

Andrzej Danilewicz

Numeryczna symulacja procesu
formowania kolumny kamiennej
metodą wymiany dynamicznej

Praca napisana pod kierunkiem
Prof. dr hab. inż. Zbigniewa Sikory

Politechnika Gdańska
Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska
Gdańsk 2014

Spis treści

1	Wstęp, cel pracy i tezy	6
2	Motywacja przedmiotu pracy doktorskiej	7
3	Technologia wymiany dynamicznej	8
3.1	Konsolidacja dynamiczna	10
3.2	Wymiarowanie kolumn kamiennych	12
3.2.1	Szacowanie nośności kolumn smukłych	13
3.2.2	Szacowanie nośności kolumn krępych	14
3.2.3	Szacowanie osiadania	16
4	Model konstytutywny	20
4.1	Niezmienniki tensora naprężenia	20
4.2	Matematyczny opis prawa konstytutywnego	21
4.2.1	Plastyczna deformacja objętościowa	23
4.2.2	Deformacja plastyczna postaciowa	24
4.3	Implementacja	25
5	Metoda Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)	31
5.1	Historia rozwoju metod bezsiatkowych	31
5.2	Aproksymacja SPH	33
5.2.1	Całkowa reprezentacja funkcji	33
5.2.2	Jądro aproksymacji	34
5.2.3	Wybór długości wygładzania h	35
5.2.4	Symetryzacja jądra aproksymacji	36
5.2.5	Operator aproksymujący SPH	37
5.2.6	Różniczkowalność estymaty SPH	38
5.3	Warunki brzegowe w ujęciu SPH	39
5.4	Sortowanie	40
5.5	Równania zachowania w ujęciu SPH	40
5.6	Sztuczna lepkość	44

5.7	Całkowanie po czasie w ujęciu SPH	47
5.8	Zagadnienie stabilności numerycznej SPH	48
5.9	Hourglassing i shearlocking	50
5.10	Połączenie SPH i MES	50
6	Zagadnienie rozchodzenia się fal w ośrodku gruntowym	53
6.1	Fale sprężyste	53
6.2	Równania falowe	54
6.3	Fale Uderzeniowe	56
6.3.1	Aproksymacja obszaru nieograniczonego - tłumienie fal na brzegu	60
7	Numeryczna symulacja wpływu procesu formowania kolumny kamiennej metodą DR	62
7.1	Kalibracja i walidacja prawa konstytutywnego	63
7.1.1	Badanie trójosiowego ściskania	67
7.1.2	Badania izotropowego ściskania	69
7.1.3	Walidacja z badaniami izotropowego ściskania	72
7.2	Opis badań terenowych	72
7.3	Numeryczna symulacja tworzenia krateru	76
7.4	Numeryczna symulacja tworzenia kolumny	77
8	Podsumowanie	81
8.1	Podziękowania	84
9	Streszczenie	85

A Kod wejściowy programu LS-DYNA do badań elementarnych trójosiowego ściskania	88
B Kod programu <i>Mathematica</i> do kalibracji modelu MAT005	92

Rozdział 1

Wstęp, cel pracy i tezy

W dysertacji opracowano następujące cele:

- motywację przedmiotu pracy doktorskiej,
- opis metody wymiany dynamicznej (ang. dynamic replacement method, DR) i przegląd stanu wiedzy na temat wymiarowania kolumn formowanych tą metodą,
- *state-of-the-art* dot. metody Smooth Particle Hydrodynamics wykorzystanej w numerycznej symulacji wpływu procesu formowania kolumny na otaczające podłoże gruntowe,
- opis matematyczny wybranego prawa konstytutywnego wraz z walidacją,
- matematyczny opis uwarunkowań powstawania i propagacji fal uderzeniowych, objętościowych i powierzchniowych w ośrodku gruntowym,
- opis numerycznej procedury symulacji procesu DR wraz z walidacją wybranych badań polowych.

Tezą pracy jest stwierdzenie: ”*Wykorzystywane aktualnie metody projektowania kolumn formowanych metodą wymiany dynamicznej nie uwzględniają lokalnego wzmocnienia ośrodka gruntowego wokół kolumny i niecyldrycznego kształtu formowanej kolumny*”.

Rozdział 2

Motywacja przedmiotu pracy doktorskiej

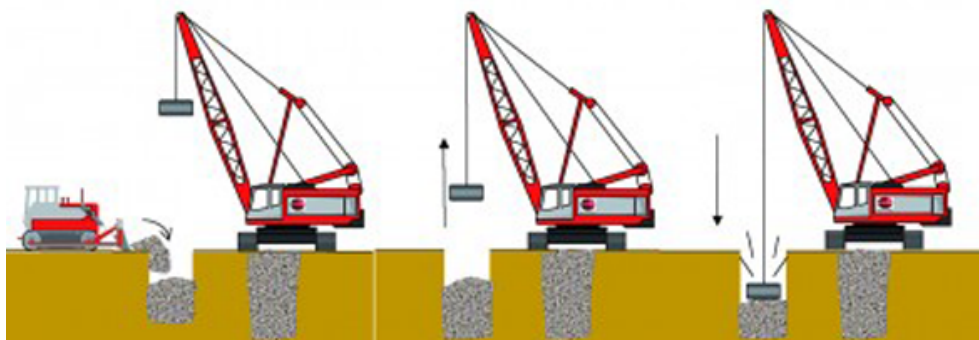
Rozprawa doktorska dotyczy numerycznej symulacji wpływu procesu formowania kolumny metodą wymiany dynamicznej, na otaczające podłoże gruntowe. Pomimo, że metodę wymiany dynamicznej zaproponowano pod koniec lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku, oraz pomimo ogromnej popularności, należy ona wciąż, do metod niedostatecznie rozpoznanych szczególnie pod względem teoretycznym. Wykorzystywane w projektowaniu analityczne metody obliczeniowe dla kolumn formowanych metodą wymiany dynamicznej, pierwotnie opracowano dla kolumn formowanych metodami nie uwzględniającymi specyfiki tej metody, np. metoda wibrowymiany. Z tego względu pomijano intuicyjnie wyczuwalny fakt lokalnego wzmocnienia gruntu wokół formowanej kolumny, co w rezultacie, podczas projektowania, często prowadzi do niedoszacowania nośności. Aktualny stan wiedzy, szczególnie teoretycznej, nie pozwalał na potwierdzenie adekwatności wykorzystywanych metod w odniesieniu do specyfiki kolumn formowanych poprzez uderzenia.

Rozdział 3

Technologia wymiany dynamicznej

Modyfikacja podłoża gruntowego w celu ulepszenia jego właściwości geotechnicznych może być realizowana na wiele sposobów. Analizowana w pracy metoda wymiany dynamicznej (ang. dynamic replacement, DR) jest połączeniem metod stosowanych do zagęszczenia gruntu, a szczególnie metod udarowych z metodą wymiany gruntów, której koncepcja polega na zwiększeniu nośności słabego gruntu przez wykonanie w nim kolumn kamiennych, żwirowych czy piaskowych.

Metoda wymiany dynamicznej służy do wzmacniania podłoża gruntowego gdy nie jest wymagana duża miąższość wzmacnianego podłoża (5-6m) i najlepiej sprawdza się do wzmacniania gruntów organicznych, nawodnionych gruntów spoistych oraz gruntów antropogenicznych. Technologia ta polega na dynamicznym formowaniu nośnych kolumn żwirowych lub kolumn wykonanych z kruszywa (kruszony beton, żużel wielkopiecowy, itp.) za pomocą ubijaków (najczęściej o masie 8-15 ton) zrzucanych grawitacyjnie z wysokości najczęściej około 15-30m. Ubijanie powoduje powstanie nadciśnienia wody w porach gruntu, które dyssypuje powodując odpływ wody filtrującej do kolumny pełniąc funkcję drenażową. Zalety tej metody to: prostota wykonania, stosunkowo niskie koszty realiza-



Rysunek 3.1: Etapy technologii formowania kolumny kamiennej metodą wymiany dynamicznej, [1].

cji w porównaniu z klasyczną wymianą gruntu i innymi metodami wzmocnienia podłoża gruntowego oraz stosunkowo krótki czas realizacji. Sam proces zagęszczania wymaga kontroli i odpowiedniego projektu dla uzyskania wymaganego stanu zagęszczenia. Problem ten, z naukowo-inżynierskiego punktu widzenia pozostaje problemem otwartym, który wymaga odpowiednich procedur obliczeniowych.

Poprawne projektowanie wymiany dynamicznej wymaga znajomości profilu geotechnicznego podłoża, poprawności dobrania masy ubijaka, jego kształtu i rozmiarów, liczby uderzeń w każdym węźle zagęszczania oraz innych powiązanych informacji, jak energii na jednostkę powierzchni upadającej masy, bądź prędkości ubijaka w chwili uderzenia w podłoże. Indywidualne warunki każdego projektu wymuszają projektowanie wzmocnienia uwzględniając zróżnicowanie faz zagęszczania, poziomów energii, a także przedziałów czasowych w jakich zostanie ona dostarczona. Dobranie odpowiedniego rodzaju metody możliwe jest po dokładnej analizie parametrów ulepszanego gruntu, a także głębokości zalegania i uwarstwienia podłoża. Rozmieszczenie punktów uderzeń oraz dobór innych parametrów technologicznych następuje na etapie projektu wstępnego, ostatecznie jednak projekt zagęszczania jest weryfikowany dopiero w wyniku prób przeprowadzonych w terenie.



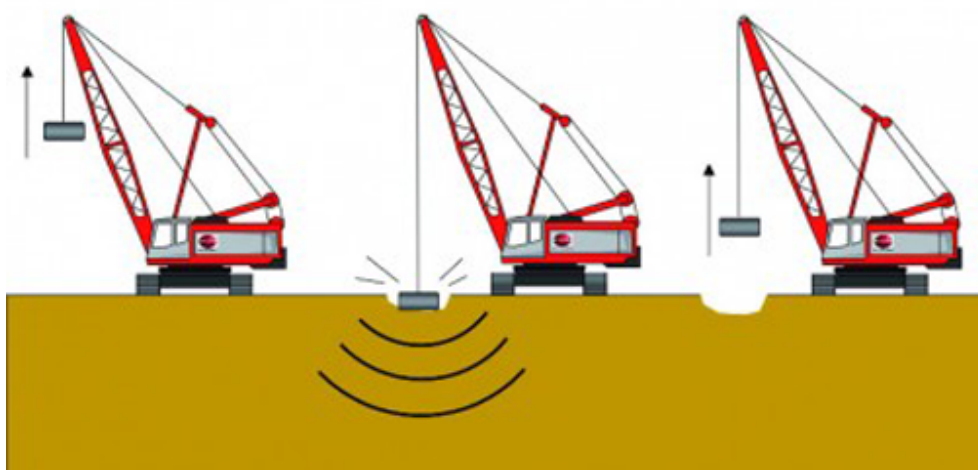
Rysunek 3.2: Urządzenie wykorzystywane do formowania kolumn w technologii DR firmy Polbud-Pomorze, fot. własna.

Wykorzystywane analityczne metody obliczeniowe w projektowaniu kolumn metodą wymiany dynamicznej, były pierwotnie opracowane dla kolumn formowanych innymi metodami, nie uwzględniającymi specyfiki metody DR (jak na przykład metoda wibrowymiany). Z tego względu pomijany jest intuicyjnie wyczuwalny fakt lokalnego zagęszczenia (wzmocnienia) gruntu wokół formowanej kolumny. Efekty zagęszczenia gruntu w wyniku dynamicznego uderzenia upadającej dużej masy są wykorzystywane w innych znanych metodach zwanych Zagęszczaniem Dynamicznym, oraz Zagęszczaniem Impulsowym, jednak stosowane obecnie w projektowaniu DR metody obliczeniowe nie uwzględniają specyfiki dynamicznego formowania kolumn i w konsekwencji prowadzą do przeszacowania nośności. Stąd też zasadniczym celem niniejszej pracy jest numeryczne określenie wpływu formowania wbijanej kolumny kamiennej na zmianę parametrów otaczającego ją słabego podłoża gruntowego.

Wymiana dynamiczna jest jedną z najczęściej stosowanych metod wzmocnienia słabego podłoża gruntowego. Brak uwzględnienia wpływu procesu formowania kolumny tą metodą na otaczające podłoże w efekcie prowadzi do przeszacowania nośności podłoża.

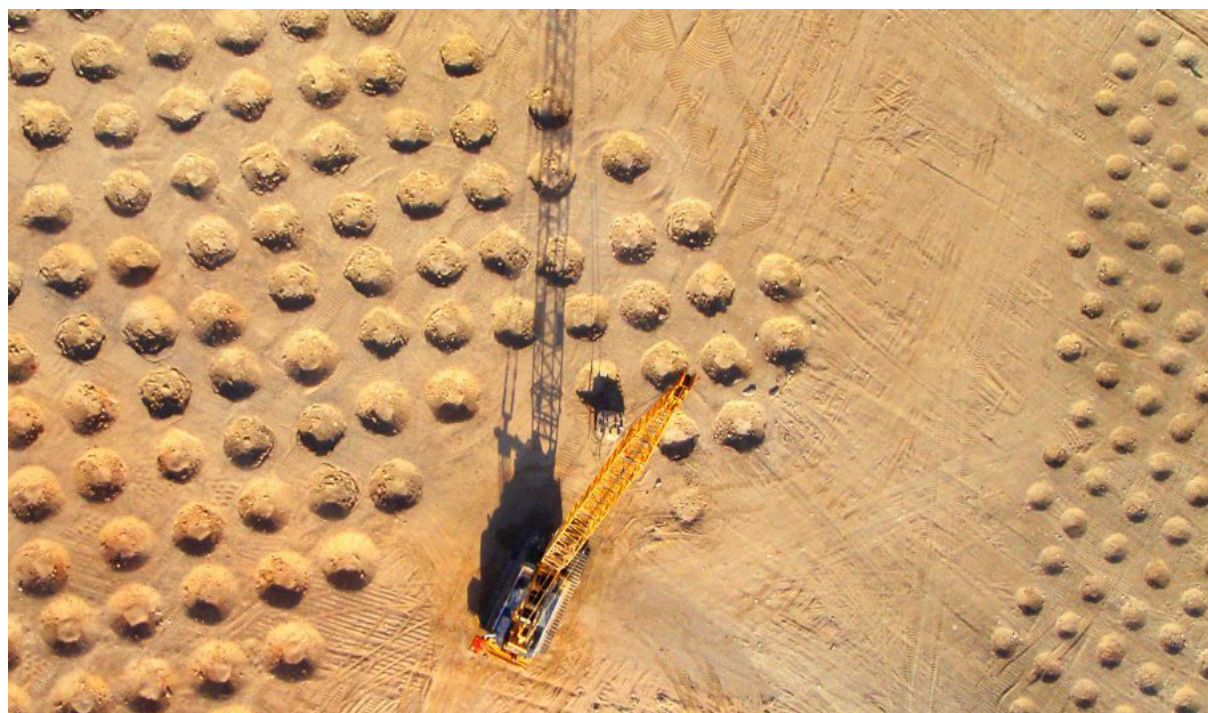
3.1 Konsolidacja dynamiczna

Wymiana dynamiczna posiada wspólne cechy z metodą zwaną Konsolidacją Dynamiczną, chociażby poprzez wykorzystanie bardzo podobnego sprzętu. Konsolidacja Dynamiczna została zaproponowana przez Louisa Menarda w latach siedemdziesiątych XX wieku [19].



Rysunek 3.3: Etapy technologii zagęszczania dynamicznego metodą dynamicznej konsolidacji, [1].

Technologia ta polega na wielokrotnym zrzucaniu z częstotliwością uderzeń 1-3 na minutę, ze znacznej wysokości (najczęściej 10-40m) ciężkiego ubijaka (10-50 ton), w wyniku czego w słabym podłożu powstaje poniżej krateru bryła wzmocnionego gruntu. Wcześniej uważano, że zagęszczanie nawodnionych gruntów spoistych nie jest możliwe z powodu powstawania zjawiska tzw. "poduszki kauczukowej". W metodzie dynamicznej konsolidacji wprowadzono zatem nowatorską technikę ubijania polegającą na wymuszeniu poprzez dużą energię opadającej masy ubijaka zjawiska utraty wytrzymałości gruntu. W wyniku następujących po sobie uderzeń ubijaka powietrze znajdujące się w porach gruntu ulega sprężeniu, a po osiągnięciu pewnej minimalnej objętości grunt ulega upłynnieniu. Energia wymagana do osiągnięcia opisywanego zjawiska nazywa się energią upłynnienia, [50]. Opadający grawitacyjnie ubijak powoduje wytworzenie nadciśnienia wody w porach oraz powstawanie fal objętościowych, poprzecznej i podłużnej, oraz fal powierzchniowych. Po serii uderzeń ciśnienie wody w porach gruntu zwiększa się do poziomu odpowiadającemu stanowi upłynnienia gruntu. Kolejna faza powoduje dyssypację nadciśnienia wody oraz zagęszczenie gruntu - ściślejszy kontakt pomiędzy ziarnami.



Rysunek 3.4: Przykład zagęszczania dynamicznego w Al-Falah, Zjednoczone Emiraty Arabskie, [66].

Po zakończeniu procesu ubijania następuje wyrównanie powierzchni i przystępuje się do zagęszczania w kolejnych punktach. Po zakończeniu wyrównuje się i dogęszcza przy powierzchniową warstwę gruntu (ang. *ironing*).

Do poprawnego zaprojektowania dynamicznego zagęszczania wymagana jest znajomość rozpoznania podłoża gruntowego, a na tej podstawie następuje ustalenie ciężaru

ubijaka, wysokości jego spadku, liczby uderzeń na dany punkt, rozmieszczenia punktów uderzeń w siatce, określenie liczby faz oraz interwałów pomiędzy nimi.

Masę ubijaka m_b oraz wysokość jego spadku h_b ustala się w zależności od głębokości h_z i rodzaju gruntu zalegającego w warstwie poddawanej zagęszczeniu. Do określenia głębokości h_z (w metrach) w przypadku luźnych gruntów niespoistych występujących do znacznej głębokości wykorzystuje się wzór [50]:

$$h_z = k_s \sqrt{m_b h_b} \quad , \quad (3.1)$$

gdzie współczynnik k_s przyjmuje wartość z przedziału (0.35, 1). Do określenia głębokości h_z (w metrach) w przypadku gruntów spoistych wykorzystuje się zależność:

$$h_z = 0.4 \sqrt{\frac{m_b h_b B}{A_p c_u}} \quad , \quad (3.2)$$

gdzie B jest średnicą bądź szerokością wykorzystywanego kafara, A_p jest powierzchnią kontaktu kafara z gruntem, natomiast c_u jest spójnością gruntu, [61].

Możliwe jest też oszacowanie głębokości zagęszczania poprzez wyznaczenie (za pomocą monogramów) energii zagęszczania, porównując wykresy energii i składowych pionowych naprężeń uzyskanych z badań edometrycznych, [50].

3.2 Wymiarowanie kolumn kamiennych

Zwiększenie nośności podłoża pod fundamentem możliwe jest przez uformowanie odpowiednich kolumn kamiennych czy żwirowych. Kolumny takie zagęszczają podłoże oraz są również częściową wymianą gruntu. Projektując posadowienie na podłożu wzmocnionym kolumnami kamiennymi, należy rozważać dwa stany graniczne, [21]:

- graniczny stan nośności, którego niespełnienie jest równoznaczne z utratą stateczności przez kolumny

$$p'_k \leq m p'_{kf} \quad , \quad (3.3)$$

gdzie p'_k to pionowy nacisk na kolumnę (obliczeniowy), p'_{kf} to efektywny nacisk na kolumnę, m to współczynnik korekcyjny ($m = 0.5$ według Ghionny i Jamiołkowskiego [20]),

- drugi stan graniczny wymaga spełnienia dwóch warunków; pierwszym jest graniczny stan układu przemieszczenia, mówiący o nieprzekroczeniu przez budowlę osiadania dopuszczalnego s_{dop} :

$$s_{max} \leq s_{dop} \quad , \quad (3.4)$$

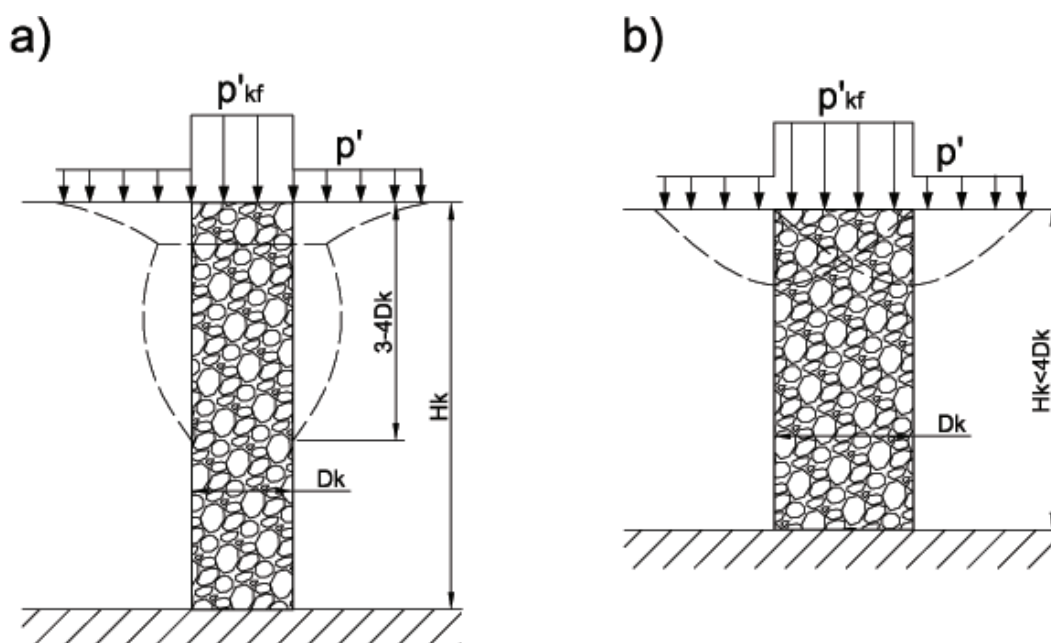
gdzie s_{max} jest maksymalnym osiadczeniem podłoża wzmocnionego (od obciążeń charakterystycznych); drugi warunek powiązany jest z odkształceniem kątowym:

$$\beta_{max}^* \leq \beta_{dop}^* \quad (3.5)$$

gdzie $\beta_{max}^* = (\frac{\Delta s}{l})_{max}$ to odkształcenie kątowe czyli maksymalna różnica osiadania dwóch punktów podzielona przez odległość między nimi. $\beta_{dop}^* = (\frac{\Delta s}{l})_{dop}$ to dopuszczalne odkształcenie kątowe (według Eurocodu 7 wartość ta wynosi 1/500).

Szacowanie nośności kolumny zależy od jej smukłości, a dokładniej od mechanizmu utraty stateczności przez kolumnę. W przypadku kolumn o długości H_k , dochodzącej do stropu warstwy nośnej, utrata stateczności następuje w wyniku:

- spęcznienia górnej części kolumny (Rys.3.5a); jest to mechanizm charakterystyczny dla kolumn smukłych ($H_k \geq 4D_k$),
- osiągnięcia stanu granicznego nośności w otoczeniu głowicy kolumny (Rys.3.5b); jest to mechanizm charakterystyczny dla kolumn krępych ($H_k < 4D_k$).



Rysunek 3.5: Mechanizmy utraty stateczności układu kolumna-grunt: a) kolumna smukła - spęcznienie kolumny; b) kolumna krępa - stan graniczny w otoczeniu głowicy, [21].

3.2.1 Szacowanie nośności kolumn smukłych

Hughes i Withers [29] na podstawie badań modelowych wykazali, iż mechanizm utraty nośności kolumn smukłych ($H_k \geq 4D_k$) polega przede wszystkim na utracie nośności po-

przez pęcznienie kolumny. Pęczniejąca kolumna wywiera naprężenie na podłoże gruntowe w kierunku radialnym od swej osi.

Cytując za Gryczmańskim, [21], obciążenie graniczne kolumny smukłej można wyznaczyć korzystając ze wzoru:

$$p'_{kf} = (\sigma'_{h0} + kc_u)K_{pk} \quad , \quad (3.6)$$

gdzie:

σ'_{h0} – składowa pozioma naprężenia efektywnego [kPa] w ulepszonym gruncie na głębokości największego spęcznienia kolumny równej w przybliżeniu $1.5D_k$,

$$\sigma'_{h0} = K_0(\gamma'z + p') \quad , \quad (3.7)$$

k – współczynnik korekcyjny:

$$k = 1 + \ln\left(\frac{G_{0u}}{c_u}\right) \quad ,$$

c_u – wytrzymałość gruntu na ścinanie w warunkach bez drenażu, [kPa],

K_{pk} – współczynnik parcia biernego materiału kolumny:

$$K_{pk} = \operatorname{tg}^2\left(45 + \frac{\phi_k}{2}\right) = \frac{1 + \sin\phi_k}{1 - \sin\phi_k} \quad , \quad (3.8)$$

G_{0u} – moduł ścinania [kPa] gruntu wzmacnianego,

K_0 – współczynnik parcia spoczynkowego słabego gruntu,

γ' – ciężar objętościowy gruntu z uwzględnieniem wyporu wody [kN/m³],

ϕ_k – kąt tarcia wewnętrzznego materiału kolumny.

We wzorze (3.7) Gryczmański uwzględnił wpływ nacisku p' na grunt otaczający kolumnę. Jamiołkowski i Ghionna [20] zaproponowali zmianę (wzrost) wytrzymałości na ścinanie gruntu otaczającego kolumnę spowodowaną procesem formowania kolumny kamiennej (zaęszczenie i konsolidacją w warunkach z przyśpieszonym drenażem):

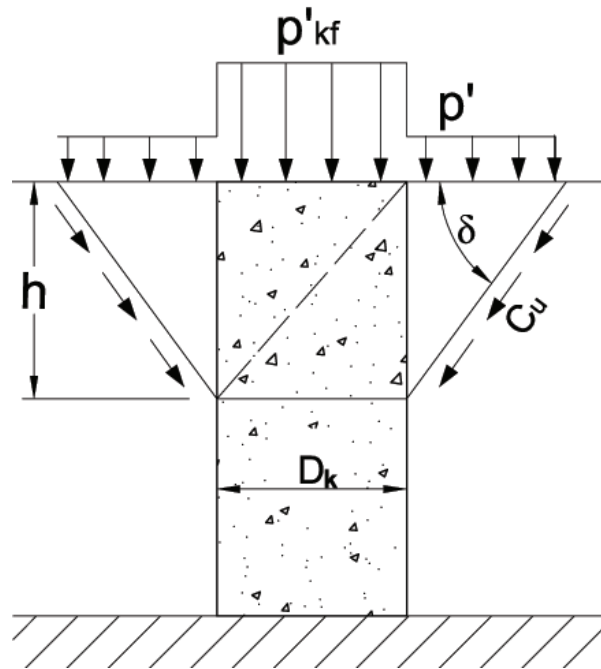
$$c_u^* = c_u + \Delta c_u \quad . \quad (3.9)$$

3.2.2 Szacowanie nośności kolumn krępych

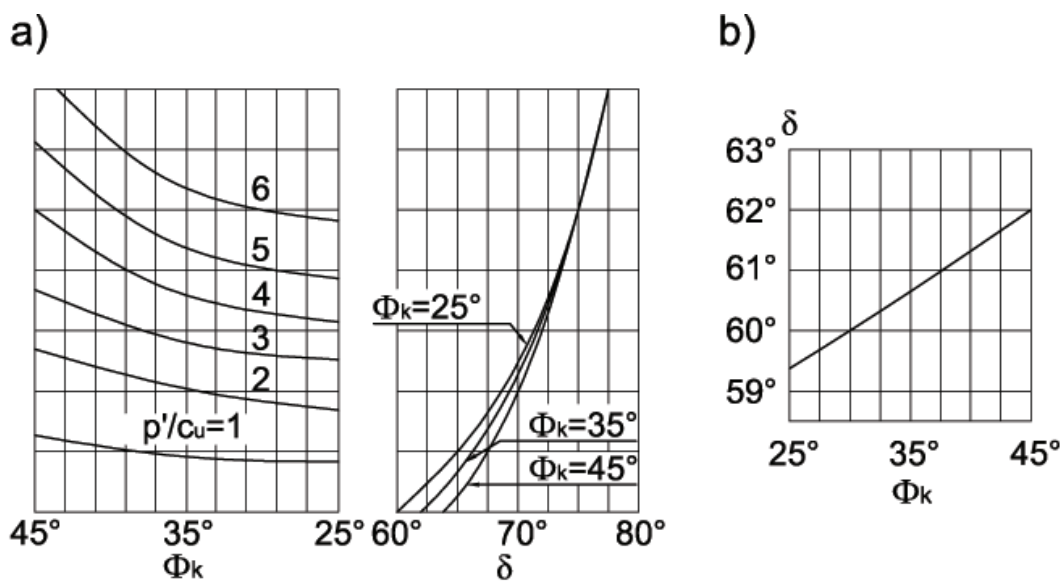
W przypadku kolumn krępych ($H_k < 4D_k$) nośność graniczną można oszacować ze wzoru Braunsa, [12]:

$$p'_{kf} = \left(p' + \frac{2c_u}{\sin\delta}\right) \left(1 + \frac{\sqrt{K_{pk}}}{\operatorname{tg}\delta}\right) K_{pk} \quad , \quad (3.10)$$

gdzie:



Rysunek 3.6: Założenia do szacowania nośności granicznej w metodzie Braunsa, [21].



Rysunek 3.7: Nomogramy do wyznaczania kąta δ w metodzie Braunsa: a) $p \neq 0$; b) $p' = 0$, [21].

c_u – spójność gruntu ulepszonego w warunkach bez drenażu, [kPa],

K_{pk} – współczynnik parcia biernego materiału kolumny:

$$K_{pk} = \operatorname{tg}^2\left(45 + \frac{\phi_k}{2}\right) = \frac{1 + \sin\phi_k}{1 - \sin\phi_k},$$

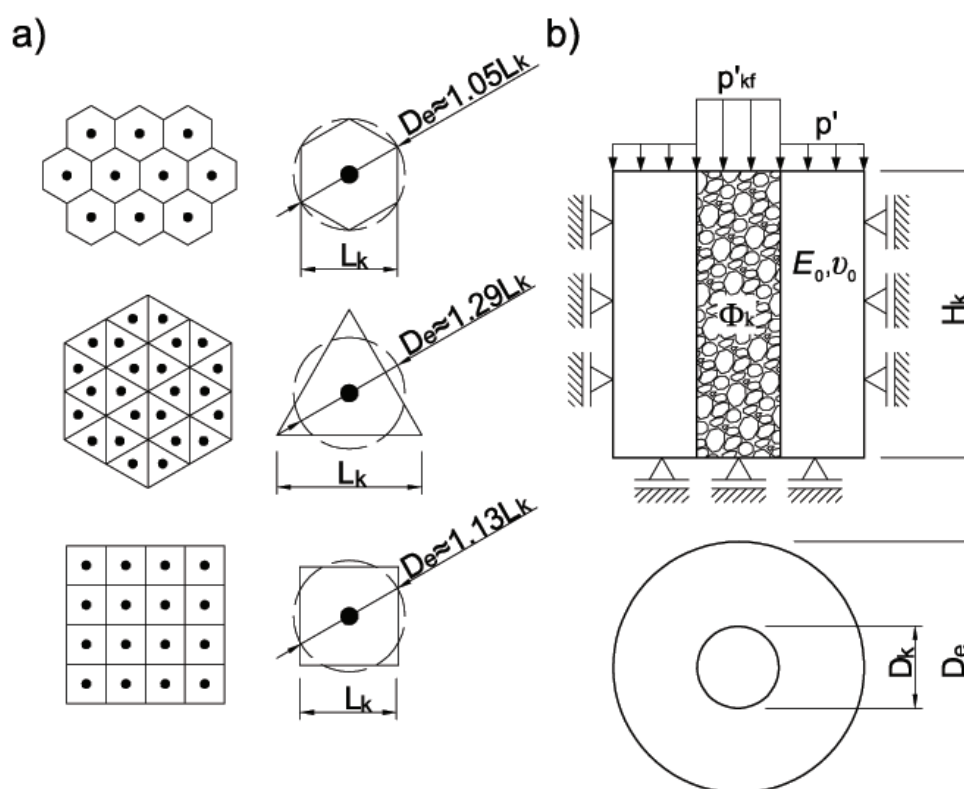
p' – nacisk pionowy [kPa] od fundamentu na grunt otaczający kolumnę, (3.8),

p_0 – średni nacisk przekazywany przez fundament na grunt [kPa],

δ – kąt nachylenia linii poślizgu do poziomu, odczytywany z nomogramów Braunsa (Rys. 3.7).

3.2.3 Szacowanie osiadania

Najpopularniejsze siatki rozstawu kolumn, wykorzystywane przy projektowaniu wzmocnienia słabego podłoża gruntowego kolumnami kamiennymi, formowanymi różnymi metodami wykorzystują geometrię sześciokątną, trójkątną i czworokątną (Rys. 3.8). Zało-



Rysunek 3.8: Schemat konstrukcji komórki jednostkowej: a) siatki i średnice równoważne, b) przekrój osiowy komórki.

żeniem komórki jednostkowej jest sprowadzenie analizy do przypadku zagadnienia osiowo-symetrycznego poprzez zastąpienie figur geometrycznych kołami o tej samej powierzchni.

We wzorze (3.3) warunkującym graniczny stan nośności, obliczeniowy pionowy nacisk na kolumnę wyznacza się ze wzoru, [50]:

$$p'_k = \frac{n}{\beta} p_0, \quad (3.11)$$

gdzie:

n jest bezwymiarowym współczynnikiem koncentracji obciążenia:

$$n = 1 + \frac{\beta - 1}{\alpha},$$

α jest bezwymiarowym współczynnikiem wymiany:

$$\alpha = \frac{A_k}{A_e} = \left(\frac{D_k}{D_e} \right)^2, \quad (3.12)$$

β jest współczynnikiem efektywności ulepszania (zwanym też współczynnikiem redukcji), którego znajomość jest wystarczająca do określenia efektywności wzmocnienia gruntu.

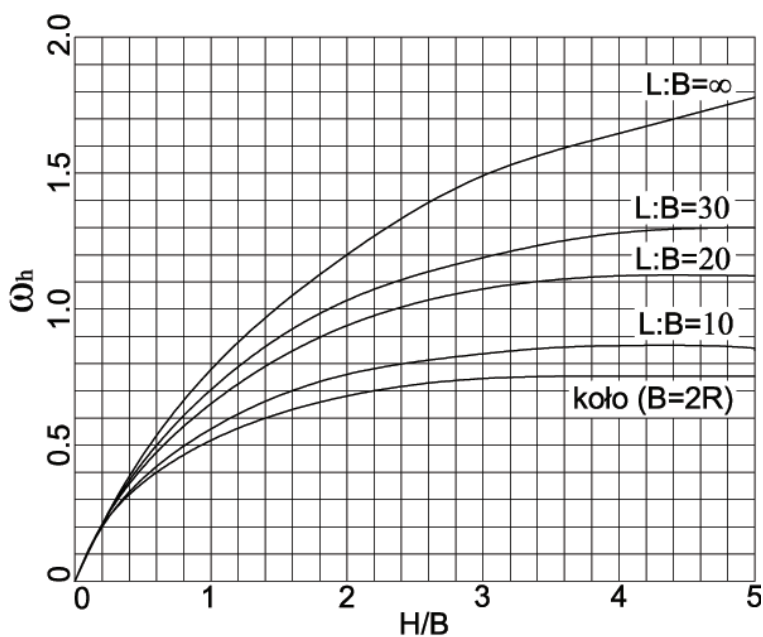
Osiadanie wyznacza się ze wzoru, [50]:

$$s = \frac{s_0}{\beta}, \quad (3.13)$$

gdzie:

$$s_0 = \frac{p_0 \beta (1 - \nu_0^2) \omega_h}{E_0}, \quad (3.14)$$

natomiast ω_h jest współczynnikiem wpływu według monogramu z Rys. 3.9.

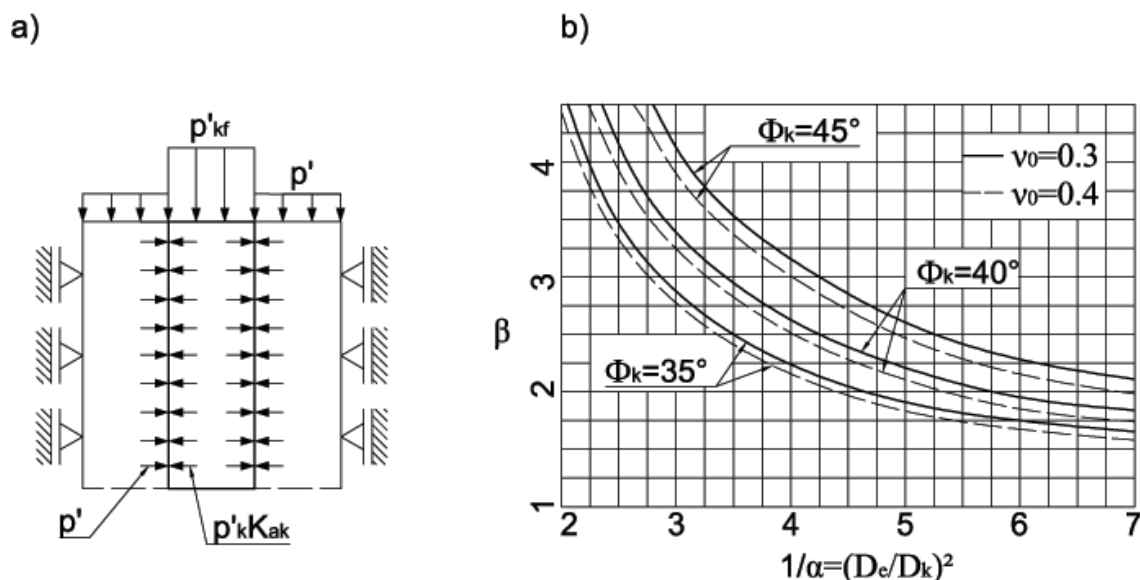


Rysunek 3.9: Nomogram służący do wyznaczania współczynników ω_h .

Sprawdzenie warunku (3.5) wymaga obliczenia osiadania w minimum trzech komórkach jednostkowych o profilach tak dobranych aby $\frac{\Delta s}{l}$ było jak największe, [50].

Metoda Priebego

W metodzie Priebego zagadnienie równowagi komórki jednostkowej jest sprowadzone do osiowo symetrycznego problemu Lamego rury grubościennej obciążonej wewnątrz ciśnieniem p' – Rys. 3.10, [51].



Rysunek 3.10: Metoda Priebego: a) schemat statyczny komórki jednostkowej, b) nomogram wyznaczania współczynnika efektywności β .

Współczynnik efektywności ulepszenia podłoża można wyznaczyć z nomogramu (Rys. 3.10b), bądź z zależności, [51]:

$$\beta = 1 + \alpha \left(\frac{1 + 2f}{2k_{ak}f} - 1 \right), \quad (3.15)$$

gdzie:

$$f = \frac{(1 - \nu_0)(1 - \alpha)}{1 + \alpha - 2\nu_0},$$

ν_0 – współczynnik rozszerzalności bocznej (Poissona) podłoża słabego,

K_{ak} – współczynnik parcia czynnego materiału kolumny:

$$K_{ak} = \operatorname{tg}^2 \left(45 - \frac{\phi_k}{2} \right),$$

ϕ_k – kąt tarcia wewnętrznego materiału kolumny,

α – współczynnik wymiany według wzoru (3.12).

Metoda Balaama-Bookera

Balaam i Booker (cyt. za: [35]) zaproponowali wyznaczenie współczynnika redukcji według wzoru:

$$\beta = \beta^{el} \beta^{pl}. \quad (3.16)$$

Autorzy przyjęli numeryczny model obliczeniowy wykorzystujący do opisu zachowania się kolumny sprężysto-idealnie plastyczne prawo konstytutywne z warunkiem plastyczności Coulomba-Mohra, natomiast do opisu zachowania się gruntu liniowe prawo sprężyste. Równanie (3.16) wymaga obliczenia współczynnika redukcji osiadania ze wzoru:

$$\beta^{el} = \frac{1}{M_0} \left((\lambda_k + 2G_k)\alpha + (\lambda_o + 2G_o)(1 - \lambda) - 2(\lambda_k - \lambda_o)\alpha F \right), \quad (3.17)$$

gdzie

$$F = \frac{(\lambda_k - \lambda)(1 - \alpha)}{2 \left((\lambda_o + G_o - \lambda_k - G_k)\alpha + (\lambda_k + G_k + G_o) \right)}. \quad (3.18)$$

λ_k i G_k są stałymi Lamego dla materiału kolumny, natomiast λ_o , G_o , M_0 są stałymi Lamego i edometrycznym modułem ścisłości dla słabego podłoża gruntowego. β^{el} jest współczynnikiem redukcji osiadania sprężystego, natomiast β^{pl} oznacza współczynnik redukcji osiadania plastycznego wyznaczanym za pomocą nomogramów, cyt. za: [35].

Rozdział 4

Model konstytutywny

4.1 Niezmienniki tensora naprężenia

Rozważmy tensor naprężenia Cauchy'ego $\boldsymbol{\sigma}$ w postaci wektorowej zapisany w formie:

$$\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{33} \ \sigma_{12} \ \sigma_{13} \ \sigma_{23} \ \sigma_{21} \ \sigma_{31} \ \sigma_{32} \right\}^T, \quad (4.1)$$

oraz wektor \mathbf{n} zdefiniowany następująco:

$$\mathbf{n} = \left\{ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right\}^T. \quad (4.2)$$

Przyjmuje się zgodnie z konwencją znaków mechaniki klasycznej, że dodatnie wartości składowych normalnych oznaczają rozciąganie, natomiast ujemne wartości składowych normalnych oznaczają ściskanie.

Wartości składowych głównych tensora naprężenia nie zmieniają się wraz ze zmianą układu odniesienia dlatego nazywa się je niezmiennikami głównymi. Tensor naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ spełnia twierdzenie Cayley'a-Hamiltona¹:

$$\sigma_{ij}^3 - I_\sigma \sigma_{ij}^2 + II_\sigma \sigma_{ij} - III_\sigma I_{ij} = 0. \quad (4.3)$$

Równanie (4.3) ma trzy pierwiastki rzeczywiste, którym odpowiadają kierunki \mathbf{n}_k będące kierunkami głównymi:

$$\begin{aligned} I_\sigma &= \sigma_{ii} \\ II_\sigma &= \frac{1}{2} (\sigma_{ij} \sigma_{ji} - \sigma_{ii} \sigma_{jj}) \\ III_\sigma &= \det(\sigma_{ij}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dewiator tensora naprężenia otrzymuje się odejmując od tensora naprężenia jego część kulistą (aksjator), czyli średnią wartość składowych normalnych naprężenia nazywaną też

¹Twierdzenie Cayley'a-Hamiltona: wielomian charakterystyczny $W(\lambda)$ macierzy \mathbf{A} ma następującą własność: $W(\mathbf{A}) = 0$.

ciśnieniem hydrostatycznym:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}. \quad (4.5)$$

Niezmienniki podstawowe dewiatora tensora naprężenia będące pierwiastkami równania charakterystycznego:

$$s_{ij}^3 - I_s s_{ij}^2 + II_s s_{ij} - III_s I_{ij} = 0 \quad (4.6)$$

wyrażają się następująco:

$$\begin{aligned} I_s &= s_{ii} = 0 \\ II_s &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji} \\ III_s &= \frac{1}{3}s_{ij}s_{jk}s_{ki} \end{aligned} \quad (4.7)$$

4.2 Matematyczny opis prawa konstytutywnego

Jednym z pionierów zastosowania teorii sprężysto-plastyczności do opisu zachowań mechanicznych gruntów, a w zasadzie skał, był Drucker. Zaimplementował on model hypersprężysty z powierzchnią plastyczności podobną w sformułowaniu do tej prezentowanej poniżej. Poziom oceny odkształceń małych lub dużych reguluje odpowiedni (stały) związek stowarzyszony z warunkiem plastyczności ważny dla pewnej części ośrodka gruntowego. Dalej przyjmuje się, że w warunkach obciążenia ściskającego, zniszczenie stowarzyszone jest z generacją wytrzymałości reprezentującej spójność ośrodka, a mianowicie w takim sensie, że wytrzymałość całkowita na ścinanie pozostaje niezmienna, w czasie kiedy element ośrodka jest w fazie zniszczenia (tj. spełniony jest warunek plastyczności), jednakże lokalna wytrzymałość na ścinanie rośnie wraz ze wzrostem naprężenia średniego. Opisany model konstytutywny zaproponowany przez Krieg'a [33] posiada powierzchnię plastyczności, którą można opisać paraboloidą obrotową² "przykrytą" elipsoidą obrotową (ang. planar cap), która to w czasie obciążenia może się przemieszczać. Powyższe można przedstawić wzorem, [33]:

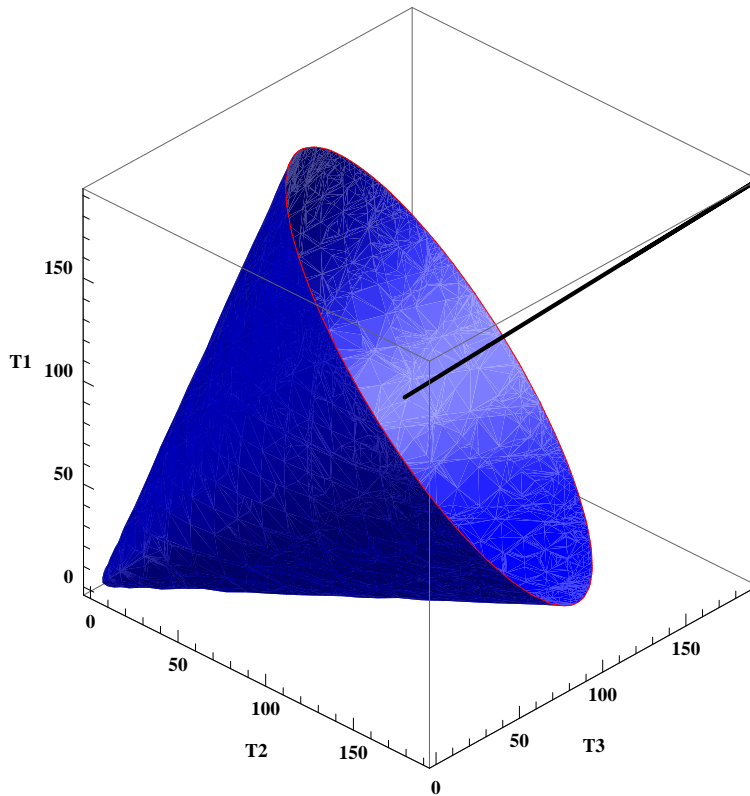
$$F(\sigma_{ij}) = (p - f)(II_s - (a_0 + a_1 p + a_2 p^2)) = 0, \quad (4.8)$$

gdzie f jest funkcją zależną od aksjatora tensora odkształcenia, II_s jest drugim niezmiennikiem dewiatora tensora naprężenia, (4.7), natomiast p jest średnim ciśnieniem związanym z naprężeniem następującą relacją:

$$p = \delta_{ij}\sigma_{ij}/3. \quad (4.9)$$

Funkcji plastyczności (4.8) jest iloczynem dwóch funkcji. Pierwsza opisuje część parabo-

²Ogólna postać powierzchni plastyczności w postaci wielomianu stopnia drugiego w zależności od naprężenia średniego p jest dobrą aproksymacją, nie mniej jednak można pokazać, że paraboloid dla $a_2 = 0$ stanowi dostateczny stopień aproksymacji, jaki można wykorzystać w procedurze walidacji na podstawie porównania z eksperymentem, np. test edometrycznej ściśliwości lub w warunkach trójosiowej ściśliwości, niniejszego prawa plastycznego płynięcia.



Rysunek 4.1: Przykładowa powierzchnia plastyczności z zaznaczoną osią hydrostatyczną w przestrzeni naprężeń Haigh-Westergaard'a.

liczną powierzchni plastyczności, a drugą powierzchnię normalną do osi hydrostatycznej:

$$F_s(s_{ij}) = II_s - (a_0 + a_1p + a_2p^2), \quad (4.10)$$

$$F_p(\sigma_{ij}^{ax}) = p - f. \quad (4.11)$$

Kryterium plastyczności jest określoną funkcją stanu naprężenia, co można zapisać jako warunek:

$$F(\sigma_{ij}) = 0, \quad (4.12)$$

natomiast z procesem czynnym (na powierzchni plastyczności) mamy do czynienia gdy:

$$F(\sigma_{ij}) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0. \quad (4.13)$$

Tensor prędkości odkształcenia, jako tensor drugiej walencji, można przedstawić w postaci sumy dwóch tensorów - aksjatora $\dot{\epsilon}_M$ i dewiatora $\dot{\epsilon}_{ij}^{dev}$. Po przekształceniach otrzymujemy:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{dev} = \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_M \delta_{ij}, \quad (4.14)$$

gdzie:

$$\dot{\epsilon}_M = \frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{3}. \quad (4.15)$$

Deformację plastyczną dzieli się na części: objętościową i dewiatorową zgodnie z (4.14) i teoretycznie można je rozpatrywać oddzielnie.

4.2.1 Plastyczna deformacja objętościowa

Jako pierwsze wymaganie w procedurze obliczeniowej stanowi warunek, na podstawie którego sprawdza się czy początkowy stan naprężenia znajduje się wewnątrz powierzchni plastyczności i nie przekracza pewnej granicy (opisanej parametrem h) wytrzymałości na rozciąganie. Tutaj granicę wytrzymałości na ścinanie stanowi (dla gruntów spoistych) $h = c_u$, spójność w warunkach bez odpływu. Ponieważ powierzchnia plastyczności (z zamknięciem) jest wypukła wystarczy sprawdzić warunek:

$$F(\sigma_{ij}) < 0 \quad \wedge \quad p \geq h. \quad (4.16)$$

Rozważmy teorię plastyczności związaną z aksjATOREM tensora prędkości odkształcenia. W tym przypadku warunek (4.13) ma postać:

$$F_p(\sigma_{ij}^{ax}) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial F_p}{\partial \sigma_{ij}^{ax}} \dot{\sigma}_{ij}^{ax} = 0. \quad (4.17)$$

Deformację plastyczną objętościową można opisać w dwojaki sposób, a mianowicie przy pomocy klasycznej deformacyjnej teorii plastyczności lub przyrostowo, natomiast jeżeli warunki (4.17) nie są spełnione, wówczas odpowiedź układu jest sprężysta, tj.:

$$\dot{p} = -3K_0 \dot{\epsilon}_M, \quad (4.18)$$

gdzie K_0 jest modułem odkształcalności objętościowej dla obciążenia. Jeżeli warunek (4.17) jest spełniony, to równanie (4.11) po zróżniczkowaniu ma postać:

$$\dot{p} = \begin{cases} f'(\epsilon_M) \dot{\epsilon}_M & \text{dla } F_p(\sigma_{ij}^{ax}) = 0, \quad \dot{p} > 0 \\ -3K_0 \dot{\epsilon}_M & \text{dla } F_p(\sigma_{ij}^{ax}) < 0 \quad \vee \quad F_p(\sigma_{ij}^{ax}) = 0, \quad \dot{p} < 0 \\ 0 & \text{dla } p = h, \quad \dot{p} < 0 \end{cases}. \quad (4.19)$$

Deformacyjna teoria plastyczności jest równoważna z przedstawioną powyżej przyrostową teorią plastyczności (4.19):

$$p = \begin{cases} f(\epsilon_M) & \text{dla } F_p(\sigma_{ij}^{ax}) = 0, \quad \dot{\epsilon}_M \leq 0 \\ p(t_u) - 3K_0 \int_{t_u}^t \dot{\epsilon}_M dt & \text{dla } F_p(\sigma_{ij}^{ax}) < 0 \\ h & \text{dla } p = h, \quad \dot{\epsilon}_M > 0 \end{cases}. \quad (4.20)$$

Równoważność przyrostowej i deformacyjnej teorii plastyczności została wykazana przez Budiansky'ego [13]. W praktyce deformacyjna teoria plastyczności wymaga całkowania $\dot{\epsilon}_M$ po czasie, podczas gdy przyrostowa teoria plastyczności wymaga całkowania po $f' \dot{\epsilon}_M$.

4.2.2 Deformacja plastyczna postaciowa

Zachowania plastyczne są formułowane dla dewiatora tensora naprężenia s_{ij} oraz dewiatora tensora prędkości odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}$. Część dewiatorową teorii plastyczności można opisać wykorzystując klasyczną teorię plastyczności. Jeżeli:

$$F_s(s_{ij}) < 0 \quad \vee \quad F_s(s_{ij}) = 0 \quad \text{oraz} \quad \dot{F}_s(s_{ij}) < 0, \quad (4.21)$$

wówczas materiał zachowuje się sprężysto, tj. w opisie wykorzystując dewiator:

$$\dot{s}_{ij} = 2G \dot{\epsilon}_{ij}. \quad (4.22)$$

Jeżeli stan naprężenia osiąga powierzchnię plastyczności, a obciążenie nadal postępuje, tzn. gdy:

$$F_s(s_{ij}) = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial F_s(s_{ij})}{\partial s_{ij}} \dot{s}_{ij} \geq 0, \quad (4.23)$$

wówczas opis części dewiatorowej procesu plastyczności musi być odpowiednio zdefiniowany.

Z założenia, przyjmuje się dekompozycję addytywną dewiatora tensora prędkości odkształcenia na część sprężystą i plastyczną:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^{el} + \dot{\epsilon}_{ij}^{pl}. \quad (4.24)$$

Część sprężystą dewiatora tensora prędkości odkształcenia definiuje się jako:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{el} = \dot{s}_{ij} \frac{1}{2G}. \quad (4.25)$$

Potencjał plastyczny

Teoria plastycznego płynięcia zakłada istnienie potencjału plastycznego $G(\sigma_{ij})$ zdefiniowanego w hiperprzestrzeni naprężeń. R. von Mises [63] zaproponował relację wiążącą dewiator prędkości odkształcenia z funkcją potencjału plastycznego, tj.:

$$de_{ij} = d\lambda \frac{\partial G(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \text{lub} \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\lambda} \frac{\partial G(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (4.26)$$

Parametry λ oraz $d\lambda$ zależą odpowiednio od energii odkształcenia plastycznego. Funkcję potencjału plastycznego w przestrzeni naprężenia przedstawia się jako hiperpowierznię $G(\sigma_{ij}) = 0$, natomiast jej gradient jest wektorem normalnym do tej powierzchni, [6]. Zarówno dewiator prędkości odkształcenia jak i dewiator przyrostu odkształcenia są współliniowe z gradientem potencjału plastycznego – więc są ortogonalne do powierzchni $G(\sigma_{ij})$.

Stowarzyszone prawo płynięcia w przestrzeni naprężenia może być interpretowane jako warunek ortogonalności dewiatora prędkości odkształcenia (lub dewiatora przyrostu odkształcenia) do powierzchni plastyczności:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{pl} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_s(s_{ij})}{\partial s_{ij}}, \quad (4.27)$$

gdzie λ jest nieujemną stałą wyznaczaną z równania (4.23) z uwzględnieniem równania (4.10).

Rozważa się pochodną:

$$\dot{F}_s(s_{ij}) = \frac{\partial F_s(s_{ij})}{\partial s_{ij}} : \dot{s}_{ij} + \frac{\partial F_s(s_{ij})}{\partial p} \dot{p} = 0, \quad (4.28)$$

wykorzystując definicję drugiego niezmiennika dewiatora tensora naprężenia $II_s = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ji}$ otrzymujemy:

$$\frac{\partial F_s(s_{ij})}{\partial s_{ij}} = \frac{\partial II_s}{\partial s_{ij}} = s_{ij}. \quad (4.29)$$

Wykorzystując powyższe, tj. (4.28), (4.29) wraz z (4.10) otrzymujemy:

$$s_{ij} : \dot{s}_{ij} = (a_1 + 2a_2p)\dot{p}. \quad (4.30)$$

W celu wyznaczenia \dot{s}_{ij} dokonuje się rozkładu dewiatora tensora prędkości odkształcenia na część sprężystą i plastyczną (4.24), oraz wykorzystując definicje tych składowych: (4.25) i (4.27), otrzymujemy:

$$\dot{s}_{ij} = 2G\dot{e}_{ij}^{el} = 2G(\dot{e}_{ij} - \dot{e}_{ij}^{pl}) = 2G(\dot{e}_{ij} - \lambda s_{ij}). \quad (4.31)$$

Podstawiając (4.31) do (4.30) oraz po przekształceniu, wyznacza się λ :

$$\lambda = \frac{s_{ij} : e_{ij} - (a_1 + 2a_2p)\frac{\dot{p}}{2G}}{s_{ij} : s_{ij}}. \quad (4.32)$$

Dewiator prędkości naprężenia otrzymuje się podstawiając (4.32) do (4.31):

$$\dot{s}_{ij} = 2G\dot{e}_{ij} - \left(\frac{2Gs_{ij} : e_{ij} - (a_1 + 2a_2p)\dot{p}}{s_{ij} : s_{ij}} \right) s_{ij}. \quad (4.33)$$

4.3 Implementacja

Dla ułatwienia zapisu i przekształceń, nie tracąc niczego z ogólności zapisu, przyjmuje się wektorową reprezentację tensora prędkości naprężenia oraz tensora prędkości odkształcenia. Z uwagi na zasadę dekompozycji deformacji na część objętościową i dewiatorową, zgodnie z (4.14) i (4.15), macierz sztywności \mathbf{E} otrzymuje się z równania:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.34)$$

co wygodnie jest przedstawić w postaci sumy:

$$\mathbf{E} = \overset{S}{\mathbf{E}} + \overset{V}{\mathbf{E}}, \quad (4.35)$$

gdzie:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\mathbf{s}} + \dot{p}\mathbf{n}, \quad (4.36)$$

$$\dot{\mathbf{s}} = \overset{S}{\mathbf{E}} \dot{e}^{dev}, \quad (4.37)$$

$$\dot{p}\mathbf{n} = \overset{V}{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{n}}_M. \quad (4.38)$$

Zatem:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\overset{S}{\mathbf{E}} + \overset{V}{\mathbf{E}} \right) (\dot{e}^{dev} + \dot{\mathbf{n}}_M). \quad (4.39)$$

Z założenia, niech w czasie t_0 w punkcie materialnym ciała (gruntu) istnieje naprężenie $\sigma_{ij}^{(0)}$ i stowarzyszona z nim prędkość odkształcenia $\dot{\epsilon}_{ij}^{(0)}$. Wykorzystując wzory (4.5) i (4.9), dekompozycję tensora naprężenia na część aksjatorową i dewiatorową można przedstawić następującym wzorem:

$$p^{(0)} = -(\sigma_{11}^{(0)} + \sigma_{22}^{(0)} + \sigma_{33}^{(0)})/3, \quad (4.40)$$

$$\begin{cases} s_{11}^{(0)} = \sigma_{11}^{(0)} + p^{(0)}; & s_{12}^{(0)} = s_{21}^{(0)} = \sigma_{12}^{(0)} \\ s_{22}^{(0)} = \sigma_{22}^{(0)} + p^{(0)}; & s_{13}^{(0)} = s_{31}^{(0)} = \sigma_{13}^{(0)} \\ s_{33}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} + p^{(0)}; & s_{23}^{(0)} = s_{32}^{(0)} = \sigma_{23}^{(0)} \end{cases} \quad (4.41)$$

Wykorzystując wzory (4.14) i (4.15) dekompozycja tensora prędkości odkształcenia ma postać:

$$\dot{\epsilon}_M = \dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{33}, \quad (4.42)$$

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_{11} = \dot{\epsilon}_{11} - \epsilon_M/3; & \dot{\epsilon}_{12} = \dot{\epsilon}_{21} = \dot{\epsilon}_{12} \\ \dot{\epsilon}_{22} = \dot{\epsilon}_{22} - \epsilon_M/3; & \dot{\epsilon}_{13} = \dot{\epsilon}_{31} = \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{33} - \epsilon_M/3; & \dot{\epsilon}_{23} = \dot{\epsilon}_{32} = \dot{\epsilon}_{23} \end{cases} \quad (4.43)$$

Rozważa się deformację objętościową. Wykorzystując wzór prostego całkowania Eulera otrzymuje się:

$$\epsilon_M^{(1)} = \epsilon_M^{(0)} + \dot{\epsilon}_M \Delta t. \quad (4.44)$$

Deformację objętościową z założenia przyjmuje się, że pozostaje w zakresie odkształceń sprężystych, zatem:

$${}^{tr}p^{(1)} = p^{(0)} - K_0 \dot{\epsilon}_M \Delta t, \quad (4.45)$$

gdzie ${}^{tr}p^{(1)}$ jest predyktorem sprężystym. Zakładając prawdziwość warunku (4.16), otrzymuje się:

$${}^{tr}p^{(1)} \geq h \quad \text{wówczas} \quad p^{(1)} = h = c, \quad (4.46)$$

gdzie c jest spójnością gruntu. W takim przypadku stan naprężenia znajduje się geometrycznie w wierzchołku powierzchni obrotowej, a dewiator naprężenia jest równy zeru. Składowe macierzy sztywności mają wówczas postać:

$$E_{11} = E_{12} = E_{13} = E_{21} = E_{22} = E_{23} = E_{31} = E_{32} = E_{33} = \frac{p^{(0)} - p^{(1)}}{\dot{\epsilon}_M \Delta t}, \quad (4.47)$$

oraz $E_{ij} = 0$ dla pozostałych ij .

W przypadku gdy warunek (4.16) nie jest spełniony należy sprawdzić czy stan aktualnego naprężenia znajduje się na "domknięciu" powierzchni plastyczności (ang. *cap surface*). Jeżeli:

$$\epsilon_M^{(1)} \geq \epsilon_u, \quad (4.48)$$

gdzie ϵ_u jest całkowitym odkształceniem średnim dla kroku gdy domknięcie *cap* powierzchni plastyczności zostało osiągnięte. Odkształcenie objętościowe jest wtedy sprężyste. Nową wartość ciśnienia i części objętościowej macierzy sztywności otrzymuje się z (4.45), tj.:

$$\text{tr } p^{(1)} = p^{(1)}, \quad (4.49)$$

$$\overset{V}{E}_{11} = \overset{V}{E}_{12} = \overset{V}{E}_{13} = \overset{V}{E}_{21} = \overset{V}{E}_{22} = \overset{V}{E}_{23} = \overset{V}{E}_{31} = \overset{V}{E}_{32} = \overset{V}{E}_{33} = K_0, \quad (4.50)$$

oraz $\overset{V}{E}_{ij} = 0$ dla pozostałych ij .

Jeżeli nierówność (4.48) nie jest spełniona, wówczas ma miejsce stan plastycznej deformacji objętościowej. Wartość całkowitego odkształcenia średniego zastępuje się wartością aksjatora tensora odkształcenia:

$$\epsilon_u = \epsilon_M^{(1)}. \quad (4.51)$$

Ciśnienie wyznacza się z równania (4.20):

$$p^{(1)} = f(\epsilon_M^{(1)}). \quad (4.52)$$

Objętościowa część macierzy sztywności przyjmuje wówczas postać:

$$\overset{V}{E}_{11} = \overset{V}{E}_{12} = \overset{V}{E}_{13} = \overset{V}{E}_{21} = \overset{V}{E}_{22} = \overset{V}{E}_{23} = \overset{V}{E}_{31} = \overset{V}{E}_{32} = \overset{V}{E}_{33} = \frac{p^{(0)} - p^{(1)}}{3\dot{\epsilon}_M \Delta t}, \quad (4.53)$$

oraz $\overset{V}{E}_{ij} = 0$ dla pozostałych ij .

Analizie poddaje się teraz oszacowanie naprężenia dewiatorowego. Sprężysty predyktor dewiatora naprężenia wyznacza się z (4.18), natomiast funkcję plastyczności ${}^{tr}F_s(s_{ij})$ wyprowadza się z (4.25) oraz z (4.10):

$${}^{tr}s_{ij}^{(1)} = s_{ij}^{(0)} + \Delta s_{ij}, \quad ij = 1, 2, 3 \quad (4.54)$$

gdzie³:

$$\begin{aligned} \Delta s_{11} &= 2G\dot{\epsilon}_{11}\Delta t & \Delta s_{12} &= G\dot{\epsilon}_{12}\Delta t \\ \Delta s_{22} &= 2G\dot{\epsilon}_{22}\Delta t & \Delta s_{13} &= G\dot{\epsilon}_{13}\Delta t \\ \Delta s_{33} &= 2G\dot{\epsilon}_{33}\Delta t & \Delta s_{23} &= G\dot{\epsilon}_{23}\Delta t \end{aligned} \quad (4.55)$$

³W opisie wykorzystano inżynierskie odkształcenia ścinające. W przypadku tensora odkształcenia wszystkie przyrosty dewiatora naprężenia przyjmują postać $\Delta s_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij}\Delta t$

$${}^{tr}II_2 = \frac{1}{2} \left[({}^{tr}s_{11})^2 + ({}^{tr}s_{22})^2 + ({}^{tr}s_{33})^2 + 2({}^{tr}s_{12})^2 + 2({}^{tr}s_{13})^2 + 2({}^{tr}s_{23})^2 \right] \quad (4.56)$$

$${}^{tr}F_s(s_{ij}) = {}^{tr}II_2 - \frac{1}{2}R^2, \quad (4.57)$$

gdzie:

$$R^2 = 2(a_0 + a_1 p^{(1)} + a_2 (p^{(1)})^2). \quad (4.58)$$

Sprawdzenie czy predyktor dewiatora naprężenia określa stan sprężysty polega na określeniu jego pozycji geometrycznej, tzn. na sprawdzeniu czy znajduje się wewnątrz powierzchni plastyczności. Jeżeli nierówność:

$$F_s({}^{tr}s_{ij}) \leq 0 \quad (4.59)$$

jest prawdziwa, to proces deformacji przebiega w zakresie sprężystym oraz:

$${}^{tr}s_{11}^{(1)} = s_{11}^{(1)}, \quad {}^{tr}s_{12}^{(1)} = s_{12}^{(1)}, \quad \dots, \quad {}^{tr}s_{33}^{(1)} = s_{33}^{(1)}. \quad (4.60)$$

Wówczas:

$$\dot{\mathbf{s}} = 2G\dot{\mathbf{e}}, \quad (4.61)$$

natomiast dewiatorowa macierz sztywności dla części sprężystej ma postać:

$$\mathbf{E}^{el} = 2G \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

Jeżeli nierówność (4.59) nie jest prawdziwa wówczas proces deformacji dewiatorowej jest częściowo sprężysty i częściowo plastyczny. Geometrycznie miejsce stanu naprężenia w przestrzeni naprężenia nie może wykroczyć poza powierzchnię plastyczności, należy wówczas dokonać procesu relaksacji obliczając odpowiedni przyrost kroku czasowego. Część tego kroku czasowego ($k\Delta t$) wymagana do relaksacji naprężenia na powierzchnię plastyczności jest następująca:

$$k = \frac{\mathbf{s}^{(1)} \cdot \Delta \mathbf{s} - \sqrt{({}^{tr}\mathbf{s}^{(1)} \cdot \Delta \mathbf{s})^2 - 2F_s(s)\Delta \mathbf{s} \cdot \Delta \mathbf{s}}}{\Delta \mathbf{s} \cdot \Delta \mathbf{s}}, \quad (4.63)$$

gdzie:

$$\mathbf{s}^{(1)} \cdot \Delta \mathbf{s} = {}^{tr}s_{11}^{(1)} \Delta s_{11} + {}^{tr}s_{22}^{(1)} \Delta s_{22} + {}^{tr}s_{33}^{(1)} \Delta s_{33} + 2{}^{tr}s_{12}^{(1)} \Delta s_{12} + 2{}^{tr}s_{13}^{(1)} \Delta s_{13} + {}^{tr}s_{23}^{(1)} \Delta s_{23}, \quad (4.64)$$

$$\Delta \mathbf{s} \cdot \Delta \mathbf{s} = (\Delta s_{11})^2 + (\Delta s_{22})^2 + (\Delta s_{33})^2 + 2(\Delta s_{12})^2 + 2(\Delta s_{13})^2 + (\Delta s_{23})^2. \quad (4.65)$$

Stan naprężenia w miejscu "wyjścia" poza powierzchnię plastyczności ma postać:

$${}^c s_{ij} = {}^{tr}s_{ij}^{(1)} - k\Delta s_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.66)$$

Proces odkształcenia plastycznego rozpatruje się następnie na pozostałej części kroku czasowego $k\Delta t$. Relaksacja odbywa się przy pomocy metody tzw. radialnego powrotu na powierzchnię plastyczności (ang. *radial return method*). Wyznaczenia wymagają następujące parametry (w przedstawionej kolejności):

$$\cos\psi = \frac{c\mathbf{s} \cdot k\Delta\mathbf{s}}{|c\mathbf{s}||k\Delta\mathbf{s}|} = \frac{\mathbf{s}^{(1)} \cdot \Delta\mathbf{s} - k\Delta\mathbf{s} \cdot \Delta\mathbf{s}}{\sqrt{\Delta\mathbf{s} \cdot \Delta\mathbf{s}}R}, \quad (4.67)$$

$$c = \exp\left(-\frac{k\sqrt{\Delta\mathbf{s} \cdot \Delta\mathbf{s}}}{R}\right), \quad (4.68)$$

$$r = \frac{R}{2c k\sqrt{\Delta\mathbf{s} \cdot \Delta\mathbf{s}}} \left[1 - c^2 + (1 - c^2 \cos\psi_0)\right]. \quad (4.69)$$

Można zatem zdefiniować tzw. "pseudo" naprężenie lub korektor naprężenia o postaci:

$$p_{s_{ij}} = c s_{ij} + r \Delta s_{ij} = {}^{tr}s_{ij}^{(1)} + (r - k)\Delta s_{ij}. \quad (4.70)$$

Ostatecznie stan naprężenia wyznacza się przy pomocy radialnego powrotu na powierzchnię plastyczności, definiując:

$$\frac{1}{2}(m^p\mathbf{s}) \cdot (m^p\mathbf{s}) = \frac{1}{2}R^2, \quad (4.71)$$

gdzie:

$$m = \frac{R}{\sqrt{p\mathbf{s} \cdot p\mathbf{s}}}, \quad (4.72)$$

oraz wykorzystując (4.70):

$$p\mathbf{s} \cdot p\mathbf{s} = {}^{tr}\mathbf{s}^{(1)} \cdot {}^{tr}\mathbf{s}^{(1)} + 2(r - k)\Delta\mathbf{s} \cdot {}^{tr}\mathbf{s}^{(1)} + (r - k)^2\Delta\mathbf{s} \cdot \Delta\mathbf{s}, \quad (4.73)$$

stan naprężenia dewiatorowego ma postać:

$$s_{ij}^{(1)} = m \left({}^{tr}s_{ij}^{(1)} + (r - k)\Delta s_{ij} \right) \quad (4.74)$$

Dewiatorową macierz sztywności dla części plastycznej wyznacza się przy użyciu (4.33), tj.:

$$\dot{\mathbf{s}} = \left[2G \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) - \frac{2G\mathbf{s} \otimes \mathbf{s}}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} + \frac{a\dot{p}\mathbf{s} \otimes \dot{\mathbf{e}}}{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})(\dot{\mathbf{e}} \cdot \dot{\mathbf{e}})} \right] \dot{\mathbf{e}}.$$

Zatem:

$$\overset{S}{\mathbf{E}} = 2G \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \right) - \frac{2G}{\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}} \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} + \frac{a\dot{p}\mathbf{s} \otimes \dot{\mathbf{e}}}{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{s})(\dot{\mathbf{e}} \cdot \dot{\mathbf{e}})}. \quad (4.75)$$

Sekwencja opisanych powyżej kroków obliczeniowych pozwala wyznaczyć końcowy stan naprężenia dla sprężysto-plastycznego procesu dewiatorowej deformacji przy założeniu stałej prędkości odkształcenia dla danego kroku czasowego. Końcowy stan naprężenia

w kroku czasowym t_1 przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}\sigma_{11}^{(1)} &= s_{11}^{(1)} - p^{(1)}, & \sigma_{12}^{(1)} &= s_{12}^{(1)}, \\ \sigma_{22}^{(1)} &= s_{22}^{(1)} - p^{(1)}, & \sigma_{13}^{(1)} &= s_{13}^{(1)}, \\ \sigma_{33}^{(1)} &= s_{33}^{(1)} - p^{(1)}, & \sigma_{23}^{(1)} &= s_{23}^{(1)}.\end{aligned}\quad (4.76)$$

Z równania (4.38) otrzymuje się:

$$\mathbf{E}^V = -\frac{\dot{p}}{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \quad (4.77)$$

Macierz sztywności ma postać:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^V + \mathbf{E}^S. \quad (4.78)$$

Dla kodów obliczeniowych wymagających macierzy \mathbf{E} , naprężenie w kolejnym kroku czasowym t_1 może być wyznaczone przy pomocy równania:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \check{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)} + \mathbf{E}\boldsymbol{\epsilon}\Delta t, \quad (4.79)$$

gdzie naprężenie $\check{\boldsymbol{\sigma}}^{(0)}$ wyznacza się za pomocą równania:

$$\begin{pmatrix} \check{\sigma}_{11}^{(0)} \\ \check{\sigma}_{22}^{(0)} \\ \check{\sigma}_{33}^{(0)} \\ \check{\sigma}_{12}^{(0)} \\ \check{\sigma}_{13}^{(0)} \\ \check{\sigma}_{23}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11}^{(1)} \\ \sigma_{22}^{(1)} \\ \sigma_{33}^{(1)} \\ \sigma_{12}^{(1)} \\ \sigma_{13}^{(1)} \\ \sigma_{23}^{(1)} \end{pmatrix} - \mathbf{E} \begin{pmatrix} \epsilon_{11}^{(1)} \\ \epsilon_{22}^{(1)} \\ \epsilon_{33}^{(1)} \\ \epsilon_{12}^{(1)} \\ \epsilon_{13}^{(1)} \\ \epsilon_{23}^{(1)} \end{pmatrix} \Delta t. \quad (4.80)$$

Rozdział 5

Metoda Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

5.1 Historia rozwoju metod bezsiatkowych

Metoda Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) jest metodą numeryczną stosowaną do rozwiązywania zagadnień początkowo-brzegowych. Metoda ta wykorzystuje określony rodzaj dyskretyzacji, w której nie wymaga się podziału kontinuum na siatkę, tj. taki rodzaj dyskretyzacji, w której sąsiadujące węzły z początkowej konfiguracji pozostają we wzajemnym sąsiedztwie podczas przebiegu obliczeń. Metoda SPH znalazła swój początek w astrofizyce, gdzie rozwinięto ją w celu symulacji ruchu i kolizji chmur gazów międzygwiazdnych. Twórcami tej metody są Lucy 1977 [41] oraz Gingold i Monaghan 1977 [45]. W 1990 roku metodę SPH rozszerzono do zastosowań w zagadnieniach dynamiki ciała stałego. Libersky i Petschek [38] oraz Benz [9] zaimplementowali w tej metodzie prawa konstytutywne. Motywacją dla rozwoju metody SPH w rozwiązywaniu strukturalnych zagadnień dynamicznych były ograniczenia istniejących metod numerycznych (wykorzystujących dyskretyzację objętości w postaci siatki). Ograniczenia takie dotyczyły problemów z dużą degradacją siatki spowodowaną dużymi deformacjami, modelowaniem propagacji pękania, fragmentacji oraz możliwych zmian faz ciała - stała-ciekła-gazowa. Metoda SPH jest efektywną metodą stosowaną w symulacjach typu FSI (ang. *Fluide-Structure-Interaction*) w przypadku złożonych i zmiennych w czasie stref kontaktowych. Zalety te przekonały wielu badaczy i programistów do stosowania metody SPH, jednak liczne problemy natury matematycznej spowodowały konieczność bardziej szczegółowej analizy w ciągłym rozwoju i udoskonalaniu tej metody, [26].

Metoda SPH należy do rodziny metod bezsiatkowych i chronologicznie jest jej pierwszą reprezentacją. SPH wykorzystuje aproksymację jądra z tzw. funkcją jądra, którą można rozumieć jako pewien rodzaj funkcji wagowej. Identyfikacja problemów związa-

nych między innymi ze stabilnością (patrz podrozdział 5.8) dała początki innych metod z rodziny metod bezsiatkowych, np. takich jak Element-Free-Galerkin (EFG) [8] lub Mesh Less Local Petrov-Galerkin Methods (MLPG) [4], [3]. Jednak zarówno EFG jak i MLPG wymagają dyskretyzacji o postaci pewnego rodzaju siatki (ang. background mesh) w celu wykonania całkowania, przez co utraciły częściowo największą zaletę jaką ma np. SPH, czyli zdolność opisu dużych deformacji i fragmentacji. Dalszy rozwój SPH wyeliminował początkowe wady opisywanej metody.

Metoda SPH została wyprowadzona dla zagadnień opisywanych przez równania różniczkowe cząstkowe w przestrzeni zmiennych takich jak gęstość, prędkość, energia itd. Uzyskanie rozwiązania analitycznego takiego układu równań różniczkowych jest najczęściej niemożliwe. Numeryczne rozwiązywanie wymaga w pierwszej kolejności dyskretyzacji dziedziny, na której równania zostały zdefiniowane. Następnie metoda numeryczna aproksymuje dla każdego punktu każdą zmienną z dopuszczalnej przestrzeni funkcji oraz jej pochodne. Funkcja aproksymująca jest wykorzystana aby przedstawić równania różniczkowe cząstkowe w postaci układu równań różniczkowych zwyczajnych w dyskretnej formie, ze zmienną czasu. Taki układ może być rozwiązany przy pomocy jednego z wielu schematów całkowania numerycznego. W metodzie SPH wymienione powyżej cele realizowane są przez, [40]:

1. dyskretyzację dziedziny na zbiór niepołączonych ze sobą cząstek (*meshfree*),
2. wykorzystanie całkowych reprezentacji dla aproksymacji pola funkcji (aproksymacja jądra) - zapewnia to stabilność numeryczną metody SPH, jako że całkowa reprezentacja w SPH ma efekt wygładzający. W rezultacie otrzymuje się zachowanie podobne jak w sformułowaniu słabym, które to jest stabilne o ile całkowanie numeryczne jest wykonywane przy wykorzystaniu odpowiednio oszacowanych kroków czasowych,
3. aproksymację jądra zastępuje się aproksymacją cząstek - zastąpienie całkowania w całkowej reprezentacji funkcji postacią dyskretną z sumowaniem po wszystkich odpowiednich wartościach w sąsiednich cząstkach z zakresu $2h$ - zwartego nośnika funkcji ¹ - *Compact Support*. W rezultacie dostajemy macierze rzadkie, co jest istotne z uwagi na czasochłonność obliczeń,
4. *adaptacyjność* - aproksymacja cząstek w odpowiednim kroku czasowym - użycie odpowiednich cząstek zależy od ich aktualnego geometrycznego położenia,

¹Nośnik funkcji – domknięcie zbioru argumentów funkcji, dla których ma ona wartość różną od zera. Jeżeli X jest zbiorem zwartym, oraz $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, to zbiór $\text{supp} f := \text{cl}\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ nazywamy zwartym nośnikiem funkcji.

5. aproksymację cząstek wykonuje się dla każdej zmiennej w przestrzeni funkcji, co daje w rezultacie układ równań różniczkowych zwyczajnych ze zmienną czasową,
6. rozwiązanie układu równań różniczkowych zwyczajnych iteracyjną metodą typu jawnego.

5.2 Aproksymacja SPH

5.2.1 Całkowa reprezentacja funkcji

Numeryczna dyskretyzacja w metodzie SPH polega na aproksymacji odpowiednich funkcji, pochodnych i całek w danej cząstce-elemente SPH wykorzystując informacje z sąsiednich cząstek SPH, które na nią oddziałują.

Metoda SPH wykorzystuje w teorii aproksymacji, tzw. radialną funkcję bazową² (ang. *Radial Basis Function*, RBF). RBF jest funkcją zmiennej rzeczywistej, której wartość zależy od odległości od określonego punktu. Każda funkcja mająca właściwość

$$u(x) = u(|x|), \quad (5.1)$$

jest funkcją radialną, przy czym jako normę przyjmuje się zwykle metrykę euklidesową.

Ciągłe zmiany rozkładów poszukiwanych wielkości zastępuje się odpowiednimi estymatami przy wcześniej założonym jądrze aproksymacji. Aproksymacja opiera się na następującej koncepcji reprezentacji dowolnej funkcji $u(\mathbf{x})$:

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}', \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (5.2)$$

gdzie $\delta(\mathbf{x})$ jest deltą Dirac'a zdefiniowaną następująco:

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \begin{cases} 1 & \text{dla } \mathbf{x} = \mathbf{x}' \\ 0 & \text{dla } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}' \end{cases} \quad (5.3)$$

Zastosowanie delty Dirac'a nie jest wygodne w zastosowaniach do zagadnień mechaniki kontinuum (bo δ nie jest funkcją w sensie matematycznym). W celu aproksymacji równania (5.2) zastępuje się niewiadomą funkcję odpowiednią radialną funkcją bazową (ciągłą funkcją gładką). Radialną funkcję bazową dla i -tej cząstki SPH zapisuje się równoważną postacią zapisując:

$$W_{ij} = W_h(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) = W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|, h) = W(R_{ij}, h), \quad (5.4)$$

²RBF używane są też w teorii prognozy, sterowania oraz w sztucznych sieciach neuronowych typu RBF

gdzie

$$R_{ij} = \frac{r_{ij}}{h} = \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|}{h} \quad (5.5)$$

jest względną odległością między cząsteczkami i oraz j , a r_{ij} jest odległością pomiędzy nimi. Funkcja W_{ij} nazywa się funkcją jądra aproksymacji, funkcją wagową lub z ang. *broadening function*, gdzie h jest tzw. długością wygładzania (ang. *smoothing length*). Długość wygładzania jest wielkością określającą odległość oddziaływania rozpatrywanej cząstki na cząstki sąsiednie. W promieniu $2h$ powinna znaleźć się liczba sąsiednich cząstek z przedziału zależnego między innymi, od tzw. "wymiaru" (jednego, dwóch lub trzech) symulacji.

5.2.2 Jądro aproksymacji

Wymaga się aby aproksymująca funkcja jądra spełniała następujące warunki:

$$\int_{\mathbb{R}^3} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) d\Omega_{\mathbf{x}_j} = 1 \quad (5.6)$$

$$\lim_{h \rightarrow \infty} W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h) = \delta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \quad (5.7)$$

i posiadała zwarty nośnik funkcji, tj.:

$$W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = 0 \quad \text{dla} \quad |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| > kh, \quad k \geq 1. \quad (5.8)$$

Funkcja $W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, h)$ jest funkcją dodatnią oraz malejącą wraz ze wzrostem odległości od geometrycznego położenia danej cząstki.

Kilka przykładowych funkcji jądra:

1. Funkcja Gaussa zaproponowana przez [45]:

$$W_h(\mathbf{u}) = \frac{1}{(\pi h^2)^{n/2}} \exp[-\mathbf{u}^2/h^2] \quad (5.9)$$

2. Funkcja sklejana 3-go stopnia (ang. *cubic B-spline*):

$$W\left(\frac{\mathbf{r}}{h}\right) = \frac{C}{h^d} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}q^2 + \frac{3}{4}q^3; & 0 \leq q \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2 - q)^3; & 1 \leq q \leq 2 \\ 0; & q > 2 \end{cases}, \quad (5.10)$$

gdzie $q = r/h$ i skalowanie $r = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$ zapewnia jedną cząstkę SPH dla długości wygładzania h ze stałą C zależną od wymiaru d , tj.:

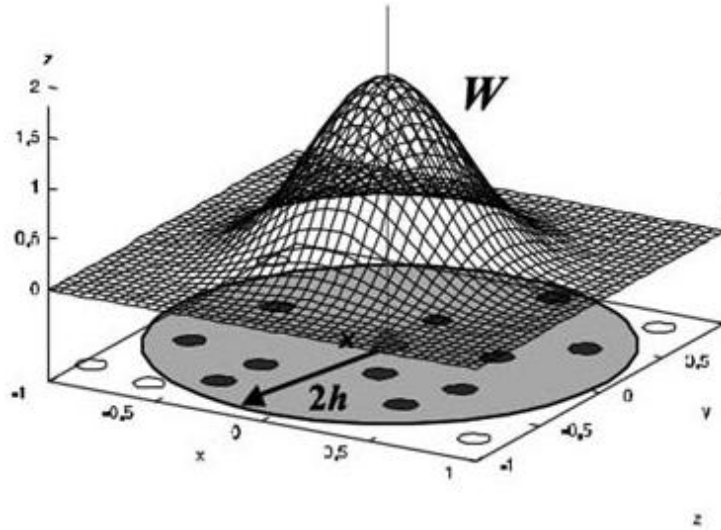
$$C = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{dla} \quad d = 1 \\ \frac{10}{7\pi} & \text{dla} \quad d = 2 \\ \frac{1}{\pi} & \text{dla} \quad d = 3 \end{cases} \quad (5.11)$$

Jest to jedna z najczęściej stosowanych aproksymacji jądra. W porównaniu do funkcji Gaussa, B-spline automatycznie spełnia warunek (5.8) oraz jest klasy C^2 . Funkcję taką zaproponowali Monaghan i Lattanzio [48].

3. Li oraz Liu zaproponowali nową funkcję jądra 4-tego stopnia, [40]:

$$W_h(\mathbf{r}) = \frac{C}{h^d} \begin{cases} 1 - 6q^2 + 8q^3 - 3q^4; & 0 < q < 1 \\ 0; & q \geq 2, \end{cases} \quad (5.12)$$

gdzie stałą C wyznacza się z równania (5.6). Funkcja ta poprawia stabilność oraz dokładność metody SPH w porównaniu do funkcji sklepanej 3-go stopnia. Wadą jej jest fakt, iż jej druga pochodna nie zeruje się na brzegu jej nośnika.



Rysunek 5.1: Przykładowy wykres funkcji jądra $W_h(\mathbf{r})$ w \mathbb{R}^3 , [26]

5.2.3 Wybór długości wygładzania h

Długość wygładzania h można powiązać z promieniem nośnika funkcji jądra. Liczba cząstek SPH w danym nośniku funkcji reguluje dokładność aproksymacji. W procesie dynamicznej deformacji może dojść do zbyt dużego zagęszczenia cząstek będących ze sobą w interakcji lub do sytuacji całkowitej utraty sąsiedztwa. Aby zapobiec takim przypadkom stosuje się zmienną długość wygładzania h . Jednym ze sposobów jest powiązanie długości wygładzania z gęstością, [26]:

$$h = h_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{d}}, \quad (5.13)$$

gdzie d jest wymiarem analizy, natomiast h_0 i ρ_0 oznaczają odpowiednio długość wygładzania oraz gęstość w konfiguracji początkowej.

Benz [9] zaproponował rozwinięcie polegające na powiązaniu długości wygładzania h z równaniem ciągłości poprzez dywergencję wektora prędkości:

$$\dot{h} = \frac{h}{d} \nabla \cdot \mathbf{v}. \quad (5.14)$$

Dla zadanej dokładności interpolacji, liczba cząstek w promieniu h powinna być stała. Jeżeli jednak gęstość jest zmienna w przestrzeni, oraz dodatkowo podczas analizy dynamicznej zmienia się również i w czasie, to długość wygładzania h powinna się również odpowiednio zmieniać aby zapewnić stałą liczbę cząstek w nośniku funkcji jądra. Wybór długości wygładzania h jest kluczowy aby zapewnić odpowiednią dokładność i efektywność obliczeń numerycznych z wykorzystaniem metody SPH.

5.2.4 Symetryzacja jądra aproksymacji

Metodę symetryzacji stosuje się aby zapobiec sytuacjom, w których długości wygładzania dwóch cząstek oddziałujących na siebie są od siebie różne. Sytuacja taka ma miejsce gdy jedna cząstka, o danej (mniejszej) długości wygładzania h , znajduje się w obszarze oddziaływania drugiej (o innej-większej długości wygładzania). Zatem pierwsza jest w zasięgu oddziaływania drugiej ale nie na odwrót (zaprzeczenie trzeciej zasady dynamiki Newtona). Najprostszym rozwiązaniem takiego problemu jest zastąpienie aktualnych długości wygładzania przez ich średnią arytmetyczną. Rozwiązanie to zaproponował Benz [9]:

$$h_{ij} = \frac{h_i + h_j}{2}. \quad (5.15)$$

Inne podejścia wykorzystują:

- średnią geometryczną: $h_{ij} = \frac{2h_i h_j}{h_i + h_j}$,
- wartość maksymalną: $h_{ij} = \max(h_i, h_j)$,
- wartość minimalną: $h_{ij} = \min(h_i, h_j)$.

Funkcja jądra aproksymacji (5.4) przyjmuje wówczas postać:

$$W_{ij} = W(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|/h_{ij}). \quad (5.16)$$

Wyżej wymienione podejścia mają jednak swoje zalety i wady. Podejście średniej arytmetycznej i wartości maksymalnej może prowadzić do użycia „zbyt” wielu sąsiednich cząstek SPH, natomiast podejście średniej geometrycznej i wartości minimalnej może prowadzić do użycia „zbyt” małej ich liczby.

Inne podejście, często implementowane w rozwiązaniach numerycznych, wykorzystuje bezpośrednio jądro aproksymacji, a dokładniej jego wartość średnią, [23]:

$$W_{ij} = \frac{W_i + W_j}{2}, \quad (5.17)$$

gdzie $W_i = W(|x_i - x_j|/h_i)$ oraz $W_j = W(|x_i - x_j|/h_j)$ są odpowiednio funkcjami jądra dla i -tej i j -tej cząstki SPH.

5.2.5 Operator aproksymujący SPH

Estymatę SPH dowolnej funkcji $\langle u(\mathbf{x}_i) \rangle$ w punkcie i (tzw. cząstki dyskretnej) wykonuje się z wykorzystaniem funkcji aproksymującej $W(|x_i - x_j|/h)$, którą w SPH nazywa się funkcją jądra, [26]:

$$\langle u(\mathbf{x}_i, t) \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x}_j, t) W\left(\frac{|x_i - x_j|}{h}\right) dx_j. \quad (5.18)$$

Zakładając, że kontinuum jest jednorodne względem rozkładu gęstości, wówczas można je podzielić na NP „małych” objętości z przypisanymi odpowiednio masami m_1, m_2, \dots, m_{NP} . Każda z objętości, z odpowiadającą jej masą, może być przypisana do cząstki SPH. Zatem przyjmując $dx_j = \frac{m_j}{\rho_j}$ można zapisać wersję dyskretną równania (5.18) w postaci:

$$\langle u_i \rangle = \sum_j^{NP} u_j W\left(\frac{|x_i - x_j|}{h}\right) \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (5.19)$$

Liczba NP sąsiednich cząstek SPH zależy od współczynnika wygładzania h i jest to wartość zmienna dla każdej cząstki SPH w każdym kroku czasowym.

Stosując (5.19) bezpośrednio do gęstości ($A(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})$) otrzymuje się następujące równanie (ang. *summation density*):

$$\langle \rho(\mathbf{x}) \rangle = \sum_j^{NP} W_h(|x_i - x_j|) \rho(\mathbf{x}_j) \frac{m_j}{\rho_j} = \sum_j^{NP} W_h(|x_i - x_j|) m_j. \quad (5.20)$$

Kolejną ważną właściwością aproksymacji SPH jest:

$$\langle \nabla u \rangle = \nabla \langle u \rangle - u \langle \nabla W \rangle. \quad (5.21)$$

Powyższa właściwość wynika z faktu, iż:

$$\langle \nabla W \rangle \approx \nabla \langle W \rangle = \nabla \sum_j W_h(x_i - x_j) \frac{m_j}{\rho_j} = \nabla(1) = 0. \quad (5.22)$$

5.2.6 Różniczkowalność estymaty SPH

Aproksymację pochodnej $\nabla u(\mathbf{x})$ wykonujemy poprzez podstawienie w równaniu (5.18) wyrażenia:

$$\langle \nabla u(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} [\nabla u(\mathbf{x}', t)] W_h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}'. \quad (5.23)$$

Ponieważ:

$$[\nabla u(\mathbf{x}', t)] W_h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \nabla[u(\mathbf{x}', t)] W_h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) - u(\mathbf{x}', t) \nabla W_h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|), \quad (5.24)$$

i po podstawieniu do (5.23) i zastosowaniu twierdzenia Gaussa-Ostrogradskiego otrzymuje się:

$$\langle \nabla u(\mathbf{x}, t) \rangle = \int_S [u(\mathbf{x}', t)] W_h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \mathbf{n} dS - \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x}', t) \nabla W_h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}', \quad (5.25)$$

a korzystając z właściwości (5.8), z którego wynika że całka powierzchniowa zeruje się (funkcja jądra zeruje się na brzegu), wówczas w rezultacie tego otrzymuje się:

$$\langle \nabla u(\mathbf{x}, t) \rangle = - \int_{\mathbb{R}^d} u(\mathbf{x}', t) \nabla W_h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) d\mathbf{x}'. \quad (5.26)$$

Z równania (5.26) zauważa się, iż operator różniczkowy działający na funkcję "przechodzi" na funkcję jądra $W(x, h)$, zatem gradient liczy się z wartości funkcji jądra i jej pochodnej, a nie z samej funkcji. Dzięki temu spełniony jest wymóg zgodności numerycznej, co w przypadku stabilności schematu gwarantuje numeryczną zbieżność (tw. Lax'a-Richtmyer'a). Należy pamiętać że nośnik funkcji $W_h(\mathbf{r})$ powinien znajdować się wewnątrz obszaru Ω , tzn. warunek brzegowy problemu nie może się znaleźć wewnątrz jakiegokolwiek nośnika funkcji $W_h(\mathbf{r})$. Sytuacja taka stwarzała problemy obliczeniowe, o których będzie mowa w rozdziale 5.3. Dyskretna forma równania (5.26) przyjmuje zatem postać:

$$\langle \nabla u_i \rangle = - \sum_j^{NP} u_j \nabla W_h(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \frac{m_j}{\rho_j}. \quad (5.27)$$

W metodzie SPH gęstość odgrywa bardzo istotną rolę. W celu uzyskania formuł gradientów dających dokładniejsze wyniki gradient pola skalarnego zapisuje się w postaci:

$$\begin{aligned} \rho \nabla + u \nabla \rho &= \nabla(\rho u), \\ \nabla u &= \frac{\nabla(\rho u) - u \nabla \rho}{\rho}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Gradient funkcji interpolacyjnej SPH można aproksymować w następujący sposób:

$$\langle \nabla u \rangle_i = - \sum_j^{NP} \frac{m_j}{\rho_j} u_{ij} \nabla_i W_{ij}. \quad (5.29)$$

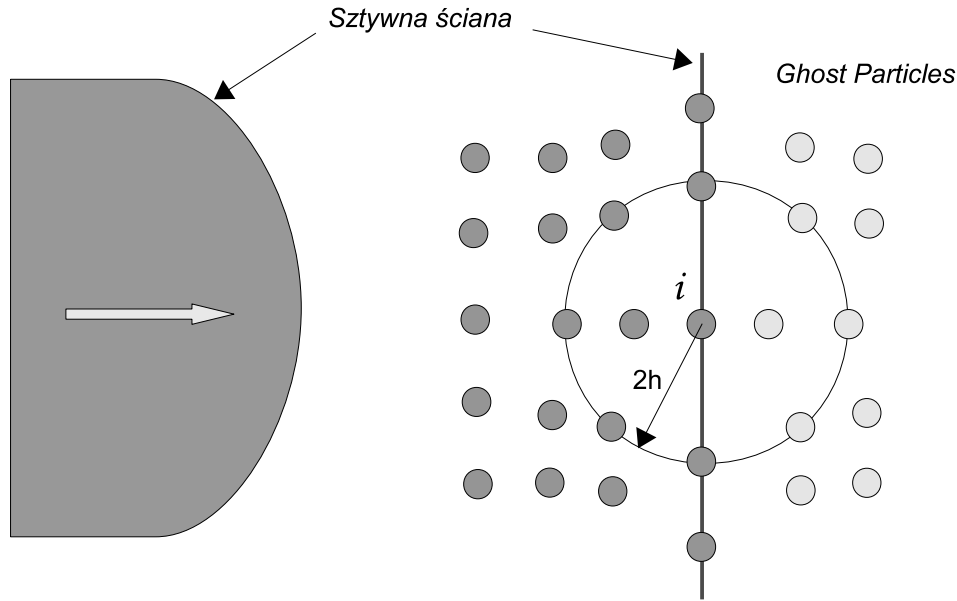
5.3 Warunki brzegowe w ujęciu SPH

Fakt, że całkowanie funkcji w aproksymacji SPH dla danej i -tej cząstki odbywa się w nośniku jej funkcji mogło prowadzić do trudności obliczeniowych wynikających z braku odpowiedniej liczby cząstek w promieniu κh w przypadku elementów SPH leżących na brzegu lub w promieniu κh . Libersky i Petschek [39] zaproponowali koncepcję *Ghost Particles* (Rys. 5.2) pierwotnie do modelowania powierzchni swobodnych, która polegała na lustrzanym odbiciu cząstek SPH przez brzeg problemu, w taki sposób aby w nośniku funkcji jądra dla każdej cząstki SPH leżącej w promieniu κh od brzegu znalazła się odpowiednia liczba cząstek-sąsiadów. Operacja ta jest powtarzana w każdym kroku czasowym. Randles i Libersky [53] zaproponowali inne, bardziej ogólne podejście. Polega ono na przypisaniu tej samej wartości (prędkości i gęstości) do pola zmiennych wszystkich wirtualnych cząstek SPH, a następnie uzyskaniu warunku brzegowego poprzez interpolację wartości w wirtualnych cząstkach oraz w cząstkach znajdujących się wewnątrz obszaru problemu.

Metodologia postępowania jest następująca: dla danej i -tej cząstki SPH znajdującej się w odległości κh od warunku brzegowego, wirtualne cząstki SPH są umieszczane symetrycznie po drugiej stronie warunku brzegowego. Wirtualnym SPH przypisujemy te same wartości gęstości co ich "prawdziwym" reprezentantom, ale wektory prędkości z przeciwnym zwrotem. Jednakże, aby w pełni zapobiec nierealnym penetracjom - przemieszczeniom cząstek przez brzeg, na cząstki SPH znajdujące się na brzegu analizowanego problemu dodatkowo jest nakładana odpowiednia siła odpychająca, kiedy tylko "wewnętrzne" SPH zbliżają się do brzegu. Siłę tą oblicza się podobnie jak potencjał Lennarda-Jones'a³.

Podsumowując, podejście takie jest stabilne i efektywne, zapobiega nierealnym penetracjom i dodatkowo zwiększa dokładność metody (Liu 2002).

³Potencjał Lennarda-Jones'a ma zastosowanie głównie w chemii molekularnej. Składa się z części repulsywnej i atraktywnej i wprowadza między innymi siły odpychające przy małych odległościach.

Rysunek 5.2: Koncepcja *Ghost Particles*, [39]

5.4 Sortowanie

W metodzie SPH, w obszarze zwartej nośnika funkcji wygładzającej dla danej cząstki SPH, znajduje się zawsze skończona liczba sąsiednich cząstek SPH. W odróżnieniu od metod z dyskretyzacją w postaci siatki, gdzie położenie sąsiednich węzłów jest z góry określone, najbliższe sąsiednie cząstki SPH dla danej cząstki mogą się zmieniać w czasie. Najpopularniejsze algorytmy poszukujące sąsiadujące cząstki to, [40]:

- *All-pair search* algorytm,
- *Linked-list search* algorytm,
- *Tree search* algorytm.

5.5 Równania zachowania w ujęciu SPH

Równania zachowania w mechanice kontinuum

Równania zachowania stosowane w mechanice kontinuum, przy założeniu braku sił masowych, braku źródeł ciepła, dyfuzji i przewodnictwa cieplnego mają postać:

- równanie zachowania masy:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (5.30)$$

gdzie ρ jest gęstością, \mathbf{v} jest polem prędkości definiowanym następująco $\mathbf{v} := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}$,

– równanie zachowania pędu:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \sigma, \quad (5.31)$$

gdzie σ jest naprężeniem Cauchy'ego z ujemnym znakiem⁴ (tj. w klasycznej konwencji znaków w mechanice - rozciąganie ma znak dodatni);

– równanie zachowania energii:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{1}{\rho} \sigma : \nabla \mathbf{v}, \quad (5.32)$$

gdzie e jest gęstością energii wewnętrznej.

Równanie ciągłości w ujęciu SPH

Gęstość w sformułowaniu SPH odgrywa istotną rolę, ponieważ wpływa na dystrybucję cząstek oraz zmianę długości wygładzania h . Równanie (5.20) dla danej i -tej cząstki (*summation density*) ma postać:

$$\rho_i = \sum_j^{NP} m_j W_{ij},$$

gdzie W_{ij} rozumie się jako funkcję jądra dla i -tej cząstki. Równanie to przedstawia gęstość cząstki aproksymowaną średnią ważoną gęstością cząstek znajdujących się w obszarze o promieniu κh (nośnik funkcji W_{ij}).

Zastosowanie metody do przypadków problemów brzegowych z występującą powierzchnią swobodną, oraz w zagadnieniach kontaktowych, w których biorą udział różne materiały, szczególnie gdy sumowanie cząstek występuje tylko po cząstkach z danego materiału, proponuje się modyfikację polegającą na normalizacji prawej strony równania (5.20) poprzez sformułowanie SPH funkcji jądra dla sąsiednich cząstek, [53]:

$$\rho_i = \frac{\sum_j^{NP} m_j W_{ij}}{\sum_j^{NP} \left(\frac{m_j}{\rho_j}\right) W_{ij}}. \quad (5.33)$$

Różne formy prawej strony równania (5.30) mogą prowadzić do różnych form równania ciągłości w sformułowaniu SPH. Jedną z możliwych opcji jest zastosowanie aproksymacji SPH tylko dla dywergencji prędkości (wykorzystując (5.19)), podczas gdy gęstość po prawej stronie równania (5.30) szacuje się w cząstkach, w których wyznacza się gradient, [40], tj. *continuity density* :

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \sum_{j=1}^{NP} \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_j \cdot \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad (5.34)$$

⁴Ogólnie przyjęty zapis w literaturze dotyczącej metody SPH.

gdzie sumowanie po i nie występuje.

Stosując właściwość (5.22), prawą stronę równania (5.34) można przedstawić w postaci:

$$\rho_i \sum_{j=1}^{NP} \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_i \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} = \rho_i \mathbf{v}_i \left(\sum_{j=1}^{NP} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} \right) = 0. \quad (5.35)$$

Po dodaniu prawej strony równania (5.35) do prawej strony (5.34) otrzymuje się kolejną aproksymację SPH równania ciągłości:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i \sum_{j=1}^{NP} \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad (5.36)$$

gdzie:

$$\mathbf{v}_{ij} = (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j). \quad (5.37)$$

Sformułowanie to wprowadza różnicę prędkości do dyskretnego sformułowania aproksymacji SPH.

Wykorzystując aproksymację (5.29) otrzymuje się alternatywną formę równania ciągłości w ujęciu SPH w postaci:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i \sum_{j=1}^{NP} \frac{m_j}{\rho_i} \mathbf{v}_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_{j=1}^{NP} m_j \mathbf{v}_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i}. \quad (5.38)$$

Z powyższego wynika, że zmiana gęstości w czasie jest ściśle związana ze względnymi prędkościami pomiędzy rozważaną cząstką SPH, a wszystkimi innymi cząstkami znajdującymi się w obszarze nośnika funkcji jądra.

Oba podejścia – *summation density* i *continuity density* mają swoje wady i zalety. W praktyce, w szczególności w zagadnieniach z mechaniki płynów, częściej stosuje się podejście pierwsze, pomimo iż wymaga ono większych nakładów obliczeniowych wynikających z faktu, iż gęstość musi być obliczona zanim inne parametry zostaną oszacowane, a następnie dopiero obliczana jest funkcja wygładzająca. W analizach problemów, w których występują duże nieciągłości (eksplozje, penetracje z dużą prędkością jednego ciała w drugie) preferuje się podejście *continuity density*.

Równanie zachowania pędu w ujęciu SPH

Analogicznie jak w równaniach zachowania masy, różne formy równania zachowania pędu w ujęciu SPH zależą od przyjętych metod aproksymacji.

Stosując aproksymację SPH (5.22) bezpośrednio do gradientu w równaniu (5.31), oraz korzystając z (5.19) otrzymuje się następujące równanie:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \sum_j^{NP} m_j \frac{\sigma_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad (5.39)$$

a w celu symetryzacji dodaje się następującą zależność:

$$\sum_j^{NP} m_j \frac{\sigma_i}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\sigma_i}{\rho_i} \left(\sum_j^{NP} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (5.40)$$

i otrzymuje najczęściej spotykane sformułowanie równania zachowania pędu w ujęciu SPH o postaci:

$$\frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\rho_i} \sum_j^{NP} m_j \frac{\sigma_i + \sigma_j}{\rho_i \rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i}. \quad (5.41)$$

Inne, również symetryczne sformułowanie, można uzyskać zaczynając od przekształcenia reguły ilorazu:

$$\nabla \left(\frac{\sigma}{\rho} \right) = \frac{\rho \nabla \sigma - \sigma \nabla \rho}{\rho^2}, \quad (5.42)$$

$$-\nabla \left(\frac{\sigma}{\rho} \right) = -\frac{\rho \nabla \sigma}{\rho^2} + \frac{\sigma \nabla \rho}{\rho^2}, \quad (5.43)$$

$$\frac{1}{\rho} \nabla \sigma = \nabla \left(\frac{\sigma}{\rho} \right) + \frac{\sigma}{\rho^2} \nabla \rho, \quad (5.44)$$

co jest równoznaczne z:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma}{\rho} \right) + \frac{\sigma}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (5.45)$$

Następnie wykorzystując równanie (5.45) i stosując aproksymację SPH do gradientów otrzymujemy:

$$\frac{dv_i}{dt} = -\left(\sum_j^{NP} \frac{m_j}{\rho_j} \left(\frac{\sigma_j}{\rho_j} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \right) + \frac{\sigma_i}{\rho_i^2} \sum_j^{NP} \frac{m_j}{\rho_j} \left(\rho_j \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \right) \right), \quad (5.46)$$

co po przekształceniu można przedstawić w postaci:

$$\frac{dv_i}{dt} = -\sum_j^{NP} m_j \left(\frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i}. \quad (5.47)$$

Równanie zachowania energii w ujęciu SPH

W zależności od zastosowanej metody aproksymacyjnej otrzymuje się alternatywne formy równania zachowania energii w ujęciu SPH. Stosując do równania (5.32) reguły aproksymaty SPH otrzymuje się:

$$\left\langle \frac{de}{dt} \right\rangle = - \left\langle \frac{1}{\rho} \sigma \nabla \mathbf{v} \right\rangle \approx - \left\langle \frac{1}{\rho^2} \sigma : (\rho \nabla \mathbf{v}) \right\rangle \approx - \frac{1}{\langle \rho^2 \rangle} \langle \sigma \rangle : \langle \rho \nabla \mathbf{v} \rangle. \quad (5.48)$$

Korzystając z (5.38) otrzymuje się:

$$-\frac{\sigma}{\rho} \nabla v_i = \frac{\sigma_i}{\rho_i^2} \sum_j^{NP} m_j v_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i}. \quad (5.49)$$

Wykorzystanie zależności:

$$-\frac{\sigma}{\rho} \nabla \mathbf{v} = -\nabla \left(\frac{\sigma \mathbf{v}}{\rho} \right) + \mathbf{v} \nabla \left(\frac{\sigma}{\rho} \right), \quad (5.50)$$

proceedzi do:

$$-\frac{\sigma}{\rho} \nabla v_i = \sum_j^{NP} m_j \frac{\sigma_j}{\rho_j^2} v_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i}. \quad (5.51)$$

Sumując równania (5.49) oraz (5.51) otrzymuje się, [37]:

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j^{NP} m_j \left(\frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j}{\rho_j^2} \right) v_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \quad (5.52)$$

Innym podejściem jest wykorzystanie (5.48) oraz (5.38), co prowadzi do:

$$-\frac{\sigma}{\rho} \nabla \mathbf{v} = \frac{\sigma_i}{\rho_i} \sum_j^{NP} \frac{m_j}{\rho_j} v_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i}. \quad (5.53)$$

Dzięki zależności:

$$-\frac{\sigma}{\rho} \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \left(\nabla (\sigma \mathbf{v}) - \mathbf{v} \nabla \sigma \right), \quad (5.54)$$

można uzyskać:

$$-\frac{\sigma}{\rho} \nabla v_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_j^{NP} m_j \frac{\sigma_j}{\rho_j} v_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i}. \quad (5.55)$$

Analogicznie, sumując równania (5.53) oraz (5.55) uzyskuje się alternatywną formę równania zachowania energii w ujęciu SPH, [37]:

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_j^{NP} m_j \frac{\sigma_i + \sigma_j}{\rho_i \rho_j} v_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i} \quad (5.56)$$

5.6 Sztuczna lepkość

W rozwiązywaniu zagadnień mających na celu symulację propagacji fali uderzeniowej wymagane są dodatkowe modyfikacje metody SPH. Wynikają one z faktu powstawania podczas obliczeń (niefizycznych) oscylacji w polu prędkości i ciśnienia za falą uderzeniową. Równania zachowania, równania konstytutywne i równania stanu nie odzwierciedlają dysypacyjnej natury fal uderzeniowych, [26]. Niestabilność numeryczna, będąca wynikiem tych oscylacji, ma swoje źródło w nieciągłości pola prędkości, jak również w występujących osobliwościach w aproksymacji układów równań różniczkowych typu parabolicznego lub hiperbolicznego. W metodzie różnic skończonych, jak również w metodzie elementów skończonych, problem niestabilności numerycznej rozwiązuje się poprzez dodanie tzw.

sztucznej lepkości. Pojęcie sztucznej lepkości ma fizyczne wytłumaczenie. W zjawisku fali uderzeniowej, zawsze część energii kinetycznej zamienia się w energię cieplną. Im mocniejsza jest fala uderzeniowa, tym więcej energii kinetycznej podlega transformacji. Fizycznie, ta zamiana energii może być rozumiana jako lepkie tłumienie. Dodanie sztucznej lepkości w metodzie SPH pomaga "wygładzić" numeryczne oscylacje pól prędkości i ciśnienia wywołanych falą uderzeniową, [48]. Odbywa się to poprzez dodanie do równań zachowania równań sztucznej lepkości obliczonych z gradientów prędkości. Takie podejście „rozciąga” falę uderzeniową na obszar kilku sąsiednich punktów dyskretyzacji. Przedstawione metodologie wykorzystujące sztuczną lepkość w celu tłumienia oscylacji numerycznych w analizach problemów dynamicznych są powszechnie stosowane w metodach takich jak Metoda Elementów Skończonych, Metoda Objętości Skończonych, czy też Metoda Elementów Dyskretnych.

Pojęcie *sztucznej lepkości* zaproponowali von Neumann i Richtmyer w 1950 roku, [64]:

$$q_{nlin} = \begin{cases} \alpha \rho h^2 (\nabla v)^2 & \nabla v < 0 \\ 0 & \nabla v \geq 0. \end{cases} \quad (5.57)$$

Równanie to jest nieliniowe z kwadratowym członem w dywergencji prędkości pomiędzy dwoma węzłami dyskretyzacji. q jest sztuczną lepkością Neumann'a-Richtmyer'a występującą tylko w warunkach ściskania. α to bezwymiarowy współczynnik (wartość skalarna) gwarantująca spełnienie warunku $q_{nlin} \neq 0$ podczas ściskania i regulujący „rozciągnięcie” fali uderzeniowej na kilka węzłów dyskretyzacji.

Wykorzystanie q_{nlin} w modelowaniu silnych fal uderzeniowych nie wygładza jednak całkowicie oscylacji za falą uderzeniową, dlatego Landshoff [36] wprowadził dodatkowy liniowy człon w celu ich dalszego wygładzenia. Człon ten ma następującą postać:

$$q_{lin} = \begin{cases} \beta \rho h c \nabla v & \nabla v < 0 \\ 0 & \nabla v \geq 0, \end{cases} \quad (5.58)$$

gdzie c jest prędkością rozchodzenia się dźwięku (dla gruntów jest to wartość rzędu 450-600 m/s), β jest współczynnikiem kontrolującym dyssypację numerycznych oscylacji i jest odpowiedzialny za kontrolę wzajemnych penetracji cząstek SPH.

Podstawowy wzór definiujący sztuczną lepkość jest sumą członu nieliniowego i liniowego:

$$q = q_{nlin} + q_{lin}. \quad (5.59)$$

Implementacja sztucznej lepkości do równań zachowania sprowadza się do dodania q , jako członu ciśnienia do tensora naprężenia.

Metoda SPH, w początkowej wersji służyła do symulacji zjawisk, w których przejście fali uderzeniowej nie występowało lub nie wpływało na wynik obliczeń. Sztuczną lepkość w metodzie SPH po raz pierwszy zastosował Monaghan i Gingold, [46]. Zaproponowana przez nich sztuczna lepkość dla metody SPH rozwiązuje problem dysypacyjnej natury fal uderzeniowych wynikającej z transformacji energii kinetycznej w ciepłą oraz dodatkowo zapobiega niefizycznym wzajemnym penetracjom cząstek SPH. Sztuczna lepkość w metodzie SPH przedstawia się jako:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha_{\Pi}\bar{c}_{ij}\mu_{ij} + \beta_{\Pi}\mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}} & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} < 0 \\ 0 & \mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij} \geq 0 \end{cases}, \quad (5.60)$$

gdzie:

$$\mu_{ij} = \frac{h\mathbf{v}_{ij} \cdot \mathbf{x}_{ij}}{x_{ij}^2 + \epsilon_0 h_{ij}^2}; \quad (5.61)$$

$$h_{ij} = \frac{1}{2}(h_i + h_j); \quad (5.62)$$

$$\bar{c}_{ij} = \frac{1}{2}(c_i + c_j); \quad (5.63)$$

$$\bar{\rho}_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_j); \quad (5.64)$$

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j; \quad \mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j. \quad (5.65)$$

Współczynnik ϵ_0 , w praktyce jest najczęściej wartością rzędu 0.01, a wprowadza się go w celu uniknięcia matematycznych osobliwości Π_{ij} pojawiających się w przypadku małych odstępów pomiędzy cząsteczkami SPH, [47]. Człon lepkości powiązany z α_{Π} generuje lepkość objętościową (tzw. drugą lepkość), podczas gdy człon powiązany z β_{Π} nie dopuszcza do wzajemnych penetracji cząstek SPH przy dużych wartościach liczby Macha (jego wpływ jest ograniczony w przypadku gdy prędkość cząstek SPH jest dużo niższa od prędkości rozchodzenia się dźwięku w analizowanym ośrodku). Monaghan, [46] proponuje wartości $\alpha_{\Pi} = 0.01$ oraz $\beta_{\Pi} = 0$ dla zagadnień ze swobodną powierzchnią, Libersky [39] wartości $\alpha_{\Pi} = 2.5$ oraz $\beta_{\Pi} = 2.5$ dla pozostałych zagadnień w mechanice ośrodków ciągłych, natomiast Bui, Sako i Fukagawa [14] sugerują dla ośrodków porowatych w tym gruntów $\alpha_{\Pi} = 1$ oraz $\beta_{\Pi} = 1$.

Równanie zachowania pędu (5.47), uwzględniające sztuczną lepkość w ujęciu SPH, przyjmuje zatem postać [40]:

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = - \sum_j^{NP} m_j \left(\frac{\sigma_i}{\rho_i^2} + \frac{\sigma_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i}, \quad (5.66)$$

natomiast równanie zachowania energii (5.52) przyjmuje postać, [40]:

$$\frac{dE_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{NP} m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} + \Pi_{ij} \right) (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{x}_i} + \frac{1}{\rho_i} \tau_i \epsilon_i + H_i. \quad (5.67)$$

5.7 Całkowanie po czasie w ujęciu SPH

Metoda SPH podobnie jak inne metody stosowane w symulacji zagadnień dynamicznych, do całkowania po czasie wykorzystuje metody jawne *explicit* takie jaką jest algorytm Verleta, a dokładniej wariant skokowy Störmera-Verleta czyli metodę „żabiego skoku” LF (ang. *Leap-Frog*), zaliczaną do algorytmów o dokładności rzędu drugiego, metodę Rungego-Kutty, czy metodę predyktor-korektor.

Metoda *Leap-Frog* jest jawną metodą drugiego rzędu, która wymaga jednokrotnego obliczenia poszukiwanej wartości w jednym kroku czasowym. Jest metodą odwracalną w czasie i symplektyczną (tj. zachowującą całość ruchu). Nie zachowuje energii, ale zachowuje wartość zaburzonego hamiltonianu H' , więc całkowita energia układu podczas symulacji fluktuuje wokół zadanej wartości. *Leap-Frog* nie jest algorytmem ogólnym. Algorytm ten ma zastosowanie w rozwiązywaniu problemów, które da się zapisać w postaci równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego. Zaletą tego algorytmu jest małe zapotrzebowanie na pamięć komputerową podczas obliczeń. Metoda ta jednak może być niestabilna dla nieodpowiednio dobranych – dużych kroków czasowych.

Algorytm metody *Leap-Frog* realizuje się w następujących krokach obliczeniowych, [37]:

$$\rho_i^{n+1} = \rho_i^n (1 - D_i^n \Delta t^n), \quad (5.68)$$

$$\mathbf{v}_i^{n+1/2} = \mathbf{v}_i^{n-1/2} + \frac{1}{2}(\Delta t^n + \Delta t^{n-1})\mathbf{F}_i^n, \quad (5.69)$$

$$E_i^{n+1} = E_i^n + \Delta t^n G_i^n, \quad (5.70)$$

$$\mathbf{S}_i^{n+1} = \mathbf{S}_i^n + \Delta t^n \mathbf{H}_i^n, \quad (5.71)$$

$$\mathbf{x}_i^{n+1} = \mathbf{x}_i^n + \mathbf{v}_i^{n+1/2} \Delta t^n, \quad (5.72)$$

gdzie:

$$D_i^n = \sum_{j=1}^{NP} \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{v}_i(t_n) - \mathbf{v}_j(t_n)) \cdot \nabla_i W_{ij}, \quad (5.73)$$

$$\mathbf{F}_i^n = - \sum_{j=1}^{NP} m_j \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_i^n}{\rho_i^2(t^n)} + \frac{\boldsymbol{\sigma}_j^n}{\rho_j^2(t^n)} + \Pi_{ij}^n \mathbf{I} \right) \cdot \nabla_i W_{ij}, \quad (5.74)$$

$$G_i^n = - \sum_{j=1}^{NP} m_j \mathbf{v}_{ij}^n \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_i^n}{\rho_i^2(t^n)} + \frac{1}{2} \Pi_{ij}^n \mathbf{I} \right) \cdot \nabla_i W_{ij}, \quad (5.75)$$

$$\mathbf{H}_i^n = \overset{\nabla}{\mathbf{S}}_i(t_n) + \mathbf{S}_i(t_n) \cdot \mathbf{W}_i(t_n) + \mathbf{S}_i(t_n) \cdot \mathbf{W}_i^T(t_n), \quad (5.76)$$

natomiast:

$$\mathbf{v}_i^n = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_i^{n+1/2} + \mathbf{v}_i^{n-1/2}). \quad (5.77)$$

Stabilność schematu kontrolują się wykorzystując warunek Couranta-Friedrichsa-Lewy'ego (*CFL*). Fizyczne znaczenie tego warunku, dla zagadnienia propagacji fali jest następujące: dla przypadku modelu opisującego propagację fali z punktową dyskretyzacją przestrzeni, maksymalny czas propagacji fali z jednego punktu dyskretyzacji do drugiego, uzyskany numerycznie, nie może być dłuższy niż maksymalny czas potrzebny rzeczywistej fali na pokonanie tego samego dystansu ([2], [27]).

Zalecany krok czasowy powinien spełniać warunek:

$$\Delta t \leq C_{CFL} \frac{h}{c + s}, \quad (5.78)$$

gdzie c jest prędkością rozchodzenia się dźwięku w ośrodku, s jest prędkością cząstki (lub maksymalną prędkością cząstki w zbiorze wszystkich cząstek SPH). Parametr C_{CFL} jest zależny od długości wygładzania h i przyjmuje wartość z przedziału $< 0, 0.2 >$. Warunek ten wymaga aby krok czasowy był proporcjonalny do najmniejszej odległości pomiędzy cząstkami SPH, co w metodzie SPH jest reprezentowane przez najmniejszą długość wygładzania h .

Biorąc pod uwagę dyssypację lepkości oraz siły zewnętrzne, Monaghan [44] zaproponował wzór na obliczanie maksymalnego kroku czasowego w metodzie SPH, wykorzystując algorytm LF:

$$\Delta t_{cv} = \min\left(\frac{h_i}{c_i + 0.6(\alpha_{\Pi} c_i + \beta_{\Pi} \max(W_{ij}))}\right), \quad (5.79)$$

$$\Delta t_f = \min\left(\frac{h_i}{f_i}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.80)$$

gdzie f_i jest wielkością siły na jednostkę masy cząstki SPH.

Morris i Monaghan [49] zaproponowali również inne wyrażenie na wyznaczenie wartości kroku czasowego, uwzględniając dyfuzję lepkości:

$$\Delta t_{cv} = 0.125 \frac{h_i^2}{\nu}, \quad (5.81)$$

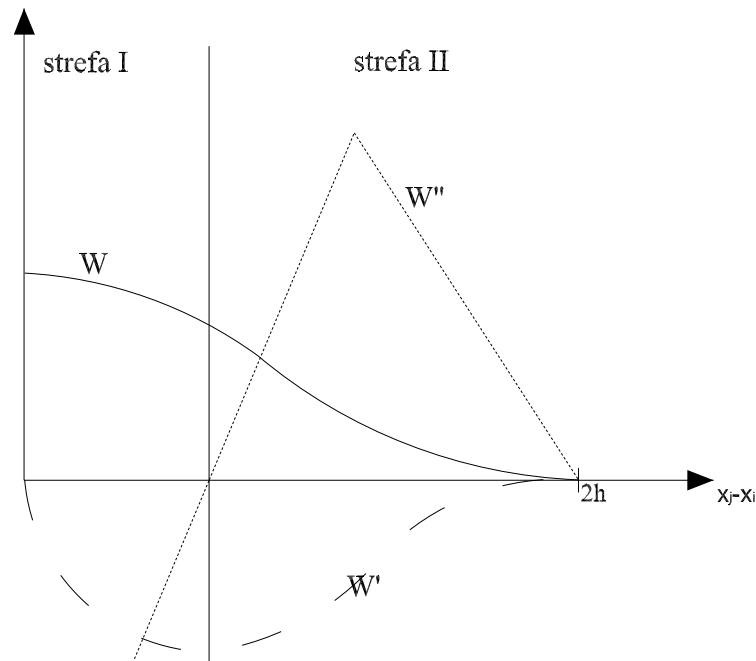
gdzie $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ jest lepkością kinematyczną.

Podsumowując, krok czasowy Δt , przy uwzględnieniu dodatkowych współczynników bezpieczeństwa λ_1 i λ_2 , wyznacza się w procedurze obliczeniowej z poniższego warunku:

$$\Delta t = \min(\lambda_1 \Delta t_{cv}, \lambda_2 \Delta t_f). \quad (5.82)$$

Monaghan, [47] sugeruje przyjęcie następujących wartości: $\lambda_1 = 0.4$ i $\lambda_2 = 0.25$.

5.8 Zagadnienie stabilności numerycznej SPH



Rysunek 5.3: Funkcja jądra $W(|x_j - x_i|)$ wraz ze swoją pierwszą i drugą pochodną, oraz obszary I i II, dla których warunek (5.83) wyznacza stabilność lub niestabilność układu w zależności od ściskania czy rozciągania, [26].

Swegle, [57], [58] wykazał istnienie pewnych specyficznych niestabilności numerycznych w metodzie SPH - ang. *tensile instability*, ujawniających się jako (niefizyczne) oscylacje w energii wewnętrznej poszczególnych cząstek, które w wyniku tego mogą prowadzić do zaburzeń całego układu. Swegle, [58] wykazał iż zaburzenie w danej cząstce może prowadzić do zaburzeń zarówno podczas obciążeń ściskających jak i rozciągających. Wyznaczona zależność warunkująca niestabilność (wiążąca ze sobą kombinację odległości cząstek, funkcję jądra oraz znak składowych tensora naprężenia) została zaproponowana w postaci nierówności:

$$W''\sigma > 0. \quad (5.83)$$

Powyższy warunek dzieli nośnik funkcji jądra na dwie strefy I oraz II (Rys. 5.3). Niestabilności mogą się pojawić w przypadku gdy dana cząstka będzie się znajdować w części układu poddanego procesowi rozciągania ($\sigma > 0$), natomiast jej sąsiednie cząstki znajdować się będą w procesie ściskania.

Zaproponowano kilka usprawnień metody SPH, jednakże większość z nich nie rozwiązywała problemu - działały albo dla przypadków jednowymiarowych, albo wprowadzały dodatkową siatkę punktów Gaussa, co niestety prowadziło do utraty największej zalety metody SPH - bezsiatkowości. Konsekwentnie, metodę gwarantującą stabilność metody SPH wprowadził Rabczuk, [52]. Zaproponował on funkcję jądra wykorzystującą współ-

rzędne materiałowe, (*Total Lagrangean SPH Formulation*):

$$W_{ij} = W\left(\frac{X_j - X_i}{h}\right). \quad (5.84)$$

5.9 Hourglassing i shearlocking

Standardowe - najczęściej wykorzystywane procedury całkowania numerycznego w metodzie elementów skończonych (np. metoda Gaussa) w przypadku materiałów nieściśliwych mają pewną wadę polegającą na tym iż przemieszczenia w siatce elementów skończonych są o rząd mniejsze niż w rzeczywistości. Zjawisko to nosi nazwę „*volumetric locking*”. Rozwiązaniem tego problemu jest wykorzystanie procedury całkowania numerycznego ze zredukowaną liczbą punktów Gaussa. Niestety, procedura ta wprowadza kolejny problem numeryczny zwany z ang. „*hourglassing*” lub „*zero energy mode*” będący (niefizyczną) deformacją produkującą zerowe odkształcenia oraz zerowe naprężenia. Może się pojawić wyłącznie w przypadku elementów skończonych z jednym punktem całkowania Gaussa. Przykładem może być następujący problem dotyczący deformacji ciała zdyskretyzowanego siatką elementów skończonych. Rozważmy płaski 4-węzłowy element skończony. Rozsuńmy węzły w dolnej krawędzi i jednocześnie przysuńmy węzły z górnej krawędzi o tą samą wartość. W wyniku tych operacji otrzymamy trapez. Jednakże w przypadku jednego punktu Gaussa znajdującego się w centrum elementu skończonego (czyli tam gdzie liczy się odkształcenie) mamy do czynienia z deformacją dającą w wyniku zerowe odkształcenie, a co za tym idzie zerowe naprężenie. Aby rozwiązać ten problem wprowadza odpowiednią lepkość aby w rezultacie otrzymać sztuczną sztywność układu. Więcej na ten temat można znaleźć w pracach Swegle [56], oraz Belytschko [7].

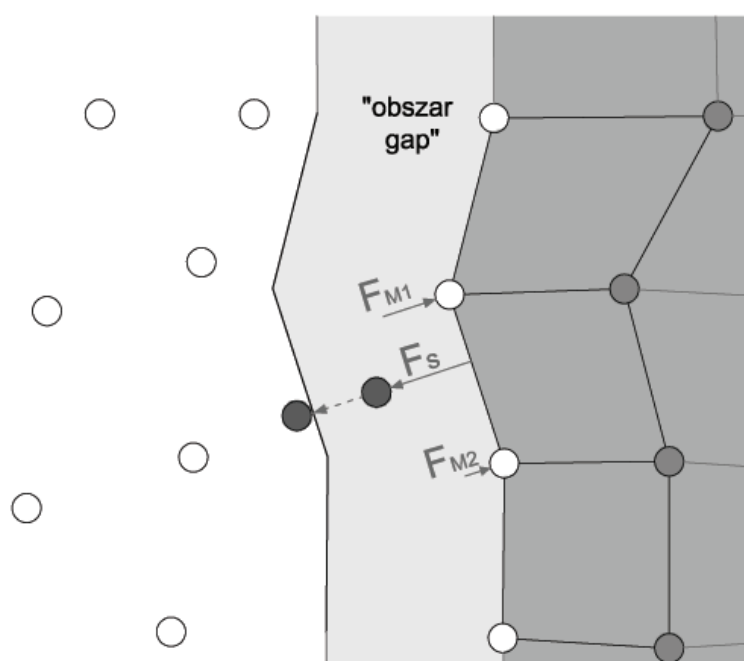
Analogiczny problem może się pojawić w metodzie SPH. W jednowymiarowym przykładzie można to zilustrować sytuacją gdy pochodna funkcji jądra jest równa zero, natomiast dla sąsiednich cząstek znajdujących się po przeciwnych stronach jest równa pewnym wartościom, lecz o przeciwnych znakach. Rozwiązaniem jest wykorzystanie dwóch rodzajów cząstek: pierwszego będącego punktami, w których oblicza się równanie zachowania pędu, oraz drugiego służącego do wyznaczania naprężenia.

Okazuje się jednak iż problem *zero energy mode* w metodzie SPH nie jest tak poważny jak w metodzie elementów skończonych lub metodzie różnic skończonych z powodu większej nieregularności rozmieszczenia cząstek w SPH niż węzłów w MES czy MRS.

5.10 Połączenie SPH i MES

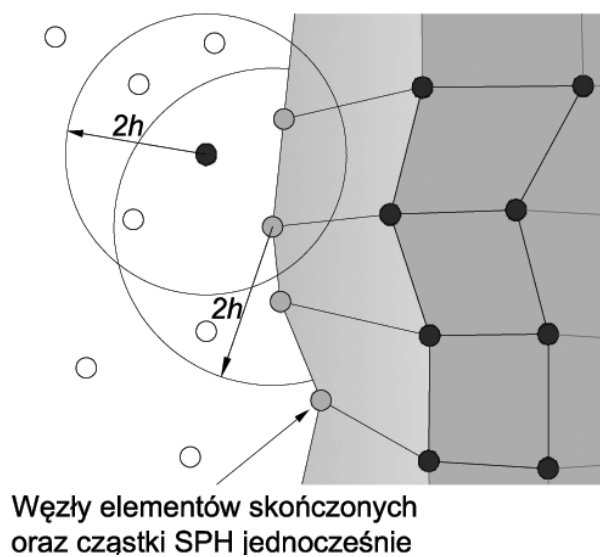
Połączenie różnych rodzajów dyskretyzacji wymaga szczególnego podejścia do zagadnienia interfejsu kontaktowego. Można wyróżnić następujące metody, [26]:

1. Wykorzystanie algorytmu kontaktowego typu *Master-Slave* zaproponowane przez Attaway'a, Heinstein'a i Swegle'a, [5] w 1993 roku. Podobnie do wielu algorytmów kontaktowych w Metodzie Elementów Skończonych podejście to wykorzystuje pewną zdefiniowaną odległość definiującą rozdzielony obszar między elementami będącymi w kontakcie (ang. *gap space*). W przypadku tej pracy są to elementy skończone oraz SPH. Element SPH wchodzący w obszar *gap* poddany jest działaniu siły odpychającej F_S , jednocześnie siły balansujące F_{M1} i F_{M2} działają na sąsiednie węzły na brzegu elementu skończonego (Rys. 5.4).



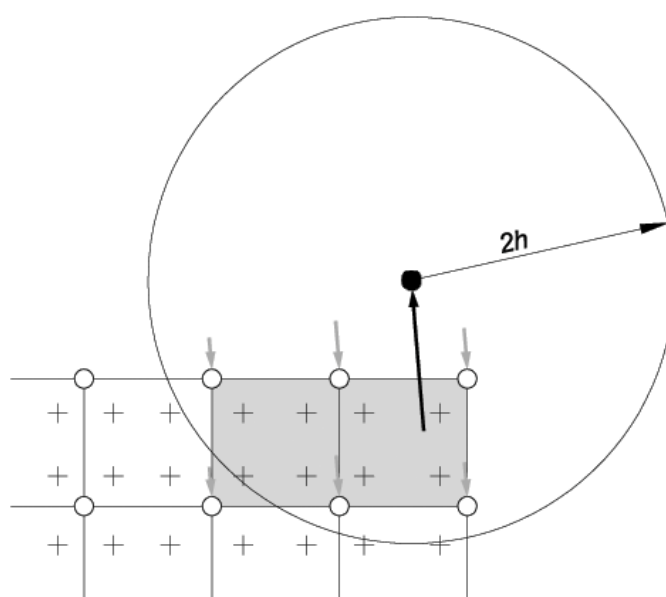
Rysunek 5.4: Wykorzystanie algorytmu *Master-Slave* w połączeniu dyskretyzacji MES i SPH, [55].

2. „Płynne przejście” elementów skończonych w cząstki SPH, tj. węzły znajdujące się na brzegu elementu skończonego są jednocześnie elementami SPH. Tylko elementy SPH oraz cząstki znajdujące się w nośniku funkcji jądra będące jednocześnie węzłami na brzegu elementu skończonego, biorą udział w obliczaniu przyrostów deformacji cząstek znajdujących się na brzegu (Rys. 5.5), (Johnson [31], [32]).
3. „Podejście hybrydowe”, w którym węzły znajdujące się w nośniku funkcji jądra elementów SPH wykorzystywane są procesie aproksymacji. Jeśli element SPH ma w zasięgu swojego nośnika węzły z elementów skończonych, wówczas wyznaczane



Rysunek 5.5: Podejście „płynnego przejścia” dyskretyzacji MES w SPH, [55].

pole prędkości i pole naprężenia z tych węzłów wykorzystywane są w aproksymacji w sformułowaniu bezsiatkowym podczas wyznaczania dyskretnych form problemu początkowo-brzegowego.



Rysunek 5.6: „Podejście hybrydowe” połączenia dyskretyzacji MES z SPH, Sauer, [55].

Rozdział 6

Zagadnienie rozchodzenia się fal w ośrodku gruntowym

Informację o obciążeniu przekazuje się w ośrodku gruntowym poprzez fale. W przypadku obciążeń statycznych oraz quasi-statycznych, efekt wpływu fal nie jest rozważany z uwagi na fakt, iż czas obciążenia jest długi w porównaniu do czasu transmisji fali. W przypadku gdy wywołane fale przyjmują kształt i amplitudę tzw. fal uderzeniowych, lub prędkość obciążenia jest zbliżona do prędkości rozchodzenia się dźwięku w ośrodku, wówczas propagacja oraz efekt tych fal na ośrodek oblicza się na podstawie równań całkowanych odpowiednio w czasie i przestrzeni, [26].

6.1 Fale sprężyste

Fale są pewnego rodzaju perturbacjami w polu prędkości, przemieszczającymi się przez ośrodek, przyjmując różne formy oraz różne prędkości. Najważniejsze rodzaje fal wielokrotnie opisano w literaturze krajowej i światowej, a zaliczają się do nich:

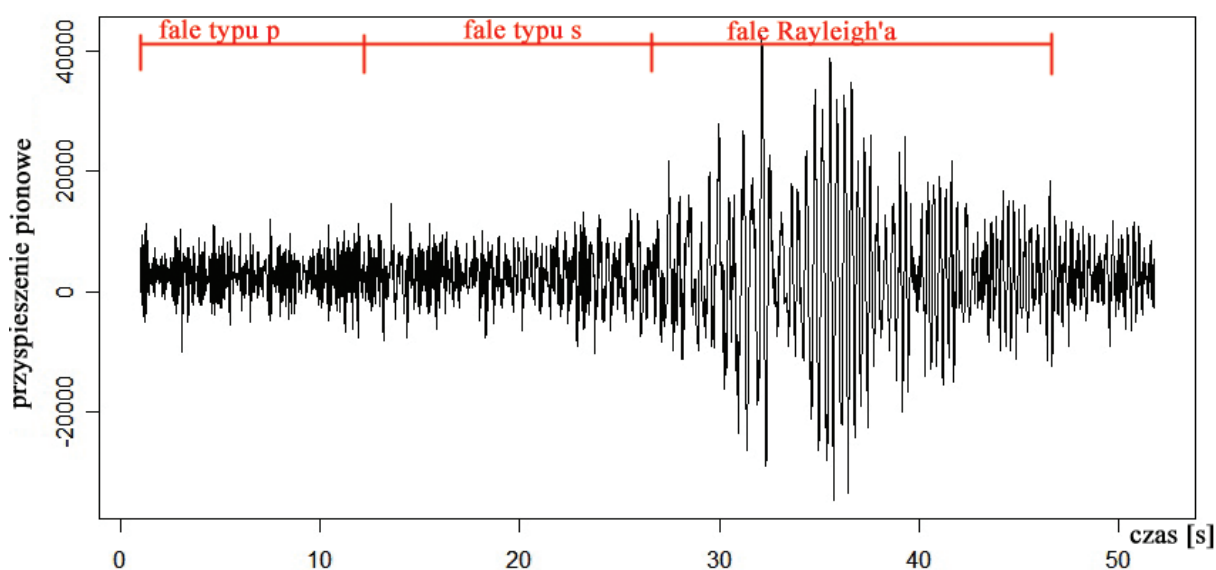
1. fale objętościowe:

- fale podłużne (zwane też falami dylatacyjnymi, falami typu p , lub z ang. *primary waves*) - są to najszybsze z fal (stąd ich angielska nazwa *primary waves*, ponieważ najszybciej docierają z epicentrum na powierzchnię). Fale te powodują odchylenia–drżania w kierunku równoległym do kierunku rozchodzenia się fal. Powodują ściskanie i rozciąganie ośrodka, przez który przechodzą; prędkość z jaką się przemieszczają oznacza się symbolem c_L ;
- fale poprzeczne (zwane też falami typu s , falami torsyjnymi lub z ang. *secondary waves* - ponieważ jako drugie, po falach podłużnych docierają z epicen-

trum na powierzchnię). Prędkość przemieszczania się fal poprzecznych oznacza się symbolem c_S ;

2. fale powierzchniowe:

- fale Rayleigh'a - fale opisane przez Rayleigh'a w 1885 roku. Są to fale typu powierzchniowego, w których ruch cząstek odbywa się po elipsie zorientowanej pionowo i która jest prostopadła do kierunku biegu fali;
- fale Love'a - fale, w których ruch cząstek odbywa się po elipsie zorientowanej prostopadle do elipsy rozchodzenia się fal Rayleigh'a.



Rysunek 6.1: Wykres przyspieszeń (w $\frac{mm}{s^2}$) podczas trzęsienia ziemi w Kobe w Japonii w 1995r., wykonany przy pomocy danych zarejestrowanych sejsmografem w Tasmanii. Plik z danymi pochodzi z Data Management Centre, Washington University.

6.2 Równania falowe

W celu wyznaczenia jednowymiarowego równania fali rozważa się następujące równanie równowagi:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \rho \frac{d^2 u_x}{dt^2}. \quad (6.1)$$

Wykorzystując liniowo sprężyste równanie konstytutywne Hooke'a:

$$\sigma_x = E \epsilon_x, \quad (6.2)$$

oraz zakładając liniową zależność w równaniu geometrycznym:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad (6.3)$$

otrzymuje się jednowymiarowe równanie fali sprężystej w postaci:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E} \frac{d^2 u_x}{dt^2}. \quad (6.4)$$

Podstawiając do powyższego równania zależność opisującą prędkość fali dylatacyjnej:

$$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (6.5)$$

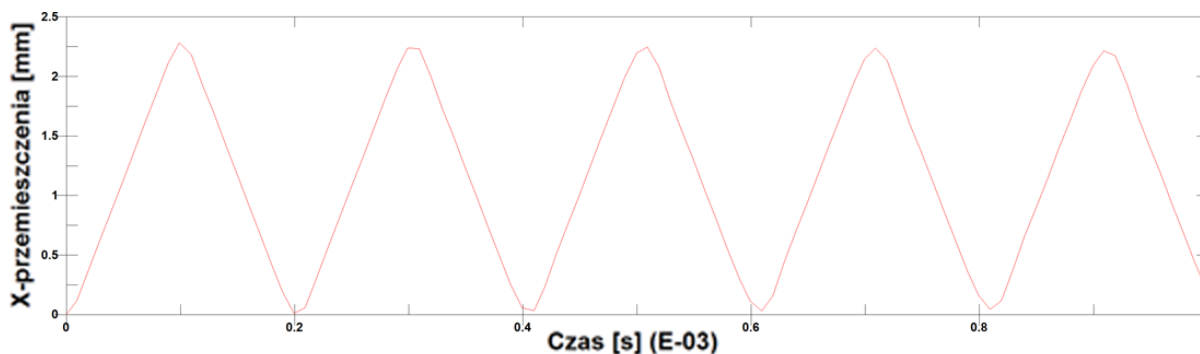
otrzymuje się równanie opisujące jednowymiarową falę dylatacyjną:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{1}{c_L^2} \frac{d^2 u_x}{dt^2}. \quad (6.6)$$

Prędkość fali dystorsyjnej przedstawia się jako:

$$c_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (6.7)$$

Równanie to (w przypadku jednowymiarowym) ma szeroko rozpowszechnione w literaturze rozwiązanie analityczne [62], [65].



Rysunek 6.2: Propagacja fali sprężystej przez ośrodek gruntowy opisany prawem Hooke'a.

W przypadku nieliniowych praw konstytutywnych moduł sprężystości E zastępuje się $\frac{\partial \sigma}{\partial \epsilon}$ dla danego stanu obciążenia. Jednowymiarowe równanie prędkości fali dylatacyjnej w tym przypadku ma postać:

$$c_L = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_x}{\partial \epsilon_x}}. \quad (6.8)$$

Zakładając przemianę adiabatyczną dla zmiany energii wewnętrznej e w danej objętości V i ciśnienia p :

$$\begin{aligned} de &= -pdV \\ ds &= 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

otrzymujemy:

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_e + \frac{p}{\rho^2} \left. \frac{\partial p}{\partial e} \right|_\rho. \quad (6.10)$$

Powyższe równanie opisuje zależność prędkości propagacji fali od ciśnienia w przypadku nieliniowych praw konstytutywnych.

6.3 Fale Uderzeniowe

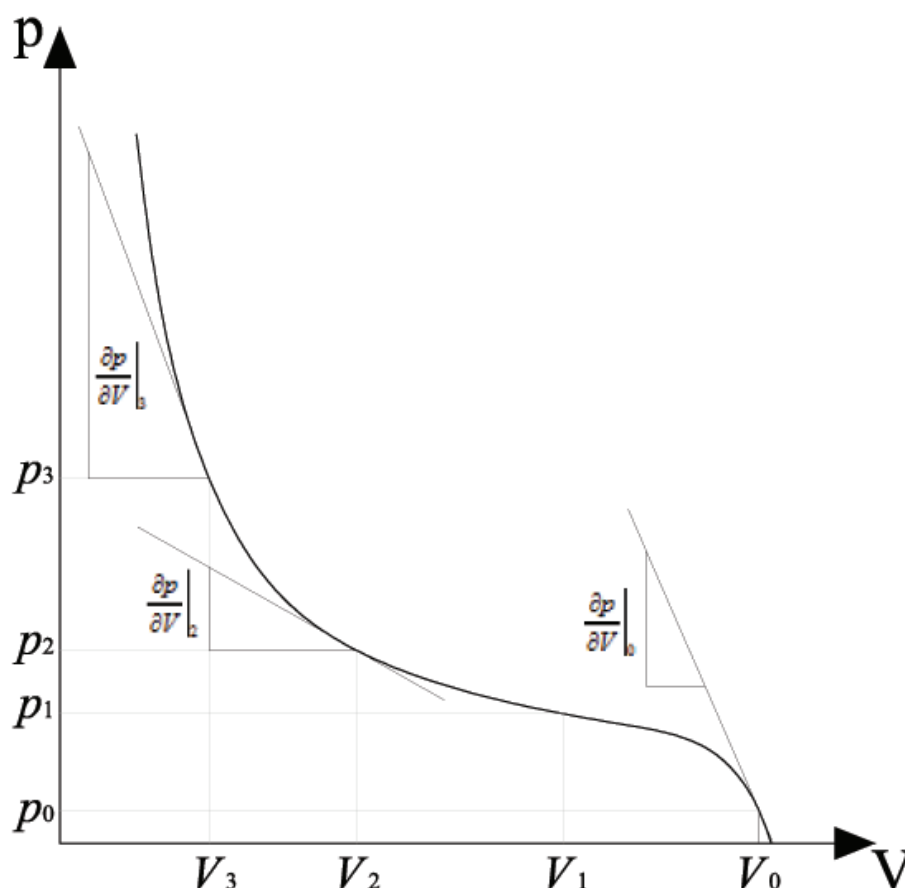
Charakterystyczną cechą fal uderzeniowych jest bardzo krótki okres ich trwania, jak również duże amplitudy ciśnień, temperatury oraz gęstości. Przejście fali uderzeniowej przez ośrodek trwale zmienia jego właściwości fizyczne. Mogą się one pojawić jako konsekwencja nałożenia się (superpozycji) fal w przypadku gdy prędkość obciążenia jest równa lub większa prędkości rozchodzenia się dźwięku w ośrodku (czyli dla wartości Liczby Macha ¹ $M \geq 1$). Zjawisko to zostało odkryte i opisane najpierw przez Dopplera, a później przez Macha. W tym przypadku nakładanie się fal (zaburzeń w polu ciśnień) powoduje wzrost amplitudy oraz gradientu ciśnienia, co w efekcie prowadzi do powstania fali uderzeniowej. Przyczyną ich powstawania jest efekt dyspersji. Efekt ten pojawia się dla nieliniowej relacji ciśnienia i gęstości, gdy szybsza fala wyprzedza falę powstałą wcześniej, lecz poruszającą się z mniejszą prędkością. Na rysunku 6.3, dla danego stanu $p(V)$ materiał ma określoną prędkość dźwięku, proporcjonalną do modułu sprężystości objętościowej $\partial p / \partial V$. W przypadku szybkiego przejścia z punktu (p_0, V_0) do (p_3, V_3) można zauważyć zamianę prędkości rozchodzenia się dźwięku dla kolejnych fal. Prowadzi to do zjawiska dyspersji. W pierwszej fazie (p_0, V_0) materiał pozostaje w zakresie sprężystym (prędkość rozchodzenia się fal odpowiada prędkości fal sprężystych), a powstałe w tym zakresie fale nazywamy *prekursorami sprężystymi*, [26]. Gdy dalej postępujące obciążenie powoduje zwiększenie ciśnienia (p_0, p_1) , materiał znajduje się w zakresie plastycznym, natomiast gradient, a zatem również prędkości propagacji fali, maleje. Po minięciu punktu p_1 gradient rośnie, a co za tym idzie również i prędkości propagacji fal. Fale wywołane dla tych stanów obciążenia przemieszczają się przez ośrodek szybciej niż fale wywołane wcześniej. W rezultacie dochodzi do superpozycji fal i w następstwie do powstania fali uderzeniowej.

Matematyczny zapis warunku powstania fali uderzeniowej jest następujący, [26]:

$$\frac{\partial p}{\partial V} < 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} > 0. \quad (6.11)$$

Należy mieć na uwadze iż pomimo spełnienia warunku (6.11) fala uderzeniowa nie musi powstać. Sytuacja taka ma miejsce w przypadku gdy prędkość obciążenia nie jest wystarczająco duża (np. obciążenia quasi-statyczne). Powstające wówczas fale nie są w stanie "dogonić" fal powstałych wcześniej i poruszających się z mniejszą prędkością.

¹Liczba Macha określa stosunek prędkości obiektu poruszającego się w danym ośrodku do prędkości rozchodzenia się dźwięku w tym ośrodku: $M = \frac{v}{c}$



Rysunek 6.3: Krzywa ściśliwości dla materiału sprężysto-plastycznego, [26].

Równania Rankine-Hugoniot'a

Równania Rankine-Hugoniot'a ([54], [30]) opisują relację pomiędzy zmiennymi opisującymi dany ośrodek po obu stronach fali uderzeniowej. Są to równania zachowania dla fal uderzeniowych. Metodyka badań propagacji płaskich fal uderzeniowych nosi nazwę problemu Riemanna. Polega ona na badaniu zamian następujących zmiennych: ciśnienia, gęstości i energii wewnętrznej (p_0, ρ_0, e_0) przed czołem fali uderzeniowej oraz za nią (p_1, ρ_1, e_1) , oraz przy założeniu $v_0 = 0, p_0 = const, \rho_0 = const$ dla ośrodka znajdującego się przed czołem fali. Falę uderzeniową traktuje się jak cienką strefę nagłej zmiany (w czasie dt) wartości zmiennych stanu, a obszar – objętość jaką zajmuje propagująca fala można obliczyć z $Av_s dt$, oraz $A(v_s - v_1)dt$, gdzie A jest powierzchnią przekroju ośrodka, przez który propaguje fala, a v_s to jej prędkość. **Równanie zachowania masy** przy założeniu $v_0 = 0$ przedstawia się następująco:

$$\rho_0 v_s = \rho_1 (v_s - v_1). \quad (6.12)$$

Zmianę przyrostu pędu dla danego przedziału czasowego można zapisać następująco:

$$\rho_1 A(v_S - v_1) dt v_1 - \rho_0 A(v_S - v_0) dt v_0, \quad (6.13)$$

co przy założeniu $v_0 = 0$ prowadzi to do **równania zachowania pędu**:

$$\rho_1 A(v_S - v_1) dt v_1 = (p_1 - p_0) A dt \quad (6.14)$$

Wykorzystując (6.12) równanie (6.14) można przedstawić w postaci:

$$\rho_0 v_S v_1 = p_1 - p_0. \quad (6.15)$$

Powyższe równanie można rozumieć jako relację pomiędzy zmianą (skokiem ciśnienia) a prędkością v_1 po przejściu przez ośrodek o gęstości ρ_0 fali uderzeniowej o prędkości v_S . Przyrost energii kinetycznej i wewnętrznej w ośrodku, przez który przeszła fala uderzeniowa można zapisać w postaci:

$$e_1 \rho_1 A(v_S - v_1) dt - e_0 \rho_0 A(v_S - v_0) dt + \frac{1}{2} \rho_1 A(v_S - v_1) dt v_1^2 - \frac{1}{2} \rho_0 A(v_S - v_0) dt v_0^2. \quad (6.16)$$

Uwzględniając pracę W wykonaną przez zmianę ciśnień:

$$W = p_1 A v_1 dt - p_0 A v_0 dt, \quad (6.17)$$

otrzymujemy **równanie zachowania energii**:

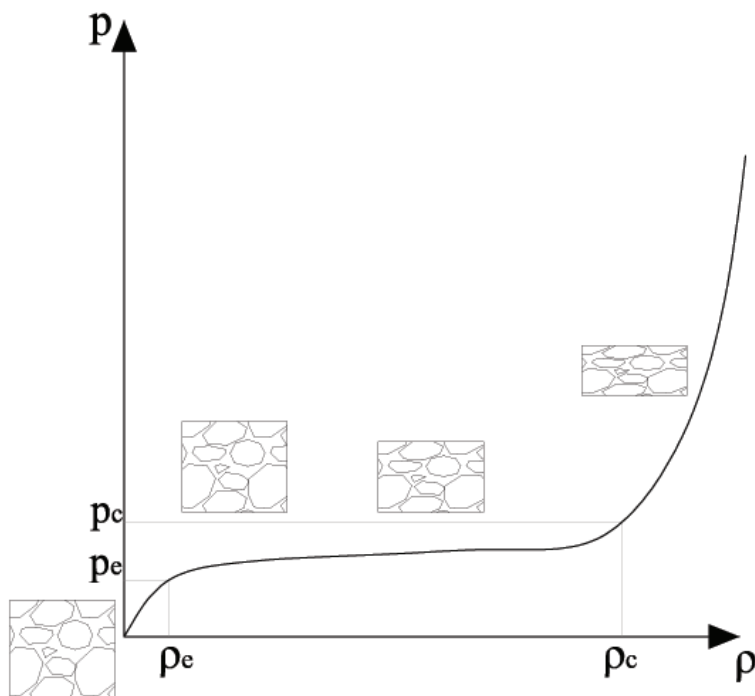
$$p_1 v_1 = e_1 \rho_1 (v_S - v_1) - e_0 \rho_0 v_S + \frac{1}{2} \rho_1 (v_S - v_1) v_1^2. \quad (6.18)$$

Wykorzystując (6.12) równanie (6.18) można zapisać następująco:

$$p_1 v_1 = (e_1 - e_0) \rho_0 v_S + \frac{1}{2} \rho_0 v_S v_1^2. \quad (6.19)$$

Równania stanu fal uderzeniowych dla ośrodków porowatych

Z wykresu na Rys. 6.3, a co za tym idzie z warunków (6.11), wynika iż równania stanu opisujące powstawanie i propagację fal uderzeniowych muszą być nieliniowe. Propagacja fal jest tłumiona przez trwałe deformacje. W tym procesie energia kinetyczna zamienia się w odkształcenia plastyczne, jak również odpowiada za zmianę-zniszczenie struktury. Złożoność opisu propagacji fal uderzeniowych przez ośrodek porowaty wynika ze zmian sztywności materiału w różnych stadiach przejścia fali uderzeniowej. W pierwszej kolejności można wyróżnić fazę sprężystą. Następnie pory „zapadają się”, ośrodek wykazuje niewielką sztywność, a postępująca deformacja przebiega dla zbliżonego poziomu naprężenia. W fazie trzeciej, której odpowiada ośrodek zagęszczony, sztywność rośnie. Zmiany te wpływają na prędkość rozchodzenia się dźwięku w ośrodku porowatym.



Rysunek 6.4: Schemat przebiegu krzywej ściśliwości dla ośrodków porowatych, [26].

W pierwszej fazie, gdy ośrodek znajduje się w zakresie sprężystym, prędkość rozchodzenia się dźwięku zależy od modułu sprężystości objętościowej $K = \rho \frac{dp}{d\rho}$ i przedstawia się następująco:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (6.20)$$

W trzeciej fazie prędkość rozchodzenia się dźwięku można analogicznie zapisać wykorzystując moduł odkształcalności objętościowej dla ośrodka zagęszczonego.

Do opisu przejścia z fazy I do III wykorzystuje się porowatość, a dokładniej parametr α będący odwróceniem współczynnika porowatości:

$$\phi = \frac{V_p}{V} = \alpha^{-1}, \quad (6.21)$$

gdzie V_p jest objętością przestrzeni porowej, a V jest objętością całkowitą ośrodka.

Prędkość dźwięku dla ośrodka porowatego znajdującego się w II fazie obciążenia zapisuje się wykorzystując porowatość w stanie naturalnym α_P :

$$c = c_P + (c_M - c_P) \left(\frac{\alpha - \alpha_P}{1 - \alpha_P} \right), \quad (6.22)$$

gdzie c_M jest prędkością rozchodzenia się dźwięku w szkielecie, a c_P jest prędkością rozchodzenia się dźwięku w przestrzeni porowej.

Pierwsze sformułowanie równania stanu opisującego propagację fali uderzeniowej w ośrodku porowatym zostało przedstawione przez Herrmann'a, [24]. Przedstawił on **rów-**

nanie stanu $p - \alpha$, w którym funkcja ciśnienia zależy od porowatości:

$$p = p(nV, e). \quad (6.23)$$

Carrol i Holt [28] zmodyfikowali zależność Herrmann'a uśredniając ciśnienie przez objętość porów, co pozwoliło uniknąć niefizycznych - większych prędkości fal objętościowych w ośrodkach porowatych, Swegle [59]. Spójną zależność równań stanu dla ośrodków porowatych przedstawili Menikoff i Kober [43], wykorzystując dekompozycję potencjału Helmholtz'a² na część odpowiadającą szkieletowi ψ_s , oraz część powiązaną z porowatością ψ_p :

$$\psi(V, T, n) = \psi_s(nV, T) + \psi_p(n), \quad (6.24)$$

gdzie n to porowatość. Równanie stanu dla ośrodka porowatego ma postać:

$$n_{eq}(pV) = 1 - (1 - n_0)e^{-\frac{pV - p_0V_0}{p_cV_0}}, \quad (6.25)$$

gdzie p_c jest ciśnieniem (w procesie ściskania), w którym następuje całkowite zamknięcie porów, $1 - n_0$ jest porowatością początkową. W celu znalezienia porowatości w stanie równowagi n_{eq} , minimalizuje się energię swobodną otrzymując:

$$pV - n_{eq} \frac{d\psi_p}{dn}(n_{eq}) = 0. \quad (6.26)$$

Równanie (6.26), łącznie z równaniem równowagi ciśnienia p_{eq} :

$$p_{eq}(V, e) = -n_{eq} \frac{\partial \psi(V_s, e_s)}{\partial V}, \quad (6.27)$$

tworzą podstawowy układ równań równowagi, gdzie $V_s = n_{eq}V$ jest objętością szkieletu oraz $e_s = e - \phi_p(n_{eq})$ jest energią wewnętrzną szkieletu. Powyższe równanie jest równoznaczne z równaniem Herrmanna $p - \alpha$ z dodaną zależnością pomiędzy energią wewnętrzną ośrodka porowatego e , a energią wewnętrzną jego szkieletu e_s .

6.3.1 Aproksymacja obszaru nieograniczonego - tłumienie fal na brzegu

Nieograniczony obszar półprzestrzeni podłoża gruntowego w problemach geotechnicznych prowadzi do określonych trudności numerycznych, szczególnie w modelowaniu zagadnień dynamicznych. Rozwiązaniem jest zastosowanie specjalnych elementów na brzegu obszaru, które w przypadku metod MES w zagadnieniach statycznych mają za zadanie

²Energia swobodna Helmholtz'a ψ jest funkcją stanu i potencjałem termodynamicznym odpowiadającym części energii wewnętrznej, która potencjalnie może być w danym procesie uwolniona w formie pracy lub ciepła, dla danej temperatury i objętości.

”wytłumienie” przemieszczeń, a w zagadnieniach dynamicznych wytłumienie prędkości i przyspieszenia. W zagadnieniach dynamicznych elementy mające na celu wytłumienie fal noszą nazwę z ang. *non reflecting boundaries condition NRBC*. Założeniem NRBC jest wytłumienie fal, aby nie mogły one zostać odbite od brzegu i tym samym zaburzyć rozwiązanie problemu. Najczęściej spotykanymi metodami są: wykorzystanie metody elementów brzegowych na brzegu obszaru modelowanego przy pomocy metody elementów skończonych, tzw. sztuczne warunki brzegowe, schematy filtrujące oraz elementy nieskończone, [65].

Rozważmy obszar, w którym σ_n jest naprężeniem normalnym na brzegu, τ_s jest naprężeniem stycznym na brzegu, ρ jest gęstością, c_L jest prędkością fali dylatacyjnej, a c_S jest prędkością fali dystorsyjnej. Stosując metodę „brzegu lepkiego tłumienia” (ang. *Viscous Boundary Condition*), składowe normalne i styczne naprężenia, w każdym węzle na brzegu obszaru obliczane są dla danego ciśnienia (fali) tak aby wypadkowe naprężenie się zerowało, [42]:

$$\begin{aligned}\sigma_n &= -\rho c_S v_n, \\ \tau_s &= -\rho c_L v_s.\end{aligned}\tag{6.28}$$

Podójście takie należy do metod zwanych w krajowej literaturze metodami bezpośrednimi [65] i polega na dodaniu na brzegu obszaru elementów pochłaniających fale (nie dopuszczając do ich odbicia czy załamania). Podójście takie prowadzi do pewnych „akceptowalnych” błędów wynikających z niedokładnego spełnienia warunków brzegowych w obszarze tzw. elementów pochłaniających. Innymi metodami bezpośrednimi są, [65]:

- podójście *superposition boundary*, w którym uśrednienie dwóch rozwiązań brzegowych - symetrycznego (z brzegiem zamocowanym) i antysymetrycznego (z brzegiem swobodnym) eliminuje odbicie fali,
- podójście *paraxial boundary* wykorzystujące dodatkowe równanie wygładzające fale,
- podójście z podwójnym przybliżeniem *double-asymptotic boundary*,
- podójście z brzegiem z ekstrapolacją, w którym przemieszczenie na sztucznym brzegu wyznaczane jest na podstawie szacowania prędkości fali w sąsiednich węzłach.

Rozdział 7

Numeryczna symulacja wpływu procesu formowania kolumny kamiennej metodą DR

Kolumny formowane metodą wymiany dynamicznej, (ang. *dynamic replacement - DR*) pomimo wielu efektywnych realizacji w kraju i za granicą wciąż należą do metod niedostatecznie rozpoznanych, szczególnie pod względem teoretycznym. W kraju pierwsze badania w tej tematyce przeprowadzał Gryczmański [21]. Większość badań nad opisywaną metodą dotyczyło modelowych badań laboratoryjnych, bądź badań terenowych. Analizy numeryczne natomiast, w znacznej mierze dotyczyły prób odwzorowania współpracy gotowej już kolumny z otaczającym ją podłożem gruntowym (np. Kwiecień [35]). Jedną z nielicznych prób numerycznej symulacji formownia kolumny kamiennej metodą DR opisał w swoim artykule Thialakasiri i inni [60] (w oparciu o rozprawę doktorską pierwszego autora). Podjęta przez tych autorów dwuwymiarowa próba odwzorowania procesu DR ograniczyła się do zmiany właściwości materiału podczas operacji aktualizacji siatki (ang. *re-meshing*) w okolicy miejsca uderzeń kafara. Po pierwszym uderzeniu, następowała operacja aktualizacji siatki wraz z lokalną zmianą parametrów materiałowych, a następnie następowało kolejne uderzenie i operacja była kilkakrotnie powtarzana.

Największym problemem z jakimi spotykano się podczas prób numerycznego odwzorowania wpędu kafara w podłoże gruntowe były duże przemieszczenia prowadzące do degradacji siatki w przypadku względnie gęstej siatki dobrze odwzorowującej geometrię gruntu i kafara, bądź z drugiej strony, nierealne wyniki w przypadku wykorzystania siatki o zbyt dużej dyskretyzacji, co uniemożliwiało realne odzwierciedlenie zachowania się podłoża w bliskim sąsiedztwie kafara.

W dysertacji wykorzystano komercyjne oprogramowanie LS-DYNA, będące komputerowym pakietem oprogramowania do analizy zjawisk szybkozmiennych metodą elementów

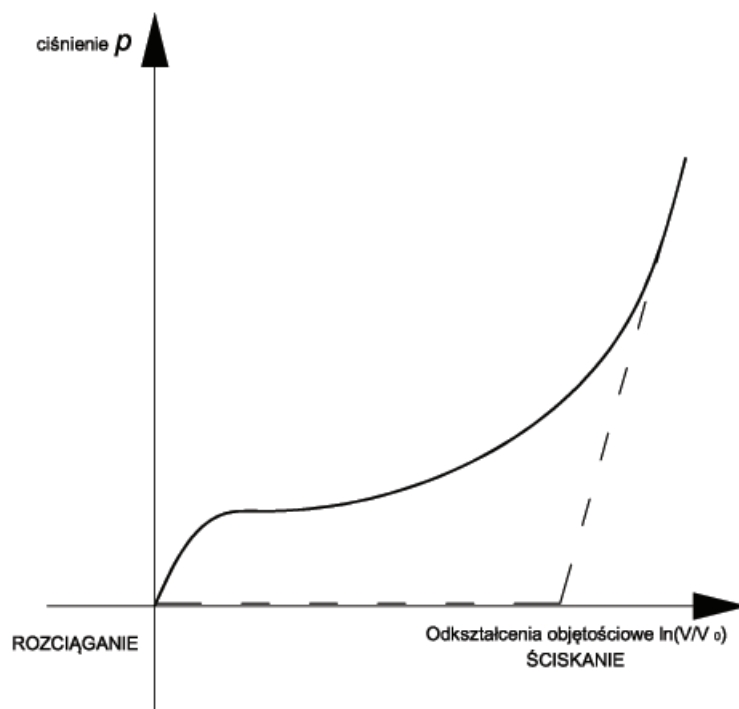
skończonych (również metodą elementów dyskretnych DEM, metodą SPH, bezsiatkowymi metodami typu Element Free Galerkin EFG i podobnymi). System komputerowy LS-Dyna opracowano w Livermore Software Technology Corporation (LSTC) w Livermore w Kalifornii wykorzystując sformułowanie całkowania jawnego. Oprogramowanie to pierwotnie powstało w laboratoriach Lawrence Livermore National Laboratory Departamentu Energii Stanów Zjednoczonych. Pierwsza wersja programu pod nazwą DYNA3D została opracowana w zespole dr John'a Hallquist'a. Oprogramowanie LS-DYNA rozwijane na przestrzeni lat znalazło zastosowanie również w dynamicznych zagadnieniach geotechnicznych. Przykładem może być wykorzystanie oprogramowania przez Narodową Agencję Aeronautyki i Przestrzeni Kosmicznej USA (NASA) w symulacji lądowania lądownika marsjańskiego, [25]. Liczne są też zastosowania w symulacji podziemnych wybuchów (np. min), bądź uderzeń, penetracji i wybuchów pocisków w gruncie czy skałach, np. [18]. Zastosowanie metody Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) zaimplementowanej i rozwijanej w oprogramowaniu LS-DYNA wykazało swoją wysoką przydatność w opisie dużych deformacji w gruncie w pracach prowadzonych między innymi przez: Schwer'a, Kułaka i Bojanowskiego w Arogonne National Laboratory USA (laboratorium Departamentu Energii USA), [34], [10], [11], jak również w badaniach przedstawionych w niniejszej dysertacji.

7.1 Kalibracja i walidacja prawa konstytutywnego

W obliczeniach wykorzystuje się model MAT005 (MAT_SOIL_AND_FOAM) z biblioteki programu LS-DYNA oparty na prawie konstytutywnym opracowanym przez Kriega w 1972 roku, [33]. W modelu konstytutywnym wymaga się kalibracji małej liczby stałych materiałowych i nie wymaga to dużych nakładów mocy obliczeniowej. Zasadność wykorzystania tego modelu do modelowania zagadnień dynamicznego obciążenia ośrodka gruntowego, obciążeniem typu „impact” wykazano w pracach [15], [17], [25], [34].

Prawo konstytutywne zapisane w modelu MAT005 wykorzystuje nieliniową, zależną od ciśnienia, funkcję plastyczności Druckera-Pragera φ , którą można zapisać wykorzystując drugi niezmiennik II_s dewiatora tensora naprężenia, [22]. Drugi niezmiennik dewiatora naprężenia odgrywa istotną rolę w mechanice plastycznego płynięcia. Kalibracja modelu MAT005 dotyczy następujących parametrów materiałowych:

- gęstości, ρ ,
- modułu Kirchhoffa, \mathbf{G} ,
- modułu odkształcenia objętościowego (dla odciążenia) \mathbf{K}_u ,
- a_0, a_1, a_2 stałych (bezwymiarowych) opisujących funkcję plastyczności,



Rysunek 7.1: Schematyczne przedstawienie zależności ciśnienia od odkształcenia objętościowego dla Mat005.

- od 2 do 10 par danych opisujących zależność logarytmicznego odkształcenia objętościowego względem ciśnienia (uzyskanych np. w badaniu laboratoryjnym izotropowego ściskania; możliwe jest też (w uproszczonych warunkach) wykorzystanie liniowej zależności uzyskanej przy pomocy modułu \mathbf{K}), opisujących zachowanie się materiału dla zakresu obciążenia występującego w analizie, Rys. 1. Z analizy zauważa się, że logarytmiczne odkształcenie jest wartością ujemną dla ściskania.

Powyższe dane uzyskuje się w następujących badaniach laboratoryjnych:

1. Badanie trójosiowego ściskania (Triaxial Compression TXC).

W badaniu tym zakłada się, że składowe naprężenia $\sigma_2 = \sigma_3 = const$, podczas gdy wartość składowej (osiowej) naprężenia σ_1 rośnie. Przeprowadza się serię badań w aparacie trójosiowego ściskania do chwili utraty wytrzymałości (ścięcia) próbki gruntu. Uzyskane dane przedstawione w przestrzeni $p'-q$ ¹ aproksymuje się względem prostej stanu krytycznego (ang. *Critical State Line CSL*) a to służy dopasowaniu (obliczeniu) wartości stałych a_0, a_1, a_2 . Ciśnienie p' , oraz stałe a_0, a_1, a_2 w modelu

¹Przestrzeń $p'-q$ w rozumieniu tzw. zapisu Cambridge zaproponowanego przez Roscoe, Schofield i Wroth'a w 1958r. w opisie modelu Cam-Clay:

$$\begin{aligned} p' &= \frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_3}{3} \\ q &= \sigma'_1 - \sigma'_3. \end{aligned} \quad (7.1)$$

MAT005 wyznacza się z badania trójosiowego ściskania przy użyciu relacji:

$$\sigma^{eff} = \sigma'_1 - \sigma'_3 = \sqrt{3II_s}, \quad (7.2)$$

gdzie σ^{eff} jest naprężeniem efektywnym (Cauchy'ego). Z równania (4.8) otrzymujemy:

$$II_s = \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = (a_0 + a_1p' + a_2p'^2). \quad (7.3)$$

Na płaszczyźnie dewiatorowej zachodzi $II_s = \frac{1}{3}(\sigma'_1 - \sigma'_3)^2$, więc:

$$\sigma'_1 - \sigma'_3 = (3(a_0 + a_1p' + a_2p'^2))^{1/2}. \quad (7.4)$$

Niech:

$$q = mp' + c \quad (7.5)$$

przedstawia liniową aproksymację wykresu $p' - q$ z badania trójosiowego ściskania. Podnosząc obustronnie do potęgi drugiej otrzymujemy:

$$\frac{1}{3}q^2 = \frac{1}{3}m^2p'^2 + \frac{2}{3}mcp' + \frac{1}{3}c^2 = a_2p'^2 + a_1p' + a_0, \quad (7.6)$$

zatem:

$$\begin{cases} a_0 &= \frac{1}{3}c^2 \\ a_1 &= \frac{2}{3}mc \\ a_2 &= \frac{1}{3}m^2 \end{cases} \quad (7.7)$$

2. Badanie izotropowego ściskania (HSC - Hydrostatic Compression Tests).

a) Gdy próbka jest poddana hydrostatycznemu ściskaniu

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3,$$

o wartości ciśnienia $p = \frac{(\sigma_1 + 2\sigma_3)}{3}$ naprężenia ścinające się nie pojawiają. Badanie to jest niezbędne w celu określenia zależności ciśnienia względem logarytmicznego odkształcenia objętościowego – takiego rodzaju odkształcenia wymaga się w kalibracji prawa konstytutywnego wykorzystanego w pracy programu obliczeniowego LS-DYNA.

b) Inny system kalibracji może wykorzystać wyniki badania jednoosiowego ściskania w aparacie trójosiowego ściskania, polegające na takim dopasowywaniu składowych radialnych naprężenia, w trakcie zwiększania składowej osiowej naprężenia, aby odkształcenia promieniowe nie wystąpiły. W takiej sytuacji składowe ścinające naprężenia nie występują, więc znajomość wartości składowej osiowej naprężenia oraz odkształcenia osiowego, daje możliwość wyznaczenia zależności $p(\ln \frac{V}{V_0})$.

Początkowe nachylenie krzywej w badaniu HSC definiuje moduł odkształcenia objętościowego K_L (w warunkach obciążenia), natomiast krzywa odciążenia definiuje moduł odkształcenia objętościowego (dla odciążenia) K_u , tj.:

$$K_L = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}, \quad (7.8)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{3K_L(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}. \quad (7.9)$$

W celu kalibracji prawa konstytutywnego MAT_005 wykonano serię badań laboratoryjnych opisanych powyżej. Dodatkowo wykonano badania ściśliwości w aparacie edometrycznej ściśliwości w celu wyznaczenia charakterystyki zmiany wskaźnika porowatości w zależności od odkształcenia względnego, oraz charakterystyki zmiany wskaźnika porowatości w zależności od efektywnego naprężenia pionowego σ'_v .



Rysunek 7.2: Zamontowana próbka typu NNS przed przeprowadzeniem badań ścinania w aparacie trójosiowego ściskania.

W badaniach wykorzystano sprzęt i aparaturę dostępną w Katedrze Geotechniki, Geologii i Budownictwa Morskiego Politechniki Gdańskiej, a w szczególności aparat trójosiowego ściskania (badania ścinania gruntu w celu wyznaczenia krzywej stanu krytycznego, oraz badania izotropowego ściskania), (Rys. 7.2), (Rys. 7.3), oraz edometr.

W badaniach laboratoryjnych analizowano słabe grunty (torf/namuł (Or), oraz namuł piaszczysty (saOr)), dla których metoda formowania kolumn kamiennych metodą DR ma częste zastosowanie. Odpowiednio pobrane w terenie próbki typu NNS (o nienaruszonej strukturze), zostały odpowiednio zabezpieczone i przewiezione do laboratorium w celu dalszych badań. Ogólną charakterystykę wybranych próbek gruntu przedstawiono w tabeli 7.1

Tablica 7.1: Ogólna charakterystyka próbek gruntu poddanych badaniom laboratoryjnym

Rodzaj gruntu	Głębokość pobrania	Gęstość objętościowa [$\frac{g}{cm^3}$]	wilgotność [%]
Torf/Namuł (Or)	4 – 4.5m	1.236 – 1.268	123 – 148
Namuł Piaszczysty (saOr)	6 – 6.5m	1.796 – 1.831	28.9 – 34.7

7.1.1 Badanie trójosiowego ściskania

W badaniach trójosiowego ściskania każdą z badanych próbek poddano wstępnie nasączeniu, a w kolejnym kroku, wstępnej konsolidacji. Dla zadanych ciśnień σ_3 w komorze aparatu próbka była ściskana w warunkach bez drenażu. Osiowe ściskanie próbki powoduje różnicę naprężeń i powstanie naprężeń ścinających. Naprężenia ścinające w gruntach zależą od poziomu naprężeń normalnych. W gruntach organicznych mechanizm ścięcia jest zgoła inny niż w gruntach np. niespoistych lub spoistych mineralnych i nie obserwuje się w próbce płaszczyzny ścięcia. Z wykresów $p - \epsilon$ (wykresy 7.4 i 7.5), wyznaczono warunki utraty wytrzymałości gruntu na ścinanie.

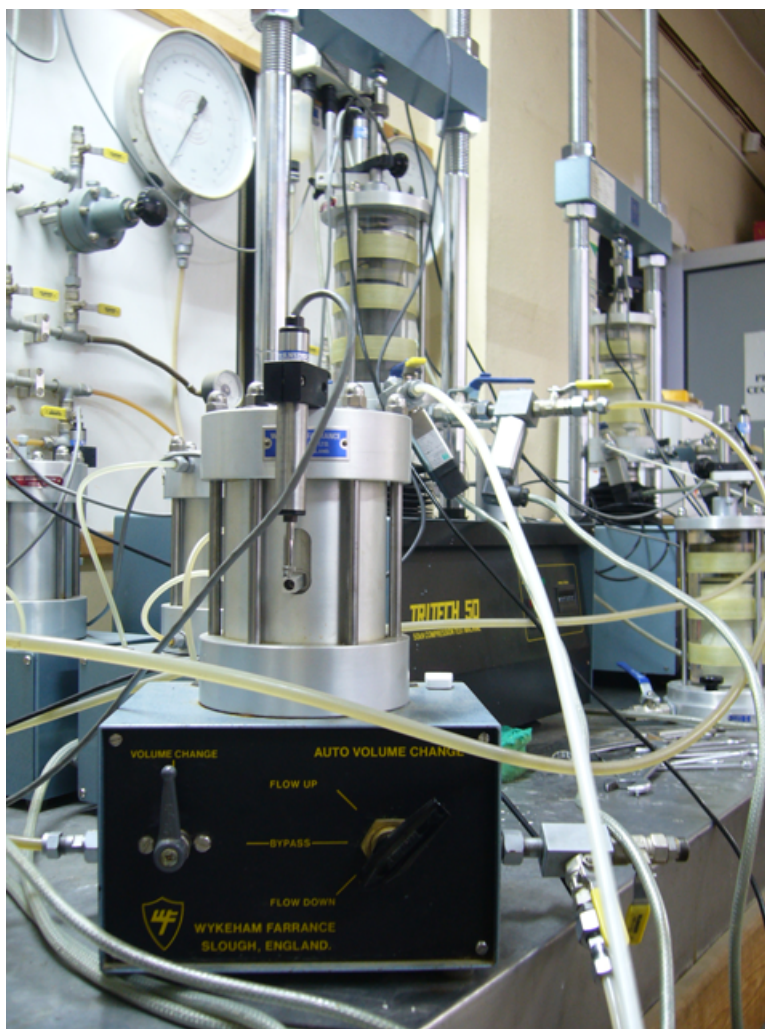
Wykonując serię badań trójosiowego ściskania dla danego rodzaju gruntu, dla zdefiniowanego zakresu naprężenia σ_3 (ciśnienie w komorze), można opisać powierzchnię plastyczności kalibrowanego prawa konstytutywnego (tj. wyznaczenie wartości parametrów a_0, a_1, a_2) zgodnie z równaniami (7.3) – (7.7).

Na podstawie przeprowadzonych badań potwierdzono małą wytrzymałość na ścinanie badanych próbek. Uzyskane parametry wytrzymałościowe przedstawiono w tabeli 6.2, natomiast krzywe definiujące obwiednie prawa konstytutywnego MAT005 skalibrowanego dla danych gruntów i wykorzystanego w dalszych obliczeniach przedstawiono na rysunkach (7.6) i (7.7).

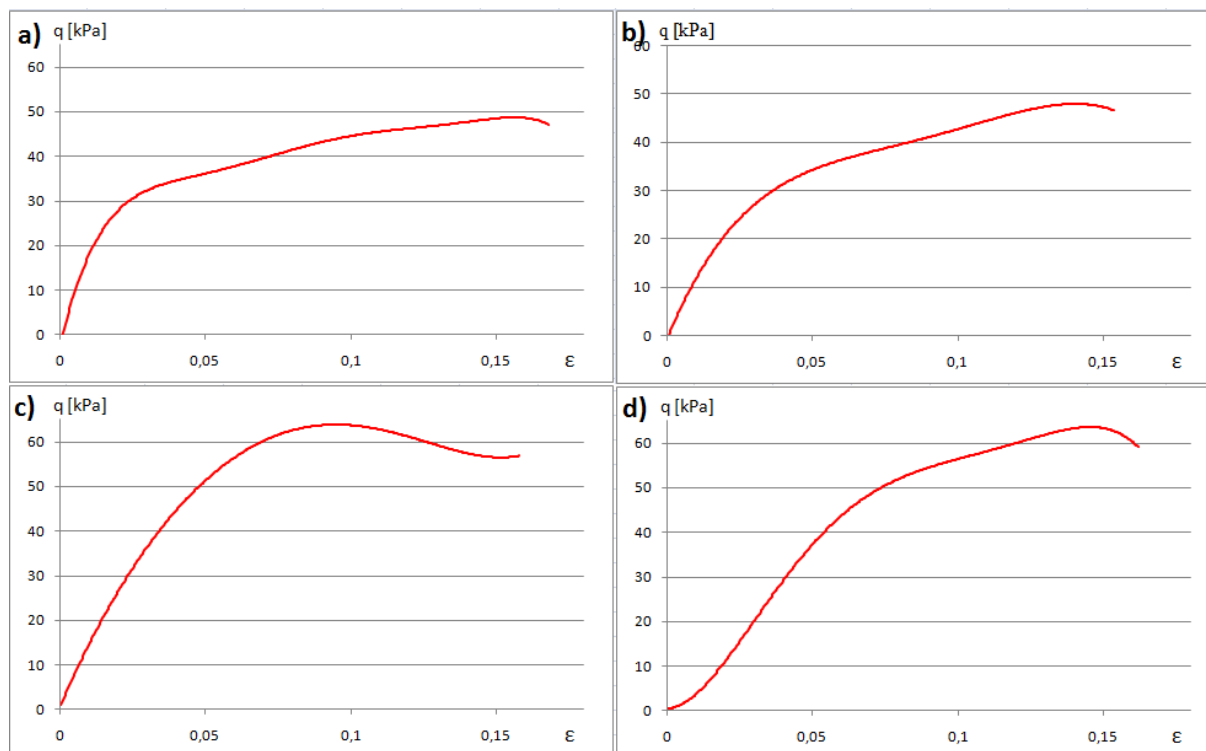
Tablica 7.2: Parametry wytrzymałościowe, oraz parametry kalibrujące prawo konstytutywne MAT005 (badaniach trójosiowego ściskania).

Rodzaj gruntu	c [kPa]	ϕ [°]	a_0	a_1	a_2
Torf/Namuł (Or)	11	7	0.012	-0.94	18.63
Namuł Piaszczysty (saOr)	5	10	0.045	-2.02	22.78

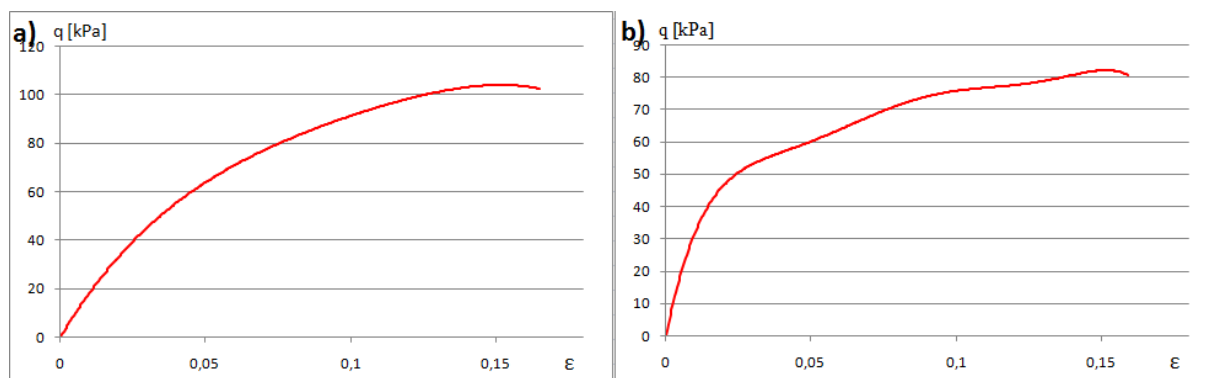
W praktyce geotechnicznej podstawowymi parametrami wytrzymałościowymi wykorzystywanymi w projektowaniu są efektywny kąt tarcia wewnętrznego ϕ' oraz efektywna spójność c' , ewentualnie również spójność w warunkach bez drenażu c_u (s_u). Wspomniane parametry wytrzymałościowe otrzymuje się również wykonując odpowiednie badania polowe np. badania sondowania statycznego. Autor proponuje procedurę kalibracji prawa



Rysunek 7.3: Zamontowana próbka typu NNS przed przeprowadzeniem badań izotropowego ściskania w aparacie trójosiowego ściskania. Na pierwszym planie elektroniczny kontroler objętości.



Rysunek 7.4: Przykładowe wykresy $p - \epsilon$ dla różnych σ_3 w komorze w badaniach trójosiowego ściskania dla próbek torfu/namułu

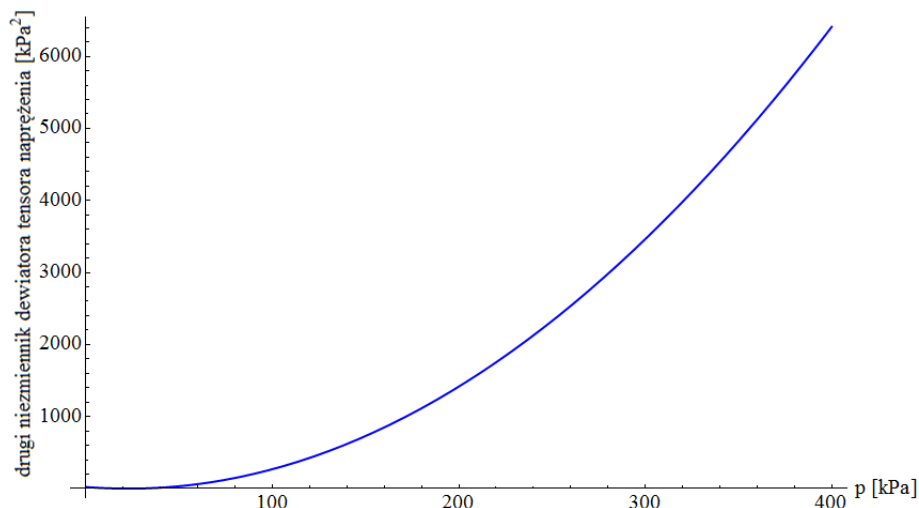


Rysunek 7.5: Przykładowe wykresy $q - \epsilon$ dla różnych wartości σ_3 w komorze w badaniach trójosiowego ściskania dla próbek namułu piaszczystego.

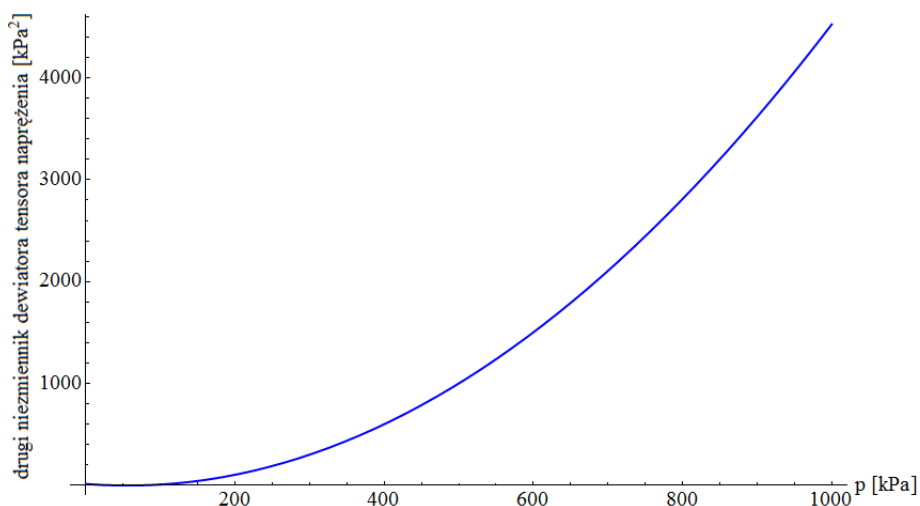
konstytutywnego MAT005, przy założeniu znajomości wartości kąta tarcia wewnętrznego i spójności gruntu, dzięki czemu jest możliwe wyznaczenie parametrów modelu na podstawie badań *in-situ* (p. Załącznik B).

7.1.2 Badania izotropowego ściskania

Pobrane próbki o nienaruszonej strukturze zostały odpowiednio przetransportowane



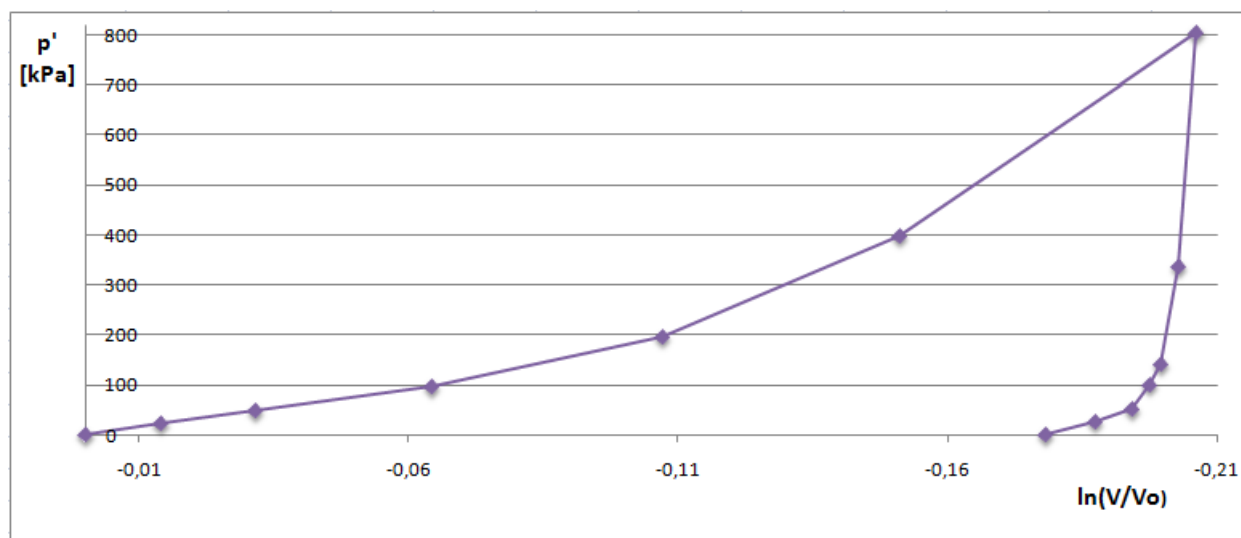
Rysunek 7.6: Zależność drugiego niezmiennika dewiatora tensora naprężenia od ciśnienia definiująca parametry wykorzystywanego w obliczeniach prawa konstytutywnego MAT005 z biblioteki programu LS-DYNA dla próbek namułu/torfu.



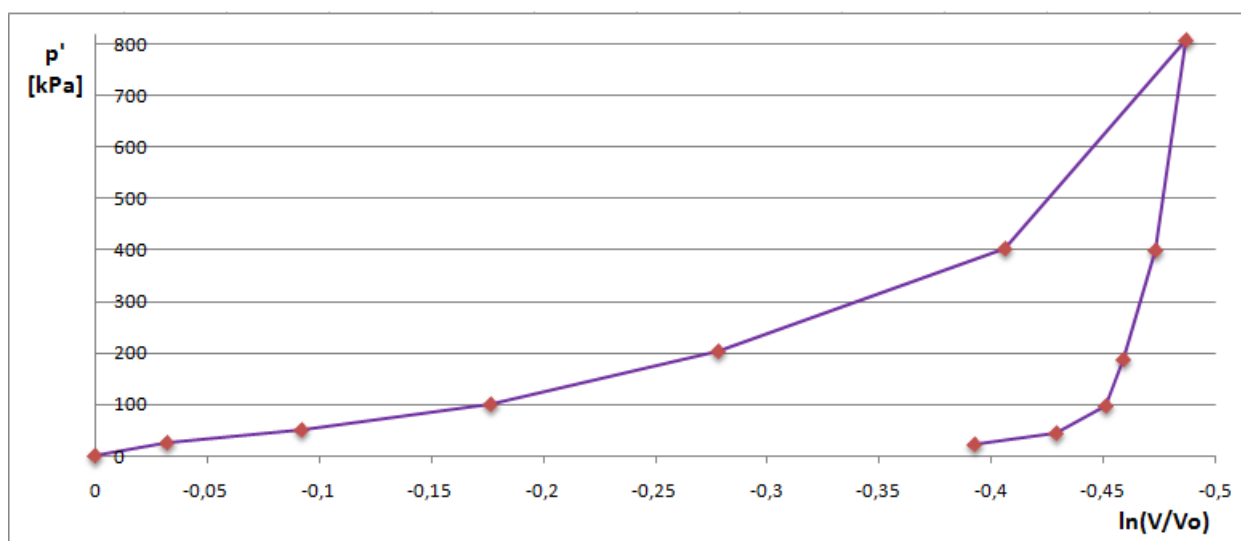
Rysunek 7.7: Zależność drugiego niezmiennika dewiatora tensora naprężenia od ciśnienia definiująca parametry wykorzystywanego w obliczeniach prawa konstytutywnego MAT005 z biblioteki programu LS-DYNA dla próbek namułu piaszczystego.

do Laboratorium Geotechniki. Podstawowe informacje o próbkach przedstawiono w tabeli 7.1. Umieszczone próbki w komorze aparatu trójosiowego ściskania w pierwszej kolejności nasycono wodą (do wartości wskaźnika Skempton B bliskiemu jedności), a następnie zwiększając ciśnienie w komorze mierzono objętość wody wypływającej z próbki przy pomocy automatycznego cyfrowego kontrolera objętości. Zgodnie z propozycją Donaghe i Townsend'a [16] przyjęto minimum 24 godzinny czas hydrostatycznego ściskania dla każdej z dwunastu wartości ciśnień w komorze. Otrzymane punkty naniesiono na wykres przedstawiający zależność logarytmicznego odkształcenia objętościowego względem ciśnienia,

p. Rys. 7.8 i Rys. 7.9.



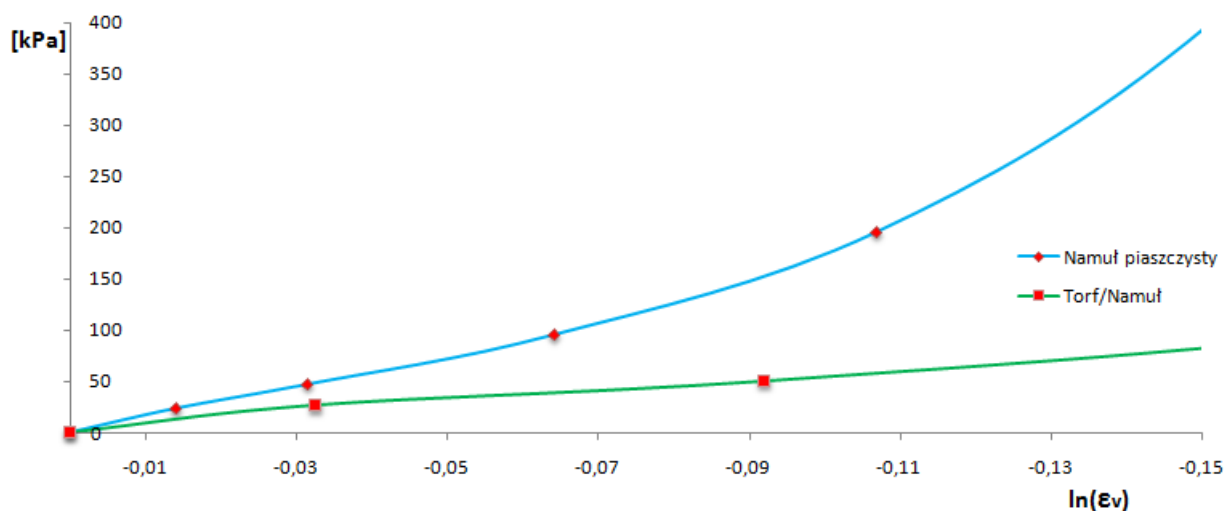
Rysunek 7.8: Zależność odkształcenia objętościowego od ciśnienia badanej próbki namułu piaszczystego.



Rysunek 7.9: Zależność odkształcenia objętościowego od ciśnienia badanej próbki torfu/namułu.

7.1.3 Walidacja z badaniami izotropowego ściskania

W celu walidacji prawa konstytutywnego wykonano numeryczne badania izotropowego ściskania. Sześcienny element skończony z 8 węzłami całkowania Gaussa poddano quasi-statycznemu izotropowemu ściskaniu do poziomu 15% odkształcenia objętościowego ϵ_V . Wykorzystując model MAT005 odtworzono wyniki eksperymentu dla obu analizowanych rodzajów gruntu (Rys. 7.10). Spowodowane jest to faktem, iż dane z krzywej izotropowego ściskania (a dokładniej 10 kolejnych punktów definiujących tę krzywą) są częścią danych wejściowych dla modelu MAT005. Numeryczna procedura walidacji izotropowego ściskania, może służyć również do kalibracji prawa MAT005 wykorzystując analizę obliczeń „wstecz”. Porównanie modelu MAT005 do innych praw konstytutywnych dostępnych w bibliotece programu LS-DYNA wykorzystywanych do opisu zachowania się gruntu można znaleźć w pracy Kulaka i Schwera [34].



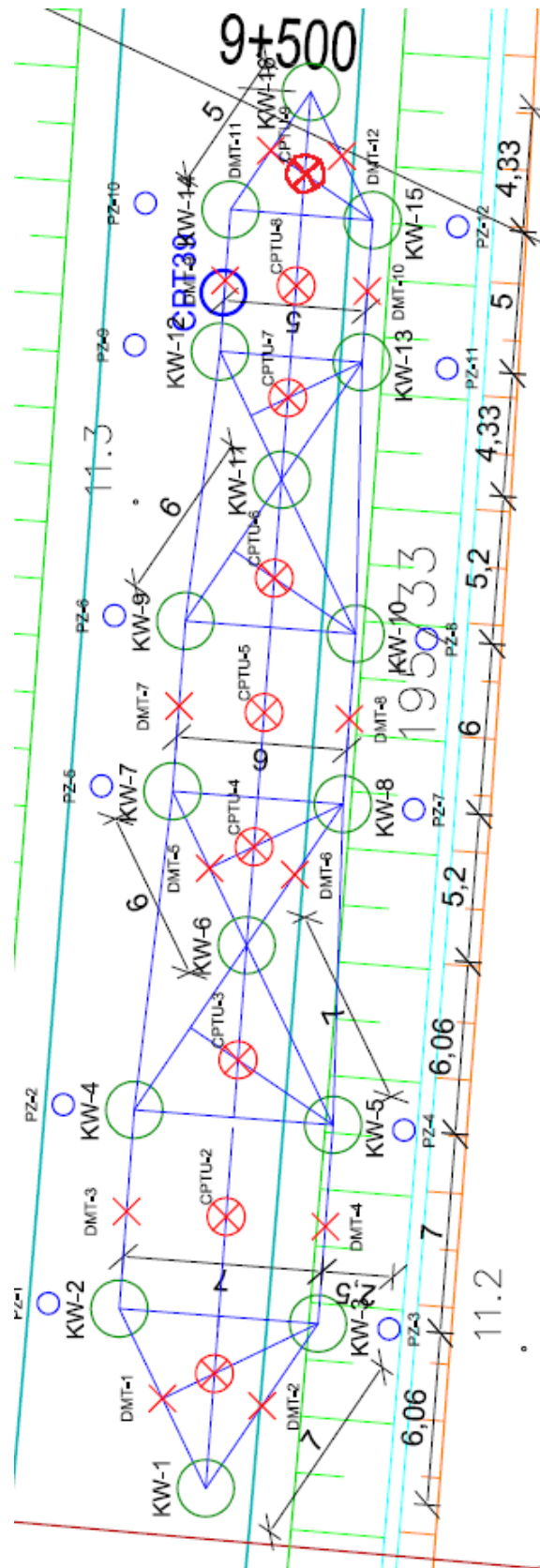
Rysunek 7.10: Porównanie badania laboratoryjnego (znaczniki czerwone) z numerycznym testem izotropowego ściskania dla dwóch rodzajów próbek gruntu (wykresy zielony i niebieski).

7.2 Opis badań terenowych

Badania polowe wykonano przy współpracy z firmą Polbud-Pomorze Sp. z o.o. na poletku doświadczalnym w miejscu realizowanej inwestycji drogowej, zlokalizowanej przy drodze krajowej numer 90 w okolicach Kwidzyna.

Prace przeprowadzono poprzez w następujących etapach:

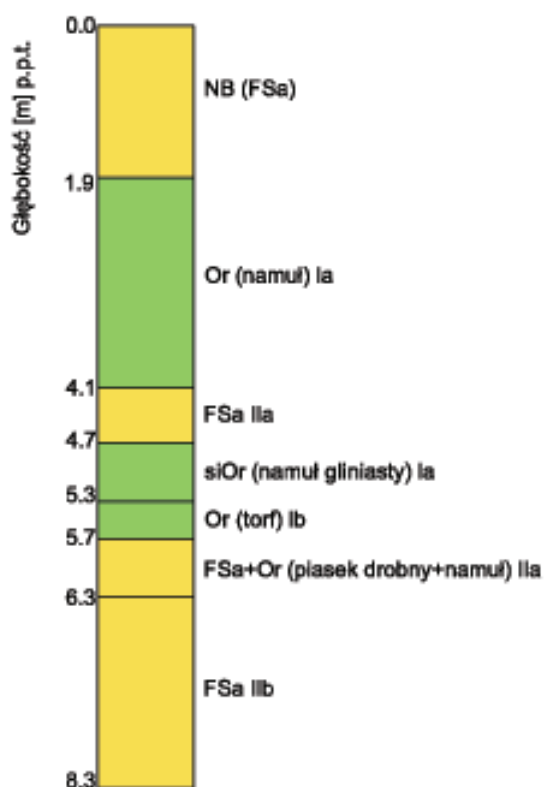
- rozpoznanie podłoża gruntowego sondowaniem statycznym CPTu,



Rysunek 7.11: Plan poletka doświadczalnego.

- montaż inklinometrów,
- formowanie kolumny w etapach,
- badania sondowania statycznego CPTu w okolicy kolumny.

Nr warstwy geotechnicznej	Rodzaj gruntu	Stopień zagęszczenia	Stopień plastyczności	Kąt tarcia wewnętrzny ϕ' [°]	Spójność c' [kPa]	Wytrzymałość na ścinanie bez odplywu s_u [kPa]	Edometryczny moduł ścisłości pierwotnej [MPa]	Współczynnik materiałowy γ_m [-]
lb	Torf (Or)	-	0,66	10	15	12	1,0000	1 +/- 0,2
la	Namuł (Or), Namuł Gliniasty (siOr)	-	0,67	10	12	10	0,5000	1 +/- 0,2
lla	Piasek Drobny (FSa), piasek drobny+namuł (FSa+Or)	0,20	-	29	-	-	16	1 +/- 0,2
lib	Piasek Drobny (FSa)	0,53	-	31	-	-	50	1 +/- 0,2



Rysunek 7.12: Profil geotechniczny (węzeł sondowania numer 9, p. Rys. 7.11), oraz wartości charakterystyczne parametrów geotechnicznych.

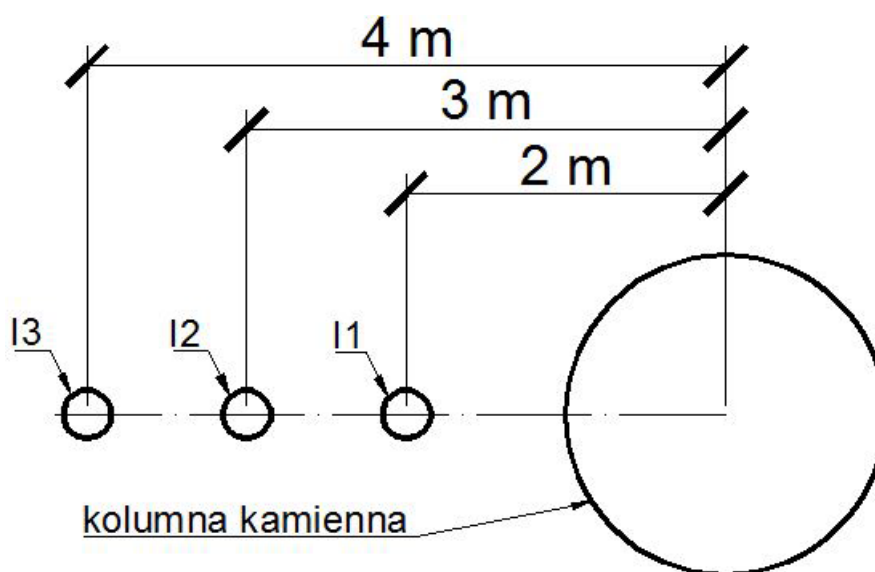
Rozpoznanie podłoża gruntowego

Na poletku doświadczalnym (Rys. 7.11) wykonano 16 kolumn wbijanych, 9 sondowań statycznych metodą CPTu i 12 badań dylatometrycznych DMT. Profil geotechniczny wraz

z wartościami charakterystycznymi parametrów geotechnicznych przedstawiono na Rys. 7.12.

Montaż inklinometrów

Wokół jednej z kolumn zainstalowano inklinometry umieszczając je w wykonanych wiertnicą otworach w rurach z tworzywa sztucznego zabezpieczonych od góry. Przestrzeń pomiędzy ścianą rury, a ścianą otworu wypełniono zaczynem cementowo-gruntowym. Plan montażu przedstawiono na Rys. 7.13.



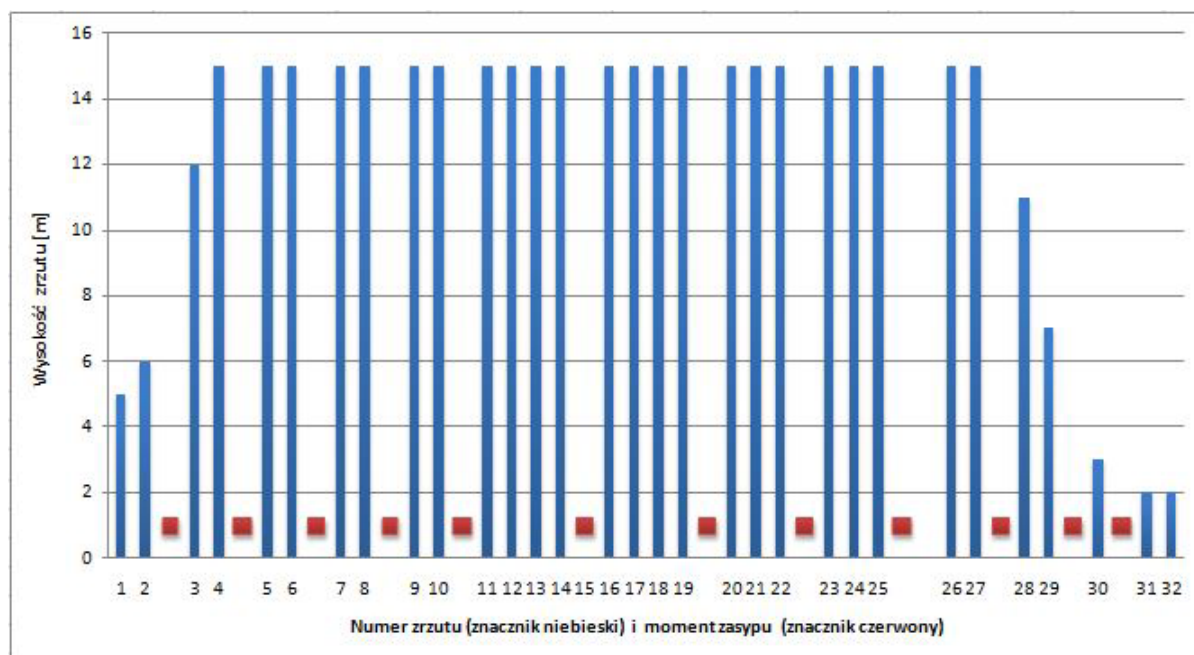
Rysunek 7.13: Plan rozmieszczenia inklinometrów wokół rozważanej kolumny.

Inżynierskie formowanie kolumny w procesie wzmocnienia słabego podłoża gruntowego

Formowanie kolumny podzielono na dwa etapy. Pierwszy etap obejmował formowanie krateru poprzez wykonanie dwóch wstępnych uderzeń – zrzutów z wysokości około 5-6 metrów. Podczas formowania kolumn w gruntach spoistych i organicznych istotną sprawą jest poprawne dobranie pierwszej energii uderzeń, tj. wysokości zrzutów. Zrzut ze „zbyt”² dużej wysokości, a co za tym idzie początkowe formowanie kolumny ze „zbyt” dużą energią może spowodować trudności w ponownym wyciągnięciu na powierzchnię ubijaka, z powodu powstania dużych sił ssących, a w najgorszym razie jego utopienie.

²Poziom określenia energii w etapie pierwszym wyznacza się na podstawie doświadczenia inżynierskiego, które zdobywa się w realizacji DR w różnych warunkach geotechnicznych.

Drugi etap obejmował formowanie z wykorzystaniem większej energii. Wykonano 32 zrzuty i 12 zasypów. Wysokość zrzutu i moment zasypu przedstawiono na Rys. 7.14. Materiał wykorzystany do formowania kolumny to mieszanka piasku średniego i grubego.

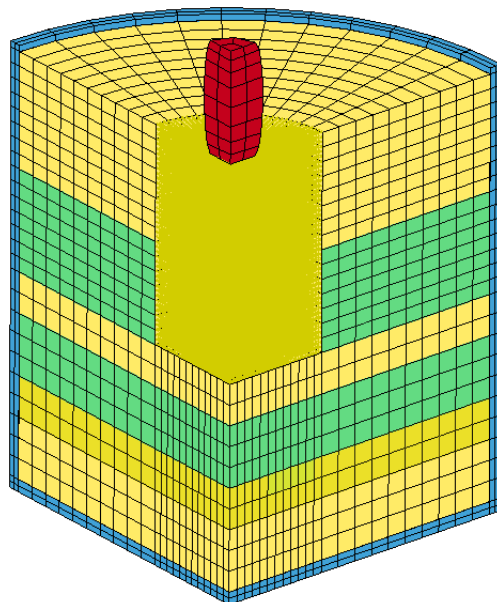


Rysunek 7.14: Etapy formowania kolumny. Słupki niebieskie przedstawiają wysokość zrzutu, natomiast znaczniki czerwone moment zasypu.

7.3 Numeryczna symulacja tworzenia krateru

Po wstępnych analizach, zdecydowano się na wybór hybrydowej metody SPH+MES. Uzasadnienie wyboru tej metody w symulacji tworzenia krateru pod obciążeniem typu "impact" można znaleźć w pracy autora [15]. Obliczenia wykonano dla 1/4 cylindrycznego modelu. Obszar gruntu poddany analizie obejmował objętość o głębokości 7 metrów i promieniu 5 metrów. W celu optymalizacji rozmiarów modelu, a co za tym idzie i czasu obliczeń, wykonano wstępne obliczenia i wyznaczono w ten sposób strefę dużych przemieszczeń. Miejsce wępu kofara i formowania kolumny (do 3.5m p.p.t.) jest obszarem dużych przemieszczeń. W tym celu obszar ten zamodelowano przy pomocy sformułowania SPH. W celu zagwarantowania braku odbicia ewentualnych fal (co mogłoby prowadzić do zaburzeń rozwiązania) zamodelowano dodatkowo obszar ograniczający, mający na celu wytłumienie propagującej fali. Warunki gruntowe przyjęto jak na Rys. 7.12. Przyjęto uproszczenie polegające na braku tarcia pomiędzy ubijakiem a gruntem. Z analizy wstępnych obliczeń potwierdzono, że aby zapewnić stabilność algorytmów kontaktowych wymaga się minimum czterech cząstek SPH na powierzchnię boczną jednego elementu skoń-

czonego. Zapotrzebowanie metody SPH na moc obliczeniową, tj. skalowalność programu LS-DYNA, oraz wymogi algorytmów kontaktowych spowodowały znaczne uproszczenie geometrii ubijaka. Geometrię modelu przedstawiono na Rys. 7.15.



Rysunek 7.15: Geometria modelu numerycznego

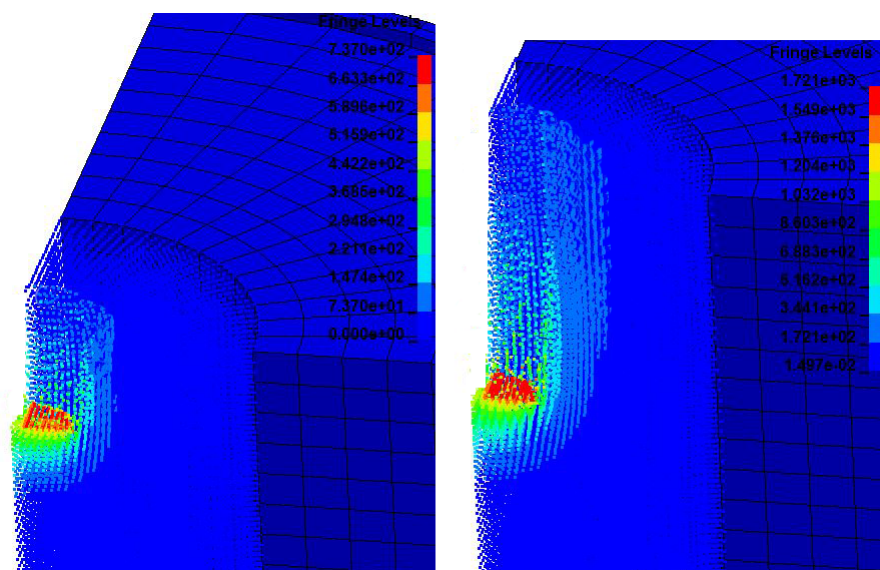
7.4 Numeryczna symulacja tworzenia kolumny

W celu wykonania symulacji formowania kolumny wykonano wieloetapową analizę (ang. *multistage analysis*). Oprogramowanie LS-DYNA umożliwia wykonanie tego rodzaju analiz w dwojaki sposób.

Pierwszym sposobem jest zdefiniowanie pliku wejściowego dla wszystkich etapów od razu. Wymaga się wówczas z góry zdefiniowania wszystkich warunków brzegowych, obciążeń, algorytmów kontaktowych i czasu ich trwania w trakcie symulacji.

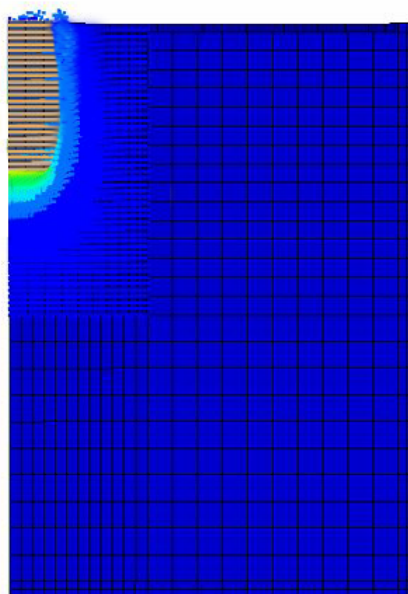
Drugi sposób polega na generacji przez program pliku *dynain*, po jednym z etapów i użycie go jako dane wejściowe podczas definiowania kolejnego etapu. W pliku *dynain* zawarte są wszystkie niezbędne informacje dla obliczeń takie jak np. zdeformowana siatka, składowe naprężenia czy odkształcenia, również przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia, a w przypadku cząstek SPH dodatkowo jeszcze pole gęstości. Po każdym z etapów obliczeniowych niezbędny jest etap relaksacji dynamicznej w celu wytłumienia oscylacji dynamicznych. W kolejnym etapie możliwe jest zdefiniowanie nowych warunków brzegowych, dodanie nowych składowych symulacji (w tym przypadku materiału zasypowego).

Przed każdym wypełnieniem krateru, sprawdza się ostatni wpęd ubijaka a w preprocesorze programu modeluje się geometrię materiału zasypowego, która to odpowiada



Rysunek 7.16: Porównanie wpędu kafara po pierwszym (rys. po lewej stronie) – wpęd około 0.74 m, oraz drugim uderzeniu (rys. po prawej stronie) – wpęd około 1.72 m.

geometrii ubijaka (ewentualnie jest pomniejszona o część powyżej powierzchni terenu). Na Rys. 7.17 przedstawiono mapę pól przemieszczeń po 2 uderzeniu wraz z nałożoną w celu ilustracji geometrią materiału zasypowego.

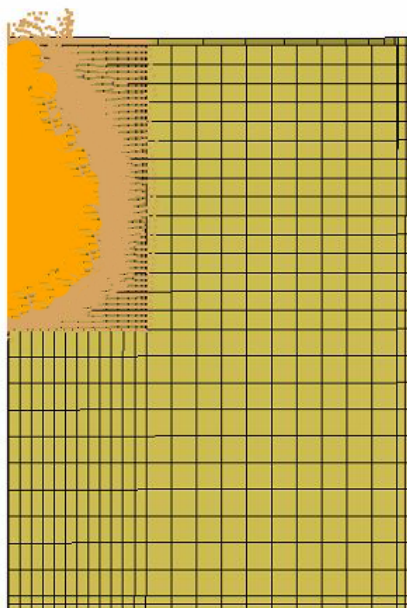


Rysunek 7.17: Mapa izopól przemieszczenia po 2 uderzeniu ubijaka wraz z geometrią materiału zasypowego.

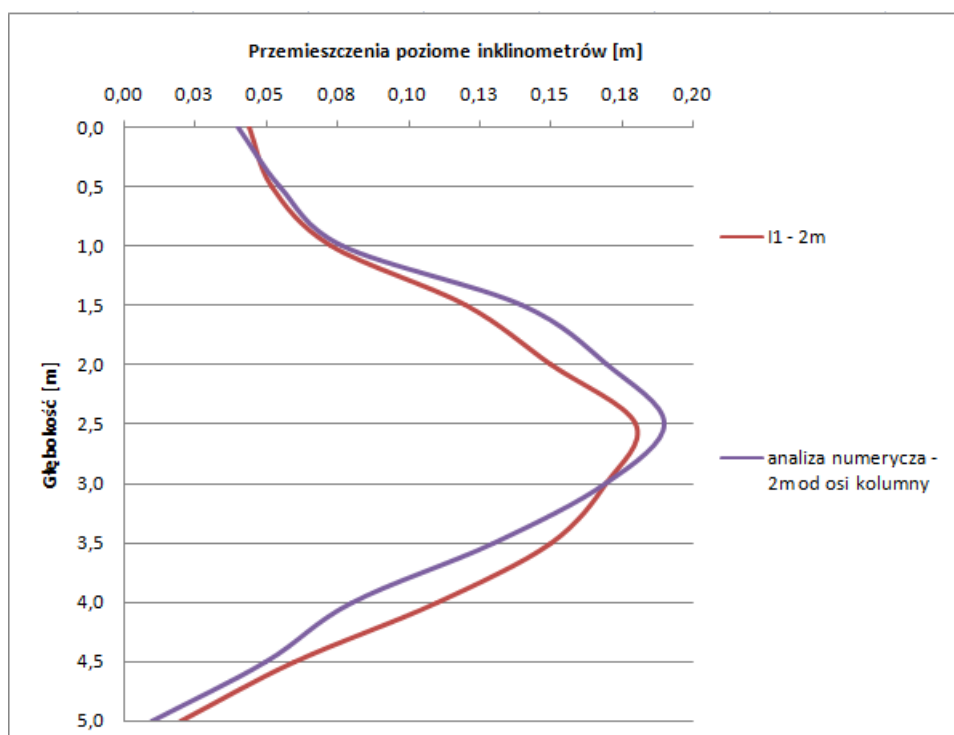
Należy podkreślić iż dla uproszczenia procesu obliczeniowego i skrócenia czasu obliczeń nie symulowano procesu wyciągania ubijaka, co z pewnością ma wpływ na kształt krateru i proces formowania kolumny. W takiej sytuacji bryła materiału zasypowego ma kształt

odpowiadający kształtowi ubijaka.

Geometrię uformowanej kolumny przedstawiono na Rys. 7.18.



Rysunek 7.18: Geometria uformowanej kolumny.



Rysunek 7.19: Składowe poziome przemieszczenia inklinometru I2 oraz składowe poziome przemieszczenia obliczeniowe.

W wyniku symulacji numerycznej uformowano kolumnę o długości 2,93 m, średnicy w

najszerszym miejscu około 2.1 m i kształcie dzbana. Klasyfikuje to kolumnę do grupy tzw. kolumn krępych. Kształt kolumny wynika z istniejącego nasypu budowlanego o miąższości około 1.9 m i zalegającej poniżej warstwie gruntów słabych. Niestety nie było możliwości wykonania odkrywki kolumny w terenie. Przemieszczenia poziome zainstalowanych inklinometrów oraz przemieszczenia otrzymane w modelu numerycznym przedstawiono na Rys. 7.19.

Różnice w przemieszczeniach można tłumaczyć uproszczeniami w geometrii kafara oraz brakiem tarcia pomiędzy ubijakiem a gruntem. Przemieszczenia mają związek z otrzymanym kształtem kolumny – w górnej części, gdzie występował nasyp budowlany na znacznie mniejsze niż w najszerszym miejscu kolumny.

Wynik I1-2m i porównanie analizy numerycznej dobrze odpowiada postawionemu celowi pracy.

Rozdział 8

Podsumowanie

W dysertacji zaproponowano wykorzystanie hybrydowego połączenia metody bezsiatkowej Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) z Metodą Elementów Skończonych, co w wyniku pozwoliło rozwiązać problem dużych przemieszczeń i degradacji siatki elementów skończonych. Metoda SPH ma liczne zastosowania w tym szczególnie w zagadnieniach, w których występują skomplikowane i zmienne w czasie algorytmy kontaktowe. Taka cecha metody pozwala na jej wykorzystanie w symulacji formowania kolumny przez wbijanie i rozpychanie materiału zasypowego. W pracy opisano wybrane, szczególne, prawo konstytutywne oraz zaproponowano procedurę kalibracji na podstawie badań polowych metodą sondowania statycznego CPTu. Przedstawiono matematyczny opis uwarunkowań powstawania fal objętościowych, powierzchniowych, a w szczególności fal uderzeniowych w gruncie, wraz ze wskazówkami postępowania podczas modelowania numerycznego. Przeprowadzono walidacyjne badania polowe formowania kolumn kamiennych na polu doświadczalnym, a następnie wykonano symulację numeryczną formowania wybranej kolumny. Stosowane powszechnie metody wymiarowania kolumn formowanych wymianą dynamiczną nie uwzględniają realnego "beczkowatego" kształtu kolumn. Badania numeryczne pozwoliły określić kształt kolumny oraz wpływ jej formowania na otaczające podłoże gruntowe. Sformułowane wnioski, przyczynią się do lepszego rozpoznania procesu i zjawiska wymiany dynamicznej, co w konsekwencji pozwoli efektywniej projektować kolumny, posilując się metodami komputerowymi.

Oryginalne osiągnięcia autora uzyskane w czasie realizacji pracy doktorskiej dotyczą niżej przedstawionych zagadnień.

1. Autor pioniersko wykorzystał hybrydowe połączenie metod numerycznych, a dokładniej bezsiatkowej metody Smooth Particle Hydrodynamics i Metody Elementów Skończonych w komputerowej symulacji głębokiego formowania kolumn w procesie wzmocnienia ośrodka gruntowego.
2. W dysertacji zawarto porównania, rekomendacje oraz zalecenia wynikające z prze-

prowadzonych prób i badań z wykorzystaniem innych sformułowań, takich jak np. sformułowanie Lagrange'a. Wybrane podejście pozwoliło rozwiązać problem dużych przemieszczeń oraz degradacji siatki elementów skończonych, jak również pozwoliło na modelowanie przenikania się (wciskania/wstrzykiwania) dwóch materiałów, jak to ma miejsce podczas rozpychania materiału kolumny wywołanego kolejnymi upadkami kafara.

3. Zaproponowano procedurę wyznaczania parametrów kalibrujących wybrane prawo konstytutywne za pomocą badań in-situ, szczególnie wykorzystując sondowanie statyczne metodą CPTu.
4. Potwierdzono tezę o niecyldrycznym kształcie kolumny kamiennej.
5. Potwierdzono tezę o lokalnym wzmocnieniu gruntu wokół formowanej kolumny.
6. Zaproponowano metodologię obliczeń, która pozwala z pomocą analizy numerycznej, przewidywać kształt kolumn, co jest istotną sprawą podczas szacowanie nośności kolumny w określonym podłożu gruntowym.

Takie sformułowanie treści dysertacji pozwala stwierdzić, że teza pracy doktorskiej została udowodniona.

Poprzez wykonanie wielokierunkowych badań naukowych potwierdzono zasadność zaproponowanej metodologii postępowania, co w efekcie stworzyło wygodne narzędzie numeryczne do komputerowej symulacji jednej z tradycyjnych, aczkolwiek teoretycznie do końca nierozpoznanych, metod wzmocniania podłoża gruntowego. Komputerowa symulacja procesu formowania kolumny w podłożu gruntowym poprzez ubijanie materiału zasypowego, pozwala na przewidywanie kształtu formowanych kolumn, oraz zmiany stanu gruntu w otoczeniu kolumny. Możliwe staje się precyzyjne dobranie energii uderzenia, tj. masy ubijaka i wysokości jego zrzutu w celu efektywnego zaprojektowania i przeprowadzenia procesu formowania kolumn w rzeczywistości. Zatem, po obowiązkowym procesie rozpoznania geotechnicznego podłoża gruntowego (wiercenia, sondowania, itp.) staje się możliwe komputerowe rozpoznanie wzmocnienia przedmiotowego słabego podłoża gruntowego. Hybrydowe podejście modelowania dużych przemieszczeń, pozwala wykorzystać autorską metodologię w wielu dziedzinach geotechniki, jak na przykład przy symulacji konsolidacji dynamicznej, wysoko strumieniowej iniekcji cementowej, procesu formowania pali i innych. Autor widzi potrzebę przyszłych badań w następujących kierunkach:

- analiza kształtu kolumn formowanych z różnych kruszyw i w różnych warunkach gruntowych,
- analiza wpływu formowania kolumn w przypadku różnych komórek jednostkowych,

-
- analiza obciążeń statycznych uformowanych kolumn (próbne obciążenia),
 - propozycje zmodernizowanych metod numerycznych pozwalających na przyspieszenie czasochłonności obliczeń,
 - nowe techniki walidacji wybranych zagadnień brzegowych,
 - i inne.

8.1 Podziękowania

Autor dziękuje prof. dr hab. inż. Zbigniewowi Sikorze za pomoc i opiekę naukową podczas pisania pracy. Firma Polbud-Pomorze Sp. z o.o. wykazała dużą pomoc organizacyjną, dziękuję za współpracę i wsparcie w badaniach. Współpracownikom Katedry Geotechniki, Geologii i Budownictwa Morskiego Politechniki Gdańskiej za wszelkie rady, opinie i krytykę.

Praca była finansowana przez Narodowe Centrum Nauki, grant numer NCN 2011/01/N/ST8/07495, za co Autor wyraża swoje szczere podziękowanie.

Rozdział 9

Streszczenie

Metoda wymiany dynamicznej, inaczej mówiąc kolumny formowane metodą wymiany dynamicznej jest to metoda wzmacniania słabego podłoża gruntowego. Polega ona na formowaniu kolumn poprzez zrzucanie ciężkiego ubijaka (10-30 ton) ze znacznej wysokości (15-30m). W wyniku uderzenia tworzy się krater który zasypuje się wytrzymałym kruszywem takim jak np. kruszony beton, kamienie, żwir czy piasek. W miejscu zasypu następują kolejne uderzenia wpychając kruszywo w głąb gruntu. Procedura jest powtarzana wielokrotnie, aż energia uderzenia nie jest w stanie przepchnąć kruszywa/uformować krateru. W efekcie otrzymuje się kolumnę kamienną o dużej nośności osiowej. Pomimo, że metoda została zaproponowana pod koniec lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku, oraz pomimo ogromnej popularności, należy ona wciąż do metod niedostatecznie rozpoznanych szczególnie pod względem teoretycznym. Wykorzystywane w projektowaniu kolumn formowanych metodą wymiany dynamicznej analityczne metody obliczeniowe, zostały pierwotnie opracowane dla kolumn formowanych metodami nie uwzględniającymi specyfiki tej metody. Z tego względu pomijany jest intuicyjnie wyczuwalny fakt lokalnego zagęszczenia (wzmocnienia) gruntu wokół formowanej kolumny, co w rezultacie często prowadzi do niedoszacowania nośności. Prowadzone w ośrodkach badawczych badania laboratoryjne borykają się z problemem skali, natomiast dotychczasowe próby modelowania numerycznego ograniczały się albo do analizy współpracy już uformowanej kolumny z podłożem gruntowym, a podjęte próby modelowania formowania kolumny, nie uwzględniały jednak specyfiki formowania poprzez uderzenia. Autor zaproponował wykorzystanie hybrydowej metody połączenia metody bezsiatkowej Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) z Metodą Elementów Skończonych co w rezultacie pozwoliło rozwiązać problem dużych przemieszczeń i degradacji siatki. Metoda SPH ma zastosowania również w zagadnieniach w których występują skomplikowane i zmienne w czasie algorytmy kontaktowe co pozwoliło na jej wykorzystanie w symulacji formowania kolumny przez wbijanie i rozpychanie materiału zasypowego. Przedstawiono wskazówki do przygotowania symulacji numerycznej z wykorzystaniem metody SPH i połączonych metod SPH+MES, jak również ograniczenia

wyżej wspomnianych podejść. Autor opisał wybrane prawo konstytutywne. Wykonano serię badań laboratoryjnych trójosiowego ściskania i izotropowego ściskania na poprzecznych próbkach gruntu celu kalibracji wybranych materiałów. Stosowność wyboru analizowanego prawa konstytutywnego dla ośrodka gruntowego i materiału kolumny potwierdzono w serii numerycznych testów elementarnych. Zaproponowano również procedurę kalibracji prawa konstytutywnego na podstawie testu polowego sondowania statycznego CPTu. Zaprezentowano matematyczny opis uwarunkowań powstawania fal objętościowych, powierzchniowych a w szczególności uderzeniowych w gruncie, wraz z wskazówkami postępowania podczas modelowania numerycznego opisanych zjawisk. Przeprowadzono testy polowe formowania kolumn na polietku doświadczalnym, a następnie wykonano symulację numeryczną formowania wybranej kolumny. Badanie to pozwoliło określić kształt kolumny, oraz wpływ jej formowania na otaczające podłoże gruntowe.

Wyciągnięte wnioski, według autora przyczyniły się do dokładniejszego rozpoznania procesu wymiany dynamicznej, co w konsekwencji pozwoli efektywniej projektować wspomniane kolumny w przyszłości. Przedstawione wyżej części dysertacji, numeryczna i eksperymentalna są według autora oryginalne i dowodzą tez postawionych w pracy doktorskiej.

Abstract

Dynamic Replacement method (DR), in other words the columns molded in the dynamic replacement, is a method of strengthening of the weak subsoil. It involves the formation of columns by dropping a large mass (10-30 tons) from a considerable height (15-30m). The impact creates a crater that is buried by tough aggregates such as crushed concrete, stones, gravel or sand. The place of filling is followed by another impact, pushing the aggregate deeper into the ground. The procedure is repeated several times until the impact energy is not able to push down the aggregate or to shape the crater. The result is a column with a high axial load capacity. Although the method was proposed in the late seventies of the last century, despite the huge popularity, it is still to be one of the most under-recognized methods especially in terms of the theory. Analytical calculation methods used in the design process of the dynamic replacement formed columns were originally developed for the columns formed by methods of the different kind (like Vibro-Replacement). Therefore, the intuitively felt local density (gain) formed around the ground column is usually overlooked what often leads to underestimation of the columns capacity in the design. The actual state of the art of column formed by Dynamic Replacement Method is presented. Calculation methods such as Brauns method for stocky column or Hughes and Withers method for slender column, assume cylindrical shape of column, when in fact, column are mostly barrel-shaped or bell-shaped. In rese-

arch centers, laboratory tests are facing the problem of scale. Found in literature previous attempts in numerical modeling were limited to analyze the cooperation of already formed column with subsoil. Numerical attempts to model formation of column, did not address to the specifics of the formation process caused by impact. By the methods proposed to use, there is a hybrid method connecting meshless Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) with Finite Element Method (FEM) which as a result helps to solve the problem of large displacements and degradation of the discretization of mesh elements. SPH method is also used in matters in which there are complicated and time-varying contact algorithms. This allows for its use in simulation of forming a column by hammering and stretching the material hopper. The author described the chosen selected constitutive law and has proposed procedure for its calibration based on popular field test like CPTu test. There is a mathematical description of conditions of formation shock waves and also volume and surface waves, along with the guidelines to be followed during the numerical modeling of the described phenomena. Field tests of the columns forming were carried out on the prepared experimental field. Laboratory tests such as triaxial compression tests, hydrostatic compression tests were performed to calibrate chosen constitutive law. The numerical simulation (performed with the LS-DYNA solver) of the formation of the selected column was performed. This study helped to determine the shape of the column and the impact of the formation on the surrounding subsoil. Numerical simulation results were validated with the field tests. Chosen methodology confirmed its ability to numerical modeling of large deformation and material mixing process. In conclusion, the results contributed to the accurate diagnosis of a dynamic exchange process, which will cause the more effective design of these columns in the future. The above mentioned parts of PhD research, both the numerical works as well as the experimental ones are original and they have been helpful to prove the thesis of this dissertation.

Dodatek A

Kod wejściowy programu LS-DYNA do badań elementarnych trójosiowego ściskania

```
*KEYWORD
*TITLE
$# title
1 element TX MAT005 fully int.
units: t mm s
*PART
$# title
one element
$#      pid      secid      mid      eosid      hgid      grav      adpopt      tmid
          1          1          1          0          0          0          0          0
$-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
*SECTION_SOLID
$#      secid      elform      aet
          1          2          0
$-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
*MAT_SOIL_AND_FOAM
$#      mid      ro      g      bulk      a0      a1      a2      pc
          1 2.3500E-9 34470 15024 1.0000E-9 0.000 0.602000 0.000
$#      vcr      ref      lcid
          0.000 0.000 0
$#      eps1      eps2      eps3      eps4      eps5      eps6      eps7      eps8
          0.000 0.025 0.040 0.060 0.070 0.080 0.089 0.101
$#      eps9      eps10
```


A. KOD WEJŚCIOWY PROGRAMU LS-DYNA DO BADAŃ ELEMENTARNYCH TRÓJOSIOWEGO ŚCISKANIA 89

```

    0.112    0.128
$#    p1      p2      p3      p4      p5      p6      p7      p8
    0.000    0.08E+6  0.14E+6  0.26E+6  0.33E+6  0.415E+6  0.49E+6  0.61E+6
$#    p9      p10
    0.697E+6  0.9E+6

```

***ELEMENT_SOLID**

```

$#  eid    pid    n1    n2    n3    n4    n5    n6    n7    n8
    1      1      1      2      3      4      5      6      7      8

```

***NODE**

```

$#  nid      x      y      z      tc      rc
    1      0.000    0.000    0.000    7      7
    2      1.000000  0.000    0.000    3      7
    3      1.000000  1.000000  0.000    3      7
    4      0.000    1.000000  0.000    3      7
    5      0.000    0.000    1.000000  0      7
    6      1.000000  0.000    1.000000  0      7
    7      1.000000  1.000000  1.000000  0      7
    8      0.000    1.000000  1.000000  0      7

```

\$-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+

***BOUNDARY_PRESCRIBED_MOTION_NODE**

```

$#  nid    dof    vad    lcid    sf    vid    death    birth
    5      3      2      2    1.000000    01.0000E+28    0.000
$#  nid    dof    vad    lcid    sf    vid    death    birth
    6      3      2      2    1.000000    01.0000E+28    0.000
$#  nid    dof    vad    lcid    sf    vid    death    birth
    7      3      2      2    1.000000    01.0000E+28    0.000
$#  nid    dof    vad    lcid    sf    vid    death    birth
    8      3      2      2    1.000000    01.0000E+28    0.000

```

***CONTROL_TERMINATION**

```

$#  endtim  endcyc  dtmin  endeng  endmas
    1.000000  0    0.000  0.000  0.000

```

***DATABASE_ELOUT**

```

$#  dt    binary  lcur  iopt  option1  option2  option3  option4
    0.0100000  0    0    1    0    0    0    0

```

***DATABASE_GLSTAT**

```

$#  dt    binary  lcur  iopt
    5.0000E-2  0    0    1

```

***DATABASE_BINARY_D3PLOT**

```

$#  dt    lcdt    beam  npltc  psetid

```

A. KOD WEJŚCIOWY PROGRAMU LS-DYNA DO BADAŃ ELEMENTARNYCH TRÓJOSIOWEGO ŚCISKANIA 90

```

5.0000E-2      0      0      0      0
$#  iopt
      0
*DATABASE_EXTENT_BINARY
$#  neiph      neips      maxint      strflg      sigflg      epsflg      rltflg      engflg
      0      0      3      0      1      1      1      1
$#  cmpflg      ieverp      beamip      dcomp      shge      stssz      n3thdt      ialemat
      0      0      0      1      1      1      2      1
$#  nintsld      pkp_sen      sclp      hydro      msscl      therm      intout      nodout
      0      0      1.000000      0      0      OALL      STRESS
$#  dtdt      resplt
      0      0
*DATABASE_HISTORY_SOLID
$#  id1      id2      id3      id4      id5      id6      id7      id8
      1      0      0      0      0      0      0      0
*DEFINE_CURVE_TITLE
side pressure loading
$#  lcid      sidr      sfa      sfo      offa      offo      dattyp
      1      0      1.000000      1.000000      0.000      0.000      0
$#
      a1      o1
      0.000      0.000
      1.000000      7.000000e+005
*DEFINE_CURVE_TITLE
top loading
$#  lcid      sidr      sfa      sfo      offa      offo      dattyp
      2      0      1.000000      1.000000      0.000      0.000      0
$#
      a1      o1
      0.000      0.000
      1.000000      -0.050000
      10.000000      -0.050000
*LOAD_SEGMENT_ID
$#  id      heading
      1
$#  lcid      sf      at      n1      n2      n3      n4      n5
      1      0.000      0.000      1      2      6      5      0
*LOAD_SEGMENT_ID
$#  id      heading
      2
$#  lcid      sf      at      n1      n2      n3      n4      n5

```

A. KOD WEJŚCIOWY PROGRAMU LS-DYNA DO BADAŃ ELEMENTARNYCH TRÓJOSIOWEGO ŚCISKANIA 91

```
      1      0.000      0.000      2      3      7      6      0
*LOAD_SEGMENT_ID
$#      id                                     heading
      3
$#      lcid      sf      at      n1      n2      n3      n4      n5
      1      0.000      0.000      3      4      8      7      0
*LOAD_SEGMENT_ID
$#      id                                     heading
      4
$#      lcid      sf      at      n1      n2      n3      n4      n5
      1      0.000      0.000      4      1      5      8      0
*END
```

Dodatek B

Kod programu *Mathematica* do kalibracji modelu MAT005

Przy założeniu znanych parametrów wytrzymałościowych gruntu dla modelu Coulomba-Mohra, tj. kąt tarcia wewnętrznego oraz spójność, możliwe jest wyznaczenie wartości współczynników a_0 , a_1 , a_2 kalibrujących prawo MAT005 przy pomocy poniższej procedury napisanej w pakiecie *Mathematica*.

```
ClearAll;
phi := 10*Pi/180;
c := 5;
sigma3a := 50;
sigma3b := 100;
temp1 = Flatten[
  Solve[(sigma1a - sigma3a) - (sigma1a + sigma3a) Sin[phi] -
    2*c*Cos[phi] == 0, sigma1a]];
temp2 = Flatten[
  Solve[(sigma1b - sigma3b) - (sigma1b + sigma3b) Sin[phi] -
    2*c*Cos[phi] == 0, sigma1b]];
sigma1a = sigma1a /. Flatten[temp1[[1]]];
sigma1b = sigma1b /. Flatten[temp2[[1]]];
q1 = (sigma1a - sigma3a) .1;
p1 = ((sigma1a + 2*sigma3a)/3) .1;
q2 = (sigma1b - sigma3b) .1;
p2 = ((sigma1b + 2*sigma3b)/3) .1;
temp3 = Flatten[Solve[a*p1 + b == p1 && a*p2 + b == q2, {a, b}]];
a = a /. Flatten[temp3[[1]]];
b = b /. Flatten[temp3[[2]]];
a0 = (a^2)/3
```

$$a1 = (2*a*b)/3$$

$$a2 = (b^2)/3$$

Bibliografia

- [1] www.vibromenard.co.uk.
- [2] J.D. Anderson. *Computational fluid dynamics: the basics with application*. Mc Graw-Hill, 1995.
- [3] S.N. Atluri, S.P. Shen. *The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method*. Tech Science Pree, USA, 2002.
- [4] S.N. Atluri, T. Zhu. A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22:p. 117–127, 1998.
- [5] S.W. Attaway, M. W. Heinstein, J.W. Swegle. Coupling of smooth particle hydrodynamics with the finite element method. *Nuclear*, 150:199–205, 1994.
- [6] T. Bednarski. *Mechanika plastycznego płynięcia w zarysie*. PWN, 1995.
- [7] T. Belytschko, W.K. Liu, B. Moran. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley and Sons, 2000.
- [8] T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu. Element-free Galerkin methods. *International Journal on Numerical Methods in Engineering*, 37:p. 229–256, 1994.
- [9] W. Benz. The numerical modelling of nonlinear stellar pulsation. *Kluwer Academic Publishers*, 1990.
- [10] C. Bojanowski, R. Kulak. Comparison of Lagrangian, SPH and MM-ALE approaches for modeling large deformation in soil. *11th International LS-DYNA Users Conference*, 2010.
- [11] C. Bojanowski, R. Kulak. Modeling of cone penetration test using SPH and MM-ALE approaches. *8th European LS-DYNA Users Conference*, 2011.
- [12] J. Brauns. Initial bearing capacity of stone column and sand piles. *Proceedings Symposium „Soil Reinforcement and Stabilizing Techniques in Engineering Practise”*, Sydney, 1978.

- [13] B. Budiansky. A reassessment of deformation theories of plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 26:259–264, 1959.
- [14] H. Bui, K. Sako, R. Fukagawa. Numerical simulation of soil–water interaction using smoothed particle hydrodynamics (SPH) method. *Journal of Terramechanics*, 44:339–346, 2007.
- [15] A. Danilewicz. Smooth particle hydrodynamics (SPH) method approach for simulating large penetration into soil. *EYGEC 2012 Proceedings, Göteborg, Szwecja*, 2012.
- [16] R.T. Donaghe, F.C. Townsend. Effects of anisotropic versus isotropic consolidation in consolidated-undrained triaxial compression tests of cohesive soils. *Geotechnical Testing Journal*, 1:173–189, 1978.
- [17] E.L. Fasanella, K.H. Lyle, K.E. Jackson. Developing soil models for dynamic impact simulations. *NASA Langley Research Center, Mail Stop 495*, 2009.
- [18] A. Fedaravičius, P. Šaulys, P. Griškevičius. Research of mine imitator interaction with deformable surface. *Mechanika*, strony 24–27, 2009.
- [19] M. Gambin. Menard dynamic consolidation. *Ground Reinforcement Seminar ASCE*, 1979.
- [20] V. Ghionna, M. Jamiołkowski. Colonne di ghiaia. *X Ciclo di Conferenze Dedicato ai Problemi di Meccanica dei Terreni e Ingegneria delle Fondazioni Metodi di Miglioramento dei Terreni*, 507, 1981.
- [21] M. Gryczmański. Metody analizy nośności i osiadania podłoża wzmocnionego kolumnami kamiennymi. *Inżynieria Morska i Geotechnika*, 5:224–231, 1993.
- [22] J.O. Hallquist. *LS-DYNA Keyword Users Manual Vol. II*, 2012.
- [23] L. Hernquist, N. Katz. Tree SPH - a unification of SPH with the hierarchical tree method. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 70:419–446, 1989.
- [24] W. Herrman. Constitutive equation for the dynamic compaction of ductile porous materials. *Journal of Applied Physics*, 40:2490–2499, 1969.
- [25] E. Heymsfield, E.L. Fasanella. Using numerical modeling to simulate space center ground landings. *Transportation Research Board Annual Meeting*, 2008.
- [26] S. Hiermaier. *Structures Under Crash and Impact*. Springer, 2008.
- [27] C. Hirsch. *Numerical Computation of Internal and External Flows*, wolumen I. Wiley-Interscience publication, 1988.

- [28] A.C. Holt, M. Carrol. Suggested modification of the p - α model for porous materials. *Journal of Applied Physics*, 43:759–761, 1972.
- [29] J. Hughes, N. Withers. Reinforcing of soft cohesive soil with stone column. *Ground Engineering*, 7:42–49, 1974.
- [30] P. H. Hugonit. On the propagation of motion in body and in perfect gases in particular. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 57:3–97, 1887.
- [31] G. R. Johnson. Linking of Lagrangean particle methods to standard finite elements methods for high velocity impact computations. *Nuclear*, 150:265–274, 1994.
- [32] G.R. Johnson, R.A. Stryk, S.R. Beissel. SPH for high velocity impact computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:347–374, 1996.
- [33] R.D. Krieg. A simple constitutive description for cellular concrete. Raport instytutowy, Sandia National Laboratories, 1972.
- [34] R.F. Kulak, L. Schwer. Effect of soil material models on SPH simulations for soil-structure interaction. *12th International LS-DYNA Users Conference*, 2012.
- [35] S. Kwiecień, J. Sękowski. *Kolumny kamienne formowane w technologii wymiany dynamicznej*. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, 2012.
- [36] R. Landshoff. A numerical method for treating fluid flow in the presence of shocks. Raport instytutowy LA-1930, Los Alamos Scientific Laboratory, 1955.
- [37] S. Li, W.K. Liu. *Meshfree Particle Methods*. Springer, 2004.
- [38] L.D. Libersky, A.G. Petschek. Smooth particle hydrodynamics with strength of materials. *Proceedings of the Next Free-Lagrange Conference held at Jackson Lake Lodge, Moran, WY, USA 3–7 June 1990*, vol. 395:p. 248–257, 1990.
- [39] L.D. Libersky, A.G. Petschek, T.C. Carney, J.R. Hipp, F.A. Allahdadi. High strain lagrangian hydrodynamics: A three-dimensional SPH code for dynamic material response. *Journal of Computational Physics*, 109:67–75, 1993.
- [40] G.R. Liu, M.B. Liu. *Smoothed Particle Hydrodynamics - a meshfree particle method*. World Scientific, 2003.
- [41] L. B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*, vol. 82:p. 1013–1024, 1977.
- [42] J. Lysmer, R. Kuhlemeyer. Finite dynamic model for infinite media. *Journal of Engineering Mechanics*, strony 857–877, 1969.

- [43] R. Menikoff, E. Kober. *Equation of State and Hugoniot Locus for Porous Materials: P- α Model Revisited*. American Institute of Physics, 2000.
- [44] J. J. Monaghan. Smoothed particle hydrodynamics. *Annual Review of Astronomical and Astrophysics*, 30:543–574, 1992.
- [45] J. J. Monaghan, R. A. Gingold. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and applications to non-spherical stars. *Royal Astronomical Society*, vol. 181:p. 375–389, 1977.
- [46] J. J. Monaghan, R. A. Gingold. Shock simulation by the particle method SPH. *Journal of Computational Physics*, 52:374–389, 1983.
- [47] J.J. Monaghan. Simulating free surface flows with sph. *Journal of Computational Physics*, strony 399–406, 1994.
- [48] J.J. Monaghan, J.C. Lattanzio. A refined particle method for astrophysical problems. *Astronomy and Astrophysics*, vol. 149:p. 135–143, 1985.
- [49] J.P. Morris, J.J. Monaghan. A switch to reduce SPH viscosity. *Journal of Computational Physics*, 136:41–50, 1997.
- [50] S. Pisarczyk. *Geoinżynieria. Metody modyfikacji podłoża gGruntowego*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2005.
- [51] H. Priebe. Abschaltung des Setzungsverhaltes eines durch Stopfverdichtung verbesserten Baugrundes. *Die Bautechnik*, 53, 1976.
- [52] T. Rabczuk, T. Belytschko, S.P. Xiao. Stable particle methods based on Lagrangean kernels. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193:1035–1063, 2004.
- [53] P.W. Randles, L.D. Libersky. Smoothed particle hydrodynamics: Some recent improvements and applications. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:375–408, 1996.
- [54] W.J. Rankine. On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbances. *Philosophical Transactions*, 160 II:277–288, 1870.
- [55] M. Sauer. *Adaptive Kopplung des netzfreien SPH-Verfahrens mit finiten Elementen zur Berechnung von Impaktvorgängen*. Praca doktorska, Universitaet der Bundeswehr Muenchen Neubiberg, 2000.
- [56] J. W. Swegle. TOODY IV - a computer program for two-dimensional wave propagation. *Sandia National Laboratories*, SAND-78-0552, 1978.

- [57] J. W. Swegle, S Q. Attaway, M. W. Heinstein, F. J. Mello, D. L. Hicks. An analysis of smooth particle hydrodynamics. *Sandia National Laboratories*, SAND93-2513, 1994.
- [58] J. W. Swegle, D.L. Hicks, S.W. Attaway. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. *Journal of Computational Physics*, strony 116–123, 1995.
- [59] J.W. Swegle. Constitutive equation for porous materials with strength. *Journal of Applied Physics*, 51:2574–2580, 1980.
- [60] H. Thilakasiri, M. Gunaratne, G. Mullins, P. Stinnette, C. Kuo. Implementation aid for dynamic replacement of organic soils with sand. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 127:25–35, 2001.
- [61] W.F. Van Impe, A. Bouazza. *Fundamentals of Enviromental Geotechnics. Soil Mechanics Laboratory*. Ghent State University, 1995.
- [62] A. Verruijt. *Soil dynamics*. Delf University of Technology, 2004.
- [63] R. von Mises. Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand. *Göttin. Nachr. Math. Phys.*, 1:582–592, 1913.
- [64] J. von Naumann, R.D. Richtmyer. A method for numerical calculation of hydrodynamic shocks. *Journal of Applied Physics*, 21:232–237, 1950.
- [65] B. Wrana. *Dynamika Gruntów. Modele obliczeniowe*. Politechnika Krakowska, 2012.
- [66] [www.menard web.com](http://www.menard.com).

Streszczenie pracy doktorskiej

Numeryczna symulacji procesu formowania kolumny kamiennej metodą wymiany dynamicznej

Metoda wymiany dynamicznej, inaczej mówiąc kolumny formowane metodą wymiany dynamicznej jest to metoda wzmocnienia słabego podłoża gruntowego. Polega ona na formowaniu kolumn poprzez zrzucanie ciężkiego ubijaka (10-30 ton) ze znacznej wysokości (15-30m). W wyniku uderzenia tworzy się krater który zasypuje się wytrzymałym kruszywem takim jak np. kruszony beton, kamienie, żwir czy piasek. W miejscu zasypu następują kolejne uderzenia wpychając kruszywo w głąb gruntu. Procedura jest powtarzana wielokrotnie, aż energia uderzenia nie jest w stanie przepchnąć kruszywa/uformować krateru. W efekcie otrzymuje się kolumnę kamienną o dużej nośności osiowej. Pomimo, że metoda została zaproponowana pod koniec lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku, oraz pomimo ogromnej popularności, należy ona wciąż do metod niedostatecznie rozpoznanych szczególnie pod względem teoretycznym. Wykorzystywane w projektowaniu kolumn formowanych metodą wymiany dynamicznej analityczne metody obliczeniowe, zostały pierwotnie opracowane dla kolumn formowanych metodami nie uwzględniającymi specyfiki tej metody. Z tego względu pomijany jest intuicyjnie wyczuwalny fakt lokalnego zagęszczenia (wzmocnienia) gruntu wokół formowanej kolumny, co w rezultacie często prowadzi do niedoszacowania nośności. Prowadzone w ośrodkach badawczych badania laboratoryjne borykają się z problemem skali, natomiast dotychczasowe próby modelowania numerycznego ograniczały się albo do analizy współpracy już uformowanej kolumny z podłożem gruntowym, a podjęte próby modelowania formowania kolumny, nie uwzględniały jednak specyfiki formowania poprzez uderzenia. Autor zaproponował wykorzystanie hybrydowej metody połączenia metody bezsiatkowej Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) z Metodą Elementów Skończonych co w rezultacie pozwoliło rozwiązać problem dużych przemieszczeń i degradacji siatki. Metoda SPH ma zastosowania również w zagadnieniach w których występują skomplikowane i zmienne w czasie algorytmy kontaktowe co pozwoliło na jej wykorzystanie w symulacji formowania kolumny przez wbijanie i rozpychanie materiału zasypowego. Przedstawiono wskazówki do przygotowania symulacji numerycznej z wykorzystaniem metody SPH i połączonych metod SPH+MES, jak również ograniczenia wyżej wspomnianych podejść. Autor opisał wybrane prawa konstytutywne. Wykonano serię badań laboratoryjnych trójosiowego ściskania i izotropowego ściskania na poprzecznych próbkach gruntu celu kalibracji wybranych materiałów. Stosowność wyboru analizowanego prawa konstytutywnego dla ośrodka gruntowego i materiału kolumny potwierdzono w serii numerycznych testów elementarnych. Zaproponowano również procedurę kalibracji prawa konstytutywnego na podstawie testu polowego sondowania statycznego CPTu.

Zaprezentowano matematyczny opis uwarunkowań powstawania fal objętościowych, powierzchniowych a w szczególności uderzeniowych w gruncie, wraz z wskazówkami postępowania podczas modelowania numerycznego opisanych zjawisk. Przeprowadzono testy polowe formowania kolumn na poletku doświadczalnym, a następnie wykonano symulację numeryczną formowania wybranej kolumny. Badanie to pozwoliło określić kształt kolumny, oraz wpływ jej formowania na otaczające podłoże gruntowe. Wyciągnięte wnioski, według autora przyczyniły się do dokładniejszego rozpoznania procesu wymiany dynamicznej, co w konsekwencji pozwoli efektywniej projektować wspomniane kolumny w przyszłości.

Przedstawione wyżej części dysertacji, numeryczna i eksperymentalna są według autora oryginalne i dowodzą tez postawionych w pracy doktorskiej.



Imię i nazwisko autora rozprawy: Andrzej Danilewicz
Dyscyplina naukowa: Budownictwo

ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Numeryczna symulacja procesu formowania kolumny kamiennej metodą wymiany dynamicznej

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Numerical simulation of column creating process by dynamic replacement method

Promotor <i>podpis</i>	Drugi promotor <i>podpis</i>
Prof. dr hab. inż. Zbigniew Sikora	<Tytuł, stopień, imię i nazwisko>
Promotor pomocniczy <i>podpis</i>	Kopromotor <i>podpis</i>
<Stopień, imię i nazwisko>	<Tytuł, stopień, imię i nazwisko>



The author of the PhD dissertation: Andrzej Danilewicz
Scientific discipline: Budownictwo

DOCTORAL DISSERTATION

Title of PhD dissertation: Numerical simulation of column creating process by dynamic replacement method

Title of PhD dissertation (in Polish): Numeryczna symulacja procesu formowania kolumny kamiennej metodą wymiany dynamicznej

Supervisor	Second supervisor
<i>signature</i>	<i>signature</i>
Prof. PhD. Eng. Zbigniew Sikora	<Title, degree, first name and surname>
Auxiliary supervisor	Cosupervisor
<i>signature</i>	<i>signature</i>
<Title, degree, first name and surname>	<Title, degree, first name and surname>



OŚWIADCZENIE

Autor rozprawy doktorskiej: Andrzej Danilewicz

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam zgodę/~~nie wyrażam zgody~~* na bezpłatne korzystanie z mojej rozprawy doktorskiej zatytułowanej:

Numeryczna symulacja procesu formowania kolumny kamiennej metodą wymiany dynamicznej do celów naukowych lub dydaktycznych.¹

Gdańsk, dnia

.....
podpis doktoranta

Świadomy(a) odpowiedzialności karnej z tytułu naruszenia przepisów ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (Dz. U. z 2006 r., nr 90, poz. 631) i konsekwencji dyscyplinarnych określonych w ustawie Prawo o szkolnictwie wyższym (Dz. U. z 2012 r., poz. 572 z późn. zm.),² a także odpowiedzialności cywilno-prawnej oświadczam, że przedkładana rozprawa doktorska została napisana przeze mnie samodzielnie.

Oświadczam, że treść rozprawy opracowana została na podstawie wyników badań prowadzonych pod kierunkiem i w ścisłej współpracy z promotorem prof. dr hab. inż. Zbigniewem Sikorą.

Niniejsza rozprawa doktorska nie była wcześniej podstawą żadnej innej urzędowej procedury związanej z nadaniem stopnia doktora.

Wszystkie informacje umieszczone w ww. rozprawie uzyskane ze źródeł pisanych i elektronicznych, zostały udokumentowane w wykazie literatury odpowiednimi odnośnikami zgodnie z art. 34 ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych.

Potwierdzam zgodność niniejszej wersji pracy doktorskiej z załączoną wersją elektroniczną.

Gdańsk, dnia

.....
podpis doktoranta

Ja, niżej podpisany(a), wyrażam zgodę/~~nie wyrażam zgody~~* na umieszczenie ww. rozprawy doktorskiej w wersji elektronicznej w otwartym, cyfrowym repozytorium instytucjonalnym Politechniki Gdańskiej, Pomorskiej Bibliotece Cyfrowej oraz poddawania jej procesom weryfikacji i ochrony przed przywłaszczeniem jej autorstwa.

Gdańsk, dnia

.....
podpis doktoranta

*) niepotrzebne skreślić

¹ Zarządzenie Rektora Politechniki Gdańskiej nr 34/2009 z 9 listopada 2009 r., załącznik nr 8 do instrukcji archiwalnej PG.

² Ustawa z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym: Rozdział 7 Odpowiedzialność dyscyplinarna doktorantów, Art. 226.



STATEMENT

The author of the PhD dissertation: Andrzej Danilewicz

I, the undersigned, agree/~~do not agree~~* that my PhD dissertation entitled:
Numerical simulation of column creating process by dynamic replacement method
may be used for scientific or didactic purposes.¹

Gdańsk,.....

.....
signature of the PhD student

Aware of criminal liability for violations of the Act of 4th February 1994 on Copyright and Related Rights (Journal of Laws 2006, No. 90, item 631) and disciplinary actions set out in the Law on Higher Education (Journal of Laws 2012, item 572 with later amendments),² as well as civil liability, I declare, that the submitted PhD dissertation is my own work.

I declare, that the submitted PhD dissertation is my own work performed under and in cooperation with the supervision of Prof. PhD. Eng. Zbigniew Sikora.

This submitted PhD dissertation has never before been the basis of an official procedure associated with the awarding of a PhD degree.

All the information contained in the above thesis which is derived from written and electronic sources is documented in a list of relevant literature in accordance with art. 34 of the Copyright and Related Rights Act.

I confirm that this PhD dissertation is identical to the attached electronic version.

Gdańsk,.....

.....
signature of the PhD student

I, the undersigned, agree/do not agree* to include an electronic version of the above PhD dissertation in the open, institutional, digital repository of Gdańsk University of Technology, Pomeranian Digital Library, and for it to be submitted to the processes of verification and protection against misappropriation of authorship.

Gdańsk,.....

.....
signature of the PhD student

*) delete where appropriate.

¹ Decree of Rector of Gdansk University of Technology No. 34/2009 of 9th November 2009, TUG archive instruction addendum No. 8.

² Act of 27th July 2005, Law on Higher Education: Chapter 7, Criminal responsibility of PhD students, Article 226.



OPIS ROZPRAWY DOKTORSKIEJ

Autor rozprawy doktorskiej: Andrzej Danilewicz

Tytuł rozprawy doktorskiej w języku polskim: Numeryczna symulacja procesu formowania kolumny kamiennej metodą wymiany dynamicznej

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Numerical simulation of column creating process by dynamic replacement method

Język rozprawy doktorskiej: polski

Promotor rozprawy doktorskiej: Zbigniew Sikora

Drugi promotor rozprawy doktorskiej*:

Promotor pomocniczy rozprawy doktorskiej*:

Kopromotor rozprawy doktorskiej*:

Data obrony: 21.04.2015

Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku polski: metoda wymiany dynamicznej, geomechanika, metoda SPH

Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku angielskim: dynamic replacement method, geomechanics, SPH method

Streszczenie rozprawy w języku polskim: Metoda wymiany dynamicznej, inaczej mówiąc kolumny formowane metodą wymiany dynamicznej jest to metoda wzmocnienia słabego podłoża gruntowego. Polega ona na formowaniu kolumn poprzez zrzućanie ciężkiego ubijaka (10-30 ton) ze znacznej wysokości (15-30m). W wyniku uderzenia tworzy się krater który zasypuje się wytrzymałym kruszywem takim jak np. kruszony beton, kamienie, żwir czy piasek. W miejscu zasypu następują kolejne uderzenia wpychając kruszywo w głąb gruntu. Procedura jest powtarzana wielokrotnie, aż energia uderzenia nie jest w stanie przepchnąć kruszywa/uformować krateru. W efekcie otrzymuje się kolumnę kamienną o dużej nośności osiowej. Pomimo, że metoda została zaproponowana pod koniec lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku, oraz pomimo ogromnej popularności, należy ona wciąż do metod niedostatecznie rozpoznanych szczególnie pod względem teoretycznym. Wykorzystywane w projektowaniu kolumn formowanych metodą wymiany dynamicznej analityczne metody obliczeniowe, zostały pierwotnie opracowane dla kolumn formowanych metodami nie uwzględniającymi specyfiki tej metody. Z tego względu pomijany jest intuicyjnie wyczuwalny fakt lokalnego zagęszczenia (wzmocnienia) gruntu wokół formowanej kolumny, co w rezultacie często prowadzi do niedoszacowania nośności. Prowadzone w ośrodkach badawczych badania laboratoryjne borykają się z problemem skali, natomiast dotychczasowe próby modelowania numerycznego ograniczały się albo do analizy współpracy już uformowanej kolumny z podłożem gruntowym, a podjęte próby modelowania formowania kolumny, nie uwzględniały jednak specyfiki formowania poprzez uderzenia. Autor zaproponował wykorzystanie hybrydowej metody połączenia metody bezsiatkowej Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) z Metodą Elementów Skończonych co w rezultacie pozwoliło rozwiązać problem dużych przemieszczeń i degradacji siatki. Metoda SPH ma zastosowania również w



zagadnieniach w których występują skomplikowane i zmienne w czasie algorytmy kontaktowe co pozwoliło na jej wykorzystanie w symulacji formowania kolumny przez wbijanie i rozpychanie materiału zasypowego. Przedstawiono wskazówki do przygotowania symulacji numerycznej z wykorzystaniem metody SPH i połączonych metod SPH+MES, jak również ograniczenia wyżej wspomnianych podejść. Autor opisał wybrane prawo konstytutywne. Wykonano serię badań laboratoryjnych trójosiowego ściskania i izotropowego ściskania na popranych próbkach gruntu celu kalibracji wybranych materiałów. Stosowność wyboru analizowanego prawa konstytutywnego dla ośrodka gruntowego i materiału kolumny potwierdzono w serii numerycznych testów elementarnych. Zaproponowano również procedurę kalibracji prawa konstytutywnego na podstawie testu polowego sondowania statycznego CPTu. Zaprezentowano matematyczny opis uwarunkowań powstawania fal objętościowych, powierzchniowych a w szczególności uderzeniowych w gruncie, wraz z wskazówkami postępowania podczas modelowania numerycznego opisanych zjawisk. Przeprowadzono testy polowe formowania kolumn na polietku doświadczalnym, a następnie wykonano symulację numeryczną formowania wybranej kolumny. Badanie to pozwoliło określić kształt kolumny, oraz wpływ jej formowania na otaczające podłoże gruntowe. Wyciągnięte wnioski, według autora przyczyniły się do dokładniejszego rozpoznania procesu wymiany dynamicznej, co w konsekwencji pozwoli efektywniej projektować wspomniane kolumny w przyszłości. Przedstawione wyżej części dysertacji, numeryczna i eksperymentalna są według autora oryginalne i dowodzą tez postawionych w pracy doktorskiej.

Streszczenie rozprawy w języku angielskim: Dynamic Replacement method (DR), in other words the columns molded in the dynamic replacement, is a method of strengthening of the weak subsoil. It involves the formation of columns by dropping a large mass (10-30 tons) from a considerable height (15-30m). The impact creates a crater that is buried by tough aggregates such as crushed concrete, stones, gravel or sand. The place of filling is followed by another impact, pushing the aggregate deeper into the ground. The procedure is repeated several times until the impact energy is not able to push down the aggregate or to shape the crater. The result is a column with a high axial load capacity. Although the method was proposed in the late seventies of the last century, despite the huge popularity, it is still to be one of the most under-recognized methods especially in terms of the theory. Analytical calculation methods used in the design process of the dynamic replacement formed columns were originally developed for the columns formed by methods of the different kind (like Vibro-Replacement). Therefore, the intuitively felt local density (gain) formed around the ground column is usually overlooked what often leads to underestimation of the columns capacity in the design. The actual state of the art of column formed by Dynamic Replacement Method is presented. Calculation methods such as Brauns method for stocky column or Hughes and Withers method for slender column, assume cylindrical shape of column, when in fact, column are mostly barrel-shaped or bell-shaped. In research centers, laboratory tests are facing the problem of scale. Found in literature previous attempts in numerical modeling were limited to analyze the cooperation of already formed column with subsoil. Numerical attempts to model formation of column, did not address to the specifics of the formation process caused by impact. By the methods proposed to use, there is a hybrid method connecting meshless Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) with Finite Element Method (FEM) which as a result helps to solve the problem of large displacements and degradation of the discretization of mesh elements. SPH method is also used in matters in which there are complicated and time-varying contact algorithms. This allows for its use in simulation of forming a column by hammering and stretching the material hopper. The author described the chosen selected constitutive law and has proposed procedure for its calibration based on popular field test like CPTu test. There is a mathematical description of conditions of formation shock waves and also volume and surface waves, along with the guidelines to be followed during the numerical modeling of the described phenomena. Field tests of the columns forming were carried out on the prepared experimental field. Laboratory tests such as triaxial compression tests, hydrostatic compression tests were performed to calibrate chosen constitutive law. The numerical simulation (performed with the LS-DYNA solver) of the formation of the selected column was performed. This



**POLITECHNIKA
GDAŃSKA**

Wydział Inżynierii
Łądowej i Środowiska



study helped to determine the shape of the column and the impact of the formation on the surrounding subsoil. Numerical simulation results were validated with the field tests. Chosen methodology confirmed its ability to numerical modeling of large deformation and material mixing process. In conclusion, the results contributed to the accurate diagnosis of a dynamic exchange process, which will cause the more effective design of these columns in the future. The above mentioned parts of PhD research, both the numerical works as well as the experimental ones are original and they have been helpful to prove the thesis of this dissertation.

~~Streszczenie rozprawy w języku, w którym została napisana.~~**

~~Słowa kluczowe rozprawy doktorskiej w języku, w którym została napisana.~~**

*) niepotrzebne skreślić.

***) dotyczy rozpraw doktorskich napisanych w innych językach, niż polski lub angielski.



DESCRIPTION OF DOCTORAL DISSERTATION

The Author of the PhD dissertation: Andrzej Danilewicz

Title of PhD dissertation: Numerical simulation of column creating process by dynamic replacement method

Title of PhD dissertation in Polish: Numeryczna symulacja procesu formowania kolumny kamiennej metodą wymiany dynamicznej

Language of PhD dissertation: polish

Supervision: Zbigniew Sikora

Second supervision*:

Auxiliary supervision*:

Cosupervision*:

Date of doctoral defense: 21.04.2015

Keywords of PhD dissertation in Polish: metoda wymiany dynamicznej, geomechanika, metoda SPH

Keywords of PhD dissertation in English: dynamic replacement method, geomechanics, SPH method

Summary of PhD dissertation in Polish: Metoda wymiany dynamicznej, inaczej mówiąc kolumny formowane metodą wymiany dynamicznej jest to metoda wzmacniania słabego podłoża gruntowego. Polega ona na formowaniu kolumn poprzez zrzucanie ciężkiego ubijaka (10-30 ton) ze znacznej wysokości (15-30m). W wyniku uderzenia tworzy się krater który zasypuje się wytrzymałym kruszywem takim jak np. kruszony beton, kamienie, żwir czy piasek. W miejscu zasypu następują kolejne uderzenia wpychając kruszywo w głąb gruntu. Procedura jest powtarzana wielokrotnie, aż energia uderzenia nie jest w stanie przepchnąć kruszywa/uformować krateru. W efekcie otrzymuje się kolumnę kamienną o dużej nośności osiowej. Pomimo, że metoda została zaproponowana pod koniec lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku, oraz pomimo ogromnej popularności, należy ona wciąż do metod niedostatecznie rozpoznanych szczególnie pod względem teoretycznym. Wykorzystywane w projektowaniu kolumn formowanych metodą wymiany dynamicznej analityczne metody obliczeniowe, zostały pierwotnie opracowane dla kolumn formowanych metodami nie uwzględniającymi specyfiki tej metody. Z tego względu pomijany jest intuicyjnie wyczuwalny fakt lokalnego zagęszczenia (wzmocnienia) gruntu wokół formowanej kolumny, co w rezultacie często prowadzi do niedoszacowania nośności. Prowadzone w ośrodkach badawczych badania laboratoryjne borykają się z problemem skali, natomiast dotychczasowe próby modelowania numerycznego ograniczały się albo do analizy współpracy już uformowanej kolumny z podłożem gruntowym, a podjęte próby modelowania formowania kolumny, nie uwzględniały jednak specyfiki formowania poprzez uderzenia. Autor zaproponował wykorzystanie hybrydowej metody połączenia metody bezsiatkowej Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) z Metodą Elementów Skończonych co w rezultacie pozwoliło rozwiązać problem dużych przemieszczeń i degradacji siatki. Metoda SPH ma zastosowania również w zagadnieniach w których występują skomplikowane i zmienne w czasie algorytmy kontaktowe co



pozwoiliło na jej wykorzystanie w symulacji formowania kolumny przez wbijanie i rozpychanie materiału zasypowego. Przedstawiono wskazówki do przygotowania symulacji numerycznej z wykorzystaniem metody SPH i połączonych metod SPH+MES, jak również ograniczenia wyżej wspomnianych podejść. Autor opisał wybrane prawo konstytutywne. Wykonano serię badań laboratoryjnych trójosiowego ściskania i izotropowego ściskania na popranych próbkach gruntu celu kalibracji wybranych materiałów. Stosowność wyboru analizowanego prawa konstytutywnego dla ośrodka gruntowego i materiału kolumny potwierdzono w serii numerycznych testów elementarnych. Zaproponowano również procedurę kalibracji prawa konstytutywnego na podstawie testu połowego sondowania statycznego CPTu. Zaprezentowano matematyczny opis uwarunkowań powstawania fal objętościowych, powierzchniowych a w szczególności uderzeniowych w gruncie, wraz z wskazówkami postępowania podczas modelowania numerycznego opisanych zjawisk. Przeprowadzono testy połowe formowania kolumn na polietku doświadczalnym, a następnie wykonano symulację numeryczną formowania wybranej kolumny. Badanie to pozwoliło określić kształt kolumny, oraz wpływ jej formowania na otaczające podłoże gruntowe. Wyciągnięte wnioski, według autora przyczyniły się do dokładniejszego rozpoznania procesu wymiany dynamicznej, co w konsekwencji pozwoli efektywniej projektować wspomniane kolumny w przyszłości. Przedstawione wyżej części dysertacji, numeryczna i eksperymentalna są według autora oryginalne i dowodzą tez postawionych w pracy doktorskiej.

Summary of PhD dissertation in English: Dynamic Replacement method (DR), in other words the columns molded in the dynamic replacement, is a method of strengthening of the weak subsoil. It involves the formation of columns by dropping a large mass (10-30 tons) from a considerable height (15-30m). The impact creates a crater that is buried by tough aggregates such as crushed concrete, stones, gravel or sand. The place of filling is followed by another impact, pushing the aggregate deeper into the ground. The procedure is repeated several times until the impact energy is not able to push down the aggregate or to shape the crater. The result is a column with a high axial load capacity. Although the method was proposed in the late seventies of the last century, despite the huge popularity, it is still to be one of the most under-recognized methods especially in terms of the theory. Analytical calculation methods used in the design process of the dynamic replacement formed columns were originally developed for the columns formed by methods of the different kind (like Vibro-Replacement). Therefore, the intuitively felt local density (gain) formed around the ground column is usually overlooked what often leads to underestimation of the columns capacity in the design. The actual state of the art of column formed by Dynamic Replacement Method is presented. Calculation methods such as Brauns method for stocky column or Hughes and Withers method for slender column, assume cylindrical shape of column, when in fact, column are mostly barrel-shaped or bell-shaped. In research centers, laboratory tests are facing the problem of scale. Found in literature previous attempts in numerical modeling were limited to analyze the cooperation of already formed column with subsoil. Numerical attempts to model formation of column, did not address to the specifics of the formation process caused by impact. By the methods proposed to use, there is a hybrid method connecting meshless Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) with Finite Element Method (FEM) which as a result helps to solve the problem of large displacements and degradation of the discretization of mesh elements. SPH method is also used in matters in which there are complicated and time-varying contact algorithms. This allows for its use in simulation of forming a column by hammering and stretching the material hopper. The author described the chosen selected constitutive law and has proposed procedure for its calibration based on popular field test like CPTu test. There is a mathematical description of conditions of formation shock waves and also volume and surface waves, along with the guidelines to be followed during the numerical modeling of the described phenomena. Field tests of the columns forming were carried out on the prepared experimental field. Laboratory tests such as triaxial compression tests, hydrostatic compression tests were performed to calibrate chosen constitutive law. The numerical simulation (performed with the LS-DYNA solver) of the formation of the selected column was performed. This study helped to determine the shape of the column and the impact of the formation on the surrounding subsoil.



**GDAŃSK UNIVERSITY
OF TECHNOLOGY**

Faculty of Civil and
Environmental Engineering

Załącznik nr 3/2
do Zarządzenia Rektora PG nr 5/2015 z 10 lutego 2015 r.



Numerical simulation results were validated with the field tests. Chosen methodology confirmed its ability to numerical modeling of large deformation and material mixing process. In conclusion, the results contributed to the accurate diagnosis of a dynamic exchange process, which will cause the more effective design of these columns in the future. The above mentioned parts of PhD research, both the numerical works as well as the experimental ones are original and they have been helpful to prove the thesis of this dissertation.

~~Summary of PhD dissertation in language, in which it was written:~~**

~~Keywords of PhD dissertation in language, in which it was written:~~**

*) delete where appropriate.

***) applies to doctoral dissertations written in other languages, than Polish or English.