

MARCIN KUJAWA

STATYKA I ANALIZA
WRAŻLIWOŚCI RUSZTÓW
ZBUDOWANYCH Z PRĘTÓW
CIENKOŚCIENNYCH

ANALIZA TEORETYCZNA
I BADANIA DOŚWIADCZALNE

POLITECHNIKA GDAŃSKA

monografie

97

POLITECHNIKA GDAŃSKA

MARCIN KUJAWA

STATYKA I ANALIZA
WRAŻLIWOŚCI RUSZTÓW
ZBUDOWANYCH Z PRĘTÓW
CIENKOŚCIENNYCH

ANALIZA TEORETYCZNA
I BADANIA DOŚWIADCZALNE



GDAŃSK 2009

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Romuald Szymkiewicz

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH

Janusz T. Cieśliński

REDAKTOR SERII

Jerzy M. Sawicki

RECENZENCI

Zbigniew Kotakowski

Elżbieta Urbańska-Galewska

PROJEKT OKŁADKI

Jolanta Cieślawska

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Wydawnictwa PG można nabywać w Księgarni PG (Gmach Główny, I piętro)
bądź zamówić pocztą elektroniczną (ksiegarnia@pg.gda.pl),
faksem (058 347 16 18) lub listownie (Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej,
Księgarnia PG, ul. G. Narutowicza 11/12, 80-233 Gdańsk)
www.pg.gda.pl/WydawnictwoPG

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej
Gdańsk 2009

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie
i w jakiegokolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

ISBN 978–83–7348–280–7

SPIS TREŚCI

| | |
|--|-----|
| Przedmowa | 5 |
| WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ | 7 |
| 1. WPROWADZENIE | 9 |
| 1.1. Istniejący stan wiedzy w zakresie tematu badań | 9 |
| 1.2. Cel i zakres pracy | 14 |
| 2. PODSTAWY WYTRZYMAŁOŚCIOWE TEORII PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O PRZEKROJU OTWARTYM | 16 |
| 3. ANALIZA PRACY RUSZTU | 29 |
| 3.1. Metoda analizy wykorzystująca ideę superelementów | 31 |
| 3.1.1. Liniowa macierz sztywności elementu cienkościennego | 31 |
| 3.1.1.1. Zginanie | 32 |
| 3.1.1.2. Skręcanie skrepowane | 34 |
| 3.1.2. Macierz sztywności superelementu | 40 |
| 3.1.3. Wpływ konstrukcji węzła na rozkład bimomentów w przekrojach przywęzłowych | 45 |
| 3.1.4. Problem wpływu długości współpracującej na rozkład sił wewnętrznych w superelementie | 50 |
| 3.1.5. Opis algorytmu numerycznego – model mieszany | 51 |
| 3.2. Przykłady numeryczne | 51 |
| 3.2.1. Przykład 1 Wspornik cienkościenny bez usztywnień | 51 |
| 3.2.2. Przykład 2 Wspornik cienkościenny z usztywnieniami w postaci przewiązek lub przepony | 58 |
| 3.2.3. Przykład 3 Ruszt cienkościenny | 61 |
| 4. BADANIA EKSPERYMENTALNE | 65 |
| 4.1. Rys historyczny | 65 |
| 4.2. Opis i wyniki badań własnych | 66 |
| 4.2.1. Określenie stałych materiałowych | 67 |
| 4.2.2. Określenie współczynnika η korygującego wartość sztywność czystego skręcania J_d | 70 |
| 4.2.3. Opis modeli badawczych | 72 |
| 4.2.4. Wyniki badań – model 1 | 78 |
| 4.2.5. Wyniki badań – model 2 | 81 |
| 4.2.6. Wyniki badań – model 3 | 85 |
| 4.2.7. Wyniki badań – model 4 | 90 |
| 5. WERYFIKACJA KONCEPCJI MODELI Z WYKORZYSTANIEM SUPERELEMENTÓW | 97 |
| 5.1. Porównanie wyników modeli teoretycznych z badaniami eksperymentalnymi | 97 |
| 5.1.1. Przykład 1 – model 1 | 97 |
| 5.1.2. Przykład 2 – model 2 | 101 |
| 5.1.3. Przykład 3 – model 3 | 106 |
| 5.1.4. Przykład 4 – model 4 | 113 |
| 5.2. Wnioski końcowe z porównania wyników modeli teoretycznych z badaniami eksperymentalnymi | 121 |

| | |
|---|-----|
| 6. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI | 123 |
| 6.1. Wstęp | 123 |
| 6.2. Analiza wrażliwości rzędu pierwszego – opis dyskretny | 124 |
| 6.2.1. Metoda bezpośrednia | 124 |
| 6.2.2. Metoda układów sprzężonych | 125 |
| 6.3. Przykłady numeryczne..... | 125 |
| 6.3.1. Analiza wrażliwości kąta skręcenia w zależności od położenia przepony wzdłuż prętów dźwigara załamane w planie | 126 |
| 6.3.2. Analiza wrażliwości bimomentu przy ciągłej zmianie szerokości póltek | 129 |
| 7. PODSUMOWANIE I KIERUNKI DALSZYCH BADAŃ | 132 |
| Bibliografia | 134 |
| Streszczenie w języku polskim | 139 |
| Streszczenie w języku angielskim | 140 |
| Załącznik 1 Tabele pomiarowe – stałe materiałowe | 141 |
| Załącznik 2 Tabele pomiarowe – zestawienie wartości naprężeń normalnych w wybranych przekrojach poprzecznych | 146 |

PRZEDMOWA

Prezentowana praca jest kontynuacją badań prowadzonych w latach 2000–2003 (KBN Nr 7 T07E 015 19) przez: C. Szymczaka, I. Kreję, T. Mikulskiego, M. Kujawę [1] i powstała, między innymi, dzięki wsparciu finansowemu KBN w ramach grantu promotorzkiego Nr 4 T07E 051 28, zakończonego pracą doktorską obronioną na Wydziale Inżynierii Lądowej i Środowiska Politechniki Gdańskiej, 11 czerwca 2007, zatytułowaną: „*Statyka i analiza wrażliwości rusztów zbudowanych z prętów cienkościennych. Analiza teoretyczna i badania doświadczalne*” [2].

Monografia dotyczy analizy statycznej i analizy wrażliwości cienkościennych dźwigarów załamanych w planie oraz rusztów (usztynwionych miejscowo przez przepony lub przewiązki). Przedstawiono w niej koncepcję metody modelowania konstrukcji dźwigarów cienkościennych z wykorzystaniem superelementów w połączeniu z klasyczną teorią belek cienkościennych o przekroju nieodkształcalnym. Zamieszczono wyniki – przeprowadzonej w ramach grantu – eksperymentalnej weryfikacji badań teoretycznych.

W niniejszej pracy podjęto próbę możliwie ogólnego potraktowania problemu analizy statycznej konstrukcji zbudowanych z prętów cienkościennych, jakkolwiek z uwagi na jego obszerność bada się jedynie dźwigary załamane w planie zbudowane z prętów o przekroju otwartym bisymetrycznym. Zagadnienie traktuje się jako liniowe, w ramach teorii małych odkształceń i przemieszczeń. W celu uproszczenia terminologii, belki załamane w planie i ruszty są w niniejszej pracy nazywane jednolicie rusztami.

Publikacja została sfinansowana ze środków statutowych Fundacji Rozwoju Inżynierii Lądowej.

Szczególne podziękowania autor kieruje do Pana Profesora Czesława Szymczaka, który był promotorem pracy doktorskiej autora. Wdzięczy autor dedykuje tę monografię właśnie Jemu, Znakomitemu Profesorowi, z najlepszymi życzeniami.

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

| | |
|-------------------------------------|---|
| A | – biegun pomocniczy współrzędnych wycinkowych; pole przekroju poprzecznego pręta, dowolny punkt przekroju |
| \mathbf{B} | – macierz funkcji kształtu |
| B | – bimoment, biegun współrzędnej wycinkowej; środek skręcania, dowolny punkt przekroju |
| $B_w, B_\theta, B_\varphi, B_\zeta$ | – współczynniki przekazu bimomentu ze względu na jednostkowe przemieszczenie pionowe w , kąt skręcania θ , kąt obrotu φ , deplanację ζ |
| \mathbf{C} | – pewna macierz współczynników równania zginania lub skręcania pręta |
| C, \bar{C} | – stałe całkowania |
| E | – moduł Younga (współczynnik sprężystości podłużnej) |
| G | – moduł Kirchhoffa (współczynnik sprężystości poprzecznej) |
| EJ_ω, GJ_d | – sztywność wycinkowa (skrępowana) i sztywność czystego (swobodnego) skręcania pręta cienkościennego |
| \mathbf{K}, \mathbf{k}_L | – globalna macierz sztywności, macierz sztywności elementu |
| K_{Bi} | – sztywność skręcania skrępowanego |
| M | – dowolny punkt linii środkowej |
| M_s | – moment skręcający |
| M_x | – moment czystego skręcania (de Saint–Venanta) |
| M_ω | – moment giętno–skrętny |
| M_y, M_z | – momenty zginające względem osi y, z |
| N | – siła podłużna |
| \mathbf{P} | – wektor obciążeń |
| $P, \Delta P$ | – osiowa siła zewnętrzna, przyrost obciążenia |
| \mathbf{Q} | – wektor sił przywęzłowych |
| S_y, S_z | – momenty statyczne określonej części przekroju pręta względem osi y i z |
| S_ω | – wycinkowy moment styczny określonej części przekroju pręta |
| T_y, T_z | – składowe siły poprzecznej o kierunkach osi y, z |
| U | – energia potencjalna układu |
| W, \bar{W} | – funkcja wrażliwości, zmodyfikowana funkcja wrażliwości |
| d | – wymiar gabarytowy przekroju poprzecznego |
| $d(s)$ | – szerokość pasma poligonalnego przekroju pręta |
| h | – wysokość przekroju |
| $h(s)$ | – odległość punktu od stycznej do linii środkowej w innym punkcie |
| $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$ | – giętno–skrętna charakterystyka pręta (współczynnik zanikania) |
| l | – długość pręta |
| l_w | – długość współpracująca |
| $m(x)$ | – moment skręcający obciążenia $p(x)$ względem osi biegunów wycinkowych (osi ścinania) |
| p_x, p_y, p_z | – składowe stanu obciążenia w układzie kartezjańskim |
| \mathbf{q} | – wektor przemieszczeń |
| s | – współrzędna w układzie walcowym |
| t_L, t_P | – siły styczne do krawędzi podłużnych z lewej i prawej strony elementu |
| $t(s)$ | – odległość punktu od normalnej do linii środkowej w innym punkcie |
| $t_0(x)$ | – strumień naprężeń stycznych |

| | |
|---|--|
| u | – wektor zmiennych projektowych |
| u, w, v | – składowe stanu przemieszczenia w układzie kartezjańskim |
| x, y, z | – współrzędne w układzie kartezjańskim |
| y_A, z_A | – współrzędne kartezjańskie bieguna współrzędnych wycinkowych |
| y_B, z_B | – współrzędne kartezjańskie środka skręcania |
| α | – kąt obrotu |
| γ | – odkształcenia postaciowe |
| $\delta = \delta(s)$ | – grubość ścianki przekroju poprzecznego |
| $\varepsilon, \varepsilon_{1,2}, \Delta\varepsilon$ | – odkształcenie, odkształcenia główne, przyrost odkształcenia |
| $\varepsilon_x = \varepsilon_x(x, s)$ | – składowa stanu odkształcenia wzdłuż osi pręta |
| $\varepsilon_s = \varepsilon_s(x, s)$ | – składowa stanu odkształcenia na kierunku stycznej do linii środkowej |
| $\xi(x), \eta(x), \zeta(x) = \theta'(x) = \theta'$ | – przesunięcia liniowe punktów linii środkowej w kierunku osi z, y, x (translacje) |
| η | – współczynnik korygujący wartość momentu bezwładności czystego skręcania |
| $\theta = \theta(x) = \theta_x$ | – kąt skręcania przekroju pręta |
| $\bar{\lambda}$ | – wektor zmiennych sprzężonych |
| ν | – współczynnik Poissona |
| σ_x | – składowa stanu naprężeń normalnych wzdłuż osi pręta |
| σ_s | – składowa normalna stanu naprężenia w układzie walcowym |
| τ_s | – składowa naprężenia stycznego od czystego skręcania |
| $\tau_{xs} = \tau(x, s)$ | – składowa naprężenia stycznego od spaczenia |
| Φ | – pewien wektor równania zginania lub skręcania pręta |
| $\omega(s)$ | – współrzędna wycinkowa (pole wycinkowe) |
| $\omega = \bar{\omega} + \bar{\bar{\omega}}$ | – deplanacja |
| $\bar{\omega}$ | – deplanacja konturu |
| $\bar{\bar{\omega}}$ | – deplanacja ścianek |

Rozdział 1

WPROWADZENIE

1.1. Istniejący stan wiedzy w zakresie tematu badań

Z początkiem XX wieku rozwój przemysłu i transportu wymusił wzrost zainteresowania konstrukcjami cienkościennymi. Początkowo były to konstrukcje związane ze środkami transportu (wagony kolejowe, samochody, ruszty pokładowe jednostek pływających). W chwili obecnej stosuje się je na szeroką skalę w budownictwie lądowym (konstrukcje mostowe, budowle wysokościowe, hale przemysłowe).

Za pierwsze prace poświęcone mechanice cienkościennych układów prętowych należy uznać cykl artykułów opublikowanych w latach 1905–1910 przez Timoszenkę [patrz 3]. Dotyczyły one stateczności belki dwuteowej. Przedstawiono w nich po raz pierwszy zależność między momentem skręcającym a charakterystykami geometrycznymi i przemieszczeniem. Wykonano także badania doświadczalne.

W tym samym czasie, w latach 1909–1910 Bach [patrz 3] przeprowadził badania eksperymentalne na ceownikach stalowych, które wykazywały, pod obciążeniem poprzecznym w płaszczyznach równoległych do środka, oprócz typowych deformacji giętych także deformacje skrętne (w postaci spaczenia). Deformacje nie podlegały więc hipotezie płaskich przekrojów. Przyczyny tego zjawiska Bach dopatrywał się tylko w braku symetrii przekroju poprzecznego w płaszczyźnie obciążenia.

Problem dodatkowych deformacji skrętnych przekroju został opisany także w pracach Maillarta wydanych w roku 1921 [patrz 3]. Zajmował się on skręcaniem, przy jednoczesnym zginaniu, kształtowników walcowanych. Maillart doszedł do przekonania, że deplancja występuje także w przypadku przekrojów symetrycznych, a nie wynika, jak sugerował Bach, z braku symetrii przekroju względem obciążenia.

W latach 1924–1926 swe prace opublikował Weber [patrz 3]. Bazując na uogólnionych rozwiązaniach Timoszenki, wyprowadził on zależność na dodatkowe naprężenia normalne powstające w półkach przy skręcaniu skrępowanym dwuteowników, ceowników i zetowników. Weber próbował udowodnić także, stosując rozważania energetyczne, że w przypadku dowolnego kształtownika, jednocześnie skręcanego i zginanego, mamy do czynienia z pokrywaniem się środków skręcania i ścinania w przekroju obciążonym (jest to słuszne tylko w przypadku prętów bisymetrycznych).

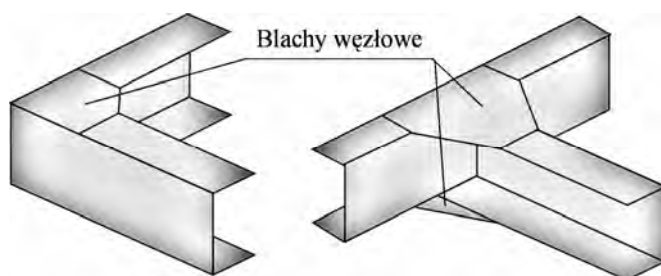
Przed drugą wojną światową w Polsce badania w tym zakresie prowadzili Grzędzielski i Nowiński [4] (była to pierwsza praca w języku polskim w zakresie teorii prętów cienkościennych). Oni to właśnie w przypadku ogólnym wykazali niesłuszność twierdzenia postawionego przez Webera.

W roku 1929 Wagner [5] opublikował pracę, która dała podstawy współczesnej teorii skręcania skrępowanego prętów cienkościennych, ustalając sposób rozkładu naprężeń normalnych w przekroju pręta cienkościennego skręcanego nieswobodnie i wprowadzając hipotezę braku deformacji przekroju poprzecznego.

Do grona czołowych twórców teorii sprężystych prętów cienkościennych należy zaliczyć także Vlasova. W latach 1936 [6], 1940 [7] Vlasov opublikował jedne ze swych pierwszych prac poświęconych podstawom technicznej teorii skręcania pojedynczych prętów cienkościennych. Monografia [7, 8] jest dotąd głównym źródłem wiedzy w dziedzinie mechaniki cienkościennych konstrukcji prętowych.

Na szczególną uwagę zasługuje również praca napisana i wydana w roku 1949 przez Goldenwejzera [patrz 3]. Stosując równania teorii powłok, przedstawił on ściśle matematyczne ujęcie teorii pręta cienkościennego, wolne od hipotez podstawowych dotyczących: braku deformacji przekroju poprzecznego oraz odkształceń postaciowych ścianek.

Rok wcześniej, bo w 1948, Gorbunow i Strielbicka [9] opublikowali monografię w całości poświęconą przestrzennym konstrukcjom zbudowanym z prętów cienkościennych. Zawiera ona podstawy teoretyczne obliczania metodą sił i metodą przemieszczeń płaskich układów cienkościennych szczególnego rodzaju.



Rys. 1.1. Przykładowe węzły ze środkami skręcania leżącymi w jednej płaszczyźnie

W pracy [9] rozważa się głównie układy zbudowane z prętów o przekroju otwartym, w przypadku których osie środków skręcania leżą w jednej płaszczyźnie (rys. 1.1). Wszystkie pręty przecinają się w węzłach pod kątami prostymi i są jednakowej wysokości. Konstrukcja węzłów zapewnia zaś zgodność miary spaczenia poszczególnych prętów schodzących się w węzle. Zgodność spaczeń zapewniona jest, zdaniem autorów, wówczas gdy mamy do czynienia z warunkiem zgodności położenia linii środków skręcania wszystkich prętów schodzących się w węzle, co jest jednoznaczne ze zgodnością wartości kątów nachylenia wykresu współrzędnej wycinkowej ω na wszystkich półkach prętów zbiegających się w węzle. Ponadto proste równoległe do osi prętów, leżące na półkach i przechodzące przez zerowe punkty wykresów ω , powinny przecinać się w jednym punkcie, w każdym z węzłów. W analizie w tym przypadku wykorzystuje się następujące założenia upraszczające:

- Blachy węzłowe (rys. 1.1) traktuje się jako nieskończenie sztywne w swej płaszczyźnie, ale doskonale wiotkie w kierunku prostopadłym do płaszczyzny układu, sprowadzając je myślowo do jednego punktu węzła i traktując jako bezwymiarowe. Przyjmuje się do obliczeń długości prętów równe odległościom między punktami węzłowymi.
- Nie bierze się pod uwagę lokalnych naprężeń powstających w węzle i jego bliskim sąsiedztwie.
- Ze względu na założoną równość spaczenia w przekrojach przywęzłowych można stosować równanie równowagi bimomentów B w węzle:

$$\sum B = 0. \quad (1.1)$$

— W przypadku węzła częściowo podatnego wylicza się wartość części bimomentu, która zostaje „pochłonięta” przez węzeł. Węzeł modeluje się wówczas krótkim prętem prostopadłym do płaszczyzny układu.

W monografii [9] rozważano także problem wpływu mimośrodków między osiami środków skręcania i środków ciężkości na pracę węzła. Oceniono, że miara spaczenia dla prętów schodzących się w węźle nie jest jednakowa, oraz że nie można w tym przypadku posługiwać się równaniem równowagi (1.1) bimomentów w węźle.

Kolejna praca, poświęcona tym razem problemowi obliczania przestrzennych prętowych konstrukcji cienkościennych o dowolnych kątach między schodzącymi się w węźle prętami, została opublikowana w 1951 roku przez Stawraki [10]. Węzły potraktowano wówczas jako nieskończenie sztywne (spaczenia równe zero) lub z całkowitą swobodą spaczenia na końcach schodzących się w węźle prętów (bimomenty równe zero). W przekrojach międzywęzłowych naprężenia od skręcania skrupowanego analizowano zgodnie z techniczną teorią prętów cienkościennych. Omówiono również szczegółowo rodzaje i sposoby mocowania prętów w węzłach.

Na podstawie elementarnej teorii Vlasova pojedynczych prętów Goldberg [11] analizuje zagadnienie obliczania płaskiego rusztu zbudowanego z prętów typu **I** oraz **H**, wykorzystując równania równowagi węzłów i równania zgodności przemieszczeń.

W roku 1955 Urban [12] wydaje monografię poświęconą problematyce układów zbudowanych z elementów cienkościennych. Świadomie rozdziela w rozwiązaniu siły działające prostopadle do płaszczyzny układu od sił działających równoległe. W pierwszym przypadku istnieje sprzężenie zginania i skręcania prętów. W drugim możemy rozdzielić problem zginania i skręcania. Analizuje problem, wykorzystując metodę sił i metodę przemieszczeń dla podstawowych przypadków, w których osie środków skręcania i środków ciężkości wszystkich prętów leżą w jednej płaszczyźnie i spaczenia przekrojów przywęzłowych są identyczne.

W 1955 publikuje swą pracę Małkina [13]. W obliczeniach belek ciągłych i ram wykorzystuje w pracy metodę kolejnych przybliżeń. Proces iteracyjny jest podobny do metody Crossa [14] dla zwykłych układów o węzłach nieprzesuwnych. Założenia podstawowe są identyczne, jak w pracach Gorbunowa [9] i Urbana [12]. W obliczeniach pominięto, w przypadku obciążeń w płaszczyźnie układu, wpływ przemieszczeń liniowych i kątowych na wartości bimomentów, uwzględniając tylko wpływ spaczenia. Współczynniki rozdziału bimomentów zostały wyznaczone z wykorzystaniem jednostkowych spaczeń węzłów. W przypadku obciążeń prostopadłych do płaszczyzny, gdy przemieszczenia z płaszczyzny oraz obroty węzłów mają istotny wpływ na rozkład bimomentów, obliczenia prowadzone są etapowo. W pierwszej fazie blokuje się spaczenia w węzłach i – stosując metodę sił, metodę przemieszczeń lub metodę Crossa – oblicza się układ poddany zginaniu i skręcaniu. Znając momenty skręcające, można wyznaczyć bimomenty w pierwszym przybliżeniu. Etap drugi polega na wyliczeniu momentów skręcających z wyznaczonych w etapie pierwszym bimomentów. Kolejno koryguje się momenty zginające, wykorzystując warunki równowagi węzłów. Znając wartości momentów skręcających wyznaczonych w etapie drugim, można obliczyć kąty skręcania i kolejno znowu bimomenty. Zwykle po drugim etapie obliczeń osiąga się dobrą dokładność wyników.

W Polsce jako pierwszy metodę Crossa zastosował w obliczeniach płaskich układów z węzłami o jednym stopniu swobody (w postaci deplanacji) Cywiński [15]. Wprowadził on do analizy konstrukcji cienkościennych nowe pojęcia: sztywność gietno-skrętna prętów i węzłów, rozdzielniki i przekazywniki, wykorzystywane wcześniej tylko w trakcie analizy ram zbudowanych z prętów litych.

W wydanej w 1957 roku monografii Rutecki [16], wykorzystując między innymi prace Vlasova, Grobunowa i Strzelbicka [9], Urbana [12], Dżanielidze [17], Kana i Panowko [18] oraz Umańskiego [19], podaje sposób obliczania układów złożonych z elementów cienkościennych, stosując metodę przemieszczeń. Jak w większości przytoczonych prac, także w pracach późniejszych autora [20], półki schodzących się w narożach elementów leżą w jednej płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny układu. W wydanej w 1962 roku monografii Byczkow [21] rozpatruje płaskie układy, w przypadku których zakłada się równość spacjeń i równowagę bimomentów. Obok metody sił i metody przemieszczeń stosuje w obliczeniach również metodę ognisk bimomentowych.

W pracy [22] Kariakin analizuje układy płaskie zgodnie z założeniami Gorbunowa i Urabana. Wykorzystuje analogie pomiędzy skręcaniem skrępowanym a zginaniem z rozciąganiem pręta. Skręcanie sprowadza do problemu zginania z rozciąganiem, stosując obciążenie sprowadzone. Wykorzystując metodę sił i metodę przemieszczeń, podaje przykłady obliczeń układów o węzłach nieprzesuwnych i przesuwnych.

W pracy [23] Biełokurov i Zaks analizują węzeł układu płaskiego zbudowany z ceownika i z dochodzącego do niego dwuteownika. Starają się wyznaczyć, przy założeniu jednakowej miary spaczenia w węźle, bimoment, jaki pojawia się w półkach dwuteownika.

Stosując rachunek macierzowy i metodę przemieszczeń analizował w swojej pracy [24] cienkościennie układy przestrzenne Cywilin. Metoda obliczeń zastosowana przez Cywilina wykorzystuje założenia Gorbunowa. Macierz sztywności ma w tej metodzie siedem stopni swobody w węźle.

Macierzowy sposób obliczania cienkościennych ram samochodowych podał w tym samym roku, co Cywilin, Neu [25]. Neu podatność węzłów wyznacza za pośrednictwem współczynników określanych doświadczalnie.

Podobne ujęcie macierzowe zastosowano również w pracach [26, 27]. Wyprowadzenia linowych macierzy sztywności cienkościennego elementu belkowego możemy znaleźć także w pracach [28, 29].

W roku 1972 Reill opublikował pracę [30], w której opisuje analizę rusztów cienkościennych przy założeniu pełnej blokady deplanacji w węzłach, rozwijając macierz sztywności elementu (8×8) o 4 stopniach swobody w węźle, z uwzględnieniem deplanacji θ' .

Analizą statyczną ortogonalnych rusztów o sztywnych węzłach złożonych z prętów cienkościennych zajmował się w roku 1973 Michalak [31]. Szczegółowo określił zależności pomiędzy wartościami naprężeń normalnych, które powstały w wyniku działania bimomentu, a wartościami naprężeń normalnych wynikających z działania momentu zginającego. W obliczeniach wykorzystał założenia z prac Vlasova i Gorbunowa. Określił błędy, jakie popełnia się przy obliczeniach konstrukcji rusztowych, przyjmując, iż elementy układu są idealnie cienkościennie (tzn. takie, które mają tylko sztywności skręcania skrępowanego EJ_{ω} , a sztywności skręcania swobodnego GJ_d są równe zero).

Borsom i Galager w roku 1970, w pracy [32], wykorzystują element określony macierzą sztywności (14×14) o 7 stopniach swobody w węźle (z uwzględnieniem deplanacji), w problemie analizy giętno-skrętnej stateczności układu. W latach 1985 i 1986 Waldron [33, 34] wyprowadza macierz sztywności elementu dźwigara cienkościennego, wykorzystując odwrócenie macierzy podatności i równowagę elementu. Wyprowadzona przez Waldrona macierz sztywności elementu cienkościennego o przekroju otwartym odpowiada macierzy wyprowadzonej przez Reilla [30].

Jak wynika z przeglądu literatury, w numerycznej analizie układów cienkościennych o otwartym przekroju poprzecznym stosowano głównie, aż do końca lat sześćdziesiątych, w problemach skręcania model jednowymiarowy, bazujący na teorii prętów cienkościennych.

nych o przekroju nieodkształcalnym. Model ten miał zastosowanie tylko w szczególnych przypadkach, gdyż wynikał z daleko idących uproszczeń, dotyczących między innymi dystrybucji bimomentów w węzłach. W trakcie analizy zakładano na przykład brak deplanacji (utwierdzenie w węźle) lub całkowitą jej swobodę (połączenie przegubowe) czy, przez analogię do zginania, podział bimomentów w węźle zgodny ze sztywnością prętów na skręcanie skrępowane. Tymczasem wpływ na deplanację przekrojów przywęzłowych prętów ma wiele czynników, takich jak: sposób skonstruowania węzłów układu, sztywność skrętna czy przekrój poprzeczny poszczególnych prętów zbiegających się w węźle, a także rodzaj deformacji przekrojów poprzecznych prętów w przekrojach przywęzłowych. Próby weryfikacji eksperymentalnej uzyskanych wyników na drodze teoretycznej spowodowały rozwój badań zarówno w zakresie doświadczalnym, jak i teoretycznym. Wpływ konstrukcji węzła na dystrybucję bimomentów w węźle okazał się ważnym elementem, na który należy zwracać uwagę w trakcie analizy złożonych konstrukcji cienkościennych.

Problem lokalnego spaczenia węzłów ram o zmiennej konstrukcji został rozpoznany w pracy [35] przez Vacharajittiphana i Trahaira już w roku 1974.

Rok później 1975 Szmidt [36], [37] opublikował wyniki swojej pracy poświęconej narożom cienkościennych układów ramowych o przekroju dwuteowym. Szmidt zaproponował, aby obydwie części składowe konstrukcji, prętowe elementy cienkościenne i naroża (węzły) były rozważane oddzielnie. W przypadku prętów cienkościennych wykorzystał teorię skręcania Vlasova. W trakcie analizy naroży o skończonych wymiarach posługiwał się metodą elementów skończonych (modelując je jako układy tarczowo-płytkowe), podając sposób obliczania macierzy sztywności naroża. Przeprowadzone przez Szmida obliczenia numeryczne zostały potwierdzone przez jego autorskie badania eksperymentalne.

Na uwagę zasługuje praca Morella [38], z 1979 roku, poświęcona, podobnie jak praca Szmida, wpływowi detali konstrukcyjnych węzła, w ramowych układach cienkościennych, na rozkład bimomentów w węźle.

Na początku lat osiemdziesiątych problemem rozkładu spaczeń w węzłach zajmowali się Baigent i Hancock (1982) [39]. Ze względu na fakt, iż deplanacja zależy od wymiarów przekroju poprzecznego, długości elementu i konstrukcji węzła, Yang i McGuire w 1984 [40] przedstawili procedurę, którą można wykorzystać w analizie ram przestrzennych z uwzględnieniem częściowej blokady deplanacji na końcach elementów. Procedura ta wykorzystuje koncepcję deplanacji sprężystej, wprowadza termin „wskaźnika deplanacji”, opisującego rozkład deplanacji na każdym z końców elementu. Wskaźnik ten jest zdefiniowany jako współczynnik deformacji wynikającej z deplanacji na końcu elementu, gdy jest ona częściowo ograniczana do deformacji tego samego końca, w przypadku pełnej jej swobody. Na podstawie tej koncepcji opracowali oni procedurę „kondensacji statycznej” do postaci macierzy sztywności, z uwzględnieniem dodatkowego stopnia swobody w postaci deplanacji, eliminując tym samym problem nieciągłego rozkładu deplanacji w węzłach (przy czym nieciągły rozkład deplanacji jest zdefiniowany jako zamiana wartości deplanacji na końcach dwóch połączonych w węźle elementów). Podobną procedurę zaproponowali także Mohammed i Frank w 1995 roku w pracy [41].

W roku 1985 Sharman [42] opublikował wyniki badań teoretycznych, nawiązując bardzo wyraźnie do Vacharajittiphana i Trahaira [35].

W roku 1990, w pracy [43] Coci i Gattas przedstawili formułę macierzy sztywności elementu cienkościennego z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej. W tym samym roku Krenk i Damkilde [44] zajmowali się analizą teoretyczną węzłów, badanych już przez Vacharajittiphana i Trahaira, a także Sharmana.

W rok później wyniki swoich badań, wykorzystując prace Bagenta i Hanocka, opublikowali Petersen, Krenk i Damkilde (1991) [45]. Dystrybucji deplanacji i bimomentów w węzłach ram poświęcona jest także praca opublikowana w roku 2004 przez Tonga i Zanga [46].

Część prac z lat dziewięćdziesiątych, a także z początku milenium, dotyczy problemów analizy statycznej i dynamicznej jedynie modeli belkowych (także o przekrojach niesymetrycznych), przy deformacji giętno–skrętnej [47–53].

W roku 1996 wyniki swoich badań opublikowali Morell, Riddington, Ali i Hamid [54]; w analizie wykorzystując program ANSYS, opisali zachowanie różnie stężonych węzłów ram, podobnych do tych, którymi zajmowali się Vacharajittiphana i Trahaira, Szmidt, Krenk i Damkilde.

W roku 2000, Wagner [55] zaproponował rozwiązanie numeryczne, w którym łączy w modelu element belkowy i element przestrzenny (powłokowy), jednak nie uwzględnił w macierzach sztywności wpływu spaczenia węzła.

Na szczególną uwagę, w kontekście pracy Wagnera, zasługuje monografia napisana w roku 2003 przez Szymczaka, Kreję, Mikulskiego i Kujawę [1]. Praca ta dotyczy analizy statycznej belek wzmocnionych przez przepony i przewiązki [56, 57] oraz ram zbudowanych z prętów cienkościennych o przekrojach otwartych. Przedstawiono w niej koncepcje analizy z wykorzystaniem superelementów i jej zastosowanie w problemach analizy wrażliwości. Aby spełnić warunki zgodności przemieszczeń w przekrojach przywęzłowych prętów schodzących się w węźle, zaproponowano w analizie układów cienkościennych model składający się z elementów cienkościennych prętowych połączonych z wykorzystaniem superelementów węzłowych. Podatny węzeł modelowany jest wówczas w analizie MES zbiorem większej liczby elementów płytowo-tarczowych. Odpowiedni superelement węzła ramy łączy się z elementami belkowymi o 7 stopniach swobody w węźle, w postaci sześciu podstawowych stopni swobody (trzech przemieszczeń i trzech kątów obrotu) i dodatkowego stopnia, opisującego deplanację przekroju, będącego pierwszą pochodną kąta skręcenia elementu. W pracy [1] zwrócono także uwagę na istotną rolę wpływu długości współpracującej superelementów.

1.2. Cel i zakres pracy

Praca ma na celu:

- opracowanie metody analizy statycznej rusztów zbudowanych z prętów cienkościennych na podstawie koncepcji modelu z wykorzystaniem superelementów, w której uwzględnia się wpływ deformacji węzła na rozkład sił wewnętrznych w elementach schodzących się w węźle,
- budowę wybranych superelementów węzłowych rusztów, wzmocnionych przez przewiązki i przepony (najczęściej stosowanych w praktyce inżynierskiej) oraz wyznaczenie ich macierzy sztywności z wykorzystaniem dostępnego oprogramowania komercyjnego stosującego MES (ABAQUS) [58],
- opracowanie procedury algorytmu komputerowego służącego do analizy statycznej cienkościennych układów rusztowych (autorski program TWGRID – krótki opis programu wraz z faksymilacją tekstu źródłowego zamieszczono w pracy [2]),
- weryfikację doświadczalną zaproponowanego w pracy modelu teoretycznego, wykorzystywanego w analizie statycznej w przypadku różnych modeli numerycznych z superelementami,

— opracowanie analizy wrażliwości pierwszego rzędu, w problemach statyki rusztów, zbudowanych z prętów cienkościennych, z użyciem wcześniej opracowanych superelementów (węzłowych) oraz programu TWGRID, z uwzględnieniem wpływu różnego rodzaju usztywnień, przepon i przewiązek zlokalizowanych na długości elementów łączonych.

Głównym celem pracy jest znalezienie metody i opracowanie procedury analizy statycznej rusztów cienkościennych, uwzględniającej dotychczas pomijane czynniki, takie jak wpływ szczegółów konstrukcyjnych węzłów (usztywnienia lokalne przy pomocy przepon lub przewiązek), na rozkład naprężeń, przemieszczeń i sił przekrojowych.

Rozdział 1 obejmuje wprowadzenie do pracy, opis istniejącego stanu wiedzy w zakresie prowadzonych badań, cel i zakres pracy oraz krótkie omówienie jej treści.

W rozdziale 2 zebrano informacje dotyczące analizy cienkościennych prętów prostych o przekroju otwartym i przedstawiono wyprowadzenia podstawowych równań różniczkowych, wykorzystywanych w kolejnych rozdziałach pracy. Materiał zawarty w rozdziale 2 został w dużej mierze opracowany na podstawie monografii Weiss, Gergovich [3], wydanej w 1973 roku przez Politechnikę Krakowską.

W rozdziale 3 omówiono krótko klasyczne metody analizy statycznej konstrukcji cienkościennych. Opisano ideę analizy numerycznej z wykorzystaniem superelementów. Wyznaczono, na bazie ścisłego modelu Vlasova, liniową macierz sztywności belkowego elementu cienkościennego poddanego skręcaniu, zginaniu i ścinaniu, oraz zaproponowano postać przybliżenia składników tej macierzy, przy zastosowaniu rozwinięcia, złożonych funkcji hiperbolicznych rozwiązania, w szereg potęgowy. Dodatkowo opisano sposób wyznaczenia macierzy sztywności superelementów węzłowych i belkowych ze wzmoczeniami (przewiązki i przepony). Ponadto omówiono wpływ konstrukcji węzła na rozkład bimomentów w przekrojach przywęzłowych. Rozdział 3 zawiera także przykłady numeryczne, na podstawie których sformułowano szereg wniosków uwzględnianych w późniejszej analizie numerycznej.

W rozdziale 4 przedstawiono wyniki przeprowadzonych badań doświadczalnych wraz z opisem eksperymentów. Badania te dotyczyły modeli: belki wspornikowej i rusztów wykonanych z belek cienkościennych bisymetrycznych o przekroju otwartym.

W rozdziale 5 porównano otrzymane wyniki modeli teoretycznych z badaniami eksperymentalnymi.

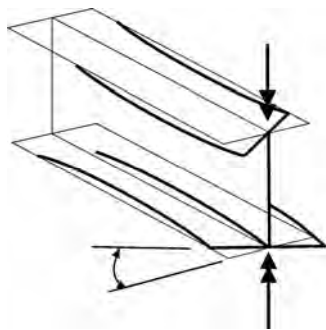
Rozdział 6 w całości został poświęcony zastosowaniu proponowanego modelu teoretycznego w problemach analizy wrażliwości pierwszego rzędu dźwigarów załamanych w planie i rusztów. Korzystając z metody układów sprzężonych, opracowano metodę analizy wrażliwości przemieszczeń, sił wewnętrznych i reakcji, w zależności od wariacji wymiarów przekroju poprzecznego, stałych materiałowych, wymiarów elementów węzła i usztywnień.

Rozdział 2

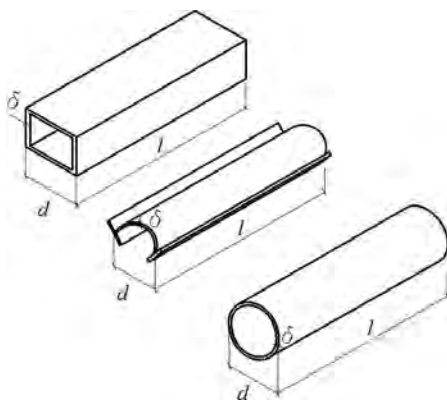
PODSTAWY WYTRZYMAŁOŚCIOWE TEORII PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH O PRZEKROJU OTWARTYM

Pręty i układy prętowe (elementy, których dwa wymiary wyrażają się wielkościami tego samego rzędu, trzeci natomiast wielkością dużą w porównaniu z pozostałymi – pręty lite) analizuje się zwykle (zgodnie z techniczną teorią prętów) na podstawie dodatkowej hipotezy geometrycznej, uwzględniając tylko jedną z sześciu składowych tensora odkształcenia (odkształcenie liniowe w kierunku osi pręta). W trakcie analizy korzysta się z hipotezy płaskich przekrojów w elementarnej teorii zginania oraz pomija odkształcenia liniowe i postaciowe w przekrojach poprzecznych prętów. Zakłada się, zgodnie z zasadą de Saint–Venanta, że lokalny, równoważny układ sił zewnętrznych powoduje powstanie odkształceń jedynie w niewielkim obszarze w sąsiedztwie miejsca przyłożenia tego układu sił. Istnieją jednak pręty (pręty cienkościenne), których wszystkie trzy wymiary wyrażają się wielkościami różnego rzędu, tzn. grubość ścianki jest mała w porównaniu z dowolnym wymiarem przekroju poprzecznego, a ten wymiar jest mały w porównaniu z jej długością.

Pręty o przekrojach nie kołowych (w szczególności pręty cienkościenne o przekroju otwartym) przy skręcaniu ulegają spaczeniu, między innymi liniowemu odkształceniu w kierunku osi pręta (deplanacji) (rys. 2.1).



Rys. 2.1. Deplanacja



Rys. 2.2. Oznaczenia grubości ścianek i wymiarów gabarytowych w przypadku różnych prętów cienkościennych

Deplanacja (rys. 2.1) ma zasadnicze znaczenie w teorii prętów cienkościennych, ze względu na jej istotny wpływ na rozkład naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym. Naprężenia te można sprowadzić w każdym przekroju poprzecznym do samorównoważących się układów sił, zwanych bimomentami. Bimomenty mogą wywołać w pręcie stan naprężenia i odkształcenia, który nie będzie miał charakteru lokalnego.

Nie można ustalić ścisłej granicy między prętami litymi a cienkościennymi. Zależy ona od schematu statycznego zadania i wymaganej dokładności obliczeń. Przyjęło się jednak [8], że pręt należy do klasy prętów cienkościennych, jeśli stosunki: grubości ścianki δ

do dowolnego wymiaru gabarytowego przekroju poprzecznego d oraz dowolny wymiar gabarytowy do długości pręta l są mniejsze lub równe jednej dziesiątej (rys. 2.2):

$$\frac{\delta}{d} \leq 0,1; \quad \frac{d}{l} \leq 0,1.$$

W teorii prętów cienkościennych przyjmuje się następujące hipotezy podstawowe:

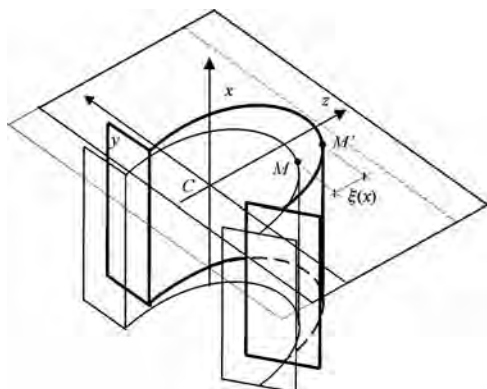
hipoteza I – brak deformacji przekroju poprzecznego,

hipoteza II – brak odkształceń postaciowych ścianek.

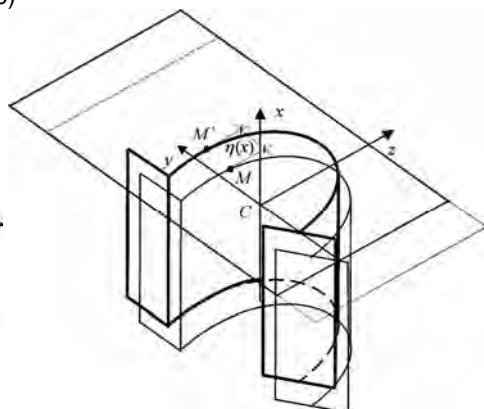
Zgodnie z założeniami teorii liniowej można przyjąć, iż przemieszczenie dowolnego punktu leżącego na linii środkowej przekroju poprzecznego składa się z:

- przemieszczeń liniowych: translacji $\xi(x)$ wzg. osi z (rys. 2.3a), $\eta(x)$ wzg. osi y (rys. 2.3b), deplanacji $\zeta(x) = \theta'(x)$ (rys. 2.3f),
- obrotów: rotacji $\theta(x)$ wzg. osi x (rys. 2.3e), dewiacji $\varphi(x) = \eta'(x)$ (rys. 2.3c), $\psi(x) = \xi'(x)$ (rys. 2.3d).

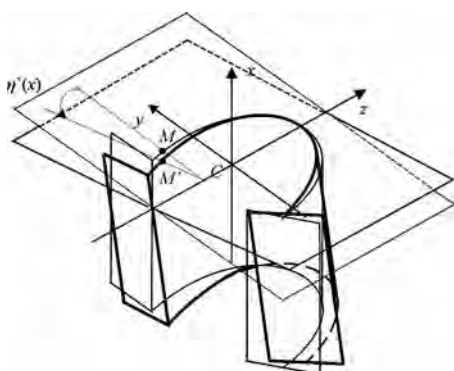
a)



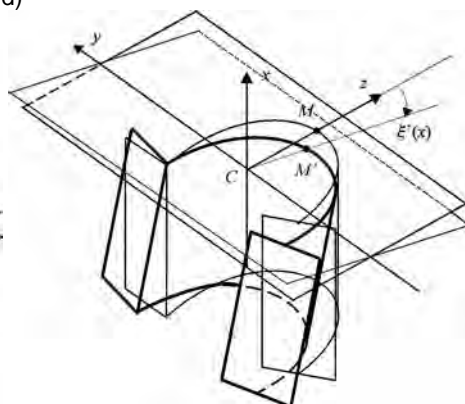
b)



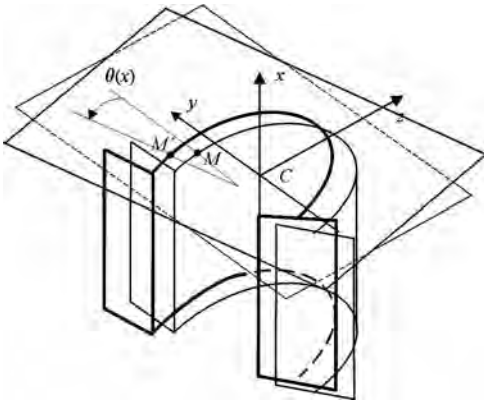
c)



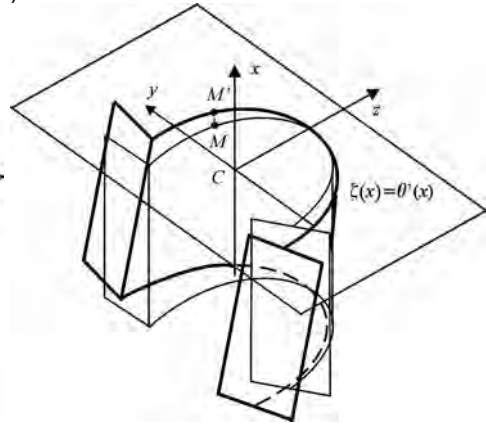
d)



e)



f)



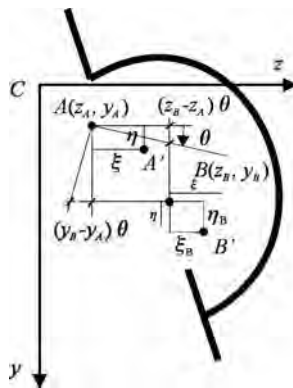
Rys. 2.3. Przesunięcia dowolnego punktu leżącego na linii środkowej przekroju poprzecznego

W celu wyznaczenia przemieszczeń liniowych v (na kierunku z), w (na kierunku y) w płaszczyźnie przekroju poprzecznego oraz przemieszczeń liniowych wzdłuż osi pręta u (na kierunku x), dowolnego punktu M leżącego na linii środkowej, rozpatrzmy na wstępie zachowanie dowolnego punktu przekroju B , nie pokrywającego się z dowolnym punktem A , (rys. 2.4) wyznaczając składowe η_B , ξ_B (2.1):

$$\begin{aligned}\eta_B &= \eta + (z_B - z_A)\theta, \\ \xi_B &= \xi - (y_B - y_A)\theta.\end{aligned}\quad (2.1)$$

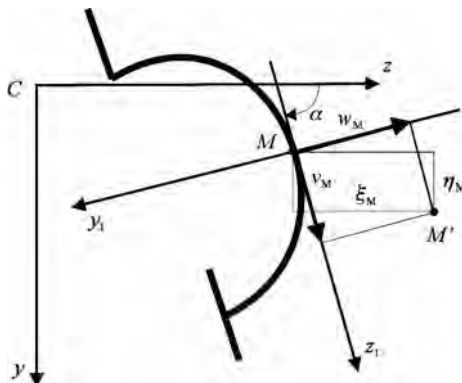
W przekroju poprzecznym można znaleźć taki punkt B , który nie doznaje przemieszczeń zwany środkiem skręcania B . Punkt ten możemy wyznaczyć, przyrównując do zera prawe strony równań (2.1):

$$\begin{aligned}z_B &= z_A - \frac{\eta}{\theta}, \\ y_B &= y_A + \frac{\xi}{\theta}.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Rys. 2.4. Płaszczyzna przekroju poprzecznego pręta – graficzne przedstawienie składowych η_B , ξ_B

Jeżeli środek skrećania (punkt B) będzie punktem leżącym na linii środkowej (punkt M) wówczas składowe przemieszczenia v_M , w_M tego punktu można wyrazić za pośrednictwem przemieszczeń η_M , ξ_M we współrzędnych lokalnych (y_1 , z_1) w postaci (rys. 2.5):

$$\begin{aligned} v_M &= \xi_M \cos \alpha + \eta_M \sin \alpha, \\ w_M &= \eta_M \cos \alpha - \xi_M \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.3)$$



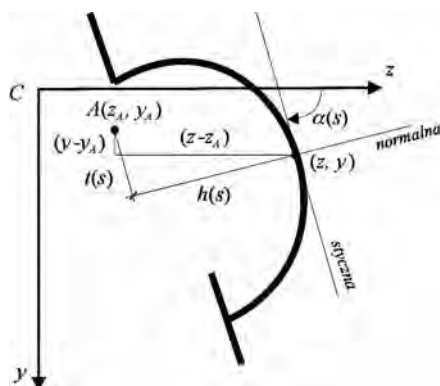
Rys. 2.5. Płaszczyzna przekroju poprzecznego pręta – graficzne przedstawienie składowych η_M , ξ_M

Podstawiając związki (2.1) ze zmianą indeksu B na M do (2.3) i opuszczając w celu uproszczenia zapisu indeks M , otrzymamy:

$$\begin{aligned} v &= [\xi + \theta(y_A - y)] \cos \alpha + [\eta + \theta(z - z_A)] \sin \alpha, \\ w &= [\eta + \theta(z - z_A)] \cos \alpha - [\xi + \theta(y_A - y)] \sin \alpha. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Przemieszczenia v , w dowolnego punktu leżącego na linii środkowej przekroju poprzecznego zależą od zmiennej x oraz kształtu konturu przekroju poprzecznego s :

$$\begin{aligned} v(x, s) &= [\xi(x) + (y_A - y) \cdot \theta(x)] \cos \alpha(s) + [\eta(x) + (z - z_A) \cdot \theta(x)] \sin \alpha(s), \\ w(x, s) &= [\eta(x) + (z - z_A) \cdot \theta(x)] \cos \alpha(s) - [\xi(x) + (y_A - y) \cdot \theta(x)] \sin \alpha(s). \end{aligned} \quad (2.5)$$



Rys. 2.6. Płaszczyzna przekroju poprzecznego pręta – graficzne przedstawienie funkcji $h(s)$, $t(s)$

W celu uproszczenia zapisu równań (2.5) wprowadzono dwie nowe funkcje (2.6) określające odległości punktu A od stycznej $h(s)$ i normalnej $t(s)$ do linii środkowej w punkcie M . Wielkości te mają postać (rys. 2.6):

$$\begin{aligned} h(s) &= (z - z_A) \sin \alpha(s) - (y_A - y) \cos \alpha(s), \\ t(s) &= (z - z_A) \cos \alpha(s) + (y_A - y) \sin \alpha(s). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ostatecznie równania opisujące obrót względem punktu A będą miały następującą postać:

$$\begin{aligned} v(x, s) &= \xi(x) \cos \alpha(s) + \eta(x) \sin \alpha(s) + h(s)\theta(x), \\ w(x, s) &= \eta(x) \cos \alpha(s) - \xi(x) \sin \alpha(s) + t(s)\theta(x). \end{aligned} \quad (2.7a, b)$$

Przeszczenie u , punktu M , w kierunku osi pręta x , ze względu na spaczenie przekroju poprzecznego (rys. 2.7), wyznaczyć można na podstawie założenia braku odkształceń postaciowych ścianek (hipoteza II) (2.8):

$$\gamma = \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} + \frac{\partial v(x, s)}{\partial x} = 0, \quad (2.8)$$

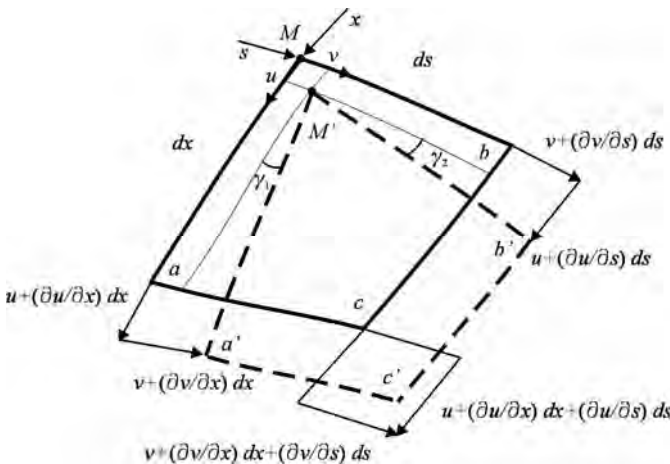
skąd po podstawianiu znanej już funkcji $v(x, s)$ (2.7a) i scałkowaniu równania (2.8) względem s , otrzymamy niewiadomą składową $u(x, s)$ postaci:

$$u(x, s) = \zeta_0(x) - \int_0^s \frac{\partial v}{\partial x} ds, \quad (2.9)$$

gdzie $\zeta_0(x)$ to nieznaną funkcją opisującą wartość identycznego przemieszczenia osiowego, wszystkich punktów danego przekroju.

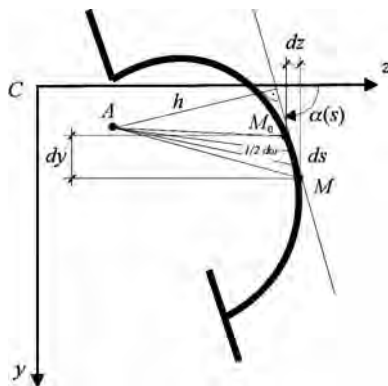
Po zróźniczkowaniu funkcji $v(x, s)$ (2.7 a) i wymnożeniu obu stron równości przez ds , otrzymamy:

$$\frac{\partial v}{\partial x} ds = \xi'(x) \cdot \cos \alpha(s) ds + \eta'(x) \cdot \sin \alpha(s) \cdot ds + \theta'(x) \cdot h(s) ds. \quad (2.10)$$



$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \gamma_2 &= \frac{u + \frac{\partial u}{\partial s} ds - u}{ds} = \frac{\partial u}{\partial s}, \\ \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 \end{aligned}$$

Rys. 2.7. Przeszczenie punktu M , ze względu na spaczenie przekroju poprzecznego



Rys. 2.8 Płaszczyzna przekroju poprzecznego pręta – graficzne przedstawienie zależności (2.11)

Podstawiając zależności zilustrowane na rys. 2.8:

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cdot ds &= dz, \\ \sin \alpha \cdot ds &= dy, \\ h \cdot ds &= d\omega,\end{aligned}\tag{2.11}$$

do wzorów (2.9) i (2.10), otrzymamy ostateczną postać funkcji przemieszczenia $u(x, s)$:

$$u(x, s) = \zeta_0(x) - \xi'(x) z(s) - \eta'(x) y(s) - \theta'(x) \omega(s),\tag{2.12}$$

w której $\omega(s) = \int_0^s d\omega$ to podwójne pole wycinka o wierzchołku w punkcie A , opartego na

łuku o początku w punkcie M_0 i końcu w punkcie M . Pierwsze trzy czynniki równania (2.12) dotyczą kolejno wydłużenia osiowego, kąta obrotu przekroju względem osi y , kąta obrotu przekroju względem osi z , a czwarty deplanacji przekroju poprzecznego.

Stan odkształcenia ogranicza się do odkształceń względem osi x tzn. $\varepsilon_x(x, s) = \partial u(x, s) / \partial x$ (Należy pamiętać, iż zgodnie z hipotezą I - odkształcenia $\varepsilon_s(x, s)$ na kierunku stycznej do linii środkowej oraz z hipotezą II - odkształcenia postaciowe γ_{xs} są równe zero):

$$\varepsilon_x(x, s) = \zeta''(x) - \xi''(x)x(s) - \eta''(x)y(s) - \theta''(x)\omega(s).\tag{2.13}$$

Zgodnie z prawem Hooke'a stan odkształcenia określają zależności:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_s), \\ \varepsilon_s &= \frac{1}{E}(\sigma_s - \nu\sigma_x), \\ \gamma_{xs} &= \frac{1}{G}\tau_{xs}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Stan naprężenia jest więc reprezentowany przez trzy składowe: naprężenia normalne σ_x , σ_s o kierunkach tworzącej i stycznej do linii środkowej, oraz naprężenie styczne τ_{xs} . Zgodnie z hipotezą I, odkształcenie ε_s równe jest zero, a więc z (2.14) otrzymamy:

$$\sigma_s = \nu\sigma_x; \quad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \varepsilon_x. \quad (2.15)$$

Ze względu na postać równań (2.15) wprowadza się zmodyfikowaną postać modułu sprężystości podłużnej:

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad (2.16)$$

który w przypadku stopów aluminium i stali ($\nu \approx 0,3$) wynosi około 1,1 E . W dalszej części pracy przyjęto jednak $E_1 \approx E$.

Naprężenia normalne mają wówczas postać:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x. \quad (2.17)$$

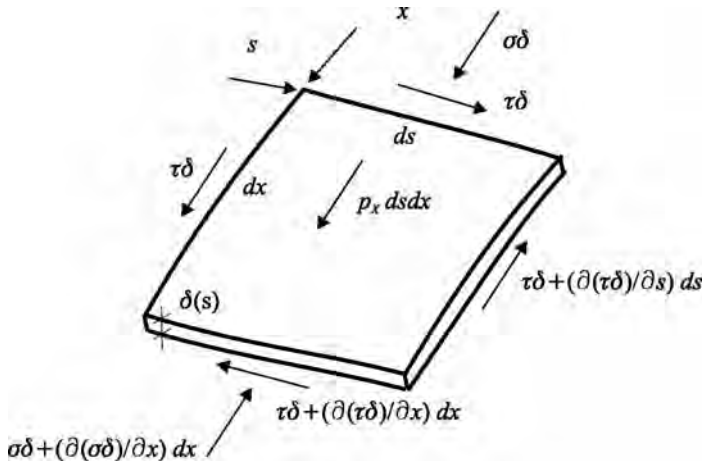
Ostatecznie, podstawiając zależność (2.13) do (2.17), otrzymamy:

$$\sigma_x = E (\zeta'(x) - \xi''(x)x(s) - \eta''(x)y(s) - \theta''(x)\omega(s)). \quad (2.18)$$

Naprężenia styczne τ_{xs} , ze względu na hipotezę II (tzn. $\gamma_{xs} = 0$), trzeba wyznaczyć, korzystając ze związków statycznych równowagi sił działających na element ścianki pręta w kierunku jego osi podłużnej $\Sigma X = 0$ (rys. 2.9):

$$\frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial x} dx ds + \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} ds dx + p_x ds dx = 0, \quad (2.19)$$

gdzie $\delta = \delta(s)$ to grubość ścianki, a $p_x = p_x(x,s)$ to składowa powierzchniowych sił zewnętrznych.



Rys. 2.9. Siły działające na element ścianki pręta w kierunku jego osi podłużnej

Rozwiązując równanie (2.19) względem $\tau(x,s)$ otrzymamy:

$$\tau(x,s) = \frac{1}{\delta} [t_0(x) - \int_0^s p_x ds - \int_0^s \frac{\partial \sigma}{\partial x} \delta ds], \quad (2.20)$$

gdzie $t_0(x)$ to dowolna funkcja, która na podstawie warunku brzegowego, przy $s = 0$ po podstawieniu do równania (2.20) ma postać (2.21):

$$\begin{aligned}\tau(x,0) &= \frac{1}{\delta(0)} t_0(x), \\ t_0(x) &= \tau(x,0) \delta(0),\end{aligned}\quad (2.21)$$

$t_0(x)$ jest więc strumieniem naprężeń stycznych w punkcie $s = 0$ danego przekroju poprzecznego.

Odpowiednio przy założeniu $dA = \delta ds$, naprężenia styczne wyrażą się zależnością:

$$\tau(x,s) = \frac{1}{\delta} \left[t_0(x) - \int_0^s p_x(x,s) ds - E \left[\zeta''(x) \int_0^s dA - \xi'''(x) \int_0^s x dA - \eta'''(x) \int_0^s y dA - \theta'''(x) \int_0^s \omega dA \right] \right]. \quad (2.22)$$

Po prostych przekształceniach równania (2.22), naprężenia styczne można wyrazić następująco:

$$\tau(x,s) = \frac{1}{\delta} t_0 - \frac{1}{\delta} \int_0^s p_x ds + E \left[-\zeta''(x) A(s) + \xi'''(x) S_y(s) + \eta'''(x) S_x(s) + \theta'''(x) S_\omega(s) \right], \quad (2.23)$$

gdzie: $A(s) = \int_0^s dA$ – to pole części przekroju ścianki mierzone pomiędzy punktami 0 a s ,

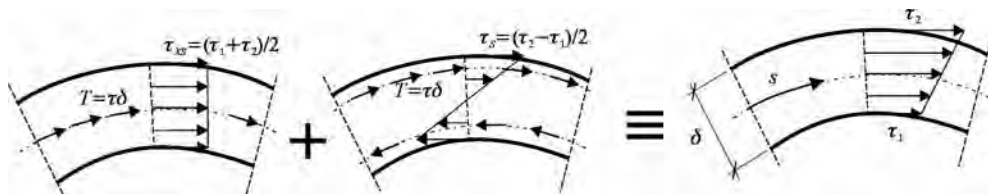
$S_x(s) = \int_0^s y dA$, $S_y(s) = \int_0^s x dA$ – statyczne momenty bezwładności części przekroju do współrzędnej s względem osi x i y ,

$S_\omega(s) = \int_0^s \omega dA$ – wycinkowy moment statyczny części przekroju do współrzędnej s .

W przypadku sił zewnętrznych powierzchniowych równych zero ($p_x = 0$) i sił krawędziowych równych zero ($t_0 = 0$) wzór (2.23) otrzymuje postać:

$$\tau(x,s) = \frac{E}{\delta(s)} \left[-\zeta''(x) A(s) + \xi'''(x) S_y(s) + \eta'''(x) S_x(s) + \theta'''(x) S_\omega(s) \right]. \quad (2.24)$$

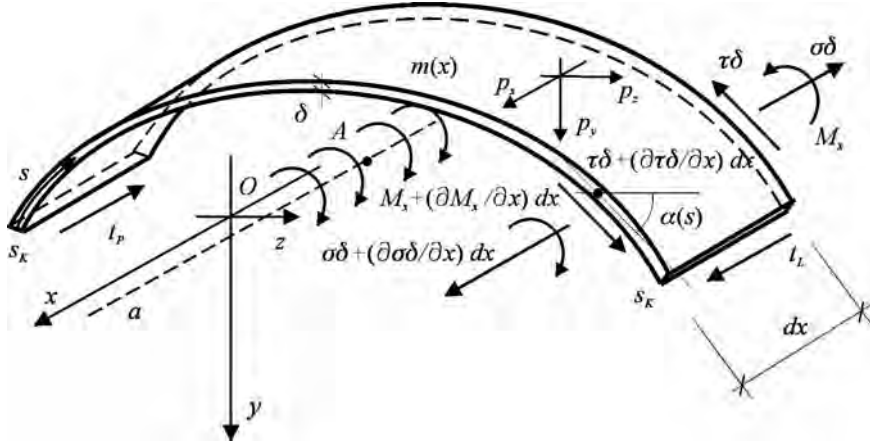
W dalszych rozważaniach, zgodnie z teorią Vlasova, sumuje się naprężenia styczne od spazczenia $\tau_{XS}(x,s)$ z naprężeniami stycznymi τ_S od czystego skręcania (rys. 2.10) oraz zakłada się, iż przekrój poprzeczny jest stały względem osi x .



Rys. 2.10. Rozkłady naprężeń stycznych od spazczenia i czystego skręcania

Wszystkie dotąd wyprowadzone wielkości były opisane z wykorzystaniem funkcji $\zeta(x)$, $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\theta(x)$, które pozostają niewiadome. Aby je wyznaczyć, należy skorzystać z równań równowagi elementu wyciętego z pręta płaszczyznami $x = \text{const.}$ i $x + dx = \text{const.}$

(rys. 2.11). Element ten znajduje się w równowadze pod działaniem sił normalnych $\sigma\delta$ i $\sigma\delta + [\partial(\sigma\delta)/\partial x] dx$, stycznych $\tau\delta$ i $\tau\delta + [\partial(\tau\delta)/\partial x] dx$, momentów skręcających M_x i $M_x + [\partial M_x/\partial x] dx$, przyłożonych do powierzchni czołowych oraz sił zewnętrznych powierzchniowych $p_x(x, s)$ i stycznych do krawędzi podłużnych elementu t_L i t_P .



Rys. 2.11. Element wycięty z pręta pod działaniem sił normalnych, stycznych, momentów skręcających, sił zewnętrznych powierzchniowych i stycznych krawędziowych

Odpowiednio więc:

$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\rightarrow \int_L \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial x} dx ds + (t_L - t_P + p_x) dx = 0, \\ \sum Z = 0 &\rightarrow \int_L \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} \cos \alpha(s) dx ds + p_z dx = 0, \\ \sum Y = 0 &\rightarrow \int_L \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} \sin \alpha(s) dx ds + p_y dx = 0, \\ \sum M_A = 0 &\rightarrow \int_L \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} dx \cdot [(x - x_A) \sin \alpha(s) - (y - y_A) \cos \alpha(s)] ds + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx + m dx = 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

gdzie $m(x)$ to zewnętrzny ciągły moment skręcający względem osi a , a L to długość całego konturu przekroju poprzecznego.

Dzieląc równania (2.25) przez dx oraz uwzględniając, iż:

$$\begin{aligned} ds \cos \alpha &= dz, \\ ds \sin \alpha &= dy, \\ [(x - x_A) \sin \alpha(s) - (y - y_A) \cos \alpha(s)] &= d\omega, \end{aligned}$$

otrzymamy:

$$1) \int_L \frac{\partial(\sigma\delta)}{\partial x} ds + t_L - t_P + p_x = 0,$$

$$\begin{aligned}
2) \int_L \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} dz + p_z &= 0, \\
3) \int_L \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} dy + p_y &= 0, \\
4) \int_L \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} d\omega + \frac{\partial M_x}{\partial x} + m &= 0.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Pamiętając, że w przypadku równania 1) (2.26) δ zależy tylko od zmiennej s , i biorąc pod uwagę, iż $\delta \cdot ds = dA$, oraz całkując przez części równania 2) i 3) (2.26), otrzymamy:

$$\begin{aligned}
1) \int_L \frac{\partial\sigma}{\partial x} dA + t_L - t_p + p_x &= 0, \\
2) \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} z|_{s_p}^{s_L} - \int_L z \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} \right] ds + p_z &= 0, \quad \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} z|_{s_p}^{s_L} = t'_L z_L - t'_p z_p, \\
3) \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} y|_{s_p}^{s_L} - \int_L y \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} \right] ds + p_y &= 0, \quad \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} y|_{s_p}^{s_L} = t'_L y_L - t'_p y_p, \\
4) \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} \omega|_{s_p}^{s_L} - \int_L \omega \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} \right] ds + \frac{\partial M_x}{\partial x} + m &= 0, \quad \frac{\partial(\tau\delta)}{\partial x} \omega|_{s_p}^{s_L} = t'_L \omega_L - t'_p \omega_p,
\end{aligned} \tag{2.27}$$

gdzie wielkości t'_L , t'_p , $\partial M_x / \partial x = dM_x / dx = M'_x$ oznaczają pochodne względem sił stycznych krawędziowych i momentu skręcającego. Pochodną momentu skręcającego można wyrazić w postaci przybliżonej, wiedząc, że deplanacja $\zeta(x)$ równa jest pierwszej pochodnej kąta skręcenia $\theta'(x)$:

$$M_x = GJ_d \zeta \rightarrow M'_x = GJ_d \theta'' \tag{2.28}$$

Na podstawie zależności (2.18) i (2.22), można zapisać (2.29):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma}{\partial x} dA &= \zeta''(x)EdA - \xi'''(x)x(s)EdA - \eta'''(x)y(s)EdA - \theta'''(x)\omega(s)EdA, \\
\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial(\tau\delta)}{\partial s} \right] ds &= -\frac{\partial p_x}{\partial x} ds - \zeta'''EdA + \xi^{IV}zEdA + \eta^{IV}yEdA + \theta^{IV}EdA.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

Wykorzystując wyrażenia (2.28) i (2.29) oraz wyłączając spod znaku całek pochodne niewiadomych funkcji $\zeta(x)$, $\xi(x)$, $\eta(x)$ oraz $\theta(x)$ w równaniach (2.27), otrzymamy:

$$\begin{aligned}
1) \zeta'' E \int_A dA - \xi''' E \int_A z dA - \eta''' E \int_A y dA - \theta''' E \int_A \omega dA + p_x + t_L - t_p &= 0, \\
2) \int_L \frac{\partial p_x}{\partial x} z ds + \zeta''' E \int_A z dA - \xi^{IV} E \int_A z^2 dA - \eta^{IV} E \int_A zy dA - \theta^{IV} E \int_A \omega z dA + p_z + t'_L z_L - t'_p z_p &= 0, \\
3) \int_L \frac{\partial p_x}{\partial x} y ds + \zeta''' E \int_A y dA - \xi^{IV} E \int_A zy dA - \eta^{IV} E \int_A y^2 dA - \theta^{IV} E \int_A \omega y dA + p_y + t'_L y_L - t'_p y_p &= 0, \\
4) \int_L \frac{\partial p_x}{\partial x} \omega ds + \zeta''' E \int_A \omega dA - \xi^{IV} E \int_A \omega z dA - \eta^{IV} E \int_A \omega y dA - \theta^{IV} E \int_A \omega^2 dA + GJ_d \theta'' + m + t'_L \omega_L - t'_p \omega_p &= 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Całki w równaniach (2.30) są charakterystykami geometrycznymi przekroju poprzecznego, postaci:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_A dA && \text{– pole przekroju poprzecznego [m}^2\text{]}, \\
 S_z &= \int_A y dA, \quad S_y = \int_A z dA && \text{– statyczne momenty bezwładności [m}^3\text{]}, \\
 S_\omega &= \int_A \omega dA && \text{– wycinkowy moment statyczny [m}^4\text{]}, \\
 J_z &= \int_A y^2 dA, \quad J_y = \int_A z^2 dA && \text{– momenty bezwładności [m}^4\text{]}, \\
 J_{zy} &= \int_A zy dA && \text{– moment odśrodkowy [m}^4\text{]}, \\
 J_\omega &= \int_A \omega^2 dA && \text{– wycinkowy moment bezwładności [m}^6\text{]}, \\
 J_{\omega z} &= \int_A \omega z dA, \quad J_{\omega y} = \int_A \omega y dA && \text{– odśrodkowe momenty bezwładności [m}^5\text{]}.
 \end{aligned}$$

Przy tych oznaczeniach układ równań (2.30) przyjmie postać:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & A \zeta'' - S_y \xi''' - S_z \eta''' - S_\omega \theta''' = -\frac{1}{E} (p_x + t_L - t_p), \\
 2) \quad & -S_y \zeta''' + J_y \xi^{IV} + J_{zy} \eta^{IV} + J_{\omega z} \theta^{IV} = \frac{1}{E} (p_z + t'_L z_L - t'_p z_p + \int_L \frac{\partial p_x}{\partial x} ds), \\
 3) \quad & -S_z \zeta''' + J_{zy} \xi^{IV} + J_z \eta^{IV} + J_\omega \theta^{IV} = \frac{1}{E} (p_y + t'_L y_L - t'_p y_p + \int_L y \frac{\partial p_x}{\partial x} ds), \\
 4) \quad & -S_\omega \zeta''' + J_{\omega z} \xi^{IV} + J_{\omega y} \eta^{IV} + J_\omega \theta^{IV} - \frac{GJ_d}{E} \theta'' = \frac{1}{E} (m + t'_L \omega_L - t'_p \omega_p + \int_L \omega \frac{\partial p_x}{\partial x} ds). \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

Jeżeli funkcje $x(s)$, $y(s)$, $\omega(s)$ będą dobrane tak, aby:

$$\begin{aligned}
 S_z &= \int_A y dA = 0, \quad S_y = \int_A z dA = 0, \quad J_{zy} = \int_A zy dA = 0, \\
 S_\omega &= \int_A \omega dA = 0, \quad J_{\omega z} = \int_A \omega z dA = 0, \quad J_{\omega y} = \int_A \omega y dA = 0, \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

wówczas układ równań (2.31) będzie złożony z czterech niezależnych równań postaci:

$$\begin{aligned}
 EA \zeta'' &= -(p_x + t_L - t_p), \\
 EJ_y \xi^{IV} &= p_z + t'_L z_L - t'_p z_p + \int_L \frac{\partial p_x}{\partial x} ds, \\
 EJ_z \eta^{IV} &= p_y + t'_L y_L - t'_p y_p + \int_L y \frac{\partial p_x}{\partial x} ds, \\
 EJ_\omega \theta^{IV} - GJ_d \theta'' &= m + t'_L \omega_L - t'_p \omega_p + \int_L \omega \frac{\partial p_x}{\partial x} ds. \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

Ponadto, jeżeli krawędzie podłużne będą wolne od sił stycznych t_L , t_p , a pozostałe siły zredukujemy do sił poprzecznych p_z , p_y oraz momentu skręcającego $m(x)$ otrzymamy wówczas:

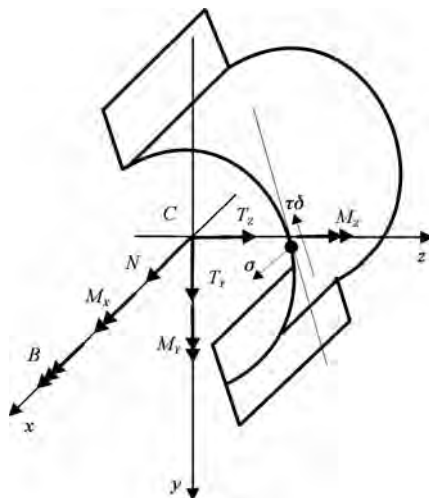
$$\begin{aligned}
 EA\zeta'' &= 0, \\
 EJ_Y\zeta^{IV} &= p_Z, \\
 EJ_Z\eta^{IV} &= p_Y, \\
 EJ_\omega\theta^{IV} - GJ_d\theta'' &= m.
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

Rozwiązując równania (2.33) lub (2.34) względem niewiadomych $\zeta(x)$, $\xi(x)$, $\eta(x)$, $\theta(x)$ otrzymamy poszukiwane przemieszczenia. W dalszej części pracy $\eta \equiv w$, $\eta' \equiv \varphi$, $\zeta \equiv \theta'$.

Zależności między naprężeniami, a siłami wewnętrznymi możemy określić następująco (rys. 2.12):

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma dA, \quad T_Z = \int_l (\tau_{xs} \delta) dz, \quad T_Y = \int_l (\tau_{xs} \delta) dy, \\
 M_Z &= -\int_A \sigma y dA, \quad M_Y = \int_A \sigma z dA, \quad B = \int_A \sigma \omega dA,
 \end{aligned}
 \tag{2.35}$$

gdzie B oznacza bimoment, a wyrażenie EJ_ω występujące w jednym z wzorów (2.34), zwane sztywnością skręcania skrępowanego, charakteryzuje sztywność pręta na spaczenie.



Rys. 2.12. Pręt cienkościenny otwarty - siły wewnętrzne i naprężenia

Moment skręcający M_S od naprężeń stycznych τ składa się z dwóch części: momentu od czystego skręcania de Saint-Venanta M_x oraz momentu giętno-skrętnego M_ω od naprężeń normalnych przy skręcaniu (rys. 2.10):

$$M_S = M_x + M_\omega = GJ_d \theta' + \int_A (\tau_{xs} \delta) d\omega.
 \tag{2.36}$$

Przy założeniu ortogonalności funkcji (2.32), podstawiając do wzorów (2.35) w miejsce σ i τ (bez obciążeń powierzchniowych i krawędziowych) wyrażenia (2.18), (2.23) otrzymamy następujące zależności na siły uogólnione (2.37):

$$\begin{aligned}
N &= \int_A E(\zeta' - \xi'' z - \eta'' y - \theta'' \omega) dA = E [\zeta' A - \xi'' S_Y - \eta'' S_Z - \theta'' S_\omega] = EA \zeta' , \\
T_Z &= \int_A (\tau \delta) dz = \int_A E(\xi''' \frac{S_Y}{\delta} + \eta''' \frac{S_Z}{\delta} + \theta''' \frac{S_\omega}{\delta}) \delta dz = E \xi''' \int_A S_Y dz + E \eta''' \int_A S_Z dz + E \theta''' \int_A S_\omega dz = -E J_Y \xi'' , \\
T_Y &= \int_A (\tau \delta) dy = \int_A E(\xi''' \frac{S_Y}{\delta} + \eta''' \frac{S_Z}{\delta} + \theta''' \frac{S_\omega}{\delta}) \delta dy = E \xi''' \int_A S_Y dy + E \eta''' \int_A S_Z dy + E \theta''' \int_A S_\omega dy = -E J_Z \eta'' , \\
M_Z &= - \int_A E(\zeta' - \xi'' z - \eta'' y - \theta'' \omega) y dA = -E [\zeta' S_Z - \xi'' J_{ZY} - \eta'' J_Z - \theta'' J_{\omega Y}] = E J_Z \eta'' , \\
M_Y &= \int_A E(\zeta' - \xi'' z - \eta'' y - \theta'' \omega) x dA = E [\zeta' S_Y - \xi'' J_Y - \eta'' J_{ZY} - \theta'' J_{\omega Z}] = -E J_Y \xi'' , \\
B &= \int_A E(\zeta' - \xi'' z - \eta'' y - \theta'' \omega) \omega dA = E [\zeta' S_\omega - \xi'' J_{\omega Z} - \eta'' J_{\omega Y} - \theta'' J_\omega] = -E J_\omega \theta'' , \\
M_S &= M_x + M_\omega = G J_d \theta' + \int_A E(\xi''' \frac{S_Y}{\delta} + \eta''' \frac{S_Z}{\delta} + \theta''' \frac{S_\omega}{\delta}) \delta d\omega = \\
&= G J_d \theta' + E \xi''' \int_A S_Y d\omega + E \eta''' \int_A S_Z d\omega + E \theta''' \int_A S_\omega d\omega = G J_d \theta' - E J_\omega \theta'' = G J_d \theta' + B'
\end{aligned}
\tag{2.37}$$

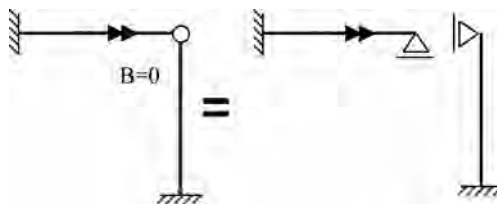
Rozdział 3

ANALIZA PRACY RUSZTU

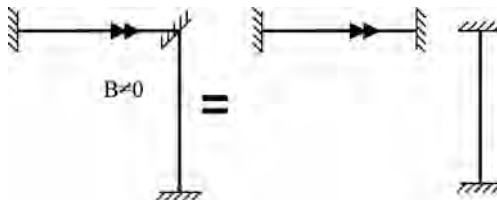
Rozważmy na wstępie ruszt złożony z prętów cienkościennych i bezwymiarowych węzłów. Bezwymiarowe węzły modeluje się zwykle, alternatywnie zakładając:

- 1) pełną swobodę deplanacji prętów, w każdym z węzłów (rys. 3.1a) ($B = 0$ – bimoment równy zero) [10],
- 2) pełną blokadę deplanacji prętów, w każdym z węzłów (rys. 3.1b) ($B \neq 0$ – bimoment różny od zera) [10],
- 3) dystrybucję bimomentów wprost proporcjonalną do sztywności skręcania skrępowanego K_{Bi} prętów schodzących się w węźle (rys. 3.1c) [15].

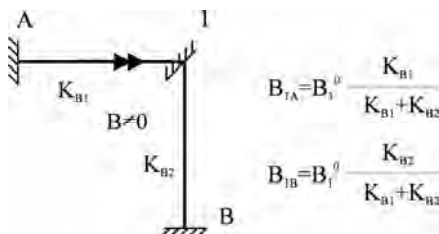
a)



b)



c)



Rys. 3.1. Alternatywne koncepcje modelowania węzłów bezwymiarowych

Przy wspomnianych założeniach, klasyczna teoria prętów cienkościennych o przekrojach otwartych, poddanych skręcaniu, wystarczająco dobrze opisuje jedynie stan naprężenia i odkształcenia pojedynczych prętów bądź układów, w których mamy zachowaną ciągłość spacjeń, a tym samym równowagę bimomentów w węzłach.

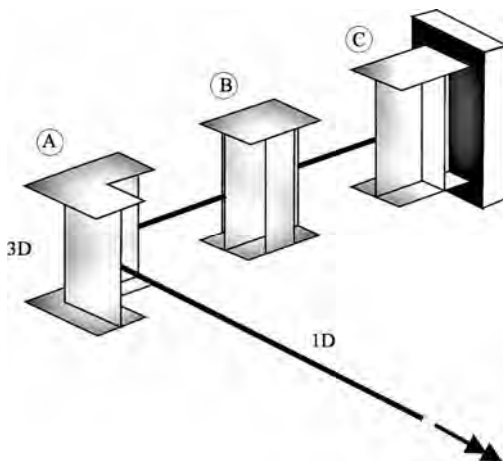
Problem stanowią jednak układy złożone (np. cienkościenne dźwigary załamane w planie, ruszty, ramy), w których istotny wpływ na rozkład naprężeń odgrywa konstrukcja węzła czy szczegóły konstrukcyjne związane np. ze wzmocnieniem prętów konstrukcji przez przepony lub przewiązki.

Wówczas w trakcie analizy, w celu zwiększenia dokładności obliczeń, rezygnuje się z założenia węzłów bezwymiarowych, gdyż stan naprężeń w przekrojach przywęzłowych znacznie różni się od stanu naprężeń w prętach. W wyniku odkształceń węzła kąty skręcenia przekroju nie są zgodne z kątami obrotu przekroju przy zginaniu.

Powszechnie w modelowaniu złożonych układów konstrukcyjnych, w tym także konstrukcji cienkościennych, wykorzystuje się obecnie metodę elementów skończonych (MES). Dzięki programom komercyjnym MES (ABAQUS, NASTRAN i innym), możemy w sposób bardzo dokładny określać złożony stan naprężenia i odkształcenia w układach konstrukcyjnych dowolnego typu. Budowa skomplikowanych przestrzennych modeli MES jest jednak bardzo pracochłonna. Dodatkowo wydłuża się czas obliczeń, ze względu na złożoność modelu (tzn. liczbę stopni swobody), a także potrzebę przeliczania rzeczywistych rozkładów naprężeń w przekrojach poprzecznych na odpowiadające im siły wewnętrzne nieodzowne w projektowaniu konstrukcji.

Wydaje się zatem naturalne by złożone szczegóły konstrukcyjne, takie jak węzły (rys. 3.2A) czy elementy wzmocnione poprzez przewiązki (rys. 3.2B) lub przepony (rys. 3.2C), modelować elementami trójwymiarowymi – 3D (zwanymi dalej superelementami), a pręty, czyli elementy łączące ze sobą superelementy w sposób znany z klasycznej teorii prętów cienkościennych jako układy jednowymiarowe – 1D.

Łącząc zalety obu metod, unikamy problemów związanych z niedoskonałością dotychczas stosowanych modeli, skracamy czas analizy, jednocześnie zapewniając dostateczną dokładność rozwiązania.



Rys 3.2. Koncepcja modelu zbudowanego z elementów prętowych i superelementów

W trakcie przygotowania modelu konstrukcji wykorzystującego ideę superelementów (zwanego dalej mieszanym), obie kategorie elementów (pręty i superelementy) analizujemy oddzielnie, uwzględniając jednak ich wzajemne oddziaływanie. Macierze sztywności poszczególnych elementów poszukujemy stosując różne metody obliczeniowe.

3.1. Metoda analizy wykorzystująca ideę superelementów

W niniejszej pracy odbiega się od założenia węzłów bezwymiarowych, przyjmując węzły o określonych wymiarach. Prętami nazywa się, jak wspomniano wcześniej, elementy zawarte pomiędzy superelementami. Obie kategorie elementów, superelementy i pręty, są analizowane oddzielnie w czasie przygotowania danych. W przypadku prętów cienkościennych, uwzględnia się klasyczną teorię prętów cienkościennych Vlasova [8], z wykorzystaniem macierzy sztywności pręta cienkościennego (3.33), (3.35), natomiast węzły oraz inne ważne szczegóły konstrukcji modeluje się zgodnie z MES, wyznaczając macierze sztywności superelementów z zastosowaniem komercyjnych programów komputerowych (ABAQUS). Należy podkreślić, że model taki spełnia warunki zgodności przemieszczeń w przekrojach wyznaczonych przez superelementy.

Idea proponowanej metody polega więc na połączeniu modelu belkowego (1D) z modelem powłokowym (3D) (rys. 3.2).

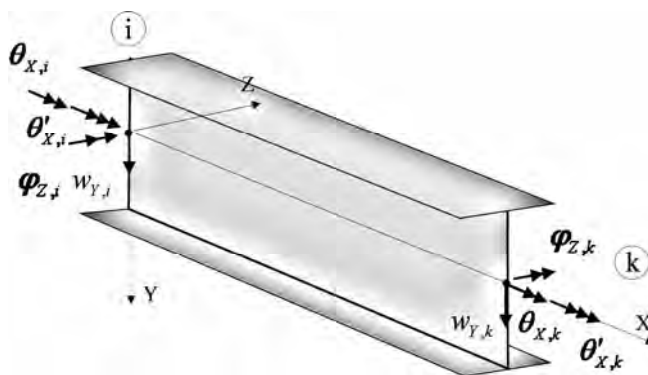
3.1.1. Liniowa macierz sztywności pręta cienkościennego

Rozważamy prostoliniowy pręt cienkościenny, opisany dwoma węzłami i i k , przyjmując jednocześnie, że mamy do czynienia z prętem o przekroju bisymetrycznym, dla którego środek ciężkości pokrywa się ze środkiem skręcania. Element ma długość l , stały przekrój poprzecznym A i jest wykonany z jednorodnego materiału o module Younga E . Schemat elementu został przedstawiony na rys. 3.3.

W przestrzeni, wspomniany element cienkościenny, dla którego obowiązuje teoria skręcania Vlasova [8], jest opisany przez cztery stopnie swobody w każdym węzle: jedno przemieszczenie translacyjne – w_Y , dwa rotacyjne – θ_X , φ_Z oraz spaczenie przekroju poprzecznego – θ'_X (Rys. 3.3).

Wektor współrzędnych uogólnionych w układzie lokalnym elementu ma wówczas postać:

$$\mathbf{q} = [w_{Y,i}, \theta_{X,i}, \varphi_{Z,i}, \theta'_{X,i}, w_{Y,k}, \theta_{X,k}, \varphi_{Z,k}, \theta'_{X,k}]^T. \quad (3.1)$$



Rys. 3.3. Element cienkościenny według Vlasova

Wychodząc z zależności na energię potencjalną układu postaci:

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^l [EJ_\omega (\theta'')^2 + GJ_d (\theta')^2] dx + \int_0^l [EJ_z (w'')^2] dy \right\}, \quad (3.2)$$

w której J_z to moment bezwładności przekroju względem osi z , GJ_d sztywności czystego skręcania, a EJ_ω to sztywność skręcania skrępowanego, wyznaczamy poszczególne składniki macierzy sztywności pręta cienkościennego.

3.1.1.1. Zginanie

Wyznaczamy dla wyciętego elementu ik pręta cienkościennego funkcje ugięcia względem osi $y - w(x)$ ze znanego równania różniczkowego zginania prostego (2.34), (3.3):

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = 0. \quad (3.3)$$

Rozwiązanie ogólne równania (3.3) ma postać (3.4):

$$w(x) = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4. \quad (3.4)$$

Podstawiając warunki brzegowe na obu końcach pręta ik postaci (3.5):

$$\begin{aligned} w &= w_{Y,i}, \quad w' = \varphi_{Z,i} \quad \text{dla } x = 0, \\ w &= w_{Y,k}, \quad w' = \varphi_{Z,k} \quad \text{dla } x = l, \end{aligned} \quad (3.5)$$

otrzymamy stałe (3.6):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2 w_{Y,i} - 2 w_{Y,k} + l(\varphi_{Z,i} + \varphi_{Z,k})}{l^3}, \\ C_2 &= -\frac{3 w_{Y,i} - 3 w_{Y,k} + 2l \varphi_{Z,i} + l\varphi_{Z,k}}{l^2}, \\ C_3 &= \varphi_{Z,i}, \\ C_4 &= w_{Y,i}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Zapisujemy kolejno równanie zginania pręta (3.4) w postaci macierzowej (3.7a, b):

$$w(x) = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad (3.7a)$$

$$w(x) = \mathbf{B} \mathbf{q}, \quad (3.7b)$$

w której:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}^T &= \{x^3, x^2, x, 1\}, \\ \mathbf{q}^T &= \{w_{Y,i}, \varphi_{Z,i}, w_{Y,k}, \varphi_{Z,k}\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a funkcje kształtu mają postać (3.9):

$$\mathbf{B} = \left[\frac{(l-x^2) + (l+2x)}{l^3} \mid \frac{(l-x)^2 x}{l^2} \mid \frac{(3l-2y)x^2}{l^3} \mid \frac{x^2(x-l)}{l^2} \right]. \quad (3.9)$$

Energia potencjalna (3.2) sił wewnętrznych przy zginaniu wynosi (3.10):

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^l EJ_Z (w'')^2 dx \right\}, \quad (3.10)$$

i wiedząc, że:

$$w = \mathbf{B}\mathbf{q}, \quad w'' = \mathbf{B}''\mathbf{q}, \quad (3.11)$$

$$(w'')^2 = \mathbf{q}^T [\mathbf{B}''^T]^T [\mathbf{B}'']\mathbf{q}, \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \int_0^l EJ_Z (w'')^2 dx \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{q}^T EJ_Z \int_0^l [\mathbf{B}''^T]^T [\mathbf{B}''] dx \mathbf{q} \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_L \mathbf{q}, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{k}_L = EJ_Z \int_0^l [\mathbf{B}''^T]^T [\mathbf{B}''] dx, \quad (3.14)$$

otrzymujemy macierz sztywności przy zginaniu w postaci:

$$\mathbf{k}_L = EJ_Z \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix}, \quad (3.15a)$$

związaną z siłami wewnętrznymi zgodnie z zależnością:

$$\begin{bmatrix} T_{Y,i} \\ M_{Z,i} \\ T_{Y,k} \\ M_{Z,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{11}] & [\mathbf{k}_{12}] \\ \text{sym.} & [\mathbf{k}_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{Y,i} \\ \varphi_{Z,i} \\ w_{Y,k} \\ \varphi_{Z,k} \end{bmatrix}, \quad (3.15b)$$

gdzie $\begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{11}] & [\mathbf{k}_{12}] \\ \text{sym.} & [\mathbf{k}_{22}] \end{bmatrix} = \mathbf{k}_L$.

3.1.1.2. Skręcanie skrępowane

Wyznaczamy dla wyciętego elementu cienkościennego ik , o bisymetrycznym przekroju otwartym, kąt skręcenia $\theta(x)$ ze znanego równia różniczkowego skręcania skrępowanego (2.34):

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} - k^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} = 0, \quad (3.16)$$

w którym $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$ jest współczynnikiem zanikania. Rozwiązanie ogólne równania (3.16) ma postać:

$$\theta(x) = (e^{kx}/k^2)\bar{C}_1 + (e^{-kx}/k^2)\bar{C}_2 + xC_3 + C_4. \quad (3.17)$$

Przekształcając funkcję z postaci wykładniczej w hiperboliczną, przyjmując nowe zmienne C_1 i C_2 zamiast $(\bar{C}_1 + \bar{C}_2)/k^2$, $(\bar{C}_1 - \bar{C}_2)/k^2$ otrzymamy ostateczną formę równia kąta skręcenia:

$$\theta(x) = \cosh(kx) \cdot C_1 + \sinh(kx) \cdot C_2 + x \cdot C_3 + C_4. \quad (3.18)$$

Podstawiając warunki brzegowe (3.19) na obu końcach pręta ik do (3.18):

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_i, \quad \theta' = \theta'_i \quad \text{dla } x = 0, \\ \theta &= \theta_k, \quad \theta' = \theta'_k \quad \text{dla } x = l, \end{aligned} \quad (3.19)$$

otrzymamy stałe:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{k(\theta'_k \cdot l + \theta_i - \theta_k) - k(\theta'_i \cdot l + \theta_i - \theta_k) \cosh(kl) + (\theta'_i - \theta'_k) \sinh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]}, \\ C_2 &= \frac{(-\theta'_i + \theta'_k)[-1 + \cosh(kl)] + k(\theta'_i \cdot l + \theta_i - \theta_k) \sinh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]}, \\ C_3 &= -\frac{k(\theta_i - \theta_k) \cosh(kl/2) + (\theta'_i + \theta'_k) \sinh(kl/2)}{kl \cosh(kl/2) - 2 \sinh(kl/2)}, \\ C_4 &= \frac{k(-\theta'_k \cdot l + \theta_i + \theta_k) - k(-\theta'_i \cdot l + \theta_i + \theta_k) \cosh(kl) + (-\theta'_i + \theta'_k + k^2 \cdot l \cdot \theta_i) \sinh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Zapisując równie kąta skręcenia pręta w postaci macierzowej:

$$\theta(x) = \Phi^T \mathbf{C} \mathbf{q}, \quad (3.21)$$

dla której Φ^T i \mathbf{q} to wektory postaci:

$$\Phi^T = \{\cosh(kx), \sinh(kx), x, 1\}, \quad (3.22)$$

$$\mathbf{q}^T = \{\theta_i, \theta'_i, \theta_k, \theta'_k\}, \quad (3.23)$$

a macierz \mathbf{C} (3.24) jest macierzą współczynników zależnych od współczynnika zanikania k oraz długości pręta l :

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c|c} \frac{k - k \cosh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]} & \frac{-kl \cosh(kl) + \sinh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]} \\ \hline \frac{\sinh(kl)}{2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)} & \frac{1 - \cosh(kl) + kl \sinh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]} \\ \hline \frac{k \cosh(kl/2)}{kl \cosh(kl/2) - 2 \sinh(kl/2)} & \frac{\sinh(kl/2)}{[kl \cosh(kl/2) - 2 \sinh(kl/2)]} \\ \hline \frac{k - k \cosh(kl) + k^2 l \sinh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]} & \frac{kl \cosh(kl) - \sinh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]} \end{array} \right] \dots$$

$$\dots \left[\begin{array}{c|c} \frac{-k + k \cosh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]} & \frac{kl - \sinh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]} \\ \hline \frac{\sinh(kl)}{2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)} & \frac{-1 + \cosh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]} \\ \hline \frac{k \cosh(kl/2)}{kl \cosh(kl/2) - 2 \sinh(kl/2)} & \frac{\sinh(kl/2)}{[kl \cosh(kl/2) - 2 \sinh(kl/2)]} \\ \hline \frac{k - k \cosh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]} & \frac{-kl + \sinh(kl)}{k[2 - 2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)]} \end{array} \right] \quad (3.24)$$

Pamiętając (3.2), iż energia sprężysta sił wewnętrznych przy skręcaniu dana jest równaniem:

$$U = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^l [EJ_\omega (\theta'')^2 + GJ_d (\theta')^2] dx \right\}, \quad (3.25)$$

możemy zapisać ją w postaci:

$$U = \frac{1}{2} \left\{ EJ_\omega \int_0^l [(\theta'')^2 + k^2 (\theta')^2] dx \right\}. \quad (3.26)$$

Podstawiając do zależności (3.26), wyprowadzone wcześniej, równanie kąta skręcenia w postaci macierzowej (3.21); otrzymamy:

$$\frac{1}{2} \left\{ \mathbf{q}^T EJ_\omega \int_0^l [(\mathbf{C}^T \Phi'')^T (\Phi'')^T \mathbf{C} + k^2 (\mathbf{C}^T \Phi')^T (\Phi')^T \mathbf{C}] dx \mathbf{q} \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_L \mathbf{q}. \quad (3.27)$$

Na mocy twierdzenia Castigliano wiemy, że pochodna liniowej części energii sprężystej względem wektora przemieszczeń węzłowych \mathbf{q} odpowiada wektorowi sił węzłowych $\mathbf{f}^T = \{M_{s_i}, B_i, M_{s_k}, B_k\}$:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k}_L \mathbf{q} \right) = \mathbf{k}_L \mathbf{q} = \mathbf{f}, \quad (3.28)$$

gdzie M_{s_i} , M_{s_k} oznaczają odpowiednio momenty skręcające w węzłach i , k , a przez B_i oraz B_k oznaczono bimomenty w tych samych węzłach.

Ostatecznie możemy zapisać:

$$\mathbf{k}_L = EJ_\omega \int_0^l [(\mathbf{C}^T \Phi'')(\Phi'')^T \mathbf{C} + k^2 (\mathbf{C}^T \Phi')(\Phi')^T \mathbf{C}] dx, \quad (3.29)$$

otrzymamy tym samym macierz sztywności przy zginaniu postaci:

$$\mathbf{k}_L = EJ_\omega \begin{bmatrix} \frac{k^3}{kl-2 \operatorname{tgh}(kl/2)} & \frac{k^2}{-2+kl \operatorname{ctgh}(kl/2)} \\ \frac{k^2}{-2+kl \operatorname{ctgh}(kl/2)} & \frac{k[kl \cosh(kl) - \sinh(kl)]}{2-2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)} \\ \frac{-k^3}{kl-2 \operatorname{tgh}(kl/2)} & \frac{k^2}{2-kl^2 \operatorname{ctgh}(kl/2)} \\ \frac{k^2}{-2+kl \operatorname{ctgh}(kl/2)} & \frac{k[-kl + \sinh(kl)]}{2-2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)} \\ \dots & \dots \end{bmatrix} \dots \quad (3.30a)$$

$$\dots \begin{bmatrix} \frac{-k^3}{kl-2 \operatorname{tgh}(kl/2)} & \frac{k^2}{-2+kl \operatorname{ctgh}(kl/2)} \\ \frac{k^2}{2-kl^2 \operatorname{ctgh}(kl/2)} & \frac{k[-kl + \sinh(kl)]}{2-2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)} \\ \dots & \dots \\ \frac{k^3}{kl-2 \operatorname{tgh}(kl/2)} & \frac{k^2}{2-kl^2 \operatorname{ctgh}(kl/2)} \\ \frac{k^2}{2-kl^2 \operatorname{ctgh}(kl/2)} & \frac{k[kl \cosh(kl) - \sinh(kl)]}{2-2 \cosh(kl) + kl \sinh(kl)} \end{bmatrix}, \quad (3.30a)$$

związaną z siłami wewnętrznymi zgodnie z zależnością:

$$\begin{bmatrix} M_{S,i} \\ B_i \\ M_{S,k} \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{11}] & [\mathbf{k}_{12}] \\ \text{sym.} & [\mathbf{k}_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{X,i} \\ \theta'_i \\ \theta_{X,k} \\ \theta'_k \end{bmatrix}, \quad (3.30b)$$

gdzie $\begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{11}] & [\mathbf{k}_{12}] \\ \text{sym.} & [\mathbf{k}_{22}] \end{bmatrix} = \mathbf{k}_L$.

Rozwijając występujące w zależności (3.30a) funkcje hiperboliczne w szeregi potęgowe (ze względu na wrażliwość numeryczną funkcji hiperbolicznych), otrzymamy zależności na poszczególne elementy macierzy sztywności, w której w pierwszym przybliżeniu weźmie-

my pod uwagę tylko składniki zawierające co najwyżej czynniki, w których współczynnik zanikania k występuje w drugiej potędze:

$$\mathbf{k}_{2L} = EJ_{\omega} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} + \frac{6k^2}{5l} & \frac{6}{l^2} + \frac{k^2}{10} & -\frac{12}{l^3} - \frac{6k^2}{5l} & \frac{6}{l^2} + \frac{k^2}{10} \\ \frac{6}{l^2} + \frac{k^2}{10} & \frac{4}{l} + \frac{2k^2l}{15} & -\frac{6}{l^2} - \frac{k^2}{10} & \frac{2}{l} - \frac{k^2l}{30} \\ -\frac{12}{l^3} - \frac{6k^2}{5l} & -\frac{6}{l^2} - \frac{k^2}{10} & \frac{12}{l^3} + \frac{6k^2}{5l} & -\frac{6}{l^2} - \frac{k^2}{10} \\ \frac{6}{l^2} + \frac{k^2}{10} & \frac{2}{l} - \frac{k^2l}{30} & -\frac{6}{l^2} - \frac{k^2}{10} & \frac{4}{l} + \frac{2k^2l}{15} \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Otrzymana macierz (3.31) odpowiada macierzy wyprowadzonej przez Barsouma i Gallagera [32], Meeka i Swannella [28], Szymczaka [29].

Pełna postać macierzy sztywności elementu cienkościennego z wykorzystaniem macierzy (3.31) ma postać:

$$\mathbf{K}_{2L} = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{11}] & [\mathbf{k}_{12}] \\ sym. & [\mathbf{k}_{22}] \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

gdzie poszczególne elementy przyjmują formułę:

$$[\mathbf{k}_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_{\omega} + 6GJ_d}{l^3} + \frac{6GJ_d}{5l} & 0 & \frac{6EJ_{\omega} + GJ_d}{l^2} + \frac{GJ_d}{10} \\ \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_z}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_{\omega} + GJ_d}{l^2} + \frac{GJ_d}{10} & 0 & \frac{4EJ_{\omega} + 2IGJ_d}{l} + \frac{2IGJ_d}{15} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{k}_{12}] = \begin{bmatrix} -\frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_{\omega} - 6GJ_d}{l^3} - \frac{6GJ_d}{5l} & 0 & \frac{6EJ_{\omega} + GJ_d}{l^2} + \frac{GJ_d}{10} \\ -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_z}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ_{\omega} - GJ_d}{l^2} - \frac{GJ_d}{10} & 0 & \frac{2EJ_{\omega} - IGJ_d}{l} - \frac{IGJ_d}{30} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{k}_{21}] = \begin{bmatrix} -\frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_\omega - 6GJ_d}{l^3} - \frac{6GJ_d}{5l} & 0 & -\frac{6EJ_\omega - GJ_d}{l^2} - \frac{GJ_d}{10} \\ \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_z}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_\omega + GJ_d}{l^2} + \frac{GJ_d}{10} & 0 & \frac{2EJ_\omega - lGJ_d}{l} - \frac{lGJ_d}{30} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{k}_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_\omega + 6GJ_d}{l^3} + \frac{6GJ_d}{5l} & 0 & -\frac{6EJ_\omega - GJ_d}{l^2} - \frac{GJ_d}{10} \\ -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_z}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ_\omega - GJ_d}{l^2} - \frac{GJ_d}{10} & 0 & \frac{4EJ_\omega}{l} + \frac{2lGJ_d}{15} \end{bmatrix},$$

a jej związek z siłami wewnętrznymi jest zgodny z zależnością:

$$\begin{bmatrix} T_{Y,i} \\ M_{S,i} \\ M_{Z,i} \\ B_i \\ T_{Y,k} \\ M_{S,k} \\ M_{Z,k} \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{11}] & [\mathbf{k}_{12}] \\ \text{sym.} & [\mathbf{k}_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{Y,i} \\ \theta_{X,i} \\ \varphi_{Z,i} \\ \theta'_i \\ w_{Y,k} \\ \theta_{X,k} \\ \varphi_{Z,k} \\ \theta'_k \end{bmatrix}. \quad (3.33)$$

Element opisany układem (3.32) będzie dalej w pracy nazywany elementem typu k2 i oznaczany – Ele. k2.

W pracy rozważono ponadto aproksymacje potęgową, o dwa rzędy wyższą od poprzedniej (3.31), w której uwzględniono także składniki, w których współczynnik zanikania k występuje maksymalnie w czwartej potędze:

$$\mathbf{k}_{4L} = EJ_{\omega} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} + \frac{6k^2}{5l} - \frac{lk^4}{700} & \frac{6}{l^2} + \frac{k^2}{10} - \frac{l^2k^4}{1400} & -\frac{12}{l^3} - \frac{6k^2}{5l} + \frac{lk^4}{700} & \frac{6}{l^2} + \frac{k^2}{10} - \frac{l^2k^4}{1400} \\ \frac{6}{l^2} + \frac{k^2}{10} - \frac{l^2k^4}{1400} & \frac{4}{l} + \frac{2k^2l}{15} - \frac{11l^3k^4}{6300} & -\frac{6}{l^2} - \frac{k^2}{10} + \frac{l^2k^4}{1400} & \frac{2}{l} - \frac{k^2l}{30} + \frac{13l^3k^4}{12600} \\ -\frac{12}{l^3} - \frac{6k^2}{5l} + \frac{lk^4}{700} & -\frac{6}{l^2} - \frac{k^2}{10} + \frac{l^2k^4}{1400} & \frac{12}{l^3} + \frac{6k^2}{5l} - \frac{lk^4}{700} & -\frac{6}{l^2} - \frac{k^2}{10} + \frac{l^2k^4}{1400} \\ \frac{6}{l^2} + \frac{k^2}{10} - \frac{l^2k^4}{1400} & \frac{2}{l} - \frac{k^2l}{30} + \frac{13l^3k^4}{12600} & -\frac{6}{l^2} - \frac{k^2}{10} + \frac{l^2k^4}{1400} & \frac{4}{l} + \frac{2k^2l}{15} - \frac{11l^3k^4}{6300} \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Pełna postać macierzy sztywności elementu cienkościennego z wykorzystaniem macierzy (3.34) jest zatem postaci:

$$\mathbf{K}_{4L} = \begin{bmatrix} [\mathbf{k}_{11}] & [\mathbf{k}_{12}] \\ \text{sym.} & [\mathbf{k}_{22}] \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

gdzie poszczególne elementy przyjmują formułę:

$$[\mathbf{k}_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_{\omega}}{l^3} + \frac{6GJ_d}{5l} - \frac{l(GJ_d)^2}{700EJ_{\omega}} & 0 & \frac{6EJ_{\omega}}{l^2} + \frac{GJ_d}{10} - \frac{l^2(GJ_d)^2}{1400EJ_{\omega}} \\ \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_z}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_{\omega}}{l^2} + \frac{GJ_d}{10} - \frac{l^2(GJ_d)^2}{1400EJ_{\omega}} & 0 & \frac{4EJ_{\omega}}{l} + \frac{2lGJ_d}{15} - \frac{11l^3(GJ_d)^2}{6300EJ_{\omega}} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{k}_{12}] = \begin{bmatrix} -\frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_{\omega}}{l^3} - \frac{6GJ_d}{5l} + \frac{l(GJ_d)^2}{700EJ_{\omega}} & 0 & \frac{6EJ_{\omega}}{l^2} + \frac{GJ_d}{10} - \frac{l^2(GJ_d)^2}{1400EJ_{\omega}} \\ -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_z}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ_{\omega}}{l^2} - \frac{GJ_d}{10} + \frac{l^2(GJ_d)^2}{1400EJ_{\omega}} & 0 & \frac{2EJ_{\omega}}{l} - \frac{lGJ_d}{30} + \frac{13l^3(GJ_d)^2}{12600EJ_{\omega}} \end{bmatrix},$$

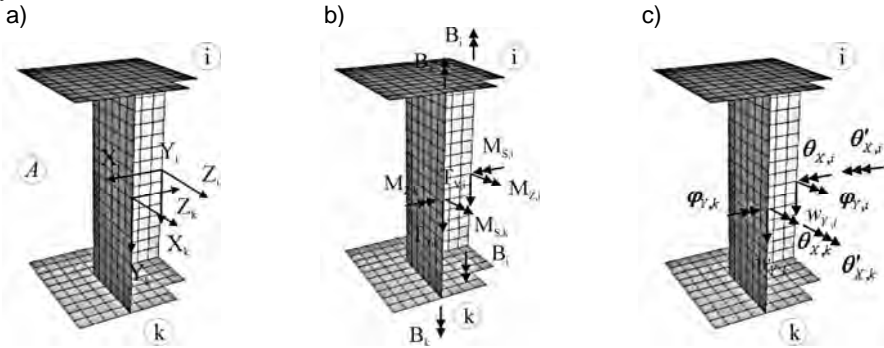
$$[\mathbf{k}_{21}] = \begin{bmatrix} -\frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_{\omega}}{l^3} - \frac{6GJ_d}{5l} + \frac{l(GJ_d)^2}{700EJ_{\omega}} & 0 & -\frac{6EJ_{\omega}}{l^2} - \frac{GJ_d}{10} + \frac{l^2(GJ_d)^2}{1400EJ_{\omega}} \\ \frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_z}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_{\omega}}{l^2} + \frac{GJ_d}{10} - \frac{l^2(GJ_d)^2}{1400EJ_{\omega}} & 0 & \frac{2EJ_{\omega}}{l} - \frac{lGJ_d}{30} + \frac{13l^3(GJ_d)^2}{12600EJ_{\omega}} \end{bmatrix},$$

$$[\mathbf{k}_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ_z}{l^3} & 0 & -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_\omega + 6GJ_d}{l^3} - \frac{l(GJ_d)^2}{700EJ_\omega} & 0 & -\frac{6EJ_\omega}{l^2} - \frac{GJ_d}{10} + \frac{l^2(GJ_d)^2}{1400EJ_\omega} \\ -\frac{6EJ_z}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_z}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ_\omega}{l^2} - \frac{GJ_d}{10} + \frac{l^2(GJ_d)^2}{1400EJ_\omega} & 0 & \frac{4EJ_\omega}{l} + \frac{2lGJ_d}{15} - \frac{11l^3(GJ_d)^2}{6300EJ_\omega} \end{bmatrix}$$

Związek macierzy (3.35) z siłami wewnętrznymi jest zgodny z (3.33). Element opisany układem (3.35) będzie dalej w pracy nazywany elementem typu k4 i oznaczany – Ele. k4.

3.1.2. Macierz sztywności superelementu

Macierz sztywności superelementu wyznaczono, stosując metodę wymuszeń jednostkowych.



Rys. 3.4 Superelement węzła z 8 stopniami swobody: a) układy współrzędnych, b) dodatnie zwroty momentów zginających, skręcających i bimomentów, c) przyjęte dodatnie zwroty kątów zginania, skręcania oraz spaczni

Rozpatrzmy przykładowo nieobciążony superelement A (rys. 3.4), wyizolowany ze schematu podstawowego (rys. 3.2), w którym to superelemente na wszystkie składowe wektora przemieszczeń:

$$\mathbf{q}_A = [w_{Y,i}, \theta_{X,i}, \varphi_{Z,i}, \theta'_{X,i}, w_{Y,k}, \theta_{X,k}, \varphi_{Z,k}, \theta'_{X,k}]^T, \quad (3.36)$$

na każdym z końców i, k , nakładamy kolejno więzy i wymuszenia kinematyczne:

- 1) wymuszenie jednostkowe $w_Y = 1$, blokując wszystkie przemieszczenia i obroty, oprócz przemieszczeń wzdłuż osi pionowej w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, (rys. 3.9),
- 2) wymuszenie jednostkowe $\theta_X = 1$, blokując wszystkie przemieszczenia i obroty, oprócz przemieszczeń wzdłuż osi pionowej i poziomej w płaszczyźnie przekroju poprzecznego oraz kąta obrotu na kierunku prostopadłym do przekroju poprzecznego (rys. 3.10),
- 3) wymuszenie jednostkowe $\varphi_Z = 1$, blokując wszystkie przemieszczenia i obroty, oprócz przemieszczeń wzdłuż osi prostopadłej do płaszczyzny przekroju poprzecznego oraz kąta obrotu na kierunku równoległy do przekroju poprzecznego wzdłuż osi poziomej (rys. 3.11),

4) wymuszenie jednostkowe $\theta' = 1$, blokując wszystkie przemieszczenia i obroty, oprócz przemieszczeń wzdłuż osi prostopadłej do płaszczyzny przekroju poprzecznego oraz kąta obrotu na kierunku równoległy do przekroju poprzecznego, wzdłuż osi pionowej (rys. 3.12),

przy braku deformacji przekroju poprzecznego zgodnie z hipotezą I.

W przypadku pierwszym (rys. 3.9) wymuszenie przemieszczeń jednostkowych $w_Y = 1$, zostało zrealizowane wzdłuż osi pionowej, zgodnie z dodatnim kierunkiem osi.

W przypadku drugim (skręcanie przekroju poprzecznego o kąt $\theta_x = 1$) (rys. 3.10), wymuszono obrót, względem osi prostopadłej do przekroju poprzecznego, zgodny z dodatnim zwrotem osi, który dla każdego z punktów przekroju, przyjmuje wartość równą 1.

Uwzględniono także, przemieszczenie przekroju poprzecznego w jego płaszczyźnie, opisanie przemieszczeniem punktu $A_0(0, y_0, z_0)$ do punktu $A(0, y, z)$, poprzez zmienne v i w :

$$\vec{r} = [0, v, w],$$

$$\vec{R} = [0, y_0, z_0] = [0, y, z],$$

$$R = \sqrt{y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{y^2 + z^2}.$$

Zgodnie z rysunkiem (rys. 3.5):

$$\begin{aligned} y_0 &= R \cos \alpha, & y &= R \cos(\alpha + \theta), \\ z_0 &= R \sin \alpha, & z &= R \sin(\alpha + \theta), \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} v &= y - y_0 = R \cos(\alpha + \theta) - R \cos \alpha, \\ w &= z - z_0 = R \sin(\alpha + \theta) - R \sin \alpha, \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \theta) &= \cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta, \\ \sin(\alpha + \theta) &= \sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta, \end{aligned} \quad (3.39)$$

otrzymano więc:

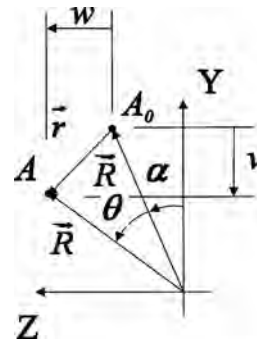
$$\begin{aligned} v &= R[\cos(\alpha + \theta) - \cos \alpha] = R[\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta - \cos \alpha], \\ w &= R[\sin(\alpha + \theta) - \sin \alpha] = R[\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta - \sin \alpha], \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} v &= y_0 \cos \theta - z_0 \sin \theta - y_0 = y_0(\cos \theta - 1) - z_0 \sin \theta, \\ w &= z_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta - z_0 = y_0 \sin \theta + z_0(\cos \theta - 1). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ostatecznie, zakładając małe obroty $\text{tg} \theta = \theta \rightarrow \cos \theta = 1$; $\sin \theta = \theta = 1$, poszukiwane przemieszczenia v i w można opisać następująco:

$$\begin{aligned} v &= -z_0, \\ w &= y_0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

W przypadku trzecim (zginanie przekroju poprzecznego $\varphi_z = 1$) (rys. 3.11), wymuszono kąt obrotu, względem osi poziomej, zgodny z dodatnim zwrotem osi, który dla każdego z punktów przekroju, przyjmuje wartość równą 1.



Rys. 3.5. Zachowanie punktu przekroju poprzecznego pręta – skręcanie

Uwzględniono także, przemieszczenia przekroju poprzecznego z jego płaszczyzny opisane przemieszczeniem punktu $A_0(0, y_0, z_0)$ do punktu $A(0, y, z)$, zgodnie z rysunkiem (rys. 3.6), przez wielkości u i v :

$$\begin{aligned} u &= x = R \sin \varphi, \\ v &= y - y_0 = R \cos \varphi - R = R(\cos \varphi - 1), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\vec{r} = [u, v, 0],$$

$$\vec{R} = [x_0, y_0, 0] = [x, y, 0],$$

$$R = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ostatecznie, zakładając małe obroty $\operatorname{tg} \varphi = \varphi \rightarrow \cos \varphi = 1$; $\sin \varphi = \varphi = 1$, poszukiwane przemieszczenia u i v można opisać następująco:

$$\begin{aligned} u &= y_0, \\ v &= 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

W przypadku czwartym (deplanacja przekroju poprzecznego $\theta' = 1$) (rys. 3.12),

$$\vec{r} = [u, 0, w],$$

$$\vec{R} = [x_0, 0, z_0] = [x, 0, z],$$

$$R = \sqrt{x_0^2 + z_0^2} = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

przemieszczenia półek przekroju poprzecznego z jego płaszczyzny opisane zostały przemieszczeniem punktu $A_0(0, y_0, z_0)$ do punktu $A(0, y, z)$, zgodnie z rysunkiem (rys. 3.7), przez wielkości u i w :

$$u = R \sin \gamma = z_0 \sin \gamma, \quad w = R(\cos \gamma - 1) = z_0(\cos \gamma - 1). \quad (3.45)$$

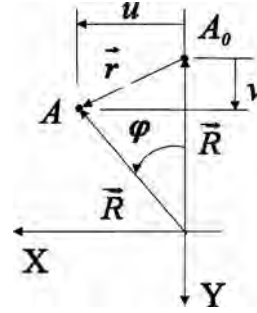
Ostatecznie, zakładając małe obroty $\operatorname{tg} \gamma = \gamma \rightarrow \cos \gamma = 1$; $\sin \gamma = \gamma = h$, (h - połowa wysokości przekroju) (rys. 3.8), otrzymamy:

$$\begin{aligned} u &= z_0 h, \\ w &= 0. \end{aligned} \quad (3.46)$$

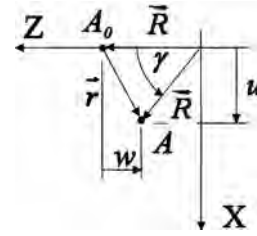
W trakcie obliczeń, przy określaniu wartości deplanacji (rys. 3.8, 3.12), należy pamiętać, że nie zależy ona tylko od kształtu przekroju poprzecznego, ale także od grubości ścianek. Funkcja opisująca deplanację ω jest sumą dwóch funkcji, deplanacji konturu $\bar{\omega}$ i deplanacji po grubości ścianek $\bar{\bar{\omega}}$:

$$\omega = \bar{\omega} + \bar{\bar{\omega}}. \quad (3.47)$$

Wielu autorów jednak, np. Timoshenko [59], definiuje ω jako deplanację konturu $\bar{\omega}$ ze względu na jej dominujący charakter.

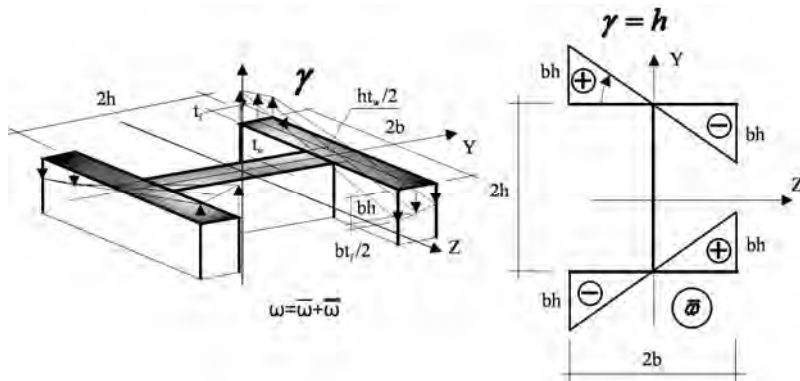


Rys. 3.6. Zachowanie punktu przekroju poprzecznego pręta – zginanie



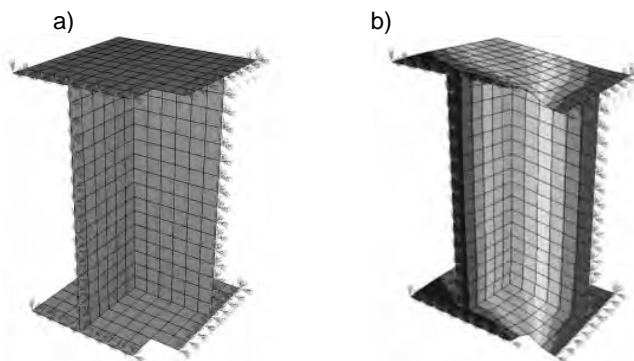
Rys. 3.7. Zachowanie punktu przekroju poprzecznego pręta – deplanacja

W przypadku przekroju dwuteowego dodanie wartości $\bar{\bar{\omega}}$ do $\bar{\omega}$ może zmienić całkowitą wartość deplanacji przekroju w max. 0 5% [60].

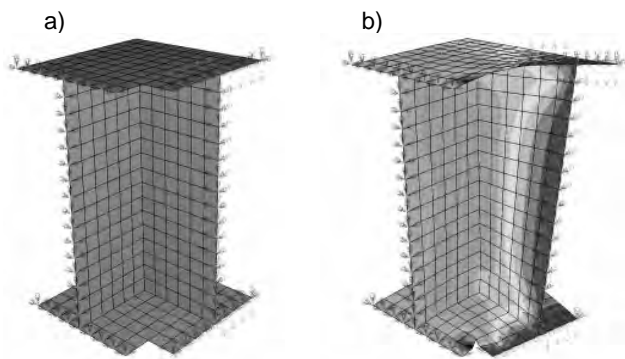


Rys. 3.8. Ideowy schemat deplanacji przekroju dwuteowego

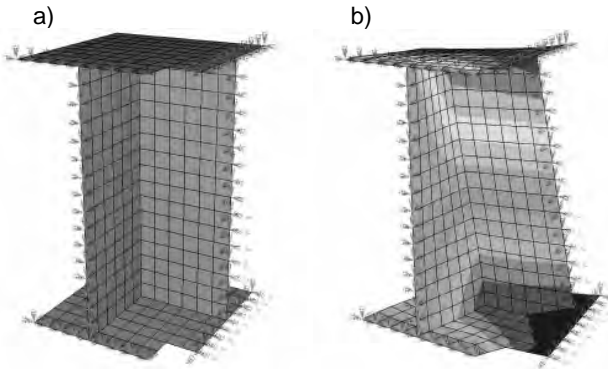
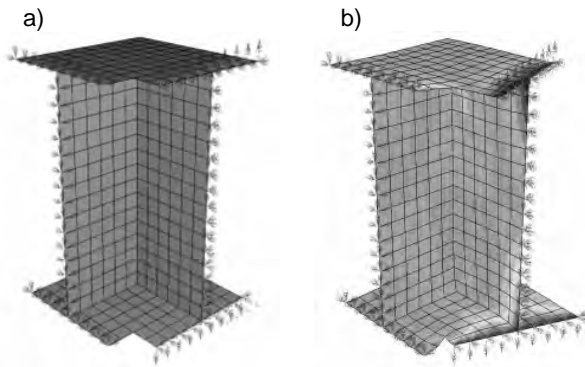
W pracy definiuje się deplanację ω za Timoszenko jako deplanację konturu $\bar{\omega}$.



Rys. 3.9. Wymuszenie jednostkowe $w_{y,i} = 1$



Rys. 3.10. Wymuszenie jednostkowe $\theta_{x,i} = 1$

Rys. 3.11. Wymuszenie jednostkowe $\varphi_{z,i} = 1$ Rys. 3.12. Wymuszenie jednostkowe $\theta'_i = 1$

Narzucone wymuszenia jednostkowe, w układzie 3D, powodują w przekrojach przywęzłowych i, k , pojawienie się sił reakcji. Wartości sił reakcji w przekrojach przywęzłowych układu 3D redukujemy kolejno do środka ciężkości i skręcania przekroju poprzecznego, otrzymując sprowadzony wektor sił wewnętrznych \mathbf{Q}_A . Powtarzając to rozumowanie dla każdego z węzłów i, k , określonych przez wektor \mathbf{q}_A (3.36), i korzystając z zasady superpozycji, możemy zapisać:

$$\mathbf{Q}_A = \mathbf{K}_A \mathbf{q}_A . \quad (3.48)$$

Poszczególne kolumny macierzy \mathbf{K}_A są siłami przywęzłowymi wywołanymi kolejnymi stanami jednostkowych przemieszczeń, końców elementu i, k .

Ostatecznie otrzymamy kwadratową macierz sztywności superelementu, symetryczną względem głównej przekątnej, o wielkości zależnej od liczby umownych przekrojów przywęzłowych określających superelement (w przypadku dwóch przekrojów przywęzłowych i, k będzie to macierz o wymiarze 8/8 elementów).

Macierz sztywności superelementu \mathbf{K}_A można wyznaczyć korzystając z dowolnego komercyjnego programu, z zastosowaniem MES (ABAQUS, NASTRAN itp.).

W pracy poddano analizie trzy rodziny superelementów węzłowych, łączących pręty o przekroju dwuteowym, opisując je dużymi literami alfabetu L, V, T. Oznaczenia literowe przyporządkowano na podstawie kształtu widoku z góry poszczególnych typów połączeń.

Dużymi literami alfabetu: A (węzeł bez usztywnień – rys. 3.13), B (usztywnienie po przekątnej połączenia – rys. 3.14), C (usztywnienia na przedłużeniu środników – rys. 3.15) określono rodzaj usztywnień węzłów. Przy każdym superelemencie węzła określono także wartość przyjętej do obliczeń długość współpracującej l_w (h_8 – tzn. jedna ósma wysokości przekroju poprzecznego h , tzn. $l_w = 0,125 h$) (patrz rozdział 3.1.4, 3.2.3).

W przypadku wszystkich superelementów węzłowych badanych w pracy ich macierz sztywności ma następującą postać ogólną:

$$\begin{bmatrix} T_{Y,i} \\ M_{S,i} \\ M_{Z,i} \\ B_i \\ T_{Y,k} \\ M_{S,k} \\ M_{Z,k} \\ B_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ & & & & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ & & & & & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ & & & & & & K_{77} & K_{78} \\ & & & & & & & K_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{Y,i} \\ \theta_{X,i} \\ \varphi_{Z,i} \\ \theta'_i \\ w_{Y,k} \\ \theta_{X,k} \\ \varphi_{Z,k} \\ \theta'_k \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

3.1.3. Wpływ konstrukcji węzła na rozkład bimomentów w przekrojach przywęzłowych

Rozkład bimomentów w węźle jest zależny od konstrukcji węzła, przy czym węzłem nazywamy miejsce przecięcia kilku prętów cienkościennych, charakteryzujących się stanem naprężenia odmiennym od zakładanego stanu dla elementów prętowych.

Na wartości bimomentów w przekrojach przywęzłowych konstrukcji rusztowych mają wpływ sztywności węzła na: ścianie, skręcanie, zginanie i spaczenie. Wpływ sztywności węzła na przekaz bimomentów, ze względu na wymienione powyżej wielkości, można określić w procentach, stosując współczynniki przekazu: B_w (przemieszczenie pionowe w), B_θ (kąt skręcenia θ), B_φ (kąt obrotu φ), B_ζ (deplanacja $\zeta = \theta'$), których wartości wyznacza się zgodnie z zależnościami (3.50), (3.51), (3.52), (3.53), na podstawie określonych składników macierzy sztywności superelementu węzła (3.49):

$$B_w = \frac{K_{14}}{K_{14} + K_{18}} \cdot 100\% = \frac{K_{54}}{K_{54} + K_{58}} \cdot 100\%, \quad (3.50)$$

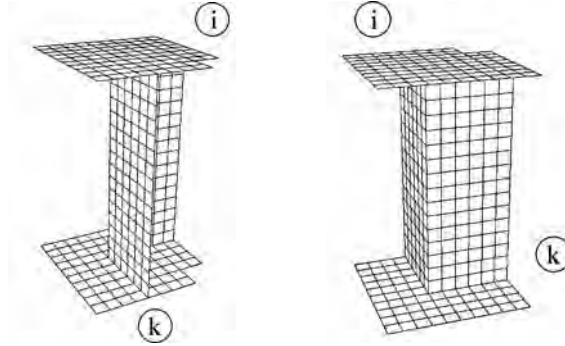
$$B_\theta = \frac{K_{24}}{K_{24} + K_{28}} \cdot 100\% = \frac{K_{64}}{K_{64} + K_{68}} \cdot 100\%, \quad (3.51)$$

$$B_\varphi = \frac{K_{34}}{K_{34} + K_{38}} \cdot 100\% = \frac{K_{74}}{K_{74} + K_{78}} \cdot 100\%, \quad (3.52)$$

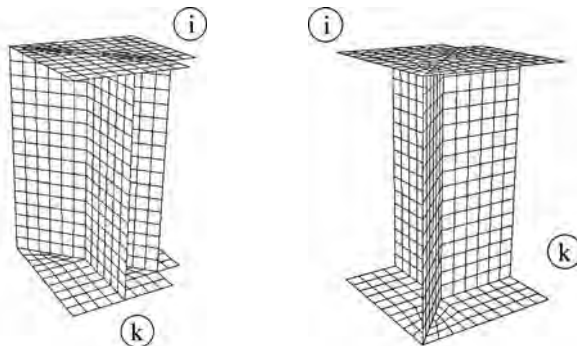
$$B_\zeta = \frac{K_{44}}{K_{44} + K_{48}} \cdot 100\% = \frac{K_{84}}{K_{84} + K_{88}} \cdot 100\%. \quad (3.53)$$

Interesujący nas wpływ poszczególnych sztywności na rozkład bimomentów w węźle można więc określać każdorazowo, na podstawie analizy macierzy sztywności superelementu konkretnego węzła.

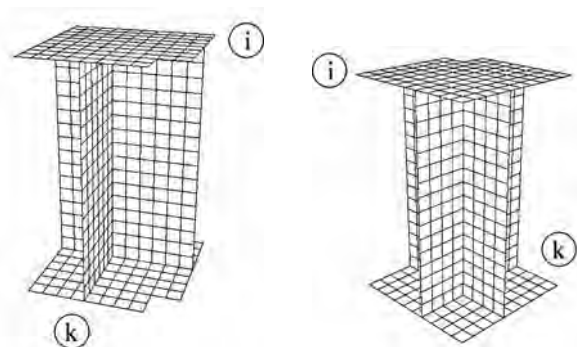
Wartości współczynników rozkładu bimomentu: B_w , B_θ , B_φ , B_ζ są wielkościami odpowiadającymi jednostkowym wymuszeniom, w postaci: przemieszczenia pionowego ($w = 1$), kąta skrzywienia ($\theta = 1$), kąta obrotu ($\varphi = 1$), i deplanacji ($\zeta = 1$) na końcu k . Przykładowe wartości tych współczynników w przypadku węzłów przedstawionych na rys. 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 zestawiono na rys. 3.17, 3.18, 3.19, 3.20



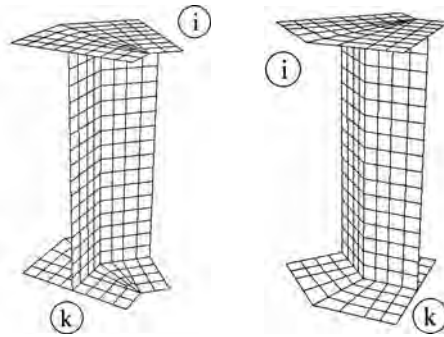
Rys. 3.13. Superelement węzła typu Lh8A



Rys. 3.14. Superelement węzła typu Lh8B



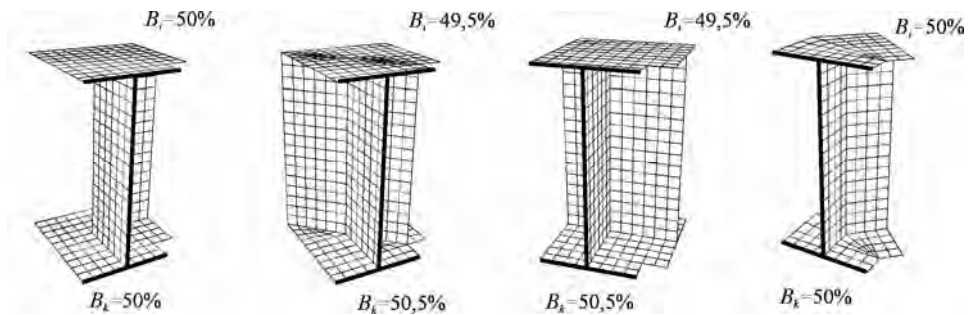
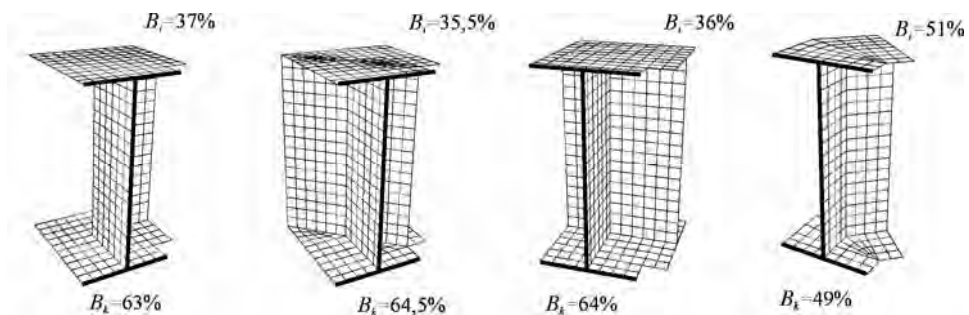
Rys. 3.15. Superelement węzła typu Lh8C

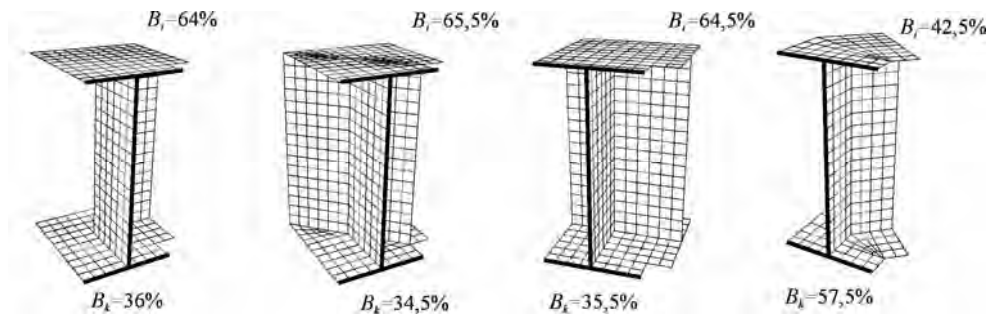
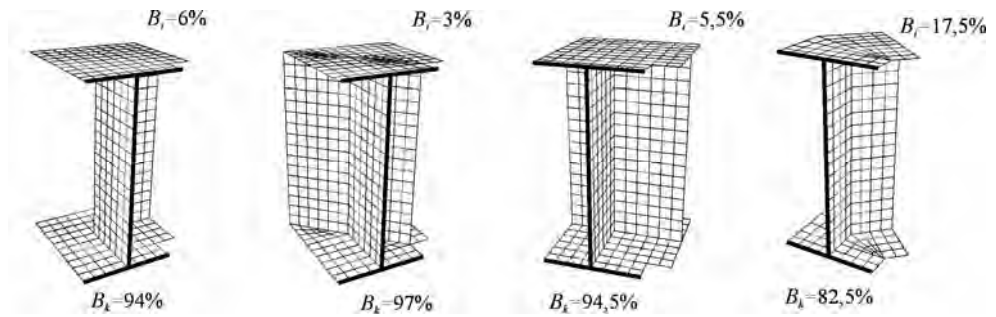


Rys. 3.16. Superelement węzła typu Vh8 135°

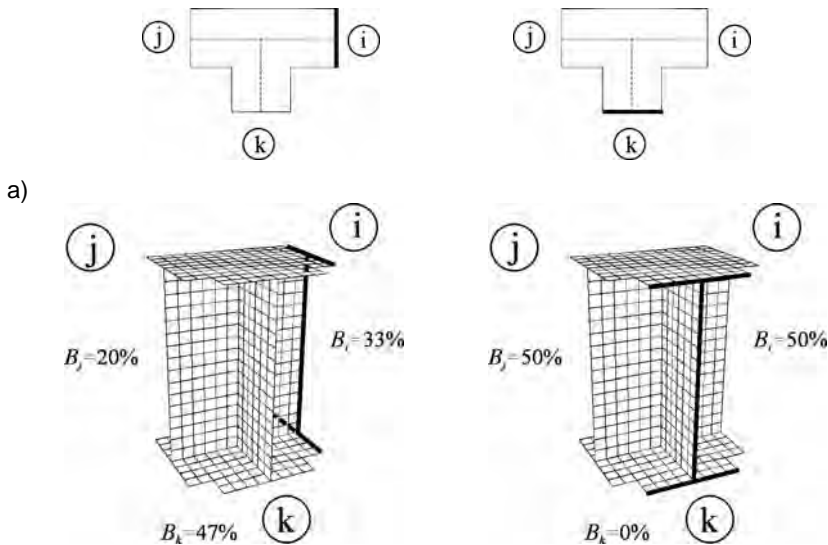
Jak wskazują wyniki, analizy węzłów typu: Lh8A, Lh8B, Lh8C, Vh8135, przedstawione na rys. 3.17, 3.18, 3.19, 3.20, struktura węzła (konstrukcja, geometria) ma znaczący wpływ na rozkład bimomentów w przekrojach przywęzłowych.

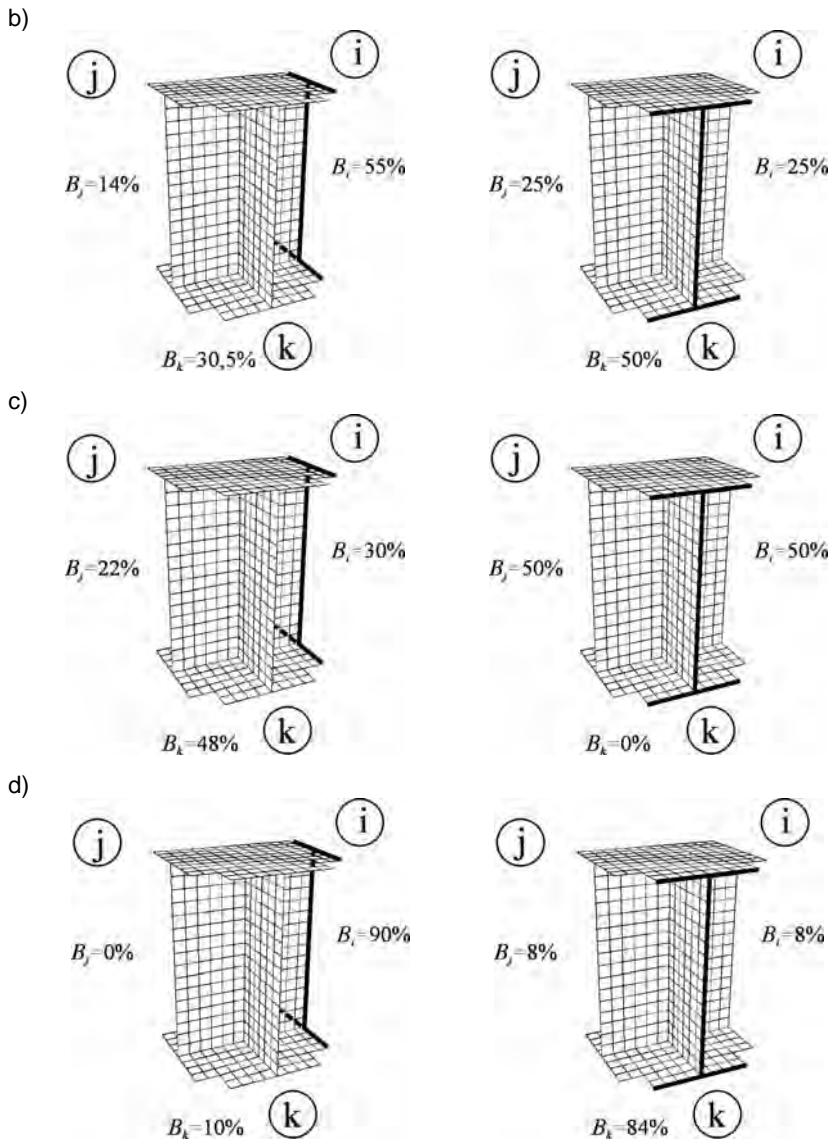
Największy wpływ na rozkład wartości bimomentu ma kąt przecięcia osi prętów (w badanych przypadkach kąt ten wynosi 90° lub 135°) (rys. 3.13, 3.16). Wraz ze wzrostem kąta przecięcia osi prętów (od 90° do 135°) zmienia się sztywność skrętna oraz sztywność na spaczenie węzła, a tym samym rozkład wartości bimomentu w przekrojach przywęzłowych. Jak wiadomo, struktura węzła wpływa także na pozostałe wielkości statyczne, takie jak: siły tnące, momenty skręcające czy momentu zginające. Zachowanie się rusztów zbudowanych z prętów cienkościennych o przekrojach bisymetrycznych otwartych zależy więc w istotny sposób od struktury węzłów.

Rys. 3.17. Rozkład bimomentu ze względu na przemieszczenia pionowe B_w Rys. 3.18. Rozkład bimomentu ze względu na kąt skręcenia B_θ

Rys. 3.19. Rozkład bimomentu ze względu na kąt obrotu B_φ Rys. 3.20. Rozkład bimomentu ze względu na spaczenie B_ζ

Wpływ na rozkład wartości bimomentu w przekrojach przywęzłowych ma także liczba prętów schodzących się w węzle (rys. 3.21).





Rys. 3.21. Superelement węzła typu Th8

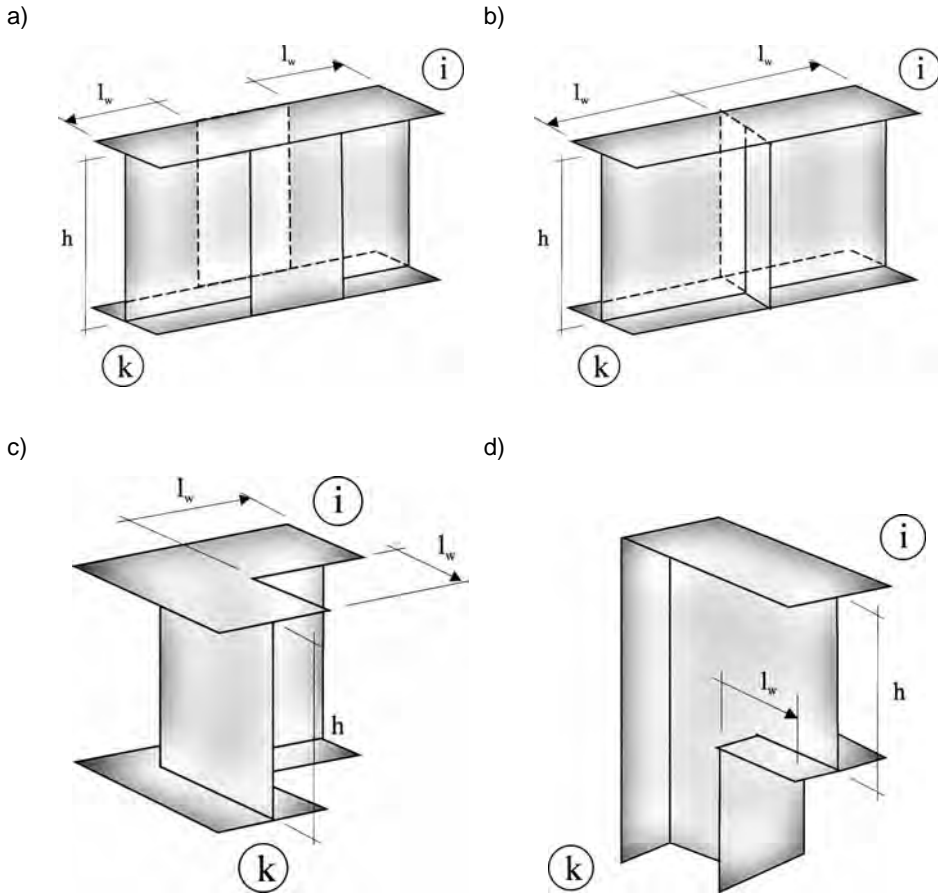
Współczynniki rozkładu bimomentu ze względu na wymuszenie w przekrojach i oraz k :

- a) przemieszczenie pionowe B_w , b) kąt skręcenia B_θ , c) kąt obrotu B_φ
d) spaczenie B_ζ

Podsumowując wyniki analizy numerycznej przedstawione na rys. 3.17–3.21, należy stwierdzić, że wpływ struktury węzła na rozkład wartości bimomentu w przekrojach przywęzłowych (co a ty idzie także naprężeń) jest znaczący. W trakcie analizy statycznej konstrukcji cienkościennych nie należy więc pomijać wpływu dodatkowych usztywnień występujących w samym węźle czy w bliskim jego sąsiedztwie.

3.1.4. Problem wpływu długości współpracującej na rozkład sił wewnętrznych w superelemencie

Stan naprężenia w węzłach konstrukcji cienkościennych, istotnie odbiega od typowego stanu prętowego. Obszar, w którym występują duże różnice w stanie naprężenia, pomiędzy węzłem a prętem, określony jest przez długość współpracującą elementu (superelementu) l_w (rys. 3.22). Wielkość superelementu jest ustalona przez przekroje przywęzłowe, których położenie wynika z przyjętej długości współpracującej.



Rys. 3.22. Superelement, długość współpracująca l_w

Długość współpracująca zależy od geometrii przekroju poprzecznego pręta dochodzącego do węzła, rodzaju konstrukcji (belka prosta wzmocniona przez przewiązki lub przepony, dźwigar załamany w planie, rama) oraz rodzaju obciążenia.

Dokładność analizy numerycznej jest ściśle związana z przyjętą długością współpracującą.

Dla każdego rodzaju superelementu przedstawionego na rys. 3.22, wartość charakterystycznej długości współpracującej można ustalić za pomocą analizy numerycznej dowolnych przypadków szczególnych (patrz rozdział 3.2.3).

Charakterystyczne długość współpracujące odpowiadające danemu rodzajowi elementu (rys. 3.22), wyznaczone w pracy, są wielkościami rekomendowanymi. Dla przykładu, jak podają autorzy pracy [1], w przypadku rodziny elementów przedstawionych na rys. 3.22d, powinna się ona zawierać w granicach $0,5h < l_w \leq h$.

3.1.5. Opis algorytmu numerycznego – model mieszany

Analiza numeryczna ustrojów zbudowanych z prętów (elementy 1D) i superelementów (elementy 3D) odbywa się według typowego algorytmu wykorzystywanego powszechnie w mechanice budowli.

Każdy ustrój w procesie dyskretyzacji dzielimy na: n elementów prętowych (zależnie od potrzeb) i superelementy (np. węzłowe) (rys. 3.2). Wyznaczone macierze sztywności poszczególnych elementów, łącznie z superelementami, zgodnie z wektorem alokacji \mathbf{A} (w którym uwzględniamy warunki brzegowe) agregujemy do globalnej macierzy sztywności układu \mathbf{K} . Tworzymy kolejno wektor obciążeń węzłowych \mathbf{Q} i rozwiązujemy znany układ równań podstawowych MES (3.54), tworzony w celu wyznaczenia globalnego wektora wartości przemieszczeń węzłowych \mathbf{q} :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{q} . \quad (3.54)$$

Kolejno wyznaczamy sił przywęzłowe \mathbf{Q}_A w poszczególnych elementach, w wyniku ekstrakcji wektora przemieszczeń węzłowych wybranego elementu \mathbf{q}_A , z wektora globalnego przemieszczeń węzłowych \mathbf{q} według wektora alokacji \mathbf{A} i wymnożenia wektora \mathbf{q}_A z odpowiadającą mu macierzą sztywności.

Do analizy numerycznej można wykorzystać dowolny interpreter macierzowy, np. dedykowany specjalnie zagadnieniom mechaniki budowli PRISM [61] lub inny (MATLAB, Scilab).

Przedstawiony algorytm był podstawą opracowania programu komputerowego TWGRID do analizy statycznej konstrukcji zbudowanych z prętów cienkościennych o bismetrycznych przekrojach otwartych, w postaci: belek, dźwigarów załamanych w palnie i rusztów. Krótki opis programu TWGRID wraz z faksymilacją tekstu źródłowego programu zamieszczono w załączniku 3 na końcu pracy [2].

3.2. Przykłady numeryczne

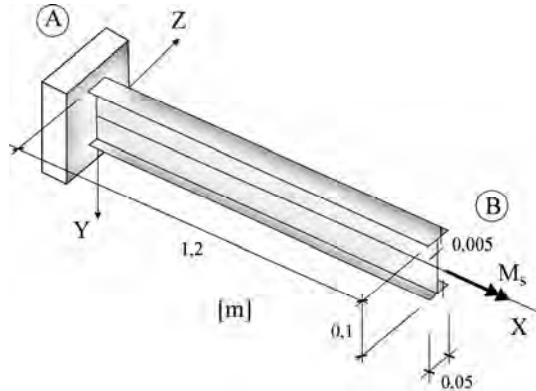
3.2.1. Przykład 1. Wspornik cienkościenny bez usztywnień

Weźmy pod uwagę wspornik wykonany z aluminium ($E = 70$ GPa, $\nu = 0,33$) o przekroju dwuteowym, obciążony momentem skręcającym na końcu swobodnym o wartości $M_S = 100$ Nm (rys. 3.23).

Przykład ma na celu analizę zbieżności elementów typu k2 i k4 oraz porównanie rozwiązania Vlasova z rozwiązaniami:

- 1) model przestrzenny - model 3D (ABAQUS ele. S4R) [58]
- 2) modele belkowe (1D - z superelementem bez usztywnień (rys. 3.27)):
 - a) typu S - w całości zbudowany z superelementów (rys. 3.25),
 - b) typu M - mieszany (superelement + Ele. k4) (rys. 3.26).

Dodatkowo przeanalizowano także wpływ liczby superelementów wykorzystywanych w budowie modelu typu S na zmianę wartości kąta skręcenia na długości wspornika.



Rys. 3.23. Model wspornika bez usztywnień

Rozwiązanie Vlasova

Rozwiązanie klasyczne Vlasova wykorzystuje równanie różniczkowe postaci (2.34):

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} - k^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} = f(x), \quad (3.55)$$

przy czym:

$$k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}, \quad f(x) = -\frac{m}{EJ_\omega}. \quad (3.56)$$

Rozwiązanie równania (3.55) ma postać:

$$\theta = \bar{\theta} + \bar{\bar{\theta}}, \quad (3.57)$$

w której:

$$\bar{\theta}(x) = \cosh(kx) \cdot C_1 + \sinh(kx) \cdot C_2 + x \cdot C_3 + C_4 \quad (3.58)$$

jest ogólnym rozwiązaniem równania jednorodnego:

$$\frac{d^4\theta}{dx^4} - k^2 \frac{d^2\theta}{dx^2} = 0, \quad (3.59)$$

a:

$$\bar{\bar{\theta}} = \int_0^x \bar{\theta}(x-t) f(t) dt \quad (3.60)$$

jest szczególnym rozwiązaniem równania niejednorodnego (3.55).

Zatem ogólnym rozwiązaniem równania będzie funkcja:

$$\theta(x) = \cosh(kx) \cdot C_1 + \sinh(kx) \cdot C_2 + x \cdot C_3 + C_4 + \int_0^x \bar{\theta}(x-t) f(x) dt. \quad (3.61)$$

Podstawiając za x zero, górna granica całkowania w składniku rozwiązania szczególnego (3.60) równa się dolnej, a wskutek tego:

$$\bar{\theta}(0) = \bar{\theta}'(0) = \bar{\theta}''(0) = \bar{\theta}'''(0) = 0. \quad (3.62)$$

Przy jednoczesnym różniczkowaniu funkcji (3.58) otrzymamy równanie:

$$\theta(0) = C_1 + C_4, \quad \theta'(0) = kC_2 + C_3, \quad \theta''(0) = k^2C_1, \quad \theta'''(0) = k^3C_2, \quad (3.63)$$

skąd wyznaczymy stałe C_1, C_2, C_3, C_4 :

$$C_1 = \frac{\theta''(0)}{k^2}, \quad C_2 = \frac{\theta'''(0)}{k^3}, \quad C_3 = \theta'(0) - \frac{\theta''(0)}{k^2}, \quad C_4 = \theta(0) - \frac{\theta''(0)}{k^2}. \quad (3.64)$$

Podstawiając wyznaczone stałe (3.64) do równania (3.58), otrzymamy:

$$\bar{\theta} = \theta(0) + \theta'(0) \cdot x + \frac{\theta''(0)}{k^2} [\cosh(kx) - 1] + \frac{\theta'''(0)}{k^3} [\sinh(kx) - kx]. \quad (3.65)$$

Przekształcając całkę ogólną postaci (3.65) i korzystając ze znanych związków:

$$\begin{aligned} M_x &= M_s + M_\omega = GJ_d \cdot \theta' - EJ_\omega \cdot \theta'' , \\ B &= -EJ_\omega \cdot \theta'' , \end{aligned} \quad (3.66)$$

przy $x = 0$ otrzymamy:

$$\theta''(0) = -\frac{B(0)}{EJ_\omega}, \quad \theta'''(0) = \frac{GJ_d \cdot \theta'(0) - M_s(0)}{EJ_\omega},$$

$$\bar{\theta}(x) = \theta(0) + \theta'(0) \frac{\sinh(kx)}{k} + \frac{B(0)}{GJ_d} [1 - \cosh(kx)] + \frac{M_s(0)}{kGJ_d} [kx - \sinh(kx)]. \quad (3.67)$$

W rozwiązaniu zamieszczono oprócz funkcji opisującej zmianę kąta skręcenia θ (3.68) także funkcję zmiany deplancji przekroju θ' (3.69) oraz zmiany bimomentu B (3.70) na długości wspornika. Wyprowadzenia pozostałych składników rozwiązania zostały świadomie w pracy pominięte.

W ogólnym przypadku, gdy mamy do czynienia z prostym prętem cienkościenny o przekroju otwartym, obciążonym skupionym momentem skręcającym M_s w przekroju $x = c$ i skupionym bimomentem B_d w przekroju $x = d$ oraz równomiernie rozłożonym momentem skręcającym o natężeniu m dla $x > a$, wyrażenia opisujące kąt skręcenia θ_x , deplancje θ'_x oraz bimoment B_x mają postać:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \theta_0 + \theta'_0 \frac{\sinh(kx)}{k} + \frac{B_0}{GJ_d} [1 - \cosh(kx)] + \frac{M_{s0}}{kGJ_d} [kx - \sinh(kx)] + \\ &+ \frac{M_{sc}}{kGJ_d} \{k(x-c) - \sinh[k(x-c)]\} - \frac{B_d}{GJ_d} \{ \cosh[k(x-d)] - 1 \} + \\ &+ \frac{m}{k^2 GJ_d} \left\{ \frac{k^2(x-a)^2}{2} - 1 - \cosh[k(x-a)] \right\}, \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \theta'_x = & \theta'_0 \cosh(kx) - \frac{B_0}{GJ_d} k \sinh(kx) + \frac{M_{s0}}{GJ_d} [1 - \cosh[kx]] + \\ & + \frac{M_{sc}}{GJ_d} \{1 - \cosh[k(x-c)]\} - \frac{B_d}{GJ_d} k \sinh[k(x-d)] + \\ & + \frac{m}{kGJ_d} \{k(x-a) - \sinh[k(x-a)]\}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} B_x = & -\frac{\theta'_0 GJ_d}{k} \sinh(kx) + B_0 \cosh(kx) + \frac{M_{s0}}{k} \sinh(kx) + \\ & + \frac{M_{sc}}{k} \sinh[k(x-c)] + B_d \cosh[k(x-d)] + \\ & + \frac{m}{k^2} \{ \cosh[k(x-a)] - 1 \} \end{aligned} \quad (3.70)$$

Podstawiając do zależności (3.68), (3.69), (3.70) warunki brzegowe (3.71), (3.72) postaci (rys. 3.23):

— dla końca utwierdzonego:

$$[\theta']_{x=0} = 0, \quad [\theta]_{x=0} = 0, \quad [M_S]_{x=0} = M, \quad (3.71)$$

— dla końca swobodnego, obciążonego momentem skręcającym:

$$[B]_{x=l} = 0, \quad [M_S]_{x=l} = M, \quad (3.72)$$

otrzymamy ostatecznie rozwiązanie Vlasova postawionego problemu postaci:

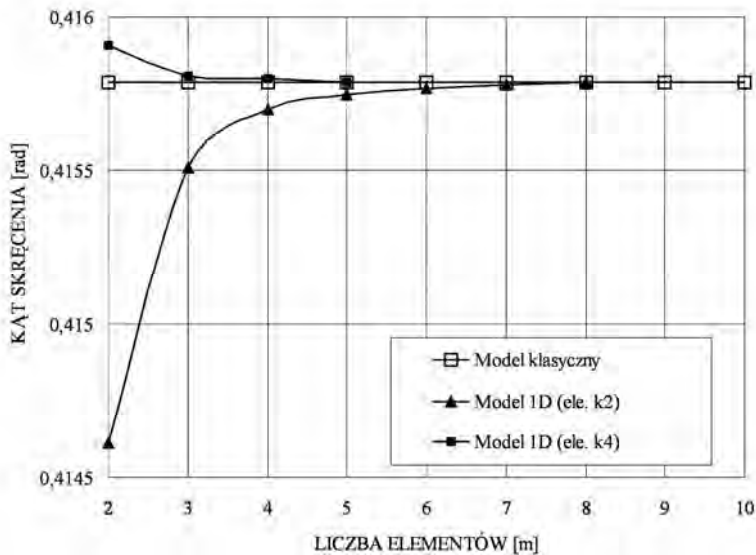
$$\begin{aligned} [\theta]_x = & \frac{M \{ kx - \sinh(kx) + [\cosh(kx) - 1] \tanh(kl) \}}{kGJ_d}, \\ [\theta']_x = & \frac{M [1 - \cosh(kx) + \sinh(kx) \tanh(kl)]}{GJ_d}, \\ [B]_x = & -\frac{M \sinh[k(l-x)]}{k \cosh(kl)}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Analiza zbieżności elementów k2 i k4

W przypadku układu przedstawionego na rys. 3.23, porównano ściśle rozwiązanie Vlasova z aproksymacjami typu k2 i k4. Analizowano zbieżność kątów skręcenia mierzonych w miejscu działania obciążenia, w zależności od liczby elementów układu. Wyniki analizy zamieszczono na rys. 3.24.

W przypadku elementu typu k2 uzyskano pełną zbieżność rozwiązania z rozwiązaniem ścisłym przy podziale na minimum 8 elementów. Przy czym rodzaj zbieżności „zbieżność od dołu” (lub „zbieżność z niedoborem”) sugeruje, iż zbyt rzadki podział spowoduje nieznaczny wzrost sztywności skrętnej całego układu. W przypadku elementu typu k4 wystarczającą zbieżność rozwiązań uzyskano już dla minimum 3 elementów. Przy czym trzeba zwrócić uwagę, iż będzie to „zbieżność od góry” (lub „zbieżność z nadmiarem”).

W dalszej części pracy, pręty modeluje się elementem typu k4 (Ele. k4), ze względu na ich szybszą zbieżność do wartości ścisłych.



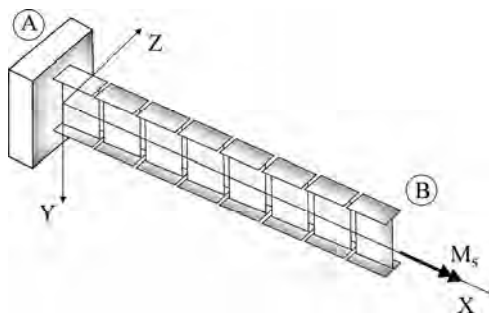
Rys. 3.24. Wykres kąta skręcenia mierzonego w przekroju B, w zależności od liczby elementów

Modele typu S i M

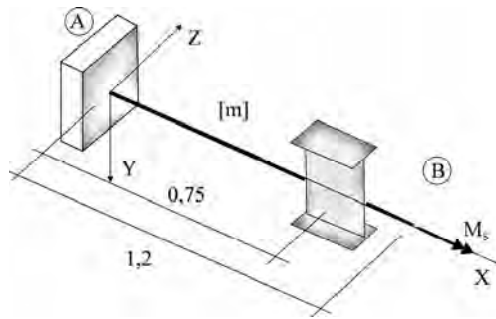
Do budowy obydwu typów modeli: S oraz M wykorzystano superelementy o postaci przedstawionej na rys. 3.27. W jednym i drugim przypadku rozważano superelementy belkowe o zmiennej długości, o wartościach: 15, 20, 30 cm.

Pierwsze trzy modele to modele, (rys. 3.25) zbudowane w całości z superelementów o zmiennej długości:

- 1) model S8(15) (8 superelementów belkowych o długość 15 cm),
- 2) model S6(20) (6 superelementów belkowych o długość 20 cm),
- 3) model S4(30) (4 superelementy belkowe o długość 30 cm).



Rys. 3.25. Model zbudowany w całości z superelementów belkowych bez usztywnień



Rys. 3.26. Model mieszany z superelementem belkowym bez usztywnień

Kolejne to modele mieszane (superelement belkowy bez usztywnień + Ele. k4) (rys. 3.26) o różnych długościach superelementów 15, 20 i 30 cm (rys. 3.27):

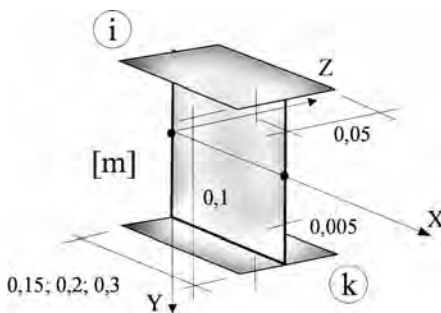
4) model mieszany M(15),

5) model mieszany M(20),

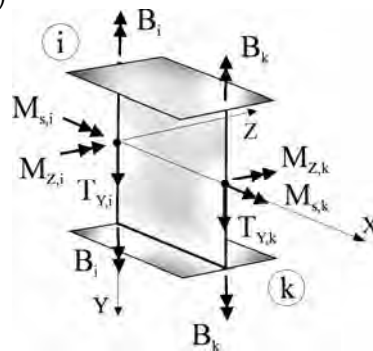
6) model mieszany M(30),

zbudowane z jednego superelementu i elementów typu k4 (3.34, 3.35). W każdym z modeli mieszanych odległość od środka superelementu do podpory wynosiła 75 cm (rys. 3.26).

a)



b)



Rys. 3.27 Superelement belkowy bez usztywnień

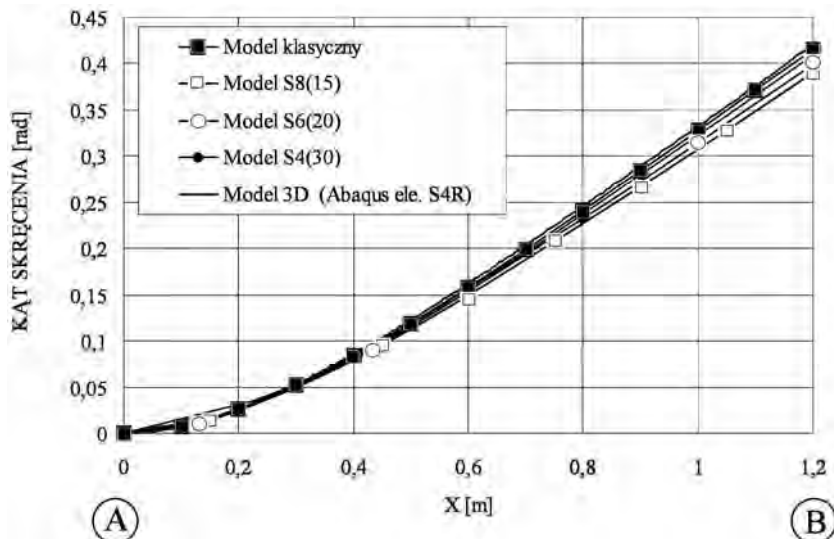
Wyniki analizy

Wyniki analizy przedstawiono na rysunkach 3.28 i 3.29. Na obydwu wykresach porównano zmiany kątów skręcenia na długości wspornika. W przypadku pierwszym (rys. 3.28) zestawiono wyniki dla modeli zbudowanych w całości z superelementów, w przypadku drugim (rys. 3.29) dla modeli mieszanych. Wyniki porównano z rozwiązaniem klasycznym Vlasova oraz modelem 3D (ABAQUS, ele.S4R) [58].

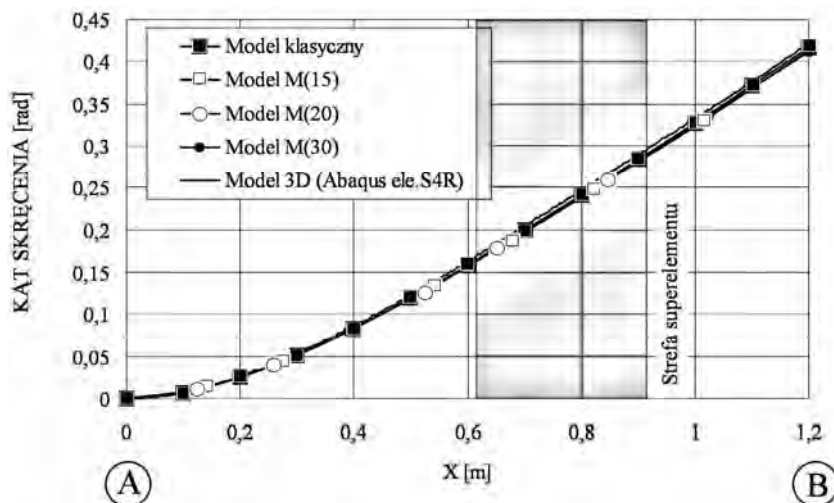
Zbieżność rozwiązania z rozwiązaniem klasycznym w przypadku modeli zbudowanych w całości z superelementów zależy od liczby superelementów. Wraz ze wzrostem długości elementów rośnie dokładność rozwiązania, co potwierdzają wyniki pokazane na rys. 3.28.

W przypadku modeli mieszanych (rys. 3.29) różnice pomiędzy poszczególnymi rozwiązaniami są nieznaczne, a tym samym wpływ długości superelementu na dokładność rozwiązania niewielki.

Na podstawie przeprowadzonej analizy zaleca się, by długość superelementu belkowego bez usztywnień (rys. 3.27), była większa lub równa co najmniej trzem wysokościom przekroju poprzecznego h tzn. $l_w \geq 3h$. Potwierdzają to wyniki przedstawione na rys. 3.28.



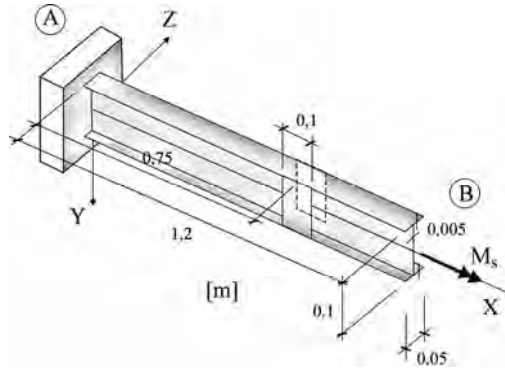
Rys. 3.28. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B, w przypadku modeli zbudowany w całości z superelementów, przy zmiennej długości superelementu: 15, 20, 30 cm i odpowiadającej jej liczbie superelementów: 8, 6, 4



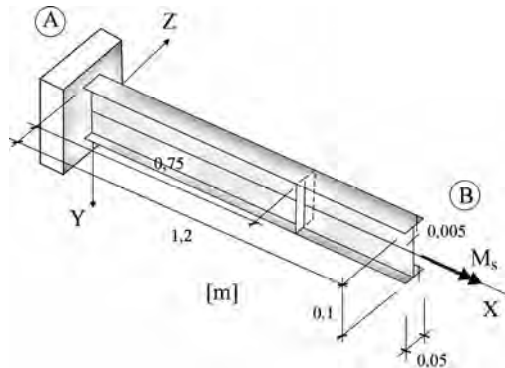
Rys. 3.29. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B, w przypadku modeli mieszanych, przy zmiennej długości superelementu: 15, 20, 30 cm

3.2.2. Przykład 2. Wspornik cienkościenny z usztywnieniami w postaci przewiązek lub przepony

Weźmy pod uwagę wspornik wykonany z aluminium ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0,33$) o przekroju dwuteowym, obciążony momentem skręcającym na końcu swobodnym o wartości $M_s = 100 \text{ Nm}$. W pierwszym przypadku (rys. 3.32) wzmocniony poprzez przewiązkę o stałej szerokości 10 cm i grubości 0,5 cm (umieszczoną po obu stronach przekroju), a w drugim (rys. 3.33) przez przeponę o grubości 0,5 cm (w całej pracy stosuje się przewiązki i przepony o tych samych smukłościach). W każdym z modeli odległość od środka superelementu do podpory wynosi 75 cm (rys. 3.30, 3.31).



Rys. 3.30. Model wspornika wzmocniony przez przewiązkę (szer. 0,1 m; grub. 0,005 m)



Rys. 3.31. Model wspornika wzmocniony przez przeponę (grub. 0,005 m)

Przykład ma na celu wyznaczenie charakterystycznej wartości długości współpracującej l_w (rys. 3.22a, b) w przypadku superelementów wzmocnionych usztywnieniami w postaci przewiązek i przepon (rys. 3.32, 3.33).

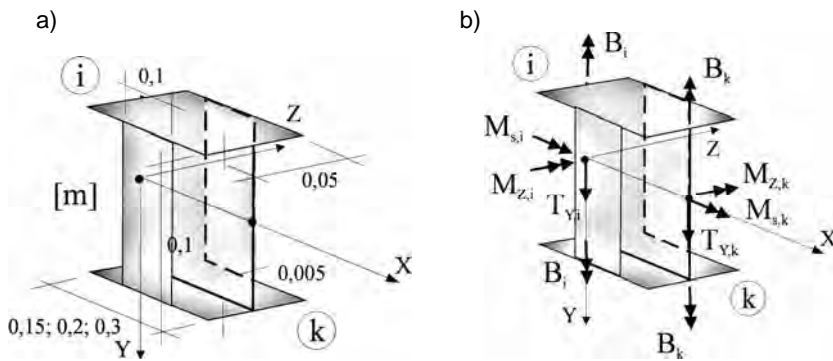
Wartość długości współpracującej wyznaczono na podstawie porównania zmiany kątów skręcenia pomiędzy modelem 3D (ABAQUS, ele. S4R) [58] a:

— w przypadku pierwszym (rys. 3.30)

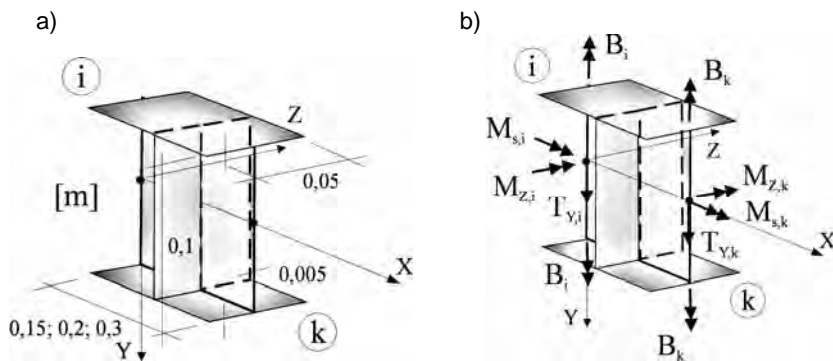
trzema modelami mieszanymi (superelement z przewiązką + Ele. k4) (rys. 3.32, 3.34) o różnych długościach superelementów 15, 20 i 30 cm:

1) model mieszany MPe(15),

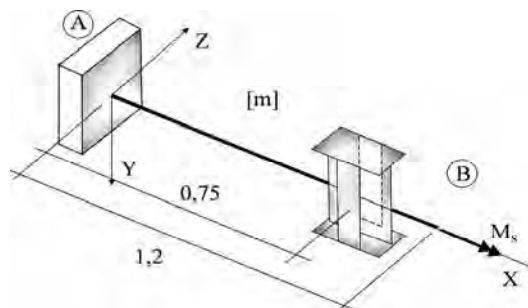
- 2) model mieszany MPe(20),
 - 3) model mieszany MPe(30),
- w przypadku drugim (rys. 3.31) trzema modelami mieszanymi (superelement z przeponą + Ele. k4) (rys. 3.33, 3.35) o różnych długościach superelementów 15, 20 i 30 cm:
- 4) model mieszany MPo(15),
 - 5) model mieszany MPo(20),
 - 6) model mieszany MPo(30).



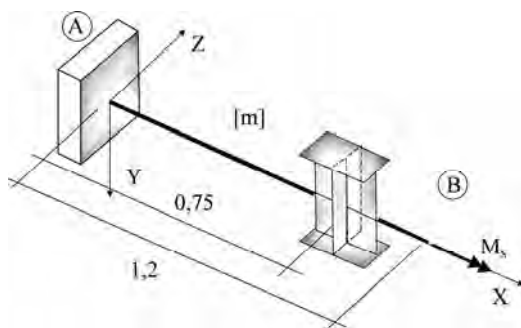
Rys. 3.32. Superelement belkowy z przewiązką (szer. 0,1 m; grub. 0,005 m)



Rys. 3.33. Superelement belkowy z przeponą (grub. 0,005 m)



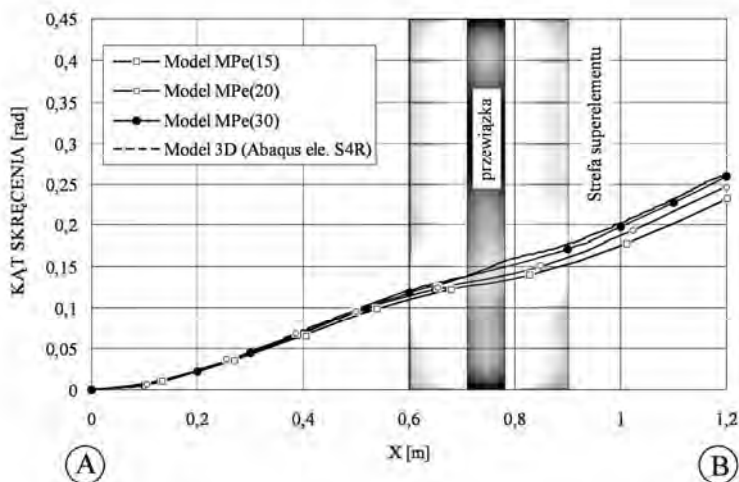
Rys. 3.34. Model mieszany z superelementem z przewiązką (szer. 0,1 m; grub. 0,005 m)



Rys. 3.35. Model mieszany z superelementem z przeponą (grub. 0,005 m)

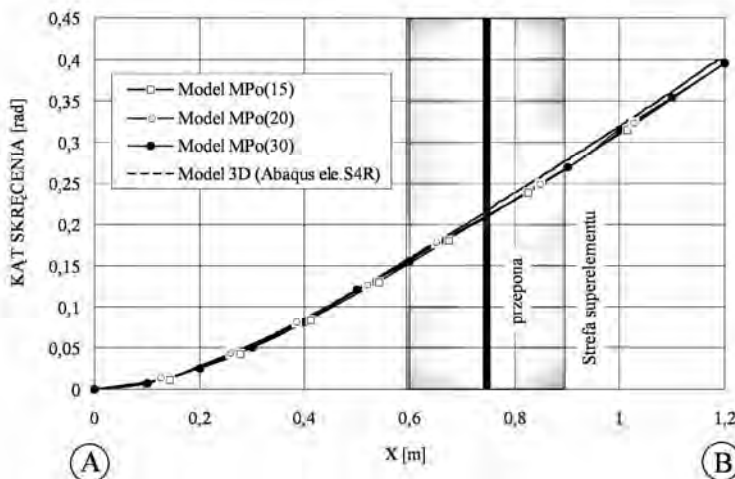
Wyniki analizy

Analiza wyników numerycznych została zestawiona na rys. 3.36 i 3.37. W przypadku usztywnienia w postaci przewiązki, charakterystyczna długość współpracująca l_w określona zgodnie z rys. 3.22a, powinna być większa lub równa jednej wysokości przekroju poprzecznego h tzn. $l_w \geq h$. Potwierdzają to wyniki analizy przedstawione na rys. 3.36.



Rys. 3.36. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B. Model z przewiązką przy zmiennej długości superelementu: 15, 20, 30 cm

W przypadku przepon (rys. 3.22b) wpływ długości współpracującej l_w na zmianę kąta skręcenia wspornika nie jest znaczący. Potwierdzają to wyniki analizy przedstawione na rys. 3.37. Zalecana wartość długość współpracującej l_w superelementu belkowego z usztywnieniem w postaci przepony, określona zgodnie z rys. 3.22b, powinna być większa lub równa jednej wysokości przekroju poprzecznego h tzn. $l_w \geq h$.



Rys. 3.37. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B. Model z przeponą przy zmiennej długości superelementu: 15, 20, 30 cm

Zbieżność rozwiązania w przypadku modeli mieszanych z modelem 3D MES zależy od liczby typowych elementów prętowych (typu k4 czy k2), przed i za superelementem. Wraz ze wzrostem liczby tych elementów rośnie dokładność analizy numerycznej. W przypadku elementów typu k2 nie może ich być mniej niż 6 (po każdej stronie superelementu), a elementów typu k4 nie mniej niż 3 (rys. 3.24).

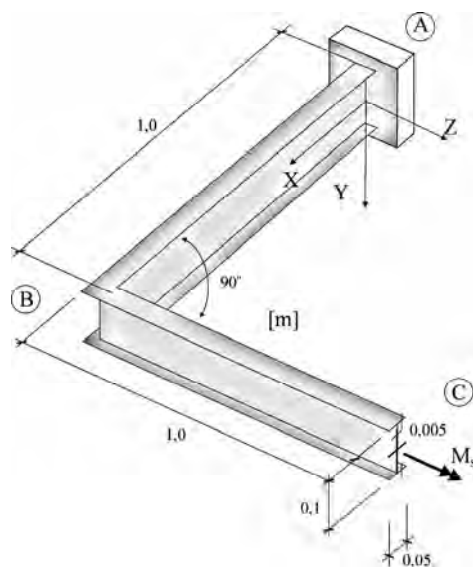
3.2.3. Przykład 3. Ruszt cienkościenny

Weźmy pod uwagę ruszt cienkościenny wykonany z aluminium ($E = 70$ GPa, $\nu = 0,33$) o przekroju dwuteowym, obciążony momentem skręcającym na końcu swobodnym o wartości $M_S = 100$ Nm (rys. 3.38).

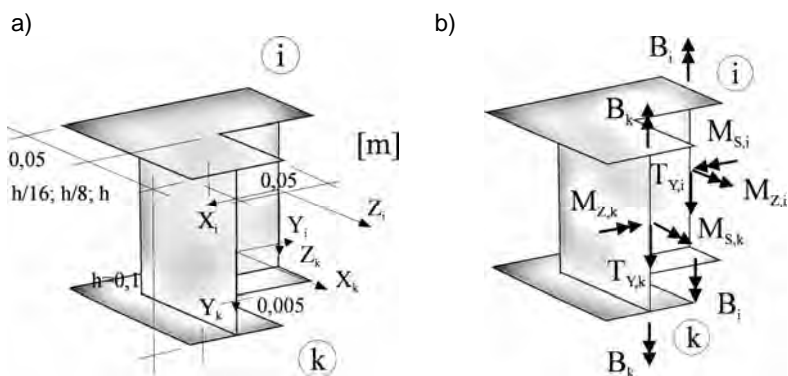
Przykład ma na celu wyznaczenie charakterystycznej wartości długości współpracującej l_w (rys. 3.22c) w przypadku superelementów węzłowych złożonych z prętów dwuteowych (rys. 3.39), na podstawie porównania zmiany kątów skręcenia pomiędzy modelem 3D (ABAQUS, ele. S4R) a trzema modelami mieszanymi typu ML (superelement węzłowy typu L + Ele. k4) (rys. 3.40) o różnej długości współpracującej superelementu: $h = 0,1$ m, $h/8 = 0,00125$ m, $h/16 = 6,25e-3$ m:

- 1) model mieszany ML(3h),
- 2) model mieszany ML(h),
- 3) model mieszany ML(h/8),
- 4) model mieszany ML(h/16).

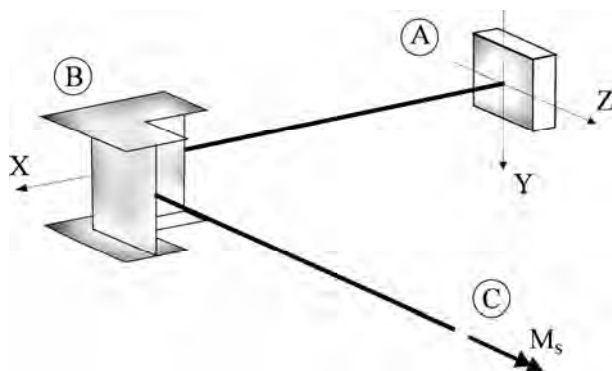
Ponadto zbadano wpływ różnego rodzaju usztywnień konstrukcji węzła (rys. 3.43) na rozkład sił bimomentowych w przekrojach przywęzłowych.



Rys. 3.38. Model – dźwigar załamany w płanie



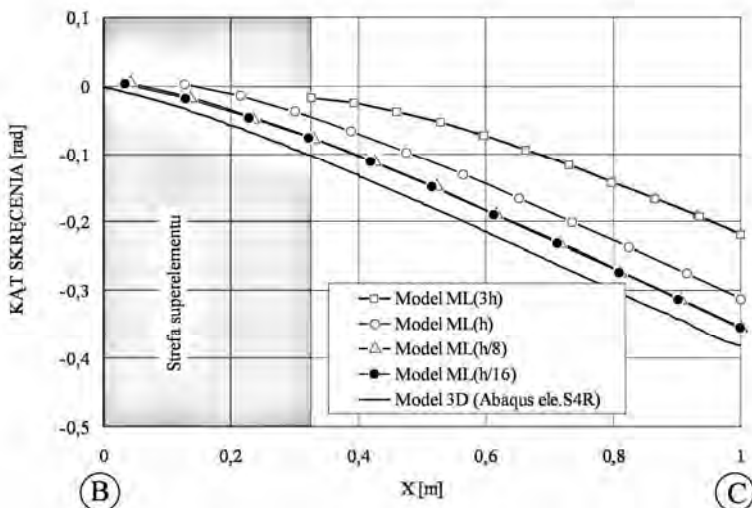
Rys. 3.39. Superelement węzłowy typu L



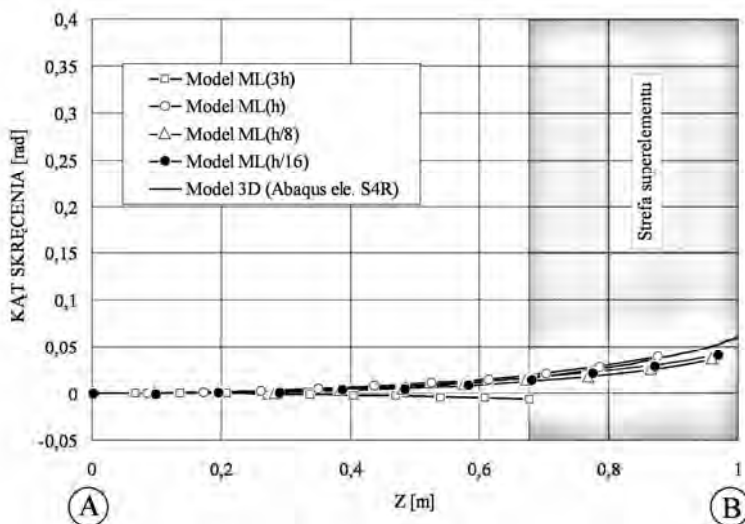
Rys. 3.40. Model mieszany z superelementem węzłowym typu L

Wyniki analizy

Analiza wyników numerycznych została zestawiona na rysunkach 3.41, 3.42.



Rys. 3.41. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale B – C przy różnych wartościach długości współpracującej l_w

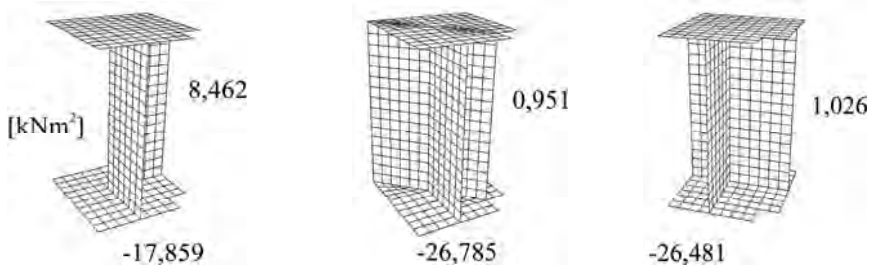


Rys. 3.42. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B przy różnych wartościach długości współpracującej l_w

W przypadku dźwigarów załamanych w planie wpływ wartości długości współpracującej l_w na ostateczne rozwiązanie jest znaczący. Potwierdzają to wyniki analizy przedstawione na rys. 3.41, 3.42. Zalecana wartość długości współpracującej superelementu węzłowego typu L, w przypadku dźwigarów załamanych w planie zbudowanych z prętów

cienkościennych dwuteowych, powinna być równa jednej ósmej wysokości przekroju poprzecznego h tzn. $l_w = 0,125 h$.

Wpływ dodatkowych usztywnień węzła na rozkład wartości bimomentu w przekrojach przywęzłowych, w przypadku modelu mieszanego (rys. 3.40), przedstawiono na rys. 3.43.



Rys. 3.43. Wpływ usztywnień węzła na rozkład bimomentów w przekrojach przywęzłowych

Na podstawie przedstawionych wyników (rys. 3.43) oraz rozważań zawartych w podpunkcie 3.1.3, możemy stwierdzić, że wartości bimomentów w przekrojach przywęzłowych zależą od geometrii i schematu statycznego układu oraz konstrukcji węzła (sztywności węzła). Z równowagą bimomentów w przekrojach przywęzłowych możemy mieć do czynienia jedynie w wyjątkowych przypadkach. Wszelkie zatem analizy rzeczywistych konstrukcji, wykorzystujące założenie równowagi bimomentów w przekrojach przywęzłowych, będą błędne.

Rozdział 4

BADANIA EKSPERYMENTALNE

4.1. Rys historyczny

Badania doświadczalne konstrukcji cienkościennych rozpoczęto już na początku XX wieku. Obszerny przegląd badań eksperymentalnych możemy znaleźć między innymi w pracach: Jombocka i Clarka [62] (1961), Koitera [63] (1963), Walkera [64] (1984), Bulsona [65] (1983), Choua i Rhodesa [66] (1997).

W roku 1913 Moore [67] badał belki dwuteowe poddane skręcaniu i przemieszczeniom bocznym. Baker i Rodderick [68] (1940) wykonali testy na podobnych belkach, badając wpływ ścinania na nośność konstrukcji stalowej. W tym samym roku Daumont i Hill [69] testowali belki dwuteowe wykonane z aluminium.

Belki dwuteowe, wykonane z elementów zimno-giętych, były testowane przez Wintera w 1940 [70], 1941 [71] i 1944 [72] dla Amerykańskiego Instytutu Konstrukcji Metalowych i Stalowych. W 1946/7 [73, 74] Winter wykonał i opublikował wyniki badań, mające na celu rozwój metod projektowania belek cienkościennych.

W 1956 Kerensky w pracy [75] zebrał i omówił badania innych autorów, wykorzystując je jako podstawę do projektowaniu belek i blachownic, o różnych przekrojach poprzecznych, wzmocnionych przez żebra usztywniające, o półkach tej samej i różnej szerokości.

Jombock i Clark w 1968 [76] badali wytrzymałość na zginanie trapezowych elementów aluminiowych. W roku 1968, Reiss i Chilver [77] opublikowali prace, w której omawiają zbiór badań eksperymentalnych poświęconych płytom, belkom i słupom, wykonanych między innymi przez Wintera [78, 79], Needhama [80], Heimerla [81], Schumana i Backa [82]. Desmond, Perkoz i Winter [83] w 1981 opisali eksperymenty poświęcone stalowym żebrom usztywniającym na końcach elementów cienkościennych.

Na szczególną uwagę zasługują wyniki prac teoretyczno - eksperymentalnych, opisanych we wstępie do monografii, opublikowanych w Rosji. Dotyczą one nie tylko skręcania prostych belek cienkościennych, o przekrojach otwartych (ceowych, zetowych) czy zamkniętych, ale również konstrukcji zbudowanych z prętów cienkościennych, takich jak belki załamane w planie czy ramy.

W Polsce, w połowie lat pięćdziesiątych, badania eksperymentalne prowadzone były między innymi w Politechnice Gdańskiej przez Ruteckiego [84]. Badania dotyczyły skręcania zbieżnych cienkościennych prętów dwuteowych, różniących się sposobem skrepowania końców.

Na początku lat siedemdziesiątych, także w Politechnice Gdańskiej wykonano badania związane z analizą ram zbudowanych z prętów cienkościennych. Badania przeprowadzono na modelu ramy wykonanej ze szkła organicznego. Z pomierzonych odkształceń jednostkowych Szmidt [85] wyznaczył naprężenia normalne, a z nich bimomenty występujące w układzie. W analizie zwrócono szczególną uwagę na wpływ konstrukcji węzła ramy na dystrybucję spaczenia w węźle.

W roku 1977, we Wrocławiu, Słomka [86] przeprowadził badania mające na celu określenie sztywności skrętnej węzłów i ram samochodowych. W roku 1988 Romanów

zamieścił wyniki badań Słomki w pracy [87]. Przedstawił w niej także wyniki badań związanych z analizą koncentracji naprężeń w prętach cienkościennych przy skręcaniu. Na Politechnice Wrocławskiej badania prowadził także Gosowski [88]. Poświęcił się on głównie problemom modelowania, nieswobodnie skręcanych, usztywnionych przez przewiązki i przepony, belek o przekrojach dwuteowych.

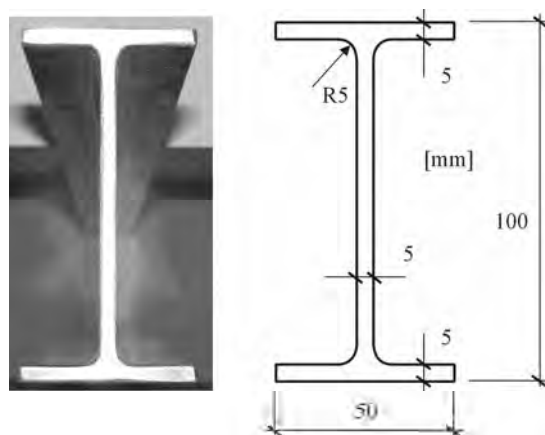
W ostatnich latach, bardzo obszerne badania doświadczalne poświęcone belkom i ramom cienkościennym były wykonywane w Olsztynie i Warszawie przez Obrębskiego. Początkowo eksperymenty dotyczyły zachowania giętno-skrętnych pojedynczych prętów prostych o przekrojach otwartych i zamkniętych [89–93]. Kolejne eksperymenty pod kierunkiem Obrębskiego, wykonane przez Jankowską [94], dotyczyły także płaskich ram typu L, T, Y, zbudowanych z dwóch lub trzech prętów cienkościennych o przekroju otwartym typu C. W każdym przypadku ramy obciążano, momentem skręcającym, przyłożonym na końcu jednego z prętów. Modele we wszystkich przypadkach wykonane były z mosiądzu. Węzły zbudowane były ze zmiennej liczby blach mosiężnych, łączonych za pośrednictwem śrub. Badania miały na celu sprawdzenie wpływu zmiany sztywności węzła na rozkład wybranych sił przekrojowych, wyznaczonych z pomierzonego rozkładu odkształceń.

Niestety, większość badań eksperymentalnych i teoretycznych konstrukcji prętowych, prowadzonych w ostatnich latach, tzn. po roku 1990, dotyczy głównie analizy ram z węzłami półsztywnymi, obciążonych tylko momentem zginającym [95, 96], z pominięciem wpływu skręcania.

4.2. Opis i wyniki badań własnych

W celu weryfikacji analizowanego w pracy modelu teoretycznego, przeprowadzono badania eksperymentalne.

Badania eksperymentalne, dotyczyły rusztów wykonanych, z dwuteowników aluminiowych, stopu 6063 (DIN AlMgSi 0,5 F22), wyprodukowanych przez firmę SAPA Aluminium Sp. Z o.o., o wymiarach nominalnych 100/50/5 mm (rys. 4.1). Skład chemiczny zgodnie z atestem firmy SAPA wykorzystanych w badaniu kształtowników jest następujący: Mg 0,45–0,9; Si 0,2–0,6; (Fe max 0,35; Cu max 0,1; Mn max 0,1; Cr max 0,1; Zn max 0,1; Ti max 0,1; innych max 0,15) oraz Al w 98–99%.



Rys. 4.1. Katalogowe wymiary przekroju porzecznego badanych belek

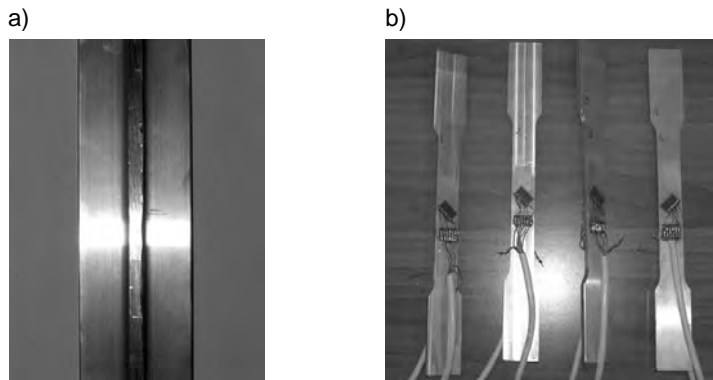
Na podstawie dziesięciu pomiarów poszczególnych wielkości wymiarowych przekroju poprzecznego (wykonanych z dokładnością do 0,01 mm) przyjęto ostatecznie:

- wysokość przekroju równą: 100,20 mm,
- szerokość przekroju równą: 50,00 mm,
- grubość półki równą: 5,20 mm,
- grubość środnika równą: 4,85 mm.

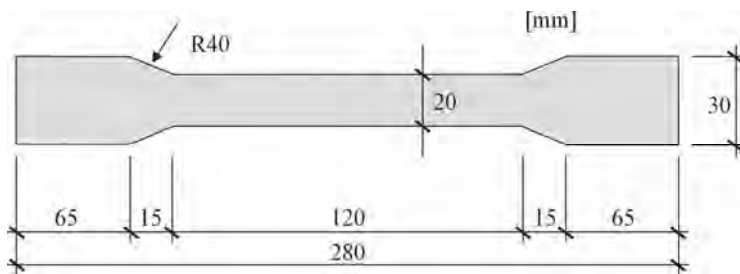
4.2.1. Określenie stałych materiałowych

W celu określenia wartości stałych materiałowych wykonano pomiary na czterech próbkach aluminiowych o wymiarach nominalnych przedstawionych na rysunku (rys. 4.2).

Rzeczywiste wymiary próbek wynosiły: próbka 1 – 19,90/4,75 mm, próbka 2 – 20,00/4,90 mm, próbka 3 – 19,90/4,75 mm, próbka 4 – 20,00/4,65 mm (rys. 4.2b). Dwie z próbek wycięto z części środkowej półek, frezując pozostałości ze środnika (rys. 4.2a) (próbka 1, 2), pozostałe natomiast ze środnika (próbka 3, 4). Próbkę wycinano w sposób nienaruszający struktury materiału.



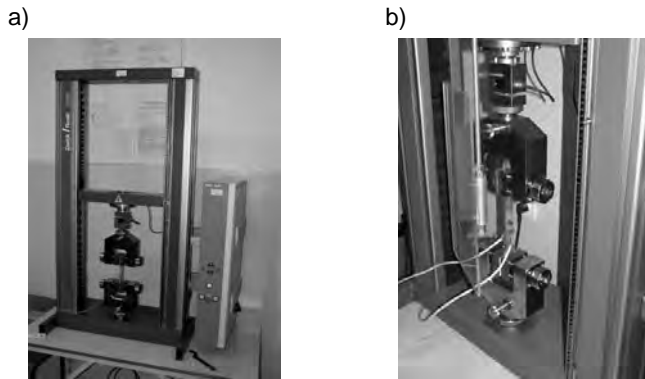
Rys. 4.2. Próbkę aluminiowe wykorzystane w badaniach



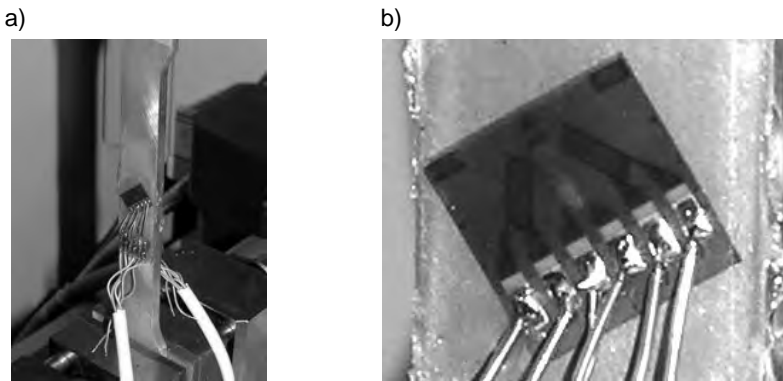
Rys. 4.3. Nominalne wymiary próbek do określenia stałych materiałowych

W badaniach wykorzystano rozety elektrooporowe foliowe firmy VISHAY MEASUREMENTS GROUP, typu CEA-13-120CZ-120, o trzech czujnikach (rozemieszczonych pod kątami: 0°– 45°– 90°), o bazie pomiarowej 3 mm i stałej tensometrycznej o wartości nominalnej 2,11. Rozety naklejono – zgodnie z technologią opracowaną przez ww.

firmę – w taki sposób, by jeden z czujników mierzył odkształcenia w kierunku podłużnym (rys. 4.5).



Rys. 4.4. Stanowisko badawcze do określenia stałych materiałowych



Rys. 4.5. Układ tensometryczny

Próbki rozciągano w uniwersalnej maszynie wytrzymałościowej Zwick BT1-FR020TNA50 (rys. 4.4a, b). Wartości odkształceń rejestrowano jednocześnie z obciążeniem za pośrednictwem mostka tensometrycznego, wykonanego na Wydziale Inżynierii Lądowej i Środowiska Politechniki Gdańskiej (rys. 4.19a).

Pomiar przeprowadzono metodą statyczną w temperaturze pokojowej. Każdą próbkę obciążano i odciążano, przykładając kolejno siły od 0 do 5 kN i od 5 kN do 0 co 0,5 kN, w trzech 10-minutowych cyklach (przy czym cykl pierwszy potraktowano jako wstępne obciążenie i odciążenie próbki), wykonując pomiary odkształceń podłużnych $\Delta \varepsilon_{i(x)}^1$, $\Delta \varepsilon_{i(x)}^2$ i poprzecznych $\Delta \varepsilon_{i(y)}^1$, $\Delta \varepsilon_{i(y)}^2$, w przypadku obciążenia i odciążenia.

Wartości odkształceń głównych wyznaczono z zależności:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{90}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \left[(\varepsilon_0 - \varepsilon_{45})^2 + (\varepsilon_{45} - \varepsilon_{90})^2 \right]. \quad (4.1)$$

W analizie wykorzystano przyrosty odkształceń $\Delta \varepsilon_{i(x)}^{sr}$ oraz $\Delta \varepsilon_{i(y)}^{sr}$, wyliczane jako średnie z wartości bezwzględnych uzyskanych w trakcie obciążenia i odciążenia próbki:

$$\Delta \varepsilon_{i(x)}^{sr} = \frac{|\Delta \varepsilon_{i(x)}^1| + |\Delta \varepsilon_{i(x)}^2|}{2}, \quad \Delta \varepsilon_{i(y)}^{sr} = \frac{|\Delta \varepsilon_{i(y)}^1| + |\Delta \varepsilon_{i(y)}^2|}{2}. \quad (4.2)$$

Wartość oczekiwana modułu Younga jest określona zależnością:

$$E_0 = \frac{\Delta \sigma_0}{\Delta \varepsilon_{0x}}, \quad (4.3)$$

w której przyrost naprężenia $\Delta \sigma_0$ jest określony związkiem:

$$\Delta \sigma_0 = \frac{\Delta P}{A}. \quad (4.4)$$

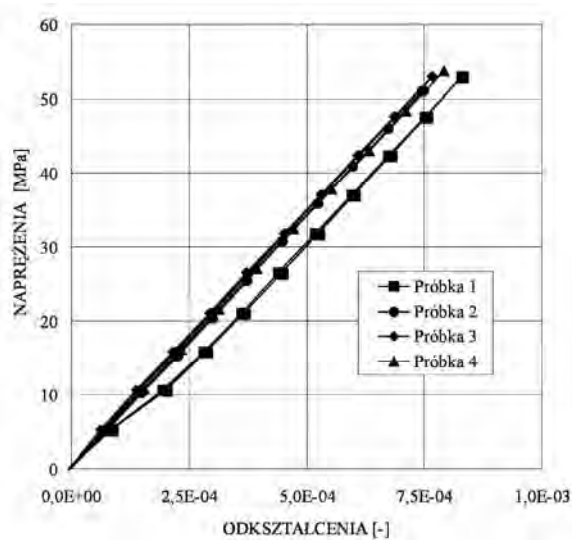
Współczynnik Poissona ν obliczono na podstawie wzoru:

$$\nu = \frac{\Delta \varepsilon_{0y}}{\Delta \varepsilon_{0x}}. \quad (4.5)$$

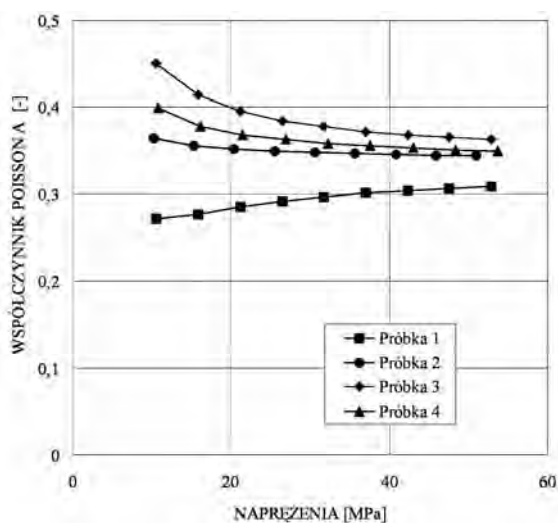
Moduł odkształcenia postaciowego G wynosi:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (4.6)$$

Pomierzone zależności odkształceń ε oraz współczynnika Poissona ν , przedstawiono na rys. 4.6 i 4.7.



Rys. 4.6. Zmiana wartości naprężeń normalnych σ [MPa] w zależności od wartości odkształceń ε dla próbek 1, 2, 3, 4



Rys. 4.7. Zmiana wartości współczynnika Poissona ν w zależności od wartości naprężeń σ [MPa] dla próbek 1, 2, 3, 4

Ostatecznie wyznaczono charakterystyczne wartości stałych materiałowych:

$$E = 67,8 \text{ GPa}; \nu = 0,33; G = 25,5 \text{ GPa},$$

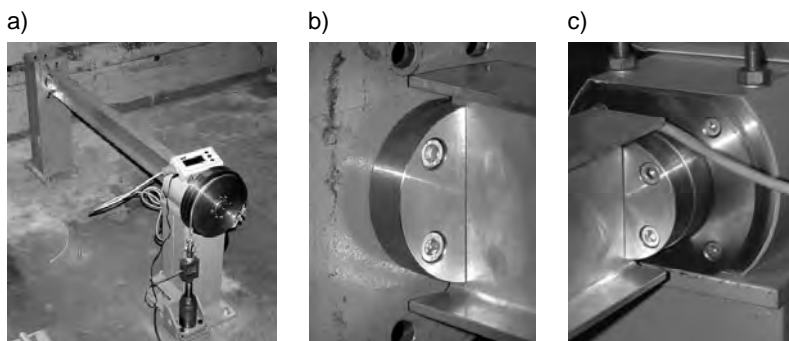
które wykorzystano w obliczeniach numerycznych.

Tabele pomiarowe zamieszczono w załączniku 1, na końcu pracy.

Wyznaczone wartości charakterystyk materiałowych, porównano z wynikami badań przeprowadzonych, na podobnych stopach aluminium, przez innych autorów [97, 98]. Porównanie potwierdziło poprawność wykonanych pomiarów.

4.2.2. Określenie współczynnika η korygującego wartość momentu bezwładności czystego skręcania J_d

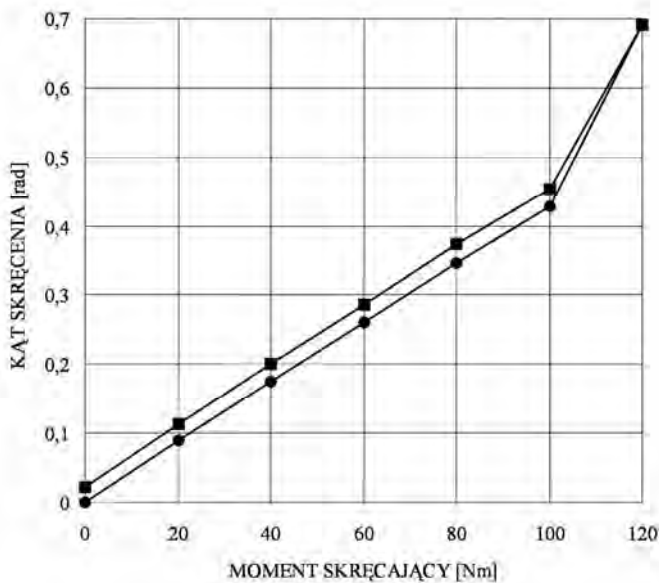
W celu określenia współczynnika η , korygującego wartość momentu bezwładności czystego skręcania J_d , w przypadku przekroju przedstawionego na rys. 4.1, wykonano badanie doświadczalne. Określono wartości współczynnika η w zależności od zmiany obciążenia (moment skręcający).



Rys. 4.8. Stanowisko badawcze do określenia stałych materiałowych

Badanie przeprowadzono na modelu pręta o przekroju dwuteowym (rys. 4.1), o długości 99 cm, skręcanego momentami: 20, 40, 60, 80, 100, 120 Nm (rys. 4.8a). Podparcie obydwu końców belki zapewniało swobodę deplanacji (rys. 4.8b, c).

Kąty obrotu mierzone były za pośrednictwem specjalnie w tym celu skonstruowanego urządzenia (rys. 4.8a, 4.17) w miejscu przyłożenia momentu skręcającego. Na rys. 4.9 przedstawiono zależność pomiędzy pomierzonym momentem skręcającym M_s a kątem skręcenia θ .



Rys. 4.9 Wykresy kątów skręcenia w przypadku obciążenia (i odciążenia) momentami skręcającymi: 20, 40, 60, 80, 100, 120 [Nm]

Widoczny na wykresie (rys. 4.9) gwałtowny wzrost przyrostu kąta skręcenia wynika z uplastycznienia materiału (aluminium), z którego wykonana była badana belka. Uplastycznienie doprowadziło do stałej deformacji skrętnej przekroju na całej długości belki. Do uplastycznienia doszło w wyniku przekroczenia dopuszczalnych obciążeń skręcających (100 Nm).

W przypadku przekrojów cienkościennych otwartych sztywność czystego skręcenia oblicza się ze wzoru:

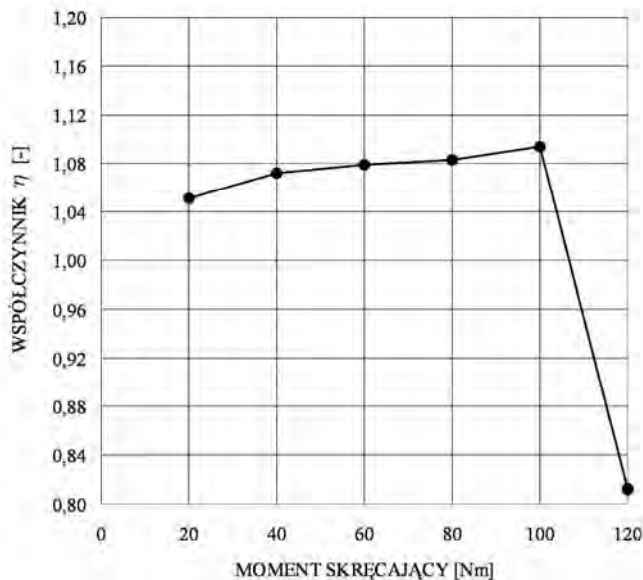
$$M_s = GJ_d \cdot \theta' = \frac{\eta}{3} \left(G \sum_{i=1}^n h_i \delta_i^3 \right) \theta', \quad (4.7)$$

gdzie η jest współczynnikiem korygującym. Współczynnik η można więc wyznaczyć z zależności:

$$\eta = \frac{3M_s}{\theta' G \sum_{i=1}^n h_i \delta_i^3} = \frac{3M_s l}{\theta G \sum_{i=1}^n h_i \delta_i^3}. \quad (4.8)$$

Wyniki analizy wpływu zmiany momentu skręcającego na wartość współczynnika η przedstawiono na rys. 4.10.

Współczynnik η jest zależny od poziomu obciążenia belki momentem skręcającym.



Rys. 4.10 Wykres zmiany wartości współczynnika η od obciążenia momentami skręcającymi: 20, 40, 60, 80, 100, 120 [Nm]

W przedziale obciążeń, w zakresie od 20 do 100 Nm, wartość współczynnika η nieznacznie wzrasta od 1,05 do 1,085. Po uplastycznieniu natomiast raptownie maleje ze względu na znaczny przyrost kąta skręcenia przy małej zmianie wartości momentu skręcającego.

Obliczeniową wartość współczynnika η ustalono ostatecznie na podstawie poziomu stanu obciążenia, odpowiadającego badaniom eksperymentalnym (tj. dla $M_s = 100$ Nm), zwiększając wartość obliczeniową momentu bezwładności czystego skręcenia J_d o 8,5%.

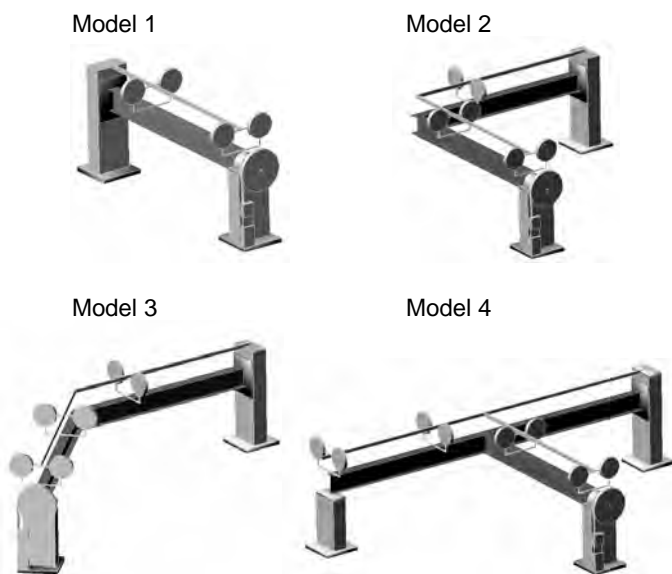
4.2.3. Opis modeli badawczych

Badania zrealizowano w czterech etapach dla czterech modeli, których ideowe schematy pokazano na rys. 4.11. Rzeczywisty wygląd modeli na stanowiskach badawczych przedstawiono na rys. 4.12.

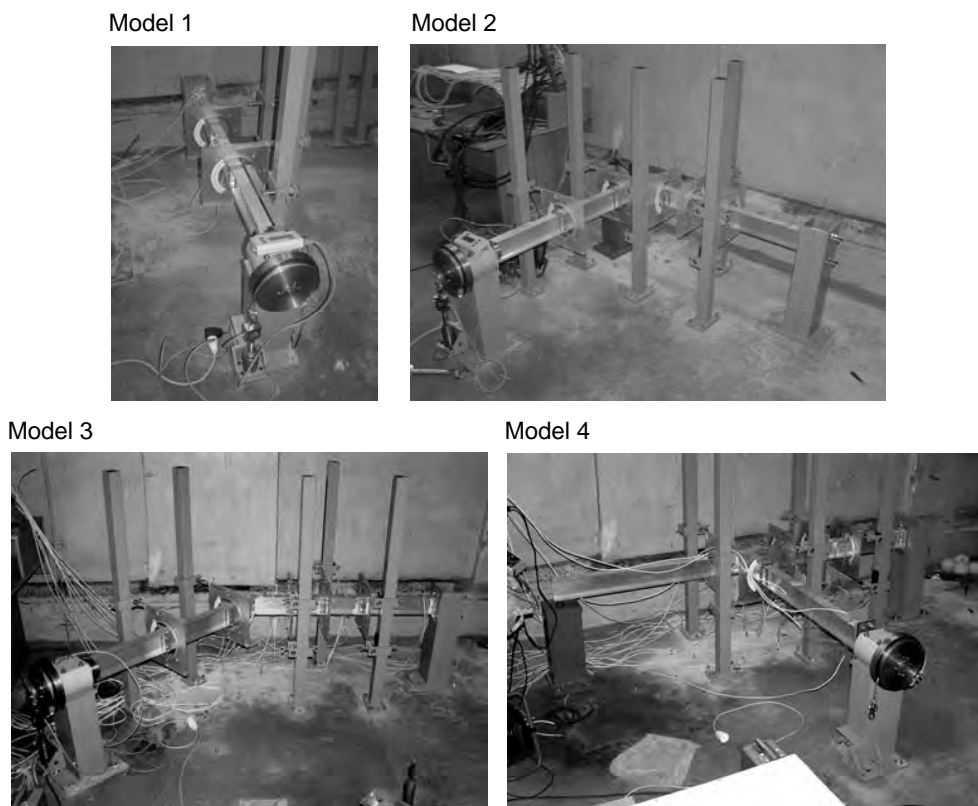
Podstawy elementów wsporczych modeli zostały w każdym przypadku zakotwione w sztywnej płycie fundamentowej za pośrednictwem śrub łączących je z fundamentem (rys. 4.13), tak by wyeliminować ruch modeli jako bryły sztywnej oraz zapewnić schemat podpory utwierdzonej.

Mocowanie modeli na słupie wsporczym ma zapewnić, zależnie od potrzeb, blokadę: kąta skręcenia, deplanacji i przemieszczeń pionowych w przekroju podporowym.

W przypadku modeli 1, 2 i 3 jeden z końców dźwigara został w pełni utwierdzony w słupie wsporczym (rys. 4.14b), a drugi zablokowany na kierunku przemieszczeń pionowych wzdłuż środka, z pełną swobodą kąta skręcenia i deplanacji (rys. 4.14a).



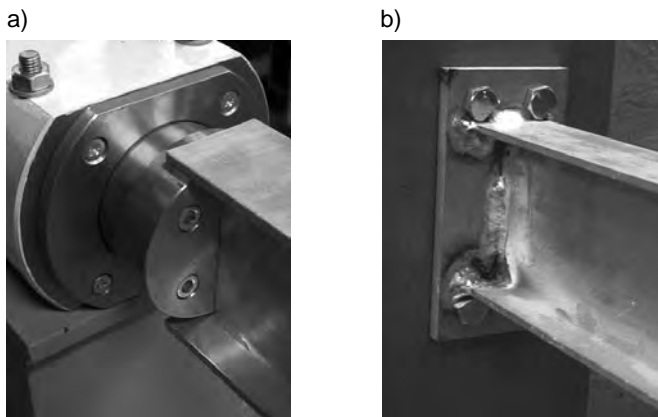
Rys. 4.11. Schematy ideowe modeli eksperymentalnych



Rys. 4.12. Stanowiska eksperymentalne

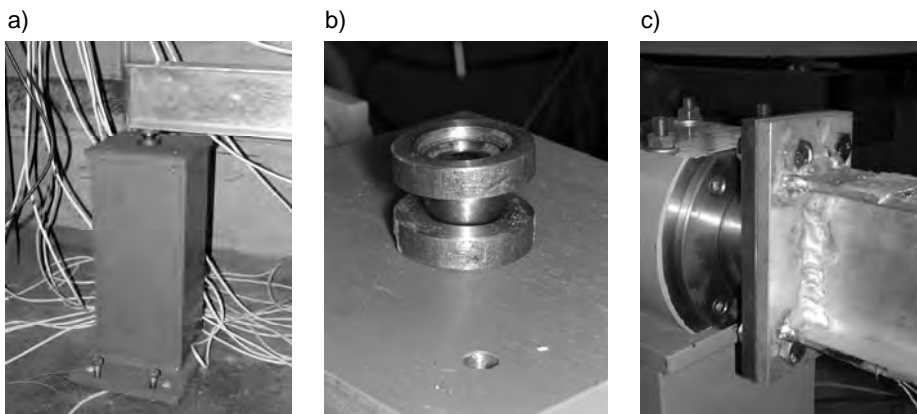


Rys. 4.13. Mocowanie podstawy słupa wsporczego



Rys. 4.14. Podpory stosowane w modelach 1, 2 i 3

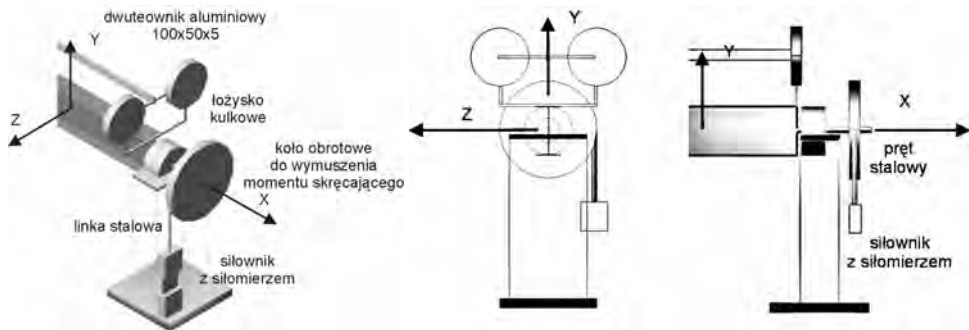
W przypadku modelu 4 jeden z końców dźwigara został utwierdzony (rys. 4.14b), kolejny pozostał swobodny z blokadą przemieszczeń pionowych (Rys. 4.15a, b), a trzeci za-blokwany we wszystkich kierunkach jedynie z możliwością obrotu względem osi pręta (rys. 4.15c).



Rys. 4.15. Podpory stosowane w modelu 4 a, b) podpora przegubowa, c) blokada z możliwością obrotu względem osi pręta

Obciążenie stanowi we wszystkich przypadkach moment skręcający na końcu swobodnym każdego z układów o zmiennej wartości od 0 do 100 Nm.

Urządzenie do wymuszania momentu skręcającego (rys. 4.16, 4.17a, b, c, d, e) wykonano ze stali. Składa się ono z wału zamocowanego w obudowie przytwierdzonej do jednego ze słupów podstawy (rys. 4.17c), kół służących do przykładania momentu skręcającego i będących jednocześnie bazą pomiarową kątów skręcenia przekroju w miejscu przyłożenia momentu (rys. 4.17d, e) oraz siłownika z siłomierzem do wymuszania obciążenia (rys. 4.17a, b).



Rys. 4.16. Ideowy schemat urządzenia służącego do wymuszania momentu skręcającego

a)

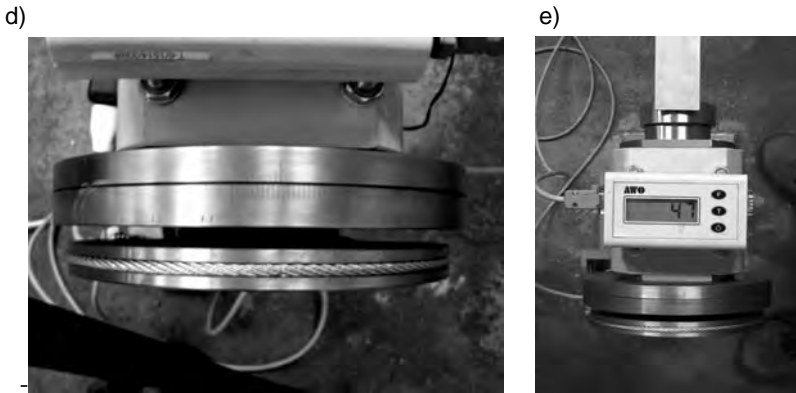


b)



c)



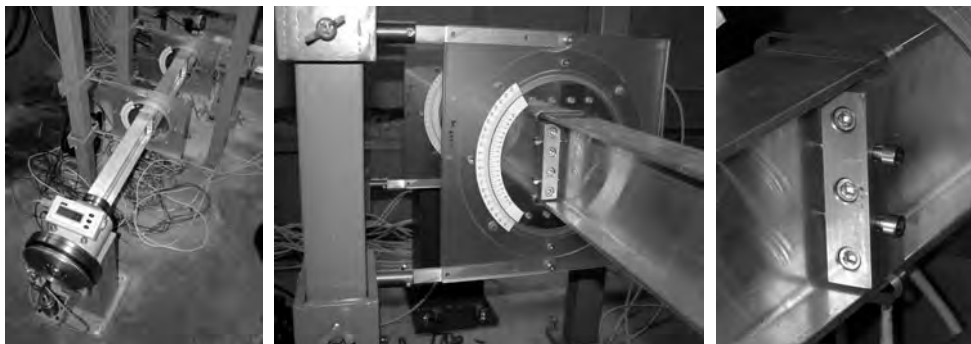


Rys. 4.17. Urządzenie służące do wymuszenia momentu skręcającego

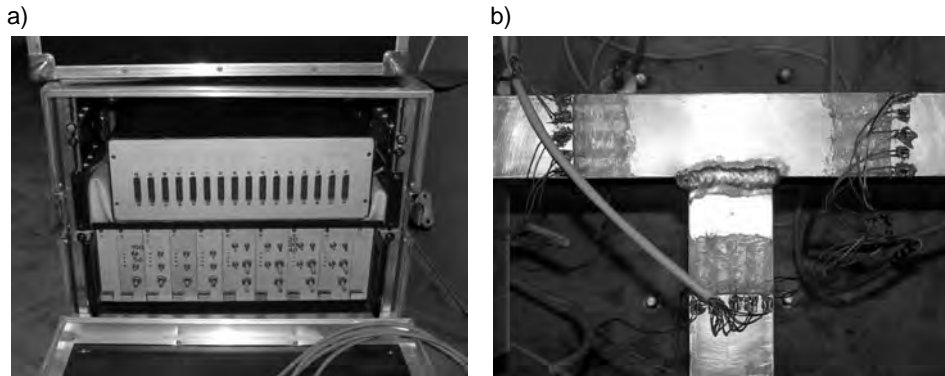
Siłownik wraz z siłomierzem (rys. 4.17b) zostały przytwierdzone u podstawy słupa (rys. 4.17a). Siłomierz został skalibrowany i zestrojony z siłownikiem, co pozwoliło na pomiar wartości momentu skręcającego z dokładnością do 0,1 Nm (rys. 4.17e).

Badania obejmowały pomiary odkształceń w podporowych i przywęzłowych przekrojach poprzecznych (rys. 4.24, 4.32, 4.44, 4.56) oraz kątów skręcenia w wybranych przekrojach na długości każdego z elementów (rys. 4.21, 4.29, 4.41, 4.53).

Wszystkie kąty skręcenia były mierzone względem osi belki wyznaczonej przez środek skręcania. Te w miejscu przyłożenia momentu skręcającego jako różnica obrotów ruchomego koła i koła na stałe związane z obudową wału (rys. 4.17d). Na kołach umieszczono podziałkę kątową i noniusz, co pozwalało odczytywać kąty skręcenia z dokładnością do 1/10 stopnia. Ponadto mierzono kąty skręcenia na długości prętów, stosując specjalnie wykonane do tego celu kątomierze, mierzące z dokładnością do 1/20 stopnia (rys. 4.18). Punkty pomiarowe kątomierzy ustalono przed i za węzłem w odległości 20 cm od przecięcia osi układu w węźle oraz wzdłuż długości dochodzących prętów w zależności od potrzeb badania. Do pomiaru odkształceń użyto papierowych czujników elektrooporowych RL 20/120, połączonych z mostkiem tensometrycznym (rys. 4.19a, b). Tensometry elektrooporowe w każdym przekroju rozmieszczono na szerokości półki górnej i dolnej, co pozwoliło wyznaczyć wartości naprężeń normalnych, a tym samym wartości bimomentów na podstawie pomiaru odkształceń w skrajnych włóknach pólki.

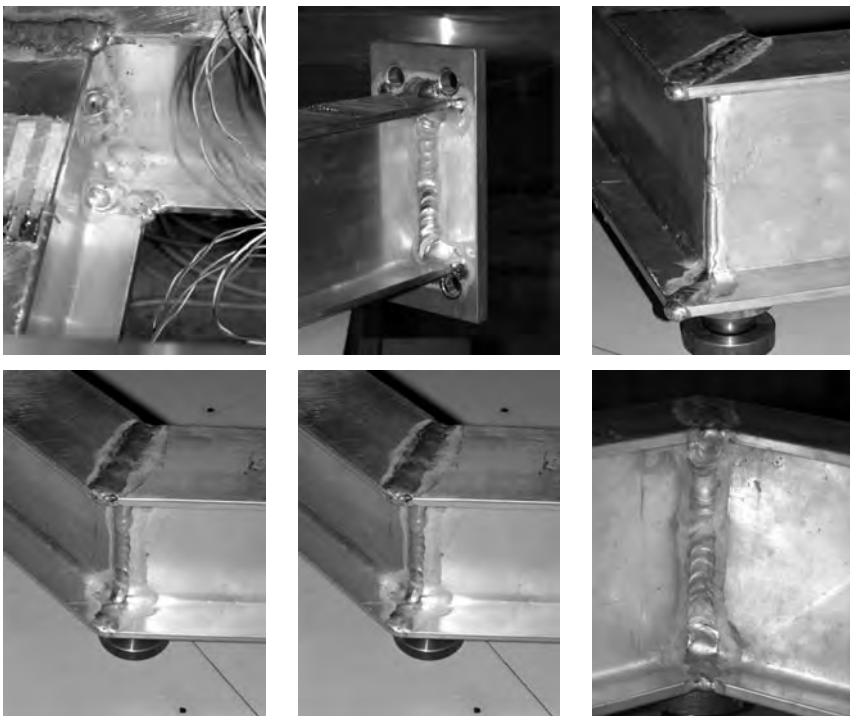


Rys. 4.18. Mocowanie kątomierzy



Rys. 4.19. Mostek tensometryczny z przykładowym układem tensometrycznym

Badania przeprowadzono w zakresie liniowym (sprężystym) materiału (rys. 4.23). Z uwagi na mierzone wielkości i dużą sztywność badanych prętów, obciążając konstrukcje momentami skręcającymi o dużych wartościach zwrócono szczególną uwagę, by nie dopuścić do uplastycznienia materiału (aluminium), gdyż groziło to zniszczeniem modeli. Wyznaczano więc, numerycznie, za każdym razem przybliżoną wartość dopuszczalnego obciążenia, tak by uniknąć uplastycznienia materiału.



Rys. 4.20. Widok spoin w połączeniach badanych modeli

Dla każdego z czterech modeli wykonano 3 serie pomiarowe, kolejno obciążając i odciążając badane układy. Z uzyskanych pomiarów wyznaczono średnie arytmetyczne.

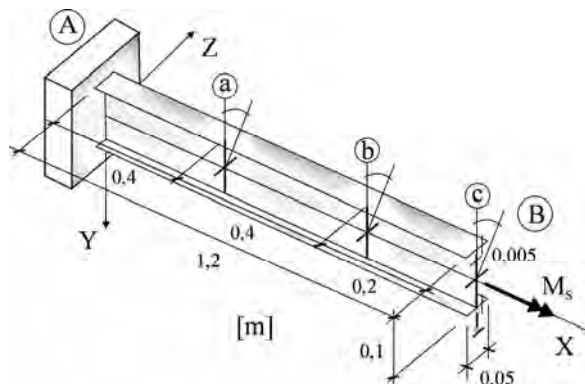
W celu wyeliminowania luzów w modelach, obciążano je wstępnie kilkakrotnie momentem skręcającym, wynoszącym około 20 do 50% momentu zasadniczego. Kolejno obciążano i odciążano modele momentami skręcającymi o wartościach 20, 50, 80, aż do wartości zasadniczej równej 100 Nm. Moment skręcający, w przypadku modeli 1, 2 i 3, przekazywany jest na końcu wspornika za pośrednictwem uchwytu stalowego osadzonego na środku dwuteownika (rys. 4.14a). W przypadku modelu 4 – za pośrednictwem płytki przyspawanej na stałe do dwuteownika (rys. 4.15c), co zapewniało blokadę spacji w miejscu przyłożenia momentu skręcającego. Każdy utwierdzony koniec układu był mocowany do słupa poprzez śruby kotwiące (rys. 4.14b). Połączenie zapewniało dostateczną sztywność zamocowania. W przypadku modelu 4 koniec swobodny był podparty na słupie wsporczym za pośrednictwem łożyska kulowego, które umożliwiało dowolny obrót końca układu, jednocześnie blokując przemieszczenia pionowe (rys. 4.15a, b).

Pręty między sobą były łączone za pośrednictwem spoin spawanych (rys. 4.20). Spoiny nie były szlifowane ani obrabiane mechanicznie.

Wyniki pomiarów naprężeń normalnych obliczone na podstawie pomierzonych odkształceń oraz kąty skręcenia w poszczególnych przekrojach zestawiono na wykresach. Wartości naprężeń normalnych zestawiono w tabelach w załączniku 2, na końcu pracy.

4.2.4. Wyniki badań – model 1

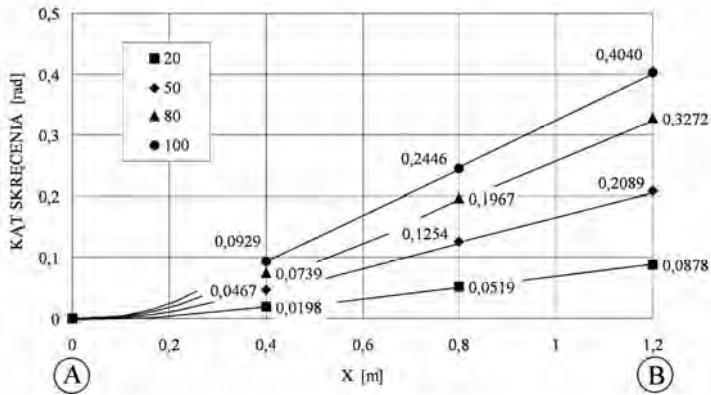
Eksperyment miał na celu identyfikację rzeczywistych kątów skręcenia i rozkładów naprężeń w konstrukcji wspornikowej od obciążenia momentem skręcającym na końcu swobodnym układu i oszacowanie sprężystego zakresu obciążenia konstrukcji.



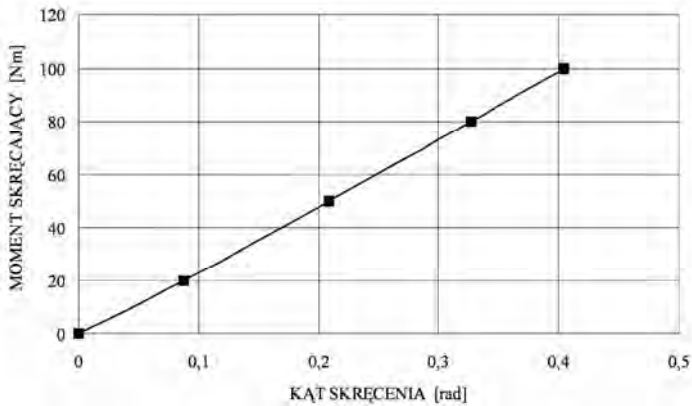
Rys. 4.21. Model 1 – rozmieszczenie kątomierzy

W przypadku modelu pierwszego (rys. 4.11, 4.13) wykonano badanie mające na celu określenie zmiany kątów skręcenia, w przekrojach: a, b, c (rys. 4.21) na długości wspornika pomiędzy punktami A i B, od obciążenia momentem skręcającym M_s o wartościach: 20, 50, 80 i 100 Nm (rys. 4.22). Przedstawiono zależność pomiędzy momentem skręcającym, a kątem skręcenia (rys. 4.23). Zestawiono także rozkłady naprężeń normalnych w półkach górnej i dolnej, w przekrojach 1 i 2 (rys. 4.24) w płaszczyźnie skrajnych włókien półek, od obciążenia momentami skręcającymi o wartościach: 20, 50, 80, 100 [Nm] (rys. 4.25–4.28).

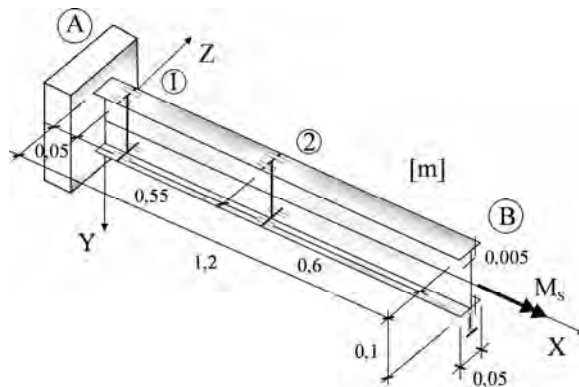
Na rys. 4.24 schematycznie oznaczono miejsca rozmieszczenia 28 czujników elektrooporowych (po 7 na każdej półce).



Rys. 4.22. Wykresy kątów skręcenia od obciążenia momentami skręcającymi: 20, 50, 80, 100 [Nm]

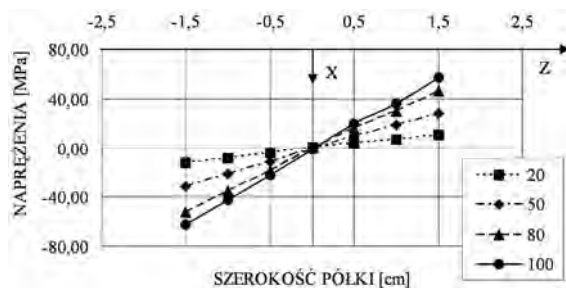


Rys. 4.23. Wykres zależności kątów skręcenia na końcu pręta od wartości momentu skręcającego

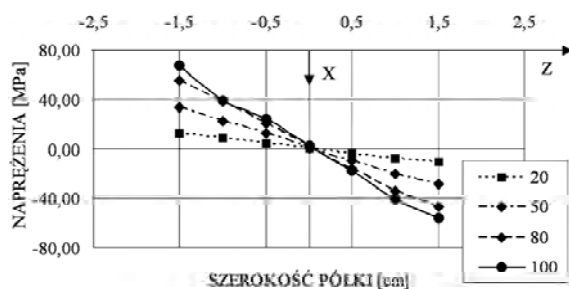


Rys. 4.24. Model 1 – rozmieszczenie czujników elektrooporowych

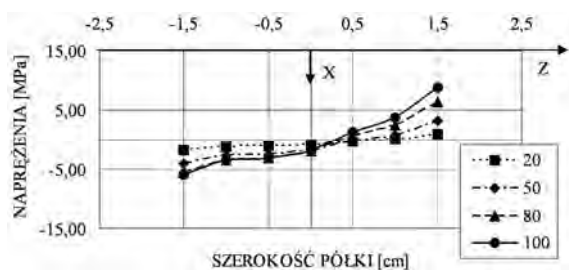
Otrzymana zależność (rys. 4.23) pomiędzy zmianą momentu skręcającego (w miejscu przyłożenia momentu skręcającego – przekrój c) a wartością kąta skręcenia, w przypadku modelu 1, wskazuje na liniowy charakter zależności pomiędzy tymi wielkościami. Tym samym można powiedzieć, iż w przypadku modelu 1, przy obciążeniu momentem skręcającym nieprzekraczającym wartości 100 Nm, mamy do czynienia z pracą konstrukcji w zakresie sprężystym i zagadnienie można traktować jako liniowe, a uogólnione przemieszczenia i kąt obrotu przyjąć jako małe w porównaniu z wymiarami elementów.



Rys. 4.25. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 1 od obciążenia momentami skręcającymi: 20, 50, 80, 100 [Nm]



Rys. 4.26. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 1 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



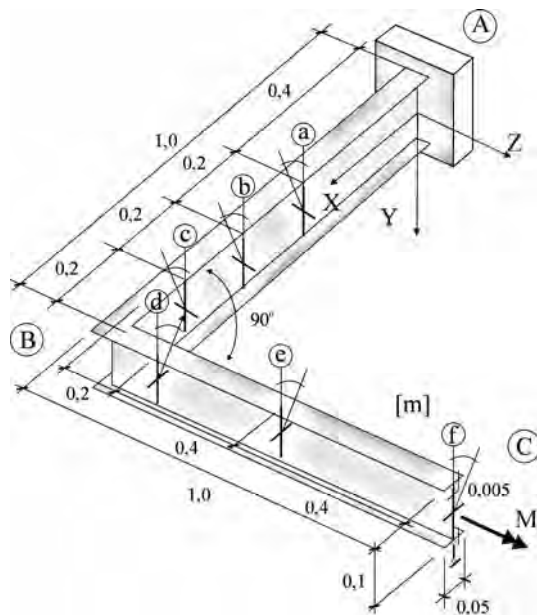
Rys. 4.27. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 2 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



Rys. 4.28. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 2 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

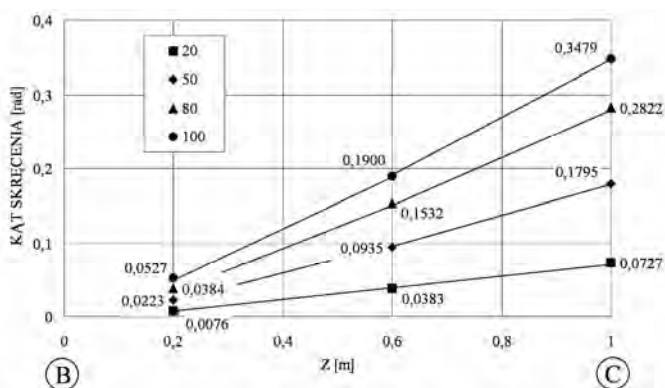
4.2.5. Wyniki badań – model 2

Eksperyment miał na celu określenie wartości kątów skręcenia i rozkładów naprężeń w modelu rusztu (którego dwa pręty zbiegają się w węzle typu L, pod kątem 90 stopni) od obciążenia momentem skręcającym, na końcu swobodnym układu, a tym samym analizę wpływu konstrukcji węzła na rozkład naprężeń w prętach schodzących się w węzle.

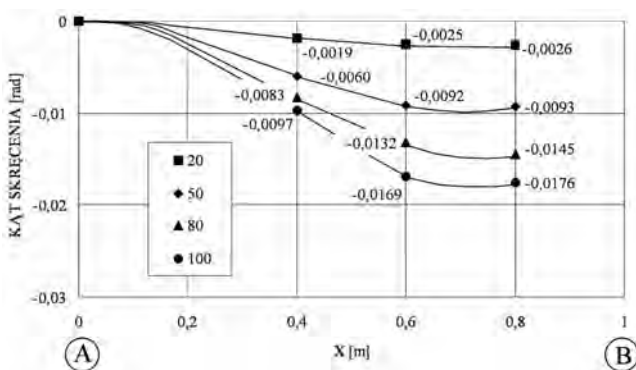


Rys. 4.29. Model 2 – rozmieszczenie kątomierzy

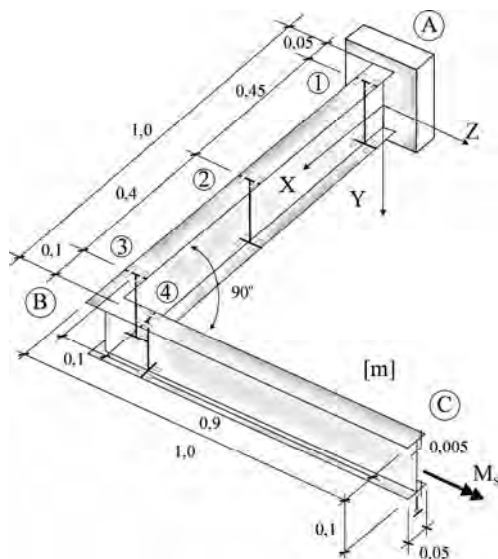
W przypadku modelu drugiego (rys. 4.11, 4.12) wykonano badanie, mające na celu określenie zmiany kątów skręcenia w przekrojach: a, b, c, d, e, f (rys. 4.29) na długości elementów pomiędzy punktami A, B oraz B, C od obciążenia momentem skręcającym M_s o wartościach: 20, 50, 80 i 100 [Nm] (rys. 4.30, 4.31).



Rys. 4.30. Wykresy kątów skręcenia od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



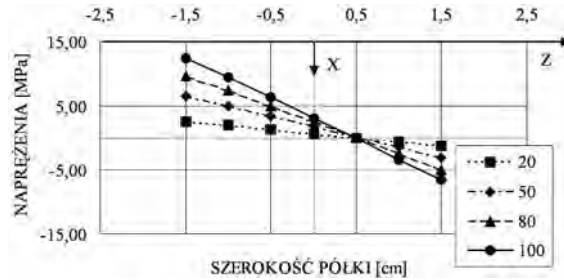
Rys. 4.31. Wykresy kątów skręcenia od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



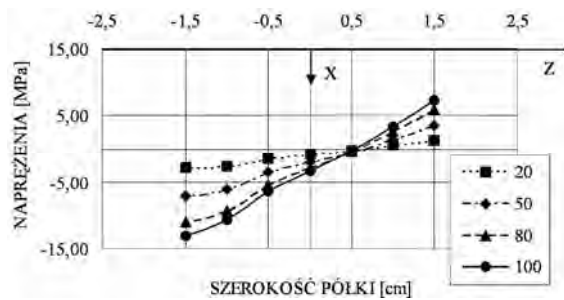
Rys. 4.32. Model 2 – rozmieszczenie czujników elektrooporowych

Zestawiono rozkłady naprężeń normalnych w półkach górnej i dolnej, w przekrojach 1, 2, 3, 4 (rys. 4.32) w płaszczyźnie skrajnych włókien półek, od obciążenia momentami skręcającymi o wartościach: 20, 50, 80, 100 [Nm] (rys. 4.33–4.40).

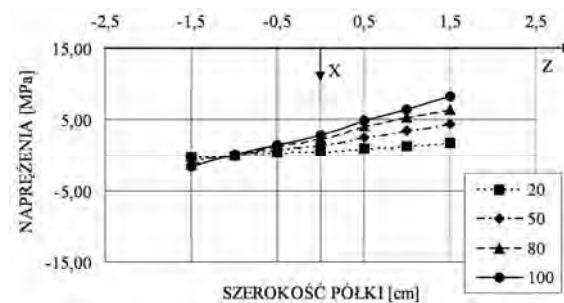
Na rys. 4.32 schematycznie oznaczono miejsca rozmieszczenia 56 czujników elektrooporowych (po 7 na każdej półce).



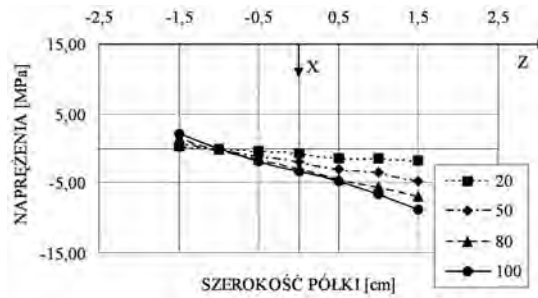
Rys. 4.33. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 1 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



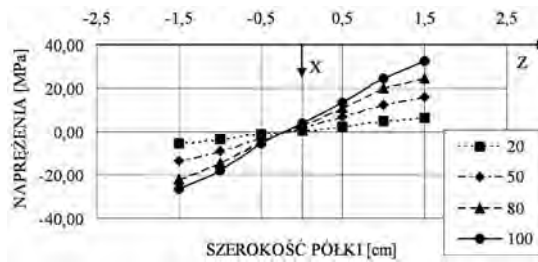
Rys. 4.34. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 1 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



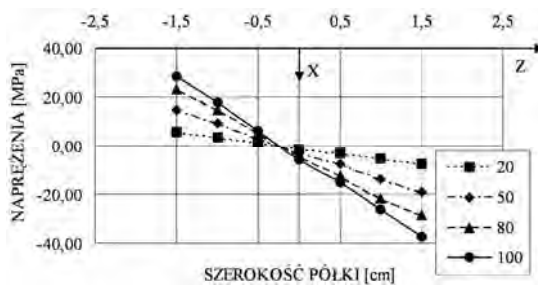
Rys. 4.35. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 2 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



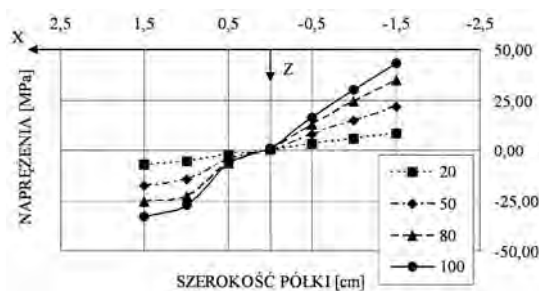
Rys. 4.36. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 2 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



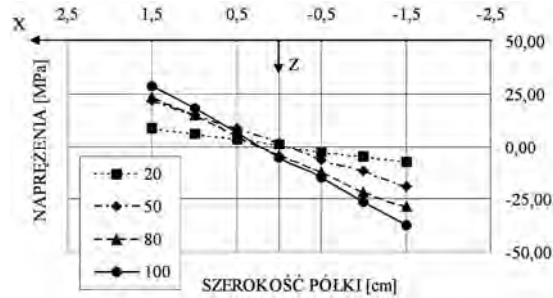
Rys. 4.37. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 3 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



Rys. 4.38. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 3 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



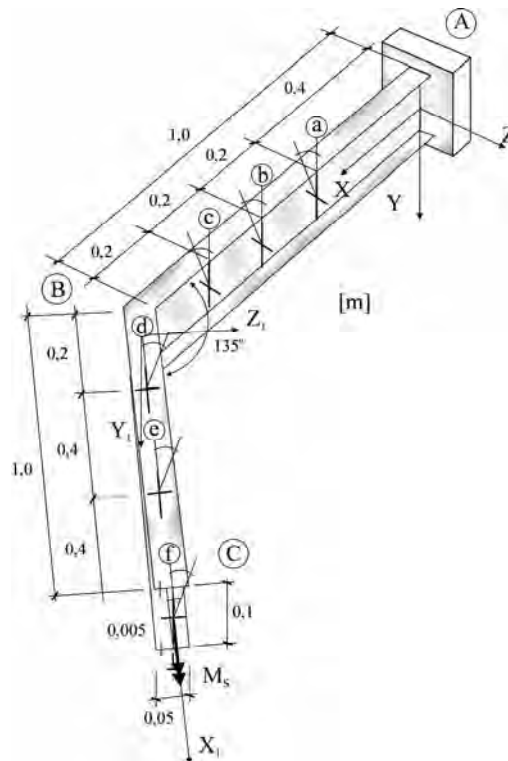
Rys. 4.39. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 4 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



Rys. 4.40 Rozkład naprężeń normalnych w płóce dolnej w przekroju 4 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

4.2.6. Wyniki badań – model 3

Ekspertyment miał na celu określenie wartości kątów skręcenia i rozkładów naprężeń w modelu rusztu (którego dwa pręty zbiegają się w węzle pod kątem 135 stopni) od obciążenia momentem skręcającym, na końcu swobodnym układu, a tym samym analizę wpływu konstrukcji węzła na rozkład naprężeń w prętach schodzących się w węzle.

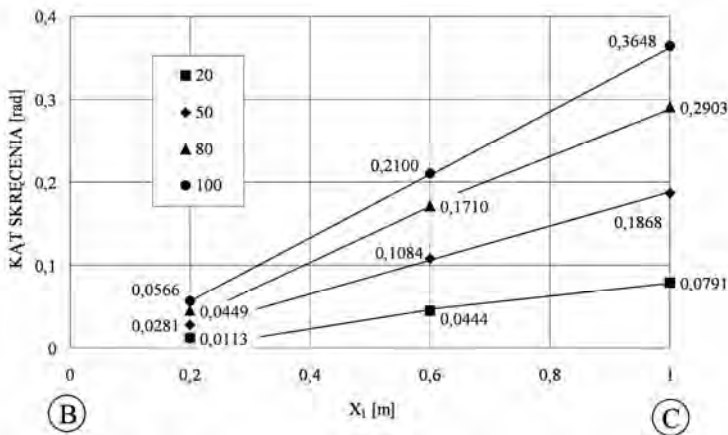


Rys. 4.41. Model 3 – rozmieszczenie kątomierzy

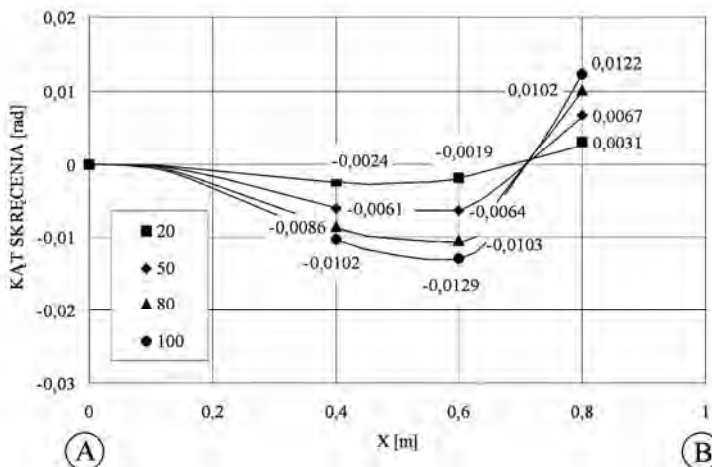
W przypadku modelu trzeciego (rys. 4.11, 4.12) wykonano badanie mające na celu określenie zmiany kątów skręcenia, w przekrojach: a, b, c, d, e, f (rys. 4.41) na długości elementów pomiędzy punktami A, B oraz B, C od obciążenia momentem skręcającym M_S o wartościach: 20, 50, 80 i 100 [Nm] (rys. 4.42, 4.43).

Zestawiono także rozkłady naprężeń normalnych w półkach górnej i dolnej, w przekrojach 1, 2, 3, 4 (rys. 4.44) w płaszczyźnie skrajnych włókien półek, od obciążenia momentami skręcającymi o wartościach: 20, 50, 80, 100 [Nm] (rys. 4.45–4.52).

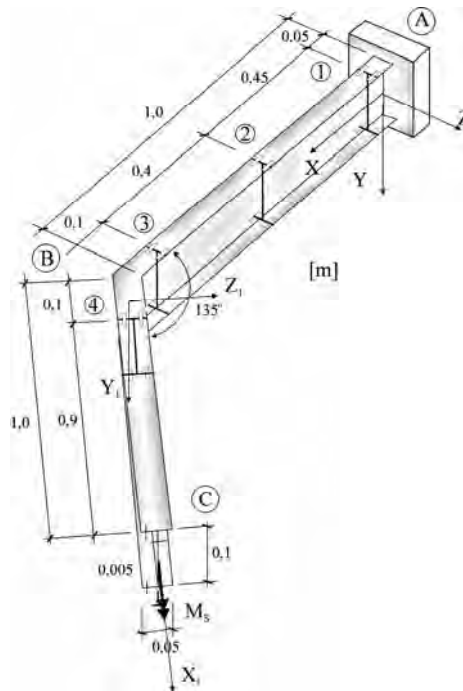
Na rys. 4.44 schematycznie oznaczono miejsca rozmieszczenia 56 czujników elektrooporowych (po 7 na każdej półce).



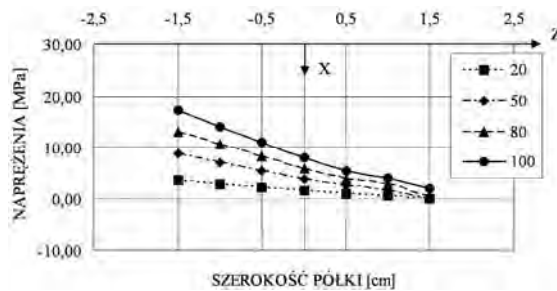
Rys. 4.42. Wykresy kątów skręcenia od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



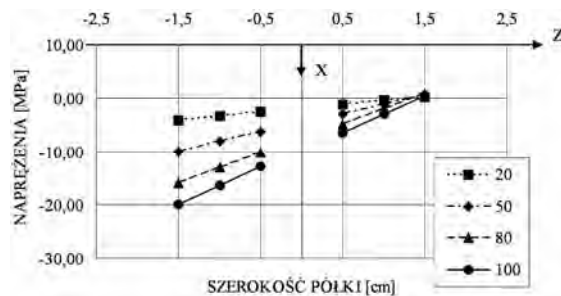
Rys. 4.43. Wykresy kątów skręcenia od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



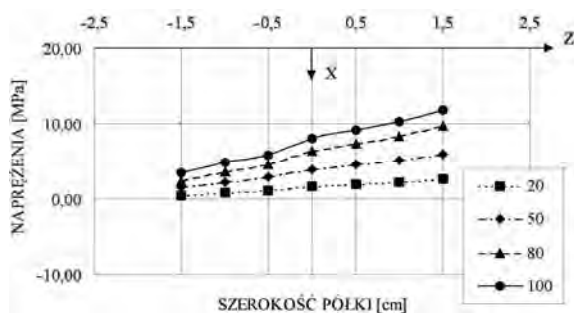
Rys. 4.44. Model 3 – rozmieszczenie czujników elektrooporowych



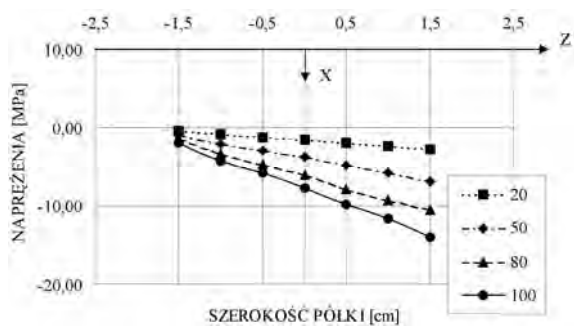
Rys. 4.45. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 1 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



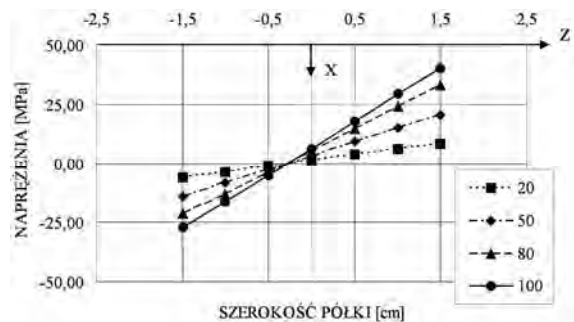
Rys. 4.46. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 1 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



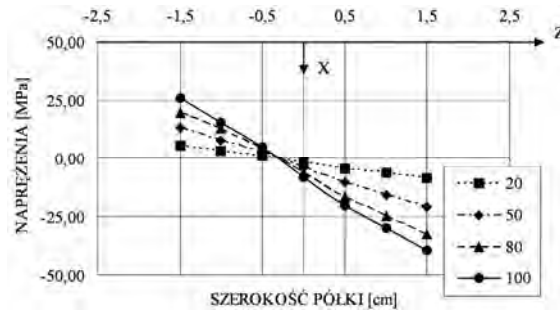
Rys. 4.47. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 2 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



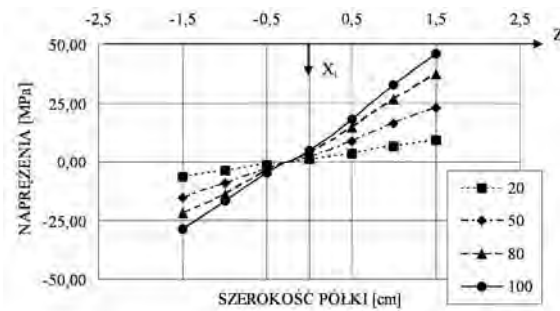
Rys. 4.48. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 2 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



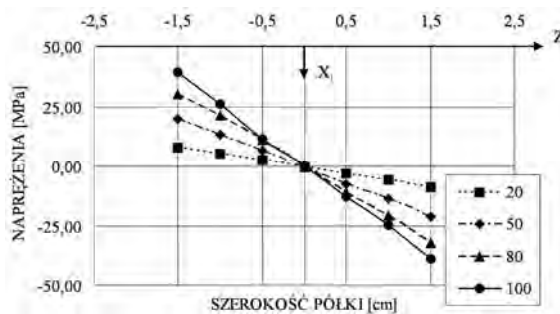
Rys. 4.49. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 3 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



Rys. 4.50. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 3 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



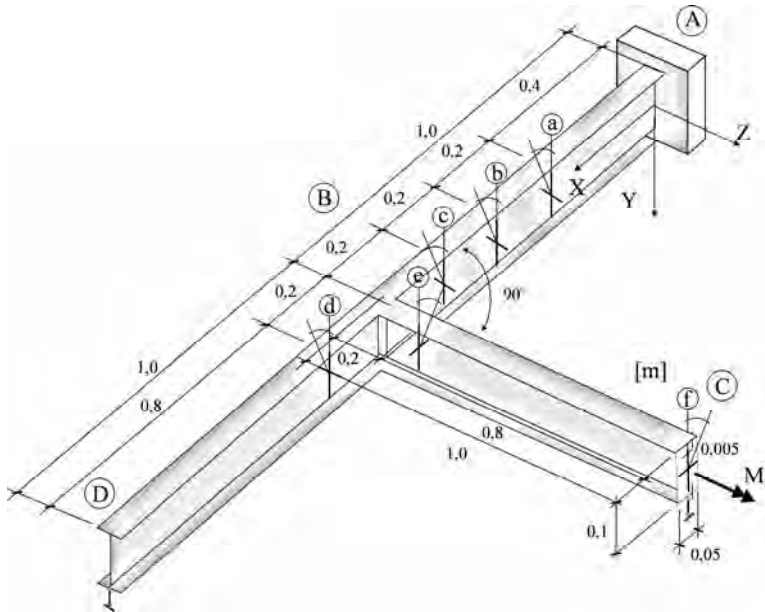
Rys. 4.51. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 4 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]



Rys. 4.52. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 4 od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

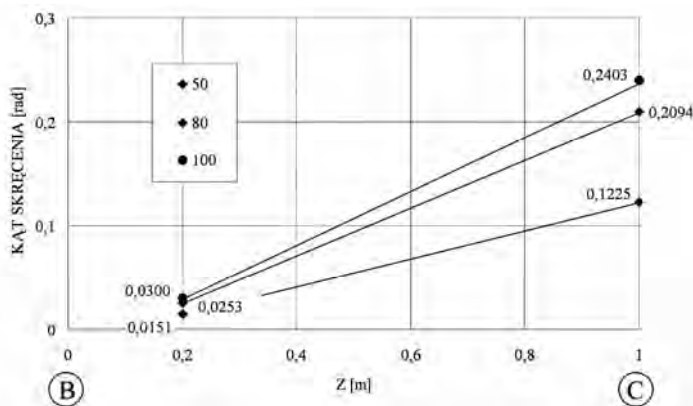
4.2.7. Wyniki badań – model 4

Eksperyment miał na celu wyznaczenie wartości kątów skręcenia i rozkładów naprężeń w przypadku modelu rusztu przedstawionego na rys. 4.53, 4.56.

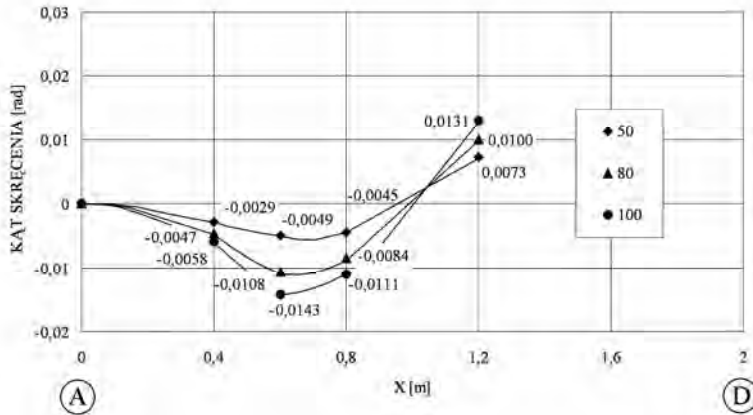


Rys. 4.53. Model 4 – rozmieszczenie kątomierzy

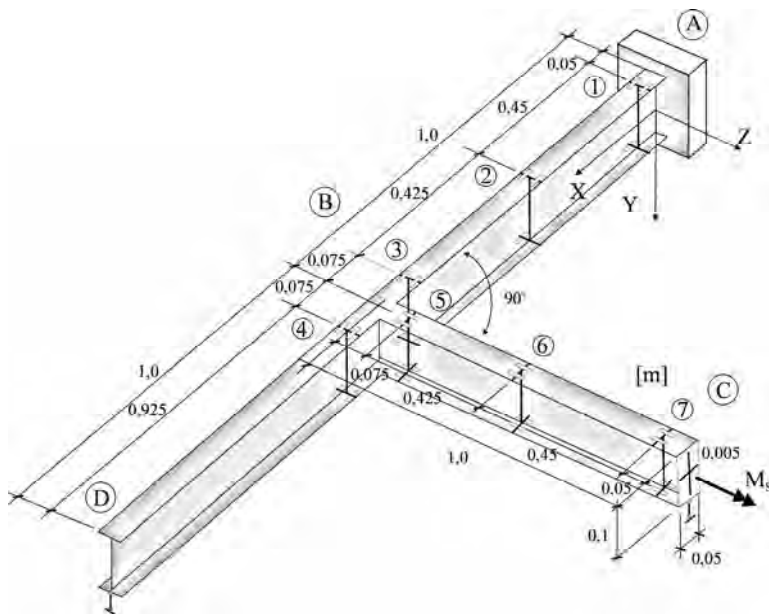
Ruszt obciążono momentami skręcającymi, na końcu swobodnym układu o wartościach 50, 80, 100 [Nm]. Analizowano wpływu konstrukcji węzła na rozkład naprężeń w prętach schodzących się w węźle.



Rys. 4.54. Wykresy kątów skręcenia od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



Rys. 4.55. Wykresy kątów skręcenia od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

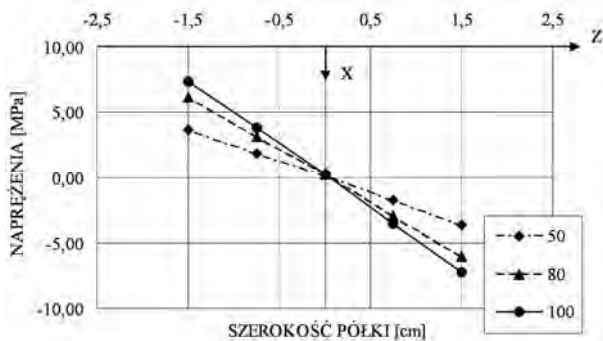


Rys. 4.56. Model 4 – rozmieszczenie czujników elektrooporowych

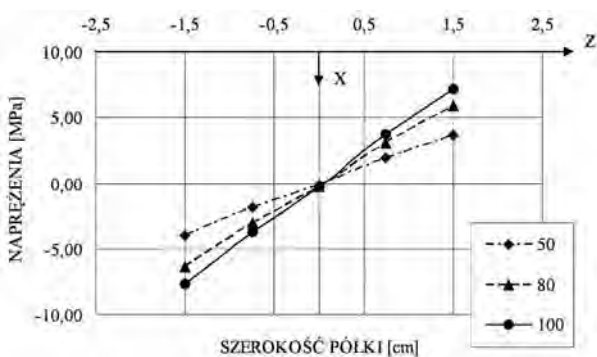
W przypadku modelu czwartego (rys. 4.11, 4.12) wykonano badanie mające na celu określenie wartości kątów skręcenia, w przekrojach: a, b, c, d, e, f (rys. 4.53) na długości elementów pomiędzy punktami A, B, D oraz B, C od obciążenia momentem skręcającym M_s o wartościach: 50, 80 i 100 [Nm] (rys. 4.54, 4.55).

Zestawiono także rozkłady naprężeń normalnych w półkach górnej i dolnej, w przekrojach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (rys. 4.56), w płaszczyźnie skrajnych włókien półek, od obciążenia momentami skręcającymi o wartościach: 50, 80, 100 [Nm] (rys. 4.57–4.70).

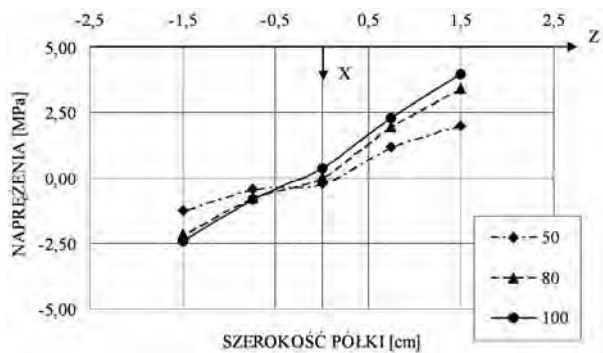
Na rys. 4.56 schematycznie oznaczono miejsca rozmieszczenia 70 czujników elektrooporowych (po 5 na każdej półce).



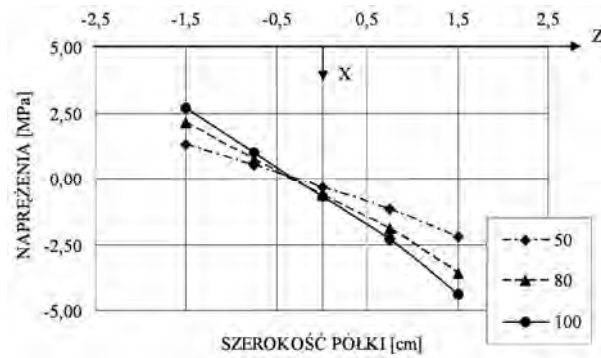
Rys. 4.57. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 1 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



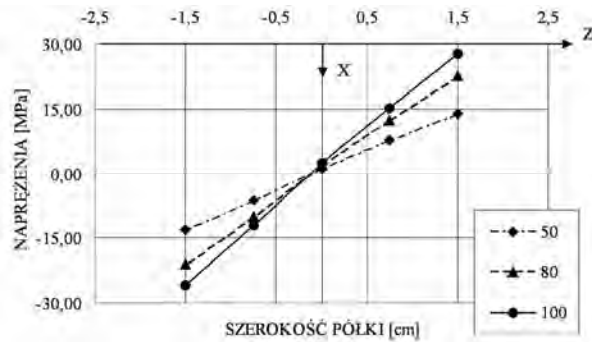
Rys. 4.58. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 1 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



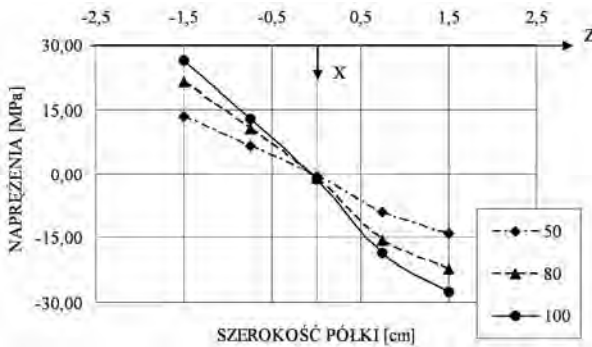
Rys. 4.59. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 2 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



Rys. 4.60. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 2 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



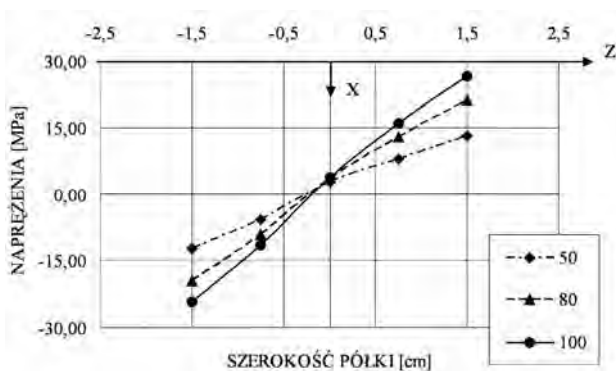
Rys. 4.61. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 3 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



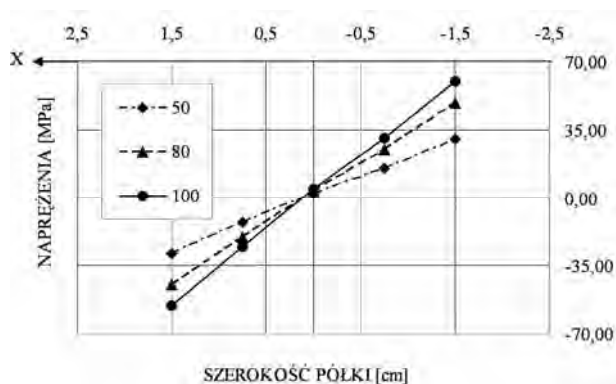
Rys. 4.62. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 3 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



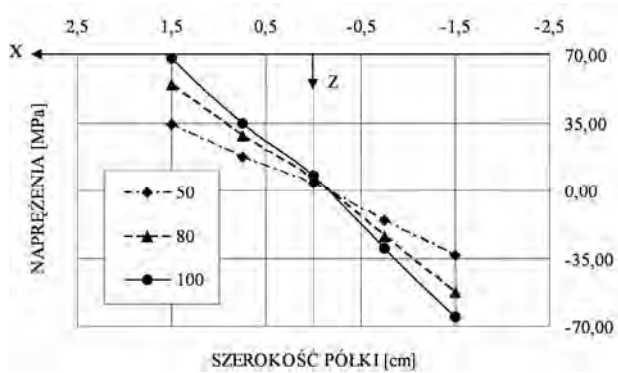
Rys. 4.63. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 4 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



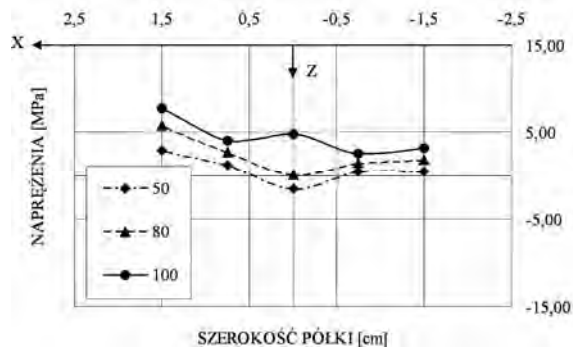
Rys. 4.64. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 4 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



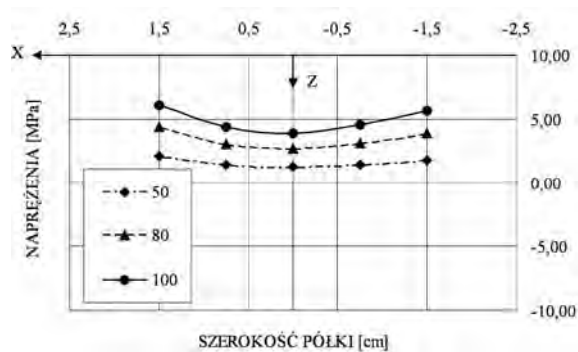
Rys. 4.65. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 5 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



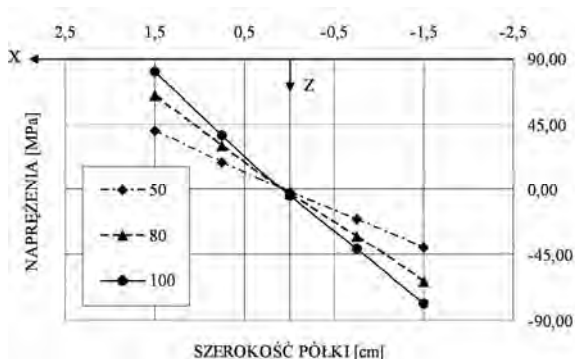
Rys. 4.66. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 5 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



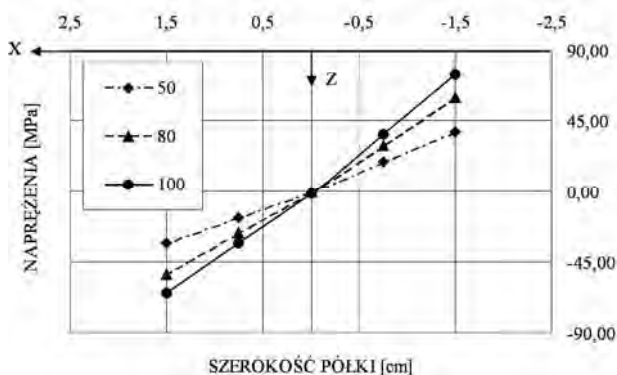
Rys. 4.67. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 6 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



Rys. 4.68. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 6 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



Rys. 4.69. Rozkład naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 7 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]



Rys. 4.70. Rozkład naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 7 od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

Krótkie podsumowanie wyników badań doświadczalnych

Wszystkie badane modele, tak jak dowiedziono w przypadku modelu 1 (rys. 4.23), są układami pracującymi w zakresie liniowym. We wszystkich przypadkach możemy więc mówić, po pierwsze – o liniowości materiałowej (fizycznej), ze względu na zanikanie (śledzonych w trakcie badań) odkształceń po odciążeniu konstrukcji, a po drugie – o liniowości geometrycznej, wynikającej z linowej zależności między przemieszczeniami i odkształceniami.

Rozkłady naprężeń we wszystkich badanych przekrojach poprzecznych półek, mają w przeważającej części charakter liniowy, z wyraźną przewagą wpływu naprężeń normalnych powstałych od skręcania. Widoczne są jednak także wpływy naprężeń normalnych od zginania w przekrojach 1 i 2, w szczególności w przypadku modelu 2 i 3 (rys. 4.33–4.36, 4.45–4.48).

W trakcie badań odnotowano błędy pomiarowe wynikające z uszkodzenia tensometrów elektrooporowych. Dotyczą one odczytu stanu odkształcenia w przypadkach: modelu 4, w przekroju 6 (rys. 4.67, 4.68) oraz modelu 3, w przekroju 1 (rys. 4.46).

Rozdział 5

WERYFIKACJA KONCEPCJI MODELI Z WYKORZYSTANIEM SUPERELEMENTÓW

Głównym celem rozdziału piątego jest weryfikacja zaproponowanego w pracy modelu teoretycznego, wykorzystującego koncepcje superelementów, poprzez porównanie wyników badań doświadczalnych, opisanych w rozdziale czwartym, z wynikami analizy numerycznej.

Porównując wyniki badań doświadczalnych i numerycznych, brano pod uwagę:

a) kąty skręcenia w wybranych przekrojach,

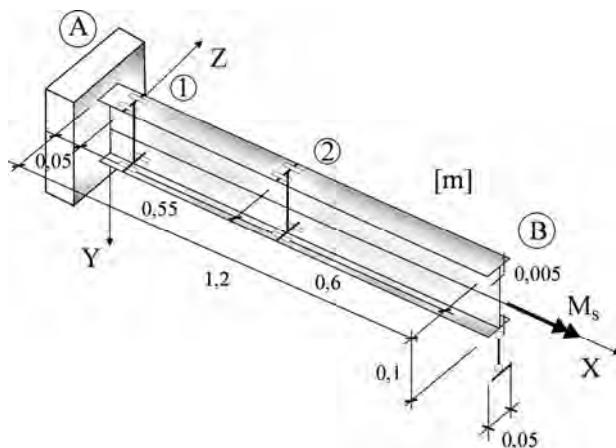
b) naprężenia normalne w półkach górnej i dolnej w wybranych przekrojach.

Ponadto otrzymane rozwiązania zestawiono z wynikami analiz numerycznych wykonanych programem komercyjny (ABAQUS).

5.1. Porównanie wyników modeli teoretycznych z badaniami eksperymentalnymi

5.1.1. Przykład 1 – model 1

Weźmy pod uwagę układ wspornikowy wykonany z aluminium ($E = 67,8$ GPa, $\nu = 0,33$, $G = 25,5$ GPa) o przekroju dwuteowym, obciążony momentem skręcającym na końcu swobodnym o wartości $M_S = 100$ Nm (rys. 5.1).



Rys. 5.1. Model 1 – oznaczenie miejsc badanych przekroji poprzecznych 1 i 2

Warunki podporowe w przypadku modelu 1 zostały zrealizowane następująco: koniec A jest przekrojem w pełni utwierdzonym, a koniec B został zablokowany jedynie na kierunku przemieszczeń pionowych wzdłuż środka, z pełną swobodą pozostałych wielkości, w tym deplanacji i kąta skręcenia.

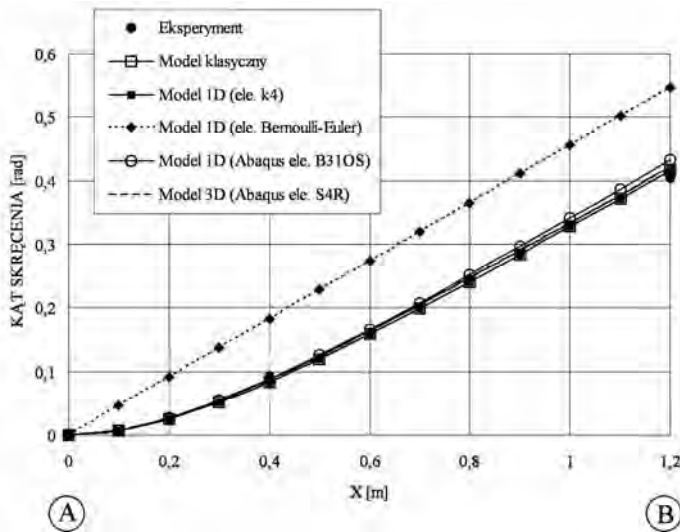
Celem analizy jest porównanie wyników badań eksperymentalnych z dostępnymi metodami obliczeń statycznych cienkościennych belek prostych, ze zwróceniem szczególnej uwagi na rozwiązanie wykorzystujące aproksymacje potęgową typu k4. Ze względu na macierzowy charakter algorytmu obliczeniowego zastosowano podział układu na dwanaście elementów.

Wyniki analizy statycznej

Wyniki analizy, w przypadku modelu 1 (rys. 5.1), przedstawiono na wykresach opisujących zmiany: kątów skręcenia (rys.5.2), bimomentów (rys.5.7) i deplanacji (rys. 5.8), w przedziale A – B względem zmiennej X [m].

Na wykresach porównano kąty skręcenia, bimomenty i deplanację, zestawiając wyniki eksperymentu ze ścisłym rozwiązaniem Vlasova, rozwiązaniami wykorzystującymi modele komercyjne (ABAQUS) (model 1D z elementem B31OS i model 3D z elementem powłokowym S4R) [58] oraz wynikami w przypadku modelu mieszanego (ele. k4 + superelement węzłowy).

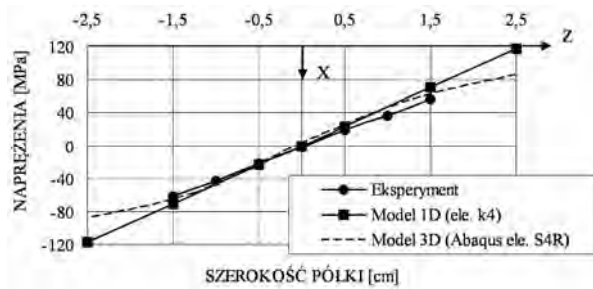
Ze względów czysto formalnych, w przypadku zmiany kąta skręcenia na długości wspornika, zamieszczono także rozwiązanie wykorzystujące klasyczny element typu Bernoulli-Euler.



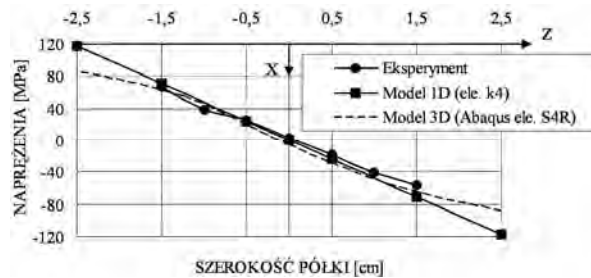
Rys. 5.2. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B

Zestawiono również rozkłady naprężeń normalnych w półkach górnej i dolnej przekroju poprzecznego, w dwóch wybranych przekrojach 1 i 2 (rys. 5.1).

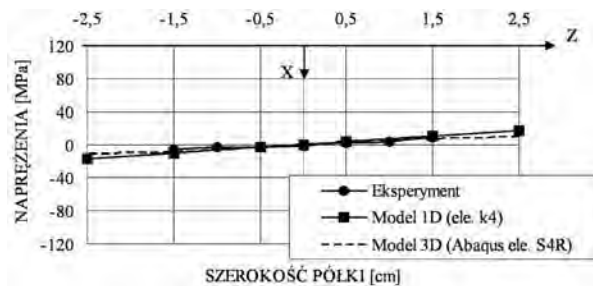
Na wykresach (rys. 5.3–5.6) porównano wyniki eksperymentalne z wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu modelu 1D (z elementem typu k4) i modelu 3D (ABAQUS; ele. S4R). W wyniku analizy stanu naprężenia stwierdzono bardzo dobrą zbieżność obydwu metod obliczeniowych z eksperymentem.



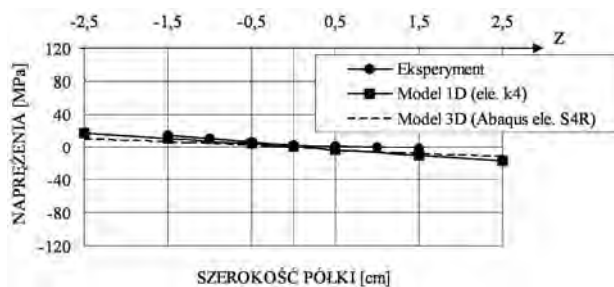
Rys. 5.3. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 1 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



Rys. 5.4. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 1 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



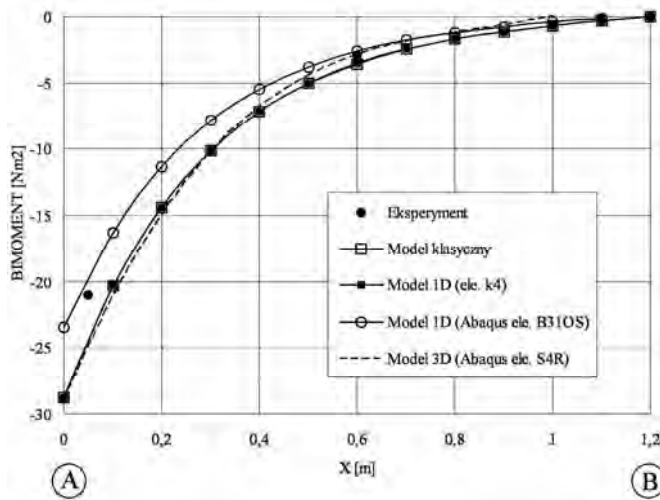
Rys. 5.5. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 2 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



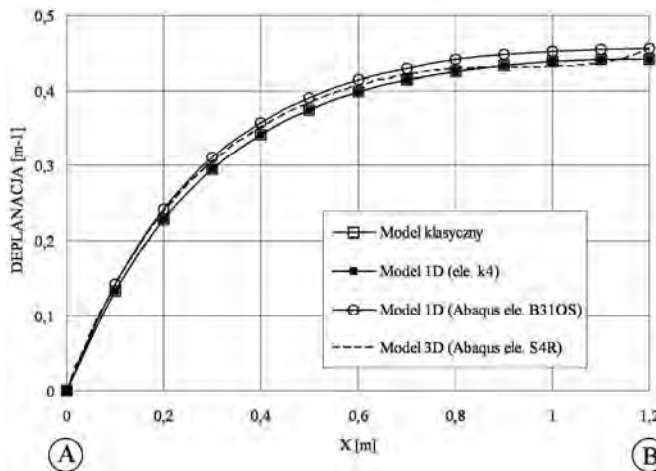
Rys. 5.6. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 2 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]

W przypadku kąta skręcenia (rys. 5.2), stwierdzono zbieżność rozwiązań z eksperymentem, przy zastosowaniu: modeli komercyjnych, modelu klasycznego Vlasova i aproksymacji typu k4. Jednocześnie należy zauważyć (rys. 5.2), iż szeroko stosowany w praktyce inżynierskiej klasyczny element belkowy Bernoulliego-Eulera (w którym nie uwzględnia się wpływów deplanacji przekroju na zachowanie elementu) nie powinien być stosowany w analizie konstrukcji cienkościennych.

W przypadku zmiany wartości bimomentów (rys. 5.7) oraz deplanacji (rys. 5.8) można założyć, iż wszystkie porównywane metody obliczeniowe dają wyniki zgodne z badaniami eksperymentalnymi.



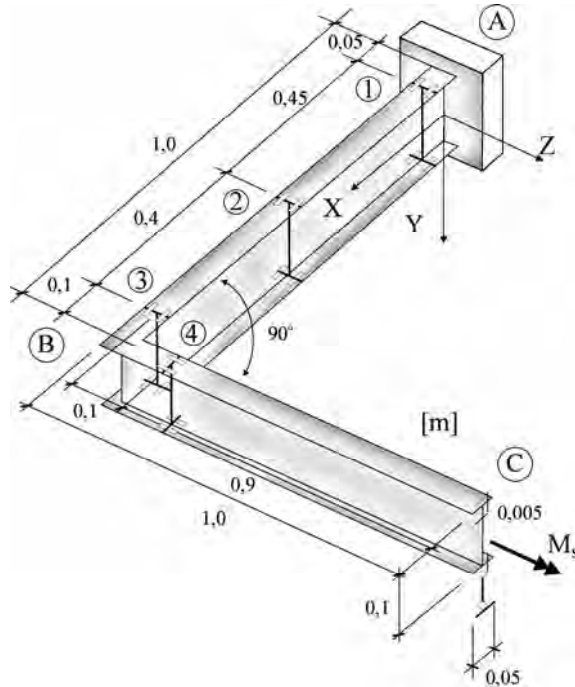
Rys. 5.7. Porównanie wykresów bimomentu od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B



Rys. 5.8. Porównanie wykresów deplanacji od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B

5.1.2. Przykład 2 – model 2

Weźmy pod uwagę ruszt, wykonany z aluminium ($E = 67,8$ GPa, $\nu = 0,33$, $G = 25,5$ GPa) o przekroju dwuteowym (rys. 4.1), obciążony momentem skręcającym na końcu swobodnym o wartości $M_S = 100$ Nm (rys. 5.9).



Rys. 5.9. Model 2 – oznaczenie miejsc badanych przekroji poprzecznych 1, 2, 3 i 4

Warunki podporowe w przypadku modelu 2 zostały zrealizowane następująco: koniec A jest przekrojem w pełni utwierdzonym, a koniec C został zablokowany jedynie na kierunku przemieszczeń pionowych wzdłuż środka, z pełną swobodą pozostałych wielkości, w tym deplanacji i kąta skręcenia, identycznie jak w przypadku modelu 1.

Celem analizy jest porównanie wyników badań eksperymentalnych z wybranymi dostępnymi metodami obliczeń statycznych cienkościennych dźwigarów załamanych w płanie, ze zwróceniem szczególnej uwagi na rozwiązanie wykorzystujące model mieszany z superelementem węzłowym (szczególnego typu, dla którego długość współpracująca została przyjęta na podstawie badań numerycznych przeprowadzonych w rozdziale 3 w przykładzie 3) i elementem typu k4.

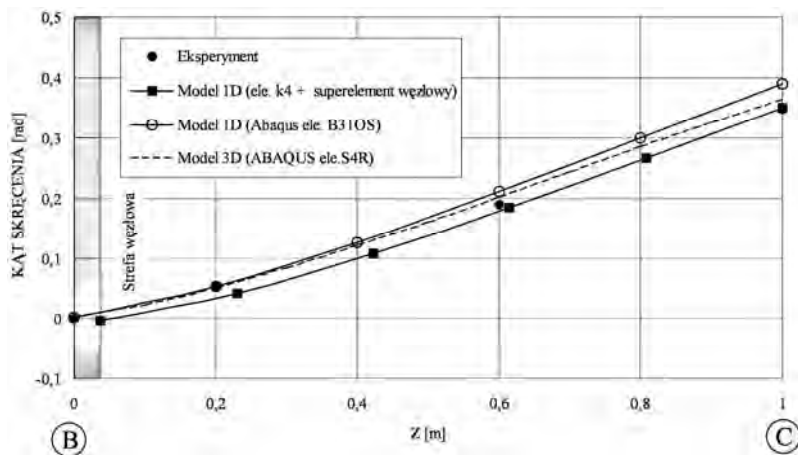
Ze względu na macierzowy charakter algorytmu obliczeniowego zastosowano następujący podział układów 1D:

- Model 1D (ele. k4 + superelement) - jeden superelement i dziesięć elementów typu k4 (po pięć na każdym z prętów schodzących się w węźle),
- Model 1D (ABAQUS, ele. B31OS) – dziesięć elementów.

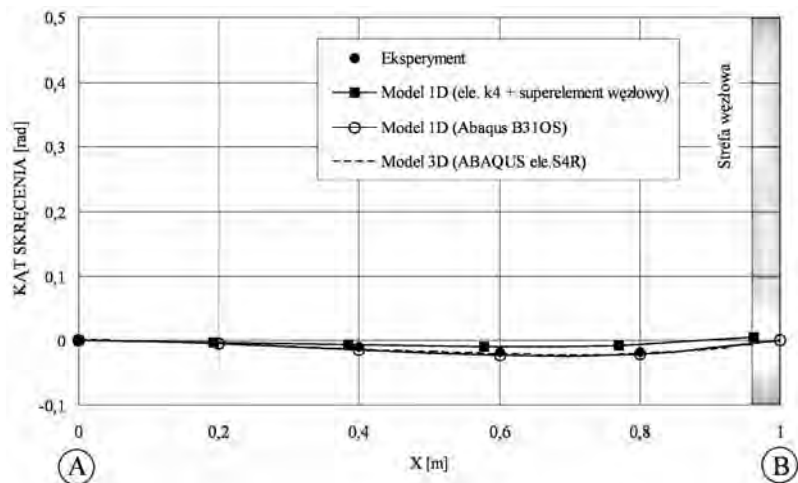
Wyniki analizy statycznej

Wyniki analizy, w przypadku modelu 2 (rys. 5.9), przedstawiono na wykresach opisujących zmiany: kątów skręcenia (rys. 5.10, 5.11), bimomentów (rys. 5.20, 5.21) i deplanacji (rys. 5.22, 5.23), w przedziałach B – C względem zmiennej Z [m] i A – B względem zmiennej X [m].

Na wykresach porównano kąty skręcenia, bimomenty i deplanację, zestawiając wyniki eksperymentu z rozwiązaniami wykorzystującymi modele komercyjne (ABAQUS) (model 1D z elementem B310S i model 3D z elementem powłokowym S4R) [58] oraz wynikami w przypadku modelu mieszanego (ele. k4 + superelement węzłowy typu L (rys. 3.13) $l_w = 0,125h$).

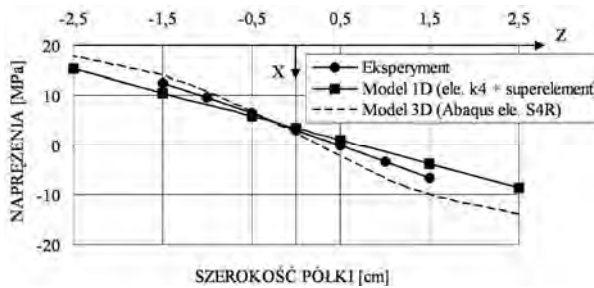


Rys. 5.10. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale B – C

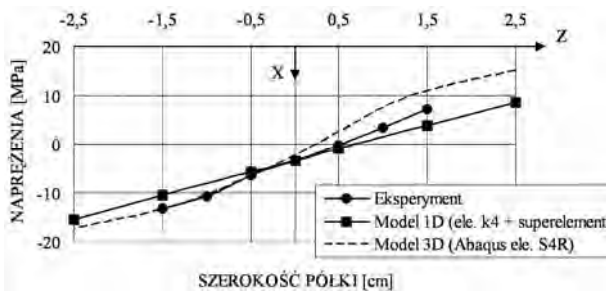


Rys. 5.11. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B

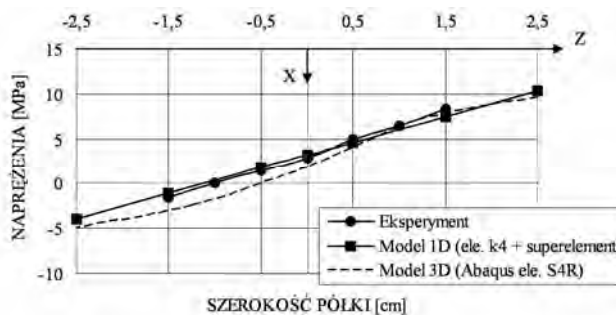
W przypadku zmiany kąta skręcenia (rys. 5.10, 5.11), bimomentu (rys. 5.20, 5.21) i deplacji (rys. 5.22, 5.23) stwierdzono wystarczającą zbieżność rozwiązań numerycznych (przy zastosowaniu modeli komercyjnych i modelu mieszanego) z eksperymentem. Zestawiono również rozkłady naprężeń normalnych w półkach górnej i dolnej przekroju poprzecznego, w czterech wybranych przekrojach 1, 2, 3, 4 (rys. 5.9). Na wykresach (rys. 5.12–5.19) porównano wyniki eksperymentalne z wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu modelu mieszanego (superelement węzłowy z elementem typu k4) i modelu 3D (ABAQUS; elementy S4R). W wyniku analizy stwierdzono dobrą zbieżność rozkładów naprężeń obydwu metod obliczeniowych z eksperymentem.



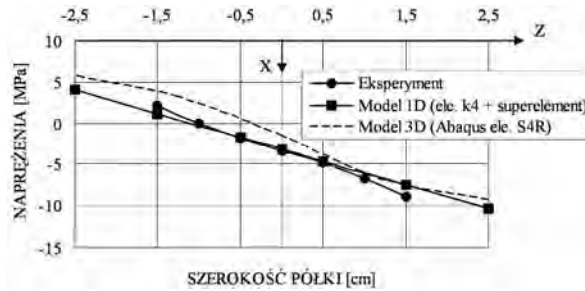
Rys. 5.12. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 1 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



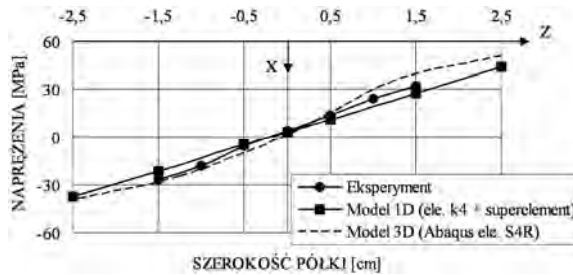
Rys. 5.13. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 1 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



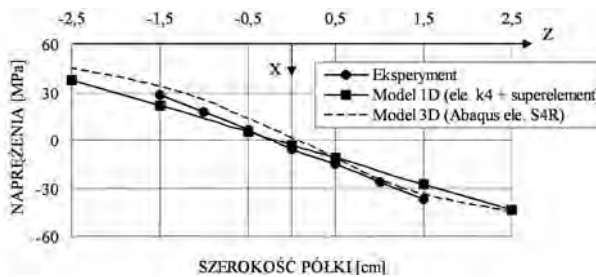
Rys. 5.14. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 2 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



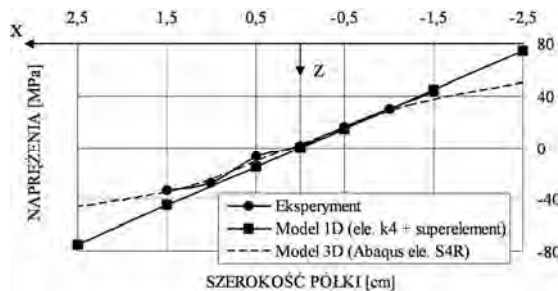
Rys. 5.15. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 2 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



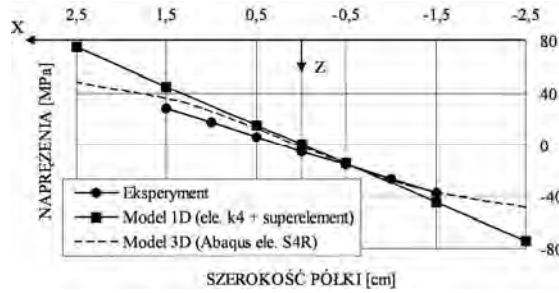
Rys. 5.16. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 3 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



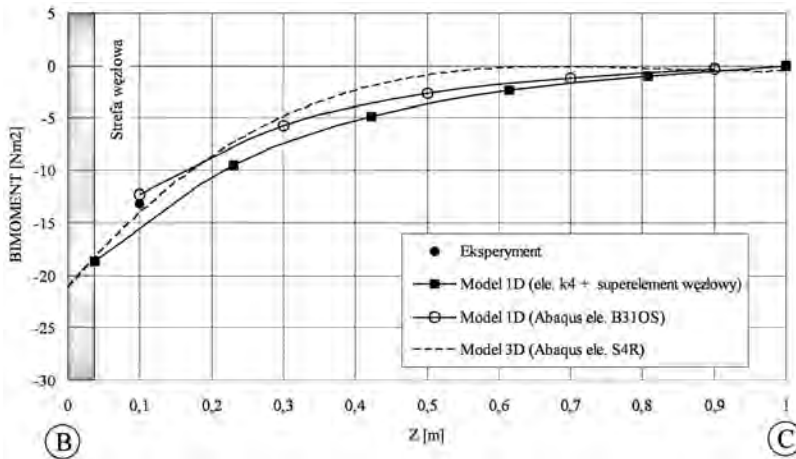
Rys. 5.17. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 3 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



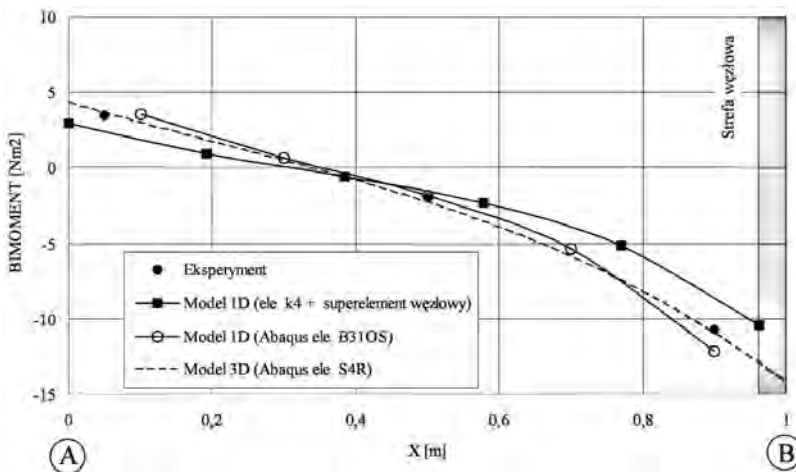
Rys. 5.18. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 4 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



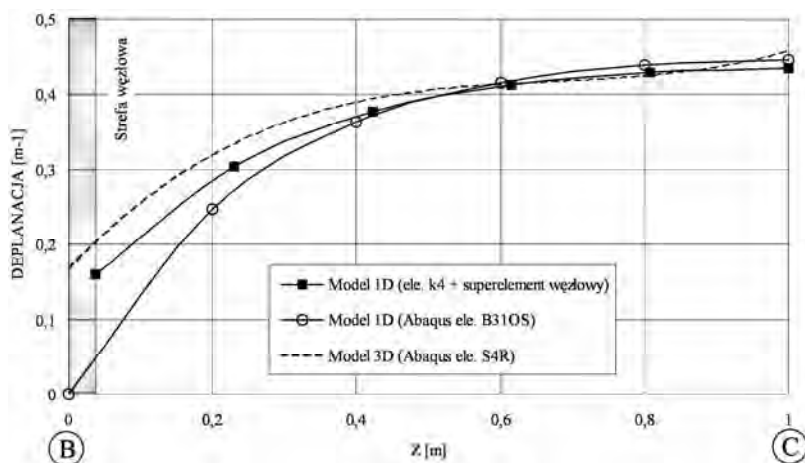
Rys. 5.19. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w płócie dolnej w przekroju 4 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



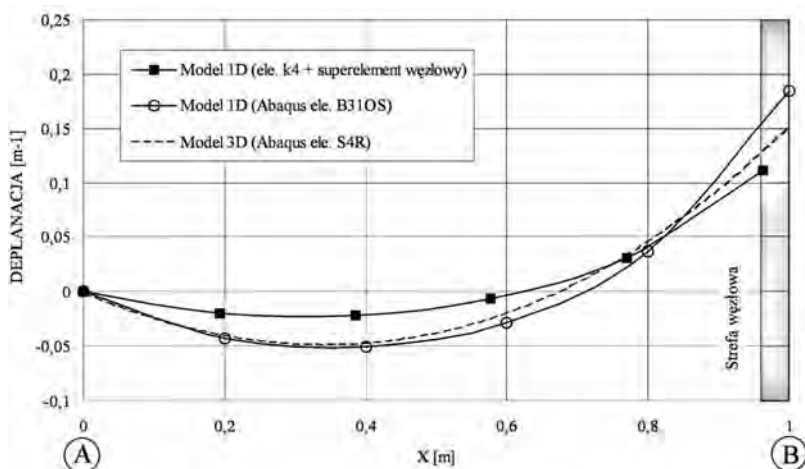
Rys. 5.20. Porównanie wykresów bimomentu od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale B – C



Rys. 5.21. Porównanie wykresów bimomentu od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B



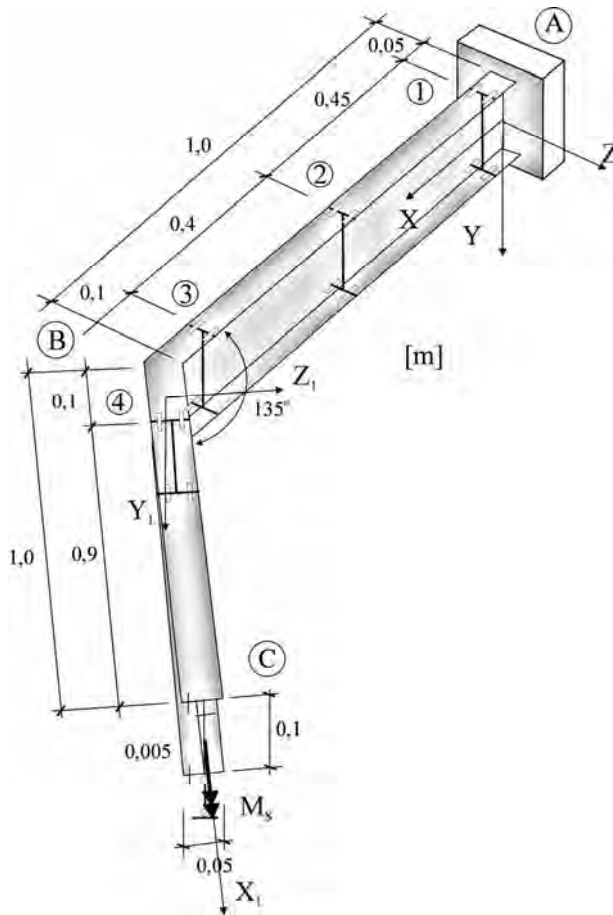
Rys. 5.22. Porównanie wykresów deplanacji od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale B – C



Rys. 5.23. Porównanie wykresów deplanacji od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B

5.1.3. Przykład 3 – model 3

Weźmy pod uwagę ruszt, wykonany z aluminium ($E = 67,8$ GPa, $\nu = 0,33$, $G = 25,5$ GPa) o przekroju dwuteowym (rys. 4.1), obciążony momentem skręcającym na końcu swobodnym o wartości $M_S = 100$ Nm (rys. 5.24).



Rys. 5.24. Model 3 – oznaczenie miejsc badanych przekroji poprzecznych 1, 2, 3 i 4

Warunki podporowe w przypadku modelu 3 zostały zrealizowane następująco: koniec A jest przekrojem w pełni utwierdzonym, a koniec C został zablokowany jedynie na kierunku przemieszczeń pionowych wzdłuż środka, z pełną swobodą pozostałym wielkości w tym deplanacji i kąta skręcenia, podobnie jak w modelach 1 i 2.

Celem analizy jest porównanie wyników badań eksperymentalnych z dostępnymi metodami obliczeń statycznych cienkościennych dźwigarów załamanych w planie, ze zwróceniem szczególnej uwagi na rozwiązanie wykorzystujące model mieszany z superelementem węzłowym (szczególnego typu, dla którego długość współpracująca została przyjęta na podstawie badań numerycznych przeprowadzonych w rozdziale 3 w przykładzie 3) i elementem typu k4.

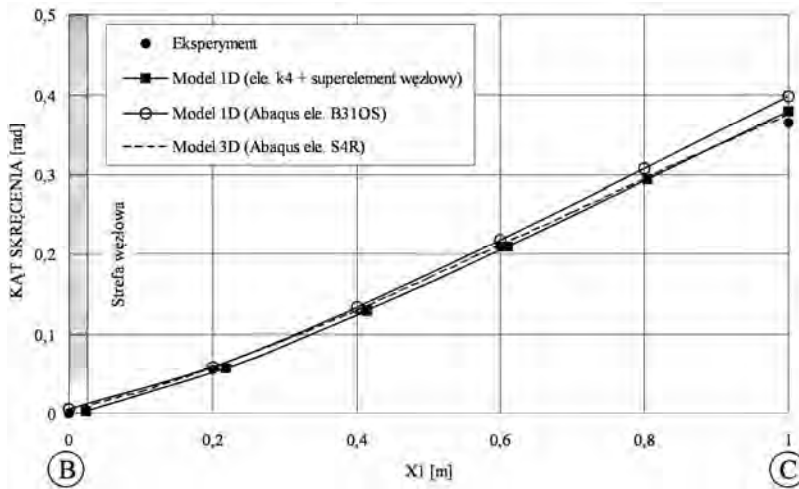
Ze względu na macierzowy charakter algorytmu obliczeniowego zastosowano następujący podział układów 1D:

- Model 1D (ele. k4 + superelement) - jeden superelement i dziesięć elementów typu k4 (po pięć na każdym z prętów schodzących się w węźle),
- Model 1D (ABAQUS, element B31OS [58]) – dziesięć elementów.

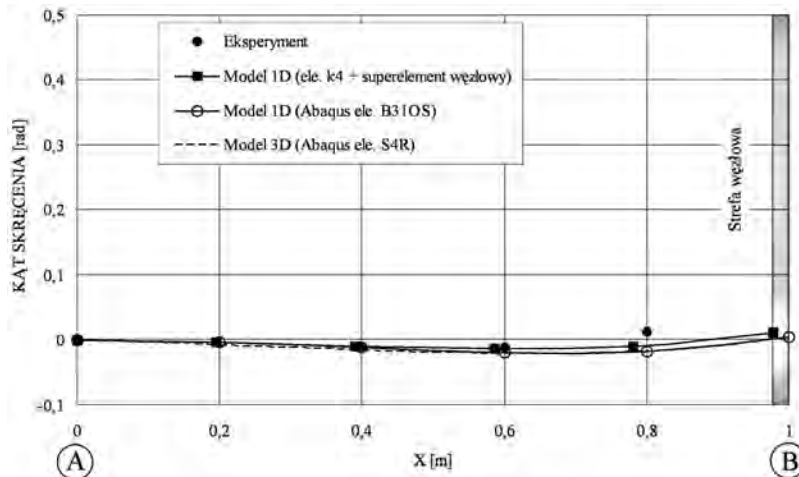
Wyniki analizy statycznej

Wyniki analizy, w przypadku modelu 3 (rys. 5.24), przedstawiono na wykresach opisujących zmiany: kątów skręcenia (rys. 5.25, 5.26), bimomentów (rys. 5.35, 5.36) i deplanacji (rys. 5.37, 5.38), w przedziałach B – C względem zmiennej X_1 [m] i A – B względem zmiennej X [m].

Na wykresach porównano kąty skręcenia, bimomenty i deplanację, zestawiając wyniki eksperymentu z rozwiązaniami wykorzystującymi modele komercyjne (ABAQUS) (model 1D z elementem B310S i model 3D z elementem powłokowym S4R) [58] oraz wynikami w przypadku modelu mieszanego (ele. k4 + superelement węzłowy typu V (rys. 3.16) $l_w = 0,125h$).



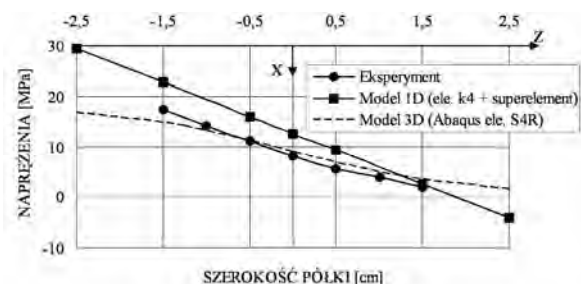
Rys. 5.25. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale B – C



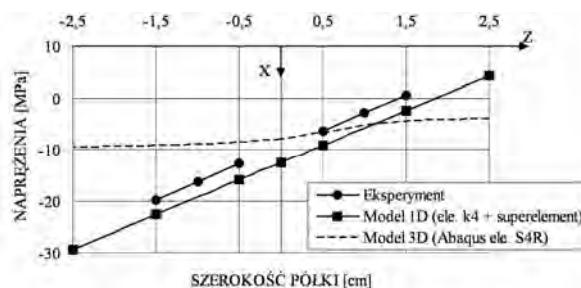
Rys. 5.26. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B

W przypadku zmiany kąta skręcenia (rys. 5.25, 5.26), bimomentu (rys. 5.35, 5.36) i deplanacji (rys. 5.37, 5.38) stwierdzono wystarczającą zbieżność rozwiązań numerycznych (przy zastosowaniu modeli komercyjnych i modelu mieszanego) z eksperymentem.

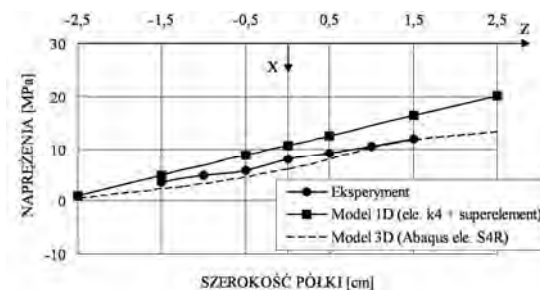
Zestawiono rozkłady naprężeń normalnych w półkach górnej i dolnej przekroju poprzecznego, w czterech wybranych przekrojach 1, 2, 3, 4 (rys. 5.24). Na wykresach (rys. 5.27–5.34) porównano wyniki eksperymentalne z wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu modelu mieszanego (superelement węzłowy z elementem typu k4) i modelu 3D (ABAQUS; element S4R [58]). W wyniku analizy stwierdzono dobrą zbieżność obydwu metod obliczeniowych z eksperymentem.



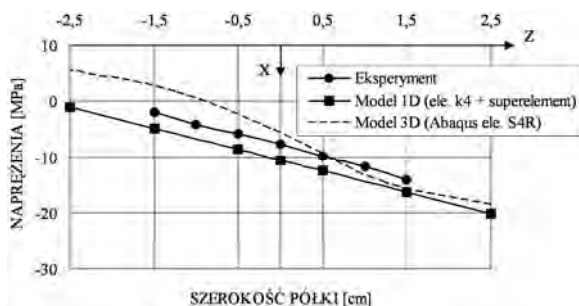
Rys. 5.27. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 1 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



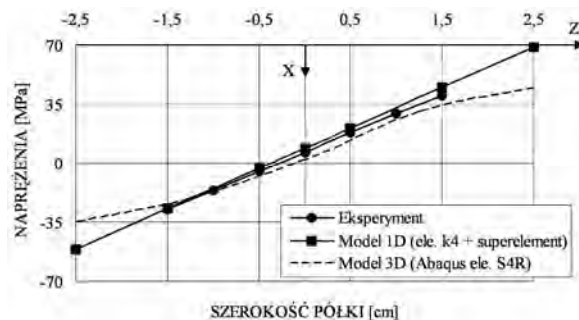
Rys. 5.28. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 1 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



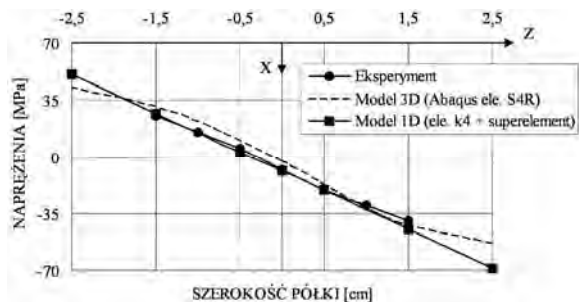
Rys. 5.29. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 2 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



Rys. 5.30. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 2 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]

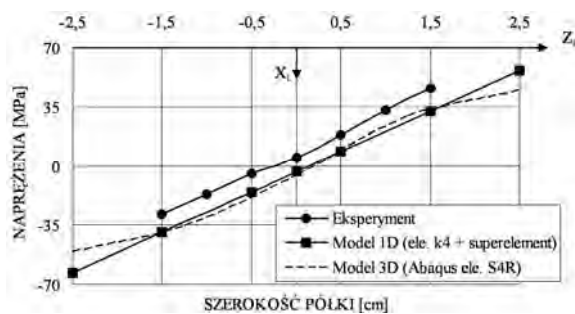


Rys. 5.31. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 3 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]

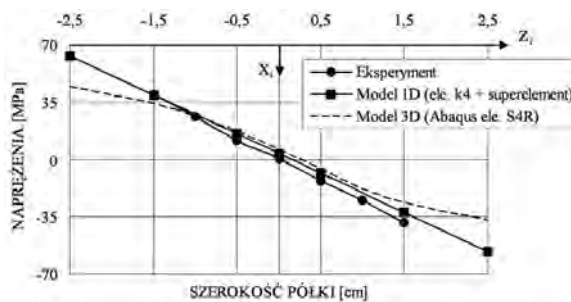


Rys. 5.32. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 3 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]

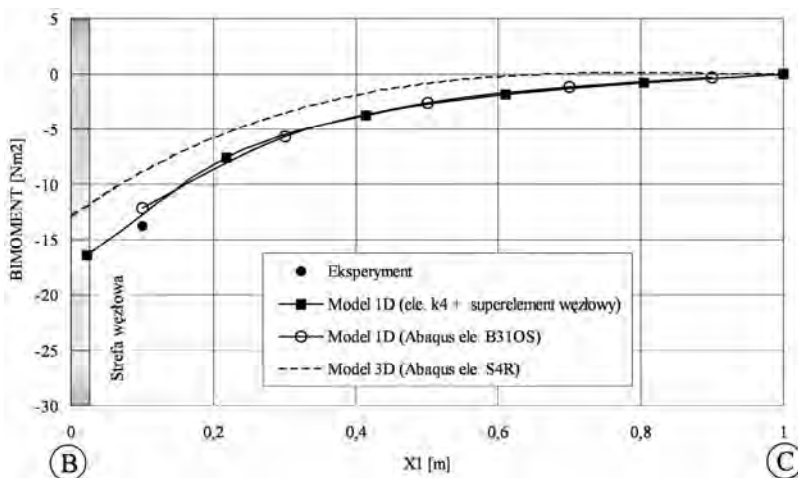
Rozbieżności, które pojawiają się między rozwiązaniami na wykresach rozkładów naprężeń, są spowodowane, w przypadku wykresu przedstawionego na rys. 5.28, 5.33, błędami pomiaru, a w przypadku rys. 5.27, 5.29, 5.30 zaburzeniami wynikającymi z niskiego poziomu wartości naprężeń. Efekty te wzmocnione są również wizualnie z powodu zmian jednostkowych wartości skali pionowej.



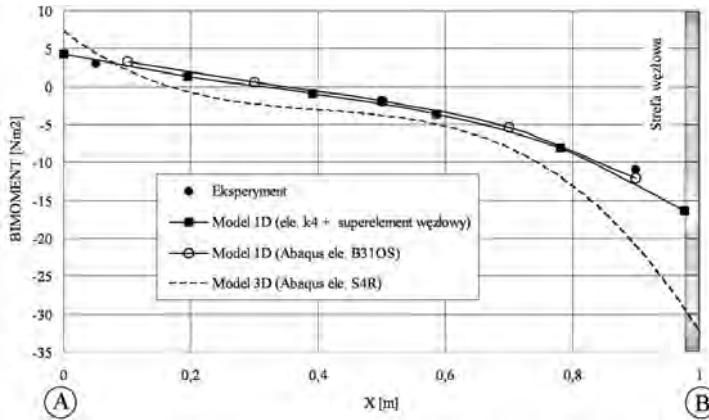
Rys. 5.33. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 4 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



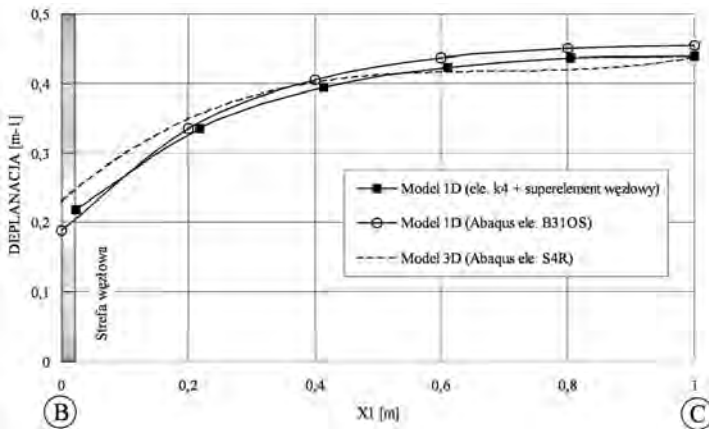
Rys. 5.34. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 4 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



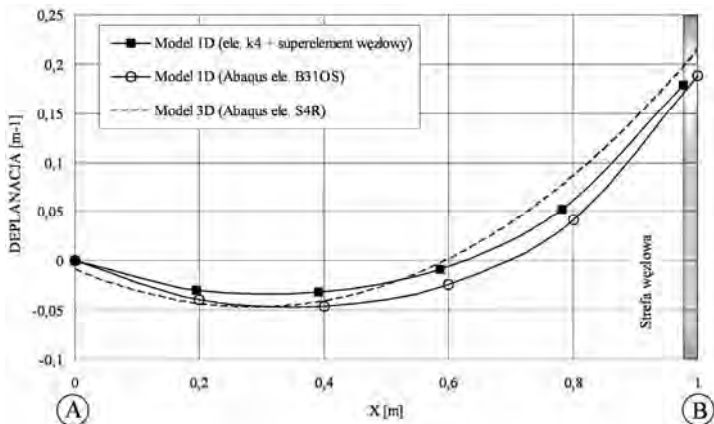
Rys. 5.35. Porównanie wykresów bimomentu od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale B – C



Rys. 5.36. Porównanie wykresów bimomentu od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B



Rys. 5.37. Porównanie wykresów deplancji od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale B – C



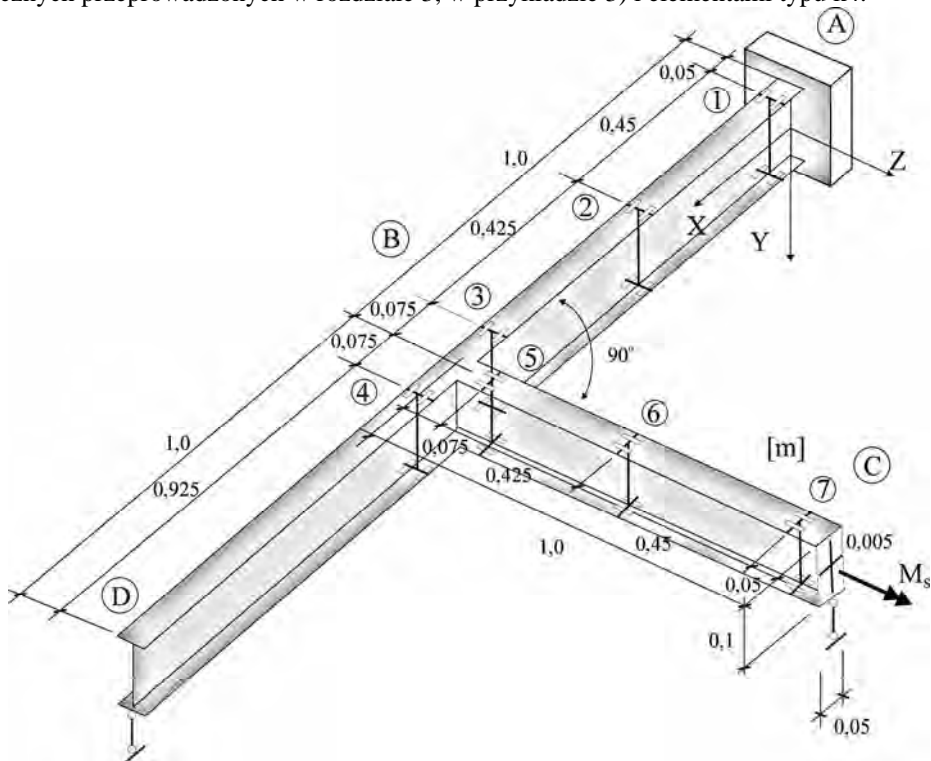
Rys. 5.38. Porównanie wykresów deplancji od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B

5.1.4. Przykład 4 – model 4

Weźmy pod uwagę ruszt cienkościenny wykonany z aluminium ($E = 67,8$ GPa, $\nu = 0,33$, $G = 25,5$ GPa) prętów o przekroju dwuteowym (rys. 4.1), obciążony momentem skręcającym na końcu swobodnym o wartości $M_s = 100$ Nm (rys. 5.39).

Warunki podporowe w przypadku modelu 4 zostały zrealizowane następująco: koniec A został w pełni utwierdzony, koniec D pozostał swobodny z blokadą przemieszczeń pionowych (rys. 4.15a, b), a koniec C zablokowany we wszystkich kierunkach jedynie z możliwością obrotu względem osi pręta C – B (rys. 4.15c).

Celem analizy jest porównanie wyników badań eksperymentalnych z dostępnymi metodami obliczeń statycznych rusztów cienkościennych, ze zwróceniem szczególnej uwagi na rozwiązanie wykorzystujące model mieszany z superelementem węzłowym (szczególnego typu, dla którego długość współpracująca została przyjęta na podstawie badań numerycznych przeprowadzonych w rozdziale 3, w przykładzie 3) i elementami typu k4.



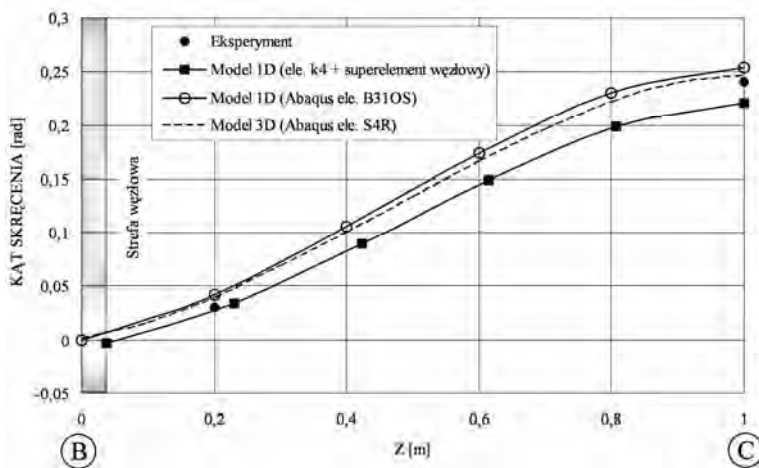
Rys. 5.39. Model 4 – oznaczenie miejsc badanych przekroi poprzecznych 1, 2, 3 i 4

Wyniki analizy statycznej

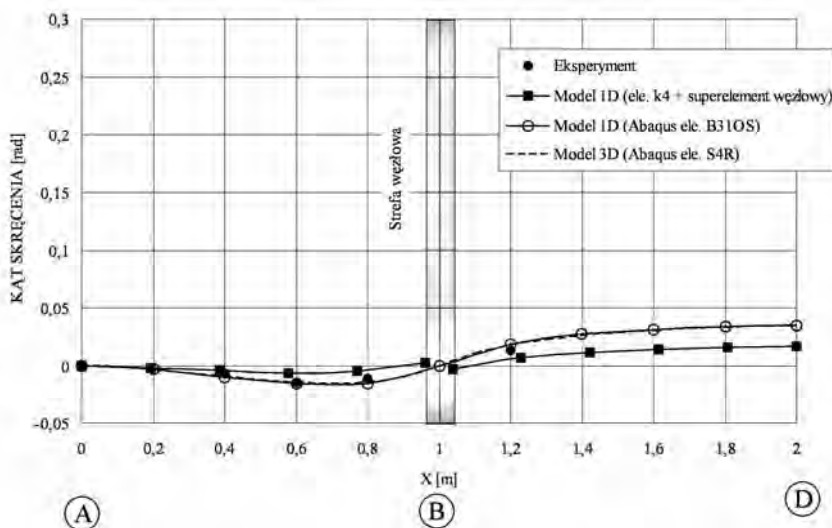
Wyniki analizy, w przypadku modelu 4 (rys. 5.39), przedstawiono na wykresach opisujących zmiany: kątów skręcenia (rys. 5.40, 5.41), bimomentów (rys. 5.56, 5.57) i deplancji (rys. 5.58, 5.59), w przedziałach B – C względem zmiennej Z [m] i A – B – D względem zmiennej X [m].

Na wykresach porównano kąty skręcenia, bimomenty i deplancję, zestawiając wyniki eksperymentu z rozwiązaniami wykorzystującymi modele komercyjne (ABAQUS) (model

1D z elementem B31OS i model 3D z elementem powłokowym S4R) [58] oraz wynikami w przypadku modelu mieszanego (ele. k4 + superelement węzłowy typu T $l_w = 0,125h$).



Rys. 5.40. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale B – C

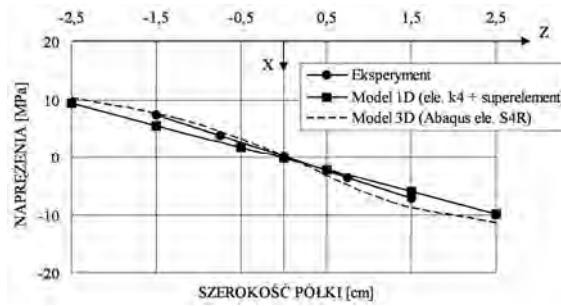


Rys. 5.41. Porównanie wykresów kąta skręcenia od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B – D

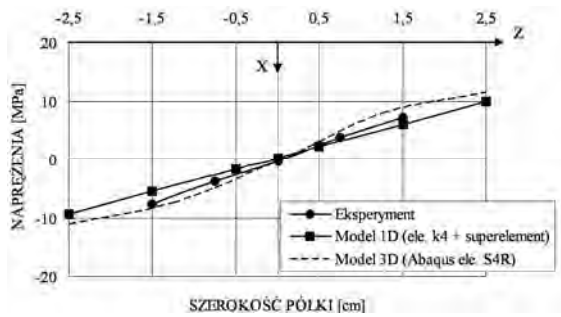
W przypadku zmiany kąta skręcenia (rys. 5.40, 5.41), bimomentu (rys. 5.56, 5.57) i deplacji (rys. 5.58, 5.59) stwierdzono wystarczającą zbieżność rozwiązań numerycznych (przy zastosowaniu modeli komercyjnych i modelu mieszanego) z eksperymentem.

Zestawiono również rozkłady naprężeń normalnych w półkach górnej i dolnej przekroju poprzecznego, w siedmiu wybranych przekrojach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (rys. 5.39). Na wykresach (rys. 5.42–5.55) porównano wyniki eksperymentalne z wynikami otrzymanymi

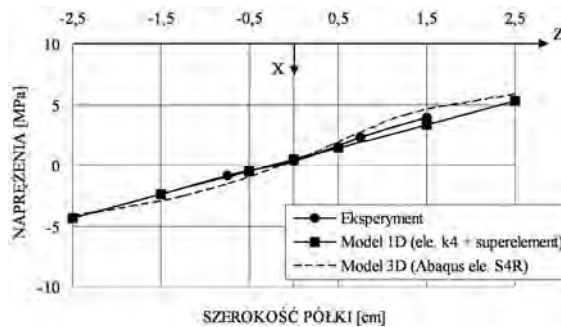
przy zastosowaniu modelu mieszanego (superelement węzłowy z elementem typu k4) i modelu 3D (ABAQUS; element S4R). W wyniku analizy stwierdzono dostateczną zbieżność, z inżynierskiego punktu widzenia, obydwu metod obliczeniowych z eksperymentem.



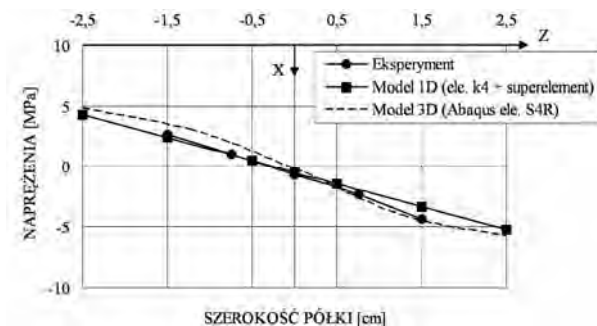
Rys. 5.42. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w płócie górnej w przekroju 1 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



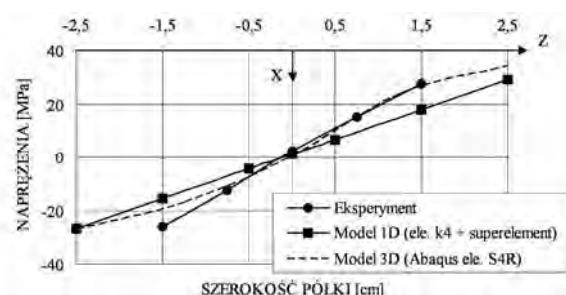
Rys. 5.43. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w płócie dolnej w przekroju 1 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



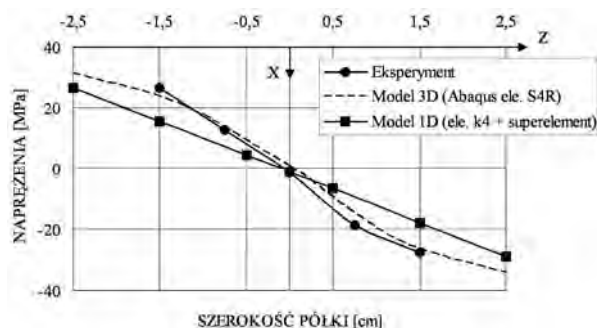
Rys. 5.44. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w płócie górnej w przekroju 2 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



Rys. 5.45. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 2 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]

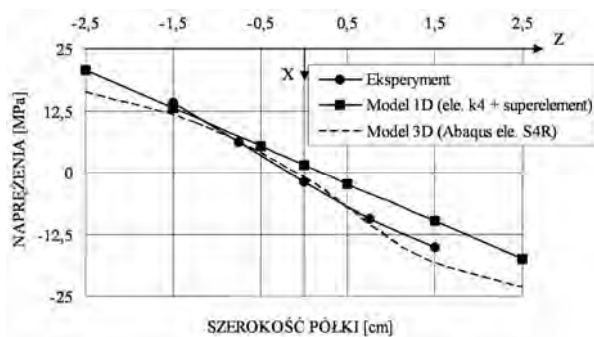


Rys. 5.46. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 3 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]

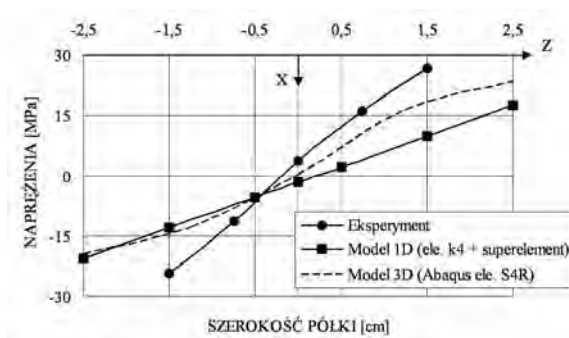


Rys. 5.47. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 3 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]

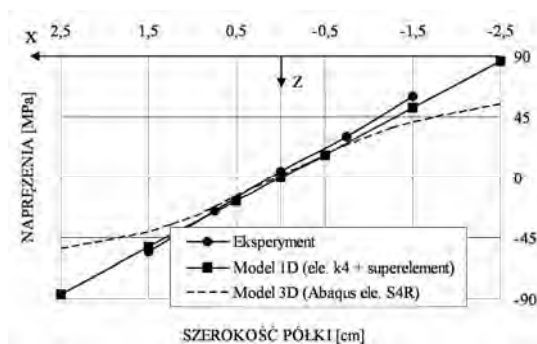
Rozbieżności, które pojawiają się między rozwiązaniami na wykresach rozkładów naprężeń, są spowodowane, w przypadku wykresów przedstawionych na rys. 5.49, 5.52, 5.53, błędami pomiaru oraz zaburzeniami wynikającymi z niskiego poziomu wartości naprężeń. Efekty te wzmocnione są wizualnie, z powodu zmiany jednostkowych wartości skali pionowej.



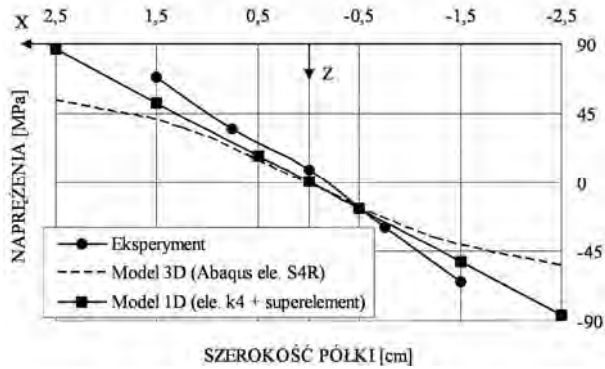
Rys. 5.48. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 4 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



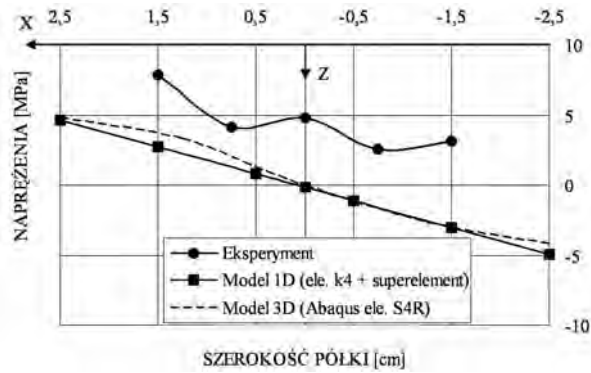
Rys. 5.49. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 4 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



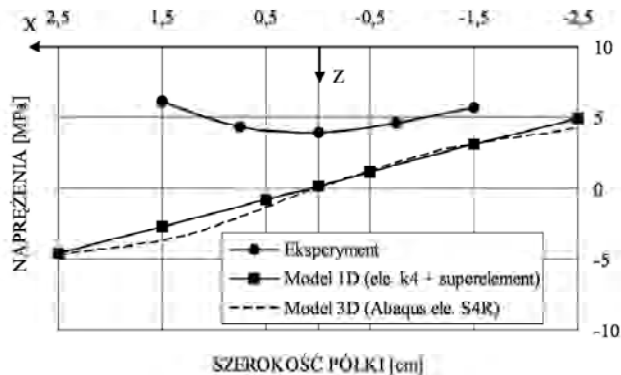
Rys. 5.50. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 5 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



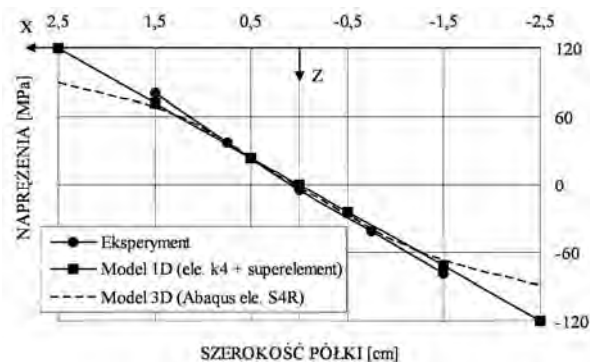
Rys. 5.51. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w płócie dolnej w przekroju 5 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



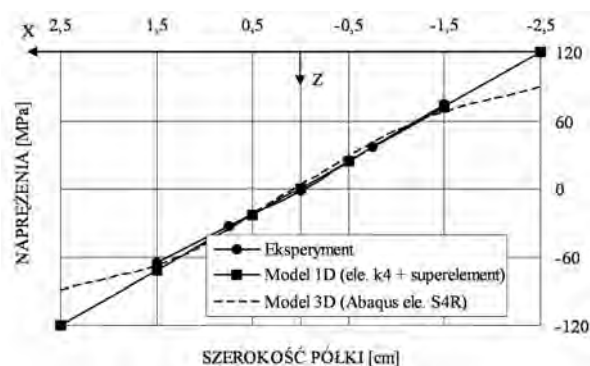
Rys. 5.52. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w płócie górnej w przekroju 6 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



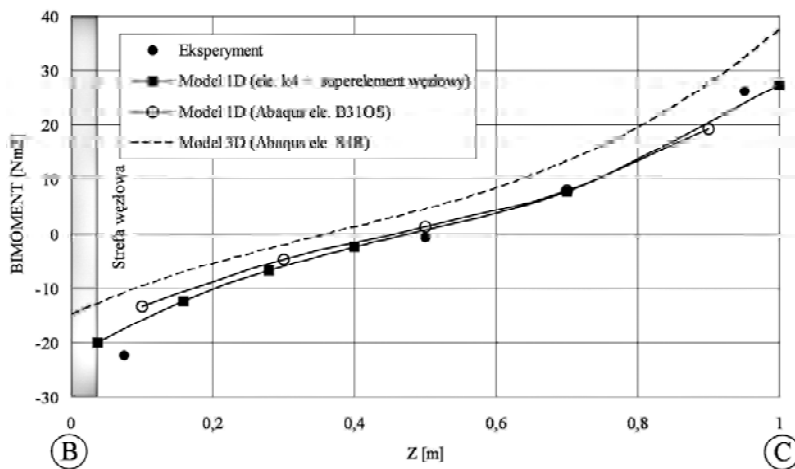
Rys. 5.53. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w płócie dolnej w przekroju 6 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



Rys. 5.54. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce górnej w przekroju 7 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]



Rys. 5.55. Porównanie rozkładów naprężeń normalnych w półce dolnej w przekroju 7 od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm]

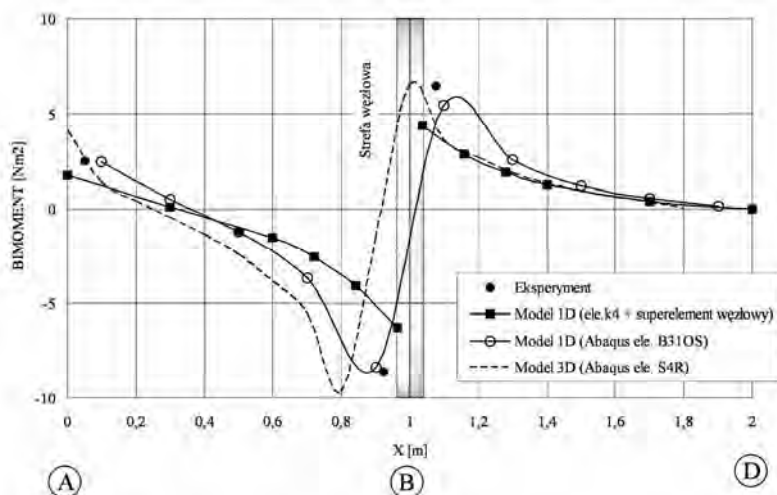


Rys. 5.56. Porównanie wykresów bimomentu od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale B – C

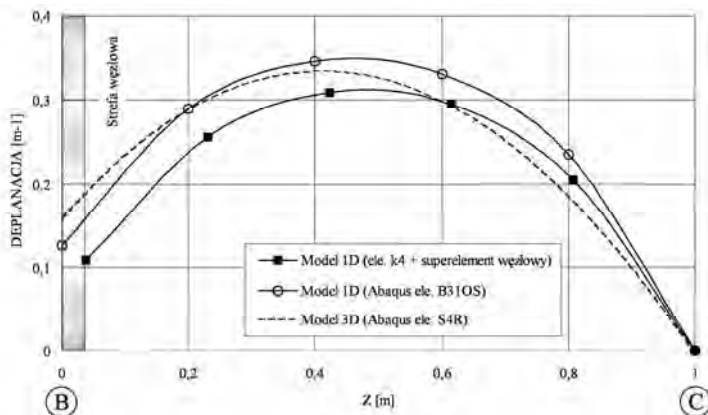
We wszystkich badanych modelach widać zaburzenia stanu naprężeń w skrajnych włóknach półek. Należy jednak pamiętać, iż w przypadku modeli mieszanych (wykorzystujących koncepcję superelementów) zakłada się liniowy rozkład naprężeń normalnych w przekroju półki, zgodnie z wykresem współrzędnej wycinkowej ω (rys. 3.8). Naprężenia wyznacza się zgodnie z zależnością [3]:

$$\sigma = \frac{B}{J_{\omega}} \omega. \quad (5.1)$$

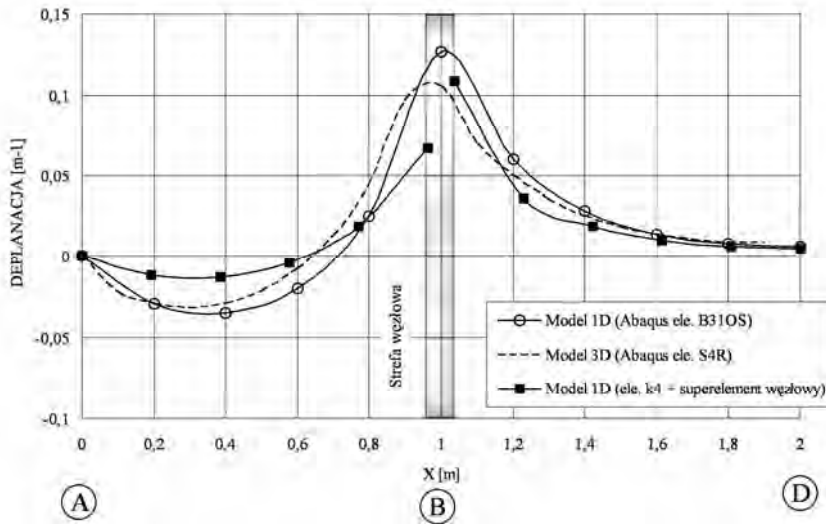
Różnice w przebiegach bimomentów oraz deplanacji, między rozwiązaniem wykorzystującym model 3D (ABAQUS, element S4R) a eksperymentem czy modelem mieszanym, wynikają ze sposobu wyznaczania tych wielkości w rozwiązaniach MES (ABAQUS, element S4R). Pochodne kątów skręcenia obliczano metodą różnicową.



Rys. 5.57. Porównanie wykresów bimomentu od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A – B – D



Rys. 5.58. Porównanie wykresów deplanacji od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale B – C



Rys. 5.59. Porównanie wykresów deplancji od obciążenia momentem skręcającym 100 [Nm] w przedziale A - B - D

5.2. Wnioski końcowe z porównia wyników modeli teoretycznych z badaniami eksperymentalnymi

Na podstawie przeprowadzonej analizy porównawczej badań numerycznych i eksperymentalnych można sformułować następujące wnioski:

1. Skręcenie jednego z prętów układu powoduje powstanie deformacji giętno-skrętnej na pozostałych prętach schodzących się w węzle.
2. Powstałe w wyniku skręcania giętno-skrętne deformacje i siły przekrojowe są zależne od sztywności giętno-skrętnej całego układu, a w szczególności podatnego węzła.
3. Porównania rozkładów naprężeń normalnych, w wybranych przekrojach, w tym, w przekrojach przywęzłowych, wskazują na istotną rolę naprężeń bimomentowych skręcania skrępowanego, na stan sił wewnętrznych w konstrukcji.
4. Stosowanie w analizie cienkościennych dźwigarów załamanych w planie, poddanych skręcaniu, modelu prętowego 1D (element Bernoulliego-Eulera), pomijającego efekty bimomentowe, prowadzi do znacznych błędów obliczeniowych.
5. Dostępne na rynku programy komercyjne (ABAQUS) z elementami 1D uwzględniającymi wpływ deformacji przekroju poprzecznego pręta na wartości sił wewnętrznych i kątów skręcenia (B31OS, B32OS [58]), w przypadkach układów analizowanych w pracy (pręty jednakowej wysokości), w sposób wystarczająco dokładny opisują rzeczywisty stan naprężenia w konstrukcji.
6. Proponowana metoda analizy z wykorzystaniem superelementu węzłowego wystarczająco dobrze opisuje rzeczywisty stan naprężenia, sił wewnętrznych i przemieszczeń w odniesieniu do cienkościennych układów konstrukcyjnych, takich jak dźwigary załamane w planie czy ruszty.
7. Olbrzymią zaletą metody zaproponowanej w pracy jest ograniczenie wielkości modelu, wynikające z połączenia elementów 3D z 1D, a tym samym skrócenie czasu analizy. Nie należy zapominać także o tym, iż przy jej użyciu można uwzględniać w analizie

wpływ konstrukcji węzła (lub dowolnych usztywnień, np. takich jak przepony czy przewiązki) na rozkład bimomentów w węźle.

8. Metoda wykorzystująca model mieszany nawiązuje do klasycznych rozwiązań teoretycznych sformułowanych we wczesnych latach pięćdziesiątych przez Vlasova [8].

Rozdział 6

ANALIZA WRAŻLIWOŚCI

6.1. Wstęp

Konstrukcje cienkościenne o przekrojach otwartych mają szerokie zastosowanie w budownictwie, ze względu na wzrastające wymagania użytkowe, ekonomiczne czy estetyczne. Doskonalone są więc metody projektowania, w szczególności dotyczące optymalizacji, identyfikacji czy analizy wrażliwości konstrukcji. Metody te bazują na istniejących modelach teoretycznych i służą do wspomagania procesów projektowania, badania lub wzmacniania istniejących układów konstrukcyjnych. W tych wszystkich zagadnieniach racjonalnego projektowania konstrukcji w celu stworzenia konstrukcji optymalnej pomocna jest analiza wrażliwości.

Początek rozwoju analizy wrażliwości datuje się na lata siedemdziesiąte. Problematyką analizy wrażliwości zajmowali się głównie Haug [99] i Arorra [100]. W Polsce tą tematyką zajmowali się Mróz, Haftka, Dems [101, 102], Szymczak [103], Bojczuk [104].

Analiza wrażliwości (tzn. badanie wpływu zmian pewnych parametrów charakteryzujących konstrukcję – geometrycznych lub materiałowych, określanych przez projektanta i mogących ulegać zmianie na etapie projektowania konstrukcji, zwanych zmiennymi projektowymi – na wielkości opisujące zachowanie się konstrukcji, np. siły wewnętrzne, reakcji, częstość drgań własnych, obciążenia krytyczne, przemieszczenia, to znaczy zmienne stanu) staje się narzędziem wręcz nieodzownym do określania i przewidywania zachowania się konstrukcji po zmianie parametrów modelu.

Analiza wrażliwości różni się od stosowanej powszechnie analizy parametrycznej tym, że przy stosowaniu analizy wrażliwości wykonujemy tylko dwukrotną analizę statyczną (dla układu podstawowego i sprzężonego) i na tej podstawie wyznaczamy poszukiwane wariacje zmiennych stanu konstrukcji. W procesie projektowania zachodzi wszak konieczność modyfikacji różnych zmiennych stanu konstrukcji, aby uzyskać z góry zamierzony efekt końcowy.

Szczególnie ważną rolę analiza wrażliwości odgrywa wówczas, gdy mamy do czynienia z konstrukcją nietypową bądź za skomplikowanym układem konstrukcyjnym. Wtedy w procesie projektowania nawet doświadczonym projektantom trudno określić miejsce i rodzaj koniecznych modyfikacji konstrukcji, w celu otrzymania oczekiwanych zmiany w jej zachowaniu.

W odniesieniu do konstrukcji prętowych (także cienkościennych), podlegających zginaniu, ściskaniu, rozciąganiu czy skręcaniu, analiza wrażliwości jest dość dobrze opracowana teoretycznie. Natomiast w przypadku cienkościennych układów konstrukcyjnych nie jest zbyt popularna: Szymczak, Budkowska [105–107], Iwicki [108].

Niniejszy rozdział poświęcony jest analizie wrażliwości układów cienkościennych, w szczególności rusztów zbudowanych z prętów o przekrojach bisymetrycznych otwartych, podlegających jedynie działaniu obciążeń statycznych w formie momentów skręcających. Podstawą rozważań jest klasyczna teoria prętów cienkościennych w połączeniu z proponowaną w pracy metodą superelementów węzłowych. Analizę ograniczono, tak jak w całej pracy, do zakresu liniowo-sprężystego. Założono, że przekroje prętów zbiegających się

w węzłach mogą ulegać zmianie wzdłuż długości, wysokość środnika jednak jest stała i przekrój pozostaje bisymetryczny. Przedmiotem analizy jest wyznaczenie wariacji sił wewnętrznych i przemieszczeń układu cienkościennego przy wariacji, różnego typu, zmiennych projektowych.

W analizie wrażliwości konstrukcji wyróżnia się analizę pierwszego i drugiego rzędu [102]. Analizy te polegają na wyznaczeniu pierwszej lub drugiej wariacji zmiennej stanu przy zastosowaniu: metody układów sprzężonych, metody różniczkowania bezpośredniego lub metody mieszanej. Opis tych metod można znaleźć w pracach [109–114]. W pracy przedstawiono jednak tylko analizę rzędu pierwszego.

Zmienne projektowe mogą mieć w obydwu przypadkach, tzn. w przypadku analizy pierwszego i drugiego rzędu, opis ciągły lub dyskretny.

Należy w tym miejscu podkreślić, iż w pewnych przypadkach korzystne jest stosowanie ciągłego opisu zmiennych projektowych w postaci funkcji $u_i(z)$. Opis ten jest granicznym przypadkiem rozwiązania dyskretnego przy rosnącym do nieskończoności wymiarze wektora zmiennych projektowych.

6.2. Analiza wrażliwości rzędu pierwszego – opis dyskretny

W analizie wrażliwości konstrukcji w ujęciu dyskretnym korzysta się ze znanych macierzowych równań statyki układów prętowych. Zmienne projektowe powodujące zmiany zmiennych stanu, mają wówczas postać wektora \mathbf{u} .

Dla dowolnego układu prętowego obciążonego statycznie równanie macierzowe równowagi statycznej ma znaną postać:

$$[\mathbf{K}(\mathbf{u})] \mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad (6.1)$$

gdzie $[\mathbf{K}(\mathbf{u})]$ jest macierzą sztywności układu zależną od wektora zmiennych projektowych \mathbf{u} , \mathbf{q} wektorem zmiennych stanu, a \mathbf{P} to wektor obciążeń [103].

6.2.1. Metoda bezpośrednia

Szukając wariacji pewnej wielkości $f(\mathbf{u}, \mathbf{q})$ względem zmiany dowolnej wielkości wektora zmiennych projektowych δu_i szukamy różniczki zupełnej tejże funkcji $f(\mathbf{u}, \mathbf{q})$ względem zmiennej u_i postaci:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{du_i} \delta u_i. \quad (6.2)$$

W drugim członie wyrażenia (6.2) występuje nieznaną pochodną postaci $d\mathbf{q}/du_i$ którą możemy znaleźć, różniczkując równanie równowagi statycznej (6.1) względem du_i , po czym otrzymamy:

$$\frac{d\mathbf{q}}{du_i} = [\mathbf{K}]^{-1} \left(\frac{d\mathbf{P}}{du_i} - \frac{d[\mathbf{K}]}{du_i} \mathbf{q} \right). \quad (6.3)$$

Po podstawieniu (6.3) do (6.2) możemy wyznaczyć poszukiwaną różniczkę wyrażoną przez przyrost zmiennej u_i :

$$\delta f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial u_i} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} [\mathbf{K}]^{-1} \left(\frac{d\mathbf{P}}{du_i} - \frac{d[\mathbf{K}]}{du_i} \mathbf{q} \right) \right\} \delta u_i. \quad (6.4)$$

Pochodne występujące w wyrażeniu (6.4) można policzyć np. ze wzorów przybliżonych postaci:

$$\frac{d\mathbf{P}}{du_i} = \frac{\mathbf{P}(u_i + \Delta u_i) - \mathbf{P}(u_i)}{\Delta u_i}, \quad \frac{d[\mathbf{K}]}{du_i} = \frac{[\mathbf{K}(u_i + \Delta u_i)] - [\mathbf{K}(u_i)]}{\Delta u_i}. \quad (6.5)$$

6.2.2. Metoda układów sprzężonych

W metodzie bezpośredniej istnieje konieczność wyznaczania odwrotnej macierzy sztywności konstrukcji, co może być pracochłonne dla dużych układów. Aby tego uniknąć, można skorzystać z metody układów sprzężonych. Polega ona na wprowadzeniu nowego wektora zmiennych sprzężonych $\bar{\lambda}$, który obliczyć można z równania:

$$[\mathbf{K}] \bar{\lambda} = - \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)^T. \quad (6.6)$$

Wyliczony z równania (6.6) wektor zmiennych sprzężonych $\bar{\lambda}$:

$$\bar{\lambda} = -[\mathbf{K}]^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \quad (6.7)$$

można podstawić do równania (6.4), otrzymując przepis na poszukiwaną różniczkę:

$$\delta f = \left\{ \frac{\partial f}{\partial u_i} + \bar{\lambda}^T \left(\frac{d[\mathbf{K}]}{du_i} \mathbf{q} - \frac{d\mathbf{P}}{du_i} \right) \right\} \delta u_i. \quad (6.8)$$

Jak można zauważyć, w metodzie układów sprzężonych zachodzi konieczność przeprowadzenia analizy statycznej układu dla zadanych obciążeń zewnętrznych oraz obciążenia sprzężonego określonego przez prawą stronę równania (6.7), natomiast obciążenie sprzężone jest identyczne, jak obciążenie wirtualne zakładane zwykle przy obliczaniu przemieszczeń, kątów skręcenia oraz innych wielkości.

W wielu przypadkach praktyki inżynierskiej wektor obciążenia \mathbf{P} , jak i funkcja f są niezależne od zmiennych projektowych, dzięki czemu równanie (6.8) może przyjąć prostszą formę:

$$\delta f = \bar{\lambda}^T \frac{d[\mathbf{K}]}{du_i} \mathbf{q} \delta u_i. \quad (6.9)$$

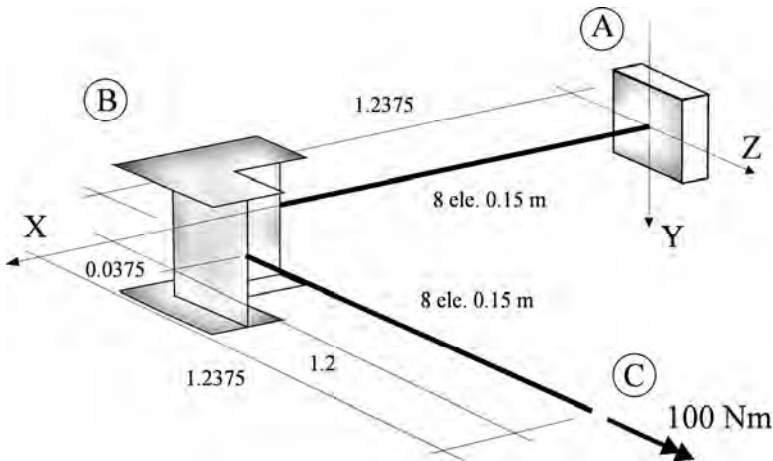
6.3. Przykłady numeryczne

Zamieszczone poniżej przykłady numeryczne mają na celu weryfikację przydatności zaproponowanego w pracy modelu, wykorzystującego koncepcję superelementów, w zagadnieniach analizy wrażliwości.

Wszystkie analizowane w rozdziale przykłady były modelowane elementami typu k4, przy wykorzystaniu różnego rodzaju superelementów, programem autorskim TWGRID.

6.3.1. Analiza wrażliwości kąta skręcenia w zależności od położenia przepony wzdłuż prętów dźwigara załamanego w planie

W przykładzie pierwszym, wzięto pod uwagę zmianę kąta skręcenia $\delta\theta$, w przekroju C, układu obciążonego momentem skręcającym o wartości 100 Nm (rys. 6.1), przy zmianie położenia przepony o zmiennej szerokości δt (zmienna projektowa), wzdłuż osi X od punktu A do B i osi Z, pomiędzy punktami B i C.



Rys. 6.1. Schemat statyczny układu

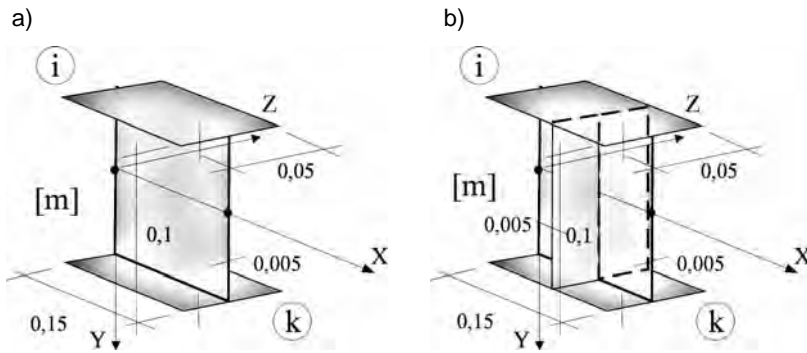
Badany model jest zbudowany z aluminiowych prętów dwuteowych ($E = 70$ GPa, $\nu = 0,33$), o grubości ścianek 5 mm, wysokości środka 100 mm i szerokości półek 50 mm. Pręty pomiędzy sobą połączone są za pośrednictwem superelementu węzłowego, opisanego w rozdziale 3, w przykładzie 3.2.3 typu L($h/8$).

Wariacja kąta skręcenia jest szacowana według zależności (6.9). Do szacowania pochodnej występującej w równaniu (6.9) wykorzystano aproksymację przyrostową (6.5) postaci:

$$\left. \frac{d\mathbf{K}}{dt} \right|_{t=0} \approx \frac{\mathbf{K}(t = 0,005m) - \mathbf{K}(t = 0)}{0,005}, \quad (6.10)$$

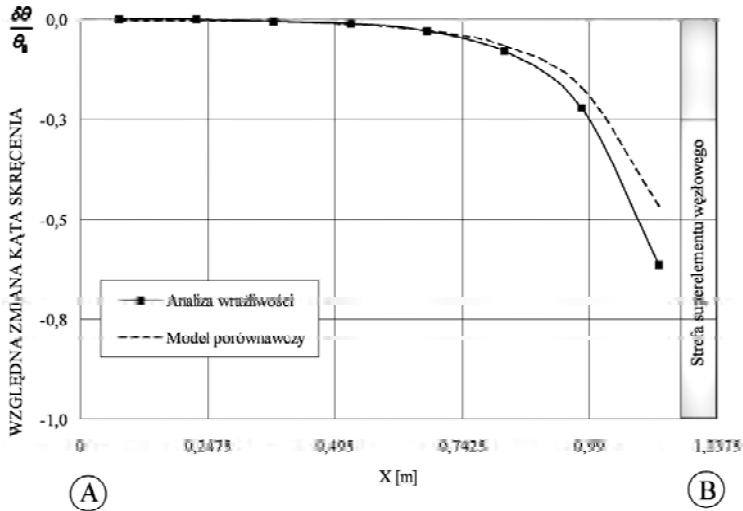
w której $\mathbf{K}(t = 0,005m)$ jest macierzą sztywności superelementu z przeponą (rys. 6.2b) grubości 0,005 m, a $\mathbf{K}(t = 0)$ to macierz sztywności superelementu bez przepony (rys. 6.2a). Analizowano miejsca położenia przepony wzdłuż osi X i Z wynikające z wielkości wykorzystywanych w obliczeniach superelementów (rys. 6.2).

Wyznaczona numerycznie, z wykorzystaniem analizy wrażliwości (linia wpływu), względna zmiana kąta skręcenia (zmiana względem kąta skręcenia $\theta_0 = 0,46207$ rad, liczonego w punkcie C w schemacie statycznym, jak na rys. 6.1), w zależności od położenia przepony o jednostkowej szerokości wraz z dyskretnym rozwiązaniem porównawczym, wykorzystującym analizę układu o zmiennym położeniu przepony w przedziałach A – B i B – C (model porównawczy – „dokładna” analiza statyczna), została przedstawiona na rys. 6.3, 6.4.



Rys. 6.2. Superelementy belkowe

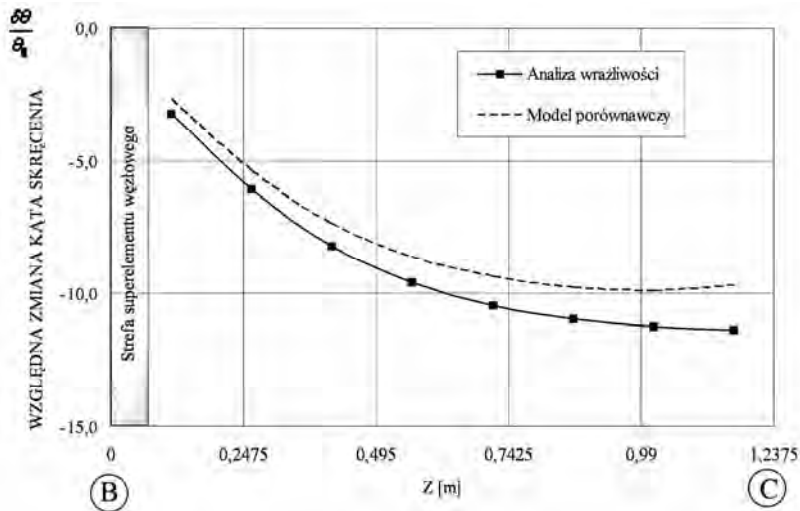
Miejsca położenia przepony i wartości rzędnych odpowiadających względnej zmianie kąta skręcenia w punkcie C, oznaczono na wykresach (rys. 6.3, 6.4) kwadratami.



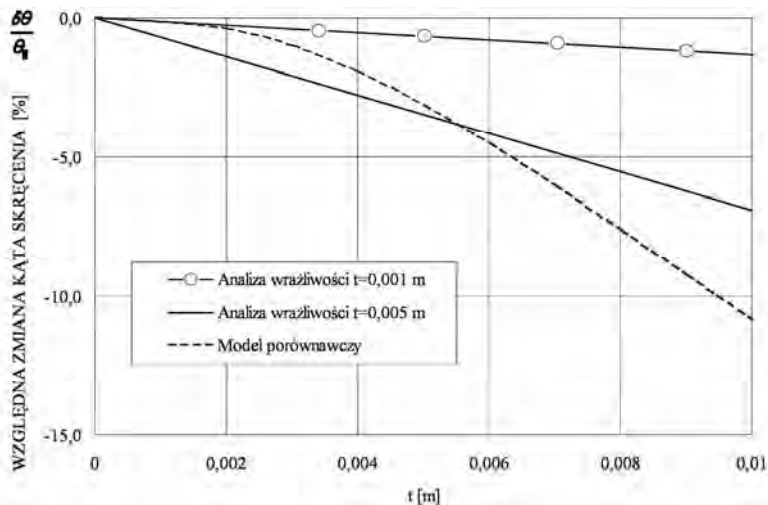
Rys. 6.3. Względna zmiana kąta skręcenia, w punkcie C, przy jednostkowej szerokości przepony w przedziale A – B

Dokładność analizy wrażliwości pierwszego rzędu zależy od przyjętego przyrostu zmiennej du_i (6.9) względem punktu początkowego. W przykładzie pierwszym jest to rozwinięcie wokół zera ($t = 0$) dla zmiany $du_i = dt = 0,005$ m. Wynik tego rozwiązania w przypadku przepony umieszczonej w pobliżu punktu C, przy $Z = 1,23$ m przedstawiono na wykresie rys. 6.5. Rozwinięcie jest wówczas sieczną (analiza wrażliwości $t = 0,005$ m) (rys. 6.5) dyskretnego rozwiązania porównawczego, wykorzystującego analizę układu o zmiennej grubości przepony umieszczonej w przykładowo wybranym przekroju $Z = 1,23$ m (model porównawczy – „dokładna” analiza statyczna). Rozwiązania przedstawione na rys. 6.4 są zgodne w 99%, tylko ze względu na miejsce cięcia blisko punktu $t = 0,005$ m. Właściwszym rozwinięciem wokół zera jest więc rozwiązanie przy $t = 0,001$ m

(rys. 6.5) (analiza wrażliwości $t = 0,001$ m). Zakres obowiązywania tego rozwiązania zależy od przyjętego przez nas błędu dopuszczalnego. Jeżeli zbieżność rozwiązań ma sięgać $\sim 90\%$, można założyć, że grubość przepony t może się zmieniać w granicach $0 \leq t \leq 0,01$ m. Należy zauważyć, iż w tym przypadku aproksymacja rzędu drugiego (aproksymacja kwadratowa), ze względu na silną nieliniową zależność wariacji względnej zmiany kąta skręcenia od wariacji szerokości przepony, pozwoliłaby na dokładniejsze przybliżenie rozwiązania.



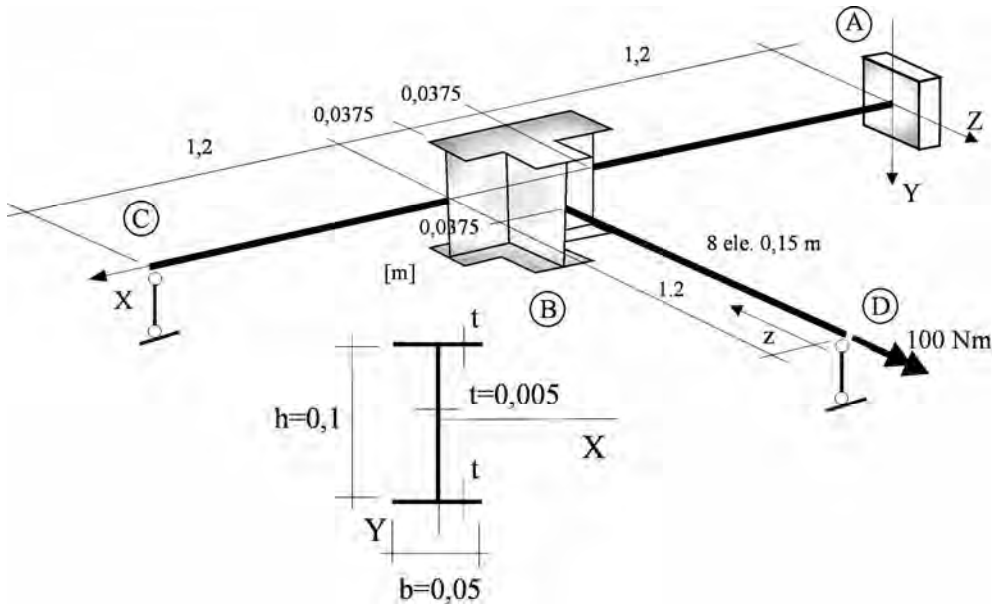
Rys. 6.4. Względna zmiana kąta skręcenia, w punkcie C, przy jednostkowej szerokości przepony w przedziale B – C



Rys. 6.5. Względna zmiana kąta skręcenia, w punkcie C, przy wariacji szerokości przepony

6.3.2. Analiza wrażliwości bimomentu przy ciągłej zmianie szerokości póltek

W przykładzie drugim, analizowano zmianę bimomentu δB , w przekroju A, układu obciążonego momentem skręcającym o wartości 100 Nm (rys. 6.6), przy ciągłej zmianie szerokości póltek przekroju poprzecznego $b + \delta b(z)$ (zmienna projektowa $\delta b(z)$) w przedziale D – B, względem osi z . Tak jak w przykładzie poprzednim, dźwigar jest wykonany z dwuteowych cienkościennych prętów aluminiowych ($E = 70 \text{ GPa}$, $\nu = 0,33$).



Rys. 6.6. Schemat statyczny układu

Wariację bimomentu δB szacuje się według zależności [105]:

$$\delta B = - \int_0^l W(z) \delta b dz, \quad (6.11)$$

w której $W(z)$ jest poszukiwaną funkcją wrażliwości bimomentu B przy ciągłej zmianie szerokości póltek $\delta b(z)$.

Przy pominięciu wpływu ścinania na zmianę bimomentu, poszukiwaną wariację δB możemy opisać następująco:

$$\begin{aligned} \delta B &= - \int_0^l [(EJ_{\omega})_{,b} \theta'' \bar{\theta}'' + (GJ_d)_{,b} \theta' \bar{\theta}' + (EJ_x)_{,b} y' \bar{y}'] \delta b dz = \\ &= - \int_0^l [(J_{\omega})_{,b} \frac{B(z) \bar{B}(z)}{J_{\omega}^2 E} + (J_d)_{,b} \frac{M_s(z) \bar{M}_s(z)}{J_d^2 G} + (J_x)_{,b} \frac{M_x(z) \bar{M}_x(z)}{J_x^2 E}] \delta b dz, \end{aligned} \quad (6.12)$$

gdzie $(\dots)_{,b}$ oznacza pochodną cząstkową względem szerokości b .

W przypadku dyskretnego opisu problemu, możemy zapisać:

$$\delta B = -\sum_{i=1}^N W(z_i) \delta b(z_i) \Delta z. \quad (6.13)$$

Funkcje podcałkową wrażliwości $W(z)$ względem wartości bimomentu w przekroju A, przy jednostkowych zmianach szerokości pólek dwuteownika w przedziale D – B przedstawiono na rys. 6.7.

Względną zmianę bimomentu $\delta B/B_0$ w punkcie A obliczono zgodnie z zależnością:

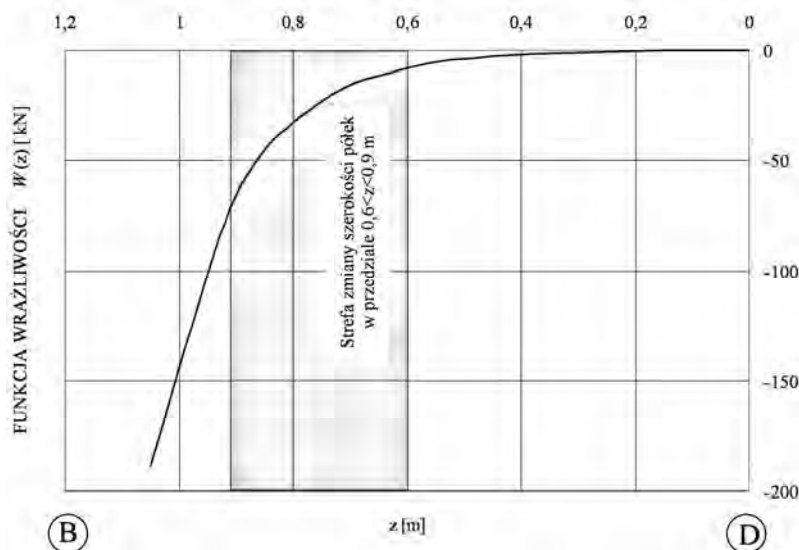
$$\frac{\delta B}{B_0} = -\sum_{i=1}^N \frac{b \cdot W(z_i)}{B_0} \frac{\delta b(z_i)}{b} \Delta z = -\sum_{i=1}^N \bar{W}(z_i) \frac{\delta b(z_i)}{b} \Delta z, \quad (6.14)$$

w której $\bar{W}(z)$ jest zmodyfikowaną funkcją wrażliwości postaci

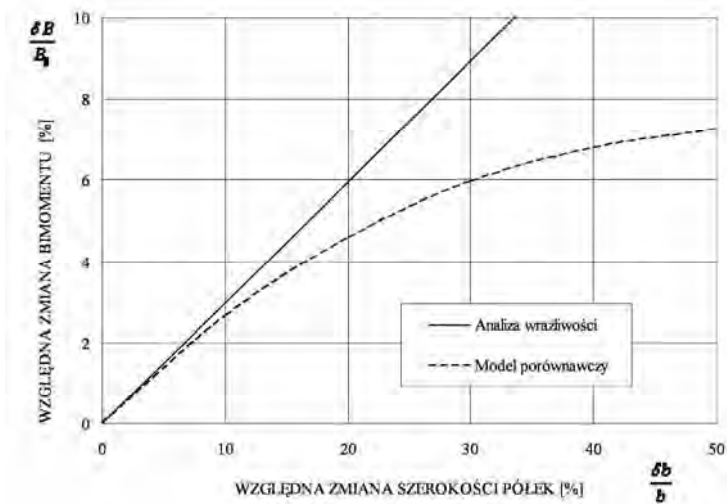
$$\bar{W}(z_i) = \frac{b \cdot W(z_i)}{B_0}. \quad (6.15)$$

Zmiany szerokości pólek dokonano w wybranym przykładowym przedziale $0,9 \geq z \geq 0,6$ m (rys. 6.7).

W celu weryfikacji otrzymanego rozwiązania (analiza wrażliwości) porównano je z rozwiązaniem dyskretnym wykorzystującym analizę układu o zmiennych szerokościach pólki w przedziale $0,9 \geq z \geq 0,6$ m (Model porównawczy – „dokładna” analiza statyczna). W przykładzie mamy do czynienia z nieliniową zależność wariacji względnej zmiany bimomentu od wariacji zmiennej projektowej (zmiana szerokości pólki, w przedziale $0,9 \geq z \geq 0,6$ m).



Rys. 6.7. Funkcja podcałkowa wrażliwości względem wartości bimomentu w przekroju A, przy jednostkowych zmianach szerokości pólki dwuteownika w przedziale D – B



Rys. 6.8. Względna zmiana bimumentu, w punkcie A, przy wariacji szerokości pól w przedziale $0,9 \geq z \geq 0,6$

Podsumowanie

Podsumowując należy stwierdzić, iż proponowana w pracy metoda analizy statycznej rusztowych konstrukcji cienkościennych, z wykorzystaniem koncepcji superelementów, może być z powodzeniem wykorzystywana w problemach analizy wrażliwości tych układów. Przy jej zastosowaniu można określać wpływ zmiany dowolnych wielkości projektowych (zmienne projektowe) na wariację poszukiwanych parametrów statycznych lub geometrycznych (zmienne stanu) oraz wskazać miejsce najbardziej efektywnych zmian zmiennych projektowych w celu osiągnięcia założonych zmian zmiennych stanu. Dokładność analizy wrażliwości zależy od rozważanej zmiennej stanu oraz wielkości i miejsca zmian wprowadzonych w konstrukcji.

W celu zwiększenia dokładności analizy przy silnej nieliniowej zależności między zmienną projektową a zmienną stanu, należałoby skorzystać z analizy wrażliwości wyższych rzędów, względnie np. z aproksymacji nieliniowej typu *long distance approximation* – polegającej na wyznaczeniu wariacji zmiennej stanu dla dwóch różnych wartości tej zmiennej i zastosowaniu odpowiedniej aproksymacji między tymi wartościami.

Rozdział 7

PODSUMOWANIE I KIERUNKI DALSZYCH BADAŃ

Przedmiotem badań autora były ruszty zbudowane z prętów cienkościennych o przekrojach otwartych bisymetrycznych (dwuteowych). Rozwiązano problem dystrybucji bimomentów w węzłach konstrukcji rusztowych. Opracowano metodę analizy statycznej rusztów z uwzględnieniem dystrybucji bimomentów w węzłach, ze względu na ich konstrukcje oraz schemat statyczny układu. Stworzono autorski program komputerowy (TWGRID), służący analizie statycznej cienkościennych konstrukcji rusztowych. Przedstawiono studium porównawcze istniejących metod analizy statycznej rusztów cienkościennych z proponowanym modelem i wynikami badań doświadczalnych, które miały na celu weryfikację wyników analizy teoretycznej. Wykorzystano zaproponowany w pracy model obliczeniowy w analizie wrażliwości układów rusztowych zabudowanych z prętów cienkościennych.

Stwierdzono, że:

- zachowanie się dźwigarów załamanych w planie i rusztów zbudowanych z prętów cienkościennych o przekrojach bisymetrycznych otwartych zależy w sposób istotny od struktury węzłów,
- badania doświadczalne modeli belek załamanych w planie potwierdziły słuszność zaproponowanej w pracy metody analizy statycznej konstrukcji rusztowych, z zastosowaniem koncepcji superelementów (węzłowych),
- analiza wrażliwości cienkościennych rusztów i dźwigarów załamanych w planie, przy wykorzystaniu modeli bazujących na koncepcji superelementów, może być przydatnym narzędziem inżyniera w projektowaniu tych konstrukcji.

Rozważania zawarte w pracy świadczą o słuszności przeprowadzonych badań teoretycznych i eksperymentalnych. Jak dotąd nie rozwiązano wszystkich problemów związanych z analizą statyczną czy analizą wrażliwości układów zbudowanych z prętów cienkościennych (rusztów, ram). Badania takie powinny być jednak kontynuowane, także w zakresie innych problemów związanych z:

- analizą statyczną układów cienkościennych (w postaci belek, ram i rusztów) o przekrojach monosymetrycznych i niesymetrycznych (wzmocnionych przez przepony i przewiązki),
- analizą teoretyczną układów, w których mamy do czynienia ze zmianą wysokości prętów schodzących się węzłach oraz z dodatkową sztywnością węzłów wzmocnionych przez różnego rodzaju usztywnienia,
- weryfikacją eksperymentalną rozkładu bimomentów w przekrojach przywęzłowych o różnej konstrukcji węzłów, zarówno układów ramowych, jak i rusztowych,
- analizą stateczności i zachowania podkrytycznego układów zbudowanych z prętów cienkościennych,
- analizą dynamiczną układów cienkościennych (ważna dla konstrukcji poddanych obciążeniom dynamicznym, takim jak: konstrukcje mostowe czy hale przemysłowe),
- analizą nieliniową układów cienkościennych z zastosowaniem koncepcji superelementów węzłowych.

Dodatkowo należy zwrócić uwagę na problem właściwego opisu wpływu konstrukcji węzła na rozkład sił wewnętrznych, naprężeń i deformacji, w przypadku konstrukcji o węzłach półsztywnych. Problem ten został już rozwiązany w przypadku konstrukcji ramowych pracujących na zginanie. W tym zakresie istnieje także bogata literatura [95, 96, 115–118], dotycząca opisu teoretycznego, jak i badań doświadczalnych. Natomiast, dotąd brak jest zarówno prac teoretycznych, jak i doświadczalnych, w dziedzinie układów zbudowanych z prętów cienkościennych o węzłach półsztywnych, których elementy poddane są skręcaniu.

Podsumowując, należy stwierdzić, iż istnieje konieczność przeprowadzenia dalszych badań w tym zakresie, gdyż będą one miały istotne znaczenie dla praktyki inżynierskiej.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Szymczak C., Kreja I., Mikulski T., Kujawa M.: *Sensitivity analysis of beams and frames made of thin-walled members*. Gdańsk: Wyd. Polit. Gdańskiej 2003.
- [2] Kujawa M.: *Statyka i analiza wrażliwości rusztów zbudowanych z prętów cienkościennych. Analiza teoretyczna i badania doświadczalne*. Rozprawa doktorska. Polit. Gdańska, Wydz. Inżynierii Lądowej i Środowiska 2007.
- [3] Weiss S., Gergovich K.: *Podstawy mechaniki pręta cienkościennego*. Kraków: Wyd. Polit. Krakowskiej 1973.
- [4] Grzędziński A., Nowiński J.: *Środek sił poprzecznych i środek skręcania przekrojów belek cienkościennych, osadzonych swobodnie*, Tech. Lotn. 1/1939.
- [5] Wagner H.: *Verdrehung und Knickung von offenen Profillen*, 1929.
- [6] Vlasov V. Z.: *Nowa metoda obliczania belek przyrmatycznych wykonanych z profili cienkościennych pod wpływem siły osiowej, zginania i skręcania*. 1936 (rosyjski).
- [7] Vlasov V. Z.: *Sprężyste pręty cienkościenne*. Moskwa 1940, drugie wyd. 1959 (rosyjski).
- [8] Vlasov V. Z.: *Thin-walled elastic beams*. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem 1961.
- [9] Gorbunow B. N., Strielbicka A. I.: *Teoria ram wykonanych z prętów cienkościennych*. Moskwa 1948 (rosyjski).
- [10] Stawarki L. N.: *Analiza wytrzymałości dźwigarów przestrzennych wykonanych z prętów cienkościennych o symetrycznym przekroju otwartym*. Moskwa 1951 (rosyjski).
- [11] Goldberg J. E.: *Torsion of I-type nad H-type beam*, ASCE, Vol. 78, 1952.
- [12] Urban I. W.: *Teoria belkowych konstrukcji cienkościennych*. Moskwa 1955 (rosyjski).
- [13] Małkina R. Ł.: *Analiza cienkościennych belek i ram metodą kolejnych przybliżeń*. Moskwa 1955 (rosyjski).
- [14] Sieczkowski J., Łopieński L.: *Przykłady obliczeń belek i ram metodą Crossa*. Warszawa: Arkady 1965.
- [15] Cywiński Z.: *Metoda iteracyjna Crossa w zastosowaniu do rozwiązywania skręcanych, płaskich, cienkościennych układów ramowych o przekrojach otwartych*. Zesz. Nauk. Polit. Gdańskiej 1962, nr 32, Bud. Lądowe 5.
- [16] Rutecki J.: *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*. Warszawa: PAN IPPT 1957.
- [17] Dżanielidze G. J.: *O teorii smukłych i cienkościennych prętów*. PMM, t. 16, Moskwa – Lenin-grad 1949 (rosyjski).
- [18] Kan S. N., Panowko L. G.: *Elementy mechaniki konstrukcji cienkościennych*. Oborongiz 1952 (rosyjski).
- [19] Umański A. A.: *Skręcanie i zginanie konstrukcji cienkościennych*. Moskwa 1939 (rosyjski).
- [20] Rutecki J.: *Cienkościenne konstrukcje nośne*. Warszawa: PWN 1966.
- [21] Byczkow D. W.: *Mechanika cienkościennych konstrukcji prętowych*. Moskwa 1962 (rosyjski).
- [22] Kariakin N. I.: *Podstawy analizy konstrukcji cienkościennych*, Moskwa 1960 (rosyjski).
- [23] Biełokurow W. N., Zaks M. N.: *Badanie deformacji pręta cienkościennego wywołanych deplacacją węzła*. Stroit. Mech. 6/1970 (rosyjski).
- [24] Cywilin K. S.: *Macierzowa metoda analizy ram prostokątnych wykonanych z prętów cienkościennych*. Prikladnaja mechanika, tom V 4/1969, (rosyjski).
- [25] Neu H. J.: *Zur berechnung von rechteckrahmen aus offenen, dunnwandigen profiltragern bei biegung und verwindung*. Automobil – Industrie 1/1969.
- [26] Kollbrunner C. F., Hajdin N., Krajcinovic D.: *Matrix analysis of thin – walled structures*. Institute for engineering research, 10, Zurich 1969.
- [27] Krajcinovic D.: *Matrix force analysis of thin – walled structures*. J. of Structural Division. Proc. ASCE 1/1970.

- [28] Meek J. L., Swannell P.: *Stiffness matrices for beam members including warping torsion effects*. Journal of the Engineering Mechanics Division 102, EM1, 1976, 193–197.
- [29] Szymczak C.: *Wyboczenie skrętne prętów cienkościennych o bisymetrycznym przekroju otwartym*. Rozprawy Inżynierskie 26, 2, 1978, 323-330.
- [30] Reill R. J.: *Stiffness analysis of grid including warping*. ASCE J. Struct. Dir. 7, 1972, 1511–1523.
- [31] Michalak B.: *Analiza statyczna rusztów złożonych z elementów cienkościennych*. Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej 1973, nr 182, Budownictwo z. 12.
- [32] Borsum R. S., Galager R. H.: *Finite element analysis of torsional – flexural stability problems*, Int. J. Numer. Meth. Engng 2, 335-352, 1970.
- [33] Waldron P.: *Elastic analysis of curved thin-walled girders including the effect of warping restraint*, Engng Structures 7, 1985, 93–104.
- [34] Waldron P.: *Stiffness analysis of thin-walled girders*, ASCE J. Struct. Div. 6, 1366-1384, 1986.
- [35] Vacharajittiphan P., Trahair N. S.: *Warping and distortion of I-section joints*, ASCE J. Struct. Div. 100(3), 547-564, 1974.
- [36] Szmids J. K.: *O równowadze sił momentowych w narożu cienkościennej ramy*, Rozprawy Inżynierskie 23, 2, 317-324, PAN IPPT, Szczecin 1975.
- [37] Szmids J. K.: *Analiza ram z elementów cienkościennych*. Rozprawy Inżynierskie 23, 3, 447 - 472, PAN IPPT, Szczecin 1975.
- [38] Morell P. J. B.: *The influence of joint detail on torsional behavior of thin-walled structures having an axial discontinuity*. Proc. Int. Conf. Thin-Walled Structures, University of Strathclyde, 1979.
- [39] Baigent A. H., Hanock G. J.: *Structural analysis of assemblages of thin-walled members*, Engrg. Struct. 4, 1982, 207-216.
- [40] Yang Y. B., McGuire W., *A procedure for analysing space frames with partial warping restraint*. Int. J. Numer. Methods Engrg. 20, 1984, 1377-1398.
- [41] Mohammed Z. A., Frank E. W.: *Torsional constant for matrix analysis of structures including warping effect*, Int. J. Solid Structures 33, 1996, 361-374.
- [42] Sharman P. W.: *Analysis of structures with thin-walled open sections*, Int. J. Mech. Sci. 27, 10, 665-677, 1985.
- [43] Coci A., Gattas M.: *Natural approach for geometric non-linear analysis of thin-walled frames*. Int. J. Numer. Methods Engrg 30, 2007-231, 1990.
- [44] Krenk S., Damkilde L.: *Warping of joints in I-beam assemblages*, J. Engrg Mech. 117, 1991, 2457-2474,
- [45] Petersen P., Krenk S., Damkilde L.: *Stability of thin-walled frames*, Report R-265, Dept. of Struct. Engrg, Tech. Univ. of Denmark, Lyngby, Denmark 1991.
- [46] Tong G. S., Zang Y. L.: *Warping and bimoment transmission through diagonally stiffened beam-to-column joints*, J. Constructional Steel Research 61, 2005, 749-763.
- [47] Gendy A. S., Saleeb A. F., Chang T. Y.: *Generalized thin-walled beam models for flexural-torsional analysis*, Computers & Structures 42, 4, 1992, 531-550.
- [48] Hu Y., Jin X., Chen B.: *A finite element model for static and dynamic analysis of thin-walled beams with asymmetric cross-sections*, Computers & Structures 61, 5, 1996, 897-908.
- [49] Back S. Y., Will K. M.: *A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams*, Int. J. Numer. Methods Engrg 43, 1998, 1173-1191.
- [50] Jonsson J.: *Distortional theory of thin-walled beams*, Thin-walled Structures 33, 1999, 269-303.
- [51] Kwak H., Kim D., Lee H.: *Effect of warping in geometric nonlinear analysis of spatial beams*, J. Constructional Steel Research 57, 2001, 729-751.
- [52] Kim N., Lee B., Kim M.: *Exact element static stiffness matrices of shear deformation thin-walled beam-columns*, Thin-walled Structures 42, 2004, 1231-1256.
- [53] Kim N., Kim M.: *Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects*, Thin-walled Structures 43, 2005, 701-734.
- [54] Riddington J. R., Ali F. A., Hamid H. A.: *Influence of joint detail on the flexural/torsional interaction of thin-walled structures*, Thin-walled Structures 24, 1996, 97-111.

- [55] Wagner W.: *Modeling of shell-beam transitions in the presence of finite rotations*. NATO Advanced Research Workshop, Poland 2000.
- [56] Szymczak C., Mikulski. T.: *Stiffener model identification of thin-walled beam with open cross-section*, XLVI Konferencja Naukowa KILiW PAN i Komitetu Nauki PZITB, 1, Krynica 2000, 167-174.
- [57] Kreja I., Szymczak C., *Numerical simulation of a thin-walled beam with warping stiffeners undergoing torsion*, TASK Quarterly, 6, 453-460, 2002.
- [58] Hibbitt, Karlsson & Sonrensen, Inc. ABAQUS Theory Manual, Version 6.4 1.
- [59] Timoshenko S., Gere J. M.: *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed. New York: McGraw-Hill 1961.
- [60] Gjelsvik A.: *The theory of thin walled bars*. New York: A Wiley – Interscience Publication 1981.
- [61] Branicki C., Wekezer J.: *PRISM Program interpreting symbolic matrix operations*. Gdańsk Technical University, User manual, Gdańsk 1998.
- [62] Jombock J. R., Clark J. W.: *Post – buckling behavior of flat plates*, Proc. ASCE, J. Struct. Div. 87, 5, 1961.
- [63] Koiter W. T.: *Introduction of the post-buckling behaviour of plates. Colloquium on the post-buckling behaviour of plates used in metal structures*. University of Liege, Belgium 1963.
- [64] Walker A. C.: *A brief review of plate buckling research. Behaviour of thin-walled structures*. ed. J. Rhodes, J. Spence. London: Elsevier Applied Science 1984.
- [65] Bulson J. B.: *Buckling and impact*. Engineering Structures, Developments in the 20th Century ed. P. S. Bulson, J. B. Caldwell, R. T. Seven, Bristol 1983.
- [66] Chou S. M., Rhodes J.: *Review and compilation of experimental results on thin-walled structures*. Computers & Structures 65, 1, 1997, 47-67.
- [67] Moore H. F.: *The strength of I-beam in flexure*. Bulletin no. 68, University of Illinois 1913.
- [68] Baker J. F., Roderick J. W.: *Further test on beams and portals – investigation into the behaviour of welded rigid frame structures*, 2nd Interim Rep., Trans. of the Institute of Welding 3, 2, 83, 1940.
- [69] Dumont C., Hill H. N.: *Lateral stability of equal flanged aluminium alloy I-beams subjected to pure bending*. NACA TN 770, 1940.
- [70] Winter G.: *Stress distribution in and equivalent width of flange of wide, thin-walled steel beams*. NACA TN 784, 1940.
- [71] Winter G.: *Test on light beams of cold – formed steel for the American Iron and Steel Institute*. Twenty – First Progress Report. New York: Cornell University, Ithaca 1941.
- [72] Winter G.: *Test on light beams of cold – formed steel for the American Iron and Steel Institute*. Twenty – Fifth Progress Report. New York: Cornell University, Ithaca 1944.
- [73] Winter G., Pian R. H. J.: *Cushing strength of thin steel webs*. Bulletin No 35, Part 1, Cornell University, 1946.
- [74] Winter G.: *Strength of thin steel compression flanges*. Proc. ASCE 72, 199, 1946, Trans. ASCE 122, 527, 1947, Cornell University Engineering Experiment Station, Reprint no. 32, 1974.
- [75] Kerensky O. A., Flint A. R., Brown W. C.: *The basis for design of beams and plate girders in the revised BS153*. Proc. Inst. of Civil Engineers 5, 396, London, 1956.
- [76] Jombock J. R., Clark J. W.: *Bending strength of aluminium formed sheet members*. Proc. ASCE, J. Struct. Div. 94, 2, 1968.
- [77] Reiss M., Chilver A. H.: *Computation of the post buckling strength of thin-walled sections*. Final Report Eight Congress IABSE 1968.
- [78] Winter G.: *Cold – formed light – gage steel construction*. Proc. ASCE, J. Struct. Div. 85, 1959, 151-171.
- [79] Winter G.: *Commentary on the 1962 edition of the light – gage cold – formed steel American Iron and Steel Institute. Design Manual*, 1962.
- [80] Needham R. A.: *The ultimate strength of aluminium alloy formed structural shapes in compression*. J. Aeronautical Sci., 21, 1954, 4 217-229.
- [81] Heimerl G. J.: *Determination of plate compressive strengths*, NACA TN No 1480, 1947.
- [82] Schuman L., Black G.: *Strength of rectangular thin plates under edge compression*, National Advisory Committee for Aeronautics (Report no. 356), 1930.

- [83] Desmond T. P., Pekoz T., Winter G.: *Edge stiffeners for thin-walled members*. Proc. ASCE, J. Struct. Div. 107, 2, 329, 1981.
- [84] Rutecki J.: *Wytrzymałość konstrukcji cienkościennych*. Warszawa: PWN 1957.
- [85] Szmidt J. K.: *Analiza konstrukcji ramowych z elementów cienkościennych*. Rozprawa doktorska, Polit. Gdańska, Wydz. Budownictwa Lądowego 1973.
- [86] Słomka E.: *Określenie rzeczywistej sztywności skrętnej węzłów i ram samochodowych*. Rozprawa doktorska, Polit. Wrocławska, Wydz. Mechaniczny 1977.
- [87] Romanów F.: *Wytrzymałość ram i nadwozi samochodowych*. Warszawa: Wyd. Komunikacji i Łączności 1988.
- [88] Gosowski B.: *Skręcanie i zginanie otwartych, stężonych elementów konstrukcji metalowych*. Wrocław: Oficyna Wyd. Polit. Wrocławskiej 2004.
- [89] Obrębski J. B., Urbaniak Z.: *Experimental analysis of non-linear effects of bending-torsional loading T-W bars*, 18th Yugoslav Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Vrnjacka-Banja, 141-144, 30.05-3.06.1988.
- [90] Obrębski J. B., Urbaniak Z.: *Experimental Verification of Selected Theories*. 27th Polish Solid Mechanics Conference of Polish Academy of Sc, Rytro 29.08-3.09.1988.
- [91] Obrębski J. B., Urbaniak Z., El-Awady M. E.: *On Designing of the Thin-Walled Bars in the Light of Theory and Experiments*. Int. IMEKO-GESA Symp. on Risk Minimisation by Experimental Mechanics, 2-4.09.1992, Dlisseldorf, FRG.
- [92] Obrębski J. B., Urbaniak Z.: *Experimental and Numerical Investigation of Certain Class of Thin-Walled Bars*, NUMEG '92, Praga, 2-4.09.1992.
- [93] Obrębski J. B., Urbaniak Z.: *Selected Results of Experimental Investigation of Certain Class of Thin-Walled Bars*. IV Międzynarodowa Konferencja Bezpieczeństwo Budowli Mostowych, Wrocław 9-12.09.1992, Poland.
- [94] Jankowska N.: *Wpływ odkształceń węzłów na rozkład sił przekrojowych w ramach cienkościennych*. Rozprawa doktorska. Polit. Warszawska, Wydz. Budownictwa Lądowego 2006.
- [95] Bernuzzi C., Zandonini R., Zanon P.: *Experimental Analysis and Modeling of Semi-rigid Steel Joints under Cyclic Reversal Loading*. J. Construct. Steel Res. Vol. 38, No 2, 95-123, 1996.
- [96] Lima L. R. O., Andrade S. A. L., Vellasco P. C. G., Silva L. S.: *Experimental and mechanical model for predicting the behaviour of minor axis beam-to-column semi-rigid joints*, International Journal of Mechanical Sciences 44, 2000, 1047-1065.
- [97] Wiśniewski L., Kubica E.: *Podstawowe cechy mechaniczne niektórych stopów metalowych*. Prace Nauk. Inst. Budownictwa Polit. Wrocławskiej 1971.
- [98] Praca zbiorowa. *Aluminium*, poradnik. Warszawa: WNT 1967.
- [99] Haug E. J., Choi K. K., Komkov V.: *Design sensitivity analysis of structural system*. Orlando: Academic Press 1986.
- [100] Arorra J. S., Haug E. J.: *Methods of design sensitivity analysis in structural optimization*. AIAA J. 17, 1979, 970-973.
- [101] Dems K., Mróz Z.: *Variational approach by means of adjoints system to structural optimization and sensitivity analysis I variation of material parameters within fixed domain*, Int. J. Solids Structures, 19, 8, 677-692, 1983.
- [102] Haftka R. T., Mróz Z.: *First and second-order sensitivity analysis of linear and nonlinear structures*, AIAA Journal 24, 7, 1986, 1187-1192.
- [103] Szymczak C.: *Elementy teorii projektowania*. Gdańsk: Wyd. Polit. Gdańskiej 1995.
- [104] Bojczuk D.: *Analiza wrażliwości sprężystych konstrukcji prętowych i belkowych*, Rozprawy Inżynierskie 35, 2, 1987, 171-204.
- [105] Szymczak C.: *Sensitivity analysis of thin-walled members, problems and applications*, Thin-walled Structures 41, 2003, 271-290.
- [106] Budkowska B. B., Szymczak C.: *Sensitivity analysis of thin-walled I-beams undergoing torsion*, Thin-walled Structures 12, 1991, 51-61.
- [107] Budkowska B. B., Szymczak C.: *Sensitivity analysis of critical torsional buckling load of thin-walled I-columns resting on elastic foundation*, Thin-walled Structures 14, 1992, 37-44.

- [108] Iwicki P.: *Problemy analizy wrażliwości prętów cienkościennych o przekroju bisymetrycznym otwartym poddanych działaniu obciążeń statycznych*. Rozprawa doktorska. Polit. Gdańska, Wydz. Budownictwa Lądowego 1997.
- [109] Arora J. S., Cardoso J. B.: *Variational principle for shape design sensitivity analysis*, AIAA, Journal, 30, 2, 1992, 538-547.
- [110] Chen J. L., Ho J. S.: *A comparative study of design sensitivity analysis by using commercial finite element programs*, Finite Elements in Analysis and Design The International Journal of Applied Finite Elements and Computer Aided Engineering, 15, 1994, 189-200.
- [111] Szefer G.: *Analiza wrażliwości i optymalizacja układów dynamicznych z rozłożonymi parametrami*. Mechanika, 1, 4, 1983, 5-36.
- [112] Van Belle H.: *Higher order sensitivities in structural systems*. AIAA Journal, 20, 2, 286-288.
- [113] Haftka R. T.: *Second-order sensitivity derivatives in structural analysis*, AIAA Journal, 20, 12, 1982, 1765-1766,
- [114] Belegundu A. D.: *Lagrangian approach to design sensitivity analysis*, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 111,5, 680-695, 1985.
- [115] Li T. Q., Choo B. S., Nethercot D. A.: *Connection element method for the analysis of semi-rigid frames*, J. Construct. Steel Research 32, 1995, 143-171.

STATYKA I ANALIZA WRAŻLIWOŚCI RUSZTÓW ZBUDOWANYCH Z PRĘTÓW CIENKOŚCIENNYCH

ANALIZA TEORETYCZNA I BADANIA DOŚWIADCZALNE

W pracy poddano analizie konstrukcje rusztowe zbudowane z prętów cienkościennych o bisymetrycznych przekrojach otwartych. Zaproponowano nową metodę obliczeń statycznych, uwzględniającą wpływ deplanacji w analizie rusztowych konstrukcji cienkościennych. Przeprowadzono analizę statyczną, zwracając szczególną uwagę na problem rozdziału wartości bimomentów na poszczególne pręty zbiegające się w węźle. W strefie międzywęzłowej wykorzystano elementy zgodne z klasyczną teorią belek cienkościennych o nie-deformowalnym przekroju poprzecznym, same zaś węzły potraktowano jak superelementy zbudowane z elementów powłokowych. Macierze sztywności superelementów tworzą przy wykorzystaniu programu ABAQUS i elementów powłokowych typu S4R. W dysertacji porównano wyniki obliczeń statycznych zaproponowanego modelu obliczeniowego z modelem, w którym nie uwzględnia się wpływu deplanacji na ostateczny wynik analizy oraz modelem w całości zbudowanym z elementów powłokowych. Ostatecznie wszystkie rozwiązania teoretyczne porównano z wynikami badań eksperymentalnych.

Stwierdzono, że zaproponowana w pracy analiza numeryczna, wykorzystująca koncepcję superelementów, jest bardziej efektywna niż obliczenia prowadzone na modelach w całości powłokowych, między innymi ze względu na dużo mniejszą liczbę elementów w modelu. Niezmiernie interesujące, zarówno z naukowego, jak i praktycznego punktu widzenia, jest także przedstawione w pracy badanie wpływu różnego rodzaju wzmocnień przekrojów poprzecznych prętów na zachowanie rusztów. Zgodnie z najlepszą wiedzą autora, problem ten nie został jeszcze w pełni rozwiązany. Studium porównawcze przedstawione w pracy dowiodło, że koncepcja superelementów w modelu obliczeniowym może być w pełni zalecana w analizie jednowymiarowych rusztów cienkościennych, gdy modele analityczne odpowiadają badanim w pracy przypadkom. Porównanie wyników modeli eksperymentalnych z modelami numerycznymi pozwala stwierdzić, że modele rusztów zbudowane na koncepcji superelementów są bardzo efektywne i właściwe w analizie rusztów zbudowanych z elementów cienkościennych.

STATIC AND SENSITIVITY ANALYSIS OF GRIDS MADE OF THIN-WALLED MEMBERS

THEORETICAL ANALYSIS AND EXPERIMENTAL RESEARCH

The grids assembled with thin-walled beams of bisymmetric open cross-section are considered in this paper. A new FE Method of static analysis of thin-walled grids taking into account warping effects is elaborated and proposed. In order to carry out static analysis of these structures, it is necessary to find a rule of the bimoment distribution in the grid nodes. In the regions between grid nodes, thin-walled elements based on the classical assumptions of the theory of thin-walled beams of non-deformable cross section are applied but in the region of nodes, superelements composed of the flat shell elements are adapted. The superelement stiffness matrix can be determined with the help of the ABAQUS software package, by treating nodal zone as complex system of plates divided into a suitable number of S4R shell elements. The dissertation includes the comparative study of numerical simulation using the proposed grid model, the simplified model neglecting cross-section warping and the most exact model, which consists of flat shell finite elements. Finally, the experimental verification of the results of theoretical consideration is presented.

The concept of the nodal superelement allows us to take into account the effect of node structure in more effective manner than for the model of the whole grid divided into a large number of flat shell elements. It would be extremely interesting, from the scientific and practical point of view, to investigate the influence of different kinds of stiffeners on grids behaviour. To the best knowledge of the author, these problems have not been considered yet. The comparative study performed in this paper shows that the concept of the superelement can be fully recommended for one-dimensional analysis of the thin-walled grids when the analytical model does not provide a proper representation of the structure. Comparison of the results of the experimental research carried out and the numerical study allow to draw a conclusion that the model of grid based on the application of the node superelement is very effective and accurate for static analysis of the grids assembled with thin walled members.

Załącznik 1

TABELE POMIAROWE – STAŁE MATERIAŁOWE

Tablica Z.1

Tabela pomiarowa – próbka 1

| P [N] | Średnia z obciążenia i odciążenia próbki 1 | | | |
|-------|--|---------------------------------|------------|---------------------------------|
| | Pomiar | $\Delta\varepsilon_{i(x)}^{sr}$ | Pomiar | $\Delta\varepsilon_{i(y)}^{sr}$ |
| 5000 | 830,085448 | 77,0353745 | -256,12295 | -25,460374 |
| 4500 | 753,050073 | 77,0926587 | -230,66257 | -25,342659 |
| 4000 | 675,957415 | | -205,31991 | -25,369621 |
| 3500 | 598,800294 | 77,1571208 | -179,95029 | -25,369257 |
| 3000 | 521,206037 | 77,5942567 | -154,58104 | -25,289239 |
| 2500 | 443,354298 | 77,8517391 | -129,2918 | -25,274952 |
| 2000 | 364,516846 | 78,8374518 | -104,01685 | -24,945929 |
| 1500 | 285,120918 | 79,3959286 | -79,070918 | -25,11918 |
| 1000 | 197,789238 | 87,3316797 | -53,951738 | -23,838056 |
| 500 | 84,0886821 | 113,700556 | -30,113682 | |

Tablica Z.2

Tabela pomiarowa – próbka 2

| P [N] | Średnia z obciążenia i odciążenia próbki 2 | | | |
|-------|--|-------------------------------|------------|-------------------------------|
| | Pomiar | $\Delta \epsilon_{i(x)}^{sr}$ | Pomiar | $\Delta \epsilon_{i(y)}^{sr}$ |
| 5000 | 747,931635 | 74,1986625 | -257,53163 | -25,298663 |
| 4500 | 673,732972 | 75,0908095 | -232,23297 | -25,40331 |
| 4000 | 598,642163 | 74,9655063 | -206,82966 | -25,303006 |
| 3500 | 523,676656 | 75,3324978 | -181,52666 | -25,569998 |
| 3000 | 448,344159 | 74,843168 | -155,95666 | -25,318168 |
| 2500 | 373,500991 | 75,1293686 | -130,63849 | -25,404369 |
| 2000 | 298,371622 | 74,2846238 | -105,23412 | -25,397124 |
| 1500 | 224,086998 | 75,1704486 | -79,836998 | -25,482949 |
| 1000 | 148,91655 | 74,0248456 | -54,35405 | -25,287346 |
| 500 | 74,8917041 | | -29,066704 | |

Tablica Z.3

Tabela pomiarowa – próbka 3

| P [N] | Średnia z obciążenia i odciążenia próbki 3 | | | |
|-------|--|-------------------------------|------------|-------------------------------|
| | Pomiar | $\Delta \epsilon_{i(x)}^{sr}$ | Pomiar | $\Delta \epsilon_{i(y)}^{sr}$ |
| 5000 | 768,248853 | 78,6208491 | -279,29885 | -26,808349 |
| 4500 | 689,628004 | 78,5895769 | -252,4905 | -26,802077 |
| 4000 | 611,038427 | 78,6810713 | -225,68843 | -26,918571 |
| 3500 | 532,357356 | 78,2206351 | -198,76986 | -26,745635 |
| 3000 | 454,136721 | 77,8688275 | -172,02422 | -26,943828 |
| 2500 | 376,267893 | 78,5410068 | -145,08039 | -26,941007 |
| 2000 | 297,726886 | 77,9126147 | -118,13939 | -26,762615 |
| 1500 | 219,814272 | 77,3626665 | -91,376772 | -26,837667 |
| 1000 | 142,451605 | 74,900359 | -64,539105 | -26,975359 |
| 500 | 67,551246 | | -37,563746 | |

Tablica Z.4

Tabela pomiarowa – próbka 4

| P [N] | Średnia z obciążenia i odciążenia próbki 4 | | | |
|-------|--|----------------------------------|------------|----------------------------------|
| | Pomiar | $\Delta \varepsilon_{i(x)}^{sr}$ | Pomiar | $\Delta \varepsilon_{i(y)}^{sr}$ |
| 5000 | 791,845841 | 79,8109273 | -277,04584 | -26,885927 |
| 4500 | 712,034914 | | -250,15991 | |
| 4000 | 632,004498 | 80,0304156 | -223,217 | -26,942916 |
| | | 79,557671 | | -26,920171 |
| 3500 | 552,446827 | 79,9822532 | -196,29683 | -27,019753 |
| 3000 | 472,464574 | 79,4908611 | -169,27707 | -26,753361 |
| | | 79,6785115 | | -27,191012 |
| 2500 | 392,973713 | 79,6458202 | -142,52371 | -26,87082 |
| 2000 | 313,295201 | 79,4118665 | -115,3327 | -26,861866 |
| | | 79,8943564 | | -27,019356 |
| 1500 | 233,649381 | 79,8943564 | -88,461881 | -26,861866 |
| 1000 | 154,237515 | 79,8943564 | -61,600015 | -26,861866 |
| | | 79,8943564 | | -27,019356 |
| 500 | 74,3431583 | 79,8943564 | -34,580658 | -27,019356 |

Tablica Z.5

Tabela obliczeniowa – próbka 1

| P [N] | $\Delta \varepsilon_{i(x)}^{sr}$ | $\Delta \varepsilon_{i(y)}^{sr}$ |
|------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 4000–4500 | 77,09265865 | -25,34265865 |
| 3500–4000 | 77,15712083 | -25,36962083 |
| 3000–3500 | 77,59425671 | -25,36925671 |
| 2500–3000 | 77,8517391 | -25,2892391 |
| SUMA | 309,6957753 | -101,3707753 |
| współczynnik mostka = | 1,00E-06 | |
| przyrost naprężeń = | 5289605,924 | |
| współ Poissona = | 0,327 | [-] |
| moduł Younga = | 68,3 | [GPa] |
| moduł odkształcenia postaciowego = | 25,7 | [GPa] |

Tablica Z.6

Tabela obliczeniowa – próbka 2

| P [N] | $\Delta \varepsilon_{i(x)}^{sr}$ | $\Delta \varepsilon_{i(y)}^{sr}$ |
|------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 4000–4500 | 75,09080951 | -25,40330951 |
| 3500–4000 | 74,96550627 | -25,30300627 |
| 3000–3500 | 75,33249778 | -25,56999778 |
| 2500–3000 | 74,84316803 | -25,31816803 |
| SUMA | 300,2319816 | -101,5944816 |
| współczynnik mostka = | 1,00E-06 | |
| 2przyrost naprężeń = | 5102040,816 | |
| współ Poissona = | 0,338 | [-] |
| moduł Younga = | 68,0 | [GPa] |
| moduł odkształcenia postaciowego = | 25,4 | [GPa] |

Tablica Z.7

Tabela obliczeniowa – próbka 3

| P [N] | $\Delta \varepsilon_{i(x)}^{sr}$ | $\Delta \varepsilon_{i(y)}^{sr}$ |
|------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 4000–4500 | 78,58957694 | -26,80207694 |
| 3500–4000 | 78,68107134 | -26,91857134 |
| 3000–3500 | 78,22063512 | -26,74563512 |
| 2500–3000 | 77,86882751 | -26,94382751 |
| SUMA | 313,3601109 | -107,4101109 |
| współczynnik mostka = | 1,00E-06 | |
| przyrost naprężeń = | 5289605,924 | |
| współ Poissona = | 0,3427 | [-] |
| moduł Younga = | 67,5 | [GPa] |
| moduł odkształcenia postaciowego = | 25,1 | [GPa] |

Tablica Z.8

Tabela obliczeniowa – próbka 4

| P [N] | $\Delta \varepsilon_{i(x)}^{sr}$ | $\Delta \varepsilon_{i(y)}^{sr}$ |
|------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 4000–4500 | 80,03041562 | -26,94291562 |
| 3500–4000 | 79,55767097 | -26,92017097 |
| 3000–3500 | 79,98225319 | -27,01975319 |
| 2500–3000 | 79,49086107 | -26,75336107 |
| SUMA | 319,0612009 | -107,6362009 |
| współczynnik mostka = | 1,00E-06 | |
| przyrost naprężeń = | 5376344,086 | |
| współ Poissona = | 0,337 | [-] |
| moduł Younga = | 67,4 | [GPa] |
| moduł odkształcenia postaciowego = | 25,2 | [GPa] |

Załącznik 2

TABELE POMIAROWE – ZESTAWIENIE WARTOŚCI NAPRĘŻEŃ NORMALNYCH W WYBRANYCH PRZEKROJACH POPRZECZNYCH

Model 1

Tablica Z.9

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 1
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | -12,03 | -8,27 | -4,28 | 0,38 | 3,75 | 6,93 | 10,62 |
| 50 | -31,53 | -21,58 | -11,13 | -0,02 | 9,98 | 18,38 | 28,13 |
| 80 | -52,67 | -35,40 | -18,37 | -0,63 | 16,28 | 30,05 | 46,33 |
| 100 | -62,23 | -42,57 | -22,23 | -1,68 | 19,58 | 36,20 | 56,80 |

Tablica Z.10

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 1
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|-------|------|--------|--------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 12,58 | 8,48 | 4,55 | 0,28 | -4,37 | -7,88 | -10,88 |
| 50 | 33,55 | 22,50 | 12,03 | 0,85 | -9,37 | -20,95 | -28,92 |
| 80 | 55,75 | 37,52 | 20,18 | 1,80 | -15,55 | -34,33 | -47,43 |
| 100 | 67,38 | 38,90 | 24,68 | 2,57 | -18,27 | -40,83 | -56,50 |

Tablica Z.11

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 2
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | -1,93 | -1,33 | -1,18 | -0,95 | -0,28 | 0,00 | 0,92 |
| 50 | -4,22 | -2,80 | -2,53 | -1,88 | -0,18 | 0,75 | 3,15 |
| 80 | -5,70 | -3,55 | -3,17 | -2,13 | 0,58 | 2,37 | 6,45 |
| 100 | -6,05 | -3,55 | -3,15 | -1,93 | 1,38 | 3,67 | 8,80 |

Tablica Z.12

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 2
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 2,10 | 1,40 | 0,63 | -0,22 | -0,02 | -0,02 | -1,07 |
| 50 | 6,40 | 4,45 | 2,35 | 0,08 | -0,10 | -0,05 | -1,93 |
| 80 | 11,75 | 8,40 | 4,88 | 1,32 | 0,48 | -0,05 | -1,60 |
| 100 | 15,23 | 10,97 | 7,13 | 2,43 | 1,68 | 0,02 | -0,75 |

Model 2

Tablica Z.13

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 1
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|-------|------|------|------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 2,57 | 2,02 | 1,38 | 0,70 | 0,08 | -0,52 | -1,20 |
| 50 | 6,52 | 5,07 | 3,53 | 1,83 | 0,25 | -1,37 | -3,05 |
| 80 | 9,65 | 7,42 | 5,07 | 2,52 | 0,13 | -2,40 | -4,92 |
| 100 | 12,47 | 9,55 | 6,42 | 3,08 | -0,05 | -3,37 | -6,63 |

Tablica Z.14

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 1
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|--------|--------|-------|-------|-------|------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | -2,77 | -2,62 | -1,45 | -0,80 | -0,18 | 0,52 | 1,32 |
| 50 | -7,05 | -6,03 | -3,55 | -1,93 | -0,40 | 1,45 | 3,50 |
| 80 | -11,03 | -9,38 | -5,40 | -2,85 | -0,37 | 2,62 | 5,88 |
| 100 | -13,18 | -10,63 | -6,35 | -3,32 | -0,30 | 3,33 | 7,27 |

Tablica Z.15

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 2
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|-------|------|------|------|------|------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | -0,30 | 0,00 | 0,33 | 0,58 | 1,03 | 1,38 | 1,75 |
| 50 | -0,72 | 0,08 | 0,88 | 1,55 | 2,62 | 3,45 | 4,38 |
| 80 | -1,32 | 0,05 | 1,28 | 2,38 | 4,10 | 5,40 | 6,47 |
| 100 | -1,62 | 0,03 | 1,48 | 2,87 | 4,92 | 6,47 | 8,30 |

Tablica Z.16

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 2
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 0,30 | -0,08 | -0,47 | -0,78 | -1,47 | -1,42 | -1,87 |
| 50 | 0,92 | -0,22 | -1,15 | -1,90 | -3,07 | -3,60 | -4,73 |
| 80 | 1,55 | -0,17 | -1,63 | -2,92 | -4,43 | -5,63 | -6,97 |
| 100 | 2,17 | -0,05 | -1,92 | -3,45 | -4,77 | -6,73 | -8,95 |

Tablica Z.17

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 3
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|--------|--------|-------|------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | -5,52 | -3,68 | -1,17 | 0,75 | 2,65 | 4,83 | 6,27 |
| 50 | -13,68 | -9,17 | -2,85 | 1,95 | 6,78 | 12,27 | 16,02 |
| 80 | -21,90 | -14,70 | -4,58 | 3,18 | 11,03 | 19,83 | 24,53 |
| 100 | -26,70 | -17,92 | -5,57 | 3,92 | 13,52 | 24,35 | 32,38 |

Tablica Z.18

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 3
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|------|-------|--------|--------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 5,80 | 3,67 | 1,27 | -1,17 | -3,10 | -5,48 | -7,67 |
| 50 | 14,55 | 9,17 | 3,23 | -2,92 | -7,72 | -13,65 | -19,23 |
| 80 | 23,30 | 14,67 | 5,20 | -4,65 | -12,27 | -21,63 | -28,63 |
| 100 | 28,42 | 17,87 | 6,37 | -5,62 | -14,93 | -26,27 | -37,20 |

Tablica Z.19

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 4
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | -7,20 | -5,97 | -1,93 | -0,07 | 2,98 | 5,83 | 8,33 |
| 50 | -17,67 | -14,65 | -4,57 | 0,07 | 7,80 | 14,82 | 21,33 |
| 80 | -26,02 | -22,90 | -7,00 | 0,55 | 12,88 | 24,20 | 34,85 |
| 100 | -33,28 | -27,43 | -6,90 | 0,95 | 16,10 | 29,85 | 42,92 |

Tablica Z.20

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 4
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|------|-------|--------|--------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 5,80 | 3,67 | 1,27 | -1,17 | -3,10 | -5,48 | -7,67 |
| 50 | 14,55 | 9,17 | 3,23 | -2,92 | -7,72 | -13,65 | -19,23 |
| 80 | 23,30 | 14,67 | 5,20 | -4,65 | -12,27 | -21,63 | -28,63 |
| 100 | 28,42 | 17,87 | 6,37 | -5,62 | -14,93 | -26,27 | -37,20 |

Model 3

Tablica Z.21

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 1
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|-------|------|------|------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 3,50 | 2,78 | 2,17 | 1,50 | 0,95 | 0,55 | -0,18 |
| 50 | 8,70 | 7,02 | 5,40 | 3,82 | 2,45 | 1,55 | 0,00 |
| 80 | 13,08 | 10,57 | 8,18 | 5,85 | 3,83 | 2,70 | 0,27 |
| 100 | 17,25 | 14,07 | 11,05 | 8,02 | 5,45 | 3,85 | 1,95 |

Tablica Z.22

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 1
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|--------|--------|--------|---|-------|-------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | -4,07 | -3,32 | -2,55 | - | -1,13 | -0,40 | 0,28 |
| 50 | -10,10 | -8,20 | -6,35 | - | -2,92 | -1,12 | 0,67 |
| 80 | -16,13 | -13,15 | -10,22 | - | -4,88 | -2,02 | 0,77 |
| 100 | -19,97 | -16,38 | -12,83 | - | -6,43 | -2,97 | 0,40 |

Tablica Z.23

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 2
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|------|------|------|------|------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 0,43 | 0,75 | 1,10 | 1,57 | 1,88 | 2,20 | 2,58 |
| 50 | 1,52 | 2,23 | 2,83 | 3,92 | 4,53 | 5,20 | 6,00 |
| 80 | 2,33 | 3,63 | 4,63 | 6,33 | 7,37 | 8,37 | 9,72 |
| 100 | 3,50 | 4,85 | 5,90 | 8,02 | 9,20 | 10,38 | 11,93 |

Tablica Z.24

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 2
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | -0,47 | -0,87 | -1,22 | -1,58 | -1,98 | -2,33 | -2,82 |
| 50 | -0,92 | -2,05 | -2,93 | -3,78 | -4,90 | -5,82 | -6,98 |
| 80 | -1,35 | -3,30 | -4,68 | -6,13 | -7,90 | -9,35 | -10,52 |
| 100 | -1,98 | -4,28 | -5,90 | -7,73 | -9,90 | -11,68 | -14,07 |

Tablica Z.25

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 3
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|--------|--------|-------|------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | -5,98 | -3,60 | -1,18 | 1,25 | 3,73 | 6,20 | 8,52 |
| 50 | -14,33 | -8,52 | -2,77 | 3,07 | 9,13 | 15,07 | 20,55 |
| 80 | -21,15 | -13,45 | -4,27 | 4,97 | 14,58 | 24,00 | 32,90 |
| 100 | -27,32 | -16,25 | -5,10 | 6,13 | 17,85 | 29,40 | 40,20 |

Tablica Z.26

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 3
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|------|-------|--------|--------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 5,50 | 3,25 | 1,08 | -1,75 | -4,38 | -6,52 | -8,50 |
| 50 | 13,35 | 7,95 | 2,75 | -4,15 | -10,58 | -15,77 | -20,68 |
| 80 | 19,75 | 12,58 | 4,30 | -6,52 | -16,65 | -24,78 | -32,52 |
| 100 | 25,75 | 15,25 | 5,17 | -8,00 | -20,28 | -30,18 | -39,73 |

Tablica Z.27

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 4
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|--------|--------|-------|------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | -6,50 | -3,88 | -1,33 | 0,75 | 3,65 | 6,65 | 9,40 |
| 50 | -15,32 | -9,15 | -2,90 | 2,12 | 8,95 | 16,50 | 23,15 |
| 80 | -22,32 | -14,05 | -4,18 | 3,77 | 14,67 | 26,58 | 37,38 |
| 100 | -28,60 | -16,72 | -4,78 | 4,85 | 18,20 | 32,73 | 46,00 |

Tablica Z.28

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 4
od obciążenia momentami skręcającymi 20, 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | 8,10 | 5,32 | 2,68 | -0,28 | -3,13 | -5,82 | -8,88 |
| 50 | 20,08 | 13,22 | 6,75 | -0,32 | -7,32 | -13,70 | -21,07 |
| 80 | 30,08 | 21,20 | 11,03 | -0,13 | -11,02 | -20,92 | -32,35 |
| 100 | 39,55 | 26,17 | 11,47 | 0,20 | -12,97 | -24,98 | -38,75 |

Model 4

Tablica Z.29

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 1
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -0,75 | 0 | 0,75 | 1,5 |
|-----------|------|-------|------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 3,65 | 1,87 | 0,12 | -1,78 | -3,63 |
| 80 | 6,15 | 3,13 | 0,18 | -2,97 | -6,07 |
| 100 | 7,30 | 3,78 | 0,23 | -3,55 | -7,23 |

Tablica Z.30

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 1
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -0,75 | 0 | 0,75 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|-------|------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | -3,95 | -1,88 | -0,15 | 1,95 | 3,68 |
| 80 | -6,37 | -3,03 | -0,27 | 3,07 | 5,88 |
| 100 | -7,70 | -3,75 | -0,30 | 3,77 | 7,17 |

Tablica Z.31

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 2
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -0,75 | 0 | 0,75 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|-------|------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | -1,27 | -0,45 | -0,23 | 1,17 | 2,00 |
| 80 | -2,17 | -0,80 | 0,02 | 1,97 | 3,42 |
| 100 | -2,43 | -0,83 | 0,37 | 2,28 | 3,95 |

Tablica Z.32

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 2
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -0,75 | 0 | 0,75 | 1,5 |
|-----------|------|-------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 1,32 | 0,52 | -0,35 | -1,17 | -2,23 |
| 80 | 2,13 | 0,75 | -0,63 | -1,90 | -3,62 |
| 100 | 2,68 | 1,00 | -0,68 | -2,30 | -4,40 |

Tablica Z.33

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 3
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -0,75 | 0 | 0,75 | 1,5 |
|-----------|--------|--------|------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | -13,22 | -6,27 | 1,17 | 7,68 | 14,02 |
| 80 | -21,17 | -10,02 | 1,90 | 12,30 | 22,48 |
| 100 | -26,03 | -12,25 | 2,32 | 15,18 | 27,73 |

Tablica Z.34

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 3
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -0,75 | 0 | 0,75 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|-------|--------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 13,37 | 6,50 | -0,78 | -9,00 | -14,27 |
| 80 | 21,27 | 10,32 | -1,20 | -15,70 | -22,45 |
| 100 | 26,42 | 12,87 | -1,45 | -18,62 | -27,73 |

Tablica Z.35

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 4
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -0,75 | 0 | 0,75 | 1,5 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 7,23 | 3,27 | -1,00 | -4,82 | -7,80 |
| 80 | 11,37 | 5,10 | -1,62 | -7,62 | -12,27 |
| 100 | 14,20 | 6,30 | -1,92 | -9,43 | -15,22 |

Tablica Z.36

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 4
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | -1,5 | -0,75 | 0 | 0,75 | 1,5 |
|-----------|--------|--------|------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | -12,27 | -5,82 | 2,68 | 7,93 | 13,23 |
| 80 | -19,60 | -9,33 | 3,40 | 12,82 | 21,22 |
| 100 | -24,40 | -11,53 | 3,85 | 16,07 | 26,58 |

Tablica Z.37

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 5
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | 1,5 | 0,75 | 0 | -0,75 | -1,5 |
|-----------|--------|--------|------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | -28,65 | -13,02 | 2,10 | 15,27 | 30,20 |
| 80 | -45,27 | -20,52 | 3,53 | 24,50 | 48,42 |
| 100 | -55,68 | -25,15 | 4,47 | 30,38 | 60,03 |

Tablica Z.38

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 5
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | 1,5 | 0,75 | 0 | -0,75 | -1,5 |
|-----------|-------|-------|------|--------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 33,87 | 17,45 | 3,73 | -15,30 | -33,37 |
| 80 | 54,37 | 27,97 | 6,15 | -24,12 | -52,67 |
| 100 | 68,28 | 34,97 | 7,80 | -29,75 | -65,10 |

Tablica Z.39

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 6
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | 1,5 | 0,75 | 0 | -0,75 | -1,5 |
|-----------|------|------|-------|-------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 0,45 | 0,43 | -1,60 | 1,22 | 2,98 |
| 80 | 1,77 | 1,48 | 0,10 | 2,72 | 5,80 |
| 100 | 3,17 | 2,60 | 4,78 | 4,10 | 7,83 |

Tablica Z.40

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 6
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | 1,5 | 0,75 | 0 | -0,75 | -1,5 |
|-----------|------|------|------|-------|------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 2,08 | 1,40 | 1,23 | 1,42 | 1,78 |
| 80 | 4,43 | 3,05 | 2,72 | 3,17 | 3,92 |
| 100 | 6,12 | 4,38 | 3,92 | 4,57 | 5,70 |

Tablica Z.41

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce górnej w przekroju 7
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | 1,5 | 0,75 | 0 | -0,75 | -1,5 |
|-----------|-------|-------|-------|--------|--------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | 40,62 | 18,87 | -2,38 | -20,97 | -40,28 |
| 80 | 64,62 | 30,03 | -3,68 | -33,33 | -64,02 |
| 100 | 80,67 | 37,22 | -4,50 | -41,10 | -78,85 |

Tablica Z.42

Rozkład naprężeń normalnych [MPa] w półce dolnej w przekroju 7
od obciążenia momentami skręcającymi 50, 80, 100 [Nm]

| [Nm]/[cm] | 1,5 | 0,75 | 0 | -0,75 | -1,5 |
|-----------|--------|--------|-------|-------|-------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 50 | -33,72 | -17,03 | -0,98 | 18,50 | 37,77 |
| 80 | -52,95 | -26,73 | -1,37 | 29,35 | 59,85 |
| 100 | -65,27 | -33,10 | -1,55 | 36,60 | 74,48 |

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Ark. wyd. 8,4, ark. druku 9,75, 97/495

Druk i oprawa: *EXPOL* P. Rybiński, J. Dąbek, Sp. Jawna
ul. Brzeska 4, 87-800 Włocławek, tel. 054 232 37 23