
Gdańsk 2012

**BIBLIOTEKA GŁÓWNA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ
PRACOWNIA DIGITALIZACJI ZBIORÓW**

SPIS TREŚCI

	Str.
PRZEDMOWA	5
I. PODSTAWOWE POJĘCIA I ZALEŻNOŚCI	7
1. Podstawowe pojęcia	7
2. Sposoby i prawa przenoszenia ciepła	9
3. Równania różniczkowe pola temperatury	14
II. USTALONE JEDNOWYMIAROWE PRZEWODZENIE CIEPŁA	24
1. Przewodzenie ciepła w przegrodach	24
2. Przewodzenie w pręcie z wewnętrznymi źródłami ciepła	41
3. Przewodzenie ciepła w prętach i żebrach prostych	43
III. PRZENIKANIE CIEPŁA	58
1. Przenikanie ciepła przez przegrody gładkie	58
2. Przenikanie ciepła przez przegrody żebrowane	66
3. Intensyfikacja przenikania ciepła	71
4; Krytyczna średnica izolacji	74
IV. PRZEPONOWE WYMIENNIKI CIEPŁA	77
1. Rekuperatory równoległo-prądowe	77
2. Rekuperatory poprzeczno-prądowe	87
3. Parowniki i skraplacze	93
4. Sprawność (efektywność) termiczna wymiennika ciepła	94
5. Rozkład temperatury wzdłuż powierzchni wymiennika	103
V. PRZEJMOWANIE CIEPŁA	110
1. Równania konwekcji	110
2. Metody rozwiązania równań konwekcji	114
3. Zastosowanie teorii podobieństwa do przejmowania ciepła	116
4. Konwekcja wymuszona	129
5. Konwekcja swobodna	155
6. Przejmowanie ciepła przy wrzeniu cieczy	160
7. Przejmowanie ciepła przy skraplaniu par	177
8. Pewne zagadnienia obliczeniowe przejmowania ciepła	189
VI. PROMIENIOWANIE CIEPŁA	203
1. Bierne właściwości radiacyjne	204
2. Emisja ciała doskonale czarnego	207
3. Emisja ciał szarych	210
4. Kierunkowość emisji	215
5. Przenoszenie ciepła między powierzchniami szarymi	218
6. Selektywne promieniowanie gazów	226
VII. PRZENOSZENIE SUBSTANCJI I CIEPŁA	237
1. Dyfuzja molekularna (drobinowa)	238
2. Dyfuzja molarna (konwektywne przenoszenie substancji)	243
3. Równoczesne przenoszenie ciepła i substancji między powietrzem i wodą	251
4. Dyfuzyjne wymienniki ciepła	258

VIII. NIEUSTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA	265
1. Rozwiązanie analityczne.....	266
2. Obliczenia praktyczne.....	272
3. Okresowo zmienna temperatura powierzchni.....	275
4. Metoda różnic skończonych.....	279
5. Regeneracyjne wymienniki ciepła.....	286
IX DWUWYMIAROWE USTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA	293
1. Rozwiązanie analityczne.....	293
2. Rozwiązanie numeryczne.....	293
3. Rozwiązanie graficzne.....	297
4. Rozwiązanie analogowo-doświadczalne.....	301
ZAŁĄCZNIKI: Tablice właściwości fizycznych.....	304
DODATEK: Tok postępowania przy projektowaniu przeponowego wymiennika ciepła.....	323

PRZEDMOWA

Non scholae sed vitae discimus*)
Lucius A. Seneca

Treścią niniejszego skryptu jest, zgodnie zresztą z obowiązującym programem nauczania, teoria przenoszenia energii cieplnej w zastosowaniu do zagadnień występujących w pracy zawodowej inżyniera mechanika. Przy jego opracowaniu autor postawił sobie dwa cele: umożliwienie Studiującemu zrozumienia występujących zjawisk oraz nabycie przezeń umiejętności ilościowego przewidywania przebiegu tych zjawisk. Celom tym podporządkowano sposób prezentacji i podział materiału. Materiał podzielono na dwie partie.

W pierwszej podaje się podstawowe pojęcia, prawa i wyprowadzone z nich równania pola temperatury, aby zająć się następnie bardziej szczegółowo ustalonym przewodzeniem ciepła w przegrodach oraz żebrach i prętach prostych. To umożliwia przejście do jednolitej prezentacji przenikania ciepła przez przegrody gładkie i żebrowane - podstawowego procesu w omawianej następnie teorii przepływów wymienników ciepła. Tak więc przerobienie tego materiału daje Studiującemu oprócz znajomości teorii znaczną porcję wiedzy użytkowej, dzięki której może On posiadać umiejętność rozwiązywania wielu zagadnień technicznych - pod warunkiem, że współczynniki przejmowania ciepła będą Mu dane. Sytuacja taka dość często występuje w praktyce inżynierskiej.

Drużga partia poświęcona jest analizie konwekcyjnego i promieniowego przenoszenia ciepła oraz równoczesnego przenoszenia substancji i ciepła i ma poza celem teoretyczno-poznawczym doprowadzić do opanowania umiejętności wyznaczania rzeczonych współczynników przejmowania ciepła. Zagadnienia i metody są w tej partii dość zróżnicowane, a uzyskiwane wyniki nie zawsze są wystarczające dla potrzeb inżynierskich.

Tak więc poza prezentowanymi w tym wykładzie ujęciami ogólniejszymi, służącymi przede wszystkim zrozumieniu zjawisk i stosowanych metod, konieczne będzie w szeregu przypadków praktycznych sięgnięcie do wzorów i wskazówek empirycznych, stosowanych i ważnych jedynie w określonej dziedzinie czy aparaturze. Tym bardziej że zjawiska bywają często bardziej złożone, niż to można przedstawić w ograniczonym do podstaw wykładzie.

Zagadnienia związane z nieustalonym przewodzeniem ciepła umieszczono w odrębnej, ostatniej części skryptu - w zastosowaniach praktycznych stanowią bowiem oddzielną dziedzinę.

Dla ułatwienia samodzielnego przyswajania sobie materiału zaopatrzone poszczególne rozdziały w przykłady liczbowe, ćwiczenia z wynikami liczbowymi a także w streszczenia poszczególnych rozdziałów, a w załącznikach podano tablice właściwości fizycznych najważniejszych substancji.

Autor

Gdańsk, w czerwcu 1979 r.

*) Uczymy się nie dla szkoły, lecz dla życia

Przedmowa do II wydania

Przygotowując drugie wydanie poprawiono wszelkie zauważone niedostatki pierwszego, a ponadto wzbogacono skrypt o syntetycznie ujęty podrozdział poświęcony analogii hydromechaniczno-termicznej. Poza tym wprowadzono kilka nowych rysunków i tablic dla lepszego zilustrowania tekstu i wymieniono na nowsze kilka wykresów użytkowych zapewniając tym samym pełne przestrzeganie jednostek układu SI.

W nadziei, że skrypt w obecnej postaci dobrze będzie służył Studiującym oddaje go w Ich ręce

Autor

Gdańsk, w sierpniu 1982 r.

Przedmowa do III wydania

Przygotowując trzecie wydanie poprawiono wykryte w poprzednim błędy, dokonano niezbędnych aktualizacji i wprowadzono pewne zmiany i uzupełnienia tekstu wynikające z zebranego doświadczenia dydaktycznego.

Autor

Gdańsk, w grudniu 1986 r.

Przedmowa do IV wydania – cyfrowego

Niniejsze, czwarte wydanie ukazuje się w ramach Biblioteki Cyfrowej Politechniki Gdańskiej i jest dostępne Czytelnikom w Internecie. Jest to powtórzenie, sprawdzonej w praktyce dydaktycznej, treści wydania trzeciego, ale z niezbędnymi korektami. Upływ czasu w niczym nie zmniejszył walorów dydaktycznych tego podręcznika, czyli możliwości poznania i zrozumienia zjawisk przenoszenia ciepła wraz z ich opisem matematycznym, a przez to przyswojenia przez Studiującego umiejętności obliczania i predykcji wielkości występujących w tych zjawiskach.

Aktualizacji wymagały niektóre dane liczbowe. Ponadto wprowadzono w wielu miejscach zmiany redakcyjne dla ułatwienia percepcji tekstu. Natomiast zachowano, stosowane dawniej w termodynamice, kontynentalne oznaczenie entalpii, za pomocą litery „i”, zamiast używanej dziś powszechnie, a wziętej z piśmiennictwa anglosaskiego, litery „h”. Wprowadzenie zmiany tego oznaczenia na „h”, aczkolwiek pożądane, stwarzało jednak zbyt duże trudności przy digitalizacji wzorów i rysunków. Rzeczą dotyczy głównie powietrza wilgotnego w części VII i incydentalnych przypadków w pozostałym tekście. Nie powinno to jednak sprawić trudności w przyswajaniu zaprezentowanego materiału. Te same przyczyny spowodowały, że pozostawiono bez zmian wyniki zadań i przykładów obliczeniowych. Otrzymało je swego czasu z obliczeń na suwaku logarytmicznym. Jednak powtórne przeliczenie ich współczesnym kalkulatorem daje niewielkie rozbieżności, są one - jak na technikę cieplną - pomijalnie małe.

Autor

Gdańsk, w maju 2008 r.

Przedmowa do drugiego wydania cyfrowego

Do niniejszego wydania wprowadzono poprawioną grafikę w pozostałych nielicznych rysunkach i w bardzo wielu wzorach. Dokonano również szeregu niezbędnych zmian werbalnych w tekście.

Autor

Gdańsk, w kwietniu 2012 r.

I. PODSTAWOWE POJĘCIA I ZALEŻNOŚCI

1. PODSTAWOWE POJĘCIA

Wykład z „Przenoszenia ciepła” obejmuje podstawowe koncepcje teoretyczne i metody rozwiązywania zagadnień przenoszenia energii cieplnej potrzebnych w pracy inżyniera mechanika.

Ciepło jest to energia cieplna (tj. energia kinetyczna i potencjalna mikrocząstek) przenoszona stosownie do II Zasady Termodynamiki samorzutnie od jednego ciała do drugiego w kierunku (i na skutek) spadku temperatury*).

Jak z tego wynika, przenoszenie energii cieplnej jest procesem jednokierunkowym i dlatego odchodzi się od tradycyjnej nazwy tej dyscypliny: „wymiana ciepła”, która sugeruje działanie dwukierunkowe (wymiana ciepła na „zimno”). Na przykład w języku angielskim zamiast "heat exchange" używa się obecnie terminu: "heat transfer", w rosyjskim zamiast „tepłooobmen” jest „tepłoperenos” lub „tepłoperedacza”, w niemieckim w miejsce „Warmeustausch” jest „Wärmeübertragung” itd. Natomiast określenie: „Wymienik ciepła” zachowuje żywotność i jest powszechnie używany dla określenia aparatu służącego do przenoszenia ciepła między dwoma płynami. Dotyczy to również języków obcych: angielski "heat exchanger", rosyjski „tepłooobmennik”, niemiecki „Wärmeaustauscher” (ale również ściślej: Wärmeübertrager).

Pole temperatury jest obszarem, w którym każdemu punktowi przypisano określoną wartość temperatury. Pole temperatury określone jest funkcją współrzędnych i czasu, czyli

$$t = f(x, y, z, \tau) \quad (1.1)$$

w prostokątnym układzie współrzędnych,

lub

$$t = f(r, \varphi, z, \tau) \quad (1.1a)$$

w cylindrycznym układzie współrzędnych (układ kulisty stosowany jest bardzo rzadko).

Wyróżnia się pole stacjonarne lub ustalone, kiedy temperatura nie zależy od czasu τ i jest określona przez funkcję samych tylko współrzędnych przestrzennych:

$$t = f(x, y, z) \quad \text{lub} \quad t = f(r, \varphi, z)$$

oraz pole niestacjonarne lub nieustalone, kiedy temperatura zależy też od czasu τ i jest określona funkcjami (1.1) lub (1.1a).

*) Ściśle biorąc przenoszenie energii cieplnej może być spowodowane jeszcze innymi przyczynami: różnicą potencjałów elektrycznych lub różnicą stężeń składników. Zjawiska te mają jednak małe znaczenie techniczne i nie będą rozpatrywane w niniejszym podręczniku.

Ponadto pola mogą być trójwymiarowe, kiedy temperatura zależy od 3 współrzędnych, dwuwymiarowe, kiedy zależy od 2 współrzędnych lub jednowymiarowe, gdy zależy tylko od 1 współrzędnej.

Pola dwuwymiarowe mogą być płaskie, gdy są określone funkcją:
 $t = f(x, y, \tau)$

lub osiowo - symetryczne, kiedy opisuje je funkcja:

$$t = f(r, z, \tau).$$

Powierzchnie izotermiczne powstają przez połączenie punktów o jednakowej wartości temperatury, Ślady przecięcia powierzchni izotermicznych z płaszczyzną (np. rysunku) stanowią **linie izotermiczne**, czyli izotermy.

Celem określenia zmienności temperatury w przestrzeni należy wyznaczyć odległość między dwiema powierzchniami izotermicznymi. Jest nią odcinek Δn na normalnej w stosunku do powierzchni (rys. 1.1). Skoro odległości Δn odpowiada przyrost temperatury Δt , to miarą zmienności temperatury jest:

$$\lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta n} = \frac{\partial t}{\partial n} = \text{grad } t = \nabla t \left[\frac{\text{K}}{\text{m}} \right] \quad (1.2)$$

Gradient temperatury ($\text{grad } t$ lub ∇t) jest wektorem o module określonym wzorem (1.2), leżącym na normalnej do powierzchni izotermicznej w danym punkcie i o zwrocie dodatnim, gdy zwrócony jest w kierunku wzrastającej temperatury. Określa on lokalny wzrost temperatury w przestrzeni.

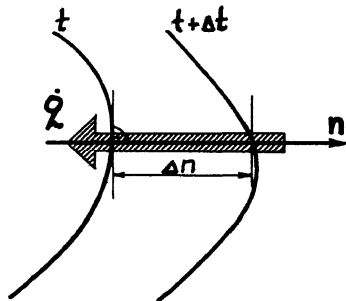
Operator Hamiltona (nabla) czyli ∇ jest wyrażony w prostokątnym układzie współrzędnych wzorem:

$$\nabla = \vec{i} \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial}{\partial z}$$

a w układzie współrzędnych cylindrycznych:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \vec{e}_z$$

Operator ten zastosowany do wielkości skalarnej (jaką jest temperatura) daje wektor gradientu tej temperatury, natomiast zastosowanie go do wektora (np. prędkości) daje skalar, jakim jest dywergencja (tej prędkości).



Rys.1.1 Ilustracja gradientu temperatury

Strumień ciepła \dot{Q} [W] jest ilością energii cieplnej przenoszonej poprzez pewną powierzchnię kontrolną A [m²] prostopadłą do tego strumienia.

Gęstość strumienia cieplnego \dot{q} [W/m²] albo jednostkowy strumień cieplny jest stosunkiem strumienia cieplnego do pola powierzchni kontrolnej:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} \quad [\text{W/m}^2] \quad (1.3)$$

2. SPOSOBY I PRAWA PRZENOSZENIA CIEPŁA

2.1. Przewodzenie ciepła

Przewodzeniem ciepła nazywamy proces przenoszenia energii cieplnej przez cząsteczki nie podlegające przemieszczeniom makroskopowym.

Występuje ono jako jedyny mechanizm tylko w ciałach stałych, a w płynach (cieczach i gazach) tylko w określonych warunkach.

Podstawowa zależność dla tego zjawiska została sformułowana przez Fouriera* (1822 r.):

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \text{grad}t = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial n} = -\lambda \cdot \nabla t \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (1.4)$$

Jednostkowy strumień cieplny jest proporcjonalny do gradientu temperatury i jako wektor, zwrócony w kierunku s p a d k u temperatury, jest skierowany przeciwnie do wektora gradientu (stąd znak minus we wzorze).

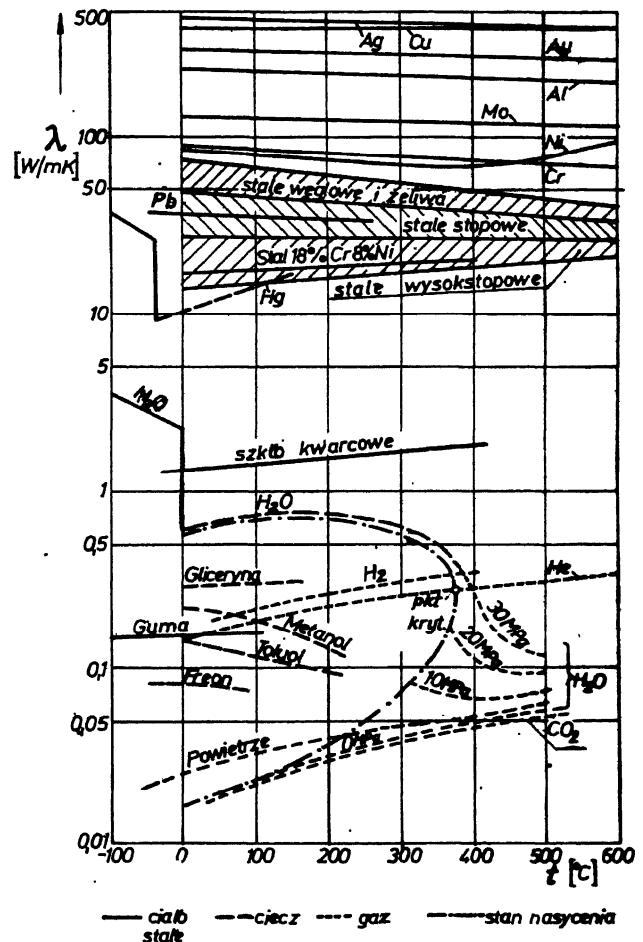
Współczynnik proporcjonalności λ [W/m·K] nazywa się **współczynnikiem przewodzenia ciepła** i zależy od struktury wewnętrznej substancji, jej gęstości i temperatury.

Przykładowe wartości tego współczynnika podaje tab.1, a jego zmienność z temperaturą pokazuje rys.1.2 obok.

Dla większości substancji stałych zależność ta jest liniowa:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot (1 + b \cdot t) \quad (1.5)$$

a wielkość b jest stała.



Rys.1.2 Zmienność przewodności cieplnej z temperaturą

*) Jean Baptiste, Joseph Fourier (1768 – 1830) - matematyk i fizyk francuski.

Orientacyjne wartości współczynnika przewodzenia ciepła λ w temperaturach 0...20°C

Rodzaj substancji	λ [W/mK]
<u>Metale</u> czyste	35 ... 419
stal węglowa, żeliwo	40 ... 60
<u>Kamienie</u> naturalne: granit, bazalt, wapień, marmur, piaskowiec	1,5 ... 3,5
<u>Materiały budowlane</u> : betony, cegły, szkła, porcelany, glina, ziemia	0,4 ... 1,5
<u>Tworzywa</u> sztuczne, drewno, skóra, guma, żywice naturalne	0,1 ... 0,4
<u>Materiały termoizolacyjne</u>	0,03 ... 0,1
<u>Ciecze</u> : woda i wodne roztwory różnych soli, amoniak, olej, mazut, benzyna, nafta, smoła, alkohole, dwutlenek węgla, dwutlenek siarki, chlorek metylu	0,1 ... 0,07
Freony ciekłe	0,6 ... 0,10
<u>Gazy i pary</u> : powietrze, azot, tlen, dwutlenek węgla, para wodna, para amoniaku, pary alkoholi	0,015 ... 0,025
Pary freonów i dwutlenku siarki	0,005 ... 0,015
Hel i wodór	0,15 i 0,18 ÷ 0,22

1.2 Konwekcja i przejmowanie ciepła

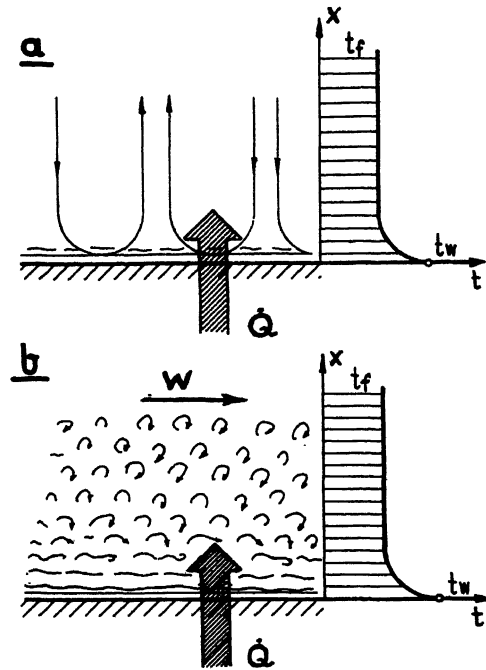
Konwekcja polega na makroskopowym przemieszczaniu się zgrupowań cząstek (porcji płynu) a wraz z nimi energii cieplnej tych cząstek. Występuje ona w płynach, czyli w cieczech i gazach.

Przejmowanie (też: **wnikanie**) **ciepła** to przenoszenie energii cieplnej od ścianki o temperaturze t_w do wnętrza płynu o temperaturze t_f lub na odwrót.

Konwekcja stanowi zasadniczą treść przejmowania ciepła, ale przy ściance, gdzie ruch konwekcyjny zanika, ma miejsce przede wszystkim przewodzenie ciepła przez warstwę płynu. Przewodzenie między cząstkami płynu towarzyszy zresztą konwekcji panującej w całej objętości płynu, jednak poza obszarem bezpośrednio przyściennym konwekcyjne przenoszenie energii cieplnej przewyższa wielokrotnie przenoszenie przewodnościowe i jest mechanizmem dominującym. Przejmowanie ciepła jest więc pojęciem szerszym od konwekcji chociaż obydwa terminy bywają używane zamiennie.

Rozróżnia się konwekcję swobodną (naturalną), w której wewnętrzny ruch płynu wywołany jest siłą wyporu (zdeteminowaną przez różnicę temperatur: ścianki i wnętrza płynu) oraz konwekcję wymuszoną, w której wewnętrzne ruchy płynu wywołane są przez ogólny przepływ płynu.

Rys. 1.2 Prądy konwekcyjne: ▶
 a) konwekcja swobodna,
 b) konwekcja wymuszona



Obydwa rodzaje przyjmowania ciepła podlegają prawu Newtona* (1701 r.):

$$\dot{q} = \alpha \cdot (t_w - t_f) \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (1.6)$$

gdzie: α [$W/m^2 \cdot K$] - to **współczynnik przyjmowania ciepła****.

Tablica 2

Orientacyjne wartości
 współczynnika przyjmowania ciepła α

Rodzaj konwekcji	α [$W/m^2 \cdot K$]
<u>Konwekcja swobodna</u>	
gazy i pary (przegrzane)	3 ... 20
ciecze:	
o dużej lepkości - np. oleje	50 ... 100
o małej lepkości - np. woda	250 ... 600
<u>Konwekcja wymuszona</u>	
gazy pary (przegrzane)	10 ... 150
ciecze	
o dużej lepkości - np. oleje	50 ... 600
o małej lepkości - np. woda	500 ... 10 000
ciepłe metale	3 000 ... 100 000
<u>Wrzenie</u>	
cieczy organicznych	500 ... 2 500
wody	1000 ... 50 000
<u>Skraplanie</u>	
par organicznych	500 ... 2 500
pary wodnej	1000 ... 15 000

*) Isaac Newton (1643 – 1727) - matematyk, fizyk i astronom angielski.

***) Obecnie spotyka się również oznaczenie tego współczynnika przez: h [$W/m^2 \cdot K$], jak pierwotnie tylko w literaturze anglo-saskiej. Dzieje się tak np. w normach PN-EN dotyczących obliczeń cieplnych budynków.

Dla warstewki płynu bezpośrednio przy ścianie obowiązuje prawo Fouriera (1.4) - w warstwie tej energia cieplna przenoszona jest (w kierunku do ścianki prostopadłym) jedynie przez przewodzenie.

Łącząc wzór (1.4) ze wzorem wyrażającym prawo Newtona (1.6) otrzymuje się wyrażenie:

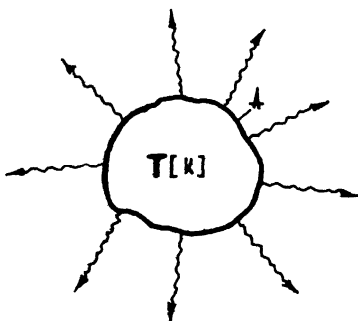
$$\alpha = \frac{\left(-\frac{\partial t}{\partial n}\right)_w}{t_w - t_f} \cdot \lambda \quad (1.7)$$

Jak widać, wartość współczynnika przejmowania ciepła α zależy od przewodności cieplnej płynu (λ) oraz od rozkładu temperatury w płynie, zwłaszcza przy ścianie. Na rozkład ten wpływają bardzo silnie warunki przepływu płynu - wyjaśnia to różnice w wartościach współczynnika przejmowania ciepła α dla tego samego płynu w tab. 2.

2.3. Promieniowanie ciepła

Promieniowanie ciepła polega na przenoszeniu energii za pośrednictwem fal elektromagnetycznych wszystkich długości, przede wszystkim jednak fal o długościach: 0,8...400 μm czyli tzw. fal podczerwonych. Proces ten zachodzi między powierzchniami ciał stałych i cieczy poprzez ciała gazowe i próżnię.

Ilość energii cieplnej wypromieniowanej przez jednostkę powierzchni ciała stałego lub cieczy o temperaturze T [K] i powierzchni A [m^2] określona jest wzorem otrzymanym doświadczalnie przez Stefana* (1879), a potem wyprowadzonym teoretycznie przez Boltzmana* (1884):



$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = C \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right] \quad (1.8)$$

Rys.1.4 Promieniowanie ciepła z ciała o temperaturze T [K]

gdzie: $C = C_0 \cdot \varepsilon = 5,677 \cdot \varepsilon$ [$\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4$]

jest stałą promieniowania wynoszącą dla tzw. ciała doskonale czarnego:

$$C = C_0 = 5,667 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4$$

Wielkość: $\varepsilon < 1$ jest to tzw. **stopień czarności** zależny od rodzaju ciała, stanu jego powierzchni i temperatury. Orientacyjne wartości ε podaje tab.3.

Gdy dwa ciała o temperaturach T_1 [K] i T_2 [K] znajdują się w pobliżu siebie, to część (ew. całość) emisji każdego z nich trafi do ciała drugiego. Będzie to więc proces dwukierunkowego przesyłu energii.

*) Josef Stefan (1835 – 1893) - fizyk austriacki.

Ludwig, Eduard Boltzmann (1844 – 1906) - fizyk austriacki.

Wskutek różnicy między temperaturami $T_1 > T_2$ emisja ciała (1) przeważa i ilość energii przeniesionej od (1) do (2) oblicza się wzorem:

$$\dot{Q} = C_{1-2} \cdot A_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad [\text{W}] \quad (1.9)$$

w którym C_{1-2} jest stałą promieniowania układu ciał (1) i (2) zależną głównie od ich wzajemnego położenia w przestrzeni.

Tablica 3
Orientacyjne wartości stopnia czarności ε

Substancja	t °C	ε
Polerowane metale	0 ... 200	0,02...0,07
Stal i żeliwo obrobione wiórowe	0 ... 200	0,24...0,45
Stal i żeliwo pokryte rdzą	0 ... 200	ok. 0,80
Cegła czerwona	0 ... 200	0,93...0,95
Papa dachowa	0 ... 200	0,91
Szkło gładkie	0 ... 200	0,95
Farby i lakiery różnych barw	0 ... 100	0,85...0,95
Farba aluminiowa	0 ... 100	0,24...0,60
Błacha stalowa ocynkowana błyszcząca i utleniona (szara)	0 ... 100	0,21...0,28
Lód i woda	0 ... 40	0,92 i 0,96
Szron i sadza	0 ... 100	0,98...0,99

2.4 Równoczesne przejmowanie i promieniowanie ciepła

W większości przypadków technicznych powierzchnia ciała stałego (lub cieczy) oddając przykładowo energię cieplną do chłodniejszego otoczenia czyni to na drodze:

- przejmowania przez otaczający gaz,
- promieniowania poprzez otaczający gaz (przeważnie powietrze) do ciał otaczających tę powierzchnię.

Ma to szczególne znaczenie przy określaniu strat cieplnych na rzecz otoczenia oraz przy nagrzewaniu ciał przez otaczający ośrodek.

Wówczas dogodnie jest posługiwać się tzw. **radiacyjnym współczynnikiem przejmowania ciepła**:

$$\alpha_r = C_{1-2} \cdot \frac{\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4}{t_1 - t_2} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \right] \quad (1.10)$$

który dodany do współczynnika konwekcyjnego α pozwala obliczyć całkowite ciepło oddane przez powierzchnię równaniem typu (1.6):

$$\dot{Q} = (\alpha + \alpha_r) \cdot A (t_1 - t_2) = \alpha_c \cdot A (t_1 - t_2)$$

Temperatura t_2 musi tu oczywiście być jednakowa dla otaczających powierzchnię ciał i powietrza. Wielkość α_c jest tzw. **całkowitym współczynnikiem przejmowania ciepła**.

3. RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE POLA TEMPERATURY

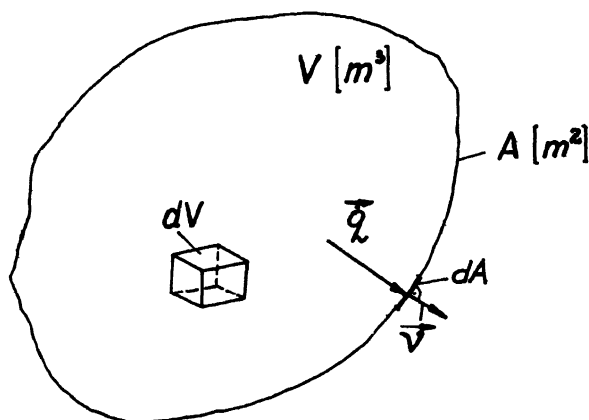
3.1. Równanie Fouriera - Kirchhoffa

Do analizy zagadnień przenoszenia, ciepła potrzebne jest ogólne równanie różniczkowe pola temperatury dla ciała jednorodnego. Scałkowanie tego równania dla określonych warunków pozwoli wyznaczyć funkcję wyrażającą rozkład przestrzenny temperatury w dowolnej chwili.

W tym celu bierze się pod uwagę ciało jednorodne o dowolnej konsystencji (stałej, ciekłej lub lotnej) o objętości V [m^3] i zamykającej ciało powierzchni zewnętrznej A [m^2]. Zachodzący w tym ciele proces energetyczny rozpatruje się w elementarnie krótkim czasie $d\tau$.

Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki ciepło dQ doprowadzone do tego ciała równe jest sumie przyrostu entalpii ciała dI i elementarnej pracy technicznej dL_t wykonanej przez substancję tego ciała:

$$dQ = dI + dL_t \quad (1.11)$$



Rys.1.5 Schemat do wyprowadzenia równania różniczkowego pola temperatury

Rozpatrzmy szczegółowo poszczególne człony tego równania bilansowego.

Elementarne ciepło doprowadzone (a więc dodatnie) dQ jest różnicą między ciepłem wytworzonym w ciele kosztem innego rodzaju energii w tzw. źródłach ciepła dQ_{zr} oraz ciepłem wyprowadzonym przez granicę ciała do otaczającego ośrodka dQ_w :

$$dQ = dQ_{zr} - |dQ_w| \quad (1.12)$$

Źródła ciepła wytwarzają energię cieplną kosztem, na przykład:

- energii mechanicznej - wskutek tarcia wewnętrznego substancji,
- energii chemicznej spalane go paliwa (lub innego procesu chemicznego),
- energii elektrycznej tracone j na rezystorach (tzw. ciepło Joule'a),
- energii jądrowej procesów zachodzących w reaktorach jądrowych.

Ilość wydzielanego ciepła w jednostce czasu określona jest przez natężenie źródeł ciepła: \dot{q}_v [W/m³] zależne, ogólnie biorąc, od miejsca i czasu.

W elementarnej objętości ciała dV [m³] wydziela się w czasie $d\tau$ [s] ilość ciepła wynosząca:

$$d^2Q_{\dot{z}r} = \dot{q}_v \cdot dV \cdot d\tau \quad [J] \quad (1.13)$$

a strumień ciepła dopływającego z źródeł wewnętrznych wynosi (dla pewnej chwili τ):

$$d\dot{Q}_{\dot{z}r} = \frac{d^2Q_{\dot{z}r}}{d\tau} = \dot{q}_v \cdot dV \quad [W] \quad (1.14)$$

Strumień dopływającego z źródeł wewnętrznych ciepła do całego ciała o objętości V [m³] otrzymuje się po scałkowaniu (1.14):

$$\dot{Q}_{\dot{z}r}(\tau) = \frac{dQ_{\dot{z}r}}{d\tau} = \int_V d\dot{Q}_{\dot{z}r} = \int_V \dot{q}_v \cdot dV \quad [W] \quad (1.15)$$

Tak więc w elementarnie krótkim czasie $d\tau$ dopływa z źródeł wewnętrznych do całego ciała ciepło:

$$dQ_{\dot{z}r} = d\tau \cdot \int_V \dot{q}_v \cdot dV \quad [J] \quad (1.16)$$

Ciepło wyprowadzane na zewnątrz charakteryzuje lokalna wartość gęstości strumienia ciepłego:

$$\dot{q}_w = \frac{d\dot{Q}_w}{dA} = \frac{d}{dA} \left(\frac{dQ_w}{d\tau} \right) = \frac{d^2Q_w}{dA \cdot d\tau} \quad [W] \quad (1.17)$$

będąca, w ogólnym przypadku, zmienną zależną od miejsca i czasu.

Zatem elementarny, bo dla powierzchni dA [m²], wyprowadzany strumień cieplny wynosi (w pewnej chwili τ):

$$d\dot{Q}_w = \frac{d^2Q_w}{d\tau} = \dot{q}_w \cdot dA \quad [W] \quad (1.18)$$

Gęstość strumienia ciepłego jest tu oczywiście określona przez gradient temperatury na granicy ciała ∇t , stosownie do prawa Fouriera (1.4):

$$\dot{q}_w = -\lambda \cdot \nabla t \quad \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (1.19)$$

Zależność (1.18) można też przedstawić w zapisie wektorowym jako iloczyn skalarny:

$$d\dot{Q}_w = \vec{q}_w \cdot \vec{dA} \quad [W] \quad (1.20)$$

w którym wektor elementu powierzchniowego:

$$\vec{dA} = \vec{\nu} \cdot dA \quad [\text{m}^2]$$

wyrażony jest przy pomocy wektora $\vec{\nu}$ normalnego względem tego elementu powierzchniowego.

Chwilowa wartość strumienia ciepłego wyprowadzanego na całej powierzchni A [m^2] wynosi:

$$\dot{Q}_w(\tau) = \frac{dQ_w}{d\tau} = \int_A d\dot{Q}_w = \int_A \vec{q}_w \cdot \vec{dA} \quad [\text{W}] \quad (1.21)$$

W elementarnie krótkim czasie $d\tau$ przez całą powierzchnię A [m^2] wyprowadzane jest ciepło

$$dQ_w = d\tau \cdot \int_A \vec{q}_w \cdot \vec{dA} \quad [\text{J}] \quad (1.22)$$

Teraz można wrócić do wzoru (1.12) i podstawić do niego (1.16) i (1.22).

Otrzymuje się:

$$dQ = d\tau \left[\int_V \dot{q}_v \cdot dV - \int_A \vec{q}_w \cdot \vec{dA} \right] \quad [\text{J}] \quad (1.23)$$

Całkę powierzchniową w tym wyrażeniu można przy pomocy twierdzenia Gaussa zamienić na objętościową:

$$\int_A \vec{q}_w \cdot \vec{dA} = \int_V \text{div} \vec{q}_w \cdot dV = \int_V \nabla \vec{q}_w \cdot dV \quad [\text{W}] \quad (1.24)$$

Otrzymuje się wtedy zamiast (1.23) wyrażenie:

$$dQ = d\tau \int_V \left[\dot{q}_v - \nabla \vec{q} \right] dV \quad [\text{J}] \quad (1.25)$$

albo

$$dQ = d\tau \int_V \left[\dot{q}_v - \nabla \vec{q} \right] dV \quad [\text{J}] \quad (1.26)$$

Elementarny przyrost entalpii ciała dI wynika z ogólnego wzoru na przyrost jednostkowej entalpii:

$$di = c_p \cdot dt \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (1.27)$$

Element objętościowy dV zawiera substancję o masie:

$$dm = \rho \cdot dV \quad [\text{kg}] \quad (1.28)$$

Zatem przyrost entalpii tego elementu wynosi:

$$d^2I = dm \cdot di = c_p \cdot \rho \cdot dt \cdot dV \quad [\text{J}] \quad (1.29)$$

a przyrost entalpii całego ciała o objętości V:

$$dI = \int_V d^2I = \int_V c_p \cdot \rho \cdot dt \cdot dV \quad [J] \quad (1.30)$$

Elementarna praca techniczna określona jest przez elementarną zmianę ciśnienia. Ciśnienie jest ogólnie biorąc zmienne w całej objętości ciała V, ale biorąc pod uwagę jego zrównoważenie w każdym punkcie ciała, można je traktować jak parametr skalarny (tak jak temperaturę). Dla 1 kg substancji oblicza się elementarną pracę techniczną związaną z elementarną zmianą ciśnienia dP jako:

$$dl_t = -v \cdot dP \quad \left[\frac{J}{kg} \right] \quad (1.31)$$

Element objętościowy dV zawiera masę określoną wzorem (1.28). Zatem praca techniczna wykonana przez substancję zawartą w tym elemencie objętościowym:

$$d^2L_t = dm \cdot dl_t = -dP \cdot dV \quad [J] \quad (1.32)$$

bowiem:

$$v = \frac{1}{\rho}$$

Praca techniczna wykonana w czasie dt przez substancję zawartą w całym ciele o objętości V wynosi więc:

$$dL_t = - \int_V dP \cdot dV \quad [J] \quad (1.33)$$

Mając szczegółowe wyrażenia na dQ, dI i dL_t, tj. (1.26), (1.30) i (1.33) można je podstawić do równania bilansowego I zasady termodynamiki (1.11) i otrzymać następujące równanie

$$d\tau \cdot \int_V [\dot{q}_v - \nabla \vec{q}_w] dV = \int_V c_p \cdot \rho \cdot dt \cdot dV - \int_V dP \cdot dV \quad (1.34)$$

Równanie to dzieli się obustronnie przez dt i po połączeniu całek po prawej stronie otrzymuje się:

$$\int_V [\dot{q}_v - \nabla \vec{q}_w] dV = \int_V \left[c_p \cdot \rho \cdot \frac{dt}{d\tau} - \frac{dP}{d\tau} \right] dV \quad (1.35)$$

Jeżeli obie całki są sobie równe, to i funkcje podcałkowe są równe:

$$\dot{q}_v - \nabla \vec{q}_w = c_p \cdot \rho \cdot \frac{dt}{d\tau} - \frac{dP}{d\tau} \quad (1.36)$$

albo po drobnych przekształceniach:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} - \frac{1}{c_p \cdot \rho} \cdot \nabla \vec{q}_w + \frac{1}{c_p \cdot \rho} \cdot \frac{dP}{d\tau} \quad (1.37)$$

W równaniu tym występują pochodne dwu funkcji miejsca i czasu:

$$t = t(x, y, z, \tau) \quad \text{i} \quad P = P(x, y, z, \tau)$$

Różniczka zupełna, np. pierwszej z tych funkcji, wyraża się wzorem:

$$dt = \frac{\partial t}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial t}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot d\tau \quad (1.38)$$

Przez podzielenie obu stron przez $d\tau$ otrzymuje się pochodną temperatury względem czasu:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (1.39)$$

a że stosunek drogi (np. dx) do czasu jej przebycia ($d\tau$) jest wielkością składowej prędkości na odpowiednim kierunku (w_x) więc:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial x} \cdot w_x + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot w_y + \frac{\partial t}{\partial z} \cdot w_z + \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (1.40)$$

Pochodna tego rodzaju nazywa się p o c h o d n ą s u b s t a n c j a l n ą i dla wyróżnienia oznacza się ją symbolem: $\frac{D}{D\tau}$.

Wyraża ona zmiany danej wielkości (skalarnej lub wektorowej - tu temperatury) w poruszającym się płynie, obserwowane w elemencie objętościowym dV . Związana jest więc z substancją - stąd nazwa..

We wzorze (1.40) pierwsze 3 człony wyrażają zmianę temperatury wskutek zmiany położenia cząstki płynu poruszającej się z prędkością \vec{w} z punktu o współrzędnych: (x, y, z) do punktu: $(x + dx, y + dy, z + dz)$ w czasie:

$$d\tau = \frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z}$$

i jako całość nazywane są p o c h o d n ą k o n w e k c y j n ą .

Ostatni człon w (1.40) wyraża zmianę temperatury wskutek upływu czasu i stanowi tzw. p o c h o d n ą l o k a l n ą : $\frac{\partial t}{\partial \tau}$

Pochodną konwekcyjną można zapisać skrótowo w postaci iloczynu skalarnego: wektora prędkości \vec{w} i operatora nabra (Hamiltona) ∇ , który jest jednocześnie symbolicznym wektorem (gdy operuje na skalarze) i symbolem różniczkowania kierunkowego:

$$(\vec{w} \cdot \nabla)t = w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \quad (1.41)$$

Zatem:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{Dt}{D\tau} = (\vec{w} \cdot \nabla)t + \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (1.42)$$

Analogiczne zapisy uzyskuje się dla pochodnej ciśnienia względem czasu:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{DP}{D\tau} = w_x \cdot \frac{\partial P}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial P}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial \tau} = (\vec{w} \cdot \nabla)P + \frac{\partial P}{\partial \tau} \quad (1.43)$$

Wprowadzając do równania (1.37) wyrażenia: (1.19), (1.42) i (1.43) otrzymuje się tzw. równanie Fouriera - Kirchhoffa w postaci najogólniejszej:

$$\frac{Dt}{D\tau} = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + \frac{1}{c_p \cdot \rho} \cdot \nabla [\lambda(t) \cdot \nabla t] + \frac{1}{c_p \cdot \rho} \cdot \frac{DP}{D\tau} \quad (1.44)$$

Równanie to ma zastosowanie głównie do procesów izobarycznych tj. dla $P = \text{const}$ lub bardzo do tego zbliżonych i wówczas równanie Fouriera - Kirchhoffa ma postać ogólną:

albo:

$$\frac{Dt}{D\tau} = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + \frac{1}{c_p \cdot \rho} \cdot \nabla [\lambda(t) \cdot \nabla t] \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + (\vec{w} \cdot \nabla)t = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + \frac{1}{c_p \cdot \rho} \cdot \nabla [\lambda(t) \cdot \nabla t] \quad (1.46)$$

Bardzo często można założyć, że przewodność cieplna λ jest stała i równa wartości średniej w granicach temperatur występujących w zjawisku ($\lambda = \lambda_{sr}$). Otrzymuje się wówczas podstawową postać równania Fouriera - Kirchhoffa dla $\lambda = \text{const}$:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + (\vec{w} \cdot \nabla)t = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + a \cdot \nabla^2 t \quad (1.47)$$

Występuje w niej **współczynnik wyrównywania temperatury**, nazywany też **dyfuzywnością cieplną**:

$$a = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho} \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (1.48)$$

Równanie (1.47) jest niezależne od rodzaju układu współrzędnych.

W przypadku układu kartezjańskiego, tj. dla współrzędnych prostokątnych, przyjmuje postać następującą:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (1.49)$$

Jest to postać najczęściej stosowana, ale w miarę potrzeby można rozpisać równania (1.47) dla innych układów współrzędnych przy pomocy odpowiednich wyrażen na gradient ∇ i laplasjan ∇^2 .

3.2. Równanie Fouriera

Jeżeli ciało, dla którego wyprowadzono równanie Fouriera - Kirchhoffa, jest ciałem stałym, to nie ma w nim wewnętrznych ruchów substancji, czyli: $w_x = w_y = w_z = \vec{w} = 0$, a pochodna konwekcyjna w równaniu (1.46) i następnych ulega wyzerowaniu. Otrzymuje się tzw. r ó w n a n i e r ó ż -

*) Gustav, Robert Kirchhoff (1824 – 1887) - fizyk niemiecki.

niczkowe przewodzenia ciepła Fouriera w postaci ogólnej:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + \frac{1}{c_p \cdot \rho} \cdot \nabla [\lambda(t) \cdot \nabla t] \quad (1.50)$$

lub dla stałej przewodności cieplnej tj. dla $\lambda = \text{const}$:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + a \cdot \nabla^2 t \quad (1.51)$$

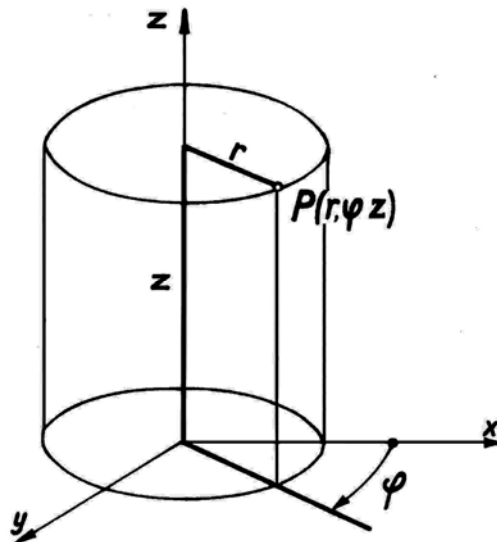
Obydwa równania (1.50) i (1.51) są niezależne od układu współrzędnych.

Dla prostokątnego układu współrzędnych otrzymuje się najbardziej rozpowszechnioną postać równania różniczkowego przewodnictwa:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (1.52)$$

W równaniu tym $\dot{q}_v = \dot{q}_v(x, y, z, \tau)$ jest znaną (i daną) funkcją przestrzenno - czasowego rozkładu źródeł ciepła.

W zagadnieniach technicznych często występuje jeszcze układ współrzędnych cylindrycznych i rzadziej układ współrzędnych sferycznych (kulistych). Znając postać laplasjanu dla odpowiedniego układu współrzędnych (z podręcznika matematyki) można z równania (1.51) bez trudu uzyskać potrzebny zapis rozwinięty równania Fouriera dla tego układu.



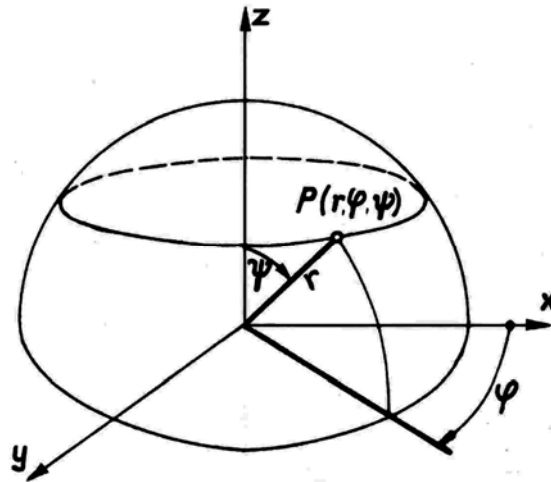
Rys.1.6 Współrzędne cylindryczne (walcowe)

Układ współrzędnych cylindrycznych określa położenie punktu przy pomocy kąta azymutu φ , długości promienia wodzącego r i wysokości z (rys. 1.6).

Równanie różniczkowe Fouriera w układzie cylindrycznym ma jedną z następujących dwu postaci:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + \frac{a}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + r \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] \quad (1.53)$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (1.54)$$



Rys.1.7 Współrzędne sferyczne (kuliste)

Układ współrzędnych sferycznych określa położenie punktu przy pomocy kątów: azymutu φ i biegunowego ψ oraz długości promienia wodzącego r (czasami zamiast kąta biegunowego ψ stosowane jest jego dopełnienie do kąta prostego zwane szerokością geograficzną).

Równanie różniczkowe Fouriera w tym układzie ma postać:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + \frac{a}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \psi} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \psi} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \cdot \frac{\partial t}{\partial \psi} \right) \right] \quad (1.55)$$

albo:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + a \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 (rt)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\sin \psi \cdot \frac{\partial t}{\partial \psi} \right) \right] \quad (1.56)$$

Do rozwiązania równania różniczkowego przewodnictwa (1.52) i znalezienia funkcji $t(x, y, z, \tau)$ potrzebna jest znajomość warunków początkowych i brzegowych.

Warunkiem początkowym jest rozkład temperatury w chwili początkowej, tj. dla $\tau = 0$, czyli: $t(x, y, z, 0) = t(x, y, z)$. Bardzo często jest jednak po prostu:

$$t(x, y, z) = t_0 = \text{const.}$$

Warunki brzegowe natomiast mogą być:

I. rodzaju (Dirichleta) - w postaci znanego rozkładu temperatury na granicy ciała w dowolnej chwili τ : $t_w(\tau)$.

- **II. rodzaju** (Neumanna) - w postaci znanego gradientu temperatury na granicy ciała w dowolnej chwili τ : $(\nabla t)_w(\tau)$, czyli znanej gęstości strumienia cieplnego na granicy ciała:

$$\dot{q}_w(\tau) = -\lambda \cdot (\nabla t)_w(\tau) \quad (1.57)$$

przy czym często jest:

$$\dot{q}_w(\tau) = \dot{q}_w = \text{const}$$

- **III. rodzaju** (Fouriera) - w postaci znanej temperatury ośrodka otaczającego rozpatrywane ciało: t_f i znanego współczynnika przejmowania ciepła na granicy ciała: $\alpha_c(x, y, z, \tau)$ - przy czym współczynnik ten, jako *coefficient*, obejmuje poza przejmowaniem również promieniowanie (jeżeli ono występuje). Zachodzi tu równość:

$$\alpha_c(t_w - t_f) = \dot{q}_w = -\lambda \cdot (\nabla t)_w$$

czyli

$$(\nabla t)_w = -\frac{\alpha_c}{\lambda} \cdot (t_w - t_f) \quad (1.58)$$

Stosunek: α_c/λ nazywany jest w matematyce „współczynnikiem wymiany ciepła”.

Równanie różniczkowe przewodnictwa (1.51) ulega w poszczególnych przypadkach redukcji przyjmując postacie znane w teorii równań różniczkowych cząstkowych:

Dla $\dot{q}_v = 0$ jest to paraboliczne równanie różniczkowe II. rzędu Fouriera:

$$a \cdot \nabla^2 t = \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (1.59)$$

jeżeli jeszcze $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ to jest to eliptyczne równanie różniczkowe II rzędu Laplace'a:

$$\nabla^2 t = 0 \quad (1.60)$$

Dla $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$, ale przy $\dot{q}_v \neq 0$, jest to eliptyczne równanie różniczkowe II rzędu Poissona:

$$\nabla^2 t = -\frac{\dot{q}_v}{\lambda} \quad (1.61)$$

przy czym \dot{q}_v musi być znaną funkcją albo liczbą.

Ponadto zamiast pełnego trójwymiarowego opisu można w wielu istotnych dla praktyki przypadkach ograniczyć się do 2 a często nawet do 1 tylko wymiaru. W tym ostatnim przypadku różniczkowe cząstkowe zmieniają się w zwyczajne i rozwiązaniu podlega równanie różniczkowe zwyczajne.

Streszczenie części pierwszej

Sprecyzowaliśmy podstawowe pojęcia nauki o przenoszeniu ciepła, takie jak ciepło, pole temperatury, powierzchnia izotermiczna, gradient temperatury, strumień ciepła i gęstość strumienia cieplnego.

Wskazaliśmy na istnienie kilku odmian pól temperatury, dokonując w ten sposób klasyfikacji zagadnień przenoszenia ciepła na ustalone i nieustalone oraz jedno i wielowymiarowe.

Dokonałiśmy przeglądu sposobów transportu energii cieplnej ze zwróceniem uwagi na to, w jakich ciałach występują oraz jakim prawom podlegają.

Mamy następujące prawa:

Fouriera dla przewodzenia ciepła
Newtona dla przejmowania ciepła
Stefana - Boltzmanna dla promieniowania ciepła.

Wreszcie wprowadziliśmy tzw. radiacyjny współczynnik przejmowania ciepła, który pozwala włączyć promieniowanie ciepła towarzyszące przejmowaniu do prawa Newtona.

Wyprowadziliśmy równania różniczkowe pola temperatury: Fouriera – Kirchhoffa dla płynów (cieczy i gazów), w których poza przewodzeniem ciepła występują wewnętrzne ruchy substancji oraz Fouriera dla ciał stałych, w których ma miejsce tylko przewodzenie ciepła. Poznaliśmy nową właściwość materiałową w postaci współczynnika wyrównywania temperatury (dyfuzyjności cieplnej): a [m^2/s].

II. USTALONE, JEDNOWYMIAROWE PRZEWODZENIE CIEPŁA

Ogólnym równaniem różniczkowym ustalonego pola temperatury dla ciał stałych jest równanie (1.50), w którym pominięto pochodną względem czasu:

$$\dot{q}_V + \nabla (\lambda \cdot \nabla t) = 0 \quad (2.1)$$

Jego rozwiązaniem dla określonych warunków brzegowych jest rozkład temperatury w ciele. Znając ten rozkład można wyznaczyć gradient temperatury ∇t na powierzchni kontrolnej A , a tym samym gęstość strumienia ciepłego \dot{q} na tej powierzchni z prawa Fouriera (1.4) i w końcu cały strumień ciepły \dot{Q} przenoszony przez powierzchnię A .

Pomimo że ustalone pole temperatury jest, ogólnie biorąc, zmienne we wszystkich trzech kierunkach układu współrzędnych, dla szeregu przypadków o dużym znaczeniu technicznym wystarczy rozpatrywać prosty model jednowymiarowy. Dotyczy to ścian płaskich, cylindrycznych i kulistych bez źródeł ciepła (czyli przegród), takiego samego kształtu ciał z wewnętrznymi źródłami ciepła oraz prostych prętów i żeber.

1. PRZEWODZENIE CIEPŁA W PRZEGRODACH

Przegrody charakteryzują się tym, że nie ma w nich źródeł ciepła, a więc:

$$\dot{q}_V = 0$$

Tak więc równanie różniczkowe pola temperatury (2.1) ma dla nich postać ogólną:

$$\nabla (\lambda \cdot \nabla t) = 0 \quad (2.2)$$

1.1. Przegroda płaska

Zakłada się, że przewodność cieplna jest stała (niezależna od temperatury) i równa wartości średniej w granicach skrajnych temperatur na przegrodzie:

$$\lambda = \lambda_{sr} = \text{const}$$

Tak więc równanie (2.2) przyjmuje postać:

$$\nabla^2 t = 0 \quad (2.3)$$

a ze względu na jednowymiarowość zjawiska redukuje się do jeszcze prostszej postaci

$$\frac{d^2 t}{dx^2} = 0 \quad (2.4)$$

Po pierwszym całkowaniu jest:

$$\frac{dt}{dx} = C_1 \quad (2.5)$$

a po następnym otrzymuje się całkę ogólną:

$$t = C_1 x + C_2 \quad (2.6)$$

Stałe całkowania wyznacza się z warunków brzegowych, które sformułowane są dla obu izotermicznych powierzchni ograniczających (rys. 2.1) i są następujące:

$$\text{dla } x = 0 \text{ jest } t = t_{w1} \quad (2.7)$$

$$\text{dla } x = \delta \text{ jest } t = t_{w2} \quad (2.8)$$

przy czym zakłada się: $t_{w1} > t_{w2}$.

Z pierwszego warunku podstawionego do (2.6) otrzymuje się:

$$C_2 = t_{w1} \quad (2.9)$$

a z drugiego:

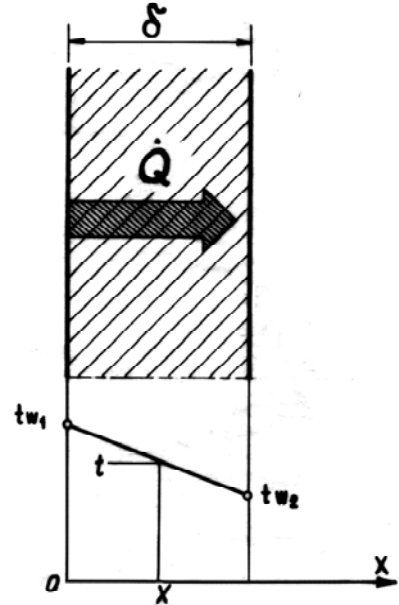
$$t_{w2} = \delta \cdot C_1 + t_{w1}$$

czyli:

$$C_1 = - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} \quad (2.10)$$

Tak więc całka szczególna równania (2.6) wyrażająca **rozkład temperatury** w przegrodzie ma postać:

$$t = - (t_{w1} - t_{w2}) \frac{x}{\delta} \quad (2.11)$$



Rys.2.1 Przewodzenie ciepła w przegrodzie płaskiej

albo:

$$t = t_{w1} - (t_{w1} - t_{w2}) \cdot \frac{x}{\delta} \quad (2.12)$$

albo:

$$t_{w1} - t = \Delta t = (t_{w1} - t_{w2}) \cdot \frac{x}{\delta} \quad (2.13)$$

Są to oczywiście równania prostej.

Przekształcenie wzoru (2.13) prowadzi do tzw. ujęcia bezwymiarowego:

$$\frac{t - t_{w2}}{t_{w1} - t_{w2}} \equiv \vartheta = 1 - \xi \equiv 1 - \frac{x}{\delta} \quad (2.14)$$

w którym bezwymiarowa temperatura ϑ zmienia się od $\vartheta = 1$ na lewej ścianie, gdzie $t = t_{w1}$, do wartości $\vartheta = 0$ dla $t = t_{w2}$ na ścianie prawej. Również współrzędna jest tu bezwymiarowa i zmienia się od 0 (dla $x = 0$) do 1 (dla $x = \delta$). W ujęciu bezwymiarowym wykres przebiegu temperatury jest identyczny dla wszystkich przegród płaskich: jest nim prosta nachylona pod kątem 45° względem osi $\xi = \frac{x}{\delta}$.

Gradient temperatury określony jest wzorami (2.5) i (2.10).
Wynosi on:

$$\nabla t = \frac{dt}{dx} = - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} \quad (2.15)$$

Strumień ciepły na powierzchni przegrody A_w [m²] otrzymuje się przy pomocy tego gradientu z prawa Fouriera:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A_w \cdot \nabla t = -\lambda \cdot A_w \cdot \left(- \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} \right)$$

i ostatecznie:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot A_w \cdot (t_{w1} - t_{w2}) \quad (2.16)$$

Wzór ten można przedstawić w nieco innym ujęciu:

$$\dot{Q} = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{\delta}{\lambda \cdot A_w}} = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{R_w} \quad (2.17)$$

Ujęcie to jest pod względem formalnym identyczne z prawem Ohma dla prądu stałego: spadek temperatury ($t_{w1} - t_{w2}$) odpowiada spadkowi potencjału elektrycznego, strumień ciepły \dot{Q} czyli natężenie przepływu energii cieplnej odpowiada natężeniu prądu, a wielkość R_w w mianowniku odpowiada oporowi elektrycznemu - jest więc oporem cieplnym.

Opór cieplny przegrody płaskiej wynosi więc:

$$R_w = \frac{\delta}{\lambda \cdot A_w} \left[\frac{K}{W} \right] \quad (2.18)$$

1.2. Przegroda płaska o zmiennej przewodności cieplnej

Zakłada się liniową zależność przewodności cieplnej z temperaturą według wzoru (1.5):

$$\lambda(t) = \lambda_0(1 + b \cdot t)$$

a temperatury na powierzchniach ograniczających tak jak poprzednio: $t_{w1} > t_{w2}$. Podstawienie przewodności do równania (2.2) daje dla przypadku jednokierunkowej tylko zmienności temperatury równanie:

$$\frac{d}{dx} \left[\lambda(t) \cdot \frac{dt}{dx} \right] = 0 \quad (2.19)$$

Po pierwszym całkowaniu jest:

$$\lambda_0 \cdot (1 + b \cdot t) \cdot \frac{dt}{dx} = C_1 \quad (2.20)$$

Rozdzielenie zmiennych:

$$\lambda_0 \cdot (1 + b \cdot t) \cdot dt = C_1 \cdot dx$$

umożliwia wyznaczenie całki ogólnej:

$$\lambda_0 \cdot \left(t + \frac{b}{2} \cdot t^2 \right) = C_1 \cdot x + C_2 \quad (2.21)$$

Z pierwszego warunku brzegowego sformułowanego dla lewej (izotermicznej) powierzchni ograniczającej:

$$\text{dla: } x = 0 \quad \text{jest: } t = t_{w1} \quad (2.21)$$

wynika po podstawieniu do (2.21):

$$\lambda_o \cdot (t_{w1} + \frac{b}{2} \cdot t_{w1}^2) = c_2 \quad (2.23)$$

albo:

$$c_2 = \lambda_o \cdot t_{w1} \cdot (1 + \frac{b}{2} \cdot t_{w1}) \quad (2.24)$$

Drugi warunek brzegowy:

$$\text{dla: } x = \delta \quad \text{jest: } t = t_{w2} \quad (2.25)$$

podstawiony do (2.21) wraz z (2.23) daje równanie:

$$\lambda_o \cdot (t + \frac{b}{2} \cdot t^2) = c_1 \cdot \delta + \lambda_o \cdot (t_{w1} + \frac{b}{2} \cdot t_{w1}^2) \quad (2.26)$$

które umożliwia wyznaczenie stałej w postaci:

$$c_1 = \frac{1}{\delta} \cdot [\lambda_o \cdot (t_{w2} + \frac{b}{2} \cdot t_{w2}^2) - \lambda_o \cdot (t_{w1} + \frac{b}{2} \cdot t_{w1}^2)] \quad (2.27)$$

albo po prostych przekształceniach:

$$c_1 = -\frac{\lambda_o}{\delta} \cdot (t_{w1} - t_{w2}) \cdot (1 + b \cdot \frac{t_{w1} + t_{w2}}{2}) \quad (2.28)$$

Jednak wobec:

$$\lambda_{\acute{s}r} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \lambda_o \cdot (1 + b \cdot \frac{t_{w1} + t_{w2}}{2}) \quad (2.29)$$

można ją wyrazić jako:

$$c_1 = -\frac{\lambda_{\acute{s}r}}{\delta} \cdot (t_{w1} - t_{w2}) \quad (2.30)$$

Po podstawieniu stałych według (2.30) i (2.24) do wyrażenia na całkę ogólną (2.21) otrzymuje się równanie **rozkładu temperatury**:

$$\begin{aligned} \lambda_o \cdot (t + \frac{b}{2} \cdot t^2) &= \\ &= -\frac{\lambda_{\acute{s}r}}{\delta} \cdot (t_{w1} - t_{w2}) \cdot x + \lambda_o \cdot t_{w1} \cdot (1 + \frac{b}{2} \cdot t_{w1}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Jest to równanie paraboli, które najlepiej przedstawić w postaci:

$$x = -A \cdot t^2 - Bt + C \quad (2.32)$$

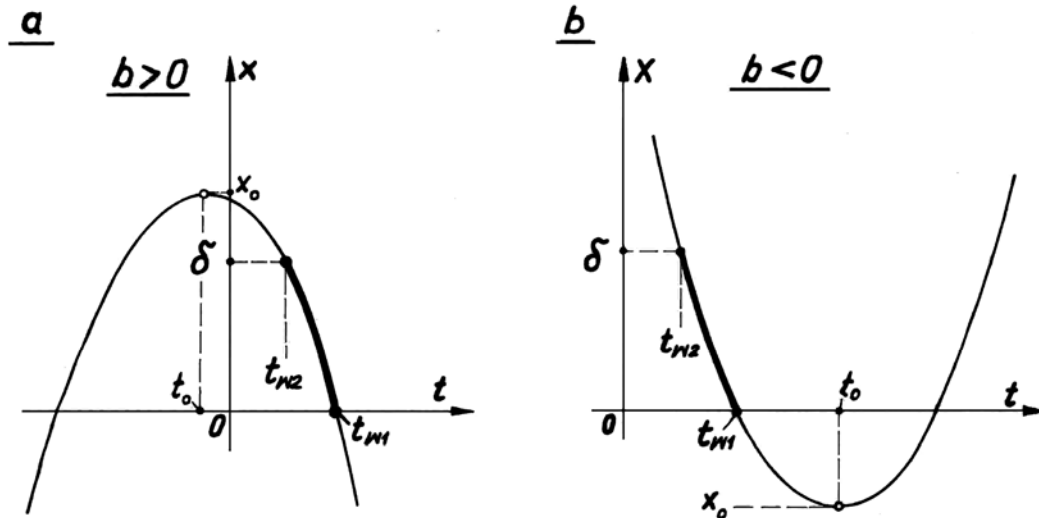
w której:

$$A = \frac{b \lambda_o}{2} \cdot \frac{\delta}{\lambda_{\acute{s}r} \cdot (t_{w1} - t_{w2})} \quad (2.33)$$

$$B = \frac{\delta \cdot \lambda_o}{\lambda_{\acute{s}r} \cdot (t_{w1} - t_{w2})} \quad (2.34)$$

$$c = \frac{\lambda_0}{\lambda_{sr}} \cdot \frac{\delta \left(1 + \frac{b}{2} t_{w1}\right) \cdot t_{w1}}{t_{w1} - t_{w2}} \quad (2.35)$$

W przypadku, gdy przewodność cieplna materiału przegrody rośnie z temperaturą, jest $b > 0$ i współczynnik \underline{A} jest dodatni, a równanie (2.32) przedstawia parabolę zwróconą wierzchołkiem do góry, o odciętej wierzchołku (t_0) ujemnej, a rzędnej (x_0) dodatniej - przebieg tej paraboli pokazuje rys.2.2a. Sens fizyczny ma tylko odcinek na prawej gałęzi w zakresie dodatnich $x = 0 \dots \delta$.



Rys.2.2 Przebieg krzywej $x(t)$ dla materiału:
 (a) o rosnącej z temperaturą przewodności cieplnej ($b > 0$),
 (b) o malejącej z temperaturą przewodności cieplnej ($b < 0$).

Gdy przewodność cieplna materiału przegrody maleje z temperaturą, to $b < 0$, a współczynnik \underline{A} jest ujemny i równanie (2.32) przedstawia parabolę zwróconą wierzchołkiem do dołu, o odciętej wierzchołku (t_0) dodatniej, a rzędnej (x_0) ujemnej (rys. 2.2b). Sens fizyczny ma tu tylko odcinek w zakresie $x = 0 \dots \delta$ na lewej gałęzi. Na prawej byłoby bowiem $t_{w2} > t_{w1}$ co przeczy założeniu

Rozkład temperatury w przegrodzie płaskiej jest więc odcinkiem paraboli zwróconym wypukłością do wyższych temperatur, gdy $b > 0$, albo do niższych temperatur, gdy $b < 0$ – tak jak pokazano na powyższym rysunku 2.3.

Strumień cieplny określa się z prawa Fouriera jako:

$$\dot{Q} = -\lambda(t) \cdot \frac{dt}{dx} \cdot A_w = -\lambda_0 \cdot (1 + bt) \cdot \frac{dt}{dx} \cdot A_w \quad (2.36)$$

Podstawiając tu (2.20), a następnie (2.30) otrzymuje się:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_{sr}}{\delta} \cdot A_w \cdot (t_{w1} - t_{w2}) \quad (2.37)$$

a więc wzór identyczny ze wzorem (2.16) dla przypadku stałej przewodności cieplnej.

Przy wykorzystaniu gęstości strumienia ciepłego \dot{q} , obliczonej ze wzoru (2.37), można uprościć zapis współczynników A, B i C równania (2.32). Otrzymuje się wtedy:

$$A = \frac{b \cdot \lambda_0}{2 \dot{q}}, \quad B = \frac{\lambda_0}{\dot{q}},$$

$$C = \frac{\lambda_0}{\dot{q}} \cdot \left(1 + \frac{b}{2} \cdot t_{w1}\right) \cdot t_{w1}$$

a samo równanie rozkładu temperatury ma wtedy postać:

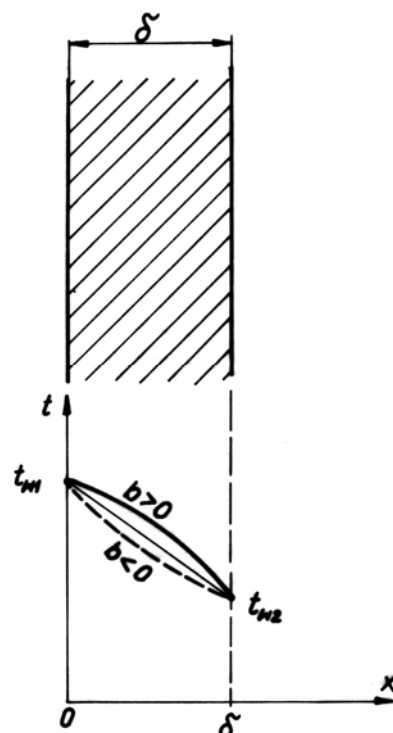
$$x = -\frac{b \cdot \lambda_0}{2 \dot{q}} \cdot t^2 - \frac{\lambda_0}{\dot{q}} \cdot t + \frac{\lambda_0}{\dot{q}} \cdot \left(1 + \frac{b}{2} \cdot t_{w1}\right) \cdot t_{w1} \quad (2.38)$$

albo:

$$x \cdot \frac{\dot{q}}{\lambda_0} = -\frac{b}{2} \cdot t^2 - t + \left(1 + \frac{b}{2} t_{w1}\right) \cdot t_{w1} \quad (2.39)$$

Rozwiązanie tego równania kwadratowego daje temperaturę w postaci rozwikłanej:

$$t = -\frac{1}{b} + \sqrt{\left(\frac{1}{b} + t_{w1}\right)^2 - \frac{2\dot{q} \cdot x}{\lambda_0 \cdot b}} \quad (2.39a)$$



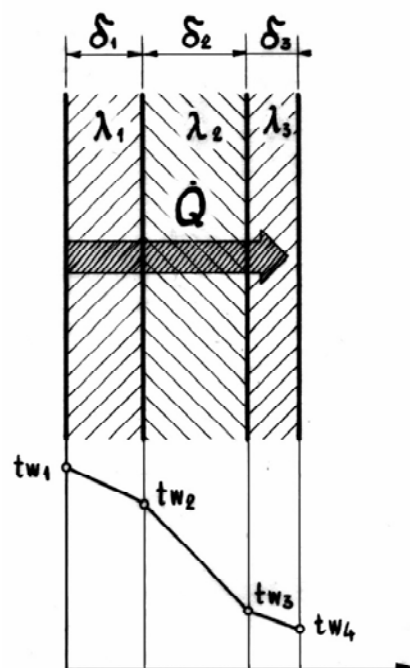
Rys.2.3 Rozkłady temperatury w ścianie płaskiej dla rosnącej ($b > 0$) i malejącej ($b < 0$) z temperaturą przewodności cieplnej

1.3. Wielowarstwowa przegroda płaska

Pod uwagę bierze się ściankę płaską mającą powierzchnię A_w [m^2] składającą się z kilku warstw o grubościach: $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ i współczynnikach przewodzenia ciepła: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ tak jak na rysunku obok

W każdej warstwie przewodzenie ciepła odbywa się w sposób podany w rozdziale 1.1, a strumień ciepły \dot{Q} [W] jest taki sam w każdej z tych warstw.

Gdyby tak nie było, rozkład temperatury musiałby ulegać zmianie wskutek gromadzenia się lub ubytku energii cieplnej w materiale ścianki. Byłby to więc przypadek niestacjonarny, co przeczy założeniu.



Rys.2.4 Przewodzenie ciepła w przegrodzie płaskiej wielowarstwowej ▶

Dla poszczególnych warstw mamy:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_1}{\delta_1} \cdot A_w \cdot (t_{w1} - t_{w2}) \quad \text{lub} \quad \frac{\dot{Q} \cdot \delta_1}{A_w \cdot \lambda_1} = t_{w1} - t_{w2} \quad (2.40)$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_2}{\delta_2} \cdot A_w \cdot (t_{w2} - t_{w3}) \quad \text{lub} \quad \frac{\dot{Q} \cdot \delta_2}{A_w \cdot \lambda_2} = t_{w2} - t_{w3} \quad (2.41)$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_3}{\delta_3} \cdot A_w \cdot (t_{w3} - t_{w4}) \quad \text{lub} \quad \frac{\dot{Q} \cdot \delta_3}{A_w \cdot \lambda_3} = t_{w3} - t_{w4} \quad (2.42)$$

Po zsumowaniu stronami otrzymuje się:

$$\dot{Q} \cdot \left(\frac{\delta_1}{A_w \cdot \lambda_1} + \frac{\delta_2}{A_w \cdot \lambda_2} + \frac{\delta_3}{A_w \cdot \lambda_3} \right) = t_{w1} - t_{w4} \quad (2.43)$$

Zatem strumień ciepły określony jest wzorem:

$$\dot{Q} = \frac{t_{w1} - t_{w4}}{\sum_{i=1}^3 \frac{\delta_i}{A_w \cdot \lambda_i}} = \frac{\Delta t_w}{R_w} \quad (2.44)$$

Opór cieplny ścianki wielowarstwowej oblicza się więc jako sumę:

$$R_w = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{A_w \cdot \lambda_i} \quad (2.45)$$

a więc analogicznie jak przy szeregowym łączeniu oporów elektrycznych.

1.4. Przegroda walcowa

Jest to bardzo ważny w technice przypadek rury o przekroju kołowym. Temperatury na powierzchni wewnętrznej i zewnętrznej przyjmuje się tak jak uprzednio stałe - temperatura zmienia się tylko w kierunku promieniowym: malejąc od t_{w1} na ścianie wewnętrznej do t_{w2} na zewnętrznej.

Równanie różniczkowe pola temperatury (2.3) najwłaściwiej jest rozpisać we współrzędnych cylindrycznych wg (1.53) dla: $t = f(r) \neq f(\varphi, z)$:

$$\frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dt}{dr} \right) = 0 \quad (2.46)$$

Po pierwszym całkowaniu jest

$$r \cdot \frac{dt}{dr} = C_1 \quad (2.47)$$

a po rozdzieleniu zmiennych:

$$dt = \frac{dr}{r} \cdot C_1 \quad (2.48)$$

i następnym całkowaniu otrzymuje się całkę ogólną:

$$t = C_1 \cdot \ln r + C_2 \quad (2.49)$$

Obydwa warunki brzegowe:

$$\text{Dla } r = r_1 \text{ jest: } t = t_{w1}$$

$$\text{Dla } r = r_2 \text{ jest: } t = t_{w2}$$

podstawione do (2.49) dają układ równań:

$$t_{w1} = C_1 \cdot \ln r_1 + C_2$$

$$t_{w2} = C_1 \cdot \ln r_2 + C_2$$

z którego wyznacza się obie stałe całkowania:

$$C_1 = - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.50)$$

$$C_2 = t_{w1} + (t_{w1} - t_{w2}) \cdot \frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.51)$$

Po podstawieniu tych stałych do równania ogólnego (2.49) otrzymuje się rozwiązanie, którym jest **równanie rozkładu temperatury** w ściance walcowej ogrzewanej od strony wewnętrznej:

$$t = t_{w1} - (t_{w1} - t_{w2}) \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.52)$$

albo:

$$\Delta t = t_{w1} - t = (t_{w1} - t_{w2}) \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.53)$$

Temperatura zmienia się więc według krzywej logarytmicznej skierowanej wypukłością w dół jak na rys. 2.5a, bowiem logarytmicznie zmienne Δt wg wzoru (2.53) jest odejmowane we wzorze (2.52) od t_{w1} .

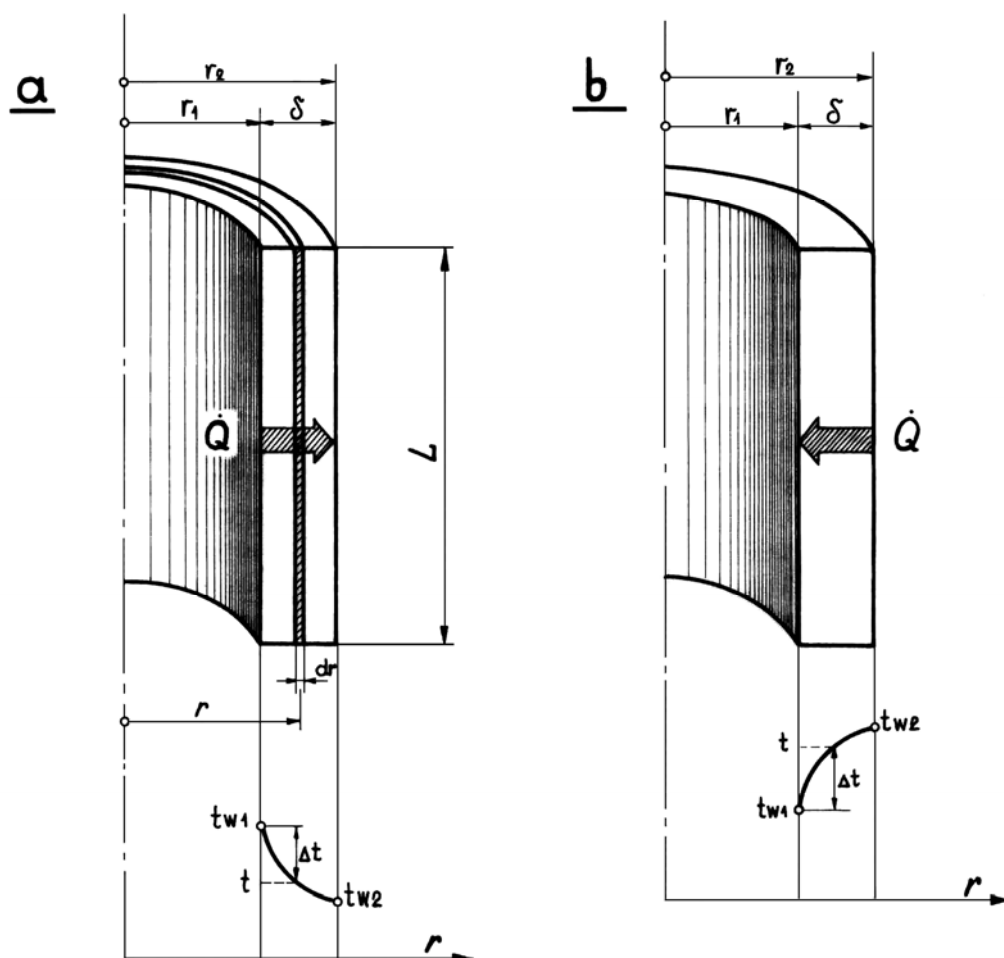
Przewodzony przez ściankę **strumień cieplny** wynika z prawa Fouriera:

$$\dot{Q} = - \lambda A \cdot \frac{dt}{dr} \quad (2.54)$$

przy czym gradient temperatury można wyznaczyć z (2.47) i (2.50):

$$\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r} = - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{r \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.55)$$

albo z bezpośredniego różniczkowania równania (2.52).



Rys.2.5. Przewodzenie ciepła w przegrodzie walcowej:
 a) od powierzchni wewnętrznej do zewnętrznej,
 b) od zewnątrz do wewnątrz

Po podstawieniu (2.55) do (2.54) z uwzględnieniem wyrażenia na powierzchnię: walca: $A = 2\pi \cdot rL$ otrzymuje się:

$$\dot{Q} = 2\pi \lambda \cdot L \cdot \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad [W] \quad (2.56)$$

Sprowadzając w tym wzorze wszystkie wielkości po prawej stronie, nie będące spadkiem temperatury, do mianownika otrzymuje się w mianowniku **opór cieplny** przegrody walcowej:

$$R_w = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi L \cdot \lambda} = \frac{\ln \frac{d_2}{d_1}}{2\pi L \cdot \lambda} \quad \left[\frac{K}{W} \right] \quad (2.57)$$

Jednak lepiej było by obliczać opór przegrody walcowej wzorem o takim samym kształcie jak dla ścianki płaskiej. W tym celu postuluje się, aby było:

$$R_w = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi L \lambda} = \frac{\delta}{\lambda A_w}$$

przy czym: $\delta = r_2 - r_1$ oraz $\lambda = \text{idem}$.

Zachodzi to wtedy, gdy:

$$A_w = 2\pi L \cdot \frac{\delta}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 2\pi \cdot \frac{r_2 - r_1}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \cdot L = 2\pi r_w \cdot L$$

Jak widać można obliczać opór cieplny ścianki walcowej wzorem dla ścianki płaskiej (2.18) - jednak pod warunkiem, że zastosuje się w nim średnią logarytmiczną powierzchnię ścianki walcowej:

$$A_w = 2\pi r_w \cdot L = \pi d_w \cdot L = \frac{A_2 - A_1}{\ln \frac{A_2}{A_1}} \quad (2.58)$$

Średnia (logarytmiczna) średnica:

$$d_w = \frac{d_2 - d_1}{\ln \frac{d_2}{d_1}} = \frac{2r_2 - 2r_1}{\ln \frac{2r_2}{2r_1}} = 2r_w \quad (2.59)$$

jest równa podwojonemu średniemu (logarytmicznemu) promieniowi ścianki walcowej.

Tak więc opór cieplny przegrody walcowej można obliczać jako:

$$R_w = \frac{\delta}{\lambda A_w} = \frac{\delta}{\lambda (\pi d_w \cdot L)} \quad (2.60)$$

Gęstość strumienia cieplnego:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = \frac{\dot{Q}}{2\pi rL} = \frac{\text{const}}{r} \quad (2.61)$$

zmienia się wzdłuż promienia przegrody: maleje on od wartości największej, na wewnętrznej powierzchni ścianki (bo tam pole powierzchni jest najmniejsze), do najmniejszej - na powierzchni zewnętrznej.

Gdy wielkości temperatur założy się przeciwnie niż to uczyniono na początku, tzn. gdy:

$$t_{w2} > t_{w1}$$

strumień cieplny skierowany będzie przeciwnie - tak jak na rys. 2.5 b.

Jednak cały przeprowadzony wywód matematyczny pozostaje niezmienny: symbolika, równanie różniczkowe i warunki brzegowe są tu takie same, więc i otrzymane równanie rozkładu temperatury jest takie same jak (2.52) czy (2.53). Należy je jednak nieco przekształcić, aby ujawnić znak ujemny w $(t_{w1} - t_{w2})$.

Otrzymuje się wtedy następujące **równanie rozkładu temperatury**

$$t = t_{w1} + (t_{w2} - t_{w1}) \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.62)$$

oraz analogicznie:

$$\Delta t = t - t_{w1} = (t_{w2} - t_{w1}) \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2.63)$$

Wykresem przebiegu temperatury jest nadal krzywa logarymiczna, ale zwrócona wypukłością do góry jak na rys.2.5 b.

Jednak niezależnie od kierunku przenoszenia ciepła krzywa rozkładu temperatury jest zawsze bardziej stroma przy wewnętrznej powierzchni i wykazuje tam większy gradient - tam bowiem gęstość strumienia ciepłego jest największa.

1.5. Wielowarstwowa przegroda walcowa

Opór cieplny pojedynczej warstwy, określonej średnicami d_i i d_{i+1} , a mającą długość L_i i przewodność cieplną λ_i wynosi:

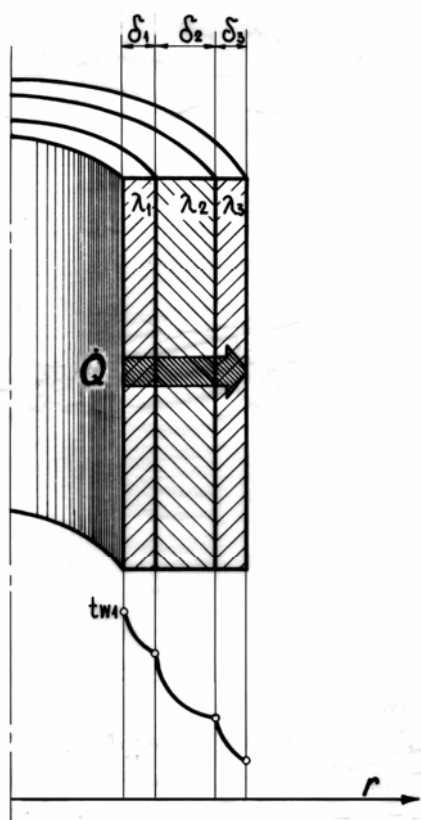
$$R_{w_i} = \frac{\ln \frac{r_{i+1}}{r_i}}{2\pi \lambda_i \cdot L_i} = \frac{\ln \frac{d_{i+1}}{d_i}}{2\pi \lambda_i \cdot L_i} \quad (2.64)$$

Strumień cieplny jest określony przez sumę oporów wszystkich warstw:

$$\dot{Q} = \frac{t_{w1} - t_{wn+1}}{\sum_{i=1}^n R_{w_i}} = \frac{t_{w1} - t_{wn+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{A_{w_i} \cdot \lambda_i}} \quad (2.65)$$

przy czym średnią powierzchnię każdej warstwy oblicza się według średniej średnicy tej warstwy:

$$d_{w_i} = \frac{d_{i+1} - d_i}{\ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} = \frac{2 \delta_i}{\ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} \quad (2.66)$$



Rys.2.6 Przewodzenie ciepła w przegrodzie walcowej wielowarstwowej

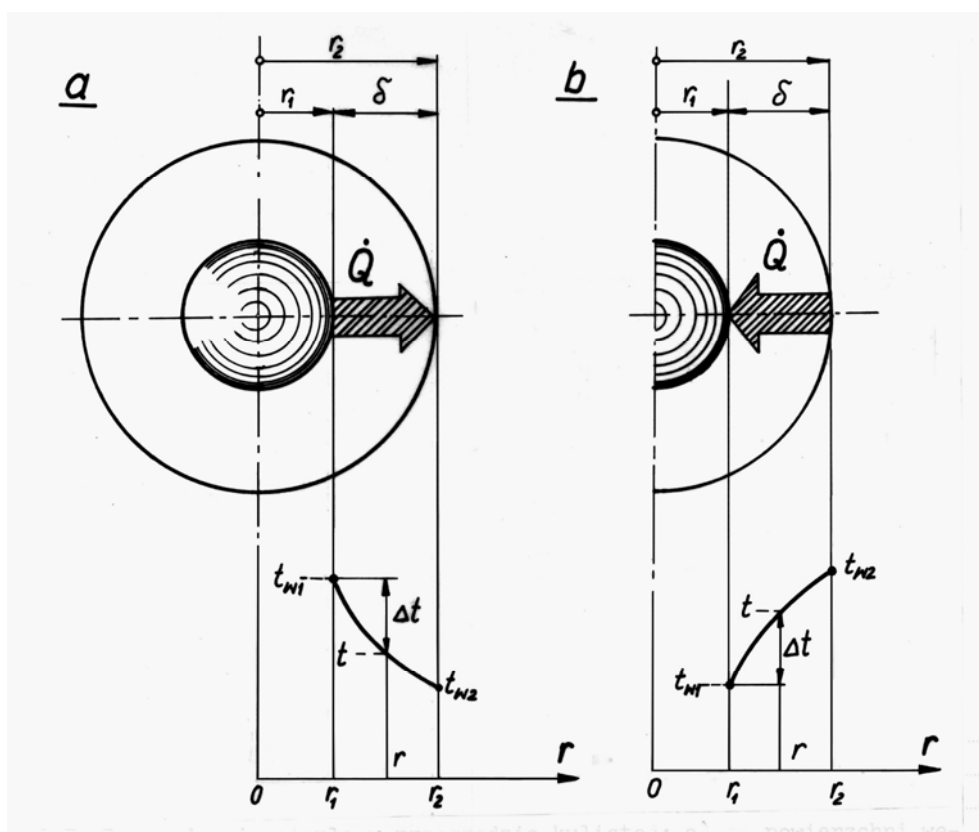
W pewnych warunkach (gdy $d_{i+1}/d_i < 2$) można zamiast logarytmicznej stosować średnią arytmetyczną:

$$d_{w_i} \cong \frac{d_{i+1} + d_i}{2}$$

Sprawa ta zostanie szczegółowo omówiona w części IV. (rozdz. 1.3) przy analizie średniej różnicy temperatur w wymienniku ciepła.

1.6. Przegroda kulista

W tym przypadku równanie różniczkowe pola temperatury (2.3) najlepiej rozpisać we współrzędnych sferycznych posiłkując się zapisem (1.55). Nadal utrzymuje się założenie, że temperatura zmienia się tylko w kierunku promienia: $t = f(r) \neq f(\varphi, \psi)$. Niech temperatura na powierzchni wewnętrznej (t_{w1}) będzie większa od tej na powierzchni zewnętrznej (t_{w2}), tak że strumień ciepły przewodzony będzie od wewnątrz na zewnątrz (rys. 2.7).



Rys.2.7 Przewodzenie ciepła w przegrodzie kulistej:
a) od powierzchni wewnętrznej do zewnętrznej
b) od zewnątrz do wewnątrz

Tak więc równanie:

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d}{dr} \left(r^2 \cdot \frac{dt}{dr} \right) = 0 \quad (2.67)$$

po obustronnym pomnożeniu przez r^2 i pierwszym scałkowaniu daje:

$$r^2 \cdot \frac{dt}{dr} = C_1 \quad (2.68)$$

a po rozdzieleniu zmiennych:

$$dt = C_1 \cdot \frac{dr}{r^2} = C_1 \cdot r^{-2} \cdot dr \quad (2.69)$$

i następnym scałkowaniu daje całkę ogólną

$$t = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (2.70)$$

Dla $r = r_1$ jest: $t = t_{w1}$, a dla $r = r_2$ jest: $t = t_{w2}$, co podstawione do wzoru (2.70) daje układ równań

$$t_{w1} = -\frac{C_1}{r_1} + C_2 \quad (2.71)$$

$$t_{w2} = -\frac{C_1}{r_2} + C_2 \quad (2.72)$$

z którego oblicza się obie stałe całkowania:

$$C_1 = -\frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad (2.73)$$

$$C_2 = t_{w1} - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r_1} \quad (2.74)$$

Po ich podstawieniu do (2.70) i niewielkich przekształceniach otrzymuje się równanie **rozkładu temperatury**:

$$t = t_{w1} - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (2.75)$$

albo:

$$t = t_{w1} - \Delta t \quad (2.76)$$

w którym:

$$\Delta t = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (2.77)$$

jest hiperbolicznie zależne od r .

Tak więc rozkład temperatury w przegrodzie kulistej ma charakter hiperboliczny o większym gradiencie przy wewnętrznej (mniejszej) powierzchni ograniczającej i skierowany jest wypukłością do dołu (rys.2.7 a).

Gdy kierunek spadku temperatury jest odwrócony, tj. dla: $t_{w1} < t_{w2}$, równanie (2.75) zmienia swoją postać na następującą:

$$t = t_{w1} + \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (2.75a)$$

albo:

$$t = t_{w1} + \Delta t \quad (2.76a)$$

przy:

$$\Delta t = \frac{t_{w2} - t_{w1}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) \quad (2.77a)$$

i wykres rozkładu temperatury skierowany jest wypukłością do góry, jak na rys.2.7 b.

Większa stromizna krzywej i większy gradient temperatury występują również tutaj przy wewnętrznej powierzchni ograniczającej, tam, gdzie wskutek mniejszego pola powierzchni, gęstość strumienia ciepłego jest większa.

Strumień ciepły:

$$\dot{Q} = - \lambda A \cdot \frac{dt}{dr} \quad (2.78)$$

oblicza się przy pomocy powierzchni:

$$A_w = 4 \pi r^2 \quad (2.79)$$

i gradientu temperatury według wzoru (2.68) z podstawieniem (2.73):

$$\frac{dt}{dr} = \frac{C_1}{r^2} = - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r^2} \quad (2.80)$$

lub uzyskanego z bezpośredniego różniczkowania równania rozkładu temperatury (2.75).

Ostatecznie otrzymuje się po podstawieniu (2.79) i (2.80) do (2.78):

$$\dot{Q} = 4 \pi \lambda \cdot (t_{w1} - t_{w2}) \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1} \quad (2.81)$$

albo po uwzględnieniu, że: $r_2 - r_1 = \delta$ oraz $A_i = 4 \pi \cdot r_i^2$:

↓(2.82)

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot \sqrt{(4 \pi \cdot r_1 r_2)^2} \cdot (t_{w1} - t_{w2}) = \frac{\lambda}{\delta} \cdot \sqrt{A_1 A_2} \cdot (t_{w1} - t_{w2})$$

Jak więc widać, również przegrodę kulistą można obliczać tak jak przegrodę płaską, ale przy pomocy średniej geometrycznej z pól powierzchni ograniczających:

$$A_w = \sqrt{A_1 \cdot A_2} = 4 \pi \cdot r_w^2 = \pi \cdot d_w^2 \quad (2.83)$$

gdzie:

$$d_w = \sqrt{d_1 \cdot d_2} = 2 \cdot r_w = 2 \cdot \sqrt{r_1 \cdot r_2} \quad (2.84)$$

Wówczas strumień cieplny:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot A_w \cdot (t_{w1} - t_{w2}) = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{R_w} \quad (2.85)$$

przy czym opór cieplny:

$$R_w = \frac{\delta}{\lambda \cdot A_w}$$

a dla kulistej przegrody wielowarstwowej mamy sumę:

$$R_w = \sum R_{w_i} = \sum \frac{\delta_i}{\lambda_i \cdot A_{w_i}}$$

tak jak w poprzednich rodzajach przegród.

Gęstość strumienia cieplnego oblicza się przy pomocy (2.80):

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} = +\lambda \cdot \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{\text{const}}{r^2} \quad (2.86)$$

Jest ona jeszcze silniej zmienna z promieniem niż w przypadku przegrody walcowej, ale tak samo jak tam, maleje od wartości największej na powierzchni wewnętrznej do wartości najmniejszej na powierzchni zewnętrznej.

Zasada ogólna, będąca uogólnieniem spostrzeżeń poczynionych wyżej, została sformułowana przez H. Hausena w następujący sposób:

Strumień cieplny przewodzony przez przegrodę o dowolnej krzywiznie lecz o stałej grubości ($\delta = \text{const}$) można obliczać tak jak dla przegrody płaskiej stosując jednak odpowiednio obliczoną średnią powierzchnię A_w :

- gdy przegroda ma kształt ograniczający kanał, to przy pomocy średniej logarytmicznej z powierzchni: wewnętrznej i zewnętrznej,
- gdy przegroda ma charakter ograniczający przestrzeń zamkniętą (np. prostopadłościenna komora domowej szafki chłodniczej), to przy pomocy średniej geometrycznej z powierzchni: zewnętrznej i wewnętrznej.

Przykłady

1. Do komory suszarki doprowadza się, z gorącym powietrzem energię, ciepłą w ilości 500 kW. 95% tej energii wykorzystuje się do suszenia, reszta pokrywa straty ciepła ścianek komory. Ścianki te o grubości 250 mm i powierzchni 220 m² wykonane są z cegły o przewodności cieplnej 0,28 W/m·K. Na zewnętrznej powierzchni zmierzono temperaturę 40°C. Obliczyć temperaturę na wewnętrznej powierzchni ścianki.

R o z w i ą z a n i e

Ścianki komory traktuje się jak płaskie.

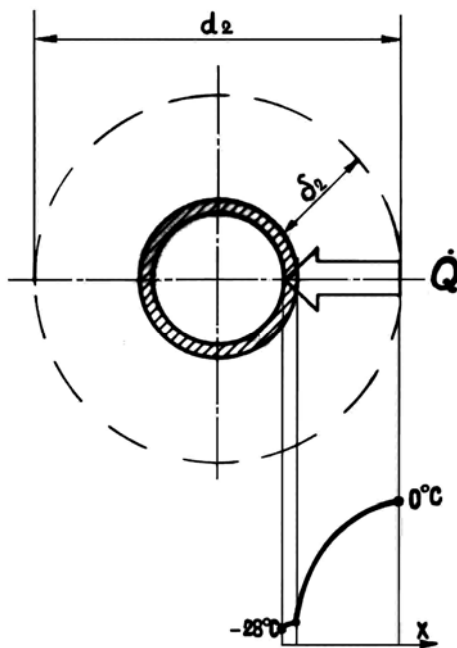
Strumień ciepła przewodzonego wynosi:

$$\dot{Q} = (1 - 0,95) \cdot 500 = 25 \text{ kW} = 25 \cdot 10^3 \text{ W}$$

Ze wzoru (2.16) wyznacza się:

$$t_{w1} = t_{w2} + \frac{\dot{Q} \delta}{\lambda A} = 40 + \frac{25 \cdot 10^3 \cdot 0,25}{0,28 \cdot 220} = 141,5^\circ\text{C}$$

2. Obliczyć maksymalną grubość warstwy lodu, jaka może powstać na zewnętrznej powierzchni rury aluminiowej omywanej wodą, jeżeli temperatura wewnętrznej powierzchni rury wynosi -28°C , a natężenie przepływu ciepła przez 1 m długości rury wynosi 177 W/m . Średnica zewnętrzna rury wynosi 95 mm , grubość ścianki 6 mm . Przewodności cieplne: aluminium 208 W/m K , lodu $2,56 \text{ W/m K}$.



Rys.2.8 Szkic sytuacyjny do przykładu 2.

R o z w i ą z a n i e

Po zakończeniu narastania lodu na jego powierzchni temperatura zrówna się z temperaturą wody i wyniesie 0°C , a pole temperatury i przenoszenie ciepła ulegną ustaleniu. Dla odcinka o długości 1 m będzie:

$$\dot{Q}_L = \frac{\Delta t}{R_L} = \frac{0 - (-28)}{R_L} = 177 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

Stąd:

$$R_L = \frac{28}{177} = 0,1582 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Ale łączny opór cieplny rury i lodu wynosi:

$$R_L = R_1 + R_2 = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{208 \cdot \pi d_{w1}} + \frac{\delta}{2,56 \cdot \pi d_{w2}}$$

Dla rury aluminiowej można obliczyć średnią logarymiczną średnicę:

$$d_{w1} = \frac{95 - 83}{\ln \frac{95}{83}} = 88,9 \text{ mm}$$

Średnia arytmetyczna wynosiłaby w tym przypadku $89,0 \text{ mm}$.

Tak więc opór cieplny rury wynosi

$$R_1 = 1,033 \cdot 10^{-4} \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Wobec tego:

$$R_2 = R_L - R_1 = 0,158 - 1,03 \cdot 10^{-4} = 0,1581 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

czyli:

$$\frac{\delta}{2,56 \cdot \pi \cdot d_{w2}} = 0,1581$$

a wobec

$$\delta = \frac{d_2 - d_1}{2} \quad \text{i} \quad d_{w2} = \frac{d_2 - d_1}{\ln \frac{d_2}{d_1}}$$

będzie po podstawieniu i redukcjach:

$$\frac{\ln \frac{d_2}{d_1}}{2 \cdot 2,56 \cdot \pi} = \frac{\ln \frac{d_2}{95}}{2 \cdot 2,56 \cdot \pi} = 0,1581$$

Ostatecznie więc:

$$\ln \frac{d_2}{95} = 2,543$$

$$\frac{d_2}{95} = 12,72$$

$$d_2 = 1208 \text{ mm}$$

a szukana grubość warstwy lodu:

$$\delta_2 = \frac{d_2 - d_1}{2} = \frac{1208 - 95}{2} = 556,5 \text{ mm}$$

Ćwiczenia

1. Mur żużłobetonowy o długości 20 m, wysokości 3,5 m i grubości 0,5 m ma na powierzchni wewnętrznej temperaturę 15°C , a na zewnętrznej: -10°C . Współczynnik przewodzenia ciepła żużłobetonu wynosi $0,8 \text{ W/m}\cdot\text{K}$. Obliczyć ilość ciepła przewodzonego w ciągu doby.

Odpowiedź: 241,9 MJ

2. Mur z poprzedniego zadania odgradza od atmosfery pomieszczenie, którego temperatura wynosi 20°C , tyle samo wynosi temperatura pozostałych ścian pomieszczenia i przedmiotów w nim ustawionych. Obliczyć całkowity współczynnik przejmowania ciepła α_c oraz radiacyjny współczynnik przejmowania ciepła α_r i konwekcyjny α , jeżeli stała promieniowania wynosi $5,1 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$

Odpowiedź: $\alpha_c = 8 \text{ W/m}^2\text{K}$

$\alpha_r = 5,0 \text{ "}$

$\alpha = 3,0 \text{ "}$

3. Obliczyć spadek temperatury w ścianie komory chłodniczej składającej się z następujących warstw:

50 cm cegły o przewodności cieplnej $0,30 \text{ W/m}\cdot\text{K}$

10 cm płyty torfowej " " $0,065 \text{ "}$

2 cm tynku " " $0,75 \text{ "}$

Wydajność chłodziarki równoważy strumień ciepła napływającego z zewnątrz o gęstości $16,4 \text{ W/m}^2$. Wpływ spoin należy zaniedbać. Wykreślić rozkład temperatury.

Odpowiedź: 53,0 K

4. Rurociąg stalowy o przewodności cieplnej $50 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, średnicy zewnętrznej 108 mm i grubości ścianki 5 mm pokryty jest izolacją składającą się z następujących trzech warstw:

o grubości 25 mm i przewodności cieplnej	$0,038 \text{ W/m}\cdot\text{K}$
35 mm " " "	$0,052$ "
" 4 mm " " "	$0,12$ "

Temperatury wynoszą: na wewnętrznej powierzchni rury $t_{w1} = 218^\circ\text{C}$, na zewnętrznej powierzchni drugiej warstwy izolacyjnej $t_{w4} = 76^\circ\text{C}$.

Obliczyć nieznane temperatury na styku warstw i na zewnętrznej powierzchni izolacji i wykreślić rozkład temperatury.

Odpowiedź: $t_{w2} \approx t_{w1} = 218^\circ\text{C}$
 $t_{w3} = 134,7^\circ\text{C}$
 $t_{w5} = 73,6^\circ\text{C}$

5. Grzejnik elektryczny dostarczający ciepło do odparowania wody w warku ma moc 2 kW i umieszczony jest w porcelanowej rurze ($\lambda = 1,15 \text{ W/m}\cdot\text{K}$) o średnicy zewnętrznej 50 mm , grubości 3 mm i długości 860 mm . Obliczyć temperatury ścian rury porcelanowej dla przypadku, w którym współczynnik przejmowania ciepła przy wrzeniu wynosi $2500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, a ciśnienie pary: 400 kPa abs. (temp. nasycenia $143,2^\circ\text{C}$).

Odpowiedź: $t_{w2} = 149,1^\circ\text{C}$
 $t_{w1} = 189,9^\circ\text{C}$

6. Przez halę fabryczną przeprowadzony jest przewód, którym przepływa nasycona para wodna o nadciśnieniu $1,16 \text{ MPa}$. Rurociąg wykonany jest ze stali ($\lambda = 45,5 \text{ W/m}\cdot\text{K}$) ma średnicę zewnętrzną $d_1 = 57 \text{ mm}$ i grubość ścianki $\delta_1 = 4 \text{ mm}$. Rurociąg należy zaizolować tak, aby jednostkowa strata ciepła nie przekraczała 70 W/m , a temperatura zewnętrzna izolacji ze względu na przepisy ochrony pracy nie przekraczała 50°C . Obliczyć minimalną grubość izolacji δ_2 w przypadku stosowania sznura azbestowego o przewodności cieplnej $\lambda = 0,175 \text{ W/m}\cdot\text{K}$. Temperaturę wewnętrznej powierzchni rury przyjmij równą temperaturze pary. Naszkicować rozkład temperatury. Ciśnienie atmosferyczne wynosi: 100 kPa .

Odpowiedź: $\delta_2 = 228,4 \text{ mm}$

2. PRZEWODZENIE CIEPŁA W PRĘCIE Z WEWNĘTRZNYMI ŹRÓDŁAMI CIEPŁA

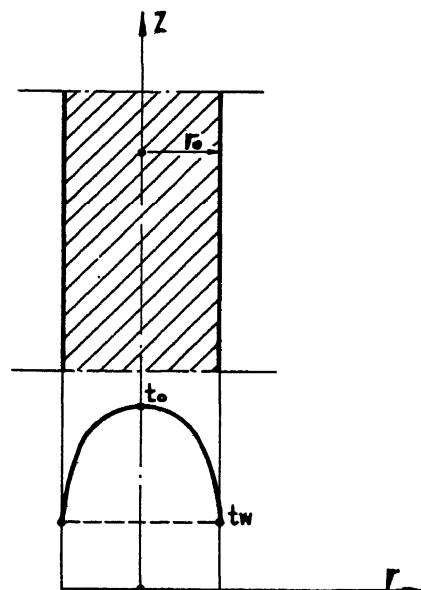
Wyznaczenie pola temperatury w ciałach z wewnętrznymi źródłami ciepła rozpatrzone zostanie na przykładzie często spotykanego przypadku pręta walcowego.

W praktyce może nim być pręt oporowy grzejnika elektrycznego albo pręt paliwowy reaktora atomowego.

Zakłada się upraszczająco równomierny rozkład źródeł ciepła, tak że ich natężenie jest stałe w całej objętości.

W rzeczywistości opór elektryczny, na którym wytwarza się ciepło, jest funkcją temperatury, a ta jest zmienna na promieniu. Podobnie rozkład neutronów w pręcie paliwowym reaktora atomowego jest funkcją promienia.

Zagadnienie najwygodniej jest rozwiązywać przy pomocy równania Fouriera zapisanego w układzie współrzędnych cylindrycznych.



Rys.2.9 Rozkład temperatury w pręcie z wewnętrznymi źródłami ciepła.

Zakłada się nadal, że temperatura jest zmienna tylko w kierunku promieniomym a więc:

$$t = f(r) \neq f(\varphi, z, \tau)$$

Wobec tego równanie (1.54) uprości się do postaci

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} + \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho \cdot a} = 0 \quad (2.87)$$

Pierwsze dwa człony są pochodną iloczynu, tak więc:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} (r \cdot \frac{dt}{dr}) + \frac{\dot{q}_v}{\lambda} = 0 \quad (2.88)$$

Wobec: $\dot{q}_v \neq f(r, \varphi, z, \tau)$ całkowanie tego równania (po pomnożeniu obydwu stron przez r) daje:

$$r \cdot \frac{dt}{dr} + \frac{\dot{q}_v \cdot r^2}{2\lambda} = C_1 \quad (2.89)$$

albo:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{\dot{q}_v \cdot r}{2\lambda} + C_1 \quad (2.90)$$

Pierwszy warunek brzegowy wymaga, aby krzywa temperatury miała w osi ekstremum (ze względu na symetrię względem osi pręta zarówno rozkładu źródeł ciepła jak i powierzchni odprowadzającej ciepło).

Dla: $r = 0$ jest więc:

$$\frac{dt}{dr} = 0$$

a po podstawieniu do (2.90) mamy: $C_1 = 0$, czyli:

$$\frac{dt}{dr} = -\frac{\dot{q}_v \cdot r}{2\lambda} \quad (2.91)$$

Całkowanie tego równania daje:

$$t = -\frac{\dot{q}_v \cdot r^2}{4\lambda} + C_2 \quad (2.92)$$

Z warunku, że na ścianie ($r = r_0$) temperatura $t = t_w$ wynika:

$$C_2 = t_w + \frac{\dot{q}_v \cdot r_0^2}{4\lambda} \quad (2.93)$$

Ostateczna **zależność temperatury od promienia** ma więc postać

$$t = t_w + \frac{\dot{q}_v \cdot r_0^2}{4\lambda} \left[1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right] \quad (2.94)$$

a więc jest to parabola zwrócona wierzchołkiem do góry (rys. 2.19). Najwyższa temperatura występuje w osi (t_o). Jest ona wyższa od temperatury ścianki zewnętrznej o:

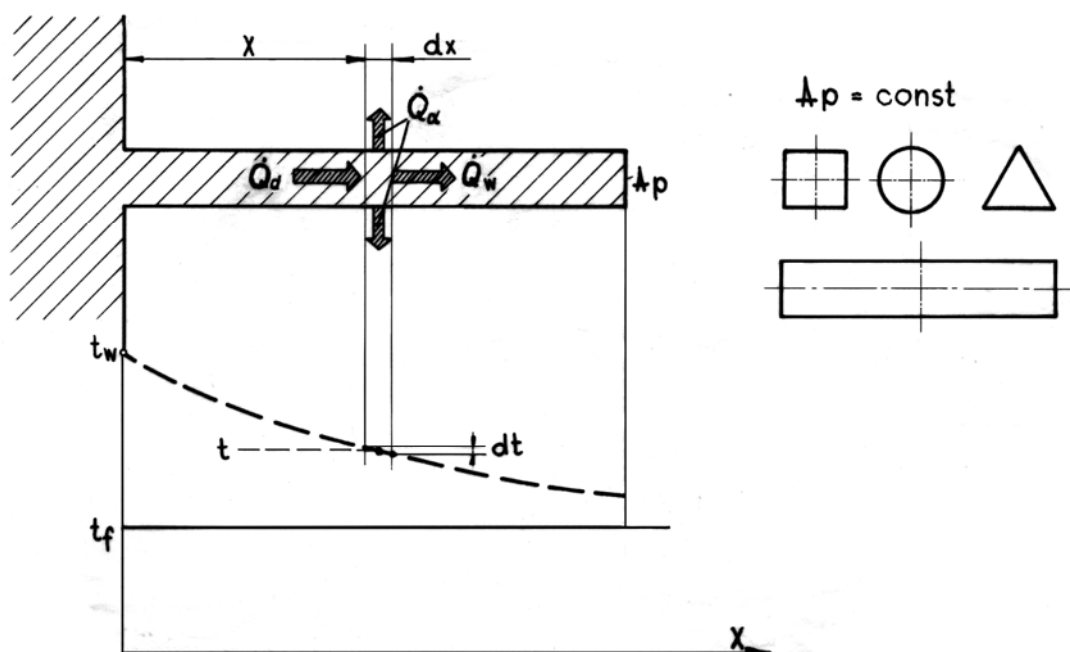
$$t_o - t_w = \frac{\dot{q}_v \cdot r_o^2}{4\lambda} \quad (2.95)$$

W podobny sposób można otrzymać równanie rozkładu temperatury dla ścian płaskich, pierścieniowych itp., zawierających wewnętrzne źródła ciepła.

3. PRZEWODZENIE CIEPŁA W PRĘTACH I ŻEBRACH PROSTYCH

3.1 Rozkład temperatury i strumień cieplny

Zakładamy, że rozważane pręty lub żebra tworzą całość monolityczną ze ścianą i zanurzone są w płynie o temperaturze t_f , do którego oddają (lub z którego pobierają) ciepło na drodze przejmowania, co określone jest (danym) współczynnikiem przejmowania ciepła α - jednakowym na całej powierzchni. Ponadto przekrój poprzeczny pręta lub żebra może mieć dowolny kształt ale niezmienny na całej długości, tak że $A_p = \text{const}$. Zakłada się temperaturę zmienną tylko w kierunku osi x , tzn. w danym przekroju poprzecznym temperatura jest jednakowa.



Rys. 2.10 Przewodzenie ciepła w pręcie lub żebrze prostym

Zagadnienie rozwiązuje się w ogólnym przypadku żebra o dowolnym profilu w ten sposób, że rozpatruje się bilans cieplny elementu żebra przedstawionego na rysunku 2.10:

$$\dot{Q}_d = \dot{Q}_\alpha + \dot{Q}_w \quad (2.96)$$

z czego \dot{Q}_d i \dot{Q}_w są strumieniami ciepła: doprowadzonym i wyprowadzonym przez przewodzenie przy kolejno zmienionych gradientach temperatury $\frac{dt}{dx} = f_1(x)$ i powierzchniach przewodzenia ciepła $A_p = f_2(x)$, a \dot{Q}_α jest ciepłem odprowadzonym przez przejmowanie.

To ostatnie wynosi:

$$\dot{Q}_\alpha = \alpha \cdot A \cdot (t - t_f) = \alpha \cdot (U \cdot dx) \cdot (t - t_f) \quad (2.97)$$

gdzie U [m] jest obwodem poprzecznym pręta (żebra prostego) a t [°C] jest (średnią) temperaturą elementu objętościowego.

Jednakże dla żebra prostego o stałym przekroju poprzecznym $A_p = \text{const} \neq f_2(x)$ i wtedy można posłużyć się równaniem (2.1). W tym celu odbiór ciepła na obu powierzchniach zewnętrznych sprowadza się do działania ujemnych źródeł ciepła równomiernie rozmieszczonych na długości pręta (żebra). Jest to możliwe z powodu nierozpatrywania zmian temperatury w poprzek pręta (żebra), tj. w kierunku grubości. Obojętne jest więc, czy źródło ciepła działa wewnątrz elementu objętościowego dV tak, jak to zakładano przy wyprowadzeniu podstawowego równania (2.1) albo raczej (1.47), czy też na brzegu tego elementu - istotne jest, że działa ono na odcinku dx , na którym panuje (średnia) temperatura t .

Znając natężenie źródeł ciepła:

$$\dot{q}_v = \frac{-\dot{Q}_\alpha}{V} = \frac{-\alpha \cdot (U dx) \cdot (t - t_f)}{A_p \cdot dx} = -\frac{\alpha U}{A_p} \cdot (t - t_f) \quad (2.98)$$

można jego wartość podstawić do równania (2.1), które przy założeniu stałości przewodności cieplnej ($\lambda = \lambda_{sr} = \text{const}$) i dla: $t = f(x) \neq f(y, z)$ przyjmuje postać:

$$-\frac{\alpha U}{A_p} \cdot (t - t_f) + \lambda \frac{d^2 t}{dx^2} = 0 \quad (2.99)$$

albo po drobnych przekształceniach

$$\frac{d^2 t}{dx^2} - m^2 \cdot (t - t_f) = 0 \quad (2.100)$$

w której współczynnik:

$$m = \sqrt{\frac{\alpha \cdot U}{\lambda \cdot A_p}} = \text{const} \quad (2.101)$$

zakłada się stały.

Całką tego równania to, zgodni z regułami matematyki, funkcja:

$$t - t_f = C_1 \cdot e^{mx} + C_2 \cdot e^{-mx} \quad (2.102)$$

wielkości: C_1 i C_2 są stałymi, które należy wyznaczyć z warunków brzegowych.

Pierwszy warunek mówi, że u nasady ($x = 0$) temperatura równa jest temperaturze ścianki ($t = t_f$). Wobec tego po podstawieniu do (2.102) otrzymuje się związek:

$$t_w - t_f = C_1 + C_2 \quad (2.103)$$

Drugi warunek brzegowy odnosi się do sytuacji cieplnej na drugim końcu pręta (żebra). Możliwe są tu dwa, a nawet trzy, przypadki.

a) Pręt lub żebro bardzo długie

Matematyczny warunek brzmi tutaj następująco:

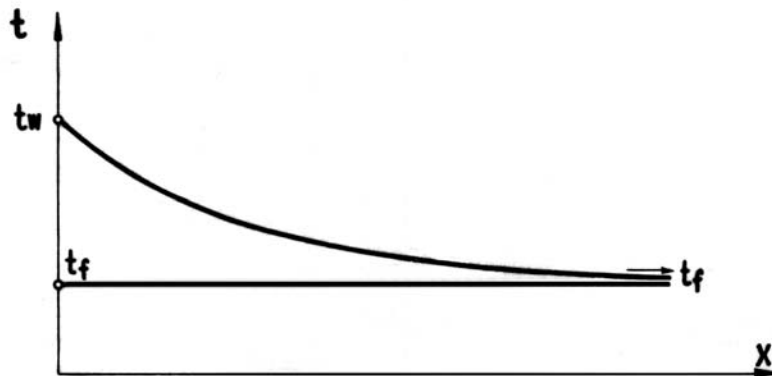
$$\begin{aligned} \text{dla } x &\longrightarrow \infty \\ t &\longrightarrow t_f \end{aligned} \quad (2.104)$$

W praktyce temperatura pręta zrównuje się z temperaturą płynu na długości kilku metrów (różnica staje się pomiarowo nieuchwytna). Po podstawieniu tego do (2.102) otrzymuje się:

$$C_1 = 0 \quad (2.105)$$

a więc **zmiennosc temperatury** na długości wyrazi się równaniem otrzymanym z (2.102), (2.103) i (2.105):

$$t - t_f = (t_w - t_f) \cdot e^{-mx} \quad (2.106)$$



Rys.2.11 Rozkład temperatury pręcie (żebry) bardzo długim

Wykres $t = f(x)$ jest krzywą wykładniczą zmierzającą asymptotycznie do t_f , to znaczy, że $(t - t_f) \rightarrow 0$, jak to pokazano na rys.2.11.

Strumień cieplny dopływający do pręta (żebra) jest oczywiście równy strumieniowi oddanemu przez pręt do płynu i wynosi:

$$\dot{Q}_{x=0} = -\lambda A_p \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=0} = m \cdot \lambda \cdot A_p \cdot (t_w - t_f) \quad (2.107)$$

albo po uwzględnieniu (2.101):

$$\dot{Q} = (t_w - t_f) \cdot \sqrt{\lambda \alpha A_p U} \quad (2.108)$$

Opór cieplny bardzo długiego pręta (żebra) wynosi:

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lambda \alpha_p A_p \cdot U}} \left[\frac{K}{W} \right]$$

b) Pręt lub żebro krótkie o izolowanym czole

W tym przypadku strumień odprowadzany przez przekrój końcowy jest zerowy, tzn.

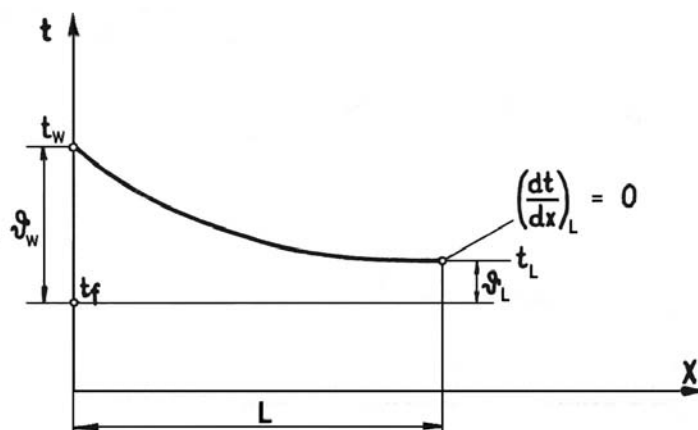
dla $x = L$ jest:

$$\dot{Q}_{x=L} = -\lambda A_p \left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=L} = 0 \quad (2.109)$$

czyli:

$$\left(\frac{dt}{dx} \right)_{x=L} = 0 \quad (2.110)$$

tzn. profil temperatury ma na końcu żebra styczną równoległą do osi x .



Rys.2.12 Rozkład temperatury w pręcie (żebrze) o izolowanym czole

Zastosowanie różniczkowania (2.110) do równania (2.102) daje:

$$C_1 \cdot e^{mL} - C_2 \cdot e^{-mL} = 0 \quad (2.111)$$

a więc:

$$C_2 = C_1 \cdot e^{2mL} \quad (2.112)$$

a po uwzględnieniu (2.103) otrzymuje się wartości stałych całkowania:

$$C_1 = \frac{t_w - t_f}{1 + e^{2mL}} \quad C_2 = \frac{t_w - t_f}{1 + e^{-2mL}} \quad (2.113)$$

Podstawienie ich do (2.102) daje wzór na **zmiennosc temperatury** z długością:

$$t - t_f = (t_w - t_f) \cdot \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad (2.114)$$

albo po uwzględnieniu, że funkcje wykładnicze tworzą funkcję hiperboliczną:

$$\frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2} = \cosh \varphi$$

wzór:

$$\underline{t - t_f = (t_w - t_f) \cdot \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL}} \quad (2.115)$$

Temperatury występują tu jako nadwyżki nad temperaturą płynu (t_f), co czasami skłania do użycia umyślnych oznaczeń dla tych nadwyżek – wtedy wzór (2.115) przyjmuje postać:

$$\vartheta = \vartheta_w \cdot \frac{\cosh m(L-x)}{\cosh mL} \quad (2.115a)$$

Strumień ciepły wyznacza się jak uprzednio (u nasady pręta):

$$\underline{\dot{Q} = -\lambda A_p \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = \frac{\alpha U}{m} \cdot (t_w - t_f) \cdot \operatorname{tgh} mL} \quad (2.116)$$

albo:

$$\underline{\dot{Q} = \sqrt{\alpha \cdot \lambda \cdot A_p \cdot U} \cdot (t_w - t_f) \cdot \operatorname{tgh} mL} \quad (2.116a)$$

gdzie:

$$\operatorname{tgh} mL = \frac{\sinh mL}{\cosh mL} = \frac{e^{mL} - e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}} \quad (2.117)$$

Opór ciepły w tym przypadku wyznacza się jako:

$$R = \frac{m}{\alpha U \cdot \operatorname{tgh} mL} = \frac{1}{\sqrt{2 \lambda \cdot A_p \cdot U} \cdot \operatorname{tgh} \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda \cdot A_p} \cdot L^2}} \quad (2.118)$$

c) Pręt lub żebro krótkie z przejmowaniem ciepła na czole

W tym przypadku strumień ciepła przenoszony przez czoło, na którym współczynnik przejmowania ciepła wynosi α_L , określony jest zależnością:

$$\dot{Q}_{x=L} = -\lambda A_p \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=L} = \alpha_L A_p (t_L - t_f) \quad (2.119)$$

ale z różniczkowania (2.102) jest:

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=L} = m \cdot (C_1 e^{mL} - C_2 e^{-mL}) \quad (2.120)$$

Z przyrównania (2.119) i (2.120) oraz przy wykorzystaniu (2.102) otrzymuje się równanie:

$$C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = \frac{\alpha_L}{\lambda m} \cdot (C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}) \quad (2.121)$$

które wraz z równaniem (2.103) pozwala określić wartości obydwu stałych całkowania:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{(t_w - t_f)(1 - \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m})e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL} + \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m} \cdot (e^{mL} - e^{-mL})} = \\
 &= \frac{t_w - t_f}{2} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m} \cdot e^{-mL}\right)}{\cosh mL + \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m} \cdot \sinh mL} \quad (2.122)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{(t_w - t_f) \cdot \left(1 + \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m}\right) \cdot e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL} + \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m} \cdot (e^{mL} - e^{-mL})} = \\
 &= \frac{t_w - t_f}{2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m}\right) \cdot e^{mL}}{\cosh mL + \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m} \cdot \sinh mL} \quad (2.123)
 \end{aligned}$$

Zatem **równanie rozkładu temperatury** wzdłuż długości pręta (żebra) jest następujące:

$$t - t_f = (t_w - t_f) \cdot \frac{\cosh m \cdot (L-x) + \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m} \cdot \sinh m \cdot (L-x)}{\cosh mL + \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m} \cdot \sinh mL} \quad (2.124)$$

Jest to wzór ogólny – w szczególnym przypadku, gdy czoło nie przenosi ciepła i $\alpha = 0$, redukuje się on do wzoru (2.115) z poprzedniego przypadku.

Strumień cieplny wyznacza się tak jak poprzednio: przy pomocy gradientu temperatury u nasady pręta (żebra) obliczonego tym razem z (2.124):

$$\begin{aligned}
 \dot{Q} &= -\lambda \cdot A_p \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = \\
 &= m \cdot \lambda \cdot A_p \cdot (t_w - t_f) \cdot \frac{\sinh mL + \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m} \cdot \cosh mL}{\cosh mL + \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m} \cdot \sinh mL} = \\
 &= m \cdot \lambda \cdot A_p \cdot (t_w - t_f) \cdot \frac{\operatorname{tg} h mL + \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m}}{1 + \frac{\alpha_L}{\lambda \cdot m} \cdot \operatorname{tg} h mL} \quad (2.125)
 \end{aligned}$$

W praktyce jednak i dla tego przypadku stosuje się wzory z poprzedniego rozdziału tj. (2.116) i (2.118) z powiększoną (o pół grubości żebra) długością:

$$L' = L + \frac{\delta}{2} \quad (2.126)$$

przez co uwzględnia się z dostateczną dla praktyki dokładnością nieadiabatyeczność czoła.

3.2. Sprawność żebra

Sprawnością (stopniem wykorzystania) żebra η_z nazywa się stosunek rzeczywiście przeniesionej energii cieplnej \dot{Q} do ilości, jaką by przeniosło żebro o stałej temperaturze równej temperaturze u nasady żebra $t = t_w$:

$$\boxed{\eta_z = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{t=t_w}}} \quad (2.127)$$

Jeżeli wprowadzić średnią temperaturę żebra (o powierzchni zewnętrznej A_z) obliczoną jako:

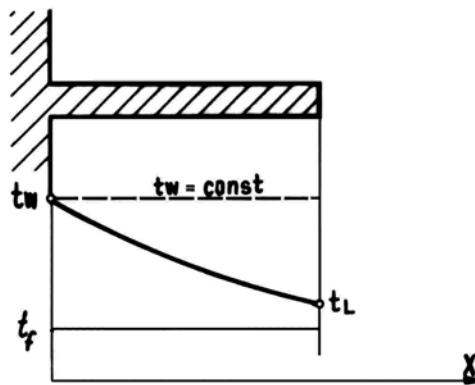
$$t_z = \frac{1}{A_z} \int_{A_z} t \cdot dA$$

to ciepło rzeczywiście przeniesione do (lub od) płynu wynosi:

$$\dot{Q} = \alpha A_z (t_z - t_f)$$

a ciepło przeniesione przy stałej temperaturze żebra:

$$\dot{Q}_{t=t_w} = \alpha A_z (t_w - t_f)$$



Rys.2.13. Rozkłady temperatury w żebrze idealnym i rzeczywistym

Po podstawieniu tych wyrażeń do (2.127) otrzymuje się wyrażenie na sprawność żebra:

$$\boxed{\eta_z = \frac{t_z - t_f}{t_w - t_f} = \frac{\vartheta_z}{\vartheta_w} < 1} \quad (2.127a)$$

Przy znanej sprawności żebra danego typu, np. z wykresu rys. 2.14, można bardzo prosto obliczyć ciepło przeniesione przez to żebro jako:

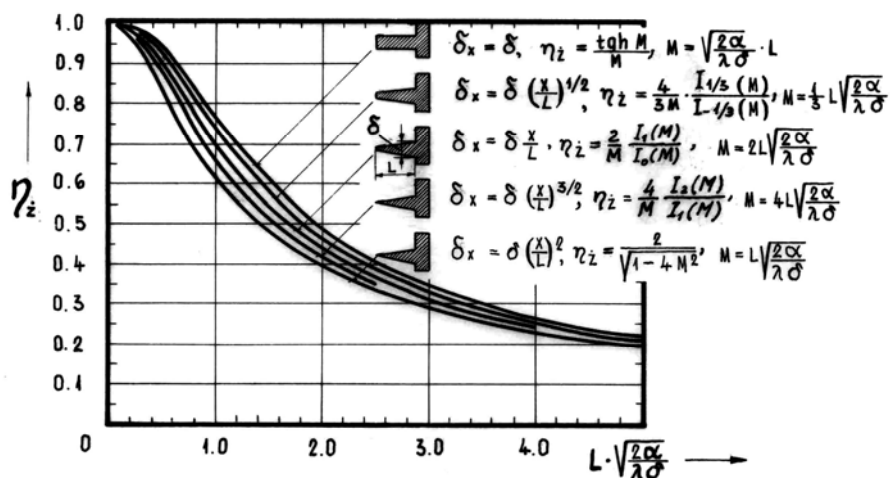
$$\boxed{\dot{Q} = \eta_z \dot{Q}_{t=t_w} = \eta_z \alpha A_z (t_w - t_f)} \quad (2.128)$$

Dla obliczenia sprawności żeber trzeba wyznaczyć zmienność temperatury wzdłuż żebra, a potem strumień ciepły lub średnią temperaturę żebra. Dla żebra prostego o grubości δ strumień ciepły jest dany wzorem (2.116) z długością określoną przez (2.126).

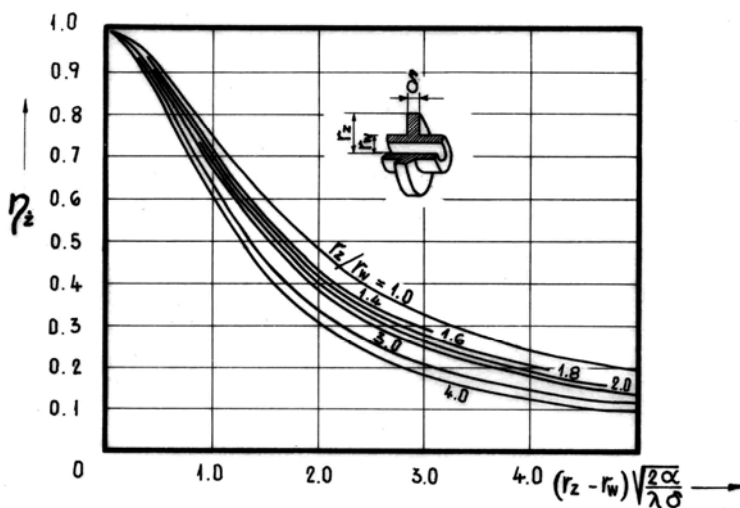
Wobec tego sprawność żebra prostego wynosi:

$$\eta_z = \frac{\alpha U}{m} \cdot \frac{(t_w - t_f) \cdot \operatorname{tgh} m(L + \frac{\delta}{2})}{\alpha A_z \cdot (t_w - t_f)} = \frac{\operatorname{tgh} m(L + \frac{\delta}{2})}{m \cdot (L + \frac{\delta}{2})} \quad (2.129)$$

ŻEBRA PROSTE



ŻEBRA OKRĄGŁE



Rys.2.14 Sprawności żeber prostych i okrągłych

bowiem:

$$A_z = U \cdot \left(L + \frac{\delta}{2} \right)$$

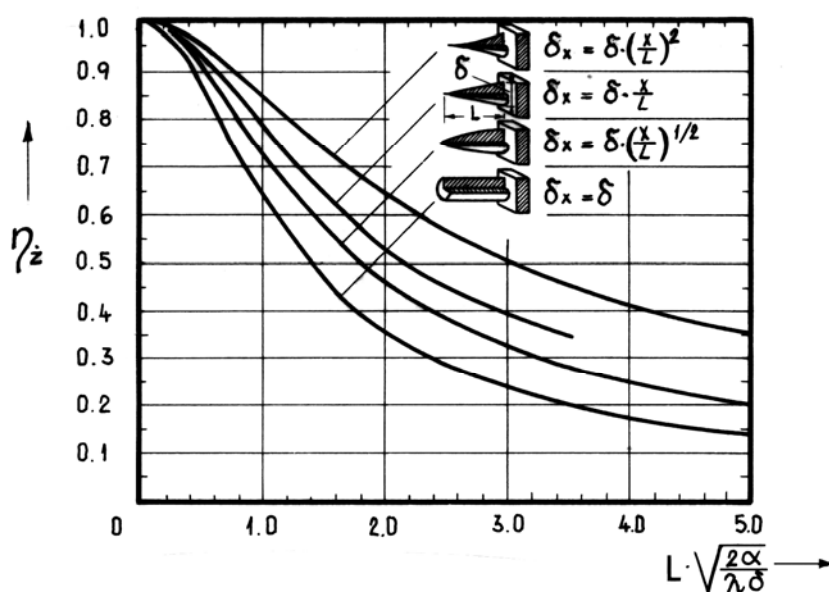
Przy szerokości zębra b można przekształcić wyrażenie (2.101):

$$m = \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda A_p}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \frac{2(b+\delta)}{b \cdot \delta}} = \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda \delta}} \cdot \sqrt{\frac{b+\delta}{b}} \approx \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda \delta}} \quad (2.130)$$

i wtedy wzór na sprawność zębra prostego przyjmuje postać:

$$\eta_z = \frac{\operatorname{tgh} \left[\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda \delta}} \cdot \left(L + \frac{\delta}{2} \right) \right]}{\sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda \delta}} \cdot \left(L + \frac{\delta}{2} \right)} \quad (2.131)$$

ŻEBRA IGŁOWE



Rys. 2.14a Sprawności żeber igłowych

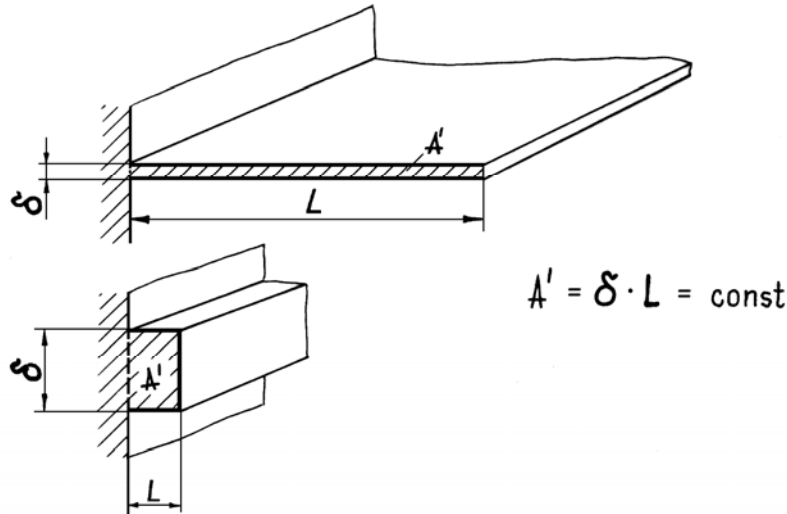
Dla innych typów żeber określenie sprawności jest trudniejsze – stosuje się metody analityczne lub przybliżone. Na przykład dla bardzo rozpowszechnionych, żeber okrągłych w kształcie pierścieni osadzonych na rurze lub wykonanych jako jedna całość z rurą rozkład temperatury opisywany jest funkcjami Bessela. Gotowe wartości sprawności η_z dla tego przypadku podaje rys. 2.14. Jeżeli różnica między długością promienia zewnętrznego i wewnętrznego: $r_z - r_w = L$ nie jest zbyt duża w porównaniu z długością promienia wewnętrznego r_w , to można stosować wzory dla żeber prostych stosując średnie wartości U i A_p .

3.3. Optymalne wymiary zębra prostego

Przy projektowaniu zębra nasuwa się pytanie o jego optymalne rozmiary, tzn. o stosunek długości do grubości. Przy określonym zużyciu materiału, czyli jednakowej powierzchni wzdłużnego przekroju zębra A' , istnieje wiele możliwych kształtów pomiędzy skrajnymi przedstawionymi na rys. 2.15.

Kształtem optymalnym będzie oczywiście ten, dla którego przenoszony strumień cieplny okaże się największy. Bierzemy wzór (2.116a) na strumień cieplny i wprowadzamy do niego wyrażenie (2.130) oraz wielkość:

$$A_p \cdot U = (b \cdot \delta) \cdot (b + \delta) \cdot 2 = 2b \cdot (b \cdot \delta + \delta^2) \cong 2b^2 \cdot \delta \quad (2.132)$$



Rys.2.15 Ilustracja do optymalizacji rozmiarów żebra prostego

Otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \sqrt{\alpha \lambda A_p U} \cdot (t_w - t_f) \cdot \text{tgh } mL = \\ &= b \cdot \sqrt{2\alpha \lambda \delta} \cdot (t_w - t_f) \cdot \text{tgh } \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda \delta}} \cdot L \end{aligned} \quad (2.133)$$

a po podstawieniu $L = \frac{A'}{\delta}$:

$$\dot{Q} = b \cdot \sqrt{2\alpha \lambda \delta} \cdot (t_w - t_f) \cdot \text{tgh } \frac{A'}{\delta^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda}} \quad (2.134)$$

co jest roboczą zależnością \dot{Q} od δ .

Istnieje oczywiście wiele możliwych kształtów żebra prostego pomiędzy skrajnymi przedstawionymi na rys. 2.15. Jeden z nich będzie miał wymiary optymalne ze względu na wydajność cieplną.

W rozpatrywanym zagadnieniu stałe są: α , λ , b , A' i $(t_w - t_f)$.

Po zróżniczkowaniu (2.132) względem δ i przyrównaniu wyniku do zera otrzymuje się równanie:

$$\text{tgh } k = \frac{3k}{\cosh^2 k} \quad (2.135)$$

w którym:

$$k = \frac{A'}{\delta^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{2\alpha}{\lambda}} \quad (2.136)$$

Rozwiązanie uzyskane na drodze numerycznej lub graficznej wyraża liczba:

$$k = 1,419$$

i dla niej strumień cieplny osiąga maksimum.

Zatem optymalna grubość żebra prostego wyrażona jest wzorem:

$$\delta_{\text{opt}} = \sqrt[3]{\frac{2 A'^2 \cdot \alpha}{1,419^2 \lambda}} \quad (2.137)$$

a optymalny stosunek długości do grubości:

$$\frac{L}{\delta_{\text{opt}}} = 1,419 \sqrt{\frac{\lambda}{2\alpha \cdot \delta_{\text{opt}}}} \quad (2.138)$$

Sprawność żebra prostego o optymalnych wymiarach obliczyć można z (2.131) przy założeniu: $L + \delta/2 \approx L$ i wykorzystaniu (2.130) i (2.136):

$$\eta_{\text{opt}} = \frac{\text{tgh } k_{\text{opt}}}{k_{\text{opt}}} = 0,626$$

Wzory (2.137) i (2.138) pozwalają obliczyć optymalne wymiary pojedynczego żebra.

Pozostaje jeszcze sprawa optymalnego rozstawienia żeber. Ta sprawa jest trudniejsza, choć istnieją udane próby rozwiązania tego zagadnienia*). Zmierzają one do określenia optymalnego rozstawu żeber dla każdej wartości współczynnika przejmowania ciepła α (warunków przepływu) lub na odwrót.

Granica stosowalności żeber

Żebra stosuje się dla zwiększenia powierzchni przejmującej ciepło, gdy współczynnik przejmowania ciepła α jest mały (a więc przede wszystkim w zetknięciu z gazami). Ze wzrostem α przejmowanie ciepła staje się intensywniejsze, temperatura żebra (t) zmienia się szybciej i na krótszym odcinku osiąga temperaturę otaczającego płynu (t_f). Zbyt długie żebro będzie wtedy niewykorzystane, a więc niecelowe. Należy więc zbadać zmienność przenieszonego strumienia ciepłego Q z długością żebra: L . Ekstremum tej funkcji istnieje dla:

$$\frac{d\dot{Q}}{dL} = 0 \quad (2.139)$$

Stosując dla żebra prostego dokładniejszy wzór (2.125) otrzymuje się:

$$\frac{d}{dL} \left[\frac{\text{tgh } mL + \frac{\alpha_L}{m\lambda}}{1 + \frac{\alpha_L}{m\lambda} \cdot \text{tgh } mL} \right] = 0 \quad (2.140)$$

Po zróżniczkowaniu i pominięciu mianownika oraz redukcjach otrzymuje się warunek istnienia ekstremum:

$$m - \frac{\alpha_L^2}{m\lambda^2} = 0 \quad (2.141)$$

czyli:

$$m\lambda = \alpha_L \quad (2.142)$$

*) J. Madejski: „Teoria wymiany ciepła” PWN, Warszawa – Poznań, 1963.

Podstawiając to do wzoru (2.125) na \dot{Q} otrzymuje się wzór na wartość ekstremalną strumienia:

$$\dot{Q} = \alpha_L A_p (t_w - t_f) \quad (2.143)$$

Przedstawia on ilość ciepła przenoszona przez powierzchnię zajętą przez samą podstawę żebra wtedy, gdyby tego żebra nie było.

Wprowadzając do (2.142) uproszczony związek (2.130) na \underline{m} i zakładając $\alpha_L = \alpha$ otrzymuje się po przekształceniach:

$$\frac{2\lambda}{\alpha\delta} = 1 \quad (2.144)$$

jako warunek istnienia minimum strumienia (2.143).

Żebro będzie więc celowe, gdy przeniesie więcej ciepła niż to minimum (tzn. że żebro nie będzie izolatorem cieplnym) czyli dla:

$$\frac{2\lambda}{\alpha\delta} > 1 \quad (2.145)$$

W praktyce zastrza się ten warunek 5-krotnie, by mieć pewność, że zastosowanie żebra nie będzie bezcelowe, tak więc:

$$\frac{2\lambda}{\alpha\delta} > 5 \quad (2.146)$$

albo:

$$\boxed{\frac{\lambda}{\alpha\delta} > 2,5} \quad (2.147)$$

Dla cienkich żeber stalowych omywanych gazem warunek ten jest wielokrotnie przekraczany. Na przykład dla: $\delta = 1 \text{ mm}$, $\lambda = 45 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, i $\alpha = 15 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ jest:

$$\frac{\lambda}{\alpha\delta} = \frac{45}{15 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 3000$$

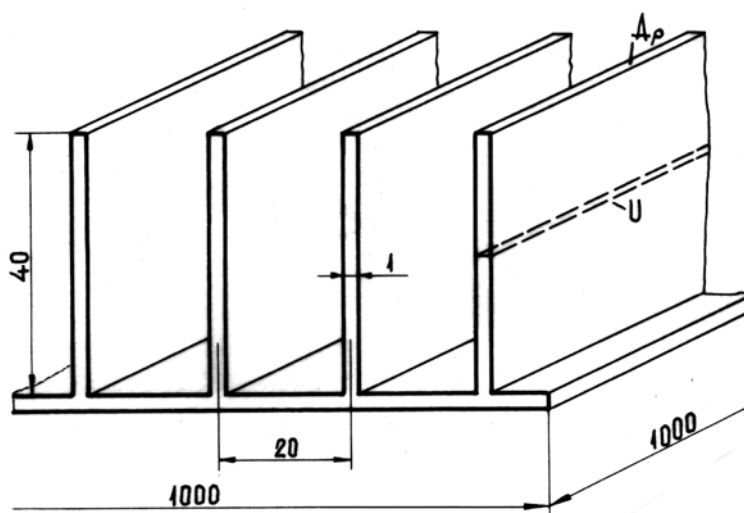
ale dla żeber grubszych, np. odlewanych ($\delta = 10 \text{ mm}$) omywanych wodą ($\alpha = 2000 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$), wypada:

$$\frac{\lambda}{\alpha\delta} = \frac{45}{2000 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 2,25$$

i żebro będzie niecelowe.

3.5. Przykłady

1. Ile razy wzrośnie strumień cieplny odprowadzany z 1 m^2 płaskiej ściany, jeżeli na nią proste stalowe żebra o stałej grubości 1 mm , wysokości (długości) 40 mm , rozstawie 20 mm i przewodności cieplnej $45,5 \text{ W/m}\cdot\text{K}$? Temperatury wynoszą: ściany 80°C , powietrza otaczającego 20°C . Współczynnik przejmowania ciepła, taki sam dla żeber i odcinków ściany pomiędzy nimi, wynosi $29 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$.



Rys.2.16 Szkic sytuacyjny do przykładu 1

R o z w i ą z a n i e

Ścianka bez żeber oddaje:

$$\dot{Q}_o = \alpha A (t_w - t_f) = 29 \cdot 1 \cdot (80 - 20) = 1740 \text{ W}$$

Ścianka uźebrowana oddaje ciepło żebrami i odcinkami międzyżebrowymi.

Ich ilość:

$$n = \frac{1000}{20} = 50$$

Każde zebro oddaje strumień ciepły:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_z &= \frac{\alpha U}{m} \cdot (t_w - t_f) \cdot \operatorname{tgh} mL = \\ &= \frac{29 \cdot 2,002}{35,72} \cdot (80 - 20) \cdot \operatorname{tgh} 35,72 \cdot 0,04 = 86,9 \text{ W} \end{aligned}$$

Podstawiono tu:

$$m = \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda A_p}} = \sqrt{\frac{29 \cdot (2 \cdot 1001) \cdot 10^{-3}}{45,5 \cdot (1 \cdot 1000) \cdot 10^{-6}}} = 35,72 \frac{1}{\text{m}}$$

a wartość tangensa hiperbolicznego odczytano z tablic

Odcinek międzyżebrowy oddaje

$$\dot{Q}_{mz} = \alpha A (t_w - t_f) = 29 \cdot (1 \cdot 0,019) \cdot (80 - 20) = 33,06 \text{ W}$$

Łączny strumień oddawany przez zebra i odcinki między nimi:

$$\dot{Q} = n(\dot{Q}_z + \dot{Q}_{mz}) = 50 \cdot (86,93 + 33,06) = 5999,5 \text{ W}$$

W rezultacie otrzymuje się stosunek:

$$\frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_o} = \frac{5999,5}{1740} = 3,45$$

2. Termometr rtęciowy mierzący temperaturę powietrza w zbiorniku zanurzony jest w oleju wypełniającym dno tulejki. Wskutek tego wskazuje on temperaturę końca tulejki. Temperatura ta jest niższa od temperatury powietrza wskutek odprowadzania ciepła przez tulejkę do ścianki.

Obliczyć wynikający z tego błąd pomiaru, jeżeli na termometrze odczytano 100°C, temperatura u nasady tulejki wynosi 50°C, tulejka ma długość 140 mm, grubość 1 mm, przewodność cieplną 58 W/m·K, a współczynnik przejmowania ciepła między powietrzem i tulejką wynosi 29 W/m²·K.

Rozwiązanie

Temperatura w dowolnym przekroju tulejki dana jest równaniem (2.113). Zatem na końcu, gdzie: $x = L$ i $t = t_L$, jest (wobec: $\cosh 0 = 1$):

$$t_L - t_f = \frac{t_w - t_f}{\cosh mL}$$

Stąd temperatura powietrza dla znanej temperatury t_L wyniesie:

$$t_f = \frac{t_L \cdot \cosh mL - t_w}{\cosh mL - 1}$$

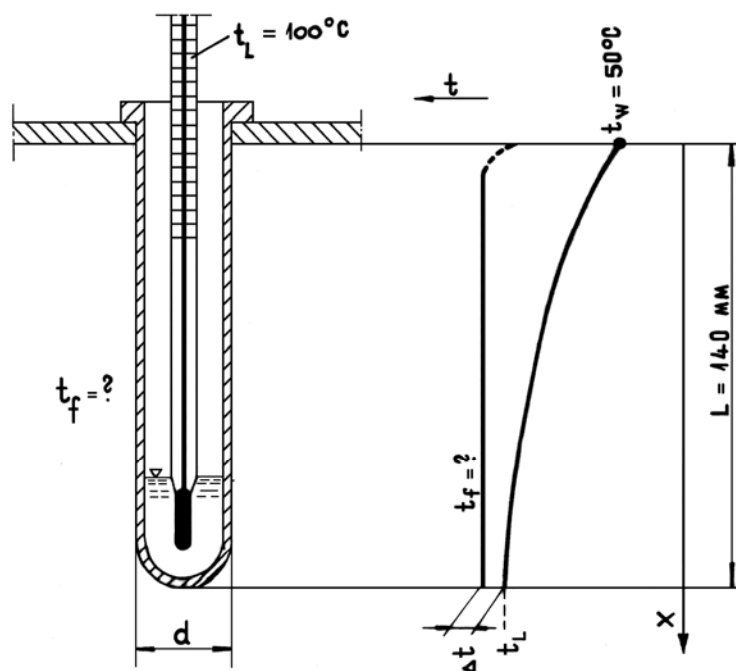
Potrzebny jest stosunek:

$$\frac{U}{A_p} = \frac{\pi d}{\pi d \delta} = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{10^{-3}} \frac{1}{m}$$

który pozwala obliczyć:

$$m = \sqrt{\frac{\alpha U}{\lambda A_p}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\lambda \delta}} = \sqrt{\frac{29}{58 \cdot 10^{-3}}} = 22,36 \frac{1}{m}$$

Zatem $mL = 22,36 \cdot 0,140 = 3,13$.



Rys.2.17 Szkic sytuacyjny do przykładu

Z tablic otrzymuje się $\cosh 3,13 = 11,459$. Wobec tego:

$$t_f = \frac{100 \cdot 11,459 - 50}{11,459 - 1} = 104,78^\circ\text{C}$$

Błąd pomiaru wynosi więc:

$$\Delta t = t_f - t_L = 104,8 - 100 = 4,8 \text{ K}$$

Zastosowana tu długość całkowita tulejki $L = 140 \text{ mm}$ odpowiada dokładnie wielkości powierzchni zewnętrznej przyjmując jej ciepło, bowiem powierzchnia ta składając się z części walcowej i z półkuli wynosi:

$$A = \pi d \cdot \left(L - \frac{d}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 4 \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi d L$$

3.6. Ćwiczenia

1. Obliczyć optymalne rozmiary żebra podanego w przykładzie 1.

$$\begin{aligned} \text{Odpowiedź : } \delta_{\text{opt}} &= 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ L/\delta_{\text{opt}} &= 39,7 \approx 40 \\ L &= 40 \text{ mm} \end{aligned}$$

2. Ile ciepła odpływa do powietrza przez proste stalowe żebro ($\lambda = 66,5 \text{ W/m}\cdot\text{K}$) o długości 2 m, wysokości $L = 60 \text{ mm}$ i grubości 4 mm, jeżeli z pomiaru uzyskano temperatury: u nasady żebra 200°C , na jego końcu $96,5^\circ\text{C}$, a dla powietrza otaczającego 20°C ?

$$\text{Odpowiedź: } \dot{Q} = 1515 \text{ W}$$

3. Ile ciepła oddaje aluminiowa ($\lambda = 203,5 \text{ W/m}\cdot\text{K}$) rura żebrowana o średnicy zewnętrznej 80 mm i temperaturze powierzchni zewnętrznej rury 120°C do powietrza o temperaturze 20°C , jeżeli współczynnik przejmowania ciepła wynosi $\alpha = 9,3 \text{ W/m}^2\text{K}$, a żebra są okrągłe o grubości 2 mm i średnicy zewnętrznej 180 mm, osadzone w liczbie 45 sztuk na 1 m długości rury? Określić sprawność żebra i temperaturę na jego końcu t_L !

Uwaga: Sprawność żebra określić z wykresu, temperaturę t_L liczyć jak dla żebra prostego.

$$\begin{aligned} \text{Odpowiedź: } \dot{Q} &= 1815 \text{ W} \\ \eta_z &= 0,94 \\ t_L &= 94,2^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Streszczenie części drugiej

Przedstawiono ważne w technice ustalone w czasie jednowymiarowe przewodzenie ciepła w przegrodach płaskich i walcowych jedno- i wielowarstwowych, a także w przegrodzie kulistej. Określono charakter zmienności temperatury wzdłuż strumienia cieplnego. Dla przegród płaskich o stałej przewodności cieplnej jest ona prostoliniowa, a dla innych ma przebieg krzywoliniowy. Wyprowadzono wzory do obliczania strumienia cieplnego. Zwrócono uwagę na analogię przewodzenia ciepła i przewodzenia prądu elektrycznego i wprowadzono pojęcie oporu cieplnego.

Wyznaczono rozkład temperatury w przypadku jednowymiarowego pręta walcowego z wewnętrznymi źródłami ciepła.

Dokonano analizy przewodzenia ciepła prętach i żebrach prostych przy założeniu jednowymiarowości procesu i wyprowadzono zależności temperatury od długości oraz wzo-ry na przenoszony strumień cieplny.

Wprowadzono pojęcie sprawności żebra i podano sposób jego wyznaczania dla żebra prostego. Przedstawiono analizy mające na celu określenie optymalnych rozmiarów żebra oraz granicy stosowalności żeber.

III. PRZENIKANIE CIEPŁA (ZŁOŻONE PRZENOSZENIE CIEPŁA)

Przenikanie ciepła polega na przenoszeniu energii cieplnej przez konwekcję i przewodzenie (czyli przez przejmowanie) od płynu do ścianki, następnie przez przewodzenie wewnątrz przegrody i znowu przez przejmowanie od ścianki w głąb drugiego płynu. W szczególnych przypadkach, przejmowaniu ciepła na powierzchni może towarzyszyć promieniowanie ciepła – wtedy współczynnik przejmowania ciepła na tej powierzchni reprezentuje transport energii cieplnej przez obydwa mechanizmy stanowiąc współczynnik całkowity:

$$\alpha_c = \alpha + \alpha_r$$

w którym współczynnik radiacyjny α_r określony jest wzorem (1.10).

PRZENIKANIE CIEPŁA PRZEZ PRZEGRODY GŁADKIE

Rozważa się ustalone jednowymiarowe pole temperatury (przykładowy rozkład temperatury podaje rys. 3.1), wobec czego strumień cieplny przenoszony kolejno od płynu do ścianki, potem wewnątrz ścianki oraz od ścianki do drugiego płynu jest na każdym etapie tego procesu taki sam.

Przy użyciu oznaczeń podanych na rys.3.1 mamy dla każdego z tych etapów:

$$\dot{Q} = \alpha_1 \cdot (t_{f1} - t_{w1}) \cdot A_1 \quad (3.1)$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (t_{w1} - t_{w2}) \cdot A_w \quad (3.2)$$

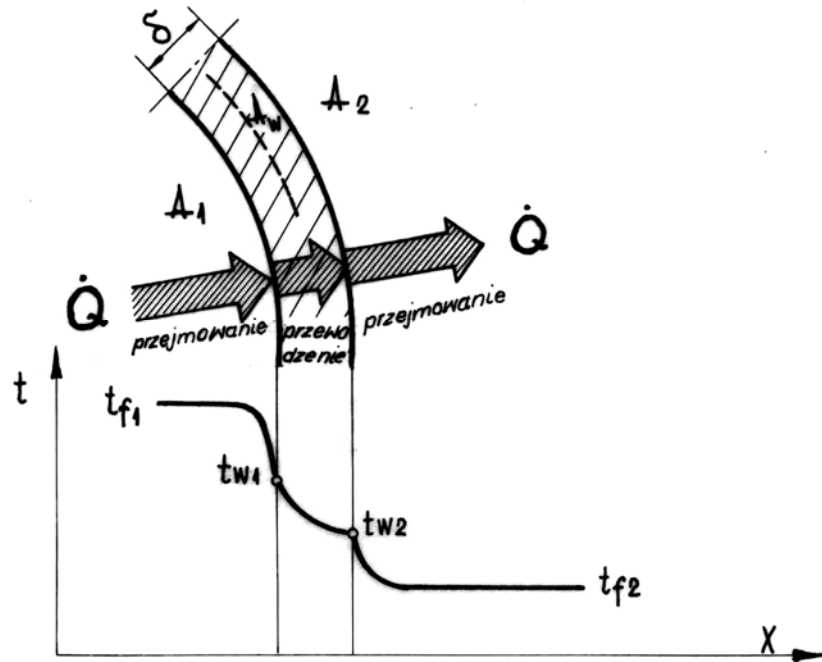
$$\dot{Q} = \alpha_2 \cdot (t_{w2} - t_{f2}) \cdot A_2 \quad (3.3)$$

Ścianka nie musi oczywiście być płaska - A_w jest średnią powierzchnią poprzeczną przegrody obliczoną w odpowiedni, a podany uprzednio, sposób. Po wyodrębnieniu w powyższych równaniach spadków temperatur:

$$\frac{\dot{Q}}{\alpha_1 \cdot A_1} = t_{f1} - t_{w1} \quad (3.4)$$

$$\frac{\dot{Q}}{\frac{\lambda}{\delta} \cdot A_w} = t_{w1} - t_{w2} \quad (3.5)$$

$$\frac{\dot{Q}}{\alpha_2 \cdot A_2} = t_{w2} - t_{f2} \quad (3.6)$$



Rys.3.1 Rozkład temperatury przy przenikaniu ciepła

i zsumowaniu stronami otrzymuje się zależność

$$\dot{Q} \cdot \left[\frac{1}{\alpha_1 \cdot A_1} + \frac{1}{\frac{\lambda}{\delta} \cdot A_w} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A_2} \right] = t_{f1} - t_{f2} \quad (3.7)$$

albo

$$\dot{Q} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot A_1} + \frac{\delta}{\lambda \cdot A_w} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A_2}} \cdot (t_{f1} - t_{f2}) \quad (3.8)$$

Zależność tę wygodniej było by ująć w postaci podobnej do poznanego uprzednio równania Newtona (1.6):

$$\dot{Q} = k \cdot A_o \cdot (t_{f1} - t_{f2}) \quad (3.9)$$

Jest to tzw. prawo (albo równanie) Pécleta*, w którym: k [W/m²·K] stanowi **współczynnik przenikania ciepła****, a A_o [m²] powierzchnię obliczeniową. Tą powierzchnią może być powierzchnia A_1 , A_2 lub A_w zależnie od wyboru lub obowiązującej w danej dziedzinie konwencji (przepisów). I tak w kotłach parowych jest nią zawsze powierzchnia od stron spalin.

Z identyczności zapisów (3.8) i (3.9) wynika:

$$kA_o \equiv \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot A_1} + \frac{1}{\frac{\lambda}{\delta} \cdot A_w} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A_2}} \quad \left[\frac{W}{K} \right] \quad (3.10)$$

Opór cieplny przenikania ciepła stanowi oczywiście mianownik wyrażenia (3.8), czyli:

$$R_k = \frac{1}{kA_o} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot A_1} + \frac{\delta}{\lambda \cdot A_w} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A_2} = R_{\alpha_1} + R_w + R_{\alpha_2} \quad (3.11)$$

Opór przenikania jest więc sumą oporów cieplnych poszczególnych procesów składowych.

*) Jean Claude Péclet (1793 – 1857) - fizyki francuski.

**) Obecnie (rok 2008) spotyka się też oznaczenie tej wielkości przez: U [W/m²·K], np. w normach PN-EN dotyczących obliczeń cieplnych budynków

Orientacyjne wartości współczynnika przenikania ciepła k [$W/m^2 \cdot K$]

Układ	k [$W/m^2 \cdot K$]	Uwagi
Budynki		
ściany zewnętrzne	0,3...1,2 (...2,0)	
drzwi zewnętrzne, bramy	3 ... 4	
okna 1-szybowe	4 ... 5	
okna 2-szybowe izolacyjne	1,5 .. 3	
stropy	3 ... 7,5	
Wymienniki ciepła		
<u>ciecz-ciecz</u>		
wodne	140...350 850...2000	konw. swobodna konw. wymuszona
olejowo-wodne	25...60 100...300	konw swobodna konw. wymuszona
wodne doładzacz skroplin płynów chłodniczych	230...580	
<u>ciecz wrząca - ciecz</u>		
chłodnice freonowe lub amoniakalne, solanki lub wody	200...1500	zależnie od konstrukcji
<u>ciecz - gaz</u>		
chłodnice wodne sprężonego powietrza	30...1000	□□ zależnie od konstrukcji i
chłodnice solankowe powietrza	20...35	
spalinowe podgrzewacze wody kotłowej	10...35	□ ciśnienia gładkie i żebrowane gładkie żebrowane
grzejniki wodne centralnego ogrzewania	7...13,5 5...6	
<u>ciecz wrząca – gaz</u>		
chłodnice freonowe	14...45 12...18	rury gładkie rury żebrowane
chłodnice amoniakalne powietrza	17...55	
parowniki chłodnicze sufitowe i przyścienne	10...20	
parowniki kotłowe konwekcyjne	20...60	
parowniki kotłowe opromieniowane	20...400	
<u>kondensująca para - ciecz</u>		
skraplacze turbin parowych	2300...4500	
skraplacze tłokowych silników parowych	1300...1800	
skraplacze amoniakalne	500...1300	
skraplacze freonowe	300...1000	
podgrzewacze parowe oleju opałowego	60...450	
podgrzewacze regeneracyjne wody	900...2000	
podgrzewacze ciepłownicze wody	2200...2600	
podgrzewacze okrętowe wody zasilającej	600...3500	
bojlery parowo - wodne	ok. 350	
<u>kondensująca para - ciecz wrząca</u>		
wyparki roztworów wodnych	600...4000	
wyparki cieczy dających osad	25...600	
skraplacze - parowniki kolumn niskotemperaturowego rozdzielania powietrza	700...950	
<u>kondensująca para – gaz</u>		
parowe grzejniki centralnego ogrzewania	8,5...14,5	
skraplacze amoniaku chłodzone powietrzem	5,5...6,5 55...70 17...35	gładkie żebrowane gładkie żebrowane
skraplacze freonu chłodzone powietrzem	33...42 10...25	gładkie żebrowane
<u>gaz -gaz</u>		
spalinowe podgrzewacze powietrza:		
turbin spalinowych	30...70	
kotłów parowych	12...18 13...35 20...35	rurowe płytkowe
spalinowe przegrzewacze pary	20...35	
płaszczowo - rurowe wymienniki ciepła w technice rozdzielania gazów	35...70	

1.1. Szczególne przypadki współczynnika przenikania ciepła

Ścianka płaska, w której wszystkie powierzchnie są jednakowe:

$$A_1 = A_w = A_2 = A_o$$

Z tego powodu powierzchnie znikają ze wzoru (3.10) i otrzymujemy:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (3.12)$$

a dla ścianki wielowarstwowej o oporze cieplnym: $R_w = \sum R_{wi} = \sum \frac{\delta_i}{\lambda_i}$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}} \quad (3.13)$$

Ścianka walcowa określona jest średnicami d_1 i d_2 , z których wyznacza się średnicę średnią d_w . W przypadku ścian metalowych (o dużej przewodności cieplnej λ) wystarcza określić d_w jako średnią arytmetyczną. Dzielnąc we wzorze (3.10) obie strony przez A_o otrzymuje się:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot \frac{A_1}{A_o}} + \frac{1}{\frac{\lambda}{\delta} \cdot \frac{A_w}{A_o}} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot \frac{A_2}{A_o}}} \quad (3.14)$$

Stosunki powierzchni można zastąpić stosunkami średnic:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_o} &= \frac{\pi d_1 L}{\pi d_o L} = \frac{d_1}{d_o} \\ \frac{A_w}{A_o} &= \frac{\pi d_w L}{\pi d_o L} = \frac{d_w}{d_o} \\ \frac{A_2}{A_o} &= \frac{\pi d_2 L}{\pi d_o L} = \frac{d_2}{d_o} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Po podstawieniu tego do (3.14) otrzymuje się

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot \frac{d_1}{d_o}} + \frac{\delta}{\lambda \cdot \frac{d_w}{d_o}} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot \frac{d_2}{d_o}}} \quad (3.16)$$

Jeżeli przegroda walcowa składa się z kilku warstw o łącznym oporze cieplnym:

$$R_w = \sum R_{wi} = \sum \frac{\delta_i}{\lambda_i \cdot A_{wi}} = \sum \frac{\delta_i}{\pi \lambda_i \cdot d_{wi} \cdot L} \quad (3.17)$$

to opór cieplny przenikania wynosi:

$$R_k = \frac{1}{k A_o} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot A_1} + \sum \frac{\delta_i}{\lambda_i \cdot A_{wi}} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A_2} \quad (3.18)$$

a współczynnik przenikania ciepła wyraża się wzorem:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot \frac{A_1}{A_o}} + \sum \frac{\delta_i}{\lambda_i \cdot \frac{A_{wi}}{A_o}} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot \frac{A_2}{A_o}}} \quad (3.19)$$

Albo po wprowadzeniu średnic:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot \frac{d_1}{d_o}} + \sum \frac{\delta_i}{\lambda_i \cdot \frac{d_{wi}}{d_o}} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot \frac{d_2}{d_o}}} \quad (3.20)$$

Przykłady

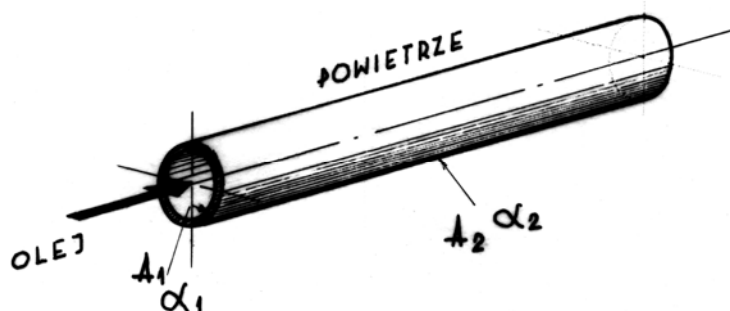
1. Obliczyć współczynnik przenikania ciepła przez ściankę rurki o średnicach: $\phi 12$ i $\phi 8$ mm, wykonanej z mosiądzu ($\lambda = 100 \text{ W/m}\cdot\text{K}$), jeżeli wewnątrz rurki przepływa olej, dla którego $\alpha_1 = 75 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$, a na zewnątrz powietrze, które ma $\alpha_2 = 20 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$.

R o z w i ą z a n i e

Średnia średnica rurki:

$$d_w = \frac{d_2 - d_1}{\ln \frac{d_2}{d_1}} = \frac{12 - 8}{\ln \frac{12}{8}} = 9,86 \text{ mm}$$

Dla porównania: średnia arytmetyczna: 10,0 mm.



Rys.3.2 Szkic sytuacyjny do przykładu 1

Za powierzchnię obliczeniową przyjmuje się powierzchnię z gorszym współczynnikiem α czyli

$$A_o = A_2$$

Potrzebne więc będą stosunki:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{8}{12} = 0,667 \quad \text{i} \quad \frac{d_w}{d_2} = \frac{9,86}{12} = 0,822$$

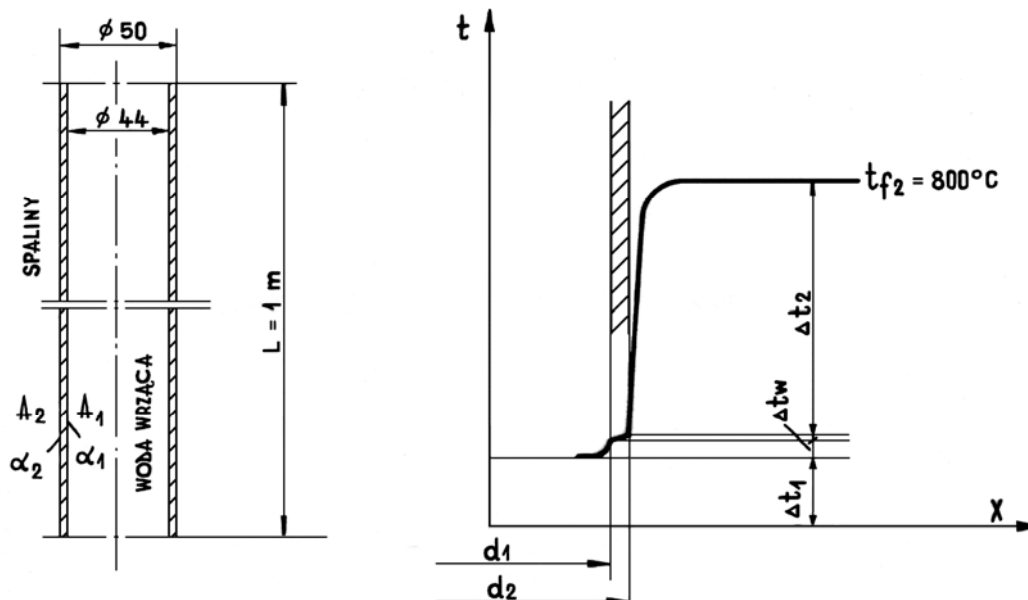
Współczynnik przenikania ciepła wg wzoru (3.16) wynosi:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \cdot \frac{d_1}{d_2}} + \frac{\delta}{\lambda \cdot \frac{d_w}{d_2}} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{75 \cdot 0,667} + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 0,822} + \frac{1}{20}} = 14,28 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Gdyby wziąć $A_o = A_1$ to przy $d_o = 8$ mm byłoby: $k = 21,4 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

2. W stalowej ($\lambda = 45 \text{ W/m}\cdot\text{K}$) rurze kotła parowego opłomkowego o średnicy zewnętrznej 50 mm i grubości ścianki 3 mm wrze woda pod ciśnieniem absolutnym 1500 kPa. Rura ogrzewana jest z zewnątrz przez spaliny o temperaturze 800°C . Obliczyć strumień ciepły przypadający na 1 m długości rury, jeżeli współczynniki przejmowania ciepła wynoszą:

dla wody wrzącej $\alpha_1 = 4000 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$, a dla spalin $\alpha_2 = 25 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$.



Rys.3.3 Szkic sytuacyjny do przykładu 2

Rozwiązanie

Temperatura wrzenia wody dla ciśnienia 1500 kPa:

$$t_s = t_{f1} = 198,1^\circ\text{C}$$

Poszczególne powierzchnie wynoszą:

$$A_1 = \pi \cdot d_1 \cdot L = \pi \cdot 0,044 \cdot 1 = 0,138 \text{ m}^2$$

$$A_w = \pi \cdot d_w \cdot L \approx \pi \cdot \frac{d_1 + d_2}{2} \cdot L = \pi \cdot 0,047 \cdot 1 = 0,148 \text{ m}^2$$

$$A_2 = \pi \cdot d_2 \cdot L = \pi \cdot 0,050 \cdot 1 = 0,157 \text{ m}^2$$

Opór cieplny przenikania obliczamy jako:

$$R_k = \frac{1}{kA_0} = \frac{1}{\alpha_1 A_1} + \frac{\delta}{\lambda A_w} + \frac{1}{\alpha_2 A_2} = \frac{1}{4000 \cdot 0,138} + \frac{3 \cdot 10^{-3}}{45 \cdot 0,148} + \frac{1}{25 \cdot 0,157} = (1,81 + 0,45 + 254,8) \cdot 10^{-3} = 257,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

A więc strumień ciepły :

$$\dot{Q}_L = \frac{800 - 198,1}{257,0 \cdot 10^{-3}} = 2342 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$

Dla wyznaczenia temperatur ścian oblicza się spadki temperatury w procesach składowych.

Z prawa Newtona dla wody wrzącej:

$$\dot{Q} = \alpha_1 A_1 \cdot \Delta t_1$$

wynika

$$\Delta t_1 = \frac{\dot{Q}}{\alpha_1 A_1} = \frac{2342}{4000 \cdot 0,138} = 4,24 \text{ K}$$

Dla przewodzenia w ścianie jest:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} A_w \cdot \Delta t_w$$

z czego:

$$\Delta t_w = \frac{\dot{Q}}{\frac{\lambda}{\delta} \cdot A_w} = \frac{2342}{\frac{45}{3 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,148} = 1,05 \text{ K}$$

Wreszcie z równania Newtona dla przejmowania po stronie spalin jest

$$\Delta t_2 = \frac{\dot{Q}}{\alpha_2 \cdot A_2} = \frac{2342}{25 \cdot 0,157} = 596,7 \text{ K}$$

Suma spadków temperatury musi oczywiście spełniać warunek:

$$\Delta t_1 + \Delta t_w + \Delta t_2 = t_{f1} - t_{f2} = 602 \text{ K}$$

co, jak wykazuje przeliczenie kontrolne, jest spełnione.

Temperatury rury wynoszą więc:

$$t_{w1} = t_{f1} + \Delta t_1 = 198 + 4 = 202^\circ\text{C}$$

$$t_{w2} = t_{w1} + \Delta t_w = 202 + 1 = 203^\circ\text{C}$$

Należy zauważyć, że procesy cząstkowe wygodniej się liczy przy pomocy oporów cieplnych - zostały one bowiem obliczone "po drodze" przy wyznaczaniu całkowitego oporu przenikania. Na przykład po stronie wody mamy:

$$\Delta t_1 = \dot{Q} \cdot R_{\alpha 1} = 2342 \cdot 1,81 \cdot 10^{-3} = 4,24 \text{ K}$$

3. Dla danych poprzedniego zadania obliczyć temperaturę ścianki zewnętrznej w przypadku, gdy wewnątrz rury pokrywa 2 mm warstwa kamienia krzemionkowego o przewodności $\lambda = 0,2 \text{ W/m}\cdot\text{K}$.

R o z w i ą z a n i e :

Średnia średnica warstwy kamienia wynosi:

$$d_{w\text{kam}} \cong \frac{40 + 44}{2} = 42 \text{ mm}$$

Średnia powierzchnia tej warstwy:

$$A_{w\text{kam}} = \pi d_{w\text{kam}} \cdot L = \pi \cdot 0,042 \cdot 1 = 0,132 \text{ m}^2$$

Opór cieplny przegrody (dwuwarstwowej):

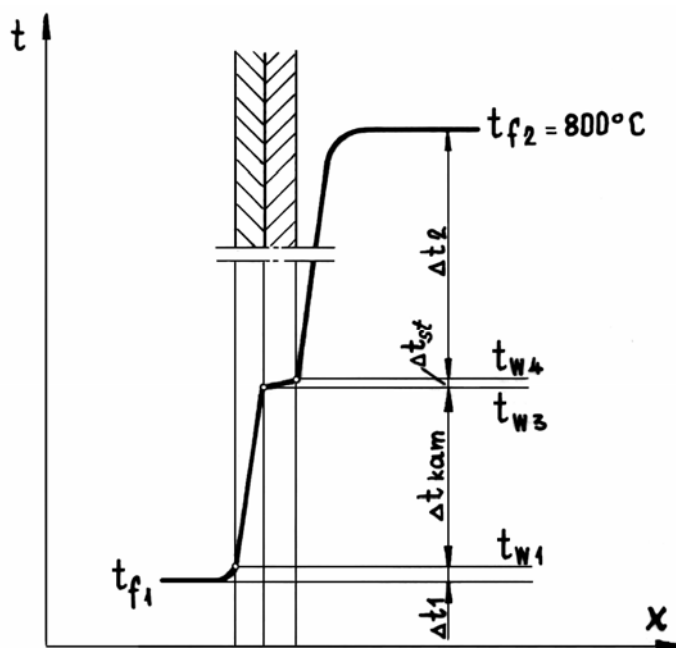
$$\begin{aligned} R_w = R_{st} + R_{\text{kam}} &= 0,45 \cdot 10^{-3} + \frac{2 \cdot 10^{-3}}{0,2 \cdot 0,132} = (0,45 + 75,7) \cdot 10^{-3} = \\ &= 76,15 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{W}} \end{aligned}$$

Opór cieplny przenikania:

$$\begin{aligned} R_k = \frac{1}{k \cdot A_o} = R_{\alpha 1} + R_w + R_{\alpha 2} &= (1,81 + 76,15 + 254,5) \cdot 10^{-3} = \\ &= 332,46 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{W}} \end{aligned}$$

Strumień cieplny:

$$\dot{Q}_L = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{R_k} = \frac{800 - 198}{332,46 \cdot 10^{-3}} = 1811 \frac{\text{W}}{\text{m}}$$



Rys.3.4 Szkic sytuacyjny do przykładu 3.

Spadki temperatury:

$$\Delta t_1 = \dot{Q} \cdot R_{\alpha 1} = 1811 \cdot 1,81 \cdot 10^{-3} = 3,3 \text{ K}$$

$$\Delta t_{\text{kam}} = \dot{Q} \cdot R_{\text{kam}} = 1811 \cdot 75,7 \cdot 10^{-3} = 137,1 \text{ K}$$

$$\Delta t_{\text{st}} = \dot{Q} \cdot R_{\text{st}} = 1811 \cdot 0,45 \cdot 10^{-3} = 0,8 \text{ K}$$

$$(\Delta t_2 = \dot{Q} \cdot R_{\alpha 2} = 1811 \cdot 254,5 \cdot 10^{-3} = 461 \text{ K})$$

Zatem temperatura zewnętrznej ścianki rury:

$$t_{w3} = t_{f1} + \Delta t_1 + \Delta t_{\text{kam}} + \Delta t_{\text{st}} \cong 339^\circ\text{C}$$

Ćwiczenia

- Mur ceglany o grubości 300 mm i przewodności cieplnej $\lambda = 0,8 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ oddziela pomieszczenie o temperaturze 20°C od powietrza atmosferycznego o temperaturze 20°C . Obliczyć jednostkową stratę ciepłą (strumień ciepły) i temperatury ścian, jeżeli współczynnik przejmowania ciepła jest po obydwu stronach ściany jednakowy i wynosi $9 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$.

Odpowiedź: $\dot{q} = 64 \text{ W/m}^2$
 $t_{w1} = 12^\circ\text{C}$
 $t_{w2} = -12^\circ\text{C}$

- Obliczyć strumień ciepły i temperatury powierzchni zewnętrznych muru z poprzedniego zadania w przypadku, gdy pokryto go z zewnątrz warstwą klinkieru o grubości 3 mm i przewodności cieplnej $\lambda = 0,165 \text{ W/m}\cdot\text{K}$.

Odpowiedź: $\dot{q} = 49,6 \text{ W/m}^2$
 $t_{w1} = 13,8^\circ\text{C}$
 $t_{w2} = -13,8^\circ\text{C}$

- Obliczyć jednostkowy strumień ciepły (stratę „zimną”) $\dot{Q}_L [\text{W/m}]$ niez izolowanego rurociągu stalowego ($\lambda = 58 \text{ W/m}\cdot\text{K}$) o średnicy zewnętrznej 76 mm i wewnętrznej 68 mm, jeżeli temperatura płynu przepływającego rurą wynosi -20°C , współczynnik przejmowania ciepła $\alpha_1 = 2320 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$, temperatura powietrza otaczającego rurociąg $t_{f2} = 20^\circ\text{C}$, a współczynnik przejmowania ciepła $\alpha_2 = 11,6 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$.

Odpowiedź: $\dot{Q}_L = 110 \text{ W/m}$

4. Jaką długość L powinna mieć wężownica miedziana ($\lambda = 385 \text{ W/m}\cdot\text{K}$) o średnicy zewnętrznej 30 mm i grubości ścianki 2,5 mm, wewnątrz której wrze freon o temperaturze -20°C przy współczynniku przejmowania ciepła $\alpha_1 = 582 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$, a na zewnątrz znajduje się solanka o średniej temperaturze -10°C i współczynniku przejmowania ciepła $\alpha_2 = 1045 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$, aby przenoszony strumień cieplny wynosił $\dot{Q} = 10 \text{ kW}$?

Odpowiedź: $L = 32,2 \text{ m}$

2. PRZENIKANIE CIEPŁA PRZEZ PRZEGRODY ŻEBROWANE (PRZEGRODY O POWIERZCHNI ROZWINIĘTEJ)

Przegroda może być jedno- lub obustronnie żebrowana. Ograniczymy się do najczęstszego przypadku jednostronnego żebrowania (obustronne żebrowanie nie zmienia przedstawionej metody postępowania).

Rozróżnia się żebra:

- a) proste - umieszczone na ścianach płaskich lub na tworzących ścian walcowych,
- b) okrągłe - umieszczone obwodowo na rurach okrągłych.

Jeżeli chodzi o przekrój poprzeczny, to mogą być żebra o stałym przekroju lub o przekroju zmiennym. Z tych ostatnich interesujące są żebra o wzdłużnym przekroju parabolicznym (wklęsłym) zapewniające stałość jednostkowego strumienia cieplnego w przekroju poprzecznym:

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A_p} = \text{const}$$

Zapewniają one najlepsze wykorzystanie materiału. Ze względów technologicznych realizowane są jednak jako żebra o profilu trójkątnym lub trapezowym.

Istnieje szereg rozwiązań specjalnych, których odmienności konstrukcyjne mają na celu polepszenie przejmowania ciepła między płynem a żebrem (np. przez wycięcia, wgniecenia itp. na powierzchni żebra).

W przypadku płynu o silnie zanieczyszczających właściwościach, jak np. zapozielone spaliny, stosuje się krótkie kołki (pręty) przytwierdzone prostopadle do powierzchni. Są to tzw. „żebra igłowe”.

Jeżeli żebra nie stanowią litej całości z materiałem ścianki, to rzeczą decydującą o tym, czy żebra spełnią założone przez konstruktora zadanie, jest zapewnienie dobrego metalicznego kontaktu między podstawą żebra a ścianką. Zakładamy, że kontakt taki istnieje i że możemy uważać żebro za jedną całość ze ścianką.

Przystępując do wyznaczania strumienia cieplnego przenikającego przez ściankę żebrowaną stwierdzamy, że temperatura zewnętrznej powierzchni po stronie żebrowanej t_{w2} nie jest stała. Cechą żebrowania jest bowiem, że ich temperatura, patrząc od podstawy do końca, zmierza dość szybko do temperatury otaczającego płynu (por. rys. 2.10 lub 2.11). Użycie pojęcia sprawności pozwala jednak liczyć przejmowanie ciepła między żebrem a płynem przy pomocy stałej temperatury podstawy żebra t_{w2} (wzór 2.126).

W rezultacie przenikanie ciepła przez przegrodę jednostronnie żebrowaną (po stronie A_2) opisuje zestaw równań:

$$\dot{Q} = \alpha_1 \cdot (t_{f1} - t_{w1}) \cdot A_1 \quad (3.21)$$

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{\delta} \cdot (t_{w1} - t_{w2}) \cdot A_w \quad (2.22)$$

$$\dot{Q} = (\eta_z \cdot \alpha'_2 \cdot A_z + \alpha''_2 \cdot A_{mz}) \cdot (t_{w2} - t_{f2}) \quad (3.23)$$

W ostatnim z równań mamy żebra scharakteryzowane sprawnością η_z , współczynnikiem przejmowania ciepła na nich α'_2 i powierzchnią żeber A_z , natomiast wielkości α''_2 i A_{mz} charakteryzują powierzchnię między żebrami. Temperatura t_{w2} jest temperaturą ścianki u podstawy żebra.

Równanie (3.23) można przedstawić w prostszej postaci:

$$\dot{Q} = \alpha_{oz} \cdot A_{oz} \cdot (t_{w2} - t_{f2}) \quad (3.24)$$

w której $A_{oz} = A_z + A_{mz}$ jest wielkością powierzchni rozwiniętej, a współczynnik przejmowania ciepła dla całego ożebrowania:

$$\alpha_{oz} = \eta_z \cdot \alpha'_2 \cdot \frac{A_z}{A_{oz}} + \alpha''_2 \cdot \frac{A_{mz}}{A_{oz}} \quad (3.25)$$

Współczynnik ten można obliczyć z tego wzoru, jeżeli dane są przede wszystkim α'_2 i α''_2 , ale najczęściej korzysta się z wyników badań całości danego rodzaju ożebrowania*) - podają one od razu wartość α_{oz} . Postępowanie takie jest dokładniejsze, bowiem warunki opływu silnie wpływają na rozkład temperatury w żebrze i zmierzony rozkład nie będzie, ogólnie biorąc, zgodny z obliczonym bez uwzględnienia tych warunków (jak to uczyniono przy obliczaniu sprawności żeber w części II).

Wykonawszy na równaniach (3.21), (3.22) i (3.24) takie same operacje jak w przypadku przegród gładkich otrzymuje się wzór na opór cieplny przenikania w postaci:

$$R_k = \frac{1}{k \cdot A_o} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot A_1} + \frac{\delta}{\lambda \cdot A_w} + R_{ktk} + \frac{1}{\alpha_{oz} \cdot A_{oz}} \quad (3.26)$$

Wprowadzono tu dodatkowo opór cieplny kontaktu R_{ktk} między ścianką a podstawą żebra nałożonego na powierzchnię ścianki, uogólniając w ten sposób wzór na spotykane w praktyce przypadki niedokładnego kontaktu żebra i ścianki.

Oczywiście należy zawsze dążyć do spełnienia postulatu: $R_{ktk} \rightarrow 0$.

Żebrowanie daje się zawsze tam, gdzie jeden z oporów przejmowania ciepła, jest duży (wskutek małego α) w porównaniu z drugim. Opór cieplny ścianki jest w takich przypadkach na ogół pomijalnie mały. Dąży się do tego aby:

$$\underline{R_{\alpha 1} \approx R_{\alpha 2}}$$

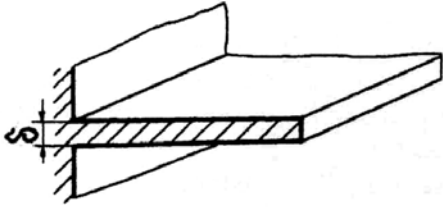
co osiąga się przez zwiększenie powierzchni (A_2) po stronie gorszego współczynnika przejmowania ciepła (α_2) - zazwyczaj po stronie gazu.

Wtedy wskutek powiększonej do A_{oz} powierzchni ożebrowania będzie:

$$\underline{\alpha_1 \cdot A_1 \approx \alpha_{oz} \cdot A_{oz}}$$

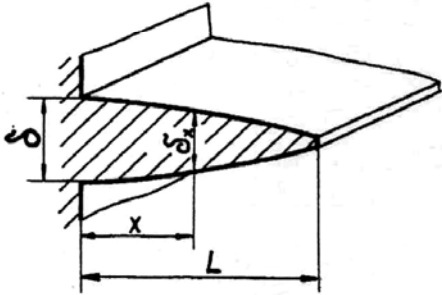
*) Np. z książki J.W. Pietrowski, W.G. Fastowski: Współczesne wysokosprawne wymienniki ciepła. WNT Warszawa 1964.

ŻEBRA PROSTE



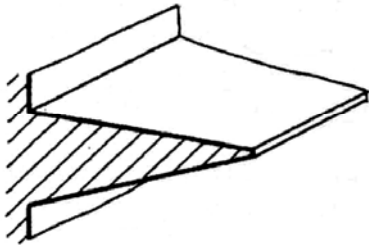
○ PROFILU PROSTOKĄTNYM

$$\delta_x = \delta$$



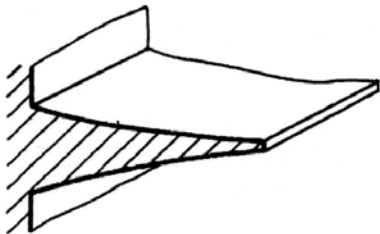
○ PROFILU WYPUKŁYM

$$\delta_x = \delta \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$$



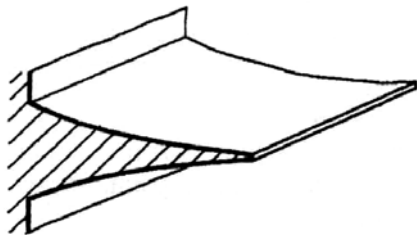
○ PROFILU TRÓJKĄTNYM

$$\delta_x = \delta \cdot \frac{x}{L}$$



○ PROFILU PARABOLICZNYM
WKŁĘŚLYM

$$\delta_x = \delta \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^{\frac{3}{2}}$$



○ PROFILU PARABOLICZNYM
WKŁĘŚLYM - OPTYMALNYM

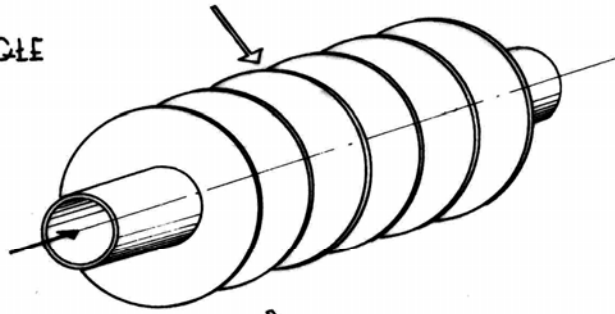
$$\delta_x = \delta \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

ZAPEWNIĄCZYM:

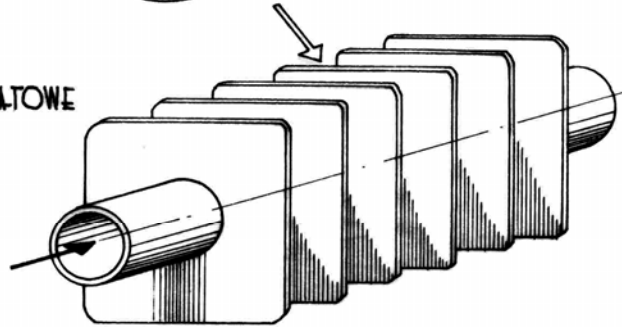
$$\dot{q} = \frac{q}{A_p} = \text{CONST.}$$

Rys.3.5 Przykłady żebrowań

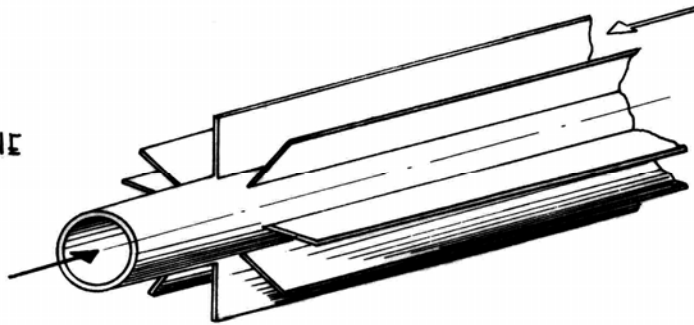
ŻEBRA OKRĄGŁE



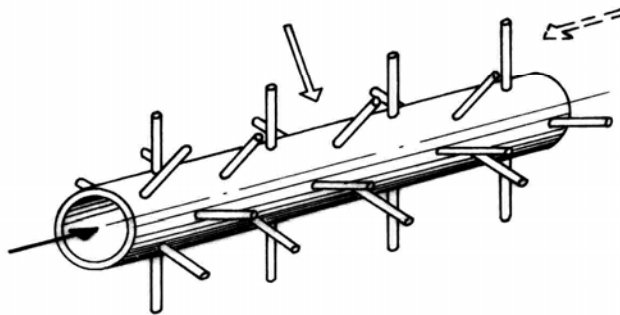
ŻEBRA KWADRATOWE



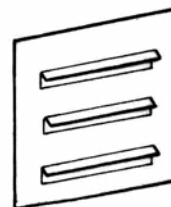
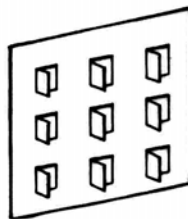
ŻEBRA WZDŁUŻNE



ŻEBRA IGŁOWE



ŻEBRA SPECJALNE
- Z WYCIECIAMI TURBU-
LIZUJĄCYMI OPIĘW

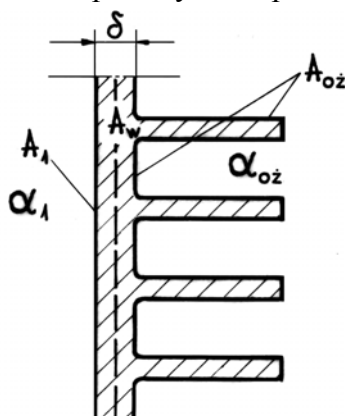


Rys.3.5 (cd.)

a pożądy do tego celu stopień rozwinięcia powierzchni wynosić będzie:

$$\frac{A_{oz}}{A_1} \approx \frac{\alpha_1}{\alpha_{oz}}$$

Współczynnik przenikania ciepła określony jest wzorem:



$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \frac{A_1}{A_o}} + \frac{\delta}{\lambda \frac{A_w}{A_o}} + \frac{1}{\alpha_{oz} \frac{A_{oz}}{A_o}}} \quad (3.27)$$

Wielkość A_{oz}/A_o nazywa się **stopniem rozwinięcia powierzchni**, przy czym A_o jest równe powierzchni podstawowej ożebrowania A_2 (możliwe jest też $A_o = A_1$ czy ew. $A_o = A_w$).

Rys.3.6 Przenikanie ciepła przez przegrodę żebrowaną

Przykład

Obliczyć jednostkowy strumień cieplny w płaskiej ściance o grubości $\delta = 10$ mm, przewodności cieplnej $\lambda = 40$ W/m·K, omywanej z jednej strony przez płyn o temperaturze $t_f = 75^\circ\text{C}$ i współczynniku przejmowania ciepła $\alpha_1 = 200$ W/m²·K a z drugiej przez płyn o temperaturze 15°C . Ścianka jest od strony chłodniejszego płynu użebrowana tak, że stopień rozwinięcia powierzchni wynosi 13 a współczynnik przejmowania ciepła $\alpha_{oz} = 10$ W/m²·K.

Rozwiązanie

Dla ścianki płaskiej $A_1 = A_w = A = A_o$ zaś: $\frac{A_{oz}}{A_o} = 13$.

Wobec tego:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{oz} \frac{A_{oz}}{A_o}}} = \frac{1}{\frac{1}{200} + \frac{10 \cdot 10^{-3}}{40} + \frac{1}{10 \cdot 13}} = 77 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Jak widać opory przejmowania ciepła są tego samego rzędu:

$$R_{\alpha_1} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ K/W}$$

$$R_{\alpha_2} = 7,7 \cdot 10^{-3} \text{ K/W}$$

Jednostkowy strumień cieplny:

$$\dot{q} = k \cdot (t_{f1} - t_{f2}) = 77 \cdot (75 - 15) = 4620 \text{ W/m}^2$$

Bez żeber współczynnik przenikania ciepła wynosiłby:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{200} + \frac{10 \cdot 10^{-3}}{40} + \frac{1}{10}} = 9,5 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Byłby więc 8.1 razy mniejszy i byłby zbliżony (ale nieco mniejszy) do mniejszego z dwu współczynników przejmowania ciepła.

3. INTENSYFIKACJA PRZENIKANIA CIEPŁA

Wzory na współczynnik przenikania ciepła k wyprowadzone w rozdziałach 1 i 2 mają taką postać, że wpływ poszczególnych wielkości na ogólną intensywność przenikania ciepła nie od razu jest widoczny. Wiadomo jednak (rys. 3.1), że składowe procesy przenoszenia ciepła odbywają się posobnie (szeregowo), tak że najmniej intensywny z nich decyduje o intensywności całego złożonego procesu. Jednak również pozostałe procesy składowe wywierają na nią wpływ.

Dla rozpoznania zachodzących tu zależności ilościowych można wziąć przypadek najprostszy: ścianki płaskiej, w której opór cieplny samej ścianki (np. metalicznej) jest pomijalnie mały. Wtedy uproszczony współczynnik przenikania ciepła k_0 można, wychodząc ze wzoru 3.12, przedstawić następująco:

$$k_0 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \quad (3.28)$$

Ze wzoru tego wynika, że współczynnik k jest zawsze mniejszy od najmniejszego α .

Dla przykładu: dla $\alpha_1 = 40$ i $\alpha_2 = 5000$ jest $k_0 = 39,8 \text{ W/m}^2\text{K}$. Znaczniejsze podwyższenie k może nastąpić jedynie przez zwiększenie mniejszego z dwu współczynników α_1 lub α_2 . Na przykład: gdyby α_1 wzrosło do 80, to otrzymało by się $k_0 = 79,8 \text{ W/m}^2\text{K}$, a przy wzroście α_1 do 200 było by $k_0 = 192 \text{ W/m}^2\text{K}$.

W przypadku gdy α_1 , i α_2 są zbliżonej wielkości, a więc dla $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, jest:

$$k_0 = \frac{\alpha \cdot \alpha}{\alpha + \alpha} = \frac{\alpha}{2}$$

tzn. że współczynnik przenikania ciepła k_0 jest równy połowie współczynnika przejmowania ciepła α : $k_0 = \frac{\alpha}{2}$

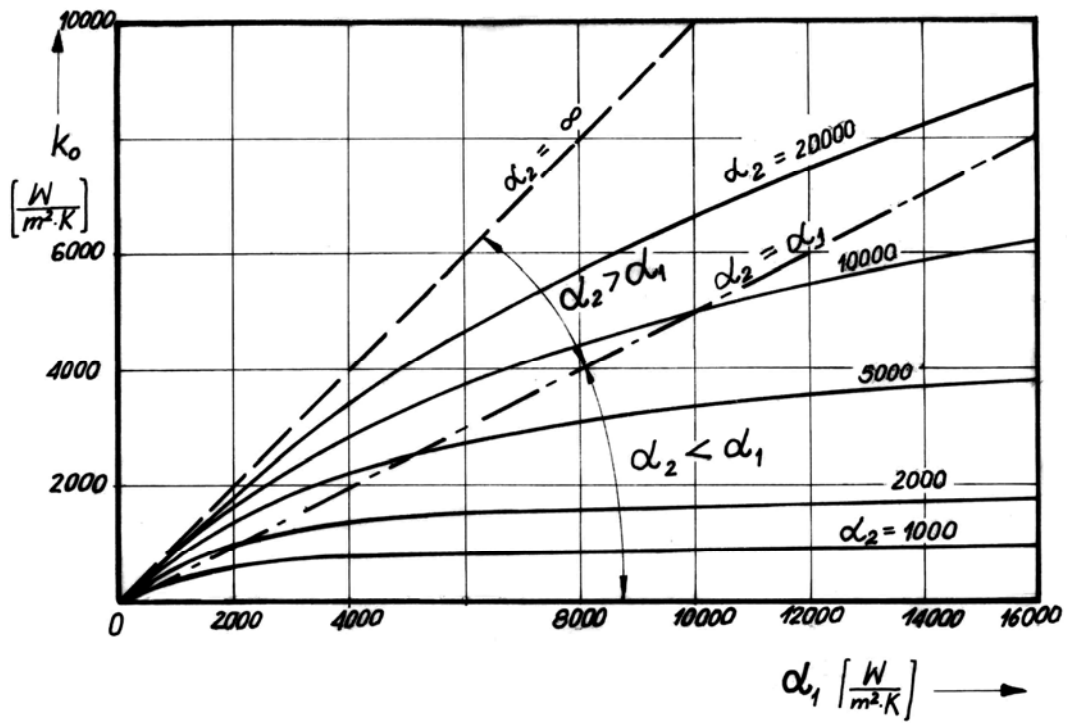
W takim przypadku dla zwiększenia k powinno się podwyższać obydwa współczynniki przejmowania ciepła.

Wnioski te potwierdza wykres rys. 3.7: zwiększając α_1 przy $\alpha_2 = \text{const}$ uzyskuje się dość szybki wzrost k_0 tylko do czasu, kiedy α_1 zrówna się z α_2 , potem wzrost k_0 jest powolniejszy i wreszcie, praktycznie biorąc, zanika.

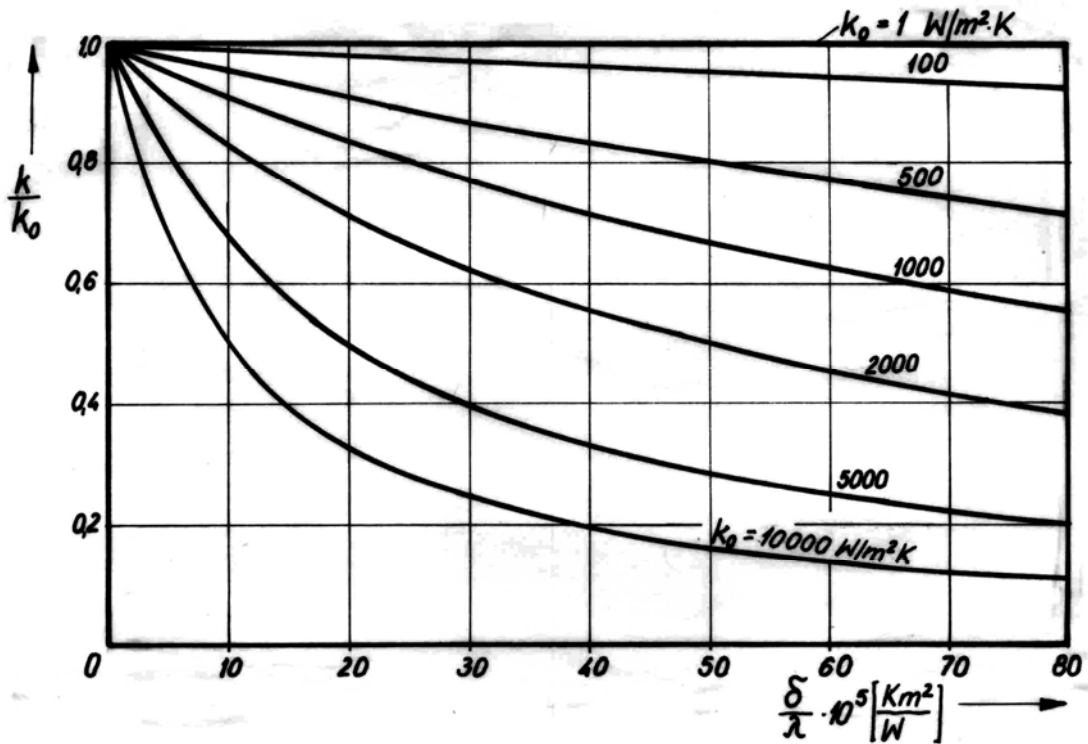
Wnioski te obejmują również powierzchnie żebrowane - przez α_1 należy tu jedynie rozumieć:

$$\alpha_1 = \alpha_{0\dot{z}} \frac{A_{0\dot{z}}}{A_1}$$

Kolejnym zagadnieniem jest wpływ oporu cieplnego ścianki. We wzorze (3.28) nie jest on uwzględniony jako pomijalnie mały. Z wielkości błędu wywołanego tym pominięciem należy jednak zdać sobie sprawę. W pewnych okolicznościach bowiem może on przekroczyć granice tolerancji i zaważyć ujemnie na dokładności obliczeń projektowanego procesu.



Rys.3.7 Zależność uproszczonego współczynnika przenikania ciepła k_0 od obydwu współczynników przyjmowania ciepła α_1 i α_2



Rys.3.8 Zależność rzeczywistego współczynnika przenikania ciepła k od oporu cieplnego ścianki i uproszczonego współczynnika przenikania ciepła k_0

Przy wykorzystaniu wzorów (3.12) i (3.28) można współczynnik przenikania ciepła dla ścianki płaskiej przedstawić następująco:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta}{\lambda}} = \frac{1}{\frac{1}{k_0} + \frac{\delta}{\lambda}} \quad (3.29)$$

a stosunek tego współczynnika do jego wartości uproszczonej k_0 jako:

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1}{1 + \frac{\delta}{\lambda} k_0} \quad (3.30)$$

Zmienność tego stosunku przedstawia rys. 3.8 w funkcji jednostkowego (dla 1 m^2 powierzchni) oporu cieplnego ścianki $\frac{\delta}{\lambda}$ z wartością k_0 jako parametrem. Wynika z niego, że oporu cieplnego ścianki nie można pomijać wtedy, gdy przejmowanie ciepła jest intensywne, tzn. kiedy duże są wartości α_1 i α_2 a więc duże jest k_0 . Wniosek ten dotyczy już czystych powierzchni metalicznych (opór cieplny rzędu 10^{-4} K/W), a tym bardziej zanieczyszczonych kamieniem kotłowym, sadzą czy olejem.

Ogólne wskazania dla konstruktora można więc sformułować następująco:

1. Gdy współczynniki przejmowania ciepła α_1 i α_2 są co do wartości zbliżone, to dla uzyskania dużego współczynnika przenikania ciepła k_0 należy powodować zwiększenie o b y d w u współczynników: α_1 i α_2 .
2. Gdy współczynniki α_1 i α_2 różnią się znacznie od siebie, to należy oddziaływać tylko na mniejszy z nich (dążąc do tego aby α_1 i α_2 były tego samego rzędu wielkości), albo należy stosować powierzchnię z e b r o w a n ą po stronie mniejszego α ,
3. Przy intensywnym przejmowaniu ciepła (duże α_1 i α_2 a więc i k_0) należy szczególną uwagę zwracać na opór cieplny ścianki, a zwłaszcza o s a d ó w . Może się bowiem okazać, że wobec dużego oporu cieplnego osadów podwyższeni α daje nieznaczny tylko wzrost k i jest tym samym niecelowe.

Przykład

W wymienniku ciepła ma być podgrzewana woda. Po stronie wody jest $\alpha_2 = 5000 \text{ W/m}^2\text{K}$. Woda ta oddzielona jest od źródła ciepła czystą ścianką stalową o grubości $\delta = 3 \text{ mm}$ i przewodności cieplnej $\lambda = 30 \text{ W/mK}$. Jakie będą wartości rzeczywistego (k) i uproszczonego (k_0) współczynników przenikania ciepła przy ogrzewaniu:

a) spalinami dla których: $\alpha_1 = 40 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$

b) skraplającą się parą wodną dla której: $\alpha_1 = 1000 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$

R o z w i ą z a n i e

Jednostkowy opór cieplny ścianki:

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{30} = 1 \cdot 10^{-4} \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Dla ogrzewania spalinami:

$$k_0 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}} = \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{1}{5000}} = 39,68 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$k = \frac{k_o}{1 + \frac{\delta}{\lambda} k_o} = \frac{39,68}{1 + 1 \cdot 10^{-4} \cdot 39,68} = 39,52 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Obie wielkości są tu prawie równe i pominięcie oporu cieplnego ścianki nie ma większego znaczenia dla dokładności obliczeń.

Dla ogrzewania skraplającą się parą:

$$k_o = \frac{1}{\frac{1}{10000} + \frac{1}{5000}} = 3333 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$k = \frac{3333}{1 + 1 \cdot 10^{-4} \cdot 3333} = 2500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} = 0,75 k_o$$

a więc dokładna wartość jest aż o 25% niższa od uproszczonej.

4. KRYTYCZNA ŚREDNICA IZOLACJI

Dla wyznaczenia zmienności strumienia ciepłego przenikającego przez izolację rury o średnicy zewnętrznej d_2 w zależności od grubości tej izolacji i $\delta_{iz} = \frac{1}{2}(d_{iz} - d_2)$ bierzemy pod uwagę opór cieplny przenikania określony wzorem (3.18). Opór cieplny rury metalowej pomijamy, jako nieznaczny - pozostaje przewodzenie w samej izolacji czyli:

$$R_k = R_{\alpha_1} + R_{\lambda} + R_{\alpha_z} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot A_1} + \frac{\delta_{iz}}{\lambda_{iz} \cdot A_{w_{iz}}} + \frac{1}{\alpha_z \cdot A_z} \quad (3.31)$$

Po wprowadzeniu średnic będzie dla $L = 1 \text{ m}$ i $d_z \equiv d_{iz}$

$$R_k = \frac{1}{\alpha_1 \pi d_1} + \frac{\ln \frac{d_{iz}}{d_2}}{2 \pi \lambda_{iz}} + \frac{1}{\alpha_z \pi d_{iz}} \quad (3.32)$$

Poszukujemy ekstremum oporu przenikania i w tym celu wyznaczamy pochodną:

$$\frac{\partial R_k}{\partial d_{iz}} = \frac{1}{2 \pi \lambda_{iz} d_{iz}} - \frac{1}{\alpha_z \pi d_{iz}^2} = \frac{1}{\pi d_{iz}} \left[\frac{1}{2 \lambda_{iz}} - \frac{1}{\alpha_z d_{iz}} \right] = 0$$

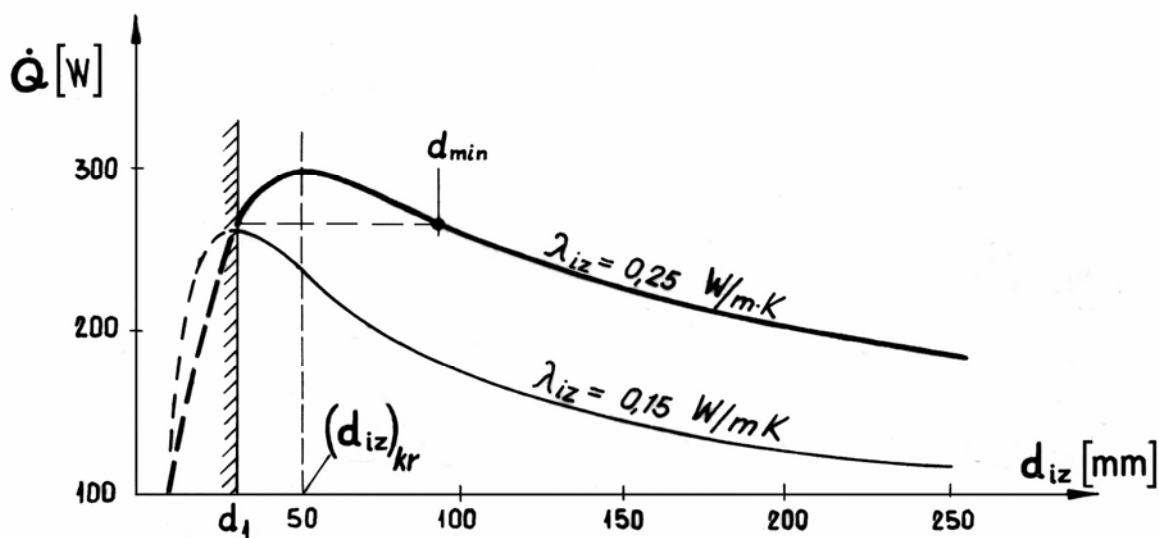
Pomijając trywialny przypadek: $d_{iz} \rightarrow \infty$, otrzymujemy ekstremalną średnicę zewnętrzną izolacji:

$$\underbrace{(d_{iz})_{kr}} = \frac{2 \lambda_{iz}}{\alpha_z} \quad (3.33)$$

zwaną **krytyczną średnicą izolacji**. Odpowiada jej minimum oporu R_k czyli maksimum strumienia ciepłego:

$$\dot{Q} = \frac{\Delta t}{R_k} \quad (3.34)$$

Zmianę tego strumienia przedstawia rys. 3.9 dla rury o średnicy zewnętrznej 30 mm i temperatury ścianki 300°C, izolacji o stosunkowo wysokiej przewodności cieplnej: 0,25 W/m·K, przy współczynniku przejścia ciepła na powierzchni zewnętrznej jak dla powietrza: 10 W/m²·K i temperaturze otoczenia 20°C.



Rys.3.9 Strumień cieplny jako funkcja grubości izolacji

Jak widać początkowo strata ciepła wzrasta, wskutek szybciej malejącego z średnicą d_{iz} oporu przejmowania ciepła R_{az} . Po przejściu średnicy krytycznej strumień cieplny spada, przeważa bowiem wzrost oporu przewodzenia.

Krytyczna średnica izolacji wynosi tu:

$$(d_{iz})_{kr} = \frac{2 \cdot 0,25}{10} = 0,05 \text{ m} = 50 \text{ mm}$$

Nałożenie izolacji o tej grubości powodować będzie większy odpływ ciepła, niż gdyby rura w ogóle nie była izolowana (rys. 3.9). Dopiero izolacja, której $\lambda = 0,25 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, o średnicy zewnętrznej powyżej d_{min} (rys.3.9) powodowałaby ograniczenie strumienia cieplnego.

Dla azbestu ($\lambda \approx 0,15 \text{ W/m}\cdot\text{K}$) średnica krytyczna byłaby równa zewnętrznej średnicy rury, a przy wacie żużlowej ($\lambda \approx 0,06 \text{ W/m}\cdot\text{K}$) byłaby jeszcze mniejsza. Tak więc w powietrzu spokojnym ($\alpha \approx 10 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$) powiększanie grubości izolacji normalnymi materiałami izolacyjnymi zawsze zmniejsza straty ciepłe.

Zatem jako izolacje ciepłochronne mogą być stosowane tylko materiały o dostatecznie niskiej przewodności cieplnej (λ) takiej, aby średnica krytyczna była co najwyżej równa średnicy rury

Krytyczna średnica izolacji ma duże znaczenie przy doborze izolacji elektrycznej przewodów prądu elektrycznego - w tym przypadku odprowadzany strumień cieplny powinien być jak największy a średnica zewnętrzna izolacji powinna być równa średnicy krytycznej.

Streszczenie części trzeciej

Przedstawiono ustalone przenikanie ciepła od jednego płynu poprzez przegrodę do drugiego. Ten sam strumień cieplny przenoszony jest kolejno przez 3 etapy: przejmowanie ciepła od płynu do ścianki, przewodzenie w ściance i przejmowanie od drugiej powierzchni ścianki do drugiego płynu. Strumień cieplny pokonuje kolejno opory cieplne związane z tymi mechanizmami, a łączny opór cieplny jest sumą oporów częściowych (układ szeregowy oporów). Proces jako całość opisany jest równaniem Pécleta; występuje w nim współczynnik przenikania ciepła \underline{k} [$\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$] który dla przegród innych niż płaskie określony jest dopiero po wskazaniu, którą powierzchnię uważa się za obliczeniową. Dotyczy to w szczególności przegród walcowych a więc rur o przekroju kołowym. Najczęściej powierzchnią obliczeniową jest ta, na której występuje niższy współczynnik przejmowania ciepła α .

Wyznaczono również opór cieplny przenikania i współczynnik przenikania ciepła dla przegród z powierzchnią żebrowaną. Żebrowanie pozwala zmniejszyć opór cieplny po stronie mniejszego α , tak że obydwa opory przejmowania ciepła stają się współmierne. Okazało się, że sprawność żebra może, ale nie musi być oddzielnie brana pod uwagę w obliczeniach - zależy to od sposobu, w jaki dane z badań o żebrowaniu zostały opracowane i opublikowane.

Rozpatrzono wpływ intensywności procesów składowych przejmowania i przewodzenia ciepła na ogólną intensywność przenikania ciepła wyrażoną wielkością współczynnika przenikania ciepła \underline{k} . Uzyskano wskazania, jak ma postępować konstruktor, aby uzyskać skuteczne zwiększenie tego współczynnika.

Na zakończenie rozpatrzono zmienność strumienia cieplnego z grubością izolacji. Okazało się, że istnieje pewna średnica krytyczna, dla której opór cieplny jest minimalny, a strumień cieplny maksymalny.

IV. PRZEPONOWE WYMIENNIKI CIEPŁA

Wymienniki (przenośniki) ciepła są aparatami służącymi do przenoszenia energii cieplnej od jednego płynu do drugiego.

Rozróżniamy, ogólnie biorąc, trzy poniższe rodzaje wymienników ciepła.

Rekuperatory czyli wymienniki przeponowe odznaczające się tym, że obydwa płyny uczestniczące w procesie oddzielone są przegrodą, poprzez którą przenika ciepło. Przegrodę stanowią przeważnie ścianki rur czasami płyt. Rekuperatory działają w sposób ciągły, a pole temperatury w nich jest ustalone w czasie.

Regeneratory czyli wymienniki z wypełnieniem działają periodycznie: płyny przepływają w nich na przemian przez kanały w masie wypełniającej oddając względnie przejmując ciepło za jej pośrednictwem. Pole temperatury w regeneratorze jest nieustalone w czasie i podlega zmianom okresowym.

Wymienniki kontaktowe, w których przenoszenie ciepła odbywa się przy bezpośrednim zetknięciu dwu płynów o różnych stanach skupienia. Tymi płynami są przeważnie: jednym woda a drugim para, gaz lub mieszanina gazowo - parowa. Najprostszą odmianą tego rodzaju wymienników są mieszankowe podgrzewacze wody lub skraplacze pary wodnej, w których kontaktują się para wodna i woda. Drugą grupę stanowią wymienniki dyfuzyjne służące do wykraplania pary z mieszanki z gazem, nasycania gazu parą lub do chłodzenia wody przy pomocy gazu.

Z powyższych trzech odmian zasadnicze znaczenie dla techniki maszynowej mają rekuperatory - stosowane są bowiem powszechnie.

Regeneratory i wymienniki kontaktowe znajdują zastosowanie w niektórych dziedzinach, a zachodzące w nich procesy zostaną omówione w częściach VII i VIII.

1. REKUPERATORY RÓWNOLEGŁO - PRĄDOWE

Na przedstawionym schemacie (rys. 4.1) równoległego przepływu obydwu płynów widać, że możliwy jest przepływ w tym samym kierunku - mówimy wtedy o *współprądzie*, albo w kierunkach względem siebie przeciwnych, co jest tak zwanym *przeciwprądem*.

Te dwa rozwiązania mają znaczenie podstawowe, możliwe są bowiem rozliczne inne orientacje, w szczególności wielu przepływów poprzecznych, o których będzie mowa dalej.

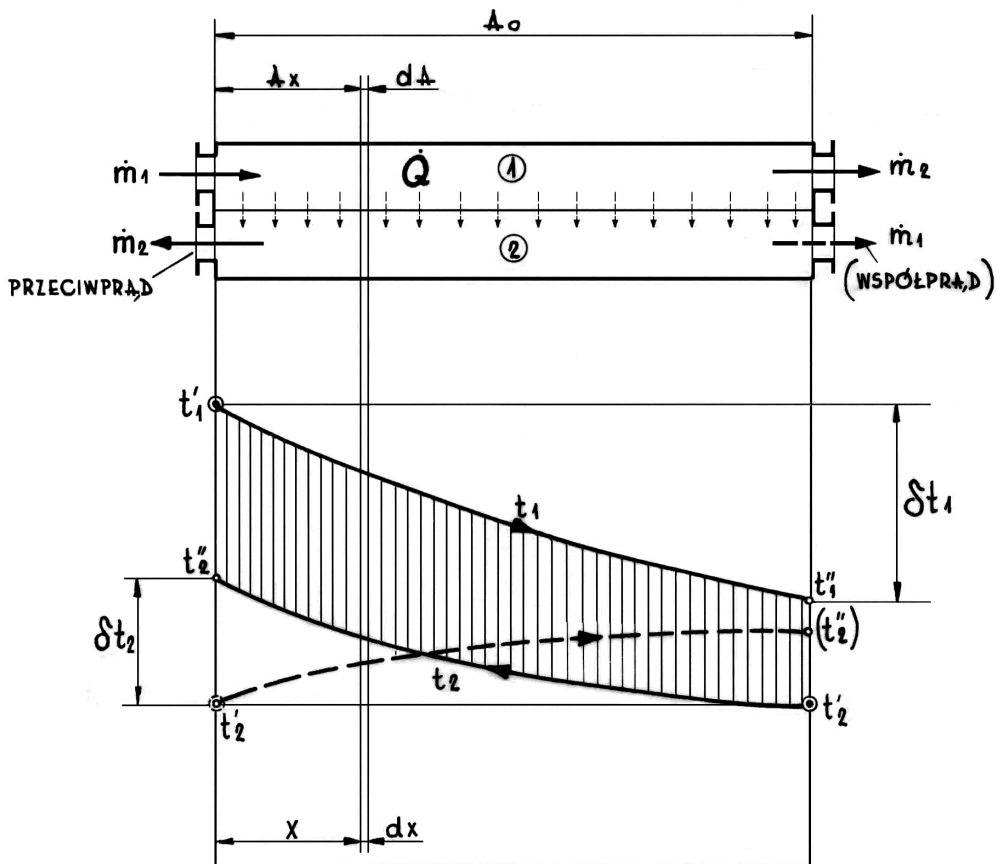
Rozpatrując termodynamiczny układ otwarty po stronie płynu cieplejszego na rys. 4.1 otrzymuje się następujący bilans energii:

$$|\dot{Q}_w| = \dot{m}_1 \cdot (i_1' - i_1'') = \dot{m}_1 \cdot c_{p1} \int_{t_1'}^{t_1''} (t_1' - t_1'') \quad (4.1)$$

bowiem zewnętrzna praca mechaniczna tu nie występuje ($\dot{L} = 0$), a różnice energii kinetycznej i potencjalnej między wlotem i wylotem są z reguły pomijalne ($w_1 - w_2 < 40$ m/s, $h_1 - h_2 < 50$ m).

Dla chłodniejszego płynu jest analogicznie:

$$\dot{Q}_d = \dot{m}_2 \cdot (i_2'' - i_2') = \dot{m}_2 \cdot c_{p2} \int_{t_2'}^{t_2''} (t_2'' - t_2') \quad (4.2)$$



Rys .4.1 Schemat rekuperatora równoległo – prądowego

Jeżeli pominąć straty ciepła do otoczenia, to musi być:

$$\dot{Q}_w = \dot{Q}_d = \dot{Q} \quad (4.3)$$

a po wprowadzeniu tego do (4.1) i (4.2) oraz drobnym przekształceniu otrzymujemy:

$$\frac{t_1' - t_1''}{t_2'' - t_2'} = \frac{\delta t_1}{\delta t_2} = \frac{\dot{m}_2 \cdot c_{p2}}{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}} = \frac{\dot{W}_2}{\dot{W}_1} \quad (4.4)$$

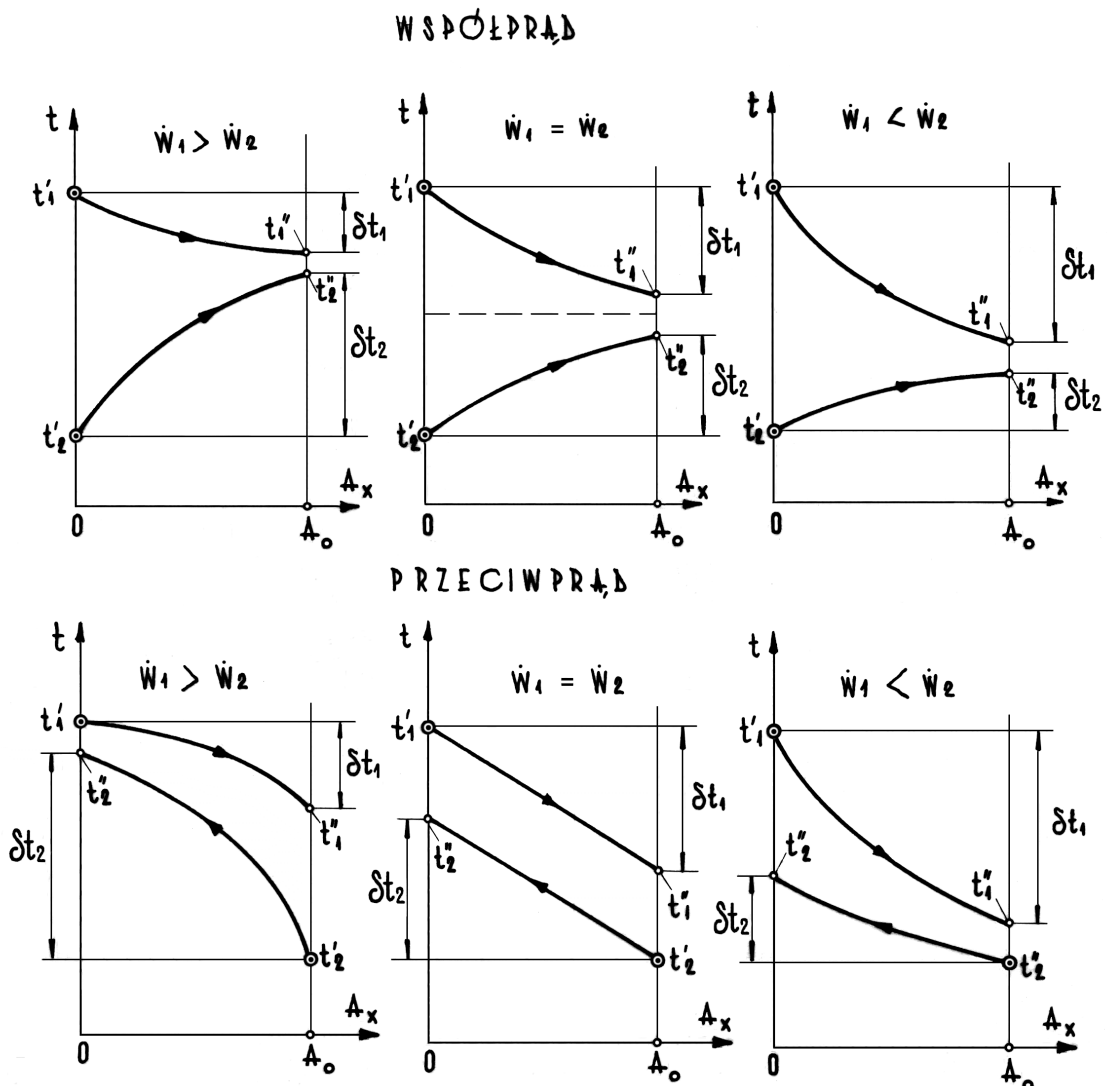
albo inaczej:

$$\dot{W}_1 \cdot \delta t_1 = \dot{W}_2 \cdot \delta t_2 = \text{const} \quad (4.4a)$$

Z zależności tej wynika, że zmiana temperatury każdego z płynów jest odwrotnie proporcjonalna do jego pojemności cieplnej $W = m \cdot c_p$. Czyli płyn o większej pojemności cieplnej doznaje mniejszej zmiany temperatury i na odwrót. Możliwości te ilustruje rys. 4.2.

Przenikanie ciepła odbywa się przy zmiennej temperaturze płynów po obu stronach przegrody. Tak więc równanie Pécleta trzeba napisać dla elementu ścianki o powierzchni obliczeniowej dA_x , na którym zmianę temperatur można uważać, z dostateczną dokładnością, za liniową, tak że średnia różnica temperatur wynosi tu $(t_1 - t_2)$, a przenoszony strumień ciepła wyraża wzór:

$$d\dot{Q} = k \cdot (t_1 - t_2) \cdot dA \quad (4.5)$$



Rys.4.2 Przebiegi temperatur w wymiennikach współ- i przeciwpłądowych w zależności od stosunku pojemności cieplnych.

Strumień ciepły przeniesiony przez całą ściankę o powierzchni A_0 wyniesie:

$$\dot{Q} = \int_0^{A_0} k \cdot (t_1 - t_2) \cdot dA \quad (4.6)$$

Z drugiej strony wygodnie było by operować średnią różnicą temperatur dla całego wymiennika:

$$\Delta t_{\text{śr}} = (t_1 - t_2)_{\text{śr}} \quad (4.7)$$

Wówczas strumień obliczany byłby ze wzoru:

$$\dot{Q} = k A_0 \cdot \Delta t_{\text{śr}} \quad (4.8)$$

Przyrównując (4.6) do (4.8) otrzymuje się

$$\Delta t_{\text{śr}} = \frac{1}{A_0} \cdot \int_0^{A_0} (t_1 - t_2) \cdot dA = \frac{1}{A_0} \cdot \int_0^{A_0} \Delta t_x \cdot dA \quad (4.9)$$

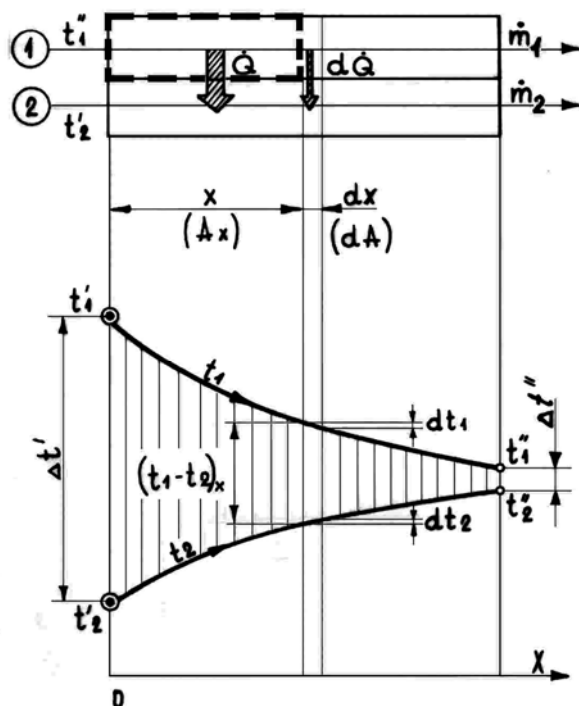
Wyznaczenie tego średniego spadku temperatury jest obok samego przebiegu temperatur podstawowym zadaniem teorii rekuperatorów.

Do obliczenia powierzchni rekuperatora potrzebna jest zawsze znajomość tej średniej różnicy temperatur $\Delta t_{\text{śr}}$.

Problem zostanie rozwiązany oddzielnie dla współprądu i oddzielnie dla przeciwprądu z pominięciem strat ciepła do otoczenia.

1.1. Współprąd

Powierzchnia przenosząca ciepło proporcjonalna jest do współrzędnej x . Oś x skierowana jest zgodnie z kierunkiem przepływu obu płynów. Rozpatrując przenikanie ciepła przez element powierzchniowy dA możemy napisać dla niego równanie Pécleta:



$$d\dot{Q} = k \cdot (t_1 - t_2)_x \cdot dA \quad (4.10)$$

gdzie: $(t_1 - t_2)_x$ jest średnią różnicą temperatur na odcinku dx , na którym można uważać zmiany temperatur za liniowe.

◀ Rys.4.3 Schemat układu współprądowego

Bilans cieplny części wymiennika ograniczonej wlotem płynu ① i powierzchnią grzejną aż do bieżącego przekroju x , w którym płyn ① wypływa (rys. 4.3), daje następujący zapis równości między energią doprowadzoną i wyprowadzoną:

$$\dot{m}_1 \cdot i'_1 = \dot{Q} + \dot{m}_1 \cdot i_1$$

albo:

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \cdot i'_1 - \dot{m}_1 \cdot i_1 \quad (4.11)$$

Po zróżniczkowaniu (przy $\dot{m}_1 = \text{const}$ oraz $i'_1 = \text{const}$) jest:

$$d\dot{Q} = -\dot{m}_1 \cdot di_1 = -(\dot{m}_1 \cdot c_{p1}) \cdot dt_1 = -\dot{W}_1 \cdot dt_1 \quad (4.12)$$

z czego elementarna zmiana temperatury płynu ① :

$$dt_1 = -\frac{d\dot{Q}}{\dot{W}_1} \quad (4.13)$$

Analogiczny jest bilans energii dla płynu ②:

$$\dot{m}_2 \cdot i'_2 + \dot{Q} = \dot{m}_2 \cdot i_2$$

albo:

$$\dot{Q} = \dot{m}_2 \cdot i_2 - \dot{m}_2 \cdot i'_2 \quad (4.14)$$

Po zróżniczkowaniu (przy $\dot{m}_2 = \text{const}$ oraz $i'_2 = \text{const}$) jest:

$$d\dot{Q} = \dot{m}_2 \cdot di_2 = (\dot{m}_2 \cdot c_{p2}) \cdot dt_2 = \dot{W}_2 \cdot dt_2 \quad (4.15)$$

a więc elementarna zmiana temperatury płynu ② :

$$dt_2 = \frac{d\dot{Q}}{\dot{W}_2} \quad (4.16)$$

Spadek temperatury $(t_1 - t_2)_x$ będący przyczyną (siłą napędową) przenikania energii cieplnej od płynu ① do płynu ② doznaje na odcinku dx zmiany:

$$d(t_1 - t_2)_x = dt_1 - dt_2 \quad (4.17)$$

Przez podstawienie do tego wyrażenia (4.13) i (4.16) otrzymuje się:

$$d(t_1 - t_2)_x = -d\dot{Q} \cdot \left(\frac{1}{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}} + \frac{1}{\dot{m}_2 \cdot c_{p2}} \right) = -d\dot{Q} \cdot \left(\frac{1}{\dot{W}_1} + \frac{1}{\dot{W}_2} \right) \quad (4.18)$$

Wprowadzając skrót:

$$\beta_w = \frac{1}{\dot{W}_1} + \frac{1}{\dot{W}_2} \quad (4.19)$$

i wyznaczając:

$$-d\dot{Q} = \frac{d(t_1 - t_2)_x}{\beta_w} \quad (4.20)$$

otrzymuje się po przyrównaniu (4.20) i (4.10) równanie różniczkowe:

$$d(t_1 - t_2)_x = -\beta_w k \cdot (t_1 - t_2)_x \cdot dA \quad (4.21)$$

które po rozdzieleniu zmiennych przy założeniu, że współczynnik przenikania ciepła oraz pojemności cieplne są stałe wzdłuż powierzchni można scałkować:

$$\int_{\Delta t'}^{\Delta t_x} \frac{d(\Delta t_x)}{\Delta t_x} = - \int_0^{A_x} \beta_w k \cdot dA = -\beta_w k \cdot \int_0^{A_x} dA \quad (4.22)$$

otrzymując:

$$\ln \frac{\Delta t_x}{\Delta t'} = -\beta_w k A_x \quad (4.23)$$

albo:

$$\boxed{\Delta t_x = \Delta t' \cdot e^{-\beta_w k A_x}} \quad (4.24)$$

Jest to, potrzebna nam, zależność spadku temperatury (między płynami) od powierzchni bieżącej A_x . W szczególności umożliwia ona obliczenie spadku temperatury Δt na końcu wymiennika o powierzchni A_0 .

Podstawiając (4.24) do (4.9) możemy teraz obliczyć średnią różnicę temperatur

$$\begin{aligned} \Delta t_{sr} &= \frac{1}{A_x} \int_0^{A_x} \Delta t_x \cdot dA_x = \frac{\Delta t'}{A_x} \cdot \int_0^{A_x} e^{-\beta_w k A_x} \cdot dA_x = \\ &= \frac{\Delta t'}{-\beta_w k A_x} \cdot (e^{-\beta_w k A_x} - 1) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Wyrażenie w mianowniku można zastąpić przez (4.23), natomiast funkcję wykładniczą przez stosunek $\frac{\Delta t_x}{\Delta t'}$ z (4.24), tak więc:

$$\Delta t_{sr} = \frac{\Delta t' \left(\frac{\Delta t_x}{\Delta t'} - 1 \right)}{\ln \frac{\Delta t_x}{\Delta t'}} = \frac{\Delta t_x - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t_x}{\Delta t'}} \quad (4.26)$$

Dla całego wymiennika: $\Delta t_x = \Delta t''$ zatem:

$$\Delta t_{sr} = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} \quad (4.27)$$

Z uwagi na to, że:

$$\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'} = \ln \Delta t'' - \ln \Delta t' = -(\ln \Delta t' - \ln \Delta t'') = -\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}$$

mamy:

$$\Delta t_{sr} = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}} \quad (4.28)$$

Wynik ten uzyskano, co należy jeszcze raz podkreślić, przy założeniu $k = \text{const}$. Założenie to obowiązuje zresztą w całej teorii rekuperatorów przedstawianej w wykładach politechnicznych. Są jednak przypadki, kiedy wielkość ta ulega silnej zmianie wzdłuż powierzchni, tak że założenie o jej stałości nie jest spełnione nawet w przybliżeniu. Wówczas k w równaniu (4.22) nie można wyłączyć przed całkę, tak że konieczne staje się określenie całki

$$\int_0^{A_x} k(x) \cdot dA_x$$

To samo odnosi się do pojemności cieplnej, która może się dość wyraźnie zmieniać, np. wskutek zmiany ciepła właściwego (c_p) pary przegrzanej w pobliżu temperatury nasycenia lub wskutek zmiany strumienia (\dot{m}) mieszanki parowo - gazowej podczas wykraplania się z niej pary.

Jeżeli wartości k lub $\dot{W} = \dot{m} \cdot c_p$ obliczone oddzielnie dla warunków panujących na wlocie i wylocie z wymiennika, różnią się znacznie od odpowiednich wartości obliczonych dla średniej temperatury w wymienniku, to trzeba zastosować bardziej złożone metody postępowania opisane w literaturze*).

1.2. Przeciwprąd

W tym przypadku równanie Pécleta pozostaje bez zmian podobnie jak bilans cieplny tej części wymiennika, przez którą przepływa płyn oddający ciepło ①:

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \cdot (i'_1 - i_1) \quad (4.29)$$

*) Np. T.Hobler: „Ruch ciepła - wymienniki”. WNT Warszawa 1986.

oraz wynikające z niego zapisy różniczkowe

$$d\dot{Q} = -\dot{m}_1 \cdot di_1 = -\dot{m}_1 \cdot c_{p1} \cdot dt_1 = -\dot{W}_1 \cdot dt_1 \quad (4.30)$$

$$dt_1 = -\frac{d\dot{Q}}{\dot{m}_1 \cdot c_{p1}} = -\frac{d\dot{Q}}{\dot{W}_1} \quad (4.31)$$

Natomiast bilans podukładu, przez który przepływa płyn chłodniejszy (rys. 4.4), wyraża równość energii doprowadzonej i wyprowadzonej następująco:

$$\dot{m}_2 \cdot i_2 + \dot{Q} = \dot{m}_2 \cdot i_2''$$

albo

$$\dot{Q} = \dot{m}_2 \cdot i_2'' - \dot{m}_2 \cdot i_2$$

Po zróżniczkowaniu (przy $i_2'' = \text{const}$ i $\dot{m}_2 = \text{const}$) jest:

$$d\dot{Q} = -\dot{m}_2 \cdot di_2 = -\dot{m}_2 \cdot c_{p2} \cdot dt_2 = -\dot{W}_2 \cdot dt_2 \quad (4.33)$$

skąd:

$$dt_2 = -\frac{d\dot{Q}}{\dot{m}_2 \cdot c_{p2}} = -\frac{d\dot{Q}}{\dot{W}_2} \quad (4.34)$$

Wyrażenie to różni się tylko znakiem od analogicznego dla współprądu (4.16).

Postępując w dalszym ciągu tak samo jak w poprzednim rozdziale, tj. podstawiając (4.31) i (4.34) do ogólnego wzoru (4.17) otrzymuje się:

$$d(t_1 - t_2)_x = -d\dot{Q} \left(\frac{1}{\dot{W}_1} - \frac{1}{\dot{W}_2} \right) \quad (4.35)$$

Oznaczamy znowu skrótowo:

$$\beta_p = \frac{1}{\dot{W}_1} - \frac{1}{\dot{W}_2} \quad (4.36)$$

otrzymując identyczne wyrażenie z (4.20):

$$d\dot{Q} = \frac{d(t_1 - t_2)_x}{\beta_p}$$

Ciąg dalszy, a więc i rezultat końcowy, są oczywiście takie same:

$$\Delta t_{sr} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}} = \frac{\Delta t'' - \Delta t'}{\ln \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} \quad (4.37)$$

Jedynie różnice temperatur na końcach wymiennika mają tu inny sens:

$$\Delta t' = t_1' - t_2'' \quad (4.38)$$

$$\Delta t'' = t_1'' - t_2' \quad (4.39)$$

Określenia $\Delta t'$ i $\Delta t''$ związane przy współprądzie z wlotem i wylotem, tu mają znaczenie jedynie symboli - można je przestawiać, np. $\Delta t'$ do (4.39) i na odwrót - wobec przemienności działań we wzorze (4.37).

Z faktu, że w wyrażeniu (4.36) jest znak minus, wynika możliwość zerowania się współczynnika β_p . Ma to miejsce w przypadku równych pojemności cieplnych obydwu płynów:

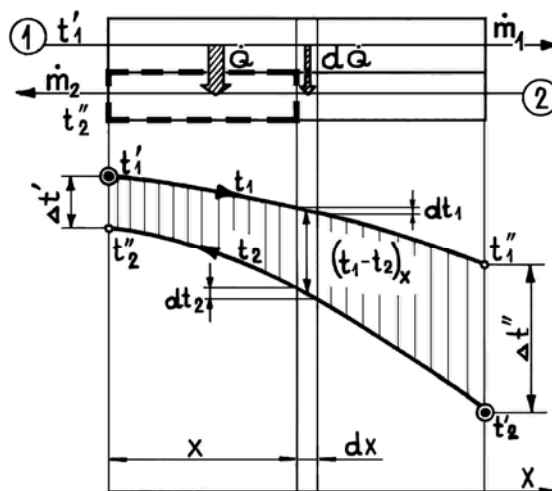
$$\dot{W}_1 = \dot{W}_2$$

Wtedy zgodnie z (4.24) jest:

$$\Delta t_x = \Delta t' \cdot e^{-\beta_p kA_0} = \Delta t' \cdot e^0 = \Delta t' = \text{const}$$

Spadek temperatury między płynami jest taki sam na całej długości wymiennika ciepła. Przypadek ten pokazano na rys. 4.2.

Warto zauważyć, że w tym przypadku przy $\Delta t \rightarrow 0$ proces przeniesienia ciepła w wymienniku przeciuprądowym zmierza do procesu odwracalnego w sensie termodynamicznym



Rys.4.4 Schemat układu przeciuprądowego ▶

1.3. Średnia logarytmiczna a średnia arytmetyczna

Załóżmy, że $\Delta t'$ będzie większą, a $\Delta t''$ mniejszą ze skrajnych różnic temperatur w rekuperatorze. Wówczas średnią logarytmiczną różnicę temperatur:

$$\Delta t_{\log} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}}$$

Można wyrazić jako wielkość względną:

$$\frac{\Delta t_{\log}}{\Delta t'} = \frac{1 - \frac{\Delta t''}{\Delta t'}}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}} \quad (4.40)$$

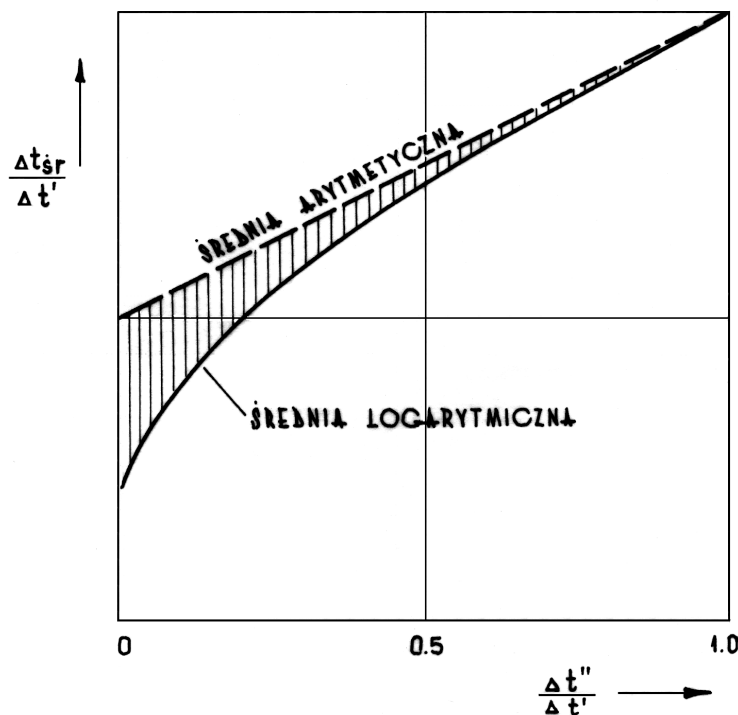
Podobnie średnią arytmetyczną:

$$\Delta t_{\text{ar}} = \frac{\Delta t' + \Delta t''}{2}$$

sprowadza się do postaci:

$$\frac{\Delta t_{ar}}{\Delta t'} = \frac{1 + \frac{\Delta t''}{\Delta t'}}{2} \quad (4.41)$$

Traktując stosunek $\Delta t''/\Delta t'$ jako zmienną niezależną oblicza się z (4.40) i (4.41) punkty do wykreślenia krzywych na rys. 4.5.



Rys. 4.5 Przebiegi średniej logarytmicznej i średniej arytmetycznej

Jak widać na wykresie średnia logarytmiczna jest mniejsza od arytmetycznej, stosowanie więc uproszczenia w postaci średniej arytmetycznej prowadzi do błędów na niekorzyść pewności.

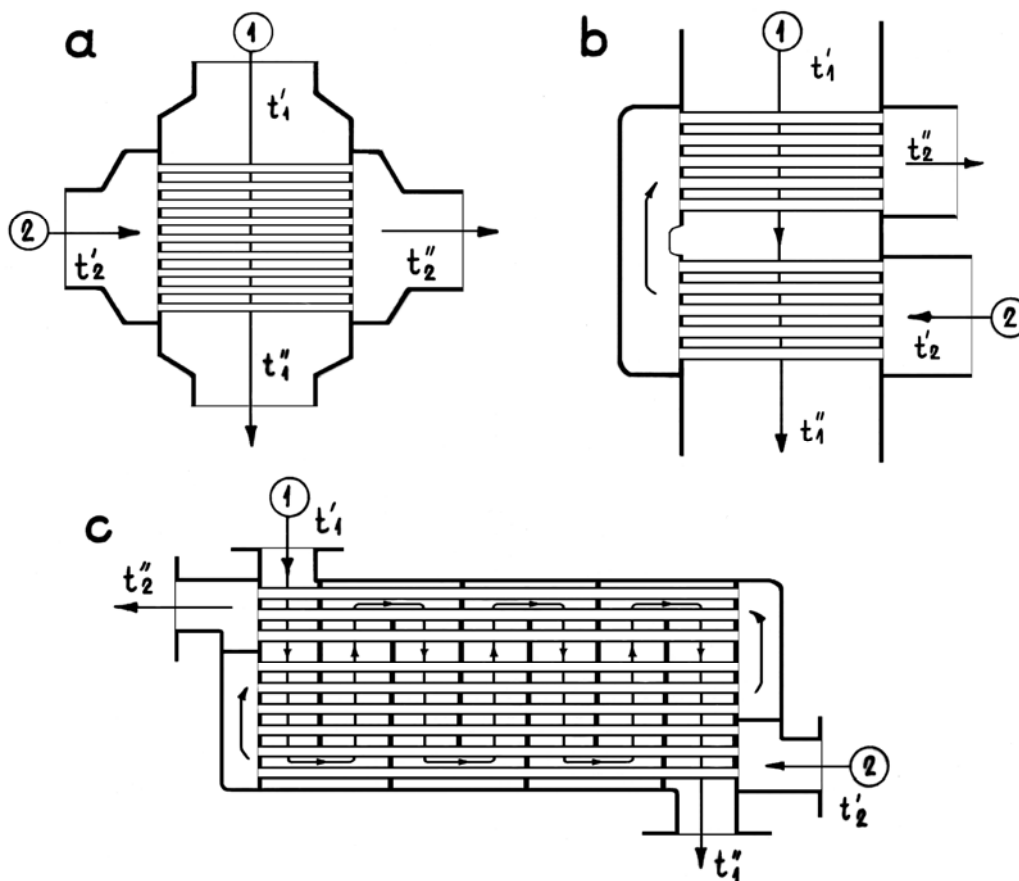
Jednak w miarę jak $\frac{\Delta t''}{\Delta t'} \rightarrow 1$ czyli: $\Delta t'' \rightarrow \Delta t'$, tzn. gdy spadki temperatury na końcach wymiennika stają się zbliżone, obie średnie również zbliżają się do siebie.

I tak dla $\Delta t'' > 0,6 \cdot \Delta t'$ błąd względny (zastąpienia średniej logarytmicznej przez arytmetyczną) staje się mniejszy od 2,3% spadając do zera przy $\Delta t'' = \Delta t'$. Tak więc, dopuszczając nieznaczny błąd wyniku, można w tym zakresie stosować różnicę temperatur liczoną w uproszczeniu jako średnia arytmetyczna.

Uzyskane tu wnioski odnoszą się do średnich z dowolnych wielkości, a więc i średnich średnic czy powierzchni (część II), które w podanych warunkach (gdy $d_2 \rightarrow d_1$ lub $A_2 \rightarrow A_1$, a więc ścian niezbyt grubych) można liczyć prościej jako średnie arytmetyczne.

2. REKUPERATORY POPRZECZNOPRĄDOWE

Rozwiązania, w których kierunki przepływu obydwu płynów przecinają się pod pewnym kątem (przeważnie zbliżonym do prostego), są często stosowane ze względu na dogodność konstrukcji samego wymiennika oraz układu rurociągów z nim związanych.



Rys.4.6 Przykłady przepływu poprzecznego

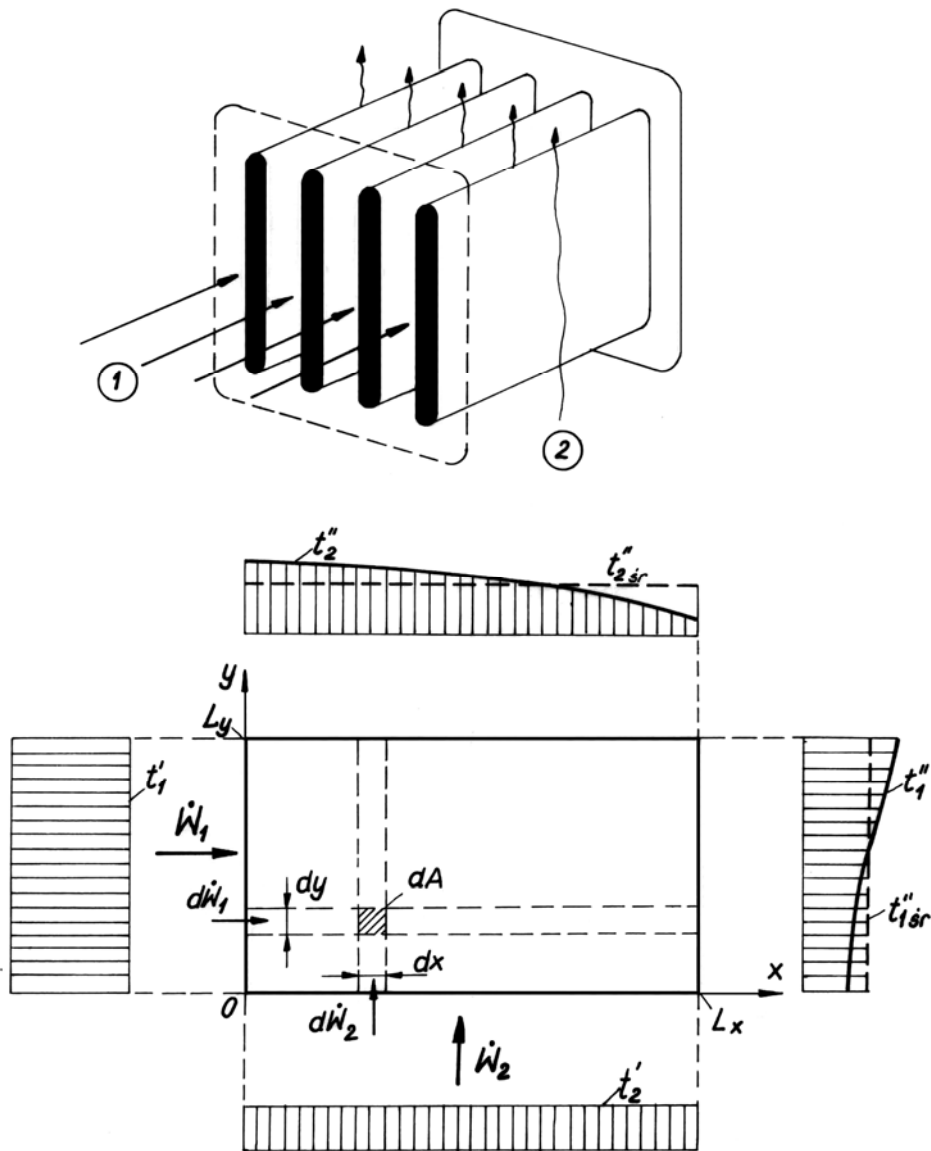
Jeżeli przepływy przecinają się pod kątem prostym, to taki układ nosi nazwę przepływu skrzyżowanego albo prądu krzyżowego (rys. 4.6a).

Poza tym przypadkiem czystego prądu krzyżowego istnieje wiele możliwości prądów krzyżowo - równoległoprądowych czyli tzw. przepływów mieszanych. Rys. 4.6 b i c przedstawiają przykłady takich przepływów wielokrotnie skrzyżowanych o ogólnym charakterze przeciwnym.

We wszystkich tych przypadkach podstawową rolę odgrywa prąd krzyżowy i jego analiza zostanie pokrótce przedstawiona na przykładzie wymiennika płytowego z rys. 4.7. Temperatury płynów są funkcjami miejsca na płaszczyźnie płyty oddzielającej obydwu płyny: oddającego ciepło $t_1 = f_1(x, y)$ i przejmującego ciepło $t_2 = f_2(x, y)$

Przenikanie ciepła przez element ścianki o powierzchni: $dA = dx \cdot dy$ daje następujący zapis prawa Pécleta:

$$d^2\dot{Q} = k \cdot (t_1 - t_2) \cdot dx \cdot dy \quad (4.42)$$



Rys.4.7 Schemat płytowego wymiennika krzyżowo-prądowego

Zakłada się, że obydwie strumienie płynów rozłożone są równomiernie na odpowiednich szerokościach płyty. O założeniu tym musi pamiętać konstruktor wymiennika konstruując go tak, aby wprowadzone do wymiennika płyny rozdzielały się rzeczywiście równomiernie na całej szerokości drogi przepływu. W przeciwnym wypadku wyniki poniższej teorii nie będą odpowiadały rzeczywistości, a wymiennik nie będzie działał z obliczoną efektywnością.

Przy równomiernym rozdziale strumienia pojemność cieplna strugi płynącej w kierunku osi x kanałem o elementarnej szerokości dy wynosi:

$$d\dot{w}_1 = \dot{w}_1 \cdot \frac{dy}{L_y}$$

Na rozpatrywanym elemencie powierzchniowym dA struga ta oddając ciepło $d^2\dot{Q}$ doznaje ujemnego przyrostu (tj. spadku) temperatury:

$$- dt_1 = - \frac{\partial t_1}{\partial x} \cdot dx$$

Tak więc ciepło oddane przez tę strugę wynosi:

$$d^2\dot{Q} = d\dot{W}_1 \cdot \left(- \frac{\partial t_1}{\partial x} \cdot dx \right) = - \frac{\dot{W}_1}{L_y} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \quad (4.43)$$

Analogicznie rozpatruje się strugę płynu przejmującą ciepło. Ma ona strumień pojemności cieplnej $d\dot{W}_2$ i ogrzewa się o:

$$dt_2 = \frac{\partial t_2}{\partial y} \cdot dy$$

przejmując więc ciepło:

$$d^2\dot{Q} = \frac{\dot{W}_2}{L_x} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \quad (4.44)$$

Po podstawieniu $d^2\dot{Q}$ z równania (4.42) do (4.43) i (4.44) otrzymuje się układ sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych:

$$\frac{\dot{W}_1}{k \cdot L_y} \cdot \frac{\partial t_1}{\partial x} = t_2 - t_1 \quad (4.45)$$

$$\frac{\dot{W}_2}{k \cdot L_x} \cdot \frac{\partial t_2}{\partial y} = t_2 - t_1 \quad (4.46)$$

Dla uproszczenia zapisu wprowadza się zmienne bezwymiarowe:

$$\xi = \frac{k \cdot L_y}{\dot{W}_1} \cdot x \quad \text{i} \quad \eta = \frac{k \cdot L_x}{\dot{W}_2} \cdot y \quad (4.47)$$

oraz:

$$\vartheta_1 = \frac{t_1 - t'_2}{t'_1 - t'_2} = \frac{t_1 - t'_2}{\Delta t_{\max}} \quad \text{i} \quad \vartheta_2 = \frac{t_2 - t'_2}{t'_1 - t'_2} = \frac{t_2 - t'_2}{\Delta t_{\max}} \quad (4.48)$$

gdzie Δt_{\max} jest największą różnicą temperatur obydwu płynów – równą różnicy ich temperatur na wlotach do wymiennika.

Przy pomocy tych zmiennych przekształca się równania (4.45) i (4.46) w postać

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi} = \vartheta_2 - \vartheta_1 \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \eta} = \vartheta_2 - \vartheta_1 \quad (4.50)$$

Warunki brzegowe podlegają również odpowiedniej transformacji:

$$1. \text{ dla } x=0 \text{ jest } t_1 = t'_1 \quad \text{czyli: dla } \xi = 0 \text{ jest } \vartheta_1 = 1 \quad (4.51)$$

$$2. \text{ dla } y=0 \text{ jest } t_2 = t'_2 \quad \text{czyli: dla } \eta = 0 \text{ jest } \vartheta_2 = 0 \quad (4.52)$$

Dla tak sformułowanego matematycznie zagadnienia opublikował Wilhelm Nusselt w 1930 roku rozwiązanie (uzyskane przy pomocy równania całkowego) w postaci szeregów nieskończonych:

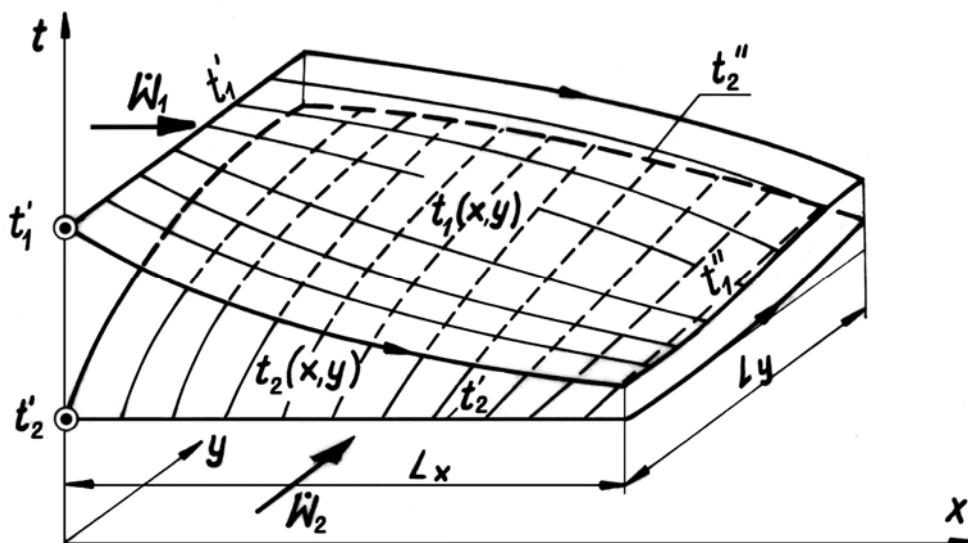
$$\vartheta_1 = 1 - e^{-\xi-\eta} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi^i}{i!} \cdot \left(\sum_{j=0}^{i-1} \frac{\eta^j}{j!} \right) \quad (4.53)$$

$$\vartheta_2 = 1 - e^{-\xi-\eta} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\xi^i}{i!} \cdot \left(\sum_{j=0}^i \frac{\eta^j}{j!} \right) \quad (4.54)$$

Z tych rozwiązań można uzyskać wyrażenia na rozkłady temperatur obydwu płynów: $t_1 = f_1(x, y)$ i $t_2 = f_2(x, y)$ stanowiących dwie powierzchnie jak na rys. 4.8:

$$t_1 = \vartheta_1 \cdot \Delta t_{\max} + t'_2$$

$$t_2 = \vartheta_2 \cdot \Delta t_{\max} + t'_2$$



Rys.4.8 Rozkład temperatury w krzyżowo-prądowym wymienniku ciepła

Do celów inżynierskich potrzebna jest nie tyle znajomość rozkładów temperatur, ile średniej różnicy temperatur między obydwoimi płynami:

$$(t_1 - t_2)_{\text{sr}} \equiv \Delta t_{\text{sr}} = (\vartheta_1 - \vartheta_2)_{\text{sr}} \cdot \Delta t_{\max} \quad (4.55)$$

Wielkość tę przedstawia się najczęściej przy pomocy średniej logarytmicznej różnicy temperatur (tak jak gdyby obydwa płyny przepływały przeciwnieprądowo) oraz mnożnika poprawkowego na przepływ poprzeczny $\psi_{\Delta t}$ (oznaczanego czasami przez $\epsilon_{\Delta t}$ lub $\epsilon_{\Delta T}$):

$$\Delta t_{\text{sr}} = \psi_{\Delta t} \cdot \Delta t_{\text{log}} = \psi_{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}} \quad (4.56)$$

Odpowiednie różnice temperatur na wlocie i wylocie:

$$\Delta t' = t'_1 - t''_{2\text{sr}} \quad (4.57)$$

$$\Delta t'' = t''_{1\text{sr}} - t_2 \quad (4.58)$$

tworzone są przy pomocy średnich temperatur wylotowych obydwu płynów: $t''_{1\text{sr}}$ i $t''_{2\text{sr}}$. Temperatury te uzyskuje się wprost z bilansu cieplnego wymiennika.

Poprawkę $\psi_{\Delta t}$ dla różnych układów przepływu poprzecznego wyznacza się z wykresów podanych w literaturze*). Powstały one z takich obliczeń, jak podane tu dla przypadku czystego prądu skrzyżowanego. Poprawka $\psi_{\Delta t}$ podawana jest w zależności od dwu charakterystycznych dla wymiennika stosunków

$$P = \frac{\delta t_2}{\Delta t_{\text{max}}} \quad \text{i} \quad R = \frac{\dot{W}_2}{\dot{W}_1} = \frac{\delta t_1}{\delta t_2} \quad (4.59)$$

przy zachowaniu umowy, że indeks $\underline{1}$ odnosi się do płynu oddającego ciepło (gorącego), a indeks $\underline{2}$ do płynu przejmującego ciepło (zimnego).

Tak więc

$$\psi_{\Delta t} = f(P, R) = f\left(\frac{\delta t_2}{\Delta t_{\text{max}}}, \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} = \frac{\delta t_1}{\delta t_2}\right) \leq 1 \quad (4.60)$$

Przykładowe wykresy na $\psi_{\Delta t}$ podane są na rys. 4.9. W odosobnionych przypadkach $\psi_{\Delta t}$ podane jest w zależności od innych stosunków, jak np. $\delta t_1/\Delta t_{\text{max}}$ i $\delta t_2/\Delta t_{\text{max}}$ **).

Szczególny przypadek prądu poprzecznego stanowi wymiennik ciepła o wielokrotnie skrzyżowanym przeciwaprądzie według schematu z rys. 4.10. Wymiennik taki jest często stosowany jako płaszczowo-rurowy z poprzecznymi przegrodami umieszczonymi w przestrzeni międzyrurowej. Należy zauważyć, że płyn wewnątrz rur przepływa przez ten wymiennik tylko jeden raz (a więc odmiennie niż na dolnym schemacie rys. 4.9).

W takim przypadku zaleca się obliczać średnią różnicę temperatur jako uśrednioną z różnicy dla prądu skrzyżowanego Δt^{\pm} i dla przeciwaprądu (lub ew. współprądu) Δt_{log} :

$$\Delta t_{\text{sr}} = (\Delta t_{\text{sr}}^{\pm})^{\frac{1}{z}} \cdot (\Delta t_{\text{log}})^{1 - \frac{1}{z}} \quad (4.61)$$

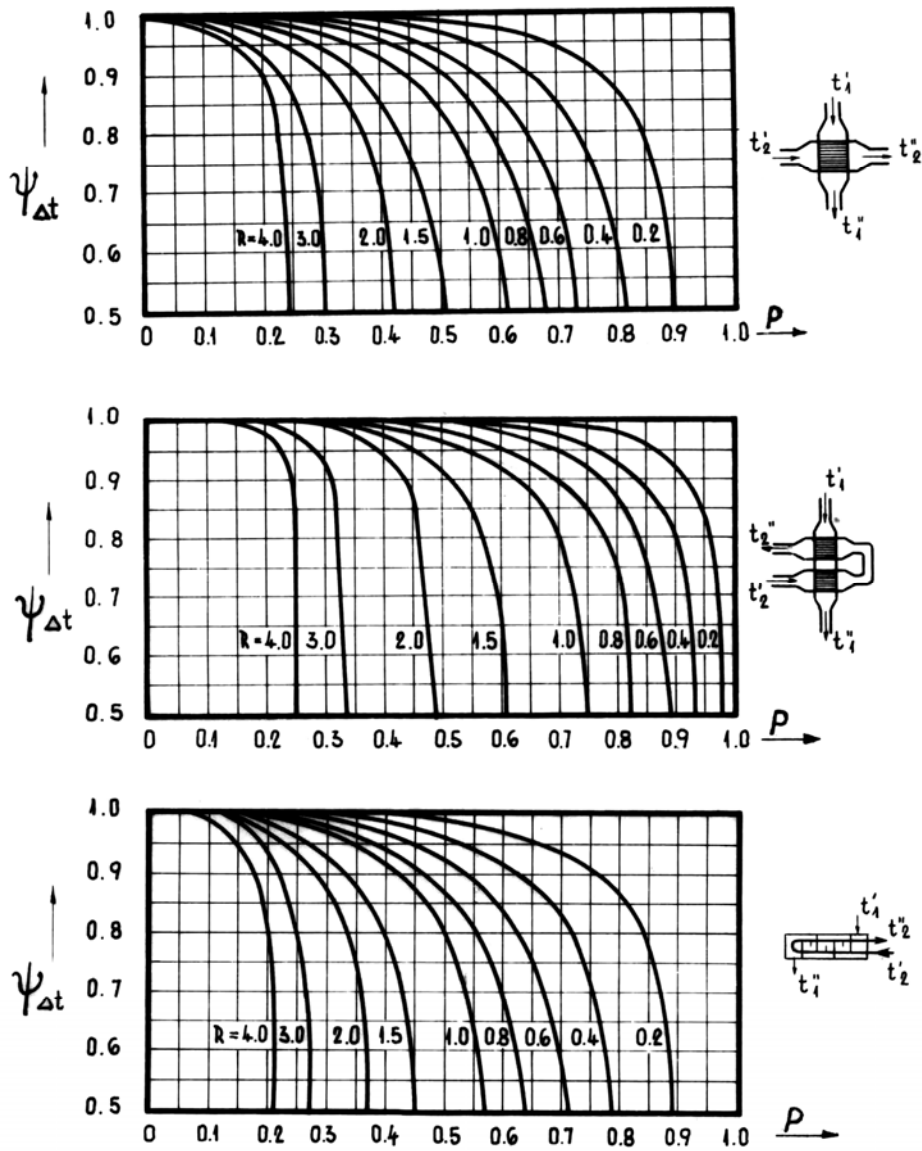
gdzie z jest liczbą przedziałów przepływu skrzyżowanego (między przegrodami).

Wprowadzenie zamiast $\Delta t_{\text{sr}}^{\pm}$ wyrażenia (4.56) daje zamiast (4.61) wzór:

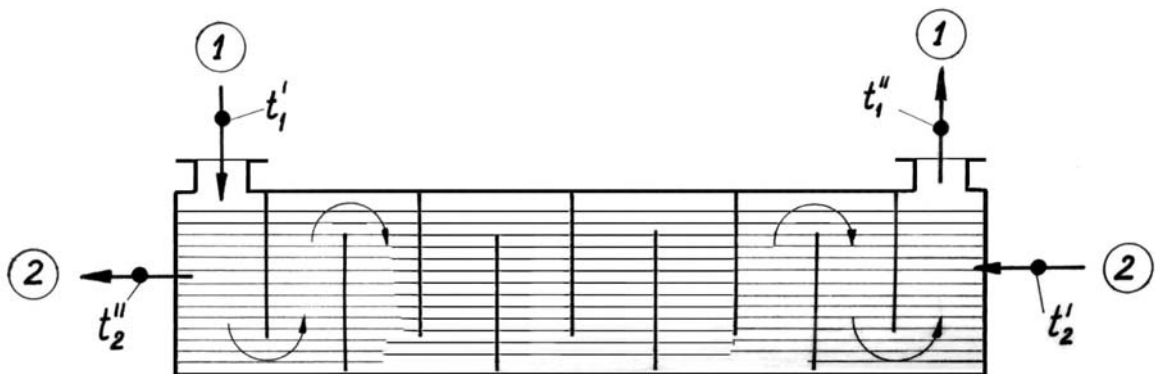
$$\Delta t_{\text{sr}} = \psi_{\Delta t}^{\frac{1}{z}} \cdot \Delta t_{\text{log}} \quad (4.62)$$

*) Na przykład: S. Wiśniewski i T. S. Wiśniewski: Wymiana ciepła, WNT, Warszawa 2010
T. Hobler: Ruch ciepła-wymienniki, WNT, Warszawa 1986
B. Staniszewski (red.): Wymiana ciepła - zadania i przykłady, PWN, Warszawa.1979.

***) Poradnik Inżyniera Mechanika t.I, WNT Warszawa 1968.



Rys.4.9 Wykresy do wyznaczania poprawki $\psi_{\Delta t}$ dla przepływu poprzecznego



Rys.4.10 Schemat wielokrotnie skrzyżowanego wymiennika przeciwpądowego

Wobec tego, że:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \psi_{\Delta t}^{\frac{1}{z}} = 1$$

przy dostatecznie dużej liczbie przegród, a więc i przedziałów między nimi, przepływ staje się prawie zupełnie przeciwny - miejscowe skrzyżowania nie mają wtedy wpływu na średnią różnicę temperatur.

3. PAROWNIKI I SKRAPLACZE

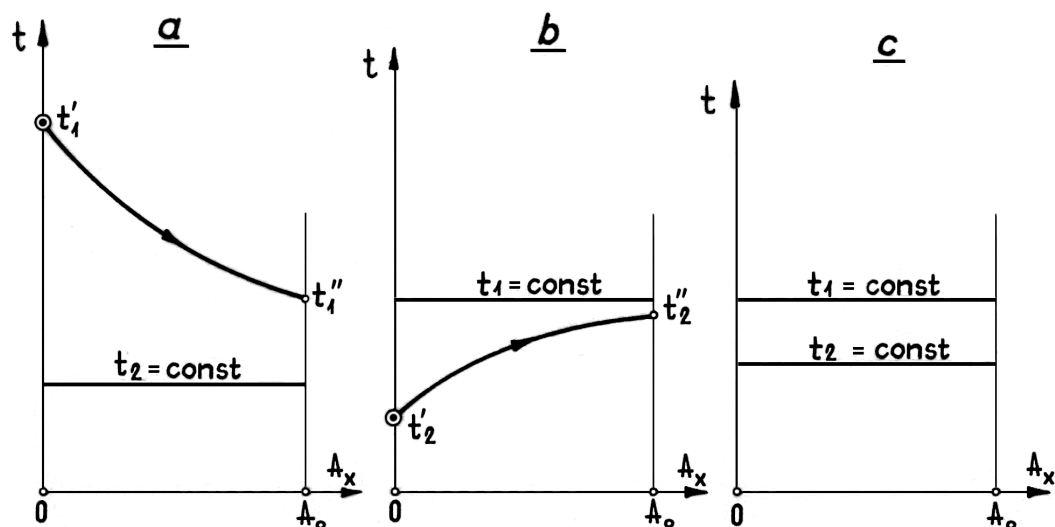
Jeżeli jeden z płynów podlega zmianie stanu skupienia przez parowanie czy skraplanie, to jego temperatura na tym odcinku wymiennika, na którym ta zmiana fazy występuje, nie ulega przeważnie zmianie (wtedy mianowicie gdy zmianie fazowej podlega ciecz lub para jednoskładnikowa). Różnicę temperatur w dowolnym miejscu (Δt_x) określa wzór (4.24) po wprowadzeniu do niego: $\dot{W}_1 \rightarrow \infty$ (albo: $\dot{W}_2 \rightarrow \infty$). Bowiem tylko wtedy będzie: $dt_1 = 0$ (lub $dt_2 = 0$) przy $d\dot{Q} \neq 0$ we wzorze (4.13).

A więc wzór (4.24) uprości się do postaci:

$$\Delta t_x = \Delta t' \cdot e^{-\frac{kA_x}{\dot{W}_2}} \quad (4.63)$$

gdzie: \dot{W}_2 jest strumieniem pojemności cieplnej płynu, którego temperatura ulega zmianie w wymienniku.

Mając Δt_x i stałą temperaturę drugiego płynu można łatwo wykreślić krzywą zmiany temperatury wzdłuż powierzchni (rys. 4.11).



Rys.4.11 Przebiegi temperatur w parowniku (a), skraplaczu (b) i skraplaczo-parowniku (c)

Wzajemny kierunek przepływu nie ma w tym przypadku żadnego znaczenia, bowiem dla $\delta t_2 = 0$ jest: $P = 0$, a dla $\delta t_1 = 0$ jest: $R = 0$.

Obydwa przypadki mimo przepływów skrzyżowanych prowadzą do $\psi_{\Delta t} = 1$.

Tak więc średnią różnicę temperatur oblicza się i tu jako średnią logarymiczną przy pomocy wzoru (4.37).

4. SPRAWNOŚĆ (EFEKTYWNOŚĆ) TERMICZNA WYMIENNIKA CIEPŁA

Sprawność termiczna wymiennika ciepła jest stosunkiem rzeczywiście przejętej (lub oddanej) przez strumień słabszy (tj. ten który mając mniejsze \dot{W}_i doznaje większego δt_i) energii cieplnej, do ilości maksymalnie możliwej do przekazania przy danych temperaturach wlotowych obydwu strumieni:

$$\varepsilon = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{\max}} = \frac{\dot{W}_i \cdot \delta t_i}{\dot{W}_i \cdot \Delta t_{\max}} = \frac{\delta t_i}{\Delta t_{\max}} \quad (4.64)$$

Wskaźnik i odnosi się do płynu słabszego - może nim być płyn oddający ciepło (1) lub przejmujący je (2), a więc niekoniecznie ten, na którym nam zależy. Np. w skraplaczu jest nim woda chłodząca, na podgrzewaniu której nam nie zależy. Dlatego czasami używane jest na ε określenie: charakterystyka ruchowa wymiennika ciepła - oznaczana wtedy przez Φ . Zaproponowano jeszcze jedną nazwę: „stopień wymiany”.

Gdy strumieniem słabszym jest płyn gorący, to $i = 1$ i korzystając ze stosunków (4.59) można napisać:

$$\varepsilon \equiv \Phi = \frac{\dot{Q}}{\dot{W}_1 \cdot \Delta t_{\max}} = \frac{\dot{W}_2 \cdot \delta t_2}{\dot{W}_1 \cdot \Delta t_{\max}} = R \cdot P$$

Gdy jest nim płyn zimny to $i = 2$:

$$\varepsilon \equiv \Phi = \frac{\delta t_2}{\Delta t_{\max}} = P$$

Sprawność ε określa stopień wykorzystania przez płyn słabszy, będącej do dyspozycji energii cieplnej, tj. na ile zrówna on swoją temperaturę wylotową z temperaturą wlotową drugiego (silniejszego) płynu.

Znając ε (np. z wykresu rys. 4.13) można łatwo obliczyć ciepło przekazane ze wzoru:

$$\dot{Q} = \varepsilon \cdot \dot{Q}_{\max} = \varepsilon \cdot \dot{W}_i \cdot \Delta t_{\max} \quad (4.65)$$

Sprawność wymiennika ciepła zależy, jak się można domyślać, m.in. od wielkości powierzchni wymiennika.

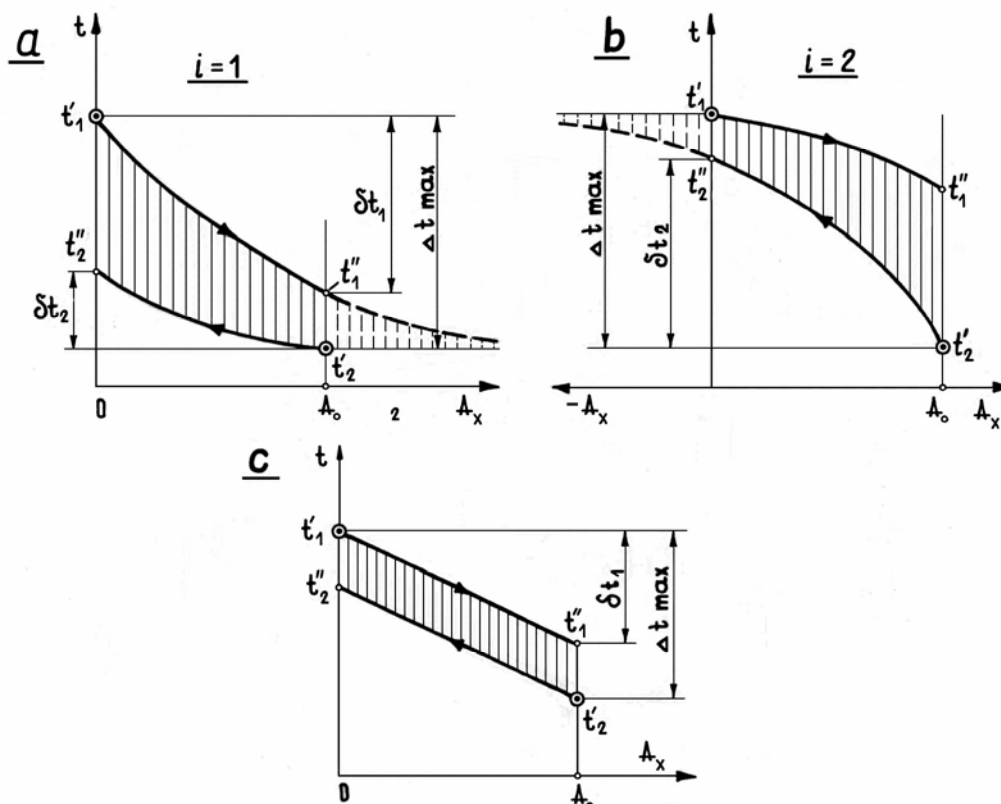
Poniżej wyprowadzone zostaną dokładne zależności - oddzielnie dla poszczególnych układów przepływowych.

4.1. Wymiennik przeciuprądowy

Zmiana różnicy temperatur powodującej przenoszenie energii cieplnej między płynami ① i ② wyrażona jest wzorem (4.24), który dla całego wymiennika ($A_x = A_o$) ma postać:

$$\Delta t'' = \Delta t' \cdot e^{-\beta_p k A_o} \quad (4.66)$$

Pod uwagę bierze się przypadek: $\dot{W}_1 < \dot{W}_2$ tzn. że $i = 1$ i słabszym jest płyn oddający ciepło (rys. 4.12a). Gdyby założyć przeciwnie, jak na rys.4.12 b, to rezultat rozważań byłby oczywiście taki sam.



Rys.4.12 Charakterystyczne temperatury do wyznaczania sprawności wymiennika przeciuprądowego w przypadkach, gdy:

a) $\dot{W}_1 < \dot{W}_2$, b) $\dot{W}_2 < \dot{W}_1$, c) $\dot{W}_1 = \dot{W}_2$.

Zatem:

$$\Delta t'' = t_1'' - t_2' \quad (4.67)$$

$$\Delta t' = t_1' - t_2'' \quad (4.68)$$

a podstawienie tego do (4.64) daje:

$$\frac{\Delta t''}{\Delta t'} = \frac{t_1'' - t_2'}{t_1' - t_2''} = e^{-\beta_p k A_o} \quad (4.69)$$

Należy zauważyć, że dla $\dot{W}_1 < \dot{W}_2$ jest:

$$\beta_p = \frac{1}{\dot{W}_1} - \frac{1}{\dot{W}_2} > 0 \quad (4.70)$$

Dalsze przekształcenia (4.67) zmierzają do uzyskania takich różnic temperatur, które by utworzyły wielkości $\delta t_1 = \delta t_i$ i Δt_{\max} wchodzące do wzoru (4.64) na sprawność wymiennika ε .

W tym celu mnoży się obie strony równania (4.69) przez (-1) i dodaje do nich jedynki otrzymując:

$$1 - \frac{t_1'' - t_2'}{t_1' - t_2''} = 1 - e^{-\beta_p k A_0} \quad (4.71)$$

Po sprowadzeniu lewej strony do wspólnego mianownika i uporządkowaniu jej uzyskuje się:

$$\frac{t_1' - t_1'' - (t_2'' - t_2')}{t_1' - t_2''} = \frac{\delta t_1 - \delta t_2}{t_1' - t_2''} = \frac{\delta t_1 - \delta t_1 \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2}}{t_1' - t_2''} \quad (4.72)$$

Wielkość δt_2 wyeliminowano tu przy pomocy równania bilansu (4.4a).

Przekształconą do (4.72) lewą stronę wprowadza się ponownie do (4.71) i otrzymuje:

$$\delta t_1 - \delta t_1 \cdot \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} = (1 - e^{-\beta_p k A_0}) (t_1' - t_2'') \quad (4.73)$$

Przy tym zgodnie z rys.4.12a jest:

$$t_1' - t_2'' = \Delta t_{\max} - \delta t_2 = \Delta t_{\max} - \delta t_1 \cdot \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} \quad (4.74)$$

Podstawienie tego do (4.73) daje po redukcjach i uporządkowaniu:

$$\delta t_1 \cdot \left(1 - \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} \cdot e^{-\beta_p k A_0} \right) = \left(1 - e^{-\beta_p k A_0} \right) \cdot \Delta t_{\max} \quad (4.75)$$

Wprowadzając zamiast indeksu 1 z powrotem indeks "i" celem przedstawienia zależności w bardziej ogólnej postaci otrzymuje się więc wyrażenie:

$$\varepsilon_p = \frac{\delta t_i}{\Delta t_{\max}} = \frac{1 - e^{-\beta_p k A_0}}{1 - \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} e^{-\beta_p k A_0}} \quad (4.76)$$

Biorąc pod uwagę, że:

$$\beta_p = \frac{1}{\dot{W}_i} - \frac{1}{\dot{W}} = \left(1 - \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} \right) \cdot \frac{1}{\dot{W}_i} > 0 \quad (4.77)$$

można wykładnik przedstawić w postaci:

$$-\beta_p k A_0 = - \left(1 - \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} \right) \cdot \frac{k A_0}{\dot{W}_i} \quad (4.78)$$

Występująca tu wielkość: $\frac{kA_o}{\dot{W}_i} = N$ określana jest czasami za literaturą anglosaską jako: „liczba jednostek przenikania ciepła” i oznaczana przez **NTU** (Number of Transfer Units).

Ostatecznie więc:

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta t_i}{\Delta t_{\max}} = \frac{1 - e^{-(1 - \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}) \cdot \frac{kA_o}{\dot{W}_i}}}{1 - \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} \cdot e^{-(1 - \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}) \cdot \frac{kA_o}{\dot{W}_i}}} = f\left(\frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}, \frac{kA_o}{\dot{W}_i}\right) \quad (4.79)$$

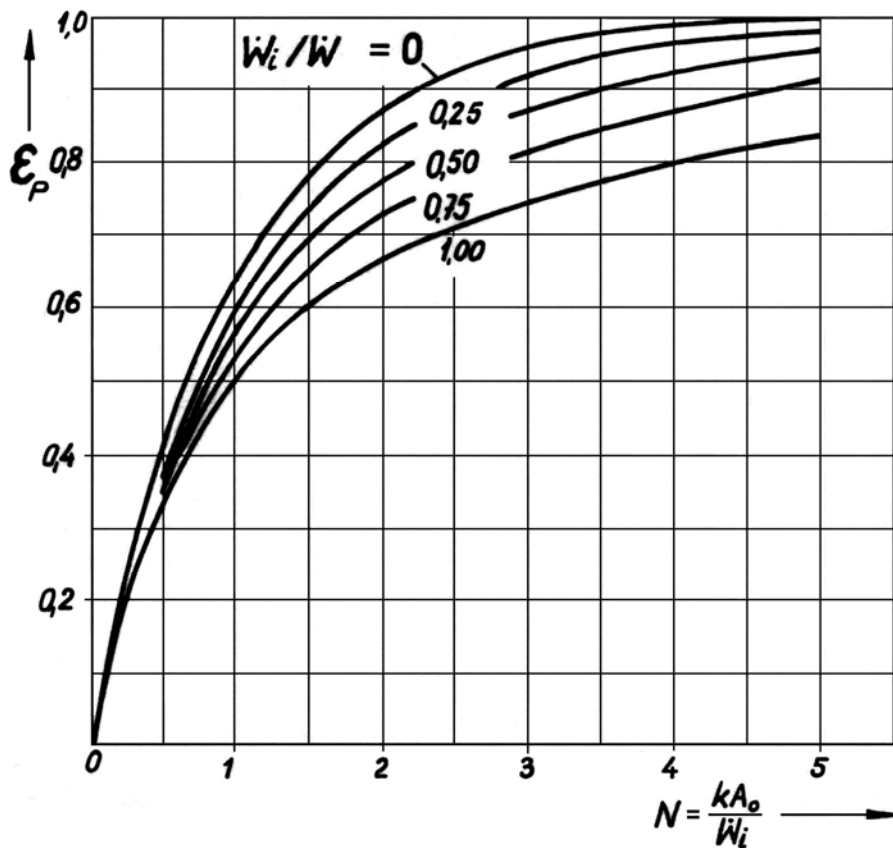
Zmienność sprawności ε_p w funkcji $\frac{kA_o}{\dot{W}_i}$ z $\frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}$ jako parametrem przedstawia rys. 4.13.

Dla: $\dot{W}_i = \dot{W}$ sprawność ε_p wg wzoru (4.79) staje się nieokreślona

Stosując jednak regułę de l'Hôspitala otrzymuje się wartość graniczną:

$$\lim_{\dot{W}_i \rightarrow \dot{W}} \varepsilon_p = \frac{\frac{kA_o}{\dot{W}_i}}{1 + \frac{kA_o}{\dot{W}_i}} \quad (4.80)$$

Wartość ta dla $A \rightarrow \infty$ dąży do jedności (rys. 4.13).



Rys. 4.13 Zmienność sprawności wymiennika przeciwprądowego

Przez wprowadzenie (4.66) do (4.76) otrzymuje się jeszcze jedną zależność do obliczania sprawności wymiennika przeciwprądowego:

$$\epsilon_p = \frac{1 - \frac{\Delta t''}{\Delta t'}}{1 - \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} \cdot \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} \quad (4.81)$$

2. Wymiennik współprądowy

Sposób wyprowadzenia zależności między sprawnością ϵ_w a powierzchnią wymiennika jest tu podobny do opisanego wyżej.

Wychodząc z ogólnego wzoru (4.66):

$$\Delta t'' = \Delta t' \cdot e^{-\beta_w \cdot kA_0} \quad (4.82)$$

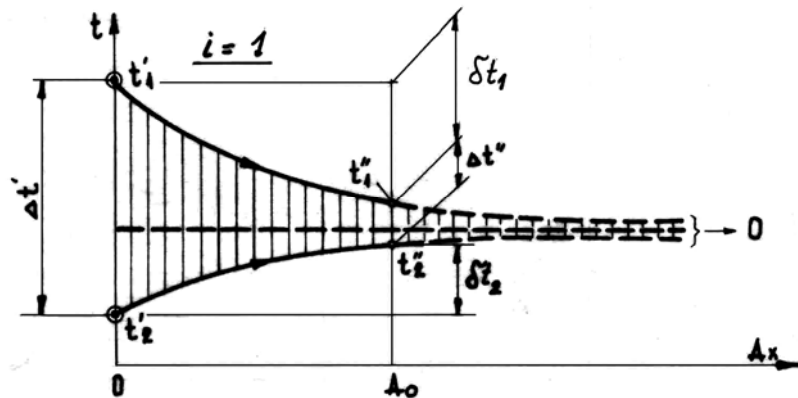
w którym:

$$\beta_w = \frac{1}{\dot{W}_i} + \frac{1}{\dot{W}} = \left(1 + \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}\right) \cdot \frac{1}{\dot{W}_i} \quad (4.83)$$

oraz zgodnie z rvs. 4.14:

$$\Delta t'' = t''_1 - t''_2 = \Delta t_{\max} - (\delta t_1 + \delta t_2) \quad (4.84)$$

$$\Delta t' = t'_1 - t'_2 = \Delta t_{\max} \quad (4.85)$$



Rys.4.14 Charakterystyczne temperatury do wyznaczenia sprawności wymiennika współprądowego (dla $\dot{W}_1 < \dot{W}_2$)

otrzymuje się bezpośrednio:

$$\Delta t_{\max} - (\delta t_1 + \delta t_2) = \Delta t_{\max} e^{-\beta_w \cdot kA_0} \quad (4.86)$$

albo:

$$1 - \frac{\delta t_1}{\Delta t_{\max}} \cdot \left(1 + \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2}\right) = e^{-\beta_w \cdot kA_0} \quad (4.87)$$

i ostatecznie dla: $i = 1$ z uwzględnieniem (4.83):

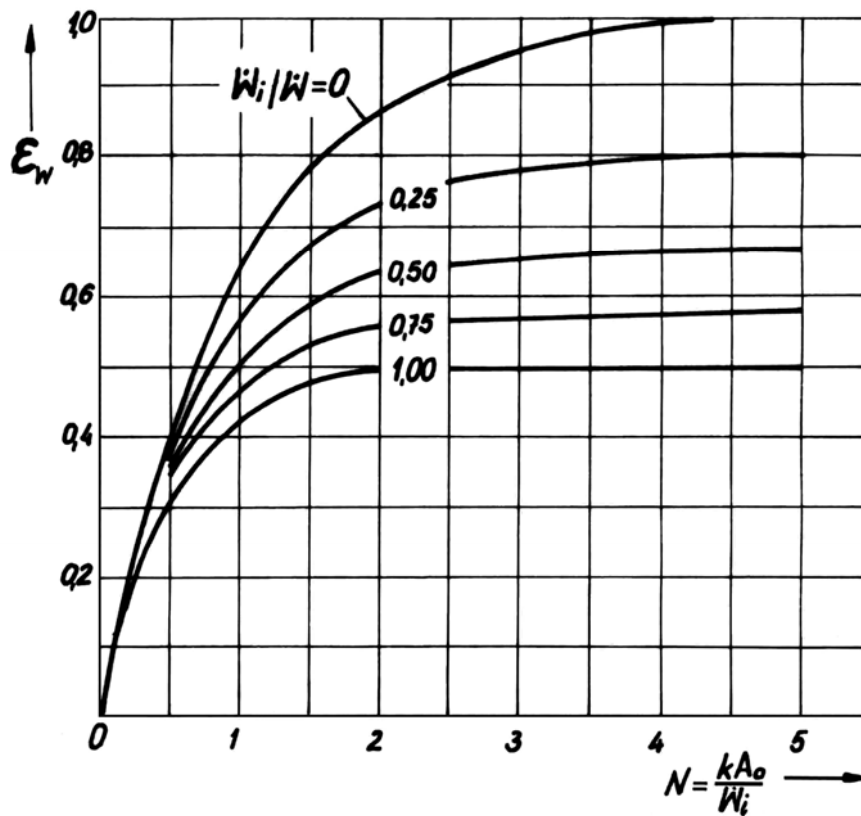
$$\epsilon_w = \frac{\delta t_i}{\Delta t_{\max}} = \frac{1 - e^{-\left(1 + \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}\right) \cdot \frac{kA_0}{\dot{W}_i}}}{1 + \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}} \quad (4.88)$$

Zmienność sprawności ϵ_w w funkcji $\frac{kA_o}{\dot{W}_i}$ ze stosunkiem $\frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}$ jako parametrem przedstawia rys.4.15.

Charakterystyczne jest tutaj to, że w przypadku: $\frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} = 1$ i $A_o \rightarrow \infty$, sprawność ϵ_w dąży do 0,5.

Przez wprowadzenie (4.82) z (4.83) do (4.88) otrzymuje się jeszcze jedną zależność na sprawność wymiennika współprądowego:

$$\epsilon_w = \frac{1 - \frac{\Delta t''}{\Delta t'}}{1 + \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}} \quad (4.89)$$



4.3. Prąd krzyżowy

W tym przypadku jest:

$$\epsilon_k = \epsilon_p \cdot \psi \Delta t \quad (4.90)$$

Dowód.

Średni spadek temperatury dla prądu krzyżowego oblicza się poznanym uprzednio wzorem

$$\Delta t_{sr}^+ = \psi \Delta t \cdot \Delta t_{sr_p} \quad (4.91)$$

Dzieląc obie strony przez Δt_{\max} otrzymuje się:

$$\frac{\Delta t_{\text{sr}}^+}{\Delta t_{\max}} = \psi_{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t_{\text{sr p}}}{\Delta t_{\max}} \quad (4.92)$$

Zupełnie ogólne zależności (4.8) i (4.65):

$$\dot{Q} = k \cdot A_o \cdot \Delta t_{\text{sr}}$$

$$\dot{Q} = \epsilon \cdot \dot{W}_i \cdot \Delta t_{\max}$$

zastosowane raz do prądu krzyżowego, a raz do przeciwprądu dają zależności:

$$\frac{\Delta t_{\text{sr}}^+}{\Delta t_{\max}} = \frac{\dot{W}_i \cdot \epsilon_k}{k \cdot A_o} \quad (4.93)$$

$$\frac{\Delta t_{\text{sr p}}}{\Delta t_{\max}} = \frac{\dot{W}_i \cdot \epsilon_p}{k \cdot A_p} \quad (4.94)$$

wielkości: Δt_{\max} , \dot{W}_i , k i A_o są bowiem jednakowe w obydwu przypadkach.

Podstawienie teraz (4.93) i (4.94) do (4.92) prowadzi bezpośrednio do (4.90).

Zatem do obliczenia sprawności wymiennika o przepływie skrzyżowanym mamy wzór:

$$\epsilon_k = \psi_{\Delta t} \cdot \frac{1 - e^{-\left(1 - \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}\right) \cdot \frac{kA_o}{\dot{W}_i}}}{1 - \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} \cdot e^{-\left(1 - \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}\right) \cdot \frac{kA_o}{\dot{W}_i}}} \quad (4.95)$$

z tym, że z uwagi na zależność:

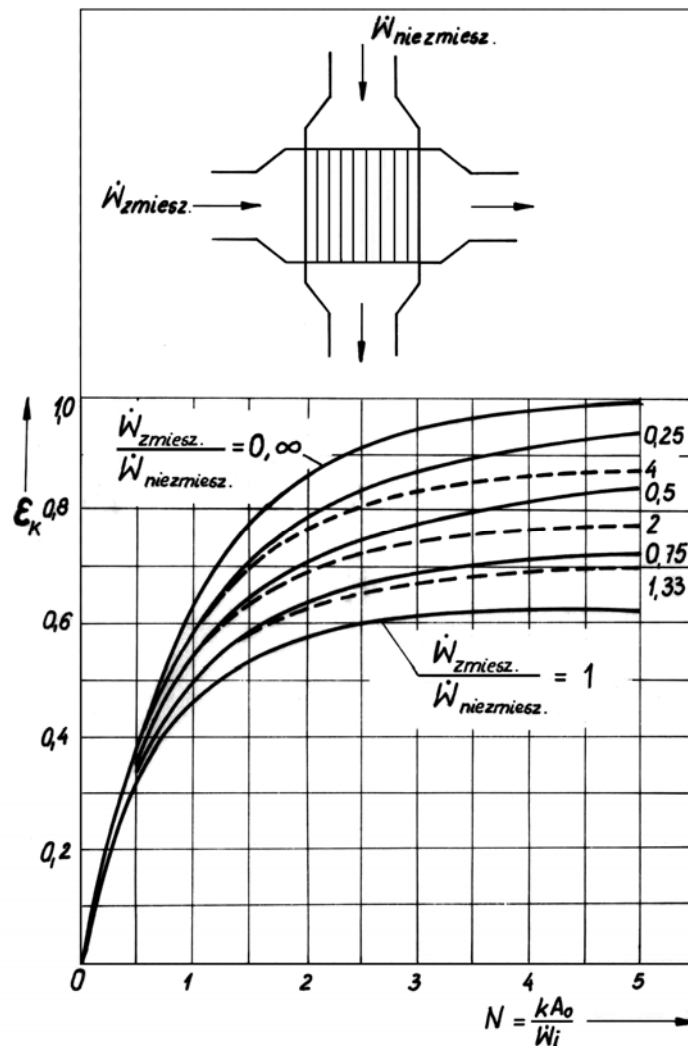
$$\psi_{\Delta t} = f(P, R) = f\left(\frac{\Delta t_2}{\Delta t_{\max}}, \frac{\dot{W}_2}{\dot{W}_1}\right) = f\left(\epsilon_k, \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}\right)$$

ϵ_k jest uwikłaną funkcją $\frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}$ i $\frac{kA_o}{\dot{W}_i}$.

Zależność ϵ_k w funkcji $\frac{kA_o}{\dot{W}_i}$ z $\frac{\dot{W}_i}{\dot{W}}$ jako parametrem podaje rys. 4.16.

Wprowadzenie (4.81) do (4.92) daje jeszcze wzór:

$$\epsilon_k = \psi_{\Delta t} \cdot \frac{1 - \frac{\Delta t''}{\Delta t'}}{1 - \frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} \cdot \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} \quad (4.96)$$



Rys.4.16 Zmienność sprawności wymiennika krzyżowo prądowego

4.4 Parownik lub skraplacz

Tu jest dla płynu silniejszego: $\delta t = 0$, a więc:

$$\frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} = \frac{\delta t}{\delta t_i} = 0 \quad (4.97)$$

Można to również interpretować w ten sposób, że pojemność cieplna płynu silniejszego $\dot{W} \rightarrow \infty$, wskutek $c_p = dq/dT \rightarrow \infty$ przy $dT = 0$.

Tak więc podstawienie (4.97) do wzoru (4.79) dla przeciwprądu albo do wzoru (4.88) dla współprądu daje ten sam rezultat:

$$\epsilon = 1 - e^{-\frac{kA_0}{\dot{W}_i}} \quad (4.98)$$

To samo było by również dla prądu krzyżowego - w świetle tego co napisano o $\psi_{\Delta t}$ w podrozdziale 3.

4.5. Porównanie układów przepływowych wymienników ciepła

Pojęcie sprawności termicznej umożliwia jednoznaczną ocenę układów przepływowych, które dotychczas prezentowano bez wyróżniania któregoś z nich.

Ocenę taką można jednak odczytać z rys. 4.17.

Jest to wykres sprawności ε w zależności od zmiennej $N = \frac{kA_o}{\dot{W}_i}$, wykonany dla skrajnych wartości parametru: $\frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} = 0$ i $\frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} = 1$.

Dla $\frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} = 0$ obowiązuje zależność (4.98) ważna dla wszystkich układów i wtedy:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_k = \varepsilon_w = \varepsilon$$

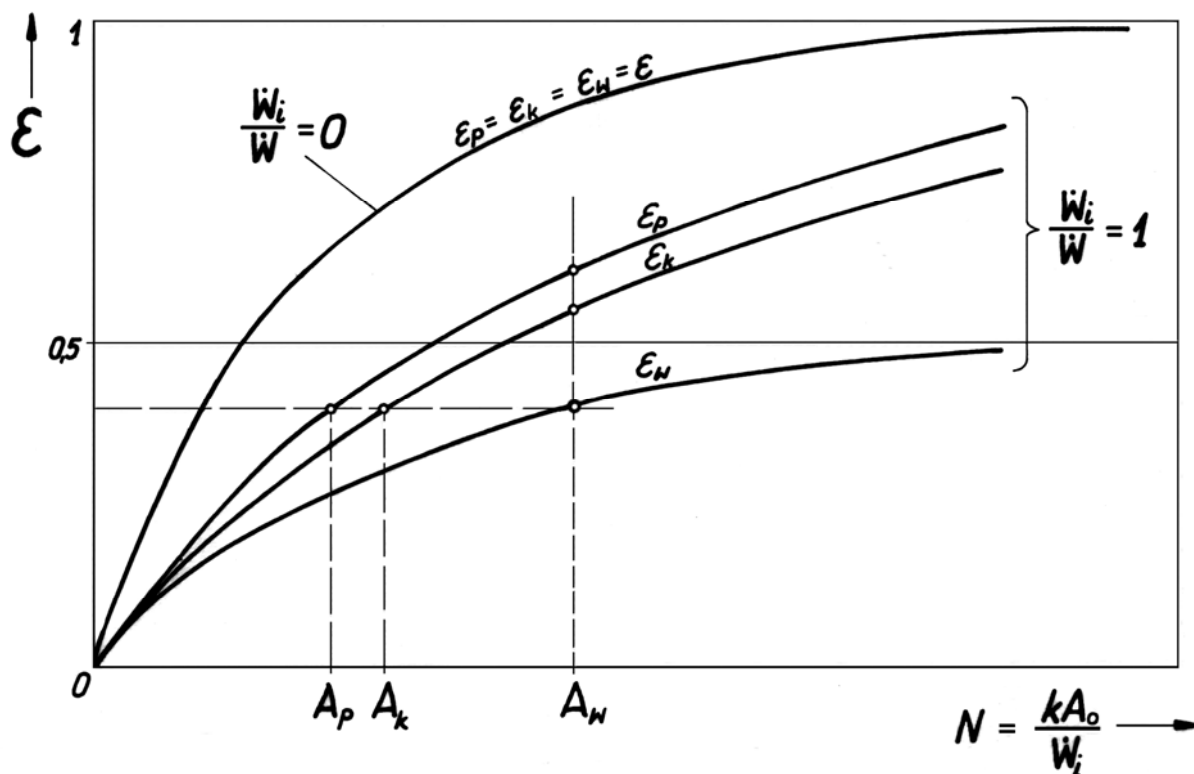
Natomiast dla $\frac{\dot{W}_i}{\dot{W}} = 1$ różnice w sprawnościach są największe, bowiem dla $A_o \rightarrow \infty$ jest $\varepsilon_p \rightarrow 1$ na mocy wzoru (4.80) i $\varepsilon_w \rightarrow 0,5$ stosownie do wzoru (4.88). Sprawność wymiennika o prądzie krzyżowym $\varepsilon_k \rightarrow 1$, tak jak ε_p , ale jej wartości są nieco niższe od ε_p .

Dla danej wartości powierzchni wymienników: $A_o = \text{const}$ (i tych samych: k i \dot{W}_i) jest więc:

$$\varepsilon_p > \varepsilon_k > \varepsilon_w$$

a dla danej sprawności wszystkich wymienników: $\varepsilon = \text{const}$ (i tych samych: k i \dot{W}_i) jest:

$$A_p < A_k < A_w$$



Rys. 4.17 Porównanie sprawności wymienników o różnych układach przepływowych

Różnice te wzrastają w miarę jak $\dot{W}_i \rightarrow \dot{W}$ i $\frac{k A_o}{\dot{W}_i} \rightarrow \infty$, ale gdy \dot{W}_i i \dot{W} silnie się różnią i gdy $\frac{k A_o}{\dot{W}_i} \rightarrow 0$, rezultaty dla wszystkich układów przepływowych stają się zbliżone.

Jak więc widać układ przeciwpądowy jest najkorzystniejszy, daje bowiem przy tych samych powierzchniach największą sprawność, a przy tej samej sprawności najmniejszą powierzchnię wymiennika.

Tylko wymiennik przeciwpądowy daje teoretyczną możliwość zrównania temperatury wylotowej płynu słabszego z temperaturą wlotową drugiego płynu (rys. 4.12).

W wymienniku współpądowym temperatury obu płynów nawet przy największej powierzchni osiągają jedynie wartości pośrednie między temperaturami tych płynów na wlocie (rys. 4.14).

Z kolei między średnią różnicą temperatur Δt_{sr} a wielkością $\frac{k A_o}{\dot{W}_i} \equiv N$ istnieje na mocy równań ogólnych:

$$\dot{Q} = k A_o \Delta t_{sr}$$

$$\dot{Q} = \dot{W}_i \cdot \delta t_i$$

zależność:

$$\Delta t_{sr} = \frac{\delta t_i}{\frac{k A_o}{\dot{W}_i}} = \frac{\delta t_i}{N}$$

Wynika z niej, że wymiennik przeciwpądowy, który dla żądanej zmiany temperatury płynu słabszego δt_i (i odpowiadającej jej sprawności ε) potrzebuje mniejszej wartości $\frac{k A_o}{\dot{W}_i} \equiv N$ i ma tym samym większą średnią różnicę temperatur niż inne układy przepływowe.

Prąd krzyżowy daje rezultaty niewiele gorsze od przeciwpądu.

Współprąd stosowany jest jedynie wtedy gdy chodzi o niedopuszczenie do przekroczenia określonej temperatury jednego z płynów w związku z wymaganiami technologicznymi co do właściwości płynu związanych z tą temperaturą, albo gdy chodzi o niedopuszczenie do przekroczenia temperatury ścianki ze względu na właściwości wytrzymałościowe materiału tej ścianki. Ze względu na granicę pełzania stali żaroodpornych nie dopuszcza się na ogół temperatur powyżej 700°C

5. ROZKŁAD TEMPERATURY WZDŁUŻ POWIERZCHNI WYMIENNIKA

W przypadku, gdy temperatura jednego z płynów jest stała, rozkład temperatury drugiego uzyskuje się łatwo przez odłożenie różnicy temperatur Δt_x wg wzoru (4.24).

Jednak, gdy obie temperatury są zmienne, to wyznaczamy je następująco:

Bierzemy pod uwagę płyn ①, który przepływa jak na rys. 4.3 i rys. 4.4. Ciepło oddane od wlotu do przekroju x :

$$\dot{Q}_x = \dot{m}_1 (i'_1 - i_1) = \dot{W}_1 \cdot (t'_1 - t_1) = \dot{W}_1 \cdot \delta t_{1x} \quad (4.99)$$

gdzie δt_{1x} jest spadkiem temperatury płynu ① od wlotu do przekroju x .

Dla całego wymiennika jest oczywiście: $A_x = A_o$, $\dot{Q}_x = \dot{Q}$ i $t_1 = t_1''$, a całkowity strumień ciepły wyraża się wzorem:

$$\dot{Q} = \dot{W}_1 (t_1' - t_1'') = \dot{W}_1 \cdot \delta t_1 \quad (4.100)$$

gdzie δt_1 jest całkowitym obniżeniem temperatury płynu ① w wymienniku. Równanie Pécleta pozwala obliczyć te same strumienie jako:

$$\dot{Q}_x = kA_x \Delta t_{sr} \Big|_0^{A_x} = \frac{\Delta t'}{\beta} (1 - e^{-\beta k A_x}) \quad (4.101)$$

$$\dot{Q} = kA_o \Delta t_{sr} \Big|_0^{A_o} = \frac{\Delta t'}{\beta} (1 - e^{-\beta k A_o}) \quad (4.102)$$

Tworzymy stosunki z (4.99) i (4.100) oraz (4.101) i (4.102):

$$\frac{\dot{Q}_x}{\dot{Q}} = \frac{\delta t_{1x}}{\delta t_1} = \frac{1 - e^{-\beta k A_x}}{1 - e^{-\beta k A_o}} \quad (4.103)$$

ale z (4.24) mamy:

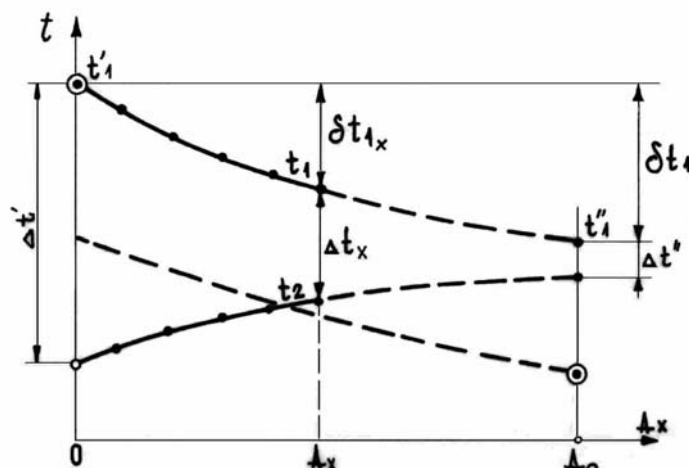
$$e^{-\beta k A_x} = \frac{\Delta t_x}{\Delta t'} \quad (4.104)$$

Tak więc możemy obliczyć obniżenie temperatury od wlotu do dowolnego przekroju A_x :

$$\delta t_{1x} = \delta t_1 \cdot \frac{1 - \frac{\Delta t_x}{\Delta t'}}{1 - \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} \quad (4.105)$$

po poprzednim wyznaczeniu Δt_x ze wzoru (4.104).

Wartości δt_{1x} odkłada się od stałej temperatury t_1' w dół otrzymując punkty krzywej t_1 , a od niej odkłada się następnie Δt_x wg wzoru (4.104) i otrzymuje punkty krzywej t_2 .



Rys.4.18 Szkic wyjaśniający wyznaczanie krzywych: $t_1 = f(A_x)$ i $t_2 = f(A_x)$

W drugim przypadku: przeciwprądu, kiedy $\dot{W}_1 > \dot{W}_2$, odmierzamy się A_x w lewo w kierunku ujemnych x i strumieniem wiodącym staje się płyn ②. Liczymy:

$$\delta t_{2x} = \delta t_2 \cdot \frac{1 - \frac{\Delta t_x}{\Delta t'}}{1 - \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} \quad (4.106)$$

z tym, że wtedy $\Delta t'$ liczone jest u wlotu strumienia ②, a $\Delta t''$ u jego wylotu. Odkładanie δt_2 i potem Δt_x odbywa się od stałej temperatury t'_2 w górze.

Należy zauważyć, że podana metoda określania przebiegu temperatury wzdłuż powierzchni jest tylko na tyle dokładna, na ile k , \dot{W}_1 i \dot{W}_2 są niezmiennie wzdłuż tej powierzchni.

Przykłady

1. W płytowym wymienniku ciepła należy oziębic 250 l/h cieczy o gęstości 1100 kg/m³ i ciepłe właściwym 3,05 kJ/kg·K od temperatury 120°C do 50°C za pomocą 1000 l/h wody o temperaturze początkowej 10°C. Obliczyć powierzchnię wymiennika w przypadkach: współprądu i przeciwprądu dla współczynnika przenikania ciepła 1000 W/m²·K.

R o z w i ą z a n i e :

Obliczamy pojemności cieplne:

$$\text{cieczy oziębianej: } \dot{W}_1 = \left(\frac{0,250}{3600} \cdot 1100\right) \cdot 3,05 = 0,233 \frac{\text{kW}}{\text{K}} = 233 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

$$\text{i wody: } \dot{W}_2 = \left(\frac{1000}{3600} \cdot 1000\right) \cdot 4,19 = 1,163 \frac{\text{kW}}{\text{K}} = 1163 \frac{\text{W}}{\text{K}}$$

Strumień ciepły oddawany przez ciecz:

$$\dot{Q} = \dot{W}_1 \cdot (t'_1 - t''_1) = 233 \cdot (120 - 50) = 16\,300 \text{ W}$$

Temperatura wylotowa wody wynika z bilansu cieplnego:

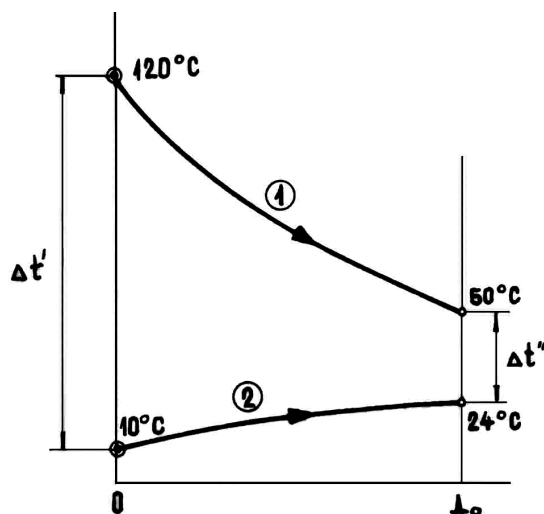
$$\dot{Q} = \dot{W}_2 \cdot (t''_2 - t'_2) \text{ albo } 16\,300 = 1163 \cdot (t''_2 - 10)$$

$$t''_2 = 10 + \frac{16\,300}{1163} = 24^\circ\text{C}$$

Dla współprądu:

$$\Delta t' = 120 - 10 = 110 \text{ K}$$

$$\Delta t'' = 50 - 24 = 26 \text{ K}$$



Rys.4.19 Przebiegi temperatury w przypadku współprądu

$$\Delta t_{\text{sr}} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}} = \frac{110 - 26}{\ln \frac{110}{26}} = 58,3 \text{ K}$$

$$A_o = A_1 = A_2 = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta t_{\text{sr}}} = \frac{16300}{1000 \cdot 58,3} = 0,280 \text{ m}^2$$

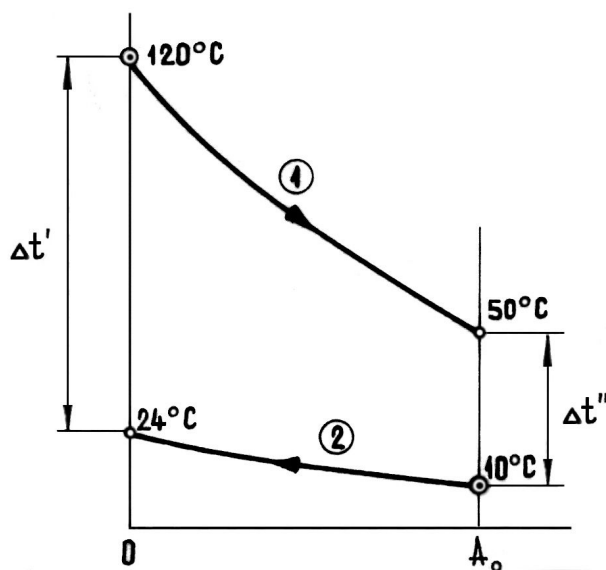
Dla przeciwprądu:

$$\Delta t' = 120 - 24 = 96 \text{ K}$$

$$\Delta t'' = 50 - 10 = 40 \text{ K}$$

$$\Delta t_{\text{sr}} = \frac{96 - 40}{\ln \frac{96}{40}} = 64,1 \text{ K}$$

$$A_o = \frac{16300}{1000 \cdot 64,1} = 0,254 \text{ m}^2$$



Rys.4.20 Przebiegi temperatur w przypadku przeciwprądu

Sprawności termiczne wynoszą:

dla współprądu zgodnie z (4.89) dla $i = 1$:

$$\epsilon_w = \frac{1 - \frac{\Delta t''}{\Delta t'}}{1 + \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2}} = \frac{1 - \frac{26}{110}}{1 + \frac{233}{1163}} = 0,636$$

dla przeciwprądu zgodnie z (4.81) dla $i = 1$ czyli dla (4.67) i (4.68)

$$\epsilon_p = \frac{1 - \frac{\Delta t''}{\Delta t'}}{1 - \frac{\dot{W}_1}{\dot{W}_2} \frac{\Delta t''}{\Delta t'}} = \frac{1 - \frac{40}{96}}{1 - \frac{233}{1163} \frac{40}{96}} = 0,636$$

Są one równe, bowiem temperatury wlotowe i wylotowe płynów są jednakowe, a sprawność jest funkcją tych temperatur.

Przewaga przeciwprądu nad współprądem uwidoczniła się tu w mniejszej powierzchni wymiennika przeciwprądowego.

2. Obliczyć powierzchnię skraplacza pary wodnej, do którego dopływa 250 t/h pary o ciśnieniu 10 kPa abs. i stopniu suchości 0,9. Odpływający kondensat zachowuje temperaturę nasycenia, a w skraplaczu nie ma powietrza ani zanieczyszczeń. Woda chłodząca ogrzewa się o 10 K płynąc wewnątrz rur mosiężnych ($\lambda = 100$ W/m·K) o średnicach 20/17 mm. Współczynniki przejmowania ciepła: po stronie skraplającej się pary 6000 W/m²·K, po stronie wody 4000 W/m²·K.

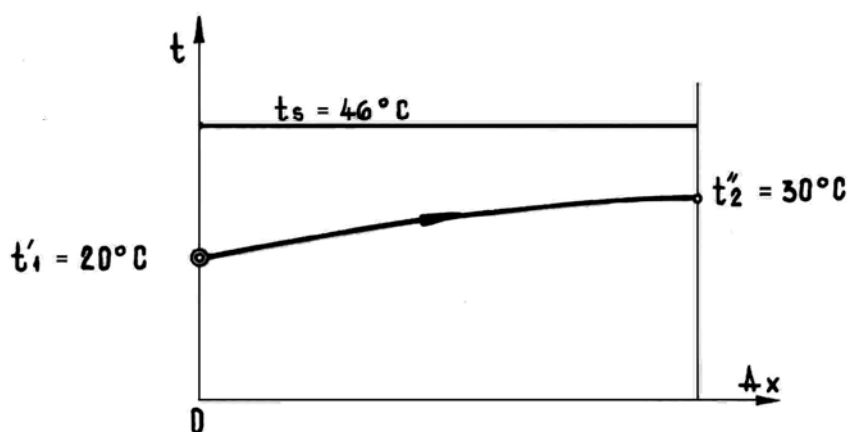
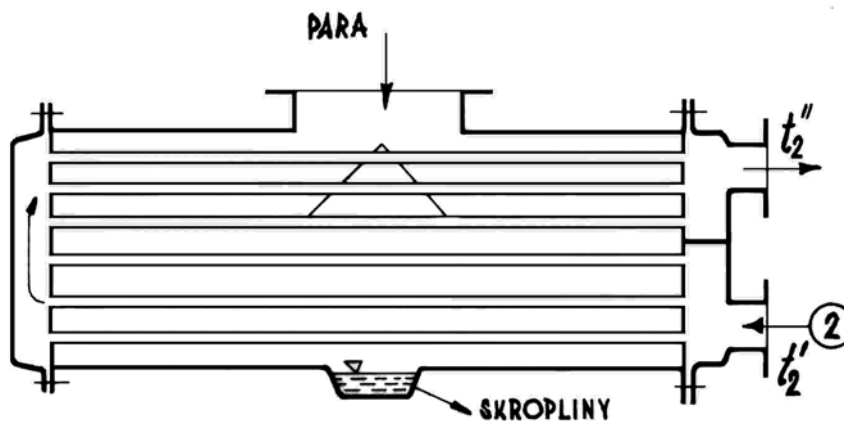
R o z w i ą z a n i e :

Z wykresu h-s (i-s) odczytuje się entalpię pary dla podanych parametrów: 2349 kJ/kg i temperaturę nasycenia: 46°C.

Zatem strumień ciepła skraplania i średnia różnica temperatur w skraplaczu:

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 \cdot (i_p - c_w \cdot t_w) = \frac{250 \cdot 1000}{3600} \cdot (2349 - 4,19 \cdot 46) = 149,5 \cdot 10^3 \text{ kW} = 149,5 \cdot 10^6 \text{ W}$$

$$\Delta t_{\text{sr}} = \frac{\Delta t' - \Delta t''}{\ln \frac{\Delta t'}{\Delta t''}} = \frac{26 - 16}{2,3 \lg \frac{26}{16}} = 20,6 \text{ K}$$



Rys.4.21 Szkic sytuacyjny do przykładu 2

Jako powierzchnię obliczeniową przyjmujemy tę, na której jest gorszy współczynnik przejmowania ciepła, a więc powierzchnię stykającą się z wodą: $A_0 = A_1$ czyli $d_0 = d_1$.

Obliczamy:

$$d_w \cong \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{20 + 17}{2} = 18,5 \text{ mm}$$

$$\frac{d_w}{d_1} = \frac{18,5}{17} = 1,09$$

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{20}{17} = 1,18$$

Współczynnik przenikania ciepła wg wzoru (3.16):

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda \frac{d_w}{d_1}} + \frac{1}{\alpha_2 \frac{d_2}{d_1}}} = \frac{1}{\frac{1}{4000} + \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 1,09} + \frac{1}{6000 \cdot 1,18}} =$$

$$= \frac{10^3}{0,25 + 0,0138 + 0,136} = \frac{10^3}{0,390} = 2560 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Teraz możemy już, z prawa Pécleta, obliczyć powierzchnię skraplacza:

$$A_o = A_1 = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta t_{sr}} = \frac{149,5 \cdot 10^6}{2560 \cdot 20,6} = 2820 \text{ m}^2$$

Ćwiczenia

1. Obliczyć powierzchnię parownika o wydajności chłodniczej 50 kW, w którym między stalowymi ($\lambda = 50 \text{ W/m} \cdot \text{K}$) rurami 24 / 20 mm wrzę freon w temperaturze 15°C przy współczynniku przejmowania ciepła $\alpha_2 = 558 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, a wewnątrz rur płynie solanka oziębiająca się od -7°C do -11°C przy współczynniku przejmowania ciepła $\alpha_1 = 2620 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

Odpowiedź: $A_o = A_2 = 19,9 \text{ m}^2$

2. Obliczyć powierzchnię poziomego skraplacza amoniaku o wydajności cieplnej 80 kW. Amoniak wpływa do skraplacza w stanie nasycenia, z temperaturą $t' = t'' = 30^\circ\text{C}$. Woda chłodząca ma na wlocie temperaturę 25°C i strumień 40 m³/h. Rury są stalowe ($\lambda = 50 \text{ W/m} \cdot \text{K}$) o średnicach 38 / 31. Współczynniki przejmowania ciepła: po stronie amoniaku $\alpha_1 = 7500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, po stronie wody $\alpha_2 = 4700 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$.

Odpowiedź: $A_o = A_2 = 8,85 \text{ m}^2$

3. Obliczyć powierzchnię krzyżowo - prądowej chłodnicy powietrza, w której suche powietrze o strumieniu 5000 m³/h przy temperaturze 30°C i ciśnieniu 105 kPa abs. oziębia się do 20°C przy współczynniku przejmowania ciepła $\alpha_1 = 50 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$. Wewnątrz rur stalowych ($\lambda = 50 \text{ W/m} \cdot \text{K}$) o średnicach 25 i 22 mm przepływa woda o strumieniu 2,10 m³/h, temperaturze wlotowej 10°C i współczynniku przejmowania ciepła $\alpha_2 = 1500 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$. Stała gazowa dla powietrza: 287 Nm/kg·K, ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu: 1,0 kJ/kg·K.

Odpowiedź: $t_2'' = 16,6^\circ\text{C}$

$$\psi_{\Delta t} = 0,94$$

$$\Delta t_{sr} = 10,80 \text{ K}$$

$$A_o = A_1 = 32,2 \text{ m}^2$$

Streszczenie części czwartej

Przedstawiono teorię rekuperatorowych wymienników ciepła opartą na założeniach stałości współczynnika przenikania ciepła \underline{k} i stałości strumieni pojemności cieplnych: \dot{W}_1 i \dot{W}_2 . W jej wyniku do obliczeń powierzchni (lub przenoszonej ilości ciepła przy danej powierzchni) stosuje się średnią logarytmiczną różnicę temperatur. Dotyczy to zarówno współprądu jak i przeciwprądu, a także prądu krzyżowego z tym, że dla tego ostatniego trzeba wyznaczyć odpowiedni mnożnik poprawkowy $\psi_{\Delta t}$. W przypadku, gdy jeden z płynów podlega parowaniu lub skraplaniu przy stałej temperaturze, kierunki przepływu płynów nie mają już znaczenia dla przebiegu temperatury.

Zdefiniowano pojęcie sprawności termicznej wymiennika ciepła. Jest ono związane z wielkością powierzchni w tym sensie, że większa powierzchnia pozwala w większym stopniu wykorzystać pierwotną różnicę temperatur obu płynów do przenoszenia ciepła w danym typie wymiennika. Wyprowadzono związki tej sprawności z charakterystycznymi stosunkami: kA_o/\dot{W}_1 i \dot{W}_1/\dot{W} dla poszczególnych typów wymienników i podano wykresy do jej wyznaczania.

Posługując się sprawnością termiczną dokonano oceny efektywności głównych układów przepływowych wymiennika. Najkorzystniejszym okazał się wymiennik przeciwprądowy, dający przy tych samych powierzchniach największą sprawność, albo przy tej samej sprawności najmniejszą powierzchnię. Nieco gorsze rezultaty daje prąd krzyżowy, a najslabsze współprąd.

Przedstawiono również metodę wyznaczania punktów do wykreślenia krzywej przebiegu temperatury wzdłuż powierzchni rekuperatora.

V. PRZEJMOWANIE CIEPŁA

(KONWEKTYWNE PRZENOSZENIE CIEPŁA)

Przenoszenie ciepła w płynach odbywa się przez przewodzenie oraz na skutek prądów wewnętrznych płynu czyli tzw. konwekcję. W tych ostatnich energia cieplna przenoszona jest wraz z przemieszczającymi się porcjami substancji.

Rozróżnią się:

- konwekcję swobodną (naturalną), w której prądy wewnętrzne płynu wywołane są siłami, wyporu wynikającymi z różnic gęstości, a te przeważnie są skutkiem różnic temperatur w płynie;
- konwekcję wymuszoną, w której ruchy wewnętrzne płynu wywołane są ogólnym przepływem spowodowanym działaniem przyczyn zewnętrznych (spadkiem ciśnienia lub wysokości).

Szczególnymi przypadkami konwekcji są te, które występują podczas wrzenia cieczy i skraplania par. Mamy wtedy do czynienia z dwiema fazami, a strumień cieplny zmienia się skokowo na powierzchni rozdziału faz wskutek pochłonięcia lub oddania ciepła parowania przez strumień substancji przekraczający tę powierzchnię. W obu tych procesach przenoszenie ciepła towarzyszy przenoszeniu substancji.

1. RÓWNANIA KONWEKCJI

Przenoszenie ciepła między ścianką i płynem charakteryzuje współczynnik przejmowania ciepła określony wzorem (1.7):

$$\alpha = - \frac{\lambda (\nabla t)_w}{t_w - t_f} \quad (5.1)$$

a w szczególnym i najczęstszym przypadku:

$$\alpha = - \frac{\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)_w}{t_w - t_f} \quad (5.2)$$

Do jego określenia potrzebna jest znajomość temperatury płynu z dala od ścianki t_f oraz rozkładu temperatury płynu w obszarze przyściennym: $t = f(x, y, z)$, z którego wynikają: gradient $(\nabla t)_w$ i temperatura ścianki t_w .

Do wyznaczenia rozkładu (pola) temperatury w pobliżu ścianki służy równanie różniczkowe pola temperatury, którym jest równanie Fouriera-Kirchhoffa dla procesu izobarycznego ($P = \text{const}$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = \\ = \frac{\dot{q}_v}{c_p \cdot \rho} + a \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

W równaniu tym poza: $t(x, y, z, \tau)$ występują jeszcze dwie niewiadome funkcje:

- rozkładu natężenia źródeł ciepła: $\dot{q}_v(x, y, z, \tau)$, która musi być w jakiś sposób dana, jednak gdy prędkości przepływu są niewielkie w porównaniu z prędkością dźwięku i nie występują reakcje chemiczne (np. spalanie), można ją pominąć;
- rozkładu prędkości płynu: $\vec{w} = \vec{w}_x = \vec{w}_y = \vec{w}_z = f(x, y, z)$, która w zagadnieniach przenoszenia ciepła jest wielkością stacjonarną (lub quasi-stacjonarną dla przepływu turbulentnego) i też musi być w jakiś sposób dana.

Składowe prędkości:

$$w_x(x, y, z) \quad w_y(x, y, z), \quad w_z(x, y, z)$$

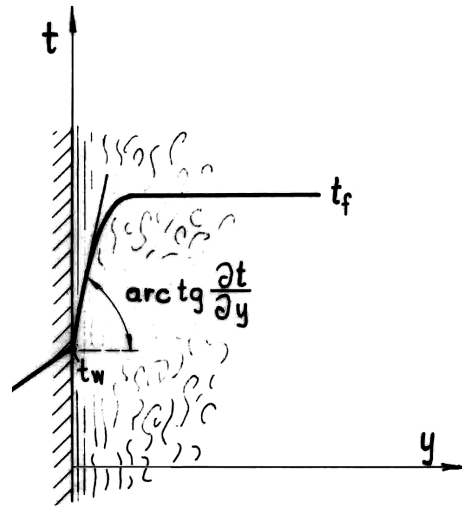
mogą być znane np. z pomiaru - mamy wtedy do czynienia z empirycznym rozkładem prędkości. Podstawienie ich wyrażeń funkcyjnych umożliwi rozwiązanie równania (5.3). Zawiera ono wtedy tylko jedną niewiadomą funkcję: $t(x, y, z, \tau)$.

Mechanice płynów znane jest jednak równanie różniczkowe pola prędkości - wyprowadzone z II zasady dynamiki Newtona - noszące nazwę równania ruchu albo równania Naviera - Stokesa*). Równanie to w przypadku przepływu stacjonarnego odnosi się wyłącznie do przepływu laminarnego, co zupełnie wystarcza, bowiem w warstwie bezpośrednio przyściennej zawsze występuje przepływ laminarny.

Równanie Naviera - Stokesa dla stałej lepkości i stałej gęstości płynu, tzn. dla $\eta = \eta_{sr} = \text{const} \neq f(t)$ i $\rho = \rho_{sr} \neq f(t)$, ma postać ogólną:

$$(\vec{w} \cdot \nabla) \vec{w} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \cdot \nabla P + \nu \cdot \nabla^2 \vec{w} \quad (5.4)$$

W szczególności dla współrzędnych prostokątnych wyrażają je 3 równania skalarowe – przedstawione na następnej stronie



Rys.5.1 Schemat przejmowania ciepła na ścianie

*) Por. np.: J. Bukowski, P. Kijkowski: „Mechanika płynów”, PWN, Warszawa 1980.
W. Prosnak: „Mechanika płynów” t. I, PWN, Warszawa 1970.

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} = \varepsilon_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) \quad (5.5)$$

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z} = \varepsilon_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right) \quad (5.6)$$

$$w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} = \varepsilon_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) \quad (5.7)$$

W powyższych równaniach Naviera – Stokesa występuje nowa niewiadoma funkcja: $P(x, y, z)$ wyrażająca rozkład ciśnienia w płynie. Pozostałe wielkości: jednostkowa siła masowa będąca przeważnie przyśpieszeniem grawitacyjnym: $\vec{g} = \vec{g}_x = \vec{g}_y = \vec{g}_z$, oraz lepkość kinematyczna:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}$$

są oczywiście znane.

Przy 4 niewiadomych funkcjach skalarnych:

$$w_x(x, y, z), \quad w_y(x, y, z), \quad w_z(x, y, z)$$

potrzebne są, do rozwiązania hydromechanicznego (ściślej: fluido-mechanicznego) aspektu zagadnienia, 4 równania różniczkowe. Tym brakującym czwartym równaniem jest równanie ciągłości:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{w}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (5.8)$$

które w przypadku stacjonarnym ma postać:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{w}) = \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0 \quad (5.9)$$

Równania: Fouriera - Kirchhoffa, Naviera – Stokesa i ciągłości w zupełności opisują konwekcyjne przenoszenie energii cieplnej w elementarnie małej objętości płynu poruszającego się ruchem laminarnym.

Równania te opisują przede wszystkim konwekcję wymuszoną i odnoszą się do przejmowania ciepła przez ściankę, którą omywa płyn przepływający zarówno laminarnie, jak i turbulentnie. W tym ostatnim przypadku bowiem warstwa przyścienna jest zawsze w całości lub części laminarna (rys. 5.5 i 5.6).

W przypadku konwekcji swobodnej siłą masową nie jest siła ciężkości, ale siła wyporu.

Jednostkowa (odniesiona do 1 kg płynu) siła ciężkości:

$$\frac{d\vec{F}_C}{\rho \cdot dV} = \vec{g} \quad \left[\frac{N}{kg} \equiv \frac{m}{s^2} \right] \quad (5.10)$$

musi więc zostać zastąpiona przez jednostkową siłę wyporu skierowaną przeciwnie do poprzedniej.

Siła wyporu $d\vec{F}_w$ działająca na element objętościowy płynu dV , w którym gęstość płynu ρ jest mniejsza od gęstości płynu otaczającego ρ_f , jest siłą wypadkową z: różnicy naporów na górną i dolną powierzchnię elementu (czyli pełnej siły wyporu): $g \cdot \rho_f \cdot dV$ skierowanej do góry, z jednej strony i ciężaru płynu w elemencie: $g \cdot \rho \cdot dV$ skierowanego w dół, z drugiej:

$$d\vec{F}_w = - \vec{g} \cdot \rho_f \cdot dV + \vec{g} \cdot \rho \cdot dV = - \vec{g} \cdot (\rho_f - \rho) \cdot dV \quad (5.11)$$

Zatem jednostkowa siła wyporu spowodowana mniejszą gęstością płynu w elemencie ($\rho < \rho_f$) wynosi:

$$\frac{d\vec{F}_w}{\rho_f \cdot dV} = - \vec{g} \cdot \frac{\rho_f - \rho}{\rho_f} \quad (5.12)$$

Jest to przyspieszenie unoszenia elementu objętościowego, tak samo jak jednostkowa siła ciężkości (5.10) jest przyspieszeniem grawitacyjnego opadania.

Jeżeli różnica gęstości: $(\rho_f - \rho)$ spowodowana jest rozszerzalnością objętościową płynu (a nie różnicą faz), to charakteryzuje ją współczynnik rozszerzalności objętościowej:

$$\beta = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P}{v_f} = - \frac{\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P}{\rho_f} \quad \left[\frac{1}{K}\right] \quad (5.13)$$

i wtedy:

$$\rho_f = \rho + \Delta \rho = \rho - \rho_f \cdot \beta \cdot (t_f - t) = \rho + \rho_f \cdot \beta \cdot (t - t_f)$$

albo

$$\rho_f = \rho + \rho_f \cdot \beta \cdot \Delta t \quad (5.14)$$

czyli:

$$\rho_f - \rho = \rho_f \cdot \beta \cdot \Delta t \quad (5.15)$$

Po podstawieniu tego do (5.11) jest:

$$d\vec{F}_w = - \vec{g} \cdot \rho_f \cdot \beta \cdot \Delta t \cdot dV$$

i ostateczne wyrażenie na jednostkową siłę wyporu ma postać:

$$\frac{d\vec{F}_w}{\rho_f dV} = - \vec{g} \cdot \beta \cdot \Delta t \quad (5.16)$$

w którym: $\Delta t = t - t_f$ jest różnicą temperatur płynu w elemencie (t) i jego otoczeniu (t_f). Wyrażenie (5.16) przedstawia przyspieszenie unoszenia nagrzanego elementu płynu w funkcji różnicy temperatur to przyspieszenie wywołującej.

Podany wyżej zestaw równań do obliczania pola temperatury w warstwie przyściennej płynu nosi nazwę **równań konwekcji**.

Równania te wyrażają podstawowe prawa fizyki (zasady zachowania: energii, pędu i ilości substancji) i opisują konwekcję w sposób zupełnie ogólny. Odnoszą się one do bardzo wielu przypadków szczególnych, różniących się między sobą wieloma istotnymi cechami. Te cechy wyróżniają je to tzw. **warunki jednoznaczności**.

Składają się na nie:

1. warunki geometryczne - a więc kształt i rozmiary ciał, w których przebiega proces;
2. właściwości fizyczne płynu - takie jak przewodność cieplna (λ), lepkość (η), ciepło właściwe (c_p), gęstość (ρ) i rozszerzalność cieplna (β);
3. warunki brzegowe - osobliwości procesu na granicy ciała, w szczególności rozkłady temperatury i prędkości na tych granicach;
4. warunki czasowe - osobliwości czasowego przebiegu procesu cieplnego, w procesie stacjonarnym oczywiście nie występują.

Na przykład: Rozpatrywany jest przypadek przenoszenia ciepła podczas przepływu cieczy w rurze. Warunki jednoznaczności mogą tu być następujące:

1. rura okrągła gładka o średnicy d i długości L ;
2. płynem jest woda traktowana jako ciecz nieściśliwa o właściwościach określonych przez $\lambda(t)$, $c(t)$, $\eta(t)$, $\rho(t)$ - w pewnych przypadkach zależności od temperatury można pominąć i zamiast funkcji wystąpią liczby: λ , c , η , ρ ;
3. temperatura cieczy na wlocie wynosi t'_f , na powierzchni rury t_w , szybkość na wlocie w' , a na ścianie $w_w = 0$ - gdy na wlocie prędkość nie jest rozłożona równomiernie, to dany być musi jej rozkład $w' = f(y)$;
4. zagadnienie jest stacjonarne - warunki czasowe nie występują.

2. METODY ROZWIĄZANIA RÓWNAŃ KONWEKCJI

2.1. Metoda analityczna

Matematyczne sformułowanie problemu obejmuje:

1. równanie przejmowania ciepła (5.1) lub (5.2),
2. równanie różniczkowe pola temperatury (5.3),
3. równania ruchu (5.5)...(5.7),
4. równanie ciągłości (5.8),
5. warunki jednoznaczności.

Rozwiązanie analityczne tak postawionego problemu możliwe jest jednak tylko w szczególnych przypadkach i przy wielu założeniach upraszczających.

Na przykład: dla przejmowania ciepła podczas przepływu w rurze trzeba było przyjąć następujące założenia:

- rura absolutnie gładka o przekroju kołowym,
- ciecz nieściśliwa, właściwości fizyczne stałe i niezależne od temperatury.
- przepływ ustalony w czasie, w całości laminarny z parabolicznym rozkładem prędkości (a więc izotermiczny), temperatura na wlocie stała,

Uzyskane rozwiązanie tego tzw. problemu Graetza jest oczywiście ważne jedynie w granicach poczynionych założeń i wykazuje odchylenia od rezultatów otrzymywanych doświadczalnie w warunkach rzeczywistych.

Tak więc metoda analityczna, mimo że może dać najbardziej wnikliwy obraz zjawiska, ma ze względu na trudności czysto matematyczne oraz niezbędne w niej założenia idealizacyjne, raczej ograniczone znaczenie.

Zastosowanie metod numerycznych i komputera szczególnie w połączeniu z gotowymi, ale i kosztownymi, programami do obliczeń fluidomechanicznych (np. „Fluent” lub CFD) znakomicie rozszerza możliwości uzyskiwania rozwiązań na drodze czysto matematycznej. Jest to szczególnie przydatne w odniesieniu do aparatury o dużym stopniu odpowiedzialności, kiedy duży nakład pracy programistycznej staje się opłacalny, a połączenie z badaniami doświadczalnymi pozwala zweryfikować otrzymane rezultaty. Wielką zaletą tej metody jest możliwość dogłębnej analizy przebiegu zjawiska.

2.2. Metody analityczno - doświadczalne

Metody te były długo jedynym spolegliwym sposobem badania zjawisk przejmowania ciepła i uzyskiwania rezultatów potrzebnych w praktyce inżynierskiej.

Należy tu wspomniana wyżej możliwość podstawienia do równania Fouriera - Kirchhoffa wartości składowych prędkości uzyskanych z pomiaru w przepływie rzeczywistym i wyznaczenia następnie rozkładu temperatury przez całkowanie tego równania. Mając ten rozkład oblicza się następnie współczynnik przejmowania ciepła α z równania (5.1). Sposób ten eliminuje konieczność rozwiązywania równań: ruchu i ciągłości zmniejszając znacznie trudności matematyczne z jednej, a uproszczenia idealizacyjne z drugiej strony.

Można z kolei ominąć równanie różniczkowe pola temperatury (5.3) przez bezpośredni pomiar rozkładu temperatury w pobliżu ścianki na obiekcie rzeczywistym, wyznaczenie gradientu i obliczenie α z równania (5.1).

Można wreszcie zrealizować podejście w pełni empiryczne wyznaczając α z pomiaru, na rzeczywistym obiekcie, wielkości wchodzących do równania wyrażającego prawo Newtona (1.6). Otrzymany rezultat uwzględnia wszystko, co ma wpływ na zjawisko, bo całkowania równań konwekcji dokonuje tu sama natura, ale jest on najmniej analityczny w sensie wglądu we wzajemne zależności między wielkościami determinującymi przebieg zjawiska i najmniej ogólny w sensie możliwości zastosowania go do różnych pojawiających się w praktyce inżynierskiej przypadków.

Ten ostatni mankament może być usunięty przez oparcie się na podobieństwie zjawisk fizycznych i uogólnienie otrzymanych na drodze czysto doświadczalnej rezultatów na całą klasę przypadków, które łączy podobieństwo geometryczne i fizyczne. Zasady, na jakich odbywa się to uogólnienie, ujmuje teoria podobieństwa uważana w ogólności za teorię eksperymentu.

2.3. Metoda analogowa

Metoda ta dostarcza wzorów użytecznych w praktyce inżynierskiej wykorzystując podobieństwo matematycznych postaci równań różniczkowych: przepływu płynu i pola temperatury.

Szczególnie gdy pominie się niektóre człony tych równań, to zbliżają się one do matematycznej identyczności. Pomięcia te ograniczają zastosowanie metody analogowej do konwekcji wymuszonej. Identyczność równań różniczkowych wraz z identycznością warunków brzegowych prowadzi do identyczności funkcji całkowych, tj. rozkładów prędkości lub ciśnień w pierwszym i temperatur w drugim przypadku. Pozwala to na wykorzystanie wyników, łatwiejszych do przeprowadzenia, badań przepływowych do rozwiązywania problemów cieplnych. Jednak równania dla obu zjawisk są identyczne tylko w szczególnym przypadku. Ogólnie jednak biorąc pozostają w pewnej relacji zwanej analogią hydromechaniczno - cieplną. Ma ona zastosowanie w analizie wymuszonych przepływów turbulentnych wewnątrz przewodów zamkniętych i wzdłuż płyt płaskich. Dla tych przypadków dostarcza ona wzorów użytkowych o dość dobrej dokładności jak np. wzór (5.90) podany dalej.

Sama metoda analogii hydromechaniczno - termicznej jest wyjaśniona w podrozdziale 4.2.

3. ZASTOSOWANIE TEORII PODOBIEŃSTWA DO PRZEJMOWANIA CIEPŁA

3.1. Zasady ogólne

Dwa zjawiska są podobne, gdy wszystkie opisujące je pola wielkości fizycznych (temperatury, prędkości, ciśnienia) są podobne, tzn. odpowiednie wielkości fizyczne w odpowiadających sobie punktach i chwilach obydwu układów są do siebie proporcjonalne (są zmienione według pewnej i tej samej dla danej wielkości skali).

Na ogół jednak funkcje rozkładu temperatury, prędkości itd. nie są znane bezpośrednio, a tylko poprzez równania różniczkowe wraz z warunkami jednoznaczności, z których można te funkcje rozkładu uzyskać - jest to tylko (i aż) kwestia znajomości odpowiednich metod całkowania tych równań (metod analitycznych, numerycznych czy empirycznych), a więc kwestia operacji jedynie pomocniczych w stosunku do treści fizycznej zawartej w równaniach różniczkowych i w warunkach jednoznaczności.

Gdy istnieje podobieństwo odpowiednich pól fizycznych w dwu różnych obiektach, to zachodzi ono również między równaniami różniczkowymi i warunkami jednoznaczności dla tych obiektów i na odwrót: podobieństwo równań różniczkowych i warunków jednoznaczności oznacza podobieństwo pól odpowiednich wielkości fizycznych.

Stwierdzenie to jest bardzo ważne, bo nie znając jeszcze funkcji rozkładu temperatury, prędkości itd. (są to niewiadome funkcje w równaniach różniczkowych konwekcji) możemy sądzić o tym, czy podobieństwo istnieje czy nie, na podstawie znanych nam równań różniczkowych i warunków jednoznaczności.

Dlatego można ich użyć do wyprowadzenia liczb podobieństwa charakteryzujących to podobieństwo.

Liczby te zwane są też liczbami kryterialnymi.

Liczby te stanowią kompleksy parametrów charakteryzujących zjawisko i dzielą się na liczby określające, czyli te, które zawierają wyłącznie parametry wchodzące do warunków jednoznaczności i tym samym warunkują podobieństwo oraz nieokreślające, które zawierają również parametry poszukiwane (nie znane a priori), które tego podobieństwa nie warunkują, ale oczywiście je charakteryzują tak jak pozostałe liczby.

Zasadnicze twierdzenia teorii podobieństwa są następujące:

1. Gdy dwa zjawiska są podobne, to wartości liczb podobieństwa są dla obydwu zjawisk jednakowe (twierdzenie Newtona).
2. Rozwiązanie (całkę ogólną) układu równań różniczkowych opisujących dowolne zjawisko fizyczne można przedstawić w postaci wiążącej ze sobą liczby podobieństwa utworzone ze zmiennych (ale nie tylko zmiennych) występujących w tym zjawisku (twierdzenie Buckinghama).

To znaczy, że zamiast rozwiązania w postaci zwyczajnej

$$y = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

można zawsze otrzymać je w postaci

$$\Pi_y = f_2(\Pi_{x1}, \Pi_{x2}, \dots, \Pi_{xn})$$

gdzie Π_{xi} jest liczbą podobieństwa zawierającą m.in. zmienną x_i . Liczby podobieństwa po prawej (Π_{xi}) są liczbami określającymi, a liczba po lewej (Π_y) jest liczbą nieokreślającą.

Twierdzenie powyższe nosi też nazwę teorematu lub twierdzenia Π (pi).

3. Warunkiem koniecznym i dostatecznym podobieństwa dwu zjawisk fizycznych jest podobieństwo warunków jednoznaczności oraz równość określających liczb podobieństwa (twierdzenie Kirpiczowa – Guchmana).

Równość nieokreślających liczb podobieństwa, zawierających niewiadome nie wchodzące do warunków jednoznaczności, nie jest warunkiem, ale można ją uważać za skutek istniejącego podobieństwa dwu zjawisk.

Trzy twierdzenia teorii podobieństwa dają odpowiedź na pytanie, jak prowadzić, opracowywać i uogólniać wyniki badań doświadczalnych.

Pierwsze z nich mówi, jakie wielkości należy mierzyć – mianowicie te które wchodzą w skład liczb podobieństwa.

Drugie wskazuje na sposób opracowywania wyników – należy je wyrażać w postaci kryterialnych liczb podobieństwa, a zależności między nimi w postaci równań kryterialnych.

Trzecie wreszcie wyjaśnia, jakie zjawiska są podobne, tzn. na jakie zjawiska można rozciągnąć (uogólnić) otrzymane rezultaty - otóż na takie, które mają podobne warunki jednoznaczności i identyczne, określające liczby podobieństwa.

Widać z tego wielką użyteczność teorii podobieństwa dla badań doświadczalnych. Uzasadnia to w pełni jej drugą nazwę: „teorii eksperymentu”. Ma ona podstawowe znaczenie dla nauk opierających się na eksperymencie, a więc dla wielu działów nauki o przenoszeniu ciepła.

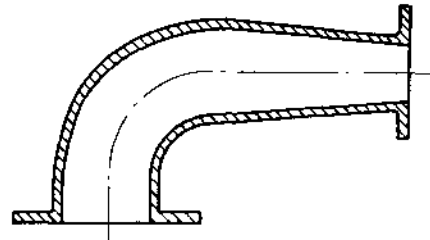
Podobieństwo przejmowania ciepła, czyli podobieństwo współczynników przejmowania ciepła α zachodzi więc, w świetle wzoru (5.2) wtedy, gdy podobne są pola temperatury. Natomiast dwa pola temperatury są podobne wtedy, gdy podobne są warunki jednoznaczności oraz równania różniczkowe pól temperatury wyrażone wzorem (5.3). Do wzoru tego wchodzi jednak składowe wektora prędkości płynu \vec{w} (w_x, w_y, w_z). Implikuje to konieczność równoczesnego podobieństwa pól prędkości.

Aby dwa procesy przejmowania ciepła były podobne, zachodzić musi zarówno podobieństwo przepływu płynów (fluidomechaniczne), jak i podobieństwo przenoszenia ciepła (termiczne).

Warunki podobieństw: fluidomechanicznego i termicznego rozpatrzone zostaną poniżej.

3.2. Podobieństwo przepływu płynów (fluidomechaniczne)

Pozostajemy przy założeniu stacjonarności przepływu i traktujemy płyn jako nieściśliwy. Przepływ odbywać się musi w układach podobnych pod względem geometrycznym, tzn. mających kąty identyczne, a odpowiadające sobie wymiary liniowe proporcjonalne. Interesującym nas układem niech będzie np. przewód z rys. 5.2. Wszystkie wielkości dla tego przewodu będą oznaczane zwyczajnie, natomiast dla modelu tego przewodu otrzymają apostrof ('), są one bowiem inne, nawet przepływający płyn może być innego rodzaju.



Rys. 5.2 Przewód modelowy

Równanie ciągłości (5.9) nie daje żadnych ograniczeń dla podobieństwa.

Pozostają równania ruchu płynu lepkiego, które wystarczy napisać dla jednego tylko kierunku, np. dla osi x (z pozostałych otrzyma się identyczne wyniki). Należy jednak zauważyć, że równania Naviera-Stokesa obowiązują dla płynu, w którym nie ma różnic temperatury, tj. dla przepływu izotermicznego. W zagadnieniach przenoszenia ciepła natomiast zawsze występują różnice temperatury w płynie i wywołane nimi siły wyporu, a przepływ jest nieizotermiczny. Zatem przepisując dla takich warunków równanie (5.5) trzeba zastąpić w nim jednostkową siłę ciężkości (5.10) jednostkową siłą wyporu (5.16), wtedy otrzymuje się dla obiektu naturalnego równanie:

$$w_x' \cdot \frac{\partial w_x'}{\partial x'} + w_y' \cdot \frac{\partial w_x'}{\partial y'} + w_z' \cdot \frac{\partial w_x'}{\partial z'} = g_x' \cdot \beta' \cdot \Delta t' - \frac{1}{\rho'} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x'} + \nu' \cdot \left[\frac{\partial^2 w_x'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w_x'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w_x'}{\partial z'^2} \right] \quad (5.17)$$

Dla modelu jest analogicznie:

$$w_x' \cdot \frac{\partial w_x'}{\partial x'} + w_y' \cdot \frac{\partial w_x'}{\partial y'} + w_z' \cdot \frac{\partial w_x'}{\partial z'} = g_x' \cdot \beta' \cdot \Delta t' - \frac{1}{\rho'} \cdot \frac{\partial p'}{\partial x'} + \nu' \cdot \left[\frac{\partial^2 w_x'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w_x'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w_x'}{\partial z'^2} \right] \quad (5.18)$$

Obydwa przepływy mają być podobne, a więc między odpowiednimi wielkościami muszą być zachowane stałe stosunki tzw. skale podobieństwa:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{l'}{l} = C_l \quad (5.19)$$

$$\frac{w_x'}{w_x} = \frac{w_y'}{w_y} = \frac{w_z'}{w_z} = \frac{w'}{w} = C_w$$

$$\frac{g_x'}{g_x} = \frac{g_y'}{g_y} = \frac{g_z'}{g_z} = \frac{g'}{g} = C_g$$

$$\frac{\beta'}{\beta} = C_\beta \quad \frac{\Delta t'}{\Delta t} = C_t \quad \frac{\rho'}{\rho} = C_\rho \quad \frac{p'}{p} = C_p \quad \frac{\nu'}{\nu} = C_\nu$$

Wyrazamy wielkości w równaniu (5.19) dla modelu za pomocą wielkości w skali naturalnej, np. $x' = x \cdot C_1$, $w'_x = w_x \cdot C_w$, $v' = v \cdot C_v$ itd. Otrzymujemy po uporządkowaniu:

$$\frac{C_w^2}{C_1} \left[w_x \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial w_x}{\partial z} \right] = C_g C_\beta C_t \cdot g \beta \Delta t +$$

$$- \frac{C_p}{C_1 C_\rho} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{C_\nu C_w}{C_1^2} \cdot \nu \left[\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right] \quad (5.20)$$

Warunkiem identyczności równań ruchu dla modelu i układu naturalnego jest możliwość skrócenia wyrazów zawierających skale podobieństwa w równaniu (5.20). Możliwość ta zachodzi, gdy wszystkie te wyrazy są sobie równe:

$$\frac{C_w^2}{C_1} = C_g \cdot C_\beta \cdot C_t = \frac{C_p}{C_1 \cdot C_\rho} = \frac{C_\nu C_w}{C_1^2} \quad (5.21)$$

Wtedy ilościowy opis zjawiska modelowego będzie taki sam jak naturalnego i zastosowane skale podobieństwa ($C_1, C_w \dots$) nie będą zniekształcać ilościowego opisu zjawiska w tym sensie, że wyniki liczbowe otrzymane z badań modelowych będą, po uwzględnieniu skal (5.19), identyczne z wynikami pomiarów uzyskanymi na obiekcie naturalnym.

Inaczej mówiąc: możliwość eliminacji skal z równania różniczkowego (i warunków brzegowych) oznacza, że również rozwiązania (poła prędkości czy ciśnienia) będą sobie równoważne, tj. zmienione proporcjonalnie według tych skal. Będą więc podobne w myśl podstawowej definicji podobieństwa (str.116).

Z potrójnej równości (5.21) wydzielamy kolejno pojedyncze równania wyprowadzając z nich poszczególne liczby podobieństwa. Z przyrównania skrajnych członów otrzymuje się po prostych przekształceniach:

$$\frac{C_w \cdot C_1}{C_\nu} = 1 \quad (5.21a)$$

albo po ponownym uwzględnieniu (5.19) i uporządkowaniu:

$$\boxed{Re = \frac{w \cdot l}{\nu} = \frac{w' \cdot l'}{\nu'} = Re'} \quad (5.22)$$

Bezwymiarowe wyrażenia (5.22), które muszą być identyczne w modelu i obiekcie naturalnym, nazywają się liczbami Reynoldsa*.

Równość pierwszego i drugiego członu w (5.21) prowadzi do zależności:

$$\frac{C_g \cdot C_\beta \cdot C_t \cdot C_1}{C_w^2} = 1 \quad (5.21b)$$

W liczniku występują tu, poza skalą liniową, jedynie skale wielkości wywołujących konwekcję swobodną (skale składające się na skalę siły wyporu), natomiast w mianowniku jest skala prędkości, a więc skala wielkości która w zasadzie charakteryzuje konwekcję wymuszoną. Bowiem, gdy chodzi o konwekcję swobodną, jest to wielkość wtórna wobec siły wyporu, gdyż prędkość jest przez tę siłę wywołana.

* Osborne Reynolds (1842 – 1912) - angielski fizyk i inżynier

Należy więc tę skalę C_w wyeliminować, aby otrzymać kryterium jednoznacznie związane z konwekcją swobodną. W tym celu z (5.21a) wyznaczamy:

$$C_w = \frac{C_v}{C_1}$$

i po podstawieniu do (5.21b) otrzymujemy równość:

$$\frac{C_\beta \cdot C_g \cdot C_1^3 \cdot C_t}{C_v^2} = 1$$

a po uwzględnieniu (5.19) i rozdzieleniu wielkości odnoszących się do modelu, od tych dla układu naturalnego, dochodzimy do drugiego warunku:

$$\boxed{Gr = \frac{\beta \cdot g \cdot l^3}{\nu^2} \cdot \Delta t = \frac{\beta' \cdot g' \cdot l'^3}{\nu'^2} \cdot \Delta t' = Gr'} \quad (5.23)$$

tj. warunku identyczności bezwymiarowych liczb Grashofa*.

Różnica temperatur w liczbie Grashofa wyrażona jest jako:

$$\underline{\Delta t = t_w - t_f}$$

Wreszcie równość pierwszego i trzeciego wyrażenia w (5.21) daje:

$$\frac{C_p \cdot C_w^2}{C_p} = 1$$

czyli warunku równości liczb Eulera**:

$$\boxed{Eu = \frac{P}{\rho_w^2} = \frac{P'}{\rho'_w'^2} = Eu'} \quad (5.24)$$

Poszczególne liczby podobieństwa są wielkościami bezwymiarowymi, a ich nazwy ustalono umownie kierując się chęcią uczczenia pamięci badaczy, którzy szczególnie zasłużyli się do rozwoju danej dziedziny nauki.

Wchodzący w skład liczb podobieństwa wymiar liniowy jest w zasadzie dowolny, skoro bowiem istnieje podobieństwo geometryczne, to wszystkie wymiary są do siebie proporcjonalne. W praktyce bierze się wymiar najbardziej charakterystyczny dla danego układu (np. średnica dla rury, długość dla płyty itp.), a określa go zawsze ten, kto opracowuje wyniki pomiarów dokonanych na modelu.

Z uzyskanych trzech liczb podobieństwa charakteryzujących nieizotermiczne przepływy płynów dwie, a mianowicie Reynoldsa i Grashofa, zawierają wielkości zmienne (które są niezależne) wchodzące w skład warunków jednoznaczności, są to więc liczby określające, natomiast liczba Eulera zawiera zmienną zależną, nie wchodzącą do tych warunków, w postaci ciśnienia P , jest więc liczbą nieokreślającą.

Zamiast ciśnienia P stosuje się przeważnie różnicę ciśnień ΔP . Reprezentuje ona, szukany w zagadnieniach przepływowych, spadek ciśnienia spowodowany oporami przepływu.

* Franz Grashof (1826 - 1893) - inżynier niemiecki

** Leonhard Euler (1707 - 1783) - szwajcarski matematyk i fizyk

Tak więc liczbami warunkującymi podobieństwo przepływów nieizotermicznych są liczby Reynoldsa i Grashofa. Aby przepływy płynów były podobne, liczby te muszą mieć identyczne wartości w odpowiadających sobie punktach poszczególnych przepływów:

$$\begin{aligned} \text{Re} &= \text{idem} \\ \text{Gr} &= \text{idem} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Wtedy pola prędkości i ciśnień są podobne, tzn. różnią się jedynie skalami.

W zagadnieniach przepływowych poszukiwaną wielkością jest zazwyczaj opór przepływu ΔP . Wchodzi on w skład nieokreślającej liczby Eulera.

Zgodnie z drugim twierdzeniem teorii podobieństwa (Buckingham) rozwiązanie równań Naviera - Stokesa (uzyskane w szczególności na drodze doświadczalnej) można przedstawić w postaci, w której nieokreślająca liczba Eulera jest funkcją obydwu liczb określających: Reynoldsa i Grashofa:

$$\text{Eu} = \frac{\Delta P}{\rho \cdot w^2} = f(\text{Re}, \text{Gr})$$

Zależność ta jest ważna dla wszystkich przepływów podobnych, tzn. takich których powierzchnie ograniczające przepływ mają identyczne kształty (choć różny rozmiar) oraz wykazują identyczne wartości liczb Reynoldsa i Grashofa.

Przeważnie rozwiązanie doświadczalne uzyskiwane jest od razu dla dostatecznie dużego zakresu liczb (Re) i (Gr) tak, aby objąć możliwie wszystkie mogące wystąpić później w praktyce przypadki.

Liczby podobieństwa można zinterpretować jako stosunki sił działających na płyn. Szczególnie użyteczna jest ta interpretacja w przypadku liczby Reynoldsa: jest ona stosunkiem sił bezwładności i do sił lepkości.

Aby to udowodnić utwórzmy wyrażenia na te siły odniesione do masy płynu: $m = \rho \cdot V$.

Siła bezwładności powodująca przyspieszenie masy \underline{m} od prędkości 0 do \underline{w} [m/s] w czasie τ :

$$F_B = - m \cdot \frac{\Delta w}{\tau} = - \frac{m}{\tau} \cdot w = - \dot{m} \cdot w$$

może być, jak widać, wyrażona przez iloczyn strumienia masy \dot{m} i osiągniętej prędkości \underline{w} . Po uwzględnieniu prawa ciągłości strugi: $\dot{m} = A \cdot w \cdot \rho$ i podzieleniu równania przez masę: $m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot l$ otrzymuje się:

$$\frac{F_B}{\rho \cdot V} = \frac{w^2}{l}$$

Siła lepkości wynika z naprężenia stycznego:

$$\tau = \eta \cdot \frac{\Delta w}{\Delta y} = \rho \cdot \nu \cdot \frac{w}{l}$$

w którym gradient prędkości (w poprzek przepływu) wyrażony jest przez zmianę prędkości od 0 do \underline{w} na odcinku \underline{l} . Naprężenie to działa na powierzchnię A dając siłę:

$$F_L = A \cdot \tau = A \cdot \rho \cdot \nu \cdot \frac{w}{l}$$

która odniesiona do masy: $m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot l$ wyraża się wzorem:

$$\frac{F_L}{\rho \cdot V} = \frac{\nu \cdot w}{l^2}$$

Liczbę Reynoldsa można więc przekształcić następująco

$$Re = \frac{w \cdot l}{\nu} = \frac{w \cdot l}{\nu} \cdot \frac{w}{w} \cdot \frac{1}{1} = \frac{\frac{w^2}{l}}{\frac{\nu \cdot w}{l^2}} = \frac{F_B}{F_L}$$

Jak widać, jest ona istotnie stosunkiem sił bezwładności pływu do sił lepkości w tym płynie. Małe wartości (Re) oznaczają przewagę sił lepkości nad siłami bezwładności - przepływ jest wtedy laminarny (uwarstwiony). Wzrost (Re) powyżej wartości krytycznej powoduje przekształcenie przepływu w turbulentny (burzliwy) - siły bezwładności przeważają teraz nad siłami lepkości, te ostatnie nie są już w stanie stłumić pojawiających się wirów (dysypacja lepkościowa energii kinetycznej staje się niewystarczająca) i przepływ przestaje być uwarstwiony - staje się zbiorowiskiem wirów o różnej wielkości (skali).

W turbulentnych przepływach wymuszonych prądy konwekcji swobodnej giną w ogólnej burzliwości płynu, konwekcja swobodna nie ma tu znaczenia, a więc liczba Grashofa jest zbędna. Do stwierdzenia podobieństwa wystarcza identyczność liczb Reynoldsa:

$$Re = \frac{w \cdot l}{\nu} = \text{idem} \quad (5.26)$$

a rozwiązaniem równań różniczkowych przepływu jest funkcja:

$$Eu = f(Re)$$

Konwekcja swobodna (naturalna) jako jedyny rodzaj prądów w płynie występuje wtedy, gdy nie ma zewnętrznego wymuszenia przepływu ($w = 0$). Wtedy podobieństwo przepływów w geometrycznie podobnych układach warunkuje wyłącznie identyczność liczb Grashofa:

$$Gr = \frac{\beta \cdot g \cdot l^3}{\nu^2} \cdot (t_w - t_f) = \text{idem} \quad (5.27)$$

Szczególny przypadek konwekcji swobodnej stanowi grawitacyjny spływ cieczy, spowodowany działaniem siły ciężkości. W tym zjawisku siłą masową w równaniu (5.17) jest rzecz jasna siła ciężkości (5.10), a nie siła wyporu (5.16), tak że równanie ruchu ma postać (5.5). Warunkiem podobieństwa (jedynym) jest wtedy identyczność liczb Galileusza:

$$Ga = \frac{g \cdot l^3}{\nu^2} = \text{idem} \quad (5.28)$$

Z innym szczególnym przypadkiem konwekcji swobodnej mamy do czynienia wtedy, gdy ruch konwekcyjny spowodowany jest siłami wyporu pęcherzyków gazu lub pary o gęstości ρ'' mniejszej od gęstości otaczającej cieczy ρ' . Siła wyporu w równaniu ruchu wyrażona jest wtedy ogólniejszym wzorem (5.12).

Warunkiem podobieństwa takiego przepływu staje się identyczność bezwymiarowych liczb Archimedeusza:

$$Ar = \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} \cdot \frac{g \cdot l^3}{\nu^2} = \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} \cdot (Ga) = \text{idem} \quad (5.29)$$

3.3. Podobieństwo termiczne

Dotyczy ono podobieństwa pól temperatury w przepływach. Równaniem różniczkowym, którego całką jest rozkład temperatury w płynie, jest oczywiście równanie Fouriera - Kirchhoffa. Rozpatrujemy układ naturalny i jego model np. z rys.5.2, z tym że między ścianką przewodową a przepływającym płynem przenoszona jest energia cieplna przez przejmowanie.

Równanie różniczkowe opisujące proces konwekcyjnego przenoszenia ciepła w układzie naturalnym ma postać:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} + w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} = a \cdot \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] \quad (5.30)$$

a w modelu:

$$\frac{\partial t'}{\partial \tau'} + w'_x \cdot \frac{\partial t'}{\partial x'} + w'_y \cdot \frac{\partial t'}{\partial y'} + w'_z \cdot \frac{\partial t'}{\partial z'} = a' \cdot \left[\frac{\partial^2 t'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial z'^2} \right] \quad (5.31)$$

Uzupełniamy skalę podobieństwa (5.19) o skalę temperatury i współczynnika przewodzenia temperatury:

$$C_t = \frac{t'}{t}, \quad C_a = \frac{a'}{a} \quad (5.32)$$

i postępujemy jak w poprzednim rozdziale.

Wyrażając wielkości dla modelu przez odpowiednie wielkości dla układu naturalnego i podstawiając do (5.31) otrzymujemy:

$$\frac{C_t}{C_\tau} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} + \frac{C_w C_t}{C_l} \cdot \left[w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \right] = \frac{C_a C_t}{C_l^2} \cdot a \cdot \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] \quad (5.33)$$

a stąd warunek identyczności równań (5.31) i (5.30) :

$$\frac{C_t}{C_\tau} = \frac{C_w C_t}{C_l} = \frac{C_a C_t}{C_l^2}$$

Skrajne wyrażenia dają po uporządkowaniu:

$$\frac{C_l^2}{C_\tau C_a} = 1$$

a po wprowadzeniu zmiennych (5.19) i (5.32) i ich rozdzieleniu prowadzą do warunku:

$$\boxed{Fo = \frac{a \tau}{l^2} = \frac{a' \tau'}{l'^2} = Fo'} \quad (5.34)$$

a więc identyczności liczb Fouriera. Jest to kryterium jednoczesności występujące jedynie w zagadnieniach nieustalonych w czasie.

Natomiast wyrazy środkowy i ostatni dają równanie:

$$\frac{C_a}{C_w C_l} = 1$$

a po rozdzieleniu zmiennych warunków

$$\boxed{Pe = \frac{w \cdot l}{a} = \frac{w' \cdot l'}{a'} = Pe'} \quad (5.35)$$

czyli identyczności liczb Pécleta. W ustalonym w czasie konwekcyjnym przenoszeniu ciepła w płynie, jakim się wyłącznie zajmujemy, jest identyczność liczb Pécleta jedynym warunkiem podobieństwa pól temperatury - oczywiście w geometrycznie podobnych układach.

Łatwo zauważyć, że liczbę Pécleta można rozdzielić na dwie:

$$\boxed{Pe = \frac{w \cdot l}{a} = \frac{w \cdot l}{\nu} \cdot \frac{\nu}{a} = (Re) \cdot (Pr)} \quad (5.36)$$

gdzie: $Pr = \nu/a$ jest nową liczbą: Prandtla* będącą, w odróżnieniu od innych liczb, właściwością materiałową. Przykładowe wartości tej liczby podaje poniższa tab. 5.

Liczbę Prandtla można przedstawić następująco:

$$\boxed{Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\frac{\eta}{\rho}}{\frac{\lambda}{c_p \cdot \rho}} = \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda}}$$

Tablica 5

Orientacyjne zakresy liczb Prandtla

Rodzaj płynu	Pr
<u>Ciekłe metale</u> (Hg, Na, K, Li, itp.)	0,005 ... 0,070
<u>Gazy i pary</u>	0,6 2
<u>Ciecze techniczne</u> woda, ciekłe płyny chłodnicze, ciekły tlen alkohol, nafta solanka (NaCl) oleje	1,3 13 6,5 35 7,5 49 20 10 000

Liczba Pécleta określona m.in. przez prędkość w , zawartą też w liczbie Reynoldsa (Re), odnosi się do konwekcji wymuszonej.

Natomiast podobieństwo konwekcji swobodnej charakteryzuje liczba Grashofa. Zatem pola temperatury w płynie, w którym występuje konwekcja swobodna, są podobne wtedy, gdy identyczne są iloczyny liczb Grashofa i Prandtla, czyli liczby Rayleigha**:

$$\boxed{Ra = (Gr) \cdot (Pr) = \left(\frac{\beta g l^3}{\nu^2} \cdot \Delta t \right) \cdot \left(\frac{\nu}{a} \right) = \frac{\beta g l^3}{\nu^2} \cdot \Delta t} \quad (5.37)$$

* Ludwik Prandtl (1875 – 1953) – fizyk i inżynier niemiecki.

** John W. Strutt Rayleigh (1842 – 1919) – fizyk angielski.

Tak więc podobieństwo ustalonych w czasie pól temperatury warunkuje:

- w przepływie wymuszonym identyżność liczb Pécleta lub jednoczesna identyżność liczb Reynoldsa i Prandtla:

$$Pe = (Re) \cdot (Pr) = \text{idem}$$

- w konwekcji swobodnej identyżność liczb Rayleigha lub jednoczesna identyżność liczb Grashofa i Prandtla:

$$Ra = (Gr) \cdot (Pr) = \text{idem}$$

Wtedy gdy podobieństwo takie istnieje, to istnieje ono również między współczynnikami przejmowania ciepła α , zależnymi od pól temperatury zgodnie z wzorem (5.1) lub (5.2). A więc istnieje wtedy podobieństwo przejmowania ciepła między płynami a ściankami.

Aby wyznaczyć liczbę podobieństwa dla przejmowania ciepła, rozpisuje się równanie (5.2) na α dla układu naturalnego:

$$\alpha = - \frac{\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)}{t_w - t_f} \quad (5.38)$$

i dla modelu:

$$\alpha' = - \frac{\lambda' \left(\frac{\partial t'}{\partial y'} \right)}{t_w' - t_f'} \quad (5.39)$$

Należy wprowadzić potrzebne skale podobieństwa:

$$c_\alpha = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad \text{i} \quad c_\lambda = \frac{\lambda'}{\lambda} \quad (5.40)$$

i postępując jak uprzednio dochodzi się do warunku podobieństwa przejmowania ciepła:

$$\frac{c_\lambda}{c_\alpha \cdot c_l} = 1 \quad (5.41)$$

który po ponownym wprowadzeniu (5.40) i rozdzieleniu parametrów prowadzi do równości odpowiednich liczb Nusselta*:

$$\boxed{Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} = \frac{\alpha' l'}{\lambda'} = Nu'} \quad (5.42)$$

Liczba Nusselta daje się łatwo zinterpretować fizycznie. W tym celu należy ją przetłumaczyć następująco:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda} = \frac{\alpha \cdot A \cdot (t_w - t_f)}{\frac{\lambda}{l} \cdot A \cdot (t_w - t_f)} = \frac{\dot{q}_\alpha}{\dot{q}_\lambda}$$

Otrzymuje się stosunek strumienia przejętego przez ściankę zgodnie z prawem Newtona, a więc przez konwekcję (i przewodzenie przez laminarną warstwę przyścienną) do strumienia, który dotarłby do ścianki przez samo przewodzenie np. przez nieruchomą warstwę przyścienną o grubości l . Dla $Nu = 1$ obydwa strumienie stają się sobie równe.

*) Wilhelm Nusselt (1882 – 1957) - inżynier i uczonec niemiecki.

Podobnie można zinterpretować liczbę Pécleta:

$$Pe = \frac{w \cdot l}{a} = \frac{w \cdot l}{\frac{\lambda}{c_p \cdot \rho}} = \frac{(A \cdot w \cdot \rho) \cdot (c_p \cdot \Delta t)}{\frac{\lambda}{l} \cdot A \cdot \Delta t} = \frac{\dot{m} \cdot i}{\dot{Q}_\lambda}$$

Jest ona, jak widać, wielokrotnością z jaką unoszenie energii cieplnej (wyrażonej entalpią właściwą i) przez strumień przepływu \dot{m} przewyższa przewodzenie energii cieplnej, na długości l w kierunku prędkości przepływu w i spadku temperatury Δt .

Liczba Nusselta zawiera wielkość niewiadomą w zagadnieniach konwekcyjnego przenoszenia ciepła, jest nią współczynnik przejmowania ciepła α , a więc jest to liczba nieokreślająca.

Zatem zgodnie z twierdzeniem Π rozwiązanie problemu przejmowania ciepła, na który składają się równanie Fouriera - Kirchhoffa (5.3) i równanie na współczynnik przejmowania ciepła (5.1) lub (5.2) można przedstawić w postaci:

$$Nu = f(Pe) = f(Re \cdot Pr) \quad (5.43)$$

dla konwekcji wymuszonej, albo:

$$Nu = f(Ra) = f(Gr \cdot Pr) \quad (5.44)$$

dla konwekcji swobodnej.

Wreszcie dla tzw. konwekcji kombinowanej (konwekcji wymuszonej z wyraźnym wpływem konwekcji swobodnej) jest:

$$Nu = f(Re, Gr, Pr) \quad (5.45)$$

W przypadkach, w których znaczenia dla rozkładu temperatury i przenoszenia ciepła nabierają czynniki pominięte, pojawiają się jako określające dalsze liczby podobieństwa. Np. przy dużych prędkościach, którym towarzyszy silna dysypacja energii, pojawia się nowa liczba: Macha* $Ma = w/w_0$, w której: w_0 jest prędkością dźwięku. Czasami (zwłaszcza w literaturze anglosaskiej) używana jest liczba Stantona** będąca prostą kombinacją poznanych uprzednio liczb podobieństwa:

$$St = \frac{Nu}{Pe} = \frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{\alpha}{w \cdot \rho \cdot c_p} \quad (5.46)$$

W literaturze francuskojęzycznej liczba ta nosi nazwę liczby Margoulisa.

Na zakończenie należy zwrócić uwagę na to, że liczby kryterialne mogą odnosić się do pewnego tylko miejsca przyjmując wartość lokalną (oznaczane są wówczas indeksem x np.: Re_x , Nu_x itd.) albo dotyczyć całej powierzchni - jako wartości średnie (bez indeksu).

3.4. Dokładność teorii podobieństwa

Ścisłość teorii podobieństwa jest uzasadniona matematycznym wyprowadzeniem kryteriów podobieństwa i ich zastosowaniem do tworzenia z rezultatów eksperymentów, uogólnionych funkcji opisujących zjawisko w formie całkowitej.

W praktyce jednak nie zawsze udaje się spełnić warunki podobieństwa w sposób zupełny. W szczególności:

1. Model, który jest pod względem makroskopowym podobny do pierwowzoru, nie zawsze odtwarza również mikrostrukturę powierzchni (nierówności) - niestety, okoliczność tę rzadko bierze się pod uwagę.

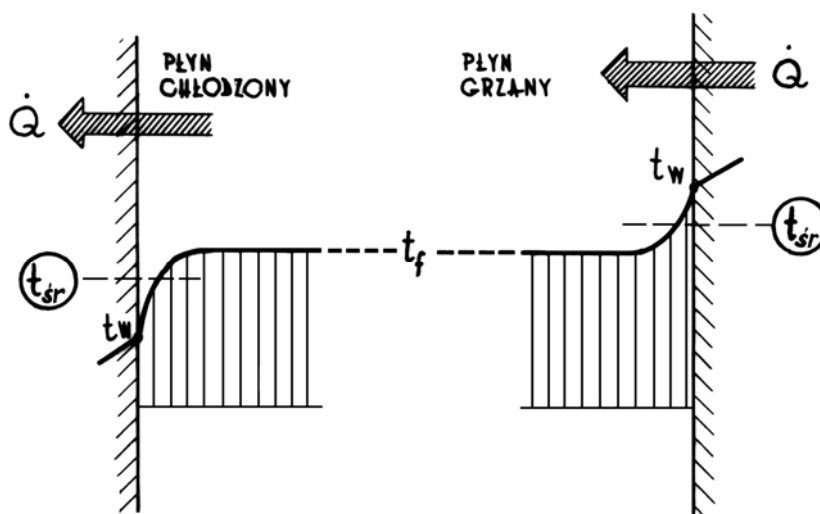
* Ernst Mach (1838 – 1916) – austriacki fizyk i filozof.

** Thomas, Edward Stanton (1865 – 1931) - angielski fizyk i inżynier.

2. Właściwości materiałowe (ρ , ν , a) występujące w równaniach warunkujących podobieństwo: (5.22) i (5.23) oraz (5.35), (5.37) i ew. (5.34) są ogólnie biorąc funkcjami temperatury, tak że równość liczb kryterialnych w modelu i urządzeniu technicznym na całej drodze płynu może nie być ściśle zachowana. Jeżeli zmienność nie jest wielka, dobiera się właściwości według średniej z temperatur: płynu i ścianki: $1/2 \cdot (t_f + t_w)$ lub z temperatur: wlotowej i wylotowej przewodu $1/2 \cdot (t'_f + t''_f)^*$. Przy silnej zmienności właściwości (jak w przypadku cieczy) uwzględnia się to za pomocą mnożników poprawkowych do wzorów, o postaci podanej jako (5.43)...(5.45), najczęściej jako:

$$\left(\frac{\eta_f}{\eta_w}\right)^{n_1} \quad \text{lub} \quad \left(\frac{\text{Pr}_f}{\text{Pr}_w}\right)^{n_2}$$

w których indeks "f" odnosi daną wielkość do temperatury rdzenia płynu (t_f) a „w” do temperatury ścianki (t_w). Czasami poprawka ta wyrażana jest przez wartość wykładnika liczby Prandtla (Pr^n) różną dla różnych kierunków przenoszenia ciepła. Jak bowiem widać na rys.5.3 przy tej samej temperaturze płynu t_f jest inna średnia temperatura $t_{sr} = 1/2 \cdot (t_f + t_w)$ przy grzaniu, a inna przy chłodzeniu płynu, przez co różne są przede wszystkim lepkości płynów w obydwu przypadkach, a stąd różne pola prędkości (rys. 5.7) i w konsekwencji różne pola temperatury.



Rys. 5.3 Temperatura średnia warstwy przyściennej przy różnych kierunkach przenoszenia ciepła i $t_f = \text{idem}$

3.5. Wyznaczanie funkcji całkowych

Uzyskiwane z pomiarów funkcje całkowe dla przejmowania ciepła aproksymowane są przeważnie przy pomocy iloczynów potęgowych. Np. dla konwekcji wymuszonej mają postać:

$$\text{Nu} = C \cdot \text{Re}^m \cdot \text{Pr}^n \quad (5.47)$$

*) Ta średnia zwana też temperaturą charakterystyczną bywa tworzona inaczej. Sposób podają każdorazowo autorzy korelacji eksperymentalnych.

Występujące w tym wzorze wielkości stałe: C , m , n wyznacza się z wyników pomiarów.

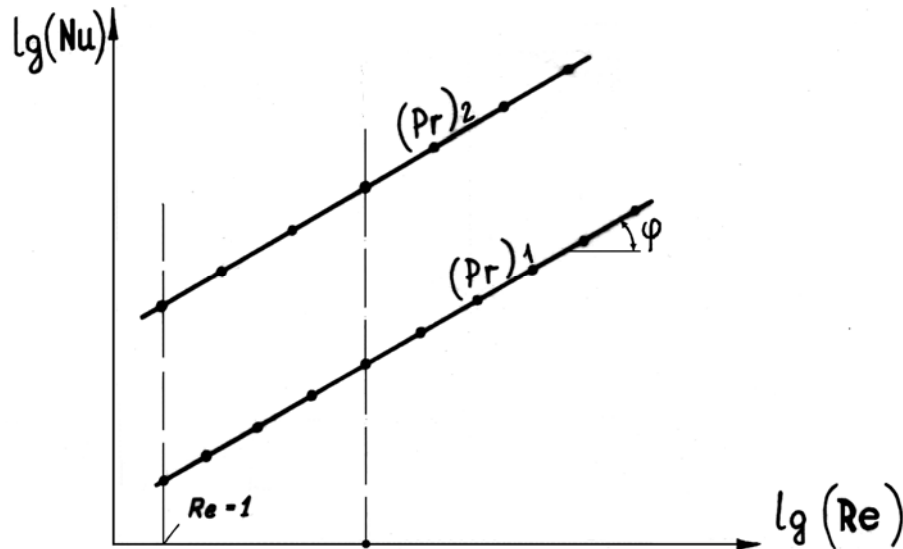
Zlogarytmujmy (5.47) – wtedy otrzymamy:

$$\lg(\text{Nu}) = \lg C + m \cdot \lg(\text{Re}) + n \cdot \lg(\text{Pr}) \quad (5.48)$$

Dla $\text{Pr}_1 = \text{const}$ (określonego płynu) jest to na wykresie o współrzędnych: $\lg(\text{Nu}) - \lg(\text{Re})$ prosta o współczynniku kierunkowym \underline{m} .

Nanosząc na wykres o skali logarytmicznej punkty obliczone z rezultatów pomiarów otrzymuje się możliwość poprowadzenia przez te punkty prostej i wyznaczenia kąta nachylenia tej prostej względem osi $\lg(\text{Re})$, czyli kąta φ . A to prowadzi do wartości poszukiwanego współczynnika kierunkowego:

$$m = \text{tg} \varphi \quad (5.49)$$



Rys.5.4 Wykres $\text{Nu} = f(\text{Re})$

Przeprowadzając serię pomiarów z innym płynem otrzymuje się drugą linię, dla $\text{Pr}_2 = \text{const}$. Teraz przy $\text{Re} = \text{const}$ wyznacza się:

$$\frac{\text{Nu}_2}{\text{Nu}_1} = \left(\frac{\text{Pr}_2}{\text{Pr}_1} \right)^n \quad (5.50)$$

a stąd, po zlogarytmowaniu, szukany wykładnik:

$$n = \frac{\lg \left(\frac{\text{Nu}_2}{\text{Nu}_1} \right)}{\lg \left(\frac{\text{Pr}_2}{\text{Pr}_1} \right)} \quad (5.51)$$

Stałą C wyznacza się w oparciu o przypadek: $\text{Re} = 1$, dla którego jest oczywiście: $\lg \text{Re} = 0$, co daje z (5.48):

$$\lg C = \lg(\text{Nu})_o - \lg(\text{Pr})^n = \lg \frac{(\text{Nu})_o}{\text{Pr}^n}$$

albo:

$$C = \frac{(\text{Nu}_1)_o}{\text{Pr}_1^n} = \frac{(\text{Nu}_2)_o}{\text{Pr}_2^n} \quad (5.52)$$

Jeżeli nie wszystkie punkty na wykresie leżą na prostej, to albo dzieli się zbadany obszar na kilka zakresów, w których wyznacza się oddzielnie: C , \underline{m} i \underline{n} (zdarza się to dość często), albo dobiera inną funkcję matematyczną niż iloczyn potęgowy. Przeważnie podział na powyższe zakresy pokrywa się z odrębnym charakterem zjawiska fizycznego, jak przepływ laminarny, przejściowy, turbulentny itp.

4. KONWEKCJA WYMUSZONA

4.1. Warstwa przyścienna

Zgodnie z hipotezą Prandtla na ścianie nie występuje poślizg płynu, lecz spoczywa tam pewna, bardzo cienka, warstwa płynu o prędkości $w = 0$. Obszar przejściowy w którym prędkość stopniowo wzrasta od zera aż do osiągnięcia wartości w_f charakteryzującej przepływ z dala od ścianki nosi nazwę hydraulicznej warstwy przyściennej. Wskutek istniejących w niej gradientów prędkości występują w warstwie przyściennej naprężenia styczne:

dla przepływu laminarnego:

$$\tau = \eta \cdot \frac{\partial w_x}{\partial y} = \rho \nu \cdot \frac{\partial w_x}{\partial y} \quad (5.53)$$

dla przepływu turbulentnego:

$$\tau = (\eta + \rho \varepsilon) \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = \rho (\nu + \varepsilon) \cdot \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \quad (5.54)$$

gdzie: ε jest dyfuzyjnością wirową zależną od intensywności turbulencji (nie jest ona, co należy podkreślić, właściwością materiałową jak lepkość ν). Wartość ε jest w rozwiniętym ruchu turbulentnym wielokrotnie większa od ν .

Naprężenia styczne stanowią opór przepływu i powodują dysypację energii. W głębi płynu (rdzeniu płynu) prędkość (lub jej średnia wartość w przypadku przepływu turbulentnego) jest niezmienna, wobec czego:

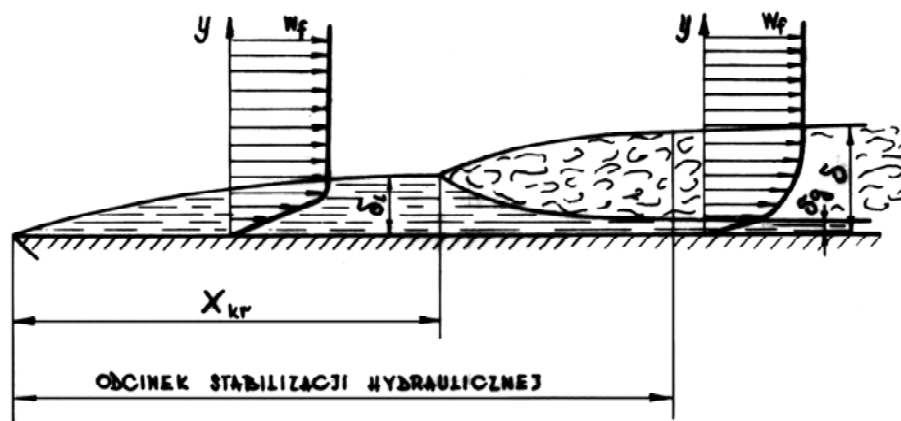
$$\frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = 0 \quad (5.55)$$

i siły tarcia nie występują.

Jak widać najważniejsze zjawiska przepływowe występują w warstwie przyściennej.

Hydrauliczna warstwa przyścienna ma również doniosłe znaczenie w przenoszeniu ciepła między ścianką a omywającym ją płynem. Energia cieplna przenoszona od (lub do) ścianki do (lub od) wnętrza płynu transportowana jest prostopadle do przepływających wzdłuż ścianki ruchem laminarnym strug płynu. Transport ten może być tylko przewodzeniem. W przepływie laminarnym nie ma bowiem makroskopowych ruchów cieczy w kierunku poprzecznym względem kierunku przepływu płynu, a to wyklucza konwekcję w kierunku, w jakim przenoszona jest energia cieplna. Przepływ laminarny przy ściance występuje zawsze - nie tylko wtedy, gdy cały przepływ albo sama warstwa przyścienna (na całej grubości) są laminarne. - Również wtedy, gdy warstwa przyścienna jest przeważająco turbulentna (prawostronna część rys. 5.5 i 5.6b) istnieje w niej cienka podwarstwa laminarna, przez którą

energia cieplna przenoszona jest przez przewodzenie, a więc mało intensywnie. Poza tym w turbulentnej (przeważająco) warstwie przyściennej wirowość poza podwarstwa laminarną dopiero stopniowo narasta, przez co stopniowo wzrasta intensywność prądów konwekcyjnych w kierunku poprzecznym do przepływu i w takim samym stopniu maleje opór cieplny tych warstw płynu. Tam gdzie przepływ jest silnie sturbulizowany, a więc z dala od ścianki, przenoszenie konwekcyjne energii cieplnej jest tak intensywne, że opór cieplny tam (praktycznie biorąc) nie występuje.



Rys.5.5 Schemat hydraulicznej warstwy przyściennej na płycie.

Warstwa przyścienne na płycie, narasta stopniowo wzdłuż ścianki poczynając od krawędzi wlotowej i uzyskuje postać ustabilizowaną dopiero po pewnym odcinku zwanym odcinkiem stabilizacji hydraulicznej lub rozbiegu hydraulicznego. Dla ilustracji zagadnienia podano na rys. 5.5 przekrój wzdłużny warstwy przyściennej na płycie. Nawet przy przepływie turbulentnym tworząca się od krawędzi wlotowej warstwa przyścienne jest laminarna, jednak począwszy od pewnej odległości krytycznej x_{kr} następuje jej turbulizacja. Jednak zawsze zachowuje się bardzo cienka pod warstwa laminarna, w której prędkość zmienia się liniowo.

Zmiana charakteru warstwy przyściennej następuje przy:

$$Re_{x_{kr}} = \frac{w_f \cdot x_{kr}}{\nu} \approx 5 \cdot 10^5 \quad (5.56)$$

Granica ta jest dość trudno uchwytana. Zależnie od kształtu krawędzi wlotowej i ewentualnie sztucznego zaburzenia przepływu przed nią obserwuje się wartości od 10^5 do $4 \cdot 10^6$. Podana wartość krytyczna odpowiada jednak na ogół warunkom technicznym.

Przejście od warstwy przyściennej do rdzenia płynu odbywa się stopniowo i dlatego jako granicę warstwy przyściennej przyjmuje się umownie miejsce, w którym prędkość osiąga np. 99% wartości w_f . Grubości warstw: laminarnej δ_1 i turbulentnej δ można obliczyć z zależności *):

$$\delta_1 = \frac{5,83 x}{(Re_x)^{0,5}}, \quad \delta = \frac{0,384 x}{(Re_x)^{0,2}} \quad (5.57)$$

*) Podstawy obliczeń znaleźć można w podręcznikach mechaniki płynów.

Grubość podwarstwy laminarnej:

$$\delta_g = \frac{183 \delta}{(\text{Re}_x)^{0,7}} \quad (5.58)$$

albo po podstawieniu wyrażenia (5.57) na δ :

$$\delta_g = 70,27 \frac{\nu}{w} \cdot (\text{Re}_x)^{0,1} \quad (5.59)$$

Ze wzoru tego wynika taki wniosek, że grubość podwarstwy laminarnej wzrasta bardzo powoli z długością płyty - proporcjonalnie do $x^{0,1}$, bo: $\text{Re}_x = \frac{x \cdot w}{\nu}$.

Biorąc przykładowo $\text{Re} = 10^6$ otrzymuje się:

$$\frac{\delta_g}{\delta} = \frac{183}{10^{6 \cdot 0,7}} = 0,012$$

Podwarstwa laminarna stanowi tu około 1% grubości całej warstwy przyściennej - jest więc niezwykle cienka. Przy tym prędkość na jej granicy osiąga około 0,53 w_f *) tak więc profil prędkości jest w niej bardzo stromy i nadzwyczaj trudno do zmierzenia.

Rozkłady prędkości w warstwie przyściennej można wyznaczyć z zależności:

$$\frac{w}{w_f} = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{\delta_1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_1} \right)^3 \quad \text{dla laminarnej} \quad (5.60)$$

$$\frac{w}{w_f} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7} \quad \text{dla turbulენტnej} \quad (5.61)$$

Wykładnik 1/7 we wzorze (5.61) jest ważny dla zakresu $\text{Re} < 80\,000$; dla większych wartości liczb Reynoldsa maleje on stopniowo do 1/10.

Są to profile izotermiczne. Przy istnieniu zmiennej temperatury w płynie, jak to jest przy przenoszeniu ciepła, zmienia się lepkość, a z nią i rozkład prędkości - przede wszystkim w przepływie laminarnym.

Drugi ważny przypadek stanowi przepływ przez rurę okrągłą. Tutaj warstwa przyścienna narasta stopniowo od ścian ku osi - profil prędkości kształtuje się na odcinku rozbiegu hydraulicznego w ten sposób, że działanie sił stycznych przenosi się stopniowo od ścianki w głąb płynu (kolejne warstwy ulegają przyhamowaniu, a warstwy przyosiowe przyspieszeniu)

Przepływ w rurze jest laminarny, gdy:

$$\text{Re} = \frac{w d}{\nu} < 2300$$

gdzie: w jest prędkością średnią.

Powyżej tej krytycznej wartości pojawia się przepływ turbulenty, czasami niestateczny laminarny (po zaburzeniu mechanicznym znika), a powyżej:

$$\text{Re} = 10\,000$$

mamy rozwinięty przepływ turbulenty.

Stosownie do tego kształtuje się też warstwa przyścienna. Dla przepływu laminarnego warstwa ta narasta na odcinku stabilizacji hydraulicznej o długości względnej (w warunkach technicznych):

$$\frac{l}{d} \approx 0,03 (\text{Re})$$

*) F. Bošnjaković: Technische Thermodynamik, Verlag Theodor Steinkopff, Dresden, 1972.

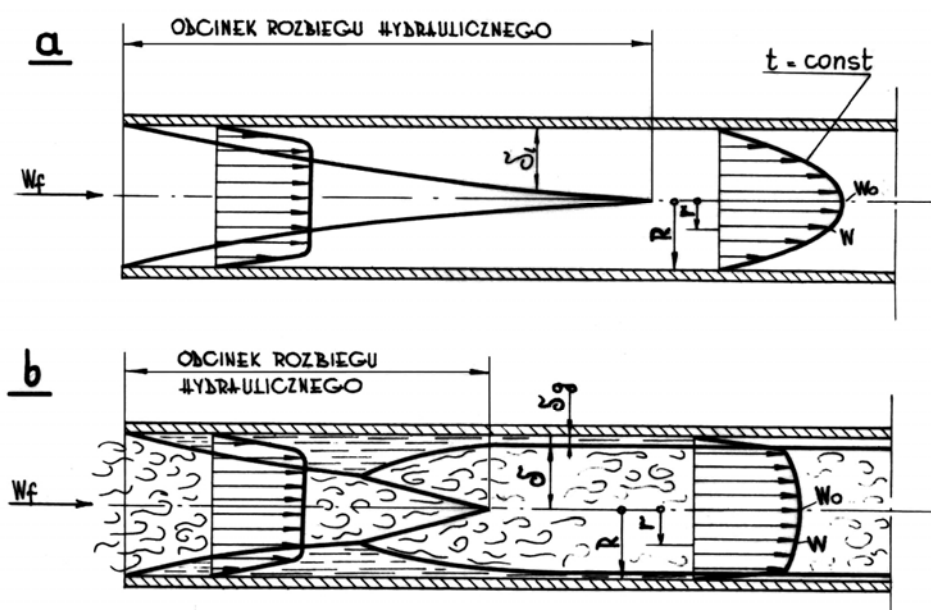
dalej grubość jej równa jest promieniowi:

$$\delta_l = \frac{d}{2}$$

a profil prędkości jest ustabilizowany i określony, w przypadku izotermicznym, zależnością:

$$\frac{w}{w_0} = \frac{y}{R} \cdot \left(2 - \frac{y}{R}\right) = \left(\frac{R-r}{R}\right)^2 \quad (5.62)$$

Jednak występująca przy przenoszeniu ciepła zmienność temperatury wpływając na lepkość zmienia ten profil prędkości - szczególnie silnie w cieczech (rys. 5.7).



Rys.5.6 Schematy hydraulicznych warstw przyściennych w rurze okrągłej dla przepływu:
(a) laminarnego i (b) turbulentnego

W przepływie turbulentnym w rurze, formująca się warstwa przyścienna po początkowym odcinku laminarnym przechodzi w turbulentną z zachowaną podwarstwą laminarną o grubości:

$$\delta_g = \frac{64,2 \cdot d}{(Re)^{7/8}} \quad (5.63)$$

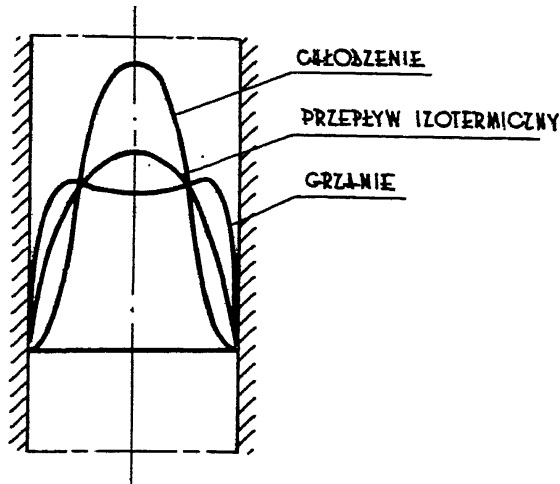
Przy odpowiednich warunkach na wlocie, może warstwa przyścienna być od samego początku turbulentna z rzeczoną podwarstwą laminarną.

Grubość warstwy przyściennej osiąga wielkość promienia rury na odcinku rozbiegu hydraulicznego o długości:

$$L \approx 40 d$$

Od tego miejsca profil jest w pełni ukształtowany i wyraża się wzorem (dla $Re \leq 80\,000$):

$$\frac{w}{w_0} = \left(\frac{y}{R}\right)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{R-r}{R}\right)^{\frac{1}{7}} \quad (5.64)$$



Rys. 5.7 Nieizotermiczne profile prędkości w przepływie laminarnym cieczy

Wpływ rozbiegu hydraulicznego na przenoszenie ciepła wyraża się w zwiększeniu intensywności przejmowania ciepła na tym odcinku (cieńsza jest warstwa przyścienna).

We wzorach kryterialnych uwzględnia się to przez mnożnik zwiększający ϵ_L podawany tabelarycznie albo włączany wprost do wzoru jako:

$$\epsilon_L = 1 + \left(\frac{d}{L}\right)^n$$

Można do tego celu posłużyć się umyślną liczbą Graetz a*:

$$Gz = \frac{wd^2}{\alpha L} = (Pe) \cdot \frac{d}{L} \quad (5.65)$$

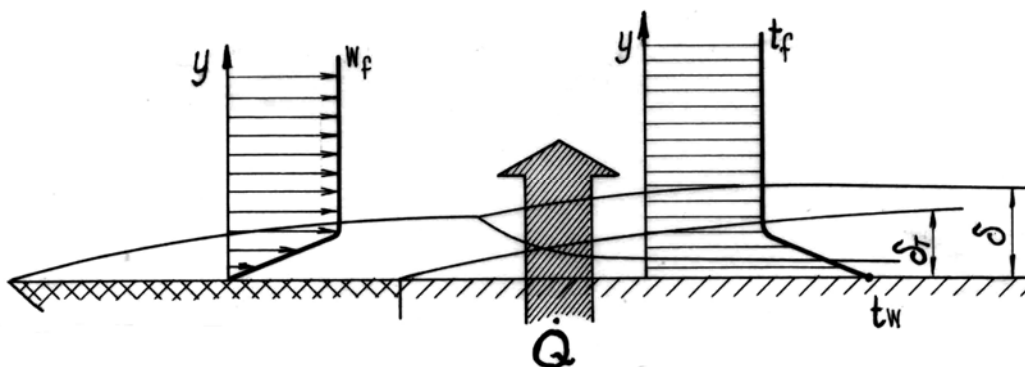
Termiczna warstwa przyścienna obejmuje obszar, w którym temperatura płynu ulega zmianie (rys. 5.8). Począwszy od $y = \delta_T$ jest: $t = t_f = \text{const}$ i $\frac{\partial t}{\partial y} = 0$.

Ogólnie biorąc termiczna warstwa przyścienna nie pokrywa się z hydrauliczną warstwą przyścienną. W przypadku płyty przenoszącej ciepło na całej swej długości wzajemny stosunek grubości obu warstw wynosi:

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \left(\frac{0,943}{Pr}\right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{1}{(Pr)^{\frac{1}{3}}} \quad (5.66)$$

Jeżeli płyta ogrzewana jest dopiero od pewnej odległości począwszy od wlotu, to termiczna warstwa przyścienna zaczyna się kształtować od tego miejsca, jak to pokazuje rys. 5.8.

* Leo Graetz (1856 – 1941) - fizyk niemiecki



Rys.5.8 Narastanie termicznej warstwy przyściennej na płycie ogrzewanej częściowo

4.2. Analogia hydromechaniczno-termiczna

Równanie różniczkowe ruchu płynu: Naviera - Stokesa (5.4) i równanie różniczkowe Fouriera – Kirchhoffa (1.47) dla ustalonego pola temperatury, gdy $\partial t / \partial \tau = 0$, mają zbliżone postacie matematyczne.

Postacie te stają się prawie identyczne, gdy w równaniu ruchu (5.4) pominiemy siłę masową (\bar{g}) jako nieistotną w konwekcji wymuszonej oraz gradient ciśnienia (∇P), jako pomijalnie mały w wielu procesach konwekcyjnych, a ponadto w równaniu pola temperatury pominiemy się wewnętrzne źródła ciepła (\dot{q}_v) ze względu na pomijalnie małe ciepło tarcia. Otrzymujemy się wówczas następujące zapisy tych równań:

$$(\bar{w} \cdot \nabla) \bar{w} = \nu \cdot \nabla^2 \bar{w}$$

$$(\bar{w} \cdot \nabla) t = a \cdot \nabla^2 t$$

albo dla laminarnego przepływu płaskiego wzdłuż ścianki, z którą pokrywa się oś \underline{x} -ów (wtedy: $w_y = w_z = 0$):

$$w_x \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x} = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right)$$

$$w_x \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right)$$

Jeżeli więc dla jakiegoś płynu lepkość kinematyczna ν [m^2/s] (którą można uważać za dyfuzyjność pędu) jest równa dyfuzyjności cieplnej a [m^2/s], tj. gdy:

$$Pr = \frac{\nu}{a} = 1$$

to funkcje: $w_x(x, y)$ i $t(x, y)$ będące rozwiązaniami obu równań (dla tych samych warunków brzegowych) powinny być pod względem matematycznym również identyczne.

Pokazuje to rys. 5.9 przedstawiający profile bezwymiarowych temperatur:

$$\theta = \frac{t - t_w}{t_f - t_w} = f\left(\frac{y}{R}\right)$$

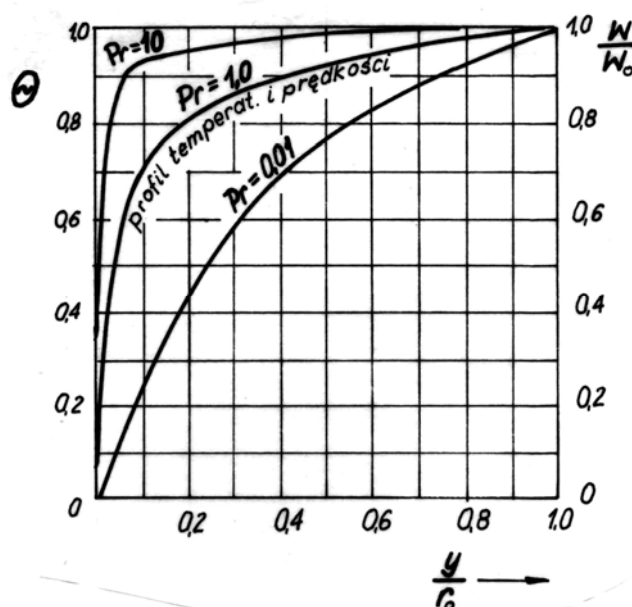
dla trzech różnych wartości liczb Prandla.

Dla $Pr = 1$ profil temperatury pokrywa się z bezwymiarowym profilem prędkości:

$$\frac{w}{w_0} = f\left(\frac{y}{R}\right)$$

gdzie: w_0 - jest prędkością w osi przewodu.

Wtedy gdy $\nu \neq a$, a więc: $Pr \neq 1$, bezwymiarowe profile temperatury i prędkości nie są już tożsame, ale ich przebiegi zachowują analogiczny charakter (rys. 5.9). Stąd zwykle się mówi o analogii hydromechaniczno - termicznej.



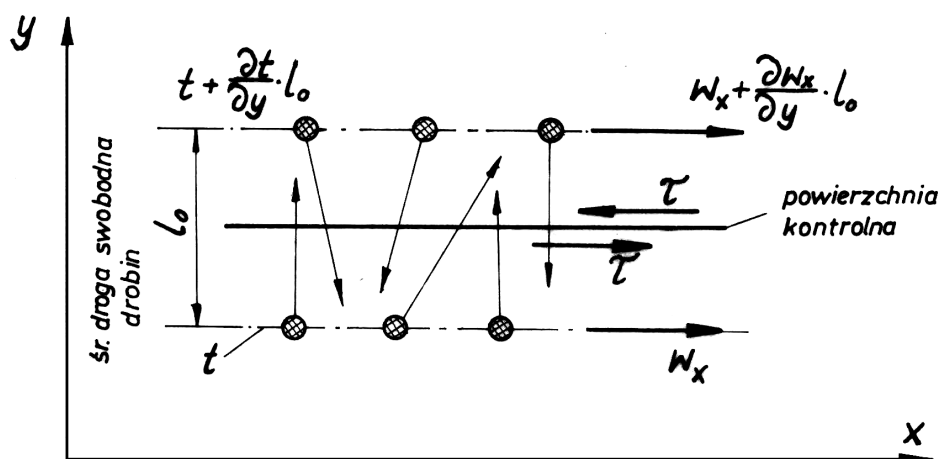
Rys.5.9 Profile temperatur dla różnych wartości liczby Prandla na tle profilu prędkości w rurze okrągłej

Analogia ta ma jednak nie tylko formalny, tj. matematyczny charakter. U jej podstaw leży wspólna natura mikroskopowa obu zjawisk. Otóż przesuujące się względem siebie sąsiednie warstwy płynu, odległe o długość średniej drogi swobodnej drobin l_0 , mają następujące:

$$\begin{aligned} \text{prędkości bezwzględne: } w_x \text{ i } w_x + \frac{\partial w_x}{\partial y} \cdot l_0 \\ \text{temperatury: } t \text{ i } t + \frac{\partial t}{\partial y} \cdot l_0 \end{aligned}$$

Pokazuje to schematycznie rys. 5.10.

W rozpatrywanym przepływie laminarnym nie ma oczywiście makroskopowych ruchów poprzecznych (bo $w_v = 0$), ale spośród chaotycznych, mikroskopowych ruchów drobin część przemieszczeń ma miejsce w kierunku sąsiednich warstw płynu, jak to zaznaczono na rys.5.10. Te dyfundujące molekuly przenoszą tam swój pierwotny pęd, będący iloczynem masy wszystkich przeniesionych drobin i prędkości makroskopowej tej warstwy płynu, z której przybyły. W rezultacie sąsiednie warstwy są odpowiednio hamowane lub przyspieszane przez import drobin o mniejszym pędzie do szybszej strugi lub przez import drobin o większym pędzie do strugi powolniejszej.



Rys.5.10 Schemat drobinowego transportu pędu i energii cieplnej w przepływie laminarnym

Makroskopowo manifestuje się to powstaniem naprężeń stycznych na powierzchni kontrolnej między obydwoma rozpatrywanymi warstwami. Naprężenia te określone są zależnością Newtona (5.53) i są miarą lepkości dynamicznej η [Ns/m^2] lub kinematycznej ν [m^2/s].

Te same dyfundujące drobiny przenoszą do sąsiedniej warstwy płynu swoje energie kinetyczne (mikroruchów), a te stanowią główną część energii cieplnej, która, jak wiadomo, jest energią kinetyczną mikroruchów drobin i energią potencjalną tych drobin w polu ich wzajemnego oddziaływania.

Makroskopową miarą średniej prędkości ruchów drobin jest temperatura. Dyfundujące z warstwy o wyższej temperaturze drobiny mają, średnio biorąc, wyższą energię i na odwrót: wychodzące z warstwy o niższej temperaturze molekuly mają, średnio biorąc, niższą energię kinetyczną. Różnica tych mikroskopowych strumieni energii jest ciepłem przeniesionym między sąsiednimi warstwami płynu – zgodnie z prawem Fouriera (1.4). Mikroskopowymi właściwościami płynu, za pomocą których manifestuje się ten drobinowy transport energii, są: przewodność cieplna λ [W/mK] i dyfuzyjność cieplna $a = \lambda/c_p \rho$

Molekularne zachowanie się gazów daje się opisać dość prosto (w przeciwieństwie do cieczy, których teoria nie jest jeszcze w pełni opracowana), tak że stosując zasady kinetycznej teorii gazów można ująć podany wyżej słowny opis zjawiska w zależności matematyczne i z nich wyprowadzić wzór na lepkość gazu:

$$\eta = \frac{2}{3\pi^{3/2}} \cdot \frac{\sqrt{\mu k T}}{d^2}$$

w którym: μ [kg] - jest masą drobiny, d [m] - jej średnicą, $k = 1,3805 \cdot 10^{-23}$ [Nm/K] stałą Boltzmanna, a T [K] - temperaturą bezwzględną.

Podobnie można otrzymać wzór na przewodność cieplną:

$$\lambda = \frac{1}{\pi^{3/2} \cdot d^2} \cdot \sqrt{\frac{k^3 T}{\mu}}$$

Wzory te odnoszą się w szczególności do gazów jednoatomowych.

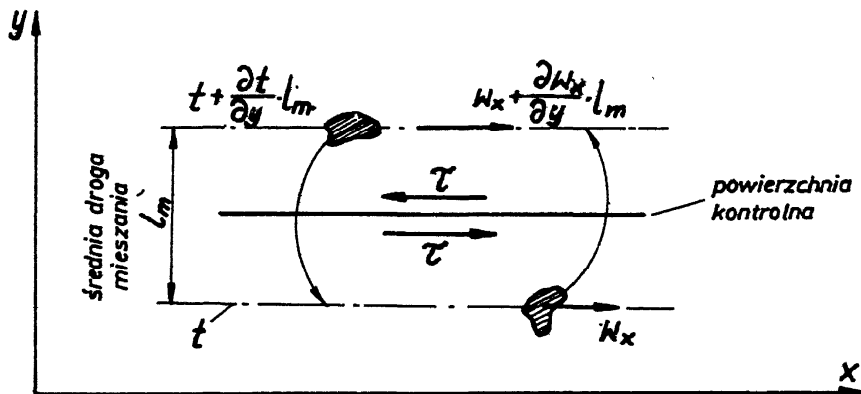
Szczegóły wyprowadzeń można znaleźć np. w książce St. Wiśniewskiego*) lub w podręcznikach fizykochemii.

Pomimo uproszczeń wprowadzonych przez teorię kinetyczną (pominięcie pola sił wzajemnego oddziaływania drobin, wprowadzenie nieprecyzyjnego pojęcia średnicy drobin ii .) wzory te pokazują, od jakich wielkości lepkość i przewodność cieplna gazów zależą. Np. obie wielkości nie zależą od ciśnienia, co zostało potwierdzone eksperymentalnie do ok. 2 MPa (powyżej tego ciśnienia następuje powolny ich wzrost).

W przepływie turbulentnym analogia hydromechaniczno – termiczna występuje również. Jej fizyczną podstawą są ruchy poprzeczne o charakterze makroskopowym: przypadkowym przemieszczeniom we wszystkich kierunkach, a więc i do sąsiedniej (w kierunku osi y) warstwy płynu (poruszającego się z prędkością w_x na kierunku osi x) podlegają już nie tylko drobiny ale makroskopowe porcje płynu, które przemieszczają się w ramach drobnych wirów turbulentnych (rys.5.11). Porcje te wraz z substancją przenoszą pierwotny pęd i pierwotną energię cieplną. Intensywność przenoszenia pędu scharakteryzowana jest przez tzw. dyfuzyjność wirową ε_τ . Wywołuje ona wraz z lepkością kinematyczną („molekularną dyfuzyjnością pędu”) łączne naprężenie styczne między warstwami płynu określone znanym już wzorem (5.54).

Wzór ten można przedstawić w nieco zmienionej postaci:

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = (\nu + \varepsilon_\tau) \cdot \frac{\partial w_x}{\partial y} \quad (5.67)$$



Rys.5.11 Schemat wirowego transportu pędu i energii cieplnej w przepływie turbulentnym

Dyfuzyjność wirowa ε_τ поблизу ścianki (gdzie przepływ jest laminarny) nie występuje, a wzór (5.54) redukuje się do wzoru (5.53). Pojawia się ona dopiero w obszarze przejściowym, gdzie wielkość ε_τ staje się współmierna z ν ; natomiast w obszarze turbulentnym jest $\varepsilon_\tau \gg \nu$ tak, że ν można tam pominąć.

W przepływie turbulentnym prędkość i temperatura podlegają szybkozmiennym fluktuacjom, uchwytym jedynie przez czułe przyrządy pomiarowe. W normalnym opisie (tzw. quasi-stacjonarnym) operuje się wartościami średnimi w_x i t . W niniejszym wykładzie nie będziemy szczegółowo rozpatrywali natury ani równań różniczkowych przepływu turbulentnego, a pod oznaczeniami w_x i t rozumiemy te średnie wartości

*) St. Wiśniewski „Wymiana ciepła” PWN, Warszawa 1979.

prędkości przepływu \bar{w}_x , jakie mierzy się np. rurką Prandtla i te średnie temperatury t , jakie mierzone są zwykłymi termometrami.

Ponieważ intensywność przemieszczania porcji płynu (w wirach) jest miarodajna dla intensywności przemieszczania wszystkich wielkości związanych z tymi porcjami (nie tylko intensywności pędu), więc dla przenoszenia energii cieplnej można wprowadzić dyfuzyjność wirową ciepła ε_q , analogiczną do ε_τ . Wówczas przenoszony między sąsiednimi warstwami (rys. 5.11) jednostkowy strumień cieplny wyrazi się wzorem:

$$\dot{q} = -c_p \rho \cdot (a + \varepsilon_q) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \quad (5.68)$$

W obszarze laminarnej (pod)warstwy przyściennej jest $\varepsilon_q = 0$ i równanie to redukuje się do prawa Fouriera (1.4).

W drugim skrajnym przypadku: w obszarze pełnej turbulencji jest $\varepsilon_q \gg a$. Natomiast w obszarze przejściowym wielkości ε_q i a są do siebie zbliżone.

Obie wielkości ε_τ i ε_q mają ten sam wymiar: $[m^2/s]$, a że wyrażają intensywność tego samego mechanizmu, transportu wirowego, można oczekiwać, że będą sobie równe:

$$\varepsilon_\tau = \varepsilon_q \quad (5.69)$$

Założenie to jest powszechnie stosowane i daje dobre wyniki, pomimo że pomiary na przepływach w przewodach zamkniętych wykazały, iż:

$$\varepsilon_\tau \approx 0,7 \varepsilon_q.$$

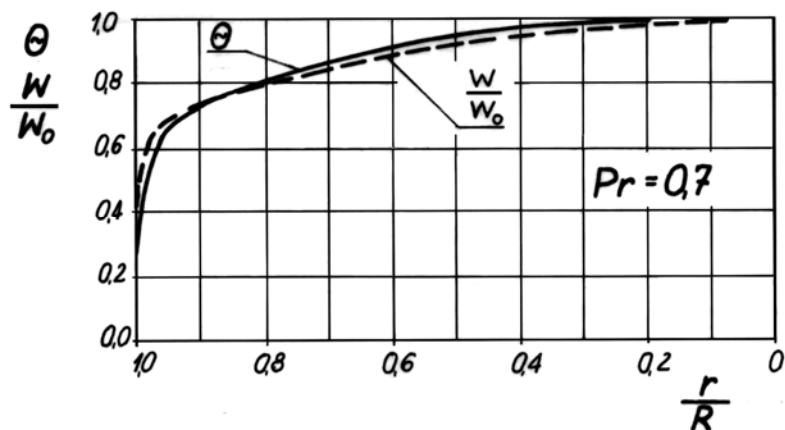
Równanie (5.68) można również przedstawić w następującej formie:

$$\frac{\dot{q}}{-c_p \rho} = -\frac{\dot{q}}{\rho} = (a + \varepsilon_q) \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \quad (5.70)$$

Równania (5.70) i (5.67) z warunkiem (5.69) stają się pod względem matematycznym identyczne, gdy $a = \nu$, czyli dla $Pr = \nu/a = 1$. To znaczy, że dla identycznych (pod względem matematycznym) warunków brzegowych rozwiązania tych równań w postaci bezwymiarowych profili prędkości i temperatury stają się również identyczne.

Gdy $Pr \neq 1$, profile te oczywiście nie są już identyczne, ale pozostają w pewnej relacji zwanej analogią hydromechaniczno-termiczną. Jej podstawą jest analogiczność postaci matematycznych równań transportu pędu (5.67) i ciepła (5.70).

Na rys.5.12 podano bezwymiarowe profile temperatury i prędkości zmierzone w turbulentnym przepływie powietrza przez rurę okrągłą przy $Re = 80\,000$. Profile te są, zgodnie z przewidywaniami, bardzo do siebie zbliżone chociaż nie identyczne, gdyż dla powietrza jest: $Pr = 0,7 \neq 1$.



Rys.5.12 Profile temperatury i prędkości zmierzone w turbulentnym przepływie powietrza przez przewód okrągły

Wobec złożoności przepływu turbulentnego i niedostatków jego teorii, skuteczną metodą analitycznego ujmowania procesu przejmowania ciepła jest metoda analogii hydromechaniczno - termicznej. Pozwala ona określić wielkości cieplne z łatwiejszych do zmierzenia wielkości hydromechanicznych.

Pierwszy użytkowy wzór oparty na tej analogii wyprowadził Osborne Reynolds (1874). Był on zresztą pierwszym, który zwrócił uwagę na istnienie analogii między wymianą pędu i energii cieplnej.

Zgodnie z tym, co stwierdzono wyżej, dla: $v = a$ i $\varepsilon_\tau = \varepsilon_a$, równania (5.67) i (5.70) stają się identyczne pod względem matematycznym, a ich rozwiązania w postaci bezwymiarowego profilu prędkości i bezwymiarowego profilu temperatury są również identyczne. Skoro tak jest, to i gradienty obydwu profili na ścianie kanału muszą być identyczne:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_x}{w_0} \right) \right]_{y=0} = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{t - t_w}{t_f - t_w} \right) \right]_{y=0} \quad (5.71)$$

a wobec:

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{c_p \eta}{\lambda} = 1 \quad (5.72)$$

jest: $c_p \cdot \eta = \lambda$, i równanie (5.71) można napisać w postaci:

$$c_p \eta \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w_x}{w_0} \right) \right]_{y=0} = \lambda \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{t - t_w}{t_f - t_w} \right) \right]_{y=0} \quad (5.73)$$

Równanie definicyjne na współczynnik przejmowania ciepła (5.2) może być zapisane przy pomocy temperatury bezwymiarowej:

$$\frac{t - t_w}{t_f - t_w} = \theta$$

Jeżeli z tego wyznaczy się pochodną:

$$\frac{\partial t}{\partial y} = - \frac{\partial \theta}{\partial y} \cdot (t_w - t_f)$$

to wtedy równanie (5.2) przyjmie postać:

$$\alpha = \lambda \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{t - t_w}{t_f - t_w} \right) \right]_{y=0} \quad (5.74)$$

Jak widać, prawe strony równań (5.73) i (5.74) są identyczne, zatem i lewe strony są sobie równe:

$$\alpha = \frac{c_p \cdot \tau}{w_o} \cdot \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (5.75)$$

Pochodna po prawej stronie wyrażająca gradient prędkości przy ścianie (gdzie nie ma turbulencji i $\varepsilon_\tau = 0$) jest równa na mocy (5.67):

$$\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{\tau}{\rho \cdot \nu} = \frac{\tau}{\eta} \quad (5.76)$$

Opór przepływu, wywołujący spadek ciśnienia ΔP w przewodzie, spowodowany jest wyłącznie przez naprężenia styczne. Zatem warunek równowagi siły pokonującej ten opór i siły tarcia:

$$\frac{\pi d^2}{4} \cdot \Delta P = \pi d \cdot L \cdot \tau \quad (5.77)$$

pozwala, po wprowadzeniu znanej zależności na opór przepływu w przewodzie o średnicy d i długości L :

$$\Delta P = \zeta \frac{\rho w^2}{2} \cdot \frac{L}{d} \quad (5.78)$$

w której ζ jest bezwymiarową liczbą oporu tarcia (Darcy - Weissbacha), uzyskać następujące wyrażenie na naprężenie styczne w płynie:

$$\tau = \frac{\zeta}{8} \cdot \rho \cdot w_o^2 \quad (5.79)$$

Teraz należy już tylko podstawić (5.79) do (5.76), a to z kolei do (5.75), aby otrzymać związek:

$$\alpha = \frac{\zeta}{8} \cdot (c_p \cdot \rho \cdot w_o) \quad (5.80)$$

który może być sprowadzony do postaci bezwymiarowej:

$$\frac{\alpha}{c_p \cdot \rho \cdot w_o} \equiv St \equiv \frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{\zeta}{8} \quad (5.81)$$

Związek ten nazywa się analogią Reynoldsa i pozwala wyznaczyć liczbę Stanton (lub Nusselta, albo wprost współczynnik przejmowania ciepła α) ze zmierzonej liczby oporu tarcia ζ , tzn. bez jakichkolwiek pomiarów termicznych!

Należy jednak pamiętać o założeniu: $v = a$ ograniczającym ważność analogii Reynoldsa do płynów mających $Pr = 1$, albo gdy $Pr \neq 1$ do obszaru, w którym (jak to podano wyżej) jest: $v \ll \varepsilon_\tau$ i $a \ll \varepsilon_a$. To ostatnie pozwala pominąć v i a w równaniach podstawowych (5.67) i (5.70), a więc ogranicza te równania do turbulentnej części warstwy przyściennej (rys. 5.5). Możemy to zresztą interpretować jako: $v = a = 0$.

Są jednak późniejsze i doskonalsze analogie jak np. Prandtla, Kármána czy Martinellogo, które wyprowadzono z pełnego zapisu równań (5.67) i (5.70) z uwzględnieniem pełnej struktury warstwy przyściennej i występujących w niej zależności, przez co otrzymane wzory ważne są dla szerszego zakresu liczb Prandtla: $Pr \neq 1$.

We wszystkich analogiach, co należy podkreślić, opór przepływu spowodowany być może jedynie przez tarcie, zgodnie z równaniem (5.77), tak że otrzymane z nich wzory dotyczą tylko przepływu przez przewody i kanały zamknięte oraz przypadku opływu płyty płaskiej. Nie mają one zastosowania do opływu ciał wykazujących opór kształtu, jak np. prostopadły opływ rur, płyt itp.

4.3. Przejmowanie ciepła w przepływie wewnątrz kanałów

Przypadek ten należy do najlepiej zbadanych i w literaturze istnieje znaczna ilość rezultatów badań w postaci wzorów kryterialnych.

Większość badań przeprowadzano doświadczalnie i wyniki uogólniano przy pomocy teorii podobieństwa. Istnieją jednak również rozwiązania uzyskane drogą analityczną (dla przepływu laminarnego) dość zresztą bliskie rezultatom eksperymentów.

Dla przepływu laminarnego, gdy $Re \leq 2300$, polecenia godny, ze względu na swą uniwersalność, jest wzór M. A. Michajewa oparty na wynikach badań wielu autorów:

$$Nu = 0,15 \cdot (Re)^{0,33} \cdot (Pr_f)^{0,43} \cdot (Gr)^{0,1} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25} \cdot \xi_L \quad (5.82)$$

ważny dla dowolnej liczby Prandtla oraz dowolnego kształtu kanału. Jeżeli ten ostatni nie jest okrągły, to charakterystycznym wymiarem liniowym jest tzw. **średnica hydrauliczna**:

$$d_h = \frac{4 \cdot A_p}{U} \quad (5.83)$$

gdzie: A - powierzchnia przekroju poprzecznego,
U - obwód „zwilżony” kanału,

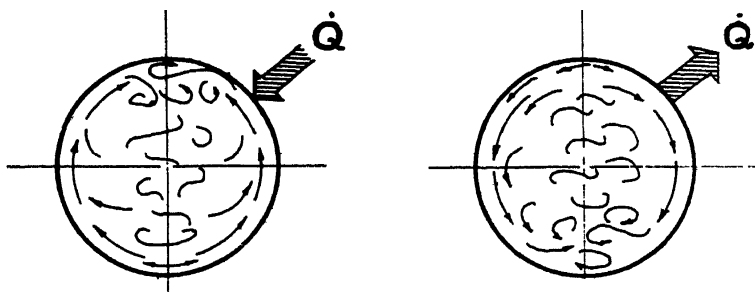
temperaturą charakterystyczną jest tu średnia arytmetyczna z temperatur na wlocie i wylocie kanału:

$$t_{f'sr} = \frac{t' + t''}{2} \quad (5.84)$$

Poprawka na zmienność parametrów z temperaturą jest dla gazów pomijalna:

$$\left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25} \approx 1 \quad (5.85)$$

Liczba Grashofa uwzględnia, intensyfikujący przenoszenie ciepła, wpływ prądów konwekcji swobodnej (rys. 5.13).



Rys.5.13 Prądy konwekcyjne w rurze poziomej przy nieizotermicznym przepływie laminarnym

Wartości mnożnika poprawkowego ε_L , uwzględniającego wpływ rozbiegu hydraulicznego na przejmowanie ciepła podaje tab. 6.

Wzór (5.82) pozwala wyznaczyć współczynnik przejmowania ciepła α z błędem nie większym niż 25%

Tablica 6

Poprawka na rozbieg hydrauliczny ε_L
dla przepływu laminarnego

L/d	1	5	10	20	30	40	50
ε_L	1,90	1,44	1,28	1,13	1,05	1,02	1,0

Dla przekrojów okrągłych można używać znacznie prostszego wzoru Siedera - Tate'a:

$$Nu = 1,86 \cdot \left(Pe \frac{d}{L} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{\eta_f}{\eta_w} \right)^{0,14} = 1,86 \cdot \left(Re \cdot Pr \cdot \frac{d}{L} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{\eta_f}{\eta_w} \right)^{0,14} \quad (5.86)$$

Temperaturę charakterystyczną liczy się tu tak samo jak poprzednio, wzorem (5.84). Poprawkę: η_f/η_w sprawdzono w zakresie:

$$\eta_f/\eta_w = 0,004 \dots 14$$

Dla rozwiniętego przepływu turbulentnego mamy znowu dość uniwersalny wzór Michejewa:

$$Nu = 0,021 \cdot (Re)^{0,8} \cdot (Pr_f)^{0,43} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25} \cdot \varepsilon_L \quad (5.87)$$

oparty na eksperymentach wykonanych w zakresie:

$$Re = 10^4 \dots 5 \cdot 10^6$$

$$Pr = 0.6 \dots 2500$$

na kanałach o przekroju: okrągłym, prostokątnym ($a/b = 1 \dots 40$), kwadratowym, trójkątnym, trapezowym, pierścieniowym ($d_z/d_w = 1 \dots 5,6$) oraz okrągłym z trzema, czterema i większą liczbą rurek mywanych wzdłużnie (por. rys. D6 na str.337).

Wymiarem charakterystycznym jest, jak uprzednio, średnica hydrauliczna określona wzorem (5.83).

Temperaturą charakterystyczną jest średnia temperatura płynu $t_{f\text{sr}}$ wg (5.83).

Poprawka na rozbieg hydrauliczny jest tu dodatkowo zależna od liczby Reynoldsa. Odpowiednie wartości podaje poniższa tab. 7.

Tablica 7

Poprawka na rozbieg hydrauliczny ε_L
dla przepływu turbulentnego

Re \ L/d	1	5	10	20	30	40	50
10 000	1,65	1,34	1,23	1,13	1,07	1,03	1
50 000	1,34	1,18	1,13	1,08	1,04	1,02	1
100 000	1,28	1,15	1,10	1,06	1,03	1,02	1
1 000 000	1,14	1,08	1,05	1,03	1,02	1,01	1

Do przekrojów okrągłych przy $Re > 10^4$, oraz $Pr = 0,7 \dots 100$ i $L/d \geq 60$ mamy prosty wzór Dittusa - Boeltera:

$$Nu = 0,023 \cdot (Re)^{0,8} \cdot (Pr_f)^n \quad (5.88)$$

gdzie: $n = 0,3$ przy chłodzeniu płynu, a przy jego ogrzewaniu $n = 0,4$.
Temperaturę charakterystyczną wyznacza się, jak uprzednio: wzorem (5.84).

Przy niezbyt dużych różnicach temperatur można ten wzór stosować też do innych kształtów z użyciem średnicy hydraulicznej, a przy większych różnicach temperatur do przekrojów: kwadratowych, prostokątnych i trójkątnych z wykładnikiem $n = 0,4$.

Przez zastosowanie poprawki Siedera - Tate'a:

$$\left(\frac{\eta_f}{\eta_w}\right)^{0,14}$$

przez którą mnoży się wzór (5.88), zwiększa się zakres liczb Prandtla do 16 700. Natomiast dla $L/d < 60$ można stosować ten wzór z poprawką H. Hausena - ważną dla przypadków równoczesnego rozbiegu hydraulicznego i termicznego:

$$Nu = 0,027 \left[1 + \left(\frac{d}{L}\right)^{2/3}\right] \cdot (Re)^{0,8} \cdot (Pr)^n \quad (5.88a)$$

W obszarze przejściowym, tj. dla $(Re) = 2\,300 \dots 10\,000$, burzliwość przepływu narasta stopniowo, ale nierównomiernie: wiele zależy od ukształtowania wlotu do przewodu i stopnia burzliwości strumienia na wlocie. Stąd przebieg zależności na rys. 5.14 jest krzywoliniowy, mimo skali logarytmicznej. Wpływ konwekcji swobodnej (Gr) ze wzrostem burzliwości stopniowo zanika.

Wyniki badań empirycznych dość dobrze oddaje wzór H. Hausena:

$$Nu = 0,037 \cdot \left[1 + \left(\frac{d}{L}\right)^{2/3}\right] \cdot \left[(Re)^{0,75} - 180\right] \cdot (Pr_f)^{0,42} \cdot \left(\frac{\eta_f}{\eta_w}\right)^{0,14} \quad (5.89)$$

sięgający zakresu ważności $Re = 2\,300 \dots 200\,000$ w głąb obszaru rozwiniętej turbulencji. Ponadto odnosi się on do $Pr = 0,6 \dots 1\,000$ i $d/L = 0 \dots 1$. Właściwości materiałowe określa się tu według temperatury średniej wg (5.84).

Nowsza literatura poleca dokładniejszy wzór (oparty na analogii hydro-mechaniczno - termicznej) B.S. Petuchowa i V. Gnielinskiego:

$$Nu = \frac{\zeta \cdot (Re - 1000) \cdot (Pr_f)}{1 + 12,7 \sqrt{\frac{\zeta}{8}} \cdot [(Pr_f)^{2/3} - 1]} \cdot \left[1 + \left(\frac{d}{L}\right)^{2/3}\right] \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,11} \quad (5.90)$$

w którym liczbę oporu ζ wyznacza się ze wzoru Filonenki dla przepływów izotermicznych w rurach gładkich:

$$\zeta = [1,82 \cdot \lg(Re) - 1,64]^{-2} \quad (5.90a)$$

Wzór (5.90) jest ważny w szerszym zakresie niż poprzedni (5.89):

$$Re = 2\,000 \dots 10^6 \text{ oraz } Pr = 0,5 \dots 2\,000.$$

W przepływie przez przewody zakrzywione występuje, wskutek działania siły odśrodkowej, wtórna cyrkulacja w przekroju poprzecznym rury. Intensyfikuje ona przenoszenie ciepła. Tę intensyfikację uwzględnia się przy pomocy mnożnika poprawkowego:

$$\epsilon_R = 1 + 1,77 \frac{d}{R_k} \quad (5.91)$$

gdzie: d - średnica przewodu
 R_k - promień krzywizny.

Mnożnik ten stosuje się dla liczb Reynoldsa większych od wartości krytycznej:

$$Re_{kr} = 2300 + 10\,500 \cdot \left(\frac{d}{R_k}\right)^{0,3} \quad (5.92)$$

Ma to szczególne znaczenie dla węzownic, w których płyn przepływa w kanale zakrzywionym w kształcie linii śrubowej.

Wtedy można korzystać ze wzoru:

$$Nu = 0,0394 Re^{0,8} \cdot Pr^{0,4} \cdot \left(\frac{d}{R_k}\right)^{0,21} \quad (5.93)$$

ważnego dla: $Re = 10\,000 \dots 40\,000$, $R_k/d = 5 \dots 10$, i skoku linii śrubowej wy-noszącego: $(2 \dots 4) \cdot d$

Temperaturą charakterystyczną jest tu średnia temperatura płynu t_f liczona wzorem (5.84).

Intensyfikacja przejmowania ciepła odbywa się przede wszystkim przez taki dobór warunków przepływu, aby osiągnąć rozwinięty przepływ turbulentny czyli $Re \geq 10\,000$. Wtedy uzyskuje się dość duży współczynnik przejmowania ciepła α , a ponadto podnoszenie liczby Reynoldsa (przez wzrost prędkości) daje względnie szybki wzrost α .

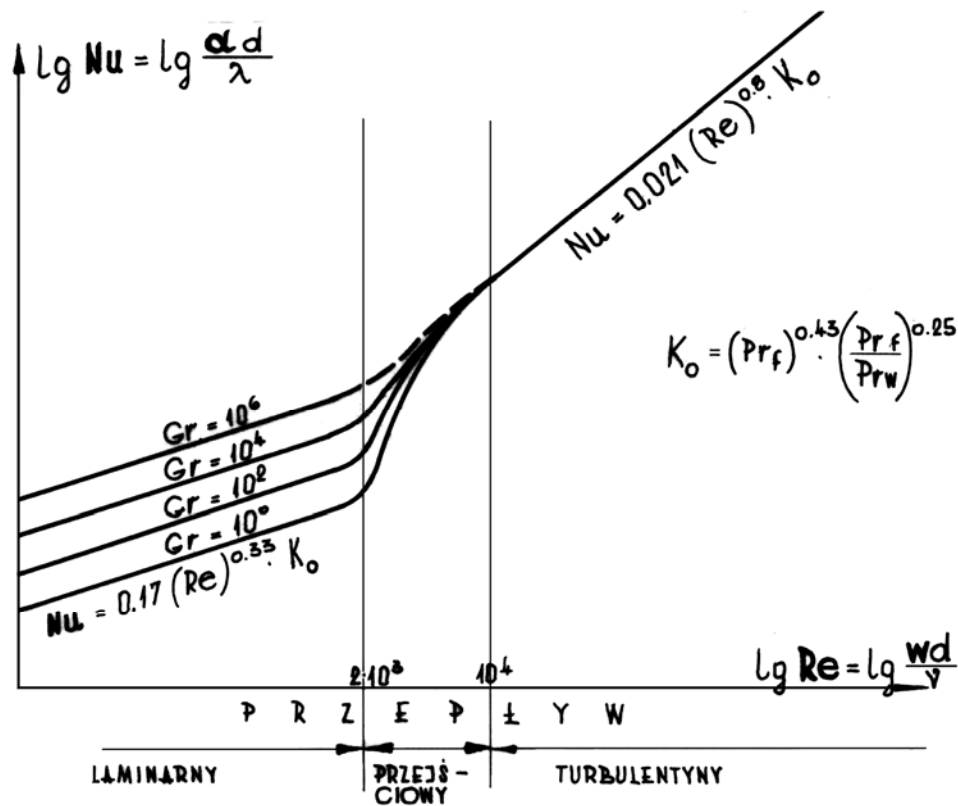
W poszczególnych przypadkach nie daje się jednak uniknąć przepływu laminarnego (oleje, spaliny), wtedy można zastosować **turbulizację** przepływu za pomocą np. spiralnie zwiniętych taśm lub spiral z drutu, włożonych do rury, albo przez zastosowanie rur spłaszczonych na przemian w 2 płaszczyznach prostopadłych itp. Wywołane takimi sposobami zawirowania powodują zwiększenie ilości przenoszonej energii cieplnej między ścianką rury a rdzeniem płynu. Rozwiązanie takie może być celowe również w przypadku konwekcji o charakterze przejściowym.

Wyniki badań przejmowania ciepła w rurach z wkładkami turbulizującymi można znaleźć w niektórych książkach*).

Intensyfikację przejmowania ciepła w przepływie turbulentnym można osiągnąć jeszcze inaczej niż przez podnoszenie prędkości, a mianowicie przez oddziaływanie na laminarną (pod-)warstwę przyścienne. Istota tego oddziaływania polega na wielokrotnym zrywaniu tej (pod-)warstwy przez wtłoczenia czy wypusty (pierścieniowe, spiralne, albo inne) rozstawione w pewnych odstępach tak, aby wielokrotnie powtarzać rozbieg hydrauliczny i w ten sposób uzyskiwać zmniejszenie średniej grubości tej warstwy i zwiększenie współczynnika przejmowania ciepła α .

*) Np. W.G.Fastowski, J.W.Pietrowski: „Współczesne wysokosprawne wymienniki ciepła”. WNT, Warszawa 1964

Dane z badań poszczególnych rodzajów rozwiązań konstrukcyjnych intensyfikujących przejmowanie ciepła rozsiiane są w czasopiśmie z zakresu techniki cieplnej i inżynierii chemicznej, a częściowo podane są w cytowanej uprzednio książce Fastowskiego i Pietrowskiego



Rys.5.14 Przebieg $\alpha = f(w)$ w przewodzie prostym

Ogólną zmienność liczby Nusselta, czyli współczynnika przejmowania ciepła α od liczby Reynoldsa, czyli od prędkości w , prezentuje rys. 5.14 w skali logarytmicznej (dla danych wymiarów kanału i danego płynu przepływającego, pozostałe wielkości są bowiem stałe).

Pokazany jest tu również wpływ liczby Grashofa, która w danym zagadnieniu jest głównie funkcją różnicy temperatur: $\Delta t = t_w - t_f$.

Jak widać, współczynnik przejmowania ciepła α wzrasta wybitnie z rosnącą prędkością w , szczególnie w obszarze przejściowym i turbulentnym. Jednak równocześnie wzrastają opory przepływu stosownie do znanej zależności:

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{\rho w^2}{2} \cdot \frac{L}{d} \quad (5.94)$$

gdzie: ζ jest liczbą tarcia (Darcy - Weissbacha). Można ją określić z zależności:

$$\zeta = \frac{2d}{L} \cdot (Eu)$$

jeżeli znana jest liczba Eulera (Eu).

Co więcej, analogia hydromechaniczno-termiczna wykazuje (wzór 5.80), że istnieje bezpośrednia zależność liczby oporu od współczynnika przejmowania ciepła α :

$$\zeta = \frac{8\alpha}{c_p \cdot Q \cdot w} \quad (5.95)$$

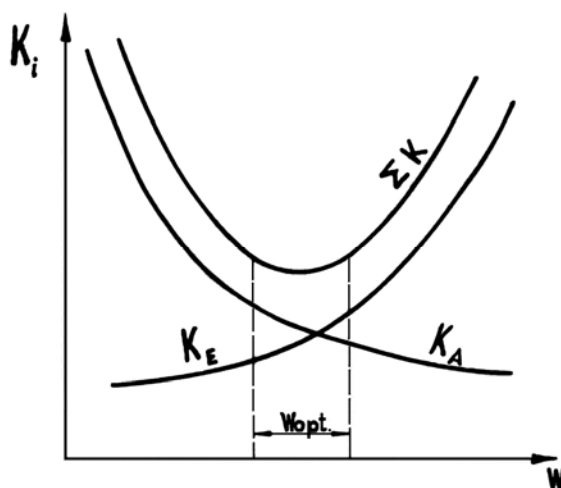
Podstawiając to do (5.94) otrzymuje się zależność:

$$\Delta p = \frac{8 \alpha \cdot w \cdot L}{\sigma_p \cdot d} \quad (5.94a)$$

w której widać bezpośrednio wpływ wzrostu α na wzrost oporów przepływu.

Zwiększenie α powoduje zmniejszenie powierzchni wymiennika ciepła, która np. dla $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ i pomijalnego oporu cieplnego ścianek wynosi:

$$A_o = \frac{\dot{Q}}{\alpha \cdot \Delta t_{sr}}$$



Rys.5.15 Zmienność kosztów w funkcji prędkości przepływu płynu przez wymiennik ciepła

Tablica 8

Orientacyjne prędkości przepływu płynów
stosowane w wymiennikach ciepła

<u>Gazy i pary</u>	ogólnie:	3 ... 30 m/s
o wysokim ciśnieniu wewnątrz rur		0,5 .. 12 m/s
w pękach rur gładkich		15 ... 20 "
" " " żebrowanych		0,5 .. 15 "
spaliny w wymiennikach kotłowych		5 ... 15 "
para w przegrzewaczach kotłowych		12 ... 25 "
powietrze w wymiennikach chłodniczych		1 ... 10 "
powietrze w chłodnicach sprężarek		1 ... 14 "
<u>Ciecze</u>	ogólnie:	do 2,5 m/s
woda w chłodnicach olejów, wody i in.		0,3 ... 2,0 m/s
oleje w rurkach chłodnic i podgrzewaczy		0,15 ... 1,2 "
oleje między rurkami chłodnic		0,4 ... 0,8 "
woda w podgrzewaczach wody		0,2 ... 2,5 "
woda lub solanka w wymiennikach chłodniczych		0,2 ... 2,5 "
woda w skraplaczach turbin parowych		1,0 ... 3,0 "
woda w skraplaczach amoniaku i freonu		0,3 ... 2,0 "

Mniejsza powierzchnia oznacza mniejsze zużycie materiałów, a więc mniejsze koszty wymiennika, które po podzieleniu przez przewidywany czas jego amortyzacji, dają roczne koszty amortyzacyjne K_A .

Z drugiej strony wzrost prędkości i oporów przepływu wymaga większej pracy pompowania, powoduje więc wzrost rocznych kosztów eksploatacyjnych K_E , w których zużycie energii elektrycznej (lub mechanicznej) na pompowanie płynu odgrywa znaczną rolę.

Optymalna prędkość to ta, dla której wypada minimum kosztów łącznych (rys. 5.15).

Z uwagi na szacunkowy z reguły charakter obliczeń ekonomicznych mamy na ogół do czynienia z pewnym zakresem prędkości optymalnych charakterystycznym dla określonego typu aparatury.

Tab. 8 podaje orientacyjne wartości prędkości stosowane w różnych rodzajach wymienników ciepła.

4.4. Przejmowanie ciepła przy opływach ciał

Opływ płyty płaskiej charakteryzuje się warunkami przepływowymi pokazanymi na rys.5.5.

Wyniki pomiarów cieplnych ujmuje zależność (niestety nie sprawdzona dla cieczy):

$$Nu = C \cdot (Re)^m \cdot (Pr_f)^{0,43} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25} \quad (5.96)$$

w której stałe wynoszą:

dla $Re < 10^5$	$C = 0,76$	$m = 0,50$
$Re > 10^5$	$C = 0,037$	$m = 0,80$

W pierwszym przypadku przepływ w warstwie przyściennej jest laminarny, w drugim mamy już warstwę laminarno - turbulentną jak na rys. 5.5.

Liczbę Reynoldsa tworzy się przy pomocy prędkości płynu przed płytą. Temperaturą charakterystyczną jest też temperatura płynu przed płytą, a charakterystycznym wymiarem liniowym jest długość (liczona w kierunku przepływu) części grzejnej płyty.

Dla gazów ostatni człon:

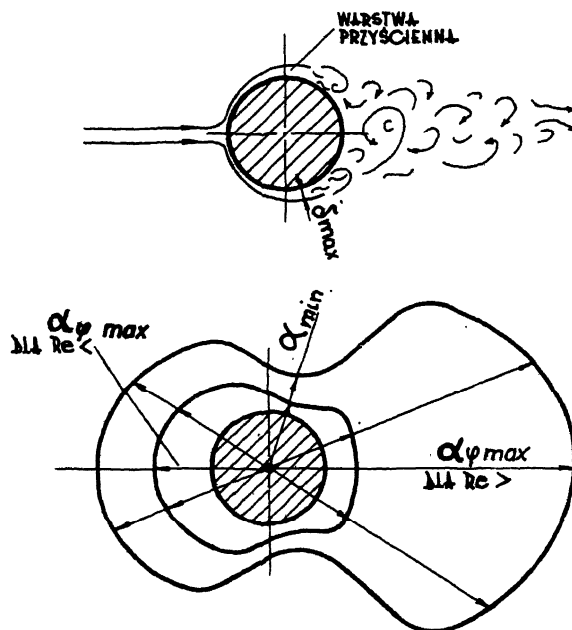
$$\left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25} \cong 1$$

Przy małych prędkościach może się ujawnić wpływ konwekcji swobodnej - należy wówczas sprawdzić ten wpływ odpowiednimi wzorami z podrozdziału 5.1 i do dalszych obliczeń wziąć wartość większą.

Opływ poprzeczny walca (rury okrągłej) odznacza się tym, że narastająca od strony napływającego płynu warstwa przyścienna po osiągnięciu maksimum grubości na kącie: $90^\circ \dots 100^\circ$ ulega oderwaniu i za walcem tworzą się wiry intensyfikujące przejmowanie ciepła między powierzchnią walca a płynem.

Rozkład lokalnych wartości współczynnika przejmowania ciepła, pokazany na rys. 5.16, wykazuje maksimum α_0 od strony napływającego płynu (gdzie tworząca się dopiero warstwa przyścienna jest najcieńsza).

Tak jest przy małych liczbach Reynoldsa. Natomiast przy dużych Re maksimum znajduje się po stronie przeciwnej (gdzie wiry są najintensywniejsze).



Rys.5.16 Rozkład prądów i lokalnego współczynnika przejmowania ciepła (współrzędne biegunowe) przy opływie walca

Liczbę Reynoldsa tworzy się tu przy pomocy prędkości płynu napływającego, a jeżeli walec umieszczony jest w kanale, to przy pomocy średniej prędkości w najwęższym przekroju. Wymiarem charakterystycznym jest zawsze średnica walca, a temperaturą charakterystyczną – temperatura napływającego płynu t_f .

Wyniki doświadczeń (z wodą, olejem transformatorowym i powietrzem) ujmuje wzór na średnią dla całego obwodu liczbę Nusselta:

$$\text{Nu} = C \cdot (\text{Re})^m \cdot (\text{Pr}_f)^{0,38} \cdot \left(\frac{\text{Pr}_f}{\text{Pr}_w} \right)^{0,25} \quad (5.97)$$

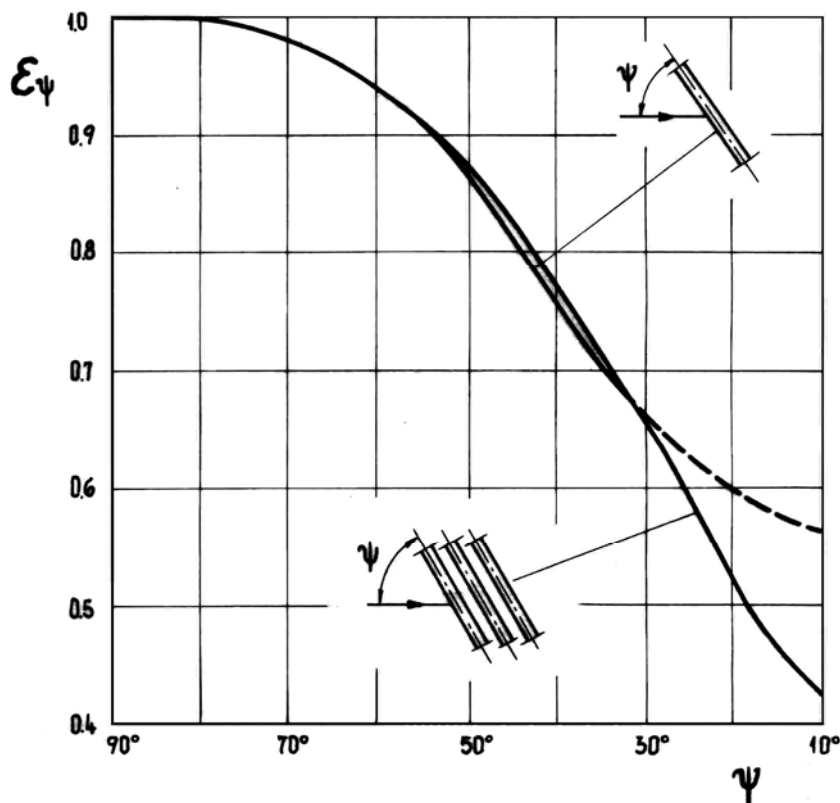
W którym stałe wynoszą:

$$\begin{array}{ll} \text{dla } \text{Re} = 10 \dots 1\,000, & C = 0,59, \quad m = 0,47 \\ \text{Re} = 1000 \dots 200\,000, & C = 0,21, \quad m = 0,62. \end{array}$$

Gdy napływ nie jest prostopadły do osi walca, lecz odbywa się pod mniejszym kątem ψ , należy pomnożyć (5.97) przez poprawkę ϵ_ψ . Wartość tej poprawki można odczytać z rys. 5.17.

Dla prostopadłego opływu słupów o innych niż kołowy przekrojach można znaleźć wzór w literaturze*).

*) Np. B. Staniszewski: „Wymiana ciepła - podstawy teoretyczne”. PWN. Warszawa 1980.

Rys.5.17. Poprawka ϵ_ψ na skośny napływ płynu

Opływ pęku rur. W tym przypadku pierwszy szereg rur omywany jest jak walec pojedynczy, ale pozostałe znajdują się już w śladach wirowych rur pierwszych, tak że przenoszenie ciepła na nich jest intensywniejsze. Przejmowanie ciepła stabilizuje się począwszy od trzeciego szeregu. Liczbę Nusselta dla trzeciego i dalszych szeregów oblicza się ze wzoru:

$$Nu = C \cdot (Re)^m \cdot (Pr_f)^{1/3} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25} \quad (5.98)$$

w którym stałe wynoszą:

dla układu rzędownego (w kwadraty):	$C = 0,23,$	$m = 0,65$
dla układu przestawionego (w trójkąty) (szachownicowego)	$C = 0,41,$	$m = 0,60.$

Wzór sprawdzono w zakresie $Re = 200 \dots 200\,000$ przy użyciu powietrza, wody i oleju transformatorowego.

Wymiarem charakterystycznym jest średnica rury, temperaturą charakterystyczną: średnia temperatura płynu między wlotem i wylotem $t_{f\text{śr}}$, a prędkością: prędkość średnia w zężeniu między rurami.

Wzór (5.98) jest niezależny od podziałki rur, co sprawdzono w zakresie względnych podziałek: $s/d = 1,09 \dots 2,0$.

Dla pierwszego szeregu należy stosować poprawkę: $\epsilon_1 = 0,6$ a dla drugiego: $\epsilon_2 = 0,9$ w układzie rzędownym i $\epsilon_2 = 0,7$ w układzie przestawionym.

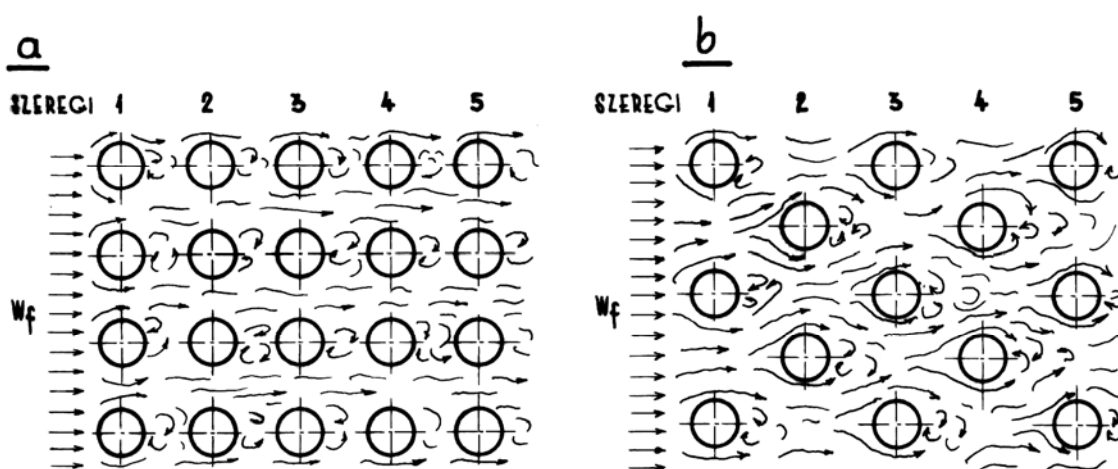
Średni, dla całego pęczka rur, współczynnik przejmowania ciepła wynosi:

$$\alpha_{\acute{s}r} = \frac{\varepsilon_1 \cdot \alpha_1 \cdot A_1 + \varepsilon_2 \cdot \alpha_2 \cdot A_2 + \sum_{i=3}^n \alpha_i \cdot A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (5.99)$$

Jeżeli wszystkie rury są takie same: $A_1 = A_2 = \dots = A_n$, to:

$$\alpha_{\acute{s}r} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + n - 2) \cdot \alpha}{n} \quad (5.100)$$

Jeżeli płyn napływa skośnie, to dochodzi poprawka: $\varepsilon_v < 1$, której wartość można określić z rys. 5.17.



Rys. 5.18 Schematy opływu pęczków rur w układzie (a) rzędownym i (b) przestawionym

Opływ pęczku rur żebrowanych. Dla tego przypadku istnieje spora ilość wyników badań różnych ożebrowań. Dane te można znaleźć w cytowanej wyżej książce Fastowskiego i Pietrowskiego*).

Przykładem wziętym z tej książki jest poniższy wzór ważny dla żeber płaskich, powietrza i $Re = 3\,000 \dots 25\,000$:

$$Nu = C \cdot (Re)^m \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^{-0,54} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^{-0,14} \quad (5.101)$$

Stałe w nim zawarte wynoszą:
dla układu:

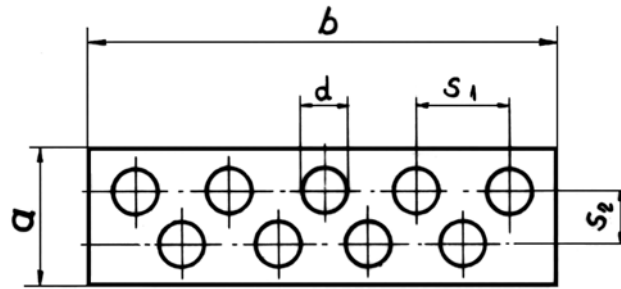
rzędownego:	$m = 0,72$	$C = 0,104$ żebra okrągłe
		$C = 0,096$ " kwadratowe
przestawionego:	$m = 0,65$	$C = 0,223$ " okrągłe
		$C = 0,205$ " kwadratowe

Charakterystycznym wymiarem liniowym jest podziałka żeber b .
Pozostałe wymiary to: średnica zewnętrzna rury d i wysokość żebra h .

Wzór sprawdzono w zakresie: $d/b = 3 \dots 4,8$ i $s/d = 1,09 \dots 2,0$.

*) W.G. Fastowski, J.W. Pietrowski: „Współczesne wysokosprawne wymienniki ciepła”.

Prędkością charakterystyczną jest średnia prędkość w największym przekroju (między rurami i żebrami), a charakterystyczną temperaturą średnia z temperatur powietrza: na wlocie i wylocie z pęczka $t_{f\text{śr}}$.



Rys.5.19 Schemat do opływu wzdłużnego pęczka rur

Opływ wzdłużny pęczka rur jest w zasadzie przepływem przez kanał wypełniony rurami (rys. 5.19). Istotnie wyniki badań takiego układu uogólnia dla $Re > 5000$ wzór niemal identyczny z (5.87):

$$Nu = 0,021 \cdot (Re)^{0,80} \cdot (Pr_f)^{0,43} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25} \cdot \epsilon_s \quad (5.102)$$

Wymiarem charakterystycznym jest tu średnica hydrauliczna (5.83), w której obwód zwilżony dla n rurek obliczamy jako:

$$U = n \cdot \pi \cdot d + 2 \cdot (a+b)$$

Poprawkę na rozstawienie rur:

$$\epsilon_s = \left(\frac{s_1 \cdot s_2}{d^2}\right)^{0,18}$$

można przeważnie zaniedbać (≈ 1).

Dolna granica stosowalności wzoru ($Re = 5000$) jest obniżona w stosunku do bardzo podobnego wzoru (5.87) bowiem rury turbulizują przepływ w kanale.

Opływ kuli wykazuje pod względem hydraulicznym podobieństwo do opływu walca. Średnie na obwodzie wartości liczby Nusselta wyznacza się ze wzoru Frösslinga:

$$Nu = 2,0 + 0,60 \cdot (Re)^{1/2} \cdot (Pr)^{1/3} \quad (5.103)$$

ważnego w zakresie: $Re = 1 \dots 70\,000$ i $Pr = 0,6 \dots 400$.

Charakterystycznym wymiarem liniowym jest oczywiście średnica kuli, ale temperaturą charakterystyczną jest średnia z temperatur: płynu t_f i ścianki t_w :

$$t_{\text{char}} = \frac{t_f + t_w}{2}$$

Dla powietrza często stosowany jest prosty wzór McAdamsa:

$$Nu = 0,33 \cdot Re^{0,6} \quad (5.104)$$

ważny w zakresie $Re = 20 \dots 150\,000$.

Przykłady

1. Obliczyć współczynnik przejmowania ciepła w rurze o średnicy wewnętrznej 60 mm i długości 2100 mm, przez którą przepływa powietrze z szybkością średnią 5 m/s o średniej temperaturze 100°C.

Rozwiązanie:

Dla średniej temperatury płynu 100°C odczytuje się z tablic właściwości powietrza:

$$\lambda = 0,032 \text{ W/m K}$$

$$\nu = 23,13 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

$$\text{Pr} = 0,688$$

Liczba Reynoldsa:

$$\text{Re} = \frac{wd}{\nu} = \frac{5 \cdot 60 \cdot 10^{-3}}{23,13 \cdot 10^{-6}} = 12\,970 > 10\,000$$

W rurze będzie więc rozwinięty przepływ turbulentny, dla którego liczba Nusselta:

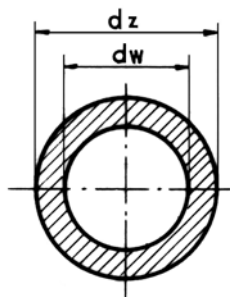
$$\begin{aligned} \text{Nu} &= \frac{\alpha d}{\lambda} = 0,021 \cdot (\text{Re})^{0,8} \cdot (\text{Pr}_f)^{0,43} \cdot \left(\frac{\text{Pr}_f}{\text{Pr}_w}\right)^{0,25} \cdot \varepsilon_L = \\ &= 0,021 \cdot (12\,970)^{0,8} \cdot (0,688)^{0,43} \cdot 1,0 \cdot 1,05 = 36,6 \end{aligned}$$

Podstawiono tu: $\varepsilon_L = 1,05$ z tab. 7 dla $\frac{L}{d} = \frac{2100}{60} = 35$.

Zatem współczynnik przejmowania ciepła:

$$\alpha = \frac{(\text{Nu})\lambda}{d} = \frac{36,6 \cdot 0,032}{60 \cdot 10^{-3}} = 19,5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

2. Obliczyć współczynnik przejmowania ciepła w kanale pierścieniowym o średnicach 60 mm i 40 mm oraz długości 750 mm. Przez kanał przepływa olej wrzecionowy, który nagrzewa się od 20°C do 100°C. Temperatura ścianek jest stała i równa 110°C. Strumień objętości oleju wynosi 5 m³/h.



Rys.5.20 Szkic sytuacyjny do przykładu 2

Rozwiązanie:

Średnica hydrauliczna kanału:

$$d_h = \frac{4A}{U} = \frac{4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d_z^2 - d_w^2)}{\pi(d_z + d_w)} = d_z - d_w = 60 - 40 = 20 \text{ mm}$$

Właściwości oleju dobieramy dla temperatury charakterystycznej:

$$t_{f_{sr}} = \frac{t' + t''}{2} = \frac{20 + 100}{2} = 60^\circ\text{C}$$

Wynoszą one:

$$\nu = 4,95 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \lambda = 0,142 \text{ W/m}\cdot\text{K}, \quad \text{Pr}_f = 59,4.$$

Prędkość przepływu:

$$w = \frac{\dot{V}}{A_p} = \frac{5}{\frac{\pi}{4} (6^2 - 4^2) \cdot 10^{-4}} = 0,88 \text{ m/s}$$

Liczba Reynoldsa:

$$\text{Re} = \frac{w d_h}{\nu} = \frac{0,88 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{4,95 \cdot 10^{-6}} = 3555 < 10\,000$$

Jest to więc przepływ przejściowy.

Liczba Nusselta:

$$\text{Nu} = 0,037 \left[1 + \left(\frac{d}{L} \right)^{2/3} \right] \cdot (\text{Re})^{0,75} \cdot (\text{Pr})^{0,42} \cdot \left(\frac{\eta_f}{\eta_w} \right)^{0,14}$$

Dodatkowo oblicza się dla 60° C: $\eta_f = \rho \cdot \nu = 845 \cdot 4,95 \cdot 10^{-6} = 4,182 \cdot 10^{-3} \text{ kgm/s}$,
a dla 110° C: $\eta_f = \rho \cdot \nu = 814 \cdot 2,17 \cdot 10^{-6} = 1,766 \cdot 10^{-3} \text{ kgm/s}$.

Wobec tego:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \cdot d_h}{\lambda} = 0,037 \left[1 + \left(\frac{20}{750} \right)^{2/3} \right] \cdot (3555)^{0,75} \cdot (59,4)^{0,42} \cdot \left(\frac{4,182}{1,766} \right)^{0,14} = 70,9$$

a współczynnik przejmowania ciepła:

$$\alpha = \frac{(\text{Nu})\lambda}{d_h} = \frac{70,9 \cdot 0,142}{20 \cdot 10^{-3}} = 503 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

3. Obliczyć współczynnik przejmowania ciepła od płaskiej ścianki wagonu do powietrza o temperaturze -20°C, jeżeli ścianka ma rozmiary 25 x 4 m, a wagon porusza się z prędkością 80 km/h.

R o z w i ą z a n i e :

Wymiarem charakterystycznym jest długość wagonu: $L=25 \text{ m}$.

Dla temperatury charakterystycznej $t_f = -20^\circ \text{ C}$ odczytuje się z tablic dane:

$$\nu = 11,61 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \lambda = 0,0228 \text{ W/m}\cdot\text{K}, \quad \text{Pr} = 0,716.$$

Liczba Reynoldsa:

$$\text{Re} = \frac{wL}{\nu} = \frac{22,2 \cdot 25}{11,61 \cdot 10^{-6}} = 47,7 \cdot 10^6 > 10^5$$

Liczba Nusselta:

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= \frac{\alpha L}{\lambda} = 0,037 \cdot (\text{Re})^{0,8} \cdot (\text{Pr})^{0,43} \cdot 1 = \\ &= 0,037 \cdot (477 \cdot 10^5)^{0,8} \cdot (0,716)^{0,43} = 37\,400 \end{aligned}$$

Tak więc współczynnik przejmowania ciepła:

$$\alpha = \frac{(\text{Nu})\lambda}{L} = \frac{37\,400 \cdot 0,0228}{25} = 34,1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

4. Obliczyć współczynnik przejmowania ciepła dla ośmioszeregowego, rzędogo pęku rur o średnicach zewnętrznych 40 mm omywanego powietrzem o średniej temperaturze 300°C i średniej prędkości w największym przekroju 10 m/s, a napływającym pod kątem 60° względem osi rur.

R o z w i ą z a n i e .

Dla temperatury $t_{f, \text{sr}} = 300^\circ \text{C}$ znajdujemy z tablic:

$$\lambda = 0,0461 \text{ W/m}\cdot\text{K}$$

$$\nu = 48,33 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$\text{Pr} = 0,674$$

Liczba Reynoldsa wynosi:

$$\text{Re} = \frac{wd}{\nu} = \frac{10 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{48,33 \cdot 10^{-6}} = 8276$$

a więc mieści się w zakresie ważności wzoru (5.98).

$$\begin{aligned} \text{Liczba Nusselta: } \text{Nu} &= 0,23 \cdot (\text{Re})^{0,65} \cdot (\text{Pr}_f)^{1/3} \cdot \left(\frac{\text{Pr}_f}{\text{Pr}_w}\right)^{1/4} = \\ &= 0,23 (8276)^{0,65} \cdot (0,674)^{1/3} \cdot 1 = 71 \end{aligned}$$

Współczynnik przejmowania ciepła dla dalszych (niż 2-gi) szeregów:

$$\alpha = \frac{(\text{Nu})\lambda}{d} = \frac{72 \cdot 0,0461}{40 \cdot 10^{-3}} = 81,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Średni dla całego pęku współczynnik przejmowania ciepła:

$$\alpha_{\text{sr}} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + n - 2)\alpha}{n} = \frac{0,6 + 0,9 + 6}{8} \cdot 81,8 = 76,7 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$$

Z uwzględnieniem poprawki na skośny napływ: $\varepsilon_{\nu} = 0,94$ otrzymujemy ostatecznie:

$$\alpha_o = 72,1 \text{ W/m}^2 \text{ K}$$

5. Obliczyć średni współczynnik przejmowania ciepła dla pęku rur z żebrami prostokątnymi. Rury rozmieszczone są rzędogo, mają średnice zewnętrzne 20 mm. Żebra o grubości 1 mm i wysokości 10 mm są rozmieszczone z zachowaniem podziałki 5 mm. Rury omywane są przez prostopadły strumień powietrza o prędkości w największym przekroju 12 m/s i średniej temperaturze w pęczku 50°C.

R o z w i ą z a n i e .

Dla $t_{f, \text{sr}} = 0^\circ \text{C}$ jest z tablic: $\nu = 17,95 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\lambda = 0,0282 \text{ W/m}\cdot\text{K}$.

Wymiarem charakterystycznym jest tu podziałka żeber $b = 5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Liczba Reynoldsa

$$\text{Re} = \frac{w \cdot b}{\nu} = \frac{12 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{17,95 \cdot 10^{-6}} = 3342,6$$

mieści się w granicach ważności wzoru (5.101).

Sprawdzamy jeszcze stosunek:

$$\frac{d}{b} = \frac{20}{5} = 4$$

jest on również zawarty w granicach ważności tego wzoru.

Zatem liczba Nusselta

$$\begin{aligned} \text{Nu} = \frac{\alpha b}{\lambda} &= 0,096 \cdot (\text{Re})^{0,72} \cdot \left(\frac{d}{b}\right)^{-0,54} \cdot \left(\frac{h}{b}\right)^{-0,14} = \\ &= 0,096 \cdot (3340)^{0,72} \cdot \frac{1}{4^{0,54}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{5}{10}\right)^{0,14}} = 17,24 \end{aligned}$$

a współczynnik przyjmowania ciepła:

$$\alpha = \frac{(Nu)\lambda}{b} = \frac{17,24 \cdot 0,0282}{5 \cdot 10^{-3}} = 97,3 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Ćwiczenia

1. Obliczyć średni współczynnik przyjmowania ciepła i przyjmowany strumień ciepła dla kanału reaktora atomowego chłodzonego wodą, jeżeli średnica kanału wynosi 9 mm, długość 1,6 m, średnia prędkość wody 4 m/s, średnia temperatura ścianki 270°C, a temperatury wody na wlocie i wylocie odpowiednio 155°C i 265°C.

$$\text{Odpowiedź: } \alpha = 31\,100 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \\ \dot{Q} = 8\,450 \text{ W}$$

2. Przez kanał szczelinowy o wymiarach poprzecznych 3 x 90 mm i długości 3 m płynie woda z szybkością 2 m/s. Obliczyć współczynnik przyjmowania ciepła i ilość przyjmowanego ciepła, jeżeli średnia temperatura wody w kanale wynosi 50°C, a średnia na długości temperatura ścianki: 110°C.

$$\text{Odpowiedź: } \alpha = 14\,000 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \\ \dot{Q} = 4,68 \cdot 10^5 \text{ W}$$

3. Gładka płyta o długości 1,5 m i szerokości 1 m omywana jest powietrzem przepływającym z prędkością 5 m/s. Obliczyć średni współczynnik przyjmowania ciepła i ilość ciepła oddaną do powietrza, jeżeli powierzchnia płyty ma temperaturę 110°C, a temperatura dopływającego powietrza wynosi 20°C.

$$\text{Odpowiedź: } \alpha = 20 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \\ \dot{Q} = 2\,700 \text{ W}$$

4. Obliczyć średni współczynnik przyjmowania ciepła dla dziesięcioszeregowego, rzędownego pęczka rur omywanego poprzecznie olejem transformatorowym, jeżeli zewnętrzna średnica rur wynosi 25 mm, średnia prędkość w przewężeniu 0,7 m/s, średnia temperatura oleju 50°C i średnia temperatura powierzchni 85°C.

Uwaga: dla oleju transformatorowego można przyjąć:

$$\text{przy } 50^\circ\text{C: } \lambda = 0,1082 \text{ W/m} \cdot \text{K}, \quad \nu = 7,58 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad Pr = 111, \\ \text{przy } 85^\circ\text{C: } Pr = 54,9.$$

$$\text{Odpowiedź: } \alpha = 825 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

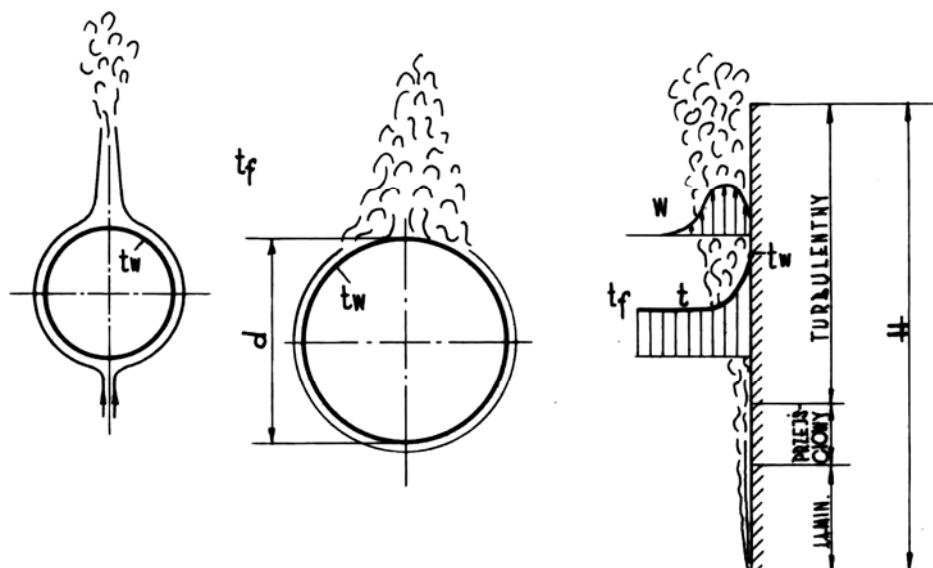
5. KONWEKCJA SWOBODNA.

5.1. Konwekcja swobodna w przestrzeni nieograniczonej

W tym przypadku prądy konwekcyjne wytworzone przez jakąś powierzchnię o temperaturze t_w różnej od temperatury t_f płynu z dala od tej powierzchni mogą się rozwijać swobodnie.

Typowe obrazy prądów konwekcyjnych wokół poziomych walców (rur) o mniejszej i większej średnicy oraz wzdłuż ścianek (i rur) pionowych podaje rys. 5.21. Podano tam również charakterystyczne profile prędkości i temperatury w obszarze przyściennym.

Warstwa przyścienna może być laminarna albo laminarno – turbulentna z odcinkiem o ruchu przejściowym.



Rys.5.21 Prądy od konwekcji swobodnej na ściankach pionowych i rurach

Dla pokazanych na rys. 5.21 kształtów oraz liczb Prandtla nie mniejszych od 0,7 oblicza się liczbę Nusselta ze wzoru *M i c h e j e w a*

$$\boxed{Nu = C \cdot (Gr \cdot Pr)^n} \quad (5.105)$$

W którym:

$C = 0,5$	$n = 0$	dla $(Gr \cdot Pr) < 0,001$
$C = 1,18$	$n = 1/8$	dla $(Gr \cdot Pr) = 0,001 \dots 500$
$C = 0,54$	$n = 1/4$	dla $(Gr \cdot Pr) = 500 \dots 20 \cdot 10^6$
$C = 0,135$	$n = 1/3$	dla $(Gr \cdot Pr) = 20 \cdot 10^6 \dots 10^{13}$

W pierwszym z tych przypadków mamy tzw. przepływ błonowy (kiedy istnieje prawie nieruchoma błona, która w miarę wzrostu $(Gr \cdot Pr)$ staje się niestateczna i przechodzi coraz częściej w przepływ laminarny).

W drugim jest opływ laminarny, a w trzecim turbulentny.

Temperaturą charakterystyczną jest średnia temperatura warstwy przyściennej:

$$t_{char} = \frac{t_w + t_f}{2}$$

gdzie: t_f jest temperaturą płynu z dala od ścianki.

Wymiarem charakterystycznym jest wymiar pionowy, a więc średnica dla rur i drutów poziomych, a wysokość dla ścian i rur pionowych.

Zamiast iloczynu $(Gr \cdot Pr)$ można się posługiwać wprost liczbą Rayleigha:

$$Ra = (Gr)(Pr) = \frac{\beta g l^3}{\nu a} \cdot (t_w - t_f)$$

Ciekawym przypadkiem jest opływ turbulentny, wówczas:

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} = 0,135 \cdot \left[\frac{\beta g l^3}{\nu a} \cdot (t_w - t_f) \right]^{\frac{1}{3}}$$

i współczynnik przejmowania ciepła:

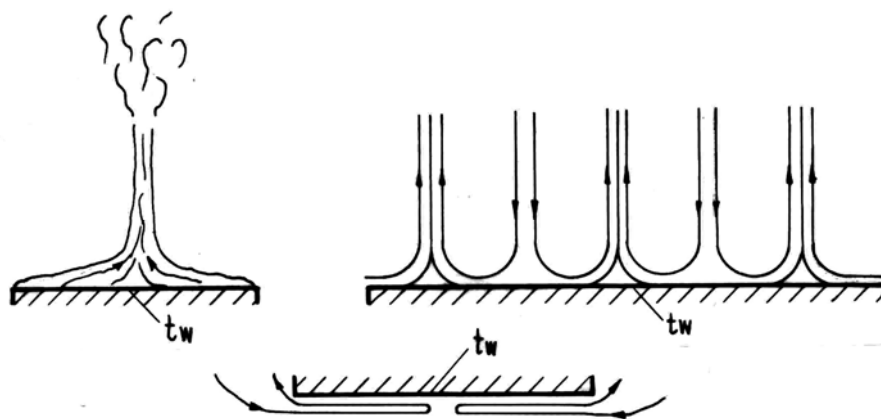
$$\alpha = 0,135 \lambda \cdot \left[\frac{\beta g \cdot (t_w - t_f)}{\nu a} \right]^{\frac{1}{3}}$$

jest niezależny od rozmiarów przedmiotu, reprezentowanych przez parametr l .

Dla ścian poziomych można również stosować wzór (5.105) z długością krótszego boku jako wymiarem charakterystycznym. Wymiar ten może jednak osiągnąć najwyżej 0,6 m, dla większych szerokości podstawa się zawsze $l = 0,6$ m. Bowiem intensywność procesu dalej już nie wzrasta - na szerokich płytach powstaje wielokrotnie powtórzony obraz prądów wznoszących, takich jak na płycie o szerokości 0,6 m.

Otrzymaną liczbę Nusselta zwiększa się o 30% dla ścian zwróconych gorącą powierzchnią do góry, a zmniejsza o 30% dla skierowanych gorącą powierzchnią do dołu.

Prądy konwekcyjne w obydwu przypadkach pokazuje rys. 5.22.



Rys.5.22 Prądy od konwekcji swobodnej) na ściankach poziomych

5.2. Konwekcja swobodna w przestrzeni ograniczonej

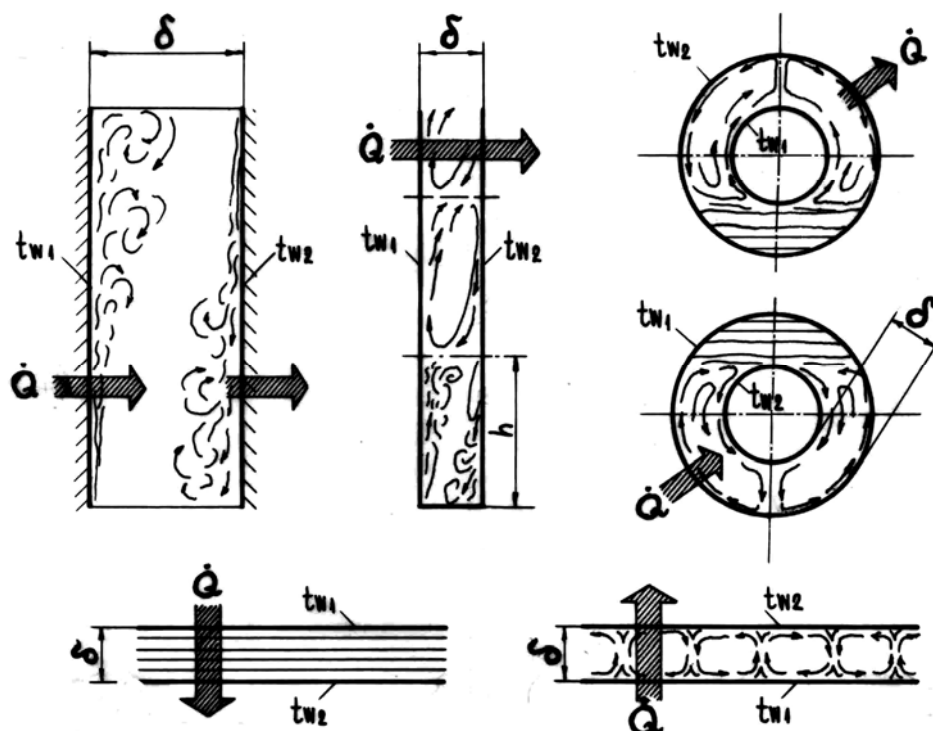
W tym przypadku strumienie wznoszące wywołane gorącą ścianką nie mogą się swobodnie rozwijać i kontaktują się bezpośrednio z prądami zstępującymi. Na rys.5.23 podano kilka przykładów takich szczelin. W nich to, przede wszystkim, ma miejsce konwekcja swobodna w ograniczonej przestrzeni.

Jeżeli pionowa szczelina jest szeroka, to prądy: wstępujący i zstępujący nie oddziałują na siebie i na obu ścianach konwekcja jest taka sama jak w przestrzeni nieograniczonej.

W wąskich szczelinach wskutek wzajemnego oddziaływania przeciwbieżnych strumieni tworzą się charakterystyczne komórki, w których cyркуluje płyn.

W szczelinach poziomych układ prądów zależy od kierunku przenoszenia ciepła. Przy przenoszeniu ciepła z góry w dół cieplejsze warstwy układają się na chłodniejszych (i gęstszych), tak że ruchy konwekcyjne nie powstają. Przy grzaniu od dołu tworzą się charakterystyczne komórki cyrkulacyjne intensyfikujące przenoszenie ciepła.

W szczelinach pierścieniowych tworzy się obszar płynu nieruchomego na dole lub u góry, zależnie od kierunku grzania.



Rys. 5.23 Prądy od konwekcji swobodnej w szczelinach.

Cały ten skomplikowany obraz traktuje się jednolicie przy pomocy zastępczego współczynnika przewodzenia ciepła:

$$\lambda_z = \lambda \cdot \varepsilon_k \quad (5.106)$$

w którym **współczynnik konwekcyjny** ε_k oblicza się dla podanych na rys. 5.19 przypadków z zależności podanej np. przez Michajewa:

$$\varepsilon_k = C \cdot (Gr \cdot Pr)^n \quad (5.107)$$

gdzie:

$$C = 0,105 \quad n = 0,3 \quad \text{dla} \quad Gr \cdot Pr = 10^3 \dots 10^6$$

$$C = 0,40 \quad n = 0,2 \quad \text{dla} \quad Gr \cdot Pr = 10^6 \dots 10^{10}$$

Temperaturą charakterystyczną jest tu średnia z temperatur ścianek (średnia temperatura płynu w szczelinie):

$$t_{\text{char}} = \frac{t_{w1} + t_{w2}}{2}$$

Charakterystycznym wymiarem liniowym jest szerokość szczeliny δ .

Dla $Gr \cdot Pr \equiv Ra < 1000$ jest zawsze: $\varepsilon_k = 1$. Nie ma wtedy intensyfikacji przenoszenia ciepła przez konwekcję - tak samo jak to ma miejsce w szczelinie poziomej grzanej od góry.

Przenoszony poprzez szczelinę strumień ciepły oblicza się jako:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda z}{\delta} \cdot A \cdot (t_{w_1} - t_{w_2}) \quad (5.108)$$

W szczelinach pierścieniowych powierzchnia A jest średnią logarytmiczną powierzchnią szczeliny:

$$A = \frac{A_2 - A_1}{\ln \frac{A_2}{A_1}}$$

Przykłady

1. Określić konwekcyjną stratę ciepłą poziomego nieizolowanego przewodu parowego o średnicy 100 mm, długości 4 m i temperaturze 170°C do otaczającego powietrza o temperaturze 30°C.

R o z w i ą z a n i e .

Dla temperatury charakterystycznej:

$$t_{\text{char}} = \frac{t_w + t_f}{2} = \frac{170 + 30}{2} = 100^\circ\text{C}$$

znajdujemy: $v = 2,31 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
 $\lambda = 0,032 \text{ W/m}\cdot\text{K}$
 $\text{Pr} = 0,69$
 $\beta = 1/T = 1/373 \text{ 1/K}$ (dla gazów)

Liczba Grashofa:

$$\text{Gr} = \frac{\beta g d^3}{\nu^2} \cdot (t_w - t_f) = \frac{1}{373} \cdot \frac{9,81 \cdot 0,1^3}{2,31^2 \cdot 10^{-10}} \cdot 140 = 6,90 \cdot 10^6$$

$$\text{Gr} \cdot \text{Pr} = 6,90 \cdot 10^6 \cdot 0,69 = 4,76 \cdot 10^6$$

Liczba Nusselta:

$$\text{Nu} = \frac{\alpha d}{\lambda} = 0,54 \cdot (\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{1/4} = 0,54 (4,76 \cdot 10^6)^{1/4} = 25,2$$

Zatem

$$\alpha = \frac{(\text{Nu})\lambda}{d} = \frac{25,2 \cdot 0,032}{0,1} = 8,1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

a strumień ciepły:

$$\dot{Q} = \alpha A \cdot (t_w - t_f) = 8,1 \cdot (\pi \cdot 0,1 \cdot 4,0) \cdot (170 - 30) = 1425 \text{ W}$$

2. Obliczyć ilość ciepła przenikającą na drodze przewodzenia i ewentualnej konwekcji przez 1 m² powierzchni, pionowej szczeliny powietrznej o grubości 25 mm. Temperatura ścianki gorącej wynosi 150°C, ścianki chłodniejszej 50°C.

R o z w i ą z a n i e

Dla temperatury charakterystycznej:

$$t_{\text{char}} = \frac{t_{w_1} + t_{w_2}}{2} = \frac{150 + 50}{2} = 100^\circ\text{C}$$

mamy takie same właściwości powietrza jak w poprzednim przykładzie.

Liczba Grashofa:

$$Gr = \frac{\beta \cdot \delta^3}{\nu^2} \cdot (t_{w1} - t_{w2}) = \frac{1}{373} \cdot \frac{9,81 \cdot (25 \cdot 10^{-3})^3}{2,312 \cdot 10^{-10}} \cdot 100 = 7,70 \cdot 10^4 > 10^3$$

zatem współczynnik konwekcyjny:

$$\varepsilon_k = 0,105 \cdot (7,70 \cdot 10^4 \cdot 0,69)^{0,3} = 2,747$$

a zastępczy współczynnik przewodzenia ciepła:

$$\lambda_z = \lambda \cdot \varepsilon_k = 0,032 \cdot 2,747 = 0,0879 \text{ W/m}\cdot\text{K}$$

Jednostkowy strumień ciepły przenoszony przez powietrze w szczelinie:

$$\dot{q}_k = \frac{\lambda_z}{\delta} \cdot (t_{w1} - t_{w2}) = \frac{0,0879}{25 \cdot 10^{-3}} \cdot 100 = 352 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Ćwiczenia

- 1.. Zakładając uproszczoną geometrię ciała ludzkiego obliczyć ilość ciepła, jaką traci człowiek do powietrza, a ile do wody o temperaturach 20°C. Można przyjąć powierzchnię ciała człowieka jako 1,6 m², a jego wysokość 1,6 m. Rozwinięcie powierzchni traktować jak płytę pionową, temperaturę powierzchni ciała przyjąć równą 32°C, a stałą promieniowania dla układu człowiek – pomieszczenie: C₁₋₂ = 5,1 W/m²·K⁴.

Odpowiedź: do powietrza: 71 + 105 = 176 W
do wody: 4660 W

2. Określić zastępczą przewodność cieplną i strumień ciepły przenoszony przez szczelinę pierścieniową o szerokości 20 mm, jeżeli temperatury powierzchni gorącej i chłodnej wynoszą odpowiednio 80°C i 20°C, a średnia średnica szczeliny wynosi 100 mm.

Odpowiedź: $\lambda_z = 0,0964 \text{ W/m}\cdot\text{K}$
 $\dot{Q}_L = 90,7 \text{ W/m}$

6. PRZEJMOWANIE CIEPŁA PRZY WRZENIU CIECZY

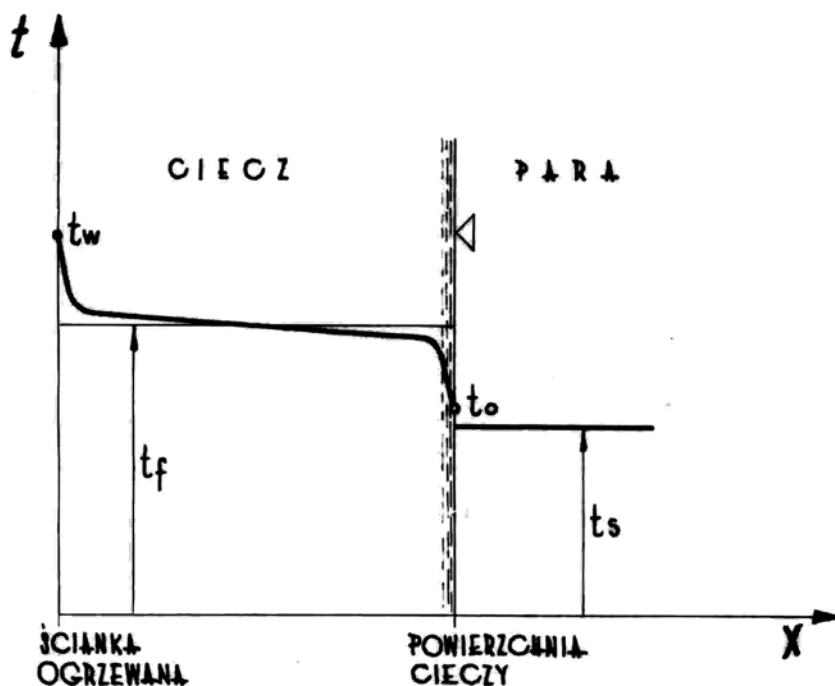
6.1 Rodzaje wrzenia

W stanie nasycenia temperatury cieczy i pary są jednakowe, jeżeli obie fazy pozostają w równowadze cieplnej. Proces wrzenia nie jest jednak procesem równowagowym: do miejsca zmiany stanu skupienia doprowadzone być musi ciepło parowania, a to oczywiście wymaga spadku temperatury.

Tak więc podczas wrzenia temperatura cieczy jest zawsze wyższa (choć o ułamek kelwina) od temperatury nasycenia.

Za wrzenie właściwe uważa się proces, w którym na powierzchni grzejnej tworzą się pęcherzyki pary. Wymaga to odpowiedniej, minimalnej gęstości strumienia cieplnego.

Przy słabszym grzaniu mamy do czynienia z tzw. **parowaniem konwektywnym** lub **powierzchniowym**. W cieczy mamy wówczas rozkład temperatury pokazany na rys.5.24.



Rys.5.24 Rozkład temperatury w cieczy podczas parowania powierzchniowego

Nad powierzchnią grzejną tworzy się warstwa graniczna o dużym spadku temperatury i grubości rzędu 1 mm. W rdzeniu cieczy temperatura jest prawie stała (w wyniku działania prądów konwekcyjnych). Natomiast w warstwie przypowierzchniowej temperatura znowu silniej spada i osiąga na samej powierzchni temperaturę tak nieznacznie większą (np. o 0,03 K dla wody pod ciśnieniem 100 kPa abs.) od temperatury nasycenia, że można ją praktycznie uważać za równą temperaturze pary.

W wyniku takiego rozkładu temperatury ciepło przenoszone jest od powierzchni grzejnej do powierzchni cieczy i tu „zużywane” do zmiany stanu skupienia. Parowanie odgrywa tu jedynie rolę ujemnego źródła ciepła na powierzchni cieczy. Odgrywa ono taką samą rolę jak np. chłodzenie tej powierzchni lub wypromieniowanie z niej ciepła. Opisany proces jest w swej istocie zwyczajną konwekcją, jaka występuje w przestrzeni ograniczonej.

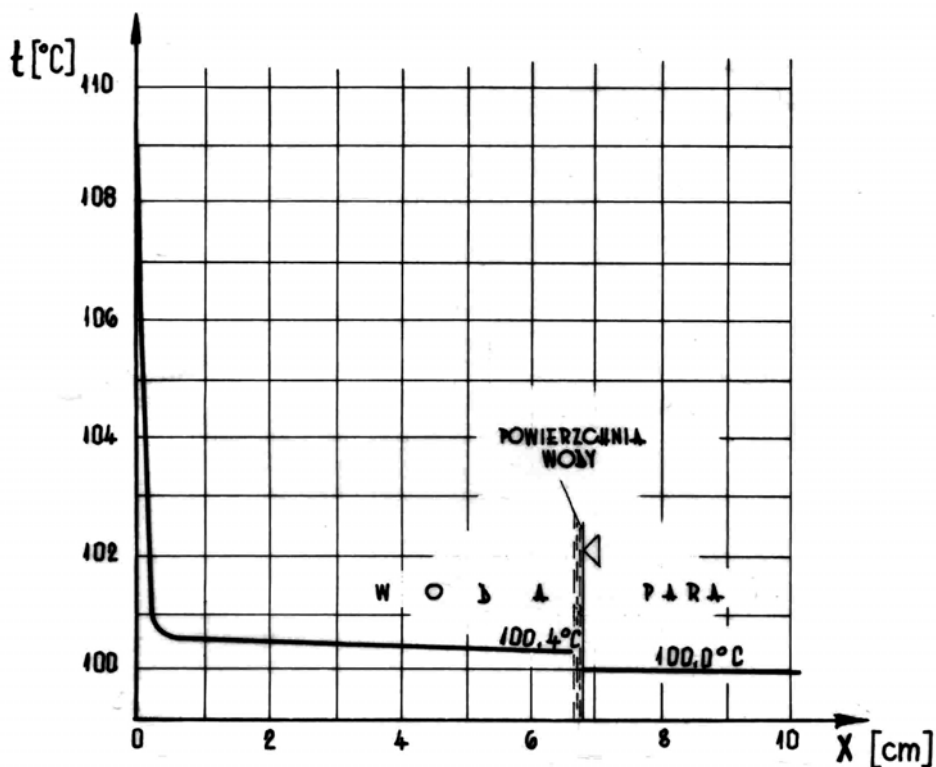
Współczynnik przejmowania ciepła α oblicza się w sposób poznany już przy konwekcji swobodnej. Używa się do tego odpowiedniej różnicy temperatur: $(t_w - t_f)$, $(t_f - t_s)$ lub $(t_w - t_s)$ - zależnie od tego, która część procesu, odbywającego w wodzie, nas interesuje.

Wrzenie pęcherzykowe. Z obserwacji wrzenia w zbiorniku wiadomo, że pęcherzyki pary tworzą się tylko na powierzchni grzejnej i to w pewnych jej miejscach, a liczebność tych miejsc wzrasta z rosnącą gęstością strumienia cieplnego \dot{q} .

Po osiągnięciu średnicy rzędu kilku milimetrów pęcherzyk odrywa się i wznosząc się w przegrzanej cieczy powiększa wielokrotnie swoją objętość wskutek parowania cieczy do jego wnętrza.

Tak więc przenoszenie ciepła przy wrzeniu odbywa się przede wszystkim między ścianką a cieczą. Nawet wtedy, gdy w początkowej fazie pęcherzyk rośnie na ściance, energia cieplna wytworzonej pary pochodzi głównie z cieczy.

Wznoszące się w cieczy pęcherzyki mieszają intensywnie ciecz i przyczyniają się do wyrównania temperatury w niej. Rozkład temperatury w tym przypadku podaje rysunek 5.25.



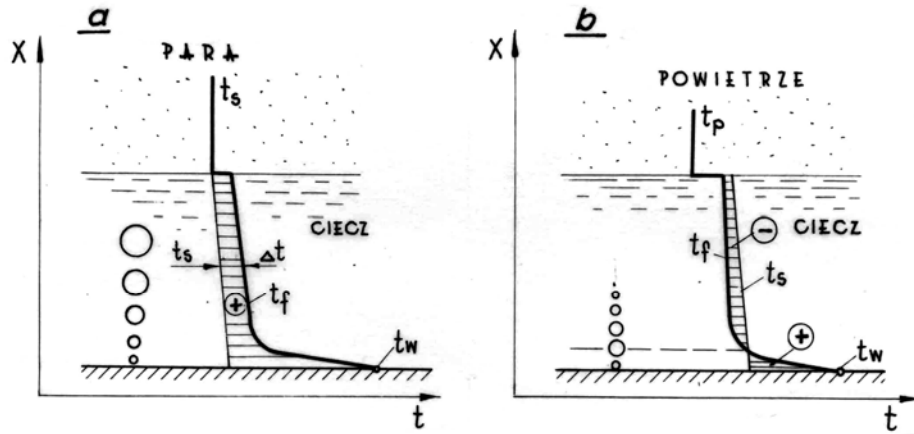
Rys. 5.25. Rozkład temperatury w cieczy podczas parowania pęcherzykowego

W porównaniu z rys. 5.24 zwraca tu uwagę znacznie większy spadek temperatury przy ścianie w porównaniu ze spadkiem przy samej powierzchni cieczy (pomiar przebiegu temperatury na samej powierzchni uniemożliwiają ruchy pęcherzyków). Ciecz w całej objętości jest przegrzana, przez co możliwe jest wspomniane parowanie do wnętrza pęcherzyków w czasie ich wznoszenia ku powierzchni cieczy. W ten sposób realizuje się tak zwane wrzenie objętościowe czyli nasyczone.

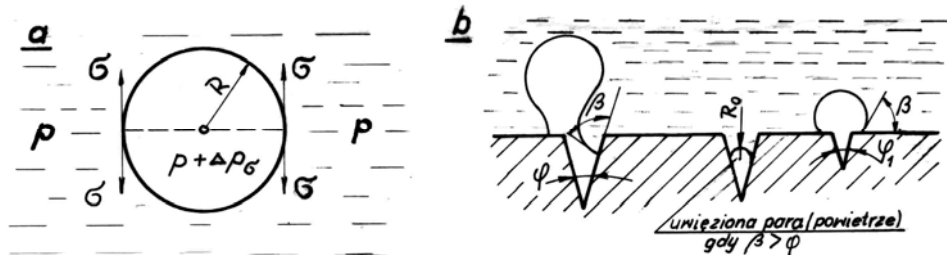
Jeżeli ciecz jest przegrzana tylko w pewnej warstwie w pobliżu ścianki, to po wyjściu ze strefy przegrzania pęcherzyki stopniowo znikają. Jest to tak zwane wrzenie lokalne albo przechłodzone.

Ciśnienie wewnątrz pęcherzyka jest większe od ciśnienia cieczy w tym miejscu o pewną wielkość Δp_{σ} równoważącą działanie napięcia powierzchniowego, które stara się zmniejszyć pęcherzyk (podtrzymuje więc istnienie swobodnej powierzchni pęcherzyka).

Początkowo wznoszące się pęcherzyki są kuliste, potem, po powiększeniu objętości, przyjmują postać grzyba.



Rys.5.26 Schematy wrzenia: objętościowego (a) i lokalnego (b)



Rys.5.27 a) siły działające na pęcherzyk pary, b) zarodki pęcherzyków w szczelinach.

Równowaga siły napięcia powierzchniowego działającego na obwodzie: $2\pi \cdot R \cdot \sigma$ i siły wypadkowej (pionowej) od wewnętrznego nadciśnienia działającego na półkulę: $\pi R^2 \cdot \Delta\rho_\sigma$ prowadzi do zależności:

$$\Delta p_\sigma = \frac{2\sigma}{R} \quad (5.109)$$

z której widać, że przy tworzeniu pęcherzyka, kiedy $R \approx 0$, konieczne byłyby ogromne nadciśnienia dla pokonania napięcia powierzchniowego i zainicjowania wzrostu pęcherzyka. A że, jak wykazały obserwacje, para wewnątrz pęcherzyka ma temperaturę nasycenia odpowiadającą panującemu w nim ciśnieniu, konieczne byłyby niezwykle wysokie przegrzania cieczy.

Jeżeli więc są na powierzchni grzejnej mikroskopijne nierówności o skończonym promieniu zaokrąglenia R_0 , to mogą i będą się na nich tworzyć pęcherzyki i to już przy niewielkich przegrzaniach cieczy.

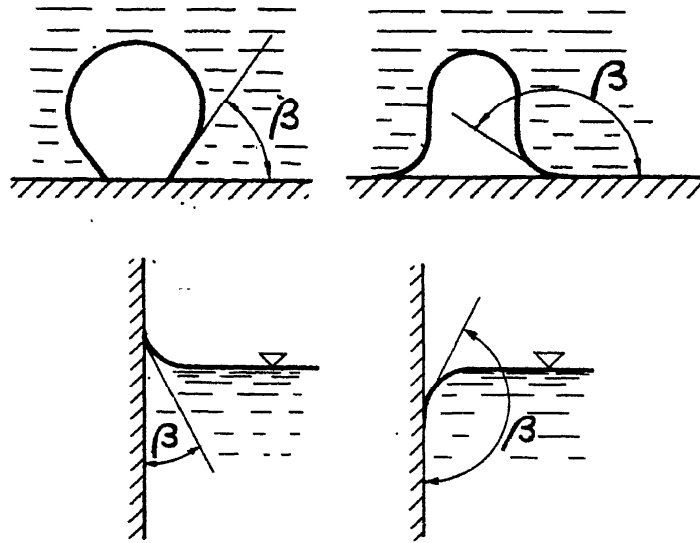
Zwiększanie temperatury ścianki powoduje, że do tworzenia pęcherzyków włączają się nierówności o mniejszym promieniu i tak stopniowo aktywizuje się coraz większa część powierzchni grzejnej.

Średnica pęcherzyka w chwili oderwania się go od ścianki zależy poza napięciem powierzchniowym od siły wyporu proporcjonalnej do różnicy gęstości cieczy i pary: $(\rho' - \rho'')$ i od zwilżalności powierzchni scharakteryzowanej kątem β^* (rys.5.28). Wynosi ona w cieczy nieporuszającej się:

$$d = 0,0209\beta \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{g \cdot (\rho' - \rho'')}} \quad (110)$$

przy czym: β podstawia się tu w stopniach.

*) Powierzchnia jest zwilżalna, gdy $\beta < 90^\circ$, a niezwilżalna dla $\beta > 90^\circ$.



Rys 5.28 Kąt zwilżenia

Wielkość:

$$l = \sqrt{\frac{\sigma}{g \cdot (\rho' - \rho'')}} \quad (5.111)$$

stanowiąca tzw. stałą Laplace'a używana jest jako charakterystyczny wymiar liniowy w liczbach kryterialnych wyrażających podobieństwo procesów wrzenia.

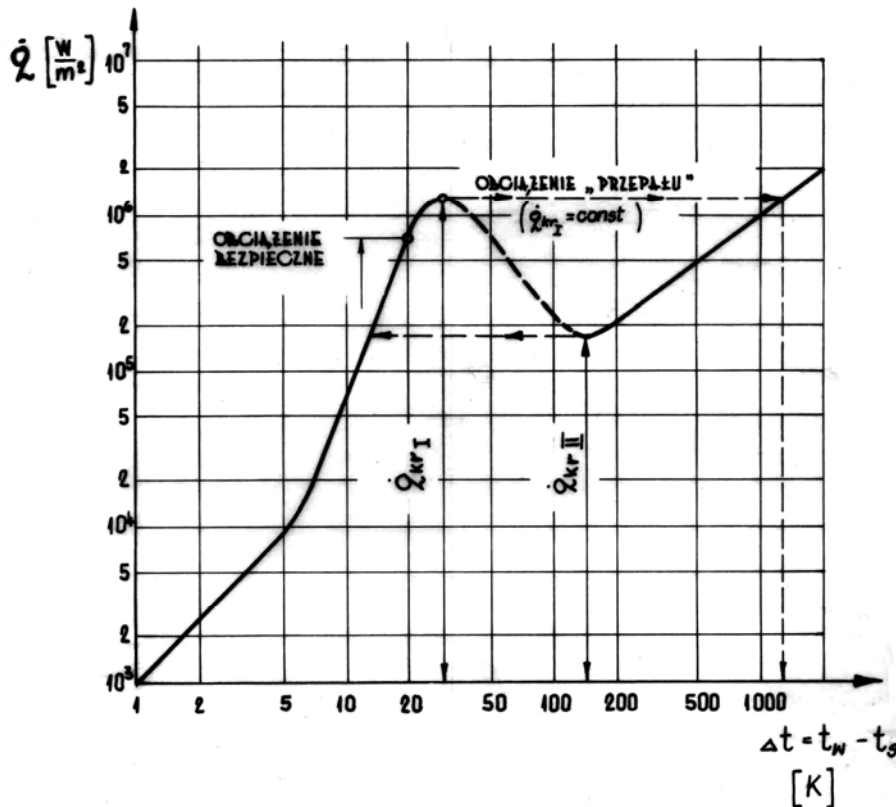
Wrzenie błonowe W miarę wzrostu temperatury ilość miejsc na powierzchni grzejnej „produkujących” pęcherzyki pary rośnie do tego stopnia, że sąsiednie pęcherzyki łączą się tworząc coraz większe płaskie pęcherze, a w końcu rozległą błonę parową, która izoluje powierzchnię grzejną od cieczy wskutek stosunkowo małej przewodności cieplnej pary. W urządzeniach technicznych wrzenie błonowe jest więc niepożądane, a np. w parownikach kotłów parowych wręcz niebezpieczne: wtedy bowiem, wskutek braku chłodzenia ścianki przez wodę, temperatura ścianki silnie wzrasta, jej wytrzymałość spada i ścianka może ulec zniszczeniu.

Wszystkie opisane rodzaje wrzenia można zaobserwować podczas doświadczenia na zbiorniku z wodą pod ciśnieniem np. atmosferycznym i poziomą rurką, w której umieszczono grzejnik elektryczny.

Doprowadzona do grzejnika moc elektryczna równa jest doprowadzonemu strumieniowi cieplnemu Q , a po podzieleniu przez powierzchnię rurki A otrzymuje się gęstość strumienia cieplnego \dot{q} .

Przy pomocy umieszczonej w ściance rurki termopary mierzy się temperaturę ścianki t_w .

Rezultaty eksperymentu dla ciśnienia atmosferycznego przedstawia (w skali logarytmicznej!) rys. 5.29.



Rys.5.29 Zależność gęstości strumienia cieplnego od przegrzania Δt , cieczi na ścianie

W miarę wzrostu doprowadzanej mocy elektrycznej wzrasta temperatura ścianki. Na wykresie jest to nadwyżka tej temperatury nad temperaturą pary nasyconej: $(t_w - t_s)$. Rośnie też gęstość strumienia cieplnego \dot{q} .

Wrzenie pęcherzykowe zaczyna się przy nadwyżce temperatury ścianki wynoszącej ok. 5 K. Maksymalna, tzw. krytyczna, gęstość strumienia cieplnego: $\dot{q}_{krI} \approx 1,3 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$ występuje przy: $(t_w - t_s) \approx 25 \text{ K}$. Jest to tzw. kryzys wrzenia pęcherzykowego albo pierwszy kryzys wrzenia. Dalszy wzrost temperatury ścianki powoduje przeskok (przy $\dot{q}_{krI} = \text{const}$) do wrzenia błonowego, w którym ciepło przenoszone jest głównie przez promieniowanie, a temperatura ścianki gwałtownie podnosi się o wiele set kelwinów - obserwuje się rozżarzenie ścianki do czerwoności. Jeżeli nie nastąpi zniszczenie ścianki przez przepalenie, a doprowadzaną elektryczną moc grzejną będzie się zmniejszać, to gęstość strumienia i temperatura ścianki będą maleć. Wtedy po osiągnięciu tzw. kryzysu wrzenia błonowego, czyli drugiego kryzysu wrzenia, nastąpi powrotny przeskok do wrzenia pęcherzykowego.

Jeżeli grzanie jest inne niż elektryczne, tak że temperatura ścianki nie może wzrastać nieograniczenie (w praktyce do tzw. przepału tj. do zniszczenia ścianki), jak to się dzieje przy grzaniu skraplającą się parą o odpowiednio wyższej temperaturze, to po osiągnięciu pierwszego kryzysu wrzenia gęstość strumienia cieplnego będzie spadać, a wrzenie przyjmie charakter przejściowy, tzn. tworząca się błona parowa staje się niestabilna i nie zajmuje jeszcze całej powierzchni (kreskowana część krzywej). Dopiero po ustabilizowaniu się błonki i następnie wzroście temperatury ścianki, a z nim promieniowania ciepła przez błonkę parową, strumień cieplny może ponownie wzrastać.

W urządzeniach technicznych działających w podwyższonej temperaturze niedopuszczalne jest przekroczenie krytycznej gęstości strumienia ciepłego \dot{q}_{krI} ze względu na niebezpieczeństwo zniszczenia ścianki, a w urządzeniach działających w niższych temperaturach jest to niepożądane ze względu na obniżenie α i \dot{q} , a więc wydajności urządzenia (np. wyparnego).

Krytyczna gęstość strumienia ciepłego zależy od materiału ścianki, ciśnienia i oczywiście od rodzaju cieczy. Dla wody na ściance stalowej można ją określić np. z następującego wzoru N. Zuber'a:

$$\dot{q}_{krI} = \frac{\pi}{24} r \cdot \rho'' \cdot \sqrt[4]{\frac{\sigma g (\rho' - \rho'')}{\rho''^2}} \cdot \sqrt{\frac{\rho' + \rho''}{\rho'}} \quad (5.112)$$

Wpływ materiału ścianki ilustruje poniższe zestawienie dla wody pod ciśnieniem atmosferycznym.

Powierzchnia grzejna:

z miedzi	$\dot{q}_{krI} = 630\ 000 \frac{W}{m^2}$
z miedzi chromowanej	$\dot{q}_{krI} = 850\ 000 \text{ ''}$
ze stali	$\dot{q}_{krI} = 1300\ 000 \text{ ''}$
drut platynowy	$\dot{q}_{krI} = 1450\ 000 \text{ ''}$

Współczynnik przejmowania ciepła α przy wrzeniu pęcherzykowym wyznacza się z danych doświadczalnych uzyskanych w sposób zbliżony do opisanego wyżej. Znając z nich gęstość strumienia ciepłego \dot{q} i różnicę temperatur ($t_w - t_s$) można wyznaczyć współczynnik przejmowania ciepła:

$$\alpha = \frac{\dot{q}}{t_w - t_s} \quad (5.113)$$

W ten sposób z wykresu 5.29 otrzymuje się wykres 5.30.

Przebieg krzywej wrzenia pęcherzykowego jest dość regularny i dla różnych cieczy otrzymuje się wyrażenie:

$$\alpha = C_1 \cdot \dot{q}^n \quad (5.114)$$

w którym $n = 0,6 \dots 0,8$.

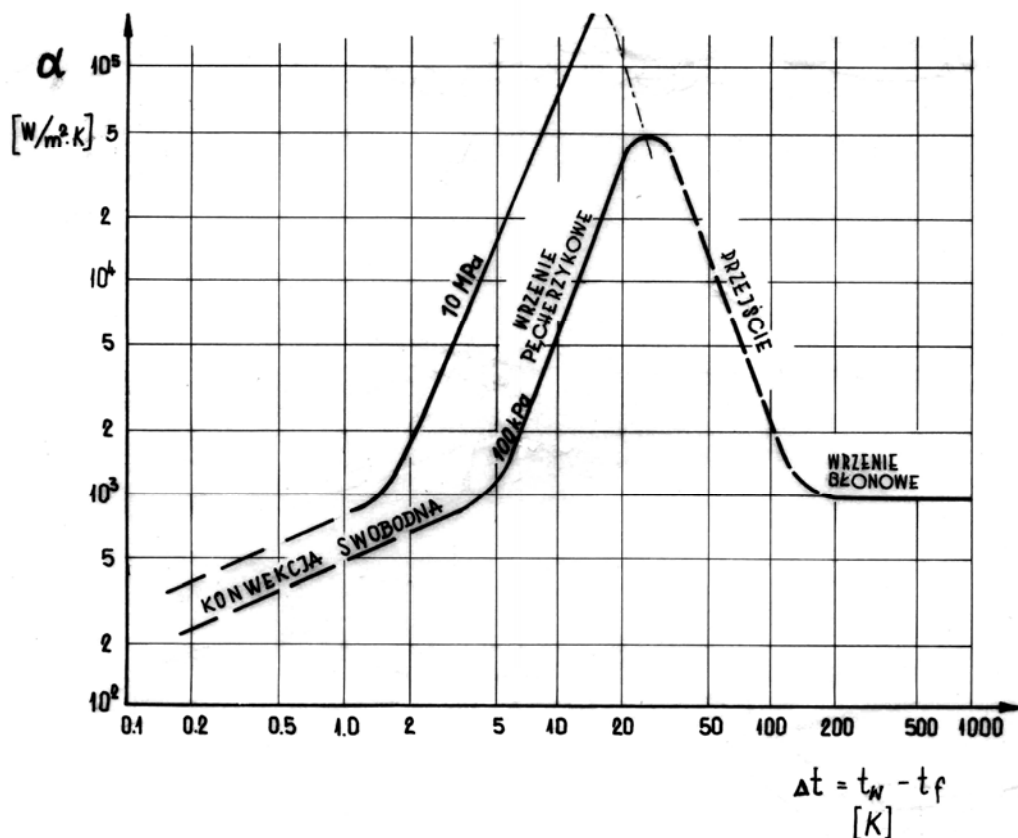
albo:

$$\alpha = C_2 \cdot \Delta t^m \quad (5.115)$$

Między stałymi w równaniach (5.114) i (5.115) istnieją przy uwzględnieniu wzoru (5.113) zależności:

$$m = \frac{n}{1-n} \quad (5.116)$$

$$C_2 = C_1 \frac{1}{1-n}$$



Rys.5.30 Zależności α od przegrzania cieczy na ścianie Δt dla ciśnień: 100 kPa i 10 MPa.

Wartości stałych C i n zależą poza rodzajem cieczy od materiału ścianki i warunków hydromechanicznych, w szczególności od tego, czy wrzenie ma miejsce w warunkach konwekcji swobodnej czy w warunkach konwekcji wymuszonej (podczas przepływu cieczy).

6.2. Wrzenie w warunkach konwekcji swobodnej

Wrzenie w zbiornikach albo w dużej objętości charakteryzuje się tym, że ciecz pozostaje w spoczynku, a rozwój i wznoszenie się pęcherzyków odbywa się w sposób niezakłócony wpływami zewnętrznymi.

Proces ten badano przeważnie na poziomych drutach, rurkach lub płytach, lecz przekonano się, że konfiguracja powierzchni nie ma większego wpływu na zjawisko. Tłumaczy się to małymi rozmiarami pęcherzyków, które decydują przecież o całości procesu. Jednak dla płyt zwróconych do dołu krytyczna gęstość strumienia cieplnego jest o 40% niższa niż przy zwróconych do góry.

Zestawienie przykładowych wzorów typu (5.114) dla rozwiniętego wrzenia pęcherzykowego w zbiornikach podaje tab. 9.

Wzory te są bardzo proste i wygodne w stosowaniu, ale ważność ich jest zawsze ograniczona do jednego płynu i pewnych tylko warunków. W literaturze specjalistycznej można znaleźć dalsze wzory tego rodzaju.

Ogólniejsze ujęcie zapewniają wzory oparte na teorii podobieństwa.

Korelacje doświadczalne na α [W/m²·K]
dla rozwiniętego wrzenia pęcherzykowego w zbiornikach.

Ciecz	Wzór*)	Uwagi
Woda	$\alpha = 1,58 \cdot \dot{q}^{0,7} \cdot p^{0,15}$ $\alpha = 4,65 \cdot (\Delta t)^{2,33} \cdot p^{0,5}$	20 ... 10 000 kPa
<u>Roztwory wodne</u>		
9% NaCl	$\alpha = 0,37 \cdot \dot{q}^{0,7} \cdot p^{0,4}$	20 ... 1 000 kPa
24% NaCl	$\alpha = 0,27 \cdot \dot{q}^{0,7} \cdot p^{0,4}$	- " -
25% cukru	$\alpha = 0,24 \cdot \dot{q}^{0,7} \cdot p^{0,4}$	- " -
10% Na ₂ SO ₄	$\alpha = 0,13 \cdot \dot{q}^{0,7} \cdot p^{0,4}$	- " -
amoniak	$\alpha = 4,4 \cdot (1+0,007 t) \cdot \dot{q}^{0,7}$	$\dot{q} > 1 650 \text{ W/m}^2$ $\dot{q}_{kr} = 1,08 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$
freon R22	$\alpha = 4,6 \cdot \dot{q}^{0,7}$	
freon R142	$\alpha = 0,62 \cdot \dot{q}^{0,8}$	
alkohol etylowy	$\alpha = 0,115 \cdot \dot{q}^{0,7} \cdot p^{0,52}$	100 ... 800 kPa
gazolina	$\alpha = 0,11 \cdot \dot{q}^{0,7} \cdot p^{0,4}$	20 ... 1 000 kPa
benzol	$\alpha = 0,13 \cdot \dot{q}^{0,7} \cdot p^{0,4}$	- " -
rtęć	$\alpha = 4,08 \cdot 10^{10} \cdot \dot{q}^{-1,58}$ $\alpha = 10 374 \cdot (\Delta t)^{-0,52}$	ciśn. atmosferyczne

*) Ciśnienie: p [kPa].

Zastosowanie teorii podobieństwa do niezwykle skomplikowanego zjawiska, jakim jest wrzenie, natrafia na trudności spowodowane niedostateczną znajomością mechanizmu zjawiska. Nie można więc ustalić pełnego systemu równań różniczkowych i wyprowadzić wszystkich kryteriów podobieństwa.

Stosowane obecnie liczby kryterialne nie oddają niestety podobieństwa w pełni.

Jako wymiar charakterystyczny używana jest powszechnie stała Laplace'a \underline{l} proporcjonalna do średnicy odrywającego się pęcherzyka i określona wzorem (5.111).

Liczbę Nusselta dla wrzenia definiuje się jako:

$$\underline{Nu}_k = \frac{\alpha \cdot \underline{l}}{\lambda'} \quad (5.117)$$

przy czym przewodność cieplna λ' odnosi się do cieczy.

Liczba Reynolds'a dla wrzenia określona jest jako:

$$\text{Re}_k = \frac{\dot{q}}{\Delta i \cdot \rho''} \cdot \frac{1}{v'} = \frac{\dot{m}''}{\rho''} \cdot \frac{1}{v'} = \frac{\dot{V}'' \cdot 1}{v'} \quad (5.118)$$

zawiera więc objętościowy strumień przepływu pary \dot{V}'' [$\text{m}^3/\text{s} \cdot \text{m}^2$] powstałej na powierzchni 1 m^2 powierzchni grzejnej (w miejsce prędkości w zwyczajnej liczbie Reynolds'a). Charakterystyczny wymiar liniowy jest oczywiście ten sam co uprzednio.

Spośród innych stosowanych dla wrzenia liczb podobieństwa używać będziemy liczby Archimedeusza podanej wzorem (5.28) oraz liczby Kutateladzego*:

$$\text{Ku} = \frac{c' \cdot \rho' \cdot \sigma \cdot T_s}{(\Delta i \cdot \rho'')^2 \cdot l} \quad (5.119)$$

przy czym charakterystycznym wymiarem jest znowu stała Laplace'a, a T_s [K] jest bezwzględną temperaturą nasycenia. Liczba Kutateladzego wyraża podobieństwo częstości odrywania się pęcherzyków od ścianki.

Przykładem zależności kryterialnej dla wrzenia w zbiornikach jest wzór S.S. Kutateladzego:

$$\text{Nu}_k = 0,44 (\text{Re}_k)^{0,7} \cdot (\text{Pr})^{0,35} \cdot (\text{K}_p)^{0,7} \quad (5.120)$$

w którym nowa liczba bezwymiarowa:

$$\text{K}_p = \frac{Pl}{\sigma} \cdot 10^{-4} \quad (5.121)$$

uwzględnia wpływ ciśnienia (ciśnienie najlepiej tu wyrażać w N/m^2).

Są też podobne wzory innych autorów. Ogólnie trzeba stwierdzić, że wszystkie wzory dają rozbieżne między sobą wyniki. Należy to przypisać wielkiej złożoności zjawiska i nieujętych ilościowo we wzorach ważnym czynnikiem warunkującym proces - w szczególności związanym z powierzchnią grzejną i jej mikrostrukturą. Badania wrzenia rozpoczęto zresztą stosunkowo późno i trwają one nadal.

Z punktu widzenia inżynierskiego wspomniane rozbieżności często nie mają większego znaczenia. Współczynniki przejmowania ciepła przy wrzeniu są bowiem duże, wskutek czego opór cieplny cieczy wrzącej jest na ogół niewielki w stosunku do pozostałych oporów złożonego przenoszenia ciepła.

Również **kryzys wrzenia** pęcherzykowego można wyznaczyć z zależności uogólnionych, jak na przykład ze wzoru D.A. Łabuncowa:

$$\text{Re}_{kr} = 68 (\text{Ar})^{4/9} \cdot (\text{Ku})^{1/3} \cdot (\text{Pr})^{1/3} \quad (5.122)$$

Zależności uogólnione mają tę zaletę, że w razie potrzeby można z nich wyprowadzić wzory uproszczone ważne dla określonej cieczy, takie jak w tab. 9.

*) Samson S. Kutateladze (1914 – 1986), termofizyk rosyjski

Wrzenie w rurach pionowych jest procesem bardziej skomplikowanym, a cały wrzący płyn porusza się pod działaniem wznoszących sił wyporu. Zazwyczaj ciecz wchodzi do rury z temperaturą niższą od temperatury nasycenia pod danym ciśnieniem hydrostatycznym, jest więc przechłodzona. Po przejściu pewnego odcinka zaczyna się wrzenie lokalne - powstałe na powierzchni ścianki pęcherzyki zanikają w przechłodzonej cieczy. Nieco dalej ciecz nagrzewa się już na tyle, aby utrzymać wrzenie objętościowe.

Ze względu na ograniczoną przestrzeń wznoszące się pęcherzyki łączą się w coraz większe i przepływ mieszaniny dwufazowej staje się pęcherzowy następnie korkowy i na koniec przechodzi w pierścieniowy, kiedy to ciecz płynie coraz cieńszą warstwą po ściance, a para z kropelkami cieczy środkiem. Wreszcie w najwyższej części rurki płynie sama para, początkowo jeszcze mokra (z kropelkami wody), a potem sucha lub przegrzana (rys. 5.31). Wobec stałego wzrostu objętości płynu prędkość przepływu mieszaniny cieczowo - parowej stale wzrasta, jednak prędkości cieczy i pary są różne (większa jest prędkość pary) i występuje między nimi poślizg. Przepływ wywołany jest wyłącznie siłami wyporu, a więc jest to konwekcja naturalna.

Współczynnik przejmowania ciepła α zmienia się wzdłuż rury przyjmując różne wartości lokalne, największe w górnej części, gdzie prędkości mieszaniny cieczy i pary są największe.

Do obliczeń konstrukcyjnych stosuje się wartość średnią odniesioną do spadku temperatury: $(t_w - t_s)$. Badania W. Fritza na wodzie w rurach o długościach 0,46 do 2 m wykazały, że współczynnik ten jest wyższy o 28% od odpowiedniej wartości dla wrzenia na ścianie poziomej (w zbiorniku). Autor ten zaleca stosowanie dla różnych cieczy mnożnika 1,25 do obliczania średniego współczynnika przejmowania ciepła w rurach pionowych:

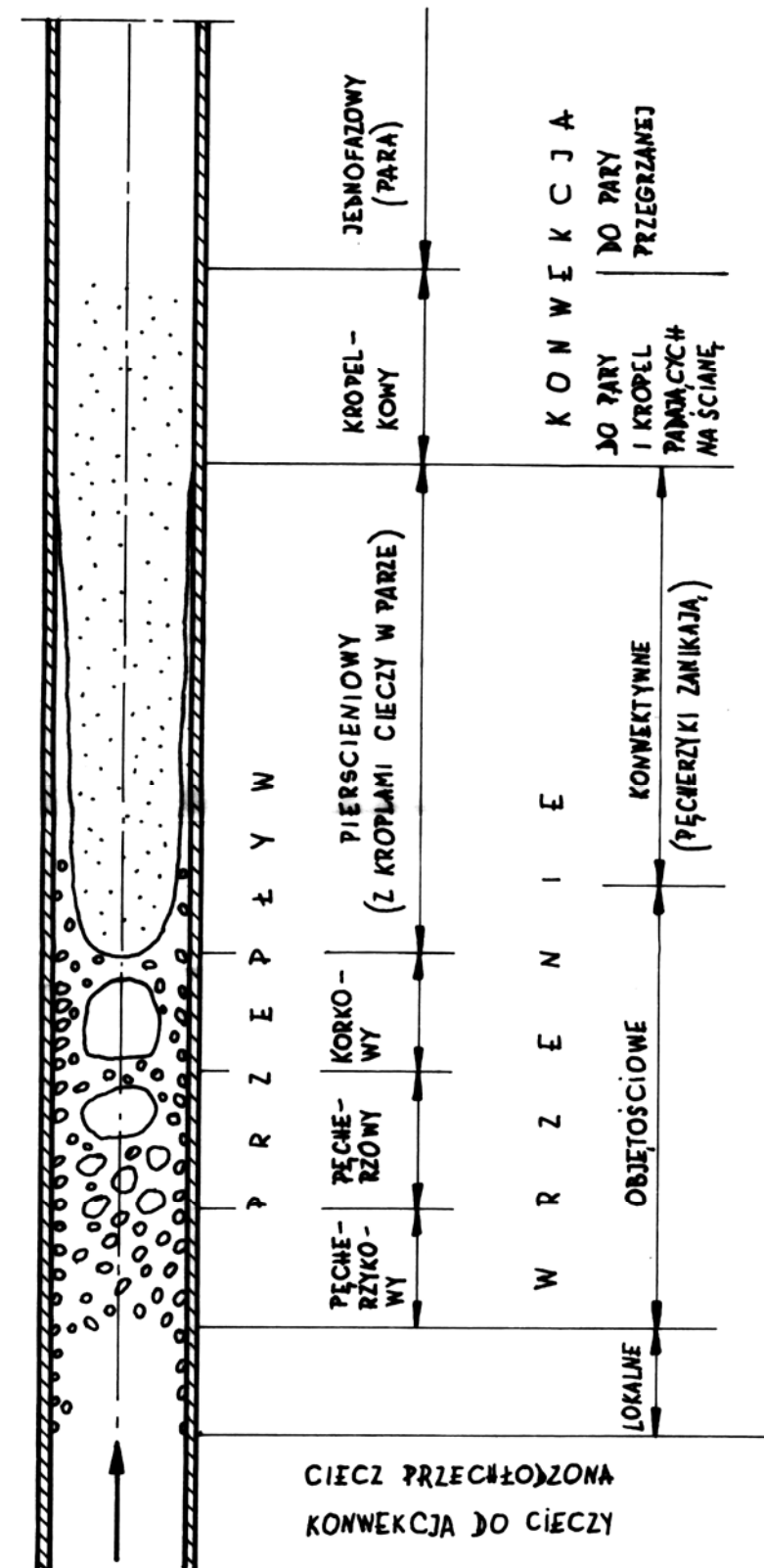
$$\alpha_r = 1,25 \cdot \alpha_{\text{zbiorn.}} \quad (5.123)$$

Jest to zależność przybliżona - dokładniejszych należy poszukiwać w literaturze specjalistycznej dla danego problemu.

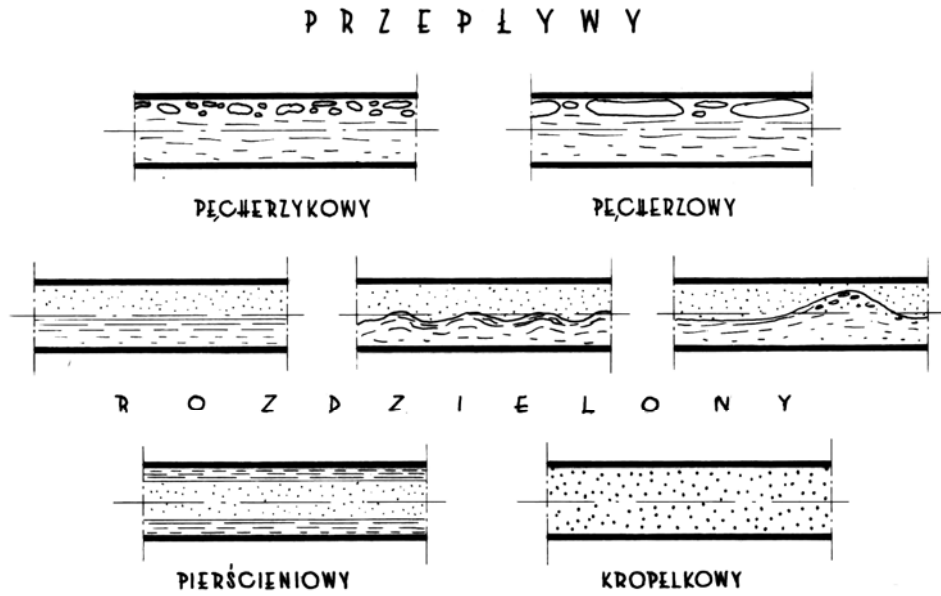
6.3. Wrzenie w warunkach konwekcji wymuszonej

Przypadek ten dotyczy przede wszystkim ważnego w technice wrzenia podczas przepływu cieczy przez rury okrągłe dowolnie zorientowane w przestrzeni i stanowiące podstawowy element konstrukcyjny parowników z wymuszoną cyrkulacją w kotłach, chłodziarkach i wyparkach. Obraz przepływu jest tu tak samo złożony i przechodzi przez różne fazy jak w opisanej rurze pionowej z konwekcją naturalną z tym, że w rurach poziomych (i słabo nachylonych) pęcherzyki i pęcherze poruszają się pod sklepieniem rury i przy większej ilości pary występuje przepływ rozwarstwiony, w którym ciecz płynie dołem wykazując różny stopień sfałowania powierzchni (rys. 5.32).

W wyniku licznych badań przede wszystkim doświadczalnych stwierdzono, że przejmowanie ciepła mało się różni od omówionego poprzednio przejmowania ciepła w warunkach konwekcji swobodnej. W szczególności nie zaobserwowano wpływu prędkości wlotowej cieczy na przejmowanie ciepła przy rozwiniętym wrzeniu pęcherzykowym - gęstość strumienia cieplnego zależy tu wyłącznie od temperatury ścianki i ciśnienia, tak jak przy wrzeniu w zbiorniku.

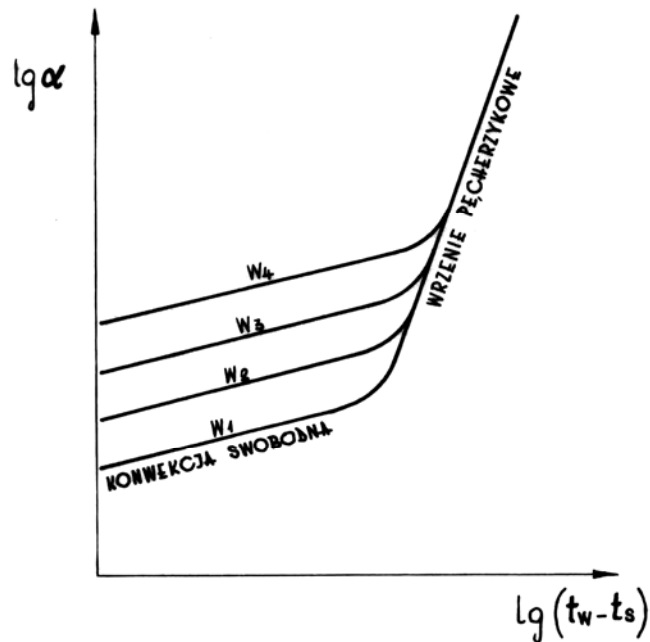


Rys. 5.31 Obraz przepływu dwufazowego w rurze pionowej w warunkach konwekcji swobodnej



Rys.5.32 Obrazy wymuszonego przepływu dwufazowego w rurze poziomej

Wpływ prędkości występuje tam, gdzie nie ma jeszcze wrzenia, czyli w obszarze konwekcji oraz w obszarze wrzenia częściowego (lokalnego). Wyraża się on późniejszym (tj. dla większych przegrzań: $t_w - t_s$) rozpoczęciem wrzenia pęcherzykowego (rys. 5.33).



Rys.5.33 Zmienność współczynnika przejmowania ciepła dla konwekcji wymuszonej

Współczynnik przejmowania ciepła α oblicza się oddzielnie dla poszczególnych obszarów. Tam gdzie nie ma jeszcze pęcherzyków, poznajemy uprzednio wzorami dla przejmowania ciepła w warunkach konwekcji wymuszonej. Natomiast w obszarze wrzenia częściowego, czyli nierozwiniętego wrzenia pęcherzykowego, można stosować odpowiednie wzory uproszczone jak na przykład:

$$\begin{aligned} \text{dla freonu 12:} \quad \dot{q} &= 175 \dots 2300 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ \alpha &= 65 \cdot \dot{q}^{1/4} \end{aligned} \quad (5.124)$$

$$\begin{aligned} \text{dla freonu 22:} \quad \dot{q} &= 175 \dots 2300 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \\ \alpha &= 76 \cdot \dot{q}^{1/4} \end{aligned} \quad (5.125)$$

W obszarze wrzenia pęcherzykowego, jeżeli warstwa cieczy nie jest zbyt cienka, można stosować te same wzory co dla wrzenia w warunkach konwekcji swobodnej, zarówno uproszczone jak i kryterialne (dość dobre wyniki daje wzór Kutateladze). Przykładowo dla wrzenia freonu 12 w rurach poziomych, w których stopień suchości pary na wylocie wynosi co najmniej 60%, mamy wzór:

$$\alpha = 5,3 \cdot \dot{q}^{0,6} \quad (5.126)$$

Dla rur pionowych stała wynosi 6,1. Dlatego przy stosowaniu tych uproszczonych wzorów należy zawsze poszukiwać w literaturze specjalistycznej takich, które otrzymano w warunkach najbliższych do tych, jakie obliczamy.

Dla wody prostą metodę postępowania podał D. A. Łabuncow. Stosować ją można pod warunkiem, że stopień suchości pary na wylocie z rury nie przekracza 70%. Oblicza się tu oddzielnie współczynnik przejmowania ciepła przy zwykłej konwekcji wymuszonej α_w i współczynnik dla wrzenia pęcherzykowego α_q (wzorem 1 z tab. 9). Następnie tworzy się stosunek α_q/α_w .

Jeżeli $\frac{\alpha_q}{\alpha_w} < 0,5$, to mamy czystą konwekcję i $\alpha = \alpha_w$

Jeżeli $\frac{\alpha_q}{\alpha_w} > 2,0$, to mamy rozwinięte wrzenie pęcherzykowe i $\alpha = \alpha_q$.

W obszarze przejściowym, gdy: $\alpha_q/\alpha_w = 0,5 \dots 2,0$ należy uwzględnić oba zjawiska, do czego służy następujący wzór interpolacyjny:

$$\alpha = \alpha_w \cdot \frac{4\alpha_w + \alpha_q}{5\alpha_w - \alpha_q} \quad (5.127)$$

Metoda ta jest ważna dla prędkości wody 0,2 ... 6,7 m/s. W monografii T. Hoblera*) można znaleźć podobną metodę Stjuszyna dla dowolnej cieczy.

*) T. Hobler: „Ruch ciepła - wymienniki”. WNT, Warszawa 1986.

Dla dowolnej cieczy wyniki badań wielu autorów skorelował A.A. Iwaszkiewicz podając dość uniwersalny wzór:

$$\text{Nu}_k = 2 \left[\frac{(\text{Re}_k) \cdot (\text{Pr})^{1/2}}{(\text{Ku})^{1/2} \cdot (\text{Ar})^{1/4}} \cdot \left(\frac{\rho''}{\rho'} \right)^{1/4} \right]^{0,7} \quad (5.128)$$

ważny dla rur okrągłych i pierścieniowych. Temperaturą charakterystyczną jest tu jak poprzednio temperatura nasycenia t_s .

Wzór ten sprawdzono na wielu cieczach (woda, freony F11 i F12, amoniak, tlen, azot, chlorek etylu, benzen, izopropanol, etanol, n-butanol, sól, rtęć z domieszką magnezu, roztwory wodne sacharozy, chlorku sodu i węglanu wapnia), w zakresie ciśnień: 20...17 700 kPa abs, prędkości: 0,3...5,9 m/s, gęstości strumienia cieplnego: 5 800...3,7·10⁷ W/m², przechłodzenia cieczy: $t_s - t' = 0...150$ K, średnic hydraulicznych: 4,3...130 mm, ogrzewanej długości kanału: 23...4 900 mm i stopni suchości pary na wylocie: 0...0.9. Uzyskana dokładność wyniosła: ± 25 %.

Ponadto było:

$$\begin{aligned} \text{Pr} &= 0,004...25, & \rho'/\rho'' &= 4,3...7800, \\ d_h/l &= 1,8...120, & L/l &= 9,3...2000, & \text{Nu}_k &= 1,23...1260. \end{aligned}$$

Wzór Iwaszkiewicza obowiązuje dla cieczy zawierających nieznaczne ilości rozpuszczonych gazów (poniżej 0,06 cm³/litr). Przy większych ilościach np. do 1,5 cm³/litr obserwuje się wzrost liczby Nusselta nawet o 60 %. Stąd uzyskane tym wzorem wyniki można uważać dla przeciętnych warunków za bardzo bezpieczne (por. wyniki ćwiczeń 3 i 4).

Kryzys wrzenia pęcherzykowego ma w tych warunkach zupełnie inny i bardziej skomplikowany mechanizm niż przy wrzeniu w zbiornikach. Zależy on generalnie od obrazu przepływu. I tak np. w przepływie rozwarstwowanym górna część ścianki może stracić cienką warstwę cieczy, jaka tam zazwyczaj płynie, co prowadzi do silnego nagrzania tej części ścianki i stanowi lokalny kryzys wrzenia. Podobnie może się zdarzyć przy przerwaniu warstwy cieczy w przepływie pierścieniowym itp. Kryzys ten wystąpić może również przy wrzeniu lokalnym (przechłodzonym). Ogólnie jednak biorąc wielkość krytycznego strumienia cieplnego $\dot{q}_{kr,T}$ wzrasta znacznie z rosnącą prędkością przepływu.

Istnieje szereg wzorów pozwalających wyznaczyć (z określoną dokładnością) wielkość krytycznego strumienia cieplnego zarówno dla rozwiniętego wrzenia pęcherzykowego jak i dla wrzenia lokalnego (przechłodzonego). Można je znaleźć w monografiach specjalistycznych*).

Na zakończenie warto zwrócić uwagę na ilościowe różnice we współczynniku przejmowania ciepła α przy wrzeniu różnych cieczy. Jeżeli przyjąć α dla wody (przy ciśnieniu atmosferycznym) za 100%, to przy identycznej gęstości strumienia cieplnego, jest: dla 20-procentowego wodnego roztworu cukru: 87 %, dla 24 - procentowego roztworu soli kuchennej (NaCl): 61%, dla amoniaku: 140%, dla freonu 12: 80%, dla izopropanolu: 70%, nafty: 52%, toluolu 36% i dla n-butanolu: 32%.

*) Np. J. Madejski; Wymiana ciepła przy wrzeniu i przepływy dwufazowe, część II. Ośrodek Informacji o Energii Jądrowej, Warszawa 1973.

Przykłady

1. Jaka jest temperatura ścianki pionowej rury w wyparce, w której woda wrze pod ciśnieniem 200 kPa abs. a zmierzona gęstość strumienia ciepłego wynosi: 80 000 W/m² ?

Rozwiązanie:

Dla rurki pionowej:

$$\begin{aligned}\alpha &= 1,25 \alpha_{\text{zbiorn.}} = 1,25 \cdot 1,58 \cdot \dot{q}^{0,7} \cdot p^{0,15} = \\ &= 1,25 \cdot 3,1,58 \cdot 80\,000^{0,7} \cdot 200^{0,15} = 11\,827 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}\end{aligned}$$

Dla ciśnienia 200 kPa abs. temperatura nasycenia:

$$t_s = 120,2^\circ\text{C}$$

a z prawa Newtona dla przejmowania ciepła:

$$t_w - t_s = \frac{\dot{q}}{\alpha}$$

Zatem

$$t_w = t_s + \frac{\dot{q}}{\alpha} = 120,2 + \frac{80\,000}{11\,827} = 127^\circ\text{C}$$

2. Obliczyć współczynnik przejmowania ciepła dla wrzącego w zbiorniku amoniaku, jeżeli ma on temperaturę -20°C, a gęstość strumienia ciepłego wynosi 25 000 W/m².

Rozwiązanie:

Dla temperatury -20°C znajdujemy z tablic:

$$\begin{aligned}\sigma &= 348 \cdot 10^{-4} \text{ N/m}, & \rho' &= 665 \text{ kg/m}^3, & \rho'' &= 1,60 \text{ kg/m}^3, \\ \lambda' &= 0,585 \text{ W/mK}, & \text{Pr} &= 1,56, & P_s &= 190 \text{ kPa} = 190 \cdot 10^3 \text{ N/m}^2, \\ \Delta i = r &= 1328 \text{ kJ/kg} = 1328 \cdot 10^3 \text{ J/kg}, & v' &= 0,30410^{-6} \text{ m}^2/\text{s}.\end{aligned}$$

Charakterystyczny wymiar liniowy:

$$l = \sqrt{\frac{\sigma}{(\rho' - \rho'')g}} = \sqrt{\frac{348 \cdot 10^{-4}}{663,4 \cdot 9,81}} = 2,31 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Liczba Reynoldsa dla wrzenia:

$$\text{Re}_k = \frac{\dot{q}}{\Delta i \cdot \rho'} \cdot \frac{1}{v'} = \frac{25\,000}{1328 \cdot 10^3 \cdot 1,6} \cdot \frac{2,31 \cdot 10^{-3}}{0,304 \cdot 10^{-6}} = 89,3$$

Liczba „ciśnieniowa”:

$$\text{K}_p = \frac{P \cdot l}{\sigma} \cdot 10^{-4} = \frac{1,9 \cdot 10^5 \cdot 2,31 \cdot 10^{-3}}{348 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^{-4} = 1,26$$

Liczbę Nusselta obliczamy ze wzoru Kutateladzego:

$$\begin{aligned}\text{Nu} &= \frac{\alpha l}{v'} = 0,44 \cdot (\text{Re}_k)^{0,7} \cdot (\text{Pr})^{0,35} \cdot (\text{K}_p)^{0,7} = \\ &= 0,44 \cdot 89,3^{0,7} \cdot 1,56^{0,35} \cdot 1,26^{0,7} = 14,0\end{aligned}$$

Zatem współczynnik przejmowania ciepła:

$$\alpha = \frac{(\text{Nu})\lambda}{l} = \frac{14 \cdot 0,585}{2,31 \cdot 10^{-3}} = 3540 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Dla porównania: obliczenia siódmym wzorem z tab. 9 dają wynik:

$$\alpha = 4,4 (1 + 0,007 t) \cdot \dot{q}^{0,7} = 4,4 [1 + 0,007 (-20)] (25\,000)^{0,7} = 4534 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

3. Obliczyć krytyczny strumień ciepły dla danych z poprzedniego zadania.

R o z w i ą z a n i e .

Posłużymy się korelacją Łabuncowa (5.122):

$$Re_{kr} = 68 (Ar)^{4/9} \cdot (Pr \cdot Ku)^{1/3}$$

Obliczamy liczbę Archimedes'a:

$$Ar = \frac{\rho' - \rho''}{\rho'} \cdot \frac{g l^3}{\nu^2} = \frac{665 - 1,6}{665} \cdot \frac{9,81 (2,31 \cdot 10^{-3})^3}{(3,04 \cdot 10^{-7})^2} = 13,0 \cdot 10^5$$

Znajdujemy dodatkowo: $c' = 4,56 \text{ kJ/kg} \cdot \text{K} = 4560 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$.

Teraz obliczamy liczbę Kutateladze'a, a następnie Re_{kr} :

$$Ku = \frac{c' \rho' \sigma \cdot T_s}{(r \cdot \rho'')^2 \nu} = \frac{4560 \cdot 662 \cdot 348 \cdot 10^{-4} (273 - 20)}{(1,328 \cdot 10^6 \cdot 1,60)^2 \cdot 2,31 \cdot 10^{-3}} = 2,554 \cdot 10^{-3}$$

$$Re_{kr} = 68 \cdot (13 \cdot 10^5)^{4/9} \cdot (1,56 \cdot 25,5 \cdot 10^{-5})^{1/3} = 2608$$

Wobec tego, że:

$$Re_{kr} = \frac{\dot{q}_{kr} \cdot l}{r \rho'' \nu'}$$

jest:

$$\dot{q}_{kr} = \frac{(Re_{kr}) r \rho'' \nu'}{l} = \frac{5630 \cdot 1,328 \cdot 10^6 \cdot 1,60 \cdot 3,04 \cdot 10^{-7}}{2,31 \cdot 10^{-3}} = 1\,575\,140 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

Ćwiczenia

1. Obliczyć współczynnik przejmowania ciepła na zewnętrznej powierzchni rury, na której wrze alkohol etylowy, a także całkowity strumień ciepły, jeżeli gęstość strumienia ciepłego wynosi $1,395 \cdot 10^4 \text{ W/m}^2$. Alkohol znajduje się pod ciśnieniem 490 kPa a wrzenie ma charakter pęcherzykowy. Rozmiary rury: długość wynosi: 1,5 m, a średnica zewnętrzna 30 mm.

$$\text{Odpowiedź: } \alpha = 2295 \text{ W/m}^2\text{K} \\ Q = 1977 \text{ W}$$

2. Określić obciążenie cieplne kotła parowego o dużej pojemności wodnej (wrzenie w zbiorniku) przy ciśnieniu 1 555 kPa abs. i temperaturze ścianki wyższej o 15 K od temperatury nasycenia.

$$\text{Odpowiedź: } \dot{q} = 1,49 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2$$

3. Obliczyć współczynnik przejmowania ciepła dla wody wrzącej, dopływającej z prędkością 1,2 m/s do rury o średnicach 25/20 mm, jeżeli temperatura na wewnętrznej powierzchni rury wynosi 200°C, a woda znajduje się pod ciśnieniem 1 255 kPa abs.

Wskazówka: skorzystać z metody Łabuncowa.

$$\text{Odpowiedź: } \alpha = 35\,000 \text{ W/m}^2\text{K}$$

4. Obliczyć współczynnik przejmowania ciepła dla wody dopływającej do rury jak w poprzednim zadaniu, ale za pomocą wzoru Iwaszkiewicza, jeżeli ciśnienie jest takie same, a gęstość strumienia wynosi $350\,000 \text{ W/m}^2$.

$$\text{Odpowiedź: } \alpha = 22\,000 \text{ W/m}^2\text{K}$$

7. PRZEJMOWANIE CIEPŁA PRZY SKRAPLANIU PAR

Gdy para zetknie się ze ścianką o temperaturze wyższej od temperatury nasycenia dla danego ciśnienia pary, to nie wystąpi skraplanie, a przejmowanie ciepła jest takie jak w gazach. Jeżeli jednak temperatura ścianki jest niższa, to nastąpi skraplanie pary zarówno wtedy, gdy para jest nasycona jak i gdy jest przegrzana (jednak niezbyt wysoko).

Skraplanie pary może być *blonowe*, kiedy skropliny pokrywają ściankę cienką warstwą spływającą swobodnie w dół lub „zmiotaną” przez strumień pary - albo *kropłowe*, kiedy wskutek słabej zwilżalności ścianki przez ciecz ta ostatnia ściąga się w krople, które spływają lub są zmiotane przez przepływającą parę.

7.1. Skraplanie kropłowe

Skraplanie kropłowe może wystąpić jedynie na powierzchniach bardzo gładkich. Może jednak powstać również na powierzchniach mniej gładkich, ale pokrytych substancjami pogarszającymi zwilżalność (dla wody są to tzw. substancje hydrofobowe), np. olejem, kwasami tłuszczowymi itp. W tych przypadkach kondensacja kropłowa utrzymuje się tylko przez pewien czas, aż do zużycia tych substancji (kilka do kilkudziesięciu godzin), po czym przechodzi w blonową.

W kondensacji kropłowej obserwuje się współczynniki przejmowania ciepła wielokrotnie (6 ÷ 7-krotnie) większe niż przy blonowej. Nie musi to jednak być regułą, jak się często sądzi. Analiza zjawiska wykonana przez R. Gregoriga wykazała, że w pewnych warunkach (przy małych różnicach temperatur między ścianką i parą oraz dla niższych części płyty, gdzie spływające krople łączą się w grubszą warstwę) współczynniki przejmowania ciepła dla płyty, na której ma miejsce skraplanie kropelkowe, są takie same, a nawet niższe od tych, jakie daje kondensacja blonowa w tych samych warunkach.

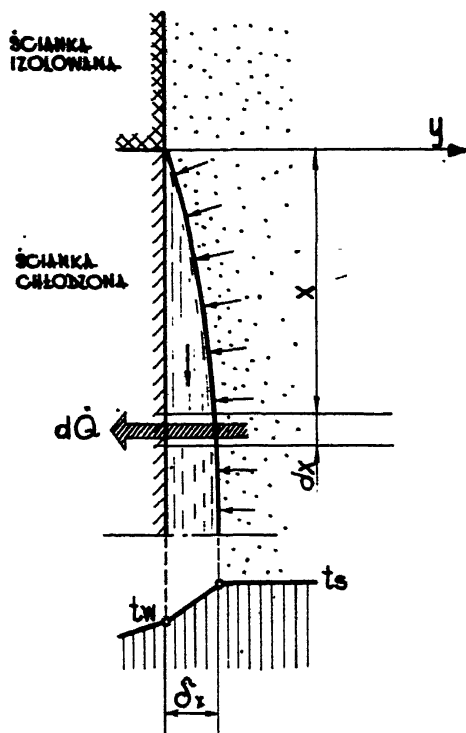
7.2. Skraplanie blonowe

Jest to podstawowy typ skraplania, na jaki liczymy w urządzeniach technicznych. Mimo, że współczynnik przejmowania ciepła jest tu gorszy od skraplania kropłowego, jest on i tak bardzo duży - jedynym oporem cieplnym jest bowiem błona skroplin na ściance, w której ciepło oddane przez skraplającą się na jej powierzchni parę jest przenoszone dalej do ścianki - najczęściej na drodze czystego przewodzenia

W odróżnieniu od prądów konwekcyjnych w płynach nie zmieniających swojego stanu skupienia, które to prądy zbliżają się do ścianki i po oddaniu ciepła wracają do rdzenia płynu, tu mamy ruch pary tylko w jednym kierunku: do ścianki. Podczas zmiany fazowej para oddaje ciepło skraplania i jednocześnie zmniejsza bardzo silnie swoją objętość osadzając się jako skropliny na błonie cieczerwowej.

Wyznaczenie oporu cieplnego sprowadza się więc do określenia grubości błony - najpierw wartości lokalnej, a potem średniej dla całej powierzchni ścianki.

Zadanie to zostanie rozwiązane dla procesu ustalonego w czasie na ściance pionowej, nieporuszającej się pary, stałej temperatury ścianki i laminarnego spływu błony skroplin. W ten właśnie sposób postawił i rozwiązał po raz pierwszy ten problem W. Nusselt (1916 r.).



Rys.5.34 Schemat błonki skroplin na ścianie pionowej

Bierzemy pod uwagę element błonki odległy od górnej krawędzi ścianki o x , długości dx , szerokości B i grubości δ_x (rys. 5.34). Przewodzenie ciepła w błonie daje elementarny strumień ciepła:

$$d\dot{Q} = -\lambda' A \cdot \text{grad} t = -\lambda' (B dx) \cdot \frac{t_s - t_w}{\delta_x} \quad (5.129)$$

Ujemny znak po prawej stronie wskazuje jedynie, że ciepło $d\dot{Q}$ skierowane jest w kierunku ujemnym osi y , a więc do ściany. W dalszym ciągu można więc ten znak pominąć, zatem:

$$d\dot{Q} = \lambda' (B \cdot dx) \cdot \frac{t_s - t_w}{\delta_x} \quad (5.130)$$

Założono tu liniowy charakter przebiegu temperatury w błonie, co w praktyce spełnione jest jedynie w przybliżeniu (przechładzanie skroplin przy ścianie). Będzie to jednym z powodów pewnych rozbieżności z wynikami eksperymentów.

Przejmowanie ciepła przez elementarną powierzchnię ścianki ($B \cdot dx$) daje zależność:

$$d\dot{Q} = \alpha_{lok} \cdot A \cdot (t_s - t_w) = \alpha_{lok} \cdot (B dx) \cdot (t_s - t_w) \quad (5.131)$$

Strumienie ciepłne w obu wyrażeniach są oczywiście takie same.

Z przyrównania równań (5.130) i (5.131) otrzymuje się:

$$\boxed{\alpha_{lok} = \frac{\lambda'}{\delta_x}} \quad (5.132)$$

W celu wyznaczenia grubości błony $\delta_x = f(x)$ rozpatrzmy bilans ilości substancji dla elementu objętościowego błony (rys. 5.34) o wysokości dx , grubości (w miejscu \underline{x}) δ_x i szerokości równej szerokości płyty B . Do rozpatrywanego elementu wpływa z góry przez przekrój $(B \cdot dx)$ strumień masy:

$$\dot{m}_x = w_{sr} \cdot \varrho' \cdot (B \cdot dx) \quad (5.133)$$

a opuszcza go strumień powiększony:

$$\dot{m}_{x+dx} = \dot{m}_x + d\dot{m} = \dot{m}_x + \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x} \cdot dx = \dot{m}_x + B \cdot \varrho' \cdot \frac{\partial (w_{sr} \cdot \delta_x)}{\partial x} \cdot dx \quad \blacktriangle (5.134)$$

Przyrost strumienia masy spływających kropli wynosi więc na odcinku dx

$$d\dot{m} = B \cdot \varrho' \cdot \frac{\partial (w_{sr} \cdot \delta_x)}{\partial x} dx \quad (5.135)$$

Uzyskany przyrost pochodzi z wykroplonej na odcinku dx pary, której dopływający strumień masy wynosi:

$$d\dot{m} = \frac{d\dot{Q}}{\Delta i} = \lambda' \cdot (B \cdot dx) \cdot \frac{t_s - t_w}{\delta_x \cdot \Delta i} \quad (5.136)$$

Podstawiono tu w miejsce $d\dot{Q}$ jego wartość wg (5.130), a przez Δi oznaczono jednostkowe ciepło oddane przy skropleniu.

Przyrównanie dwu ostatnich równań daje:

$$\varrho' \cdot \frac{\partial (w_{sr} \cdot \delta_x)}{\partial x} = \lambda' \cdot \frac{t_s - t_w}{\delta_x \cdot \Delta i} \quad (5.137)$$

Potrzebna tu jest znajomość średniej prędkości spływu kropli w_{sr} .

Prędkość spływu w_x zmienia się zarówno z wysokością \underline{x} jak i w kierunku osi y :

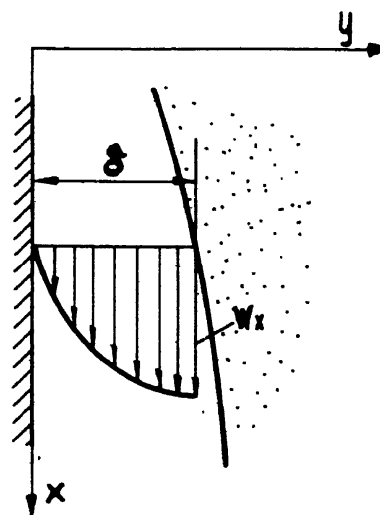
$$w_x = f(x, y)$$

Dla jej wyznaczenia należy rozwiązać równanie ruchu Naviera - Stokesa, w którym pomija się składowe prędkości w pozostałych dwu kierunkach: $w_y = w_z = 0$ i spadek ciśnienia: $\partial P / \partial x = 0$.

Ponieważ prędkość spływu ma być uśredniona tylko na grubości błony, a więc wzdłuż osi y (rys. 5.35), zagadnienie może być rozpatrywane przy danym $x = \text{const.}$ (pomija się pochodne względem \underline{x}).

W tych warunkach równanie Naviera-Stokesa (5.5) przyjmuje prostą postać równania różniczkowego zwykłego:

$$\frac{d^2 w_x}{dy^2} = - \frac{g}{\nu'} \quad (5.138)$$



Rys. 5.35 Rozkład prędkości w błonie kropli

Rozwiązanie ogólne tego równania:

$$w_x = -\frac{g}{2\nu'} \cdot y^2 + C_1 y + C_2 \quad (5.139)$$

po uwzględnieniu następujących warunków brzegowych:

dla $y = 0$ jest: $w_x = 0$ (zerowanie prędkości na ścianie)

dla $y = \delta_x$ jest: $\frac{dw_x}{dy} = 0$ (brak na powierzchni błony naprężeń stycznych od przepływającej pary)

daje prędkość w odległości y od ścianki:

$$w_x = \frac{g \cdot y}{2\nu'} \cdot (2 \cdot \delta_x - y) \quad (5.140)$$

Prędkość średnia w przekroju x wynosi:

$$w_{sr} = \frac{1}{\delta_x} \cdot \int_0^{\delta_x} w_x \cdot dy = \frac{g}{3\nu'} \cdot \delta_x^2 \quad (5.141)$$

Podstawiamy tę średnią prędkość do równania (5.137) i otrzymujemy:

$$\frac{\rho' g}{3\nu'} \cdot \frac{d(\delta_x^3)}{dx} = \frac{\lambda'(t_s - t_w)}{\delta_x \cdot \Delta i}$$

Po zróżniczkowaniu i rozdzieleniu zmiennych jest:

$$\frac{\rho' g}{\nu'} \cdot \delta_x^3 \cdot d\delta_x = \frac{\lambda'(t_s - t_w)}{\Delta i} \cdot dx \quad (5.142)$$

Zważywszy, że na górnej krawędzi ($x = 0$) nie ma jeszcze błony ($\delta_x = 0$), otrzymamy po scałkowaniu i uporządkowaniu wyrażenie na grubość błony:

$$\delta_x = \sqrt[4]{\frac{4 \lambda' \nu' (t_s - t_w) \cdot x}{\rho' \Delta i \cdot g}} \quad (5.143)$$

Zatem lokalna wartość współczynnika przejmowania ciepła:

$$\alpha_{lok} = \frac{\lambda}{\delta_x} = \sqrt[4]{\frac{\lambda'^3 \cdot g \cdot \Delta i \cdot g}{4 \nu' (t_s - t_w) \cdot x}} = \sqrt[4]{\frac{\lambda'^3 \cdot g^2 \cdot \Delta i \cdot g}{4 \nu' (t_s - t_w) \cdot x}} \quad (5.144)$$

Średnia wartość dla całej ścianki o wysokości H wynosi:

$$\alpha = \frac{1}{H} \int_0^H \alpha_{lok} dx = 0,943 \cdot \sqrt[4]{\frac{\lambda'^3 \cdot \rho'^2 \cdot \Delta i \cdot g}{\eta' (t_s - t_w) \cdot H}} \quad (5.145)$$

Wzór ten nosi nazwę wzoru Nusselta.

Wielkości α otrzymywane z badań eksperymentalnych są nieco większe wtedy, gdy występują na powierzchni błonki fale wywołane napięciem powierzchniowym cieczy (laminarny spływ falowy).

Przedstawiamy wzór (5.145) w postaci bardziej ogólnej:

$$\alpha = C \cdot \sqrt[4]{\frac{\lambda'^3 \cdot \rho'^2 \cdot g \cdot \Delta i}{\eta' (t_s - t_w) \cdot l}} \quad (5.146)$$

albo po drobnych zmianach jako:

$$\alpha = C \cdot \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 \rho' g}{\nu}} \cdot \frac{\sqrt[4]{\Delta i}}{\sqrt[4]{1 \cdot (t_s - t_w)}} \quad (5.146a)$$

Wówczas dla obliczeń praktycznych mamy:

$C = 1,15$ i $l = H$ dla ścian i rur pionowych (na ich powierzchni zewnętrznej i wewnętrznej)

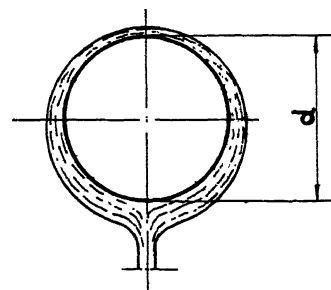
$C = 0,725$ i $l = d$ dla rur poziomych (tylko na powierzchni zewnętrznej).

Dla rur poziomych, na których skrapla się para, otrzymuje się jednakowe wartości stałej C tak na drodze analitycznej jak i eksperymentalnej (wyprowadzenie analityczne jest podobne do pokazanego wyżej, lecz przy użyciu współrzędnych walcowych).

Właściwości fizyczne cieczy we wzorze (5.146) lub (5.146a) są określone dla średniej temperatury błony:

$$t = t_{\text{char}} = \frac{t_s + t_w}{2}$$

Natomiast dla ciepła skraplania (Δi) miarodajna jest temperatura nasycenia (t_s) i ewentualnie temperatura przegrzania.



Rys.5.36 Błona skroplin na rurce poziomej

W poniższej tabelicy podane są, dla ułatwienia, obliczone dla pary wodnej, wartości pierwszego pierwiastka we wzorze (5.146).

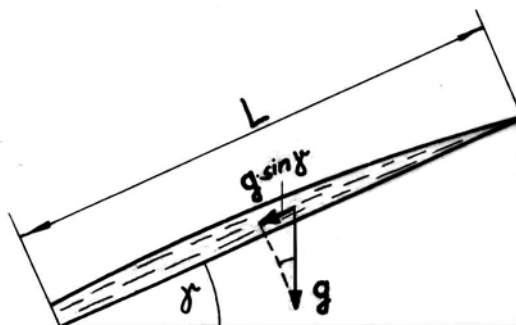
Tablica 10

Wartości: $\sqrt[4]{\frac{\lambda^3 \rho' g}{\nu}} = f(t)$ dla skroplin pary wodnej

t [°C]	f(t)	t [°C]	f(t)	t [°C]	f(t)
0	312,41	60	489,66	140	605,67
5	329,49	65	500,98	150	613,66
10	346,56	70	512,33	160	620,76
15	363,25	75	521,92	170	624,65
20	379,36	80	531,19	180	627,12
25	394,86	85	540,08	190	629,11
30	409,88	90	548,53	200	628,62
35	424,75	95	556,48	210	626,09
40	439,94	100	563,88	220	621,77
45	453,50	110	575,59	230	616,73
50	466,15	120	586,10	240	611,91
55	478,12	130	597,04	250	606,20

Dla ścianek nachylonych pod pewnym kątem γ do poziomu (rys.5.37) zamiast przyspieszenia g podstawia się do (5.146) jego składową w kierunku spływu:

$$g \cdot \sin \gamma$$



Rys.5.37 Skraplanie na ściance pochylonej

W teorii skraplania często używana jest liczba Reynoldsa określona przy pomocy średniej prędkości cieczy w błonie na dolnej krawędzi ścianki: w_{sr} i grubości błony w tym miejscu: δ_H :

$$Re_H = \frac{w_{sr} \cdot \delta_H}{\nu'} = \frac{w_{sr} \cdot \rho' \cdot \delta_H}{\eta'} \quad (5.148)$$

Z prawa ciągłości jest jednak:

$$w_{sr} \cdot \rho' \cdot \delta_H = \frac{\dot{m}'}{B} \quad (5.149)$$

a ilość skroplin otrzymanych na całej ścianie:

$$\dot{m}' = \frac{\dot{Q}}{r} = \frac{\alpha \cdot (H \cdot B) \cdot (t_s - t_w)}{r} \quad (5.150)$$

Tak więc liczba Reynoldsa może być określona jako:

$$Re_H = \frac{\alpha \cdot (t_s - t_w) \cdot H}{r \cdot \eta'} \quad (5.151)$$

Dla tak określonej liczby Reynoldsa jest:

- dla $Re_H < 8$ spływ laminarny (jak w teorii Nusselta)
- dla $Re_H = 8 \dots 400$ " sfalowany
- dla $Re_H > 400$ " turbulentny

Krytyczna wartość: $Re'_{Hkr} = 400$ ważna jest dla umiarkowanych prędkości pary - przy większych prędkościach spada ona - osiągając 100, a nawet mniej.

W literaturze amerykańskiej używana jest liczba:

$$Re'_H = 4 \cdot Re_H$$

i wówczas:

$$Re'_{Hkr} = 1600$$

Korzystając z (5.151) można wzór Nusselta (5.146) przedstawić w postaci:

$$\frac{\alpha}{\lambda'} \cdot \sqrt[3]{\frac{\nu'^2}{g}} = \frac{C'}{\sqrt[3]{(Re_H)}} \quad (5.152)$$

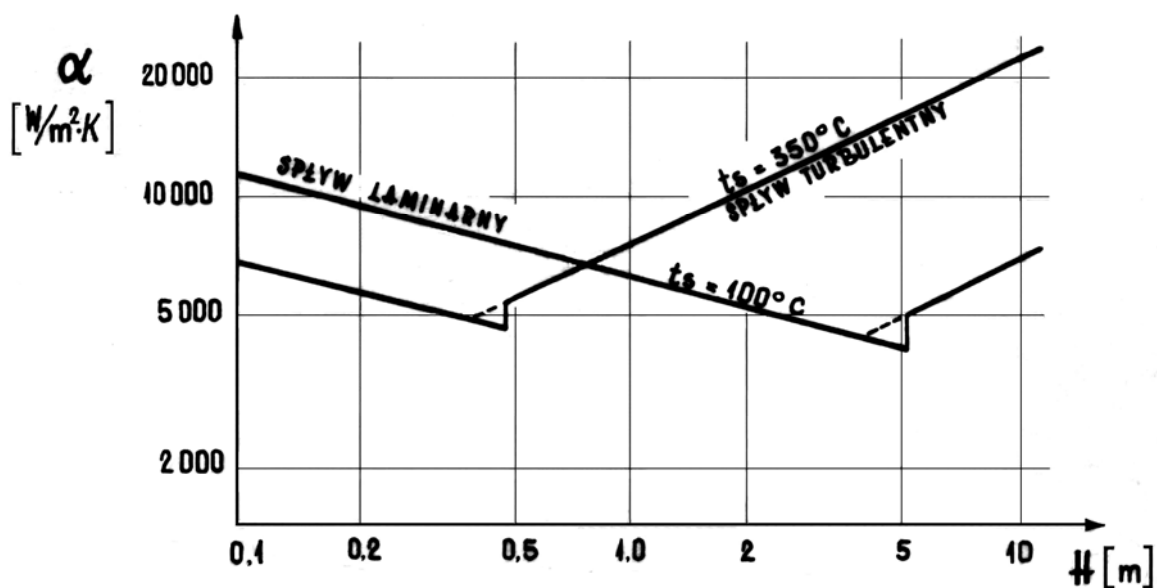
w której $C' = C^{4/3}$ czyli:

$$\begin{aligned} C' &= 0,65 && \text{dla rur poziomych} \\ C' &= 0,925 && \text{dla ścian i rur pionowych przy spływie} \\ &&& \text{laminarnym - gdy } Re_H < 8 \\ C' &= 1,20 && \text{dla ścian i rur pionowych przy spływie} \\ &&& \text{sfałowanym (} Re_H = 8 \dots 400 \text{)} \end{aligned}$$

W przypadku, gdy w dalszej części ściany wystąpi spływ turbulentny (czyli $Re_H > 400$), istnieje szereg korelacji doświadczalnych, m.in. wzór C.G. Kirkbride'a:

$$\frac{\alpha}{\lambda'} \cdot \sqrt[3]{\frac{\nu'^2}{g}} = 0,0133 \cdot (Re_H)^{0,4} \quad (5.153)$$

Jak wynika ze wzorów (5.149) i (5.150) duże ilości kropli ($\frac{\dot{m}'}{B}$), a tym samym duże wartości Re_H występują na wysokich ściankach. Zależność α od H podaje poniższy rys.5.38.



Rys.5.38 Zależność α od wysokości ścianki

Ze wzrostem H maleje α - wskutek rosnącej grubości błony i jej oporu cieplnego, a po przejściu wartości krytycznej i wystąpieniu turbulencji w spływającej cieczy - w miarę jak rośnie turbulencja wzrasta α .

Wzory Nusselta i Kirkbride'a można również przedstawić przy pomocy liczb kryterialnych, w których wymiarem charakterystycznym jest $l = H$ dla ścian i rur pionowych, względnie $l = d$ dla rur poziomych. Zostanie to wykonane w sposób podany niżej.

Lewe strony wzorów (5.152) i (5.153) sprowadzamy do kombinacji liczb Nusselta i Galileusza:

$$\frac{\alpha}{\lambda'} \cdot \sqrt[3]{\frac{\nu'^2}{g}} = \frac{\alpha l}{\lambda'} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{g l^3}{\nu'^2}}} = \frac{Nu}{Ga^{1/3}}$$

a liczbę Reynoldsa określoną wzorem (5.151) przekształcamy następująco:

$$Re_H = \frac{\alpha \cdot (t_s - t_w) \cdot H}{r \cdot \eta} = \frac{\alpha \cdot H}{\lambda'} \cdot \frac{\lambda'}{c' \cdot \eta'} \cdot \frac{c' \cdot (t_s - t_w)}{r} = \frac{Nu}{(Pr) \cdot (Ja)} \quad (5.154)$$

Występuje tu nowa bezwymiarowa liczba podobieństwa zwana liczbą Jakoba*:

$$Ja = \frac{r}{c' \cdot (t_s - t_w)} \quad (5.155)$$

Zawiera ona ciepło właściwe skroplin (c') i warunkuje podobieństwo zmiany fazy.

Liczbę Prandtla określono w (5.154) z jej postaci przekształconej:

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{\frac{\eta}{\rho}}{\frac{\lambda}{c_p \cdot \rho}} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda}$$

Teraz już łatwo otrzymuje się ze wzoru Nusselta (5.152) następującą zależność kryterialną dla spływu laminarnego lub sfalowanego:

$$Nu = C \cdot [(Ga) \cdot (Pr) \cdot (Ja)]^{1/4} \quad (5.156)$$

W podobny sposób możemy przekształcić empiryczny wzór Kirkbride'a (5.153) otrzymując ostatecznie:

$$Nu = 0,75 \cdot 10^{-3} \left[\frac{(Ga)^{5/3}}{(Pr)^2 \cdot (Ja)^2} \right]^{1/3} \quad (5.157)$$

Dla spływu turbulentnego podawane są również wzory o odmiennej postaci, ale używające tych samych liczb kryterialnych.

Należy zauważyć, że lewe strony we wzorach (5.152) i (5.153) mogą też przedstawiać wyłącznie liczbę Nusselta, ale utworzoną przy pomocy wymiaru charakterystycznego określonego jako:

$$l = \sqrt[3]{\frac{\nu'^2}{g}}$$

Ujęcie takie bywa czasami stosowane. Podstawienie zdefiniowanego w ten sposób wymiaru charakterystycznego do liczby Galileusza daje:

$$Ga = \frac{g l^3}{\nu'^2} = \frac{g}{\nu'^2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{\nu'^2}{g}} \right)^3 = 1$$

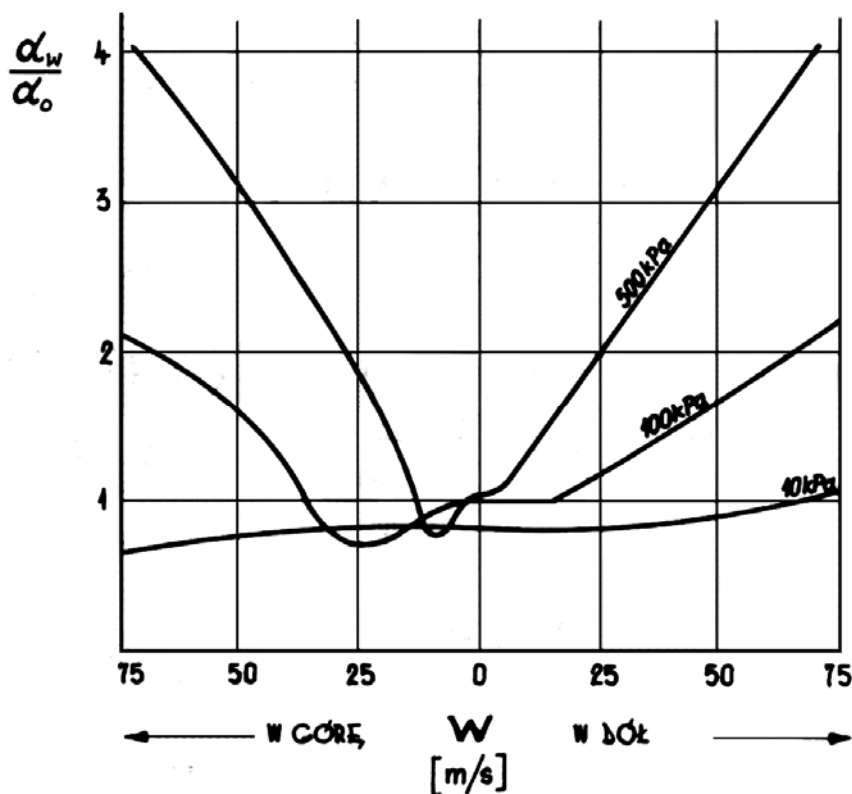
A więc oparta na tym wymiarze charakterystycznym liczba Galileusza równa jest jedności.

* Max Jakob (1899 – 1955) - fizyk niemiecki i amerykański.

Gdy para przepływa z prędkością większą od ok. 10 m/s, nie można już zaniedbywać wywołanych przez nią naprężeń stycznych na powierzchni cieczy - co było założeniem dotychczasowych wywodów. Poprzez te naprężenia para oddziałuje na ciecz i porywa ją ze sobą powodując zmniejszenie grubości warstwy i wzrost współczynnika przejmowania ciepła α . Krzywe na rys.5.39 dają wyobrażenie o wielkości tego wpływu. Ponadto pokazują, że wpływ prędkości wzrasta z ciśnieniem pary.

Warto zwrócić uwagę na to, że przy ciśnieniach bardzo niskich, takich jakie panują w energetycznych skraplaczach pary wodnej (poniżej 10 kPa) - wpływ prędkości pary na α jest nieznaczny.

Wzory do praktycznego uwzględnienia wpływu prędkości pary podaje T.Hobler w swej monografii.



Rys.5.39. Zmiana α w funkcji ciśnienia i prędkości pary

Powierzchnie chropowate zwiększają opór przepływu kropli. Przez to zmniejsza się prędkość sływu tych kropli i błonka ulega pogrubieniu nawet o 30% i więcej. W rezultacie zmniejsza się współczynnik przejmowania ciepła

Obecność gazów nieskrapających się, w szczególności powietrza, powoduje znaczne obniżenie współczynnika przejmowania ciepła. Z mieszanki parowo - gazowej wykrapla się tylko para pozostawiając gaz, a ten utrudnia dostęp następnym porcjom pary do ścianki. Przenoszenie substancji parowej, które pod nieobecność gazów obojętnych nie napotykało na żaden opór materialny, teraz musi się odbywać na drodze dyfuzji (molekularnej lub molarnej). Analiza tego zjawiska wymaga zastosowania praw przenoszenia substancji. Będzie o tym mowa w części siódmej podręcznika.

Pęki rur poziomych wykazują zmniejszony średni współczynnik przejmowania ciepła α , wskutek pogrubionych warstw cieczy na rurkach niżej położonych - zraszanych cieczą spływającą z rurek leżących wyżej. Zmniejszenie współczynnika przejmowania ciepła dla kolejnej n-tej rurki w stosunku do pierwszej wynosi według Nusselta:

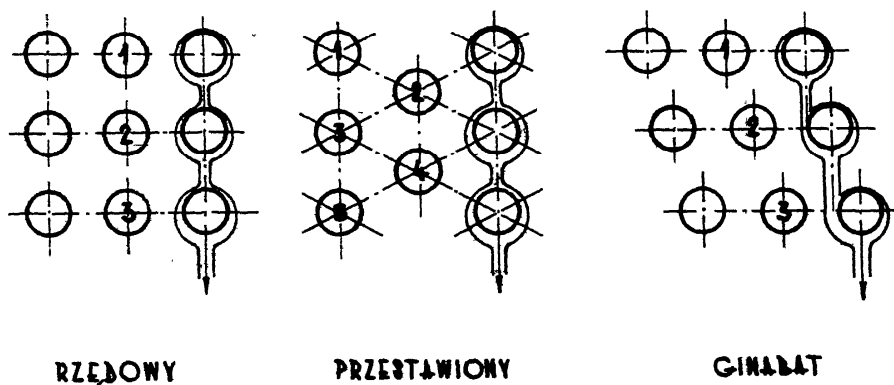
$$\frac{\alpha_n}{\alpha_1} = \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \quad (5.158)$$

Poprawka ε_n określająca średni współczynnik przejmowania ciepła

$$\alpha_{\text{śr}} = \alpha_1 \cdot \varepsilon_n \quad (5.159)$$

podana jest w poniższej tab.11 - dla pęków przedstawionych na rys.5.40.

U K Ł A D Y :



Rys.5.40 Skraplanie na pękach rur poziomych

Szczególnie korzystny jest tu układ A. G i n a b a t, w którym jedynie część obwodu rurki dolnej zraszana jest skroplinami z rurki położonej wyżej.

T a b l i c a 11

Współczynnik poprawkowy ε_n dla skraplania na pęku rur

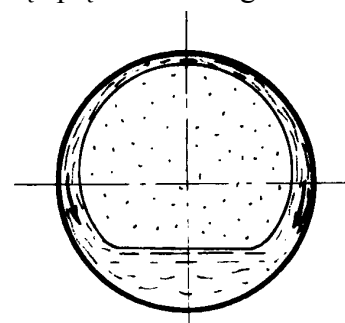
n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
układ przestawiony	1,00	0,92	0,87	0,83	0,80	0,77	0,75	0,73	0,71	0,70
układ rzędowy	0,92	0,83	0,77	0,73	0,70	0,67	0,65	0,63	0,61	0,60
układ Ginabat	0,93	0,96	0,95	0,93	0,93	0,92	0,92	0,915	0,91	0,91

Skraplanie wewnątrz rur poziomych różni się tym, od skraplania na powierzchni zewnętrznej tych rur, że skropliny spływające ze ścianki gromadzą się na dnie rury. Dla ich spływu konieczne jest pochylenie rurki albo (przy dokładnie poziomym położeniu) wytworzenie się spiętrzenia strugi.

Im wolniejszy jest spływ skroplin, tym gorsze jest α . Dotyczy to małych prędkości pary - wtedy spływ cieczy powodowany jest przez siłę ciężkości.

Przy dużych prędkościach dominuje wpływ naprężenia stycznego wywieranego przez parę na powierzchnię cieczy i przepływ cieczy jest sfalowany lub pierścieniowy jak na rys.5.32.

Dla węzownic grzejnych, w których skrapla się para wodna, można w obliczeniach przyjmować 60% wartości α przy skraplaniu na zewnątrz rury.



Rys.5.41, Skraplanie wewnątrz rur poziomych przy małej prędkości pary

Dla płynów chłodniczych można stosować prosty wzór:

$$\alpha = M \cdot \dot{q}^{0,5} \cdot L^{0,35} \cdot d^{-0,25} \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right] \quad (5.160)$$

gdzie:

$$M = 1,26 \frac{\lambda \cdot (\varphi')^{0,1} \cdot g^{0,3}}{(r \cdot \nu')^{0,5} \cdot (\rho \cdot c)^{0,3}} \left[\frac{W^{0,5}}{m^{1,1} \cdot K} \right] \quad (5.161)$$

ponadto: L [m] jest długością, d [m] średnicą rurki, a \dot{q} [W/m^2] gęstością strumienia cieplnego.

Obliczone wartości M podaje poniższa tablica.

Tablica 12

Wartości stałej M [$W^{0,5}/m^{1,1} \cdot K$] we wzorze dla skraplania par wewnątrz rur

t °C	NH ₃	freon R22	freon R134a	freon R12
0	9,50	3,57	3,90	3,64
10	8,52	3,32	3,72	3,38
20	8,09	3,16	3,59	3,09
30	7,43	2,99	3,52	2,86
40	6,82	2,90	3,50	2,71

Na zakończenie warto zwrócić uwagę na ilościowe różnice we współczynnikach α przy skraplaniu par różnych płynów. Jeżeli przyjąć przykładowo w pewnych warunkach dla pary wodnej 100%, to dla amoniaku będzie około 70%, natomiast dla benzolu ok. 25%, alkoholu etylowego ok. 20%, a dla freonu tylko ok. 12%.

Przykłady

1. Na pionowej ścianie o wysokości 1,8 m i temperaturze 15°C skrapla się para wodna o ciśnieniu 15,7 kPa abs. Należy obliczyć współczynnik przyjmowania ciepła.

R o z w i ą z a n i e

Dla ciśnienia 15,7 kPa temperatura nasycenia wynosi $t_s = 55^\circ\text{C}$.

Dla temperatury charakterystycznej skroplin:

$$t_{\text{char}} = \frac{t_s + t_w}{2} = \frac{55 + 15}{2} = 35^\circ\text{C}$$

jest: $\lambda' = 0,626 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, $\nu' = 0,732 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\rho' = 993,9 \text{ kg/m}^3$,
a dla temperatury nasycenia: $t_s = 55^\circ\text{C}$ i braku przegrzania jest: $\Delta i = r = 2370 \text{ kJ/kg} = 2370 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$.

Współczynnik przyjmowania ciepła

$$\begin{aligned} \alpha &= 1,15 \sqrt[4]{\frac{\lambda'^3 \cdot \rho'^2 \cdot g}{\eta'}} \cdot \frac{\sqrt[4]{\Delta i}}{\sqrt[4]{\Delta t \cdot H}} = 1,15 \sqrt[4]{\frac{\lambda'^3 \cdot \rho' \cdot g}{\nu'}} \cdot \frac{\sqrt[4]{\Delta i}}{\sqrt[4]{\Delta t \cdot H}} = \\ &= 1,15 \sqrt[4]{\frac{0,626^3 \cdot 993,9 \cdot 9,81}{0,732 \cdot 10^{-6}}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2370 \cdot 10^4}}{\sqrt[4]{(55-15) \cdot 1,8}} = 3703 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \end{aligned}$$

Sprawdzamy jeszcze liczbę Reynoldsa

$$\begin{aligned} \text{Re}_H &= \frac{\alpha(t_s - t_w) \cdot H}{r \cdot \eta} = \frac{\alpha(t_s - t_w) \cdot H}{r \cdot \nu \cdot \rho} = \\ &= \frac{3703 \cdot (55-15) \cdot 1,8}{2370 \cdot 10^3 \cdot 0,732 \cdot 10^{-6} \cdot 993,9} = 154,6 < 400 \end{aligned}$$

Jest ona mniejsza od wartości krytycznej - obliczone α jest więc wartością ostateczną.

2. Obliczyć współczynnik przyjmowania ciepła dla skraplania amoniaku, o temperaturze nasycenia 26°C, na zewnętrznej powierzchni rury o temperaturze 24°C i średnicy 38 mm.

R o z w i ą z a n i e

Dla średniej temperatury warstwy skroplin:

$$t_{\text{char}} = \frac{t_s + t_w}{2} = \frac{26 + 24}{2} = 25^\circ\text{C}$$

jest: $\lambda' = 0,48 \text{ W/mK}$, $\rho' = 603 \text{ kg/m}^3$, $\eta' = 136,3 \cdot 10^{-6} \text{ Ns/m}^2$,
a dla temperatury $t_s = 26^\circ\text{C}$ i braku przegrzania: $\Delta i = r = 1162 \text{ kJ/kg} = 1162 \cdot 10^3 \text{ J/kg}$.

Współczynnik przyjmowania ciepła na rurze:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,725 \sqrt[4]{\frac{\lambda'^3 \cdot \rho'^2 \cdot g}{\eta'}} \cdot \frac{\sqrt[4]{\Delta i}}{\sqrt[4]{d(t_s - t_w)}} = \\ &= 0,725 \sqrt[4]{\frac{0,48^3 \cdot 603^2 \cdot 9,81}{136,3 \cdot 10^{-6}}} \cdot \frac{\sqrt[4]{1162 \cdot 10^4}}{\sqrt[4]{38 \cdot 10^{-3} \cdot (26-24)}} = \\ &= 10\,515 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} \end{aligned}$$

Ćwiczenia

1. Obliczyć współczynnik przyjmowania ciepła i strumień ciepły oddawany do ścianki przy skraplaniu suchej nasyconej pary wodnej na zewnętrznej powierzchni pionowej rury o wysokości 2 m i średnicy 50 mm, jeżeli ciśnienie pary wynosi 294 kPa, a temperatura ścianki 60°C.

$$\begin{aligned} \text{Odpowiedź: } \alpha &= 5\,400 \text{ W/m}^2\text{K} \\ Q &= 135\,700 \text{ W} \end{aligned}$$

2. Dla warunków z poprzedniego zadania obliczyć współczynnik przyjmowania ciepła i strumień ciepły w przypadku, gdy rura ustawiona będzie poziomo i wyznaczyć stosunek tych wielkości w obu przypadkach.

$$\begin{aligned} \text{Odpowiedź: } \alpha &= 7\,210 \text{ W/m}^2\text{K} \\ Q &= 181\,300 \text{ W} \\ \alpha_2/\alpha_1 &= 1,336 \end{aligned}$$

3. Określić średni współczynnik przejmowania ciepła i ilość skraplającej się w jednostce czasu suchej, nasyconej pary wodnej w skraplaczu płaszczowo - rurowym o rurkach poziomych w liczbie 80 szt. - rozmieszczonych w 8 szeregach i układzie przestawionym. Rurki mają średnicę 20 mm, długość 2 m i temperaturę powierzchni zewnętrznej 81°C. Para znajduje się na zewnątrz rur i ma ciśnienie 980,7 kPa.

Odpowiedź: $\alpha_{sr} = 6\,420 \text{ W/m}^2\text{K}$
 $\dot{m} = 3,20 \text{ kg/s} = 11\,520 \text{ kg/h}$

8. PEWNE ZAGADNIENIA OBLICZENIOWE PRZEJMOWANIA CIEPŁA

Przedstawione tu zostaną bardziej szczegółowo dwa zagadnienia sprawiające trudności podczas obliczeń przenoszenia ciepła przez przejmowanie:

1. Obliczanie współczynnika przejmowania ciepła α przy przenikaniu, kiedy ten współczynnik zależy decydująco od temperatury ścianki, a ta temperatura nie jest znana. Ma to przede wszystkim znaczenie wtedy, gdy występuje konwekcja swobodna, wrzenie lub skraplanie.
2. Obliczanie przejmowania ciepła podczas poprzecznego opływu pęczka rur w, często spotykanym w praktyce, wymienniku płaszczowo - rurowym z przegrodami poprzecznymi. W tym przypadku charakterystyczna prędkość przepływu zmienia się od jednego szeregu rurek do następnego, a ponadto występują ucieczki płynu przez nieszczelności w przegrodach i przez wolną przestrzeń między pękiem rur a płaszczem, co powoduje zmniejszenie tej prędkości.

8.1. Przenikanie ciepła przy nieznannej temperaturze ścianki

Omówione w części trzeciej przenikanie ciepła zakładało znajomość współczynników przejmowania ciepła α_1 i α_2 oraz temperatur w rdzeniach obu płynów t_{r1} , t_{r2} i oporu cieplnego ścianki. W tej sytuacji obliczenie strumienia cieplnego i ew. temperatur ścianki było proste.

Zazwyczaj jednak α_1 i α_2 trzeba dopiero wyznaczyć z zależności kryterialnych.

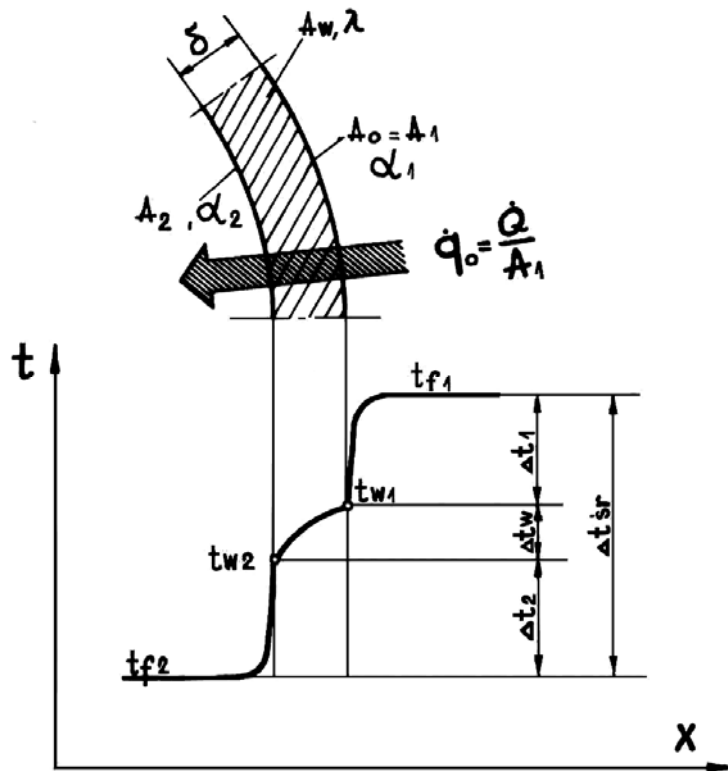
W przypadku konwekcji **wymuszonej** jest to stosunkowo proste z tym, że dla przepływu cieczy potrzebna jest temperatura ścianki. Przyjmuje się ją w pierwszym przybliżeniu jako:

$$t_w \cong \frac{t_{r1} + t_{r2}}{2}$$

i według niej wyznacza poprawkę $\left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25}$ lub $\left(\frac{\eta_f}{\eta_w}\right)^{0,14}$..

Po otrzymaniu wyniku sprawdza się wartość t_w .

Zazwyczaj wystarcza już drugie przybliżenie, by uzyskać zgodność wyniku z założeniem.



Rys.5.42 Szkic sytuacyjny

W przypadku konwekcji **swobodnej**, **wrzenia** lub **skraplania** współczynnik przejmowania ciepła zależy wprost od różnicy temperatur: $\Delta t = t_w - t_f$, jak to widać w poniższych wzorach:

dla wrzenia:

$$\alpha = C' \cdot \Delta t^{\frac{n}{1-n}}$$

dla skraplania:

$$\alpha = C \cdot \sqrt[4]{\frac{\lambda^3 \rho g \Delta t}{\nu \cdot 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\Delta t}} = C'' \cdot \Delta t^{-\frac{1}{4}}$$

dla konwekcji swobodnej:

$$\alpha = \frac{\lambda}{l} \cdot (Nu) = \frac{\lambda}{l} \cdot C \cdot (Gr \cdot Pr)^{n'''} = C''' \cdot \Delta t^{n'''}$$

Ogólnie:

$$\alpha = C \cdot \Delta t^m \quad (5.162)$$

Właściwości fizyczne płynu określa się według podanego wyżej pierwszego przybliżenia temperatury ścianki.

Założymy ogólnie, że o b y d w a współczynniki α_1 i α_2 zależą od Δt . Powierzchnią obliczeniową niech będzie $A_0 = A_1$ i do niej odniesiemy strumień cieplny \dot{Q} .

Procesy składowe dają zależności:

$$\dot{q}_o = \frac{\dot{Q}}{A_1} = \frac{\alpha_1 A_1 \cdot (t_{f1} - t_{w1})}{A_1} = \alpha_1 \cdot \Delta t_1 \quad \dot{q}_o = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{A_1 \cdot R_w} = \frac{\Delta t_w}{\sum \frac{\delta}{\lambda A_w} \frac{1}{A_1}}$$

$$\dot{q}_o = \frac{\alpha_2 A_2 \cdot (t_{w2} - t_{f2})}{A_1} = \alpha_2 \cdot \Delta t_2 \cdot \frac{A_2}{A_1}$$

Przy pomocy (5.162) eliminujemy α_1 i α_2 i wyznaczamy poszczególne spadki temperatur:

$$\Delta t_1 = \left(\frac{\dot{q}_o}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{1+m_1}} \quad (5.163)$$

$$\Delta t_w = \dot{q}_o \sum \frac{\delta}{\lambda A_w} \frac{1}{A_1} \quad (5.164)$$

$$\Delta t_2 = \left(\frac{\dot{q}_o}{\alpha_2} \right)^{\frac{1}{1+m_2}} \quad (5.165)$$

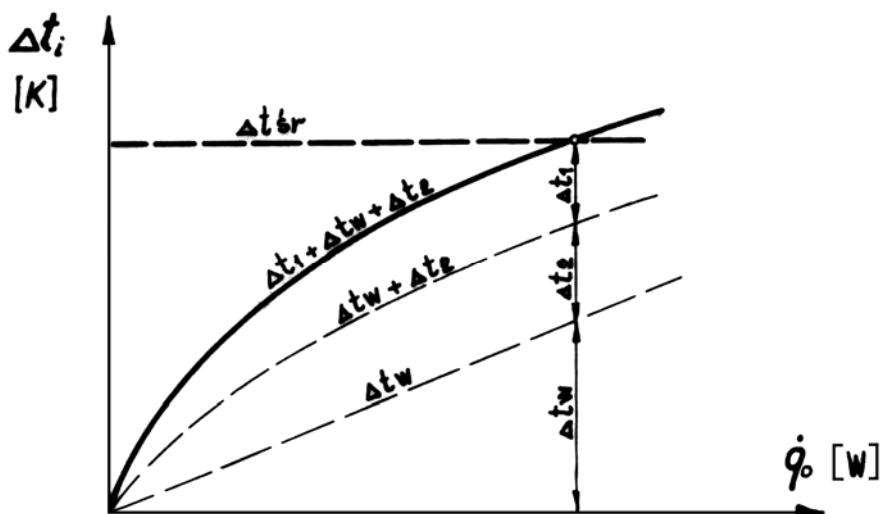
Średni spadek temperatury w wymienniku ciepła Δt_{sr} jest zawsze dany, mamy więc warunek:

$$\Delta t_1 + \Delta t_w + \Delta t_2 = \Delta t_{sr} \quad (5.166)$$

Powyższe cztery równania pozwalają wyznaczyć 4 niewiadome: \dot{q} , Δt_1 , Δt_w , Δt_2 . Najlepiej posłużyć się w tym celu wykresem tak jak na rys. 5.43.

Oblicza się po kilka wartości wg równań (5.163 ... 5.165) i nanosi punkty na wykresie dodając rzędne do siebie. Zależność (5.164) jest liniowa i wystarczy obliczenie 1 punktu (drugim jest: 0,0).

Przecięcie ostatniej krzywej z rzędną Δt_{sr} daje rozwiązanie. Można zresztą wykreślić od razu tylko jedną krzywą wg (5.166) z podstawieniem (5.163) ... (5.165).



Rys. 5.43 Konstrukcja graficzna dla wyznaczenia temperatur ścianek

Zagadnienie można rozwiązać bez konstrukcji graficznej posługując się kalkulatorem programowalnym lub komputerem. Wówczas można zaprogramować iteracyjne obliczanie aż do uzyskania wyniku o żądanej dokładności. Najwygodniej rozwiązywać względem \dot{q} równanie uzyskane z podstawienia (5.163) ... (5.165) do (5.166):

$$\left(\frac{\dot{q}_o}{c_1}\right)^{\frac{1}{1+m_1}} + \dot{q}_o \cdot \sum \frac{\dot{q}_i}{\lambda_i \cdot \frac{A_{w_i}}{A_1}} + \left(\frac{\dot{q}_o}{c_2}\right)^{\frac{1}{1+m_2}} = \Delta t_{sr} \quad (5.167)$$

W przypadku jednoczesnej **konwekcji i radiacji**, co ma miejsce np. przy przenoszeniu ciepła między ścianką a otoczeniem, współczynnik przejmowania ciepła jest współczynnikiem całkowitym:

$$\alpha_c = \alpha + \alpha_r \quad (5.168)$$

składającym się z członu konwekcyjnego α i radiacyjnego α_r [wg wzoru (1.10)].

Konwekcyjne przenoszenie ciepła odbywa się między ścianką a np. powietrzem o temperaturze t_f , natomiast radiacyjne między tą ścianką a otaczającymi ją ścianami i przedmiotami o temperaturze bardzo zbliżonej do t_f (choć, gdy chodzi o ściany pomieszczenia czy komory, to zasadniczo różnej od t_f). W zagadnieniach technicznych różnice te można często pominać, zakładając równowagę całego otoczenia rozpatrywanej ścianki (oczywiście z wyjątkiem warstwy przyściennej).

Wobec nieznannej temperatury ścianki t_w nieznanym jest również spadek temperatury:

$$\Delta t_i = t_w - t_f \quad (5.169)$$

gdzie: $i = 1$ lub $i = 2$.

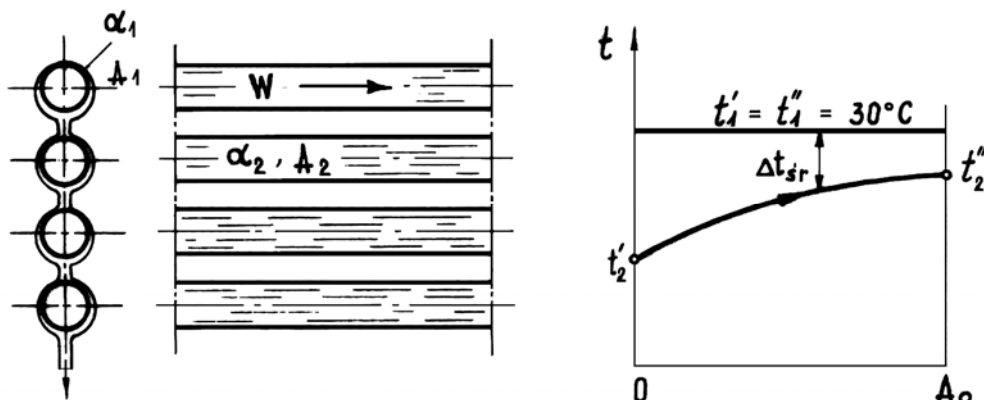
Gęstość strumienia cieplnego przenoszonego jednocześnie przez konwekcję swobodną i radiację wyraża wzór:

$$\begin{aligned} \dot{q}_o &= (\alpha + \alpha_r) \cdot \Delta t_i = \\ &= \left\{ c \cdot \Delta t_i^{m+1} + 5,67 \cdot \epsilon_{1-2} \cdot \left[\left(\frac{T_f}{100} + \frac{\Delta t_i}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_f}{100} \right)^4 \right] \right\} \cdot \frac{A_i}{A_o} \quad (5.170) \end{aligned}$$

Rozwikłanie tego równania ze względu na Δt_i nie jest możliwe i dlatego obliczenia przenikania ciepła lepiej jest w tym przypadku rozpocząć od próbnego założenia wartości Δt_i i obliczenia \dot{q} , a potem już posługiwać się jak poprzednio wzorami (5.164) ... (5.166).

Przykład

Obliczyć powierzchnię poziomego skraplacza płaszczowo - rurowego do kondensacji amoniaku. Amoniak skrapla się w przestrzeni międzyrurowej, a woda chłodząca płynie wewnątrz rur. Wydajność cieplna skraplacza: 93 000 W. Amoniak jest w stanie nasycenia i ma temperaturę 30°C. Woda ma temperaturę wlotową 25°C, strumień przepływu 40 m³/h i prędkość 1,47 m/s. Rury stalowe ($\lambda = 45$ W/m·K) o średnicy wewnętrznej 31 mm i grubości ścianki 3,5 mm rozmieszczone są rzędowo w 4 szeregach.



Rys.5.44 Ilustracja do przykładu

Rozwiązanie

Z bilansu ciepła otrzymujemy wzrost temperatury wody:

$$\delta t_2 = t_2'' - t_2' = \frac{\dot{Q}}{(\dot{V}_2 \rho_2) c_2} = \frac{93\,000}{\frac{40 \cdot 1000}{3600} \cdot 4190} = 2 \text{ K}$$

i temperaturę wylotową wody:

$$t_2'' = t_2' + \delta t_2 = 25 + 2 = 27^\circ\text{C}$$

Średnia różnica temperatur:

$$\Delta t_{sr} = \frac{(30-25) - (30-27)}{\ln \frac{30-25}{30-27}} = 3,9 \text{ K}$$

Dla średniej temperatury wody: $\frac{1}{2} \cdot (25 + 27) = 26^\circ\text{C}$ jest:

$$v = 0,885 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \lambda = 0,610 \text{ W/m}\cdot\text{K}, \quad \text{Pr} = 6,06.$$

Liczba Reynoldsa dla wody:

$$\text{Re} = \frac{wd}{v} = \frac{1,47 \cdot 31 \cdot 10^{-3}}{0,885 \cdot 10^{-6}} = 51\,500 > 10\,000$$

Zatem

$$\text{Nu} = 0,021 (\text{Re})^{0,8} \cdot (\text{Pr})^{0,43} \cdot \left(\frac{\text{Pr}_f}{\text{Pr}_w}\right)^{0,25} = 0,021 \cdot 51\,500^{0,8} \cdot 6,06^{0,43} \cdot 1 = 279$$

Ze względu na niewielką różnicę temperatur: $\Delta t_2 \approx 2\text{K}$ uznano: $\left(\frac{\text{Pr}_f}{\text{Pr}_w}\right)^{0,25} \approx 1$.

Współczynnik przejmowania ciepła po stronie wody:

$$\alpha_2 = \frac{(\text{Nu})\lambda}{d_2} = \frac{279 \cdot 0,610}{31 \cdot 10^{-3}} = 5490 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Przyjmuje się: $A_0 = A_1$, zatem:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{31}{38} = 0,816$$

$$\frac{A_w}{A_1} = \frac{dw}{d_1} = \frac{34,5}{38} = 0,91$$

Jednostkowy strumień ciepły:

$$\dot{q}_o = \frac{t_{w1} - t_2}{\frac{1}{\alpha_2 \cdot \frac{A_2}{A_1}} + \frac{\delta}{\lambda \cdot \frac{A_w}{A_1}}} = \frac{\Delta t_2 + \Delta t_w}{\frac{1}{5490 \cdot 0,816} + \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{45 \cdot 0,91}} = \frac{\Delta t_2 + \Delta t_w}{(0,223 + 0,085) \cdot 10^{-3}} = 3250(\Delta t_2 + \Delta t_w)$$

Zatem:

$$\Delta t_2 + \Delta t_w = \frac{\dot{q}_o}{3250}$$

Biorąc punkty: 0,0 oraz punkt dla którego: $\dot{q} = 9750 \text{ W/m}^2$ i $(\Delta t_2 + \Delta t_w) = 3\text{K}$, wykreślamy prostą jak na rys. 5.45.

Dla amoniaku skraplającego się na rurach temperatura charakterystyczna wynosi w I. przybliżeniu:

$$t_{\text{char}} = \frac{1}{2} \left[\frac{t_{f1} + t_{f2}}{2} + t_{f1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{30 + 26,1}{2} + 30 \right] = 29^\circ\text{C}$$

dla niej mamy: $\lambda' = 0,474 \text{ W/mK}$, $\rho' = 596,8 \text{ kg/m}^3$, $\eta' = 13,71 \cdot 10^{-5} \text{ Ns/m}^2$,
a ciepło parowania dla 30°C : $r = 11455 \text{ kJ/kg} = 1,1455 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$.

Współczynnik przejmowania ciepła:

$$\alpha = 0,725 \varepsilon_n \cdot \sqrt[4]{\frac{\lambda'^3 \cdot \rho'^2 \cdot g}{\eta'}} \cdot \frac{\sqrt[4]{r}}{\sqrt[4]{d \cdot \Delta t_1}} =$$

$$= 0,725 \cdot 0,84 \sqrt[4]{\frac{0,474^3 \cdot 596,8^2 \cdot 9,81}{13,71 \cdot 10^{-5}}} \cdot \frac{\sqrt[4]{1,1455 \cdot 10^6}}{\sqrt[4]{38 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta t_1}} = 10320 \cdot \Delta t_1^{-1/4}$$

Jednostkowy strumień ciepły:

$$\dot{q}_o = \alpha_1 \cdot \Delta t_1 = 10320 \Delta t_1^{3/4}$$

stąd:

$$\Delta t_1 = \left(\frac{\dot{q}_o}{10320} \right)^{4/3}$$

Wyznaczamy kilka punktów:

\dot{q}_o	5160	7000	9000	10 000
Δt_1	0,40	0,60	0,87	0,96

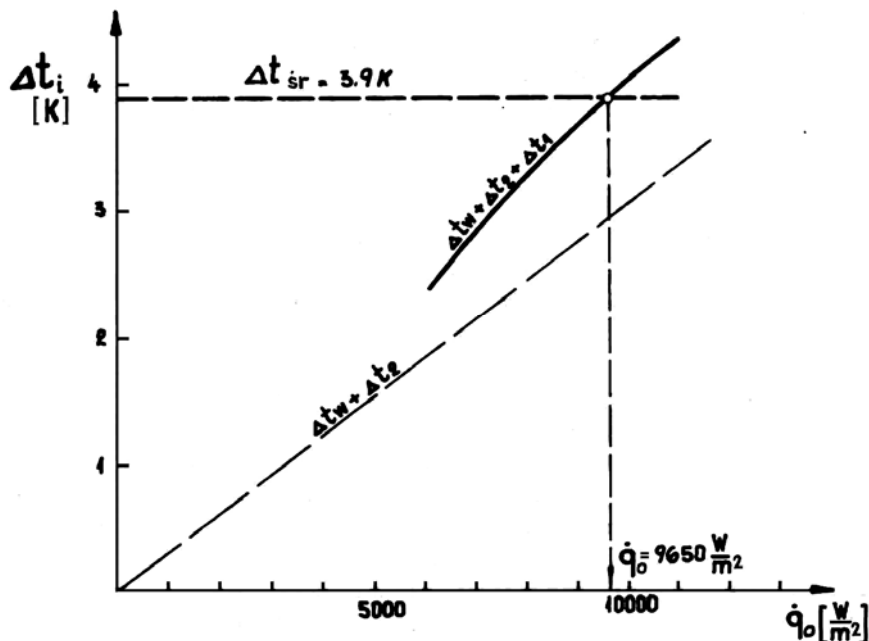
Wartości te dodajemy do rzędnych prostej: $(\Delta t_2 + \Delta t_w)$ i wykreślamy krzywą.

Na przecięciu z rzędną: $\Delta t_{sr} = 3,9 \text{ K}$ otrzymujemy rozwiązanie:

$$\dot{q}_o = 9650 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}, \Delta t_1 = 0,95 \text{ K}, \Delta t_2 + \Delta t_w = 2,95 \text{ K}$$

Uzyskane rozwiązanie pozwala obliczyć pozostałe interesujące wielkości:

$$\Delta t_w = \dot{q}_o \cdot \frac{\delta}{\lambda \frac{A_w}{A_1}} = 9650 \cdot 0,085 \cdot 10^{-3} = 0,82 \text{ K}$$



Rys.5.45 Konstrukcja graficzna do przykładu

$$\Delta t_2 = 2,95 - 0,82 = 2,13 \text{ K}$$

$$\alpha_1 = \frac{\dot{q}_o}{\Delta t_1} = \frac{9650}{0,95} = 10\,158 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$\alpha_2 = \frac{\dot{q}_o}{\Delta t_2 \cdot \frac{A_2}{A_1}} = \frac{9650}{2,13 \cdot 0,816} = 5552 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

$$k = \frac{\dot{q}_o}{\Delta t_{sr}} = \frac{9650}{3,9} = 2474 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Różnica między otrzymaną wartością $\alpha_2 = 5552 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$, a obliczoną na początku ($5490 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$) stanowi zaledwie 1% tej ostatniej i wynika przede wszystkim z niedokładności graficznej. W idealnym przypadku powinny one być sobie równe.

Otrzymana temperatura ścianki: $t_{w1} = 30 - \Delta t_1 = 29^\circ\text{C}$ daje temperaturę charakterystyczną: $29,5^\circ\text{C}$. Korekta nie jest więc potrzebna.

8.2. Opływ pęku rur w wymienniku ciepła z przegrodami

Wymienniki płaszczowo - rurowe w układzie krzyżowo – przeciuprądowym są bardzo często stosowane. Poprzeczny opływ rurek zapewnia bowiem lepsze przejmowanie ciepła od wzdłużnego, ale decydująca jest tu przeważnie dogodność rozwiązania konstrukcyjnego.

Przepływ poprzeczny osiągany jest przez zastosowanie przegród prostopadłych do pęku rur z otworem do przepuszczenia płynu na drugą stronę przegrody. Tarcze przegradzające mogą być koncentryczne - składają się wtedy na przemian z pierścieni (z otworem pośrodku) i tarcz (z otworem pierścieniowym na obwodzie) albo mogą być segmentowe w postaci tarcz rozciągających się na całym przekroju (z małym luzem względem płaszcza lub do niego przyspawanych) z prostym wycięciem o strzałce b na jednym końcu. Wycięcia te (zwane też „oknami”) umieszczone są na przemian po jednej i po przeciwległej stronie walczaka (rys. 5.47).

Najbardziej rozpowszechnione są przegrody segmentowe i nimi zajmujemy się bardziej szczegółowo. Metodę obliczania przegród koncentrycznych można, w razie potrzeby, znaleźć w cytowanej już książce T. Hoblera.

W zasadzie przepływ płynu w całym wymienniku jest poprzeczny w stosunku do rurek, a tylko w obszarze wycięcia („okna”) jest on w znacznym stopniu równoległy do rurek. Ponadto istniejące (ze względu na luzy montażowe) szczeliny w przegrodach: wokół rurek oraz między przegrodą a płaszczem powodują, że obraz przepływu w przestrzeni międzyururowej takiego wymiennika staje się bardzo złożony i obliczeniowe traktowanie tego przepływu przy pomocy podanych w podrozdziale 4.4 wzorów dla pęku rur nie jest bezpośrednio możliwe. Dodatkowo komplikuje zagadnienie fakt, że pęk rur nie jest „prostokątny”, a ograniczony jest kołowym przekrojem płaszcza. Na skutek tego prędkość przepływu w kolejnych szeregach rur nie jest taka sama. Ponadto ze względów konstrukcyjnych między pękiem rur a tą kołową ścianką płaszcza, ograniczającą przepływ, pozostawia się (ze względów konstrukcyjnych), sporą często, przestrzeń swobodnego przepływu. Płyn który tamtędy przepływa nie kontaktuje się z rurkami i jest dla przejmowania ciepła stracony (vide rys. 5.48).

To złożone zagadnienie rozwiązuje się obecnie na dwa sposoby:

1. Na drodze szczegółowej analizy rozplywu płynu przez szeregi rur i szczeliny celem wyznaczenia średniej (efektywnej) prędkości płynu omywającego rurki poprzecznie, a w obszarze „okna” - wzdłużnie. Zagadnienie sprowadza się do rozwiązania układu kilkudziesięciu lub kilkuset równań jednoczesnych ułożonych dla poszczególnych szeregów rur. Układ ten rozwiązuje się przy pomocy komputera uwzględniając różne w praktyce spotykane możliwości konstrukcyjne wymienników*).
2. Przez obliczenie w pewien sposób średniej prędkości charakterystycznej, którą można podstawić do wzoru (5.98) lub bardzo do niego podobnego wzoru opracowanego przez A.P. Colburna. Następnie uwzględnia się wpływ szczelin (które osłabiają przepływ główny), przez mnożnik poprawkowy ε do tych wzorów.

Ten ostatni sposób nie wymaga środków informatycznych i jest bardzo rozpowszechniony - chociaż oczywiście mniej dokładny.

*) Program taki, dla wymienników o mniejszych rozmiarach, opracowano przed laty w Katedrze Techniki Ciepłej PG i w porównaniu z doświadczeniami uzyskano dobrą zgodność wyników. Doświadczenia wykonano dla różnych wielkości luzów przy użyciu wody, oleju i powietrza.

Średnia prędkość w przewężeniach między rurkami może być wyznaczona metodą zaproponowaną przez Hoblera i sprawdzoną przez niego na szeregu wymienników ciepła.

Weźmy najpierw najczęściej stosowany układ przestawiony (heksagonalny) rur jak na rys.5.46.

Podziałką rur jest s , a średnicą zewnętrzną rur d .

Środki rurek tworzą trójkąty równoboczne, wobec czego:

$$a = \frac{s\sqrt{3}}{2} = 0,866 \cdot s \quad (5.171)$$

Do każdej trójki rurek przynależy wolna objętość elementu

$$V_{el} = h \cdot A_p = h \cdot \left(a \cdot s - \frac{\pi d^2}{4} \right)$$

gdzie: h jest odstępem między przegrodami.

Cała swobodna przestrzeń między rurkami składa się z takich elementów objętościowych (pomijając nieregularności przy płaszczu).

Dla obliczenia przejmowania ciepła miarodajny jest przekrój przepływu płynu w zwężeniu między rurkami:

$$A'_{zw} = h \cdot (s - d) \quad (5.172)$$

Natomiast średni przekrój przepływu w elemencie:

$$A'_{sr} = \frac{V_{el}}{a} = \frac{h}{a} \cdot \left(a \cdot s - \frac{\pi d^2}{4} \right) \quad (5.173)$$

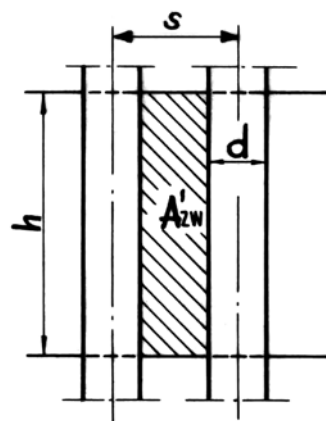
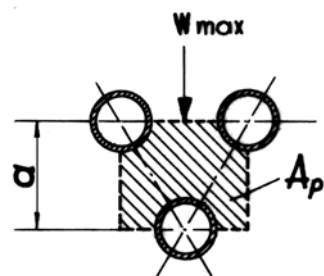
Stosunek przekroju największego do średniego w elemencie wynosi:

$$\frac{A'_{zw}}{A'_{sr}} = \frac{h \cdot (s - d)}{\left(a \cdot s - \frac{\pi d^2}{4} \right) \cdot \frac{h}{2}} = \frac{1 - \frac{d}{s}}{1 - 0,9 \cdot \left(\frac{d}{s} \right)^2} \quad (5.174)$$

przy czym w przekształceniach uwzględniono (5.171).

Jeżeli napływ na rury jest wszędzie prostopadły do nich, to stosunek przekroju największego do średniego dla całego wymiennika jest taki sam. Pęk rur jest bowiem zwielokrotnieniem rozpatrywanego elementu. Zatem największy przekrój przepływowy wymiennika

$$A_{zw} = A_{sr} \cdot \frac{1 - \frac{d}{s}}{1 - 0,9 \cdot \left(\frac{d}{s} \right)^2} \quad (5.175)$$



Rys.5.46 Ilustracja do metody Hoblera (układ rur)

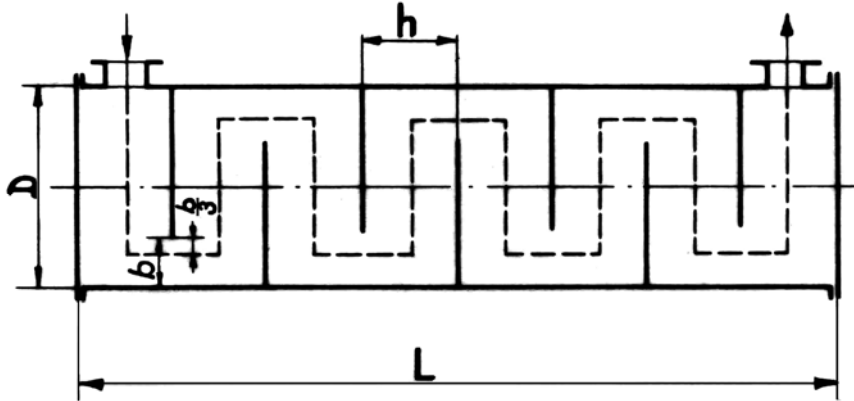
Do obliczenia A_{zw} konieczna jest znajomość średniego przekroju przepływu w wymienniku. Z wystarczającą dokładnością można ją wyznaczyć z zależności:

$$A_{\acute{s}r} \cdot S = V - V_r \quad (5.176)$$

gdzie: S - jest drogą przepływu płynu w wymienniku (linią prądu środka ciężkości strumienia płynu),

V - całkowitą objętością wewnętrzną wymiennika,

V_r - objętością zajmowaną przez rurki i przegrody.



Rys.5.47 Ilustracja do metody Hoblera (średnia droga przepływu)

Zatem:

$$A_{\acute{s}r} = \frac{V - V_r}{S} \quad (5.177)$$

i ostatecznie potrzebny przekrój charakterystyczny dla układu przestawionego (heksagonalnego):

$$(A_{zw})_{\acute{s}r} = \frac{V - V_r}{S} \cdot \left[\frac{1 - \frac{d}{s}}{1 - 0,9 \cdot \left(\frac{d}{s}\right)^2} \right] \quad (5.178)$$

Dla układu rzędownego (w kwadraty), stosowanego zresztą bardzo rzadko, analogiczne wyprowadzenie daje wzór

$$(A_{zw})_{\acute{s}r} = \frac{V - V_r}{S} \cdot \left[\frac{1 - \frac{d}{s}}{1 - 0,9 \cdot \left(\frac{d}{s}\right)^2} \right] \quad (5.179)$$

Względną podziałkę rur wybiera się przeważnie jako: $s/d = 1,25 \dots 1,5$ (czasami do 2,0). Drogę przepływu S można w obliczeniach wstępnych przyjmować jako:

$$S = \frac{D \cdot L}{h} \quad (5.180)$$

a w sprawdzających jako:

$$S = (L - h) + \frac{L}{h} \cdot \left(D - \frac{4}{3} b \right) + \frac{4}{3} \cdot b \quad (5.181)$$

W obliczeniach wstępnych podstawia się (5.180) do wzoru (5.178), przez co eliminuje się długość wymiennika L .

Otrzymuje się wtedy, przy pominięciu objętości samych (dość cienkich zresztą) przegród, kiedy to:

$$v - v_r \approx \frac{\pi}{4} (D^2 - nd^2) \cdot L \quad (5.182)$$

wzór na charakterystyczną powierzchnię przepływu:

$$(A_{zw})_{\acute{s}r} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{D^2 - nd^2}{\frac{D}{h}} \cdot \frac{1 - \frac{d}{s}}{1 - 0,9 \left(\frac{d}{s}\right)^2} \quad (5.183)$$

Rozstaw przegród h przyjmuje się na podstawie stosunku:

$$\frac{D}{h} = 3 \dots 5 \text{ (najlepiej } \frac{D}{h} \approx 4) \quad (5.184)$$

z tym, że musi być: $h \geq 50 \text{ mm}$.

Wielkość otworu w przegrodzie określa strzałka wycięcia b . Najczęściej stosuje się: $b = 0,25 \cdot D$.

Aby wolne przekroje przepływu w poprzek rur i wzdłuż nich (w otworze przegrody) były jednakowe (dla uniknięcia dodatkowego dławienia), wielkość b powinna wynosić:

$$b \approx \sqrt{2} h \cdot \frac{1 - \frac{d}{s}}{1 - 0,9 \cdot \left(\frac{d}{s}\right)^2} \quad (5.185)$$

ale nie może być większa od $0,5 \cdot D$.

Znając $(A_{zw})_{\acute{s}r}$ można obliczyć prędkość charakterystyczną:

$$w_{char} = \frac{\dot{V}}{(A_{zw})_{\acute{s}r}} \quad (5.186)$$

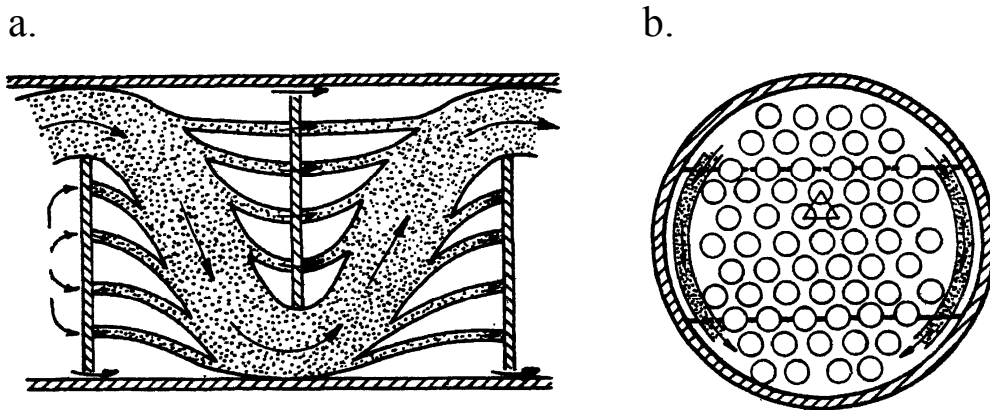
Tę prędkość podstawia się do odpowiedniego wzoru na przejmowanie ciepła - np. (5.98).

Poprawka ϵ_w do wzoru (5.98), pozwalającego obliczyć liczbę Nusselta dla pęku rur, uwzględnia przede wszystkim wpływ płynu przez luzy montażowe w przegrodach oraz ucieczkę płynu przez wolny przekrój między płaszczem a skrajnymi rurkami pęku (rys.5.48). Upływy te zmniejszają prędkość przepływu płynu w pęku w_{char} .

Ponadto poprawka ϵ_w winna uwzględniać pewne zmniejszenie liczby Nusselta (a tym samym α) wskutek wzdłużnego opływu rur w obszarze otworu w przegrodzie. Ze wzorów (5.102) i (5.98) można wyznaczyć stosunek współczynników przejmowania ciepła przy opływie pęku rur: wzdłużnym i prostopadłym. T. Hobler podaje, że dla $s/d = 1,25 \dots 1,5$ jest: $\alpha_w/\alpha_p = 0,8 \dots 0,6$ (przy $Re = 100\,000$).

Jednak to zmniejszone α występuje jedynie na ok.20% (przy: $b = 0,25 D$) całej powierzchni rur, tak że średni współczynnik przejmowania ciepła dla całego wymiennika ulegnie obniżeniu jedynie o kilka procent.

Jeżeli jeszcze wziąć pod uwagę, że wskutek gwałtownej zmiany kierunku występuje intensyfikacja przejmowania ciepła w pobliżu otworu przegrody, to można ujemny wpływ wzdłużnego przepływu na α pominąć.



Rys.5.48 Schemat upływu płynu przez nieszczelności
(a) w przegrodzie i (b) wokół pęku rur.

Natomiast upływy płynu przez szczeliny (a) wokół rurek i przegrody oraz przez przestrzeń (b) między pękiem rur a płaszczem mają znaczny wpływ na współczynnik przejmowania ciepła α .

Szerokość szczeliny wokół rurek wynosi 1... 2% zewnętrznej średnicy tych rurek (określona jest przez tolerancję hutniczego wykonania samych rurek oraz dokładność ich rozstawu w pęku), co daje luzy ok. 0,2... 0,7 mm. Szerokość szczeliny między przegrodą a płaszczem waha się na ogół w granicach 0,2...0,4% średnicy wewnętrznej płaszcza, co odpowiada luzom: 1,5...4 mm.

Wolna przestrzeń na obwodzie pęku nie jest dokładnie określona, ale w wadliwych rozwiązaniach konstrukcyjnych może osiągnąć znaczne rozmiary.

Z zestawienia wyników różnych badań (wykonanych dla względnych podziałek $s/d = 1,25...1,5$) otrzymuje się wartości współczynnika korekcyjnego:

$$\varepsilon_w = 0,46 \dots 0,78 \quad (5.187)$$

Do obliczeń **wstępnych** można za T.Hoblerem przyjmować dla normalnych luzów i to z dostatecznym bezpieczeństwem:

$$\varepsilon_w = 0,58 \dots 0,60 \quad (5.188)$$

Do obliczeń **sprawdzających** należy wprowadzić dokładną wartość współczynnika poprawkowego ε_w . Można to uczynić przy pomocy metody V.Gnielinskiego*).

Liczbę Nusselta należy więc obliczać dla układu przedstawionego jako:

$$Nu = 0,41 \cdot (Re)^{0,60} \cdot (Pr)^{0,33} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25} \cdot \varepsilon_w \quad (5.189)$$

natomiast dla układu rzędowego:

$$Nu = 0,23 \cdot (Re)^{0,65} \cdot (Pr)^{0,33} \cdot \left(\frac{Pr_f}{Pr_w}\right)^{0,25} \cdot \varepsilon_w \quad (5.190)$$

*) "VDI - Wärmeatlas", VDI - Verlag, Karlsruhe 1984.

Streszczenie części piątej

Przedstawiono całokształt zagadnień przejmowania ciepła, czyli konwekcyjnego przenoszenia ciepła.

Do wyznaczenia współczynnika przejmowania ciepła α służy zestaw równań opisujących to zjawisko nazywany równaniami konwekcji, a obejmujący równania różniczkowe: ciągłości, ruchu (Naviera - Stokesa) i energii (czyli równanie różniczkowe pola temperatury Fouriera - Kirchhoffa).

Spośród metod rozwiązywania tych równań najważniejszą jest całkowanie doświadczalne. Jego wyniki uogólnia się przy pomocy zasad teorii podobieństwa. Operuje ona warunkami (kryteriami) podobieństwa w postaci wyrażen utworzonych z wielkości charakteryzujących zjawisko i występujących w równaniach różniczkowych opisujących zjawisko. Wyrażenia te wyprowadza się z tych równań różniczkowych i są one bezwymiarowe. Są to liczby nazwane nazwiskami badaczy szczególnie zasłużonych w badaniach rozważanych zjawisk. I tak podobieństwo nieizotermicznego przepływu wymuszonego warunkuje identyczność liczb: Reynoldsa i ewentualnie Grashofa, a podobieństwo konwekcji swobodnej samych liczb Grashofa. Podobieństwo termiczne w zjawiskach ustalonych w czasie warunkuje identyczność liczb Pécleta dla konwekcji wymuszonej i Rayleigha dla konwekcji swobodnej. Ponadto występują liczby podobieństwa zawierające wielkości niewiadome, czyli tzw. liczby nieokreślające. Są to: liczba Eulera w przepływie płynu i liczba Nusselta w przejmowaniu ciepła.

Wyniki całkowania doświadczalnego przedstawia się jako zależności funkcyjne między tymi liczbami kryterialnymi.

Dla przepływu płynu:

$$Eu = f(Re, Gr)$$

Dla przejmowania ciepła:

$$Nu = f(Pe) = f(Re, Pr)$$

lub

$$Nu = f(Ra) = f(Gr, Pr)$$

lub

$$Nu = f(Re, Gr, Pr)$$

gdzie (Pr) jest liczbą Prandtla, która jako stosunek lepkości kinematycznej ν do współczynnika wyrównywania temperatury a - jest właściwością materiałową.

W przedstawionym następnie przeglądzie typowych przypadków przepływu podano szczegółowe wzory uzyskane w wyniku uogólnienia rezultatów pomiarów uzyskanych przez wielu badaczy. Wskazano przy tym na decydującą rolę warstwy przyściennej zarówno hydraulicznej jak i termicznej. Przedstawiono w zarysie podstawy analogii hydromechaniczno - termicznej i jej zastosowanie do przepływu wewnątrz rury okrągłej.

Omówiono przejmowanie ciepła przy przepływie wymuszonym wewnątrz kanałów, przy opływie najważniejszych układów geometrycznych: płyty, walca, pęku walców, pęku rur żebrowanych i kuli. Następnie przedstawiono przejmowanie ciepła w warunkach konwekcji swobodnej w przestrzeni nieograniczonej i ograniczonej.

Swoisty charakter ma przejmowanie ciepła przy zmianach stanu skupienia. Wrzenie cieczy, które jako pęcherzykowe ma szerokie zastosowanie techniczne, uwarunkowane jest skomplikowanym procesem tworzenia i wzrostu pęcherzyków pary. Bardzo intensywne wrzenie pęcherzykowe przechodzi tzw. kryzys wrzenia pęcherzykowego i przeradza się (często skokowo) we wrzenie błonowe bardzo niepożądane a nawet niebezpieczne w urządzeniach technicznych. Liczby kryterialne Nusselta i Reynoldsa dla wrzenia zdefiniowane są swoiście, a ponadto dochodzą nowe liczby: Archimedes a i Kutateładzego.

W skraplaniu par, które ma zasadniczo charakter błonowy, jedynym oporem cieplnym jest warstwa skroplin spływających po chłodnej ścianie. Stosunkowo dobrą zgodność z doświadczeniem daje, dla spływu laminarnego, zaprezentowana teoria Nusselta i uzyskany z niej wzór na współczynnik przejmowania ciepła. Zjawisko można scharakteryzować liczbą Reynoldsa zdefiniowaną przy pomocy prędkości i grubości spływającej warstwy skroplin. W ujęciu kryterialnym występują ponadto: liczba Galileusza charakteryzująca spływ cieczy pod wpływem siły ciężkości i liczba Jakoba charakteryzująca zmianę stanu skupienia płynu.

Na zakończenie omówiono, ważne w obliczeniach projektowych, zagadnienie przenikania ciepła przy nieznanej temperaturze ścianki i nieznanymi współczynnikami przyjmowania ciepła zależnych również od tej temperatury.

Drugim problemem przedstawionym w ostatnim rozdziale jest obliczanie współczynnika przyjmowania ciepła w warunkach poprzecznego opływu pęku rur w płaszczowo - rurowym wymienniku ciepła z przegrodami.

VI. PROMIENIOWANIE CIEPŁA

Promieniowanie ciał stałych, ciekłych i częściowo gazowych polega na tym, że część ich energii wewnętrznej odprowadzana jest przez fale elektromagnetyczne. Wszystkie długości fal od $\lambda = 0$ do $\lambda = \infty$ przenoszą energię^{*)}, ale poszczególne zakresy fal przenoszą różne ilości energii. Zwyczajowo dzieli się długości fal na zakresy podane w poniższej tabelicy.

T a b l i c a 13

Klasyfikacja fal elektromagnetycznych według długości

do 10^{-6} μm	promieniowanie kosmiczne
10^{-6} ... 10^{-4} μm	" gamma
10^{-4} ... 10^{-2} μm	promienie Roentgena
10^{-2} ... 0,4 μm	" ultrafioletowe
0,4 ... 0,8 μm	" świetlne
0,8 ... 300 μm	" podczerwone (cieplne)
0,3 ... 300 mm	" mikrofalowe
powyżej 300 mm	" radiowe

Promieniowanie ciepłe albo temperaturowe, tj. promieniowanie zależne od temperatury emitującego je ciała, nie ogranicza się do fal podczerwonych - obejmuje również fale innych długości jak świetlne czy ultrafioletowe, jednak największa część energii, w przeciętnych warunkach technicznych, przenoszona jest przez fale podczerwone.

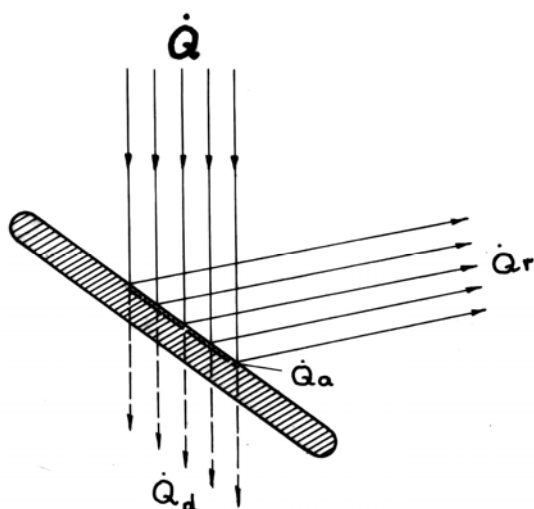
Energia ta jest energią przejść oscylacyjnych jąder atomowych (zmiany poziomów energetycznych) i przejść rotacyjnych drobin w przypadku fal podczerwonych, a energią przejść elektronów dla fal ultrafioletowych i świetlnych. Pozostałe rodzaje promieniowania są wywołane odmiennymi mechanizmami (kosmiczne - zmianą substancji w energię radiacyjną, gamma - rozpadem pierwiastków radioaktywnych itd.) i zajmować się nimi nie będziemy.

Rozpatrywane promieniowanie zależy wyłącznie od rodzaju substancji i temperatury w odróżnieniu od innych rodzajów promieniowania jak fluorescencja, radioaktywność i in. których właściwości nie są określone przez temperaturę ciała emitującego.

Każde ciało oprócz wysyłania promieniowania, czyli emisji, reaguje na promieniowanie padające na nie z innych ciał wykazując tym samym bierne właściwości radiacyjne.

^{*)} w tej części podręcznika symbol λ oznacza długość fali elektromagnetycznej, tak jak to jest przyjęte w fizyce.

1. BIERNE WŁAŚCIWOŚCI RADIACYJNE



Rys.6.1 Reakcja ciała na padające promieniowanie

Padające na ciało promieniowanie obce przenoszące energię \dot{Q} [W] zostaje ogólnie biorąc: częściowo pochłonięte (\dot{Q}_a), częściowo odbite (\dot{Q}_r) i częściowo przepuszczone (\dot{Q}_d):

$$\dot{Q} = \dot{Q}_a + \dot{Q}_r + \dot{Q}_d \quad (6.1)$$

albo

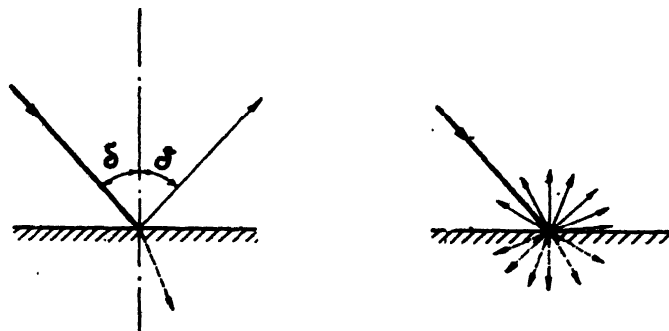
$$\frac{\dot{Q}_a}{\dot{Q}} + \frac{\dot{Q}_r}{\dot{Q}} + \frac{\dot{Q}_d}{\dot{Q}} = 1 \quad (6.2)$$

Wprowadzamy oznaczenia skrótowe dla poszczególnych członów i otrzymujemy:

$$a + r + d = 1 \quad (6.3)$$

Oznaczają tu: \underline{a} - absorpcyjność czyli pochłanianiałość, \underline{r} - refleksyjność czyli odbijalność, \underline{d} - diabatyczność czyli przepuszczalność.

Odbijanie promieni na powierzchniach gładkich ma charakter lustrzany, na powierzchniach matowych - rozproszony czyli dyfuzyjny (rys.6.2).



Rys. 6.2 Odbicie gładkie i matowe (dyfuzyjne)

Absorpcja (pochłanianie) promieniowania odbywa się w większości ciał stałych w warstwie przypowierzchniowej na głębokości kilku zaledwie mikrometrów. Tak więc ciała te, jeżeli nie są oczywiście zbyt cienkie, są nieprzepuszczalne dla promieniowania cieplnego. Niektóre przepuszczają promieniowanie o określonym zakresie długości fal, np.: kwarc - światłne i ultrafioletowe, a szkło - światłne. Wobec tego, że dla takich ciał $\underline{d} = 0$, mamy z (6.3):

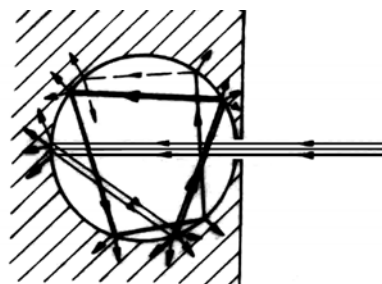
$$\underline{a} + \underline{r} = 1 \quad (6.4)$$

Zależnie od wykazywanych właściwości rozróżniamy poniższe charakterystyczne przypadki ciał:

Ciało doskonale czarne czyli takie, które pochłania całe padające na nie promieniowanie. Wtedy: $\underline{a} = 1$, a z (6.4) wynika: $\underline{r} = 0$, tzn. że ciało to nie odbija żadnej części padających fal (rys.6.4a).

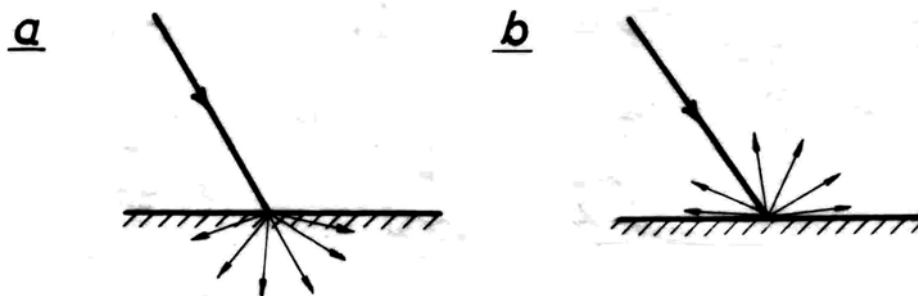
Modelem technicznym takiego ciała jest wnęka w ciele stałym, połączona niewielkim otworem z otoczeniem (rys.6.3). Promieniowanie wchodzące przez otwór po kilkukrotnych zetknięciach z powierzchnią wnęki (w czasie których każdorazowo część promieniowania jest pochłaniana a reszta odbijana) zostaje całkowicie pochłonięte.

W praktyce bardzo bliskie temu przypadkowi skrajnemu są powierzchnie pokryte substancją mikroporowatą, np. sadzą lub szronem (ten ostatni odbija co prawda promieniowanie światłne, ale bardzo silnie pochłania podczerwone).



Rys.6.3 Techniczna realizacja ciała doskonale czarnego za pomocą wnęki ciała szarego

Ciało doskonale białe, tj. takie, które odbija całe padające promieniowanie. Wtedy: $\underline{r} = 1$, a z (6.4) wynika: $\underline{a} = 0$, czyli nieabsorbowanie niczego z padającego promieniowania (rys.6.4b). Jest to drugi przypadek skrajny i stanowi, tak samo jak ciało doskonale czarne, idealizację rzeczywistości. W praktyce bliskie temu są polerowane powierzchnie metali. Natomiast ciała o białej barwie powierzchni odbijają tylko krótkofalowe promieniowanie światłne, a długofalowe cieplne absorbują.



Rys.6.4 Schemat reagowania ciał: doskonale czarnego (a) i doskonale białego (b).

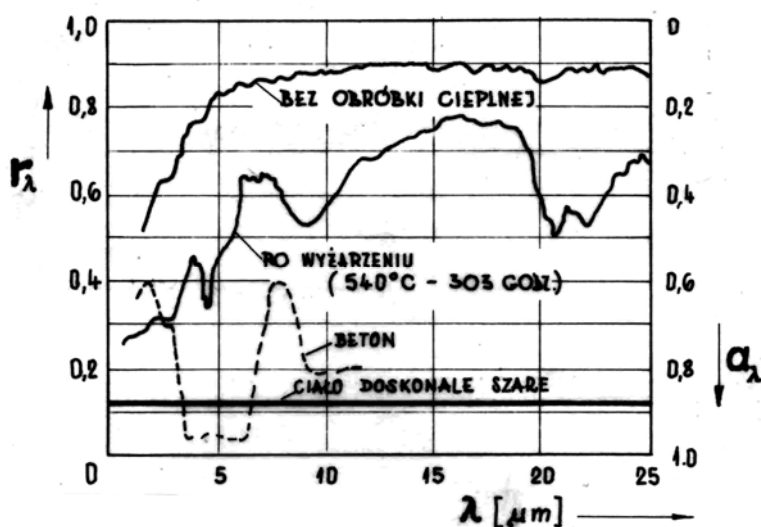
Ciała szare mają właściwości pośrednie: część padającego na nie promieniowania pochłaniają, a część odbijają:

$$\begin{aligned} 0 < a < 1 \\ 0 > r > 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Takie właściwości mają ciała występujące w przyrodzie. Jeżeli ciało absorbuje wszystkie długości fal w takim samym stopniu (jak ciało doskonale czarne), to mamy do czynienia z ciałem doskonale szarym.

Zarówno absorpcyjność (a) jak refleksyjność (r) zależą poza rodzajem substancji i temperatury ciała również od długości fal padających.

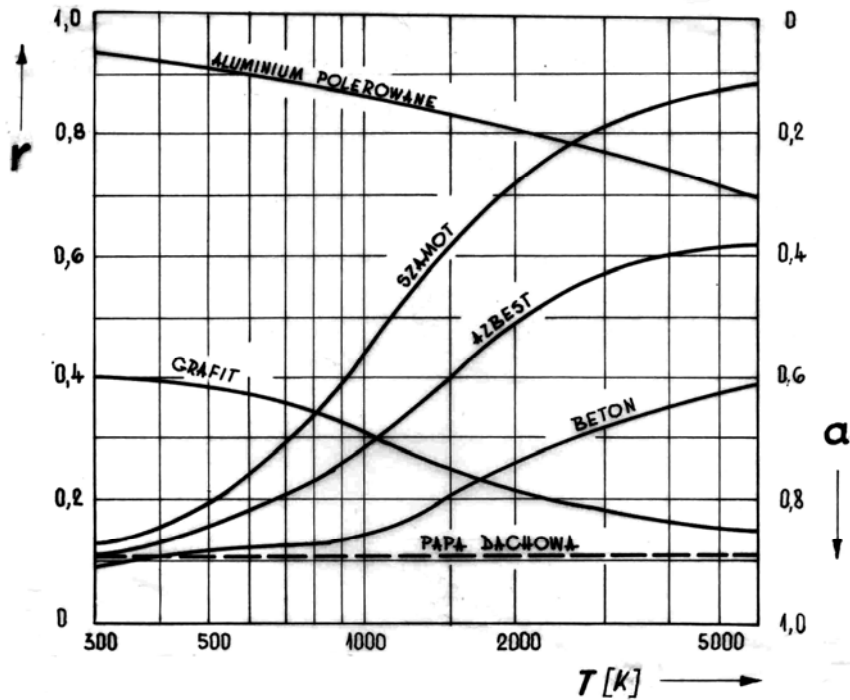
Absorpcyjność (lub refleksyjność) dotycząca elementarnego zakresu długości padających fal ($d\lambda$) nazywa się absorpcyjnością monochromatyczną i oznaczana jest przez a_λ (r_λ). Rozkład absorpcyjności monochromatycznej na wszystkie długości fal nosi nazwę widma absorpcyjności (lub refleksyjności). Przykład widma refleksyjności dla powierzchni z tytanu o temperaturze 95°C podaje poniższy rysunek. Ponieważ tytan ten jest nieprzezroczysty, obowiązuje tu (6.4) i dopełnienie rzędnych do 1,0 stanowi absorpcyjność: a_λ .



Rys.6.5 Widma refleksyjności i absorpcyjności

Dla ciała doskonale szarego widmo absorpcyjności na rys.6.5 było by prostą poziomą ($a_\lambda = \text{const}$), podobnie jak dla doskonale czarnego ($a_0 = 1$). W technice używa się absorpcyjności (i refleksyjności) całkowitych czyli panchromatycznych. Zależą one nie tylko od widma absorpcyjności, ale również (i to silniej) od widma promieniowania padającego. Takie właśnie wielkości panchromatyczne wchodzi do równań (6.3) i (6.4).

Z kolei rys.6.6 podaje zmienność absorpcyjności i refleksyjności różnych ciał, na które pada promieniowanie ciała doskonale czarnego o różnych temperaturach (same powierzchnie badane pozostają w temperaturze pokojowej). Większość ciał absorbuje silnie promieniowanie źródła o niższej temperaturze. Ze wzrostem temperatury źródła absorpcyjność spada (a refleksyjność rośnie) tak, że promieniowanie słoneczne (ok. 6000 K) jest silniej absorbowane np. przez polerowane aluminium niż przez szamet.



Rys.6.6 Refleksyjność i absorpcyjność ciał szarych w funkcji temperatury źródła promieniowania czarnego

2. EMISJA CIAŁA DOSKONALE CZARNEGO

Emisję własną charakteryzuje **natężenie promieniowania** \dot{e} [W/m^2], które jest ilością energii wypromieniowanej w ciągu jednostki czasu we wszystkich kierunkach (w obrębie półkuli) przez jednostkę powierzchni ciała za pomocą wszystkich długości fal. Jest to tak zwana **panchromatyczna** emisja własna (zwana również całkowitą emitancją promienistą^{*)}).

Wielkość natężenia promieniowania ciała doskonale czarnego jest określona znanym już prawem Stefana - Boltzmanna:

$$\dot{e}_0 = C_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \quad (6.6)$$

gdzie: $C_0 = 5,67 \text{ W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4$ jest stałą promieniowania ciała doskonale czarnego.

Całkowita (panchromatyczna) emisja rozłożona jest na poszczególne długości fal. Ilość emitowanej energii przypadającej na elementarny zakres długości fal $d\lambda$ (między λ i $\lambda+d\lambda$) nazywa się **monochromatycznym** albo **widmowym** natężeniem promieniowania (zwanym również intensywnością promieniowania lub monochromatyczną emitancją promienistą):

$$\dot{e}_\lambda = \frac{d\dot{e}}{d\lambda} \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{m}} \right] \quad (6.7)$$

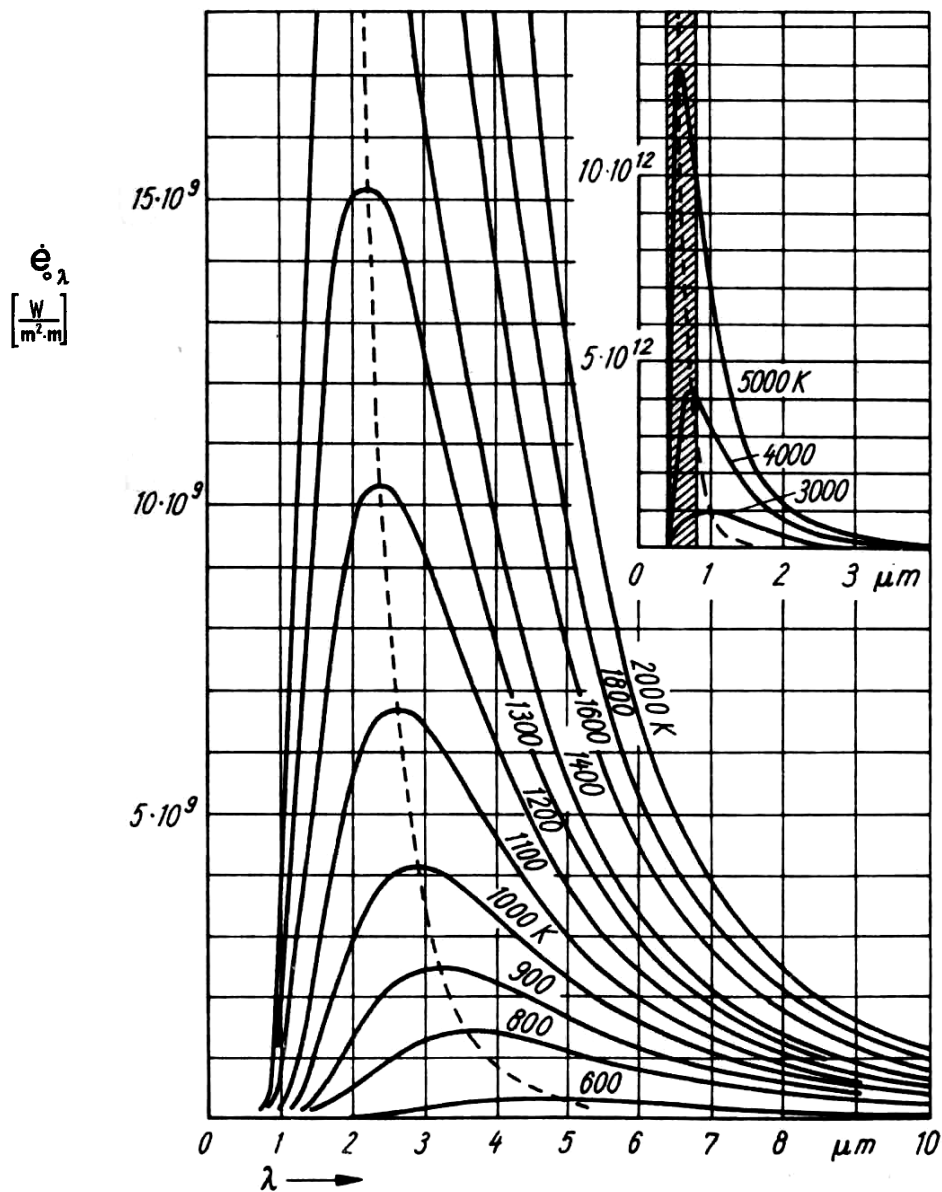
^{*)} A. Sala: Radiacyjna wymiana ciepła. WNT 1982

Jego wielkość zależy od długości fali - dla ciała doskonale czarnego jest ona określona prawem Maxa Plancka:

$$\dot{e}_{o\lambda} = \frac{d\dot{e}_o}{d\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5 \cdot \left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1 \right)} \quad (6.8)$$

gdzie: $c_1 = 0,374 \cdot 10^{-15} \text{ W} \cdot \text{m}^2$
 $c_2 = 0,01438 \text{ m} \cdot \text{K}$

Zależność tę prezentuje w postaci wykresnej poniższy rysunek, z temperaturą bezwzględną T jako parametrem.



Rys.6.7 Widmo promieniowania czarnego w funkcji temperatury

Jak widać na rys. 6.7 energia emitowana przez ciało czarne jest nierówno rozdzielona na poszczególne długości fal. Dla technicznie ważnego zakresu $T = 500 \dots 3\,000$ K falami przenoszącymi największe ilości energii są fale o długościach: $\lambda = 0,6 \dots 6 \mu\text{m}$, a więc fale podczerwone

Maksymalne wartości monochromatycznego natężenia promieniowania przesuwają się ze wzrostem temperatury ku mniejszym długościom fal. Przy $5\,000 \dots 6\,000$ K (temperatura powierzchni słońca: $5\,780$ K) przypadają one na fale o długościach: $0,4 \dots 0,6 \mu\text{m}$, a więc na fale świetlne.

Położenie maksimum monochromatycznego natężenia promieniowania wyznacza się przez zróżniczkowanie (6.8), przy $T = \text{const}$, względem λ i przyrównanie wyniku do zera:

$$\left(\frac{d\dot{e}_{o\lambda}}{d\lambda} \right)_{T=\text{const}} = 0$$

W rezultacie otrzymuje się związek:

$$\lambda_m = \frac{c_2}{5T} = \frac{2,88 \cdot 10^{-3}}{T} [\text{m}] = \frac{2880}{T} [\mu\text{m}] \quad (6.9)$$

zwany pierwszym prawem W. W i e n a.

Z obserwacji (pomiaru) λ_m można wnioskować o temperaturze T powierzchni ciała emitującego promieniowanie. Ma to zwłaszcza znaczenie dla ciał odległych (np. powierzchni gwiazd).

Suma energii przenoszonej przez wszystkie długości fal czyli pole pod izotermą na rys. 6.7 jest panchromatycznym natężeniem promieniowania (określonym przez prawo Stefana-Boltzmann'a) i wynosi:

$$\int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \dot{e}_{o\lambda} \cdot d\lambda = \dot{e}_o = c_o \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 \quad (6.10)$$

Z prawa Plancka (6.8) można określić rozkład energii na poszczególne (umowne) rodzaje promieniowania. Podaje go poniższa tab. 14. Widnieją w niej procentowe udziały energii przypadające na określone rodzaje promieniowania, jako części całkowitej energii emitowanej przez ciało doskonale czarne o danej temperaturze.

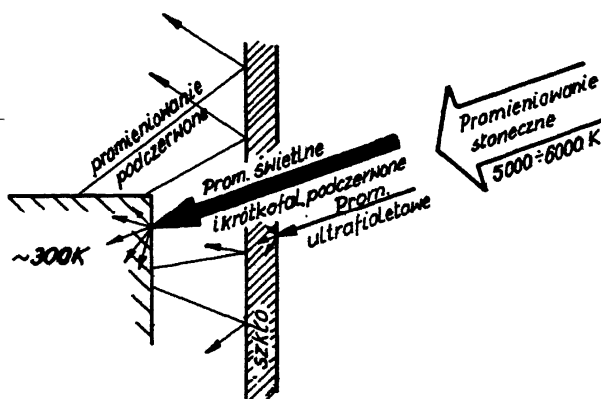
T a b l i c a 14

Udziały różnych rodzajów promieniowania w całkowitej energii promieniowania ciał doskonale czarnych i szarych

Temperatura ciała promieniującego	Promienie podczerwone	Promienie świetlne	Promienie ultrafioletowe
do 1 200 K	~ 100%	—	—
2 000 K	98%	2%	—
2 500 K	95%	5%	—
4 000 K	75%	24%	1%
6 000 K	45%	43%	12%
10 000 K	18%	50%	42%

W tablicy widać, że dla temperatury $6\,000$ K (przybliżona temperatura powierzchni słońca) energia przenoszona jest w prawie równych częściach przez promieniowanie podczerwone i świetlne.

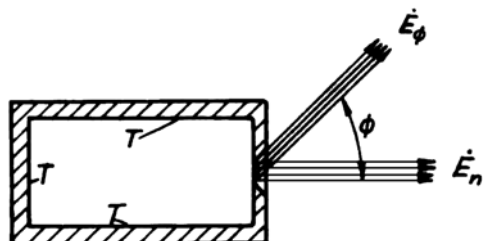
To ostatnie tłumaczy, w połączeniu z właściwościami szkła (które przepuszcza promieniowanie świetlne, a nie przepuszcza ciepłego), tzw. efekt szklarniowy. Przepuszczona przez szyby energia promieniowania świetlnego i krótkofalowego (do ok. $2 \mu\text{m}$) podczerwonego jest w przeważającej części absorbowana przez ciała w pomieszczeniu - same ciała promieniują energię tylko za pośrednictwem fal podczerwonych długofalowych. Te ostatnie nie są jednak przez szyby przepuszczane i ich energia pozostaje w pomieszczeniu. Mamy więc do czynienia z rodzajem pułapki dla energii promieniowania świetlnego.



Rys.6.8 Ilustracja efektu szklarniowego

Na zakończenie rozdziału należy zwrócić uwagę na modelowy jedynie charakter emisji ciała doskonale czarnego - w rzeczywistości ciał takich nie ma. Prawo Plancka wyznacza maksymalnie możliwe monochromatyczne natężenia promieniowania dla poszczególnych długości fal przy określonej temperaturze dowolnego ciała - nie ma w przyrodzie ciał, które mogłyby te wartości przekroczyć.

Techniczna realizacja ciała emitującego promieniowanie (prawie) doskonale czarne przedstawiona jest na poniższym rysunku. Jest ona odwróceniem działania wnętrza z rys. 6.3.



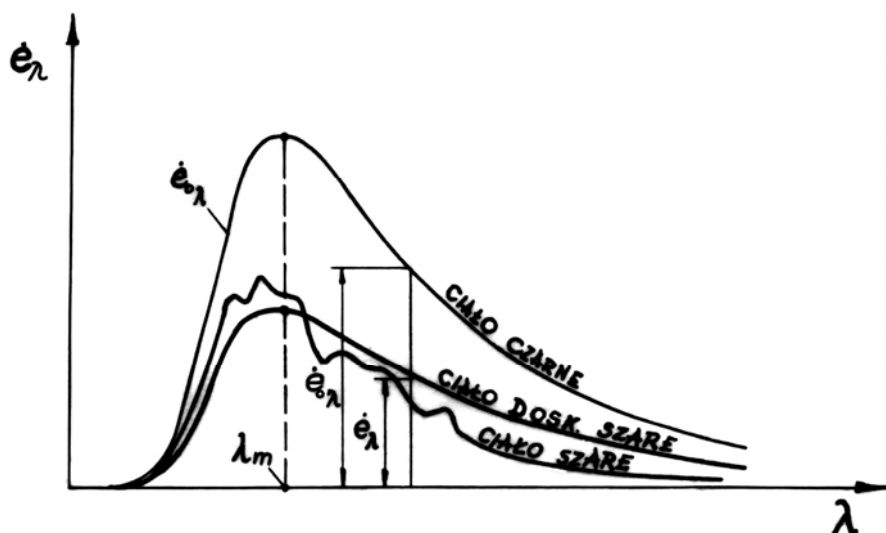
Rys.6.9 Schemat wnętrza szarej emitującej promieniowanie (prawie) doskonale czarne

3. EMISJA CIAŁ SZARYCH

3.1. Właściwości promieniowania ciał szarych

Promieniowanie ciał szarych jest takie, że rozkład energii na poszczególne długości fal jest ciągły (w odróżnieniu od nieciągłego rozkładu dla ciał promieniujących selektywnie), a dla ciał **doskonale szarych** podobny do rozkładu ciała czarnego. Widmo emisji ciała doskonale szarego stanowi zmniejszenie widma ciała doskonale czarnego (rys.6.10).

Ciało doskonale szare promieniuje podobnie jak ciało doskonale czarne na wszystkich długościach fal - ale słabiej.



Rys.6.10 Widmo promieniowania szarego

Dla ciała doskonale szarego stopień zmniejszenia emisji w stosunku do ciała doskonale czarnego czyli **stopień czarności** (inaczej: **emisyjność**):

$$\varepsilon = \frac{\dot{e}_\lambda}{\dot{e}_{0\lambda}} = \text{const} \neq f(\lambda) \quad (6.11)$$

jest stały w całym zakresie długości (λ).

Rzeczywiste ciała szare takie jak: dielektryki, półprzewodniki i metale (zarówno czyste jak i pokryte tlenkami) wykazują jednak zmienność stopnia czarności z długością fali i warunek (6.11) nie jest w nich spełniony.

Emisyjność dla pojedynczej długości fali, czyli tzw. emisyjność **monochromatyczna**:

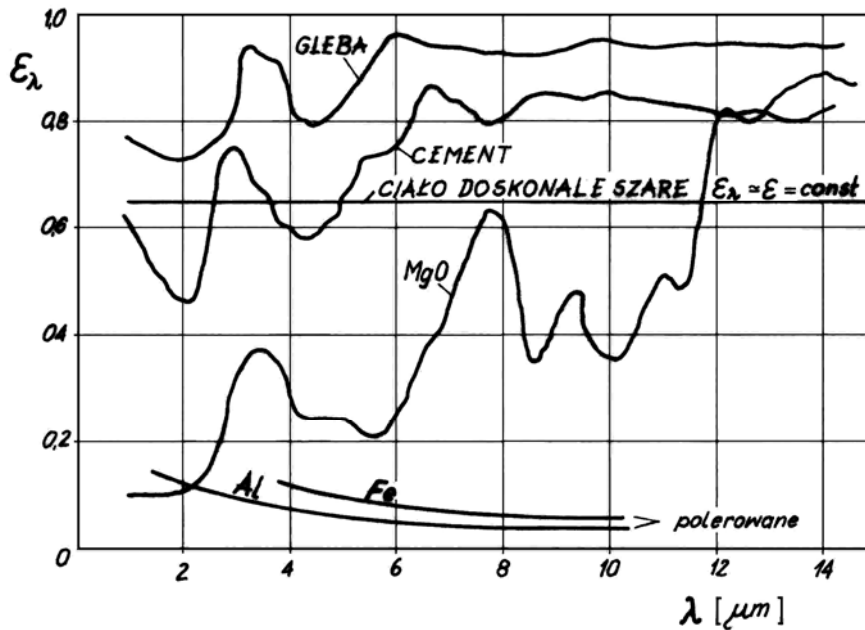
$$\varepsilon_\lambda = f(\lambda) \neq \text{const}$$

wzrasta z długością fali dla dielektryków, dla metali maleje, a półprzewodniki wykazują właściwości pośrednie. Ilustruje to powyższy rysunek 6.11.

Dla celów technicznych używa się emisyjności uśrednionej czyli **panchromatycznej** ε . Zależy ona zasadniczo od rodzaju substancji, temperatury ciała i gładkości jego powierzchni. Powierzchnie chropowate, wykazujące tzw. **wnętkowość** zbliżającą budowę powierzchni do budowy technicznego ciała czarnego (rys. 6.9), zwiększają odpowiednio stopień czarności tej powierzchni ε . Przykładowe wartości emisyjności ε podano w tabl. 3 na str. 13. Dalsze dane można łatwo znaleźć w licznych źródłach literaturowych.

Tak więc emisję ciała szarego określa wzór Stefana - Boltzmann dla ciała doskonale czarnego skorygowany emisyjnością:

$$\dot{E} = \varepsilon \cdot C_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \cdot A \quad [W] \quad (6.12)$$



Rys.6.11 Emisyjność monochromatyczna ϵ_λ w funkcji długości fali dla dielektryków, metali i ciała doskonale szarego

Ciała szare poza emisją własną \dot{Q}_e [W] odbijają część padającego na nie promieniowania obcego w ilości \dot{Q}_r [W]. To łączne promieniowanie opuszczające powierzchnię odniesione do wielkości powierzchni stanowi tzw. jasność powierzchni:

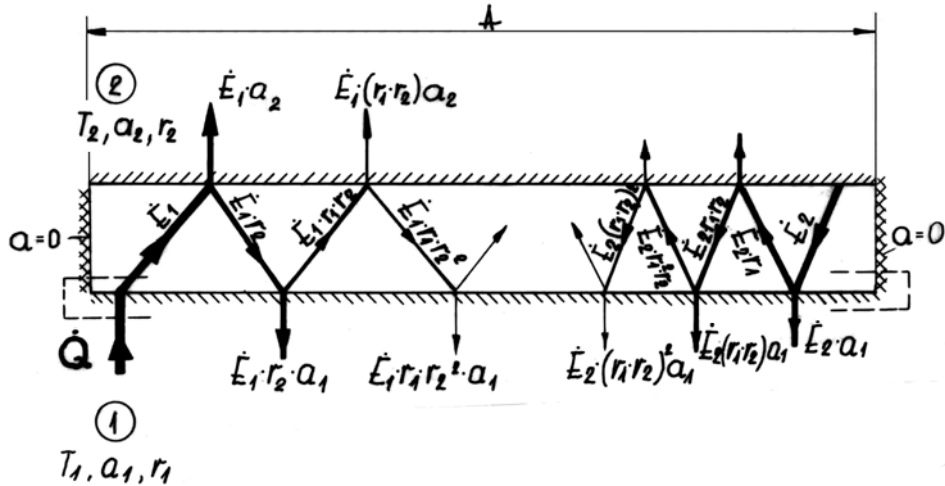
$$\dot{J} = \frac{\dot{E} + \dot{Q}_r}{A} = \dot{e} + \frac{\dot{Q}_r}{A} \quad (6.13)$$

3.2. Prawo Kirchhoffa

Dwie równoległe powierzchnie szare o różnych temperaturach (rys.6.12) emitują (każda niezależnie) promieniowanie ciepłe w ilościach określonych prawem Stefana - Boltzmann'a. Wskutek odbicia od drugiej powierzchni - część własnego promieniowania wraca i jest częściowo absorbowana, a częściowo ponownie odbijana. Celem zapobieżenia ucieczce promieni z układu, wolny obwód układu zamknięty jest ciałem doskonale białym odbijającym całkowicie padające nań promieniowanie. Sporządzamy bilans energii warstwy przypowierzchniowej ciała ①.

W stanie ustalonym składa się on z następujących pozycji:

- ciepła doprowadzonego z wnętrza ciała przez przewodzenie: \dot{Q} [W],
- energii cieplnej wypromieniowanej: \dot{E}_1 ,
- części emisji własnej zwróconej wskutek częściowego odbicia od ciała ② i pochłonięcia jej przez rozpatrywaną powierzchnię ①: \dot{Q}_1 [W],
- części emisji ciała ② pochłoniętej przez ciało ①: \dot{Q}_2 [W].



Rys.6.12 Ilustracja do prawa Kirchoffa

Ostatnie dwa człony obliczamy śledząc kolejne zetknięcia wiązki promieniowania z obu powierzchniami.

Zwrócona emisja własna wynosi:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_1 &= (\dot{E}_1 r_2) \cdot a_1 + (\dot{E}_1 r_1 r_2^2) \cdot a_1 + \dots = \\ &= \dot{E}_1 a_1 r_2 \cdot [1 + r_1 r_2 + (r_1 r_2)^2 + \dots]\end{aligned}\quad (6.14)$$

Wyrażenie w nawiasie jest szeregiem geometrycznym o ilorazie: $r_1 \cdot r_2 < 1$, mającym nieskończenie wielką liczbę wyrazów, z których pierwszy wynosi: 1.

Suma wszystkich wyrazów wynosi:

$$\frac{1}{1 - r_1 \cdot r_2}\quad (6.15)$$

Podstawiając to do (6.14) otrzymujemy:

$$\dot{Q}_1 = \frac{a_1 \cdot r_2}{1 - r_1 r_2} \cdot \dot{E}_1\quad (6.16)$$

Pochłonięta emisja obca wynosi:

$$\begin{aligned}\dot{Q}_2 &= \dot{E}_2 a_1 + (\dot{E}_2 \cdot r_1 r_2) \cdot a_1 + \dots = \\ &= \dot{E}_2 a_1 \cdot [1 + r_1 r_2 + (r_1 \cdot r_2)^2 + \dots]\end{aligned}\quad (6.17)$$

Wyrażenie w nawiasie jest tu takie same jak uprzednio. Zatem po uwzględnieniu (6.15) otrzymujemy:

$$\dot{Q}_2 = \frac{a_1 \cdot \dot{E}_2}{1 - r_1 r_2}\quad (6.18)$$

Równanie bilansu:

$$\dot{E}_1 = \dot{Q} + \dot{Q}_1 + \dot{Q}_2\quad (6.19)$$

po podstawieniu (6.16) i (6.18) i prostych przekształceniach, w których korzysta się z zależności (6.4), przyjmuje postać:

$$\dot{Q} = \frac{\dot{E}_1 a_2 - a_1 \dot{E}_2}{1 - r_1 r_2} \quad (6.20)$$

Ciepło doprowadzane \dot{Q} równoważy ubytek energii rozpatrywanej powierzchni ① na rzecz ciała ②. Wzór (6.19) określa więc ilość ciepła przeniesioną efektywnie przez promieniowanie od powierzchni ① do ②.

Prawo Kirchhoffa określa związek między emisyjnością (stopniem czarności) a absorpcyjnością ciała szarego. Aby ten związek uzyskać odetniemy dopływ ciepła \dot{Q} do układu z rys.6.12. Staje się on wtedy adiabatyczny i po pewnym czasie osiągnie równowagę. Wtedy temperatury obu powierzchni ulegną zrównaniu: $T_1 = T_2$.

Dla $\dot{Q} = 0$ otrzymujemy z (6.20):

$$a_2 \dot{E}_1 = a_1 \dot{E}_2 \quad (6.21)$$

Dzieląc obie strony przez $A_1 = A_2 = A$ otrzymujemy w miejsce emisji: \dot{E} [W] natężenie promieniowania: \dot{e} [W/m²].

Po uporządkowaniu uzyskujemy związek:

$$\frac{\dot{e}_1}{a_1} = \frac{\dot{e}_2}{a_2} = \text{idem} = \frac{\dot{e}_0}{1} \quad (6.22)$$

który mówi, że ilorazy natężenia promieniowania i absorpcyjności różnych ciał (w tej samej temperaturze) są takie same i równe natężeniu promieniowania ciała doskonale czarnego (którego absorpcyjność: $a_0 = 1$). Ujmując to inaczej mamy:

$$\varepsilon = \frac{\dot{e}_i}{\dot{e}_0} = a_i = f(T) \quad (6.23)$$

czyli: emisyjność ciała szarego jest równa jego absorpcyjności w danej temperaturze, tzn. emituje ono tyle, ile zaabsorbowałoby z promieniowania wysyłanego przez ciało doskonale czarne o tej samej temperaturze.

Prawo Kirchhoffa jest dokładne tylko dla ciała doskonale szarego, którego emisyjność i absorpcyjność są podobne (proporcjonalnie zmniejszone) do ciała doskonale czarnego - dla rzeczywistych ciał szarych jest to spełnione, gdy: $\varepsilon > 0,5$.

Podkreślić należy, że absorpcyjność jest równa emisyjności danego ciała jedynie w tej samej temperaturze.

Jeżeli ciało promieniujące ma inną temperaturę, to absorpcyjność jest inna niż wynikająca z prawa Kirchhoffa. Dotyczy to w szczególności promieniowania słonecznego ($T \approx 6000$ K). Na przykład: powłoki lakieru czarnego i białego mają w temperaturach 0...200°C: $\varepsilon = a = 0,92...0,96$, ale dla promieniowania słonecznego powłoka czarna ma: $a' = 0,97...0,99$, a biała: $a' = 0,12...0,26$.

Podobnie jak wyżej dla promieniowania panchromatycznego, można wyprowadzić prawo Kirchhoffa dla promieniowania monochromatycznego (o określonym zakresie długości $d\lambda$) otrzymując:

$$\frac{\dot{e}_\lambda}{a_\lambda} = \text{idem} = \frac{\dot{e}_{0\lambda}}{1} = f(T, \lambda) \quad (6.24)$$

Ten zapis prawa Kirchhoffa ma szczególne zastosowanie do ciał o selektywnych właściwościach radiacyjnych.

Wnioski z prawa Kirchhoffa są następujące:

- 1) *Ciała przezroczyste nie absorbują ani nie emitują energii*
 Bowiemy dla: $\underline{d} = 1$ jest według (6.3): $\underline{r} = 0$ i $\underline{a} = 0$, a dla tego ostatniego jest według (6.23): $\varepsilon = 0$.
 Dotyczy to na przykład: mieszaniny tlenu, azotu i gazów szlachetnych (czyli powietrza bez H_2O i CO_2).
- 2) *Ciała nieprzezroczyste o idealnie gładkiej powierzchni również nie absorbują ani nie emitują energii.*
 W tym przypadku jest: $\underline{d} = 0$ i $\underline{r} = 1$, wobec czego: $\underline{a} = \varepsilon = 0$.
 Bardzo bliskie takiego modelowego ciał są polerowane powierzchnie metali ($\varepsilon \leq 0,07$), zwłaszcza srebra i złota ($\varepsilon = 0,01 \dots 0,02$) w umiarkowanych temperaturach.

4. KIERUNKOWOŚĆ EMISJI

4.1. Prawo Lamberta

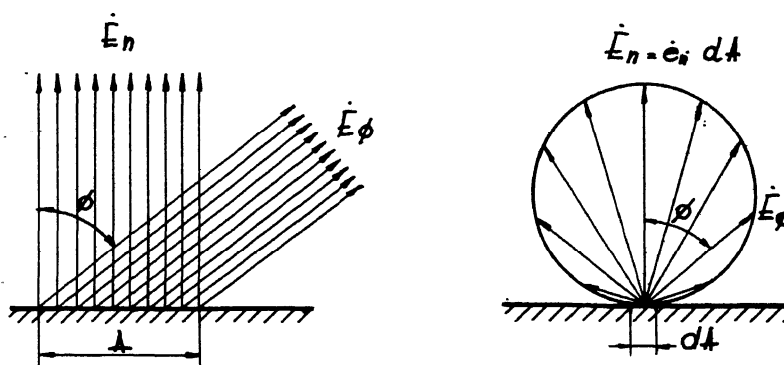
Prawo Stefana - Boltzmana określa ilość energii emitowanej przez powierzchnię we wszystkich kierunkach półprzestrzeni.

Natomiast rozkład tego promieniowania na poszczególne kierunki określa prawo J.H. Lamberta. Mówi ono, że ilość energii emitowanej w kierunku odchylonym od normalnej o kąt ϕ jest zmniejszoną kosinowo emisją w kierunku normalnym, czyli:

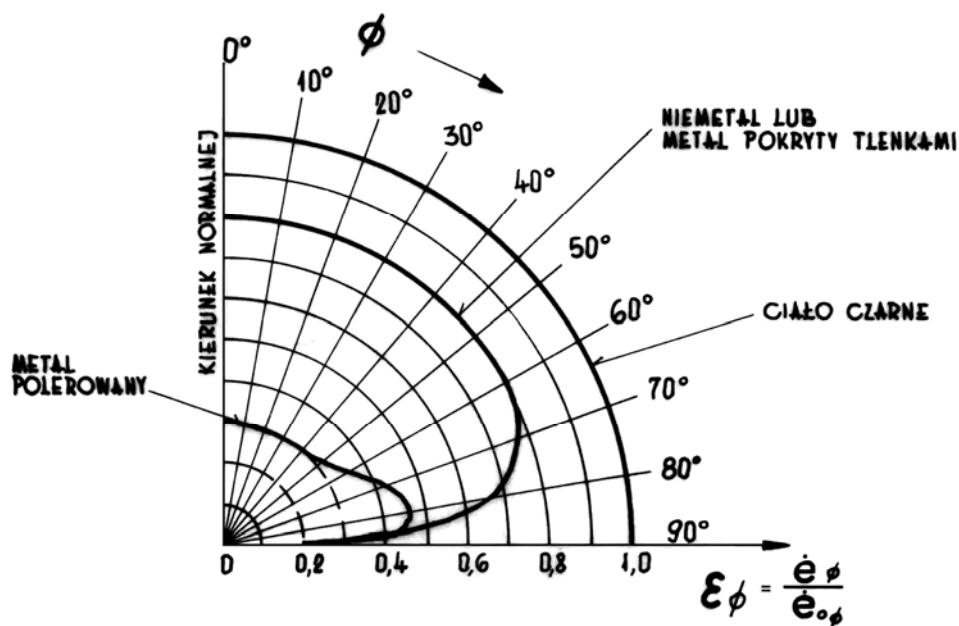
$$\dot{E}_\phi = \dot{E}_n \cdot \cos \phi \quad (6.25)$$

Graficznym obrazem tego prawa jest wykres wektorowy (rys. 6.13), na którym widać, że długość wektora na odpowiednim kierunku jest proporcjonalna do emisji w tym właśnie kierunku.

Prawo Lamberta jest dokładne tylko dla ciała doskonale czarnego. Dla rzeczywistych ciał (szarych) występują odchylenia począwszy od pewnej wielkości kąta ϕ , czyli w zakresie kierunków zbliżonych do rozpatrywanej powierzchni. Ilustruje to rys. 6.14, który w układzie biegunowym podaje względne (w stosunku do doskonale czarnego) natężenia



Rys.6.13 Ilustracja do prawa Lamberta



Rys.6.14 Wykres biegunowy kierunkowej emisyjności dla różnych ciał

promieniowania na poszczególnych kierunkach, czyli emisyjność kierunkową:

$$\frac{\dot{e}_\phi}{\dot{e}_{0\phi}} = \epsilon_\phi \quad (6.26)$$

Dla ciała doskonale czarnego jest oczywiście stałe: $\epsilon_\phi = 1$. Niemetale o powierzchni matowej i metale pokryte tlenkami zachowują stałe $\epsilon_\phi = \text{const.}$ tylko do kąta $\phi \approx 65^\circ$, potem ich emisyjność kierunkowa silnie maleje. Metale o gładkiej powierzchni przy ogólnej małej emisyjności zachowują $\epsilon_\phi = \text{const.}$ do $\phi = 40^\circ$. Potem ich emisyjność wzrasta, aby raptownie spaść do zera przy samej ścianie. Jednak średnia emisyjność kierunkowa dla niemetali nie różni się zbytnio od normalnej:

$$\epsilon_{\phi_{sr}} = 0,98 \cdot \epsilon_n$$

Natomiast dla metali o gładkiej powierzchni jest:

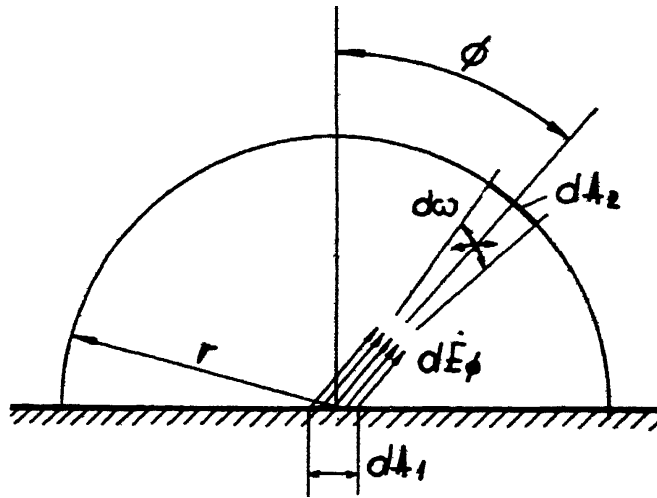
$$\epsilon_{\phi_{sr}} = 1,20 \cdot \epsilon_n$$

Tablice podane w literaturze podają wartości ϵ_n lub $\epsilon_{\phi_{sr}}$.

4.2. Promieniowanie do półprzestrzeni

Celem określenia związku między emisją w kierunku normalnym (prostopadłym) a całkowitą emisją do półprzestrzeni wyznaczmy najpierw ilość energii wypromieniowanej do elementarnego kąta bryłowego leżącego na kierunku odchylonym pod kątem ϕ od pionu (vide rys. 6.15):

$$d^2Q_\phi = d\dot{E}_\phi \cdot d\omega = \dot{e}_\phi \cdot dA_1 \cdot d\omega \quad (6.27)$$



Rys.6.15 Ilustracja emisji do elementarnego kąta bryłowego

Zgodnie z prawem Lamberta jest: $\dot{e}_\phi = \dot{e}_n \cos \phi$ zatem:

$$d^2Q_\phi = \dot{e}_n \cos \phi \cdot d\omega \cdot dA_1 \quad (6.28)$$

Wartość kąta bryłowego $d\omega$ określona jest przez stosunek powierzchni czworoboku sferycznego (dA_2) do promienia sfery (kuli) w kwadracie (analogicznie do kąta płaskiego, będącego stosunkiem długości łuku do promienia koła):

$$d\omega = \frac{dA_2}{r^2} = \frac{(r d\phi) \cdot (r \sin \phi d\psi)}{r^2} = \sin \phi \cdot d\phi \cdot d\psi \quad (6.29)$$

Wielkość powierzchni dA_2 określono tu z zależności trygonometrycznych pokazanych na rys.6.16.

Po podstawieniu (6.29) do (6.28) otrzymujemy:

$$d^2Q_\phi = \dot{e}_n \sin \phi \cdot \cos \phi \cdot d\phi \cdot d\psi \cdot dA_1 \quad (6.30)$$

Całkujemy to wyrażenie na obszarze półsfery tj. w granicach: $\phi = 0 \dots \frac{1}{2} \pi$ oraz $\psi = 0 \dots 2\pi$ i otrzymujemy ilość ciepła emitowaną do półprzestrzeni przez element powierzchni dA_1 :

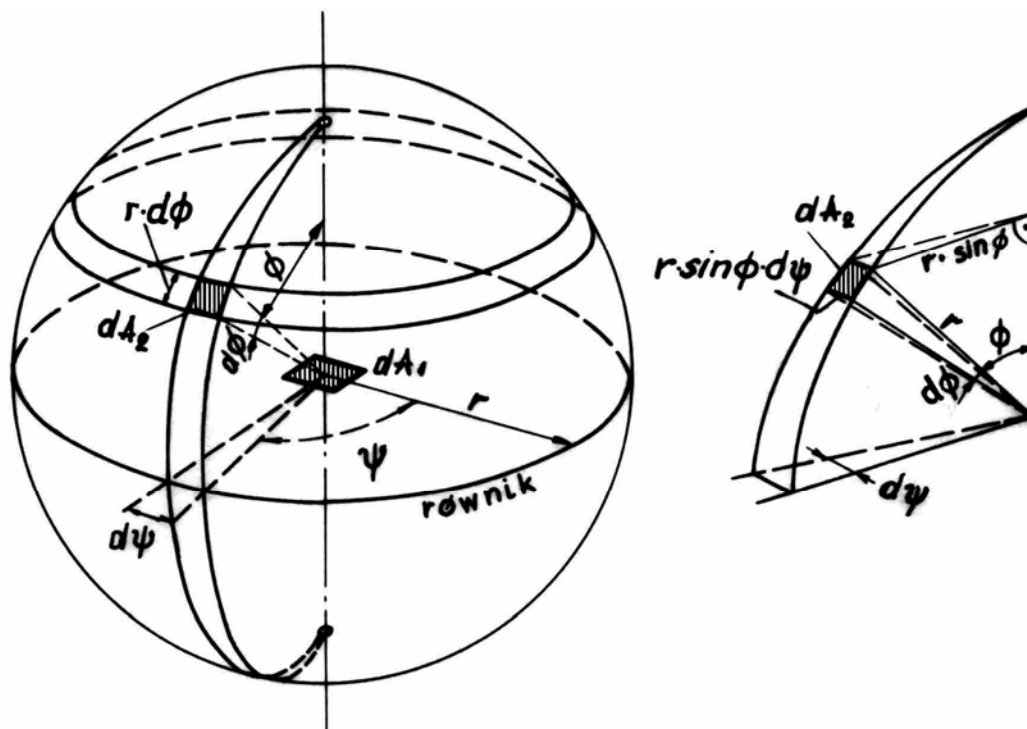
$$\begin{aligned} d\dot{Q} &= \dot{e}_n dA_1 \cdot \int_{\psi=0}^{2\pi} d\psi \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \cos \phi d\phi = \\ &= \dot{e}_n dA_1 2\pi \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \dot{e}_n dA_1 \end{aligned} \quad (6.31)$$

Z drugiej strony ilość ta jest określona prawem Stefana – Boltzmann (dla ciał szarych):

$$d\dot{Q} \equiv d\dot{E} = \dot{e} dA_1 = \epsilon C_0 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4 \cdot dA_1 \quad (6.32)$$

Porównanie (6.31) i (6.32) daje w rezultacie:

$$\dot{e} = \pi \cdot \dot{e}_n \quad (6.33)$$



Rys.6.16 Trygonometria półsfery

Całkowita emisja jednostki powierzchni do półprzestrzeni jest zatem π razy większa od natężenia emisji w kierunku prostopadłym do tej powierzchni.

Podstawiamy e_n z (6.33) do (6.28) i otrzymujemy wyrażenie na ilość energii emitowanej przez elementarną powierzchnię dA_1 do kąta bryłowego $d\omega$ leżącego na kierunku odchylonym od pionu o kąt ϕ :

$$\underbrace{d^2\dot{Q} = \frac{\dot{e}}{\pi} \cdot \cos \phi \cdot dA_1 \cdot d\omega}_{(6.34)}$$

Posłuży ono do obliczenia wymiany ciepła między powierzchniami dowolnie rozmieszczonymi w przestrzeni.

5. PRZENOSZENIE CIEPŁA MIĘDZY POWIERZCHNIAMI SZARYMI

Przenoszenie ciepła przez promieniowanie ma zawsze charakter bilansowy - wszystkie biorące udział w procesie powierzchnie emitują promieniowanie z natężeniami określonymi przez ich temperatury i wszystkie pochłaniają część padającego promieniowania, a część odbijają. W tym przypadku można z pełnym uzasadnieniem używać określenia: „wymiana ciepła”.

Oczywiście promieniowanie powierzchni o najwyższej temperaturze przeważa i ono wyznacza kierunek efektywnego przenoszenia ciepła.

Rozpatrzmy przenoszenie ciepła między dwiema powierzchniami. Najpierw uczynimy to dla dwu prostszych przypadków, potem dla przypadku ogólniejszego.

5.1 Dwie powierzchnie równoległe

Zakłada się, że odległość między dwiema równoległymi powierzchniami jest dostatecznie mała, a rozmiary tych powierzchni są wystarczająco duże, aby można było zaniedbać ucieczki promieniowania przez otwarte boki.

Energię przeniesioną od jednej powierzchni do drugiej wyznaczono już w podrozdziale 3.2 otrzymawszy wzór (6.20):

$$\dot{Q} = \frac{\dot{E}_1 a_1 - a_1 \dot{E}_2}{1 - r_1 r_2}$$

Wobec:

$$r_1 = 1 - a_1 \quad (\text{bo } d_1 = 0)$$

$$r_2 = 1 - a_2 \quad (\text{bo } d_2 = 0)$$

otrzymujemy przy wykorzystaniu prawa Kirchhoffa ($a = \varepsilon$):

$$\dot{Q} = \frac{\varepsilon_2 \dot{E}_1 - \varepsilon_1 \dot{E}_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \quad (6.35)$$

Emisje: \dot{E}_1 i \dot{E}_2 określone są prawem Stefana - Boltzmannna dla ciał szarych (6.12). Uwzględniając jeszcze, że: $A_1 = A_2 = A$ otrzymujemy:

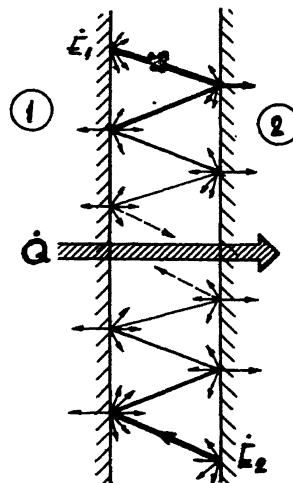
$$\dot{Q} = \frac{A \cdot C_0}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (6.36)$$

albo:

$$\dot{Q} = \varepsilon_{1-2} \cdot C_0 \cdot A \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (6.37)$$

gdzie: ε_{1-2} jest emisyjnością zastępczą układu dwu powierzchni równoległych:

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \quad (6.38)$$



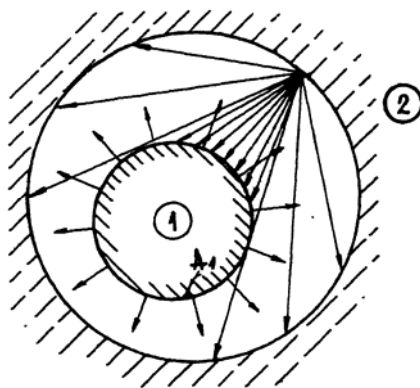
Rys.6.17 Promieniowanie w układzie powierzchni równoległych

5.2. Powierzchnia zamknięta w drugiej

Zakłada się, że zamknięta powierzchnia (ta mniejsza) jest niewklęsła (wypukła lub płaska), tak że nie opromieniowuje samej siebie (rys. 6.18). Całe jej promieniowanie (własne i odbite) przechodzi do powierzchni zamykającej A_2 . Natomiast z promieniowania tej ostatniej tylko część φ trafia do A_1 . Reszta: $(1 - \varphi)$ pada na nią samą w innych miejscach. Wielkość φ jest **współczynnikiem konfiguracji** obydwu powierzchni.

Jasność: \dot{J}_1 [$\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}$] powierzchni A_1 składa się z emisji własnej i odbitego promieniowania z powierzchni A_2 . Tak więc mamy:

$$\dot{J}_1 A_1 = A_1 \dot{e}_1 + \varphi A_2 \dot{J}_2 \cdot (1 - \varepsilon_1) \quad (6.39)$$



Rys.6.18 Promieniowanie w układzie zamkniętym

gdzie: $(1 - \varepsilon_1) = r_1$ jest refleksyjnością powierzchni A_1

Jasność powierzchni A_2 : \dot{j}_2 składa się z analogicznych członów, tak więc:

$$\dot{j}_2 A_2 = A_2 \dot{e}_2 + A_1 \dot{j}_1 \cdot (1 - \varepsilon_2) + A_2 \dot{j}_2 \cdot (1 - \varphi) \cdot (1 - \varepsilon_2) \quad (6.40)$$

Pierwszy człon po prawej jest emisją własną, drugi promieniowaniem powierzchni A_1 odbitym od A_2 , trzeci odbitym promieniowaniem własnym (padającym z innych miejsc powierzchni A_2).

Ciepło przenoszone efektywnie od A_1 do A_2 stanowi różnicę między promieniowaniem emitowanym i zaabsorbowanym:

$$\dot{Q}_{1-2} = A_1 \dot{e}_1 - \varphi A_2 \dot{j}_2 a_1 = A_1 \dot{e}_1 - \varphi A_2 \dot{j}_2 \varepsilon_1 \quad (6.41)$$

Współczynnik konfiguracji φ zależy tylko od geometrii układu, a nie od temperatur T_1 i T_2 . Tak więc można go wyznaczyć dla najprostszego przypadku równowagi: $T_1 = T_2$ i $\dot{Q}_{1-2} = 0$.

Obliczamy jasność \dot{j}_2 z układu równań (6.39) i (6.40) i otrzymujemy:

$$\dot{j}_2 = \frac{\dot{e}_2 + \frac{A_1}{A_2} \cdot \dot{e}_1 \cdot (1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_2 + \varphi \varepsilon_1 (1 - \varepsilon_2)} \quad (6.42)$$

i to podstawiamy do (6.41) przy: $\dot{Q}_{1-2} = 0$.

Po pewnych przekształceniach dochodzimy do prostego wyrażenia na współczynnik konfiguracji

$$\varphi = \frac{A_1}{A_2} \quad (6.43)$$

niezależny od kształtu, położenia i temperatur obydwu powierzchni.

Efektywnie przenoszony strumień ciepły określamy teraz z (6.41) z podstawieniem: (6.42) i (6.43) oraz (6.12):

$$\dot{Q}_{1-2} = \frac{C_0 \cdot A_1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \varphi \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (6.44)$$

albo:

$$\dot{Q}_{1-2} = \varepsilon_{1-2} \cdot C_0 \cdot A_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (6.45)$$

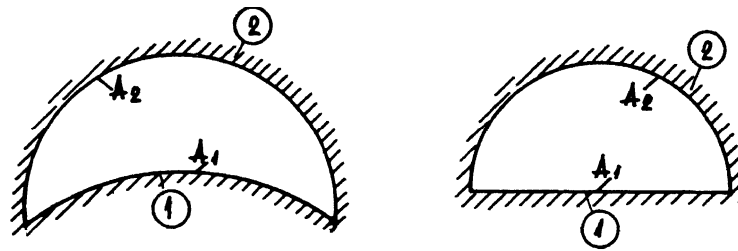
z zastępczym stopniem czarności:

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \varphi \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} \quad (6.46)$$

Jeżeli powierzchnia zamykająca A_2 jest bardzo duża w porównaniu z A_1 (np. termometr w pokoju), to $\varepsilon_{1-2} \approx \varepsilon_1$ i miarodajne dla przenoszenia ciepła są tylko właściwości powierzchni zamkniętej (termometru).

W przeciwnym przypadku, gdy A_2 ulega zmniejszeniu, to φ zbliża się do jedności (czyli do przypadku dwu powierzchni równoległych), a emisyjność zastępcza ε_{1-2} maleje zapewniając np. mniejsze straty ciepłe rurociągu A_1 zamkniętego w kanale o powierzchni A_2 .

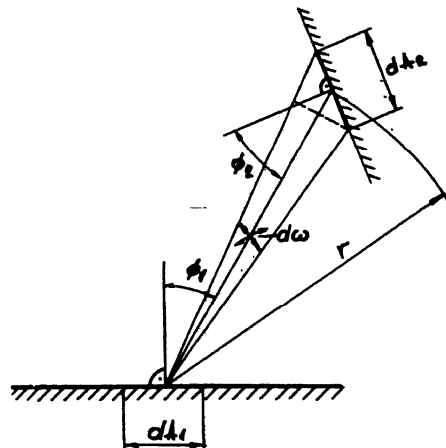
W podany sposób można również obliczać przenoszenie ciepła w układach zamkniętych przedstawionych na rys. 6.19. Promieniowanie powierzchni A_1 (mniejszej) nie pada bowiem na nią samą.



Rys. 6.19 Dalsze przykłady układów zamkniętych

5.1 Dwie dowolnie rozmieszczone powierzchnie

Rozpatrujemy elementy powierzchniowe dA_1 i dA_2 na każdym z ciał o temperaturach T_1 i T_2 . Obieramy kąt bryłowy $d\omega$, pod którym widać element dA_2 z elementu powierzchni dA_1 (rys. 6.20). Energia emitowana do tego kąta wynosi zgodnie z (6.34):



Rys. 6.20 Opromieniowanie wzajemne elementarnych powierzchni dwu ciał ►

$$d^2\dot{Q} = \frac{\dot{e}_1}{\pi} \cdot \cos\phi_1 \cdot dA_1 \cdot d\omega \quad (6.47)$$

Kąt $d\omega$ można wyrazić przez:

$$d\omega = \frac{dA_2 \cdot \cos\phi_2}{r^2} \quad (6.48)$$

co podstawione do (6.47) daje energię wyemitowaną do kąta $d\omega$:

$$d^2\dot{Q} = \frac{\dot{e}_1}{\pi} \cdot \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2}{r^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 \quad (6.49)$$

Z tej energii padającej na dA_2 zostaje pochłonięte:

$$d^2\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} = a_2 d^2\dot{Q} = \frac{a_2 \dot{e}_1}{\pi} \cdot \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2}{r^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 \quad (6.50)$$

Dla bardzo małych kątów $d\omega$ można pominąć powracającą energię odbitą. Dla większości materiałów technicznych: $\underline{a} = 0,8 \dots 0,95$, tak że dla $\underline{a} > 0,9$ można poprzestać na pierwszej absorpcji i pominąć powracającą energię odbitą również dla skończonych kątów ω .

Analogicznie wyznacza się energię wypromieniowaną przez dA_2 i pochłoniętą przez dA_1 :

$$d^2\dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = \frac{a_1 \dot{e}_2}{\pi} \cdot \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2}{r^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 \quad (6.51)$$

Efektywnie przeniesiona energia jest różnicą między (6.50) i (6.51):

$$\begin{aligned} d^2\dot{Q}_{1-2} &= d^2\dot{Q}_{1 \rightarrow 2} - d^2\dot{Q}_{2 \rightarrow 1} = \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot (a_2 \dot{e}_1 - a_1 \dot{e}_2) \cdot \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2}{r^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 \end{aligned} \quad (6.52)$$

Wprowadzamy w miejsce natężeń promieniowania (6.12), a absorpcyjności zastępujemy emisyjnościami (6.23) i otrzymujemy:

$$d^2\dot{Q}_{1-2} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot C_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot \frac{\cos\phi_1 \cos\phi_2}{\pi r^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 \quad (6.53)$$

Dla powierzchni o skończonych rozmiarach A_1 i A_2 oraz stałych temperaturach T_1 i T_2 jest:

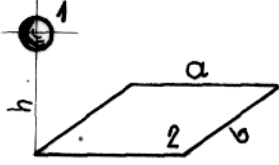
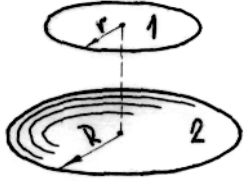
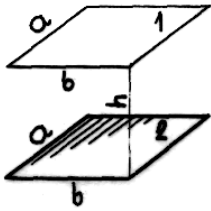
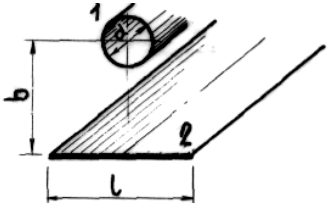
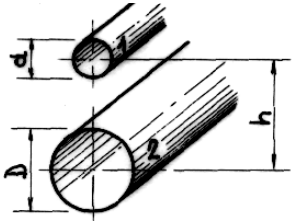
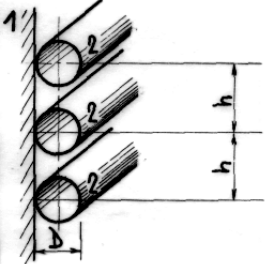
$$\dot{Q}_{1-2} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot C_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2}{\pi r^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 \quad (6.54)$$

Całka podwójna obejmuje wyłącznie wielkości geometryczne będące wyrazem konfiguracji obu powierzchni A_1 i A_2 .

Zatem:

$$\iint_{A_1 A_2} \frac{\cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2}{\pi r^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 = A_1 \psi_{1-2} = A_2 \psi_{2-1} \quad (6.55)$$

Przykłady wzorów na stosunek konfiguracji φ_{1-2}

UKŁAD	SZKIC	WZÓR
1 – elementarna powierzchnia kulista 2 - prostokąt		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{4\pi} \arccos \sin \frac{a \cdot b}{\sqrt{(h^2 + a^2)(h^2 + b^2)}}$
Dwie równoległe, płaskie, okrągłe tarcze, o wspólnej normalnej centralnej		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2r^2} \left[h^2 + r^2 + R^2 - \sqrt{(h^2 + r^2 + R^2)^2 - 4r^2 R^2} \right]$
Dwie równoległe, jednakowe płaszczyzny prostokątne (jedna powstaje przez przesunięcie drugiej w kierunku normalnej)		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{h^2}{ab} \cdot \ln \frac{(a^2 + h^2)(h^2 + b^2)}{h^2(h^2 + a^2 + b^2)} - \frac{2h}{a} \arccos \frac{b}{h} - \frac{2h}{b} \arccos \frac{a}{h} + \frac{2\sqrt{h^2 + b^2}}{b} \cdot \arccos \frac{a}{\sqrt{h^2 + b^2}} + \frac{2\sqrt{h^2 + a^2}}{a} \cdot \arccos \frac{b}{\sqrt{h^2 + a^2}} \right]$
Dwie nieograniczone, równoległe powierzchnie: 1 – walec 2 - pasmo		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{l}{2b}$
Dwie nieograniczone, równoległe powierzchnie walcowe		$\varphi_{1-2} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d+D}{d} \arccos \sin \frac{d+D}{2h} - \frac{D-d}{d} \arccos \sin \frac{D-d}{2h} + \frac{\sqrt{4h^2 - (D+d)^2} - \sqrt{4h^2 - (D-d)^2}}{d} \right]$
1 – nieograniczona płaszczyzna 2 – ekran (szereg) nieograniczonych, równoległych walców		$\varphi_{1-2} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{D}{h}\right)^2} + \frac{D}{h} \cdot \arccos \sqrt{\left(\frac{h}{D}\right)^2 - 1}$

gdzie: φ_{1-2} i φ_{2-1} są średnimi współczynnikami konfiguracji:

$$\varphi_{1-2} = \frac{1}{A_1} \cdot \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2}{\pi r^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 \quad (6.56)$$

oraz:

$$\varphi_{2-1} = \frac{1}{A_2} \cdot \iint_{A_1 A_2} \frac{\cos\phi_1 \cdot \cos\phi_2}{\pi r^2} \cdot dA_1 \cdot dA_2 \quad (6.57)$$

Wyznaczenie tych współczynników jest na ogół dość trudne. Dla szeregu przypadków można znaleźć gotowe wzory lub wykresy pomocnicze w literaturze*). W innych przypadkach stosuje się różne metody: analityczne z obliczeniem całek wielokrotnych, numeryczne, graficzne, metody modelowe z wykorzystaniem integratorów mechanicznych lub światła oraz elektrycznych urządzeń analogowych.

Prawe części równania (6.55):

$$A_1 \cdot \varphi_{1-2} = A_2 \cdot \varphi_{2-1}$$

stanowią tzw. prawo przemienności.

Wprowadzając zastępczą emisyjność układu:

$$\varepsilon_{1-2} = \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \varphi_{1-2} \quad (6.58)$$

otrzymujemy ostateczny wzór do obliczania efektywnie przeniesionego ciepła:

$$\dot{q}_{1-2} = \varepsilon_{1-2} \cdot C_0 \cdot A_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (6.59)$$

5.4. Ekrany

Ekrany mają na celu zmniejszenie przenoszenia ciepła przez promieniowanie. Między dwiema powierzchniami równoległymi (rys. 6.21a) przenoszony jest strumień cieplny o gęstości:

$$\dot{q}_{1-2} = \varepsilon_{1-2} \cdot C_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = C_{1-2} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (6.60)$$

Zakładamy $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$. Po umieszczeniu między rozpatrywanymi powierzchniami ekranu (rys. 6.21b), pomiędzy każdą z powierzchni a ekranem o emisyjności $\varepsilon_e = \varepsilon$ i temperaturze T_e przenoszone są strumienie:

$$\dot{q}_{1-e} = C_{1-2} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_e}{100} \right)^4 \right] \quad (6.61)$$

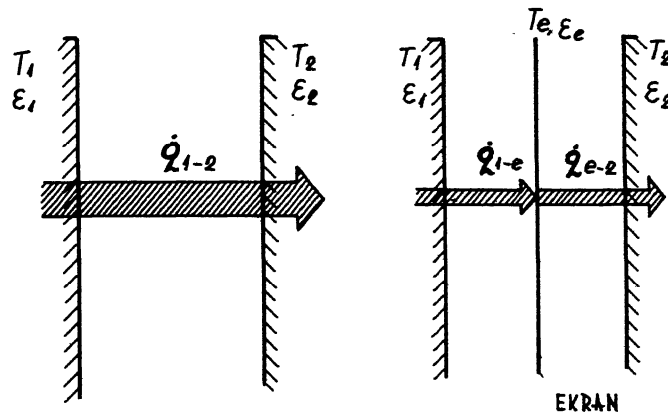
$$\dot{q}_{e-2} = C_{1-2} \cdot \left[\left(\frac{T_e}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (6.62)$$

*) Np. A. Sala: „Radiacyjna wymiana ciepła” WNT 1982.

J. Madejski: „Teoria wymiany ciepła” 1) PWN 1963, 2) Wydaw. Politechniki Szczecińskiej 1998.

T. Hobler: „Ruch ciepła - wymienniki. WNT 1986.

Aut. zbior. „Poradnik inżyniera mechanika” WNT 1968.



Rys.6.21 Schemat działania ekranu

W stanie ustalonym musi być:

$$\dot{q}_{1-e} = \dot{q}_{e-2} \quad (6.63)$$

czyli:

$$\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_e}{100}\right)^4 = \left(\frac{T_e}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \quad (6.64)$$

$$\left(\frac{T_e}{100}\right)^4 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 + \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \quad (6.65)$$

Zatem:

$$\dot{q}_{1-e} = \dot{q}_{e-2} = \frac{1}{2} c_{1-2} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] = \frac{1}{2} \dot{q}_{1-2} \quad (6.66)$$

Dla liczby n równoległych ekranów będzie:

$$\dot{q}_{1-e} = \frac{1}{n+1} \cdot \dot{q}_{1-2} \quad (6.67)$$

A więc ekrany o tej samej emisyjności, w liczbie n sztuk, zmniejszają ilość przenieszonego przez promieniowanie ciepła $(n+1)$ -krotnie.

Dalsze zmniejszenie możliwe jest przez zastosowanie powierzchni ekranów o zmniejszonej emisyjności (np. z polerowanego aluminium).

W praktyce ekranuje się m.in. czujniki miernicze termometrów mierzących temperaturę spalin w paleniskach, aby wyeliminować promieniowanie płomienia z jednej, a wypromieniowanie ciepła z czujnika do otaczających ścian z drugiej strony.

Poza tym idea wielokrotnego ekranu np. z folii aluminiowej znalazła zastosowanie jako izolacja ciepłochronna ("alfol") oraz jako niezwykle skuteczna izolacja kriogeniczna (niskotemperaturowa), w której na dodatek eliminuje się, praktycznie biorąc, przewodzenie i konwekcję w gazie przez wypompowanie tego gazu spomiędzy ekranów.

6. SELEKTYWNE PROMIENIOWANIE GAZÓW

6.1. Właściwości radiacyjne gazów

Spośród gazów część jest w warunkach spotykanych w technice, praktycznie biorąc, zupełnie przepuszczalna dla promieniowania cieplnego. Są to gazy o tzw. **budowie symetrycznej**, tj. takie których drobiny składają się z takich samych atomów, np.: argon Ar, krypton Kr i inne szlachetne oraz tlen O₂, azot N₂, wodór H₂ itd. Dopiero w bardzo wysokich temperaturach (8000 K i wyżej) niektóre z nich, w postaci zdysocjowanej, wykazują właściwości radiacyjne - nawet znaczne.

Wobec: $\underline{d} = 1$ musi być na podstawie (6.3): $\underline{a} = 0$ i $\underline{r} = 0$, a zgodnie z prawem Kirchhoffa również: $\varepsilon = 0$. Oznacza to, że gazy o budowie symetrycznej (praktycznie biorąc) nie absorbują ani nie emitują promieniowania.

Natomiast gazy, których drobiny składają się z różnych atomów, czyli gazy o **budowie niesymetrycznej** jak H₂O, CO₂, CO, NH₃, C_nH_m itp. wykazują właściwości radiacyjne, ale różniące się szeregiem osobliwości od promieniowania ciał mających powierzchnię.

Przedewszystkim promieniowanie tych gazów ma charakter selektywny, tzn. emitują i absorbują one tylko w określonych przedziałach długości fal („pasmach”) - pozostałą część widma pozostawiając zupełnie przezroczystą (rys. 6.22). Np. dla dwutlenku węgla CO₂ i pary wodnej H₂O aktywne są następujące pasma:

CO ₂	$\lambda = 2,36 \dots 3,02 \mu\text{m}$	H ₂ O	$\lambda = 2,24 \dots 3,27 \mu\text{m}$
	$\lambda = 4,01 \dots 4,80 \mu\text{m}$		$\lambda = 4,8 \dots 8,5 \mu\text{m}$
	$\lambda = 12,50 \dots 16,50 \mu\text{m}$		$\lambda = 12 \dots 25 \mu\text{m}$

Podane wartości liczbowe są przybliżone, bo granice pasm nie są ostre, a ich szerokości zależą od grubości warstwy gazu i jego gęstości.

Prawo Kirchhoffa odnosi się tu do poszczególnych pasm długości (wzór 6.24):

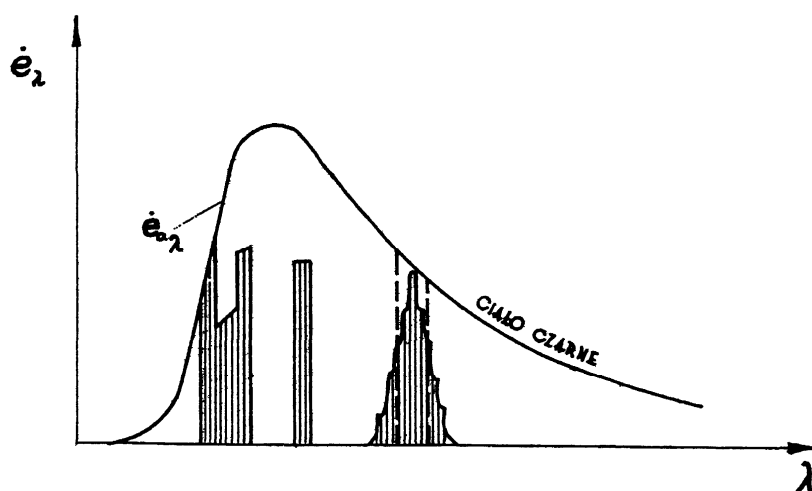
$$\frac{\dot{\varepsilon}_{\lambda}}{a_{\lambda}} = \text{idem} = f(T, \lambda)$$

W pewnych zakresach $d\lambda$ natężenie promieniowania może osiągnąć wielkość natężenia ciała doskonale czarnego: $\dot{\varepsilon}_{\lambda} = \dot{\varepsilon}_{o\lambda}$.

Dla technicznie bardzo grubych warstw, panchromatyczne absorpcyjności promieniowania pochodzącego od ciała doskonale czarnego (o tej samej temperaturze) są następujące:

t [°C]	CO ₂	H ₂ O
200	12 %	67 %
1000	10,5 %	46 %
2000	6 %	24 %

Spadek absorpcyjności z rosnącą temperaturą jest tu spowodowany przesuwaniem się maksimum natężenia promieniowania (λ_m) ku falom krótszym leżącym poza aktywnymi pasmami absorbujących gazów.



Rys.6.22 Przykład widma promieniowania gazu

Gazy absorbują i emitują w całej swojej objętości. Stąd ważny jest kształt bryły gazowej i ciśnienie (zagęszczenie cząstek) w niej. W zasadzie gazy nie stosują się do prawa Stefana-Boltzmann.

Wyniki pomiarów np. dla CO_2 spełniają następującą zależność:

$$\epsilon_{\text{CO}_2} = 0,878 \cdot (pL)^{1/3} \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^{3,5} \quad (6.68)$$

w której p [kPa] jest ciśnieniem składnikowym gazu promieniującego, a L [m] grubością warstwy gazu.

W praktyce stosuje się jednak prawo Stefana - Boltzmann jak dla ciał szarych (6.12), z tym że odchylenia ujmuje **emisyjność panchromatyczna gazu** zależna poza temperaturą od iloczynu ciśnienia i grubości warstwy ($p \cdot L$):

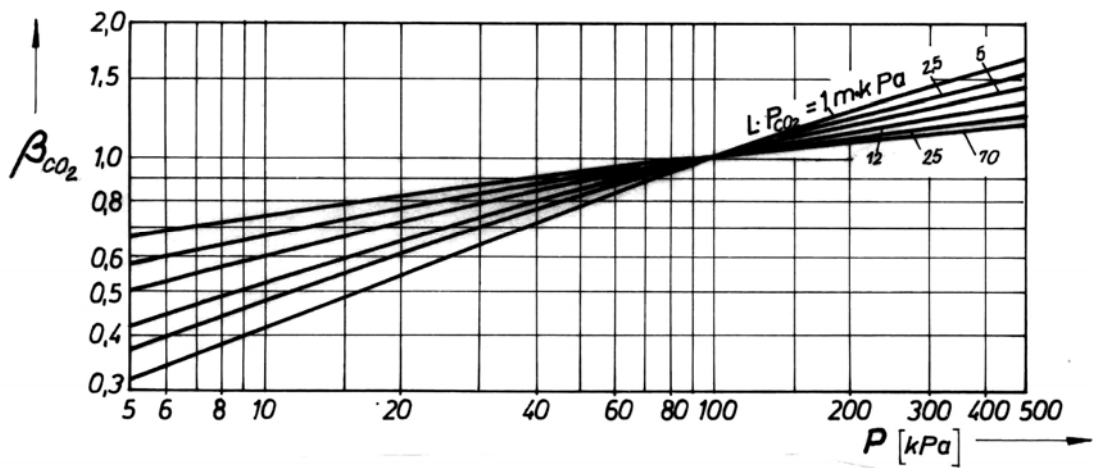
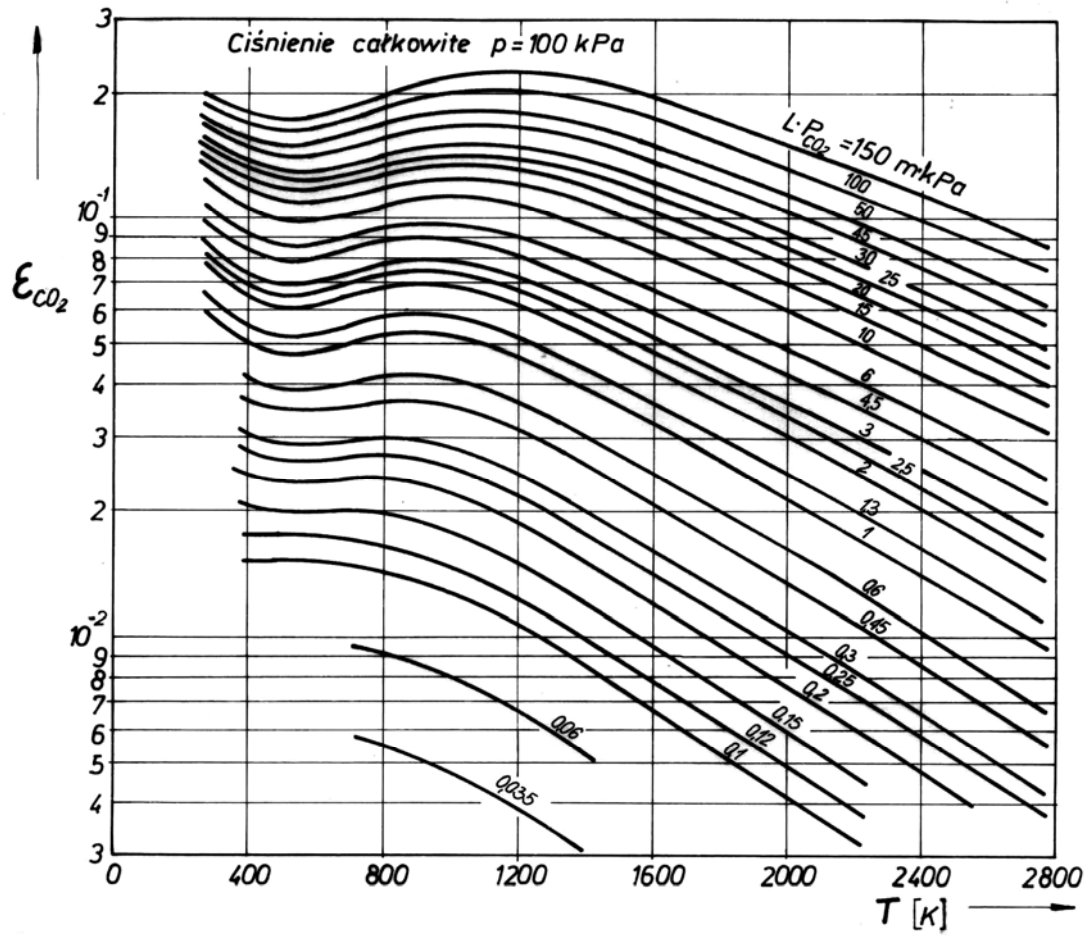
$$\epsilon_g = f(T, pL) = a_g \quad (6.69)$$

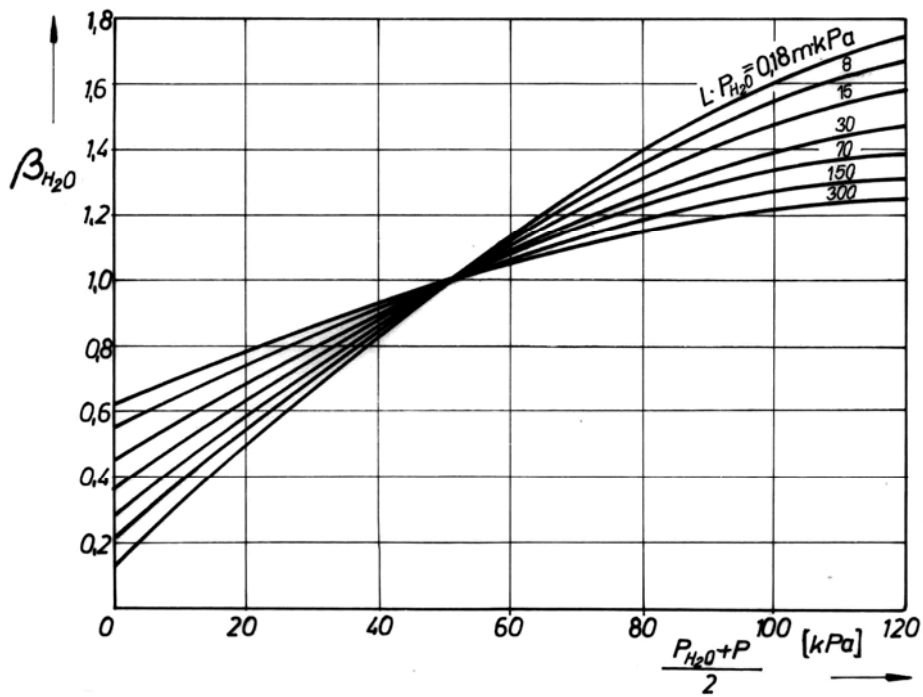
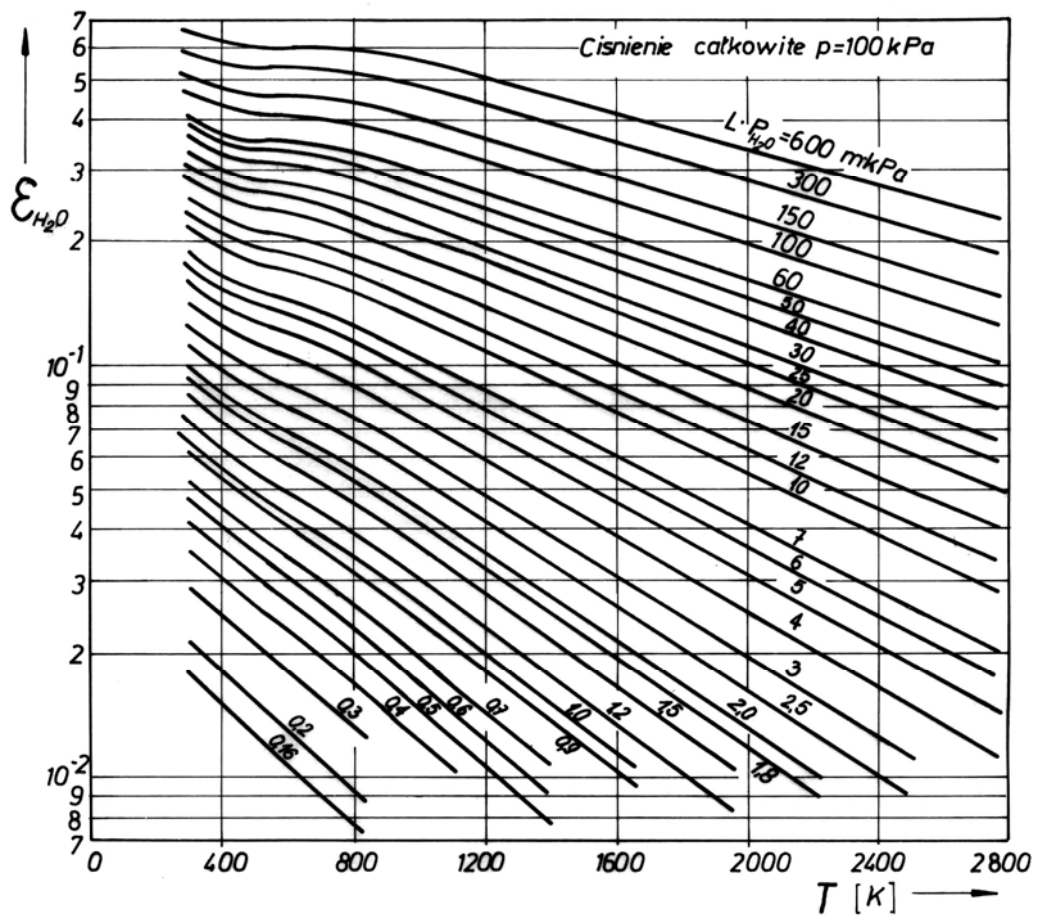
Wykresy na rys. 6.23 i 6.24, podają wartości ϵ_g dla dwutlenku węgla CO_2 i pary wodnej H_2O .

Ze względu na silny wpływ ciśnienia, wykresy górne oddają tylko wpływ grubości warstwy L i sporządzone są dla ciśnienia gazu równego 100 kPa, ale przy znikomej zawartości CO_2 wzgl. H_2O ($p_{\text{CO}_2} \approx p_{\text{H}_2\text{O}} \approx 0$).

Natomiast wpływ ciśnień składnikowych CO_2 i H_2O uwzględniają poprawki β_{CO_2} i $\beta_{\text{H}_2\text{O}}$ odczytywane z wykresów dolnych.

Emisyjność CO (przy $pL \approx 2/3$) jest równa mniej więcej połowie emisyjności CO_2 .

Rys. 6.23 Zastępcza emisyjność CO_2

Rys. 6.24 Zastępcza emisyjność H_2O

Jeżeli bryła gazowa ma inny kształt niż półkula (w środku podstawy której, znajduje się element powierzchniowy wymieniający ciepło z tym gazem) to średnia grubość warstwy gazu L nie jest we wszystkich kierunkach jednakowa i równa promieniowi (tej półkuli), wtedy jej wartość dobieramy z poniższej tablicy lub obliczmy z przybliżonego wzoru:

$$L \cong 0,9 \cdot \frac{4 \cdot V}{A} = 3,6 \cdot \frac{V}{A} \quad (6.70)$$

gdzie: V jest objętością bryły gazowej, a A powierzchnią ograniczającą tę bryłę.

T a b l i c a 1 6

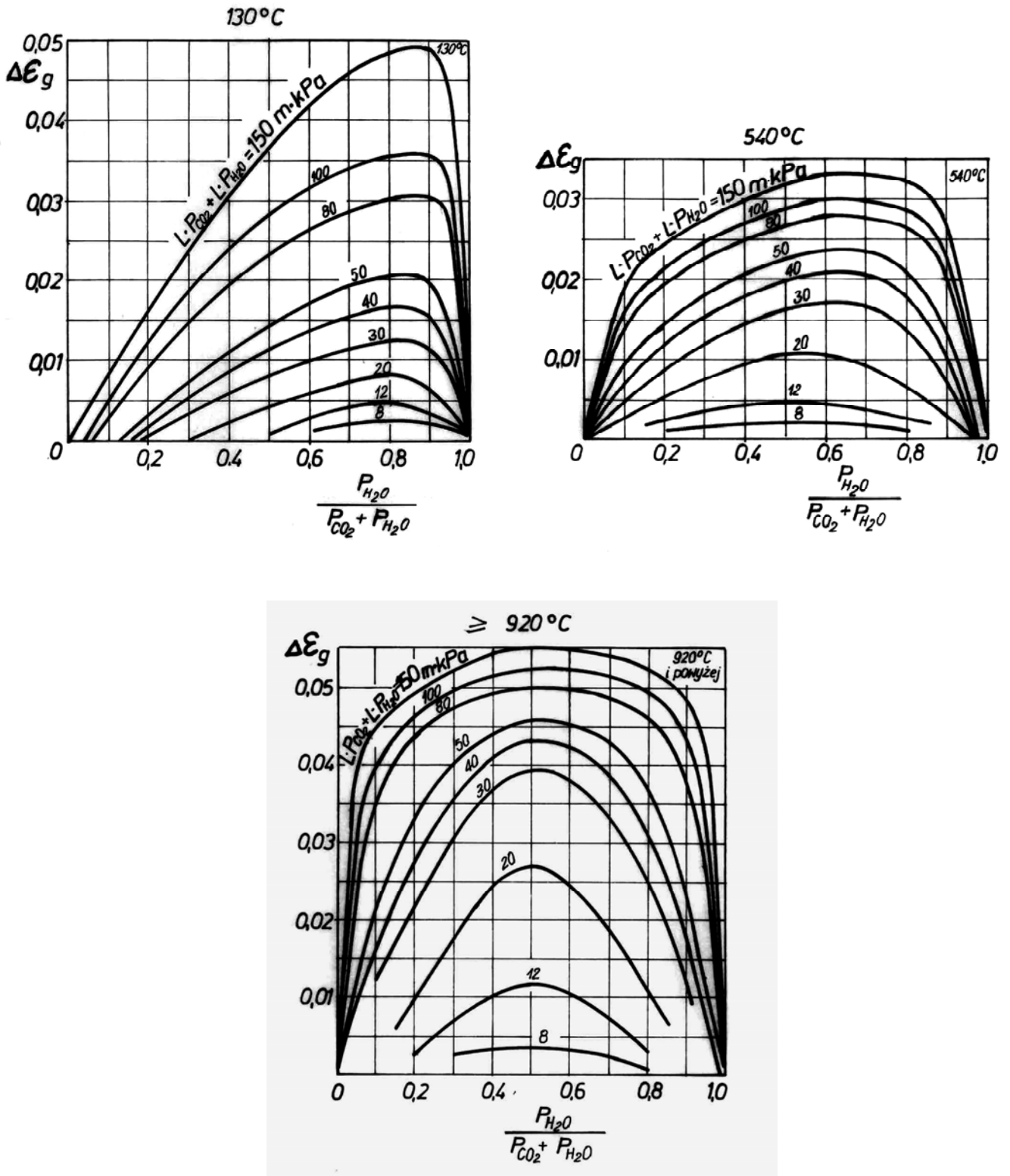
Wartości zastępczych grubości bryły gazowej L

Kształt bryły gazowej	L [m]
Cylinder o średnicy d i wysokości $h = D$, promieniowanie na środek podstawy	$0,77 \cdot d$
To samo, promieniowanie na całą powierzchnię	$0,60 \cdot d$
Cylinder bardzo (nieskończenie) długi o średnicy d , promieniowanie na środek podstawy	$0,90 \cdot d$
Cylinder o średnicy d bardzo (nieskończenie) długi, promieniowanie na pobocznice (płaszcz)	$0,95 \cdot d$
Cylinder o przekroju półokrągłym (promień r), nieograniczenie długi, promieniowanie na oś płaskiej strony	$1,26 \cdot r$
Płaska warstwa między równoległymi ścianami o nieograniczonej powierzchni i odstępnie δ	$1,8 \cdot \delta$
Sześcian o boku a , promieniowanie na każdą ścianę boczną	$0,60 \cdot a$
Kula o średnicy d , promieniowanie na pobocznice	$0,60 \cdot d$
Gaz między rurami o średnicy d i rozstawie s :	
- w układzie przestawionym – $s/d = 2$	$2,8 \cdot (s-d)$
" " " " $s/d = 3$	$3,8 \cdot (s-d)$
- w układzie rzędownym $s/d = 2$	$3,5 \cdot (s-d)$

Dla mieszaniny gazów całkowita emisyjność jest sumą emisyjności składników promieniujących, z tym że jeżeli pasma promieniowania składników mieszaniny częściowo się pokrywają, to rzeczywista emisyjność jest odpowiednio mniejsza od sumy emisyjności.

Dla technicznie ważnego przypadku gazów spalinowych zawierających (prócz zupełnie przezroczystych N_2 i O_2) CO_2 i H_2O odpowiednią poprawkę można wyznaczyć z wykresów na rys. 6.25. Tak więc emisyjność mieszaniny oblicza się ze wzoru:

$$\epsilon_g = \epsilon_{CO_2} + \beta \epsilon_{H_2O} - \Delta \epsilon_g \quad (6.71)$$

Rys. 6.25 Poprawka $\Delta \epsilon_g$ dla mieszaniny $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$.

6.2. Promieniowanie gazu do ściany

Ilość ciepła przeniesioną efektywnie od gazu do ściany oblicza się, w przypadku gdy ściana jest doskonale czarna (i nie odbija promieniowania), jako różnicę między emisją gazu o temperaturze T_g [K] przekazaną ścianie (i całkowicie pochłoniętą) oraz emisją ściany o temperaturze T_w ($\epsilon_w = 1$) zaabsorbowaną przez gaz o absorpcyjności a_g (w temperaturze ściany T_w , bo jak wskazano w podrozdziale 6.1 absorpcyjność zależy bardzo silnie od temperatury źródła promieniowania):

$$\dot{q}_{1-2} = C_o \cdot \left[\epsilon_g \cdot \left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - a_g \cdot \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right] \quad (6.72)$$

W praktycznych przypadkach ściany szarej sprawę komplikuje emisja odbita wracająca częściowo do gazu. Z wystarczającą dla celów technicznych dokładnością można dla $\epsilon_w > 0,7$ stosować wzór:

$$\dot{q}_{1-2} = \frac{\epsilon_w + 1}{2} \cdot C_o \cdot \left[\epsilon_g \cdot \left(\frac{T_g}{100} \right)^4 - a_g \cdot \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right] \quad (6.73)$$

w którym pierwszy człon stanowi efektywną emisyjność ściany o stopniu czarności ϵ_w , a pozostałe są takie same jak w (6.72).

Geometrię układu wyraża tu zastępcza grubość warstwy gazu L wyznaczona w sposób podany uprzednio.

Jeżeli temperatura promieniującego gazu zmienia się wzdłuż kanału, którym gaz płynie, to w obliczeniach stosuje się średnią geometryczną z temperatur na wlocie i wylocie:

$$T_g = \sqrt{T' \cdot T''} \quad (6.74)$$

6.3. Promieniowanie płomienia

Promieniowanie płomienia różni się od promieniowania czystej mieszaniny [$\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O} + \text{N}_2 + \text{O}_2$] wskutek dodatkowego emitowania energii przez rozżarzone cząstki sadzy (o średnicach: 0,03...3 μm) oraz pyłu węglowego, koksiku i popiołu (o średnicach: 1...300 μm). To dodatkowe promieniowanie może kilkakrotnie przewyższyć emisję gazu.

Sz szczególnie intensywne jest promieniowanie płomienia z pyłu węglowego, który stanowiąc zawiesinę promieniujących pylinek w gazie, właściwościami radiacyjnymi zbliżony jest bardziej do ciała szarego niż do gazu. Z tym ostatnim ma tę wspólną cechę, że zależy w podobny sposób od grubości warstwy.

Czasami w piecach opalanych gazem ziemnym dla wywołania intensywnego promieniowania przez „świecący” płomień spala się gaz z niedomiarem powietrza, co powoduje intensywne wytwarzanie sadzy, która (rozgrzana „do białości”) silnie promieniuje. Tę tak zwaną „karburyzację” płomienia stosuje się w piecach metalurgicznych i szklarskich. Do obliczeń praktycznych tego bardzo złożonego zjawiska można stosować wzór podobny do poprzednich:

$$\dot{q}_{1-2} = \epsilon_w \cdot \epsilon_p \cdot C_o \cdot A_w \cdot \left[\left(\frac{T_p}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right] \quad (6.75)$$

gdzie: ϵ_w - emisyjność ściany, ϵ_p - emisyjność płomienia (wg tab.17), A_w - powierzchnia ścian płaskich nie ekranowanych rurami, T_p - efektywna temperatura płomienia.

Zastępcze emisyjności płomienia

Rodzaj płomienia	ϵ_p
Nieświecący płomień gazowy jak również płomień antracytu spalane w warstwie	0,4
Płomień z pyłu antracytowego	0,45
Świecący płomień z węgla chudych	0,6
Świecący płomień z węgla płomiennych, brunatnych, torfu	0,7
Świecący płomień z mazutu	0,85

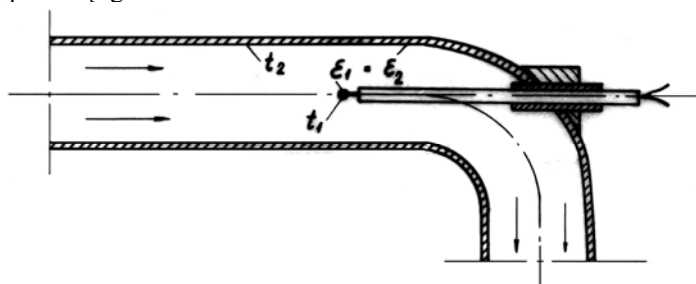
Tę ostatnią określa się w przybliżeniu jako średnią wartość z temperatury spalania T_{sp} i temperatury spalin opuszczających palenisko T_k :

$$T_p \cong \sqrt{T_{sp} \cdot T_k} \quad (6.76)$$

Takie obliczanie promieniowania płomienia jest oczywiście bardzo przybliżone, dokładniejsze metody (uwzględniające również ekranowanie komory spalania rurami) podają nowsze podręczniki kotłów parowych, stosownie do aktualnego stanu badań.

Przykłady

1. Dla zmierzenia temperatury przezroczystego dla promieniowania cieplnego gazu płynącego przewodem umieszczono w nim termoparę, która pokazała $t_1 = 400^\circ\text{C}$. Stopień czarności spiny termopary jest taki sam jak ścian przewodu: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0,78$. Temperatura ścianki $t_2 = 300^\circ\text{C}$, współczynnik przyjmowania ciepła między gazem a powierzchnią spiny wynosi $65,1 \text{ W/m}^2\text{K}$. Określić błąd pomiaru wywołany wypromieniowaniem ciepła ze spiny do ścian oraz rzeczywistą temperaturę gazu



Rys.6.26 Ilustracja do przykładu 1

R o z w i ą z a n i e

Bilans cieplny spiny termopary o powierzchni A_1 w stanie ustalonym stanowi równość ciepła przejętego przez konwekcję oraz oddanego przez promieniowanie:

$$\alpha(t_f - t_1) \cdot A_1 = \epsilon_{1-2} \cdot C_o \cdot A_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

Stąd mamy błąd pomiaru:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_f - t_1 = \frac{\epsilon_{1-2} \cdot C_o}{\alpha} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = \\ &= \frac{0,78 \cdot 5,67}{65,1} \cdot \left[\left(\frac{673}{100} \right)^4 - \left(\frac{573}{100} \right)^4 \right] = 66 \text{ K} \end{aligned}$$

Zastępcza emisyjność jest tu: $\varepsilon_{1-2} = \varepsilon_1 = 0,78$. Powierzchnia spoiny jest bowiem niewielka w stosunku do powierzchni otaczających ścianek i $\varphi = \frac{A_1}{A_2} \cong 0$. Rzeczywista temperatura przepływającego gazu wynosi więc:

$$t_{\text{r}} = t_1 + \Delta t = 400 + 66 = 466^\circ\text{C}$$

2. Przewód stalowy o średnicy zewnętrznej 600 mm i długości 10 m umieszczony jest w kanale betonowym ϕ 2000 mm. Temperatura ściany przewodu wynosi 300°C , kanału 35°C .

Ile ciepła traci przewód przez promieniowanie, a ile traciłby po pokryciu go farbą aluminiową?

R o z w i ą z a n i e :

Emisyjności wynoszą: dla stali pokrytej rdzą $\varepsilon_1 \approx 0,8$, dla betonu $\varepsilon_2 \approx 0,8$. Rozpatrywany układ jest układem zamkniętym, dla którego stosunek konfiguracji obliczamy ze wzoru 6.43:

$$\varphi = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi d_1 L}{\pi d_2 L} = \frac{600}{2000} = 0,3$$

Zatem emisyjność zastępcza

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \varphi \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right)} = \frac{1}{\frac{1}{0,8} + 0,3 \cdot \left(\frac{1}{0,8} - 1 \right)} = 0,755$$

Strata ciepła

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{1-2} &= \varepsilon_{1-2} \cdot C_0 \cdot A_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = \\ &= 0,755 \cdot 5,67 \cdot (\pi \cdot 0,6 \cdot 10) \cdot \left[\left(\frac{573}{100} \right)^4 - \left(\frac{308}{100} \right)^4 \right] = 79\,500 \text{ W} = 79,5 \text{ kW} \end{aligned}$$

Dla farby aluminiowej: $\varepsilon_1 = 0,35$. Emisyjność zastępcza w tym przypadku:

$$\varepsilon'_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{0,35} + 0,3 \cdot \left(\frac{1}{0,8} - 1 \right)} = 0,341$$

Strata ciepła

$$\dot{Q}_{1-2} = 79\,500 \cdot \frac{0,341}{0,755} = 36\,000 \text{ W} = 36 \text{ kW}$$

3. Spaliny o ciśnieniu 100 kPa, abs, temperaturze 400°C i składzie objętościowym: 11% CO_2 , 5% H_2O , 9% O_2 i 75% N_2 przepływają przez kanał o przekroju kwadratowym i wymiarach: $1 \times 1 \text{ m}$, temperaturze ścianki 250°C i emisyjności 0,82.

Obliczyć strumień ciepły przenoszony do 1 m^2 ściany wskutek promieniowania spalin.

R o z w i ą z a n i e :

Dla $\varepsilon_w > 0,7$ stosować można wzór (6.73). Potrzebne są: emisyjność ε_g i absorpcyjność a_g .

Zastępcza grubość warstwy gazu wynosi:

$$L = 3,6 \frac{V}{A} = 3,6 \frac{1 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot (1 \cdot 1)} = 0,9 \text{ m}$$

Ciśnienia składnikowe i gęstości optyczne gazów promieniujących:

$$p_{\text{CO}_2} = 0,11 \cdot 100 = 11 \text{ kPa}$$

$$p_{\text{CO}_2} \cdot L = 11 \cdot 0,9 = 9,9 \text{ kPa} \cdot \text{m}$$

$$p_{\text{H}_2\text{O}} = 0,05 \cdot 100 = 5 \text{ kPa}$$

$$p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot L = 5 \cdot 0,9 = 4,5 \text{ kPa} \cdot \text{m}$$

Dla temperatury $T_f = 273 + 400 = 673 \text{ K}$ i tych gęstości optycznych odczytujemy z wykresów na rys. 6.23 i 6.24:

$$\epsilon_{\text{CO}_2} = 0,10 \qquad \beta_{\text{CO}_2} = 1,00$$

$$\epsilon_{\text{H}_2\text{O}} = 0,11 \qquad \beta_{\text{H}_2\text{O}} = 1,04$$

Ponadto dla mieszaniny wyznaczmy poprawkę uwzględniającą częściowe nakrywanie pasm $\Delta\epsilon_g$. Ciśnienie łączne obu gazów promieniujących:

$$p_o = p_{\text{CO}_2} + p_{\text{H}_2\text{O}} = 11 + 5 = 16 \text{ kPa}$$

Zatem dla:

$$p_o \cdot L = 16 \cdot 0,9 = 14,4 \text{ kPa} \cdot \text{m}$$

$$i \quad \frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{p_{\text{CO}_2} + p_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{5}{5 + 11} = 0,312$$

oraz dla $t = 400^\circ\text{C}$ otrzymujemy z wykresów na rys. 6.25 (interpolując między 130°C i 540°C):

$$\Delta\epsilon_g \cong 0,003$$

Emisyjność spalin wynosi więc:

$$\epsilon_g = \epsilon_{\text{CO}_2} \cdot \beta_{\text{CO}_2} + \epsilon_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \beta_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta\epsilon_g = 0,10 \cdot 1,00 + 0,11 \cdot 1,04 - 0,003 = 0,214$$

W taki sam sposób wyznaczamy dla temperatury $T_w = 273 + 250 = 523 \text{ K}$ absorpcyjność spalin na ściance (równą emisyjności w tej temperaturze):

$$a_g = \epsilon_{g^*} = \epsilon_{\text{CO}_2} \cdot \beta_{\text{CO}_2} + \epsilon_{\text{H}_2\text{O}} \cdot \beta_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta\epsilon_g = 0,09 \cdot 1,00 + 0,12 \cdot 1,04 - 0,001 = 0,214$$

Teraz możemy już obliczyć gęstość strumienia emitowanego przez spaliny do ścianek posługując się wzorem (6.73):

$$\begin{aligned} \dot{q}_{1-2} &= \frac{\epsilon_w + 1}{2} \cdot c_o \cdot \left[\epsilon_g \cdot \left(\frac{T_f}{100} \right)^4 - a_g \cdot \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right] = \\ &= \frac{0,82 + 1}{2} \cdot 5,67 \cdot \left[0,214 \cdot \left(\frac{673}{100} \right)^4 - 0,214 \cdot \left(\frac{523}{100} \right)^4 \right] = 1439 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

Ćwiczenia

- Określić przenoszony między ściankami naczynia Dewara strumień ciepła, jeżeli wewnętrzna ścianka ma temperaturę -183°C , zewnętrzna $+17^\circ\text{C}$, a między ściankami jest próżnia. Obie ścianki pokryte są srebrem o emisyjności 0,02 i mają powierzchnie prawie takie same: $0,1 \text{ m}^2$.

$$\text{Odpowiedź: } \dot{Q} = 0,396 \text{ W}$$

- Obliczyć całkowity współczynnik przejmowania ciepła i stratę cieplną poziomego przewodu parowego o średnicy 200 mm, temperaturze ścianki 467°C i emisyjności 0,79 - poprowadzonego w pomieszczeniu o jednakowej temperaturze powietrza i ścian: 27°C .

$$\text{Odpowiedź: } \alpha_c = \alpha_r + \alpha = 30,7 + 8,7 = 39,4 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\dot{Q}_L = 10 \text{ 880 W/m}$$

- Określić błąd pomiaru temperatury termopary z powyższego przykładu 1, jeżeli wskutek lepszej izolacji przewodu temperatura ścianki wzrosła do 360°C .

$$\text{Odpowiedź: } \Delta t = 30,6 \text{ K}$$

- Obliczyć emisyjność i natężenie promieniowania mieszaniny gazów o udziałach objętościowych: 10% H_2O , 10% CO_2 reszta azot i tlen, mającej temperaturę 1200°C i ciśnienie całkowite 98 kPa, jeżeli średnia grubość warstwy gazu wynosi 1,54 m.

$$\text{Odpowiedź: } \epsilon_g = 0,189$$

$$\dot{e} = 50 \text{ 700 W/m}^2$$

Streszczenie części szóstej

Opisano podstawowe właściwości i prawa promieniowania ciał. Wprowadzono pojęcia biernych właściwości radiacyjnych takich jak absorpcyjność, refleksyjność i przepuszczalność i przy ich pomocy zdefiniowano podstawowe modele ciał: doskonale czarnego, doskonale białego oraz ciała szarego i jego szczególnego przypadku: ciała doskonale szarego.

Przedstawiono właściwości promieniowania (abstrakcyjnego) ciała doskonale czarnego, jego natężenie określone prawem Stefana - Boltzmanna, jego rozkład na długości fal określony prawem Plancka oraz związek między panchromatycznym i monochromatycznymi natężeniami promieniowania.

Omówiono właściwości promieniowania ciał szarych; wprowadzono pojęcia emisyjności i jasności powierzchni szarej; wprowadzono związek emisyjności i absorpcyjności czyli prawo Kirchoffa oraz omówiono kierunkowość emisji ciał podając prawo Lamberta i dyskutując zakres ważności tego prawa. Wyprowadzono związek między emisją do półprzestrzeni emisją w kierunku normalnym.

Po poznaniu podstawowych właściwości promieniowania cieplnego można było przejść do technicznie ważnych zagadnień przenoszenia ciepła między powierzchniami ciał rzeczywistych (szarych), w szczególności przedstawiono sposoby wyznaczania emisyjności zastępczych dla układów powierzchni: równoległych, zamkniętych i dowolnie rozmieszczonych. W tym ostatnim przypadku występuje współczynnik konfiguracji - wielkość geometryczna, której wyznaczenie stanowi klucz do rozwiązania większości zagadnień promieniowania ciepła. Ponadto wykazano skuteczność stosowania ekranów do zmniejszania radiacyjnego strumienia ciepła.

W odrębnym rozdziale omówiono selektywne z natury promieniowanie gazów. Odnacza się ono tym, że emisja i absorpcja odbywa się w całej objętości bryły gazowej, tak że emisyjność i absorpcyjność zależą tu dodatkowo jeszcze od ciśnienia i grubości warstwy gazu.

Podano sposób obliczania strumienia cieplnego przenoszonego między gazem promieniującym a ścianką, przy czym wpływ kształtu bryły gazowej ujmuje zastępcza grubość warstwy gazu L .

Na zakończenie omówiono pokrótce skomplikowane zjawisko promieniowania płomienia, które ma częściowo charakter promieniowania ciała szarego a częściowo ciała gazowego.

VII. PRZENOSZENIE CIEPŁA I SUBSTANCJI

W niektórych procesach przenoszenia ciepła występuje również przenoszenie substancji. Dotyczy to przede wszystkim odparowania cieczy do gazu i wykraplania lub wymrażania pary z mieszaniny parowo – gazowej. Zrozumienie procesu cieplnego, a tym bardziej jego obliczanie, nie jest w tych przypadkach możliwe bez znajomości podstawowych praw i zależności warunkujących przenoszenie substancji.

Przenoszenie substancji może się odbywać wyłącznie przez dyfuzję molekuł, mówimy wtedy o dyfuzji molekularnej, albo również (i to przeważająco) przez prądy wewnętrzne w płynie czyli przez dyfuzję molarną. Istnieje tu widoczna analogia do przewodzenia ciepła i przenoszenia go przez konwekcję. Mechanizm transportu jest zresztą w obu przypadkach ten sam.

Podstawowym pojęciem jest tu **stężenie** (koncentracja) składnika, czyli stosunek jego łącznej masy M [kg] lub liczby kilomoli N [kmol]* do zajmowanej objętości:

$$c_i = \frac{M_i}{V} \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] \quad (7.1)$$

lub

$$c_i = \frac{N_i}{V} \left[\frac{\text{kmol}}{\text{m}^3} \right] \quad (7.2)$$

Stężenie składnika jest ogólnie biorąc funkcją miejsca i czasu:

$$c_i = f(x, y, z, \tau) \quad (7.3)$$

Przenoszenie jakiegoś składnika mieszaniny odbywa się z miejsc o wyższym do miejsc o niższym stężeniu, czyli na skutek i w kierunku spadku stężenia.

W mieszaninach gazowych zastępuje się stężenie c_i **ciśnieniem składnikowym** (cząstkowym) P_i . Stosownie do prawa Daltona dla mieszaniny - równanie stanu gazu doskonałego dla składnika i ma następującą postać:

$$P_i \cdot V = M_i \cdot R_i \cdot T \quad (7.4)$$

gdzie: V [m³] jest objętością całej mieszaniny, T [K] jej temperaturą, P_i [N/m² = Pa] ciśnieniem składnikowym, M_i [kg] masą składnika, a wielkość R_i [Nm/kg·K] to stała gazowa rozważanego składnika mieszaniny.

*) W niniejszej części masa lub strumień substancji oznaczane będą dużą, a strumień jednostkowy (na 1 m²) małą literą.

Z (7.4) otrzymuje się:

$$c_i = \frac{M_i}{V} = \frac{P_i}{R_i T} \quad (7.5)$$

Przy wyrażaniu ilości substancji kilomolami jest:

$$c_i = \frac{N_i}{V} = \frac{P_i}{8314 \cdot T} \quad (7.6)$$

gdzie: 8314 Nm/kmol·K - jest uniwersalną stałą gazową.

1. DYFUZJA MOLEKULARNA (DROBINOWA)

Ten rodzaj dyfuzji występuje jako jedyny w płynach nieruchomych lub poprzecznie do laminarnych strug poruszającego się płynu.

Rozpatrujemy dyfuzję w układzie izotermicznym wykluczając przeniesienie substancji wskutek różnic temperatur czyli tzw. termodyfuzję.

Strumień substancji składnika ① podzielony przez wielkość powierzchni kontrolnej - czyli jednostkowy strumień substancjalny albo gęstość strumienia substancji - określa podstawowe dla dyfuzji molekularnej prawo Ficka* (1855 r.):

$$\dot{m}_1 = \frac{\dot{M}_1}{A} = - D_{c_{1,2}} \cdot \frac{\partial c_1}{\partial s} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \quad (7.7)$$

w którym: współrzędna s jest prostopadła do linii stałego stężenia,

a $D_{c_{1,2}} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$ - jest kinematycznym współczynnikiem dyfuzji molekularnej zwanym też **dyfuzyjnością**.

Przykładowe wartości dyfuzyjności podaje poniższa tablica.

Empiryczne prawo Ficka zostało później uzasadnione teoretycznie na gruncie teorii molekularno-kinetycznej, niezależnie od siebie przez: Alberta Einsteina (1905) i Mariana Smoluchowskiego (1906).

Tablica 18

Kinematyczny współczynnik dyfuzji dla gazów dyfundujących przez powietrze o ciśnieniu 101,3 kPa = 760 Tr

Gaz dyfundujący	t °C	D _{1, pow}
wodór H ₂	0	69,5·10 ⁻⁶
tlen O ₂	0	18,1·10 ⁻⁶
amoniak NH ₃	0	19,8·10 ⁻⁶
dwutlenek węgla CO ₂	0	13,9·10 ⁻⁶
	1000	132,0·10 ⁻⁶
para wodna	0	21,9·10 ⁻⁶
	100	35,3·10 ⁻⁶
	1000	248,0·10 ⁻⁶

*) Adolf, Eugen Fick (1829 – 1901) – medyk i fizjolog niemiecki

Dla ważnej w technice dyfuzji pary wodnej przez powietrze mamy zależność:

$$D_c = 2,19 \frac{1}{P} \left(\frac{T}{273}\right)^{1,81} \left[\frac{m^2}{s}\right]$$

w której: P [Pa], T [K] są bezwzględными wartościami ciśnienia i temperatury.

Ogólna ilość substancji dyfundującej przez powierzchnię kontrolną A [m²], czyli strumień substancji, wynosi:

$$\dot{M}_1 = \dot{m}_1 \cdot A = - D_{c_{1,2}} \cdot A \cdot \frac{\partial c}{\partial s} \left[\frac{kg}{s}\right] \quad (7.8)$$

Dla mieszanin gazowych używamy ciśnień składnikowych zamiast stężeń. Wprowadzamy (7.5) do (7.7) i otrzymujemy drugą postać prawa Ficka:

$$\dot{m}_1 = - \frac{D_{c_{1,2}}}{R_1 T} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial s} = - D_{P_{1,2}} \cdot \frac{\partial P_1}{\partial s} \left[\frac{kg}{s \cdot m^2}\right] \quad (7.9)$$

w której występuje dyfuzyjność odniesiona do gradientu ciśnienia:

$$D_{P_{1,2}} = \frac{D_{c_{1,2}}}{R_1 T} \quad [s] \quad (7.10)$$

obliczana ze znanych wartości $D_{c_{1,2}}$ [m²/s].

W ujęciu molowym zamiast R_1 podstawia się 8314 [Nm/kmol·K] i otrzymujemy D_p o wymiarze: [kmol·s/kg].

Najprostsze, ale mimo to o dużym znaczeniu praktycznym, są 2 przypadki jednowymiarowego i ustalonego w czasie molekularnego przeniesienia substancji: dwukierunkowa dyfuzja równomolowa i dyfuzja jednokierunkowa.

1.1. Dyfuzja równomolowa (ekwimolarna)

W podanych wyżej warunkach rozkład stężenia (7.3) sprowadza się do prostej zależności:

$$c_1 = f(x) \neq f(y, z, t) \quad (7.11)$$

Tak więc jednostkowy strumień substancjalny określony prawem Ficka:

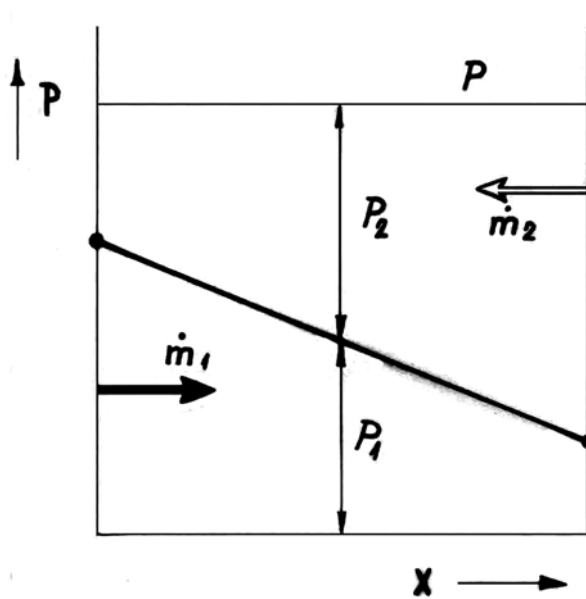
$$\dot{m}_1 = - D_{c_{1,2}} \cdot \frac{dc_1}{dx} = - D_{P_{1,2}} \cdot \frac{dP_1}{dx} = \text{const} \quad (7.12)$$

jest ustalony w czasie. Wynika stąd, że i gradienty stężenia lub ciśnienia składnikowego są stałe. Tak więc rozkład ciśnienia składnikowego (stężenia) ma charakter prostoliniowy (rys. 7.1).

Jeżeli więc 2 substancje dyfundują we wzajemnie przeciwnych kierunkach w sposób ustalony w czasie, to rozkłady ciśnień składnikowych są prostoliniowe, a obydwa strumienie masy są jednakowe.

Ostatnie stwierdzenie uzasadnione jest następująco: Ciśnienie mieszaniny jest jednakowe w całym układzie i wynosi:

$$P = P_1 + P_2 \quad (7.13)$$



Rys.7.1. Rozkład ciśnień składnikowych dla dyfuzji równomolowej

Stąd:

$$P_1 = P - P_2 \quad (7.14)$$

a po zróżniczkowaniu względem współrzędnej x :

$$\frac{dP_1}{dx} = - \frac{dP_2}{dx} \quad (7.15)$$

Wobec równości: $D_{P_1,2} = D_{P_2,1}$ jest więc zgodnie z (7.12):

$$\dot{m}_1 = - \dot{m}_2$$

Równanie Ficka (7.12) możemy po rozdzieleniu zmiennych scałkować (dla $T = \text{const}$) następująco:

$$\dot{m}_1 \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx = - D_P \cdot \int_{P_1'}^{P_1''} dP \quad (7.17)$$

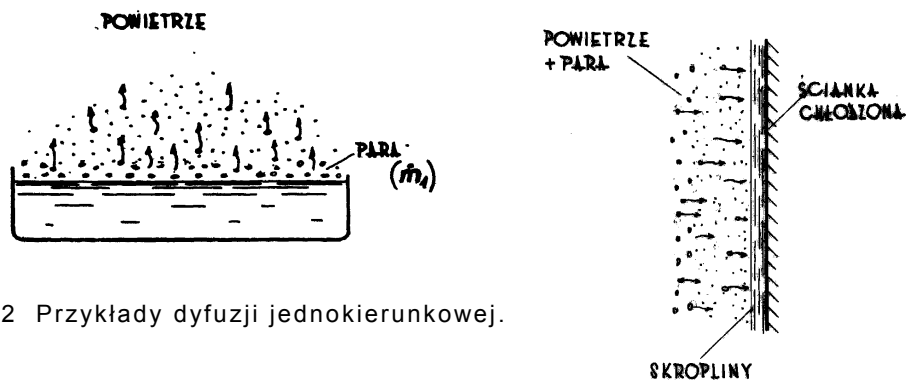
Otrzymujemy wyrażenie na prawo Ficka, dla ustalonej w czasie, dyfuzji równomolowej:

$$\dot{m}_1 = D_P \cdot \frac{P_1' - P_1''}{x_2 - x_1} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \quad (7.18)$$

Przypadek dyfuzji równomolowej ma małe znaczenie w zagadnieniach przenoszenia ciepła - dotyczy natomiast takich ważnych procesów jak spalanie i destylacja.

1.2. Dyfuzja jednokierunkowa

Ma ona miejsce przy odparowaniu wody do nieruchomego lub poruszającego się ruchem laminarnym powietrza oraz przy wykraplaniu jakiejś pary z mieszanki z gazem obojętnym. W obu przypadkach para dyfunduje przez gaz od lub do powierzchni cieczy. Przypadek ten ma zresztą znaczenie szersze, gdyż występuje np. przy absorpcji jakiegoś składnika mieszaniny przez ciecz, adsorpcji składnika przez powierzchnię ciała stałego itp.



Rys.7.2 Przykłady dyfuzji jednokierunkowej.

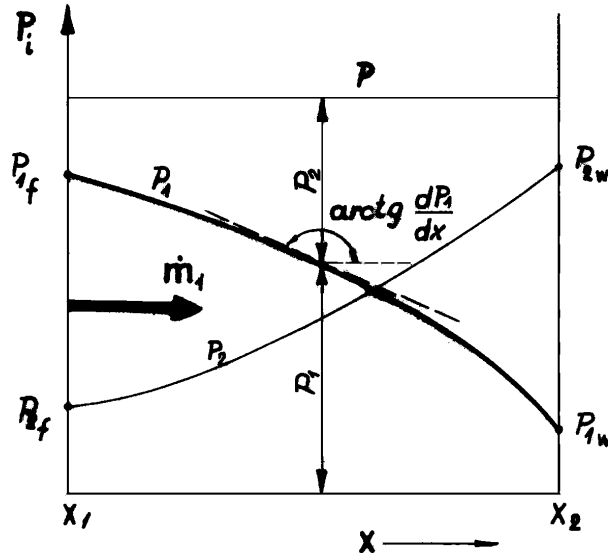
Jednostkowy strumień substancji dyfundującej jest oczywiście określony prawem Ficka:

$$\dot{m}_1 = -D_P \cdot \frac{dP_1}{dx} \quad (7.19)$$

a z uwagi na stałość ciśnienia całkowitego: $P = P_1 + P_2$ w układzie, jest jak uprzednio:

$$\frac{dP_2}{dx} = -\frac{dP_1}{dx} \quad (7.20)$$

czyli że gradient ciśnienia składnikowego gazu obojętnego jest taki sam jak gazu dyfundującego, jedynie o przeciwnym kierunku (rys. 7.3).



Rys.7.3 Rozkład ciśnień składnikowych dla dyfuzji jednokierunkowej.

Ten gradient dP_2/dx powoduje dyfuzję substancji obojętnej ② w kierunku przeciwnym do dyfuzji substancji aktywnej ①. Jednostkowy strumień substancji obojętnej wynosi:

$$\dot{m}_2 = -D_P \cdot \frac{dP_2}{dx} = +D_P \cdot \frac{dP_1}{dx} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \quad (7.21)$$

Ale przecież na powierzchni (x_2), do której dąży składnik ①, nie ma źródeł substancji obojętnej ②! Aby więc utrzymywał się stan ustalony (czyli nie zmieniał się rozkład ciśnień składnikowych) musi do tej powierzchni dopływać gaz obojętny z głębi (rdzenia) mieszanki, a to jest możliwe tylko w postaci dodatkowego (konwektywnego) strumienia mieszanki, w którym dopływa do ścianki również składnik ① w ilości (wyrażonej w kilomolach):

$$\dot{n}_{1,\text{kon.}} = \frac{P_1}{P_2} \cdot (-\dot{n}_2) = \frac{P_1}{P - P_1} \cdot (-\dot{n}_2) \quad \left[\frac{\text{kmol}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \quad (7.22)$$

Zależność ta wynika ze stosunku:

$$\frac{\dot{n}_1}{\dot{n}_2} = \frac{\frac{P_1 \cdot V}{8314 \cdot T}}{\frac{P_2 \cdot V}{8314 \cdot T}} = \frac{P_1}{P_2}$$

oraz z przeciwnych kierunków obu strumieni: $\dot{n}_1 = -\dot{n}_2$.

Łącznie przez dyfuzję molekularną i prąd konwekcyjny dopływa do powierzchni następująca, całkowita ilość aktywnej substancji ① :

$$\dot{n}_{1c} = \dot{n}_{1dyf.} + \dot{n}_{1kon.} = -D'_P \cdot \frac{dP_1}{dx} + \frac{P_1}{P-P_1} \cdot (-\dot{n}_2) \quad (7.23)$$

Po podstawieniu tu (7.21), w ujęciu molowym, otrzymujemy po prostych przekształceniach:

$$\dot{n}_{1c} = -D'_P \cdot \frac{P}{P-P_1} \cdot \frac{dP_1}{dx} \quad \left[\frac{\text{kmol}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \quad (7.24)$$

Jest to tzw. równanie Stefana.

Przy przeciwnym kierunku przepływu składnika aktywnego (pary), tj. od powierzchni w głąb gazu, zjawisko przebiega analogicznie: gaz obojętny dyfunduje do powierzchni, a że nie jest tam pochłaniany, więc prąd konwekcyjny odprowadza go z powrotem w głąb płynu i unosi jednocześnie odpowiednią ilość składnika aktywnego. Łączny strumień składnika aktywnego określony jest znowu równaniem Stefana.

Jak widać z równania (7.24), gradient ciśnienia dP_1/dx jest m.in. funkcją ciśnienia składnikowego P_1 . Zatem rozkład P_1 musi być krzywoliniowy tak jak na powyższym rys. 7.3.

Dla wyrażenia gęstości strumienia substancji w kilogramach trzeba pomnożyć (7.24) przez masę molową μ_1 [kg/kmol]:

$$\dot{m}_{1c} = \mu_1 \dot{n}_{1c} = -D'_P \cdot \frac{P}{P-P_1} \cdot \frac{dP_1}{dx} \quad \left[\frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \quad (7.25)$$

Rozdzielamy zmienne i całkujemy:

$$\dot{m}_{1c} \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx = -D'_P \cdot P \cdot \int_{P_{1f}}^{P_{1w}} \frac{dP_1}{P-P_1}$$

otrzymując:

$$\dot{m}_{1c} = \frac{D'_P \cdot P}{x_2 - x_1} \cdot \ln \frac{P - P_{1w}}{P - P_{1f}} = \frac{D'_P \cdot P}{x_2 - x_1} \cdot \ln \frac{P_{2w}}{P_{2f}} \quad (7.26)$$

Wprowadzamy teraz średnie, logarytmiczne ciśnienie składnikowe:

$$P_{2log} = \frac{P_{2w} - P_{2f}}{\ln \frac{P_{2w}}{P_{2f}}} \quad (7.27)$$

a ze związków:

$$P_{2w} = P - P_{1w}$$

$$P_{2f} = P - P_{1f}$$

otrzymujemy:

$$P_{2w} - P_{2f} = P_{1f} - P_{1w} \quad (7.28)$$

Ostatnie dwa związki dają zależność:

$$\ln \frac{P_{2w}}{P_{2f}} = \frac{P_{2w} - P_{2f}}{P_{2 \log}} = \frac{P_{1f} - P_{1w}}{P_{2 \log}} \quad (7.29)$$

którą podstawiamy do (7.25) otrzymując ostatecznie wzór na gęstość strumienia substancji dyfundującej do lub od powierzchni:

$$\dot{m}_1 c = - \frac{D_P \cdot P \cdot (P_{1f} - P_{1w})}{P_{2 \log} \cdot (x_2 - x_1)} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \quad (7.30)$$

Wzór ten obowiązuje dla stałej temperatury w całym układzie.

W przypadku wystąpienia różnicy temperatur w mieszaninie dwuskładnikowej nie wykazującej różnic stężenia (ciśnien składnikowych), po pewnym czasie zaobserwuje się nagromadzenie składnika lżejszego w miejscu o wyższej temperaturze, a cięższego w miejscu o temperaturze niższej. W ten sposób różnica temperatur wywołuje przenoszenie substancji zwane termodyfuzją oraz różnicę stężeń, która działa hamująco na ten proces.

Pomimo, że termodyfuzja znalazła zastosowanie techniczne (do rozdzielania izotopów), jest to proces mało intensywny. Wywołany przez termodyfuzję, przeciwnie skierowany gradient stężenia wzrasta stopniowo, aż staje się na tyle duży, że zupełnie zahamuje przenoszenie substancji. W stanie ustalonym przenoszone jest więc tylko ciepło, odpowiednio do Δt , a strumień substancji jest równy zero.

Jeżeli w mieszaninie, w której ma miejsce przenoszenie substancji przez dyfuzję lub termodyfuzję, występują jeszcze prądy konwekcyjne, to przenoszą one dodatkowe, przeważnie znaczne, ilości substancji i jej energii.

2. DYFUZJA MOLARNA (KONWEKTYWNE PRZENOSZENIE SUBSTANCJI)

Prądy konwekcyjne powstają podczas przepływu mieszaniny wzdłuż powierzchni, do (lub od) której dyfunduje składnik aktywny (para). Prądy te przenoszą substancję, w łącznej ilości określonej przez rozszerzone prawo Ficka:

$$\dot{m}_1 = (D_P + \epsilon_P) \cdot \frac{\partial P_1}{\partial x} \quad (7.31)$$

W którym ε_p jest to tzw. dyfuzyjność wirowa, która w odróżnieniu od D_p nie jest właściwością fizyczną, lecz zależy od warunków ruchu, a więc głównie od liczby Reynoldsa. W warunkach technicznych dyfuzyjność wirowa ε_p poza obszarem przyściennym jest wielokrotnie większa od dyfuzyjności D_p .

W pobliżu powierzchni, które są źródłem (dodatnim lub ujemnym) składnika aktywnego, występuje warstwa przyścienna, a w niej grubsza lub cieńsza część laminarna. Przez warstwę laminarną substancja przenoszona jest jedynie przez dyfuzję (podobnie jak przenoszenie ciepła tylko przez przewodzenie).

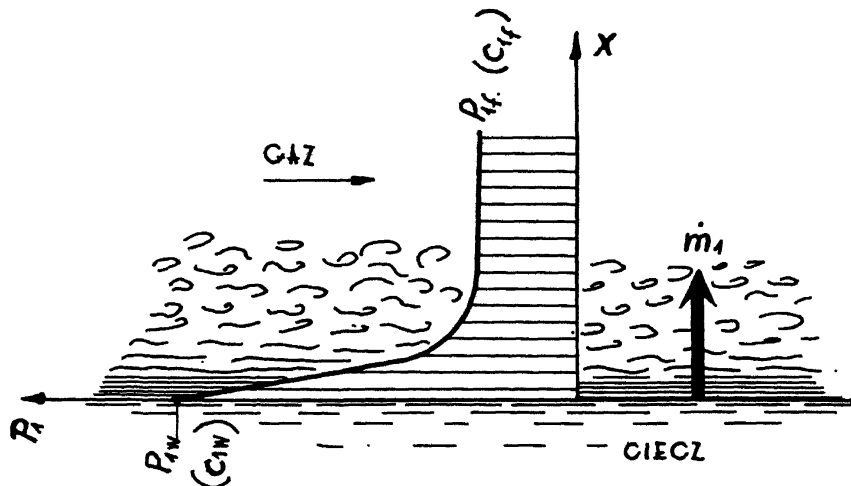
Przykład rozkładu stężenia w strudze przepływającej, nad parującą cieczą, gazu podaje poniższy rysunek. Gęstość strumienia substancji przenoszonej w warunkach konwekcji określa następujące wyrażenie (analogiczne do prawa Newtona dla przenoszenia ciepła):

$$\dot{m}_1 = \beta_c \cdot (c_{1w} - c_{1f}) = \frac{\beta_c}{R_1 T} \cdot (P_{1w} - P_{1f})$$

w którym: $\beta_c \left[\frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right]$ jest współczynnikiem przejmowania substancji odniesionym do stężenia (analogicznym do α w przenoszeniu ciepła).

Współczynnik przenoszenia substancji odniesiony do ciśnienia wynosi:

$$\beta_P = \frac{\beta_c}{R_1 \cdot T}$$



Rys.7.4 Schemat przenoszenia substancji w warstwie przyściennej

Wartości współczynników przenoszenia substancji wyznacza się na drodze doświadczalnej, a wyniki eksperymentalne uogólnia dla układów geometrycznie podobnych przy pomocy teorii podobieństwa.

2.1. Warunki podobieństwa

Zastosowanie teorii podobieństwa do konwektywnego przenoszenia substancji wymaga układu równań różniczkowych opisujących ten proces.

Równanie różniczkowe przenoszenia substancji, w poruszającym się płynie, wyprowadza się przez obliczenie przyrostu ilości składnika ①, spowodowanego wzrostem stężenia: $c_1 = f(x, y, z, \tau)$ o dc_1 , w elemencie przestrzennym $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ w czasie $d\tau$.

Sam elementarny przyrost stężenia c_1 , będącego funkcją 4 zmiennych, wynosi:

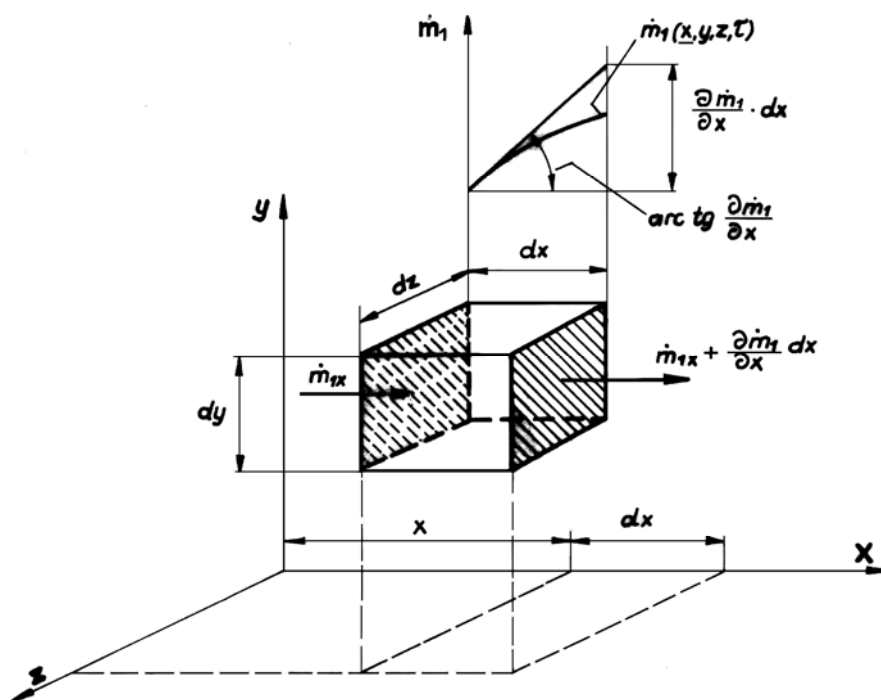
$$dc_1 = \frac{\partial c_1}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial c_1}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial c_1}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial c_1}{\partial \tau} \cdot d\tau \quad (7.34)$$

Dzieląc obustronnie przez $d\tau \neq 0$ otrzymuje się:

$$\frac{dc_1}{d\tau} \equiv \frac{Dc_1}{D\tau} = \frac{\partial c_1}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\tau} + \frac{\partial c_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{d\tau} + \frac{\partial c_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\tau} + \frac{\partial c_1}{\partial \tau} \quad (7.35)$$

albo:

$$\frac{Dc_1}{D\tau} = w_x \cdot \frac{\partial c_1}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial c_1}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial c_1}{\partial z} + \frac{\partial c_1}{\partial \tau} = (\vec{w} \cdot \nabla) c_1 + \frac{\partial c_1}{\partial \tau} \quad (7.36)$$



Rys.7.5 Elementary prostokąt płynu do wyprowadzenia różniczkowego równania pola stężenia (koncentracji).

Przyrost ilości składnika ① w elemencie dV i czasie $d\tau$ wynosi więc:

$$(\vec{w} \cdot \nabla) c_1 + \frac{\partial c_1}{\partial \tau} \quad (7.37)$$

Przyrost ten spowodowany jest napływem składnika ① z trzech kierunków prostokątnego układu współrzędnych - na drodze dyfuzji, a więc zgodnie z prawem Ficka (7.7).

Biorąc pod uwagę np. kierunek osi x otrzymuje się następujące równanie bilansu między ilością substancji, która dopłynęła z lewej, a tą, która wypłynęła z prawej (rys. 7.5):

$$d\dot{m}_1 \cdot dA \cdot d\tau - (d\dot{m}_1 + \frac{\partial \dot{m}_1}{\partial x} \cdot dx) \cdot dA \cdot d\tau = - \frac{\partial \dot{m}_1}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau \quad (7.38)$$

przy czym powierzchnia przekroju: $dA = dy \cdot dz$.

Uwzględniając prawo Ficka (7.7) otrzymuje się wyrażenie:

$$+ D_{c_{1,2}} \cdot \frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau \quad (7.39)$$

Analogiczne wyrażenia otrzymuje się dla pozostałych dwu osi tak, że bilansowy napływ składnika ① do elementu dV w czasie $d\tau$ wynosi:

$$D_{c_{1,2}} \cdot \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial z^2} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau = D_{c_{1,2}} \cdot \nabla^2 c_1 \cdot dV \cdot d\tau \quad (7.40)$$

Przyrost ilości składnika ① wyrażony wzorem (7.37) i bilansowy napływ według wzoru powyższego muszą być sobie równe. Prowadzi to do równania:

$$\underbrace{w_x \cdot \frac{\partial c_1}{\partial x} + w_y \cdot \frac{\partial c_1}{\partial y} + w_z \cdot \frac{\partial c_1}{\partial z} + \frac{\partial c_1}{\partial \tau}} = D_{c_{1,2}} \cdot \left(\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_1}{\partial z^2} \right) \quad (7.41)$$

albo:

$$\underbrace{(\vec{w} \cdot \nabla) c_1 + \frac{\partial c_1}{\partial \tau}} = D_{c_{1,2}} \cdot \nabla^2 c_1 \quad (7.42)$$

Jest to równanie różniczkowe pola stężenia składnika ① (c_1) – analogiczne do równania różniczkowego pola temperatury (1.49) dla przypadku bez źródeł ciepła ($\dot{q}_v = 0$).

Dla określenia liczb podobieństwa postępujemy jak w rozdziale 3. części V. Piszemy więc równanie (7.41) dla układu naturalnego i dla modelu oznaczając apostrofem wszystkie wielkości dla tego ostatniego.

Wprowadzamy skale podobieństwa:

$$\begin{aligned} c_c &= \frac{c'}{c} & c_1 &= \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{1'}{1} \\ c_w &= \frac{w'}{w} & c_D &= \frac{D'}{D_c} \end{aligned} \quad (7.43)$$

Wyrazimy wielkości dla modelu przez skale ($c'_1 = C_c \cdot c_1$, $w' = C_w \cdot w$, itd.) i otrzymujemy warunek podobieństwa:

$$\frac{C_w \cdot C_c}{C_1} = \frac{C_c}{C_\tau} = \frac{C_D \cdot C_c}{C_1^2} \quad (7.44)$$

Ponieważ rozpatrujemy tylko proces ustalony w czasie, bierzemy pod uwagę tylko wyrazy skrajne tego równania i po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$\frac{c_w \cdot c_l}{c_D} = 1$$

a po uwzględnieniu (7.43):

$$\frac{w \cdot l}{D_c} = \frac{w' \cdot l'}{D'_c} \quad (7.45)$$

Otrzymane wyrażenie bezwymiarowe jest odpowiednikiem liczby Pécleta w przenoszeniu ciepła, jednak używane jest jako warunek podobieństwa w postaci przekształconej:

$$\boxed{\frac{w \cdot l}{D_c} = \frac{w \cdot l}{\nu} \cdot \frac{\nu}{D_c} = (Re) \cdot (Sc) = \text{idem}} \quad (7.46)$$

Mamy tu nową liczbę Schmidta*:

$$\boxed{Sc = \frac{\nu}{D_c}} \quad (7.47)$$

będącą (jak liczba Prandtla) właściwością fizyczną substancji. Wartości liczbowe tej liczby, dla gazów i par dyfundujących przez powietrze wynoszą: $Sc = 0,2 \dots 2,6$.

Tablica 19

Wartości liczby Schmidta dla gazów i par dyfundujących przez powietrze o temperaturze 25°C i ciśnieniu 760 Tr (mieszaniny o małej zawartości składnika aktywnego).

Substancja aktywna	Sc	Substancja aktywna	Sc
Para wodna	0,60	Wodór	0,22
Para amoniaku	0,67	Para metanolu	0,97
Tlen	0,75	Para alkoholu etylowego	1,30
Dwutlenek węgla	0,94	Para benzenu	1,76

Dla konwekcji swobodnej (naturalnej) zastępuje się liczbę Reynoldsa przez liczbę Grashofa, w której jednak jednostkowa siła wyporu wyrażona jest nie przy pomocy rozszerzalności objętościowej jak w (5.16), ale przy pomocy gęstości jak we wzorze (5.12):

$$\underline{\underline{Gr = \frac{g l^3}{\nu^2} \cdot \frac{\rho_f - \rho_w}{\rho_f}}} \quad (7.48)$$

przy czym: ρ_f i ρ_w są gęstościami mieszaniny obu składników (pary i gazu) odpowiednio: w głębi (rdzeniu) płynu i na powierzchni.

Na samej powierzchni cieczy w przyściennej (pod-) warstwie laminarnej płynącej mieszaniny nie ma konwekcji. Tak więc występuje tu jedynie dyfuzja molekularna.

Gęstość strumienia substancji (który potem przenoszony jest dalej szybko przez konwekcję) określona jest równaniem Stefana - stąd równanie:

$$-D_P \cdot \frac{P}{P - P_{1w}} \cdot \left(\frac{\partial P_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \beta_P \cdot (P_{1w} - P_{1f}) \quad (7.49)$$

* Ernst Schmidt (1892 – 1975), inżynier i uczonek niemiecki

Postępujemy z tym równaniem tak samo jak z poprzednim (m. in. wpro-
adzamy dodatkowe skale podobieństwa: $C_\beta = \beta/\beta$ i $C_P = P'_1/P_1$) i otrzymujemy warunek:

$$\frac{C_D \cdot C_P}{C_1} = C_\beta \cdot C_P$$

$$\frac{C_\beta \cdot C_1}{C_D} = 1$$

czyli:

$$Sh = \frac{\beta_P \cdot l}{D_P} = \frac{\beta'_P \cdot l'}{D'_P} = Sh'$$

a więc identyczności liczb Sherwooda* w układzie modelowym i naturalnym.

Liczba Sherwooda zawiera wielkość szukaną: β_P , jest więc liczbą nieokreślającą. Jest ona liczbowo taka sama, jak łatwo sprawdzić, przy odniesieniu wielkości β do ciśnienia składnikowego P_i jak i do stężenia c_i :

$$\boxed{Sh = \frac{\beta_P \cdot l}{D_P} = \frac{\beta_c \cdot l}{D_c}} \quad (7.50)$$

Liczba ta nazywana też bywa dyfuzyjną liczbą Nusselta.

W literaturze anglosaskiej używany bywa tzw. czynnik przenoszenia masy (mass-transfer-factor):

$$j_M = \frac{(Sh)}{(Re) \cdot (Sc)^{1/3}} = f(Re) \quad (7.51)$$

Wyniki badań przenoszenia substancji przedstawiane więc będą w postaci

$$\boxed{Sh = f(Re, Sc)} \quad \text{dla konwekcji wymuszonej} \quad (7.52)$$

$$\boxed{Sh = f(Gr, Sc)} \quad \text{dla konwekcji swobodnej} \quad (7.53)$$

2.2. Prawo Lewisa

Liczbę Schmidta można przekształcić następująco:

$$Sc = \frac{\nu}{D_c} = \frac{a}{D_c} \cdot \frac{\nu}{a} = (Le) \cdot (Pr) \quad (7.54)$$

otrzymując nową liczbę kryterialną Lewisa** : $Le = \frac{a}{D_c}$ wiążącą obie dyfuzyjności: cieplną (a) i substancjalną (D_c).

Jeżeli ta liczba jest równa jedności, to: $a = D_c$. Wtedy rozwiązania równań różniczkowych: pola temperatury (5.3) dla $\dot{q}_v = 0$ (czyli bez źródeł ciepła) i pola stężenia (7.41) są, dla danych warunków brzegowych, identyczne pod względem matematycznym. A to oznacza, że identyczne są również matematyczne postacie funkcji całkowych: (5.43) i (7.52).

*) Thomas K. Sherwood (1903 – 1976), chemik i inżynier amerykański.

***) Warren K. Lewis (1882 – 1975), chemik i inżynier amerykański.

Wobec tego, że dla $Le = 1$ jest: $Sc = Pr$, mamy przy $Re = idem$:

$$Sh = Nu \quad (7.55)$$

czyli:

$$\frac{\beta_c \cdot l}{D_c} = \frac{\alpha \cdot l}{\lambda} \quad (7.56)$$

a stąd:

$$\beta_c = \frac{\alpha \cdot D_{c_{1,2}}}{\lambda} \quad (7.57)$$

Właściwości powietrza suchego i nasyconego parą wodną (przy powierzchni cieczy) różnią się na ogół nieznacznie wskutek małych zawartości pary (ciśnien składnikowych) w niewysokich temperaturach. Stąd często najwygodniej jest przyjmować $\lambda \approx \lambda_2$, $a \approx a_2$ itd.

Dla ilustracji tego stwierdzenia podano w tab. 20, w której wartości dyfuzyjności cieplnej a dotyczą powietrza suchego, również odpowiednie liczby dla powietrza nasyconego parą wodną (w nawiasach).

Stosując jeszcze raz założenie Lewisa celem zastąpienia $D_{c_{1,2}}$ w (7.57) przez a czyli:

$$D_{c_{1,2}} = a = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho} \quad (7.58)$$

otrzymuje się:

$$\beta_c = \frac{\alpha}{c_p \cdot \rho} = \frac{\alpha}{c_p} \quad (7.59)$$

We wzorze tym wykorzystano zależność między ciepłami właściwymi:

$$c_p = \frac{Q}{v \cdot \Delta t} = \frac{Q}{M \cdot \Delta t} \cdot \frac{M}{v} = c_p \cdot \rho \left[\frac{\text{kJ}}{\text{m}^3 \text{K}} \right]$$

Wielkość C_p we wzorze (7.59) odnosi się ściśle biorąc do powietrza wilgotnego w stanie pośrednim między \textcircled{w} i \textcircled{f} .

Wyprowadzony powyżej bezpośredni związek między współczynnikami przejmowania substancji i ciepła ważny jest tylko dla konwekcji wymuszonej. Założenie Lewisa ($a = D_c$) jest w przybliżeniu spełnione dla powietrza i pary wodnej (por. tabl. 20). Podobnie jest jeszcze dla pary amoniaku i powietrza, ale dla innych par nie jest na ogół spełnione i wzoru (7.59) używać wtedy nie można.

Tablica 20

Wartości liczby Lewisa dla pary wodnej dyfundującej przez powietrze pod ciśnieniem 101,3 kPa = 760 Tr

t	°C	0	20	50	100
$a \cdot 10^6$	m^2/s	18,8 (18,2)	21,4 (21,2)	25,7 (24,4)	33,6 (-)
$D_c \cdot 10^6$	m^2/s	21,9	24,8	29,0	35,3
Le	-	0,86	0,86	0,89	0,95

2.3. Analogia dyfuzyjno - termiczna

Analogia między przenoszeniem substancji i ciepła opiera się na wspomnianej identyczności matematycznej równań różniczkowych (5.30) i (7.41) opisujących obydwie procesy, co dla danych warunków brzegowych (i ew. początkowych) pozwala wykorzystać znaną postać matematyczną zależności (5.43) lub (5.44) do zbudowania rozwiązania równania (7.52) lub (7.53) przez wymianę liczb Prandtla i Nusselta na ich odpowiedniki dyfuzyjne: liczbę Schmidta i liczbę Sherwooda. Uzyskane z badań procesu dyfuzji korelacje potwierdzają dobrze tę analogię dyfuzyjno - termiczną.

Oto kilka przykładów. Dalsze można znaleźć w książce T. Hoblera o dyfuzyjnym przenoszeniu substancji*).

Dla turbulentnego przepływu gazu w rurze pionowej o ściankach zraszanych cieczą Gilliland uzyskał z pomiarów następującą zależność:

$$\underline{Sh = 0,023 \cdot (Re)^{0,83} \cdot (Sc)^{0,44}} \quad (7.60)$$

ważną dla: $Re = 2\,000 \dots 35\,000$ (wymiar charakterystyczny: $l = d$)

Jest ona bardzo podobna do wzoru (5.87), a szczególnie (5.88).

Dobłą zgodność odpowiednich korelacji uzyskuje się też dla przepływu laminarnego.

Dla spadających kropli otrzymano dla $Re = 0 \dots 200$ (ew. do $Re = 10^3$) następującą zależność:

$$\underline{Sh = 2,0 + 0,552 \cdot (Re)^{0,5} \cdot (Sc)^{1/3}} \quad (7.61)$$

w której (Sc) wyznacza się dla rdzenia płynu ($t_{char} = t_f$).

Jest ona prawie identyczna z (5.103) dla przejmowania ciepła przy opływie kuli (stałą: 0,552 niektórzy podają nawet jako 0,6).

Dla konwekcji swobodnej wykonano mniej badań, ale te które są, potwierdzają wystarczająco analogię. Np. dla konwekcji swobodnej na powierzchni kul, z których parował naftalen wzgl. benzen dyfundując do powietrza, otrzymano

$$Sh = 2,0 + 0,282 \cdot [(Gr) \cdot (Sc)]^{0,37} \quad \text{gdy } (Gr) \cdot (Sc) < 100 \quad (7.62)$$

$$Sh = 2,0 + 0,5 \cdot [(Gr) \cdot (Sc)]^{0,25} \quad \text{gdy } (Gr) \cdot (Sc) = 100 \dots 10^6$$

Tymczasem z badań przejmowania ciepła, uzyskano następujące, identyczne z powyższymi pod względem matematycznym, zależności:

$$\left. \begin{aligned} Nu &= 2,0 + 0,282 \cdot [(Gr)(Pr)]^{0,37} && \text{gdy } (Gr)(Pr) < 100 \\ Nu &= 2,0 + 0,5 \cdot [(Gr)(Pr)]^{0,25} && \text{gdy } (Gr)(Pr) = 100 \dots 10^6 \end{aligned} \right\} (7.63)$$

Tak więc zawsze wtedy, gdy nie dysponujemy korelacją otrzymaną z badań przejmowania substancji, możemy posługiwać się istniejącymi korelacjami dla przejmowania ciepła zastępując jedynie (Pr) przez (Sc) i (Nu) przez (Sh) oraz licząc (Gr) dla przenoszenia substancji wzorem (7.48).

*) T.Hobler: „Dyfuzyjny ruch masy i absorberzy”. WNT, Warszawa 1976.

3. RÓWNOCZESNE PRZENOSZENIE SUBSTANCJI I CIEPŁA MIĘDZY POWIETRZEM I WODĄ

W technice maszynowej największe znaczenie ma przenoszenie ciepła i substancji między powietrzem i wodą. Energia cieplna jest tu przenoszona wskutek różnicy temperatur: $t_w - t_f$ przez konwekcję (zgodnie z prawem Newtona) oraz wraz z dyfundującą parą wodną jako ciepło parowania lub skraplania. Dyfuzja pary odbywa się na skutek różnicy stężeń: $c_w - c_f$ (lub ciśnień składnikowych: $P_w - P_f$).

Na ogół traktuje się obydwie procesy jako addytywne i niezależne chociaż w rzeczywistości wpływają one na siebie: Poprzeczny w stosunku do ruchu całej mieszaniny dyfundujący strumień pary przy powierzchni cieczy powoduje wzrost grubości warstwy przyściennej i jej burzliwości, a przenoszenie ciepła przez dyfundującą parę zmienia rozkład temperatury i spadek jej gradientu na powierzchni.

Rozkład ciśnień składnikowych jest jednak taki sam jak przy izotermicznym przenoszeniu substancji przez konwekcję, a wspomniane zmiany są niewielkie.

Układ jest prawie zawsze nieizotermiczny: inna jest temperatura na powierzchni cieczy, a inna w rdzeniu powietrza - nie można więc wyłączyć we wzorze (7.32) „wspólnej” temperatury przed nawias i gęstość strumienia pary oblicza się ze wzoru:

$$\dot{m}_1 = \frac{\beta_c}{R_1} \cdot \left(\frac{P_{1w}}{T_w} - \frac{P_{1f}}{T_f} \right) \quad (7.32a)$$

3.1. Wymuszony przepływ powietrza nad powierzchnią wody

Zjawisko to występuje w wielu zagadnieniach technicznych, w których powietrze wilgotne przepływa nad powierzchnią wody lub lodu.

W teorii gazów wilgotnych dla wyrażenia stężenia pary używa się **zawilgocenia** będącego stosunkiem masy pary do masy gazu suchego:

$$X = \frac{M_p}{M_g} \quad (7.64)$$

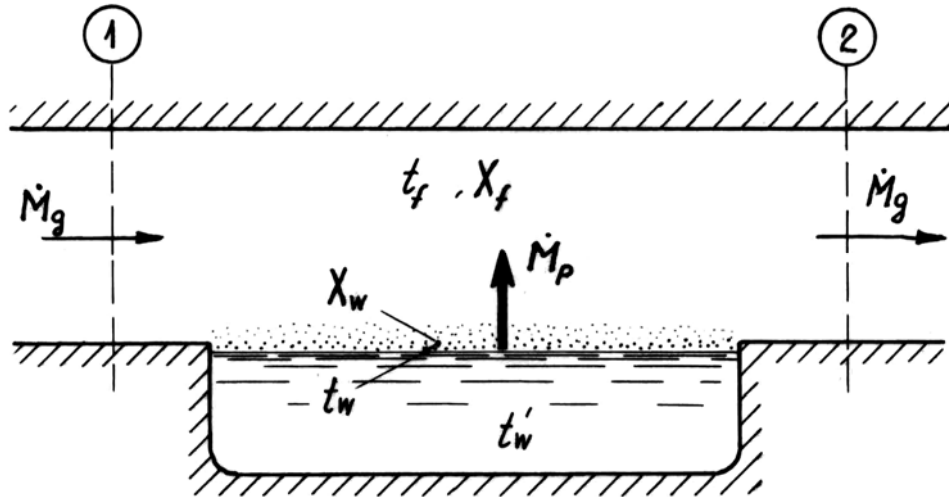
Związek między stężeniem pary (7.1) a zawilgoceniem jest następujący:

$$c_i = \frac{M_p}{V} = \frac{M_p}{M_g} \cdot \frac{M_g}{V} = X \rho_g \quad (7.65)$$

gdzie: ρ_g jest gęstością powietrza suchego (w warunkach mieszaniny)

Teraz możemy zastąpić w równaniu przejmowania substancji (7.32) stężenie c_i zawilgoceniem X_i i otrzymujemy wzór na strumień masy pary przenoszony przez powierzchnię cieczy A [m^2]:

$$\dot{M}_p = \beta_c \rho_g \cdot (X_w - X_f) \cdot A = G \cdot (X_w - X_f) \cdot A \quad (7.66)$$



Rys.7.6 Szkic sytuacyjny do przenoszenia substancji podczas przepływu powietrza nad wodą

W powyższym wzorze (7.66) wprowadzono nowy współczynnik przejmowania substancji odniesiony do zawilgocenia (X):

$$\dot{G} = \beta_c \cdot \rho_g \left[\frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \quad (7.67)$$

nazywany **współczynnikiem odparowania** albo **osuszenia** (gdy zachodzi proces odwrotny: wykroplenia pary). Czasami oznacza się go przez β_x .

We wzorze (7.66) gęstość ρ_g jest wyłączona przed nawias, bowiem wobec niewielkich różnic w ciśnieniach pary wodnej (dla małych ΔX) jest:

$$\rho_{g_f} \cong \rho_{g_w} = \rho_g$$

Dla wyznaczenia współczynnika σ wyznacza się β_c ze wzoru wyrażającego prawo Lewisa:

$$\dot{G} = \frac{\alpha}{c_p} \cdot \rho_g = \frac{\alpha}{\frac{c_p}{\rho_g}} \quad (7.68)$$

i przekształca wyrażenie:

$$\begin{aligned} \frac{c_p}{\rho_g} &= \frac{Q}{\frac{V \cdot \Delta t}{M_g}} = \frac{Q}{M_g \cdot \Delta t} = \frac{(M_g \cdot c_{p_g} + M_p \cdot c_{p_p}) \cdot \Delta t}{M_g \cdot \Delta t} = \\ &= c_{p_g} + X \cdot c_{p_p} = 1,0 + 1,93 \cdot X = c_{p_{1+X}} \left[\frac{\text{kJ}}{\text{kg pow. such.}} \right] \end{aligned}$$

tak, że ostatecznie jest:

$$\dot{G} = \frac{\alpha}{c_{p_{1+X}}} = \frac{\alpha}{1,0 + 1,93 \cdot X} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s} \cdot \text{m}^2} \right] \quad (7.69)$$

W świetle podanych w tabl. 20 wartości liczb Lewisa mogą powstać wątpliwości, czy zastosowanie wzoru (7.59) ważnego dla $Le = 1$ jest uzasadnione. Dla zbadania tej sprawy weźmy dwa wzory wyrażające analogię dyfuzyjno - termiczną dla konwekcji wymuszonej:

$$Sh = C \cdot Re^m \cdot Sc^n$$

$$Nu = C \cdot Re^m \cdot Pr^n$$

Z podzielenia stronami otrzymuje się:

$$Sh = Nu \cdot \left(\frac{Sc}{Pr} \right)^n = Nu \cdot (Le)^n$$

a po wprowadzeniu (7.50) i (5.42) i wyeliminowaniu D_c za pomocą (Le) jest:

$$\beta_c = \frac{\alpha}{c_p \cdot \rho} \cdot (Le)^{n-1} = \frac{\alpha}{c_p} \cdot \left(\frac{1}{Le} \right)^{1-n}$$

Przy podanych w tabl. 20 wartościach $Le = 0,86 \dots 0,95$ i dla np. przepływu wewnątrz rur, kiedy zgodnie z (5.88) i (7.60) $n = 0,40$ (ew. 0,44), jest

$$\beta_c = \frac{\alpha}{c_p} \cdot (1,09 \dots 1,03)$$

a więc dokładniejsze wartości współczynników przejmowania substancji byłyby co najwyżej o 9% większe od wartości obliczonych z przybliżonym zastosowaniem prawa Lewisa.

Stosowanie wzoru (7.59) i w konsekwencji wzorów (7.68) i (7.69) daje więc błąd obliczeń na korzyść pewności nie przekraczający 9%, co w obliczeniach technicznych jest dopuszczalne.

Ilość energii cieplnej przeniesionej z parą do lub od powietrza wynosi:

$$\dot{Q}_X = \dot{M}_p \cdot r = \sigma \cdot r \cdot (X_w - X_f) \dot{m}_r \cdot A \quad (7.70)$$

Równocześnie wskutek różnicy temperatur powietrza i powierzchni wody przenoszona jest ("na sucho") energia cieplna w ilości:

$$\dot{Q}_t = \alpha A \cdot (t_w - t_f) \dot{m}_r \quad (7.71)$$

Tak więc łączny strumień cieplny pobrany lub oddany przez mieszaninę parowo - powietrzną wynosi:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_t + \dot{Q}_X = \left[\alpha (t_w - t_f) \dot{m}_r + \sigma \cdot r \cdot (X_w - X_f) \dot{m}_r \right] \cdot A \quad (7.72)$$

Podstawiając tu (7.69) otrzymuje się:

$$\dot{Q} = \alpha \cdot \left[(t_w - t_f) \dot{m}_r + \frac{r}{c_{p_{1+X}}} \cdot (X_w - X_f) \dot{m}_r \right] \cdot A$$

albo:

$$\dot{Q} = \alpha \cdot \xi \cdot (t_w - t_f) \dot{m}_r \cdot A \quad (7.74)$$

gdzie:

$$\xi = 1 + \frac{r}{c_{p_{1+X}}} \cdot \frac{(X_w - X_f) \dot{m}_r}{(t_w - t_f) \dot{m}_r} \quad (7.75)$$

jest **stopniem zwiększenia** przejmowania ciepła wskutek dodatkowego przenoszenia energii cieplnej z substancją.

Ogólnie biorąc oba strumienie \dot{Q}_t i \dot{Q}_X nie zawsze skierowane są jednako. Wymaga to szczegółowego rozpatrzenia, co zostanie wkonane w następnym podrozdziale.

3.2. Możliwe przypadki

Przegląd możliwych przypadków przenoszenia substancji i ciepła między strumieniem powietrza a wodą o temperaturze na powierzchni t_w , a w głębi t'_w przedstawia rys. 7.7.

Z uwagi na nasycenie powietrza, przy powierzchni cieczy, parą wodną stan mieszaniki w tym miejscu (będącej w równowadze z cieczą) przedstawiają punkty na krzywej nasycenia wykresu entalpia – zawilgocenie: $(i - X)$.

Stan powietrza wchodzącego do układu określa punkt ① zdeterminowany przez temperaturę t_1 i zawilgocenie X_1 .

Zależnie od temperatury powierzchniowej warstwy wody t_w możliwy jest szereg charakterystycznych przypadków transportu energii i substancji (A,B,C,D,E,F,G).

Kiedy woda jest cieplejsza i $t_w > t_1$ ciepło przenoszone jest przez konwekcję do powietrza (przyp. **A**). Gdy woda jest chłodniejsza i $t_w < t_1$ powietrze grzeje wodę (przypadek **C** i dalsze).

Z kolei energia cieplna przenoszona z dyfundującą parą kieruje się do powietrza, kiedy $X_w = X_s > X_1$ i mamy parowanie (przypadki od **A** do **E**), a gdy $X_w < X_1$ wykraplanie pary z powietrza przenosi związaną z nią energię cieplną w przeciwnym kierunku (przypadki **F** i **G**).

W zakresie stanów **B** do **F** wypadkowy strumień cieplny jest różnicą między \dot{Q}_x i \dot{Q}_t .

Stan **D** wyznacza tzw. graniczną temperaturę chłodzenia w układzie adiabatycznym - do niego będzie zmierzał zawsze stan wody, gdy izolujemy układ cieplnie (wyłączymy Q)

Poza odcinkiem B - F oba strumienie cieplne skierowane są jednako-wo i wypadkowy strumień cieplny jest sumą obydwu.

3.3. Ilość przeniesionej energii cieplnej

Łączny strumień cieplny przenoszony przez obydwie mechanizmy wygodniej jest obliczać nieco inaczej niż wzorem (7.72) lub (7.74).

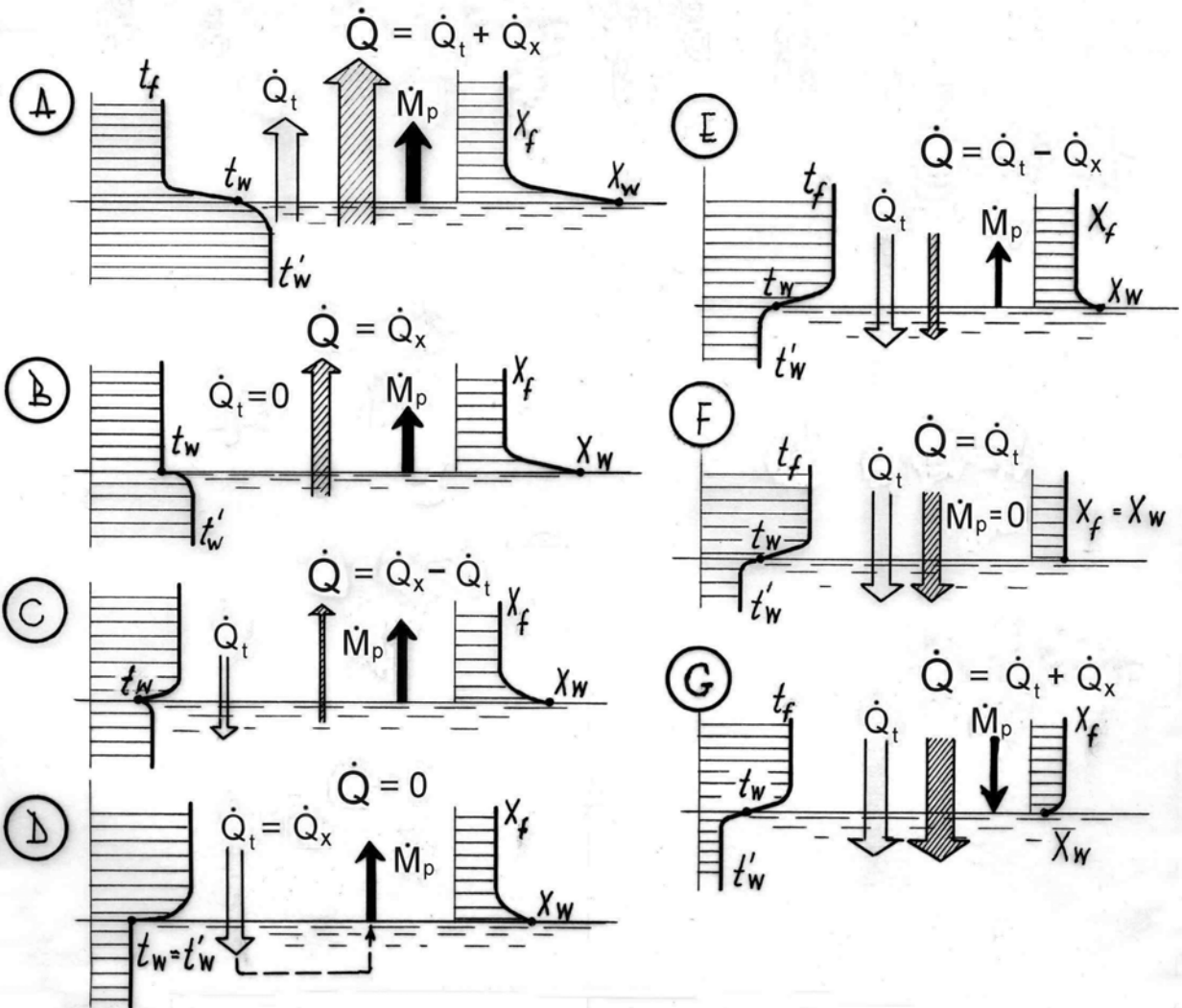
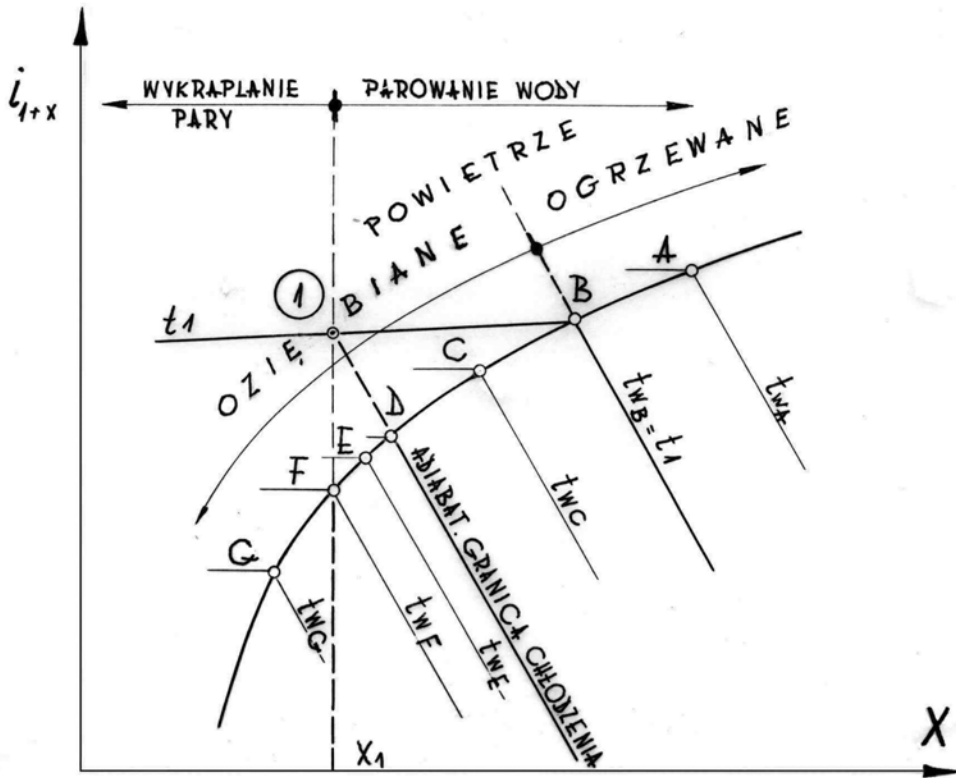
Można go mianowicie wyznaczyć jako ciepło przejęte (lub oddane) przez powietrze wilgotne zmieniające swój stan od ① na wejściu, do ② na wyjściu z układu:

$$\dot{Q} = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 = \dot{M}_g \cdot (i_{1+X} \text{ ②} - i_{1+X} \text{ ①}) \quad (7.76)$$

W tym równaniu wyeliminujemy nieznaną strumień masy powietrza suchego: \dot{M}_g .

W tym celu zestawiamy bilansowo strumień masy odparowującej wody i przyrost strumienia masy pary w przepływającym powietrzu:

$$\dot{M}_p = \sigma (X_w - X_f) \dot{s}_r \cdot A = \Delta \dot{M}_p = \dot{M}_g \cdot (X_2 - X_1) \quad (7.77)$$



Rys. 7.7 Zestawienie możliwych przypadków przenoszenia ciepła między powierzchnią wody i powietrzem

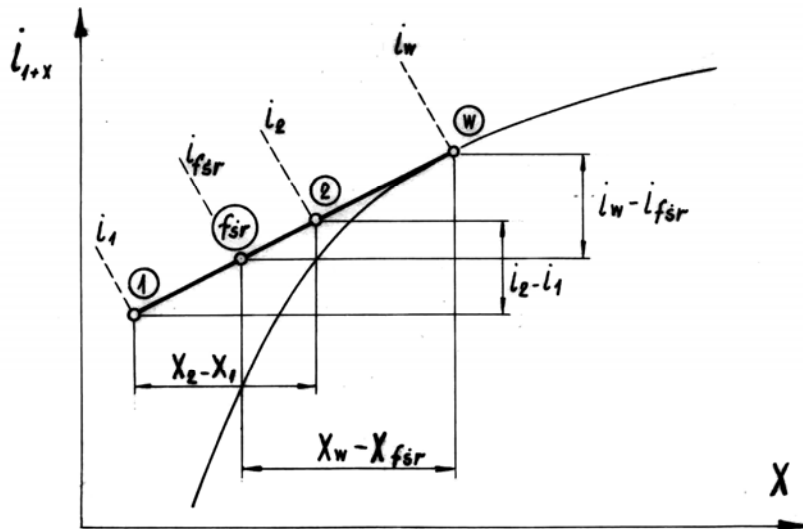
Z tego bilansu można wyznaczyć strumień masy powietrza suchego (stały podczas przepływu przez układ):

$$\dot{M}_g = \sigma A \cdot \frac{(X_w - X_f) \dot{s}_r}{X_2 - X_1} \quad (7.78)$$

i podstawić do (7.76) by otrzymać:

$$\dot{Q} = \sigma \cdot (i_{1+X(2)} - i_{1+X(1)}) \cdot A \cdot \frac{(X_w - X_f) \dot{s}_r}{X_2 - X_1} \quad (7.79)$$

Rozpatrywany proces jest mieszaniem powietrza o stanie ① (t_1, X_1) z parą nasyconą o temperaturze t_w i w stanie ⑨. Wynikiem tego mieszania jest stan końcowy powietrza ② (t_2, X_2), któremu odpowiada na wykresie $i - X$ punkt leżący na prostej mieszania pomiędzy punktami ① i ⑨.



Rys.7.8. Prosta mieszania pary i powietrza na wykresie $i - X$

Z prostej mieszania (rys. 7.8) otrzymuje się proporcję:

$$\frac{i_{1+X(2)} - i_{1+X(1)}}{X_2 - X_1} = \frac{i_{1+X(9)} - i_{1+X(f_{sr})} \dot{s}_r}{X_w - X_{f_{sr}}} \quad (7.80)$$

albo

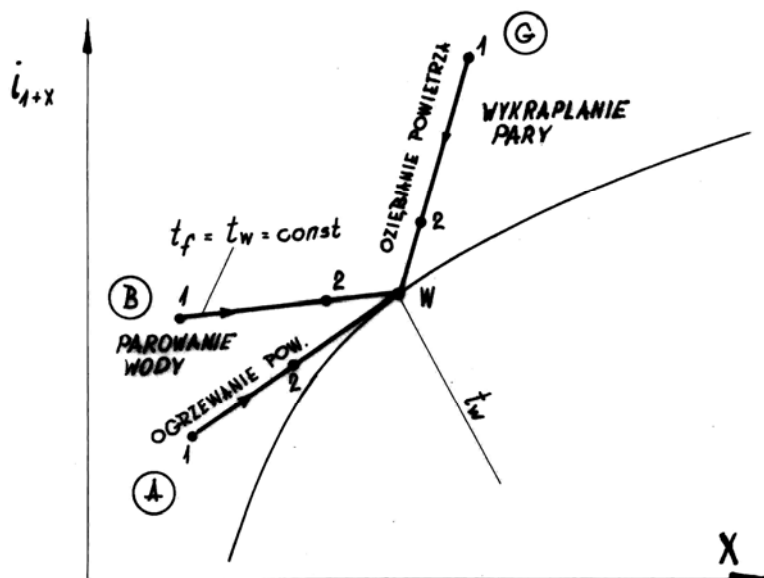
$$i_{1+X(2)} - i_{1+X(1)} \cdot \frac{X_w - X_{f_{sr}} \dot{s}_r}{X_2 - X_1} = i_{1+X(9)} - i_{1+X(f_{sr})} \dot{s}_r \quad (7.81)$$

Lewa strona tego wyrażenia podstawiona do (7.79) daje wzór na łączny strumień przenieszonego między wodą i powietrzem ciepła:

$$\dot{Q} = \sigma \cdot (i_{1+X(9)} - i_{1+X(f_{sr})} \dot{s}_r) \cdot A \quad (7.82)$$

Poszerzono tu w stosunku do (7.81) zakres ważności na przypadek zmiennej również temperatury wody (wzdłuż powierzchni) przez objęcie średnią - różnicy obu entalpii.

Analogicznie jest przy wykraplaniu pary z powietrza. Rysunek 7.9. pokazuje przebieg prostych mieszania dla charakterystycznych przypadków (oznaczenia wg rys.7.7) w tym i dla wykraplania pary (G).



Rys. 7.9 Różne możliwości przebiegu prostych mieszania na wykresie $i - X$

Zakładając ważność prawa Lewisa wprowadzamy do (7.82) wyrażenie (7.69) oraz średnią różnicę temperatur $(t_w - t_f)_{\text{śr}}$ i otrzymujemy ostatecznie:

$$\dot{Q} = \alpha \cdot \xi \cdot (t_w - t_f)_{\text{śr}} \cdot A \quad (7.83)$$

gdzie:

$$\xi = \frac{(i_{1+X}^{\text{W}} - i_{1+X}^{\text{F}})_{\text{śr}}}{c_{p,1+X} \cdot (t_w - t_f)_{\text{śr}}} \quad (7.84)$$

jest nowym wyrażeniem na stopień zwiększenia przyjmowania ciepła wskutek równoczesnego przenoszenia substancji.

Przy obliczaniu ξ entalpie bierze się z wykresu entalpia powietrza wilgotnego - zawilgocenie ($i - X$) lub oblicza wzorami stosowanymi w teorii gazów wilgotnych (w tym również dla procesu mieszania - w przypadku wyznaczania $t_{f, \text{śr}}$ i $X_{f, \text{śr}}$ ze znanej wartości $i_{f, \text{śr}}$).

Wielkość:

$$\alpha_X = \alpha \cdot \xi \quad (7.85)$$

nazywana jest "mokrym" współczynnikiem przyjmowania ciepła.

4. DYFUZYJNE WYMIENNIKI CIEPŁA

Wymienniki ciepła, w których występuje jednoczesne przenoszenie ciepła i substancji, stanowią grupę dość zróżnicowaną. Tak samo zróżnicowane, choć oparte na przedstawionych wyżej zasadach, są metody obliczeniowe. Przy projektowaniu aparatury trzeba zawsze posłużyć się literaturą specjalną uwzględniającą istniejące w danej dziedzinie doświadczenie.

4.1. Bezprzeponowe wymienniki ciepła

W stosowanych często bezprzeponowych chłodnicach wody obiegowej wykonywanych jako tzw. chłodnie kominowe lub wentylatorowe albo jako skrubery proces oziębiania wody jest zasadniczo adiabatyczny, tzn. przenoszenie ciepła odbywa się tylko między wodą i powietrzem wewnątrz chłodni. Woda spływająca w postaci strug lub kropel, w przeciwprądzie do wznoszącego się powietrza, oziębia się zmieniając swój stan (na powierzchni) po linii nasycenia od **A** w kierunku **D** (rys. 7.7). Tego ostatniego jednak w praktyce nigdy nie osiąga. Do obliczenia charakterystycznych wielkości chłodni i skrubarów można posłużyć się dostępną literaturą*).

4.2. Przeponowe wymienniki ciepła

Spośród przeponowych wymienników ciepła, w których ciepło przenika przez warstwę cieczy do lub od ścianki można wyróżnić.

1. **Chłodnice odparowujące**, w których powierzchnię od strony powietrza (dla którego współczynniki przejmowania ciepła są stosunkowo niewielkie), zrasza się wodą, a ta pod wpływem napływającego przez ściankę ciepła paruje zwiększając swoim strumieniem substancji ilość odprowadzanego ciepła. Dodatkowy opór cieplny spływającej warstwy wody jest niewielki i można go pominąć. Zwiększony w ten sposób współczynnik przejmowania ciepła od strony powietrza oblicza się wzorami (7.85) i (7.86).
2. **Chłodnice wykraplające** parę wodną z oziębianego powietrza jak np. chłodnice sprężarek czy chłodnice w instalacjach chłodniczych lub klimatyzacyjnych. Na ścianie tworzy się spływająca błona wykroplonego kondensatu o temperaturze t_w . Jest ona, ogólnie biorąc, zmienna wzdłuż powierzchni, tak że stan (**w**) dla tego przypadku (**G** na rys. 7.9) przedstawia wypadkowy stan nasycenia nad cieczą spływającą w wymienniku. Tak samo jak wypadkowy jest stan (**2**) powietrza na wylocie z chłodnicy.

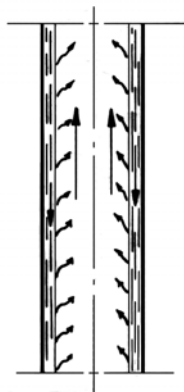
Również w tym przypadku obliczać można zwiększony współczynnik przejmowania ciepła wzorami (7.85) i (7.84), a dodatkowy opór cieplny warstwy wody jest pomijalny. W wypadku wyższych ciśnień powietrza przydatne są wykresy $i-X$ dla odpowiednich ciśnień**). Dalsze metody obliczania wykraplaczy par przede wszystkim innych niż para wodna podane są w cytowanej wyżej książce T. Hoblera.

*) J.Ledwoń, M.Golczyk: „Chłodnie kominowe i wentylatorowe”, Arkady, Warszawa 1967.
P.D.Lebiediew: „Wymienniki ciepła, urządzenia suszarnicze i chłodnicze”, WNT Warszawa 1970.
K.Brodowicz: „Teoria wymienników ciepła i masy”, PWN, Warszawa 1982.

***) W.Häussler: „Zastosowanie wykresu $i-X$ w inżynierii sanitarnej”, Arkady, Warszawa 1970

Przykłady

1. Wewnątrz rury pionowej o średnicy 50 mm i ściankach zraszanych wodą przepływa z prędkością 5 m/s powietrze o średniej temperaturze 20°C, średniej wilgotności względnej 60% i ciśnieniu 750 Tr. Temperatura wody jest taka sama jak powietrza. Obliczyć współczynnik przejmowania substancji różnymi metodami oraz gęstość strumienia wytwarzanej pary.



Rys.7.10 Szkic sytuacyjny do przykładu 1

Rozwiązanie:

Dla temperatury 20°C znajdujemy z tablic:

$$\nu_2 = 15,06 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \lambda_2 = 0,0259 \text{ W/m}\cdot\text{K}, \quad D_{c_{1,2}} = 24,8 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s},$$

$$c_{p_2} = 1,004 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}, \quad Pr_2 = 0,71, \quad P_{s_1} = 2337 \text{ N/m}^2$$

Ponadto obliczamy, dla stałej gazowej $R_2 = 287 \text{ Nm/kg}\cdot\text{K}$, gęstość powietrza:

$$\rho_2 = \frac{P - P_{1f}}{R_2 T} = \frac{10^5 - 0,6 \cdot 2337}{287 \cdot 293} = 1,173 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

Liczba Reynoldsa:

$$Re = \frac{wd}{\nu} = \frac{5 \cdot 0,05}{15,06 \cdot 10^{-6}} = 16\,600 > 10^4$$

Jak widać mamy do czynienia z rozwiniętym przepływem turbulentnym.

Wyznaczamy β_c z prawa Lewisa (7.59). W tym celu obliczamy współczynnik przejmowania ciepła ze wzoru Michejewa (5.87), w którym pomijamy obie poprawki:

$$\left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{0,25} = 1 \quad \text{i} \quad \epsilon_L = 1$$

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = 0,021 \cdot (Re)^{0,8} \cdot (Pr)^{0,43} = 0,021 \cdot 16\,600^{0,8} \cdot 0,71^{0,43} = 43,4$$

$$\alpha = \frac{(Nu)\lambda}{d} = \frac{43,4 \cdot 0,0259}{50 \cdot 10^{-3}} = 22,4 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Zatem:

$$\beta_c = \frac{\alpha}{c_{p_2} \cdot \rho_2} = \frac{22,4}{1004 \cdot 1,173} = 19,0 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Dla określenia tej samej wielkości z analogii dyfuzyjno - termicznej zastępujemy we wzorze Michejewa ciepłe liczby kryterialne dyfuzyjnymi:

$$Sh = \frac{\beta_c d}{D_c} = 0,021 \cdot (Re)^{0,8} \cdot (Sc)^{0,43} = 0,021 \cdot 16\,600^{0,8} \cdot 0,61^{0,43} = 40,8$$

przy czym liczba Schmidta wynosi tu: $Sc = \frac{\nu}{D_c} = 0,61$

A więc:

$$\beta_c = \frac{(Sh) \cdot D_c}{d} = \frac{40,8 \cdot 24,8 \cdot 10^{-6}}{50 \cdot 10^{-3}} = 20,3 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$$

Gdyby użyć wzoru Dittusa - Boeltera (5.88) z $n = 0,3$ (chłodzenie powietrza), wynik byłby taki:

$$\beta_c = 23,60 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$$

Z korelacji, bezpośrednich badań konwektywnego przenoszenia substancji - podanej przez Gillianda:

$$Sh = 0,023 \cdot (Re)^{0,83} \cdot (Sc)^{0,44} = 0,023 \cdot 16\,600^{0,83} \cdot 0,61^{0,44} = 59,8$$

mamy:

$$\beta_c = \frac{(Sh) \cdot D_c}{d} = \frac{59,8 \cdot 24,8 \cdot 10^{-6}}{50 \cdot 10^{-3}} = 29,6 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s}$$

Z porównania otrzymanych trzech wartości na β_c wynika, że prawo Lewisa i analogia dyfuzyjno - termiczna dają niższe, a więc bezpiecznie (w obliczeniach konstrukcyjnych), wartości.

Do dalszych obliczeń przyjmujemy wynik korelacji Gillianda, gdyż odnosi się bezpośrednio do rozpatrywanego przypadku: $\beta_c = 29,6 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}$.

Ciśnienia składnikowe pary:

$$\text{na powierzchni cieczy} - P_{1w} = P_s = 2337 \text{ N/m}^2$$

$$\text{w rdzeniu powietrza} - P_{1f} = 0,60 \cdot 2337 = 1400 \text{ N/m}^2$$

Współczynnik przejmowania substancji odniesiony do ciśnienia (stała gazowa pary wodnej: 462 Nm/kg K):

$$\beta_p = \frac{\beta_c}{R_1 T} = \frac{29,6 \cdot 10^{-3}}{462 \cdot 293} = 2,18 \cdot 10^{-7} \frac{s}{m}$$

Zatem gęstość strumienia pary:

$$\begin{aligned} \dot{m}_1 &= \beta_p \cdot (P_{1w} - P_{1f}) = 2,18 \cdot 10^{-7} (2337 - 1400) = \\ &= 2,04 \cdot 10^{-4} \frac{kg}{s \cdot m^2} = 0,735 \frac{kg}{h \cdot m^2} \end{aligned}$$

2. Obliczyć „mokry” współczynnik przejmowania ciepła dla ścianki chłodnicy dyfuzyjnej (odparowującej) omywanej przez powietrze o ciśnieniu atmosferycznym, które na dopływie ma temperaturę 25°C i wilgotność względną 70%, a na wylocie wilgotność względną 90%. Spływająca po ściance warstewka cieczy ma temperaturę 30°C, Konwekcyjny współczynnik przejmowania ciepła wynosi 30 W/m²·K

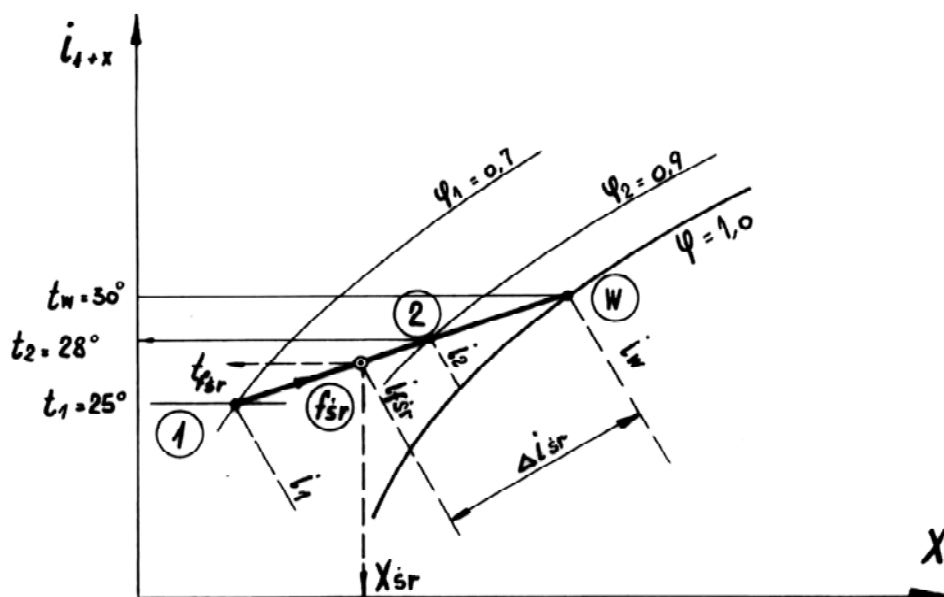
R o z w i ą z a n i e :

Z wykresu i - X odczytujemy dla danych w zadaniu stanów powietrza i wody:

$$i_1 = 60,7 \text{ kJ/kg p. s.}$$

$$i_2 = 82,7 \text{ kJ/kg p. s.} \quad t_2 = 28^\circ\text{C}$$

$$i_w = 99,1 \text{ kJ/kg p. s.} \quad (t_w = 30^\circ\text{C} = \text{const})$$



Rys.7.11 Prosta mieszania do przykładu 2.

średnia różnica entalpii parującej wody i powietrza:

$$\begin{aligned} \Delta i_{sr} = (i_w - i_f)_{sr} &= \frac{i_w - i_1 - (i_w - i_2)}{\ln \frac{i_w - i_1}{i_w - i_2}} = \frac{i_2 - i_1}{2,3 \cdot \lg \frac{i_w - i_1}{i_w - i_2}} = \\ &= \frac{82,7 - 60,7}{2,3 \cdot \lg \frac{99,1 - 60,7}{99,1 - 82,7}} = 25,8 \text{ kJ/kg pow. such.} \end{aligned}$$

Stąd średnia entalpia powietrza:

$$i_{f_{sr}} = i_w - \Delta i_{sr} = 99,1 - 25,8 = 73,3 \text{ kJ/kg p. s.}$$

dla niej z wykresu i - X mamy na prostej mieszania:

$$t_{f_{sr}} = 26,8^\circ\text{C} \quad X_{sr} = 0,0174$$

Średnie ciepło właściwe powietrza wilgotnego:

$$c_{p_{1+X}} = 1,004 + 1,93 \cdot X_{sr} = 1,004 + 1,93 \cdot 0,0174 = 1,038 \frac{\text{kJ}}{(\text{kg p. s.}) \cdot \text{K}}$$

Stopień zwiększenia przejmowania ciepła:

$$\xi = \frac{(i_w - i_f)_{sr}}{c_{p_{1+X}} \cdot (t_w - t_f)_{sr}} = \frac{25,8}{1,038 \cdot (30 - 26,8)} = 7,76$$

Współczynnik przejmowania ciepła przez konwekcję i dyfuzję:

$$\alpha_x = \alpha \xi = 30 \cdot 7,76 = 233 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

3. Powietrze przepływające pod ciśnieniem atmosferycznym przez chłodnicę rurową oziębia się od 8°C i wilgotności względnej 60% do 0°C i wilgotności względnej 85%. Prędkość powietrza 5 m/s. Chłodnica wykonana jest z rur stalowych o średnicach $\phi 38/\phi 33$ rozstawionych szachownicowo (układ przestawiony). Obliczyć współczynnik mokrego przejmowania ciepła α_x .

R o z w i ą z a n i e :

Z tablic znajdujemy dla temperatury charakterystycznej:

$$t_f = \frac{t' + t''}{2} = \frac{8 + 0}{2} = 4^{\circ}\text{C}$$

potrzebne wielkości: $\nu = 13,63 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\text{Pr} = 0,706$, $\lambda = 0,025 \text{ W/m} \cdot \text{K}$.
i obliczamy liczbę Reynoldsa:

$$\text{Re} = \frac{wd}{\nu} = \frac{5 \cdot 38 \cdot 10^{-3}}{13,63 \cdot 10^{-6}} = 13\ 920$$

Dla rozważanego układu rur jest w zakresie $\text{Re} = 200 \dots 200\ 000$:

$$\begin{aligned} \text{Nu} &= 0,41 \cdot (\text{Re})^{0,60} \cdot (\text{Pr}_f)^{0,33} \cdot \left(\frac{\text{Pr}_f}{\text{Pr}_w}\right)^{0,25} = \\ &= 0,41 \cdot 13\ 920^{0,60} \cdot 0,706^{1/3} \cdot 1 = 111 \end{aligned}$$

Z braku danych co do ogólnej liczby rur pomijamy poprawkę na 2 pierwsze szeregi. Wobec tego współczynnik przejmowania ciepła:

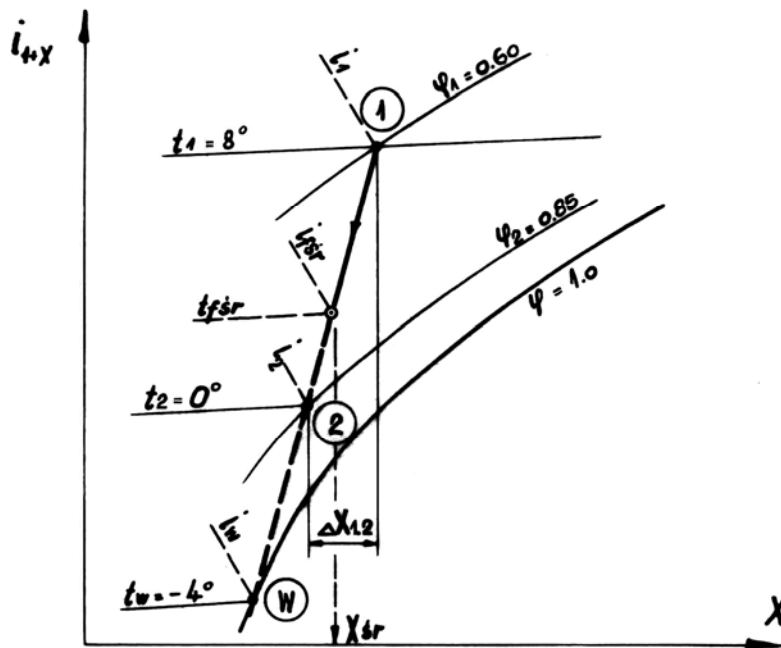
$$\alpha = \frac{(\text{Nu}) \cdot \lambda}{d} = \frac{111 \cdot 0,025}{38 \cdot 10^{-3}} = 72,7 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

Dla określenia stopnia zwiększenia przenoszenia ciepła wskutek dyfuzji pary: ξ odczytujemy z wykresu $i - X$ entalpie:

$$i_1 = 18,1 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad i_2 = 8,15 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \quad i_w = 2,98 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

oraz średnią entalpię powietrza:

$$i_{f\ \text{sr}} \cong \frac{i_1 + i_2}{2} = \frac{18,1 + 8,15}{2} = 13,13 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$



Rys.7.12 Prosta mieszania do przykładu 3.

Dokładniej wyznaczmy średnią entalpię powietrza $i_{f\text{sr}}$ rachunkowo, jak w poprzednim przykładzie 2, korzystając z odczytanych na wykresie entalpii stanów 1 i 2:

$$\Delta i_{\text{sr}} = (i_f - i_w)_{\text{sr}} = \frac{i_1 - i_2}{\ln \frac{i_1 - i_w}{i_2 - i_w}} = \frac{18,1 - 8,15}{2,3 \cdot \lg \frac{18,1 - 2,98}{8,15 - 2,98}} = 9,25 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$i_{f\text{sr}} = i_w + \Delta i_{\text{sr}} = 2,98 + 9,25 = 12,23 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

Różnica wynosi ok. 7,4 %.

Z wykresu dla tej ostatniej entalpii jest: $X_{\text{sr}} = 0,00355$ i $t_{f\text{sr}} = 3,1^\circ\text{C}$.

Ciepło właściwe:

$$c_{p1+X} = 1,004 + 1,93 X_{f\text{sr}} = 1,004 + 1,93 \cdot 0,00355 = 1,011 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

Zatem współczynnik zwiększenia przyjmowania ciepła:

$$\xi = \frac{(i_w - i_f)_{\text{sr}}}{c_{p1+X} \cdot (t_{f\text{sr}} - t_w)} = \frac{9,25}{1,011 \cdot [3,1 - (-4)]} = 1,29$$

a „mokry” współczynnik przyjmowania ciepła:

$$\alpha_x = \alpha \cdot \xi = 72,7 \cdot 1,29 = 93,8 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}}$$

Ćwiczenia

1. Obliczyć gęstość strumienia pary przenieszonego do powietrza przepływającego z prędkością 3 m/s wzdłuż naczynia o długości 100 mm, napełnionego wodą o temperaturze powierzchni 15°C . Powietrze ma temperaturę 20°C , ciśnienie 100 kPa i wilgotność względną 33%. Współczynnik przyjmowania substancji β_c obliczyć wg prawa Lewisa i wg analogii dyfuzyjno - termicznej:

Odpowiedź: wg prawa Lewisa: $\beta_c = 19,3 \cdot 10^{-3}$ m/s

z analogii: $\beta_c = 22,1 \cdot 10^{-3}$ m/s

wg analogii: $m_1 = 155,2 \cdot 10^{-6}$ kg/s·m²

2. Obliczyć ilość ciepła oddaną do powietrza przez każdy 1 m² powierzchni wody w stawie o temperaturze zwierciadła 25°C do powietrza, które mając temperaturę 18°C i wilgotność względną 50% przepływa z prędkością 2 m/s w kierunku długości stawu wynoszącej 15 m.

Odpowiedź: $\dot{Q}_X = 235$ W/m²

3. Obliczyć współczynnik przyjmowania ciepła α_x od powietrza przepływającego przez chłodnicę z przykładu 3, jeżeli temperatura powietrza na wlocie wynosi 15°C , wilgotność względną 60%, natomiast na wylocie jest: 0°C i 95%. Pozostałe dane pozostają takie same.

Odpowiedź: $\alpha_x = 111$ W/m²K

Streszczenie części siódmej

Przedstawiono podstawowe prawo przenoszenia substancji na drodze dyfuzji molekularnej w układzie izotermicznym czyli prawo Ficka i zwrócono uwagę na jego strukturalne podobieństwo do prawa przewodzenia ciepła Fouriera.

Zanalizowano przypadek dwukierunkowej dyfuzji równomolowej oraz ważny w technice cieplnej przypadek ustalonej dyfuzji jednokierunkowej i wyprowadzono podstawowe równanie dla tego przypadku, czyli równanie Stefana.

W praktyce dyfuzja molekularna intensyfikowana jest przez prądy konwekcyjne. Dla takiego, złożonego procesu zwanego konwektywnym przenoszeniem substancji wyprowadzono podstawowe równanie różniczkowe. Następnie wyprowadzono kryteria podobieństwa. Są nimi liczby: Reynoldsa i Schmidta jako określające i liczba Sherwooda jako nieokreślająca. Ta ostatnia zawiera poszukiwaną wielkość: współczynnik przejmowania substancji β (analogiczny do współczynnika przejmowania ciepła α). Wykazano, że między przenoszeniem substancji i przenoszeniem ciepła istnieje analogia oparta na matematycznej identyczności podstawowych równań różniczkowych i ich rozwiązań. Analogię tę potwierdzają zadowalająco wyniki eksperymentów. W pewnych przypadkach, kiedy dyfuzyjność substancjalna D [m^2/s] jest liczbowo równa dyfuzyjności cieplnej (współczynnikowi wyrównywania temperatury a [m^2/s], czyli kiedy liczba Lewisa: $Le = \nu/a = 1$, można współczynnik β wyznaczyć wprost ze znanego współczynnika przejmowania ciepła α stosownie do tzw. prawa Lewisa. Dotyczy to w szczególności, z dość dobrym przybliżeniem, układu woda - powietrze.

W szeregu ważnych procesów cieplnych występuje równoczesne przenoszenie ciepła i substancji. Dotyczy to w szczególności parowania wody do powietrza lub wykraplania pary wodnej z niego.

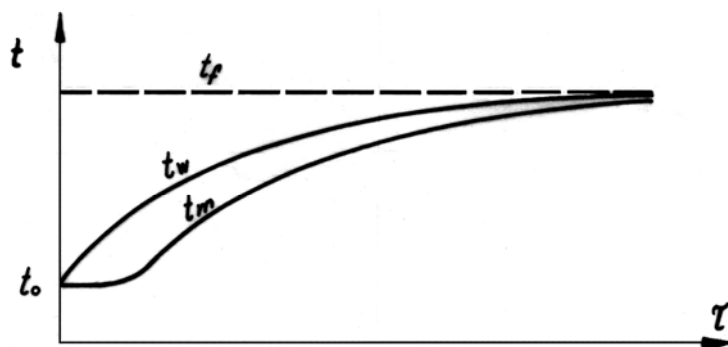
Rozpatrzono różne możliwości przenoszenia ciepła i pary między wodą i powietrzem. Zależnie od warunków obydwa strumienie skierowane są w tym samym lub w przeciwnych kierunkach, co odpowiednio powiększa lub zmniejsza przenoszoną łącznie ilość energii cieplnej. Przedstawiono stosunkowo prosty sposób obliczania zastępczego tzw. "mokrego" współczynnika przejmowania ciepła α_x przy użyciu, znanego w teorii powietrza wilgotnego, wykresu: entalpia – zawilgocenie ($i - X$).

Na zakończenie dokonano krótkiego przeglądu wymienników ciepła, w których zachodzi proces dyfuzji pary przez gaz.

VIII. NIEUSTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA

Nieustalone przewodzenie ciepła występuje podczas **ogrzewania i chłodzenia** ciał, kiedy ciała te dążą do równowagi z otoczeniem, w którym się znalazły. Na przykład przedmiot o temperaturze t_1 umieszczony (nagle) w płynie o temperaturze wyższej $t_f > t_1$ będzie przejmował ciepło od płynu wskutek tej różnicy temperatur.

Temperatury przedmiotu będą wzrastać: temperatura ścianki t_w szybciej od temperatur w głębi przedmiotu, w szczególności od temperatury w środku przedmiotu t_m (różnica temperatur $t_w - t_m$ konieczna jest dla transportu energii cieplnej do wnętrza przedmiotu). Wszystkie temperatury przedmiotu zbiegają jednak stopniowo do t_f (rys. 8.1).



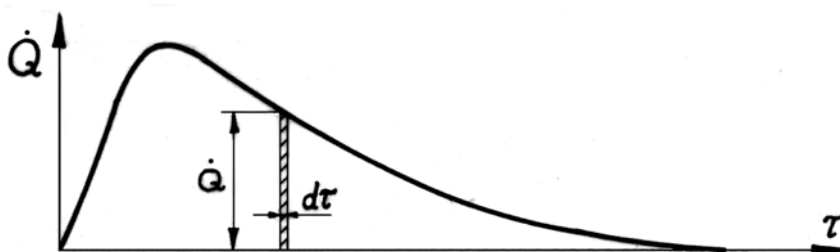
Rys.8.1 Zmiana temperatury, w czasie ogrzewania ciała

Strumień ciepły \dot{Q} przenoszony do przedmiotu również ulega w tym czasie zmianie, jak to pokazuje rys. 8.2. Przechodzi on przez maksimum i spada do zera wtedy, gdy temperatury uległy wyrównaniu i osiągnięta została równowaga z otoczeniem przedmiotu.

Całkowite ciepło pochłonięte przez przedmiot:

$$Q = \int_0^{\tau_0} \dot{Q} \cdot d\tau = \Delta U$$

równe polu pod krzywą na rys.8.2, powiększa energię wewnętrzną przedmiotu o wartość ΔU .



Rys.8.2 Zmiana strumienia ciepłego w czasie ogrzewania przedmiotu

Podobnie przebiega zjawisko, gdy temperatura płynu otaczającego przedmiot ulegnie (nagłej) zmianie. Mamy wtedy przejście między stanami ustalonymi: temperatury stopniowo zmierzają do nowych wartości ustalonych, a przedmiot pochłania (lub oddaje) odpowiednią porcję ciepła Q przyjmując nową wartość energii wewnętrznej.

Drugą grupę zagadnień stanowią przypadki **okresowo zmiennej temperatury** płynu omywającego powierzchnię ciała. Wymusza ona analogiczne zmiany temperatury powierzchni ciała i potem głębszych jego warstw.

Zjawiska takie występują w ściankach cylindrów cieplnych maszyn tłokowych, w masach wypełniających regeneracyjne wymienniki ciepła, a także w przypowierzchniowych warstwach ziemi (gruntu).

Nieustalonomu przewodzeniu ciepła towarzyszy zawsze zmiana energii wewnętrznej ciała - spowodowana pochłonięciem lub oddaniem ciepła Q . Jego ilość jest wprost proporcjonalna do przewodności cieplnej przedmiotu λ , a odwrotnie proporcjonalna do jego (jednostkowej) pojemności cieplnej $\rho \cdot c_p$. Stąd **współczynnik wyrównywania temperatury** (dyfuzywność cieplna):

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho} \quad (8.1)$$

ma dla przewodzenia nieustalonego podstawowe znaczenie - analogiczne do tego, jakie ma sam współczynnik przewodzenia ciepła λ w procesie ustalonym.

1. ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

Problem znalezienia zmiennego w czasie rozkładu temperatury i zmiennego strumienia cieplnego sprowadza się do rozwiązania równania Fouriera:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t = a \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) \quad (8.2)$$

dla określonych warunków początkowych (początkowy rozkład temperatury) oraz brzegowych (oddziaływanie otaczającego ośrodka).

Te ostatnie mogą być dane na trzy sposoby: znane jako warunki brzegowe I, II lub III rodzaju, a podane w podrozdziale 3.2 części I.

Sposób rozwiązania zostanie przedstawiony na przykładzie ścianki płaskiej o grubości δ i nieograniczonej powierzchni. Dla innych ważnych figur jak nieograniczonej długości walec czy kula metoda postępowania jest taka sama.

1.1. Ścianka płaska

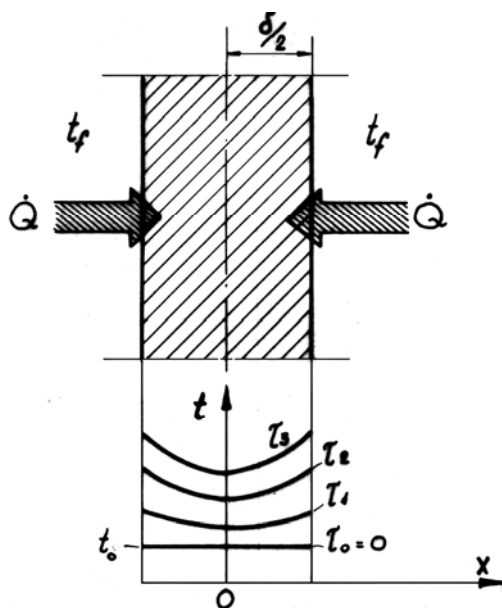
Ścianka płaska jest układem symetrycznym (po obu stronach mamy t_f i α) i jednowymiarowym. Tak więc równanie (8.2) upraszcza się do postaci:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (8.3)$$

Warunek początkowy brzmi:

$$\text{dla } \tau = 0 \text{ jest: } t = t_0 \text{ (w całej płycie)} \quad (8.4)$$

tzn., że w chwili początkowej rozkład temperatury jest równomierny.



Rys.8.3 Schemat nieustalonego przewodzenia ciepła w płycie nieograniczonej

Warunki brzegowe:

$$\text{dla } x = 0, \text{ tj. w osi płyty jest: } \frac{\partial t}{\partial x} = 0 \text{ (ze wzgl. na symetrię)} \quad (8.5)$$

dla $x = \frac{1}{2} \delta$, tj. na brzegu płyty, jednostkowy strumień ciepły odprowadzany przez przewodzenie w materiale ścianki (prawo Fouriera) jest równy strumieniowi doprowadzanemu przez przejmowanie od otaczającego płynu (prawo Newtona):

$$-\lambda \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=\frac{\delta}{2}} = \alpha \cdot (t_w - t_f) \quad (8.6)$$

Jest to warunek brzegowy III rodzaju - podany już w części pierwszej wzorem (1.58).

W ostatnim wyrażeniu wprowadzamy dla uproszczenia $t_f = 0$ i otrzymujemy:

$$-\lambda \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=\frac{\delta}{2}} = \alpha \cdot t_w \quad (8.7)$$

Zakłada się, że rozwiązanie matematyczne problemu ma następującą postać ogólną:

$$t = f(x) \cdot g(\tau) \quad (8.8)$$

Pierwszy składnik przedstawia rozkład temperatury na przekroju płyty w danej chwili, drugi zmianę temperatury danego miejsca w czasie.

Wobec tego:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = f(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} g(\tau) \quad (8.9)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = g(\tau) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) \quad (8.10)$$

Obydwa wyrażenia podstawiamy do wyjściowego równania różniczkowego (8.3) i po uporządkowaniu mamy:

$$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x) = \frac{1}{a \cdot g(\tau)} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} g(\tau) \quad (8.11)$$

Równanie to będzie spełnione dla dowolnego x i dowolnego τ tylko wtedy, gdy lewa i prawa strona będą zawsze równe tej samej, stałej liczbie, którą oznaczamy przez $-\mu^2$. Otrzymujemy więc zamiast cząstkowego dwa równania różniczkowe zupełne:

$$\frac{1}{g(\tau)} \cdot \frac{dg}{d\tau} = -\mu^2 \quad (8.12)$$

$$\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} = -\mu^2 \quad (8.13)$$

których rozwiązania są następujące:

$$g(\tau) = A' \cdot e^{-a \cdot \mu^2 \tau} \quad (8.14)$$

$$f(x) = B' \cdot \cos \mu x + C' \cdot \sin \mu x \quad (8.15)$$

Tak więc rozwiązanie równania (8.8) ma następującą postać ogólną:

$$t = e^{-a \cdot \mu^2 \tau} (A \cos \mu x + B \sin \mu x) \quad (8.16)$$

W równaniu tym stałe: $A = A' \cdot B'$ i $B = A' \cdot C'$ trzeba wyznaczyć z warunków brzegowych.

Stosownie do pierwszego z nich: (8.5), mamy:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=0} = e^{-a \cdot \mu^2 \tau} \cdot (-A \mu \cdot \sin \mu x + B \mu \cdot \cos \mu x)_{x=0} = 0$$

a po wykonaniu działań:

$$t = e^{-a \cdot \mu^2 \tau} \cdot A \cdot \cos \mu x \quad (8.17)$$

Celem wykorzystania drugiego warunku brzegowego obliczamy z (8.17) pochodną:

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=\frac{\delta}{2}} = -e^{-a \cdot \mu^2 \tau} \cdot A \cdot \mu \cdot \sin \mu \frac{\delta}{2} \quad (8.18)$$

i podstawiamy ją do (8.7), w którym t_w zastępujemy przez (8.17) z podstawieniem: $x = \frac{\delta}{2}$ i otrzymujemy równanie:

$$\begin{aligned} \lambda e^{-a \cdot \mu^2 \tau} \cdot A \cdot \mu \cdot \sin \mu \frac{\delta}{2} &= \alpha t_w = \\ &= \alpha (e^{-a \cdot \mu^2 \tau} \cdot A \cdot \cos \mu \frac{\delta}{2}) \end{aligned} \quad (8.19)$$

a z niego zależność:

$$\operatorname{ctg} \mu \frac{\delta}{2} = \frac{\mu \lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{\alpha \frac{\delta}{2}} \cdot \mu \frac{\delta}{2} = \frac{\mu \frac{\delta}{2}}{(\operatorname{Bi})} \quad (8.20)$$

w której występuje bezwymiarowa liczba Biota* definiowana ogólnie jako:

$$\operatorname{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda_{\text{śc}}} \quad (8.21)$$

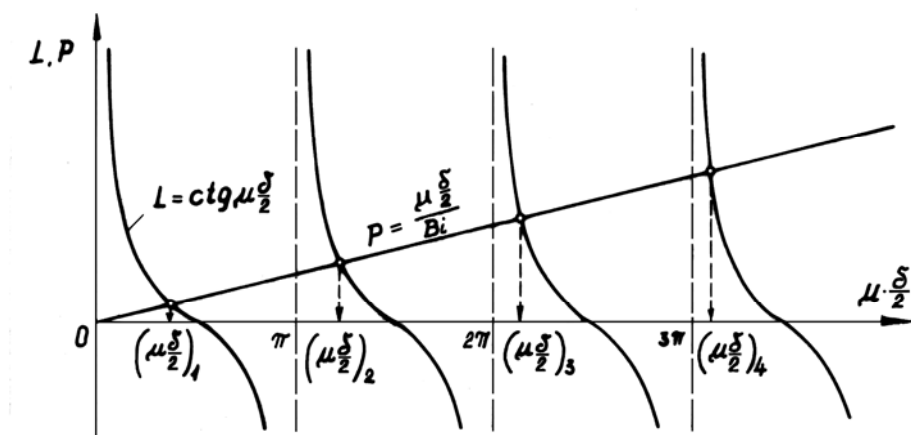
Nusselta jedynie tym, że przewodność cieplna $\lambda_{\text{śc}}$ odnosi się do materiału ścianki

Liczba ta różni się od znanej liczby na powierzchni ciała, ale rozpatrywanego od strony ciała stałego. Liczbę Bi , a nie płynu. Jest ona kryterium podobieństwa przejmowania ciepła Biota można wyprowadzić analogicznie jak liczbę Nusselta z równania (8.6), w którym przewodność cieplną λ rozpatrywanego ciała oznaczono dobitniej przez $\lambda_{\text{śc}}$.

Skrajne wyrazy w (8.20) stanowią równanie charakterystyczne:

$$\operatorname{ctg} \mu \frac{\delta}{2} = \frac{\mu \frac{\delta}{2}}{(\operatorname{Bi})} \quad (8.22)$$

które ma nieskończenie wiele rozwiązań ze względu na μ (μ_1, μ_2, \dots itd.). Ilustruje to poniższy rysunek, a wartości liczbowe pierwszych sześciu rozwiązań podaje przykładowo podana na następnej stronie tablica 21.



Rys.8.4 Szkic do rozwiązania równania trygonometrycznego

Uzyskana z (8.22) wartość μ_n daje rozwiązanie szczególne*) ze stałą A_n (którą można przy pomocy znanego μ_n wyznaczyć).

* Jean Baptiste Biot (1774 – 1862) fizyk francuski.

*) Poszczególne rozwiązania nazywane są funkcjami własnymi, a poszczególne wartości: $(\mu \frac{\delta}{2})_1, (\mu \frac{\delta}{2})_2$ itd. stanowią wartości własne.

Wartości pierwszych 6-ciu rozwiązań równania (8.22)

Bi	$(\mu \cdot \frac{\delta}{2})_1$	$(\mu \cdot \frac{\delta}{2})_2$	$(\mu \cdot \frac{\delta}{2})_3$	$(\mu \cdot \frac{\delta}{2})_4$	$(\mu \cdot \frac{\delta}{2})_5$	$(\mu \cdot \frac{\delta}{2})_6$
0,00	0,0000	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080
0,01	0,0998	3,1448	6,2848	9,4258	12,5672	15,7086
0,1	0,3111	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143
1,0	0,8603	3,4256	6,4373	9,5293	12,6453	15,7713
10	1,4289	4,3058	7,2281	10,2003	13,2142	16,2594
100	1,5552	4,6658	7,7764	10,8871	13,9981	17,1093
∞	1,5708	4,7124	7,8540	10,9956	14,1372	17,2788

Rozwiązanie ogólne jest sumą rozwiązań szczególnych:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\mu_n^2 \tau} \cdot A_n \cdot \cos \mu_n \cdot x \quad (8.23)$$

Stałą A_n wyznaczamy z warunku początkowego (8.4):

$$t(x,0) = t_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos \mu_n \cdot x \quad (8.24)$$

Mnożymy obie strony tego równania przez $\cos \mu_m x$, całkujemy w granicach od 0 do $\frac{\delta}{2}$ i otrzymujemy:

$$\int_0^{\frac{\delta}{2}} t_0 \cdot \cos(\mu_m \cdot x) \cdot dx = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \int_0^{\frac{\delta}{2}} \cos(\mu_n \cdot x) \cdot \cos(\mu_m \cdot x) \cdot dx \quad (8.25)$$

Ale wszystkie wyrazy mieszane ($m \neq n$) zerują się:

$$\int_0^{\frac{\delta}{2}} \cos(\mu_n \cdot x) \cdot \cos(\mu_m \cdot x) \cdot dx = 0 \quad (8.26)$$

a tylko, gdy $m = n$ mamy:

$$\int_0^{\frac{\delta}{2}} \cos(\mu_n \cdot x) \cdot \cos(\mu_m \cdot x) \cdot dx = \int_0^{\frac{\delta}{2}} \cos^2(\mu_n \cdot x) \cdot dx \neq 0 \quad (8.27)$$

Tak więc po wykonaniu zaznaczonego w (8.25) całkowania otrzymujemy:

$$\frac{t_0}{\mu_n} \cdot \sin \mu_n \cdot \frac{\delta}{2} = A_n \cdot \left(\frac{\delta}{4} + \frac{1}{2 \cdot \mu_n} \cdot \sin \mu_n \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \cos \mu_n \cdot \frac{\delta}{2} \right) \quad (8.28)$$

a stąd:

$$A_n = \frac{2 \cdot t_0 \cdot \sin \mu_n \cdot \frac{\delta}{2}}{\frac{\delta}{2} \cdot \mu_n + \sin \mu_n \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \cos \mu_n \cdot \frac{\delta}{2}} \quad (8.29)$$

i wyrażenie na rozkład temperatury w ścianie:

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n^2 a \tau} \cdot \frac{2 \cdot t_0 \cdot \sin \mu_n \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \cos \mu_n \cdot x}{\mu_n \cdot \frac{\delta}{2} + \sin \mu_n \cdot \frac{\delta}{2} \cdot \cos \mu_n \cdot \frac{\delta}{2}} \quad (8.30)$$

Szereg ten jest szybko zbieżny, tak że dla uzyskania dokładnego wyniku wystarczają 3 pierwsze wyrazy.

Wprowadzamy tu jeszcze:

$$\delta_n = \mu_n \cdot \frac{\delta}{2} \quad (8.31)$$

oraz liczbę Fouriera wg (5.34):

$$Fo = \frac{a\tau}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \quad (8.32)$$

i otrzymujemy ostatecznie (po przeniesieniu t_0 na lewą stronę):

$$\frac{t}{t_0} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta_n^2 (Fo)} \cdot \frac{2 \sin \delta_n \cdot \cos \frac{\delta_n \cdot x}{\frac{\delta}{2}}}{\delta_n + \sin \delta_n \cdot \cos \delta_n} \quad (8.33)$$

Przy tym z (8.20) i (8.31) jest

$$\delta_n \cdot \operatorname{tg} \delta_n = (Bi) \quad (8.34)$$

Ilość ciepła pobraną przy ogrzewaniu (lub oddaną przy studzeniu) płyty oblicza się z prawa Fouriera:

$$d\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=\frac{\delta}{2}} \cdot d\tau \quad (8.35)$$

Gradient temperatury wyznaczamy z (8.33):

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=\frac{\delta}{2}} = -\frac{2 \cdot t_0}{\frac{\delta}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta_n^2 (Fo)} \cdot \frac{\delta_n \cdot \sin^2 \delta_n}{\delta_n + \sin \delta_n \cdot \cos \delta_n} \quad (8.36)$$

Podstawiamy go do (8.35), całkujemy za okres czasu τ i otrzymujemy ilość ciepła pobraną (lub oddaną) przez jednostkę powierzchni:

$$\frac{Q}{A} = \frac{\lambda \cdot 2 \cdot t_0}{\frac{\delta}{2}} \cdot \int_0^{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\delta_n^2 \frac{a\tau}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2}} \cdot \frac{\delta_n \cdot \sin^2 \delta_n}{\delta_n + \sin \delta_n \cdot \cos \delta_n} \cdot d\tau \quad (8.37)$$

a po wykonaniu zaznaczonych działań:

$$\frac{Q}{A} = \frac{\lambda \cdot \delta \cdot t_0}{a} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \delta_n}{\delta_n^2 + \delta_n \cdot \sin \delta_n \cdot \cos \delta_n} \cdot \left[1 - e^{-\delta_n^2 (Fo)}\right] \quad (8.38)$$

Równania (8.33) i (8.38) można przedstawić bezwymiarowo przez wprowadzenie (8.34) i odniesienie współrzędnej x do charakterystycznego wymiaru liniowego l równego w przypadku płyty połowie jej grubości:

$$1 = \frac{\delta}{2} \quad (8.39)$$

Ta bezwymiarowa współrzędna x/l określa położenie punktu w objętości ciała.

Tak więc zamiast (8.33) będzie:

$$\frac{t}{t_o} = f(Bi, Fo, \frac{x}{\delta}) \quad (8.40)$$

a zamiast (8.38):

$$\frac{Q}{Q_o} = f(Bi, Fo) \quad (8.41)$$

przy tym:

$$\frac{Q_o}{A} = \frac{\lambda \delta (t_o - t_f)}{a} = c \rho \delta (t_o - t_f) \left[\frac{\text{kJ}}{\text{m}^2} \right] \quad (8.42)$$

Wyrażenie przed znakiem sumy w (8.38) stanowi $\frac{Q_o}{A}$ dla $t_f = 0^\circ\text{C}$ (jak to założono na początku).

Obydwie bezwymiarowe zależności (8.40) i (8.41) podawane są w literaturze w postaci wykresów takich jak na rys. 8.5.

Ciepło: $Q_o = c \cdot \rho \cdot (\delta \cdot A) \cdot (t_o - t_f) = c \cdot \rho \cdot V \cdot (t_o - t_f) = c \cdot m \cdot (t_o - t_f)$ [kJ] jest tą jego ilością, którą trzeba doprowadzić (lub odprowadzić) do (lub od) ciała, aby je ogrzać (lub oziębic) od t_o do t_f .

2. OBLICZENIA PRAKTYCZNE

W praktyce korzysta się z gotowych rozwiązań otrzymanych na drodze analitycznej (jak wyżej), ale przedstawionych bezwymiarowo w postaci wykresów dla nieskończone długich płyt i walców oraz dla kul.

Temperaturę bierze się zazwyczaj jako jej nadwyżkę ponad temperaturę otaczającego płynu: $(t - t_f)$.

Zamiast $\frac{t}{t_o}$ stosuje się więc:

$$\boxed{\frac{t - t_f}{t_o - t_f} = \frac{\vartheta}{\vartheta_o}} \quad (8.43)$$

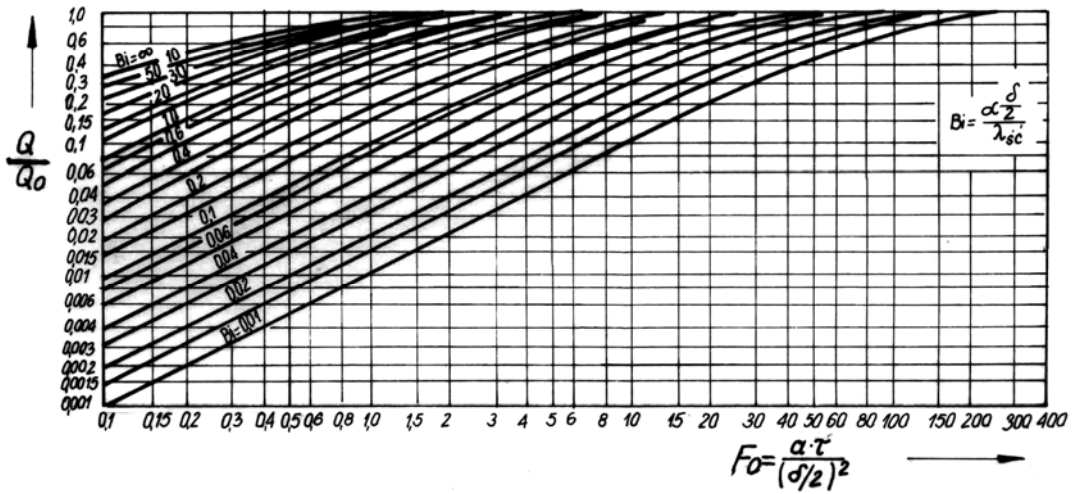
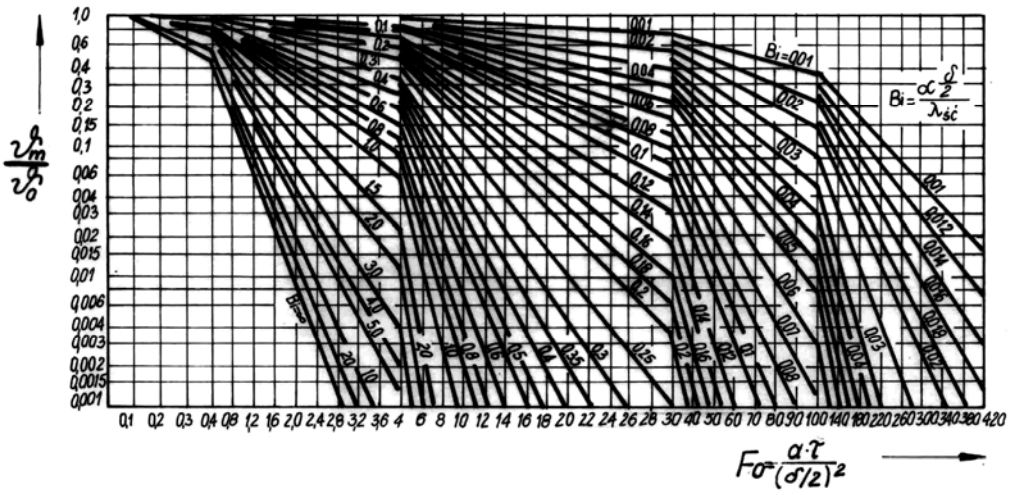
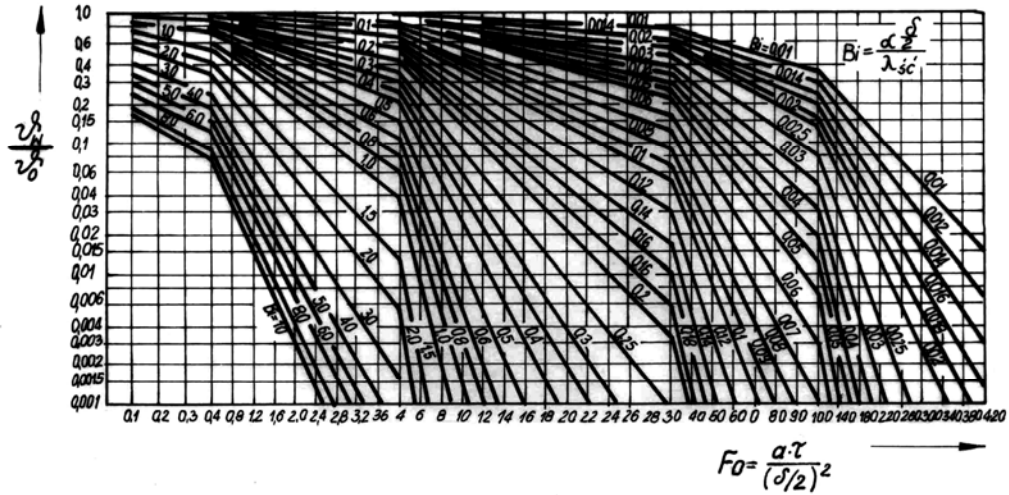
i wykres jest graficznym obrazem funkcji:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_o} = f(Bi, Fo, \frac{x}{l}) \quad (8.44)$$

Zasadniczo podaje się temperaturę na powierzchni ciała: $\vartheta_w(t_w)$, tj. dla $x/l = 0$ i w jego środku: $\vartheta_m(t_m)$ czyli dla $x/l = 1$, tak jak pokazano na rys. 8.5 i 8.6.

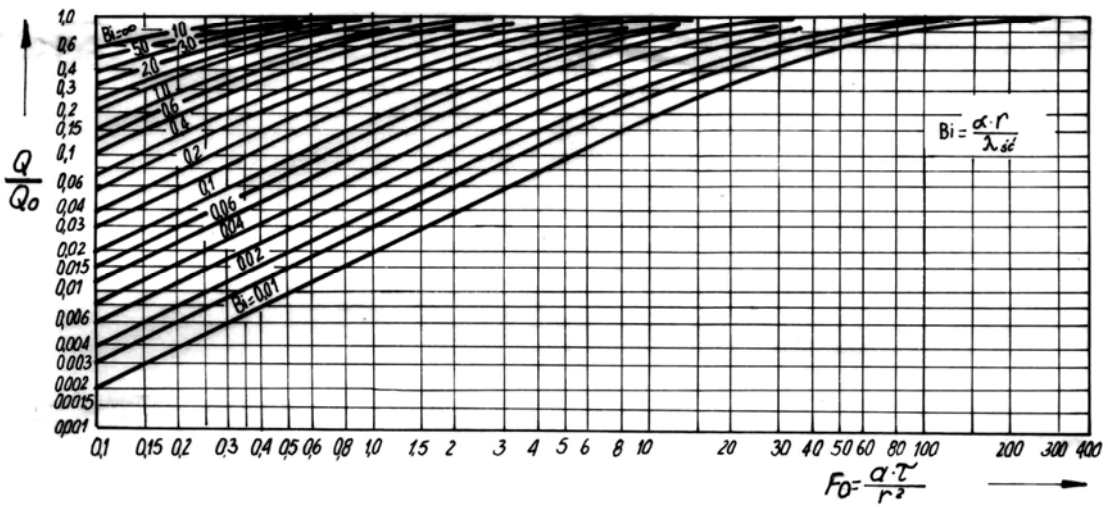
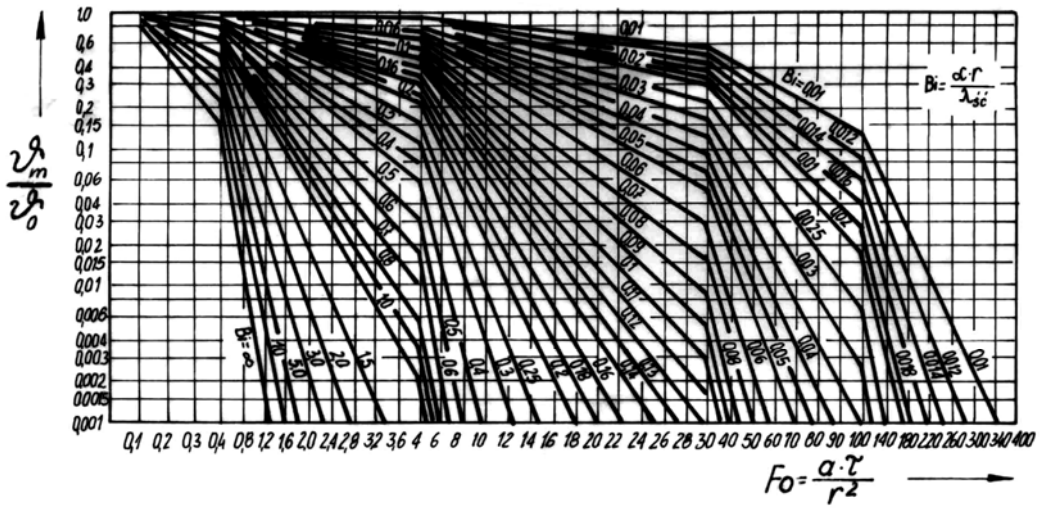
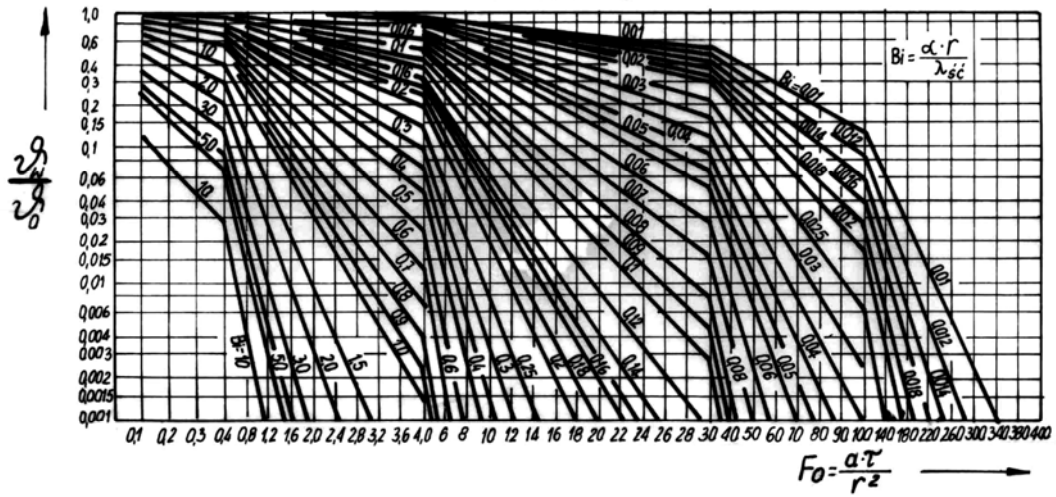
Ten sam wykres odnosi się do ogrzewania i chłodzenia ciała pod warunkiem, że w chwili początkowej w całej objętości ciała jest jednako- wa temperatura t_o (ϑ_o).

PŁYTA



Rys. 8.5 Wykresy pomocnicze do obliczania temperatur i ciepła dla nieograniczonej płyty.

WALEC



Rys. 8.6 Wykresy pomocnicze do obliczania temperatur i ciepła w nieograniczonym walcu

Ilość ciepła wyznacza się z wykresów funkcji:

$$\frac{Q}{Q_0} = f(Bi, Fo) \quad (8.45)$$

z tym, że Q_0 oblicza się dla walca ze wzoru:

$$Q_0 = c\rho\pi r_0^2 \cdot (t_0 - t_f) \left[\frac{\text{kJ}}{\text{m}} \right] \quad (8.46)$$

a dla kuli ze wzoru:

$$Q_0 = c\rho \frac{4}{3} \cdot \pi r_0^3 \cdot (t_0 - t_f) [\text{kJ}] \quad (8.47)$$

Dla ciał, których kształt powstaje z przecięcia płyty, walca i kul, otrzymuje się rozwiązanie **metodą A. B. Newmana**. W szczególności stosuje się ją dla płyt i walców o skończonych rozmiarach - jako że przedstawione wyżej zależności graficzne ważne są dla tworów nieskończenie rozciągniętych.

Na przykład celem obliczenia temperatury prostopadłościanu o wymiarach $a \times b \times c$ bierzemy wartości bezwymiarowych temperatur dla płyt o grubościach a , b i c i mnożymy je przez siebie:

$$\frac{\vartheta_i}{\vartheta_0} = \frac{t_i - t_f}{t_0 - t_f} = \left(\frac{t_i - t_f}{t_0 - t_f} \right)_a \cdot \left(\frac{t_i - t_f}{t_0 - t_f} \right)_b \cdot \left(\frac{t_i - t_f}{t_0 - t_f} \right)_c \quad (8.48)$$

Podobnie dla walca o długości L bierzemy temperatury dla walca o nieskończonej długości i dla płyty o grubości L i mnożymy przez siebie

$$\frac{\vartheta_i}{\vartheta_0} = \frac{t_i - t_f}{t_0 - t_f} = \left(\frac{t_i - t_f}{t_0 - t_f} \right)_{\text{walec}} \cdot \left(\frac{t_i - t_f}{t_0 - t_f} \right)_{\text{płyta } L} \quad (8.49)$$

Metoda Newmana jest ściśle biorąc słuszną dla $Bi \rightarrow \infty$, a uzyskane przy jej pomocy wyniki są tym dokładniejsze im większą wartość ma liczba Biota.

3. OKRESOWO ZMIENNA TEMPERATURA POWIERZCHNI

Okresowe zmiany temperatury powierzchni ciała wymuszane są przez okresowe zmiany temperatury płynu stykającego się z tą powierzchnią.

Zjawisko takie występuje w cylindrach tłokowych silników cieplnych i sprężarek, w wypełnieniu regeneratorów oraz w powierzchniowej warstwie ziemi (amplitudy dobowe i roczne).

Wychodzimy z równania przewodnictwa:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (8.50)$$

i warunku brzegowego:

$$\text{dla } x = 0 \text{ i } \tau > 0 \text{ jest } t_w = t_{ow} \cdot \cos \omega \tau \quad (8.51)$$

Wielkość t_{ow} jest amplitudą temperatury na powierzchni, natomiast:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau_0} \quad (8.52)$$

częstością kątową zmian temperatury (przez τ_0 oznaczono okres zmian temperatury).

Początek układu współrzędnych znajduje się w tym przypadku na powierzchni ciała, a oś x skierowana jest w głąb ciała, którego rozmiarów nie ograniczamy (jest to tzw. półprzestrzeń).

Rozwiązanie znajduje się tak jak w rozdziale 1. Wynik stanowi iloczyn funkcji czasowej i współrzędnościowej (8.8). Ponieważ temperatura jest okresowo zmienna w czasie, więc τ i x powinny być argumentami funkcji trygonometrycznych.

Stała po prawej stronie wzorów (8.12) i (8.13) powinna być urojona i równa $\pm i \cdot \mu^2$ (przy czym $i = \sqrt{-1}$).

Rozwiązanie może mieć postać:

$$t = c_1 \cdot e^{\pm i \mu^2 a \tau} \cdot f(x) \quad (8.53)$$

Pochodne:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \pm i \mu^2 a \cdot c_1 \cdot e^{\pm i \mu^2 a \tau} \cdot f(x) \quad (8.54)$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = c_1 \cdot e^{\pm i \mu^2 a \tau} \cdot f''(x) \quad (8.55)$$

podstawia się dorównania wyjściowego (8.50) i otrzymuje po redukcjach równanie:

$$f''(x) \mp i \mu^2 \cdot f(x) = 0$$

którego rozwiązanie ma postać:

$$f(x) = c_2 \cdot e^{\pm \sqrt{-i} \mu x} \quad (8.56)$$

Łatwo wykazać, że

$$\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad (8.57)$$

Podstawiamy to do (8.56) a (8.56) do (8.53) i otrzymujemy rozwiązanie równania Fouriera w postaci:

$$t = c \cdot e^{\pm i \mu^2 a \tau} \cdot e^{\pm (1-i) \sqrt{\frac{1}{2}} \mu x} \quad (8.58)$$

albo:

$$t = c \cdot e^{\pm \sqrt{\frac{1}{2}} \mu x \pm i(\mu^2 a \tau \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \mu x)} \quad (8.59)$$

Korzystając ze wzoru Eulera: ($e^{\pm i \varphi} = \cos \varphi \pm i \cdot \sin \varphi$) otrzymujemy z tego ostatniego następujące równanie:

$$t = c \cdot e^{\pm \sqrt{\frac{1}{2}} \mu x} \cdot \left[\cos (\mu^2 a \tau \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \mu x) \pm i \cdot \sin (\mu^2 a \tau \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \mu x) \right] \quad (8.60)$$

Założona postać warunku brzegowego (8.51) wyklucza funkcję sinus w tym wzorze, a wykładnik potęgowy może być tylko ujemny (temperatura nie może wzrastać nieograniczenie - ze wzrostem x), tak więc zamiast równania (8.60) mamy:

$$t = C \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot \mu x} \cdot \cos(\mu^2 a \tau - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot \mu x) \quad (8.61)$$

Dla ustalenia ostatecznej postaci wzoru na temperaturę wyznaczamy stałe: C i μ z warunku brzegowego (8.51):

$$\text{dla } x = 0 \quad t = C \cdot \cos \mu^2 a \tau = t_{ow} \cdot \cos \omega \tau \quad (8.62)$$

Stąd:

$$C = t_{ow}$$

$$\mu^2 a = \omega \quad \text{czyli} \quad \mu = \sqrt{\frac{\omega}{a}}$$

Ostatecznie więc wzór na zmienność temperatury wzdłuż osi x , w czasie τ przyjmuje postać:

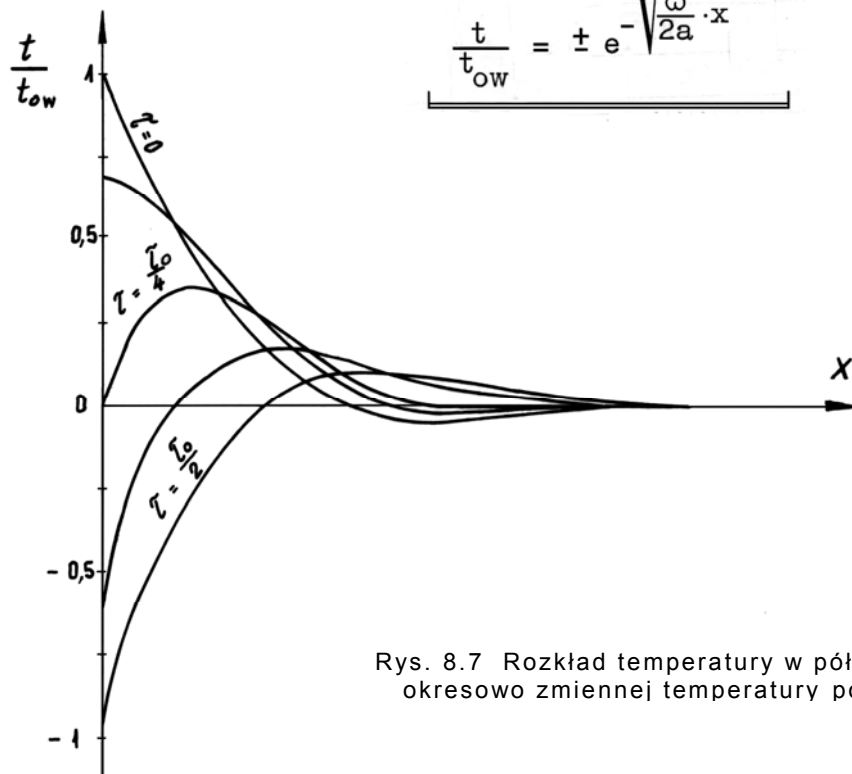
$$t = t_{ow} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x} \cdot \cos(\omega \tau - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x) \quad (8.63)$$

Pierwsze dwa wyrazy z prawej: $(t_{ow} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x})$ stanowią malejącą z odległością x amplitudę temperatury (dla $x = 0$ wynosi ona t_{ow}).

Graficzny obraz funkcji (8.63) we współrzędnych bezwymiarowych przedstawia za czas półokresu rys. 8.7.

Wszystkie krzywe przebiegu temperatury (w poszczególnych chwilach τ) mają wspólne obwiednie w równaniu:

$$\frac{t}{t_{ow}} = \pm e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x} \quad (8.64)$$



Rys. 8.7 Rozkład temperatury w półprzestrzeni dla okresowo zmiennej temperatury powierzchni

W przedmiocie rozchodzą się więc poczynając od powierzchni fale temperatury o następujących właściwościach:

Okres oscylacji temperatury τ_0 jest taki sam na całej głębokości ciała [$\omega \neq f(x)$], lecz w miarę wzrostu x następuje przesunięcie fazy o wielkość: $\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x$.

Amplituda oscylacji: $t_{ow} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x}$ maleje w głąb ciała i to tym szybciej, im większa jest częstość zmian temperatury ω i im mniejsza jest dyfuzyjność cieplna a . W pewnej odległości od powierzchni ciała oscylacje temperatury zanikają, praktycznie biorąc, zupełnie (np. w ziemi amplituda dobowa na głębokości 1m stanowi już tylko 10% amplitudy na powierzchni).

Ilość ciepła zakumulowaną w ciągu półokresu oblicza się na podstawie znanego rozkładu temperatury. Najpierw obliczamy gęstość strumienia ciepłego na powierzchni ($x=0$) i w tym celu obliczamy pochodną:

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -t_{ow} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x} \cdot \left[\cos(\omega\tau - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x) - \sin(\omega\tau - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x) \right] \quad (8.65)$$

wobec czego z prawa Fouriera jest:

$$\dot{q} = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_{x=0} = +\lambda t_{ow} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot (\cos \omega\tau - \sin \omega\tau) \quad (8.66)$$

Korzystamy jeszcze z tożsamości:

$$\cos \omega\tau - \sin \omega\tau = \sqrt{2} \cdot \cos \left(\omega\tau + \frac{\pi}{4} \right)$$

i otrzymujemy:

$$\dot{q} = \lambda t_{ow} \cdot \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot \cos \left(\omega\tau + \frac{\pi}{4} \right) \quad (8.67)$$

Ciepło jest doprowadzane w czasie półokresu grzania (gdy $\dot{q} > 0$), a odprowadzane w następnym półokresie: chłodzenia (gdy $\dot{q} < 0$).

Wyrażenie (8.67) jest dodatnie wtedy, gdy dodatni jest cosinus, tzn. w zakresie kątów

$$-\frac{\pi}{2} < \omega\tau + \frac{\pi}{4} < +\frac{\pi}{2}$$

czyli dla:

$$-\frac{3\pi}{4} < \omega\tau < \frac{\pi}{4}$$

Doprowadzone i zakumulowane w ścianie ciepło odniesione do powierzchni wynosi więc:

$$\frac{Q}{A} = \int_{-\frac{3}{4}\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{4}\frac{\pi}{\omega}} \dot{q} \cdot d\tau = \frac{2\lambda t_{ow}}{\sqrt{\omega \cdot a}} \quad (8.68)$$

To samo ciepło jest potem odprowadzane w półokresie chłodzenia.

Należy pamiętać, że uzyskane rezultaty dotyczą półprzestrzeni i przy obliczaniu przedmiotów o ograniczonych rozmiarach należy bacznie na dopuszczalność tego założenia.

4. METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

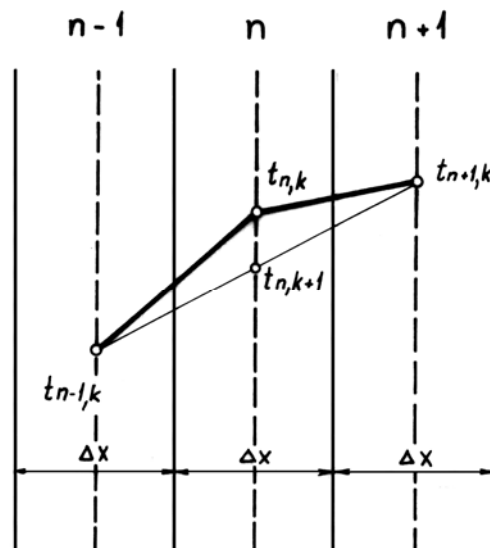
W przypadkach nietypowych można zastosować którąś z metod przybliżonych rozwiązania równania Fouriera.

Najczęściej stosowana do zagadnień jednowymiarowych jest metoda L. Bindera i E. Schmidta. Polega ona na zastąpieniu różniczek przez różnice skończone, tak że zamiast równania różniczkowego

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (8.69)$$

rozwiązuje się równanie różnicowe:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = a \frac{\Delta^2 t}{(\Delta x)^2} \quad (8.70)$$



Rys. 8.8. Schemat do metody graficznej

Rozpatrywany przedmiot dzieli się na równe części, np. płytę dzielimy (na jej grubości) płaszczyznami jak na rys. 8.8. Otrzymane elementy numerujemy jako: $n-1$, n , $n+1$, itd. Skończone przedziały czasowe otrzymują numery: $k-1$, k , $k+1$ itd. Temperatura elementu n w ciągu czasu $\Delta \tau_k$ wynosi $t_{n,k}$. Przebieg temperatury (w pewnej chwili τ) jest krzywą łamaną (rys. 8.8).

W elemencie o szerokości Δx krzywa temperatury ma dwa nachylenia:

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_+ = \frac{t_{n+1,k} - t_{n,k}}{\Delta x} \quad (8.71)$$

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)_- = \frac{t_{n,k} - t_{n-1,k}}{\Delta x} \quad (8.72)$$

Druga pochodna wynosi:

$$\frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2} = \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)_+ - \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)_- \right] = \frac{1}{\Delta x^2} [t_{n+1,k} + t_{n-1,k} - 2 \cdot t_{n,k}] \quad \uparrow(8.73)$$

Pochodną temperatury względem czasu wyraża wzór:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{t_{n,k+1} - t_{n,k}}{\Delta \tau} \quad (8.74)$$

Podstawiamy (8.73) i (8.74) do (8.70) i otrzymujemy:

$$\frac{t_{n,k+1} - t_{n,k}}{\Delta \tau} = a \frac{t_{n+1,k} + t_{n-1,k} - 2 \cdot t_{n,k}}{(\Delta x)^2} \quad (8.75)$$

albo:

$$t_{n,k+1} = 2a \frac{\Delta \tau}{(\Delta x)^2} \cdot \frac{t_{n+1,k} + t_{n-1,k}}{2} - \left(2a \frac{\Delta \tau}{(\Delta x)^2} - 1 \right) \cdot t_{n,k} \quad \uparrow(8.76)$$

Temperatura po lewej odnosi się do następnego przedziału czasu (k+1), prawa strona stanowi rozkład temperatury w danym przedziale czasu (k).

Jeżeli tak dobierze się odstęp Δx i czas $\Delta \tau$ aby:

$$2a \frac{\Delta \tau}{(\Delta x)^2} = 1 \quad (8.77)$$

to:

$$t_{n,k+1} = \frac{t_{n+1,k} + t_{n-1,k}}{2} \quad (8.78)$$

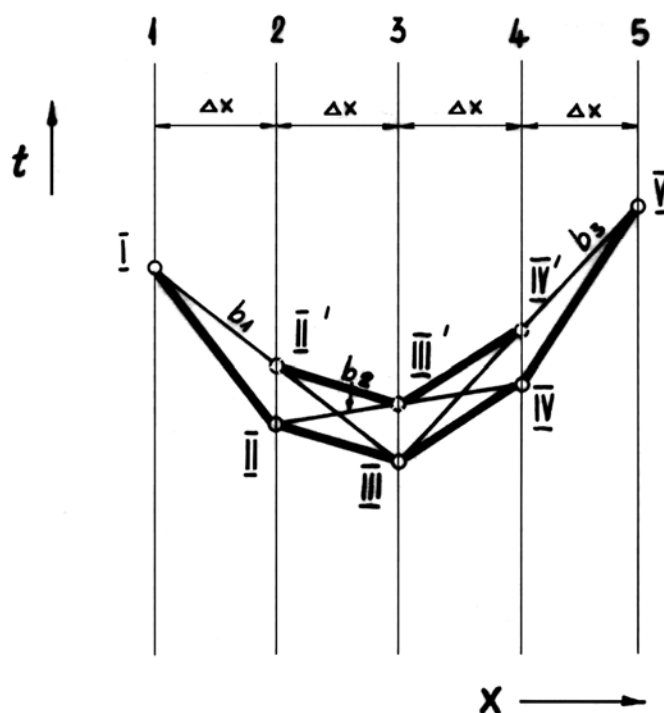
To znaczy, że temperatura w przedziale \underline{n} w chwili następnej (k+1) jest średnią arytmetyczną temperatur przedziałów sąsiednich w danej chwili.

Tak więc obliczenia numeryczne stają się bardzo łatwe. Najlepiej przeprowadzać je na komputerze. Istnieją gotowe programy do obliczania zagadnień niestacjonarnych opublikowane w literaturze^{x)}. Można je stosunkowo łatwo zaadaptować do indywidualnych warunków rozwiązywanego zagadnienia - same obliczenia przeprowadza się potem bardzo szybko.

Równie łatwo otrzymuje się średnią (8.78) na drodze graficznej. Wyjaśnia to rys. 8.9. Wychodzi się z początkowego rozkładu temperatury przedstawionego linią łamaną I - II - III - IV - V. Dla wyznaczenia rozkładu temperatury w chwili następnej (odległej o $\Delta \tau = (\Delta x)^2 / 2a$) prowadzi się proste: b_1, b_2, b_3 , itd. Prosta b_1 przechodzi przez punkty I i III i przecina linię 2 w punkcie II'. Temperatura w punkcie II' jest, jak łatwo sprawdzić, średnią arytmetyczną temperatur I i III i stanowi zgodnie z (8.78) temperaturę w następnej chwili. W podobny sposób znajduje się punkty III' i IV', a więc cały przebieg temperatury ciała w chwili następnej.

^{x)} np: St. Wiśniewski: "Obciążenia cieplne silników turbinowych" WK i Ł, 1974.

D. Kern, A. Kraus: "Extended Surface Heat Transfer" np. wyd. rosyjskie „Energija” Moskwa 1977.



Rys.8.9 Sposób wyznaczania izoterm w metodzie graficznej

Oddziaływanie (w tym przypadku chłodzące) ośrodka zewnętrznego na ściankę określone jest prawem Newtona dla płynu:

$$d\dot{Q} = \alpha (t_f - t_w) dA \quad (8.79)$$

oraz prawem Fouriera dla ścianki:

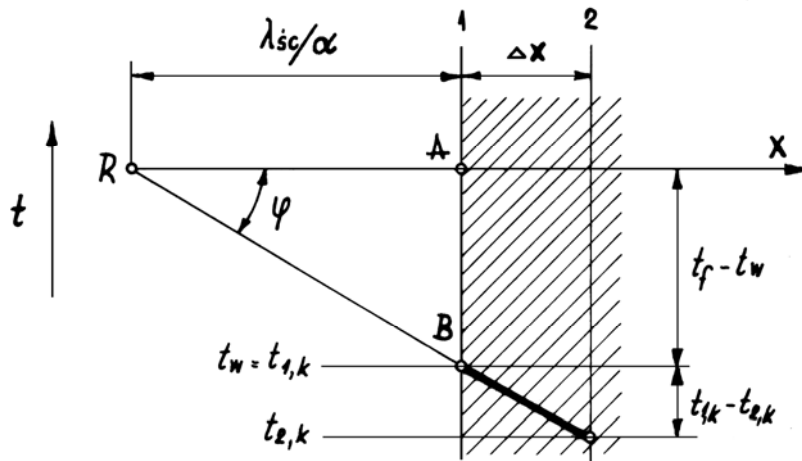
$$d\dot{Q} = -\lambda_{\text{śc}} \frac{\partial t}{\partial x} dA \quad (8.80)$$

Z porównania obu równań mamy współczynnik kierunkowy stycznej do profilu temperatury na powierzchni ciała:

$$-\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda_{\text{śc}}} (t_f - t_w) = \frac{t_f - t_w}{\frac{\lambda_{\text{śc}}}{\alpha}} \quad (8.81)$$

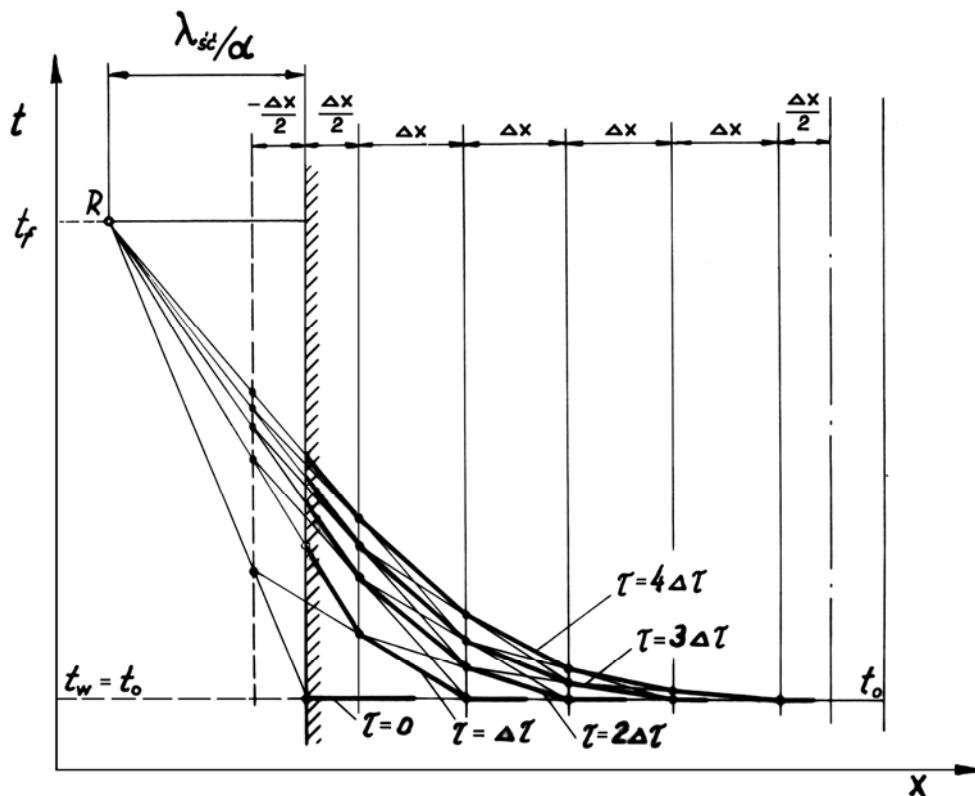
Zależność ta jest spełniona przez konstrukcję geometryczną na rys.8.10. Odcinek \overline{RA} jest tu równy $\frac{\lambda_{\text{śc}}}{\alpha}$.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{RA}} = \frac{t_f - t_w}{\frac{\lambda_{\text{śc}}}{\alpha}} = -\frac{\partial t}{\partial x} \quad (8.82)$$



Rys.8.10 Konstrukcja graficzna warunku brzegowego

Jeżeli α jest zmienne, to wyraża się to w zmiennej długości odcinka RA (zmienności λ_{sc} nie można niestety uwzględnić).



Rys.8.11 Pełna konstrukcja izoterm dla płyty nieograniczonej

W praktyce, poszerza się przedmiot fikcyjnie o $\frac{\Delta x}{2}$, co pozwala wyznaczyć temperaturę na powierzchni przedmiotu jako temperaturę w środku pierwszego przedziału (rys. 8.11).

Jeżeli warunek brzegowy podany jest inaczej, to mamy następujące sytuacje:

- jeżeli dane są temperatury powierzchni, to tym samym dane są od razu położenia punktów I i V na rys. 8.9;
- jeżeli dane są strumienie cieplne na powierzchniach, to określone są nachylenia skrajnych odcinków profilu temperatury; w szczególności gdy strumienie są stałe, odcinki te są równoległe do odcinków początkowych.

Przykłady

1. Obliczyć temperaturę w osi i na powierzchni walca ze stali stopowej o średnicy 0,3 m i długości 0,6 m w godzinę po umieszczeniu go z temperaturą 20°C w piecu o temperaturze 1020°C. Współczynnik przejmowania ciepła na powierzchni walca wynosi 230 W/m²·K, przewodność cieplna stali stopowej: 35 W/m·K, ciepło właściwe: 0,7 kJ/kg·K, a gęstość: 7800 kg/m³.

R o z w i ą z a n i e :

Zakładamy na razie nieskończenie wielką długość walca.

Dyfuzyjność cieplna:

$$a = \frac{\lambda}{c\rho} = \frac{35}{0,7 \cdot 10^3 \cdot 7800} = 6,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

Liczba Biota dla promienia jako wymiaru charakterystycznego ($\underline{l} = r$):

$$Bi = \frac{\alpha r}{\lambda_{\text{st}}} = \frac{230 \cdot 0,150}{35} = 0,99$$

Liczba Fouriera:

$$Fo = \frac{a\tau}{r^2} = \frac{6,4 \cdot 10^{-6} \cdot 3600}{0,15^2} = 1,01$$

Z wykresów na rys.8.6 odczytujemy:

$$\frac{\mathcal{S}_w}{\mathcal{S}_o} = 0,16 \quad \frac{\mathcal{S}_m}{\mathcal{S}_o} = 0,24$$

Z danych zadania jest:

$$\mathcal{S}_o = t_f - t_o = 1020 - 20 = 1000 \text{ K}$$

Zatem:

$$\mathcal{S}_w = t_f - t_w = 0,16 \cdot \mathcal{S}_o = 0,16 \cdot 1000 = 160 \text{ K}$$

$$t_w = t_f - \mathcal{S}_w = 1020 - 160 = 860^\circ\text{C}$$

$$\mathcal{S}_m = t_f - t_m = 0,24 \cdot \mathcal{S}_o = 0,24 \cdot 1000 = 240 \text{ K}$$

$$t_m = t_f - \mathcal{S}_m = 1020 - 240 = 780^\circ\text{C}$$

Są to temperatury dla walca o nieskończonej długości.

Korzystając z metody Newmana uwzględniamy ograniczoną do 0,6 m długość walca, przez płytę nieskończoną o grubości $\delta = 0,6 \text{ m}$, i wymiarze charakterystycznym: $\underline{l} = \delta/2 = 0,3 \text{ m}$. Właściwości fizyczne tej zastępczej płyty są oczywiście takie same jak rozważanego walca.

Obliczamy liczby Biota i Fouriera:

$$Bi = \frac{\alpha r}{\lambda_{\text{st}}} = \frac{230 \cdot 0,150}{35} = 0,99$$

$$Fo = \frac{a\tau}{r^2} = \frac{6,4 \cdot 10^{-6} \cdot 3600}{0,15^2} = 1,01$$

Dla tych liczb odczytujemy z wykresów na rys. 8.5 (dla płyty):

$$\frac{\vartheta_w}{\vartheta_o} = 0,43 \quad \text{ i } \quad \frac{\vartheta_m}{\vartheta_o} = 0,88$$

Mnożąc odpowiednie stosunki dla walca i płyty otrzymuje się temperatury w odpowiednich miejscach walcowego bloku stali:

na obwodzie powierzchni czołowej:

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_o} = \left(\frac{\vartheta_w}{\vartheta_o} \right)_{\text{walec}} \cdot \left(\frac{\vartheta_w}{\vartheta_o} \right)_{\text{płyta}} = 0,16 \cdot 0,43 = 0,069$$

$$\vartheta_1 = \vartheta_o \cdot 0,069 = 69 \text{ K}$$

w środku powierzchni czołowej:

$$\frac{\vartheta_2}{\vartheta_o} = \left(\frac{\vartheta_m}{\vartheta_o} \right)_{\text{walec}} \cdot \left(\frac{\vartheta_w}{\vartheta_o} \right)_{\text{płyta}} = 0,24 \cdot 0,43 = 0,103$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_o \cdot 0,103 = 103 \text{ K}$$

pośrodku powierzchni bocznej:

$$\frac{\vartheta_3}{\vartheta_o} = \left(\frac{\vartheta_w}{\vartheta_o} \right)_{\text{walec}} \cdot \left(\frac{\vartheta_m}{\vartheta_o} \right)_{\text{płyta}} = 0,16 \cdot 0,88 = 0,140$$

$$\vartheta_3 = \vartheta_o \cdot 0,140 = 1000 \cdot 0,140 = 140 \text{ K}$$

pośrodku osi walca:

$$\frac{\vartheta_4}{\vartheta_o} = \left(\frac{\vartheta_m}{\vartheta_o} \right)_{\text{walec}} \cdot \left(\frac{\vartheta_m}{\vartheta_o} \right)_{\text{płyta}} = 0,24 \cdot 0,88 = 0,211$$

$$\vartheta_4 = \vartheta_o \cdot 0,211 = 211 \text{ K}$$

Poszczególne temperatury wynoszą (wobec $\vartheta_1 = t_r - t_i$ czyli $t_i = t_r - \vartheta_1$):

$$t_1 = 1020 - 69 = 952^\circ\text{C} \quad (\text{wg walca nieskończonego: } 860^\circ\text{C})$$

$$t_2 = 1020 - 103 = 917^\circ\text{C} \quad (\quad " \quad " \quad " \quad 780^\circ\text{C})$$

$$t_3 = 1020 - 140 = 880^\circ\text{C} \quad (\quad " \quad " \quad " \quad 860^\circ\text{C})$$

$$t_4 = 1020 - 211 = 809^\circ\text{C} \quad (\quad " \quad " \quad " \quad 780^\circ\text{C})$$

Jak widać, walec krótki osiąga wyższe temperatury od liczonego jako nieskończenie długi, przede wszystkim na powierzchniach czołowych (t_1 i t_2).

2. Obliczyć głębokość przenikania fal cieplnych w stalowej ścianie cylindra silnika spalinowego o prędkości obrotowej 1600 obr/min. Przyjmuje się, że fale cieplne zanikają jeżeli ich amplituda osiąga wartość 1% amplitudy na powierzchni.

Rozwiązanie:

Dla stali: $a = 11 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$.

Temperatura w ścianie w ujęciu bezwymiarowym:

$$\frac{t}{t_{ow}} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x} \cdot \cos \left(\omega \tau - \sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x \right)$$

Wielkość bezwymiarowej amplitudy:

$$e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x} = 0,01$$

Stąd po przekształceniach i zlogarytmowaniu:

$$\ln e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a}} \cdot x} = \ln 100$$

Zatem:

$$x = \frac{\ln 100}{\sqrt{\frac{\omega}{2a}}} = \sqrt{\frac{2a}{\omega}} \cdot 2,3 \cdot \lg 100$$

Częstość kątowna wynosi:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \quad \left[\frac{1}{s} \right]$$

Po podstawieniu mamy głębokość, na której nastąpi stłumienie do poziomu 1%:

$$x = \sqrt{\frac{60 \cdot 11 \cdot 10^{-6}}{\pi \cdot 1600}} \cdot 2,3 \cdot 2 = 1,52 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cong 1,5 \text{ mm}$$

Otrzymany wynik potwierdza słuszność założenia o półprzestrzeni - ścianka cylindra w silniku jest zazwyczaj znacznie grubsza.

Ćwiczenia

1. Płaska płyta ze stali chromowej o grubości 120 mm i temperaturze w całej objętości 0°C zostaje nagle wprowadzona do pieca o temperaturze 800°C. Obustronne grzanie odbywa się przy współczynniku przejmowania ciepła 150 W/m²·K. Po jakich czasach osiągnięte zostaną w środku płyty temperatury 200 i 600°C? Jakie będą temperatury na powierzchni i doprowadzone ilości ciepła na każdy 1 kg materiału?

Gęstość stali wynosi 7700 kg/m³, ciepło właściwe 0,5 kJ/kg·K, a średnia przewodność cieplna 23 W/m·K.

Odpowiedź: dla 200°C:	dla 600°C:
$\tau = 603 \text{ s}$	$\tau = 2712 \text{ s}$
$t_w = 296^\circ\text{C}$	$t_w = 640^\circ\text{C}$
$Q/m = 116 \text{ kJ/kg}$	$Q/m = 312 \text{ kJ/kg}$

2. Obliczyć czas nagrzewania długiego wału ze stali węglowej w piecu o temperaturze 890°C. Średnica wału 100 mm, jego temperatura początkowa 20°C. Nagrzewanie jest zakończone, gdy temperatura na powierzchni osiągnie 870°C. Współczynnik przejmowania ciepła wynosi 140 W/m²·K, średnia dyfuzyjność cieplna 8,8·10⁻⁶ m²/s.

Obliczyć również temperaturę w środku walca.

Odpowiedź: $\tau = 45,2 \text{ min}$
 $t_m = 867,4^\circ\text{C}$

3. Na jakiej głębokości należy ułożyć rurociąg wodny w suchym gruncie, aby nie był narażony na zamarzanie wskutek rocznych wahań temperatury powierzchni gruntu w granicach -5 do +17°C, a wahania te można uważać za harmoniczne? Dla suchego gruntu dyfuzyjność cieplna wynosi 0,26·10⁻⁶ m²/s.

Odpowiedź: $x_0 = 0,97 \text{ m}$

5. REGENERACYJNE WYMIENNIKI CIEPŁA

O ile rekuperatory stosowane są we wszystkich dziedzinach techniki, to regeneratory mają ograniczony zakres zastosowań:

- jako spalinowe podgrzewacze powietrza w metalurgii i energetyce,
- do przenoszenia ciepła w technice niskotemperaturowego rozdzielania gazów (głównie powietrza na tlen i azot),
- w technologii chemicznej.

Odnaczają się zwartością budowy. W porównaniu z rekuperatorami mieszczą bowiem znacznie większe powierzchnie grzejne w takiej samej objętości. Dlatego służą do przenoszenia ciepła między dwoma gazami (ze względu na niskie współczynniki przejmowania ciepła), zwłaszcza w temperaturach wysokich i bardzo niskich.

Proces w regeneratorze ma charakter cyklicznie nieustalony. Do ciągłego ruchu konieczna jest zawsze para regeneratorów.

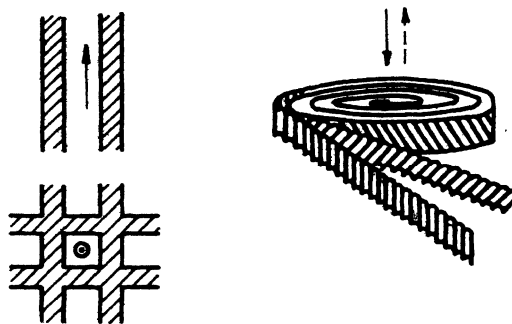
Gdy przez jeden przepływa gaz gorący ① oddając ciepło do wypełnienia, przez drugi przepływa równocześnie gaz chłodniejszy ② pobierający w ciepło od drugiego wypełnienia. Przenoszenie ciepła odbywa się więc za pośrednictwem wypełnienia, które akumuluje na pewien czas energię cieplną, zmieniając odpowiednio swoją temperaturę.

Wadą regeneratorów jest m.in. to, że podczas przełączania występuje strata gazu o wyższym ciśnieniu przez co, jeżeli drugi gaz jest innego rodzaju, następuje zanieczyszczanie tego gazu.

5.1. Regeneratory z wypełnieniem nieruchomym

Wypełnienie nieruchome jest w procesach wysokotemperaturowych ceramiczne, na przykład w postaci kratownicy przestrzennej z cegieł lub kształtek ogniotrwałych.

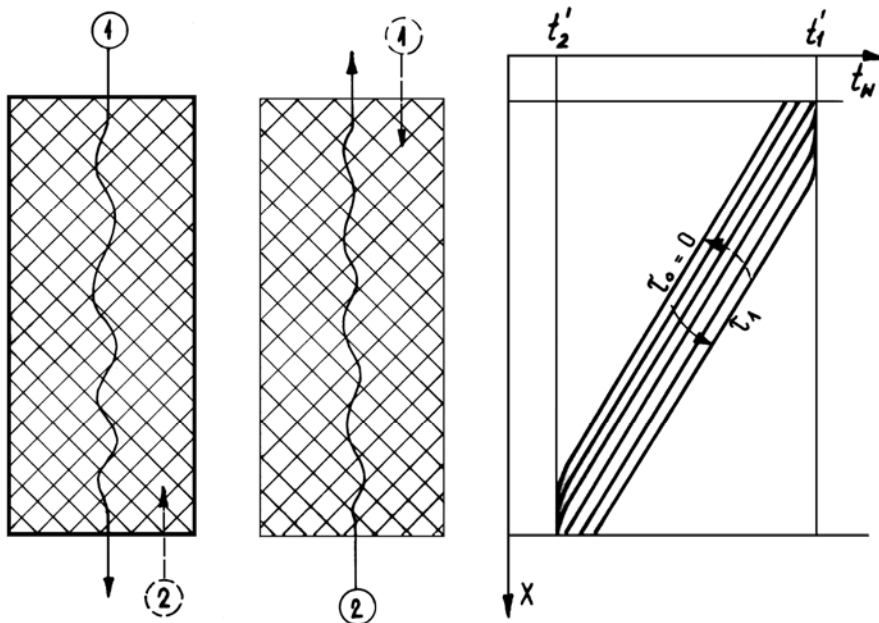
Do niskotemperaturowego rozdzielania gazów stosuje się albo wkładki ze zwiniętych spiralnie i karbowanych (by utworzyć kanały dla przepływu gazu) taśm aluminiowych albo drobne kamyki kwarcytowe lub bazaltowe.



Rys.8.12. Rodzaje wypełnień regeneracyjnych

Wyznaczenie rozkładu temperatury wypełnienia jest dość trudne, ale możliwe również na drodze analitycznej*). Temperatura jest tu zmienna nie tylko wzdłuż wypełnienia, ale i w czasie. Rysunek 8.13 przedstawia rozkład temperatury wypełnienia w czasie jednego półokresu (w tym przypadku nagrzewania przepływającego gazu) dla równych pojemności cieplnych obu gazów.

*) J. Madejski: Teoria wymiany ciepła. 1. PWN 1963, 2. Wyd. Polit. Szczecińskiej 1998
K. Brodowicz: Teoria wymienników ciepła i masy. PWN 1982.

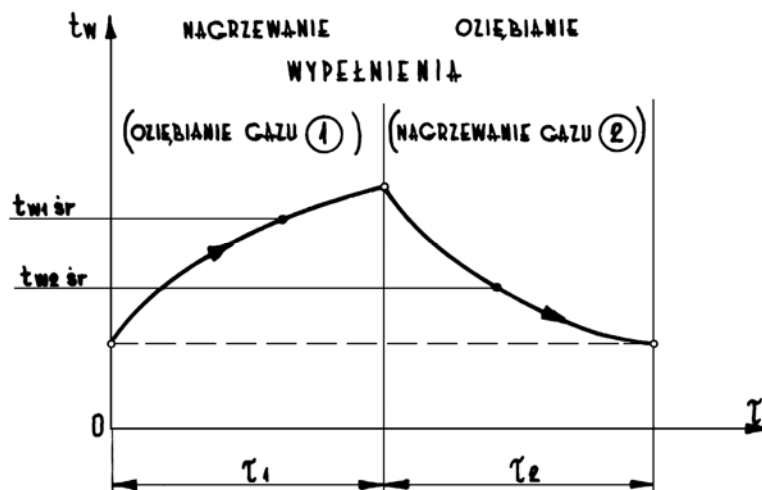


Rys.8.13 Wykres przebiegu temperatur w regeneratorze.

Jak widać, rozkład temperatury jest (poza krańcami) liniowy. Zachodzi to jednak tylko, gdy obydwa gazy mają takie same, albo zbliżone: pojemności cieplne: $\dot{m}_1 c_{p1} \approx \dot{m}_2 c_{p2}$, współczynniki przejmowania ciepła $\alpha_1 \approx \alpha_2$ oraz okresy grzania i chłodzenia: $\tau_1 \approx \tau_2$.

W miarę upływu czasu temperatura wypełnienia na wlocie początkowo szybko wzrasta i zrównuje się z temperaturą gazu, a potem strefa zrównania temperatur przesuwa się w głąb wypełnienia.

Istniejąca początkowo u wylotu strefa stałej temperatury stopniowo zanika i temperatura na końcu wypełnienia rośnie, tak jak w całym regeneratorze.

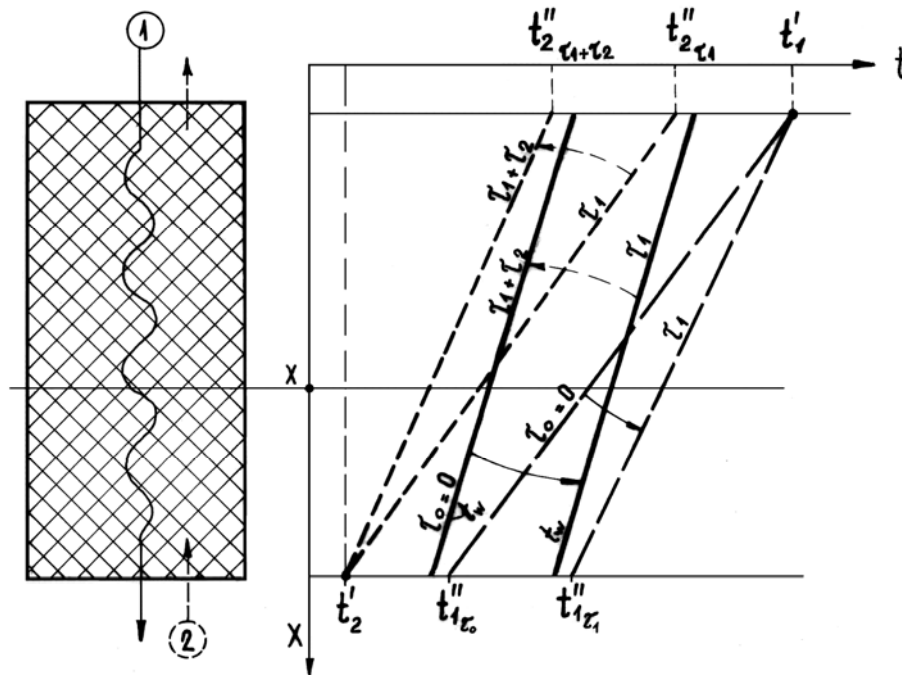


Rys.8.14. Wykres zmian temperatur w czasie dla pewnego miejsca w regeneratorze

Powyższy rys. 8.14 pokazuje przebieg temperatury wypełnienia w czasie jednego pełnego okresu, dla pewnego przekroju x regeneratora.

Średnie temperatury obu półokresów: t_{w1} i t_{w2} nie pokrywają się. Różnica tych temperatur określa tzw. histerezę wypełnienia.

Uproszczony przebieg temperatur: obydwu gazów i wypełnienia w tzw. regeneratorze idealnym podaje poniższy rys. 8.15.



Rys. 8.15 Przebieg temperatur w regeneratorze idealnym.

Temperatura gazu gorącego u wylotu w okresie od $\tau = 0$ do $\tau = \tau_1$ stopniowo wzrasta "podnosząc" temperaturę wypełnienia. Po przełączeniu zaworów, z przeciwnej strony wchodzi gaz chłodny, którego temperatura u wylotu w następnym półokresie stopniowo spada „idąc” za temperaturą wypełnienia. Tak więc temperatury wylotowe gazów z regeneratora o wypełnieniu nieruchomym są zmienne w czasie.

Obliczenie wydajności i wielkości regeneratora przeprowadza się na, uśrednionych za okres półcyklu, temperaturach gazów i wypełnienia. W ten sposób sprowadza się akumulacyjne przenoszenie ciepła do przenikania przez przegrodę (rys. 8.16).

Stosując średnie temperatury można obliczyć ciepło przeniesione w ciągu jednego pełnego cyklu ($\tau_1 + \tau_2$) jako:

$$Q_c = k_c \cdot A \cdot (t_1 - t_2)_{\text{sr}} \left[\frac{\text{J}}{\text{cykl}} \right] \quad (8.82)$$

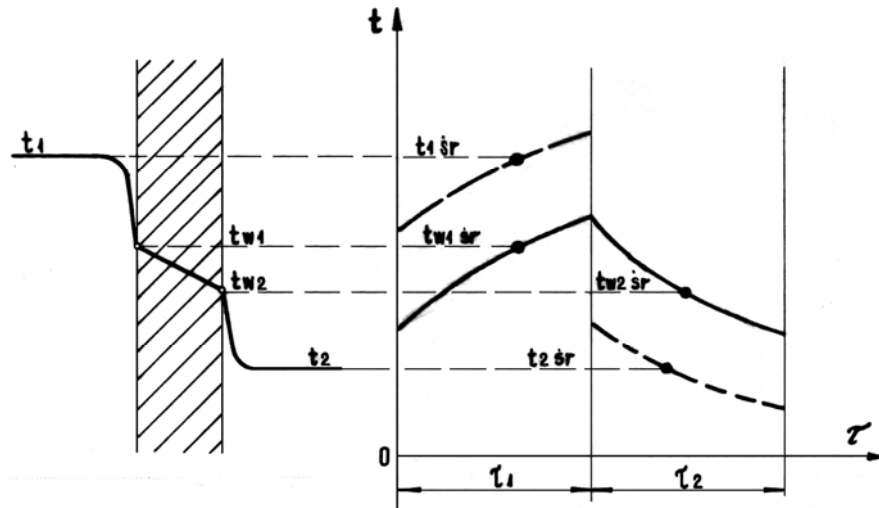
a więc przenoszony strumień cieplny wyraża się wzorem:

$$\dot{Q} = \frac{Q_c}{\tau_c} = \frac{k_c A}{\tau_1 + \tau_2} \cdot (t_1 - t_2)_{\text{sr}} \quad [\text{W}] \quad (8.83)$$

Zastępczy współczynnik przenikania ciepła można obliczyć jako:

$$k_c = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 \tau_1} + \frac{1}{\alpha_2 \tau_2}} \cdot \varepsilon_k \quad (8.84)$$

gdzie: α_1 i α_2 są współczynnikami przejmowania ciepła między gazem cieplejszym wzgl. chłodniejszym a powierzchnią wypełnienia



Rys.8.16 Schemat uśredniania temperatur.

Czasy między przełączeniami są na ogół równe: $\tau_1 = \tau_2 = \tau$, tak że czas jednego cyklu: $\tau_c = 2\tau$ i wynosi od kilku minut do kilku godzin.

Przykładowo:

w regeneratorach hutniczych: $\tau = 10 \dots 60$ min.
 w regeneratorach instalacji
 rozdzielania powietrza: $\tau = 3 \dots 15$ min.

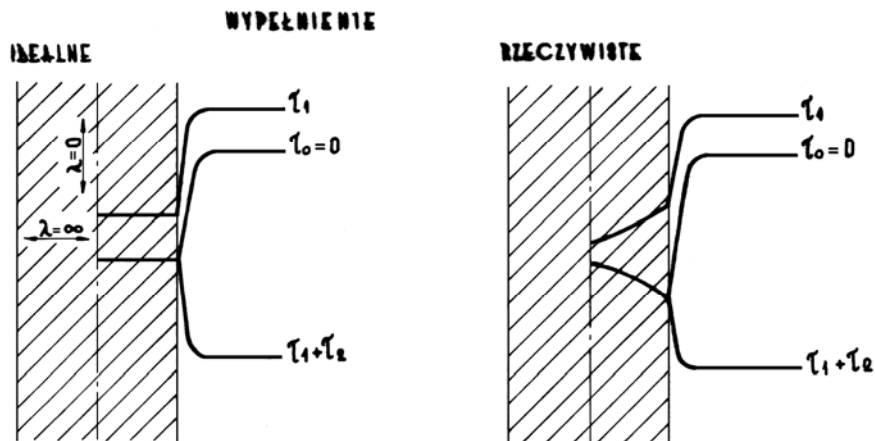
Wielkość: $\varepsilon_k < 1$ jest poprawką na nieidealność wypełnienia. Jest ona określona przez średnie temperatury jako:

$$\varepsilon_k = 1 - \frac{t_{w1} - t_{w2}}{t_1 - t_2} \quad (8.85)$$

Wypełnienie idealne wykazuje nieskończenie wielką przewodność cieplną w kierunku prostopadłym, a zerową w kierunku równoległym do kierunku przepływu gazu. W każdym przekroju poprzecznym wypełnienia idealnego ustala się więc natychmiast jednakowa temperatura, bez jakichkolwiek spadków w tym kierunku.

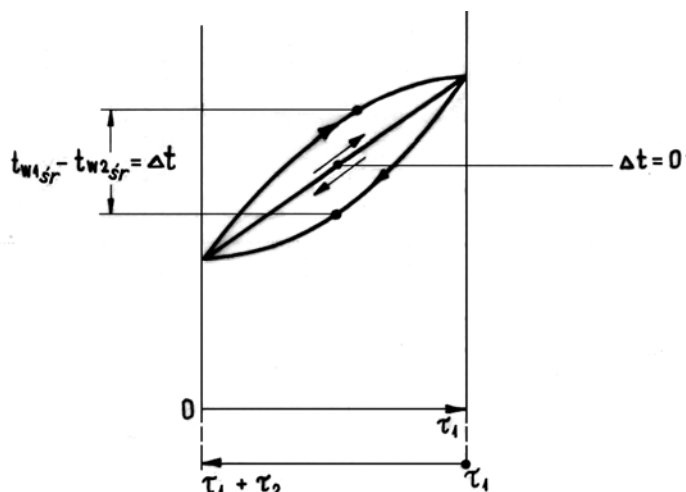
Na rys. 8.17 pokazane są rozkłady temperatury dla wypełnienia idealnego i dla wypełnienia rzeczywistego w postaci ścianki płaskiej (cegły). W tym ostatnim przypadku występują spadki temperatury, dzięki którym ciepło jest przewodzone do wnętrza ścianki.

W rezultacie wypełnienie idealne nie wykazuje histerezy i $t_{w1} = t_{w2}$, a więc $\varepsilon_k = 1$. Dla regeneratorów wysokotemperaturowych jest: $\varepsilon_k \approx 0,8$.



Rys.8.17 Rozkład temperatury w wypełnieniu idealnym i w rzeczywistym.

Pokazuje to poniższy rys.8.18, na którym „złożono” obydwie półkresy.



Rys. 8.18 Cykliczny przebieg temperatur w wypełnieniach: idealnym i rzeczywistym

Zastępczy współczynnik przenikania ciepła oblicza się często inaczej, mianowicie jako:

$$\frac{1}{k_c} = \frac{1}{\alpha_1 \tau_1} + \frac{1}{\alpha_2 \tau_2} + \frac{1}{\varepsilon} \quad (8.86)$$

przy czym ε jest tu nową postacią poprawki na nieidealność wypełnienia.

Obie poprawki związane są zależnościami:

$$\varepsilon_k = 1 - \frac{k_c}{\varepsilon}$$

W literaturze*) można znaleźć kilka sposobów obliczania poprawki ε . Wszystkie one wychodzą z indywidualnych właściwości wypełnienia.

Np. dla wypełnienia z cegieł o grubości δ , gęstości ρ , ciepłe właściwym c i przewodności cieplnej λ jest:

$$\frac{1}{\varepsilon} = 0,4 \cdot \left(\frac{2}{\alpha \rho \delta} + \frac{\delta}{2 \lambda \tau_c} \right) \quad (8.87)$$

Wielkość ta stanowi dodatkowy opór cieplny wskutek skończonej przewodności cieplnej (w kierunku poprzecznym) wypełnienia rzeczywistego.

Na koniec należy zwrócić uwagę na to, że jeżeli przebieg temperatury wypełnienia jest liniowy, tzn. zachowane są, przynajmniej w przybliżeniu, równości: pojemności cieplnych, współczynników przejmowania ciepła i czasów przełączania, a zachodzi to dość często, to za średnią różnicę temperatur gazów $(t_1 - t_2)_{sr}$ we wzorze (8.83) można podstawić średnią arytmetyczną, ewentualnie przy większych różnicach: średnią logarytmiczną. W regeneratorach niskotemperaturowych konieczna będzie jednak średnia całkowa.

*) Np. T. Hobler: Ruch ciepła - wymienniki. PWT, Warszawa 1959.

P.D. Lebediew: Wymienniki ciepła, urządzenia suszarnicze i chłodnicze, WNT, Warszawa 1970.

W regeneratorach używanych do niskotemperaturowego rozdzielania powietrza na tlen i azot występują jeszcze zjawiska wykraplania i wymrażania pary wodnej i dwutlenku węgla, co dodatkowo komplikuje zagadnienie.

Ogólnie biorąc do obliczeń regeneratorów konieczne jest zawsze poszukiwanie się literaturą specjalną dziedziny, w której znajdują zastosowanie.

5.2. Regeneratory z wypełnieniem ruchomym

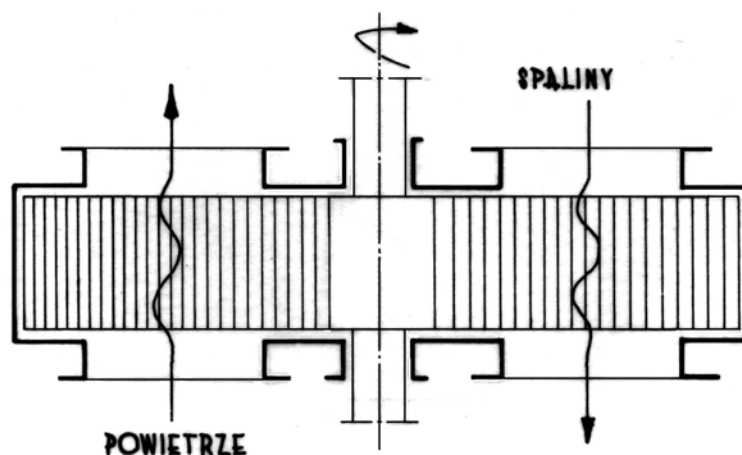
O ile w poprzednio omówionych regeneratorach z wypełnieniem stałym okresowe przełączanie przepływu gazów (z wypełnienia nagrzanego na oziębione i na odwrót) odbywało się przy pomocy układu zaworów, to przy wypełnieniu ruchomym strumienie gazów płyną nieprzerwanie tymi samymi kanałami, a samo wypełnienie przemieszcza się pomiędzy nimi w sposób ciągły. Wskutek tego temperatury wylotowe obydwu gazów w odróżnieniu od poprzedniego rozwiązania są stałe w czasie.

Z drugiej strony, wskutek braku szczelnego odcięcia gazów zaworami, niemożliwe lub bardzo trudne jest opanowanie większych różnic ciśnień między obydwo gazami.

Regeneratory obrotowe (systemu F. Ljungströma) stosowane są do podgrzewania powietrza spalinami w kotłach i turbinach spalinowych. Ich wielką zaletą jest zwartość budowy.

Głównym elementem konstrukcyjnym jest rotor, stanowiący pakiet blach karbowanych, poruszający się z prędkością 3...6 obr./min (w regeneratorach turbin spalinowych: 10...30 obr./min). Wypełnienie rotora może również być ceramiczne.

W części spalinowej wypełnienie nagrzewa się, a po przesunięciu się do części powietrznej oddaje energię cieplną. Dzięki ciągłości ruchu zapewniona jest stałość temperatury wylotowej powietrza. Wadą urządzenia jest zanieczyszczanie powietrza spalinami, a z drugiej strony strata części masy powietrza do spalin.



Rys. 8.19 Schemat regeneratora obrotowego

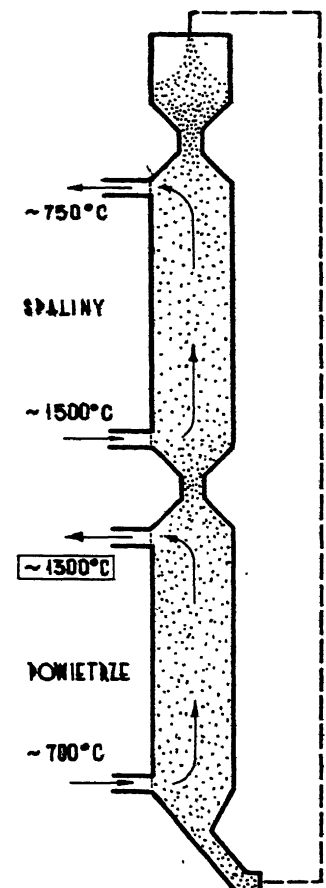
Regeneratory przesypowe (z ruchomym złożem) stanowią układ dwu komór umieszczonych jedna nad drugą z opadającym wypełnieniem czyli tzw. złożem w postaci kulek o średnicach 8...12 mm wykonanych z materiałów ceramicznych odpornych na wysokie temperatury i na ścieranie.

Złoże nagrzewa się w górnej komorze od przepływających spalin, by po przejściu przez gardziel (której zadaniem jest odcięcie spalin od powietrza) oddać pobraną energię podgrzewanemu w dolnej komorze powietrzu

Spod dolnej komory kulki przemieszczane są urządzeniem mechanicznym lub mechaniczno – pneumatycznym w górę: do zasobnika nad komorą spalniczą, skąd opadając zaczynają następny cykl roboczy.

Regeneratory z ruchomym złożem znajdują zastosowanie w różnych procesach wysokotemperaturowych. Przy pomocy kulek z dwutlenku cyrkonu (ZrO_2) osiąga się w trwałym ruchu temperaturę powietrza sięgającą $1400^{\circ}C$.

Obliczanie regeneratorów z wypełnieniem ruchomym jest podobne do regeneratorów z wypełnieniem stałym.



Rys. 8.20 Schemat regeneratora przesypowego ►

Streszczenie części ósmej

Przedstawiono analityczny sposób rozwiązania równania Fouriera dla niestabilnego, jednowymiarowego przewodzenia ciepła na przykładzie płyty nieskończonej. Wyprowadzono nową liczbę bezwymiarową Biota charakteryzującą oddziaływanie otaczającego ośrodka na rozważany przedmiot. Podano praktyczne metody obliczania temperatur i ciepła, przy pomocy wykresów pomocniczych, dla nieskończonej długości płyty i takiegoż walca oraz dla kuli. Dla płyt i walców o skończonych rozmiarach oraz przedmiotów powstałych z przecięcia typowych figur, dla których dysponujemy wykresami, można stosować metodę Newmana, według której rozwiązanie otrzymuje się w postaci iloczynu temperatur odpowiednich figur podstawowych. Zastosowanie tej metody objaśniono w przykładzie rachunkowym.

Zanalizowano ważny dla techniki przypadek okresowo zmiennej temperatury ścianki i problem rozchodzenia się fal temperaturowych w półprzestrzeni. Stwierdzono, że fale te są tłumione - zanikają w pewnej odległości, zależnej od częstości zmian i dyfuzyjności cieplnej materiału.

Wreszcie podano metodę przybliżonego znajdowania jednowymiarowego rozkładu temperatury metodą różnic skończonych (Bindera - Schmidta). Wskazano na możliwości realizowania jej na drodze numerycznej lub graficznej.

Na zakończenie omówiono regeneracyjne wymienniki ciepła z wypełnieniem stałym lub ruchomym. Przedstawiono w uproszczeniu zmienność temperatur w regeneratorze ze stałym wypełnieniem oraz sposoby obliczania wydajności cieplnej i wielkości powierzchni takiego wymiennika.

IX. DWUWYMIAROWE USTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA

1. ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE

W rozpatrywanym przypadku temperatura jest funkcją jedynie 2 współrzędnych na płaszczyźnie:

$$t = f(x, y)$$

i wtedy równanie przewodnictwa Fouriera (2.1) dla $\dot{q}_v = 0$ (nie istnieją źródła ciepła) oraz $\lambda = \lambda_{sr} = \text{const}$ przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0 \quad (9.1)$$

będącą matematycznym równaniem Laplace'a.

Dla szeregu prostszych przypadków, w których brzegi są krzywymi matematycznymi, można otrzymać rozwiązanie tego równania na drodze analitycznej. Wyniki podaje się w postaci **współczynnika kształtu** ψ [m], pozwalającego obliczyć opór cieplny obszaru leżącego między odpowiednimi powierzchniami izotermicznymi:

$$R = \frac{1}{\lambda \psi} \quad (9.2)$$

albo wprost **strumień cieplny**:

$$\dot{Q} = \lambda \psi (t_1 - t_2) \quad (9.3)$$

Zestawienie wzorów na obliczenie współczynnika kształtu dla kilku układów geometrycznych podaje tablica 22.

2. ROZWIĄZANIE NUMERYCZNE

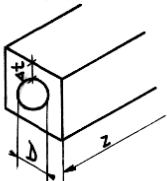
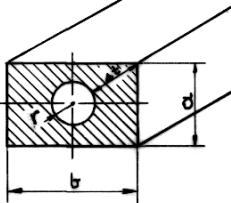
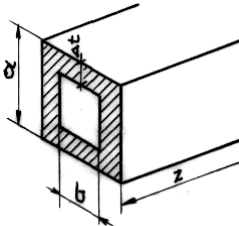
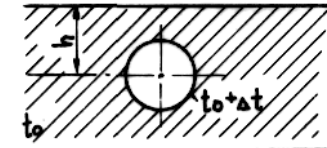
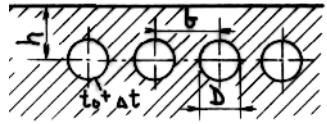
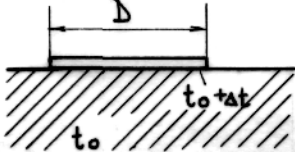
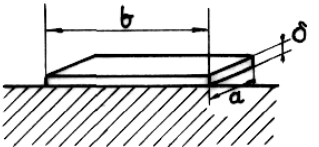
Wtedy, gdy nie można uzyskać analitycznego rozwiązania równania (9.1) lub, aby go rozwiązać trzeba wprowadzać zbyt daleko idące, w stosunku do warunków realnych, założenia upraszczające, to można równanie różniczkowe aproksymować równaniem różnicowym.

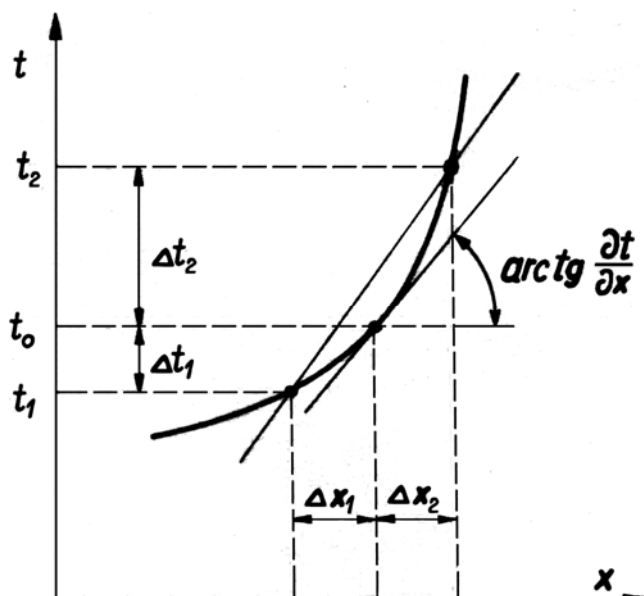
W miejsce różniczek wprowadza się wtedy różnice o skończonej wielkości. Opis procesu zmienia się przez to z ciągłego w dyskretny.

I tak dla $y = \text{const}$ pochodną temperatury względem x czyli pochodną funkcji: $t = f_1(x)$ aproksymuje się następująco:

$$\frac{\partial t}{\partial x} \cong \frac{\Delta t_2 + \Delta t_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = \frac{t_2 - t_0 + t_0 - t_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2} = \frac{t_2 - t_1}{\Delta x_1 + \Delta x_2} \quad (9.4)$$

Przykłady współczynników kształtu ψ
dla dwuwymiarowego przewodzenia ciepła

UKŁAD	SZKIC	WZÓR																				
Nieograniczona rura w izolacji kwadratowej - o długości: z		$\psi = \frac{2 \pi z}{1.08 \ln \frac{a}{d}}$ albo $\psi = \frac{2 \pi z}{\ln \frac{\sqrt{2} a}{d} - 0.27079}$																				
Nieograniczony pręt prostokątny z symetrycznie wywierconym otworem - o długości z		$\psi = \frac{2 \pi z}{\ln \frac{2a}{\pi r_i} - 2K}$ <table border="1" data-bbox="973 761 1396 840"> <tr> <td>b/a</td> <td>1.00</td> <td>1.25</td> <td>1.50</td> <td>1.75</td> </tr> <tr> <td>K</td> <td>0.0829</td> <td>0.03963</td> <td>0.01781</td> <td>0.00816</td> </tr> </table> <table border="1" data-bbox="973 862 1396 929"> <tr> <td>b/a</td> <td>2.00</td> <td>2.50</td> <td>3.00</td> <td>4.00</td> </tr> <tr> <td>K</td> <td>0.0017</td> <td>0.00078</td> <td>0.00016</td> <td>6.97 · 10⁻⁴</td> </tr> </table>	b/a	1.00	1.25	1.50	1.75	K	0.0829	0.03963	0.01781	0.00816	b/a	2.00	2.50	3.00	4.00	K	0.0017	0.00078	0.00016	6.97 · 10 ⁻⁴
b/a	1.00	1.25	1.50	1.75																		
K	0.0829	0.03963	0.01781	0.00816																		
b/a	2.00	2.50	3.00	4.00																		
K	0.0017	0.00078	0.00016	6.97 · 10 ⁻⁴																		
Nieograniczona rura kwadratowa - o długości z		$\psi = \frac{8b \cdot z}{a - b} \varphi$ <table border="1" data-bbox="965 1075 1396 1187"> <tr> <td>$\frac{a-b}{b}$</td> <td>1</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>$\frac{1}{3}$</td> <td>$\frac{1}{4}$</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>φ</td> <td>0.815</td> <td>0.889</td> <td>0.906</td> <td>0.941</td> <td>1</td> </tr> </table>	$\frac{a-b}{b}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	φ	0.815	0.889	0.906	0.941	1								
$\frac{a-b}{b}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0																	
φ	0.815	0.889	0.906	0.941	1																	
Nieograniczona rura, o długości z , w nieograniczonej półprzestrzeni o temperaturze t_0		$\psi = \frac{2 \pi \cdot z}{\ln \left[\frac{h}{R} + \sqrt{\left(\frac{h}{R}\right)^2 - 1} \right]}$ dla $\frac{h}{R} > 4$ jest $\psi = \frac{2 \pi \cdot z}{\ln \frac{2h}{R}}$																				
Nieograniczony szereg rur o długości z w nieograniczonej półprzestrzeni o temperaturze t_0		$\psi = \frac{2 \pi \cdot z}{\ln \left[\frac{2b}{\pi D} \cdot \sinh \frac{\pi \cdot h}{b} \right]}$																				
Okrągła płyta na nieograniczonej półprzestrzeni o temperaturze t_0		$\psi = 2D$																				
Prostokątna płyta na nieograniczonej powierzchni o temperaturze t_0		$\psi = \frac{\pi b}{\ln \frac{4b}{a}} \quad \begin{array}{l} a \gg \delta \\ b \gg a \end{array}$																				



Rys. 9.1 Schemat aproksymacji pochodnej różnicami skończonymi

Druga pochodna wyraża przyrost pierwszej pochodnej na odległości między środkami dwu sąsiednich elementów powierzchniowych:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cong \frac{\frac{\Delta t_2}{\Delta x_2} - \frac{\Delta t_1}{\Delta x_1}}{\frac{\Delta x_2}{2} + \frac{\Delta x_1}{2}} \quad (9.5)$$

Przy równomiernym podziale (zwanym dyskretyzacją) jest: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x$ i równanie (9.5) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \cong \frac{\frac{t_2 - t_0}{\Delta x} - \frac{t_0 - t_1}{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{t_1 - t_2 - 2t_0}{(\Delta x)^2} \quad (9.6)$$

Analogiczne do tego wyrażenia otrzymuje się dla $t = t_2(y)$:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \cong \frac{t_3 + t_4 - 2t_0}{(\Delta y)^2} \quad (9.7)$$

Tak więc równanie różniczkowe (9.1) aproksymuje się następującym równaniem różnicowym:

$$\frac{t_1 + t_2 - 2t_0}{(\Delta x)^2} + \frac{t_3 + t_4 - 2t_0}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (9.8)$$

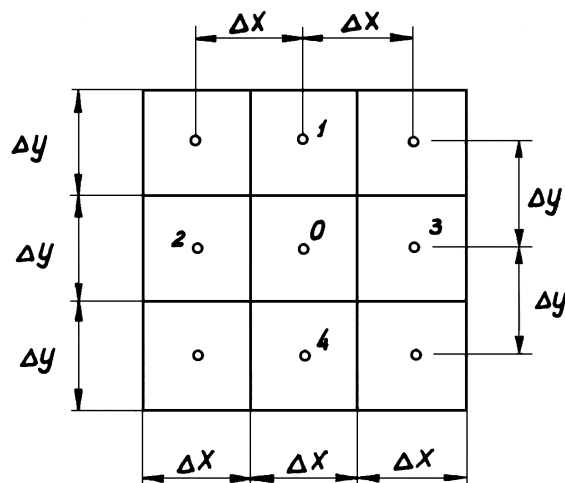
które dla $\Delta x = \Delta y$ przyjmuje postać:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - 4t_0 = 0 \quad (9.9)$$

albo:

$$(t_1 - t_0) + (t_2 - t_0) + (t_3 - t_0) + (t_4 - t_0) = 0 \quad (9.10)$$

W równaniu tym występują spadki temperatury między pewnym kwadratowym elementem płaskim o temperaturze t_0 a czterema sąsiednimi elementami rozmieszczonymi ortogonalnie względem siebie (rys. 9.2).



Rys.9.2 Siatka do obliczania pola temperatury metodą różnic skończonych

Te spadki temperatury powodują przewodzenie ciepła w 4 prostopadłych kierunkach, a równanie (9.10) wyraża bilans tych czterech strumieni ciepłych. Wprowadzając do tego równania opór cieplny (taki sam dla wszystkich czterech kierunków, bo: $\Delta x = \Delta y$):

$$R_w = \frac{\Delta x}{\lambda(\delta \cdot \Delta y)} = \frac{\Delta y}{\lambda(\delta \cdot \Delta x)} \quad (9.11)$$

gdzie: δ jest grubością rozpatrywanej płyty, otrzymuje się to równanie bilansu w następującej postaci:

$$\frac{\lambda}{\Delta y} \cdot (\delta \cdot \Delta x) \cdot (t_1 - t_0) + \frac{\lambda}{\Delta x} \cdot (\delta \cdot \Delta y) \cdot (t_2 - t_0) + \\ + \frac{\lambda}{\Delta x} \cdot (\delta \cdot \Delta y) \cdot (t_3 - t_0) + \frac{\lambda}{\Delta y} \cdot (\delta \cdot \Delta x) \cdot (t_4 - t_0) = 0 \quad (9.12)$$

Można je krótko zapisać w formie ogólnej:

$$\sum \dot{Q} = 0 \quad (9.13)$$

która wyraża bilans cieplny elementu skończonego o temperaturze t_0 . Stąd nazwa metody: **metoda bilansów elementarnych**. Stosuje się ją właśnie w ten sposób, że dla każdego węzła elementu siatki układa się równanie bilansu i uzyskuje układ równań liniowych ze względu na niewiadome temperatury t_i . Równań jest tyle, ile węzłów (dla siatki z rys.9.2 jest ich 9), a w przypadku, gdy $\Delta x = \Delta y$, równania te upraszczają się do postaci zbliżonej do równania (9.9).

W równaniach dla elementów leżących na b r z e g u (w strumieniu zewnętrznym) bierze się pod uwagę temperaturę powierzchni brzegowej (jeżeli jest dana) i wtedy przewodzenie odbywa się na długości: $\Delta x/2 = \Delta y/2$. Albo bierze się pod uwagę przejmowanie ciepła według prawa Newtona i wtedy strumień na tym kierunku:

$$\dot{Q} = \alpha (\delta \cdot \Delta x) \cdot \Delta t$$

Układ równań liniowych rozwiązuje się znanymi metodami numerycznymi jak np. odwrócenia macierzy, relaksacji, iteracji czy metodą eliminacyjną Gaussa.

Istnieją gotowe, uogólnione programy komputerowe do wykonania takich obliczeń - zarówno komercyjne, jak i opublikowane w literaturze*).

Można nimi rozwiązywać również zagadnienia t r ó j w y m i a r o w e .

*) Np. J. Gdula (red.): Przewodzenie ciepła. PWN 1984.

3. ROZWIĄZANIE GRAFICZNE

Metoda graficzna opiera się na następującej właściwości funkcji zmiennej zespolonej w stosunku do równania Laplace'a (9.1):

Jeżeli dowolna funkcja zmiennej zespolonej $f(x + iy)$, która może być przedstawiona jako suma części rzeczywistej Φ i urojonej $i \cdot \Psi$:

$$f(x + iy) = \Phi + i \cdot \Psi \quad (9.14)$$

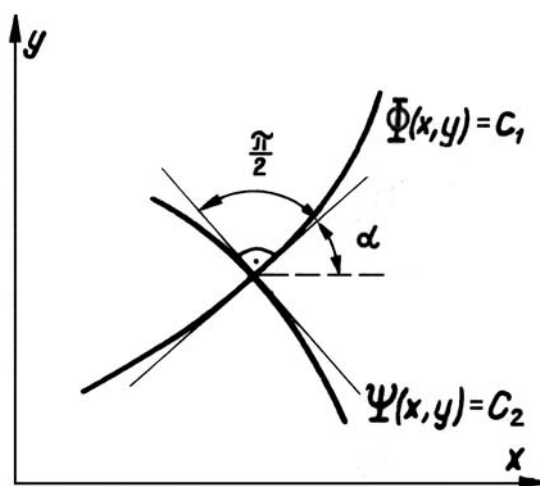
jest funkcją analityczną, tzn. spełnia warunki Cauchy - Riemanna:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (9.15)$$

to funkcje Φ i Ψ są funkcjami harmonicznymi sprzężonymi i są ortogonalne, tzn. przecinają się pod kątami prostymi (rys.9.3), a ponadto funkcje Φ i Ψ spełniają równania Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (9.16)$$

i stanowią jego rozwiązanie.



Rys. 9.3 Przebieg krzywych ortogonalnych

Istotnie współczynniki kierunkowe stycznych do krzywych Φ i Ψ wynoszące zgodnie z zasadami różniczkowania funkcji uwikłanych:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{-\frac{\partial \Phi}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi} = \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}$$

spełniają, po wprowadzeniu np. do pierwszego z nich warunków Cauchy - Riemanna (9.15), warunek prostopadłości prostych:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Phi} = \frac{-\frac{\partial \Psi}{\partial y}}{-\frac{\partial \Psi}{\partial x}} = \left(\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial x}}{\frac{\partial \Psi}{\partial y}}\right)^{-1} = \frac{1}{-\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\Psi}}$$

Otóż w zastosowaniu do równania (9.1) rozwiązanie w postaci pęku krzywych $\Phi(x,y)$ - to izoterm $t(x,y)$, a krzywe $\Psi(x,y)$ prostopadłe do nich są stycznymi do wektora strumienia ciepłego w poszczególnych punktach. Te ostatnie są odpowiednikiem linii prądu w mechanice płynów i wyznaczają jak gdyby kanały, którymi przewodzone jest ciepło.

Siatkę izoterm i linii prądu (adiabat) znajduje się, metodą kolejnych prób i przybliżeń, wychodząc z intuicyjnie wykreślonego (jako I przybliżenie) ich przebiegu, starając się osiągnąć warunek ortogonalności.

Praktycznie rysuje się siatkę tak, aby składała się z tzw. krzywoliniowych kwadratów ograniczonych dwiema izotermami i dwiema adiabatami (liniami prądu) jak na rys. 9.4.

Muszą one spełniać następujące warunki:

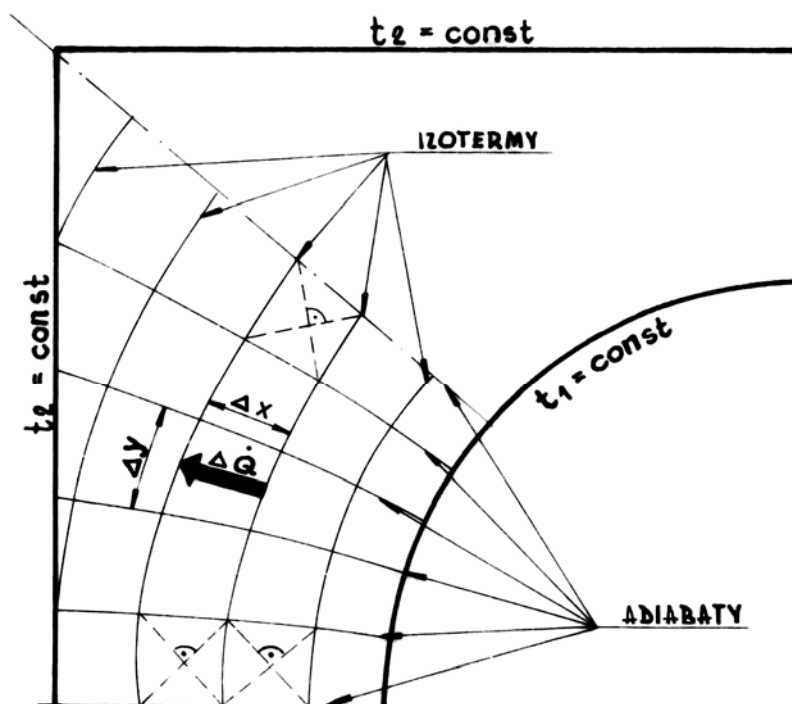
- styczne do ich boków w punkcie przecięcia są do siebie prostopadłe,
- przekątne przecinają się pod kątami prostymi,
- przecinające się odcinki izoterm i linii prądu są sobie równe.

Ostatni z warunków może być spełniony tym dokładniej, im mniejsze są boki kwadratów.

Uzyskanie zadowalającego rozwiązania jest kwestią wprawy.

Pomocne mogą być następujące wskazówki:

- linia symetrii jest linią prądu i dzieli pole temperatury na symetryczne części,
- w każdym narożu izotermicznej linii ograniczającej należy poprowadzić krótkie dwusieczne kątów - będą one początkami linii prądu,
- błędy siatki można wykrywać przy pomocy przekątnych w kwadratach - one również muszą być ortogonalne.



Rys.9.4 Siatka izoterm i adiabat w układzie płaskim

Mając wykreśloną siatkę można wyznaczyć łączny strumień ciepły przewodzony wzdłuż linii prądu.

Weźmy pod uwagę na razie jeden kwadrat, na którym temperatura spada o Δt i przewodzony jest strumień ciepła $\Delta \dot{Q}$. Rozmiary kwadratu podane są na rys. 9.4 (L jest głębokością).

Wówczas, wobec $\Delta z = \Delta y$, mamy:

$$\Delta \dot{Q} = \frac{\lambda}{\Delta x} (\Delta y \cdot L) \cdot \Delta t = \lambda L \cdot \Delta t \quad (9.17)$$

Spadek temperatury Δt jest taki sam dla wszystkich sąsiednich izoterm więc:

$$\Delta t = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{n_1} \quad (9.18)$$

gdzie: n_1 jest liczbą kwadratów na jednej linii prądu (w jednym "kanale"). Cała powierzchnia obejmuje n_2 "kanałów" strumienia ciepłego. Wobec tego łączny strumień ciepły

$$\dot{Q} = n_2 \lambda L \cdot \frac{t_{w1} - t_{w2}}{n_1} = \psi \lambda \cdot (t_{w1} - t_{w2}) \quad (9.19)$$

gdzie: współczynnik kształtu wwrążony jest jako:

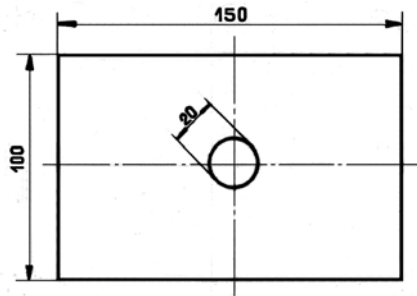
$$\psi = \frac{n_2}{n_1} \cdot L \quad (9.20)$$

Opór cieplny w tej metodzie oblicza się jak poprzednio wzorem (9.2).

Przykład

Słup ceramiczny ($\lambda = 1,5 \text{ W/m}\cdot\text{K}$) o przekroju prostokątnym i wymiarach $150 \times 100 \text{ mm}$ ma w osi otwór o średnicy 20 mm , przez który przepływa ciepła woda. Średnia temperatura ścianki otworu wynosi 60°C . Słup stoi w pomieszczeniu o temperaturze 20°C .

Obliczyć stratę cieplną przypadającą na 1 m długości słupa oraz temperaturę ścian zewnętrznych, jeżeli całkowity (przejmowanie i promieniowanie) współczynnik przejmowania ciepła na tych ścianach wynosi $10 \text{ W/m}^2\text{K}$.



Rys.9.5 Szkic sytuacyjny do przykładu

Rozwiązanie:

Z tab. 22. znajdujemy dla pręta prostokątnego z symetrycznie wywierconym otworem współczynnik kształtu:

$$\psi = \frac{2 \pi L}{\ln \frac{2a}{\pi r_1} - 2K} \quad \text{oraz} \quad K = 0,0178 \quad \text{dla} \quad \frac{b}{a} = \frac{150}{100} = 1,5$$

Zatem po podstawieniu wartości liczbowych:

$$\psi = \frac{2\pi \cdot 1}{2,3 \cdot 1g \frac{2 \cdot 100}{\pi \cdot 10} - 2 \cdot 0,0178} = 3,46 \text{ m}$$

Opór cieplny materiału słupa:

$$R_w = \frac{1}{\psi \lambda} = \frac{1}{3,46 \cdot 1,5} = 0,1925 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Opór przyjmowania ciepła na ścianie zewnętrznej:

$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha A} = \frac{1}{\alpha \cdot 2(a+b)L} = \frac{1}{10 \cdot 2(0,100 + 0,150) \cdot 1} = 0,200 \frac{\text{K}}{\text{W}}$$

Strumień cieplny:

$$\dot{Q} = \frac{t_{w1} - t_f}{\sum R_i} = \frac{t_w - t_f}{R_w + R_\alpha} = \frac{60 - 20}{0,1925 + 0,200} = 102 \text{ W}$$

Spadek temperatury w materiale ceramicznym:

$$\Delta t_w = \dot{Q} \cdot R_w = 102 \cdot 0,1925 = 19,6 \text{ K}$$

Temperatura ścian zewnętrznych:

$$t_2 = t_1 - \Delta t_w = 60 - 19,6 = 40,4^\circ\text{C}$$

Jest to wartość średnia - narożniki będą miały temperaturę nieco niższą, a środkowa część ścian nieco wyższą. Dokładny przebieg tych izoterm można wyznaczyć metodą graficzną.

4. ROZWIĄZANIE ANALOGOWO-DOŚWIADCZALNE

Równanie Fouriera można przedstawić bardziej ogólnie, jeżeli wprowadzi się bezwymiarową temperaturę:

$$\vartheta = \frac{t - t_{w2}}{t_{w1} - t_{w2}} \quad (9.21)$$

Gdzie: t_{w1} i t_{w2} są temperaturami dwu izotermicznych powierzchni rozpatrywanego przedmiotu (pozostałe ściany są izolowane).

Wtedy na brzegach będzie:

$$\begin{aligned} \text{dla } t = t_{w1} & \text{ jest } \vartheta = 1 \\ \text{dla } t = t_{w2} & \text{ jest } \vartheta = 0 \end{aligned}$$

Równanie Fouriera dla przypadku ustalonego (stacjonarnego) ma wówczas postać ogólną:

$$\nabla^2 \vartheta = 0 \quad (9.22)$$

a dla dwuwymiarowego:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0 \quad (9.23)$$

To matematyczne równanie Laplace'a opisuje również inne zjawiska fizyczne, w szczególności te, do których można stosować teorię potencjału.

Mówimy wówczas o zjawiskach (matematycznie) analogicznych, a wielkości odgrywające tę samą rolę matematyczną (ϑ) są tzw. analogami.

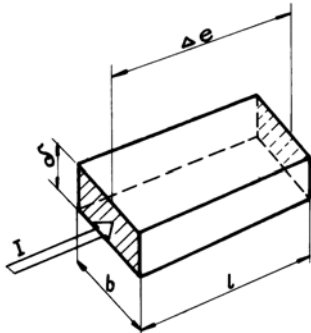
Przez wykorzystanie analogii można otrzymywać trudne do wyznaczenia wielkości termiczne (temperatury, strumień ciepły) poprzez pomiar na modelu geometrycznie podobnym, w którym zachodzi, łatwiejsze do przeprowadzenia, zjawisko analogiczne.

Często zjawiskiem analogicznym jest przepływ prądu elektrycznego w elektrolitach (szczególnie do układów 3-wymiarowych) lub w płaskich płytach przewodzących (do 2-wymiarowych) albo w układzie sieciowym modelującym przedmiot przy pomocy oporów (rezystorów) elektrycznych. Analogiem temperatury jest tu potencjał elektryczny, a strumienia ciepłego - natężenie prądu elektrycznego.

Ciekawe przykłady zastosowania takich analogii można znaleźć w książkach St. Wiśniewskiego, a zasady budowy modeli analogowych w monografii E. Kaćki*).

Z innych zjawisk analogicznych warto wymienić ugięcie membrany (błony) nieobciążonej ciśnieniem, w którym analogiem temperatury jest wielkość tego ugięcia (fotografowanie linii stałego ugięcia - izoterm) oraz płaski przepływ potencjalny z wizualizacją linii prądu za pomocą rozpuszczających się kryształków nadmanganianu potasu.

Analog elektryczny 2-wymiarowego przewodzenia ciepła buduje się często z papieru przewodzącego (pokrytego farbą przewodzącą zawierającą grafit lub sadzę) grubości kilku setnych milimetra, na którym mocuje się klejem przewodzącym kontury przedmiotu wykonane (w pewnej skali) z drutu miedzianego lub lepiej przy pomocy srebrnej farby przewodzącej (rys. 9.7). Do linii konturowych (reprezentujących odpowiednie izotermiczne linie brzegowe) podłącza się źródło prądu stałego i mierzy spadek potencjału (Δe) oraz natężenie prądu (I).



Zgodnie z prawem Ohma jest:

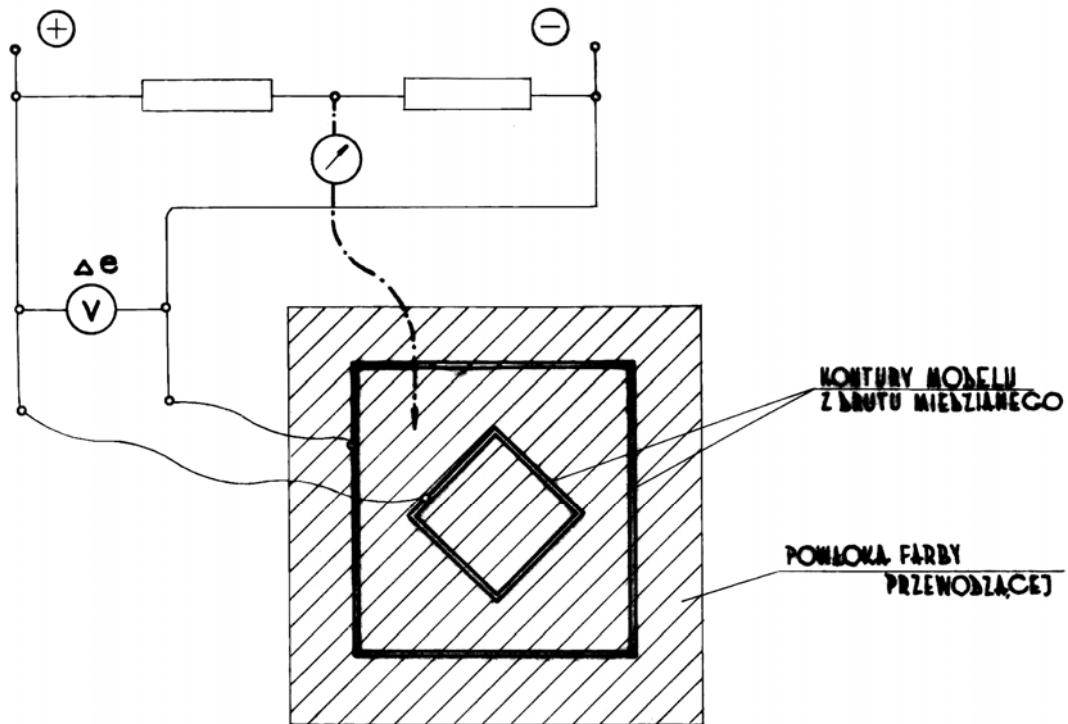
$$I = \frac{\Delta e}{R_{e1}} \quad (9.24)$$

Natomiast opór elektryczny można wyrazić przy pomocy oporności właściwej ρ_e [$\Omega \cdot m$] i rozmiarów przewodnika (rys. 9.6):

$$R_{e1} = \frac{\rho_e l}{b \delta} \quad (9.25)$$

▲ Rys.9.6 Element objętościowy w analogii elektrotermicznej

*) St. Wiśniewski: Obciążenia cieplne spalinowych silników tłokowych. WNT, Warszawa 1972.
St. Wiśniewski: Obciążenia cieplne silników turbinowych. WKŁ Warszawa 1974.
E. Kaćki: Termokinetika. WNT, Warszawa, 1967.



Rys.9.7 Schemat analogu elektrycznego

Zatem:

$$I = \frac{b}{l} \frac{\delta}{\rho_e} \Delta e = S_i \frac{\delta}{\rho_e} \Delta e \quad (9.26)$$

gdzie: $S_i = b/l$ jest współczynnikiem kształtu dla elementu przedstawionego na rys.9.6.

Dla modelu z rys. 9.7 współczynnik S_i też będzie funkcją wymiarów, chociaż funkcją bardziej złożoną .

Przewodzenie ciepła w przedmiocie rzeczywistym, geometrycznie podobnym do modelu lecz o innych rozmiarach (l' , b' , δ') i przewodności cieplnej λ [W/m·K] opisuje zależność:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{l'} \cdot A_w \cdot (t_{w1} - t_{w2}) = \lambda \frac{b' \cdot \delta'}{l'} \cdot (t_{w1} - t_{w2}) = \lambda S_q \cdot \delta' \cdot \Delta t \quad (9.27)$$

Współczynnik kształtu S_q jest taki sam*) jak dla modelu (S_i).

W szczególności dla elementu z rys.9.7 wyraża się wzorem:

$$S_q = \frac{b'}{l'} = \frac{b}{l} = S_i$$

oraz

$$\dot{Q} = \frac{\lambda}{l'} \cdot b' \cdot \delta' \cdot \Delta t = \frac{\lambda}{l'} \cdot A' \cdot \Delta t$$

*) Używany w rozdziale 1. niniejszej części, a podany w tab. 22, współczynnik kształtu ψ obejmował również grubość (tu: l'): $\psi = \frac{A_w}{l'} = S_q \cdot \delta'$.

Z odniesienia (9.27) do (9.26) otrzymujemy wyrażenie na strumień ciepła:

$$\dot{Q} = \lambda \delta' \cdot \frac{\Delta t}{\Delta e} \cdot \left(\frac{\rho_e}{\delta}\right) \cdot I \quad [W] \quad (9.28)$$

w którym Δe oraz I pochodzą z pomiaru, a wyraz: ρ_e/δ stanowi charakterystykę papieru przewodzącego podawaną przez wytwórcę (około 2000 Ω /kwadrat), natomiast λ , δ' i Δt są znane.

Jeżeli potrzebna jest znajomość izoterm, to podłącza się oddzielny galwanometr z końcówką igłową, którą określa się położenie punktów o tej samej wartości potencjału (odpowiadającego temperaturze).

W przypadku gdy linia konturowa nie jest izotermiczna, wykonuje się ją jako dzieloną na odizolowane od siebie odcinki, odpowiadające zadanyemu temperaturom .

Streszczenie części dziewiątej

Przedstawiono w zarysie metody rozwiązywania zagadnień dwuwymiarowego, ustalonego w czasie przewodzenia ciepła w ciałach stałych. Omówiono pokrótce metodę analityczną prowadzącą do określenia tzw. współczynnika kształtu ψ .

Podano podstawy metod uzyskiwania rozwiązania na drodze numerycznej, graficznej i analogowo – doświadczalnej. Wskazano przy tym na możliwości rozwiązywania zagadnień trójwymiarowych.

TABLICE WŁAŚCIWOŚCI FIZYCZNYCH

Załącznik 1

Właściwości fizyczne suchego POWIETRZA o ciśnieniu: 101,3 kPa = 760 Tr

t °C	ρ kg/m ³	c_p kJ/kg·K	$\lambda \cdot 10^2$ W/m·K	$a \cdot 10^6$ m ² /s	$\eta \cdot 10^6$ kg/ms = = Ns/m ²	$\nu \cdot 10^6$ m ² /s	Pr
-50	1,584	1,013	2,04	12,70	14,62	9,23	0,728
-40	1,515	1,013	2,12	13,78	15,21	10,04	0,728
-30	1,453	1,013	2,20	14,92	15,70	10,80	0,723
-20	1,395	1,009	2,28	16,20	16,19	11,61	0,716
-10	1,342	1,006	2,36	17,45	16,68	12,43	0,712
0	1,293	1,004	2,44	18,81	17,17	13,28	0,707
10	1,247	1,004	2,51	20,06	17,66	14,16	0,705
20	1,205	1,004	2,59	21,42	18,15	15,06	0,703
30	1,165	1,004	2,61	22,86	18,64	16,00	0,701
40	1,128	1,004	2,76	24,31	19,13	16,96	0,699
50	1,093	1,004	2,83	25,72	19,62	17,95	0,698
60	1,060	1,004	2,90	27,20	20,11	18,97	0,696
70	1,029	1,006	2,97	28,56	20,60	20,02	0,694
80	1,000	1,006	3,05	30,20	21,09	21,09	0,692
90	0,972	1,006	3,13	31,89	21,48	22,10	0,690
100	0,946	1,006	3,21	33,64	21,88	23,13	0,688
120	0,898	1,009	3,34	36,84	22,86	25,45	0,686
140	0,854	1,013	3,49	40,34	23,74	27,80	0,684
160	0,815	1,017	3,64	43,89	24,52	30,09	0,682
180	0,779	1,022	3,78	47,50	25,31	32,49	0,681
200	0,746	1,026	3,93	51,36	26,00	34,85	0,680
250	0,674	1,038	4,27	61,00	27,37	40,61	0,677
300	0,615	1,047	4,61	71,56	29,72	48,33	0,674
350	0,566	1,059	4,91	81,87	31,39	55,46	0,676
400	0,524	1,068	5,21	93,12	33,06	63,09	0,678
500	0,456	1,093	5,74	115,3	36,20	79,38	0,687
600	0,404	1,114	6,22	138,3	39,14	96,89	0,699
700	0,362	1,135	6,71	163,4	41,79	115,4	0,706
800	0,329	1,156	7,18	188,8	44,34	134,8	0,713
900	0,301	1,172	7,63	216,2	46,70	155,1	0,717
1000	0,277	1,185	8,07	245,9	49,05	177,1	0,719
1100	0,257	1,198	8,50	276,3	51,21	199,3	0,722
1200	0,239	1,210	9,15	316,5	53,46	233,7	0,724

Właściwości fizyczne WODY w stanie nasycenia

t °C	P _s kPa	ρ' kg/m ³	i' kJ/kg	c' kJ/kgK	λ' W/mK	a'·10 ⁶ m ² /s	η'·10 ⁶ kg/ms = = Ns/m ²	v'·10 ⁶ m ² /s	β'·10 ⁴ 1/K	σ·10 ⁴ N/m	Pr
0	0,6	999,9	0,0	4,226	0,558	0,131	1793,6	1,789	- 0,63	756,4	13,67
10	1,2	999,7	42,0	4,195	0,577	0,137	1296,4	1,306	+ 0,70	741,6	9,52
20	2,3	998,2	83,9	4,182	0,597	0,143	993,4	1,006	1,82	726,9	7,02
30	4,2	995,7	125,7	4,176	0,615	0,149	792,4	0,805	3,21	711,2	5,42
40	7,4	992,2	167,5	4,175	0,633	0,151	658,0	0,659	3,87	696,5	4,31
50	12,3	988,1	209,3	4,178	0,647	0,157	555,0	0,556	4,49	676,9	3,54
60	19,9	983,2	251,1	4,181	0,658	0,159	471,7	0,478	5,11	662,2	2,98
70	31,2	977,8	293,0	4,187	0,668	0,163	404,0	0,415	5,70	643,5	2,55
80	47,4	971,8	334,9	4,194	0,673	0,165	352,1	0,365	6,32	625,9	2,21
90	70,1	965,3	377,0	4,202	0,678	0,167	328,5	0,326	6,95	607,2	1,95
100	101,3	958,4	419,1	4,211	0,682	0,169	277,5	0,295	7,52	588,6	1,75
110	143	951,0	461,3	4,224	0,684	0,170	255,0	0,272	8,08	569,0	1,60
120	198	943,1	503,7	4,232	0,685	0,171	235,4	0,252	8,64	548,4	1,47
130	270	934,8	546,4	4,250	0,686	0,172	211,8	0,233	9,19	528,8	1,36
140	361	926,1	589,1	4,257	0,685	0,172	201,0	0,217	9,72	507,2	1,26
150	476	917,0	632,2	4,270	0,684	0,173	185,4	0,203	10,3	486,6	1,17
160	618	907,4	675,3	4,285	0,683	0,173	171,6	0,191	10,7	466,0	1,10
170	792	897,3	719,3	4,396	0,679	0,172	162,3	0,181	11,3	443,4	1,05
180	1 003	886,9	763,3	4,396	0,675	0,172	152,0	0,173	11,9	422,8	1,00
190	1 255	876,0	807,6	4,480	0,670	0,171	145,1	0,165	12,6	400,2	0,96
200	1 555	863,0	852,4	4,501	0,663	0,170	139,3	0,158	13,3	376,7	0,93
210	1 908	852,8	897,6	4,560	0,655	0,168	131,4	0,153	14,1	351,1	0,91
220	2 320	840,3	943,7	4,605	0,645	0,167	124,5	0,148	14,8	331,6	0,89
230	2 789	827,3	990,2	4,690	0,637	0,164	119,6	0,145	15,9	310,0	0,88
240	3 348	813,6	1 037,5	4,731	0,628	0,162	113,8	0,141	16,8	285,5	0,87
250	3 978	799,0	1 085,6	4,857	0,618	0,160	109,8	0,137	18,1	261,9	0,86
260	4 694	784,0	1 135,0	4,982	0,605	0,156	104,9	0,135	19,7	237,4	0,87
270	5 505	767,9	1 185,3	5,030	0,590	0,152	102,0	0,133	21,6	214,8	0,88
280	6 419	750,7	1 236,8	5,234	0,575	0,147	98,1	0,131	23,7	191,3	0,90
290	7 445	732,3	1 290,0	5,445	0,558	0,140	94,1	0,129	26,2	168,7	0,93
300	8 592	712,5	1 344,8	5,694	0,540	0,132	92,2	0,128	29,2	144,2	0,97
310	9 869	691,1	1 402,2	6,155	0,523	0,122	88,3	0,128	32,9	120,7	1,03
320	11289	667,1	1 462,0	6,610	0,506	0,112	85,3	0,128	38,2	98,1	1,11
330	12 864	640,2	1526,1	7,245	0,484	0,101	81,4	0,127	43,3	76,7	1,22
340	14 608	610,1	1 594,8	8,160	0,457	0,088	77,5	0,127	53,4	56,7	1,39
350	16 537	574,4	1 671,4	9,295	0,430	0,076	72,6	0,126	66,8	38,2	1,60
360	18 674	528,0	1 761,4	9,850	0,395	0,067	66,7	0,126	109	20,2	2,35
370	21 053	450,5	1 892,4	11,690	0,337	0,058	56,9	0,126	264	4,71	6,79

Właściwości fizyczne PARY WODNEJ suchej, nasyconej

t °C	P _s kPa	ρ" kg/m ³	i" kJ/kg	r·10 ⁻³ J/kg	c" _p kJ/kgK	λ"·10 ² W/mK	a"·10 ⁶ m ² /s	η"·10 ⁶ kg/ms = Ns/m ²	v"·10 ⁶ m ² /s	Pr
0	0,61	0,0048	2489	250 1	1,854	1.59	1787	8,24	1700	0,95
10	1,23	0.0094	2519	2477	1,857	1,67	957	8.53	910	0,95
20	2,3	0.0173	2537	2453	1,861	1,75	544	8,92	516	0,95
30	4,2	0,0304	2556	2430	1,864	1.82	321	9.3 1	306	0,95
40	7.4	0.0512	2574	2406	1,868	1,90	199	9,71	190	0,95
50	12,3	0,0830	2591	2382	1,871	1.98	127,5	10.0	121	0,95
60	19,9	0,1302	2609	2358	1,924	2,06	82.2	10,3	80,1	0,97
70	31,2	0.1982	2626	2333	1,977	2,14	54,6	10,7	54.5	1,00
80	47,3	0,2934	2643	2308	2,029	2,22	37.3	11,1	38.2	1,02
90	70,1	0.4235	2660	2283	2,082	2,30	26,1	11,5	27,4	1,05
100	101.3	0,598	2676	2257	2,135	2,38	18.7	11,98	20,02	1.08
110	143	0,826	2691	2230	2.180	2.49	13,8	12,45	15,07	1,09
120	198	1,121	2706	2203	2.205	2.60	10,5	12,85	11,46	1,09
130	270	1,496	2721	2174	2.255	2.69	7,97	13,25	8.85	1,11
140	361	1,966	2734	2145	2.315	2,79	5.85	13,52	6.89	1,12
150	476	2,547	2746	2114	2.39	2.88	4.74	13.92	5.47	1,16
160	618	3,258	2758	2082	2.48	3,02	3.72	14,32	4,39	1,18
170	792	4,122	2769	2049	2.58	3.13	2.44	14.71	3,57	1,21
180	1 003	5,157	2778	2015	2.71	3,26	2.34	15,10	2,93	1,25
190	1 255	6.394	2786	1979	2,86	3,42	1.87	15,60	2,44	1.30
200	1 555	7,862	2793	1941	3.02	3.55	1,49	16,00	2.03	1,36
210	1 908	9.588	2798	1900	3.20	3.71	1.215	16,38	1.71	1,41
220	2 320	11,62	2801	1858	3.40	3.90	0,984	16,87	1.45	1,47
230	2 798	13,99	2803	1813	3,63	4.10	0.805	17,37	1,24	1,54
240	3 348	16,76	2803	1766	3.88	4.29	0,658	17,76	1.06	1,61
250	3 978	19,98	2801	1715	4.16	4,51	0,644	18,23	0.913	1,68
260	4 694	23,72	2796	1661	4,46	4,80	0,452	18,82	0,794	1,75
270	5 505	28,09	2790	1604	4.81	5.10	0,378	19.30	0,688	1,82
280	6 419	33,19	2780	1543	5,24	5,50	0,317	19.88	0,600	1,90
290	7 445	39,15	2766	1476	5.70	5,83	0,261	20,60	0,526	2,01
300	8 592	46.21	2749	1404	6,29	6,27	0.216	21.30	0,461	2,13
310	9 869	54.58	2727	1325	7,12	6.85	0,176	21,95	0,403	2,29
320	11 289	64.72	2700	1238	8,20	7.51	0.1415	22.85	0,353	2,50
330	12 864	77.10	2666	1140	9.86	8.25	0.2083	23,95	0,310	2,86
340	14 608	92.76	2622	1027	12,35	9.30	0,0811	25.20	0,272	3,35
350	16 537	113.6	2564	893	16,23	10,70	0.0581	26,60	0,234	4,03
360	18 674	144,0	2481	720	23.05	12.80	0,0386	29.15	0,202	5,23
370	21 053	203.0	2331	438,4	56,50	17.10	0,0150	33,75	0,166	11,10

Lepkość dynamiczna GAZÓW $\eta \cdot 10^6$ [Ns/m² = kg/ms]

t [°C]	N ₂	O ₂	H ₂ O	CO ₂	CO	H ₂	CH ₄
0	16,65	19,42	8,66	13,84	16,6	8,41	10,28
100	21,00	24,60	12,07	18,44	20,7	10,38	13,32
200	24,76	29,09	16,03	22,59	24,5	12,18	16,04
300	28,15	33,10	20,00	26,39	27,9	13,86	18,50
400	31,19	36,76	23,89	29,89	30,9	15,44	20,80
500	34,04	40,12	27,70	33,14	33,7	16,94	22,68
600	36,64	43,26	31,44	36,19	36,3	18,38	24,65
700	39,09	46,21	35,09	39,05	38,7	19,76	26,50
800	41,38	49,96	38,64	41,74	41,0	21,08	28,20
900	43,59	51,58	42,09	44,36	43,3	22,37	29,80
1000	45,73	54,10	45,43	46,78	45,3	23,62	31,35
1100	47,73	56,54	48,73	49,13		24,83	
1200	49,68	58,85	51,94	51,39		26,02	

Przewodność cieplna GAZÓW $\lambda \cdot 10^3$ [W/m·K]

t [°C]	H ₂	O ₂	H ₂ O	CO ₂	CO	H ₂	CH ₄
0	24,86	25,06	16,15	14,44	23,26	174,5	29,4
100	31,51	32,55	24,64	22,70	30,12	216,3	48,0
200	37,56	39,97	33,66	31,05	36,52	258,2	70,1
300	43,39	47,26	45,64	39,38	42,57	300,1	92,7
400	49,36	54,25	57,06	47,50	48,50	341,9	118,0
500	55,21	60,94	69,97	55,36	54,08	383,8	143,0
600	60,88	67,13	83,85	62,88	59,66	425,7	170,7
700	66,38	73,06	98,48	70,09	65,01	467,5	196,9
800	71,68	78,72	114,1	76,90	70,13	509,4	220,3
900	76,79	83,74	130,1	83,43	75,48	551,3	250,3
1000	81,72	88,81	146,7	89,67	80,59	593,1	276,9
1100	86,40	93,74	163,4	95,67		635,0	
1200	90,91	98,39	180,3	101,3		676,9	

**Średnie ciepła właściwe GAZÓW $c_p \Big|_0^t$ [kJ/kg·K]
o ciśnieniu 101,4 kPa = 760 Tr**

t [°C]	Powiet- trze	N ₂	O ₂	H ₂ O	CO ₂	CO	H ₂	CH ₄
0	1,004	1,039	0,915	1,359	0,815	1,040	14,195	2,165
100	1,006	1,040	0,923	1,873	0,866	1,042	14,353	2,294
200	1,012	1,043	0,935	1,894	0,920	1,046	14,421	2,458
300	1,019	1,049	0,950	1,919	0,949	1,054	14,446	2,635
400	1,028	1,057	0,965	1,948	0,983	1,063	14,447	2,816
500	1,039	1,066	0,979	1,978	0,013	1,075	14,509	2,991
600	1,050	1,076	0,993	2,009	1,040	1,086	14,542	3,159
700	1,061	1,087	1,005	2,042	1,064	1,098	14,587	3,321
800	1,071	1,097	1,016	2,075	1,085	1,109	14,641	3,485
900	1,081	1,108	1,026	2,110	1,104	1,120	14,706	3,636
1 000	1,091	1,118	1,035	2,144	1,122	1,130	14,776	3,771
1 100	1,100	1,127	1,043	2,177	1,135	1,140	14,853	3,893
1 200	1,108	1,136	1,051	2,211	1,153	1,149	14,934	4,000
1 300	1,117	1,145	1,058	2,243	1,166	1,158	15,023	
1 400	1,124	1,153	1,065	2,274	1,178	1,166	15,113	
1 500	1,131	1,160	1,071	2,305	1,189	1,173	15,202	
M [kg/kmol]	28,964	28,016	32,000	18,020	44,010	28,010	2,016	16,031

**Ciepła właściwe rzeczywiste GAZÓW c_p [J/kg·K]
(do obliczenia np. liczby Prandtla)**

t [°C]	Powiet- rze	N ₂	O ₂	H ₂ O	CO ₂	CO	H ₂	CH ₄
0	1 003,6	1 039,2	914,8	1 859,4	814,8	1 039,6	14 194,9	2 165,4
100	1 010,3	1 042,1	933,7	1 890,3	913,6	1 044,6	14 448,2	2 448,4
200	1 024,5	1 051,7	963,0	1 940,6	992,7	1 058,4	14 504,3	2 606,8
300	1 044,6	1 069,3	994,8	2 000,5	1 056,7	1 080,2	14 533,2	3 175,3
400	1 068,5	1 091,5	1 023,7	2 064,5	1 110,3	1 105,7	14 580,9	3 529,5
500	1 092,3	1 115,4	1 048,4	2 131,9	1 154,7	1 132,1	14 662,2	3 448,7
600	1 114,9	1 139,2	1 068,9	2 201,4	1 192,0	1 156,2	14 773,6	3 697,4
700	1 135,5	1 161,4	1 085,6	2 273,0	1 223,0	1 179,0	14 930,1	3 915,9
800	1 153,9	1 181,5	1 099,9	2 345,0	1 249,3	1 198,7	15 114,8	4 092,6
900	1 170,2	1 199,1	1 112,0	2 415,4	1 271,5	1 215,8	15 212,0	4 250,0
1000	1 184,4	1 215,0	1 122,9	2 482,4	1 290,0	1 230,5	15 517,5	4 394,5
1100	1 197,0	1 228,8	1 131,7	2 545,6	1 305,9	1 243,5	15 735,7	4 526,3
1200	1 208,3	1 241,0	1 140,1	2 604,2	1 319,7	1 254,4	15 949,6	4 644,8
1300	1 217,9	1 251,4	1 148,4	2 658,6	1 331,4	1 264,4	16 155,7	
1400	1 226,7	1 260,6	1 156,4	2 708,9	1 341,5	1 272,8	16 369,1	
1500	1 234,7	1 268,6	1 163,9	2 755,3	1 349,5	1 279,9	16 554,2	

**Właściwości fizyczne SPALIN zawierających
13% CO₂ + 11% H₂O + 76% N₂ pod ciśnieniem 101,3 kPa = 760 Tr**

t °C	ρ kg/m ³	c_p kJ/kg·K	$\lambda \cdot 10^2$ W/m·K	$a \cdot 10^6$ m ² /s	$\eta \cdot 10^6$ kg/ms = =Ns/m ²	$\nu \cdot 10^6$ m ² /s	Pr
0	1,295	1,042	2,28	16,9	15,8	12,20	0,72
100	0,950	1,068	3,13	30,8	20,4	21,54	0,69
200	0,748	1,096	4,01	48,9	24,5	32,80	0,67
300	0,617	1,122	4,84	69,8	28,2	45,81	0,65
400	0,525	1,151	5,70	94,3	31,7	60,38	0,64
500	0,457	1,183	6,55	121,2	34,8	76,30	0,63
600	0,405	1,212	7,42	150,9	37,8	93,61	0,62
700	0,363	1,238	8,26	183,7	40,7	112,1	0,61
800	0,3295	1,263	9,15	219,5	43,4	131,8	0,60
900	0,301	1,288	10,00	258	45,9	152,5	0,59
1000	0,275	1,304	10,88	304	48,4	174,3	0,58
1100	0,257	1,322	11,74	346	50,8	197,1	0,57
1200	0,240	1,340	12,60	393	53,0	221,0	0,56

Właściwości fizyczne OLEJÓW technicznych

Rodzaj oleju	t °C	ρ kg/m ³	c kJ/kg·K	λ W/m·K	$a \cdot 10^6$ m ² /s	$\nu \cdot 10^6$ m ² /a	$\beta \cdot 10^4$ 1/K	Pr
Olej silnikowy lotniczy	20	893	1,838	0,145	0,0823	892	6,8	10 100
	40	881	1,922	0,143	0,0844	231	6,9	2 740
	60	868	2,005	0,141	0,0811	82	7,0	1 011
	80	856	2,089	0,140	0,0781	36,7	7,1	469
	100	844	2,177	0,137	0,0750	19,7	7,2	262
	120	832	2,269	0,136	0,0719	11,9	7,3	165
	140	819	2,361	0,134	0,0694	7,95	7,4	114
Olej wrzecionowy	20	871	1,851	0,144	0,0894	15,0	7,4	168
	40	858	1,934	0,143	0,0861	7,92	7,5	92
	60	845	2,018	0,142	0,0833	4,95	7,5	59,4
	80	832	2,102	0,141	0,0806	3,39	7,6	42,1
	100	820	2,186	0,140	0,0778	2,44	7,7	31,4
	120	807	2,269	0,138	0,0756	1,91	7,8	25,3
Olej transforma- torowy	0	892,5	1,549	0,1124	0,0814	70,5	6,80	866
	10	886,4	1,608	0,1115	0,0783	37,9	6,85	434
	20	880,3	1,645	0,1106	0,0756	22,5	6,90	298
	30	874,2	1,729	0,1098	0,0728	14,7	6,95	202
	40	868,2	1,788	0,1090	0,0703	10,3	7,00	146
	50	862,1	1,846	0,1082	0,0681	7,58	7,05	111
	50	856,0	1,905	0,1072	0,0658	5,78	7,10	87,8
	70	850,0	1,964	0,1064	0,0636	4,54	7,15	71*3
	80	843,9	2,026	0,1056	0,0617	3,66	7,20	59,3
	90	837,8	2,085	0,1047	0,0600	3,03	7,25	50,5
	100	831,8	2,144	0,1039	0,0583	2,56	7,30	43,9
	110	825,7	2,202	0,1030	0,0567	2,20	7,35	38,8
	120	819,6	2,261	0,1022	0,0550	1,92	7,40	34,9

Właściwości fizyczne OLEJU TURBINOWEGO 6

t °C	ρ kg/m ³	c kJ/kg·K	λ W/m·K	$a \cdot 10^8$ m ² /s	$\eta \cdot 10^6$ kg/ms = = Ns/m ²	$\nu \cdot 10^6$ m ² /s	Pr
0	908	1,784	0,1308	8,07	1 498 968	1650	20 445
5	904	1,801	0,1304	8,01	902 520	1000	12 465
10	901	1,818	0,1301	7,94	585 657	650	8 184
15	898	1,835	0,1297	7,87	372 780	415	5 274
20	895	1,851	0,1294	7,81	250 645	280	3 585
25	892	1,868	0,1289	7,74	173 637	195	2 516
30	888	1,889	0,1286	7,67	124 390	140	1 827
35	885	1,906	0,1282	7,60	87 505	99	1 301
40	882	1,923	0,1279	7,54	66 119	79	994
45	879	1,939	0,1275	7,48	50 129	57	762
50	876	1,956	0,1272	7,42	39 436	45	606
55	872	1,977	0,1268	7,36	30 509	35	476
60	869	1,994	0,1265	7,30	24 623	28,4	388
65	866	2,011	0,1261	7,24	20 306	23,5	324
70	863	2,027	0,1258	7,19	16 824	19,5	271
75	860	2,044	0,1254	7,13	14 175	16,5	231
80	856	2,065	0,1251	7,08	11 968	14	198
85	853	2,082	0,1247	7,02	10 202	12	170
90	850	2,099	0,1244	6,97	-	-	-
95	847	2,120	0,1240	6,91	-	-	-
100	844	2,136	0,1237	6,86	-	-	-

**Właściwości fizyczne OLEJU do SILNIKÓW wysokoprężnych
(SAE 50)**

t °C	ρ kg/m ³	c kJ/kg·K	λ W/m·K	$a \cdot 10^8$ m ² /s	$\eta \cdot 10^6$ kg/ms = = Ns/m ²	$\nu \cdot 10^6$ m ² /s	Pr
0	922	1,770	0,1287	7,88	-	-	-
5	918	1,7870	0,1283	7,82	2 383 830	2600	33 203
10	915	1,8058	0,1280	7,75	1 389 096	1520	19 597
15	912	1,822	0,1276	7,68	875 052	960	12 495
20	908	1,839	0,1273	7,62	563 094	620	8 135
25	906	1,856	0,1269	7,55	366 894	405	5 366
30	902	1,875	0,1266	7,49	252 117	280	3 734
35	899	1,893	0,1263	7,42	170 694	190	2 558
40	895	1,910	0,1259	7,36	120 663	135	1 831
45	892	1,927	0,1256	7,30	89 271	110	1 370
50	889	1,944	0,1252	7,24	67 394	76	1 046
55	886	1,963	0,1249	7,18	50 423	57	793
60	882	1,981	0,1245	7,13	39 632	45	631
65	879	1,998	0,1242	7,07	31 588	36	508
70	876	2,015	0,1238	7,01	25 407	29	414
75	873	2,034	0,1235	6,95	21 385	24,5	352
80	870	2,053	0,1231	6,89	17 363	20	290
85	866	2,069	0,1228	6,85	14 518	16,8	245
90	863	2,086	0,1224	6,80	12 262	14,2	209
95	860	2,103	0,1221	6,75	-	-	-
100	857	2,122	0,1217	6,69	-	-	-

Właściwości fizyczne OLEJU OPAŁOWEGO II
($\nu < 6^\circ \text{E}_{80}$)

t °C	ρ kg/m ³	c kJ/kg·K	λ W/m·K	$a \cdot 10^6$ m ² /s	$\eta \cdot 10^6$ kg/ms = = Ns/m ²	$\nu \cdot 10^6$ m ² /s	Pr
0	954	1,743	0,1243	0,0747	-	-	-
5	951	1,755	0,1239	0,0742	-	-	-
10	948	1,772	0,1236	0,0735	-	-	-
15	945	1,789	0,1232	0,0728	2 638 890	2800	38 320
20	942	1,805	0,1229	0,07221	1 549 980	1650	22 764
25	939	1,826	0,1225	0,0714	937 836	1000	13 980
30	936	1,843	0,1222	0,0708	570 942	610	8 611
35	933	1,860	0,1219	0,0702	363 460	390	5 546
40	930	1,881	0,1216	0,0694	251 136	270	3 885
45	928	1,893	0,1213	0,0690	176 089	190	2 748
50	925	1,914	0,1209	0,0683	125 568	136	1 988
55	922	1,931	0,1206	0,0677	90 252	98	1 445
60	919	1,948	0,1202	0,0671	67 885	74	1 100
65	916	1,965	0,1199	0,0666	51 289	57	841
70	913	1,886	0,1195	0,0659	41 005	45	681
75	910	1,998	0,1192	0,0655	32 765	36	549
80	907	2,019	0,1189	0,0649	25 800	28,5	438
85	904	2,036	0,1186	0,0644	21 483	23,8	369
90	901	2,053	0,1182	0,0638	17 265	19,2	300
95	899	2,069	0,1179	0,0634	14 420	16,1	253
100	896	2,086	0,1175	0,0629	12 507	14	222

Właściwości fizyczne CIEKŁEGO AMONIAKU na linii nasycenia

t °C	P _s kPa	r·10 ⁻³ J/kg	ρ' kg/m ³	ρ'' kg/m ³	c' kJ/kg·K	λ' W/m·K	a'·10 ⁶ m ² /s	η'·10 ⁶ kg/ms = Ns/m ²	v'·10 ⁶ m ² /s	σ'·10 ⁴ N/m	β'·10 ⁴ 1/K	Pr
-40	71,8	1387	690,0	0,645	4,45	0,630	0,205	-	-	510	17,28	1,95
-30	119,5	1359	677,7	1,038	4,46	0,608	0,200	241,5	0,355	427	18,32	1,77
-20	190,2	1328	665,0	1,604	4,50	0,585	0,195	202	0,304	348	19,32	1,56
-10	290,9	1296	652,0	2,390	4,54	0,562	0,190	173	0,264	298	20,25	1,38
0	429,4	1262	638,6	3,452	4,59	0,540	0,184	157	0,245	264	21,12	1,33
10	615,0	1226	624,7	4,859	4,64	0,517	0,178	146	0,234	234	22,54	1,31
20	857,2	1187	610,3	6,694	4,71	0,494	0,172	138	0,227	214	23,86	1,32
30	1166,5	1145	595,2	9,034	4,77	0,472	0,166	133	0,222	198	25,66	1,335
40	1554,3	1100	579,5	12,005	4,86	0,449	0,162	126	0,216	186	33,14	1,330

Właściwości fizyczne PARY AMONIAKU w stanie nasycenia

t °C	P _s kPa	r10 ⁻³ J/kg	ρ'' kg/m ³	c _p '' kJ/kg·K	λ'' W/mK	a''·10 ⁶ m ² /s	η''·10 ⁶ kg/m s	v'' 10 ⁶ m ² /s	Pr
-40	71,8	1387	0,645	2,28	0,0181	12,2	9,9	15,35	1,25
-30	119,5	1359	1,038	2,37	0,0191	7,78	10,4	10,00	1,29
-20	190,2	1328	1,604	2,45	0,0202	5,11	10,9	6,78	1,33
-10	290,9	1296	2,390	2,58	0,0210	3,42	11,3	4,72	1,38
0	429,4	1262	3,452	2,73	0,0220	2,34	11,8	3,42	1,46
10	615,0	1226	4,859	2,90	0,0230	1,64	12,4	2,55	1,56
20	857,2	1187	6,694	3,07	0,0240	1,168	13,0	1,93	1,65
30	1166,5	1145	9,034	3,28	0,0250	0,834	13,4	1,48	1,78
40	1554,3	1100	12,005	3,52	0,0259	0,611	13,9	1,16	1,90

Właściwości fizyczne CIEKŁEGO FREONU R 22 na linii nasycenia

t °C	P _s kPa	r·10 ⁻³ J/kg	ρ' kg/m ³	c' kJ/kg·K	λ' W/m·K	a'·10 ⁶ m ² /s	η'·10 ⁴ kg/ms	v'·10 ⁶ m ² /s	σ·10 ⁴ N/m	β'·10 ⁴ 1/K	Pr'
-50	64,3	238,47	1438,7	1,078	0,1244	0,0802	3,572	0,2483	198,2	19,4	3,098
-40	104,9	232,45	1410,3	1,090	0,1195	0,0777	3,259	0,2311	182,1	20,4	2,973
-30	163,6	225,87	1380,8	1,105	0,1147	0,0752	3,001	0,2173	166,1	21,7	2,890
-20	245,1	218,74	1350,3	1,124	0,1100	0,0725	2,781	0,2060	150,2	23,0	2,842
-10	354,7	211,05	1318,5	1,147	0,1053	0,0696	2,591	0,1965	134,5	24,6	2,823
0	498,1	202,81	1285,2	1,175	0,1006	0,0666	2,421	0,1884	119,0	26,5	2,828
10	681,2	194,03	1250,2	1,208	0,0958	0,0634	2,266	0,1813	103,7	28,7	2,857
20	910,1	184,66	1213,1	1,247	0,0910	0,0602	2,123	0,1750	88,7	30,5	2,908
30	1 191,4	174,62	1173,6	1,292	0,0861	0,586	1,986	0,1693	74,0	35,0	2,981
40	1 532,3	163,76	1130,8	1,344	0,0810	0,0533	1,854	0,1639	59,7	39,1	3,076
50	1 940,3	151,82	1083,9	1,405	0,0757	0,0497	1,720	0,1587	46,1	45,7	3,194

Właściwości termofizyczne PARY FREONU R 22 w stanie nasycenia

t °C	P _s kPa	r·10 ⁻³ J/kg	ρ'' kg/m ³	c _p '' kJ/kg·K	λ'' W/m·K	a''·10 ⁶ m ² /s	η''·10 ⁶ kg/ms	v''·10 ⁶ m ² /s	Pr''
-50	64,3	238,47	3,096	0,463	0,00635	3,575	9,64	3,12	0,873
-40	104,9	232,45	4,878	0,602	0,00704	2,398	10,16	2,08	0,868
-30	163,6	225,87	7,407	0,631	0,00773	1,654	10,67	1,44	0,870
-20	245,1	218,74	10,76	0,664	0,00843	1,169	11,17	1,03	0,879
-10	354,7	211,05	15,29	0,701	0,00915	0,843	11,66	0,75	0,894
0	498,1	202,81	21,23	0,744	0,00989	0,619	12,17	0,57	0,916
10	681,2	194,03	28,90	0,794	0,01068	0,460	12,69	0,43	0,944
20	910,1	184,66	38,76	0,853	0,01151	0,346	13,23	0,34	0,981
30	1 191,4	174,62	51,55	0,924	0,01241	0,261	13,81	0,27	1,029
40	1 532,3	163,76	67,57	1,013	0,01340	0,197	14,44	0,22	1,092
50	1 940,3	151,82	88,50	1,128	0,01450	0,148	15,14	0,17	1,178

Właściwości fizyczne CIEKŁYCH METALI

Metal	t °C	ρ kg/m ³	c kJ/kg·K	λ W/m·K	$a \cdot 10^6$ m ² /s	$\nu \cdot 10^8$ m ² /s	Pr
Rtęć (Hg) $t_{top} = -38,9^\circ\text{C}$ $t_s = 357^\circ\text{C}$	20	13 550	0,1391	7,9	4,4	11,4	0,0272
	100	13 350	0,1374	8,9	4,9	9,4	0,0192
	150	13 230	0,1374	9,6	5,3	8,6	0,0162
	200	13 120	0,1374	10,3	5,7	8,0	0,0140
	300	12 880	0,1374	11,7	6,6	7,1	0,0107
Cyna (Sn) $t_{top} = 231,9^\circ\text{C}$ $t_s = 1227^\circ\text{C}$	250	6 980	0,255	34,0	19,2	27,0	0,0141
	300	6 940	0,255	33,7	19,0	24,0	0,0126
	400	6 865	0,255	33,1	18,9	20,0	0,0106
	500	6 790	0,255	32,5	18,8	17,3	0,0092
Bizmut (Bi) $t_{top} = 271^\circ\text{C}$ $t_s = 1490^\circ\text{C}$	300	10 030	0,150	13,0	8,6	17,1	0,0198
	400	9 910	0,150	14,4	9,7	14,2	0,0146
	500	9 785	0,150	15,8	10,8	12,2	0,0113
	600	9 660	0,150	17,2	11,9	10,8	0,0091
Lit (Li) $t_{top} = 186^\circ\text{C}$ $t_s = 1317^\circ\text{C}$	200	515	4,187	37,2	17,2	111,0	0,0643
	300	505	4,187	38,9	18,3	92,7	0,0503
	400	494	4,187	41,8	20,3	81,7	0,0404
	500	484	4,187	45,3	22,5	73,4	0,0328
Sód (Na) $t_{top} = 97,3^\circ\text{C}$ $t_s = 878^\circ\text{C}$	150	916	1,357	84	68,3	59,4	0,0087
	200	903	1,328	81	67,8	50,6	0,0075
	300	978	1,282	70	63,1	39,4	0,0063
	400	854	1,275	63	58,9	33,0	0,0056
	500	829	1,273	56	54,2	28,9	0,0053
Stop 56,5%Bi+43,5%Pb $t_{top} = 123,5^\circ\text{C}$ $t_s = 1670^\circ\text{C}$	150	10 550	0,146	9,7	6,4	28,9	0,0450
	200	10 490	0,146	10,3	6,7	24,3	0,0364
	300	10 360	0,146	11,3	7,5	18,7	0,0250
	400	10 240	0,146	12,5	8,4	15,7	0,0187
	500	10 120	0,146	13,9	9,4	13,6	0,0144
Stop 25% Na + 75% K $t_{top} = -11^\circ\text{C}$ $t_s = 784^\circ\text{C}$	100	847	1,143	23,8	24,4	60,7	0,0248
	200	822	1,072	23,2	26,4	45,2	0,0171
	300	799	1,038	22,6	27,5	36,6	0,0134
	400	775	1,000	22,0	28,6	30,8	0,0108
	500	751	0,967	21,5	29,7	26,7	0,0090

Właściwości fizyczne WODY MORSKIEJ

t °C	Zaso- lenie °Br*)	ρ kg/m ³	c kJ/kg·K	λ W/m·K	$a \cdot 10^6$ m ² /s	$\eta \cdot 10^6$ kg/ms = Ns/m ²	$\nu \cdot 10^6$ m ² /s	Pr
0	1000		4,074	0,540		1805		13,62
	2000		4,003	0,531		1814		13,68
	3000		3,952	0,528		1824		13,65
	4000		3,894	0,524		1834		13,63
5	1000		4,066	0,547		1530		11,37
	2000		3,994	0,539		1545		11,45
	3000		3,944	0,536		1554		11,43
	4000		3,886	0,532		1563		11,42
10	1000	1008,8	4,061	0,555	0,135	1321	1,310	9,66
	2000	1017,1	3,990	0,548	0,135	1334	1,312	9,70
	3000	1023,0	3,940	0,544	0,135	1349	1,319	9,78
15	1000	1008,0	4,053	0,563	0,138	1153	1,143	8,32
	2000	1016,3	3,982	0,555	0,138	1165	1,145	8,36
	3000	1022,1	3,934	0,552	0,137	1177	1,150	8,39
20	1000	1007,2	4,049	0,570	0,140	1020	1,012	7,24
	2000	1015,3	3,978	0,563	0,139	1032	1,020	7,30
	3000	1021,0	3,927	0,560	0,140	1045	1,022	7,33
25	1000	1006,0	4,046	0,578	0,142	906	0,900	6,35
	2000	1014,0	3,973	0,571	0,142	917	0,904	6,38
	3000	1019,6	3,925	0,568	0,142	932	0,916	6,44
30	1000	1004,7	4,045	0,586	0,144	816	0,810	5,64
	2000	1012,5	3,973	0,579	0,144	829	0,819	5,69
	3000	1018,0	3,923	0,576	0,144	839	0,824	5,72
35	1000	1003,0	4,045	0,593	0,146	754	0,750	5,14
	2000	1010,8	3,973	0,587	0,146	765	0,756	5,17
	3000	1016,0	3,921	0,584	0,147	775	0,763	5,22

*) I° Br (Brandta) - określony jest zawartością soli równoważną 10 mg chlorku sodu (NaCl) w 1 l wody.

Zasolenie mórz

Akw en	Gęstość kg/dm ³	Zasolenie °Br (Brandta)
Morze Bałtyckie: Zatoki: Botnicka i Fińska Część środkowa i połudn. Część zachodnia Cieśniny Duńskie Kattegat	1,0005 ... 1,0050 1,0040 ... 1,0060 1,0045 ... 1,0100 1,0070 ... 1,0120 1,0100 ... 1,0240	200 ... 600 600 ... 800 600 ... 1800 800 ... 2000 1400...3000
Morze Północne	1,024 ... 1,025	3400
Ocean Atlantycki	1,025 ... 1,027	3500 ... 3690
Morze Śródziemne		do 4100
Morze Czarne	1,015 ... 1,018	1000 ... 1850
Morze Czerwone		do 4100
Ocean Indyjski	1,025 ... 1,032	3200 ... 3750
Ocean Spokojny	1,025 ... 1,037	3400 ... 3690
Ocean Lodowaty Północny	1,024 ... 1,025	3500

Właściwości cieplne STALI dla urządzeń energetycznych

Gatunek stali*	Właściwość	Wartość przy temperaturze [°C]						
		200	100	200	300	400	500	600
St 36K (P235GH) St 41K (P265GH)	c [kJ/kg·K]	0,46	0,49	0,52	0,56	0,61	0,68	-
	λ [W/m·K]	54,5	52,5	50	47	44	41	-
	$a \cdot 10^6$ [m ² /s]	15	14	13	11	9	8	-
St 44K (P355GH)	c [kJ/kg·K]	0,46	0,49	0,52	0,56	0,61	0,65	0,76
	λ [W/m·K]	56	53	51	48	45	41	36
	$a \cdot 10^6$ [m ² /s]	14	14	12	10	9	8	-
K 10 K 18	c [kJ/kg·K]	0,46	0,49	0,52	0,54	0,63	0,70	0,80
	λ [W/m·K]	52	50,5	48	45	42,5	40	-
	$a \cdot 10^5$ [m ² /s]	15	14	12	11	9	7	6
16M (16Mo3) 20M	c [kJ/kg·K]	0,46	0,49	0,50	0,54	0,63	0,71	0,80
	λ [W/m·K]	49	48	46	43	40,5	37,5	35
	$a \cdot 10^6$ [m ² /s]	14	13	12	10	9	7	6
15HM (13CrMo 4-5)	c [kJ/kg·K]	0,46	0,48	0,50	0,54	0,63	0,71	0,80
	λ [W/m·K]	44	43	41	39	37	34	31
	$a \cdot 10^6$ [m ² /s]	12	12	11	10	8	7	6
10H2M (10CrMo 4-5)	c [kJ/kg·K]	0,4	0,4	0,5	0,5	0,6	0,68	0,7
	λ [W/m·K]	38	38	37	35	33	31	29
	$a \cdot 10^6$ [m ² /s]	10	10	9	9	8	7	6
13HMF (14MoV 6 3)	c [kJ/kg·K]	0,46	0,50	0,50	0,54	0,63	0,71	0,80
	λ [W/m·K]	44	43	41	40	37	34	31
	$a \cdot 10^6$ [m ² /s]	12,1	11,3	9,9	9,0	8,0	7,1	6,0
15NCuMNB (15NiCuMoNb 5-6-4)	c [kJ/kg·K]	0,46	0,49	0,52	0,56	0,61	0,68	0,78
	λ [W/m·K]	38	40	41	40	39	38	35
	$a \cdot 10^6$ [m ² /s]	11	11	10	9	8	7	6

* Oznaczenia stali podane pierwotnie wg normy PN – 75 / H – 84 024, zostały uzupełnione współczesnymi oznaczeniami (w nawiasach) według norm PN – EN 10 246 – 2 i in.

Właściwości fizyczne CIAŁ STAŁYCH

Substancja	t °C	ρ kg/m ³	c kJ/kg·K	λ W/m·K	$a \cdot 10^6$ m ² /s
Metale					
Cyna	20	7 310	0,23	59,9	35,6
Cynk	20	7 140	0,385	112,1	41,1
Glin (99,1%)	20	2 696	0,879	206,0	87,0
Miedź (99,999%)	20	8 930	0,381	395,5	116,2
	600	8 700	0,456	344,2	86,8
Żelazo	20	7 870	0,452	78,6	22,1
Brąz (75% Cu, 25% Sn)	20	8 660	0,343	25,9	87,2
Mosiądz (70% Cu, 30% Zn)	20	8 520	0,385	110,6	33,8
Duraluminium (94..96% Al, 3..5% Cu, 0,5% Mg)	20	2 800	0,883	164,5	66,5
Stal węglowa (0,3% C) hart.	0	7 803	0,444	40,0	11,6
	900	7 549	0,573	28,0	6,5
Stal chromowa (1% Cr)	20	7 860	0,461	60,6	16,7
10% " " Cr)	20	7 780	0,461	31,2	8,7
Stal chromo - niklowa (25% Cr, 20% Ni)	20	7 860	0,461	12,8	3,5
Żeliwo (4% C)	20	7 270	0,419	51,9	17,1
Materiały budowlane					
Cegła czerwona	0	1 800	0,379	0,768	0,486
Tynk (zaprawa wapienna)	-	1 600	0,837	0,698... ..0,872	0,522.. ...0,65
Mur ceglany	0	1 700	0,879	0,814	0,545
Mur kamienny	-	2 680	0,922	3,2	0,13
Cegła szamotowa	0	1 800... ...1 900	0,879	0,838	0,50... ...0,53
Gлина ogniotrwała	450	1 845	1,09	0,931	0,463
Beton z żwirem kamiennym	20	2 000	0,837	1,279	0,764
" " ceglanym	20	1 900	0,837	1,163	0,732
		1 200	0,754	0,524	0,579
Beton żuźlowy	0	1 500	0,754	0,675	0,596
Żelazobeton	60	2 200	0,837	1,548	0,84
Pianobeton (1.5% wilg.)	25	360	0,795	0,0954	0,334
Ziemia sucha (grunt nie - urodzajny)	25	1 310	0,837	0,279	0,254
Ziemia gliniasta (42% wilgotności)	20	1 960	1,155	1,49	0,72
Sosna \perp do włókien	0... ...50	546	2,74	0,139... ...0,163	0,093... ...0,109
Sosna \parallel do włókien	20... ...25	546	2,74	0,349... ...0,722	0,234... ...0,591
Sosna \perp do włókien (44,3% wilg.)	5	713	2,97	0,291	0,137

Właściwości fizyczne CIAŁ STAŁYCH (c.d.)

Substancja	t °C	ρ kg/m ³	c kJ/kg·K	λ W/m·K	$a \cdot 10^6$ m ² /s
Materiały termoizolacyjne					
Alfol	50	20		0,0465	-
Korek płyty	80	147...198	1,76	0,042...0,054	0,153...0,161
Korek luźny, suchy, Φ 4...5 mm	0...60	85	1,76	0,044...0,058	0,294...0,389
Keramzyt luźny				0,070...0,150	
Pianka poliuretanowa		30...150	1,46	0,020...0,045	
Polietylen komórkowy	10 40	30...40		0,033 0,038	
Styropian		15...50	1,5	0,032...0,050	
Szkoło piankowe				0,035...0,055	
Wata mineralna	50	40...200	0,922	0,030...0,050	0,303
Wata szklana	0	60...200	0,670	0,030...0,052	0,278
Wata żuźlowa	20 170	100 300	0,741 0,837	0,047 0,083	0,627 0,329
Azbest karton	0	900	0,816	0,163	0,222
Azbest włókno	50 50	50 470	0,816 0,816	0,058 0,163	0,142 0,424
Inne					
Kamień kotłowy gipsowy	100...300	2000...2700	0,84	0,60...2,6	-
Kamień kotłowy wapienny	100...300	1000...500	-	0,15...1,83	-
Kamień kotłowy krzemionkowy	100...300	300...1200	-	0,08...0,27	-
Sadza lampowa	40	190	-	0,0314	-
Bakelit	20	1273	1,59	0,232	0,115
Ebonit	20	1200	1,42	0,163	0,096
Kauczuk	20	920...960	2,09	0,128...0,163	0,066...0,081
Guma miękka (80% kauczuku) i twarda	20	1200	1,42	0,157	0,0922
Guma porowata	20	160	1,382	0,050	0,226
Płyta pilśniowa porowata		300	1,7	0,070	
Płyta pilśniowa twarda		1000	1,7	0,18	
Płyta wiórowo - cementowa		450 600	1,5	0,24 0,15	

Właściwości fizyczne CIAŁ STAŁYCH (dok.)

Substancja	t °C	ρ kg/m ³	c kJ/kg·K	λ Wm·K	$a \cdot 10^6$ m ² /s
Poliamidy (stilon, perlon)	20	1080...1140	1,80...1,885	0,209...0,256	0,108...0,119
Polichlorek winylu (ze zmiękczaczem)	20	1200...1500	1,34...2,14	0,163...0,175	0,055...0,111
Polietylen	20	900...1000	2,51	0,348...0,466	0,153...0,185
Polistyren	20	1055...1200	1,255	0,128...0,163	0,099...0,074
Linoleum		1100	1,884	0,186	0,090
Skóra sucha	20	900.. 1000	1,255.. 1,675	0,139.. 0,163	0,097.. 0,122
Tekstolit	20	1 300. . 1 400	1,507	0,233.. 0,337	0,147
Szkło zwykłe	20	2500	0,67	0,744	0,444
Szkło kwarcowe	20	2200	0,712	1,338	0,852
Porcelana	95	2400	1,09	1,035	0,395
	1055	2400	1,09	1,965	0,752
Lód	0	920	2,26	2,25	1,08
Śnieg świeży		200	2,1	0,10	0,238
Śnieg stary	-	400	2,1	0,48	0,571
Węgiel kamienny	20	1400	1,297	0,186	0,1025
Pył węglowy	-	-	-	0,095.. 0,110	-
Sadza sucha	40	165	-	0,07.. 0,12	-
Powłoka malarska	-	-	-	2,32	-

Współczynniki rozszerzalności liniowej α_L METALI

Metal	t °C	$\alpha_L \cdot 10^3$ 1/K	Metal	t °C	$\alpha_L \cdot 10^3$ 1/K	
Brąz	-190	-0,0284	Stal konstrukcyjna	-190	-0,0167	
	100	0,0175		100	0,0120	
	200	0,0358		200	0,0251	
	300	0,0550		300	0,0392	
	400	0,0751		400	0,0546	
Miedź	-190	-0,0265		500	0,0706	
	100	0,0165		600	0,0879	
	200	0,0338		700	0,1063	
	300	0,0515		Stal stopowa 18%Cr, 8%Ni	100	0,016
	400	0,0751		Stal chromowa	100	0,010...0,014
Mosiądz	-190	-0,0311	Stal chromowo - niklowo - molibdenowa	100	0,011	
	100	0,0184				
	200	0,0385				
	300	0,0603				
	400	0,0839				

D O D A T E K

TOK POSTĘPOWANIA PRZY PROJEKTOWANIU PRZEPOŃOWEGO WYMIENNIKA CIEPŁA

W projektowaniu wymienników ciepła ogromną rolę odgrywają obliczenia. Są to obliczenia przede wszystkim cieplne i hydrauliczne a potem konstrukcyjno - wytrzymałościowe.

Obliczenia przy pomocy gotowych programów mogą jednak być stosowane jedynie w odniesieniu do pewnych grup aparatów charakteryzujących się określoną budową i przeznaczeniem. W przeważającej liczbie przypadków konstruktor projektujący wymiennik zdany jest na swoje doświadczenie i intuicję z jednej strony, a z drugiej na bogaty materiał teoretyczny i empiryczny tworzący uporządkowaną wiedzę o zjawiskach przenoszenia ciepła, przedstawiony w głównych zarysach w niniejszym podręczniku. Zawsze jednak należy zaopatrzyć się w literaturę dotyczącą typu wymiennika, jaki się projektuje. Zawiera ona specyficzne wymagania i warunki oraz wskazówki i sugestie wynikające z nagromadzonego w danej dziedzinie doświadczenia.

Zalecany tok postępowania można ująć w niżej podanych punktach. Należy je realizować w podanej kolejności.

1. Bilans cieplny

Ma on następującą postać:

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 (i'_1 - i''_1) - \dot{Q}_{ot} = \dot{m}_2 (i'_2 - i''_2)$$

albo:

$$\dot{Q} = \dot{m}_1 (i'_1 - i''_1) (1 - x) = \dot{m}_2 (i'_2 - i''_2)$$

i pozwala określić strumień cieplny, jaki musi być przeniesiony poprzez przegrodę rozdzielającą obydwie płyny.

Wielkość względnej straty cieplnej:

$$x = \frac{\dot{Q}_{ot}}{\dot{Q}_1} = \frac{\dot{Q}_{ot}}{\dot{m}_1 (i'_1 - i''_1)}$$

waha się w granicach: 0,005...0,03 dla wymienników izolowanych, z tego w wymiennikach stosowanych w energetyce: 0,005...0,01, a w okrętowych: 0,02...0,03.

W wymiennikach nieizolowanych względna strata cieplna może wynosić: 0,05...0,07.

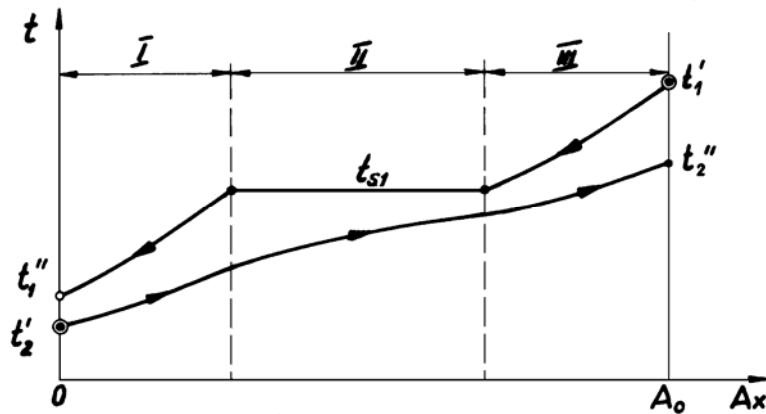
W obliczeniach wstępnych wskazane jest jednak pominąć tę wielkość całkowicie. Skutkiem będzie pozorne zwiększenie obciążenia cieplnego wymiennika Q i wyznaczenie nieco większej niż trzeba powierzchni.

Jednak potem, na etapie ostatecznego doboru wymiarów wymiennika, można stratę ciepła uwzględnić znacznie dokładniej, bo jako stratę obliczoną z wielkości charakteryzujących znany już wtedy dokładnie wymiennik.

W przypadku skraplaczy i parowników strumień cieplny \dot{Q} przenikający przez przegrodę oblicza się oczywiście przy pomocy ciepła parowania:

$$\dot{Q} = \dot{m} r$$

Należy od razu zauważyć, że jeżeli (co prawie zawsze ma miejsce) poza zmianą stanu skupienia w postaci wrzenia czy skraplania płynu jest jeszcze ogrzewany lub ochładzany, to każdy z tych procesów oblicza się oddzielnie, tak jak by do tego był potrzebny odrębny aparat, a jedynie w rozwiązaniu konstrukcyjnym łączy się je w jedną całość (często jednak z wyodrębnionymi konstrukcyjnie częściami – stosownie do wymagań cieplno-przepływowych, jakie trzeba spełnić). Na przykład podgrzewacz regeneracyjny wody zasilającej kocioł w siłowni parowo – turbinowej wykazuje przebieg temperatury przedstawiony na rys. D1. Para przegrzana najpierw jest ochładzana do temperatury nasycenia (wymiennik gaz-ciecz), potem się skrapla (skraplacz) i wreszcie powstałe skropliny ulegają dalszemu ochładzaniu (wymiennik typu: ciecz - ciecz). Tymczasem woda zasilająca jest cały czas podgrzewana i jej temperatura wzrasta monotonicznie. W jednej całości konstrukcyjnej są tu: dwa wymienniki zasadniczo przeciwprądowe, a między nimi skraplacz. Tymczasem obliczenia cieplno-przepływowe muszą być wykonane oddzielnie dla każdej części.



Rys.D1 Przebieg temperatury w trzystrefowym podgrzewaczu wody

2. Wybór układu przepływowego

Przeważnie wybiera się układ przeciwprądowy, przepływ poprzeczny lub mieszany, czyli poprzeczno - przeciwprądowy (o ile nie ma skraplania lub wrzenia - wtedy kierunki przepływu nie mają znaczenia). Umożliwia to wykonanie szkicu przebiegu temperatury i obliczenie średniej różnicy temperatur: Δt_{sr} .

3. Przyjęcie rodzaju i rozmiarów poprzecznych przegródy

Przede wszystkim trzeba zdecydować się na wybór rodzaju przegród w postaci płyty lub rurek. Regułą jest wybór rurek. Jeżeli chodzi o płyty, to decydujące znaczenie mają możliwości technologiczne zakładu w zakresie wytlaczania odpowiednio ukształtowanych płyt.

W przypadku powszechnie stosowanych rurek istotna jest dyslokacja płynów względem ścianki.

I tak do wnętrza rurek kieruje się ten płyn, który:

- odkłada zanieczyszczenia - czyszczenie wnętrza prostych rurek jest łatwiejsze od czyszczenia powierzchni zewnętrznej pęku rur, który to pęk trzeba jeszcze do oczyszczenia wyciągnąć z walczaka (płaszcz);
- wykazuje agresywność chemiczną względem tworzyw konstrukcyjnych – można wtedy stosować tańszy materiał na płaszcz;
- ma wyższe ciśnienie - umożliwia to zaoszczędzenie materiału płaszcz; wskutek zmniejszenia jego grubości (rurki i tak muszą wytrzymać pełne ciśnienie) - dotyczy to ciśnień powyżej 2 MPa.

Z drugiej strony należy kierować na zewnątrz rurek płyn, który:

- ma większy strumień masy \dot{m} [kg/s];
- jest gazem lub płynem, który ma dużą lepkość - przez manipulacje średnicą i podziałką rur oraz rozstawem przegród poprzecznych (o ile są) można uzyskać, przy danym Δp , współczynniki przejmowania ciepła α większe niż w przepływie wewnątrz rur,
- nie może przekroczyć pewnego określonego spadku ciśnienia w wymienniku: Δp_{\max} - przez manipulację tymi samymi elementami jak pod (b) można utrzymać spadek ciśnienia na pożądanym poziomie.

W praktyce zdarza się często, że występują sprzeczne wymagania, takie że ich równoczesne spełnienie jest niemożliwe - wtedy konieczny jest rozsądny kompromis oparty na intuicji i doświadczeniu konstruktora. Należy przy tym pamiętać, że najczęstszymi przyczynami wypadnięcia wymiennika z ruchu, a tym samym awarii całej instalacji, są: korozja, erozja i nadmierne osady.

Dobór średnicy rurek i ich podziałki ma podstawowe znaczenie dla zwartości budowy wymiennika. **Zwartość budowy**, wyrażona stosunkiem powierzchni przenoszącej ciepło (A) do objętości aparatu (V), jest tym większa, im mniejsza jest średnica rurek (d) i im mniejsza jest ich podziałka (s).

Stosowane średnice nominalne rurek (równe w przybliżeniu ich średnicom wewnętrznym) zawarte są w dość szerokich granicach:

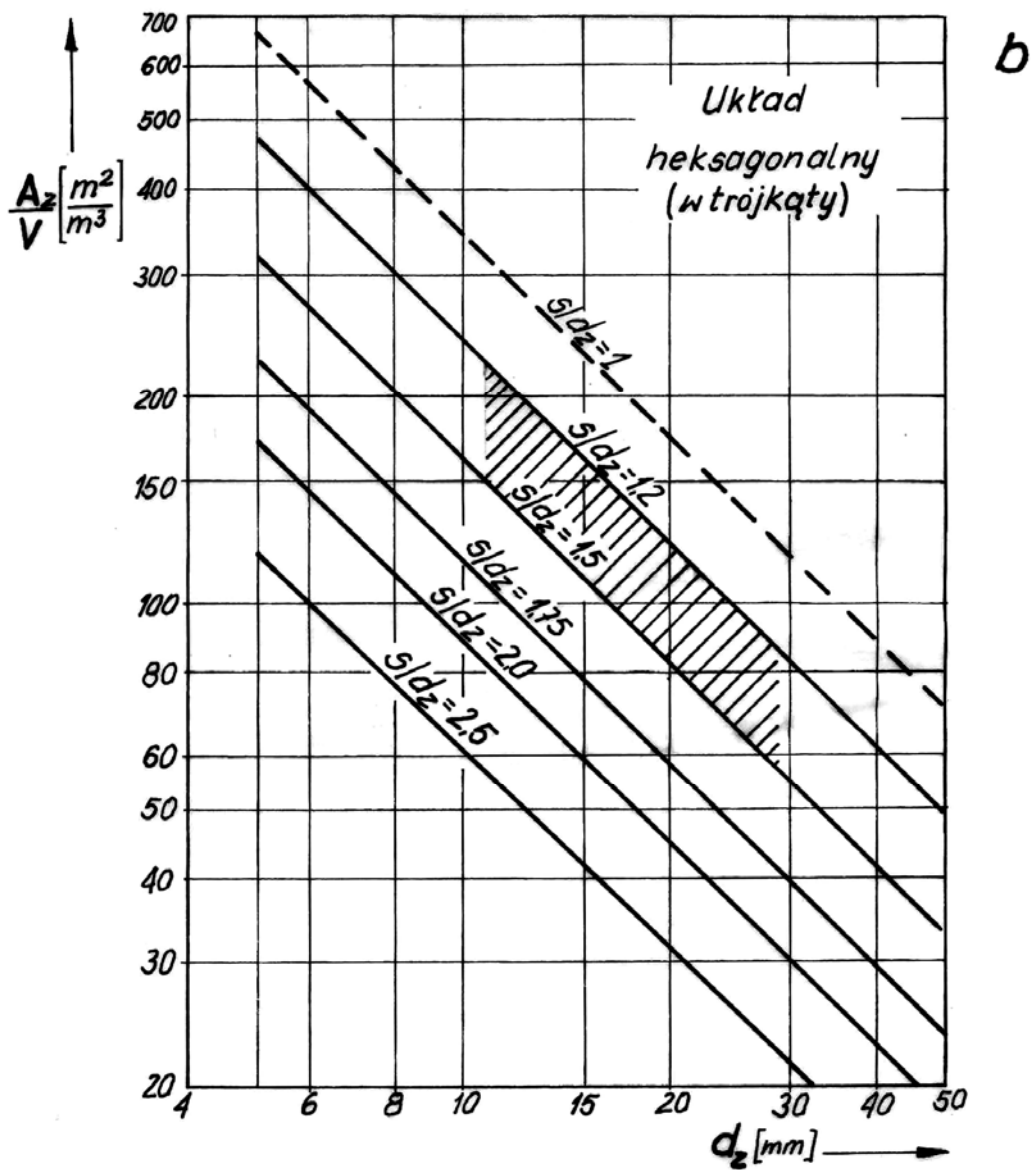
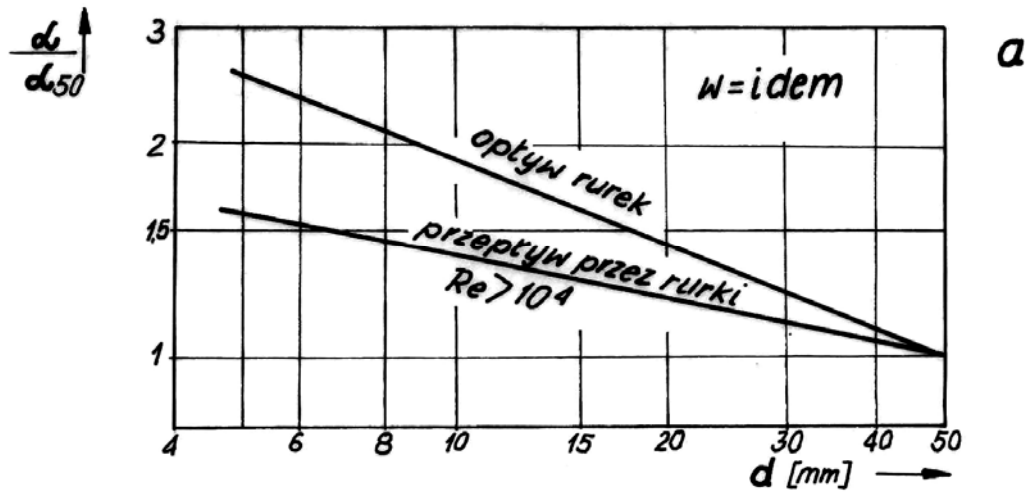
$$d_{\text{nom}} \approx d_w = 6 \dots 10 \dots 25 \dots 40 \text{ mm}$$

jednak w praktyce większość wykonań mieści się w podkreślonym, węższym zakresie.

Podziałki rur powinny się mieścić w zakresie:

$$s = (1,25 \dots 1,5 \dots 1,5) \cdot d \quad \text{dla rur rozwalcowanych}$$

$$s = (1,20 \dots 1,35) \cdot d \quad \text{dla rur wstawianych}$$



Rys.D2 Wpływ średnicy rurek na
 a) współczynnik przejmowania ciepła α ,
 b) zwartość budowy wymiennika wyrażoną pojemnością powierzchni $\frac{A_z}{V}$.

Najczęściej stosuje się jednak podziałki w zakresie:

$$s = (1,25 - 1,30) \cdot d$$

Podkreślone wyżej zakresy średnic i podziałek rur dają pojemności powierzchni w granicach:

$$\frac{A_o}{V} = 250 \dots 55 \text{ m}^2/\text{m}^3$$

przy preferowanym układzie *h e k s a g o n a l n y m* (w trójkąty).

Podany korzystny wpływ malejącej średnicy rurki na zwartość budowy wymiennika wyrażoną stosunkiem A_z/V wynika z zależności czysto geometrycznych. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że mniejsze średnice rurek dają ponadto większe współczynniki przejmowania ciepła (przy tej samej prędkości przepływu), co prowadzi poprzez większy współczynnik przenikania ciepła k do mniejszej ogólnej powierzchni wymiennika $A_z = A_o$, a więc do mniejszych rozmiarów bezwzględnych wymiennika.

Rozmieszczenie rur w układzie *o r t o g o n a l n y m* (w kwadraty) stosowane jest bardzo rzadko i to głównie dla ułatwienia mechanicznego czyszczenia zewnętrznej powierzchni rur. Wtedy odstępy rur powinny być dostatecznie duże i wynosić:

$$s - d_z \geq 12 \text{ mm}$$

Ten warunek liczbowy dotyczy również układu heksagonalnego, ale odnosi się wtedy do szczelin: poziomej i skośnej między rurkami i tam $f \geq 12 \text{ mm}$ (rys. D3).

W przypadku rur rozwałcowanych konieczna jest dostateczna szerokość mostka między otworami w płycie sitowej: $m = s - d_z$. Wymaga się, aby dla: $d_z = 10 \text{ mm}$ było: $m \geq 3,5 \text{ mm}$, dla $d_z = 16 \text{ mm}$: $m \geq 5 \text{ mm}$ i dla $d_z = 25 \text{ mm}$: $m \geq 8,5 \text{ mm}$.

4. Wstępne przyjęcie prędkości przepływu wewnątrz rur

Odbywa się to na podstawie danych z tab. 4 lub, co jest najbardziej wskazane, danych z literatury dotyczącej dziedziny projektowanego aparatu. Należy w miarę możliwości dążyć do uzyskania rozwiniętego przepływu turbulentnego ($Re \geq 10\ 000$), ale nie można przekraczać pewnych prędkości granicznych dla cieczy (zwłaszcza wody morskiej) ze względu na przyspieszoną *e r o z j ę* materiału przy dużych prędkościach.

Z drugiej strony dla zapobieżenia odkładaniu się zanieczyszczeń, prędkości nie mogą być zbyt małe i powinny wynosić np. dla spalin $w \geq 10 \text{ m/s}$, a dla wody chłodzącej $w \geq 1,0 \text{ m/s}$.

Mając prędkość w wyznacza się z równań:

$$\dot{m}_{\text{wewn.}} = A_p w \rho$$

$$A_p = n \frac{\pi d_w^2}{4}$$

liczbę rur, przez które przepływa płyn w pierwszym biegu:

$$n = \frac{\dot{m}_{\text{wewn.}}}{w \rho \frac{\pi d_w^2}{4}}$$

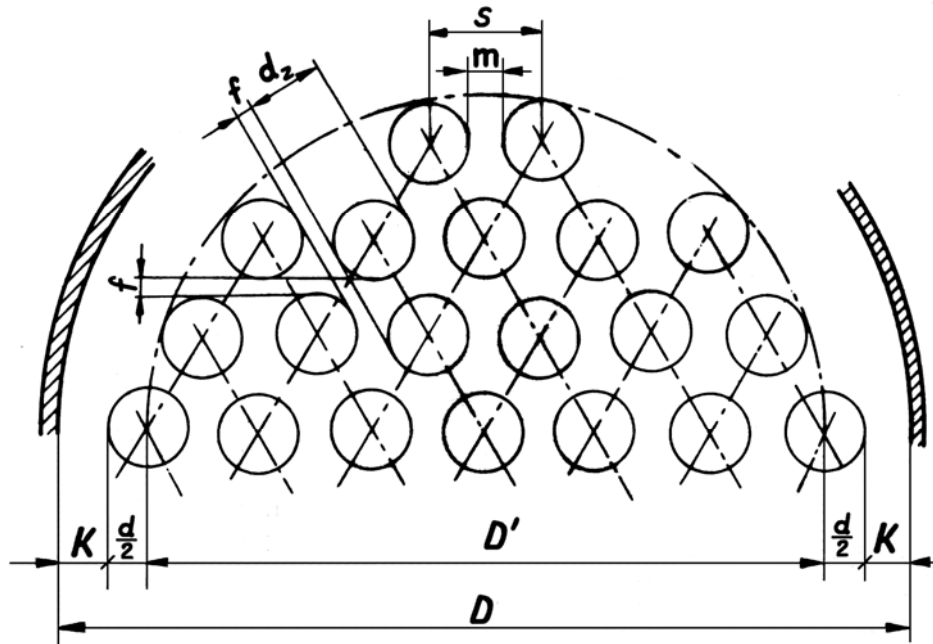
Mając niezbędną liczbę rur n można określić średnicę wewnętrzną płaszcza dla pojedynczego albo wielokrotnego przepływu:

$$D = D' + d_z + 2 K$$

Średnicę pęku rur D' określa się przy pomocy tablicy D1. Zawiera ona względne wartości D'/s , które pozwalają obliczyć:

$$D' = \left(\frac{D'}{s}\right) \cdot s$$

Przy rozwiązaniu wieloprzepływowym (wielobiegowym) należy oczywiście wchodzić do tabl. D1 z odpowiednio zwielokrotnioną liczbą rur.



Rys. D3 Wymiary heksagonalnego układu rurek

Wielkość: $K \geq s - d_z$ jest tu odstępem skrajnej rurki w pęku od płaszcza i zależy od konstrukcji wymiennika, a przede wszystkim płyt sitowych. Ze względu na pożądaną równomierny rozdział płynu pomiędzy wszystkie rurki w szeregu, powinno K być równe połowie odstęp między rurkami:

$$K \approx \left(\frac{m}{2}\right) = 0,5 (s - d_z)$$

W praktyce konstrukcja płyty sitowej powoduje, że odstęp ten jest większy. W obliczeniach wstępnych można przyjmować orientacyjnie:

$$K = (0,02 \dots 0,04) D$$

Pewną orientację dają też wykonane konstrukcje, np. w amerykańskim przemyśle petrochemicznym, w wymiennikach o małych i umiarkowanych średnicach D , przy średnicach rurek: 19 i 25 mm, szerokości szczelin przy płaszczu są następujące:

- $K = 11 \dots 12$ mm dla wymienników o stałych płytach sitowych (bez kompensacji) lub z rurkami U,
- $K = 29 \dots 37$ mm dla wymienników z głowicą swobodną,
- $K = 22 \dots 52$ mm dla wymienników z kompensacją dławikiem.

Szczeliny szersze od $K = 0,5 \cdot (s - d_z)$ powodują odpływ tą drogą dodatkowego strumienia płynu (rys. 5.48b) omijającego pęk rur i pogarszają w ten sposób przejmowanie ciepła w pęku rur. Jeżeli więc zbliżenie się do wartości teoretycznej K nie jest możliwe, to należy stosować odpowiednie listwy dławiące (uszczelniające) w tej szczelinie.

Ponadto należy dążyć, o ile to możliwe, do wypełnienia wolnych segmentów przy płaszczu rurkami nawet nieczynnymi (ew. prętami).

Średnicę D można również obliczyć (przy bardzo dużej liczbie rur, np. w skraplaczach energetycznych) przy pomocy tzw. stopnia zapełnienia płyty sitowej rurami η_z :

$$D' = 1,05 s \sqrt{\frac{n}{\eta_z}}$$

gdzie: $\eta_z = 0,8 \dots 1,0$ dla wymienników 1-biegowych,
 $\eta_z = 0,7 \dots 0,85$ dla wymienników 2-biegowych,
 $\eta_z = 0,6 \dots 0,8$ dla wymienników 4 i więcej biegowych.

Ponadto:

$\eta_z = 0,75 \dots 0,82$ dla skraplaczy 1-biegowych,
 $\eta_z = 0,72 \dots 0,78$ dla skraplaczy i więcej biegowych.

Podane liczby odnoszą się do układu heksagonalnego (w trójkąty).

5. Obliczenie współczynnika przenikania ciepła k

W tym celu oblicza się współczynniki przejmowania ciepła na wewnętrznej i zewnętrznej stronie rur (α_1 i α_2) oraz zakłada w oparciu o przewidywane warunki ruchowe jakość i grubość osadów oraz produktów korozji na powierzchniach rur po to, by do obliczeń wprowadzić opór cieplny tych osadów.

Gdy stosunek wyższego współczynnika α_w do niższego α_n :

$$\frac{\alpha_w}{\alpha_n} > 2 \dots 3 \text{ (ew. } 4 \dots 5)$$

można rozważyć, czy po stronie α_n nie dać żeber lub elementów intensyfikujących przejmowanie ciepła (jednak w przypadku płynu odkładającego zanieczyszczenia nie jest to wskazane).

W przypadku skraplaczy lub parowników wyznacza się współczynnik przenikania ciepła k w sposób podany w rozdziale 8. części V.

Potrzebną w przypadku skraplania pary wodnej w skraplaczach energetycznych charakterystyczną (średnią) temperaturę skroplin można w pierwszym przybliżeniu określić ze wzoru:

$$t_{\text{char}} \approx t_s - 0,8 \Delta t_{\text{sr, log}}$$

Jeżeli współczynnik przenikania ciepła k zmienia się silnie wzdłuż powierzchni wymiennika, to średnią wartość iloczynu $(k \cdot \Delta t)_{\text{sr}}$ określa się w sposób podany w książce T. Hoblera^{*}).

^{*}) T.Hobler: „Ruch ciepła - wymienniki”. WNT, Warszawa 1986.

Liczby rurek wypełniających koło o średnicy D'
przy określonej podziałce s

D'/s	Liczba rurek	D'/s	Liczba rurek
0	1	16	241
2	7	16,45	253
3,5	13	17,15	265
4	19	17,4	271
5,35	31	17,55	283
6	37	17,8	295
6,95	43	18	301
7,25	55	18,35	313
8	61	19,1	337.
8,75	73	19,4	349
9,2	85	19,75	361
10	90	20	367
10,6	109	22	439
11,2	121	24	517
12	127	26	613/613
12,2	139	28	703/721
12,6	151	30	817/823
13,15	163	32	/931
15,65	169	34	/1045
14	187	36	/1165
14,5	199	38	/1306
15,5	211	40	/1459
15,7	223		

Liczby na prawo od kreski (/...) oznaczają liczby rur łącznie z tymi, którymi zapełniono segmenty przy płaszczu.

6. Obliczenie nominalnej powierzchni przenoszenia ciepła

Przy wyznaczaniu nominalnej wielkości powierzchni wymiennika stosuje się współczynnik bezpieczeństwa β :

$$A_o = \frac{\dot{Q}}{k \Delta t_{sr}} \beta$$

Współczynnik β zabezpiecza końcowy wynik obliczeń przed błędami, jakimi obarczone są empiryczne zależności do wyznaczania współczynników α_1 i α_2 (zob. rys.D6) oraz przed mogącymi się pojawić nieprzewidzianymi oporami cieplnymi ścianki δ/λ i przed innego rodzaju nieznanymi wpływami.

Na ogół jest:

$$\beta \leq 1,30$$

ale może on przyjmować wartości większe - dochodzące do 2,0.

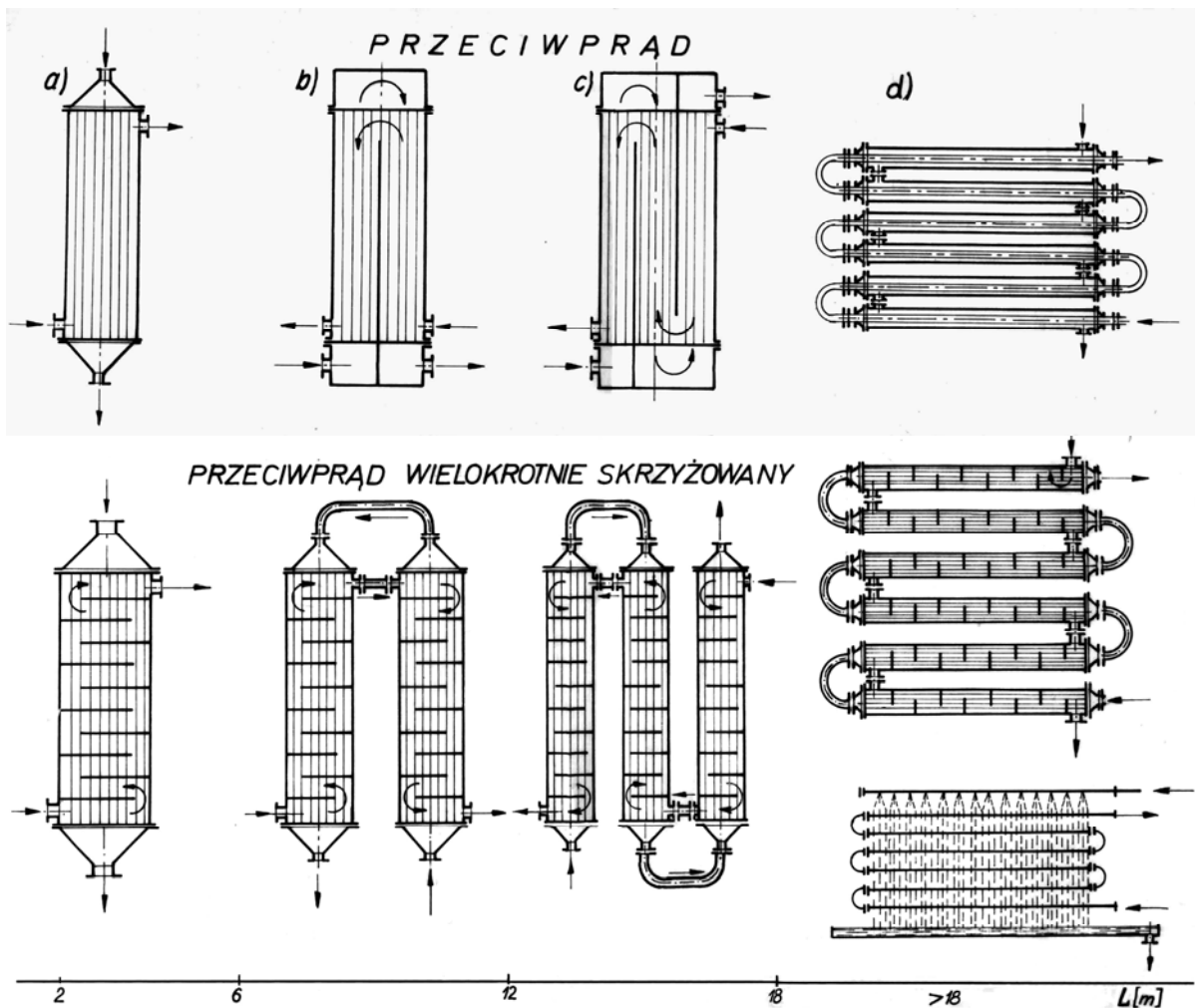
7. Obliczenie długości rur i przyjęcie wstępnej koncepcji konstrukcyjnej

Ze znanej powierzchni A_o oblicza się długość rur:

$$L = \frac{A_o}{\pi d_o n}$$

Gdy wypadnie: $L > L_{\max} = 4000 \dots 5000$ mm (wyjątkowo: 6000...8000 mm) tj. od handlowej długości rurek, to trzeba zastosować podział wymiennika na kilka połączonych szeregowo ze sobą sekcji. Te kilka wymienników można nawet umieścić we wspólnym płaszczu, jak to pokazuje poniższy rys. D4 w rozwiązaniach b i c u góry. Jest to wtedy wymiennik wielobiegowy lub wieloprzepływowy.

W szczególnych przypadkach można stosować rurki o długościach większych. Na przykład rurki w dużych skraplaczach turbin parowych osiągają długość 12 000 mm.



Rys. D4 Możliwe układy wymienników zależnie od obliczonej długości rur L [m] wg T Hoblera

8. Obliczenie oporu hydraulicznego wymiennika

Opory przepływu przez wymiennik oblicza się przy pomocy wzorów znanych z mechaniki płynów dla przepływu izotermicznego.

Osobno oblicza się sumę oporów miejscowych wywołanych zmianami kierunku, nagłymi rozszerzeniami i zwężeniami przekroju przepływowego etc.:

$$\Delta p_1 = \sum \xi_i \frac{\rho w_i^2}{2}$$

Poszczególne współczynniki oporów lokalnych ξ_i dobiera się z poradników inżynierskich lub podręczników hydrauliki. Związane są one z prędkościami w_i określonymi dla charakterystycznych przekrojów przepływu.

Następnie wyznacza się opór tarcia strugi w rurce (kanale):

$$\Delta p_2 = \sum \xi_i \frac{\rho w^2}{2} \frac{L}{d_w}$$

Wielkość L jest tu całkowitą drogą, jaką przemierza płyn w pojedynczej rurce. W wymienniku o kilku biegach (przepływach) jest ona sumaryczną drogą przebytą w tych biegach.

Średnica wewnętrzna rurki d_w jest w przypadku kanałów nieokrągłych (np. dla wzdłużnego opływu pęku rur) średnicą hydrauliczną:

$$d_w = \frac{4 A_p}{U}$$

Liczbę oporu tarcia wyznacza się przy pomocy znanej z mechaniki płynów wartości izotermicznej ζ_0 oraz mnożnika uwzględniającego zmienność parametrów z temperaturą:

dla przepływu turbulentnego:

$$\zeta = \zeta_0 \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{1/3} \quad \text{w tym dla gazów: } \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{1/3} \approx 1$$

dla przepływu laminarnego:

$$\zeta = \zeta_0 \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^{1/3} \left[1 + 0,22 \left(\frac{Gr_f Pr_f}{Re_f} \right)^{0,15} \right]$$

Indeksy w i f odnoszą daną wielkość do (średniej) temperatury ścianki t_w lub płynu t_f , a liczba oporu ζ_0 określona jest przez temperaturę płynu t_f .

Ponadto należy uwzględnić 2 opory wywołane przez **nieizotermiczność przepływu**:

- opór przyspieszenia gazu ogrzewanego w kanale o stałym przekroju przepływowym (zwiększenie energii kinetycznej gazu):

$$\Delta p_3 = 2 \left(\frac{\rho'' w''^2}{2} - \frac{\rho' w'^2}{2} \right) = \frac{2(t'' - t')}{T_f} \frac{\rho_f w_f^2}{2}$$

We wzorze tym indeks f odnosi się do średniej temperatury płynu między wlotem (') i wylotem (").

W przypadku oziębiania gazu jest: $\Delta p_3 < 0$. Gaz jest wtedy spalniany (zmniejsza swoją energię kinetyczną), co przyczynia się do zmniejszenia ogólnego oporu przepływu.

- opór pokonywania siły wyporu słupa płynu:

$$\Delta p_4 = g (\rho_0 - \rho) h$$

gdzie: ρ_0 jest gęstością płynu chłodnego
 ρ " " " " nagrzanego
 h " wysokością pionowego słupa płynu.

Opór Δp_4 występuje w skierowanym w dół przepływie płynu nagrzanego.

W przepływie do góry jest $\Delta p_4 < 0$ i wtedy ta różnica ciśnień stanowi siłę napędową (ma znak ujemny), a nie opór, zmniejsza więc ogólny opór przepływu.

Uzyskany łączny opór przepływu musi się mieścić w granicach dopuszczalnych dla danego rodzaju aparatu. Informacji o wielkościach dopuszczalnych oporów udziela literatura specjalistyczna.

Ogólnie jednak biorąc można ocenić ekonomiczną dopuszczalność danego oporu przepływu przez obliczenie mocy pompowania płynu przez wymiennik ze wzoru:

$$N = \frac{\dot{V} \Delta p}{\eta} = \frac{\dot{m} \Delta p}{\rho \eta}$$

w którym: η jest sprawnością pompy lub wentylatora.

Następnie odnosi się tę moc do strumienia ciepła \dot{Q} przenieszonego w wymienniku między płynami. Stosunek tych wielkości powinien, według danych amerykańskich, zawierać się w granicach:

$$\frac{N}{\dot{Q}} = 0,005 \dots 0,01$$

aby łączne roczne koszty amortyzacji i eksploatacji wymiennika były minimalne.

Jeżeli $\Delta p > \Delta p_{dop}$, to należy wrócić do punktu 3, albo nawet do 2, zmienić założenia i przeprowadzić powtórnie dalsze obliczenia aż do punktu 8. Czynności te należy powtarzać tak długo, aż się osiągnie opór przepływu $\Delta p < \Delta p_{dop}$.

Dlatego wskazane jest podjąć od razu, począwszy od punktu 3, obliczenia w kilku wariantach (stosując odpowiednią tabelkę). Doprowadza to szybciej do znalezienia zadowalającego wyniku obliczeń.

9. Ostateczne ustalenie konstrukcji wymiennika

Odbywa się przy wykorzystaniu, o ile możliwości, doświadczeń uzyskanych na już wykonanych i działających wymiennikach o takim samym przeznaczeniu, podobnych rozmiarach i warunkach działania.

Najpoważniejszym problemem jest tutaj kompensacja wydłużeń cieplnych. Nierównomierny rozkład temperatury w wymienniku powoduje bowiem rozmaite wydłużenia poszczególnych części aparatu.

Jeżeli tym dylatacjom cieplnym nie zapewni się dostatecznej swobody, to wywołają one, nieraz poważne, naprężenia w materiale mogące doprowadzić do trwałych deformacji a nawet do zerwania.

Najważniejsze w wymiennikach rurowych są różnice wydłużeń rurki i płaszcza. Płaszcz ma temperaturę zbliżoną do temperatury płynu, z którym się styka, rurki natomiast mają temperaturę pośrednią między temperaturami obydwu płynów.

Należy więc zapewnić dostateczną swobodę tej podstawowej różnicy wydłużeń, aby zapobiec powstaniu dużych naprężeń w materiałach rurek, płaszczu i płyt sitowych (płyt, w których zamocowane są rurki).

Wydłużenia promieniowe rurek są bez znaczenia - liczą się tylko wydłużenia osiowe.

W pewnych przypadkach łączne naprężenia mogą być niższe od naprężeń dopuszczalnych i wtedy mamy do czynienia z **kompensacją własną** układu. Ma to na ogół miejsce przy ciśnieniach mniejszych od 1,4 MPa i temperaturach węzłów metalowych nie przekraczających 150°C albo przy różnicach temperatur między płynami nie przekraczających 50 K.

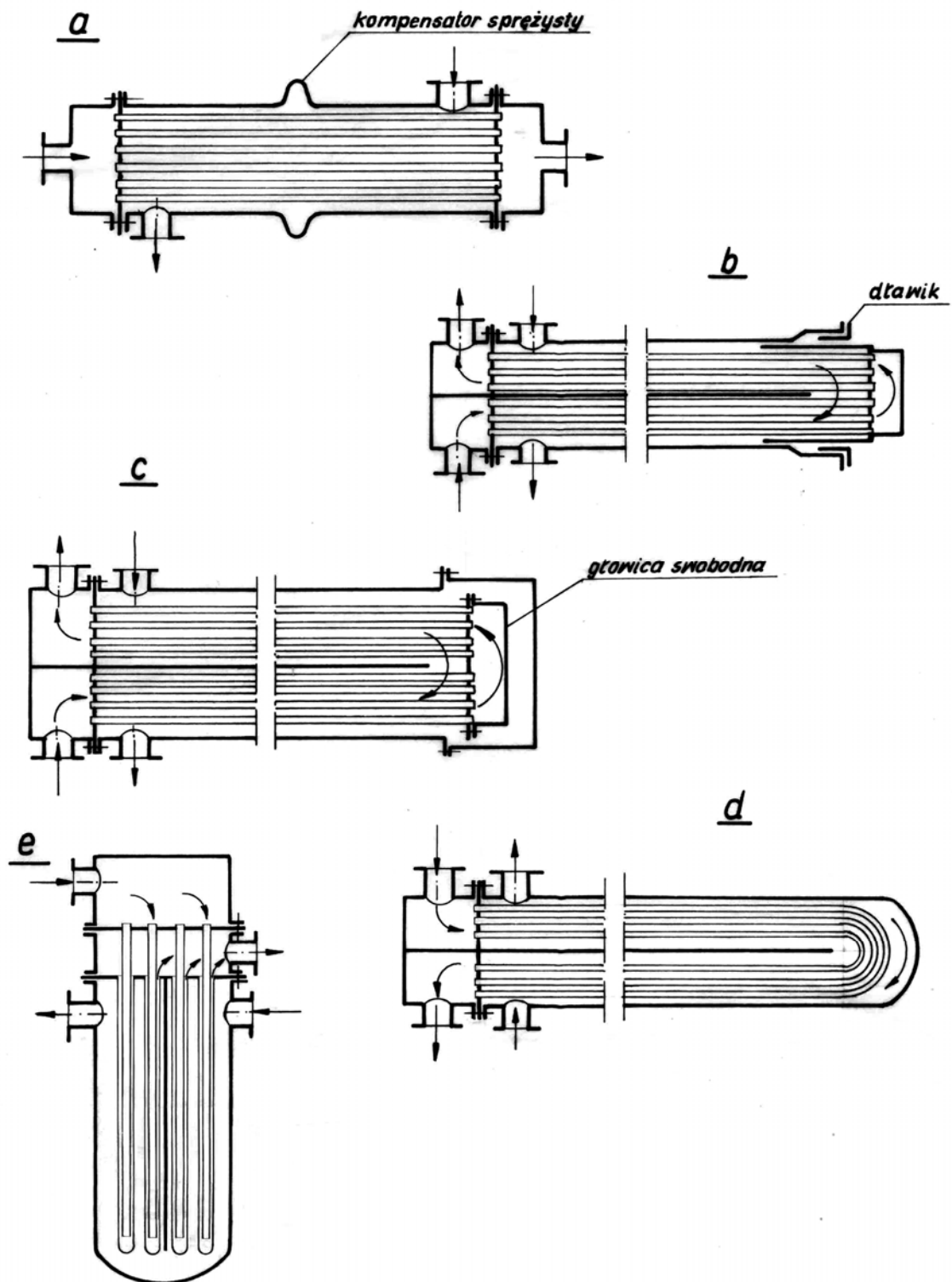
Jeżeli jednak obliczenia wykażą, że naprężenia te są większe od dopuszczalnych, to trzeba zastosować kompensację dodatkową. Jest ona przeważnie konieczna wtedy, gdy różnica temperatur między płaszczem i rurkami przekracza 38 K.

Kompensacja dodatkowa realizowana jest przy pomocy:

- a) kompensatora sprężystego - dla ciśnień do ok. 1 MPa;
- b) dławika lub przesuwne kolektora - też do ok. 1 MPa, ale jest to rozwiązanie kosztowne;
- c) głowicy swobodnej - dla dowolnych parametrów, ale jest to kosztowne i o trudnym dostępie do uszczelki w tej głowicy, a tym samym braku kontroli nad ewentualnym przeciekiem płynu; wymiennik z głowicą swobodną daje się jednak łatwo demontować np. do czyszczenia rur z zewnątrz, czy do napraw;
- d) rur giętych przeważnie w kształcie litery U, ale również spiralnych, śrubowych i in. - są one trudne do czyszczenia od strony wewnętrznej, zajmują więcej miejsca i są trudniejsze w wykonaniu od rur prostych, ale są często stosowane;
- e) rur Fielda - stosowanych przeważnie jako pionowe rurki ϕ 25/30 w rurach ϕ 50/57;
- f) indywidualnych dławików na rurkach - stosowanych dzisiaj rzadko ze względu na wysoki koszt - dawniej w skraplaczach parowych.

Poza kompensacją wydłużeń cieplnych należy przy konstruowaniu wymiennika brać pod uwagę jeszcze następujące okoliczności:

- 1) warunki technologiczne wykonania, montażu i ew. transportu - w szczególności: spawalność czy lutowność materiału i jego podatność na obróbkę plastyczną (walcowanie, gięcie), następnie możliwość obróbki termicznej dla usunięcia resztkowych naprężeń spawalniczych i naprężeń od gięcia oraz inne;
- 2) konieczność i możliwość czyszczenia powierzchni rur (możliwość demontażu, odstęp między rurami nie mniejszy niż 12 mm);
- 3) możliwość napraw - dostęp do uszczelki dla ich kontroli i wymiany, dostęp do rurek dla zaślepienia lub wymiany uszkodzonych itp.
- 4) koszty, ale nie tylko koszty wykonania wymiennika, lecz koszty całkowite obejmujące cały okres żywotności technicznej wymiennika; np. przy płynach o silnej korozyjności należy stosować materiał dobry chociaż drogi - ten początkowy większy wydatek finansowy zostanie jednak pokryty później z nawiązką przez bezawaryjne działanie wymiennika bez przerw w ruchu spowodowanych koniecznością naprawy aparatu;



Rys.D5 Schematy sposobów kompensacji wydłużeń cieplnych:
 a) kompensatorem sprężystym,
 b) dławikiem,
 c) swobodną głowicą,
 d) rurkami giętymi,
 e) rurkami Fielda.

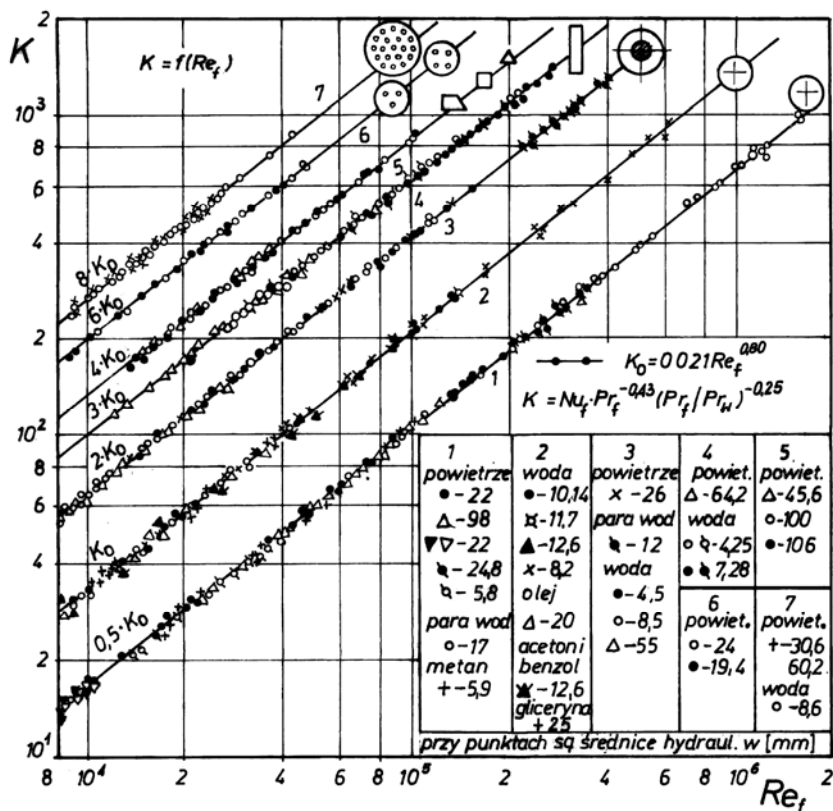
- 5) pewność ruchu - ale nie tylko samego wymiennika, lecz przede wszystkim całej instalacji, której wymiennik jest fragmentem, a przecież wypadnięcie z ruchu tego fragmentu może spowodować przerwanie działania całej instalacji.

Przy ciśnieniach przewyższających 7 MPa i temperaturach przekraczających 540°C o konstrukcji wymiennika decyduje analiza naprężeń. Dotyczy to szczególnie kolektorów determinujących geometrię całego wymiennika. Nie wchodząc w tym miejscu w szczegóły obliczeń wytrzymałościowych, które wykonuje się na ogół w oparciu o Warunki Urzędu Dozoru Technicznego dla urządzeń ciśnieniowych, należy zauważyć, że w wyższych temperaturach należy brać pod uwagę pełzanie: w stalach węglowych począwszy od 375°C, a w stopach od 420°C. Ma to szczególnie istotne znaczenie dla połączeń śrubowych, w których deformacje od pełzania muszą być mniejsze od wydłużeń sprężystych śrub.

10. Obliczenia sprawdzające

Po rozrysowaniu konstrukcji wymiennika wykonuje się sprawdzające obliczenia cieplne, hydrauliczne i ew. wytrzymałościowe gotowej konstrukcji. Są one ostatnim krokiem w procesie projektowania wymiennika.

Ze względu na znane już na tym etapie szczegóły konstrukcyjne, obliczenia te wykonuje się z maksymalną dokładnością i z uwzględnieniem wszystkich potrzebnych szczegółów. Obliczenia te są reprezentatywnym opisem przewidywanego procesu przepływowo – cieplnego w aparacie.



Rys. D.6 Wyniki pomiarów współczynnika α (zawartego w Nu , czyli w K) dla przepływu w przewodach zamkniętych na tle wyników obliczeń wzorem (5.87), przedstawionych linią ciągłą (K_0), jako bardzo ważna przesłanka stosowania współczynnika bezpieczeństwa β w obliczeniach wymiennika. Rozrzut wyników pomiarów wynosi tu $\pm 5\%$.