

Jerzy M. Sawicki

MECHANIKA

przepływów

Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej

Jerzy M. Sawicki

MECHANIKA
przeptywów

Gdańsk 2009

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ
Romuald Szymkiewicz

RECENZENT
Czesław Grabarczyk
Michał Szydłowski

PROJEKT OKŁADKI
Katarzyna Olszonowicz

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Wydawnictwa PG można nabywać w Księgarni PG (Gmach Główny, I piętro)
bądź zamówić pocztą elektroniczną (ksiegarnia@pg.gda.pl),
faksem (058 347 16 18) lub listownie (Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej,
Księgarnia PG, ul. G. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk)
www.pg.gda.pl/WydawnictwoPG

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej
Gdańsk 2009

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie
i w jakiegokolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

ISBN 978-83-7348-278-4

Spis treści

Wykaz ważniejszych oznaczeń i symboli	9
Słowo wstępne	13
Część I – MECHANIKA PŁYNÓW	
1. Mechanika płynów newtonowskich	15
1.1. Molekularna budowa materii	15
1.2. Pojęcie ośrodka ciągłego	15
1.3. Podstawowe zagadnienia mechaniki ośrodków ciągłych	18
1.3.1. Uwagi ogólne	18
1.3.2. Rodzaje wielkości fizycznych	19
1.3.3. Gęstość rozkładu wielkości fizycznej	21
1.3.4. Uśrednianie wielkości fizycznych	23
1.3.5. Ruch materii	24
1.3.6. Mechaniczne oddziaływania ciał materialnych	25
1.3.6.1. Siły i ich rodzaje	25
1.3.6.2. Jednostkowa siła masowa	25
1.3.6.3. Gęstość rozkładu siły powierzchniowej	26
1.3.6.4. Stan naprężenia	29
1.4. Fizyczne własności materii	31
1.4.1. Materia jako ośrodek dyskretny	31
1.4.2. Materia jako ośrodek ciągły	32
1.4.2.1. Stany skupienia materii	32
1.4.2.2. Pojęcie płynności	34
1.4.2.3. Hipoteza Newtona – ujęcie jakościowe	35
1.4.2.4. Stałe materiałowe	35
1.5. Opis stanu substancji płynnej	39
1.5.1. Możliwości określania stanu materii	39
1.5.2. Klasyfikacja praw przyrody	40
1.5.3. Zmienne stanu	40
1.5.4. Pomocnicze wielkości fizyczne	41
1.5.5. Pochodna substancjalna	44
1.5.6. Metody empiryczne	46
1.5.7. Metoda analizy wymiarowej	47
2. Kinematyka płynów	51
2.1. Pojęcia podstawowe	51
2.2. Trajektoria elementu płynu i linia prądu	52
2.3. Pierwsze twierdzenie Helmholtza	55
2.3.1. Zmienność pola prędkości	55
2.3.2. Prędkość kątowna elementu masy	57
2.3.3. Prędkość deformacji kątownej elementu masy	59
2.3.4. Prędkość deformacji liniowej elementu płynu	59
2.3.5. Twierdzenie Helmholtza i jego znaczenie	60
2.4. Linie wirowe	61
2.5. Kinematyczna charakterystyka przepływów	61
2.6. Pojęcie strumienia	62

3. Dynamika płynów	65
3.1. Przedmiot dynamiki	65
3.2. Ogólne cechy praw zachowania	65
3.3. Bilans masy	66
3.3.1. Prawo zachowania masy	66
3.3.2. Równanie zachowania masy dla przypadku ogólnego	67
3.3.3. Równanie zachowania masy dla strumienia	68
3.4. Bilans pędu	69
3.4.1. Prawo zachowania pędu	69
3.4.2. Równanie zachowania pędu dla przypadku ogólnego	69
3.4.3. Równanie zachowania pędu dla strumienia	72
3.5. Szczególne postacie wyprowadzonych równań	76
3.5.1. Techniczne wersje równań zachowania masy i pędu	76
3.5.2. Napór hydrodynamiczny	77
3.6. Pozostałe prawa o charakterze bilansowym	80
3.6.1. Prawo zachowania momentu pędu	80
3.6.2. Prawo zachowania energii	81
3.6.3. Prawo bilansu entropii	82
3.7. Zestawienie liczby równań i niewiadomych	83
3.8. Równanie stanu	84
3.9. Równania konstytutywne	85
3.9.1. Uwagi ogólne	85
3.9.2. Hipoteza Newtona – ujęcie ilościowe	85
3.9.2.1. Przypadek ogólny	85
3.9.2.2. Strumień podłużny	87
3.9.3. Prawo Fouriera	87
3.10. Równania ruchu	87
3.10.1. Przypadek ogólny – równanie Naviera-Stokesa	87
3.10.2. Strumień podłużny	90
4. Formułowanie problemów hydromechaniki	91
4.1. Uwagi ogólne	91
4.2. Opis układu i jego własności	92
4.3. Warunki graniczne	95
4.3.1. Warunki początkowe	95
4.3.2. Warunki brzegowe	95
4.4. Rozwiązywanie zadań hydromechaniki	97
4.5. Upraszczenie równań ruchu	100
5. Hydrostatyka	101
5.1. Uwagi ogólne	101
5.2. Podstawowe równania	101
5.3. Ciśnienie hydrostatyczne	102
5.3.1. Płyny nieściśliwe	102
5.3.2. Płyny ściśliwe	104
5.4. Napór hydrostatyczny	104
5.5. Punkt przyłożenia naporu hydrostatycznego	107
5.6. Wypór hydrostatyczny	108
5.7. Pływanie ciał nieruchomych	109
6. Równanie Bernoulliego	113
6.1. Uwagi wstępne	113
6.2. Wyprowadzenie równania Bernoulliego	113
6.2.1. Założenia upraszczające	113
6.2.2. Równanie Bernoulliego dla strumienia cieczy rzeczywistej	114
6.2.3. Interpretacja trójmianu Bernoulliego	115

6.2.4. Linia ciśnienia i linia energii	117
6.2.5. Wyznaczanie strat energii	119
6.2.6. Równanie Bernoulliego dla strugi oraz dla linii prądu	120
6.2.7. Równanie Bernoulliego dla cieczy nielepkiej	121
6.2.8. Trójmian Bernoulliego dla płynu ściśliwego	123
6.2.9. Pojęcie ciśnienia	124
7. Turbulencja	125
7.1. Ogólna charakterystyka ruchu turbulentnego	125
7.2. Generacja turbulencji	127
7.3. Równania Reynoldsa	129
7.4. Modelowanie turbulencji	131
7.4.1. Koncepcja podstawowa	131
7.4.2. Model algebraiczny	132
7.4.3. Model Prandtla	132
7.4.4. Inne modele turbulencji	132
7.5. Rozwiązywanie zagadnień	133
7.5.1. Przypadek ogólny	133
7.5.2. Równanie Bernoulliego dla ruchu turbulentnego	134
7.5.3. Profil prędkości typu logarytmicznego	134
8. Warstwa przyścienna	138
8.1. Pojęcia podstawowe	138
8.2. Laminarna a turbulentna warstwa przyścienna	140
8.3. Formowanie się profilu prędkości strumienia	141
8.4. Pojęcie ścianki hydraulicznie gładkiej	143
8.5. Oderwanie warstwy przyściennej	144
8.6. Temperaturowa warstwa przyścienna	145
9. Modele kinematyczne	147
9.1. Uwagi ogólne	147
9.2. Funkcja prądu i jej własności	148
9.2.1. Ruch płaski	148
9.2.2. Funkcja prądu	148
9.2.3. Własności funkcji prądu	148
9.3. Płaski ruch potencjalny	150
9.3.1. Charakterystyka modelu	150
9.3.2. Podstawowe równanie modelu	150
9.3.3. Formułowanie zagadnienia	151
9.3.4. Rozwiązywanie zagadnienia	152
9.4. Model biharmoniczny	153
9.4.1. Opis modelu	153
9.4.2. Formułowanie zagadnienia	153
9.4.3. Rozwiązywanie zagadnienia	154
9.5. Ruch śrubowy	155
9.5.1. Charakterystyka ogólna	155
Część II – HYDRAULIKA	
10. Problematyka hydrauliki	157
10.1. Uwagi ogólne	157
10.2. Schematy obliczeniowe hydrauliki	159
10.3. Podstawowe równania hydrauliki	160
11. Ruch cieczy w pojedynczych przewodach zamkniętych	161
11.1. Charakterystyka zagadnienia	161
11.1.1. Aspekty funkcjonalne i techniczne	161
11.1.2. Aspekty hydrauliczne	164

11.2.	Ustalony przepływ jednostajny w pojedynczym przewodzie zamkniętym	166
11.2.1.	Równania ruchu	166
11.2.2.	Obliczanie strat energii mechanicznej	167
11.2.2.1.	Uwagi ogólne	167
11.2.2.2.	Straty na długości	169
11.2.2.3.	Współczynnik strat liniowych	170
11.2.2.4.	Charakterystyka przepływu	171
11.2.2.5.	Straty lokalne	172
11.2.3.	Praktyczne postacie równań ruchu	173
11.2.3.1.	Przewód poziomy	173
11.2.3.2.	Przewody o zmiennej konfiguracji w pionie	174
11.2.4.	Rodzaje zadań obliczeniowych	179
11.3.	Ustalony przepływ odcinkami jednostajny w pojedynczym przewodzie zamkniętym	179
11.4.	Ustalony przepływ niejednostajny w pojedynczym przewodzie zamkniętym	180
11.4.1.	Rodzaje zagadnień	180
11.4.2.	Matematyczny opis przepływu	181
11.4.2.1.	Równania ruchu	181
11.4.2.2.	Wyznaczanie naprężenia stycznego	182
11.4.3.	Konfuzory i dyfuzory	183
11.4.4.	Przewód z wydatkiem bocznym	184
11.4.4.1.	Aspekty techniczne	184
11.4.4.2.	Obliczenia hydrauliczne	185
11.4.4.3.	Równomierność odpływu bocznego	187
11.4.5.	Dysza de Laval'a	188
11.5.	Przepływ nieustalony w pojedynczym przewodzie zamkniętym	190
11.5.1.	Przypadek cieczy o stałej gęstości	190
11.5.2.	Przypadek cieczy o zmiennej gęstości	192
11.5.2.1.	Uderzenie hydrauliczne w przewodzie długim	192
11.5.2.2.	Przewód o skończonej długości	196
11.5.2.3.	Uderzenie hydrauliczne w układzie rzeczywistym	197
11.6.	Zasilanie przewodów zamkniętych	198
11.6.1.	Możliwości techniczne	198
11.6.2.	Zbiorniki zasilające	198
11.6.3.	Pompy	201
11.6.3.1.	Uwagi wstępne	201
11.6.3.2.	Hydrauliczny opis działania pompy	202
11.6.3.3.	Zjawiska w przewodzie ssącym	203
11.6.3.4.	Charakterystyki pomp	204
11.6.3.5.	Charakterystyka przewodu	206
11.6.3.6.	Dobór pompy	206
11.7.	Uwagi o przepływach przy obniżonym ciśnieniu	207
12.	Ustalony ruch cieczy w sieciach przewodów zamkniętych	208
12.1.	Uwagi ogólne	208
12.2.	Elementy sieci	209
12.2.1.	Odcinki przewodów	209
12.2.2.	Węzły	209
12.2.3.	Punkty skrajne	211
12.3.	Ilościowy opis zagadnienia	212
12.3.1.	Zestawienie niewiadomych	212
12.3.2.	Zestawienie równań	212
12.3.3.	Formułowanie zagadnień	212
12.3.3.1.	Zasady ogólne	212
12.3.3.2.	Sieć rozgałęziona	213
12.3.3.3.	Sieć pierścieniowa	215

13. Ruch cieczy w korytach otwartych	216
13.1. Uwagi wstępne	216
13.2. Charakterystyka koryt otwartych	216
13.2.1. Aspekty techniczne	216
13.2.2. Schematyzacja koryt naturalnych	220
13.2.3. Charakterystyka hydrauliczna	221
13.3. Równania ruchu dla koryt otwartych	227
13.4. Przepływ ustalony i jednostajny	229
13.4.1. Wyznaczanie naprężeń stycznych na dnie	229
13.4.2. Wzory obliczeniowe	231
13.4.3. Krzywe prędkości i wydatku	234
13.4.4. Przekroje wielodzielne	237
13.4.5. Przekrój najkorzystniejszy hydraulicznie	239
13.4.6. Ruch krytyczny	240
13.5. Przepływ ustalony i niejednostajny	240
13.5.1. Równanie profilu zwierciadła cieczy	240
13.5.2. Warunek graniczny	242
13.5.3. Wyznaczanie linii zwierciadła cieczy	242
13.5.4. Zastosowanie równania Bernoulliego	243
13.5.5. Zmiana charakteru przepływu	245
13.6. Przepływ nieustalony i niejednostajny	245
13.6.1. Równania de Saint-Venanta	245
13.6.2. Formułowanie zagadnień	248
13.6.3. Rozwiązywanie zagadnień	249
13.6.4. Uprozczone postacie równań ruchu	250
14. Ruch cieczy w sieciach kanałów otwartych	252
14.1. Ogólna charakterystyka sieci	252
14.2. Połączenia i punkty skrajne odcinków sieci	253
14.3. Ustalone przepływy w sieciach	256
14.4. Nieustalone przepływy w sieciach	257
15. Strumienie swobodne	259
15.1. Charakterystyka ogólna	259
15.2. Strumienie niezatopione	260
15.3. Strumienie zatopione	262
16. Zjawiska lokalne	264
16.1. Uwagi ogólne	264
16.2. Przepływ cieczy nad przelewem	264
16.2.1. Definicja pojęcia „przelew”	264
16.2.2. Obliczanie wydatku przelewu	266
16.2.2.1. Przelewy niezatopione	266
16.2.2.2. Przelewy zatopione	270
16.2.2.3. Inne profile przelewowe	271
16.2.2.4. Przelewy boczne	271
16.2.3. Współczynniki wydatku dla przelewów	272
16.3. Wpływ cieczy przez otwór	274
16.3.1. Definicja pojęcia „otwór”	274
16.3.2. Obliczanie wydatku otworu	275
16.3.2.1. Otwór niezatopiony	275
16.3.2.2. Otwór zatopiony	276
16.3.2.3. Wpływ spod zasuwy	277
16.3.3. Współczynniki wydatku otworów	278
16.3.4. Wpływ przystawek	279
16.4. Odskok hydrauliczny	280

17. Przepływy w obiektach kubaturowych	284
17.1. Uwagi ogólne	284
17.2. Zbiorniki retencyjne	286
17.3. Reaktory przepływowe	287
17.3.1. Uwagi ogólne	287
17.3.2. Charakterystyka hydrauliczna reaktora przepływowego	288
17.3.3. Wyznaczanie czasu zatrzymania	290
17.3.3.1. Zasady ogólne	290
17.3.3.2. Model tłokowy	291
17.3.3.3. Krzywa gęstości rozkładu czasu zatrzymania masy	291
17.3.3.4. Szczególne przypadki gęstości rozkładu stężenia końcowego	295
17.3.3.5. Gęstość rozkładu stężenia znacznika jako funkcjonalna charakterystyka reaktora	296
17.3.4. Reaktory recyrkulacyjne	298
18. Podstawy teorii filtracji	303
18.1. Charakterystyka przepływu filtracyjnego	303
18.1.1. Pojęcia ogólne	303
18.1.2. Porowatość ośrodka	304
18.1.3. Prędkość filtracji	305
18.1.4. Równania zachowania	308
18.1.4.1. Uwagi ogólne	308
18.1.4.2. Równanie zachowania masy	308
18.1.4.3. Prawo Darcy'ego	309
18.1.5. Przewodność hydrauliczna	311
18.2. Filtracja przestrzenna	313
18.2.1. Bilans niewiadomych i równań	313
18.2.2. Formułowanie zagadnienia	315
18.3. Filtracja podłużna	319
18.3.1. Uwagi ogólne	319
18.3.2. Podstawowe równania modelu podłużnego	320
18.3.2.1. Charakterystyka modelu	320
18.3.2.2. Równanie ciągłości	322
18.3.2.3. Uśrednione prawo Darcy'ego	322
18.3.2.4. Równanie Boussinesq'a dla modelu podłużnego	323
18.3.3. Formułowanie zagadnienia	323
18.3.4. Zagadnienia ustalone	324
19. Podobieństwo i zasady modelowania	325
19.1. Charakterystyka zagadnienia	325
19.2. Podstawowa koncepcja opisu podobieństwa zjawisk	326
19.3. Sprowadzanie równań do postaci bezwymiarowej	327
19.3.1. Zasady ogólne	327
19.3.2. Bezwymiarowa postać równania zachowania masy	329
19.3.3. Bezwymiarowa postać równania zachowania pędu	330
19.3.4. Bezwymiarowe postacie pozostałych równań ruchu	331
19.4. Interpretacja liczb kryterialnych	331
19.5. Zastosowanie metody	332
20. Mierzenie wielkości fizycznych	333
20.1. Zasady ogólne	333
20.2. Cechowanie przyrządów pomiarowych	334
20.3. Pomiary hydrauliczne	336
Bibliografia	339
Załącznik – tabele	341
Skorowidz nazwisk	346
Skorowidz rzeczy	347

Wykaz ważniejszych oznaczeń i symboli

Oznaczenia

- a – prędkość rozchodzenia się zaburzeń w ośrodku ciągłym
- b – szerokość
- B – szerokość swobodnej powierzchni
- c – stężenie masowe substancji rozpuszczonej
- c_w – ciepło właściwe
- C – współczynnik Chezy’ego
- C_Z – obwód zwilżony
- d – średnica
- d_c – charakterystyczny wymiar liniowy
- d_e – miarodajna średnica ziaren
- D – średnica
- [D]** – tensor prędkości deformacji
- D_w – współczynnik wyrównywania temperatury
- e – energia wewnętrzna
- E – energia mechaniczna strumienia cieczy
- [E]** – tensor jednostkowy
- E_C – moduł sprężystości cieczy
- E_S – moduł sprężystości ciała stałego
- Eu – liczba Eulera
- f – jednostkowa siła masowa
- F – siła
- Fr – liczba Froude’a
- g – przyspieszenie ziemskie
- G** – siła ciężkości
- h – głębokość średnia
- h_c – głębokość krytyczna
- h_n – głębokość normalna
- h_1, h_2 – głębokości sprzężone
- H – głębokość
- H_C – zagłębienie środka ciężkości
- H_m – głębokość maksymalna
- H_{str} – wysokość straty energii mechanicznej
- i, j, k** – wersory kartezjańskiego układu współrzędnych
- i_c – spadek krytyczny
- i_f – spadek hydrauliczny
- i_o – spadek dna
- j_e – jednostkowy strumień energii
- I – spadek swobodnej powierzchni
- I** – pęd
- I_P – strumień pędu
- k – stała Boltzmanna

k_s	– chropowatość bezwzględna
k_T	– kinetyczna energia turbulencji
K	– skalarny współczynnik przewodności (filtracji) ośrodka porowatego
[K]	– tensorowy współczynnik filtracji
K_L	– współczynnik podłużnej dyspersji substancji rozpuszczonej
K_p	– współczynnik przepuszczalności ośrodka porowatego
K_w	– moduł przepływu (przewodność rurociągu lub kanału)
Kn	– liczba Knudsena
l	– długość
l_m	– droga mieszania wg Prandtla
l_o	– długość odcinka początkowego
L	– długość
L_B	– długość odskoku hydraulicznego
L_o	– długość odcinka przejściowego
L_p	– długość przystawki
m	– strumień masy
m_a	– adwekcyjny strumień masy
m_k	– współczynnik szorstkości wg Kuttera
m_M	– masa molekuly
m_w	– miąższość warstwy wodonośnej
M	– masa
n	– współczynnik szorstkości wg Manninga (w hydraulice strumieni); porowatość (w teorii filtracji)
\mathbf{n}	– wektor jednostkowy, prostopadły do powierzchni (normalny)
n_e	– porowatość efektywna
n_z	– efektywny współczynnik szorstkości
N	– siła naporu
Nu	– liczba Nusselta
p	– ciśnienie
p_{atm}	– ciśnienie atmosferyczne
p_c	– ciśnienie całkowite
p_{ij}	– współrzędne tensora naprężenia
\mathbf{p}_n	– naprężenie
p_o	– ciśnienie zewnętrzne
[P]	– tensor naprężenia
P_c	– funkcja ciśnienia
Pr	– liczba Prandtla
q	– wydatek jednostkowy
q_L	– dopływ boczny, odniesiony do jednostki długości strumienia
Q	– wydatek płynu (objętościowe natężenie przepływu)
r	– promień wodzący
r_{ef}	– efektywność reaktora
r_N	– ramię siły naporu
R	– promień
Re	– liczba Reynoldsa
R_h	– promień hydrauliczny
s_w	– depresja wody podziemnej
S	– pole powierzchni
Sh	– liczba Strouhala
S_s	– współczynnik pojemności sprężystej
t	– czas

t_p	– czas zatrzymania masy w układzie
t_u	– czas uśredniania
T	– temperatura
\mathbf{u}	– wektor rzeczywistej prędkości cieczy (adwekcji)
u_C	– moduł prędkości molekuly
\mathbf{u}_f	– prędkość filtracji (wydatek jednostkowy, strumień Darcy’ego)
\mathbf{u}_p	– prędkość porowa
u_s	– prędkość swobodnej powierzchni cieczy
u_x, u_y, u_z	– kartezjańskie składowe wektora prędkości
U	– skala prędkości
v	– moduł prędkości uśrednionej w przekroju poprzecznym strumienia
\mathbf{v}	– wektor prędkości uśrednionej w przekroju poprzecznym strumienia
v_c	– prędkość krytyczna
v_g	– prędkość graniczna
v_{nr}	– prędkość nierozmywająca
v_{nz}	– prędkość niezamulająca
v_s	– prędkość ścianki
v^*	– prędkość dynamiczna (ścinająca)
V	– objętość
\mathbf{w}	– prędkość wiatru
w_b	– dopływ boczny
w_{oc}	– współczynnik odsączalności
\mathbf{W}	– siła wyporu (Archimedes)
x, y, z	– współrzędne kartezjańskie
y_s	– odległość od najbliższej ścianki
z_c	– rzędna środka ciężkości
z_d	– rzędna dna zbiornika
z_g	– rzędna swobodnej powierzchni cieczy
α	– współczynnik de Saint-Venanta (Coriolisa)
α_p	– współczynnik przekroju
β	– kąt
γ_B	– współczynnik szorstkości wg Bazina
δ	– grubość hydrodynamicznej warstwy przyściennej
δ_L	– grubość podwarstwy laminarnej
δ_T	– grubość temperaturowej warstwy przyściennej
Δh	– strata energii mechanicznej
Δs	– eskok hydrauliczny
ε	– hropowatość względna powierzchni
ε_T	– prędkość dyssypacji energii
χ	– wykładnik izentropy
χ_T	– stała von Karmana
λ	– współczynnik strat na długości wg Nikuradsego
λ_m	– współczynnik molekularnego przewodzenia ciepła
λ_s	– intensywność ruchu śrubowego
μ	– dynamiczny współczynnik lepkości molekularnej
μ_p	– współczynnik wydatku przelewu
μ_T	– dynamiczny współczynnik lepkości burzliwej (turbulentnej)
μ_w	– współczynnik wydatku otwory
μ_z	– współczynnik wydatku zasowy

ν	– kinematyczny współczynnik lepkości molekularnej
ν_T	– kinematyczny współczynnik lepkości burzliwej (turbulentnej)
ξ	– współczynnik straty lokalnej (miejscowej)
$[\Pi]$	– tensor naprężeń burzliwych (Reynoldsa)
Π_{ij}	– współrzędne tensora Reynoldsa
ρ	– gęstość (c – cieczy, w – wody, p – powietrza, s – substancji)
τ_b	– współczynnik korekcyjny dla przelewu bocznego
τ_z	– współczynnik zatopienia (przelewu lub otworu)
τ_d	– naprężenie denne
τ_o	– czas życia osiadłego molekuly
τ_p	– naprężenie powierzchniowe
τ_s	– naprężenie styczne
τ_w	– naprężenie wywołane wiatrem
φ	– potencjał
φ_p	– współczynnik prędkości
ψ	– funkcja prądu
ω	– prędkość kątowna
Ω	– wektor rotacji prędkości

Symbole

—	– wartość zmiennej, uśredniona w czasie
~	– wartość zmiennej, uśredniona względem współrzędnych przestrzennych
'	– turbulentna fluktuacja prędkości
°	– różnica między rzeczywistą wartością zmiennej, a jej wartością uśrednioną w obszarze wypełnionym materiałem porowatym
×	– jak wyżej, gdy uśrednianie odbywa się w przestrzeni porowej
⊗	– znak iloczynu diadycznego

Słowo wstępne

Jeszcze kilkadziesiąt lat temu mianem hydrauliki określano półempiryczną naukę, badającą prawa opisujące ruch cieczy, głównie metodami doświadczalnymi, wyraźnie różniąc ją względem mechaniki płynów, którą – przy tym samym przedmiocie badań – zaliczano do nauk teoretycznych. Główną tego przyczyną były ograniczone możliwości rozwiązywania ogólnych równań ruchu cieczy i gazów, cechujących się bardzo wysokim stopniem formalnej złożoności. Warto wszakże zauważyć, że nawet w owych latach zróżnicowanie to nie było ściśle zdefiniowane i miało charakter raczej werbalny. Dobrze ilustruje to zapis w Encyklopedii Powszechnej PWN z roku 1974, zgodnie z którym „...hydraulika bada prawa ruchu cieczy, **w odróżnieniu** od hydromechaniki, z którą **jest ściśle związana**”.

Jednakże z czasem owo metodyczne zróżnicowanie straciło na znaczeniu – w ramach mechaniki płynów wyprowadzono równania szczegółowe, które coraz lepiej opisywały problemy praktyczne, zaś specjaliści z zakresu hydrauliki, wyczerpawszy ograniczoną liczbę prostych przypadków, dla których można było uzyskać pożyteczne zależności empiryczne, zaczęli podejmować bardziej złożone tematy.

Przełom nastąpił z upowszechnieniem maszyn liczących i jednoczesnym rozwojem metod numerycznych. Dla skomplikowanych równań fizyki matematycznej, poprzednio niedostępnych inżynierom, można było wreszcie uzyskiwać rozwiązania – przybliżone, lecz wystarczająco dokładne do celów nie tylko praktycznych, ale i badawczych.

Od tej pory hydraulikę można traktować jako dział mechaniki płynów, zajmujący się praktycznym zastosowaniem ogólnych praw ruchu (a w szczególnym przypadku – bezruchu) cieczy i gazów. Naturalną tego konsekwencją stało się wewnętrzne zróżnicowanie hydrauliki, odzwierciedlające techniczne aspekty różnych grup zagadnień praktycznych. Inną specyfikę mają bowiem maszyny przepływowe (pompy, turbiny, wentylatory, dmuchawy, sprężarki...), inną – aparaty i obiekty pływające i latające (statki i okręty, samoloty, balony, rakiety, pociski...), a jeszcze inną – budowle hydrotechniczne (konstrukcje piętrzące, elektrownie wodne, porty morskie i rzeczne, obiekty służące regulacji rzek czy ochronie brzegów morskich, systemy melioracyjne ...).

Za najmłodszą ze specjalistycznych gałęzi hydrauliki należy uznać tę, w ramach której podejmowane są problemy przepływowe, występujące w środowisku człowieka – zarówno naturalnym, jak i antropogenicznym. Ich wyodrębnienie jest uzasadnione tym, że podejmowane przez tę gałąź problemy są jednocześnie i bezpośrednio związane z potrzebami ludzi oraz uwarunkowaniami przyrody, co jest szczególnie ważne w inżynierii środowiska, inżynierii sanitarnej, hydrologii, meteorologii, hydrogeologii i innych gałęziach nauk o Ziemi.

Książka, którą Czytelnik bierze do ręki, jest podręcznikiem akademickim, zawierającym pełny wykład zagadnień związanych z ruchem płynu, zorientowanym na potrzeby tych wydziałów wyższych uczelni technicznych, które oferują nauczanie w zakresie Inżynierii Środowiska oraz kierunków pokrewnych. Jej tytuł, wzorem Ludwiga Prandtla [37], ma na

celu raczej podkreślanie wspomnianych już podobieństw między mechaniką płynów i hydrauliką, niż akcentowanie czynników, różnicujących te gałęzie nauki.

Przedstawione uwarunkowania znajdują swe odbicie w układzie i w treści książki. Jej pierwsza część zawiera wiadomości podstawowe. Szczególny nacisk położono na związek omawianej tematyki z fizyką i mechaniką ogólną. W części drugiej, poświęconej hydraulicznym modelom procesów przepływowych, zwrócono uwagę na sposoby stawiania zagadnień, zarówno od strony obliczeniowej (pod kątem praktycznego stosowania metod numerycznych), jak też dyskutując ich aspekty techniczne, ważne w inżynierii środowiska. Treść tego podręcznika obejmuje program studiów trzystopniowych. Materiału dla dwóch pierwszych stopni (inżynierskiego i magisterskiego) nie wyodrębniono, gdyż jego dobór jest kwestią indywidualnych decyzji programowych, natomiast materiał odpowiadający trzeciemu stopniowi (studia doktoranckie) został wyróżniony drobniejszą czcionką.

Część I – MECHANIKA PŁYNÓW

1. Mechanika płynów newtonowskich

1.1. Molekularna budowa materii

Substancje rzeczywiste mają strukturę dyskretną. Oznacza to, że są zbudowane z odrębnych elementów, zwanych **cząsteczkami (molekułami, drobinami)**, a w szczególnych przypadkach – **atomami** [32]. Gdy wszystkie te elementy są identyczne, substancję nazywamy **jednorodną**. W przeciwnym razie mówimy o substancji **niejednorodnej**.

Niektóre składniki, tworzące układ niejednorodny, mogą ze sobą reagować. Cząsteczki substancji wyjściowych (**substratów**) ulegają wtedy przemianom i są przekształcane w cząsteczki substancji końcowych (**produktów**). Opis zachowania układów podlegających reakcjom lub przemianom (chemicznym, biologicznym oraz/albo fizycznym) jest szczególnie ważny w inżynierii środowiska, bowiem do jej podstawowych zadań należy dbałość o właściwą jakość otoczenia ludzi, zwierząt i roślin. Ogólne równania mechaniki, w tym mechaniki płynów, pozwalają na uwzględnienie reakcji i przemian w opisie ruchu materii [18, 50]. Jest to wszakże problem skomplikowany, głównie z dwóch względów – trudności przy określaniu wpływu tych reakcji na **fizyczne własności substancji** oraz wysokiego stopnia formalnej (matematycznej) złożoności tych równań.

Na szczęście konieczność podejmowania przez inżynierów tak ogólnych zadań nie pojawia się zbyt często. W praktyce technicznej z reguły można stosować uproszczenia, polegające na fizykalnej dekompozycji zagadnienia; w pierwszym etapie określamy wtedy stan substancji, traktując ją jako jednorodną (lub uwzględniając obecność innych składników układu w sposób przybliżony), zaś dopiero w drugim etapie opisujemy przebieg interesujących nas reakcji lub przemian. Tak więc w dalszym ciągu będziemy rozważali zagadnienia ruchu płynów, które (dokładnie lub w uproszczeniu) można traktować jako jednorodne.

1.2. Pojęcie ośrodka ciągłego

W praktyce nie mamy możliwości określenia stanu układu drogą wyznaczenia wzajemnych oddziaływań między poszczególnymi molekułami. Wynika to z rozmiarów realnych systemów (liczbę molekuł w jednym molu substancji określa **liczba Avogadra** $A = 6,023 \cdot 10^{23}$) oraz przypadkowości, cechującej stan każdej z cząsteczek.

Aby stworzyć możliwość racjonalnego opisu zachowania układów fizycznych, wprowadzono pojęcie **ośrodka ciągłego**. Termin „ciągły” stanowi przeciwieństwo omówionego już pojęcia „dyskretny”, a oznacza taką strukturę, która jest zdefiniowana w każdym punkcie rozważanego obszaru (choć intensywność jej rozkładu może być zmienna). Intuicyjnie jest to określenie zrozumiałe i klarowne, mimo iż w rzeczywistości ciągłe są tylko **przestrzeń i czas** (w sensie klasycznego pojęcia czasoprzestrzeni).

Koncepcja **continuum** jest niezwykle przydatna w naukach ścisłych oraz w technice. Do jej podstawowych zalet należy możliwość opisywania własności oraz/albo stanu każde-

go z rozważanych układów oraz/albo procesów za pomocą jednego z najważniejszych pojęć matematyki – a mianowicie **funkcji**, jak też możliwość stosowania rozbudowanego i wydajnego aparatu **analizy matematycznej**.

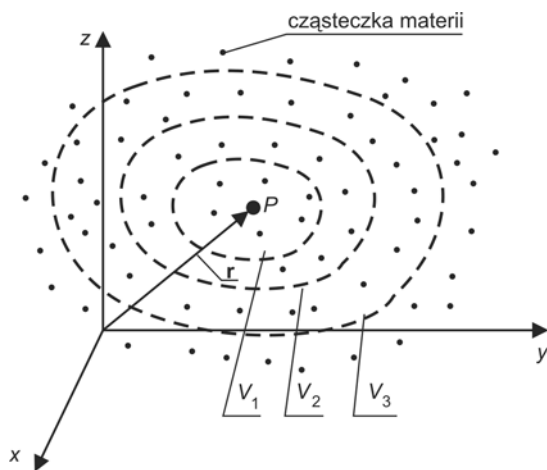
Nie wolno jednak zapominać, iż **ośrodek ciągły** jest zawsze **modelem** rzeczywistego **ośrodka dyskretnego**. Pojawiają się więc dwa problemy: określenie wzajemnych relacji między wielkościami opisującymi każdą z tych struktur (które różnią się z natury rzeczy) oraz wyznaczenie granic stosowalności modelu **continuum**.

W pierwszej kolejności przedstawmy ogólną zasadę stosowaną podczas przeliczania charakterystyk układu dyskretnego na charakterystyki układu ciągłego. Polega ona na tym, że dla dowolnego punktu P , leżącego w rozważanym obszarze (rys. 1.1), którego położenie w przyjętym układzie współrzędnych jest wyznaczone przez wektor wodzący:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.1)$$

określamy ją, sumując udziały odpowiednich wartości każdej z rozważanych wielkości fizycznych (WF), przypisanych obu strukturom (jak na przykład **masa**), lub też przejawiających się dla każdej z nich w odrębny sposób (jak na przykład **temperatura** ośrodka ciągłego, powiązana z **kinetyczną energią chaotycznego ruchu cząsteczek** na poziomie molekularnym). Symbolicznie możemy to zapisać następująco (rys. 1.1):

$$WF(x, y, z, t) = \sum_{V_j} WF_i. \quad (1.2)$$



Rys. 1.1. Określanie wzajemnych relacji między strukturą dyskretną a ośrodkiem ciągłym

Widzimy, że wartość wielkości fizycznej WF, zdefiniowana powyższą relacją dla ośrodka ciągłego (poziom „makro”), zależy od wielkości obszaru obliczeniowego (otoczenia punktu P). W ujęciu ogólniejszym można powiedzieć, że jest to kwestia wpływu rozmiarów „próbki” na reprezentatywność własności charakteryzujących nas układ. Jest to bardzo istotny problem wtedy, gdy rzeczywiście pobieramy próbki interesujących nas substancji (na przykład próbki skały podczas wiercenń geologicznych, próbki gruntu podczas badań geotechnicznych, próbki wody podczas badań hydrochemicznych...) i określone dla nich własności przyporządkowujemy punktom ich poboru.

Jednak w **teorii ośrodków ciągłych** relacja (1.2) ma tylko znaczenie poznawcze. Pozwala ona zrozumieć, w jaki sposób zachowanie układu na poziomie molekularnym („mikro”) przejawia się na poziomie „makro”. Natomiast roboczy opis tego układu, traktowanego jako **continuum**, dokonywany jest za pomocą różnych funkcji, które **wyznaczone są z równań fizyki matematycznej, otrzymywanych na bazie stosownych praw fizycznych**.

Drugi z wymienionych problemów – to jest ograniczenie stosowalności modelu ośrodka ciągłego – nie może być rozstrzygnięty w sposób jednoznaczny i bezdyskusyjny. Wynika to z faktu, że **pod względem formalnym** każdy układ dyskretny da się uśrednić i zastąpić umownym ośrodkiem ciągłym, nawet jeśli nie miałyby to sensu fizycznego. Przykładowo wyobraźmy sobie naczynie o pojemności V , wypełnione wodą, w której zanurzony jest kamień o objętości $V_k < V$. Jeżeli masy obu składników – wody i kamienia – wynoszą odpowiednio M_w i M_k , to bez trudu możemy zdefiniować średnią gęstość tego układu, równą:

$$\rho_s = \frac{M_w + M_k}{V}. \quad (1.3)$$

Jednakże byłaby to tylko operacja rachunkowa, a przyjęcie modelu ciągłego dla ewidentnie dyskretnego układu „woda-kamień” wymagałoby specjalnego uzasadnienia.

Zupełnie inną sytuację mielibyśmy natomiast wtedy, gdyby tę samą masę M_k rozdrobnić do poziomu ziaren piasku lub żwiru i wymieszać z tą samą masą wody M_w . Otrzymany układ (zwany w technice **pulpą**) ma bardzo ważne odniesienia praktyczne (taką zawiesinę można przemieszczać na duże odległości rurociągami, co jest podstawą **transportu hydraulicznego**), a średnia gęstość (1.3) stanowi dla niego ważny wskaźnik techniczny.

Aby rozstrzygnąć tę nieokreśloność przyjęto, że układ dyskretny można traktować jako ciągły wtedy, gdy na dystansie L_c , charakterystycznym dla geometrii rozważanego systemu, znajduje się co najmniej 100 tworzących go elementów (w ogólnym przypadku – molekuł). Jeżeli średnią odległość między tymi elementami oznaczymy przez l_s , to powyższy wymóg możemy zapisać następująco:

$$Kn = l_s / L_c < 0,01. \quad (1.4)$$

W przeważającej liczbie przypadków praktycznych warunek (1.4) jest spełniony bez żadnych wątpliwości. Średnie odległości między molekułami rzeczywistych substancji są rzędu 10^{-8} m, podczas gdy charakterystyczne wymiary układów technicznych rzadko spadają poniżej 10^{-3} m. Tym niemniej o warunku (1.4) nie należy zapominać, gdyż w niektórych zagadnieniach praktycznych może on nie być spełniony (na przykład rurociągi podciśnieniowe, stosowane w obiektach służby zdrowia, lub aparaty latające w górnych warstwach atmosfery ziemskiej).

Dodajmy jeszcze, że model ośrodka ciągłego jest stosowany nie tylko do układów, których dyskretna struktura przejawia się na poziomie „mikro”, lecz także wtedy, gdy tworzące układ elementy mają dużo większe rozmiary (skala „mezo”). Ważnych przykładów dostarczają **ośrodki rozdrobnione** (żwir, piasek, glina...), składające się z odrębnych elementów, lecz traktowane w **mechanice gruntów** jako **continuum**.

1.3. Podstawowe zagadnienia mechaniki ośrodków ciągłych

1.3.1. Uwagi ogólne

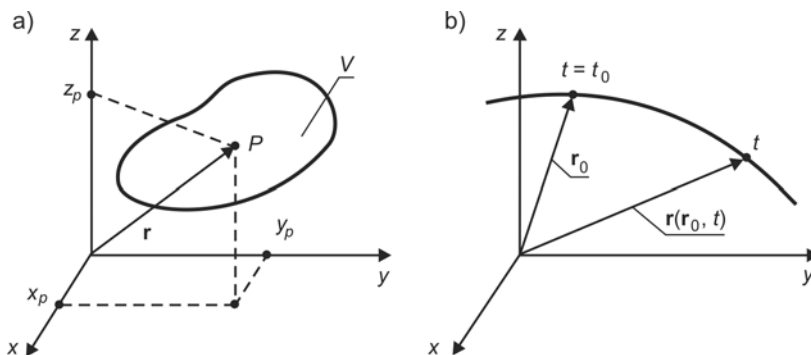
Mechanika jest gałęzią fizyki, poświęconą opisywaniu ruchu materii, jego przyczyn i skutków. Jest to definicja dostatecznie ogólna, gdyż obejmuje także często występujący i ważny praktycznie stan **bezruchu** materii, która może nie ulegać zauważalnym przemieszczeniom, mimo iż poddawana jest oddziaływaniom dynamicznym, wyrażanym przez **siły**. Przypadki należące do tej klasy zagadnień opisuje **statyka** (w przypadku płynów – **hydrostatyka**), podczas gdy ciałami znajdującymi się w ruchu zajmuje się **dynamika**.

W myśl omówionych już modeli struktur materialnych, możemy mówić o **mechanice układów dyskretnych oraz o mechanice ośrodków ciągłych**. Właśnie ta ostatnia stanowi punkt wyjścia do naszych dalszych rozważań, choć będziemy się też odwoływać do pojęć typowych dla opisu nieciągłego. Chodzi tu głównie o proces określany mianem **dyskretyzacji**. Polega on na zastąpieniu układu kontynualnego przez układ dyskretny. Podkreślmy, że gdy ciągłość systemu wyjściowego jest tylko modelem rzeczywistości (a tak bywa najczęściej), proces dyskretyzacji ma charakter wtórny. Ma to zasadnicze znaczenie w teorii **metod numerycznych** [6, 63], lecz stosowane jest też w klasycznej mechanice, a swój formalny wyraz znajduje w dwóch metodach opisu stanu materii.

Pierwsza z nich, zwana **metodą Eulera**, polega na określaniu tego stanu za pomocą matematycznych funkcji, dla których **zmiennymi niezależnymi** są **współrzędne przestrzenne** oraz **czas**. Położenie każdego punktu rozważanego obszaru V wskazane jest **promieniem wodzącym** \mathbf{r} (relacja 1.1), wobec czego każda **zmienna zależna** f , mająca swą własną interpretację fizyczną, tworzy **pole fizyczne**:

$$f = f(\mathbf{r}, t). \quad (1.5)$$

Z tego względu metoda Eulera bywa też nazywana **metodą polową**. W myśl dotychczasowych rozważań możemy uznać ją za typową dla mechaniki ośrodków ciągłych.



Rys. 1.2. Zmienne niezależne w metodzie Eulera (a) oraz w metodzie Lagrange'a (b)

Drugi ze wspomnianych sposobów opisu, zwany **metodą Lagrange'a**, polega na określaniu interesujących nas wielkości fizycznych dla każdego z osobnych ciał, tworzących układ (jeżeli są one odrębne), lub też dla każdej ze sztucznie wydzielonych „porcji” materii (jeśli tworzy ona strukturę ciągłą). Położenie każdego takiego elementu określone jest przez aktualny wektor wodzący \mathbf{r} , zmienny w czasie, przy czym poszczególne elemen-

ty rozróżniamy dzięki ich **położeniu początkowemu**, określone odpowiednim wektorem wodzącym \mathbf{r}_0 . Możemy więc napisać:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) = [x(\mathbf{r}_0, t), y(\mathbf{r}_0, t), z(\mathbf{r}_0, t)]. \quad (1.6)$$

Dla dowolnej wielkości fizycznej f mamy tu:

$$f = f(\mathbf{r}_0, t). \quad (1.7)$$

Widzimy, że ujęcie to jest dostosowane do opisu układów dyskretnych – sprowadza się ono do „wędrowania” (stąd równoważna nazwa – **metoda wędrowna**) wraz z każdym elementem układu (wyróżniającym się ze swej natury lub wyróżnionym w sposób sztuczny, na przykład przez zabarwienie, co jest stosowane w metodach empirycznych), czy też „śledzenia” każdego z takich elementów (skąd jeszcze jedna nazwa tego podejścia – **metoda śledcza**).

Podkreślimy jednak, że niezależnie od wybranej metody (jeśli mamy możliwość zastosowania obu) **wynik końcowy** (określający stan układu) **musi być taki sam**, gdyż odnosi się on do obiektywnie zachodzącego procesu, którego przebieg nie może zależeć od sposobu jego obserwacji i opisu.

1.3.2. Rodzaje wielkości fizycznych

Mianem **wielkości fizycznej** będziemy określali właściwość ciała lub zjawiska, którą możemy odróżnić od innych właściwości pod względem jakościowym i którą można opisać ilościowo.

Termin ten może być stosowany ogólnie, bez odniesienia do konkretnego układu (na przykład **czas, długość, masa, temperatura, twardość**), a także dla określenia jakiegoś szczególnego przypadku (na przykład **czas obrotu, długość drogi, masa cegły, temperatura wody, twardość skały**).

Rzecz oczywista, porównanie ilościowe może dotyczyć tylko wielkości tego samego rodzaju. Wiąże się ono z pojęciami „układ wielkości”, „wymiar” i „jednostka miary”. Pierwsze z nich określa uporządkowany zestaw wielkości fizycznych – dotyczący jednej dziedziny nauki, lub bardziej uniwersalny, dotyczący wielu dziedzin. W takim układzie wyróżniamy **wielkości podstawowe** (umownie przyjęte jako niezależne), oraz **wielkości pochodne** (określone za pomocą wzorów definicyjnych, jako kombinacje wielkości podstawowych).

W mechanice najdogodniejszy układ wielkości podstawowych tworzą:

$$\text{długość } (L), \quad \text{masa } (m), \quad \text{czas } (t).$$

Pozwalają one zdefiniować każdą inną wielkość, ukazując jej związek z pozostałymi. Przykładowo:

- **prędkość** (iloraz długości drogi przez czas trwania ruchu),
- **przyspieszenie** (iloraz prędkości przez czas),
- **siła** (iloczyn masy i przyspieszenia).

Termin „wymiar” określa wyrażenie, przedstawiające każdą wielkość fizyczną z danego układu jako iloczyn potęg wielkości podstawowych. Oznaczamy go albo symbolem dim , umieszczonym przed rozważaną wielkością, albo ujmując ją w nawias kwadratowy. Przykładowo, wymiar ciśnienia oznaczamy następująco:

$$dim p = [p] = L^{-1} m^1 t^{-2}. \quad (1.8)$$

I wreszcie przez termin „jednostka miary” rozumiemy umownie ustaloną liczbę, która służy do ilościowego porównywania różnych wartości tej samej wielkości fizycznej. Dla wielkości podstawowych mamy **jednostki podstawowe**, zaś dla pochodnych – **jednostki pochodne**. Ich uporządkowany zbiór nosi nazwę **układu jednostek miar**. Liczba określająca, ile jednostek miary reprezentuje aktualnie dana wielkość fizyczna nazywa się jej **wartością**. Jeżeli wartość wielkości fizycznej a zależy od układu jednostek miar, to nazywamy ją **wymiarową**. W przeciwnym razie mówimy o **wielkości**

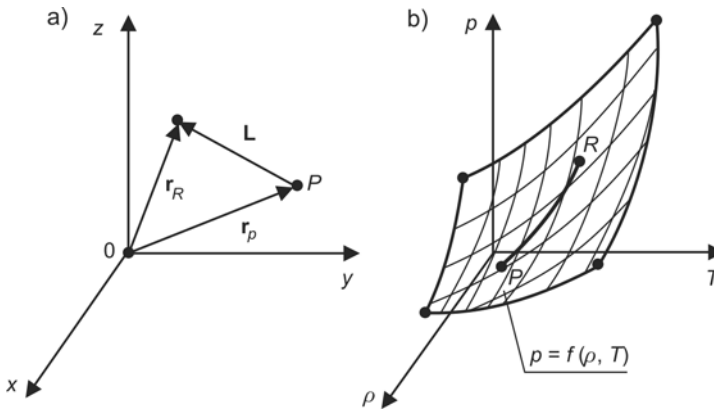
bezwymiarowej b (wtedy mamy $\dim b = 1$). Przykładami wielkości bezwymiarowych są **ludolfina** $\Pi = 3,14159\dots$ i podstawa logarytmów naturalnych $e = 2,71828\dots$

Wielkości fizyczne można klasyfikować z różnych punktów widzenia. Niektóre z nich mają charakter formalny, toteż definiowane są ogólnie, w ramach pojęć matematycznych, jak podstawowy ich podział na:

- zmienne niezależne,
- zmienne zależne.

Do tych pierwszych zaliczamy z reguły **współrzędne przestrzenne** i **czas** (patrz par. 1.3.1), a wtedy drugą grupę tworzą wszelkie możliwe wielkości, rozważane w obszarze nauk ścisłych.

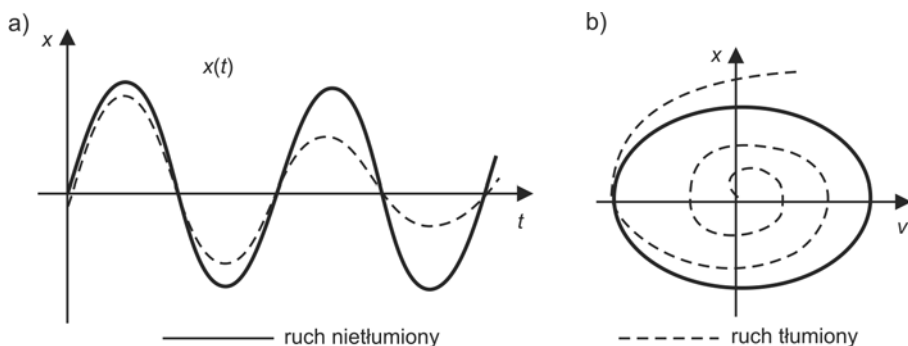
Zmienne zależne, dane przez współrzędne przestrzenne, określają **przestrzeń metryczną** (to jest taką, w której można zdefiniować **odległość** między dwoma dowolnymi punktami w sensie geometrycznym – rys. 1.3a).



Rys. 1.3. Przestrzeń metryczna (a) i afiniczna (b)

Może jednak być tak, że interesuje nas zależność między pewnymi wielkościami, mającymi różne znaczenia fizyczne. Gdy każdej z nich przyporządkujemy osobną oś układu współrzędnych (rys. 1.3b), to otrzymamy **przestrzeń afiniczną**. Możemy w takiej przestrzeni wybrać parę punktów (P i R na rys. 1.3b), lecz pytanie o długość łączącego je łuku nie ma sensu, gdyż osie współrzędnych nie mają wspólnej miary. Obiektami w takiej przestrzeni zajmuje się **geometria afiniczna**.

W ujęciu fizycznym przestrzeń afiniczna nazywana jest **przestrzenią stanu**. Jej współrzędne określone są przez poszczególne zmienne, opisujące stan układu. Gdy zbiór tych zmiennych jest utworzony przez interesującą nas wielkość fizyczną oraz jej kolejne pochodne, mówimy o **przestrzeni fazowej**. Dla przykładu rozważmy ruch prostego wahadła. Jego położenie w dowolnym momencie czasu t jest określone przez odległość x od punktu spoczynku wahadła, czyli przez funkcję $x(t)$. Przestrzeń fazową dla tego rodzaju ruchu tworzy położenie x oraz jego pochodna względem czasu, czyli prędkość v . Ruch wahadła możemy opisać albo zależnością $x(t)$ (rys. 1.4a – jeśli nie występuje tłumienie, wykresem tej funkcji jest sinusoida; gdy zaś na układ działają siły tłumiące, jak na przykład opór powietrza – wykresem jest sinusoida o malejącej amplitudzie), albo też relacją $x(v)$ (rys. 1.4b – wykresami są tu albo elipsoida dla przypadku bez sił tłumiących, albo spirala, gdy występuje tłumienie).



Rys. 1.4. Charakterystyki ruchu wahadła

Inny istotny podział pozwala rozróżnić wielkości fizyczne ze względu na stopień ich złożoności. Mamy tu:

- **skalary** (wielkości jednoznacznie określone przez jedną **wartość liczbową** – na przykład **czas, temperatura**),
- **wektory** (wielkości jednoznacznie określone przez swą **wartość liczbową** oraz **kierunek działania** – na przykład **prędkość, siła**),
- **tensory**.

To ostatnie pojęcie w ujęciu formalnym jest bardzo złożone. Jednakże w praktyce technicznej możemy posłużyć się jego **definicją uproszczoną**, według której mianem **tensora** określamy taką wielkość fizyczną, która opisana jest za pomocą pojęcia **macierzy**.

Kolejna klasyfikacja wielkości fizycznych uwzględnia ich zależność od rozmiarów układu. Jeżeli wartość danej wielkości jest do nich proporcjonalna, nazywamy ją **ekstensywną** (albo **globalną**, gdyż odnosi się do całości układu). Podstawowymi przykładami wielkości ekstensywnych są objętość, energia, masa, ładunek elektryczny.

Drugi rodzaj wielkości fizycznej, która nie zależy od rozmiarów układu, nazywamy **intensywną** (lub **lokalną**, gdyż odnosi się ona do poszczególnych punktów układu). Jako przykłady można tu podać ciśnienie, temperaturę, gęstość, stężenie.

Wielkości ekstensywne przy łączeniu pewnej liczby układów sumują się, w przeciwieństwie do wielkości intensywnych, które zmieniają się w takiej sytuacji w bardziej złożony sposób. Rozważmy obrazowy przykład, jakiego dostarcza połączenie dwóch terytoriów (krajów, powiatów...). Powierzchnia oraz ludność nowej struktury są równe sumom odpowiednich wielkości wyjściowych, gdyż oba te pojęcia mają charakter ekstensywny. Inaczej rzecz się ma z gęstością zaludnienia. Jako wielkość intensywna jest ona równa ilorazowi liczby ludności i powierzchni zaludnianego obszaru. Ta ważna cecha wielkości lokalnych (są one z reguły ilorazami dwóch wielkości globalnych) prowadzi nas do pojęcia **gęstości rozkładu**, które omówimy w następnym paragrafie.

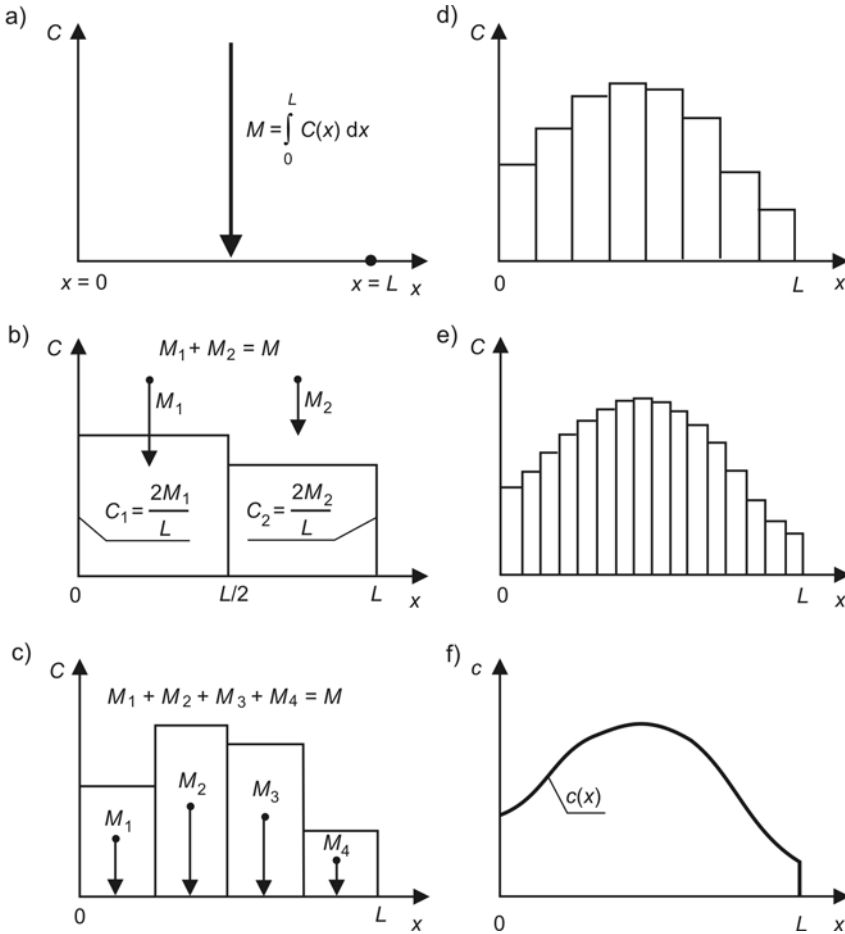
1.3.3. Gęstość rozkładu wielkości fizycznej

Charakter układu dyskretnego jest ściśle związany z jego rozmiarami, toteż opisując go z reguły posługujemy się wielkościami ekstensywnymi. Inaczej rzecz się ma z układami ciągłymi. Traktujemy je z definicji jako wypełniające obszar w sposób nieprzerwany, więc i charakteryzujące je wielkości też muszą być określone w każdym jego punkcie. Powinny one w ujęciu ciągłym (choć ich natężenie może być zmienne) opisywać sposób, w jaki każda z globalnych własności układu jest rozłożona w zajmowanym obszarze.

Rozważmy wielkość ekstensywną M (na przykład masę substancji), rozproszoną w sposób który można uznać za ciągły w pewnym obszarze. Dla prostoty zapisu niech to będzie obszar jednowymiarowy, wyznaczony odcinkiem od 0 do L osi $0x$ (rys. 1.5). Wybierzmy fragment ΔM tej wielkości, przyporządkowany części ΔL obszaru. Iloraz:

$$C = \Delta M / \Delta L \quad (1.9)$$

określa średnie natężenie, z jakim wielkość M odnieszona jest do punktów odcinka ΔL . Jest to wielkość intensywna, przy czym w ujęciu różnicowym (1.9) jej wartość zależy od sposobu podziału obszaru na części. Obrazują to kolejne wykresy słupkowe na rys. 1.5.



Rys. 1.5. Geometryczna interpretacja pojęcia gęstości rozkładu

Dla uniknięcia tej niejednoznaczności wybieramy nieskończenie małe przedziały ΔL , a **gęstość rozkładu** rozważanej wielkości ekstensywnej zapisujemy, używając pojęcia **granicy**:

$$c = \lim_{\Delta L \rightarrow \Delta L_g} \Delta M / \Delta L = \frac{dM}{dL} . \quad (1.10)$$

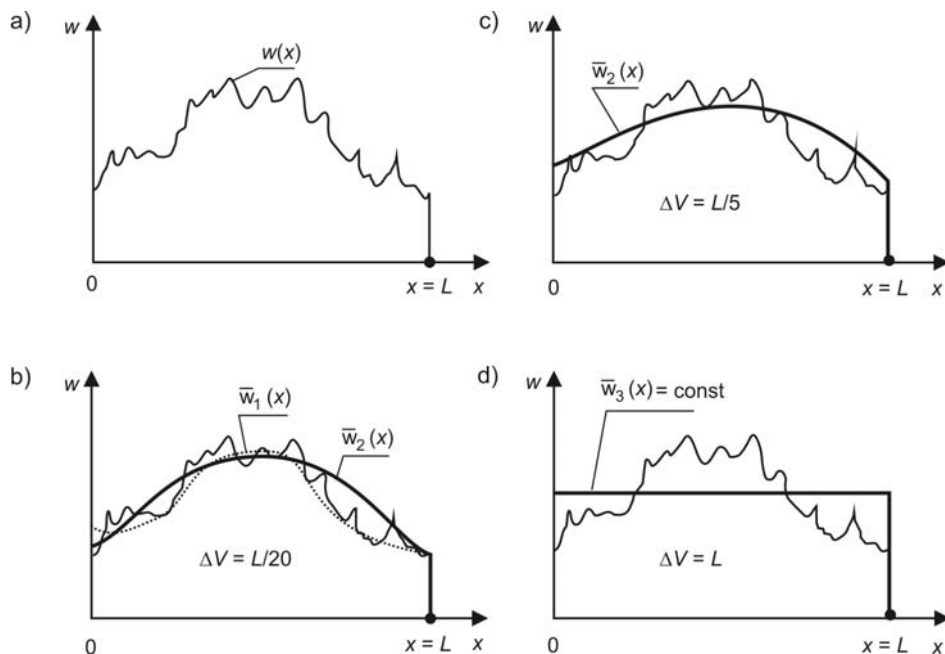
Symbol ΔL_g oznacza, że w fizyce i naukach technicznych nie można wielkości ΔL zmniejszać dowolnie, gdyż jest ona ograniczona od dołu przez molekularną strukturę materii (liczba Knudsena (1.4)). Posługując się relacją (1.10), definiujemy ciągłą funkcję, stanowiącą szukaną gęstość rozkładu wielkości M (rys. 1.5f).

1.3.4. Uśrednianie wielkości fizycznych

Stosunkowo często rozważane gęstości rozkładu opisane są funkcjami o złożonym przebiegu (rys. 1.6a), przy czym niejednokrotnie bywa tak, iż do naszych celów wystarczy ich przybliżony przebieg. Stosujemy wtedy **uśrednianie** funkcji. Polega ono na zastępowaniu wielkości o bardziej skomplikowanej gęstości rozkładu przez wielkość o rozkładzie prostszym, przy czym obie muszą być w jakimś sensie równoważne. Najdogodniej jest wyrazić tę równoważność przez całą rozkładu wyjściowego i rozkładu uproszczonego, co prowadzi do następującej definicji uśrednionej wielkości fizycznej:

$$\bar{w} = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} w d\Delta V . \quad (1.11)$$

Im mniejszy jest obszar uśredniania ΔV , tym lepsze przybliżenie funkcji rzeczywistej stanowi rozkład uproszczony (rys. 1.6b, gdzie przyjęto $\Delta V = L/20$, otrzymując średnią \bar{w}_1 , oraz rys. 1.6c, gdzie dla $\Delta V = L/5$ mamy \bar{w}_2). W takim przypadku mówimy czasem o jej **wyglądaniu** lub **filtracji**. Ze wzrostem ΔV otrzymujemy coraz grubsze przybliżenia, aż do sytuacji, gdy dla $\Delta V = V$ zmienną funkcję początkową zastępujemy jej **wartością średnią** dla całego obszaru (rys. 1.6d, gdzie dla $\Delta V = L$ mamy $\bar{w}_3 = \text{const}$).



Rys. 1.6. Uśrednianie gęstości rozkładu wielkości fizycznej

1.3.5. Ruch materii

Molekuły każdej substancji rzeczywistej nieustannie zmieniają swe położenia. Łączne przemieszczenie każdej z nich należy rozłożyć na dwie składowe. Pierwsza z nich odnosi się do **ruchu chaotycznego**, zaś druga – do **ruchu makroskopowego**, który w przypadku płynów nazywany jest **adwekcją** (w szczególnym przypadku, gdy adwekcję powoduje siła wyporu, wywołana zróżnicowaniem gęstości płynu, używamy terminu **konwekcja**).

Ruch chaotyczny wykonywany jest przez molekuły praktycznie zawsze, toteż może być traktowany jako atrybut materii. Inaczej jest z ruchem makroskopowym, którego wywołanie wymaga przyłożenia do układu niezrównoważonej siły. Tak więc **rzeczywista prędkość** każdej cząsteczki \mathbf{u}_R może być przedstawiona jako suma **prędkości adwekcji** \mathbf{u} oraz **prędkości ruchu chaotycznego** \mathbf{u}_C :

$$\mathbf{u}_R = \mathbf{u} + \mathbf{u}_C. \quad (1.12)$$

Gdybyśmy znali rzeczywistą prędkość każdej z molekuł \mathbf{u}_{Ri} , znajdujących się w wybranym otoczeniu V_j dowolnego z punktów P , leżących w rozważanym obszarze (rys. 1.1), to sumując je w sposób opisany ogólną relacją (1.2) i dzieląc przez całkowitą liczbę molekuł w tym otoczeniu N_j , zdefiniowalibyśmy **prędkość adwekcji**:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{N_j} \sum_{i=1}^{I_j} \mathbf{u}_{Ri}. \quad (1.13)$$

Z już wspomnianych powodów (ogromna liczba molekuł oraz złożoność ich ruchu), operacja taka mogłaby zostać przeprowadzona tylko w przybliżeniu (metody tego rodzaju stosowane są w ramach **fizyki statystycznej**). W **mechanice deterministycznej** funkcja \mathbf{u} należy do zmiennych, wyznaczanych z równań wyrażających prawa natury, ale relacja (1.13) ma duże znaczenie dla **rozumienia fizycznych własności materii oraz wielkości, opisujących jej stan** (podrozdz. 1.5).

Zdefiniowana w wyżej opisany sposób prędkość adwekcji jest jednym z podstawowych **pól fizycznych**. Jest ono opisane w każdym punkcie rozważanego obszaru, zgodnie z omówioną już koncepcją ośrodka ciągłego (według **metody Eulera**). Można powiedzieć, że każdy punkt tego ośrodka porusza się z przypisanym mu wektorem prędkości. Z drugiej jednak strony należy pamiętać, że wobec dyskretnej budowy materii w rozważanym punkcie może akurat znajdować się materia (cząstka), lub może on akurat znajdować się w przestrzeni między molekułami. Taka analiza struktury rzeczywistej i jej modelu obliczeniowego jest szczególnie znacząca w mechanice cieczy i gazów.

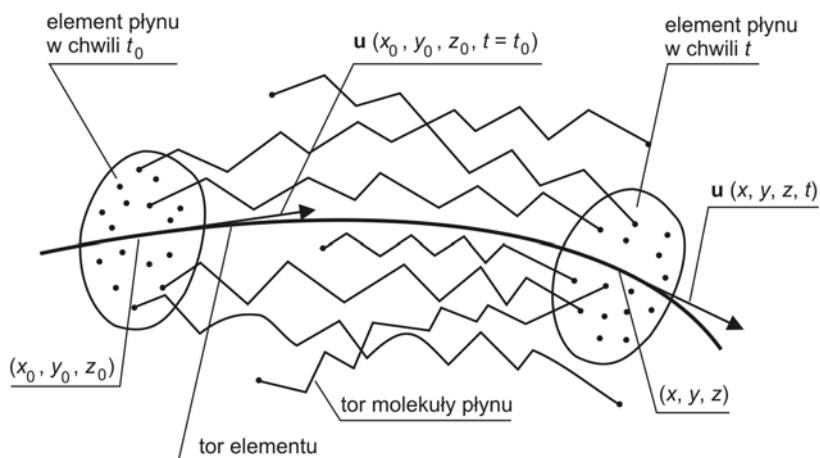
Pola prędkości płynów są bardzo złożone, toteż przyjęło się mówić, że najmniejszą porcją tego rodzaju substancji jest **element płynu**. Jego rozmiary są tak małe, że może być traktowany jako punkt materialny (choć nim nie jest), lecz na tyle duże, że spełnia warunek (1.4). Element płynu jest pojęciem bardzo przydatnym przy stosowaniu do opisu ruchu płynu **metody Lagrange’a** (par. 1.3.1).

Zgodnie z przedstawioną zasadą definiowania prędkości adwekcji, możemy każdy **element płynu** traktować jako zwartą i wymierną porcję masy, choć w istocie rzeczy w trakcie ruchu następuje nieustanna wymiana tworzących go molekuł płynącej cieczy lub gazu (rys. 1.7).

Chaotyczna składowa ruchu \mathbf{u}_C , pominięta w makroskopowym opisie zjawiska, odgrywa bardzo istotną rolę w **procesach transportu pędu, masy i energii** (pkt 1.4.2.4), a także jest mikroskopową miarą jednej z głównych makroskopowych wielkości fizycznych – **temperatury** T , zgodnie z relacją [7]:

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}m_M\bar{u}_C^2, \quad (1.14)$$

gdzie $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ kg m}^2/(\text{s}^2 \text{ K})$ jest **stałą Boltzmann**, m_M – masą molekuly, \bar{u}_C – średniokwadratową prędkością chaotycznego ruchu molekuly [59].



Rys. 1.7. Ruch elementu płynu w ujęciu kontynualnym na tle rzeczywistego ruchu molekuł

1.3.6. Mechaniczne oddziaływania ciał materialnych

1.3.6.1. Siły i ich rodzaje

Podstawową miarą oddziaływań między ciałami i substancjami rozważanymi w mechanice jest **siła**. Istnieją tu dwie podstawowe kategorie:

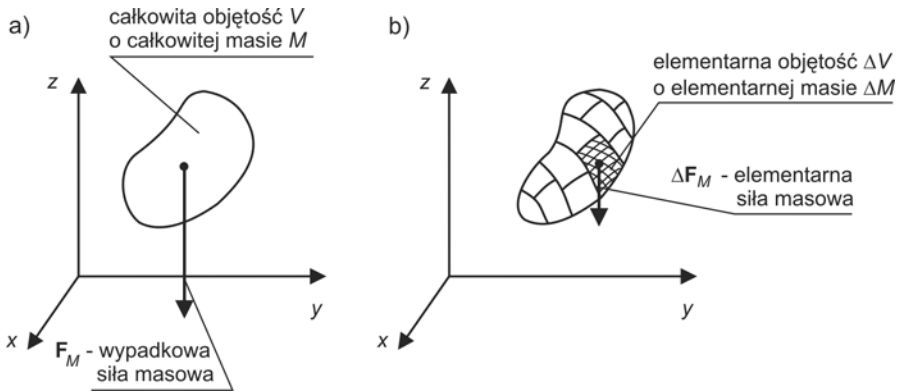
- **siły masowe** (które działają na każdy punkt rozważanego ciała),
- **siły powierzchniowe** (które działają na każdy punkt **powierzchni zewnętrznej** rozważanego ciała).

Z natury rzeczy siły są **wielkościami ekstensywnymi** (par. 1.3.2), bowiem odnoszą się do układów jako całości, a przy ich łączeniu lub rozdzielaniu ulegają analogicznym przemianom (dodawaniu lub dzieleniu, choć w ogólnym przypadku nie odbywa się to proporcjonalnie do zmian geometrii układu). Będziemy więc oczekiwali, że dla każdej siły da się zdefiniować odpowiednią wielkość **intensywną**, mającą względem niej charakter **gęstości rozkładu**.

1.3.6.2. Jednostkowa siła masowa

Za podstawowy rodzaj siły masowej w mechanice należy uznać **siłę grawitacji (siłę ciężkości)**. Oprócz niej w zagadnieniach inżynierii środowiska i dyscyplinach pokrewnych będziemy niekiedy mieli do czynienia z **siłą odśrodkową** oraz z **siłą elektromagnetyczną**. Odgrywają one szczególną rolę w takich urządzeniach do usuwania z cieczy lub gazu cząstek zawiesiny, jak odpowiednio **hydrocyklony** i **elektrofiltry**.

Gęstość rozkładu rozważanej tu wielkości dynamicznej \mathbf{F}_M (rys. 1.8a) nazywamy **jednostkową siłą masową** \mathbf{f} . Definiujemy ją dla każdego punktu obszaru, przyporządkowując mu elementarną masę ΔM , na którą działa elementarna siła masowa $\Delta \mathbf{F}_M$ (rys. 1.8b).



Rys. 1.8. Graficzna interpretacja jednostkowej siły masowej

Dzieląc obie te wielkości przez siebie musimy pamiętać, że element ΔM nie może być zbyt duży (gdyż nie byłby miarodajny dla lokalnego charakteru funkcji \mathbf{f}), ani zbyt mały (ze względu na warunek Knudsena (1.4)). Jak wiemy z matematyki, w takim przypadku posługujemy się pojęciem **granicy**, które pozwala napisać:

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta M \rightarrow \Delta M_g} \frac{\Delta \mathbf{F}_M}{\Delta M} = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_g} \frac{\Delta \mathbf{F}_M}{\rho \Delta V} = \frac{d\mathbf{F}_M}{dM} = \frac{1}{\rho} \frac{d\mathbf{F}_M}{dV} = \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_V. \quad (1.15)$$

Zróżnicowanie powyższego zapisu wynika z faktu, że elementarną masę można wyrazić przez **gęstość substancji** ρ (pkt 1.4.2.4) oraz objętość elementu ΔV . Niekiedy jest to bardzo wygodne.

Jeżeli znamy jednostkową siłę masową \mathbf{f} , wówczas wypadkową siłę masową obliczamy za pomocą całki, wynikającej z (1.15):

$$\mathbf{F}_M = \int_V \rho \mathbf{f} dV. \quad (1.16)$$

Dla najbardziej nas interesującej siły masowej, którą stanowi siła ciężkości, mamy:

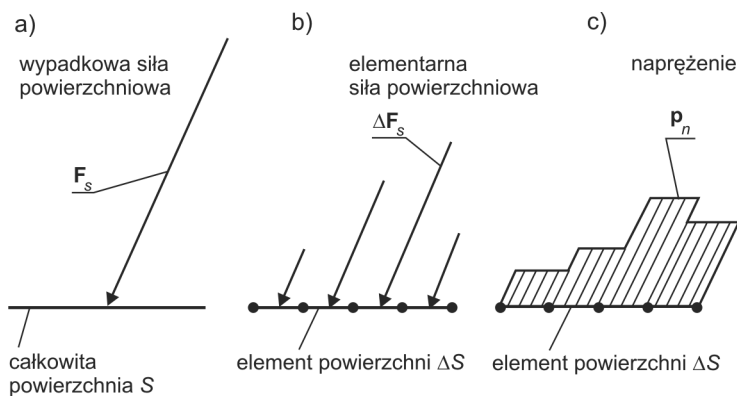
$$d\mathbf{F}_M = d\mathbf{F}_G = \rho g dV, \quad (1.17)$$

co oznacza, że w tym przypadku jednostkowa siła masowa określona jest przez wartość **przyspieszenia ziemskiego**:

$$f = g = 9,81... \text{ m/s}^2. \quad (1.18)$$

1.3.6.3. Gęstość rozkładu siły powierzchniowej

Gęstość rozkładu siły powierzchniowej \mathbf{p}_n obliczana jest w sposób analogiczny do poprzedniego, przy czym odnoszona jest do powierzchni, na którą działa. Jest to wielkość tak ważna w nauce i technice, że nosi odrębną nazwę – jest mianowicie zwana **naprężeniem**.



Rys. 1.9. Graficzna interpretacja napężenia

Zasadę jej definiowania przedstawiono na rys. 1.9. Pozwala ona napisać:

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow \Delta S_g} \frac{\Delta \mathbf{F}_S}{\Delta S} = \frac{d\mathbf{F}_S}{dS}. \quad (1.19)$$

Jeśli znamy napężenie, to wobec (1.19) wypadkową siłę powierzchniową \mathbf{F}_S wyraża oczywista relacja:

$$\mathbf{F}_S = \int_S \mathbf{p}_n ds. \quad (1.20)$$

Funkcję \mathbf{p}_n można wyznaczyć dla rzeczywistej powierzchni zewnętrznej, ograniczającej rozważany obszar (mówimy wtedy o **napężeniu zewnętrznym**), jak również dla dowolnej powierzchni geometrycznej, położonej wewnątrz obszaru (na której panują **napężenia wewnętrzne**).

Podział ten ma duże znaczenie tak poznawcze, jak i praktyczne. **Napężenia zewnętrzne** opisują wzajemne oddziaływania dynamiczne, panujące na bezpośrednim styku między obszarem a jego otoczeniem (zauważmy, że analogiczne oddziaływania opisują **siły masowe**, przy czym różnica polega na tym, że te ostatnie nie są związane z kontaktem między układem a jego otoczeniem, bowiem działają na odległość). Celowe jest tu rozważenie dwóch aspektów.

Pierwszy z nich pozwala rozróżnić, co jest w rozważanym przypadku czynnikiem aktywnym (obszar, czy jego otoczenie), zaś drugi określa typ działania (napędzające, lub hamujące). Otrzymujemy w ten sposób cztery kombinacje, które w poglądowy sposób przedstawiają możliwe sytuacje:

- otoczenie jest czynnikiem napędowym dla rozważanego układu (na przykład napężenie wywierane przez strumień powietrza na swobodną powierzchnię wody, generujące **prądy powierzchniowe**);
- otoczenie jest czynnikiem hamującym (na przykład opór ścianek rurociągu, utrudniający przepływ wody w jego wnętrzu);
- układ jest czynnikiem napędowym (na przykład siła unosząca tratwę, dryfującą na powierzchni wody);
- układ jest czynnikiem hamującym (na przykład opór wody, który musi być pokonany przez silniki napędzające statek).

Z kolei **napężenie wewnętrzne** określa sposób przekazywania działających na układ sił przez jego wnętrze. W mechanice ciała stałego szczególnie ważne są te napężenia wewnętrzne, które można wywołać bez spowodowania ruchu układu. Typowych przykładów dostarcza budownictwo – właściwie zaprojektowany i wykonany budynek musi **przenosić obciążenia**, nie wywołując odczuwalnych przez użytkowników przemieszczeń.

Z kolei w mechanice płynów, dla której ruch jest szczególnie ważnym stanem, naprężenia wewnętrzne często reprezentują **opór ośrodka**. Praca wykonywana celem przezwyciężenia tego oporu, niezbędna dla zmiany lub choćby utrzymania warunków ruchu, wymaga ciągłego dostarczania do układu **energii mechanicznej**, gdyż jej zasoby są nieustannie zamieniane w **energię cieplną**. Proces tej przemiany nazywamy **dyssypacją energii**. W technice mówi się tu o **stratach energii mechanicznej** (w ujęciu potocznym często opuszczając ostatnie słowo).

Zgodnie z definicją (1.19) naprężenie jest wielkością wektorową, toteż możemy napisać:

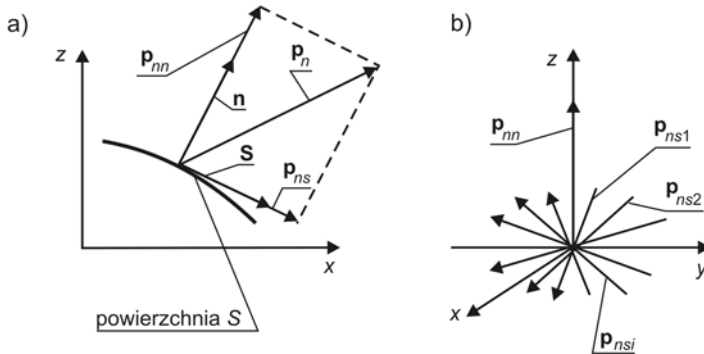
$$\mathbf{p}_n = p_{nx} \mathbf{i} + p_{ny} \mathbf{j} + p_{nz} \mathbf{k}, \quad (1.21)$$

wyrażając je w ten sposób przez **współrzędne (składowe)** p_{ni} , zależne od wybranego **układu odniesienia (układu współrzędnych)**. Szczególnie dogodny jest **układ kartezjański** $Oxyz$ – prostoliniowy i ortogonalny (jego osie utworzone są przez trzy linie proste, wzajemnie do siebie prostopadłe).

W ogólnym przypadku układ współrzędnych można wybrać dowolnie, uwzględniając jednak konkretne uwarunkowania, z jakimi mamy do czynienia. W inżynierii środowiska szczególnie istotny jest przypadek powiązania tego układu z charakterystycznymi kierunkami kuli ziemskiej. Jedna z osi jest często sytuowana wzdłuż linii wschód-zachód, druga wzdłuż linii północ-południe, zaś trzecia – prostopadła do powierzchni Ziemi.

Niezależnie od ogólnego układu współrzędnych, w niektórych sytuacjach celowe jest wprowadzenie układu lokalnego. Typowym jego przykładem jest **naturalny układ odniesienia**, pożyteczny wtedy, gdy rozważamy jakąś powierzchnię. Wyznaczają go dwa charakterystyczne dla każdej powierzchni kierunki – **normalny** (prostopadły do tej powierzchni) oraz **styczny** (równoległy do niej). W przypadku wektora naprężenia możemy wtedy napisać (rys. 1.10a):

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{nx} + \mathbf{p}_{nz} = \mathbf{p}_{nn} + \mathbf{p}_{ns}. \quad (1.22)$$



Rys. 1.10. Naturalny układ odniesienia: a) naprężenia normalne i styczne w ujęciu dwuwymiarowym, b) jednoznaczność kierunku normalnego i wieloznaczność kierunku stycznego

Oba te kierunki (jak każdy układ współrzędnych) mają swoje **wersory**, czyli wektory o jednostkowej długości. Są nimi odpowiednio **wektor jednostkowy normalny** \mathbf{n} oraz **wektor jednostkowy styczny** \mathbf{s} (rys. 1.10a).

Znaczenie takiego układu wynika stąd, że pozwala on zróżnicować własności i reakcje materii, ujawniające się przy różnych kierunkach działania naprężeń. Przykładowo, tafła lodowiska nie ugina się pod ciężarem łyżwiarza, czyli wykazuje znaczną odporność na działanie naprężeń normalnych,

natomiast stawia znikomy opór naprężeniom stycznym, pozwalając zawodnikowi na ślizganie się wzdłuż swej powierzchni.

Między tymi charakterystycznymi kierunkami istnieje bardzo istotna różnica formalna. Kierunek normalny jest mianowicie w każdym punkcie powierzchni (gładkiej w sensie matematycznym [27]) określony jednoznacznie, podczas gdy kierunków stycznych jest w takim punkcie nieskończenie wiele (rys. 1.10b). Tym samym **naprężenie styczne** będzie zawsze miało charakter **wektorowy**, podczas gdy **naprężenie normalne** można w wygodny sposób zastąpić iloczynem jego modułu p oraz jednoznacznie określonego wektora jednostkowego \mathbf{n} :

$$\mathbf{p}_{nn} = -p \mathbf{n} \quad (1.23)$$

(znak „minus” jest tu wyrazem przyjętych konwencji, iż dodatni wektor normalny \mathbf{n} jest zorientowany na zewnątrz powierzchni, podczas gdy naprężenie jest uważane za dodatnie wtedy, gdy działa ku powierzchni).

Skalarną funkcję $p(x, y, z, t)$ nazywać będziemy **ciśnieniem całkowitym**. W dalszym ciągu rozważań wprowadzimy szczególne rodzaje tej wielkości fizycznej – **ciśnienie hydrodynamiczne**, **ciśnienie hydrostatyczne**, **ciśnienie dynamiczne** oraz **ciśnienie statyczne** (patrz par. 6.2.9). Na zróżnicowanie tych pojęć warto zwrócić uwagę, gdyż w potocznym języku technicznym często używa się terminu skróconego – **ciśnienie**, zakładając, że każdorazowo wiemy, o jakim wariacie tego pojęcia jest mowa.

1.3.6.4. Stan naprężenia

W naturalnej dla mechaniki ośrodków ciągłych metodzie Eulera (par. 1.3.1) rozważane wielkości fizyczne są funkcjami współrzędnych przestrzennych oraz czasu. Jednakże zastosowanie takiej konwencji bezpośrednio do opisu zmienności **naprężenia** \mathbf{p}_n , zdefiniowanej relacją (1.19), nie jest możliwe. Stwierdzono bowiem, że jedna i ta sama powierzchnia S , umieszczana w tych samych warunkach dynamicznych, odbiera różne siły powierzchniowe przy zmianie swej orientacji (określonej kierunkiem wektora jednostkowego normalnego \mathbf{n}). Innymi słowy, **naprężenie zależy nie tylko od położenia punktu powierzchni w przestrzeni i czasie, lecz także od orientacji powierzchni w tym punkcie**, co formalnie można zapisać następująco:

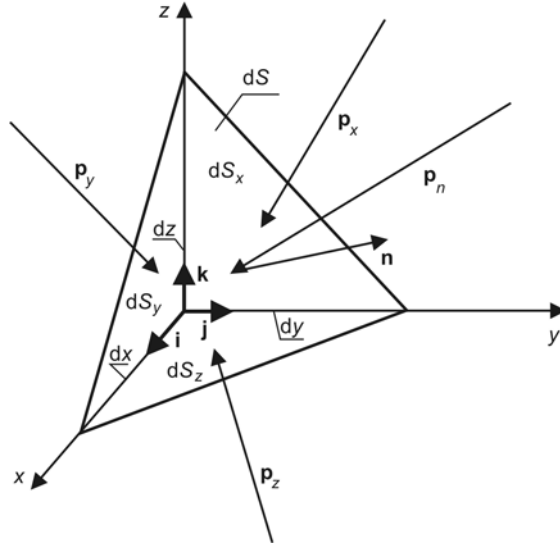
$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_n(\mathbf{r}, \mathbf{t}, \mathbf{n}). \quad (1.24)$$

Prostym tego przykładem może być żagiel. Umieszczony na maszcie, zawsze w tym samym strumieniu powietrza i przy stałej powierzchni, będzie odbierał różne siły ze strony wiatru dla różnych ustawień względem łodzi. Bardzo podobnego przykładu dostarcza parasol, trzymany w dłoni osoby stojącej podczas wietrznej pogody na otwartym powietrzu.

Aby rozwiązać ten problem – formalny, lecz mający ważne konsekwencje praktyczne, przyjęto pewną konwencję, zgodnie z którą każdy element dowolnej powierzchni dS przedstawiamy przez jego rzuty na płaszczyzny układu współrzędnych. W układzie kartezjańskim będą to odpowiednio dS_x , dS_y oraz dS_z . Orientację elementu dS w przestrzeni określa wektor \mathbf{n} , zaś dla powierzchni składowych określają je odpowiednie wersory \mathbf{i} , \mathbf{j} i \mathbf{k} .

Na każdy z tych czterech elementów działa siła powierzchniowa, wyrażona przez naprężenia \mathbf{p}_n , \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y oraz \mathbf{p}_z (rys. 1.11). Na utworzoną przez cztery rozważane powierzchnie czworościenną objętość dV działają także siły masowe, lecz wobec jej nieskończenie małych rozmiarów możemy ten czynnik pominąć i zgodnie z II prawem Newtona sformułować następujący warunek równowagi sił powierzchniowych:

$$\mathbf{p}_n dS = \mathbf{p}_x dS_x + \mathbf{p}_y dS_y + \mathbf{p}_z dS_z. \quad (1.25)$$



Rys. 1.11. Stan naprężenia w ośrodku ciągłym

Między poszczególnymi elementami powierzchni zachodzą oczywiste relacje trygonometryczne:

$$dS_x = dS \cos(n, x), \quad dS_y = dS \cos(n, y), \quad dS_z = dS \cos(n, z), \quad (1.26)$$

gdzie symboliczny zapis argumentu funkcji **cosinus** oznacza kąt pomiędzy odpowiednimi parami powierzchni elementarnych. Drogą prostych przekształceń geometrycznych można wykazać, że funkcje te są składowymi wektora jednostkowego \mathbf{n} , czyli zachodzi:

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{i} + n_y \mathbf{j} + n_z \mathbf{k} = \cos(n, x) \mathbf{i} + \cos(n, y) \mathbf{j} + \cos(n, z) \mathbf{k}. \quad (1.27)$$

Podstawiając dwie ostatnie relacje do (1.25), otrzymujemy:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_x n_x + \mathbf{p}_y n_y + \mathbf{p}_z n_z. \quad (1.28)$$

W zapisie skalarnym ostatnie wyrażenie ma następującą postać:

$$\left. \begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}n_x + p_{xy}n_y + p_{xz}n_z \\ p_{ny} &= p_{yx}n_x + p_{yy}n_y + p_{yz}n_z \\ p_{nz} &= p_{zx}n_x + p_{zy}n_y + p_{zz}n_z \end{aligned} \right\}, \quad (1.29)$$

którą można zastąpić zwartą notacją macierzową:

$$\mathbf{p}_n = [\mathbf{P}] \mathbf{n}, \quad (1.30)$$

gdzie tablica:

$$[\mathbf{P}] = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1.31)$$

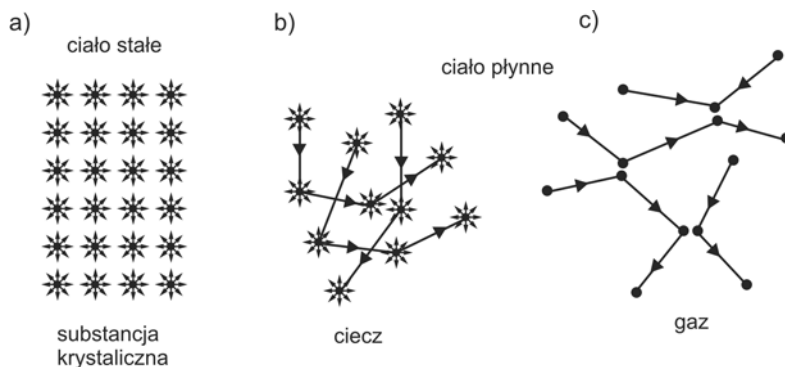
zgodnie z przedstawioną konwencją określa **stan naprężenia w ośrodku ciągłym**. Stanowi ona (bardzo ważny w fizyce i technice) przykład **wielkości tensorowej** (par. 1.3.2), zwanej **tensorem naprężenia**.

Trzeba zwrócić uwagę na sens podwójnych indeksów, które wyróżniają współrzędne p_{ij} tablicy (1.31). Łatwo sprawdzić, że pierwszy z nich określa oś, wzdłuż której działa dana składowa, zaś drugi – wyznacza oś, do której prostopadły jest odpowiedni element. Tym samym współrzędne o jednakowych indeksach określają **naprężenia normalne**, zaś o różnych indeksach – **naprężenia styczne** (zgodnie z relacją (1.22)).

1.4. Fizyczne własności materii

1.4.1. Materia jako ośrodek dyskretny

Charakterystyka materii w ujęciu molekularnym zawiera dwa rodzaje informacji – o tworzących daną substancję cząsteczkach oraz o ich rozmieszczeniu i zachowaniu się w obszarze. Pierwsza część tej charakterystyki wynika z budowy molekuł, toteż w istocie rzeczy jest zawarta w chemicznym symbolu tej substancji [3]. Aby otrzymać część drugą, posłużmy się klasycznym modelem, zgodnie z którym poszczególne molekuły reprezentowane są przez punkty materialne (rys. 1.12). Rozważać będziemy tylko chaotyczny ruch cząsteczek, jak już bowiem wspomniano, to właśnie on determinuje podstawowe własności materii. Z dobrym dla naszych celów przybliżeniem można przyjąć, że podstawową kategorią tego ruchu są nieregularne **drgania** wokół pewnego średniego położenia, w którym aktualnie znajduje się molekula.



Rys. 1.12. Układy molekuł substancji w różnych stanach skupienia

Na przebieg tych drgań w istotny sposób wpływają siły międzycząsteczkowe. Można wyróżnić trzy sytuacje:

- siły międzycząsteczkowe są na tyle duże, iż wzajemne położenia molekuł nie ulegają zmianom (lub ulegają im bardzo rzadko); cząsteczki tworzą układ, który w ujęciu makroskopowym nazywamy **ciałem stałym** (rys. 1.12a) – **krystalicznym** (gdy konfiguracja molekuł jest regularna) lub **bezpostaciowym** (gdy molekuły ułożone są bezładnie);
- siły międzycząsteczkowe mają wartość na tyle umiarkowaną, że każda molekula przez pewien okres czasu (zwany **czasem życia osiadłego** τ_0) drga wokół położenia swej chwilowej równowagi, by jednak po upływie tego czasu (gdy kolejna oscylacja będzie

intensywniejsza od średniej) wykonać **przeskok** do nowego położenia chwilowej równowagi (rys. 1.12b), gdzie ów nieregularny cykl „drżania-przeskok” powtarza się; tak zachowująca się konfiguracja molekuł tworzy szczególnie rodzaj **płynu**, a mianowicie **ciecz**;

- siły międzycząsteczkowe są bardzo słabe, toteż zamiast ruchu drgającego każda molekula wykonuje ruch prostoliniowy, który w wyidealizowanym przypadku braku innych molekuł nie podlegałby żadnym ograniczeniom – jego trajektoria byłaby nieskończona; jednak praktycznie długość tych trajektorii jest ograniczona przez wzajemne zderzenia cząstek (albo cząstek materii wypełniającej układ oraz/albo materiału ścianek, tworzących brzeg układu); w efekcie molekuly takiej substancji (nazywanej **gazem**) wykonują swoisty **ruch chaotyczny**, którego istotą są ich wzajemne zderzenia, zmieniające w sposób przypadkowy kierunki i moduły prędkości tego ruchu (rys. 1.12c).

Stosownie do zróżnicowanego zachowania tych trzech kategorii struktur molekularnych (które w ujęciu makroskopowym przejawiają się trzema **stanami skupienia materii**), będą się też różnić cechujące je wielkości fizyczne.

1.4.2. Materia jako ośrodek ciągły

1.4.2.1. Stany skupienia materii

Omówione w par. 1.4.1 typy struktur molekularnych stanowią punkt wyjścia do wyróżnienia poszczególnych stanów skupienia materii – **stałego**, **ciekłego** i **gazowego** (**lotnego**). Jest to wszakże kryterium opisowe i nie nadaje się do zastosowania w praktyce.

Ilościowe rozróżnianie poszczególnych stanów skupienia, choć intuicyjnie zrozumiałe, nie jest jednak zagadnieniem prostym. Dokonujemy tego, uwzględniając dwa czynniki:

- strukturę substancji,
- jej własności mechaniczne.

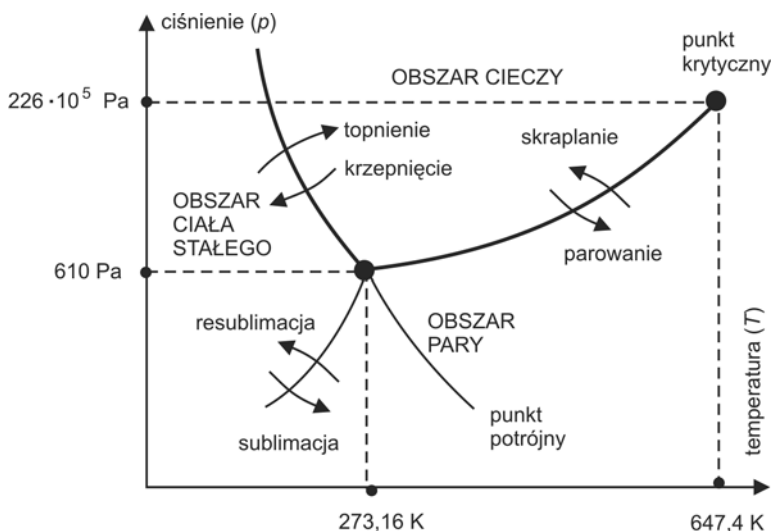
W dalszym ciągu bardziej interesować nas będzie ten drugi aspekt, lecz uprzednio musimy rozpoznać pierwszy z nich.

Analizując zachowanie molekuł, każdorazowo podkreślaliśmy znaczenie działających między nimi sił zwanych siłami van der Waalsa, przy czym ich intensywność określana była mało precyzyjnie – duża, umiarkowana, słaba. Te jakościowe terminy należałoby zastąpić ścisłymi kryteriami, najlepiej liczbowymi, a odnoszącymi się do konkretnych stanów układu. Jedno z takich kryteriów ma postać **wykresów równowagi faz** (rys. 1.13), które określają zakresy **temperatury** i **ciśnienia**, wspólne dla poszczególnych stanów skupienia.

Inne kryterium, mniej ścisłe, ale obrazowe i przydatne w praktyce, ujmuje objętość i kształt próbki materii. Mówimy zgodnie z nim, że:

- ciało stałe o danej objętości zachowuje nadany mu kształt;
- próbka cieczy przyjmuje kształt naczynia, w którym jest umieszczona, przy czym wypełnia to naczynie tylko w części równej objętości tej próbki;
- próbka gazu przyjmuje kształt naczynia, w którym jest umieszczona, a jej objętość (dzięki dużej ściśliwości gazów) jest zawsze równa objętości naczynia.

W odmienny sposób klasyfikujemy stany skupienia materii dla potrzeb mechaniki. Bazujemy tu na podstawowej relacji, która definiuje tę gałąź fizyki, a mianowicie **na zależności między działającymi siłami a wywoływanym przez nie ruchem substancji**. Chodzi tu o szczególnie rodzaj ruchu, polegający na zmianie kształtu ciała, czyli na jego **deformacji** (par. 2.3.5).



Rys. 1.13. Przykładowy wykres równowagi faz dla substancji prostej

Kluczowe znaczenie dla omawianej relacji ma zmienność położenia poszczególnych molekuł względem siebie (rys. 1.12). **Im bardziej „ruchliwe” są molekuly substancji, tym łatwiej jest zdeformować jej próbkę.** Stwierdzenie to poparte jest bardzo obszernym materiałem empirycznym.

Potocznie zrozumiały termin „ruchliwość molekuł” musi być sprecyzowany. Najwygodniej jest użyć tu zdefiniowanego już **czasu życia osiadłego**. Dla klasycznej cieczy, jaką stanowi **woda**, jest on rzędu:

$$\tau_o(H_2O) \approx 10^{-11} \text{ s.} \quad (1.32)$$

Jest to czas bardzo krótki, ale wystarcza do wykonania od 10 do 100 drgań atomowych, co oznacza, że średnia częstotliwość drgań molekuly jest rzędu 10^{12} s^{-1} .

W przypadku gazów mamy oczywiście (rys. 1.12c):

$$\tau_o(\text{gaz}) = 0, \quad (1.33)$$

podczas gdy dla ciał stałych można byłoby napisać, że $\tau_o(\text{ciało stałe}) \rightarrow \infty$, co jest jednak relacją wyidealizowaną, gdyż także w tego typu strukturach obserwujemy przeskoki molekuł. W praktyce więc za ciała stałe uważamy te substancje, dla których:

$$\tau_o(\text{ciało stałe}) > 10^4 \text{ s.} \quad (1.34)$$

Jak widać, między typowymi płynami a typowymi ciałami stałymi występują ogromne dysproporcje w stopniu ruchliwości molekuł, dzięki czemu omówione kryterium jest przydatne w praktyce. Istnieją wszakże materiały o charakterze pośrednim, dla których określenie stanu skupienia nie jest łatwe. Zaliczyć do nich można takie substancje, jak **woski, asfalty, kity** czy **kremy**, oznaczające się umiarkowaną ruchliwością molekuł ($10^{-4} < \tau_o < 10^4$).

Jednakże sam **czas życia osiadłego** nie wystarcza do identyfikacji materiału. Równie istotny jest tu **czas działania siły** τ_s . Jeżeli jest on dłuższy od czasu życia osiadłego ($\tau_o > \tau_s$), obciążana substancja reaguje znacznym odkształceniem, które wynika nie tylko

z pokonania sił van der Waalsa, lecz jest dodatkowo (a z reguły bardzo znacznie) zwiększane w wyniku samorzutnych przeskoków molekuł. W przeciwnym razie ($\tau_s < \tau_o$) odkształcenie jest osiągane tylko pod warunkiem przewyższenia sił międzycząsteczkowych, a ruchliwość molekuł nie ma praktycznego wpływu na deformację materiału.

Obrazowymi przykładami są takie substancje, jak silikon i smoła. Można je wylewać z naczyń, o ile pozostawi się je w stosownym położeniu na odpowiednio długi okres czasu (mierzony przynajmniej w miesiącach). Jeżeli jednak poddamy je obciążeniom krótkotrwałym, zachowują się zgoła inaczej – spadająca na podłogę kula silikonowa odbija się od podłoża jak piłka (co jest cechą ciała stałego o bardzo wysokiej sprężystości), zaś uderzony młotkiem kawałek smoły pęka (zachowuje się jak bardzo kruche ciało stałe).

Warto zaznaczyć, że istnieją substancje o charakterze mieszanym. Należą do nich **ciała bezpostaciowe**, jak na przykład **szkliwo**, które w aspekcie strukturalnym ma charakter płynu, a ściślej – przechłodzonej cieczy, zaś pod względem mechanicznym zachowuje się jak ciało stałe. Inną kategorię tworzą **ciekłe kryształy**, które – odwrotnie niż szkliwo – poruszają się jak płyny, choć strukturalnie przypominają ciała stałe.

Widzimy więc, że pozornie oczywista klasyfikacja stanów skupienia materii może nasuwać wiele wątpliwości. A choć w praktyce inżynierii środowiska z reguły mamy do czynienia z substancjami, które zachowują się w sposób typowy, to w szczególnych przypadkach możemy natknąć się na materiały bardziej złożone (na przykład **osady ściekowe**).

1.4.2.2. Pojęcie płynności

Omówiwszy procesy molekularne, decydujące o reakcji materii na działanie sił, możemy przejść do sformułowania konkretnych kryteriów ilościowych. Znamy już empiryczne stwierdzenie, iż ruchliwość molekuł (opisywana **czasem życia osiadłego** τ_o), wspomaga deformację ciała (o ile **czas działania siły** τ_s jest odpowiednio długi). W praktyce oznacza to, że w **ciałach stałych** deformację obserwujemy tylko wtedy, gdy wypadkowa siła odkształcająca jest większa od wewnętrzznego oporu materiału, wywołanego siłami van der Waalsa.

W efekcie układ, zbudowany z materiałów stałych, poddany działaniu **jednej stałej siły**, wykazuje **jedno stałe odkształcenie**. Może ono mieć charakter **odwracalny** (jak na przykład w przypadku **materiałów sprężystych**), **nieodwracalny** (gdy mamy do czynienia na przykład z **materiałem plastycznym**), lub też **mieszany** (jak dla wielu materiałów rzeczywistych). Zawsze jednak możemy tu przyjąć jakościowy związek:

$$\text{Jednoznaczna reakcja ciała stałego na działającą siłę} \\ \text{jest deformacja tego ciała.} \quad (1.35)$$

Jak już wiemy (pkt 1.3.6.4), dynamiczne oddziaływanie na materię w mechanice ośrodków ciągłych opisujemy tablicą (1.31), zwaną **tensorem naprężenia**. Omówiona reakcja ciała jest także opisana przez wielkość o charakterze macierzowym **[OD]**, zwaną **tensorem deformacji** [41]. Obie te wielkości w myśl (1.35) stanowią parę związanych ze sobą zmiennych, charakteryzujących bardzo szeroką klasę materiałów – ciał stałych. Z tego względu zaliczamy je do **zmiennych konstytutywnych**. Możemy więc jakościową relację (1.35) zastąpić symbolicznym zapisem funkcyjnym:

$$[\mathbf{P}] = f[\mathbf{OD}]. \quad (1.36)$$

Konkretne postacie tej ogólnej funkcji f mogą być bardzo różne, tworząc **równanie konstytutywne**. Każde z nich opisuje odrębną klasę substancji, lecz jeśli podlega ona warunkowi (1.36), opisywany materiał należy do rodziny ciał stałych.

Za najbardziej chyba typowy przykład takiego równania należy uznać **prawo Hooke’a**, dla którego relacja (1.36) jest funkcją liniową. Odpowiadająca mu substancja, to **materiał sprężysty**.

Inaczej rzecz się ma w przypadku **cieczy i gazów** (łącznie określanych mianem **płynów**). Ich **deformacja** w trakcie działania sił **narasta, teoretycznie bez ograniczenia**. Niezmienna natomiast okazuje się tu inna wielkość fizyczna – **prędkość deformacji**, definiowana jako iloraz przemieszczenia, powstającego podczas deformacji, oraz czasu jego trwania. Tak więc dla **płynów** (substancji, którym przypisujemy **cechę płynności**) mamy związek:

$$\text{Jednoznaczną reakcją ciała płynnego na działającą na nie siłę} \\ \text{jest prędkość jego odkształcenia.} \quad (1.37)$$

Tak jak i w relacji (1.35), działanie dynamiczne możemy tu wyrazić przez tensor naprężenia (1.31). Jednak reakcję układu płynnego wyraża inna wielkość. Jest nią tablica **[D]** zwana **tensorem prędkości deformacji** (patrz podrozdz. 2.3). Obie te **zmienne konstytutywne** powiązane są pewną relacją funkcyjną:

$$[\mathbf{P}] = f[\mathbf{D}], \quad (1.38)$$

która stanowi ogólną postać formalnego zapisu **równania konstytutywnego dla substancji płynnych**. W ujęciu fizycznym oznacza to tyle, że **nawet bardzo małe naprężenie, działające na płyn, wywołuje jego deformację**.

1.4.2.3. Hipoteza Newtona – ujęcie jakościowe

Liczba możliwych postaci ogólnej funkcji f w równaniu (1.38) jest w istocie rzeczy nieograniczona. Umożliwia to ilościowe opisywanie rzeczywistych materiałów, które mogą mieć bardzo różnicowane własności.

W praktyce okazuje się wszakże, iż najważniejsze z technicznego punktu widzenia rodzaje płynu podczas ruchu zachowują się w sposób na tyle prosty, że relacja konstytutywna między tensorem naprężenia **[P]** a tensorem prędkości deformacji **[D]** ma charakter **funkcji liniowej i izotropowej**. Taki typ substancji (w szczególności należą do nich **woda**, wiele **roztworów wodnych** oraz **powietrze**) nazywamy **płynami newtonowskimi**. Odpowiadająca temu przypadkowi forma relacji (1.38) nazywana jest **hipotezą Newtona** (patrz par. 3.9.2).

Pozostałe substancje, dla których zależność (1.38) nie ma charakteru liniowego, określamy mianem **płynów nienewtonowskich**. Opisem ich ruchu zajmuje się **reologia** [47, 57].

1.4.2.4. Stałe materiałowe

Mianem **stałej materiałowej** określamy każdą wielkość fizyczną, która opisuje **własności substancji** w ujęciu makroskopowym (gdy posługujemy się modelem kontynuualnym). Należy odróżniać **stałe materiałowe** od **zmiennych stanu**, czyli wielkości opisujących stan, w jakim znajduje się substancja.

Termin **stała materiałowa** nie jest w pełni ścisły, gdyż wartość niemal każdej z wielkości opisujących własności materii ulega pewnym zmianom – czasem pomijalnie małym, czasem bardzo znacznym – wraz ze zmianą stanu układu. Kwestia ta musi być starannie rozważana na wstępnym etapie rozwiązywania niemal każdego problemu z zakresu nauk ścisłych oraz techniki. Jeżeli w interesującym nas zakresie wartości zmiennych stanu nie spodziewamy się istotnych dla ostatecznego wyniku zmian własności substancji, możemy opisać je za pomocą stałych fizycznych. W przeciwnym

razie występujące zależności opisujemy odpowiednimi relacjami matematycznymi. Ich struktura jest dość typowa – zawierają podstawową wartość danej wielkości (określoną dla warunków traktowanych jako standardowe; są one zawsze podawane w tablicach fizycznych, z których możemy odczytać potrzebne nam wartości podstawowe) oraz człon funkcyjny, odnoszący się do zmian tej wielkości (patrz na przykład równanie (1.47)).

Za podstawową stałą materiałową w mechanice należy uznać *gęstość* substancji. Termin ten oznacza (patrz par. 1.3.3) **gęstość rozkładu masy**. W ujęciu makroskopowym jest ona definiowana następująco (rys. 1.1):

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_g} \frac{\Delta M}{\Delta V}. \quad (1.39)$$

Uwzględniając cząsteczkową budowę materii, można powiedzieć, że gęstość jest wielkością odnoszącą się do ciągłego modelu substancji. Określa ona stopień zagęszczenia molekuł w otoczeniu każdego punktu przestrzeni. Jeśli w jednostce objętości mamy n_M molekuł, a masa każdej z nich wynosi m_M , to można napisać:

$$\rho = n_M m_M. \quad (1.40)$$

Najbardziej interesującym w zagadnieniach inżynierii środowiska płynem jest **woda**. Wykazuje ona bardzo małą podatność na zmiany gęstości. W temperaturze 4°C i pod ciśnieniem atmosferycznym można przyjąć, że gęstość wody jest równa:

$$\rho_w = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (1.41)$$

Inaczej zachowuje się drugi z podstawowych płynów, tworzących naturalne środowisko człowieka, czyli **powietrze**. Jest ono bardzo podatne na zmiany **ciśnienia** (czyli wykazuje dużą **ściśliwość**). W warunkach normalnych gęstość powietrza jest równa:

$$\rho_p = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}. \quad (1.42)$$

Ewentualną zależność gęstości substancji od innych wielkości fizycznych określa **równanie stanu** (patrz podrozdz. 3.8).

W mechanice płynów bardzo ważną rolę odgrywają **współczynniki lepkości – dynamiczny μ oraz kinematyczny ν** , powiązane ze sobą prostą zależnością:

$$\mu = \rho \nu. \quad (1.43)$$

W zapisie makroskopowym **dynamiczny współczynnik lepkości** jest mnożnikiem proporcjonalności w **hipotezie Newtona** (patrz pkt 1.4.2.3 oraz par. 3.9.2). Na poziomie molekularnym **określa on intensywność wymiany pędu między molekułami, spowodowanej ich ruchem chaotycznym**. Stosując uproszczony model tego ruchu, typowy dla kinetycznej teorii gazów [38, 59], można otrzymać zależności:

$$\nu = \bar{u}_C l_S \quad \mu = n_M m_M \bar{u}_C l_S. \quad (1.44)$$

Mają one dużą wartość poznawczą, lecz pod względem ilościowym pozwalają jedynie oszacować oba współczynniki. Z tego względu w praktyce ich wartości odczytujemy z tablic wielkości fizykochemicznych (np. [47, 65]), lub – w nietypowych przypadkach – wyznaczamy doświadczalnie, posługując się wiskozymetrem.

Dla wody w temperaturze 273 K można przyjąć:

$$\nu_{wo} = 1,79 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \mu_{wo} = 1,79 \cdot 10^{-3} \text{ kg}/(\text{ms}), \quad (1.45)$$

zaś dla powietrza:

$$v_{po} = 0,129 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}, \quad \mu_{po} = 0,168 \cdot 10^{-4} \text{ kg}/(\text{ms}). \quad (1.46)$$

W technice niekiedy ważna jest zależność tych współczynników od temperatury. Można posługiwać się wtedy następującymi relacjami [3, 50]:

— dla wody:

$$\mu_w(T) = \frac{\mu_{wo}}{1 + 0,0337(T - 273) + 0,000221(T - 273)^2}, \quad (1.47)$$

— dla powietrza:

$$\mu_p(T) = \mu_{wo} \frac{385}{(T + 112)} \left(\frac{T}{273} \right)^{3/2} \quad (1.48)$$

(T – temperatura płynu w kelwinach).

Współczynnik lepkości należy do bardzo ważnej rodziny stałych materiałowych, zwanych **współczynnikami transportu**. Analizując chaotyczny ruch molekuł płynu, można wykazać [7, 38], że przemieszczające się w trakcie tego ruchu cząsteczki wywołują zmiany wartości charakteryzujących układ wielkości fizycznych, z których najważniejszymi są: **masa**, **pęd** oraz **energia cieplna**.

Aby pojawił się niezerowy strumień pierwszej z tych wielkości, gęstość rozkładu molekuł transportowanej substancji musi się zmieniać w przestrzeni. Możliwe są dwie sytuacje. Ważniejszy praktycznie jest przypadek, gdy na „podkład”, utworzony z molekuł **rozpuszczalnika**, „nałożone” są molekuły **substancji rozpuszczonej**. Gęstość ich rozkładu określona jest przez **stężenie (koncentrację)** tej substancji, które najwygodniej zdefiniować jako lokalny stosunek masy substancji rozpuszczonej do objętości próbki roztworu:

$$c_i = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_g} \frac{\Delta M_i}{\Delta V}. \quad (1.49)$$

Indeks „ i ” oznacza aktualnie rozważaną substancję rozpuszczoną, których może być wiele ($i = 1, 2, \dots, I_R$).

Gdy stężenie i -tej substancji rozpuszczonej zmienia się w przestrzeni, to w wyniku chaotycznego ruchu molekuł jej masa ulega przemieszczaniu z miejsc o wyższym stężeniu do miejsc o niższym stężeniu. Proces ten nazywa się **dyfuzją molekularną**. Ilościowo opisuje go **prawo Ficka** [50]:

$$\mathbf{m}_{Mi} = -D_{Mi} \text{ grad } c_i. \quad (1.50)$$

Interesujący, choć mniej ważny praktycznie, jest drugi przypadek – molekularnego transportu masy substancji jednorodnej o zmiennej gęstości. Mechanizm transportu jest taki sam, ale ze względu na chemiczną jednorodność przenoszonej substancji proces ten nazywamy **samodyfuzją**.

Jeżeli zróżnicowanie układu molekuł płynu w przestrzeni odnosi się do ich **pędu (ilości ruchu)**, to wskutek chaotycznego ruchu cząstek zaobserwujemy analogiczny do dyfuzji masy proces przemieszczania pędu z miejsc o jego większej wartości, do miejsc o mniejszej wartości pędu. Można byłoby tu mówić o dyfuzji pędu, lecz zwyczajowo ten wypadkowy strumień pędu wyrazamy przez znane nam już pojęcie **naprężenia** (pkt 1.3.6.4). Dla bardzo szerokiej kategorii płynów, relacja między miarą zróżnicowania pola prędkości (które jest czynnikiem warunkującym „dyfuzję pędu”) a naprężeniem (które określa intensywność tego procesu) ma postać **hipotezy Newtona** (pkt 1.4.2.3, równ. (3.84)).

Gdy wreszcie przedmiotowe zróżnicowanie stanu molekuł wyraża się zmiennością **temperatury** substancji, wtedy omawiany tu proces transportu polega na przenoszeniu **energii cieplnej**. Jej jednostkowy strumień q_T podlega **prawu Fouriera**:

$$q_T = -\lambda \text{ grad } T. \quad (1.51)$$

Występujące w omówionych relacjach współczynniki: **dyfuzji** D_{Mi} , **lepkości (dynamicznej)** μ oraz **przewodnictwa cieplnego** λ , fizycznie spokrewnione ze sobą, łącznie określane są mianem **współczynników transportu**.

Ze znacznej liczby innych **stałych materiałowych**, występujących w naukach ścisłych i w technice, w termomechanice ważne są jeszcze następujące:

- współczynnik ściśliwości,
- współczynnik rozszerzalności cieplnej,
- napięcie powierzchniowe,
- ciepło właściwe,
- temperatura wrzenia.

Pierwszy z nich odnosi się do szczególnego przypadku zmiany objętości substancji ΔV , gdy zachodzi ona pod wpływem zmian ciśnienia Δp . Definiowany jest relacją:

$$\beta = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta p} . \quad (1.52)$$

Dla wody w temperaturze 20°C i pod ciśnieniem do 5 MPa mamy $\beta = 4,65 \cdot 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}$. W teorii sprężystości często używana jest odwrotność β , zwana **modułem sprężystości** E (dla wody $E = 0,215 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$).

Współczynnik rozszerzalności cieplnej α określa podatność substancji na zmianę objętości ΔV w miarę zmiany temperatury ΔT , zgodnie z relacją:

$$\alpha = -\frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T} . \quad (1.53)$$

W przypadku wody można przyjąć, że $\alpha = 0,00022 \text{ 1/K}$.

Kolejna wielkość, **napięcie powierzchniowe** σ , jest bardzo ważnym czynnikiem, gdy rozważamy efekty dynamiczne na powierzchni rozdziału faz (na przykład wody i gazu). Idzie o to, że molekuly substancji, znajdujące się wewnątrz jej objętości, podlegają takim samym oddziaływaniom z każdej strony. Natomiast molekuly znajdujące się na powierzchni, ze względu na asymetrię otoczenia, podlegają niezrównoważonej sile, skierowanej do wnętrza objętości. Tak więc powierzchniowa warstwa molekuł wywiera na objętość pewne dodatkowe **ciśnienie wewnętrzne cieczy**. Pragnąc zwiększyć powierzchnię międzyfazową, musimy wobec tego wykonać pewną pracę. Praca ta, odniesiona do jednostki tej nowej powierzchni, nosi nazwę **napięcia powierzchniowego**. Dla wody w temperaturze 20°C mamy $\sigma = 0,0728$.

Termin **ciepło właściwe** określa ilość energii cieplnej, pobieranej przez jednostkę masy substancji podczas jednostkowej zmiany temperatury. Dla substancji ściśliwych różniamy **ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu** c_{wp} oraz **ciepło właściwe przy stałej objętości** c_{wv} , przy czym:

$$c_{wp} - c_{wv} = R , \quad (1.54)$$

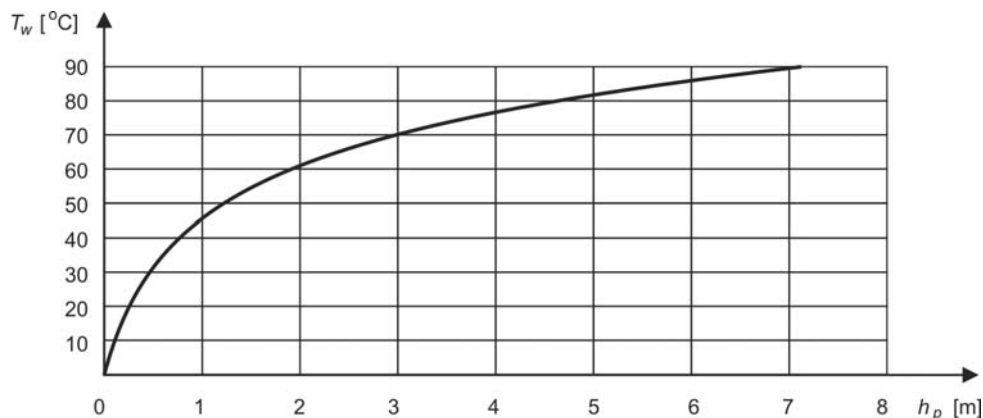
$$c_{wp}/c_{wv} = \kappa , \quad (1.55)$$

gdzie R jest nazywane **stałą gazową** ($R = 8,3144 \text{ J/(mol K)}$), zaś κ – **wykładnikiem izentropii** (dla powietrza $\kappa = 1,403$).

Dla cieczy nieściśliwych operujemy tylko jedną wielkością, bowiem wtedy $c_{wp} = c_{wv} = c_w$. W przypadku wody przy temperaturze 20°C mamy $c_w = 4181,1 \text{ m}^2/(\text{s}^2\text{K})$.

Ostatnia z omawianych tu stałych materiałowych, **temperatura wrzenia** T_w , interesuje nas w praktyce hydrotechnicznej wtedy, gdy ciśnienie cieczy spada do bardzo małej warto-

ści. Jeżeli zdarzy się tak, że przy takim ciśnieniu aktualna temperatura cieczy będzie równa lub nawet niższa od **temperatury wrzenia**, wtedy w bardzo krótkim okresie czasu płynąca ciecz zostanie odparowana. Tym samym w przepływie pojawią się pęcherze pary danej cieczy, czasem o bardzo znacznej objętości, w istotny sposób pogarszające warunki ruchu. Przykładową zależność temperatury wrzenia wody T_w od ciśnienia przedstawiono na rys. 1.14.



Rys. 1.14. Temperatura wrzenia wody w funkcji wysokości ciśnienia

1.5. Opis stanu substancji płynnej

1.5.1. Możliwości określania stanu materii

Istnieją dwa podstawowe źródła poznania – zmysły oraz rozum. A choć prowadzona narządami zmysłów, wspieranymi przez aparaturę badawczą, obserwacja może wydawać się źródłem podstawowym, to refleksji rozumowej nie sposób przecenić. Pozwala ona na uporządkowanie i ocenę wyników obserwacji, a także sama w sobie prowadzi do niesłychanie owocnych rezultatów. Dobitym tego przykładem są koncepcje, które sformułowali twórcy jońskie filozofii przyrody (VI – IV w. p.n.e.).

W ujęciu praktycznym jest tak, że obszerny materiał empiryczny, zgromadzony w ramach poszczególnych gałęzi wiedzy, został opracowany i wyrażony w formie ścisłych **praw przyrody**. Termin ten jest bardzo ważki. Nie każda obserwowana w przyrodzie lub technice prawidłowość zasługuje na miano prawa przyrody. Rzecz w tym, iż każdy proces możemy obserwować (a w ujęciu ilościowym – mierzyć) w odmiennych układach odniesienia (**współrzędnych**). Oznacza to, że różnie usytuowani obserwatorzy mogą uzyskać zróżnicowane wyniki pomiarów, choć dotyczą one **tego samego zjawiska**. Mówimy, że każdy z nich uzyskał jedną **reprezentację** tej samej wielkości fizycznej. Jeśli otrzymanym wynikiom chcemy nadać walor **prawa fizycznego**, to jego brzmienie nie może być uzależnione od jakiegokolwiek układu odniesienia. Wymóg ten nazywa się **kowariancją praw nauki**. Jeżeli nasuwające się stwierdzenia nawiązują do układu odniesienia, nie mają one wartości obiektywnego prawa, a co najwyżej są lokalnymi prawidłowościami (które zresztą mogą być bardzo przyteczne).

Prawa przyrody w ujęciu ilościowym zapisuje się w postaci **równań fizyki matematycznej**. W naturalnym dążeniu do upraszczania stosowanych relacji matematycznych

staramy się przedstawić je w możliwie najprostszych postaciach, każdorazowo dążąc do otrzymania **zamkniętego układu równań** (to jest takiego, w którym liczba równań jest taka sama, jak liczba niewiadomych). Rozwiązanie takiego układu (o ile istnieje, nawet jeśli jego uzyskanie jest bardzo trudne) stanowi charakterystykę zjawiska, dla którego układ ten został wyprowadzony.

Gdy teoretyczny (czyli wyznaczony równaniami fizyki matematycznej) opis problemu jest nieosiągalny (zbyt trudny, zbyt czasochłonny, zbyt kosztowny...), wtedy alternatywną możliwością jest **pomiar**. Jego walorem jest prostota poznawcza i stosunkowo duża dostępność, lecz ma on także istotne wady:

- wyniki pomiarów odnoszą się do warunków, w jakich zostały przeprowadzone;
- pomiar jest zawsze obciążony błędem, a w szczególności sama obecność przyrządów pomiarowych może zmieniać przebieg badanego zjawiska;
- pomiary można wykonywać tylko w już istniejących obiektach, lub ich modelach, podczas gdy w dziedzinie nauk ścisłych i technicznych szczególnie interesują nas obiekty, które dopiero mają powstać.

1.5.2. Klasyfikacja praw przyrody

Prawa natury mogą być klasyfikowane z różnych punktów widzenia. Na przykład ze względu na charakter zależności, które opisują, mówi się o:

- **zależnościach równowagi**, które wiążą zmienne ekstensywne (jak na przykład I prawo Kirchhoffa, bilans masy przepływającej cieczy, warunek równowagi sił...);
- **zależnościach spójności**, wiążących zmienne intensywne (do grupy tej należą II prawo Kirchhoffa, warunek zerowania się sumy spadków ciśnienia wzdłuż zamkniętego obwodu rurociągu, geometryczne warunki zgodności...);
- **zależnościach fizycznych**, wyrażających związki między zmiennymi intensywnymi i ekstensywnymi (jak prawo Ficka (1.50) lub prawo Fouriera (1.51)).

Dokonywanie pełnego przeglądu różnych możliwych klasyfikacji praw przyrody byłoby niecelowe – jest ich bardzo wiele, a w praktyce często wykorzystujemy prawidłowości, będące kombinacjami praw o różnym charakterze. Do naszych potrzeb trzeba jednak wydzielić trzy ważne rodziny praw, a mianowicie:

- **prawa zachowania**,
- **prawa konstytutywne**,
- **prawa stanu**.

1.5.3. Zmienne stanu

Jak już wspomniano w par. 1.5.1, w dążeniu do ilościowego opisu procesów staramy się wyprowadzić możliwie najprostszy układ równań fizyki matematycznej, zawierający jak najmniej bezpośrednio ze sobą powiązanych niewiadomych, które tym samym mają charakter **wielkości podstawowych** (musimy je wyznaczyć najpierw, aby możliwe było wyznaczenie pozostałych wielkości fizycznych). Nazywamy je **zmiennymi stanu**.

Ich zestaw w istocie rzeczy wynika z układu **równań podstawowych**, które jesteśmy w stanie dla danej dyscypliny sformułować (dla hydrauliki uczynimy to w następnych rozdziałach). Jednakże informacja o tym, jakie wielkości wchodzi w skład zmiennych stanu, jest na tyle ważna, że celowe jest zapamiętanie, iż w pierwszej kolejności stanowią je:

- **prędkość u** (par. 1.3.5, równ. (1.13)),
- **ciśnienie p** (pkt 1.3.6.3, równ. (1.23)).

W szczególnych przypadkach dochodzą jeszcze dwie zmienne stanu:

- **gęstość cieczy** ρ (pkt 1.4.2.4, równ. (1.39)),
- **temperatura** T (par. 1.3.5, równ. (1.14)).

Podkreślmy raz jeszcze, że wyjątkowa rola tych wielkości wynika z faktu, że każdą inną wielkość (**pomocniczą**) możemy obliczyć, korzystając z wielkości podstawowych, posługując się **pomocniczymi równaniami fizyki matematycznej**. Działanie odwrotne (to jest obliczenie zmiennych stanu na podstawie wielkości pomocniczych) w ogólnym przypadku nie jest możliwe.

Tytułem prostego przykładu rozważmy bardzo praktyczny problem ogrzewania pomieszczenia mieszkalnego. Dla osoby, która w nim przebywa, duże znaczenie ma panująca tam **temperatura** T . Z kolei dla kogoś, kto pokrywa koszty ogrzewania (a mogą to być różne osoby), zasadnicze znaczenie ma **strumień ciepła** q_r , który trzeba doprowadzić do pomieszczenia dla utrzymania pożądanej temperatury (równy stratom energii, wynikającym z nieszczelności oraz z przepuszczalności przegród budowlanych), gdyż on właśnie decyduje o tych kosztach. Z fizycznego punktu widzenia jest tak, że możemy obliczyć wielkość q_r , znając T , korzystając z prawa Fouriera (1.51), podczas gdy jednoznaczne obliczenia odwrotne w ogólnym przypadku nie dadzą się wykonać.

1.5.4. Pomocnicze wielkości fizyczne

Liczba wielkości fizycznych, które określiliśmy tu mianem pomocniczych, jest bardzo znaczna, a ich wykaz z pewnością nie jest definitywnie zamknięty, gdyż praktyka techniczna w każdej chwili może w tym zakresie przynieść nowe propozycje. Będziemy więc kolejne wielkości, należące do tej kategorii, definiowali na bieżąco, w miarę potrzeby, a tutaj ograniczymy się tylko do omówienia jednej ich grupy, noszącej wspólne miano **strumieni wielkości fizycznych**.

Pojęciem wyjściowym jest **ładunek** (LD). Słowo to określa miarę łącznej ilości interesującej nas ekstensywnej (całkowej) wielkości fizycznej. W przypadku materii miarą tą najczęściej będzie **objętość** ($LD = V$) lub **masa** (całego układu $LD = M$, albo jednego ze składników układu $LD = M_i$). Dla **energii** podstawową miarą jest **dżul** (J), przy czym różne jej postacie (mechaniczną, cieplną, elektryczną...) często rozważamy oddzielnie.

Całkowity ładunek masy lub energii nie jest wszakże informacją pełną, gdyż może on być różnie rozmieszczony w rozważanym układzie, lub też na różne sposoby przekazywany z jednego miejsca układu do innego. Aby wyjaśnić tę kwestię, posłużmy się prostym przykładem. Niech rozważanym ładunkiem będzie porcja wody o objętości $1,0 \text{ dm}^3$. Najpierw zajmijmy się pierwszym z rozważanych aspektów zagadnienia, czyli sposobem rozmieszczenia masy w układzie. Ograniczmy się do dwóch przypadków – gdy ładunek ten umieszczony jest w pionowym naczyniu cylindrycznym o polu powierzchni podstawy $100,0 \text{ cm}^2$ oraz o polu powierzchni $1,0 \text{ cm}^2$. W pierwszym naczyniu słup wody będzie miał wysokość 10 cm, zaś w drugim – 1000 cm. Oznacza to, że ciśnienie na dnie drugiego naczynia będzie stukrotnie większe, niż w pierwszym. Przywołany tu rodzaj wielkości fizycznej (iloraz **ładunku** oraz **poła powierzchni**, na której jest on rozłożony) nosi nazwę **gęstości rozkładu** (par. 1.3.3).

Drugi z wymienionych aspektów, związany z ruchem **ładunku**, wymaga rozważenia **czasu**, w którym to przemieszczenie nastąpiło. Ten sam przykładowy litr wody, gdyby stanowił dobowy przydział płynu dla dorosłego człowieka, z pewnością zostałby uznany za objętość bardzo niewielką. Gdyby jednak przyszło temu człowiekowi wypić litr wody w ciągu sekundy, zapewne uznałby go za ładunek całkiem znaczny.

Aby więc dysponować pojęciem fizycznym, pozwalającym na ocenę intensywności przemieszczania się ładunku, definiujemy **strumień** rozważanej wielkości Q_{WF} . Jest to

iloraz ładunku i czasu przemieszczenia, przy czym dla uwzględnienia ewentualnych zmian tej intensywności w czasie, iloraz ma charakter lokalny, czyli wyrażony jest pochodną:

$$Q_{WF} = \frac{dLD}{dt}. \quad (1.56)$$

W mechanice płynów szczególne znaczenie ma **strumień objętości** płynu Q , zwany też **wydatkiem** (**wydatkiem objętościowym**, lub czasem **objętościowym natężeniem przepływu**):

$$Q = \frac{dV}{dt}, \quad (1.57)$$

a także **strumień masy** płynu Q_m (**wydatek masowy**, **masowe natężenie przepływu**):

$$Q_m = \frac{dM}{dt}. \quad (1.58)$$

Dla przepływów niezmiennych w czasie możemy pochodne, występujące w ostatnich trzech relacjach zastąpić ilorazami różnicowymi, pisząc na przykład zamiast (1.57), że:

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (1.59)$$

Zależność ta stanowi punkt wyjścia do powszechnie stosowanej metody **pomiaru wydatku cieczy** Q , która polega na chwilowym skierowaniu jej strumienia do osobnego naczynia (zbiornika) i tym samym określeniu objętości, przemieszczonej przez ten strumień, co wraz z jednoczesnym pomiarem czasu pozwala obliczyć Q za pomocą wzoru (1.59). Można to zrobić pobieżnie, uzyskując wynik o niskiej dokładności, ale przy użyciu bardzo precyzyjnych urządzeń otrzymujemy najdokładniejszą z możliwych metodę pomiaru wydatku cieczy (choć w dobie elektronicznej aparatury badawczej może się to wydawać nieco zaskakujące – rozdz. 20).

Trzeba tu podkreślić, że tak zdefiniowany termin „strumień” określa grupę wielkości fizycznych. W języku polskim to samo słowo opisuje też odrębne pojęcie, a mianowicie ukierunkowaną wzdłuż jednej linii strukturę przepływową (strumień wody z kranu, strumień górski itp. – patrz par. 2.6).

Pojęcie strumienia zawsze wiąże się z powierzchnią S , przez którą przemieszczany jest ładunek (choć nie zawsze powierzchnia ta jest wyodrębniona przez fizyczne granice). Intensywność tego przemieszczania może być różna w różnych punktach powierzchni. Aby to uwzględnić, należy odnieść ten strumień do jednostki powierzchni, czyli obliczyć jego **gęstość rozkładu** (par. 1.3.3). Definiujemy w ten sposób **strumień jednostkowy** danej wielkości fizycznej. Jego wartość bezwzględna opisana jest relacją:

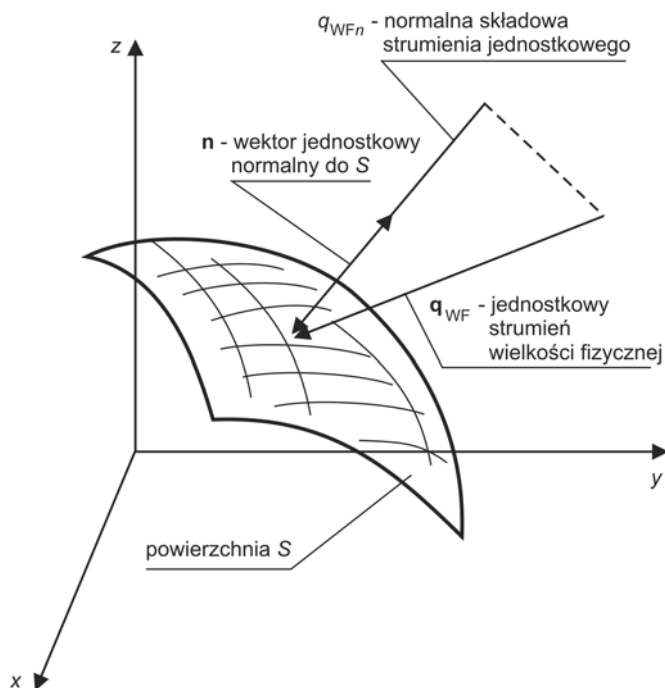
$$q_{WF} = \frac{dQ_{WF}}{dS}, \quad (1.60)$$

zaś kierunek – trajektorią, wzdłuż której przemieszcza się rozważana wielkość fizyczna. W przypadku jednostkowego strumienia objętości płynu (lub **jednostkowego wydatku**), przemieszczanej wskutek ruchu substancji przez powierzchnię prostopadłą do osi Ox , zachodzi:

$$q = \frac{dQ}{dS} = \frac{dV}{dS dt} = \frac{dS dx}{dS dt} = \frac{dx}{dt} = u_x. \quad (1.61)$$

Jest to bardzo ważny rezultat. Mówi on, że **prędkość** (w tym przypadku jej składowa wzdłuż osi $0x$) jest **jednostkowym strumieniem objętości płynu**. Dla ścisłości należałoby dodać, że jest to **strumień adwekcyjny** (wywołany makroskopowym ruchem substancji). Ma on inny charakter od **strumienia dyfuzyjnego**, wywołanego mikroskopowym ruchem molekuł (1.50).

Powyższe relacje można wykorzystać do obliczenia **strumienia** rozważanej wielkości fizycznej, o ile znamy jej strumień jednostkowy oraz powierzchnię S . Istotną rzeczą jest tu wzajemna orientacja tej powierzchni i strumienia (który jest przecież wielkością wektorową) – rys. 1.15.



Rys. 1.15. Orientacja strumienia jednostkowego względem powierzchni przepływu S

Rzecz w tym, że dana własność może przecinać powierzchnię tylko wtedy, gdy normalna (prostopadła do tej powierzchni) składowa jej strumienia jednostkowego:

$$q_{WFn} = -\mathbf{q}_{WF} \cdot \mathbf{n} \quad (1.62)$$

jest różna od zera. W przeciwnym razie strumień jest równoległy do powierzchni, co oznacza, że własność „ślizga się” wzdłuż niej, nie przemieszczając się na drugą stronę. Jest to stwierdzenie w ogromnym stopniu oczywiste, lecz warto je wyartykułować, choćby ze względu na konsekwencje formalno-prawne, gdy przecięcie powierzchni (która może być granicą) przez własność (która może być towarem) ma charakter transakcji handlowej.

Wykorzystując sześć ostatnich równań, możemy następująco wyrazić objętościowy wydatek płynu:

$$Q = -\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (1.63)$$

oraz jego wydatek masowy:

$$Q_M = - \int_S \rho \mathbf{u} \mathbf{n} dS. \quad (1.64)$$

Zgodnie z tymi zasadami obliczamy strumień dowolnej wielkości fizycznej. W szczególności, gdy z prawa Fouriera (1.51) znamy jednostkowy strumień energii cieplnej, to jej strumień całkowity wynosi:

$$Q_T = - \int_S \mathbf{q}_T \mathbf{n} dS. \quad (1.65)$$

1.5.5. Pochodna substancjalna

W ogólnym przypadku wartość każdej wielkości fizycznej jest zmienna w czasie i przestrzeni. Symbolicznie wyrażają to relacje (1.5) i (1.7), odpowiednio dla metody Eulera i metody Lagrange'a.

Stwierdzenie to nie jest tylko prostym spostrzeżeniem prawidłowości, oczywiście dla każdego obserwatora. Okazuje się, że zmienność wielkości fizycznych nie jest jedynie powodem zwiększania trudności przy matematycznym opisie zjawiska, lecz sama w sobie może stanowić ważny czynnik przyczynowy. Jest bowiem tak, że istnieją dwie główne kategorie procesów, których badaniem i opisem zajmują się nauki ścisłe. Są to:

- **procesy „algebraiczne”** (których przebieg jest określony przez wartość wielkości, określającej czynnik wymuszający ten proces; dobrym przykładem jest tu przebieg topnienia ciała stałego, zachodzącego wtedy, gdy temperatura układu przekracza wartość progową, nazywaną **temperaturą topnienia**; procesy tego rodzaju opisane są **wyrażeniami algebraicznymi**);
- **procesy „różniczkowe”** (ich przebieg uzależniony jest od **różnicy wartości wielkości wymuszających**; przykładem może tu być wypływ cieczy przez otwór w ścianie zbiornika ciśnieniowego – im większa jest różnica ciśnienia po obu jego stronach, tym większa jest prędkość wypływu; zjawiska tego typu opisują równania różniczkowe).

W niektórych zjawiskach pojawia się trzeci rodzaj procesu, którego przebieg uzależniony jest od sumy wartości wielkości wymuszającej w otoczeniu danego punktu, lub wręcz w całym obszarze. Suma taka opisywana jest **całką funkcji wymuszającej**, toteż można wtedy mówić o **procesach całkowych**, ilościowo wyrażanych przez **równania całkowite**. Są one szczególnie złożone, lecz na szczęście występują niezbyt często.

Rzecz zrozumiała, rozpatrywane tu różnice wartości funkcji wymuszającej (lub kilku takich funkcji) muszą mieć charakter lokalny, czyli odnosić się do bardzo krótkich dystansów (czy to mierzonych w jednostkach czasu, czy też odległości). Trzeba bowiem mieć pewność, iż zmiany takie mają charakter **monotoniczny**, czyli że wewnątrz rozważanego dystansu proces przebiega w jednakowy sposób. Służy temu **rachunek różniczkowy**, który w istocie rzeczy właśnie dla realizacji tego celu został odkryty (niezależnie przez Izaaka Newtona oraz Gottfrieda Wilhelma Leibniza w XVII wieku).

Podstawowymi pojęciami są tu **różniczka** i **pochodna** (rys. 1.16). W prostym przypadku funkcji jednej zmiennej $f(x)$, różniczka df (którą można nazwać **różniczką zwyczajną**) wyrażana jest przez iloczyn **pochodnej** tej funkcji $f'(x)$ oraz **różniczki zmiennej niezależnej** dx :

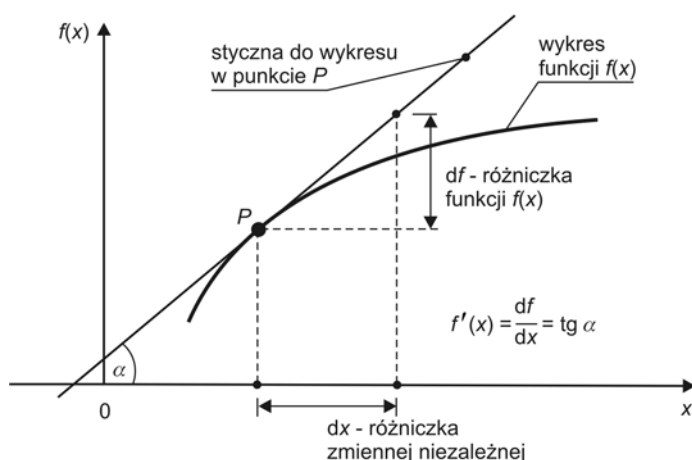
$$df = f'(x) dx. \quad (1.66)$$

Gdy rozważamy funkcje wielu zmiennych (najczęściej czterech – trzech współrzędnych przestrzennych x , y oraz z i czasu t), zasadnicze w fizyce ośrodka ciągłego, posługujemy się **różniczką zupełną** df :

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz. \quad (1.67)$$

Odnosząc tę zmianę do przyrostu wpływającego czasu dt , możemy zdefiniować **po pochodną zupełną**. Dla szczególnego przypadku funkcji dwóch zmiennych $f(x, t)$ mamy:

$$\frac{df(x, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt}. \quad (1.68)$$



Rys. 1.16. Interpretacja geometryczna różniczki oraz pochodnej

Tak prosty zapis pozwala na sformułowanie poglądowej interpretacji przywołanych pojęć. Otóż **różniczka zupełna** oraz **pochodna zupełna** opisują odpowiednio **zmianę** oraz **prędkość zmiany** rozważanej funkcji między dowolnie wybranym punktem P a każdym innym punktem R (rys. 1.17).

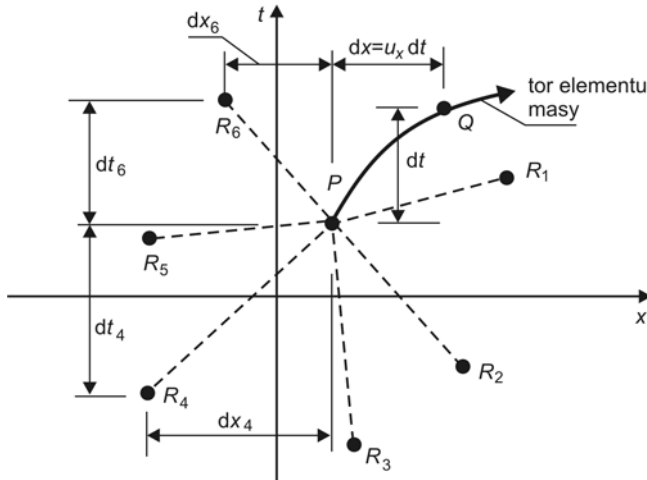
Jeżeli położenie punktu P na płaszczyźnie (x, t) określimy poglądowymi terminami **TU** i **TERAZ**, zaś każdy inny punkt będzie określany słowami **TAM** i **KIEDYŚ**, to **pochodna zupełna określa szybkość zmiany wartości rozważanej funkcji między stanami TU i TERAZ** oraz **TAM i KIEDYŚ**. Jest ona sumą zmian, wynikających z dwóch niezależnych, a jednocześnie działających czynników: wpływu czasu oraz różnicy położenia punktów w przestrzeni.

Zwróćmy teraz uwagę na prosty, lecz bardzo ważny fakt. Wybór punktu R , porównawczego względem punktu P , jest całkowicie dowolny. Jednakże w mechanice szczególnie ważny jest jeden taki punkt – ten mianowicie, do którego po upływie czasu dt dociera element masy, który przed tym czasem znajdował się w punkcie P (jest to punkt $R = Q$ na rys. 1.17). Mamy wtedy zgodnie ze znaną z mechaniki ogólną definicją prędkości:

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \quad \frac{dy}{dt} = u_y, \quad \frac{dz}{dt} = u_z, \quad (1.69)$$

a tak szczególną wartość pochodnej zupełnej nazywamy **pochodną substancjalną**, pisząc:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_x \frac{\partial f}{\partial x} + u_y \frac{\partial f}{\partial y} + u_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (1.70)$$



Rys. 1.17. Pochodna substancjalna jako szczególny przypadek pochodnej zupełnej

Wykorzystując operator różniczkowy **nabla** [4]:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}, \quad (1.71)$$

możemy posłużyć się zapisem symbolicznym:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)f. \quad (1.72)$$

Pierwszy składnik tej sumy określa szybkość zmiany wartości funkcji f względem czasu (**pochodna lokalna**), zaś drugi – intensywność jej zmiany w przestrzeni (**pochodna adwekcyjna**).

1.5.6. Metody empiryczne

Gdy teoretyczne podejście do rozważanego problemu jest zbyt kosztowne, zbyt czasochłonne lub też zbyt trudne, zawsze możemy rozważyć możliwość zastosowania metod doświadczalnych (empirycznych). Planowanie eksperymentów oraz proces opracowywania wyników doświadczeń stanowią odrębną dziedzinę wiedzy technicznej. Kwestie niezbędne do jej zrozumienia – dla zagadnień przepływowych – będziemy omawiać w kolejnych rozdziałach tej książki. Szczególnie miejsce zajmuje wśród nich **twierdzenie Buckinghama** [75], które sformułujemy w następnym paragrafie.

1.5.7. Metoda analizy wymiarowej

Zasadniczym elementem tej metody jest zastępowanie wybranych wielkości fizycznych przez ich kombinacje, mające postać iloczynów potęg tych wielkości. Liczba formalnych możliwości takiego działania jest nieograniczona, jednakże ich wykorzystywanie powinno być odpowiednio uzasadnione.

Rozważmy prosty przykład – ruch pojazdu. Najważniejsze wielkości, które go opisują, to **droga** L , **czas ruchu** t oraz **prędkość** v . W powszechnie przyjętej konwencji dwie pierwsze traktujemy jako podstawowe, zaś trzecią – jako wielkość pochodną, przy czym wiąże je oczywista zależność:

$$v = L / t. \quad (1.73)$$

Pod względem formalnym nic jednak nie stoi na przeszkodzie, aby za wielkości podstawowe uznać, powiedzmy, L i v , natomiast czas t potraktować jako wielkość pochodną. Oczywiście, ze względu na zrozumiały wymóg zapewnienia komunikatywności języka (w tym przypadku – naukowego) celowość takiego kroku musielibyśmy przekonująco umotywić.

Istnieje wszakże jeden przypadek, w którym posługiwanie się kombinacjami powszechnie przyjętych wielkości fizycznych można już na poziomie ogólnym uznać za zasadne. Jest to mianowicie taka sytuacja, gdy wprowadzane kombinacje są **wielkościami bezwymiarowymi** (par. 1.3.2).

Punktem wyjścia do **analizy wymiarowej** jest najbardziej ogólna postać matematycznego zapisu zależności funkcyjnej:

$$F(a_1, a_2, a_3, \dots, a_N) = 0. \quad (1.74)$$

W naukach ścisłych wyraża ona merytoryczny związek, istniejący pomiędzy wielkościami (które nazwiemy tu **wielkościami pierwotnymi**) a_n ($n = 1, 2, \dots, N$). Każda z nich ma swój **wymiar** (par. 1.3.2). Zestaw jednostek podstawowych B_m ($m = 1, 2, \dots, M$), w których wyrażamy te wymiary, nazywa się tu **pierwotną bazą wymiarową**. Jak już wiemy, w termomechanice taką bazę najczęściej tworzą jednostki **masy** ($B_1 = M$), **drogi** ($B_2 = L$), **czasu** ($B_3 = t$) oraz **temperatury** ($B_4 = T$). W układzie SI podstawowe znaczenie mają tu odpowiednio **kilogram, metr, sekunda i kelwin**.

Strukturę wymiarową zestawu wielkości pierwotnych a_n w bardzo czytelny sposób opisuje **macierz wymiarowa** [W]. Sposób jej tworzenia wyjaśnia poniższy schemat:

	a_1	a_2	a_3	\dots	a_N	
B_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	\dots	α_{1N}	
B_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	\dots	α_{2N}	
.	
.	
.	
B_M	α_{M1}	α_{M2}	α_{M3}	\dots	α_{MN}	

(1.75)

Kolejność postępowania w omawianej tu metodzie określa **twierdzenie Buckingham** (zwane też **twierdzeniem Π**). Mówi ono, że:

Funkcję pierwotnych wielkości fizycznych a_n ($n = 1, 2, \dots, N$), postaci (1.74) można zastąpić przez w pełni jej równoważną inną funkcję pochodnych wielkości bezwymiarowych Π_k ($k = 1, 2, \dots, K$), postaci:

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_K) = 0. \quad (1.76)$$

Każda z tych bezwymiarowych wielkości jest jednomianem, utworzonym z wielkości pierwotnych, według reguły:

$$\Pi_k = a_1^{w_{k1}} a_2^{w_{k2}} \dots a_N^{w_{kN}}. \quad (1.77)$$

Wykładniki w_{kn} są składowymi wektorów \mathbf{w}_k ($k = 1, 2, \dots, K$), tworzących zespół liniowo niezależnych rozwiązań równania:

$$[W] \mathbf{w}_k = 0, \quad (1.78)$$

gdzie $[W]$ jest macierzą wymiarową (1.75), a wartość:

$$K = N - R \quad (1.79)$$

określona jest przez liczbę N wielkości a_n oraz rząd R macierzy wymiarowej $[W]$.

Aby udowodnić to twierdzenie, porównajmy wymiary obu stron relacji (1.77). Dla jej lewej strony z definicji (par. 1.3.2) mamy:

$$[\Pi_k] = 1. \quad (1.80)$$

Wymiar każdej z wielkości a_n , wyrażony w bazie pierwotnej B_m , można zapisać następująco:

$$[a_n] = B_1^{\alpha_{1n}} B_2^{\alpha_{2n}} \dots B_M^{\alpha_{Mn}}. \quad (1.81)$$

Z kolei wymiar iloczynu potęg a_n , określonego przez prawą stronę (1.77), można wobec tego zapisać jako:

$$[a_1^{w_{k1}} a_2^{w_{k2}} a_N^{w_{kN}}] = B_1^{\sum_1^N \alpha_{1n} w_{kn}} B_2^{\sum_2^N \alpha_{2n} w_{kn}} \dots B_M^{\sum_M^N \alpha_{Mn} w_{kn}}. \quad (1.82)$$

Prawa strona (1.77) musi także być wielkością bezwymiarową, toteż dla każdego $m = 1, 2, \dots, M$ mamy:

$$\sum_1^N \alpha_{mn} w_{kn} = 0. \quad (1.83)$$

Zgodnie z zasadami zapisu wskaźnikowego [4], ostatnia zależność jest równoważna relacji (1.78). Tym samym twierdzenie Π można uznać za udowodnione.

■ Przykład 1.1

W przewodzie kołowym o średnicy D płynie z prędkością v ciecz o gęstości ρ oraz lepkości ν . Doświadczalnie stwierdzono, że w trakcie przepływu na odcinku przewodu o długości l występuje spadek ciśnienia o wartości Δp . Zauważono też, że spadek ten zależy od szorstkości wewnętrznej ścianki przewodu. Zastosować twierdzenie Buckinghama do relacji opisującej rozważane zjawisko.

Rozwiązanie

Przedmiotową relację w myśl (1.74) możemy zapisać następująco:

$$F(\Delta p, D, \rho, v, l, v, \varepsilon) = 0. \quad (1.84)$$

Parametr ε jest miarą szorstkości ścianek przewodu, którą – zgodnie z treścią zadania, pragniemy uwzględnić. Posłużyliśmy się tu powszechnie stosowaną w technice wielkością względną:

$$\varepsilon = 2k_s / D, \quad (1.85)$$

gdzie k_s – przeciętna wysokość nierówności i występow, będących przyczyną chropowatości ścianek (którą nazywamy **szorstkością** lub **chropowatością bezwzględną** – patrz tab. 1).

Macierz wymiarowa [W], zgodnie z (1.75), wygląda tu następująco:

	Δp	D	ρ	v	l	v	ε
M	1	0	1	0	0	0	0
L	-1	1	-3	2	1	1	0
t	-2	0	0	-1	0	-1	0

Jak widać, jej rząd jest równy $R = 3$, a skoro $N = 7$, to liczba poszukiwanych ilorazów bezwymiarowych Π_k zgodnie z (1.79) wynosi $K = N - R = 4$. Otrzymamy je z następującego roboczego układu równań:

$$\begin{aligned} w_{k1} + w_{k3} &= 0, \\ -w_{k1} + w_{k2} - 3w_{k3} + 2w_{k4} + w_{k5} + w_{k6} &= 0, \\ -2w_{k1} - w_{k4} - w_{k6} &= 0. \end{aligned}$$

Liczba równań jest tu mniejsza od liczby niewiadomych, toteż zgodnie z zasadami algebry liniowej [4, 68] dla uzyskania kolejnych $K = 4$ rozwiązań musimy każdorazowo założyć wartości K współrzędnych wektora w_k , obliczając pozostałe z układu roboczego. Założenia te możemy przyjmować w zasadzie dowolnie, dbając jedynie o ich zgodność z układem, a także pamiętając o prostocie formalnej (nie należy przyjmować dużych wartości w_{km}). Dość typowym elementem jest tu wartość wykładnika w_{k7} , który przyporządkowany jest wielkości ε . Nie występuje on w roboczym układzie równań, gdyż wielkość ta jest bezwymiarowa. Oznacza to, że możemy przyjąć dowolną wartość tego wykładnika, a więc najlepiej jest przyjąć $w_{17} = 0$, zaś $w_{27} = w_{37} = w_{47} = 0$. W dalszym ciągu przyjmijmy kolejno:

$$-w_{11} = w_{12} = w_{14} = 0, \quad w_{17} = 1,$$

co daje $\Pi_1 = \varepsilon$;

$$-w_{21} = 1, \quad w_{22} = w_{25} = w_{27} = 0,$$

co daje $\Pi_2 = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$;

$$-w_{31} = w_{35} = w_{37} = 0, \quad w_{32} = 1,$$

co daje $\Pi_3 = \frac{vD}{v}$;

$$-w_{41} = w_{44} = w_{47} = 0, \quad w_{45} = 1,$$

co daje $\Pi_4 = \frac{l}{D}$.

Otrzymane wielkości bezwymiarowe pozwalają zgodnie z (1.76) napisać, iż dla rozważanego przypadku możemy oczekiwać istnienia zależności:

$$f\left(\varepsilon, \frac{\Delta p}{\rho v^2}, \frac{vD}{\nu}, \frac{l}{D}\right) = 0. \quad (1.86)$$

Jak widać z (1.79), liczba pochodnych zmiennych bezwymiarowych jest mniejsza od liczby równoważnych zmiennych pierwotnych ($K < N$). Jest to bardzo istotna zaleta, gdyż z oczywistych względów zawsze łatwiej jest posługiwać się mniejszą liczbą zmiennych.

Opisana metoda wykazuje bardzo wysoki stopień elastyczności ze względu na postać zmiennych bezwymiarowych, co również jest jej zaletą. Wynika to z charakteru rozwiązań \mathbf{w}_k układu (1.78). Nie jest ono jedyne i jednoznaczne, lecz może być zastąpione przez inny ciąg wektorów, byle byłyby one liniowo niezależne. Innymi słowy, każdy wektor \mathbf{w}_k możemy zastąpić przez kombinację liniową już otrzymanych wektorów:

$$\mathbf{w}_k \rightarrow \mathbf{w}_k^z = \sum_1^K A_k \mathbf{w}_k, \quad (1.87)$$

gdzie A_k – dowolne mnożniki. Zapis ten ma bardzo ważne konsekwencje praktyczne, gdyż pozwala na zastąpienie każdej z już otrzymanych wielkości bezwymiarowych Π_k przez iloczyny i ilorazy ich potęg. W przykładzie (1.1) moglibyśmy więc człon Π_4 zastąpić przez iloraz Π_1 i Π_4 :

$$\Pi_4 \rightarrow \Pi_4^z = \Pi_1 / \Pi_4 = 2k_s / l.$$

Stwarza to możliwość elastycznego korygowania ciągu Π_k , celem jego uproszczenia lub dostosowania do szczególnych przypadków.

Posługiwanie się twierdzeniem Buckinghama wymaga pewnej wprawy, lecz warto ją nabyć, gdyż stanowi ono bardzo pożyteczne narzędzie nauk ścisłych.

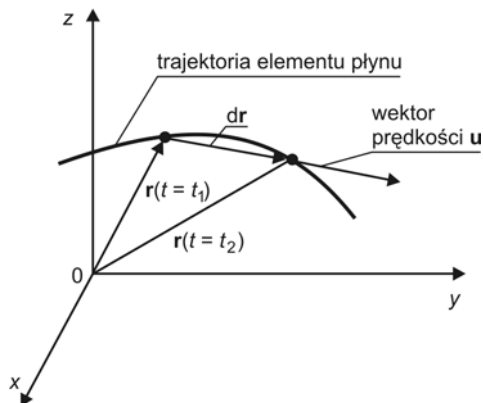
2. Kinematyka płynów

2.1. Pojęcia podstawowe

Mianem **kinematyki** tradycyjnie określa się tę część mechaniki, w ramach której rozważa się **ruch materii** bez wnikania w jego przyczyny i skutki.

Za główną miarę ruchu należy uznać **przemieszczenie**, szczególnie w mechanice ciał stałych (patrz pkt 1.4.2.2.) i dla tych obiektów, które z definicji powinny pozostawać w bezruchu (np. budynki i obiekty inżynierskie). Z kolei w przypadku obiektów, dla których przemieszczanie się jest naturalnym stanem eksploatacyjnym (np. maszyny i pojazdy), jak również w mechanice płynów, zasadniczą wielkością opisującą ruch jest **prędkość \mathbf{u}** , definiowana jako stosunek **przemieszczenia** (opisanego zmianą promienia wodzącego $d\mathbf{r}$) do **czasu** (rys. 2.1):

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.1)$$



Rys. 2.1. Geometryczna interpretacja prędkości elementu płynu

Dla podkreślenia, że chodzi tu o prędkość elementu płynu traktowanego jako **ośrodek ciągły**, niekiedy używa się terminu **prędkość adwekcji** (patrz par. 1.3.5 i rys. 1.7).

W ogólnym przypadku prędkość płynu zmienia się w czasie i przestrzeni. Miarą intensywności tej zmiany jest **przyspieszenie**, które w ujęciu Lagrange'a (czyli dla wydzielonej porcji masy) można wobec (2.1) zdefiniować jako drugą pochodną wektora wodzącego \mathbf{r} :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (2.2)$$

Jednakże w mechanice ośrodków ciągłych, gdy wektor \mathbf{u} jest określony w każdym punkcie i tworzy **pole prędkości**, dogodnie jest posługiwać się metodą Eulera, czyli wyrazić przyspieszenie jako **pochođną substancjalną prędkości**, zgodnie z (1.70):

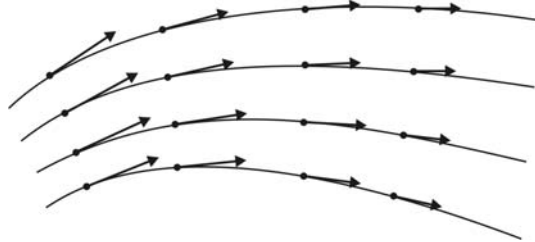
$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

2.2. Trajektoria elementu płynu i linia prądu

Relacja (2.1) może być wykorzystywana w dwojaki sposób. Jeżeli znamy położenie elementu masy w poszczególnych momentach czasu $\mathbf{r}(t)$, pozwala ona na obliczenie jego prędkości. Możliwość tę niekiedy stosujemy niemal intuicyjnie, na przykład wtedy, gdy podczas zawodów lekkoatletycznych dzielimy długość bieżni przez czas trwania poszczególnych okrążeń, oceniając w ten sposób prędkość obserwowanego biegacza.

Drugi z tych sposobów, w mechanice bodajże bardziej istotny, polega na wyznaczaniu kolejnych położeń elementu masy, gdy znane jest pole jego prędkości \mathbf{u} . Linie, które wyznaczają te połozenia, nazywa się **trajektoriami** (lub **torami**) elementu masy.

Ważnym pojęciem pokrewnym jest **linia prądu**. Definiuje się ją dla chwilowego układu wektorów prędkości (który może, choć nie musi, zmieniać się w czasie) jako rodzinę linii, które w każdym punkcie są styczne do wektora prędkości \mathbf{u} (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Przebieg linii prądu na tle układu wybranych wektorów prędkości

Aby uzyskać możliwość wyznaczenia linii prądu, sformułowaną tu definicję należy zapisać w postaci matematycznej. Jeżeli przebieg każdej z tych linii będzie określony przez wektorowy element jej łuku:

$$d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}, \quad (2.4)$$

to warunek równoległości wektorów $d\mathbf{s}$ i \mathbf{u} przyjmuje postać:

$$d\mathbf{s} \times \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

równoważny trzem równaniom skalarnym:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{u_x}{u_y}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{u_y}{u_z}, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{u_x}{u_z}. \quad (2.6)$$

Jest to właśnie poszukiwane różniczkowe równanie rodziny linii prądu.

Zauważmy, że w ruchu ustalonym, gdy pole prędkości nie zmienia się w czasie, linie prądu są identyczne z trajektoriami elementów płynu. Różnica między nimi pojawia się dopiero w ruchu nieustalonym – układy linii prądu ukazują chwilowe obrazy ruchu dla poszczególnych momentów czasu, zaś trajektorie elementów płynu wyznaczają ich rzeczywiste tory i mają charakter **obwiedni** kolejnych rodzin linii prądu [68].

■ Przykład 2.1

Wyznaczyć trajektorię elementu płynu, poruszającego się w polu prędkości:

$$u_x = ax, \quad u_y = ay, \quad u_z = -2az.,$$

który dla $t = 0$ znajdował się w punkcie o współrzędnych:

$$x_0 = X, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = Z.$$

Rozwiązanie

Równanie poszukiwanej trajektorii zgodnie z (2.1) ma w tym przypadku postać:

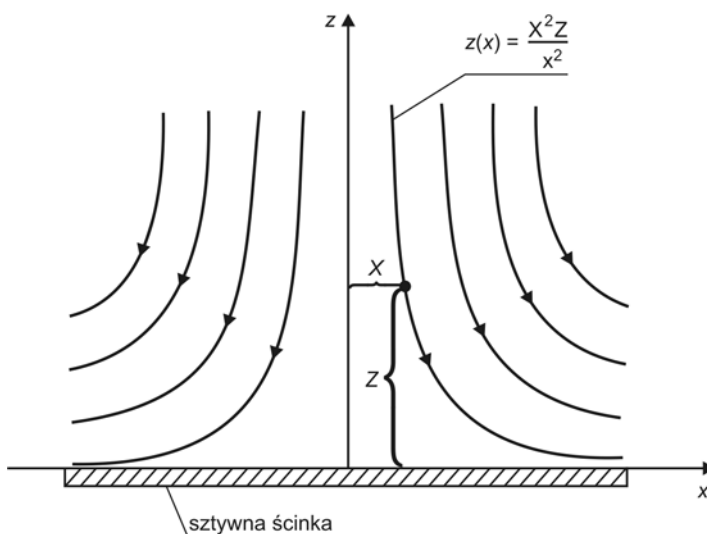
$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad \frac{dy}{dt} = ay, \quad \frac{dz}{dt} = -2az.$$

Układ tych zależności jest na tyle prosty, że można go scałkować w kwadraturach, otrzymując:

$$x = x_0 \exp(at), \quad y = y_0 \exp(at), \quad z = z_0 \exp(-2at).$$

Z danego warunku początkowego wynika, że interesujący nas element płynu porusza się w płaszczyźnie xOz , wzdłuż linii określonej relacjami:

$$x = X \exp(at), \quad z = Z \exp(-2at).$$



Rys. 2.3. Trajektorie elementu płynu (przykład 2.1)

O równaniu linii, które opisuje współrzędne jej poszczególnych punktów w zależności od czasu mówimy, że ma **postać parametryczną**. Aby otrzymać z niej (często dogodniejszy) bezpośredni związek między współrzędnymi $z(x)$, możemy wyeliminować z ostatnich relacji czas t , co daje następujące równanie trajektorii elementu płynu (rys. 2.3):

$$z(x) = \frac{X^2 Z}{x^2}.$$

Warto dodać, że rozważane w tym przykładzie pole prędkości może być interpretowane jako odpowiadające prostopadłemu napływowi strumienia cieczy na płaską ściankę sztywną, usytuowaną w płaszczyźnie xOy . ■

■ Przykład 2.2

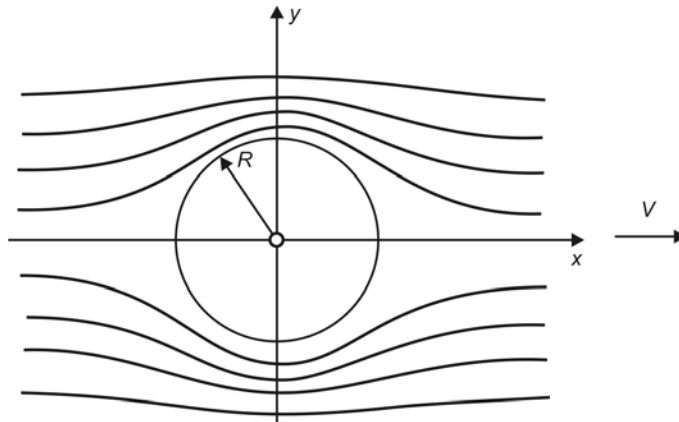
Wyznaczyć rodzinę linii prądu dla pola prędkości danego równaniami:

$$u_x = V \left[1 - \frac{3R}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{R^3}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} \right] \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$u_y = -V \left[1 - \frac{3R}{4\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{R^3}{4(x^2 + y^2)^{3/2}} \right] \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

które opisują opływ nieruchomej kuli o promieniu R strumieniem płynu o stałej prędkości V [50].

Rozwiązanie



Rys. 2.4. Linie prądu dla cieczy opływającej nieruchomą kulę
(V – prędkość cieczy poza obszarem wpływu ciała)

Rozważany przepływ jest osiowoosymetryczny, toteż można go jednoznacznie przedstawić za pomocą obrazu pola prędkości w dowolnej płaszczyźnie, przechodzącej przez oś kuli, równoległą do wektora prędkości V . Zgodnie z (2.6) mamy tu następujące równanie rodziny linii prądu:

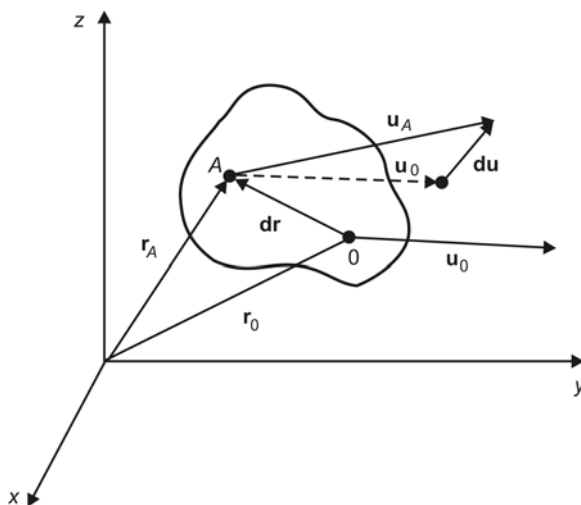
$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1 - \frac{3R}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{3R}{2(x^2 + y^2)^{3/2}} x}{1 - \frac{3R}{4\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{R^3}{4(x^2 + y^2)^{3/2}} y}$$

Jest ono na tyle złożonym równaniem różniczkowym, że dla uzyskania jego rozwiązania należy posłużyć się metodami numerycznymi [63]. Przykładowy układ poszukiwanych linii prądu (otrzymany drogą numerycznego całkowania rozważanej zależności) przedstawiono na rys. 2.4. ■

2.3. Pierwsze twierdzenie Helmholtza

2.3.1. Zmienność pola prędkości

W paragrafie 1.5.5 stwierdziliśmy, że w naukach ścisłych rozważamy nie tylko same wartości funkcji opisujących interesujące nas zjawiska, lecz także ich lokalne zróżnicowanie. Znaczenie tego zróżnicowania w przypadku pola prędkości (nie tylko płynów, lecz także każdego innego ośrodka ciągłego) ujawnia się już na poziomie analizy kinematycznej (czyli bez wnikania w charakter sił działających na materię).



Rys. 2.5. Analiza struktury pola prędkości ośrodka ciągłego

Aby ją przeprowadzić, wybierzmy dwa dowolne punkty elementu masy (A i O na rys. 2.5). Prędkości substancji w tych punktach są w ogólnym przypadku różne, toteż dla dowolnie ustalonej chwili czasu zachodzi:

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_O + \mathbf{du} . \quad (2.7)$$

Różniczkę prędkości \mathbf{du} możemy zgodnie z (1.67) wyrazić następująco:

$$\left. \begin{aligned} du_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \\ du_y &= \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \\ du_z &= \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

lub stosując zapis symboliczny:

$$d\mathbf{u} = [\text{TN}] d\mathbf{r} . \quad (2.9)$$

Tablica [TN]:

$$[\text{TN}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

nosi nazwę **tensora nierównomierności pola prędkości** (patrz par. 1.3.2), jest bowiem zbudowana z trzech możliwych pochodnych przestrzennych każdej z trzech składowych wektora prędkości \mathbf{u} . Im bardziej złożone (nierównomierne) jest pole prędkości, tym większa liczba tych pochodnych ma wartości różne od zera. Z kolei wektor:

$$d\mathbf{r} = [dx, dy, dz] \quad (2.11)$$

określa różnicę położenia punktów A i 0 (rys. 2.5).

Dokonyjmy teraz istotnego przekształcenia. Pozornie ma ono charakter formalny, lecz dalsza analiza pozwoli ujawnić jego głęboki sens fizyczny. Rozdzielmy mianowicie tablicę [TN] na część asymetryczną [R] oraz symetryczną [D], wykorzystując w tym celu znaną z matematyki regułę [68] (górny indeks T oznacza tu macierz transponowaną):

$$[\text{TN}] = \frac{1}{2} \left[([\text{TN}] - [\text{TN}]^T) \right] + \frac{1}{2} \left[([\text{TN}] + [\text{TN}]^T) \right] = [\mathbf{R}] + [\mathbf{D}] . \quad (2.12)$$

Po wykonaniu zgodnych z zasadami rachunku macierzowego przekształceń, otrzymamy:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

oraz:

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Rezultaty te pozwalają na przepisanie (2.7) w postaci:

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + [R]_0 d\mathbf{r} + [D]_0 d\mathbf{r}, \quad (2.15)$$

gdzie indeks „0” oznacza, że oznaczone nim wielkości obliczono w punkcie 0 (rys. 2.5), który wygodnie jest nazwać **biegunem** (gdyż jest to punkt odniesienia dla każdego innego punktu A). Aby zrozumieć sens otrzymanego wyrażenia, musimy uprzednio dokonać kinematycznej interpretacji elementów tablic [R] oraz [D].

2.3.2. Prędkość kątowna elementu masy

Współrzędne asymetrycznej tablicy [R] utworzone są z wyrażenń typu:

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.16)$$

Dla uwidocznienia ich sensu fizycznego, przeanalizujemy ruch dwóch ramion kąta MON (rys. 2.6), w chwili początkowej prostopadłych do siebie i pokrywających się z osiami układu współrzędnych xOy . Ramiona te wyznaczone są przez elementy masy, zlokalizowane dla $t = 0$ w ustalonych punktach.

Po upływie bardzo krótkiego czasu dt każdy z tych elementów przemieści się, tworząc kąt $M'O'N'$. Przemieszczenie takie możemy łatwo zobrazować, na przykład umieszczając na swobodnej powierzchni płynącej wody trzy lekkie pływaki i fotografując ich położenia w krótkich odstępach czasu. Jest to jednak proces tak elementarny, że w dalszych rozważaniach posłużymy się tylko wyobraźnią.

Dla porównania zmiany konfiguracji obserwowanych punktów, przemieścimy ich układ dla $t = dt$ równoległe do punktu O'' , identycznego z punktem 0. Wektor:

$$d\mathbf{r}_0 = \mathbf{u}_0 dt \quad (2.17)$$

określa **przemieszczenie równoległe** (lub **translację**) całego układu, wraz z punktem 0, obranym za biegun. Zauważmy jednak (rys. 2.6), że nowe położenie pozostałych punktów (M'' oraz N'') różni się od początkowych położenń odpowiednich elementów masy (M oraz N). Oznacza to, że punkty te wykonały ruch względem bieguna 0. Ich przemieszczenia (odpowiednio dM i dN) możemy wyrazić dwojako – albo posługując się kątami α i β , o jakie obróciły się ramiona dx i dy kąta MON, co daje [4]:

$$dM = \alpha dx, \quad dN = \beta dy \quad (2.18)$$

albo przez różnicę prędkości między parami punktów OM i ON, odpowiednio w kierunku y i x , co daje:

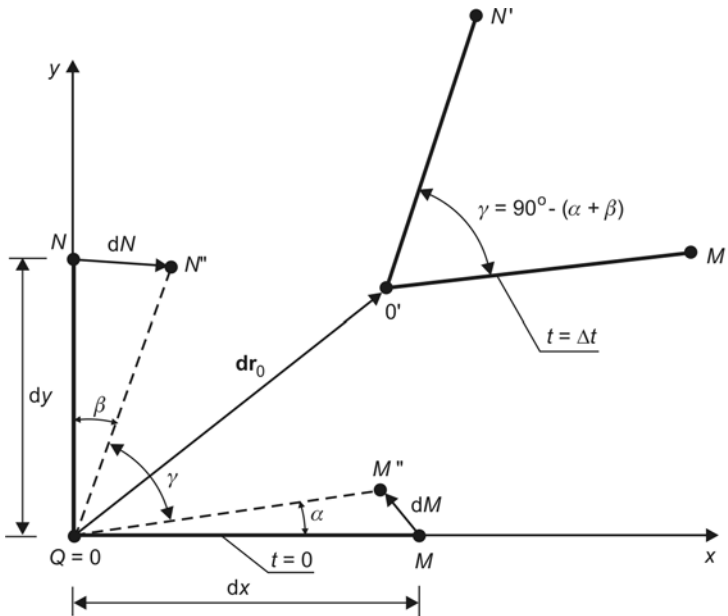
$$dM = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx dt, \quad dN = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy dt. \quad (2.19)$$

Porównując otrzymane relacje, mamy:

$$\alpha = \frac{\partial u_y}{\partial x} dt, \quad \beta = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt, \quad (2.20)$$

co pozwala następująco wyrazić ogólne wyrażenie (2.16) przez kąty α i β :

$$R_{ij} = \frac{\alpha - \beta}{2 dt} \quad (2.21)$$



Rys. 2.6. Interpretacja obrotu i deformacji elementu masy

Posługując się szkicem na rys. 2.6 możemy zauważyć, że początkowa orientacja rozważanego kąta określona była przez jego dwusieczną, odchyloną od osi Ox o kąt 45° . Po upływie czasu dt zmianie uległa zarówno wartość tego kąta, jak i jego orientacja, wyznaczona przez nowe położenie dwusiecznej. Tym razem jest ona odchylona od osi Ox o kąt:

$$\frac{(90^\circ + \alpha - \beta)}{2}.$$

Widzimy więc, że w rozważanym czasie nastąpiła zmiana położenia dwusiecznej kąta o wartość $(\alpha - \beta)/2$. Taka **zmiana orientacji jest konsekwencją obrotu elementu masy**. Uwzględniając przyrost czasu dt występujący w mianowniku (2.21), możemy powiedzieć, że **składowe tablicy [R] opisują prędkość obrotową elementu masy**.

Zapis odpowiedniego członu (2.15) możemy uprościć, korzystając ze znanego z matematyki **operatora rotacji wektora w**, który wygodnie jest zapisać w postaci wyznacznika [4]:

$$\text{rot } \mathbf{w} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}. \quad (2.22)$$

Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić, że zachodzi wtedy:

$$[\mathbf{R}]_0 \, d\mathbf{r} = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{u})_0 \times d\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}_0 \times d\mathbf{r}, \quad (2.23)$$

gdzie $\boldsymbol{\omega}$ jest wektorem **prędkości kątowej**.

2.3.3. Prędkość deformacji kątowej elementu masy

Wyprowadzone powyżej zależności pozwalają na przeprowadzenie interpretacji współrzędnych tablicy (2.14) leżących poza główną przekątną, mających postać:

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{gdzie } i \neq j) \quad (2.24)$$

Podstawiając tu (2.20), widzimy, że:

$$D_{ij} = \frac{\alpha + \beta}{2dt}. \quad (2.25)$$

Pamiętamy, że początkowo ramiona analizowanego kąta tworzyły wartość 90° . Po upływie czasu dt kąt ten wynosi:

$$90^\circ - (\alpha + \beta).$$

Różnica tych wartości, odniesiona do czasu, określa więc **prędkość odkształcenia (deformacji) kątowego elementu masy**.

2.3.4. Prędkość deformacji liniowej elementu płynu

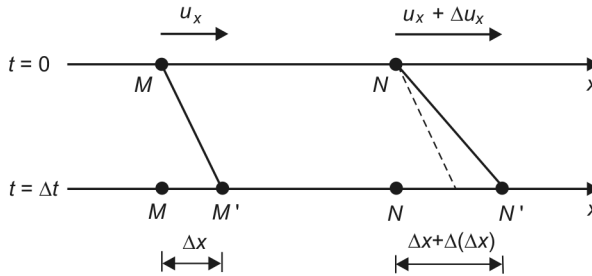
Pozostaje nam jeszcze wyjaśnienie sensu wyrażenia typu:

$$D_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad (2.26)$$

znajdujących się na głównej przekątnej tablicy [D].

W tym celu rozważmy ruch odcinka MN , przykładowo w kierunku osi $0x$ (rys. 2.7). Ze względu na występujące w ogólnym przypadku zróżnicowanie pola prędkości, każdy z tych punktów porusza się z inną prędkością. Jeżeli różnica między nimi wynosi Δu_x , to różnica przemieszczeń jest równa:

$$\Delta(\Delta x) = \Delta u_x \Delta t. \quad (2.27)$$



Rys. 2.7. Interpretacja deformacji liniowej

Dzieląc tę relację obustronnie przez $(\Delta x \Delta t)$ i porównując ten różnicowy zapis z różniczkową relacją (2.26), widzimy, że:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \approx \frac{\Delta u_i}{\Delta x_i} = \frac{\Delta(\Delta x)}{\Delta x \Delta t}. \quad (2.28)$$

Oznacza to, że analizowane tu wyrażenia D_{ii} **opisują prędkości względnej zmiany długości odcinków materialnych** (w przypadku płynów – odcinków płynnych).

2.3.5. Twierdzenie Helmholtza i jego znaczenie

Podstawiając (2.23) do (2.15) otrzymujemy następującą relację:

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{dr} + [\mathbf{D}]_0 \mathbf{dr}. \quad (2.29)$$

Stanowi ona matematyczny zapis **I twierdzenia Helmholtza**, które mówi, że **prędkość każdego elementu ośrodka ciąglego jest sumą trzech składowych**, a mianowicie:

- 1) **prędkości postępowej**, określonej przez wektor prędkości punktu obranego za biegun;
- 2) **prędkości liniowej, wynikającej z obrotu elementu wokół chwilowej osi obrotu**, przechodzącej przez biegun;
- 3) **prędkości liniowej, wynikającej z deformacji elementu**, przy czym łączna deformacja składa się z **odkształceń kątowych** oraz **odkształceń liniowych**.

To proste w istocie stwierdzenie ma ogromną wagę w mechanice. W jednoznacznej formie definiuje ono trzy składowe postacie ruchu – **translację** (ruch postępowy), **obrót** i **deformację**. W ogólnym przypadku ruchu materii występują one równocześnie, a że każda z nich ma swe zalety i wady, więc możliwość ich oddzielnego opisu (dana zależnością (2.29)) pozwala na takie kształtowanie ruchu masy, podczas którego wzmacniane są cechy pożądane, a osłabieniu ulegają jego własności negatywne.

Jest oczywiste, że utrzymanie każdej z tych form ruchu wymaga dostarczenia energii. Osłabienie form niepożądanych skutkuje redukcją kosztów eksploatacji układu. Z drugiej strony trzeba pamiętać, że formy te są ze sobą wzajemnie powiązane. Ruch translacyjny takiego ciała jak bumerang, dysk, czy piłka tenisowa ma zupełnie inny charakter, gdy towarzyszy mu rotacja (obrót), niż gdy ta część ruchu zostaje wyeliminowana.

Omówione I twierdzenie Helmholtza odgrywa ogromną rolę także w hydraulice. Translacja płynu określa jedno z podstawowych zadań tej nauki – opis jego przenoszenia z miejsca poboru (lub magazynowania) do miejsca użytkowania. Z kolei ruch obrotowy odgrywa szczególną rolę w procesach mieszania płynu (homogenizacji), jakże ważnych w eko-hydraulice. Problemy te będą omawiane w dalszych rozdziałach pracy. I wreszcie trzeci rodzaj ruchu, związany z odkształceniem, opisany jest tablicą $[\mathbf{D}]$, zwaną **tensorem prędkości deformacji**. Stanowi ona jedną z podstawowych **zmiennych konstytutywnych** w mechanice płynów (patrz pkt 1.4.2.2 i równ. (1.38)).

2.4. Linie wirowe

Określone relacją (2.6) **linie prądu** pozwalają na wizualizację **adwekcji** elementów płynu. Analogicznie do nich możemy zdefiniować **linie wirowe**, czyli linie, które w każdym swym punkcie są styczne do wektorów wirowości (rotacji). Jeżeli symbolem \mathbf{db} oznaczmy elementarny wektor takiej linii, to jej kształt wyznaczyć można z warunku:

$$\mathbf{db} \times \text{rot } \mathbf{u} = 0. \quad (2.30)$$

Szczególnie obrazowego przykładu linii, która może być traktowana jako linia wirowa, dostarcza wkręt do drewna. Obraca się go w płaszczyźnie prostopadłej do osi podłużnej, toteż ta właśnie oś ma charakter linii wirowej. Zauważmy przy okazji, że tak obracany element równocześnie przemieszcza się wzdłuż swej osi. Oznacza to, że wektory jego prędkości i rotacji są równoległe:

$$\mathbf{u} \parallel \text{rot } \mathbf{u} \quad (2.31)$$

W przypadku ruchu płynu warunek ten określa interesujący i czasem przydatny w praktyce model przepływu, zwany **ruchem śrubowym** [38].

2.5. Kinematyczna charakterystyka przepływów

Zróznicowanie występujących w praktyce pól wielkości fizycznych określone jest przez trzy aspekty:

- 1) liczbę różnych od zera składowych wektora prędkości – od trzech w ogólnym przypadku (u_x, u_y, u_z), przez dwie (u_x, u_y), aż do jednej (u_x); można powiedzieć, że wyznacza ona **liczbę kierunków przestrzeni**, wzdłuż których porusza się substancja;
- 2) liczbę współrzędnych przestrzennych, względem których zmieniają się te wielkości – mamy tu cztery możliwości, od trzech zmiennych (x, y, z), przez dwie (x, y) i jedną (x), aż po przypadek, gdy rozważana wielkość fizyczna jest stała (potocznie mówi się wtedy o ruchu „zero-wymiarowym”); w naukach ścisłych i w technice używa się tu terminu „**wymiarowość zjawiska**”;
- 3) zależność bądź niezależność pola od czasu t – mówimy tu o zjawiskach oraz/albo systemach **nieustalonych** lub **niestacjonarnych** i odpowiednio **ustalonych** lub **stacjonarnych**.

Tak więc w najbardziej ogólnym przypadku pole prędkości nieustalonego przepływu trójkierunkowego i trójwymiarowego może być symbolicznie zapisane następująco:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t) = [u_x, u_y, u_z], \quad (2.32)$$

zaś w najprostszym przypadku ustalonego ruchu ze stałą prędkością mamy:

$$\mathbf{u} = \mathbf{vi} = \text{const}. \quad (2.33)$$

Trzy omówione aspekty zmienności pól fizycznych są od siebie niezależne, toteż maksymalną liczbę stwarzanych przez nie kombinacji określa iloczyn wariantów występujących w każdym z aspektów, równy w tym przypadku 24. Trzeba wszakże pamiętać, że niektóre z nich mają charakter czysto formalny, jak na przykład przepływ 3-kierunkowy i 0-wymiarowy. W takiej bowiem sytuacji oczywistą rzeczą jest usytuowanie jednej z osi układu współrzędnych wzdłuż wektora prędkości, co sprowadza opis zjawiska do relacji (2.33).

Tym niemniej świadomość istnienia ogólnej zasady, porządkującej poszczególne rodzaje przepływu, ułatwia posługiwanie się istniejącymi modelami ruchu, a w szczególności – zwraca uwagę na kwestię wyboru takiego układu współrzędnych, który najbardziej pasuje do rozważanego problemu.

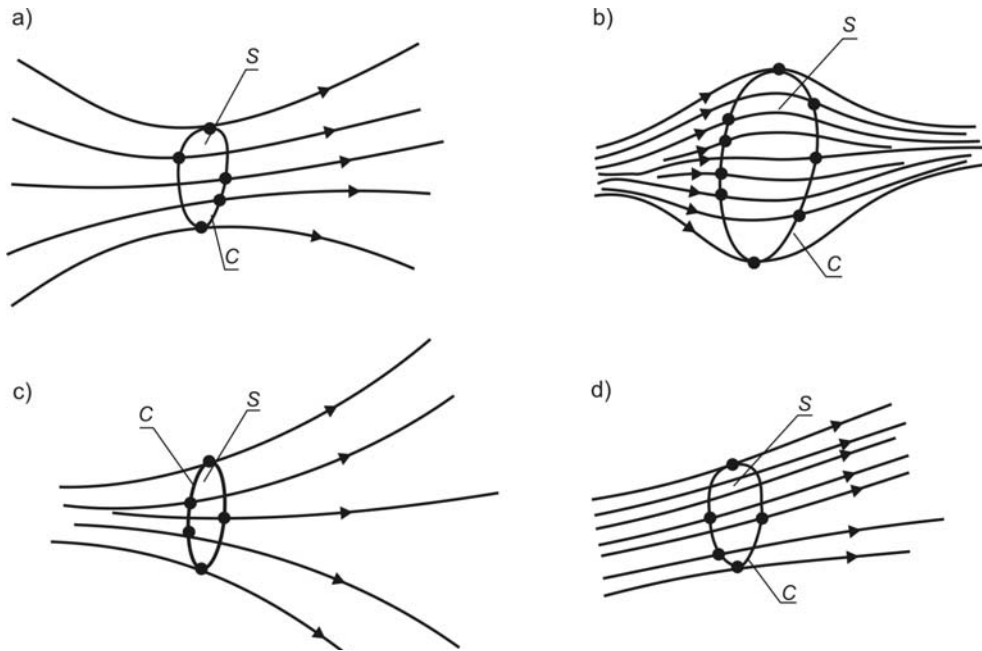
2.6. Pojęcie strumienia

W paragrafie 1.5.4 zdefiniowaliśmy **strumień** jako szczególny rodzaj wielkości fizycznej, określający intensywność przemieszczania się **ładunku** w czasie. Jest to określenie ogólne, szeroko używane w naukach ścisłych i w technice.

Jednakże w mechanice płynów i hydraulice termin ten ma jeszcze drugie, odrębne znaczenie – określa ono strukturę przepływową, utworzoną przez **pęk trajektorii elementów płynu, przecinających powierzchnię S** .

Trajektorie przechodzące przez punkty **obwodu C przekroju poprzecznego strumienia S** tworzą **powierzchnię strumienia**. Gdy powierzchnia ta ma rozmiary małe ($S \rightarrow \Delta S$), słowo **strumień** zastępujemy terminem **struga**. Jeżeli rozmiar ten jest nieskończenie mały ($\Delta S \rightarrow dS$) – mówimy o **strumieniu elementarnym**.

Przy rozważaniu zjawisk nieustalonych, niekiedy wygodnie jest rozważać pęk **linii prądu**, które w danym momencie przecinają rozważaną powierzchnię S . Tworzą one **rurkę prądu**, której poboczną nazywamy **powierzchnią prądu**.



Rys. 2.8. Schematy strumienia płynu

Pojęcie strumienia jest oczywiste i łatwo trafia do wyobraźni, ale bynajmniej nie jest to termin banalny, gdyż stanowi pożyteczny model dla szerokiej grupy niesłychanie ważnych obiektów technicznych (głównie dla rurociągów i koryt otwartych). Dokładnie omówimy te zagadnienia w dalszych rozdziałach. Tutaj zauważmy tylko, że tak ogólnie zdefiniowany **strumień** może być strukturą bardzo rozbudowaną. Poszczególne trajektorie mogą w pobliżu rozważanej powierzchni S cechować się bardzo znacznymi krzywiznami (rys. 2.8a, b, c), ulegając istotnym zwężeniom lub rozszerzeniom. Jednakże najbardziej interesujące w praktyce są układy regularne (rys. 2.8d), utworzone przez równomiernie ułożone

pęki trajektorii, które niekiedy mogą być traktowane jako równoległe (lub wręcz są do siebie równoległe). Ale nawet gdy geometryczny kształt strumienia jest regularny, w jego obrębie może występować znaczne zróżnicowanie pola prędkości.

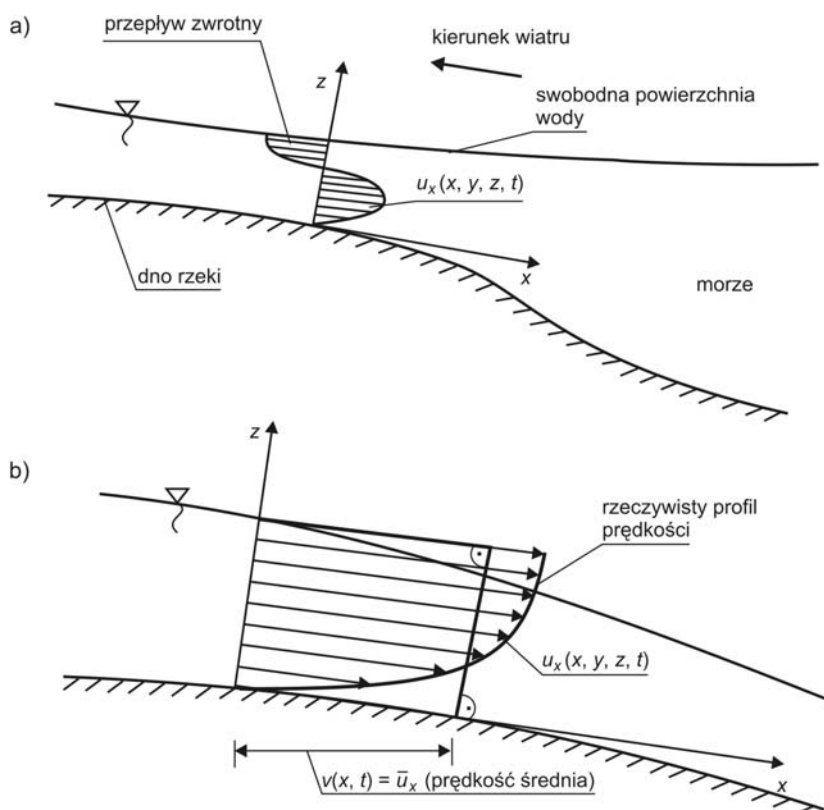
Typowym przykładem może być przepływ w ujściowym odcinku rzeki, znajdującym się pod działaniem silnego wiatru, skierowanego w górę cieku (rys. 2.9a). Nawet jeśli podłużna składowa prędkości u_x będzie w takim przypadku dominowała nad składowymi poprzecznymi u_y i u_z (czyli ruch będzie miał charakter jednokierunkowy), to istnienie generowanego wiatrem przepływu zwrotnego skomplikuje sytuację (będzie to przepływ dwuwymiarowy).

Gdy jednak ruch powietrza nie wpływa na przepływ wody (rys. 2.9b), poprzeczną zmienność profilu prędkości często można zaniedbać, zastępując jej rzeczywisty rozkład przez wartość uśrednioną względem poprzecznego przekroju strumienia S (patrz par. 1.3.4):

$$u_x(x, y, z, t) \approx v(x, t) = \frac{1}{S} \int_S u_x dS, \quad (2.34)$$

co wobec (1.63) można zapisać w postaci ważnej relacji:

$$v(x, t) = \frac{Q(x, t)}{S(x, t)}. \quad (2.35)$$



Rys. 2.9. Przykłady przepływów w korytach otwartych

Taki rodzaj przepływu jednokierunkowego i jednowymiarowego (nieustalonego, bądź ustalonego) nazwijmy **przepływem podłużnym** [47]. Stanowi on bardzo istotny schemat obliczeniowy w hydraulice (patrz rozdz. 11).

3. Dynamika płynów

3.1. Przedmiot dynamiki

Dynamika zajmuje się relacjami pomiędzy ruchem materii a czynnikami, które ten ruch wywołują. Pojęcia i wielkości opisujące ruch omówiliśmy w ramach kinematyki (rozdz. 2), zaś sposoby określania stanowiących przyczyny ruchu sił – w par. 1.3.6. Rozważane w obrębie dynamiki związki między ruchem a działającymi na ciało siłami (co bardzo ważne – uwzględniające własności tych ciał oraz zachodzące w nich procesy) są opisywane za pomocą **praw przyrody**. Dzielią się one na trzy kategorie (par. 1.5.2.):

- **prawa zachowania,**
- **prawa konstytutywne,**
- **prawa stanu.**

W dalszym ciągu książki omówimy je kolejno – najpierw podając odpowiednie **prawo** w postaci opisowej, a następnie zapisując je w formie matematycznej, co pozwoli otrzymać stosowne postacie **równań ruchu**.

3.2. Ogólne cechy praw zachowania

Omawiana w pierwszej kolejności kategoria praw przyrody określa „zachowanie się” pewnej grupy wielkości fizycznych, charakteryzujących stan, w jakim znajduje się interesujący nas układ.

Spotykana niekiedy interpretacja używanego tu terminu „zachowanie” jako „utrzymanie niezmiennej wartości”, choć wykazuje pewne odniesienia do historycznego rozwoju fizyki, jest myląca i niewłaściwa. Wartości podlegających tym prawom wielkości nie są bowiem w ogólnym przypadku stałe, lecz wykazują istotną zmienność.

Wielkościami tymi są:

- **masa** (całego układu, a dla **układów niejednorodnych** – także masa każdego ze składników [50]),
- **pęd** (zwany także **ilością ruchu**),
- **moment pędu,**
- **energia,**
- **entropia.**

Prawa zachowania mają charakter bilansowy, co oznacza, iż wyrażają łączną szybkość zmiany (czyli całkowitą zmianę odniesioną do jednostki czasu) każdej z wielkości jako sumę szybkości zmian wywoływanych przez poszczególne czynniki jednostkowe. Treść każdego z nich ściśle oddaje przebieg obiektywnych procesów, zachodzących w przyrodzie, uwzględniając ewentualne założenia upraszczające, wprowadzone do zastosowanego modelu zjawiska. Co więcej, treść ta jest też zgodna z rezultatami intuicyjnego oglądu

rzeczywistości, dzięki czemu wszystkie prawa zachowania mają jednakową strukturę formalną, znakomicie ułatwiającą ich opanowanie.

Główną osią każdego z tych praw jest stwierdzenie, że zmiana poszczególnych własności układu może być wywołana przez czynniki należące do dwóch grup:

- **przemieszczenie** (doprowadzenie własności do wnętrza układu, lub jej odprowadzenie na zewnątrz układu);
- **przemiana** (wytwarzanie lub zużywanie).

Szybkość przemieszczania własności opisywana jest **strumieniem adwekcyjnym** (dla tej jej części, która porusza się wraz z masą substancji nośnej – patrz par. 1.5.4), a niekiedy także innymi rodzajami strumieni (wywoływanych przez czynniki dyfuzyjne, elektromagnetyczne lub grawitacyjne), które ogólnie nazwijmy **strumieniami względnymi** (gdyż wyrażają one ruch własności względem masy nośnika).

Jeżeli chodzi o drugą grupę czynników, to wyraża się je przez **funkcje źródłowe**, czyli relacje matematyczne, opisujące intensywność wytwarzania lub zużywania danej własności, odniesioną do czasu.

Tak więc ogólna struktura każdego z praw zachowania wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \text{Zmiana własności w czasie} = & \text{wypadkowy strumień adwekcyjny} + \\ & + \text{wypadkowy strumień względny} + \text{suma funkcji źródłowych.} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Rzecz oczywista, sens tych pojęć dla poszczególnych własności ma już charakter indywidualny. Zostanie on szczegółowo omówiony w następnych rozdziałach.

Wielkie znaczenie ma określenie **układu**, dla którego formułuje się poszczególne prawa zachowania. Istnieje tu kilka możliwości [38], lecz niezależnie od wybranej metody wyprowadzenia, końcowe postacie odpowiednich równań muszą być takie same (gdyż treść obiektywnego prawa natury nie może być uzależniona od subiektywnego wyboru układu). W dalszym ciągu będziemy się posługiwać tak zwaną **objętością kontrolną**. Jest to całkowicie zanurzona w płynie oraz nieruchoma względem układu współrzędnych trójwymiarowa bryła geometryczna. Jej kształt jest dowolny, choć powinien uwzględniać szczególne cechy rozważanego problemu. Zewnętrzną powierzchnię tej objętości nazywamy **powierzchnią kontrolną**.

3.3. Bilans masy

3.3.1. Prawo zachowania masy

W interesującym nas przypadku **płynu jednorodnego** bilansowa relacja (3.1) ma szczególnie prostą formę, gdyż masa takiego płynu może jedynie przemieszczać się adwekcyjnie i nie ulega przemianom (które mogą zachodzić w **płynach niejednorodnych** [50]). Nie uwzględniamy tu, rzecz naturalna, nuklearnych przemian masy i energii, wykraczających poza ramy klasycznej hydromechaniki. Tak więc możemy sformułować następujące **prawo zachowania masy** płynu jednorodnego (ważne także dla każdej innej substancji jednorodnej, bowiem nie wprowadzamy tu żadnych ograniczeń odnośnie do jej stanu skupienia):

Zmiana w czasie masy, zawartej w objętości kontrolnej, jest równa adwekcyjnemu strumieniowi tej substancji przez powierzchnię kontrolną.

3.3.2. Równanie zachowania masy dla przypadku ogólnego

Dla zapewnienia czytelności zapisu przyjmijmy, że rozważana **objętość kontrolna** ma kształt elementarnego prostopadłościanu o bokach Δx , Δy i Δz (rys. 3.1).

Jeżeli aktualną gęstość wypełniającej objętość substancji oznaczymy przez ρ , to masa elementu jest równa:

$$M = \rho \Delta V = \rho \Delta x \Delta y \Delta z. \quad (3.2)$$

Jednostkowy adwekcyjny strumień masy jest wektorem o składowych:

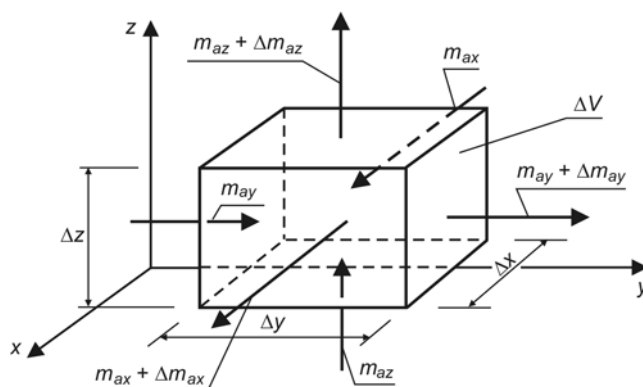
$$\mathbf{m}_a = [m_{ax}, m_{ay}, m_{az}], \quad (3.3)$$

z których każda powoduje przepływ masy tylko przez jedną, prostopadłą do niej powierzchnię objętości kontrolnej. Zauważmy, że strumienie te dla poszczególnych par równoległych do siebie ścian prostopadłościanu ΔV mogą się w ogólnym przypadku różnić o pewną wartość, którą wygodnie jest oznaczyć symbolem przyrostu Δm_{ai} ($i = x, y, z$). Układ poszczególnych strumieni zaznaczono na rys. 3.1 strzałkami. Prawo zachowania masy możemy wobec tego zapisać następująco:

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = (m_{ax} - m_{ax} - \Delta m_{ax}) \Delta S_x + (m_{ay} - m_{ay} - \Delta m_{ay}) \Delta S_y + (m_{az} - m_{az} - \Delta m_{az}) \Delta S_z, \quad (3.4)$$

gdzie ΔS_i oznacza powierzchnię ściany elementarnego prostopadłościanu, prostopadłą do osi O_i ($i = x, y, z$). Podstawiając do ostatniej relacji (3.2) i dzieląc ją obustronnie przez ΔV , otrzymamy:

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} + \frac{\Delta m_{ax}}{\Delta x} + \frac{\Delta m_{ay}}{\Delta y} + \frac{\Delta m_{az}}{\Delta z} = 0. \quad (3.5)$$



Rys. 3.1. Bilans masy dla elementarnej objętości kontrolnej

Strumień masy substancji, przecinający powierzchnię S , wyraża całka (1.64). W rozważanym przypadku, gdy wymiary objętości płynnej są bardzo małe (a w granicy – nieskończenie małe), możemy przyjąć, że składowe prędkości w obrębie każdej z jego ścian są stałe, więc:

$$m_{ai} = \rho u_i, \quad (i = x, y, z). \quad (3.6)$$

Skończenie małe przyrosty „ Δ ” możemy zastąpić nieskończenie małymi różniczkami cząstkowymi „ ∂ ”, otrzymując w efekcie **różniczkowe równanie zachowania masy dla substancji ciągłej**:

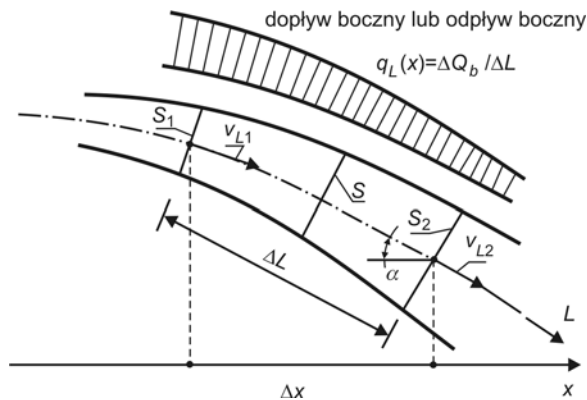
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0. \quad (3.7)$$

W zwartym zapisie operatorowym ma ono postać [68]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.7')$$

3.3.3. Równanie zachowania masy dla strumienia

W hydraulicznie szczególnie ważną rolę odgrywa pojęcie **strumienia** (a ściślej – **strumienia podłużnego**; patrz podrozdział 2.6), toteż celowe jest wyprowadzenie szczególnej postaci równania zachowania masy (jak również pozostałych równań), uwzględniającej charakterystyczne cechy tej struktury przepływowej. Można to uczynić na kilka sposobów, zależnie od kolejności wprowadzania założeń upraszczających i wykonywania przekształceń. W rozważanym przypadku zastosujemy metodę wykorzystaną w poprzednim paragrafie. Rzeczą naturalną będzie tu wybór elementarnej objętości kontrolnej w postaci „wycinka” strumienia o długości ΔL (rys. 3.2).



Rys. 3.2. Bilans masy dla strumienia

Masa zawarta w tak zdefiniowanej objętości jest równa:

$$M = \rho \Delta V. \quad (3.8)$$

Zgodnie z definicją strumienia, adwekcyjny strumień masy skierowany jest głównie wzdłuż jego poboczniczy z prędkością $v(x, t)$, przy czym nie wyklucza to procesu przekazywania masy przez tę pobocznice. Proces ten nie powinien być na tyle intensywny, by nadawał przepływowi charakter trójwymiarowy, lecz w pewnych sytuacjach może mieć zasadnicze znaczenie dla bilansu masy w objętości kontrolnej. Szczegółowo omówimy to zagadnienie w par. 11.4.4 oraz podrozdz. 13.3. Tutaj poprzestaniemy na wprowadzeniu

formalnej funkcji q_L , opisującej dopływ boczny (ubytek wody wskutek parowania, jej dopływ z opadów atmosferycznych ...), odniesiony do jednostki długości strumienia:

$$q_L = \Delta Q_b / \Delta L. \quad (3.9)$$

Uwzględniając sformułowane uwagi, prawo zachowania masy można zapisać następująco:

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{\Delta(\rho S)}{\Delta t} \Delta L = \rho_1 v_{L1} S_1 - \rho_2 v_{L2} S_2 + \rho \Delta Q_b = -\Delta(\rho v_L S) + \rho \Delta Q_b. \quad (3.10)$$

Dzieląc tę zależność obustronnie przez ΔL i zastępując skończone przyrosty zmiennych (oznaczone symbolem Δ) przez ich nieskończone małe różniczki (oznaczone symbolem ∂), otrzymamy **różniczkowe równanie zachowania masy dla strumienia**:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_L S)}{\partial L} = \rho q_L. \quad (3.11)$$

3.4. Bilans pędu

3.4.1. Prawo zachowania pędu

Pęd, zwany też **ilością ruchu**, stanowi jedno z najważniejszych pojęć w mechanice. Nie jest to wielkość prosta, gdyż jej miarę definiuje się jako iloczyn masy i prędkości. Podlega on bardziej zróżnicowanym procesom, niż masa, gdyż jest nie tylko przenoszony wraz z substancją, lecz może także powstawać (lub zanikać) wewnątrz układu pod działaniem **sił**, które tym samym mają dla pędu charakter czynników źródłowych. Zgodnie z treścią **prawa zachowania pędu**, bardziej chyba znanego jako **II zasada dynamiki**:

zmiana w czasie pędu substancji zawartej w objętości kontrolnej jest równa sumie adwekcyjnego strumienia pędu, przenieszonego przez powierzchnię kontrolną, oraz wypadkowej sile, działającej na układ.

3.4.2. Równanie zachowania pędu dla przypadku ogólnego

Wykorzystując podejście, omówione już w par. 3.3.2, możemy pęd, zawarty w elementarnej prostopadłościenną objętości kontrolnej, wyrazić jako:

$$\mathbf{I} = \rho \mathbf{u} \Delta V. \quad (3.12)$$

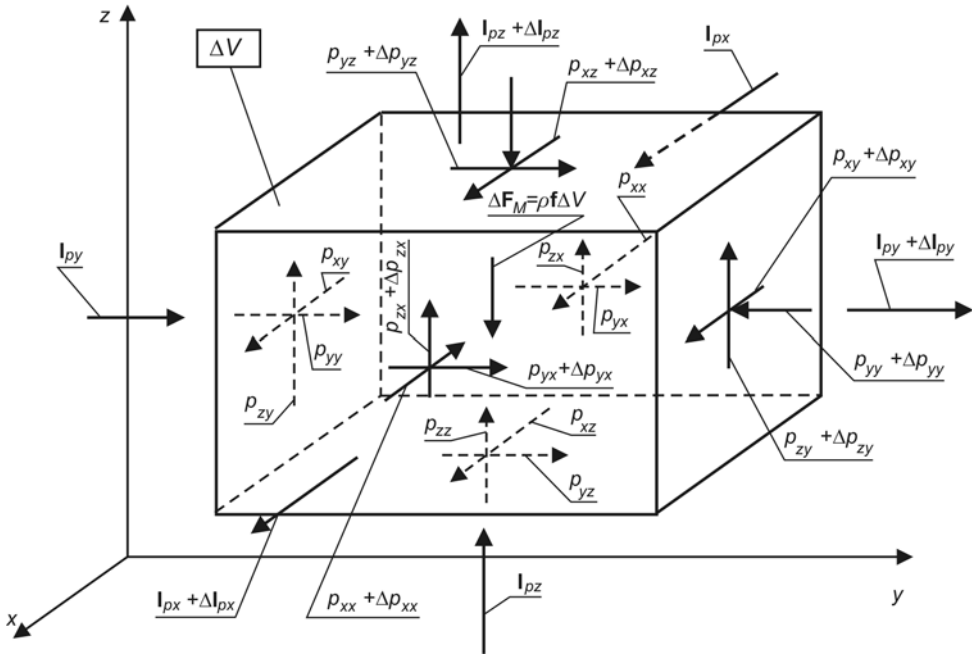
Wektor jednostkowego adwekcyjnego strumienia pędu \mathbf{I}_p możemy wyrazić przez jego składowe, podobnie jak to uczyniliśmy z wektorem \mathbf{m}_a (3.3) podczas omawiania bilansu masy – uwzględniając jego trzy składowe prostopadłe do poszczególnych ścian elementu ΔV i podkreślając jego przestrzenną zmienność przez wprowadzenie przyrostu $\Delta \mathbf{I}_p$.

Rodzaje działających na objętość kontrolną sił (**masowych** oraz **powierzchniowych**), jak też przyjęty w mechanice sposób ich ilościowego opisu (**jednostkowa siła masowa \mathbf{f}** oraz **tensor naprężenia \mathbf{P}**) zostały już omówione w par. 1.3.6. Ich położenie względem rozważanej elementarnej objętości kontrolnej ΔV pokazano na rys. 3.3. Można więc następująco zapisać prawo zachowania pędu dla poszczególnych kierunków przestrzeni:

$$\frac{\Delta I_x}{\Delta t} = (I_{P_x} - I_{P_x} - \Delta I_{P_x}) + \rho \Delta V f_x + (p_{xx} + \Delta p_{xx} - p_{xx}) S_x + (p_{xy} + \Delta p_{xy} - p_{xy}) S_y + (p_{xz} + \Delta p_{xz} - p_{xz}) S_z, \quad (3.13a)$$

$$\frac{\Delta I_y}{\Delta t} = (I_{P_y} - I_{P_y} - \Delta I_{P_y}) + \rho \Delta V f_y + (p_{yx} + \Delta p_{yx} - p_{yx}) S_x + (p_{yy} + \Delta p_{yy} - p_{yy}) S_y + (p_{yz} + \Delta p_{yz} - p_{yz}) S_z, \quad (3.13b)$$

$$\frac{\Delta I_z}{\Delta t} = (I_{P_z} - I_{P_z} - \Delta I_{P_z}) + \rho \Delta V f_z + (p_{zx} + \Delta p_{zx} - p_{zx}) S_x + (p_{zy} + \Delta p_{zy} - p_{zy}) S_y + (p_{zz} + \Delta p_{zz} - p_{zz}) S_z. \quad (3.13c)$$



Rys. 3.3. Bilans pędu dla elementarnej objętości kontrolnej

Wykonajmy teraz kilka stosunkowo prostych przekształceń. W pierwszej kolejności wyrażmy adwekcyjny strumień pędu I_P przez jednostkowy strumień masy (3.6) oraz wektor prędkości \mathbf{u} . Zauważmy, że udział w każdej składowej tego strumienia (I_{P_x} , I_{P_y} , I_{P_z}) ma każda ze składowych strumienia masy. Wynika to z wektorowego charakteru pędu. Mamy więc:

$$I_{P_x} = \rho u_x u_x S_x + \rho u_x u_y S_y + \rho u_x u_z S_z, \quad (3.14a)$$

$$I_{P_y} = \rho u_y u_x S_x + \rho u_y u_y S_y + \rho u_y u_z S_z, \quad (3.14b)$$

$$I_{P_z} = \rho u_z u_x S_x + \rho u_z u_y S_y + \rho u_z u_z S_z. \quad (3.14c)$$

Po drugie, podzielmy równania (3.13) obustronnie przez ΔV , zauważając, iż:

$$\frac{S_x}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta x}, \quad \frac{S_y}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta y}, \quad \frac{S_z}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta z}, \quad (3.15)$$

i wreszcie wykonajmy przejście od różnic skończonych do różniczek, zastępując ilorazy różnicowe przez pochodne. W efekcie otrzymamy następujący układ trzech skalarnych równań, stanowiących składowe wektorowego równania zachowania pędu:

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_x u_z)}{\partial z} = \rho f_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}, \quad (3.16a)$$

$$\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x u_y)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z u_y)}{\partial z} = \rho f_y + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}, \quad (3.16b)$$

$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x u_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y u_z)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z u_z)}{\partial z} = \rho f_z + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}. \quad (3.16c)$$

Wykonując różniczkowanie iloczynów funkcji, występujących po lewych stronach tej zależności (oznaczmy je odpowiednio przez LS_x , LS_y oraz LS_z), a następnie uwzględniając (3.7) i (1.70), otrzymamy ($i = x, y, z$):

$$LS_i = \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right] u_i + \\ + \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_i}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_i}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_i}{\partial z} \right] = \rho \frac{Du_i}{Dt}, \quad (3.17)$$

co pozwala w istotny sposób uprościć zapis (3.16):

$$\rho \frac{Du_x}{Dt} = \rho f_x + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z}, \quad (3.18a)$$

$$\rho \frac{Du_y}{Dt} = \rho f_y + \frac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial z}, \quad (3.18b)$$

$$\rho \frac{Du_z}{Dt} = \rho f_z + \frac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z}. \quad (3.18c)$$

Korzystając z zasad różniczkowania macierzy w stosunku do relacji (1.31) oraz zapisu operatorowego [68], możemy trzy ostatnie człony każdej z relacji (3.18) przedstawić w zapisie symbolicznym jako (patrz 1.28):

$$\frac{\partial p_{ix}}{\partial x} + \frac{\partial p_{iy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{iz}}{\partial z} = \text{div } \mathbf{p}_i, \quad (3.19)$$

a następnie cały ten układ zapisać w postaci relacji wektorowej:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \text{div}[\mathbf{P}], \quad (3.20)$$

gdzie dywergencję tensora naprężenia $[P]$ oblicza się zgodnie z zasadami różniczkowania macierzy.

W wyniku opisanych przekształceń otrzymaliśmy najbardziej ogólną postać **równania zachowania pędu**, ważną dla dowolnej substancji ciągłej.

W potocznej terminologii inżynierskiej mówi się, że jest to **równanie zachowania pędu „w naprężeniach”** (gdyż zawiera ono w jawnej postaci symbole wielkości, opisujących stan naprężenia w rozważanym układzie).

3.4.3. Równanie zachowania pędu dla strumienia

Wykorzystując omówioną już specyfikę **strumienia podłużnego** (podrozdz. 2.6) możemy stwierdzić, że zmiana pędu w jego elementarnej objętości kontrolnej, określonej oczywiście w sposób pokazany na rys. 3.2, wywoływana jest przepływem tej wielkości przez przekroje poprzeczne S_1 i S_2 oraz przez siły działające na te przekroje i na pobocznicy S_0 . Z natury rzeczy siły te będą miały nieco odrębny charakter dla poszczególnych części powierzchni kontrolnej:

- dla przekrojów poprzecznych będą uwzględniane tylko naprężenia normalne, określone przez odpowiednie wartości ciśnienia (gdyby bowiem na tych powierzchniach występowały istotne naprężenia styczne, wywoływałyby one równie istotny ruch poprzeczny, skutkiem czego nie byłoby tu możliwe zastosowanie modelu strumienia podłużnego);
- dla pobocznicy uwzględnić należy siłę wywołaną naprężeniami stycznymi oraz składową siłę wywołaną ciśnieniem, wynikającą z ewentualnej zmiany przekroju strumienia o wartość $\Delta S = S_1 - S_2$.

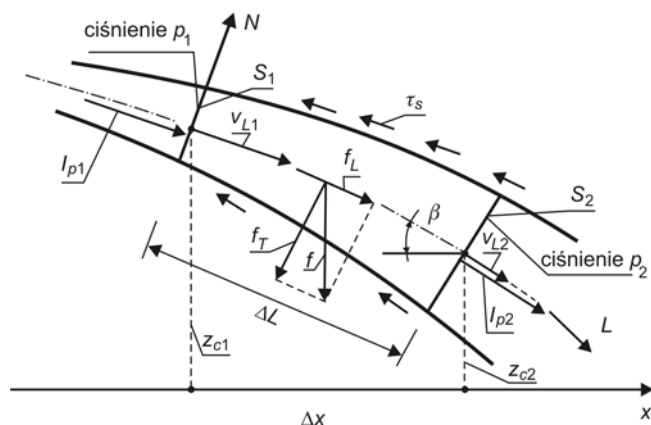
Osobnego komentarza wymaga dopływ boczny q_L (3.9). Jest to czynnik bardzo specyficzny dla hydrauliki. Z jednej bowiem strony pobocznica strumienia jest z definicji nieprzepuszczalna dla adwekcyjnego strumienia cieczy (gdyż jej kształt wyznaczają linie prądu, równoległe do wektorów prędkości), lecz z drugiej – dla przeprowadzenia bilansu masy, dopływ boczny musi być często brany pod uwagę. Aby tego dokonać, traktujemy go jako czynnik o charakterze „źródłowym”, opisany funkcją q_L .

Podobnie należałoby uczynić, przeprowadzając bilans pędu strumienia. Ewentualny udział dopływu bocznego w takim bilansie jest ściśle uzależniony od jego usytuowania względem głównego kierunku ruchu. Wyobraźmy sobie swobodny strumień wody, wypływający ze strażackiej prądownicy, skierowany do otwartego zbiornika. Jeśli wprowadzimy go prostopadłe do swobodnej powierzchni wody, wywoła jedynie lokalne zaburzenie przepływu. Gdy jednak zostanie on wprowadzony do zbiornika pod niewielkim kątem, spowoduje wyraźną cyrkulację cieczy w całym układzie.

Tak więc dopływ boczny może być istotnym czynnikiem dynamicznym, co bywa wykorzystywane w praktyce (na przykład w konstrukcji pomp strumieniowych [19]). Jednakże w interesujących nas tu zagadnieniach czynnik ten będziemy pomijali, bowiem zasilające rzeczywiste strumienie dopływy (opady deszczu, spływy powierzchniowe...) są z reguły skierowane prostopadłe do głównego kierunku ruchu.

Uwzględniając omówione czynniki, możemy następująco zapisać bilans pędu (par. 3.4.1) wzdłuż osi strumienia L (rys. 3.4):

$$\frac{\Delta I_L}{\Delta t} = I_{P1} - I_{P2} + \rho \Delta V f_L + p_1 S_1 - p_2 S_2 + p \Delta S - T_S. \quad (3.21)$$



Rys. 3.4. Bilans pędu dla strumienia

Skierowaną wzdłuż strumienia składową pędu I_L zapisujemy jako iloczyn masy i prędkości średniej:

$$I_L = \rho v_L \Delta V \quad (3.22)$$

Przy obliczaniu adwekcyjnego strumienia pędu I_p trzeba pamiętać, że nawet przy bardzo równomiernym kształcie strumienia profil prędkości w jego przekroju poprzecznym jest zawsze w jakimś stopniu zmienny, czyli zamiast stosować prędkość uśrednioną musimy posłużyć się składowymi prędkościami rzeczywistej u , pisząc:

$$I_p = \int_S \rho u_L u_L dS. \quad (3.23)$$

Tymczasem w omawianym tu modelu przepływu jednowymiarowego i jednokierunkowego bardzo wygodnie jest posługiwać się prędkością średnią v_L . Niestety, strumień pędu I'_p , obliczony za pomocą tej wielkości, nie jest równy dokładnej wartości I_p (co wynika z reguły całkowania):

$$I'_p = \rho v_L^2 S \neq I_p. \quad (3.24)$$

Z tego względu wprowadzamy tak zwany **współczynnik de Saint-Venanta** (lub **współczynnik Coriolisa**), zdefiniowany następująco:

$$\alpha = \int_S \rho u_L^2 dS / (\rho v_L^2 S). \quad (3.25)$$

Pozwala to na zastąpienie (3.23) przez relację:

$$I_p = \alpha \rho v_L^2 S. \quad (3.26)$$

Współczynnik α zależy od profilu prędkości w przekroju poprzecznym strumienia. Im bardziej jest on zróżnicowany, tym większa jest wartość współczynnika (3.25). Dla ruchu powolnego (**laminarnego** – patrz podrozdz. 4.4) w przewodzie kołowym mamy $\alpha = 2,00$, zaś dla kanału otwartego – $\alpha = 1,53$ [10]. Z kolei dla przepływu szybszego (**turbulentnego** – patrz par. 7.5.3) zachodzi $\alpha \leq 1,05$ [70].

Podłużną składową jednostkowej siły masowej f wyznaczamy z prostej zależności geometrycznej (rys. 3.4):

$$f_L = f \sin \beta. \quad (3.27)$$

Analizując wypadkową siłę styczną T_S , wywołaną naprężeniami lepkiemi na poboczniczy strumienia τ_s , zauważmy, iż w ogólnym przypadku może ona w różnych punktach obwodu strumienia działać z różną intensywnością. W takim przypadku jej wartość określimy, całkując funkcję, opisującą te naprężenia:

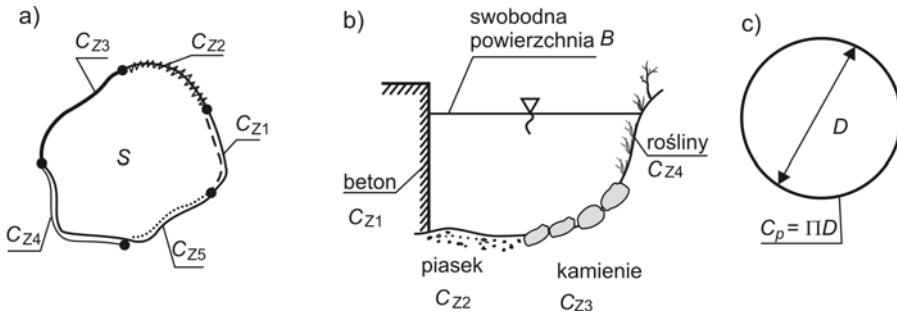
$$T_S = \left(\int_{C_P} \tau_s dC_P \right) \Delta L. \quad (3.28)$$

Byłoby to bardzo kłopotliwe, tak ze względów fizycznych (konieczność uprzedniego wyznaczenia rozkładu naprężeń τ_s), jak i rachunkowych (pojawienie się w równaniu zachowania pędu całki, co zmieniałoby relację różniczkową w bardziej złożoną zależność różniczkowo-całkową).

Na szczęście w zagadnieniach praktycznych z reguły mamy do czynienia z sytuacjami o tyle prostymi, że jeżeli nawet warunki ruchu zmieniają się wzdłuż obwodu strumienia, to zmiany te nie zachodzą w sposób ciągły, lecz występują między pewnymi odcinkami tego obwodu, który tym samym możemy podzielić na kilka części:

$$C_P = \sum_{i=1}^I C_{Zi}, \quad (3.29)$$

jak to pokazano na rys. 3.5a (dla $I = 5$).



Rys. 3.5. Zróżnicowanie obwodu zwilżonego strumienia: a) schemat ogólny, b) przykładowy przekrój poprzeczny rzeki, c) regularny przekrój poprzeczny przewodu kołowego

Dość typową sytuację dla koryta rzecznego obrazuje szkic na rys. 3.5b. Charakterystyczną częścią obwodu jest tu **swobodna powierzchnia** $C_{Z0} = B$. Pozostałe jego odcinki, wzdłuż których ciecz styka się ze ściankami kanału (czyli z ciałem stałym), nazywamy **obwodem zwilżonym**:

$$C_Z = \sum_{i=1}^I C_{Zi}. \quad (3.30)$$

Dla całego obwodu mamy relację:

$$C_P = B + C_Z. \quad (3.31)$$

Na każdą z tak wyróżnionych części obwodu będzie oddziaływała inna wartość naprężenia τ_{si} (stała dla tej części), wobec czego zamiast (3.28) otrzymamy stosowaną w praktyce relację:

$$T_S = \left(\sum_{i=0}^I \tau_{si} C_{Zi} \right) \Delta L. \quad (3.32)$$

W szczególnym przypadku, dość typowym dla przewodów zamkniętych, gdy cały obwód strumienia ma charakter jednorodny (rys. 3.5c), otrzymamy:

$$T_S = \tau_S C_P \Delta L. \quad (3.33)$$

Wykonajmy teraz następujące przekształcenia (analogiczne do tych, które już zostały omówione w par. 3.3.3):

- podstawmy zależności 3.22, 3.26, 3.27 oraz 3.32 do 3.21;
- podzielmy obie strony (3.21) przez (rys. 3.4):

$$\Delta V = S \Delta L; \quad (3.34)$$

- wykonajmy możliwe działania arytmetyczne.

W efekcie otrzymamy **równanie zachowania pędu dla strumienia w postaci różnicowej**:

$$\frac{1}{S} \frac{\Delta(\rho v_L S)}{\Delta t} + \frac{1}{S} \frac{\Delta(\alpha \rho v_L^2 S)}{\Delta L} = \rho f \sin \beta - \frac{1}{S} \left[\frac{\Delta(pS)}{\Delta L} - p \frac{\Delta S}{\Delta L} \right] - \sum_{i=0}^I \frac{\tau_{si} C_{Zi}}{S}. \quad (3.35)$$

Stosując po raz kolejny jedno z najbardziej istotnych przekształceń fizyki matematycznej (patrz równ. (3.7), (3.11) i (3.16)), polegające na zastąpieniu ilorazów różnicowych przez pochodne, otrzymamy:

$$\frac{1}{S} \frac{\partial(\rho v_L S)}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial(\alpha \rho v_L^2 S)}{\partial L} = \rho f \sin \beta - \frac{1}{S} \left[\frac{\partial(pS)}{\partial L} - p \frac{\partial S}{\partial L} \right] - \sum_{i=0}^I \frac{\tau_{si} C_{Zi}}{S}. \quad (3.36)$$

Wykorzystajmy teraz zasadę różniczkowania iloczynu funkcji w odniesieniu do dwóch członów po lewej stronie (3.36), dodatkowo uwzględniając (3.11), oraz dla dwóch członów po prawej stronie tej zależności, które zawierają ciśnienie p . Wobec $\alpha \approx 1$, możemy napisać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho v_L S)}{\partial t} + \frac{\partial(\alpha \rho v_L^2 S)}{\partial L} &= \rho S \frac{\partial v_L}{\partial t} + v_L \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \alpha v_L \frac{\partial(\rho v_L S)}{\partial L} + \rho v_L S \frac{\partial(\alpha v_L)}{\partial L} = \\ &= \rho S \frac{\partial v_L}{\partial t} + \rho v_L S \frac{\partial(\alpha v_L)}{\partial L}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial(pS)}{\partial L} - p \frac{\partial S}{\partial L} = p \frac{\partial S}{\partial L} + S \frac{\partial p}{\partial L} - p \frac{\partial S}{\partial L} = S \frac{\partial p}{\partial L}. \quad (3.38)$$

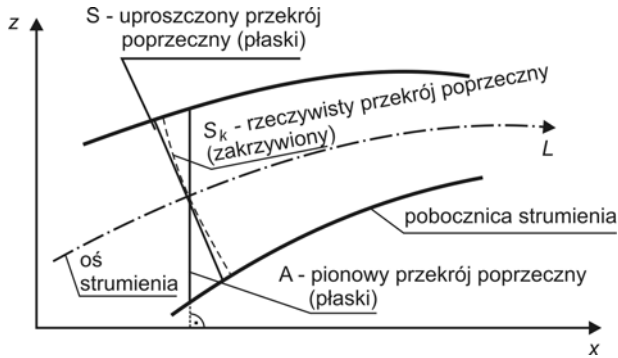
Dzieląc następnie przekształcone równanie obustronnie przez gęstość ρ , otrzymamy ostateczną postać **równania zachowania pędu dla strumienia**:

$$\frac{\partial v_L}{\partial t} + v_L \frac{\partial(\alpha v_L)}{\partial L} = f \sin \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial L} - \sum_{i=0}^I \frac{\tau_{si} C_{Zi}}{\rho S}. \quad (3.39)$$

3.5. Szczególne postacie wyprowadzonych równań

3.5.1. Techniczne wersje równań zachowania masy i pędu

Trzeba podkreślić, że zależności (3.11) oraz (3.39) zostały wyprowadzone dla szczególnego układu współrzędnych, w którym położenie każdego przekroju wyznacza odległość bieżąca L , liczona wzdłuż osi strumienia, zaś sam przekrój S jest prostopadły do tej osi.



Rys. 3.6. Rodzaje przekrojów poprzecznych

W ujęciu dokładnym, rzeczywisty przekrój poprzeczny strumienia S_k , którego pobocznica nie stanowi powierzchni walcowej o równoległych tworzących, ma charakter krzywoliniowy (rys. 3.6). Dla strumienia o silnie zróżnicowanym kształcie (rys. 2.8a, b, c) może to być powierzchnia o wysokim stopniu zakrzywienia. Jednakże w przypadku **strumienia podłużnego**, dla którego zmienność prędkości musi być umiarkowana (rys. 2.8 d), można ten efekt pominąć i posługiwać się przekrojem uproszczonym S – prostopadłym tylko do osi strumienia L , lecz płaskim (rys. 3.6).

Niekiedy jednak dogodnie jest posługiwać się układem prostoliniowym. W ogólnym przypadku może on być zorientowany dowolnie (rys. 2.9), lecz bardzo często korzystnie jest usytuować jego osie w kierunkach poziomym (na przykład oś Ox) oraz pionowym (na przykład oś Oz). Szczególnie często korzystamy z takiej możliwości przy rozwiązywaniu zagadnień z zakresu inżynierii środowiska i dyscyplin pokrewnych, gdy przebieg strumienia (rzeki, kanału, rurociągu...) określony jest za pomocą map, planów lub innych materiałów kartograficznych.

Jest to dopuszczalne tylko wtedy, gdy nachylenie osi strumienia względem poziomu (czyli nachylenie osi przewodu zamkniętego lub spadek dna kanału otwartego) jest na tyle małe, że możemy akceptować następujące przybliżenia:

— długość odcinka strumienia ΔL zastępuje się przez długość jego rzutu poziomego Δx (rys. 3.4):

$$\Delta L \approx \Delta x ; \quad (3.40)$$

— pole powierzchni płaskiego przekroju prostopadłego do osi strumienia S zastępuje się przez pole powierzchni przekroju pionowego A (rys. 3.6):

$$S \approx A ; \quad (3.41)$$

— obwód zwilżony C_z przekroju prostopadłego do osi S zastępuje się przez obwód zwilżony przekroju A , oznaczony symbolem O_z ;

— prędkość średnią względem przekroju S :

$$v_L = Q / S \quad (3.42)$$

zastępuje się przez prędkość uśrednioną względem przekroju A :

$$v = Q / A ; \quad (3.43)$$

— intensywność dopływu bocznego q_L według (3.9) zastępuje się wartością skorygowaną:

$$q_B = \Delta Q_B / \Delta x . \quad (3.44)$$

W konsekwencji tych założeń zmienia się też postać członu opisującego siłę masową, bowiem:

$$g \sin \beta = g \frac{\Delta z}{\Delta L} \approx g \frac{\Delta z}{\Delta x} = g \operatorname{tg} \beta = g i_o . \quad (3.45)$$

Podstawiając omówione w tym paragrafie zależności do (3.11) oraz (3.39), otrzymamy następujące zależności, szczególnie dogodnie w hydraulice koryt otwartych:

— równanie zachowania masy z uwzględnieniem dopływu bocznego:

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v A)}{\partial x} = \rho q_B ; \quad (3.46)$$

— równanie zachowania masy bez dopływu bocznego:

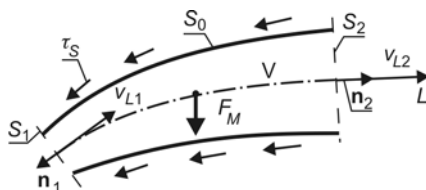
$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v A)}{\partial x} = 0 ; \quad (3.47)$$

— równanie zachowania pędu:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial(\alpha v)}{\partial x} = g i_o - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \sum_{i=0}^l \frac{\tau_{si} C_{zi}}{\rho A} . \quad (3.48)$$

3.5.2. Napór hydrodynamiczny

Dzięki równaniom (3.39) lub (3.48) można prawu zachowania pędu (par. 3.4.1) nadać szczególnie obrazową interpretację fizyczną (rys. 3.7). Pozwala ona powiedzieć, że zmiana pędu w objętości V jest spowodowana różnicą strumienia pędu między przekrojami S_1 i S_2 , siłą masową F_M , siłą wynikającą z różnicy ciśnienia między tymi przekrojami oraz siłą styczną T_S , działającą na pobocznice.



Rys. 3.7. Schemat ilustrujący znaczenie siły naporu hydrodynamicznego

W zastosowaniach technicznych bardzo często rozważamy zagadnienia stacjonarne, przebiegające dla ustalonych (a traktowanych jako miarodajne) wartości zmiennych stanu.

W takich przypadkach równanie zachowania pędu (3.20), z uwzględnieniem jego szczególnej postaci (3.39), można zapisać, jak następuje:

$$\mathbf{v}_{L2} m_2 - \mathbf{v}_{L1} m_1 = \mathbf{F}_M - p_1 \mathbf{n}_1 S_1 - p_2 \mathbf{n}_2 S_2 + \mathbf{T}_S, \quad (3.49)$$

gdzie masowe natężenie przepływu jest wobec (2.35) równe odpowiednio:

$$m_1 = \rho v_{L1} S_1, \quad m_2 = \rho v_{L2} S_2. \quad (3.50)$$

Siła \mathbf{T}_S wywołana jest naprężeniem stycznym na poboczniczy strumienia τ_s , co ilościowo opisane jest relacją (3.32) lub w strumieniu regularnym wyrażeniem (3.33). Jednakże w ujęciu globalnym (gdy rozważamy cały strumień, lub przynajmniej jego wybrany odcinek) możemy rozważać wypadkową wartość tej siły, która zgodnie z III zasadą dynamiki Newtona jest równa wziętej z przeciwnym znakiem **siły reakcji \mathbf{R}** , z jaką strumień cieczy działa na otoczenie (a w szczególności – na ścianki przewodów lub kanałów), wobec czego można napisać:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_M - (\mathbf{v}_{L2} m_2 - \mathbf{v}_{L1} m_1) - p_1 \mathbf{n}_1 S_1 - p_2 \mathbf{n}_2 S_2. \quad (3.51)$$

Siłę reakcji R nazywamy także **naporem hydrodynamicznym**, co oznacza siłę, jaką na swe otoczenie wywiera płynąca ciecz lub gaz. Relacja (3.51) jest bardzo ważna i pożyteczna przy projektowaniu przewodów, wzdłuż których następuje znaczna zmiana strumienia pędu (wyloty kanalizacyjne [55], łuki magistralnych przewodów wodociągowych [34, 72]...). Łączy się je z analogicznie przekształconym równaniem zachowania masy (3.7). Aby je otrzymać, zauważmy, że w stanie ustalonym dla strumienia podłużnego z (3.11) mamy:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial L} = \rho q_L. \quad (3.52)$$

Wykorzystano tu zależność (2.34). Zastępując w powyższej relacji pochodną przez iloraz różnicowy dla odcinka ΔL (rys. 3.7), możemy napisać (patrz też 3.9):

$$Q_1 - Q_2 = q_L \Delta L = \Delta Q_b. \quad (3.53)$$

W praktyce za podstawowy należy uznać przypadek, gdy $q_L = 0$, co prowadzi do zależności:

$$Q = v_{L1} S_1 = v_{L2} S_2 = \text{const}. \quad (3.54)$$

Ta bardzo przydatna relacja zwana jest potocznie **równaniem ciągłości**, gdyż wyraża warunek zachowania ciągłości strumienia. Może on ulegać zwięźnieniu lub rozszerzaniu, lecz wobec (3.54) musi takim przemianom geometrycznym towarzyszyć jednoczesna zmiana prędkości średniej. Gdyby pole prędkości nie spełniało tego wymogu, byłoby to równoznaczne z przerwaniem ciągłości strumienia płynu (patrz rys. 3.8b).

Aby wyjaśnić znaczenie poszczególnych członów równania (3.51), rozważmy kilka szczególnych przypadków ruchu cieczy. Pierwszy z nich (rys. 3.8a) odnosi się do ustalonego i jednostajnego przepływu w poziomej rurze kołowej o stałej średnicy d . Mamy tu $S_1 = S_2$, więc wobec (3.54) zachodzi $v_{L1} = v_{L2}$, co oznacza brak zmiany pędu wzdłuż strumienia. Korzystając z (3.51), możemy napisać:

$$(p_1 - p_2) S = \Delta p S = R = \tau_s S_o. \quad (3.55)$$

Podstawiając:

$$S = \pi d^2 / 4, \quad S_o = \pi d L, \quad (3.56)$$

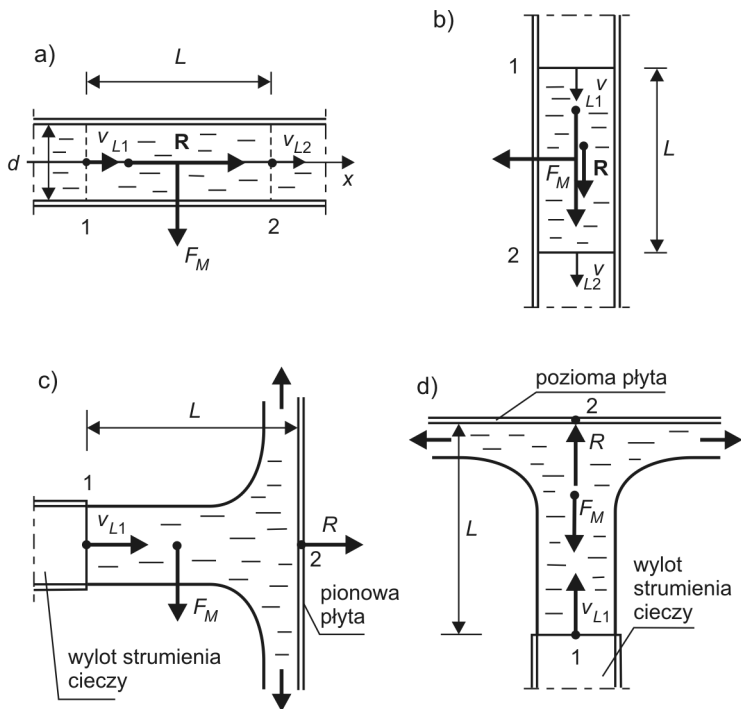
otrzymamy:

$$\Delta p = 4 l \tau_s / d. \quad (3.57)$$

Oznacza to, że w tym przypadku ruch wywołany jest przez zmianę ciśnienia, która równoważona jest naprężeniem działającym na pobocznicę strumienia.

W przepływie poziomym siła masowa F_M nie ma wpływu na zmianę pędu w kierunku podłużnym. Pojawia się on natomiast w strumieniu pionowym (rys. 3.8b), dla którego możemy napisać:

$$R = \tau_s S_0 = \rho S L g - (p_1 - p_2) S. \quad (3.58)$$



Rys. 3.8. Przykłady zastosowania równania zachowania pędu w postaci (3.51) (komentarz w tekście)

Jeśli oba końce przewodu znajdują się pod ciśnieniem atmosferycznym, wtedy na całej jego długości mamy $p = p_{\text{atm}}$, czyli $p_1 = p_2$. Widzimy, że naprężenie na pobocznicę strumienia:

$$\tau_s = \rho d g / 4 \quad (3.59)$$

jest w takim przypadku wywołane przez siłę ciężkości. Siła ta może być na tyle znaczna, że naprężenie τ_s nie będzie w stanie jej zrównoważyć. W takim przypadku warunek stałej prędkości opadającej cieczy nie mógłby zostać spełniony, a jej strumień uległby początkowo przewężeniu (płynąłby niepełnym przekrojem), a następnie – przerwaniu (tak jak to ma miejsce w pionowych rynnach deszczowych – patrz pkt 11.2.3.2).

Szkic na rys. 3.8c pokazuje sytuację, w której poziomy strumień cieczy, wypływającej z przewodu kołowego, uderza w pionowo usytuowaną, nieruchomą płaską płytę. Ze względu na warunki ruchu, możemy tu pominąć siły lepkości oraz przyjmując, że $p_1 = p_2 = p_{\text{atm}} = \text{const.}$ (strumień swobodny otoczony jest powietrzem atmosferycznym). W rezultacie równanie (3.51) przyjmie postać:

$$R = \rho v_1^2 S = \rho v_1^2 \pi d^2 / 4, \quad (3.60)$$

gdyż końcowa prędkość strumienia $v_2 = 0$ (płyta jest nieruchoma). Tak więc w tym przypadku siła, z jaką strumień uderza w płytę, wywołana jest wyłącznie spadkiem jego początkowego pędu do zera.

Ostatni z przykładów (rys. 3.8d) jest podobny do poprzedniego, tyle tylko, że tym razem strumień uderzający w płytę jest usytuowany pionowo, toteż musimy tu uwzględnić siłę masową, pisząc:

$$R = \rho v_1^2 S - \rho g S L. \quad (3.61)$$

Trzeba podkreślić, że omówione przykłady mają charakter przypadków szczególnych. W zagadnieniach praktycznych z reguły mamy do czynienia z sytuacjami bardziej złożonymi, w których jednocześnie występują zmiany pędu (tak co do wartości, jak i kierunku) oraz ciśnienia, jak też uwzględniać trzeba siły masowe.

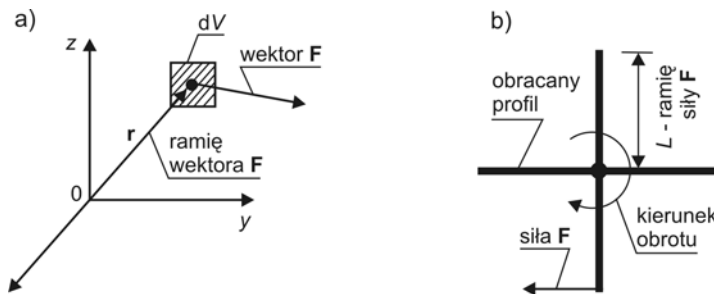
3.6. Pozostałe prawa o charakterze bilansowym

3.6.1. Prawo zachowania momentu pędu

Wektorowe wielkości fizyczne występują w otaczającym nas świecie niesłychanie często. Te, które odgrywają ważną rolę w mechanice, omówione zostały w poprzednich rozdziałach. W interpretacjach ułatwiających zrozumienie rozważanej tu problematyki, geometrycznej i technicznej, wygodnie jest przedstawiać wektor jako „strzałkę” o długości proporcjonalnej do wartości bezwzględnej tej wielkości, a zorientowanej w kierunku jej działania.

Okazuje się, że obok punktu, w którym działa ta wielkość (czyli punktu, w którym owa „strzałka” jest przyłożona), ogromne znaczenie ma także usytuowanie linii działania wektora względem wybranego punktu przestrzeni, zwanego **biegunem**. W ogólnym przypadku może on być usytuowany dowolnie, lecz w praktyce najbardziej interesują nas punkty szczególne (początek układu współrzędnych, punkt, przez który przechodzi oś, wokół której rozważany układ może się obracać).

Właśnie **ruch obrotowy** jest zjawiskiem, które w najbardziej chyba czytelny sposób pozwala zobrazować znaczenie odległości linii działania wektora od bieguna, zwanej **ramieniem wektora**. Wektorem takim jest **siła**. Z prostego doświadczenia wiemy, że im dłuższe jest **ramię siły**, tym mniejszego wysiłku wymaga wywołanie pożądanego obrotu. Przykładowo, im dłuższy jest klucz francuski, tym łatwiej jest odkręcić śrubę.



Rys. 3.9. Interpretacja geometryczna momentu wektora

Decydującą o tego rodzaju efektach wielkość fizyczną nazywamy **momentem wektora** N_F (w szczególności – momentem siły) i definiujemy jako iloczyn wektorowy ramienia \mathbf{r} i wektora \mathbf{F} (rys. 3.9a):

$$N_F = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (3.62)$$

Wielkość N_F jest wektorem usytuowanym prostopadle do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory \mathbf{r} i \mathbf{F} . W przypadkach technicznych często mamy do czynienia z układami regularnymi, co nie-

jednokrotnie pozwala na uproszczenie zapisu. Gdy przykładowo rozważamy obrót układu w jednej płaszczyźnie (rys. 3.9b), możemy posłużyć się zapisem skalarnym:

$$N_F = F L . \quad (3.63)$$

Dla **pędu**, jak dla każdej wielkości wektorowej, również możemy zdefiniować odpowiadający mu **moment pędu**. Jeżeli rozważać będziemy element materii o objętości dV (rys. 3.9a), to wartość elementarnego momentu pędu wyniesie:

$$dN_P = \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} dV . \quad (3.64)$$

Okazuje się, że wielkość ta podlega bilansowej regule, zwanej **prawem zachowania momentu pędu**. W rozważanym tu przypadku ruchu materii jednorodnej mówi ono, że:

Zmiana w czasie momentu pędu w objętości kontrolnej jest równa strumieniowi momentu pędu przez powierzchnię kontrolną oraz sumie momentów sił masowych i powierzchniowych, działających na układ.

Tak sformułowane prawo fizyczne można wyrazić za pomocą symboliki matematycznej, tak jak to już uczyniliśmy z prawem zachowania masy (par. 3.3.2) i prawem zachowania pędu (par. 3.4.2). Po przekształceniach otrzymuje się **równanie zachowania momentu pędu**. Co ciekawe, nie ma ono charakteru typowego dla zagadnień fizyki matematycznej równania różniczkowego (jak na przykład (3.7) lub (3.20)), lecz sprowadza się do bardzo prostej relacji, mówiącej, że **tensor naprężenia [P] jest symetryczny**. Pomińmy więc formalne przekształcenia [38] i ograniczmy się do zapisania wyniku końcowego:

$$P_{xy} = P_{yx}, \quad P_{xz} = P_{zx}, \quad P_{zy} = P_{yz} . \quad (3.65)$$

Zależność ta jest bardzo istotna w mechanice, gdyż pozwala zredukować liczbę nieznanymi składowych tablicy (1.31) z dziewięciu do sześciu.

Jest rzeczą interesującą, że podane wyżej sformułowanie prawa zachowania momentu pędu nie jest jedynym z możliwych. Dla szczególnych sytuacji, gdy rozważana substancja albo proces nie ma charakteru jednorodnego, lecz cechuje się istnieniem „mikrostruktury momentowej” oraz/albo podlega działaniu lokalnych źródeł momentu pędu, końcowa postać równania różni się od (3.65), co otwiera możliwość opisu nietypowych substancji albo procesów [46].

3.6.2. Prawo zachowania energii

Jak wiadomo z fizyki, energia występuje w rozmaitych formach, przy czym w trakcie procesów przebiegających w układach fizycznych jedne z tych form często przechodzą w drugie. Niektóre z takich przemian zachodzą w sposób naturalny, wręcz samorzutnie (jak na przykład przemiana kinetycznej energii dwóch ślizgających się względem siebie powierzchni stałych w energię cieplną, co jest konsekwencją procesu *tarcia*). Są jednak i takie przemiany, których realizacja nie jest prosta i wymaga szczególnych warunków (jak na przykład wytwarzanie energii elektrycznej z energii termicznej, do czego niezbędny jest skomplikowany system urządzeń elektrowni cieplnej).

W mechanice ważna jest szczególna postać rozważanej zależności, którą dla ścisłości należałoby nazwać **prawem zachowania całkowitej energii kinetycznej układu**.

Termin „całkowity” oznacza tu, że interesuje nas zarówno energia kinetyczna ruchu makroskopowego (adwekcji), jak i energia kinetyczna chaotycznego ruchu molekuł (patrz par. 1.3.5). Ten pierwszy składnik wyrażamy poprzez prędkość adwekcji \mathbf{u} , podczas gdy drugi (ze względu na złożoność ruchu chaotycznego) zapisuje się w fizyce za pomocą pojęcia **energii wewnętrznej** e , która powiązana jest z **temperaturą** materii następującą zależnością:

$$e = c_v T + e_0. \quad (3.66)$$

Dla dowolnej objętości V , wewnątrz której zmienne stanu są funkcjami czasu (t) i przestrzeni (x, y, z), możemy więc całkowitą energię kinetyczną materii wyrazić następująco:

$$E_{KC} = \int_V \rho \left(\frac{u^2}{2} + e \right) dV. \quad (3.67)$$

Zgodnie ze znaną już nam strukturą praw zachowania, zmiana rozważanej wielkości fizycznej w układzie może być wywołana przenoszeniem tej wielkości przez granice układu oraz jej wytwarzaniem lub zużywaniem przez czynniki źródłowe.

Przemieszczanie interesującej nas tu formy energii może odbywać się dwojako, zgodnie z dwoistym charakterem ruchu materii:

- drogą przenoszenia wraz z poruszającą się substancją (**transport adwekcyjny**);
- wskutek chaotycznego ruchu molekuł (**transport względny**).

Również czynniki źródłowe mają tu dwojaki charakter. Bowiem z jednej strony mamy źródła energii o charakterze mechanicznym (praca sił działających na układ), a z drugiej – źródła fizykochemiczne (reakcje oraz/albo przemiany egz- i endotermiczne), których intensywność, odniesioną do jednostki masy, opiszmy funkcją $Z_T(x, y, z, t)$.

Powyższe uwagi pozwalają na następujące sformułowanie rozważanej postaci **prawa zachowania energii**:

Zmiana w czasie energii objętości kontrolnej jest równa strumieniowi adwekcyjnemu i strumieniowi względnemu energii przez powierzchnię kontrolną oraz sumie mocy sił masowych, mocy sił powierzchniowych i czynników źródłowych.

Wykorzystując znaną już metodę matematycznego zapisu praw zachowania (par. 3.3.2 i 3.4.2), możemy uzyskać różniczkową postać **równania zachowania energii** [38, 50, 60]:

$$\frac{DT}{Dt} = -\operatorname{div} \mathbf{q}_T + Z_T. \quad (3.68)$$

Równanie to wprowadza kolejną z **podstawowych zmiennych stanu** (par. 1.5.3), jaką jest **temperatura** substancji, toteż musi być wykorzystywane wtedy, gdy wielkość ta ulega istotnym zmianom i wpływa na przebieg rozważanych zjawisk. Nie są to co prawda sytuacje typowe (w klasycznych zastosowaniach hydromechaniki i hydrauliki zmiany temperatury są z reguły pomijane), lecz w inżynierii środowiska występują zagadnienia, dla których efekty termiczne muszą być uwzględniane. W pierwszej kolejności należy tu wymienić problemy ogrzewnictwa, wentylacji i klimatyzacji, ale także hydrologię i meteorologię, technologię wody i ścieków (wpływ temperatury na funkcjonowanie reaktorów) oraz ekologię (termika zbiorników wodnych i gruntu).

3.6.3. Prawo bilansu entropii

Entropia jest w naukach ścisłych wielkością bardzo ważną. Nie należy jednak do pojęć, których sens fizyczny można sobie łatwo przyswoić, gdyż daje się ono definiować poprzez bardzo ogólne swoje aspekty – jako wyraz prawdopodobieństwa znajdowania się substancji w określonym stanie, a nawet jako miara nieokreśloności układu. W interesujących nas tutaj zagadnieniach termomechanicznych dogodnie jest interpretować entropię jako addytywną (czyli **globalną**; patrz par. 1.3.2)

funkcję stanu, której zmianę określa przekazana oraz/albo wytworzona energia cieplna, dzielona przez temperaturę układu.

Opisową postać **prawa bilansu entropii** możemy sformułować bez trudu, korzystając z omówionych już praw fizycznych. Mówi ono, że:

Zmiana w czasie entropii objętości kontrolnej równa jest sumie adwekcyjnego i względnego strumienia tej wielkości oraz intensywności jej wytwarzania.

Matematyczny zapis tego stwierdzenia wymaga przeprowadzenia dość złożonych przekształceń [38]. Nie będziemy ich tu jednak dokonywali, gdyż najważniejszy pożytek z takiej analizy da się wyrazić (w pewnym sensie podobnie, jak to miało miejsce w przypadku prawa zachowania momentu pędu – par. 3.6.1) w formie opisowej. Okazuje się mianowicie, że **część energii kinetycznej ruchu deformacyjnego materii zamieniana jest na energię wewnętrzną, czyli powoduje wzrost temperatury układu.**

Jest to niezwykle ważna konkluzja. Wyjaśnia ona znany fakt empiryczny – podtrzymywanie ruchu materii wymaga ciągłego dopływu energii, gdyż jest ona nieustannie zamieniana na energię cieplną (proces **dyssypacji energii mechanicznej**). W inżynierii ten ubytek energii określa się mianem **straty energii mechanicznej** (a potocznie – **stratą energii**).

W ujęciu ilościowym proces wytwarzania entropii opisany jest funkcją \dot{s} , określającą intensywność źródeł entropii, odniesionych do jednostki objętości [38]:

$$\begin{aligned} \dot{s} = \frac{\mu}{T} & \left\{ \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left\{ \frac{\lambda}{T^2} (\text{grad} T)^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Człon występujący w pierwszym nawiasie klamrowym wyraża intensywność wytwarzania entropii w wyniku procesów mechanicznych (czyli właśnie **dyssypację energii**) i może być wykorzystany w praktyce do wyznaczania strat energii w układach nietypowych [2]. Wyrażenie w drugim nawiasie klamrowym opisuje wytwarzanie entropii w wyniku procesów termicznych.

3.7. Zestawienie liczby równań i niewiadomych

Rozwiązywanie problemów z zakresu nauk ścisłych (a w szczególności – nauk technicznych) pod względem formalnym sprowadza się do rozwiązywania układów równań fizyki matematycznej. Każdy taki układ musi być zamknięty, co oznacza, że liczba tworzących go wyrażeń matematycznych musi być równa liczbie występujących w nich niewiadomych.

W trakcie zestawiania takiego roboczego układu równań, niezależnie od stopnia ogólności rozważanego zadania, celowe jest prowadzenie bieżącego bilansu liczby informacji, zawartych w wyrażeniach matematycznych, które mamy do dyspozycji, oraz liczby występujących w nich funkcji, opisujących interesujące nas wielkości fizyczne. Wykonajmy więc takie zestawienie dla zestawu omówionych już praw mechaniki.

W ujęciu fizycznym sformułowaliśmy pięć równań zachowania – masy, pędu, momentu pędu, energii i entropii. Pod względem formalnym mają one różny charakter – pierwsze, czwarte i piąte są równaniami skalarnymi, podczas gdy drugie i trzecie – wekto-

rowymi. W ujęciu jednolitym dysponujemy więc zestawem dziewięciu relacji skalarnych. Pamiętajmy wszakże, iż równania bilansu entropii nie traktujemy jako wyrażenia o charakterze roboczym, toteż pozostaje nam osiem równań skalarnych: (3.7), (3.18), (3.65) oraz (3.68). Występuje w nich siedemnaście skalarnych funkcji, które mają charakter niewiadomych. Na tym etapie naszych rozważań są to:

- gęstość ρ ,
- trzy składowe wektora prędkości (u_x, u_y, u_z) ,
- dziewięć składowych tensora naprężenia $(p_{ij}, i, j = x, y, z)$,
- temperatura T ,
- trzy składowe wektora względnego strumienia ciepła (q_{Tx}, q_{Ty}, q_{Tz}) .

Tak więc do zamknięcia układu równań, opisujących szeroko pojęte problemy mechaniki, brakuje nam dziewięciu równań (lub ogólniej mówiąc – dziewięciu informacji).

Stwierdzona przewaga liczby niewiadomych nad liczbą równań zachowania wynika z faktu, że wyjściowe prawa fizyczne zostały sformułowane na bardzo ogólnym poziomie. Zauważmy, że odnoszą się one do każdej substancji, dla której można zastosować model ośrodka ciągłego (podrozdz. 1.2), niezależnie od jej stanu skupienia. W szczególności nie korzystaliśmy przy wyprowadzaniu tych równań z cechy płynności, podstawowej dla cieczy i gazów.

Oznacza to, że kolejnych relacji, niezbędnych dla domknięcia układu, nie można już poszukiwać na dotychczasowym poziomie ogólności. Konieczne będzie zawężanie klasy rozważanych substancji oraz procesów. Brakujących równań dostarczą nam prawa stanu i prawa konstytutywne (par. 1.5.2).

3.8. Równania stanu

O ile prawa zachowania stanowią efekt wysiłków badawczych, których istotą była analiza „zachowywania się” pewnych wielkości fizycznych (masy, pędu, energii...), to **prawa stanu** są rezultatem prób poszukiwania bezpośredniego związku między zmiennymi stanu.

Niestety, dotychczas nie udało się uzyskać jednego równania stanu dla przypadku ogólnego, lecz efektem tych wysiłków było ważne stwierdzenie, że zachodzące w naturze zjawiska fizyczne można podzielić na pewne procesy o charakterze jednostkowym, a każdy z nich opisać odpowiednią zależnością.

Za najprostsze równanie stanu należy uznać relację wyrażającą niezmienną gęstość substancji:

$$\rho = \text{const.} \quad (3.70)$$

Jest to warunek bardzo często wykorzystywany w inżynierii środowiska, nawet gdy w rzeczywistości gęstość ulega pewnym zmianom (choć nie mogą one generować istotnych efektów, które nakazywałyby uwzględniać zmienność tej wielkości).

Dla gazu nielepkiego i nieprzewodzącego ciepła znane jest **równanie stanu gazu doskonałego**:

$$p = R T \rho. \quad (3.71)$$

W praktyce technicznej (podrozdz. 11.5) ważną rolę odgrywają zmiany gęstości, wywołane tylko zmianami ciśnienia. Dla wielu substancji (także dla wody) odpowiednia zależność ma charakter liniowy, co pozwala jako równanie stanu przyjąć **prawo Hooke’a**:

$$\rho = \rho_o \left(1 + \frac{P - P_o}{E_c} \right). \quad (3.72)$$

Istotne znaczenie ma równanie **adiabaty Poissona** (zwane także **równaniem izentropi** [38, 60], patrz również (1.55):

$$\frac{P}{\rho^\kappa} = \frac{P_o}{\rho_o^\kappa} = \text{const.} \quad (3.73)$$

Jest ono ważne dla przepływu bez wymiany ciepła, toteż stanowi tylko pewien model zjawisk rzeczywistych. Może on być stosowany dla procesów zachodzących z dużą szybkością (jak na przykład nagłe sprężanie lub rozprężanie gazu).

3.9. Równania konstytutywne

3.9.1. Uwagi ogólne

Termin „prawa konstytutywne” określa rodzinę tych prawidłowości wykazywanych przez przyrodę, które definiują („konstytuują” – stąd nazwa) szczególne kategorie substancji oraz procesów. Pod względem formalnym dają one możliwość wyprowadzenia zależności ilościowych, pozwalających na domknięcie układu równań ruchu (patrz pkt 1.5.2).

Własności rozważanych substancji (jak też specyfika interesujących nas procesów), opisane odpowiednimi równaniami konstytutywnymi, zawsze warto przeanalizować w aspekcie molekularnej struktury materii. Pozwala to na zrozumienie ważnego związku między rzeczywistymi procesami, zachodzącymi w skali „mikro”, a ich makroskopowym opisem, stosowanym w modelu ośrodka ciągłego (podrozdz. 1.2).

Od strony formalnej równania konstytutywne podlegają kilku ogólnym zasadom, które bardzo ułatwiają poprawne ich formułowanie [50]. Ponadto muszą one spełniać pewne wymogi formalne. W dalszym ciągu ważny będzie dla nas **warunek równości niezmienników** obu stron równania konstytutywnego, który dla relacji opisanych macierzami (tensorami) przyjmuje postać:

$$\text{tr } L = \text{tr } P, \quad (3.74)$$

gdzie symbole L i P oznaczają odpowiednio lewą i prawą stronę relacji, zaś tr oznacza **ślad macierzy** (sumę wyrazów leżących na jej głównej przekątnej).

Precyzyjne wyprowadzenie tworzonego lub korygowanego równania konstytutywnego jest tym ważniejsze, że nie tworzą one skończonego i zamkniętego zestawu. A choć w klasycznej hydromechanice posługujemy się ich typowymi wersjami, to zawsze może pojawić się potrzeba opracowania nowych relacji tego rodzaju.

3.9.2. Hipoteza Newtona – ujęcie ilościowe

3.9.2.1. Przypadek ogólny

W par. 1.4.2 przedstawiliśmy modele, opisujące zachowanie molekuł w różnych stanach skupienia materii. W konsekwencji sformułowaliśmy pewne wnioski jakościowe, dotyczące przewidywanych sposobów reakcji układów materialnych na działające na nie siły. W szczególności wyróżniliśmy najważniejszą dla nas kategorię substancji, nazwaną **plynem newtonowskim** (pkt 1.4.2.3).

Przeprowadzone w następnych rozdziałach rozważania pozwoliły na zdefiniowanie ważnych pojęć oraz na zrozumienie miejsca postulowanych zależności w ogólnym układzie równań ruchu. Umożliwia to przystąpienie do ilościowego ujęcia **hipotezy Newtona**.

Skorzystajmy ze znanego z matematyki stwierdzenia, że ogólna postać **zależności liniowej** wyraża **zmienną zależną ZZ** jako **sumę stałego czynnika SC** oraz **iloczynu zmiennej niezależnej ZN i stałego mnożnika MN**:

$$ZZ = SC + MN \times ZN. \quad (3.75)$$

W interesującym nas tu przypadku **przepływu cieczy newtonowskiej** zmienną niezależną jest **tensor prędkości deformacji [D]** (patrz 2.14), a zmienną zależną – **tensor naprężenia [P]** (patrz 1.38). Istotną cechą rozważanej tu relacji jest **izotropia**. Termin ten oznacza, że struktura substancji i jej własności nie zależą od kierunku, wzdłuż którego są rozważane. Dzięki temu mnożnik **MN** w (3.75) jest skalarzem.

W przeciwnym razie, gdyby istniała jakaś zależność cech materii od kierunku, mówilibyśmy o **anizotropii**, dla której typowych przykładów dostarczają materiały zbudowane z warstw (mika, sklejka...). Dla substancji anizotropowych mnożnik **MN** miałby charakter tensorowy (czyli zapisywalibyśmy go w formie macierzy).

Kolejny ważny wniosek, wynikający z analizy ruchu molekuł płynu i jego konsekwencji (par. 1.4.2), dotyczy postaci stałego czynnika w (3.75). Ze względu na ogromną ruchliwość molekuł cieczy i gazów, nawet najmniejsze naprężenie styczne (p_{ij} dla i/j – patrz 1.31) musi wywołać ruch substancji. Oznacza to, że

$$\text{dla } \mathbf{u} = 0, \text{ to zachodzi } p_{ij} = 0, \quad (3.76)$$

czyli macierz **SC** jest diagonalna:

$$SC = a[\mathbf{E}] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

Uwzględniając zestawione czynniki, możemy następująco wyrazić relację (3.74) dla funkcji (1.38):

$$[\mathbf{P}] = a [\mathbf{E}] + b [\mathbf{D}]. \quad (3.78)$$

Przejdźmy do określenia stałych a oraz b . Dla wyznaczenia dwóch skalarnych mnożników musimy mieć do dyspozycji dwie informacje. Jednej z nich dostarcza formalny wywód (3.74), zaś drugiej – empirycznie uzasadnione stwierdzenie, że mnożnikiem w proporcji między tensorem naprężenia i tensorem prędkości deformacji jest **dynamiczny współczynnik lepkości cieczy** (pkt 1.4.2.4). Jest rzeczą interesującą, że choć ten makroskopowy współczynnik wprowadzony został w ramach teorii ośrodka ciągłego, to analiza na poziomie „mikro” pozwala powiązać go z charakterystyką struktury molekularnej, zgodnie z (1.44). Uwzględniając te uwagi, możemy napisać, że:

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = 3a + b \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (3.79)$$

$$p_{xy} = \frac{1}{2} b \frac{\partial u_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (3.80)$$

Wykorzystując ponadto relację (1.23), która mówi, że naprężenie normalne p_{ii} ($i = x, y, z$) są takie same, czyli zachodzi (znak minus jest tu wynikiem konwencji (1.23)):

$$(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})/3 = -p, \quad (3.81)$$

otrzymamy:

$$a = - \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \quad (3.82)$$

$$b = 2 \mu. \quad (3.83)$$

Ostatecznie więc **hipotezę Newtona** (3.77) możemy zapisać następująco:

$$[\mathbf{P}] = - \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathbf{u} \right) [\mathbf{E}] + 2\mu [\mathbf{D}]. \quad (3.84)$$

3.9.2.2. Strumień podłużny

Zestawiając (3.83) i (3.18), stwierdzamy, że ostatnia zależność pozwala wyeliminować z ogólnego równania zachowania pędu nieznanne naprężenia p_{ij} ($i, j = x, y, z$). Jest rzeczą logiczną, by powtórzyć tę procedurę także w przypadku szczególnej postaci równania zachowania pędu (3.48), wyprowadzonej dla strumienia płynu.

Będziemy wtedy poszukiwali naprężenia stycznego τ_S na poboczniczy strumienia, które w układzie współrzędnych LON (L – kierunek wzdłuż strumienia, N – kierunek poprzeczny – rys. 3.4) jest równe (patrz 3.83):

$$\tau_S = p_{LN} = \mu \frac{\partial u_L}{\partial N}. \quad (3.85)$$

Dla praktycznego wykorzystania tej zależności należałoby uprzednio wyznaczyć profil prędkości w każdym przekroju poprzecznym strumienia. W ogólnym przypadku byłoby to niezwykle trudne i kosztowne, a ponadto sprzeczne z zastosowaną ideą modelu strumienia podłużnego, w którym posługujemy się prędkością v , uśrednioną względem tego przekroju. Tak więc należy zależność (3.85) przedstawić w postaci funkcji:

$$\tau_S = \tau_S(v, \dots). \quad (3.86)$$

Stosowane w mechanice płynów i hydraulicie postaci takiej funkcji omówimy w par. 11.2.2 oraz par. 13.4.1.

3.9.3. Prawo Fouriera

Występujący w (3.68) względny strumień energii cieplnej \mathbf{q}_T można wyrazić przez temperaturę T , za pomocą zależności, która także należy do kategorii równań konstytutywnych. W tym przypadku nosi ono nazwę **prawa Fouriera**, ma postać relacji (1.51), a omówione zostało w punkcie 1.4.2.4.

3.10. Równania ruchu

3.10.1. Przypadek ogólny – równanie Naviera-Stokesa

Uzupełniając przedstawiony w podrozdz. 3.7 bilans równań i niewiadomych o:

- jedno, odpowiednio dobrane, równanie stanu (podrozdz. 3.8);
- hipotezę Newtona (3.84), która ze względu na symetrię jest równoważna sześciu równaniom skalarnym;
- trzy skalarne składowe prawa Fouriera (1.51)

stwierdzamy, że do równań zachowania udało się nam dołączyć 10 kolejnych relacji skalarnych. Występuje w nich tylko jedna nowa niewiadoma, jaką jest **ciśnienie** p . Oznacza to, że otrzymaliśmy **zamknięty układ równań**, opisujący ruch obszernej kategorii substancji płynnych (cieczy i gazów), noszących nazwę **płynów newtonowskich**. Układ ten utworzony jest przez 18 równań skalarnych, w których występuje 18 niewiadomych funkcji skalarnych.

Zestaw tych relacji możemy w istotnym stopniu uprościć, podstawiając wielkości określone przez prawa konstytutywne (3.83) i (1.52) do wyrażeń wynikających z praw zachowania (3.18) i (3.68). Otrzymamy wtedy:

— równanie zachowania masy („równanie ciągłości”)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0; \quad (3.7)$$

— równanie zachowania pędu w postaci Naviera-Stokesa („równanie dynamiczne”)

$$\frac{Du_x}{Dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[p - \frac{1}{3} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \quad (3.87a)$$

$$\frac{Du_y}{Dt} = f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[p - \frac{1}{3} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right), \quad (3.87b)$$

$$\frac{Du_z}{Dt} = f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[p - \frac{1}{3} \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right); \quad (3.87c)$$

— równanie zachowania energii („równanie przewodnictwa cieplnego”)

$$\frac{DT}{Dt} = D_w \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + Z_T, \quad (3.88)$$

gdzie:

$$D_w = \frac{\lambda}{\rho c_v}; \quad (3.89)$$

— równanie stanu

$$\rho = \rho(p, T, \dots). \quad (3.90)$$

Jest to układ 6 równań skalarnych, zawierających 6 niewiadomych funkcji skalarnych, którymi są u_x , u_y , u_z , p , ρ oraz T . Zestawienie to z jednej strony wykazuje, że relacje (3.7, 3.87, 3.88, 3.90) stanowią **zamknięty układ równań ruchu** cieczy newtonowskiej, zaś z drugiej strony uzasadnia podane w par. 1.5.3 określenie tych funkcji mianem **wielkości podstawowych** lub **zmiennych stanu**.

Tym samym składowe tensora naprężenia p_{ij} oraz składowe względnego strumienia ciepła q_{Ti} stają się **wielkościami pomocniczymi**. Można je obliczyć z należących do kategorii równań pomocniczych relacji (3.89) oraz (1.51).

W powyższych rozważaniach przyjęliśmy, że funkcja źródłowa $Z_T(x, y, z, t)$ w (3.88) jest znana (najczęściej mamy do czynienia z przypadkiem, gdy $Z_T = 0$), oraz że współczyn-

nik lepkości cieczy jest stały. W sytuacjach, w których musielibyśmy uwzględnić jego zmienność, należałoby do układu dołączyć odpowiednią relację, na przykład w postaci (1.47) dla wody lub (1.48) dla powietrza.

Równania powyższe wygodnie jest zapisać za pomocą symbolicznych **operatorów matematycznych**. Obok już zastosowanej **pochoďnej substancjalnej** (1.70) oraz **operatora rotacji** (2.22), wykorzystajmy jeszcze [4, 68]:

— operator Laplace’a

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}; \quad (3.91)$$

— operator gradientu

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}; \quad (3.92)$$

— operator dywergencji

$$\text{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.93)$$

Pozwala to napisać:

— równanie ciągłości

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0; \quad (3.7')$$

— równanie dynamiczne

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} \left(p - \frac{1}{3} \mu \text{div} \mathbf{u} \right) + \nu \Delta \mathbf{u}; \quad (3.87')$$

— równanie przewodnictwa cieplnego

$$\frac{DT}{Dt} = D_w \Delta T + Z_T. \quad (3.88')$$

W zagadnieniach hydromechaniki i hydrauliki szczególnie często rozważane są przypadki, dla których gęstość płynu jest stała lub co najmniej zmienia się w pomijalnie małym stopniu. Równanie stanu przyjmuje wtedy postać:

$$\rho = \text{const}. \quad (3.70')$$

zaś równania ruchu ulegają korzystnym uproszczeniom:

— równanie ciągłości

$$\text{div} \mathbf{u} = 0; \quad (3.94)$$

— równanie dynamiczne

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \mathbf{u}. \quad (3.95)$$

W takim przypadku mamy do wyznaczenia 4 podstawowe zmienne stanu: u_x , u_y , u_z oraz p . Są one opisane czterema równaniami skalarnymi (3.94) i (3.95).

Zauważmy, że relacja (3.70) jest konsekwencją stałości lub pomijalnie małej zmienności temperatury. W takich przypadkach równanie (3.88) jest spełnione tożsamościowo. Gdyby było inaczej, przestrzenna zmiennosc temperatury wywoływałaby istotne efekty dynamiczne (ruch płynu, powo-

dowany zróżnicowaniem gęstości, zwany **konwekcją**), skutkiem czego nie moglibyśmy przyjąć relacji (3.70).

3.10.2. Strumień podłużny

Wobec faktu, że dla dowolnego strumienia podłużnego nie jesteśmy w stanie sformułować ogólnej relacji konstytutywnej (3.86), układ równań (3.11) i (3.39), czy też jego wersja (3.47) i (3.48), zostaną uzupełnione odpowiednimi zależnościami podczas omawiania głównych technicznych kategorii tej ważnej struktury przepływowej – **przewodów zamkniętych** (rozd. 11) i **koryt otwartych** (rozd. 13).

4. Formułowanie problemów hydromechaniki

4.1. Uwagi ogólne

Narzędziem służącym do wyznaczania **zmiennych stanu** układu mechanicznego (w naszym przypadku – płynu) są **równania ruchu**. Stanowią one matematyczny zapis **praw natury**. Prawa te z definicji formułowane są w możliwie najbardziej ogólny sposób. Muszą one bowiem opisywać jedynie obiektywną rzeczywistość, a całkowicie pomijać efekty subiektywne (indywidualne cechy układu, usytuowanie układu współrzędnych...). Tym samym wyprowadzone na ich podstawie równania nie zawierają żadnych informacji o układzie, ani o sposobie jego oddziaływania z otoczeniem.

W celu rozwiązania konkretnego problemu, należy te oddzielone informacje dołączyć do równań. Sposób, w jaki można to uczynić, w zasadniczym stopniu zależy od charakterystyki danego zjawiska. W takich przypadkach, gdy zagadnienia opisane są równaniami różniczkowymi (co w ogromnym stopniu dotyczy mechaniki płynów i hydrauliki), aby **sformułować (postawić) zagadnienie** musimy mieć do dyspozycji:

- **układ równań** (zamknięty w sensie teorii równań różniczkowych, czyli taki, w którym liczba skalarnych równań jest równa liczbie występujących w nich skalarnych zmiennych zależnych, stanowiących zmienne stanu);
- informacje o **kształcie układu** oraz o jego **własnościach**;
- **warunki początkowe**, czyli informacje o stanie układu w chwili traktowanej jako początkowa (dotyczy to tylko zagadnień zmiennych w czasie, czyli **nieustalonych**);
- **warunki brzegowe**, czyli informacje o oddziaływaniach między układem a jego otoczeniem.

Warunki początkowe i brzegowe określa się niekiedy łącznie jako **warunki graniczne**.

Aby zagadnienie było **poprawnie postawione**, każda z tych informacji musi mieć formę zgodną z przyjętym modelem zjawiska. Kwestię tę będziemy szczegółowo omawiali w dalszej części książki, zgodnie z odpowiednimi zasadami matematyki, dla kolejnych kategorii zadań.

W wielu przypadkach zestaw zmiennych stanu, otrzymany jako rozwiązanie zagadnienia, stanowi poszukiwaną informację. Umożliwia ona podejmowanie dalszych decyzji dotyczących układu, w szczególności mających charakter techniczny. Problemy tego rodzaju można nazwać **zagadnieniami wprost**.

Jednakże niejednokrotnie (a w technice chyba nawet częściej) musimy rozważać **zagadnienia odwrotne**. Do tej kategorii należą zadania, w których na początku znamy wartości (części lub wszystkich) zmiennych stanu, a naszym celem jest odpowiedni dobór wielkości pozostałych (opisujących układ oraz/albo warunki graniczne). Jako typowe przykłady można tu podać obliczanie średnicy rurociągu dla zadanego wydatku płynącej nim cieczy, dobór napełnienia kanału dla zadanej prędkości wody, czy wyznaczanie grubości przęsła mostu dla zadanej jego nośności, czy ogólnie – projektowanie nowych obiektów. Tym

samym zagadnieniem proste będzie dotyczyło funkcjonowania obiektów już istniejących (zadania eksploatacyjne).

4.2. Opis układu i jego własności

Kształt jest z natury rzeczą indywidualną cechą układu, toteż ogólne omówienie jego charakterystyki geometrycznej nie byłoby ani możliwe, ani celowe. Informację taką uzyskuje się natomiast bez szczególnego trudu (choć może to być czasochłonne, na przykład gdy pragniemy opisać konfigurację dna jeziora), po zdefiniowaniu przedmiotu rozważań.

Z reguły kształt układu (a przynajmniej jego większa część) wyznaczona jest przez rzeczywiście istniejące powierzchnie, tworzące **granicę fizyczną** (lub **brzeg fizyczny**).

Brzeg taki może cechować się różnymi własnościami szczególnymi, które obejmują poniższe klasyfikacje:

- **brzeg sztywny** (który w normalnych warunkach nie zmienia swego kształtu, jak na przykład budowla wodna) oraz **brzeg odkształcalny** (mogący zmieniać kształt, jak na przykład piaszczyste dno naturalnego zbiornika wody);
- **brzeg ruchomy** (dla którego dobrze jest wyróżnić dwie kategorie szczegółowe – brzeg zmieniający swe położenie niezależnie od ruchu cieczy, jak na przykład statek lub aparat latający z własnym napędem, oraz brzeg poruszający się w sposób wymuszony przez ruch cieczy, jak na przykład łódź dryfująca na powierzchni rzeki) oraz **brzeg nieruchomy** (na przykład ścianka reaktora przepływowego);
- **brzeg przepuszczalny** (utworzony z materiału porowatego, jak na przykład piaszczyste dno rzeki lub jeziora, umożliwiające przesiąkanie wody) oraz **brzeg nieprzepuszczalny** (czyli szczelny, jak na przykład zbiornik z blachy stalowej).

Stosunkowo często mamy jednak do czynienia z takimi sytuacjami, gdy rozważany układ jest rozległy, w porównaniu z tą jego częścią, w której zachodzą rozważane przez nas zjawiska. Poszukiwanie rozwiązania zadania o charakterze lokalnym z uwzględnieniem kształtu całości układu byłoby nie tylko bardzo kosztowne, lecz także obciążone znacznym błędem. Przykładowo, rozważania wpływu falowania morskiego na pracę portu w Gdańsku, lub ewentualnej budowy zapory na Sanie w rejonie Przemysła, są w stosunku do całego Bałtyku lub odpowiednio Wisły zadaniami o skali lokalnej.

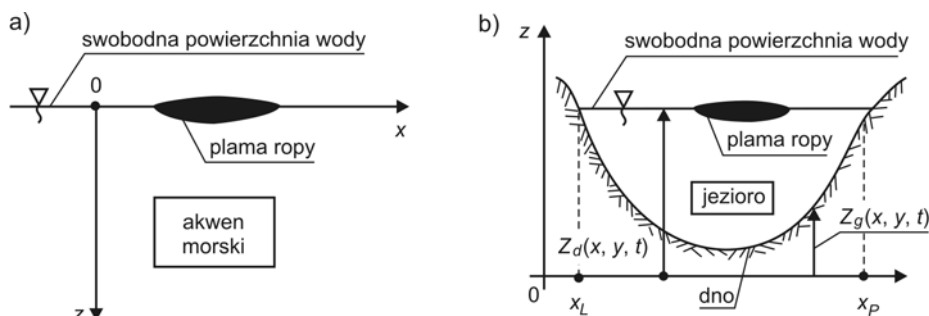
Dla takich przypadków należy w opisie zagadnienia uwzględnić fakt, że przynajmniej część brzegu rozważanego obszaru jest oddalona od interesującego nas rejonu w sposób pozwalający na pominięcie jej wpływu na opisywane zjawisko.

W ujęciu analitycznym pożyteczne jest tu pojęcie **nieskończoności**. Przykładowo rozważmy proces przemieszczania się plamy ropy naftowej, rozlanej na swobodnej powierzchni wody wskutek awarii statku. W przypadku zbiornika bardzo rozległego (jak na przykład akwen morski – rys. 4.1a), którego dno i brzegi są bardzo odległe, można przyjęc następujące zakresy wartości zmiennych x oraz z :

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq z < +\infty. \quad (4.1)$$

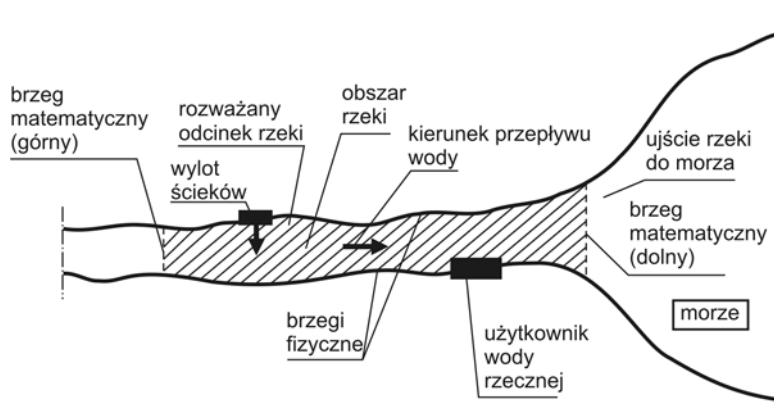
Jest to zupełnie inna sytuacja, niż w przypadku zbiornika o ograniczonych rozmiarach (jak na przykład jezioro nieprzepływowe – rys. 4.1b), gdy:

$$x_L \leq x \leq x_P, \quad z_d(x) \leq z \leq z_{g(x)}. \quad (4.2.)$$



Rys. 4.1. Obszar częściowo nieograniczony (a) oraz ograniczony (b)

Pojęcie brzegu nieskończenie odległego nie da się jednak zastosować w takich przypadkach (a są one w technice bardzo częste), gdy do rozwiązania rozważanych równań stosujemy metody numeryczne. Jest to prostą konsekwencją faktu, że numeryczny opis nieskończenie rozległego obszaru wymagałby nieskończenie obszernej pamięci maszyny liczącej, co jest warunkiem niemożliwym do spełnienia. Stosuje się wtedy inne rozwiązania, polegające na wydzieleniu tylko części całego obszaru. Czyni się to wprowadzając **granice matematyczne** (czyli **brzeg matematyczny**), stanowiące niematerialne powierzchnie geometryczne.



Rys. 4.2. Zasada określania brzegu matematycznego (na przykładzie ujściowego odcinka rzeki)

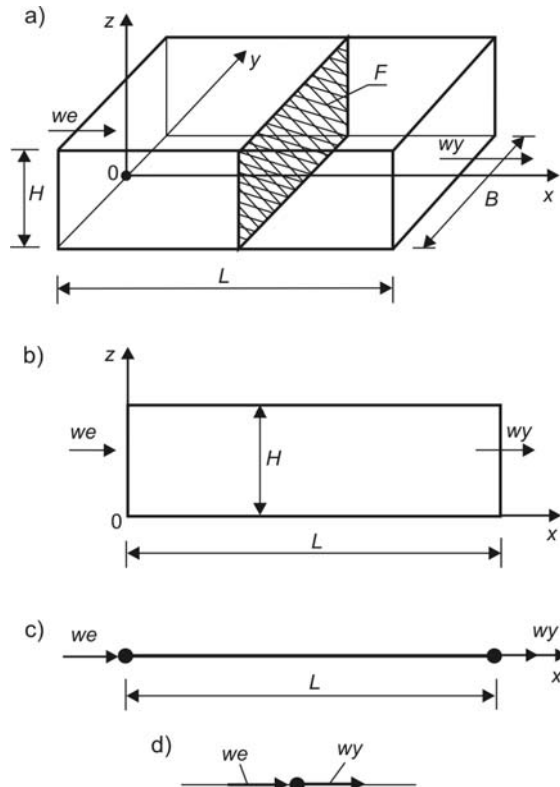
Ogólna zasada wyboru granic matematycznych jest prosta i zrozumiała (rys. 4.2), jednakże w konkretnych przypadkach ich określenie może sprawiać pewne trudności. Ważne jest doświadczenie osoby, podejmującej decyzje. Należy tu pamiętać, że brzeg matematyczny powinien być na tyle oddalony od interesującej nas części obszaru, by jego wpływ na rozwiązanie był możliwie słaby. Jednocześnie powinno się go sytuować na tyle blisko tej części, by rozmiary układu nie utrudniały obliczeń i nie zwiększały ich kosztów.

Omówione cztery klasyfikacje brzegów układu są wzajemnie niezależne, toteż pozwalają utworzyć 16 różnych kombinacji. Nie będziemy ich tu wymieniać, gdyż część z nich może mieć charakter czysto formalny (przykładowo, brzeg matematyczny będzie z reguły sztywny i nieruchomy), ale świadomość ich istnienia ułatwia pracę, szczególnie przy formułowaniu warunków brzegowych (par. 4.3.2).

Kolejny czynnik, na który trzeba zwrócić uwagę, wiąże się z geometryczną charakterystyką rozważanego układu i ze stosowanymi uproszczeniami kinematycznymi (podrozdz. 2.5 [50]). Generalnie rzecz biorąc, każdy układ fizyczny ma charakter **trójwymiarowy** (albo **przestrzenny**, co symbolicznie zapisuje się jako układ 3D). Ze względu na złożoność opisu takiego układu, w praktyce często stosujemy modele uproszczone pod względem geometrycznym i kinematycznym, a w szczególności układy **dwuwymiarowe** (czyli **płaskie**, 2D) oraz **jednowymiarowe** (1D). W szczególnym przypadku cały układ możemy traktować jako punkt (układ „**zerowymiarowy**”, 0D). Jest to dogodne wtedy, gdy nie interesuje nas wewnętrzna struktura tego układu i opisujemy go modelem należącym do kategorii „czarnych skrzynek” [18]. Granicami takich układów są odpowiednio **zamknięta powierzchnia** (3D), **zamknięty obwód płaski** (2D) oraz **para punktów** (1D) – rys. 4.3.

Przy rozważaniu zadań hydrauliki dobrze jest wyróżnić następujące rodzaje odcinków brzegu:

- **brzeg „dopływowy”**, wyznaczony przez strumienie, które doprowadzają płyn do układu; tego typu odcinki brzegu określa się potocznie mianem **wejścia** (patrz „we” na rys. 4.3);
- **brzeg „odpływowy”**, wyznaczony przez strumienie wypływające z układu; mówimy wtedy o **wyjściu** z układu (patrz „wy” na rys. 4.3);
- **brzeg nieprzepuszczalny** (wyznaczony przez pozostałe odcinki brzegu, przez które nie zachodzi przepływ płynu).



Rys. 4.3. Możliwości upraszczania układów fizycznych: a) układ trójwymiarowy 3D, b) układ dwuwymiarowy 2D, c) układ jednowymiarowy 1D, d) układ „zerowymiarowy” 0D

4.3. Warunki graniczne

4.3.1. Warunki początkowe

Jak sama nazwa wskazuje, **warunki początkowe** określają stan układu w takim momencie czasu, od którego rozpoczynamy opis przebiegu rozważanego procesu. Rzecz oczywista, muszą one być formułowane tylko wtedy, gdy przebieg tego procesu zmienia się w czasie. Ich sens jest łatwy do zrozumienia. Stan układu w każdej chwili zależy bowiem częściowo od jego stanu w niedalekiej przeszłości, a częściowo od wpływu czynników wymuszających przebieg procesu. Sposób, w jaki stan układu zmienia się między kolejnymi chwilami, określają oczywiście prawa przyrody, zapisane w postaci odpowiednich równań.

W najprostszym przypadku, gdy zmiennymi stanu są prędkość \mathbf{u} i ciśnienie p , jako warunki początkowe musimy zadać funkcje:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(x, y, z, t = t_0), \quad p_0 = p(x, y, z, t = t_0). \quad (4.3)$$

W bardziej ogólnych sytuacjach niezbędne są też analogiczne informacje o początkowym rozkładzie gęstości płynu i jego temperaturze, bądź innych zmiennych zależnych.

Określenie początkowych rozkładów zmiennych stanu nie jest rzeczą prostą. Z tego względu często wykorzystuje się tu pewien chwyt, uzasadniony empirycznie i teoretycznie potwierdzony faktem, że wpływ stanu układu w dowolnej chwili na stany następne sukcesywnie słabnie, by po upływie czasu t_z (który można oszacować, na przykład drogą próbnego rozwiązywania równań) praktycznie zaniknąć. Pozwala to zaakceptować jakieś możliwe do sformułowania przybliżenie rzeczywistego warunku początkowego, z jednoczesnym rozpoczęciem obliczeń w chwili $(t_0 - t_z)$. Tym samym będzie można przyjąć, że rozwiązanie zagadnienia dla $t > t_0$ nie będzie obciążone błędem aproksymacji warunków początkowych.

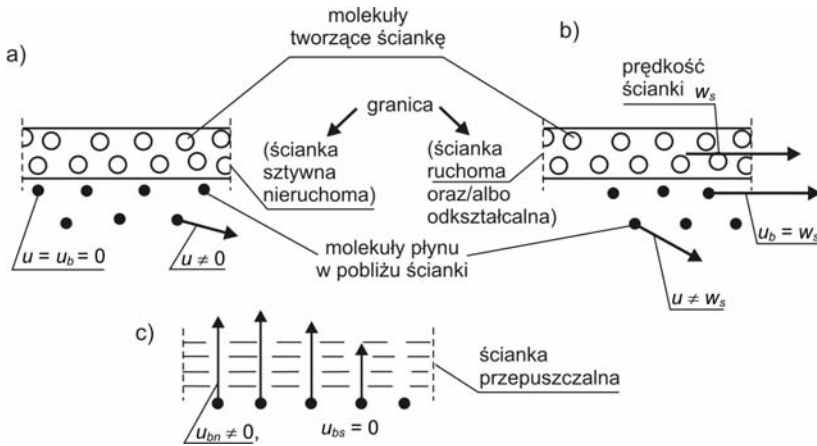
4.3.2. Warunki brzegowe

Warunki brzegowe opisują oddziaływania zachodzące na styku rozważanego układu oraz jego otoczenia. W przeciwieństwie do warunków początkowych, których sens jednoznacznie określają relacje (4.3), przy rozważaniu tych oddziaływań możemy mieć do czynienia z różnymi sytuacjami. Z tego względu konkretne zestawy warunków brzegowych będą prezentowane sukcesywnie, w miarę omawiania kolejnych wersji równań ruchu cieczy. Tutaj ograniczymy się tylko do uwag, mających charakter ogólny.

Podstawowa informacja przy formułowaniu warunków brzegowych dotyczy **zgodności ruchu płynu oraz ścianki nieprzepuszczalnej**. Jest to konsekwencją **sił adhezji** [7], działających między molekułami płynu a molekułami substancji tworzącej otoczenie rozważanego układu. Są one na tyle znaczne, że na powierzchni granicznej nie pozwalają molekułom jednego ośrodka przesuwać się względem molekuł drugiego ośrodka, jak również oderwać się od siebie. Ponadto zwartość materii tworzącej taką ściankę wyklucza poprzeczny ruch płynu przez powierzchnię graniczną. Tym samym prędkość płynu na powierzchni granicznej musi być równa prędkości tej powierzchni. Nie wyklucza to oczywiście ruchu samych powierzchni granicznych, które mogą przemieszczać się albo w większej skali (**brzeg ruchomy**), albo lokalnie (ruch, zachodzący w wyniku zmiany kształtu **brzegu odkształcalnego**). W obu przypadkach odkształcenie to może być:

- wywołane czynnikami zewnętrznymi (na przykład ruch samolotu, wymuszony pracą jego silników);
- wywołane przez ruch płynu (na przykład ruch balonu, unoszonego wiatrem).

W praktyce nierzadko mamy do czynienia z sytuacją, w której oba te czynniki występują jednocześnie. Przykładowo, statek płynący w strefie silnych prądów oraz/albo silnego wiatru będzie poruszała się po linii, na której kształt, obok silników, będą wpływały czynniki wywołujące ruch znoszenia, zwany **dryfem**. Zagadnienie to wykracza jednak poza ramy naszych zainteresowań.



Rys. 4.4. Interpretacja warunku zgodności ruchu płynu i ścianki:
a) ścianka nieruchoma, b) ścianka ruchoma, c) ścianka przepuszczalna

Nieco inna jest sytuacja wtedy, gdy ściankę tworzy materiał przepuszczalny (na przykład piaszczyste lub żwirowe łóżysko rzeki, umożliwiające przesiąkanie wody przez podłoże). Choć styczna składowa prędkości płynu także wtedy musi być równa zero (siły adhezji), to składowa normalna będzie różna od zera, zależnie od kierunku i intensywności przesiąkania wody.

Możemy więc mieć do czynienia z następującymi głównymi kategoriami **warunków brzegowych typu Dirichleta** [27] dla prędkości:

— granice utworzone przez nieprzepuszczalną ściankę sztywną i nieruchomą (rys. 4.4a)

$$\mathbf{u}_b = 0; \quad (4.4)$$

— granice utworzone przez nieprzepuszczalną ściankę odkształcalną oraz/albo ruchomą (rys. 4.4b):

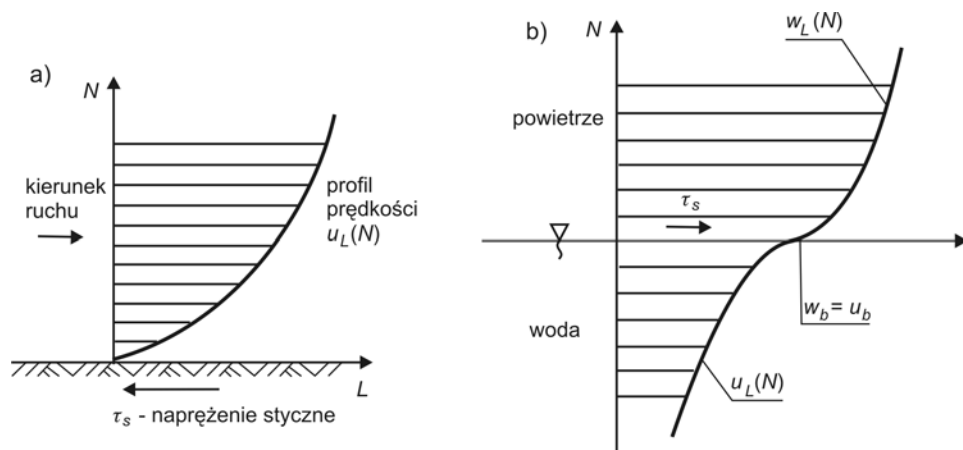
$$\mathbf{u}_b = \mathbf{w}_s; \quad (4.5)$$

— granica utworzona jest przez ściankę przepuszczalną

$$u_{bn} \neq 0, \quad u_{bs} = w_{ss}. \quad (4.6)$$

Niekiedy pożytecznej informacji na brzegu dostarcza hipoteza Newtona (3.83). Gdy mamy możliwość określenia naprężenia stycznego τ_s , działającego na brzegu obszaru, relacja (3.85) pozwala powiązać je z profilem prędkości płynu (rys. 4.5a). Jest to szczególnie przydatne wtedy, gdy rozważamy ruch wody w zbiorniku otwartym, wywołany ruchem powietrza (**prąd wiatrowy**). Zgodnie z (4.5) prędkości molekuł wody i powietrza na powierzchni granicznej są sobie równe (choć ich nie znamy). Korzystając z (3.85), możemy wtedy napisać (rys. 4.5b):

$$\tau_s = \mu_p \frac{\partial w_L(N)}{\partial N} = \mu_w \frac{\partial u_L(N)}{\partial N}. \quad (4.7)$$



Rys. 4.5. Naprężenie styczne na granicy obszaru jako warunek brzegowy

W praktyce technicznej często naprężenia wywołane wiatrem określa się wzorami empirycznymi, wyrażając je przez standardowo używaną w meteorologii i hydrologii średnią prędkość wiatru, na przykład [13]:

$$\tau_s = \tau_w = 3,25 \cdot 10^{-6} \rho / w / w, \quad (4.8)$$

otrzymując w efekcie pożyteczny **warunek brzegowy typu Neumanna**:

$$\mu_w \frac{\partial u_L(N)}{\partial N} = \tau_w. \quad (4.9)$$

Jeśli zaś chodzi o drugą z podstawowych zmiennych stanu, czyli **ciśnienie**, to w ogólnym przypadku możemy bez trudu określić stosowny warunek brzegowy tylko dla swobodnej powierzchni, na której panuje ciśnienie zewnętrzne, najczęściej równe ciśnieniu atmosferycznemu:

$$p_{\text{swobodna powierzchnia}} = p_{\text{zewnętrzne}} (= p_{\text{atm}}) \quad (4.10)$$

4.4. Rozwiązywanie zadań hydromechaniki

Zagadnienia hydromechaniki, tak jak i problemy rozważane w innych dziedzinach nauk ścisłych, opisane są układami równań, najczęściej różniczkowych. Ogólne zasady rozwiązywania takich układów określa matematyka. Można tu mówić o dwóch podstawowych grupach metod postępowania:

- dokładnych,
- przybliżonych.

Dokładne rozwiązania równań fizyki matematycznej uzyskuje się, wykonując odpowiednie przekształcenia ich postaci, stosowne do rodzaju rozważanych równań. W ich wyniku otrzymuje się pewne wyrażenia matematyczne, które tworzą **rozwiązanie analityczne**.

Jeśli chodzi o **metody przybliżone**, to mamy nieco więcej możliwości, gdyż rozwiązanie zadania możemy tu uzyskać na drodze:

- **analitycznej** (w postaci wyrażeń matematycznych, które wszakże nie stanowią rozwiązania dokładnego; klasycznym przykładem są tu rozwiązania równań w postaci **szeregów**);
- **graficznej** (gdy rozwiązanie, mające charakter wykresu, powstaje wskutek wykonania pewnych procedur geometrycznych; metody te należy obecnie uznać za archaiczne);
- **numerycznej** (gdy tworzące rozwiązanie zadania funkcje mają postać ciągów lub tablic liczbowych).

Zauważmy, że te trzy grupy metod przybliżonych odpowiadają trzem klasycznym sposobom przedstawiania funkcji (wzór, wykres, tablica wartości [4]).

Obecnie, w dobie rozwoju maszyn liczących, za podstawową metodę przybliżonego rozwiązywania problemów fizyki matematycznej należy uznać metody numeryczne [6, 63]. Dominują one także nad dokładnymi metodami analitycznymi, gdyż te ostatnie można stosować tylko w takich przypadkach, których prostota pozwala na daleko idące uproszczenie równań ruchu.

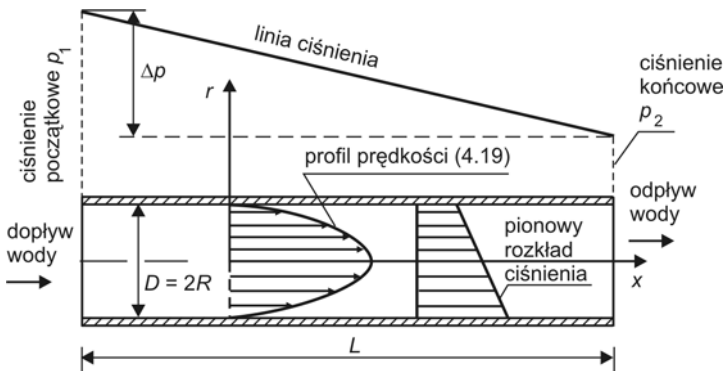
■ Przykład 2.1

Wyznaczyć pole prędkości przepływu cieczy nieściśliwej w poziomej rurze kołowej o stałej średnicy $D = 2R$ i długości L , jeżeli ciśnienia w jej początkowym i końcowym przekroju wynoszą odpowiednio p_1 oraz $p_2 < p_1$.

Rozwiązanie

Ze względu na prosty i regularny kształt rozważanego układu, możemy spodziewać się, że wektor prędkości będzie tu miał tylko jedną niezerową składową (brak bowiem czynników mogących wywołać ruch poprzeczny). Będzie ona funkcją jedynie zmiennej poprzecznej, co wynika z równomierności warunków ruchu wzdłuż przewodu oraz z równania zachowania masy (3.93), które w tym przypadku ma postać:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \rightarrow u_x = u_x(x). \quad (4.11)$$



Rys. 4.6. Przepływ Hagen-Poiseuille'a

Przyjmując naturalny w takim przypadku cylindryczny (walcowy) układ współrzędnych (rys. 4.6), możemy napisać, że:

$$\mathbf{u} = u_x(r) \mathbf{i}. \quad (4.12)$$

Podstawiając tę relację do równania Naviera-Stokesa (3.95), otrzymamy dla płaskiego pionowego przekroju rury:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right), \quad (4.13)$$

$$0 = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial r}. \quad (4.14)$$

Wobec (4.12) pochodna ciśnienia w (4.13) nie może być funkcją zmiennej x . Oznacza to, że ciśnienie musi się w tym przypadku zmieniać liniowo, co pozwala przyjąć, że:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p_1 - p_2}{L} = -\frac{\Delta p}{L}. \quad (4.15)$$

Podstawiając (4.15) do (4.13) i dwukrotnie całkując to wyrażenie, otrzymamy:

$$u_x(r) = -\frac{\Delta p}{4\mu L} r^2 + C_1 \ln r + C_2. \quad (4.16)$$

Stałe całkowania C_1 i C_2 wyznaczmy z dwóch oczywistych warunków brzegowych:

— profil prędkości jest opisany funkcją gładką i symetryczną:

$$\frac{\partial u_x}{\partial r}(r=0) = 0 \rightarrow C_1 = 0; \quad (4.17)$$

— dla cieczy przylegającej do nieruchomej ścianki zachodzi:

$$u_x(r=R) = 0 \rightarrow C_2 = \frac{\Delta p}{4\mu L} R^2. \quad (4.18)$$

Po podstawieniu obliczonych wartości stałych całkowania do (4.16) otrzymamy:

$$u_x(r) = \frac{\Delta p}{4\mu L} (R^2 - r^2). \quad (4.19)$$

Z kolei całkując (4.14) dla kierunku pionowego ($r = z$), mamy:

$$p(x, z) = -\rho g z + C_3. \quad (4.20)$$

Jeżeli ciśnienie w osi przewodu (dla $z = 0$) wynosi $p_c(x)$, to:

$$C_3 = p_c(x). \quad (4.21)$$

Wobec czego z (4.20) mamy ($-R \leq z \leq +R$):

$$p(x, z) = p_c(x) - \rho g z. \quad (4.22)$$

Jak widać, w rozważanym przypadku profil prędkości (4.19) ma kształt paraboloidy obrotowej (wynik ten nazywamy **rozwiązaniem Hagen-Poiseuille'a**), zaś ciśnienie (4.22) zmienia się liniowo wzdłuż osi przewodu oraz wzdłuż kierunku pionowego (rys. 4.6). ■

4.5. Upraszczenie równań ruchu

Treść podrozdz. 4.4 pokazuje, jak ważną rolę w zastosowaniach mechaniki płynów i hydrauliki odgrywa upraszczenie ogólnych równań, opisujących zjawiska przepływowo. Warto przy tym rozróżnić dwa aspekty działań upraszczających – **formalny** oraz **fizyczny**. Celem, do którego należy dążyć, jest uzyskanie jak największej prostoty formalnej równań, przy możliwie najmniejszych ograniczeniach ich sensu fizycznego.

W rzeczywisty sposób pojawia się tu ważna kategoria takich przybliżonych modeli hydrodynamicznych, których nieskomplikowana postać matematyczna uzyskiwana jest bez żadnych ograniczeń merytorycznych. Należą do niej przypadki ruchu cieczy w układach o bardzo regularnych kształtach, wywołane przez proste czynniki wymuszające, które można określić mianem **przypadków szczególnych**. Typowym zjawiskiem należącym do tej grupy jest przepływ Hagen-Poiseuille’a (rys. 4.1). Jeszcze lepszych przykładów dostarczą zagadnienia związane z zachowaniem się cieczy nieruchomej, opisywane w ramach **hydrostatyki** (rozdz. 5).

Tak więc możemy mówić o modelach uproszczonych formalnie:

- dokładnych fizycznie (opisujących rzeczywiste przypadki szczególne);
- uproszczonych fizycznie (uzyskiwanych wskutek odrzucenia tych członów równań, które uznajemy za mniej istotne od pozostałych członów).

Tę drugą grupę modeli można podzielić jeszcze na dwie kategorie:

- modele jednostkowe,
- modele ogólne.

Kategoria modeli nazwanych jednostkowymi obejmuje te przypadki, przy upraszczaniu których wykorzystano ich cechy indywidualne. Z natury rzeczy trudno jest dla nich sformułować jakieś uniwersalne prawidłowości. Często przy ich wyprowadzaniu pożyteczne jest stosowanie równań ruchu w postaci bezwymiarowej (rozdz. 19).

Inaczej rzecz się ma z kategorią modeli, w których uproszczenia fizyczne mają walor ogólny, „gatunkowy”. Celowe jest ich omawianie jako odrębnych narzędzi mechaniki płynów i hydrauliki. W dalszych rozdziałach tej książki przedstawione zostaną najważniejsze z nich (podrozdz. 10.2).

5. Hydrostatyka

5.1. Uwagi ogólne

Zadaniem hydrostatyki jest opis stanu płynu nieruchomego ($\mathbf{u} = 0$), przy czym podkreślmy, że chodzi tu o spoczynek względny, czyli odniesiony do przyjętego układu współrzędnych. Jest to uwaga oczywista, bowiem wszystkie płyny w otaczającej nas rzeczywistości poruszają się wraz z kulą ziemską. Taką samą sytuację obserwujemy w układach lokalnych, o mniejszej skali – przewożone koleją pojemniki z mlekiem, czy umieszczone w laboratoryjnej wirówce płyny ustrojowe także poruszają się względem swego otoczenia. Można więc powiedzieć, że naturalnym stanem dla płynów (jak i dla ciał stałych) jest ruch. Jednakże niejednokrotnie układ, w jakim ten płyn się znajduje, pozwala na wytworzenie się stanu jego względnego bezruchu.

Efekt taki można uzyskać tylko w warunkach ustalonych. Wynika to z postaci ogólnych równań ruchu (3.7) i (3.87). Mówią one, że jakkolwiek zmiana w czasie prędkości oraz/albo gęstości płynu musi zostać zrównoważona przez odpowiednią zmianę przynajmniej niektórych pozostałych członów tych równań. Oznacza to, że płyn zacznie się wtedy poruszać (nawet jeśli zmiany te będą niewielkie, skutkiem czego ruch taki będzie trudny do zaobserwowania).

Inaczej rzecz się ma w warunkach ustalonych, gdy czynniki wymuszające nie zmieniają się w czasie. Wytwarza się wtedy stabilna sytuacja, w której płyn nie porusza się względem granic układu. Takimi właśnie przypadkami zajmuje się **hydrostatyka**.

Dodajmy wszakże, iż w zagadnieniach technicznych niejednokrotnie pomija się ograniczone przemieszczenia cieczy, stosując dla nich relacje hydrostatyki jako modele uproszczone fizycznie. Przykładowo, woda w stawie rybnym, przemieszczająca się z niedużą prędkością pod wpływem łagodnego wiatru, może być traktowana jako nieruchoma, gdy obliczamy siłę, jaką wywiera ona na groblę piętrzącą staw. Jednakże w warunkach silnego wiatru, wywołującego intensywne falowanie, model taki byłby zbyt uproszczony.

5.2. Podstawowe równania

Podstawiając zasadniczy dla hydrostatyki warunek

$$\mathbf{u} = 0 \tag{5.1}$$

do równań ruchu (3.7) oraz (3.87), otrzymamy:

— równanie zachowania masy:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \tag{5.2}$$

— równanie zachowania pędu:

$$\rho \mathbf{f} - \text{grad } p = 0. \tag{5.3}$$

Z relacji (5.2) wynika, że w cieczy nieruchomej gęstość płynu nie może być funkcją czasu, choć może zmieniać się w przestrzeni, stosownie do wartości pozostałych zmiennych stanu (czyli ciśnienia i temperatury):

$$\rho = \rho(x, y, z) . \quad (5.4)$$

Wektorowe równanie (5.3), równoważne trzem relacjom skalarnym, jest zależnością o tyle nietypową, że zawiera tylko jedną niewiadomą (ciśnienie p), która jest zmienną skalarną. Jej wyznaczenie uwarunkowane jest jednak uprzednim ustaleniem równania stanu (podrozdz. 3.8), wiążącego gęstość z innymi zmiennymi stanu.

5.3. Ciśnienie hydrostatyczne

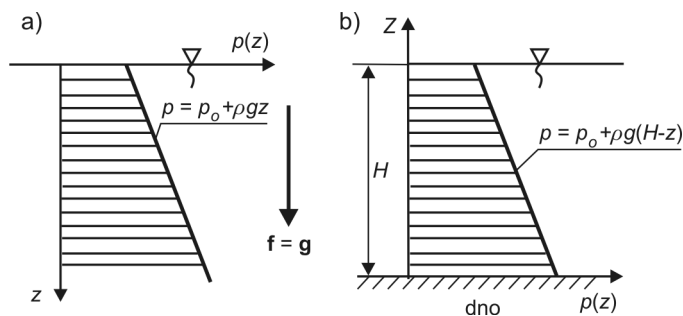
5.3.1. Płyny nieściśliwe

W najprostszym przypadku, gdy możemy przyjąć stałość gęstości płynu (3.70), a pole sił masowych określone jest przez grawitację ziemską, równanie (5.30) przyjmuje szczególnie prostą postać:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 , \quad (5.4a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 , \quad (5.4b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g . \quad (5.4c)$$



Rys. 5.1. Hydrostatyczny rozkład ciśnienia w polu grawitacji ziemskiej

Z (5.4ab) wynika, że ciśnienie nie jest w tym przypadku funkcją zmiennych x ani y (których osie przebiegają poziomo):

$$p \neq p(x, y) . \quad (5.5)$$

Jednokrotne całkowanie (5.4c) daje:

$$p = \rho g z + C . \quad (5.6)$$

Wykorzystując oczywisty warunek brzegowy (rys. 5.1a):

$$\text{dla } z = 0 \text{ zachodzi } p = p_a, \text{ skąd } C = p_a, \quad (5.7)$$

otrzymujemy:

$$p = p_a + \rho g z . \quad (5.8)$$

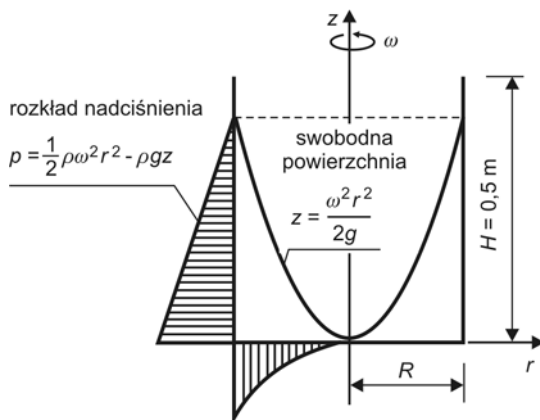
Rezultat ten można nazwać fundamentalną relacją hydrostatyki. Mówi on, że **rozkład ciśnienia w polu grawitacyjnym jest liniową funkcją zmiennej pionowej**, a nie zależy od zmiennych poziomych (w tym przypadku x oraz y).

Wypunktowane w poprzednim akapicie stwierdzenie ma charakter uniwersalny, gdyż jego treść nie zależy od usytuowania układu współrzędnych. Przykładowo, jeśli pionową oś $0z$ zorientujemy ku górze, jak to często czynimy w układach o ograniczonej głębokości (rys. 5.1b), to otrzymamy:

$$p = p_a + \rho g (H - z) . \quad (5.9)$$

Wyrażenie to pod względem formalnym różni się od (5.8), lecz opisuje taki sam liniowy („trapezowy”) rozkład ciśnienia.

Przyspieszenie ziemskie jest dominującym czynnikiem, określającym jednostkową siłę masową (pkt 1.3.6.2), jednakże w technice mamy niekiedy do czynienia z obiektami poruszającymi się ruchem niejednostajnym. Jeżeli z takim obiektem zwiążemy układ współrzędnych, to jego przyspieszenie musimy dodać do wektora przyspieszenia ziemskiego (mamy wtedy do czynienia z nieinercjalnym układem odniesienia [39]). Dobrym przykładem takiej sytuacji jest ciecz, znajdująca się w naczyniu wirującym wokół swej pionowej osi (rys. 5.2).



Rys. 5.2. Rozkład ciśnienia w cieczy, znajdującej się w wirującym zbiorniku

Jednostkowa siła masowa ma wtedy postać (w cylindrycznym układzie współrzędnych r, φ, z):

$$\mathbf{f} = \omega^2 r \mathbf{i} - g \mathbf{k} . \quad (5.10)$$

Podstawiając tę relację do (5.3) i mnożąc wynik obustronnie przez wektor:

$$d\mathbf{r} = [dr, r d\varphi, dz] , \quad (5.11)$$

otrzymamy [3]:

$$\text{grad } p \, d\mathbf{r} = dp = \rho \omega^2 r dr - \rho g dz . \quad (5.12)$$

Jest to dogodny zapis, umożliwiający rozwiązanie wektorowej zależności (5.3), bez konieczności analizowania jej poszczególnych składowych skalarnych, jak to zostało zrobione przy otrzymaniu relacji (5.8). Całkując obustronnie (5.12), otrzymujemy:

$$p = \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z + C . \quad (5.13)$$

Jak widać, w rozważanym przypadku rozkład ciśnienia pozostaje liniowy względem pionu, lecz zmienia się parabolicznie z odległością od osi obrotu. Dla wyznaczenia stałej całkowania C musimy znać ciśnienie w jednym punkcie cieczy. Ze względu na zależność kształtu swobodnej powierzchni od indywidualnej charakterystyki układu (rozmiary naczynia, jego prędkość kątowna oraz objętość cieczy), mamy tu różne możliwości. Jeżeli przykładowo przyjmiemy, że dolny punkt swobodnego zwierciadła cieczy jest styczny do dna naczynia (rys. 5.2), wtedy mamy:

$$p = p_a \text{ dla } r = 0 \text{ oraz } z = 0, \text{ skąd } C = p_a \quad (5.14)$$

i ostatecznie:

$$p = p_a + \frac{1}{2} \rho \omega^2 r^2 - \rho g z. \quad (5.15)$$

5.3.2. Płyny ściśliwe

Aby rozwiązać (5.3) dla płynu o zmiennej gęstości, należy tę relację uzupełnić odpowiednim równaniem stanu. W przypadku płynu podlegającego prawu stanu gazu doskonałego (3.71), który znajduje się w polu grawitacji ziemskiej i w stałej temperaturze T_o , zamiast (5.4c) otrzymujemy:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{p g}{R T_o}, \quad (5.16)$$

skąd (gdy $p = p_o$ dla $z = 0$):

$$p = p_o \exp(-g z / R T_o). \quad (5.17)$$

Gdy z kolei wykorzystamy równanie izentropii (3.73), zamiast (5.4c) mamy:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_o g \left(\frac{p}{p_o} \right)^{1/\kappa}. \quad (5.18)$$

Całkując tę relację z takim samym warunkiem brzegowym, dostajemy:

$$p = \left(p_o + \frac{\kappa-1}{\kappa} \rho_o g z \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} p_o^{\frac{1}{1-\kappa}}. \quad (5.19)$$

5.4. Napór hydrostatyczny

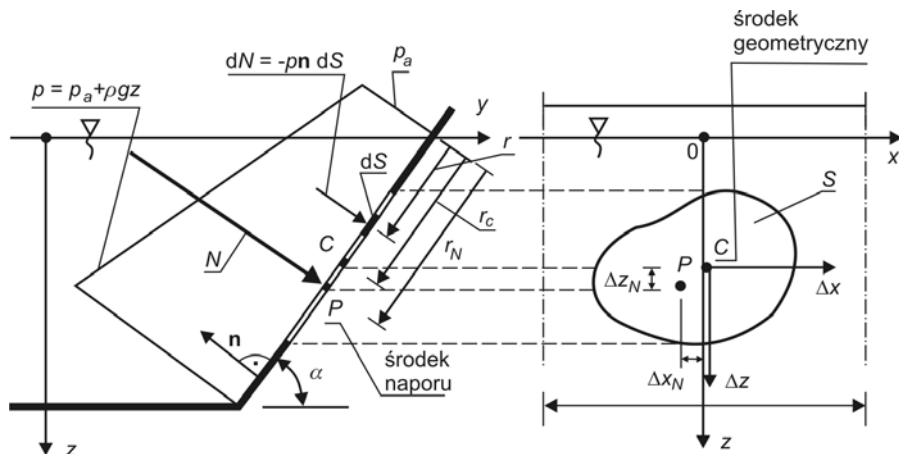
Zgodnie z (1.23), ciśnienie hydrostatyczne jest modułem naprężenia normalnego w cieczy nieruchomej. Tym samym efektem działania określonego rozkładu ciśnienia na powierzchnię S będzie pewna siła powierzchniowa (1.20), nazywana **naporem hydrostatycznym \mathbf{N}** :

$$\mathbf{N} = - \int_S p \mathbf{n} \, dS. \quad (5.20)$$

Możliwość obliczenia tej siły uwarunkowana jest znajomością rozkładu ciśnienia oraz kształtu powierzchni S . W zagadnieniach inżynierii środowiska najczęściej mamy do czynienia z liniowym rozkładem ciśnienia (5.8), zaś możliwe konfiguracje powierzchni S dogodnie jest podzielić na trzy kategorie – ścianki **płaskie**, ścianki **walcowe**, **których tworzące usytuowane są poziomo**, oraz ścianki **przestrzenne** (tworzące powierzchnie trójwymiarowe).

Dla pierwszej z nich wektor jednostkowy normalny \mathbf{n} ma w każdym punkcie taki sam kierunek, co wobec (5.8) pozwala na obliczenie całki (5.20) dla dowolnego kształtu S . Mamy tu bowiem (rys. 5.3):

$$\mathbf{N} = -\mathbf{n} \int_S (p_a + \rho g z) dS = -\mathbf{n} \left[p_a S - \rho g \int_S z dS \right]. \quad (5.21)$$



Rys. 5.3. Napór hydrostatyczny na ściankę płaską

Jak widać, siła naporu jest prostopadła do ścianki, a jej zwrot – skierowany ku ściance. Przywołując znaną z mechaniki ogólną definicję położenia środka ciężkości powierzchni S :

$$z_C = \frac{1}{S} \int_S z dS, \quad (5.22)$$

możemy następująco wyrazić moduł siły naporu:

$$N = (p_a + \rho g r_C \sin \alpha) S. \quad (5.23)$$

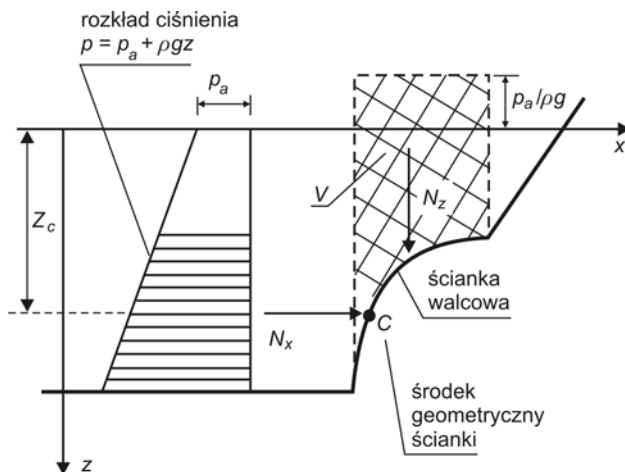
Jest on więc równy ciśnieniu w środku geometrycznym ścianki, pomnożonemu przez pole jej powierzchni.

Nieco bardziej złożona jest sytuacja ze ścianką walcową (rys. 5.4). Jednakże i w tym przypadku otrzymuje się ogólną relację algebraiczną, bardzo przydatną w praktyce inżynierskiej. Składowe wektora \mathbf{n} możemy tu wyrazić przez trygonometryczne funkcje kąta, jaki styczna do powierzchni S tworzy z osią Oz :

$$\mathbf{n} = -\cos \alpha \mathbf{i} - \sin \alpha \mathbf{k} \quad (5.24)$$

Podstawiając tę zależność wraz z (5.8) do (5.20), a następnie wykonując możliwe przekształcenia i uwzględniając (5.22), otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N} &= \int_S (p_a + \rho g z) (\cos \alpha \mathbf{i} + \sin \alpha \mathbf{k}) dS = \mathbf{i} \left[p_a \int_S \cos \alpha dS + \rho g \int_S z \cos \alpha dS \right] + \\
 &+ \mathbf{k} \left[p_a \int_S \sin \alpha dS + \rho g \int_S z \sin \alpha dS \right] = \mathbf{i} \left[p_a \int_S dS_z + \rho g \int_S z dS_z \right] + \\
 &+ \mathbf{k} \left[p_a \int_S dS_x + \rho g \int_S z dS_x \right] = (p_a + \rho g z_C) S_z \mathbf{i} + (p_a S_x + \rho g V) \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{5.25}$$



Rys. 5.4. Napór hydrostatyczny na ściankę walcową

Symbole S_z i S_x oznaczają tu rzuty powierzchni S odpowiednio na płaszczyzny prostopadłe do osi $0x$ i $0z$, z_C jest zagłębieniem środka ciężkości rzutu S_z , zaś V – objętością cieczy, usytuowaną ponad ścianką S .

Relacja (5.25) oznacza, że:

- składowa pozioma N_x siły naporu \mathbf{N} jest w rozważanym przypadku równa sile naporu obliczanej jak dla pionowego rzutu S_z ścianki S ;
- składowa pionowa N_z siły naporu \mathbf{N} jest równa ciężarowi cieczy „podpartej” przez ściankę S , z uwzględnieniem wpływu ciśnienia zewnętrznego.

Zauważmy, że w obu rozważonych przypadkach – (5.23) i (5.25) – wartość siły naporu zależy tylko od usytuowania powierzchni S , a nie zależy od położenia pozostałych ścianek zbiornika, w którym znajduje się ciecz. Efekt ten nosi nazwę **paradoksu hydrostatycznego**.

Jeśli chodzi o trzecią z wymienionych kategorii ścianek (utworzoną przez powierzchnię trójwymiarową), to w tym przypadku nie udało się uzyskać ogólnego rozwiązania, analogicznego do (5.25). Każdorazowo należy tu obliczać wartość całki (5.20), uprzednio określwszy indywidualny kształt ścianki.

5.5. Punkt przyłożenia naporu hydrostatycznego

Omówione w poprzednich podrozdziałach procedury pozwalają na wyznaczenie modułu i kierunku wypadkowej siły naporu. Pozostaje nam jeszcze określić punkt przyłożenia tego wektora. W mechanice wykorzystuje się w tym celu podwójną możliwość obliczenia **momentu siły** (w interesującym nas przypadku – momentu siły naporu). Z jednej strony możemy tę wartość zdefiniować jako sumę (całkę) elementarnych sił naporu, z których każda działa w innym punkcie powierzchni S . Wyznaczając położenie każdego z tych punktów przez wektor wodzący \mathbf{r} , możemy napisać (rys. 5.3):

$$\mathbf{L} = \int_S d\mathbf{L} = - \int_S (\mathbf{r} \times p\mathbf{n}) dS . \quad (5.26)$$

Całkę tę potrafimy obliczyć, znając rozkład ciśnienia (na przykład zgodnie z (5.8)) oraz kształt powierzchni S .

Z drugiej strony, moment \mathbf{L} możemy wyrazić przez iloczyn wektorowy omówionej już wartości siły naporu \mathbf{N} (5.20) oraz poszukiwanego wektora **ramienia siły naporu** \mathbf{r}_N , pisząc:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_N \times \mathbf{N} . \quad (5.27)$$

Porównując obie ostatnie zależności, otrzymamy równanie wektorowe z niewiadomą \mathbf{r}_N :

$$\mathbf{r}_N \times \mathbf{N} = - \int_S (\mathbf{r} \times p\mathbf{n}) dS . \quad (5.28)$$

W ogólnym przypadku wyznaczenie **położenia środka naporu** (danego wektorem \mathbf{r}_N) wymaga wykonania indywidualnych obliczeń. Jednakże w szczególnie ważnym praktycznie przypadku ścianki płaskiej możemy otrzymać proste zależności o dużym znaczeniu praktycznym.

Aby je uzyskać, rozważmy sytuację jak na rys. 5.3, przy czym uwzględnijmy tylko nadciśnienie (bowiem w przypadkach ważnych technicznie na odwodną stronę ścianki z reguły działa ciśnienie atmosferyczne). Składowa momentu siły naporu N_x (wzdłuż osi Ox), obliczona względem punktu 0 jest równa:

$$L_x = r_N N = \rho g r_C \sin \alpha (r_C + \Delta z_N) S . \quad (5.29)$$

Z kolei, zgodnie z (5.28), mamy tu:

$$L_x = \int_S \rho g (r_C + \Delta z)^2 \sin \alpha dS , \quad (5.30)$$

gdzie Δz jest lokalną zmienną, wskazującą na oddalenie kolejnych punktów powierzchni S od jej środka geometrycznego. Porównując dwie ostatnie relacje i wykonując oczywiste działania, otrzymamy:

$$r_C \Delta z_N S = 2 r_C \int_S \Delta z dS + \int_S \Delta z^2 dS . \quad (5.31)$$

Pierwsza z całek po prawej stronie tej równości jest momentem statycznym powierzchni S , obliczonym względem osi przechodzącej przez środek ciężkości tego pola, toteż jest równa zero. Z kolei druga z tych całek jest **momentem bezwładności** powierzchni S , obliczonym względem jej środka ciężkości. Pozwala to napisać, że:

$$\int_S \Delta z^2 dS = I_x \quad (5.32)$$

i następnie:

$$\Delta z_N = \frac{I_x}{r_C S} . \quad (5.33)$$

W ten sposób wyznaczyliśmy przesunięcie środka naporu P względem środka ciężkości C powierzchni S . Jak widać ($\Delta z_N > 0$), punkt P leży poniżej punktu C (a tylko dla powierzchni poziomych oba punkty pokrywają się).

Jeżeli chodzi o poziome odchylenie punktu P względem punktu C (wartość Δx_N na rys. 5.3), to wyznaczymy je, obliczając składową momentu \mathbf{L} względem osi Oz . Mamy wtedy:

$$\rho g r_C \sin \alpha \Delta x_N S = \rho g \int_S (r_C + \Delta z) \sin \alpha \Delta x \, dS . \quad (5.34)$$

Po wykonaniu działań otrzymujemy:

$$\Delta x_N = \frac{I_{xy}}{r_C S} , \quad (5.35)$$

gdzie:

$$I_{xy} = \int_S \Delta z \Delta x \, dS . \quad (5.36)$$

Jest **momentem odśrodkowym** powierzchni S względem osi przechodzącej przez jej środek ciężkości.

W przypadku powierzchni o złożonych kształtach, niezbędne do wyznaczenia położenia środka naporu wartości I_x oraz I_{xy} należy obliczyć, zgodnie z relacjami (5.32) i (5.36). Jednak dla figur regularnych są to wielkości opisane prostymi wzorami. Przykładowo, dla prostokąta o wysokości H mamy:

$$I_x = \frac{BH^3}{12} , \quad (5.37)$$

zaś dla trójkąta o wysokości H i podstawie B zachodzi:

$$I_x = \frac{BH^3}{36} . \quad (5.38)$$

5.6. Wypór hydrostatyczny

W szczególnym przypadku, gdy powierzchnia S ma charakter trójwymiarowej i zamkniętej struktury geometrycznej (czyli stanowi zewnętrzną powierzchnię ciała o objętości V , zanurzonego w płynie – całkowicie lub częściowo), możemy relację (5.20) przekształcić, korzystając z twierdzenia Gaussa [3], [68]. Otrzymamy wtedy:

$$\mathbf{W} = - \int_V \text{grad } p \, dV . \quad (5.39)$$

Wykorzystując równanie zachowania pędu dla cieczy nieruchomej (5.3), mamy:

$$\mathbf{W} = - \int_V \rho \mathbf{f} \, dV = - \rho g \mathbf{k} \int_V dV . \quad (5.40)$$

Czyli:

$$\mathbf{W} = - \rho g V \mathbf{k} = - \mathbf{G}_C . \quad (5.41)$$

Jest to znane **prawo Archimedesesa**. Mówi ono, że na ciało zanurzone w cieczy działa siła wyporu hydrostatycznego, równa co do wartości ciężarowi cieczy wypartej przez to ciało, a skierowana ku górze. Siła ta przechodzi przez środek ciężkości objętości płynu, zajmowanej przez bryłę V [38].

5.7. Pływanie ciał nieruchomych

Jak wynika z prawa Archimedesesa, siłę wyporu generuje tylko zanurzona część ciała. Jeżeli będziemy pogrążali w cieczy ciało o ciężarze G , to jego sytuacja docelowa (pomijamy tu etap wstępnego ruchu zanurzanego ciała, gdyż nie można go rozważać w ramach hydrostatyki, a ma on charakter przejściowy) wyniknie z relacji między maksymalną siłą wyporu W_{\max} (wyznaczoną dla całkowitej objętości ciała V), a wartością siły ciężkości G . Mamy trzy możliwe sytuacje, odnośnie do modułów tych sił:

- jeśli $W_{\max} > G$ – ciało zanurzy się częściowo, do momentu, gdy wypór objętości pogrążonej w cieczy V_Z zrównoważy jego ciężar:

$$\rho g V_Z = G \quad (5.42)$$

po czym będzie unosilo się na powierzchni cieczy;

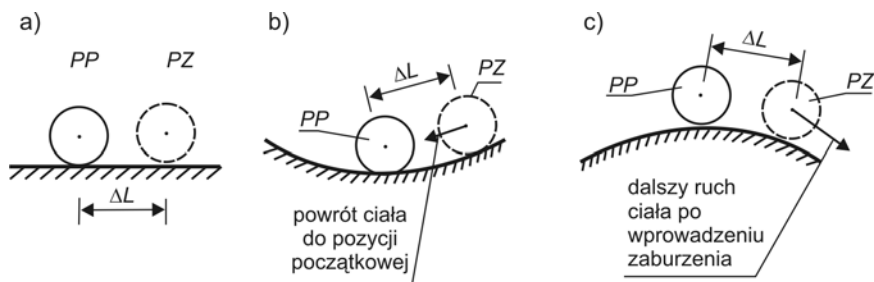
- jeśli $W_{\max} = G$ – ciało można umieścić w dowolnym miejscu cieczy, całkowicie zanurzone, a wobec równości działających na nie sił, będzie w tym miejscu pozostawało przez dowolnie długi okres czasu (przy założeniu, że nie zmienia się stan układu, na przykład jego temperatura);
- jeśli $W_{\max} < G$ – ciało będzie opadało w głąb cieczy tak długo, aż napotka na granicę obszaru (na przykład – dno zbiornika).

W technice szczególnie ważny jest pierwszy z tych przypadków, gdyż warunkuje możliwość funkcjonowania statków, okrętów i innych jednostek pływających (z którymi niekiedy mamy do czynienia także w budownictwie i inżynierii środowiska). Istotnym elementem jest tu kwestia zachowania przez taki obiekt **równowagi**.

W wielu dziedzinach nauki i techniki rozważamy stany ustalone, do których należy także bezruch ciała (w mechanice stanem tym zajmuje się **statyka**). W szczególności interesuje nas reakcja układu, znajdującego się w stanie ustalonym, na małe zaburzenie tego stanu. Wymóg niewielkiej wartości tego zaburzenia jest tu bardzo istotny. Jest bowiem tak, że terminem „**zaburzenia duże**” (niekiedy mówimy – **skończenie wielkie**) określamy czynnik, którego oczekiwanym skutkiem jest zmiana stanu układu. Natomiast termin **zaburzenie małe** (niekiedy mówimy – **nieskończenie małe**) określa czynniki o charakterze przypadkowym, mające ograniczoną wartość (na przykład chwilowy podmuch wiatru, falowanie, czy wstrząsy podłoża, wywołane przejeżdżającymi w pobliżu pojazdami), których występowanie nie powinno wywoływać istotnych zmian rozważanego układu.

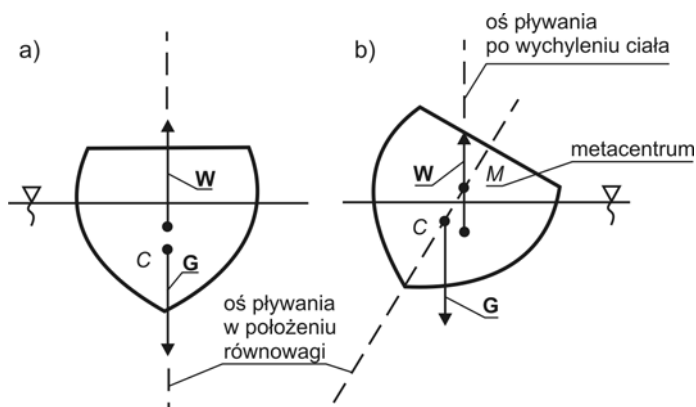
W klasycznym ujęciu wyróżnia się tu trzy przypadki, wiążąc je ze **stabilnością układu**:

- gdy wprowadzone zaburzenie utrzymuje się bez zmiany wartości, mamy do czynienia z **równowagą obojętną** (przykładem może tu być ciało kuliste, spoczywające na powierzchni poziomej; jego przesunięcie o wartość ΔL utrzymuje się do chwili zadziałania następnych czynników, wpływających na położenie ciała – rys. 5.5a);
- gdy wprowadzone zaburzenie zostaje przez układ samoczynnie stłumione, mamy do czynienia ze stanem **równowagi trwałej** (na przykład kula, umieszczona na powierzchni wklęsłej – rys. 5.5b);
- gdy wprowadzone zaburzenie powoduje radykalną zmianę stanu układu, mówimy o **równowadze chwiejnej** (na przykład kula, umieszczona na powierzchni wypukłej, która przemieszczona na małym dystansie ΔL zaczyna staczać się w dół pod działaniem siły ciężkości – rys. 5.5c).



Rys. 5.5. Ilustracja różnych stanów równowagi (a – obojętna, b – trwała, c – chwiejna; PP – położenie początkowe kuli; PZ – położenie kuli po wprowadzeniu zaburzenia)

Zagadnienie to jest szczególnie istotne ze względu na bezpieczeństwo jednostek pływających. Aby określić tu rodzaj równowagi, posługujemy się pojęciem **metacentrum**. Definiuje się je jako punkt przecięcia się linii działania siły wyporu (**osi pływania**) w położeniu równowagi z linią działania tej siły w położeniu odchylnym od stanu równowagi (punkt M na rys. 5.6b).



Rys. 5.6. Wyznaczanie metacentrum

Gdy metacentrum leży powyżej środka ciężkości ciała, mamy do czynienia z równowagą trwałą (moment siły ciężkości i siły wyporu będzie powodował powrót ciała do położenia pierwotnego). W przeciwnym razie uzyskamy niebezpieczny stan równowagi chwiejnej (moment sił będzie dążył do wywrócenia ciała). Gdy oba punkty pokrywają się ($C = M$), mamy do czynienia z równowagą obojętną.

W obiektach inżynierii sanitarnej elementy unoszące się na powierzchni cieczy znajdują zastosowanie na przykład w konstrukcji **zamknięć pływakowych**. Można tu napotkać różne rozwiązania. Ich wspólną zasadą działania jest blokowanie otworu odpływowego przez zespolony z pływakiem element zamykający w chwili, gdy swobodna powierzchnia cieczy znajduje się zbyt blisko przekroju odpływowego.

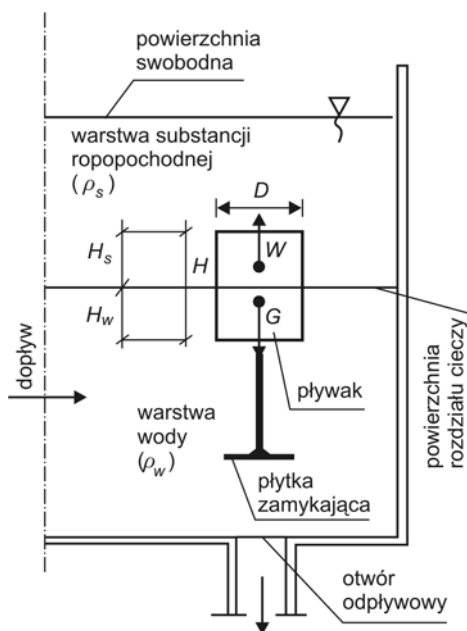
Jako ciekawy przykład zastosowania tej koncepcji posłużyć mogą zawory pływakowe, w jakie wyposaża się niektóre urządzenia do usuwania z cieczy (ze ścieków) rozproszonych substancji ropopochodnych, tłuszczów i innych składników, niemieszających się z nośnikiem (czyli **separatory**, przeznaczone do oczyszczania wód balastowych ze statków, wód opadowych, pochodzących z powierzchni drogowych i im podobnych cieczy zanieczyszczonych).

Grubość warstwy usuniętej substancji ropopochodnej rośnie z czasem, skutkiem czego powierzchnia międzyfazowa obniża się, zbliżając ku otworowi odpływowemu. Gdy odległość ta staje się zbyt mała, szkodliwe substancje mogą przedostać się do przewodu odpływowego. Może to grozić na przykład skażeniem odbiornika (rzeki, rowu...), do którego odprowadzane są oczyszczone ścieki.

Aby temu zapobiec (rys. 5.7), pływak zaworu musi unosić się na powierzchni międzyfazowej i wraz z nią przemieszczać ku dołowi, by w stosownym momencie zablokować otwór odpływy.

Punktem wyjścia do zaprojektowania takiego urządzenia jest wynikający z (5.42) bilans siły ciężkości G oraz siły wyporu W , przy czym ta ostatnia jest sumą trzech składowych (dla części pływak zanurzonej w oleju, dla pozostałej części pływak zanurzonej w wodzie oraz dla dodatkowych elementów zaworu):

$$SH_S \rho_s g + SH_W \rho_W g + V_P \rho_W g = G . \quad (5.43)$$



Rys. 5.7. Zasada działania zaworu pływakowego w układzie dwuwarstwowym

Dla pływak o kształcie walcowym mamy oczywiste zależności:

$$H = H_S + H_W , S = \pi D^2 / 4 . \quad (5.44)$$

Zwróćmy uwagę, że w trzech powyższych wyrażeniach występuje sześć niewiadomych. Jest to sytuacja bardzo typowa dla zagadnień technicznych. Przewaga liczby charakteryzujących obiekt wielkości nad liczbą informacji, wynikających z praw natury, powoduje, że przy rozwiązywaniu zadania (czego warunkiem jest dostarczenie brakującej liczby informacji) możemy wykorzystać czynniki pozatechniczne – przepisy, lokalne uwarunkowania i zwyczaje, jak też chęć nadania obiektowi niepowtarzalnego charakteru, nadając nietypowe wartości niektórym z tych parametrów).

Aby w przybliżeniu zorientować się w możliwościach wymiarowania pływak, pominiemy wypór elementów dodatkowych, a ciężar urządzenia wyrażmy przez jego zastępczą gęstość średnią ρ_z . Otrzymamy:

$$SH_S \rho_s g + SH_W \rho_W g = SH \rho_z g , \quad (5.45)$$

skąd:

$$\rho_Z = \frac{\rho_W H_W + \rho_S H_S}{H_W + H_S} . \quad (5.46)$$

Ta przybliżona relacja pozwala na przeanalizowanie różnych rozwiązań szczególnych. Łatwo zauważyć, że szczególnie korzystne będzie przyjęcie warunku $H_S = H_W$ (zanurzenie pływaka w połowie jego wysokości). Gęstość zastępcza zaworu musi być wtedy równa średniej arytmetycznej z gęstości obu cieczy:

$$\rho_Z = (\rho_W + \rho_S)/2 . \quad (5.47)$$

Rzecz oczywista, pływak zaprojektowany na podstawie zależności uproszczonych powinien być przed wykorzystaniem w praktyce poddany próbom laboratoryjnym.

6. Równanie Bernoulliego

6.1. Uwagi wstępne

Równanie Bernoulliego zajmuje poczesne miejsce wśród uproszczonych wersji ogólnych równań ruchu cieczy i gazów. **Formalnie jest ono szczególną całką równania Naviera-Stokesa** (3.87), przy czym w przypadku równań różniczkowych termin „całka” oznacza „rozwiązanie”. Za podstawową zaletę tej zależności należy uznać jej algebraiczną postać końcową. Walor ten doceni każdy, kto zapoznał się ze złożonością różniczkowych relacji matematycznych, ilościowo wyrażających prawa ruchu płynu.

Ogólnie rzecz biorąc, sprowadzanie równania ogólnego do którejś z jego szczególnych postaci jest pewną procedurą, polegającą na wprowadzaniu założeń upraszczających oraz wykonywaniu przekształceń, które są możliwe dzięki tym uproszczeniom. Im dokładniejsze jest takie wyprowadzenie, tym ogólniejszy jego rezultat. Warto podkreślić, że bardzo często kolejność wprowadzania założeń i wykonywania przekształceń może być różna. Z reguły jest to efektem poglądu autora opisu takiego wyprowadzenia na jego czytelność. Ważne jest tylko, aby wynik końcowy był poprawny. W dalszym ciągu tego rozdziału równanie Bernoulliego zostanie wyprowadzone w sposób zgodny z zasadą przyjętą w książce – by uzyskać możliwie ogólny wynik, stosując możliwie proste formy zapisu matematycznego.

6.2. Wyprowadzenie równania Bernoulliego

6.2.1. Założenia upraszczające

Przedstawiona dalej procedura odnosić się będzie do przypadku, który odgrywa największą rolę w zastosowaniach praktycznych. Określony on jest przez następujące warunki:

- 1) przepływ jest ustalony (niezmienny w czasie);
- 2) konfiguracja rozważanego układu przepływowego pozwala traktować go jako strumień podłużny (podrozd. 2.6);
- 3) przepływ odbywa się w polu sił masowych, określonym przez grawitację ziemską;
- 4) płyn jest (lub może być traktowany jako) nieściśliwy.

Pierwsze z tych założeń z pewnością ogranicza liczbę sytuacji, w których możemy zastosować równanie Bernoulliego. Nie jest to jednakże ograniczenie istotne, bowiem w praktyce inżynierskiej jako podstawowe schematy obliczeniowe rozważa się stany ustalone, określone przez miarodajne warunki przebiegu zjawiska. Przykładowo, projektując sieć wodociągową rozważamy pewne stany charakterystyczne (powiedzmy: przepływ średni, minimalny i maksymalny), dobrane stosownie do celów, jakim taki obiekt ma służyć. Gdy jednak zachodzi potrzeba opisu przepływu ewidentnie zmiennego w czasie, wykorzystujemy inne zależności (patrz podrozd. 11.5 oraz 13.6).

Jeśli chodzi o następny z podanych warunków, to możemy mówić o dwóch kategoriach zagadnień. Do pierwszej zaliczymy te, w których kształt strumienia jest określony

przez układ ścianek (głównie mamy do czynienia z przewodami zamkniętymi oraz korytami otwartymi), a więc gdy jego wyznaczenie nie sprawia trudności. Drugą kategorię tworzą takie układy, w których pobocznica strumienia nie jest znana z góry, a jej przebieg wyznaczamy, kierując się doświadczeniem oraz intuicją. Dodajmy, że w takich przypadkach posługujemy się strukturami o niedużym polu powierzchni przekroju poprzecznego, czyli **strugą** lub nawet **strumieniem elementarnym** (patrz podrozdz. 2.6). Takie podejście obniża dokładność obliczeń, ale w niektórych przypadkach otrzymany rezultat jest bardzo pożyteczny (patrz rozdz. 16, poświęcony otworom i przelewom).

Założenie trzecie akceptujemy bez specjalnych zastrzeżeń, gdyż w zastosowaniach rzeczywiście mamy do czynienia głównie z polem grawitacji ziemskiej.

W ujęciu bardziej ogólnym równanie Bernoulliego odnosi się do pól sił masowych, które nazywamy **potencjalnymi**. Oznacza to, że wektor jednostkowej siły masowej (1.15) jest określony przez gradient funkcji skalarnej, zwanej potencjałem siły masowej. Wektor przyspieszenia ziemskiego \mathbf{g} spełnia ten wymóg [38].

Ostatni z wyliczonych warunków, choć także ogranicza zakres ważności równania Bernoulliego, również możemy zaakceptować, gdyż relacja (3.70) odpowiada bardzo wielu zagadnieniom inżynierii środowiska. Przypadek zmiennej gęstości płynu omówimy osobno (patrz par. 6.2.8).

6.2.2. Równanie Bernoulliego dla strumienia cieczy rzeczywistej

Omówione w poprzednim paragrafie założenia pozwalają jako punkt wyjścia przyjąć różniczkowe równanie zachowania pędu w postaci (3.39). Zgodnie ze schematem na rys. 3.4 mamy:

$$\sin \beta = -\frac{dz_C}{dL}. \quad (6.1)$$

Dla czytelności przekształceń przyjmijmy, że obwód rozważanego strumienia jest jednorodny, co pozwala pozostawić tylko jeden człon w sumie, określającej wpływ naprężeń stycznych na pobocznicy strumienia. Stosunek przekroju poprzecznego S do jego obwodu zwilżonego C_z nazwijmy **promieniem hydraulicznym**:

$$R_H = S / C_z. \quad (6.2)$$

Uwzględniając założenia, wyliczone w poprzednim paragrafie, możemy następująco przepisać (3.39):

$$v_L \frac{d(\alpha v_L)}{dL} = -g \frac{dz_C}{dL} - \frac{d}{dL} \left(\frac{p}{\rho} \right) - \frac{\tau_S}{\rho R_H}. \quad (6.3)$$

Wykorzystując zasadę różniczkowania iloczynu oraz sumy funkcji, otrzymamy wyrażenie:

$$\frac{d}{dL} \left(\frac{\alpha v_L^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz_C \right) = -\frac{\tau_S}{\rho R_H}, \quad (6.4)$$

które bez trudu możemy scałkować wzdłuż strumienia, od jego przekroju 1., wybranego jako początkowy, do dowolnego następnego przekroju 2., co daje:

$$\left(\frac{\alpha v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_{C1} \right) - \left(\frac{\alpha v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_{C2} \right) = \int_1^2 \frac{\tau_S}{\rho R_H} dL. \quad (6.5)$$

Pojawiająca się tu suma trzech składników:

$$B = \frac{\alpha v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz_C \quad (6.6)$$

nosi nazwę **trójmianu Bernoulliego** i należy do najważniejszych (a także najbardziej rozpoznawalnych i charakterystycznych) wyrażeń mechaniki płynów i hydrauliki.

Ma ona bardzo czytelną oraz niesłychanie istotną (tak w ujęciu teoretycznym, jak i praktycznym) interpretację. Omówimy ją nieco dalej, zaś tutaj zwróćmy uwagę na fakt, że całka po prawej stronie (6.5) jest zawsze dodatnia. Oznacza to, że **wartość trójmianu Bernoulliego zawsze maleje wzdłuż strumienia**.

W ogólnym przypadku zarówno naprężenie na pobocznicy τ_s , jak i promień hydrauliczny R_H , mogą zmieniać się wzdłuż strumienia. Tym samym wyznaczenie różnicy trójmianów w (6.5) wymaga obliczenia całki, co zmniejsza atrakcyjność tej relacji. Na szczęście w praktyce technicznej dominują zagadnienia, w których naprężenie na pobocznicy:

- 1) jest praktycznie stałe (jak na przykład w rurociągach magistralnych o stałej średnicy);
- 2) jest stałe z dobrym przybliżeniem (jak na przykład w korytach rzecznych o regularnym kształcie);
- 3) zmienia się tylko na krótkich odcinkach, łączących dłuższe fragmenty strumienia (jak na przykład w rurociągach, składających się z odcinków o różnych średnicach, połączonych armaturą).

W takich sytuacjach całkę w (6.5) możemy zastąpić sumą, pisząc:

$$B_1 - B_2 = \sum_{i=1}^I \frac{\tau_{si}}{\rho R_{Hi}} L_i, \quad (6.7)$$

gdzie I oznacza liczbę różnych odcinków strumienia. W dalszym ciągu warunkiem wykorzystania tej relacji jest uprzednie wyznaczenie wielkości τ_s . Zajmiemy się tą kwestią po przedyskutowaniu fizycznego sensu trójmianu Bernoulliego.

6.2.3. Interpretacja trójmianu Bernoulliego

Pomnożmy obustronnie zależność (6.6) przez gęstość cieczy, pisząc (dla czytelności pominięto tu współczynnik de Saint-Venanta):

$$\rho B = E = \frac{\rho v^2}{2} + p + \rho g z_C. \quad (6.8)$$

To proste przekształcenie sprowadza trójmian do **postaci energetycznej**. Termin ten ma na celu podkreślenie faktu, że każdy z trzech jego członów opisuje jedną ze składowych **całkowitej energii mechanicznej płynu, odniesionej do jednostki objętości substancji**. Kolejno mamy tu:

- energię kinetyczną,
- energię potencjalną:
 - ciśnienia,
 - położenia.

W świetle (6.7) możemy więc powiedzieć, że **całkowita energia mechaniczna płynu maleje wzdłuż strumienia**. Miarą tej zmiany jest wyrażenie po prawej stronie (6.7), opisujące czynnik roboczo określany mianem **straty energii** (oczywiście – **mechanicznej**).

Niezależnie od zmniejszania się całkowitej energii mechanicznej strumienia (która ulega przemianom w energię cieplną, w procesie **dyssypacji energii** – patrz par. 3.6.3), poszczególne jej formy mogą przechodzić w inne. Ze względu na liczbę członów trójmianu, można się tu spodziewać kilku różnych kombinacji. Do celów praktycznych warto zapamiętać zasadę ważną dla przypadku szczególnego, jakim jest strumień poziomy (gdy $z_C = \text{const.}$): **gdy rośnie prędkość, wtedy spada ciśnienie; przy spadku prędkości obserwujemy wzrost ciśnienia.**

Druga z ważnych interpretacji trójmianu Bernoulliego ma charakter geometryczny. Celem jej wykazania podzielmy obie strony (6.8) przez iloczyn gęstości płynu i przyspieszenia ziemskiego, co daje:

$$B/g = E/\rho g = H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z_C. \quad (6.9)$$

Tym razem człony analizowanego wyrażenia mają wymiar liniowy, toteż zależność (6.9) nazywamy **postacią wysokościową** trójmianu Bernoulliego. Najbardziej oczywisty z tych członów (z_C) nosi miano **wysokości położenia** (H_z), bowiem określa wzniesienie środka geometrycznego rozważanego przekroju strumienia nad poziomą płaszczyzną układu współrzędnych (rys. 3.4).

Sens środkowego składnika sumy (6.9) ujawnia znana z hydrostatyki relacja, opisująca rozkład ciśnienia w nieruchomej cieczy, znajdującej się w polu ciężkości. Zgodnie z (5.8) możemy powiedzieć, że:

$$H_p = p/\rho g \quad (6.10)$$

jest zastępczą grubością warstwy cieczy nieruchomej, która wywołuje takie samo ciśnienie, jakie panuje w rozważanym punkcie strumienia. Wielkość tę nazywamy **wysokością ciśnienia**.

Trzeci składnik trójmianu zinterpretujmy odwołując się do znanego z kursu fizyki **wzoru Torricellego**, zgodnie z którym prędkość wypływu cieczy pozbawionej lepkości przez mały otwór w ścianie naczynia jest równa:

$$v_s = \sqrt{2gh_s}, \quad (6.11)$$

gdzie h_s jest grubością warstwy tej cieczy, znajdującej się ponad osią otworu (dokładne wyprowadzenie tego wzoru – patrz par. 16.3.2). Proste przekształcenie (6.11) pozwala stwierdzić, że:

$$H_v = h_s = v^2 / 2g, \quad (6.12)$$

zwana **wysokością prędkości**, jest zastępczą grubością warstwy cieczy, która wywołuje taką samą prędkość wypływu przez otwór, jaka panuje w rozważanym punkcie strumienia.

Tak więc możemy powiedzieć, że trójmian Bernoulliego **stanowi sumę trzech wysokości: prędkości H_v , ciśnienia H_p oraz położenia H_z .** W trakcie ruchu płynu mogą one ulegać wzajemnym przemianom, co odpowiada przemianom poszczególnych form energii mechanicznej między sobą. Ich suma maleje wzdłuż strumienia. Z tego względu różnicę wartości trójmianu między dwoma przekrojami strumienia nazywamy **całkowitzą wysokością straty energii**:

$$H_1 - H_2 = \sum H_{\text{str}}. \quad (6.13)$$

6.2.4. Linia ciśnienia i linia energii

Wyrażenia tworzące trójmian Bernoulliego odnoszą się do każdego przekroju strumienia, toteż ich wartości są funkcjami zmiennej L , określonej wzdłuż jego osi (rys. 3.2). W praktyce wygodnie jest posłużyć się rozwinięciem rzutu tej osi na poziomą płaszczyznę xOy (rys. 6.1), zwaną **poziomem porównawczym** (na rysunkach symbolicznie oznaczanym literami pp). Dodajmy, że gdy przewód przebiega pionowo, wtedy posługujemy się jego kładem, poprzecznym w stosunku do poziomu porównawczego (rys. 6.6). Oznaczmy tę zmienną biejącą symbolem s i zdefiniujmy następujące ważne pojęcia:

— **linię położenia**, która jest wykresem funkcji:

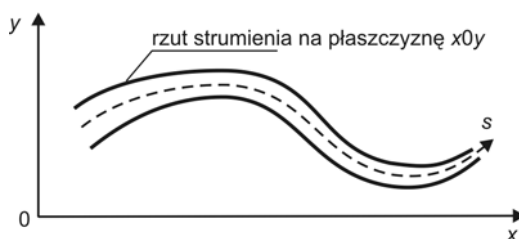
$$z_c(s) = z_C(s) = H_z; \quad (6.14)$$

— **linię ciśnienia**, będącą wykresem funkcji:

$$z_p(s) = \frac{p(s)}{\rho g} + z_C(s) = H_p + H_z; \quad (6.15)$$

— **linię energii**, której przebieg określa wartość całego trójmianu Bernoulliego:

$$z_e(s) = \frac{v^2(s)}{2g} + \frac{p(s)}{\rho g} + z_C(s) = H_v + H_p + H_z. \quad (6.16)$$



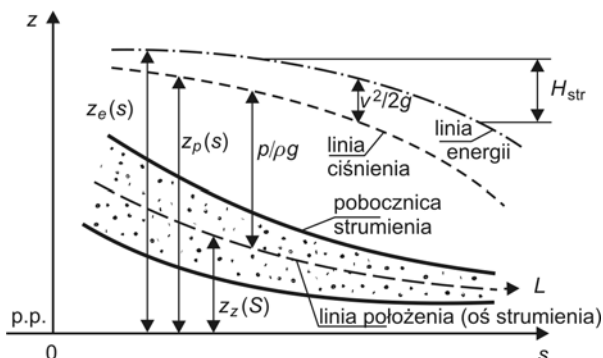
Rys. 6.1. Określenie zmiennej biejącej s dla strumienia

Linie te, będące wykresami trzech funkcji, zdefiniowanych przez trzy ostatnie relacje, są podstawą niesłychanie ważnej i pogłądowej geometrycznej interpretacji równania Bernoulliego.

Przebieg **linii położenia**, wyznaczony przez rzeczywiście istniejącą oś strumienia, określa jego konfigurację względem kierunku pionowego, opisując ten kształt w sensie wręcz technicznym.

Pozostałe dwie linie nie mają charakteru materialnego, lecz **linię ciśnienia** można uwidocznic w bardzo plastyczny i pożyteczny sposób, korzystając z podanej już interpretacji **wysokości ciśnienia** (6.10). W tym celu w pobocznicy strumienia należy umocować ciekłą rurkę, skierowaną ku górze (najlepiej pionowo). Jeżeli ciśnienie p w punkcie jej przyłączenia będzie wyższe od zewnętrznego (w szczególności – od atmosferycznego), a tak jest najczęściej, to zostanie ona zapełniona płynącą cieczą do poziomu h_p , który zgodnie z zasadami hydrostatyki (w zapełnionej rurce ciecz nie będzie się przemieszczać, gdyż ciśnienie po obu stronach jej wlotu będzie jednakowe) zapewni zrównoważenie ciśnienia w rozważanym punkcie, zgodnie z relacją:

$$p = p_{\text{atm}} + \rho g h_p. \quad (6.17)$$

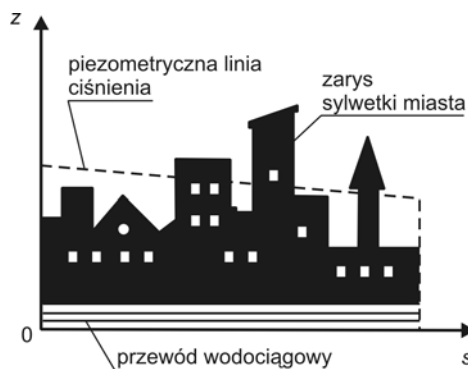


Rys. 6.2. Geometryczna interpretacja równania Bernoulliego

Skonstruowana w opisany sposób rurka może być wykorzystywana jako przyrząd do pomiaru ciśnienia (choć ze względu na dużą podatność na uszkodzenia, głównie w warunkach laboratoryjnych), zwany **piezometrem**. Wstawiając zaś do strumienia kilka przezroczystych piezometrów uzyskamy wizualizację funkcji (6.15), przy czym wobec (6.17) będzie ona obniżona względem rzeczywistej linii ciśnienia o wysokość ciśnienia atmosferycznego:

$$H_{pa} = p_{atm} / \rho g \approx 10 \text{ m H}_2\text{O} , \quad (6.18)$$

toteż nosi nazwę **piezometrycznej linii ciśnienia**.



Rys. 6.3. Techniczne znaczenie piezometrycznej linii ciśnienia

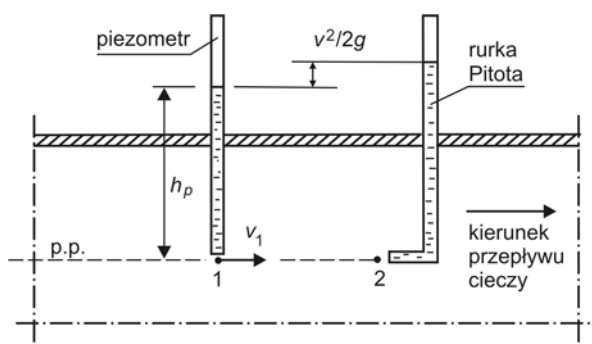
W praktyce technicznej opisaną interpretację można odnieść do elementów sieci wodociągowej. Rolę strumienia pełni tu przewód uliczny, dostarczający wodę, zaś rolę piezometrów – przyłącza i piony instalacji wodociągowej. Zgodnie z przedstawionym rozumowaniem, woda w tych pionach może wznieść się tylko do poziomu piezometrycznej linii ciśnienia. Porównując jej przebieg z profilem wysokościowej zabudowy miasta, możemy ocenić możliwości zaopatrzenia w wodę okolicznych budynków (rys. 6.3).

Ostatni z omawianych wykresów, czyli **linia energii**, wzniesiony jest ponad linię ciśnienia o wysokość prędkości (6.12). Zwróćmy uwagę, że linie te zbliżają się do siebie gdy prędkość płynu maleje, a oddalają ze wzrostem tej prędkości, co w czytelny sposób informuje nas o charakterze przepływu. Spadek linii energii jest proporcjonalny do intensywności strat energii (6.13).

Podobnie jak w przypadku linii ciśnienia, istnieje możliwość wizualizacji także linii energii. Aby uzyskać pożądany efekt, wstawmy do strumienia pionową cienką rurkę, zagiętą pod kątem prostym, usytuowaną jak na rys. 6.4. Rurka zostanie zalana cieczą w wyniku działania nadciśnienia ($p - p_{\text{atm}}$), a dodatkowo także w wyniku zamiany kinetycznej energii cieczy na energię potencjalną, co opisuje w tym przypadku równanie Bernoulliego dla punktów 1–2:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{p_2}{\rho g} \quad (6.19)$$

(dla prostoty zapisu pominięto tu straty energii). Oznacza to, że różnica wzniesień cieczy w rurce zagiętej oraz w rurce prostej (którą można ustawić obok – rys. 6.4) jest w przybliżeniu (wynikającym z pominięcia strat energii) równa wysokości prędkości.



Rys. 6.4. Zasada działania rurki Pitota i rurki Prandtla

Ta interpretacja stanowi podstawę teoretyczną dla skonstruowania prostego, lecz bardzo pożytecznego, przyrządu do pomiaru prędkości. Pojedyncza rurka, wygięta pod kątem prostym, nosi nazwę **rurki Pitota**, zaś zestawiona z piezometrem – **rurki Prandtla** (pomiaru hydrauliczne – patrz rozdz. 20).

6.2.5. Wyznaczanie strat energii

Obliczenie różnicy wartości trójmianu Bernoulliego między dwoma przekrojami strumienia (1 oraz 2), odległymi o odcinek L , zgodnie z (6.5) jest uwarunkowane znajomością naprężenia stycznego na poboczniczy tego strumienia (wartość τ_s). Jego określenie jest z kolei możliwe tylko wtedy, gdy znany jest profil prędkości strumienia w każdym przekroju, co wynika z (3.85).

Wśród nielicznych rozwiązań równań ruchu, które można w tym celu wykorzystać, poczesne miejsce zajmuje **rozwiązanie Hagen-Poiseuille'a**, dane relacją (4.19). Podstawiając tę zależność do (3.85), otrzymamy:

$$\tau_s = \frac{\Delta p D}{4L} \quad (6.20)$$

(symboliczna zmienna poprzeczna N , użyta w (3.85), dla układu cylindrycznego staje się promieniem r – rys. 4.6).

Spadek ciśnienia Δp , występujący na odcinku przewodu o długości L , wygodnie jest zastąpić przez technicznie wygodniejszą wielkość, a mianowicie przez prędkość średnią v . Otrzymamy ją całkując rozkład (4.19) względem przekroju poprzecznego strumienia S , zgodnie z (2.34), co daje:

$$v = \frac{1}{S} \int_S \frac{\Delta p (R^2 - r^2)}{4\mu L} dS = \frac{\Delta p R^2}{8\mu L}, \quad (6.21)$$

skąd:

$$\Delta p = \frac{8\mu L v}{R^2}. \quad (6.22)$$

Po podstawieniu tej relacji do (6.20) otrzymamy:

$$\tau_s = \frac{8\mu v}{D}, \quad (6.23)$$

a wykorzystując (6.50 i (6.13) możemy napisać, że:

$$H_{\text{str}} = \frac{32\mu L v}{\rho g D^2}. \quad (6.24)$$

Rezultat ten wykazuje dobrą zgodność z wynikami pomiarów, jednakże tylko w zakresie ważności rozwiązania (4.19). Niestety, z praktycznego punktu widzenia zakres ten jest bardzo ograniczony. Górną granicę, dla której relację (4.19) można uznać za potwierdzoną empirycznie, określa bezwymiarowa wielkość (bardzo powszechnie występująca w zagadnieniach hydromechaniki), zwana **liczbą Reynoldsa** Re . Zależność (6.24) można więc stosować wtedy, gdy:

$$Re = v D / \nu \leq Re_c. \quad (6.25)$$

Dla rurociągów wartość Re_c przyjmuje się na poziomie:

$$Re_c = 2300. \quad (6.26)$$

Inne, technicznie ważniejsze, sposoby wyznaczania strat energii mechanicznej będą omawiane w kolejnych rozdziałach, stosownie do specyfiki prezentowanych zagadnień szczegółowych.

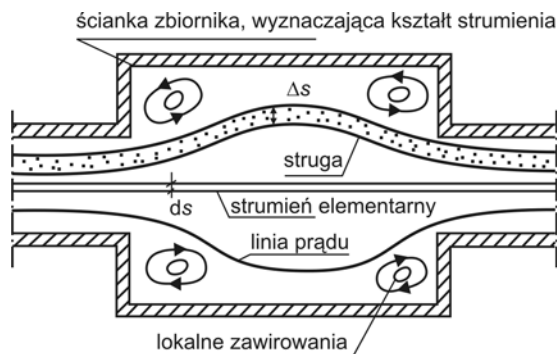
6.2.6. Równanie Bernoulliego dla strugi oraz dla linii prądu

W par. 6.2.1 wspomnieliśmy, że pojęcie strumienia wykorzystujemy w hydraulice najczęściej wtedy, gdy jego pobocznice wyznacza rzeczywistość istniejący brzeg (ścianka, granica). Dla takiej właśnie struktury przepływowej wyprowadziliśmy równanie Bernoulliego w postaci (6.5).

Jednakże nieraz mamy do czynienia z ruchem płynu w obszarze o złożonym kształcie, dla którego model strumienia byłby trudny do przyjęcia. Dobrym przykładem takiej złożoności może być przepływ przez prostokątny zbiornik. W pobliżu jego naroży często powstają lokalne wiry lub obszary o bardzo małej prędkości, zwane „martwymi strefami” (rys. 6.5). W takich sytuacjach niekiedy wygodnie jest podzielić rozważany obszar na **strugi** albo **strumienie elementarne** (podrozd. 2.6), lub nawet zobrazować pole prędkości wybranymi **liniami prądu** (podrozd. 2.2, rys. 6.5).

Każda z tych możliwości spełnia warunki i założenia, jakie przyjęliśmy przy wyprowadzaniu równania Bernoulliego, toteż możemy zastosować tę relację także do omawianych struktur, z bardzo niewielką korektą formy. Wynika ona z faktu, że zmniejszając pole powierzchni przekroju strumienia S (do ΔS lub dS , a nawet do zera w przypadku linii prądu) mamy do czynienia z coraz bardziej wyrównanym profilem prędkości, której wartość średnia v dąży do wartości rzeczywistej u (osiągając ją w punktach leżących na linii prądu). Tym samym współczynnik Saint-Venanta (3.25) dąży do jedności, co pozwala następująco zapisać **równanie Bernoulliego dla strugi** (oraz **strumienia elementarnego i linii prądu**):

$$\left(\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) = \sum H_{\text{str}}. \quad (6.27)$$



Rys. 6.5. Wewnętrzna struktura strumienia płynu

6.2.7. Równanie Bernoulliego dla cieczy nielepkiej

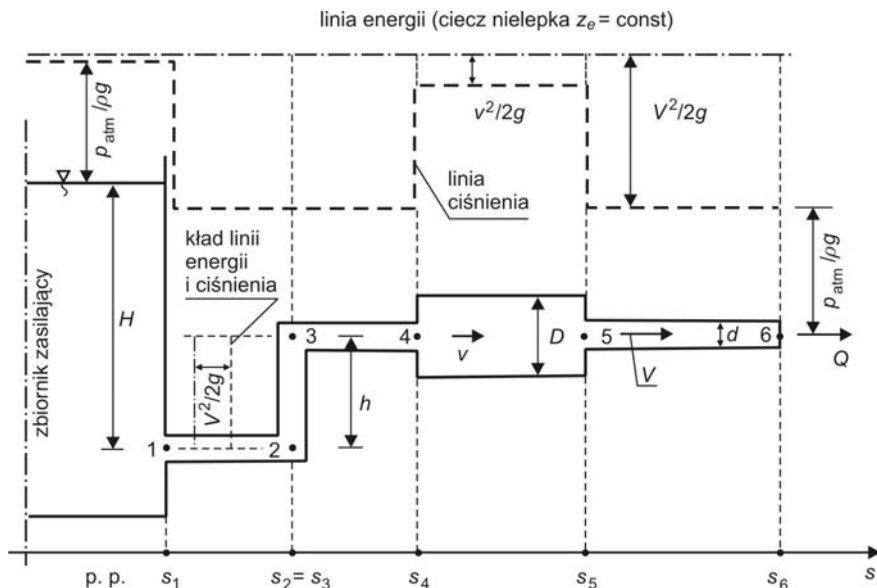
W par. 6.2.5 podkreślono trudności, jakie sprawia wyznaczenie różnicy wartości trójmianu Bernoulliego między dwoma przekrojami strumienia (a także między dwoma punktami linii prądu). Z formalnego punktu widzenia najprostszym oszacowaniem jest całkowite pominięcie w (6.5) wpływu naprężeń lepkich. Od strony fizycznej oznaczałoby to, że rozważamy **płyn nielepkki** (gdyż zgodnie z hipotezą Newtona (3.84) naprężenia styczne powstają w płynach wykazujących lepkość), czyli że pomijamy straty energii mechanicznej. W konsekwencji z relacji (6.5) wynikałoby, że w takim przypadku trójmian Bernoulliego jest stały wzdłuż strumienia (i odpowiednio strugi oraz linii prądu), czyli:

$$\frac{u_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{u_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2. \quad (6.28)$$

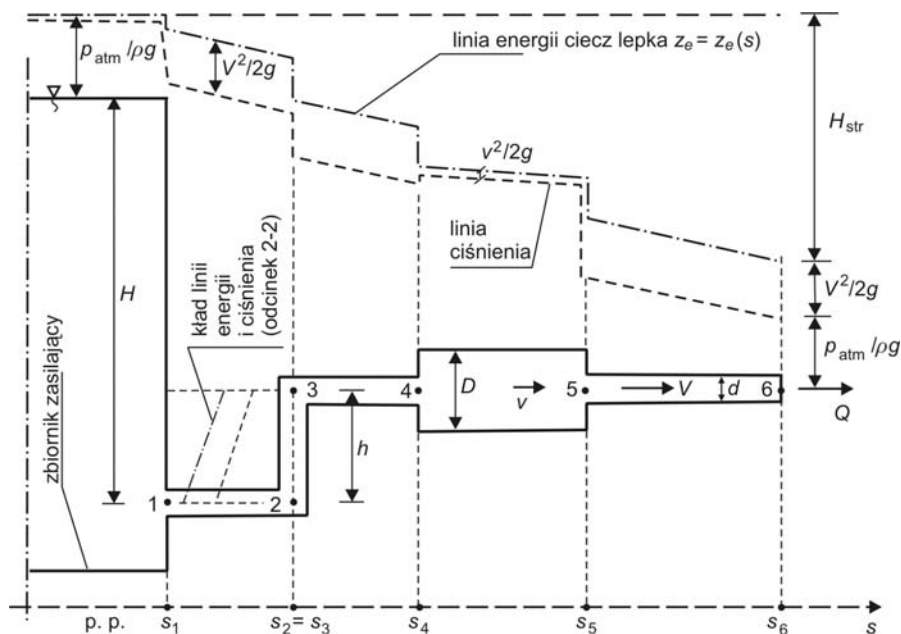
Jak łatwo przewidzieć, relacja ta nie znajduje potwierdzenia empirycznego, gdyż rzędne linii energii (i odpowiednio linii ciśnienia) dla płynów rzeczywistych maleją wzdłuż strumienia, i to w stopniu niedającym się pominąć.

Relacja (6.28) ma więc jedynie walor dydaktyczny, gdyż pozwala prześledzić wzajemne przemiany poszczególnych form energii mechanicznej (kinetycznej, potencjalnej ciśnienia oraz potencjalnej położenia). Dla technicznie ważnego przepływu w przewodzie kołowym obrazuje to rys. 6.6. Zgodnie z założeniem definiującym model strumienia podłużnego przyjęto tam, że wszelkie zmiany prędkości i ciśnienia zachodzą w sposób ciągły,

choć niekoniecznie łagodny. Tym samym bardzo mała (zerowa w ujęciu obliczeniowym) prędkość w zbiorniku zasilającym nagle wzrasta do wartości v w przewodzie (punkt 1), tak jak i nagle są przemiany między v oraz V w punktach 4 i 5.



Rys. 6.6. Linia energii i linia ciśnienia dla cieczy nielepkiej, wzdłuż przykładowego rurociągu



Rys. 6.7. Linia energii i linia ciśnienia dla cieczy lepkiej, wzdłuż przykładowego rurociągu (patrz podrozdz. 11.3)

Trzeba wszakże pamiętać, że w rzeczywistości ciecze i gazy wykazują lepkość, skutkiem czego pomijanie strat energii nie jest uzasadnione. Ilustruje to przebieg linii ciśnienia i energii dla przepływu płynu lepkiego (rys. 6.7).

W ujęciu tradycyjnym podstawą do wyprowadzenia omawianej tu wersji równania Bernoulliego byłoby ogólne równanie ruchu płynu pozbawionego lepkości. Otrzymuje się je odrzucając w równaniu Naviera-Stokesa (3.95) ostatni człon po jego prawej stronie, co prowadzi do **równania Eulera**:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p . \quad (6.29)$$

Jest to zależność pierwszego rzędu, skutkiem czego pozwala ona na uwzględnienie mniejszej liczby warunków brzegowych, niż równanie Naviera-Stokesa (drugiego rzędu). Fizycznie przejawia się to obliczeniowym występowaniem poślizgu cieczy względem ścianki, gdyż nie mamy tu możliwości spełnienia warunku przylegania cieczy do ścianki (par. 4.3.2). Efekt ten stanowi bardzo poważną wadę równania Eulera. Tym niemniej odegrało ono ogromnie pozytywną rolę w rozwoju metod opisu ruchu płynu przed rozpowszechnieniem się maszyn liczących, a w wersji klasycznej także i teraz jest punktem wyjścia przy wyprowadzaniu równania Bernoulliego. Podejście takie wykazuje jednakowoż istotną wadę metodyczną – osoba ucząca się w pierwszej kolejności poznaje uproszczoną wersję tej zależności, a dopiero po stwierdzeniu jej niezgodności z obserwacją dowiaduje się o konieczności rezygnacji z błędnego założenia $\mu = 0$ i o potrzebie uzupełnienia brakującego członu.

6.2.8. Trójmian Bernoulliego dla płynu ściśliwego

Przy wyprowadzaniu równania Bernoulliego istotnym fragmentem przekształceń jest przedstawienie trzech jego członów jako pochodnych względem zmiennej bieżącej L . Pozwala to bowiem na zapisanie ich w postaci pochodnej sumy, zwanej trójmianem Bernoulliego (patrz relacje (6.3) i (6.4)).

Dla przypadku płynu o zmiennej gęstości możliwość wykonania takiego przekształcenia zależy od postaci konkretnego **równania stanu** (podrozdz. 3.8), opisującego daną sytuację. Musimy wtedy znaleźć taką pomocniczą funkcję ciśnienia $P(p)$, która pozwoli przyjąć:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d p}{d L} = \frac{d P(p)}{d L} . \quad (6.30)$$

Bezpośrednim rachunkiem łatwo sprawdzić, że dla płynu doskonałego w stałej temperaturze zgodnie z (3.71) mamy:

$$P(p) = R T \ln (p/p_o) , \quad (6.31)$$

wobec czego trójmian Bernoulliego przyjmie postać:

$$H = \frac{u^2}{2g} + \frac{RT}{g} \ln(p/p_o) + z . \quad (6.32)$$

Z kolei dla przepływu adiabatycznego relacja (3.77) prowadzi do:

$$P(p) = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_o}{\rho_o} \left[\left(\frac{p}{p_o} \right)^{\kappa - 1/\kappa} - 1 \right] , \quad (6.33)$$

co daje:

$$H = \frac{u^2}{2g} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_o}{\rho_o g} \left[\left(\frac{p}{p_o} \right)^{\kappa - 1/\kappa} - 1 \right] + z . \quad (6.34)$$

6.2.9. Pojęcie ciśnienia

Przedstawiony dotychczas materiał pozwala zwrócić uwagę na różne aspekty terminu „ciśnienie” – nie tylko fizyczne, lecz również techniczne. Wielkość ta pojawiła się podczas wyprowadzania **hipotezy Newtona** (par. 3.9.2). W ujęciu ścisłym jest ona wartością bezwzględną (modułem) tej części naprężenia normalnego w płynie, która nie zależy bezpośrednio od jego lepkości. Wynika to z faktu, że dla cieczy nielepkiej (3.84) przyjmuje postać:

$$[\mathbf{P}] = -p [\mathbf{E}] . \quad (6.35)$$

Podkreślmy, że wartość ciśnienia p (możemy powiedzieć, iż **rzeczywistego**) w ogólnym przypadku zależy od prędkości \mathbf{u} , gdyż obie te wielkości są ze sobą powiązane równaniami ruchu cieczy i gazów. W szczególności, dla cieczy nieruchomej, ciśnienie opisane jest prawami hydrostatyki (podrozdz. 5.3), a nazywamy je wtedy **ciśnieniem hydrostatycznym**. Trzeba także pamiętać o bardzo ważnym wniosku, płynącym z relacji (4.22), że gdy ruch odbywa się w płaszczyźnie poziomej, wtedy pionowy rozkład ciśnienia dany jest funkcją liniową, tak jak i w cieczy nieruchomej.

Niekiedy wygodnie jest rozdzielić ciśnienie rzeczywiste na część p' , która by panowała w danym układzie, gdyby ciecz nie poruszała się (czyli dla $\mathbf{u} = 0$), oraz na różnicę względem ciśnienia p , wywołaną ruchem płynu:

$$p^* = p - p' . \quad (6.36)$$

Składowe te to znane nam już ciśnienie hydrostatyczne (tu oznaczone symbolem p'), oraz **ciśnienie hydrodynamiczne** (p^*).

Kolejny aspekt omawianego terminu pojawia się w nierzadkim przypadku, gdy strumień cieczy zostaje lokalnie zahamowany przez jakąś nieruchomą przeszkodę. Typowy przykład pokazano na rys. 6.4. Zgodnie z (6.19), ciśnienie tuż przed taką przeszkodą może być przedstawione jako suma rzeczywistego ciśnienia p w pewnej odległości od punktu reprezentującego przeszkodę (zwanego zamiennie **ciśnieniem statycznym**) oraz przyrostu, wywołanego zamianą energii kinetycznej w potencjalną, nazywanego **ciśnieniem dynamicznym** (którego nie należy mylić z ciśnieniem hydrodynamicznym (6.36)). Całkowite ciśnienie przed przeszkodą (miejsce to zwane jest **punktem spiętrzenia**) wynosi więc:

$$p_c = p + \frac{\rho u^2}{2} . \quad (6.37)$$

Warto zwrócić uwagę na omówione pojęcia, aby uniknąć nieporozumień, gdyż w potocznym ujęciu często używa się dla nich jednego terminu „ciśnienie”, milcząco przyjmując, że jego konkretne znaczenie wynika z kontekstu rozmowy.

7. Turbulencja

7.1. Ogólna charakterystyka ruchu turbulentnego

Ograniczając się choćby tylko do bezpośredniej obserwacji prostych zjawisk przepływowych (jak na przykład strumień wody w rzece, czy pióropusz dymu, uchodzącego z kolumny) łatwo zauważyć, że możliwe jest wyróżnienie dwóch charakterystycznych obrazów ruchu płynu.

Pierwszy z nich, który nazwano **laminarnym** (lub **uwarstwionym**), cechuje się dużą płynnością (w sensie geometrycznym) i regularnością poszczególnych strug cieczy (linii prądu). Tworzą one smugi o dużej gładkości, co bynajmniej nie oznacza, że ich układy są proste i że łatwo je opisać.

W innych warunkach (lecz także w tym samym obiekcie) możemy stwierdzić występowanie przepływu o zdecydowanie innej specyfice, zwanego **turbulentnym** (lub **burzliwym**). Charakteryzuje go ogromna złożoność, przy czym przejawia się ona lokalnie, co oznacza, że nie dotyczy pola przepływu jako całości. Układ linii prądu jest generalnie zorientowany zgodnie z kierunkiem działających sił oraz kształtem granic układu, jednakże linie te przestają być gładkie i płynne. Szczególnie istotnymi cechami tego zjawiska są niestanna oscylacja kształtu trajektorii elementów płynu w czasie oraz powstawanie specyficznych wirów, o nieregularnych kształtach i rozmiarach.

Turbulencja jest zjawiskiem bardzo powszechnym oraz znaczącym, toteż od dawna przyciągała uwagę badaczy i praktyków, że przywołamy choćby znany szkic Leonarda da Vinci (1452–1519), ukazujący strukturę burzliwie płynącego strumienia cieczy.

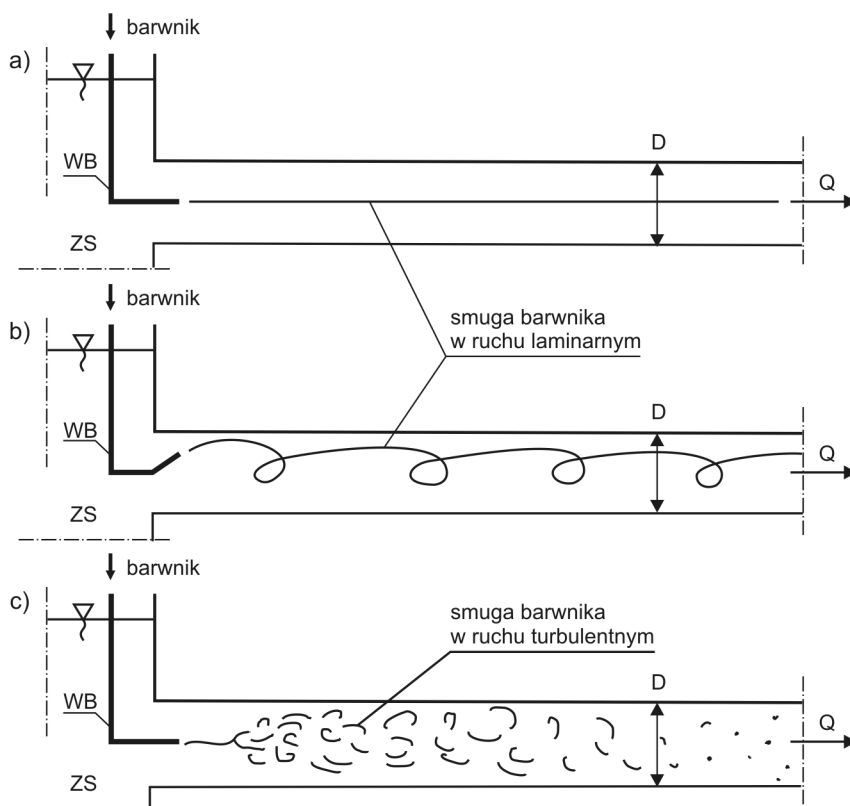
Pierwsze systematyczne prace badawcze nad turbulencją przeprowadził brytyjski fizyk Osborne Reynolds w roku 1883. Ich głównym elementem była obserwacja kształtu, jaki przyjmowała smużka kolorowego znacznika (zabarwionej cieczy), wprowadzana do przezroczystej rury o średnicy D , w której płynęła ciecz o kinematycznym współczynniku lepkości ν (w tym przypadku – woda) z prędkością średnią v . Badania wykazały, że przy niedużych prędkościach przepływu oraz/albo małych średnicach przewodu kształt smużki był bardzo regularny – tworzyła ona linię prostą (rys. 7.1a), gdy znacznik wprowadzano do rury osiowo, lub bardzo zwartą linię śrubową (rys. 7.1b), gdy wlot znacznika był nieco odchylony od osi przewodu.

Jakościową zmianę obrazu obserwowano po przekroczeniu pewnego progu, dotyczącego skali przepływu (przy czym chodzi tu zarówno o **skalę kinematyczną**, wyrażoną przez prędkość średnią v , jak i **skalę geometryczną**, określoną przez średnicę D). Smużka barwnika rozpadała się wtedy na wspomniane już charakterystyczne struktury wirowe (rys. 7.1c) – początkowo znaczne, o wielkości porównywalnej z promieniem przewodu, a następnie coraz mniejsze, by w dalszym biegu strumienia ulec praktycznie całkowitemu wymieszaniu z otaczającą cieczą.

Ilościowa analiza zjawiska wykazała, że moment przejścia między jednym a drugim rodzajem ruchu można określić za pomocą znanej już nam **liczby Reynoldsa** (6.25). Ze zrozumiałych względów przejście to w sposób ciągły można było realizować tylko drogą

zmiany prędkości cieczy zaworem regulacyjnym. Wpływ średnicy przewodu badany był dzięki równoległej obserwacji przepływu w kilku przewodach o różnych średnicach.

Jest rzeczą ciekawą, że badania te pozwoliły na znalezienie fizykalnego uzasadnienia faktu (patrz par. 6.2.5), iż analityczne rozwiązanie Hagena-Poiseuille'a (4.19), powstałe na bazie prac przeprowadzonych w II połowie XVIII wieku i I połowie XIX wieku, jest zgodne z obserwacjami tylko dla małych wartości Re (6.26). Jak widzimy obecnie, relacja ta jest ważna tylko dla ruchu laminarnego.



Rys. 7.1. Wizualizacja przepływu laminarnego i burzliwego (ZS – zbiornik zasilający, WB – rurka doprowadzająca barwnik)

Przejście laminarno-turbulentne obserwowane jest nie tylko w rurociągach, lecz także w każdej innej strukturze przepływowej – mającej charakter strumienia, czy też złożonej i rozległej (jak oceany, atmosfera ziemska, czy układy techniczne, jak na przykład reaktory, stosowane do uzdatniania wody lub oczyszczania ścieków). Każdorazowo trzeba tu wskazać pamiętając o właściwym zdefiniowaniu geometrycznej skali przepływu. Dla strumieni o nieregularnym przekroju szczególnie dogodny jest tu **promień hydrauliczny** (6.2). W przypadkach bardziej złożonych bywa i tak, że mamy do wyboru kilka możliwości (na przykład długość L , szerokość B i grubość H skrzydła samolotu).

Przy rozważaniu ruchu turbulentnego pojawiają się dwie grupy zagadnień. Pierwsza z nich dotyczy przyczyn i sposobu powstawania turbulencji, zaś druga – sposobu opisu już ukształtowanego przepływu burzliwego.

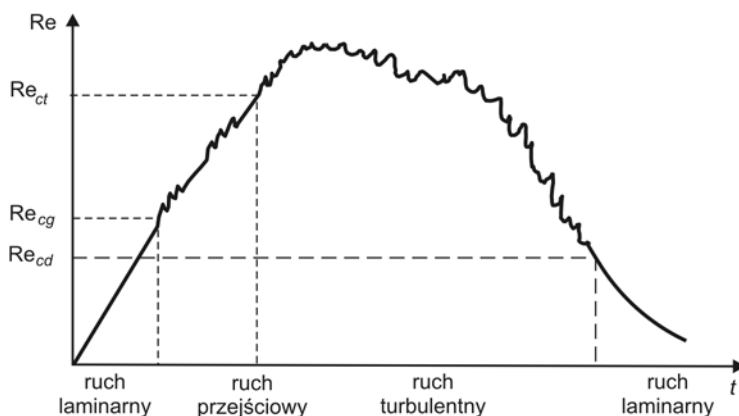
7.2. Generacja turbulencji

Ze względu na wagę zagadnienia, problem powstawania burzliwości od ponad stu lat stanowi przedmiot zainteresowania badaczy i praktyków. Bibliografia przedmiotu jest więc bardzo obszerna (na przykład [28, 38, 42, 67]), ale pełna teoria, wyjaśniająca mechanizm pojawiania się turbulencji, nie została jeszcze sformułowana.

Istotnym elementem tego mechanizmu jest wzajemna proporcja między działającymi na płyn **siłami bezwładności** (lewa strona równania Naviera-Stokesa) oraz **siłami lepkości**. Ta pierwsza ma charakter napędzający ruch materii, podczas gdy ta druga – stabilizujący i osłabiający. Po przekroczeniu granicznej wartości liczby Reynoldsa, siła bezwładności zaczyna dominować nad siłą lepkości. W rezultacie każde zakłócenie warunków przepływu (czy wprowadzone z zewnątrz, czy też wywołane wewnątrz układu, na przykład przez nierówności ścianek przewodu lub zbiornika) będzie lokalnie wzmacniane. To samo dotyczy przepływów w obszarach rozległych, oddalonych od ścianek, gdzie zaburzenia pojawiają się między lokalnymi strumieniami płynu. Konsekwencją tego jest **utrata stabilności przepływu** (patrz rys. 5.5), przy czym ma ona charakter **fluktuacyjny**. Można więc powiedzieć, że turbulencję stanowią **drgania samowzbudne** płynu.

Proces zmiany rodzaju przepływu jest odwracalny, gdyż w miarę zmniejszania wartości liczby Reynoldsa intensywność fluktuacji pola przepływu maleje, by całkowicie zaniknąć w momencie jego przejścia ponownie w zakres ruchu laminarnego. Jest jednak rzeczą ważną, że graniczne wartości liczby Reynoldsa przy przejściach są dla obu kierunków zmian (odpowiednio wzrost i spadek Re) inne. Mierząc na przykład wartość dowolnej składowej wektora prędkości rzeczywistej w ustalonym punkcie podczas ciągłej zmiany liczby Reynoldsa otrzymuje się wykres (rys. 7.2), na którym można wyróżnić kolejne zakresy:

- ruch laminarny, dla $0 \leq Re < Re_{cg}$;
- ruch przejściowy, w którym burzliwe fluktuacje występują na przemian z odcinkami ruchu laminarnego (zjawisko intermitencji), dla $Re_{cg} \leq Re < Re_{ct}$;
- w pełni rozwinięty ruch turbulentny, który utrzymuje się po utracie stabilności, aż do momentu obniżenia wartości liczby Re poniżej poziomu Re_{cd} ;
- ponowny obszar ruchu laminarnego, dla $Re_{cd} > Re \geq 0$.

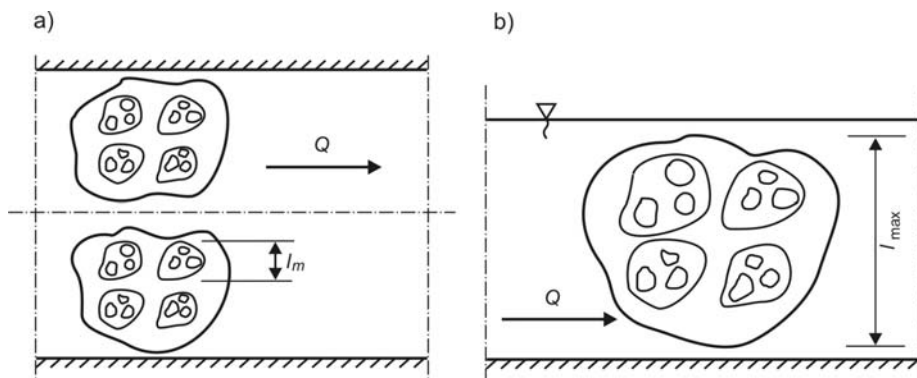


Rys. 7.2. Charakterystyka przejścia ruchu laminarnego w turbulentny i odwrotnie

Trzeba podkreślić, że zachodzi $Re_{cg} > Re_{cd}$. Oznacza to, że niekiedy (szczególnie dla układów regularnych i starannie wykonanych) można utrzymać ruch laminarny aż do bardzo wysokich wartości Re , podczas gdy wytłumienie już powstałej burzliwości jest trudniejsze (wymaga znacznego obniżenia Re). Ponadto wartość Re_{cd} wyznaczana doświadczalnie ma wartości bardziej powtarzalne, toteż ona właśnie jest traktowana jako miarodajny wskaźnik przejścia laminarno-turbulentnego. Dla rurociągów mamy więc:

$$Re_c = 2300 \quad (6.26')$$

Do charakterystycznych cech turbulencji należy jej wirowość, przy czym tworzone przez fluktuacje prędkości struktury wirowej charakteryzują się specyficznym zróżnicowaniem skal. Polega to na tym, że w wyniku utraty stabilności przepływu (czyli przekroczenia krytycznej wartości liczby Reynoldsa) generowane są wiry o największej możliwej skali L_{max} . Jest ona zbliżona do miarodajnego wymiaru rozważanego zjawiska przepływowego. Uwzględnić tu należy ewentualną symetrię układu, skutkiem której powstawać mogą dwie takie struktury (rys. 7.3a). Te duże obiekty wirowe (zwane **strukturami koherentnymi** [67]) zachowują swą odrębność tylko przez pewien czas, po upływie którego rozpadają się na wiry o mniejszej skali, które przez czas swego trwania jako całości wchodzą w obręb innych wirów o większej skali, po czym same rozpadają się na mniejsze wiry, podlegające tym samym procesom.



Rys. 7.3. Schemat kaskady wirów turbulentnych:
a) w kanale symetrycznym, b) w kanale niesymetrycznym

W efekcie każda ze struktur niższego rzędu wchodzi w skład struktury wyższego rzędu, a jednocześnie sama zawiera wiry jeszcze niższego rzędu. Tworzy się specyficzny układ, zwany **kaskadą wirów turbulentnych**. Jej dolnym ograniczeniem są wiry o tak małych rozmiarach, że w ich wnętrzu nie mogą już powstawać fluktuacje prędkości, a tym samym energia mechaniczna jest w ich obrębie zamieniana w energię cieplną (lepka dyssypacja energii – par. 3.6.3). Tak więc omówiona koncepcja kaskady wirów pozwala wyjaśnić mechanizm strat energii mechanicznej w ruchu burzliwym. Energia ta jest przekazywana z ruchu głównego do generowanych przezeń struktur wirowych, które rozpadając się przekazują ją wirom o mniejszej skali, aż wreszcie wiry najmniejsze umożliwiają jej lepka dyssypację. Uwzględniając złożoność pola turbulentnych fluktuacji prędkości możemy się spodziewać, że **intensywność tracenia energii mechanicznej jest tu znacznie większa niż w ruchu laminarnym**. Wniosek ten jest w pełni potwierdzony empirycznie.

7.3. Równania Reynoldsa

Stopień złożoności pola prędkości \mathbf{u} i pozostałych zmiennych stanu w ruchu burzliwym jest tak wysoki, że praktycznie nie mamy tu możliwości, by uzyskać jego matematyczny opis. Wynika to zarówno z losowego i skomplikowanego charakteru powstawania burzliwych fluktuacji, jak też ze względów formalnych (odpowiednie wyrażenia matematyczne musiałyby być niestęchanie skomplikowane).

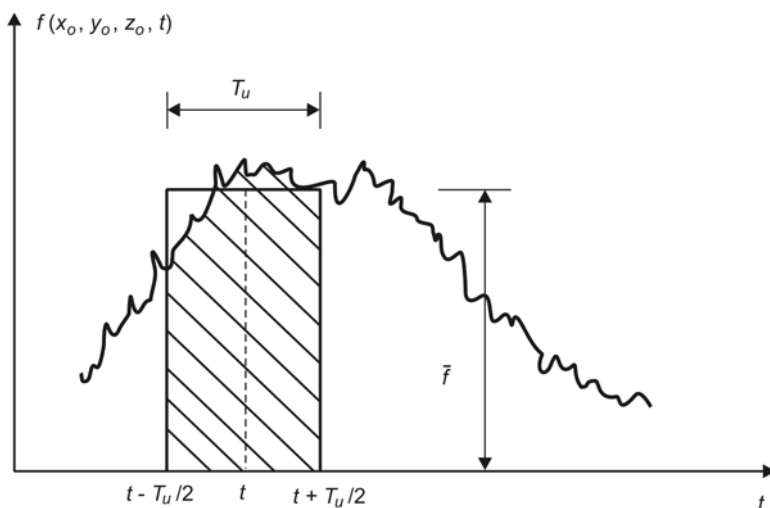
W tej sytuacji do celów praktycznych wykorzystujemy **lokalnie uśrednione zmienne stanu**, definiowane następującą relacją:

$$\bar{f} = \frac{1}{T_u} \int_{t-T_u/2}^{t+T_u/2} f \, d\tau. \quad (7.1)$$

Jej sens wyjaśnia rys. 7.4. Obliczoną w ten sposób wartość średnią (niekiedy mówimy: „wygładzoną”) przyporządkowujemy obliczeniowemu punktowi czasu t , a powtarzając tę procedurę dla każdego punktu, otrzymujemy ciągły przebieg lokalnie uśrednionej funkcji $\bar{f}(x, y, z, t)$.

Tak zdefiniowana wartość średnia w oczywisty sposób zależy od długości **czasu uśredniania** T_u . Stwierdzenie to ma ogromne znaczenie wtedy, gdy dysponujemy rzeczywistym, skomplikowanym przebiegiem rozważanej funkcji i korzystając z (7.1) pragniemy go uprościć (lokalnie uśrednić, wygładzić...). W teorii turbulencji z tego typu potrzeba mamy do czynienia niezbyt często, głównie w zagadnieniach badawczych, gdy rzeczywisty rozkład zmiennych stanu poddanych fluktuacjom otrzymujemy z pomiarów. W większości jednakże przypadków relacja (7.1) ma charakter informacyjny, a średnią wartość odpowiednich zmiennych **wyznaczamy z uśrednionych równań ruchu**. Aby je otrzymać, przedstawimy poszczególne zmienne w postaci sumy wartości średnich \bar{f} oraz części fluktuacyjnej (oznaczonej symbolem „prim”). Dla prędkości, ciśnienia, gęstości i temperatury mamy więc:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}', \quad p = \bar{p} + p', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \quad T = \bar{T} + T'. \quad (7.2)$$



Rys. 7.4. Metoda uśredniania zmiennych stanu w ruchu burzliwym

Średnie wartości składowych fluktuacyjnych są z definicji równe zero, toteż dla oszacowania ich wielkości posługujemy się miarami **średniokwadratowymi**. Dla dowolnej składowej prędkości u'_i mamy wtedy:

$$\|u'_i\| = \left[\frac{1}{Tu} \int_{t-Tu/2}^{t+Tu/2} (u'_i)^2 d\tau \right]^{1/2}. \quad (7.3)$$

Ważną miarą intensywności ruchu fluktuacyjnego jest **stopień turbulencji**:

$$\varepsilon_T = \frac{\sqrt{\left(\|u'_x\|^2 + \|u'_y\|^2 + \|u'_z\|^2 \right) / 3}}{\bar{u}} \quad (7.4)$$

Wskaźnik ten jest z definicji równy zero w punktach przylegających do ścianki sztywnej (mówimy o laminaryzującym oddziaływaniu ścianki), a następnie, na stosunkowo krótkim dystansie, wzrasta do pewnej wartości maksymalnej, równej około 8 – 10% prędkości uśrednionej, po czym nieco maleje i stabilizuje się na poziomie 3 – 5%.

Podstawiając sumy (7.2) w odpowiednie miejsca równań ruchu płynu i wykonując możliwe działania matematyczne, a następnie uśredniając obie strony tych równań zgodnie z (7.1), otrzymamy dwie relacje [38, 42, 67]:

— równanie ciągłości (3.94):

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0; \quad (7.5)$$

— równanie dynamiczne (3.95):

$$\rho \frac{D\bar{\mathbf{u}}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \operatorname{grad} \bar{p} + \mu \Delta \bar{\mathbf{u}} + \operatorname{div} (-\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'). \quad (7.6)$$

Noszą one nazwę **równań Reynoldsa**.

Wyprowadzenie dwóch ostatnich równań nie jest trudne, o ile zwrócimy uwagę na fakt, że pochodne fluktuacyjnych składowych zmiennych stanu są, tak jak i różniczkowane funkcje, wielkościami fluktuacyjnymi. Tym samym:

$$\overline{f'} = 0, \quad \frac{\partial \overline{f'}}{\partial x_i} = 0. \quad (7.7)$$

Ponadto w (7.6) wykorzystano symboliczny zapis **iloczynu diadycznego**, który w ogólnym przypadku definiowany jest następująco:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

Porównując (7.5) i (7.6) z wyjściowymi równaniami (3.94) i (3.95), stwierdzamy, że:

- równanie ciągłości dla prędkości lokalnie uśrednionej $\bar{\mathbf{u}}$ ma postać identyczną z równaniem dla prędkości rzeczywistej;
- równanie dynamiczne dla zmiennych lokalnie uśrednionych $\bar{\mathbf{u}}$ i \bar{p} ma postać niemal identyczną z równaniem dla zmiennych rzeczywistych; różnica polega na pojawieniu się w (7.6) dodatkowego członu, zawierającego uśredniony iloczyn diadyczny, utworzony z wektora prędkości fluktuacyjnej.

Oznacza to, że możliwość wykorzystania otrzymanych relacji do wyznaczania lokalnie uśrednionych zmiennych stanu w ruchu burzliwym jest uwarunkowana uprzednim określeniem wielkości:

$$[\Pi] = -\overline{\rho \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}, \quad (7.9)$$

zwanej **tensorem Reynoldsa**, lub **tensorem naprężeń turbulentnych**. Odpowiednie relacje określa się mianem **modeli turbulencji**.

7.4. Modelowanie turbulencji

7.4.1. Koncepcja podstawowa

W literaturze zagadnienia znajduje się pewna liczba propozycji wyrażenia tablicy (7.9) za pomocą uśrednionych zmiennych stanu oraz współczynników (z reguły – empirycznych). Można je podzielić na trzy klasy. Podstawowa i najbardziej obszerna obejmuje **modele typu dyfuzyjnego**. Koncepcja, stanowiąca ich bazę, została zaprezentowana w roku 1877 przez V. J. Boussinesqa. Jej istotą jest przyjęcie analogii pomiędzy „chaosem turbulentnym” a „chaosem molekularnym”. Poszczególnym cząsteczkom płynu, poruszającym się z chaotyczną prędkością \mathbf{u}_c , odpowiadają tu burzliwe struktury wirowe, dla których miarodajna jest prędkość fluktuacyjna \mathbf{u}' . Średniej drodze swobodnej molekuł l_s odpowiada z kolei **liniowa skala turbulencji** l_m , w ogólnym ujęciu utożsamiana z wymiarem typowych wirów (rys. 7.3), lub w innym ujęciu z przeciętna drogą, po przebyciu której wiry te ulegają rozpadowi.

Akceptacja tej analogii (trzeba przyznać, że dość płynnej, choć z pewnością trafiającej do wyobraźni, co jest jej istotną zaletą) prowadzi do wniosku, że skoro chaotyczny ruch molekuł wywołuje transport pędu (pkt 1.4.2.4), to taki sam efekt (choć w znacznie większej skali) wywoływać będą burzliwe fluktuacje prędkości.

Ostatni etap tego rozumowania jest już oczywisty – skoro molekularny transport pędu, zgodnie z **hipotezą Newtona** (par. 3.9.2), w modelu płynu wyrażamy przez tensor naprężenia (1.31), to powinna pojawić się analogiczna wielkość, opisująca umowne naprężenia, równoważące fluktuacyjny transport pędu (7.9).

Formalną konsekwencją tego rozumowania jest przyjęcie **hipotezy Boussinesqa**, która zgodnie z (3.82) dla cieczy nieściśliwej ma postać:

$$[\Pi] = \bar{p}[\mathbf{E}] + 2\mu_T[\bar{\mathbf{D}}], \quad (7.10)$$

gdzie \bar{p} oraz $[\bar{\mathbf{D}}]$ są odpowiednio uśrednionymi dla ruchu burzliwego wartościami ciśnienia oraz tensora prędkości deformacji (2.24), zaś symbol μ_T oznacza **dynamiczny współczynnik lepkości burzliwej**, oczywistą relacją typu (1.43) powiązany z **kinematycznym współczynnikiem lepkości burzliwej**:

$$\mu_T = \rho \nu_T. \quad (7.11)$$

Zauważmy, że pojawia się tu ważna różnica, wynikająca z istotnej odrębności między „chaosem molekularnym” a „chaosem burzliwym” – współczynniki μ oraz ν są **stałymi materiałowymi**, podczas gdy μ_T oraz ν_T są **własnościami ruchu płynu**. Kontynuując przyjętą tu analogię, a jednocześnie uwzględniając wspomnianą różnicę, możemy wobec (1.44) napisać, że:

$$\nu_T \approx \|u'\| l_m. \quad (7.12)$$

7.4.2. Model algebraiczny

Za najprostszą propozycję, pozwalającą przekształcić (7.12) do postaci użytecznej praktycznie, należy uznać empiryczne oszacowania:

$$l_m = \kappa_T \delta = 0,417 \delta, \quad (7.13)$$

$$\|u'\| = 0,04 \bar{u}. \quad (7.14)$$

Oznaczają one, że przyjmuje się tu, iż geometryczna skala turbulencji w rozważanym punkcie rośnie liniowo z odległością δ tego punktu od najbliższej ścianki (uwaga: wyznaczenie tak określonej wartości δ sprawia trudności formalne w układach o nieregularnych kształtach). Mnożnik $\kappa_T = 0,417$ jest tu traktowany jako uniwersalna stała empiryczna. Z kolei mnożnik 0,04 przed prędkością średnią w (7.14) znaczy, że przeciętna wartość stopnia turbulencji (7.4) może być uważana za równą 4%.

Podstawiając dwie ostatnie relacje do (7.12), otrzymamy algebraiczny wzór, określający kinematyczny współczynnik lepkości burzliwej:

$$\nu_T = 0,0168 \delta \bar{u}. \quad (7.15)$$

7.4.3. Model Prandtla

Nieco bardziej złożoną relację dla wartości ν_T otrzymamy, gdy zgodnie ze sformułowaną w 1925 roku przez L. Prandtla propozycją zapiszemy średniokwadratową prędkość fluktuacyjną jako pierwszy człon rozwinięcia prędkości średniej w szereg Taylora, pisząc (dla przepływu jednokierunkowego, wzdłuż osi $0x$):

$$\|u'\| = l_m \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|, \quad (7.16)$$

co pozwala następująco przepisać (7.12):

$$\nu_T = l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right|. \quad (7.17)$$

7.4.4. Inne modele turbulencji

Wyznaczanie współczynnika lepkości burzliwej obciążone jest znaczną dawką spekulatywności, bazującej na intuicji badacza. Jest to konsekwencją braku kompletnej teorii turbulencji, ale związane jest głównie z charakterystyczną prędkością fluktuacji. W mniejszym stopniu dotyczy to wartości l_m , którą najczęściej określa się relacją (7.13).

Za istotną należy uznać propozycję wyznaczenia $\|u'\|$ przez **kinetyczną energię turbulencji**:

$$k_T = \frac{1}{2} \sqrt{u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2}, \quad (7.18)$$

zgodnie z prostą zależnością:

$$\|u'\| = \sqrt{k_T}, \quad (7.19)$$

co pozwala napisać:

$$\nu_T = l_m \sqrt{k_T}. \quad (7.20)$$

Funkcję k_T wyznacza się z odrębnego równania różniczkowego, mającego charakter typowy dla równań zachowania (3.1):

$$\frac{D k_T}{D t} = \dots \quad (7.21)$$

Jego pełnej postaci nie będziemy tu jednak wyprowadzać, gdyż ma ono charakter bardzo specjalistyczny. W razie potrzeby znaleźć je można w literaturze zagadnienia (na przykład [42]).

Ważnym rozszerzeniem tej koncepcji jest wyrażenie średniokwadratowej prędkości fluktuacyjnej przez k_T oraz ε_T , zgodnie z relacją:

$$v_T = C_T \frac{k_T^2}{\varepsilon_T}, \quad (7.22)$$

gdzie ε_T jest wyrażoną przez prędkość uśrednioną intensywnością dyssypacji energii (3.69):

$$\varepsilon_T = \bar{s}, \quad (7.23)$$

opisaną analogicznie do (7.21) równaniem różniczkowym:

$$\frac{D \varepsilon_T}{D t} = \dots, \quad (7.24)$$

zaś C_T ma charakter mnożnika empirycznego (w pierwszym przybliżeniu można przyjmować $C_T = 0,09$).

Relacja (7.22), zwana potocznie „modelem k -epsilon”, jest uważana za szczególnie dobre przybliżenie kinematycznego współczynnika lepkości burzliwej.

Omówione cztery modele turbulencji ((7.15), (7.17), (7.20), (7.22)) należą do kategorii dyfuzyjnych, bowiem jako kluczowe pojęcie wykorzystuje się w nich koncepcję **lepkości burzliwej**. Obok tej kategorii istnieją jeszcze dwie, całkowicie odrębne pod względem formalnym [44]. Pierwsza, którą można nazwać **różniczkową**, obejmuje te modele, w których współrzędne tensora Reynoldsa (7.9) opisuje się odrębnym równaniem różniczkowym. Z kolei w kategorii modeli **adwekcyjnych** współrzędne Π_{ij} wyrażone są przez człony występujące po lewej stronie równania (7.6), zawierające pierwsze pochodne prędkości średniej. Jednakże te dwie kategorie nie odgrywają szczególnej roli w teorii ruchu turbulentnego, więc nie będą tu omawiane.

7.5. Rozwiązywanie zagadnień

7.5.1. Przypadek ogólny

Opisując naprężenia Reynoldsa (7.9) za pomocą dyfuzyjnego modelu turbulencji (7.10), otrzymujemy roboczą postać równań ruchu dla lokalnie uśrednionych zmiennych stanu $\bar{\mathbf{u}}$ oraz \bar{p} :

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (7.5)$$

$$\rho \frac{D \bar{\mathbf{u}}}{D t} = \rho \mathbf{f} - \nabla \bar{p} + \operatorname{div} \left\{ 2(\mu + \mu_T) [\bar{\mathbf{D}}] \right\}. \quad (7.25)$$

W ostatniej relacji zastosowane zostało proste przekształcenie:

$$\mu \Delta \bar{\mathbf{u}} = \operatorname{div} (2\mu \bar{\mathbf{D}} | \bar{\mathbf{D}} |), \quad (7.26)$$

którego poprawność można udowodnić bezpośrednim rachunkiem (patrz relacja (2.14) i par. 3.10.1). Pozwala ono na połączenie dwóch członów, opisujących naprężenia wewnętrzne, spowodowane lepkością (a reprezentowane przez współczynnik lepkości molekularnej) oraz wywołane turbulencją (wyrażone przez współczynnik lepkości burzliwej).

Trzeba zauważyć, że wartości μ oraz μ_T różnią się od siebie o kilka rzędów wielkości. Orientacyjnie przyjmując, że grubość warstwy cieczy (na przykład głębokość rzeki) jest rzędu $H = 2,0$ m, a jej prędkość średnia rzędu $V = 0,5$ m/s, to zgodnie z (7.15) otrzymamy ($\delta \approx H/2$, $\bar{u} = V$) współczynnik $\mu_T = 0,0084$ m²/s, a więc wartość średnio ponad 4 500 razy większą od współczynnika lepkości molekularnej (1.45).

Tym niemniej nie jest możliwe odrzucenie μ w relacji (7.25). Wynika to ze zmienności μ_T w przestrzeni. W szczególności dla płynu przylegającego do ścianki zachodzi $l_m = 0$, wobec czego z (7.12) otrzymamy $\mu_T = 0$. Oznacza to, że w bezpośrednim sąsiedztwie ścianki dominują naprężenia lepkie. Ich wpływ jest tam bardzo istotny i nie może być pominięty.

Uwagi powyższe mają ogromne znaczenie fizyczne, które znajduje swój wyraz w odpowiednim określeniu współczynnika lepkości burzliwej. Jednakże od strony czysto formalnej dostrzegamy praktyczną identyczność równań (3.95) oraz (7.25). **Oznacza to, że metodyka formułowania i rozwiązywania zagadnień przepływowych dla ruchu laminarnego oraz dla ruchu turbulentnego jest taka sama.** Wszystko to, co zostało powiedziane na ten temat w rozdziale 4, zachowuje ważność także dla ruchu turbulentnego. Różnice między tymi podstawowymi kategoriami ruchu wynikają tylko ze sposobu wyrażania odpowiednich współczynników lepkości (μ oraz μ_T), co dobrze ilustruje przykład 4.1, zestawiony z treścią par. 7.5.3.

Jest zrozumiałe, że skoro równania ruchu laminarnego są tak złożone, iż ich analityczne rozwiązania uzyskujemy tylko w wyjątkowo prostych przypadkach, to tym trudniejsze będzie rozwiązywanie równań ruchu burzliwego (ze względu na dodatkową komplikację, jaką stanowią wzory opisujące współczynnik lepkości burzliwej). Tym większego więc znaczenia nabierają tu metody przybliżone (w szczególności numeryczne, wymagające zastosowania maszyn liczących).

7.5.2. Równanie Bernoulliego dla ruchu turbulentnego

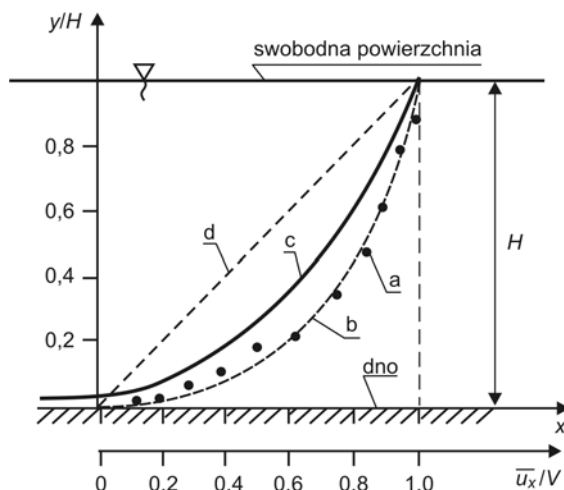
Podane w poprzednim paragrafie uwagi o formalnym podobieństwie matematycznego opisu ruchu laminarnego i burzliwego odnoszą się w całej rozciągłości również do tak ważnej relacji, jaką jest równanie Bernoulliego. Pozwala to wykorzystać praktycznie całą treść rozdz. 6 także do warunków ruchu burzliwego. Różnica polega tylko na tym, że musimy zastąpić rzeczywiste zmienne stanu (u oraz p) przez ich wartości lokalnie uśrednione (\bar{u} oraz \bar{p}), zaś wielkość strat energii mechanicznej wyznaczyć z uwzględnieniem lepkości turbulentnej. Tak więc relacje (6.27) możemy przepisać następująco:

$$\left(\frac{\bar{u}_1^2}{2g} + \frac{\bar{p}_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{\bar{u}_2^2}{2} + \frac{\bar{p}_2}{\rho g} + z_2 \right) = \sum H_{\text{str}}^{\text{turb}}. \quad (7.27)$$

7.5.3. Profil prędkości typu logarymicznego

Analogicznie jak w przypadku ruchu laminarnego (patrz przykład 4.1), także dla przepływu burzliwego uzyskujemy ważną informację o charakterze tej kategorii ruchu, analizując sytuację o bardzo prostej charakterystyce kinematycznej, jaką stanowi przepływ warstwy cieczy o grubości H , wzdłuż poziomej płaskiej ścianki (rys. 7.5), zwany przepływem Couette'a. Mamy wtedy:

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_x(y) \mathbf{i}. \quad (7.28)$$



Rys. 7.5. Charakterystyczne profile prędkości w przepływie Couette'a
(a – punkty pomiarowe [42], b – równanie dokładne (7.29), c – profil typu logarytmicznego,
d – ruch laminarny, identyczny z przypadkiem stałego współczynnika lepkości)

Równanie Reynoldsa (7.25) przyjmuje tu postać (zgodnie z klasyczną wersją tego zadania [37] przyjęto tu model turbulencji według Prandtla, dany relacją (7.16)):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\mu + \rho \kappa_T^2 y^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right| \right) \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right] = 0. \quad (7.29)$$

Zgodnie z omówioną już charakterystyką ruchu burzliwego oraz jego modelu dyfuzyjnego, wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest sumą równoległego do ścianki naprężenia lepkiego p_{xy} (1.31) oraz umownego naprężenia Π_{xy} (7.9), wywołanego turbulentnymi fluktuacjami prędkości. Pozwala to napisać:

$$\tau_s = p_{xy} + \Pi_{xy}. \quad (7.30)$$

Jednokrotne całkowanie (7.29) mówi, że wartość ta jest stała:

$$\left(\mu + \rho \kappa_T^2 y^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right| \right) \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} = \tau_s = \text{const}. \quad (7.31)$$

W istocie rzeczy jest to naprężenie zewnętrzne, wywierane na rozważany układ (tu: warstwę cieczy) przez czynniki wywołujące ruch (na przykład – przez ruch powietrza nad swobodną powierzchnią cieczy, wywołujący tak zwane naprężenia wiatrowe (4.8)).

Niestety, równanie (7.31) jest na tyle złożone, że można je rozwiązać tylko w sposób przybliżony, najlepiej na drodze numerycznej. Przyjmując oczywisty warunek brzegowy, opisujący adhezyjne przyleganie cieczy do ścianki:

$$y = 0, \quad \bar{u}_x = 0, \quad (7.32)$$

otrzymamy profil prędkości (linia „b” na rys. 7.5), wykazujący bardzo dobrą zgodność z wynikami pomiarów [42] (uwaga: wykres wykonano dla prędkości względnej, odniesionej do prędkości V na swobodnej powierzchni).

W teorii turbulencji znaczną rolę odegrało przybliżone rozwiązanie relacji (7.31), otrzymane po odrzuceniu lepkości molekularnej, gdy można napisać:

$$\rho \kappa_T^2 y^2 \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right)^2 = \tau_s . \quad (7.33)$$

Proste przekształcenie prowadzi do relacji:

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} \frac{1}{\kappa_T y} . \quad (7.34)$$

Warto zwrócić uwagę, że występujący tu człon pierwiastkowy ma wymiar prędkości. Jest to oczywiście wartość niefizyczna, lecz stanowi dogodny punkt odniesienia w wielu zagadnieniach hydromechaniki. Z tego względu wprowadza się dla niej osobny symbol oraz nazywa **prędkością dynamiczną** (lub niekiedy **prędkością ścinającą**):

$$v^* = \sqrt{\frac{\tau_s}{\rho}} . \quad (7.35)$$

Równanie (7.34) możemy bez trudu scałkować, otrzymując:

$$u_x(y) = \frac{1}{\kappa_T} v^* \ln y + C . \quad (7.36)$$

Wyrażenie to opisuje klasyczny **profil prędkości typu logarytmicznego** (linia „c” na rys. 7.5). Przywiązywano do niego dużą wagę w okresie poprzedzającym rozwój technik numerycznych i maszyn liczących. Uwidacznia ono bardzo istotną cechę pól prędkości w ruchu burzliwym. Są one mianowicie wyrównane (to jest stosunkowo mało zmienne) w swej głównej części, oddalonej od ścianek. Znaczną natomiast zmienność obserwuje się na krótkim dystansie w pobliżu ścianki. Jest to cecha jakościowo różniąca ruch burzliwy od laminarnego, dla którego profile prędkości są bardziej wydłużone („smukłe”). Widać to na przykładzie paraboloidalnego profilu dla przepływu w rurze kołowej (przykład 4.1), jak również dla rozważanego tu przepływu Couette’a, gdy podczas ruchu laminarnego równanie (7.31) przyjmuje postać:

$$\mu \frac{\partial u_x}{\partial y} = \tau_s = \text{const} . , \quad (7.37)$$

z której otrzymujemy prostoliniowy profil prędkości (linia „d” na rys. 7.5):

$$u_x(y) = \frac{\tau_s}{\mu} y . \quad (7.38)$$

Rozkład typu logarytmicznego wykazuje dobrą zgodność z wynikami pomiarów w znacznej części wykresu, lecz istotną wadą relacji (7.36) jest dążąca do minus nieskończoności obliczeniowa wartość prędkości bezpośrednio przy ściance (rys. 7.5, linia „c”).

$$y \rightarrow 0, \quad u_x \rightarrow -\infty . \quad (7.39)$$

Jest to oczywisty efekt formalnego (a nieuzasadnionego fizycznie) odrzucenia wpływu lepkości molekularnej. Dążenie do jego usunięcia było w przeszłości, przy ówczesnym braku obecnych możliwości obliczeniowych, ważnym czynnikiem w badaniach struktury

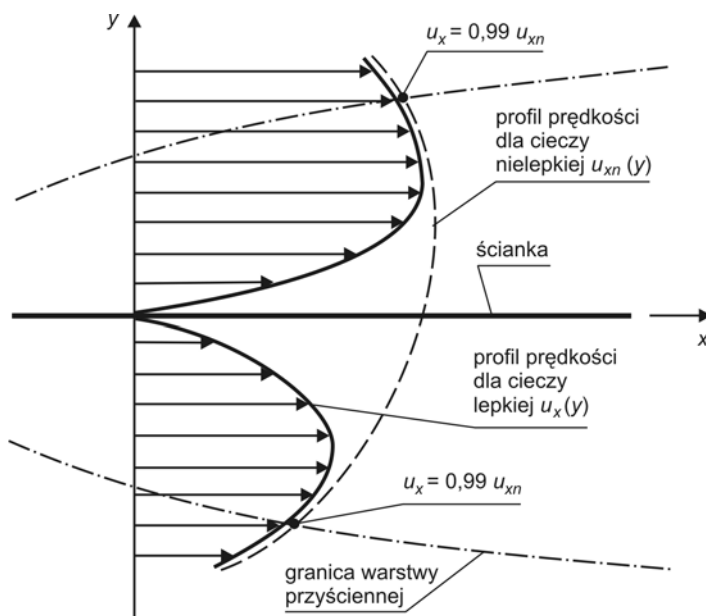
turbulentnych pól prędkości. Aktualnie nie ma takiej potrzeby, gdyż posługujemy się metodami komputerowymi (patrz linia „b” na rys. 7.5), lecz w dalszym ciągu profil prędkości typu logarymicznego ma swoje walory poznawcze. Należy do nich między innymi stwierdzenie, że wobec wspomnianej już równomierności profilu prędkości, strumienie turbulentne wykazują lepszą zgodność z bardzo ważną w inżynierii prędkością średnią (2.35) niż strumienie laminarne.

8. Warstwa przyścienna

8.1. Pojęcia podstawowe

Analiza przestrzennych rozkładów prędkości, w szczególności prowadzona dla przepływów o prostych cechach geometrycznych (par. 7.5.3), pozwala zauważyć, że rozkłady te wykazują zasadniczą zmienność w pobliżu granic obszaru przepływowego. Z oddaleniem od ścianek zróżnicowanie prędkości często maleje. Prawdopodobnie ta jest uzasadniona hipotezą Newtona (3.84) oraz hipotezą Boussinesqa (7.10). Zestawienie tych relacji wraz z (7.12) pokazuje bowiem, że w pobliżu ścianki łączna wartość współczynnika lepkości (molekularnej i burzliwej) maleje, toteż wywołanie określonego naprężenia stycznego wymaga większych zmian prędkości. Z kolei z oddaleniem od ścianki efektywna wartość współczynnika lepkości rośnie, co skutkuje złagodzeniem zróżnicowania prędkości.

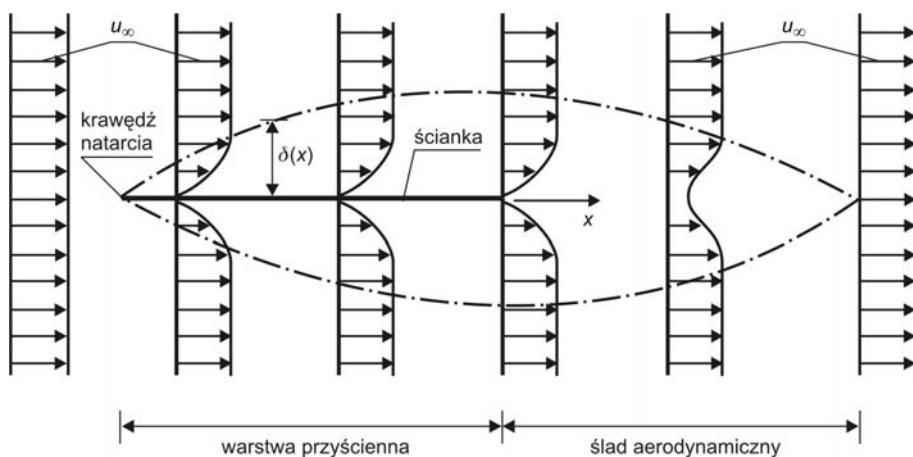
Oznacza to, że każdy obszar przepływowy, ograniczony ściankami sztywnymi (całkowicie lub przynajmniej częściowo), można podzielić na dwie części – wewnętrzną, w której dynamikę w dużym stopniu kształtują turbulენტne fluktuacje zmiennych stanu, oraz przylegający do ścianek obszar o dominującym wpływie lepkości, zwany **warstwą przyścienną**.



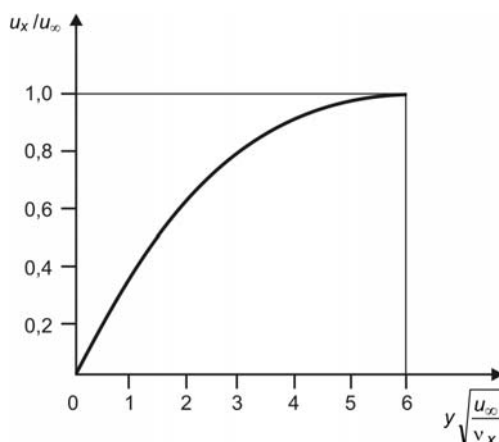
Rys. 8.1. Definicja warstwy przyściennej

Rzecz oczywista, wobec ciągłości zmiennych stanu, granica między tymi obszarami ma charakter umowny. Przyjęto, że **granicę warstwy przyściennej** (wyznaczoną przez jej **grubość** δ_{WP}) określa linia biegnąca wzdłuż ścianki, dla której prędkość przepływu wynosi 99% prędkości, która panowałaby w tym miejscu podczas przepływu cieczy nielepkiej (rys. 8.1).

W bardzo licznych zagadnieniach przepływowych można wyróżnić **krawędź natarcia** ścianki, wzdłuż której rozwija się warstwa przyścienne. Często wyznacza tę krawędź początkowy przekrój rurociągu lub kanału otwartego, zasilanego przez pompę lub zbiornik (rys. 6.7), a dla ciał opływanych strumieniem płynu – ich przednia część (rys. 2.4). Skoro zdefiniowaliśmy warstwę przyścienną jako obszar o dominującym wpływie lepkości, powstający podczas przepływu wzdłuż sztywnej granicy obszaru, to oznacza, że jej grubość w przekroju krawędzi natarcia jest równa zero, a następnie rośnie, gdy w miarę przepływu chaotyczny ruch molekuł (par. 1.3.5) powoduje przenoszenie informacji o obecności ścianki w kierunku do niej poprzecznym. Ilustruje to rys. 8.2, który dla zwiększenia czytelności zjawiska obrazuje prosty geometrycznie przepływ wzdłuż płaskiej płytki o pomijalnie małej grubości.



Rys. 8.2. Struktura warstwy przyściennej i śładu aerodynamicznego



Rys. 8.3. Znormalizowany profil prędkości w warstwie przyściennej wzdłuż płaskiej płytki

Interesujący i ważny technicznie jest też proces wygaszania warstwy przyściennej za opływającym ciałem (którego długość w zagadnieniach praktycznych jest zwykle ograniczona). Otóż w obszarze tym, wskutek zaniku hamującego działania brzegu, poprzeczna wymiana pędu powoduje ponowny wzrost prędkości, aż do całkowitego przywrócenia profilu początkowego (rys. 8.2). Obszar ten nosi nazwę **ślądu aerodynamicznego** (a w przypadku płynącego okrętu nazywany jest **kilwaterem**).

Kolejne poprzeczne profile prędkości podłużnej w obrębie warstwy przyściennej wykazują **samopodobieństwo**. Oznacza to, że można przez odpowiedni dobór zmiennych opisać ten profil jedną relacją. Wprowadzając prędkość względną u_x/u_∞ (rys. 8.2), można napisać, że:

$$u_x/u_\infty = f \left(y \sqrt{\frac{u_\infty}{\nu_x}} \right). \quad (8.1)$$

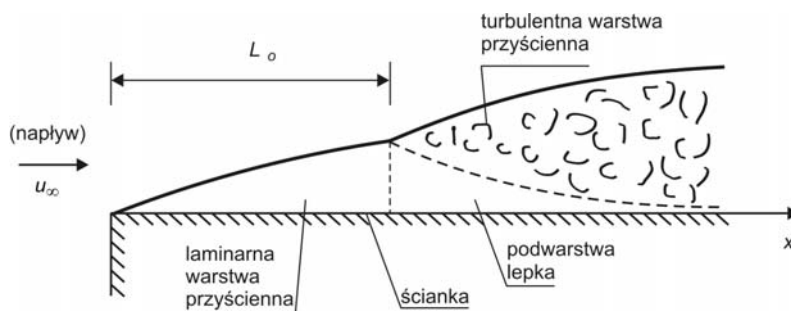
Empirycznie wyznaczony (i potwierdzony obliczeniami numerycznymi [38]) wykres tej relacji dla płaskiej płytki pokazano na rys. 8.3. Analiza jego przebiegu pozwala stwierdzić, że wartość $u_x/u_\infty = 0,99$ (czyli warunek wyznaczający granicę warstwy przyściennej $y = \delta_{WP}$) osiągany jest dla znormalizowanej zmiennej niezależnej równej 5. Oznacza to, że zachodzi związek:

$$\delta_{WP}(x) = 5 \sqrt{\frac{\nu_x}{u_\infty}}, \quad (8.2)$$

będący bardzo pożytecznym oszacowaniem grubości warstwy przyściennej.

8.2. Laminarna a turbulentna warstwa przyścienne

Intensywność turbulentnych fluktuacji prędkości, wystarczająca na przykład do zakłócenia swobodnej powierzchni cieczy (co w dogodny do obserwacji sposób wizualizuje strukturę przepływu burzliwego), nie jest na tyle wysoka, by wywołać ruch brzegu utworzonego przez ściankę sztywną. Tym samym w bezpośrednim sąsiedztwie takiej ścianki panuje ruch laminarny. Obszar ten w specyficzny sposób wiąże się z warstwą przyścinną – do pewnego momentu pokrywa się z nią całkowicie, lecz gdy jej grubość przekroczy pewną wartość graniczną, w zewnętrznej części warstwy (czyli wzdłuż jej granicy) pojawiają się turbulentne fluktuacje zmiennych stanu. Oznacza to, że dotychczas całkowicie laminarna warstwa przyścienne przechodzi w turbulentną, a laminaryzujący wpływ brzegu obszaru przejawia się tylko w wąskiej strefie, zwanej **podwarstwą lepka** (rys. 8.4).



Rys. 8.4. Turbulizacja warstwy przyściennej

Przejście to określa krytyczna liczba Reynoldsa, definiowana za pomocą odległości punktu przejścia L_0 od krawędzi natarcia [37]:

$$\text{Re}_{cw} = \frac{u_\infty L_0}{\nu} = 5 \cdot 10^5 \div 3 \cdot 10^6. \quad (8.3)$$

Konkretna wartość Re_{cw} zależy każdorazowo od burzliwości strumienia napływającego oraz od chropowatości powierzchni ścianki. Dla wartości średniej tego wskaźnika oraz prędkości przepływu rzędu $u_\infty = 1,0$ m/s mamy:

$$L_0 = 1,75 \text{ m}. \quad (8.4)$$

Jak widać, warstwa przyścienna ulega turbulizacji na stosunkowo krótkim dystansie. Warto też zwrócić uwagę, że jej grubość narasta szybciej, niż ma to miejsce w warstwie laminarnej, co widać z półempirycznej relacji [37]:

$$\delta_r(x) = 0,37 x \left(\frac{\nu}{u_\infty x} \right)^{1/5}, \quad (8.5)$$

po porównaniu jej ze wzorem (8.2).

8.3. Formowanie się profilu prędkości strumienia

W dotychczasowych rozważaniach już kilka razy podkreślaliśmy wpływ pojawienia się efektywnych maszyn liczących na metody, stosowane przy rozwiązywaniu zagadnień hydromechaniki. Dawniej, przy braku racjonalnych metod rachunku przybliżonego, mniejszą wagę przywiązywano do równań ogólnych, skupiając się na opracowywaniu metod uproszczonych, tak analitycznych, jak i graficznych.

Przewrót, jaki stanowiło pojawienie się komputerów, zmienił tę sytuację w sposób zasadniczy. Nadał on właściwą rangę równaniom ogólnym, których numeryczne rozwiązania zaczęły stanowić punkt wyjścia do podejmowania złożonych zagadnień teoretycznych i aplikacyjnych, dawniej praktycznie niedostępnych dla badaczy i inżynierów. Jednocześnie nowe metody dostarczyły narzędzia weryfikacji licznych metod uproszczonych, pozwalającego na oddzielenie tych, które się sprawdziły, odrzucenie sposobów archaicznych, jak też na skorygowanie metod o charakterze pośrednim. I właśnie teoria warstwy przyściennej jest dobrym przykładem tego typu zagadnień.

W przeszłości popularna była procedura dwustopniowa. Polegała ona na wstępnym rozwiązaniu rozważanego zagadnienia jakąś metodą uproszczoną (na przykład przy założeniu braku lepkości, za pomocą **równań Eulera** (6.29)) dla całego obszaru. To wstępne rozwiązanie było następnie korygowane w pobliżu ścianki za pomocą kolejnej wersji równań ogólnych, tym razem uwzględniającą wpływ lepkości płynu, lecz uproszczoną dla szczególnych cech geometrycznych warstwy przyściennej.

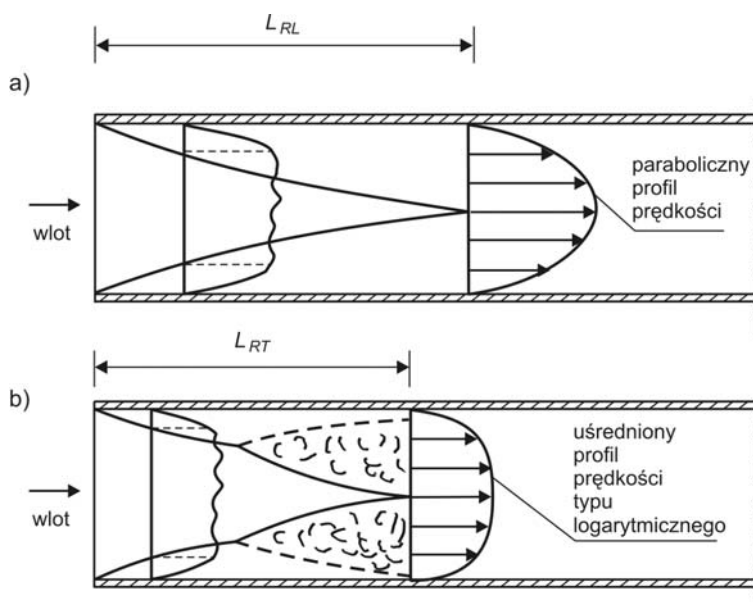
Obecnie nie ma takiej potrzeby, gdyż istniejące metody rachunku przybliżonego pozwalają na rozwiązywanie zagadnień jednolitych. Pamiętać wszakże należy, iż wobec niedużej grubości warstwy przyściennej, siatka węzłów obliczeniowych [6, 63] musi być często w pobliżu brzegu zagęszczona.

Uwzględniając przedstawione uwarunkowania, w dalszym ciągu rozdziału przedstawimy tylko te zagadnienia teorii warstwy przyściennej, które zachowały swą aktualność, a odgrywają istotną rolę w inżynierii środowiska i w dyscyplinach pokrewnych.

Praktycznie każdy rzeczywisty strumień płynu ma ograniczone rozmiary, wyznaczone przekrojami początkowym oraz końcowym. Warunki ruchu w przekroju początkowym wyznaczone są przez system zasilający (pompę, zbiornik...), lecz w miarę przemieszczania się płynu wzdłuż granic kształtujących strumień, charakter przepływu dostosowuje się do wymuszeń, określonych na jego brzegu.

W szerokiej i ważnej praktycznie klasie przepływów ograniczonych ściankami sztywnymi odbywa się to – jak już wiemy – przez formowanie się warstwy przyściennej. Jest rzeczą ważną, że wobec ograniczonych rozmiarów poprzecznych takiego strumienia, grubość warstwy nie może narastać w nieskończoność, gdyż w pewnym momencie warstwy narastające z przeciwnych stron zetkną się (rys. 8.5). Podobnie gdy rozważamy przepływ ze swobodną powierzchnią, ograniczeniem grubości warstwy przyściennej jest głębokość strumienia.

Od przekroju wyznaczonego przez ten punkt zetknięcia obu warstw (lub odpowiednio przez punkt styku warstwy przyściennej ze swobodną powierzchnią) mamy do czynienia z **całkowicie rozwiniętym profilem prędkości** – typu parabolicznego (4.19) w ruchu laminarnym, zaś typu logarytmicznego (7.35) w ruchu burzliwym. Podkreślimy raz jeszcze, że na **odcinku przejściowym** (o długości odpowiednio L_{RL} oraz L_{RT}) rozkład prędkości jest zróżnicowany – ukształtowany przez ściankę w warstwie przyściennej, zaś wynikający z warunków zasilania w jego części centralnej. Wniosek ten może być o tyle istotny, że jeżeli zakłócenia wlotowe są znaczne, to mogą utrudniać spełnienie warunków, jakie obciążają model strumienia podłużnego (podrozdz. 2.6), jak też zaburzać rezultaty ewentualnych pomiarów, przeprowadzanych w tym obszarze.



Rys. 8.5. Formowanie się rozwiniętego profilu prędkości
(a – ruch laminarny, b – ruch turbulentny)

Oszacowanie długości odcinka przejściowego dla obu kategorii przepływu otrzymamy z relacji (8.2) oraz (8.5), gdyż z definicji (rys. 8.5) mamy warunek:

$$\delta_{WP} = D/2 \text{ dla } x = L_R. \quad (8.6)$$

Podstawiając te relacje do przywołanych wzorów, otrzymamy:
— dla warstwy laminarnej:

$$L_{RL} = 0,01 \operatorname{Re} D; \quad (8.7)$$

— dla warstwy burzliwej:

$$L_{RT} = 0,54 \operatorname{Re}^{1/5} D, \quad (8.8)$$

gdzie:

$$\operatorname{Re} = \frac{u_{\infty} D}{\nu}. \quad (8.9)$$

Ze względu na znacznie większą intensywność chaotycznej wymiany pędu w ruchu turbulentnym niż w ruchu laminarnym, spodziewamy się, że $L_{RL} > L_{RT}$. Rzeczywiście, łatwo sprawdzić, że:

$$L_{RL} / L_{RT} > 1 \text{ dla } \operatorname{Re} > 146, \quad (8.10)$$

a więc w całym zakresie ruchu burzliwego.

8.4. Pojęcie ścianki hydraulicznie gładkiej

Na stopień złożoności pola prędkości płynu w zasadniczym stopniu wpływa kształt obszaru. Jest to oczywisty wniosek z postaci równań ruchu (3.94) i (3.95). Wpływ ten wywierany jest zarówno przez zróżnicowanie kształtu całości obszaru, jak też przez zróżnicowanie o charakterze lokalnym. W szczególności istotne są tu bardzo niewielkie nierówności, łącznie wywołujące efekt określany nawet potocznie zrozumiałym terminem **szorstkość** (lub też **chropowatość**) powierzchni ścianki.

Najprostszym sposobem opisu tego czynnika jest średnia wysokość tych nierówności, nazywana **szorstkością bezwzględną** k_s . Wpływa ona zarówno na charakter głównego pola prędkości, jak też na generację turbulencji.

Praktyczne sposoby uwzględniania tego wpływu omówimy w dalszych rozdziałach (głównie 11 oraz 13), zaś tutaj zwrócimy uwagę tylko na jeden aspekt tego zagadnienia, poznawczo podstawowy, związany z wzajemnymi proporcjami między wartością k_s a grubością podwarstwy lepkiej δ_L , która określona jest przez empirycznie wyznaczoną wartość lokalnie zdefiniowanej liczby Reynoldsa (ν^* – patrz (7.35)):

$$\frac{\delta_L \nu^*}{\nu} = 11. \quad (8.11)$$

Możliwe są tu trzy przypadki [38]:

- 1) gdy wywołujące szorstkość nierówności są całkowicie zakryte podwarstwą lepką (rys. 8.6a):

$$k_s \leq 0,25 \delta_L. \quad (8.12)$$

W takiej sytuacji chropowatość powierzchni nie wpływa na profil prędkości, a ściankę nazywamy **hydraulicznie gładką**;

- 2) gdy obie wielkości są tego samego rzędu (rys. 8.6b), co przyjęto zapisywać w formie warunku:

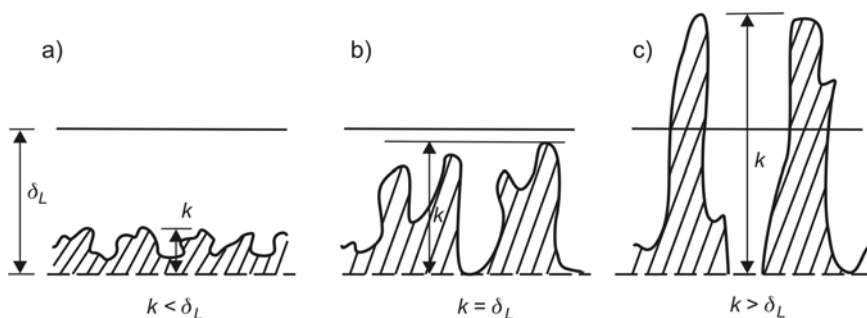
$$0,25 < k_s / \delta_L < 6,00. \quad (8.13)$$

Mówimy wtedy o obszarze przejściowym, w którym wpływ szorstkości zaczyna się ujawniać;

- 3) gdy nierówności powierzchni wyraźnie dominują nad podwarstwą lepką (rys. 8.6c):

$$K_s \geq 6 \delta_L. \quad (8.14)$$

Mamy wtedy do czynienia z wyraźnym wpływem szorstkości na profil prędkości płynu.

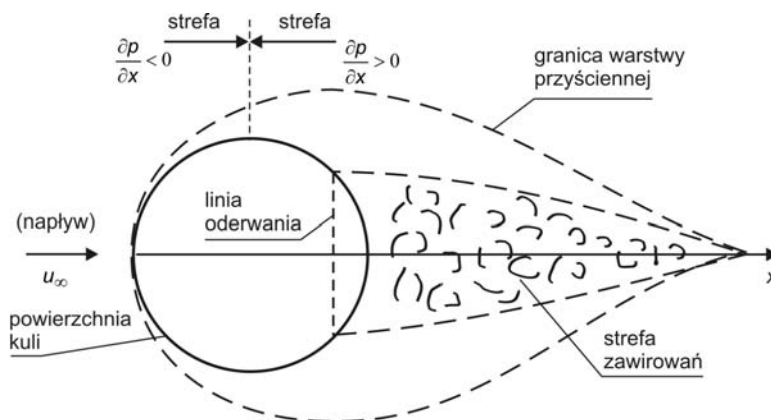


Rys. 8.6. Wpływ szorstkości przewodu na pole prędkości płynu

8.5. Oderwanie warstwy przyściennej

Kolejny istotny efekt istnienia warstwy przyściennej ujawnia się przy rozważaniu opływu ciała materialnego strumieniem płynu, czyli tak zwanego **zagadnienia zewnętrznego** (dla odróżnienia, przepływy w kanałach określamy mianem **zagadnień wewnętrznych**). W takich przypadkach warstwa przyścienne rozwija się wzdłuż powierzchni ciała, poczynając od najbardziej wysuniętej do przodu krawędzi (lub punktu) natarcia. Jej grubość wzrasta, przy czym dla rzeczywistych ciał odbywa się to w sposób bardziej złożony, niż dla wyidealizowanego przypadku nieskończonej cienkiej płytki, gdy możemy przyjąć relacje (8.2) lub (8.5).

Na układ tej warstwy istotny wpływ ma zmiana warunków ruchu po przekroczeniu przez elementy płynu linii największej rozpiętości ciała. Do tego momentu, w związku ze zwiększaniem się jego przekroju poprzecznego, lokalna prędkość wzrasta, czemu odpowiada zmniejszanie się ciśnienia, wynikające z równania Bernoulliego (par. 6.2.3). W efekcie na odcinku tym panuje spadek ciśnienia wzdłuż kierunku ruchu, korzystny dla przepływu (gdyż stanowi czynnik napędzający płyn). Jednakże w tylnej (spływowej) części ciała sytuacja ulega jakościowej zmianie – prędkość spada tam wzdłuż kierunku ruchu, co wywołuje przeciwnie skierowany spadek ciśnienia, utrudniający (czyli hamujący) przepływ.



Rys. 8.7. Oderwanie warstwy przyściennej podczas opływu ciała

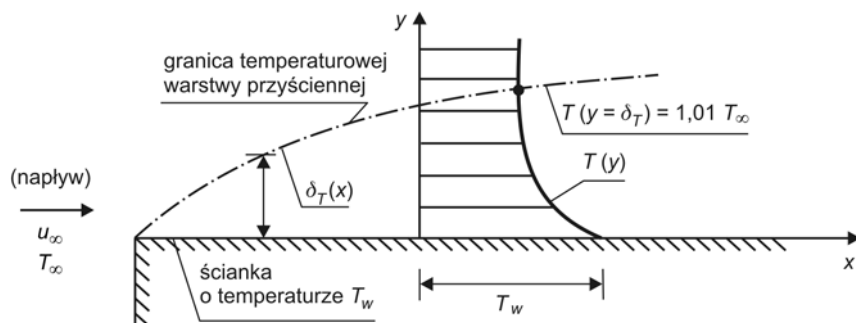
Ilościowy opis tych zmian nie będzie tu rozpatrywany, gdyż nie jest on przedmiotem szczególnego zainteresowania inżynierii środowiska (istotną rolę odgrywa w takich dziedzinach techniki, jak

budowa okrętów i aparatów latających). Do naszych celów wystarczy tu jakościowa uwaga, że występujący w spływowej części ciała przyrost ciśnienia może być na tyle znaczny, iż **warstwa przyścienna ulegnie oderwaniu**. Obszar pomiędzy powierzchnią ciała z oderwaną warstwą wypełniają lokalne zawirowania. Sytuację ilustruje rys. 8.7. Efektem oderwania warstwy przyściennej jest wzrost siły oporu, z jaką ciało przeciwstawia się ruchowi płynu [37].

8.6. Temperaturowa warstwa przyścienna

Analogicznie do specyficznej zmiany pola prędkości w pobliżu opływanej ścianki, w obszarze tym można zaobserwować również charakterystyczną zmianę pola temperatury. Rzecz oczywista, pojawia się ona tylko wtedy, gdy temperatura ścianki różni się od temperatury płynu. Znajomość tego efektu jest ważna dla zrozumienia niektórych zagadnień inżynierii środowiska, a w szczególności – inżynierii sanitarnej, związanych z ogrzewaniem lub chłodzeniem płynu. Jest to tym bardziej istotne, że ostatnio coraz większe zainteresowanie budzą alternatywne źródła energii oraz oszczędne i wydajne metody jej pozyskiwania, gromadzenia i przekazywania.

Celem przedstawienia podstawowej charakterystyki omawianego zagadnienia, rozważmy prosty kinematycznie przypadek przepływu cieczy o temperaturze T_∞ wzdłuż płaskiej ścianki o temperaturze T_w , z prędkością ruchu niezakłóconego (rys. 8.2) wynoszącą u_∞ . Jak już wiemy (podrozdz. 8.1), wskutek poprzecznej wymiany pędu, wzdłuż ścianki kształtuje się warstwa przyścienna, którą dodatkowo określimy mianem **hydrodynamicznej** (bowiem odnosi się do dynamicznych zmiennych stanu). Skoro w rozważanym układzie występuje także zróżnicowanie temperatury, to ów poprzeczny ruch molekuł wywoła także odpowiednią wymianę energii cieplnej (spowodowaną znanym z fizyki procesem **przewodzenia ciepła** przez płyn). W efekcie wzdłuż powierzchni utworzy się struktura pokrewna warstwie hydrodynamicznej, nazywana **warstwą przyścienną temperaturową** (rys. 8.8).



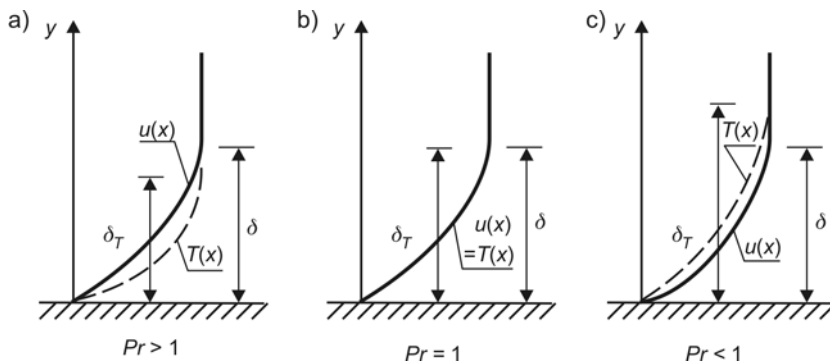
Rys. 8.8. Schemat temperaturowej warstwy przyściennej

Jeżeli transport ciepła jest ukierunkowany od ścianki do płynu, wtedy granicę tej warstwy wyznacza warunek:

$$T(y = \delta_T) = 1,01 T_\infty . \quad (8.15)$$

W przeciwnym razie (gdy $T_w < T_\infty$) mamy:

$$T(y = \delta_T) = 0,99 T_\infty . \quad (8.16)$$



Rys. 8.9. Wzajemne relacje między hydrodynamiczną i temperaturową warstwą przyścienną

Jest rzeczą interesującą, że w ogólnym przypadku grubości obu warstw są różne ($\delta_{WP} \neq \delta_T$). Ich wzajemne położenie uzależnione jest od własności płynu, a konkretnie – od różnicy między jej podatnością na przenoszenie pędu (wyrażaną współczynnikiem lepkości molekularnej μ) a podatnością na przenoszenie ciepła (wyrażaną współczynnikiem przewodzenia ciepła λ). Ich wzajemny stosunek opisuje bezwymiarowa **liczba Prandtla**:

$$Pr = \frac{c_w \mu}{\lambda}. \quad (8.17)$$

Mamy tu następujące możliwości:

- $Pr > 1$ (lepkość przeważa nad przewodnością cieplną) – warstwa hydrodynamiczna przeważa nad temperaturową ($\delta_{WP} > \delta_T$, rys. 8.9a);
- $Pr = 1$ (oba czynniki są tego samego rzędu) – obie warstwy są jednakowe ($\delta_{WP} = \delta_T$, rys. 8.9b);
- $Pr < 1$ (przewodnictwo cieplne dominuje nad lepkością) – warstwa hydrodynamiczna jest cieńsza od temperaturowej ($\delta_{WP} < \delta_T$, rys. 8.9c).

Przykładowo, dla wody mamy $Pr = 12,5$ (bowiem $c_w = 4186 \text{ m}^2/\text{s}^2\text{K}$, $\mu = 0,00179 \text{ kg/ms}$, $\lambda = 0,6 \text{ kg m/s}^3 \text{ K}$), czyli ciecz ta należy do pierwszej z wymienionych kategorii.

Występująca tu różnica temperatury ($T_w - T_\infty$) wywołuje oczywiście transport energii cieplnej między ścianką a płynem. W zastosowaniach technicznych dla płytki o szerokości b i długości l , strumień oddawanego lub przyjmowanego ciepła jest opisany wzorem [38]:

$$q_T = b \lambda (T_w - T_\infty) Nu, \quad (8.18)$$

gdzie bezwymiarowa **liczba Nusselta** wyrażona jest relacją:

$$Nu = 0,664 Pr^{1/3} Re^{1/2} \quad (8.19)$$

(liczba Prandtla – (8.17), liczba Reynoldsa – (6.25)).

9. Modele kinematyczne

9.1. Uwagi ogólne

W poprzednich rozdziałach omówiliśmy sposób wyprowadzania ogólnego układu równań, opisujących ruch cieczy i gazów. Punktem wyjścia były tam prawa zachowania, które – uzupełnione odpowiednimi równaniami konstytutywnymi i równaniem stanu – pozwalały na osiągnięcie zamierzonego celu. Dla przypadku podstawowego, rdzeń roboczego układu tych zależności tworzą równanie ciągłości (3.94) oraz równanie dynamiczne (3.95).

Jednakże ich ogólna postać jest na tyle złożona, że bardzo poważnie ogranicza możliwości ich rozwiązywania (podrozdz. 4.3 i 4.4). W związku z tym w praktyce inżynierskiej za podstawowe narzędzie pracy należy uznać modele uproszczone. Tworzą one kilka specyficznych grup, które omówimy w następnych rozdziałach.

W przypadkach złożonych poszukuje się rozwiązań dla ogólniejszych postaci tych równań, a czyni się to niemal wyłącznie za pomocą metod numerycznych, wykorzystując maszyny liczące. Jest to niesłychanie pożyteczna możliwość, bardzo często dająca ważne i przydatne w praktyce wyniki. Trzeba jednak pamiętać, że jest to metodyka kosztowna i niejednokrotnie czasochłonna. Ponadto otrzymane rezultaty obciążone są błędami, nieraz istotnymi, których źródłem są niedokładności określenia informacji fizycznych i technicznych [34, 37], jak też proces obliczeniowy [6].

W tej sytuacji istotne znaczenie praktyczne ma specyficzna kategoria narzędzi przybliżonego opisu ruchu płynów, których głównymi składowymi są:

- równanie ciągłości,
- warunek sformułowany w postaci matematycznej, określający charakterystyczne cechy rozważanego pola prędkości płynu.

Rzecz oczywista, nie każde pole prędkości musi cechować się jakimś szczególnym wyróżnikiem. Tym samym wspomniany warunek można wyartykułować tylko w niektórych sytuacjach, gdy kinematyczne cechy przepływu (stąd nazwa tej kategorii modeli) dadzą się w odpowiedni sposób opisać. W dalszym ciągu tego rozdziału omówimy trzy najważniejsze modele tego typu, a mianowicie:

- model ruchu potencjalnego,
- model Stokesa (równanie biharmoniczne),
- model ruchu śrubowego.

Podkreślmy, że niektóre z modeli kinematycznych pozwalają na wyznaczenie pola prędkości płynu bez wykorzystania równania zachowania pędu. W takich sytuacjach posługujemy się nim tylko wtedy, gdy musimy określić ciśnienie, panujące w płynie (szczególnie często korzystając wtedy z równania Bernoulliego). Należy więc stosować je ostrożnie, a wyniki każdorazowo poddawać starannej weryfikacji.

9.2. Funkcja prądu i jej własności

9.2.1. Ruch płaski

Dwa pierwsze z omawianych tutaj modeli kinematycznych stosuje się niemal wyłącznie do przepływów dwuwymiarowych i dwukierunkowych (patrz podrozdz. 2.5), a także ustalonych, potocznie zwanych **przepływami płaskimi**:

$$\mathbf{u} = u_x(x, y) \mathbf{i} + u_y(x, y) \mathbf{j} . \quad (9.1)$$

Jest to kategoria pośrednia między przepływami jednowymiarowymi, dla których dysponujemy zestawem sprawdzonych modeli ruchu (omówionych w drugiej części książki), a skomplikowanymi przepływami przestrzennymi (rozdz. 17). Ma ona istotne znaczenie przy rozwiązywaniu zagadnień inżynierii środowiska, gdy regularne kształty przepływowych obiektów technicznych, mimo ich trójwymiarowego charakteru, pozwalają na akceptację warunku (9.1).

9.2.2. Funkcja prądu

Równanie ciągłości (3.94) dla przypadku ruchu płaskiego przyjmuje postać warunku (w kartezjańskim układzie współrzędnych):

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 , \quad (9.2)$$

który można spełnić tożsamościowo, jeżeli składowe wektora prędkości zdefiniuje się za pomocą skalarnej funkcji $\psi(x, y)$, zwanej **funkcją prądu**, przyjmując następujące relacje:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} . \quad (9.3)$$

Aby wyznaczyć tę funkcję – formalnie pomocniczą, lecz odgrywającą w mechanice płynów i hydraulice znaczącą rolę – możemy wykorzystać omówione już równanie dynamiczne (3.95), albo też zastosować któryś z modeli uproszczonych (w szczególności z omówionych w dalszym ciągu tego rozdziału modeli kinematycznych).

9.2.3. Własności funkcji prądu

Bardzo istotną cechą funkcji $\psi(x, y)$ można ujawnić, analizując matematyczny zapis oczywistego warunku, że wzdłuż linii stałej wartości (czyli wzdłuż **izolinii**), dla której:

$$\psi = \text{const} . \quad (9.4)$$

różniczka zupełna tej funkcji jest równa zeru:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 . \quad (9.5)$$

Podstawiając tu (9.3), otrzymamy:

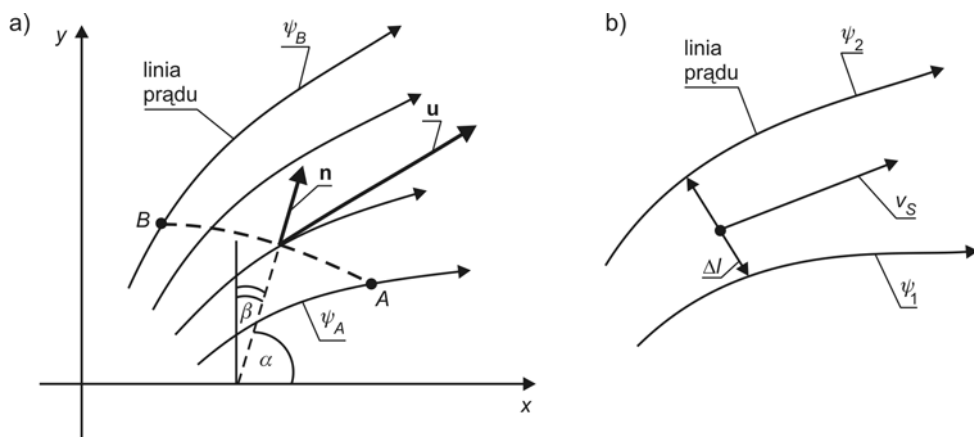
$$-u_y dx + u_x dy = 0 , \quad (9.6)$$

co pozwala napisać:

$$\frac{d_x}{d_y} = \frac{u_x}{u_y} . \quad (9.7)$$

Przywołując (2.6) widzimy, że relacja ta jest identyczna z równaniem **linii prądu** dla ruchu płaskiego. Innymi słowy – **izolinie funkcji prądu są tożsame z liniami prądu**. Ten bardzo ważny wniosek stanowi o znaczeniu omawianych tu pojęć (funkcji prądu oraz linii prądu). Można za ich pomocą w bardzo czytelny sposób dokonać wizualizacji przepływu, wyznaczając linie prądu (na przykład doświadczalnie), określające pole prędkości, lub też znając pole prędkości – obliczyć funkcję prądu i przebieg jej izolunii.

Drugą z najważniejszych cech funkcji prądu wykażemy, obliczając objętościowe natężenie przepływu Q (czyli **wydatek**) przez przepuszczalną powierzchnię S , określoną przez dowolną linię l (rys. 9.1a) i stałą głębokość warstwy cieczy H (której ruch opisujemy modelem płaskim).



Rys. 9.1. Zmiana wartości funkcji $\psi(x, y)$ między liniami prądu

Z definicji (1.63) mamy tu:

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_S \mathbf{u} \mathbf{n} dS = \int_A^B \mathbf{u} \mathbf{n} H dl = H \int_A^B (u_x \cos \alpha + u_y \cos \beta) dl = \\
 &= H \int_A^B \left(u_x \frac{dy}{dl} - u_y \frac{dx}{dl} \right) dl = H \int_A^B (u_x dy - u_y dx) = \\
 &= H \int_A^B \left(\frac{d\psi}{dy} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = H \int_A^B d\psi = H(\psi_B - \psi_A).
 \end{aligned} \tag{9.8}$$

Oznacza to, że zmiana wartości funkcji prądu między dwiema dowolnymi liniami prądu (tu oznaczonymi symbolami A i B) jest równa wydatkowi strumienia ograniczonego tymi liniami prądu, odniesionemu do jednostki jego głębokości:

$$\psi_B - \psi_A = Q/H. \tag{9.9}$$

Wniosek ten odgrywa ogromną rolę przy formułowaniu warunków brzegowych dla równań, służących do wyznaczania funkcji prądu.

Zauważmy przy okazji, że dzieląc różnicę tych wartości $\Delta\psi$ przez odległość Δl między rozważanymi liniami prądu, otrzymujemy średnią prędkość lokalnego strumienia cieczy (rys. 9.1b):

$$\frac{\Delta \psi}{\Delta l} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{\Delta l} = \frac{Q}{H \Delta l} = v_s. \quad (9.10)$$

9.3. Płaski ruch potencjalny

9.3.1. Charakterystyka modelu

Terminem **ruchu potencjalnego** określamy taki przepływ, dla którego pole wektorów prędkości wyznaczone jest przez gradient skalarnej funkcji, zwanej **potencjałem prędkości**. W rozważanym przypadku płaskim mamy:

$$\mathbf{u} = \text{grad } \varphi(x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j}. \quad (9.11)$$

Praktyczna przydatność tego modelu wynika z jego szczególnej cechy, którą można wykazać, korzystając z prostej tożsamości matematycznej [38]. Jeżeli bowiem obliczymy rotację (2.22) wektora prędkości określonego jak w (9.11), to otrzymamy:

$$\text{rot } \mathbf{u} = \text{rot grad } \varphi = 0 \quad (9.12)$$

Rezultat ten (zerowanie się rotacji gradientu dowolnej funkcji skalarnej) można sprawdzić bezpośrednim rachunkiem. Wynika stąd, że model płaskiego ruchu potencjalnego wolno stosować wtedy, **gdy przepływ nie wykazuje wirowości**.

Istotę tej cechy oraz znaczenie rotacji jako jednej ze składowych ogólnego ruchu materii omówiliśmy w podrozdz. 2.3, poświęconym **pierwszemu twierdzeniu Helmholtza**. Tutaj pozostaje więc tylko odnieść się do technicznych aspektów braku wirowości. Zasadnicze znaczenie ma tu bezpośrednia obserwacja naszego otoczenia. Pozwala ona zauważyć, że im większa jest prędkość poruszającej się materii (a w szczególności – płynu), tym wyraźniejsza jest jej tendencja do wykonywania obrotów (a w przypadku płynów – do tworzenia wirów). Można więc przyjąć następującą zasadę: **im mniejsza jest prędkość płynu, tym lepszym przybliżeniem pola przepływu jest model płaskiego ruchu potencjalnego**. Podkreślmy jednak, że w każdym przypadku jest to model przybliżony.

9.3.2. Podstawowe równanie modelu

Warunek (9.12) w ruchu płaskim przybiera postać:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0. \quad (9.13)$$

Podstawiając tu (9.3), otrzymujemy:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Delta \psi = 0. \quad (9.14)$$

Relacja ta należy do klasycznych zależności fizyki matematycznej [15], a zwana jest **równaniem Laplace'a**. Stanowi ona narzędzie formalne, pozwalające w tej metodzie wyznaczyć **funkcję prądu**.

Podobnie, jeśli definiujemy składowe prędkości relacjami (9.2), ponownie otrzymamy równanie Laplace'a, tym razem dla **potencjału prędkości**:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta \varphi = 0. \quad (9.15)$$

9.3.3. Formułowanie zagadnienia

Uzyskanie opisu każdego problemu technicznego (jako rozwiązania odpowiednich równań fizyki matematycznej) wymaga uprzedniego **sformułowania zagadnienia**. Pojęcia i wskazówki ogólne dotyczące tej kwestii omówiono w rozdz. 4, toteż tutaj skupimy się tylko na jednym elemencie, uzależnionym od indywidualnych cech rozważanych równań, a mianowicie na **warunkach brzegowych**. Dla równania Laplace'a (par. 4.3.2) można sformułować trzy typy takich warunków, które odpowiednio prowadzą do [27]:

— **zagadnienia Dirichleta**, powstającego przez określenie na brzegu obszaru wartości poszukiwanej funkcji (w tym przypadku ψ albo φ):

$$\psi_b = f_{pd} \quad \text{albo} \quad \varphi_b = f_{fd}; \quad (9.16)$$

— **zagadnienia Neumanna**, dla którego wzdłuż brzegu określa się wartość pochodnej szukanej funkcji w kierunku prostopadłym do linii brzegowej:

$$\frac{\partial \psi_b}{\partial n} = f_{pn} \quad \text{albo} \quad \frac{\partial \varphi_b}{\partial n} = f_{fn}; \quad (9.17)$$

— **zagadnienia Hankela**, gdy wzdłuż brzegu znamy ilościową relację między szukaną funkcją a jej pochodną normalną do linii brzegowej:

$$f\left(\psi_b, \frac{\partial \psi_b}{\partial n}\right) = f_{ph} \quad \text{albo} \quad f\left(\varphi_b, \frac{\partial \varphi_b}{\partial n}\right) = f_{fh}. \quad (9.18)$$

Możliwe jest także zadawanie różnych rodzajów warunku brzegowego dla różnych odcinków brzegu. Mówimy wtedy o **zagadnieniu mieszanym**.

Za wariant podstawowy w modelu płaskiego ruchu potencjalnego należy uznać **zagadnienie Dirichleta** (9.16) dla funkcji prądu, opisanej równaniem Laplace'a (9.14). Biorąc pod uwagę, że zgodnie z (9.3) pole prędkości płynu określa się drogą różniczkowania funkcji prądu, nie musimy na brzegu określać jej bezwzględnych wartości, a można ograniczyć się do wyznaczenia różnicy tych wartości względem jednego dowolnie wybranego punktu brzegu, dla którego można przyjąć jakąkolwiek wartość ψ . Sytuację dla bardzo typowego przypadku przepływu przez dwuwymiarowy zbiornik o kształcie prostokąta obrazuje aksonometryczny szkic, przedstawiony na rys. 9.2.

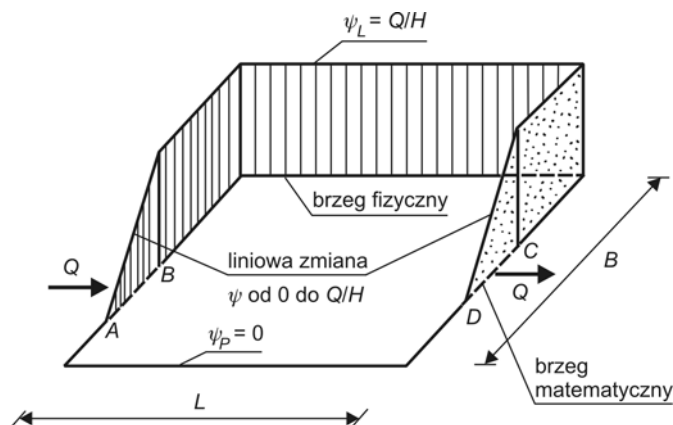
Ze względu na brak możliwości przepływu cieczy przez ściankę sztywną (brzeg fizyczny – rozdz. 4), jej zarys należy do układu linii prądu. Przyjmując dla wygody zerową wartość funkcji prądu dla jednej ze ścianek (rys. 9.2), zmianę tej wartości dla przeciwległej części brzegu wyznaczmy bez trudu z relacji (9.9).

Pozostaje więc tylko określić przebieg funkcji prądu na odcinkach AB i CD obwodu obszaru (brzeg matematyczny – rozdz. 4). Mamy tu różne możliwości, zależne od ukształtowania profili prędkości wzdłuż tych odcinków. W najprostszym przypadku, gdy przepływy takie opiszemy za pomocą prędkości średniej, przebieg funkcji prądu określony jest tam zgodnie z (9.10) funkcją liniową (rys. 9.2). Takie też podejście stosowane jest najczęściej w zastosowaniach omawianego modelu. Gdybyśmy jednak pragnęli dokładniej opisać profile prędkości dopływowej (odcinek AB) i odpływowej (odcinek CD), na przykład za po-

mocą profilu parabolicznego (4.19), wtedy przebieg funkcji prądu wzdłuż brzegu matematycznego (określonego symbolicznie zmienną „ s ”) możemy wyznaczyć, całkując funkcję $u_n(s)$ wzdłuż odpowiedniego odcinka brzegu:

$$\psi(s) = \int_0^s u_n(s) ds. \quad (9.19)$$

Bez trudu można stwierdzić, że przy parabolicznym rozkładzie prędkości funkcja prądu opisana będzie relacją trzeciego stopnia.



Rys. 9.2. Wykres warunku brzegowego dla zagadnienia Dirichleta

9.3.4. Rozwiązywanie zagadnienia

Sformułowany w omówiony sposób problem tylko w bardzo nielicznych przypadkach układów o regularnych kształtach można rozwiązać analitycznie. Jako zasadę przyjąć tu należy stosowanie metod numerycznych [6, 63].

Omawiany model, choć bardzo prosty pod względem formalnym, wykazuje jednak bardzo istotny mankament o charakterze fizycznym. Uwidaczniają go relacje (9.3). Wynika z nich, że pochodna funkcji prądu na ścianie, która przecież stanowi jedną z linii prądu, obliczona dla kierunku do niej prostopadłego, jest w ogólnym przypadku różna od zera, czyli model płaskiego ruchu potencjalnego prowadzi do wystąpienia **obliczeniowego poślizgu cieczy względem ścianki**, sprzecznego z fizycznym sensem zjawiska (rys. 4.4).

Jest to wada niesłychanie istotna. Ogranicza ona zakres stosowalności modelu do bardzo nielicznych zagadnień przepływowych (w szczególności do problemów filtracji – rozdz. 18). Trzeba bowiem pamiętać, że płaski ruch potencjalny był atrakcyjnym modelem ruchu cieczy w okresie poprzedzającym powstanie współczesnych metod i możliwości obliczeń numerycznych. Stwarzane przez ten model możliwości były ówczesnie na tyle cenne, że równoważyły jej nieścisłości fizyczne. Jednak obecnie, gdy dysponujemy efektywnymi i wydajnymi możliwościami rachunku przybliżonego, jego przydatność znacznie zmalała.

Z tego względu w dalszym ciągu nie będziemy rozwijać tego tematu (bliższy opis modelu płaskiego ruchu potencjalnego znaleźć można w starszych podręcznikach, jak na przykład [10]), poprzestając na jego ogólnej prezentacji w zakresie przydatnym do omówienia kolejnego modelu kinematycznego, którego przydatność jest wciąż bardzo znaczna.

9.4. Model biharmoniczny

9.4.1. Opis modelu

O ile w przypadku płaskiego ruchu potencjalnego podstawowy charakter miało założenie o możliwości pominięcia rotacji prędkości (9.12), to tym razem nie odrzuca się równania dynamicznego, lecz jedynie poddaje się je pewnemu uproszczeniu i przekształceniu. Bazuje to uproszczenie na stwierdzeniu, że ze spadkiem prędkości ruchu płynu maleją także pochodne tej funkcji. Oznacza to, że dla **przepływów powolnych** (dla których dopuszczalne jest stosowanie omawianego modelu) można odrzucić w równaniu ruchu (3.95) pochodną substancjalną, co określane jest mianem **założenia Stokesa** [47].

Przyjmując ten warunek i obliczając obustronnie rotację relacji (3.95), otrzymamy:

$$\text{rot } (\Delta \mathbf{u}) = 0, \quad (9.20)$$

co wynika z faktu, że [4]:

$$\text{rot grad} \equiv 0, \quad (9.21)$$

zaś w polu grawitacyjnym zachodzi:

$$\text{rot } \mathbf{f} = 0. \quad (9.22)$$

Jeżeli teraz ograniczymy się do ruchu płaskiego i wprowadzimy funkcję prądu ψ , to po podstawieniu (9.3) do (9.20) otrzymamy:

$$\Delta \Delta \psi = 0 \quad (9.23)$$

lub w układzie kartezjańskim:

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = 0. \quad (9.24)$$

Tak więc w omawianym przypadku funkcja prądu jest rozwiązaniem **równania biharmonicznego** (9.23), co uzasadnia potoczną nazwę modelu.

9.4.2. Formułowanie zagadnienia

Równanie (9.23) jest relacją czwartego rzędu, toteż dla poprawnego przedstawienia opisanego nim zagadnienia należy określić dwa warunki brzegowe [6, 15], a mianowicie:

- wartość funkcji prądu na brzegu obszaru (9.16),
- wartość normalnej pochodnej funkcji prądu na brzegu obszaru (9.17).

Sposób wyznaczenia pierwszego z tych warunków przedstawiony został w par. 9.3.3 (rys. 9.2), więc tutaj pozostaje nam omówienie drugiego z nich. Punktem wyjścia są tu relacje (9.3). Mówią one, że pochodna funkcji prądu w pewnym kierunku określa prędkość w kierunku do niego prostopadłym. Tak więc pochodna normalna do brzegu, wyrażona funkcją f_{pn} w (9.17), jest tożsama z prędkością wzdłuż linii brzegowej. W przypadku nieruchomej ścianki sztywnej (brzeg fizyczny) mamy oczywiście:

$$\frac{\partial \psi_b}{\partial n} = 0, \quad (9.25)$$

co wynika z warunku przylegania cieczy do ścianki (rozdz. 4). Dla ścianki poruszającej się z prędkością wzdłużną w_s (rys. 4.4) można napisać:

$$\frac{\partial \psi_b}{\partial n} = w_s. \quad (9.26)$$

Te same relacje przyjmuje się na matematycznych częściach brzegu obszaru (przekroje wlotowe i wylotowe – rys. 9.2), przy czym z reguły dobieramy ich położenie tak, by przebiegały prostopadłe do kierunku napływu i odpływu. Pozwala to wykorzystać relację (9.25) i uniknąć trudności przy wyznaczaniu wartości w_s w (9.26).

9.4.3. Rozwiązywanie zagadnienia

Podobnie jak w przypadku płaskiego ruchu potencjalnego (par. 9.3.4), także równanie (9.24), najczęściej uzupełniane warunkami brzegowymi (9.16) i (9.25), rozwiązuje się metodami numerycznymi [6, 63].

■ Przykład 9.1

Wyznaczyć układy linii prądu w dwuwymiarowym zbiorniku prostokątnym jak na rys. 9.2, przyjmując jego szerokość $B = 2,40$ m oraz długość $L = 2,00$ m, posługując się modelem płaskiego ruchu potencjalnego oraz modelem biharmonicznym.

Rozwiązanie

Zagadnienie sformułowano w sposób omówiony w par. 9.3.3 oraz par. 9.4.2, przy czym dla uzyskania większej ogólności wyniku końcowego posłużono się możliwością znormalizowania funkcji prądu. Jest to wariant często wykorzystywany w praktyce, a polega on na podzieleniu obu stron rozważanego równania przez maksymalną wartość tej funkcji, czyli przez $\psi_m = Q/H$ (patrz (9.9)), co daje:

— znormalizowane równanie (9.14) dla płaskiego ruchu potencjalnego:

$$\Delta(\psi/\psi_m) = 0; \quad (9.27)$$

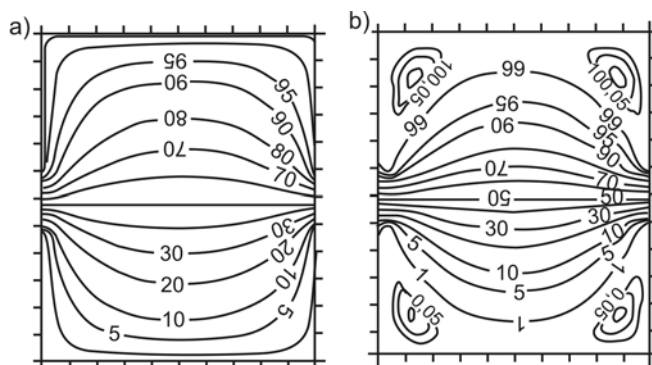
— znormalizowane równanie (9.23) dla modelu biharmonicznego:

$$\Delta\Delta(\psi/\psi_m) = 0. \quad (9.28)$$

Tym samym warunek brzegowy (9.16) przyjmuje postać (rys. 9.2):

$$\psi_p = 0, \quad \psi_l = 100\%. \quad (9.29)$$

Oba równania różniczkowe cząstkowe rozwiązano numerycznie metodą różnic skończonych [6]. Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 9.3.



Rys. 9.3. Rozwiązanie przykładu 9.1: a) model potencjalny, b) model biharmoniczny ■

Analiza istoty omówionych zależności, poparta powyższym przykładem, dobitnie pokazuje przewagę modelu biharmonicznego nad modelem potencjalnym. Nie tylko nie prowadzi on do wystąpienia obliczeniowego poślizgu płynu względem ścianki, ale dodatkowo pozwala odtworzyć struktury wirowe, bardzo często pojawiające się w rzeczywistych układach przepływowych, a których opis jest z definicji niemożliwy za pomocą modelu potencjalnego.

Nie da się natomiast jednoznacznie rozstrzygnąć kwestii zakresu stosowalności relacji (9.24). Jak już wspomniano, odnosi się ona do przepływów powolnych, lecz nie ma ilościowego kryterium dla tego warunku. Formalnie można więc stosować tę relację dla różnych warunków, a o akceptacji lub odrzuceniu wyniku muszą decydować konkretne informacje o przebiegu zjawiska, choćby przybliżone, albo przynajmniej zalecenia literaturowe. Jak jednak pokazują doświadczenia techniczne, model biharmoniczny jest przydatny w wielu zagadnieniach inżynierii środowiska.

9.5. Ruch śrubowy

9.5.1. Charakterystyka ogólna

Istotę tego modelu ujawnia jego nazwa – odnosi się on do takich przepływów, w których linie prądu mają charakter spiralny. Zagadnienia tego typu na tyle często występują w inżynierii środowiska (najbardziej typowym przykładem są tu piaskowniki napowietrzane [52]), że warto się z nimi zapoznać.

Podczas przepływu o takim charakterze wektor rotacji prędkości (2.22) ma kierunek zbliżony do kierunku wektora prędkości. Wynika to ze specyfiki ruchu spiralnego. Idealizując sytuację, w modelu ruchu śrubowego przyjmuje się ścisłą równoległość obu tych wektorów, co pozwala napisać:

$$\text{rot } \mathbf{u} = \lambda_s \mathbf{u} . \quad (9.30)$$

Ten właśnie warunek, wraz z prawem zachowania masy, tworzy podstawowy układ równań omawianego modelu.

W praktyce znaczenie ma przypadek jednorodnego i jednostajnego ruchu śrubowego, gdy jego intensywność oraz prędkość wzdłuż strumienia są stałe:

$$\lambda_s = \text{const.} \quad \text{oraz} \quad u_x \neq f(x) . \quad (9.31)$$

Przy takich założeniach równanie ciągłości (3.94) zawiera tylko pochodne składowych prędkości cyrkulacji poprzecznej (u_y oraz u_z), co pozwala zdefiniować funkcję prądu (patrz par. 9.2.2) taką, że zachodzi:

$$u_y = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = -\frac{\partial \psi}{\partial y} . \quad (9.32)$$

Zależności te spełniają tożsamościowo równanie ciągłości oraz pozwalają następująco zapisać skalarne składowe relacji (9.30):

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \lambda_s u_x , \quad (9.33)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\lambda_s \frac{\partial \psi}{\partial z} , \quad (9.34)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \lambda_s \frac{\partial \psi}{\partial y} . \quad (9.35)$$

Z dwóch ostatnich równości wynika, że:

$$u_x = -\lambda_s \psi + C' . * \quad (9.36)$$

Podstawiając wyznaczoną z (9.36) funkcję prądu do (9.33), otrzymamy równanie robocze, opisujące rozkład prędkości podłużnej:

$$\Delta u_x + \lambda_s^2 u_x = 0 . \quad (9.37)$$

Jego rozwiązanie wymaga opisanego warunku brzegowego (patrz rozdz. 4) oraz określenia intensywności ruchu śrubowego λ_s . Jest to już zagadnienie o charakterze specjalistycznym, wymagające wykorzystania informacji o technicznych aspektach rozważanego problemu, toteż nie będziemy go tutaj omawiali [47].

Znając funkcję $u_x(x, y)$, można – korzystając z (9.32) i (9.36), obliczyć składowe cyrkulacji poprzecznej:

$$u_y = \frac{1}{\lambda_s} \frac{\partial u_x}{\partial z}, \quad u_z = -\frac{1}{\lambda_s} \frac{\partial u_x}{\partial y} . \quad (9.38)$$

Część II – HYDRAULIKA

10. Problematyka hydrauliki

10.1. Uwagi ogólne

O ile podstawowymi cechami zjawisk fizycznych i prawami natury, opisującymi ruch płynu, zajmuje się **mechanika płynów** (w przypadku płynów nieściśliwych określana mianem **hydromechaniki**), to zagadnienia praktyczne stanowią przedmiot zainteresowań **hydrauliki**. Nie znaczy to oczywiście, że w ramach mechaniki płynów omawiane są wyłącznie zagadnienia ogólne i teoretyczne, gdyż obejmuje ona także pewną liczbę modeli uproszczonych. Te z nich, które są najważniejsze dla inżynierii środowiska, omówiliśmy w pierwszej części tej książki, a są to: hydrostatyka, równanie Bernoulliego, przepływy turbulentne, warstwa przyścienna oraz modele kinematyczne.

Obecnie przechodzimy do problemów omawianych w ramach hydrauliki. Bardzo istotne znaczenie przy ich wyróżnianiu i definiowaniu mają aspekty techniczne. Aby jednak lepiej zrozumieć strukturę tej gałęzi wiedzy inżynierskiej, dobrze jest zwrócić uwagę na pewne ogólne prawidłowości, z których wynikają konkretne klasyfikacje zagadnienia.

Za kluczowe należy tu uznać pojęcie **strumienia**, przedyskutowane w podrozdz. 2.6. Uwzględniając dodatkowo spotykany w inżynierii środowiska wariant przepływów z cyrkulacją poprzeczną (podrozdz. 9.5), możemy mówić o trzech typach tej struktury przepływowej:

- 1) **strumienie podłużne**, o wyrównanym profilu prędkości w przekroju poprzecznym, który można z dobrym przybliżeniem zastąpić prędkością średnią (2.35);
- 2) **strumienie z poprzeczną stratyfikacją prędkości** (cechujące się znacznym zróżnicowaniem prędkości podłużnej w przekroju poprzecznym – rys. 2.9a);
- 3) **strumienie zawirowane** (w szczególności – strumienie o przepływie śrubowym).

Pierwsza z tych kategorii należy do klasycznych zagadnień hydrauliki, podczas gdy dwie pozostałe, ze względu na swą złożoność, opisywane są metodami mechaniki płynów.

Drugi czynnik, różnicujący zagadnienia hydrauliczne, ma charakter funkcjonalny. Biorąc pod uwagę wymogi, jakie ma spełniać dany układ przepływowy, możemy zdefiniować:

- **obiekty tranzytowe** (czyli służące do przemieszczania płynów na odległość), które mogą mieć formę:
 - rurociągów,
 - koryt otwartych,
 - strumieni swobodnych;
- **obiekty kubaturowe**, a mianowicie:
 - zbiorniki (służące do gromadzenia płynów),
 - reaktory (w których własności płynów ulegają przemianom);
- **maszyny hydrauliczne** (pompy, wentylatory, sprężarki, turbiny, silniki spalinowe, śruby napędowe, wiatraki...);

- **łączniki i regulatory** (armatura połączeniowa i rozdzielcza, zawory, kurki, zasuw, urządzenia zabezpieczające...);
- **urządzenia pomiarowe.**

Konkretne obiekty, należące do poszczególnych kategorii, można opisywać zarówno dokładnie, z uwzględnieniem struktury zachodzących w ich wnętrzu zjawisk przepływowych (a więc metodami mechaniki płynów), jak też w pewnym uproszczeniu, stosując narzędzia specyficzne dla hydrauliki.

Ze względu na ogólną charakterystykę profili zawodowych poszczególnych specjalności z zakresu nauk technicznych, projektowanie i budowa maszyn hydraulicznych oraz armatury przepływowej stanowi domenę inżynierów-mechaników. Dla specjalistów z zakresu inżynierii środowiska obiekty należące do tych kategorii mają z zasady charakter gotowych wyrobów, wytwarzanych z reguły seryjnie. Zasadnicze znaczenie ma w tej branży umiejętność właściwego doboru odpowiedniej jednostki z katalogów, dostarczanych przez ich producentów (patrz rozdz. 11).

Uwaga powyższa w znacznym stopniu dotyczy także urządzeń pomiarowych, choć istnieje szereg istotnych przyrządów tego typu, których wymiarowanie ma charakter zadań czysto hydraulicznych (patrz rozdz. 20).

Pierwszą z wymienionych kategorii – obiekty tranzytowe – należy uznać za główny przedmiot zainteresowań hydrauliki

Jeśli chodzi o obiekty kubaturowe, to opis ich funkcjonowania uzależniony jest od charakteru zmiennych, opisujących zachodzące w nich zjawiska. Jeśli zależy nam na lokalnym jego opisie (patrz par. 1.3.2), czyli na wyznaczeniu tych zmiennych w każdym punkcie wnętrza układu (co ma na przykład miejsce w zagadnieniach ogrzewania, wentylacji i klimatyzacji dużych pomieszczeń, jak fabryczne hale produkcyjne lub sale widowiskowe), musimy zastosować złożone metody mechaniki płynów. Natomiast gdy możemy wykorzystać globalne parametry syntetyczne, opisujące pracę układu jako całości, można wykorzystać możliwości stwarzane przez hydraulikę.

Trzeci aspekt charakterystyki systemów przepływowych, który wpływa na dobór modelu obliczeniowego, pozwalającego rozwiązywać problemy inżynierskie, wiąże się z wartością wnętrza takiego systemu. Może ono być całkowicie otwarte, wypełnione jedynie przepływającą substancją, lecz także mogą być w nim usytuowane różnego typu obiekty, i to w różnej liczbie – od pojedynczych, aż do bardzo licznych. Teoretycznie rzecz biorąc, zagęszczenie tych obiektów może być bardzo zróżnicowane, lecz w praktyce możemy tu wydzielić układy, w których występuje policzalna liczba obiektów (jeden lub kilka). Mają one charakter „przeszkód”, opływanych przez substancję płynną wypełniającą układ. Tytułem przykładu można tu podać filar (lub kilka filarów) mostu, ale też pęk rur (często tworzących charakterystyczną **wężownicę**), umieszczony wewnątrz zamkniętego zbiornika, które mają przykładowo za zadanie chłodzenie lub podgrzewanie jego zawartości.

Osobną kategorię stanowią obiekty, w których wnętrzu znajduje się bardzo znaczna liczba drobnych ciał, z reguły stykających się ze sobą, które tworzą **wypełnienie**. Może ono cechować się stosunkowo niskim zagęszczeniem (jak na przykład w przypadku **złoża biologicznego**, utworzonego przez bryłki litego materiału, lub też przez ażurowe kształtki z tworzywa sztucznego [72]), ale też zajmować znaczną część wnętrza układu (jak na przykład filtry do wody, wypełnione żwirem lub piaskiem, czy też wymienniki jonowe [23]).

Pożyteczne jest tu wprowadzenie matematycznego pojęcia **spójności obszaru** [27, 68]. Punktem wyjścia jest eksperyment myślowy, polegający na umieszczeniu w układzie dowolnej zamkniętej powierzchni geometrycznej. W przypadku płaskim będzie to oczywiście zamknięty obwód. Jeżeli każdy taki twór geometryczny da się w ciągły sposób zredukować do punktu, nie przecinając przy

tym brzegu układu, to mamy do czynienia z **obszarem jednospójnym**. W przeciwnym razie mówimy o **obszarach wielospójnych**.

Można więc mówić o układach przepływowych określonych przez:

- obszary otwarte (jednospójne),
- obszary zawierające przeszkody (wielospójne),
- obszary zawierające wypełnienie, lub materiał porowaty (czyli wielospójne w tak wysokim stopniu, że mogą być traktowane jako układy wypełnione w sposób ciągły).

W pewnym sensie osobną kategorię obiektów przepływowych tworzą **otwory i przelewy** (rozdz. 16). Są one o tyle specyficzne, że mogą mieć różny charakter funkcjonalny (przykładowo – z jednej strony można je traktować jako **łączniki** pomiędzy zbiornikami lub kanałami otwartymi a strumieniami swobodnymi, ale także odgrywają one istotną rolę jako **urządzenia pomiarowe**).

I wreszcie piąty aspekt urządzeń, stanowiących przedmiot zainteresowań hydrauliki, ma charakter kinematyczny. Uwzględniając interesujący nas tu dział mechaniki płynów, zajmujący się głównie **strumieniami**, będziemy mogli rozważać:

- strumienie nieustalone i niejednostajne:

$$v = v(x, t); \quad (10.1)$$

- strumienie ustalone i niejednostajne:

$$v = v(x); \quad (10.2)$$

- strumienie ustalone i jednostajne:

$$v = \text{const.} \quad (10.3)$$

10.2. Schematy obliczeniowe hydrauliki

Uwzględniając omówione w poprzednim podrozdziale aspekty problematyki przepływowej i odnosząc je do potrzeb praktyki, otrzymuje się zestaw typowych zagadnień inżynierskich, tworzących kanon **schematów obliczeniowych**, objętych programem nauczania wyższych uczelni technicznych, dla specjalności szeroko pojętej inżynierii wodnej (inżynierii środowiska, inżynierii sanitarnej, hydrotechniki, budownictwa wodnego, melioracji wodnych...). W skład zestawu tych schematów wchodzi:

- rurociągi (pojedyncze przewody oraz ich sieci),
- koryta otwarte (pojedyncze kanały oraz ich sieci),
- strumienie swobodne,
- otwory,
- przelewy,
- zbiorniki retencyjne i reaktory,
- przepływy w ośrodkach porowatych.

Podstawowe metody obliczeniowe, stosowane do rozwiązywania konkretnych problemów, z reguły odnoszą się do przepływów ustalonych i jednostajnych, lecz w przypadkach rurociągów, koryt otwartych oraz zagadnień filtracyjnych omówione zostaną także zagadnienia niejednostajne i nieustalone.

Stosownie do potrzeb technicznych, dla kolejnych schematów będą przedstawione także metody doboru armatury oraz urządzeń napędowych (pomp).

Oddzielny rozdział zajmuje omówienie przyrządów pomiarowych, w szczególności takich, których projektowanie wymaga przede wszystkim wykorzystania wiedzy z zakresu mechaniki płynów i hydrauliki.

10.3. Podstawowe równania hydrauliki

Stosownie do charakteru poszczególnych schematów obliczeniowych, punktem wyjścia do matematycznego opisu systemów tranzytowych są ogólne równania ruchu strumieni podłużnych – zachowania masy (3.11) oraz zachowania pędu (3.39). Każdorazowo będą one przekształcane do postaci szczegółowych, uwzględniających indywidualne cechy danego schematu.

Dla części zagadnień (w szczególności dla otworów i przelewów) najważniejszą relacją obliczeniową jest równanie Bernoulliego, w wersji (6.27) lub pokrewnej.

Wreszcie dla zagadnień mających charakter bardziej złożony (dwu- lub trójwymiarowy) stosować będziemy pełniejsze modele równań ruchu – którąś z wersji układu ((3.7), (3.87)) dla zbiorników i reaktorów, zaś specyficzną ich odmianę, wynikającą z **prawa Darcy'ego**, dla przepływów filtracyjnych.

11. Ruch cieczy w pojedynczych przewodach zamkniętych

11.1. Charakterystyka zagadnienia

11.1.1. Aspekty funkcjonalne i techniczne

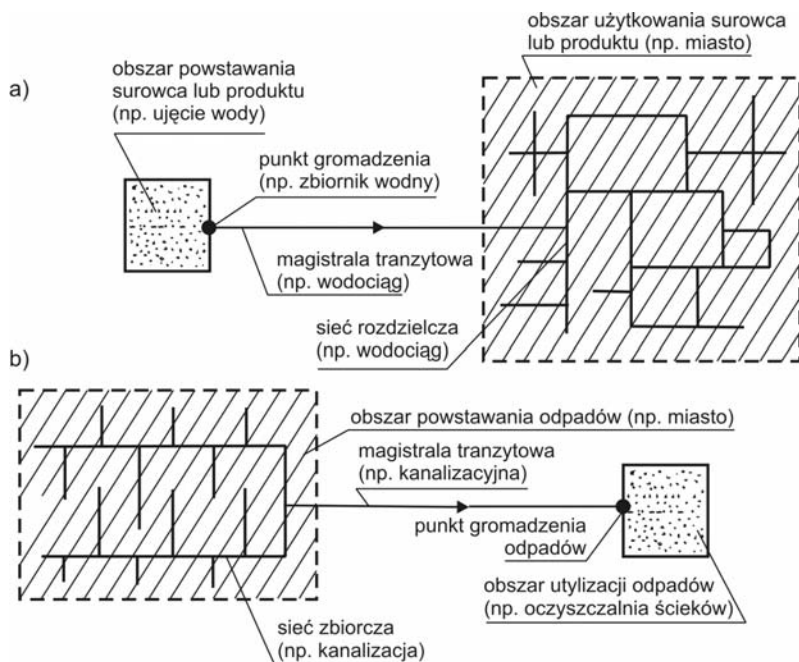
Wszelkie surowce oraz produkty z reguły są wydobywane lub wytwarzane i magazynowane lokalnie, w wyodrębnionych miejscach. Jest to oczywistą konsekwencją przyrodniczych, technicznych, organizacyjnych i ekonomicznych aspektów ich pozyskiwania, produkowania i gromadzenia. Inny natomiast charakter ma przebieg wykorzystywania owych surowców oraz produktów. Ich użytkownicy i konsumenci są najczęściej liczni, a zlokalizowani w różnych punktach. Tym samym pojawia się potrzeba przemieszczenia dóbr (nie tylko materialnych, jeśli weźmiemy pod uwagę na przykład energię elektryczną) na pewnym dystansie, dzielącym miejsce ich powstawania lub gromadzenia od miejsca, w którym są rozdzielane. Używane tu terminy specjalistyczne (transport, przewóz, przenoszenie, zaopatrzenie...) wygodnie jest ująć jednym słowem **tranzyt**.

Celowe jest oddzielenie dwóch elementów układów tranzytowych. Pierwszy z nich łączy miejsce, z którego surowiec lub produkt jest pobierany, ze skupiskiem użytkowników. Odpowiednie ciągi tranzytowe nazywamy **magistralami**. W najprostszym przypadku, gdy jedno miejsce poboru łączone jest z jednym skupiskiem odbiorców, magistrala ma charakter **ciągu (przewodu) pojedynczego**. Gdy natomiast miejsc poboru oraz/albo skupisk odbiorców jest więcej, ciągi tranzytowe tworzą **sieci magistralne**.

Drugi z omawianych elementów odnosi się do rozprowadzenia surowca lub produktu wewnątrz skupiska odbiorców. Służą temu **sieci rozdzielcze (dystrybucyjne)** – rys. 11.1a.

Równie ważne praktycznie są układy o przeciwnym kierunku funkcjonowania, gdy transportowane medium powstaje na obszarze rozległym, z którego odprowadzane jest **siecią zbiorczą**. Następnym etapem jest wtedy przemieszczenie medium **magistralą tranzytową** (mającą charakter ciągu pojedynczego lub sieci) do miejsca jego gromadzenia, a wreszcie – docelowego przetworzenia (rys. 11.1b). Jeśli uwzględnić realia techniczne, tego typu układy będą z reguły związane z odprowadzaniem substancji zużytych lub niepotrzebnych, które można określić mianem **odpadów**. W interesujących nas tutaj zagadnieniach, najlepszym przykładem odpadu jest zużyta woda (ścieki bytowo-gospodarcze, przemysłowe lub rolnicze, odprowadzane odpowiednimi przewodami i sieciami kanalizacyjnymi), bądź woda o względnie dobrej jakości, lecz występująca w nadmiarze (co dotyczy na przykład **sieci kanalizacji deszczowej**, odprowadzających wody opadowe z terenów zurbanizowanych, lub **sieci przewodów melioracyjnych**, odwadniających tereny podmokłe).

Uwagi powyższe sformułowano w bardzo ogólny sposób, choć w dalszym ciągu przedmiotem naszych rozważań będą układy służące rozrowadzaniu płynów, którymi zajmuje się inżynieria środowiska – wody czystej (zimnej i ciepłej), wody zanieczyszczonej (ścieków), powietrza (służącego wentylacji pomieszczenia albo celom technologicznym) oraz innych cieczy i gazów (palnych lub wykorzystywanych do celów użytkowych, jak na przykład tlen w instalacjach szpitalnych). Jednak taki zarys systemowego spojrzenia na kwestię tranzytu surowców i produktów jest o tyle celowy, że pozwala uwypuklić znaczenie wpływu użytkowych i technicznych aspektów rozważanych zagadnień zarówno na schematy układów występujących w praktyce, jak też na metodykę ilościowego opisu ich funkcjonowania. Trzeba bowiem podkreślić, że o ile w ramach mechaniki płynów rozważane są układy uogólnione, o dowolnych kształtach i bez konkretnych odniesień praktycznych, o tyle przedmiotem zainteresowań hydrauliki są schematy obliczeniowe realnych układów technicznych.

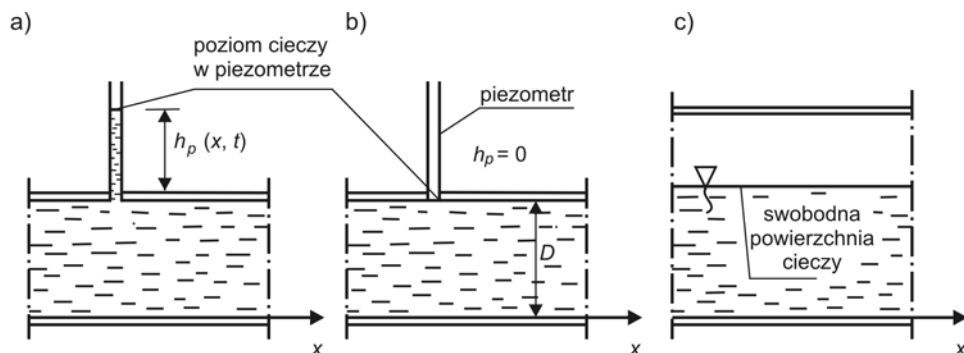


Rys. 11.1. Schematy układów tranzytowych (a – tranzyt i rozdział surowca lub produktu, na przykład czystej wody; b – spływ i tranzyt odpadu, na przykład ścieków)

W rozdziale tym będziemy się zajmować pojedynczymi ciągami, służącymi do transportu płynów. Występują one jako **magistrale**, ale także stanowią zasadniczy element układów złożonych, czyli **sieci**. Ograniczamy się przy tym do **przewodów zamkniętych, pracujących pod ciśnieniem**. Ten powszechnie zrozumiały termin określa szczególny rodzaj kanału, którego pierwszym wyróżnikiem jest całkowite ograniczenie przekroju poprzecznego przez ściankę boczną. Izoluje ona znajdującą się w jego wnętrzu substancję (płyn) od otoczenia, ograniczając lub wręcz uniemożliwiając ruch cieczy w kierunkach poprzecznych (poziomym i pionowym) i powodując, że dominuje tu ruch wzdłuż osi przewodu.

Drugim istotnym wyróżnikiem rozważanych tu zagadnień jest całkowite wypełnienie wnętrza przewodu płynem, i to w sposób zapewniający powstanie na całym obwodzie przekroju tego przewodu pewnego ciśnienia, wywierającego od środka siłę naporu na jego ściankę. Wymóg ten jest zawsze spełniony w przypadku gazów, które z natury rzeczy wypełniają cały dostępny obszar. Wymaga on jednak pewnego komentarza w przypadku ruchu cieczy. Mogą one mianowicie zajmować tylko część dostępnego obszaru, oddzielając się w takim przypadku od pozostałej części obszaru (zajętej wtedy najczęściej przez powietrze atmosferyczne) **powierzchnią międzyfazową**, w inżynierii wodnej określaną mianem **swobodnej powierzchni**.

Sytuację zilustrowano na rys. 11.2. Gdy przewód jest całkowicie wypełniony cieczą, a umieszczony w jego ściance **piezometr** (patrz (6.2.4)) wskazuje wzniesienie jej słupa ponad strop przewodu (rys. 11.2a), mamy do czynienia z **przepływem ciśnieniowym**. Kiedy jednak przepływ odbywa się tylko częścią przekroju przewodu (grubość warstwy cieczy jest mniejsza od maksymalnej odległości między jego dnem i stropem – rys. 11.2c), mówimy o **ruchu grawitacyjnym** i zaliczamy go do kategorii **przepływów w korytach otwartych** (patrz rozdz. 13), mimo iż odbywa się on w przewodzie o ograniczonym przekroju.



Rys. 11.2. Klasyfikacja przepływów w przewodach ze względu na stopień ich wypełnienia:
 a) przepływ ciśnieniowy w przewodzie zamkniętym, b) przepływ swobodny w przewodzie zamkniętym,
 c) przepływ swobodny w korycie otwartym o ograniczonym przekroju

Należy tu zwrócić uwagę na sytuację pośrednią (rys. 11.2b), gdy przekrój poprzeczny przewodu jest całkowicie zalany cieczą, lecz ta nie wywiera na jego strop żadnego nacisku (poziom wody w piezometrze znajduje się na poziomie stropu przewodu). Tak jak i poprzednio, mamy tu do czynienia z **przepływem grawitacyjnym**.

Wprowadzone terminy, dotyczące przepływów przedstawionych na rys. 11.2, mają nieco potoczną formę, lecz w istocie dobrze oddają charakter zjawiska. Jak bowiem wynika z ogólnych równań ruchu rozważanych tu płynów newtonowskich (3.87), przepływ cieczy lub gazu może zostać wywołany, podtrzymany lub stłumiony w efekcie trzech rodzajów oddziaływań, w skrócie określanych mianem sił:

- masowych,
- ciśnienia,
- lepkości.

W układach tranzytowych ten trzeci rodzaj sił odgrywa znikomą rolę napędową, gdyż taki wynik ich działania możliwy jest tylko wtedy, gdy powierzchnia graniczna (ścianka przewodu lub swobodna powierzchnia cieczy) porusza się względem strumienia (par. 4.3.2).

Jeżeli chodzi o napędowe działanie siły masowej, to może ono wystąpić tylko wtedy, gdy spadek dna przewodu jest różny od zera, bowiem w takim przypadku zgodnie z (3.27) zachodzi $f_L = 0$. Natomiast „siły ciśnienia” (a ściślej rzecz biorąc – zmiana wzdłuż przewodu wartości siły naporu) wpływają na ruch cieczy wtedy, gdy przewód jest całkowicie wypełniony, a nacisk, wywierany przez płynące medium na jego ściankę, zmniejsza się wzdłuż kierunku ruchu, czyli wysokość nadciśnienia pod stropem przewodu jest różną od zera funkcją dystansu (rys. 11.2a), a w ogólnym przypadku – także czasu:

$$h_p = h_p(x, t) . \quad (11.1)$$

Omawiane czynniki należy rozważać z uwzględnieniem uwarunkowań o bardzo praktycznym charakterze. W interesujących nas tu zagadnieniach, gdy transportowanym medium jest najczęściej woda, jej zasoby z reguły występują w niższych partiach powierzchni terenu (wody powierzchniowe) lub gruntu (wody podziemne). Jest to oczywistą konsekwencją działania siły ciężkości. Z kolei użytkownicy tego medium, z równie oczywistych względów, z zasady przebywają w miejscach wyżej położonych. Tym samym jako typowy schemat układu dostarczającego użytkownikom wodę czystą można przyjąć przewody, w których czynnikiem napędowym jest spadek ciśnienia. Zgodnie z omówioną już charakterystyką takiego przepływu (rys. 11.2), muszą to być przewody zamknięte. Jedną z zalet takiego rozwiązania jest możliwość odizolowania płynącego medium od otoczenia, co między innymi zabezpiecza je przed zanieczyszczeniem. Do wad takiego schematu należy potrzeba dostarczania energii (najczęściej elektrycznej).

Z kolei do odprowadzenia wody zużytej (ścieków) w naturalny sposób będziemy najczęściej mogli wykorzystywać kanały otwarte, w których ciecz napędzana jest siłą grawitacji.

Podkreślmy, że omówione schematy dotyczą układów najczęściej stosowanych. W praktyce można jednak spotkać także rozwiązania nietypowe, jak na przykład stromo przebiegające przewody zamknięte, w których siła grawitacji ma większe znaczenie, niż siła naporu. Tym niemniej przeprowadzona dyskusja pozwala naświetlić zasadnicze aspekty rozważanej kategorii przepływów, w sposób ukazujący wpływ uwarunkowań technicznych na fizyczny opis zjawiska, a bez wnikania w kwestie czysto praktyczne, omawiane w ramach przedmiotów zawodowych (poświęconych wodociągom, kanalizacji, czy instalacjom sanitarnym).

11.1.2. Aspekty hydrauliczne

W myśl przedstawionych uwarunkowań funkcjonalnych i technicznych, przepływy w **przewodach zamkniętych**, w których nie występują rozgałęzienia ani połączenia, w pełni odpowiadają modelowi **strumienia podłużnego** (podrozdz. 2.6). Podstawowymi **zmiennymi zależnymi**, opisującymi tę kategorię ruchu są więc:

- **prędkość średnia** $v(x, t)$, zdefiniowana relacją (2.34);
- **ciśnienie** wzdłuż przewodu $p(x, t)$;
- **pole powierzchni przekroju poprzecznego** $S(x, t)$;
- **wydatek** $Q(x, t)$, czyli **objętościowe natężenie przepływu**, powiązany z prędkością średnią i przekrojem przewodu zależnością (2.35).

Jeśli chodzi o geometryczną charakterystykę przewodu, to jest ona określona przez konkretny kształt jego przekroju poprzecznego. W praktyce najczęściej stosuje się przewody o przekroju kołowym (rys. 3.5c). Jest on dogodny ze względów technologicznych, a ponadto cechuje się najmniejszym przy danej wartości S obwodem, co zgodnie z (3.32) ma znaczenie fizyczne (zmniejszenie siły tarcia). Podstawową zmienną geometryczną dla takiego przewodu jest więc **średnica** D , lub równoważny jej **promień** $R = D/2$. W ogólnym przypadku wielkości te mogą zmieniać się wzdłuż przewodu oraz w czasie, czyli może zachodzić $D = D(x, t)$, lecz są to bardzo szczególne sytuacje i w zagadnieniach technicznych najczęściej mamy do czynienia ze stałą średnicą $D = \text{const}$.

Prze kroje o innych kształtach napotykamy w inżynierii środowiska raczej rzadko. Jako odrębną kategorię możemy tu przywołać przewody prostokątne (w szczególności – kwadratowe), stosowane w systemach wentylacyjnych.

W konsekwencji stosowane w praktyce procedury obliczeniowe dostosowane są do przekrojów kołowych. Dla innych kształtów najczęściej wykorzystuje się te same relacje, zastępując w nich średnicę przewodu D przez **promień hydrauliczny** R_H , korzystając z prostej relacji, wynikającej z (6.2):

$$D = 4 R_H. \quad (11.2)$$

Zwróćmy też uwagę, że ze względu na całkowite wypełnienie i jednorodny charakter przekroju, naprężenia styczne na jego obwodzie będą najczęściej jednakowe. Tym samym suma w (3.48) będzie zawierała tylko jeden składnik.

Kolejnym wskaźnikiem, który formalnie ma charakter geometryczny, lecz bardzo istotnie wpływa na dynamikę przepływu, jest **szorstkość** (lub też **chropowatość**) powierzchni ścianki. Chodzi tu oczywiście o jej powierzchnię wewnętrzną, mającą kontakt z płynem, gdyż zewnętrzna część ścianki pełni inną rolę (ma za zadanie odizolować przewód od wpływu otoczenia, a w szczególności – chroniąc go przed korozją).

Podstawową miarę tego wskaźnika, jaką stanowi **szorstkość bezwzględna** k_s , przedstawiliśmy w podrozdz. 8.4. Omówiliśmy tam również wpływ tej wielkości na mechanizm

kształtowania się profilu prędkości, wprowadzając pojęcie **ścianki hydraulicznie gładkiej** (rys. 8.6), czyli takiej, której chropowatość nie wpływa na charakter przepływu.

Szorstkość bezwzględna k_s powierzchni jest pojęciem typu technicznego. Jej wartość zależy od:

- materiału, z którego wykonano lub którym pokryto powierzchnię (stal, żeliwo, tworzywo sztuczne, beton, substancje ceramiczne...);
- sposobu wykonania powierzchni (walcowanie, kucie, odlewanie, piłowanie, heblowanie...);
- warunków i okresu jej eksploatacji (obiekty nowe lub zużyte, funkcjonujące w warunkach korzystnych lub ciężkich, poddane czynnikom korozyjnym lub zabezpieczone przed korozją...).

W praktyce przy określaniu k_s posługujemy się zestawieniami tabelarycznymi, w których w opisowy sposób przedstawione są różne rodzaje powierzchni oraz podane graniczne wartości odpowiednich współczynników szorstkości bezwzględnej (tab. 1).

Analizując zestawione w tab. 1 wartości k_s dostrzegamy, że określanie wartości tego współczynnika należy do słabych punktów metod obliczeniowych hydrauliki. W szczególności ważny problem stanowi jego zmiana w czasie pracy układu przepływowego. Zachodzi ona co prawda powoli, lecz okresy funkcjonowania takich układów są na tyle długie, by wzrost szorstkości w istotnym stopniu wpływał na ich działanie.

Z tego względu, po upływie dłuższego okresu użytkowania układu, celowe jest przeprowadzenie kontrolnych obliczeń hydraulicznych przewodów i ich sieci, pozwalających na określenie ich aktualnej wydajności. Uwzględniając wtedy możliwość przeprowadzenia pomiarów zmiennych, charakteryzujących zjawisko, można w ramach pierwszego etapu takich obliczeń dokonać **identyfikacji** parametrów układu, czyli wyznaczenia ich wartości dla zmierzonych wartości zmiennych. W szczególności identyfikacji takiej może podlegać współczynnik szorstkości. Trzeba jednak pamiętać, że nie powinien to być jedyny wskaźnik, wyznaczany doświadczalnie, gdyż bardzo często pojawienie się we wnętrzu przewodu osadów **w większym stopniu wpływa na spadek jego efektywnej średnicy, niż na wzrost chropowatości.**

Po przeprowadzeniu identyfikacji można przystąpić do wiarogodnych obliczeń symulacyjnych, pozwalających na wyciągnięcie ważnych wniosków praktycznych (na przykład odnośnie do ewentualnej potrzeby czyszczenia lub rozbudowy układu przepływowego).

Zwróćmy uwagę, że warunek (8.12), określający ściankę hydraulicznie gładką, jest trudny do spełnienia. Dla ruchu laminarnego (podrozdz. 7.1) możemy dokonać odpowiednich oszacowań korzystając z relacji (4.7) oraz (4.19) i (7.35). Przy prędkości rzędu $v = 0,02$ m/s i w rurociągu o średnicy $D = 0,10$ m otrzymamy warunek:

$$k_s < 2,20 \text{ mm} .$$

Choć więc oznacza to, iż w zasadzie większość stosowanych materiałów może być traktowana jako hydraulicznie gładka (tab. 1), to przecież ruch laminarny rzadko występuje w zagadnieniach inżynierii środowiska. Natomiast dla rozwiniętego ruchu turbulentnego, przyjmując przykładowo $v = 1,00$ m/s i $D = 0,20$ m, mamy:

$$k_s < 0,04 \text{ mm} .$$

W tym przypadku, dużo ważniejszym technicznie, jako hydraulicznie gładkie można traktować co najwyżej ścianki wykonane z tworzyw sztucznych lub z dobrej jakościowo stali.

Można spodziewać się, że ta sama wartość szorstkości bezwzględnej będzie miała inny wpływ w przewodach o różnych rozmiarach. Z tego względu w zastosowaniach z reguły wykorzystuje się pojęcie **szorstkości względnej** (1.85):

$$\varepsilon_w = \frac{k_s}{d_c} , \quad (11.3)$$

gdzie d_c jest charakterystyczną dla danego przypadku liniową miarą przekroju poprzecznego. Może to być promień rury R , ale także głębokość strumienia h albo promień hydrauliczny R_H .

Szorstkość bezwzględna i szorstkość względna należą do **bezpośrednich** miar chropowatości powierzchni. Poza nimi występują także miary **pośrednie** (jak na przykład współczynnik szorstkości według Manninga). Omówimy je w rozdziałach poświęconych korytom otwartym.

Wykorzystując omówione cechy szczególne przepływów w przewodach zamkniętych, możemy przystąpić do omawiania kolejnych kategorii tego schematu obliczeniowego (równania (10.1), (10.2) oraz (10.3)). Zanim to jednak uczynimy, zwróćmy uwagę na pewną istotną kwestię, związaną z ze stosowaniem równania (3.48) oraz równania Bernoulliego (6.13), a zasygnalizowaną w par. 6.2.2.

Wiemy mianowicie, że równanie Bernoulliego jest szczególną całką równania zachowania pędu. Wobec wprowadzonych założeń (par. 6.2.1) oznacza to, że (6.13) jest dla strumieni ustalonych formalnie równoważne relacji (3.48), przy czym mamy tu dwa przypadki – ruch niejednostajny (10.2) i jednostajny (10.3).

Dla pierwszego z nich równanie (3.48), mimo swej różniczkowej (a więc matematycznie złożonej) postaci, jest dogodniejsze w zastosowaniach, gdyż człon opisujący straty energii mechanicznej ma w nim formę lokalnego wyrażenia algebraicznego, podczas gdy w równaniu Bernoulliego występuje wtedy wyrażenie całkowe (6.5). Pojawia się ono wszakże tylko dla strumieni o ciągłej zmianie pola powierzchni przekroju poprzecznego, co w przypadku przewodów zamkniętych występuje dość rzadko. Z reguły bowiem mamy tu do czynienia z pojedynczymi przewodami o stałej średnicy, lub z ciągami takich przewodów (każdy o innej średnicy). W takim zaś przypadku straty energii możemy wyrazić członem algebraicznym, jak w (6.7). Dla drugiej ze wspomnianych kategorii – dla ruchu jednostajnego – spodziewamy się oczywiście pełnej równoważności obu relacji – to jest (3.48) oraz (6.13).

W świetle tych uwag wygodnie będzie wprowadzić pomocniczą kategorię rozważanego schematu obliczeniowego, a mianowicie **przepływ odcinkami jednostajny**. Tak więc w kolejnych podrozdziałach omówimy:

- przepływ jednostajny i ustalony,
- przepływ odcinkami jednostajny i ustalony,
- przepływ niejednostajny i ustalony,
- przepływ niejednostajny i nieustalony.

11.2. Ustalony przepływ jednostajny w pojedynczym przewodzie zamkniętym

11.2.1. Równania ruchu

W tak prostym przypadku zmienne o charakterze geometrycznym i kinematycznym przyjmują stałe wartości, czyli zachodzi:

$$v = \text{const.}, \quad Q = \text{const.}, \quad D = \text{const.}, \quad S = \text{const.} \quad (11.4)$$

Tym samym z (3.46) wynika brak możliwości występowania efektywnego dopływu bocznego:

$$q_B = 0. \quad (11.5)$$

Uwzględniając (6.2) i (11.2), możemy równanie zachowania pędu (3.48) zapisać następująco:

$$g i_o - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{4\tau_s}{\rho D} = 0. \quad (11.6)$$

Przyjmując z kolei jako punkt wyjścia **równanie Bernoulliego** (6.13), wobec stałej wartości średniej prędkości przepływu, otrzymamy zależność fizykalnie równoważną wobec (11.6) (rozdz. 6):

$$\left(\frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) = H_{\text{str}} = \frac{4\tau_s}{\rho g D} l, \quad (11.7)$$

gdzie indeksy 1 oraz 2 oznaczają dwa dowolne przekroje strumienia, zaś l – odległość między nimi.

W tej konkretnej kategorii przepływu wygodniej posłużyć się algebraiczną relacją (11.7). Jednakże jej wykorzystanie, podobnie jak i relacji (11.6), wymaga uprzedniego wyznaczenia naprężenia stycznego na poboczniczy strumienia τ_s .

11.2.2. Obliczanie strat energii mechanicznej

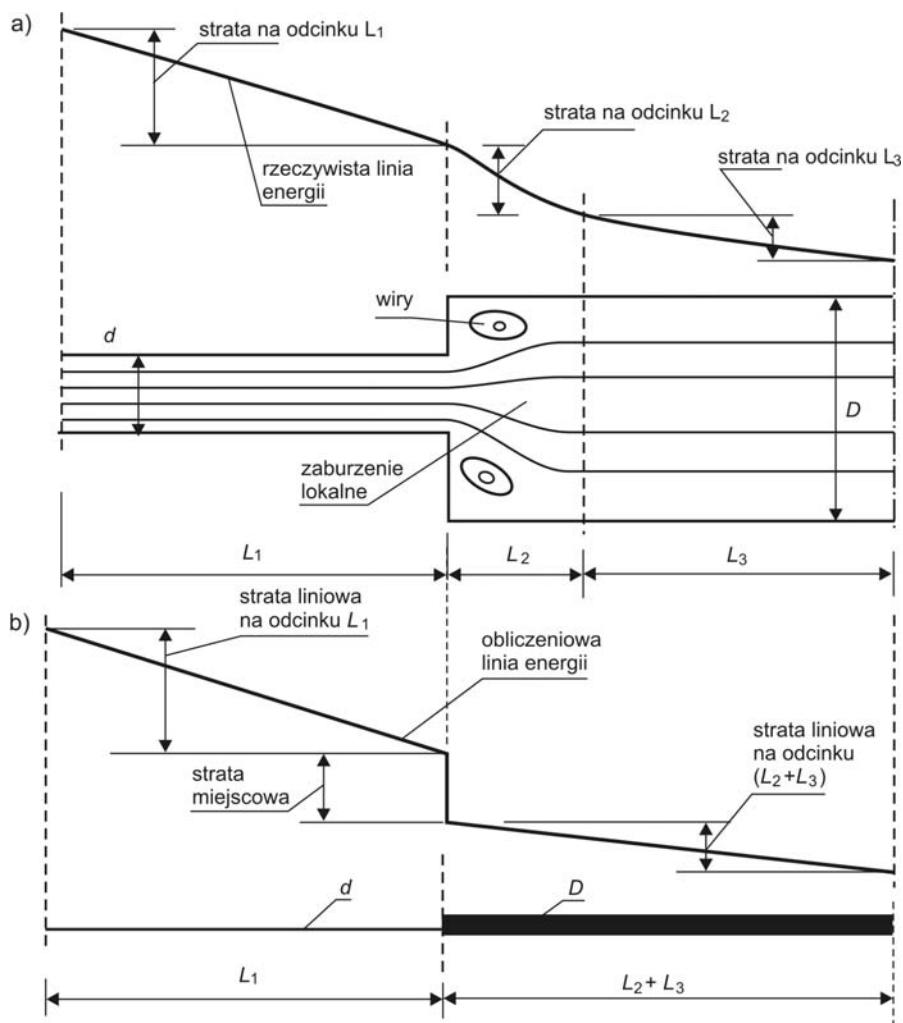
11.2.2.1. Uwagi ogólne

Możliwość analitycznego wyznaczenia straty energii mechanicznej, omówiona w par. 6.2.5, jest ograniczona do nielicznych przypadków bardzo regularnych struktur przepływowych, należących w dodatku do rzadko występującej w technice kategorii ruchu laminarnego. Znaczenie praktyczne ma tu właściwie tylko wzór (6.24), odnoszący się do przepływu w przewodzie kołowym.

Ze względu na stopień złożoności przepływów rzeczywistych, z reguły turbulentnych (rozdz. 7), dotychczas nie udało się otrzymać teoretycznej zależności, opisującej naprężenie styczne na ścianie τ_s , toteż problem jego wyznaczenia rozwiązano metodami empirycznymi.

Podkreślmy tu raz jeszcze, że **przyczyną strat energii mechanicznej jest konieczność wykonania przez płyn pracy przeciwko siłom oporu, wywołanym lepkością substancji, które ujawniają się w przestrzennie zróżnicowanym polu prędkości** (patrz hipoteza Newtona – par. 3.9.2). W procesie tym energia mechaniczna zostaje zamieniona na energię cieplną (**dyssypacja energii**), a więc jest to przemiana nieodwracalna. Wszelkie czynniki komplikujące zjawisko (w szczególności – kształt układu oraz szorstkość jego ścianek), jak też turbulencja przepływu, oczywiście zwiększają intensywność dyssypacji, lecz jest to wpływ pośredni, wywierany poprzez wzrost złożoności pola prędkości. Natomiast przyczyna zamiany energii mechanicznej w cieplną jest zawsze opisana hipotezą Newtona.

Powstanie praktycznych formuł obliczeniowych zostało poprzedzone bardzo istotnym spostrzeżeniem, dotyczącym charakteru przepływu strumieni podłużnych. Jest ono oczywiście nawet dla postronnego obserwatora w strukturach tego typu, a w szczególności w przewodach zamkniętych, występują stosunkowo długie odcinki o dużym stopniu regularności (rys. 2.8d), a często nawet bardzo uporządkowane (o praktycznie równoległym przebiegu linii prądu), przedzielane krótkimi odcinkami, wzdłuż których układy linii prądu są bardziej (lub nawet bardzo) skomplikowane (rys. 11.3a).



Rys. 11.3. Rodzaje strat energii: a) rzeczywisty układ linii prądu, b) schemat obliczeniowy

Te pierwsze elementy odnoszą się oczywiście do odcinków przewodów (w praktyce – rurociągów), zaś te drugie – do armatury (łączników, regulatorów, urządzeń zabezpieczających i pomiarowych).

Stwierdzenie to stanowi punkt wyjścia do **technicznej schematyzacji przewodów**, powszechnie przyjętej w praktyce inżynierskiej. Jej istotą jest wyraźny podział przewodu na (rys. 11.3b):

- długie odcinki o przepływie na tyle regularnym, że można dla nich przyjąć proporcjonalność straty energii do długości odcinka; mówimy wtedy o **stratach na długości**, albo o **stratach liniowych**);
- krótkie odcinki o złożonym polu prędkości, dla których straty energii mechanicznej (**straty lokalne** lub **miejscowe**) oblicza się łącznie, za pomocą syntetycznych wzorów empirycznych, a dla których pomija się długość obszaru zakłóconego i zakłada, że strata lokalna zachodzi punktowo.

Należy tu zwrócić uwagę na kwestię „nakładania się” spadku linii energii, spowodowanego przez zaburzenie pola prędkości generowane zmianą warunków ruchu, na spadek, który występowałby na tym odcinku bez zmiany warunków, czyli związany ze stratami liniowymi. Długość odcinka, na którym zmiana warunków ruchu zaburza pole prędkości (L_2 na rys. 11.3) może być oszacowana wzorem (8.7) dla ruchu laminarnego, albo (8.8) dla ruchu turbulentnego. Problem rozdzielenia obu tych czynników obniża dokładność obliczeń hydraulicznych, lecz dla przewodów o znacznych długościach efekt ten na szczęście nie jest zbyt znaczny.

11.2.2.2. Straty na długości

Jak zawsze, gdy podejmujemy zagadnienia złożone, których nie udaje się rozwiązać teoretycznie, odwołujemy się metod empirycznych. Punktem wyjścia jest tu zestawienie wielkości fizycznych, wzajemnie powiązanych relacją opisującą to zagadnienie. Przed przystąpieniem do określenia interesującej nas relacji empirycznej, z zasady należy podjąć próbę uporządkowania otrzymanego zestawu tych wielkości, stosując **metodę analizy wymiarowej** (par. 1.5.7).

Problem związku wielkości fizycznych, charakteryzujących przepływ w przewodzie kołowym o stałej średnicy, stanowi istotę przykładu 1.1. Zestaw siedmiu opisujących ten przepływ wymiarowych wielkości fizycznych (1.84) można zastąpić zestawem czterech wielkości bezwymiarowych, występujących w relacji (1.86). Ze względu na ogólny charakter tej zależności, możemy wobec (6.25) przepisać ją następująco:

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = f\left(\varepsilon_w, \text{Re}, \frac{l}{D}\right). \quad (11.8)$$

Korzystając z empirycznie potwierdzonego faktu, iż przy stałej średnicy przewodu straty na długości są liniową funkcją jego długości, możemy napisać:

$$\Delta p = f''(\varepsilon_w, \text{Re}) \frac{l}{D} \frac{\rho v^2}{2}. \quad (11.9)$$

Zauważmy, że korzystając wyłącznie z możliwości formalnych otrzymaliśmy wyrażenie mające postać niemalże technicznego wzoru obliczeniowego. Jedynym elementem nieokreślonym jest tu funkcja f'' , której wartości uzależnione są od chropowatości względnej przewodu oraz liczby Reynoldsa. Nie mając możliwości wyznaczenia jej na drodze teoretycznej, traktujemy ją jako **empiryczny współczynnik strat na długości** (lub **strat liniowych**), oznaczony symbolem λ , po czym zapisujemy (11.9), jak następuje:

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \frac{\rho v^2}{2}. \quad (11.10)$$

Zauważmy, że dla tak prostego przypadku równanie Bernoulliego (11.7) przyjmuje postać:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \rho g H_{\text{str}} = \frac{4\tau_s}{D} l. \quad (11.11)$$

Z jednej strony oznacza to, że wysokość strat H_{str} jest tutaj tożsama z wysokością spadku ciśnienia na długości l , wyrażoną **wzorem Darcy'ego-Weisbacha**:

$$H_{\text{str}} = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g}, \quad (11.12)$$

zaś z drugiej – pozwala obliczyć naprężenie styczne na ścianie przewodu:

$$\tau_s = \lambda \frac{\rho v^2}{8}. \quad (11.13)$$

11.2.2.3. Współczynnik strat liniowych

Obrazową interpretację **współczynnika strat liniowych** (lub **oporów liniowych**) otrzymamy z (11.12), gdy zapytamy o długość l_v odcinka przewodu o średnicy D , wzdłuż którego liniowa strata energii jest równa wysokości prędkości. Jest ona równa:

$$l_v = \frac{D}{\lambda}. \quad (11.14)$$

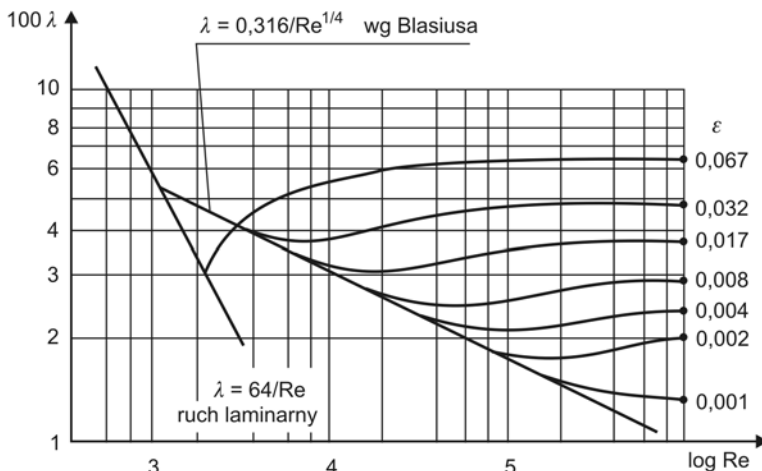
Ścisłą relację, opisującą wartości λ otrzymano, jak już wiemy, tylko dla ruchu laminarnego. Porównując (6.24) z (11.12), mamy:

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}}, \quad \text{Re} = \frac{vD}{\nu}. \quad (11.15)$$

W zakresie ruchu turbulentnego, w pierwszej kolejności opracowano wiarygodną zależność empiryczną dla ścianek **hydraulicznie gładkich** (podrozdz. 8.4). W roku 1913 opublikował ją H. Blasius, proponując zapis:

$$\lambda = \frac{0,316}{\text{Re}^{0,25}}. \quad (11.16)$$

Dla przepływów w istotnym stopniu podlegających wpływowi chropowatości ścianek, podstawowa metoda określania wartości λ bazuje na wynikach klasycznych badań doświadczalnych, opublikowanych w roku 1933 [37]. Tradycyjnie są one przedstawiane w postaci wykresu, zwanego **harfą Nikuradsego** (rys. 11.4). Badania te przeprowadzono dla rur o sztucznie wytworzonej chropowatości. Wewnętrzne ścianki przewodów zwilżano w tym celu płynnym klejem, a następnie posypywano piaskiem o zbliżonym uziarnieniu, uprzednio przesianym przez sita o znanych rozmiarach otworów. Miarodajne średnice kolejnych frakcji tych ziaren określały tu szorstkość bezwzględną k_s ścianki.



Rys. 11.4. Harfa Nikuradsego

Odczytywanie współczynnika z nomogramu lub wykresu nie jest metodą wygodną, szczególnie w dobie powszechnego stosowania maszyn liczących. Z tego względu podejmowano prace nad opracowaniem wyrażenia matematycznego, które opisywałoby wartości współczynnika oporów liniowych. Z braku zamkniętej teorii ruchu burzliwego (rozdz. 7), odpowiednie wzory mogły mieć jedynie charakter empirycznych zależności, w formalny sposób wyrażających wyniki pomiarów.

W trakcie prowadzonych badań, z czasem zwrócono uwagę, że regularny charakter sztucznej chropowatości, wywoływanej w opisany sposób podczas badań Nikuradsego, nie najlepiej odpowiada bardziej złożonej strukturze nierówności, powodujących szorstkość ścianek rzeczywistych. W efekcie, niejako łącząc dążenia do opracowania zależności matematycznej dla współczynnika strat liniowych, z jednoczesnym uwzględnieniem realnego charakteru chropowatości, otrzymano szereg zależności [16], z których największe uznanie zdobył **wzór Colebrooka-White'a**, szczególnie dogodny dla rur wodociągowych:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon_w}{3,71} \right). \quad (11.17)$$

Wadą tego wzoru jest uwikłana postać niewiadomej λ . Jednakże, gdy korzysta się z maszyn liczących, fakt ten nie stanowi znaczącej trudności praktycznej.

Dodajmy, że w literaturze przedmiotu znaleźć można także inne propozycje, pozwalające na obliczenie współczynnika oporów liniowych. Mogą one być ważne dla osób zainteresowanych dokładnością obliczeń praktycznych [16, 70]. W szczególności istotna praktycznie jest zależność, opisująca wartości λ przy dużych liczbach Reynoldsa. Jak widać z wykresu na rys. 11.4, poszczególne linie „harfy Nikuradsego” układają się wtedy równolegle do osi Re. Oznacza to, że współczynnik oporu przestaje w tym obszarze zależeć od liczby Reynoldsa (a więc od warunków ruchu), a staje się wyłącznie funkcją chropowatości ścianki. Jest to bardzo korzystna okoliczność, gdyż często upraszcza proces obliczeniowy. Trzeba bowiem zauważyć, że wiele zadań technicznych polega na wyznaczeniu prędkości przepływu cieczy lub gazu, a do tego niezbędny jest współczynnik strat liniowych, zależny właśnie od nieznaney na początku obliczeń prędkości (poprzez wartość Re). Wyznaczenie wartości λ wymaga więc zastosowania jakiegoś wariantu **metody kolejnych przybliżeń** [4]. Dla dużych liczb Reynoldsa sytuacja ulega uproszczeniu i można korzystać ze szczególnej postaci wzoru Colebrooka-White'a, którą otrzymujemy z (11.17), gdy $\text{Re} \rightarrow \infty$:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon_w}{3,71} \right). \quad (11.18)$$

11.2.2.4. Charakterystyka przepływu

Wzór (11.12) bywa niekiedy stosowany w zmienionej postaci (choć w pełni równoważnej względem zależności wyjściowej). Dotyczy to w szczególności przepływu przy dużych wartościach liczby Reynoldsa, gdy można wykorzystać relację (11.18).

Zgodnie z zasadami geometrii (rys. 6.7), możemy następująco zdefiniować nachylenie linii energii, zwane też **spadkiem hydraulicznym**:

$$i_f = \frac{H_{\text{str}}}{l}. \quad (11.19)$$

Średnią prędkość przepływu v zastąpmy zgodnie z (2.35) przez wydatek strumienia Q . Dla przewodów kołowych mamy wtedy:

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2}. \quad (11.20)$$

Wykonując proste przekształcenia relacji (11.12), otrzymamy:

$$H_{\text{str}} = i_f l = \frac{Q^2}{K^2} l, \quad (11.21)$$

gdzie wielkość:

$$K = \sqrt{\frac{\pi^2 D^5 g}{8\lambda}}, \quad (11.22)$$

zwana **charakterystyką przepływu**, jest przy dużych liczbach Reynoldsa (rys. 11.4) oczywistą kombinacją wielkości zależnych tylko od średnicy i chropowatości przewodu. Jest to wielkość syntetyczna, wygodna tym samym w zastosowaniach. Można ją bez trudu obliczyć dla poszczególnych średnic przewodów oraz względnych szorstkości ich ścianek, wykorzystując (11.18). W praktyce jest ona podawana w zestawieniach, zamieszczanych w podręcznikach i poradnikach technicznych (tab. 2).

W trakcie prac projektowych możemy mieć do czynienia z dwiema podstawowymi kategoriami zadań. Albo dla już dobranego, lub wręcz już istniejącego, przewodu określamy wartość K i następnie obliczamy prędkość, wydatek oraz/ albo stratę energii, lub też przy znanych wartościach zmiennych przepływu (v , Q , H_{str}) obliczamy K , co po wyborze materiału przewodu (czyli chropowatości) określa jego niezbędną średnicę. Przy tej drugiej grupie zadań musimy pamiętać, że do dyspozycji mamy asortyment przewodów o wybranych (z reguły „okrągłych”) średnicach. Rozmiary nietypowe należy zamawiać indywidualnie, co niesłychanie podnosi koszt wyrobu. Z tego względu po obliczeniu teoretycznej wartości charakterystyki przepływu dobieramy przewód o średnicy, która zapewnia najlepszą zgodność rzeczywistej i obliczeniowej wartości K , a następnie korygujemy wartości pozostałych wielkości. Jest to już jednak procedura omawiana raczej w ramach przedmiotów zawodowych, niż teoretycznych, a dotyczy także przypadków, gdy szukana średnica przewodu wyznaczana jest za pomocą wzoru (11.12).

11.2.2.5. Straty lokalne

Wszelkie zmiany przebiegu przewodu (jego przekroju lub kierunku osi), które zachodzą na krótkim dystansie, jak też urządzenia zaliczane do armatury (służące do zasilania przewodu, odprowadzania płynu, regulacji i pomiaru wielkości charakterystycznych...), skutkują wzrostem zróżnicowania pola prędkości płynu, transportowanego przewodem, a co za tym idzie – zwiększeniem intensywności dyssypacji energii mechanicznej. Jest to schematycznie pokazane na rys. 11.3. W ramach technicznej schematyzacji przewodów przyjmuje się, że strata taka zachodzi na odcinku o pomijalnie małej długości (czyli „punktowo”).

Podkreślimy, że gdy rozważane zmiany zachodzą na długim dystansie, to modelu takiego nie możemy zastosować. W szczególności może tu chodzić o płynną zmianę pola powierzchni przekroju przewodu (choć dla klasycznych rurociągów byłby to przypadek nietypowy), które to zagadnienie należałoby do kategorii przepływów niejednostajnych (podrozdz. 11.4), oraz zmian kierunku osi przewodu wzdłuż łuku o dużym promieniu krzywizny (gdy efekty z tym związane są praktycznie nieistotne).

Rzecz zrozumiała, obiektami wywołującymi straty lokalne nie mogą być **przepływowe zbiorniki kubaturowe** (rozdz. 17), które wykazują możliwość **retencji** (czyli „przechowywania” części płynu, gdy wydatek w przekroju początkowym przewyższa wydatek w przekroju końcowym), lub przeciwnie – możliwość **zasilania** przewodu odpływowego (gdy z układu pragniemy pobrać więcej płynu, niż chwilowo do niego dopływa). W takich sytuacjach musimy przeanalizować strukturę prze-

plywu i dopiero na jej podstawie obliczyć łączną stratę energii mechanicznej, wywołaną oporami ruchu w trakcie przemieszczania się medium przez układ [2].

Formalnie rzecz biorąc, jako czynnik wywołujący stratę miejscową można traktować obiekt hydrauliczny, dla którego wydatek „przed” jest zawsze równy wydatkowi „za”:

$$Q_p = Q_z. \quad (11.23)$$

W praktyce technicznej **lokalną (miejscową) stratę energii** wyraża się za pomocą **ciśnienia dynamicznego**, posługując się empirycznym **współczynnikiem straty lokalnej (miejscowej)**:

$$H_{li} = \xi_{ip} \frac{v_p^2}{2g} = \xi_{iz} \frac{v_z^2}{2g}. \quad (11.24)$$

Indeks „i” wskazuje tu konkretny obiekt, wywołujący dane zaburzenie, natomiast indeksy „p” oraz „z” odnoszą się odpowiednio do średnich prędkości przepływu „przed” oraz „za” tym obiektem. Potrzeba takiego zróżnicowania uzasadniona jest względami technicznymi, bowiem nierzadko obiekt wywołujący stratę miejscową powoduje równocześnie zmianę średnicy przewodu, a co za tym idzie – zmianę prędkości średniej.

Przelicznik współczynników ξ_{ip} oraz ξ_{iz} , dotyczących tej samej straty, lecz odnoszonej do różnych prędkości, można bez trudu otrzymać z relacji (11.23), która wobec (2.35) dla przewodu kołowego przyjmuje postać:

$$v_p \frac{\pi D_p^2}{4} = v_z \frac{\pi D_z^2}{4}. \quad (11.25)$$

Uwzględniając (11.24), otrzymamy:

$$\xi_{ip} = \xi_{iz} \left(\frac{D_p}{D_z} \right)^4. \quad (11.26)$$

Uwagę zwraca tu wysoki wykładnik potęgi przy ilorazie średnic przewodu. Przykładowo, już przy dwukrotnej zmianie średnicy mamy 16-krotną różnicę między współczynnikami dla tego samego obiektu. Jest więc zrozumiałe, że ewentualne pomyłki, związane z przestawieniem prędkości i współczynnika w (11.24), mogą mieć znaczne konsekwencje dla wyników obliczeń.

Gdy „przed” i „za” stratą nie następuje zmiana prędkości, oba współczynniki w (11.24) są oczywiście takie same:

$$\xi_p = \xi_z = \xi. \quad (11.27)$$

Wartości współczynników strat lokalnych dla najważniejszych obiektów i elementów armatury podano w (tab. 3).

11.2.3. Praktyczne postacie równań ruchu

11.2.3.1. Przewód poziomy

Nawet jeśli przewód prowadzony jest na podłożu poziomym, to w rzeczywistości układa się go z pewnym nachyleniem (**spadek technologiczny**). Ma to na celu stworzenie możliwości opróżnienia układu z wypełniającej go cieczy (na przykład przed jego remontem lub przebudową, bądź też dla odprowadzenia osadów, często gromadzących się na jego dnie), lub usunięcia gazów, mogących wydzielać się z cieczy w trakcie eksploatacji układu.

Aby stworzyć takie możliwości, w najwyższych i w najniższych punktach przewodów umieszcza się odpowiednie urządzenia. Ich dobór oraz sposób montażu i eksploatacji jest już jednak przedmiotem szczegółowych dyscyplin technicznych.

Gdy z kolei przewód przebiega przez obszar o nachyleniu różnym od zera, a często zmiennym (jak w przypadku przewodów wodociągowych, gazowych, czy ropociągów, układanych w terenie naturalnym), prowadzony jest z reguły równoległe do górnej powierzchni tego obszaru (najczęściej – do powierzchni gruntu). Zagłębia się go na tyle, by grubość przykrycia zapewniała ochronę przed obciążeniem zewnętrznym (ciężkie pojazdy) i przed warunkami atmosferycznymi (zamarzanie w okresie zimowym), unikając nadmierne głębokich wykopów. Bywa wtedy tak, że przy mocno zróżnicowanej rzeźbie terenu (rejony górskie i podgórskie) spadki przewodu w istotnym stopniu wpływają na charakter przepływu. Ale w terenie o umiarkowanych spadkach (dość typowych dla Polski) często znaczenie tego czynnika jest niewielkie i może być pominięte (tak samo, jak wpływ spadku technologicznego). W takich sytuacjach mówimy o **przewodach poziomych**, dla których (dokładnie, lub w przybliżeniu) zachodzi:

$$i_o = 0, \quad z_1 = z_2. \quad (11.28)$$

Uwzględniając ponadto jednorodny charakter rzeczywistych przewodów (niezmiennosc warunków ruchu wzdłuż jego osi), możemy napisać, iż spadek linii ciśnienia jest w takich systemach stały:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\Delta p}{l}. \quad (11.29)$$

W takiej sytuacji zarówno równanie ogólne (11.6), jak i równanie Bernoulliego (11.7), przyjmują identyczną postać:

$$\frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} + \sum_{i=1}^l \xi_i \frac{v_i^2}{2g}. \quad (11.30)$$

Wpływ naprężenia stycznego τ_s opisaliśmy tu za pomocą dwóch omówionych kategorii strat – liniowych (11.12) oraz miejscowych (11.19).

W układach tego typu często występuje niewiele obiektów, wywołujących straty lokalne, a jeśli nawet są, to ich wpływ na łączną stratę energii mechanicznej jest pomijalnie mały. Mówimy wtedy o **przewodach hydraulicznie długich** [16], dla których **równanie dynamiczne sprowadza się do wzoru Darcy'ego-Weisbacha** (11.12):

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{D} \frac{\rho v^2}{2}. \quad (11.31)$$

11.2.3.2. Przewody o zmiennej konfiguracji w pionie

Gdy pionowe zmiany położenia osi przewodu są znaczne, musimy je uwzględnić w równaniu dynamicznym. Należy jest wtedy zamiast zależności (11.30) stosować równanie Bernoulliego (11.7), które w myśl przeprowadzonej analizy przyjmie postać:

$$\frac{\Delta p}{\rho g} + \Delta z = \lambda \frac{l}{D} \frac{v^2}{2g} + \sum_{i=1}^l \xi_i \frac{v_i^2}{2g}. \quad (11.32)$$

Istotną rolę w technice odgrywają dwa szczególne przypadki tej kategorii przewodów – **lewary** oraz **syfony**.

Pierwszy z tych terminów oznacza w hydraulice przewód zamknięty, który na swym początkowym odcinku wznosi się (z reguły ze znacznym nachyleniem), by osiągnąwszy maksymalną wysokość, skierować ku dołowi. Utworzenie takiej konfiguracji może wynikać z potrzeb technicznych, jak na przykład konieczność przeprowadzenia przewodu ponad przeszkodą terenową (rzeką, drogą, masywem skalnym...), ale ma też istotne zastosowania w przemyśle, nauce i nawet w gospodarstwie domowym (na przykład do odprowadzania płynnych przetworów owocowych znad osadu). W inżynierii sanitarnej ważnym przykładem zastosowania lewarów są systemy rurociągów, odprowadzających wodę pobieraną ze studni (**ujęcia lewarowe** [17, 72]).

Taka specyficzna dla lewarów lokalna zmiana rzędnych przewodu w istotny sposób wpływa na warunki przepływu. W ujęciu jakościowym, posługując się interpretacją trójmianu Bernoulliego (par. 6.2.3), bez trudu stwierdzimy, że wobec znacznej różnicy rzędnych między najwyższym a najniższym punktem lewara (czyli znacznej różnicy energii potencjalnej położenia) występuje między tymi punktami znaczna różnica wartości ciśnienia. Aby wyrazić to oszacowanie ilościowo, napiszmy równanie Bernoulliego dla punktów 1 i 3 w lewarze, którego wlot umieszczony jest w zbiorniku otwartym (rys. 11.5). Punkt numer 1 wyznaczony jest przez początkowe położenie schematycznej linii prądu, wzdłuż której ciecz dopływa do przewodu, zgodnie z typowymi procedurami stosowania równania Bernoulliego. Dla lepszego zobrazowania omawianych tu zjawisk, pomińmy stratę energii mechanicznej. Przyjmując poziom porównawczy na wysokości punktu 3, mamy ogólną postać rozważanej zależności dla wybranej linii prądu (6.27):

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\rho g} + z_3. \quad (11.33)$$

Wykorzystując specyficzne cechy zjawiska, możemy napisać:

$v_1 = 0$ – powierzchnia cieczy w zbiorniku musi pozostawać nieruchoma, gdyż równanie Bernoulliego można stosować tylko dla przepływów ustalonych; przyjmuje się więc, że ubytek cieczy ze zbiornika jest na bieżąco uzupełniany, albo zakłada się, że zwierciadło wody opada na tyle wolno, że efekt ten można zaniedbać – mówimy wtedy o „dużym zbiorniku”;

$$p_1 = p_{\text{atm}}, \quad z_1 = h,$$

$$v_3 = v_{\text{lewara}}^n, \quad p_3 = p_{\text{atm}}, \quad z_3 = 0.$$

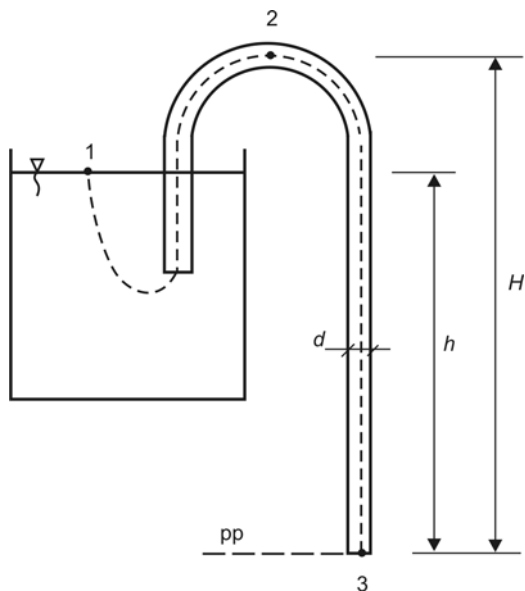
Równanie (11.33) ulega wtedy znacznemu uproszczeniu, a wyznaczoną za jego pomocą prędkość przepływu w przewodzie określa zależność:

$$v_{\text{lewara}}^n = \sqrt{2gh}. \quad (11.34)$$

Z kolei wydatek lewara będzie, zgodnie z (2.35), równy:

$$Q_{\text{lewara}}^n = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh}. \quad (11.35)$$

Są to wielkości zawyżone, bowiem obliczyliśmy je dla cieczy nielepkiej (co symbolizuje górny indeks n), czyli pomijając straty energii, jednak dla celów praktycznych ważny jest wniosek, że intensywność wypływu z lewara uzależniona jest od obniżenia jego wylotu względem poziomu cieczy w zbiorniku zasilającym (wartość h).



Rys. 11.5. Hydrauliczny schemat lewara

Obliczmy teraz ciśnienie w najwyższym przekroju lewara (punkt 2), ponownie pisząc równanie Bernoulliego. Wobec stałej w tym przypadku średnicy przewodu, prędkość w jego wnętrzu jest stała, czyli mamy:

$$\frac{p_2}{\rho g} + H = \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g}, \quad (11.36)$$

skąd:

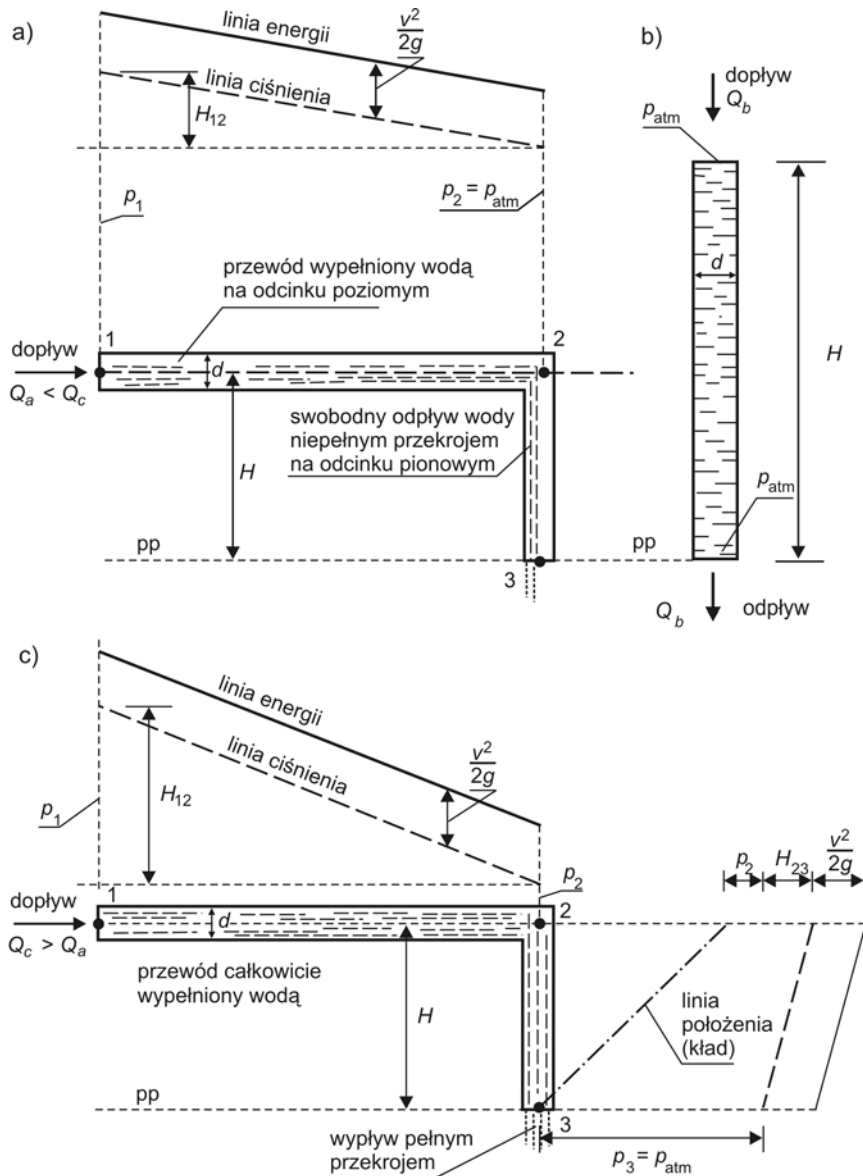
$$p_2 = p_{\text{atm}} - \rho g H. \quad (11.37)$$

Ze względu na fakt, że ciśnienie nie może być ujemne, otrzymujemy bardzo ważne w praktyce ograniczenie wzniesienia lewara ponad jego punkt wylotowy:

$$H \leq \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g}. \quad (11.38)$$

Gdybyśmy wykonali lewar o wzniesieniu większym niż wynikające z (11.38), nie mógłby on funkcjonować, bowiem strumień wypełniającej go cieczy uległby przerwaniu gdyż ze względu na zwiększenie intensywności parowania cieczy i wydzielanie się rozpuszczonych w niej gazów (co w praktyce z reguły ma miejsce), w górnej części lewara pojawiłby się „korek gazowy”, uniemożliwiający jego pracę nawet przed przekroczeniem warunku (11.38). Dla wody o temperaturze 25°C maksymalne teoretyczne wzniesienie lewara jest równe $H_{\text{max}} = 9,89$ m.

W zastosowaniach szczególnie ważne jest rozwiązanie problemu napełnienia lewara cieczą przed jego uruchomieniem, jak też skutecznego odprowadzania gazów, wydzielających się w jego najwyższej położonej części. Są to jednak kwestie o charakterze praktycznym, omawiane w literaturze technicznej (na przykład [72]).



Rys. 11.6. Efekt lewarowy: a) odpływ wymuszony ciśnieniem początkowym, b) przepływ w przewodzie pionowym o jednostkowym spadku hydraulicznym, c) odpływ wspomagany dodatkowym spadkiem ciśnienia na odcinku pionowym

Omawiane tu efekty, typowe dla lewarów, występują także wtedy, gdy zasadniczym elementem układu jest stromo opadający (lub wręcz pionowy) przewód zamknięty. Możliwe są tu różne sytuacje, a że praktyka inżynierska zawsze może dostarczyć kolejnych, więc ograniczymy się omówienia jednego przypadku szczególnego, pozwalającego zrozumieć istotę zjawiska, potocznie określanego jako „zalewarowanie pionu”.

W pierwszej kolejności rozważmy przewód zamknięty – poziomy, a następnie stromo wygięty w dół (rys. 11.6a). Niech warunki przepływu będą takie, że wydatek Q_a zapewnia całkowite wypełnienie odcinka poziomego, lecz jest zbyt mały, by wypełnić odcinek pionowy. Graniczną wartością tego wydatku, niezbędną dla wywołania przepływu całym przekrojem tego odcinka, możemy obliczyć stosując równanie Bernoulliego (11.32) dla przewodu pokazanego schematycznie na rys. 11.6b. Wobec równości ciśnienia w obu jego skrajnych przekrojach, mamy:

$$H = H_{\text{str}}, \quad (11.39)$$

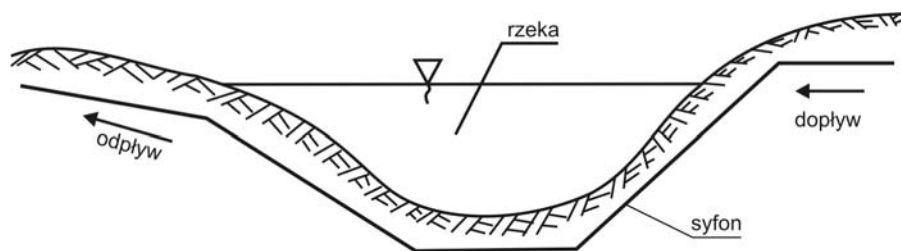
co wobec (11.19) oznacza, że jest to przepływ z jednostkowym spadkiem hydraulicznym, bowiem w tym przypadku jego długość jest równa wysokości straty energii $L = H$. Zaś korzystając z (11.21) możemy stwierdzić, że interesujący nas wydatek graniczny jest liczbowo równy charakterystyce przepływu K .

Możemy więc oczekiwać, że gdy w układzie jak na rys. 11.6a wydatek dopływowy osiągnie, a następnie przekroczy $Q_a = K$, w pionowym odcinku przewodu pojawi się dodatkowy spadek ciśnienia (wywołany „lewarowym ssaniem”), obniżający je do wartości $p_2 < p_{\text{atm}}$. Tym samym różnica ciśnienia na odcinku 1–2 zwiększy się, powodując dodatkowy wzrost wydatku układu do wartości $Q_c > Q_b > Q_a$.

Jeśli intensywność zasilania przewodu jest mniejsza od tej wartości, może to wywołać przerwanie ciągłości strumienia. Efekt ten może być niekorzystny dla pracy rozważanego układu, ale wykorzystuje się go niekiedy do uzyskania zamierzonych rezultatów (na przykład w wysokosprawnych systemach odprowadzania wody deszczowej z dachów budowli, gdzie celowo stosuje się mniejsze od typowych średnice pionów spustowych, by po ich całkowitym zalaniu zwiększyć intensywność odpływu wody).

Drugim z omawianych tu szczególnych konfiguracji jest **syfon**, stanowiący niejako odwrotność lewara (rys. 11.7). Układ taki nie wywołuje tak specyficznych efektów hydraulicznych, jak omówiony poprzednio. Wymaga on jedynie spełnienia pewnych warunków o charakterze technicznym, a w szczególności:

- ze względu na wzrost ciśnienia w jego dolnej części, przewód i jego armatura muszą być odpowiednio uszczelnione;
- należy przewidzieć możliwość jego opróżniania w razie potrzeby;
- prędkość przepływu powinna zapewnić możliwość wymywania osadów, które mogą być unoszone przez płynącą ciecz (lub też należy przewidzieć możliwość usuwania zanieczyszczeń przed syfonem, albo czyszczenia przewodu).



Rys. 11.7. Schemat syfonu

Syfon może być włączony w ciąg przewodów ciśnieniowych (wywołane jego kształtem dodatkowa strata energii musi być wtedy uwzględniona przy doborze pomp), lub w ciąg kanałów otwartych (wtedy początkowy przekrój kanału odpływowego musi leżeć niżej niż końcowy przekrój kanału dopływowego, by zrównoważyć tę stratę).

W praktyce syfony często wykorzystuje się do przeprowadzania przewodów pod przeszkodami terenowymi. Ważne jest też zastosowanie tego urządzenia jako **zamknięcia wodnego**. Umieszcza się je wtedy w ciągu przewodu grawitacyjnego. Nawet gdy nie jest on

całkowicie wypełniony, woda pozostająca w dolnej części syfonu uniemożliwia przedostawanie się szkodliwych gazów z przewodu dolnego do górnego. Ma to duże znaczenie w systemach kanalizacyjnych.

11.2.4. Rodzaje zadań obliczeniowych

Wzory, opisujące rozważaną kategorię przepływu, są nieskomplikowane matematycznie, stosownie do prostoty opisywanego przypadku, lecz dzięki temu można w czytelny sposób przeanalizować stwarzane przez nie możliwości obliczeniowe.

Podstawowymi wielkościami, które w praktyce inżynierskiej oblicza się z równania dynamicznego są zmiana ciśnienia Δp , średnica przewodu D albo średnia prędkość przepływu cieczy v , którą zgodnie z (2.35) możemy bez trudu przeliczyć na wydatek strumienia Q :

$$Q = \frac{\pi D^2}{4} v. \quad (11.40)$$

Zauważmy, że wielkości te dają się pogrupować, stosownie do konkretnej sytuacji. Może bowiem być tak, że rozważany obiekt **dopiero jest projektowany**, albo też **już istnieje**. Mamy więc:

- **zadania projektowe** (dobór średnicy projektowanego przewodu lub spadku ciśnienia dla z góry zadanej prędkości bądź wydatku);
- **zadania eksploatacyjne** (określenie prędkości lub wydatku, jakie można uzyskać w już istniejącym przewodzie o znanej średnicy i znanych warunkach jego zasilania).

11.3. Ustalony przepływ odcinkami jednostajny w pojedynczym przewodzie zamkniętym

Charakterystyczny dla rozważanej kategorii przepływów układ przewodu pokazano schematycznie na rys. 6.7. Stanowi on ciąg szeregowo połączonych prostych odcinków przewodów, w ogólnym przypadku każdy o innej średnicy. Między tymi odcinkami mogą być umieszczone elementy armatury. Przekrój początkowy jest wyznaczony przez system zasilający przewód. Może to być albo odpowiednia maszyna hydrauliczna (pompa, sprężarka...), albo jakiegoś typu zbiornik. Rzecz oczywista, zawartość takiego zbiornika musi być w trakcie pracy uzupełniana, aby zapewnić płynność funkcjonowania układu. W przekroju końcowym takiego przewodu z zasady umieszcza się zawór odcinający, umożliwiając regulację wydatku.

Podkreślmy, że konfiguracje rzeczywistych układów muszą wynikać z konkretnych uwarunkowań technicznych, a w szczególności – z celów, których osiągnięciu mają służyć. Rozważając aspekty funkcjonalne pojedynczych przewodów magistralnych, należy stwierdzić, że przepływ odcinkami jednostajny nie może być traktowany jako typowy schemat układu, służącego tranzytowi cieczy. Wynika to z faktu, że w przewodzie takim wydatek byłby stały, a więc potrzebę ewentualnej zmiany średnicy przewodu (a więc zmiany prędkości) należałoby tu oddzielnie uzasadnić.

Tym niemniej układy takie są interesujące w systemach instalacji przemysłowych i laboratoryjnych. Ponadto mają duże walory dydaktyczne i w takim głównie charakterze są tu prezentowane.

Przewód o przepływie odcinkami jednostajnym może być uważany za jeden z klasycznych obiektów hydraulicznych, do opisu których stosuje się równanie Bernoulliego. Ze

względem to, że zależność (6.27) zawiera znaczną liczbę wielkości, w ogólnym przypadku mających charakter niewiadomych, przekroje obliczeniowe wybieramy w taki sposób, by można było dla nich określić możliwie dużo wartości zmiennych. Z natury rzeczy najlepiej jest wybierać przekroje skrajne (początkowy i końcowy).

Zauważmy też, że wobec występującej w tym modelu możliwości sumowania strat energii, wywoływanych przez poszczególne odcinki lub elementy armatury, możemy grupować poszczególne składniki sumy H_{str} w (6.27). Traktując więc układ pokazany na rys. 6.7 jako przykład konkretnego zadania, wyrażonego przez symbole ogólne, możemy napisać równanie Bernoulliego w następującej postaci:

$$\left(\frac{V^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 \right) - \left(\frac{V^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 \right) = \lambda \frac{L_{14} + L_{56}}{d} \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{L_{45}}{D} \frac{v^2}{2g} + (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_5) \frac{V^2}{2g} + \xi_4 \frac{v^2}{2g}. \quad (11.41)$$

Wyrażając teraz prędkości V (w przewodach o średnicy d) oraz v (w przewodach o średnicy D) za pomocą wydatku przewodu Q według (11.40) oraz wprowadzając oczywiste zależności:

$p_1 = p_{atm} + \rho g H$ – wobec pomijalnie małej prędkości, w zbiorniku praktycznie panuje hydrostatyczny rozkład ciśnienia;

$$p_2 = p_{atm},$$

$$z_2 = z_1 + h,$$

możemy następująco przepisać (11.41):

$$H - h = \frac{8}{\pi^2 g} \left[\frac{\lambda(L_{14} + L_{56})}{d^5} + \frac{\lambda L_{45}}{D^5} + \frac{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_5}{d^4} + \frac{\xi_4}{D^4} \right] Q^2. \quad (11.42)$$

Otrzymaliśmy jedną relację algebraiczną, umożliwiającą obliczenie jednej niewiadomej. Można tu rozważać różne rodzaje zadań szczegółowych, lecz zgodnie z uwagami podanymi w par. 11.2.4, za podstawowe możemy uznać:

- obliczenie wydatku Q , przy znanej wartości spiętrzenia H w zbiorniku oraz danej geometrycznej charakterystyce przewodu;
- obliczenie spiętrzenia H w zbiorniku, przy znanym wydatku Q oraz konfiguracji przewodu.

Po rozwiązaniu zadania możemy obliczyć wartości poszczególnych strat energii, by w razie potrzeby narysować przebieg linii ciśnienia oraz linii energii w rozważanym układzie (jakościowo przedstawione na rys. 6.7).

11.4. Ustalony przepływ niejednostajny w pojedynczym przewodzie zamkniętym

11.4.1. Rodzaje zagadnień

Zgodnie z techniczną orientacją zagadnień hydrauliki, przed przystąpieniem do formalnego opisu rozważanej kategorii przepływu celowe jest przeanalizowanie praktycznych aspektów zadań, które można napotkać w działalności inżynierskiej.

Wszystkie zmienne, charakteryzujące przepływ, są tu z definicji funkcjami odległości x przekroju od początku strumienia, wobec czego funkcja q_B , opisująca w równaniu ciągłości (3.46) dopływ boczny, może przyjmować wartości różne od zera – dodatnie, gdy dopływ ten skierowany jest ku strumieniowi, zaś ujemne, jeśli opisuje pobór płynu z tego strumienia.

Możemy tu mieć do czynienia z różnymi rodzajami konkretnych problemów. Nie można także wykluczyć zadań szczególnych, na przykład takich, gdy spadek wydatku wzdłuż strumienia, wywołany odpływem bocznym, musi być skompensowany zmianą średnicy przewodu tak, aby wzdłuż jego osi panowała stała prędkość średnia. Jednakże dla potrzeb praktyki inżynierskiej można wyróżnić dwie szczególne kategorie zadań, stawianych dla cieczy o stałej gęstości:

- 1) przepływ niejednostajny bez odpływu bocznego, wywołany zmianą średnicy przewodu (**dyfuzory i konfuzory**);
- 2) przepływ niejednostajny w przewodzie o stałym przekroju, wyposażonym w perforowaną ściankę, umożliwiającą przepływ cieczy (**przewód z wydatkiem bocznym**).

Nieco uwagi poświęcimy też niejednostajnemu przepływowi gazów (płynów ściśliwych).

11.4.2. Matematyczny opis przepływu

11.4.2.1. Równania ruchu

Skoro w rozważanej kategorii przepływu wielkości charakterystyczne mogą być zależne tylko od zmiennej x , w równaniach ruchu możemy pochodne cząstkowe zastąpić przez zwyczajne. Równanie ciągłości (3.46) przyjmie wtedy postać:

$$\frac{d(vA)}{dx} = q_B, \quad (11.43)$$

zaś równanie dynamiczne (3.48) napiszemy następująco (pomijając współczynnik de Saint-Venanta (3.25), którego wartość w ruchu turbulentnym niewiele przekracza jedność):

$$v \frac{dv}{dx} = gi_o - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} - \frac{4\tau_s}{\rho D}. \quad (11.44)$$

Zauważmy, że wobec (2.35) możemy scałkować (11.43), obliczając wydatek przewodu w dowolnym jego przekroju:

$$Q(x) = Q_0 + \int_0^x q_B dx, \quad (11.45)$$

gdzie Q_0 oznacza natężenie przepływu w przekroju początkowym (dla $x = 0$).

Pewnej refleksji wymaga zmienność przekroju przewodu. Może bowiem być tak, że jego ścianki wykonane zostaną z tworzywa podatnego na odkształcanie, skutkiem czego przekrój ten będzie funkcją ciśnienia $A = A(p)$. Tego typu przypadek rozważymy w podrozdziale 11.6, omawiając pewną ważną kategorię przepływu zmiennego w czasie. W warunkach ustalonych zależność przekroju przewodu od warunków ruchu napotkamy w instalacjach przemysłowych albo laboratoryjnych, bądź przy badaniu ruchu płynów ustrojowych w organizmach żywych (na przykład krwioobieg ludzki, co jest ważnym zagadnieniem biomechaniki). Natomiast w inżynierii środowiska zagadnienia takie mają charakter nietypowy, gdyż rozważa się tam sytuacje, w których substancje płynące w przewodach zamkniętych z zasady powinny być zabezpieczone przed kontaktem z otoczeniem (aby uchronić je przed zanieczyszczeniem z zewnątrz, jak w przypadku czystej wody, lub przed wydostaniem się na

zewnątrz, jak w przypadku ścieków), czemu służą szczelne i odporne na odkształcenia ścianki. Z tych względów przypadku $A = A(p)$ nie będziemy rozważać.

Najczęściej będziemy tutaj mieli do czynienia z sytuacją, gdy wartość $A(x)$ będzie znana, co pozwoli bezpośrednio z (11.45) obliczyć średnią prędkość przepływu:

$$v(x) = Q(x)/A(x). \quad (11.46)$$

W efekcie wielkością niewiadomą zostaje funkcja $p(x)$, opisująca zmianę ciśnienia wzdłuż przewodu. Odpowiednią relację otrzymamy z (11.44), po wykonaniu oczywistych przekształceń, które pozwalają napisać:

$$p(x) = \int_0^x \left[\rho g i_o(x) - \frac{4\tau_s(x)}{D(x)} - \rho v(x) \frac{dv(x)}{dx} \right] dx. \quad (11.47)$$

11.4.2.2. Wyznaczanie naprężenia stycznego

Aby wykorzystać zależność (11.47), uzupełnioną w tym przypadku relacjami (11.45) i (11.46), musimy wyznaczyć wartość τ_s . Zasadę postępowania omówiliśmy w par. 11.2.2, a jej praktyczne zastosowanie pozwoliło na wyprowadzenie relacji (11.13). Trzeba jednak pamiętać, że przekształcenia te odnosiły się do przepływu o stałej prędkości, podczas gdy obecnie mamy do czynienia z ruchem niejednostajnym. Jak zwykle w takich przypadkach, należy rozstrzygnąć istotną wątpliwość, która w ogólnym ujęciu ma formę pytania: **czy relację, otrzymaną dla prostszej formy ruchu, można wykorzystać do opisu formy bardziej złożonej, ograniczając się tylko do odpowiedniego uzmiennienia występujących w niej wielkości?**

Jest to pytanie bardzo ważne, proces poszukiwania na nie odpowiedzi – złożony, zaś odpowiedź (dla ogólnego przypadku nieznana) – często negatywna.

Obrazowego przykładu dostarcza analiza ważnego (także w inżynierii środowiska) przypadku ruchu ciała, zanurzonego w płynie. Otóż okazuje się [50], że o ile w ruchu ustalonym siłę tę można opisać prostymi wzorami algebraicznymi (opisującymi **siłę Stokesa** dla ruchu laminarnego oraz **siłę Newtona** dla ruchu turbulentnego), to w ruchu nieustalonym należy tu dodać jeszcze dwa człony: różniczkowy, opisujący **siłę od masy stowarzyszonej**, oraz różniczkowo-całkowy, wyrażający **siłę Basseta**.

Jeszcze do niedawna (zanim osiągnięto właściwą precyzję aparatury pomiarowej oraz maszyn liczących) powszechnie przyjmowano, że można tu stosować relację (11.13), określając współczynnik strat liniowych λ dokładnie w taki sam sposób, jak dla ruchu jednostajnego. Dotyczące tych problemów wyniki obserwacji oraz/albo obliczeń symulacyjnych uważano za w pełni potwierdzające to założenie.

W miarę poprawy jakości stosowanej aparatury, zaczęto zauważać pewne rozbieżności, lecz początkowo tłumaczono je niedoskonałościami stosowanego modelu. Jednakże wyniki badań przeprowadzonych w ostatniej dekadzie prowadzą do wniosku, że rozbieżności między wynikami obliczeń, wykonywanych w dotychczas akceptowany sposób, a rezultatami pomiarów są w ruchu niejednostajnym konsekwencją wzrostu złożoności pola prędkości, w stosunku do warunków przepływu jednostajnego. Innymi słowy, współczynnik strat liniowych λ , wyznaczony dla stałej prędkości, nie odpowiada warunkom ruchu z prędkością zmienną, nawet jeśli przyjąć, że sama postać formuły (11.13) jest poprawna.

Niestety, brak jest jeszcze materiału empirycznego, który pozwoliłby wyznaczyć skorygowane wartości λ . W praktyce (patrz punkt następny) do obliczeń przybliżonych wykorzystuje się harfę Nikuradsego (rys. 11.4), lub wzór Colebrooke'a-White'a (11.17). Mając ewentualnie do dyspozycji wyniki pomiarów dla rozważanego układu, można podjąć próbę

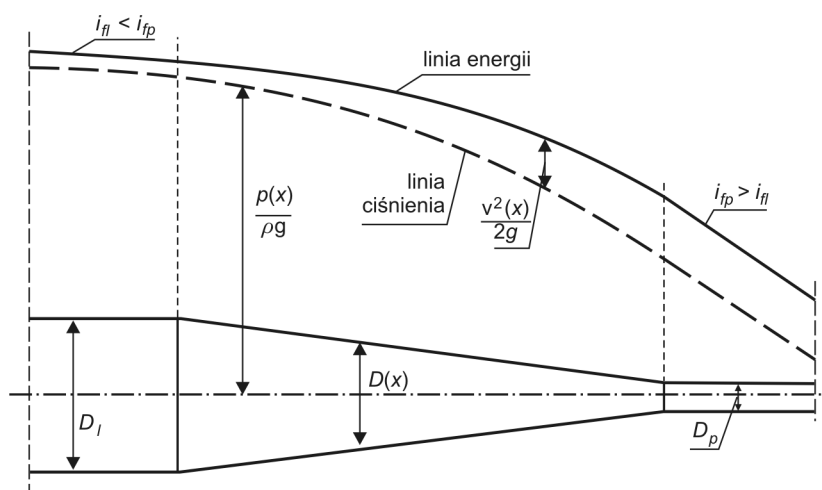
indywidualnego doboru tego współczynnika. Orientacyjnie można przyjmować, że dla przepływu niejednostajnego współczynnik strat liniowych jest około 5-krotnie większy od odpowiedniej wartości, wyznaczonej dla ruchu jednostajnego [54].

11.4.4.3. Konfuzory i dyfuzory

Jak pokazano w poprzednim paragrafie, wyznaczenie rozkładu ciśnienia wzdłuż przewodu zamkniętego o zmiennym przekroju sprowadza się do obliczenia całki (11.47). Rzecz oczywista, wobec braku przepływu bocznego ($q_B = 0$), wydatek cieczy w (11.46) jest stały ($Q = \text{const.}$). Przed podjęciem obliczeń należy tu oczywiście rozstrzygnąć omówiony już problem wyznaczenia współczynnika strat liniowych (pkt 11.4.2.2), który z pewnością obniża dokładność rezultatu końcowego.

Na szczęście, potrzeba przeprowadzania takich obliczeń w inżynierii środowiska pojawia się bardzo rzadko, gdyż z reguły przewody zamknięte mają tu charakter pryzmatyczny (czyli mają stały przekrój poprzeczny, z reguły kołowy). Przewody o zmiennym przekroju stosuje się najczęściej jako odcinki przejściowe, mające na celu złagodzenie zmiany wymiarów między dwoma połączonymi przewodami o różnych przekrojach.

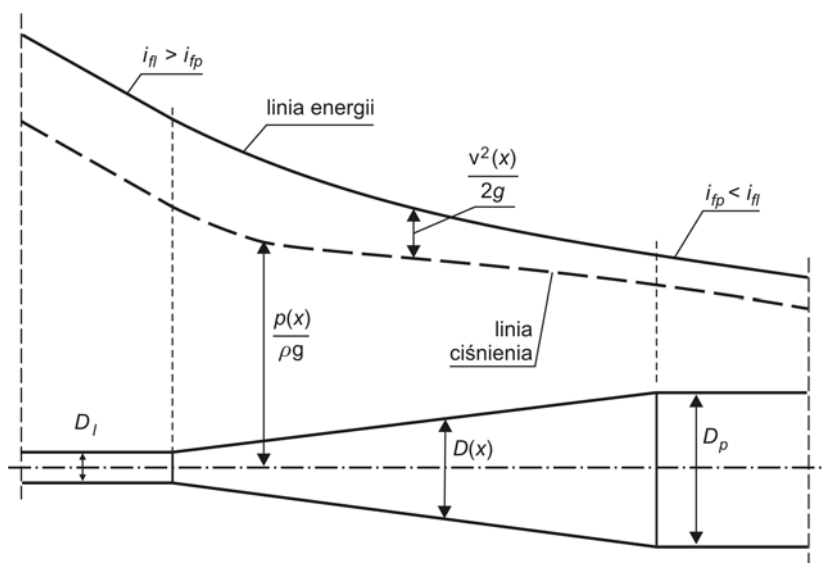
Gdy przekrój ten maleje, mówimy o **konfuzorze** (rys. 11.8), zaś w przeciwnym razie – o **dyfuzorze** (rys. 11.9). Jest jednak zrozumiałe, że odcinek przewodu o takim charakterze musi mieć ograniczoną długość, bowiem wywołowany przezeń efekt pozytywny (złagodzenie zakłóceń, a więc zmniejszenie strat energii mechanicznej) musi kompensować istotną cechę negatywną, jaką jest znaczny koszt wykonania takiego przewodu (w porównaniu ze standardowym przewodem o stałej średnicy). Tym samym łącznik tego typu nabiera charakteru **kształtki**, której wpływ na ruch cieczy opisywany jest tak samo, jak wpływ innych elementów, wywołujących **straty lokalne** (pkt 11.2.2.5, wzór 11.24). Sposób określania odpowiednich współczynników strat dla podstawowych rodzajów kształtek podano w tab. 3.



Rys. 11.8. Linia energii i linia ciśnienia wzdłuż konfuzora

Z drugiej jednak strony, konfuzory i dyfuzory mają pewną długość i niekiedy może zająć potrzeba określenia rozkładu ciśnienia wzdłuż takiej kształtki. Można go wtedy obli-

czyć z równania (11.47), lecz ze względów dydaktycznych dobrze jest też opanować umiejętność jakościowego naszkicowania takiego rozkładu.



Rys. 11.9. Linia energii i linia ciśnienia wzdłuż dyfuzora

W pierwszej kolejności rozważmy **konfuzor**. Jest oczywiste, że spadek linii energii na odcinku dopływowym (o większej średnicy) będzie tu mniejszy, niż spadek wzdłuż odcinka odpływowego. Tym samym linia energii na odcinku konfuzora będzie opisana krzywą wypukłą w górę. Jeśli skrajne przekroje konfuzora połączono z przewodami w sposób gładki, czyli nie wywołując start miejscowych, wtedy poszczególne odcinki linii energii stykają się ze sobą w sposób płynny (rys. 11.8). W przeciwnym wypadku musielibyśmy w tych miejscach zaznaczyć pewne nieciągłości ich przebiegu. Po narysowaniu linii energii, bez trudu możemy określić przebieg linii ciśnienia, uwzględniając tu ciągły wzrost prędkości wzdłuż strumienia.

Podobnie postępujemy w przypadku **dyfuzora** (rys. 11.9), dla którego krzywoliniowy przebieg linii energii musi wykazywać malejący tym razem spadek hydrauliczny (krzywa jest tu wypukła w dół). Linia ciśnienia wykazuje w tym przypadku specyficzne „przebiecie”, wynikające z konieczności odzwierciedlenia wzrostu ciśnienia (wynikającego ze spadku prędkości średniej), z jednoczesnym spadkiem tego ciśnienia, wywołanym stratą energii.

11.4.4. Przewód z wydatkiem bocznym

11.4.4.1. Aspekty techniczne

W przewodach zamkniętych najczęściej panuje ciśnienie większe, niż w ich otoczeniu (stąd często mówimy o **przepływie ciśnieniowym**). Z tego względu odpływ boczny z takiego przewodu będzie z reguły skierowany na zewnątrz. Jest to bardzo ważny w inżynierii środowiska typ układu przepływowego, znajdujący wiele zastosowań. Jako przykłady wymienić tu można przede wszystkim systemy rur perforowanych, służących do napowietrza-

nia wody lub ścieków, systemy przewodów do rozdeszczania cieczy (przy nawadnianiu pól uprawnych lub zraszania złóż biologicznych), instalacje ozdobne (wodotryski, fontanny...), czy też elementy powietrznych systemów ogrzewniczo-wentylacyjnych, jak choćby kurtyny powietrzne.

Interesujące i ważne jest też zastosowanie omawianego układu przepływowego jako **modelu ulicznego przewodu wodociągowego**. Chodzi tu o taką sytuację, gdy przewód doprowadzający wodę biegnie wzdłuż gęstej zabudowy, wskutek czego kolejne przyłącza wodociągowe są położone blisko siebie. Obliczenie tak zagęszczonego układu („grzebień” z rur) byłoby kosztowne, a jednocześnie mało dokładne (wobec dużej liczby elementów). W technice przyjmuje się wtedy, że mamy do czynienia z przewodem, który wydatkuje wodę w sposób praktycznie ciągły.

Układy tego typu, które pobierałyby płyn z otoczenia, występują dużo rzadziej. Przywołać tu można niektóre systemy drenarskie, czy instalacje odprowadzające zapyłone powietrze.

Ze względów wytrzymałościowych, przepływ boczny najprościej jest wywołać przez wykonanie w poboczniczy przewodu ciągu otworów. Można też myśleć o ciągłej szczelinie, lecz dla zapobieżenia odkształceniom należałoby przewód odpowiednio wzmocnić (na przykład, wykonując co pewien odcinek łączniki między krawędziami szczeliny).

11.4.4.2. Obliczenia hydrauliczne

Tak jak i poprzednio, rozkład ciśnienia opisany jest tu równaniem (11.47), przy czym razem należy uwzględnić w (11.46) zmienność wydatku $Q(x)$, zgodnie z (11.45).

Formalnie więc zadanie jest jasno sformułowane i nie należy do trudnych. W ujęciu jakościowym możemy spodziewać się, że przebieg linii energii i linii ciśnienia będzie najczęściej zbliżony do pokazanego na rys 11.9. Wynika to z faktu, że wydatek wzdłuż przewodu najczęściej będzie malał, co wobec stałej jego średnicy wywoła spadek prędkości. Gdyby z kolei przewód pobierał ciecz, wydatek wzrastałby i mielibyśmy sytuację jak na rys. 11.8.

Istotne zróżnicowanie problemów, jakie można tu stawiać, wynika natomiast ze sposobu określenia wydatku bocznego q_B . Jak zwykle w zagadnieniach przepływowych, trudno tu o zestawienie zamkniętej klasyfikacji różnych przypadków. Jednakże w ujęciu ogólnym można mówić o dwóch typach zagadnień:

- 1) przepływ o wymuszonym wydatku bocznym,
- 2) przepływ o wydatku bocznym wynikającym z warunków hydraulicznych.

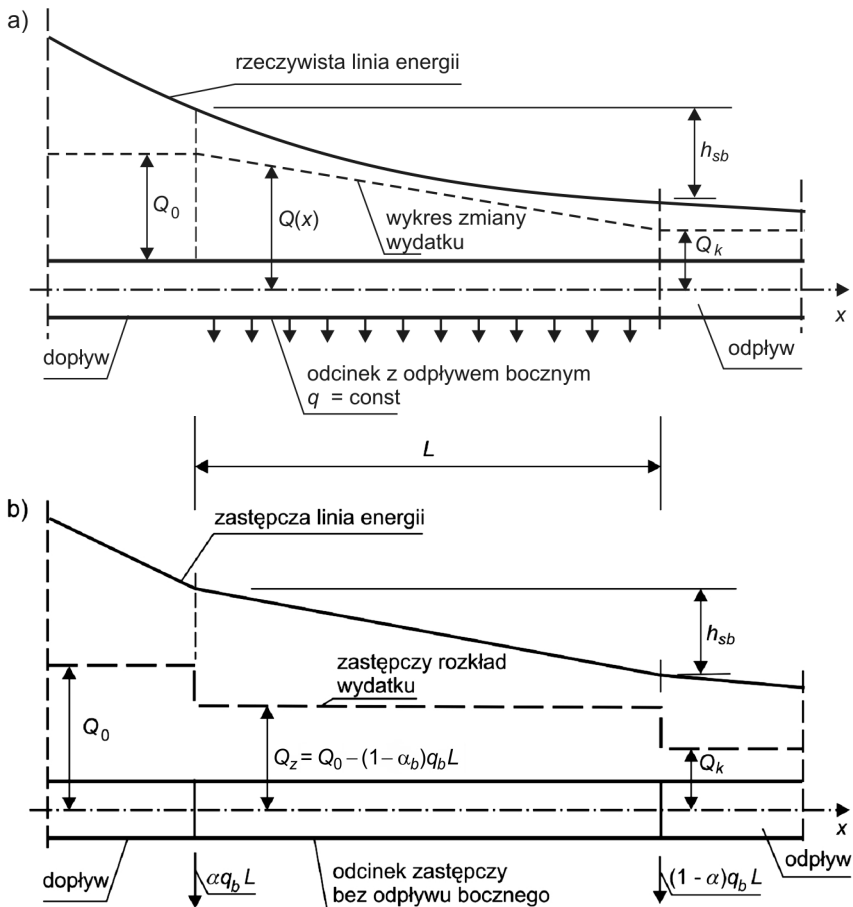
Ta pierwsza grupa zadań, gdy odpływ lub dopływ boczny w każdym punkcie (otworze, odgałęzieniu, czy odcinku szczeliny) jest wywołany i utrzymywany przez osobny układ (najczęściej pompowy) jest hydraulicznie prosty. W zasadzie przewód główny musi wtedy spełniać tylko jeden warunek – doprowadzić (lub odprowadzić) łączną ilość przepływającej cieczy lub gazu. A że nie występuje on w typowych zagadnieniach inżynierii środowiska, nie będziemy go bliżej analizować.

Inaczej rzecz wygląda z drugą kategorią zadań. Aby je rozwiązać, musimy omówione już równania, dotyczące ruchu płynu w przewodach tranzytowych, uzupełnić relacjami opisującymi wypływ cieczy przez otwór w ścianie (w tym przypadku – w ścianie przewodu), które wyprowadzimy w rozdz. 16. Istotnym aspektem tego typu zadań zajmiemy się w następnym punkcie, natomiast tutaj przedstawimy ważny w praktyce przypadek, gdy wypływ boczny na jednostkę długości strumienia jest stały wzdłuż przewodu.

Jest to technicznie ważna wersja wspomnianego już modelu, gdy przewód z wydatkiem bocznym stanowi schemat obliczeniowy dla rozdzielczego przewodu wodociągowe-

go. Aby uniknąć wtedy problemów, związanych z opisem bardzo nierównomiernych, a w sumie niezbyt istotnych, zmian poboru wody, do celów projektowych przyjmuje się wtedy pewien miarodajny wydatek boczny, stały wzdłuż rurociągu, a określony przez liczbę osób, korzystających z wodociągu [34, 72]. Zakłada się tu, że pobór jest w pewnym stopniu wyrównywany przez samych odbiorców, którzy przymkną zawory czerpalne przy nadmiernym wydatku, zaś zwiększą ich otwarcie, gdy będą potrzebowali więcej wody.

Zadanie pod względem hydraulicznym sprowadza się do schematu jak na rys. 11.10a. Obejmuje on odcinek dopływowy o wydatku Q_0 , a tym samym o największym spadku hydraulicznym, następnie odcinek wydatkujący ciecz (łączny odpływ boczny wynosi $q_b L$), wzdłuż którego linia energii obniża się krzywoliniowo, i wreszcie odcinek odpływowy o wydatku Q_k i o najmniejszym spadku hydraulicznym.



Rys. 11.10. Przepływ w przewodzie ze stałym wydatkiem bocznym:
 a) schemat rzeczywisty, b) model techniczny

Łączna wysokość straty energii na odcinku wydatkującym h_{sb} , istotna przy obliczeniach hydraulicznych całego układu, może być wyznaczona za pomocą omówionej już relacji (11.47), co ze względu na jej całkowitą postać wymaga znacznego nakładu pracy.

W tej sytuacji do celów praktycznych wprowadza się uproszczony model zjawiska (rys. 11.10b). Przyjmuje się w nim, iż rzeczywisty odpływ boczny można rozdzielić na dwie części, a każdą z nich umownie przyporządkować początkowemu i końcowemu przekroju odcinka wydatkującego. W rezultacie wzdłuż samego odcinka płynie pewien wydatek zastępczy:

$$Q_Z = Q_0 - (1 - \alpha_b)q_B L = Q_K + \alpha_b q_b L. \quad (11.48)$$

Mnożnik α_b dobiera się tak, by rzeczywista wysokość straty energii była równa obliczonej wzorem Darcy'ego-Weisbacha dla wydatku zastępczego Q_Z . Wykonując obliczenia [10, 16, 70] można stwierdzić, że mnożnik ten zależy od proporcji między poszczególnymi wydatkami, lecz mieści się w stosunkowo wąskim zakresie:

$$0,5 < \alpha_b < 0,65. \quad (11.49)$$

W praktyce zaleca się stosowanie jako wartości średniej:

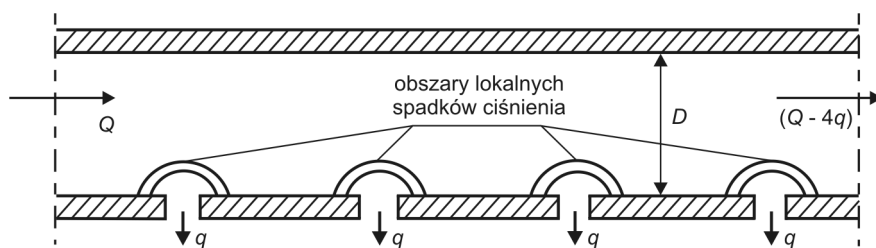
$$\alpha_b = 0,55. \quad (11.50)$$

Tak więc, stosując omawiany model dla konkretnego układu przewodów wodociągowych, odcinki o bardzo zagęszczonych odpływach bocznych zastępujemy odcinkami szczelnymi, wprowadzając dla nich przepływ zastępczy o wydatku (11.48).

11.4.4.3. Równomierność odpływu bocznego

Omówiony w poprzednich punktach model przewodu z odpływem bocznym, wprowadzony został w ramach założeń określających przepływ jednowymiarowy i jednokierunkowy, zwany w skrócie podłużnym (podrozdz. 2.6). Oznacza to, że poprzeczne składowe wektora prędkości nie mogą na tyle zakłócać jego składowej podłużnej, by posługiwanie się prędkością średnią zaczęło budzić wątpliwości. W takiej sytuacji ciśnienie spada wzdłuż przewodu (rys. 11.10), co w konsekwencji zmienia warunki odpływu bocznego – prędkość wypływu dla kolejnych otworów (lub dla kolejnych odcinków szczeliny bocznej) będzie malała. Można co prawda próbować utrzymać tu stały wydatek lokalny przez odpowiednie zwiększanie średnic kolejnych otworów (lub wysokości szczeliny), lecz w niektórych obiektach zmiany te (prędkości oraz/albo miąższości strumienia) mogą być niewskazane, lub wręcz niedopuszczalne. W szczególności dotyczy to układów, dla których ważne są kryteria estetyczne (na przykład fontanny, lub inne atrakcje wodne).

W takiej sytuacji można zmienić charakter przepływu w układzie, przez wprowadzenie wyraźnej dysproporcji między średnicą przewodu a wymiarem otworów bocznych, tak aby przewód ten funkcjonował jak wydłużony zbiornik, a zakłócenie ciśnienia w rejonie wypływu miało charakter lokalny (patrz rys. 11.11).



Rys. 11.11. Schemat obliczeniowy dla wypływu cieczy przez małe otwory w ścianie wydłużonego zbiornika

Zagadnienie to nie jest jeszcze dokładnie rozpoznane, lecz orientacyjnie można przyjmować [55]:

- schemat przewodu wydatkującego – gdy $D/d < 5$,
- schemat zbiornika z otworami na pobocznicę – gdy $D/d > 5$.

11.4.5. Dysza de Laval

Zasadnicza część przepływowych problemów inżynierii środowiska może być opisana za pomocą zależności wyprowadzonych dla płynów o stałej gęstości. Odnosi się to nawet do takich przypadków, gdy przepływające medium cechuje ściśliwość (powietrze, gaz ziemny...), bowiem dla wielu zagadnień prędkość i ciśnienie robocze są na tyle umiarkowane, że wpływ zmiany jego gęstości można pominąć [38].

Jeśli jednak zmiany tej wielkości będą istotne dla przebiegu zjawiska, należy odwołać się do równań ogólniejszych. W omawianym tu przypadku jednostajnego i ustalonego ruchu strumienia płynu, **mamy do dyspozycji równanie ciągłości (3.47), równanie dynamiczne (3.48) oraz odpowiednio dobrane równanie stanu** (podrozdz. 3.8). Występują w nich trzy niewiadome (prędkość średnia, ciśnienie, gęstość), toteż układ jest zamknięty i po uzupełnieniu go o stosowne warunki graniczne (rozdz. 4) możemy przystąpić do jego rozwiązywania. Gdyby okazało się, że na przebieg procesu wpływa temperatura T , byłaby ona czwartą zmienną zależną, a do układu należałoby dołączyć jeszcze jedno równanie, a mianowicie równanie zachowania energii (3.68).

W dalszym ciągu rozważymy szczególnie przypadek niejednostajnego przepływu cieczy ściśliwej w niezmienniej temperaturze (przepływ adiabatyczny) przez poziomy przewód zamknięty o charakterystycznie uformowanym kształcie – początkowo zwęża się on od średnicy D_0 do wartości D_S , by następnie wzrosnąć do D_K (rys. 11.12a). Dla uwypuklenia istoty omawianych przemian pominiemy tu straty energii, toteż trzy wymienione równania przyjmą postacie:

- równanie ciągłości:

$$\frac{\partial(\rho v S)}{\partial x} = 0; \quad (11.51)$$

- równanie dynamiczne:

$$v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad (11.52)$$

- równanie stanu dla przepływu adiabatycznego:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa}. \quad (11.53)$$

Wykonajmy teraz następujące przekształcenia:

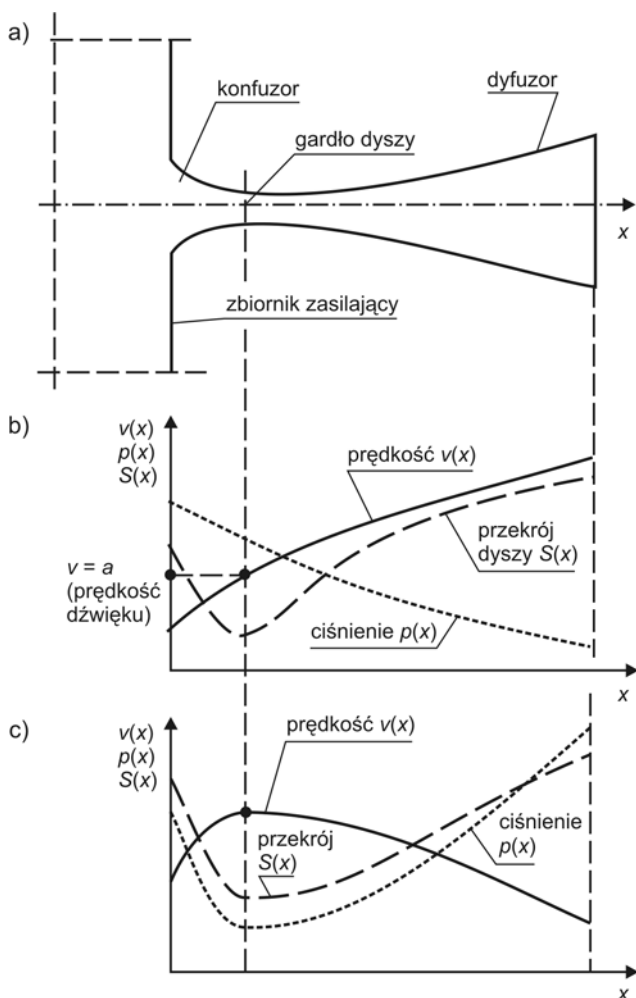
- zróżniczkujemy iloczyn trzech zmiennych w równaniu (11.51) i podzielmy je obustronnie przez ten iloczyn;
- obliczmy pochodną (3.73) względem zmiennej x .

Mnożąc dwie pierwsze z trzech rozważanych relacji przez różniczkę dx , otrzymamy:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0, \quad (11.51')$$

$$v dv + \frac{1}{\rho} dp = 0, \quad (11.52')$$

$$dp - \kappa \frac{p}{\rho} d\rho = 0. \quad (3.73')$$



Rys. 11.12. Przepływ w dyszy de Laval'a: a) schematyczny kształt dyszy, b) rozkłady zmiennych dla przepływu naddźwiękowego, c) rozkłady zmiennych dla przepływu poddźwiękowego

Zastąpmy teraz różniczkę ciśnienia w (11.52') przez różniczkę gęstości, korzystając z relacji:

$$\frac{dp}{d\rho} = a^2. \quad (11.53)$$

Druga potęga przy symbolu a podkreśla tu fakt, że pochodna po lewej stronie tej relacji jest zawsze dodatnia (wzrostowi ciśnienia odpowiada wzrost gęstości, zaś spadkowi ciśnienia – zmniejszenie gęstości płynu ściśliwego). Jeżeli zaś chodzi o samą wielkość a , to (jak wykazemy w następnym podrozdziale), określa ona **prędkość rozchodzenia się małych zaburzeń w ośrodku ściśliwym**. W przypadku gazu jest to **prędkość dźwięku**. Po wykonaniu przekształceń otrzymamy:

$$v dv + a^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0. \quad (11.54)$$

Za pomocą (11.51') wyeliminujmy z powyższego iloraz różniczki gęstości przez gęstość, co pozwala ostatecznie napisać:

$$(M^2 - 1) \frac{dv}{v} = \frac{dS}{S}, \quad (11.55)$$

gdzie symbol M oznacza **liczbę Macha**:

$$M = \frac{v}{a}. \quad (11.56)$$

Ta bezwymiarowa wielkość, będąca ilorazem rzeczywistej prędkości przez prędkość dźwięku, jest znaną w technice miarą, stosowaną do opisu znacznych prędkości (na przykład prędkości myśliwców ponaddźwiękowych).

Otrzymana relacja (11.55), zwana **równaniem Hugoniota**, pozwala na wyciągnięcie ważnych wniosków odnośnie do niejednostajnego przepływu płynu ściśliwego. Widać bowiem, że kierunek zmian prędkości v , wymuszonych zmianą jego przekroju poprzecznego S , zależy od liczby Macha. Dla przepływu poddźwiękowego ($M < 1$) zmniejszenie przekroju będzie skutkowało przyspieszeniem strumienia (wzrost v) i odwrotnie, zaś dla przepływu naddźwiękowego ($M > 1$) przyspieszenie gazu wymaga zwiększenia przekroju. Schematycznie pokazano to na rys. 11.12b.

Podkreślmy, że jest to zjawisko specyficzne dla płynów ściśliwych. W przypadku cieczy nieściśliwej, jak wiemy z analizy równania Bernoulliego (rozdz. 6), uzyskujemy jednoznaczną zmianę prędkości i ciśnienia, towarzyszącą zmianom przekroju poprzecznego kanału (rys. 11.12c).

Omówiony efekt, obok swego znaczenia dydaktycznego (pozwala on zwrócić uwagę na istotne cechy przepływu substancji gazowych), stwarza podstawy do projektowania kanałów, umożliwiających przyspieszenie gazu do prędkości naddźwiękowej. Zgodnie ze schematami na rys. 11.12, jeżeli w przekroju początkowym płyn porusza się z prędkością poddźwiękową, początkowy odcinek takiego kanału należy wykonać jako konfuzor, aż do uzyskania w największym przekroju (czyli w **gardle**) prędkości dźwięku. Dalsze przyspieszenie płynu wymaga zwiększenia przekroju. Przewód taki nosi nazwę **dyzy de Laval**.

11.5. Przepływ nieustalony w pojedynczym przewodzie zamkniętym

11.5.1. Przypadek cieczy o stałej gęstości

Przechodźmy do najbardziej złożonej kategorii przepływu w przewodzie zamkniętym, gdy charakteryzujące zjawisko wielkości fizyczne zmieniają się zarówno względem czasu, jak i wzdłuż strumienia. W ogólnym przypadku mamy zatem:

$$v = v(x,t), \quad p = p(x,t), \quad \rho = \rho(x,t), \quad S = S(x,t). \quad (11.57)$$

Wyprowadzone w rozdziale 3 równania ruchu dla przewodu kołowego bez dopływu bocznego, gdy naprężenie styczne na poboczniczy strumienia wyrażone jest relacją (11.13), przyjmują postać:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v S)}{\partial x} = 0, \quad (11.58)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = g i_o - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \lambda \frac{v^2}{2D}. \quad (11.59)$$

Gdy mamy do czynienia z cieczą o stałej gęstości, płynącą w nieodkształcalnym rurociągu, co w inżynierii sanitarnej jest sytuacją typową, te dwa równania tworzą układ zamknięty ze względu na prędkość średnią v oraz ciśnienie p . Ich rozwiązanie, możliwe praktycznie tylko przy użyciu metod numerycznych [15, 63], wymaga określenia **obszaru**, w którym przebiega zjawisko (czyli podania geometrycznej i hydraulicznej charakterystyki rurociągu), oraz **warunków granicznych** (patrz rozdział 4). Obejmują one **warunek początkowy** (opis stanu układu w chwili, dla której rozpoczynamy obliczenia) oraz **warunki brzegowe** (informacje o oddziaływaniu między układem, a jego otoczeniem). Sposób stawiania tych warunków musi być dostosowany do typu równań. W tym przypadku jest to **układ równań hiperboliczny** [4, 47].

Tak więc można powiedzieć, że problem przepływu nieustalonego i niejednostajnego cieczy o stałej gęstości w ujęciu ogólnym został sformułowany, toteż dalsza dyskusja dotyczyłaby tylko prezentacji przykładów szczególnych.

Trzeba tu jednak zwrócić uwagę na bardzo ważny praktyczny aspekt omawianej kategorii przepływów. Dotyczy on mianowicie możliwości określenia odpowiednich warunków brzegowych, przy czym nie chodzi tu o trudności formalne, lecz o fizyczny i techniczny opis czasowej zmienności czynników, wymuszających ruch nieustalony. Zagadnienia rozważane w ramach inżynierii środowiska cechują się bowiem bardzo wysokim stopniem złożoności, niejednokrotnie przyjmując charakter zjawisk losowych. Często o zmianach zachodzących w układzie decydują indywidualne i trudne do przewidzenia decyzje ludzi, korzystających z urządzeń wodociągowo-kanalizacyjnych. Z drugiej zaś strony, zmiany te nierzadko mają charakter dość łagodny, toteż ich odtwarzanie, znacznie podnoszące koszty pracy inżynierskiej, nie ma zasadniczego znaczenia dla jej wyników.

Warto dodać, że łatwiej jest znaleźć istotne i możliwe do odtworzenia regularności w przebiegu procesów niezależnych od decyzji ludzkich, czyli przebiegających w przyrodzie. Jednak one związane są raczej z przepływami w korytach otwartych (rozdz. 13).

W istocie rzeczy, dla przepływów nieustalonych w rurociągach formułuje się jeden rodzaj zadania – bardzo ważny w technice i dający się w ścisły sposób opisać matematycznie. Chodzi tu mianowicie o **gwałtowne zmniejszenie** (w szczególnym przypadku – do zera) lub **gwałtowne zwiększenie** (w szczególnym przypadku – od zera) prędkości cieczy v (a tym samym – wydatku Q).

Sytuacje takie, a w zwłaszcza tę pierwszą, napotyka się w praktyce inżynierskiej na tyle często, że ewentualność ich wystąpienia należy analizować przy rozważaniu każdej większej inwestycji, której elementem są układy przewodów ciśnieniowych. Mogą one być skutkami awarii zasowy lub zaworu (na przykład wskutek korozji), zgniecenia przewodu (na przykład przez ciężki sprzęt budowlany, pracujący w terenie o źle rozpoznanej infrastrukturze), czy też niewłaściwej eksploatacji układu (zbyt szybkie wyłączanie pompy lub zamykanie zasowy).

Pod względem formalnym zmianę taką można zapisać bez trudu, na przykład za pomocą formuły:

$$\begin{aligned} &\text{w chwili } t = t_0 \text{ prędkość ulega zmianie } \Delta v = v_{\text{pocz}} - v_{\text{konc}} \\ &\quad (\text{w szczególnym przypadku zachodzi } \Delta v = v_{\text{pocz}}, \\ &\quad \text{co odpowiada nagłemu zamknięciu przepływu), \end{aligned} \quad (11.60)$$

lub $\Delta v = -v_{\text{konc}}$, co odpowiada nagłemu otwarciu przepływu.

Warunek, wyrażony w tak zwarty sposób, prowadzi do ważnej konkluzji, gdy wprowadzi się go do równania (11.59). Mówi on mianowicie, że w tym przypadku można jako model zjawiska przyjąć relację:

$$\frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \infty. \quad (11.61)$$

Zakładając w dalszym ciągu, że $\rho = \text{const.}$ oraz $S = \text{const.}$, z (11.58) mamy:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (11.62)$$

Oznacza to, że modelowo nieskończenie wielka (a w praktyce – bardzo duża) wartość pochodnej prędkości musi być w (11.59) skompensowana przez równie znaczny wzrost innego członu (lub innych członów). Wobec postaci tego równania, jedyną taką wielkością może być ciśnienie, co symbolicznie zapiszemy jako:

$$p \rightarrow \infty. \quad (11.63)$$

Tego typu wniosek z dyskusji jakościowej, sygnalizujący możliwość bardzo dużych wzrostów rozważanych wielkości fizycznych, musi być zawsze starannie przeanalizowany, z uwzględnieniem wyników obserwacji i pomiarów. W rozważanym przypadku analiza taka potwierdziła relację (11.63), lecz tylko częściowo – przy nagłym zmniejszeniu prędkości w rurociągu rzeczywiście obserwuje się znaczny wzrost ciśnienia. Nie jest on jednak aż tak duży, jak by to wynikało z przeprowadzonej dyskusji. Oznacza to, że dotychczas wykorzystywany model jest zbyt uproszczony. Oczywiście możliwością jego poprawy jest uwzględnienie **odkształcalności**, związanej ze zmianą gęstości, zarówno płynącej w rurociągu **cieczy**, jak i jego **ścianek**. W ten sposób sformułowano klasyczny model przepływu nieustalonego w przewodzie zamkniętym, wywołanego przez nagłą zmianę warunków przepływu, potocznie określanego mianem **uderzenia hydraulicznego**.

11.5.2. Przypadek cieczy o zmiennej gęstości

11.5.2.1. Uderzenie hydrauliczne w przewodzie długim

Zarówno ciecze newtonowskie, jak i większość materiałów, z których wykonywane są przewody zamknięte, na zmianę obciążenia reagują zmianą gęstości opisaną modelem **substancji sprężystej**, ilościowo wyrażonym przez **prawo Hooke'a** (podrozdz. 3.8). Dla cieczy ma ono postać:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p - p_0}{E_C} \right). \quad (11.64)$$

W przypadku rurociągu efekt ten wyrażamy za pomocą zmiany jego przekroju poprzecznego:

$$S = S_0 \left(1 + \frac{D}{\delta_s} \frac{p - p_0}{E_S} \right), \quad (11.65)$$

gdzie: E_C, E_S – moduły sprężystości odpowiednio cieczy (najczęściej wody) i materiału ścianki, δ_s – grubość ścianki.

Dwa ostatnie wyrażenia, wraz z (11.58) i (11.59), tworzą układ równań, zamknięty ze względu na zestaw niewiadomych (11.57). Wobec algebraicznej postaci dwóch ostatnich relacji, możemy w korzystny sposób przekształcić te zależności, uzyskując ich bardzo ważną postać roboczą.

W pierwszej kolejności wprowadźmy pomocniczą wielkość a , analogicznie do (11.53), której sens fizyczny wyjaśnimy po wykonaniu całej sekwencji przekształceń. Przyjmijmy mianowicie, że:

$$S \frac{\partial p}{\partial(\rho S)} = a^2. \quad (11.66)$$

Druga potęga tej wielkości sygnalizuje, że pochodna po lewej stronie jest zawsze dodatnia (wzrostowi ciśnienia odpowiada wzrost gęstości oraz przekroju, i odwrotnie). Korzystając z (11.64) i (11.65) bez trudu obliczymy:

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \left(\frac{1}{E_C} + \frac{D}{\delta_s E_S} \right)}}. \quad (11.67)$$

Wprowadzona wielkość pozwala napisać, że:

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho S)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{S}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (11.68)$$

$$\frac{\partial(\rho S)}{\partial x} = \frac{\partial(\rho S)}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{S}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (11.69)$$

dzięki czemu równania (11.58) i (11.59) przyjmą postać:

$$\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (11.70)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{a}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (11.71)$$

Pewną trudność w dalszym przekształcaniu układu stwarza występowanie w równaniach ilorazu pochodnych ciśnienia oraz gęstości. Jest to zresztą sytuacja analogiczna do tej, z jaką mieliśmy do czynienia podczas wyprowadzania równania Bernoulliego dla płynu ściśliwego (par. 6.2.8). Wiemy już więc, że dalsze postępowanie wymaga doboru równania stanu. Zgodnie z charakterem rozważanego zjawiska mamy tu do dyspozycji zależność (11.64), więc:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0 \left(1 + \frac{p-p_0}{E_C}\right)} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{E_C}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\ln \left(1 + \frac{p-p_0}{E_C}\right) \right]. \quad (11.72)$$

Obserwowane podczas omawianego zjawiska w technice maksymalne zmiany ciśnienia nie przekraczają kilkudziesięciu megapaskali, podczas gdy moduł sprężystości wody jest rzędu 2000 MPa [74]. Oznacza to, że:

$$\frac{p-p_0}{E_C} \ll 1, \quad (11.73)$$

co pozwala wykorzystać oszacowanie [4]:

$$\ln(1 + \varepsilon) \approx \varepsilon \quad (11.74)$$

i ostatecznie zapisać, że:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(p-p_0)}{\partial t}. \quad (11.75)$$

W taki sam sposób dla pochodnej ciśnienia względem x otrzymamy:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(p-p_0)}{\partial x}. \quad (11.76)$$

Podstawiając teraz dwie ostatnie relacje do analizowanych równań, a następnie dodając i odejmując je stronami, po wykonaniu prostych przekształceń możemy napisać:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p-p_0}{\rho_0 a} + v \right) + (v+a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p-p_0}{\rho_0 a} + v \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p-p_0}{\rho_0 a} - v \right) + (v-a) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p-p_0}{\rho_0 a} - v \right) &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (11.77)$$

Jest to specyficzna postać układu wyjściowego, utworzonego przez równanie ciągłości i równanie dynamiczne. Pod względem fizycznym obie postacie są w pełni równoważne, przy czym w tej ostatniej występują formalnie nowe niewiadome, będące kombinacjami niewiadomych wyjściowych (prędkości średniej v oraz ciśnienia p). Są to tak zwane **niezmienniki Riemanna**:

$$R_W = \frac{p-p_0}{\rho_0 a} + v, \quad R_P = \frac{p-p_0}{\rho_0 a} - v. \quad (11.78)$$

Zapis (11.77) odgrywa ważną rolę przy badaniu przebiegu wielu zjawisk (nie tylko tu omawianego), toteż nosi odrębną nazwę. Jest to mianowicie **postać kanoniczna** (uwaga: zaprezentowane tu wyprowadzenie ma charakter indywidualny, co pozwala analizować jego poszczególne etapy; matematyka oferuje tu także procedurę sformalizowaną, dającą możliwość otrzymania postaci kanonicznej bez wnikania w fizyczny sens równań). Pożytek z niego płynący dostrzeżemy bez trudu, jeśli przywołamy omówione już pojęcie **pochodnej substancjalnej** (par. 1.5.5). Posługując się symbolami (11.78), możemy (11.77) przepisać następująco:

$$\left. \begin{aligned} \frac{DR_W}{Dt} &= \frac{\partial R_W}{\partial t} + (v+a) \frac{\partial R_W}{\partial x} = 0 \\ \frac{DR_P}{Dt} &= \frac{\partial R_P}{\partial t} + (v-a) \frac{\partial R_P}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.79)$$

Możemy teraz zinterpretować wielkość a , zdefiniowaną przez relację (11.66) w rozważanym tu zagadnieniu, zaś przez (11.53) dla przepływu płynu o dużej ściśliwości (gdy jego podatność na zmiany gęstości jest tak duża, że nie bierzemy pod uwagę ewentualnego odkształcenia ścianek przewodu). Jest to mianowicie **prędkość, z jaką w przewodzie rozchodzi się zaburzenie** warunków przepływu. W przypadku gazów zaburzenie takie ma charakter fali akustycznej, toteż w (11.53) wielkość a nazwalibyśmy **prędkością dźwięku**.

Wartość a , określona relacją (11.67), jest bardzo duża. Dla wody ($E_C = 2000$ MPa) w rurociągu stalowym ($E_S = 210\,000$ MPa), gdy orientacyjnie przyjmujemy $D / \delta_S = 100$, mamy:

$$a = 1000 \text{ m/s} . \quad (11.80)$$

Zgodnie z (11.79) prędkość ta sumuje się (z przeciwnymi znakami) z prędkością adwekcji v . Praktycznie zawsze zachodzi $v \ll a$, toteż wypadkowa prędkość, z jaką rozchodzi się to zaburzenie, jest **dodatnia** dla pierwszego z równań (11.79), zaś **ujemna** dla drugiego z nich. Stwierdzenie to pozwala nam na ilościową dyskusję charakteru owego zaburzenia.

Możemy więc powiedzieć, że **wskutek gwałtownej zmiany prędkości przepływu** (krótko nazywanej zaburzeniem) **wzdłuż przewodu przemieszcza się informacja o tej zmianie**. Ma ona bardzo specyficzny charakter – przy zmianie prędkości średniej v oraz ciśnienia p , kombinacje tych zmiennych, wyrażone przez niezmienniki Riemanna (11.78), zachowują stałe wartości, przy czym:

- wartość $R_W = \text{const}$ przenosi się wzdłuż początkowego kierunku przepływu (w górę rurociągu) z prędkością $v + a$;
- wartość $R_P = \text{const}$ przenosi się przeciwnie do początkowego kierunku przepływu (w dół rurociągu) z prędkością $v - a$.

Dla obliczenia konkretnych wartości niezmienników musimy znać przebieg rozważanego zaburzenia. Na dość ogólnym poziomie można przyjąć, że w ustalonym punkcie przewodu **dla $t = 0$ prędkość spada o wartość Δv , a ciśnienie spada do poziomu p_0** . W chwili początkowej mamy wtedy:

$$R_{W0} = v - \Delta v, \quad R_{P0} = -v + \Delta v, \quad (11.81)$$

czyli wobec (11.78) możemy napisać, że:

- w dół rurociągu z prędkością $v + a$ ciśnienie spada do wartości:

$$p = p_0 - \rho_0 a \Delta v ; \quad (11.82)$$

- w górę rurociągu z prędkością $v - a$ ciśnienie rośnie do wartości:

$$p = p_0 + \rho_0 a \Delta v . \quad (11.83)$$

Podkreślmy, że omawiane zjawisko cechuje przemieszczanie się energii, ze stosunkowo niewielkimi zmianami adwekcji, co oznacza, że jest to **ruch falowy** [8, 9]. Zauważmy też, że gdy w rozważanym punkcie następuje **zmniejszenie prędkości**, wtedy Δv jest dodatnie, podczas gdy **zwiększenie prędkości** opisane jest ujemną wartością Δv . Tak więc z chwilą nagłego zmniejszenia prędkości w jednym punkcie strumienia w dół przewodu

zaczyna przemieszczać się **fala ciśnienia obniżonego**, zaś w górę – **fala ciśnienia podwyższonego**. Moduł tej zmiany opisany jest dobrze potwierdzonym empirycznie wzorem:

$$|\Delta p| = |\rho_0 a \Delta v|. \quad (11.84)$$

Gdy natomiast prędkość ulegnie nagłemu zwiększeniu (co w inżynierii środowiska jest sytuacją mniej typową), wzrost ciśnienia przenosi się w dół przewodu, zaś jego spadek – w górę. Zaznaczmy, że w obszarze objętym zmianami ciśnienia prędkość cieczy spada do wartości obniżonej (w szczególności – do zera).

Zmiana wyrażona relacją (11.84) jest z reguły bardzo znaczna, szczególnie gdy mamy do czynienia z maksymalną zmianą prędkości (całkowite zamknięcie przewodu). Uwzględniając (11.80) oraz przyjmując przykładowo $\Delta v = 2,0$ m/s, mamy:

$$\Delta p = 20 \text{ barów}. \quad (11.85)$$

Tak duża wartość przyrostu ciśnienia, w dodatku przemieszczająca się z ogromną prędkością (11.80), w pełni tłumaczy użyty do opisu tego zjawiska termin – **uderzenie hydrauliczne**. Może ono być przyczyną uszkodzenia rurociągu lub jego elementów (armatury, uszczelnień...), jak też pomp.

Inaczej rzecz się ma z falą obniżonego ciśnienia. Wobec faktu, że $p > 0$, relacja (11.82) zachowuje ważność tylko wtedy, gdy:

$$p_0 > |\rho_0 a \Delta v|. \quad (11.86)$$

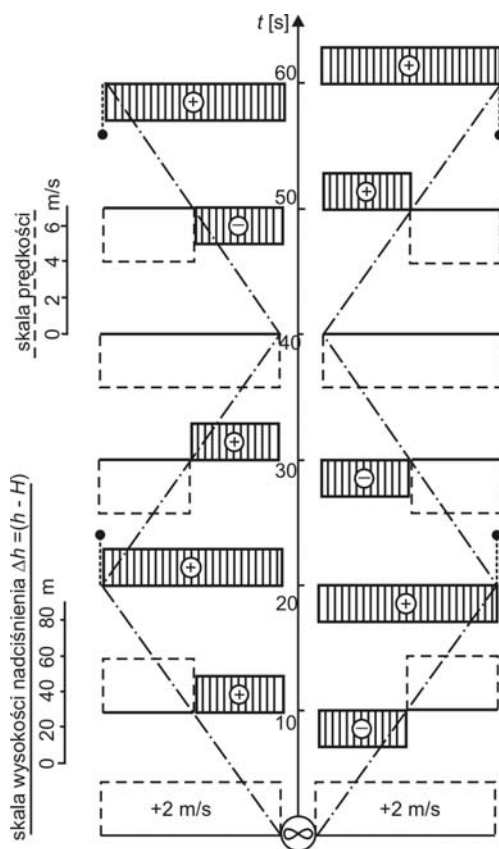
W przeciwnym razie spadek ciśnienia w odpowiedniej części przewodu następuje tylko do wartości, która dla danej temperatury odpowiada warunkom wrzenia cieczy. W tym momencie, a nawet jeszcze przed jego osiągnięciem, w przewodzie pojawia się mieszanina pary danej cieczy oraz ewentualnie gazów, które mogły być w niej rozpuszczone (a pamiętajmy, że rozpuszczalność gazów w cieczach maleje wraz z ciśnieniem). Taki „gazowy korek”, o rosnącej objętości, powoduje przerwanie ciągłości strumienia cieczy i łagodzi skutki tego zjawiska w tej części przewodu, wzdłuż której przechodzi fala obniżonego ciśnienia.

11.5.2.2. Przewód o skończonej długości

Jeśli uderzenie hydrauliczne zostanie wywołane w przewodzie, którego przekrój początkowy oraz/albo końcowy usytuowany jest w ograniczonej odległości od punktu, w którym wprowadzone zostało zaburzenie, a nie jest on zakończony **wylotem swobodnym**, lecz jakimś obiektem technicznym (pompą, zbiornikiem, zaworem...), wtedy obserwujemy charakterystyczną dla tego zjawiska zmianę kierunku ruchu cieczy. Zaczyna ona poruszać się z prędkością początkową, lecz o zmienionym znaku. Towarzyszy temu obniżenie ciśnienia do wartości początkowej p_0 . Trwa to do chwili powrotu czoła fali do punktu, w którym powstało zaburzenie, a wtedy pojawia się fala odbita, o zmienionym znaku. Wędruje ona ponownie wzdłuż przewodu, aż do jego drugiego końca, skąd ponownie wraca, by odbić się ze zmianą znaku po raz kolejny. Opisany etap takiego cyklu pokazują rozkłady wysokości nadciśnienia oraz prędkości, pokazane na rys. 11.13. Przy braku czynników tłumiących energię mechaniczną, zjawisko powtarza się cyklicznie.

11.5.2.3. Uderzenie hydrauliczne w układzie rzeczywistym

Przebieg omawianego zjawiska, ukazany w poprzednim punkcie, dobrze oddaje jego najważniejsze cechy. Jedynym założeniem, które można tu zakwestionować, jest odrzucenie wpływu lepkości. Jednakże jego wprowadzenie pozwoliło na otrzymanie prostego oszacowania dla modułu zmiany ciśnienia. **Jest to wynik bardzo ważny, gdyż wartości wynikające z relacji (11.84) są dobrze potwierdzone eksperymentalnie.** A skoro wiemy, że pominięta w tym rozwiązaniu lepkość jest czynnikiem tłumiącym ruch, to zależność (11.84) ma duże znaczenie techniczne, gdyż jest oszacowaniem rzeczywistego przyrostu ciśnienia „od góry”. Jeżeli więc zaprojektujemy układ tak, by wytrzymał przyrost maksymalny, to tym bardziej wytrzyma on dalszy jego przebieg, gdy tłumienie lepkie obniży wartość ciśnienia.



Rys. 11.13. Przebieg uderzenia hydraulicznego w przewodzie o skończonej długości

Tym niemniej, w razie potrzeby możemy przeprowadzić stosowną symulację matematyczną. Równania ruchu w postaci kanonicznej dla tego przypadku będą różniły się od (11.71) tylko występowaniem członu, opisującego straty energii. Odpowiednie wyrażenie zapiszmy w zwartej formie, posługując się symbolem **spadku hydraulicznego** (11.19):

$$\lambda \frac{v^2}{2D} = i_f g . \quad (11.87)$$

Powtarzając przekształcenia (11.58) i (11.59) zgodnie z opisaną procedurą, zamiast (11.79) otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} \frac{DR_W}{Dt} &= -gi_f \\ \frac{DR_P}{Dt} &= gi_f \end{aligned} \right\} \quad (11.88)$$

Wykonywanie obliczeń z uwzględnieniem lepkości może być wskazane dla układów złożonych, w tym dla sieci przewodów zamkniętych (rys. 11.1). Występujące w nich rozgałęzienia, połączenia i zmiany kierunku strumieni mogą bowiem powodować trudne do prostego przewidzenia skutki.

Jednakże matematyczny opis uderzenia hydraulicznego z uwzględnieniem tłumienia lepkiego wymaga określenia współczynnika strat liniowych, a tu pojawia się efekt, omówiony już w punkcie 11.4.2.2 dla przepływu jednostajnego, choć niezmiennego w czasie. Chodzi mianowicie o istotny wzrost wartości tego współczynnika, spowodowany zwiększeniem stopnia złożoności pola prędkości – stwierdzono go empirycznie, lecz nie został jeszcze w pełni wyjaśniony teoretycznie. Co więcej, w przepływie nieustalonym jest on jeszcze bardziej wyraźny, bo i pole prędkości jest tu jeszcze bardziej rozbudowane.

Gdy istnieje potrzeba i możliwość przeprowadzenia dokładnych obliczeń symulacyjnych, wspartych pomiarami, należy współczynnik λ dobrać indywidualnie tak, aby rezultaty obliczeń wstępnych odpowiadały wynikom obserwacji (niejednokrotnie trzeba tu zastosować metodę prób i błędów). Gdy zaś chcemy przeprowadzić obliczenia dla uderzenia z uwzględnieniem lepkości, a nie dysponujemy żadnym materiałem empirycznym, można przyjmować [54]:

$$\lambda_{\text{nieustalone}} \approx 30\lambda_{\text{ustalone, jednostajne}} \quad (11.89)$$

Podkreślmy raz jeszcze, że w praktyce technicznej jako wariant podstawowy w projektowaniu rurociągów ciśnieniowych przyjmujemy maksymalny przyrost ciśnienia, wyrażony relacją (11.84), zaś główne wysiłki specjalistów idą w kierunku konstruowania urządzeń zabezpieczających systemy rurociągów przed uderzeniami. Stosuje się tu w szczególności zawory regulacyjne, systemy wydłużające czas zmiany warunków przepływu, zbiorniki wodno-powietrzne oraz urządzenia napowietrzające ciecz [16].

11.6. Zasilanie przewodów zamkniętych

11.6.1. Możliwości techniczne

Przepływy ciśnieniowe w przewodach zamkniętych wymagają całkowitego wypełnienia przekroju poprzecznego kanału. W praktyce efekt taki można uzyskać wtedy, gdy początkowy przekrój przewodu zasilany jest za pomocą:

- zbiornika,
- pompy.

11.6.2. Zbiorniki zasilające

Zbiorniki wręcz z definicji są obiektami, wewnątrz których przepływ cieczy ma w ogólnym przypadku charakter trójwymiarowy i trójkierunkowy. Sposób opisu tego typu

zagadnień, w zakresie ważnym w inżynierii środowiska, zostanie omówiony w rozdz. 17. Tutaj zajmiemy się jedynie szczególną funkcją zbiorników, jaką jest zasilanie przewodów zamkniętych.

Omawiając te przewody, dużą uwagę przywiązywaliśmy do wyraźnego oddzielenia trzech podstawowych kategorii przepływu, określonych przez stopień złożoności ruchu (jednostajne – na całej długości przewodu oraz wzdłuż kolejnych jego odcinków, niejednostajne i niestabilne – par. 11.1.2). Analizując współpracę przewodu ze zbiornikiem zasilającym, należy zwrócić uwagę na kwestię czasowej zmienności tego zagadnienia.

W najprostszym przypadku **ruchu ustalonego** zbiornik traktujemy jako obszar na tyle rozległy, że prędkość znajdującej się w nim cieczy pomijamy (co pozwala przyjąć, że w jego wnętrzu panuje **hydrostatyczny rozkład ciśnienia** (5.8)), a wpływ otoczenia wlotu do przewodu uwzględniamy jako stratę miejscową. Schemat obliczeniowy dla takiego przypadku pokazano na rys. 6.7, zaś omówiono go w podrozdz. 11.3.

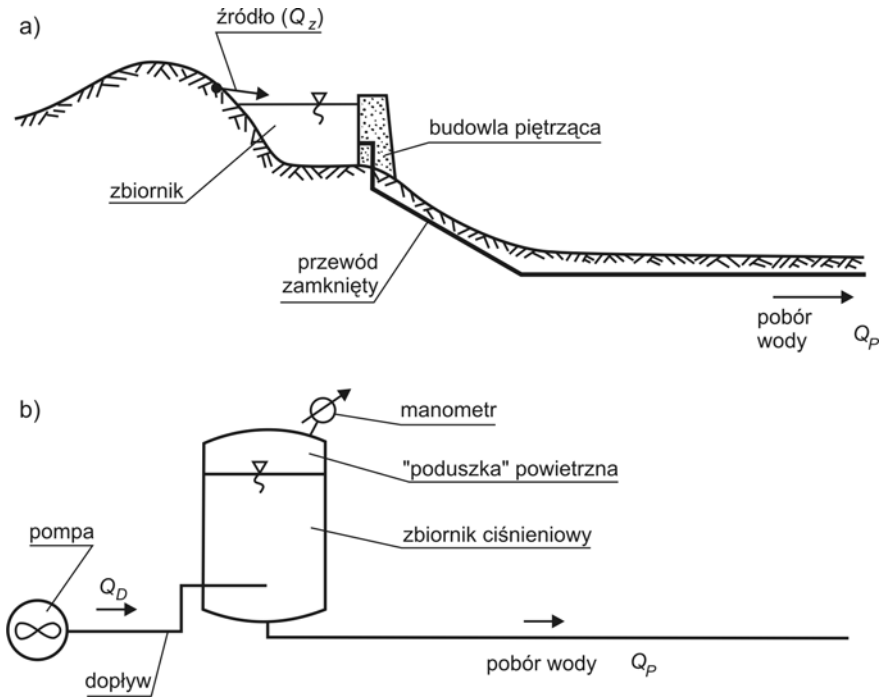
Jeżeli natomiast chodzi o przypadek **ruchu niestabilnego**, to zwróciliśmy już uwagę (par. 11.5.1), że jego opis uwarunkowany jest możliwością odtworzenia czasowego przebiegu czynników, wywołujących zmienność. Musi to być ponadto zmienność na tyle istotna, by uzasadniała celowość rozwiązywania problemu złożonego, a nietypowego.

Dla inżynierii środowiska interesujący jest taki przypadek, gdy zbiornik zasilający dostarcza wodę (lub inną ciecz) do układu przewodów zamkniętych, w których wydatek zmienia się w czasie w sposób określony decyzjami użytkowników tego układu (na przykład mieszkańców miasta, korzystających z wodociągu). Będzie to z reguły przebieg nieregularny, choć wykazujący pewne prawidłowości, określone rytmem życia użytkowników (co przejawia się między innymi porannym oraz popołudniowo-wieczornym szczytem poboru wody [72]), ale zaznaczymy raz jeszcze – musi on być opisany przez jakiś realistyczny rozkład matematyczny.

Ubytek wody (lub innej cieczy) z tego zbiornika musi być uzupełniany od strony układu doprowadzającego. O ile popyt odbiorców może być, jak już wspomniano, nieregularny, o tyle intensywność produkcji rozważanego medium z wielu względów powinna być równomierna. Pojawia się więc ważny i ciekawy problem, szczególnie typowy dla wodociągów. Jaka mianowicie powinna być pojemność zbiornika, by zapewniał on nieregularny (choć cykliczny w pewnym okresie, na przykład w przeciągu doby [72]) odpływ cieczy, przy regularnym zasilaniu? Innymi słowy, chodzi o taki dobór jego pojemności, by zapewnić możliwość gromadzenia cieczy w okresie przewagi produkcji nad poborem, oraz zagwarantować zaopatrzenie odbiorców gdy pobór przewyższa produkcję. Równocześnie rozmiary zbiornika, dla zmniejszenia kosztów jego budowy i eksploatacji, powinny być możliwie niewielkie. Należy tu osobno rozważyć dwa typy rozwiązań technicznych:

- zbiorniki otwarte,
- zbiorniki ciśnieniowe.

Schematy ideowe obu tych kategorii pokazano na rys. 11.14. Dla pierwszej z nich ważnymi przykładami technicznymi z zakresu techniki wodociągowej będą **wieżowe** lub **terenowe zbiorniki zapasowo-wyrównawcze**. Rysunek 11.14a przedstawia zbiornik, zasilany z naturalnego źródła (przyjęto, że o stałym wydatku Q_Z). Aby zapewnić dostawę wody dla użytkowników przewodu, musimy tak zaprojektować zbiornik (a w szczególności – jego pojemność), by gwarantował on oczekiwany odpływ $Q_P(t)$ – zmienny w czasie, lecz nieprzerwany. Z technicznego punktu widzenia niedopuszczalna jest bowiem sytuacja całkowitego opróżnienia zbiornika w chwili, gdy pobór przewyższa dopływ (choć z drugiej strony – minimalne w czasie napełnienie zbiornika nie powinno być zbyt duże, tak ze względów ekonomicznych, jak i jakościowych).



Rys. 11.14. Schematy zasilania przewodu zamkniętego ze zbiornika: a) zbiornik otwarty, b) zbiornik ciśnieniowy

Stopień wypełnienia zbiornika wyrównawczego jest z definicji zmienny w czasie (choć zmiany te z reguły są umiarkowane). Tym samym w razie potrzeby dokładnego opisu jego hydraulicznego funkcjonowania należy zastosować równania w wersji omówionej w par. 11.5.1 Istotnym problemem jest tu wspomniany już problem dokładnego opisu czasowej zmienności przepływów, a głównie – poboru wody $Q_P(t)$, bowiem dopływ najczęściej ma charakter regularny (pompy lub źródła, jak na rys. 11.14a). Ponadto proces obliczeniowy jest dość czasochłonny i trudny. Z tych względów w praktyce stosuje się tu prostą metodę bilansową, której podstawa jest porównanie sumowych krzywych znormalizowanego (czyli odniesionego do całkowitej objętości cieczy, zużywanej w rozważanym czasie) dopływu cieczy:

$$S_0(t) = \int_0^t Q_0(t) dt / V_{24} \quad (11.90)$$

oraz jej odpływu:

$$S_P(t) = \int_0^t Q_P(t) dt / V_{24} \quad (11.91)$$

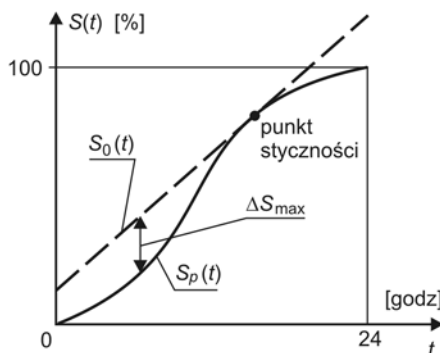
(V_{24} – całkowite dobowe zużycie wody). Obie te krzywe należy umieścić w jednym układzie współrzędnych tak, aby linia dopływu znajdowała się powyżej linii poboru i była do niej styczna, przynajmniej w jednym punkcie (patrz rys. 11.15 dla przykładu jak na rys. 11.14a – ze względu na stały wydatek źródła, wykres dopływu jest tu linią prostą; przy zmiennej intensywności dopływu byłaby to krzywa).

Maksymalna różnica rzędnych obu linii:

$$\Delta S_{\max} = \max[S_0(t) - S_p(t)] \quad (11.92)$$

określa, jaką część dobowego zużycia wody V_{24} musi stanowić pojemność zbiornika, czyli mamy:

$$V_{zb} = \Delta S_{\max} V_{24} \cdot \quad (11.93)$$



Rys. 11.15. Graficzna prezentacja metody wymiarowania zbiornika wyrównawczego

Zauważmy, że początkowa rzędna wykresu dopływu (równa wzniesieniu tego wykresu nad linią poboru w punkcie końcowym) pokazuje, jaką część zużycia dobowego stanowi zapas na przełomie dób, zaś punkty styczności obu linii wskazują te momenty w ciągu doby, gdy zbiornik jest całkowicie opróżniony, co jednak nie zakłóca ciągłości poboru (bowiem styczność tych wykresów z definicji oznacza równość dopływu i odpływu).

Drugą z omawianych kategorii technicznych tworzą zbiorniki ciśnieniowe. Dobrym przykładem może tu być **hydrofor** (rys. 11.14b). Jest to zamknięty zbiornik, wewnątrz którego ponad obszarem zapełnionym cieczą (z reguły – wodą) pozostawia się część wypełnioną powietrzem. Gdy pompa zasilająca wtłoczy do zbiornika maksymalną przewidzianą w projekcie ilość cieczy, zwiększone w „poduszce powietrznej” ciśnienie poprzez automatyczny system sterujący wyłącza napęd, a następnie – jest czynnikiem ułatwiającym odpływ pobieranej cieczy. Gdy jej poziom spadnie poniżej minimalnego, czujnik ciśnienia ponownie uruchamia pompy i cykl pracy hydroforu powtarza się.

Dokładny opis pracy tego urządzenia można w razie potrzeby uzyskać w omówiony sposób (par. 11.5.1). Jednak, z omówionych poprzednio względów, przy ich wymiarowaniu stosuje się także metodę bilansową, której zasadę już znamy. W praktyce projektowania hydroforów, więcej problemów stwarzają zagadnienia techniczno-eksploatacyjne, niż hydrauliczne. Z tego względu są one szerzej omawiane w literaturze specjalistycznej i technicznej (na przykład [16, 34, 72]).

11.6.3. Pompy

11.6.3.1. Uwagi wstępne

Pompami nazywamy maszyny przepływowe, służące do zwiększania energii mechanicznej cieczy, znajdującej się za pompą (w obszarze, który umownie nazywa się **zbiornikiem górnym**), w stosunku do energii cieczy, znajdującej się przed pompą (w **zbiorniku**

dolnym lub **czerpalnym**). Są one urządzeniami złożonymi, toteż ich budowa stanowi domenę oddzielnej specjalizacji zawodowej. Z punktu widzenia osób, zajmujących się systemami wodno-kanalizacyjnymi, pompy traktowane są jako obiekty jednostkowe, charakteryzowane pewnymi wskaźnikami syntetycznymi. Nie będziemy więc tu bliżej omawiali ich konstrukcji i działania, lecz ograniczymy się do informacji niezbędnych dla prawidłowego doboru pomp oraz właściwej ich eksploatacji.

Istnieją rozmaite typy pomp. Za podstawowy należy uznać **pompy wirowe**. W drugiej kolejności wymienić można **pompy wyporowe**, głównie **łukowe**. Pozostałe typy pomp wyporowych, jak również **pompy strumieniowe** i **uderzeniowe**, są wyraźnie rzadziej stosowane.

Pompy wirowe można podzielić na trzy kategorie [19]:

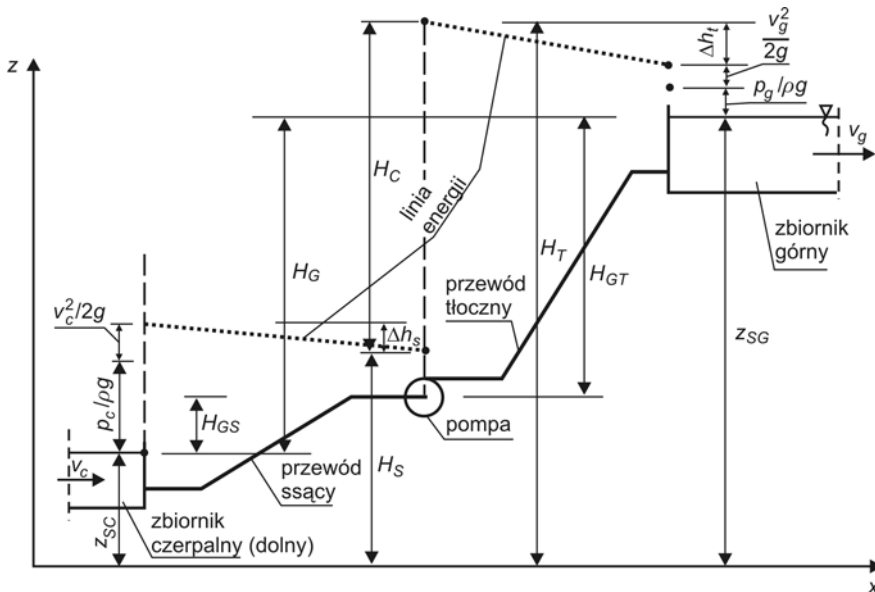
- 1) **odśrodkowe** (o promieniowym wypływie płynu),
- 2) **diagonalne i helikoidalne** (o wypływie promieniowo-osiowym),
- 3) **śmigłowe** (o wypływie osiowym).

11.6.3.2. Hydrauliczny opis działania pompy

Miarą energii mechanicznej cieczy jest **trójmian Bernoulliego**:

$$H = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z_s. \quad (6.9)$$

Jak wiemy (rozd. 6), wartość trójmianu maleje w kierunku przepływu strumienia, gdyż część jego energii mechanicznej jest ciągle zużywana na wykonanie pracy przeciwko siłom tarcia wewnętrznego (siłom lepkości) i zamieniana na energię ciepłą (dyssypacja energii). Jeżeli jednak rozważany strumień płynu przepływa przez pompę, to między jej wlotem a wylotem wartość trójmianu H gwałtownie wzrasta, stosownie do ilości energii, dostarczonej strumieniowi medium przez element roboczy pompy (najczęściej wirnik lub tłok).



Rys. 11.16. Bilans energii mechanicznej w przewodzie współpracującym z pompą

Geometryczna interpretacja opisanej prawidłowości przedstawiona jest na rys. 11.16. pozwala ona zobrazować następująco zdefiniowaną **całkowiłą wysokość podnoszenia pompy**:

$$H_C = H_T - H_S = H_G + (p_G - p_C)/\rho g + (v_G^2 - v_C^2)/2g + \Delta h_S + \Delta h_T, \quad (11.94)$$

gdzie: H_T , H_S – rzędne linii energii według (6.9) odpowiednio w przekroju wylotowym (tłocznym) oraz w przekroju wlotowym (ssącym) pompy, Δh_S , Δh_T – wysokości strat energii mechanicznej w przewodzie ssącym (S) i tłocznym (T), H_C – całkowita wysokość podnoszenia pompy, H_G – geometryczna wysokość podnoszenia pompy. Ta ostatnia wielkość, określona przez różnicę rzędnych zwierciadła wody po obu stronach pompy, składa się z **geometrycznej wysokości ssania** H_{GS} oraz **geometrycznej wysokości tłoczenia** H_{GT} :

$$H_G = z_{SG} - z_{SC} = H_{GS} + H_{GT}. \quad (11.95)$$

Granice między tymi wielkościami wyznacza punkt najniższego ciśnienia w pompie. Do obliczeń przybliżonych można przyjąć, że pokrywa się on z osią wirnika pompy wirowej poziomej, lub z najniższym punktem krawędzi wlotowej łopatki wirnika pompy wirowej pionowej.

Jeżeli nie zachodzi potrzeba zasysania cieczy przez pompę (czyli gdy poziom cieczy w zbiorniku zasilającym leży ponad przewodem doprowadzającym), termin wysokość ssania staje się bezprzedmiotowy, a geometryczną wysokość podnoszenia określa różnica rzędnych z_{SG} oraz z_{SC} .

Drugim, obok całkowitej wysokości podnoszenia H_C , podstawowym parametrem pompy jest jej **wydatek (wydajność, objętościowe natężenie przepływu)**. Wyróżniamy **wydatek rzeczywisty** Q (określający strumień objętości płynu, tłoczonego w rzeczywistej sytuacji) oraz **wydatek nominalny** (czyli wydatek przy maksymalnej sprawności pompy).

Energia dostarczana masie płynu przez pompę, zwana **energiją użyteczną**, jest mniejsza od energii dostarczonej pompie przez silnik, ze względu na straty, generowane przez układ. W odniesieniu do jednostki czasu definiujemy **moc użyteczną pompy**:

$$N_U = \rho g H_C Q \quad (11.96)$$

oraz jej **sprawność** (N_W – moc pobierana na wale lub sprzęgle pompy):

$$\eta = N_U / N_W. \quad (11.97)$$

11.6.3.3. Zjawiska w przewodzie ssącym

Jeżeli w warunkach statycznych oś pompy znajdzie się powyżej zwierciadła cieczy w przewodzie ssącym, to po uruchomieniu napędu w przewodzie tym nastąpi spadek ciśnienia, co może mieć istotne konsekwencje dla pracy pompy. Zjawisko to rozważymy dla przypadku modelowego, z pominięciem aspektów technicznych, nawiązując do już omówionych analogicznych efektów, występujących w lewarach (rys. 11.5).

Wyobraźmy sobie pionową rurę (rys. 11.17), połączoną ze zbiornikiem czerpalnym. Niech rzędna swobodnego zwierciadła cieczy w zbiorniku wynosi z_0 . Przyjmijmy, że w celu zalania pompy woda w rurze musi zostać podniesiona do rzędnej z_P . Oznacza to, że na tej górnej rzędnej ciśnienie w warunkach statycznych musi spaść do wartości:

$$P_{PS} = P_a - \rho g (z_P - z_0). \quad (11.98)$$

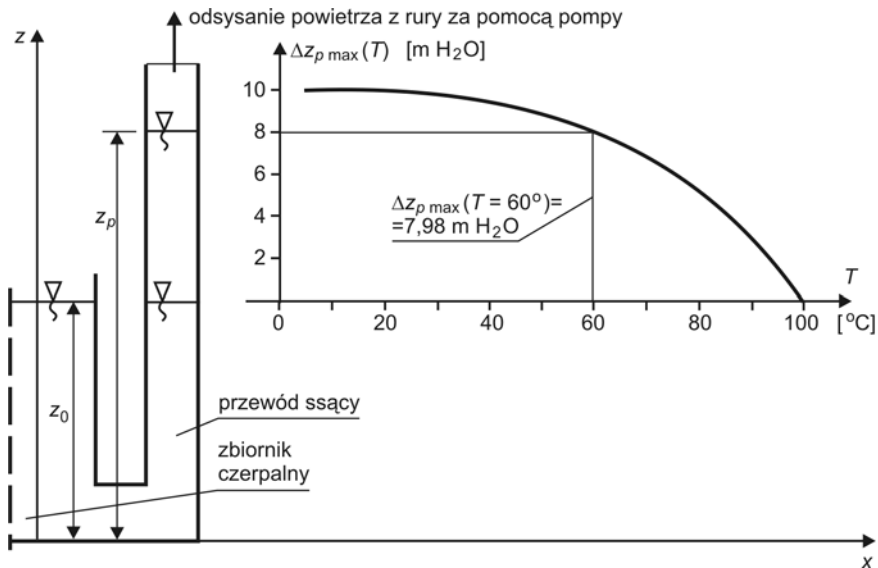
W warunkach dynamicznych (czyli podczas ruchu płynu) spadnie ono dodatkowo o wysokość straty energii, wynikającej z tego przepływu, czyli do wartości:

$$p_{PD} = p_a - \rho g(z_p - z_0) - \rho g \Delta h. \quad (11.99)$$

Ciśnienie jest z definicji wielkością nieujemną, a dodatkowym ograniczeniem jego spadku jest wydzielanie się z cieczy rozpuszczonych w niej gazów oraz jej parowanie, zależne od aktualnej temperatury. Tak więc w warunkach statycznych maksymalne wzniesienie zwierciadła zasysanej cieczy wyniesie (h_p – wysokość ciśnienia pary nasyconej):

$$\Delta z_{p \max}(T) = p_a / \rho g - h_p(T). \quad (11.100)$$

Przebieg stosownej krzywej dla wody pokazano na rys. 11.17. Omówione tu zjawisko ma bardzo istotny wpływ na pracę pomp (kawitacja [19]), szczególnie dla cieczy o wysokiej temperaturze (ogrzewnictwo, podgrzane wody chłodnicze, wody podziemne w rejonach źródeł ciepła...).

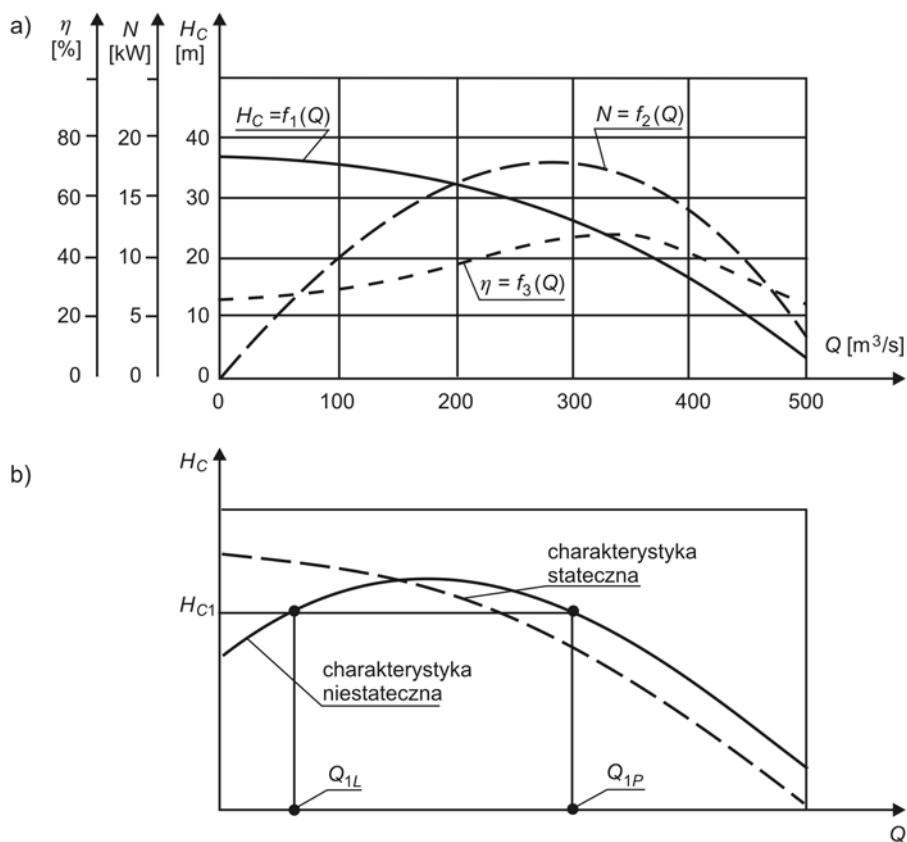


Rys. 11.17. Spadek ciśnienia w przewodzie ssącym

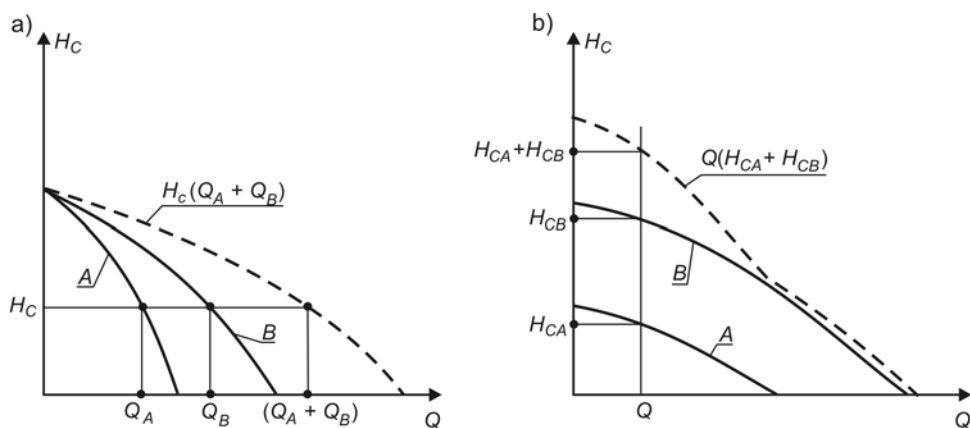
11.6.3.4. Charakterystyki pomp

Mianem **charakterystyki** określamy funkcję (zwykle mającą postać wykresu, lub daną tabelarycznie), opisującą relację między parametrami pracy pompy. Podstawowe znaczenie mają **charakterystyka wydatku** $H_C = f_1(Q)$, **charakterystyka mocy** $N = f_2(Q)$ oraz **charakterystyka sprawności** $\eta = f_3(Q)$. Przykładowe przebiegi odpowiednich krzywych pokazano na rys. 11.18a.

Istotne znaczenie dla pracy pompy ma kształt charakterystyki wydatku. Jeżeli jest to krzywa malejąca, to nazywamy ją **charakterystyką stateczną** (jednej wartości wysokości podnoszenia odpowiada wtedy jedna wartość wydatku). Niekiedy jednak może to być krzywa rosnąca na swym początkowym odcinku, a dopiero później – malejąca. mamy wtedy do czynienia z **charakterystyką niestateczną** (jednej wartości wysokości podnoszenia odpowiadają dwie wartości wydatku, a pompa w trakcie pracy może wtedy samoczynnie „przeskakiwać” z jednego stanu w drugi – rys. 11.18b).



Rys. 11.18. Charakterystyki pomp: a) przebiegi przykładowe, b) stateczność pracy pompy



Rys. 11.19. Charakterystyki zespołu pomp: a) równoległego, b) szeregowego

Charakterystyki sprawności $\eta = f_3(Q)$ są krzywymi wykazującymi maksimum dla pewnej wartości wydatku, zwanej **wydatkiem nominalnym** Q_N .

Niekiedy konieczne jest zastosowanie zespołu kilku pomp. Możliwe sytuacje są kombinacjami dwóch podstawowych schematów współpracy pomp – **równoległego** i **szeregowego**. Charakterystyką układu dwóch pomp (A i B) pracujących równolegle jest linia, powstająca z dodania do siebie wartości wydatków Q_A oraz Q_B dla danej wartości H_C (rys. 11.19a). Przy połączeniu szeregowym z kolei, sumujemy obie wysokości podnoszenia H_{CA} oraz H_{CB} dla danego wydatku Q .

11.6.3.5. Charakterystyka przewodu

Termin **charakterystyka przewodu** określa funkcję, opisującą związek między całkowitą wysokością ciśnienia H_C , niezbędną do utrzymania w przewodzie wymaganego przepływu, a jego wydatkiem, czyli relację $H_C = F(Q)$. Odpowiednie zależności konstruujemy zgodnie z zasadami hydrauliki, korzystając z równania Bernoulliego dla cieczy lepkich (6.27). Ostateczna postać równania charakterystyki przewodu będzie więc wyglądała następująco:

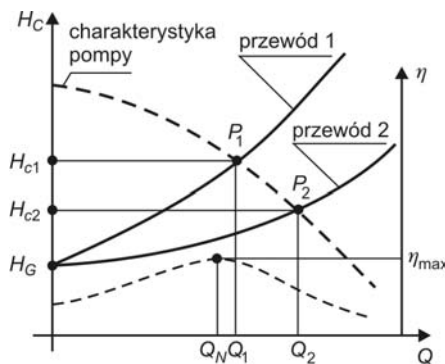
$$H_C = H_G + (p_G - p_C) / \rho g + CQ^2, \quad (11.101)$$

gdzie C jest **współczynnikiem charakterystyki przewodu**, określonym relacją (par. 11.2.2):

$$C = 8(\lambda L / D + \sum \xi_M) / (\pi^2 g D^4). \quad (11.102)$$

11.6.3.6. Dobór pompy

Każda pompa, połączona z przewodem, pracuje przy wartościach H_C i Q , określonych przez **punkt pracy pompy**. Jest to punkt przecięcia się charakterystyki wydatku pompy i charakterystyki przewodu. W najprostszym układzie sytuację pokazano na rys. 11.20, dla dwóch przewodów. Wydatek odpowiadający punktowi pracy właściwie dobranej pompy musi odpowiadać wydatkowi nominalnemu (czyli wydatkowi dla maksymalnej sprawności pompy). W przykładzie z rys. 11.20 zaakceptować można wybór pokazanej tam pompy dla przewodu P1, gdyż Q_1 jest bliskie Q_N . Natomiast przewód P2 nie powinien współpracować z pompą o pokazanej na tym rysunku charakterystyce.



Rys. 11.20. Dobór pompy

W praktyce dla właściwego doboru pompy trzeba uwzględnić możliwie dużą liczbę czynników – zarówno dotyczących pompy i możliwości jej regulacji (na przykład poprzez

zmianę liczby jej obrotów), jak też przewodu i możliwości zmiany jego charakterystyki (na przykład poprzez dławienie przepływu zaworami).

Są to jednak czynniki bezpośrednio powiązane z użytkowymi cechami rozważanych układów, toteż ich aspekty przepływowe muszą być rozważane łącznie z technologicznymi (na przykład [19, 34, 72]).

11.7. Uwagi o przepływach przy obniżonym ciśnieniu

Jako zasadniczy wariant pracy przewodów zamkniętych można przyjąć przepływ cieczy z obszarów o ciśnieniu celowo zwiększonym (za pomocą pomp lub zbiorników) do obszarów o ciśnieniu niższym (bardzo często – atmosferycznym). Jednakże możliwe jest też uzyskanie tego typu przepływu wtedy, gdy ciśnienie w przekroju zasilającym nie jest celowo podwyższone (a bardzo często jest równe atmosferycznemu), zaś ruch odbywa się dzięki celowemu obniżeniu ciśnienia w odpływowych odcinkach układu. Mówimy wtedy o instalacjach podciśnieniowych, albo (akcentując ich zastosowania techniczne) zasysających.

Gdy w układzie takim znajduje się ciecz, bardzo znaczny wpływ na jego funkcjonowanie ma intensyfikacja procesu jej parowania oraz wydzielanie ewentualnie rozpuszczonych w niej gazów. W rezultacie w układzie nieustannie pojawia się frakcja gazowa, a jej ciągle odprowadzanie (na przykład za pomocą pompy próżniowej) jest charakterystycznym elementem instalacji.

W praktyce, gdy substancją transportowaną w przewodzie podciśnieniowym ma być ciecz, często świadomie generuje się przepływ dwufazowy (lub nawet trójfazowy, jeśli ciecz ta zawiera rozdrobnione ciała stałe) – sam ruch odbywa się wskutek obniżenia ciśnienia w fazie gazowej poniżej atmosferycznego, a faza ciekła jest „porywana” przez ten gaz.

W inżynierii sanitarnej przykładami tego typu instalacji są systemy kanalizacji ciśnieniowej [20] oraz przewody odsysające substancje szkodliwe w instalacjach przemysłowych (głównie chodzi tu o wyciągi zanieczyszczonego powietrza w fabrykach i zakładach produkcyjnych) oraz medycznych (przewody do odsysania płynów ustrojowych, w które wyposaża się szpitale i gabinety zabiegowe).

Z punktu widzenia hydrauliki, sposób wymiarowania takich przewodów zależy od wielkości spadku ciśnienia w układzie. Można tu mówić o trzech grupach zadań, które kolejno cechują:

- niewielkie obniżenie ciśnienia, pozwalające na pominięcie ściśliwości płynu (możemy wtedy stosować omówione już metody opisu ruchu strumienia cieczy o stałej gęstości),
- obniżenie ciśnienia do poziomu w istotnym stopniu wpływającego na zmiany gęstości płynu (stosujemy tu relacje uwzględniające ściśliwość substancji, a w szczególności równanie Bernoulliego dla gazów – par. 6.2.8),
- spadek ciśnienia do niskich wartości, gdy mówi się już o technice próżniowej (opis ruchu komplikuje się o tyle, że lepkość gazu w takich warunkach staje się funkcją ciśnienia; nie są to jednak zagadnienia typowe dla inżynierii sanitarnej, lecz dla inżynierii mechanicznej).

W przypadku przepływu dwufazowego sytuacja komplikuje się jeszcze bardziej, gdyż ich funkcjonowanie ma z reguły charakter nieustalony. Można wtedy wyróżnić okresy „oczekiwania” instalacji na pracę właściwą, oraz etapy „odsysania”, gdy do przewodów wprowadza się frakcję ciekłą oraz/albo stałą. Przebieg takiego zjawiska jest złożony i słabo rozpoznany. Jak zwykle w takich sytuacjach, zasadniczym problemem jest taki opis czasowej zmienności czynników wymuszających ruch, by miał on charakter racjonalny, a nie stanowił formalnego przykładu. W praktyce więc stosuje się tu metody o charakterze technicznym.

12. Ustalony ruch cieczy w sieciach przewodów zamkniętych

12.1. Uwagi ogólne

Pojęcie **sieci przewodów zamkniętych** od strony funkcjonalnej wprowadzone zostało w rozdz. 11 (rys. 11.1), na tle terminu **przewód pojedynczy**. Nie wymaga ono zresztą specjalnego komentarza, bo przykłady układów tego typu towarzyszą nam na co dzień (sieci wodociągowe i gazowe, krwioobieg organizmów ludzkich i zwierzęcych...), toteż obecnie przejdziemy do przedstawienia schematów obliczeniowych, pozwalających na wykorzystanie omówionych już metod mechaniki płynów i hydrauliki do otrzymania przepływowych charakterystyk rozważanej kategorii obiektów.

Podstawowym wyróżnikiem każdej sieci są **węzły**, czyli elementy, w obrębie których następuje łączenie oraz/albo rozdzielanie strumieni płynu. Tak więc w węzle muszą stykać się przynajmniej trzy elementy drugiej z ważnych kategorii – **odcinki przewodów zamkniętych**. Ich skrajne przekroje, które nie łączą się w węzłach z innymi przewodami, nazwiemy **punktami końcowymi**. Będą wśród nich **punkty zasilania** oraz **punkty poboru** (sens techniczny tych punktów tłumaczą ich nazwy). Rzeczywiste sieci stanowią bardzo nieraz rozbudowane układy, w których liczby poszczególnych elementów jednostkowych są znaczne.

Rodzaje zadań obliczeniowych, które mogą się pojawić w praktyce, mogą być zróżnicowane. Generalnie będą one jednak należały do jednej z dwóch omówionych już kategorii – **zadań projektowych**, gdy rozważa się budowę nowych układów, albo **zadań eksploatacyjnych**, polegających na wyznaczeniu charakterystyk obiektów już istniejących, przy czym często podejmuje się zadania o mieszanym charakterze (rozbudowa lub modernizacja układów istniejących).

Szczególnym aspektem tych zadań jest ich zmienność w czasie. Jak już parokrotnie wspominaliśmy, istotną kwestią jest opis czynników wymuszających. W inżynierii środowiska pojawia się ograniczona liczba zagadnień, w których waga zmienności czasowej uzasadnia celowość stosowania złożonego narzędzia, jakim są równania ruchu nieustalonego (w przypadku przepływów w przewodach zamkniętych jest to głównie **uderzenie hydrauliczne** – par. 11.5.2 – którego przebieg jest istotny także dla układów sieciowych). W trakcie normalnego użytkowania sieci, będących przedmiotem zainteresowania inżynierii środowiska, zmiany warunków przepływu zachodzą z reguły w sposób umiarkowany, a że wywoływane są najczęściej wskutek trudnych do przewidzenia decyzji ludzkich – mają charakter losowy. Z tego względu w praktyce często stosuje się specyficzne podejście do uwzględniania tego czynnika. Zestawia się mianowicie kilka miarodajnych wartości parametrów (podstawowy oraz jeden lub więcej dodatkowych), po czym obliczenia projektowe wykonuje dla wielkości podstawowych (na przykład dla przeciętnego poboru wody z sieci wodociągowej), zaś dla wariantów dodatkowych (na przykład dla poboru wody w czasie pożaru) jedynie sprawdza funkcjonowanie układu. Z tych względów jako schemat

podstawowy w dalszym ciągu przyjmiemy przepływ ustalony, zagadnienia nieustalone traktując jako wykraczające poza standard inżynierski.

12.2. Elementy sieci

12.2.1. Odcinki przewodów

Odcinki przewodów zamkniętych, tworzących sieć, mogą należeć do każdej z już omówionych kategorii, czyli możemy mieć tu do czynienia z przepływami:

- o ruchu jednostajnym,
- o ruchu odcinkami jednostajnym,
- o ruchu niejednostajnym,
- z odpływem bocznym.

Każdy z takich przewodów może być wyposażony w różne elementy armatury, jak też zmieniać swe położenie w planie i w pionie, jednakże wewnątrz odcinka nie może występować skupiony pobór cieczy (gdyż punkt takiego poboru stanowiłby **węzeł**, dzielący odcinek na dwa inne).

W myśl omówionych już zasad wymiarowania przewodów możemy powiedzieć, że dla pełnej charakterystyki hydraulicznej odcinka należy znać:

- wydatek płynu Q ,
- wartości ciśnienia p_0 i p_K w skrajnych przekrojach odcinka,
- wymiary geometryczne (w najczęstszym przypadku – średnicę D).

Jeżeli przepływ wzdłuż odcinka ma charakter niejednostajny, to znając te wielkości możemy (niezależnie od pozostałych elementów sieci) obliczyć dla każdego punktu jego wnętrza prędkość i ciśnienie, a dla płynu ściśliwego także gęstość. W przepływie jednostajnym prędkość jest, jak wiemy stała, a ciśnienie zmienia się między końcami odcinka liniowo.

Podkreśliśmy jednak, że za schemat podstawowy należy tu przyjąć odcinek prosty o stałej średnicy. Jak już bowiem wspomnieliśmy w rozdz. 11, zmiany geometrycznej charakterystyki przewodu między węzłami oraz/albo punktami poboru mają charakter nietypowy. Natomiast w przypadku występowania odpływu bocznego stosujemy model uproszczony, w którym ciągły wydatek boczny zastępujemy przez dwa umowne wydatki skupione (rys. 11.10).

12.2.2. Węzły

Węzły, stanowiące obiekty hydrauliczne, łączące poszczególne odcinki, zbiegające się w ich rejonie, można podzielić na dwie kategorie:

- 1) punktowe,
- 2) obszarowe.

Pierwszy z tych terminów obejmuje kształtki, których wewnętrzna struktura przepływu nie ma istotnego znaczenia dla rozważanego problemu, choć mogą one gromadzić nawet znaczną ilość płynu. Aby uwypuklić ten aspekt, mówimy o:

- węzłach punktowych przepływowych;
- węzłach punktowych retencyjnych.

Schemat **węzła punktowego przepływowego** należy uznać za podstawowy element połączeniowy w sieci przewodów zamkniętych. Jest to taki rodzaj łącznika, wewnątrz któ-

rego nie ma możliwości gromadzenia (czyli retencji) płynu, co oznacza, że całkowity strumień cieczy dopływającej do niego jest taki sam, jak całkowity strumień cieczy odpływającej. To proste stwierdzenie o charakterze bilansowym stanowi w istocie sens **równania ciągłości dla węzła przepływowego**:

$$\Sigma Q_{\text{dopt}} - \Sigma Q_{\text{odpt}} = 0. \quad (12.1)$$

Gdy natomiast istnieje możliwość gromadzenia płynu, mówimy o **węzłach punktowych retencyjnych**. Ich wnętrze pozwala na przetrzymanie chwilowego nadmiaru płynu docierającego do węzła, jak też na uzupełnienie niedomiaru odpływu. Chwilowa różnica między tymi strumieniami określa czasową zmianę objętości płynu zmagazynowanego w węźle V , co pozwala następująco zapisać **równanie ciągłości dla węzła retencyjnego**:

$$\frac{dV}{dt} = \Sigma Q_{\text{dopt}} - \Sigma Q_{\text{odpt}}. \quad (12.2)$$

Rzecz oczywista, możliwość retencji uwidacznia się jedynie w warunkach nieustalonych. Gdy przepływ nie zmienia się w czasie, relacja (12.2) przyjmuje postać (12.1), czyli węzeł retencyjny działa jak przepływowy.

Inaczej należy traktować węzły obszarowe, które w istocie rzeczy są **zbiornikami**. W ruchu nieustalonym będą one zawsze pozwalały na retencję pewnej ilości płynu, lecz nawet w ruchu ustalonym, gdy zmiany ich pojemności nie zachodzą, struktura ich przepływu musi być opisywana odrębnymi relacjami (patrz par. 11.6.2 oraz rozdz. 18). Hydrauliczne współdziałanie zbiornika z przewodami, które są z nim połączone, opisuje się wartościami zmiennych przepływu w przekrojach połączeniowych (czyli wspólnych dla przewodów i dla zbiornika).

Tak więc węzły retencyjne i obszarowe, mające charakter zbiorników, stanowią w zasadzie obiekty specjalne, a opis ich funkcjonowania musi być przedmiotem osobnych procedur obliczeniowych. Natomiast obecność najprostszych z omawianych tu obiektów – węzłów punktowych przepływowych – można pod względem hydraulicznym uwzględnić w trakcie obliczeń łącznie z odcinkami przewodów, co będzie pokazane w trakcie dalszych rozważań.

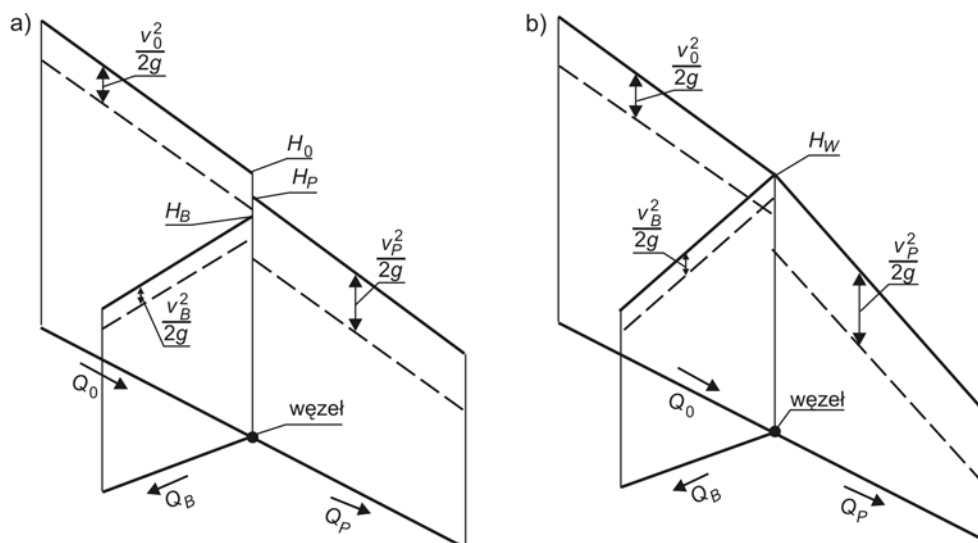
Zwrócić tu musimy uwagę na znany już fakt, że w węźle takim, jak w każdym rejonie o bardziej rozbudowanym polu prędkości, intensywność dyssypacji energii jest większa, niż podczas przepływu płynu wzdłuż prostego odcinka. Uwzględniamy to jako **stratę miejscową**, przy czym w przypadku węzła należy uwzględnić różne możliwe drogi strumieni składowych. Ogólną zasadę ilustruje szkic na rys. 12.1a. Wysokość energii w końcowym przekroju przewodu dopływowego ulega lokalnemu obniżeniu, lecz w różnym stopniu dla każdego ze strumieni odpływowych. uwzględniamy to w obliczeniach poprzez różne wartości współczynnika strat miejscowych, w szczególności dla trójkątów używając roboczych terminów „przelot”, „dopływ” i „odpływ” (patrz tab. 3). Jeżeli zaś chodzi o zmianę położenia linii ciśnienia, to należy tu pamiętać o zmianie prędkości w poszczególnych przewodach (rozdział lub łączenie strumieni, czyli zmiana wydatków, mogą wraz z ewentualnymi zmianami średnic dawać różne kombinacje).

Komplikuje to nieco obliczenia, a że w większości sieci dominującym źródłem strat energii są przepływy wzdłuż odcinków, w praktyce często pomijamy straty miejscowe, przyjmując (rys. 12.1b):

$$H_W = H_0 = H_P = H_B. \quad (12.3)$$

Po wykonaniu zasadniczej części obliczeń, możemy albo dodatkowo wyznaczyć wysokość strat miejscowych i o tę wartość (przed doбором pomp) zwiększyć wartość H_C , albo uczynić to metodą uproszczoną, dodając pewną „zryczałtowaną” wartość (na przykład 15% H_C)

W ten sposób wprowadzamy uproszczony praktyczny model obliczeniowy – wielkościami hydraulicznymi, charakteryzującymi węzły, są wysokości energii H_w^i (i – numer węzła), które jednoznacznie określają także wymienione w par. 12.2.1 ciśnienia w skrajnych przekrojach przewodów.



Rys. 12.1. Straty energii mechanicznej w węźle: a) rzeczywisty układ linii energii, b) model uproszczony, pomijający straty lokalne

12.2.3. Punkty skrajne

Jak już wspomnieliśmy, termin ten określa te końcowe przekroje odcinków, które nie łączą się z innymi odcinkami poprzez węzły. Aby odpowiedni odcinek był czynny (czyli żeby jego wydatek był różny od zera), w punkcie skrajnym musi występować albo dopływ płynu do sieci (zasilanie), albo jego odpływ (pobór).

Możliwości zasilania przewodów (a tym samym sieci) omówiono w podrozdz. 11.6. Jeśli zaś chodzi o pobór płynu, to możemy tu mieć do czynienia z trzema głównymi przypadkami:

- 1) wypływ swobodny (dotyczy to cieczy wydostającej się z przewodu do obszaru wypełnionego gazem o znanym ciśnieniu p_K ; najczęściej jest to ciśnienie atmosferyczne $p_K = p_{\text{atm}}$),
- 2) wypływ zatopiony (kategoria ta obejmuje wypływ cieczy do zbiornika wypełnionego cieczą lub gazem do obszaru wypełnionego gazem; ciśnienie końcowe może tu być **znane** i **stałe**, może być **znane** i **zmienne**, bo regulowane niezależnie od charakteru wypływu, oraz **nieznane** i **zmienne**, czyli określone przez wypływ strumienia, jak ma to na przykład miejsce w hydroforze od strony zasilania – par. 11.6.2),
- 3) odpływ wymuszony maszyną przepływową (dotyczy to na przykład przewodów podciśnieniowych, w których przepływ wymuszony jest przez odsysanie płynu z przekroju końcowego – podrozdz. 11.7).

W każdym przypadku wydatek płynu przemieszczającego się przez przekrój skrajny jest taki sam, jak wydatek odpowiedniego przewodu. Niewiadomą charakterystyczną dla tego punktu będzie więc wysokość energii H_K .

12.3. Ilościowy opis zagadnienia

12.3.1. Zestawienie niewiadomych

W myśl rozważań poprzedniego podrozdziału możemy powiedzieć, że każda sieć stanowi kombinację:

- $i = 1, \dots, I_O$ odcinków,
- $j = 1, \dots, J_W$ węzłów,
- $k = 1, \dots, K_P$ punktów skrajnych.

Aby jednoznacznie opisać stan takiego układu, musimy znać:

- wydatki odcinkowe (I_O wartości Q_i),
- charakterystyki geometryczne odcinków (z reguły będzie to I_O średnic D_i),
- rzędne linii energii w każdym węźle i każdym punkcie końcowym (czyli $J_W + K_P$ wartości H_j i H_k).

W sumie musimy więc określić ($2I_O + J_W + K_P$) niewiadomych. Przyjęto tu, że długości odcinków i pionowe rzędne elementów sieci oraz szorstkość przewodów będą wielkościami określonymi na wstępnym etapie prac projektowych (trasowanie sieci, wybór materiałów...).

12.3.2. Zestawienie równań

Zgodnie z omówionymi już zasadami hydrauliki, możemy:

- dla każdego odcinka napisać równanie Bernoulliego, co daje I_O relacji typu (6.27),
- dla każdego węzła napisać równanie ciągłości, otrzymując J_W zależności (12.1).

Łącznie mamy do dyspozycji ($I_O + J_W$) równań.

12.3.3. Formułowanie zagadnień

12.3.3.1. Zasady ogólne

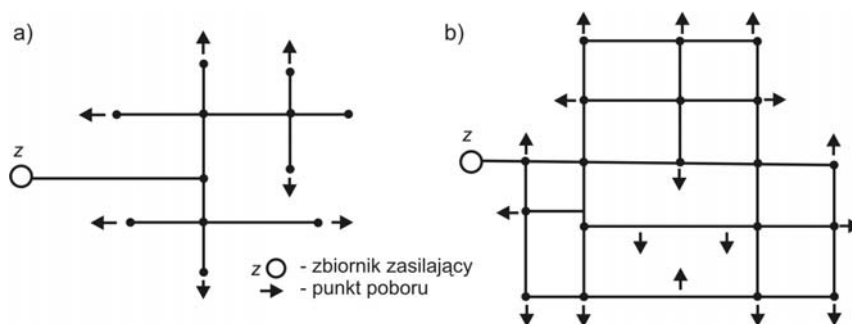
Aby wykorzystać układy równań, które mamy do dyspozycji w różnych dziedzinach nauk ścisłych i techniki, należy je sprowadzić do postaci zamkniętej, czyli takiej, gdy liczba równań jest równa liczbie niewiadomych. Z reguły bywa jednak tak, że niewiadomych jest więcej niż informacji, wyrażonych równaniami. Sytuację tę należy uznać za korzystną, gdyż pozwala na zróżnicowanie projektowanych obiektów. Należy bowiem brakującą liczbę informacji uzupełnić, uwzględniając wszystkie możliwe czynniki i aspekty (przepisy prawne, uwarunkowania naturalne, zwyczaje, możliwości techniczne, a wreszcie – doświadczenie oraz intuicję projektanta). Istotny jest tu charakter podjętego problemu. Gdy jest to **zadanie projektowe** (podrozdz. 12.1), wśród niewiadomych będą występowały wielkości charakteryzujące obiekt, a znane będą wymogi, które ma on spełniać. Z kolei w **zadaniu eksploatacyjnym** będziemy znali cechy obiektu, a poszukiwane będą informacje o jego funkcjonowaniu.

W rozważanym tu przypadku sieci przewodów zamkniętych zestawienie liczby niewiadomych oraz równań mówi nam, że **liczba informacji (równań oraz/albo wielkości), które należy określić dla domknięcia układu wynosi ($J_O + K_P$)**. Możliwe są tu różne przypadki szczególne. Ich rozważanie byłoby celowe po uwzględnieniu konkretnych uwarunkowań technicznych, omawianych w literaturze specjalistycznej, dlatego tutaj ograniczymy się tylko do omówienia dwóch kategorii ogólnych – **sieci rozgałęzionych** oraz **sieci pierścieniowych**.

12.3.3.2. Sieć rozgałęziona

Użyty w nazwie tego rozdziału termin w zasadzie wyjaśnia istotę obiektu. Chodzi tu bowiem o takie kombinacje odcinków, w których żadna część nie tworzy obiegu zamkniętego (rys. 12.2a). Jest to o tyle istotna informacja, że analiza usytuowania punktów poboru płynu pozwala na określenie kierunków przepływu dla wszystkich odcinków (w prostszych układach), lub przynajmniej dla znacznej ich części (w układach rozbudowanych, zasilanych w kilku punktach). Ułatwia to obliczenia hydrauliczne, w prostych przypadkach dając nawet możliwość otrzymania rozwiązania w postaci analitycznej (patrz przykład 12.1).

Do wad takiej sieci należy znaczne zróżnicowanie wartości ciśnienia między jej początkowymi a końcowymi odcinkami, jak również dość znaczna zawodność. Jeśli bowiem w jakimś przekroju nastąpi zamknięcie lub zablokowanie przewodu, to zasilana z tego miejsca część układu przestaje funkcjonować. Jak już wspomniano, bliższa analiza tego typu układów wymaga uwzględnienia wielu uwarunkowań technicznych, toteż omawiana jest w literaturze specjalistycznej (na przykład [16, 72]). Natomiast zasadę wykonywania obliczeń hydraulicznych ilustruje przykład.



Rys. 12.2. Podstawowe schematy sieci przewodów zamkniętych:
a) sieć rozgałęziona, b) sieć pierścieniowa

■ Przykład 12.1

Obliczyć przepływy w odcinkach sieci rozgałęzionej, której układ oraz długości odcinków (o średnicy $d = 0,20$ m każdy, wykonanych z rur żeliwnych, gdzie $L = 20,0$ m) pokazano na rys. 12.3a. Sieć zasilana jest za pomocą pompy, wytwarzającej nadciśnienie o wysokości $H_C = 50$ m H_2O . W punktach oznaczonych numerami 4, 5, 7, 9 i 10 woda swobodnie wypływa do atmosfery. Narysować piezometryczną linię energii (pomijając miejscowe straty energii).

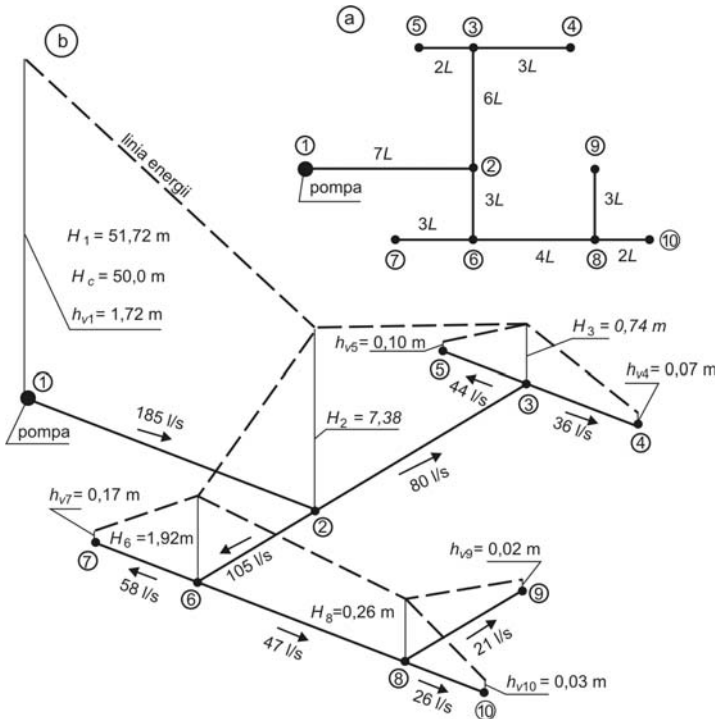
Rozwiązanie

Rozważana sieć składa się z $I_O = 9$ odcinków, $J_W = 4$ węzłów oraz $K_P = 6$ punktów skrajnych (w tym jeden zasilający oraz pięć zasilanych). Dla określenia jej charakterystyki

hydraulicznej musimy więc obliczyć 9 wartości wydatku wzdłuż odcinków, oraz 4 wartości rzędnych linii energii w węzłach. Natomiast w punktach skrajnych wartości te określone są przez warunki zadania – w punkcie 1 rzędna linii energii jest równa wartości H_C , powiększonej o wysokość prędkości na odcinku 1 – 2, zaś w punktach wylotowych, gdzie nadciśnienie wynosi zero, linia energii wzniesiona jest ponad oś każdego wylotu o wysokość prędkości. Razem musimy wyznaczyć 13 wielkości. Do dyspozycji mamy 9 równań Bernoulliego (6.27) oraz 4 równania ciągłości (12.1), czyli układ jest zamknięty.

Zgodnie z oznaczeniami, podanymi na rys. 12.3, roboczy układ równań ma postać (zauważmy, że wobec stałości średnic odcinków charakterystyka przepływu jest jedna dla całej sieci i wynosi $K = 0,34 \text{ m}^3/\text{s}$):

$$\begin{aligned}(H_1 - H_2)/7L &= Q_{12}^2/K^2, & H_8/3L &= Q_{89}^2(1/K^2 + 8/3\Pi^2 d^4 gL), \\(H_2 - H_3)/6L &= Q_{23}^2/K^2, & H_8/2L &= Q_{8,10}^2(1/K^2 + 4/\Pi^2 d^4 gL), \\(H_2 - H_6)/3L &= Q_{26}^2/K^2, & Q_{68} &= Q_{89} + Q_{8,10}, \\H_3/2L &= Q_{34}^2(1/K^2 + 4/\Pi^2 d^4 gL), & Q_{26} &= Q_{67} + Q_{68}, \\H_3/3L &= Q_{35}^2(1/K^2 + 8/3\Pi^2 d^4 gL), & Q_{23} &= Q_{34} + Q_{35}, \\H_6/3L &= Q_{67}^2(1/K^2 + 8/3\Pi^2 d^4 gL), & Q_{12} &= Q_{23} + Q_{26}, \\(H_6 - H_8)/4L &= Q_{68}^2/K^2.\end{aligned}$$



Rys. 12.3. Obliczeniowy schemat sieci (przykład 12.1)

Układ ten nie jest zbyt obszerny, toteż możemy pokusić się o jego rozwiązanie analityczne, posługując się metodą podstawiania. Otrzymane wartości wydatków oraz rzędnych linii energii podano na rys. 12.3b. ■

12.3.3.3. Sieć pierścieniowa

W przeciwieństwie do poprzedniego schematu, tutaj podstawowym wyróżnikiem układu jest występowanie **pierścieni**, czyli lokalnych obiegów zamkniętych (z reguły bardzo wielu). Rozwiązanie takie pozwala na usunięcie już wymienionych mankamentów hydraulicznych sieci rozgałęzionej – wartości ciśnienia są bardziej wyrównane, co daje bardziej równomierne warunki zasilania odbiorców na obszarze takiej sieci, a ewentualna awaria pozbawia dopływu cieczy tylko odbiorców znajdujących się w pobliżu uszkodzonego miejsca, gdyż do pozostałych rejonów układu medium może dotrzeć okrężną drogą.

Jednakże tego typu sieci sprawiają znaczne trudności obliczeniowe. Wynikają one z faktu, że nie jesteśmy w stanie z góry określić kierunku przepływu dla zdecydowanej większości odcinków, a że we wzorach opisujących straty energii, na przykład (11.21), wydatek występuje w drugiej potęgze, jedna strona takiej relacji jest zawsze dodatnia, podczas gdy druga (opisująca stratę energii) może być zarówno dodatnia, jak i ujemna (zależnie od zwrotu prędkości). Formalnie można ten mankament usunąć przez wprowadzenie znaku dla wydatku (na przykład dodatniego, gdy jest on zgodny z kierunkiem ruchu wskazówek zegara wewnątrz każdego pierścienia, lub ujemnego w przeciwnym razie) i posłużyć się symbolem modułu, pisząc zamiast (11.21):

$$H_{\text{str}} = \frac{Q|Q|}{K^2}L. \quad (12.4)$$

Jednakże zapis ten nie pozwala na prowadzenie ciągłych przekształceń równań, którymi się tu posługujemy. Dla rozwiązania układu równań, analogicznego jak w przykładzie 12.1 (uwaga: ogromne znaczenie ma tu numeracja elementów sieci, która musi pozwalać na ich jednoznaczną identyfikację), niezbędne są wtedy metody przybliżone. Szczególnie przydatna i dogodna jest **metoda Crossa** [72].

13. Ruch cieczy w korytach otwartych

13.1. Uwagi wstępne

Przechodzimy do omówienia kolejnego z najważniejszych schematów obliczeniowych hydrauliki (podrozdz. 10.2). Jako struktura przepływowa jest on zdefiniowany przez pojęcie **strumienia podłużnego** (podrozdz. 2.6). Równania zachowania dla takiej struktury wyprowadziliśmy w rozdz. 3, wykorzystując wszakże tylko jej cechy kinematyczno-geometryczne, a mianowicie wydłużony kształt oraz prostotę pola prędkości, które da się sprowadzić się do uśrednionej w przekroju poprzecznym składowej wzdłużnej $v(x, t)$, zgodnie z (2.34). W rezultacie otrzymaliśmy równania zachowania masy (3.11) oraz pędu (3.39).

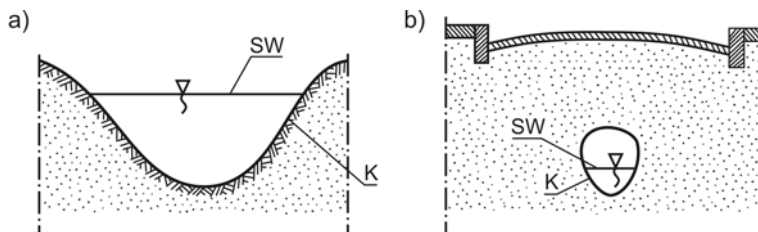
Dalsze przekształcenia tych zależności, umożliwiające ich zastosowanie do opisu i rozwiązywania konkretnych problemów, wymaga uwzględnienia fizycznych i technicznych cech strumieni. W odniesieniu do przewodów zamkniętych uczyniliśmy to w rozdz. 11, a obecnie zajmujemy się **korytami otwartymi**.

13.2. Charakterystyka koryt otwartych

13.2.1. Aspekty techniczne

Podstawową cechą przepływu w korytach otwartych jest istnienie **swobodnej powierzchni**. Tym samym ruch taki może dotyczyć wyłącznie **cieczy**.

Przewód lub zespół ścianek sztywnych, który umożliwia występowanie przepływu podłużnego ze swobodną powierzchnią, nazywać będziemy **kanalem**. Można wyróżnić **kanały otwarte** (gdy ich ścianki boczne nie łączą się ze sobą u góry – rys. 13.1a) oraz **kanały zamknięte** (gdy ich ścianki boczne tworzą nad swobodnym zwierciadłem sklepienie – rys. 13.1b). Różnica między pracą kanału otwartego i zamkniętego pojawia się wtedy, gdy są one maksymalnie wypełnione cieczą. W pierwszym przypadku pojawia się wypływ cieczy poza obręb kanału (na przykład powódź, jeżeli kanałem tym jest koryto rzeczne), zaś w drugim – kanał zamknięty zachowuje się jak całkowicie wypełniony przewód ciśnieniowy (rys. 11.2).

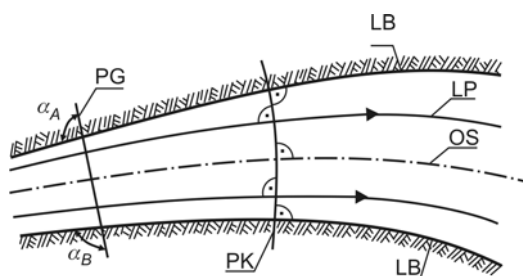


Rys. 13.1. Rodzaje kanałów: a) otwarty, naturalny, b) zamknięty, sztuczny;
SW – swobodna powierzchnia, K – łóżysko kanału

Ze względu na charakterystykę geometryczno-fizyczną, kanały możemy podzielić na **regularne** i **nieregularne**. Pierwszą grupę tworzą kanały o jednakowym (w szczególności – mającym postać znanych z geometrii figur foremnych) kształcie przekroju poprzecznego (zwane **pryzmatycznymi**) oraz o niezmiennych własnościach fizycznych wzdłuż osi. Gdy warunki te nie są spełnione (to jest gdy kanał ma przekrój pryzmatyczny, lecz wykazuje zmienną charakterystykę wzdłuż swej osi, lub gdy zmianie ulega kształt kanału oraz/lub jego własności) – wtedy kanał nazywamy nieregularnym.

Inna klasyfikacja kanałów wiąże się z ich genezą. Obiekty powstałe bez ingerencji człowieka nazywamy **kanałami naturalnymi** (rzeki, strumienie, potoki), zaś pozostałe – **sztucznymi** (kanały melioracyjne i żeglugowe, akwedukty, drenaże, przewody kanalizacyjne). Najczęściej kanały sztuczne są regularne, zaś naturalne – nieregularne.

Brak regularności jest bardzo kłopotliwą cechą kanału, gdyż komplikuje proces wyznaczania charakterystyk przepływu. Gdy więc zmienność parametrów kanału jest nieduża, wtedy często zaniedbujemy ją, traktując kanał jako regularny. Często posługujemy się zastępczym kanałem regularnym, którego parametry są uśrednionymi parametrami rzeczywistego kanału nieregularnego (tzw. schematyzacja koryta – patrz pkt 13.2.2).



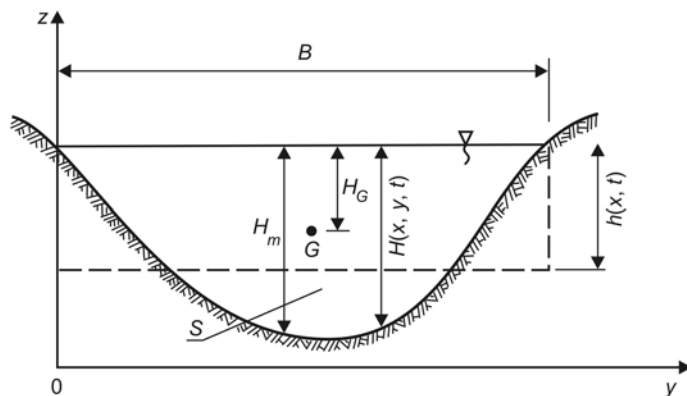
Rys. 13.2. Geometryczna charakterystyka strumienia: PG – przekrój geometryczny, PK – przekrój kinematyczny, LB – linia brzegowa, LP – linia prądu, OS – oś strumienia

Strumień cieczy płynącej w kanale ograniczony jest od dołu i z obu boków przez **łożysko** kanału, zaś od góry – przez **swobodną powierzchnię** (rys. 13.1). Linie, wzdłuż których przecinają się łożysko kanału i jego swobodna powierzchnia, nazywamy **liniami brzegowymi** (lewą i prawą – rys. 13.2). Odległość między nimi wyznacza **szerokość swobodnej powierzchni B** (rys. 13.3).

Łožysko kanału niekiedy dzielimy na **dno** i **brzegi** (lub **ścianki boczne**). Podział ten jest celowy właściwie tylko wtedy, gdy elementy te mają wyraźnie odrębne cechy geometryczne (jak na przykład pionowe usytuowanie brzegów, lub poziome – dna) lub/ oraz fizyczne (na przykład piaszczyste dno, zaś pokryte darnią lub betonem brzegi). Często jednak dno przechodzi płynnie w brzegi i podział powyższy staje się kwestią umowy (rys. 3.5b).

Łožysko może być **nieruchome** (gdy materiał, z którego wykonany jest kanał, nie ulega procesom erozyjnym ani przemieszczeniu) lub **ruchome** (gdy podlega erozji lub przemieszczaniu wskutek ruchu cieczy). W praktyce jest to kwestia prędkości przepływu cieczy (patrz pkt 13.2.3). Z kolei swobodna powierzchnia jest z definicji ruchoma i w czasie przepływu łatwo ulega deformacji.

Materiał łożyska może być **przepuszczalny** lub **nieprzepuszczalny**. W pierwszym przypadku część cieczy płynącej w kanale może wsiąkać w otoczenie (**infiltracja**) lub możemy mieć do czynienia z dopływem cieczy z otoczenia (**drenaż**). Zależy to od różnicy między poziomem wody w kanale i w otoczeniu (patrz rozdz. 18).



Rys. 13.3. Elementy przekroju poprzecznego kanału: G – środek ciężkości

Również na swobodnej powierzchni możemy mieć do czynienia zarówno z ubytkiem masy cieczy (**parowanie**), jak i z jej dopływem (głównie poprzez **opady atmosferyczne** i **splływ powierzchniowy**).

Istotnym pojęciem w hydraulice kanałów są przekroje poprzeczne. Wyróżnić będziemy **przekrój poprzeczny geometryczny** i **przekrój poprzeczny kinematyczny**. Ten pierwszy definiowany jest jako część płaszczyzny pionowej, która pod tym samym kątem przecina obie linie brzegowe kanału (np. kąty α_A lub α_B na rys.13.2), a ograniczona jest przez **obwód zwilżony** C_z (linię przecięcia tej płaszczyzny z łożyskiem kanału) oraz przez swobodną powierzchnię. Nazywany jest on także przekrojem **zwilżonym**, **przepływowym** lub **czynnym**.

Z kolei przekrój kinematyczny jest to fragment powierzchni (zakrzywionej w ogólnym przypadku), prostopadły w każdym punkcie do wektora prędkości, ograniczony, podobnie jak i poprzednio, obwodem zwilżonym oraz swobodną powierzchnią (rys. 13.2).

W ruchu jednowymiarowym oba rodzaje przekrojów pokrywają się, toteż mówimy tylko o jednym **przekroju poprzecznym** S , względem którego uśredniamy zmienne przepływu, według relacji (2.34).

Linia łącząca środki ciężkości (G) kolejnych przekrojów geometrycznych (rys. 13.2) nosi nazwę **osi kanału**.

Głębokością H nazywamy wzniesienie zwierciadła wody nad dnem. Z reguły jest to wielkość zmieniająca się zarówno wzdłuż, jak i w poprzek kanału $H = H(x, y)$. Wynika to głównie ze zróżnicowania dna, ale często także swobodnej powierzchni. Jej największa wartość nazywana jest **głębokością maksymalną** H_m (rys. 13.3). Bardzo często używaną wielkością jest **głębokość uśredniona** w przekroju poprzecznym h , definiowana jako stosunek pola powierzchni przekroju poprzecznego S do szerokości swobodnej powierzchni B :

$$h = S/B . \quad (13.1)$$

W kanałach regularnych o przekrojach prostokątnych głębokość jest stała w poprzek kanału i równa głębokości średniej ($H = h$).

Ważnym wskaźnikiem geometrycznym przekroju poprzecznego jest **promień hydrauliczny** R_H . Stanowi on iloraz pola powierzchni przekroju czynnego S , do obwodu zwilżonego C_z (6.2). Dla koryt o szerokości dużo większej od głębokości ($B \gg h$) możemy obwód zwilżony utożsamić z szerokością (dla przekroju prostokątnego mamy wtedy $C_z = B + 2h \approx B$), co pozwala napisać, że:

$$R_H = \frac{Bh}{B+2h} \approx \frac{Bh}{B} = h. \quad (13.2)$$

Powyższe oszacowanie ma duże znaczenie praktyczne, gdyż pozwala w pewnych przypadkach (gdy $B \gg h$) zastąpić dość niewygodny parametr, jakim jest promień hydrauliczny, przez głębokość.

Dna i brzegi kanałów mogą być utworzone z różnych materiałów i pokryte różnymi substancjami. Ich rodzaj ma ogromny wpływ na charakter przepływu. Ogólną regułą jest wzrost strat energii mechanicznej ruchu ze wzrostem stopnia chropowatości ścianek kanału. Jest to zrozumiałe, gdyż im bardziej zawiły jest kształt obszaru, w którym płynie ciecz, tym bardziej rozbudowane jest pole prędkości, co zgodnie z hipotezą Newtona (równanie 3.84) oznacza wzrost naprężeń tarcia wewnętrznego i tym samym zwiększenie zapotrzebowania energii na podtrzymanie ruchu.

Powszechnie stosowaną bezpośrednią miarą stopnia nierówności powierzchni łożyska kanału jest przeciętna wysokość występow (k_s), wywołujących nierównomierność powierzchni dna i brzegów, nazywana **szorstkością bezwzględną** (lub **chropowatością bezwzględną**). Zagadnienie to omówiliśmy już w podrozdz. 8.4 oraz par. 11.1.2, wprowadzając ważne w praktyce pojęcie **szorstkości względnej** (11.3).

Dla przepływów w korytach otwartych podstawowym wskaźnikiem jest tu **współczynnik szorstkości według Manninga** n (zestaw jego przykładowych wartości podano w tab. 4) oraz (o mniejszym stopniu popularności) współczynniki szorstkości według Kuttera (m_k , patrz tab. 5) i według Bazina (γ_b , patrz tab. 6).

Niejednokrotnie chropowatość ścianki w znacznym stopniu zmienia się wzdłuż obwodu zwilżonego. Aby zastosować model podłużny musimy wtedy obliczyć **chropowatość zastępczą (efektywną, średnią)**. W tym celu dzielimy obwód zwilżony C_z na J odcinków (o długości l_j każdy) o stałej chropowatości n_j (przyjmijmy, że posługujemy się współczynnikiem Manninga; możemy jednak wykorzystywać w ten sposób także inne współczynniki). Chropowatość efektywną n_z najczęściej obliczamy według A. K. Schoklitscha:

$$n_z = \sqrt{\frac{1}{C_z} \sum_{j=1}^J n_j^2 l_j} \quad (13.3)$$

lub według D. M. Czertousowa:

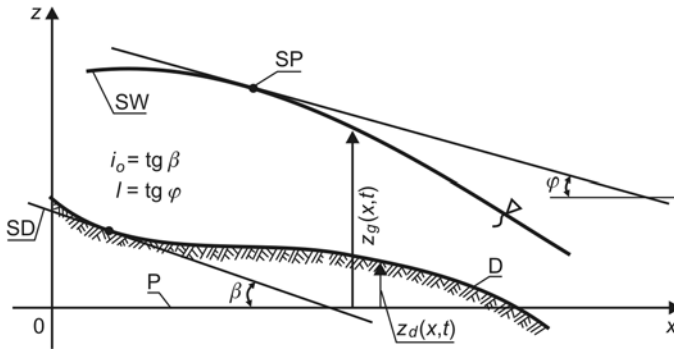
$$n_z = \frac{1}{C_z} \sum_{j=1}^J n_j l_j. \quad (13.4)$$

Według literatury, ten pierwszy sposób daje lepsze wyniki.

Jak wynika z ogólnych równań ruchu (3.87), istotnym czynnikiem przy przepływie płynów są siły masowe. Najczęściej gęstość rozkładu sił masowych \mathbf{f} określona jest przez wektor przyspieszenia ziemskiego (\mathbf{g}). Jest to podstawowy czynnik powodujący przepływ jednowymiarowy ze swobodną powierzchnią (w przepływach dwuwymiarowych dochodzi jeszcze siła Coriolisa). Dla wyznaczenia składowych tego wektora należy znać usytuowanie koryta kanału względem poziomu, co jest jednoznacznie określone przez **spadek dna** (i_0). Jest on definiowany jako tangens kąta (β), jaki styczna do dna kanału tworzy z poziomem (rys. 13.47). W ogólnym przypadku spadek dna zmienia się wzdłuż kanału, a także zależy od czasu. Jeżeli wzniesienie dna ponad płaszczyznę poziomą dane jest funkcją $z_d(x, t)$, to mamy:

$$i_o(x,t) = -\frac{\partial z_d(x,t)}{\partial x} = \text{tg} \beta(x,t) \approx \sin \beta(x,t). \quad (13.5)$$

Pożyteczna możliwość zastąpienia funkcji „tangens” przez funkcję „sinus” odnosi się do małych kątów β , nie przekraczających 10° (wtedy $\sin \beta = 0,174 \approx \text{tg} \beta = 0,176$). Warunek ten jest z reguły spełniony dla rzeczywistych cieków (rzek, kanałów), gdyż nawet w rzekach górskich nachylenie dna rzadko przekracza wartość $i_o = 0,0005$.



Rys. 13.4. Spadek dna oraz spadek swobodnej powierzchni: SW – swobodna powierzchnia, SD – styczna do dna, SP – styczna do swobodnej powierzchni, D – dno, P – poziom

Spadek dna kanałów ma ścisły związek z topografią terenu, w którym kanał przebiega. Wynika to z faktu, że przy wytyczaniu trasy kanału staramy się unikać zbyt głębokich wykopów (które byłyby konieczne, gdyby spadek dna kanału był większy od spadku terenu) lub prowadzenia kanału ponad powierzchnię terenu (w postaci **akweduktów**, gdy spadek dna jest mniejszy niż spadek terenu na dłuższym odcinku).

Oprócz spadku dna istotną wielkością jest także **spadek swobodnej powierzchni** (rys. 13.4):

$$I(x,t) = -\frac{\partial z_g(x,t)}{\partial x} = \text{tg} \varphi(x,t). \quad (13.6)$$

13.2.2. Schematyzacja koryt naturalnych

Rzeczywiste koryta rzeczne wykazują bardzo dużą zmienność charakteryzujących je parametrów. Są one bowiem formowane przez procesy naturalne, czyli obejmujące bardzo wiele czynników, przeważnie o charakterze losowym.

Już samo rozpoznanie kształtu koryta naturalnego stanowi złożony problem. Ze względu na wysokie koszty prac terenowych, kształt koryta opisywany jest przez skończoną liczbę przekrojów poprzecznych, wyznaczanych drogą sondowania dna rzeki w kilku wybranych pionach, lub też jako linie ciągłe, otrzymywane dzięki sondom automatycznym.

Usytuowanie najniższych punktów kolejnych przekrojów poprzecznych jest zmienne wzdłuż koryta, stosownie do przebiegu procesów erozyjnych, tworzących koryto. Określa ono podłużny spadek dna rzeki.

Podobnym zmianom ulegają pozostałe wielkości charakterystyczne dla koryta (w szczególności – współczynnik szorstkości). Powoduje to w rezultacie wzrost pracochłonności oraz kosztów opisu zjawiska, a także zmniejsza dokładność tego opisu (głównie w wy-

niku interpolacji dostępnych danych między przekrojami pomiarowymi). Z tego względu często opłaca się rozważyć celowość zastąpienia rzeczywistych parametrów koryta przez pewne wielkości uśrednione. Proces uśredniania nazywamy **schematyzacją koryta**.

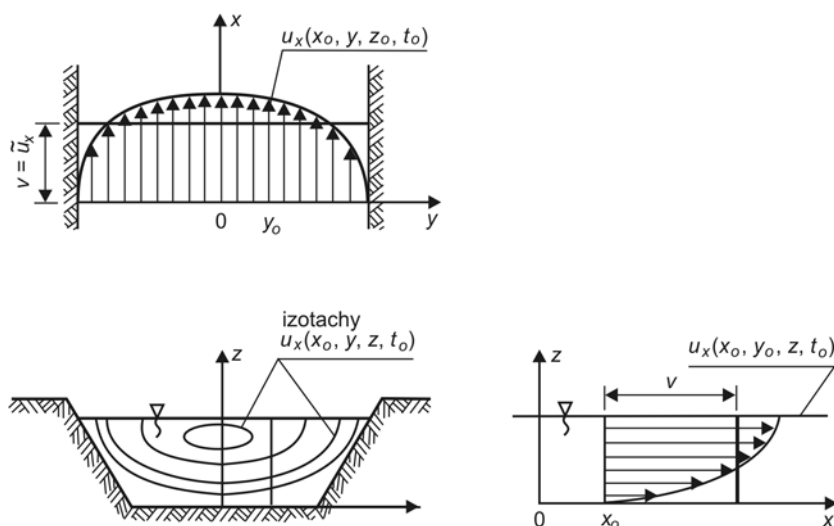
Odpowiednie obliczenia można prowadzić na różne sposoby. Podstawowe zasady są tu określone przez ogólne reguły geometrii, ale duże znaczenie ma intuicja i doświadczenie wykonawcy. Szczegółowe procedury znaleźć można w literaturze specjalistycznej [47].

13.2.3. Charakterystyka hydrauliczna

W rozdziale niniejszym zajmujemy się modelem przepływu, w którym zasadniczą zmienną jest prędkość uśredniona w przekroju poprzecznym S , zgodnie z ogólną relacją (2.34). Jest to prędkość **średnia objętościowa**, to jest taka, że **objętościowe natężenie przepływu** cieczy Q (zwane powszechnie **wydatkiem**), obliczone przez całkowanie rzeczywistego rozkładu prędkości, jest równe wydatkowi obliczonemu dla rozkładu uśrednionego

$$Q = \int_S \mathbf{u} \mathbf{n} dS = v S . \quad (13.7)$$

Rzeczywiste profile prędkości podłużnej $u_x(x, y, z, t)$, których wyznaczanie wymaga rozwiązania równań ogólnych (rozd. 4), zależą ściśle od konkretnych warunków przepływu cieczy, ale zawsze wykazują pewne istotne cechy wspólne dla wszystkich takich profili. Mianowicie prędkość cieczy przylegającej do łożyska (dna i brzegów) jest równa prędkości łożyska. W szczególnie często występującym przypadku ścianek nieruchomych z warunku tego wynika, że ciecz przy ścianie pozostaje nieruchoma. Maksymalna prędkość przepływu występuje w pobliżu swobodnej powierzchni (tuż pod powierzchnią, gdy powietrze atmosferyczne stawia pewien opór płynącej cieczy, lub na tej powierzchni, gdy ruch powietrza stanowi czynnik napędzający ciecz). Typowy rozkład prędkości w przekroju poprzecznym kanału otwartego pokazano na rys. 13.5. Nosi on nazwę **tachoidy**. Linie stałej wartości prędkości nazywamy **izotachami**.



Rys. 13.5. Tachoida i prędkość uśredniona

Przepływy cieczy ze swobodną powierzchnią mają prawie zawsze charakter turbulentny (burzliwy), gdyż liczba Reynoldsa (11.15) ma dla nich prawie zawsze wartość przekraczającą wartość graniczną. Rzeczywiście, przy prędkościach średnich rzędu $v = 0,5$ m/s i głębokościach średnich rzędu $h = 1,0$ m dla wody mamy:

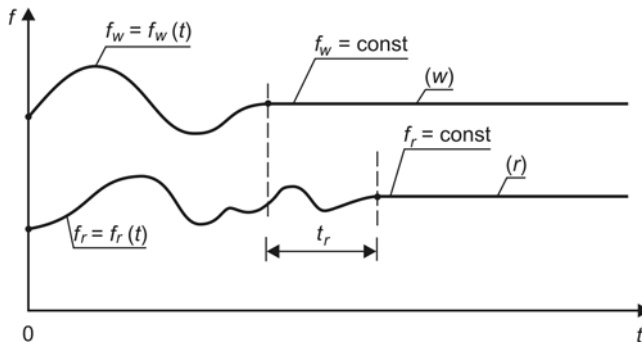
$$Re = \frac{vh}{\nu} = 500000 \gg Re_g \approx 575. \quad (13.8)$$

Z ruchem laminarnym najczęściej mamy do czynienia podczas przepływu wody w ośrodkach porowatych (patrz rozdz. 18).

W ujęciu kinematycznym wyróżniamy trzy główne kategorie przepływu podłużnego (patrz podrozdz. 10.1):

- ruch niestabilny, niejednostajny (gdy prędkość jest funkcją czasu i położenia),
- ruch ustalony, niejednostajny (gdy prędkość jest funkcją tylko położenia),
- ruch ustalony, jednostajny (gdy prędkość jest stała).

Ustalenie się drugiego i trzeciego z wymienionych powyżej rodzajów ruchu wymaga zaistnienia odpowiednich warunków. W przypadku ruchu ustalonego i niejednostajnego musi upłynąć odpowiednio długi czas od ostatniej zmiany warunków wymuszających ruch oraz/lub zmiany charakteru obszaru, w którym odbywa się ten przepływ. Inaczej mówiąc, przepływ musi „mieć czas” na „zapomnienie” zmienności wymuszeń (rys. 13.6). Czas (t_r), który nazwać też można czasem retardacji, zależy od konkretnych własności płynu oraz charakteru przepływu.



Rys. 13.6. Ustalenie się przepływu niejednostajnego: w – wymuszenie, r – odpowiedź układu

Z kolei dla wytworzenia się przepływu ustalonego i jednostajnego, oprócz niezmienności w czasie czynników wymuszających oraz kształtu obszaru, niezbędne jest istnienie odpowiednio długiego odcinka łożyska strumienia, o stałej charakterystyce, wzdłuż którego będzie mógł rozwinąć się niezmienny w czasie oraz wzdłuż osi przepływu profil prędkości. W hydromechanice mówimy o **odcinku początkowym** lub o **odcinku rozwijania profilu** prędkości. Jego długość l_0 , dla warstwy cieczy o grubości H , można w warunkach ruchu burzliwego oszacować ze wzoru (rys. 13.7a, wartość C – współczynnik według Chézy’ego, patrz wzór (13.44) [66]):

$$l_0 = 1,8HC / \sqrt{g}. \quad (13.9)$$

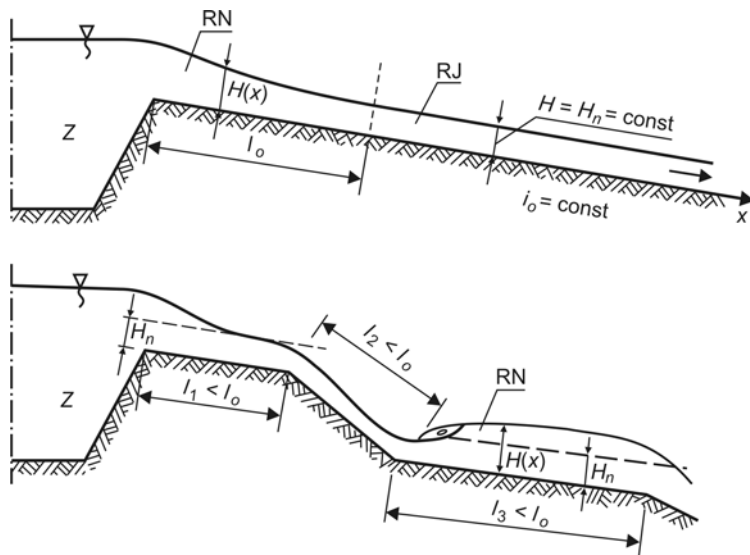
Jeżeli wzdłuż łożyska strumienia nie występuje dostatecznie długi odcinek o stałej charakterystyce, przepływ będzie ustalony, lecz niejednostajny (rys. 13.7b).

Zmienne ruchu ustalonego i jednostajnego mają duże znaczenie przy opisie przepływów w korytach otwartych, toteż ruch taki nazywamy **przepływem normalnym**. Charakterystyczne go zmienne również określamy tym terminem, mówiąc o **prędkości normalnej**

v_n , **głębokości normalnej** H_n i **normalnym spadku dna** i_n . Trzeba podkreślić, że w takim ujęciu nie ma znaczenia, czy ruch ustalony i jednostajny ma szanse powstać w rzeczywistości (rys. 13.7a), czy nie (rys. 13.7b), gdyż przepływ normalny jest tu tylko porównawczym stanem odniesienia.

Niezależnie od powyższego, w hydraulice koryt otwartych duże znaczenie ma podział przepływów dokonywany za pomocą pojęcia **ruchu krytycznego**. Aby je zdefiniować, wykorzystujemy znane z teorii równania Bernoulliego (patrz rozdz. 6) pojęcie **linii energii**. Dla linii prądu przebiegającej wzdłuż swobodnej powierzchni, piezometryczna linia energii jest wzniesiona ponad dno o wartość (równ. (6.9)):

$$E = H + \frac{\alpha v^2}{2g} . \quad (13.10)$$



Rys. 13.7. Powstawanie przepływu jednostajnego: RJ – odcinek ruchu jednostajnego, RN – odcinek ruchu niejednostajnego, Z – zbiornik

Jak wiemy, w przepływie ze swobodną powierzchnią, na której panuje ciśnienie atmosferyczne, wartość ta określa sumę wysokości położenia oraz wysokości prędkości i jest miarą energii mechanicznej strumienia.

Prędkość średnią v możemy zgodnie z relacją (2.35) wyrazić przez wydatek cieczy Q , gdzie pole powierzchni przekroju czynnego strumienia jest funkcją napęnienia $S = S(H)$. Podstawiając tę zależność do (13.10), mamy:

$$E = H + \frac{\alpha Q^2}{2gS^2(H)} . \quad (13.11)$$

Jeżeli rozważymy strumień o stałym wydatku $Q = \text{const.}$, to wzniesienie linii energii nad dnem jest zależne tylko od głębokości H . Gdy (przy ustalonym wydatku) zmniejszamy wartość H , funkcja E rośnie:

$$H \rightarrow 0: E \rightarrow \infty (\text{bo } S \rightarrow 0) .$$

Rośnie ona również przy zwiększaniu H :

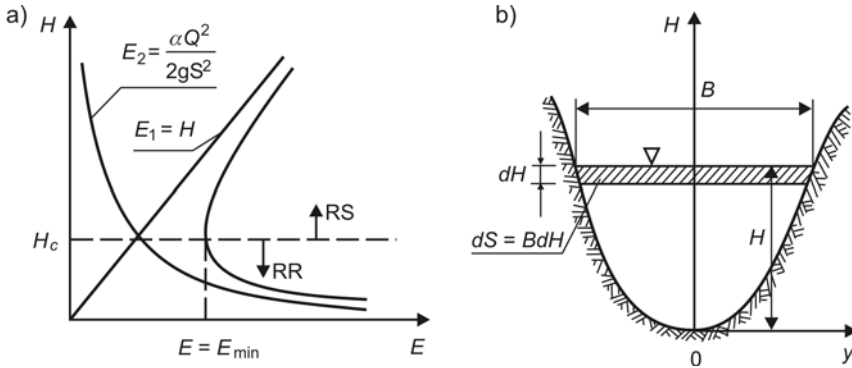
$$H \rightarrow \infty: E \rightarrow \infty.$$

Biorąc pod uwagę, że napełnienie H nie może być ujemne ($H \geq 0$) stwierdzamy, że przy pewnej głębokości H_c wartość E musi osiągać minimum (rys. 13.8a). Odpowiednią wartość H_c znajdziemy z różniczkowego warunku istnienia minimum funkcji (13.11)

$$\frac{dE}{dH} = 0, \quad (13.12)$$

który po wykonaniu oczywistych operacji daje zależność

$$1 - \frac{\alpha Q^2}{g S^3} \frac{dS}{dH} = 0. \quad (13.13)$$



Rys. 13.8. Pojęcie ruchu krytycznego: RS – zakres ruchu spokojnego, RR – zakres ruchu rwącego

Uwzględniając, że mamy $dS/dH = B$ (rys. 13.8b), możemy zamiast ostatniej równości napisać

$$\frac{S^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g}. \quad (13.14)$$

Przyjmijmy teraz, że rozważamy strumień o stałym wzniesieniu linii energii E , lecz zmiennym wydatku Q . Z równania (13.11) wyznaczamy wydatek

$$Q^2 = \frac{2g}{\alpha} S^2 (E - H). \quad (13.15)$$

Przy stałej wartości E napełnienie H może zmieniać się od $H = 0$ (strumień o „zerowej” grubości i maksymalnej wysokości prędkości) do $H = E$ (strumień o maksymalnej grubości oraz zerowej wysokości prędkości). W tych granicach mamy

$$H \rightarrow 0 : Q \rightarrow 0 \quad (\text{bo } S \rightarrow 0),$$

$$H \rightarrow E : Q \rightarrow 0 \quad (\text{bo } v \rightarrow 0).$$

Biorąc pod uwagę, że Q nie może być ujemne ($Q \geq 0$) stwierdzamy (podobnie jak poprzednio), że istnieje pewna wartość napełnienia, przy której wydatek osiąga maksimum. Mamy więc:

$$\frac{dQ}{dH} = 0 \quad (13.16)$$

oraz po wykonaniu niezbędnych przekształceń:

$$2S \frac{dS}{dH} (E - H) - S^2 = 0. \quad (13.17)$$

Uwzględniając znaną już relację $dS/dH = B$, oraz wyznaczając $(E-H)$ z (13.15) otrzymujemy zamiast (13.17) identyczny warunek, jak poprzednio:

$$\frac{S^3}{B} = \frac{\alpha Q^2}{g}. \quad (13.18)$$

Głębokość h_c , przy której spełniona jest ta równość, nazywamy **głębokością krytyczną**, zaś przepływ odbywający się z taką głębokością – **przepływem krytycznym**. Uwzględniając powyższe rozważania, możemy powiedzieć, że **przepływ krytyczny jest to taki ruch, w którym przy stałym wydatku Q energia strumienia E osiąga minimum, lub przy stałej energii E wydatek Q osiąga maksimum**.

W naturze przekroje poprzeczne strumieni mają kształt nieregularny, krzywoliniowy (rys. 13.3), o napełnieniu zmieniającym się w poprzek koryta, toteż dogodnie jest posługiwać się głębokością średnią h (13.1), która jest równa głębokości rzeczywistej H tylko dla koryt o przekroju prostokątnym. Uwzględniając tę relację w (13.18) mamy:

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{B^2 g}}. \quad (13.19)$$

Jest to wygodna w praktyce wersja warunku ruchu krytycznego. Z kolei zastępując w (13.19) wydatek Q przez prędkość średnią (13.7):

$$v_c = Q/Bh_c, \quad (13.20)$$

którą w tym przypadku nazwiemy **prędkością krytyczną**, mamy:

$$h_c = \frac{\alpha v_c^2}{g}, \quad (13.21)$$

skąd:

$$v_c = \sqrt{\frac{gh_c}{\alpha}} \approx \sqrt{gh_c} \quad (13.22)$$

(gdyż $\sqrt{1/\alpha} \approx 1$). Iloraz obu stron ostatniej równości nazywany jest **liczbą Froude'a**. Pozwala nam to napisać kolejną postać warunku ruchu krytycznego:

$$Fr_c = \frac{v_c}{\sqrt{gh_c}} = 1. \quad (13.23)$$

W hydraulice koryt otwartych duże znaczenie odgrywa relacja między rzeczywistymi parametrami strumienia, a parametrami ruchu krytycznego (który by powstał, gdyby ciecz o danym wydatku płynęła z prędkością krytyczną). Jeżeli prędkość jest mniejsza od krytycznej ($v < v_c$, co oznacza, że $h > h_c$ i $Fr < 1$), ruch nazywamy **spokojnym**. W przeciwnym razie ($v > v_c$, $h < h_c$, $Fr > 1$) mówimy o **ruchu rwącym**.

Bardzo istotną cechą ruchu rwącego jest duża koncentracja energii mechanicznej na jednostkę grubości warstwy płynu. Jak już powiedziano powyżej, w ruchu krytycznym energia mechaniczna strumienia o stałym wydatku osiąga minimum. Rośnie ona przy każdej zmianie grubości warstwy płynu. Jeżeli jednak posługiwać się będziemy wartością energii podzieloną przez głębokość strumienia, to zobaczymy, że iloraz ten będzie rósł przy spadku wartości H (to jest w ruchu rwącym), zaś malał przy wartości H (w ruchu spokojnym). Wynika to z relacji (13.11), podzielonej przez H , co daje:

$$E/H = 1 + \frac{\alpha Q^2}{2gS^2H} . \quad (13.24)$$

Oznacza to, że strumień o charakterze rwącym będzie bardzo intensywnie oddziaływał na otaczające go powierzchnie (ścianki, brzegi, dno), co wypukła jego nazwa. Oddziaływanie to jest bardzo szkodliwe, gdy przepływ rwący w niekontrolowany sposób niszczy łożysko strumienia, lecz bywa też z pożytkiem stosowane w praktyce (np. do konstrukcji narzędzi hydraulicznych, w których cienki strumień wody o charakterze rwącym służy do cięcia gruntu, skał itp.).

Odrotnie rzecz się ma z ruchem spokojnym, w którym energia na jednostkę głębokości (przy $Q = \text{const.}$) maleje ze wzrostem wielkości H . Strumień taki nie wykazuje własności niszczących (stąd nazwa).

Do omawianych tu hydraulicznych charakterystyk strumieni zaliczyć należy różnego typu **prędkości charakterystyczne**. Są to syntetyczne wskaźniki, określające progowe wartości prędkości średniej przepływu, przy których zaczynają się lub kończą zachodzące w strumieniu procesy, przemiany, reakcje itp. Posługujemy się takimi wskaźnikami wtedy, gdy opis rzeczywistego przebiegu zjawiska jest zbyt trudny, lub wręcz niemożliwy.

Podstawowy zestaw prędkości charakterystycznych w hydraulice przepływów ze swobodną powierzchnią tworzą **prędkości graniczne**, związane z rozmywaniem materiału łożyska, unoszeniem materiału dennego i jego odkładaniem z powrotem na dnie. Ze względu na złożoność tych zjawisk, prędkości graniczne określane są najczęściej doświadczalnie i podawane bądź w postaci wzorów empirycznych, bądź w postaci zestawień liczbowych. Istnieje na ten temat bardzo szeroka bibliografia (np. [11, 26, 31]), a zagadnienie przenoszenia substancji rozproszonej w płynie stanowi odrębną gałąź nauki i techniki.

W literaturze problemu można znaleźć materiał tabelaryczny, zawierający informacje o dwóch typach prędkości granicznych – **prędkości niezamulającej** oraz **prędkości nierozmywającej**. Pierwsza z nich określa dolną granicę średniej prędkości przepływu wody, przy której nie następuje opadanie na dno cząstek zawiesiny o danej średnicy (poniżej tej wielkości cząstki opadają na dno, czyli **sedymetują**, zaś powyżej – są unoszone przez wodę). Orientacyjne wartości prędkości niezamulającej v_{nz} wynoszą [26]:

- piasek ilasty – $v_{nz} = 0,076$ m/s,
- piasek drobny – $v_{nz} = 0,15$ m/s,
- piasek – $v_{nz} = 0,20$ m/s,
- drobny żwir – $v_{nz} = 0,31$ m/s,
- otoczaki – $v_{nz} = 0,61$ m/s.

Z kolei prędkość nierozmywająca v_{nr} jest to maksymalna średnia prędkość przepływu, przy której nie następuje niszczenie materiału dna i brzegów strumienia. Orientacyjnie można przyjmować [26]:

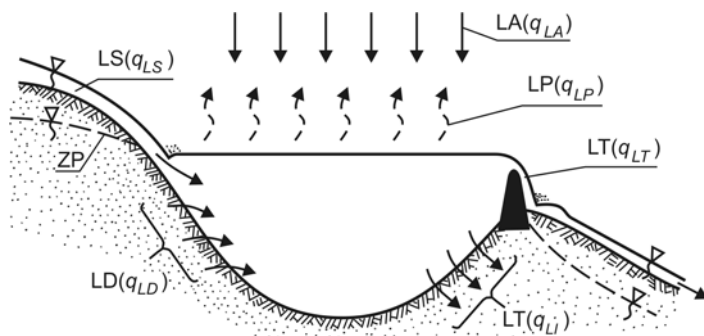
— chudy il	— $v_{nr} = 0,10$ m/s,
— drobny piasek	— $v_{nr} = 0,15$ m/s,
— tłusty il	— $v_{nr} = 0,25$ m/s,
— glina, piasek gruby	— $v_{nr} = 0,45$ m/s,
— żwir	— $v_{nr} = 1,00$ m/s,
— otoczaki	— $v_{nr} = 1,25$ m/s,
— zlepieńce i łupki	— $v_{nr} = 1,85$ m/s,
— skały warstwowe	— $v_{nr} = 2,25$ m/s,
— skały lite	— $v_{nr} = 3,70$ m/s.

Omówione wyżej pojęcia nie wyczerpują kwestii prędkości charakterystycznych i granicznych. Jednakże problem ten wykracza poza ramy niniejszej pracy.

13.3. Równania ruchu dla koryt otwartych

Aby otrzymać roboczą wersję przedmiotowych równań, rozważmy jeszcze dwie wielkości, różnicujące przepływy w korytach otwartych oraz w rurociągach. Pierwsza z nich, oznaczona w równaniu (3.11) symbolem q_L , ujmuje wszystkie czynniki, powodujące dopływy oraz/albo odpływy cieczy poprzez pobocznice strumienia, która składa się ze swobodnej powierzchni i łożyska (dna i brzegów, patrz rys. 13.3). Czynniki te są najczęściej (rys. 13.9):

- dopływ wody przez swobodną powierzchnię w postaci opadów atmosferycznych (q_{LA}),
- odpływ wody przez swobodną powierzchnię wskutek parowania (q_{LP}),
- dopływ przez linie brzegowe wody, pochodzącej ze spływu bocznego (q_{LS}),
- odpływ wody poprzez przelew boczny, wzdłuż linii brzegowych (q_{LT} – jest to stosunkowo rzadko występujący czynnik; jego przykładem może być przepływ wody przez koronę wałów przeciwpowodziowych, zalewającej w efekcie depresyjne tereny w pobliżu rzeki, lub też rozdzielanie wody za pomocą przelewów bocznych w węzłach wodnych),
- dopływ wody podziemnej przez powierzchnię dna i brzegów, gdy zwierciadło wody podziemnej leży powyżej zwierciadła wody w rzece, to jest gdy rzeka drenuje przyległy teren (q_{LD}),
- odpływ wody rzecznej przez powierzchnię dna i brzegów (infiltracja lub wsiąkanie), gdy zwierciadło wody w rzece leży powyżej zwierciadła wody podziemnej (q_{LI}).



Rys. 13.9. Najważniejsze składniki dopływu bocznego: LS – spływ powierzchniowy, LA – opad atmosferyczny, LP – parowanie, LT – przelew boczny, LD – drenaż, LI – infiltracja, ZP – zwierciadło wody podziemnej

Tak więc w rzeczywistości funkcja q_L jest sumą pewnej liczby składników. Uwzględniając wymienione, możemy napisać, że:

$$q_L = \sum (q_{LA} + q_{LP} + q_{LS} + q_{LT} + q_{LD} + q_{LI}). \quad (13.25)$$

Składniki te nie zawsze występują w pełnym zestawie, a jeśli nawet, to nie zawsze wszystkie są uwzględniane w równaniu ciągłości (3.11). Jest to kwestia dokładności opracowywanego modelu przepływu. Jest on tym dokładniejszy, im więcej czynników jest w nim uwzględnione. Jednakże ze zwiększeniem stopnia złożoności modelu wzrasta czas, praca i koszty jego rozwiązania. W praktyce zawsze należy oszacować rząd wielkości poszczególnych składników i uwzględniać tylko najważniejsze.

Wymiar funkcji q_L opisany jest przez iloraz drugiej potęgi wymiaru liniowego przez czas. Określa więc ona objętość cieczy, która w jednostce czasu dopływa (lub odpływa) do jednostki długości koryta (strumienia). Można też ją podawać w odniesieniu do jednostki powierzchni swobodnego zwierciadła, wprowadzając funkcję w_B , jak w równaniu (13.30):

$$w_B = q_L / B. \quad (13.26)$$

Składniki funkcji q_L mogą być podawane w sposób jawny (bezpośrednio zaczerpnięte z pomiarów, jak na przykład dopływ z opadów atmosferycznych, brany z roczników hydrometeorologicznych, lub określone pośrednio, jak na przykład spływ powierzchniowy) lub niejawni (na przykład poprzez równania ruchu wody podziemnej; patrz rozdz. 18). Metody ich określania podawane są w podręcznikach szczegółowych dyscyplin nauki i techniki (jak hydrologia, meteorologia, hydrogeologia, wodociągi i kanalizacja ...).

Drugą z omawianych obecnie wielkości jest ciśnienie p . Jak już wiemy (przykład 4.1), dla przypadku odpowiadającego warunkom ruchu podłużnego możemy opisać je relacją (4.22), analogiczną do zależności (5.8), opisującej **hydrostatyczny rozkład ciśnienia**. Tym jednak razem, przeciwnie niż w przypadku przewodów zamkniętych, to ciśnienie zewnętrzne, praktycznie zawsze równe ciśnieniu atmosferycznemu, będziemy mogli potraktować jako stałe, zaś jego „hydrostatyczny” przyrost, jako określony przez niejednakową wzdłuż koryta głębokość, będzie wielkością zmienną. Pozwala to napisać, że:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\rho g H) = g \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (13.27)$$

Uwzględniając teraz przedstawioną charakterystykę przepływów w korytach otwartych, możemy następująco przepisać **równanie ciągłości** (3.11):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial (vS)}{\partial x} = q_L \quad (13.28)$$

oraz równanie dynamiczne (3.39):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial (av)}{\partial x} = g i_o - g \frac{\partial H}{\partial x} - \sum_{i=0}^l \frac{\tau_{si} C_{zi}}{\rho S}. \quad (13.29)$$

W praktyce bardzo często posługujemy się średnią w przekroju poprzecznym głębokością kanału h (par. 13.2.1), co pozwala przekształcić ostatnie relacje do postaci:

— równanie ciągłości:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (vh)}{\partial x} = w_b; \quad (13.30)$$

— równanie dynamiczne:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial(\alpha v)}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g i_o - \sum_{i=0}^I \frac{\tau_{si} C_{zi}}{\rho B h} . \quad (13.31)$$

13.4. Przepływ ustalony i jednostajny

13.4.1. Wyznaczanie naprężeń stycznych na dnie

Najprostszą kategorią przepływu (jak już wiemy – nie tylko podłużnego) jest ruch ustalony i jednostajny. Gdy uśrednione zmienne przepływu nie zależą ani od czasu t , ani od zmiennej przestrzennej x , równanie (13.29) przyjmuje postać zależności:

$$g i_o - \sum_{i=0}^I \frac{\tau_{si} C_{zi}}{\rho S} = 0 . \quad (13.32)$$

Oznacza ona, że o przepływie takim decydują dwa typy sił – podłużna (czyli skierowana wzdłuż dna koryta) składowa siły ciężkości oraz wypadkowa siła powierzchniowa, działająca na pobocznice strumienia. Mogą one mieć różne znaki, a tym samym wywierać różny wpływ na ruch cieczy. Gdy rzędne dna koryta maleją wzdłuż kierunku ruchu, wtedy składowa grawitacji jest czynnikiem napędzającym ciecz, zaś wypadkowa siła powierzchniowa ma charakter siły oporu, równoważącej grawitację. Jest to sytuacja typowa dla przepływu w rzekach i kanałach. W przeciwnym wypadku, gdy dno łożyska wznosi się wzdłuż kierunku ruchu, składowa grawitacji przeciwdziała przepływowi, zaś czynnikiem napędzającym musi być wypadkowa siła powierzchniowa. Ma to miejsce w pewnych odmianach taśmowych podnośników cieczy.

Przypomnijmy, że dla wytworzenia się ruchu ustalonego i jednostajnego niezbędne jest spełnienie określonych warunków. W szczególności długość koryta musi przekraczać długość odcinka początkowego (rys. 13.7).

Z równania zachowania masy (13.28) w rozważanym przypadku wynika, że:

$$Sv = Q = \text{const} ., \quad (13.33)$$

bowiem z definicji $\partial/\partial t \equiv 0$ oraz $\partial/\partial x \equiv 0$, a tym samym $q_L \equiv 0$ (nie jest możliwy ruch jednostajny w strumieniu zasilanym dopływem bocznym). Ponadto w ruchu jednostajnym prędkość musi być stała, więc wobec ostatniej zależności mamy

$$v = \text{const}., \quad S = \text{const} . \quad (13.34)$$

Stała wartość pola powierzchni poprzecznego przekroju strumienia pod względem geometrycznym może być zrealizowana przy różnych szerokościach swobodnej powierzchni i różnych głębokościach.

Zauważmy jednak, że różne kształty obwodu tej samej powierzchni S oznaczają różne długości poszczególnych odcinków ΔL_i tego obwodu, które muszą spełniać warunek (rys. 13.3):

$$C_P = \sum_{i=0}^I C_{zi} = C_z + B . \quad (13.35)$$

Pod względem dynamicznym oznacza to, że przy zmiennym kształcie (choć stałej powierzchni) strumienia w każdym przekroju inny byłby spadek dna oraz/lub naprężenie

powierzchniowe. Formalnie można próbować dobrać stosowne funkcje w równaniu (13.32), lecz trudno jest oczekiwać, by wynik był zgodny z parametrami układów rzeczywistych. Należy więc przyjąć, że warunki (13.32) oznaczają stały kształt przekroju poprzecznego wzdłuż strumienia. Koryto o stałym kształcie tego przekroju nazywamy **korytem pryzmatycznym**.

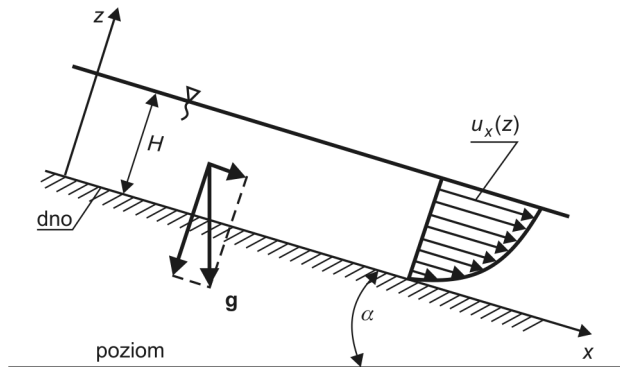
Przepływ jednostajny i ustalony, wytworzony w korycie pryzmatycznym, jest tożsamy z **przepływem normalnym** (patrz par. 13.2.3).

Kluczowe znaczenie przy praktycznym stosowaniu zależności (13.32) ma możliwość wyznaczenia naprężeń stycznych na poszczególnych częściach obwodu przekroju poprzecznego τ_{si} . Obwód każdego strumienia ze swobodną powierzchnią składa się przynajmniej z dwóch odcinków ($I = 1$): z linii obwodu zwilżonego (o długości $C_{z1} = C_z$) oraz ze swobodnej powierzchni (o szerokości $C_{z0} = B$). Pozwala to następująco przepisać (13.32):

$$\rho g i_o + \frac{\tau_p}{h} - \frac{\tau_d}{R_h} = 0 \quad (13.36)$$

(wykorzystano tu omówione już zależności geometryczne, według których $S/B = h$ oraz $S/C_z = R_h$ – patrz par. 13.2.1).

Dla wyznaczenia naprężenia dennego ($\tau_{s1} = -\tau_d$) z definicji, którą stanowi **hipoteza Newtona** (3.84), należy znać pole prędkości przepływu. Jak już wiemy (par. 6.2.5), wyznaczenie tego pola jest możliwe tylko w bardzo nielicznych sytuacjach (dla ruchu laminarnego, przy prostej charakterystyce geometrycznej układu). W przypadku przepływu w korycie otwartym możemy tu zastosować schemat grawitacyjnego spływu warstwy cieczy o stałej miąższości H wzdłuż równi pochyłej (rys. 13.10), przy założeniu, że na swobodną powierzchnię nie działa naprężenie styczne.



Rys. 13.10. Spływ cieczy po równi pochyłej

Postępując w sposób analogiczny do opisanego w przykładzie 4.1, możemy następująco zapisać równanie Naviera-Stokesa (3.95):

$$g i_o + \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 0. \quad (13.37)$$

Warunki brzegowe mają oczywistą postać (wyrażającą przyleganie cieczy do nieruchomego dna oraz brak naprężenia stycznego na swobodnej powierzchni):

$$z = 0 \rightarrow u_x = 0, \quad z = H \rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0. \quad (13.38)$$

Równanie (13.37) rozwiązujemy bez trudu, wykonując dwukrotne całkowanie względem zmiennej pionowej z . Po wyznaczeniu dwóch stałych całkowania z (13.38), otrzymujemy równanie, opisujące paraboliczny profil prędkości:

$$u_x = \frac{g i_o}{2\nu} (2H - z)z. \quad (13.39)$$

Uśredniając tę funkcję względem grubości warstwy wody H , otrzymujemy prędkość średnią:

$$v = \frac{1}{H} \int_0^H u_x(z) dz = \frac{\rho g H^2 i_o}{3\mu}. \quad (13.40)$$

Podstawiając w ostatniej relacji spadek dna i_o , wyznaczony z (13.36), otrzymamy zależność, opisującą naprężenia styczne na dnie warstwy cieczy, poruszającej się ruchem laminarnym:

$$\tau_d = \frac{3\nu\mu}{H}. \quad (13.41)$$

Trzeba jednak podkreślić, że przydatność tej relacji jest niestyczna ograniczona. O ile bowiem analogiczne rozwiązanie (6.23), otrzymane dla zamkniętych przewodów kołowych, odnosi się do przypadku mającego istotne walory praktyczne, to model laminarnego spływu po równi pochyłej jest bardzo słabym przybliżeniem rzeczywistych przepływów ze swobodną powierzchnią. Z jednej strony jest to skutkiem braku brzegów strumienia, zaś z drugiej – powszechnego występowania ruchu turbulentnego.

Wobec powyższego, podobnie jak to miało miejsce dla rurociągów (par.11.2.2), celem otrzymania relacji przydatnych w praktyce także tutaj musimy odwołać się do metod uproszczonych.

13.4.2. Wzory obliczeniowe

O ile zależność (11.13) opisująca naprężenia styczne na ścianie rurociągu powstała w wyniku metodycznej analizy zagadnienia (pkt 11.2.2.2), o tyle w przypadku koryt otwartych odpowiednia relacja została sformułowana w wyniku połączenia intuicji fizycznej z technicznym doświadczeniem. Wynikło to z faktu, że potrzeby praktyczne od bardzo dawna zmuszały inżynierów i badaczy do znalezienia jakiegoś sposobu określania naprężeń dennych dla koryt otwartych. Już ponad dwieście lat temu francuski inżynier i badacz Antoine Léonard Chézy, analizując wyniki badań nad ruchem wody w korytach otwartych, stwierdził, że naprężenie denne (przy przepływie turbulentnym, bez wpływu wiatru) jest proporcjonalne do kwadratu prędkości średniej, przy czym współczynnik proporcjonalności jest zależny od charakterystyki koryta i jego napełnienia. W stosowanej tu symbolice można to zapisać następująco:

$$\tau_d = \frac{\rho g v^2}{C^2}. \quad (13.42)$$

Podstawiając powyższe do (13.36), otrzymujemy:

$$v = C \sqrt{R_h i_o}. \quad (13.43)$$

Jest to jedna z podstawowych relacji hydrauliki koryt otwartych, zwana wzorem Chézy'ego. Choć powstał on bardzo dawno temu (w roku 1775), to jednak do dziś stanowi powszechnie stosowaną zależność, wiążącą średnią prędkość przepływu podłużnego (v) w korycie otwartym z geometryczną charakterystyką koryta (C, R_h, i_o).

Współczynnik C (ma on wymiar $[L^{1/2}/T]$, co jest niedogodne w praktyce, lecz zostało zaakceptowane przez użytkowników wzoru) początkowo traktowany był jako stały, równy $50 \sqrt{m}/s$. Dokładniejsze pomiary wskazały, że jest on zależny od szorstkości łożyska kanału oraz od jego napełnienia (a ściślej – od promienia hydraulicznego). Istnieje bardzo wiele formuł, pozwalających na wyznaczenie wartości C . Do najpowszechniej stosowanych należą:

— formuła Manninga (współczynnik szorstkości wg Manninga n – tab. 4):

$$C = \frac{1}{n} R_h^{1/6}, \quad (13.44)$$

która po podstawieniu do (4.146) daje bardzo popularny **wzór Manninga**:

$$v = \frac{1}{n} R_h^{2/3} i_o^{1/2}; \quad (13.45)$$

— formuła Kuttera (współczynnik szorstkości wg Kuttera m_k – tab. 5):

$$C = \frac{100 \sqrt{R_h}}{m_k + \sqrt{R_h}}; \quad (13.46)$$

— formuła Bazina (współczynnik szorstkości wg Bazina γ_B – tab. 6):

$$C = \frac{87 \sqrt{R_h}}{\gamma_B + \sqrt{R_h}}. \quad (13.47)$$

W literaturze specjalistycznej znaleźć można także inne relacje. Niekiedy wygodnie jest przy wyznaczaniu współczynnika C wykorzystać obszerny materiał doświadczalny, zgromadzony przy określaniu współczynnika strat λ (równanie (11.12), rys. 11.4). Porównując naprężenia styczne, wyrażone za pomocą współczynnika λ według (11.13), z relacją (13.42), otrzymujemy:

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}. \quad (13.48)$$

Mnożąc średnią prędkość przepływu, określoną wzorem Chézy'ego, przez pole powierzchni przekroju strumienia otrzymujemy, zgodnie z równaniem ciągłości (13.33), relację opisującą wydatek strumienia:

$$Q = vS = C \sqrt{R_h i_o} S. \quad (13.49)$$

Wielkości C, R_h i S odnoszą się do geometrycznych wymiarów koryta i jego szorstkości. Jego zróżnicowanie w pionie określa natomiast spadek dna. Oznaczając

$$K_w = C \sqrt{R_h} S, \quad (13.50)$$

możemy (13.49) przepisać następująco:

$$Q = K_w \sqrt{i_o} . \quad (13.51)$$

Jest to dogodny wzór, często stosowany w obliczeniach praktycznych. Wielkość K_w nazywamy **przewodnością** (lub też **modułem przepływu**). Jest ona tablicowana lub przedstawiana w postaci nomogramów (patrz par. 13.4.3). Przewodność można interpretować jako natężenie przepływu w kanale (czyli jego wydatek) przy spadku dna równym jedności.

Dla lepszego zrozumienia mechanizmu ruchu cieczy w korycie otwartym warto przeanalizować jego bilans energetyczny. W dowolnym przekroju strumienia ciecz ma pewną energię mechaniczną, ilościowo opisaną przez trójmian Bernoulliego (par. 6.2.3):

$$B_T = \frac{\alpha v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z_C . \quad (13.52)$$

Ruch cieczy wywołany jest przez wypadkową siłę napędzającą. Jej składowymi mogą być: siła grawitacji, podłużny spadek ciśnienia, naprężenie wiatrowe na swobodnej powierzchni. W czasie przepływu wzdłuż ścianek formują się tachoidy prędkości, stosownie do których na powierzchni międzyfazowej ciecz-ścianka wytwarzane są naprężenia przyścienne, powodujące powstawanie wypadkowej siły oporu koryta, przeciwdziałającej ruchowi cieczy. W ruchu jednostajnym i ustalonym siła napędzająca jest równa sile oporu, zgodnie z relacją (13.32). Innymi słowy, siła napędzająca wykonuje pracę przeciwko sile oporu, skutkiem czego początkowy zasób energii mechanicznej B_T maleje, podczas gdy rośnie zasób energii wewnętrznej cieczy. Proces ten nazywamy dyssypacją energii (par. 3.6.3). Tak więc wzdłuż strumienia wartość trójmianu Bernoulliego maleje. Różnicę wartości dwóch trójmianów w dwóch przekrojach oddalonych o L nazywamy **wysokością straty energii (mechanicznej)**:

$$\Delta h_s = B_{T1} - B_{T2} . \quad (13.53)$$

W przepływie jednostajnym $v = \text{const.}$ i $h = \text{const.}$, toteż podstawiając (13.52) do (13.53) otrzymujemy prostą zależność (patrz równ. 13.5):

$$\frac{\Delta h_s}{L} = \frac{z_{c1} - z_{c2}}{L} = i_f = i_o . \quad (13.54)$$

Stosunek wysokości straty energii mechanicznej do długości odcinka, na którym ta strata występuje, oznaczony symbolem i_f , jak już wiemy (11.19), nazywany jest **spadkiem hydraulicznym**. W ruchu jednostajnym spadek hydrauliczny równy jest spadkowi dna. Oznacza to, że w ruchu takim obniżenie dna strumienia wzdłuż jego osi dokładnie odpowiada wysokości straty energii. Podstawiając (13.54) do (13.52), otrzymujemy:

$$\Delta h_s = \frac{v^2 L}{C^2 R_h} = i_o L = i_f L = \frac{\tau_d}{\rho g R_h} L . \quad (13.55)$$

Nawiązanie do terminologii równania Bernoulliego pozwala nam stwierdzić, że w przepływie ustalonym i jednostajnym ze swobodną powierzchnią linia ciśnień jest równoległa do linii swobodnej powierzchni i oddalona od niej o wysokość ciśnienia atmosferycznego ($p_0/\rho g$). Piezometryczna linia ciśnień pokrywa się z linią swobodnej powierzchni. Linia energii jest wzniesiona ponad linię ciśnień o wysokość prędkości średniej ($\alpha v^2/2g$). Do wyżej wymienionych linii równoległa jest też linia dna.

Równanie (13.32) odnosi się do sytuacji, gdy długość obwodu zwilżonego składa się z pewnej liczby odcinków o różnych współczynnikach szorstkości. W hydraulice koryt otwartych przyjmuje się wtedy, że dla każdego z tych odcinków (o długości C_{zi} oraz współczynnikiem szorstkości C_i) piszemy osobno relację (13.42), a następnie je sumujemy, zgodnie z (13.32).

Alternatywą jest obliczenie chropowatości efektywnej (wzory (13.3) lub (13.5)) i stosowanie jednej relacji (13.42) dla całego obwodu zwilżonego.

Trzeba podkreślić, że wzór (13.42) sformułowany został dla przepływu ustalonego, jednostajnego, bez naprężeń wiatrowych. Dla warunków takich spełnia on swoją rolę w sposób rzeczywiście dobry, o czym świadczy codzienna praktyka inżynierska. Sytuacja nieco komplikuje się, gdy istotny wpływ na ruch cieczy wywiera wiatr. Wpływa on na kształt profilu prędkości w strumieniu, a tym samym na naprężenia denne.

Jeżeli wpływ wiatru jest znaczny (czyli gdy wywołuje on takie zróżnicowanie tacho-
idy, które wyklucza zastosowanie prędkości średniej, jak na przykład wyraźny wsteczny
prąd powierzchniowy – rys. 2.9a), wtedy należy odwołać się do modeli ogólniejszych. Gdy
jednak wpływ ten jest umiarkowany, możemy wykorzystać relację (13.36). Podstawiając
w niej naprężenie denne według (13.42), otrzymamy:

$$v = C \sqrt{R_H i_o + \frac{\tau_p R_H}{\rho g h}}. \quad (13.56)$$

Naprężenie powierzchniowe opisuje się w takim przypadku wzorami empirycznymi, typu (4.8).

■ Przykład 13.1

Obliczyć objętościowe natężenie przepływu (wydatek) kanału trapezowego (szerokość dna $b = 2,0$ m, nachylenie skarp $m = 0,7$, spadek dna $i_o = 0,001$). Dno i brzegi kanału wykończone są okładziną z ciosów kamiennych, a jego napętnienie wynosi $h = 1,2$ m).

Rozwiązanie

Zgodnie ze wzorem (13.49), w pierwszej kolejności musimy obliczyć pole przekroju strumienia S i promień hydrauliczny R_H . Korzystając z prostych zależności dla trapezu, mamy:

$$O_z = 4,93 \text{ m}, \quad S = 3,41 \text{ m}^2, \quad R_H = 0,69 \text{ m}.$$

Współczynnik szorstkości dla ciosów kamiennych według Manninga można przyjąć równy $n = 0,015$ (tab. 4). Zgodnie z (13.44) mamy:

$$C = 62,67 \sqrt{\text{m}}/\text{s},$$

a wobec wzoru Chézy'ego otrzymujemy

$$Q = 5,61 \text{ m}^3/\text{s}. \quad \blacksquare$$

13.4.3. Krzywe prędkości i wydatku

Wzór Chézy'ego (oraz relacje pochodne) zawiera trzy zmienne, charakteryzujące jednostajny i ustalony przepływ podłużny – prędkość średnią v , spadek dna i_o oraz napętnienie kanału h (poprzez R_H). Znając dowolne dwa z nich, możemy obliczyć trzeci. Obliczanie wartości v lub i_o jest (jak widać w przykładzie 13.1) rzeczą bardzo prostą. Trudniej jest wyznaczyć głębokość, szczególnie wtedy, gdy (jak to często bywa w praktyce) zamiast

prędkością, operujemy wydatkiem. Nawet bowiem w najprostszym przypadku przekroju prostokątnego wielkość ta określona jest relacją nieliniową, wynikającą ze wzoru Chézy'ego (13.49)

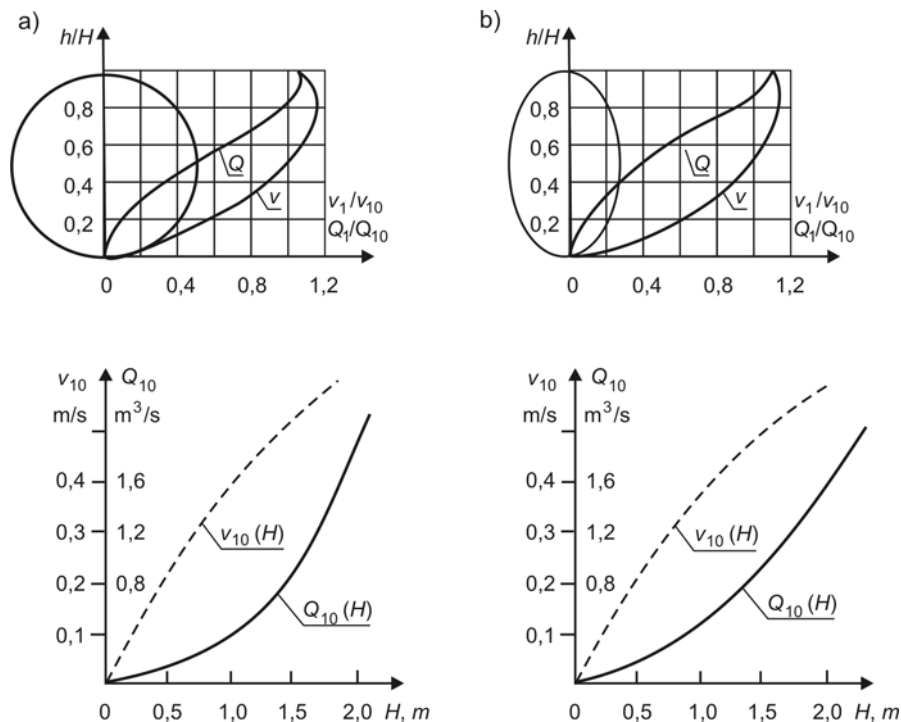
$$C^2 B^3 i_o h^3 - Q^2 (B + 2h) = 0. \quad (13.57)$$

Aby uprościć obliczenia, często wygodnie jest posługiwać się nomogramami, lub zestawieniami tabelarycznymi. W przypadku przekrojów regularnych materiały takie zamieszcza się w literaturze specjalistycznej. Szczególnie pożyteczne są one przy projektowaniu przewodów kanalizacyjnych (np. [70, 72]). Gdy z kolei rozważamy kanały o kształtach nieregularnych, które są najczęściej naturalne, wtedy celowe bywa samodzielne wykonanie nomogramu roboczego.

Nomogramem takim może być wykres, opisujący dla danego przekroju (to jest przy ustalonej geometrii i szorstkości ścianek) zmienność charakterystyki wydatku (13.50) z napełnieniem $K_w(h)$. Jednakże bardziej przydatne są wykresy uniwersalne, obrazujące funkcje

$$\frac{v_1}{v_{10}} = f_1\left(\frac{h}{H}\right), \quad \frac{Q_1}{Q_{10}} = f_2\left(\frac{h}{H}\right), \quad (13.58)$$

gdzie: v_1, Q_1 – prędkość średnia i wydatek przy spadku dna i współczynniku szorstkości równym jeden ($i = 1, n = 1$), a zmiennym napełnieniu h ; v_{10}, Q_{10} – jw., przy napełnieniu całkowitym $h = H$. Przykłady krzywych f_1 oraz f_2 dla przewodów o przekroju kołowym i tzw. jajowym (często stosowanym w kanalizacji) pokazano na rys. 13.11. Noszą one nazwę odpowiednio **krzywej prędkości** i **krzywej wydatku**.



Rys. 13.11. Krzywe prędkości i wydatku: a) przekrój kołowy, b) przekrój jajowy

Korzystanie z tych wykresów wymaga znajomości prędkości średniej i wydatku dla napełnienia maksymalnego (v_{10} oraz Q_{10}). Prędkość i wydatek rzeczywisty oblicza się z relacji:

$$v = \frac{1}{n} v_1 \sqrt{i_o} = \frac{1}{n} f_1 v_{10} \sqrt{i_o}, \quad (13.59)$$

$$Q = \frac{1}{n} Q_1 \sqrt{i_o} = \frac{1}{n} f_2 Q_{10} \sqrt{i_o}. \quad (13.60)$$

■ Przykład 13.2

Dany jest przewód kołowy o średnicy $D = 800$ mm, wykonany z betonu, ułożony ze spadkiem $i = 0,0001$. O ile wzrośnie jego napełnienie, gdy wydatek zostanie zwiększony od $Q_p = 0,06$ m³/s do $Q_k = 0,10$ m³/s.

Rozwiązanie

Dla kanału betonowego możemy przyjąć $n = 0,013$ (tab. 4). Wydatki jednostkowe, zgodnie z (13.60), wynoszą:

$$Q_{p1} = Q_p n / \sqrt{i_o} = 0,078,$$

$$Q_{k1} = Q_k n / \sqrt{i_o} = 0,130.$$

Korzystając z wykresu pomocniczego na rys. 13.11a, mamy maksymalny wydatek jednostkowy $Q_{10} = 0,227$ m³/s, co pozwala obliczyć wartości funkcji f_{p2} oraz f_{k2} :

$$f_{p2} = Q_{p1} / Q_{10} = 0,344,$$

$$f_{k2} = Q_{k1} / Q_{10} = 0,573.$$

Z krzywej wydatku odczytujemy dla powyższych wartości napełnienia względne ($H = D = 800$ mm):

$$h_p / D = 0,38 \quad \text{skąd} \quad h_p = 304 \text{ mm},$$

$$h_k / D = 0,56 \quad \text{skąd} \quad h_k = 448 \text{ mm}.$$

Tak więc napełnienie kanału w rozważanym przypadku wzrośnie o 47,4%, od 304 mm do 448 mm. ■

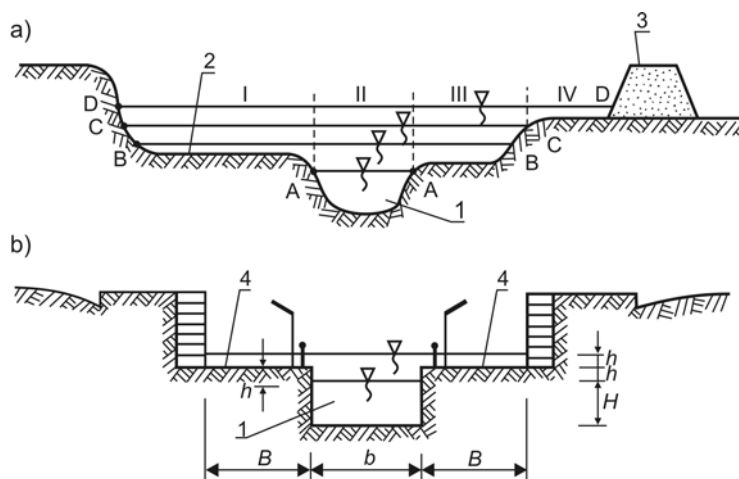
Analizując krzywe prędkości i wydatku dla przekrojów zamkniętych, obserwujemy charakterystyczny spadek ich rzędnych w obszarze maksymalnych napełnień. Największy wydatek dla przekroju kołowego wynosi $Q_{\max} = 1,087 Q_{10}$ i odpowiada napełnieniu 95%. Przy wzroście napełnienia ponad h_{\max} , wydatek maleje, co warto uwzględnić przy projektowaniu kanałów, w których przepływ odbywa się ze swobodną powierzchnią, lecz które wykonywane są z profili zamkniętych (kanalizacja sanitarna i deszczowa, zabudowa strumieni w terenach zurbanizowanych, przepusty drogowe itp.).

Wskazany powyżej efekt jest prostą konsekwencją geometrycznych własności przekrojów zamkniętych — w górnych jego strefach przyrostowi napełnienia odpowiada szybszy przyrost obwodu zwilżonego, niż przekroju czynnego. W efekcie spada promień hydrauliczny, a z nim prędkość i wydatek. Moment styku zwierciadła cieczy z najwyższym punktem przekroju zamkniętego określa granicę między rozważanymi tu przepływami ze swobodną powierzchnią a przepływami zachodzącymi pod ciśnieniem (gdy ciśnienie w najwyższym punkcie przekroju przekracza ciśnienie atmosferyczne), nazywanymi też **przepływami z napiętym zwierciadłem** (rys. 11.2).

13.4.4. Przekroje złożone

Omówiony w poprzednich paragrafach sposób stosowania wzoru Chézy'ego odnosił się do przekrojów regularnych, zwartych, w których przyrost głębokości cieczy odpowiadał w miarę równomiernemu przyrostowi pozostałych parametrów geometrycznych. W praktyce hydrotechnicznej mamy jednak do czynienia z pewną grupą zagadnień, w których przekrój poprzeczny wykazuje pewną charakterystyczną cechę – zwarte do pewnego poziomu **koryto główne** ulega nagłemu rozszerzeniu (w jedną lub w obie strony), tworząc **taras zalewowy**, ograniczony przez naturalne wzniesienie terenu, lub poprzez sztuczne konstrukcje (skarpy, wały przeciwpowodziowe itp.). Koryta tego typu nazywamy **złożonymi** (lub **wielodzielnymi**). Mogą one występować zarówno w systemach naturalnych (rys. 13.12a), jak też być wynikiem regulacji rzeki (rys. 13.12b). Tarasów zalewowych po każdej stronie koryta może być kilka, na różnych poziomach.

Koryta wielodzielne kształtuje się wtedy, gdy przepływ w cieku podlega okresowym, dużym wahaniom, a wydatki maksymalne wymagają większych głębokości, niż dopuszczalne w korycie głównym. Mamy wtedy dwie możliwości – albo powiększyć koryto główne (tworząc głębokie, oraz/albo szerokie, kosztowne, niekiedy stwarzające zagrożenie dla ludzi i zwierząt łożysko, tylko w krótkich okresach czasu całkowicie wypełnione), albo poświęcić część terenu przylegającego do cieków na ukształtowanie tarasu zalewowego. Jest on zalewany tylko w okresach wysokich stanów wody, a przez pozostałą część roku może być wykorzystywany (na przykład jako pastwiska, lub jako bulwar spacerowy na terenach zurbanizowanych).



Rys. 13.12. Schematy koryt złożonych: 1 – koryto główne, 2 – taras zalewowy, 3 – wał przeciwpowodziowy, 4 – bulwar

Przy wyznaczaniu wydatków dla napełnienia nieznacznie przekraczającego (linia B–B na rys. 13.12a) napełnienie maksymalne dla koryta głównego (linia A–A na rys. 13.12a) okazuje się, że niedużemu wzrostowi głębokości odpowiada duży wzrost obwodu zwilżonego, ale za to mały przyrost przekroju czynnego (podobnie jak miało to miejsce przy wypełnianiu przekroju zamkniętego, patrz par. 13.4.3). Oznacza to spadek promienia hydrau-

licznego, czyli zgodnie ze wzorem Chézy'ego (13.49) – spadek wydatku obliczonego, co jest sprzeczne z rzeczywistym wzrostem wydatku.

Aby uniknąć tego problemu, koryto dzieli się pionowymi liniami, na kilka odrębnych części (I, II i III na rys. 13.12a), a następnie oblicza wydatek osobno dla każdej z nich i sumuje te wartości, otrzymując wydatek łączny. Należy tu pamiętać o starannym doborze współczynnika szorstkości, którego wartość jest z reguły inna dla koryta głównego, oraz inna dla tarasów. W przypadku wysokich stanów wody na tarasie zalewowym (linia C–C na rys. 13.12a) omawiany tu efekt zanika, gdyż koryto główne zaczyna stanowić mały fragment całego przekroju czynnego.

■ Przykład 13.3

Wyznaczyć zmiany wydatku wody w prostokątnym korycie trójdzielnym (rys. 13.12b, $B = 20,0$ m, $b = 10,0$ m, $i_o = 0,00001$, $n = 0,016$) przy wzroście jego napełnienia od $(H-h)$ do $(H+h)$, a następnie do $2H$, gdzie $H = 4,0$ m, $h = 0,25$ m.

Rozwiązanie

Przy napełnieniu najmniejszym, $H-h = 3,75$ m, obwód zwilżony wynosi $O_{z1} = b + 2(H-h) = 17,5$ m, zaś przekrój czynny $S_1 = (H-h)b = 37,5$ m², toteż promień hydrauliczny wyniesie $R_{h1} = 2,14$ m. Korzystając ze wzoru Chézy'ego, określając współczynnik C wzorem Manninga (13.44) mamy wydatek początkowy:

$$Q_1 = 12,3 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Aby obliczyć wydatek przy napełnieniu $H+h = 4,25$ m, podzielmy koryto na trzy części – środkową ($O_{z2s} = 18,0$ m, $S_{2s} = 42,5$ m², $R_{h2s} = 2,36$ m) oraz dwie (w tym przypadku identyczne) części boczne ($O_{z2b} = 20,25$ m, $S_{2b} = 5,0$ m², $R_{h2b} = 0,25$ m). Wykorzystując znane już wzory, otrzymujemy:

$$Q_2 = Q_{2s} + 2Q_{2b} = 14,88 + 2 \cdot 0,39 = 15,66 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Dla porównania powtórzmy obliczenia dla napełnienia $(H+h)$, lecz traktując koryto jako jednodzielne. Mamy wtedy $O'_{z2} = 58,5$ m, $S'_{z2} = 52,5$ m², $R'_{h2} = 0,90$ m, co daje:

$$Q'_2 = 9,65 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Widzimy teraz, jak duże znaczenie ma właściwy tok obliczeń. Rzeczywisty przyrost wydatku wyniósł około 27%, podczas gdy (błędne) pominięcie zmiany charakteru koryta prowadzi do wniosku, że wydatek przy wzroście napełnienia spadł o 22%.

Przejdźmy teraz do napełnienia maksymalnego $2H = 8,0$ m. Zgodnie z rys. 4.24b mamy znów część środkową ($O_{z3s} = 18,0$ m, $S_{3s} = 80,0$ m², $R_{h3s} = 4,44$ m) oraz dwie jednakowe części boczne ($O_{z3b} = 24,0$ m, $S_{3b} = 80,0$ m², $R_{h3b} = 3,33$ m). Wydatek całkowity wyniesie:

$$Q_3 = Q_{3s} + 2Q_{3b} = 42,68 + 2 \cdot 35,23 = 113,14 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Jeżeli teraz potraktujemy koryto jako jednodzielne, to mamy $O'_{z3} = 66,0$ m, $S'_{z3} = 240,0$ m², $R'_{h3} = 3,64$ m, co daje

$$Q'_3 = 112,10 \text{ m}^3/\text{s}.$$

A więc, tak jak można się było spodziewać, przy dużej głębokości wody na obszarze zalewowym, rzeczywiście podkreślanie wielodzielności koryta w małym stopniu wpływa na wynik (a zwiększa czasochłonność obliczeń). ■

13.4.5. Przekrój najkorzystniejszy hydraulicznie

Rozważania nad zmiennością wydatku kanału wraz z jego napełnieniem wykazały, że przepływ zależy od kształtu przekroju poprzecznego strumienia. Za przekrój najbardziej korzystny (z punktu widzenia hydrauliki) uważamy taki, który przy danym przekroju czynnym i spadku podłużnym zapewnia największy wydatek cieczy, płynącej ruchem jednostajnym. Ze wzoru Chézy'ego wynika, że przekrój taki musi mieć maksymalny promień hydrauliczny, co przy stałym przekroju czynnym oznacza, że jego obwód zwilżony musi osiągać minimum.

Z geometrii wiadomo, że warunki powyższe spełnia przekrój kołowy, toteż on właśnie jest najbardziej korzystny pod względem hydraulicznym. Jednakże wykonanie kanału o przekroju kołowym jest kłopotliwe, toteż przekrój ten stosuje się prawie wyłącznie w postaci prefabrykowanych przewodów kołowych lub łupin półkolistych. W praktyce zaś najczęściej spotyka się koryta o przekrojach trapezowych. Zbadajmy teraz, jakie proporcje muszą zachodzić w takim przekroju, aby był on hydraulicznie korzystniejszy od innych trapezów.

Oznaczmy stosunek szerokości dna kanału trapezowego do jego głębokości przez $\varphi = b/h$. Korzystając ze znanych z geometrii zależności dla trapezu, mamy:

$$S = h^2(\varphi + m), \quad (13.61)$$

$$C_z = h \left(\varphi + 2\sqrt{1+m^2} \right). \quad (13.62)$$

W rozważanym przypadku $S = \text{const.}$ (z definicji) oraz $C_z \rightarrow \text{min.}$ Oznacza to, że $dS = 0$ oraz $dC_z = 0$. Obliczając różniczki zupełne funkcji S i C_z , mamy:

$$dS = h^2 d\varphi + 2(\varphi + m)hdh = 0,$$

$$dC_z = hd\varphi + \left(\varphi + 2\sqrt{1+m^2} \right) dh = 0.$$

Wyznaczając z ostatnich dwóch równości $d\varphi/dh$ dostajemy warunek:

$$\varphi = b/h = 2 \left(\sqrt{1+m^2} - m \right). \quad (13.63)$$

Podstawiając powyższe do wzoru na promień hydrauliczny, otrzymujemy:

$$R_h = \frac{S}{C_z} = \frac{h}{2}. \quad (13.64)$$

Z kolei przekształcając (13.63), po podstawieniu $m = \text{ctg}\alpha$, możemy napisać

$$\varphi = b/h = 2 \text{tg} \frac{\alpha}{2}. \quad (13.65)$$

W geometrii dowodzi się, że warunek powyższy oznacza, iż rozważany trapez jest opisany na półkolu. Podstawiając teraz dwie ostatnie relacje do (13.62), po przekształceniach otrzymujemy:

$$C_z^2 = 4S \left(\text{tg} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\sin \alpha} \right).$$

Wobec warunku $S = \text{const.}$ obwód zwilżony osiągnie wartość najmniejszą, gdy:

$$\frac{d(\text{tg}\alpha/2 + 1/\sin\alpha)}{d\alpha} = 0.$$

Po zróżniczkowaniu i rozwiązaniu powyższej relacji otrzymujemy jako rozwiązanie wartość $\alpha = 60^\circ$.

Ostatecznie więc możemy stwierdzić, że wśród przekrojów trapezowych, hydraulicznie najkorzystniejszym jest przekrój opisany na półkolu, w którym boczne skarpy nachylo-
ne są do poziomu pod kątem 60° .

W podobny sposób możemy badać inne kształty przekrojów poprzecznych, poszukując ich hydraulicznie najkorzystniejszych proporcji.

13.4.6. Ruch krytyczny

W paragrafie 13.2.3 zdefiniowaliśmy ważną kategorię ruchu, zwaną **przepływem krytycznym**. Zmienne w ruchu krytycznym spełniać muszą warunek (13.14), który możemy zapisać w postaci (13.21). Jeżeli zażądamy, aby ruchem krytycznym płynął strumień jednostajny i ustalony, to równocześnie spełniona musi być zależność (13.43), którą zapiszemy tu dla zmiennych krytycznych:

$$v_c = C\sqrt{R_{hc}i_c}. \quad (13.66)$$

Warunek (13.14) oraz relacja (13.66) zawierają trzy podstawowe zmienne przepływu podłużnego – prędkość średnią, napełnienie i spadek dna. Jeżeli więc rozważamy ustalony ruch krytyczny, to wystarczy podać jedną z nich, a dwie pozostałe można wyliczyć z tych zależności. Eliminując z nich prędkość średnią i pamiętając, że $R_h = S/C_z$, otrzymujemy wzór, określający spadek krytyczny:

$$i_c = \frac{gC_z}{\alpha C^2 B}. \quad (13.67)$$

W przypadku koryta o dużej szerokości ($B \gg h$) mamy $B \approx C_z$, dzięki czemu możemy ostatnią relację uprościć, otrzymując:

$$i_c \approx \frac{g}{C^2}. \quad (13.68)$$

Jest to istotna z praktycznego punktu widzenia relacja, która pozwala określić spodziewany rodzaj przepływu w korycie – gdy $i > i_c$, to ruch będzie rwący ($h < h_c$, $v > v_c$), zaś gdy $i < i_c$, to ruch będzie spokojny ($h > h_c$, $v < v_c$).

13.5. Przepływ ustalony i niejednostajny

13.5.1. Równanie profilu zwierciadła cieczy

W rozważanym tu przypadku ruchu niezmiennego w czasie, lecz zmieniającego się wzdłuż osi strumienia, równanie zachowania masy (13.28) przyjmuje postać (występuje tu tylko jedna zmienna niezależna x , toteż zamiast pochodnych cząstkowych stosujemy pochodne zwyczajne):

$$\frac{d(Sv)}{dx} = q_L, \quad (13.69)$$

zaś równanie zachowania pędu (13.29) możemy zapisać następująco (pomijając czony nietypowe, a w szczególności zmiany ciśnienia zewnętrznego oraz naprężenie wiatrowe)

$$v \frac{d(\alpha v)}{dt} + g \frac{dh}{dx} = gi_o - \frac{\tau_d}{\rho R_h}. \quad (13.70)$$

Uwzględniając, że $Sv = Q$, możemy scałkować równanie (13.69), otrzymując:

$$Q = Q_0 + \int_{x_0}^x q_L dx. \quad (13.71)$$

Oznacza to, że wydatek strumienia zasilanego niezmiennym w czasie dopływem bocznym zmienia się wzdłuż strumienia (rośnie dla dodatniego q_L , a maleje – dla ujemnego), poczynając od wartości Q_0 (dla przekroju $x = x_0$, uznanego za początkowy). Dzieliąc obie strony (13.71) przez przekrój czynnny $S(x)$, mamy

$$v(x) = v_0 + \frac{1}{S(x)} \int_{x_0}^x q_L dx. \quad (13.72)$$

W praktyce szczególnie często interesujący jest przypadek przepływu bez strumienia bocznego, gdy (13.69) przyjmuje postać:

$$\frac{d(vS)}{dx} = 0, \quad (13.73)$$

skąd:

$$Q = S(x)v(x) = \text{const}. \quad (13.74)$$

Aby wykorzystać równanie zachowania pędu, musimy określić naprężenie denne τ_d . Jak już powiedzieliśmy w punkcie 11.4.2.2 przy omawianiu przewodów zamkniętych, w hydraulice koryt otwartych dokonujemy uogólnienia wzorów opisujących tę wielkość, wyprowadzonych dla najprostszego przypadku ruchu ustalonego i jednostajnego, stosując je także w ruchu niejednostajnym. Trzeba tu wszakże pamiętać, że wobec większej złożoności pola prędkości mamy wtedy do czynienia ze wzrostem intensywności dyssypacji energii. **Uwzględnienie tego efektu w obliczeniach wymaga zwiększenia współczynnika strat liniowych.** Zagadnienie to nie jest jeszcze całkowicie rozpoznane. Orientacyjnie można powiedzieć [54], że dla koryt otwartych współczynnik Manninga określony dla ruchu jednostajnego (tab. 4) należy w ruchu niejednostajnym zwiększyć o około 75%.

Z tym zastrzeżeniem, naprężenia denne τ_d wyznaczamy według (13.42). Korzystając z dogodnej definicji spadku hydraulicznego (13.54), możemy w ruchu niejednostajnym napisać

$$i_f = \frac{dh_s}{dL} = \frac{v^2}{C^2 R_h} = \frac{Q^2}{C^2 S^2 R_h} = \frac{\tau_d}{\rho g R_h} \quad (13.75)$$

skąd

$$\tau_d = \rho g R_h i_f. \quad (13.76)$$

Przekształćmy teraz równanie (13.70). Korzystając z (13.74), możemy zastąpić w nim pochodną prędkości średniej przez pochodną głębokości, pisząc:

$$\frac{d(\alpha v)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha Q}{Bh} \right) = -\alpha \frac{Q}{Bh^2} \frac{dh}{dx} = -\alpha \frac{v}{h} \frac{dh}{dx}. \quad (13.77)$$

Podstawiając ten związek do (13.70) oraz wyrażając naprężenia denne przez spadek hydrauliczny według (13.76), po wykonaniu paru prostych przekształceń otrzymujemy:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{i_o - i_f}{1 - \alpha \cdot Fr^2}. \quad (13.78)$$

W zapisie tym wykorzystaliśmy definicję **liczby Froude'a** (13.23). Jest to równanie różniczkowe, opisujące zmienność linii swobodnego zwierciadła cieczy w przepływie podłużnym. Relacja ta ma bardzo duże znaczenie praktyczne. Stosowana jest w szeroko pojętej hydrotechnice do wyznaczania kształtu swobodnej powierzchni wody w kanałach otwartych oraz w rejonie budowli i obiektów hydrotechnicznych.

13.5.2. Warunek graniczny

Zależność (13.78) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym, pierwszego rzędu. Jego rozwiązaniem jest funkcja $h(x)$, opisująca zmianę głębokości średniej strumienia wzdłuż jego osi. Obszarem rozwiązania jest odcinek strumienia ze swobodną powierzchnią, od dowolnego punktu początkowego $x = x_0$, do dowolnego punktu $x = x_k$, traktowanego jako końcowy. Wewnątrz odcinka nie mogą występować obszary, wykluczające stosowanie modelu ruchu podłużnego (jak na przykład jaz, śluza, dopływ...).

Przed rozwiązaniem omawianego tu równania, musimy uzupełnić je niezbędnym warunkiem granicznym. Ma on postać następującego warunku początkowego:

$$h(x = x_0) = h_0. \quad (13.79)$$

Relacja ta może być sformułowana wtedy, gdy znamy początkowe położenie zwierciadła wody. Jednakże w szeregu przypadkach nie mamy informacji o wartości h_0 , natomiast znamy położenie zwierciadła cieczy w przekroju końcowym ($x = x_k$). Jest to szczególnie częsta sytuacja, gdy przekrojem końcowym jest ujście rozważanego odcinka ciekłu do obszaru wypełnionego, a na tyle dużego (morze, jezioro, duża rzeka), że jego napelnienie nie zależy od dopływu (lub zależy na tyle mało, że wpływ jego można pominąć). W takim razie jako warunek graniczny można przyjąć:

$$h(x = x_k) = h_k \quad (13.80)$$

i poszukiwać krzywej całkowitej $h(x)$ równania (13.78), przechodzącej przez punkt określony tą relacją.

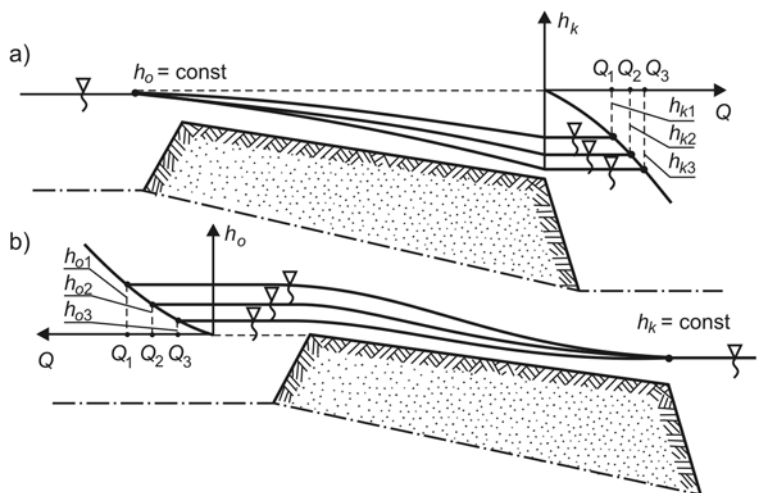
13.5.3. Wyznaczanie linii zwierciadła cieczy

Określanie kształtu podłużnego profilu swobodnego zwierciadła cieczy za pomocą równania (13.78) z warunkiem granicznym (13.79) lub (13.80) wymaga znajomości wydatku strumienia Q . Jest to niezbędne dla wyznaczania prędkości przepływu w kolejnych przekrojach poprzecznych, co z kolei jest niezbędne do obliczenia spadku hydraulicznego (13.75) oraz liczby Froude'a (3). Można powiedzieć, że obliczamy wtedy współrzędne linii swobodnego zwierciadła cieczy, dla której znamy wydatek przepływu oraz jeden punkt „zaczepienia” tej linii. W takiej sytuacji rzędna swobodnej powierzchni na drugim końcu

rozważanego odcinka strumienia jest wynikiem obliczeń („dostosowuje się” ona do „wymuszonego” przepływu).

Inny wariant zadania powstaje, gdy znamy położenie zwierciadła wody w obu skrajnych przekrojach (to jest znamy oba wyżej podane warunki brzegowe). Wydatek kanału Q jest wtedy wielkością niewiadomą („wymuszamy” skrajne rzędne linii zwierciadła cieczy, do których „dostosowuje się” wydatek). Z taką sytuacją mamy do czynienia na przykład wtedy, gdy rozważany odcinek strumienia bierze początek w zbiorniku o znanej rzędnej h_0 , zaś uchodzi na końcu do podobnego zbiornika o rzędnej zwierciadła h_k .

W równaniu (13.78) opisującym kształt szukanej linii występuje tylko jedna rzędna (h_0 lub h_k), jako warunek graniczny, a także musimy znać nieokreśloną przecięź prędkość przepływu. Należy więc posłużyć się jakąś odmianą metody kolejnych przybliżeń. Dogodny schemat działania pokazano na rys. 13.13. Przyjmujemy wtedy (dowolną w ogólnym przypadku, lecz rozsądnie oszacowaną) pewną wartość wydatku Q_1 oraz jeden ze znanych warunków granicznych i wyznaczamy przebieg swobodnej powierzchni (równanie (13.78)), a tym samym rzędną zwierciadła na drugim brzegu (h_{01} lub h_{k1}). W ogólnym przypadku będzie ona różna od wartości znanej, więc powtórzmy ten cykl dla następnych wartości Q_2, Q_3, \dots , otrzymując roboczy wykres $Q(h_k)$, jak na rys. 13.13a, lub $Q(h_0)$, jak na rys. 13.13b. Z wykresu tego odczytujemy dla znanego drugiego warunku brzegowego właściwy wydatek Q , a następnie wyznaczamy rzeczywisty układ zwierciadła cieczy.



Rys. 13.13. Wyznaczanie profilu swobodnej powierzchni przy dwóch warunkach granicznych i nieznanym wydatku cieczy

13.5.4. Zastosowanie równania Bernoulliego

Przepływ ustalony i niejednostajny jest typowym zagadnieniem, które może być opisane za pomocą równania Bernoulliego (patrz rozdz. 6). Przyjmując schemat jak na rys. 13.14, możemy następująco zapisać równanie (6.13):

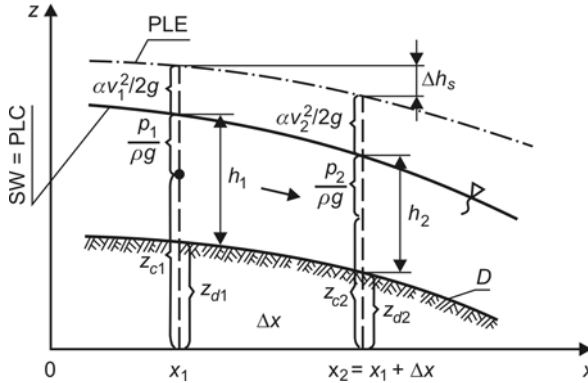
$$\left(\frac{\alpha v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_{c1} \right) - \left(\frac{\alpha v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_{c2} \right) = \Delta h_s \quad (13.81)$$

Równanie ciągłości (13.74) pozwala napisać:

$$v_1 = \frac{Q}{Bh_1}, \quad v_2 = \frac{Q}{Bh_2}, \quad (13.82)$$

natomiast wobec hydrostatycznego rozkładu ciśnienia (4.22) mamy:

$$\frac{p}{\rho g} + z_c = z_d + h. \quad (13.83)$$



Rys. 13.14. Schemat do zastosowania równania Bernoulliego:
D – dno, SW – swobodna powierzchnia, PLC – piezometryczna linia ciśnienia,
PLE – piezometryczna linia energii

Podstawiając dwie ostatnie relacje do (13.81), po obustronnym podzieleniu przez Δx , otrzymujemy (pomijając zmienność B oraz α wzdłuż strumienia):

$$\frac{\alpha Q^2}{2gB^2\Delta x} \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) + i_o + \frac{h_1 - h_2}{\Delta x} = i_f. \quad (13.84)$$

Wyrażenie w nawiasie możemy przekształcić następująco (po sprowadzeniu do wspólnego mianownika i po zastąpieniu głębokości h_1 i h_2 ich wartością średnią):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2} \right) = \frac{h_2^2 - h_1^2}{2h_1^2 h_2^2} = \frac{(h_2 - h_1)(h_2 + h_1)}{2h_1^2 h_2^2} \approx \frac{(h_2 - h_1)}{\bar{h}^3}. \quad (13.85)$$

Podstawiając powyższe do (13.84) i korzystając z definicji liczby Froude'a (13.23), możemy ostatecznie napisać:

$$\frac{h_1 - h_2}{\Delta x} = \frac{i_o - i_f}{1 - \alpha Fr^2}. \quad (13.86)$$

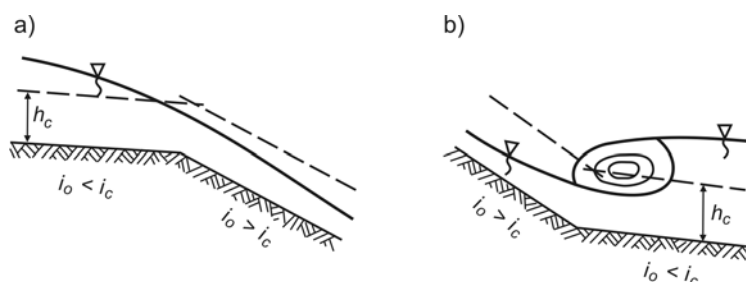
Jest to różnicowy odpowiednik równania (13.78), jak bowiem wiemy [6, 63], iloraz różnicowy jest przybliżeniem pochodnej:

$$\frac{h_2 - h_1}{\Delta x} \approx \frac{dh}{dx}. \quad (13.87)$$

Pokazaliśmy w ten sposób, że praktycznie ważna relacja, opisująca kształt podłużnego profilu zwierciadła wody, może być uzyskana bezpośrednio z równania Bernoulliego. Wadą relacji (13.86) jest jej przybliżony sens. Została ona bowiem wyprowadzona przy użyciu uśrednionego równania Bernoulliego, z wykorzystaniem pewnych uproszczeń. Tym samym wyprowadzenie takie nie daje możliwości przeanalizowania wpływu poszczególnych czynników, jaką stwarza zastosowanie metody dokładnej.

13.5.5. Zmiana charakteru przepływu

W sytuacjach rzeczywistych spadek dna koryta ulega wzdłuż jego osi zmianom, niejednokrotnie znacznym (na przykład dla strumieni w obszarach podgórskich, spływających ze zboczy na teren doliny). Układy zwierciadła wody (w ujęciu jakościowym) przy zmianie spadku z podkrytycznego na nadkrytyczny (i odwrotnie) pokazano na rys. 13.15.



Rys. 13.15. Przejście ruchu spokojnego w rwący (a) i odwrotnie (b)

Gdy spadek początkowy jest mniejszy od krytycznego ($i_0 < i_c$), strumień przemieszcza się ruchem spokojnym. Przejście w ruch rwący (gdy $i_0 > i_c$) odbywa się po krzywej łagodnej (rys. 13.15a), przy czym głębokość krytyczna występuje nieco powyżej punktu załamania dna. W sytuacji odwrotnej przejście łagodne można uzyskać tylko wyjątkowo. Najczęściej w rejonie przejścia warstwy rwącej w mającą większą grubość warstwę spokojną (rys. 13.15b) pojawia się charakterystyczny wir o poziomej osi (wirujący „walec” cieczy), noszący nazwę **odskoku hydraulicznego** lub **odskoku Bidone’a** (patrz rozdz. 16).

13.6. Przepływ nieustalony i niejednostajny

13.6.1. Równania de Saint-Venanta

Ogólne równania zmiennego w czasie przepływu podłużnego w korytach otwartych (13.30) i (13.31) rozważymy w wersji podstawowej. Pozwoli to na zwiększenie czytelności zapisu, bez obniżenia przydatności otrzymanych wyników. Przyjmijmy mianowicie, że obwód zwilżony strumienia ma charakter jednorodny, a naprężenia na swobodnej powierzchni można pominąć, podobnie jak i dopływ boczny. Wyrażając ponadto opór koryta przez pojęcie spadku hydraulicznego (13.55), otrzymamy następujące:

— równanie zachowania masy (równanie ciągłości):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad (13.88)$$

— równanie zachowania pędu (równanie dynamiczne):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(i_o - i_f). \quad (13.89)$$

Obie te równości tworzą układ, zamknięty ze względu na dwie zmienne zależne – średnią prędkość przepływu v i średnią głębokość strumienia h . Nosi on nazwę **układu równań de Saint-Venanta**.

Obszarem, w którym poszukujemy rozwiązania równań de Saint-Venanta, jest odcinek kanału otwartego o dowolnej długości, o warunkach przepływu umożliwiających stosowanie modelu podłużnego. W szczególności odcinek ten nie może zawierać punktów, w których występują dopływy lub rozwidlenia oraz/albo połączenia. Jeżeli chcemy zastosować omawiane tu narzędzie do opisu sieci kanałów otwartych, dzielimy ją na odcinki jednorodne, dla których ważne są ostatnie równania. Sposób określania związku między stykającymi się odcinkami omówiony będzie w następnym rozdziale.

Aby zbadać charakter omawianych równań i w konsekwencji – określić sposób formułowania opisanych za jego pomocą problemów przepływowych, sprowadźmy tworzony przez nie układ do **postaci kanonicznej** (patrz też par. 11.5.2). W tym celu wykorzystajmy tożsamościowe przekształcenie, zgodnie z którym:

$$g \frac{\partial h}{\partial t} = 2\sqrt{gh} \frac{\partial \sqrt{gh}}{\partial t}, \quad g \frac{\partial h}{\partial x} = 2\sqrt{gh} \frac{\partial \sqrt{gh}}{\partial x}. \quad (13.90)$$

Podstawmy te wartości do układu wyjściowego ((13.88), (13.89)) i podzielmy pierwsze z tych równań obustronnie przez pierwiastek z iloczynu gh , a następnie dodajmy oraz odejmijmy stronami od siebie otrzymane postacie obu równań. Po wykonaniu oczywistych działań i uporządkowaniu zapisu, otrzymamy interesującą nas postać kanoniczną dyskutowanego układu:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial(v - 2\sqrt{gh})}{\partial t} + (v - \sqrt{gh}) \frac{\partial(v - 2\sqrt{gh})}{\partial x} &= g(i_o - i_f) \\ \frac{\partial(v + 2\sqrt{gh})}{\partial t} + (v + \sqrt{gh}) \frac{\partial(v + 2\sqrt{gh})}{\partial x} &= g(i_o - i_f) \end{aligned} \right\}. \quad (13.91)$$

Zgodnie z zasadami klasyfikowania równań różniczkowych i ich układów [4, 15] stwierdzamy, że jest to **układ równań hiperbolicznych**, który opisuje zjawiska falowe. Tak więc zaburzenie prędkości oraz/albo głębokości warstwy cieczy w korycie ze swobodną powierzchnią przenoszone jest jako fala z prędkościami:

$$k_1 = \frac{dx_1}{dt} = v - \sqrt{gh}, \quad k_2 = \frac{dx_2}{dt} = v + \sqrt{gh}. \quad (13.92)$$

Znaki prawych stron powyższych równań zależą od konkretnych wartości funkcji v lub h . Porównując (13.92) z definicją liczby Froude'a (13.23) zauważamy, że znaki te zależą od rodzaju przepływu w korycie. Gdy ma on charakter spokojny ($Fr < 1$), wtedy $v < \sqrt{gh}$, wobec czego $k_1 < 0$, zaś $k_2 > 0$. Oznacza to, że rozważane zaburzenie stanu wody rozchodzi się wzdłuż kanału, w obie jego strony, przy czym pod względem ilościowym ulega ono zmianom zgodnie z symboliką pochodnej substancjalnej (1.70):

$$\frac{D(v-2\sqrt{gh})}{Dt} = g(i_o - i_f), \quad \frac{D(v+2\sqrt{gh})}{Dt} = g(i_o - i_f). \quad (13.93)$$

W przypadku ruchu rwącego ($Fr > 1$) zachodzi $v > \sqrt{gh}$, wobec czego obie prędkości k_1 i k_2 mają ten sam znak. Tym samym zaburzenie stanu cieczy przenosi się tylko wzdłuż kierunku przepływu.

Uwagi powyższe mają bardzo istotne znaczenie praktyczne. Oznaczają one mianowicie, że w ruchu rwącym informacja o zaburzeniu przepływu nie może przenosić się „pod prąd”, a jedynie „spływa” wraz z cieczą. Innymi słowy, wpływ zaburzenia przepływu w ustalonym przekroju obejmuje jedynie przekroje niższe, podczas gdy w przekrojach górnych przepływ kształtuje się niezależnie od zaburzenia. Odmiennie wygląda sytuacja w ruchu spokojnym, gdy zaburzenie przepływu rozchodzi się zarówno w dół, jak i w górę strumienia. Prędkość rozchodzenia się tego zaburzenia jest z reguły dość znaczna. Jeżeli przyjąć, że średnia prędkość przepływu w rzekach jest rzędu 1,0 m/s, a głębokość rzędu 2–3 m, to $\sqrt{gh} \approx 5,0$ m/s $\gg v \approx 1,0$ m/s. Wartość \sqrt{gh} nosi nazwę **prędkości rozchodzenia się małego zaburzenia**. Termin „małe” oznacza takie zakłócenie przepływu, które nie wyklucza możliwości zastosowania modelu podłużnego. Zgodnie z (13.21) możemy stwierdzić, że prędkość rozchodzenia się zaburzenia w cieczy jest równa prędkości ruchu krytycznego v_c (patrz par. 13.2.3) przy danej głębokości h strumienia. Jest to oczywiście prędkość obliczeniowa, nie wolno jej mylić z prędkością przemieszczania się masy cieczy v .

Fale, kształtujące się wskutek zaburzenia przepływu, a opisywane układem równań de Saint-Venanta, mają charakter fal długich. Wynika to z założeń, jakie czynimy przy wprowadzaniu modelu przepływu podłużnego (patrz podrozdz. 2.6). Aby podkreślić, jak niewielkie są tu zmiany głębokości, w porównaniu z długością obszaru objętego zakłóceniem, często nazywamy je **falami długimi w wodzie płytkiej**. Mogą one być zarówno okresowe, jak i nieokresowe. Zależy to od charakteru wymuszeń, generujących te fale.

Na zakończenie tego podrozdziału dodajmy, że postać (13.88, 13.89) równań de Saint-Venanta nie jest jedyną możliwą. Wybraliśmy ją, gdyż najlepiej nadaje się do przeprowadzenia analizy teoretycznej, a w szczególności do sprowadzania do postaci kanonicznej. W praktyce często stosowane są nieco inne, choć w pełni równoważne, postacie tego układu. Jedną z nich składa się z równania zachowania masy (13.28) oraz równania zachowania pędu, w którym prędkość średnią zastępujemy wydatkiem, zgodnie ze znaną już relacją $Q = vS$, jak też pozostawiamy dopływ boczny, co daje:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_L, \quad (13.94)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + gS \frac{\partial h}{\partial x} = gS(i_o - i_f) + q_L \frac{Q}{S}. \quad (13.95)$$

W innej wersji, korzystając z relacji (13.5) kładziemy:

$$\frac{\partial h}{\partial x} - i_o = \frac{\partial z_g}{\partial x} \quad (13.96)$$

i piszemy równanie dynamiczne (13.95) następująco:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{S} \right) + gS \frac{\partial z_g}{\partial x} = -gSi_f + q_L \frac{Q}{S}. \quad (13.97)$$

Możemy więc posługiwać się przynajmniej trzema równoważnymi zestawami zmiennych zależnych:

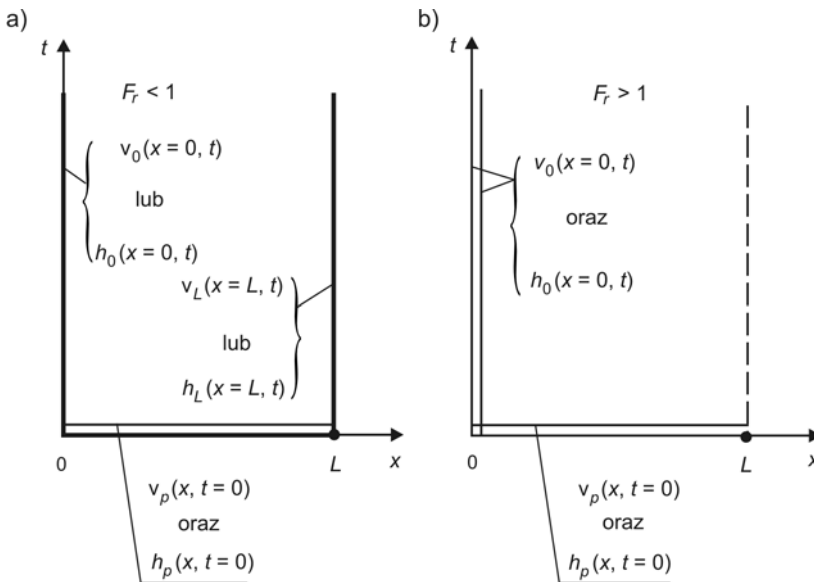
- prędkość średnia v i głębokość h (układ w postaci (13.88), (13.89)),
- wydatek Q i przekrój czynny S (układ w postaci (13.94), (13.95)),
- wydatek Q i stan wody z_g (układ w postaci (13.94), (13.97)).

13.6.2. Formułowanie zagadnień

Jak wiadomo z teorii równań różniczkowych [15, [27, 47], dla układów hiperbolicznych typowym zadaniem jest **zagadnienie początkowo-brzegowe**. Jego istotą jest określenie **warunku początkowego**, który ma postać dwóch funkcji zmiennej x , opisujących przebieg zmiennych zależnych (v oraz h) w chwili uznawanej za początkową ($t = 0$). Symbolicznie można to zapisać następująco:

$$v_p = v_p(x, t = 0) \quad \text{oraz} \quad h_p = h_p(x, t = 0). \quad (13.98)$$

Warunek ten określa stan początkowy układu, czyli taki stan, którego ewolucja w czasie, opisana równaniami de Saint-Venanta, nas interesuje. Często określenie rzeczywistego stanu początkowego jest trudne, lub wręcz niemożliwe. W takich sytuacjach stosuje się różne metody uproszczone lub rozwiązania zastępcze [47]. Szczególnie przydatne jest tu przyjęcie warunków ruchu jednostajnego i ustalonego (podrozdz. 13.4), przy czym konieczne jest wtedy możliwie dokładne odtworzenie przebiegu czynników wywołujących zmienność stanu układu.



Rys. 13.16. Zagadnienie początkowo-brzegowe dla równań de Saint-Venanta:
a) ruch spokojny, b) ruch rwący

Czynniki te tworzą **warunki brzegowe**. Sposób ich postawienia jest uzależniony od charakteru przepływu. Dla **ruchu spokojnego**, gdy zgodnie z wynikami rozważań poprzednie-

go paragrafu informacja o zaburzeniu stanu rozchodzi się w obie strony strumienia, musimy zadać po jednym warunku dla każdego przekroju brzegowego (rys. 13.16a), co symbolicznie zapiszemy w następujący sposób:

gdy $Fr < 1$: dla $x = 0$ zadajemy

$$v_0 = v_0(x = 0, t) \text{ lub } h_0 = h_0(x = 0, t),$$

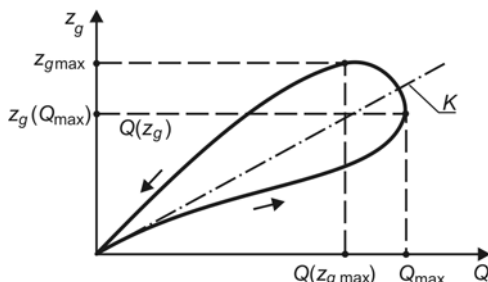
zaś dla $x = L$ zadajemy

$$v_L = v_L(x = L, t) \text{ lub } h_L = h_L(x = L, t). \quad (13.99)$$

W przypadku **ruchu rwącego**, gdy informacja o zaburzeniu stanu strumienia nie może przenosić się pod prąd, oba warunki brzegowe zadajemy na tym samym brzegu (rys. 13.16b), czyli:

gdy $Fr > 1$: dla $x = 0$ zadajemy

$$v_0 = v_0(x = 0, t) \text{ oraz } h_0 = h_0(x = 0, t). \quad (13.100)$$



Rys. 13.17. Histereza krzywej konsumpcyjnej

Wariantowo możemy każdy z wyżej wymienionych warunków brzegowych zastąpić związkiem funkcyjnym v i h w danym przekroju. Związek taki nazwalibyśmy krzywą prędkości $v(h)$ lub krzywą wydatku $Q(h)$ i omówiliśmy w par. 13.4.3. W hydrologii wykorzystuje się relację pokrewną, wiążąc wydatek rzeki Q ze stanem wody z_g (rys. 13.17). Relacja $Q(z_g)$ nosi nazwę **krzywej konsumpcyjnej**.

Istotnym mankamentem krzywej konsumpcyjnej i relacji pokrewnych jest ich niejednoznaczność w przepływach niejednostajnych. Jak już wiemy (patrz podrozdz. 13.5), w przepływie takim wydatek zależy nie tylko od napełnienia koryta (równoważnego jego stanowi, określonego przez rzędną swobodnej powierzchni), ale też od spadku swobodnej powierzchni. Tym samym dla jednakowych napełnień w kanale mogą występować różne natężenia przepływu. W korytach naturalnych (rzekach, kanałach) na szczęście występują pewne prawidłowości w czasie wzbierania i opadania fal powodziowych, dzięki czemu krzywa konsumpcyjna wykazuje tylko jedną główną „pętlę”, obrazującą zjawisko **histerezy** tej krzywej (rys. 13.17). W praktyce posługujemy się „osią” tej „zapętlonej” krzywej (linia K na rys. 13.17). Histereza jest źródłem istotnego błędu przy rozwiązywaniu równań de Saint-Venanta.

13.6.3. Rozwiązywanie zagadnień

Jak zawsze, gdy rozważamy model o wyższym stopniu złożoności, kluczowe znaczenie dla dokładności i przydatności wyników ma stopień, w jakim wszelkie niezbędne dla rozwiązania równań informacje odpowiadają rzeczywistości. Informacje te obejmują:

- warunki początkowe i brzegowe,
- opis kształtu oraz własności rozważanego obszaru,
- współczynniki modelu.

W zagadnieniach inżynierii środowiska, jak też dziedzinach pokrewnych, wymóg ten można na odpowiednim poziomie spełnić dla procesów mających raczej charakter naturalny, a zachodzących w większej skali. Chodzi tu głównie o zagadnienia typu hydrologicznego, a szczególnie – nieustalone przepływy w rzekach i kanałach, w tym zjawiska powodziowe. Ich skala i znaczenie gospodarcze są tego rzędu, że wskazane jest poniesienie kosztów prowadzenia obliczeń prognostycznych lub symulacyjnych na takim poziomie złożoności. Co więcej, przebieg rozważanych tu procesów jednostkowych (opady atmosferyczne, spływ powierzchniowy, topnienie pokrywy śniegowej...) wykazują poziom regularności zapewniający odpowiednią dokładność informacji wejściowych.

Omawiane równania rozwiązują się praktycznie zawsze za pomocą przybliżonych metod numerycznych [6, 62], stosując maszyny liczące. Koszt niezbędnego oprogramowania jest na tyle wysoki, że zasadą jest posługiwanie się tu komercyjnymi systemami obliczeniowymi. Muszą one być możliwie uniwersalne, lecz mimo to stosuje się w nich różne odmiany omawianych tu modeli. Zadaniem osoby zainteresowanej ich wykorzystaniem jest staranna analiza istniejących możliwości i uważny dobór wersji obliczeniowej, a także poprawne sformułowanie niezbędnych informacji wejściowych.

Bardzo istotną rolę odgrywa tu właściwy opis strat energii mechanicznej. Tak jak i w przypadku przewodów zamkniętych (pkt 11.5.2.3), także tutaj stosuje się relacje opracowane dla przypadku prostszego (13.42, 13.75), lecz empiryczny współczynnik strat należy zwiększyć. Przy braku możliwości doświadczalnego oszacowania tego współczynnika, można stosować metodę przybliżoną [54], mnożąc współczynnik Manninga przez 1,5–2,0.

W trakcie rozwiązywania układu de Saint-Venanta dobrze jest obserwować uzyskiwane wyniki. Jest to ważne szczególnie wtedy, gdy przewidujemy podczas opisywanego zjawiska przejście ruchu spokojnego w rwący, lub odwrotnie. Może wtedy być konieczna korekta warunków brzegowych (rys. 13.16).

13.6.4. Uproszczone postacie równań ruchu

Istnieje kilka uproszczonych wersji układu de Saint-Venanta. W tym paragrafie omówimy dwie – równania fali kinematycznej oraz fali dyfuzyjnej. Są to bowiem najczęściej stosowane i najmocniej ugruntowane w praktyce przybliżenia dla rozważanego tu przepływu nieustalonego i niejednostajnego.

W modelu **fali kinematycznej** zakłada się, że bilans masy płynącej cieczy jest opisany równaniem ciągłości jak w układzie wyjściowym (13.88), natomiast wprowadza się daleko idące uproszczenie w bilansie sił. Przyjmuje się mianowicie, że dominujące znaczenie ma tu napędzająca ciecz siła ciężkości oraz równoważąca ją siła oporu, zaś pozostałe siły można pominąć. Innymi słowy, równanie dynamiczne sprowadzamy tu do postaci wzoru Chézy (13.49). Model taki stosowany jest do opisu przepływów wzdłuż rzek, nieznajdujących się pod działaniem budowli hydrotechnicznych i pozbawionych dopływów, a także do opisu spływu powierzchniowego wody, a opisany jest równaniami:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (13.101)$$

$$Q = C\sqrt{i_0 S/C_z} S. \quad (13.102)$$

W drugim z rozważanych przypadków, modelu **fali dyfuzyjnej**, odrzucamy człony adwekcyjne w równaniu zachowania pędu, pozostawiając wszystkie inne. Oznacza to, że model ten stosować można dla przepływów o niedużej zmienności wydatku w czasie, przy małej liczbie Froude'a i dużej szorstkości łożyska strumienia. W klasycznej wersji falę dyfuzyjną opisać można równaniami [47]:

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad (13.103)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = i_o - i_f = i_o - \frac{n^2 Q^2}{B^2 h^{10/3}}. \quad (13.104)$$

Każdą z tych wersji trzeba przed rozwiązaniem uzupełnić odpowiednimi warunkami granicznymi [47]. Zagadnienia opisane tymi zależnościami mają już silne odniesienia techniczne, toteż stosowane są przy rozważaniu konkretnych problemów technicznych.

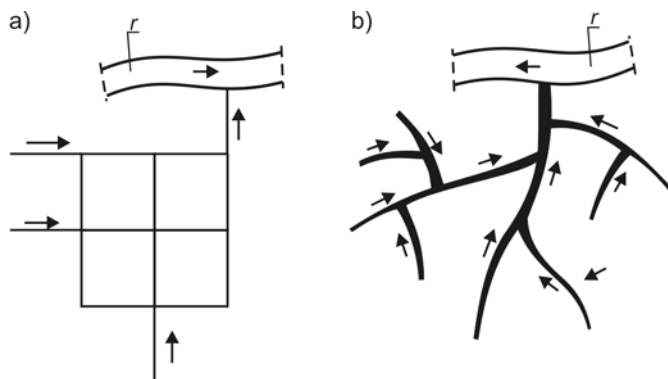
14. Ruch cieczy w sieciach kanałów otwartych

14.1. Ogólna charakterystyka sieci

Z sieciami kanałów otwartych mamy do czynienia w wielu zagadnieniach inżynierii środowiska oraz hydrotechniki. Najbardziej typowymi układami takich sieci są systemy rzeczne (rzeki główne wraz z dopływami), systemy melioracyjne (sieci rowów oraz drenów nawadniających i odwadniających) oraz sieci kanalizacyjne (kanalizacja bytowo-gospodarcza, deszczowa, ogólnospławna, przemysłowa). Z reguły będą to układy zbiorcze (rys. 14.1b).

Podobnie jak to było w przypadku przewodów zamkniętych (rozd. 12), celowe jest zestawienie elementów sieci kanałów otwartych. Modelem hydraulicznym takiego układu jest więc system N_0 odcinków kanałów otwartych, połączonych w N_w węzłach. Węzeł może łączyć teoretycznie dowolną liczbę odcinków (ale co najmniej trzy). Swobodne końce odcinków mogą być punktami początkowymi (w liczbie N_p) lub wylotami (w liczbie N_k).

Odcinki sieci mogą tworzyć obiegi zamknięte (mówimy wtedy o **siecach pierścieniowych** – rys. 14.1a) lub nie (taką sieć nazywamy **rozgałęzioną** – rys. 14.1b). Sieci rozgałęzione tworzą z reguły systemy rzeczne i układy kanalizacyjne. Układy pierścieniowe stosowane są głównie w sieciach przewodów zamkniętych (rozd. 12). Pierścieniowe sieci kanałów otwartych napotkać można w systemach melioracyjnych.



Rys. 14.1. Rodzaje sieci kanałów otwartych: a) pierścieniowa, b) rozgałęziona; r – rzeka

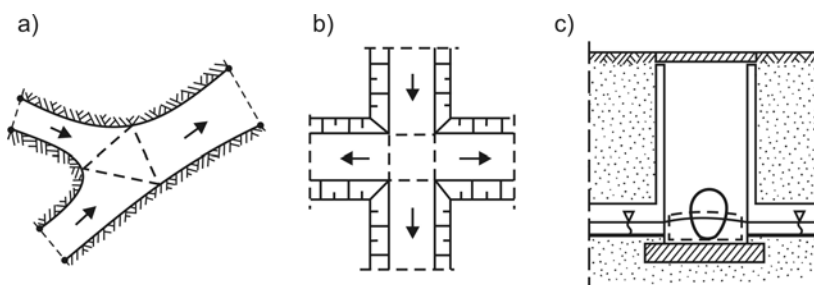
Przepływy w sieciach kanałów otwartych mogą być zmienne w czasie lub ustalone, lecz praktycznie zawsze będą miały charakter niejednostajny. Wynika to z faktu, że strumienie wypływające z węzła muszą ulec stabilizacji na odcinku początkowym (patrz rys. 13.6), toteż ruch jednostajny może w nich panować tylko na pewnej części każdego z odcinków. Tym niemniej, w praktyce inżynierskiej spotyka się uproszczone metody opisu pracy sieci, bazujące na założeniu ruchu ustalonego i jednostajnego.

14.2. Połączenia i punkty skrajne odcinków sieci

Geometryczno-funkcyjny opis rozważanych tu układów jest w istocie w pełni analogiczny do charakterystyki sieci przewodów zamkniętych. Tak więc miejsca, w których łączą się tworzące sieć odcinki kanałów otwartych oraz/albo strumienie dopływające lub odpływające z sieci, nazywamy **węzłami**.

Przepływy w węzłach mają bardzo złożony charakter. Wyróżniamy dwa typy połączeń, zależnie od ich podatności na sytuację w łączonych przez nie kanałach – węzły punktowe oraz zbiorniki. Klasyfikacja ta ma charakter umowny, gdyż w praktyce zawsze można napotkać połączenie o własnościach mieszanych, ale wybór sposobu jego traktowania z reguły nie nastęcza trudności.

O **węzłach punktowych** mówimy wtedy, gdy obszar wyznaczony przez skrajne przekroje łączących się strumieni (to jest przez przekroje końcowe strumieni dopływających i przez przekroje początkowe strumieni odpływających) jest na tyle nieduży, że czas transformacji strumieni dopływowych w strumienie odpływowe jest pomijalnie krótki, a pole prędkości cieczy w obrębie połączenia jest związane praktycznie tylko z dynamiką tych strumieni.



Rys. 14.2. Schematy węzłów punktowych:
a) dopływ rzeki, b) rowy melioracyjne, c) studzienka kanalizacyjna

Jako przykłady węzłów punktowych (rys. 14.2) podać można ujścia dopływów rzecznych do rzek głównych, połączenia rowów melioracyjnych, czy studzienki kanalizacyjne i drenażowe, przy czym podczas dużych natężeń przepływu w sieci, studzienki takie mogą już gromadzić ciecz (czyli wykazywać **retencję**). Funkcjonują wtedy jak zbiorniki, których typowymi przykładami są jeziora przepływowe i zbiorniki zaporowe. Bilans strumieni dopływających i wypływających z węzła retencyjnego (zbiornika) omówiliśmy w par. 12.2.2. Wynikające z niego **równanie ciągłości w węzle retencyjnym** ma postać:

$$\sum Q_{\text{dopl.}} - \sum Q_{\text{odpl.}} = \frac{dV}{dt} \quad (14.1)$$

Wykorzystanie tego równania jest uwarunkowane rozmiarami węzła.

Kwestię oszacowania tych rozmiarów dogodnie jest rozważyć na tle kształtu swobodnej powierzchni cieczy w układzie. Napotkać można dwa typy takiego ukształtowania – „zróżnicowane” lub „płaskie”. Z pierwszym przypadkiem mamy do czynienia wtedy, gdy węzeł zawiera takie jednostkowe urządzenia hydrauliczne, jak przelewy, progi lub otwory, albo gdy powstaje w jego obrębie odskok hydrauliczny (rozd. 16). Jednak sytuacje takie nie są zbyt częste, a z reguły węzeł ma charakter prostego połączenia, skutkiem czego po-

łożenie zwierciadła wody w jego rejonie niewiele odbiega od poziomu. Jest ono co prawda zniekształcone przez zaburzenia powierzchniowe (zafalowania, odbicia, rozbryzgi), ale stanowią one tylko niedużą (rzędu paru procent) część głębokości średniej h . Jeśli nawet w jednym z kanałów dopływowych wystąpi duże napełnienie, a w innym dopływowym małe, to duże napełnienie spowoduje wzrost głębokości cieczy w węźle oraz wywoła spiętrzenie lub nawet przepływ zwrotny w kanale o małym napełnieniu („podtopienie”). Tak więc, w sposób co prawda przybliżony, lecz z wystarczającą do celów praktycznych dokładnością, możemy bardzo często przyjąć [73], że poziom wody w obszarze węzła, dla którego odległości między wlotami i wylotami nie są duże, jest stały i równy dla wszystkich skrajnych przekrojów łączących się w tym węźle kanałów. Definiując dla węzła jego pole powierzchni w rzucie na płaszczyznę poziomą S , mamy:

$$V = S h, \quad (14.2)$$

co po podstawieniu do (14.1) daje:

$$S \frac{dh}{dt} = \sum Q_{\text{dopl}} - \sum Q_{\text{odpl}}. \quad (14.3)$$

Jest to bardzo wygodna w zastosowaniach postać równania ciągłości w węźle retencyjnym o niedużych rozmiarach. Dla przepływów ustalonych oraz dla węzłów punktowych (bez retencji) mamy oczywiście

$$\sum Q_{\text{dopl}} = \sum Q_{\text{odpl}}. \quad (14.4)$$

Omówione powyżej, powszechnie stosowane w praktyce, założenie o stałości rzędnej zwierciadła wody w obrębie węzła jest równoznaczne z pominięciem strat energii mechanicznej podczas przepływu przez połączenie.

Inaczej rzecz się ma dla rozległych węzłów retencyjnych, czyli dla typowych zbiorników. Używamy tego terminu wtedy, gdy między skrajnymi przekrojami łączących się kanałów występuje znaczny obszar wypełniony cieczą, na tyle duży, że czas transformacji przepływu z kanałów dopływowych do odpływowych jest znaczny i nie może być pominięty. Pole prędkości cieczy w zbiorniku jest określone nie tylko przez strumienie wlotowe i wylotowe, ale także (często w głównej mierze) przez czynniki oddziałujące na sam zbiornik, charakteryzujący się własną dynamiką.

Właśnie w takich zbiornikach zasadniczą rolę odgrywa retencja. Niecelowe jest dla nich stosowanie całkowitej postaci równania zachowania masy (14.1), gdyż do opisu transformacji przepływu przez zbiornik musimy określić pole prędkości cieczy w jego wnętrzu. W tym celu stosować należy pełne równania ruchu przestrzennego, lub ich modele uproszczone, omówione w pierwszej części tej książki.

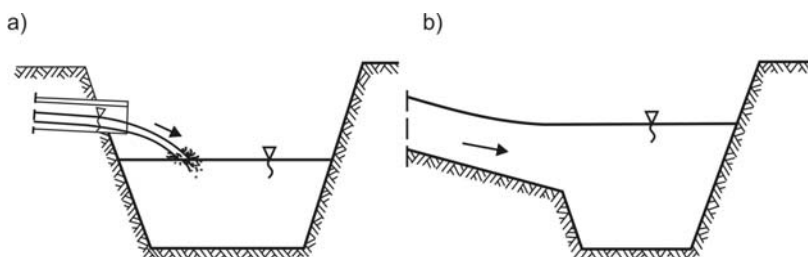
Układ zwierciadła cieczy w zbiorniku jest z reguły zmienny, toteż najczęściej nie możemy mówić o jednej rzędnej zwierciadła w rejonie połączenia. Rzędna ta jest zmienną zależną, wyznaczaną w trakcie rozwiązywania równań ruchu cieczy. W pewnych przypadkach (mówimy wtedy o **zbiornikach dużych**) dopływy i odpływy wywierają jednak tak niewielki wpływ na dynamikę zbiornika, że może on być pominięty. Ma to miejsce na przykład w takich sytuacjach, gdy połączenie strumieni stanowi duże jezioro, morze lub ocean. Możemy wtedy rozważać dynamikę takiego obszaru oddzielnie, przyjmując wyznaczone (lub niekiedy zmierzone) rzędne zwierciadła wody w przekrojach ujściowych rzek jako warunki graniczne dla równań opisujących ruch w tych rzekach. W przypadku dużych, stabilnych zbiorników, rzędna taka może być nawet przez dłuższy okres czasu stała, co bardzo ułatwia obliczenia.

Oddzielną kategorię charakterystycznych punktów sieci tworzą punkty skrajne, do których należą punkty początkowe i wyloty.

W **punktach początkowych** możemy obserwować określone przepływy początkowe. Ma to miejsce w przypadku rzek, powstających z wyraźnego, punktowego **źródła**, oraz przewodów kanalizacyjnych, zasilanych wylotami przykanalików lub upustów ulicznych, które są usytuowane w studzienkach początkowych. Wydatki dopływów w punktach początkowych, z punktu widzenia hydrauliki sieci przewodów otwartych, stanowią informację wejściową, która musi być znana przed rozpoczęciem opisu pracy sieci. W zastosowaniach są one często wynikiem bardzo złożonych obliczeń (hydrogeologicznych przy określaniu wydatku źródła, hydrologicznych przy sieciach kanalizacji deszczowej itp.).

Przepływy w punktach początkowych mogą być równe zeru (na przykład w sieciach melioracyjnych i drenarskich, zasilanych przez dopływy boczne). Osobny typ punktów początkowych stanowią punkty wykonane jako obiekty hydrauliczne (przelewy, otwory – patrz rozdz. 16).

Wreszcie **wyloty** są końcowymi punktami sieci, poprzez które zbierana i transportowana poprzez sieć ciecz zostaje odprowadzona do **odbiornika**, czyli układu zewnętrznego względem sieci, przejmującego ciecz. Wyloty nie muszą występować, jeżeli cały doprowadzony do sieci przepływ zostaje rozdysponowany poprzez pobory punktowe lub przez odpływ boczny (np. wsiąkanie w dna i brzegi kanałów, jak ma to miejsce w sieciach kanałów nawadniających).



Rys. 14.3. Schematy wylotów: a) wylot swobodny, b) wylot zatopiony

Wyróżnić można dwa główne typy wylotów: swobodne i zatopione. W przypadku **wylotu swobodnego** rzędna zwierciadła cieczy w odbiorniku nie wpływa na ukształtowanie strumienia cieczy w przekroju wylotowym (rys. 14.3a). Głębokość strumienia wylotowego zależy od jego charakteru na odcinku przed wylotem. Gdy płynie on ruchem rwącym, to głębokość wylotowa określona jest poprzez rozwiązanie równania de Saint-Venanta. Gdy jednak ruch ma charakter spokojny, głębokość ta może być wymagany warunkiem brzegowym (gdy nie znamy wydatku strumienia w przekroju wylotowym, a z reguły w ruchu nieustalonym wielkości tej nie znamy). Wylot swobodny możemy wtedy traktować jako punkt przejścia kanału o spadku łagodnym w kanał o dużym spadku (rys. 13.15a). Pozwala to przyjąć, że:

$$h_{\text{wyl}} \approx h_c. \quad (14.5)$$

Podobnie jak w przypadku poprzednio omawianych charakterystycznych punktów sieci, wylot może być uzbrojony w jakieś urządzenie hydrauliczne. Jego charakterystyka hydrauliczna, opisana relacją typu:

$$Q_{\text{wyl}} = f(h_{\text{wyl}}) \quad (14.6)$$

jest wtedy stosownym warunkiem brzegowym dla sieci.

W szczególnym przypadku swobodny wylot danej sieci może być skierowany do innej sieci. Sytuacja taka często występuje w systemach kanalizacyjnych. Uniezależnia to pracę sieci dopływowej od pracy sieci stanowiącej odbiornik.

W przypadku **wylotu zatopionego** powierzchnia cieczy w jego rejonie ulega pewnemu zniekształceniu, zależnie od dynamiki strumienia wylotowego oraz rozmiarów odbiornika. Zniekształcenie to (teoretycznie przynajmniej) można wyznaczyć, posługując się równaniami ruchu przestrzennego, co jednak jest rzeczą trudną. Ponadto rzadko się to opłaca, gdyż w praktyce nie stosuje się jako odbiorników układów małych, które byłyby całkowicie zdominowane przez strumień wylotowy. Z tego względu dla wylotów zatopionych albo stosujemy relacje typu (14.6), wynikające ze szczególnych teorii hydraulicznych, albo przyjmujemy, że głębokość wylotowa wynika z warunku równości rzędnych zwierciadła strumienia w przekroju wylotowym i w odbiorniku:

$$z_{\text{wyl}} = z_{\text{odb}} \quad (14.7)$$

14.3. Ustalony przepływ w sieciach

W zastosowaniach możemy mieć do czynienia z bardzo różnorodnymi konfiguracjami sieci. Nie jest więc celowe tworzenie zestawów schematów obliczeniowych, wyczerpujących wszystkie możliwe sytuacje. Trzeba ograniczyć się do omówienia ogólnej zasady dokonywania bilansu niewiadomych i równań.

Liczba niewiadomych wielkości, opisujących pracę sieci, uzależniona jest od liczby jej elementów (odcinków i punktów charakterystycznych). Dla każdego odcinka w ruchu ustalonym i niejednostajnym musimy znać:

- krzywą $h(x)$, opisującą głębokość strumienia, lub $z_g(x)$, opisującą rzędną zwierciadła wody;
- wartość funkcji $h(x)$ lub $z_g(x)$ na jednym z końców odcinka, jako warunek początkowy dla równania (13.78); określają one „punkty zaczepienia” wyżej wymienionych krzywych;
- wydatki cieczy Q lub prędkości jej przepływu.

Z kolei w każdym połączeniu oraz każdym punkcie skrajnym musimy znać głębokość cieczy h_p lub rzędną zwierciadła z_{gp} . W przypadku węzłów punktowych, wartości h_p i z_{gp} są liczbami, zaś w przypadku zbiorników – funkcjami $h_p(x, y)$ i $z_g(x, y)$. Całkowita liczba niewiadomych wielkości wynosi więc (N_o – liczba odcinków, N_w – liczba węzłów, N_p – liczba punktów początkowych, N_k – liczba punktów końcowych):

$$L_{UN} = 3N_o + N_w + N_p + N_k \quad (14.8)$$

Jeżeli znamy charakterystykę geometryczną i hydrauliczną sieci, to do wyznaczenia tych niewiadomych możemy (w ruchu ustalonym) dla każdego odcinka napisać równanie, opisujące kształt swobodnego zwierciadła (13.78), a także warunek zgodności rzędnej zwierciadła wody dla obu jego końców, łączących się z węzłem lub zbiornikiem, z rzędnymi zwierciadła cieczy w tych połączeniach. Ponadto dla każdego węzła punktowego możemy napisać równanie ciągłości (14.3). Dla rozległego zbiornika, łączącego kanały, równoważną informację zawierają ogólne równania ruchu. W sumie więc dysponujemy następującą liczbą informacji, zawartych w równaniach:

$$L_{UI} = 3N_o + N_w \quad (14.9)$$

Różnica między liczbą niewiadomych a liczbą informacji określa niezbędną liczbę danych wielkości, które musimy znać przed przystąpieniem do rozwiązywania problemu opisu pracy sieci. Liczba danych wynosi:

$$L_{UD} = L_{UN} - L_{UI} = N_p + N_k. \quad (14.10)$$

Omówiony powyżej bilans dotyczy zagadnienia polegającego na wyznaczaniu zmiennych, opisujących działanie istniejącej sieci. Drugim typem zagadnienia, równie ważnym pod względem zastosowań, jest projektowanie nowej sieci, która spełnić ma określone warunki. Najczęściej są one określone przez wydatki cieczy, które projektowana sieć ma odprowadzić z określonego obszaru lub do niego doprowadzić. Sposób zestawiania zamkniętego układu równań dla takiego typu zagadnienia jest podobny do poprzedniego. Bardzo często jednak problemy takie, ściśle związane z potrzebami techniki, poddawane są różnym uwarunkowaniom, opisanym przez nierówności (na przykład ograniczenia prędkości ze względu na niszczenie łożyska kanału – patrz par. 13.2.3). Powstaje wtedy zadanie projektowe, które nie ma jednoznacznego rozwiązania, a nie problem z zakresu hydromechaniki czy hydrauliki, dla którego można poszukiwać ścisłej odpowiedzi.

Rozwiązanie otrzymanego w wyżej opisany sposób układu równań nie stwarza szczególnych trudności w przypadku sieci rozgałęzionych. Jest ono co prawda czasochłonne, szczególnie przy sieciach rozbudowanych, toteż często wymaga stosowania maszyn cyfrowych. Istotne kłopoty napotykamy natomiast przy rozważaniu sieci pierścieniowych. Kwestię tę omówiliśmy w punkcie 12.3.3.3, toteż wiemy już, że w praktyce przy rozwiązywaniu równań opisujących przepływy w sieciach pierścieniowych posługujemy się metodą kolejnych przybliżeń, najczęściej w postaci metody Crossa [72].

14.4. Nieustalone przepływy w sieciach

Zmienny w czasie i przestrzeni przepływ w sieci przewodów otwartych opisany jest przez zestaw niewiadomych, obejmujących dla każdego odcinka:

- wydatek $Q(x, t)$ lub prędkość cieczy $v(x, t)$,
- głębokość cieczy $h(x, t)$ lub rzędną jej zwierciadła $z_g(x, t)$,
- wartości każdej funkcji na jednym końcu odcinka („punkty zaczepienia” ich wykresów),

a ponadto rzędną $z_g(t)$ lub głębokość $h_p(t)$ wody w każdym punkcie połączeniowym i skrajnym.

Razem musimy określić następującą liczbę niewiadomych

$$L_{NN} = 4N_o + N_w + N_p + N_k. \quad (14.11)$$

Do dyspozycji mamy następujące informacje:

- dwa równania różniczkowe zachowania masy i pędu (na przykład w postaci de Saint-Venanta) dla każdego odcinka,
- dwa warunki zgodności głębokości lub rzędnej w punktach połączeniowych i skrajnych oraz w przekrojach końcowych dla każdego odcinka,
- równanie ciągłości w każdym węźle.

Razem dysponujemy informacjami w liczbie:

$$L_{NI} = 4N_o + N_w. \quad (14.12)$$

Jako dane musimy więc przed rozwiązaniem zadania zgromadzić

$$L_{ND} = L_{NN} - L_{NI} = N_p + N_k \quad (14.13)$$

wartości. Uzyskujemy je, korzystając z informacji o sposobie współpracy sieci z otoczeniem, podobnie jak i w przypadku przepływu ustalonego.

Omówiony wyżej zamknięty układ równań należy jeszcze uzupełnić warunkami początkowymi i brzegowymi, w sposób omówiony w poprzednim rozdziale. Jego rozwiązanie wymaga zastosowania metod numerycznych.

15. Strumienie swobodne

15.1. Charakterystyka ogólna

Omawianą tu strukturę przepływową zaliczamy do kategorii **strumieni** ze względów geometrycznych oraz kinematycznych. Decydują o tym ich pomijalnie małe w porównaniu z długością wymiary poprzeczne, jak też dominacja podłużnej składowej prędkości. Jednakże ze względów funkcjonalnych strumienie swobodne istotnie różnią się od już omówionych strumieni w **przewodach zamkniętych** (rozdz. 11) oraz w **korytach otwartych** (rozdz. 13). Wynika to z braku ścianek, choćby częściowo wpływających na kształt poboczniczy.

Konsekwencją tego są ograniczone możliwości przekazania takiej strukturze energii z zewnątrz, co w zasadniczym stopniu ogranicza jej własności tranzytowe. Jest bowiem tak, że w tym przypadku siła grawitacji wpływa na ruch tylko w kierunku pionowym, gdyż brak ścianki uniemożliwia jej rozdzielenie i wykorzystanie do napędu strumienia tylko składowej podłużnej (co jest przecież podstawowym czynnikiem napędowym cieczy w korytach otwartych). Nie ma tu także możliwości wywołania istotnego spadku ciśnienia (czynnika napędowego w przewodach zamkniętych), zaś siła lepkości przejawia się niemal wyłącznie w postaci oporu ośrodka, w którym przemieszcza się płyn. W rezultacie ruch strumienia swobodnego utrzymywany jest praktycznie tylko dzięki jego pędowi początkowemu, co wobec nieuchronnej utraty energii mechanicznej (dyssypacja wywołana oporem ośrodka) ogranicza jego maksymalną długość (zasięg).

Strumień swobodny kształtuje się w efekcie wypływu płynu przez otwór (najczęściej kołowy, co wynika z łatwości jego wykonania oraz najkorzystniejszych warunków dynamicznych, które pogarszają naroża i załamanie otworów wielokątnych). Może on być wykonany w ściance zbiornika lub przewodu (patrz także pkt 11.4.4.3), bądź stanowić wylot takiego przewodu lub kanału. Sposób powiązania wielkości charakteryzujących przepływ (w pierwszym rzędzie – prędkości i wydatku) dla strumienia wypływającego przez otwór wykonany w ściance (i ewentualnie uzbrojony w kształtkę, zwaną **dyszą** lub **przystawką**) będzie omówiony w rozdz. 16. Jeżeli zaś chodzi o zmienne charakteryzujące początkowy przekrój strumienia, wypływającego z przewodu zamkniętego lub kanału otwartego, to zostały one omówione w rozdz. 11 oraz 13. W dalszym ciągu zajmiemy się ewolucją kształtu i parametrów hydraulicznych samego strumienia swobodnego.

Istotną cechą każdego takiego strumienia jest zgodność ciśnienia na jego poboczniczy z ciśnieniem panującym w otoczeniu (które z definicji stanowi także płyn – ciecz lub gaz). Jeśli ciśnienie to ulega istotnym zmianom (w przestrzeni lub nawet w czasie), oraz/albo płyn otaczający strumień porusza się, wpływa to na jego zachowanie się. Jednakże w zagadnieniach inżynierii środowiska efekty takie uwzględniane są tylko w szczególnie uzasadnionych przypadkach. Wynika to z charakteru zastosowań strumieni swobodnych w tej dziedzinie techniki. Kwestia ta będzie omówiona dalej, więc tutaj zauważmy tylko, że ewentualny wpływ ruchu otoczenia ma albo charakter przemijających zakłóceń (jak na przykład chwilowe znoszenie strumienia wody, wypływającej z fontanny, przez wiatr), albo

będzie miał drugorzędne znaczenie (jak na przykład odchylenie strumienia ścieków, mieszających się z wodami płynącej rzeki). A że w każdym razie opis tego czynnika jest bardzo trudny, jako model podstawowy przyjmuje się **ruch strumienia swobodnego w ośrodku nieruchomym**. Jak wiemy (rozdz. 5), w ośrodku takim panuje ciśnienie hydrostatyczne, więc wobec ograniczonego zasięgu strumienia będziemy z reguły przyjmować, że ciśnienie w jego otoczeniu jest stałe.

Zarówno strumienie swobodne, jak też ich otoczenie, wręcz z definicji uformowane są z substancji płynnych. Istotnym czynnikiem jest tu możliwość (lub jej brak) wzajemnego mieszania się obu tych układów. Występuje ona tylko wtedy, gdy oba mają ten sam charakter. Z tego względu wyróżniamy:

- **strumienie niezatopione** (gdy oba układy znajdują się w różnych stanach skupienia, lub też ze względów fizykochemicznych nie mogą się mieszać),
- **strumienie zatopione** (gdy oba układy znajdują się w jednakowym stanie skupienia, umożliwiającym wzajemne mieszanie).

15.2. Strumienie niezatopione

W inżynierii środowiska podstawowy schemat dla tej kategorii stanowi strumień cieczy, poruszający się w ośrodku gazowym. Inne możliwości (strumień gazu w cieczy oraz układ utworzony przez dwie ciecze, które nie ulegają wzajemnemu mieszanemu) należą raczej do wyjątków, choć okazjonalnie można się na nie natknąć. Przykładem może tu być strumień oleju, wypływający z uszkodzonych zbiorników zatopionego statku.

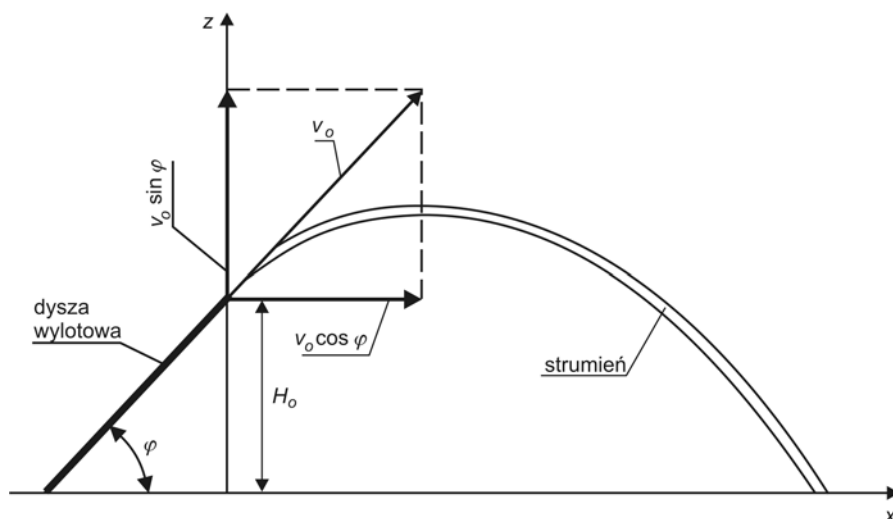
Przy rozważaniu strumieni niezatopionych istotnym czynnikiem jest ich zwartość. Właściwość tę trudno jest utrzymać, gdyż każda nieograniczona ściankami struga cieczy wykazuje silną tendencję do rozpadu na drobniejsze strużki, a wreszcie – na krople. Zjawisko to w sensie geometrycznym przypomina boczne rozszerzanie się strumienia zatopionego, będące skutkiem jego mieszania z otoczeniem, lecz od strony fizycznej oba efekty są różne. Rozpadowi strumienia sprzyja turbulencja oraz napięcie powierzchniowe.

Rozbicie na krople, lub wręcz rozpylenie strumienia, jest ważnym elementem wielu procesów technicznych, toteż często specjalnie dąży się do jego uzyskania. Stosuje się w tym celu odpowiednio ukształtowane przeszkody, często perforowane (zwane perlatorami), a strumieniom nadaje poprzeczną wirowość [37]. Jako przykłady zastosowań takich układów w inżynierii środowiska można podać systemy rozdeszczające wodę lub ścieki, stosowane przy nawadnianiu pól i w rolniczym wykorzystaniu odpadów płynnych, instalacje do zalewania złóż biologicznych, czy też służące do natleniania cieczy. Struktury takie mają wszakże inną specyfikę, niż strumienie zwarte.

Klasycznym przykładem zastosowania tych ostatnich są urządzenia pożarnicze. Dla uzyskania ciągłości i odpowiedniego zasięgu strumienia wody gaśniczej, wykonuje się specjalnie ukształtowane końcówki węży strażackich, zwane prądownicami. Z kolei w inżynierii środowiska pogładowego przykładu dostarczają różnego rodzaju atrakcje wodne, zarówno służące podniesieniu poziomu estetycznego przestrzeni zurbanizowanej (fontanny), jak też stanowiące elementy niektórych urządzeń sanitarnych (obiekty lecznicze i sportowo-rekreacyjne). Możemy tu mieć do czynienia zarówno ze strumieniami wypływającymi z otworów i przewodów zamkniętych, jak też z końcowych przekrojów kanałów otwartych, lub przelewów (kaskady wodne).

Przy ich projektowaniu istotną rolę odgrywa umiejętność przewidywania kształtu strumienia. Szczególną trudność sprawia tu uwzględnienie oporu powietrza. Jednak ze względu na wspomniany już ograniczony zasięg strumienia, czynnik ten z reguły można

pominać, a ruch cieczy opisać znanymi z mechaniki ogólnej zależnościami dla **rzutu ukośnego** (a w szczególnym przypadku – poziomego lub pionowego).



Rys. 15.1. Wyznaczanie kształtu niezatopionego strumienia swobodnego

Odpowiednie relacje otrzymamy rozwiązując równanie zachowania pędu (3.95), w którym odrzucimy siłę lepkości oraz przyjmiemy stałe ciśnienie (zgodnie z uwagami podanymi w podrozdz. 15.1). Wykorzystując równocześnie zależność między przemieszczeniem a prędkością płynu (2.1), możemy napisać (w układzie współrzędnych jak na rys. 15.1):

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad (15.1)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} = -g. \quad (15.2)$$

Dwukrotne całkowanie tych równań daje:

$$x = C_1 t + C_2, \quad (15.3)$$

$$z = -\frac{1}{2} g t^2 + C_3 t + C_4. \quad (15.4)$$

Stałe całkowania wyznaczmy z warunków początkowych (rys. 15.1): dla $t = 0$:

$$x = 0, z = H_0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dz}{dt} = v_0 \sin \alpha, \quad (15.5)$$

co prowadzi do **równania kształtu strumienia** w postaci parametrycznej (czyli w zależności od czasu t):

$$x = v_0 t \cos \varphi, \quad (15.6)$$

$$z = H_0 + v_0 t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2. \quad (15.7)$$

Po wyeliminowaniu zmiennej t otrzymamy bezpośredni związek między współrzędnymi x (poziomą) oraz z (pionową):

$$z = H_o + xtg\varphi - \frac{gx^2}{2v_o^2 \cos^2 \varphi} gt^2. \quad (15.8)$$

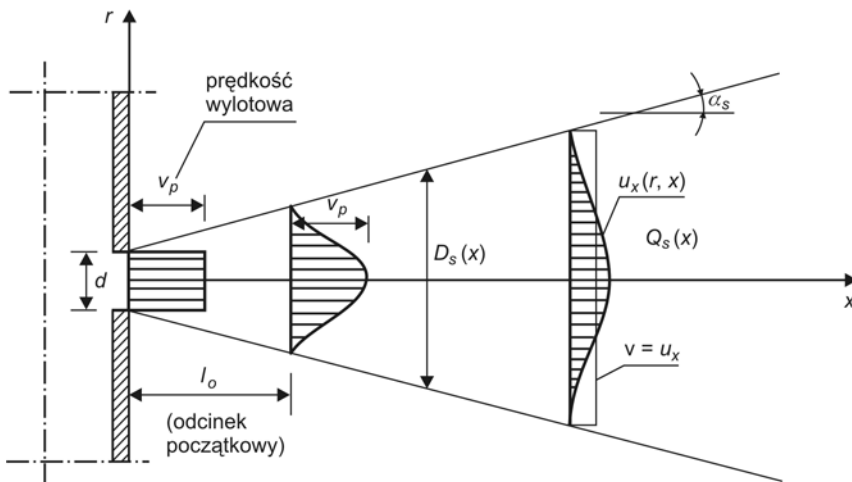
Zależność ta jest na tyle dobrze potwierdzona empirycznie, że można ją wykorzystywać do celów praktycznych. Trzeba wszakże pamiętać, by w projektowanym układzie zapewnić możliwość pewnej regulacji parametrów (prędkości początkowej i kąta nachylenia strumienia) dla ewentualnego skorygowania błędów, wynikających z wprowadzonych w tym modelu uproszczeń.

15.3. Strumienie zatopione

Zasadniczą cechą strumieni zatopionych jest ich mieszanie się z otaczającym je płynem. Często jest to cecha pożądana, przy czym podkreślmy, że chodzi tu o mieszanie samorzutne, niewynikające z działania żadnych systemów wspomagających, a zachodzące na pewnym dystansie. Jeżeli bowiem zasadniczym celem wprowadzenia płynu do otoczenia płynnego jest możliwie najszybsze wzajemne wymieszanie obu ośrodków, wtedy należy zastosować specjalną aparaturę (mieszacze mechaniczne lub hydrauliczne [35]).

W inżynierii środowiska szczególnie ważnymi przykładami zastosowania takich strumieni są wyloty kanalizacyjne [55] oraz systemy wentylacji nawiewnej.

Dokładny opis dynamicznej charakterystyki strumienia zatopionego wymaga rozwiązania znanych nam już ogólnych równań ruchu płynu (rozd. 3 i 4). Ze względu na fakt, że bardzo istotną rolę w przebiegu mieszania odgrywa turbulencja, należałoby tu oczywiście rozwiązywać równania Reynoldsa, a te, jak już wiemy (rozd. 7), są o tyle kłopotliwe, że teoria wyznaczania współczynnika lepkości burzliwej nie jest w pełni zamknięta. Istnieje więc istotna dowolność przy wyborze modeli oraz występujących w nich empirycznych współczynników, co obniża dokładność obliczeń.



Rys. 15.2. Schemat zatopionego strumienia swobodnego

Na szczęście bliższe badania tego zagadnienia pokazały, że rozkłady prędkości w zatopionych strumieniach swobodnych wykazują daleko idące wzajemne podobieństwo, ujawniające się po wprowadzeniu współrzędnych bezwymiarowych (prędkość i wydatek odniesione do odpowiednich wartości początkowych, oraz długość odniesiona do średnicy otworu wylotowego). Opracowane w oparciu o te badania **wzory Abramowicza** [70] bardzo dobrze opisują dynamiczną strukturę takiego przepływu.

Schemat obliczeniowy obrazuje rys. 15.2. Przyjmuje się tu, że początkowy rozkład prędkości (w przekroju otworu wylotowego) jest stały i równy v_p , powiązany z wydatkiem początkowym Q_S oczywistą relacją (2.35):

$$v_p = \frac{4Q_S}{\pi d^2}. \quad (15.9)$$

W pierwszej części strumienia wyróżnia się **odcinek początkowy** o długości l_0 , wzdłuż którego w osi strumienia utrzymuje się prędkość v_p . Długość ta jest równa:

$$l_0 = 0,335 \frac{d}{a}, \quad (15.10)$$

gdzie a jest współczynnikiem empirycznym, zależnym od rodzaju wylotu. Przyjmuje się:

- otwór cylindryczny z przewężeniem wylotu: $a = 0,070$,
- otwór cylindryczny bez przewężenia: $a = 0,080$,
- otwór kwadratowy: $a = 0,095$.

Wskutek mieszania z otoczeniem rośnie średnica strugi, określona wzorem:

$$D_S(x) = d + 6,8 ax, \quad (15.11)$$

oraz jej wydatek:

- na odcinku początkowym:

$$Q_R(x) = \left[1 + 1,52 \frac{ax}{d} + 5,28 \left(\frac{ax}{d} \right)^2 \right] Q_S; \quad (15.12)$$

- za odcinkiem początkowym:

$$Q_R(x) = \left(0,63 + 4,36 \frac{ax}{d} \right) Q_S \quad (15.13)$$

natomiast maleje prędkość osiowa (dla $x > l_0$):

$$v_{os} = \frac{0,48}{\frac{ax}{d} + 0,145} v_p. \quad (15.14)$$

Kąt, jaki pobocznicza strumienia tworzy z jego osią, określony jest relacją:

$$\alpha_s = \arctg(3,4a). \quad (15.15)$$

Wzory te odnoszą się do przypadku, gdy płyn otaczający strumień jest nieruchomy. W przeciwnym razie sytuacja komplikuje się, bowiem oś strumienia ulega wygięciu przez poruszający się ośrodek, a intensywność mieszania zależy nie tylko od burzliwości strumienia, lecz także od charakterystyki całości układu. Jeżeli nie da się pominąć tego efektu, wtedy zadania nie można sprowadzić do prostego schematu obliczeniowego i należy sięgnąć po bardziej złożone modele.

16. Zjawiska lokalne

16.1. Uwagi ogólne

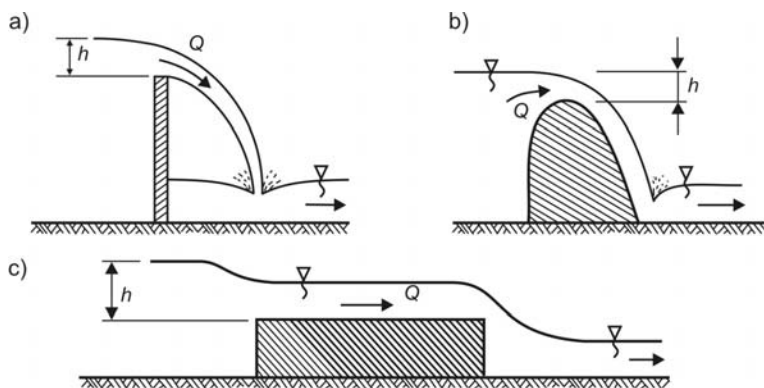
Terminu „zjawiska lokalne” użyto w tym rozdziale dla łącznego określenia specyficznych struktur przepływowych, powstających w obszarze czynnych **przelewów**, **otworów** i **odskoków hydraulicznych**. Każdy z tych obiektów stanowi odrębne zagadnienia hydromechaniki stosowanej, lecz w porównaniu ze skalą systemów przepływowych (jak rzeki, kanały, morza, jeziora itp.), geometrycznie mają charakter lokalny, bowiem ich bezpośredni zasięg jest nieduży (chyba, że występują jako jedyny obiekt hydrauliczny), toteż celowa jest ich prezentacja w jednym bloku. Trzeba jednak podkreślić, że mimo ograniczonych rozmiarów, oddziaływanie każdej z tych struktur na układy przepływowe jest znaczne, głównie dlatego, że wpływają one na całkowite straty energii mechanicznej oraz determinują warunki brzegowe dla tych układów.

16.2. Przepływ cieczy nad przelewem

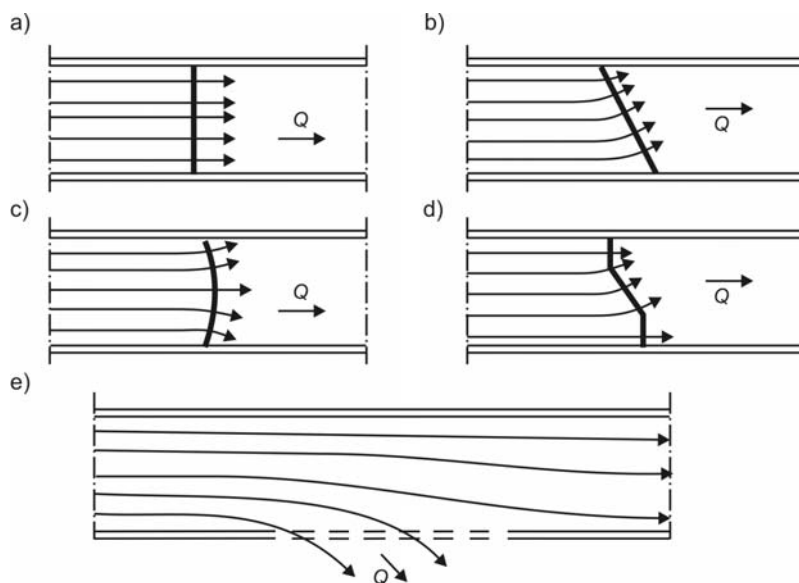
16.2.1. Definicja pojęcia „przelew”

Mianem „przelewu” opisujemy przegrodę (lub jej część), ponad górną krawędzią której przepływa swobodnie („przelewa się”) strumień cieczy, spiętrzonej przez tę przegrodę. Klasyfikuje się je ze względu na różne cechy – zależnie od kształtu przekroju podłużnego ścianki przelewowej (rys. 16.1), od jej usytuowania w planie, położenia względem kierunku wektora prędkości cieczy dopływającej (rys. 16.2), zależnie od wzajemnej proporcji między szerokością przelewu a szerokością strumienia dopływającego (rys. 16.3), uwzględniając kształt krawędzi przelewowej w przekroju prostopadłym do kierunku przepływu (najczęściej stosowane kształty pokazano na rys. 16.4) i wreszcie ze względu na warunki hydrauliczne, zależnie od tego, czy poziom wody za przelewem wpływa na jego wydatek (przelew zatopiony), czy nie wpływa (przelew niezatopiony) – rys. 16.5.

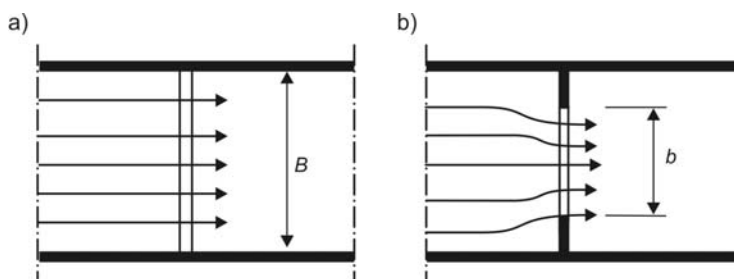
Niezatopione przelewy o ostrej krawędzi dzieli się na dwie grupy – **swobodne** (gdy w przestrzeni między ścianką przelewową a strumieniem cieczy panuje ciśnienie atmosferyczne) i **nieswobodne** (gdy przestrzeń ta jest odizolowana od otoczenia, skutkiem czego płynąca woda „porywa” z niej cząsteczki powietrza, wywołując spadek ciśnienia; w rezultacie przelewający się strumień zostaje wskutek pojawiającej się po jego obu stronach różnicy ciśnień przesunięty ku ściance, co wpływa na pracę układu).



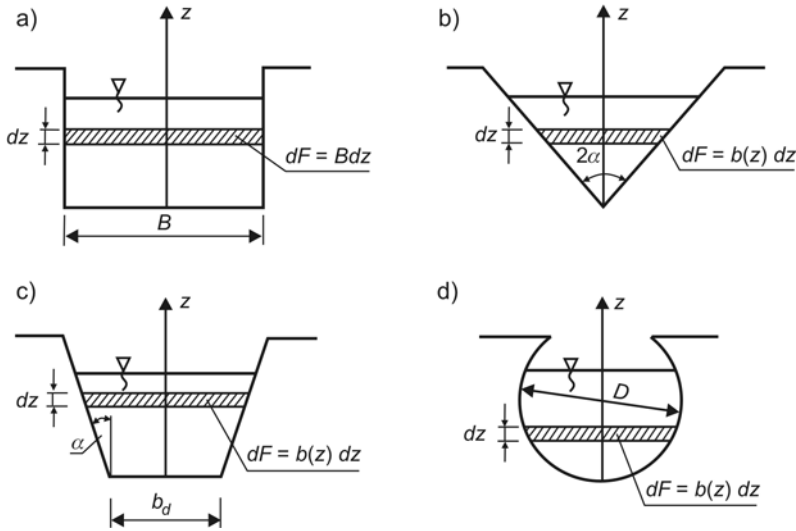
Rys. 16.1. Podłużne przekroje ścianek przelewowych:
a) ostra krawędź, b) kształt praktyczny, c) szeroka korona



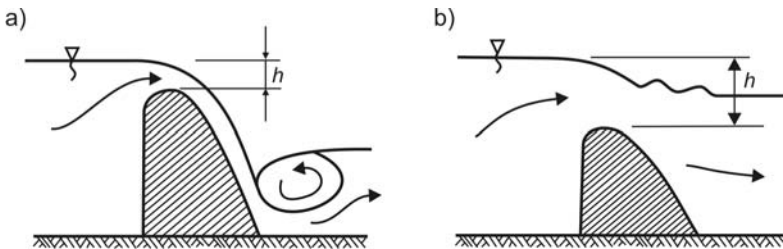
Rys. 16.2. Położenie przelewu w planie:
a) czołowy, b) ukośny, c) krzywoliniowy, d) łamany, e) boczny



Rys. 16.3. Szerokość przelewu: a) bez dławienia bocznego, b) z dławieniem bocznym



Rys. 16.4. Najczęściej spotykane kształty przelewów:
a) prostokątny, b) trójkątny, c) trapezowy, d) kołowy



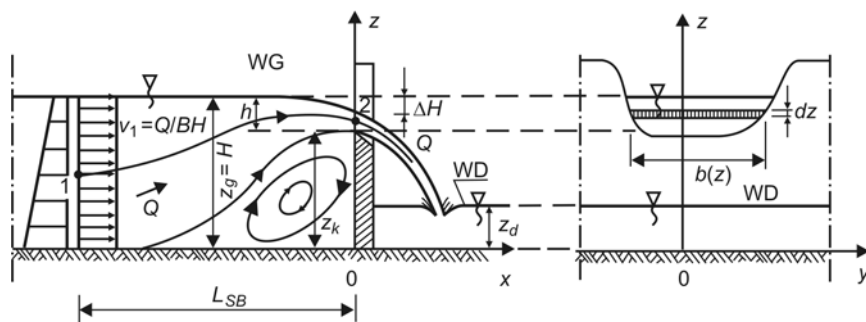
Rys. 16.5. Wpływ położenia wody dolnej:
a) przelew niezatopiony, b) przelew zatopiony

16.2.2. Obliczanie wydatku przelewu

16.2.2.1. Przelewy niezatopione

Obliczanie wielkości, stanowiących hydrauliczną charakterystykę przepływu ponad przelewem, należy do podstawowych przypadków zastosowania równania Bernoulliego (rozdz. 6). Punktem wyjścia jest tu intuicyjnie przyjęty układ linii prądu ustalonego przepływu w rejonie przelewu. Przybliżenie, jakie daje założony układ linii prądu, nie jest jednak wystarczająco dokładne, aby uwzględnić wpływ lepkości cieczy, toteż czynnik ten uwzględniany jest w typowy dla hydrauliki sposób – przez wprowadzenie empirycznego współczynnika strat.

Hydrauliczny schemat obliczeniowy dla przelewu pokazano na rys. 16.6. Odnosi się on do niezatopionego przelewu czołowego, swobodnego, o ostrej krawędzi.



Rys. 16.6. Schemat hydrauliczny przelewu niezatopionego: a) profil podłużny, b) widok z przodu

Przebiegi linii prądu zaczynamy rysować w takiej odległości przed przelewem (L_{SB}), aby sięgały one poza obszar wpływu ścianki. Odcinek ten charakteryzuje się istnieniem strefy zawirowań w rejonie dna (a przy małych prędkościach – obszaru nieruchomej cieczy, tak zwanej „martwej strefy”) oraz strefy obniżenia rzędnej swobodnej powierzchni (o maksymalnej wartości ΔH). W obszarze oddziaływania przelewu pole prędkości wykazuje strukturę przestrzenną, toteż jego opis jest rzeczą złożoną. Jednakże przedłużenie układu linii prądu w górę obszaru powoduje, że dla ich punktów początkowych możemy przyjmować hydrostatyczny rozkład ciśnienia (4.22) oraz posługiwać się prędkością średnią $v_1 = Q/BH$.

Obierzmy dowolną linię prądu z przyjętego ich pęku (1–2 na rys. 16.6) i napiszmy równanie Bernoulliego (6.27):

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta h. \quad (16.1)$$

Dzięki hydrostatycznemu rozkładowi ciśnienia możemy napisać:

$$p_1 = p_0 + \rho g(H - z_1), \quad (16.2)$$

podczas gdy w strumieniu swobodnym nad krawędzią przelewową zachodzi

$$p_2 = p_0. \quad (16.3)$$

Jak wspomniano, strata energii mechanicznej wzdłuż linii prądu Δh nie może być dokładnie opisana, gdyż jej przebieg jest tylko przybliżony, a także nie znamy odległości L_{SB} między punktami 1 i 2 (w przybliżeniu przyjmuje się $L_{SB} \approx 3h$). W tej sytuacji traktujemy tę stratę jako lokalną, pisząc:

$$\Delta h = \xi \frac{v_2^2}{2g} \quad (16.4)$$

(ξ – współczynnik straty).

Wstawiając ostatnie relacje do (16.1), otrzymujemy:

$$v_2(z_2) = \varphi_p \sqrt{2g(H - z_2) + v_1^2}, \quad (16.5)$$

gdzie symbol φ_p oznacza **współczynnik prędkości**:

$$\varphi_p = \sqrt{1/(1 + \xi)}. \quad (16.6)$$

Wydatek przelewu możemy obliczyć całkując (16.5) względem powierzchni przekroju poprzecznego strumienia S_T . Niestety, wartości tej dokładnie nie znamy, co wynika z ugięcia granicznych linii prądu przy krawędzi przelewu i na swobodnej powierzchni (ΔH). W praktyce posługujemy się więc znaną powierzchnią przekroju poprzecznego strumienia nad przelewem S (wyznaczoną przez szerokość wycięcia $b(z)$), licząc ją od $z = z_k$ do $z = H$, korygując ją za pomocą empirycznego **współczynnika dławienia** α_p (lub **współczynnika przekroju**):

$$S_T = \alpha_p S, dS_T = \alpha_p dS = \alpha_p b(z) dz. \quad (16.7)$$

Wydatek przelewu jest więc równy:

$$Q = \int_{S_T} v_z dS_T = \mu_p \int_{z_k}^H \sqrt{2g(H - z_2) + v_1^2} b(z_2) dz_2, \quad (16.8)$$

gdzie

$$\mu_p = \alpha_p \varphi_p \quad (16.9)$$

oznacza empiryczny **współczynnik wydatku**, którego wartość omówimy w par. 16.2.3.

W przypadku **przelewu prostokątnego** zachodzi $b = \text{const}$. (rys. 16.4a), więc relacja (16.8) po scałkowaniu przyjmuje postać ($h = H - z_k$):

$$Q = \frac{2}{3} \mu_p b \sqrt{2g} \left[\left(h + v_1^2 / (2g) \right)^{3/2} - \left(v_1^2 / (2g) \right)^{3/2} \right]. \quad (16.10)$$

Zwróćmy uwagę, że średnia prędkość w przekroju dopływowym jest jednoznacznie opisana przez wydatek, bowiem zachodzi $v_1 = Q/BH$ (rys. 16.6). Oznacza to, że ostatnia zależność jest uwikłaną funkcją Q , co komplikuje uwzględnienie prędkości dopływowej. Wobec faktu, że w praktyce często prędkość ta jest nieduża, jej wpływ można pominąć i napisać:

$$Q = \frac{2}{3} \mu_p b \sqrt{2g} h^{3/2}. \quad (16.11)$$

Dla **przelewu trójkątnego** (rys. 16.4b) mamy

$$b(z_2) = 2(z_2 - z_k) \operatorname{tg} \alpha, \quad (16.12)$$

co prowadzi do relacji:

$$Q = \frac{8}{15} \mu_p \sqrt{2g} \operatorname{tg} \alpha \left[\left(h + v_1^2 / (2g) \right)^{5/2} - \left(v_1^2 / (2g) \right)^{5/2} - 2,5h \left(v_1^2 / (2g) \right)^{3/2} \right]. \quad (16.13)$$

Pomijając prędkość dopływową, otrzymujemy:

$$Q = \frac{8}{15} \mu_p \sqrt{2g} \operatorname{tg} \alpha h^{5/2}. \quad (16.14)$$

W praktyce szczególnie ważną rolę odgrywa przelew o ostrej krawędzi trójkątny, o kącie rozwarcia $2\alpha = 90^\circ$, nazywany **przelewem Thomsona**. Wzór (16.14) dla takiego przypadku przyjmuje postać ($h = 50 - 175 \text{ mm}$, $\mu_p = 0,5926$):

$$Q = 1,4h^{5/2}. \quad (16.15)$$

Zwróćmy uwagę, że stały mnożnik ma tu wymiar $\sqrt{\text{m}}/\text{s}$; spiętrzenie h należy podstawić w metrach, a wydatek Q ma wtedy wymiar m^3/s .

Kolejny ważny schemat obliczeniowy, jakim jest **przelew trapezowy** (rys. 16.4c), można traktować jako składający się z części prostokątnej o szerokości b_d (a ściślej – równoległobocznej) oraz z części trójkątnej o kącie rozwarcia 2α . Ze wzorów (16.10) i (16.13) mamy wtedy (pomijając prędkość dopływową):

$$Q = \frac{2}{15} \mu_p \sqrt{2g} (5b + 4\text{tg}\alpha h) h^{3/2}. \quad (16.16)$$

Jeśli chodzi o czwarty z podstawowych typów przelewów, **przelew kołowy**, to ma on dużo bardziej złożony kształt, niż pozostałe. W efekcie całka (16.8) przyjmuje dość niewygodną postać. Z tego względu w praktyce stosuje się tu różne formuły empiryczne, jak na przykład wzór Stausa:

$$Q = \mu_p C_k D^{5/2}, \quad (16.17)$$

gdzie współczynnik wydatku μ_p jest funkcją stosunku spiętrzenia h do średnicy wycięcia D (rys. 16.4d; przy $2z_k + D > B$, $0,1 \text{ m} < D < 1,0 \text{ m}$):

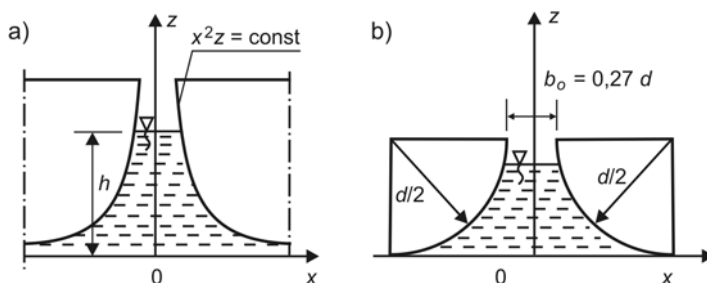
$$\mu_p = 3,203 (h/D)^{1,975} - 0,842 (h/D)^{3,78}, \quad (16.18)$$

zaś mnożnik C_k zależy od stosunku pola powierzchni przekroju strumienia w płaszczyźnie przelewu S do całkowitego pola powierzchni wycięcia $S_o = 0,25 \pi D^2$ oraz od pozostałych parametrów geometrycznych przelewu kołowego D i h

$$C_k = [0,558D^{-0,025} + 0,085 - S/(10Dh)][1 + (S/S_o)^2]. \quad (16.19)$$

Przedstawione związki między wydatkiem przelewu Q a spiętrzeniem cieczy nad jego krawędzią h , nazywamy ogólnie **charakterystykami przelewów**. Mają ogólną postać $Q = F(h)$, która jest funkcją nieliniową, szczególnie trudną do rozwikłania, gdy musimy uwzględnić prędkość dopływową. Jest to kłopotliwe, toteż niekiedy (na przykład wtedy, gdy w rejonie przelewu dokonujemy pomiaru wielkości sterujących układami automatycznymi) stosujemy specjalne kształty wycięć, dla których przelew ma charakterystykę liniową (C_l – stała cechowania przelewu):

$$Q = C_l h. \quad (16.20)$$



Rys. 16.7. Kształty przelewów liniowych: a) dokładny, b) przybliżony

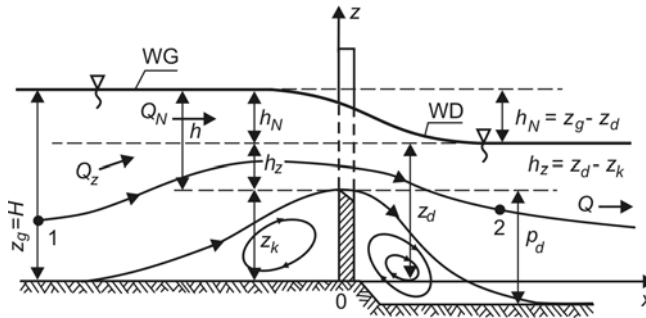
Zagadnienie to ma duże znaczenie praktyczne. Przykładowy profil takiego **przelewu liniowego** opisany został przez M. Rothera [10] równaniem (rys. 16.7a):

$$x^2 z = \text{const}. \quad (16.21)$$

Jest to zależność teoretyczna, toteż linia ta dąży asymptotycznie do poziomu W praktyce należy ograniczyć maksymalną szerokość przelewu, co oczywiście wpływa na dokładność jego wskaźników. Alternatywą jest zastosowanie przybliżonego przelewu liniowego (rys. 16.7b).

16.2.2.2. Przelewy zatopione

Odrębną kategorię stanowi przypadek, gdy poziom dolnego zwierciadła wpływa na wydatek, czyli przelew zatopiony. Schemat obliczeniowy dla takiej sytuacji pokazano na rys. 16.8. Rzędna zwierciadła wody dolnej (z_d) jest tutaj większa od rzędnej korony przelewu (z_k). Musi być ona jednak mniejsza od rzędnej zwierciadła wody górnej (z_g), bowiem w przeciwnym razie wystąpi przepływ zwrotny cieczy, przynajmniej w górnej strefie strumienia.



Rys. 16.8. Schemat hydrauliczny przelewu zatopionego (WG – woda górna, WD – woda dolna)

Istnieją dwa typy wzorów, opisujących wydatek przelewu zatopionego – jednoczłonowe i dwuczłonowe. Zależności jednoczłonowe mają postać jak dla przelewów niezatopionych, uzupełnioną tylko dodatkowym współczynnikiem zatopienia σ_z , który dla przelewu prostokątnego wyliczyć można z empirycznego wzoru Bazina (oznaczenia – rys. 16.8):

$$\sigma_z = 1,05 \left(1 + 0,2 h_z / p_d \right) \left[(z_g - z_d) / h \right]^{1/3}. \quad (16.22)$$

Relacja opisująca wydatek przelewu prostokątnego ma wtedy postać następującą (pominięto tu wpływ prędkości dopływowej):

$$Q = \frac{2}{3} \mu_p \sigma_z b \sqrt{2g} h^{3/2}. \quad (16.23)$$

Wzory dwuczłonowe otrzymuje się, sumując wydatek Q_N części niezatopionej (o grubości warstwy wody h_N , wyznaczany w sposób taki sam, jak dla przelewów niezatopionych) oraz wydatek Q_z części zatopionej. Obliczany jest on w nieco inny sposób niż poprzednio, gdyż tym razem nie możemy przyjąć w przekroju przelewu relacji (16.3). W tej sytuacji przedłużamy linie prądu poza krawędź przelewu, aż punkt 2 (rys. 16.8) znajdzie się w strefie przepływu podłużnego, poza obszarem wpływu przelewu, co pozwoli napisać przez analogię do (16.2):

$$p_z = p_0 + \rho g (z_d - z_2). \quad (16.24)$$

Przekształcając teraz równanie Bernoulliego (16.1), otrzymamy:

$$v_2 = \varphi_p \sqrt{2g h_z + v_1^2}. \quad (16.25)$$

W części zatopionej prędkość nie zmienia się w przekroju strumienia (czyli $v_z = \text{const.} = v_2$), wobec czego wydatek obliczamy, mnożąc v_2 przez pole przekroju strumienia zatopionego nad przelewem $S_{Tz} = \alpha_p S_z$, co daje:

$$Q_z = \mu_p S \sqrt{2gh_z + v_1^2}. \quad (16.26)$$

16.2.2.3. Inne profile przelewowe

Dotychczas rozważaliśmy przelewy o ostrej krawędzi, gdyż to one są najczęściej stosowane w praktyce. Przepływy przez pozostałe typy przelewów opisywane są za pomocą analogicznych modeli obliczeniowych, jakie przedstawiono na rys. 16.6 i 16.8, natomiast istniejące między nimi różnice ujmowane są poprzez współczynniki wydatku μ_p (patrz rozdział następny). W praktyce interesują nas tu tylko przelewy o kształcie prostokątnym, gdyż pozostałe rodzaje wycięć w ściankach przelewowych (rys. 16.4) raczej nie są stosowane w układach praktycznych i o szerokiej koronie. Tak więc dla przelewów niezatopionych, prostokątnych, bez dławienia bocznego, o **kształcie praktycznym** i o **szerokiej koronie** mamy następujący wzór:

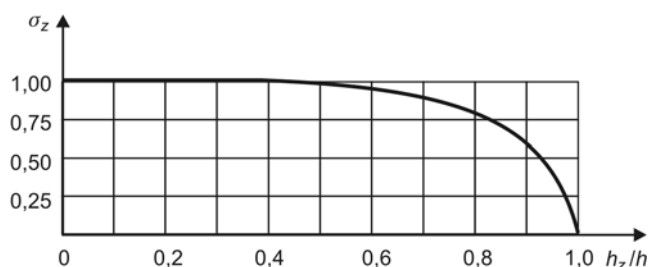
$$Q = \mu_p b \sqrt{2g} h_0^{3/2}, \quad (16.27)$$

gdzie

$$h_0 = h + v_1^2 / 2g. \quad (16.28)$$

Gdy przepływ jest zatopiony, wprowadzamy dodatkowo **współczynnik zatopienia** σ_z . Dla przelewu praktycznego jest on funkcją stosunku grubości warstwy wody dolnej do grubości warstwy wody górnej nad krawędzią przelewu (h_z/h – rys. 16.8). Jej przebieg jest pokazany na rys. 16.9. Z kolei dla zatopionego przelewu o szerokiej koronie zamiast (16.27) piszemy:

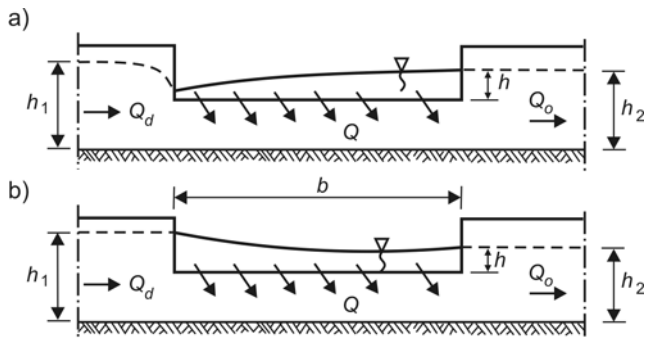
$$Q = \varphi_p h_z b \sqrt{2g(h_0 - h_z)}. \quad (16.29)$$



Rys. 16.9. Współczynnik zatopienia dla przelewu praktycznego

16.2.2.4. Przelewy boczne

Gdy krawędź przelewowa umieszczona jest w ściance przewodu lub kanału, mamy do czynienia z **przelewem bocznym**. Obiekty takie stosowane są w kanalizacji ogólnospławnej, jako tak zwane przelewy burzowe (służące do odprowadzania nadmiaru ścieków w okresie deszczowym), a także w budowlach hydrotechnicznych na rzekach (gdzie istnieje potrzeba rozdzielenia przepływu na dwie części) [23].



Rys. 16.10. Profil zwierciadła wody wzdłuż przelewu bocznego: a) ruch spokojny, b) ruch rwący

Kształt zwierciadła cieczy wzdłuż krawędzi przelewu bocznego zależy od charakteru ruchu (rys. 16.10). W praktyce w kanałach wyposażonych w przelewy boczne z reguły mamy do czynienia z przepływem spokojnym, dla którego stosuje się wzór:

$$Q = \frac{2}{3} \mu_p \sigma_b b \sqrt{2g} h^{3/2}, \quad (16.30)$$

gdzie **współczynnik korygujący** według Engelsa wynosi

$$\sigma_b = (h/b)^{1/6}, \quad (16.31)$$

zaś **współczynnik wydatku** μ_p określany jest jak dla przelewu czołowego.

16.2.3. Współczynniki wydatku dla przelewów

Występujący w wyprowadzonych wzorach mnożnik μ_p , zwany **współczynnikiem wydatku** (16.9), ujmuje wpływ lepkości oraz wszystkie indywidualne cechy każdego z przelewów, wraz z efektami założeń upraszczających, przyjmowanych przy wyprowadzaniu tych wzorów. Z tego względu dokładność jego określenia decyduje o precyzji obliczania wydatku przelewu.

Współczynnik ten wyznaczyć można dwojako – empirycznie lub teoretycznie. Metoda empiryczna jest znacznie dokładniejsza i należy ją stosować wtedy, gdy dany przelew ma służyć do pomiarów wydatku cieczy, jako tak zwany przelew mierniczy. Gdy nie mamy możliwości doświadczalnego zbadania pracy przelewu, współczynnik wydatku określić można teoretycznie, opierając się na informacjach zawartych w literaturze.

Dla przelewów niezatapionych, prostokątnych, o ostrej krawędzi, bez dławienia bocznego, współczynnik wydatku określony jest wzorem Bazina:

— z pominięciem wpływu prędkości dopływowej, dla wzoru (16.11):

$$\mu_p = 0,6075 + 0,0045/h \quad (h[\text{m}]), \quad (16.32)$$

— z uwzględnieniem wpływu prędkości dopływowej:

$$\mu_p = (0,6075 + 0,0045/h) [1 + 0,55(h/H)^2]. \quad (16.33)$$

Orientacyjnie przyjmować można $\mu_p = 0,63$. Gdy szerokość przelewu b jest mniejsza od szerokości strumienia dopływowego B (przelew z dławieniem bocznym), stosuje się wzór Hégly'ego:

— z pominięciem wpływu prędkości dopływowej:

$$\mu_p = 0,6075 + 0,0045/h - 0,045(B-b)/B, \quad (16.34)$$

— z uwzględnieniem wpływu prędkości dopływowej:

$$\mu_p = [0,6075 + 0,0045/h - 0,045(B-b)/B][1 + 0,55(bh/BH)^2]. \quad (16.35)$$

Dla przelewu trójkątnego (o kącie otwarcia 2α) o ostrej krawędzi mamy wzór Otta (może on też być stosowany do przelewów trapezowych):

$$\mu_p = 0,575(1 + 0,01015\text{ctg}\alpha)(0,0328h)^{ep}, \quad (16.36)$$

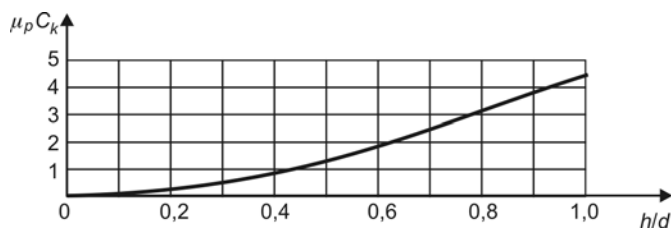
$$ep = -0,02(\text{ctg}\alpha)^{0,75}. \quad (16.37)$$

Gdy $\alpha = 45^\circ$, wtedy wzór powyższy upraszcza się do postaci:

$$\mu_p = 0,622h^{-0,02}. \quad (16.38)$$

W zakresie $h = 50 \div 175$ mm można przyjmować $\mu_p = 0,5926$, co prowadzi do wzoru (16.15) dla przelewu Thomsona.

Skorygowany współczynnik wydatku dla przelewu kołowego o ostrej krawędzi (wzór (16.17)), w funkcji ilorazu spiętrzenia na przelewie h i średnicy wycięcia D , odczytać można z wykresu na rys. 16.11 lub obliczyć ze wzorów (16.18) i (16.19).



Rys. 16.11. Skorygowany współczynnik wydatku przelewu kołowego

Dla przelewów o szerokiej koronie współczynnik wydatku uzależniony jest od kształtu krawędzi wlotowej:

— przy opływowej krawędzi — $\mu_p = 0,540$,

— przy zaokrąglonej krawędzi — $\mu_p = 0,525$,

— przy ściętej krawędzi — $\mu_p = 0,495$,

— przy ostrokątnej krawędzi — $\mu_p = 0,480$,

— przy chropowatej krawędzi — $\mu_p = 0,450$,

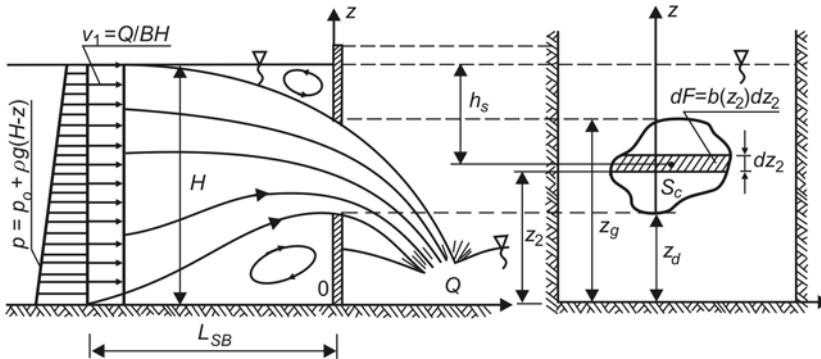
podczas gdy dla przelewów niezatopionych o kształtach praktycznych można przyjmować $\mu_p = 0,83$, gdy mają one opływowy profil, według tak zwanej krzywej Creagera [11]. Gdy kształt przelewu jest nietypowy, należy korzystać z ewentualnych danych literaturowych (o ile profil przelewu został skądś zaczerpnięty), lub wyznaczyć go doświadczalnie (wykonując pomiary na modelu przelewu lub w naturze).

16.3. Wypływ cieczy przez otwór

16.3.1. Definicja pojęcia „otwór”

Ten zrozumiały i bardzo ważny w hydraulice termin odnosi się do otworów w ściankach, ograniczających obszary wypełnione cieczą. Umożliwiają one wypływ tej cieczy poza obszar, a mogą one mieć dowolne kształty, które w przypadku otworów naturalnych są z reguły nieregularne, zaś w przypadku otworów wykonanych sztucznie – najczęściej regularne. Trzeba zaznaczyć, że światło otworu od wewnętrznej strony ścianki musi być zakryte cieczą. Jeżeli tak nie jest, będziemy mieli do czynienia z przelewem. Z kolei od zewnętrznej strony ścianki znajdować się może gaz lub ciecz. Jeżeli ciecz wypływa przez otwór jako strumień swobodny do obszaru wypełnionego gazem (podrozdz. 15.2), mówimy o otworze niezatopionym (rys. 16.12). Gdy z kolei strumień ten trafia do obszaru wypełnionego cieczą (podrozdz. 15.3), mamy do czynienia z otworem zatopionym. W sytuacji pośredniej, gdy po stronie zewnętrznej dolna część przekroju otworu jest zalana cieczą, a górna kontaktuje się z gazem (praktycznie zawsze jest to powietrze atmosferyczne) – mówimy o otworze częściowo zatopionym.

Gdy pole prędkości wypływającej cieczy nie zmienia się w świetle otworu (lub zmienia się w sposób pomijalny), mówimy o **otworze małym**. Jeżeli zaś prędkość zmienia się w sposób istotny, wymagający uwzględnienia – mamy **otwór duży**.



Rys. 16.12. Schemat obliczeniowy otworu niezatopionego:
a) profil podłużny, b) widok z przodu

Dla podstawowego schematu obliczeniowego pomijamy grubość ścianki, w której wykonany jest otwór. Nierzadko w otworach mocowane są krótkie odcinki przewodów (zbieżnych, rozbieżnych lub o stałej średnicy), które nazywamy **przystawkami** (par. 16.3.4). Jeżeli grubość rozważanej ścianki nie może być pominięta, wykonany w niej otwór również traktujemy jako uzbrojony w przystawkę, której długość równa jest grubości ścianki. Jeżeli otwór połączony jest z rurociągiem, traktujemy go jako otwór wlotowy. Przy jego wymiarowaniu należy uwzględnić przepływ w rurociągu, w sposób omówiony w punkcie 11.2.2.5 (strata miejscowa).

16.3.2. Obliczanie wydatku otworu

16.3.2.1. Otwór niezatopiony

Przebieg wyznaczania hydraulicznej charakterystyki otworów jest pod względem formalnym identyczny jak dla przelewów – posługujemy się równaniem Bernoulliego, korygując wprowadzone uproszczenia empirycznym **współczynnikiem wydatku otworu** μ_w .

Zasadniczym schematem hydraulicznym jest niezatopiony duży otwór bez przystawki, jak na rys. 16.12. Przebieg linii prądu zaczynamy rysować w takiej odległości przed ścianką z otworem, by ich punkty początkowe leżały poza obszarem wpływu otworu (górną i dolną strefą zawirowań). Tak jak i w przypadku przelewu, pozwala to przyjąć hydrostatyczny rozkład ciśnienia oraz wykorzystać prostokątny rozkład prędkości.

Wybierając dowolną linię prądu (1–2 na rys. 16.12), możemy napisać równanie Bernoulliego (6.27):

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \Delta h \quad (16.39)$$

oraz przyjąć następujące oczywiste relacje

$$p_1 = p_0 + \rho g(H - z_1), \quad (16.40)$$

$$p_2 = p_0 \text{ (strumień swobodny)}, \quad (16.41)$$

$$v_1 = Q/BH, \quad (16.42)$$

$$\Delta h = \xi \frac{v_2^2}{2g}, \quad (16.43)$$

które po podstawieniu do (16.39) dają:

$$v_2(z_2) = \varphi_p \sqrt{2g(H - z_2) + v_1^2}, \quad (16.44)$$

gdzie **współczynnik prędkości**:

$$\varphi_p = \sqrt{1/(1 + \xi)}. \quad (16.45)$$

Wydatek otworu obliczymy jako całkę pola prędkości (16.44) względem powierzchni przekroju poprzecznego strumienia S_T , przy czym musimy pamiętać, że pole powierzchni tego przekroju jest mniejsze od pola powierzchni otworu S (wskutek kontrakcji krawędzi). Uwzględniamy to, wprowadzając **współczynnik przekroju** α_p :

$$S_T = \alpha_p S, dS_T = \alpha_p dS = \alpha_p b(z_2) dz_2, \quad (16.46)$$

co ostatecznie pozwala napisać

$$Q = \int_{S_T} v_2 dS_T = \mu_w \int_{z_d}^{z_g} \sqrt{2g(H - z_2) + v_1^2} b(z_2) dz_2, \quad (16.47)$$

gdzie **współczynnik wydatku** μ_w określony jest, tak jak dla przelewu, relacją (16.9).

W przypadku, gdy wysokość otworu $h_w = z_g - z_d$ nie przekracza 1/4 zagłębienia jego środka ciężkości, prędkość v_2 jest słabą funkcją zmiennej z_2 , a otwór nazywamy **małym**. Możemy wtedy prędkość wypływu uważać za stałą i napisać (h_s – zagłębienie środka ciężkości otworu):

$$v_2 = \varphi_p \sqrt{2gh_s + v_1^2} \quad (16.48)$$

oraz

$$Q = \mu_w \sqrt{2gh_s + v_1^2} S. \quad (16.49)$$

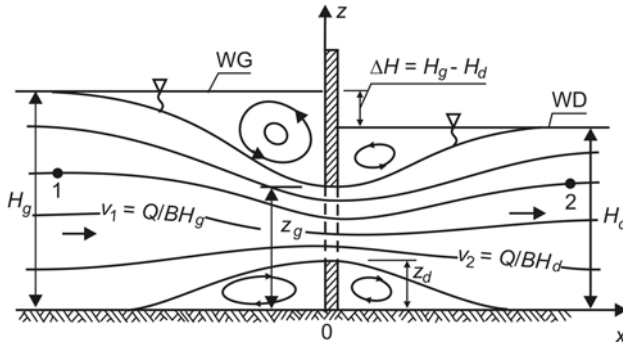
Trzeba podkreślić, że obliczanie wydatku według (16.47) jest ujęciem dokładnym, ale formalnie każdy otwór możemy traktować jako mały. Dokładne określenie jego charakteru wymaga obliczenia wydatku Q obydwoma metodami (16.47 i 16.49). Jeżeli obie otrzymane wartości różnią się zbyt mocno, mamy do czynienia z otworem dużym. Gdy są sobie dostatecznie bliskie – otwór jest mały.

16.3.2.2. Otwór zatopiony

Schemat obliczeniowy dla otworu zatopionego pokazano na rys. 16.13. Tym razem nie możemy przyjąć, że w świetle otworu panuje ciśnienie atmosferyczne (16.41), toteż przedłużamy układ linii prądu poza dolny obszar wpływu otworu, co pozwala napisać

$$p_1 = p_0 + \rho g(H_g - z_1), \quad (16.50)$$

$$p_2 = p_0 + \rho g(H_d - z_2). \quad (16.51)$$



Rys. 16.13. Schemat obliczeniowy otworu zatopionego: WG – woda górna, WD – woda dolna

Odnosząc wysokość straty energii Δh do prędkości w świetle otworu v_0 :

$$\Delta h = \xi v_0^2 / 2g \quad (16.52)$$

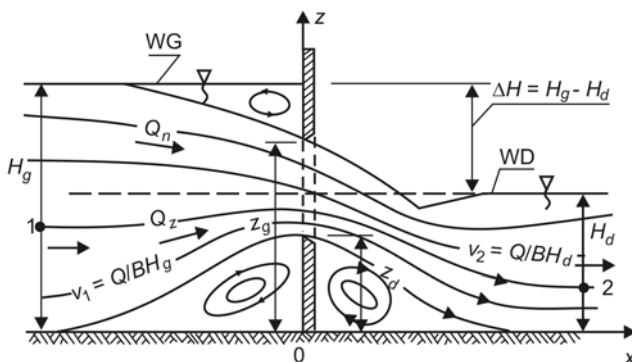
i podstawiając powyższe do równania Bernoulliego (16.39), otrzymujemy:

$$v_0 = \varphi_p \sqrt{2g\Delta H + v_1^2 - v_2^2}. \quad (16.53)$$

Prędkość ta jest stała w każdym punkcie otworu. Można powiedzieć, że każdy otwór zatopiony jest otworem małym. Wobec powyższego mamy:

$$Q = \mu_w \sqrt{2g\Delta H + v_1^2 - v_2^2} S. \quad (16.54)$$

W sytuacji pośredniej, gdy rzędna wody dolnej leży pomiędzy z_d a z_g , mamy do czynienia z otworem częściowo zatopionym (rys. 16.14).



Rys. 16.14. Schemat otworu częściowo zatopionego

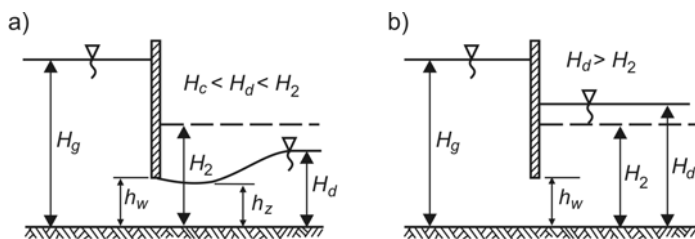
W takiej sytuacji postępujemy analogicznie, jak w przypadku przelewu zatopionego (rys. 16.8) – oddzielnie obliczamy wydatek części zatopionej Q_z i wydatek części nie zatopionej Q_N . Wykorzystując wyprowadzone powyżej relacje możemy napisać

$$Q = Q_z + Q_N = \mu_{wz} \sqrt{2g\Delta H + v_1^2 - v_2^2} S + \mu_{wN} \int_{H_d}^{z_g} \sqrt{2g(H_g - z) + v_1^2} b(z) dz. \quad (16.55)$$

Najczęściej przyjmujemy, że $\mu_{wz} = \mu_{wN} = \mu_w = 0,65$.

16.3.2.3. Wpływ spod zasuw

Szczególnym typem otworu jest szczelina pod zasuwą. **Zasuwą** nazywamy przegrodę, która ma możliwość ruchu w płaszczyźnie pionowej. Gdy opuścimy ją całkowicie, wtedy stanowi ściankę piętrzącą. Gdy zaś uniesiemy, jej dolna krawędź stanowi górne ograniczenie otworu (rys. 16.15), którego dolnym ograniczeniem jest z reguły dno kanału (choć może też ono być wzniesione ponad dno).

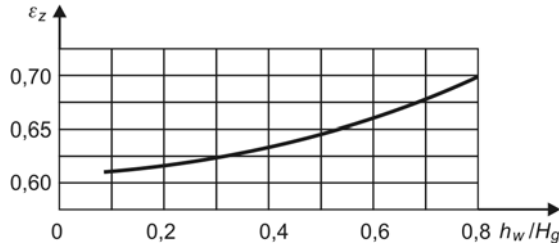


Rys. 16.15. Wpływ spod zasuw: a) niezatopiony, b) zatopiony

Wpływ spod zasuw nazywamy niezatopionym wtedy, gdy głębokość wody dolnej H_d nie przekracza **głębokości sprężonej** h_2 , obliczonej za pomocą relacji (16.77) dla $h_1 = h_z$, czyli gdy $H_d \leq h_2$. Wartość h_z jest mniejsza od wysokości szczeliny h_w , co wynika z kontrakcji dolnej krawędzi zasuw. Przyjmijmy, że:

$$h_z = \varepsilon_z h_w. \quad (16.56)$$

Współczynnik dławienia zasuw ε_z odczytać można z wykresu na rys. 16.16.



Rys. 16.16. Współczynnik dławienia zasuwy

Wydatek przy wypływie nie zatopionym obliczamy tak, jak wydatek małego otworu. Jeżeli szczelina pod zasuwą ma kształt prostokąta o szerokości B , to możemy napisać

$$Q = \mu_z h_w \sqrt{2g(H_g - \varepsilon_z h_w) + v_1^2} B. \quad (16.57)$$

Współczynnik wydatku μ_z leży w granicach $0,65 \div 0,80$.

Gdy głębokość wody dolnej H_d przekracza głębokość sprzężoną H_2 , zjawisko ma charakter wypływu zatopionego (rys. 16.15b) i wtedy piszemy:

$$Q = \mu_z B h_w \sqrt{2g(H_g - H_d) + v_1^2 - v_2^2}. \quad (16.58)$$

16.3.3. Współczynniki wydatku otworów

Tak jak i w przypadku przelewów, najdokładniejszą metodą jest doświadczalne wyznaczenie wartości współczynnika wydatku. Jeżeli jest to niemożliwe, korzystamy z danych z literatury (np. [69]).

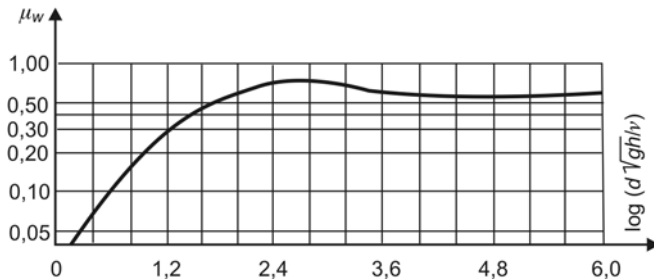
Dla małych otworów można z dobrym przybliżeniem przyjmować:

$$\mu_w = 0,62. \quad (16.59)$$

W ujęciu dokładniejszym współczynnik wydatku zależy nie tylko od wielkości otworu, ale także od jego zatopienia i od lepkości wypływającej cieczy:

$$\mu_w = f\left(d\sqrt{g(H - z_g)} / \nu\right). \quad (16.60)$$

Przebieg tej funkcji dla otworów kołowych pokazano na rys. 16.17.



Rys. 16.17. Współczynnik wydatku dla otworu kołowego

Jeżeli część (p_n) obwodu (p_w) otworu jest bezpośrednim przedłużeniem bocznych ścianek oraz/lub dna obszaru dopływowego, mówimy, że wypływ odbywa się z niezupełnym dławieniem. W takim przypadku korygujemy współczynnik wydatku μ_w , wprowadzając współczynnik μ_{wu} :

$$\mu_{wu} = \mu_w (1 + c_n p_n / p_w) \quad (16.61)$$

(gdzie $c_n = 0,13$ dla otworu kołowego, zaś $c_n = 0,15$ dla otworu prostokątnego).

Dla otworów dużych można przyjmować następujące wartości:

— przy pełnym dławieniu (ostra krawędź):

$$\mu_w = 0,65; \quad (16.62)$$

— gdy dolna krawędź pokrywa się z dnem, a pozostałe krawędzie są ostrokątne:

$$\mu_w = 0,675; \quad (16.63)$$

— jak wyżej, lecz przy zaokrąglonych krawędziach

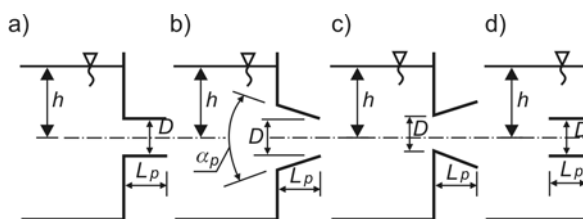
$$\mu_w = 0,825. \quad (16.64)$$

Współczynnik wydatku otworu zatopionego bardzo nieznacznie różni się od odpowiedniej wartości dla otworu niezatopionego. Można go otrzymać, mnożąc ten ostatni przez 0,986. Z kolei dla otworów częściowo zatopionych można stosować relację (16.62).

16.3.4. Wpływ przystawek

Termin **przystawka** określa krótki odcinek przewodu (o stałej średnicy, zbieżny lub rozbieżny), wstawiony w otwór. Może on być skierowany poziomo, pionowo lub ukośnie. Montuje się go albo od strony wewnętrznej, albo od strony zewnętrznej ścianki, w której wykonany jest otwór.

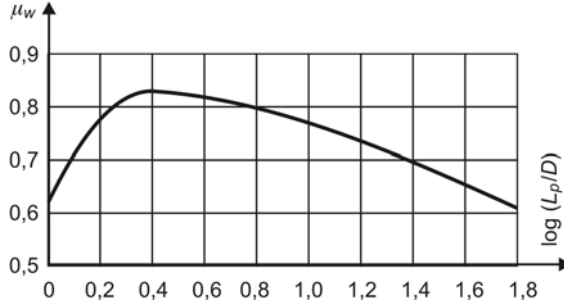
Przystawki umieszcza się celem skierowania strumienia w pożądanym kierunku oraz dla zmiany warunków wypływu [69]. Pod względem ilościowym obecność przystawki uwzględnia się poprzez zmianę wartości współczynnika wydatku otworu.



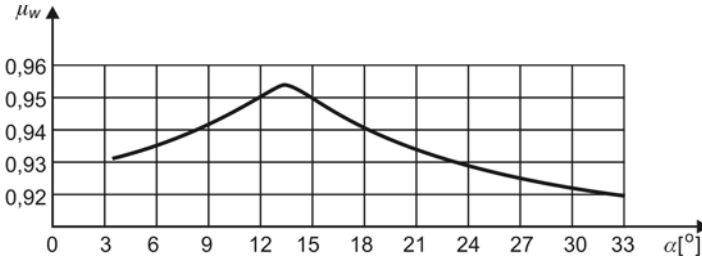
Rys. 16.18. Podstawowe rodzaje przystawek: a) zewnętrzna cylindryczna, b) zewnętrzna zbieżna, c) zewnętrzna rozbieżna, d) wewnętrzna cylindryczna

Długość przystawki nie może być mniejsza od około $3,0 \div 3,5$ średnic otworu, gdyż w przeciwnym razie wypływ będzie następował tylko częścią otworu wylotowego, co zniweczy jej wpływ. Z drugiej strony, gdy jest ona zbyt długa ($L_p / D > 55$), zaczyna działać jak rurociąg, czyli zaczynają dominować straty na długości.

Za najważniejsze ze względów praktycznych należy uznać przystawki zewnętrzne cylindryczne (rys. 16.18a) i zbieżne (rys. 16.18b). Współczynniki wydatku dla tych przystawek opisują wykresy na rys. 16.19 i 16.20.



Rys. 16.19. Współczynnik wydatku dla przystawki cylindrycznej



Rys. 16.20. Współczynnik wydatku dla przystawki zbieżnej

Pozostałe typy przystawek są słabiej zbadane. Dla przystawki zewnętrznej, rozbieżnej (rys. 16.18c) można przyjmować $\mu_w = 0,46$, zaś rozbieżnej, wewnętrznej – $\mu_w = 0,50$ (jej kąt rozwarcia nie może przekraczać $5\div 7^\circ$, bo inaczej strumień wypływa tylko częścią przekroju wylotowego). W przypadku przystawki cylindrycznej wewnętrznej mamy $\mu_w = 0,71$ (gdy strumień wypływa całym przekrojem, zaś w przeciwnym wypadku mamy $\mu_w = 0,51$, co jest wartością mniejszą od $0,62$, przyjmowanej dla otworu bez przystawki).

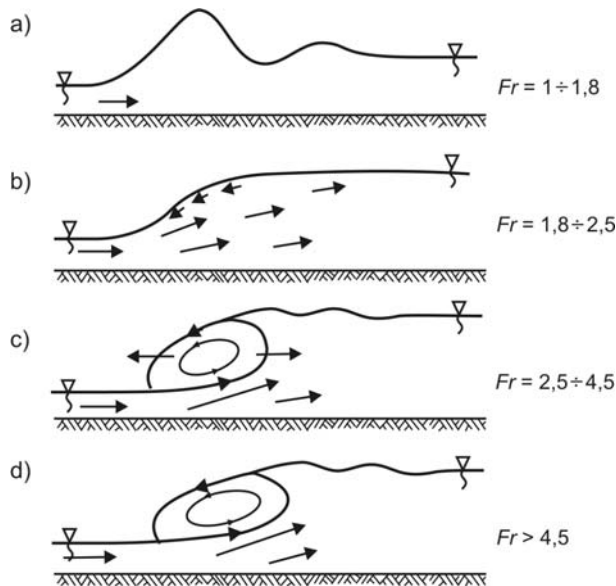
16.4. Odskok hydrauliczny

Jeżeli w pewnym przekroju kanału otwartego wymusimy **przeływ rwący** (rozd. 13), o głębokości strumienia $h_1 < h_c$ (na przykład umożliwiając wypływ wody spod zasuw), a w pewnej odległości L_B (niedużej) – przeływ spokojny o głębokości $h_2 > h_c$ (na przykład układając kanał z małym spadkiem, lub spiętrzając wodę), uzyskamy bardzo charakterystyczną strukturę przepływową, zwaną **odskokiem hydraulicznym** lub zamiennie **odskokiem Bidone'a**.

Istotą tej struktury jest złożone, przestrzenne pole prędkości, zawierające strumienie zwrotne, o konkretnym kształcie zależnym od liczby Froude'a, w przekroju początkowym (rys. 16.21):

$$Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}}. \quad (16.65)$$

Przy małych wartościach tej liczby ($1 < Fr_1 < 1,8$) odskok ma postać lokalnego zafalowania swobodnej powierzchni, a z jej wzrostem przechodzi w rodzaj wirującego walca wodnego, o osi poziomej ($Fr_1 > 4,5$).



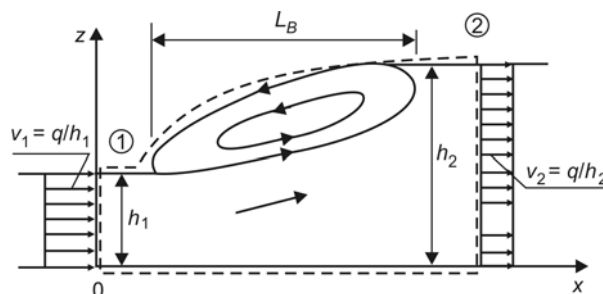
Rys. 16.21. Rodzaje odskoków hydraulicznych: a) zafałowany, b) słaby, c) oscylujący, d) trwały

Z uwagi na złożoność przepływu, mającego silnie turbulentny charakter, dokładnego opisu odskoku nie udało się uzyskać. Biorąc więc pod uwagę potrzeby praktyki, ruch w obrębie odskoku opisywany jest za pomocą uproszczonego modelu jednowymiarowego, zgodnie z którym traktowany jest on jako nieciągłość strumienia.

Dla schematu obliczeniowego jak na rys. 16.22, przyjmijmy następujące założenia:

- spadek dna koryta jest na tyle mały, że możemy pominąć składową siły ciężkości wzdłuż kierunku ruchu,
- długość odskoku (L_B) jest na tyle mała, że można pominąć naprężenia styczne,
- przepływ przed i za odskokiem może być opisany modelem podłużnym,
- parametry zjawiska nie zmieniają się w kierunku osi Oy ; przepływ na jednostkę szerokości wynosi:

$$q = Q/B. \quad (16.66)$$



Rys. 16.22. Schemat obliczeniowy odskoku Bidone'a

Równanie zachowania masy w przekrojach 1-1 i 2-2 (rys. 16.22) można wobec powyższych założeń zapisać następująco:

$$h_1 v_1 = h_2 v_2 = q. \quad (16.67)$$

Równanie zachowania pędu w kierunku pionowym sprowadza się do relacji, określających hydrostatyczny rozkład ciśnienia w przekrojach 1–1 i 2–2:

$$p_1 = p_0 + \rho g(h_1 - z), \quad (16.68)$$

$$p_2 = p_0 + \rho g(h_2 - z). \quad (16.69)$$

Natomiast w kierunku poziomym mamy [38]:

$$\rho q(v_2 - v_1) = \int_0^{h_1} p_1 dz - \int_0^{h_2} p_2 dz + \int_{h_1}^{h_2} p_0 dz. \quad (16.70)$$

Podstawiając trzy przedostatnie zależności do (7.70), otrzymujemy:

$$h_1 v_1^2 + \frac{1}{2} g h_1^2 = h_2 v_2^2 + \frac{1}{2} g h_2^2. \quad (16.71)$$

Przeliczając prędkość v_2 na v_1 zgodnie z (16.67):

$$v_2 = v_1 h_1 / h_2 \quad (16.72)$$

oraz wykorzystując (16.65), mamy zamiast (16.71):

$$\left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - 2Fr_1^2 \right] \left(\frac{h_2}{h_1} - 1 \right) = 0. \quad (16.73)$$

Równanie to ma trzy rozwiązania. Pierwsze z nich

$$\frac{h_2}{h_1} - 1 = 0 \quad (16.74)$$

odrzucaamy, bowiem prowadzi do relacji $h_2 = h_1$, czyli nie odnosi się do odskoku, lecz do zwykłego przepływu podłużnego, bez zmiany głębokości. Drugie z nich:

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 + 8Fr_1^2}}{2} < 0 \quad (16.75)$$

również odrzucaamy, gdyż iloraz h_2/h_1 musi być dodatni. Sens fizyczny ma dla nas tylko trzecie rozwiązanie postaci:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1}{2}. \quad (16.76)$$

Oznacza ono, że:

- gdy $Fr_1 = 1$, to $h_2 = h_1$ (strumień krytyczny nie zmienia swego charakteru na odcinku L_B),
- gdy $Fr_1 < 1$ – $h_2 < h_1$ (głębokość strumienia spokojnego maleje na odcinku L_B , panuje tam ruch jednostajny przyspieszony),

— gdy $Fr_1 > 1 - h_2 > h_1$ (głębokość na odcinku L_B rośnie i tworzy się odskok hydrauliczny).

Jak widzimy z powyższego, głębokość h_1 i h_2 są ze sobą ściśle powiązane, zgodnie z relacją

$$h_2 = 0,5h_1 \left(\sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right). \quad (16.77)$$

Nazywamy je **głębokościami sprzężonymi**. Związek (16.77) pozwala obliczyć, jaka będzie głębokość strumienia za odskokiem, jeżeli znana jest jego głębokość oraz liczba Froude'a przed odskokiem.

Przedstawiona powyżej teoria nie pozwala, niestety, na określenie długości odskoku L_B . Stosuje się więc w tym celu relacje empiryczne. W Polsce do najbardziej popularnych należą:

— wzór Smetany ($n_B = 0,8 \div 1,2$):

$$L_B = 6n_B (h_2 - h_1), \quad (16.78)$$

— wzór Wójcickiego

$$L_B = \left(8 - 0,05 \frac{h_2}{h_1} \right) (h_2 - h_1). \quad (16.79)$$

17. Przepływy w obiektach kubaturowych

17.1. Uwagi ogólne

Mianem **objektu kubaturowego** określamy każdy układ przepływowy, dla analizy pracy którego nie można pominąć wewnętrznej struktury pola zmiennych przepływu. W rozstrzyganiu tej kwestii zasadnicze znaczenie mają argumenty funkcjonalne, a dopiero w drugiej kolejności – geometryczne. Choć bowiem jest tak, że niejednokrotnie pomijanie zmienności tych pól wiąże się z niedużymi wymiarami obiektu (jak to miało miejsce w przypadku **węzłów punktowych** – par. 12.2.2), lecz nie jest to regułą. Przykładów sytuacji, gdy musimy starannie rozważać rozkłady prędkości, nawet w niedużym obszarze, jest w technice bardzo wiele (pompy i inne maszyny hydrauliczne, urządzenia pomiarowe i regulacyjne...).

Przy opisie pracy obiektów kubaturowych duże znaczenie ma charakter zmiennych stanu. Jak już wspomniano (par. 1.3.2), mogą one określać albo cały układ (**zmienne globalne**), albo odnosić się do każdego z punktów tego układu (**zmienne lokalne**). Aspekt ten należy rozważać oddzielnie dla samego układu, a oddzielnie – dla zachodzących w nim procesów (nie zapominając jednak o ich współzależności). Przykładem obiektu kubaturowego, należącego do pierwszej kategorii, jest **węzeł przepływowy rencyjny** (par. 12.2.2), który w nieco innym ujęciu można określić mianem **małego zbiornika** (rozdz. 14). W skrócie można powiedzieć, że jest on reprezentowany przez pionową „kolumnę cieczy”. Jej poziomy przekrój poprzeczny jest z reguły stały (i może mieć dowolny kształt, choć często jest on kołowy), a o aktualnej objętości zgromadzonej w nim cieczy decyduje wysokość tej „kolumny” H . Tak więc podstawowa charakterystyka hydrauliczna takiego układu obejmuje trzy wielkości globalne – wydatek dopływowy Q_{dopl} , wydatek odpływowy Q_{odpl} oraz wysokość H (jedyna zmienna odnosząca się do wewnętrznej struktury zjawiska).

Jednakże tak proste obiekty kubaturowe nie występują zbyt często. Większość z nich musimy opisywać złożonymi funkcjami, określającymi pole prędkości i ciśnienia, a niekiedy także gęstości, stężenia substancji rozpuszczonych oraz temperatury, a w przypadku układów o zmiennej geometrii – także odnoszącymi się do ich kształtu. Znając ogólne równania ruchu płynu (część I), mamy świadomość, jak trudne formalnie są to zadania.

Istniejące uproszczone modele interesujących nas zjawisk warto analizować także z punktu widzenia potrzeb i możliwości wymiarowania obiektów. Generalnie możemy metody wymiarowania podzielić na:

- metody wskaźnikowe,
- metody fizyczne:
 - uproszczone,
 - dokładne.

Do **metod wskaźnikowych** zaliczymy wszystkie sposoby wymiarowania obiektów, bazujące na syntetycznych wskaźnikach liczbowych, mających charakter zaleceń technicznych, które powstają

w wyniku (mniej czy bardziej ściśle prowadzonej) statystycznej analizy dostępnych informacji o funkcjonowaniu już istniejących układów, należących do tej samej kategorii, co obiekt wymiarowany. Jako prosty przykład takiego wskaźnika można podać normatywne zużycie wody przez jedną osobę w ciągu doby (rzędu 100–200 l/Md [72]), powszechnie wykorzystywane przy programowaniu wielkości wodociągu. Zaletą metod wskaźnikowych jest ich ogromna prostota formalna, zaś podstawową wadą – brak związku z mechanizmami, które rządzą przebiegiem rozważanych zjawisk. Tym samym można dzięki ich stosowaniu w prosty sposób zwymiarować obiekt. Jeśli przyjęte wskaźniki odpowiadają warunkom pracy tego obiektu, będzie on mógł funkcjonować w oczekiwany sposób. Jeżeli jednak pojawi się jakaś niezgodność lub zostanie popełniony błąd projektowy, skutkujący niekorzystnym jego działaniem, zalecenia techniczne nie pozwalają na wyjaśnienie tego problemu. Jedyną możliwością reakcji jest wtedy zmiana wartości przyjętych wskaźników (o ile już wykonany obiekt stwarza takie możliwości, co nie zawsze ma miejsce).

Druga grupa metod wymiarowania obiektów technicznych (nie tylko przepływowych), określonych mianem **fizykalnych**, bazuje na zależnościach ilościowych, których postacię wynikają z praw natury – mniej czy bardziej uproszczonych, lecz opisujących przebieg rozważanych zjawisk. Można je podzielić na dwie podgrupy (metod **uproszczonych** oraz **dokładnych**), przy czym podział ten nie jest precyzyjny, a ma jedynie charakter metodyczny, bowiem w istocie rzeczy wszystkie modele procesów, zachodzących w przyrodzie oraz/albo technice, obarczone są pewnymi założeniami, prowadzącymi do odrzucenia niektórych czynników. Rzecz w tym, aby w każdym konkretnym przypadku mieć świadomość, która wersja (lub wersje) dostępnych metod wymiarowania należy do ściślej opisujących proces, a która – do mniej dokładnych. Tytułem przykładu można tu przywołać znany nam już opis ruchu cieczy w przewodzie kołowym, w którym posługujemy się zróżnicowanym polem jej prędkości (rozwiązanie Hagen-Poiseuille'a, podrozdz. 4.4), który należy do kategorii dokładniejszych, a z drugiej strony – metodę uproszczoną, wykorzystującą prędkość średnią według wzoru Darcy'ego-Weisbacha (11.12).

Kolejnym ważnym czynnikiem, jaki trzeba wziąć pod uwagę przy opisie pracy obiektów kubaturowych, jest charakterystyka (chemiczna, fizyczna oraz/albo biologiczna) płynu. Jeżeli w każdym punkcie obszaru jest ona jednakowa, a także nie zmienia się w czasie, wtedy możemy potraktować płyn jako **jednorodny**. W przeciwnym razie mamy do czynienia z **płynem niejednorodnym**. Możemy stwierdzić, że zróżnicowanie to jest bardzo istotne, nawet bez rozważania cech konkretnych układów. Wynika to z faktu, że w przypadku substancji jednorodnej możemy korzystać z „wymienności” masy. Polega ona na tym, że jeśli do układu wprowadzimy w jakimś jego miejscu i w pewnej chwili czasu porcję masy Δm , a następnie w innym czasie i miejscu odbierzemy taką samą masę, to operację taką traktujemy jako w pełni równoważną, mimo że obie te porcje (wprowadzona i pobrana) w ogólnym przypadku fizycznie będą się składały z różnych molekuł. Ze względu na jednorodność układu nie zauważamy tu bowiem ich zróżnicowania.

Zupełnie inaczej sytuacja wygląda w przypadku cieczy niejednorodnej, gdyż w czasie upływającym pomiędzy wprowadzeniem i pobraniem próbki masy, w układzie będą zachodziły różnego rodzaju reakcje i przemiany chemiczne, fizyczne oraz/albo biologiczne, które doprowadzą do zmiany składu substancji. Najprostsza z tych przemian będzie polegała na zmianie właściwości próbki, będącej rezultatem wyżej wspomnianego zróżnicowania składu próbek (tę bardzo ważną kwestię omówimy dalej – patrz rys. 17.3). Tym samym nie można tu zakładać „wymienności” masy, natomiast konieczne staje się staranne analizowanie **czasu przebywania masy w układzie** oraz zachodzących w tym czasie przemian.

Zróżnicowanie to prowadzi do wprowadzenia dwóch zasadniczych kategorii obiektów kubaturowych – odpowiednio **zbiorników retencyjnych** oraz **reaktorów**.

17.2. Zbiorniki retencyjne

Zasadniczym zadaniem **zbiorników retencyjnych** jest gromadzenie płynu w okresach, gdy dopływ przewyższa pobór, oraz jego wprowadzanie do układu w sytuacjach przeciwnych. Występują one w wielu systemach przepływowych inżynierii środowiska. Możemy więc napotkać zbiorniki czerpalne przy ujęciach wody, zbiorniki wyrównawcze w sieciach wodociągowych, zbiorniki zabezpieczające w ciągach przewodów kanalizacji deszczowej, a wreszcie szczególnie istotną kategorię tych obiektów – zbiorniki zaporowe, utworzone przez budowle piętrzące.

Te ostatnie mają z reguły charakter wielofunkcyjny (gromadzenie wody dla zaopatrzenia ludności, przemysłu oraz/albo rolnictwa, jak też do celów energetycznych oraz dla ochrony przed powodzią...), choć bywa i tak, że służą tylko wybranym celom. Cechują się one znacznymi rozmiarami, co wynika ze skali stawianych przed nimi zadań. Aby bowiem mogły je wypełniać, muszą wykazywać odpowiednią bezwładność. Uwzględniając ponadto różne inne ich funkcje (stwarzanie warunków do żeglugi śródlądowej, sportów wodnych i rekreacji, wykorzystywanie do celów gospodarczych, jak choćby hodowla ryb, czy też zatrzymywanie osadów i rumowiska, przynieszonego przez napływającą wodę) dochodzimy do oczywistego wniosku, że muszą one mieć znaczne pojemności.

Obok zamierzonych, ma to też szereg dodatkowych konsekwencji – zbiorniki wpływają na lokalny klimat oraz stosunki wodne, a tym samym na warunki wegetacji roślin i bytowania zwierząt. Tak więc obiekty tego typu nie mogą być traktowane wyłącznie jako specjalistyczne konstrukcje, lecz już na etapie planowania należy do nich podchodzić w sposób interdyscyplinarny.

Jest więc zrozumiałe, iż ze względu na złożoność tej kategorii obiektów inżynierskich, do ich wymiarowania należy stosować **metody uzasadnione fizycznie**, i to raczej należące do kategorii dokładnych. Od strony teorii przepływów opisano je w pierwszej części tej książki. Uwzględniając realia (znaczne wartości liczby Reynoldsa dla zbiorników retencyjnych, co oznacza istotny poziom turbulencji), za ogólny model zjawiska należy tu uznać **równania Reynoldsa** (7.5, 7.25). Stosuje się tu także metody uproszczone, w tym bazujące na bilansie przepływów, analogicznym do przedstawionego w par. 11.6.2.

Jeśli chodzi o **metody wskaźnikowe**, to mogą one być tu przydatne tylko na etapie wstępnego planowania obiektu (gdy celowe bywa posłużenie się statystycznymi zaleceniami technicznymi, mającymi charakter praktycznych normatywów).

Generalnie rzecz biorąc, proces wymiarowania zbiorników retencyjnych jest silnie uwarunkowany przez ich aspekty użytkowe. Zagadnienie to bliżej omawia się w literaturze specjalistycznej z zakresu hydrotechniki, gospodarki wodnej oraz przedmiotów pokrewnych.

Z kolei obiekty mniejsze, o charakterze zbiorników wyrównawczych, funkcjonują w sposób odpowiadający **węzłom retencyjnym** (par. 12.2.2).

Trzeba tu wszakże dodać, że coraz częściej klasyczne zależności, służące opisowi zbiorników retencyjnych, w których całkowicie pomijamy zmiany własności płynącego medium, muszą być uzupełniane relacjami, uwzględniającymi reakcje i przemiany, zachodzące w układzie. Wynika to z jednej strony z rosnących wymagań użytkowników, a z drugiej – z ogólnego pogarszania się jakości naturalnego środowiska człowieka, co przejawia się w niemal wszystkich systemach przepływowych. Nie jest to co prawda czynnik zasadniczy dla zbiorników retencyjnych, który musi być uwzględniany w trakcie podstawowego wymiarowania obiektu (jak to ma miejsce w przypadku reaktorów – patrz następny podrozdział), lecz nabiera coraz większego znaczenia.

17.3. Reaktory przepływowe

17.3.1. Uwagi ogólne

W przeciwieństwie do **zbiorników retencyjnych**, w których uwzględnić należy indywidualne cechy konkretnych obiektów, dla **reaktorów** można wprowadzić pewne dodatkowe klasyfikacje. Wynikają one z szerszego niż w przypadku zbiorników obszaru wykorzystywania reaktorów (liczne gałęzie przemysłu oraz inżynieria środowiska, a w szczególności – inżynieria sanitarna), a także z ich specyfiki. Chodzi o to, że o ile zbiorniki retencyjne mają z reguły charakter jednostkowy, o tyle reaktory wykazują wyraźną powtarzalność. Jest ona szczególnie widoczna w przemyśle, gdzie często stosuje się równoległe baterie reaktorów, liczące po kilka lub kilkanaście identycznych jednostek. W zagadnieniach inżynierii środowiska zestawy takie są mniej liczne, lecz i tak w jednym obiekcie (oczyszczalni ścieków, stacji uzdatniania wody...) z reguły wykonuje się ich po kilka.

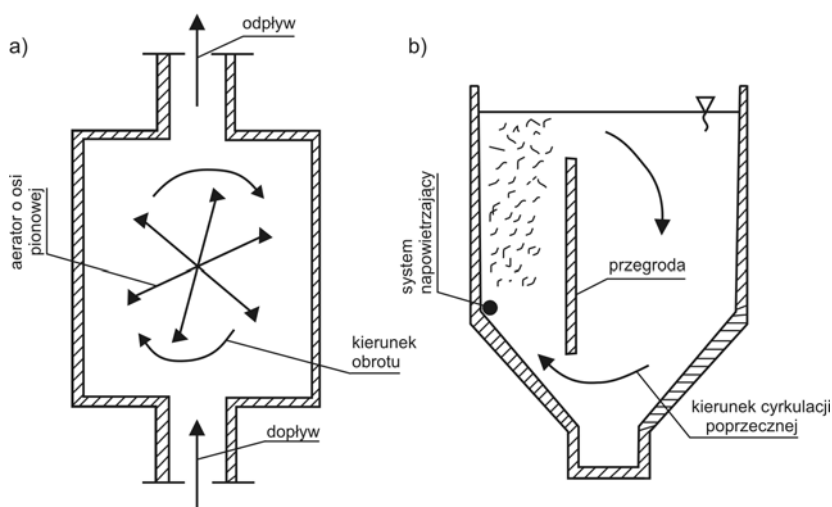
By uwypuklić te szczególne cechy reaktorów, w pierwszej kolejności wyróżnimy wśród nich:

- urządzenia o przepływie postępowym,
- urządzenia o przepływie zwrotnym.

Kryterium klasyfikacyjne ma tu charakter funkcjonalny. Do pierwszej grupy zaliczamy te urządzenia, wewnątrz których płyn roboczy przemieszcza się sukcesywnie między wlotem a wylotem, podczas gdy do drugiej grupy należą urządzenia, w których wnętrzu dla właściwej pracy należy wymusić ruch powrotny części strumienia płynu roboczego.

Pamiętając o ogromnej różnorodności już istniejących obiektów technicznych (jak też o tych, które mogą jeszcze powstać w przyszłości), dogodnie jest podzielić urządzenia o przepływie zwrotnym na dwie kolejne kategorie:

- urządzenia o przepływie cyrkulacyjnym,
- urządzenia o przepływie recykulacyjnym.



Rys. 17.1. Przykładowe schematy urządzeń o przepływie cyrkulacyjnym:

a) komora reakcji napowietrzana aeratorami mechanicznymi, b) piaskownik napowietrzany

Pierwszą z nich tworzą obiekty, wewnątrz których wywoływany jest przepływ wirowy, o uporządkowanym charakterze i o dużej skali. Nie zaliczamy do niej urządzeń o lokalnej wirowości (indukowanej na przykład przez niektóre systemy napowietrzające, lub służące do mieszania zawartości komory). Można tu dodatkowo wyróżnić obiekty o pionowej osi cyrkulacji (na przykład niektóre komory osadu czynnego, napowietrzane aeratorami mechanicznymi – rys. 17.1a), oraz obiekty o poziomej osi cyrkulacji (których klasycznym przykładem jest piaskownik napowietrzany – rys. 17.1b).

Kategoria druga obejmuje te urządzenia, w których przepływ zwrotny nie ma charakteru rotacyjnego, a jego istotą jest nawrót części strumienia płynu, pobranego z jednej części obiektu (najczęściej położonego w strefie odpływowej) i wprowadzonego z powrotem do innej jego części (najczęściej położonej w strefie dopływowej).

Przepływ typu cyrkulacyjnego w obiektach kubaturowych najczęściej wywoływany jest w celu:

- homogenizacji jego zawartości (mieszanie mechaniczne),
- doprowadzenia tlenu (aeratory turbinowe),
- utrzymania odpowiednich warunków hydraulicznych (jak ma to miejsce w piaskownikach napowietrzanych, lub komorach flokulacji).

Z kolei przepływy recyrkulacyjne z reguły stosuje się, aby:

- doprowadzić do płynu surowego (na przykład ścieków) produkty pożądanego reakcji (na przykład osad czynny), warunkujące podtrzymanie przebiegu tychże reakcji;
- utrzymać minimalny (ze względów technologicznych, jak na przykład w złożach biologicznych [35]) przepływ przez urządzenie, gdy wydatek dopływającego surowca jest zbyt niski.

W dalszym ciągu tej pracy rozważane będą głównie reaktory o przepływie postępowym, przy czym celem tych rozważań będzie analiza oraz opis ilościowy hydraulicznych aspektów zagadnienia.

17.3.2. Charakterystyka hydrauliczna reaktora przepływowego

Zasadniczą różnicę między dwiema podstawowymi kategoriami obiektów kubaturowych stanowi możliwość zachodzenia reakcji oraz/albo przemian chemicznych, fizycznych oraz/albo biologicznych. Cechują one **reaktory**, a nie występują (lub są pomijane) w **zbiornikach retencyjnych**. Oznacza to, że dla każdej z tych kategorii do opisu pola przepływu możemy wykorzystywać w zasadzie te same metody wyznaczania zmiennych stanu. Ewentualne różnice mogą pojawić się wtedy, gdy zachodzące w reaktorze przemiany w istotny sposób zmieniają właściwości przepływających substancji. W skrajnym przypadku może być tak, że reagujące medium nie jest płynem newtonowskim (podrozdz. 3.9), co wymagałoby posłużenia się równaniami omawianymi w ramach **reologii** [47, 57, 71]. Jednakże tego typu sytuacje zdecydowanie częściej występują w instalacjach przemysłowych, niż w systemach inżynierii środowiska, gdzie z kolei nierzadko możemy mieć do czynienia z wpływem reakcji na własności substancji w ramach modelu newtonowskiego, co przejawia się zmianą gęstości oraz współczynnika lepkości płynu. Omówione w I części książki równania uwzględniają taką możliwość.

Tak więc znane już zależności mechaniki płynów i hydrauliki musimy uzupełnić relacjami, odnoszącymi się do reakcji i przemian, zachodzących w interesujących nas układach.

Podstawową wielkością, określającą stan układu reagującego, jest **stężenie** c_i każdej z i ($i = 1, 2, \dots, I$) obecnych w nim substancji (**substratów**, czyli składników wchodzących w reakcje, oraz **produktów**, stanowiących jej rezultat). Stężenie z reguły jest definiowane jako lokalny iloraz masy i -tej substancji ΔM_i oraz objętości próbki ΔV :

$$c_i = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_g} \frac{\Delta M_i}{\Delta V} . \quad (17.1)$$

Objętość graniczna ΔV_g ma tu sens omówiony w par. 1.3.3.

Przebieg reakcji (a w szczególności – prędkość, z jaką substancje ulegają przemianom, wyrażana ilorazem zmiany stężenia oraz czasu, w jakim ta zmiana nastąpiła) ma ogromne znaczenie w każdej dziedzinie nauki i techniki, w której zajmujemy się tymi zagadnieniami. Ilościowemu opisowi tego przebiegu w każdej z przedmiotowych dziedzin poświęcona jest jej odrębna gałąź, zwana **kinetyką** (kinetyka reakcji chemicznych, czy też kinetyka przemian biologicznych; zauważmy, że w przypadku szybkości zmiany położenia, która jest przeciwieństwem specyficzną przemianą, rozważaną w ramach mechaniki, używamy tradycyjnie terminu **kinematyka** – rozdz. 2). Są to jednak zagadnienia specjalistyczne (na przykład [32, 50, 56]), więc tutaj nie będą omawiane. Zwrócić natomiast musimy baczną uwagę na niesłychanie ważny wskaźnik, jakim jest **całkowity czas przebiegu reakcji** t_{rc} . Biegnie on od momentu wejścia substratów w kontakt (w wymaganych dla danej reakcji warunkach), aż do chwili wyczerpania przynajmniej jednego z nich.

W przypadku wyidealizowanym powinno być tak, że czas rozpoczęcia reakcji pokrywa się z czasem wprowadzenia mieszaniny substratów do reaktora, który z kolei medium powinno opuścić z chwilą ustania reakcji. Jeśli więc posłużyć się **czasem przebywania masy w układzie przepływowym** t_p (zwanym także **czasem zatrzymania**), to należałoby napisać, że:

$$t_{rc} = t_p . \quad (17.2)$$

Jednakże ściśle potraktowanie tego warunku byłoby trudne i wręcz niecelowe. Wynika to z faktu, że bardzo często szybkość przemiany jest proporcjonalna do stężenia substratów. Tym samym najszybciej biegnie ona na samym początku, zwalniając w miarę wyczerpywania się składników. W efekcie całkowity czas reakcji jest z reguły bardzo długi, co wobec (17.2) wymagałoby budowy reaktorów o dużych rozmiarach, czyli kosztownych. W praktyce przyjmuje się, że przemiana w reaktorze biegnie aż do momentu, gdy stężenie substratów spadnie do poziomu na tyle niskiego, iż cel przemiany będzie można uznać za osiągnięty w pożądanym stopniu r_{ef} , przy racjonalnej wartości **efektywnego czasu przebiegu reakcji** t_{ref} . Sposób określenia wartości r_{ef} , definiowanej jako:

$$r_{ef} = \frac{c_{i,początkowe} - c_{i,końcowe}}{c_{i,początkowe}} , \quad (17.3)$$

należy do specyfiki konkretnej dziedziny nauki lub techniki. W zagadnieniach inżynierii środowiska rozważane procesy najczęściej mają na celu usuwanie zanieczyszczeń z wody lub ścieków. Wartość r_{ef} jest tu najczęściej regulowana przepisami prawa oraz/albo uzgodnieniami urzędowymi [72].

Tak więc w zastosowaniach jako warunek właściwego funkcjonowania reaktorów przyjmujemy relację:

$$t_{ref} = t_p . \quad (17.4)$$

Sposób wyznaczania czasu zatrzymania masy w reaktorze przepływowym t_p jest przedmiotem dalszych rozważań tego rozdziału.

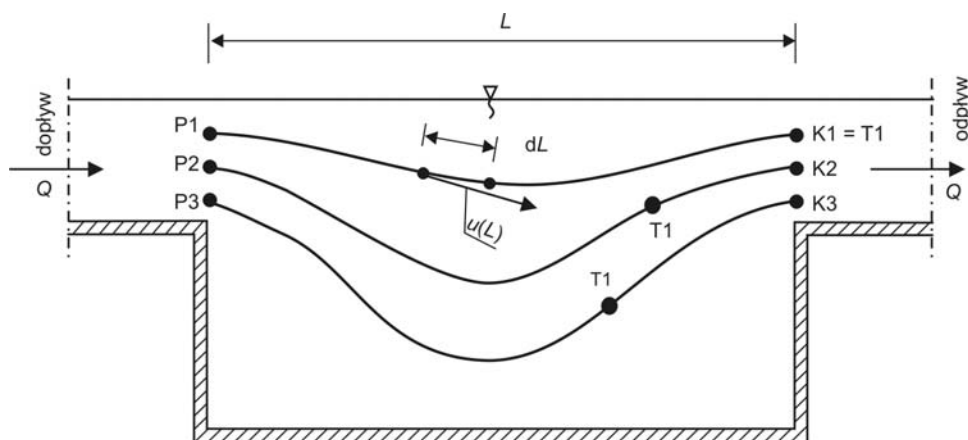
17.3.3. Wyznaczanie czasu zatrzymania

17.3.3.1. Zasady ogólne

W ujęciu dokładnym [50] wyznaczenie czasu zatrzymania jest możliwe wtedy, gdy znamy trajektorię rozważanej porcji masy oraz prędkość w każdym jej punkcie. Zgodnie z podstawową zależnością, definiująca prędkość jako stosunek drogi do czasu, mamy wtedy:

$$t_p = \int_p^K \frac{dL}{u(L)}. \quad (17.5)$$

Uwzględniając zróżnicowanie pola przepływu cieczy przez realne układy, łatwo stwierdzimy, że poszczególne elementy płynu, wpływające do reaktora w różnych punktach przekroju wlotowego (P1, P2 i P3 na rys. 17.2), będą przebywały w nim przez różne okresy czasu. Wynika to zarówno z różnych długości ich trajektorii, jak też ze zróżnicowania wektorów prędkości (a jako prawidłowość można przyjąć, że im krótsza jest trajektoria elementu, tym większa jego prędkość). W efekcie, gdy wybrany przykładowo element płynu o numerze 1 dotrze z punktu P1 do K1 po upływie czasu t_{p1} , to wchodzące jednocześnie z nim do reaktora przykładowe elementy 2 i 3 po upływie tego czasu będą się dopiero znajdowały w punktach oznaczonych symbolem T1. Do swych punktów końcowych K2 i K3 dotrą one później, po upływie odpowiednio czasów t_{p2} i t_{p3} . Tym samym „porcja” masy płynu, znajdującą się w chwili $t = t_{p1}$ w przekroju końcowym reaktora, będzie w większości składała się z innych elementów, niż „porcja” wpływająca do reaktora w chwili $t = 0$. Ten niustanny proces zmiany położenia poszczególnych elementów płynu względem siebie, wynikający ze zróżnicowania pola prędkości wewnątrz reaktora, mający charakter specyficznego mieszania jego zawartości, nosi nazwę **dispersji masy** [18, 50]. Sposób praktycznego uwzględniania wpływu tego procesu na transport masy omówimy dalej.



Rys. 17.2. Dokładne wyznaczenie czasu przebywania masy w reaktorze

Wykorzystanie relacji (17.5) do wymiarowania reaktorów prowadziłoby do bardzo żmudnych i czasochłonnych obliczeń. Byłyby one tym samym obciążone istotnym błędem rachunkowym, bowiem czas zatrzymania obliczany jest tam dla poszczególnych trajektorii. Należałoby więc w ramach takiej procedury obliczyć dla każdej z nich lokalną wartość stopnia przemiany r_i (wykorzystując relacje omawiane w ramach modeli kinetyki danej przemiany [32, 50]). Wartość efektywna byłaby wtedy średnią z tych wartości lokalnych.

17.3.3.2. Model tłokowy

Podstawowa, ze względu na popularność, a jednocześnie najprostsza formalnie, metoda określania projektowego czasu przebywania masy w reaktorze, nosi nazwę **modelu przepływu tłokowego**. Przyjmuje się w nim, że każdy element płynu przebywa w reaktorze przez jednakowy okres, zwany **średnim czasem zatrzymania** t_{ps} (lub **czasem przepływu tłokowego**).

W myśl relacji (17.5) możliwe są rozmaite interpretacje tego założenia. W ujęciu tradycyjnym przyjmuje się, że prędkość przepływu jest w nim określona przez wartość średnią, obliczoną dla przekroju poprzecznego strumienia cieczy:

$$v = Q / S . \quad (17.6)$$

Obliczeniowy wydatek płynu Q jest w zastosowaniach technicznych traktowany jako stały, natomiast wartość S określają geometryczne cechy reaktora. W najprostszym przypadku obiektu prostopadłościennego (rys. 17.2) mamy:

$$S = B H, \quad v = Q / B H = \text{const.} \quad (17.7)$$

Dla drugiej z podstawowych w praktyce kategorii reaktorów, mających kształt cylindryczny (przepływ odbywa się tu z reguły od pionowej rury centralnej o promieniu r_o , umieszczonej w osi symetrii obiektu, wzdłuż poziomego promienia r , ku ściance zewnętrznej o promieniu R , wyposażonej w przelew odpływowy [35]), gdy:

$$S = 2\pi rH, \quad v(r) = Q / 2\pi rH . \quad (17.8)$$

Jednakże w istocie rzeczy zmienność wymiarów geometrycznych nie ma tu znaczenia, gdyż podstawiając (17.6) do (17.5) mamy:

$$t_p = \int_p^K \frac{S(L)dL}{Q} = \frac{1}{Q} \int_p^K S(L)dL = \frac{1}{Q} \int_p^K dV = \frac{V}{Q} = t_{ps} . \quad (17.9)$$

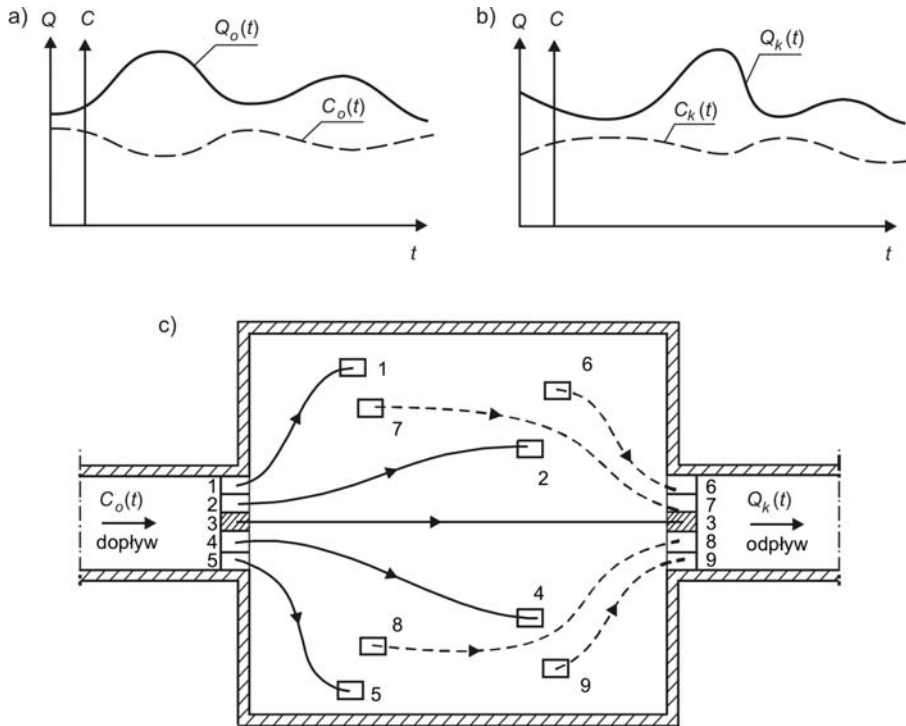
W ten sposób wyprowadziliśmy jedną z chyba najczęściej stosowanych w praktyce inżynierii obiektów kubaturowych (zbiorników i reaktorów) uproszczoną zależność, utożsamiającą przeciętny (w myśl opisanej koncepcji) czas przebywania masy w układzie z wartością czasu przepływu tłokowego. Stopień zgodności tego parametru z rzeczywistą czasową charakterystyką przepływu przez reaktory pokażemy dalej, na konkretnych przykładach (rys. 17.4).

17.3.3.3. Krzywa gęstości rozkładu czasu zatrzymania masy

Jak już wspomniano (rys. 17.2), dokładny opis czasu przebywania masy w reaktorze jest trudny do uzyskania, ze względu na złożoność procesów przepływowych. W ogólnym bowiem przypadku natężenie przepływu przez reaktor jest funkcją czasu $Q(t)$, która w dodatku ma inną postać w przekroju wlotowym $Q_0(t)$, a inną w przekroju wylotowym $Q_k(t)$. Jest to efekt transformującego przepływ oddziaływania układu (rys. 17.3a,b). Jednakże nawet podczas ruchu ustalonego mamy do czynienia ze specyficznym zróżnicowaniem czasu przepływu, które wynika z rzeczywistej zmienności pola prędkości, co zostało wykazane w punkcie 17.3.3.1.

W nieco innym ujęciu problem przedstawiono na rys. 17.3c, gdzie zaznaczono kontrolny „plaster” masy, usytuowany w jednej chwili czasu w dopływowym przekroju reaktora. Podzielono go umownie na 5 „elementów”, o numerach 1, 2, 3, 4 i 5. W chwili, gdy najszybszy z tych elementów (oznaczony tu numerem 3) dociera do końcowego przekroju

urządzenia, pozostałe znajdują się jeszcze w jego wnętrzu. Tym samym „kontrolny plaster masy”, usytuowany w tym momencie w przekroju końcowym, składać się musi z innych elementów (oprócz 3 będą to 6, 7, 8 i 9). To nieustanne „tasowanie” elementów masy jest istotą procesu dyspersji. Komplikuje on opis czasu przebywania masy w układzie, jak też opis rozkładu stężenia każdej z rozważanych substancji (uwaga: w dalszym ciągu, dla uproszczenia zapisu, będziemy pomijać rozróżniające te substancje indeksy „i”; przyjmiemy, że omawiane relacje będzie można w oczywisty sposób powtarzać dowolną liczbę razy, dla każdej z tych substancji).



Rys. 17.3. Dyspersja masy w reaktorze

Równoległym czynnikiem, wpływającym na przebieg omawianego zjawiska, są występujące w rzeczywistych reaktorach przemiany chemiczne, fizyczne oraz/albo biologiczne (zwane często **procesami źródłowymi**). Aby lepiej zrozumieć przebieg rozważanych zjawisk, w pierwszej kolejności dokonajmy dekompozycji tych dwóch kategorii procesów (ruch i czynniki źródłowe). W tym celu najpierw rozważmy przepływ przez reaktor substancji trwałej, którą w tym przypadku nazywamy **znacznikiem** (lub też **traserem**). Uwzględnienie wpływu procesów źródłowych możliwe jest w następnej kolejności [50, 56].

Do celów praktycznych nie będziemy analizowali rzeczywistych rozkładów stężenia rozważanej substancji $c_R(y, z, t)$ w obu skrajnych przekrojach reaktora (początkowym i końcowym), lecz ograniczymy się do operowania ich wartościami uśrednionymi względem tych przekrojów. W przypadku przekroju wlotowego, stężeniem średnim $c_0(t)$ będziemy zresztą posługiwali się z natury rzeczy, gdyż wynika to z oczywistego zastosowania modelu jednowymiarowego [50], [72] do opisu transportu masy w kanałach tranzytowych, łączą-

cych kolejne reaktory. Tym samym posłużenie się wartością średnią w przekroju końcowym:

$$c_K(t) = \frac{1}{S} \int_S c_{RK}(y, z, t) dS \quad (17.10)$$

jest też zrozumiałe. Pozwala ono w prosty sposób obliczyć obciążenie reaktora (to jest ładunek rozważanej substancji):

$$L_S(t) = c(t)Q(t). \quad (17.11)$$

Rzeczywiste rozkłady stężenia w przekroju odpływowym otrzymać można jako rozwiązanie **równania transportu masy**. Jest ono wyrazem **prawa zachowania masy substancji rozpuszczonej** w płynie [50], a w ogólnym przypadku ma postać:

$$\frac{\partial c_i}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)c_i = D_{Mi}\Delta c_i + Z_i, \quad (17.12)$$

gdzie D_{Mi} jest współczynnikiem dyfuzji molekularnej i -tej substancji, zaś Z_i – sumaryczną funkcją źródłową dla tego układu, uwzględniającą wszystkie przemiany, jakim podlega rozważana substancja.

W praktyce stosuje się różne postacie szczególne tej zależności. Za najważniejsze należy uznać **równanie transportu w warunkach ruchu turbulentnego** oraz równania uśrednione względem wybranych zmiennych przestrzennych [38].

Proponowane tu ujęcie, polegające na wyznaczeniu transformacji uśrednionego w przekroju wlotowym stężenia $c_0(t)$ do zmiennego w przekroju końcowym stężenia $c_{RK}(t)$, które następnie zastępuje się uśrednionym według (17.10) stężeniem końcowym $c_K(t)$, jest tym bardziej uzasadnione, że przy opisie dynamiki procesu nie rozróżniamy indywidualnych cech poszczególnych elementów przepływającego przez reaktor medium, a interesuje nas jedynie czas przebywania każdego z nich w układzie. Innymi słowy, stosujemy **podejście o charakterze statystycznym**, którego istotą jest **gęstość rozkładu czasu przebywania masy w układzie**.

Jest oczywiste, że aby porównać zróżnicowanie torów, prędkości, czasów zatrzymania i innych wielkości, charakteryzujących pobyt poszczególnych elementów masy w układzie, analizie należy poddać taki ich zespół, który do wnętrza systemu został wprowadzony w tej samej chwili. Inaczej mówiąc, zbiór kontrolnych elementów płynu (czyli porcja **znacznika**) musi zostać wprowadzony do układu jako **impuls** – w krótkim czasie i ze znaczną intensywnością, umożliwiającą ich odróżnienie od elementów sąsiednich, które nie podlegają obserwacji.

W ujęciu matematycznym warunek ten spełnić można, wykorzystując **funkcję delta** (zwaną też **funkcją Diraca**) [4]:

$$\delta(t) = 0 \text{ dla } t \neq 0, \quad \delta(t) = +\infty \text{ dla } t = 0, \quad \int_0^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (17.13)$$

Funkcja Diraca pozwala zdefiniować **impuls** za pomocą wyrażenia:

$$\ell_S(x) = M\delta(x - x_0). \quad (17.14)$$

Powtórzmy raz jeszcze, że ze względu na charakter kanałów lub przewodów doprowadzających i odprowadzających medium z reaktora, które z zasady mają charakter strumieni jednowymiarowych i jednokierunkowych, przyjęto tu zmienność wielkości fizycznych tylko względem osi Ox .

Wobec (17.13) mnożnik M , zwany **intensywnością impulsu**, określa masę znacznika, odniesiona do jednostki przekroju poprzecznego strumienia dopływającego.

Pojęcie impulsu, z jednej strony opisując sposób wprowadzenia znacznika do układu przepływowego w sposób adekwatny do wymogów modelu zjawiska, daje również możliwość sformułowania dogodnego **warunku początkowego** dla równania transportu masy substancji rozproszonej (17.12). Dzięki temu otrzymuje się kilka, zresztą bardzo nielicznych, rozwiązań tych równań, które mają postać wyrażenia analitycznego. Do ważniejszych należy tu wynik dla jednowymiarowej postaci równania transportu ($Z = 0$), które można zapisać następująco [50]:

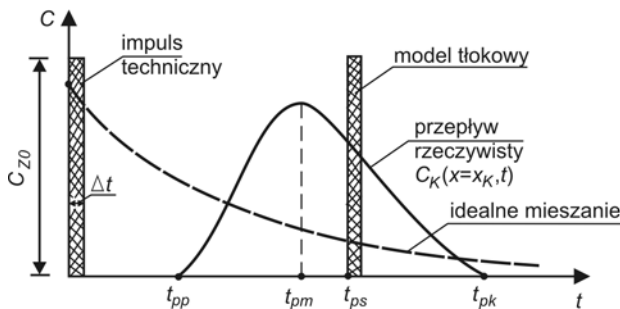
$$c_k(x,t) = \frac{M}{\sqrt{2} K_L \Pi t} \exp \left[-\frac{(x-vt)^2}{4K_L t} \right]. \quad (17.15)$$

Opisuje ono transformację stężenia między przekrojem początkowym (impuls w początku układu współrzędnych) a końcowym (krzywa $c_k(t)$), pokazaną na rys.17.4.

Do celów praktycznych relacja (17.15) jest w przypadku reaktorów mało przydatna, gdyż obrazuje transformację przez system jednowymiarowy, ewentualnie realizowany jako reaktor rurowy, raczej rzadko stosowany w inżynierii środowiska. Jednakże jest ona ważna poznawczo, gdyż ukazuje ogólną zasadę tej transformacji, ważną także dla rzeczywistych struktur przepływowych, spotykanych w reaktorach.

Źródłem błędu jest tu także rzeczywista możliwość odtworzenia impulsu w praktyce. Relacja (17.14) ma charakter wyidealizowany, gdyż trudno byłoby wprowadzić do układu znacznik w nieskończenie krótkim czasie, także dlatego, że przy skończonej wartości M wymagałoby to nieskończenie wielkiego stężenia początkowego. W praktyce posługujemy się pojęciem **impulsu technicznego**, który stanowi wysoko stężona dawka znacznika, wprowadzona do układu na możliwie krótkim dystansie Δx . Stężenie tej dawki c_{z0} musi być na tyle wysokie, by zawierało odpowiednią masę znacznika, wystarczającą do śledzenia jego dalszych losów, lecz na tyle niskie, by obecność znacznika nie wpływała na fizyczne własności płynącego medium. Mamy wtedy:

$$M = c_{z0} \Delta x = c_{z0} v \Delta t. \quad (17.16)$$



Rys. 17.4. Transformacja impulsu znacznika

Jest ważne, że transformację impulsu wejściowego w rozkład stężenia odpływowego $c_k(t)$ można realizować dwojako:

- obliczeniowo, przez rozwiązywanie równań transportu typu (17.12),
- eksperymentalnie, przez pomiar stężenia $c_k(t)$ w odpływowym przekroju strumienia.

Rzecz zrozumiała, można to robić na różnych poziomach dokładności, stosując modele obliczeniowe i metody pomiarowe o zróżnicowanym stopniu przybliżenia rzeczywistości.

Niezależnie od zastosowanej metodyki, końcowy rozkład stężenia $c_K(t)$ jest pożytecznym narzędziem, które dostarcza wspomnianego już statystycznego rozkładu czasu przebywania masy w układzie przepływowym. Pokazuje on najkrótszy czas przebywania t_{pp} (po upływie którego w przekroju końcowym pojawiają się pierwsze ślady znacznika), **czas modalny** t_{pm} (odpowiadający odpływowi stężenia maksymalnego) oraz najdłuższy czas przebywania t_{pk} (gdy odpływają ostatnie elementy kontrolnej dawki znacznika; w układach rzeczywistych rozkład krzywej stężenia wykazuje specyficzny „ogon”; przyczyny jego powstawania i znaczenie omówimy w następnym rozdziale).

Pewną wadą funkcji $c_K(t)$ jest zależność kształtu jej wykresu od dawki znacznika M . Aby wyeliminować ten efekt, możemy poddać tę funkcję normalizacji, dzieląc aktualny strumień masy przez całkowitą masę znacznika, czyli wprowadzając **zewnętrzną funkcję rozkładu czasu zatrzymania masy** [30, 53]:

$$E_Z(t) = \frac{c_K(t)}{\int_{-\infty}^{+\infty} c_K(t) dt} . \quad (17.17)$$

17.3.3.4. Szczególne przypadki gęstości rozkładu stężenia końcowego

Wspomniana w poprzednim punkcie możliwość empirycznego wyznaczenia funkcji $c_K(t)$, bardzo atrakcyjna w zastosowaniach, może być wykorzystana tylko dla obiektów już istniejących (lub ich modeli). Z kolei teoretyczne jej obliczanie jest procesem trudnym, ze względu na poziom matematycznej złożoności równań transportu. Co prawda w chwili obecnej, gdy dysponujemy racjonalnymi metodami numerycznymi oraz bardzo sprawnymi maszynami liczącymi, nie stanowi to szczególnego problemu, lecz zawsze jest rzeczą pożyteczną mieć do dyspozycji metody uproszczone. A były one wręcz niezbędne w ubiegłych dekadach, gdy jeszcze nie istniały maszyny liczące, lub też dostęp do nich był bardzo ograniczony. Powstała wtedy pewna liczba szczególnych modeli transformacji znacznika przez układ przepływowy, aktualnych do chwili obecnej.

Pierwszy z nich omówiliśmy w punkcie 17.3.3.2, nadając mu miano **modelu tłokowego** (17.8). Jego bazowe założenie (stały czas zatrzymania każdego ze składowych elementów kontrolnej porcji znacznika) pozwala narysować wykres $c_{Kt}(t)$ przez proste przesunięcie wykresu stężenia znacznika $c_{z0}(t)$ o czas przepływu tłokowego t_{ps} (rys. 17.4). Jest to model niezwykle prosty formalnie, lecz cechujący się niską dokładnością.

Drugi z tych modeli odnosi się do przypadku reaktora, którego zawartość ulega bardzo silnemu mieszaniu. Jeśli jest ono tak intensywne, że możemy przyjąć, iż w każdej chwili stężenie każdego ze składników w całej zawartości reaktora jest praktycznie stałe, to otrzymujemy **model idealnego mieszania**. Jego cechą szczególną jest stałość stężenia $c(x, y, z, t) = c(t)$ w każdym punkcie jego wnętrza, czyli także w przekroju odpływowym. Pozwala to napisać następujące równanie bilansu masy substancji rozproszonej (lub w szczególnym przypadku – znacznika):

$$\frac{dm(t)}{dt} = -c(t)Q . \quad (17.18)$$

Mówi ono, że zmiana w czasie masy $m(t)$ jest wywołana tylko jej ciągłym ubytkiem w przekroju końcowym (bowiem przez przekrój wlotowy dawka rozważanej substancji

wpływa tylko w chwili początkowej $t = 0$, a następnie dopływa tam tylko płyn pozbawiony tego składnika). Dzieląc ostatnią równość obustronnie przez pojemność reaktora V , mamy:

$$m(t)/V = c(t), \quad (17.19)$$

co prowadzi do oczywistej relacji:

$$c(t) = c_0 \exp\left(-\frac{Q}{V}t\right). \quad (17.20)$$

Wykres tej zależności pokazany jest na rys. 17.4 (linia przerywana). Jak widać, idealne mieszanie jest cechą specyficzną, która z punktu widzenia przebiegu przemiany nie musi być korzystna (gdyż w takim układzie zasadnicza część doprowadzanej substancji opuszcza reaktor po upływie stosunkowo krótkiego czasu).

Omówione modele – przepływ tłokowy oraz przepływ z idealnym mieszaniem – należą do podstawowych przypadków szczególnych. W projektowaniu reaktorów stosuje się też pewne ich kombinacje (na przykład kaskady reaktorów), oraz niektóre inne, typowe dla inżynierii procesowej w przemyśle (na przykład reaktory rurowe) [5, 58]. Jednakże w inżynierii środowiska nie odgrywają one dotychczas szczególnej roli, więc nie będziemy ich tu omawiać.

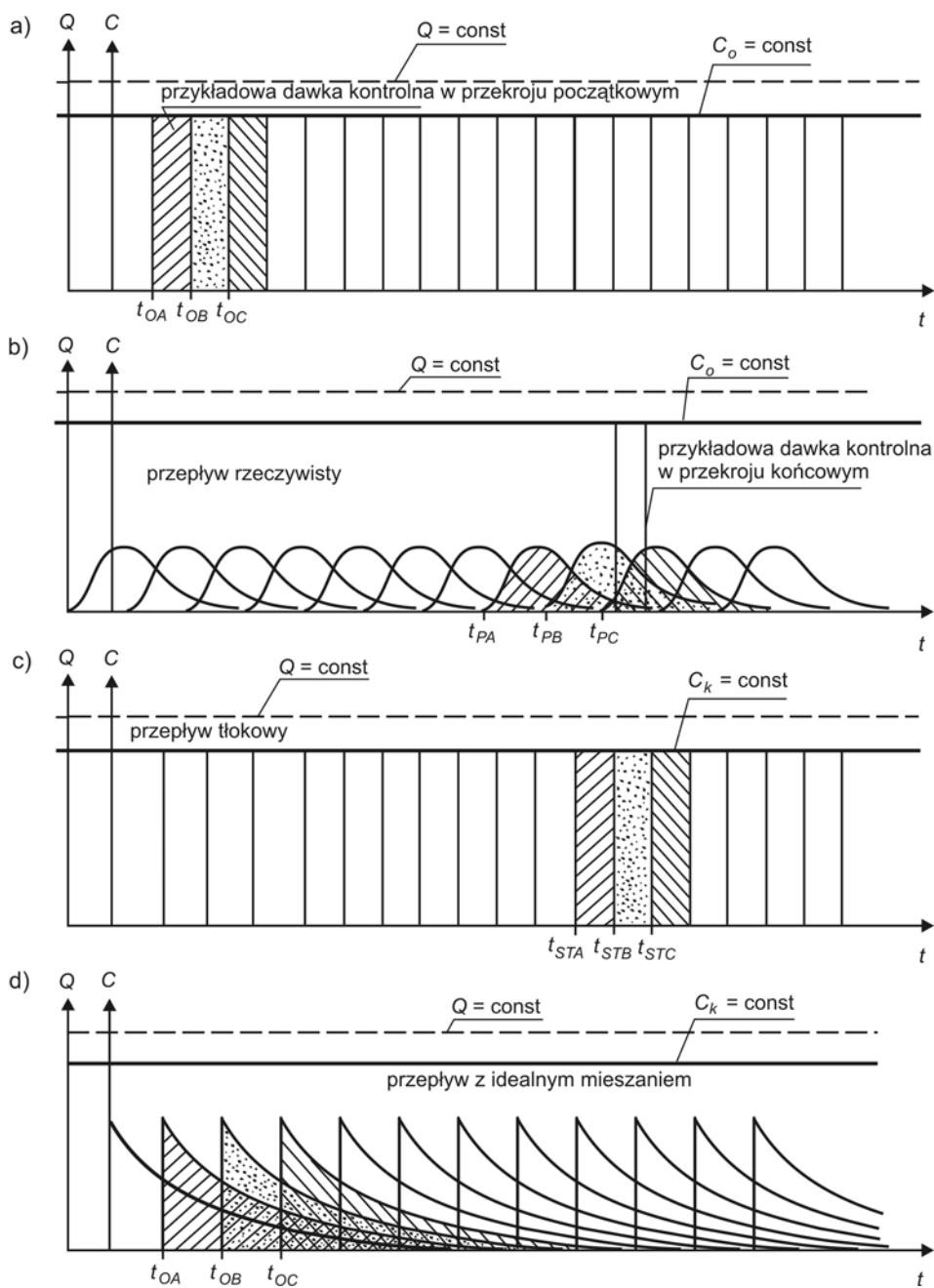
17.3.3.5. Gęstość rozkładu stężenia znacznika jako funkcjonalna charakterystyka reaktora

Jak widać z dotychczasowych rozważań, czas przebywania masy w reaktorze, dla impulsowo wprowadzonej dawki znacznika, opisany jest funkcją $c_K(t)$, pokazującą gęstość rozkładu masy tego znacznika względem czasu. Zawiera ona statystyczną informację o względnych częściach masy całkowitej, przebywających w układzie przez kolejne okresy czasu między t_{pp} i t_{pk} (rys. 17.4).

Podkreślimy, że dotyczy to substancji trwałej (znacznika), lecz w rzeczywistych reaktorach nie mamy możliwości poddania interesującej nas przemianie tylko wybranej części strumienia dopływowego. Z kolei podczas przebiegu reakcji w układzie o ciągłym dopływie substratów nie można wyodrębnić objętości płynnej, obrazującej dynamiczną transformację masy. Tym samym zastosowanie omówionej dekompozycji procesu na przepływ i przemianę jest nie tylko uzasadnione, lecz wręcz niezbędne.

Tak więc w pierwszym etapie badania pracy reaktora wyznaczamy krzywą $c_K(t)$. Można to zrobić teoretycznie, rozwiązując odpowiednie równania (rys. 17.5b), stosując bardzo prosty formalnie model tłokowy (rys. 17.5c), lub w uzasadnionych przypadkach – model idealnego mieszania (rys. 17.5d). Istnieje też możliwość wyznaczenia tej funkcji metodami empirycznymi [56].

Analiza wykresów, przedstawionych na rys. 17.5 pozwala zrozumieć omawianą tu metodę opisu **funkcjonalnej charakterystyki reaktora**. Jej istotą jest opis dynamicznej transformacji wybranej „porcji” masy substancji, wprowadzonej do wnętrza reaktora. Trzeba tu zwrócić uwagę, że w warunkach rzeczywistych strumień przepływającej substancji stanowi nieprzerwany ciąg takich „porcji” (rys. 17.5a). Każda z nich ulega transformacji (o identycznym charakterze w warunkach ruchu ustalonego), toteż kolejne „porcje” masy, tworzące strumień odpływowy, są kombinacjami elementów strumienia dopływającego. I tylko w przypadku modelu tłokowego transformacje te sprowadzają się do prostego przesunięcia „tłokowej porcji” przez reaktor, więc nie zmieniają składu strumienia odpływającego względem strumienia dopływającego. Stanowi to o wspomnianych już cechach tego modelu – prostocie formalnej i niskiej dokładności fizycznej, co ilustruje rys. 17.5.



Rys. 17.5. Wyznaczanie efektywności reaktora

17.3.4. Reaktory recykulacyjne

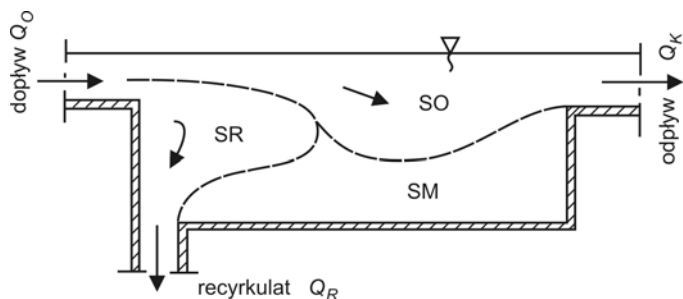
Krzywa gęstości rozkładu czasu zatrzymania tworzy narzędzie wymiarowania reaktorów przepływowych, które należy zaliczyć do grupy dokładnych metod fizykalnych (podrozdz. 17.1). Choć bowiem mamy do dyspozycji podejście, które jeszcze dokładniej opisuje wewnętrzną strukturę przepływu (rys. 17.2), to trzeba tę kwestię rozważać na tle choćby modelu tłokowego (przybliżona metoda fizykalna), a także różnego typu zaleceń technicznych (metody wskaźnikowe [35]).

Opisana tu metoda, choć cechuje się wysoką dokładnością, stwarza duże trudności obliczeniowe. Z tego względu jest chętnie zastępowana którąś z prostszych możliwości. Jak już wspomniano, najczęściej jest to model tłokowy, zaś dla szczególnej kategorii reaktorów, w których następuje intensywne homogenizacja zawartości – modelem idealnego mieszania. Warto jednak powtórzyć, że jeżeli obiekt, zaprojektowany za pomocą metody prostszej, pracuje niewłaściwie, to dla skorygowania jego charakterystyki warto sięgnąć po metodę dokładniejszą.

Możliwość względnie szerokiego wyboru metody wymiarowania nie istnieje wszakże dla ważnej kategorii obiektów, które w par. 17.3.1 nazwaliśmy **reaktorami recykulacyjnymi**. Ze względu na schemat obliczeniowy, dzielą się one na dwie grupy:

- reaktory rozdzielające strumień płynu,
- reaktory łączące strumień płynu.

Zasadniczą ich cechą jest rozdział wnętrza komory na co najmniej dwie strefy, odpowiadające poszczególnym strumieniom (rozpływającym się lub ulegającym połączeniu). W praktyce prawie zawsze pojawia się tu trzecia strefa, w której przepływ nie zachodzi, lub ma charakter wewnętrznej cyrkulacji („martwa strefa”). Suma tych trzech objętości jest oczywiście równa całkowitej objętości komory reaktora. Jednakże objętości składowych nie można tu wyznaczyć w prosty sposób, co wyklucza możliwość zastosowania omówionych już modeli uproszczonych (tłokowego oraz idealnego mieszania). Tym samym mamy do wyboru dwie możliwości – albo pominąć dynamikę recykulacji i podczas wymiarowania potraktować ten czynnik jako określony przez zalecenia techniczne (co jest dopuszczalne przy niskich intensywnościach recykulacji, opisanych stosunkiem wydatku strumienia zawracanego do wydatku strumienia głównego), albo zastosować metodę dokładną.

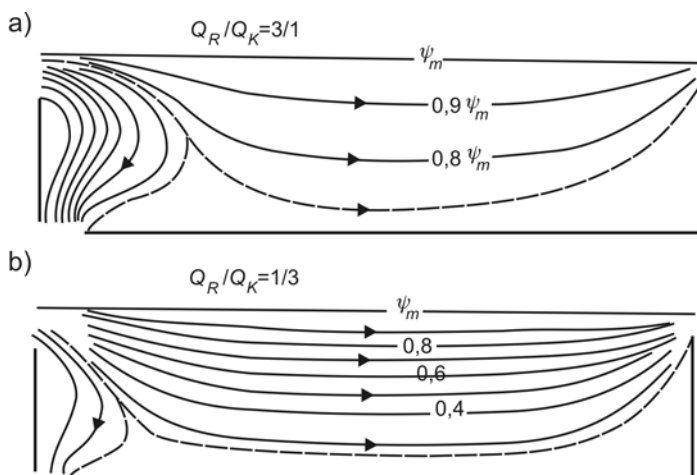


Rys. 17.6. Schemat podstawowych stref reaktora rozdzielającego (SO – strefa odpływu medium, SR – strefa odpływu recykulacyjnego, SM – martwa strefa)

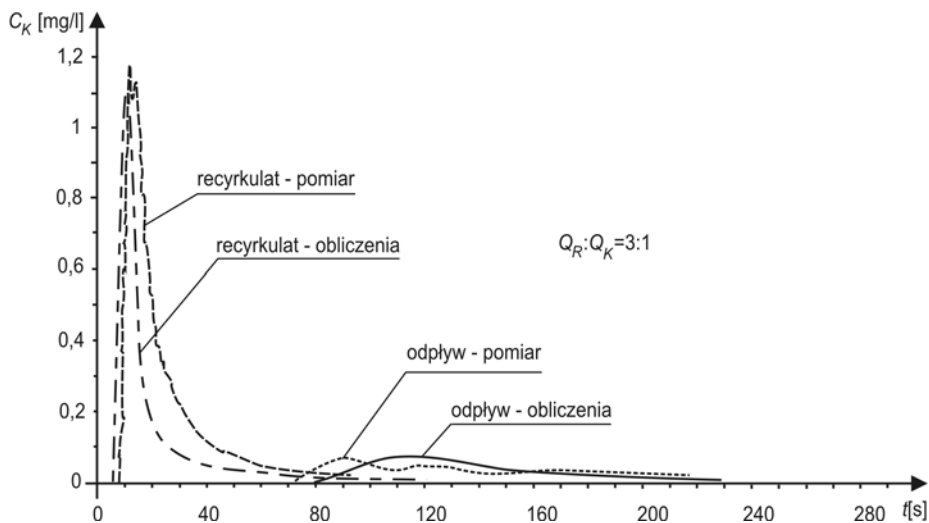
Sposób wykorzystania w tym przypadku krzywej gęstości rozkładu czasu zatrzymania jest tu oczywisty, a wynika z ogólnej struktury przepływu. Dla **reaktora rozdzielającego** (rys. 17.6) mamy z reguły jeden strumień dopływowy oraz dwa (rzadko kiedy więcej) stru-

mienie odpływowo. Dla każdego ze strumieni opuszczających układ musimy wyznaczyć oddzielną krzywą gęstości rozkładu czasu zatrzymania. Gdy stosujemy metodę teoretyczną, krzywe te otrzymamy, rozwiązując równanie transportu (17.12). Dla metody pomiarowej należy tu użyć odrębnej sondy dla każdego ze strumieni odpływowych, dawkując impuls znacznika w przekroju wlotowym.

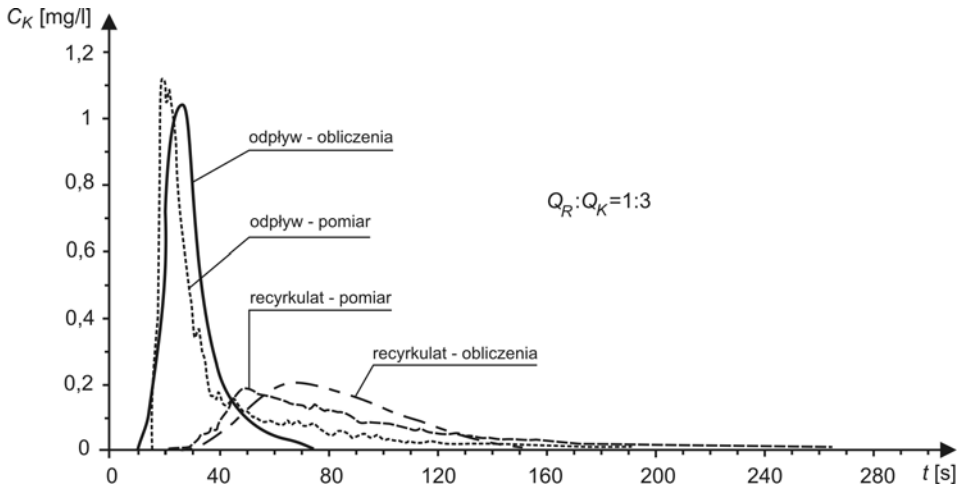
Przykładowe układy linii prądu dla reaktora rozdzielającego (przy dwóch intensywnościach recyrkulacji $Q_R : Q_K = 3 : 1$ oraz $Q_R : Q_K = 1 : 3$) pokazano na rys. 17.7.



Rys. 17.7. Przykładowe przebiegi linii prądu w osadniku wtórnym dla różnych proporcji wydatku recyrkulacji do wydatku głównego



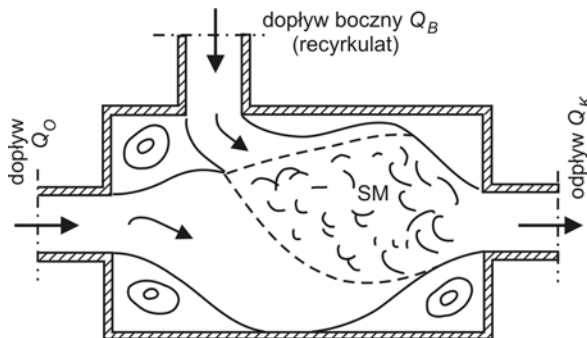
Rys. 17.8. Końcowe rozkłady stężenia znacznika w cieczy odpływającej oraz w recyrkulacji ($Q_R : Q_K = 3 : 1$)



Rys. 17.9. Końcowe rozkłady stężenia znacznika w cieczy odpływającej oraz w recyrkulacji ($Q_R : Q_K = 1 : 3$)

Odpowiadające tym sytuacjom krzywe gęstości rozkładu czasu zatrzymania pokazano na rys. 17.8 oraz 17.9. Przedstawiono na nich wyniki obliczeń oraz pomiarów [56], wykazując przy okazji duży stopień równoważności obu podejść – teoretycznego i empirycznego.

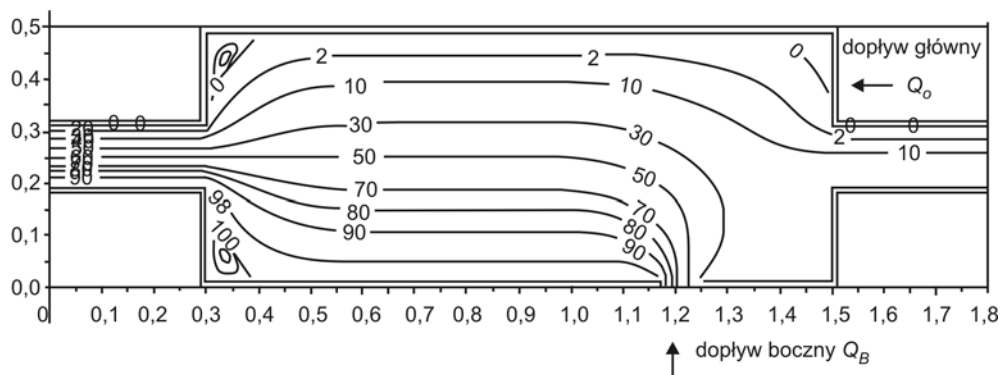
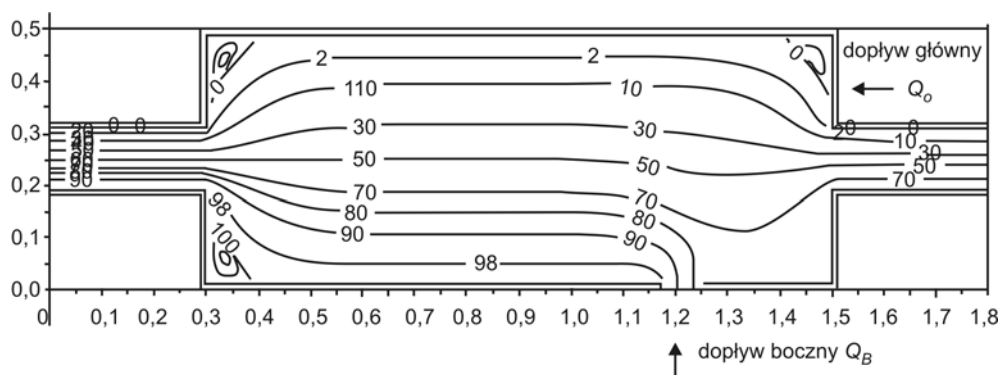
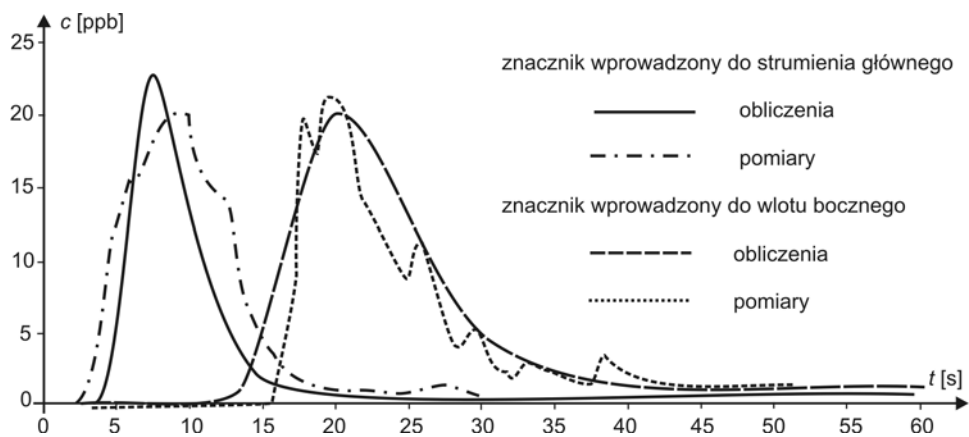
Z kolei dla **reaktorów łączących**, w których również występują trzy obszary – dla obu strumieni oraz „martwa strefa” (rys. 17.10), sytuacja jest nieco inna, gdyż krzywe gęstości rozkładu czasu zatrzymania wyznaczamy tu tylko w przekroju odpływowym, lecz musimy to uczynić tyle razy, ile mamy strumieni wlotowych (osobno dla każdego z nich).

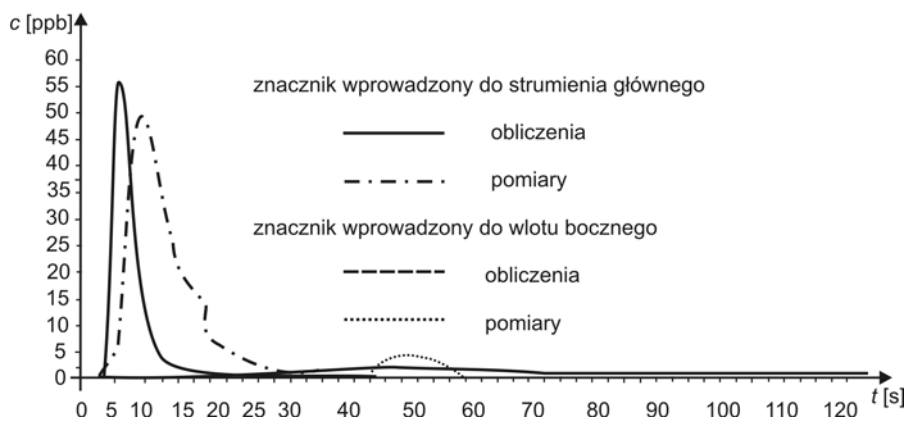


Rys. 17.10. Schemat przepływu w reaktorze łączącym (SM – strefa mieszania strumieni)

Orientacyjne wyniki dla tego typu obiektu (przy takich samych intensywnościach recyrkulacji, jak w przypadku reaktora rozdzielającego) pokazano na rys. 17.11 i 17.12 (układy linii prądu) oraz 17.13 i 17.14 (krzywe gęstości rozkładu czasu zatrzymania).

Określona w ten sposób hydrauliczna charakterystyka omawianej tu kategorii reaktorów może być wykorzystana do celów projektowych. Wymaga to wszakże uwzględnienia równań kinetyki przemian oraz innych zależności technologicznych, co wykracza poza ramy książki [35, 56].

Rys. 17.11. Przykładowy układ linii prądu w reaktorze łączącym ($Q_O : Q_B = 1 : 3$)Rys. 11.12. Przykładowy układ linii prądu w reaktorze łączącym ($Q_O : Q_B = 3 : 1$)Rys. 17.13. Rozkłady końcowego stężenia znacznika w reaktorze łączącym ($Q_O : Q_B = 1 : 3$)



Rys. 17.14. Rozkłady końcowego stężenia znacznika w reaktorze łączącym ($Q_O : Q_B = 3 : 1$)

18. Podstawy teorii filtracji

18.1. Charakterystyka przepływu filtracyjnego

18.1.1. Pojęcia ogólne

Terminem **przepływ filtracyjny** (lub krócej – **filtracja**) określamy ruch płynu w ośrodku porowatym. Składa się on najczęściej z ogromnej liczby, mniejszych lub większych, ziarenek ciała stałego. Nie przylegają one do siebie całkiem ściśle, toteż pozostają między nimi wolne przestrzenie, tworzące złożony i nieregularny system **porów** (drobnych kanalików), którymi przepływać może filtrujący przez **złoże** (ośrodek rozdrobiony) płyn. Niekiedy mamy do czynienia z ośrodkami, które nie są złożone z odrębnych cząstek ciała stałego, lecz z materiału porowatego. Jest to bryła ciała stałego, wewnątrz którego znajdują się kanaliki (na przykład pumeks, wyroby ceramiczne...).

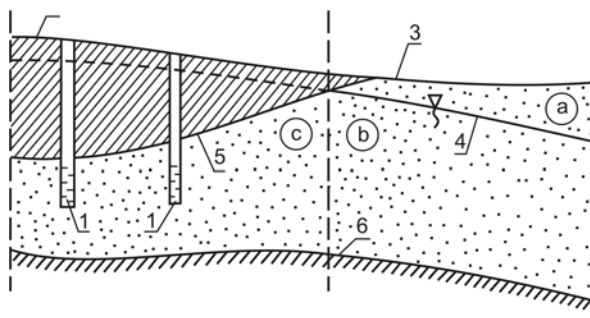
Ze względu na sposób powstawania, systemy, w których zachodzi filtracja, mogą być naturalne lub sztuczne. Systemy naturalne tworzą porowate utwory geologiczne, a w szczególności grunt i spękane skały. Zasadnicze znaczenie ma tu (ze względu na powszechność występowania i znaczenie dla życia na Ziemi) filtracja wody podziemnej, ale bardzo ważne są też kwestie filtracji ropy naftowej i gazu ziemnego.

Natomiast systemy sztuczne, to wszelkiego rodzaju filtry, złoża jonitów, węgla aktywnego i innych substancji ziarnistych, przez które przepuszczamy płyny celem oczyszczenia z zawiesin lub poddania reakcjom chemicznym z materiałem porowatym. Występują one bardzo często przy oczyszczaniu wody i ścieków oraz w przemyśle (przeważnie chemicznym).

Możemy mieć do czynienia z dwoma podstawowymi rodzajami przepływu cieczy w ośrodku porowatym, zależnie od stopnia wypełnienia przestrzeni porowej (nie dotyczy to gazów, które ze swej natury wypełniają zawsze cały dostępny obszar). Jeżeli przestrzeń ta nie jest całkowicie „zalana” filtrującą cieczą, a częściowo wypełniona jest gazem (z reguły powietrzem), to mówimy o **strefie nienasyconej** (strefie **aeracji**). Przykładem przepływu w strefie aeracji jest wsiąkanie wody deszczowej w grunt (rys. 18.1). Gdy z kolei mamy do czynienia z całkowitym wypełnioną przez ciecz przestrzenią porową, obszar taki nazywamy **strefą nasyconą** (strefą **saturationi**). Jej przykładem są zasoby wody podziemnej.

W strefie aeracji przesiąkająca woda lokalnie opływa ziarna ośrodka porowatego. Nie występuje tu więc swobodne zwierciadło cieczy o charakterze ciągłej powierzchni. Z kolei w strefie saturacji pojawiają się dwa typy zagadnień – z **przepływem ze swobodnym zwierciadłem** lub z **przepływem z napiętym zwierciadłem** (zwanym także **artezyjskim**).

Przepływ **swobodny w obszarze nieograniczonym** występuje wtedy, gdy ośrodek porowaty tworzy warstwę przepuszczalną od dołu (**spąg**), ograniczoną skałami litymi (lub o pomijalnie małej porowatości), tworzącymi warstwę nieprzepuszczalną, zaś od góry ograniczoną tylko powierzchnią terenu. Część takiej warstwy przepuszczalnej, zalana cieczą tworzącą swobodną powierzchnię, tworzy obszar, w którym ruch cieczy nazywamy filtracją swobodną (strefa *b* na rys. 18.1).



Rys. 18.1. Rodzaje filtracji: a) strefa aeracji, b) strefa saturacji, przepływ swobodny, c) strefa saturacji, przepływ artezyjski (1 – piezometr, 2 – piezometryczna linia ciśnienia, 3 – powierzchnia terenu, 4 – swobodna powierzchnia wody podziemnej, 5 – strop warstwy przepuszczalnej, 6 – spąg warstwy przepuszczalnej)

W drugiej natomiast kategorii zagadnień górna część warstwy przepuszczalnej (**strop**) jest ograniczona warstwą nieprzepuszczalną, na którą wypełniająca przestrzeń porową ciecz wywiera pewne ciśnienie. Mówimy wtedy o obszarze ograniczonym, w którym ma miejsce przepływ artezyjski. Powierzchnia kontaktu cieczy ze stropem warstwy przepuszczalnej nosi nazwę **napiętego zwierciadła** filtrującej cieczy (strefa c na rys. 18.1). Jeżeli w górnej warstwie nieprzepuszczalnej wykonamy otwory obserwacyjne (**piezometry**), to ciecz wypełni je do takiego poziomu, by jej ciśnienie zrównoważyło ciśnienie na strop warstwy. Wykres tego ciśnienia tworzy **piezometryczną linię ciśnienia**. W zagadnieniach hydrogeologicznych bywa, że linia ta leży powyżej poziomu terenu. Ze studni wykonanych w takim obszarze następuje samoczynny wypływ wody (mówimy wtedy o studniach artezyjskich).

Ruch filtracyjny ma prawie wyłącznie charakter laminarny, choć bywa, że prędkości w przestrzeni porowej są duże i przepływ staje się turbulentny (burzliwy).

Powtórzyć możemy tutaj wszystkie uwagi, dotyczące kinematycznej klasyfikacji przepływów (patrz podrozdz. 2.5). Możemy więc mieć filtrację **nieustaloną** (zmienną w czasie) lub filtrację **ustaloną** (niezmienną w czasie). Stosownie do liczby różnych od zera składowych wektora prędkości, mówimy o przepływach jedno-, dwu-, i trój kierunkowych, zaś zależnie od liczby współrzędnych przestrzennych, o ruchu jedno-, dwu-, i trójwymiarowym.

Należy odróżniać modele rzeczywistych pól prędkości i uproszczonych (najczęściej poprzez uśrednienie).

18.1.2. Porowatość ośrodka

Do podstawowych parametrów, charakteryzujących filtracyjne własności ośrodka, należy **porowatość** n (a ściślej mówiąc, współczynnik porowatości objętościowej). Definiujemy ją jako graniczną wartość stosunku całkowitej objętości kanalików ΔV_p w próbce ośrodka porowatego, do objętości całej próbki tego ośrodka ΔV :

$$n = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_g} \frac{\Delta V_p}{\Delta V} \quad (18.1)$$

Znaczenie granicznej wartości objętości próbki ΔV_g omówiono ogólnie w par. 1.3.3. Porowatość niektórych skał podano w tab. 7.

Niekiedy musimy znać udział przestrzeni porowej w dwuwymiarowym przekroju ośrodka porowatego. Odpowiedni wskaźnik nazywamy **współczynnikiem porowatości powierzchniowej** n_x (lub n_y, n_z ; indeks wskazuje, do jakiej osi jest prostopadły rozważany przekrój):

$$n_x = \lim_{\Delta S_x \rightarrow \Delta S_{gx}} \frac{\Delta S_{px}}{\Delta S_x}. \quad (18.2)$$

Jeżeli ośrodek utworzony jest z ziaren o jednakowym, zwartym kształcie, to mówimy, że jest on **izotropowy** (co oznacza, że w każdym kierunku ma jednakowy charakter i strukturę, mimo że opisujące jego własności parametry mogą się zmieniać). Współczynniki porowatości objętościowej i powierzchniowej (a gdybyśmy taki zdefiniowali, to także liniowej) są wtedy sobie równe. Gdy jednak ośrodek zbudowany jest z elementów wykazujących orientację w przestrzeni (spłaszczonych ziaren, płytek, prętów...), porowatość wzdłuż różnych kierunków może się zmieniać. Ośrodek taki nazywamy **anizotropowym**. Przy opisie ośrodka anizotropowego nie wystarczy podanie jednej skalarnej funkcji, określającej współczynnik porowatości $n(x, y, z, t)$. Należy podać ich tyle, ile charakterystycznych przekrojów ma dany ośrodek.

Współczynnik porowatości jako czynnik charakteryzujący ośrodek, określany jest w warunkach **statycznych**. Jednakże przy rozważaniu przepływów filtracyjnych interesują nas warunki dynamiczne, gdyż płyn wypełniający pory znajduje się w ruchu. W przypadku takim tylko część całkowitej przestrzeni porowej ΔV_p jest dostępna dla ruchu, bowiem jest ona w pewnym stopniu „zablokowana” przez płyn (szczególnie jest to ważne dla cieczy) przylegający do ścianek ziarn wypełnienia wskutek sił adhezji, oraz przez płyn nieruchomy, zalegający w zakamarkach przestrzeni porowej (w martwych strefach). W rezultacie w filtracji bierze udział tylko część przestrzeni porowej, zwana objętością efektywną ΔV_e . Za jej pomocą definiujemy **współczynnik porowatości efektywnej**:

$$n_e = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_g} \frac{\Delta V_e}{\Delta V}. \quad (18.3)$$

Rozważając kwestię zasobów cieczy, znajdujących się w ośrodku porowatym (na przykład dla celów zaopatrzenia w wodę), napotkamy na trzeci wskaźnik, związany z objętością cieczy zawartej w przestrzeni porowej. Nazywany jest on **współczynnikiem odsączalności** w_{oc} . Opisuje on stosunek objętości cieczy ΔV_{oc} , która może grawitacyjnie wysączyć się ze skały, do objętości próbki tej skały:

$$w_{oc} = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_g} \frac{\Delta V_{oc}}{\Delta V}. \quad (18.4)$$

Wartości w_{oc} oraz n_e są zbliżone, ale nie jednakowe. Jest to konsekwencją faktu, że inna część przestrzeni porowej bierze udział w ruchu, a z innej można grawitacyjnie pobierać ciecz (przykładowo, ciecz zawarta w martwych strefach nie płynie, a może się wysączyć z próbki). Omówione wyżej współczynniki wyznacza się metodami laboratoryjnymi, polowymi (pomiaru w terenie) lub teoretycznymi [31, 33].

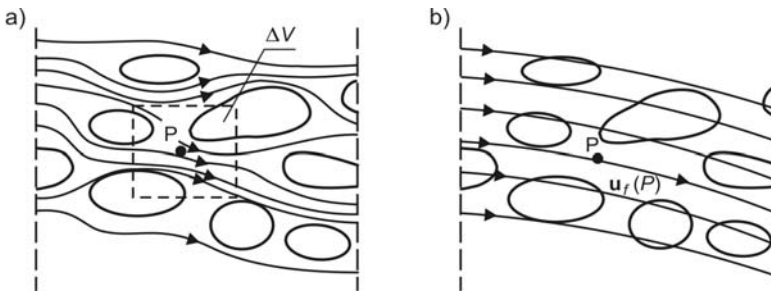
18.1.3. Prędkość filtracji

Pole prędkości filtrującej cieczy jest bardzo złożone. Wynika to ze skomplikowanego, nieregularnego, wręcz losowego, kształtu kanalików, tworzących przestrzeń porową. Linie prądu przepływu rzeczywistego mają zawiłą postać, gdyż napotykać na swej drodze na

ziarenka gruntu muszą co chwilę zmieniać kierunek (rys. 18.2a). Jednakże ruch ten wykazuje pewną prawidłowość – składniki wywołujące złożoność mają z reguły charakter znakozmiennych zaburzeń (co znaczy, że składowe opisującego je wektora prędkości zmieniają znak), natomiast płyn jako całość przemieszcza się w określonym kierunku, zgodnie z działającymi nań czynnikami wymuszającymi ruch (spadek ciśnienia, siła ciężkości).

Prawidłowość ta pozwala na „wygładzenie” obrazu ruchu, poprzez posługiwanie się uśrednionymi w przestrzeni wektorami pola prędkości.

W ujęciu podstawowym uśrednienie to przeprowadzamy wiążąc z każdym punktem P równoważnego obszaru (rys. 18.2a) objętość obserwacyjną ΔV . Jest ona analogiczna do granicznej objętości ΔV_g , omówionej w poprzednim podrozdziale (nie może być ani zbyt mała, ani zbyt duża). Punkt P wiążemy z każdym punktem obszaru, niezależnie od tego, czy leży w przestrzeni porowej, czy w materiale ziarna wypełnienia złoża. Dzięki temu „sieciovą” strukturę rzeczywistego pola prędkości (określonego tylko w przestrzeni porowej) przeliczamy na strukturę ciągłą, zgodnie z sensem tego słowa, używanym w teorii pola i w mechanice.



Rys. 18.2. Przebieg linii prądu podczas filtracji: a) rzeczywisty, b) uśredniony

Całkując pole prędkości w objętości ΔV i dzieląc tę całość przez ΔV , otrzymujemy powszechnie stosowaną w teorii filtracji zmienną, charakteryzującą ruch, nazywaną **prędkością filtracji**:

$$\mathbf{u}_f = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{u} d(\Delta V). \quad (18.5)$$

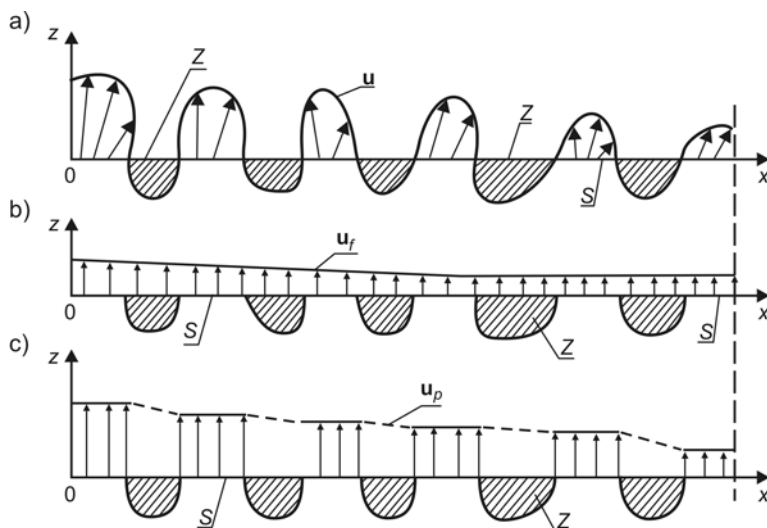
Trzeba podkreślić, że słowo „prędkość” ma tu znaczenie umowne, gdyż linia prądu przepływu opisanego polem wektorowym \mathbf{u}_f „nie zauważają” ziaren gruntu, przecinając je w swym wygładzonym przebiegu (rys. 18.2b). Z tego względu zamiennie używa się dla tej ważnej wielkości terminów „wydatek jednostkowy” lub „strumień Darcy’ego”.

Całkę w (18.5) obliczamy względem objętości obserwacyjnej ΔV , choć ruch odbywa się tylko w przestrzeni porowej. Jednakże w obszarze zajęтым przez ziarna prędkość $\mathbf{u} = 0$, więc wartość tej całki jest taka sama, jak gdyby była ona wyznaczana dla przestrzeni porowej ΔV_p . Nie jest natomiast obojętne, przez jaką objętość będziemy dzielić otrzymaną wartość całki. W (18.5) jest to wartość ΔV , a więc suma objętości porów i ziaren. Tym samym otrzymaliśmy podstawową zmienną teorii filtracji – fikcyjną „prędkość filtracji”.

Jeżeli jednak zastosujemy tu objętość przestrzeni porowej ΔV_p , to uzyskamy inny typ prędkości średniej, stosowany w teorii filtracji, a mianowicie **prędkość porową**:

$$\mathbf{u}_p = \frac{1}{\Delta V_p} \int_{\Delta V} \mathbf{u} d(\Delta V). \quad (18.6)$$

Jest to wielkość, dla której bardziej realistycznie (niż dla prędkości filtracji) możemy użyć terminu „prędkość”, gdyż opisuje średnią wartość rzeczywistej prędkości przepływu cieczy w kanalikach.



Rys. 18.3. Charakterystyczne prędkości przepływu przez ośrodek porowaty:
 a) prędkość rzeczywista, b) prędkość filtracji, c) prędkość porowa
 (Z – ziarna ośrodka porowatego, S – szczeliny przestrzeni porowej)

Istotę trzech omówionych powyżej prędkości (rzeczywistej, filtracyjnej i porowej) przedstawiono schematycznie na rys. 18.3. Widać tam, że rzeczywisty rozkład prędkości jest zbyt złożony, by posługiwać się nim do opisu zjawiska. Widać też, że prędkość filtracji istotnie różni się od obwiedni wykresu prędkości rzeczywistej, ale jest wygodna i powszechnie stosowana, bowiem ma poważne zalety (możliwość stosowania aparatu analizy matematycznej). Wreszcie widzimy, że rozkład prędkości porowej jest zbliżony do kształtu obwiedni rzeczywistego rozkładu prędkości. Jednakże przy obliczaniu wydatku filtrującej cieczy za pomocą u_p nie możemy w prosty sposób określić obszaru całkowania. Mamy bowiem wtedy:

$$Q = \int_{\Delta S_p} \mathbf{u}_p \mathbf{n} d(\Delta S_p), \quad (18.7)$$

gdzie ΔS_p jest częścią powierzchni ΔS , zajęta przez pory. Jest to wielkość, jak już powiedzieliśmy, której praktycznie nie można dokładnie opisać. Natomiast gdy posługujemy się prędkością filtracji (strumieniem jednostkowym), mamy relację:

$$Q = \int_{\Delta S} \mathbf{u}_f \mathbf{n} d(\Delta S), \quad (18.8)$$

w której bez trudu określamy granice całkowania.

Przewaga prędkości u_p nad u_f jest natomiast widoczna wtedy, gdy chcemy obliczyć taką wielkość, jak czas ruchu cieczy wzdłuż linii l . Możemy wtedy napisać:

$$dt = \frac{dl}{u_p}, \quad t = \int_l \frac{dl}{u_p}. \quad (18.9)$$

Gdyby w powyższym użyć \mathbf{u}_f , otrzymany czas byłby dużo dłuższy od rzeczywistego, co wynika z faktu, że $|\mathbf{u}_f| < |\mathbf{u}_p|$ (patrz rys. 18.3).

Z powyższych względów dobrze jest mieć możliwość przeliczania obu prędkości. Otrzymujemy ją, podstawiając (18.1) do (18.6), co daje:

$$\mathbf{u}_p = \frac{1}{\Delta V_p \Delta V} \int \mathbf{u} d(\Delta V) = \frac{1}{n_e \Delta V} \int \mathbf{u} d(\Delta V). \quad (18.10)$$

Uwzględniając (18.5) mamy ważny związek

$$\mathbf{u}_p = \mathbf{u}_f / n_e, \quad \mathbf{u}_f = n_e \mathbf{u}_p. \quad (18.11)$$

Wspomnieliśmy już, że rzeczywisty ruch filtracyjny składa się ze stosunkowo regularnej prędkości średniej (\mathbf{u}_f lub \mathbf{u}_p) oraz chaotycznej, nieregularnej odchyłki prędkości (zależnie od stosowanego typu prędkości średniej oznaczmy odchyłkę przez \mathbf{u}^o lub \mathbf{u}^x). Możemy więc napisać

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_f + \mathbf{u}^o = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}^x. \quad (18.12)$$

18.1.4. Równania zachowania

18.1.4.1. Uwagi ogólne

Pole prędkości płynu, przemieszczającego się wzdłuż kanalików ośrodka porowatego, opisane jest omówionymi już równaniami zachowania masy, pędu, oraz momentu pędu i energii (patrz część I). Skoro jednak pragniemy ominąć problemy, związane z niezwykle złożoną strukturą obszaru filtracji (składającego się z sieci kanalików ośrodka porowatego), czyli posługiwać się strumieniem jednostkowym \mathbf{u}_f , a nie prędkością rzeczywistą \mathbf{u} , musimy odpowiednio przekształcić te równania, by odnosiły się nie do zmiennych rzeczywistych, lecz uśrednionych w sposób charakterystyczny dla teorii filtracji. Tak jak w całej tej pracy, rozważać będziemy izotermiczny przepływ płynu jednorodnego.

18.1.4.2. Równanie zachowania masy

W przypadku płynu ściśliwego równanie zachowania masy przyjmuje postać (3.7). Uśrednijmy wszystkie jego czony, całkując je w przestrzeni porowej ΔV_p elementu objętości ΔV i podzielmy przez ΔV (**uwaga**: nie możemy obliczać tej całki względem ΔV , jak to uczyniliśmy w relacji (18.5), bowiem w części ΔV zajętej przez ziarna złoża mamy co prawda $\mathbf{u} = 0$, ale $\rho \neq 0$; gdyby tego nie wziąć pod uwagę, otrzymalibyśmy masę całkowitą – i złoża, i płynu w ΔV – a równanie (3.7) dotyczy tylko płynu):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V_p} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) \right] d(\Delta V_p) = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V_p} \rho d(\Delta V_p) \right] + \text{div} \left[\frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V_p} \rho \mathbf{u} d(\Delta V_p) \right] = I_1 + I_2 = 0. \end{aligned} \quad (18.13)$$

Każda z całek w ostatniej równości musi być uśredniana w innym obszarze – pierwsza z nich w przestrzeni porowej (bowiem dotyczy ona gęstości cieczy; uśrednienie masy cieczy w całej objętości próbki dałoby wynik pozbawiony sensu fizycznego), natomiast druga – w objętości ΔV (gdyż pragniemy do równania wprowadzić prędkość filtracji \mathbf{u}_f). Mamy więc:

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{n_e}{\Delta V_p} \int \rho d(\Delta V_p) \right] = \frac{\partial}{\partial t} (n_e \bar{\rho}), \quad (18.14)$$

$$I_2 = \operatorname{div}(\bar{\rho} \mathbf{u}_f), \quad (18.15)$$

gdzie

$$\bar{\rho} = \frac{\int \rho \mathbf{u} d(\Delta V_p)}{\int \mathbf{u} d(\Delta V_p)} = \frac{\int \rho \mathbf{u} d(\Delta V_p)}{\mathbf{u}_f \Delta V}. \quad (18.16)$$

W relacjach tych pojawiają się dwie różne średnie gęstości – $\bar{\rho}$ oraz $\bar{\rho}$. Wynika to z różnej postaci całek I_1 oraz I_2 . Zauważmy jednak, że przeprowadzana powyżej operacja uśredniania dotyczy lokalnej objętości kontrolnej ΔV , mającej nieduże rozmiary. W objętości tej istotną zmienność, jak już mówiliśmy w poprzednich podrozdziałach, wykazuje prędkość (wskutek złożonej kanalikowej struktury przestrzeni porowej). Natomiast gęstość może ulegać znacznym zmianom dopiero na większym dystansie. Możemy więc przyjąć

$$\bar{\rho} \approx \bar{\rho} \approx \rho. \quad (18.17)$$

Podstawiając teraz cztery ostatnie relacje do (18.13), otrzymujemy ostateczną postać równania zachowania masy dla płynu przemieszczającego się w ośrodku porowatym (w strefie saturacji):

$$\frac{\partial(n_e \rho)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}_f) = 0. \quad (18.18)$$

18.1.4.3. Prawo Darcy'ego

Przedmiotowa zależność jest specyficzną dla teorii filtracji wersją prawa zachowania pędu. W ujęciu historycznym miało ono pierwotnie charakter prawa empirycznego. Sformułował je w 1856 roku francuski uczony Henri Darcy. Badając piaskowe filtry wodociągowe miasta Dijon stwierdził on, że strumień jednostkowy wody (określony ilorazem wydatku wody i powierzchni całkowitego przekroju poprzecznego filtra F), czyli znana już nam **prędkość filtracji** (18.5), jest liniową funkcją spadku hydraulicznego, określonego jako iloraz różnicy rzędnych linii ciśnienia $\Delta\varphi$ (patrz par. 6.2.4) przez dystans ΔL , na którym ta różnica występuje:

$$u_f = Q/F = -K \Delta\varphi/\Delta L. \quad (18.19)$$

Relacja powyższa w wersji wyjściowej, przedstawionej powyżej, dotyczy ruchu jednokierunkowego i jednowymiarowego, toteż wymaga uogólnienia na przypadek przestrzenny. Współczynnik proporcjonalności K nazywamy **współczynnikiem przewodności (hydraulicznej)**, lub w wersji tradycyjnej – **współczynnikiem filtracji** (patrz par. 18.1.5).

Współcześnie jednak prawa Darcy'ego nie traktuje się jako relacji czysto empirycznej, lecz jako szczególną postać równania zachowania pędu (3.87). Podejście takie pozwala lepiej zrozumieć fizyczny sens tego prawa oraz współczynnika K .

W równaniu Naviera-Stokesa, wobec małych prędkości ruchu filtracyjnego, odrzucamy człon pochodnej substancjalnej, a przyjmując, że z sił masowych działa tylko grawitacja, możemy napisać:

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad}(gz). \quad (18.20)$$

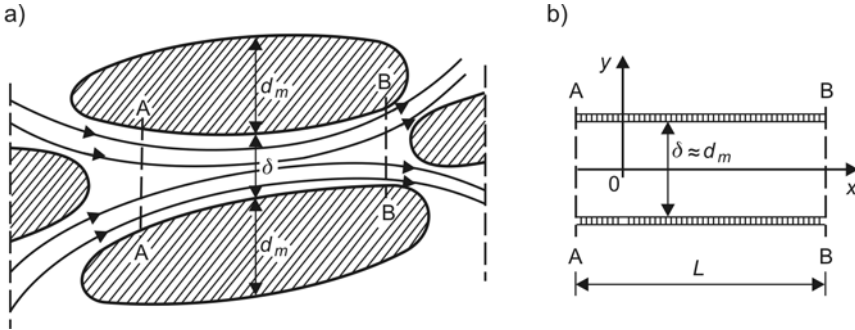
Oba powyższe założenia pozwalają przepisać (3.87) następująco:

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{\rho g}{\mu} \text{grad}(z + p/\rho g). \quad (18.21)$$

Wyrażenie w nawiasie określa, zgodnie z (6.15), wysokość linii ciśnienia, a wobec (9.11) ma charakter potencjału. Napiszmy więc:

$$\varphi = z + p/\rho g \quad (18.22)$$

i nazwijmy funkcję φ **potencjałem filtracyjnym**.



Rys. 18.4. Oszacowanie laplasjanu prędkości w przepływie filtracyjnym

Oszacujmy teraz laplasjan prędkości. W tym celu potraktujemy przepływ stróżki filtrującej cieczy przez kanałek przestrzeni porowej (odcinek AB na rys. 18.4a) jak laminarny ruch tej cieczy w prostej rurce o średnicy δ , w przybliżeniu równej miarodajnej średnicy ziaren ośrodka porowego d_m (rys. 18.4b). Korzystając z rozwiązania Hagen-Poiseuille'a (4.19) możemy wtedy przyjąć oszacowanie:

$$\Delta \mathbf{u} \approx -C_1 \mathbf{u}_p / d_m^2 = -C_1 \mathbf{u}_f / n d_m^2. \quad (18.23)$$

Podstawiając powyższe przybliżenie do (18.21) otrzymujemy:

$$\mathbf{u}_f = -C n d_m^2 \frac{\rho g}{\mu} \text{grad} \varphi. \quad (18.24)$$

Zespół mnożników przed operatorem gradientu jako całość tworzy oczywiście **współczynnik przewodności (hydraulicznej) K**. Dzięki powyższemu rozumowaniu możemy więc napisać następującą postać uogólnionego na przypadek przestrzenny prawa Darcy'ego:

$$\mathbf{u}_f = -K \text{grad} \varphi = -K \mathbf{I} = -K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \mathbf{i} - K \frac{\partial \varphi}{\partial y} \mathbf{j} - K \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (18.25)$$

Otrzymana relacja ma charakter liniowy (czasem mówi się o liniowym prawie Darcy'ego), a odnosi się do ruchu laminarnego. Podlega ona ograniczeniu „od dołu” i „od góry”.

Dolne ograniczenie jest rezultatem działania sił adhezji. Wskutek przylegania filtrującej cieczy do ziarna złoża, niezbędne jest przekroczenie pewnej minimalnej wartości (grad φ)_{min}, by rozpoczął się ruch. Gdy bowiem (grad φ) < (grad φ)_{min}, wtedy $\mathbf{u}_f = 0$. W praktyce ograniczenie to nie stanowi utrudnienia w stosowaniu prawa Darcy [47].

Ograniczenie górne prawa Darcy'ego wiąże się z turbulizacją przepływu. Filtracja traci charakter laminarny, gdy liczba Reynoldsa:

$$\text{Re}_f = \frac{u_f d_{10}}{\nu} \geq \text{Re}_{fc} \quad (18.26)$$

przekracza pewną wartość krytyczną (jednorodny, gruby piasek – $\text{Re}_{fc} = 3 \div 10$, niejednorodny, drobny piasek – $\text{Re}_{fc} = 0,034 \div 0,24$, piaskowiec – $\text{Re}_{fc} = 0,5 \div 1,4$). Symbol d_{10} w (18.26) oznacza średnicę takich ziaren ośrodka porowatego, które wraz z mniejszymi tworzą 10% masy próbki. Niekiedy filtrację burzliwą nazywa się **fluacją**.

W przypadku filtracji turbulენტnej stosuje się **nieliniowe prawo Darcy'ego**, w postaci **wzoru Pronego-Forchheimera** [36]:

$$I = au_f + bu_f^r \quad (18.27)$$

Niestety, jak dotychczas nie udało się wyznaczyć uniwersalnych wartości stałych a oraz b , które zależą nie tylko od własności cieczy i ośrodka, lecz także od prędkości ruchu. Ponadto relacja ta odnosi się do filtracji jednokierunkowej. W sumie problem turbulენტnego przepływu przez ośrodek porowaty należy uznać jeszcze za otwarty. W dalszym ciągu będziemy zajmować się tylko filtracją laminarną.

18.1.5. Przewodność hydrauliczna

Współczynnik przewodności (zwany też **współczynnikiem filtracji**) jest mnożnikiem proporcjonalności w równaniu (18.25), określającym **prawo Darcy'ego**. Jego struktura wynika z porównania relacji (18.24) i (18.25):

$$K = Cnd_m^2 \rho g / \mu \quad (18.28)$$

Wśród występujących tu pięciu wielkości fizycznych (poza stałą C) dwie związane są z własnościami ośrodka porowatego (porowatość n oraz miarodajna średnica ziaren d_m) zaś trzy – z własnościami filtrującego płynu oraz grawitacją ziemską (ρ , μ oraz g). Aby to podkreślić, stosuje się niekiedy **współczynnik przepuszczalności K_p** :

$$K_p = Cnd_m^2 = K\mu / \rho g \quad (18.29)$$

Relacja (18.28) pozwala na zrozumienie czynników, wpływających na wielkość K , lecz nie pozwala na obliczenie liczbowej wartości tego współczynnika, gdyż została wyrowadzona z dokładnością do stałej C . Istnieją trzy grupy metod wyznaczania tego współczynnika – teoretyczne, laboratoryjne i polowe.

Pierwsza z tych grup bazuje na wzorach (najczęściej empirycznych), lub wykresach i zestawieniach tabelarycznych (np. tab. 8). W pierwszej kolejności wymienić tu trzeba wzór Hazena, zgodnie z którym:

$$K_{10} = cd_{10}^2 \quad (18.30)$$

gdzie K_{10} – przewodność w temperaturze 10°C w [m/dobę], d_{10} [mm] – jak w relacji (9.29), c – współczynnik liczbowy, który może być uzależniony od porowatości ośrodka n [%]:

$$c = 400 + 4(n - 26) \quad (18.31)$$

Związek wartości K z temperaturą T wynika głównie ze zmienności współczynnika lepkości cieczy [3]. Przeliczanie przyjętego jako standardowy współczynnika K_{10} w tempe-

raturze $T = 10^{\circ}\text{C}$ na współczynnik w temperaturze dowolnej K_T może odbywać się według wzoru:

$$K_T = 0,736K_{10} \left(1 + 0,0337T + 0,00022T^2 \right). \quad (18.32)$$

Zależność (18.30) bywa też używana w uproszczonej wersji (wtedy K_{10} [m/s], d_{10} [cm]):

$$K_{10} = 1,16d_{10}^2. \quad (18.33)$$

Przydatny jest także **wzór Slichtera**:

$$K_{10} = 6740d_{10}^2 m_s \quad (18.34)$$

(K_{10} [m/dobę], d_{10} [mm], m_s – współczynnik zależny od porowatości, według tab. 9).

Metody laboratoryjne opierają się na pomiarach zmiennych, charakteryzujących filtrację w próbce ośrodka porowatego, umieszczonej w naczyniu, z reguły o kształcie cylindrycznym (na przykład w tak zwanej rurce Kamińskiego [33]). Wreszcie metody polowe bazują na pomiarach parametrów układu podczas próbnych pompowań cieczy ze studni, lub podczas próbnego zalewania studni cieczą. Po dokładniejszy opis tych metod, jak też po większą liczbę wzorów, wykresów i tabel, określających współczynnik K , odsyłamy Czytelnika do specjalistycznej literatury hydrogeologicznej [33, 36]. Z punktu widzenia potrzeb matematycznego opisu przepływów współczynnik ten ma charakter stałej materiałowej.

Niekiedy istotną rzeczą jest typ wielkości, opisującej przewodność hydrauliczną. Dotychczas milcząc zakładaliśmy, że jest to wielkość skalarna. Jest to prawdziwe dla ośrodków **izotropowych** (patrz par. 18.1.2). Jeżeli jednak złożę wykazuje różne własności w różnych kierunkach (**anizotropia**), współczynnik filtracji ma charakter tensora:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}. \quad (18.35)$$

W znaczący sposób powoduje to rozwinięcie zapisu prawa Darcy'ego (18.25), które wobec (18.35) następująco określa składowe prędkości filtracji:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_f = u_{fx} \mathbf{i} + u_{fy} \mathbf{j} + u_{fz} \mathbf{k} = & \left(K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{xz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \\ & + \left(K_{yx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{yz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left(K_{zx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{zy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (18.36)$$

Aby wyznaczyć współrzędne tensora przewodności K_{ij} ($i, j = x, y, z$) w dowolnym układzie współrzędnych (x, y, z), należy znaleźć taki układ odniesienia (x_d, y_d, z_d), w którym tensor ten ma postać diagonalną \mathbf{K}_d [21]:

$$\mathbf{K}_d = \begin{bmatrix} K_{dx} & 0 & 0 \\ 0 & K_{dy} & 0 \\ 0 & 0 & K_{dz} \end{bmatrix}, \quad (18.37)$$

czyli posiada tylko trzy niezerowe składowe.

Najczęściej układ (x, y, z) wynika z rozwiązywanego problemu technicznego (z – z reguły oznacza pion), zaś układ (x_d, y_d, z_d) – z budowy geologicznej obszaru, w którym ten problem rozpatrujemy. Między tymi układami istnieje tensor transformacji o współrzędnych [21]:

$$A_{i_d}^i A_{j_d}^j = \cos(i_d, i) \cos(j_d, j). \quad (18.38)$$

Składowe K_{dx} , K_{dy} , K_{dz} możemy wyznaczyć na przykład w laboratorium, badając przewodność próbki złoża w każdym z trzech charakterystycznych kierunków, co określa współrzędne tablicy (18.37). Przeliczamy ją do postaci (18.35) zgodnie z regułą transformacyjną tensorów [21]:

$$K_{ij} = \sum_{i_d=1}^3 \sum_{j_d=1}^3 (A_{i_d}^i A_{j_d}^j K_{dij}). \quad (18.39)$$

Posługiwanie się tensorową postacią współczynnika przewodności \mathbf{K} jest trudne. Na szczęście w praktyce hydrogeologicznej przeważająca większość przypadków daje się opisać modelem izotropowym, gdy współczynnik filtracji jest skalarem.

18.2. Filtracja przestrzenna

18.2.1. Bilans niewiadomych i równań

Zgodnie z ogólnymi zasadami opisu ruchu płynu (część I) możemy stwierdzić, że trójwymiarowy i trójkierunkowy ruch płynu w ośrodku porowatym (filtracja przestrzenna) jest w pełni opisany wtedy, gdy znamy następujące zmienne zależne:

- wektor strumienia jednostkowego (prędkości filtracji) \mathbf{u}_f ,
- potencjał filtracyjny φ ,
- ciśnienie p .

Tak więc poszukujemy pięciu funkcji skalarnych. Mogą one być określone albo w obszarze swobodnym, czyli w ogólnym przypadku o zmiennym kształcie, opisanym przez układ swobodnej powierzchni, dany funkcją $z_g(x, y, t)$, albo też w obszarze znajdującym się pod ciśnieniem (par. 18.1.1).

W tym pierwszym przypadku kształt obszaru będzie uzależniony od warunków ruchu, bowiem to właśnie pole prędkości cieczy wymusza nieznaną z góry kształt jej swobodnego zwierciadła – niezmienny w czasie dla ruchu ustalonego, zaś zmienny w ruchu nieustalonym. Relacja, wiążąca pole prędkości płynu z funkcją $z_g(x, y, t)$, nosi nazwę **kinematycznego warunku na swobodnej powierzchni**. Omówimy ją na końcu tego paragrafu. Dodajmy, że teoretycznie możliwy jest przypadek przepływu przy zmiennym kształcie również spągu warstwy filtracyjnej, danym funkcją $z_d(x, y, t)$. Efekt ten można opisać za pomocą analogicznego warunku kinematycznego na dnie obszaru. Jednakże w zagadnieniach filtracji raczej nie napotykamy takich przypadków (gdy wskutek ruchu płynu spąg warstwy ulega przemieszczeniom), w przeciwieństwie do przepływów w zbiornikach otwartych (gdy opis zmiany konfiguracji dna wskutek ruchu osadów dennych bywa istotnym problemem). Bardziej prawdopodobny byłby przypadek przemieszczania granic obszaru, wywołanego przez czynniki zewnętrzne (na przykład ruchy tektoniczne). W takim przypadku musielibyśmy dysponować matematycznym opisem tego zjawiska.

Jeśli zaś chodzi o drugą możliwość, czyli filtrację w obszarze zamkniętym, to tutaj będziemy z reguły mieli do czynienia z niezmiennym jego kształtem. Zgodnie bowiem z powyższymi uwagami możemy uznać ruch granic obszaru (spowodowany czynnikami

zewnątrznymi, a tym bardziej wywołany samym przepływem cieczy) za przypadek bardzo rzadko spotykany.

Dla wyznaczenia wyliczonych powyżej niewiadomych mamy do dyspozycji:

- prawo Darcy'ego (18.25);
- równanie ciągłości (18.18), które dla szczególnie częstego przypadku przepływu płynu o stałej gęstości przyjmie postać:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_r = 0; \quad (18.40)$$

- definicję potencjału filtracyjnego (18.22).

Jest to zamknięty układ pięciu równań skalarnych, o pięciu niewiadomych. Jednakże w praktyce stosujemy nieco inną wersję tego układu, bowiem jego postać wyprowadzona w poprzednim podrozdziale daje możliwość uproszczenia zapisu. Podstawiając mianowicie (18.25) do (18.40), otrzymujemy (w warunkach anizotropowych)

$$\operatorname{div} (\mathbf{K} \operatorname{grad} \varphi) = 0. \quad (18.41)$$

W kartezjańskim układzie współrzędnych mamy wtedy dość rozbudowaną postać równania, określającego potencjał φ

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{xy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{xz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{yy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{yz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_{zx} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + K_{zy} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + K_{zz} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0. \end{aligned} \quad (18.42)$$

Jeżeli ośrodek jest izotropowy, lecz współczynnik filtracji jest zmienny, wtedy mamy

$$\operatorname{div} (K \operatorname{grad} \varphi) = 0 \quad (18.43)$$

lub w układzie kartezjańskim

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0. \quad (18.44)$$

Natomiast w najprostszym przypadku, gdy $K = \text{const.}$, otrzymujemy stosunkowo proste równanie Laplace'a:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (18.45)$$

Podane wyżej wersje równania, opisującego potencjał filtracyjny, są szczególnymi postaciami równania najbardziej ogólnego, w którym uwzględnia się ściśliwość płynu oraz ośrodka porowatego (łącznie wyrażając ten wpływ za pomocą **współczynnika pojemności sprężystej** S_c). Ponadto przyjmuje się wtedy, że masa filtrującego płynu może powstawać (lub zanikać) wskutek oddziaływania materiału, tworzącego ośrodek porowaty (reakcje chemiczne, biologiczne i fizyczne). Jako przykład można tu wskazać powstawanie metanu podczas rozkładu substancji organicznych w korpusie składowiska odpadów. Gaz ten jest usuwany ze składowiska, aby uniknąć zagrożenia dla środowiska, a następnie wykorzystywany. Proces powstawania (lub zanikania) filtrującego płynu uwzględniany jest w równaniu ciągłości za pomocą funkcji s , określającej masę gazu, powstającą (lub zanikającą, a wtedy s jest ujemne) z jednostki objętości ośrodka w jednostce czasu.

Ostatecznie, uwzględniając powyższe, otrzymujemy **równanie Richardsa** [47]:

$$\rho_0 S_c \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \operatorname{div}(\rho \mathbf{K} \operatorname{grad} \varphi) + s. \quad (18.46)$$

Procedura rozwiązywania zagadnień filtracji przestrzennej wygląda więc tak, że najpierw rozwiązujemy jedno z omówionych powyżej równań, opisujących potencjał filtracyjny φ . W następnej kolejności z prawa Darcy'ego wyznaczamy prędkość filtracji u_f , zaś z (18.22) – ciśnienie p .

Określający kształt swobodnej powierzchni filtrującej cieczy **warunek kinematyczny** wynika ze stwierdzenia, że swobodna powierzchnia utworzona jest zawsze przez te same elementy płynu. Jest ono oczywiste, gdyby bowiem elementy takie miały ulegać wymianie, musiałaby ona być wymuszana przez siły, generujące lokalne przemieszczenia, mające charakter zawirowań. Tymczasem efektów takich nie obserwuje się. Konsekwencją tego spostrzeżenia jest kolejne stwierdzenie, że zmiana pionowego usytuowania dowolnego elementu płynu (opisana funkcją z_g) po upływie krótkiego okresu czasu dt (wyrażona z definicji pochodną substancjalną – par. 1.5.5) może być spowodowana przez pionowe przemieszczenie swobodnej powierzchni wynikające z jej ruchu z prędkością u_{pzg} (jest to prędkość porowa na swobodnej powierzchni), oraz/albo z dopływu (lub odpływu) cieczy wskutek działania czynników źródłowych (opady atmosferyczne, wsiąkanie, parowanie...), opisanych funkcją w_b . Powyższe możemy zapisać następująco:

$$\frac{Dz_g}{Dt} = \frac{\partial z_g}{\partial t} + u_{pxg} \frac{\partial z_g}{\partial x} + u_{pyg} \frac{\partial z_g}{\partial y} = u_{pzg} + w_b. \quad (18.47)$$

Uwzględniając zależność między prędkością porową u_p a wydatkiem jednostkowym u_f (18.11), otrzymujemy roboczą postać rozważanego warunku kinematycznego:

$$n_e \frac{\partial z_g}{\partial t} + u_{fxg} \frac{\partial z_g}{\partial x} + u_{fyg} \frac{\partial z_g}{\partial y} = u_{fzg} + w_b n_e. \quad (18.48)$$

18.2.2. Formułowanie zagadnienia

Miarodajny schemat kształtu obszaru, w którym poszukujemy rozwiązania równań opisujących przestrzenną filtrację, pokazano na rys. 18.5. Tworzy go warstwa przepuszczalna (ośrodek porowaty o przewodności hydraulicznej K), w której mogą znajdować się wewnętrzne przewarstwienia z materiału nieprzepuszczalnego (lita skała lub substancja o znikomej przepuszczalności). Obszar ten ograniczony może być następującymi rodzajami powierzchni zewnętrznej:

- ścianka sztywna, nieprzepuszczalna (lita skała lub inny materiał szczelny, jak na przykład tworzywo sztuczne – linie AB i KLK na rys. 18.5),
- ścianka sztywna, przepuszczalna (najczęściej są to filtry studni i drenów oraz łożyska rzek, kanałów, zbiorników otwartych itp. – linie DE i FG na rys. 18.5),
- swobodna powierzchnia (linie AE i CD na rys. 18.5),
- brzeg matematyczny (arbitralnie wybrana powierzchnia domykająca obszar, nie wyróżniająca się odrębnością fizyczną; stosujemy ją wtedy, gdy nie chcemy rozważać obszaru o dużych rozmiarach – linia BC na rys. 18.5).

Dodatkowego komentarza wymaga połączenie swobodnych powierzchni cieczy w ośrodku porowatym i w kontaktującym się z nim zbiornikiem otwartym (na przykład punkty D i E na rys. 18.5). Obie one przecinają granicę obszaru (dno zbiornika, łożysko rzeki, rurę filtrową studni itp.) wzdłuż różnych linii. Pasma wyznaczone tymi liniami nazywamy **powierzchnią przesączania**, a jego wysokość Δs – **zeskokiem hydraulicznym** (rys. 18.6). Zagadnienie to nie jest w pełni rozpoznane. Występowanie zeskoku hydraulicz-

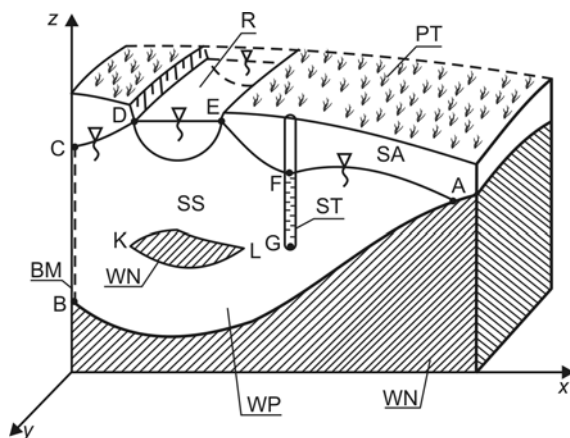
nego jest wyjaśniane koniecznością pokonania oporów ruchu w pobliżu powierzchni granicznej (po obu jej stronach), jak też oporem substancji i elementów, zalegających na tej granicy (np. osadów dennych w korycie rzeki, siatki filtracyjnej w studni). Wartość zesko-ku dla studni obliczyć można ze wzoru:

$$\Delta s = 0,01 a_z \sqrt{Qs/KF} \quad (18.49)$$

lub w uproszczeniu:

$$\Delta s = 0,05 s^2/m, \quad (18.50)$$

gdzie a_z – współczynnik liczbowy ($a_z = 6 - 10$ dla filtrów perforowanych, $a_z = 15 - 20$ dla tzw. filtrów kieszeniowych, $a_z = 15 - 25$ dla filtrów siatkowych i żwirowych), Q – wydatek studni, s – depresja wody w studni (różnica między początkowym poziomem wody w miejscu wiercenia studni, a jej poziomem podczas pracy tej studni), K – przewodność hydrauliczna, F – czynna powierzchnia filtru, m – miąższość warstwy wodonośnej.



Rys. 18.5. Warunki brzegowe dla zagadnień filtracyjnych: R – rzeka, PT – powierzchnia terenu, ST – studnia, SA – strefa aeracji, SS – strefa saturacji, WP – warstwa przepuszczalna, WN – warstwa nieprzepuszczalna, BM – brzeg matematyczny

Wartość Δs nie jest zbyt duża. Z reguły $s < m$, toteż ze wzoru (18.50) mamy

$$\Delta s < 0,05 s. \quad (18.51)$$

Oszacowanie powyższe jest podstawą do jednego z dwóch **założeń Dupuit'a**, które polega na pominięciu powierzchni przesączania i przyjęciu:

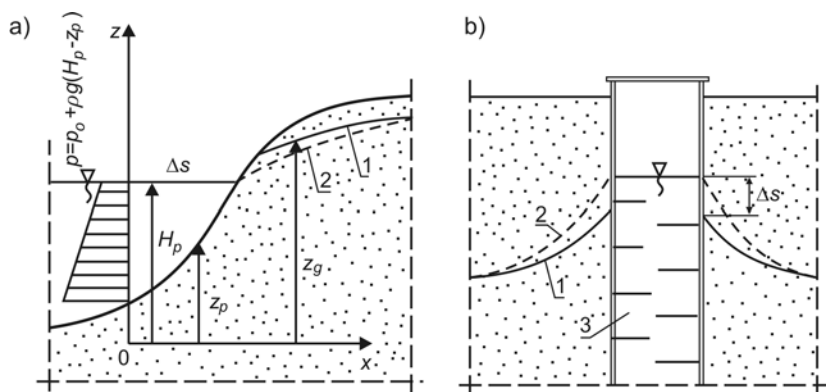
$$\Delta s \approx 0. \quad (18.52)$$

Założenie to jest bardzo popularne w hydrogeologii. Oznacza ono warunek zgodności powierzchni cieczy w ośrodku porowatym i w sąsiednim układzie swobodnym (rys. 18.6).

Zajmijmy się teraz warunkami granicznymi (który to termin w przypadku równań różniczkowych cząstkowych obejmuje **warunki brzegowe** oraz **warunki początkowe** [4]). W interesującym nas tu przypadku równanie dynamiczne, opisujące rozkład potencjału filtracyjnego φ (jedna z relacji od (18.41) do (18.45), zależnie od charakteru współczynnika

K), nie zawiera członu opisującego opóźnienie reakcji układu na zmianę czynników wymuszających, czyli członu z pochodną względem czasu. Nie trzeba więc dla tego równania formułować warunku początkowego. Jest on jednak niezbędny dla równania opisującego zmianę konfiguracji swobodnej powierzchni, czyli dla warunku kinematycznego (18.48). Musi on mieć postać funkcji, opisującej kształt tej powierzchni w chwili początkowej:

$$z_{g0} = z_g(x, y, t = 0). \quad (18.53)$$



Rys. 18.6. Zeskok hydrauliczny: a) przy ścianie przepuszczalnej, b) przy ścianie nieprzepuszczalnej (1 – rzeczywiste zwierciadło wody, 2 – zwierciadło wody według założenia Dupuita, 3 – ścianka studni)

Równanie dynamiczne ma charakter **eliptyczny** [4], wobec czego sposoby formułowania dla niego warunków brzegowych są takie, jak dla potencjału w modelu płaskiego ruchu potencjalnego (patrz par. 9.3.3). Dla różnych typów powierzchni granicznych (rys. 18.5) możemy te warunki formułować następująco:

— ścianka sztywna, nieprzepuszczalna:

składowa prędkości, normalna do takiej ścianki znika, toteż mamy wtedy warunek Neumanna

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0; \quad (18.54)$$

— ścianka sztywna, przepuszczalna:

prędkość, z jaką ciecz przesącza się przez ściankę przepuszczalną jest w każdym jej punkcie różna; jeżeli znamy ten rozkład prędkości, to możemy napisać dla takiej ścianki warunek Neumanna:

$$-K \frac{\partial \varphi_p}{\partial n} = u_{fnp}. \quad (18.55)$$

Całkując funkcję u_{fnp} po powierzchni ścianki przepuszczalnej S_p , otrzymujemy wydatek całkowity

$$Q = \int_{S_p} u_{fnp} dS_p \quad (18.56)$$

Jednak z reguły tej funkcji nie znamy, toteż co najwyżej możemy przyjąć oszacowanie

$$u_{fnp} \approx \tilde{u}_{fnp} = Q/S_p \quad (18.57)$$

pozwalające na powiązanie potencjału filtracyjnego φ z niezwykle istotną wielkością techniczną Q (o ile znamy tę wartość). Gdy ścianka sztywna oddziela ośrodki porowate od cieczy, zawartej w zbiorniku otwartym (a często tak jest, gdy ścianka ta jest np. filtrem studni, lub łożyskiem rzeki), wtedy możemy stawiać dla niej warunek Dirichleta. W dokładnym ujęciu wymaga on określenia pola ciśnienia (a więc także prędkości) w tym zbiorniku. Jest to możliwe, jeżeli równocześnie z równaniami filtracji będziemy rozwiązywać równania ruchu cieczy w zbiorniku (patrz rozdz.17). Jednakże rzadko kiedy przepływ cieczy między ośrodkami porowatym oraz przyległym do niego zbiornikiem jest tak intensywny, że wywołuje istotne odchylenie rozkładu ciśnienia w zbiorniku od rozkładu hydrostatycznego. Najczęściej więc traktujemy ciecz w zbiorniku jako nieruchomą i dla dowolnego punktu ścianki sztywnej, przepuszczalnej, wykorzystujemy (rys. 18.6a) zależność (18.22)

$$\varphi_p = \frac{p_0}{\rho g} + (H_p - z_p) + z_p = \frac{p_0}{\rho g} + H_p = \text{const} .; \quad (18.58)$$

- swobodna powierzchnia oraz powierzchnia przesączania (o ile ją uwzględniamy): na powierzchniach tych panuje ciśnienie zewnętrzne p_0 , które traktujemy jako wielkość znaną. Mamy więc tu następujący warunek Dirichleta:

$$\varphi_s = p_0/\rho g + z_g ; \quad (18.59)$$

- brzeg matematyczny:

sformułowanie warunków na tego typu brzegu jest najtrudniejszym etapem formułowania problemu, gdyż panuje na nim nieznaną prędkość, będącą częścią poszukiwanego rozwiązania. Staramy się więc w miarę możliwości unikać tego typu brzegu, dobierając odpowiednio kształt obszaru. Gdy nie jest to możliwe, lub gdy dobrany obszar staje się zbyt duży, należy tak wybierać brzeg matematyczny, aby jego lokalizacja dawała podstawy przynajmniej do oszacowania przepływu przez taki brzeg. Wykorzystać w tym celu można studnie i otwory obserwacyjne (piezometry). W modelach przestrzennych muszą to być obiekty o filtrach położonych na różnych głębokościach, by oddać pionową zmienność potencjału. Metoda taka staje się kosztowna i czasochłonna. Pożytecznym chwytem jest ustalenie brzegu matematycznego w postaci pionowej płaszczyzny, przechodzącej przez **wododział**. Mianem wododziału określamy linię, dzielącą zlewnie poszczególnych rzek. Dzieli ona obszary o różnych kierunkach spływu wód powierzchniowych, ale także podziemnych. Dzięki temu możemy się spodziewać, że przepływ przez granicę, wyznaczoną przez wododział, jest równy zero, czyli (rys. 18.7a):

$$\frac{\partial \varphi_w}{\partial n} = 0 . \quad (18.60)$$

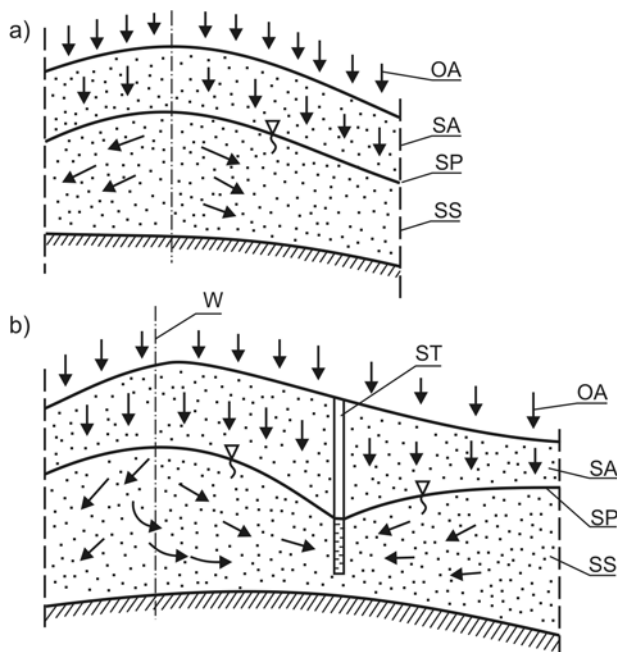
Jednakże istnieje wtedy możliwość popełnienia istotnego błędu, gdy w rejonie wododziału są obiekty (studnie, dreny), które wymuszają jednak pewien przepływ (rys. 18.7b). Jak widać, wyznaczenie warunku brzegowego wzdłuż brzegu matematycznego jest rzeczą trudną. W zagadnieniach praktycznych bywa więc, że przepływ przez taki brzeg określamy z dużym przybliżeniem, lub wręcz traktujemy jako parametr modelu, dobierany podczas jego identyfikacji.

Obok warunku brzegowego dla równania dynamicznego, musimy go określić także dla relacji (18.48). Jest to zależność typu **hiperbolicznego** [4]. Jeżeli więc dla każdej linii prą-

du na swobodnej powierzchni (najlepiej w jej punkcie początkowym, gdyż możemy wtedy powiązać kształt tej powierzchni z czynnikami zewnętrznymi, jak na przykład z poziomem cieczy w zbiorniku zasilającym ośrodek porowaty) podamy zależność:

$$z_{gb} = f_g(t), \quad (18.61)$$

będzie ona wystarczającym warunkiem brzegowym dla funkcji z_g .



Rys. 18.7. Przepływ w rejonie wododziału: W – wododział, ST – studnia, OA – opady atmosferyczne, SA – strefa aeracji, SS – strefa saturacji, SP – swobodna powierzchnia wody podziemnej

18.3. Filtracja podłużna

18.3.1. Uwagi ogólne

Model filtracyjnego **ruchu podłużnego** definiowany jest tak samo, jak w przepływie swobodnym (podrozdz. 2.6), z tą tylko różnicą, że posługujemy się tu wydatkiem jednostkowym (prędkością filtracji) v_f , a nie prędkością rzeczywistą v (uwaga: obie te wielkości są skalarami, gdyż oznaczają podłużne składowe wektorów \mathbf{v}_f oraz \mathbf{v}).

W istocie rzeczy bez zmian pozostaje w tym modelu także równanie ciągłości. Tylko prawo zachowania pędu (w postaci prawa Darcy'ego) ma inną formę, niż w ruchu swobodnym.

Robocze postacie równań modelu podłużnego, jak zobaczymy dalej, są na tyle proste, że dla wielu przypadków możemy uzyskać dla nich rozwiązania analityczne. Jest to, wraz z potrzebami praktyki (w dużym stopniu z zakresu problemów inżynierii środowiska),

przyczyną intensywnego rozwoju tej części teorii filtracji. W literaturze znaleźć można wiele rozwiązań, dokładnych i przybliżonych, mających postać analityczną lub graficzną, czy tabelaryczną. Opracowano różne metody rozwiązywania zagadnień filtracji. Cały ten materiał jest silnie nasycony aspektami praktycznymi, toteż trudno go studiować bez równoczesnej znajomości odpowiednich dyscyplin technicznych (jak hydrologia, wodociągi, oczyszczanie wody i ścieków, górnictwo gazu i ropy naftowej, inżynieria chemiczna i inne).

W związku z powyższym tutaj, zgodnie z przyjętym charakterem książki, omówimy jedynie podstawowe zasady formułowania problemów, po szczegóły odsyłając Czytelnika do dostępnej i obszernej literatury fachowej (np. [8, 24, 31, 33, 65]).

18.3.2. Podstawowe równania modelu podłużnego

18.3.2.1. Charakterystyka modelu

Model podłużny może być wykorzystywany do opisu zachowania się strumienia filtrującej cieczy, jeśli ma on charakter jednokierunkowy i jednowymiarowy:

$$\mathbf{u}_f(x, y, z, t) = [v_f(x, t) + u_{f_x}^+(x, y, z, t)]\mathbf{i} + u_{f_y}^+(x, y, z, t)\mathbf{j} + u_{f_z}^+(x, y, z, t)\mathbf{k}. \quad (18.62)$$

Podstawowe znaczenie w powyższej reprezentacji wektora prędkości ma uśredniona w przekroju poprzecznym S składowa podłużna $v_f(x, t)$:

$$v_f(x, t) = \frac{1}{S} \int_S u_{f_x}(x, y, z, t) dS. \quad (18.63)$$

Reszta składowych wektora \mathbf{u}_f ma charakter odchyłek, które mogą zostać pominięte w trakcie przekształceń.

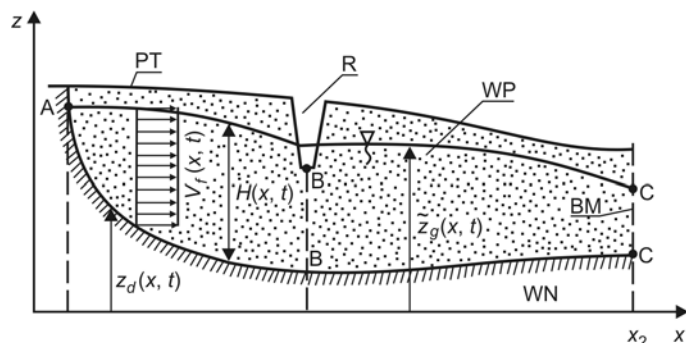
Obszar, dla którego omawiany tu model można stosować, powinien być wydłużony w kierunku uśrednianej składowej prędkości filtracji, czyli w symbolice (18.62) zgodnie ze składową u_{f_x} . Oznacza to, że miąższość warstwy filtrującej cieczy musi być dużo mniejsza od rozważanego dystansu wzdłuż kierunku przepływu, jak na rys. 18.8, podobnie jak w przypadku przepływu swobodnego, czyli w obszarze bez wypełnienia (rys. 2.9b). Inaczej natomiast wygląda tu kwestia poprzecznego wymiaru strumienia w kierunku poziomym. O ile dla strumieni płynących w przewodach zamkniętych lub korytach otwartych także ten rozmiar powinien być niewielki (w przeciwnym razie mielibyśmy do czynienia z warstwą cieczy, w której z łatwością wytworzyłby się ruch przynajmniej dwukierunkowy [47], jak na przykład w przybrzeżnych strefach mórz, płytkich zatokach lub jeziorach), o tyle w przypadku ruchu wód podziemnych występują odwrotne proporcje. Wąskie i płytkie warstwy wodonośne należą do nietypowych, podczas gdy często obserwujemy rozległe obszary materiału porowatego, w których woda filtruje w zasadzie w jednym kierunku. Aby jednak proces uśredniania rozważanych tu równań ruchu cieczy był matematycznie ścisły, przyjmijmy schemat obliczeniowy jak na rys.18.9.

Obszar obliczeniowy ma więc charakter koryta, utworzonego z materiału szczelnego (np. z litej skały), wypełnionego substancją porowatą o przepuszczalności $K(x, y, z, t)$. Boczne ściany koryta opisane są równaniami:

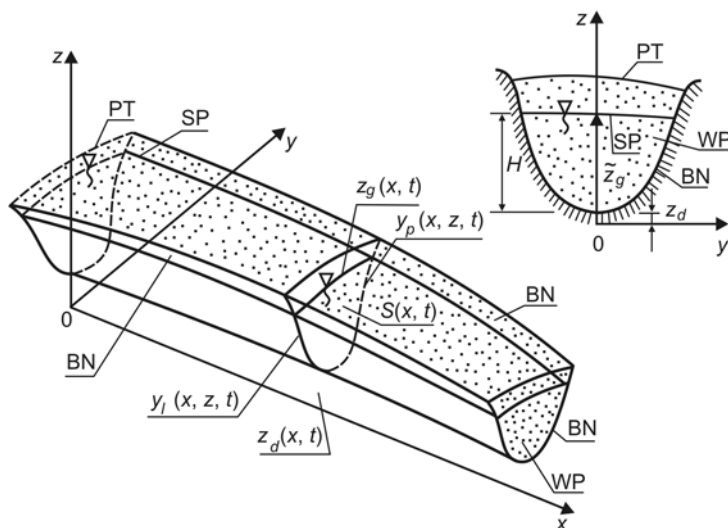
$$y_L = y_L(x, z, t), y_P = y_P(x, z, t). \quad (18.64)$$

Powierzchnie te przecinają się wzdłuż linii dna, o równaniu $z_d(x, t)$, zaś od góry rozdzielone są swobodną powierzchnią filtrującej cieczy, o równaniu $z_g(x, y, t)$, lub uśrednioną

względem y (czyli względem kierunku poprzecznego) relacją $\tilde{z}_g(x, t)$. Pozostaje tu w mocy jedna z podstawowych konwencji modelu podłużnego, zgodnie z którą oś $0x$ może nie być prosta, a jest traktowana jako prostoliniowa (chyba że jej krzywizna powoduje efekty wykluczające możliwość stosowania tego modelu).



Rys. 18.8. Model filtracji podłużnej (PT – powierzchnia terenu, R – rów odwadniający, WP – warstwa przepuszczalna, WN – warstwa nieprzepuszczalna, BM – brzeg matematyczny)



Rys. 18.9. Schemat obliczeniowy dla filtracji podłużnej ze swobodną powierzchnią (PT – powierzchnia terenu, SP – swobodna powierzchnia wody, BN – brzeg nieprzepuszczalny, WP – warstwa przepuszczalna)

Dla wspomnianych przepływów w ośrodkach porowatych o bardziej typowym kształcie rozległej warstwy wodonośnej, dla której bardzo dużej szerokości B odpowiada stosunkowo mała średnia głębokość warstwy filtrującej cieczy \tilde{H} , wobec $B \gg \tilde{H}$ przyjmuje się $B = \text{const.}$ i pisze:

$$S(x, t) = B\tilde{H}(x, t). \quad (18.65)$$

18.3.2.2. Równanie ciągłości

Aby uśrednić równanie zachowania masy (18.18) całkujemy po powierzchni S (patrz rys. 18.9) obie jego strony, co daje:

$$\int_S \operatorname{div} \mathbf{u}_f dS = \int_{z_d}^{z_g} \int_{y_L}^{y_P} \left[\frac{\partial u_{fx}}{\partial x} + \frac{\partial u_{fy}}{\partial y} + \frac{\partial u_{fz}}{\partial z} \right] dy dz = 0. \quad (18.66)$$

Wyrażenie to przekształcamy wykorzystując zasadę różniczkowania całki o zmiennych granicach [4]. Jeżeli kształt obszaru jest niezmienny (filtracja pod ciśnieniem – par. 18.1.1), funkcje opisujące kształt przekroju poprzecznego są znane. Natomiast dla filtracji ze swobodną powierzchnią uwzględniamy warunek kinematyczny (18.47). Po wykonaniu możliwych działań otrzymujemy:

$$n_e \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_f S) = \tilde{W}(x, t). \quad (18.67)$$

Funkcja $\tilde{W}(x, t)$ wyraża grubość swobodnej warstwy cieczy, która w jednostce czasu dopływa do jednostki długości swobodnej powierzchni (czyli jest to uśredniona w przekroju poprzecznym funkcja dopływu bocznego w_b).

Dla przypadku szerokiego strumienia o głębokości $\tilde{H}(x, t)$, według (18.65), mamy:

$$n_e \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v_f \tilde{H}) = \tilde{W}/B = W. \quad (18.68)$$

18.3.2.3. Uśrednione prawo Darcy'ego

Przy uśrednianiu relacji (18.25) względem S pojawia się problem nieliniowości. Polega on na tym, że uśredniona wartość iloczynu dwóch funkcji (dla prawa Darcy'ego jest to iloczyn zmiennego w ogólnym przypadku współczynnika filtracji oraz gradientu potencjału filtracyjnego) nie jest równa iloczynowi tych zmiennych, uśrednionych osobno. Jak wszakże pokazuje praktyka [36, 47], różnica ta nie jest na tyle istotna, by nie pozwolić na przyjęcie relacji uproszczonej, która dla rozważanego ruchu jednokierunkowego ma postać:

$$v_f = -\tilde{K} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x}, \quad (18.69)$$

gdzie

$$\tilde{K}(x, t) = \frac{1}{S} \int K(x, y, z, t) dS. \quad (18.70)$$

Wobec hydrostatycznego rozkładu ciśnienia w ruchu podłużnym mamy zgodnie z (18.22):

$$\varphi = \frac{p_0}{\rho g} + (z_g - z) + z = \frac{p_0}{\rho g} + z_g \approx \frac{p_0}{\rho g} + \tilde{z}_g = \tilde{\varphi}, \quad (18.71)$$

więc ostatecznie prawo Darcy'ego przyjmuje tu postać

$$v_f = -\tilde{K} \frac{\partial \tilde{z}_g}{\partial x}. \quad (18.72)$$

18.3.2.4. Równanie Boussinesqa dla modelu podłużnego

Podstawiając (18.72) do (18.67) otrzymujemy roboczą wersję jednowymiarowego równania filtracji, zwaną **równaniem Boussinesqa**:

$$n_e \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{K} S \frac{\partial \tilde{z}_g}{\partial x} \right] + \tilde{W}. \quad (18.73)$$

Dla jednokierunkowej warstwy mamy

$$n_e \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{K} \tilde{H} \frac{\partial \tilde{z}_g}{\partial x} \right] + W \quad (18.74)$$

lub, podstawiając związek $\tilde{H} = \tilde{z}_g - z_d$ przy $z_d \neq f(t)$:

$$n_e \frac{\partial \tilde{z}_g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{K} (\tilde{z}_g - z_d) \frac{\partial \tilde{z}_g}{\partial x} \right] + W. \quad (18.75)$$

18.3.3. Formułowanie zagadnienia

Strumień filtrującej cieczy jest w modelu podłużnym sprowadzany do schematycznej strugi o grubości $H(x, t)$, wzdłuż której panuje prędkość $v_f(x, t)$, zgodnie ze schematem na rys. 18.8. Rozważany odcinek tej strugi może być wyznaczony przez:

— brzeg nieprzepuszczalny (przekrój A–A na rys. 18.8) – tworzyć go może lita skała, lub sztucznie wykonana szczelna konstrukcja (np. mur oporowy, ścianka szczelna). Jako warunek brzegowy mamy tu:

$$\frac{\partial \tilde{z}_{gn}}{\partial x} = 0; \quad (18.76)$$

— brzeg przepuszczalny (przekrój B–B na rys. 18.8) – tworzyć go może brzeg rzeki, zbiornika, rowu melioracyjnego itp. Warunek brzegowy Dirichleta określa tu rzędna wody w obszarze otaczającym z_w

$$\tilde{z}_{gp} = z_w; \quad (18.77)$$

lub relacje (18.56, 18.57);

— brzeg matematyczny (przekrój C–C na rys. 18.8) – jego określenie bywa trudne. Jeżeli jest on wyznaczony przez linię wododziałową, prostopadłą do osi $0x$, wtedy możemy napisać:

$$\frac{\partial \tilde{z}_{gm}}{\partial x} = 0. \quad (18.78)$$

Obok warunku brzegowego, dla równania (18.75) musimy też określić warunek początkowy:

$$\tilde{z}_{go} = \tilde{z}_g(x, t = 0). \quad (18.79)$$

18.3.4. Zagadnienia ustalone

Jeżeli warunki ruchu nie zmieniają się w czasie, wtedy równanie (18.75) przyjmuje postać:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{K}(\tilde{z}_g - z_d) \frac{\partial \tilde{z}_g}{\partial x} \right] + W = 0. \quad (18.80)$$

Do jego rozwiązania potrzebne są dwa warunki brzegowe, według uwag w poprzednim paragrafie.

W szczególnie prostym przypadku, gdy spąg warstwy wodonośnej jest poziomy ($z_d = \text{const}$), warstwa jest jednorodna ($\tilde{K} = \text{const}$) oraz nie ma zasilania zewnętrznego ($W = 0$), relacja (18.80) ma postać:

$$\frac{d}{dx} \left(\tilde{H} \frac{d\tilde{H}}{dx} \right) = 0, \quad (18.81)$$

którą możemy rozwiązać w dwóch kwadraturach:

$$\tilde{H} \frac{d\tilde{H}}{dx} = C_1, \quad (18.82)$$

skąd

$$\frac{1}{2} \tilde{H}^2 = C_1 x + C_2. \quad (18.83)$$

Stałe całkowania wyznaczamy z omówionych już warunków brzegowych, które niemal zawsze są ściśle związane z technicznymi aspektami zagadnienia. Powszechnie stosuje się tu założenie Dupuita. Model ten jest bardzo przydatny do opisu takich zagadnień, jak dopływ wody podziemnej do rowu, lub przesiąkanie wody przez nasyp ziemny. W szczególności ważnych dla inżynierii środowiska zadaniach związanych z dopływem wody do studni, stosujemy oczywiście współrzędne cylindryczne, które także prowadzą do zadań jednowymiarowych i jednokierunkowych.

19. Podobieństwo i zasady modelowania

19.1. Charakterystyka zagadnienia

W podrozdziale 1.5 wyraziliśmy kilka ogólnych prawidłowości, cechujących proces poznawania przez ludzi otaczającej ich rzeczywistości. Wiemy, że chociaż czynnikiem podstawowym jest tu w istocie rzeczy **obserwacja**, to jej rezultaty konsumowane są w dwojaki sposób.

Z jednej strony, inspirując niesłychanie ważne refleksje myślowe, pozwalają one na formułowanie **praw przyrody**, które stoją u podstaw **teoretycznej** metody opisu tej rzeczywistości oraz rozwiązywania problemów, które ona przynosi. W innym natomiast ujęciu proces obserwacji stanowi zasadniczy element **empirycznych** metod rozpoznawania układów oraz procesów.

Teoretyczne ujęcie **mechaniki płynów** oraz **hydrauliki** zaprezentowaliśmy w poprzednich rozdziałach tej książki. Obecnie przedstawimy ogólne reguły stosowania metod empirycznych, które możemy podzielić na dwie obszerne kategorie.

Pierwsza z nich polega na wykonywaniu pomiarów wielkości fizycznych dla interesującego nas zjawiska tak, aby uzyskany materiał mógł być wykorzystany do prognozowania przebiegu tego zjawiska. Wyniki tych pomiarów muszą być oczywiście odpowiednio opracowane, w sposób dogodny w zastosowaniach. Najczęściej staramy się ująć je w postaci **wzorów empirycznych** (przy tworzeniu których bardzo pomocna jest **metoda analizy wymiarowej** – par. 1.6.7), lub ewentualnie **tablic** albo **wykresów** (nomogramów) empirycznych.

Prognozy takie mogą dotyczyć **obiektów równoważnych** badanym (a w szczególności – także tych samych obiektów, lecz znajdujących się w stanach innych, niż poddane obserwacji). Termin „równoważność” oznacza tu występowanie wieloaspektowego pokrewieństwa obiektów, których funkcjonowanie chcemy prognozować. Nie jest to jednak pojęcie jednoznaczne, a w bardzo ścisłym ujęciu można byłoby postawić wymóg odnoszenia rezultatów takich badań tylko do obiektów **identycznych**. Stanowiłoby to jednak daleko idące ograniczenie przydatności rezultatów kosztownych prac pomiarowych. By tego uniknąć, albo posługujemy się intuicyjną oceną równoważności interesujących nas obiektów (co w technice czynimy dość powszechnie), albo poszukujemy możliwie ścisłych kryteriów oceny tego wymogu.

Problem jest na tyle ważki i szeroki, że został rozpoznany na dosyć wysokim poziomie ogólności. Okazuje się bowiem, że obok oceny równoważności obiektów, dla których chcemy stosować możliwie uniwersalne zależności empiryczne (wzory, tabele, wykresy), opracowane na bazie odpowiednio obszernych pomiarów i poddane analizie statystycznej, możemy podejmować próby opisu działania jednego obiektu (bardzo często takiego, który dopiero ma powstać) poprzez wykorzystanie obserwacji działania innego obiektu, który ma wtedy charakter **modelu fizycznego**. W takim ujęciu oba te obiekty muszą cechować się na tyle wysokim stopniem równoważności, że można mówić o ich **podobieństwie**. Podsta-

wowe dla mechaniki płynów i hydrauliki kryteria podobieństwa omówimy w dalszej części tego rozdziału.

Opisana możliwość otwiera odrębne i specyficzne pole działalności naukowej i technicznej, potocznie określane mianem **modelowania fizykalnego**. Stanowi ono drugą ze wspomnianych kategorii metod empirycznych i jest wciąż ważną alternatywą dla **modelowania matematycznego**, którego istotą jest wspomniana już teoretyczna metoda opisu rzeczywistości. Trzeba zresztą od razu zaznaczyć, że w zastosowaniach coraz bardziej dominuje drugie z wymienionych podejść. Jest to konsekwencją pojawienia się niesłychanie ważnych narzędzi, wielokrotnie już przywoływanych w tej pracy. Są nimi mianowicie maszyny liczące oraz metody obliczeń numerycznych. Ich rozpowszechnienie w pierwszej kolejności spowodowało ogromny wzrost znaczenia ogólniejszych postaci równań (z reguły – różniczkowych), opisujących rozmaite kategorie zjawisk, rozważanych w naukach ścisłych i technice. Łatwo to ocenić, choćby porównując podręczniki akademickie sprzed kilkudziesięciu lat, z wydawanymi niedawno.

Kolejną konsekwencją tej wręcz rewolucyjnej poprawy jakości metod obliczeniowych jest właśnie spadek zainteresowania modelowaniem fizykalnym. Jeszcze parę dekad temu dla każdej nietypowej budowli (hali widowiskowej, zapory wodnej, mostu...) należało, w myśl przepisów prawnych, wykonać model laboratoryjny, a wyniki jego badań wykorzystać na etapie projektowania tej budowli. Dotyczyło to również innych dziedzin techniki. Przykładowo, kapitanowie wielkich jednostek pływających byli w tamtym okresie zobowiązani do okresowego przechodzenia praktycznych treningów, polegających na manewrowaniu modelami statków w modelowych akwenach portowych. Obecnie wymogi takie spotyka się wyjątkowo, a prace modelowe zastępują coraz dokładniejsze symulacje komputerowe.

Tym niemniej modelowanie fizykalne, jako narzędzie pracy badacza oraz inżyniera, nadal stanowi na tyle istotną i przyteczną możliwość, że znajomość jego podstaw teoretycznych jest niezbędna dla każdego specjalisty z zakresu nauk ścisłych lub techniki.

Jest rzeczą ważną oraz interesującą, że równoważność – zrozumiała dla **obiektów** o tym samym charakterze (model mostu reprezentuje most, model zapory reprezentuje zaporę...), w przypadku **procesów** występuje także między zagadnieniami całkowicie odrębnymi fizycznie. Przykładowo, przepływ prądu elektrycznego w płaskiej płycie, wykonanej z przewodnika, jest porównywalny z dwuwymiarową filtracją wody, co stanowi podstawę tak zwanej **analogii elektrohydrodynamicznej**. Pozwala to podzielić **modele fizykalne** na dwie kategorie:

- **modele techniczne** (gdy obiekty oraz ich modele, jak również zachodzące w nich procesy, mają ten sam przebieg fizyczny),
- **modele analogowe** (gdy obiekty oraz ich modele należą do różnych gałęzi fizyki lub techniki, a równoważność dotyczy tylko procesów).

W dalszym ciągu omówimy tylko kwestię podobieństwa modeli technicznych.

19.2. Podstawowa koncepcja opisu podobieństwa zjawisk

W ujęciu intuicyjnym, ocena podobieństwa różnych obiektów nie sprawia specjalnych trudności. Gorzej jednak jest z jej ujęciem ilościowym. Łatwo tu porównać poszczególne aspekty rozważanych obiektów i procesów. W interesującym nas przypadku zagadnień z zakresu mechaniki możemy wyróżnić trzy takie podstawowe aspekty:

- geometryczny (związany z kształtem i wymiarami obiektu),

- kinematyczny (związany z ruchem),
- dynamiczny (związany z silami, działającymi na układ).

Aby jednak zdefiniować ściśle i jednoznaczne kryteria podobieństwa dla całych układów oraz/albo zjawisk zauważmy, że każdy z rozważanych procesów opisany jest przez określony układ równań. Jest on omawiany w ramach teorii odpowiedniej gałęzi nauki lub techniki. Dla modeli technicznych obowiązują więc te same zależności, co i dla obiektów rzeczywistych, względem których modele te mają wykazywać podobieństwo. Pojawia się więc pytanie, czy nie jest celowe zastąpienie porównania modelu z obiektem przez porównanie odpowiadających im równań, a także pytanie następne – w jaki sposób porównać te równania? W ujęciu wariantowym można też zapytać, jak zaprojektować model techniczny, aby wykazywał on podobieństwo do obiektu wyjściowego?

Odpowiedzi na te pytania otrzymamy dzięki sprowadzeniu przedmiotowych równań do postaci bezwymiarowych.

19.3. Sprowadzanie równań do postaci bezwymiarowej

19.3.1. Zasady ogólne

Punktem wyjścia w procedurze sprowadzania równań fizyki matematycznej do postaci bezwymiarowej jest przedstawienie każdej z występujących w nich zmiennych (zależnych i niezależnych) z_f w postaci iloczynu dwóch czynników – stałej i wymiarowej skali Z_f oraz zmiennej i bezwymiarowej części funkcyjnej z'_f :

$$z_f = Z_f z'_f . \quad (19.1)$$

Termin „skala” należy tu rozumieć jako pojęcie określające rząd wielkości danej zmiennej. Intuicyjnie jest on łatwy do przyjęcia, gdyż pojęcie „skala problemu” jest używane także w życiu codziennym, nawet w odniesieniu do zagadnień trudnych do opisu ilościowego. Warto tylko zwrócić uwagę, że w ujęciu potocznym staramy się rząd wielkości określać liczbami „okrągłymi” (z zasady stosując całkowite potęgi liczby dziesięć – 1, 10, 100...). Jednakże w zastosowaniach technicznych tego typu jednolitość zapisu nie zawsze jest wskazana i często lepiej nie zwracać uwagi na „elegancję” zapisu, a jako skalę Z_f obierać wielkości rzeczywiście reprezentatywne, na przykład średnią wartość zakresu wielkości, przyjmowanych przez rozważaną zmienną.

Po zdefiniowaniu skali Z_f , określenie członu funkcyjnego z'_f nie stanowi już problemu, bowiem znając wartość wyjściową z_f , możemy wtedy skorzystać z relacji (19.1).

Szczególnie proste jest określanie skal dla zmiennych niezależnych – współrzędnych przestrzennych (w układzie kartezjańskim będą to x , y oraz z) i czasu t . Podstawą są tu rozmiary danego układu oraz charakterystyka czasowej zmienności rozważanego zjawiska. Rozważmy przykładowo oddziaływanie pływów morskich na dynamikę ujściowego odcinka rzeki o długości $L = 5,0$ km, szerokości średniej $B = 100,0$ m oraz średniej głębokości $H = 8,0$ m. Poszczególne zmienne niezależne możemy przedstawić jako:

$$x = Z_x x', \quad y = Z_y y', \quad z = Z_z z', \quad (19.2)$$

gdzie:

$$Z_x = L, \quad Z_y = B, \quad Z_z = H . \quad (19.3)$$

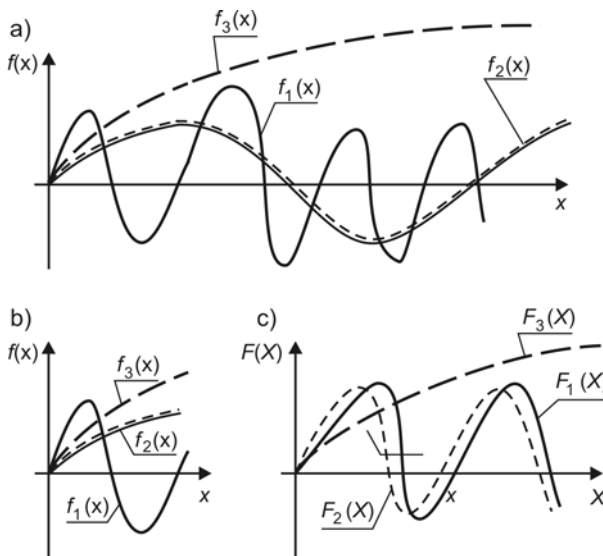
Z kolei skalę czasową w rozważanym przykładzie zjawiska pływowego można przyjąć jako równą połowie doby, czyli:

$$t = Z_t t', \quad Z_t = 12 \text{ godzin} . \quad (19.4)$$

Zauważmy, że po dokonaniu dekompozycji wielkości fizycznych, bezwymiarowa zmienna z_f' staje się funkcją bezwymiarowych zmiennych niezależnych, czyli (19.1) można przepisać następująco:

$$z_f(x, y, z, t) = Z_f z_f'(x', y', z', t'). \quad (19.5)$$

Operacja wyrażona symbolicznie relacją (19.5) ma duże znaczenie praktyczne, które najlepiej jest zobrazować graficznie za pomocą wykresów rozważanych funkcji. Ich porównywanie w bezwzględnych (czyli wymiarowych) układach współrzędnych wymaga zestawienia tych wykresów dla odpowiednio obszernych zakresów zmienności argumentów i wartości funkcji. Dopiero wtedy możemy ocenić (przynajmniej jakościowo) podobieństwa i różnice między nimi. Przykładowo na rys. 19.1a pokazano wykresy trzech funkcji – dwóch okresowych, czyli wykazujących podobieństwo, choć przebiegających w innych skalach zmiennej x , oraz funkcji rosnącej monotonicznie, czyli wyraźnie różnej od pozostałych. Gdybyśmy jednak mieli do dyspozycji tylko ograniczoną informację o przebiegu rozważanych zależności, moglibyśmy wyciągnąć błędne wnioski co do ich ewentualnego podobieństwa. W analizowanym tu przykładzie problem ilustruje rys. 19.1b, na którym widnieją rozważane wykresy, lecz przedstawione tylko wzdłuż początkowej części osi $0x$ (co w praktyce często może mieć miejsce, jako wynik ograniczonego dostępu do danych). Porównanie tych skróconych wykresów sugerowałoby podobieństwo funkcji f_2 oraz f_3 , co byłoby wnioskiem niezgodnym ze stanem faktycznym. Dużo korzystniejszy jest wynik oglądu interesujących nas wykresów, wykonanych w układzie bezwymiarowym (rys. 19.1c). Warunkiem otrzymania poprawnego wyniku jest tu oczywiście poprawny dobór skal, ale przy pewnym doświadczeniu zadanie to nie sprawia kłopotów.



Rys. 19.1. Porównywanie przebiegów funkcji (opis w tekście)

Następnym krokiem w omawianej procedurze jest podstawienie wyrażeń typu (19.5) do rozważanego równania i wykonanie możliwych operacji matematycznych. Najczęściej chodzi tu o wyłączenie stałych skal Z_f przed symbole pochodnych (lub, w rzadszych przypadkach, całek). W rezultacie każdy z członów przekształcaney zależności da się przedstawić jako iloczyn mnożnika, utworzonego z wymiarowych skal, oraz bezwymiarowej kombinacji bezwymiarowych funkcji i ich pochodnych.

Zilustrujmy to na przykładzie jednego z typowych członów, występujących w pochodnej substancjalnej (1.70). Przyjmując dla składowej prędkości u_x oraz zmiennej x , że:

$$u_x = Z_u u'_x, \quad x = Z_x x', \quad (19.6)$$

możemy napisać:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} = Z_u u'_x \frac{\partial (Z_u u'_x)}{\partial (Z_x x')} = \frac{(Z_u)^2}{Z_x} u'_x \frac{\partial u'_x}{\partial x'}. \quad (19.7)$$

Ostatni krok prezentowanej metody polega na porównaniu ze sobą odpowiednich członów poszczególnych par równań, (z których każda jest utworzona z zależności dla obiektu rzeczywistego i dla modelu). Podstawę tego porównania i wynikających z niego decyzji stwarza przeświadczenie, że jeżeli zwrócimy dobrane poszczególne skale, to te części wszystkich członów równań, które utworzone są z bezwymiarowych funkcji i ich pochodnych, będą miały praktycznie taką samą wartość. **Oznacza to, że wielkości poszczególnych członów będą określone przez wchodzące w ich skład kombinacje skal.** W przykładzie opisanym relacją (19.7) jest to kombinacja postaci (Z_u^2/Z_x) .

19.3.2. Bezwymiarowa postać równania zachowania masy

Wykorzystując przedstawioną zasadę postępowania dla przypadku cieczy nieściśliwej, przyjmijmy dla składowych prędkości:

$$u_x = U u'_x, \quad u_y = V u'_y, \quad u_z = W u'_z, \quad (19.8)$$

zaś dla współrzędnych przestrzennych napiszmy:

$$x = X x', \quad y = Y y', \quad z = Z z'. \quad (19.9)$$

Podstawiając te relacje do (3.94), otrzymamy:

$$\frac{U}{X} \frac{\partial u'_x}{\partial x'} + \frac{V}{Y} \frac{\partial u'_y}{\partial y'} + \frac{W}{Z} \frac{\partial u'_z}{\partial z'} = 0. \quad (19.10)$$

Aby bezwymiarowa postać rozważanego równania była dogodniejsza w zastosowaniach, podzielmy obie strony (19.10) przez (U/X) . W rezultacie otrzymamy zależność, której wszystkie składowe są bezwymiarowe, a mnożnik przed pierwszym składnikiem sumy jest równy jedności:

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x'} + \frac{VX}{YU} \frac{\partial u'_y}{\partial y'} + \frac{WX}{ZU} \frac{\partial u'_z}{\partial z'} = 0. \quad (19.11)$$

W szczególnym przypadku ruchu przestrzennego (gdy wszystkie skale prędkości są takie same) w obszarze zwartym (gdy wszystkie skale współrzędnych są również takie same) mamy:

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x'} + \frac{\partial u'_y}{\partial y'} + \frac{\partial u'_z}{\partial z'} = 0. \quad (19.12)$$

Oznacza to, że w takiej sytuacji wszystkie człony równania zachowania masy są tego samego rzędu.

19.3.3. Bezwymiarowa postać równania zachowania pędu

Aby uwypuklić istotę problemu, zrezygnujmy z pełnej ogólności zapisu i przyjmijmy tu, że skale składowych prędkości są jednakowe:

$$Z_u = Z_v = Z_w = U. \quad (19.13)$$

To samo założmy dla skal geometrycznych:

$$Z_x = Z_y = Z_z = L. \quad (19.14)$$

Zmienną niezależną, opisującą czas t , przedstawmy jako:

$$t = Tt', \quad (19.15)$$

zaś dla jednostkowej siły masowej \mathbf{f} za skalę przyjmijmy przyspieszenie ziemskie g , pisząc:

$$\mathbf{f} = g\mathbf{f}'. \quad (19.16)$$

Ostatnią z interesujących nas zmiennych stanu, czyli ciśnienie p , można wyrazić następująco:

$$p = Pp'. \quad (19.17)$$

Podstawiając te iloczyny do (3.95), otrzymamy:

$$\frac{U}{T} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + \frac{U^2}{L} (\mathbf{u}' \nabla') \mathbf{u}' = g\mathbf{f}' - \frac{P}{\rho L} (\mathbf{u}' p') + \frac{\nu U}{L^2} (\Delta' \mathbf{u}'). \quad (19.18)$$

Podzielmy teraz ostatnie równanie obustronnie przez mnożnik przy członie adwekcyjnym, czyli przez (U^2/L) , a następnie wprowadźmy tradycyjne symbole pomocnicze, definiujące ważne **bezwymiarowe liczby kryterialne** (zwane też **liczbami podobieństwa**):

— **liczbę Strouhala**

$$Sh = \frac{L}{TU}, \quad (19.19)$$

— **liczbę Froude'a**

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}, \quad (19.20)$$

— **liczbę Eulera**

$$Eu = \frac{P}{\rho U^2}, \quad (19.21)$$

— **liczbę Reynoldsa**

$$Re = \frac{UL}{\nu}. \quad (19.22)$$

Pozwalają one w dogodnej i powszechnie przyjętej formie zapisać bezwymiarową postać równania zachowania pędu:

$$Sh \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} + (\mathbf{u}' \nabla') \mathbf{u}' = \frac{1}{Fr^2} \mathbf{f}' - Eu (\nabla' p') + \frac{1}{Re} (\Delta' \mathbf{u}'). \quad (19.23)$$

19.3.4. Bezwymiarowe postacie pozostałych równań ruchu

W analogiczny sposób można otrzymać bezwymiarową postać każdego innego równania fizyki matematycznej [47, 50, 75]. W miarę wprowadzania nowych zmiennych, będą one oczywiście generowały kolejne bezwymiarowe liczby kryterialne.

19.4. Interpretacja liczb kryterialnych

Zdefiniowane w par. 19.3.4 **bezwymiarowe liczby kryterialne** zostały wprowadzone w sposób czysto formalny. Jednakże sposób ich pojawiania się pozwala na ujawnienie sensu fizykalnego każdej z nich. Wynika on mianowicie ze znaczenia składników tych liczb, które w postaci wyjściowej stanowią stałe współczynniki w (19.18). Kolejne składniki tej sumy są jak wiemy (rozdz. 3) miarami:

- siły bezwładności, związanej z niestacjonarnością ruchu (zmienność w czasie),
- siły bezwładności, związanej z niejednostajnością ruchu (zmienność w przestrzeni),
- siły masowej,
- siły związanej z ciśnieniem (czyli siły naporu),
- siły wywołanej lepkością.

Przypomnijmy, że liczby kryterialne powstały wskutek dzielenia obu stron (19.18) przez współczynnik występujący przy sile bezwładności, wywołanej niestacjonarnością ruchu. Uwzględniając tradycyjne postacie liczb podobieństwa, możemy sformułować sens fizyczny każdej z nich.

I tak **liczba Strouhala** (19.19) jest miarą stosunku obu składowych siły bezwładności, ale bardziej czytelna jest jej interpretacja o charakterze kinematycznym. Zauważmy mianowicie, że iloczyn TU jest równy dystansowi l_N , jaki element płynu przebywa w czasie T , charakteryzującym zmienność rozważanego zjawiska (oczywiście tylko dla przepływów niustalonych). Natomiast iloraz L/U jest czasem przebywania tego elementu w układzie o rozmiarach rzędu L . Tym samym możemy napisać:

$$Sh = \frac{L}{l_N} = L/l_N = t_p/T, \quad (19.24)$$

co oznacza, że liczba Strouhala wyraża stosunek geometrycznej skali obiektu do dystansu przebywanego w czasie odpowiadającym zmianie warunków ruchu lub też stosunkowi średnich czasów przebywania masy w układzie i zmiany warunków. Każde z tych ujęć pokazuje, że omawiana wielkość jest miarą zmienności przepływu w czasie. Gdy $Sh \gg 1$, ruch jest ewidentnie niustalony, gdy zaś $Sh = 0$ – ustalony.

Z kolei **liczba Froude'a** (19.20) jest miarą stosunku siły bezwładności do siły masowej, **liczba Eulera** (19.21) – miarą stosunku siły naporu do siły bezwładności, zaś **liczba Reynoldsa** (19.22) – miarą stosunku siły bezwładności do siły lepkości.

Omawiana w tym rozdziale metoda pozwoliła pokazać sposób powstawania bezwymiarowych liczb podobieństwa i sformułować ich interpretację fizykalną. Ale już z poprzednich rozdziałów wiemy, że liczby te (a także inne, zależnie od rozważanej gałęzi fizyki [75]) występują również przy opisie wielu innych zagadnień mechaniki płynów i hydrauliki. Stanowią one wygodne kombinacje bezwymiarowe w metodzie analizy wymiarowej (par. 1.5.7), pojawiają się w wielu relacjach półempirycznych lub empirycznych (rozdz. 8), a liczba Reynoldsa odgrywa ogromnie ważną rolę w teorii turbulencji (rozdz. 7).

19.5. Zastosowanie metody

Zgodnie z omówioną już ogólną zasadą określania podobieństwa układów i procesów, obiekt rzeczywisty oraz jego model są w pełni równoważne wtedy, gdy charakteryzujące zagadnienie liczby kryterialne dla obu układów są identyczne.

Stwierdzenie to wykorzystuje się dwojako. Możemy mianowicie, dysponując charakterystyką dwóch układów (czyli kompletem skal), obliczyć wartości poszczególnych liczb kryterialnych, a przez ich porównanie ocenić stopień ich podobieństwa. W drugim zaś ujęciu, znając skale projektowanego lub analizowanego obiektu rzeczywistego, obliczyć dla niego wartości liczb podobieństwa, a dla obliczonych wielkości wyznaczyć potrzebne wymiary modelu, który ma być podobny do obiektu. Pozwala to na wykonanie modelu i przeprowadzenie na nim odpowiednich badań, których rezultaty wykorzystuje się do projektowania nowego lub korygowania istniejącego układu finalnego.

Okazuje się jednak, że metodyka ta, zastosowana w pełnym zakresie, wykazuje bardzo istotny mankament. By przeanalizować problem, zapiszmy warunek równości liczb kryterialnych (dla uproszczenia, w warunkach ustalonych, przy $Sh = 0$). Posłużmy się tu symboliką skróconą, przyjmując:

$$\alpha_i = Z_{i, \text{ obiekt}} / Z_{i, \text{ model}} , \quad (19.25)$$

co pozwala napisać:

$$\text{wobec } Fr_{\text{obiekt}} = Fr_{\text{model}}, \quad \text{mamy } \alpha_u^2 = \alpha_g \alpha_L , \quad (19.26)$$

$$\text{wobec } Eu_{\text{obiekt}} = Eu_{\text{model}}, \quad \text{mamy } \alpha_p = \alpha_\rho \alpha_u^2 , \quad (19.27)$$

$$\text{wobec } Re_{\text{obiekt}} = Re_{\text{model}}, \quad \text{mamy } \alpha_w \alpha_L = \alpha_v . \quad (19.28)$$

Jest oczywiste, że skala sił masowych musi praktycznie zawsze być równa jedności. Trudno bowiem dla zagadnień inżynierii środowiska potraktować realistycznie wymóg przeprowadzenia pomiarów w innym polu tych sił, niż grawitacyjne. Ograniczona jest także możliwość zmiany skal gęstości i lepkości. Wymagałoby to zastosowania różnych płynów w obiekcie rzeczywistym i w modelu. Biorąc pod uwagę typowe rozmiary obiektów interesującej nas dziedziny techniki, jak też fakt, że ciecze o własnościach wyraźnie różniących się od wody i jej roztworów są z reguły drogie oraz/albo niebezpieczne, rozwiązanie takie może być stosowane wyjątkowo.

Warto jednak zauważyć, że wykazane ograniczenie możliwości modelowania jest o tyle pozytywne, iż otrzymany zestaw warunków liczy trzy zależności, a w ogólnym przypadku występuje w nim sześć nieznanymi wielkościami (proporcji między skalami odpowiednich wielkości). Jego wykorzystanie i tak wymagałoby wprowadzenia pewnych założeń.

Uwzględniając powyższe, możemy następująco przepisać układ trzech ostatnich zależności:

$$\alpha_u^2 = \alpha_L, \quad \alpha_p = \alpha_u^2, \quad \alpha_u \alpha_L = 1 . \quad (19.29)$$

Widać teraz wyraźnie **podstawowy mankament** omawianej zasady modelowania, w przypadku zagadnień przepływowych. Pierwsza i trzecia z relacji (19.29) są mianowicie ze sobą sprzeczne – według pierwszej wzrostowi skali prędkości musi towarzyszyć wzrost skali geometrycznej (co jest warunkiem zgodności sił masowych), podczas gdy z trzeciej wynika zalecenie odwrotne (warunek zgodności sił lepkości).

W tej sytuacji w praktyce jako punkt wyjścia do technicznego modelowania zagadnień przepływowych **przyjmujemy tylko jedno kryterium**. Wybieramy mianowicie taką liczbę podobieństwa, która generuje największy mnożnik w relacji (19.23). Jest to istotne zawężenie koncepcji ogólnej (podrozdz. 19.2), lecz dzięki niemu zachowujemy możliwość jej stosowania w praktyce, choćby w przybliżeniu.

20. Mierzenie wielkości fizycznych

20.1. Zasady ogólne

Problematyka pomiarów wielkości fizycznych należy do najważniejszych działów każdej dziedziny nauk ścisłych i techniki. Do tego stopnia, że zasady prowadzenia pomiarów i stosowane przyrządy oraz metody prezentacji wyników z reguły omawia się w oddzielnych opracowaniach, także ze względu na zakres tej tematyki [24, 69]. W szczególności dotyczy to problemu **dokładności pomiarów** oraz obarczających je błędów [25].

Z tych względów w niniejszym rozdziale przedstawione będą tylko informacje podstawowe, sygnalizujące najbardziej istotne kwestie, związane z pomiarami wielkości fizycznych, charakterystycznych dla mechaniki płynów i hydrauliki.

W pierwszej kolejności zwróćmy uwagę na fakt, że metody pomiarowe mogą być:

- bezpośrednie,
- pośrednie.

Do pierwszej z tych kategorii należą metody, w ramach których istnieje możliwość opracowania i wykonania wzorca jednostki miary dla odpowiedniej wielkości fizycznej. Wzorzec taki „przykłada się” do mierzonego obiektu, odczytując wynik na skali (bądź w równoważny sposób). Najprostszym przykładem są tu pomiary wielkości geometrycznych (długości, głębokości, średnicy...), ale także czasu.

W drugiej grupie znajdują się metody, przy stosowaniu których pomiarowi podlega nie sama interesująca nas wielkość, lecz wynik jej działania („efekt mierniczy”), który jest następnie przeliczany na wartość wielkości mierzonej. Rzecz oczywista, efekt ten musi być wielkością mierzalną w sposób bezpośredni. W przeciwnym razie albo należałoby go zidentyfikować poprzez kolejny efekt mierniczy (byłby to pomiar pośredni wielostopniowy), albo – zrezygnować z niego jako podstawy metody pomiarowej.

Typowym przykładem tej grupy metod może być jeden z podstawowych sposobów pomiaru temperatury, w zasadzie mający charakter dwustopniowy. Pierwszym efektem zmiany temperatury jest w tym przypadku zmiana objętości substancji termometrycznej, ale że pomiar objętości nie jest prosty, układowi pomiarowemu nadaje się wydłużony kształt (słupek rtęci lub alkoholu), ograniczając ściankami rurki mierniczej przemieszczenia poprzeczne. W rezultacie zmiana objętości zostaje sprowadzona do przemieszczenia w jednym kierunku, które można już bez trudu zmierzyć bezpośrednio.

Efekty miernicze, wykorzystywane w metodach pośrednich, są bardzo różne. Ich liczba rośnie i zapewne nadal będą pojawiały się nowe rozwiązania. Przy opracowywaniu tego typu metod pomiarowych zawsze staramy się znaleźć ilościowe (przede wszystkim – fizyczne) wyjaśnienie zachodzących procesów, aby istniała możliwość teoretycznego przeliczenia działania rozważanego czynnika na obserwowany efekt mierniczy. W podanym wyżej przykładzie pomiaru temperatury wykorzystuje się oczywiście teorię cieplnej rozszerzalności ciał (zaś w jej drugim stopniu – zależności geometryczne).

Wśród licznych możliwości, wykorzystywanych w mechanice płynów i hydraulice, szczególnie popularne w ostatnich latach stały się metody bazujące na **efekcie Dopplera**. Jego istotą jest pozorna zmiana częstotliwości fali dochodzącej do obserwatora (którym jest również czujnik pomiarowy), gdy źródło fali i obserwator poruszają się względem siebie. Przy zbliżaniu odnotowuje się wzrost częstotliwości, zaś jej spadek – przy oddalaniu się. Wykorzystuje się tu różne typy fal – akustyczne, świetlne, elektromagnetyczne.

Ważną rolę w pomiarach hydraulicznych odgrywa też obrót odpowiednio ukształtowanych ciał (wirmików, turbin...), wywołany ruchem otaczającego je płynu. Stanowi to podstawę działania takich urządzeń, jak młynki hydrometryczne czy wodomierze wirnikowe.

Nie wnikając w obszerną materię konkretnych metod pomiaru, należy tu bardzo wyraźnie podkreślić, że procedura przeliczania efektu mierniczego na wartość rozważanej wielkości ma zasadnicze znaczenie dla dokładności rezultatu. O ile bowiem w przypadku pomiarów bezpośrednich, gdy dysponujemy legalnym i właściwie wykonanym wzorcem miary, dokładność wyniku jest uzależniona od postępowania obserwatora (poprawność przyłożenia wzorca do obiektu i odczytu), a jej obniżenie wiąże się głównie z błędami, popełnionymi ewentualnie w trakcie tej procedury, o tyle przy pomiarach pośrednich kluczową rolę odgrywa właśnie sposób przeliczania efektu mierniczego.

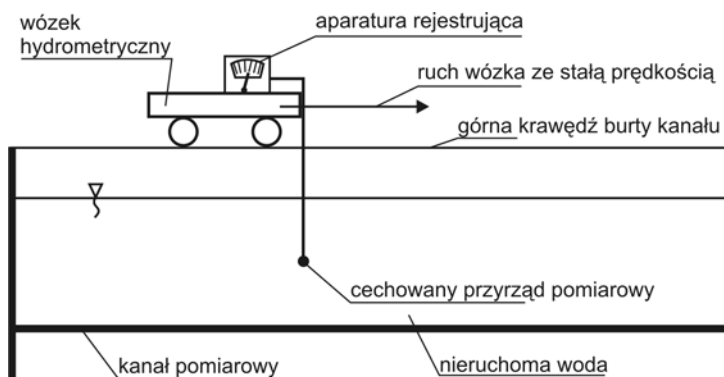
Kwestię tę trudno rozstrzygnąć definitywnie, tak ze względu na różnorodność wykorzystywanych tu możliwości, jak też wobec pojawiania się nowych rozwiązań. Obserwuje się tu jednak wyraźną prawidłowość. Mianowicie, jeśli efekt mierniczy należy do tej samej kategorii fizycznej, co wielkość mierzona, procedura przeliczania cechuje się stosunkowo wysoką dokładnością. Możemy wtedy mówić o **jednorodnych metodach pomiaru pośredniego** (a w interesującej nas tu dziedzinie możemy wtedy użyć terminu **pomiary hydrauliczne**). Gdy jednak efekt i wielkość mają różne specyfiki (na przykład zjawisko Dopplera dla wiązki fal elektromagnetycznych, wykorzystywane do pomiaru prędkości wody), dokładność ta będzie z reguły dużo niższa. W takiej sytuacji niezbędne staje się określenie roboczej charakterystyki przyrządu, drogą porównania jego wskazań z wynikami otrzymanymi inną metodą, uważaną za dokładną (lub przynajmniej za dokładniejszą). Mówimy wtedy o **cechowaniu przyrządu pomiarowego** (któremu z zasady poddawać należy wszystkie urządzenia, służące do pomiarów pośrednich, także należących do kategorii jednorodnych).

20.2. Cechowanie przyrządów pomiarowych

Podobnie jak w przypadku opisu zasad przeprowadzania pomiarów, także tutaj ograniczymy się tylko do uwypuklenia ogólnych reguł. W pierwszej kolejności wprowadzimy jeszcze jeden istotny podział przyrządów pomiarowych, wiążący się ze znaną nam już klasyfikacją wielkości fizycznych. Mamy więc przyrządy do pomiaru:

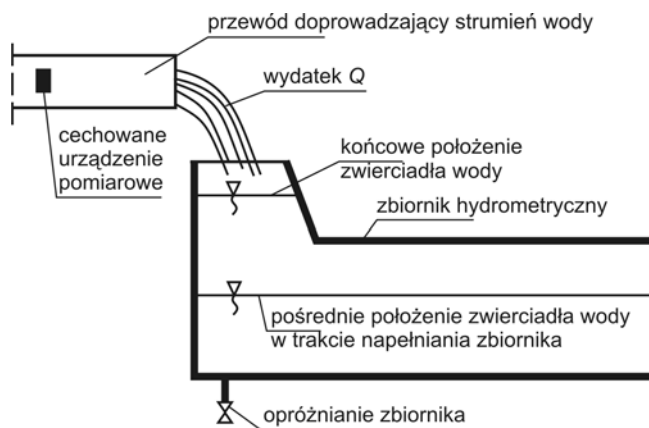
- wielkości lokalnych,
- wielkości globalnych.

Z urządzeń należących do pierwszej grupy jako miarodajny przykład omówimy **czujniki do pomiaru prędkości lokalnej**. Niezależnie od zastosowanej w tym celu metody, możliwość sprowadzenia pomiaru porównawczego do wielkości mierzonych bezpośrednio daje nam definicja tej wielkości fizycznej, będącej ilorzem **drogi** L przez **czas** t . Rzecz zrozumiała, cechowanie należy przeprowadzić w warunkach ustalonych, żeby równomiernemu upływowi czasu odpowiadał także równomierny przyrost dystansu.



Rys. 20.1. Zasada cechowania urządzeń do pomiaru prędkości lokalnej (opis w tekście)

Podczas cechowania wykorzystujemy wózki hydrometryczne, poruszające się ze stałą prędkością, bardzo starannie regulowaną przez precyzyjne urządzenia mechaniczne, wzdłuż górnych krawędzi burt kanału pomiarowego (rys. 20.1). Do wózka mocuje się sprawdzany przyrząd, połączony z aparaturą rejestrującą wykorzystujący efekt mierniczy (na przykład wskazujący liczbę obrotów młynka hydrometrycznego). Napęd mechaniczny wprowadza wózek w ruch ze stałą prędkością (zmienianą w kolejnych seriach cechowania), a jej porównanie z równocześnie rejestrowanym efektem mierniczym jest podstawą do wyznaczenia charakterystyki przyrządu (najczęściej w postaci graficznej, mającej postać krzywej cechowania, lub współczynnika przeliczeniowego, szczególnie pożytecznego wtedy, gdy istnieje jakaś relacja matematyczna, wiążąca rozważane wielkości).



Rys. 20.2. Zasada cechowania przyrządu do pomiaru wydatku (opis w tekście)

Z wielkości globalnych największe znaczenie w hydraulice ma **wydatek** (czyli objętościowe natężenie przepływu). Zasada pomiaru porównawczego, tak jak i poprzednio, wynika z definicji tej wielkości – jest to mianowicie iloraz **objętości** cieczy (najczęściej – wody), przemieszczającej się przez znaną powierzchnię, oraz **czasu** wypływu.

Do cechowania stosujemy tu zbiorniki hydrometryczne (rys. 20.2). Przed rozpoczęciem każdej serii pomiarowej musimy ustalić wydatek cieczy w przewodzie (lub kanale) zasilającym zbiornik, w którym umieszczone jest badane urządzenie. W trakcie ustalania wartości Q strumień płynu należy kierować do obiegu zamkniętego (kwestia oszczędności), a zbiornik musi być całkowicie opróżniony. Pomiar rozpoczyna się od bardzo szybkiego skierowania strumienia do zbiornika przez precyzyjne urządzenie mechaniczne („przerzutnik”), z jednoczesnym włączeniem pomiaru czasu. Po napełnieniu zbiornika, to samo urządzenie przemieszcza strumień do położenia wyjściowego i wyłącza miernik czasu.

Dzieląc objętość płynu w zbiorniku przez czas jego dopływu, otrzymujemy wartość wydatku, którą możemy uznać za dokładną. Porównanie kolejnych takich wartości ze wskazaniami testowanego przyrządu pomiarowego pozwala na wyznaczenie charakterystyki przyrządu (współczynnika przeliczeniowego lub krzywej cechowania).

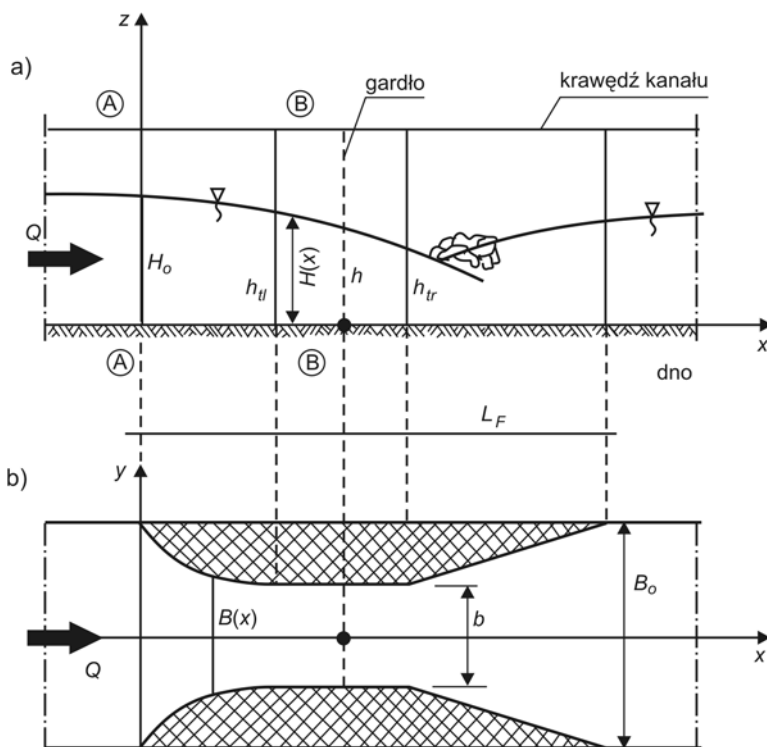
Zauważmy, że dokładność określenia objętości cieczy, przy stałej precyzji wyznaczania napełnienia zbiornika, uzależniona jest od powierzchni swobodnego zwierciadła cieczy w zbiorniku. Aby spowodowany tym błąd zminimalizować, w górnej części zbiornika wykonuje się specyficzne przewężenie („kominek”), jak to schematycznie pokazano na rys. 20.2. Zbiornik napełnia się tak, aby końcowy poziom cieczy znalazł się w jego wnętrzu, dzięki czemu pole jej swobodnej powierzchni będzie nieduże.

20.3. Pomiary hydrauliczne

Terminem tym określiliśmy tutaj odrębną kategorię pomiarów, w zasadzie pośrednich, ale wymagających obserwacji wielkości o tyle pokrewnych sobie, że pojawiających się w mechanice płynów i hydraulicznie. Powiązanie tych wielkości teorią fizycznie jednorodną, pozwala ze stosunkowo dużą dokładnością przeliczać efekty miernicze na wartość interesującej nas wielkości (choć także tutaj wskazane jest cechowanie przyrządu).

Opis funkcjonowania każdego z takich przyrządów jest w istocie rzeczy mniej lub bardziej złożonym zadaniem technicznym, a często – przykładem liczbowym, ilustrującym kolejne działy teorii. Omówiono je w kolejnych rozdziałach tej książki, toteż ich zastosowanie jest kwestią wiedzy, wzbogaconej doświadczeniem. Ogromne znaczenie ma tu także pomysłowość badacza lub inżyniera (szczególnie przy konstruowaniu nowych czujników pomiarowych). Jako przyrządy podstawowe możemy więc wymienić **rurki piętzące** (piezometry oraz rurki Pitota i Prandtla – par. 6.2.4), **przelewy miernicze** (podrozdz. 16.2), czy też **danaidy** (zbiorniki miernicze, dla których zasada pomiaru wydatku cieczy jest określona przez relacje, opisujące jej wypływ przez otwór w ścianie – podrozdz. 16.3), jak też różnego rodzaju **zwężki i kryzy**, montowane w przewodach zamkniętych (rozdz. 11).

Jako ważny przykład urządzenia pomiarowego, którego koncepcja pozwala na wykazanie bardzo istotnych aspektów, mających walor ogólny, rozważmy **kanał zwężkowy Venturiego** (rys. 20.3). Tworzy go specyficzne przewężenie, usytuowane wzdłuż bocznych ścianek kanału otwartego. Zgodnie ze znaną nam już zasadą (rozdz. 6), ze wzrostem prędkości strumienia, wymuszonym przez zwężenie kanału, spada ciśnienie, co w przepływie ze swobodną powierzchnią przejawia się spadkiem głębokości. Spadek ten jest związany z prędkością średnią, a tym samym z wydatkiem strumienia, co stanowi zasadę działania kanału pomiarowego.



Rys. 20.3. Schemat obliczeniowy kanału zwężkowego Venturiego:
a) przekrój podłużny, b) widok z góry

Napiszmy równanie Bernoulliego (6.27) dla przekrojów A i B (rys. 20.3a):

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + H_o = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_{\text{atm}}}{\rho g} + h + h_L, \quad (20.1)$$

gdzie:

$$h_L = \xi \frac{v_B^2}{2g} \quad (20.2)$$

opisuje łączną stratę energii mechanicznej, traktowaną tu jak strata miejscowa (11.24). Drugą relacją, jaką mamy tu do dyspozycji, jest równanie ciągłości (11.25):

$$v_A B_o H_o = v_B b h. \quad (20.3)$$

Po wykonaniu prostych przekształceń, otrzymamy:

$$Q = \mu_H B_o H_o \sqrt{2g(H_o - h)} \quad (20.4)$$

lub:

$$Q = \mu_h b h \sqrt{2g(H_o - h)}. \quad (20.5)$$

Są to dwa równoważne wzory, wyrażające wydatek zwężki albo za pomocą szerokości i głębokości kanału doprowadzającego ciecz (20.4), albo za pomocą tych wielkości w przeżęczeniu, zwanym **gardłem zwężki** (20.4). Korzystniej jest stosować pierwszą z tych zależności, bowiem zawsze pomiar wartości większych (H_0 , B_0) jest bardziej dokładny, niż wartości mniejszych (h , b).

W praktyce chętnie stosuje się tak ukształtowane zwężki, aby w gardle takiego obiektu (gdzie mierzy się wartość h) panował **ruch krytyczny**. Wykorzystując wyprowadzoną w par. 13.2.4 relację (13.22), możemy napisać, że:

$$Q = hb\sqrt{gh} . \quad (20.6)$$

Porównując ostatnią zależność z (20.4), otrzymujemy następujący związek między charakterystycznymi napełnieniami kanału H_0 oraz h , ważny wszakże tylko dla ruchu krytycznego:

$$H_0 = \frac{3}{2} h . \quad (20.7)$$

Podstawiając go do (20.4), otrzymamy:

$$Q = \mu B_0 H_0 \sqrt{g H_0} = C H_0^{3/2} , \quad (20.8)$$

gdzie C – mnożnik, stały dla danej zwężki.

Zależność (20.8) jest formalnie bardziej korzystna niż (20.4), bowiem do obliczenia wydatku Q za jej pomocą wystarcza pomiar napełnienia „tylko” w jednym przekroju kanału („pomiar jednopunktowy”), zamiast „pomiaru dwupunktowego”, koniecznego w przypadku wzoru (20.4). Możliwość takiego uproszczenia jest więc chętnie stosowana w praktyce.

Niestety, pomiary kontrolne pokazują [48], że bardzo często rzeczywiste zwężki nie spełniają warunku (20.7) – wskutek niedokładności projektu oraz/albo wykonania przyrządu, lub też spełniają go tylko w części zakresu mierzonych wydatków. Generuje to pewien błąd pomiarowy. W rezultacie oszczędność inwestycyjna, uzyskana dzięki zmniejszeniu liczby czujników do pomiaru napełnienia, może zostać zniweczona przez niedokładność pomiaru. Jest to szczególnie istotne w inżynierii środowiska, gdzie kanały zwężkowe Venturiego są często stosowanymi urządzeniami pomiarowymi, wykorzystywanymi przy rozliczeniach opłat za zużytą wodę, doprowadzane do oczyszczalni surowe ścieki oraz za odprowadzenie oczyszczonych ścieków do odbiornika.

Bibliografia

- [1] Abbott M. B., Basco D. R.: Computational fluid dynamics. New York: John Wiley and Sons 1988.
- [2] Bering S., Sawicki J. M.: Przybliżone obliczanie strat energii w zbiornikach. Mat. XXII Szkoły Hydrauliki. Lubniewice: IBW PAN 2002.
- [3] Bretsznajder S.: Własności gazów i cieczy. Warszawa: WNT 1962.
- [4] Bronsztejn I. N., Siemiendiajew K. A.: Matematyka. Poradnik encyklopedyczny. Warszawa: PWN 1968.
- [5] Ciborowski J.: Podstawy inżynierii chemicznej. Warszawa: WNT 1965.
- [6] Collatz L.: Metody numeryczne rozwiązywania równań różniczkowych. Warszawa: PWN 1980.
- [7] Cottrell A. H.: Własności mechaniczne materii. Warszawa: PWN 1970.
- [8] Coulson C. A., Jeffrey A.: Fale. Modele matematyczne. Warszawa: WNT 1982.
- [9] Crawford F. C.: Fale. Warszawa: PWN 1975.
- [10] Czetwertyński E., Utrysko B.: Hydraulika i hydromechanika. Warszawa: PWN 1968.
- [11] Czugajew R. R.: Gidrawlika. Leningrad: Gosenergoizdat 1970.
- [12] Design of municipal wastewater treatment plants. WEF Manual of Practice nr 8. New York: WEF and ASCE 1992.
- [13] Druet Cz., Kowalik Z.: Dynamika morza. Gdańsk: Wyd. Morskie 1970.
- [14] Gańczarczyk J.: Oczyszczanie ścieków metodą osadu czynnego. Warszawa: Arkady 1969.
- [15] Godunow S. K.: Równania fizyki matematycznej. Warszawa: WNT 1975.
- [16] Grabarczyk Cz.: Przepływy cieczy w przewodach. Poznań: Envirotech 1997.
- [17] Grabarczyk Cz.: Metody obliczania współdziałania rzędu studni ze złożonym lewarem. Mat. VIII Międzynarod. Konf. Nauk.-Techn. „Zaopatrzenie w wodę, jakość i ochrona wód”, Poznań – Gniezno: Polit. Poznańska 2008.
- [18] James A.: Modelowanie matematyczne w oczyszczaniu ścieków i ochronie wód. Warszawa: Arkady 1986.
- [19] Jankowski F.: Pompy i wentylatory w inżynierii sanitarnej. Warszawa: Arkady 1975.
- [20] Kalenik M.: Metody wymiarowania systemów kanalizacji podciśnieniowej. Inżynieria Ekologiczna nr 5/2001.
- [21] Karaśkiewicz E.: Zarys teorii wektorów i tensorów. Warszawa: PWN 1974.
- [22] Kotowski A.: Podstawy wymiarowania bocznych przelewów burzowych z rurą dławiącą. Monografie Polit. Wrocławskiej nr 38/1998.
- [23] Kowal A. L., Świdarska-Bróż M.: Oczyszczanie wody. Warszawa: Wyd. Naukowe PWN 1996.
- [24] Kuratow T.: Pomiar przepływów cieczy, par i gazów. Katowice: Wyd. Śląsk 1977.
- [25] Laboratorium z mechaniki płynów i hydrauliki (praca zbiorowa). Gdańsk: Wyd. PG 2007.
- [26] Lambor J.: Hydrologia inżynierska. Warszawa: Arkady 1971.
- [27] Leja F.: Rachunek różniczkowy i całkowy. Warszawa: PWN 1973.
- [28] Łojcjangskij L. G.: Mechanika zidkosti i gaza. Moskwa: Izdatielstwo Nauka 1973.
- [29] Metody numeryczne w mechanice płynów (praca zbiorowa). Wrocław: Ossolineum 1969.
- [30] Orzechowski Z., Prywer J., Zarzycki R.: Mechanika płynów w inżynierii środowiska. Warszawa: WNT 1997.
- [31] Palarski J.: Hydrotransport. Warszawa: WNT 1982.
- [32] Pauling L.: Chemia ogólna. Warszawa: PWN 1959.
- [33] Pazdro Z., Kozerski B.: Hydrogeologia ogólna. Warszawa: Wyd. Geologiczne 1990.
- [34] Pietrozolin W.: Projektowanie sieci wodociągowych. Warszawa: Arkady 1974.
- [35] Piotrowski I., Roman M.: Urządzenia do oczyszczania wody i ścieków. Warszawa: PWN 1974.
- [36] Poradnik hydrogeologa (praca zbiorowa). Warszawa: Wyd. Geologiczne 1971.

-
- [37] Prandtl L.: *Dynamika przepływów*. Warszawa: PWN 1956.
- [38] Puzyrewski R., Sawicki J. M.: *Podstawy mechaniki płynów i hydrauliki*. Warszawa: Wyd. Naukowe PWN 2000.
- [39] Resnick D. P., Holliday K. L.: *Fizyka*. Warszawa: PWN 1987.
- [40] Rich L. G.: *Unit processes of sanitary engineering*. New York: John Wiley and Sons 1963.
- [41] Sawicki A.: *Mechanika kontinuum – wprowadzenie*. Gdańsk: Wyd. IBW PAN 1994.
- [42] Sawicki J. M.: *Matematyczne modele turbulencji*. Gdańsk: Wyd. Polit. Gdańskiej 1986.
- [43] Sawicki J. M.: *Ewolucja pojęcia izotropii w naukach geofizycznych*. *Przegląd Geofizyczny* nr 3/1988.
- [44] Sawicki J. M.: *Konwekcyjny model turbulencji przyściennej*. *Zesz. Nauk. Polit. Gdańskiej* 1989, nr 433, Bud. Wodne 30.
- [45] Sawicki J. M., Zima P.: *Wyznaczanie pola przepływu w zbiorniku otwartym za pomocą równania biharmonicznego*. *Mat. XIII Szkoły Hydrauliki*. Szczyrk: Politechnika Krakowska 1993.
- [46] Sawicki J. M.: *Niesymetryczny model turbulencji*. *Inżynieria Morska i Geotechnika* nr 1/1996.
- [47] Sawicki J. M.: *Przepływy ze swobodną powierzchnią*. Warszawa: Wyd. Naukowe PWN 1998.
- [48] Sawicki J. M.: *Hydraulic investigation of Venturi flumes*. *AHEEM* nr 1/2001.
- [49] Sawicki J. M.: *Wyznaczanie sprawności piaskowników*. *GWTS* nr 5/2001.
- [50] Sawicki J. M.: *Migracja zanieczyszczeń*. Gdańsk: Wyd. Polit. Gdańskiej 2003.
- [51] Sawicki J. M.: *Wpływ przelewów burzowych na efektywność oczyszczania ścieków*. *GWTS* nr 7–8/2003.
- [52] Sawicki J. M.: *Aerated grit chambers hydraulic design equation*. *Journal of Environmental Engineering* nr 9/2004.
- [53] Sawicki J. M.: *Hydrauliczny opis przepływu w systemach kubaturowych*. *Zesz. Monograficzny nr 1*. Gdańsk: PAN Komitet Inż. Lądowej i Wodnej, Polit. Gdańska, Wydz. Inż. Lądowej i Środowiska 2005.
- [54] Sawicki J. M.: *Hydraulic loss coefficients in 1D flows*. *AHEEM* nr 2/2007.
- [55] Sawicki J. M., Marcinkowski T., Cudny M., Bolt A.: *Wymiarowanie głębokowodnych wylotów kanalizacyjnych*. Gdańsk: Wyd. Polit. Gdańskiej 2008.
- [56] Sawicki J. M., Malus D., Zima P.: *Hydraulika reaktorów recyrkulacyjnych*. Gdańsk: Wyd. Polit. Gdańskiej 2008.
- [57] Schowalter W. R.: *Mechanics of non-Newtonian fluids*. Oxford: Pergamon Press 1978.
- [58] Serwiński M.: *Zasady inżynierii chemicznej i procesowej*. Warszawa: WNT 1982.
- [59] Silin W. P.: *Wstęp do teorii kinetycznej gazów*. Warszawa: PWN 1975.
- [60] Staniszewski B.: *Termodynamika*. Warszawa: PWN 1982.
- [61] Suchecki W.: *Badanie opływu pęku rur w modelu krystalizatora chłodzonego*. *Zeszyt Monograficzny nr 1*. Gdańsk: Gdańsk: PAN Komitet Inż. Lądowej i Wodnej, Polit. Gdańska, Wydz. Inż. Lądowej i Środowiska 2005.
- [62] Szymkiewicz R.: *Modelowanie matematyczne przepływów w rzekach i kanałach*. Warszawa: Wyd. Naukowe PWN 2000.
- [63] Szymkiewicz R.: *Metody numeryczne w inżynierii wodnej*. Gdańsk: Wyd. Polit. Gdańskiej 2003.
- [64] Tabiś B.: *Zasady inżynierii reaktorów chemicznych*. Warszawa: WNT 2000.
- [65] *Tablice matematyczne, fizyczne, chemiczne i astronomiczne (praca zbiorowa)*. Warszawa: Wyd. Szkolne i Pedagogiczne 1984.
- [66] Taylor G. I.: *Dispersion of matter in turbulent flow through a pipe*. *Proc. Roy. Soc.* 219/1954.
- [67] Tennekes H., Lumley J. T.: *A first course in turbulence*. Cambridge: MIT Press 1972.
- [68] Trajdos T.: *Matematyka dla inżynierów*. Warszawa: WNT 1981.
- [69] Troškolański A.: *Hydrodynamika*. Warszawa: WNT 1962.
- [70] Walden H., Stasiak J.: *Mechanika cieczy i gazów w inżynierii sanitarnej*. Warszawa: Arkady 1971.
- [71] Wilczyński K.: *Reologia w przetwórstwie tworzyw sztucznych*. Warszawa: WNT 2001.
- [72] *Wodociągi i kanalizacja. Poradnik (praca zbiorowa)*. Warszawa: Arkady 1971.
- [73] Yevjevich V., Barnes A. K.: *Flood routing through storm drains*. Colorado: Hydrology Papers 1970.
- [74] *Zbiór wielkości fizykochemicznych (praca zbiorowa)*. Warszawa: PWN 1974.
- [75] Zierop J.: *Kryteria podobieństwa i zasady modelowania w mechanice płynów*. Warszawa: PWN 1978.

Tabele pomocnicze

Tabela 1

Szorstkości bezwzględne różnych materiałów

Materiał	k_s [mm]
Szkło, tworzywa sztuczne, emalia, metale nieżelazne (niekorodowane)	0,0010÷0,0015
Stal ciągniona (niekorodowana)	0,02÷0,06
Stal walcowana (niekorodowana)	0,03÷0,04
Stal ocynkowana	0,07÷0,15
Stal skorodowana	0,15÷4,0
Stal skorodowana po oczyszczeniu	0,15÷0,20
Żeliwo nowe asfaltowane	0,1÷0,15
Żeliwo nowe nieasfaltowane	0,25÷0,5
Żeliwo skorodowane	1,0÷4,0
Azbestocement	0,03÷0,10
Beton starannie wygładzony	0,3÷0,8
Beton	1,0÷3,0
Żelbet nowy	0,1÷0,80
Żelbet	0,2÷2,0
Drewno obrobione	0,2÷0,9

Tabela 2

Charakterystyki przepływu w [m³/s]

Średnica przewodu [mm]	Dla przewodów o szorstkości n			
	0,011	0,012	0,013	0,014
50	0,00961	0,00880	0,00826	0,00754
100	0,0610	0,0560	0,0516	0,0480
150	0,180	0,165	0,152	0,141
200	0,388	0,355	0,328	0,304
250	0,703	0,644	0,595	0,552
300	1,14	1,05	0,967	0,897
350	1,72	1,58	1,46	1,35
400	2,46	2,26	2,08	1,93
450	3,37	3,09	2,85	2,64
500	4,46	4,09	3,78	3,50
550	5,75	5,27	4,86	4,45
600	7,25	6,65	6,14	5,70
700	10,95	10,05	9,26	8,60
800	15,6	14,3	13,2	12,3
900	21,4	19,6	18,1	16,8
1000	28,3	26,0	24,0	22,2

Tabela 4

Współczynniki szorstkości według Manninga

Lp.	Charakterystyka powierzchni	<i>n</i>
1	Emalia, glazura, bardzo gładkie i bardzo dobrze dopasowane deski	0,009
2	Dobrze heblowane deski, wyprawa z czystego cementu	0,010
3	Zaprawa cementowa, nowe rury krzemionkowe, żeliwne i stalowe, wygładzone ścianki żelbetowe, pokryte warstwą ochronną	0,011
4	Lód (powstały przy prędkości wody <0,6 m/s)	0,010÷0,012
5	Heblowane deski i bale, ścianki z klepek, wygładzone ścianki żelbetowe, bardzo gładki beton w stosunkowo prostych kanałach	0,011÷0,014
6	Ścianki z glazurowanej cegły	0,011÷0,015
7	Deski nieheblowane, rury wodociągowe w warunkach normalnych i bez wyraźnej inkrustacji, bardzo czyste rury kanalizacyjne, bardzo dobrze wykonany beton	0,012
8	Ścianki ceglane z zaprawą cementową	0,012÷0,017
9.	Nieheblowane bale i belki	0,012÷0,018
10	Rury kanalizacyjne w warunkach normalnych, zabrudzone rury wodociągowe	0,013
11	Gładki beton w kanałach o niedużych krzywiznach, bez osadów na dnie, przy umiarkowanych krzywiznach łuków	0,013÷0,015
12	Okładzina z ciosów kamiennych	0,013÷0,017
13	Brudne rury wodociągowe i kanalizacyjne, kanały betonowe w średnich warunkach	0,014
14	Lód (powstały przy prędkości >0,6 m/s) bez podbitki sryżowej	0,014÷0,017
15	Przeciętny mur z cegły lub z kamienia, brudne deski, brezent	0,015
16	Kanały betonowe z osadami dennymi, szorstkie powierzchnie betonowe ze śladami szalunku, krzywizny łuków o małych promieniach	0,015÷0,018
17	Powierzchnie torkretowane, lód (powstały przy prędkości >0,6 m/s) z podbitką sryżową	0,016÷0,021
18	Dobry mur z kamienia łamanego, stary mur ceglany, nierówny beton i gładka, dobrze obrobiona skała	0,17
19	Ścianki pokryte grubą warstwą ilastą, kanały w zwartym lessie	0,18
20	Skała częściowo obrobiona, tunele skalne	0,019÷0,023
21	Ściany z grubego kamienia lub bruku, kanały wyciosane w skale	0,020÷0,025
22	Kanały w lessie, żwirze lub w warstwie humusowej, powleczone cienką powłoką ilastą; duże kanały ziemne, w dosyć dobrych warunkach	0,022÷0,026
23	Powierzchnia skalna torkretowana lub wyrównana zaprawą	0,022÷0,030
24	Ściany z kamienia układanego bez zaprawy, duże kanały ziemne w średnich warunkach, rzeki o bardzo dobrych warunkach przepływu (równe, proste łóżysko, bez zagłębień i roślinności wodnej)	0,025÷0,035
25	Duże kanały ziemne, utrzymane w warunkach poniżej przeciętnych, małe kanały w dobrych warunkach; narzut kamienny	0,0275÷0,0325
26	Źle utrzymane kanały ziemne (zarośnięte, z nierównym dnem i brzegami), rzeki o dobrych warunkach przepływu, przeciętnie wykonane kanały w skale	0,030÷0,035
27	Kanały i rzeki w złych warunkach (nierówny przekrój, kamienie i rośliny wodne na dnie i na brzegach)	0,033÷0,039
28	Kanały bardzo źle utrzymane, rzeki o bardzo złych warunkach przepływu (osuwiska brzegów, wyrwy w dnie, szuwary, glazy, korzenie, kręte łóżysko itp); kanały niestarannie wykonane w skale	0,040÷0,045
29	Strumienie porośnięte roślinnością, o bardzo nieregularnym korycie	0,07÷0,10

Tabela 5

Współczynniki szorstkości według Kuttera

Lp.	Charakterystyka powierzchni	m_k
1	Czysty, gładki cement	0,12
2	Heblowane deski drewniane, dobrze dopasowane	0,15
3	Deski drewniane heblowane, stal, żeliwo, nowy żelbet	0,20
4	Czysta kamionka, używane żeliwo, deski nieheblowane	0,25
5	Dobry mur z cegły	0,27
6	Belki drewniane, zwykły mur z cegły	0,35
7	Kamień ciosany	0,45
8	Stary mur	1,00
9	Starannie wykonane i utrzymane powierzchnie ziemne	1,50
10	Ziemia porośnięta trawą	2,00
11	Powierzchnia ziemna zaniedbana, silnie porośnięta, zamulona	2,50

Tabela 6

Współczynniki szorstkości według Bazina

Lp.	Charakterystyka powierzchni	γ_B
1	Powierzchnie bardzo gładkie (dobra wyprawa cementowa, heblowane deski)	0,06
2	Powierzchnie gładkie (deski, cegły, ciosy kamienne, beton, żeliwo)	0,16
3	Powierzchnie dosyć szorstkie (mur z kamienia łamanego)	0,46
4	Powierzchnie szorstkie (bruk kamienny, dobrze utrzymane ścianki w zwartych gruntach, źle obetonowane skały, ściany kute w litej skale)	0,85
5	Powierzchnie ziemne w przeciętnym stanie	1,30
6	Powierzchnie ziemne w złym stanie (zarośnięte, pokryte kamieniami)	1,75

Tabela 7

Współczynniki porowatości niektórych skał

Lp.	Skała	n
1	Granit, gnejs	0,0002÷0,02
2	Kwarcyt	0,002÷0,008
3	Piaskowiec	0,035÷0,28
4	Wapień, dolomit	0,005÷0,13
5	Kreda	0,45÷0,50
6	Żwir	0,30÷0,55
7	Pospółka	0,20÷0,40
8	Piasek jednorodny	0,26÷0,48
9	Piasek nie jednorodny	0,20÷0,45
10	Less	0,40÷0,60
11	Gлина	0,20÷0,35
12	łł w stanie plastycznym	0,40÷0,70
13	łł w stanie półzwardym	0,35÷0,50
14	łł w stanie zwardym	0,18÷0,35
15	łłolupek	0,05÷0,08

Tabela 8

Współczynniki przewodności hydraulicznej

Lp.	Rodzaj ośrodka porowatego	K [m/dobę]
1	Żwir	100 ÷ 200
2	Żwir piaszczysty	75 ÷ 150
3	Piasek gruboziarnisty ze żwirem	50 ÷ 100
4	Piasek gruboziarnisty	25 ÷ 75
5	Piasek średnioziarnisty	10 ÷ 25
6	Piasek drobnoziarnisty	2 ÷ 10
7	Piasek drobnoziarnisty z gliną	1 ÷ 2
8	Piasek gliniasty luźny	0,2 ÷ 0,7
9	Piasek gliniasty zbity	0,08 ÷ 0,4
10	Gлина piaszczysta	0,005 ÷ 0,4
11	Gлина	< 0,005

Tabela 9

Mnożniki do wzoru Slichtera (9–55)

n	m_s	n	m_s	n	m_s
0,26	0,01187	0,33	0,02601	0,40	0,04922
0,27	0,01350	0,34	0,02878	0,41	0,05339
0,28	0,01517	0,35	0,03136	0,42	0,05789
0,29	0,01694	0,36	0,03473	0,43	0,06267
0,30	0,01905	0,37	0,03808	0,44	0,06776
0,31	0,02122	0,38	0,04154	0,45	0,07295
0,32	0,02356	0,39	0,04254	0,46	0,07838
				0,47	0,08455

Skorowidz nazwisk

- A** Abramowicz G. N. 263
Archimedes z Syrakuz 109
Avogadro di Quavegua A. 15
- B** Basset A. B. 182
Bazin H. E. 219, 232, 270
Bernoulli D. 113, 175
Bidone G. 245
Boltzmann L. E. 25
Borda J. Ch. 342
Boussinesq V. J. 131, 323
Buckingham E. 46, 48
- C** Carnot M. L. S. 342
Chezy A. L. 232
Colebrook C. F. 171, 182
Coriolis G. G. 73
Couette M. 134
Creager W. P. 273
Cross H. 215, 257
Czertousow D. M. 330
- D** Darcy H. P. G. 160, 169, 174, 311
Dirac P. A. M. 293
Dirichlet P. G. I. 96, 151
Dupuit A. J. 316, 324
- E** Engels H. 272
Euler L. 18, 24, 52, 123
- F** Fick A. 37
Forchheimer Ph. 311
Fourier J. B. J. 37, 44
Froude W. 225, 242, 280
- G** Gauss C. 108
- H** Hagen G. H. L. 98
Hankel H. 151
Hazen A. 311
Hegly M.K. 272
Helmholtz H. 60
Hooke R. 35, 84, 192
Hugoniot H. 190
- K** Karman Th. von 11
Kelvin – patrz Thomson
Knudsen M. H. Ch. 17
Kutter W. R. 219, 232
- L** Lagrange J. L. 18, 24
Laplace P. S. 89, 150
Laval C. G. P. de 198
- M** Mach E. 190
Manning R. 166, 219, 232
- N** Navier L. M. N. 87, 113
Neumann E. P. 97, 151
Newton I. 35, 44, 85, 182
Nikuradse J. 170, 182
Nusselt E. K. W. 146
- O** Ott A. 273
- P** Pitot H. 119, 336
Poiseuille J. 98
Prandtl L. 13, 119, 132, 336
Prone G. 311
- R** Reynolds O. 120, 125, 130, 262
Richards L. A. 314
Riemann B. 194
Rother M. 269
- S** Saint-Venant B. de 73, 121, 245
Schoklitsch A. K. 219
Slichter C. S. 312, 345
Smetana J. 283
Stokes G. G. 87, 113, 148, 182
Strouhal V. 330
- T** Thomson W. 268, 273
Torricelli E. 116
- V** Venturi G. B. 336
Vinci L. da 125
- W** Waals J. D., van der 34
Weisbach J. 169, 174
White C. M. 171, 182
Wójcicki K. 283

Skorowidz rzeczy

- a**
 - adhezja 95, 135
 - adiabata Hugoniota 190
 - Poissona 85
 - adwekcja 24
 - analogia 326
 - anizotropia 35, 86, 205, 312
- b**
 - baza wymiarowa 47
 - brzeg 92, 217
 - fizyczny 92
 - matematyczny 93, 315, 318
 - nieprzepuszczalny 92, 217
 - nieruchomy 92, 217
 - przepuszczalny 92, 217
 - ruchomy 92, 217
 - burzliwość 125
- C**
 - charakterystyka 172, 204, 341
 - przelewu 269
 - przewodu 172, 206
 - wydatku 204
 - chropowatość bezwzględna 49, 143, 219
 - względna 219
 - zastępcza 219
 - ciecz 35
 - newtonowska 35
 - nienewtonowska 35
 - nieściśliwa 102
 - ściśliwa 36, 104
 - ciepło właściwe 38
 - ciśnienie 29, 36, 40, 88, 124
 - atmosferyczne 79, 102, 118, 207
 - całkowite 29
 - dynamiczne 29, 124
 - hydrodynamiczne 29, 124
 - hydrostatyczne 29, 102, 124
 - statyczne 29, 124
 - zewnętrzne 102
 - czas przebiegu reakcji 289
 - zatrzymania 289
 - życia osiadłego 31, 33
- d**
 - danaida 336
 - deformacja 34, 60
 - dopływ boczny 72, 184, 227
 - drenaż 217
 - drżania samowzbudne 127
 - droga mieszania 132
 - dyssypacja energii 28, 83, 116, 167
 - dysza 188, 259
 - dywergencja 72, 89
- e**
 - efekt Dopplera 334
 - energia 81
 - kinetyczna 115
 - mechaniczna 115
 - potencjalna ciśnienia 115
 - położenia 115
 - wewnętrzna 81
 - entropia 82
- f**
 - filtracja 303
 - burzliwa 311
 - laminarna 311
 - nieustalona 304
 - ustalona 304
 - fluacja 311
 - fluktuacja prędkości 127
 - funkcja anizotropowa 35
 - ciśnienia 123
 - izotropowa 35
 - prądu 148, 150
- g**
 - gęstość 26, 36, 41
 - rozkładu 21, 25, 291
 - głębokość 218
 - krytyczna 225
 - normalna 223
 - maksymalna 218
 - średnia 218
 - głębokości sprzężone 277, 283
 - gradient 89
 - grubość warstwy przyściennej 140
- h**
 - harfa Nikuradsego 170
 - hipoteza Boussinesqa 131
 - Newtona 35, 85, 230
 - histereza 249
 - hydrostatyczny rozkład ciśnienia 103, 228
- i**
 - iloczyn diadyczny 130
 - infiltracja 217
 - intensywność ruchu śrubowego 156

- izotacha 221
izotropia 25, 86, 305, 312
- j** jednowymiarowy przepływ 94
- k** kanał 216
– naturalny 217
– nieregularny 217
– otwarty 216, 259
– pryzmatyczny 217
– regularny 217
– sztuczny 217
– zamknięty 216
kinetyczna energia turbulencji 132
koherentne struktury 128
koncentracja 289
koryto główne 237
– pryzmatyczne 230
– złożone 237
krzywa konsumcyjna 249
– prędkości 234
– wydatku 234
- l** laminarny przepływ 73, 125
laplasjan 89, 150
lepkość 36
– turbulentna 131
liczba Eulera 330
– Froude’a 242, 280, 330
– Knudsen’a 17
– Macha 190
– Nusselta 146
– Prandtla 146
– Reynoldsa 120, 330
– Strouhala 330
linia brzegowa 217
– charakterystyczna 172, 204, 341
– ciśnienia 117
– energii 117, 223
– położenia 117
– prądu 52
– wirowa 61
logarytmiczny profil prędkości 136
- m** macierz wymiarowa 47
moc 203
model biharmoniczny 153
– kinematyczny 147, 153
– tłokowy 219
– turbulencji 131
moduł sprężystości 38
moment ilości ruchu 81
– siły naporu 107
- n** napór hydrodynamiczny 77
– hydrostatyczny 104
naprężenie 26
– denne 229
– normalne 31
– powierzchniowe 234
– styczne 31, 87, 182, 229
– turbulentne 131
– wiatrowe 135, 234
niewiadome 84, 212, 313
niezmiennik 85, 194
- O** obiekt kubaturowy 285
objętościowe natężenie przepływu 42
obliczenia hydrauliczne 159
obszar 91, 191
obwód zwilżony 74, 218
odcinek rozwijania profilu prędkości 142
– początkowy 222, 263
oderwanie 144
odsączalność 305
odskok Bidone’a 245, 280
– hydrauliczny 345, 264, 280
opady atmosferyczne 218
oś kanału 218
ośrodek ciągły 15
– dyskretny 15
– porowaty 303
otwór 159, 264, 274
- p** paradoks hydrostatyczny 106
piezometr 118, 162
piezometryczna linia ciśnienia 118, 304
płaski ruch potencjalny 150
płyn 35
płynność 34
pochodna adwekcyjna 46
– lokalna 46
– substancjalna 44, 89, 194
podwarstwa lepka (laminarna) 140
pompa 201
porowatość 304
postać kanoniczna 246
potencjał filtracyjny 310, 315
– prędkości 150
powierzchnia dna 217
– wyszczenia 315
prawo Archimedes’a 109
– Darcy’ego 160, 309
– Ficka 37
– Fouriera 87
– Hooke’a 35, 84, 192
– konstytutywne 65
– zachowania energii 81
– zachowania entropii 82
– zachowania masy 66
– zachowania momentu pędu 80

- zachowania pędu 69
 - prędkość charakterystyczna 226
 - deformacji 59
 - dynamiczna 136
 - dyssypacji energii 133
 - dźwięku 190, 195
 - filtracji 305
 - fluktuacyjna 127
 - graniczna 226
 - krytyczna 223, 338
 - nierozmywająca 226
 - niezamulająca 226
 - normalna 222
 - porowa 306
 - ścinająca 136
 - średnia 129, 164, 221
 - produkty 15, 289
 - promień hydrauliczny 114, 126, 164, 218
 - przekrój czynny 218
 - geometryczny 218
 - kinematyczny 218
 - poprzeczny 218
 - przepływowy 218
 - zwilżony 218
 - przelew 159, 264, 271
 - przepływ artezyjski 303
 - krytyczny 223, 240
 - normalny 222, 230
 - podłużny 64
 - spokojny 225, 248
 - rwący 225, 249, 280
 - przestrzeń porowa 305
 - przyspieszenie substancjalne 52
 - przystawka 259, 274
- r**
- reaktor 287
 - łączący 300
 - recyrkulacyjny 298
 - rozdzielający 298
 - retencja 172, 285
 - rotacja 59, 150
 - równanie Bernoulliego 113, 121, 243
 - biharmoniczne 153
 - ciągłości 78, 228, 322
 - ciągłości dla węzła 210, 253
 - Eulera 123, 141
 - konstytutywne 34, 85
 - Naviera–Stokesa 87
 - Poissona 85
 - przewodnictwa 82, 89
 - stanu 84
 - zachowania energii 82
 - zachowania masy 68, 77, 308
 - zachowania pędu 72, 77
 - równania de Saint–Venanta 246
 - Reynoldsa 128, 130, 286
 - ruch burzliwy 73, 125
 - krytyczny 223, 338
 - laminarny 73, 125
 - nieustalony 61, 190, 245, 257
 - podłużny 64, 139
 - potencjalny 150
 - rwący 225, 249
 - spokojny 225, 248
 - śrubowy 61, 155
 - turbulentny 73, 125
 - ustalony 61, 166, 208, 240, 253, 324
 - rukka piętrząca 119, 336
 - rzut ukośny 261
- S**
- schematyzacja 168, 221
 - sieć kanałów otwartych 252
 - pierścieniowa 215, 252
 - przewodów zamkniętych 208
 - rozgałęziona 213, 252
 - skała 125, 131, 327
 - spadek dna 219
 - hydrauliczny 171, 197, 233
 - krytyczny 240
 - swobodnej powierzchni 220
 - spąg warstwy 303
 - spływ powierzchniowy 218
 - stała von Karmana 11
 - stan wody 248
 - stopień turbulencji 130
 - strata energii mechanicznej 83, 115, 167
 - miejscowa 168, 172, 183, 210
 - na długości 168, 183, 198
 - strefa nasycona 303
 - nienasycona 303
 - strop warstwy 303
 - strumień 41, 62, 159, 259
 - Darcy’ego 306
 - swobodny 159, 259
 - studnia 317
 - substrat 15, 289
 - swobodna powierzchnia 74, 217
 - szerokość 217
 - szorstkość 143, 165, 219
- Ś**
- ściśliwość 36, 104
 - śląd aerodynamiczny 140
 - średnia gęstość 17
 - prędkość 129
 - środek naporu 107
- t**
- tachoida 221
 - taras zalewowy 237
 - temperatura 24, 41

- temperaturowa warstwa przyścienna 145
 tensor 21, 56, 312
 – naprężenia 34, 69, 86
 – naprężenia turbulentnego 131
 – prędkości deformacji 35, 86
 – Reynoldsa 131
 tor elementu płynu 52
 trajektoria elementu 52
 traser 292
 trójmian Bernoulliego 115, 202
 turbulencja 125
 twierdzenie Helmholtza 60
 – Buckinghama 46, 48
- U** uderzenie hydrauliczne 192, 196
 uśrednianie 23, 129
- W** warstwa przyścienna 138
 warunki brzegowe 91, 95, 191, 248, 316
 – kinematyczne 315
 – początkowe 91, 191, 248, 316
 węzeł 208, 253
 – punktowy 253, 284
 – retencyjny 253, 284
 wododział 318
 współczynnik dławienia 268, 277
 – filtracji 309
 – lepkości burzliwej dynamiczny 131
 – lepkości burzliwej kinematyczny 131
 – lepkości molekularnej dynamiczny 38, 86
 – lepkości molekularnej kinematyczny 38
 – odsączalności 305
 – pojemności sprężystej 314
 – porowatości efektywnej 305, 344
 – prędkości 267, 275
 – przekroju 268, 275
 – przepuszczalności 311
 – przewodności 309, 345
 – Saint-Venanta 73
 – strat 172, 241, 342
 – szorstkości 143, 165, 219, 341
 – wydatku otworu 275
 – wydatku przelewu 268
 – zatopienia 271
 współrzędne kartezjańskie 20, 28
 wydatek 42, 164, 203
 – jednostkowy 42, 306
 – masowy 42
 – objętościowy 42, 164
 wykładnik izentropii 38
 wylot swobodny 255
 – zatopiony 256
 wymiar 19
 wypór hydrostatyczny 108
 wysokość ciśnienia 116
 – położenia 116
 – prędkości 116
 – straty energii 116, 233
 wzór Bazina 232
 – Chezy 232, 250
 – Darcy–Weisbacha 169, 174
 – Hagen–Poiseuille’a 99
 – Hazena 311
 – Kuttera 232
 – Manninga 232
 – Prandtla 132
 – Slichtera 312
 – Torricellego 116
- Z** założenia Dupuita 316
 zasawa 277
 zbiornik 172, 198, 210, 254, 284
 – retencyjny 172, 285
 zeskok hydrauliczny 315
 złoże 158, 303
 zmienne konstytutywne 34, 60
 – globalne 21, 82, 284
 – lokalne 21, 284
 – niezależne 18
 – zależne 18
 znacznik 125, 292
 zwężka Venturiego 337

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Ark. wyd. 22,4, ark. druku 22,0, 82/553

Druk i oprawa: *EXPOL* P. Rybiński, J. Dąbek, Sp. Jawna
ul. Brzeska 4, 87-800 Włocławek, tel. 054 232 37 23