Załącznik nr 1/1
do Zarządzenia Rektora PG nr 5/2015 z 10 lutego 2015 r.

POLITECHNIKA GDAŃSKA

WYDZIAŁ ELEKTRONIKI, TELEKOMUNIKACJI I INFORMATYKI

Imię i nazwisko autora rozprawy: Krzysztof Turowski
Dyscyplina naukowa: Informatyka

ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Analiza właściwości algorytmicznych problemu szkieletowego kolorowania grafów

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Analysis of algorithmic properties of the backbone graph coloring problem

Promotor *podpis*	Drugi promotor *podpis*
Prof. dr hab. inż. Marek Kubale	
Promotor pomocniczy *podpis*	Kopromotor *podpis*
Dr inż. Robert Janczewski	

Gdańsk, rok 2015

Streszczenie

W niniejszej pracy badany jest problem szkieletowego kolorowania grafów, wywodzący się z zagadnienia przydziału częstotliwości w sieciach radiowych.

Grafy często są wykorzystywane do modelowania topologii sieci telekomunikacyjnych. W modelach tych stacjom bazowym odpowiadają wierzchołki grafów, natomiast ograniczenia nałożone na sygnały są przedstawiane jako krawędzie grafu, łączące te pary wierzchołków, dla których emitowane sygnały mogą się wzajemnie zakłócać. Typowo, problem przypisania pasm częstotliwości w sieci można zamodelować jako zagadnienie kolorowania grafów, w którym pasma częstotliwości są reprezentowane przez poszczególne kolory. Dokładna definicja podobieństwa pasm częstotliwości może się różnić w zależności od typu sygnału czy rodzaju przesyłanej informacji, skutkując różnymi sformułowaniami problemu. Przykładowo, w większości przypadków nie należy zakładać, że sąsiednie wierzchołki nie mogą otrzymać jedynie identycznych kolorów, ale raczej kolory im przydzielone powinny być oddzielone o zadany przedział. Podejściem, które spełnia ten warunek i jednocześnie uogólnia szereg znanych w literaturze modeli jest kolorowanie szkieletowe, które, choć sformułowane niedawno, zdobyło już pewne zainteresowanie w teorii grafów.

W pracy wyróżnić można kilka podstawowych wątków. Po pierwsze, podana jest ogólna asymptotyczna charakteryzacja zachowania szkieletowej liczby chromatycznej dla zadanych grafów z ustalonymi szkieletami. Dowiedziono, że jej wartość rośnie proporcjonalnie do wartości parametru λ, będącego szkieletową odległością kolorów, oraz do liczby chromatycznej szkieletu. Co więcej, ponieważ problem obliczania szkieletowej liczby chromatycznej jest $\mathcal{NP}$-trudny w przypadku ogólnym, badane są ograniczenia i złożoność obliczeniowa tego zagadnienia dla wyróżnionych klas grafów i szkieletów: grafów pełnych ze szkieletem dwudzielnym, grafów planarnych, grafów o ograniczonym stopniu oraz split grafów. W każdym z przypadków podany został działający w czasie wielomianowym algorytm dokładny (o ile istnieje) lub przybliżony dla wyznaczania szkieletowej liczby chromatycznej.

Abstract

In this thesis we study the backbone coloring, originating from the efficient frequency assignment problem in radio networks.

Graphs are frequently used to model topology of the radio networks, representing the base stations with vertices of the graphs. The restrictions on the signal interferences can be represented using edges of the graph, each adjacent to vertices whose respective transmitters' signals are prone to distort one another. The assignment can be modelled as the graph coloring, with frequency channels represented by colors. The exact notion of similarity of frequency channels may vary, resulting in different types of coloring problems. For instance, in most cases it is not possible to assume that the adjacent vertices cannot be assigned the same color, but they have to be separated by a given margin. The approach which fits this constraint and unifies several well-known models, known as backbone coloring, has recently emerged and gained relatively substantial interest among graph theorists.

There are few major threads of this thesis. First, we give the general asymptotic characterization of the backbone chromatic number for given graphs with given backbones. We prove that it grows proportionally to the value of parameter λ and the chromatic number of the backbone graph. Furthermore, as the problem of computing the backbone chromatic number is $\mathcal{NP}$-hard in general, we investigate the bounds and the complexity of this problem for special classes of graphs and backbones: complete graphs with bipartite backbones, planar graphs, graphs with bounded degree and split graphs. In each case we construct an exact (if possible) or an approximate polynomial-time algorithm for computing the backbone chromatic number.

Wykaz oznaczeń

$\emptyset$	zbiór pusty
$x \in X$	x jest elementem zbioru X
$X \subseteq Y$	X jest podzbiorem Y
$X \subset Y$	X jest podzbiorem właściwym Y
$X \cap Y$	iloczyn zbiorów X i Y
$X \cup Y$	suma zbiorów X i Y
$X \setminus Y$	różnica zbiorów X i Y
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{N}_+$	zbiór liczb naturalnych dodatnich
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych
$\min A$	najmniejszy element niepustego, skończonego zbioru $A \subset \mathbb{Z}$
$\max A$	największy element niepustego, skończonego zbioru $A \subset \mathbb{Z}$
$x := y$	x jest równe z definicji y
$f\colon X \to Y$	f jest funkcją odwzorowującą zbiór X w zbiór Y
$\lceil x \rceil$	najmniejsza liczba całkowita nie mniejsza niż x
$\lfloor x \rfloor$	największa liczba całkowita nie większa niż x
$G \subseteq H$	G jest podgrafem H
$G[A]$	podgraf indukowany grafu G na niepustym zbiorze $A \subseteq V(G)$
$G \cap H$	część wspólna grafów G i H

$G \cup H$	suma grafów G i H
$G \setminus H$	różnica grafów G i H
$\bar{G}$	dopełnienie grafu G
$V(G)$	zbiór wierzchołków grafu G
$E(G)$	zbiór krawędzi grafu G
$N_G(v)$	sąsiedztwo wierzchołka $v \in V(G)$ w grafie G
N_n	n-wierzchołkowy graf pełny
K_n	n-wierzchołkowy graf pełny
C_n	n-wierzchołkowy cykl
P_n	n-wierzchołkowa ścieżka
$n(G)$	rząd grafu G
$m(G)$	rozmiar grafu G
$\deg_G(v)$	stopień wierzchołka $v \in V(G)$ w grafie G
$\mathrm{indeg}_G(v)$	stopień wejściowy wierzchołka $v \in V(G)$ w digrafie G
$\mathrm{outdeg}_G(v)$	stopień wyjściowy wierzchołka $v \in V(G)$ w digrafie G
$\Delta(v)$	stopień grafu G
$\omega(v)$	liczba klikowa grafu G
$\chi(v)$	liczba chromatyczna grafu G
$BBC_\lambda(G,H)$	λ-szkieletowa liczba chromatyczna grafu G ze szkieletem H
$O(f)$	zbiór funkcji rosnących nie szybciej niż f
$\mathcal{P}$	klasa problemów decyzyjnych rozstrzygalnych przez algorytmy wielomianowe
$\mathcal{NP}$	klasa problemów decyzyjnych rozstrzygalnych przez wielomianowe algorytmy niedeterministyczne
$\mathcal{NPC}$	klasa problemów zupełnych w klasie $\mathcal{NP}$ ze względu na redukcje wielomianowe

Spis treści

Rozdział 1

Wprowadzenie

1.1. Założenia i cele pracy

Zagadnienie przydziału częstotliwości dla sieci telekomunikacyjnych, w szczególności w sieciach radiowych, jest problemem, w modelowaniu którego często wykorzystywane są narzędzia teoriografowe. Naturalnym sposobem przedstawienie topologii zadanej sieci radiowej i wzajemnych zależności między stacjami bazowymi jest odwzorowanie przekaźników na wierzchołki grafu, natomiast możliwych interferencji między stacjami na jego krawędzie. Zazwyczaj dwa wierzchołki sąsiadują ze sobą, gdy odpowiednie przekaźniki mają dostatecznie dużą moc i znajdują się w niewielkiej odległości od siebie, zatem prawdopodobne jest ich wzajemne zakłócanie, w przypadku gdy zostaną im przydzielone zbliżone pasma częstotliwości. Częstym kryterium optymalizacji jest minimalizacja szerokości pasma potrzebnego do prawidłowego funkcjonowania wszystkich przekaźników przy jednoczesnym zapewnieniu akceptowalnego poziomu interferencji.

Jak widać, szczegółowe kryteria określające problem są ściśle związane z różnymi sposobami zdefiniowania pasma częstotliwości, określenia „podobieństwa" między poszczególnymi pasmami, a także poziomu interferencji i kryteriów jego dopuszczalnej akceptowalności. Prekursorską w tej dziedzinie była praca Metzgera [36] opublikowana na początku lat 70. ubiegłego wieku. Jednak dopiero prace Hale'a [25] oraz Cozzensa i Robertsa [16] rozpoczęły na dobre dynamiczny rozwój dziedziny, który zaowocował wieloma nowymi modelami. Na przestrzeni ostatnich lat stosunkowo duże zainteresowanie wzbudził model kolorowania szkieletowego, wprowadzony przez Broersmę i in. w [7], w ramach którego możliwe stało się uogólnienie wyników znanych z szeregu innych modeli, np. $L(2,1)$-kolorowania oraz kolorowania radiowego [6].

Celem pracy jest przedstawienie na tle dotychczasowych rezultatów z dziedziny szkieletowego kolorowania grafów zagadnień i problemów, do których rozwiązania przyczynił się autor niniejszej pracy. Zaprezentowane wyniki umożliwią nam uzasadnienie poniższego stwierdzenia, stanowiącego podstawową tezę niniejszej pracy:

> Zagadnienie szkieletowego kolorowania grafów jest działem chromatycznej teorii grafów, w ramach którego znalezienie optymalnych parametrów grafów lub przynajmniej ich dobrych oszacowań jest w ogólnym przypadku $\mathcal{NP}$-trudne. Co więcej, problem wyznaczenia szkieletowej liczby chromatycznej pozostaje $\mathcal{NP}$-trudny dla grafów stopnia 4 oraz grafów planarnych, nawet w przypadku, gdy szkielet jest spójny, a także dla grafów stopnia 5, gdy szkielet jest drzewem.
>
> W przypadku grafów podkubicznych, kaktusów oraz split grafów ze skojarzeniem w szkielecie istnieją jednak wielomianowe algorytmy wyznaczające rozwiązanie dokładne. Taki algorytm również można znaleźć dla grafów pełnych z drzewami w szkielecie, przy założeniu dostatecznie małej lub dużej wartości parametru λ względem rozmiaru partycji szkieletu. W ogólnym przypadku, dla grafów pełnych z grafami dwudzielnymi w szkielecie oraz dla grafów kolczastych istnieją efektywne algorytmy przybliżone.

Niniejsza praca składa się z pięciu rozdziałów. W pierwszym z nich, mającym charakter wprowadzający, przedstawione zostaną pokrótce podstawowe definicje z zakresu teorii grafów oraz złożoności obliczeniowej, wykorzystywane do formalnego modelowania oraz badania omawianych zagadnień. Przede wszystkim zostaną omówione pojęcia i fakty mające szczególne znaczenie w problemie szkieletowego kolorowania grafów.

W drugim rozdziale zostaną zawarte najważniejsze własności pokolorowań szkieletowych. Najpierw wprowadzone zostaną elementarne relacje, zachodzące między podstawowym parametrem w problemie szkieletowego kolorowania grafów, szkieletową liczbą chromatyczną, a innymi parametrami grafu, np. liczbą chromatyczną grafu oraz liczbą chromatyczną szkieletu. Następnie, przedstawione zostaną nowe ograniczenia górne i dolne dla szkieletowej liczby chromatycznej, zależne od liczby chromatycznej grafu i szkieletu, ulepszające ogólne ograniczenia, znane z prac [6,29]. Ponadto zostanie zaprezentowany dowód, że asymptotycznie stosunek szkieletowej liczby chromatycznej do parametru λ dąży do liczby chromatycznej szkieletu. Co więcej, zostanie wykazane, że dla dużych wartości parametru λ wartość szkieletowej liczby chromatycznej daje się wyrazić wzorem zależnym wyłącznie od wartości λ, liczby chromatycznej szkieletu oraz pewnego parametru zależnego wyłącznie od grafów G i H. Na koniec rozdziału przedstawione zostaną dwa algorytmy wyznaczania szkieletowej liczby chromatycznej w przypadku, gdy szkielet jest dwudzielny: liniowy algorytm 2-przybliżony (1.5-przybliżony, gdy nałożone zostanie dodatkowe ograniczenie o spójności szkieletu) oraz kwadratowy algorytm dla przypadku, gdy szkielet jest drzewem spinającym, zwracający rozwiązanie dokładne dla prawie wszystkich wartości λ.

Trzeci rozdział poświęcony będzie kolorowaniu szkieletowemu grafów planarnych, dotychczas poruszanemu w pracach [7, 12, 14, 29], aczkolwiek częściej badanego pod kątem poszukiwania grafów ekstremalnych. Przedstawiona zostanie pełna klasyfikacja złożoności obliczeniowej decyzyjnej wersji problemu kolorowania szkieletowego grafów planarnych ze spójnymi szkieletami wraz z podaniem wielomianowych algorytmów znajdujących optymalne pokolorowanie w przypadkach, w których jest to możliwe. Jednocześnie, dla grafów planarnych z drzewami spinającymi w szkielecie również zostanie podana niemal pełna klasyfikacja złożoności obliczeniowej – z wyjątkiem trzech przypadków, w których problem nadal pozostaje otwarty. Okazuje się, że zagadnienie kolorowania szkieletowego grafów planarnych pozostaje w dużej mierze $\mathcal{NP}$-trudne, jednak w szczególnych przypadkach możliwe jest podanie algorytmu dokładnego lub bezwzględnie przybliżonego.

Treścią kolejnego, czwartego rozdziału będzie analiza zagadnienia kolorowania szkieletowego dla grafów o ustalonym maksymalnym stopniu. Zostanie przedstawiony dowód i algorytm znajdowania optymalnego pokolorowania szkieletowego dla grafów podkubicznych o spójnym szkielecie. Zarazem zostanie dowiedziona $\mathcal{NP}$-trudność problemu dla grafów, których maksymalny stopień jest ograniczony przez dowolną ustaloną liczbę większą niż 3 oraz spójnych szkieletów. Ponadto, nawet jeśli ograniczymy klasę dozwolonych szkieletów tylko do drzew, to możliwe jest pokazanie, że zagadnienie pozostaje $\mathcal{NP}$-trudne dla grafów o maksymalnym stopniu ograniczonym przez dowolną ustaloną liczbę większą niż 4.

W piątym rozdziale, zamykającym główną część wyników, przedstawiony zostanie algorytm wyznaczania szkieletowej liczby chromatycznej dla split grafów ze skojarzeniem w szkielecie. Chociaż istnieje podane w [8, 9] ścisłe ograniczenie ogólne na wartość szkieletowej liczby chromatycznej, dotychczas nieznana była złożoność obliczeniowa algorytmu dokładnego. Przedstawiony algorytm, działający w czasie kwadratowym, bazuje na przekształceniu problemu do wyznaczenia optymalnego pokolorowania szkieletowego grafu pełnego z lasem lub zbiorem grafów unicyklicznych w szkielecie.

Przedstawione powyżej wyniki zawarte w rozprawie zostały wcześniej opublikowane lub przyjęte do publikacji głównie w następujących pracach:

- R. Janczewski, K. Turowski, *The backbone coloring problem for bipartite backbones*. Przyjęte do druku w *Graphs and Combinatorics* (DOI:10.1007/s00373-014-1462-9).
- R. Janczewski, K. Turowski, *The computational complexity of the backbone coloring problem for bounded-degree graphs with connected backbones*. Information Processing Letters 115 (2015), s. 232–236 (DOI:10.1016/j.ipl.2014.09.018).
- R. Janczewski, K. Turowski, *The computational complexity of the backbone coloring problem for planar graphs with connected backbones*. Przyjęte do druku w *Discrete Applied Mathematics* (DOI:10.1016/j.dam.2014.10.028).
- K. Turowski, *Optimal coloring of split graphs with matching backbone*. Discussiones Mathematicae Graph Theory 35(1) (2015), s. 157–169 (DOI:10.7151/dmgt.1786).

Wszystkie powyższe publikacje ukazały się lub są dostępne online w pismach znajdujących się w bazie ISI Journal of Citation Reports (na tzw. liście filadelfijskiej).

1.2. Elementy teorii grafów

Ponieważ dalsze rozważania bazować będą na wiedzy z zakresu matematyki dyskretnej i teorii grafów, poniższy przegląd pojęć i faktów służy omówieniu podstawowych zagadnień związanych z przyjętym w pracy badanym modelem dla problemu przydziału częstotliwości – szkieletowym kolorowaniem grafów. Czytelnika zainteresowanego szerszym i bardziej szczegółowym omówieniem podstaw teoriografowych odsyłamy do literatury, w szczególności [4], [17] i [44]. Osobom chcącym zagłębić się w problematykę kolorowania grafów należy polecić z kolei książki [35] oraz [34], natomiast zagadnienia związane ze złożonością obliczeniową są szerzej omówione w [37], [1] oraz [19]. W szczególności, ta ostatnia książka zawiera zestawienie najważniejszych problemów $\mathcal{NP}$-zupełnych i $\mathcal{NP}$-trudnych.

1.2.1. Podstawowe definicje

Definicja 1.1. *Grafem prostym* nazywamy każdą parę (V, E), gdzie V jest niepustym i skończonym zbiorem, natomiast $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V \wedge u \neq v\}$. Jeśli

$G = (V, E)$ jest grafem prostym, to elementy zbioru V nazywamy *wierzchołkami*, a elementy zbioru E – *krawędziami* grafu G.

Graf skierowany (zwany również *digrafem*) różni się od grafu prostego tym, że jego krawędziami nie są dwuelementowe podzbiory, ale uporządkowane pary zbioru wierzchołków. Ponieważ w przeważającej części pracy pojawiają się tylko grafy proste, wyrażenia „graf" oraz „graf prosty" będą stosowane zamiennie. Dodatkowo, mając na uwadze skrócenie notacji, jeśli to nie prowadzi do nieporozumień, to w niniejszej pracy krawędzie będą oznaczane symbolami uv zamiast $\{u, v\}$.

Tak jak przyjęło się to w literaturze, $V(G)$ oznaczać będzie zbiór wierzchołków grafu G, $E(G)$ zbiór jego krawędzi, $n(G) := |V(G)|$ – *rząd* grafu G, natomiast $m(G) := |E(G)|$ jego *rozmiar*. Zbiór wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem v w grafie G, nazywany *sąsiedztwem*, oznaczamy formalnie $N_G(v) := \{u \in V(G) \colon uv \in E(G)\}$. Liczba $\deg_G(v) := |N_G(v)|$ jest *stopniem* wierzchołka v w grafie G, z kolei $\Delta(G) := \max\{\deg_G(v) \colon v \in V(G)\}$ nazywany jest *stopniem* grafu G.

Oznaczenia $V(G)$, $E(G)$, $n(G)$, $m(G)$ są również dobrze zdefiniowane dla grafów skierowanych. W tym przypadku jednak należy rozróżnić dwa rodzaje krawędzi incydentnych do wierzchołka v: krawędzie *wchodzące* do v, czyli (u, v) oraz krawędzie *wychodzące* z v, czyli (v, u). Odpowiednio, w grafie skierowanym zdefiniowane są dwa stopnie wierzchołka v w grafie G: *wejściowy* $\mathrm{indeg}_G(v) := |\{u \in V(G) \colon (u, v) \in E(G)\}|$ oraz *wyjściowy* $\mathrm{outdeg}_G(v) := |\{u \in V(G) \colon (v, u) \in E(G)\}|$.

Definicja 1.2. Graf G jest *podgrafem* grafu H (oznaczane $G \subseteq H$) wtedy i tylko wtedy, gdy $V(G) \subseteq V(H)$ i $E(G) \subseteq E(H)$.

Rzecz jasna, jeśli G jest podgrafem H, to równoważnie H jest *nadgrafem* G. Jeśli zachodzi $V(G) = V(H)$, to G nazywane jest podgrafem *spinającym* grafu H.

Definicja 1.3. Graf G jest *podgrafem indukowanym* grafu H wtedy i tylko wtedy, gdy $V(G) \subseteq V(H)$ i $E(G) = \{uv \colon u, v \in V(G) \wedge uv \in E(H)\}$.

Jeśli mamy dany niepusty zbiór $W \subseteq V$, to podgraf indukowany grafu G zawierający tylko i wyłącznie wierzchołki ze zbioru W oznaczamy $G[W]$.

Definicja 1.4. *Częścią wspólną* grafów G i H jest nazywany taki graf $G \cap H$, że $V(G \cap H) = V(G) \cap V(H)$ i $E(G \cap H) = E(G) \cap E(H)$.

Definicja 1.5. *Sumą* grafów G i H jest nazywany taki graf $G \cup H$, że $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ i $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

Definicja 1.6. *Różnicą* grafów G i H jest nazywany taki graf $G \setminus H$, że $V(G \setminus H) = V(G)$ i $E(G \setminus H) = E(G) \setminus E(H)$.

Definicja 1.7. *Dopełnieniem* grafu G jest nazywany taki graf $\bar{G}$, że $V(G) = V(\bar{G})$ i $E(\bar{G}) = \{uv \colon u, v \in V(G) \wedge uv \notin E(G)\}$.

Graf G o n wierzchołkach jest *grafem pustym* (i oznaczany symbolem N_n) wtedy i tylko wtedy, gdy $E(G) = \emptyset$. Z kolei graf G o n wierzchołkach jest *kliką*, *grafem pełnym* (i oznaczany symbolem K_n) wtedy i tylko wtedy, gdy jest dopełnieniem grafu pustego o n wierzchołkach. Zbiór I jest *zbiorem niezależnym* wtedy i tylko wtedy, gdy $I = \emptyset$ lub $G[I]$ jest grafem pustym, natomiast zbiór C jest *kliką* wtedy i tylko wtedy, gdy $C = \emptyset$ lub $G[C]$ jest grafem pełnym. Największa liczba $k \in \mathbb{N}_+$, taka że G posiada k-wierzchołkowy podgraf będący kliką, jest nazywana *liczbą klikową* grafu G i oznaczana symbolem $\omega(G)$.

Definicja 1.8. Graf G jest spójny wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje taki podział V_1, V_2 zbioru wierzchołków $V(G)$, że $E(G) = E\left(G[V_1]\right) \cup E\left(G[V_2]\right)$.

Równoważnie, graf jest spójny, gdy dla każdej pary wierzchołków u, v istnieje sekwencja wierzchołków $u = v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k = v$ taka, że $v_{i-1}v_i \in E(G)$ dla każdego $1 \leq i \leq k$. Z kolei gdy graf nie jest spójny, można jednoznacznie wyznaczyć taki podział $V(G)$ na parami rozłączne zbiory $V_1, V_2, \ldots, V_k$, że każda krawędź grafu G należy do dokładnie jednego $G[V_i]$ oraz każdy z grafów $G[V_1], G[V_2], \ldots, G[V_k]$ jest spójny. Takie grafy nazywane są *składowymi spójności* grafu G.

Oprócz grafów pustych, pełnych i spójnych należy wyróżnić jeszcze inne, przydatne w wielu miejscach niniejszej pracy, klasy grafów:

- *cykle* – grafy spójne, w których każdy wierzchołek ma stopień 2,
- *drzewa* – grafy spójne, niezawierające cykli,
- *ścieżki* – drzewa stopnia $\Delta \leq 2$,
- *lasy* – grafy acykliczne,
- *gwiazdy* – drzewa stopnia $\Delta = n - 1$,
- *galaktyki* – grafy, będące zbiorem parami rozłącznych gwiazd,
- *skojarzenia* – grafy stopnia $\Delta \leq 1$,
- *doskonałe skojarzenia* – skojarzenia bez wierzchołków izolowanych,
- *grafy planarne* – grafy, które można narysować na płaszczyźnie bez przecięć.

W dalszej części pracy cykle n-wierzchołkowe będą oznaczane symbolem C_n, ścieżki n-wierzchołkowe – symbolem P_n.

Czytelnik może zauważyć, że przedstawiona powyżej definicja skojarzenia odbiega od klasycznej, według której skojarzenie jest podzbiorem krawędzi zadanego grafu takim, że każdy wierzchołek jest końcem co najwyżej jednej krawędzi. Motywowane jest to użyciem skojarzeń jako jednej z typowych klas szkieletów (obok galaktyk, ścieżek i drzew) w literaturze dotyczącej kolorowania szkieletowego – i wynikającą stąd koniecznością ujednolicenia definicji z pozostałymi przypadkami.

Ponadto, grafem dwudzielnym nazywamy graf, w którym istnieje podział $V(G) = V_1 \cup V_2$ taki, że $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ i każdy z podgrafów indukowanych $G[V_i]$ $(i = 1, 2)$ jest grafem pustym. Ogólniej, można zdefiniować graf k-dzielny jako taki, w którym istnieje podział $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots V_k$ taki, że $V_i \cap V_j = \emptyset$ dla dowolnych i, j z zakresu od 1 do k, a każdy z podgrafów indukowanych $G[V_i]$ $(1 \leq i \ \leq k)$ jest grafem pustym.

1.2.2. Pokolorowania szkieletowe

Za pokolorowania zwyczajowo są uznawane w teorii grafów funkcje przyporządkowujące pewnym elementom grafu (wierzchołkom, krawędziom, ścianom, ...) liczby całkowite (nazywane kolorami) w taki sposób, że sąsiednie elementy nie otrzymują identycznych liczb. W niniejszej pracy rozważane będą pokolorowania wierzchołkowe i ich różne odmiany.

Definicja 1.9. Niech G będzie grafem. Funkcja $c\colon V \to \mathbb{N}_+$ jest *pokolorowaniem* (wierzchołkowym) grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ zachodzi $c(u) \neq c(v)$.

Definicja 1.10. Niech G będzie grafem. Funkcja $c\colon V \to \mathbb{N}_+$ jest *k-pokolorowaniem* (wierzchołkowym) grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy c jest pokolorowaniem grafu G oraz $\max\limits_{v \in V(G)} c(v) \leq k$.

Dla każdego grafu G istnieje najmniejsza liczba $k \in \mathbb{N}_+$, dla której istnieje k-pokolorowanie. Liczba ta nazywana jest *liczbą chromatyczną* grafu G i oznaczana jako $\chi(G)$.

Definicja 1.11. Pokolorowanie c grafu G jest *optymalne* wtedy i tylko wtedy, gdy $\max\limits_{v \in V(G)} c(v) = \chi(G)$.

Warto zauważyć, że wyznaczenie optymalnego pokolorowania wierzchołkowego jest bardzo trudnym problemem z punktu widzenia teorii złożoności. Przede wszystkim, od dawna wiadomo, że wyznaczenie dokładnej wartości liczby chromatycznej grafu G jest problemem $\mathcal{NP}$-trudnym [19]. Ponadto, Zuckerman w [46] wykazał, że również oszacowanie $\chi(G)$ z dokładnością $n^{1-\epsilon}$ dla dowolnej wartości $\epsilon > 0$ jest

$\mathcal{NP}$-trudne. Z drugiej strony, dla wielu klas grafów istnieją algorytmy wyznaczające optymalne pokolorowania, działające w czasie wielomianowym. W szczególności, jest to możliwe dla wszystkich grafów doskonałych (tj. grafów G spełniających równość $\chi(G') = \omega(G')$ dla wszystkich podgrafów indukowanych G' grafu G) [24], w tym m.in. grafów dwudzielnych, split grafów oraz grafów cięciwowych.

Fakt 1.1. *Dla dowolnego grafu G zachodzi $\omega(G) \leq \chi(G) \leq n(G)$.*

Definicja 1.12. Niech G będzie grafem, a H jego podgrafem spinającym. Funkcja $c\colon V \to \mathbb{N}_+$ jest *λ-szkieletowym pokolorowaniem* grafu G ze szkieletem H wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ zachodzi $c(u) \neq c(v)$ oraz dla każdej krawędzi $uv \in E(H)$ zachodzi $|c(u) - c(v)| \geq \lambda$.

Definicja 1.13. Niech G będzie grafem, a H jego podgrafem spinającym. Funkcja $c\colon V \to \mathbb{N}_+$ jest *λ-szkieletowym k-pokolorowaniem* grafu G ze szkieletem H wtedy i tylko wtedy, gdy c jest λ-szkieletowym pokolorowaniem grafu G ze szkieletem H oraz $\max\limits_{v \in V(G)} c(v) \leq k$.

Analogicznie do kolorowania wierzchołkowego, również dla kolorowania szkieletowego można zdefiniować λ-szkieletową liczbę chromatyczną grafu G ze szkieletem H, oznaczoną symbolem $BBC_\lambda(G, H)$, jako najmniejszą liczbę $k \in \mathbb{N}_+$, dla której istnieje λ-szkieletowe k-pokolorowanie c. Należy zwrócić uwagę, że – w przeciwieństwie do optymalnego pokolorowania wierzchołkowego – optymalne λ-szkieletowe pokolorowanie nie musi wykorzystywać wszystkich kolorów od 1 do $BBC_\lambda(G, H)$.

Definicja 1.14. λ-szkieletowe pokolorowanie c grafu G ze szkieletem H jest *optymalne* wtedy i tylko wtedy, gdy $\max\limits_{v \in V(G)} c(v) = BBC_\lambda(G, H)$.

Ponieważ pierwotne sformułowanie problemu kolorowania szkieletowego obejmowało tylko przypadek $\lambda = 2$, zajmuje on do dziś szczególne miejsce w literaturze przedmiotu. Znajduje to wyraz w konwencji notacyjnej opuszczania oznaczenia λ m.in. w nazwie problemu i funkcji („pokolorowanie szkieletowe" zamiast „2-pokolorowanie szkieletowe") oraz oznaczenia liczby chromatycznej ($BBC(G, H)$ zamiast $BBC_2(G, H)$). Konwencja ta została również przyjęta w niniejszej pracy.

W całej niniejszej pracy będzie konsekwentnie przyjęte, że graf i szkielet są określone na tym samym zbiorze wierzchołków, $V(G) = V(H)$. Jest to wygodna konwencja, ponieważ w przypadku $V(H) \subset V(G)$ zawsze można uzupełnić szkielet H wierzchołkami izolowanymi, otrzymując $H' = (V(G), E(H))$. Takie przekształcenie nie zmienia zbioru możliwych λ-szkieletowych pokolorowań, ani innych parametrów związanych z tym problemem.

Istnieje ścisły związek między pokolorowaniami wierzchołkowymi a pokolorowaniami λ-szkieletowymi: każde pokolorowanie wierzchołkowe grafu G rzędu n jest jednocześnie λ-szkieletowym pokolorowaniem grafu G ze szkieletem pustym N_n. Co więcej, dla dowolnego grafu G rzędu n zachodzi $BBC_\lambda(G, N_n) = \chi(G)$.

Odpowiednie zależności można wyznaczyć również dla podgrafów: jeśli G jest grafem, a H i H' jego podgrafami spinającymi takimi, że H jest podgrafem H', to zachodzi $BBC_\lambda(G, H) \leq BBC_\lambda(G, H')$. Podobnie, jeśli G jest grafem, a G' i H jego podgrafami spinającymi takimi, że H jest podgrafem G', to zachodzi $BBC_\lambda(G', H) \leq BBC_\lambda(G, H)$.

1.3. Związki kolorowania szkieletowego z innymi modelami grafowymi dla przydziału częstotliwości

Problem λ-szkieletowego kolorowania grafów jest ściśle związany z innymi problemami w teorii grafów, wykorzystywanymi do zamodelowania problemu przydziału częstotliwości.

Kolorowanie radiowe jest zagadnieniem, w którym nacisk położony jest na geograficzne położenie nadajników: im bliżej są w grafie, tym większe wywołują zakłócenia. Przyjęto, że dla danego grafu G jego pokolorowaniem radiowym jest funkcja c przydzielająca wierzchołkom kolory w taki sposób, że dwa wierzchołki otrzymują różne kolory, gdy istnieje między nimi ścieżka długości 2 w G, natomiast różnica kolorów im przydzielonych musi być nie mniejsza od 2 dla wszystkich par wierzchołków sąsiadujących ze sobą w G. Klasycznym kryterium minimalizacji jest rozpiętość, czyli najmniejsza wartość $|c(u)-c(v)|$ po wszystkich parach wierzchołków $u, v \in V(G)$. Ten model, znany również w literaturze pod nazwą $L(2,1)$-kolorowania, $\lambda_{2,1}$-kolorowania i $\chi_{2,1}$-kolorowania, został wprowadzony przez Griggsa i Yeha w [23]. W ramach tego modelu ciekawym kierunkiem jest badanie problemów dla zadanego uprzednio częściowego prekolorowania, poruszone w pracach [2] i [18].

Zagadnienie λ-szkieletowego kolorowania grafów historycznie wyrasta z uogólnienia problemu kolorowania radiowego [6]. Z definicji obu problemów wynika, że każde pokolorowanie radiowe grafu G jest zarazem szkieletowym pokolorowaniem grafu G^2, czyli grafu powstałego z grafu G poprzez dodanie krawędzi dla wszystkich par wierzchołków u, v, mających wspólnego sąsiada w G, ze szkieletem G.

Etykietowanie radiowe jest wariantem problemu przydziału częstotliwości, dla którego przyjmuje się, że wszystkie kanały częstotliwości, przydzielone stacjom bazowym na zadanym obszarze, powinny być różne. Jednocześnie, nałożone jest dodatkowe ograniczenie na pary nadajników umiejscowionych dostatecznie blisko siebie i emitujących na dany obszar sygnały zakłócające się wzajemnie. Formalnie oznacza to, że dla danego grafu G poszukiwana jest funkcja c, spełniająca warunek $c(u) \neq c(v)$ dla każdej pary wierzchołków $u, v \in V(G)$ oraz $|c(u) - c(v)| \geq 2$ dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$. Zagadnienie to było badane w różnych aspektach dla wielu klas grafów: wśród najważniejszych wyników należy wyróżnić dowody $\mathcal{NP}$-trudności problemu dla grafów planarnych, split grafów oraz dopełnień grafów dwudzielnych [3] oraz algorytm wielomianowy dla drzew i kografów [15].

Co ważne, problem etykietowania radiowego jest szczególnym przypadkiem kolorowania szkieletowego dla $\lambda = 2$ oraz grafu pełnego K_n ze szkieletem G [6].

$L(p, q)$**-kolorowanie grafów** wyrasta z jednego z wariantów problemu przydziału częstotliwości wspomnianego w pracy [38]. Formalnie, można zagadnienie $L(p, q)$-kolorowania grafów zdefiniować następująco: dla danego grafu G oraz liczb naturalnych p, q należy znaleźć pokolorowanie wierzchołkowe spełniające dodatkowe warunki: dla każdej pary wierzchołków u, v różnica kolorów im przydzielonych powinna być równa co najmniej q, jeśli wierzchołki te sąsiadują w grafie G i równa co najmniej p, jeśli odległość między nimi w grafie G jest równa 2. Tak, jak w powyższych problemach, również i tutaj celem jest minimalizacja rozpiętości szukanego pokolorowania. Czytelnika zainteresowanego problemem $L(p, q)$-kolorowania grafów oraz różnymi jego wariantami odsyłamy do pracy [45] oraz do wyczerpującego przeglądu wyników w [13].

Należy zwrócić uwagę, że – tak samo jak w przypadku $L(2, 1)$-kolorowania – również problem $L(p, 1)$-kolorowania grafu G jest tożsamy z problemem p-szkieletowego kolorowania grafu G^2 ze szkieletem G.

ξ**-kolorowanie** Pewnym wariantem kolorowania kontrastowego jest zagadnienie ξ-kolorowania grafów, sformułowane następująco: dany jest graf G oraz funkcja $\xi\colon E(G) \to \mathbb{N}$. Celem jest wyznaczenie ξ-pokolorowania grafu G, tj. takiej funkcji $c\colon V(G) \to \mathbb{Z}$, że $|c(u) - c(v)| \geq \xi(uv)$ dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$, która będzie minimalizować rozpiętość, czyli odległość między najmniejszym a największym kolorem. Na kolorowanie λ-szkieletowe można patrzeć jako na wariant ξ-kolorowania, w którym zbiór wartości funkcji ξ składa się tylko z liczb 1 oraz λ. Innym kryterium optymalizacji dla ξ-kolorowania jest poszukiwanie rozpiętości krawędziowej, czyli minimalnej możliwej wartości $|c(u) - c(v)|$ jedynie po wszystkich krawędziach

$uv \in E(G)$. Więcej informacji dotyczących problemu ξ-kolorowania grafów można znaleźć w pracy [33].

Kolorowanie kontrastowe, znane także w literaturze jako T-kolorowanie, jest problemem zdefiniowanym następująco: niech dany będzie graf G oraz zbiory T_e, będące skończonymi podzbiorami liczb naturalnych takimi, że $0 \in T_e$, zdefiniowanymi dla każdej krawędzi $e \in E(G)$. Funkcję c nazywamy T-pokolorowaniem grafu G wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ zachodzi $|c(u)-c(v)| \notin T_{uv}$. Z definicji wprost wynika, że kolorowanie λ-szkieletowe jest szczególnym przypadkiem kolorowania kontrastowego, w którym zbiory T_e są dwojakiej postaci: albo $\{0\}$, albo $\{0, 1, \ldots, \lambda - 1\}$. Krawędzie odpowiadające zbiorom drugiego typu w kolorowaniu kontrastowym można bezpośrednio utożsamić z krawędziami szkieletowymi w kolorowaniu λ-szkieletowym.

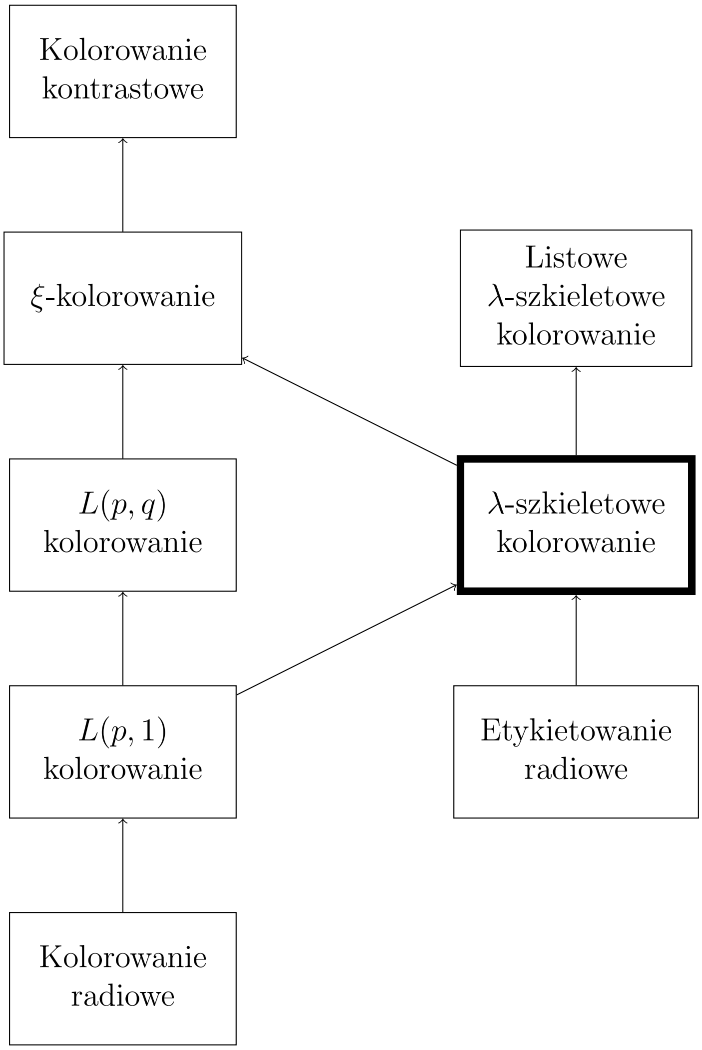
W ogólnym przypadku, zbiory T_e odpowiadające krawędziom mogą być różne i zmieniać się niezależnie od siebie. Jednak z uwagi na dużą trudność przypadku ogólnego, uwaga badaczy skupiła się głównie na wariancie problemu, w którym wszystkie zbiory są identyczne. Wyniki z zakresu kolorowania kontrastowego można znaleźć m.in. w pracach [16, 22, 38].

Listowe kolorowanie szkieletowe, rozpatrywane w pracach [11] oraz [28], jest uogólnieniem problemu kolorowania λ-szkieletowego – a z drugiej strony nawiązaniem do innego szeroko badanego problemu chromatycznej teorii grafów, jakim jest kolorowanie listowe [5]. Niech każdemu wierzchołkowi v grafu G przyporządkowana zostanie skończony zbiór liczb naturalnych $L(v)$. Wówczas λ-szkieletowym pokolorowaniem listowym grafu nazywamy λ-szkieletowe pokolorowanie c takie, że dla dowolnego wierzchołka $v \in V(G)$ zachodzi $c(v) \in L(v)$.

Na problem λ-szkieletowego kolorowania grafu można patrzeć jak na szczególny przypadek λ-szkieletowego kolorowania listowego grafów, w którym zbiory kolorów dozwolonych dla każdego wierzchołka są odpowiednio dużym zbiorem kolejnych liczb naturalnych, począwszy od 1.

W literaturze przedmiotu głównym zagadnieniem badanym w modelu kolorowania listowego jest k-wybieralność. W szczególności, graf G ze szkieletem H jest λ-szkieletowo k-wybieralny wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych list $L(v) \subset \mathbb{N}$ takich, że $|L(v)| \leq k$, istnieje λ-szkieletowe pokolorowanie listowe grafu G ze szkieletem H.

Poniższy rysunek przedstawia zależności między poszczególnymi problemami, spotykanymi w zagadnieniach przydziału częstotliwości:



Rys. 1.1. Hierarchia modeli dla problemu przydziału częstotliwości.

Rozdział 2

Kolorowanie szkieletowe grafów z dwudzielnym szkieletem

Dotychczas dla grafów ogólnych znane były następujące trywialne ograniczenia górne i dolne:

Twierdzenie 2.1 (Broersma et al., [7]). *Niech G będzie grafem, a H podgrafem G. Wówczas zachodzi $\chi(G) \leq BBC_\lambda(G,H) \leq \lambda(\chi(G)-1)+1$.*

W pracy [29] zostało zaproponowane dokładniejsze ograniczenie:

Twierdzenie 2.2 (Havet et al., [29]). *Niech G będzie grafem, a H podgrafem G. Wówczas zachodzi $BBC_\lambda(G,H) \leq (\lambda+\chi(G)-2)\chi(H)-\lambda+2$.*

W pierwszej części artykułu [30] badane są ogólne zależności między parametrami grafów G i H oraz wartością λ a λ-szkieletową liczbą chromatyczną $BBC_\lambda(G,H)$:

Twierdzenie 2.3 (Janczewski, Turowski, [30]). *Niech G będzie grafem, a H podgrafem spinającym G. Wówczas zachodzi $\lambda(\chi(H)-1)+1 \leq BBC_\lambda(G,H) \leq \lambda(\chi(H)-1)+n(G)-\chi(H)+1$.*

Okazuje się, że każde optymalne λ-szkieletowe pokolorowanie c grafu G ze szkieletem H można rozbić na dwie funkcje q i r, z których pierwsza musi być pewnym optymalnym pokolorowaniem szkieletu H, wyznaczając jednocześnie zbiory wierzchołków V_0, V_1, ..., V_{k-1}. Jednocześnie, druga funkcja, nazwana q-szkieletową funkcją resztową, musi spełniać ściśle określone warunki: być pokolorowaniem dla każdego $G[V_i]$ $(0 \leq i \leq k-1)$, spełniać $r(u) \leq r(v)$ dla każdej krawędzi $uv \in E(H)$ takiej, że $q(v) = q(u)+1$.

Na tej podstawie przydatne okazało się zdefiniowanie liczby bichromatycznej:

Definicja 2.1. Niech q będzie k-pokolorowaniem grafu G. Ponadto zdefiniujmy $\chi(G,H,q) := \min\{\max r\,(q^{-1}(\{k-1\})) : r$ jest q-szkieletową funkcją resztową$\}$. Wówczas *liczbą bichromatyczną* grafu G ze szkieletem H, oznaczaną $\chi(G,H)$, nazywana jest minimalna wartość $\chi(G,H,q)$ po wszystkich q, będących optymalnymi pokolorowaniami grafu H.

Dla dużych wartości λ możliwe jest wyznaczenie dokładnej wartości $BBC_\lambda(G,H)$ na podstawie $\chi(G,H)$, $\chi(H)$ oraz λ:

Twierdzenie 2.4 (Janczewski, Turowski, [30])**.** *Niech G będzie grafem, a H podgrafem spinającym G. Jeśli $\lambda > n(G) - \chi(H)$, to $BBC_\lambda(G,H) = \lambda(\chi(H)-1) + \chi(G,H)+1$.*

Ponadto, dowiedziono, że warunek $\lambda > n(G) - \chi(H)$ jest konieczny – w przeciwnym przypadku można podać grafy G i H, które dla dowolnych wartości $\lambda \leq n(G) - \chi(H)$ nie spełniają powyższej zależności.

Drugą część artykułu [30] stanowią analizy problemu λ-szkieletowego pokolorowania dla grafów pełnych z dwudzielnym szkieletem. Przede wszystkim, przedstawiony jest algorytm, działający w czasie $O(n+m)$, znajdujący rozwiązanie przybliżone.

Algorytm 1 Algorytm kolorowania grafu pełnego K_n z grafem dwudzielnym H w szkielecie

1: Wyznacz 2-pokolorowanie q grafu H oraz jego partycje V_0 i V_1 takie, że $V_i = q^{-1}(\{i\})$ $(i = 1, 2)$ oraz $|V_0| \leq |V_1|$
2: Wyznacz pokolorowanie r dla V_0 przydzielając kolory 0, 1, ..., $|V_0| - 1$
3: Wyznacz pokolorowanie r dla V_1 przydzielając kolory $|V_0|-1$, $|V_0|$, ..., $n(G)-2$

4: **for all** $v \in V(G)$ **do**
5: $\quad c(v) := \max\{\lambda, |V_0|\}q(v) + r(v) + 1$
6: **return** c

Twierdzenie 2.5 (Janczewski, Turowski, [30])**.** *Jeśli H jest grafem dwudzielnym, to algorytm 1 jest 2-przybliżony. Jeśli dodatkowo H jest grafem spójnym, to algorytm jest 1.5-przybliżony.*

Na koniec, podany został dokładny wzór na liczbę bichromatyczną dla grafów pełnych z drzewem w szkielecie:

Twierdzenie 2.6 (Janczewski, Turowski, [30])**.** *Jeśli H jest lasem, to $\chi(K_n,H) \leq |V_1| - 1$. Jeśli H jest drzewem, to $\chi(K_n,H) = |V_1| - 1$.*

Dowód tego twierdzenia można łatwo przekształcić na algorytm o złożoności czasowej $O(n^2)$ wyznaczający optymalną szkieletową funkcję resztową odpowiadającą liczbie bichromatycznej grafu pełnego z drzewem w szkielecie, zatem z twierdzenia 2.4 i 2.6 istnieje optymalny algorytm λ-szkieletowego kolorowania grafów pełnych z drzewami w szkielecie dla $\lambda > n(G) - 2$. Jednocześnie, gdy H jest drzewem o partycjach V_0 i V_1 takich, że $\lambda \leq |V_0| \leq |V_1|$, to zachodzi $BBC_\lambda(K_n, H) = n$ i również możliwe jest znalezienie rozwiązania optymalnego w czasie $O(n^2)$.

Rozdział 3

Kolorowanie szkieletowe grafów planarnych

Dotychczas, jedyne wyniki dla kolorowania szkieletowego grafów planarnych wynikały z ograniczeń ogólnych (podanych w tw. 2.1 oraz 2.2). W szczególności, wykazano że:

Twierdzenie 3.1 (Havet et al., [29])**.** *Jeśli G jest grafem planarnym a H lasem, to* $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 6$.

Jednocześnie, w tej samej pracy przedstawiono cząstkowe wyniki dotyczące trudności problemu λ-kolorowania szkieletowego i cyrkularnego λ-kolorowania szkieletowego dla grafów planarnych z lasami w szkielecie. Natomiast w pracy [31] przedstawione zostały pełne wyniki dotyczące złożoności obliczeniowej problemu λ-szkieletowego kolorowania grafów planarnych ze spójnymi szkieletami.

Jeśli problem λ-szkieletowej k-kolorowalności grafów planarnych zdefiniujemy następująco: „czy dla zadanego grafu planarnego G ze spójnym spinającym podgrafem H istnieje λ-szkieletowe k-pokolorowanie, tj. czy $BBC_\lambda(G, H) \leq k$?”, to okazuje się, że dla problemu kolorowania można wyznaczyć kompletną klasyfikację złożoności obliczeniowej tego problemu dla dowolnego k, przedstawioną w tabeli 3.1. Jednocześnie, jeżeli dopuszczalna klasa szkieletów zostanie ograniczona tylko do drzew spinających, to również dla tego problemu można wyznaczyć niemal kompletną klasyfikację złożoności obliczeniowej. Otrzymane wyniki zostały przedstawione w tabeli 3.2.

W dalszej części artykułu badano również problem kolorowania λ-szkieletowego dla szczególnych podklas grafów planarnych: kaktusów oraz grafów kolczastych. Kaktusy, wprowadzone pierwotnie w literaturze jako drzewa Husimiego [27], zdefiniowano następująco:

$BBC_2(G,H) \leq k$			$BBC_3(G,H) \leq k$		
$k \leq 2$	$O(1)$	Tw. 3, [31]	$k \leq 3$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 3$	$O(n)$	Tw. 4, [31]	$k = 4$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 4$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]	$k = 5$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$5 \leq k \leq 6$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 8, [31]	$6 \leq k \leq 9$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, 8, [31]
$k \geq 7$	$O(1)$	Tw. 9, [31]	$k \geq 10$	$O(1)$	Tw. 9, [31]

$BBC_4(G,H) \leq k$			$BBC_5(G,H) \leq k$		
$k \leq 4$	$O(1)$	Tw. 3, [31]	$k \leq 5$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 5$	$O(n)$	Tw. 4, [31]	$k = 6$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 6$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]	$k = 7$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$7 \leq k \leq 12$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, 8, [31]	$8 \leq k \leq 15$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, 8, [31]
$k \geq 13$	$O(1)$	Tw. 9, [31]	$k \geq 16$	$O(1)$	Tw. 9, [31]

$BBC_\lambda(G,H) \leq k$ $(\lambda \geq 6)$		
$k \leq \lambda$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = \lambda + 1$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = \lambda + 2$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$\lambda + 3 \leq k \leq \lambda + 5$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, [31]
$\lambda + 6 \leq k \leq 2\lambda$	$O(n)$	Tw. 7, [31]
$2\lambda + 1 \leq k \leq 3\lambda$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 8, [31]
$k \geq 3\lambda + 1$	$O(1)$	Tw. 9, [31]

TABELA 3.1. Złożoność problemu kolorowania szkieletowego dla grafów planarnych ze spójnym szkieletem. [31]

Definicja 3.1. Graf spójny jest *kaktusem* wtedy i tylko wtedy, gdy jego każda krawędź należy do co najwyżej jednego cyklu.

Twierdzenie 3.2 (Janczewski, Turowski, [31]). *Jeśli G jest kaktusem, a H spójnym i dwudzielnym podgrafem spinającym G, to $BBC_\lambda(G,H) \leq \lambda + 3$. Ograniczenie jest ścisłe.*

Co więcej, w [31] zawarto również dowód faktu, że ograniczenie pozostaje ścisłe, nawet gdy szkielet jest drzewem.

Szeroką podklasą grafów planarnych, zawierającą nie tylko kaktusy, ale również wszystkie grafy zewnętrznie planarne, są grafy kolczaste. Zostały one po raz pierwszy zdefiniowane w pracy [21]:

Definicja 3.2. Graf spójny G jest *grafem kolczastym* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje jego dekompozycja na grafy $G_1, G_2, \ldots, G_k$, dla której spełnione są następujące warunki:

1. wszystkie grafy G_i, $1 \leq i \leq k$, są cyklami lub ścieżkami,
2. graf G jest sumą grafów $G_1, G_2, \ldots, G_k$,

$BBC_2(G,T) \le k$

$k \le 2$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 3$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 4$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$5 \le k \le 6$	otwarte	
$k \ge 7$	$O(1)$	Tw. 9, [31]

$BBC_3(G,T) \le k$

$k \le 3$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 4$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 5$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$k = 6$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, [31]
$7 \le k \le 8$	otwarte	
$k \ge 9$	$O(1)$	Tw. 1, 9, [31]

$BBC_4(G,T) \le k$

$k \le 4$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 5$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 6$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$7 \le k \le 8$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, [31]
$k = 9$	otwarte	
$k \ge 10$	$O(1)$	Tw. 1, [31]

$BBC_5(G,T) \le k$

$k \le 5$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = 6$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = 7$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$8 \le k \le 10$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, [31]
$k \ge 11$	$O(1)$	Tw. 1, [31]

$BBC_\lambda(G,T) \le k$ $(\lambda \ge 6)$

$k \le \lambda$	$O(1)$	Tw. 3, [31]
$k = \lambda + 1$	$O(n)$	Tw. 4, [31]
$k = \lambda + 2$	$O(n^2)$	Tw. 5, [31]
$\lambda + 3 \le k \le \lambda + 5$	$\mathcal{NPC}$	Tw. 6, [31]
$k \ge \lambda + 6$	$O(1)$	Tw. 1, [31]

TABELA 3.2. Złożoność problemu kolorowania szkieletowego dla grafów planarnych z drzewem spinającym w szkielecie.

3. dla każdego $2 \le i \le k$, część wspólna sumy grafów G_1, G_2, …, G_{i-1} oraz grafu G_i to tylko wierzchołek lub krawędź.

Twierdzenie 3.3 (Janczewski, Turowski, [31]). *Jeśli G jest grafem kolczastym, a H spójnym i dwudzielnym podgrafem spinającym G, to $BBC_\lambda(G,H) \le \lambda + 4$. Ograniczenie jest ścisłe.*

Co więcej, w [31] zawarto również dowód faktu, że ograniczenie pozostaje ścisłe, nawet dla grafów kolczastych z drzewami w szkielecie.

W pracy [39] dowiedziono, że dla grafu G ze spójnym i dwudzielnym podgrafem problem rozstrzygnięcia, czy $BBC_\lambda(G,H) \le k$ jest rozwiązywalny w czasie co najwyżej kwadratowym dla dowolnego $k \le \lambda + 2$. Ponadto przypadek, gdy szkielet jest spójny, ale nie dwudzielny jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym, ponieważ wystarczy wyznaczyć optymalne pokolorowanie c grafu G – wykonalne w czasie $O(n)$ dla grafów kolczastych – i zdefiniować pokolorowanie $c'(v) := \lambda(c(v) - 1) + 1$, będące optymalnym λ-pokolorowaniem szkieletowym dla grafu kolczastego G ze spójnym i niedwudzielnym szkieletem H.

Ostatecznie, istnieje algorytm dokładny, wyznaczający $BBC_\lambda(G,H)$ dla kaktusów G ze spójnym szkieletem H oraz algorytm 1-bezwzględnie przybliżony, wyznaczający $BBC_\lambda(G,H)$ dla grafów kolczastych G ze spójnym szkieletem H.

Rozdział 4

Kolorowanie szkieletowe grafów o ograniczonym stopniu

Twierdzenie 4.1 (Janczewski, Turowski, [32]). *Niech $\Delta(G) \leq 2$. Wówczas*

(*i*) *jeśli G ma dokładnie 1 wierzchołek, to $BBC_\lambda(G, H) = 1$,*

(*ii*) *jeśli G jest grafem dwudzielnym i $|V(G)| \geq 2$, to $BBC_\lambda(G, H) = \lambda + 1$,*

(*iii*) *jeśli G jest cyklem nieparzystym, H jego podgrafem spinającym i $G \neq H$, to $BBC_\lambda(G, H) = \lambda + 2$,*

(*iv*) *jeśli G jest cyklem nieparzystym i $G = H$, to $BBC_\lambda(G, H) = 2\lambda + 1$.*

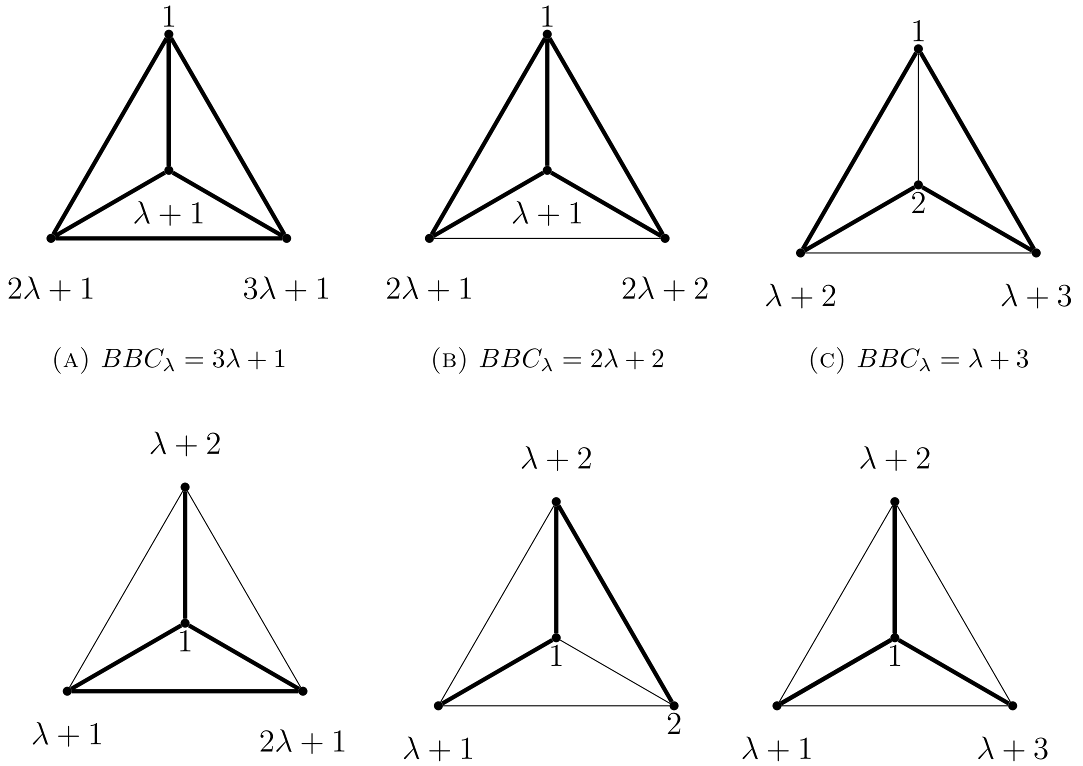
Również dla grafów podkubicznych problem jest rozwiązywalny w czasie wielomianowym, aczkolwiek w tym przypadku dowód rozbito na trzy przypadki:

Twierdzenie 4.2 (Janczewski, Turowski, [32]). *Jeśli $\Delta(G) = 3$ i $\chi(G) \geq 4$, to można wyznaczyć optymalne λ-szkieletowe pokolorowanie grafu G ze szkieletem H w czasie $O(1)$.*

W tym przypadku wiadomo, że $G = K_4$ z twierdzenia Brooksa [10], a zatem można sprawdzić wszystkie 6 możliwości nieizomorficznych szkieletów (przedstawione na rys. 4.1).

Twierdzenie 4.3 (Janczewski, Turowski, [32]). *Jeśli $\Delta(G) = 3$ i $\chi(G) = \chi(H) \leq 3$, to $BBC_\lambda(G, H) = (\chi(G) - 1)\lambda + 1$ i można wyznaczyć optymalne λ-szkieletowe pokolorowanie grafu G ze szkieletem H w czasie $O(n)$.*

Z [30] wiadomo, że $(\chi(H) - 1)\lambda + 1 \leq BBC_\lambda(G, H) \leq (\chi(G) - 1)\lambda + 1$. Co więcej, wyznaczenie optymalnego λ-szkieletowego pokolorowania grafu G ze szkieletem H wymaga jedynie wyznaczenia optymalnego pokolorowania podkubicznego



(A) $BBC_\lambda = 3\lambda + 1$ (B) $BBC_\lambda = 2\lambda + 2$ (C) $BBC_\lambda = \lambda + 3$

(D) $BBC_\lambda = 2\lambda + 1$ (E) $BBC_\lambda = \lambda + 2$ (F) $BBC_\lambda = \lambda + 3$

RYS. 4.1. K_4 ze wszystkimi możliwymi szkieletami.

grafu G oraz zamiany na optymalne pokolorowanie λ-szkieletowe – a obie operacje są wykonywalne w czasie $O(n)$.

Twierdzenie 4.4 (Janczewski, Turowski, [32]). *Jeśli* $\Delta(G) = 3$ *i* $\chi(G) = 3$, $\chi(H) = 2$, *to można wyznaczyć optymalne* λ*-szkieletowe pokolorowanie grafu* G *ze szkieletem* H *w czasie wielomianowym.*

Wynika to bezpośrednio z faktu, że w pracy [39] dowiedziono, że dla grafu G ze spójnym i dwudzielnym podgrafem problem rozstrzygnięcia, czy $BBC_\lambda(G, H) \leq k$ jest rozwiązywalny w czasie co najwyżej kwadratowym dla dowolnego $k \leq \lambda + 2$ oraz z poniższego twierdzenia:

Twierdzenie 4.5 (Janczewski, Turowski, [32]). *Niech* G *będzie grafem podkubicznym, a* H *jego spójnym i dwudzielnym podgrafem spinającym. Wówczas zachodzi* $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 3$.

Jednocześnie, dowód tego twierdzenia zawiera algorytm zwracający λ-szkieletowe $(\lambda+3)$-pokolorowanie grafu podkubicznego G ze spójnym i dwudzielnym szkieletem H, działający w czasie $O(n^2)$.

Sednem dowodu twierdzenia 4.5 jest algorytm 2, wyznaczający zbiory A i B w taki sposób, że zbiór A jest niezależny, po usunięciu zbioru A z grafu $G \setminus H$ otrzymujemy graf dwudzielnym o partycjach U_1 i U_2 takich, że $B \subseteq U_1$. W rezultacie, uwzględniając, że również szkielet H jest dwudzielny i ma jednoznaczny podział na partycje V_1 i V_2, można przydzielić kolejno zbiorom $V_1 \cap U_1$, $V_1 \cap U_2$, $V_1 \cap A$, $V_2 \cap A$, $V_2 \cap U_2$, $V_2 \cap U_1$ kolory 1, 2, 3, $\lambda + 1$, $\lambda + 2$, $\lambda + 3$.

W algorytmie tym wykorzystywana jest relacja $R \subseteq V^2(G)$, zdefiniowana następująco: uRv wtedy i tylko wtedy, gdy u i v należą do pewnych (być może różnych) cykli nieparzystych w $G \setminus H$, natomiast ich unikalni sąsiedzi w H są połączeni w grafie $G \setminus H$ ścieżką o nieparzystej długości.

Algorytm 2 Algorytm pomocniczy dla λ-szkieletowego kolorowania grafu podkubicznego G ze spójnym i dwudzielnym szkieletem spinającym H)

$\mathcal{C} \leftarrow \{C\colon C$ jest nieparzystym cyklem w $G \setminus H\}$, $A \leftarrow \emptyset$, $B \leftarrow \emptyset$
for all $C \in \mathcal{C}$ **do**
    $f(C) \leftarrow V(C)$
while $\mathcal{C} \neq \emptyset$ **do**
    Niech $C_0 \in \mathcal{C}$ będzie cyklem o minimalnej wartości $|f(C)|$
    Niech u będzie dowolnym wierzchołkiem z $f(C_0)$
    if istnieje v taki, że uRv oraz $v \notin V(C_0)$ **then**
        Niech C_1 będzie nieparzystym cyklem w $G \setminus H$ zawierającym v
        if $C_1 \in \mathcal{C} \setminus \{C_0\}$ **then**
            Usuń v z $f(C_1)$
    $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \setminus \{C_0\}$, $A \leftarrow A \cup \{u\}$, $B \leftarrow B \cup \{h(u)\}$

Ostatecznie, możliwa jest konstrukcja algorytmu wyznaczającego optymalne λ-szkieletowe pokolorowanie grafu G o maksymalnym stopniu Δ ze szkieletem H dla wszystkich $\Delta \leq 3$. Z drugiej strony okazuje się, że już dla grafów stopnia co najmniej 4 problem kolorowania szkieletowego staje się znacznie trudniejszy:

Twierdzenie 4.6 (Janczewski, Turowski, [32])**.** *Dla każdego ustalonego $\Delta \geq 4$ oraz $\lambda \geq 2$ problem rozstrzygnięcia, czy $BBC_\lambda(G, G) \leq 2\lambda + 1$ jest $\mathcal{NP}$-zupełny dla grafów G o maksymalnym stopniu Δ.*

Twierdzenie 4.7 (Janczewski, Turowski, [32])**.** *Dla każdego ustalonego $\Delta \geq 5$ oraz $\lambda \geq 4$ problem rozstrzygnięcia, czy $BBC_\lambda(G, T) \leq \lambda + 3$, jest $\mathcal{NP}$-zupełny dla grafów G o maksymalnym stopniu Δ z drzewem spinającym T w szkielecie.*

W dowodach obu twierdzeń wykorzystano znajomość $\mathcal{NP}$-zupełności problemu 3-kolorowania grafów o ustalonym maksymalnym stopniu $\Delta(G) \geq 4$ [20].

Rozdział 5

Kolorowanie szkieletowe split grafów

W pracy [43] badane są split grafy, wprowadzone przez Hammera i Földesa w [26]:

Definicja 5.1. Graf G jest *split grafem* wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podział $V(G) = C \cup I$, $C \cap I = \emptyset$ taki, że zbiór C indukuje w grafie G maksymalną klikę, natomiast I jest zbiorem niezależnym.

Split grafy są podklasą grafów doskonałych, zatem spełniają równość $\chi(G) = \omega(G)$. W dalszej części tego rozdziału rozpatrywane będą tylko split grafy o liczbie chromatycznej $\chi(G) \geq 3$, ponieważ w pozostałych sytuacjach graf G jest pusty lub dwudzielny – a zatem wiadomo np. z [29], że możliwe jest znalezienie optymalnego pokolorowania w czasie wielomianowym.

W literaturze znane było następujące ogólne ograniczenie dla split grafów ze skojarzeniem w szkielecie:

Twierdzenie 5.1 (Broersma et al., [9])**.** *Jeśli G jest split grafem a M skojarzeniem i podgrafem G, to*

$$BBC_\lambda(G, M) \leq \begin{cases} 1 + \lambda & \textit{dla } \chi(G) = 2 \\ 1 + \chi(G) & \textit{dla } \chi(G) \geq 4 \textit{ i } \lambda \leq \min\{\frac{\chi(G)}{2}, \frac{\chi(G)+5}{3}\} \\ 2 + \chi(G) & \textit{dla } \chi(G) = 9 \textit{ lub } \chi(G) \geq 11,\ \frac{\chi(G)+6}{3} \leq \lambda \leq \lceil \frac{\chi(G)}{2} \rceil \\ \frac{\chi(G)}{2} + \lambda & \textit{dla } \chi(G) = 3,\ 5,\ 7 \textit{ i } \lambda \geq \lceil \frac{\chi(G)}{2} \rceil \\ \frac{\chi(G)}{2} + \lambda + 1 & \textit{dla } \chi(G) = 4,\ 6,\ \chi(G) \geq 7,\ \lambda \geq \lceil \frac{\chi(G)}{2} \rceil + 1 \end{cases}$$

W szczególności, dla przypadku $\lambda = 2$ zachodzi $\chi(G) \leq BBC_\lambda(G, M) \leq \chi(G) + 1$.

Dla problemu kolorowania szkieletowego split grafów ze skojarzeniem w szkielecie istnieje prosty algorytm 1-bezwzględnie przybliżony:

Twierdzenie 5.2 (Turowski, [43]). *Niech G będzie split grafem, a M skojarzeniem, będącym podgrafem spinającym G. Wówczas szkieletowe $(\chi(G)+1)$–pokolorowanie grafu G ze szkieletem M można zawsze wyznaczyć w czasie $O(n^2)$.*

Niestety, pokolorowanie szkieletowe wyznaczone według powyższego twierdzenia nie jest optymalne we wszystkich przypadkach. W celu znalezienia algorytmu optymalnego, w [43] najpierw rozważane są tylko split grafy spełniające warunek $|C| = |I| = k$ oraz takie, dla których skojarzenie M jest doskonałe, tj. każdy wierzchołek grafu G jest incydentny z krawędzią szkieletu M. Dla dalszych rozważań przydatne okazują się wprowadzone w tej pracy pojęcia *digrafu konfliktów*, *quasi-lasu* oraz *szkieletu digrafu*.

Definicja 5.2. Digraf G' jest *digrafem konfliktów* split grafu G ze szkieletem M wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

1. $V(G') = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$,
2. $E(G') = \{(w_i, w_j) \colon u_i v_j \notin E(G) \wedge 1 \leq i, j \leq k \wedge u_i \in I \wedge v_j \in C\}$.

Definicja 5.3. Digraf G jest *quasi-lasem* wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{outdeg}(v) = 1$ dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$.

Definicja 5.4. Graf G' jest *szkieletem* (*underlying graph*) digrafu G wtedy i tylko wtedy, gdy $V(G') = V(G)$ oraz $E(G') = \{uv : (u,v) \in E(G)\}$.

Niestety, z uwagi na zbieżność terminologiczną w języku polskim odpowiedników terminów *underlying graph* oraz *backbone*, należy zachować szczególną ostrożność w operowaniu ww. terminami: gdy graf jest szkieletem digrafu, to używamy terminu „szkielet” w pierwszym znaczeniu, gdy szkieletem innego grafu (prostego) – w drugim.

Jeśli F' jest szkieletem quasi-lasu F, to z definicji wynika, że składowymi spójności F' mogą być tylko grafy rzadkie: drzewa oraz grafy unicykliczne. Okazuje się, że problem kolorowania grafów szkieletowych ze skojarzeniem w szkielecie można dzięki tak zdefiniowanym pojęciom sprowadzić do problemu kolorowania grafów pełnych z rzadkimi podgrafami w szkielecie:

Twierdzenie 5.3 (Turowski, [43]). *Niech G będzie split grafem o $|C| = |I| = k$, a M podgrafem spinającym G, będącym doskonałym skojarzeniem. Jeśli D jest digrafem konfliktów dla G ze szkieletem M, to istnieje taki szkielet F' pewnego quasi-lasu F, będącego podgrafem spinającym D, że $BBC(G,M) = BBC(K_k, F')$.*

W przypadku, gdy rozmiar quasi-lasu jest duży, można wyznaczyć szkieletową liczbę chromatyczną (a także optymalne pokolorowanie szkieletowe) jego szkieletu na mocy poniższego twierdzenia:

Twierdzenie 5.4 (Turowski, [43]). *Niech G będzie grafem rzędu $n \geq 5$. Jeśli dla każdej składowej spójności G' grafu G zachodzi nierówność $|E(G')| \leq |V(G')|$, to wówczas*

$$BBC(K_n, G) = \begin{cases} n+1 & \textit{jeśli } G \textit{ zawiera gwiazdę jako podgraf spinający,} \\ n & \textit{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wiadomo ponadto, że w przypadku małych grafów ($n < 5$) możemy otrzymać optymalne pokolorowanie szkieletowe grafu K_n ze szkieletem G w czasie $O(1)$ rozpatrując wszystkie możliwości (z dokładnością do izomorfizmu).

Ostatecznie, optymalne pokolorowanie szkieletowe przypadku bazowego można wyznaczyć wykonując algorytm 3, przekształcający – o ile to możliwe – początkowy, losowo wybrany quasi-las w taki, który spełnia warunki twierdzenia 5.4, tj. nie zawiera gwiazdy jako podgrafu spinającego.

Twierdzenie 5.5 (Turowski, [43]). *Niech G będzie split grafem rzędu $2k$ takim, że maksymalna klika C oraz zbiór niezależny I są rozmiaru k. Ponadto, niech M będzie podgrafem G, będącym doskonałym skojarzeniem. Wówczas:*

- *dla $k < 5$ algorytm 3 zwraca optymalne pokolorowanie grafu G ze skojarzeniem M w szkielecie,*
- *jeśli $k \geq 5$ i istnieje szkielet F' dla pewnego spinającego quasi-lasu F w digrafie konfliktów taki, że $BBC(K_k, F') = k$, to algorytm 3 zwraca szkieletowe k-pokolorowanie grafu G ze szkieletem M,*
- *w pozostałych przypadkach $BBC(G, M) = k+1$ i algorytm 3 zwraca szkieletowe $(k+1)$-pokolorowanie grafu G ze szkieletem M.*

Z analizy czasu działania algorytmu 3 wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie 5.6 (Turowski, [43]). *Niech G będzie split grafem rzędu $2k$ takim, że maksymalna klika C oraz zbiór niezależny I są rozmiaru k. Ponadto, niech M będzie podgrafem G, będącym doskonałym skojarzeniem. Wówczas $BBC(G, M)$ można obliczyć w czasie $O(k^3)$.*

Na koniec zostało podane uogólnienie twierdzenia 5.6, uzupełniające jego dowód o rozważanie trzech typów wierzchołków, mogących pojawić się w przypadku ogól-

Algorytm 3 Algorytm optymalnego kolorowania grafu G z doskonałym skojarzeniem M w szkielecie – gdy $|C| = |I| = k$

Utwórz digraf konfliktów D grafu G ze szkieletem M oraz zdefiniuj pusty digraf F na wierzchołkach $w_1, w_2, \ldots, w_k$
if $k < 5$ **then**
  Wyznacz pokolorowanie szkieletowe c, odpowiadające minimalnej wartości $BBC(K_k, F')$ wśród wszystkich szkieletów F' quasi-lasów F, będących podgrafami D
  return pokolorowanie grafu G ze szkieletem M na podstawie twierdzenia 5.3
for all w_i, $1 \leq i \leq k$ **do**
  if outdeg$(w_i) > 0$ **then**
    Dodaj dowolną krawędź wychodzącą z w_i do F
if szkielet F' quasi-lasu F jest gwiazdą **then**
  if istnieje dopuszczalna krawędź $(w_i, w_j) \in E(D) \setminus E(F)$ **then**
    Zamień w F krawędź wychodzącą z w_i na (w_i, w_j)
  else
    return $(k + 1)$-pokolorowanie szkieletowe grafu G ze szkieletem M na podstawie twierdzenia 5.2
if szkielet F' quasi-lasu F jest gwiazdą z dodatkową krawędzią **then**
  if istnieje dopuszczalna krawędź $(w_i, w_j) \in E(D) \setminus E(F)$ **then**
    Zamień w F krawędź wychodzącą z w_i na (w_i, w_j)
  else
    return $(k + 1)$-pokolorowanie szkieletowe grafu G ze szkieletem M na podstawie twierdzenia 5.2
Wyznacz optymalne pokolorowanie szkieletowe c grafu K_k ze szkieletem F' dla quasi-lasu F na podstawie twierdzenia 5.4
return k-pokolorowanie szkieletowe grafu G ze szkieletem M wyznaczone z c i twierdzenia 5.3

nym: wierzchołków izolowanych z M (zarówno z I, jak i z C) oraz par wierzchołków z C, połączonych krawędzią szkieletową:

Twierdzenie 5.7 (Turowski, [43]). *Niech G będzie split grafem, a M skojarzeniem, będącym podgrafem G. Wówczas $BBC(G, M)$ może być obliczone w czasie $O(n^3)$.*

Uzupełnieniem tego wyniku są twierdzenia zamieszczone w [41] i [42] rozstrzygające trudność problemu kolorowania szkieletowego dla split grafów z galaktykami lub drzewami w szkielecie wraz z wynikami Broersmy [9] i Salmana [40], podające odpowiednie oszacowania dla tych klas szkieletów.

Twierdzenie 5.8 (Broersma et al., [9]). *Jeśli G jest split grafem a S galaktyką oraz* *podgrafem G, to:*

$$BBC_\lambda(G,S) \leq \begin{cases} 1 & \textit{dla } \chi(G)=1 \\ \chi(G)+\lambda-1 & \textit{dla } \chi(G)=2 \textit{ lub } \chi(G)\geq 4 \textit{ i } \lambda \geq 3 \\ \chi(G)+\lambda & \textit{dla } \chi(G)=3 \textit{ i } \lambda\geq 2 \textit{ lub } \chi(G)\geq 4 \textit{ i } \lambda=2 \end{cases}$$

W szczególności, dla przypadku $\lambda = 2$ zachodzi $\chi(G) \leq BBC(G,S) \leq \chi(G)+2$.

Twierdzenie 5.9 (Turowski, [41])**.** *Jeśli G jest split grafem, a S galaktyką oraz podgrafem spinającym G, to istnieje algorytm 1-bezwzględnie przybliżony dla problemu wyznaczania $BBC(G,S)$.*

Twierdzenie 5.10 (Turowski, [42])**.** *Jeśli G jest split grafem, a S galaktyką oraz podgrafem spinającym G, to problem rozstrzygnięcia, czy $BBC(G,S) \leq \chi(G)$ jest $\mathcal{NP}$-zupełny.*

Twierdzenie 5.11 (Salman, [40])**.** *Jeśli G jest split grafem, a T drzewem spinającym G, to:*

$$BBC_\lambda(G,T) \leq \begin{cases} 1 & \textit{dla } \chi(G)=1 \\ 1+\lambda & \textit{dla } \chi(G)=2 \\ \chi(G)+\lambda & \textit{dla } \chi(G)\geq 3 \end{cases}$$

W szczególności, dla przypadku $\lambda = 2$ zachodzi $\chi(G) \leq BBC(G,T) \leq \chi(G)+2$.

Twierdzenie 5.12 (Turowski, [42])**.** *Jeśli G jest split grafem, a T drzewem spinającym G, to problem rozstrzygnięcia, czy $BBC(G,T) \leq \chi(G)$ jest $\mathcal{NP}$-zupełny.*

Rozdział 6

Podsumowanie

Na zakończenie przedstawione zostanie podsumowanie uzyskanych wyników oraz podane problemy otwarte wraz z możliwymi kierunkami dalszych badań.

W rozdziale 2 przedstawione zostały ogólne ograniczenia górne i dolne dla λ-szkieletowej liczby chromatycznej. Nowym wynikiem, dowiedzionym w [30] są ograniczenia górne i dolne, wskazujące na asymptotyczną proporcjonalność $BBC_\lambda(G, H)$ oraz $\lambda(\chi(H) - 1)$, gdy $\lambda \to \infty$. Jednocześnie, w pracy podano dokładny wzór na wartość λ-szkieletowej liczby chromatycznej w przypadkach, gdy $\lambda > n(G) - \chi(H)$. Wkładem autora było natomiast opracowanie liniowego algorytmu 2-przybliżonego dla grafów pełnych z dwudzielnym i spójnym szkieletem (1.5-przybliżonego w przypadku, gdy szkielet jest spójny) oraz kwadratowego algorytmu, wyznaczającego optymalną liczbę bichromatyczną dla grafów pełnych z drzewem spinającym w szkielecie. Ten drugi algorytm umożliwia bezpośrednie wyznaczenie optymalnego λ-szkieletowego pokolorowania dla grafów pełnych z drzewem spinającym w szkielecie w przypadku, gdy parametr λ jest mniejszy od rozmiaru mniejszej partycji szkieletu lub gdy jest większy od $n - 2$ (dla n oznaczającego rząd grafu pełnego i szkieletu).

Następny rozdział zawierał, za [31], kompletną klasyfikację złożoności problemu wyznaczania $BBC_\lambda(G, H)$ dla grafów planarnych ze spójnym szkieletem spinającym oraz niemal kompletną klasyfikację złożoności problemu wyznaczania $BBC_\lambda(G, T)$ dla grafów planarnych z drzewem spinającym w szkielecie. Ponadto, autor zaproponował w [31] górne ograniczenia wartości λ-szkieletowej liczby chromatycznej dla kaktusów oraz grafów kolczastych ze spójnymi i dwudzielnymi szkieletami wraz z uzasadnieniem faktu, że podane ograniczenia są ścisłe. Na podstawie powyższych twierdzeń zaprojektował również algorytm dokładny dla problemu λ-szkieletowego kolorowania kaktusów oraz 1-bezwzględnie przybliżony dla zagadnienia λ-

szkieletowego kolorowania grafów kolczastych.

W rozdziale 4 opisane zostało λ-szkieletowe kolorowanie grafów o ograniczonym stopniu, bazujące na [32]. W tym artykule wkładem autora było dowiedzenie istnienia λ-szkieletowego $(\lambda + 3)$-pokolorowania dla każdego grafu podkubicznego ze spójnym szkieletem spinającym, a w szczególności opracowanie kwadratowego algorytmu rozstrzygającego problem dla 3-barwnych grafów podkubicznych z dwudzielnym, spójnym i spinającym szkieletem. Ten wynik został uzupełniony dowodami $\mathcal{NP}$-trudności problemów wyznaczania λ-szkieletowej liczby chromatycznej dla grafów o stopniu 4 z dowolnym szkieletem oraz dla grafów stopnia 5 z drzewem spinającym w szkielecie.

Rozdział 5 zawiera zaproponowane przez autora w [43] rozwiązanie problemu wyznaczania optymalnego pokolorowania szkieletowego split grafów ze skojarzeniami w szkielecie za pomocą algorytmu działającego w czasie $O(n^3)$. Dodatkowo, rozstrzygany jest problem kolorowania szkieletowego dla drzew oraz grafów unicyklicznych. Jednocześnie, jak wynika z prac autora [41,42], mimo że problemy kolorowania szkieletowego split grafów z galaktykami spinającymi lub drzewami spinającymi w szkielecie są prostymi uogólnieniami powyższego problemu i istnieją dobrze znane w literaturze algorytmy bezwzględnie przybliżone do obliczania wartości $BBC_\lambda(G, H)$, to jednak jej dokładne wyznaczenie jest problemem $\mathcal{NP}$-trudnym.

W niniejszej pracy dla pewnych problemów zostały przedstawione jedynie częściowe rozwiązania. Wydaje się, że najważniejszą rangę należy przypisać problemowi uzupełnienia wyników dotyczących złożoności obliczeniowej problemu obliczania λ-szkieletowej liczba chromatycznej dla grafów planarnych z drzewami spinającymi w szkielecie. Jednocześnie, należy zaznaczyć, że rozwiązanie tego problemu zdaje się być powiązane z postawioną przez Broersmę w [7] hipotezą, że zachodzi $BBC_2(G, T) \leq 6$ dla każdego grafu planarnego G z drzewem spinającym T w szkielecie. Ważnym problemem otwartym jest również rozstrzygnięcie statusu zagadnienia wyznaczania λ-szkieletowej liczby chromatycznej dla grafów pełnych z drzewami spinającymi w szkielecie. Ponadto, nadal nie jest również znana złożoność obliczeniowa problemu λ-szkieletowego kolorowania kaktusów z dwudzielnym i spójnym szkieletem oraz split grafów ze skojarzeniem w szkielecie dla parametru $\lambda > 2$.

Innym kierunkiem badań mogłoby być podejście badające jakość algorytmów, zarówno w aspekcie praktycznym – ich implementacji dla grafów małych i losowych – ale również pod względem oszacowań teoretycznych. W szczególności, ciekawym kierunkiem wydaje się badanie algorytmów opartych o strategie zachłanne, gdyż znany jest fakt, zgodnie z którym dla każdego grafu i szkieletu istnieje sekwencja wierzchołków, której zachłanne pokolorowanie zwraca wynik optymalny. Dokładniejsza analiza tych zagadnień mogłaby być wartościowym uzupełnieniem rozważań asymptotycznych, bądź też ograniczonych jedynie do szczególnych klas grafów lub szkieletów.

Z punktu widzenia praktycznych zastosowań, mimo że systemy, z których wywodzi się ten model, są wypierane przez systemy trzeciej i czwartej generacji, to jednak istnieją przykłady sieci zgodnych z przyjętymi założeniami, rozbudowywanych obecnie również w Polsce. Ważnym przykładem są sieci TETRA (*Terrestrial Trunked Radio*), mające na celu zapewnienie skoordynowanego i niezakłóconego funkcjonowania oraz współpracy służb publicznych, w szczególności policji, pogotowia ratunkowego oraz straży pożarnej. Sieci tego typu można przedstawić jako sześciokąty umieszczone na płaszczyźnie, odpowiadające pojedynczym stacjom bazowym, którym należy przydzielić pasma w taki sposób, aby sąsiednie obszary otrzymały częstotliwości odpowiednio odseparowane od siebie. Typowo, problem przydziału częstotliwości w sieciach TETRA rozwiązuje się dzieląc teren na identyczne podobszary i rozwiązując odpowiedni podproblem, a następnie powielając to rozwiązanie na pozostałych, natomiast podejście algorytmiczne mogłoby umożliwiać rozwiązania dokładniejsze.

Bibliografia

[1] S. Arora, B. Barak. *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge University Press, 2009.

[2] H. L. Bodlaender, H. Broersma, F. V. Fomin, A. V. Pyatkin, G. J. Woeginger. Radio labeling with pre-assigned frequencies. W: J. van Leeuwen, G. F. Italiano, W. van der Hoek, C. Meinel, H. Sack, F. Plasil (red.), *Proceedings of the 10th Annual European Symposium on Algorithms (ESA 2002)*, vol. 2461, *Lecture Notes in Computer Science*, s. 211–222, 2002.

[3] H. L. Bodlaender, T. Kloks, R. B. Tan, J. van Leeuwen. λ-coloring of graphs. W: *Proceedings of the 17th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS'2000)*, vol. 1770, *Lecture Notes in Computer Science*, s. 395–406, 2000.

[4] B. Bollobás. *Graph Theory: An Introductory Course*, vol. 63, *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 1979.

[5] B. Bollobás, A. J. Harris. List colourings of graphs. *Graphs and Combinatorics*, 1:115–127, 1985.

[6] H. J. Broersma. A general framework for coloring problems: old results, new results, and open problems. W: *Combinatorial Geometry and Graph Theory*, s. 65–79. Springer, 2003.

[7] H. J. Broersma, F. V. Fomin, P. A. Golovach, G. J. Woeginger. Backbone colorings for graphs: tree and path backbones. *Journal of Graph Theory*, 55(2):137–152, 2007.

[8] H. J. Broersma, B. Marchal, D. Paulusma, A. N. M. Salman. Improved upper bounds for λ-backbone colorings along matchings and stars. W: J. van Leeuwen, G. F. Italiano, W. van der Hoek, C. Meinel, H. Sack, F. Plasil (red.), *SOFSEM 2007: Theory and Practice of Computer Science, 33rd Conference on Current*

Trends in Theory and Practice of Computer Science, Harrachov, Czech Republic, January 20-26, 2007, Proceedings, vol. 4362, *Lecture Notes in Computer Science*, s. 188–199, 2007.

[9] H. J. Broersma, B. Marchal, D. Paulusma, A. N. M. Salman. Backbone colorings along stars and matchings in split graphs: their span is close to the chromatic number. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 29(1):143–162, 2009.

[10] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 37(2):194–197, 1941.

[11] Y. Bu, S. Finbow, D. Der-Fen Liu, X. Zhu. List backbone colouring of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 167:45–51, 2014.

[12] Y. Bu, Y. Li. Backbone coloring of planar graphs without special circles. *Theoretical Computer Science*, 412(46):6464–6468, 2011.

[13] T. Calamoneri. The $L(h, k)$-labelling problem: An updated survey and annotated bibliography. *The Computer Journal*, 54(8):1344–1371, 2011.

[14] V. Campos, F. Havet, R. Menezes Sampaio, A. Silva. Backbone colouring: Tree backbones with small diameter in planar graphs. *Theoretical Computer Science*, 487:50–64, 2013.

[15] G. J. Chang, D. Kuo. The $L(2, 1)$-labeling problem on graphs. *SIAM Jorunal of Discrete Mathematics*, 9:309–316, 1996.

[16] M. B. Cozzens, F. S. Roberts. T-colorings of graphs and the channel assignment problem. *Congressium Numerantium*, 35:191–208, 1982.

[17] R. Diestel. *Graph Theory*, vol. 173, *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, 2000.

[18] J. Fiala, J. Kratochvíl, A. Proskurowski. Distance constrained labeling of precolored trees. W: J. van Leeuwen, G. F. Italiano, W. van der Hoek, C. Meinel, H. Sack, F. Plasil (red.), *Proceedings of the 7th Italian Conference on Theoretical Computer Science (ICTCS '01)*, vol. 2202, *Lecture Notes in Computer Science*, s. 285–292, 2001.

[19] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of $\mathcal{NP}$-Completeness*. W. H. Freeman & Co., 1979.

[20] M. R. Garey, D. S. Johnson, L. Stockmeyer. Some simplified $\mathcal{NP}$-complete graph problems. *Theoretical Computer Science*, 1(3):237–267, 1976.

[21] K. Giaro, R. Janczewski, M. Małafiejski. Polynomial algorithm for finding T-span of generalized cacti. *Discrete Applied Mathematics*, 129:371–382, 2003.

[22] K. Giaro, R. Janczewski, M. Małafiejski. The complexity of the T-coloring problem for graphs with small degree. *Discrete Applied Mathematics*, 129(2–3):361–369, 2003.

[23] J. R. Griggs, R. K. Yeh. Labeling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Jorunal of Discrete Mathematics*, 5:586–595, 1992.

[24] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver. *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*. Algorithms and Combinatorics. Springer, 1988.

[25] W. K. Hale. Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE*, 68:1497–1514, 1980.

[26] P. L. Hammer, S. Földes. Split graphs. *Congressum Numerantium*, 19:311–315, 1977.

[27] F. Harary, G. Uhlenbeck. On the number of Husimi trees. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 39(4):315–322, 1953.

[28] F. Havet, A. D. King. List circular backbone colouring. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 16(1):89–104, 2014.

[29] F. Havet, A. D. King, M. Liedloff, I. Todinca. (Circular) backbone colouring: Forest backbones in planar graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 169:119–134, 2014.

[30] R. Janczewski, K. Turowski. The backbone coloring problem for bipartite backbones. *Graphs and Combinatorics*, 2014. Przyjęte do druku.

[31] R. Janczewski, K. Turowski. The computational complexity of the backbone coloring problem for planar graphs with connected backbones. *Discrete Applied Mathematics*, 2014. Przyjęte do druku.

[32] R. Janczewski, K. Turowski. The computational complexity of the backbone coloring problem for bounded-degree graphs with connected backbones. *Information Processing Letters*, 115:232–236, 2015.

[33] R. Janczewski, K. Turowski. An $O(n \log n)$ algorithm for finding edge span of cacti. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2015. Przyjęte do druku.

[34] T. R. Jensen, B. Toft. *Graph Coloring Problems.* Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, 1995.

[35] M. Kubale (red.). *Optymalizacja dyskretna. Modele i metody kolorowania grafów.* Wydawnictwa Naukowo-Techniczne WNT, 2002.

[36] B. H. Metzger. Spectrum management technique. Paper presented at the 38th National ORSA Meeting, Detroit, MI, 1970.

[37] C. H. Papadimitriou. *Złożoność obliczeniowa.* Klasyka Informatyki. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne WNT, 2007.

[38] F. S. Roberts. T-colorings of graphs: recent results and open problems. *Discrete Mathematics*, 93(2–3):229–245, 1991.

[39] A. N. M. Salman. *Contributions to Graph Theory.* PhD thesis, University of Twente, 2005.

[40] A. N. M. Salman. λ-backbone coloring numbers of split graphs with tree backbones, 2006.

[41] K. Turowski. A note on fast approximate backbone coloring of split graphs with star–like backbones. *Zeszyty Naukowe Wydziału Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki Politechniki Gdańskiej*, 1(1):15–20, 2011.

[42] K. Turowski. On optimal backbone coloring of split and threshold graphs with pairwise disjoint stars. W: *Proceedings of 5th International Interdisciplinary Technical Conference of Young Scientists InterTech 2012, Poznań, 16-18.05.2012*, s. 271–274, 2012.

[43] K. Turowski. Optimal coloring of split graphs with matching backbone. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 35(1):157–169, 2015.

[44] R. J. Wilson. *Wprowadzenie do teorii grafów.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2007.

[45] R. K. Yeh. A survey on labeling graphs with a condition at distance two. *Discrete Mathematics*, 306:1217–1231, 2006.

[46] D. Zuckerman. Linear degree extractors and the inapproximability of Max Clique and Chromatic Number. *Theory of Computing*, 3:103–128, 2007.

Graphs and Combinatorics
DOI 10.1007/s00373-014-1462-9

ORIGINAL PAPER

The Backbone Coloring Problem for Bipartite Backbones

Robert Janczewski · Krzysztof Turowski

Received: 5 December 2013 / Revised: 30 April 2014

Abstract Let G be a simple graph, H be its spanning subgraph and $\lambda \geq 2$ be an integer. By a λ-backbone coloring of G with backbone H we mean any function c that assigns positive integers to vertices of G in such a way that $|c(u) - c(v)| \geq 1$ for each edge $uv \in E(G)$ and $|c(u) - c(v)| \geq \lambda$ for each edge $uv \in E(H)$. The λ-backbone chromatic number $BBC_\lambda(G, H)$ is the smallest integer k such that there exists a λ-backbone coloring c of G with backbone H satisfying $\max c(V(G)) = k$. A λ-backbone coloring c of G with backbone H is optimal if and only if $\max c(V(G)) = BBC_\lambda(G, H)$. In the paper we study the problem of finding optimal λ-backbone colorings of complete graphs with bipartite backbones. We present a linear algorithm that is 2-approximate in general and 1.5-approximate if backbone is connected. Next we show a quadratic algorithm for backbones being trees that finds optimal λ-backbone colorings provided λ is large enough.

Keywords Bipartite graphs · Chromatic number · Backbone chromatic number

Mathematics Subject Classification 05C15

1 Introduction

The backbone coloring problem (BBC) originates from the frequency assignment problem in radio networks: the assigment of predefined frequency channels of equal

This project has been partially supported by Narodowe Centrum Nauki under contract DEC-2011/02/A/ST6/00201.

R. Janczewski (✉) · K. Turowski
Department of Algorithms and Systems Modelling, Gdańsk University of Technology, Narutowicza 11/12, Gdańsk, Poland
e-mail: skalar@eti.pg.gda.pl

K. Turowski
e-mail: Krzysztof.Turowski@eti.pg.gda.pl

Published online: 12 August 2014

bandwidth to the transmitters so that the total bandwidth is minimized and none of the signals interfere with other in the network. Two emitted signals can interfere if they are either on the similar frequency bands or one of the transmitters produces too powerful signal. In fact, it is usually assumed that the smaller the distance between transmitters, the greater the difference between the assigned bands is needed to ensure transmission with interferences below the acceptable level.

Graphs are frequently used to model topology of the networks, representing the transmitters with vertices of the graphs. The restrictions on the signal interferences can be represented using the edges of the graph, each adjacent to vertices, whose respective transmitters' signals are prone to distort one another. Frequency channels are represented by colors, therefore the assignment can be modelled as the coloring in graph. The exact notion of similarity of frequency channels can be varied, resulting in different types of coloring problems, introduced e.g. in [5,7].

In the general framework, introduced by Broersma [2], the restrictions are given for some pairs of transmitters in the form the widths of the minimum separation band between their frequencies. It is also assumed that these widths are equal to the single frequency band or a multiple with a constant factor of $\lambda \geq 2$. This approach is strongly motivated by the fact that in the majority of radio network the transmitters are either the active spots supplying crucial services or the moderate ones which do not need to be protected using the same high standards.

Formally, the BBC problem [2] can be stated as follows: given a simple graph G, its fixed spanning subgraph H and integer λ, the λ-backbone coloring of the graph G with backbone H is defined as a function $c\colon V(G) \to \mathbb{N}_+$ such that $|c(u) - c(v)| \geq 1$ for each edge $uv \in E(G)$ and $|c(u) - c(v)| \geq \lambda$ for each edge $uv \in E(H)$. The λ-backbone chromatic number $BBC_\lambda(G, H)$ is the smallest integer k such that there exists a λ-backbone coloring c of G with backbone H with $\max c(V(G)) = k$. A λ-backbone coloring c of G with backbone H is called *optimal* if and only if $\max c(V(G)) = BBC_\lambda(G, H)$.

The BBC problem also can be presented in a decision version: for a given number k decide whether $BBC_\lambda(G, H) \leq k$. This problem is polynomial for $k \leq \lambda + 1$, but NP-complete for any $k \geq \lambda + 2$; the proof straighforwardly follows from the NP-completeness of the classical coloring problem. Furthermore, it was proven in [4] that this problem remains NP-complete for any $k \geq \lambda + 2$ even if H is a matching. If we consider only connected backbones, it is known [3] that the BBC problem in decision version is solvable in polynomial time also for $k = \lambda + 2$, but for any $k \geq \lambda + 3$ remains NP-complete, even if backbone is the Hamiltonian path.

For the special case $\lambda = 2$ it was proven that for all split graphs with matching backbones the value of $BBC_\lambda(G, H)$ can be found in polynomial time [9]. Moreover, the generalization of this problem for backbone graph isomorphic to pairwise vertex-disjoint stars is NP-complete, but as it was proved in [9] there is an 1-absolute approximation algorithm for it.

In most cases, it is convienient to bound the value of λ-backbone chromatic number by function of chromatic number. Basic tight bounds on the relation between these two numbers were presented by Broersma in [2]:

$$\chi(G) \leq BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda(\chi(G) - 1) + 1 \tag{1}$$

Tighter bounds for certain graph classes such as planar graphs and split graphs with different backbones are also present in the literature. For fixed λ, the λ-backbone chromatic number for split graphs with matching backbone is bounded from above by the following inequality [4]:

$$BBC_\lambda(G, H) \leq \left(2 - \frac{2}{\lambda + 1}\right)\chi(G) + O(1)$$

In case of split graphs with pairwise vertex-disjoint stars backbone the similar bound was proven in the same paper:

$$BBC_\lambda(G, H) \leq \left(2 - \frac{1}{\lambda}\right)\chi(G) + O(1)$$

The bound for $\lambda = 2$ was also studied in terms of maximum degree of the graph and degeneracy of the backbone. In [8] Miskuf proved the inequality for an arbitrary graph G with maximum degree $\Delta(G)$ and its d-degenerated backbone H:

$$BBC_2(G, H) \leq \Delta(G) + d + 1.$$

It is important since all frequently studied classes of backbones (matchings, stars, trees) are 1-degenerate. The above inequality can be simply generalized for any value of $\lambda \geq 2$:

$$BBC_\lambda(G, H) \leq (\lambda - 1)\Delta(G) + d + 1.$$

All above bounds are tight.

In the paper we study the behaviour of $BBC_\lambda(K_n, H)$, where K_n is a complete n-vertex graph and H is a bipartite graph[1]. We begin our considerations with a proof that formula $BBC_\lambda(G, H) = \lambda(\chi(H) - 1) + \chi(G, H) + 1$, where $\chi(G, H)$ is a new chromatic-like number, holds if $\lambda > n(G) - \chi(H)$, where $n(G)$ is the number of vertices of G. Next, we present a linear algorithm that produces λ-backbone colorings of K_n with bipartite backbone H and prove that it is 2-approximate in general and 1.5-approximate if H is connected. At the end, we show that if H is a tree then $\chi(K_n, H)$ can be computed in $O(n^2)$ time. As a consequence, we receive a quadratic algorithm that computes $BBC_\lambda(K_n, H)$ for backbones being trees and $\lambda > n - 2$.

2 Preliminaries

Since G and H are fixed in the remainder of the paper, we will write "λ-backbone coloring" instead of "λ-backbone coloring of G with backbone H". We will also write V instead of $V(G) = V(H)$, and n instead of $n(G) = n(H)$.

[1] This problem is a generalization of the so-called radio labelling, which is exactly the problem of computing $BBC_2(K_n, H)$. This problem was studied by many authors, see e.g. [1,6].

Lemma 1 *Let $c \geq 0$ be a coloring of H and $v_1, v_2, \ldots, v_n$ be a vertex ordering of H such that $c(v_1) \leq c(v_2) \leq \cdots \leq c(v_n)$. If $c'(v_i) := (\lambda - 1)c(v_i) + i$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ then*

(1) *If $j > i$ then $c'(v_j) - c'(v_i) \geq 1$;*
(2) *If $v_j v_i \in E(H)$ then $|c'(v_j) - c'(v_i)| \geq \lambda$.*

Proof (1) $j > i$ implies $c(v_j) \geq c(v_i)$. Thus $c'(v_j) - c'(v_i) = (\lambda - 1)(c(v_j) - c(v_i)) + j - i \geq j - i > 0$.
(2) Without loss of generality we can assume that $j > i$. c is a coloring of H, so $c(v_j) \neq c(v_i)$. Since $c(v_j) \geq c(v_i)$, we have $c(v_j) \geq c(v_i) + 1$. Hence $|c'(v_j) - c'(v_i)| = c'(v_j) - c'(v_i) = (\lambda - 1)(c(v_j) - c(v_i)) + j - i \geq \lambda - 1 + j - i \geq \lambda$. □

Corollary 1 $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda(\chi(H) - 1) + n - \chi(H) + 1$.

Proof Let c be a coloring of H such that $c(V) = \{0, 1, \ldots, \chi(H) - 1\}$ and $v_1, v_2, \ldots, v_n$ be a vertex ordering of H such that $c(v_1) \leq c(v_2) \leq \ldots \leq c(v_n)$. By Lemma 1, the formula $c'(v_i) := (\lambda - 1)c(v_i) + i$ for $i = 1, 2, \ldots, n$ defines a λ-backbone coloring. Therefore $BBC_\lambda(G, H) \leq \max c'(V) = (\lambda - 1) \max c(V) + n = \lambda(\chi(H) - 1) + n - \chi(H) + 1$. □

For a given function $c\colon V \to \mathbb{N}_+$ we define functions $q_{c,\lambda}, r_{c,\lambda}\colon V \to \mathbb{N}$ as the quotient and the remainder of the division of $c - 1$ by λ, respectively ($c(v) = \lambda q_{c,\lambda}(v) + r_{c,\lambda}(v) + 1$ and $0 \leq r_{c,\lambda}(v) \leq \lambda - 1$ for each $v \in V$). It is easy to see that $q_{c,\lambda} \geq 0$.

Lemma 2 *Let c be a λ-backbone coloring. Then*

(1) *$q_{c,\lambda}$ is a coloring of H;*
(2) *If c is optimal then $q_{c,\lambda} \leq \chi(H) - 1 + \lfloor (n - \chi(H))/\lambda \rfloor$.*

Proof (1) If $uv \in E(H)$ and $q_{c,\lambda}(u) = q_{c,\lambda}(v)$ then $|c(u) - c(v)| = |r_{c,\lambda}(u) - r_{c,\lambda}(v)| \leq \lambda - 1$, a contradiction.
(2) Since c is optimal, we have $\max c(V) = BBC_\lambda(G, H)$. $q_{c,\lambda} = \lfloor (c - 1)/\lambda \rfloor$ by definition of $q_{c,\lambda}$, so $\max q_{c,\lambda}(V) = \lfloor (\max c(V) - 1)/\lambda \rfloor = \lfloor (BBC_\lambda(G, H) - 1)/\lambda \rfloor$. To complete the proof, it suffices to use the inequality of Corollary 1. □

Corollary 2 $BBC_\lambda(G, H) \geq \lambda(\chi(H) - 1) + 1$.

Proof Let c be an optimal λ-backbone coloring. By Lemma 2, $q_{c,\lambda}$ is a coloring of H. Therefore $BBC_\lambda(G, H) = \max c(V) \geq \lambda \max q_{c,\lambda}(V) + 1 \geq \lambda(\chi(H) - 1) - 1$. □

Corollaries 1 and 2, taken together, shows that the λ-backbone chromatic number, as a function of λ, is almost linear:

$$\lambda(\chi(H) - 1) + 1 \leq BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda(\chi(H) - 1) + n - \chi(H) + 1. \qquad (2)$$

We will further show that the word "almost" can be omitted for large values of λ. If we compare the above bounds with inequalities (1), we will see that they have the same $\chi(H) - 1$ coefficient in the lower and the upper bound while those have different.

Lemma 3 *Let $\lambda' \geq \lambda$.*

(1) *If c is a λ-backbone coloring then $\lfloor \frac{\lambda'}{\lambda} c \rfloor$ is a λ'-backbone coloring.*
(2) $BBC_{\lambda'}(G, H) \leq \lfloor \frac{\lambda'}{\lambda} BBC_{\lambda}(G, H) \rfloor$.

Proof (1) Let $uv \in E(G)$ ($uv \in E(H)$). Then $|c(u) - c(v)| \geq 1$ ($|c(u) - c(v)| \geq \lambda$) and $|\lfloor \frac{\lambda'}{\lambda} c(u) \rfloor - \lfloor \frac{\lambda'}{\lambda} c(v) \rfloor| \geq \lfloor |\frac{\lambda'}{\lambda} c(u) - \frac{\lambda'}{\lambda} c(v)| \rfloor = \lfloor \frac{\lambda'}{\lambda} |c(u) - c(v)| \rfloor$. To complete the proof it suffices to combine these inequalities together.
(2) Follows immediately from (1). $\square$

Let q be a coloring of H. Function $r : V \to \mathbb{N}$ is a q-backbone remainder function if and only if:

(1) $r|_{q^{-1}(\{i\})}$ is a coloring of $G[q^{-1}(\{i\})]$ for each $i \in q(V)$;
(2) $r(u) \leq r(v)$ for each edge $uv \in E(H)$ such that $q(v) = q(u) + 1$.

If additionally

(3) $r \leq \lambda - 1$

then r will be called q-backbone λ-remainder. These notions clearly depend on G and H, but the graphs are fixed, so we do not mention them in the name of the notion.

Theorem 1 *Function $c : V \to \mathbb{N}_+$ is a λ-backbone coloring if and only if $q_{c,\lambda}$ is a coloring of H and $r_{c,\lambda}$ is a $q_{c,\lambda}$-backbone λ-remainder function.*

Proof ($\Rightarrow$) It follows from Lemma 2 that $q_{c,\lambda}$ is a coloring of H. Clearly $r_{c,\lambda} \leq \lambda - 1$, so to complete the proof it suffices to show that:

- $r_{c,\lambda}$ satisfies condition (1) of the definition of backbone remainder;
  Let $uv \in E(G)$ and $q_{c,\lambda}(u) = q_{c,\lambda}(v)$. Then $r_{c,\lambda}(u) - r_{c,\lambda}(v) = c(u) - c(v) \neq 0$, since c is a coloring of G.
- $r_{c,\lambda}$ satisfies condition (2) of the definition of backbone remainder;
  Let $uv \in E(H)$ and $q_{c,\lambda}(v) = q_{c,\lambda}(u) + 1$. Then $c(v) > c(u)$ and $r(v) - r(u) = (\lambda + r(v) - r(u)) - \lambda = |c(v) - c(u)| - \lambda \geq 0$.

($\Leftarrow$) Let $uv \in E(H)$. Then $q_{c,\lambda}(v) \neq q_{c,\lambda}(u)$. Without loss of generality we can assume that $q_{c,\lambda}(v) > q_{c,\lambda}(u)$. There are two cases to consider:

- $q_{c,\lambda}(v) = q_{c,\lambda}(u) + 1$;
  Then $c(v) - c(u) = \lambda + r_{c,\lambda}(v) - r_{c,\lambda}(u) \geq \lambda$ by condition (2) of the definition of backbone remainder.
- $q_{c,\lambda}(v) \geq q_{c,\lambda}(u) + 2$;
  Then $c(v) - c(u) \geq 2\lambda + r_{c,\lambda}(v) - r_{c,\lambda}(u) \geq \lambda + 1$ since $r_{c,\lambda} \leq \lambda - 1$.

To complete the proof it suffices to show that if $uv \in E(G)$ then $c(u) \neq c(v)$. Suppose that $c(v) = c(u)$. Then $q_{c,\lambda}(u) = q_{c,\lambda}(v)$ and $r_{c,\lambda}(u) = r_{c,\lambda}(v)$, which contradicts condition (1) of the definition of backbone remainder. $\square$

Let k be positive integer and q be a coloring of H such that $q(V) = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Let $V_i = q^{-1}(\{i\})$. We define

$$\chi(G, H, q) := \min\{\max r(V_{k-1}) : r \text{ is a } q\text{-backbone remainder}\}.$$

This notion is well-defined. To prove this, we need to show that there is at least one q-backbone remainder r. To this aim, let $r_i\colon V_i \to \mathbb{N}$ $(0 \le i \le k-1)$ be a coloring of $G[V_i]$ such that $r_i(V_i) = \{0, 1, \ldots, \chi(G[V_i]) - 1\}$. It is easy to see that function given by

$$r(v) := \sum_{i=0}^{q(v)-1} \max r_i(V_i) + r_{q(v)}(v) = \sum_{i=0}^{q(v)-1} (\chi(G[V_i]) - 1) + r_{q(v)}(v)$$

is a q-backbone remainder. Moreover, this formula shows that $\chi(G, H, q) \le \sum_{i=0}^{k-1} \chi(G[V_i]) - k \le n - k$.

A q-backbone remainder r will be called optimal if and only if $\max r(V_{k-1})$ equals $\chi(G, H, q)$. Let us note that if r is a q-backbone remainder such that $\max r(V_0) \ge |V_0|$ (or $\max r(V_{i+1}) - \max r(V_i) \ge |V_{i+1}|$ for some i) then there is an integer $0 \le j \le |V_0|$ ($\max r(V_i) \le j \le \max r(V_{i+1})$) such that $j \notin r(V_0)$ ($j \notin r(V_{i+1})$) and a function r' that arises from r by decreasing by 1 all colors that are greater than j is a q-backbone remainder satisfying $\max r'(V_{k-1}) \le \max r(V_{k-1})$. This shows that there exists an optimal q-backbone remainder function r such that $\max r(V_i) \le \sum_{j=0}^{i} |V_j| - i - 1$.

Let $\chi(G, H)$ be the smallest value of $\chi(G, H, q)$ over all colorings q of H such that $q(V) = \{0, 1, \ldots, \chi(H) - 1\}$.

Theorem 2 *If* $\lambda > n - \chi(H)$ *then* $BBC_\lambda(G, H) = \lambda(\chi(H) - 1) + \chi(G, H) + 1$.

Proof $(\ge)$ Let c be an optimal λ-backbone coloring. By Theorem 1, $q_{c,\lambda}$ is a coloring of H and $r_{c,\lambda}$ is a $q_{c,\lambda}$-backbone λ-remainder. Combining Lemma 2 with $\lambda > n - \chi(H)$ and the fact that $q_{c,\lambda}$ must use at least $\chi(H)$ colors, we obtain $\max q_{c,\lambda}(V) = \chi(H) - 1$. Therefore $BBC_\lambda(G, H) = \max c(V) = \lambda \max q_{c,\lambda}(V) + \max r_{c,\lambda}(q_{c,\lambda}^{-1}(\{\chi(H) - 1\})) + 1 \ge \lambda(\chi(H) - 1) + \chi(G, H) + 1$.

$(\le)$ Let q be a coloring of H such that $q(V) = \{0, 1, \ldots, \chi(H) - 1\}$ and $\chi(G, H, q) = \chi(G, H)$. Let r be an optimal q-backbone remainder such that $\max r(V_i) \le \sum_{j=0}^{i} |V_j| - i - 1$. Then $r \le \sum_{j=0}^{\chi(H)-1} |V_j| - \chi(H) = n - \chi(H) \le \lambda - 1$, which shows that r is a q-backbone λ-remainder. By Theorem 1, function $c := \lambda q + r + 1$ is a λ-backbone coloring. Therefore $BBC_\lambda(G, H) \le \max c(V) = \lambda \max q(V) + \max r((q^{-1}(\{\chi(H) - 1\})) + 1 = \lambda(\chi(H) - 1) + \chi(G, H) + 1$. □

The equality $BBC_\lambda(G, H) = \lambda(\chi(H) - 1) + \chi(G, H) + 1$ may not be true if $\lambda \le n - \chi(H)$. For instance, if G is a complete graph and H has exactly one edge then $\chi(H) = 2$, $\chi(G, H) = 0$ and

$$BBC_\lambda(G, H) = \begin{cases} n & \text{if } \lambda \le n - 1, \\ \lambda + 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In this case $BBC_\lambda(G, H) = \lambda(\chi(H) - 1) + \chi(G, H) + 1$ if and only $\lambda > n - \chi(H)$. Other examples shown in Fig. 1 prove that $\lambda(\chi(H) - 1) + \chi(G, H) + 1$ is neither upper nor lower bound for $BBC_\lambda(G, H)$.

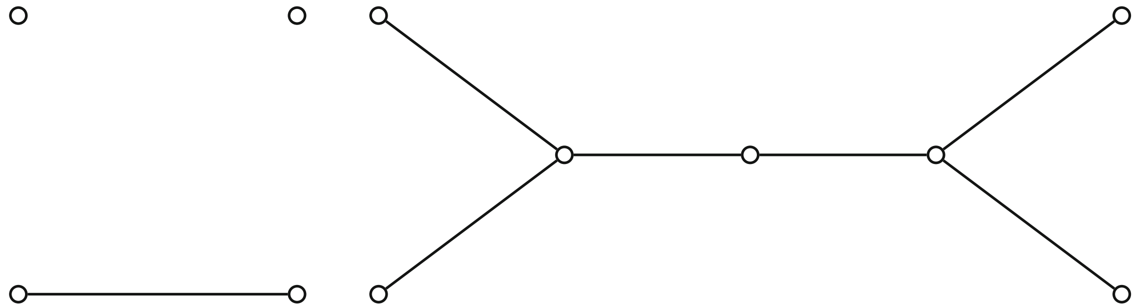


Fig. 1 Examples of backbones H for which $BBC_\lambda(K_n, H) \neq \lambda(\chi(H) - 1) + \chi(K_n, H) + 1$: $BBC_2(K_4, H) = 4 > 3 = 2(\chi(H) - 1) + \chi(K_4, H) + 1$ (*left*) and $BBC_3(K_7, H) = 7 < 8 = 3(\chi(H) - 1) + \chi(K_7, H) + 1$ (*right*)

3 Bipartite Backbones in Complete Graphs

Now we focus on bipartite backbones in complete graphs, i.e. we assume that $G = K_n$ and H is bipartite and nonempty[2]. Let q be a coloring of H such that $q(V) = \{0, 1\}$. Let $V_i = q^{-1}(\{i\})$ and $n_i = |V_i|$. Without loss of generality we can assume that $n_0 \leq n_1$.

Lemma 4 *If r is a q-backbone remainder and $r(V_0) = \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$, then function $c\colon V \to \mathbb{N}_+$ given by formula $c(v) := \max\{\lambda, n_0\}q(v) + r(v) + 1$ is a λ-backbone coloring.*

Proof Let us notice that c is a λ-backbone coloring if and only if c is one-to-one function and $|c(u) - c(v)| \geq \lambda$ whenever $uv \in E(H)$. To see that c is an injection, it suffices to note that $\max c(V_0) = n_0 < \max\{\lambda, n_0\} + 1 \leq \min c(V_1)$ and $c|_{V_i}$ $(i = 0, 1)$ is one-to-one as a constant plus one-to-one function $r|_{V_i}$.

Let $uv \in E(H)$. Then u and v are in different partitions of H. Without loss of generality we can assume that $u \in V_0$ and $v \in V_1$. Since r is a q-backbone remainder, we have $r(v) \geq r(u)$ and hence $|c(v) - c(u)| = |\max\{\lambda, n_0\} + r(v) - r(u)| \geq \max\{\lambda, n_0\} \geq \lambda$. $\square$

The above lemma suggests how to construct a λ-backbone coloring. In the first step, we compute q. In the second, we compute r, e.g. by numbering vertices of V_0 with numbers $0, 1, \dots, n_0 - 1$ and vertices of V_1 with numbers $n_0 - 1, n_0, \dots, n - 2$. In the last step, we construct λ-backbone coloring by formula given in Lemma 4. The algorithm is clearly linear. The question is: how good it is?

Lemma 5 *If H is connected then $\chi(K_n, H) \geq n_1 - 1$.*

Proof Let q' be a coloring of H such that $q'(V) = \{0, 1\}$ and r' be a q'-backbone remainder. Let $u \in (q')^{-1}(\{0\})$ be a vertex satisfying

$$r'(u) = \max r'((q')^{-1}(\{0\}))$$

[2] If H is empty then $BBC_\lambda(K_n, H) = n$ and any numbering of vertices of K_n with numbers $1, 2, \dots, n$ is an optimal λ-coloring.

and $v \in (q')^{-1}(\{1\})$ be one of its neighbours. By definition $r'(v) \geq r'(u)$ and therefore $\max r'((q')^{-1}(\{1\})) \geq \max r'((q')^{-1}(\{0\}))$. To complete the proof it suffices to recall that $\max r'((q')^{-1}(\{i\})) \geq |(q')^{-1}(\{i\})| - 1$ for $i = 0, 1$ and $\{(q')^{-1}(\{0\}), (q')^{-1}(\{1\})\} = \{V_0, V_1\}$ since H is connected. □

Theorem 3 *The algorithm is 2-approximate. If H is connected then it is 1.5-approximate.*

Proof Let c be a λ-coloring that is a result of the algorithm. Then

$$\max c(V) = \max\{\lambda, n_0\} + \max r(V_1) + 1 \leq \max\{\lambda, n_0\} + n - 1.$$

Since H is nonempty, we have $BBC_\lambda(K_n, H) \geq \max\{n, \lambda\}$. There are two cases to consider:

- $\lambda > n_0$;
  Then $\max c(V) \leq \lambda + n - 1 < 2BBC_\lambda(K_n, H)$. Let c' be an optimal λ-backbone coloring. There are two subcases to consider.
  (a) $\max q_{c',\lambda}(V) \geq 2$. Then $BBC_\lambda(K_n, H) \geq 2\lambda+1$ and $\max c(V) \leq \lambda+n-1 < 1.5BBC_\lambda(K_n, H)$.
  (b) $\max q_{c',\lambda}(V) \leq 1$. Then, if H is connected, we have $BBC_\lambda(K_n, H) \geq \lambda + 1 + \chi(K_n, H) \geq \lambda + n_1$. Hence $\max c(V) \leq \lambda + n - 1 = \lambda + n_1 - 1 + n_0 < \lambda + n_1 + 0.5n \leq 1.5BBC_\lambda(K_n, H)$.
- $\lambda \leq n_0$;
  Then $\max c(V) \leq n_0 + n - 1 < 1.5n \leq 1.5BBC_\lambda(K_n, H)$. □

There is another question worth asking: how to choose r to obtain best result? Obviously, r should be an optimal q-backbone remainder. If that is the case, we can even obtain an optimal λ-backbone coloring—it happens e.g. if $\lambda > n - 2$ and H is connected[3]. Unfortunately, the problem of finding optimal q-backbone remainders is NP-hard in general and its polynomiality for complete graphs and bipartite backbones is open. Nevertheless, there is a case which is polynomially solvable—backbones being trees in complete graphs.

Theorem 4 *If H is a forest then for every subgraph H' of H there is a $q|_{V(H')}$-backbone remainder $r_{H'}$ such that* $\max r_{H'}(V(H') \cap V_0) = |V(H') \cap V_0| - 1$ *and* $\max r_{H'}(V(H')) = \max\{|V(H') \cap V_0|, |V(H') \cap V_1|\} - 1$.

Proof We will use induction on $n(H')$. The claim is obvious if H' has at most two vertices. Suppose that it true for all subgraphs H' such that $n(H') < k$ and let H' be a subgraph of H with k vertices. There are two cases to consider:

- H' has an isolated vertex v. Let $H'' = H' \setminus v$. There are two subcases to consider.
  (a) $v \in V_0$. To obtain $r_{H'}$, we extend $r_{H''}$ by setting $r_{H'}(v) = |V(H') \cap V_0| - 1$.

[3] If r is optimal, we get a λ-backbone coloring c with $\max c(V) = \lambda + 1 + \chi(K_n, H, q)$. Since H is connected, there are exactly two possible 2-colorings of H: q and $1 - q$. Our claim follows from Theorem 2 and the fact that $\chi(K_n, H, q) = \chi(K_n, H, 1 - q)$ provided that H is bipartite.

(b) $v \in V_1$. To obtain $r_{H'}$, we extend $r_{H''}$ by setting $r_{H'}(v)$ to the biggest nonnegative integer that is less than $\max\{|V(H') \cap V_0|, |V(H') \cap V_1|\}$ and does not belong to $r_{H''}(V(H'') \cap V_1)$ (it is always possible since $|r_{H''}(V(H'') \cap V_1)| = |V(H'') \cap V_1| = |V(H') \cap V_1| - 1$).

– H' has a leaf v. Let u be the only neighbour of v in H', $H'' = H' \setminus v$ and $H''' = H'' \setminus u$. There are four subcases to consider.
  (a) $v \in V_0$ and $|V(H'') \cap V_0| < |V(H'') \cap V_1|$. To obtain $r_{H'}$, we extend $r_{H'''}$ by setting $r_{H'}(u) = |V(H') \cap V_1| - 1$ and $r_{H'}(v) = |V(H') \cap V_0| - 1$.
  (b) $v \in V_0$ and $|V(H'') \cap V_0| \geq |V(H'') \cap V_1|$. To obtain $r_{H'}$, we extend $r_{H''} + 1$ by setting $r_{H'}(v) = 0$.
  (c) $v \in V_1$ and $|V(H'') \cap V_0| \leq |V(H'') \cap V_1|$. To obtain $r_{H'}$, we extend $r_{H''}$ by setting $r_{H'}(v) = |V(H') \cap V_1| - 1$.
  (d) $v \in V_1$ and $|V(H'') \cap V_0| > |V(H'') \cap V_1|$. To obtain $r_{H'}$, we extend $r_{H'''} + 1$ by setting $r_{H'}(u) = 0$ and $r_{H'}(v)$ to the biggest nonnegative integer that is less than $|V(H') \cap V_0|$ and does not belong to $r_{H'''}(V(H''') \cap V_1)$ (it is always possible since $|r_{H'''}(V(H''') \cap V_1)| = |V(H''') \cap V_1| = |V(H') \cap V_1| - 1$).

In all above cases it is easy to verify that $r_{H'}$ has the required properties. This completes the proof. □

Corollary 3 *If H is a forest then $\chi(K_n, H) \leq n_1 - 1$. If H is a tree then $\chi(K_n, H) = n_1 - 1$.*

Proof It follows immediately from Lemma 5 and Theorem 4. □

If we carefully study the proof of Theorem 4, we will see that it describes a recursive algorithm that produces q-backbone remainders for backbones being trees. These q-backbone remainders are optimal by Corollary 3. Furthermore, they are constructed in $O(n)$ steps, where by a step we mean assigning integers to a vertex or a pair of adjacent vertices and (in some cases) incrementing the values of previously assigned numbers. In each step we have to select vertex (vertices) and integer (integers) that are assigned to the vertex (vertices). Both actions (and increment as well) can be done in $O(n)$ time. Hence the algorithm runs in $O(n^2)$ time.

4 Open Problems

In the paper we presented two algorithms that try to find λ-backbone colorings of complete graphs with bipartite and tree backbones that are close to optimal. Unfortunately, the first algorithm may produce suboptimal solutions and the second is guaranteed to be optimal only for values of λ which are large and very small[4]. This means that the question whether the problems are in P, is still open.

[4] It is easy to show that for $\lambda \leq n_0$ and H being a tree, $BBC_\lambda(K_n, H) = n$ and our algorithm produces optimal λ-backbone coloring.

References

1. Bodlaender, H.L., Broersma, H., Fomin, F.V., Pyatkin, A.V., Woeginger, G.J.: Radio labeling with preassigned frequencies. SIAM J. Optim. **15**(1), 1–16 (2005)
2. Broersma, H.J.: A general framework for coloring problems: old results, new results, and open problems. In: Combinatorial Geometry and Graph Theory, pp. 65–79. Springer, Berlin, Heidelberg (2003)
3. Broersma, H., Fomin, F., Golovach, P., Woeginger, G.: Backbone colorings for graphs: tree and path backbones. J. Graph Theory **55**(2), 137–152 (2007)
4. Broersma, H., Fujisawa, J., Marchal, B., Paulusma, D., Salman, A.N.M., Yoshimoto, K.: λ-backbone colorings along pairwise disjoint stars and matchings. Discrete Math. **309**(18), 5596–5609 (2009)
5. Comellas, F., Ozon, J.: Graph coloring algorithms for assignment problems in radio networks. In: Applications of Neural Networks to Telecommunications in Radio, Networks, pp. 49–56 (1995)
6. Fotakis, D., Nikoletseas, S., Papadopoulou, V., Spirakis, P.: Hardness results and efficient approximations for frequency assignment problems: radio labelling and radio coloring. Comput. Info. **20**, 121–180 (2001)
7. Klasing, R., Morales, N., Pérennes, S.: On the complexity of bandwidth allocation in radio networks. Theor. Computer Sci. **406**(3), 225–239 (2008)
8. Miskuf, J., Skrekovski, R., Tancer, M.: Backbone colorings of graphs with bounded degree. Discrete Appl. Math. **158**(5), 534–542 (2010)
9. Turowski, K.: Optimal backbone coloring of split graphs with matching backbones. To appear in Discuss. Math. Graph Theory. http://www.discuss.wmie.uz.zgora.pl/gt/ (accepted)

Discrete Applied Mathematics ▮ (▮▮▮▮) ▮▮▮–▮▮▮

Contents lists available at ScienceDirect

Discrete Applied Mathematics

journal homepage: www.elsevier.com/locate/dam

Note

The computational complexity of the backbone coloring problem for planar graphs with connected backbones[☆]

Robert Janczewski *, Krzysztof Turowski

Department of Algorithms and Systems Modelling, Gdańsk University of Technology, Narutowicza 11/12, Gdańsk, Poland

ARTICLE INFO

Article history:
Received 29 January 2014
Received in revised form 8 August 2014
Accepted 28 October 2014
Available online xxxx

Keywords:
Planar graphs
Cacti
Backbone chromatic number

ABSTRACT

In the paper we study the computational complexity of the backbone coloring problem for planar graphs with connected backbones. For every possible value of integer parameters $\lambda \geq 2$ and $k \geq 1$ we show that the following problem:

Instance: A simple planar graph G, its connected spanning subgraph (backbone) H.
Question: Is there a λ-backbone coloring c of G with backbone H such that $\max c(V(G)) \leq k$?

is either NP-complete or polynomially solvable (by algorithms that run in constant, linear or quadratic time). As a result of these considerations we obtain a complete classification of the computational complexity with respect to the values of λ and k.

We also study the problem of computing the backbone chromatic number for two special classes of planar graphs: cacti and thorny graphs. We construct an algorithm that runs in $O(n^3)$ time and solves this problem for cacti and another polynomial algorithm that is 1-absolute approximate for thorny graphs.

1. Introduction

One of the main algorithmic issues in area of radio network design is the frequency assignment problem. Consider, for example, the radio network with given topology and assume existence of a certain substructure in the network (called the backbone) with higher requirements concerning the level of interferences. Such connections could be recognized as the ones with high traffic loads, crucial for the reliability of communication. In the case of backbone we should assign to the adjacent base stations the channels separated by a certain frequency gap, while for the rest of the network it suffices not to assign the same channel to the adjacent stations. The solution of this problem is to minimize the total frequency bandwidth required by the network while keeping the acceptable level of interference between signals.

This problem is closely related to the general framework for graph coloring problems: given a radio network, we can model its topology as a graph and the assignment of the frequency channels to the transmitters as a color assignment. In this model the base stations (transmitters, receivers) and possible interferences between them are represented respectively as the vertices and the edges of the graph. We define two vertices as adjacent if their frequency bands are close enough that their signals interfere.

Formally, in this model of radio networks, introduced by Broersma in [1], we consider the so-called λ-backbone colorings of a simple graph G with backbone (spanning subgraph) H, i.e. functions $c\colon V(G) \to \mathbb{N}_+$ which satisfy $|c(u) - c(v)| \geq \lambda$

☆ This project has been partially supported by Narodowe Centrum Nauki under contract DEC-2011/02/A/ST6/00201.
* Corresponding author.
E-mail addresses: skalar@eti.pg.gda.pl (R. Janczewski), Krzysztof.Turowski@eti.pg.gda.pl (K. Turowski).

http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2014.10.028
0166-218X/

for each edge $uv \in E(H)$ and $c(u) \neq c(v)$ for each edge $uv \in E(G)$, where $\lambda \geq 2$ is an integer. The λ-backbone coloring problem (BBC) is to find a λ-backbone coloring function c which minimizes the total span or, equivalently, $\max c(V(G))$. The smallest integer k such that there exists a λ-backbone coloring c with $\max c(V(G)) = k$ is called the λ-backbone chromatic number and denoted by $BBC_\lambda(G, H)$. A λ-backbone coloring function c is optimal if and only if $\max c(V(G)) = BBC_\lambda(G, H)$.

The first tight lower and upper bounds on $BBC_\lambda(G, H)$ depending on the chromatic number $\chi(G)$ of G were presented by Broersma in [1]:

$$\chi(G) \leq BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda(\chi(G) - 1) + 1. \tag{1}$$

Another bounds for general graphs that depend on $\chi(H)$ and the number n of vertices of G, were presented in [9]:

$$\lambda(\chi(H) - 1) + 1 \leq BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda(\chi(H) - 1) + n - \chi(H) + 1. \tag{2}$$

Clearly the backbone coloring problem is an extension of the classical vertex coloring problem so computing the exact value of the backbone chromatic number in general case is NP-hard. Furthermore, deciding whether for a given number k the inequality $BBC_\lambda(G, H) \leq k$ holds is NP-complete for any $k \geq \lambda + 2$ even in a case when H is restricted to a matching [3]. There were some works concerning the backbone coloring problem for planar graphs, see e.g. [2,8], but none of them gave a complete classification of its computational complexity. In the paper we deal with it.

The remainder of the paper is organized as follows. Section 2 contains preliminary results. In Section 3 we present our main result: the classification of the computational complexity of the following problem for all possible values λ and k:

Instance: A simple planar graph G, its connected spanning subgraph (backbone) H.
Question: Is there a λ-backbone coloring c of G with backbone H such that $\max c(V(G)) \leq k$?

The last section contains an algorithm for optimal coloring of cacti with connected backbones and 1-absolute approximate algorithm for coloring of thorny graphs. Both algorithms are polynomial.

2. Preliminaries

Theorem 1. *Let G be a graph and H be its spanning bipartite subgraph. Then*

$$BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 2\chi(G) - 2. \tag{3}$$

Proof. It is an easy consequence of Proposition 13 of [8], which states that $BBC_\lambda(G, H) \leq (\chi(G) + \lambda - 2)\chi(H) - \lambda + 2$ provided that G is a graph, H is its subgraph and $\lambda \geq 2$. □

Lemma 2. *Let $1 \leq x \leq \lambda$. If H is a spanning subgraph of a nonempty graph G and $c : V \to \mathbb{N}_+$ is a λ-backbone coloring of graph G with backbone H such that $\max c(V) \leq \lambda + x$ then:*

(1) *the vertices colored with $1, 2, \ldots, x$ form an independent set in H,*
(2) *the vertices colored with $x + 1, x + 2, \ldots, \lambda$ are isolated in H,*
(3) *the vertices colored with $\lambda + 1, \lambda + 2, \ldots, \lambda + x$ form an independent set in H,*
(4) *H is bipartite and, provided it is connected, its bipartition is $c^{-1}(\{1, 2, \ldots, x\})$ and $c^{-1}(\{\lambda + 1, \ldots, \lambda + x\})$.*

Proof. (1), (3) Obvious.

(2) Easy consequence of the fact that $\min\{x + 1, x + 2, \ldots, \lambda\} + \lambda > \lambda + x$ and $\max\{x + 1, x + 2, \ldots, \lambda\} - \lambda \leq 0$.

(4) Follows from (1)–(3) and the fact that H has no isolated vertices. □

3. Main results

In this section we present the computational complexity of the backbone coloring problem for general planar graphs with connected backbones.

Theorem 3. *If G is planar and H is a connected spanning subgraph of G then the problem $BBC_\lambda(G, H) \leq k$ is decidable in $O(1)$ time for $k \leq \lambda$.*

Proof. If H is nonempty, then $BBC_\lambda(G, H) \geq \lambda + 1$. If H is both empty and connected, $H = G = K_1$ and $BBC_\lambda(G, H) = 1$. □

Theorem 4. *If G is planar and H is a connected spanning subgraph of G then the problem $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 1$ is decidable in $O(n)$ time.*

Proof. We prove that this problem is equivalent to the problem of deciding whether G is bipartite.

($\Rightarrow$) Let $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 1$. From Lemma 2 we know that H is bipartite and the only colors used are 1 and $\lambda + 1$. G must be also bipartite, otherwise the coloring would contain at least one vertex with a color outside of $\{1, \lambda + 1\}$.

($\Leftarrow$) Let G be bipartite. Then G with any backbone H can be colored using the colors 1 and $\lambda + 1$ assigned to the vertices in the first and second partition of G, respectively. □

Please cite this article in press as: R. Janczewski, K. Turowski, The computational complexity of the backbone coloring problem for planar graphs with connected backbones, Discrete Applied Mathematics (2014), http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2014.10.028

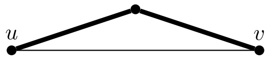


Fig. 1. Triangle that replaces the edge uv.

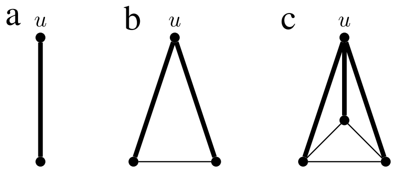


Fig. 2. Gadgets that replaces the vertex u: (a) the case $k = \lambda + 3$; (b) the case $k = \lambda + 4$; (c) the case $k = \lambda + 5$.

The above result can be strengthened for $\lambda \geq 5$: $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 1$ is decidable in $O(n)$ time for planar G and any backbone H. Indeed, $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 1$ implies that both G and H are bipartite. If they are bipartite, then we color G with colors $1, \lambda + 1$ on all non-isolated vertices in H and use the colors $\{2, 3, 4, 5\}$ to color all remaining vertices (this is possible due to the famous Four Color Theorem).

Theorem 5. *If G is planar and H is a connected spanning subgraph of G then the problem $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 2$ is decidable in $O(n^2)$ time.*

Proof. It was proved in [8] (see Theorem 17) that the problem is polynomially solvable even for nonplanar graphs. The proof is based on a reduction to the 2-SAT problem. The reduction can be done in $O(n^2)$ time and the 2-SAT is solvable in $O(n^2)$ time [5], so our claim holds. □

The requirement that H is connected is necessary. Otherwise, it was proved in [3] that for instances with matching backbone the problem $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 2$ is NP-complete. In fact, the proof implies (although it is not stated explicitly) that NP-completeness holds even when the problem is restricted to planar graphs with matching backbones.

Theorem 6. *If G is planar and H is a connected spanning subgraph of G, then the problem $BBC_\lambda(G, H) \leq k$ is NP-complete:*

(1) *for $k = \lambda + 3$ if $\lambda \geq 3$,*
(2) *for $k = \lambda + 4$ if $\lambda \geq 4$,*
(3) *for $k = \lambda + 5$ if $\lambda \geq 5$.*

Proof. We pick an arbitrary spanning tree T of G and replace every edge uv of T by a triangle shown in Fig. 1. Next, for each vertex u of G, we replace v by a gadget shown in Fig. 2 (in both cases bold edges belong to the backbone T'). We claim that the resulting graph G' with the backbone spanning tree T' has a λ-backbone coloring that uses colors from 1 to k if and only if G is 3-colorable.

If G is 3-colorable, we simply expand the 3-coloring to all new vertices by coloring them as follows: vertices of degree 2 in T' receive color $\lambda + 3$ and all other pendant vertices connected with vertex in G of color x receive colors $x + \lambda, x + \lambda + 1, \ldots, x + k - 3$. This gives the desired λ-backbone coloring.

Now let c' be a λ-backbone coloring of G' with backbone T' such that $\max c'(V(G')) \leq k$. All vertices of the original graph G lie in the same partition of T', so, due to Lemma 2, they are either colored with $1, 2, \ldots, k - \lambda$ or $\lambda + 1, \lambda + 2, \ldots, k$. Without loss of generality we assume that the first possibility holds. Let v be a vertex of G. Let u_1, u_2 be its pendant (in T') neighbors with maximum and minimum color, respectively. v has exactly $k - \lambda - 2$ pendant neighbors in T' and all of them have different colors. Therefore $c'(v) \leq c'(u_1) - \lambda \leq c'(u_2) - (k - \lambda - 3) - \lambda = c'(u_2) - k + 3 \leq 3$ which proves that G is 3-colorable.

Since it is well known that 3-coloring of planar graphs is NP-complete (even for graphs with degree 4, [4]), the problem $BBC_\lambda(G, H) \leq k$ for planar graphs and connected backbones is also NP-complete. □

Theorem 7. *If G is planar and H is a connected spanning subgraph of G, then the problem $BBC_\lambda(G, H) \leq k$ is decidable in $O(n)$ time for every fixed $\lambda + 6 \leq k \leq 2\lambda$.*

Proof. If $\chi(H) \geq 3$ then $BBC_\lambda(G, H) \geq 2\lambda + 1$—hence H is necessarily bipartite. It turns out that it is also a sufficient condition, since from Theorem 1 we have $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 2\chi(G) - 2 \leq \lambda + 6$. □

Theorem 8. *If G is planar and H is a connected spanning subgraph of G, then the problem $BBC_\lambda(G, H) \leq k$ is NP-complete for every fixed $2\lambda + 1 \leq k \leq 3\lambda$.*

Proof. It is known (see the right-hand side of the inequality (1) and the left-hand side of the inequality (2)) that $BBC_\lambda(G, G) = \lambda(\chi(G) - 1) + 1$. Therefore $BBC_\lambda(G, G) \leq k$ if and only if $\chi(G) \leq 3$ for all $2\lambda + 1 \leq k \leq 3\lambda$. To complete the proof it suffices to recall that the 3-coloring problem for planar graphs is NP-complete [4]. □

Please cite this article in press as: R. Janczewski, K. Turowski, The computational complexity of the backbone coloring problem for planar graphs with connected backbones, Discrete Applied Mathematics (2014), http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2014.10.028

Table 1
The complexity of the backbone coloring problem: G—planar, H—connected.

$BBC_2(G,H) \le k$			$BBC_3(G,H) \le k$		
$k \le 2$	$O(1)$	Theorem 3	$k \le 3$	$O(1)$	Theorem 3
$k = 3$	$O(n)$	Theorem 4	$k = 4$	$O(n)$	Theorem 4
$k = 4$	$O(n^2)$	Theorem 5	$k = 5$	$O(n^2)$	Theorem 5
$5 \le k \le 6$	NPC	Theorem 8	$6 \le k \le 9$	NPC	Theorem 6, 8
$k \ge 7$	$O(1)$	Theorem 9	$k \ge 10$	$O(1)$	Theorem 9

$BBC_4(G,H) \le k$			$BBC_5(G,H) \le k$		
$k \le 4$	$O(1)$	Theorem 3	$k \le 5$	$O(1)$	Theorem 3
$k = 5$	$O(n)$	Theorem 4	$k = 6$	$O(n)$	Theorem 4
$k = 6$	$O(n^2)$	Theorem 5	$k = 7$	$O(n^2)$	Theorem 5
$7 \le k \le 12$	NPC	Theorem 6, 8	$8 \le k \le 15$	NPC	Theorem 6, 8
$k \ge 13$	$O(1)$	Theorem 9	$k \ge 16$	$O(1)$	Theorem 9

$BBC_\lambda(G,H) \le k$ $(\lambda \ge 6)$		
$k \le \lambda$	$O(1)$	Theorem 3
$k = \lambda + 1$	$O(n)$	Theorem 4
$k = \lambda + 2$	$O(n^2)$	Theorem 5
$\lambda + 3 \le k \le \lambda + 5$	NPC	Theorem 6
$\lambda + 6 \le k \le 2\lambda$	$O(n)$	Theorem 7
$2\lambda + 1 \le k \le 3\lambda$	NPC	Theorem 8
$k \ge 3\lambda + 1$	$O(1)$	Theorem 9

Theorem 9. *If G is planar and H is a connected spanning subgraph of G, then the problem $BBC_\lambda(G, H) \le k$ is trivial for $k \ge 3\lambda+1$.*

Proof. Every planar graph is 4-colorable, so from the upper bound from inequality (1) we obtain $BBC_\lambda(G, H) \le 3\lambda + 1$. □

We may sum up all presented results in Table 1, containing the complete classification of the computational complexity with respect to the values of λ and k. Similar results, but not complete, for backbones being trees are presented in Table 2.

4. Backbone coloring of cacti and thorny graphs

In this section, we present algorithms for solving the backbone coloring problem for special classes of planar graphs: cacti and thorny graphs. Cacti, introduced first in literature under name Husimi trees [7], are defined as follows:

Definition 1. A connected graph is a cactus if and only if every edge of it belongs to at most one cycle.

It can be shown that every cactus can be constructed from a single vertex using a sequence of two operations: addition of a new pendant vertex or attachment of a cycle to one of the vertices of the graph. Clearly, every cactus is outerplanar and therefore also planar. The chromatic number of the cacti is at most 3. Cacti can be recognized in linear time. In [6], there was introduced the class of thorny graphs:

Definition 2. A connected graph G is thorny if and only if it has at least one decomposition into subgraphs $G_1, G_2, \dots, G_k$ so the following conditions are fulfilled:

(1) all graphs G_i, $1 \le i \le k$, are cycles or paths,
(2) graph G is a union of the graphs $G_1, G_2, \dots, G_k$,
(3) for every $2 \le i \le k$, the union of graphs $G_1, G_2, \dots, G_{i-1}$ intersects with G_i only in a vertex or an edge.

As with the cacti, we can define thorny graphs as results of a sequence of three operations, starting from the K_1 graph: addition of a new pendant vertex, attachment of a cycle to one of the vertices of the graph or attachment of a cycle to one of the edges of the graph. Hence, every cactus is thorny and every thorny graph is planar and connected. Furthermore, it was shown in [6] that outerplanar graphs form a subclass of thorny graphs. In the same paper, there was presented algorithm that recognizes thorny graphs in $O(n^3)$ time.

Since thorny graphs are 3-colorable [6], we know from inequalities (1) and (2) that if H is not bipartite then $BBC_\lambda(G, H) = 2\lambda + 1$. Furthermore, we obtain the following corollary from Theorem 1:

Corollary 10. *If G is a thorny graph and H is a connected bipartite subgraph of G then $BBC_\lambda(G, H) \le \lambda + 4$.* □

Please cite this article in press as: R. Janczewski, K. Turowski, The computational complexity of the backbone coloring problem for planar graphs with connected backbones, Discrete Applied Mathematics (2014), http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2014.10.028

Table 2
The complexity of backbone coloring problem: G—planar, T—spanning tree.

$BBC_2(G,T) \leq k$		
$k \leq 2$	$O(1)$	Theorem 3
$k = 3$	$O(n)$	Theorem 4
$k = 4$	$O(n^2)$	Theorem 5
$5 \leq k \leq 6$	open	
$k \geq 7$	$O(1)$	Theorem 9

$BBC_3(G,T) \leq k$		
$k \leq 3$	$O(1)$	Theorem 3
$k = 4$	$O(n)$	Theorem 4
$k = 5$	$O(n^2)$	Theorem 5
$k = 6$	NPC	Theorem 6
$7 \leq k \leq 8$	open	
$k \geq 9$	$O(1)$	Theorem 1, 9

$BBC_4(G,T) \leq k$		
$k \leq 4$	$O(1)$	Theorem 3
$k = 5$	$O(n)$	Theorem 4
$k = 6$	$O(n^2)$	Theorem 5
$7 \leq k \leq 8$	NPC	Theorem 6
$k = 9$	open	
$k \geq 10$	$O(1)$	Theorem 1

$BBC_5(G,T) \leq k$		
$k \leq 5$	$O(1)$	Theorem 3
$k = 6$	$O(n)$	Theorem 4
$k = 7$	$O(n^2)$	Theorem 5
$8 \leq k \leq 10$	NPC	Theorem 6
$k \geq 11$	$O(1)$	Theorem 1

$BBC_\lambda(G,T) \leq k$ $(\lambda \geq 6)$		
$k \leq \lambda$	$O(1)$	Theorem 3
$k = \lambda + 1$	$O(n)$	Theorem 4
$k = \lambda + 2$	$O(n^2)$	Theorem 5
$\lambda + 3 \leq k \leq \lambda + 5$	NPC	Theorem 6
$k \geq \lambda + 6$	$O(1)$	Theorem 1

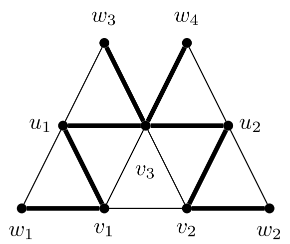


Fig. 3. Thorny graph G with backbone H, $BBC_\lambda(G, H) = \lambda + 4$.

This bound is tight, at least for $\lambda \geq 3$. An example is given in Fig. 3. Suppose that this graph has a λ-backbone coloring c such that $\max c(V(G)) \leq \lambda + 3$. Then, by Lemma 2, the non-backbone triangle $v_1v_2v_3$ is colored either with $\{1, 2, 3\}$ or $\{\lambda + 1, \lambda + 2, \lambda + 3\}$. Without loss of generality we assume that the first possibility holds. Then, at least one of the vertices u_i will be assigned $\lambda + 3$ as its color since all edges u_iv_j are in H. Hence, there would be a vertex w_i such that for some v_j and u_k we will have $w_iv_j \in E(H)$, $c(v_j) = 3$ and $w_iu_k \in E(G)$, $c(u_k) = \lambda + 3$. Therefore, such w_i cannot be colored using any color less than $\lambda + 4$—a contradiction.

However, in case of cacti graphs we may tighten the upper bound:

Theorem 11. *If G is a cactus and H is a connected bipartite spanning subgraph of G then $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 3$. The bound is tight.*

Proof. We claim that we can find a λ-backbone coloring using only colors from the set $\{1, 2, \lambda + 2, \lambda + 3\}$. G can be constructed from a single vertex using a sequence two operations: addition of a new pendant vertex or attachment of a cycle to one of the vertices of the graph. A single vertex can be easily colored with 1. To complete the proof, it suffices to show that, given a partial coloring, we can extend it without recoloring in both mentioned operations.

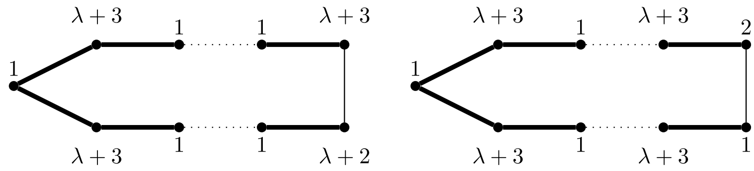
If we attach a pendant vertex v to a vertex u already colored with $c(u)$, we may assign $c(v) = \lambda + 4 - c(u)$. If we attach a pendant even cycle, we may assign colors $\lambda + 4 - c(u)$ and $c(u)$ alternately to the vertices on the cycle, thus obtaining a valid coloring.

The only remaining case is thus the attachment of an odd cycle to a vertex v. Notice that such cycle contains one edge outside of H, since otherwise $\chi(H) > 2$. Let us denote this edge as u_1u_2. Then, either both paths: from v to u_1 and from v to u_2 have odd or even length. In the first case (left example in Fig. 4) we assign the colors $\lambda + 4 - c(v)$ and $c(v)$ alternately along both paths without u_1 and color u_1 with $\lambda + 3 - c(v)$.

In the second case (right example in Fig. 4) it is possible that either $v = u_1$ or $v = u_2$ (but not both since $u_1 \neq u_2$). Hence, we assign the colors $\lambda + 4 - c(v)$ and $c(v)$ along both paths and finally recolor an arbitrary $u_i \neq v$ with $\lambda + 3 - c(v)$.

Finally, the graph in Fig. 5 demonstrates that this bound cannot be improved, even if we restrict backbones to trees. Suppose on the contrary that it has λ-backbone coloring that uses colors $1, 2, \ldots, \lambda + 2$. Then, one of the vertices of the

Please cite this article in press as: R. Janczewski, K. Turowski, The computational complexity of the backbone coloring problem for planar graphs with connected backbones, Discrete Applied Mathematics (2014), http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2014.10.028



(a) An example of odd paths. (b) An example of even paths.

Fig. 4. The attachment of an odd cycle to a vertex v.

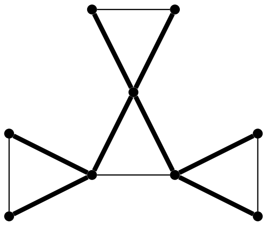


Fig. 5. Cactus G with backbone H, $BBC_\lambda(G, H) = \lambda + 3$.

internal triangle is colored with a color from the set $\{2, 3, \ldots, \lambda + 1\}$. But in this case, we cannot assign to the two uncolored its neighbors different colors less than $\lambda + 3$, which would satisfy the backbone coloring conditions. □

This result, together with Theorems 3–5, gives us a complete algorithm for finding an optimal coloring of a given cactus G with connected spanning backbone H. Since cacti can be decomposed into the sequence of two operations: attachment of a single vertex and attachment of a cycle (even or odd), starting from a single vertex in $O(n^3)$, the whole algorithm runs in $O(n^3)$. In case of thorny graphs we obtain 1-absolute approximate algorithm by combining the results from Theorems 3–5 with Corollary 10.

References

[1] H. Broersma, A general framework for coloring problems: old results, new results, and open problems, in: Combinatorial Geometry and Graph Theory, Springer Berlin, Heidelberg, 2003, pp. 65–79.
[2] H. Broersma, F.V. Fomin, P.A. Golovach, G.J. Woeginger, Backbone colorings for networks, in: Proceedings of the 29th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, WG 2003, in: LNCS, vol. 2880, 2003, pp. 131–142.
[3] H. Broersma, J. Fujisawa, B. Marchal, D. Paulusma, A.N.M. Salman, K. Yoshimoto, λ-backbone colorings along pairwise disjoint stars and matchings, Discrete Math. 309 (18) (2009) 5596–5609.
[4] D.P. Dailey, Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete, Discrete Math. 30 (3) (1980) 289–293.
[5] M.R. Garey, D.S. Johnson, Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, W.H. Freeman & Co, 1979.
[6] K. Giaro, R. Janczewski, M. Małafiejski, A polynomial algorithm for finding T-span of generalized cacti, Discrete Appl. Math. 129 (2003) 371–382.
[7] F. Harary, G. Uhlenbeck, On the number of Husimi trees. I., Proc. Natl. Acad. Sci. 39 (4) (1953) 315–322.
[8] F. Havet, A.D. King, M. Liedloff, I. Todinca, (Circular) backbone colouring: Forest backbones in planar graphs, Discrete Appl. Math. 169 (2014) 119–134.
[9] R. Janczewski, K. Turowski, The backbone coloring problem for bipartite backbones, Graphs Combin. (in press).

Information Processing Letters 115 (2015) 232–236

Contents lists available at ScienceDirect

Information Processing Letters

www.elsevier.com/locate/ipl

The computational complexity of the backbone coloring problem for bounded-degree graphs with connected backbones ☆

Robert Janczewski *, Krzysztof Turowski

Department of Algorithms and Systems Modelling, Gdańsk University of Technology, Narutowicza 11/12, Gdańsk, Poland

ARTICLE INFO

Article history:
Received 28 June 2013
Received in revised form 15 September 2014
Accepted 21 September 2014
Available online 28 September 2014
Communicated by Ł. Kowalik

Keywords:
Bounded-degree graphs
Backbone chromatic number
Graph algorithms

ABSTRACT

Given a graph G, a spanning subgraph H of G and an integer $\lambda \geq 2$, a λ-backbone coloring of G with backbone H is a proper vertex coloring of G using colors $1, 2, \ldots,$ in which the color difference between vertices adjacent in H is greater than or equal to λ. The backbone coloring problem is that of finding such a coloring whose maximum color does not exceed a given limit k. In this paper, we study the backbone coloring problem for bounded-degree graphs with connected backbones and we give a complete computational complexity classification of this problem. We present a polynomial algorithm for optimal backbone coloring for subcubic graphs with arbitrary backbones. We also prove that the backbone coloring problem for graphs with arbitrary backbones and with fixed maximum degree (at least 4) is NP-complete. Furthermore, we show that for the special case of graphs with fixed maximum degree at least 5 and $\lambda \geq 4$ the problem remains NP-complete even for spanning tree backbones.

1. Introduction

Coloring problems have been one of main areas of interest in graph theory since the middle of the 19th century. Whenever real-world situations can be modeled by graphs and one's aim is to partition the set of objects into pairwise disjoint subsets of non-conflicting objects, this can be viewed as a graph coloring problem. For this reason, graph coloring has found applications in many problems such as job scheduling, wavelength assignment and frequency assignment.

In [1], the backbone coloring problem was motivated and introduced in the context of a general framework of graph coloring problems. In the graph model of the radio network the vertices represent the transmitters, receivers or base stations. Two adjacent vertices denote possible interference between transmitters broadcasting on the same or similar frequency channels. Given the definition of interference, the requested level of interference and the notion of similarity between frequency channels, the goal is to find a coloring which minimizes the total frequency band (the number of frequency channels) used in the network.

A backbone coloring problem within the given framework was also introduced and motivated in [1]. We distinguish a certain substructure of adjacent transmitters (called the backbone) from the rest of the network as more crucial for communication. It could, for example, model the connections between cluster heads and the other sensors in the same cluster of a sensor network [2] or hot spots with very busy patterns of communication in a radio network [3].

☆ This project has been partially supported by Narodowe Centrum Nauki under contract DEC-2011/02/A/ST6/00201.

* Corresponding author.
E-mail addresses: skalar@eti.pg.gda.pl (R. Janczewski), Krzysztof.Turowski@eti.pg.gda.pl (K. Turowski).

http://dx.doi.org/10.1016/j.ipl.2014.09.018
0020-0190/

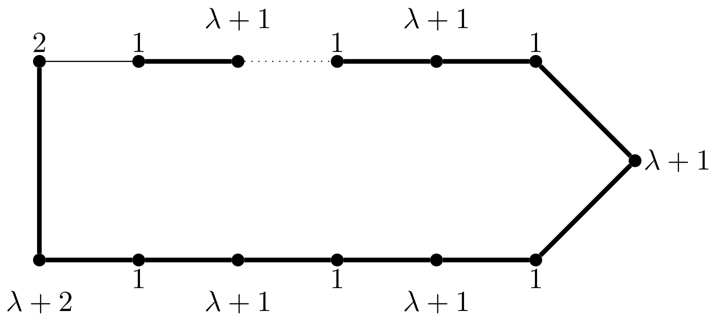


Fig. 1. Optimal backbone coloring of C_{2n+1} with backbone P_{2n+1}.

Formally, we define a λ-backbone coloring of a graph G and its spanning subgraph (backbone) H, where $\lambda \geq 2$ is an integer, to be a function $c\colon V(G) \to \mathbb{N}_+$ such that $c(u) \neq c(v)$ for each edge $uv \in E(G)$ and $|c(u) - c(v)| \geq \lambda$ for each edge $uv \in E(H)$. The minimum number k for which there exists a λ-backbone coloring of graph G with backbone H with $\max c(V(G)) = k$ is called the backbone chromatic number and denoted by $BBC_\lambda(G, H)$.

In this paper, we study the backbone coloring problem (given G with backbone H and integers k, λ, is there a λ-backbone coloring of G with backbone H with maximum color not exceeding k?) for bounded-degree graphs with connected backbones. This leads to a plausible interpretation in terms of radio networks since typically radio networks have rather low degree, but for every transmitter there is at least one other transmitter within its close range.

The remainder of the paper is organized as follows. In Section 2 we give some preliminary results. Next, in Sections 3 and 4, we show that the backbone coloring problem is polynomially solvable for graphs with maximum degree not exceeding 3. The last section contains proofs of the facts that this problem is NP-complete for graphs with fixed maximum degree ≥ 4 and for graphs with fixed maximum degree ≥ 5 and backbones being trees.

2. Preliminaries

The following basic observation turns out to be very useful for proving the properties of backbone coloring of low-degree graphs:

Theorem 1. *For any graph G with backbone H we have*

(i) $(\chi(H) - 1)\lambda + 1 \leq BBC_\lambda(G, H) \leq (\chi(G) - 1)\lambda + 1$,
(ii) *if* $\chi(G) = \chi(H)$ *then* $BBC_\lambda(G, H) = (\chi(G) - 1)\lambda + 1$.

Proof.

(i) The first inequality was originally proved in [6]. The second can be proved using the observation that for any coloring of G that uses colors $1, 2, \ldots, \chi(G)$ we may substitute color i with color $(i - 1)\lambda + 1$ and obtain a λ-backbone coloring of G with backbone H.
(ii) Trivial consequence of (i). □

From now on, we assume that G and H are fixed, connected and H is a spanning subgraph of G. We will write V instead of $V(G) = V(H)$.

3. $\Delta(G) \leq 2$

The following result shows that backbone coloring of graph G with $\Delta(G) \leq 2$ is easily solvable.

Theorem 2. *Let $\Delta(G) \leq 2$. Then*

(i) *if G has exactly one vertex then* $BBC_\lambda(G, H) = 1$,
(ii) *if G is bipartite with at least 2 vertices then* $BBC_\lambda(G, H) = \lambda + 1$,
(iii) *if G is an odd cycle and $G \neq H$ then* $BBC_\lambda(G, H) = \lambda + 2$,
(iv) *if G is an odd cycle and $G = H$ then* $BBC_\lambda(G, H) = 2\lambda + 1$.

Proof. Recall that in all cases we assume G is connected and H is connected and spanning subgraph of G.

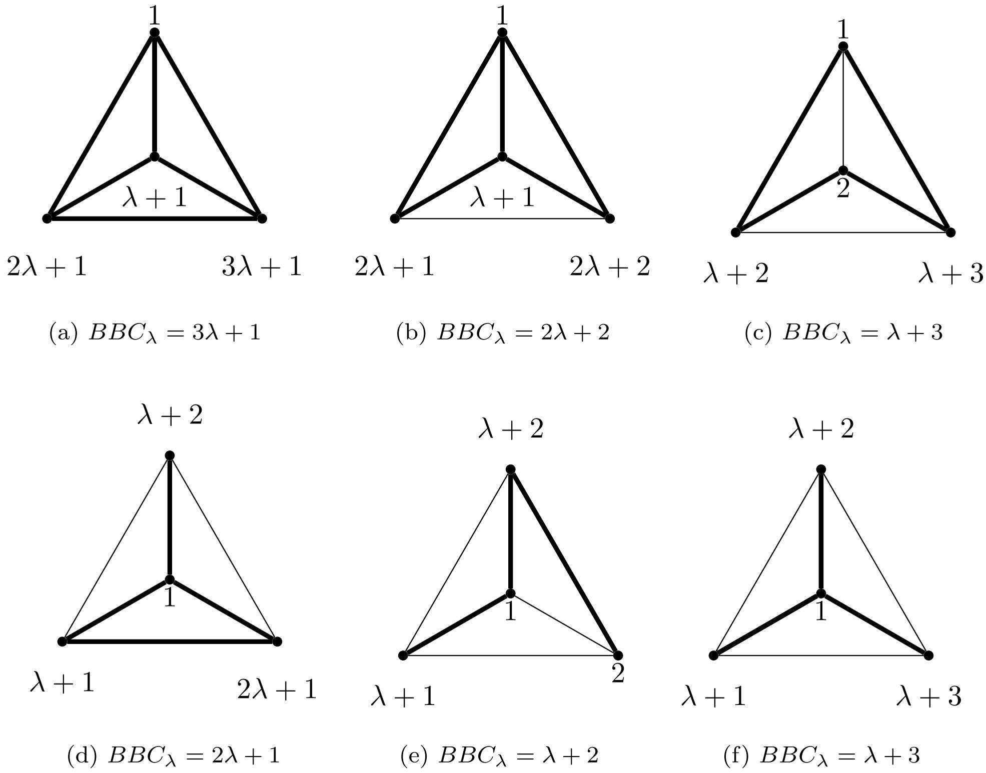
(i) Trivial.
(ii) This was proved in [4].
(iii) In this case $G = C_{2n+1}$ and $H = P_{2n+1}$ for some n. In [4], it was shown that $BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 1$ is possible only if G is bipartite. Therefore $BBC_\lambda(G, H) \geq \lambda + 2$. Fig. 1 shows how to color G with backbone H with $\lambda + 2$ colors (bold edges are in H).
(iv) Follows from Theorem 1(ii). □

4. $\Delta(G) = 3$

This case is still polynomial-time solvable but much harder. Our algorithm, which finds optimal backbone coloring (and therefore computes $BBC_\lambda(G, H)$) works in two steps. In the first step it computes an optimal coloring of G and the chromatic numbers $\chi(G)$ and $\chi(H)$. In the second, it applies one of the subalgorithms described in the next three subsections (the one that matches the computed values of $\chi(G)$ and $\chi(H)$). The first step can be done in $O(n^2)$ time since G and H are subcubic. The subalgorithms run in $O(n^2)$ time, so the whole process takes $O(n^2)$ time.

4.1. $\chi(G) \geq 4$

According to Brooks' theorem the only subcubic graph with $\chi(G) \geq 4$ is the complete graph K_4. In this case there are six possible spanning subgraphs (up to isomorphism),



(a) $BBC_\lambda = 3\lambda+1$ (b) $BBC_\lambda = 2\lambda+2$ (c) $BBC_\lambda = \lambda+3$

(d) $BBC_\lambda = 2\lambda+1$ (e) $BBC_\lambda = \lambda+2$ (f) $BBC_\lambda = \lambda+3$

Fig. 2. K_4 with all possible connected spanning backbones.

all of which are listed in Fig. 2 (bold edges are in H). We leave it to the reader to verify that the backbone chromatic colorings shown in this figure are optimal.

The computational complexity of this procedure is clearly $O(1)$.

4.2. $\chi(G) = \chi(H) \le 3$

Theorem 1(ii) gives $BBC_\lambda(G, H) = (\chi(G) - 1)\lambda + 1$. Theorem 1(i) also shows how to create an optimal backbone coloring given an optimal vertex coloring of G. The whole procedure takes $O(n)$ time.

4.3. $\chi(G) = 3$ *and* $\chi(H) = 2$

This is the hardest case. Before we formulate our algorithm, we first establish some facts and introduce some new notation. Recall that $G \setminus H$ is the graph obtained from G by removing all edges appearing in H.

Fact 3. *$G \setminus H$ is a collection of pairwise disjoint paths, cycles and isolated vertices.*

Let $V' \subseteq V$ be the set of all vertices v such that v has exactly one neighbor in H. Let $h: V' \to V$ be the function such that $vh(v)$ is an edge in H.

Fact 4. *If v belongs to any cycle in $G \setminus H$ then $v \in V'$.*

Fact 5. *If u and v are adjacent in H then at most one of them belongs to a cycle in $G \setminus H$.*

Let $R \subseteq V^2$ be the relation such that uRv if and only if u and v belong to some (possibly different) odd cycles in $G \setminus H$ and $h(u)$ and $h(v)$ are connected by a path of odd length in $G \setminus H$. R is well-defined due to Fact 4.

Theorem 6. *For every $u \in V$ there is at most one $v \in V$ such that uRv.*

Proof. Suppose that there is $u \in V$ such that for some v_1, $v_2 \in V$ ($v_1 \ne v_2$) both uRv_1 and uRv_2 hold. Therefore by definition, the respective $h(u)$ is connected to both $h(v_1)$ and $h(v_2)$ in $G \setminus H$ by paths of odd length. Additionally, $h(u) \ne h(v_1)$ and $h(u) \ne h(v_2)$.

Suppose now that $h(v_1) \ne h(v_2)$. If $\deg_{G\setminus H}(h(u)) \ge 2$ then u and $h(u)$ are not connected with any other vertices in H—a contradiction. If $\deg_{G\setminus H}(h(u)) = 0$ then $h(u)$ cannot be connected to any other vertex in $G \setminus H$ by a path of odd length. Therefore $\deg_{G\setminus H}(h(u)) = 1$.

Since (by Fact 3) $G \setminus H$ contains only isolated vertices, paths and cycles, either $h(v_2)$ lies on a path connecting $h(u)$ with $h(v_1)$ or $h(v_1)$ lies on a path connecting $h(u)$ with $h(v_2)$. Without loss of generality, assume the first possibility holds. Then $\deg_{G\setminus H}(h(v_2)) \ge 2$ and v_2 with $h(v_2)$ are not connected to any other vertices in H—a contradiction. Therefore $h(v_1) = h(v_2)$.

But then we know that $\deg_H(h(v_1)) \ge 2$, because $h(v_1)$ is adjacent to both v_1 and v_2—and $v_1 \ne v_2$. Since $h(u) \ne h(v_1)$, $\deg_{G\setminus H}(h(v_1)) \ge 1$ also clearly follows. Therefore $\deg_H(h(v_1)) = 2$ and $\deg_{G\setminus H}(h(v_1)) = 1$ and we notice that v_1, v_2 and $h(v_1)$ form a component in H and this component does not contain u. $\square$

Algorithm 1 Auxiliary algorithm (a part of our $(\lambda+3)$-coloring algorithm for subcubic graph G with connected, bipartite backbone H).

1: $\mathcal{C} \leftarrow \{C\colon C$ is an odd cycle in $G \setminus H\}$, $A \leftarrow \emptyset$, $B \leftarrow \emptyset$
2: **for all** $C \in \mathcal{C}$ **do**
3: $\quad f(C) \leftarrow V[C]$
4: **while** $\mathcal{C} \neq \emptyset$ **do**
5: $\quad$ Let $C_0 \in \mathcal{C}$ be a cycle with minimum value of $|f(C)|$
6: $\quad$ Let u be any vertex from $f(C_0)$
7: $\quad$ **if** there exists v such that uRv and $v \notin V[C_0]$ **then**
8: $\quad\quad$ Let C_1 be an odd cycle in $G \setminus H$ containing v
9: $\quad\quad$ **if** $C_1 \in \mathcal{C} \setminus \{C_0\}$ **then**
10: $\quad\quad\quad$ Remove v from $f(C_1)$
11: $\quad \mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \setminus \{C_0\}$, $A \leftarrow A \cup \{u\}$, $B \leftarrow B \cup \{h(u)\}$

Now we are ready to formulate an auxiliary algorithm. It takes a vertex from every odd cycle in $G \setminus H$ and puts it in a set A (see Algorithm 1 for details). Next, we will use this set and the set $B = h(A)$ to create a $(\lambda+3)$-backbone coloring of G (see the proof of Theorem 17 for details). Finally, we verify if it is optimal (see comments after the proof). The following facts state the properties of the auxiliary algorithm.

Fact 7. *For any two odd cycles $C \neq C'$ in $G \setminus H$ we have $V[C] \cap V[C'] = \emptyset$.*

Fact 8. *$f(C) \subseteq V[C]$ for every odd cycle C in $G \setminus H$ during every iteration of the algorithm.*

Fact 9. *For any two distinct odd cycles C, C' in $G \setminus H$, $f(C) \cap f(C') = \emptyset$ during every iteration of the algorithm.*

Fact 10. *During every iteration of the algorithm exactly one odd cycle from $G \setminus H$ is removed from $\mathcal{C}$.*

Fact 11. *During every iteration of the algorithm at most one set $f(C)$ is modified by removing exactly one vertex.*

Lemma 12. *During all iterations of the algorithm $\min_{C \in \mathcal{C}} |f(C)| \geq 2$ and there is at most one cycle C with $|f(C)| = 2$.*

Proof. From the definition of f it follows that at the beginning of the algorithm $|f(C)| = |V[C]| \geq 3$. Suppose that after the i-th iteration of the algorithm $\min_{C \in \mathcal{C}} |f(C)| \geq 2$ and there is at most one cycle C with $|f(C)| = 2$. Let $C_0 \in \mathcal{C}$ be the cycle such that $|f(C_0)|$ is minimum. Then clearly for any cycle $C \neq C_0$ we have $|f(C)| \geq 3$.

In $(i+1)$-th iteration we always pick C_0 as the cycle with minimum $|f(C)|$ and remove it from $\mathcal{C}$. Due to Fact 11 we know that after this iteration of the algorithm the inequality $|f(C)| \geq 3$ holds for all $C \in \mathcal{C}$—or (if Lines 8–10 are executed) there is exactly one cycle C_1 from which we removed exactly one vertex, so it satisfies the inequality $|f(C_1)| \geq 2$. □

Fact 13. *The algorithm stops after processing all odd cycles from $G \setminus H$.*

Fact 14. *After the termination of the algorithm, A contains exactly one vertex from every odd cycle in $G \setminus H$.*

Lemma 15. *No two vertices from B are connected in $G \setminus H$ by an odd path.*

Proof. Suppose to the contrary that $h(u)$, $h(v)$ are distinct vertices from B connected by an odd path and let u, v be their respective vertices from A. Without loss of generality we assume that u was added to A before v, during some iteration of the algorithm. But then uRv, so v was removed from its respective $f(C)$ and therefore it could not be added to A in any subsequent iteration. □

Lemma 16. *$(G \setminus H)[V \setminus A]$ is bipartite and there exists a bipartition $V \setminus A = U_1 \cup U_2$ such that $B \subseteq U_1$.*

Proof. Since $A \cap B = \emptyset$, we have $B \subseteq V \setminus A$. By Fact 14, $(G \setminus H)[V \setminus A]$ contains no odd cycles—therefore it is bipartite. Moreover, every $v \in B$ has $\deg_H(v) \geq 2$ (otherwise v and its respective vertex from A would be disconnected from other vertices in H) so $\deg_{G \setminus H}(v) \leq 1$.

But then (by Lemma 15) every two vertices in B are either endpoints of the same even path in $G \setminus H$ or belong to different connected components of $G \setminus H$. □

Theorem 17. *$BBC_\lambda(G, H) \leq \lambda + 3$.*

Proof. By Lemma 16, $(G \setminus H)[V \setminus A]$ is bipartite and we obtain the bipartition of $V \setminus A = U_1 \cup U_2$ such that $B \subseteq U_1$. Since H is bipartite and connected we also obtain the unique bipartition of vertices of H: $V = V_1 \cup V_2$.

If we color $V_1 \cap U_1$ with color 1, $V_1 \cap U_2$ with color 2, $V_2 \cap U_2$ with color $\lambda + 2$ and $V_2 \cap U_1$ with color $\lambda + 3$, we obtain a backbone coloring of $G[V \setminus A]$ with backbone $H[V \setminus A]$: every color set is independent in $G \setminus H$ and for every edge in H the color difference is at least λ.

If we now color the vertices from $V_1 \cap A$ (A is independent in G by Fact 7 and Fact 14) using color 3 and the vertices from $V_2 \cap A$ using color $\lambda + 1$, we obtain a backbone coloring of G with backbone H: every vertex v from $V_1 \cap A$ belongs to an odd cycle in $G \setminus H$, so it is adjacent in $G \setminus H$ to exactly two vertices from $V \setminus A$—and they receive colors from the set $\{1, 2, \lambda+2, \lambda+3\}$. Moreover, v is adjacent to exactly one vertex in H, but this vertex is—by definition of sets A and B—always included in B, therefore it is given the color $\lambda + 3$. The argument for $v \in V_2 \cap A$ is similar. □

The complexity of the auxiliary algorithm that constructs A and B depends on both a preprocessing phase and the main loop. The first step—identification of all odd cycles in $G \setminus H$ can be done (e.g. using DFS) in $O(n)$ time.

Since there are at most n such cycles, the algorithm terminates after at most n iterations of the main loop. During every iteration we check all values of $|f(C)|$ for remaining $C \in \mathcal{C}$, which takes up to $O(n)$ time. All other steps: the identification of vertex v (given Fact 5, we can find it using DFS) finding the respective C_1 and removal of v from $f(C_1)$ can also be done in linear time. Since both stages of the algorithm run in $O(n^2)$ time, the running time of the whole auxiliary algorithm is also bounded by $O(n^2)$.

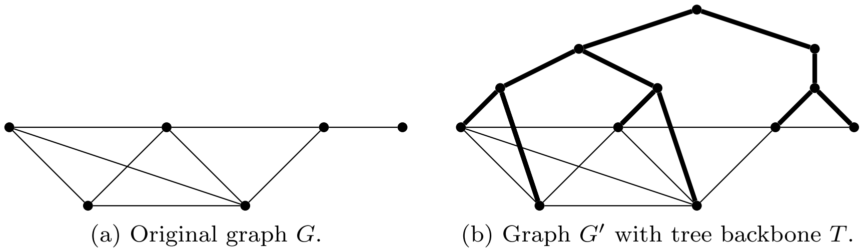


Fig. 3. An example of a construction of the instance G' with backbone T from a graph G.

It is known [7] that it can be decided whether $BBC_\lambda(G, H) = \lambda + 1$ or $BBC_\lambda(G, H) = \lambda + 2$ (and construct a suitable coloring if the answer is yes) in $O(n^2)$ time. The above proof contains a description of an algorithm that, given A and B, colors G with at most $\lambda+3$ colors in $O(n^2)$ time. Therefore we can construct an optimal coloring of G with backbone H in $O(n^2)$ time.

5. $\Delta(G) \geq 4$

In this section we prove NP-hardness of computation of the backbone chromatic number for graphs with fixed maximum degree at least 4 and any connected backbone. Furthermore, if $\lambda \geq 4$ then the computation of the backbone chromatic number for graphs with fixed maximum degree at least 5 is also NP-hard even if we restrict the backbones to be trees.

Theorem 18. *For any fixed $\Delta \geq 4$ the problem of verifying if $BBC_\lambda(G, G) \leq 2\lambda + 1$ is NP-complete for connected graphs G with maximum degree Δ and any value $\lambda \geq 2$.*

Proof. This follows from Theorem 1 and the NP-completeness of the problem of 3-coloring of graphs with fixed maximum degree $\Delta(G) \geq 4$ [5]. □

Theorem 19. *For any fixed $\Delta \geq 5$ and $\lambda \geq 4$ the problem of verifying whether $BBC_\lambda(G, T) \leq \lambda + 3$, where T is a spanning tree of G, is NP-complete for connected graphs G with maximum degree Δ.*

Proof. We prove this theorem, as in the previous proof, using a reduction from the following NP-complete problem: 3-coloring of graphs with fixed maximum degree $d \geq 4$. For any given G with maximum degree d we construct G' by adding binary backbone tree T such that all vertices of G are the leaves of this tree—and are on the same parity level from root (as presented in Fig. 3). Clearly, the maximum degree of G' is $d + 1$.

If there exists a 3-coloring of G then there also exists a backbone $(\lambda + 3)$-coloring of G' with backbone T: we just color the remaining vertices with color 1 if they are on the same parity level of T as the vertices from G and with color $\lambda + 3$ otherwise.

If there exists a backbone $(\lambda + 3)$-coloring of G' with backbone T then we know that only colors in the set {1, 2, 3, $\lambda + 1$, $\lambda + 2$, $\lambda + 3$} are used, since every vertex is incident to at least one backbone edge. Furthermore, all vertices on even levels of T (descending from the root) either get colors less than 4 or greater than λ. Without loss of generality assume that all vertices from G are on the even levels of T and they are colored with 1, 2 or 3. But from this it immediately follows that G is 3-colorable. □

The complexity status of problem for graphs with maximum degree 4 and connected bipartite backbone is still open.

References

[1] H.J. Broersma, A general framework for coloring problems: old results, new results, and open problems, in: Combinatorial Geometry and Graph Theory, Springer, Berlin/Heidelberg, 2003, pp. 65–79.
[2] H.J. Broersma, B. Marchal, D. Paulusma, A.N.M. Salman, Improved upper bounds for λ-backbone colorings along matchings and stars, in: SOFSEM 2007: Theory and Practice of Computer Science, 33rd Conference on Current Trends in Theory and Practice of Computer Science, Harrachov, Czech Republic, January 20–26, 2007, in: Lect. Notes Comput. Sci., vol. 4362, 2007, pp. 188–199.
[3] H.J. Broersma, F. Fomin, P. Golovach, G. Woeginger, Backbone colorings for graphs: tree and path backbones, J. Graph Theory 55 (2) (2007) 137–152.
[4] H.J. Broersma, J. Fujisawa, B. Marchal, D. Paulusma, A.N.M. Salman, K. Yoshimoto, λ-Backbone colorings along pairwise disjoint stars and matchings, Discrete Math. 309 (18) (2009) 5596–5609.
[5] M.R. Garey, D.S. Johnson, L. Stockmeyer, Some simplified NP-complete graph problems, Theor. Comput. Sci. 1 (1976) 237–267.
[6] R. Janczewski, K. Turowski, The backbone coloring problem for bipartite backbones, submitted for publication.
[7] A.N.M. Salman, Contributions to graph theory, PhD thesis, University of Twente, 2005.

Discussiones Mathematicae
Graph Theory 35 (2015) 157–169
doi:10.7151/dmgt.1786

OPTIMAL BACKBONE COLORING OF SPLIT GRAPHS WITH MATCHING BACKBONES

Krzysztof Turowski[1]

Gdańsk University of Technology
Department of Algorithms and System Modelling

e-mail: Krzysztof.Turowski@eti.pg.gda.pl.

Abstract

For a graph G with a given subgraph H, the backbone coloring is defined as the mapping $c : V(G) \to \mathbb{N}_+$ such that $|c(u) - c(v)| \geq 2$ for each edge $\{u, v\} \in E(H)$ and $|c(u) - c(v)| \geq 1$ for each edge $\{u, v\} \in E(G)$. The backbone chromatic number $BBC(G, H)$ is the smallest integer k such that there exists a backbone coloring with $\max_{v \in V(G)} c(v) = k$.

In this paper, we present the algorithm for the backbone coloring of split graphs with matching backbone.

Keywords: backbone coloring, split graphs, matching.

2010 Mathematics Subject Classification: 05C15.

1. Preliminaries

The backbone coloring problem, introduced by Broersma in [4], is an example of the general framework of graph coloring problems. It is strongly related to the frequency assignment problem: given transmitters (represented by the vertices of a graph) and their adjacency (vertices are adjacent if transmitters are close enough or strong enough), assign the frequency bands so that corresponding transmitters keep interferences at a defined level, minimizing total frequency span. Furthermore, we distinguish certain substructure of the network (called the backbone) crucial for the communication and put additional restrictions on the assignment. Possible applications of backbone coloring are described e.g. in [4].

In this paper, we consider simple undirected graphs, i.e. graphs without loops or multiple edges, and digraphs, i.e. graphs with directed edges. For a graph or

[1]This project has been partially supported by Narodowe Centrum Nauki under contract DEC-2011/02/A/ST6/00201.

digraph G, let $V(G)$ and $E(G)$ denote its vertex set and edge set, respectively, with cardinalities $|V(G)| = n$ and $|E(G)| = m$. Graph G is a *tree* if and only if it is simple, connected and $m = n - 1$. Graph G is *unicyclic* if and only if it is simple, connected and $m = n$. Graph is a *matching* if and only if it is simple and every its vertex is adjacent to at most one edge. We call the matching *perfect* if and only if every vertex is adjacent to exactly one edge. The size of a largest possible clique (complete subgraph K_k) in an undirected graph G is called the *clique number* of G and denoted by $\omega(G)$.

The *coloring* of a graph (or a digraph) G is defined as a function $c : V(G) \to \mathbb{N}_+$ such that $|c(u) - c(v)| \geq 1$ for each edge $\{u, v\} \in E(G)$ (or $(u, v) \in E(G)$ in case of digraphs). The *backbone coloring* of a graph (or a digraph) G and the given subgraph (subdigraph) H (called the *backbone*) of G, is a function $c : V(G) \to \mathbb{N}_+$, such that it is a coloring of G and the inequality $|c(u) - c(v)| \geq 2$ holds for each edge $\{u, v\} \in E(H)$. The minimum number k for which there exists a coloring of G with $\max_{v \in V(G)} c(v) = k$ is called the chromatic number $\chi(G)$ of G. Similarly, the *backbone chromatic number* $BBC(G, H)$ is the smallest integer k such that there exists a backbone coloring of G with backbone H and $\max_{v \in V(G)} c(v) = k$. The backbone coloring c is *optimal* if $\max_{v \in V(G)} c(v) = BBC(G, H)$. We straightforwardly obtain from these definitions that for every directed graph G with backbone H and its respective underlying undirected graphs, G' and H', the equation $BBC(G, H) = BBC(G', H')$ holds. Throughout this paper, we assume that the subgraph (subdigraph) H is spanning, i.e., $V(G) = V(H)$, and for notational simplicity we use the abbreviation ,,(G, H)" instead of ,,graph G with backbone H".

In this paper we focus on split graphs introduced by Hammer and Földes in [1]. A *split graph* is a simple graph whose vertex set can be partitioned into two sets: those of a clique C and an independent set I. Split graphs are perfect, thus satisfying the equation $\chi(G) = \omega(G)$. In this paper we consider split graphs with $\chi(G) \geq 3$, as other split graphs are empty or bipartite and thus easily colorable [3].

The remainder of the paper is organized as follows: we begin our considerations with an algorithm that produces the value of $BBC(K_n, G)$, where K_n is a complete graph of order n and G is a tree or unicyclic graph. Next, we study the backbone coloring of split graphs with perfect matching backbones and $|C| = |I|$. Finally, we obtain a polynomial algorithm that computes $BBC(G, M)$ for any split graph G and any matching backbone M.

2. Backbone Coloring of Complete Graphs with Tree or Unicyclic Backbones

Lemma 1. *Let G be a graph of order n and G' be a graph obtained from G by attaching a pendant vertex. If $BBC(K_n, G) = n$, then $BBC(K_{n+1}, G') = n + 1$.*

Proof. Let c be the optimal coloring of (K_n, G) and v be the vertex added to graph G to obtain G'. Since v is a pendant vertex, it has only one adjacent vertex $u \in V(G')$.

If $c(u) \leq n-1$, then we extend c by assigning $c(v) \leftarrow n+1$. The color assigned to v does not appear elsewhere in the coloring and $c(v) - c(u) > n + 1 - n = 1$, therefore $|c(v) - c(u)| \geq 2$ and extended c is a feasible backbone coloring of (K_{n+1}, G').

Otherwise, $c(u) \geq n$. Since $BBC(K_n, G) = n$, we know that $c(u) = n$. By assumption, since the mapping c is injective in $\{1, 2, \ldots, n\}$, there exists a vertex $w \in V(G)$ such that $c(w) = n - 1$. Let us define a function $c' : V(G') \rightarrow \mathbb{N}_+$:

$$c'(x) = \begin{cases} n-1 & \text{if } x = v, \\ n & \text{if } x = w, \\ n+1 & \text{if } x = u, \\ c(x) & \text{if } x \in V(G) - \{u, v, w\}. \end{cases}$$

It is easy to see that the mapping c' is injective. By definition, $|c'(v) - c'(u)| = 2$, $c'(u) - c'(x) > c(u) - c(x) \geq 2$ for every edge $\{u, x\} \in E(G')$ and $c'(w) - c'(x) > c(u) - c(x) \geq 2$ for every edge $\{u, w\} \in E(G')$. Finally, it suffices to note that $|c'(x) - c'(y)| = |c(x) - c(y)| \geq 2$ for every other edge $\{x, y\} \in E(G')$. Since the inequality $|c'(x) - c'(y)| \geq 2$ holds for every edge $\{x, y\} \in E(G')$ and c' is injective, c' is a backbone coloring of (K_{n+1}, G'). ■

Lemma 2. *For any $n \geq 5$, if C_n is a Hamiltonian cycle in K_n, then $BBC(K_n, C_n) = n$.*

Proof. If n is even, we color vertices on cycle sequentially with $1, 3, 5, \ldots, n-1, 2, 4, \ldots, n$. If n is odd, we use colors $1, 3, 5, \ldots, n, 2, 4, \ldots, n-1$. In any case, the mapping is injective and for every edge of the cycle the color difference between endpoints is at least 2, so $BBC(K_n, C_n) \leq n$. But on the other hand, for any graph G, $BBC(K_n, G) \geq \chi(K_n) = n$, which completes the proof. ■

A*Hamiltonian path* is a path in a graph that visits each vertex exactly once. If a graph G contains a Hamiltonian path, then we call G a *semihamiltonian* graph. Graph $\bar{G}$ is a *complement* of a graph G if and only if $V(G) = V(\bar{G})$ and for every pair of vertices $u, v \in V(G)$ it holds $uv \in E(\bar{G})$ if and only if $uv \notin E(G)$.

It can be shown that coloring of (K_n, G) using colors $\{1, 2, \ldots, n\}$ is equivalent to the semihamiltonicity of the complement of a graph G. Indeed, suppose we have an optimal coloring of (K_n, G) with colors $\{1, 2, \ldots, n\}$, then the vertex with color 1 is not connected in G to the vertex with color 2 (as it would violate the backbone condition), the vertex with color 2 is not connected to the vertex with color 3 and so on—therefore these vertices are connected in $\bar{G}$. However, if we know that the graph $\bar{G}$ is semihamiltonian, then by assigning to the vertices along the Hamiltonian path colors $1, 2, 3, \ldots$ we obtain the solution for (K_n, G), as every two vertices received distinct colors and every two vertices which received consecutive colors are adjacent in $\bar{G}$, therefore cannot be adjacent in G.

The problem of semihamiltonicity of a graph G is shown in [5] to be NP-complete in general case, but it can be solved in polynomial time for sparse graphs, therefore:

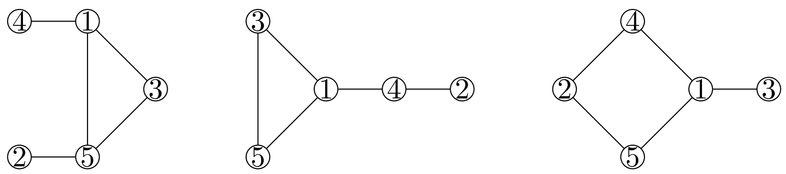
Theorem 3. *For every connected graph G of order $n \geq 5$ and with $m \leq n$ edges,*

$$BBC(K_n, G) = \begin{cases} n+1 & \textit{if } G \textit{ contains a spanning star as a subgraph,} \\ n & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. First, we note that any connected graph with $m \leq n$ edges is either a tree or an unicyclic graph.

If G contains a spanning star as a subgraph, then it does not exists any backbone coloring function for (K_n, G) to $\{1, 2, \ldots, n\}$, because color of the root of the star must differ from colors of all leaves by at least 2. But since $m \leq n$ and the spanning star has exactly $n-1$ edges, G has at most one edge outside the spanning star. Therefore we may assign color $n+1$ to the root of the star and (if $m = n$) assign colors 1 and $n - 1 \geq 4$ to the endpoints of the edge not included in the spanning star. Finally, we assign all unused colors less than n to all uncolored vertices and obtain the backbone coloring c of (K_n, G).

If G is a tree non-isomorphic to a spanning star, it has an induced path P_4 as a subgraph. But $BBC(K_4, P_4) = 4$ and we may color G starting from the optimal coloring of P_4 and color the rest of the vertices using DFS ordering from an arbitrary vertex of P_4 and applying Lemma 1 to each step.



(a) Bull graph (b) Paw graph (c) Banner graph

Figure 1. Minimum optimally labeled supergraphs of C_3 and C_4.

In all other cases, G is unicyclic. If it contains a cycle C_k of length $k \geq 5$, then $BBC(K_k, C_k) = k$ due to Lemma 2. Otherwise, there is either C_3 or C_4 subgraph of G. But then we attach pendant vertices to this cycle until we obtain subgraph C' of G on 5 vertices (all possibilities are presented in Figure 1). It turns out that in each case $BBC(K_5, C') = 5$. Finally, as in previous case, we extend the partial coloring to the whole graph G using DFS ordering from an arbitrary vertex of the colored part of the graph and applying Lemma 1. ■

The proof of Theorem 3 yields an algorithm for backbone coloring of (K_n, G). All operations: checking the existence of a spanning star, finding a cycle in a graph and ordering the vertices using e.g. DFS from one of the previously colored vertices can be implemented in $O(m+n)$ time and labeling each vertex can be implemented in $O(1)$. Therefore, since $m \leq n$, this algorithm runs in $O(m+n) = O(n)$ time.

We can extend Theorem 3 to forests by using the following lemma.

Lemma 4. *Let G_1 (of order n_1) and G_2 (of order n_2) be graphs non-isomorphic both to C_3, and let c_1 and c_2 be the optimal backbone colorings of (K_{n_1}, G_1) and (K_{n_2}, G_2), respectively. If $BBC(K_{n_1}, G_1) \leq n_1 + 1$ and $BBC(K_{n_2}, G_2) \leq n_2 + 1$, then $BBC(K_{n_1+n_2}, G_1 \cup G_2) \leq n_1 + n_2$.*

Proof. Since we have $n_1 \leq BBC(K_{n_1}, G_1) \leq n_1 + 1$ and $n_2 \leq BBC(K_{n_2}, G_2) \leq n_2 + 1$, we split the proof into the following possible cases:

Case 1. $[BBC(K_{n_1}, G_1) = n_1$ and $BBC(K_{n_2}, G_2) = n_2]$. In this case we define $c(v) = c_1(v)$ if $v \in V(G_1)$ and $c(v) = c_2(v) + n_1$ if $v \in V(G_2)$. The coloring function c is injective, for every $\{u, v\} \in E(G_1) \cup E(G_2)$ the inequality $|c(u) - c(v)| \geq 2$ holds and $BBC(K_{n_1+n_2}, G_1 \cup G_2) \leq n_1 + n_2$.

Case 2. $[BBC(K_{n_1}, G_1) = n_1 + 1$ and $BBC(K_{n_2}, G_2) = n_2.]$ In this case there exists color k, $2 \leq k \leq n_1$, such that for each vertex $v \in V(G_1)$, $c_1(v) \neq k$. Let us define:

$$c(v) = \begin{cases} c_1(v) & \text{if } v \in V(G_1) \text{ and } c_1(v) < k, \\ k + c_2(v) - 1 & \text{if } v \in V(G_2), \\ n_2 + c_1(v) - 1 & \text{if } v \in V(G_1) \text{ and } c_1(v) > k. \end{cases}$$

All backbone constraints of G_1 and G_2 are preserved, therefore it suffices to show that c is an injective function. If $u \in V_1$, $v \in V_2$ and $c_1(u) < k$, then $c(u) = c_1(u) < k < k + c_2(v) - 1 = c(v)$. If $u \in V_1$, $v \in V_2$ and $c_1(u) > k$, then $c(u) = n_2 + c_1(u) - 1 \geq n_2 + k > c_2(v) - 1 + k = c(v)$. Otherwise, $u, v \in V_1$ or $u, v \in V_2$. Clearly $c(u) \neq c(v)$ also holds, hence c is a backbone coloring function using exactly $n_1 + n_2 = n$ colors. The same argument applies to the case $BBC(K_{n_1}, G_1) = n_1$ and $BBC(K_{n_2}, G_2) = n_2 + 1$. In both cases, $BBC(K_{n_1+n_2}, G_1 \cup G_2) \leq n_1 + n_2$.

Case 3. $[BBC(K_{n_1}, G_1) = n_1 + 1$ and $BBC(K_{n_2}, G_2) = n_2 + 1.]$ We know that there exist colors k_1 and k_2, $2 \leq k_1 \leq n_1$, $2 \leq k_2 \leq n_2$, such that for each vertex $v \in V(G_1)$, $c_1(v) \neq k_1$ and for each vertex $v \in V(G_2)$, $c_2(v) \neq k_2$. Let us define:

$$c(v) = \begin{cases} c_1(v) & \text{if } v \in V(G_1) \text{ and } c_1(v) < k_1, \\ k_1 + c_2(v) - 1 & \text{if } v \in V(G_2) \text{ and } c_2(v) < k_2, \\ k_2 + c_1(v) - 2 & \text{if } v \in V(G_1) \text{ and } c_1(v) > k_1, \\ n_1 + c_2(v) - 1 & \text{if } v \in V(G_2) \text{ and } c_2(v) > k_2. \end{cases}$$

As in the previous case, all backbone constraints of G_1 and G_2 are preserved, therefore it suffices to show that c is an injective function. If $u \in V_1$, $v \in V_2$ and $c_1(u) < k_1$, then $c(u) = c_1(u) < k_1 < k_1 + c_2(v) - 1 \le c(v)$. If $u \in V_1$, $v \in V_2$ and $c_1(u) > k_1$, then we have either $c_2(v) < k_2$, hence $c(u) = k_2 + c_1(u) - 2 > k_2 + k_1 - 2 \ge k_1 + c_2(v) - 1 = c(v)$, or $c_2(v) > k_2$, thus $c(u) = k_2 + c_1(u) - 2 \le k_2 + n_1 - 1 < n_1 + c_2(v) - 1 = c(v)$.

Finally, the remaining cases are $u, v \in V_1$ or $u, v \in V_2$. Clearly, $c(u) \neq c(v)$ also holds, so c is a backbone coloring function using exactly $n_1 + n_2$ colors. Therefore $BBC(K_{n_1+n_2}, G_1 \cup G_2) \le n_1 + n_2$. ■

Theorem 5. *Let G be a graph of order $n \ge 5$. If for each connected component G' of G the inequality $|E(G')| \le |V(G')|$ holds, then*

$$BBC(K_n, G) = \begin{cases} n + 1 & \textit{if } G \textit{ contains a spanning star as a subgraph,} \\ n & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. If G is connected, the formula is straightforward from Theorem 3. Otherwise, we color separately all non-C_3 connected components of G using Theorem 3 and we proceed by induction using Lemma 4. Therefore, for all disconnected graphs G of order n without connected components C_3 we proved that $BBC(K_n, G) = n$.

If G contains $t \ge 2$ connected components C_3, then we number all triangles with $1, 2, \ldots, t$ and construct the backbone coloring c by assigning to the i-th C_3 colors $\{i, i+t, i+2t\}$. Such a coloring can be merged with any number of non-C_3 connected components of G using Lemma 4.

To complete the proof it suffices to show the solution for G with exactly one triangle. Then, we obtain the optimal backbone coloring c of $(K_{n-3}, G \setminus C_3)$ (nonempty, since $n \ge 5$) by combining Theorem 3 and Lemma 4. If there exists a color k, $2 \le k \le n-3$, such that for each vertex $v \in V(G \setminus C_3)$, $c(v) \neq k$, then we define a new backbone coloring c' as the assignment of colors $\{1, k+1, n\}$ to C_3 and $c'(v) = c(v) + 1$ for all other vertices of the graph. Clearly, all colors are distinct and for any backbone edge c' guarantees a sufficient span, based on the fact that c does.

Otherwise, $BBC(K_{n-3}, G \setminus C_3) = n - 3$. In this case, we assign the colors $\{1, 3, n\}$ to C_3. We set $c'(v) = 2$ for each vertex v with $c(v) = 1$ and $c'(v) = c(v) + 2$ for all other vertices v(for which $2 \le c(v) \le n-3$). Clearly, the resulting coloring is injective and uses only only colors from the set $\{1, 2, \ldots, n\}$. Moreover, the backbone conditions for C_3 and $G \setminus C_3$ remain satisfied, therefore $c'(v)$ is a backbone coloring. ■

3. Backbone Coloring of Split Graphs with Matching Backbones

Before we present the results in this section, we introduce useful concepts of conflict digraph, quasiforest and underlying undirected graph.

Digraph G' is a *conflict digraph* of (G, M) if and only if the following conditions are satisfied:

1. $V(G') = \{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ (where $k = \omega(G)$),
2. $E(G') = \{(w_i, w_j) : \{u_i, v_j\} \notin E(G), 1 \leq i, j \leq k\}$.

Note that G' contains no loops since $\{u_i, v_i\} \in E(M) \subset E(G)$. Each edge of the conflict digraph represents the following condition: if $c(v_j) = c(u_i)$ in a backbone coloring of (G, M) using k colors, then $|c(v_i) - c(v_j)| \geq 2$.

Digraph G is a *quasiforest* if and only if every its vertex is incident to exactly one outgoing edge. For every digraph G we define a (simple) *underlying undirected graph* obtained by replacing all directed edges of G with undirected edges. If G' is an underlying undirected graph of a quasiforest G, then it follows that G is a union of trees and unicyclic graphs.

From now on, we assume that G is a split graph with vertex set partitioned into a maximal clique C (of size $k = \chi(G) = \omega(G)$) and an independent set I. We begin with a simple observation: if a split graph G with the given matching backbone M satisfies the equality $BBC(G, M) = k$, then for each vertex $u \in I$ there exists exactly one vertex $v \in C$ such that $c(u) = c(v)$.

Theorem 6 [2]**.** *Every complete graph of order $n \geq 3$ with a matching backbone can be colored using n colors.*

Theorem 7. *For every split graph G with the given matching backbone M there exists a backbone $(k + 1)$–coloring and it can be computed in polynomial time.*

Proof. If $k = 2$ then G is bipartite and if we color the bipartition using 1 and 3 we obtain a backbone $(k + 1)$–coloring. Therefore, the case $k \geq 3$ remains.

If there is an edge $uv \in E(M)$ such that $u, v \in C$, we assign $c(u) = k$, $c(v) = k - 2$. Next, we use Theorem 6 to color the complete graph with matching backbone, induced by $C \setminus \{u, v\}$, using colors $1, 2, \ldots, k - 3, k - 1$. Finally, we assign to all vertices from I color $k + 1$ (not used in the clique). All backbone conditions between the clique and the independent set are satisfied since for any $xy \in E(M)$ with $x \in I$, $y \in C$ we have $c(x) - c(y) \geq k + 1 - k + 1 = 2$.

Otherwise, we pick an arbitrary edge $uv \in E(M)$ (we know that $u \in I$, $v \in C$) and any vertex $w \in C$ such that $uw \notin E(G)$. The rest of the proof is similar as before: we assign $c(u) = c(w) = k - 2$, $c(v) = k$, all vertices from $C \setminus \{v, w\}$ get (different) colors $1, 2, \ldots, k-3, k-1$ and all vertices from $I \setminus \{u\}$ get color $k+1$ (not used in the clique). All backbone conditions between the clique and the independent set are satisfied since for any $xy \in E(M)$ with $x \in I \setminus \{u\}$, $y \in C$ we have $c(x) - c(y) \geq k+1-k+1 = 2$ and for $uv \in E(M)$ clearly $c(u) - c(v) = 2$. ∎

3.1. Basic case: $|C| = |I|$ and perfect matching backbone

In this section we restrict our considerations only to the split graphs with matching backbones which satisfy the following requirements: $|C| = |I| = k$ and backbone matching M is perfect. It follows that every vertex in I is adjacent to exactly one other vertex in the backbone (and its neighbor is in C). But since $|C| = |I|$, there can be no backbone edges in the clique.

Let us denote the vertices of C as $v_1, v_2, \ldots, v_k$ and the vertices of I as $u_1, u_2, \ldots, u_k$ such that $E(M) = \{\{u_i, v_i\} : 1 \leq i \leq k\}$.

The following theorem establishes the relation between backbone coloring of (G, M), conflict digraphs, quasiforests and backbone coloring of complete graphs with sparse backbones.

Theorem 8. *$BBC(G, M) = BBC(K_k, F')$ for the underlying undirected graph F' of some spanning quasiforest subdigraph F of the conflict digraph D of G.*

Proof. Suppose c is an optimal backbone coloring function for (G, M). Then let $E(F) = \{(w_i, w_j) : c(u_i) = c(v_j)\}$. Of course, F is a spanning quasiforest subdigraph of D since every u_i get the same color as exactly one vertex from C. The function $f(w_i) = c(v_i)$ for $w_i \in V(F')$ is a backbone coloring of (K_k, F') since:

- $f(w_i) \neq f(w_j)$ for each $i \neq j$, because C is a clique and $c(v_i) \neq c(v_j)$,
- $|f(w_i) - f(w_j)| = |c(v_i) - c(v_j)| = |c(v_i) - c(u_i)| \geq 2$ for each $\{w_i, w_j\} \in E(F')$.

The proof in the other direction is straightforward: given conflict graph D, quasiforest F and optimal backbone coloring f of (K_k, F'), let $s(w)$ be the end vertex of an edge of the quasiforest F, which starts in w. Then, we assign $c(v_i) = f(w_i)$ for $v_i \in C$ and $c(u_i) = f(s(w_i))$ for $u_i \in I$. ∎

Theorem 9. *Let $k \geq 5$, F be a spanning quasiforest subdigraph of conflict digraph D of G, and let F' be the underlying undirected graph of F. Then, $BBC(K_k, F') = k$ unless F' contains a spanning star as a subgraph.*

Proof. The underlying graph of a quasiforest is a collection of vertex-disjoint trees and unicyclic graphs so the proof follows directly from Theorem 3. ∎

Unfortunately, the number of spanning quasiforests can be exponential in the size of D. But if $k \geq 5$ we can check whether a suitable quasiforest exists starting from an arbitrary one using Algorithm 1. By an 3-*allowed edge* we denote an edge $(w_i, w_j) \in E(D) \setminus E(F)$, which—substituted for the edge outgoing from w_i in F—turns C_3-free underlying undirected graph of a quasiforest into the one with an induced C_3 as a subgraph. Similarly, an 4-*allowed edge* is an edge $(w_i, w_j) \in E(D) \setminus E(F)$, which—substituted for the edge outgoing from w_i in F—turns (P_4, bull, paw, banner)-free underlying undirected graph of a quasiforest into the one with an induced P_4 or one of the graphs in Figure 1 as a subgraph.

The underlying undirected graph of a quasiforest on $n \geq 5$ vertices is a collection of vertex-disjoint trees and unicyclic graphs, therefore:

- it is isomorphic to a star if and only if it is connected and it does not contain C_3 or P_4 as an induced subgraph,
- it is isomorphic to a star with an additional edge if and only if it is connected and it contains C_3, but not P_4 or one of the graphs in Figure 1 as an induced subgraph.

Algorithm 1 The optimal coloring algorithm for the basic case (G, M)

Create conflict digraph D and empty F on vertices $w_1, w_2, \ldots, w_k$
if $k < 5$ **then**
    return the best coloring of (G, M) using Theorem 8 for all quasiforests
for all w_i, $1 \leq i \leq k$ **do**
    if $outdeg(w_i) > 0$ **then**
        Add an arbitrary outgoing edge of w_i to F
if F' is isomorphic to a star **then**
    if exists (3 or 4)-allowed edge $(w_i, w_j) \in E(D) \setminus E(F)$ **then**
        Substitute in F edge outgoing from w_i with (w_i, w_j)
    else
        return $(k+1)$-coloring of (G, M) using Theorem 7
if F' is isomorphic to a star with an additional edge **then**
    if exists 4-allowed edge $(w_i, w_j) \in E(D) \setminus E(F)$ **then**
        Substitute in F edge outgoing from w_i with (w_i, w_j)
    else
        return $(k+1)$-coloring of (G, M) using Theorem 7
Color F' with k colors using Theorem 5
return k-coloring of (G, M) using coloring of F' and Theorem 8

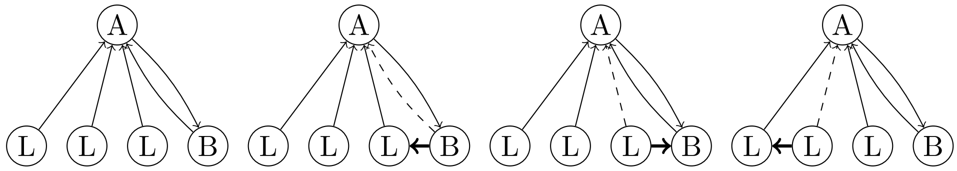
Theorem 10. *If $k < 5$, Algorithm 1 returns the optimal coloring of (G, M). In all other cases, if there exists an underlying undirected graph F' of any spanning quasiforest subdigraph F of a conflict graph of order k that $BBC(G, M) = k$, then Algorithm 1 returns a backbone k-coloring of (G, M). Otherwise, $BBC(G, M) = k + 1$ and Algorithm 1 returns a backbone $(k+1)$-coloring of (G, M).*

Proof. If $k < 5$, there are $O(1)$ of quasiforests so we can generate, color them optimally and find the one with the lowest $BBC(K_k, F')$ all in $O(1)$ time.

If the algorithm returns a backbone k-coloring, the final F' is not isomorphic to a star or a star with an additional edge (due to the allowed edge definitions). Therefore it does not contains a spanning star as a subgraph so $BBC(K_k, F') = k$ from Theorem 5 and the algorithm returns optimal backbone coloring.

If the algorithm returns backbone $(k+1)$-coloring of (G, M), both the initial and final F' are isomorphic to a star or a star with an additional edge.

If the quasiforest is isomorphic to a star, it has three distinguishable types of vertices: A—the root of the star (with ingoing edges from all other vertices and one outgoing edge), B—the non-root vertex with one ingoing edge from the root (and one outgoing edge to the root) and L—all other vertices (no ingoing edges, just one outgoing edge to the root). All edges from $B \cup L$ to A and from A to B are already included in the quasiforest F. All other edges of $E(D) \setminus E(F)$ may change the quasiforest in a following way (shown in Figure 2).



(a) Original quasitree (b) $B \to L$ (c) $L \to B$ (d) $L \to L$

Figure 2. (3 or 4)-allowed edge possibilities for a star.

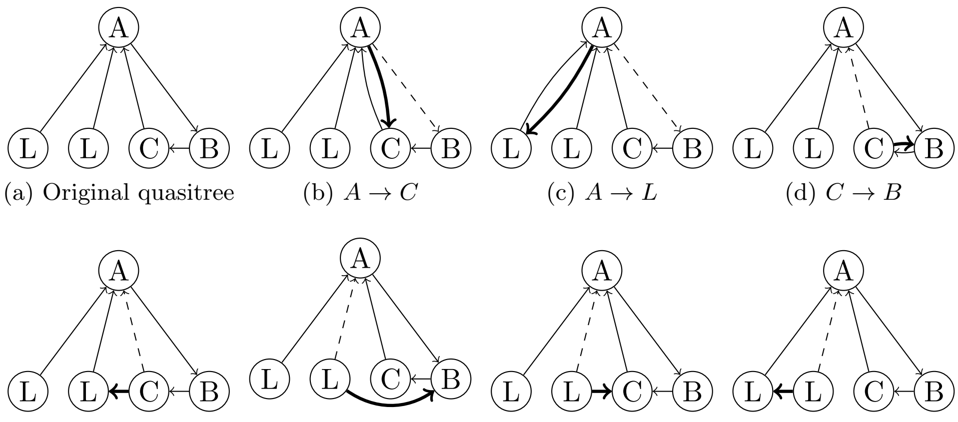
If there exists an edge from A to L, then an underlying undirected graph of a quasiforest obtained by removing an edge from A to B and replacing it by an edge from A to L is still isomorphic to a star, so the edge is not a (3 or 4)-allowed edge (by definition).

If there exists an edge from L to B, then an underlying undirected graph of a quasiforest obtained by removing an edge from L to A and replacing it by an edge from L to B is isomorphic to a star with an additional edge—so it is a 3-allowed edge (an example is presented in second picture in Figure 2).

For any other edge, a quasiforest obtained by replacing respective outgoing edge from F with a new edge has an induced a P_4 path so it is 4-allowed edge—the only two possible cases are presented in third and fourth picture in Figure 2.

If we cannot find a (3 or 4)-allowed edge while the quasiforest is isomorphic to a star, all edges from $E(D) \setminus E(F)$ are restricted to edges from A to L. But then the underlying undirected graph of any quasiforest F is isomorphic to a star and, due to Theorem 5, no (K_k, F') (and its respective (G, M)) admits backbone coloring with colors no greater than k.

If the quasiforest is isomorphic to a star with an additional edge, we distinguish four types of vertices: A—the root of the star (with ingoing edges from all but one other vertices and one outgoing edge), B—the non-root vertex with one ingoing edge from the root and outgoing edge to a non-root vertex, C—the non-root vertex with one ingoing edge from a non-root vertex and outgoing edge to the root, and L—all other vertices (no ingoing edges, just one outgoing edge to the root). All edges from $C \cup L$ to A, from A to B and from B to C are already included in the quasiforest F. All other edges of $E(D) \setminus E(F)$ may change the quasiforest in a following way (shown in Figure 3).



(a) Original quasitree (b) $A \to C$ (c) $A \to L$ (d) $C \to B$

(e) $C \to L$ (f) $L \to B$ (g) $L \to C$ (h) $L \to L$

Figure 3. 4-allowed edge possibilities for a star with an additional edge.

If there exists an edge from B to L, then an underlying undirected graph of a quasiforest obtained by removing an edge from B to C and replacing it by an edge from B to L is isomorphic to a star with an additional edge, so the edge is not a 4-allowed edge (by definition).

If there exists an edge from B to A, then an underlying undirected graph of a quasiforest obtained by removing an edge from B to C and replacing it by an edge from B to A is isomorphic to a star, so the edge is noa 4-allowed edge (by definition).

For any other edge, a quasiforest obtained by replacing respective outgoing edge from F with a new edge has an induced P_4 path or one of the graphs listed in Figure 1 (seven possible subcases are presented in Figure 3), therefore it is a 4-allowed edge.

If we cannot find a 4-allowed edge while the quasiforest is isomorphic to a star with an additional edge, all edges from $E(D) \setminus E(F)$ are restricted to edges from B to $A \cup L$. But then the underlying undirected graph of any quasiforest F is isomorphic to a star or to a star with an additional edge and, due to Theorem

5, no (K_k, F') (and its respective (G, M)) admits backbone coloring with colors no greater than k.

In both cases, $BBC(G, M) > k$ so the backbone $(k+1)$-coloring of (G, M) is guaranteed to be optimal. ■

Theorem 11. *For every split graph G of order $2k$ with maximal clique C and an independent set I both of size k and the given perfect matching backbone M with no backbone edges in the clique, $BBC(G, M)$ can be computed in polynomial time.*

Proof. This result directly follows from Theorem 10.

The Algorithm 1 can be divided into several stages with polynomial running time of every stage:

- construction of the conflict graph requires checking all pairs $\{v_i, u_j\} \in E(G)$, which can be done in $O(k^2)$ time,
- choosing the initial quasiforest F—$O(k)$ operations,
- checking and updating F using Algorithm 1—$O(k^2)$ operations,
- coloring the original graph G using the coloring of F'—$O(k)$ operations.

■

3.2. Beyond the basic case

Now we can expand our analysis to the polynomial-time algorithm for arbitrary split graphs with the given matching backbone.

Theorem 12. *For every split graph G with the given matching backbone M, $BBC(G, M)$ can be computed in polynomial time.*

Proof. There are possible types of vertices, which do not appear in Theorem 11: vertices not included in the backbone matching M and pairs of vertices from C connected with a backbone edge.

Interestingly, it turns out that if G contains in I only vertices incident to a backbone edge, we can also obtain the optimal solution by including all vertices from C in the conflict graph, e.g., adding its respective vertices w_i to the conflict graph D. If v_i is not incident to any edge of M, w_i will have no outgoing edges in D, but it will still receive unique color in the optimal coloring. If it is connected with some v_j in M, we can add new vertices w_i, w_j to the conflict graph with two directed edges between them. Because $outdeg(w_i) = outdeg(w_j) = 1$, these edges will be always included in F so they guarantee that $|c(v_i) - c(v_j)| \geq 2$ and that these colors are unique in the optimal coloring.

The rest of the proof is exactly the same as for the proof of Theorem 10 except that some original cases may be impossible, e.g. if G contains a backbone edge with both endpoints in C, then the underlying undirected graph of any quasiforest of a conflict graph cannot be isomorphic to a star.

Therefore, the whole algorithm would first find the bipartition into a maximal clique C and an independent set I. In the next step, it would find the vertices from I non-incident to the backbone edges and remove them from the graph. Then, we execute Algorithm 1 on the remaining part of (G, M); we obtain its optimal backbone coloring. Finally, we would restore all unmatched vertices from I and note that for each uncolored vertex $u \in I$ there is a vertex $v \in C$ such that $\{u, v\} \notin E(G)$, otherwise u would be in C. Therefore we extend the coloring by assigning to u the color $c(v)$ of its respective non-adjacent vertex.

Since all steps can be implemented to run in polynomial time, the whole algorithm is also polynomial-time. ■

References

[1] P. Hammer and S. Földes, *Split graphs*, Congr. Numer. **XIX** (1977) 311–315.

[2] J. Miškuf, R. Škrekovski and M. Tancer, *Backbone colorings of graphs with bounded degree*, Discrete Appl. Math. **158** (2010) 534–542. doi:10.1016/j.dam.2009.11.015

[3] H. Broersma, F.V. Fomin, P.A. Golovach and G.J. Woeginger, *Backbone colorings for graphs: tree and path backbones*, J. Graph Theory **55** (2007) 137–152. doi:10.1002/jgt.20228

[4] H. Broersma, *A general framework for coloring problems: old results, new results, and open problems*, in: Combinatorial Geometry and Graph Theory: Indonesia-Japan Joint Conference, IJCCGGT 2003, Bandung, Indonesia, J. Akiyama, E.T. Baskoro, M. Kano (Ed(s)), (Springer, 2003) 65–79.

[5] R. Janczewski, *On an interrelation between travelling salesman problem and T-coloring of graphs*, Proceedings of the Sixth International Conference: Advanced Computer Systems, ACS 1999, Szczecin, Poland (1999) 23–25.

Received 1 December 2011
Revised 18 November 2013
Accepted 1 May 2014

Gdańsk, 19 stycznia 2015 roku

dr inż. Robert Janczewski
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Politechnika Gdańska

mgr inż. Krzysztof Turowski
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Politechnika Gdańska

OŚWIADCZENIE

w sprawie publikacji

Janczewski R., Turowski K.: The backbone coloring problem for bipartite backbones, przyjęte do druku w *Graphs and Combinatorics*[1]

Oświadczam jako współautor powyższej pracy, że mój wkład w jej powstanie oceniam na 50%. Moim wkładem są lematy 1–4, wnioski 1–2, twierdzenia 1–2.

Janczewski
....
Robert Janczewski

Oświadczam jako współautor powyższej pracy, że mój wkład w jej powstanie oceniam na 50%. Moim wkładem są lematy 4–5, twierdzenia 3–4 i wniosek 3.

Turowski
....
Krzysztof Turowski

[1]Dostępne online pod adresem http://dx.doi.org/10.1007/s00373-014-1462-9

Gdańsk, 19 stycznia 2015 roku

dr inż. Robert Janczewski
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Politechnika Gdańska

mgr inż. Krzysztof Turowski
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Politechnika Gdańska

Oświadczenie

w sprawie publikacji

Janczewski R., Turowski K.: The computational complexity of the backbone coloring problem for planar graphs with connected backbones, przyjęte do druku w *Discrete Applied Mathematics*[1]

Oświadczam jako współautor powyższej pracy, że mój wkład w jej powstanie oceniam na 60%. Moim wkładem są lematy 2 i twierdzenia 3–9.

Janczewski
....
Robert Janczewski

Oświadczam jako współautor powyższej pracy, że mój wkład w jej powstanie oceniam na 40%. Moim wkładem są twierdzenia 1, 3–4, 9, 11 i wniosek 10.

Turowski
....
Krzysztof Turowski

[1]Dostępne online pod adresem http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2014.10.028

Gdańsk, 19 stycznia 2015 roku

dr inż. Robert Janczewski
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Politechnika Gdańska

mgr inż. Krzysztof Turowski
Wydział Elektroniki, Telekomunikacji i Informatyki
Politechnika Gdańska

OŚWIADCZENIE

w sprawie publikacji

Janczewski R., Turowski K.: The computational complexity of the backbone coloring problem for bounded-degree graphs with connected backbones, ***Information Processing Letters*** 115 (2015), 232–236

Oświadczam jako współautor powyższej pracy, że mój wkład w jej powstanie oceniam na 25%. Moim wkładem są twierdzenia 1, 2, 18 i 19 oraz opracowanie ogólnej koncepcji podziału algorytmu opisanego w pracy na 5 przypadków.

Janczewski
....
Robert Janczewski

Oświadczam jako współautor powyższej pracy, że mój wkład w jej powstanie oceniam na 75%. Moim wkładem są fakty 3–5, 7–11, 13–14 twierdzenia 6, 17 i lematy 12, 15–16.

Turowski
....
Krzysztof Turowski