

WOJCIECH WITKOWSKI

SYNTEZA SFORMUŁOWANIA  
NIELINIOWEJ MECHANIKI POWŁOK  
PODLEGAJĄCYCH  
SKOŃCZONYM OBROTOM  
W UJĘCIU MES

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*monografie*

*111*

POLITECHNIKA GDAŃSKA

WOJCIECH WITKOWSKI

SYNTEZA SFORMUŁOWANIA  
NIELINIOWEJ MECHANIKI POWŁOK  
PODLEGAJĄCYCH  
SKOŃCZONYM OBROTOM  
W UJĘCIU MES



GDAŃSK 2011

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

*Romuald Szymkiewicz*

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH

*Janusz T. Cieśliński*

REDAKTOR SERII

*Jerzy M. Sawicki*

RECENZENCI

*Ireneusz Kreja*

*Wojciech Pietraszkiewicz*

PROJEKT OKŁADKI

*Jolanta Cieślawska*

Wydano za zgodą  
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna na stronie  
[www.pg.gda.pl/WydawnictwoPG](http://www.pg.gda.pl/WydawnictwoPG)

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2011

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie  
i w jakiegokolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

ISBN 978–83–7348–358–3

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Ark. wyd. 9,9, ark. druku 11,5, 111/645

Druk i oprawa: *EXPOL* P. Rybiński, J. Dąbek, Sp. Jawna  
ul. Brzeska 4, 87-800 Włocławek, tel. 54 232 37 23

# SPIS TREŚCI

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW .....	5
1. WSTĘP .....	7
1.1. Uwagi ogólne .....	7
1.2. Materiały kompozytowe.....	9
1.3. Teorie powłok .....	13
1.4. Metoda Elementów Skończonych w analizie powłok .....	15
1.4.1. Wstęp .....	15
1.4.2. Wybrane wiadomości o modelowaniu powłok przy pomocy MES .....	16
1.4.3. Modelowanie powłok warstwowych .....	18
1.4.4. Blokada numeryczna rozwiązań MES.....	21
1.4.5. Całkowanie zredukowane.....	22
1.4.6. Podejścia niezgodnych postaci i EAS.....	23
1.4.7. Podejście ANS .....	25
1.4.8. Podejście EAS+ANS.....	26
1.4.9. Ocena elementów skończonych .....	27
1.5. Cel, zakres i założenia przyjęte w pracy.....	29
1.6. Układ pracy .....	30
2. OŚRODEK COSSERATÓW .....	33
2.1. Przegląd zagadnień .....	33
2.1.1. Wybrane zagadnienia mechaniki ośrodka Cosseratów .....	35
2.1.2. Teoria płyt i powłok, wybrane implementacje MES.....	41
2.2. Liniowy ośrodek Cosseratów .....	44
3. TEORIA POWŁOK .....	47
3.1. Opis powierzchni odniesienia powłoki.....	47
3.1.1. Baza ortonormalna .....	52
3.2. Wypadkowe równania równowagi dla powłok regularnych .....	54
3.2.1. Zasady zachowania .....	54
3.2.2. Sprowadzone zasady zachowania mechaniki powłok.....	56
3.2.3. Lokalne równania równowagi.....	58
3.3. Słaba postać problemu brzegowego .....	60
3.3.1. Zasada prac wirtualnych.....	62
3.3.2. Kinematyka powłoki, miary odkształceń.....	63
3.3.3. Zasady wariacyjne .....	64
4. RÓWNANIA KONSTITUTYWNE .....	67
4.1. Uwagi ogólne .....	67
4.2. Formułowanie równań konstytutywnych w mechanice kontinuum.....	69
4.2.1. Materiał hipersprężysty .....	70
4.2.2. Liniowa teoria sprężystości .....	73
4.3. Równania konstytutywne liniowego ośrodka Cosseratów .....	74
4.3.1. Liniowo sprężyste kontinuum Cosseratów .....	74
4.3.2. Nieliniowa 6-parametrowa teoria powłok sprężystych .....	77
4.3.3. Model Altenbacha i Eremeyeva liniowo sprężystej płyty Cosseratów.....	79
4.4. Podejście równoważnej jednej warstwy .....	83
4.4.1. Wprowadzenie.....	83
4.4.2. Sformułowanie na poziomie warstwy.....	85
4.4.3. Sformułowanie w wielkościach przekrojowych .....	87

5. ELEMENTY SKOŃCZONE .....	89
5.1. Przegląd podstaw MES .....	89
5.1.1. Aproksymacja i interpolacja, zagadnienia ogólne .....	89
5.1.2. Istnienie rozwiązania .....	92
5.1.3. Typowy 4-węzłowy powłokowy element skończony .....	92
5.1.4. Zamiana współrzędnych .....	93
5.2. Linearyzacja .....	94
5.3. Interpolacja .....	97
5.3.1. Uwagi ogólne .....	97
5.3.2. Interpolacja wielkości wektorowych .....	97
5.3.3. Interpolacja na grupie obrotów $SO(3)$ .....	97
5.3.4. Interpolacja wektora obrotów .....	98
5.3.5. Interpolacja niezależnych pól odkształceń .....	99
5.3.6. Interpolacja odkształceń w podejściu ANS .....	103
5.3.7. Uwagi o elementach hybrydowo-mieszanych .....	104
5.3.8. Macierze elementowe .....	106
6. PRZYKŁADY NUMERYCZNE .....	109
6.1. Wprowadzenie .....	109
6.2. Przykłady analizy liniowej .....	109
6.2.1. Test Łaty .....	109
6.2.2. Test inf-sup .....	112
6.2.3. Test wartości własnych .....	113
6.2.4. Swobodnie podparta zginana belka warstwowa o przekroju dwuteowym .....	114
6.3. Przykłady analizy nieliniowej .....	115
6.3.1. Utwierdzona powłoka walcowa obciążona siłą skupioną .....	115
6.3.2. Czasza oparta na rzucie kwadratu .....	117
6.3.3. Swobodna paraboloidalno-hiperboliczna powłoka trójwarstwowa .....	120
6.3.4. Półsfery z otworem obciążona siłami samorównoważącymi się .....	124
6.3.5. Chłodnia kominowa (hiperboloida) warstwowa .....	126
6.3.6. Wspornik o przekroju ceowym .....	132
6.3.7. Stateczność giętna swobodnie podpartego słupa o przekroju dwuteowym .....	134
6.3.8. Stateczność giętno-skrętna słupa o przekroju krzyżowym .....	139
7. UWAGI KOŃCOWE .....	142
7.1. Podsumowanie .....	142
7.2. Wnioski .....	143
7.3. Kierunki dalszych badań .....	144
BIBLIOGRAFIA .....	145
Streszczenie w języku polskim .....	163
Streszczenie w języku angielskim .....	164
Dodatek A .....	165
Dodatek B .....	167
Dodatek C .....	169
Dodatek D .....	173
Dodatek E .....	178

# WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW

## Oznaczenia

$\otimes$	– iloczyn tensorowy wektorów
$\times$	– iloczyn wektorowy wektorów
$\wedge$	– iloczyn skośny wektorów
$\cdot$	– iloczyn skalarny wektorów, tensorów
$:$	– podwójne nasunięcie tensora trzeciej walencji na tensor drugiej walencji
$E^3$	– przestrzeń euklidesowa
$SO(3)$	– grupa właściwych tensorów ortogonalnych
$so(3)$	– grupa tensorów skośnie symetrycznych
$M$	– powierzchnia podstawowa powłoki
$T_x M$	– przestrzeń styczna do powłoki
$\mathbf{u}$	– wektor przemieszczeń trójwymiarowego ośrodka Cosseratów
$\boldsymbol{\varphi}$	– wektor obrotów trójwymiarowego ośrodka Cosseratów
$\mathbf{p}$	– wektor naprężeń siłowych trójwymiarowego ośrodka Cosseratów
$\boldsymbol{\mu}$	– wektor naprężeń momentowych trójwymiarowego ośrodka Cosseratów
$\boldsymbol{\gamma}$	– tensor odkształceń trójwymiarowego ośrodka Cosseratów
$\boldsymbol{\kappa}$	– tensor skręcenia trójwymiarowego ośrodka Cosseratów
$\mathbf{x}$	– wektor wodzący powierzchni podstawowej $M$ w konfiguracji odniesienia
$\mathbf{y}$	– wektor wodzący powierzchni podstawowej $M$ w konfiguracji zdeformowanej
$\boldsymbol{Q}$	– tensor obrotu
$\boldsymbol{T}_0$	– tensor struktury powłoki w konfiguracji odniesienia
$\boldsymbol{T}$	– tensor struktury powłoki w konfiguracji zdeformowanej
$\boldsymbol{B}_0$	– tensor krzywizn
$\boldsymbol{T}$	– pierwszy tensor naprężeń Piolii-Kirchhoffa
$\boldsymbol{f}(\mathbf{x})$	– przekrojowy wektor sił powierzchniowych
$\boldsymbol{c}(\mathbf{x})$	– przekrojowy wektor momentów powierzchniowych
$\mathbf{N}_v$	– wektor wewnętrznych sił przekrojowych
$\mathbf{M}_v$	– wektor wewnętrznych momentów przekrojowych
$\mathbf{N}$	– tensor przekrojowych sił
$\mathbf{M}$	– tensor przekrojowych momentów
$\mathbf{u}$	– wektor rzeczywistych przesunięć
$\boldsymbol{v}(\mathbf{x})$	– kinematycznie dopuszczalne pole wirtualnych przesunięć
$\boldsymbol{w}(\mathbf{x})$	– kinematycznie dopuszczalne pole wirtualnych obrotów
$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta$	– wektor odkształceń membranowych i poprzecznych
$\boldsymbol{\kappa}_\beta$	– wektor krzywizn
$\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \boldsymbol{Q})$	– wektor rzeczywistych uogólnionych przemieszczeń powłoki
$\mathbf{w} = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$	– wektor wirtualnych pól uogólnionych przemieszczeń powłoki
$\mathbf{B}(\mathbf{u})$	– macierzowy operator przemieszczenie-odkształcenie
$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta)$	– wektor uogólnionych odkształceń (zgodnych)
$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$	– wektor odkształceń wzbogacających
$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta)$	– dwuwymiarowa funkcja gęstości energii odkształcenia
$\mathbf{I}_j$	– funkcjonal konstytutywny
$\mathbf{C}$	– tensor konstytutywny
$\lambda, \mu$	– stale Lamego

$E, \nu$	– moduł Younga i współczynnik Poissona
$\alpha_t$	– współczynnik owinięcia
$\alpha_s$	– współczynnik ścinania
$a_{(k)}, b_{(k)}$	– osie materiałowe warstwy
$H^k$	– przestrzeń Sobolewa rzędu $k$
$L_2$	– przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem
$L_p^M(\xi)$	– wielomian Lagrange'a rzędu $M$
$\Pi_{(e)}$	– obszar element skończonego w przestrzeni $E^3$
$\pi_{(e)}$	– obszar element skończonego w przestrzeni $R^2$
$\mathbf{P}(\xi)$	– macierz interpolacyjna wzbogacających odkształceń we współrzędnych fizycznych
$\mathbf{H}(\xi)$	– macierz interpolacyjna wzbogacających odkształceń we współrzędnych rodzimych
$\mathbf{M}(\xi)$	– macierz transformacji wzbogacających odkształceń
$\mathbf{L}(\xi)$	– macierz funkcji kształtu elementu skończonego
$\mathbf{K}_T^{(e)}$	– styczna macierz sztywności elementu skończonego
$\mathbf{r}^{(e)}$	– elementowy wektor sił wewnętrznych
$\Delta\boldsymbol{\beta}_{(e)}$	– elementowy wektor przyrostów parametrów wzbogacających
$\mathbf{p}^{(e)}$	– elementowy wektor obciążeń

### Skróty

ANS	– koncepcja dwustopniowej interpolacji odkształceń (ang. <i>Assumed Natural Strain</i> )
CFRC	– kompozyty wzmocnione włóknem węglowym (ang. <i>Carbon Fiber Reinforced Composites</i> )
EAS	– koncepcja wzbogaconych odkształceń (ang. <i>Enhanced Assumed Strain</i> )
ESL	– model równoważnej jednej warstwy (ang. <i>Equivalent Single Layer</i> )
FI	– całkowanie pełne (ang. <i>Full Integration</i> )
FOSD	– teoria płyt oparta na kinematyce Reissnera–Mindlina (ang. <i>First Order Shear Deformation Theory</i> )
FRC	– kompozyty wzmocnione włóknem (ang. <i>Fiber Reinforced Composites</i> )
GFRP	– kompozyty wzmocnione włóknem szklanym (ang. <i>Glass Fiber Reinforced Plastics</i> )
HOT	– teoria wyższego rzędu (ang. <i>Higher Order Theory</i> )
MOC	– mechanika ośrodków ciągłych
LW	– dyskretny model warstwowy (ang. <i>Layer-Wise</i> )

### Przelicznik jednostek USCS na jednostki SI

1 in	– 0.0254 m
1 m	– 39.37 in
1 lb	– 4.448 N
1 N	– 0.2248 lb
1 psi	– 0.00689 MPa
1 MPa	– 145.0377 psi

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego własnego pt. *Nieliniowa teoria i analiza deformacji i stateczności warstwowych powłok kompozytowych metodą elementów skończonych* w ramach umowy nr 2542/B/T02/2009/37 do wniosku nr N N506 254237 z Ministerstwem Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

## Rozdział 1

# WSTĘP

### 1.1. Uwagi ogólne

Przystępując do przeglądu literatury poświęconej konstrukcjom powłokowym, staje się przed problemem klasyfikacji i syntetycznego uporządkowania olbrzymiej liczby prac poświęconych temu tematowi. W literaturze przedmiotu można odnaleźć co najmniej kilka opracowań, których zasadniczym celem był przegląd literatury. Można tu wymienić na przykład prace następujących autorów: Noor (1990), Pietraszkiewicz (1992), Jemielita (2001a), Jemielita (2001b) Kowal-Michalska (2007), Chróścielewski i inni (2011a), Kreja (2011).

Autor niniejszej monografii nie jest wyjątkiem i stanął przed tym samym problemem. Sprawę dodatkowo komplikuje fakt, że w czasie niewiele poprzedzającym niniejsze opracowanie, dwoje bliskich Współpracowników Autora, to jest dr hab. inż. Ireneusz Kreja i mgr inż. Agnieszka Sabik, przedstawili odpowiednio rozprawę habilitacyjną (Kreja 2007) i pracę dyplomową magisterską (Sabik 2006) z obszernymi w obu przypadkach odniesieniami do literatury. Bliskość tematyki niniejszej monografii z tymi pracami, a jednocześnie niewielki odstęp w czasie, powoduje że przeglądy literatury tam zawarte aktualne są i dla tej pracy. Z tego też względu i aby uniknąć zbędnych powtórzeń, Autor pozwala sobie, tam, gdzie jest to możliwe, odwoływać się do wyżej cytowanych prac, wyrażając jednocześnie uznanie i podziw dla wysiłku Współpracowników.

Powłoki lub szerzej konstrukcje powłokowe są elementem konstrukcyjnym chętnie stosowanym w szeroko pojętych zastosowaniach inżynierskich. Szerokie spektrum zastosowań podali Bašar i Krätzig (2001). Powłokami mogą być na przykład ściany tuneli, rurociągi, zbiorniki (zob. na przykład Błachut 2010, Błachut i Magnucki 2008, Górski i Mikulski 2008, Małachowski 2010), kominy, chłodnie kominowe (Krätzig 1993, Krätzig i inni 1998, Kasprzak i inni 2010), dzwony, karoserie samochodów, opony, kadłuby okrętowe (zob. na przykład Taczała 2010), łopatki turbin (zob. na przykład Rządkowski i inni 2010), konstrukcje zbudowane z elementów cienkościennych (zob. na przykład Kołakowski i Kubiak 2005, Chróścielewski i inni 2006, Kołakowski i inni (2007), Kinomura i Shimizu 2010), ustroje pneumatyczne (zob. na przykład Stanuszek 2004). W architekturze spotyka się powłoki między innymi jako kopuły budowli sakralnych (zob. na przykład Selcuk i inni 2006) czy przekrycia membranowe (zob. na przykład Kłosowski 2010). Rys. 1.1 przedstawia tekstylne przekrycie membranowe (obecnie nieistniejące) Opery Leśnej w Sopocie. Także w naturze można zaobserwować liczne przykłady powłok jak, na przykład skorupki jaj, pancerze skorupiaków, ściany naczyń krwionośnych (zob. na przykład Holzapfel i inni 1996), ściany komórek (zob. na przykład Krishnaswamy 1996), element zoperowanej chirurgicznie przepukliny brzusznej (zob. na przykład Lubowiecka i inni 2010).

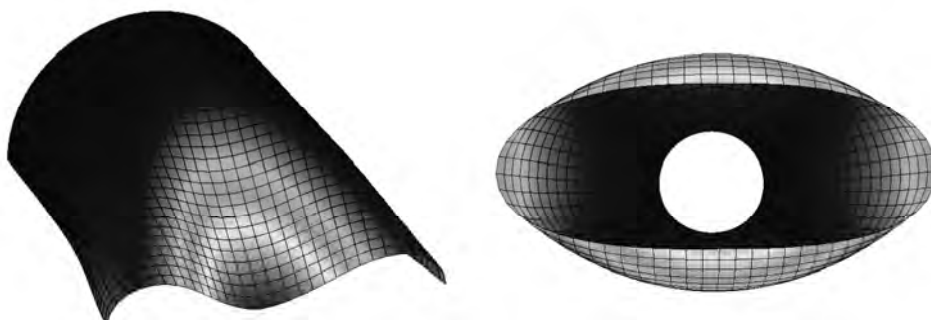
Przyjęta do rozważań w niniejszej pracy teoria powłok pozwala na wprowadzenie podziału powłok na te o gładkiej geometrii powierzchni podstawowej i powłoki strukturalne, tzn. takie, gdzie powierzchnia podstawowa jest sumą (w sensie teorii mnogości) pewnej liczby płatów powłok gładkich. Przykłady powłok z obu kategorii



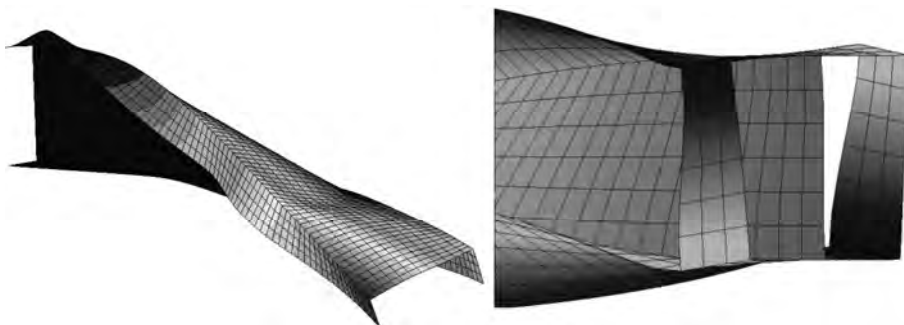
przedstawiają odpowiednio rys. 1.2 i rys. 1.3. W drugim przypadku powłoka strukturalna wykorzystana została do modelowania pewnych konstrukcji cienkościennej. Szersze ujęcie zagadnień związanych z ustrojami cienkościnnymi można odnaleźć, na przykład, w pracach Szymczak i inni (2003), Kujawa (2007), Mikulski (2010), Iwicki (2010).



Rys. 1.1. Dach dawnej Opery Leśnej w Sopocie, zdjęcie z archiwum prof. Pawła Kłosowskiego



Rys. 1.2. Przykładowe deformacje powłok gładkich



Rys. 1.3. Przykładowe deformacje powłok strukturalnych

## 1.2. Materiały kompozytowe

Kompozyty to materiały w których połączono dwa lub więcej materiałów składowych w taki sposób, że wynikowy materiał cechuje się lepszymi własnościami mechanicznymi w porównaniu z materiałami składowymi (Jones 1999). Zwykle (Hebda 2006) materiały wchodzące w skład kompozytu różnią się od siebie w istotny sposób. Wynika to z roli, jaką pełnią poszczególne materiały: wypełniacza (osnowy) i zbrojenia. Od strony matematycznej kompozyty mogą być postrzegane jako materiały o strukturze periodycznej, zob. na przykład Jędrysiak i Woźniak (2006), Jędrysiak (2009).

Materiały kompozytowe znane są ludzkiej myśli technicznej od dawna. German (1996) podaje, że wczesne zastosowania materiałów kompozytowych można odnaleźć w starożytności. Na przykład w Egipcie (ok. 3600 lat p.n.e.) stosowano sklejkę drewnianą. Z kolei Izraelici (od trzynastego wieku p.n.e.) wykorzystywali materiał budowlany złożony z błota oraz słomy jako wzmocnienia.

W ostatnich latach, w pierwszej kolejności w przemyśle lotniczym (zob. na przykład German 1996, Altenbach 1998, Öry i inni 1998, Jones 1999, Gruttmann i Wagner 2006, Kreja 2007), a później w inżynierii lądowej, obserwuje się zainteresowanie płytami i powłokami warstwowymi. Uzasadnienie takiego stanu rzeczy można odnaleźć na przykład w pracach Balah i Al-Ghamedy (2002), Carrera i Ciuffreda (2005), Hebda (2006), Andrade i inni (2007) czy Kreja (2007). Wśród korzystnych cech przypisywanych materiałom warstwowym wymienia się między innymi:

- wysoki współczynnik sztywności do wagi,
- wysoką odporność na korozję,
- niewielką rozszerzalność termiczną,
- dobrą odporność na obciążenia cykliczne,
- możliwość wykorzystania anizotropowej struktury materiału do ukształtowania danego elementu konstrukcyjnego zgodnie z kierunkami działających w nim sił.

W odniesieniu do ostatniego z wyżej wymienionych punktów Hebda (2006) pisze „*Mamy zatem do czynienia z rozszerzeniem procesu projektowania konstrukcji o projektowanie materiału, z którego ma być ona zbudowana. Niezbędna jest zatem wiedza z zakresu mechaniki materiałów kompozytowych, a w szczególności umiejętność wyznaczania ich nośności*”. Muc i Ulatowska (2010) zwracają uwagę na kolejne aspekty projektowania kompozytów:

- poszukiwanie optymalnego rozkładu materiału, obejmującego zarówno grubość, jak i orientację włókien i/lub rozkład włókien,
- optymalizację kształtu, tj. dobór kształtu projektowanego modelu.

Zagadnienia optymalizacji konstrukcji wykonanych z materiałów kompozytowych są poza zakresem niniejszej monografii. Szerzej na temat optymalizacji traktują przykładowo prace Muc i Gurba (2001), Muc (2007), Czarnecki i inni (2008), Studziński i inni (2009).

Altenbach (1998) zwrócił uwagę na pewne wady materiałów kompozytowych. Są to:

- utrata sztywności ze względu na starzenie się połączeń międzywarstwowych,
- wysokie wymagania technologiczne przy produkcji,
- konieczność opracowania nowych metod badań nieniszczących,
- kruchość,
- niewielka wytrzymałość na obciążenia udarowe.

W tym miejscu warto zwrócić uwagę na jeszcze jedną cechę kompozytów. Pożądane z punktu widzenia konstruktora własności, jak na przykład odporność na korozję, stanowią przeszkodę w utylizacji takich materiałów.

Pojęcie materiału kompozytowego obejmuje znaczną liczbę materiałów. Materiały te można klasyfikować na szereg sposobów. Przykładowo Hebda (2006) podaje, że jedną z możliwości klasyfikacji kompozytów jest rozróżnienie w zależności od materiału użytego do konstrukcji osnowy, która może być polimerowa, metalowa czy ceramiczna. Inną możliwością (zob. na przykład German 1996, Hebda 2006) jest klasyfikacja ze względu na formę wzmocnienia, tzn. wzmocnienie cząsteczkami, wzmocnienie dyspersyjne, wzmocnienie włóknami krótkimi i długimi. Dwa ostatnie typy materiałów znane są jako ang. *fiber reinforced composites*, FRC. Materiały te cechuje znaczna wytrzymałość wzdłuż włókien i niewielka w pozostałych kierunkach. Stąd też, w celu poprawienia własności mechanicznych, poszczególne warstwy materiału (lamininy) można łączyć w tzw. kompozyt warstwowy.

Kompozyt warstwowy (laminat) powstaje w wyniku odpowiedniego ułożenia włókien kolejnych cienkich warstw w stos i ich zespolenie (zob. na przykład German 1996, Hebda 2006, Kołakowski 2007).

W opisie pojedynczej warstwy zwyczajowo (zob. na przykład German 1996) stosuje się tzw. konfigurację osiową<sup>1)</sup>, w której układ geometryczny warstwy opisywany jest w głównych osiach materiałowych: oś  $a$  przebiega w kierunku włókien, oś  $b$  jest prostopadła do kierunku włókien, zaś oś  $c$  jest prostopadła do płaszczyzny warstwy wyznaczonej osiami  $a$  i  $b$ . Tak więc odpowiednie ułożenie oznacza w tym wypadku obrót osi  $a$  poszczególnych warstw w stosie laminatu. Zwykle projektując laminat, wykorzystuje się ten sam materiał, różnicując w warstwach kierunek włókien. Takie laminaty są przedmiotem analizy w niniejszej monografii<sup>2)</sup>.

Szczególnym przypadkiem kompozytu warstwowego są płyty bądź powłoki sandwichowe. Są one złożone z dwóch cienkich sztywnych okładzin i lekkiego wypełnienia. Generalnie wypełnienie to nie przenosi obciążeń, bądź przenosi jedynie siły ścinające, zob. na przykład Zielnica (2003). Znane są także technologie, w których wypełnienie w znaczący sposób wpływa na nośność i zachowanie płyt sandwichowych.

Firma Inteligent Engineering<sup>3)</sup> opracowała i opatentowała elementy konstrukcyjne w formie płyty sandwichowej, o nazwie Sandwich Plate System – SPS, zob. rys. 1.4. System ten składa się z dwóch płyt stalowych połączonych w sposób ciągły poprzez sprasowaną warstwę poliuretanu. Materiał taki jest sztywniejszy od pojedynczych płyt stalowych. Warstwa poliuretanu zapewnia podparcie dla elementów stalowych, przez co są one zabezpieczone przed lokalną utratą stateczności. Przenosi ona jednocześnie naprężenia ścinające z płyty na płytę. Wytrzymałość płyty dobiera się w zależności od wymagań inwestora. Omawiany materiał, wg strony internetowej producenta, znajduje zastosowanie w przemyśle okrętowym, morskim przemyśle wydobywczym, w inżynierii lądowej oraz w przemyśle wojskowym.

---

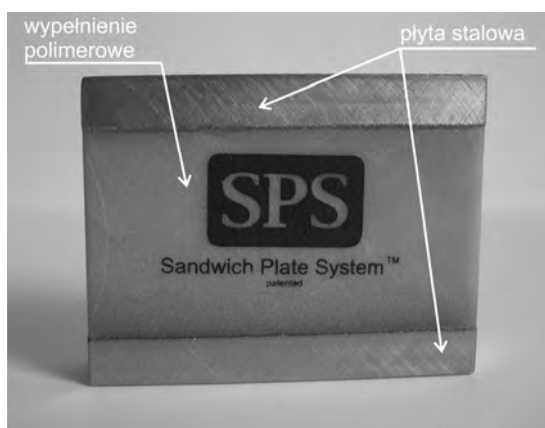
<sup>1)</sup> Jest to tak zwany układ *on-axis*, pojęcie głównych osi materiałowych nie ma swojego odpowiednika w mechanice materiałów izotropowych.

<sup>2)</sup> Istnieją także tzw. laminaty hybrydowe, w których warstwy wykonywane są z różnych materiałów, por. German (1996).

<sup>3)</sup> <http://www.ie-sps.com>.

Dalsze przykłady zastosowań materiałów kompozytowych w inżynierii lądowej podał Kreja (2007). Inną potencjalną możliwością stosowania materiałów kompozytowych jest wykonanie jezdni mostów (zob. na przykład Davalos i inni 2001).

Kolejnym przykładem, zastosowania materiałów kompozytowych w budownictwie są maty i taśmy wzmacniające. Przykładowym dostawcą i wykonawcą tej technologii jest przedsiębiorstwo Megachemie<sup>4)</sup> sp. z. o. o. z Krakowa. Firma ta dostarcza między innymi taśmy CFRP (ang. *carbon fiber reinforced plastics*) o nazwie Neoxeplate. Produkt ten zawiera, zgodnie z nazwą, włókna węglowe umieszczone w matrycy epoksydowej. Producent oferuje także maty z włókien węglowych jako osnowy oraz białych włókien szklanych i poliestrowych jako wątku.



Rys. 1.4. Materiał SPS

Wzmocnienia konstrukcji betonowych wykonuje się poprzez bezpośrednie naklejanie taśm systemowym klejem epoksydowym na elementy betonowe. Innym zastosowaniem jest wykorzystanie wstępnie naprężanych taśm z włókien węglowych.

Przykładowe realizacje, w których zastosowano materiały firmy Megachemie to:

- wzmocnienie budynku wieży transportowej w cukrowni „Góra Śląska”,
- wzmocnienie stropów w budynku adaptowanym na potrzeby nowej siedziby Zarządu Jastrzębskiej spółki Węglowej S.A.,
- naprawa oraz wzmocnienie i zabezpieczenie powłokowe konstrukcji mostu w ciągu drogi dojazdowej do S69 w Milówce,
- wzmocnienie spękanych ceglanych murów obronnych Zamku Królewskiego na Wawelu,
- wzmocnienie budynku Sukiennic na Rynku Głównym w Krakowie.

Tytułem podsumowania tej części rozważań w tabeli 1.1 zestawiono, za pracą Hebda (2006) i materiałami firmy Megachemie, pewne przykładowe własności materiałów kompozytowych.

Choć badania eksperymentalne dotyczące powłok i ich własności materiałowych, w tym powłok kompozytowych, są poza zakresem niniejszej monografii, warto jednak odnotować kilka reprezentatywnych prac z tej dziedziny.

<sup>4)</sup> [www.megachemie.com](http://www.megachemie.com), wszystkie podane w niniejszej pracy właściwości i zastosowania kompozytowych materiałów grupy Megachemie pochodzą z prospektu informacyjnego firmy.

Marcinowski (1999) przedstawił wyniki badań doświadczalnych i numerycznych dotyczących stateczności stalowych powłok walcowych.

Kłosowski (1999), por. też Kłosowski i Woźnica (2007) zajmował się określaniem parametrów modeli konstytutywnych Perzyny, Chaboche'a i Bodnera-Partona stosowanych w analizie drgań sprężysto-lepkoplastycznych płyt i powłok.

Qiao i inni (2003) rozwinęli model teoretyczny i przedstawili wyniki badań doświadczalnych, dotyczących wybożenia skrętnego cienkościennych belek o przekroju dwuteowym.

W pracach Bisgani i Cordisco (2003, 2006) przedstawiono wyniki badań, dotyczących zachowania dokrytycznego i pokrytycznego cienkościennych powłok cylindrycznych z materiału CFRP bez i ze wzmocnieniami. Rozpatrywano utraty stateczności związane z obciążeniem osiowym lub/i skręcającym.

Shan i Qiao (2005), wykorzystując podobne podejście teoretyczne do tego z pracy Qiao i inni (2003), sformułowali model do badania wybożenia cienkościennych prętów o przekroju ceowym. Otrzymane rozwiązania są w dobrej zgodności z wynikami analizy numerycznej i wynikami eksperymentów.

Gruttmann i Wagner (2005) przedstawili pewne wyniki eksperymentalne dotyczące wybożenia panelu cylindrycznego wzmocnianego wzdłuż tworzącej.

Kesavan i inni (2006) przedstawili wyniki badań eksperymentalnych i numerycznych na temat belek o przekrojach cienkościennych, zawierających połączenia w kształcie litery T wykonanych z materiału *glass fibre reinforced plastic*, GFRP.

Kłosowski i inni (2009) (zob. także Ambroziak 2006) opisali eksperymenty pozwalające na identyfikację pewnych parametrów materiałowych dla tkaniny technicznej Panama, która może być stosowana do konstrukcji przekryć membranowych.

Santiuste i inni (2010) prowadzili badania eksperymentalne i numeryczne dotyczące zniszczenia kompozytowych belek zginanych. Zaimplementowane kryterium zniszczenia obejmowało różne możliwości: zniszczenia włókna, pęknięcia matrycy, miażdżenia matrycy oraz delaminację. Do analizy MES wykorzystano program Abaqus Explicit.

Przowski (2010) studiował zagadnienie lepkoplastycznego zniszczenia konstrukcji płytowo-powłokowych pod wpływem obciążeń dynamicznych na bazie modelu Chaboche'a.

**Tabela 1.1**

Przykładowe wartości modułu Younga i wytrzymałości wybranych materiałów kompozytowych i porównanie z materiałami konwencjonalnymi

Materiał	Wytrzymałość na rozciąganie [MPa]	Moduł Younga [GPa]
Stal węglowa	370 – 460	210
Stal stopowa	490 – 560	210
Aluminium	450	72
Węgiel/epoksyd	1300 – 3000	130 – 200
Aramid/epoksyd	1380 – 2200	75 – 95
Szkło E/epoksyd	1200 – 3000	45
Neoxeplate HS*	2679 ± 167	178 ± 8
Neoxeplate HM*	2811 ± 245	256 ± 26
Neoxeplate UHS*	3240 ± 269	169 ± 9

\* parametry wyznaczone w kierunku ułożenia włókien w taśmie

### 1.3. Teorie powłok

Pod pojęciem „teoria powłok” wg Woźniaka (Woźniak 1978)<sup>5)</sup> rozumie się mechanikę cienkiej, lecz zawsze trójwymiarowej struktury powłokowej. Opis mechaniczny odbywa się na pewnej powierzchni, znanej jako powierzchnia podstawowa<sup>6)</sup>.

Jemielita (Jemielita 2001a) sugeruje, by za początek procesu formułowania teorii powłok przyjąć pracę Eulera z roku 1766. W pracy tej Euler badał zjawisko generacji dźwięków przez dzwon. Rozpatrywany dzwon podzielił na cienkie pierścienie powłoki obrotowo-symetrycznej, a każdy z pierścieni potraktował jako pręt. W ten sposób Euler otrzymał równanie różniczkowe cząstkowe, z którego określił częstość drgań własnych dzwonu.

Inną przełomową dla teorii płyt i powłok jest praca Kirchhoffa z roku 1850. Teoria ta znana jest jako teoria płyt cienkich. Podstawowym założeniem kinematycznym (tzw. więzem) jest w tym przypadku żądanie, by włókno proste prostopadłe do powierzchni podstawowej pozostało proste i prostopadłe w trakcie deformacji. Założenie to redukuje (Fung i Tong 2001) równania trójwymiarowego kontinuum do równań kontinuum dwuwymiarowego. Podejście takie nazywane jest podejściem sprowadzającym (ang. *derived approach*). Skonstruowane w ten sposób teorie noszą też nazwę teorii technicznych (zob. na przykład Jemielita 2001b).

Drugą grupą teorii wg Jemielity są teorie asymptotyczne, w których wyjściowe zagadnienie trójwymiarowe sprowadza się do ciągu zastępczych zagadnień dwuwymiarowych. Podejście to nie jest jednak przedmiotem analizy w niniejszej monografii. Szerzej na ten temat piszą na przykład Lewiński i Telega (2000).

W literaturze znane jest także podejście bezpośrednie (ang. *direct approach*), zob. na przykład Woźniak (1978), Chróścielewski i inni (2004). Tutaj formułowanie powierzchniowych równań teorii powłok odbywa się poprzez przyjęcie jako modelu powłoki pewnej odkształcalnej powierzchni typu Cosseratów<sup>7)</sup>, o jednym lub większej liczbie dyrektorów. Sformułowanie to pochodzi z pracy Ericksen i Truesdell (1958) i było dalej rozwijane, zob. przegląd literatury w rozdziale 2.

W literaturze przedmiotu przyjmuje się (zob. na przykład Woźniak 1978, Jemielita 2001a, Kreja 2007), że podstawy teorii powłok, jako uogólnienie teorii płyt Kirchhoffa z pracy z roku 1850, zostały podane przez Love’a (Love 1889). Sformułowanie to znane jest obecnie w literaturze pod nazwą teoria Kirchhoffa-Love’a (teoria K-L, zob. na przykład Radwańska 2009) lub *Classical Lamination Theory*<sup>8)</sup>, CLT, w modelowaniu płyt i powłok warstwowych (zob. na przykład Carrera i Brischetto 2009). Zasadnicze dwa założenia, na których bazuje ta teoria to (Radwańska 2009):

- włókno proste i prostopadłe do nieodkształconej powierzchni podstawowej pozostaje, po przyłożeniu obciążenia, proste i *prostopadłe* do odkształconej powierzchni podstawowej,
- naprężenie  $\sigma_3$  jest tak małe w porównaniu z pozostałymi składowymi tensora naprężenia, że dla wszystkich punktów dźwigara można założyć płaski stan naprężenia.

<sup>5)</sup> W niniejszej monografii przyjęto cytować tylko te prace, do których autor dotarł osobiście. Prace te zostały zestawione w bibliografii. Pozostałe prace przytacza się za innymi opracowaniami.

<sup>6)</sup> Matematyczne rozważania przedstawione są w rozdziale trzecim niniejszej monografii.

<sup>7)</sup> Przegląd literatury traktującej o osrodku Cosseratów zawiera rozdział drugi monografii.

<sup>8)</sup> Polskim odpowiednikiem tej nazwy jest termin „klasyczna teoria laminacji” (German 1996).

Teoria ta sprawdza się w przypadku ustrojów powierzchniowych cienkich, tzn.  $\frac{h}{L} < \frac{1}{10}$  (zob. na przykład Radwańska 2009), bowiem tutaj wpływ poprzecznego ścinania może być zaniebany. W dalszym okresie teoria płyt i powłok, jak podaje Jemielita (Jemielita 2001b), ewoluowały w dwóch kierunkach: rozwijanie liniowych i nieliniowych teorii płyt i powłok na bazie kinematyki Kirchhoffa (zob. na przykład Pietraszkiewicz 1976) lub konstruowanie teorii uściślonych.

Wyczerpujący przegląd literatury historycznej jak i współczesnej podali na przykład Wempner (1989), Jemielita (2001a, 2001b), Piskunov i Rasskazov (2002). Najbardziej wyczerpujące przedstawienie geometrycznie nieliniowej teorii powłok cienkich typu K-L podał Pietraszkiewicz (1989).

Inną pracą przeglądową jest opracowanie Noora (Noor 1990), który zestawił 532 pozycji literatury. Zestawienie to jednak nie obejmowało między innymi prac naukowców z Europy Wschodniej. Zrażony tym faktem profesor Wojciech Pietraszkiewicz<sup>9)</sup> napisał list do redaktora naczelnego czasopisma Applied Mechanics Reviews, w którym zawarł dodatkowe, w porównaniu z opracowaniem Noora, pozycje literatury. Ku zdziwieniu prof. Pietraszkiewicza, jego list ukazał się drukiem jako artykuł w Applied Mechanics Reviews w roku 1992, zob. Pietraszkiewicz (1992). Praca ta „odkryła” dla naukowego świata zachodniego prace polskich i rosyjskich autorów.

Założenie o prostopadłości włókna zostało rozluźnione w teorii, którą zwykle nazywać się w literaturze teorią Reissnera-Mindlina<sup>10)</sup>, zob. na przykład Hughes (2000), str. 383 u dołu. Jej rozwój przypadł na lata czterdzieste dwudziestego wieku. W tym czasie, równoległe Bollé, Hencky, Reissner (zob. na przykład Reissner 1945) i Mindlin sformułowali podobne w założeniach teorie.

Na temat nazwy tejże teorii powstało kilka publikacji, w których autorzy prześledzili aspekty historyczne jej powstawania, zob. na przykład Ramm (2000), Jemielita (2001a). I tak na przykład Ramm pisze wprost, że teoria Reissnera-Mindlina nie istnieje (ang. *strictly speaking such a theory does not exist*), zob. paragraf 1 w pracy Ramm (2000). Dlatego też Kreja (2007), zob. przypis 8 tamże, przyjął termin „kinematyka Reissnera-Mindlina” jako bardziej adekwatny, lub równoważnie „teoria ścinania pierwszego rzędu” (ang. *First Order Shear Deformation Theory*, FOSD), zob. na przykład Reddy (1997), Carrera (2001), Kreja i Schmidt (2006), Carrera i Brischetto (2009). Zaś Gilewski (2005) pisze o teorii płyt Hencky’ego-Boole’a. Teorię tą stosuje się w przypadku płyt i powłok umiarkowanie grubych (tzn.  $\frac{h}{L} \approx \frac{1}{10}$ ), gdyż uwzględnia ona efekty poprzecznego ścinania.

Ze względu na założenie kinematyczne w teoriach CLT i FOSD, rozkład naprężeń poprzecznych stycznych wzdłuż włókna normalnego jest stały. Wymaga to wprowadzenia odpowiedniego współczynnika korekcyjnego (współczynnika ścinania)  $\alpha_s$ . Współczynnik ten był przedmiotem wielu analiz (zob. na przykład Rychter 1987, Jemielita 2001a, Liu i Soh 2007, Chróścielewski i inni 2010, Dong i inni 2010) i jego sens fizyczny w ramach mechaniki prętów oraz płyt i powłok jest dobrze ugruntowany. Wartość liczbowa zależy od przyjętego kryterium i sposobu wyznaczenia. W pracy Mindlin (1951) oszacowano jego wartość dla płyt jako  $\pi^2/12 \approx 0,822467$ . Lewiński (1987), por. również Jemielita (2001a), otrzymał wartość  $14/17 \approx 0,823529$ . W literaturze zwykle przyjmuje się wartość  $5/6 \approx 0,8(3)$ , zob. na przykład Hughes (2000) czy Chróścielewski i inni (2010b).

Ciekawe podejście analizy powłok przedstawili Merlini i Morandini (2010). Jest ono oparte na helikoidalnej parametryzacji rototranslacji (ang. *helicoïdal parameterization of*

<sup>9)</sup> Opisaną tu historię Autor zna bezpośrednio z opowiadania prof. Pietraszkiewicza.

<sup>10)</sup> Badur (1990) badał pewne aspekty teorii Reissnera w języku współczesnej teorii pola.

*the rototranslation*). Tutaj pojęcie rototranslacji opisuje ruch będący złożeniem ruchu postępowego i obrotowego. Przedstawione w cytowanej pracy wyniki numeryczne, dotyczące powłok gładkich, jak i z przecięciami, są obiecujące. Niestety, szczegółowe omówienie tego podejścia w odniesieniu do powłok nie zostało przedstawione w tejże pracy, ale w pracach złożonych do nieznanymi czasopism. Do dnia zamknięcia niniejszej monografii Autor nie odnalazł w dostępnych mu czasopismach tychże artykułów.

Teoria powłok, przyjęta za podstawę rozważań niniejszej monografii formułowana jest na sposób hybrydowy, tzn. dziedziczy cechy zarówno podejścia sprowadzającego, jak również bezpośredniego, por. na przykład Libai i Simmonds (1998), Chrościelewski i inni (2004) i cytowana tam literatura<sup>11), 12)</sup>. Schemat formułowania teorii w odniesieniu do statyki i główne cechy rozpatrywanej teorii powłok przedstawiają się następująco:

- teoria jest statycznie ścisła (ang. *statically exact*), to znaczy, że ściśle dwuwymiarowe równania równowagi ciała typu powłoka wynikają z całkowania z kierunku grubości ciała równań równowagi klasycznego kontinuum trójwymiarowego,
- dwa wektorowe równania równowagi są wyrażone w terminach wielkości przekrojowych, z tego względu w sformułowaniu MES nie ma potrzeby kosztownego numerycznie całkowania po objętości elementu,
- teoria jest geometrycznie jednoznaczna (ang. *geometrically unique*), to znaczy, że kinematyka powłoki wynika z tożsamości całkowitej, będącej bezpośrednią implikacją ścisłych dwuwymiarowych równań równowagi,
- model kinematyczny jest równoważny modelowi ciała Cosseratów z trzema sztywno rotującymi dyrektorami; szósty stopień swobody, tj. obrót prostopadły do powierzchni podstawowej jest naturalnie ujęty w ramach teorii,
- w ramach teorii nie stawia się ograniczeń co do wielkości przesuń i obrotów.

## 1.4. Metoda Elementów Skończonych w analizie powłok

### 1.4.1. Wstęp

Wraz z rozwojem teorii powłok opartej na kinematyce Reissnera-Mindlina, bo już w latach pięćdziesiątych dwudziestego wieku następował rozwój metody elementów skończonych, zob. na przykład Tablica 1.1 w książce Zienkiewicz i Taylor (2002) czy ciekawy rys historyczny zamieszczony w rozdziale 1, sekcji 1.2 w pracy Belytschko i inni (2003). Interesujący przegląd wczesnej literatury związanej z metodą residuów ważonych, można odnaleźć w pracy Finlayson i Scriven (1966). Yang i inni (1990) przedstawili ciekawe zestawienie wczesnych prac poświęconych powłokowym elementom skończonym. Samuelsson i Zienkiewicz (2006) omawiają rozwój metody sztywności (ang. *stiffness method*).

Ze względu na zasadniczy cel niniejszej monografii, przegląd literatury w niniejszym podrozdziale ograniczony jest do obszaru teorii technicznych powłok i płyt. Bowiem, jak pisze Gilewski (2005), właśnie w implementacji teorii prętów bądź płyt i powłok przenikają się dwie grupy hipotez: wybranej teorii technicznej (na przykład hipoteza płaskich przekrojów) i hipotezy MES, co decyduje o skomplikowaniu problemu.

---

<sup>11)</sup> Reissner E.: Linear and nonlinear theory of shells. W Fung Y.C., Sechler E.E. (edytorzy), *Thin Shell Structures*, 1974, 29-44, Prentice-Hall, Englewood Cliffs,

<sup>12)</sup> Libai A., Simmonds J.G.: Nonlinear elastic shell theory. In: *Advances in Applied Mechanics* 23, 1983, 271-371, Academic Press, New York.



### 1.4.2. Wybrane wiadomości o modelowaniu powłok przy pomocy MES

Jak podaje MacNeal (1998), pierwsza praca dotycząca elementu płytowego pojawiła się w roku 1961. W pracy tej opracowano, na bazie teorii K-L, prostokątny element skończony o trzech stopniach swobody w węźle. Wkrótce naukowcy opracowujący elementy skończone zdali sobie jednak sprawę, że nie jest możliwe opracowanie całkowicie poprawnego elementu z trzema stopniami swobody w węźle. Wykazano między innymi, że wyrażenie na ugięcie płyty  $w$ , zapewniające jednoznaczność krzywizn powierzchni podstawowej, nie zapewnia ciągłości pierwszych pochodnych  $w$  na granicach elementów w przypadku, gdy zmiennymi węzłowymi są ugięcia  $w$  i ich pierwsze pochodne.

Nadto Gilewski (Gilewski 2005) dodaje, że teorie dźwigarów o średniej grubości w przejściu granicznym prowadzą do teorii dźwigarów cienkich. Stąd, poprawnie opracowany element skończony opracowany w ramach teorii FOSD w równym stopniu powinien odwzorowywać wyniki uzyskiwane na podstawie zarówno teorii FOSD, jak i CLT.

Według MacNeal'a (MacNeal 1998), na początku lat siedemdziesiątych dwudziestego wieku, gdy twórcy elementów skończonych bazujących na teorii K-L próbowali przełamać ograniczenia sformułowania, opracowano dwie koncepcje, które w znaczący sposób wpłynęły na rozwój elementów skończonych: koncepcję elementu izoparametrycznego wg Ironsa (1966)<sup>13)</sup> oraz koncepcję zdegenerowanego elementu skończonego z pracy doktorskiej Ahmada z roku 1969 (zob. praca Ahmad i inni 1970).

Podejście izoparametryczne jest do dziś stosowane w formułowaniu elementów skończonych, zarówno kontynualnych (1D, 2D, 3D), jak i strukturalnych i jest szeroko opisane w podręcznikach MES, zob. na przykład Bathe (1982), Zienkiewicz i Taylor (2002), Rakowski i Kacprzyk (2005). Szczegóły można odnaleźć w wymienionych pozycjach, a także w rozdziale piątym niniejszej pracy.

W koncepcji elementu zdegenerowanego wprowadza się do równań równowagi ośrodka Cauchy'ego hipotezę płaskich przekrojów, nieprostokątnych do powierzchni podstawowej powłoki wraz ze stowarzyszonymi więzami wynikającymi z przyjętych funkcji kształtu. Oryginalne sformułowanie Ahmada borykało się jednak z błędami, wynikającymi z blokady numerycznej (ang. *locking effect*) wartości przemieszczeń i dużymi wartościami odkształceń postaciowych.

Znaczną poprawę wyników modelu Ahmada uzyskano, stosując całkowanie zredukowane, zob. na przykład Zienkiewicz i inni (1971), Hughes (2000). Ponieważ jednak techniki ograniczania zjawiska blokady omawiane są dalej w niniejszym rozdziale, nie poświęca się uwagi temu podejściu w tym miejscu.

Klasyczny model elementu zdegenerowanego jest omówiony, na przykład w pracach Bathe (1982), Hughes (2000). Wśród licznych prac, w których wykorzystano podejście Ahmada, wymienić można prace Dvorkin i Bathe (1984), Huang i Hinton (1986), Hsiao i Chen (1989), Cesar de Sa i inni (2002), Valente i inni (2005), a także literaturę cytowaną w pracy Yang i inni (2000).

Z punktu widzenia MES niewątpliwym, udogodnieniem<sup>14)</sup>, wynikającym z wprowadzenia elementów zdegenerowanych, jest obniżenie rzędu ciągłości międzyelementowej do klasy  $C^0$ . Prowadzi to do znacznie prostszej konstrukcji

---

<sup>13)</sup> Irons B.M.: Engineering application of numerical integration in stiffness methods. *J. AIAA*, 14 1966 2035–2037.

<sup>14)</sup> Hughes (2000) pisze na stronie 310: „*It has taken considerable ingenuity to develop compatible  $C^1$ -interpolation schemes for two-dimensional plate elements based on classical theory, and the resulting schemes have always been extremely complicated in one way or another.*”

aproxymacji skończenie wymiarowej. Jednak podejście to, w swej podstawowej wersji, posiada pewne wady, zob. na przykład Chróścielewski (1996), Hauptmann i Schweizerhof (1998):

- elementy skończone są obarczone zjawiskiem blokady numerycznej w przejściu do powłok cienkich (ten niekorzystny efekt dotyczy wszystkich elementów klasy  $C^0$  niskiego rzędu bazujących na sformułowaniu przemieszczeniowym, także w sformułowaniu teorii FOSD wyrażonym przez wielkości przekrojowe),
- ze względu na założenie o nierozciągliwości włókna, rozszerzenie sformułowania na zakres dużych odkształceń nie jest proste,
- występuje konieczność kosztownego w sensie numerycznym całkowania po całej objętości elementu skończonego<sup>15)</sup>,
- bezpośrednie wprowadzenie obrotu prostopadłego do powierzchni powłoki nie jest możliwe,
- występują trudności w numerycznym realizowaniu pewnych typów warunków brzegowych.

Równoważne podejściu degeneracji, w zakresie przyjmowanych założeń kinematycznych (zob. na przykład Büchter i Ramm 1992, Chróścielewski 1996), jest podejście klasyczne, tzn. bazujące na wielkościach przekrojowych. Ze względu na popularność tego modelu kompleksowe zestawienie prac, w których wykorzystano to podejście, nie jest możliwe. Przykładowo Pica i inni (1980) omówili sformułowanie elementu płytowego w zakresie geometrycznie nieliniowym, Hughes (2000) opisuje element płytowy w zakresie liniowym, Wagner i Gruttmann (2005) sformułowali 4-węzłowy hybrydowy element powłokowy, Klinkel i inni (2008) rozszerzyli sformułowanie z pracy Wagner i Gruttmann (2005) na zakres dużych odkształceń.

Omawiając formułowanie elementów skończonych w ramach teorii FOSD, wyrażonej w terminach wielkości przekrojowych, należy zaznaczyć nowoczesny nurt w ramach tego podejścia, związany z Juanem Carlosem Simo. W cyklu prac, jaki ukazał się na przełomie lat osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych dwudziestego wieku, tzn. Simo i Fox (1989), Simo i inni (1989, 1990a, 1990b, 1992b) Simo i Kennedy (1992), Simo (1993) sformułowano tzw. geometrycznie ścisłą teorię (ang. *geometrically exact theory*) jak i stowarzyszone elementy skończone. W pracach tych analizowano zagadnienia liniowe, poprzez problemy implementacji w zakresie materiałowo i geometrycznie nieliniowym, aż po zagadnienia dynamiki. Omawiane podejście eksponuje i formalizuje matematycznie pewne aspekty teorii, wprowadzając na przykład grupę obrotów  $SO(3)$ . Zasadnicze dla podejścia Simo aspekty są zrekapitulowane w pracy Simo i Fox (1989). Vu-Quoc i inni (2000) rozszerzyli to podejście na płyty sandwiczowe.

Kolejną koncepcją formułowania elementów skończonych jest podejście znane jako solid-shell. Zwykle w modelu tym (zob. na przykład Hauptmann i Schweizerhof 1998, Vu-Quoc i Tan 2003, Tan i Vu-Quoc 2005, Reese 2007, Cardoso i inni 2008, 2010) jako niewiadome węzłowe przyjmuje się tylko translacyjne stopnie swobody. Zaletami tego podejścia są między innymi możliwość zastosowania ogólnych równań konstytutywnych ośrodka 3D, uniknięcie złożonych algorytmów składnia obrotów oraz możliwość stosowania jednej warstwy elementów po grubości powłoki. Do wad sformułowania zalicza się przede wszystkim efekt blokady numerycznej: blokady membranowej, blokady ścinania

---

<sup>15)</sup>Proces całkowania w całej objętości elementu nie jest równoważny procesowi dwuwymiarowego całkowania łączonego w każdym punkcie całkowania z dodatkowym całkowaniem po grubości, zob. na przykład Chróścielewski (1996), str. 14.

i blokady w kierunku grubości (ang. *thickness locking*). W celu ograniczenia wpływu tych zjawisk na rozwiązania numeryczne<sup>16)</sup> stosuje się pewne znane techniki, które będą omawiane w dalszej części rozdziału.

### 1.4.3. Modelowanie powłok warstwowych

W niniejszym paragrafie przedstawiono wybrane zagadnienia modelowania powłok warstwowych. Przedstawiono wybrane podejścia uwzględnienia warstwowej struktury przekroju płyty bądź powłoki. Szerszy przegląd modeli, ich wad i zalet można odnaleźć przykładowo w pracach Carrera (2001, 2002, 2003a, 2003b), Carrera i Ciuffreda (2005), Sabik (2006), Kreja (2007, 2011), Carrera i inni (2008), Carrera i Brischetto (2009) i w cytowanej tam literaturze.

Przystępując do analizy numerycznej powłok warstwowych, należy zwrócić uwagę na pewne zagadnienia teoretyczne, typowe dla struktur warstwowych (zob. na przykład Carrera 2002, Carrera i Ciuffreda 2005, Sabik 2006). Są to: anizotropia warstwy, anizotropia poprzeczna, efekt zig-zag i ciągłość międzywarstwowa.

#### Anizotropia warstwy

Anizotropia warstwy wynika ze znacznych różnic między wartościami modułu Younga materiału wzdłuż włókna kompozytu w porównaniu z wartościami modułu w kierunkach prostopadłych do włókna. Jednocześnie stosunki wartości modułu postaciowego w kierunkach płaszczyzny do modułu Younga w płaszczyźnie (prostopadłego do kierunku włókna) są niskie.

#### Anizotropia poprzeczna

Anizotropia poprzeczna związana jest ze zmianą cech mechanicznych materiałów wzdłuż grubości płyty bądź powłoki. Brak ciągłości cech materiału powoduje gwałtowne zmiany pochodnych pola przemieszczeń na granicach warstw. Efekt ten znany jest jako efekt zig-zag.

#### Ciągłość międzywarstwowa

Wartości naprężeń w płaszczyźnie warstwy mogą być nieciągłe na granicy pojedynczych warstw, lecz wartości naprężeń  $\sigma_{i3}$ ,  $i=1,2,3$ , muszą być ciągłe. Wymaganie to znane jest jako ciągłość międzywarstwowa, (ang. *Interlaminar Continuity*, IC).

#### Wybrane modele powłok warstwowych

W literaturze przedmiotu (zob. na przykład Carrera 2002, Rohwer i inni 2005, Carrera i Brischetto 2009) wyróżnia się dwie zasadnicze możliwości modelowania powłok warstwowych: modele trójwymiarowe (3D) i modele dwuwymiarowe (2D).

W pierwszym podejściu rozwiązanie dla płyty (powłoki) warstwowej uzyskuje się, rozwiązując analitycznie odpowiednio sformułowany problem brzegowy ciała 3D dany w postaci silnej. Jednak, podobnie jak w przypadku płyt i powłok jednorodnych, rozwiązania takie są nieliczne i ograniczone do prostych geometrii i rozkładów obciążenia. Przegląd

---

<sup>16)</sup> Efekt blokady dotyczy wyłącznie wyników numerycznych, nie występuje on na poziomie sformułowania teoretycznego.

prac, w których przedstawiono pewne rozwiązania, można odnaleźć w pracy Carrera (2002) i Carrera i Brischetto (2009). Z punktu widzenia analizy numerycznej, zasadniczą zaletą rozwiązań analitycznych 3D jest możliwość ich wykorzystania w celu kalibracji przyjętego modelu MES, zob. na przykład Meyer-Piening (2004).

W nurcie rozważań 3D możliwe jest otrzymanie rozwiązania przybliżonego przy pomocy przestrzennych elementów skończonych. Podejście takie boryka się jednak z pewnymi problemami ściśle związanymi z elementami skończonymi. Na przykład, w pracy Rohwer i inni (2005) wymienia się zagadnienie uwzględnienia znacznych zmian sztywności pomiędzy warstwami. Wymaga to przyjęcia co najmniej jednej warstwy elementów dla pojedynczej warstwy laminatu. W połączeniu ze stosowanymi w MES proporcjami długości boków elementów liczba elementów przypadająca na pojedynczą warstwę staje się znacząco duża. W przypadku kilku (kilkunastu) warstw, rozwiązanie numeryczne takiego zadania staje się czasochłonne, nawet uwzględniając moc obliczeniową obecnych komputerów.

W modelowaniu 2D powłok warstwowych powszechnie rozróżnia się (zob. na przykład Altenbach i inni 1994, Carrera 2002, Auricchio i Sacco 2003 i Carrera i Brischetto 2009) dwa podejścia: dyskretne modele warstwowe (ang. *Layer-Wise*, LW) oraz zastępcze modele warstwowe (ang. *Equivalent Single Layer*, ESL). Różnica między tymi modelami wynika z typu uwzględniania niejednorodności przekroju i liczby zmiennych wymaganych do opisu deformacji powłoki.

Carrera (2002) podaje, że w pierwszym podejściu każda warstwa postrzegana jest jako niezależna<sup>17)</sup> płyta bądź powłoka. Stąd liczba niewiadomych jest zależna od liczby analizowanych warstw. W modelu warstwy zastępczej liczba niewiadomych jest zależna wyłącznie od przyjętej teorii płyt/powłok. Tutaj bowiem faktyczna warstwowa struktura ośrodka sprowadzana jest do pojedynczej warstwy. Oba podejścia stosuje się w różnych obszarach analizy, zob. na przykład Altenbach (2000); model LW jest dokładniejszy i pozwala na analizę, na przykład, zagadnienia delaminacji, model ESL zaś jest wystarczająco dokładny do oceny globalnej odpowiedzi układu, na przykład przemieszczeń czy częstości drgań własnych. Pewnym ograniczeniem modelu ESL jest żądanie by w przekroju płyty bądź powłoki nie występowały gwałtowne zmiany grubości lub/i sztywności warstw (zob. na przykład Sabik 2006 i cytowana tam literatura).

Inny podział modeli 2D powłok warstwowych wynika z przyjętej kinematyki. Oprócz wymienionych wcześniej podejść CLT i FOSD, stosuje się także teorie wyższego rzędu (ang. *higher order theory*, HOT). W przypadku teorii typu HOT, najczęściej (zob. na przykład wzór 13 w pracy Carrera 2002, por. także wzór 10.3.1 w pracy Reddy 2007) przyjmuje się rozwinięcie w szereg funkcji przemieszczeń wzdłuż grubości płyty/powłoki. Przykładowo, Arciniega i Reddy (2004) założyli pole przemieszczeń oparte na rozwinięciu sześciennym wzdłuż grubości powłoki. W pracy Kulkarni i Kapuria (2007) omówiono sformułowanie czterowzłowego płyowego elementu skończonego na bazie teorii HOT.

Model CLT, ze względu na brak możliwości uwzględnienia deformacji od ścinania poprzecznego przekroju ma ograniczone zastosowanie w analizie ustrojów warstwowych. Pewne odniesienia do literatury w tym zakresie można odnaleźć na przykład w pracy Kreja (2007). Carrera i Ciuffreda (2005) przeprowadzili szereg analiz porównawczych między

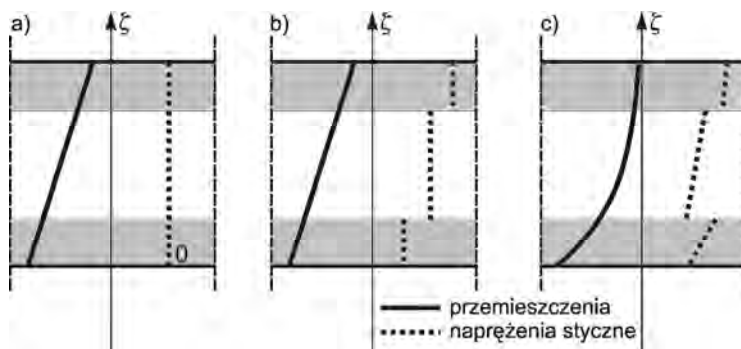
---

<sup>17)</sup> Wydaje się, że sformułowanie to (ang. *independent*) jest niefortunne, bowiem choć każda warstwa w tym modelu ma swoją powierzchnię odniesienia, to obecność innych warstw jest ujmowana poprzez nałożenie stosownych warunków ciągłości na granicy warstw. Carrera (2002) pisze o tym dalej pod równaniem (6).

różnymi modelami warstwowymi. Rezultaty numeryczne wskazują, że błąd, jaki otrzymuje się, stosując podejście CLT, jest znaczny w porównaniu na przykład z wynikami uzyskanymi przy pomocy modelu FOSD.

Znacznie bardziej rozpowszechnionym podejściem są podejścia FOSD i HOT. Przegląd prac poświęconym podejściom FOSD i HOT można odnaleźć na przykład w pracach Carrera (2002), Kreja (2007), Carrera i Brischetto (2009).

Schematyczne porównanie rozkładów przemieszczeń i naprężeń ścinania poprzecznego wzdłuż grubości włókna w teorii K-L, FOSD i HOT przedstawia rys. 1.5.



Rys. 1.5. Koncepcja rozkładu przemieszczeń i naprężeń ścinanych wzdłuż grubości:  
a) teoria K-L, b) teoria FOSD, c) teoria HOT, (wg pracy Carrera i Brischetto 2009)

Przedstawione powyżej wybrane modele, w wersji podstawowej, nie zapewniają spełnienia a priori warunków równowagi naprężeń ścinania poprzecznego i normalnych na granicach warstw. W podejściu LW w sposób naturalny uwzględniony jest efekt zig-zag, natomiast spełnienie warunku IC nie jest z góry zagwarantowane (Carrera i Brischetto 2009). Spełnienie warunków IC i uwzględnienie efektu zig-zag w modelu ESL jest możliwe w wyniku pewnego rozszerzenia podejścia. Szerzej na ten temat pisze Carrera (2002, 2003a), zob. także Sabik (2006).

Omawiane wyżej warunki w naturalny sposób można spełnić, stosując mieszaną zasadę wariacyjną Reissnera (ang. *Reissner Mixed Variational Theorem, RMVT*). Zasada ta została zaproponowana przez Reissnera na początku lat osiemdziesiątych dwudziestego wieku. Powstała ona poprzez modyfikację zasady Hellingera-Reissnera, polegającą na zmniejszeniu liczby niewiadomych naprężeniowych przy zachowaniu liczby niewiadomych przemieszczeniowych. W wyniku tej modyfikacji niewiadomymi naprężeniowymi pozostają jedynie składowe tensora naprężenia związane z rozciąganiem i ścinaniem poprzecznym. Jawną postać funkcjonału można odnaleźć w pracach Carrera (2001, 2002, 2003), Sabik i Kreja (2008).

Ważną dla aproksymacji MES cechą sformułowania RMVT jest możliwość wyeliminowania zmiennych naprężeniowych przed całkowaniem w dziedzinie powierzchni podstawowej płyty bądź powłoki. W ten sposób wynikowe elementy skończone są wyposażone wyłącznie w niewiadome translacyjne i obrotowe. Pozwala to na stosunkowo łatwą implementację tego podejścia do istniejących kodów programów bazujących na sformułowaniu przemieszczeniowym. Możliwe warianty wykorzystania zasady RMVT można odnaleźć w pracy Carrera i Brischetto (2009). W pracach Sabik (2006) Sabik i Kreja (2008) omówiono liniowe sformułowanie elementów skończonych, 4-węzłowego i 9-

węzłowego typu Lagrange'a oraz 8-węzłowego elementu Serendipa bazujących na modelu RMVT z uwzględnieniem funkcji zig-zag.

#### 1.4.4. Blokada numeryczna rozwiązań MES

Sygnalizowany w paragrafach powyżej efekt blokady (zakleszczania) jest problemem znanym w analizie MES od początku formułowania i stosowania tej metody. Zaznacza się on w elementach skończonych niskiego rzędu sformułowanych wyłącznie w terminach przemieszczeń. Tutaj pod pojęciem elementów niskiego rzędu rozumie się elementy skończone, które charakteryzuje niski rząd funkcji kształtu w postaci liniowych funkcji interpolacyjnych, najczęściej w postaci wielomianów typu Lagrange'a rozpiętych w bazie Gaussa-Legendre'a (zob. Dodatek B niniejszej monografii). Zastosowanie reguły pełnego całkowania numerycznego<sup>18)</sup>, na przykład Gaussa-Legendre'a (zob. także Dodatek B), prowadzi do znacznego niedoszacowania (niekiedy do praktycznego zaniku) wartości przemieszczeń układu otrzymywanych z rozwiązania układu równań MES (zob. przypis 16). Błąd ten jest praktycznie niewrażliwy na zagęszczanie siatki podziału.

W analizie płyt i powłok zjawisko blokady numerycznej może objawiać się w kilku postaciach.

Blokada ścinania (ang. *shear locking*) jest wynikiem pojawienia się fałszywych form odkształceń postaciowych (Belytschko i inni 2003), a dokładniej rzecz biorąc, jest wynikiem niemożności modelowania przez element skończony takich deformacji, w których odkształcenia poprzeczne powinny zniknąć, na przykład czyste zginanie. Innymi słowy, odkształcenie poprzeczne jest zbyt „bogate”. Analityczny dowód podali na przykład Fung i Tong (2001), zob. także Panasz (2008). Ponieważ sztywność na ścinanie jest zwykle znacząco większa od sztywności giętnej, to fałszywa postać ścinania absorbuje dużą część energii obciążeń zewnętrznych. Na skutek tego, wyznaczone odkształcenia i przemieszczenia są niedoszacowane.

Blokada membranowa (ang. *membrane locking*) wynika z braku możliwości wiernego reprezentowania przez powłokowy element skończony nierozciągliwych postaci deformacji (Belytschko i inni 2003). Powłoki bowiem zginają się bez rozciągania: bardzo łatwo jest zgiąć kartkę papieru – takie zginanie nazywa się nierozciągliwym, ale trudne jest rozciągnięcie tejże kartki. Powłoka zachowuje się podobnie – ma małą sztywność giętą w porównaniu ze sztywnością na ściskanie lub rozciąganie. Kiedy element skończony nie może zgiąć się bez rozciągnięcia, energia obciążeń zewnętrznych jest niepoprawnie dystrybuowana do energii ściskania lub rozciągania przez co, jak przy blokadzie ścinania, następuje niedoszacowanie odkształceń i przemieszczeń.

Kolejne dwa przypadki efektu blokady zaznaczają się w tych teoriach powłok, w których uwzględnia się zmianę grubości powłoki i wykorzystuje trójwymiarowe związki konstytutywne.

Efekt *Poisson thickness locking* obserwuje się w teorii 6-parametrowej, gdzie szóstym parametrem jest przemieszczeniowy stopień swobody, reprezentujący rozciąganie wzdłuż

---

<sup>18)</sup> W przypadku całkowania wielomianów wykorzystanie kwadratury Gaussa rzędu  $n$  pozwala na dokładne obliczenie całki z wielomianu stopnia  $(2n-1)$ . Dla elementów  $n$ -węzłowych typu Lagrange'a z bazą węzłów wyznaczonych jako zera wielomianów Legendre'a (zob. Dodatek B) za pełne całkowanie przyjmuje się regułę całkowania Gaussa o  $n$  punktach całkowania. Podobnie, dla elementów powierzchniowych o  $n \times n$  węzłach reguła całkowania pełnego wymaga  $n \times n$  punktów całkowania.

grubości (Bischoff i Ramm 1997). Zjawisko takiej blokady wynika ze sprzężenia, przy niezerowym współczynniku Poissona, między odkształceniami normalnymi w płaszczyźnie a odkształceniami poprzecznymi: odkształcenia w płaszczyźnie zmieniają się liniowo, a w konsekwencji tak samo powinny się zmieniać odkształcenia w kierunku grubości. Tymczasem, liniowy rozkład przemieszczeń wzdłuż grubości generuje stałe odkształcenia poprzeczne, a tym samym dodatkowe niefizyczne naprężenia. Istotną cechą tego przypadku blokady jest to, że nie zależy on od gęstości podziału na elementy skończone. Sposobem ominięcia tego efektu jest założenie kwadratowej funkcji przemieszczenia wzdłuż grubości, zob. na przykład wzór 36 w pracy Bischoff i Ramm (1997) lub wzór 19 w pracy Sansour (1995). Założenie to prowadzi w efekcie do teorii 7-parametrowej.

Zjawisko *curvature thickness locking* jest charakterystyczne dla wymienionej wyżej teorii 7-parametrowej w przypadku rzadkich siatek podziału i znacznych krzywizn początkowych powłoki, zob. na przykład praca Bischoff i Ramm (1997).

W ramach rozpatrywanej tutaj teorii powłok, w pracy Chrościelewski i Witkowski (2010b) wprowadzono pojęcie  $\alpha_i$ -locking. Jest to zjawisko związane z wpływem współczynnika konstytutywnego  $\alpha_i$  (współczynnik ten będzie przedmiotem rozważań rozdziału 4. niniejszej monografii) na wartości energii sprężystej układu i wartości przemieszczeń. Na podstawie wyników testów numerycznych zauważono, że zbyt duże wartości współczynnika  $\alpha_i$  mogą prowadzić do znacznego zmniejszania się wartości przemieszczeń w przypadku zadań zdominowanych przez deformację membranową. Omawiany efekt również nie jest zależny od siatki podziału na elementy skończone.

W celu zminimalizowania niepożądanego wpływu blokady na wyniki numeryczne<sup>19)</sup> opracowano różne metody, zob. na przykład prace Gilewski (2005), Sitek (2010).

#### 1.4.5. Całkowanie zredukowane

Jednymi z pierwszych metod zminimalizowania efektu blokady są metody bazujące na zastosowaniu niższego (niżby to wynikało z warunku otrzymania rozwiązania dokładnego przy zastosowaniu pełnego całkowania) rzędu całkowania numerycznego. Podejście to zostało zaproponowane równolegle w dwóch pracach: Zienkiewicz i inni (1971) oraz Pawsey i Clough (1971).

Omawiana koncepcja znana jest jako całkowanie zredukowane (ang. *uniform reduced integration*). W przypadku, gdy całkowanie zredukowane stosowane jest do różnych składników macierzy sztywności (na przykład membranowej i zginania), to podejście takie nazywa się całkowaniem selektywnie zredukowanym (ang. *selective reduced integration*).

W wyniku zabiegu całkowania zredukowanego odpowiedzialne za efekt blokady składowe wielomianów wyższego rzędu są eliminowane. Jednak ta metoda wprowadza niepożądane formy deformacji, tzw. postaci pasożytnicze albo zero-energetyczne (ang. *spurious zero-energy modes*). Odpowiadają one wektorom własnym macierzy sztywności związanym z dodatkowymi, nie uzasadnionymi fizycznie, zerowymi wartościami własnymi, ale nie z zerowymi odkształceniami (w odróżnieniu od postaci opisujących ruch sztywny przy zerowych odkształceniach).

Kontrola form pasożytniczych wymaga podjęcia dodatkowych kroków w kierunku stabilizowania kinematyki elementu, zob. na przykład Belytschko i inni (2003) W pracy tej

---

<sup>19)</sup> W pracy Merlini i Morandini (2010) autorzy piszą o wpływie efektu blokady na ich wyniki: „*The helicoidal shell element does not resort to commonly used techniques like ANS, EAS or reduced integration, however it proves locking free.*”

przedstawiono też pewne popularne elementy powłokowe, w których zastosowano całkowanie zredukowane (zob. tabela 9.2 tamże).

Ze względu na powszechność stosowania tego podejścia, można wymienić tutaj, jako przykład zastosowań i rozwoju koncepcji, pewne wybrane prace, na przykład: Badur (1983, sformułowanie bazujące na różnicach skończonych), Kreja i Cywiński (1988), Gruttmann i Wagner (2004), Andrade i inni (2007), Cardoso i Yoon (2007), Cardoso i inni (2007), Juhre i Reese (2010).

#### 1.4.6. Podejścia niezgodnych postaci i EAS

Podejście odkształceń wzbogaconych (ang. *enhanced strain formulation*, EAS) wyewoluowało z tzw. niedostosowanych elementów skończonych (ang. *non-conforming elements*), zob. Taylor i inni (1976). Zasadniczym punktem tego sformułowania jest dodanie do istniejącego pola przemieszczeń, dwóch postaci deformacji opisujących efekt zginania w płaszczyźnie elementu. Dodane postaci obowiązują tylko w obrębie danego elementu, a w konsekwencji parametry je opisujące mogą być statycznie kondensowane na poziomie elementu. Sposób taki jest typowy dla elementów mieszanych. Tym samym wynikowy rozmiar zadania, wyrażony liczbą równań, nie powiększa się. Oczywiście, proces kondensacji statycznej wydłuża nieco czas obliczeń. Czas potrzebny na przeprowadzenie tej kondensacji jest wprost proporcjonalny do liczby elementów w siatce zadania. Niemniej jednak, w porównaniu z czasem potrzebnym na rozwiązanie dużych układów równań, może być uznany za nieznaczny<sup>20)</sup>. Ponadto, znając na wstępie struktury macierzy podlegających kondensacji, można opracować dedykowane procedury numeryczne pozwalające na skrócenie czasu kondensacji.

Pierwotnie koncepcja niedostosowanych elementów skończonych, w momencie powstania, nie miała uzasadnienia teoretycznego, gdyż dodatkowe postaci nie wynikały wprost ze sformułowania wariacyjnego. Aby zapewnić spełnienie membranowego testu łąki przy dowolnym kształcie elementu, w pracy Taylor i inni (1976) zaproponowano pewną modyfikację sposobu obliczania pochodnych dodatkowych postaci.

Podejście odkształceń wzbogaconych zostało sformalizowane w pracy Simo i Rifai (1990). Pokazano w niej, że elementy niedostosowane powinny być raczej rozumiane jako wzbogacenie odkształceń, a nie przemieszczeń<sup>21)</sup>. Dało to podstawy do tzw. sformułowania wzbogaconego, EAS. W podejściu tym standardowe, zgodne pole odkształceń uzupełnia się o pewne założone pole. Pole to formułowane jest na poziomie elementu i nie wymaga żadnych warunków ciągłości między elementami. Podobnie jak w sformułowaniu niezgodnych postaci dodatkowe parametry są kondensowane statycznie na poziomie elementu, jednak nie wchodzi one jawnie do niewiadomych problemu.

Braess (1998) w późniejszej pracy względem Simo i Rifai (1990) wykazał analitycznie, że sformułowanie EAS, mimo że oryginalnie sklasyfikowane jako hybrydowo-mieszane oparte o zasadę Hu-Washizu, powinno być raczej klasyfikowane jako zmodyfikowany model przemieszczeniowy, ze względu na strukturę sformułowania słabego (wariacyjnego), warunki ortogonalności i wynikającą z niej strukturę macierzy

---

<sup>20)</sup> W przypadku zadań o małej liczbie niewiadomych czasy kondensacji statycznej i rozwiązania układu równań mogą być porównywalne.

<sup>21)</sup> Podejście niezgodnych postaci nadal jest rozwijane, zob. na przykład rozważania w pracy Wiśniewski (2010).



elementowych<sup>22)</sup>. W konsekwencji, wynikowe podejście stosunkowo można łatwo implementować w istniejących kodach programów MES bazujących na sformułowaniu przemieszczeniowym.

W pracy Simo i Armero (1992) przedstawiono rozwinięcie koncepcji EAS na zagadnienia geometrycznie nieliniowe. Wkrótce potem, zob. praca Wriggers i Reese (1996), zwrócono uwagę na niekorzystne zjawisko pojawiania się zerowych wartości własnych (stycznej) macierzy sztywności. Obserwacja ta zapoczątkowała badania, celem których było wyeliminowanie tego efektu, zob. na przykład prace cytowane w artykule Gharzeddine i Ibrahimbegović (2000).

Jedną z pierwszych prac, w której zastosowano technikę EAS w analizie numerycznej powłok, była praca Andelfinger i Ramm (1993). Autorzy dyskutowali zastosowanie sformułowania wzbogaconego do konstrukcji 4-węzłowego elementu EAS, wykorzystującego koncepcję degeneracji. Technikę EAS przyjęto dla odkształceń membranowych, podczas gdy dla odkształceń poprzecznych użyto techniki ANS (o podejściu tym będzie mowa w kolejnym paragrafie). Andelfinger i Ramm (1993) zasygnalizowali równoważność<sup>23)</sup>, przy pewnych założeniach odnośnie rzędu całkowania, między elementem skończonym opartym na sformułowaniu założonych naprężeń z pracy Pian i Sumihara (1984) (zob. też Pian 2000), a elementem EAS.

W pracy Sansour (1998), zob. też na przykład Sansour i Kollmann (2000) i cytowana tam literatura, przyjęto inną w porównaniu z pracą Andelfinger i Ramm (1993) metodologię minimalizacji wpływu efektu blokady w elementach powłokowych. Mianowicie, odkształcenia membranowe wzdłuż włókna i poprzeczne obliczane są zgodnie z techniką EAS.

Podobne podejście zastosowano w pracy César De Sá i inni (2002). Tutaj sformułowano 4-węzłowy element zdegenerowany, w zakresie geometrycznie i materiałowo liniowym, w którym zastosowano jednocześnie technikę EAS do wszystkich składowych tensora odkształcenia. Do części membranowej zastosowano schemat interpolacji dodatkowych pól odkształceń, bazując na wynikach z pracy Andelfinger i Ramm (1993), zaś do odkształceń poprzecznych wykorzystano oryginalne, własne podejście. Jego istotą jest użycie pochodnych tzw. funkcji bąblowej (ang. *bubble function*) do interpolacji dodatkowych odkształceń poprzecznych. Otrzymane obiecujące wyniki stały się przyczynkiem do rozszerzenia jednolitego użycia techniki EAS na zakres geometrycznie i materiałowo nieliniowy, zob. na przykład prace Fontes Valente i inni (2003, 2005).

Wykorzystując koncepcję zastosowaną w pracy César De Sá i inni (2002), w pracy doktorskiej Autora (Witkowski 2005) dokonano adaptacji sformułowania EAS do potrzeb sformułowania z niesymetrycznymi miarami odkształceń w płaszczyźnie powłoki. Skonstruowano cztery elementy skończone, różniące się liczbą parametrów swobodnych interpolujących odkształcenia wzbogacające. Elementy porównywano, analizując otrzymane za ich pomocą rezultaty, a także, w zadaniach nieliniowych, koszt rozwiązania mierzony liczbą iteracji. Na podstawie tych badań z opracowanych czterech wybrano jeden element skończony. Pewne wyniki przedstawiono w pracy Chrościelewski i Witkowski (2006).

Koncepcja EAS jest nadal stosowana i rozwijana, zob. na przykład prace Cardoso i inni (2007, 2008), Bischoff i Romero (2007), Hommel i Meschke (2008), Wiśniewski i Turska (2009) oraz inne prace cytowane w rozprawie Sitek (2010).

---

<sup>22)</sup> Szerzej na ten temat traktuje rozdział 6. niniejszej monografii.

<sup>23)</sup> Nieco szerzej zagadnienie to jest omawiane w rozdziale 5. niniejszej monografii.

### 1.4.7. Podejście ANS

Podejście ANS znane jest także jako dwustopniowa interpolacja odkształceń, zob. np. Chróścielewski i inni (2004), Panasz (2008). Przegląd wczesnej literatury związanej z tym podejściem przedstawili na przykład Hughes (2000), Kreja (2007).

W ogólnym zarysie, dwustopniowa interpolacja odkształceń przebiega następująco. W fazie pierwszej, w bazie naturalnej elementu, na podstawie przemieszczeń węzłowych w pewnych punktach pomiarowych (ang. *sample points*), oblicza się odkształcenia ścinania poprzecznego za pomocą właściwych dla danego elementu funkcji interpolacyjnych. W fazie drugiej, obliczone wartości odkształceń są interpolowane do punktów całkowania Gaussa przy pomocy specjalnych funkcji. Analogiczne obliczenia przeprowadza się dla współczynników operatora odkształcenie-przemieszczenie, oznaczanego standardowo w literaturze, jak i w niniejszej monografii przez **B**.

Koncepcja ta ma ustaloną pozycję w literaturze przedmiotu, ponieważ jest stosunkowo prosta w implementacji MES i nie wprowadza dodatkowych zmiennych, które wymagają kondensacji statycznej, zob. poprzedni paragraf.

Początki podejścia ANS wiążą się z pracami MacNeal<sup>24)</sup> (1978) (element QUAD4) oraz Hughes i Tezduyar (1981) (element T1). Ostatni element konstruowany jest na bazie podejścia  $\bar{\mathbf{B}}$  (ang.  $\bar{\mathbf{B}}$ -*approach*), zob. np. Hughes (2000).

Jednym z bardziej znanych elementów skończonych, w których obliczenia odkształceń ścinania poprzecznego przeprowadza się przy wykorzystaniu techniki podwójnej interpolacji jest element *MITCn*, gdzie przez *n* oznacza się liczbę węzłów elementu skończonego. Początki sformułowania tego elementu można odnaleźć w pracy Dvorkin i Bathe (1984), a nazwę dla tej rodziny elementów (ang. *Mixed Interpolation of Tensorial Components*) zaproponowano w późniejszej pracy Bathe i Dvorkin (1986). Pierwotnie rozwinięto elementy 4-węzłowe, a później także wyższego rzędu, zob. np. Huang i Hinton (1986), Bucalem i Bathe (1993), Lee i Han (2006), Kreja (2007) i cytowana tam literatura. Bathe i jego współpracownicy nadal rozwijają omawiane sformułowanie, zob. np. Bathe i inni (2000a), Chapelle i Bathe (2003), Hiller i Bathe (2003), Lee i Bathe (2004, 2005).

Koncepcję podwójnej interpolacji odkształceń próbowano też rozszerzyć na wszystkie składowe tensora odkształcenia, zob. np. Huang (1987), Kreja (2007). Na gruncie rozpatrywanej w niniejszej rozprawie teorii 6-parametrowej powłok, w pracy Chróścielewski (1996) opracowano element ASce4 i ASce9 (zob. także Chróścielewski i inni 2004). W pracy Bischoff i Ramm (1997) można jednak odnaleźć uwagę, że elementy skończone, w których podejście ANS stosowane jest do składowych membranowych tensora odkształcenia, mogą być wrażliwe na dystorsje siatki podziału. Ten niekorzystny efekt zaobserwowano w badaniach numerycznych wykonanych przy pomocy elementu ANS zob. np. Chróścielewski (1996), Witkowski (2004).

Ciekawe zastosowanie techniki całkowania zredukowanego i podejścia ANS przedstawił Panasz (2008), zob. także Panasz i Wiśniewski (2008), Wiśniewski (2010). Zaproponowano modyfikację metody dwustopniowej aproksymacji ANS polegającą na jednoczesnym traktowaniu próbkowania i całkowania numerycznego w powłokowym elemencie 9-węzłowym. W konsekwencji tego podejścia sześć punktów próbkowania zastępuje się dwiema liniami próbkowania. Wyselekcjonowano także specyficzne dla poszczególnych części energii odkształcenia powłoki reguły całkowania, otrzymując element o pożądanym z punktu widzenia analizy MES i efektywności cechach: brak efektu

---

<sup>24)</sup> MacNeal R.H.: A simple quadrilateral shell element. *Computers & Structures*, 8, 1978, 175–183.

zakleszczania, niewrażliwość na zniekształcenia siatki i dobra dokładność dla rzadkich siatek elementów skończonych.

W pracy Kulikov i Plotnikova (2010) zastosowano podejście ANS do wszystkich składowych tensora odkształcenia w teorii 5-parametrowej. Ciekawym aspektem tego sformułowania jest zastosowanie koncepcji ścisłej geometrii (ang. *exact geometry*). Oznacza to, że w punktach całkowania Gaussa oblicza się dokładnie pierwszą i drugą formę fundamentalną powierzchni odniesienia, jak i symbole Christoffela. W podejściu tym sformułowano elementy skończone: przemieszczeniowy, hybrydowy odkształceniowy, hybrydowy naprężeniowy i hybrydowy odkształceniowo-naprężeniowy.

#### 1.4.8. Podejście EAS+ANS

Łatwość formułowania, a także mała wrażliwość na zjawisko blokady (zob. na przykład Wriggers i Reese 1996), spowodowały, że elementy skończone bazujące na sformułowaniu EAS znalazły szerokie zastosowanie w analizie MES powłok.

Betsh i inni (1996) rozszerzyli na zagadnienia nieliniowe podejście z pracy Andelfinger i Ramm (1993). W symulacjach autorzy badali różne 3-wymiarowe hipersprężyste prawa materiałowe.

W pracy Eberlein i Wriggers (1999) analizowano zastosowanie elementów bazujących na sformułowaniu EAS w zadaniach sprężysto-plastycznych. Rozpatrywano trzy teorie powłok: 5-parametrową (z nierozciągliwym direktorem), 6-parametrową (z direktorem rozciągliwym) oraz 5(6)-parametrową (trzy przesunięcia i trzy parametry obrotu). W ostatniej koncepcji szóstym parametrem teorii jest obrót direktora wokół jego osi – tzw. owinięcie. Ujęcie tego stopnia swobody pozwala na, jak w przypadku rozpatrywanej w niniejszej monografii teorii powłok, analizę numeryczną powłok z ortogonalnymi przecięciami. Eberlein i Wriggers sugerują, że w analizie powłok gładkich szósty parametr powinien zniknąć bowiem wynikowy układ równań byłby osobliwy. W przykładach autorzy analizowali, między innymi, ceownik zginany w zakresie sprężystym siłą skupioną, zaproponowany oryginalnie w pracy Chróścielewski i inni (1992). W opisie tego przykładu można odnaleźć pewne nieporozumienie. Eberlein i Wriggers, porównując swoje wyniki z pracą Betsh i inni (1996), stwierdzili, że oryginalne rezultaty (z pracy Chróścielewski i inni 1992) silnie zależą od „współczynnika kary” sztywności związanej z owinięciem<sup>25</sup>). Stąd, w porównaniach nie wykorzystują wyników oryginalnych.

Omawiany przykład z ceownikiem był także przedmiotem badań w pracy Fontes Valente i inni (2005). W pracy tej jednak nie wyjaśniono, w jaki sposób wykorzystano elementy o pięciu stopniach swobody do modelowania powłok z ortogonalnymi przecięciami płatów. Tym niemniej przedstawione wyniki zgodne są z rozwiązaniami odniesienia.

W pracy Vu-Quoc i Tan (2003) wykazano, że warunkiem by element skończony spełniał zgięciowy patch-test konieczne jest, aby odkształcenia ścinania poprzecznego były obliczane przy pomocy metody Assumed Natural Strain (ANS) wg Bathe i Dvorkin (1986), zob. także cytowaną tam literaturę. Podejście to zastosowano także na przykład w pracach Wagner i Gruttmann (2005), Gruttmann i Wagner (2006), Kim i inni (2007), Brank (2008).

---

<sup>25</sup>) Zdanie to brzmi: „...numerical results show a strong dependence on a penalty multiplier which accounts for the drilling stiffness within their shell formulation.” To samo zdanie znajduje się w opisie zadania z ceownikiem w pracy Tan i Vu-Quoc (2005). Autor niniejszej monografii pozostawia ten fakt bez komentarza.

W ramach rozpatrywanej tu teorii powłok, w pracy Chróścielewski i inni (2006) wstępnie zaproponowano element EANS4, w którym do usunięcia blokady membranowej zastosowano technikę EAS, zaś do usunięcia blokady ścinania poprzecznego podejście ANS. Witkowski (2009) przeanalizował ten element szerzej, rozwiązując szereg przykładów porównawczych. Otrzymano wyniki zgodne z rozwiązaniami odniesienia. W pracy tej wykazano numerycznie, że element EANS4 spełnia zgięciowy test łąty w dwóch znanych w literaturze wariantach. Oryginalnym pierwiastkiem formułowania omawianego tutaj elementu, w porównaniu z powszechnie znanymi koncepcjami, jest uwzględnienie na poziomie techniki EAS braku symetrii membranowych odkształceń ścinających. Element ten jest stosowany w niniejszej monografii.

### 1.4.9. Ocena powłokowych elementów skończonych

Bogactwo i różnorodność elementów skończonych, opracowywanych przez różne ośrodki naukowe, a także dostawców oprogramowania komercyjnego wymusza zestawienie, celem porównania tychże elementów, pewnych pożądanych cech, jakimi elementy te powinny się charakteryzować. Przykładowo, Wiśniewski (2010) wymienia następujące własności:

- macierz sztywności elementu nie powinna zawierać zerowych wartości własnych,
- element powinien reprezentować stany zerowych odkształceń przy ruchu sztywnym, a także reprezentować stałe stany odkształcenia,
- element powinien być wolny od zjawiska blokady numerycznej,
- element nie powinien być wrażliwy na dystorsję siatki podziału,
- w toku formułowania elementu nie powinno wykorzystywać się współczynników zależnych od rozważanego zadania,
- sformułowanie elementu powinno umożliwić łatwą implementację różnych związków fizycznych,
- sformułowanie elementu powinno umożliwić stosowanie go w szerokim zakresie zagadnień,
- sformułowanie elementu winno być numerycznie ‘tanie’, tzn. powinno umożliwić wykorzystanie elementu w obliczeniach złożonych konstrukcji o znacznej liczbie stopni swobody.

Wśród metod pozwalających na ocenę elementów skończonych można wymienić następujące (zob. na przykład Bathe i inni 2000b, Gilewski 2005, Sitek 2010, Wiśniewski 2010):

- test łąty,
- kryterium eliptyczności,
- kryterium zbieżności,
- kryterium inf-sup,

W niniejszej pracy do oceny elementu EANS4 wykorzystuje się następujące metody, krótko omówione poniżej.

#### Test łąty

Aby omówić koncepcję testu łąty, w pierwszej kolejności należy określić pojęcie elementu dostosowanego.

Za element dostosowany uznaje się element skończony, którego funkcje kształtu spełniają następujące kryteria (Waszczyszyn i inni 1990, por. także na przykład Hughes 2000, Sitek 2010):

- warunek zgodności i zupełności, tzn. funkcje powinny być zgodne na brzegach między elementami aż do  $r-1$  pochodnych oraz powinny mieć  $r$  ciągłych pochodnych w obszarze elementu, gdzie  $r$  jest rzędem operatorów różniczkowych w relacji przemieszczenie-odkształcenie,
- warunek ruchu sztywnego, tzn. funkcje aproksymujące powinny umożliwiać opis ruchu sztywnego rozpatrywanego elementu bez powstawania w nim odkształceń,
- warunek jednorodnego stanu odkształceń, tzn. aby stany takie były możliwe do opisanego przez odpowiednią kombinację liniową tych funkcji.

Element skończony, który nie spełnia jednego z powyższych warunków nazywany jest niedostosowanym. Koncepcja testu łaty rozwinięta została w latach sześćdziesiątych dwudziestego wieku, zob. na przykład Zienkiewicz i Taylor (1997). Test ten pozwala sprawdzić (Bathe 1982), czy *siatka* niedostosowanych elementów skończonych spełnia kryterium kompletności<sup>26)</sup>. Słowo *siatka* jest tutaj celowo wyróżnione bowiem, jak pisze Bathe, choć pojedynczy element niedostosowany może spełniać kryterium kompletności, to własność ta nie musi przenosić się na siatkę elementów, por. także Wiśniewski (2010).

Idea testu łaty wiąże się z pracą Bazeley i inni<sup>27)</sup> (zob. na przykład Zienkiewicz i Taylor 1997, Hughes 2000 czy Vu-Quoc i Tan 2003) i rozwijana była dalej, zob. literaturę cytowaną w pracy Zienkiewicz i Taylor (1997) czy Sitek (2010). Warto jednak zwrócić uwagę, że pomysł testu łaty spotkał się z pewną krytyką. Zarówno w ubiegłym stuleciu, jak i współcześnie pojawiają się prace bądź uwagi kwestionujące zasadność przeprowadzania testu łaty, zob. na przykład komentarz we wstępie do pracy Zienkiewicz i Taylor (1997) lub dyskusję w uwadze 4.2 w pracy Vu-Quoc i Tan (2003). Hughes (2000) tak pisze na temat krytyki testu łaty: „*This is unfortunate, for we firmly believe that, within the realm of problems dealt with so far in this book, the patch test is the most practically useful technique for assessing element behavior.*”

### Kryterium eliptyczności

Jest to główny warunek istnienia i jednoznaczności rozwiązania MES, zob. na przykład Bathe i inni (2000b). Sprawdzenie tego kryterium sprowadza się do zbadania spektrum macierzy sztywności elementu. Element powłokowy powinien mieć sześć zerowych wartości własnych odpowiadających fizycznym ruchom sztywnym. Elementy, których macierz sztywności posiada więcej niż sześć zerowych wartości własnych nie powinien być stosowany.

### Kryterium inf-sup

<sup>26)</sup> Na przykład Hughes (2000) wymienia trzy warunki, jakie stawia się funkcjom kształtu: gładkość w obszarze elementu, ciągłość na granicach elementów i kompletność. Ostatni warunek oznacza, że element wyposażony w pewne funkcje kształtu, które są w stanie dokładnie reprezentować dowolny liniowy wielomian, jaki został nałożony na węzłowe stopnie swobody elementu.

<sup>27)</sup> Bazeley G.P., Cheung Y.K., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.: Triangular elements in bending-conforming and non-conforming solutions. Conference of matrix methods in structural mechanics, Air Force Inst. Tech., Wright-Patterson AF base, OH, 1965.

W sformułowaniach mieszanych, zob. na przykład Wiśniewski i Turska (2009), Sitek (2010), układ równań zadania może być źle uwarunkowany. Fakt ten może rzutować na możliwość uzyskania rozwiązania. Aby uzyskać w takiej sytuacji poprawne rozwiązanie układ równań zadania musi spełnić tzw. warunek inf-sup. Spełnienie tego warunku gwarantuje stabilność rozpatrywanego podejścia niezależnie od gęstości siatki oraz optymalny rząd zbieżności rozwiązania dyskretnego w zakresie użytej interpolacji. Pojęcie stabilności oznacza, że mała zmiana wartości po prawej stronie układu równań powoduje małą zmianę wartości otrzymanego rozwiązania (Sitek 2010).

## 1.5. Cel, zakres i założenia przyjęte w pracy<sup>28)</sup>

Zasadniczym celem niniejszej pracy jest skonstruowanie modelu obliczeniowego MES, opartego na dwuliniowym elemencie klasy  $C^0$  dla powłok laminowanych w ramach nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok. Od strony aproksymacji po przestrzeni, wykorzystuje się czterowęzłowy powłokowy element skończony EANS4 omówiony w pracy Witkowski (2009) i cytowanej tam literaturze. Prawo materiałowe, rozwinięte w ramach podejścia ESL sformułowane w ramach rozważanej teorii powłok w pracy Chróścielewski i inni (2011b). Oryginalnym i niepublikowanym elementem niniejszej monografii jest połączenie wyżej wymienionego prawa materiałowego z oprogramowaniem MES, bazującym na elemencie skończonym EANS4. Stworzone w ten sposób środowisko ma posłużyć w analizie następujących celów szczegółowych:

- wpływu uwarstwienia materiału powłoki na wartości uogólnionych przemieszczeń powłok,
- wpływu uwarstwienia materiału powłoki na wartości sił krytycznych w zagadnieniach wyboczenia powłok strukturalnych,
- wpływu gęstości siatki podziału na elementy skończone na mechanizmy deformacji powłok warstwowych.

W zakresie rozważań niniejszej monografii można wyróżnić następujące główne punkty:

- omówienie podstaw nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok,
- rys historyczny dotyczący ośrodka Cosseratów wraz z przeglądem literatury,
- szkic podstaw teorii równań konstytutywnych ośrodków Cauchy’ego i Cosseratów z uwzględnieniem stosowanego w pracy modelu ESL,
- studium wybranych aspektów formalizmu MES i omówienie stosowanego w rozprawie elementu skończonego,
- test własności elementu skończonego,
- wykonanie symulacji numerycznych i dyskusja wyników.

Rozważania przedstawione w dalszej części monografii oparte są na następujących założeniach:

- odkształcenia są wszędzie małe,
- materiał jest liniowo sprężysty, - to i powyższe założenie zapewniają, że tensor konstytutywny  $\mathbf{C} = C_{ijkl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$  jest stały w trakcie deformacji,
- rozpatruje się wyłącznie wpływy mechaniczne (własności materiału nie zależą od temperatury),

<sup>28)</sup> Przygotowując ten paragraf, Autor wzorował się na pracy Marcinowski (1999).

- materiał powłoki składa się ze skończonej liczby warstw, każda warstwa jest zbudowana z materiału jednorodnego, a materiał powłoki nie doznaje pęknięć<sup>29)</sup>,
- powłoka ma odpowiednią grubość do stosowania podejścia ESL w ramach teorii FOSD,
- rozpatruje się wyłącznie zagadnienia statyki i stateczności, w zagadnieniach stateczności nie uwzględnia się wpływów dynamicznych<sup>30)</sup>,
- w zagadnieniach stateczności ewolucja obciążenia kontrolowana jest wyłącznie przez jeden parametr<sup>31)</sup>,
- wartości obciążeń, parametry materiałowe i geometria powłoki określone są wyłącznie w sposób deterministyczny<sup>32)</sup>,
- układ włókien w matrycy jest stały w trakcie deformacji i nie podlega zmianie orientacji<sup>33)</sup>.

Zestawione cele pracy formułują syntezę rozpatrywanej w niniejszej monografii teorii powłok, jako podejścia kinematycznie związanego z ośrodkiem Cosseratów. Równolegle dokonuje się syntezy zagadnień numerycznych w obrębie nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok, ze szczególnym uwzględnieniem zagadnienia blokady numerycznej i oceny elementów skończonych.

## 1.6. Układ pracy

Monografia niniejsza składa się z siedmiu rozdziałów numerowanych, przeglądu literatury oraz czterech dodatków uzupełniających główny nurt rozważań pracy.

W rozdziale pierwszym omówiono pojęcie materiału kompozytowego, przedstawiono jego własności materiałowe na tle innych materiałów stosowanych w budownictwie oraz zasygnalizowano potencjalny zakres stosowania w zagadnieniach inżynierskich. Następnie przedstawiono krótki rys historyczny rozwoju teorii płyt i powłok. Zestawiono dwa zasadnicze podejścia stosowane w formułowaniu teorii technicznych. Na tym tle zapisano główne charakterystyki rozpatrywanej w niniejszej monografii teorii powłok. Kolejno przedstawiono w sposób syntetyczny przegląd literatury dotyczącej zastosowania MES w analizie dźwigarów powierzchniowych. Przedstawiono zalety i wady pewnych podejść ogólnie stosowanych w literaturze. Kolejny podrozdział dotyczy zagadnień modelowania powłok warstwowych. Zrekapitulowano tutaj zasadnicze dla tego zagadnienia założenia oraz omówiono pewne podejścia służące do ujęcia warstwowej struktury przekroju płyty/powłoki. W dalszej części rozdziału omówiono zjawisko blokady numerycznej rozwiązań w MES, przedstawiono niektóre sposoby przeciwdziałania temu efektowi oraz scharakteryzowano pewne metody oceny elementów skończonych.

---

<sup>29)</sup> Pewne zagadnienia zmian wartości współczynników konstytutywnych na skutek pęknięcia omawiano na przykład w pracy Lewiński i Telega (1998).

<sup>30)</sup> Przegląd kryteriów stosowanych w analizie stateczności dynamicznej można odnaleźć, na przykład, w pracach Kubiak 2007a, 2007b), wyniki badań w tym zakresie przedstawiono na przykład w pracy Kołakowski i inni (2007a, 2007b).

<sup>31)</sup> Szersze ujęcie obciążeń wieloparametrowych można odnaleźć na przykład w pracach Waszczyszyn i inni (1990), Marcinowski (1999).

<sup>32)</sup> Obszerne ujęcie wpływu losowości w zagadnieniach mechaniki można odnaleźć, na przykład, w pracach Bielewicz i inni (1994), Górski (2006), Górski i Mikulski (2008), Gołota i inni (2010) i cytowanej tam literaturze.

<sup>33)</sup> Możliwość reorientacji włókien badano, na przykład, w pracy Himpel i inni (2008).

Rozdział drugi poświęcony jest ośrodkowi z mikrostrukturą, ze szczególnym uwzględnieniem ośrodka Cosseratów. Omówiono tutaj miejsce tego ośrodka w szerokiej obecnie grupie materiałów z mikrostrukturą oraz na tle reprezentatywnych prac przedstawiono historię kontinuum Cosseratów. Przegląd prac podzielono na dwie części. W pierwszej z nich przedstawione zostały prace dotyczące ogólnych zagadnień w ramach teorii ośrodka Cosseratów, zaś w drugiej części przeglądu zestawiono prace traktujące o płytach i powłokach wraz z pewnymi implementacjami MES. Podsumowaniem rozdziału jest zestawienie równań równowagi oraz związków kinematycznych dla liniowego kontinuum Cosseratów. Rozdział ten powstał na podstawie osobistych studiów Autora dotyczących pojęcia mikrostruktury.

W rozdziale trzecim przedstawione zostały wybrane zagadnienia dotyczące opisu powierzchni odniesienia powłoki. Przedstawiono także zasadnicze równania statyki dla rozpatrywanej w niniejszej monografii teorii powłok, syntetyzując w ten sposób dotychczasowe osiągnięcia zespołu badawczego: Chróścielewski, Konopińska, Lubowiecka, Makowski, Pietraszkiewicz, Stumpf, do którego zalicza się też Autor. Przedstawiono przejście od statycznych równań równowagi do sformułowania silnego. W kolejnym etapie omówiono przejście od lokalnych różniczkowych równań równowagi do postaci pewnej tożsamości całkowitej, nadano tej tożsamości sens zasady prac wirtualnych, a także uwypuklono miary wirtualnych odkształceń<sup>34)</sup>, jakie w naturalny sposób wynikają z przekształceń. W dalszym ciągu przedstawiono zasadniczą dla rozważań niniejszej monografii trójpolową zasadę wariacyjną Hu-Washizu. Rozdział zakończono zestawieniem najważniejszych związków dotyczących grupy obrotów.

W kolejnym rozdziale omówiono wybrane zagadnienia równań konstytutywnych. Omówiono postulaty, jakie powinny spełniać związki materiałowe, podano określenie materiału hipersprężystego i podano równania konstytutywne liniowej teorii sprężystości ośrodka Cauchy'ego. Następnie omówiono formułowanie równań konstytutywnych dla liniowego ośrodka Cosseratów, a także dla pewnych sformułowań teorii płyt i powłok. W przypadku ośrodka liniowego, poświęcono szczególną uwagę dokonaniom prof. Nowackiego w tym zakresie. Na tym tle omówiono znane w literaturze problemy z notacją dotyczącą stałych materiałowych. W kolejnym etapie rozważano równania konstytutywne liniowej sprężystości występujące w rozpatrywanej tutaj teorii powłok, a także dokonano ich porównania z wyprowadzonymi przez Altenbacha i Eremeyeva (Altenbach i Eremeyev 2009) związkami fizycznymi dla płyt Cosseratów. Dyskutowano także znane w literaturze oszacowania wartości współczynnika korekcyjnego wypadkowych momentów naprężeń owinięcia  $\alpha_i$ . W końcowej części rozdziału przedstawiono w szczegółach wykorzystane w tej pracy podejście równoważnej jednej warstwy.

W rozdziale piątym przedstawiono podstawowe wiadomości dotyczące aproksymacji skończonej wymiarowej przy pomocy MES. Zapisano podlegający aproksymacji funkcjonal z modyfikowanej zasady wariacyjnej Hu-Washizu. Następnie przedstawiono formalne warunki, jakie powinna spełniać siatka dyskretyzacyjna MES, a także dyskutowano pewne formalne aspekty metody. Następnie omówiono procedury interpolacji zmiennych problemu. W szczególny sposób przedstawiono oryginalną koncepcję doboru pól interpolacyjnych dla niesymetrycznych stycznych odkształceń

---

<sup>34)</sup> W pewnych przypadkach istnieje możliwość wyznaczenia pola przemieszczeń powierzchni podstawowej powłoki, znając tensor odkształceń powierzchniowych, zob. na przykład praca Pietraszkiewicz i Szwabowicz (2007).



membranowych. W końcowej części rozdziału zestawiono wymagane w implementacji numerycznej macierze elementowe.

Rozdział szósty przedstawia wyniki analizy numerycznej. Rozważania rozdziału podzielono na dwie części. W pierwszej z nich ocenie poddano sam element skończony. Przedstawione zostały wybrane, znane w literaturze testy oceniające zachowanie się elementu EANS4: zrealizowano test łąty, omówiono test inf-sup, i sprawdzono wartości własne macierzy sztywności. Następnie przedstawiono reprezentatywne przykłady analizy geometrycznie nieliniowej powłok gładkich i strukturalnych.

W rozdziale siódmym zapisano wnioski końcowe wynikające z wyników badań.

Treść pracy uzupełnia pięć dodatków uzupełniających główny nurt badań.

## Rozdział 2

# OŚRODEK COSSERATÓW

### 2.1. Przegląd zagadnień

Rozpatrywany w pracy ośrodek Cosseratów należy do szerokiej klasy ośrodków z tak zwaną mikrostrukturą. Pojęcie to (zob. np. Capriz 1989) opisuje matematyczny model ciała wykazującego pewien rodzaj mikroskopowego uporządkowania. Capriz wyróżnia, wraz z charakterystyką, następujące ciała, które wykazują cechy mikrostruktury<sup>35)</sup>:

- *continuum with voids*,
- *liquid with nondiffusing bubbles*,
- *continuum with planar spin*,
- *liquid crystal*,
- *continuum with ordinary spin*,
- *Cosserat continuum*,
- *biaxial nematic*,
- *continuum with vector microstructure*,
- *micromorphic continuum*,
- *bodies with continuous distribution of dislocations*.

Nieco inną klasyfikację ośrodków z mikrostrukturą przedstawia Eringen (1999). W obrębie kategorii *micromorphic continuum* wyróżnia on dodatkowe podkategorie. Rys. 2.1 niniejszej monografii przedstawia kopię rysunku 1.4.1 z pracy Eringen (1999). Jako podstawę swej klasyfikacji przyjął on sposób deformacji dyrektorów ośrodka.

Celem poniższego podrozdziału jest krótki przegląd prac<sup>36)</sup>, w których omawia się różne aspekty formułowania i stosowania ośrodków z mikrostrukturą w mechanice ośrodka ciągłego. Autor ma świadomość, że poniższe zestawienie dalekie jest od kompletności, zob. przypis 5 w rozdziale 1.

Początków koncepcji mikrostruktury można doszukiwać się w pracy Duhema z roku 1893 (zob. np. Ericksen i Truesdell 1958, Green i inni 1965). Inni, jak na przykład Mindlin i Tiersten (1962), Barański i inni (1967) czy Nowacki (1971), załóżka koncepcji mikrostruktury doszukują się we wcześniejszej pracy Voighta z roku 1887. Capriz (1989) zaś przesuwa w czasie początki koncepcji mikrostruktury do Poissona (za pracą Love'a z roku 1842), który zaproponował by traktować cząsteczki jako ciała sztywne, mające możliwość zarówno ruchu translacyjnego, jak i obrotu.

Powszechnie przyjmuje się jednak (zob. Ericksen i Truesdell 1958, Nowacki 1971 czy Capriz 1989), że przełomową pracą dla ośrodków z mikrostrukturą jest praca braci Cosseratów (1909). W pracy tej sformułowano podstawy nieliniowej teorii ośrodka, w którym każdej cząsteczce przypisano doskonale sztywne sześcian, doznający przesunięcia

---

<sup>35)</sup> Aby uniknąć niejasności przy tłumaczeniu, klasyfikację przytacza się w oryginale.

<sup>36)</sup> Przygotowując poniższy przegląd, Autor bazował na pracy Barański i inni (1967), monografii Nowackiego (1971), monografii Antmana (1995), rozprawie habilitacyjnej Patrizio Neffa (2004), pracy Altenbach i Eremeyev (2009) i pracy przeglądowej Altenbach i inni (2009).

opisanego wektorem  $\mathbf{u}$  i obrotu opisanego wektorem  $\boldsymbol{\phi}$ . W ten sposób, punkty ośrodka uzyskały orientację, a deformację ośrodka opisuje wektor przesunięcia i niezależny od niego wektor obrotu. Powoduje to także niesymetryczność tensorów deformacji i naprężenia.



Rys. 2.1. Podgrupy materiału mikromorficznego, wg pracy Eringen (1999)

Praca Cosseratów pozostała praktycznie bez echa w czasach sobie współczesnych. W pracy Nowackiego (1971) można znaleźć uwagę, że praca braci Cosserat była zbyt trudna i nieprzejrzysta dla ówczesnych badaczy. Barański i inni (1967) podają cztery prace bezpośrednio nawiązujące do pracy Cosseratów. Renesans sformułowanej w niej koncepcji przypaść na koniec lat pięćdziesiątych dwudziestego wieku.

Jedną z ważniejszych prac z tego okresu jest artykuł Ericksen i Truesdell (1958), gdzie teorię Cosseratów wyrażono w matematycznie współcześnie przejrzystej formie i uzupełniono. W szczególności, w pracy tej wprowadzono pojęcie direktora jako wektora doznającego obrotu i wydłużenia. W omawianym podejściu, autorzy nie ograniczali liczby direktorów. Praca koncentruje się na opisie odkształceń, pozostawiając problem równań konstytutywnych poza nurtem rozważań.

Kolejne prace z tego okresu koncentrowały się na przypadku granicznym teorii Cosseratów, to jest tak zwanym pseudokontinuum Cosseratów (Nowacki 1971), czyli ośrodka, w którym możliwe jest powstanie niesymetrycznych naprężeń siłowych i momentowych przy deformacji opisanej za pomocą jedynie wektora przemieszczeń. Podejście to znane jest w literaturze jako tzw. *couple-stress theory*. Wektor obrotu  $\boldsymbol{\phi}$  jest tu wektorem zależnym od wektora przemieszczeń  $\mathbf{u}$  poprzez relację  $\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}$ . Jako reprezentatywne prace można tu wymienić artykuły: Toupin (1962) Mindlin i Tiersten (1962), szereg prac naukowców rosyjskich cytowanych przez Nowackiego (Nowacki 1971)

zob. także Simo i inni 1992a. Konsekwencją przyjęcia jako niewiadomej tylko wektora przemieszczeń jest niemożność określenia antysymetrycznej części tensora naprężeń siłowych i kulistej części tensora naprężeń momentowych, zob. wzór 1.15 i komentarz pod wzorem 1.16 w pracy Mindlin i Tiersten (1962).

Wydaje się, że rok 1964 był przełomowym dla późniejszego rozwoju teorii ośrodka z mikrostrukturą. W tym roku bowiem ukazały się trzy istotne prace: Toupina (Toupin 1964), Mindlina (Mindlin 1964) i Eringena i Suhubiego (Eringen i Suhubi 1964). Toupin w swej pracy pisze, że teoria pseudokontinuum Cosseratów, w świetle teorii materiałów drugiego stopnia<sup>37</sup>, nie powinna być dalej rozwijana, ze względu na nienaturalne warunki stawiane pochodnym funkcji energii (zob. równanie 11.13 pracy Toupin 1964).

Równoległe, Mindlin oraz Eringen i Suhubi rozwinęli odpowiednio liniowe i nieliniowe teorie ośrodka z mikrostrukturą (Eringen i Suhubi nazwali swoje podejście teorią mikromorficzną). W założeniach tej teorii przyjmuje się, iż pojedyncza mikrostruktura jest klasycznym kontinuum. W teoriach tych charakterystycznym pojęciem jest mikro- i makro- deformacja. Odnośnie poprawności takiego podejścia w pracy Barański i inni (1967) można odnaleźć uwagę, że pewne przekształcenia w ramach teorii Eringena wzbudzają wątpliwości mimo poprawności podstawowego układu równań.

Mindlin wprowadził pojęcie komórki jednostkowej (ang. *unit cell*), która może być interpretowana jako molekula polimeru lub ziarno materiału ziarnistego. Modelem komórki jest liniowa wersja teorii Ericksena i Truesdella. Jeśli żąda się, by komórka pozostała sztywna, wtedy z teorii Mindlina otrzymuje się równania liniowej teorii Cosseratów.

W dalszych latach nastąpił intensywny rozwój i modyfikacje samej teorii, jak i obszarów jej zastosowania. Poniżej przedstawiono krótki przegląd prac podzielony na dwie grupy: zagadnienia ogólne oraz teoria płyt i powłok wraz z wybranymi implementacjami MES. Trzeba jednak zaznaczyć, że nie wszystkie przedstawione tutaj prace dotyczą modelu tożsamego z modelem Cosseratów. Tam, gdzie było to możliwe, Autor starał się ułożyć prace w porządku chronologicznym. Zebrane tu prace należy traktować sygnalnie, tzn. jako reprezentatywne dla pewnych nurtów zagadnień rozwijanych w ramach, ogólnie rozumianego ośrodka z mikrostrukturą.

Zagadnieniem, jakie pozostaje poza zakresem niniejszego przeglądu, jest teoria prętów Cosseratów. Jako reprezentatywne prace dla tej grupy zagadnień można wymienić: Green i Laws (1966), Green i inni (1967), Whitman i DeSilva (1969), Antman (1972, 1995), a z nowszych prac np. Cardona i Geradin (1988), Smoleński (1999), Sander (2009), Miśkiewicz (2011).

### 2.1.1. Wybrane zagadnienia mechaniki ośrodka Cosseratów

W pracy Mindlin (1965) otrzymano rozwiązania równań równowagi liniowej, sprzężonej teorii Cosseratów, postawionych w naprężeniach.

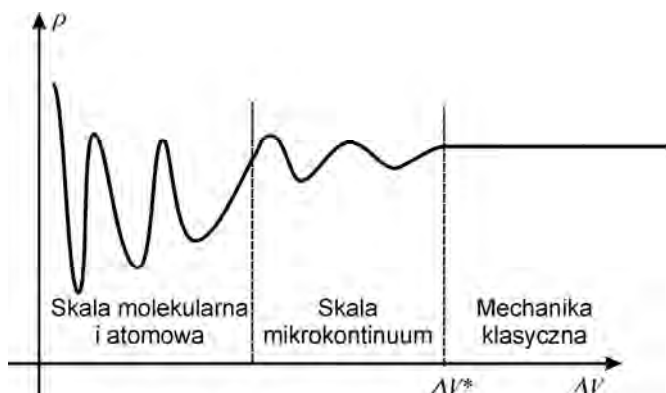
Neuber (1966) przedstawił rozwiązania zagadnień koncentracji naprężeń wokół kołowego cylindrycznego otworu oraz sferycznej pustki w jednorodnym jednoosiowym stanie naprężenia.

---

<sup>37</sup> Dłużewski (1996) krytykuje podejście polegające na określaniu pseudo-kontinuum Cosseratów jako materiału drugiego stopnia (zob. następny rozdział niniejszej monografii.) Wg Dłużewskiego, znacznie trafniejsze jest za Sokołowskim (Sokołowski 1972) określenie „teoria naprężeń momentowych”.

Eringen (1966) przedstawił liniową wersję teorii mikromorficznej i nazwał ją teorią mikropolarną. Nie ustrzegł się jednak błędu, formułując równanie konstytutywne dla naprężeń siłowych, co spowodowało pewne zamieszanie w późniejszych pracach. Problem ten został dokładnie omówiony i sprostowany w pracy Cowin (1970a), gdzie podano odniesienia do prac, w których przeoczono nieściśłość Eringena oraz do tych prac, gdzie znaleźć można poprawną postać równań (między innymi Neuber 1966).

Eringen (1968) podsumował dotychczasowe wyniki na gruncie teorii ośrodka z mikrostrukturą. Jako uzasadnienie do prowadzenia badań na poziomie mikrostruktury, przedstawił interesujący eksperyment myślowy. Załóżmy, że gęstość masy  $\rho$  danego ośrodka zostanie zliczona jako suma znacznej liczby, odpowiadającej liczbie molekuł, ilorazów  $\Delta m / \Delta V$ . Analizując teraz wykres zależności tak wyliczonej gęstości masy  $\rho$  względem  $\Delta V$  (zob. rys. 2.2 za rys. 1 z pracy Eringen 1968), można dojść do wniosku, że  $\rho$  ma stałą wartość powyżej pewnej objętości krytycznej  $\Delta V^*$ . W zakresie zaś poniżej tej wartości,  $\rho$  zaczyna łagodnie oscylować na poziomie mikrostruktury, by przejść do gwałtownych oscylacji na poziomie atomowym. Dalej Eringen podaje przykład z analizą propagacji fal o długościach rzędu wielkości molekuł ośrodka. Wtedy indywidualne oscylacje molekuł wpływają na całkowitą odpowiedź ośrodka.



Rys. 2.2. Zależności gęstości masy od objętości, wg pracy Eringen (1968)

Edelstein (1969) podjął problem jednoznaczności rozwiązań w teorii Mindlina z roku 1964.

W pracy Lippmann (1969) badano zagadnienie plastyczności w teorii Cosseratów. Sformułowano, między innymi, uogólnione warunki plastyczności Treski i Hubera-Misesa.

Cowin (1969) badał także zagadnienie osobliwości i koncentracji rozkładu naprężeń, przy czym, w porównaniu z pracą Neuber (1966), ograniczył się do półprzestrzeni. Co ciekawe, Cowin w roku 1969 nie cytował pracy Neubera. Jednak już rok później (Cowin 1970b), przedstawiając rozwiązania równań równowagi liniowej sprężystej teorii Cosseratów postawione w przemieszczeniach, odnosi się już do pracy Neubera z roku 1966. Obie prace Cowina są bardzo istotne także ze względu na odniesienia do wcześniejszej literatury, wprowadzenie porządku w nazewnictwie, przeglądzie notacji używanej przez różnych autorów (zob. dodatek w pracy Cowin 1970b) i określenie relacji między teorią Cosseratów a teorią pseudokontinuum Cosseratów.

Dla porządku należy tu odnotować jeszcze jedną pracę Cowin (1970a), w której zwraca on uwagę na błąd w równaniach konstytutywnych z pracy Eringen (1966). Ta konkretna praca Cowina będzie omówiona szerzej w rozdziale niniejszej monografii poświęconym równaniom konstytutywnym.

We wczesnych latach siedemdziesiątych Eringen rozwijał nieliniową teorię ośrodka mikropolarnego, zob. Kafadar i Eringen (1971).

Tauchert (1971) rozpatrywał naprężenia termiczne w ośrodku mikropolarnym. Przedstawił dwa ogólne rozwiązania mikropolarne termosprężystości: jedno w uogólnionych przemieszczeniach i drugie w uogólnionych naprężeniach. Analizował on zagadnienia: rozkładu temperatury w nieograniczonym ośrodku mikropolarnym, rozkładu naprężeń wokół walcowego wydrążenia pod działaniem równoległego rozkładu ciepła i naprężeń wokół sztywnej walcowej inkluzji.

Stojanović (1972) wyprowadził równania równowagi ośrodka z mikrostrukturą z pierwszego równania termodynamiki. Porównywał także wyprowadzoną w ten sposób teorię z podejściem Eringena i Suhubiego (Eringen i Suhubi 1964).

Bhargava i Ghosh (1975) analizowali problem rozkładu naprężeń wokół okrągłego otworu w nieograniczonej tarczy (nazywaną przez autorów płytą). Jako obciążenie przyjęli naprężenia normalne i styczne oraz naprężenie momentowe na wewnętrznej krawędzi otworu. Przedstawili między innymi analityczne rozwiązania dla siły skupionej oraz momentu skupionego od naprężeń momentowych.

W pracach Gauthier i Jashman (1975, 1981) podjęto próby identyfikacji stałych materiałowych w ośrodku Cosserat. W pierwszej z cytowanych prac, gdzie podano odniesienia do innych prac poświęconych eksperymentom w tym zakresie, badano statycznie specjalnie skonstruowany materiał złożony ze śrutu aluminiowego zatopionego w matrycy epoksydowej. W toku eksperymentów stwierdzono jednak, że potencjalne efekty mikropolarne nie zostały zidentyfikowane ze względu na maskujący efekt materiałowej niejednorodności. W zakresie dostępnej autorom aparatury pomiarowej stwierdzono, że opracowany materiał zachowuje się jak materiał niepolarny. Ci sami autorzy, w pracy Gauthier i Jashman (1981), prowadzili eksperymenty dynamiczne. W tym przypadku udało się zidentyfikować stałe materiałowe dla zaproponowanego materiału. Komentarz do tych wyników można znaleźć w pracy Eringen (1999).

Berglund (1977) rozszerzył na ośrodki mikropolarne rozważania Toupina (Toupin 1965), który sformułował matematycznie i udowodnił zasadę de Saint-Venanta dla ośrodka niepolarnego. Rozwazał on stan naprężenia w ciele o kształcie walcowym, wywołany dowolnym samorzównoważonym układem sił, przyłożonym na jednym końcu cylindra i zanikającym eksponentalnie wraz z odległością od punktu przyłożenia. Toupin określił wykładnik funkcji eksponentalnej, wyrażony poprzez najmniejszą częstość własną wycinka cylindra. Rozważania te uogólnił później Batra (1983) na ośrodki z mikrostrukturą.

Nakamura i inni (1984) badali rozkład naprężeń wokół otworu w ortotropowym mikropolarnym ośrodku liniowo sprężystym. Wyprowadzony model porównywali z rozwiązaniami analitycznymi znanymi dla zagadnienia formułowanego w izotropowym ośrodku mikropolarnym. W pracy tej do analizy MES przyjęto trójkątny element trójwęzłowy. Autorzy rozpatrywali zagadnienia pełnej ortotropii tensora naprężeń siłowych i tensora naprężeń momentowych oraz ortotropii tensora naprężeń siłowych i izotropii tensora naprężeń momentowych. W pierwszym przypadku do opisu prawa konstytutywnego wymagane jest dziewięć stałych, podczas gdy w drugim liczba ta redukuje się do sześciu. Stałe te dobrano w ten sposób, że dla tensora naprężeń siłowych

przyjęto je jak dla kompozytu węgiel/epoksyd. Poprzez arbitralne ustalenie długości charakterystycznych ustalono parametry dla części równania konstytutywnego dla tensora naprężeń momentowych. W symulacjach numerycznych autorzy, przy ustalonej długości charakterystycznej, badali zmiany wartości współczynnika koncentracji naprężeń od średnicy otworu dla zmiennych wartości współczynnika sprzężenia (ang. *coupling factor*).

Badur i Stumpf (1989) przedstawili ujęcie wyników braci Cosseratów w języku współczesnej mechaniki. Praca ta wskazuje te dziedziny mechaniki, które czerpią pośrednio lub bezpośrednio ze spuścizny Cosseratów.

Badur (1993) dyskutował teorię powierzchni Cosseratów w języku teorii pola.

Uogólnieniem teorii ośrodka mikropolarnego, a jednocześnie uproszczeniem teorii ośrodka mikromorficznego jest ujęcie znane jako *microstretch*. W ujęciu tym punkty materialne ciała doznają rozciągnięć niezależnie od obrotów i translacji. Nowiński (Nowiński 1993) analizował zagadnienia propagacji powierzchniowych fal mikroobrotu i *microstretch* w ośrodku nielokalnym. Praca ta jest też wartościowa ze względu na syntetyczne ujęcie historii pojęcia mikrostruktury.

Tejchman i Wu (1993) badali numerycznie zagadnienie tworzenia się pasm ścinania w próbie dwuosowego ściskania.

Batra (1994) przeprowadził szczegółowe wyprowadzenie zasady prac wirtualnych dla termosprężystego ośrodka z naprężeniami momentowymi.

W ramach ośrodka typu *microstretch*, w pracy Ieşan i Pompei (1995) rozważano równania równowagi w zakresie statyki takiego ośrodka, a na przykład w pracy Ieşan i Quintanilla (2007) rozpatrywano zagadnienia termopiezoelektryczności.

Nakamura i Lakes (1995) kontynuowali w ujęciu MES rozważania z pracy Berglund (1977).

Kaplunov i Lippmann (1995) badali zagadnienie sprężysto-plastycznego skręcania pręta typu Cosseratów o pełnym przekroju kołowym. Podali jawne, asymptotyczne rozwiązania tego zagadnienia.

Epstein i De León (1996) rozpatrywali zagadnienie dystrybucji niejednorodności w ośrodku z mikrostrukturą. W szczególności poszukiwali oni miar niejednorodności odpowiednich dla tego typu ośrodków.

Krishnaswamy (1996) analizował budowę ściany erythrocytu. Na podstawie badań eksperymentalnych przyjął on założenie, że ściany komórki mogą być traktowane jako dwie powłoki połączone poprzez dodatkowy wektor zwany łącznikiem (ang. *interconnector*). Jedna z powłok jest powłoką Cosseratów z jednym директором, druga zaś jest nieliniową powłoką Kirchhoffa-Love'a. Jednym z zasadniczych punktów omawianej pracy jest nadanie dyrektorowi powierzchni Cosseratów interpretacji jako łącznika między powierzchniami.

Steinmann i Stein (1997) przedstawili studium zasad wariacyjnych dla ośrodka mikropolarnego. Rozpatrywali pseudokontinuum Cosseratów jak i pełen model ośrodka. Analizowali różne zasady wariacyjne w zakresie geometrycznie liniowym i nieliniowym i zaproponowali metodę pozwalającą na wykorzystanie standardowych związków konstytutywnych do symetrycznej części tensora naprężenia.

Forest i inni (2000) studiowali zagadnienie wpływu efektu skali na zachowanie polikryształów i materiałów wielofazowych. Motywacją do ich badań jest obserwacja, że w kryształach zachowanie się pojedynczego elementu agregatu może być odmienne od zachowania się pojedynczego kryształu traktowanego oddzielnie. W pracy tej wykorzystano teorię plastyczności pojedynczego kryształu typu Cosserat. Przeprowadzono

trójwymiarowe symulacje MES periodycznego agregatu kryształów Cosserat. Omówiono różne techniki homogenizacji, pozwalające na ocenę własności wynikowego polikryształu.

Makowski i Stumpf (2001) analizowali zagadnienie ewolucji zniszczenia w ośrodkach z mikrostrukturą. W pracy tej zaprezentowano termodynamiczne podejście do opisu propagacji makro- i mikrouszkodzeń w tego typu ośrodkach. Jako model przyjęto ciało wg Ericksena i Truesdella (1958), tzn. ze skończoną liczbą dyrektorów. Wyprowadzono równania równowagi sił deformacyjnych i konfiguracyjnych oraz zapisano pierwsze i drugie prawo termodynamiki. W toku uproszczeń wyniki tej pracy mogą służyć do analizy ośrodka Cosseratów czy ośrodka z trzema odkształcalnymi dyrektorami.

Teoria ośrodka Cosseratów znalazła zastosowanie w mechanice skał. W pracy Adhikary i Guo (2002) rozwinięto sprężysto-plastyczny model dla uwarstwionych skał, w których występuje znaczna liczba warstw (lub równoważnie: grubości warstw są małe w porównaniu z wymiarami konstrukcji). Przedstawiono rezultaty numeryczne zgodne z badaniami eksperymentalnymi.

Providas i Kattis (2002) przedstawili sformułowanie trzech trójkątnych elementów skończonych w zakresie płaskiego stanu naprężenia: elementu trójwęzłowego oraz dwóch elementów wyższego rzędu. W pierwszym elemencie, w węzłach należących do boku elementu, jako niewiadome przyjęto tylko dwie składowe wektora przesunięcia, a w węzłach wierzchołkowych przyjęto składowe wektora przesunięcia i obrót prostopadły do płaszczyzny (obrotów owinięcia). Łącznie prowadzi to do piętnastu niewiadomych elementów. W drugim elemencie, w każdym z sześciu wierzchołków przyjęto trzy niewiadome, co daje osiemnaście niewiadomych elementów. Autorzy przeprowadzili test łąty (ang. *patch test*) w wersji przemieszczeniowej (por. na przykład, MacNeal i Harder 1985, Witkowski 2009 lub Sitek 2010) oraz zaproponowali wzbogacenie tego testu także o wymuszenia związane z obrotem owinięcia. W drugiej części pracy badali oni zagadnienie koncentracji naprężeń wokół cylindrycznego otworu.

Forest i Sievert (2003) przedstawili uogólnione termomechaniczne podejście dla zagadnień sprężysto-lepko-plastycznych w materiałach wyższego rzędu (ang. *higher order*) i wyższego stopnia (ang. *higher grade*)<sup>39)</sup>. Pod pojęciem materiału wyższego rzędu autorzy rozumieją materiał uwzględniający dodatkowe względem przesunięć stopnie swobody (na przykład ośrodek Cosseratów, ośrodek mikromorficzny), a jako ośrodek wyższego stopnia autorzy rozumieją ośrodek, w którym w równaniu konstytutywnym występują wyższe pochodne pól przesunięć. Rozważania przeprowadzono w zakresie liniowym i w zakresie skończonych deformacji. Autorzy podali przykłady analityczne dla ośrodka Cosseratów i ośrodka z wyższymi gradientami pola przesunięcia.

Lee i Chen (2003) rozwijali teorię ośrodka mikromorficznego. Wyprowadzili oni równania konstytutywne dla ośrodka termo-lepko-sprężysto-plastycznego.

Neff (2004) w pierwszej części swojej rozprawy habilitacyjnej analizował ośrodek trójwymiarowy. Studiował, między innymi, zasady wariacyjne w zakresie skończonych deformacji sprężysto-plastycznych. W drugiej części pracy, poświęconej zagadnieniom dwuwymiarowym, w ramach podejścia wyprowadzanego zredukował równania ośrodka trójwymiarowego. Badał własności gęstości energii wewnętrznej w tak otrzymanym modelu.

Walsh i Tordesillas (2004) studiowali równania konstytutywne ziarnistego ośrodka Cosseratów w ramach termomechaniki. Praca ta może być uważana za reprezentatywną dla

---

<sup>39)</sup> Zagadnienie to jest szerzej omawiane w rozdziale 4. niniejszej monografii.



innych prac tychże autorów, gdzie przyjmuje się technikę homogenizacyjną polegającą na analizie cząstki ośrodka wraz z jej najbliższym otoczeniem.

Kulesh i inni (2005) rozwiązywali zagadnienie propagacji akustycznej powierzchniowej fali Rayleigh'a w ośrodku Cosseratów. W pracy tej otrzymano rozwiązania analityczne w przemieszczeniach i przeprowadzono pewne studia parametryczne.

Li i Tang (2005) przedstawili sformułowanie algorytmu rozwiązania zadania sprężysto-plastycznego w ramach ośrodka Cosseratów. Zaproponowana metoda bazuje na dekompozycji tensora naprężenia na część dewiatorową i kulistą.

Bigoni i Drugan (2007) omówili pewną metodologię określania stałych materiałowych w jednorodnym ośrodku Cosseratów.

Grammenoudis i Tsakmakis (2007a) oraz Grammenoudis i inni (2007b), rozwijając swoje wcześniejsze badania (zob. cytowana tam literatura), analizowali model plastyczności gradientowej dla ośrodka mikropolarnego. W rozpatrywanym tu podejściu dokonuje się multiplikatywnej dekompozycji tensora gradientu deformacji oraz mikropolarnego tensora obrotu. Ujęto zarówno wzmocnienie izotropowe, jak i kinematyczne. Określono warunki, przy których model mikropolarny przechodzi w ośrodek Cauchy'ego. W drugiej z cytowanych prac porównywano szczegółowo analitycznie i numerycznie, przy pomocy programu Abaqus, opracowany model plastyczności ze standardowym modelem plastyczności.

Mora i Waas (2007) zajmowali się zagadnieniem określenia stałych Lamego dla struktur typu plaster miodu, wykorzystując model ośrodka mikropolarnego. W pracy w pierwszej kolejności rozwiązano zagadnienie rozciąganej mikropolarnej tarczy w płaskim stanie odkształcenia z kołowym otworem o nieodkształcalnych krawędziach. W ten sposób otrzymano wzór na odkształcenia promieniowe. Następnie wprowadzono miarę odkształcenia dla plastra miodu jako względną zmianę średnicy komórki i przeprowadzono symulacje numeryczne. Ściany komórki modelowano w programie Abaqus przy pomocy trójwęzłowych elementów belkowych typu Timoszenki. Otrzymane numerycznie odkształcenia porównywano z analitycznymi. Kalibrację modelu przeprowadzono poprzez zmienianie stałych w modelu MES, minimalizując błąd średniokwadratowy. W ten sposób otrzymano wartości stałych materiałowych dla ośrodka mikropolarnego.

Ramezani i Naghdabadi (2007) analizowali zagadnienie par energetycznie sprzężonych w ośrodku mikropolarnym.

Boerner i inni (2007) omówili sformułowanie elementów skończonych na bazie punktu Cosseratów w zagadnieniach płaskiego stanu odkształcenia. Opracowany element jest niewrażliwy na dystorsje siatki podziału, a także wolny od zjawiska blokady numerycznej.

Jabareen i Rubin (2007) przedstawili sformułowanie trójwymiarowego elementu skończonego rozwiniętego ze sformułowania punktu Cosseratów. Element jest niewrażliwy na dystorsje siatki podziału. Praca ta zawiera interesujące porównanie wyników własnych z rozwiązaniami uzyskanymi przy pomocy wiodących programów komercyjnych i akademickich.

Ramezani i inni (2009) studiowali zagadnienie hipersprężystości w ośrodku mikropolarnym. W pracy tej autorzy zarysowali pobieżnie sformułowanie MES w ujęciu uaktualnionego opisu Lagrange'a i przedstawili rozwiązania dwóch typowych zadań dwuwymiarowych. Dalsze omówienie tej pracy znajduje się w rozdziale czwartym niniejszej monografii.

Pietraszkiewicz i Eremeyev (2009a) wyprowadzili naturalne definicje miar odkształceń w nieliniowym ośrodku Cosseratów. Zwrócili uwagę na fakt, że o ile w sformułowaniu liniowym ośrodka mikropolarnego miary odkształcenia są jednoznacznie określone, to w zagadnieniach nieliniowych znane są różne podejścia. Dotyczy to zwłaszcza tensora wykrzywienia<sup>40)</sup> (ang. *wryness tensor*). Autorzy przedstawili ciekawe studium porównawcze znanych w literaturze miar odkształceń stosowanych w opisie nieliniowego ośrodka mikropolarnego.

Pietraszkiewicz i Eremeyev (2009b) wyrazili miary odkształceń nieliniowego ośrodka Cosseratów w terminach wektora obrotu skończonego. Wyprowadzenia przedstawili dla siedmiu różnych parametryzacji tensora obrotu.

Ramezani i Naghdabadi (2010) omówili rozszerzenie pojęcia hyposprężystości na ośrodek Cosseratów. Przedstawili sformułowanie dziewięciowęzłowych elementów skończonych i analizowali zagadnienie stateczności łuku małowyniosłego. W ramach tego problemu analizowali także efekt skali.

### 2.1.2. Teoria płyt i powłok, wybrane implementacje MES

Green i inni (1965) rozwinęli teorię powierzchni Cosseratów. W pracy tej wprowadzono na dwuwymiarowej powierzchni konfiguracyjnej pojedyncze niezanikające i niestyyczne pole wektorowe, zwane direktorem. W omawianej pracy zapisano równania konstytutywne jedynie w postaci ogólnej, w ramach podejścia Greena, tj. poprzez różniczkowanie funkcji gęstości energii wewnętrznej.

Niemalże równoległe do pracy Green i inni (1965), Cohen i DeSilva (1966) sformułowali teorię powłok z trzema direktorami. W pracy tej zapisano ogólne postaci równań konstytutywnych w zależności od przyjętej funkcji gęstości energii wewnętrznej, ale w przypadku teorii z trzema direktorami.

Eringen (1967) (por. także Eringen 1999) sformułował liniową teorię mikropolarnych płyt. Rozpatrywał on przypadki płaskiego stanu odkształcenia i naprężenia, przedstawił różne uproszczenia swojej teorii, a także badał zagadnienie propagacji fal i podał oszacowania wartości prędkości rozchodzenia się fal w płytach mikropolarnych. Eringen (1967) zapisał także szczegółowe równania konstytutywne dla wielkości przekrojowych w liniowej teorii płyt mikropolarnych.

Reissner (1972) wyprowadził równania dwuwymiarowej teorii płyty typu sandwich, przy założeniu, że wypełnienie płyty posiada cechy ortotropowego ośrodka Cosseratów. Uwypuklił przy tym fakt braku symetrii momentów  $M_{12}$  i  $M_{21}$  jako konsekwencję przyjętej teorii. W przyjętym modelu założył on, że okładziny są cienkie i nie są wyposażone w poprzeczną sztywność giętą. Natomiast wypełnienie potraktował jako ortotropowy ośrodek Cosseratów zdolny do przenoszenia naprężeń ścinania poprzecznego oraz naprężeń momentowych oddziałujących na przekroje równoległe do okładzin. W pracy tej wyprowadzono równania konstytutywne dla przekrojowych momentów  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  i niesymetrycznych przekrojowych momentów  $M_{12}$ ,  $M_{21}$ .

W roku 1972 opublikowano klasyczną encyklopedię Handbuch der Physik pod redakcją Truesdella, gdzie znalazła się, między innymi, fundamentalna dla teorii powłok praca Naghdi (1972). Praca ta szeroko omawia różne aspekty formułowania teorii powłok, jak podejście bezpośrednie i podejście wyprowadzane. Między innymi, podano wartość

---

<sup>40)</sup> Nazwę polską przyjęto za Dłużewskim (Dłużewski 1996), przypis 2, str. 37 u dołu.

konstrytuwnego współczynnika  $\alpha_i$  w równaniu dla momentów owinięcia. Zagadnienie to będzie dyskutowane w dalszej części niniejszej monografii.

Cohen (1976), bazując na wynikach z pracy Naghdi (1972), rozpatrywał zagadnienie propagacji fal w sprężystych płytach. Sklasyfikował on, między innymi, dwie fale w płaszczyźnie: wzdłużną i poprzeczną oraz falę wynikającą z gradientu poprzecznego normalnego odkształcenia.

Green i Naghdi (1982) przedstawili sformułowanie teorii płyt kompozytowych w zakresie małych deformacji sprężystych. Jako model kinematyczny przyjęli oni powierzchnię Cosseratów z jednym директором. Podali oni rozwiązania analityczne dla pewnych zagadnień płyt laminowanych.

Badur (1984) analizował możliwość stosowania modelu sześcioparametrowego do obliczeń powłok zarówno umiarkowanie grubych jak i powłok cienkich.

Yeh i Chen (1993) omówili sformułowanie zdegenerowanych elementów powłokowych w ramach ośrodka mikropolarnego. Jako model kinematyczny przyjęli hipotezę Reissnera-Mindlina. Analizowali powłoki gładkie i jedną powłokę z ortogonalnym przecięciem płatów. W celu wyeliminowania zjawiska blokady, w elementach czterowęzłowych część macierzy sztywności związana ze ścinaniem była całkowana przy pomocy kwadratury jednopunktowej.

Naghdi i Rubin (1995) badali zagadnienie ograniczeń, jakie należy nałożyć na równania konstytutywne, które zapewnią, że ściśle równania powłokowe będą zgodne ze ścisłymi nieliniowymi rozwiązaniami zadań trójwymiarowych dla jednorodnych deformacji. Jako model ciała typu powłoka przyjęli powłokę Cosseratów z jednym директором. W pracy tej można znaleźć uwagę, że przyjęcie pojedynczego direktora jest wystarczające dla powłok cienkich, jednak może być niedostateczne w przypadku powłok grubych, bądź sytuacji kiedy należy uwzględnić ogólniejsze warunki brzegowo-początkowe. Wtedy może zająć potrzeba wzbogacenia modelu o dodatkowe direktory. Jednak Antman (1995) stwierdza, że teorie z trzema директорami nie są ani prostsze ani bardziej ogólne od teorii jednodirektorowych (zob. Antman 1995, strona 600 u dołu).

Makowski i Stumpf (1994) przedstawili kompletnie i w zwarty sposób podstawowe wzory i zależności dla rozpatrywanej w niniejszej monografii teorii powłok.

Sansour i Bednarczyk (1995) poprzez redukcję trójwymiarowego ośrodka Cosseratów sformułowali dwuwymiarowy model Cosseratów i stowarzyszone elementy skończone. Jako równanie konstytutywne przyjęli uogólnienie klasycznych równań znanych z mechaniki ośrodka Cauchy'ego.

Craine i Newman (1996) wykorzystali model powierzchni Cosseratów z trzema директорami do badania pełzania w stanie ustalonym w połączeniach spawanych.

Chróścielewski (1996) dał kompletne przedstawienie podstaw sześcioparametrowej teorii powłok i związanych z tym sformułowań słabych, wraz z wynikającymi skończonymi elementami powłokowymi. W pracy tej opracowano różne rodziny elementów bazujących na różnych sformułowaniach słabych, o różnej liczbie węzłów. Badano wpływ różnych schematów interpolacji zmiennych niezależnych. Przedstawiono pogłębioną analizę porównawczą szeregu przykładów numerycznych. W szczególności w toku analiz numerycznych, oszacowano wpływ współczynnika konstytutywnego<sup>41)</sup>  $\alpha_i$  na wartości uogólnionych przemieszczeń.

---

<sup>41)</sup> Równania konstytutywne są przedmiotem rozważań przedstawionych w dalszej części monografii.

Steigmann (1999) badał warunki zgodności między teorią płyt Kirchhoffa-Love'a a bardziej ogólną teorią powłok Cosseratów z jednym директором.

Ciarletta (1999) badał teorię zgięciową płyt w ośrodku w ramach modelu typu microstretch.

Rubin (2000) opublikował monografię poświęconą teorii ośrodka Cosseratów i jej zastosowaniu do opisu zachowania powłok, prętów oraz punktów.

Chróścielewski i inni (2002), Lubowiecka i Chróścielewski (2002), Lubowiecka (2004) przenieśli rozważania teorii sześcioparametrowej na grunt dynamiki. W pracach tych sformułowano problem brzegowo-początkowy dla rozpatrywanej teorii. Następnie opracowano uogólnienie na przestrzeń konfiguracyjną, zawierającą grupę obrotów  $SO(3)$ , algorytmu Newmarka sformułowanego w klasycznej przestrzeni wektorowej  $E^3$ . W pracach tych analizowano szereg przykładów testujących, z uwzględnieniem powłok strukturalnych zawierających ortogonalne połączenia płatów.

Eremeyev i Pietraszkiewicz (2004, 2009) badali zagadnienie przejść fazowych w materiale powłoki w ramach rozpatrywanej w niniejszej rozprawie teorii powłok. W pracy tej wyprowadzono równania równowagi w formie słabej. W rozważaniach założono, że przejście fazowe dokonuje się na pewnej powierzchniowej krzywej osobliwej, której położenie nie jest znane. Rozpatrywano różne typy krzywej przejścia fazowego: taką, na której przemieszczenia i obroty są ciągłe (tzw. krzywe koherentne) oraz krzywą, na której założenie ciągłości obrotów nie obowiązuje (krzywe niekoherentne).

W pracy Witkowski (2005) sformułowano cztery 4-węzłowe skończone elementy powłokowe, w których do usunięcia zjawiska blokady membranowej i blokady ścinania wykorzystano technikę EAS. Oryginalnie rozszerzono tym samym zakres stosowania koncepcji wzbogaconych odkształceń na sformułowania z niesymetrycznymi miarami odkształceń. Badano różne schematy wzbogacania odkształceń oraz przeprowadzono szereg testów numerycznych. Porównywano otrzymane wyniki w zakresie ich zgodności z rozwiązaniami odniesienia, jak i oceniając koszt rozwiązania mierzony liczbą iteracji. Jeden z elementów oraz otrzymane przy jego pomocy rezultaty przedstawiono w pracy Chróścielewski i Witkowski (2006).

W pracy Chróścielewski i inni (2006) zastosowano powłokowe elementy skończone CAM (zob. Chróścielewski i inni 1992 i Chróścielewski 1996) do analizy zagadnienia wybożenia giętno-skrętnego bisymetrycznych przekrojów cienkościennych otwartych<sup>42)</sup>. Badano ścieżki przed- i pokrytyczne, a także zjawisko lokalizacji<sup>43)</sup> postaci wybożenia w zależności od przyjętych imperfekcji. Studia te ostatnio rozszerzył Machado (2010) na zakres przekrojów cienkościennych wykonanych z materiałów kompozytowych.

Eremeyev i Pietraszkiewicz (2006) badali grupę materiałowej symetrii w równaniach konstytutywnych. Wprowadzili między innymi różne modele powłok: płynną, stałą i membranową.

Konopińska i Pietraszkiewicz (2007) rozpatrywali ściśle warunki równowagi na osobliwych krzywych powierzchniowych, modelujących zarówno rozwidlenia powłok, jak i ich samoprzecięcia.

Bîrsan (2007, 2009) rozważał pewną wersję zasady de Saint-Venanta dla powłok Cosseratów z jednym deformowalnym директором.

---

<sup>42)</sup> Por. także prace Szymczak i inni (2003), Chróścielewski i inni (2004).

<sup>43)</sup> Zagadnienie lokalizacji spotyka się także w innych dziedzinach, zob. na przykład praca Garstecki i inni (2003), Pamin i de Borst (1998).

Altenbach i Eremeyev (2009) sformułowali model liniowo sprężystej płyty z trzema niezależnymi przesunięciami i trzema niezależnymi obrotami jako parametrami teorii. Jednym z istotnych aspektów tej pracy jest wyprowadzenie wzoru na równanie konstytutywne dla momentów owinięcia. W pracy Chróścielewski i Witkowski (2010b) badano szczegółowo te równania, zwracając szczególną uwagę na współczynnik konstytutywny  $\alpha_i$  znany w rozpatrywanej w niniejszej monografii nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok. W szczególności Chróścielewski i Witkowski pokazali, że przy założeniu równoważności równań konstytutywnych Altenbacha i Eremeyeva i równań z rozpatrywanej tu teorii powłok można wyprowadzić zamknięty wzór na współczynnik owinięcia  $\alpha_i$ .

## 2.2. Liniowy ośrodek Cosseratów

Za Nowackim (Nowacki 1971) przytacza się podstawowe dla liniowego ośrodka Cosseratów związki. Przedstawione skrócone wyprowadzenia prowadzone są w kartezjańskim układzie współrzędnych.

Nowacki przeprowadził następujące rozważanie. Wydzieliwszy myślowo z ciała pewną objętość  $V'$  ograniczoną powierzchnią  $A'$ , założył, że transmisja oddziaływań między cząsteczkami wewnątrz objętości  $V$  a pozostałymi cząsteczkami odbywa się poprzez dowolny element  $dA \subset A$  z zadanymi na nim: wektorem naprężenia siłowego  $\mathbf{p}dA$  i wektorem naprężenia momentowego  $\mathbf{m}dA$ . Następnie, stosując znaną argumentację, wyznaczył naprężenia w punkcie ośrodka, co doprowadziło do określenia składowych  $\sigma_{jk}$  tensora naprężeń  $\boldsymbol{\sigma}$  i składowych  $\mu_{ji}$  tensora naprężeń momentowych  $\boldsymbol{\mu}$ . Tensory te są odpowiednio związane z wektorami  $\mathbf{p}$  i  $\mathbf{m}$  poprzez uogólniony postulat Cauchy'ego

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}, \quad \mathbf{m} = \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{n} \quad (2.1)$$

Zasady zachowania pędu i momentu pędu zapisuje się odpowiednio w postaci

$$\int_{V'} \mathbf{f} dV + \int_{A'} \mathbf{p} dA = \frac{D}{Dt} \int_{V'} \rho \mathbf{v} dV, \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \quad (2.2)$$

$$\int_{V'} (\mathbf{r} \times \mathbf{f} + \mathbf{b}) dV + \int_{A'} (\mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mathbf{m}) dA = \frac{D}{Dt} \int_{V'} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} + \mathbf{J} \mathbf{w}) dV, \quad \mathbf{w} = \dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (2.3)$$

Tutaj  $\mathbf{f}$  i  $\mathbf{b}$  są odpowiednio siłą masową i momentem masowym odniesionymi do jednostki masy,  $\mathbf{r}$  jest promieniem wodzącym liczonym od ustalonego punktu ciała,  $\mathbf{J} \mathbf{w}$  jest spinowym momentem pędu, a  $\rho$  jest gęstością masy. We wzorach (2.2) i (2.3) operator

$$\frac{Df_a}{Dt} = \frac{\partial f_a}{\partial t} \quad (2.4)$$

oznacza obliczanie pochodnej materialnej pola w opisie materialnym, por. na przykład Rymarz (1993). Wykorzystując twierdzenie Gaussa o dywergencji, wobec dowolności wyboru objętości  $V'$  otrzymuje się lokalne równanie ruchu

$$\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^T + \mathbf{f} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad \sigma_{ji,j} + f_i = \rho \dot{v}_i, \quad \dot{v}_i = \frac{d^2 u_i}{dt^2} = \ddot{u}_i \quad (2.5)$$

gdzie operator dywergencji w układzie kartezjańskim określony jest przez

$$\text{Div } \mathbf{T} = T_{ij,j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k) \cdot \mathbf{e}_j = T_{ij,j} \mathbf{e}_i \quad (2.6)$$

Drugie równanie ruchu ma postać

$$\text{Div } \boldsymbol{\mu}^T + \mathbf{c} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = J\dot{\mathbf{w}}, \quad \dot{w}_i = \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} = \ddot{\varphi}_i \quad (2.7)$$

Poszczególne kroki przy przejściach od równań (2.2) do (2.5) oraz od (2.3) do (2.7) można odnaleźć na przykład w pracy Nowacki (1971). W równaniu (2.7) symbol  $:$  oznacza podwójne nasunięcie trójwymiarowego tensora Levi-Civita  $\mathbf{c}$  na tensor naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$  tzn.

$$(\mathbf{c} : \boldsymbol{\sigma})_i = \epsilon_{ijk} \sigma_{mn} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) : (\mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n) = \epsilon_{ijk} \sigma_{mn} \delta_{nk} \delta_{jm} \mathbf{e}_i = \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} \mathbf{e}_i \quad (2.8)$$

W konsekwencji, wykorzystując (2.6) i (2.8), postać równania (2.7) w składowych przyjmuje postać

$$\mu_{ji,j} + \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + b_i = J\dot{w}_i \quad (2.9)$$

Równania (2.5) i (2.7) są poszukiwanymi równaniami ruchu liniowego trójwymiarowego ośrodka Cosseratów. Ze wzoru (2.7) (równoważnie ze wzoru (2.9)) wynika, że tensor naprężeń  $\boldsymbol{\sigma}$  jest niesymetryczny. Dalej wprowadza się gęstość  $K$  energii kinetycznej (por. Rymarz 1993)

$$K = \frac{1}{2} \int_V (\rho \mathbf{v}^2 + J \mathbf{w}^2) dV \quad (2.10)$$

Szerzej na temat pojęcia energii pisze Badur (2009). Gęstość pracy sił zewnętrznych na jednostkę czasu, czyli ich moc, wyraża się wzorem

$$L = \int_V (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{w}) dV + \int_A (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{w}) dA \quad (2.11)$$

W kolejnym kroku zapisuje się zasadę zachowania energii mechanicznej (por. na przykład Rymarz 1993)

$$\frac{D}{Dt} (K + U) = L \quad (2.12)$$

Podstawienie do (2.12) równań (2.10) i (2.11) z jednoczesnym wykorzystaniem (2.4) prowadzi do

$$\int_V (\rho \mathbf{v} \mathbf{a} + J \mathbf{w} \dot{\mathbf{w}} + \dot{U}) dV = \int_V (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{w}) dV + \int_A (\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{w}) dA \quad (2.13)$$

Całkę powierzchniową w (2.13) rozpisuje się, wykorzystując (2.1) oraz wzór 2.22<sub>3</sub> z pracy Gurtin i Murdoch (1975), tzn.

$$\int_A \mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \mathbf{n} dS = \int_V \{ \mathbf{x} \cdot (\text{Div } \mathbf{T}) + \mathbf{T} \cdot \nabla \mathbf{x} \} dV \quad (2.14)$$

co prowadzi do równania

$$\begin{aligned} \int_A (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}) dA &= \int_V \text{Div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{w}) dV = \\ &= \int_V (\mathbf{v} \cdot \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^T + \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \text{Div } \boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\mu}^T \cdot \nabla \mathbf{w}) dV \end{aligned} \quad (2.15)$$

Podstawienie (2.15) do (2.13) daje

$$\begin{aligned} \int_V (\rho \mathbf{v}\mathbf{a} + J\mathbf{w}\dot{\mathbf{w}} + \dot{U})dV = \\ = \int_V (\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{w})dV + \int_V (\mathbf{v}\cdot\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^T + \boldsymbol{\sigma}^T\cdot\nabla\mathbf{v} + \mathbf{w}\cdot\text{Div } \boldsymbol{\mu}^T + \boldsymbol{\mu}^T\cdot\nabla\mathbf{w})dV \end{aligned} \quad (2.16)$$

Wykonanie w (2.16) wymaganych przekształceń prowadzi do równania

$$\begin{aligned} \int_V (\rho \mathbf{v}\mathbf{a} + J\mathbf{w}\dot{\mathbf{w}} + \dot{U} - \mathbf{v}\cdot\text{Div } \boldsymbol{\sigma}^T - \boldsymbol{\sigma}^T\cdot\nabla\mathbf{v} - \mathbf{w}\cdot\text{Div } \boldsymbol{\mu}^T - \boldsymbol{\mu}^T\cdot\nabla\mathbf{w} - \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{w})dV \\ = \int_V (\dot{U} + \mathbf{v}\cdot(\rho\mathbf{a} - \text{Div } \boldsymbol{\sigma}^T - \mathbf{f}) + \\ \mathbf{w}\cdot(J\dot{\mathbf{w}} - \text{Div } \boldsymbol{\mu}^T - \mathbf{b} - (\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{\sigma})) - \boldsymbol{\sigma}^T\cdot\nabla\mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}^T\cdot\nabla\mathbf{w} + \mathbf{w}\cdot(\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{\sigma}))dV \\ = \int_V (\dot{U} - \boldsymbol{\sigma}^T\cdot\nabla\mathbf{v} - \boldsymbol{\mu}^T\cdot\nabla\mathbf{w} + \mathbf{w}\cdot(\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{\sigma}))dV = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Równanie (2.17) jest spełnione dla dowolnej objętości  $V$ . Zakładając ciągłość wyrażenia podcałkowego i wykorzystując zależność

$$\int_V f dV = 0 \Rightarrow f = 0 \quad (2.18)$$

(zob. Chadwick 1999, problem 19), otrzymuje się równanie na pochodną materialną gęstości energii wewnętrznej

$$\dot{U} = \boldsymbol{\sigma}^T\cdot\nabla\mathbf{v} + \boldsymbol{\mu}^T\cdot\nabla\mathbf{w} - \mathbf{w}\cdot(\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{\sigma}) \quad (2.19)$$

W ustalonej bazie ostatnie wyrażenie rozpisuje się jako

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^T\cdot\nabla\mathbf{v} + \boldsymbol{\mu}^T\cdot\nabla\mathbf{w} - \mathbf{w}\cdot(\boldsymbol{\epsilon}:\boldsymbol{\sigma}) \rightarrow \\ \sigma_{ji}v_{k,i}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) + \mu_{ji}w_{k,i}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) - w_i \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = \\ \sigma_{ji}v_{k,i} \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu_{ji}w_{k,i} \delta_{ik} \delta_{jl} - w_i \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = \\ \sigma_{jk} v_{k,j} + \mu_{jk} w_{k,j} - w_i \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = \sigma_{jk} (v_{k,j} - w_i \epsilon_{ijk}) + \mu_{jk} w_{k,j} = \sigma_{jk} \dot{\gamma}_{jk} + \mu_{jk} \dot{\kappa}_{jk} \end{aligned} \quad (2.20)$$

We równaniu (2.20)  $\dot{\gamma}_{jk}$  są składowymi tensora prędkości odkształcenia, gdzie tensor odkształcenia określony jest przez

$$\boldsymbol{\gamma} = \nabla^T \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\varphi}, \quad \gamma_{jk} = u_{k,j} - \varphi_i \epsilon_{ijk} \quad (2.21)$$

a  $\dot{\kappa}_{jk}$  określa składowe tensora prędkości skręcenia. Tutaj tensor skręcenia określony jest przez

$$\boldsymbol{\kappa} = \nabla^T \boldsymbol{\varphi}, \quad \kappa_{ij} = \varphi_{j,i} \quad (2.22)$$

Równania konstytutywne dla liniowego ośrodka Cosseratów dyskutowane będą w kolejnych rozdziałach niniejszej monografii.

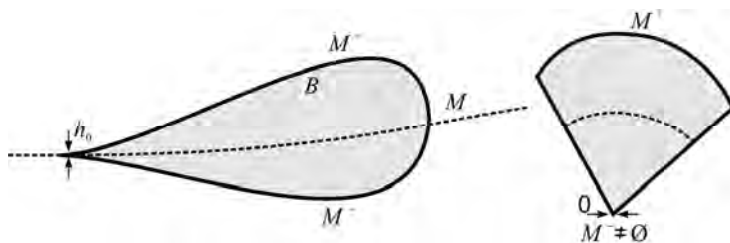
## Rozdział 3

# TEORIA POWŁOK

### 3.1. Opis powierzchni odniesienia powłoki

Z punktu widzenia mechaniki, powłoka jest ciałem trójwymiarowym, które w konfiguracji nieodkształconej zajmuje obszar  $B$  o pewnej specyficznej geometrii (zob. na przykład Naghdi 1972, Makowski i Stumpf 1994 Chróścielewski i inni 2004). Ciało to podlega ogólnym prawom mechaniki. Jako szczególną geometrię powłoki w konfiguracji nieodkształconej rozumie się zwykle obszar  $B$ , którego dwa wymiary są dużo większe niż pozostały trzeci wymiar, wzdłuż którego mierzy się początkową grubość powłoki  $h_0$ .

W dalszym ciągu powłokę utożsamia się z obszarem ciała  $B$ . Dalej zakłada się że brzeg powłoki  $B$  jest sumą trzech części: powierzchni górnej  $M^+$ , powierzchni dolnej  $M^-$  i prostokątnej powierzchni bocznej  $\partial B$ . Ponadto przyjmuje się, że  $M^+ \cap M^- = \emptyset$ , co wyklucza ‘patologiczną’ sytuację zerowania się grubości powłoki  $h_0$ , zob. rys. 3.1.



Rys. 3.1. Niedopuszczalne sytuacje określania grubości powłoki

Powłokę zwykle reprezentuje powierzchnia podstawowa  $M \subset [M^-, M^+]$ , na której zapisuje się wszystkie prawa mechaniki powłok w opisie Lagrange’a. Na tym etapie rozważań powierzchnia boczna może być dowolnie zorientowana (nachylona) względem powierzchni podstawowej  $M$ . W szczególności,  $M$  może być powierzchnią środkową to znaczy równoodległą od  $M^+$  i  $M^-$ , zob. na przykład Lewiński i Telega (2000), Borkowski (2001). Istnieją jednak przypadki (Pietraszkiewicz 2001), w których wygodniejsza może okazać się powierzchnia podstawowa  $M$  ważona według gęstości masy obszaru  $B$ , względnie inna powierzchnia geometryczna, na przykład  $M^+$  lub  $M^-$ . Takie przyjęcie może być zasadne w analizie powłok niejednorodnych, powłok z mikrostrukturą, powłok o znacznych zmianach grubości, a także w zagadnieniach dużych odkształceń lub/i kontaktu.

Literatura przedmiotu zwykle poświęcona jest powłokom regularnym. W pracy Chróścielewski i inni (2004) podano określenie tego typu powłoki jako takiej, w której powierzchnia<sup>44)</sup> podstawowa jest klasy  $C^1$ , a jej brzeg  $\partial M$  jest skończoną sumą zamkniętych krzywych Jordana. Krzywe brzegowe są odcinkami klasy  $C^1$  i nie zawierają punktów osobliwych.

<sup>44)</sup> Pojęcie powierzchni jak i inne, wybrane pojęcia matematyczne są przedstawione w Dodatku D.



W ogólnym przypadku powierzchnia podstawowa powłoki może być jednak powierzchnią kawałkami regularną, to znaczy, że składać się może ze skończonej liczby płatów regularnych  $M^{(k)}$ ,  $k=1,2,3,\dots,p$ . Jako przykład takiej powłoki na rys. 3.2 przedstawiono powłokę złożoną z trzech płatów:  $M^{(1)}$ ,  $M^{(2)}$ ,  $M^{(3)}$  połączonych wzdłuż wspólnej dla wszystkich płatów krawędzi  $\Gamma^{(1,2,3)}$ . Formalnie więc (por. Chróścielewski i inni 2004)

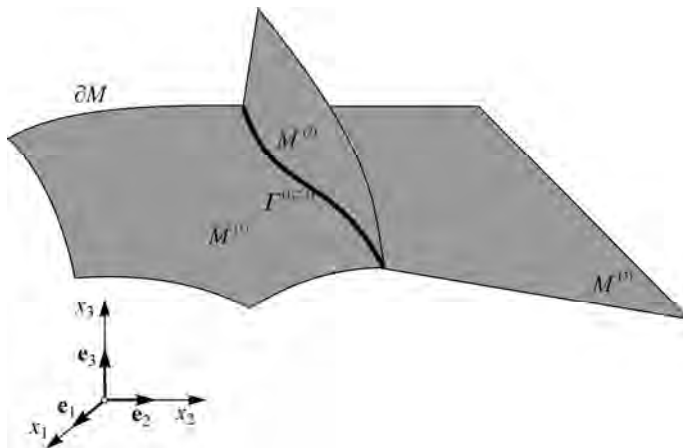
$$M = \bigcup_{k=1}^p (M^{(k)} \cup \partial M^{(k)}) \quad (3.1)$$

Występujące w określeniu (3.1) płaty  $M^{(k)}$ , jak i ich brzegi  $\partial M$  mają następujące własności:

- każdy płatek  $M^{(k)}$  jest ograniczoną, spójną (również wielospójną) i gładką powierzchnią klasy  $C^q$ ,  $k \geq 1$ , której brzeg  $\partial M^{(k)}$  składa się ze skończonej liczby krzywych Jordana, zorientowanych zgodnie z  $M^{(k)}$  i nie zawierających punktów osobliwych,
- żadne dwa płaty  $M^{(k)}$  nie mają wspólnych punktów wewnętrznych,
- dwa płaty  $M^{(k)}$  i  $M^{(m)}$  mogą mieć jako wspólną część brzegów co najwyżej kawałkami gładką krzywą  $\Gamma^{(k,m)}$

$$\Gamma^{(k,m)} = \partial M^{(k)} \cap \partial M^{(m)}, \quad k \neq m \quad (3.2)$$

- dwie krzywe  $\Gamma^{(k,m)}$  mogą mieć co najwyżej jeden punkt wspólny.

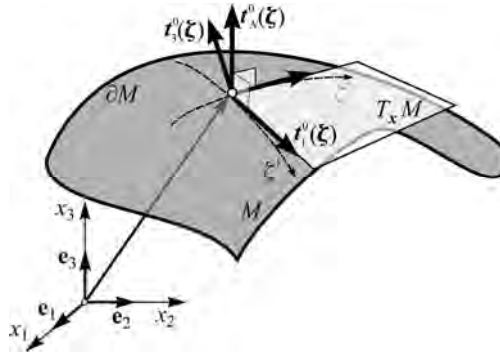


Rys. 3.2. Wielopłatowa struktura powłokowa z wyróżnionymi płatami i krawędzią połączenia

Ze względu na cel niniejszej pracy, jakim jest, między innymi, analiza MES, w dalszym ciągu rozważań pomija się dyskusję własności krzywej  $\Gamma^{(k,m)}$  połączenia (nieciągłości). W przyjętym tutaj sformułowaniu MES zakłada się, że krzywa połączenia płatów znajduje się zawsze na krawędzi elementu skończonego i nigdy go nie przecina. Pozwala to zawęzić dalszą dyskusję do obszaru pojedynczego płata  $M^{(k)}$  powłoki wielogałęziowej (wielopłatowej). Wobec tego, w dalszym ciągu pomija się górną etykietę w oznaczeniu powierzchni podstawowej pojedynczego płata powłoki tj.  $M^{(k)} \equiv M$ . Więcej informacji dotyczących krzywej połączenia znaleźć można w pracach Makowski i Stumpf (1994), Chróścielewski (1996), Makowski i inni (1999), Chróścielewski i inni (2004), Eremeyev i Pietraszkiewicz (2004), Pietraszkiewicz i inni (2007), Konopińska i Pietraszkiewicz (2007).

Opis powierzchni podstawowej  $M$  powłoki jest klasycznym zagadnieniem teorii powłok por. na przykład, Pietraszkiewicz (1976), Başar i Krätzig (2001), Woźniak (2001), Eisenhart (2010)<sup>45)</sup>, Makowski (1981), Konopińska i Pietraszkiewicz (2007). Niniejszy podrozdział przedstawia syntetyczne ujęcie zagadnienia opisu powierzchni podstawowej. Zawiera on podstawowe dla zakresu monografii wzory i definicje. Szersze ujęcie tych zagadnień wraz z dyskusją można odnaleźć w cytowanej powyżej literaturze.

Zakłada się, że powierzchnia odniesienia  $M$  jest parametryzowana współrzędnymi  $(\zeta^\alpha, \zeta^i) = \zeta^i$ , gdzie  $\alpha = 1, 2$  oraz  $i = 1, 2, 3$ . Tutaj współrzędna  $\zeta$  mierzy odległość wzdłuż linii wyznaczonej wektorem  $\mathbf{t}_3^0$ , niekoniecznie kolinearnym z wektorem  $\mathbf{t}_N^0$  normalnym do powierzchni  $M$ , zob. rys. 3.3. W dalszym ciągu tego rozdziału nie określa się położenia powierzchni podstawowej wzdłuż  $\zeta$ .



Rys. 3.3. Parametryzacja powierzchni odniesienia powłoki

Kowariantne  $\mathbf{t}_\beta^0$  wektory bazowe  $M$  i kowariantne współrzędne  $a_{\alpha\beta}$  tensora metrycznego dane są odpowiednio przez

$$\mathbf{t}_\beta^0 = \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta^\beta} = \mathbf{P} \mathbf{x}_{,\beta} \quad (3.3)$$

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{t}_\alpha^0 \cdot \mathbf{t}_\beta^0, \quad \bar{a} = \det(a_{\alpha\beta}) \quad (3.4)$$

Występujący we wzorze (3.3) operator  $\mathbf{P}$  jest operatorem projekcji, działającym z przestrzeni euklidesowej  $E$  w przestrzeń styczną  $T_x M$ . Dalsze określenie  $\mathbf{P}$  wymaga określenia wektora normalnego  $\mathbf{t}_N^0$  do powierzchni  $M$ .

Wprowadzając dwuwymiarowy symbol permutacyjny  $e_{\alpha\beta}$  określony jako

$$e_{\alpha\beta} \equiv e^{\alpha\beta} = \{e_{11} = e_{22} = 0, e_{12} = e_{21} = 1\} \quad (3.5)$$

określa się dwuwymiarowy pseudotensor Ricci<sup>46)</sup> (Lewiński i Telega 2000)  $e^{\alpha\beta}$

$$e^{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} \sqrt{\bar{a}} \quad (3.6)$$

Wtedy wektor  $\mathbf{t}_N^0$  normalny do  $M$  wyraża się wzorem

<sup>45)</sup> Jest to elektroniczna wersja książki Eisenhart L.P.: *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Dover, New York, 1960.

<sup>46)</sup> Borkowski (2001) nazywa ten obiekt dwuwektorem Ricciego, zob. równanie 1.6 tamże.

$$\mathbf{t}_N^0 = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} \mathbf{x}_{,\alpha} \times \mathbf{x}_{,\beta} \quad (3.7)$$

Operator projekcji  $\mathbf{P}$  wzdłuż wektora normalnego  $\mathbf{t}_N^0$  do powierzchni podstawowej  $M$  w punkcie  $\mathbf{x} \in M$  przyporządkowuje każdemu wektorowi  $\mathbf{d}$  jego składową styczną  $\mathbf{Pd} \in T_x M$ . Szersze omówienie własności operatora projekcji można znaleźć na przykład w pracach Gurtin i Murdoch (1975), Chróścielewski i inni (2004).

Równania (3.3) i (3.4) pozwalają określić tak zwaną pierwszą formę fundamentalną powierzchni (Başar i Krätzig 2001, Eisenhart 2010)

$$ds^2 = d\mathbf{t} \cdot d\mathbf{t} = \mathbf{t}_\alpha^0 \cdot \mathbf{t}_\beta^0 d\zeta^1 d\zeta^2 = a_{\alpha\beta} d\zeta^1 d\zeta^2 \quad (3.8)$$

Bazowe wektory kontrawariantne  $\mathbf{t}^{0\beta}$  powierzchni  $M$  spełniają relację

$$\mathbf{t}_\alpha^0 \cdot \mathbf{t}^{0\beta} = \delta_\alpha^\beta \quad (3.9)$$

zaś kontrawariantne współrzędne tensora metrycznego  $a^{\alpha\beta}$  oblicza się ze wzoru

$$a^{\alpha\beta} = \mathbf{t}^{0\alpha} \cdot \mathbf{t}^{0\beta} \quad (3.10)$$

Ponieważ powierzchnia podstawowa  $M$  może być dowolnie umieszczona w obszarze ciała  $B$ , położenie typowego punktu  $\mathbf{x} \in B$  można opisać związkami

$$\mathbf{x}(\mathbf{x}, \zeta) = \mathbf{x} + \zeta \mathbf{t}_3^0 \quad (3.11)$$

Kowariantne wektory bazowe w tak określonym punkcie  $\mathbf{x}$  powłoki (zob. rys. 3.4), wyrażają się wzorem

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{x}_{,i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.12)$$

a związane z nimi kowariantne współrzędne tensora metrycznego mają postać

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \quad g = \det(g_{ij}) \quad (3.13)$$

Różniczkowy element objętości wyraża się zależnością

$$dV = \sqrt{g} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 = \mu d\zeta da, \quad \mu = \sqrt{\frac{g}{a}} \quad (3.14)$$

a różniczkowy element powierzchni

$$da = \sqrt{a} d\zeta^1 d\zeta^2 \quad (3.15)$$

Z równania (3.14) wynika przepis na całkowanie pewnej wielkości wzdłuż grubości powłoki w kierunku  $\mathbf{t}_3^0$  tzn.

$$\iiint_V (\dots) dv = \iint_A \left( \int_{-h^-}^{+h^+} (\dots) \mu d\zeta \right) da \quad (3.16)$$

Wyrażone poprzez wektory  $\mathbf{x}_{,\alpha}$  i  $\mathbf{t}_3^0$  powierzchni podstawowej  $M$ , kowariantne wektory bazowe w punkcie  $\mathbf{x}$  określone są wzorami:

$$\mathbf{g}_\alpha^0 = \mathbf{x}_{,\alpha} + \zeta \mathbf{t}_{,\alpha}^0, \quad \mathbf{g}_3^0 = \mathbf{t}_3^0 \quad (3.17)$$

Wektory kontrawariantne w punkcie  $\mathbf{x}$  można obliczyć z zależności

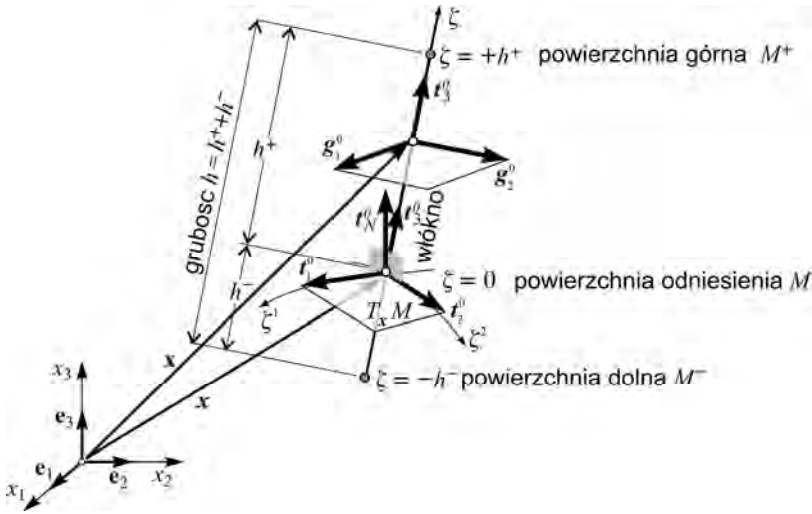
$$\mathbf{g}^{0\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{ij\beta} \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j \quad (3.18)$$

Tutaj  $\epsilon^{ij\beta}$  jest symbolem permutacyjnym tzn.

$$\epsilon^{123} = \epsilon^{231} = \epsilon^{312} = -\epsilon^{132} = -\epsilon^{321} = -\epsilon^{213} = 1, \quad (3.19)$$

oraz 0 w pozostałych przypadkach. W większości zadań inżynierskich, powierzchnia brzegowa  $\partial B$  nie jest dowolnie nachylona do powierzchni podstawowej  $M$ , lecz jest do niej ortogonalna. To pociąga za sobą równość wektorów

$$\mathbf{t}_N^0 \equiv \mathbf{t}_3^0. \quad (3.20)$$



Rys. 3.4. Wektory bazowe powierzchni podstawowej i w dowolnym punkcie  $\mathbf{x}$

W konsekwencji równości (3.20) definicje wektorów bazy w dowolnym punkcie  $\mathbf{x}$ , wyrażone równaniami (3.17) i (3.18), można odpowiednio zapisać jako

$$\mathbf{g}_\alpha^0 = \mu_\alpha^\beta \mathbf{x}_{,\beta} = (\delta_\alpha^\beta - \zeta b_\alpha^\beta) \mathbf{x}_{,\beta} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{g}^\beta = (\mu^{-1})_\lambda^\beta a^{\lambda\eta} \mathbf{x}_{,\eta}, \quad \mathbf{g}^3 = \mathbf{g}_3 \equiv \mathbf{t}_3^0 \quad (3.22)$$

W równaniu (3.21) poprzez

$$b_\alpha^\eta = a^{\eta\beta} b_{\alpha\beta} \quad (3.23)$$

oznaczono mieszane współrzędne tensora krzywizny powłoki. Występujące we wzorze (3.23) kowariantne współrzędne (symetrycznego) tensora krzywizny wyznacza się poprzez różniczkowanie wyrażenia  $\mathbf{t}_N^0 \cdot \mathbf{t}^0$  po współrzędnych  $\zeta^\alpha$

$$\mathbf{t}_N^0 \cdot \mathbf{t}_\beta^0 = 0 \Rightarrow (\mathbf{t}_N^0 \cdot \mathbf{t}_\beta^0)_{,\alpha} = 0 \Rightarrow \mathbf{t}_N^0 \cdot \mathbf{t}_{\beta,\alpha}^0 = -\mathbf{t}_{N,\alpha}^0 \cdot \mathbf{t}_\beta^0 = \mathbf{t}_N^0 \cdot \mathbf{t}_{\alpha,\beta}^0 = -\mathbf{t}_{N,\beta}^0 \cdot \mathbf{t}_\alpha^0 \quad (3.24)$$

Wykorzystując (3.20), można napisać poszukiwany wzór na kowariantne współrzędne  $b_{\alpha\beta}$

$$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{t}_\beta^0 \cdot \mathbf{t}_{3,\alpha}^0 = \mathbf{t}_N^0 \cdot \mathbf{t}_{\alpha,\beta}^0 \quad (3.25)$$

Na mocy równań (3.23) i (3.25) można podać określenie współrzędnych  $\mu_\alpha^\eta$  tensora przeniesienia (ang. *shifter tensor*) ze wzoru (3.21)

$$\mu_\alpha^\eta = \delta_\alpha^\eta - \zeta b_\alpha^\eta \quad (3.26)$$

Ogólnie (zob. na przykład Naghdi 1963, Kreja 2007, wzór 3.28 i uwagi) tensor ten jest tensorem dwupunktowym, wyrażonym przez wektory kontrawariante z przestrzeni w punkcie  $\mathbf{x} \in T_x M$  i kowariantne wektory z punktu  $\mathbf{x}$  opisane wzorami (3.17)

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{g}_j^0 \otimes \mathbf{t}^{0j} \quad (3.27)$$

### 3.1.1. Baza ortonormalna

W podejściu przyjętym w niniejszej pracy baza  $\mathbf{t}_i^0$  jest przyjmowana w sposób szczególny, tj. jako ortonormalna. Z założenia o ortonormalności zanika różnica między kowariantnymi i kowariantnymi współrzędnymi tensorów. Prawdziwe są też następujące zależności

$$\mathbf{t}_i^0 \cdot \mathbf{t}_j^0 = \delta_{ij}, \quad \mathbf{t}_i^0 = \overline{\mathbf{t}_i^0}, \quad \|\mathbf{t}_i^0\| = 1, \quad (3.28)$$

gdzie  $i, j = 1, 2, 3$ . Stąd, dla współrzędnych tensorów metrycznych (3.4) i (3.10) otrzymuje się

$$a_{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \quad (3.29)$$

Wobec przyjęcia  $\mathbf{t}_3^0$  i  $\mathbf{t}_N^0$  jako kolinearnych we wzorze (3.20), w dalszym ciągu wektor normalny do powierzchni odniesienia  $M$  oznacza się symbolem  $\mathbf{t}^0$ . Współrzędne tego wektora wyznacza się z relacji

$$\mathbf{t}_N^0 \equiv \mathbf{t}_3^0 \equiv \mathbf{t}^0 = \frac{\mathbf{t}_1^0 \times \mathbf{t}_2^0}{\|\mathbf{t}_1^0 \times \mathbf{t}_2^0\|}. \quad (3.30)$$

W rozpatrywanym w niniejszej pracy podejściu, bazę  $\mathbf{t}_i^0$  wprowadza się poprzez transformację pewnej ustalonej w przestrzeni  $E^3$  bazy ortonormalnej  $\mathbf{e}_i$ , zob. rys. 3.4,

$$\mathbf{t}_i^0(\mathbf{x}) = \mathbf{T}_0(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \quad (3.31)$$

gdzie

$$\mathbf{T}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_i^0(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{e}_i \quad (3.32)$$

jest tak zwanym tensorem struktury powierzchni podstawowej  $M$ . W konsekwencji związków (3.28), tensor  $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$  należy do grupy obrotów  $SO(3)^{47)}$ , a zatem równanie (3.31) opisuje obrót bazy  $\mathbf{e}_i$  do  $\mathbf{t}_i^0$ .

W implementacji MES, specyfikacja współrzędnych łukowych  $\zeta^\alpha$  w wybranym punkcie powierzchni odniesienia  $M$  w równaniu (3.3) odbywa się pośrednio, poprzez podanie jako danych zadania: współrzędnych wektora wodzącego  $\mathbf{x}$  i wektorów bazy stycznej  $\mathbf{t}_0^\beta$  obliczanych według równania (3.3).

Wobec ortogonalności  $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$  relacja odwrotna do (3.31) ma postać

<sup>47)</sup> Pewne wybrane wiadomości na temat grupy obrotów  $SO(3)$  podane są w Dodatku E.

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{T}_0^T(\mathbf{x})\mathbf{t}_i^0(\mathbf{x}) \quad (3.33)$$

Kowariantne współrzędne tensora krzywizny powierzchni podstawowej powłoki w konfiguracji odniesienia

$$\mathbf{B}_0 = b_{\alpha\beta}^0 \mathbf{t}_0^\alpha \otimes \mathbf{t}_0^\beta = \mathbf{P}(\mathbf{b}_\beta^0) \otimes \mathbf{t}_0^\beta \quad (3.34)$$

wyznacza się z równania (3.25), wykorzystując wzór (3.31) i pomijając argument  $\mathbf{x}$

$$b_{\alpha\beta}^0 = -\mathbf{t}^0_{,\beta} \cdot \mathbf{t}_\alpha^0 = \mathbf{t}_{\alpha,\beta}^0 \cdot \mathbf{t}^0 \quad (3.35)$$

Stałe wektory bazy  $\mathbf{e}_i$  w (3.31) nie podlegają różniczkowaniu. Na mocy relacji (3.33) równanie (3.35) można zapisać jako

$$b_{\alpha\beta}^0 = -\mathbf{t}^0_{,\beta} \cdot \mathbf{t}_\alpha^0 = \mathbf{t}_{\alpha,\beta}^0 \cdot \mathbf{t}^0 = (\mathbf{T}_{0,\beta} \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{t}^0 = (\mathbf{T}_{0,\beta} \mathbf{T}_0^T \mathbf{t}_\alpha^0) \cdot \mathbf{t}^0 = (\mathbf{B}_\beta^0 \mathbf{t}_\alpha^0) \cdot \mathbf{t}^0 \quad (3.36)$$

Tutaj  $\mathbf{B}_\beta^0$  jest tensorem skośnie symetrycznym<sup>48)</sup>

$$\mathbf{B}_\beta^0 = \mathbf{T}_{0,\beta} \mathbf{T}_0^T = \text{ad}(\mathbf{b}_\beta^0) \in so(3) \quad (3.37)$$

Odwzorowanie  $\text{ad}(\dots)$  w równaniu (3.37) zdefiniowane jest jako

$$\text{ad} : E^3 \rightarrow so(3) \quad (3.38)$$

tak, że dla dowolnego wektora  $\mathbf{w} \in E^3$  i tensora  $\mathbf{W} \in so(3)$  obowiązuje

$$\mathbf{w} \rightarrow \mathbf{W} = \text{ad}(\mathbf{w}), \quad \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{w} = \text{ad}^{-1}(\mathbf{W}). \quad (3.39)$$

Tutaj  $\mathbf{w}$  jest wektorem osiowym skośnie symetrycznego tensora  $\mathbf{W}$ , tzn.  $\mathbf{W}\mathbf{a} = \mathbf{w} \times \mathbf{a}$  dla każdego  $\mathbf{a} \in E^3$ . W ustalonej bazie powyższa zależność ma następującą reprezentację macierzową:

$$[\mathbf{W}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{w}_i] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{w}_i] \rightarrow [\mathbf{W}_{ij}] = \text{ad}([\mathbf{w}_i]) \quad (3.40)$$

Szersze ujęcie zagadnień związanych z grupą obrotów przedstawiono w rozdziale 3.4. Przyjęcie założenia o ortonormalności wektorów bazy w równaniach (3.21) i (3.26) pozwala na ich przepisanie odpowiednio jako

$$\mathbf{g}_\alpha^0 = \mu_{\alpha\beta} \mathbf{t}_\beta^0 = (\delta_{\alpha\beta} - \zeta b_{\alpha\beta}^0) \mathbf{t}_\beta^0 \quad (3.41)$$

oraz

$$\mu_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - \zeta b_{\alpha\beta}^0 \quad (3.42)$$

Rozpisując (3.42), otrzymuje się

$$\mu_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 - \zeta b_{11}^0 & -\zeta b_{12}^0 \\ -\zeta b_{21}^0 & 1 - \zeta b_{22}^0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

<sup>48)</sup> Ponieważ  $\mathbf{T}_0 \in SO(3)$  to  $\mathbf{1}_{,\beta} = (\mathbf{T}_0 \mathbf{T}_0^T)_{,\beta} = \mathbf{T}_{0,\beta} \mathbf{T}_0^T + \mathbf{T}_0 \mathbf{T}_{0,\beta}^T = \mathbf{0}$ . Stąd  $\mathbf{T}_{0,\beta} \mathbf{T}_0^T = -\mathbf{T}_0 \mathbf{T}_{0,\beta}^T$ , czyli  $\mathbf{T}_{0,\beta} \mathbf{T}_0^T = -(\mathbf{T}_{0,\beta} \mathbf{T}_0^T)^T$ , a w konsekwencji  $\mathbf{B}_\beta^0 = -(\mathbf{B}_\beta^0)^T$ .

Wymagany w dalszych przekształceniach wyznacznik  $\mu$  z macierzy (3.43) ma postać

$$\mu = (1 - \zeta b_{11}^0)(1 - \zeta b_{22}^0) - \zeta^2 b_{21}^0 b_{12}^0 = 1 - \zeta(b_{22}^0 + b_{11}^0) + \zeta^2(b_{11}^0 b_{22}^0 - b_{21}^0 b_{12}^0) \quad (3.44)$$

Wykorzystując fakt, że wzdłuż krzywizn głównych zachodzi  $b_{12}^0 = 0$  (zob. na przykład Başar i Krätzig 2001), równanie (3.44) można przepisać w postaci

$$\mu = 1 - 2\zeta H + \zeta^2 K, \quad \zeta \in [-h^-, +h^+], \quad h = h^+ + h^- \quad (3.45)$$

Tutaj  $H$  jest krzywizną średnią powierzchni  $M$ , którą można obliczyć z zależności

$$H = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{B}_0 = \frac{1}{2} (b_{22}^0 + b_{11}^0) = \frac{1}{2} (R_{min}^{-1} + R_{max}^{-1}), \quad (3.46)$$

zaś  $K$  jest krzywizną Gaussa powierzchni obliczaną jako

$$K = \det \mathbf{B}_0 = b_{11}^0 b_{22}^0 = R_{min}^{-1} R_{max}^{-1}. \quad (3.47)$$

W równaniach (3.46) i (3.47) tensor krzywizny  $\mathbf{B}_0$  dany jest wzorem (3.34).

## 3.2. Wypadkowe równania równowagi dla powłok regularnych

W ramach rozpatrywanej tutaj teorii powłok szczegółowe wyprowadzenia równań równowagi w formie klasycznej i słabej były dyskutowane między innymi w pracach: Chróścielewski i inni (1992), Makowski i Stumpf (1994), Chróścielewski (1996), Chróścielewski i inni (1997), Libai i Simmonds (1998), Pietraszkiewicz (2001), Chróścielewski i inni (2004), Konopińska i Pietraszkiewicz (2007). Ponadto, skrócone rozważania na ten temat odnaleźć można w pracach, których Autor niniejszej monografii jest współautorem bądź autorem: Witkowski (2005), Chróścielewski i inni (2006), Chróścielewski i Witkowski (2006), Witkowski (2009), Chróścielewski i inni (2010a, 2011). Wobec tak obszernej literatury Autor, bazując na wyżej wymienionych pozycjach literatury, przedstawia poniżej syntetyczne ujęcie zasadniczych w statyce powłok równań. W równaniach wielkości odnoszone są do konfiguracji nieodkształconej.

### 3.2.1. Zasady zachowania

W zagadnieniach czysto mechanicznych obowiązują trzy zasady zachowania: masy, pędu i momentu pędu, zob. np. Marsden i Hughes (1983), Holzapfel (2001). Są one ogólne i obowiązują dla wszystkich ciał materialnych. W zagadnieniach (quasi) statycznych zasada zachowania masy jest spełniona tożsamościowo. Pozostałe dwie zasady redukują się do równań równowagi sił  $\mathfrak{F}(P)$  i równowagi momentów  $\mathfrak{Z}(P)$ , czyli

$$\mathfrak{F}(P) = \mathbf{0}, \quad \mathfrak{Z}(P) = \mathbf{0}. \quad (3.48)$$

Powyższe równania obowiązują dla pewnego podciała  $P \subset B$ . Zgodnie bowiem z zasadami MOC, każde podciało  $P$  jest ciałem, zatem musi posiadać wszystkie jego cechy. W dalszym ciągu do rozważań przyjmuje się opis odniesienia. Siły działające na dowolne podciało  $P$  określa się poprzez gęstość sił objętościowych  $\mathbf{f}$ , mierzoną względem objętości obszaru w konfiguracji odniesienia oraz gęstość sił kontaktowych  $\mathbf{t}$ , mierzoną względem pola powierzchni brzegowej  $\partial P$  ograniczającej obszar  $P$ . Z gęstości sił kontaktowych wyodrębnia się warunki brzegowe w naprężeniach reprezentowane poprzez

pole sił  $\mathbf{t}^*$  zadanych na brzegu ciała  $\partial B_f$ . Całkowitą siłę  $\mathfrak{F}(P)$  i całkowity moment  $\mathfrak{Z}(P)$  działające na podciąło  $P$  obliczamy z następujących zależności

$$\mathfrak{F}(P) = \iiint_P \mathbf{f} dV + \iint_{\partial P \setminus \partial B_f} \mathbf{t} dA + \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{t}^* dA \quad (3.49)$$

$$\mathfrak{Z}(P) = \iiint_P \mathbf{x} \times \mathbf{f} dV + \iint_{\partial P \setminus \partial B_f} \mathbf{x} \times \mathbf{t} dA + \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{x} \times \mathbf{t}^* dA \quad (3.50)$$

Siły kontaktowe  $\mathbf{t}$  wynikają z postulatu Cauchy'ego<sup>49)</sup>

$$\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad (3.51)$$

gdzie  $\mathbf{T}$  jest pierwszym tensorem naprężeń nominalnych Pioli-Kirchhoffa. Wykorzystując w równaniu równowagi sił (3.48)<sub>1</sub> określenie (3.49), definicję (3.51) i twierdzenie Stokesa (por. na przykład Spivak 2006), otrzymuje się równanie równowagi sił

$$\mathfrak{F}(P) = \iiint_P (\text{Div}\mathbf{T} + \mathbf{f}) dV + \iint_{\partial P \cap \partial B_f} (\mathbf{t}^* - \mathbf{T}\mathbf{n}^*) dA = \mathbf{0}. \quad (3.52)$$

Tutaj  $\mathbf{n}^*$  jest jednostkowym wektorem zewnętrznym normalnym do  $\partial B_f$ . Ponieważ  $P$  może być obrane dowolnie, to z równania (3.52) otrzymuje się lokalne prawo równowagi sił i naprężeniowe warunki brzegowe

$$\text{Div}\mathbf{T} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{t}^* = \mathbf{T}\mathbf{n}^*. \quad (3.54)$$

Sprowadzenie do lokalnej postaci równań równowagi momentów (3.50) wymaga pewnych dodatkowych określeń. W pracy Gurtin i Murdoch (1975) udowodniono, między innymi, następującą zależność (zob. równanie 2.22<sub>2</sub> tamże)

$$\int_{\partial P} \mathbf{x} \wedge \mathbf{T}\mathbf{n} dS = \iiint_P \{ \mathbf{x} \wedge (\text{Div}\mathbf{T}) + (\mathbf{F}\mathbf{T}^T - \mathbf{T}\mathbf{F}^T) \} dV \quad (3.55)$$

Wykorzystując odwzorowanie  $\text{ad}(\dots)$  określone przez (3.38) do iloczynu skośnego<sup>50)</sup> dwóch wektorów,

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} - \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} \quad (3.56)$$

otrzymuje się zależność

$$-\text{ad}^{-1}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad (3.57)$$

Działając na obie strony równania (3.57), operatorem  $\text{ad}^{-1}(\dots)$

$$\text{ad}^{-1} \int_{\partial P} \mathbf{x} \wedge \mathbf{T}\mathbf{n} dS = \text{ad}^{-1} \iiint_P \{ \mathbf{x} \wedge (\text{Div}\mathbf{T}) + (\mathbf{F}\mathbf{T}^T - \mathbf{T}\mathbf{F}^T) \} dV \quad (3.58)$$

otrzymuje się po przekształceniach i zmianie znaku następującą zależność

$$\int_{\partial P} \mathbf{x} \times \mathbf{T}\mathbf{n} dS = \iiint_P \{ \mathbf{x} \times (\text{Div}\mathbf{T}) - \text{ad}^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{T}^T - \mathbf{T}\mathbf{F}^T) \} dV \quad (3.59)$$

<sup>49)</sup> Postulat ten jest jednym z najważniejszych postulatów mechaniki. Wymaga on jednak silnego założenia o ciągłości funkcji  $\mathbf{t}$  względem argumentu  $\mathbf{X}$  określającego położenie punktu. Istnienie tensora  $\mathbf{T}$  przy słabszych założeniach dyskutowano w pracy Gurtin i Martins [1976].

<sup>50)</sup> Jest to formalnie iloczyn zewnętrzny tensorów antysymetrycznych, zob. na przykład Skwarczyński (1993), wzór 2.22 lub Spivak (2006) str. 74.



We wzorze (3.59)  $\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{y}$  oznacza gradient deformacji. Wyrażając teraz w (3.50) siły kontaktowe  $\mathbf{t}$  przez tensor  $\mathbf{T}$  naprężeń Pioli-Kirchhoffa otrzymuje się

$$\mathfrak{Z}(P) = \iiint_P \mathbf{x} \times \mathbf{f} \, dV + \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{x} \times \mathbf{Tn}^* \, dA + \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{x} \times \mathbf{t}^* \, dA \quad (3.60)$$

Rozpisanie drugiej całki po prawej stronie równania (3.60) prowadzi do

$$\begin{aligned} \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{x} \times \mathbf{Tn}^* \, dA &= \iint_{\partial P} \mathbf{x} \times \mathbf{Tn}^* \, dA - \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{x} \times \mathbf{Tn}^* \, dA \\ &= \iiint_P \{ \mathbf{x} \times (\text{Div} \mathbf{T}) - \text{ad}^{-1}(\mathbf{FT}^T - \mathbf{TF}^T) \} dV - \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{x} \times \mathbf{Tn}^* \, dA \end{aligned} \quad (3.61)$$

Podstawiając wynik przekształcenia (3.61) do (3.50), otrzymuje się postać równowagi momentów jak poniżej

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(P) &= \iiint_P \mathbf{x} \times \mathbf{f} \, dV + \iiint_P \{ \mathbf{x} \times (\text{Div} \mathbf{T}) - \text{ad}^{-1}(\mathbf{FT}^T - \mathbf{TF}^T) \} dV \\ &+ \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{x} \times \mathbf{t}^* \, dA - \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{x} \times \mathbf{Tn}^* \, dA = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Uporządkowanie wyrazów w (3.62) daje

$$\mathfrak{Z}(P) = \iiint_P [ \mathbf{x} \times (\text{Div} \mathbf{T} + \mathbf{f}) + \text{ad}^{-1}(\mathbf{TF}^T - \mathbf{FT}^T) ] dV + \iint_{\partial P \cap \partial B_f} \mathbf{x} \times (\mathbf{t}^* - \mathbf{Tn}^*) dA = \mathbf{0} \quad (3.63)$$

Uwzględniając w (3.63) pierwsze prawo Cauchy'ego (3.53) i naprężeniowe warunki brzegowe (3.54), uzyskuje się lokalną postać (3.50)

$$\text{ad}^{-1}(\mathbf{TF}^T - \mathbf{FT}^T) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{TF}^T = \mathbf{FT}^T. \quad (3.64)$$

Z otrzymanych równań lokalnych (3.53) i (3.64) można wyprowadzić pewną tożsamość całkową, która ma interpretację zasady prac wirtualnych. Ponieważ zasada taka jest postawą formułowania elementów skończonych, co jest jednym z zasadniczych celów niniejszej monografii, jej wyprowadzenie zostanie omówione w następnej sekcji poświęconej zasadom zachowania mechaniki powłok.

### 3.2.2. Sprowadzone warunki równowagi powłoki

W rozpatrywanej teorii powłok redukcja trójwymiarowych zasad zachowania pędu i krętu do postaci dwuwymiarowej opiera się na koncepcji podciała  $P$ . Na podstawie zasady najeżania wyrażonej równaniem (3.20), podciało  $P$  ma kształt cylindra otrzymanego poprzez obwiedzenie normalną do powierzchni  $M$  wzdłuż pewnej krzywej zamkniętej  $\partial \Pi \subset M$ , zob. rys. 3.5.a. Na potrzeby dalszych przekształceń na rys. 3.5.b przez  $\mathbf{v}$  oznaczono wektor zewnątrznie normalny do  $\partial \Pi$  w danym punkcie na brzegu  $\partial M \cap P$ .

Oznaczając przez  $\Pi$  część powierzchni podstawowej powłoki w konfiguracji odniesienia, która odpowiada części  $P$  obszaru  $B$  oraz przez  $\partial \Pi$  brzeg  $\Pi$ , otrzymuje się następujące definicje  $\Pi$  i  $\partial \Pi$ :

$$\Pi = M \cap P, \quad \partial \Pi = M \cap \partial P'. \quad (3.65)$$

Brzeg  $\partial P$  podciała  $P$  (rys. 3.5) składa się z trzech rozłącznych części, górnej i dolnej powierzchni granicznej  $\Pi^\pm \subset M^\pm$  i powierzchni bocznej  $\partial P'$ , która nie musi, ale może mieć wspólną część z brzegiem ciała:

$$\partial P = \Pi^+ \cup \Pi^- \cup \partial P', \quad \partial P' \cap \partial B' \neq \emptyset \cup \partial P' \cap \partial B' = \emptyset. \quad (3.66)$$

Wtedy siłom  $\mathfrak{F}(P)$  i momentom  $\mathfrak{Z}(P)$  występującym w prawach mechaniki (3.49) i (3.50) ciała trójwymiarowego, muszą odpowiadać wielkości w teorii powłok formalnie definiowane następująco:

$$\mathfrak{f}(\Pi) \equiv \mathfrak{F}(P), \quad \mathfrak{t}(\Pi) \equiv \mathfrak{Z}(P). \quad (3.67)$$

To z kolei pociąga za sobą postaci warunków równowagi dla powłoki w formie:

$$\mathfrak{f}(\Pi) = \mathbf{0}, \quad \mathfrak{t}(\Pi) = \mathbf{0}. \quad (3.68)$$

Zakłada się dalej, iż na pewnej części  $\partial B'_f$  brzegu  $\partial B'$  podciała wyróżniono powierzchnię o danych siłach kontaktowych  $\mathbf{t}^*$  (zob. rys. 3.5b). Oznaczając teraz siły kontaktowe na powierzchniach granicznych  $\mathbf{x}^\pm \in \Pi^\pm$  przez  $\mathbf{t}_n^\pm = \pm \mathbf{t}_n(\mathbf{x}^\pm)$ , całkowitą siłę  $\mathfrak{F}(P)$  i całkowity moment  $\mathfrak{Z}(P)$  działające na ciało typu powłoka można zapisać jako

$$\mathfrak{F}(P) = \iiint_P \mathbf{f} dv + \iint_{\Pi^+} \mathbf{t}_n^+ da^+ - \iint_{\Pi^-} \mathbf{t}_n^- da^- + \iint_{\partial P' \setminus \partial B'_f} \mathbf{Tn}^* da + \iint_{\partial P' \cap \partial B'_f} \mathbf{t}^* da \quad (3.69)$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{Z}(P) = & \iiint_P \mathbf{y} \times \mathbf{f} dv + \iint_{\Pi^+} \mathbf{y}^+ \times \mathbf{t}_n^+ da^+ - \iint_{\Pi^-} \mathbf{y}^- \times \mathbf{t}_n^- da^- \\ & + \iint_{\partial P' \setminus \partial B'_f} \mathbf{y} \times \mathbf{Tn}^* da + \iint_{\partial P' \cap \partial B'_f} \mathbf{y} \times \mathbf{t}_n^* da \end{aligned} \quad (3.70)$$

Siły objętościowe  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  i siły kontaktowe na górnej i dolnej powierzchni  $\mathbf{t}_n^\pm$  można potraktować jako obciążenia zewnętrzne. Jako takie, można je ująć w definicjach obciążeń w postaci przekrojowych wektorów sił powierzchniowych  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  i przekrojowych momentów powierzchniowych  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  (zob. rys. 3.6):

$$\iint_{\Pi} \mathbf{f} da \equiv \iiint_P \mathbf{f} dv + \iint_{\Pi^+} \mathbf{t}_n^+ da^+ - \iint_{\Pi^-} \mathbf{t}_n^- da^- \quad (3.71)$$

$$\iint_{\Pi} (\mathbf{c} + \mathbf{y} \times \mathbf{f}) da \equiv \iiint_P \mathbf{y} \times \mathbf{f} dv + \iint_{\Pi^+} \mathbf{y}^+ \times \mathbf{t}_n^+ da^+ - \iint_{\Pi^-} \mathbf{y}^- \times \mathbf{t}_n^- da^- \quad (3.72)$$

Wewnętrzne siły kontaktowe  $\mathbf{t}_n(\mathbf{x})$ , działające na powierzchni bocznej  $\partial P' / \partial B'$ , wynikają poprzez postulat Cauchy'ego z naprężeń w ciele. Dlatego wektor wewnętrznych sił przekrojowych  $\mathbf{N}_v$  oraz wektor wewnętrznych momentów przekrojowych  $\mathbf{M}_v$  wzdłuż brzegu wewnętrznego (zob. rys. 3.6) są zdefiniowane następująco:

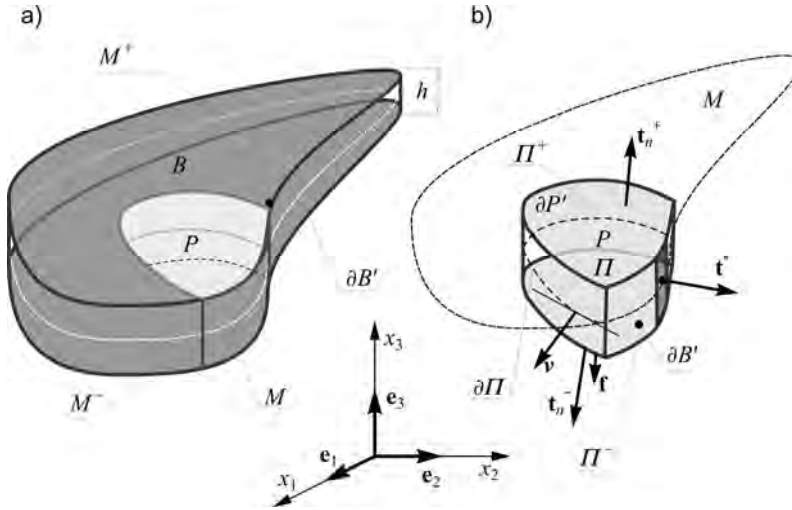
$$\int_{\partial \Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{N}_v dl \equiv \iint_{\partial P' \setminus \partial B'} \mathbf{Tn}^* da \quad (3.73)$$

$$\int_{\partial \Pi \setminus \partial M_f} (\mathbf{M}_v + \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v) dl \equiv \iint_{\partial P' \setminus \partial B'} \mathbf{y} \times \mathbf{Tn}^* da, \quad (3.74)$$

gdzie  $\partial M_f = M \cap \partial B'_f$ . Odpowiednio przekrojową siłę i przekrojowy moment obciążeń brzegowych na krawędzi (zob. rys. 3.6) definiuje się jako:

$$\int_{\partial M_f} \mathbf{N}_v^* dl \equiv \iint_{\partial B'_f} \mathbf{t}^* da \quad (3.75)$$

$$\int_{\partial M_f} (\mathbf{M}_v^* + \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v^*) dl \equiv \iint_{\partial B'_f} \mathbf{y} \times \mathbf{t}^* da \quad (3.76)$$



Rys. 3.5. Ciało  $B$  typu powłoka z wyróżnionym podciałem  $P$  (a), układ sił działających na podciało  $P$  (b)

W konsekwencji zależności (3.71)-(3.75) otrzymuje się wypadkowe równania bilansu (3.68) ciała typu powłoka zapisane w postaci

$$\mathfrak{f}(\Pi) = \iint_{\Pi} \mathbf{f} da + \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{N}_v dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{N}_v^* dl \quad (3.77)$$

$$\mathfrak{t}(\Pi) = \iint_{\Pi} (\mathbf{c} + \mathbf{y} \times \mathbf{f}) da + \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} (\mathbf{M}_v + \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v) dl + \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{M}^* + \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v^*) dl. \quad (3.78)$$

### 3.2.3. Lokalne równania równowagi

Przejsięcie do postaci lokalnej równań równowagi odbywa się w sposób analogiczny do przypadku ciała trójwymiarowego. W przypadku powłok, do otrzymania lokalnych równań równowagi z równań globalnych (3.77) i (3.78) wymagany jest dwuwymiarowy analog postulat Cauchy'ego. Przyjmuje się, zob. na przykład Chróścielewski (1996), iż w każdym punkcie  $\mathbf{x} \in M$  istnieją przekrojowy tensor sił  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  i przekrojowy tensor momentów  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  takie, że

$$\mathbf{N}_v(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\nu(\mathbf{x}), \quad \mathbf{M}_v(\mathbf{x}) = \mathbf{M}(\mathbf{x})\nu(\mathbf{x}). \quad (3.79)$$

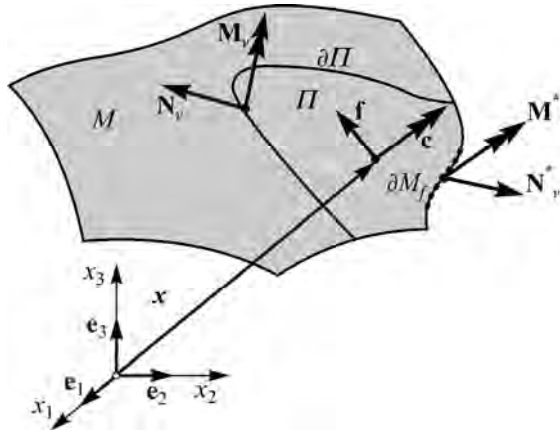
Stosując twierdzenie o dywergencji powierzchniowej<sup>51)</sup>, zob. równanie (2.14) w pracy Gurtin i Murdoch (1975), oraz równanie (3.79), drugą całkę z równania (3.77) zapisuje się

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{N}_v dl &= \int_{\partial\Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{N} \nu dl = \int_{\partial\Pi} \mathbf{N} \nu dl - \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{N} \nu dl \\ &= \iint_{\Pi} \operatorname{div} \mathbf{N} da - \int_{\partial\Pi \cap \partial M_f} \mathbf{N} \nu^* dl \end{aligned} \quad (3.80)$$

Podstawiając wynik (3.80) do (3.77), otrzymuje się

<sup>51)</sup> W dalszym ciągu przyjmuje się oznaczenie  $\operatorname{div}$  na oznaczenie dywergencji powierzchniowej w sensie z pracy Gurtin i Murdoch (1975), wzór (2.13) tamże.

$$\mathfrak{f}(\Pi) = \iint_{\Pi} \mathbf{f} da + \iint_{\Pi} \operatorname{div} \mathbf{T} da - \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{N}_v^* dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{N}_v^* dl \quad (3.81)$$



Rys. 3.6. Definicja przekrojowych sił i momentów

Po uporządkowaniu wyrazów w (3.81) i wobec dowolności  $\Pi$ , otrzymuje się odpowiednio lokalne równanie równowagi i naprężeniowy warunek brzegowy

$$\operatorname{div} \mathbf{N} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (3.82)$$

$$\mathbf{N}_v^* = \mathbf{N}_v \quad (3.83)$$

Analiza równania (3.78) przebiega podobnie. Formalne rozpisanie drugiej całki w (3.78) prowadzi do

$$\int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{M}_v + \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v) dl = \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{M}_v dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v dl \quad (3.84)$$

Przekształcając pierwszą całkę w (3.84), stosując twierdzenie o dywergencji powierzchniowej i poprzez analogię do (3.80), otrzymuje się

$$\int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{M}_v dl = \iint_{\Pi} \operatorname{div} \mathbf{M} da - \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{M}_v^* dl \quad (3.85)$$

Do drugiej całki w równaniu (3.84) stosuje się wzór (3.59). Prowadzi to do zależności

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v^* dl &= \int_{\partial \Pi} \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v^* dl - \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v^* dl \\ &= \iint_{\Pi} \{ \mathbf{y} \times (\operatorname{div} \mathbf{N}) da - \operatorname{ad}^{-1}(\mathbf{F} \mathbf{N}^T - \mathbf{N} \mathbf{F}^T) \} da - \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v^* dl \end{aligned} \quad (3.86)$$

Ostatecznie równanie (3.84) można zapisać teraz w postaci

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{M}_v dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v dl &= \iint_{\Pi} \operatorname{div} \mathbf{M} da - \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{M}_v^* dl + \\ &= \iint_{\Pi} \{ \mathbf{y} \times (\operatorname{div} \mathbf{N}) - \operatorname{ad}^{-1}(\mathbf{F} \mathbf{N}^T - \mathbf{N} \mathbf{F}^T) \} da - \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v^* dl \end{aligned} \quad (3.87)$$

Wstawiając (3.87) do (3.78), otrzymuje się

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(II) = & \iint_{II} \{ \text{div} \mathbf{M} - \text{ad}^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{N}^T - \mathbf{N}\mathbf{F}^T) + \mathbf{c} + \mathbf{y} \times (\text{div} \mathbf{N} + \mathbf{f}) \} da \\ & + \int_{\partial II \cap \partial M_f} (\mathbf{M}^* + \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v^* - \mathbf{y} \times \mathbf{N}_v^* - \mathbf{M}_v^*) dl \end{aligned} \quad (3.88)$$

Wobec dowolności wyboru  $II$  i podstawiając równanie (3.82) do (3.88), otrzymuje się lokalne równanie równowagi momentów i stowarzyszony warunek brzegowy

$$\text{div} \mathbf{M} - \text{ad}^{-1}(\mathbf{F}\mathbf{N}^T - \mathbf{N}\mathbf{F}^T) + \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (3.89)$$

$$\mathbf{M}_v^* = \mathbf{M}_v^* \quad (3.90)$$

Można pokazać (zob. na przykład Chróścielewski 1996, równanie 3.27), że występujące w równaniach (3.82) i (3.89) tensory sił przekrojowych  $\mathbf{N}$  i  $\mathbf{M}$  mogą być wyrażone przez wektory przekrojowe tzn.

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}^\alpha \otimes \mathbf{t}_\alpha, \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}^\alpha \otimes \mathbf{t}_\alpha \quad (3.91)$$

Występujące w (3.91) wektory  $\mathbf{N}^\alpha$  i  $\mathbf{M}^\alpha$  dane są równaniami

$$\mathbf{N}^\alpha = \int_-^+ \mathbf{T}^\alpha \mu d\zeta, \quad \mathbf{M}^\alpha = \int_-^+ \bar{\zeta} \times \mathbf{T}^\alpha \mu d\zeta \quad (3.92)$$

Występujący we wzorze (3.92) wektor  $\bar{\zeta}(\mathbf{x}, \zeta)$  określa położenie końcowe  $\mathbf{y}$  punktu  $\mathbf{x}$  z konfiguracji odniesienia powłoki w trakcie pewnej, dowolnej, trójwymiarowej deformacji obszaru powłoki, opisaney wzorem

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, \zeta) = \mathbf{y}(\mathbf{x}) + \bar{\zeta}(\mathbf{x}, \zeta) \quad (3.93)$$

względem odpowiadającego mu punktu  $\mathbf{y}(\mathbf{x}, t)$  powierzchni podstawowej powłoki w konfiguracji aktualnej  $M(t)$ . Należy dodać, że wzór (3.93) ma charakter formalny i dotyczy także, między innymi, powłok warstwowych, zob. rys. 1.8.4 z pracy Chróścielewski i inni (2004).

### 3.3. Słaba postać problemu brzegowego

Równania (3.82), (3.83), (3.89), (3.90) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}} &= \text{div} \mathbf{N} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{c}} &= \text{div} \mathbf{M} + \mathbf{c} + \text{ad}^{-1}(\mathbf{T}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{T}^T) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.94)$$

oraz

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{N}_v^* - \mathbf{N}_v^* = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{M}_v^* - \mathbf{M}_v^* = \mathbf{0} \quad (3.95)$$

W dalszym ciągu rozpatruje się wyrażenie

$$G(\mathbf{w}, II) = \iint_{II} (\bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial II \cap \partial M_f} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} + \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{w}) dl \quad (3.96)$$

gdzie  $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$  są dowolnymi polami wektorowymi<sup>52)</sup>, którym nie nadaje się w tej chwili konkretnego znaczenia. Wobec (3.94) całka objętościowa z (3.96) przybiera postać

$$\iint_{\Pi} (\bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{w}) da = \iint_{\Pi} \left\{ (\operatorname{div} \mathbf{N} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{v} + (\operatorname{div} \mathbf{M} + \mathbf{c} + ad^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{T}^T)) \cdot \mathbf{w} \right\} da \quad (3.97)$$

Człony zawierające dywergencję tensorów  $\mathbf{N}$  i  $\mathbf{M}$  w równaniu (3.97) są przekształcane zgodnie z twierdzeniem o dywergencji powierzchniowej, co symbolicznie zapisuje się jako

$$\iint_{\Pi} (\operatorname{div}(\dots)) \cdot \mathbf{v} da = - \iint_{\Pi} ((\dots) \cdot \nabla \mathbf{v}) da + \int_{\partial \Pi \setminus \partial M_f} \mathbf{v} \cdot (\dots) \mathbf{v}^* dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} \mathbf{v} \cdot (\dots) \mathbf{v}^* dl \quad (3.98)$$

Występujące we wzorach (3.97) i (3.98) symbole  $\mathbf{F}$  i  $\nabla(\dots)$  oznaczają, odpowiednio, powierzchniowy gradient deformacji i powierzchniowy operator gradientu w sensie pracy Gurtin i Murdoch (1975), zob. też Chróścielewski i inni 2004.

Wynikowa postać równania (3.98) dana jest przez

$$\begin{aligned} \iint_{\Pi} (\bar{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{v} + \bar{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{w}) da = & - \iint_{\Pi} \left\{ \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - [ad^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T)] \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \right\} da + \\ & + \int_{\partial \Pi \setminus \partial M_f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \mathbf{v}^* + \mathbf{w} \cdot \mathbf{M} \mathbf{v}^*) dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \mathbf{v}^* + \mathbf{w} \cdot \mathbf{M} \mathbf{v}^*) dl + \\ & + \iint_{\Pi} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) da \end{aligned} \quad (3.99)$$

Całkę po brzegu z (3.96) rozpisuje się jako

$$\begin{aligned} \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} + \bar{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{w}) dl = \\ = \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{N}_v^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}_v^* \cdot \mathbf{w}) dl - \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{v}^* + \mathbf{M}_v \cdot \mathbf{w}^*) dl \end{aligned} \quad (3.100)$$

Podstawienie równań (3.99) i (3.100) do wzoru (3.96) prowadzi do zależności

$$\begin{aligned} G(\mathbf{w}, \Pi) = & - \iint_{\Pi} \left\{ \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - [ad^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T)] \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \right\} da + \\ & + \int_{\partial \Pi \setminus \partial M_f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \mathbf{v}^* + \mathbf{w} \cdot \mathbf{M} \mathbf{v}^*) dl + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N} \mathbf{v}^* + \mathbf{w} \cdot \mathbf{M} \mathbf{v}^*) dl + \\ & + \iint_{\Pi} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_d} (\mathbf{N}_v^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}_v^* \cdot \mathbf{w}) dl \end{aligned} \quad (3.101)$$

Dalsze przekształcenia przeprowadza się, wykorzystując określenie iloczynu skalarnego dwóch wektorów  $[ad^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T)] \cdot \mathbf{w}$ , gdzie  $\mathbf{w}$  jest wektorem osiowym skośnie symetrycznego tensora  $\mathbf{W}$ , tj.  $\mathbf{W} = ad(\mathbf{w})$ . Na podstawie tożsamości

$$\mathbf{a} = ad(\mathbf{A}), \quad \mathbf{b} = ad(\mathbf{B}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad (3.102)$$

można zapisać

$$[ad^{-1}(\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T)] \cdot \mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{W} \cdot (\mathbf{N}\mathbf{F}^T - \mathbf{F}\mathbf{N}^T) \quad (3.103)$$

Stosując teraz do prawej strony (3.103) tożsamości

<sup>52)</sup> Na tym etapie polom  $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  stawia się warunek, by spełniały odpowiednie warunki regularności tak, aby całka miała sens.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T \mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}^T \mathbf{A} \quad (3.104)$$

otrzymuje się

$$\frac{1}{2} \mathbf{W} \cdot (\mathbf{N} \mathbf{F}^T - \mathbf{F} \mathbf{N}^T) = \frac{1}{2} (\mathbf{W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} - \mathbf{N} \cdot \mathbf{W}^T \mathbf{F}) = \frac{1}{2} (\mathbf{W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} + \mathbf{W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}) = \mathbf{W} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \quad (3.105)$$

W konsekwencji pierwszą całkę powierzchniową z równania (3.101) zapisuje się jako

$$\iint_{\Pi} \{ \mathbf{N} \cdot \nabla \mathbf{v} - [\mathbf{a} d^{-1} (\mathbf{N} \mathbf{F}^T - \mathbf{F} \mathbf{N}^T)] \cdot \mathbf{w} + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \} da = \iint_{\Pi} \{ \mathbf{N} \cdot (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{W} \mathbf{F}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \} da \quad (3.106)$$

Podstawienie otrzymanego wyniku (3.106) do (3.101) i pogrupowanie wyrazów prowadzi do tożsamości całkowej

$$-G_i(M, \mathbf{w}) + G_e(M, \mathbf{w}) + G_b(M, \mathbf{w}) + G_k(M, \mathbf{w}) = 0 \quad (3.107)$$

Poszczególne składniki sumy w równaniu (3.107) określone są następująco

$$G_i(M, \mathbf{w}) = \iint_{\Pi} \{ \mathbf{N} \cdot (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{W} \mathbf{F}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \} da \quad (3.108)$$

$$G_e(M, \mathbf{w}) = \iint_{\Pi} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{w}) da + \int_{\partial \Pi \cap \partial M_f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}_v^* + \mathbf{w} \cdot \mathbf{M}_v^*) dl \quad (3.109)$$

$$G_b(M; \mathbf{w}) = \int_{\partial \Pi \cap \partial M_d} (\mathbf{N}_v^* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}_v^* \cdot \mathbf{w}) dl \quad (3.110)$$

$$G_k(M, \mathbf{w}) = \int_{\partial \Pi \setminus \partial M_f} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{N}_v^* + \mathbf{w} \cdot \mathbf{M}_v^*) dl \quad (3.111)$$

Otrzymana tożsamość całkowa określona przez równanie (3.107) wyraża następujący fakt (por. Chrościelewski i inni 2004): jeśli spełnione są lokalne równania równowagi i (3.82) (3.89) oraz warunki brzegowe (3.83) i (3.90) to równanie (3.107) jest spełnione tożsamościowo dla każdych dwóch pól wektorowych

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}, \mathbf{w}). \quad (3.112)$$

### 3.3.1. Zasada prac wirtualnych

Niech brzeg  $\partial M$  powierzchni podstawowej  $M$  będzie sumą logiczną dwóch części  $\partial M = \partial M_d \cup \partial M_f$ . Na częściach tych określono, odpowiednio, przemieszczeniowe ( $\partial M_d$ ) i naprężeniowe ( $\partial M_f$ ) warunki brzegowe. Niech wprowadzone w równaniu (3.96) pola wektorowe  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  i  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  oznaczają, odpowiednio, kinematycznie dopuszczalne pola wirtualnych przesunięć i obrotów, spełniające jednorodne warunki brzegowe na  $\partial M_d$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (3.113)$$

W konsekwencji takiego założenia człon  $G_b(M; \mathbf{w})$  określony przez równanie (3.110) znika, a wykorzystanie definicji (3.111) prowadzi do  $G_k(M, \mathbf{w}) = 0$ . Ostatecznie więc otrzymuje się równanie zasady prac wirtualnych w postaci

$$G_i(M; \mathbf{w}) = G_e(M; \mathbf{w}), \quad (3.114)$$

gdzie wielkości występujące we wzorze (3.114) określone są równaniami (3.108) i (3.109). W dalszym ciągu rozważań przyjmuje się utożsamienie obszaru  $\Pi$  z  $M$ .

### 3.3.2. Kinematyka powłoki, miary odkształceń

Występujący we wzorze (3.114) składnik

$$G_i(M; \mathbf{w}) = \iint_{\Pi} \{ \mathbf{N} \cdot (\nabla \mathbf{v} - \mathbf{W}\mathbf{F}) + \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{w} \} da, \quad (3.115)$$

reprezentuje gęstość wirtualnej pracy wewnętrznej, por. na przykład, Makowski i Stumpf (1994) Chróścielewski (1996), Chróścielewski i inni (2004), Witkowski (2005) i cytowana tam literatura. W pracach tych wykazano, że wielkości

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{x}) \equiv \nabla \mathbf{v} - \mathbf{W}\mathbf{F}, \quad \delta \mathbf{K}(\mathbf{x}) \equiv \nabla \mathbf{w} \quad (3.116)$$

są wirtualnymi odkształceniami energetycznie sprzężonymi z przekrojowymi miarami naprężeń  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  i  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  w powłoce. Wprowadzona wcześniej baza określona równaniami (3.28) pozwala na wyrażenie wirtualnych odkształceń (3.116) w postaci

$$\delta \mathbf{E}(\mathbf{x}) = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta \otimes \mathbf{t}_0^\beta, \quad \delta \mathbf{K}(\mathbf{x}) = \delta \boldsymbol{\kappa}_\beta \otimes \mathbf{t}_0^\beta \quad (3.117)$$

gdzie wektory wirtualnych miar  $\delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta$  i  $\delta \boldsymbol{\kappa}_\beta$  określone są następująco

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{y}_{,\beta} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}_{,\beta} + (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\varepsilon}_\beta) \times \mathbf{w}, \quad \delta \boldsymbol{\kappa}_\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_{,\beta} \quad (3.118)$$

W równaniach (3.116) dostrzec można podobieństwo do wzorów opisujących odkształcenia w liniowej teorii ośrodka Cosseratów, zob. rozdział 2. Model kinematyczny rozpatrywanej tu teorii powłok zgodny jest z modelem powierzchni Cosserat wyposażonej w trzy (ortogonalne) direktory, zob. Pietraszkiewicz (2001) i cytowana tam literatura, Chróścielewski i inni (2004). Uzasadnia to przyjęcie tensora struktury  $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$  w postaci wyrażonej równaniem (3.32). Deformacja płata powłoki opisana jest przez dwa pola, wektorowe pole przesunięć  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\zeta})$  spełniające zależność

$$\mathbf{y}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{x}(\boldsymbol{\zeta}) + \mathbf{u}(\boldsymbol{\zeta}) \quad (3.119)$$

oraz pole właściwych tensorów ortogonalnych  $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ , określających rotację tensora struktury  $\mathbf{T}_0(\mathbf{x})$  zadanego równaniem (3.32)

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\zeta}, t) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\zeta}, t) \mathbf{T}_0(\boldsymbol{\zeta}) \quad (3.120)$$

Na podstawie wzoru (3.120) wektory najeżenia (por. Woźniak 1966) w konfiguracji aktualnej otrzymuje się z

$$\mathbf{t}_i(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{t}_i^0(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{T}_0(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{e}_i = \mathbf{T}(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{e}_i \quad (3.121)$$

Wektorowe miary odkształceń dla powierzchni Cosserat wprowadza się poprzez związki, zob. na przykład Chróścielewski (1996), Pietraszkiewicz (2001)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \mathbf{y}_{,\beta} - \mathbf{t}_\beta = \mathbf{u}_{,\beta} + \mathbf{x}_{,\beta} - \mathbf{t}_\beta = \mathbf{u}_{,\beta} + \mathbf{t}_\beta^0 - \mathbf{t}_\beta = \mathbf{u}_{,\beta} + (\mathbf{1} - \mathbf{Q}) \mathbf{t}_\beta^0 \quad (3.122)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_\beta = \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T) \quad (3.123)$$



Rozpisanie równań (3.122) i (3.123) w składowych prowadzi do wzorów

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\beta = \varepsilon_{\beta 1} \mathbf{t}_1 + \varepsilon_{\beta 2} \mathbf{t}_2 + \varepsilon_\beta \mathbf{t}^0 \quad (3.124)$$

$$\boldsymbol{\kappa}_\beta = \mathbf{t} \times (\kappa_{\beta 1} \mathbf{t}_1 + \kappa_{\beta 2} \mathbf{t}_2) + \kappa_\beta \mathbf{t}^0 \quad (3.125)$$

Można pokazać (zob. Dodatek A w niniejszej monografii), że w wyniku obliczenia pochodnych korotacyjnych z (3.122) i (3.123), tzn.

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_\beta \equiv \mathbf{Q}(\delta(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}_\beta)), \quad d\boldsymbol{\kappa}_\beta \equiv \mathbf{Q}(\delta(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\kappa}_\beta)) \quad (3.126)$$

otrzymuje się odpowiednio związki (3.118).

### 3.3.3. Zasady wariacyjne

Nawiązując do wektora wirtualnych uogólnionych przemieszczeń (3.112), można określić wektor rzeczywistych przemieszczeń powłoki

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \quad (3.127)$$

W dalszym ciągu pracy wprowadza się wygodną w przekształceniach notację macierzowo-operatorową, por. na przykład Chróścielewski (1996), Chróścielewski i inni (2004), Chróścielewski i Witkowski (2006). Związki kinematyczne (3.122) i (3.123) zapisuje się jako

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{K} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_\beta \\ \boldsymbol{\kappa}_\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \boldsymbol{\kappa}_1 \\ \boldsymbol{\kappa}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.128)$$

Energetycznie sprzężone z (3.128) miary naprężeń przedstawia się w formie

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^\beta \\ \mathbf{m}^\beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^1 \\ \mathbf{n}^2 \\ \mathbf{m}^1 \\ \mathbf{m}^2 \end{Bmatrix} \quad (3.129)$$

W podobny sposób ujmuje się odpowiednio wektory obciążenia zewnętrznego i wektory obciążenia brzegowego

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{c} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{s}^* = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}^* \\ \mathbf{m}^* \end{Bmatrix} \quad (3.130)$$

Zgodnie z porządkiem składowych określonym równaniem (3.128) wprowadza się następujący zapis odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}$  (3.128) i odkształceń wirtualnych  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\kappa}_1(\mathbf{u}) \\ \boldsymbol{\kappa}_2(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{,1} + (\mathbf{1} - \mathcal{Q})\mathbf{t}_1^0 \\ \mathbf{u}_{,2} + (\mathbf{1} - \mathcal{Q})\mathbf{t}_2^0 \\ \text{ad}^{-1}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}^T) \\ \text{ad}^{-1}(\mathcal{Q}_2, \mathcal{Q}^T) \end{Bmatrix}, \quad \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \delta\boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \delta\boldsymbol{\kappa}_1 \\ \delta\boldsymbol{\kappa}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{,1} + (\mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1) \times \mathbf{w} \\ \mathbf{v}_{,2} + (\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2) \times \mathbf{w} \\ \mathbf{w}_{,1} \\ \mathbf{w}_{,2} \end{Bmatrix} \quad (3.131)$$

Wprowadzając operator macierzowy przemieszczenie-odkształcenie

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{1}(\cdot)_{,1} & (\mathbf{t}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1) \times (\cdot) \\ \mathbf{1}(\cdot)_{,2} & (\mathbf{t}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2) \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,2} \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

oraz wykorzystując wektor (3.112), równanie (3.131)<sub>2</sub> zapisuje się jako

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{u})\mathbf{w} \quad (3.133)$$

We wprowadzonej notacji równanie (3.114) można przedstawić w postaci

$$G[\mathbf{u}; \mathbf{w}] \equiv G_i[\mathbf{u}; \mathbf{w}] - G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}], \quad (3.134)$$

gdzie składniki po prawej stronie są interpretowane jako wirtualna praca wewnętrzna i wirtualna praca obciążeń zewnętrznych

$$G_i[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = \iint_M (\mathbf{B}(\mathbf{u})\mathbf{w})^T \mathbf{s} da \quad (3.135)$$

$$G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = \iint_M \mathbf{w}^T \mathbf{p} da + \int_{\partial M_f} \mathbf{w}^T \mathbf{s}^* dl \quad (3.136)$$

### Trójpłowa zasada Hu-Washizu

W równaniu (3.135) relacja

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{u})\mathbf{u} \quad (3.137)$$

musi być spełniona w sposób silny. Wykorzystując metodę mnożników Lagrange'a, wyżej wymienioną relację można rozluźnić, wprowadzając pewne dodatkowe pole, tj. pole naprężeń  $\hat{\mathbf{s}}$ . W konsekwencji powstaje trójpłowy funkcjonał

$$W(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\mathbf{s}}) = \iint_M \left( \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) + \hat{\mathbf{s}}^T (\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}) \right) da + V(\mathbf{u}) \quad (3.138)$$

w którym trzy pola  $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\mathbf{s}})$  są traktowane jako niezależne. Tutaj  $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})$  oznacza wektor odkształceń zgodnych, obliczany wg (3.131)<sub>1</sub>. Ponieważ równania konstytutywne są przedmiotem kolejnego rozdziału, na tym etapie rozważań przyjmuje się, że istnieje dwuwymiarowa funkcja gęstości energii odkształcenia

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta). \quad (3.139)$$

W równaniu (3.138)  $V(\mathbf{u})$  oznacza potencjał obciążeń powierzchniowych, który zdefiniowany jest przez

$$\delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = -G_e[\mathbf{u}; \mathbf{w}] \quad (3.140)$$

Zwyczajowo zasadę taką łączy się z nazwiskami Hu i Washizu. Felippa (2000) prześledził chronologię powstawania prac Hu, Washizu oraz Fraeijsa de Veubeke. Konkluzją Felippy jest stwierdzenie, że Fraeijs de Veubeke wyprzedził zarówno Hu, jak i Washizu o cztery lata (prace Hu i Washizu datowane są na rok 1955). Wobec powyższego Felippa proponuje, by wprowadzić nazwę: funkcjonal Fraeijs de Veubeke-Hu-Washizu.

Zasada wariacyjna (3.138) jest jedną z wielu zasad wielopolowych, jakie można wyprowadzić w zagadnieniach mechaniki. Jednym z miejsc, gdzie zasady te znajdują zastosowanie jest formułowanie mieszanych elementów skończonych, por. np. Pian i Sumihara (1984), Simo i Hughes (1986), Chróścielewski (1996), Felippa (2000), Hughes (2000), Kasper i Taylor (2000), Fung i Tong (2001), Wiśniewski i Turska (2008, 2009) i cytowaną tam literaturę. Właściwy sposób interpolacji zmiennych niezależnych pozwala na ominięcie niekorzystnego zjawiska blokady numerycznej (omawianego w rozdziale pierwszym), jakie pojawia się w klasycznym podejściu przemieszczeniowym i decyduje o ewentualnym sukcesie sformułowania. Wśród innych argumentów, zob. na przykład Wiśniewski i Turska (2009), jakie przemawiają za formułowaniem wielopolowych zasad wariacyjnych i stowarzyszonych elementów skończonych można wyróżnić następujące: większą dokładność obliczanych naprężeń i odkształceń, lepszą zbieżność podziału, lepszą zbieżność rozwiązania w zagadnieniach nieliniowych.

### Trójpłowa zasada Hu-Washizu, wariant zmodyfikowany

Element skończony EANS4 dyskutowany w niniejszej monografii bazuje, między innymi, na technice wzbogaconych odkształceń wg Simo i Rifai (1990). W niniejszym podrozdziale podejście EAS jest omówione w zakresie samej zasady wariacyjnej. Szczegóły interpolacji zmiennych będą omówione w dalszych rozdziałach monografii.

Punktem wyjścia w podejściu EAS jest założenie, że całkowite odkształcenia  $\boldsymbol{\varepsilon}$  obliczane są jako suma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon} = -\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (3.141)$$

Tutaj  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  oznacza wektor odkształceń wzbogacających. Wykorzystanie zależności (3.141)<sub>2</sub> w równaniu (3.138) prowadzi do zmodyfikowanej zasady wariacyjnej Hu-Washizu

$$W(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\mathbf{s}}) = \iint_M \left( \Phi(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \hat{\mathbf{s}}^T (-\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right) da + V(\mathbf{u}) . \quad (3.142)$$

Na mocy relacji (3.133) pierwsza wariacja (3.142) dana jest równaniem

$$\delta W[\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\mathbf{s}}; \mathbf{w}, \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta \hat{\mathbf{s}}] = \iint_M \left( (\mathbf{B}\mathbf{w})^T \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi + (\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^T (\partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi - \hat{\mathbf{s}}) - \delta \hat{\mathbf{s}}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] \quad (3.143)$$

Stosując standardową argumentację, łatwo stwierdzić, że jeśli  $(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\mathbf{s}})$  jest słabym rozwiązaniem mieszanego zagadnienia brzegowego mechaniki powłok, to z warunku stacjonarności

$$\delta W[\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \hat{\mathbf{s}}; \mathbf{w}, \delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta \hat{\mathbf{s}}] = 0 \quad (3.144)$$

wobec dowolności przyjęcia pól  $\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  i  $\delta \hat{\mathbf{s}}$ , wynikają następujące zależności: równania równowagi, relacje kinematyczne, równania konstytutywne, statyczne i kinematyczne warunki brzegowe. Tutaj wymaga się, by pole  $\mathbf{u}$  było polem kinematycznie dopuszczalnym. Od pól  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  i  $\hat{\mathbf{s}}$  wymaga się odcinkowej ciągłości, tak by istniała całka (3.142).

## Rozdział 4

# RÓWNANIA KONSTITUTYWNE

### 4.1. Uwagi ogólne

Równania konstytutywne w mechanice kontinuum łączą ze sobą pola naprężeń i odkształceń. Tym samym, równania te uzupełniają bilans równań (por. Rymarz 1993). Jednocześnie równania konstytutywne opisują bogactwo materiałów jakie występują w przyrodzie i ich reakcje na oddziaływanie zewnętrzne. Praktyka inżynierska podpowiada bowiem, że ciała z różnych materiałów o tych samych rozmiarach, poddane tym samym obciążeniom nie będą reagowały tak samo. Często cytowanym tu przykładem, zob. na przykład. Wang i Truesdell (1973), Gurtin (1981), jest rozciąganie dwóch sprężyn wykonanych ze stali i miedzi. Poddane działaniu tej samej siły rozciągającej doświadczają one różnych wydłużeń.

Materiał w koncepcji kontinuum jest postrzegany na sposób fenomenologiczny. Rymarz (1993) zauważa, że opisując materiał, wyraża się makroskopowe skutki mikroskopowej odmienności różnych ciał. Ze względu na znaczną liczbę struktur molekularnych na poziomie mikro istnieje wiele możliwości formułowania związków konstytutywnych (materiałowych) na poziomie makro, które uśredniają opis mikroskopowy. Fakt ten stawia przed teorią równań konstytutywnych znaczące wyzwanie. Dodatkowo sprawę komplikuje obserwacja, że ten sam materiał wykazuje różne odpowiedzi na te same przyczyny zależnie, na przykład, od stanu deformacji czy prędkości odkształcenia.

Tak więc, w odróżnieniu od warunków równowagi czy zasad zachowania, równania konstytutywne nie mogą mieć charakteru uniwersalnego, a ich teoria rządzi się własnymi prawami i postulatami. Te prawa i postulaty reprezentują ogólne charakterystyki mechaniczne materiału, zgodne z codziennym doświadczeniem. Rymarz (1993) stwierdza, że brak ogólnych praw na podobieństwo zasad zachowania, nie jest zaskakujący. Bowiem trudno jest zamknąć bogactwo struktur materii w kilku zwięzłych równaniach.

W zależności od potrzeb badawczych przyjmuje się różne sposoby określenia modelu materiału zob. na przykład Bednarski (1995). Wyróżnia on cztery zasadnicze grupy modeli materiału scharakteryzowane pokrótce poniżej:

- *model myślowy* jest wytworem myśli ludzkiej i służy jako podstawa poznawania materiałów i konstruowania nowych materiałów,
- *model fizyczny* jest uproszczonym obrazem materiału, niesformalizowanym matematycznie, zawierającym najistotniejsze dla badacza informacje o naturze materiału,
- *model mechaniczny* rozumiany jako układy mechaniczne, reprezentujące własności mechaniczne danego materiału,
- *model matematyczny*, czyli zbiór wiadomości o własnościach danego materiału wyrażony poprzez formalizm matematyczny.

Fundamenty współczesnej teorii równań konstytutywnych przypisuje się Walterowi Nollowi (Noll 1958), zob. Wang i Truesdell (1973). Szczegółowy przegląd literatury dla zagadnień termodynamiki przedstawił też Perzyna (1978).

Noll (1958) sformułował trzy zasadnicze postulaty, jakie powinny spełniać równania konstytutywne w ich najbardziej ogólnej postaci:

- postulat determinizmu: aktualny stan naprężenia w pewnym punkcie ciała jest jednoznacznie określony przeszłą historią ruchu ciała,
- postulat lokalności: stan naprężenia w pewnym punkcie ciała zależy tylko od historii ruchu lokalnego otoczenia tego punktu, a nie od ruchu wszystkich cząstek ciała<sup>53)</sup>,
- postulat obiektywności materiałowej: każda reprezentacja własności materiałowych powinna być niezależna od wyboru układu odniesienia.

Ujęcie formalne powyższych postulatów można odnaleźć, na przykład, w pracach Noll (1958), Wang i Truesdell (1973), Rymarz (1993) i literaturze tamże cytowanej.

Ostatni postulat i związane z nim subtelności wzbudzają w literaturze duże zainteresowanie, zob. Pietraszkiewicz i Eremeyev (2009a), paragraf 5 i cytowana tam na wstępie literatura, na przykład praca Svendsen i Bertram (1999).

Najbardziej ogólna ze wszystkich zasada determinizmu jest ograniczona zasadą lokalnego działania. Taka restrykcja jest konieczna, ponieważ inaczej formułowanie i stosowanie praw materiałowych byłoby niemal niemożliwe (Haupt 2000). Dalsze ograniczenia wynikają z postulatu obiektywności materiałowej<sup>54)</sup>, zob. na przykład Rymarz (1993).

Trzy postulaty wymienione powyżej nie są jedynymi jakie spełniać musi fizycznie ważny model konstytutywny, bowiem równania konstytutywne nie mogą być sprzeczne z równaniami równowagi mechaniki klasycznej, jak i z równaniami termodynamiki (Haupt 2000). Dalsze postulaty, wg Wang i Truesdell (1973), pozwalające formułować równania konstytutywne to:

- postulat współobecności: zmienna niezależna obecna w jednym równaniu konstytutywnym materiału powinna występować w pozostałych równaniach. Jej eliminacja może nastąpić po wykazaniu, że jej obecność jest sprzeczna z zasadami zachowania, zasadami termodynamiki lub innymi postulatami, por. np. Coleman (1964), Rymarz (1993),
- postulat uniwersalnej dyssypacji<sup>55)</sup>: wszystkie równania konstytutywne muszą spełniać zredukowaną nierówność dyssypacji dla wszystkich argumentów w swojej dziedzinie,
- postulat symetrii materiałowej: symetria materiału jest określona grupami symetrii punktów materialnych tego ciała.

Wymienione postulaty, jakie winny spełniać równania konstytutywne, nie wyczerpują jednak wszystkich możliwości, bowiem Haupt (2000) wymienia jeszcze zasadę zanikającej pamięci (Coleman i Noll 1960). Perzyna (1978) podaje konieczność zapewnienia realności rozprzestrzeniających się fal. Pytanie o ogólnie stosowalne zasady, które zapewnią fizyczną zgodność i kompletność modelu materiałowego w każdym aspekcie, pozostaje więc nadal otwarte. (Haupt 2000).

<sup>53)</sup> Noll (1958) dodaje tu, że postulat ten jest zawarty w pojęciu siły kontaktowej.

<sup>54)</sup> Postulat obiektywności materiałowej bywa krytykowany jako zbyt restrykcyjny. Rymarz (1993) podaje opis ciekawego eksperymentu, który zaprzecza temu postulatowi.

<sup>55)</sup> Postulat ten został sformułowany w pracy Coleman i Noll (1963), tutaj podaje się jego brzmienie za pracą Wang i Truesdell (1973).

## 4.2. Formułowanie równań konstytutywnych w mechanice kontinuum

Syntetyczne podejście do zagadnienia formułowania równań konstytutywnych można odnaleźć przykładowo w pracach Makowski i Stumpf (1994), Antman (1995). W dalszym ciągu przyjmuje się, że  $\boldsymbol{\sigma}$  oznacza symetryczny tensor naprężenia Cauchy'ego,  $\mathbf{X}$  oznacza położenie cząstki materialnej w konfiguracji odniesienia, a  $\mathbf{x}$  oznacza położenie cząstki materialnej w konfiguracji aktualnej.

W pracy Cheverton i Beatty (1976) wprowadzono pojęcie  $p$ -materiału rzędu  $n$  jako materiału, którego odpowiedź jest opisana przez  $p$  tensorów hipernaprężeń  $\boldsymbol{\sigma}_j$ . Pojęcie to obejmuje szeroką klasę materiałów. Szczególnym przypadkiem takiego materiału, tj. dla  $p = 1$  jest materiał, którego uogólnione równanie konstytutywne przyjmuje postać

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathfrak{H}_{s=0}^{\infty}(\nabla \boldsymbol{\chi}'(\cdot, \cdot), \mathbf{X}, t) \quad (4.1)$$

Występujący we wzorze (4.1) funkcjonal  $\mathfrak{H}$  nazywany jest funkcjonalem konstytutywnym. Wśród jego argumentów znajduje się, między innymi, historia ruchu ciała  $\boldsymbol{\chi}'(\mathbf{X}, s)$ . Antman (1995), (por. Noll 1958, Cheverton i Beatty 1976), definiuje historię do czasu  $t$  dowolnej funkcji  $R \ni t \mapsto \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, s)$  (to znaczy przeszłą historię  $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, \cdot)$ ) jako funkcję

$$[0, \infty) \ni s \mapsto \boldsymbol{\chi}'(\mathbf{X}, s) \equiv \boldsymbol{\chi}'(\mathbf{X}, t - s) \quad (4.2)$$

czyli  $s$  odmierza czas wstecz od chwili  $t$ . W pracy Antmana (1995) można odnaleźć uwagę, że nie ma dowodów na to, by rzeczywiste materiały wymagały do opisu poziomu ogólności danego równaniem (4.1). W szczególności można odwołać się do postulatu lokalnego działania. Wtedy równanie (4.1) można zapisać w postaci

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathfrak{H}_{s=0}^{\infty}(\nabla \boldsymbol{\chi}'(\mathbf{X}, s), \nabla^2 \boldsymbol{\chi}'(\mathbf{X}, s), \dots, \nabla^n \boldsymbol{\chi}'(\mathbf{X}, s), \mathbf{X}), \quad (4.3)$$

która opisuje materiał nieprosty rzędu  $n$ . Równanie konstytutywne niejednorodnego materiału prostego z pamięcią ma postać

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathfrak{H}_{s=0}^{\infty}(\nabla \boldsymbol{\chi}'(\mathbf{X}, s), \mathbf{X}). \quad (4.4)$$

Prosty, niejednorodny materiał sprężysty (bez pamięci) uzyskuje się z (4.4), eliminując zależność od historii  $t$  po prawej stronie równania

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathfrak{H}(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t), \mathbf{X}). \quad (4.5)$$

Oznacza to, że naprężenie jest określone przez aktualny gradient deformacji  $\mathbf{F}$  i nie jest zależne od jego historii, ale od stanu w chwili  $t$ . Eliminując zależność od położenia  $\mathbf{X}$  w (4.5), otrzymuje się funkcjonal odpowiedzi jednorodnego materiału sprężystego w postaci

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathfrak{H}(\mathbf{F}). \quad (4.6)$$

Można sprawdzić, przy jakich warunkach równanie (4.6) spełnia postulat obiektywności materiałowej. W tym celu rozważa się ruch  $\boldsymbol{\chi}'^{**}(\mathbf{X}, s)$  ciała, który różni się od  $\boldsymbol{\chi}'(\mathbf{X}, s)$  o nałożony na konfigurację aktualną ruch sztywny, por. na przykład Holzapfel (2001). Wykorzystując obiektywność gradientu deformacji<sup>56)</sup>, można zapisać:

<sup>56)</sup> Obiektywność tensora gradientu deformacji jest problematyczna. Jako tensor dwupunktowy nie transformuje się on zgodnie z prawami obiektywnej transformacji dla tensorów drugiego rzędu, lecz jego transformacja względem obrotów przebiega jak dla wektorów. W pracy niniejszej,

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathfrak{h}(\mathbf{F}^+) = \mathfrak{h}(\mathbf{Q}\mathbf{F}^+), \quad (4.7)$$

a wykorzystanie obiektywności tensora  $\boldsymbol{\sigma}$  prowadzi do

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = \mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathfrak{h}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T. \quad (4.8)$$

Porównanie stronami (4.7) i (4.8) daje

$$\mathbf{Q}\mathfrak{h}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T = \mathfrak{h}(\mathbf{Q}\mathbf{F}). \quad (4.9)$$

Równanie (4.9) obowiązuje dla nieosobliwych tensorów  $\mathbf{F}$  i  $\mathbf{Q} \in SO(3)$  i wskazuje, że (4.6) jest niezależne od obserwatora gdy funkcjonal  $\mathfrak{h}$  spełnia (4.9).

Wykorzystując rozkład polarny gradientu deformacji  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ , gdzie  $\mathbf{R} \in SO(3)$ , a

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \quad (4.10)$$

gdzie  $\mathbf{U}$  jest (prawym) tensorem rozciągnięcia, równanie (4.9) można zapisać jako

$$\mathbf{Q}\mathfrak{h}(\mathbf{F})\mathbf{Q}^T = \mathfrak{h}(\mathbf{Q}\mathbf{R}\mathbf{U}). \quad (4.11)$$

Powyższa zależność obowiązuje dla wszystkich tensorów ortogonalnych  $\mathbf{Q}$ . A zatem, w szczególności, (4.11) jest ważne dla  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$ , co pociąga

$$\mathfrak{h}(\mathbf{F}) = \mathbf{R}\mathfrak{h}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T \quad (4.12)$$

A zatem, porównując (4.6) z (4.12), otrzymuje się

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R}\mathfrak{h}(\mathbf{U})\mathbf{R}^T, \quad (4.13)$$

co wskazuje, że właściwości materiału sprężystego są niezależne od części rotacyjnej  $\mathbf{R}$  gradientu  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ . Wniosek ten, zob. Wang i Truesdell (1973) s. 168, przypisuje się Richterowi (Richter 1948).

#### 4.2.1. Materiał hipersprężysty

Za Bychawskim (Bychawski 1979) wprowadza się pojęcie stanu naturalnego ciała, będącego stanem hipotetycznym, w którym istnieje zerowy stan naprężeń i odkształceń w ciele. Dalej określa się pojęcie natychmiastowego stanu naprężenia (odkształcenia), które powstaje w sposób niezależny od czasu.

Ośrodek ciągły, w którym lokalny stan naprężenia jest jednoznacznie określony natychmiastowym stanem odkształcenia (lub odwrotnie), nazywamy ośrodkiem sprężystym. Całkowity natychmiastowy zanik jednego ze stanów (naprężenia lub odkształcenia) powoduje natychmiastowy powrót ciała do stanu naturalnego.

Intuicyjne pojęcie sprężystości (Haupt 2000) opisuje sytuację, w której próbka materiału, po usunięciu obciążenia, wraca natychmiast do konfiguracji początkowej, jaką zajmowała przed przyłożeniem oddziaływania. Co więcej, odciążone ciało sprężyste powinno „oddać” zmagazynowaną w trakcie obciążania energię. Wymagań takich nie spełnia funkcja  $\mathfrak{h}$  w równaniu (4.6) i są one pewnymi dodatkowymi warunkami.

---

przyjmuje się jednak (zob. Coleman i Noll 1963, Green i Naghdi 1979, Holzapfel 2001), że  $\mathbf{F}$  jest tensorem obiektywnym.

Sformułowanie, w którym materiał sprężysty, określony jest poprzez funkcje (4.6), nazywane jest podejściem Cauchy'ego. Materiał sprężysty zaś, który jest opisany pewną funkcją skalarną gęstości energii wewnętrznej jako potencjałem dla naprężeń, nosi nazwę materiału hipersprężystego, a podejście takie znane jest jako podejście Greena (zob. Rymarz 1993, Haupt 2000). Rozróżniając te podejścia, Ogden (1997) czyni uwagę (zob. str. 206), iż w literaturze podważa się zasadność teorii sprężystości, w której nie istnieje funkcja gęstości energii. Deklaruje jednak także, że w swojej książce nie faworyzuje żadnego z podejść, przedstawiając oba. Ciąg dalszy niniejszej pracy dotyczy podejścia Greena, o którym Ogden pisze, że okazało się ono bardziej przydatne.

Jednym z najlepiej rozpoznanych od strony równań konstytutywnych materiałów hipersprężystych jest guma. Materiał ten zwykle zachowuje się jako jednorodny, izotropowy, nieściśliwy ciało stałe. Pionierami badań w tym zakresie byli Mooney i Rivlin. Ten ostatni pod koniec lat czterdziestych dwudziestego wieku opublikował na łamach czasopism *Philosophical Transactions of the Royal Society A* (5 prac) i *Proceedings of the Royal Society A*. (1 praca) cykl prac poświęconych dużym deformacjom materiałów sprężystych. Zawarł w nich definicję materiału neo-Hooke'a, a także badał zagadnienia jednoznaczności, problemy postawione we współrzędnych cylindrycznych biegunowych czy zagadnienia zginania, ścinania i skręcania.

Współcześnie, zagadnienia materiałów hipersprężystych, rozpatrywano między innymi, w pracach Chrościelewski (1996), Ogden (1997), Holzapfel (2001), Armero (2000), Ramezani i inni (2009) oraz w cytowanej tam literaturze.

W pracy Marsden i Hughes (1983), bazując na pracy Coleman i Noll (1963), (zob. także Wang i Truesdell 1973) wykazano, że w przypadku izotermalnej hipersprężystości tensory naprężenia: pierwszy Pioli-Kirchhoffa  $\mathbf{T}$  i drugi Pioli-Kirchhoffa  $\mathbf{S}$  mogą być obliczone jako pochodne funkcji gęstości energii odkształcenia<sup>57)</sup>  $\Phi$  odpowiednio z równań

$$\mathbf{T} = \rho_{ref} \frac{\partial \Phi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}}, \quad \mathbf{S} = 2\rho_{ref} \frac{\partial \Phi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \rho_{ref} \frac{\partial \Phi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}} \quad (4.14)$$

We wzorze (4.14)

$$\rho_{ref} = \det(\mathbf{F})\rho \quad (4.15)$$

co wynika z prawa zachowania masy, a

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (4.16)$$

opisuje tensor odkształcenia Greena-Lagrange'a. Z relacji (4.14) i (4.16) wynika teraz następujący wzór na tensor sprężystości w postaci

$$\mathbf{C} = \rho_{ref} \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}^2} \quad (4.17)$$

---

<sup>57)</sup> Formalnie, zob. Coleman i Noll (1963) jest to funkcja zależna nie tylko od gradientu deformacji  $\mathbf{F}$  ale także od entropii  $\eta$ , zob. np. równanie 5.4 w Coleman i Noll (1963), por. także Badur (2009). W niniejszej pracy jednak rozpatruje się zjawiska czysto mechaniczne.



Truesdell (1952) wykazał (zob. także na przykład Richter 1948, Rivlin i Ericksen 1955, Gurtin 1981, Haupt 2000, Holzapfel 2001), że równanie konstytutywne jednorodnego, izotropowego materiału sprężystego może być postawione w terminach funkcji gęstości energii odkształcenia  $\Phi$ , która jest funkcją trzech skalarnych niezmienników tensora deformacji Greena  $\mathbf{C}$  ze wzoru (4.16). Jeśli za argument przyjmując (4.16) to można zapisać odpowiednik równania (4.6) (Haupt 2000)

$$\mathbf{S} = \mathbf{g}(\mathbf{E}) = \psi_0 \mathbf{1} + \psi_1 \mathbf{E} + \psi_2 \mathbf{E}^2 \quad (4.18)$$

W powyższym równaniu współczynniki  $\psi_i = \psi_i(J_1, J_2, J_3)$ ,  $i = 0, 1, 2$  są funkcjami niezmienników<sup>58)</sup> tensora  $\mathbf{E}$ , to znaczy

$$J_1 = \text{tr} \mathbf{E} = I_{\mathbf{E}} \quad (4.19)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} I_{\mathbf{E}}^2 - II_{\mathbf{E}} \quad (4.20)$$

$$J_3 = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{E}^3 = \frac{1}{3} I_{\mathbf{E}}^3 - I_{\mathbf{E}} II_{\mathbf{E}} + III_{\mathbf{E}} \quad (4.21)$$

Dla ciała jednorodnego, izotropowego, sprężystego można pokazać, że funkcja energii  $\Phi$  może zależeć tylko od niezmienników (4.19)-(4.21), tzn.

$$\Phi(\mathbf{E}) = \Phi(J_1, J_2, J_3). \quad (4.22)$$

Wtedy otrzymuje się jawną postać równania (4.14)<sub>2</sub> jako

$$\frac{1}{\rho_{ref}} \mathbf{S} = \frac{\partial \Phi}{\partial J_1} \mathbf{1} + \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} \mathbf{E} + \frac{\partial \Phi}{\partial J_3} \mathbf{E}^2. \quad (4.23)$$

Jednym z materiałów hipersprężystych jest materiał Saint-Venanta i Kirchhoffa, funkcja energii, którego dana jest równaniem

$$\Phi(\mathbf{E}) = \frac{\lambda}{2} (\text{tr} \mathbf{E})^2 + \mu \text{tr} \mathbf{E}^2 \quad (4.24)$$

W równaniu (4.24) wykorzystano stałe Lamego związane ze stałymi technicznymi zależnościami

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.25)$$

---

<sup>58)</sup> Skalarne niezmienniki dowolnego tensora  $\mathbf{A}$  rzędu drugiego otrzymuje się ze wzorów:  $I_{\mathbf{A}} = \text{tr} \mathbf{A}$ ,  $II_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} ((\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr} \mathbf{A}^2)$ ,  $III_{\mathbf{A}} = \det \mathbf{A}$ .

### 4.2.2. Liniowa teoria sprężystości

Najczęściej spotykanym modelem ciała niepolarnego jest ciało jednorodne, izotropowe i sprężyste. Model taki znajduje zastosowanie głównie wtedy, gdy przemieszczenia wynikające z ogólnej deformacji ciała są małe.

Można pokazać, że liniowo sprężysty materiał jest także hipersprężysty. Wyrażając gradient deformacji z (4.16) przez gradient przemieszczeń<sup>59)</sup> i zakładając, że  $\nabla \mathbf{u}$  jest małe, otrzymuje się klasyczną definicję tensora małych odkształceń jako symetrycznej części gradientu przemieszczenia tzn.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) = \nabla^{sym} \mathbf{u} \quad (4.26)$$

Rozwijając teraz (zob. Rymarz 1993) gęstość energii wewnętrznej w szereg Taylora z uwzględnieniem jedynie członów kwadratowych względem (4.26) i wykorzystując fakt, że energia sprężysta osiąga minimum w stanie niezdeformowanym, otrzymuje się wzór

$$\Phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4.27)$$

który wyraża fakt, że potencjał idealnego, liniowo-sprężystego materiału jest kwadratową funkcją współrzędnych tensora odkształcenia. Występujący w równaniu (4.27) tensor konstytutywny  $\mathbf{C}$  nazywany jest punktowo stabilnym (por. Marsden i Hughes 1994, str. 241) gdy  $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$  implikuje

$$\Phi > 0 \quad (4.28)$$

Podstawiając (4.24) do (4.14)<sub>2</sub> i przyjmując że w teorii liniowej obowiązują zależności

$$\mathbf{F} \approx \mathbf{1} \Rightarrow J = \det \mathbf{F} \approx 1 \Rightarrow \rho_0 = J\rho \approx \rho, \quad (4.29)$$

otrzymuje się znane równania (por. na przykład Marsden i Hughes 1994, str. 241)

$$\mathbf{s} = \lambda(\text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{C}_{abcd} = \lambda \delta_{ab} \delta_{cd} + \mu (\delta_{ac} \delta_{bd} + \delta_{ad} \delta_{bc}) \quad (4.31)$$

Równania (4.30) i (4.31) są podstawowymi równaniami konstytutywnymi liniowej mechaniki klasycznego ciała sprężystego.

Ograniczenia na wartości stałych w równaniu (4.31) wynikają z jednego z postulatów, jakie stawia się równaniom konstytutywnym (por. Antman 1995 rozdział XII.2), a mianowicie że równania równowagi ośrodka (2.4) powinny ujmować rozwiązania falowe, (zob. także Perzyna 1978, str. 114). Żądaniu temu czyni się zadość wtedy, gdy układ ten jest hiperboliczny.

Niech  $\Lambda_{ac}$  oznaczają współrzędne tensora akustycznego w postaci (por. Marsden i Hughes 1994)

$$\Lambda_{ac} = \mathbf{C}_{abcd} k_b k_d \quad (4.32)$$

<sup>59)</sup> Ponieważ  $\mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}$ , to otrzymuje się  $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u})$ .

gdzie  $\mathbf{k}$  jest wektorem kierunku propagacji fali. Dla materiałów hipersprężystych tensor ten jest tensorem symetrycznym (zob. Wang i Truesdell 1973, rozdział VI.3). W konsekwencji, aby prędkości fal były rzeczywiste, wartości własne tensora akustycznego muszą być dodatnie. Prowadzi to do tzw. warunku silnej eliptyczności Legendre'a i Hadamarda

$$\mathbf{c}_{abcd}k_bk_d\alpha_a\alpha_c > 0, \mathbf{k} \neq \mathbf{0}, \alpha \neq \mathbf{0}. \quad (4.33)$$

Tutaj  $\alpha$  oznacza wektor polaryzacji fali. Można pokazać (por. Marsden i Hughes 1994, s. 241), że tensor konstytutywny jest:

- punktowo stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mu > 0$  i  $(3\lambda + 2\mu)/3 > 0$  (por. także Fung i Tong 2001. str. 420)
- silnie eliptyczny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mu > 0$  i  $\lambda + 2\mu > 0$

### 4.3. Równania konstytutywne liniowego ośrodka Cosseratów

Zasadnicza trudność w stosowaniu modelu ośrodka Cosseratów przejawia się większą niż w modelu ośrodka Cauchy'ego liczbą stałych materiałowych. Ponieważ nie są dotąd znane szczegółowe metody identyfikacji tych stałych, to w rozwiązaniach zadań w ramach modelu Cosseratów zwykle przyjmuje się pewne wartości stałych dowolnie, zob. na przykład Yeh i Chen (1993), względnie prowadzi się analizy parametryczne, por. Nakamura i inni (1984). Pewne próby oznaczenia wartości mikropolarnych współczynników konstytutywnych opisano w przeglądzie literatury w rozdziale 2. niniejszej monografii. Bogatą listę publikacji związanych z tym problemem można odnaleźć w przeglądowej pracy Altenbach i inni (2010).

Równania konstytutywne są miejscem, w którym pojawia się pojęcie długości charakterystycznej ośrodka Cosseratów. Wielkość ta jest używana jako jedna z metod regularyzacji rozwiązań MES, zob. na przykład prace Mühlhaus (1989), de Borst (1991), Tejchman i Gudehus (2001), Chambon i inni (2001) oraz przeglądowa praca Neff (2004). Z tego względu teoria Cosseratów znalazła zastosowanie przy modelowaniu materiałów takich jak grunty. Bowiem w tych ośrodkach teoria owa ma dobre umotywowanie fizyczne: dodatkowe stopnie swobody odpowiadają obrotom ziaren, a długością charakterystyczną jest średnia średnica ziaren (Bobiński 2006). Szerzej na ten temat, w kontekście analizy MES betonu, pisze Bobiński (2006) w swej rozprawie doktorskiej.

Bardzo ciekawe ujęcie zagadnienia równań konstytutywnych z wieloma odniesieniami do literatury przedstawia na swojej stronie domowej<sup>60)</sup> Patrizio Neff.

Zadaniem niniejszego podrozdziału jest przedstawienie równań konstytutywnych w odniesieniu do pewnych sformułowań ośrodka Cosseratów: trójwymiarowego kontinuum, mikropolarnej płyty i nieliniowej sześcioparametrowej powłoki.

#### 4.3.1. Liniowo sprężyste kontinuum Cosseratów

Jak wynika z poprzedniego rozdziału, równania konstytutywne dla liniowo sprężystego ośrodka Cosseratów otrzymał między innymi Nowacki (1971). W przypadku materiału izotropowego, jednorodnego i centrosymetrycznego (niezmienniczego względem

<sup>60)</sup> <http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/fbereiche/analysis/pde/staff/neff/patrizio/Cosserat.html>.

obrotów) równanie opisujące energię odkształcenia w otoczeniu stanu neutralnego przyjmuje postać (por. Nowacki 1971, Ramezani i inni 2009)

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{1}{2} \left[ \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\gamma})^2 + (\mu - \alpha) \text{tr}(\boldsymbol{\gamma}^2) + (\mu + \alpha) \text{tr}(\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[ \beta \text{tr}(\boldsymbol{\kappa})^2 + (\gamma - \varepsilon) \text{tr}(\boldsymbol{\kappa}^2) + (\gamma + \varepsilon) \text{tr}(\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\kappa}^T) \right] \end{aligned} \quad (4.34)$$

Równanie (4.34) nie zawiera członów z iloczynami tensorów odkształcenia  $\boldsymbol{\gamma}$  i skręcenia  $\boldsymbol{\kappa}$ , ponieważ byłoby to sprzeczne z założeniem centrosymetryczności. Widoczne jest, że do pełnego opisu takiego ośrodka potrzebnych jest sześć stałych materiałowych. Dwie z nich to klasyczne stałe Lamego, pozostałe cztery są nowymi stałymi sprężystymi.

Warto zwrócić uwagę na pewne niedomówienie, jakie można odnaleźć w pracy Ramezani i inni (2009). W ustępie przed równaniem (43) tej pracy przeczytać można, że równanie to wynika z pracy Eringen (1968). Zakładając, że Ramezani i współautorzy mają na myśli równanie (20.22) z pracy Eringena, zapisali oni poprawną wersję tego równania, choć nie wynika ona bezpośrednio z pracy Eringena. Zagadnienie to należałoby raczej omówić w świetle pracy Cowina (Cowin 1970b).

Cowin w swej pracy zauważył i wyjaśnił błąd, jaki popełnił Eringen w artykule z roku 1966. Wykazał on między innymi, że Eringen pomylił klasyczny moduł odkształcenia postaciowego

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4.35)$$

z nową stałą materiałową

$$\mu \rightarrow \mu^* = \mu - \frac{1}{2}\kappa \quad (4.36)$$

Równanie (4.36) wskazuje, że w pracy Eringena należy podstawić w miejsce  $\mu$  wielkość  $\mu^*$ , której wartość określa prawa strona równania (4.36). Eringen wyraził swoje równanie (20.22) przez sześć stałych materiałowych, przy czym cztery z nich nazywa dodatkowymi modułami sprężystości (zob. komentarz pod równaniem 20.25 w pracy Eringen 1968). Wśród tych czterech stałych nie wymienia on jednak klasycznego modułu odkształcenia postaciowego. Nie jest zatem jasne, czy Eringen, zapisując równanie (20.22), wyraził je przez klasyczny moduł  $\mu$  (4.35), czy, jak powinno być wg Cowina (Cowin 1970b), przez przejście (4.36). Tymczasem Ramezani i współautorzy (2009) podali prawidłową wersję równania gęstości energii wewnętrznej uwzględniające (4.36), nie cytując jednak pracy Cowina (Cowin 1970b). Kończąc ten wątek, warto też odnotować, że Nowacki (1971) także otrzymał prawidłowe równania<sup>61)</sup>. Ramezani i współautorzy nie odnotowali jednak tego faktu, dodatkowo mylnie pisząc nazwisko profesora Nowackiego, nazywając go Nowakim we wstępie do pracy i Nowakiem w spisie literatury.

Wykorzystując regułę (4.14) zapisaną dla tensorów naprężenia  $\boldsymbol{\sigma}$  i tensora naprężeń momentowych  $\boldsymbol{\mu}$  (por. rozdział 2),

<sup>61)</sup> Ściśle rzecz biorąc, Nowacki przedstawił równania konstytutywne dla liniowego ośrodka Cosseratów w pracy Nowacki (1968), a zatem równoległe z pracą Eringena (Eringen 1968) i przed pracami Cowina (Cowin 1970a, Cowin 1970b). Szkoda, że osiągnięcia profesora Nowackiego pozostały niezauważone przez współczesnych mu badaczy. Prace profesora Nowackiego, w wersji pdf, zebrano pod adresem [http://bcpw.bg.pw.edu.pl/Content/970/Nowacki\\_index.html](http://bcpw.bg.pw.edu.pl/Content/970/Nowacki_index.html)

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\gamma})}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{\partial \Phi(\boldsymbol{\kappa})}{\partial \boldsymbol{\kappa}} \quad (4.37)$$

otrzymuje się równania konstytutywne liniowego ośrodka Cosseratów w postaci

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mu + \alpha)\boldsymbol{\gamma} + (\mu - \alpha)\boldsymbol{\gamma}^T + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{1} \quad (4.38)$$

$$\boldsymbol{\mu} = (\gamma + \varepsilon)\boldsymbol{\kappa} + (\gamma - \varepsilon)\boldsymbol{\kappa}^T + \beta \text{tr}(\boldsymbol{\kappa})\mathbf{1}. \quad (4.39)$$

Równoważne postaciom (4.38) i (4.39) równania w terminach symetrycznych i asymetrycznych części tensorów odkształcenia mają odpowiednio postaci

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\gamma}_{sym} + 2\alpha \boldsymbol{\gamma}_{asym} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\mu} = 2\gamma \boldsymbol{\kappa}_{sym} + 2\varepsilon \boldsymbol{\kappa}_{asym} + \beta \text{tr}(\boldsymbol{\kappa})\mathbf{1}. \quad (4.40)$$

W dalszej części tego rozdziału wykorzystywane będą postaci równań (4.38) i (4.39) w poprawionej wersji Eringena, gdyż są bardziej rozpowszechnione w literaturze. Aby ułatwić przejście z notacji Nowackiego do notacji Eringena, w tabeli 4.1 zestawiono związki między stałymi materiałowymi w notacji Cowina, Nowackiego, Eringena i Neffa. Tabela ta nawiązuje do dodatku z pracy Cowin (1970b) i jest jej uzupełnieniem, zob. przypis 61. Za Neffem<sup>62)</sup> zapisuje się

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mu + \mu_c)\boldsymbol{\gamma} + (\mu - \mu_c)\boldsymbol{\gamma}^T + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\gamma})\mathbf{1} \quad (4.41)$$

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \boldsymbol{\kappa} + \beta \boldsymbol{\kappa}^T + \alpha \text{tr}(\boldsymbol{\kappa})\mathbf{1} \quad (4.42)$$

Wartości czterech mikropolarnych stałych  $\mu_c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  można wyznaczyć z ich relacji względem czterech następujących parametrów:

$$N^2 = \frac{\kappa}{2\mu + \kappa} \Rightarrow \kappa = 2\mu \frac{N^2}{1 - N^2}, \quad 0 \leq N < 1, \quad \kappa = 2\mu_c, \quad (4.43)$$

$$l_b^2 = \frac{\gamma}{4\mu} \Rightarrow \gamma = 4\mu l_b^2, \quad (4.44)$$

$$l_t^2 = \frac{\beta + \gamma}{2\mu} \Rightarrow \beta = 2\mu l_t^2 - \gamma, \quad (4.45)$$

$$\Psi = \frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \Rightarrow \alpha = (\beta + \gamma) \left( \frac{1 - \Psi}{\Psi} \right) = 2\mu l_t^2 \left( \frac{1 - \Psi}{\Psi} \right), \quad 0 < \Psi \leq \frac{3}{2}. \quad (4.46)$$

odpowiednio znanych jako (zob. na przykład praca cytowana w przypisie 62): *coupling number*, *characteristic length for bending*, *characteristic length for torsion*, *non-dimensional polar ratio*.

<sup>62)</sup> [http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/fbereiche/analysis/pde/staff/neff/patrizio/Cosserat\\_files/web\\_coss\\_relations.pdf](http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/fbereiche/analysis/pde/staff/neff/patrizio/Cosserat_files/web_coss_relations.pdf).

Tabela 4.1

Związki między stałymi materiałowymi Cowina, Eringena, Nowackiego i Neffa

Nazwa	Cowin [1970b]	Eringen [1968]	Nowacki [1971]	Neff
Stała Lamego	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$
Moduł ścinania	$\mu$	$\mu + \frac{1}{2}\kappa$	$\mu$	$\mu$
Moduł rotacji	$\tau$	$\frac{1}{2}\kappa$	$\alpha$	$\mu_c$
Moduł gradientu rotacji	$\frac{1}{2}\alpha$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$
Moduł gradientu rotacji	$2\eta$	$\frac{1}{2}\gamma$	$\gamma + \varepsilon$	$\beta$
Moduł gradientu rotacji	$2\eta'$	$\frac{1}{2}\beta$	$\gamma - \varepsilon$	$\gamma$

#### 4.3.2. Nieliniowa 6-parametrowa teoria powłok sprężystych

W niniejszej monografii zakres rozważań ograniczony jest do (warstwowych) powłok liniowo sprężystych. W pracach Makowski i Stumpf (1994), Chróścielewski (1996), Chróścielewski i inni (2004) przeprowadzono szczegółowe rozważania na temat równań konstytutywnych dla rozpatrywanej nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok. Poniżej zestawia się zasadnicze dla tego zagadnienia zależności.

W konfiguracji aktualnej stan naprężenia w wybranym punkcie  $\mathbf{x}$  określony jest przez przekrojowy tensor sił  $\mathbf{N}(\mathbf{x})$  i przekrojowy tensor momentów  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ , zob. równanie (3.78). Poprzez analogię do równania (4.4), zapisuje się dwa równania konstytutywne (por. na przykład Chróścielewski i inni 2004, równanie 2.2.6)

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\chi}'(\mathbf{x}, \cdot), \mathbf{T}'(\mathbf{x}, \cdot); \mathbf{x}, \mathbf{T}_0(\mathbf{x})) \quad (4.47)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\chi}'(\mathbf{x}, \cdot), \mathbf{T}'(\mathbf{x}, \cdot); \mathbf{x}, \mathbf{T}_0(\mathbf{x})) \quad (4.48)$$

Funkcjonały  $\mathbf{f}_{s=0}^{\infty}$  i  $\mathbf{g}_{s=0}^{\infty}$  ujmują zarówno własności mechaniczne materiału powłoki, jak i geometrię powierzchni podstawowej. Należy jednak zauważyć, że choć równania (4.47) i (4.48) opisują tzw. powłokę prostą, nie ma to nic wspólnego z geometrią powłoki, która może być w ogólności dowolna. Zawężając dalsze rozważania do powłok sprężystych (bez pamięci) i wyrażając deformację lokalną powłoki poprzez powierzchniowe miary odkształcenia  $\mathbf{E}(\mathbf{x})$  i  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ , równania (4.47) i (4.48) zapisuje się w postaci

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t); \mathbf{K}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}), \quad \mathbf{M}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{E}(\mathbf{x}, t); \mathbf{K}(\mathbf{x}, t); \mathbf{x}). \quad (4.49)$$

W równaniach powyższych  $\mathbf{f}$  i  $\mathbf{g}$  są funkcjami swoich argumentów. Dalej wprowadza się pojęcie powłoki hipersprężystej. Jest to powłoka, której własności mechaniczne wynikają z funkcji skalarnej gęstości energii sprężystej

$$\Phi(\boldsymbol{\epsilon}) = \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}; \mathbf{x}) = \Phi(\boldsymbol{\epsilon}_\beta, \boldsymbol{\kappa}_\beta; \mathbf{x}). \quad (4.50)$$

Szerzej na temat własności funkcji energii w kontekście różnych modeli ośrodka ciągłego piszą Eremeyev i Pietraszkiewicz (2006). Wykorzystując wzór (3.129), relację konstytutywną można formalnie zapisać w postaci

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \mathbf{s}(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \partial_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{Bmatrix} \partial_E \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}) \\ \partial_K \Phi(\mathbf{E}, \mathbf{K}) \end{Bmatrix} \quad (4.51)$$

Ze względu na założony w niniejszej pracy sposób zminimalizowania zjawiska blokady, przyjmuje się następujący formalny podział składowych wektora odkształcenia

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \varepsilon_{12} \ \varepsilon_{21} \mid \varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \mid \kappa_{11} \ \kappa_{22} \ \kappa_{12} \ \kappa_{21} \mid \kappa_1 \ \kappa_2\}^T = \{\boldsymbol{\varepsilon}_m \mid \boldsymbol{\varepsilon}_s \mid \boldsymbol{\varepsilon}_b \mid \boldsymbol{\varepsilon}_d\}^T \quad (4.52)$$

i wektora przekrojowych uogólnionych miar naprężeń

$$\mathbf{s} = \{N^{11} \ N^{22} \ N^{12} \ N^{21} \mid Q^1 \ Q^2 \mid M^{11} \ M^{22} \ M^{12} \ M^{21} \mid M^1 \ M^2\}^T = \{\mathbf{s}_m \mid \mathbf{s}_s \mid \mathbf{s}_b \mid \mathbf{s}_d\}^T \quad (4.53)$$

Etykiety dolne użyte w (4.52) i (4.53) określają odpowiednio składowe:  $m$  – membranowe (ang. *membrane*),  $s$  – ścinania poprzecznego (ang. *shear*),  $b$  – zgięciowe (ang. *bending*) i  $d$  – owinięcia (ang. *drilling*).

W pracy Eremeyev i Pietraszkiewicz (2006) zapisano równanie gęstości energii sprężystej dla powłoki stałej w postaci

$$\begin{aligned} 2\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = & \alpha_1 tr^2 \mathbf{E}_{\parallel} + \alpha_2 tr \mathbf{E}_{\parallel}^2 + \alpha_3 tr(\mathbf{E}_{\parallel}^T \mathbf{E}_{\parallel}) + \alpha_4 \mathbf{t}_N^0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{t}_N^0 + \\ & + \beta_1 tr^2 \mathbf{K}_{\parallel} + \beta_2 tr \mathbf{K}_{\parallel}^2 + \beta_3 tr(\mathbf{K}_{\parallel}^T \mathbf{K}_{\parallel}) + \beta_4 \mathbf{t}_N^0 \mathbf{K} \mathbf{K}^T \mathbf{t}_N^0 \end{aligned} \quad (4.54)$$

Tutaj oznaczenie  $\parallel$  określa składową styczną pewnego tensora  $\mathbf{X}$  zgodnie z rozkładem

$$\mathbf{X}_{\parallel} \equiv \mathbf{X} - \mathbf{t}_N^0 \mathbf{X} \in T_x M \otimes T_x M, \quad \mathbf{X} \equiv \mathbf{X}_{\parallel} + \mathbf{t}_N^0 \otimes \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{t}_N^0 \mathbf{X}. \quad (4.55)$$

Różniczkowanie związku (4.54) zgodnie z (4.51) prowadzi do formalnych wyrażeń na przekrojowy tensor sił  $\mathbf{N}$  i przekrojowy tensor momentów  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{N} = \alpha_1 A tr \mathbf{E}_{\parallel} + \alpha_2 \mathbf{E}_{\parallel}^T + \alpha_3 \mathbf{E}_{\parallel} + \alpha_4 \mathbf{t}_N^0 \mathbf{E} \mathbf{I}^T \mathbf{t}_N^0 \quad (4.56)$$

$$\mathbf{M} = \beta_1 A tr \mathbf{K}_{\parallel} + \beta_2 \mathbf{K}_{\parallel}^T + \beta_3 \mathbf{K}_{\parallel} + \beta_4 \mathbf{t}_N^0 \mathbf{K} \mathbf{I}^T \mathbf{t}_N^0. \quad (4.57)$$

W równaniach (4.56) i (4.57) operator  $A$  określony jest przez

$$\mathbf{A} = \mathbf{1} - \mathbf{t}_N^0 \otimes \mathbf{t}_N^0, \quad (4.58)$$

a  $\mathbf{I}$  jest operatorem inkluzji. Równanie konstytutywne dla rozpatrywanej w niniejszej monografii teorii powłok wynika ze szczególnej postaci wzoru (4.54) w formie

$$\begin{aligned} 2\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = & C \left[ \nu tr^2 \mathbf{E}_{\parallel} + (1-\nu) tr(\mathbf{E}_{\parallel}^T \mathbf{E}_{\parallel}) \right] + \alpha_s C (1-\nu) \mathbf{t}_N^0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{t}_N^0 + \\ & + D \left[ \nu tr^2 \mathbf{K}_{\parallel} + (1-\nu) tr(\mathbf{K}_{\parallel}^T \mathbf{K}_{\parallel}) \right] + \alpha_t C (1-\nu) \mathbf{t}_N^0 \mathbf{K} \mathbf{K}^T \mathbf{t}_N^0 \end{aligned} \quad (4.59)$$

W równaniu (4.59) wprowadzono oznaczenia

$$C = \frac{E h_0}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)}, \quad (4.60)$$

gdzie  $h_0$  oznacza grubość powłoki w konfiguracji odniesienia,  $E$  oznacza moduł Younga,  $\nu$  jest współczynnikiem Poissona, zaś  $\alpha_s$  i  $\alpha_t$  to odpowiednio współczynnik ścinania i współczynnik owinięcia. Współczynnik ścinania  $\alpha_s$  był omawiany w we wstępie do niniejszej monografii, zaś dyskusja na temat współczynnika  $\alpha_t$  jest przesunięta do dalszej części niniejszego rozdziału.

Różniczkowanie funkcji (4.59) prowadzi do jawnych postaci równań konstytutywnych (4.56) i (4.57), gdzie porządek składowych ustala równanie (3.128). Dla przekrojowych sił otrzymuje się związki

$$\begin{aligned}
 N^{11} &= C(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}) \\
 N^{22} &= C(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}) \\
 N^{12} &= C(1-\nu)\varepsilon_{12} \\
 N^{21} &= C(1-\nu)\varepsilon_{21} \\
 Q^1 &= \frac{1}{2}\alpha_s C(1-\nu)\varepsilon_1 \\
 Q^2 &= \frac{1}{2}\alpha_s C(1-\nu)\varepsilon_2
 \end{aligned} \tag{4.61}$$

zaś dla przekrojowych momentów

$$\begin{aligned}
 M^{11} &= D(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}) \\
 M^{22} &= D(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11}) \\
 M^{12} &= D(1-\nu)\kappa_{12} \\
 M^{21} &= D(1-\nu)\kappa_{21} \\
 M^1 &= \alpha_t D(1-\nu)\kappa_1 \\
 M^2 &= \alpha_t D(1-\nu)\kappa_2
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

Równania (4.61) oraz (4.62) były stosowane w szeregu prac zespołu zajmującego się rozpatrywaną tu teorią powłok. Jako reprezentatywne prace można tu wymienić na przykład Chróścielewski i inni (1992, 1997, 2002, 2004, 2006, 2010a, 2010b), Witkowski (2005, 2009), Chróścielewski i Witkowski (2006, 2010a, 2010b, 2011).

### 4.3.3. Model Altenbacha i Eremeyeva liniowo sprężystej płyty Cosseratów

Modelowi Altenbacha i Eremeyeva (Altenbach i Eremeyev 2009) poświęca się w niniejszej monografii nieco więcej uwagi, gdyż jest on najbliższy, w sensie kinematyki, rozpatrywanej tu teorii powłok. Zapisując w porządku składowych z (4.61) i (4.62) składowe równania (4.56) i (4.57) (zob. Dodatek w pracy Chróścielewski i Witkowski 2010b), otrzymuje się związki dla składowych tensora przekrojowych sił

$$\begin{aligned}
 N^{11} &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\varepsilon_{11} + \alpha_1\varepsilon_{22} \\
 N^{22} &= \alpha_1\varepsilon_{11} + (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\varepsilon_{22} \\
 N^{12} &= \alpha_3\varepsilon_{12} + \alpha_2\varepsilon_{21} \\
 N^{21} &= \alpha_2\varepsilon_{12} + \alpha_3\varepsilon_{21} \\
 Q^1 &= \alpha_4\varepsilon_1 \\
 Q^2 &= \alpha_4\varepsilon_2
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

oraz dla składowych tensora przekrojowych momentów.



$$\begin{aligned}
M^{11} &= (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\kappa_{11} + \beta_1\kappa_{22} \\
M^{22} &= \beta_1\kappa_{11} + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\kappa_{22} \\
M^{12} &= \beta_3\kappa_{12} + \beta_2\kappa_{21} \\
M^{12} &= \beta_2\kappa_{12} + \beta_3\kappa_{21} \\
M^1 &= \beta_4\kappa_1 \\
M^2 &= \beta_4\kappa_2
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Tutaj poszczególne stałe określone są wzorami

$$\alpha_1 = \tilde{\lambda}h = \frac{Ev}{1-\nu^2}h, \quad \tilde{\lambda} = \frac{2\mu\lambda}{2\mu+\lambda} = \frac{Ev}{1-\nu^2}, \tag{4.65}$$

$$\alpha_2 = (\mu - \frac{1}{2}\kappa)h, \tag{4.66}$$

$$\alpha_3 = (\mu + \frac{1}{2}\kappa)h, \tag{4.67}$$

$$\alpha_4 = (\mu + \frac{1}{2}\kappa)h, \tag{4.68}$$

$$\beta_1 = ah - (\mu - \frac{1}{2}\kappa)\frac{h^3}{12}, \tag{4.69}$$

$$\beta_2 = \beta h - \frac{1}{12}\tilde{\lambda}h^3, \tag{4.70}$$

$$\beta_3 = \gamma h - \frac{1}{12}(2\mu + \tilde{\lambda})h^3, \tag{4.71}$$

$$\beta_4 = \gamma h. \tag{4.72}$$

W pracy Chróścielewski i Witkowski (2010b) pokazano, że równania konstytutywne teorii sześcioparametrowej są szczególnym przypadkiem modelu Altenbacha i Eremeyeva (2009). W tabeli 4.2 zestawiono równania stałych materiałowych z równań konstytutywnych dla przekrojowych sił.

**Tabela 4.2**

Związki między stałymi materiałowymi  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  Altenbacha i Eremeyeva oraz ze stałymi nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok

Altenbach i Eremeyev (2009)	Teoria sześcioparametrowa
$\alpha_1 = \tilde{\lambda}h = \frac{Ev}{1-\nu^2}h$	$\alpha_1 = Cv = \frac{Ev}{1-\nu^2}h \equiv \tilde{\lambda}h$
$\alpha_2 = (\mu - \frac{1}{2}\kappa)h$	$\alpha_2 = 0$
$\alpha_3 = (\mu + \frac{1}{2}\kappa)h, \alpha_3 = 2\mu h = 2\frac{E}{2(1+\nu)}h = \frac{E}{(1+\nu)}h$	$\alpha_3 = C(1-\nu) = \frac{E(1-\nu)}{1-\nu^2}h = \frac{Eh}{1+\nu} = 2\mu h$
$\alpha_4 \equiv \alpha_3 = (\mu + \frac{1}{2}\kappa)h = 2\mu h$	$\alpha_4 = \alpha_s \frac{1}{2}C(1-\nu) = \alpha_s \frac{1}{2}\frac{E(1-\nu)}{1-\nu^2}h = \alpha_s \frac{Eh}{2(1+\nu)} = \alpha_s \mu h$

Przy współczynniku  $\alpha_4$  w teorii sześcioparametrowej pojawia się mnożnik  $\frac{1}{2}$  wynikający z faktu, że teoria ta jest sformułowana w terminach odkształceń inżynierskich.

Z drugiego wiersza tabeli 4.2 wynika, że współczynnik  $\alpha_2$  (4.66) zeruje się w teorii sześcioparametrowej. Wykorzystując związek (4.43) w równaniu (4.66), można pokazać, że warunkiem równoważności obu modeli konstytutywnych jest, by

$$\alpha_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (4.73)$$

Relacja (4.73) pozwala uogólnić i zapisać równania konstytutywne teorii sześcioparametrowej dla przekrojowych sił w terminach współczynnika  $N$  określonego równaniem (4.43) tzn.

$$\begin{Bmatrix} N^{11} \\ N^{22} \\ N^{12} \\ N^{21} \\ Q^1 \\ Q^2 \end{Bmatrix} = h \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} \\ \frac{\mu}{1-N^2} & \frac{\mu(1-2N^2)}{1-N^2} \\ \frac{\mu(1-2N^2)}{1-N^2} & \frac{\mu}{1-N^2} \\ & & \frac{\mu}{1-N^2} \\ & & & \frac{\mu}{1-N^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} \quad (4.74)$$

Łatwo pokazać, że przy relacji (4.73) równania (4.74) przechodzą w związki (4.61). W podobny sposób można pokazać, że równania konstytutywne dla momentów przekrojowych z teorii sześcioparametrowej są szczególnym przypadkiem równań Altenbacha i Eremeyeva. Szczegółowe wyprowadzenia zawiera praca Chróścielewski i Witkowski (2010b). Wykorzystując tabelę 4.3 oraz wzór 32 tejże pracy, przy jednoczesnym użyciu relacji (4.73) niniejszej monografii, dochodzi się do równania

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= ah - \frac{1}{12}(\mu - \frac{1}{2}\kappa)h^3 + \beta h - \frac{1}{12}\tilde{\lambda}h^3 + \gamma h - \frac{1}{12}(2\mu + \tilde{\lambda})h^3 \\ &= 2\mu \frac{1}{\varphi} l_t^2 h - \frac{1}{12}\mu \left( \frac{1-2N^2}{1-N^2} + \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \right) h^3 \end{aligned} \quad (4.75)$$

Równania konstytutywne dla momentów przekrojowych można wtedy zapisać jako

$$\begin{Bmatrix} M^{11} \\ M^{22} \\ M^{12} \\ M^{21} \\ M^1 \\ M^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varphi} l_t^2 - \frac{1}{12} \left( \frac{1-2N^2}{1-N^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) h^2 & \frac{1-\nu}{\varphi} l_t^2 - \frac{1}{2} \frac{1-2N^2}{1-N^2} \frac{1}{12} h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{\varphi} l_t^2 - \frac{1}{12} \left( \frac{1-2N^2}{1-N^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) h^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2l_b^2 - \frac{1}{12} \frac{1}{1-\nu} h^2 & l_t^2 - 2l_b^2 - \frac{1}{12} \frac{\nu}{1-\nu} h^2 & 0 & 0 \\ & & & 2l_b^2 - \frac{1}{12} \frac{1}{1-\nu} h^2 & 0 & 0 \\ & & & & 2l_b^2 & 0 \\ & & & & & 2l_b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ \kappa_{12} \\ \kappa_{21} \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{Bmatrix} \quad (4.76)$$

*Sym.*

Dalsze podstawienie do równań (4.76) zależności

$$N = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad l_t^2 = \frac{1}{6} \frac{1}{1-\nu} h, \quad \Psi = \frac{2}{2+\nu} \quad (4.77)$$

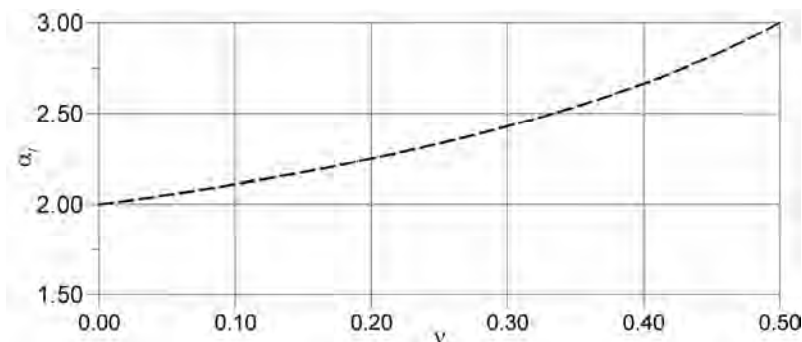
proceedzi do wzorów (4.62). Wykorzystując teraz równanie (26<sub>2</sub>) w zależności (27) z pracy Chróścielewski i Witkowski (2010b), tzn.

$$l_b^2 = \frac{1}{24} \frac{2-\nu}{1-\nu} h^2 \rightarrow \alpha_t = 24 \frac{l_b^2}{h^2} \quad (4.78)$$

otrzymuje się wzór na współczynnik konstytutywny  $\alpha_t$

$$\alpha_t = \frac{2-\nu}{1-\nu} \quad (4.79)$$

Wzór powyższy jest ważny tylko przy założeniu równoważności (zob. równanie (4.73)) między modelem Altenbacha i Eremeyeva a równaniami konstytutywnymi teorii rozważanej w niniejszej pracy. Podstawiając do równania (4.79) typowe wartości współczynnika Poissona  $\nu \in [0; 0.5]$ , otrzymuje się zakres zmienności współczynnika konstytutywnego  $\alpha_t$   $\alpha_t \in [2, 3]$ . Zmiany wartości  $\alpha_t$  w rozpatrywanym zakresie przedstawia rys. 4.1.



Rys. 4.1. Zmiany wartości współczynnika wartości  $\alpha_t$  wg wzoru (4.79)

**Tabela 4.3**

Związki między stałymi materiałowymi  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  Altenbacha i Eremeyeva oraz z nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok

Altenbach i Eremeyev (2009)	Teoria sześcioparametrowa
$\beta_1 = ah - (\mu - \frac{1}{2}\kappa) \frac{h^3}{12}$	$\beta_1 = Dv = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} v = \frac{1}{12} Cv h^2 = \frac{1}{12} \frac{2\mu h}{(1-\nu)} v h^2 = 2\mu h \frac{v h^2}{12(1-\nu)}$
$\beta_2 = \beta h - \tilde{\lambda} \frac{h^3}{12}$	$\beta_2 = 0$
$\beta_3 = \gamma h - (2\mu + \tilde{\lambda}) \frac{h^3}{12}$	$\beta_3 = D(1-\nu) = \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} = 2\mu h \frac{1}{12} h^2$
$\beta_4 = \gamma h$	$\beta_4 = \alpha_t \frac{1}{2} D(1-\nu) = \alpha_t \frac{1}{2} \frac{Eh^3}{12(1+\nu)} = \alpha_t \frac{h^3}{12} \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu h \alpha_t \frac{h^2}{12}$

### Oszacowanie współczynnika $\alpha_t$

Współczynnik owinięcia  $\alpha_t$  jest unikalnym współczynnikiem korekcyjnym, występującym jedynie w ramach rozpatrywanej tu sześcioparametrowej teorii powłok. Oszacowany analitycznie przy pomocy wzoru (4.79) możliwy kres górny wartości  $\alpha_t$  jest znacząco większy w porównaniu z wartościami oznaczonymi numerycznie w pracach Chróścielewski i inni (1992), Chróścielewski (1996), Chróścielewski i inni (2004). W pracach tych pokazano, że w zakresie  $\alpha_t < 1$  rezultaty analizy MES są praktycznie niewrażliwe na wartości  $\alpha_t$ .

Inną wartość współczynnika  $\alpha_t = 7/20$  podał Naghdi (Naghdi 1972, równanie 20.11). Pietraszkiewicz (1979) podał wartość  $\alpha_t = 7/10$ , do której Badur (1984) podał szczegółowe wyprowadzenie. W pracy Chróścielewski i inni (2010b) określono w sposób analityczny wartość zarówno współczynnika  $\alpha_t$  jak i  $\alpha_s$

$$\alpha_t = \frac{7}{10}, \quad \alpha_s = \frac{5}{6} \quad (4.80)$$

Wartości powyższe uzyskano, wykorzystując gęstość energii komplementarnej wyprowadzonej dla naprężeń ścinania poprzecznego. Zakładając pewne rozkłady naprężeń wzdłuż grubości powłoki, które zanikają na górnej i dolnej powierzchni powłoki, otrzymano równania konstytutywne dla momentów owinięcia naprężeń stycznych ze współczynnikami odpowiednio danymi równaniami (4.80). Współczynniki te nie zależą od symetrii materiału, grubości i geometrii powłoki, a także nie podlegają żadnym hipotezom kinematycznym.

Wartość współczynnika  $\alpha_t$  była też przedmiotem rozważań w pracy Neff i inni (2010a). Bazując na pojęciu krzywizny konforemnej (ang. *conformal curvature*, zob. na przykład praca Neff (2006) pokazano, że przyjmując pewne założenia odnośnie wartości współczynników konstytutywnych w opisie prawa materiałowego dla trójwymiarowego ośrodka Cosseratów oraz dla energii sprężystej (ściśle energii krzywiznowej, ang. *curvature energy*), w wyniku całkowania po grubości wyrażenia na energię sprężystą, pojawia się współczynnik  $\alpha_{2\_Neff}$ . Odgrywa on podobną rolę jak współczynnik  $\alpha_t$  w niniejszej teorii powłok. W pracy Neff i inni (2010a) wykazano ściśle, że w przypadku

$$\alpha_{2\_Neff} > 0 \quad (4.81)$$

energia krzywiznowa zależałaby od niesymetrycznej części tensora krzywizny. W konsekwencji, jak dowodzą autorzy, wynikowa graniczna wartość dwuwymiarowej energii w analizie zbieżności typu  $\Gamma$  stanie się funkcją warunków brzegowych nałożonych na wektor obrotu. Z tego względu w pracy Neff i inni (2010a) przyjmuje się  $\alpha_{2\_Neff} = 0$ , co prowadzi do klasycznej teorii FOSD. W rozdziale 4. pracy Makowski i Stumpf (1994) pokazano, że z założenia o sztywnym dyrektorze w teorii FOSD wynika nieokreśloność obrotu owinięcia, co nie oznacza, że jest on równy zero.

## 4.4. Podejście równoważnej jednej warstwy

### 4.4.1. Wprowadzenie

W poniższym podrozdziale podejście równoważnej jednej warstwy (zob. opis we Wstępie) jest zaadoptowane na potrzeby rozpatrywanej w niniejszej monografii teorii powłok. Uwzględnia się w szczególności brak symetrii membranowych naprężeń ścinania. Przedstawione tu podejście zostało omówione także w pracy Chróścielewski i inni (2011b).

W poprzednich rozdziałach przedstawiono ściśle wyniki dotyczące kinematyki i statyki sześcioparametrowej teorii powłok. Zagadnienie równań konstytutywnych jest tym miejscem sformułowania, w którym koncentrują się założenia upraszczające teorii.

W rozdziale 3.3.2 niniejszej monografii pokazano, że miary wirtualnych odkształceń dla teorii sześcioparametrowej mają strukturę identyczną z równaniami dla liniowego ośrodka Cosserat, zob. rozdział 2. Tak więc, naturalnym byłoby sformułowanie równań konstytutywnych dla powłok na podobieństwo równań fizycznych ośrodka Cosserat. W takim podejściu należy jednak zmierzyć się z zagadnieniem identyfikacji stałych materiałowych ośrodka mikropolarnego. Równania konstytutywne takiego ośrodka były dyskutowane, między innymi w pracach Mindlin (1965), Nowacki (1968, 1971), Eringen (1968), Cowin (1970ab), Nakamura i Lakes (1995). Jak pokazano w równaniach (4.41) i (4.42), w podstawowej wersji potrzeba czterech stałych materiałowych do zapisania równań fizycznych ośrodka Cosseratów. Oszacowanie wartości tych stałych jest jednak trudne zarówno od strony eksperymentalnej, zob. na przykład prace Gauthier i Jahsman (1975, 1981) i komentarz Eringena (Eringen 1999, str. 164) jak i od strony teoretycznej, zob. na przykład Eremeyev i Pietraszkiewicz (2006) czy Neff i inni (2010b).

Przystępując do analizy powłok warstwowych, należy wziąć pod uwagę ich anizotropię poprzeczną. W szczególności German (1996) zwraca uwagę, że „istotnym z punktu widzenia kompozytów jest przypadek symetrii ortotropowej, gdyż większość kompozytów warstwowych o jednokierunkowym zbrojeniu zalicza się do tej klasy”. Równania konstytutywne dla ortotropowego ośrodka Cauchy’ego można odnaleźć w pracach German (1996), Jones (1999) czy Kreji (2007). W niniejszej pracy należałoby wykorzystać trójwymiarowe równania konstytutywne ortotropowego ośrodka Cosseratów. Związki takie można odnaleźć na przykład w pracach Green i Naghdi (1982), Nakamura i inni (1984), Casolo (2006), Birsan (2009). W pracy Nakamura i inni (1984) rozważano różne typy ortotropii materiału: materiał ortotropowy ze względu na naprężenia i izotropowy ze względu na naprężenia momentowe oraz materiał ortotropowy ze względu na naprężenia i naprężenia momentowe. W ostatnim przypadku, w płaskim stanie naprężenia potrzeba dziewięciu stałych materiałowych. W omawianej pracy przedstawiono pewną możliwość określenia tych stałych na podstawie pięciu stałych ortotropowego ośrodka Cauchy’ego.

W niniejszej monografii do opisu materiału warstwowego wykorzystuje się podejście opisane w pracy Chróścielewski i inni (2011b). W zaproponowanym tam sposobie równania konstytutywne powłoki warstwowej w ramach sześcioparametrowej teorii powłok zapisuje się bezpośrednio ze związków fizycznych formułowanych w ramach teorii FOSD klasycznego continuum Cauchy’ego. Sposób ten, choć intuicyjny, pozwala wyrazić prawo materiałowe przez pięć stałych fizycznych ortotropowego ośrodka niepolarnego, oraz dodatkowo współczynnika  $\alpha_i$ . Przyjętą tutaj metodologię można uzasadnić faktem, że większość wyników, prezentowanych w literaturze przedmiotu dla powłok warstwowych, wynika z trójwymiarowych równań konstytutywnych ośrodka Cauchy’ego. W ten sposób, wykorzystanie zapisanych poniżej równań pozwala na bezpośrednie, nieobarczone błędem identyfikacji stałych materiałowych<sup>63)</sup> ośrodka polarnego porównanie wyników.

---

<sup>63)</sup> Zagadnienie identyfikacji stałych materiałowych pozostaje poza zakresem niniejszej monografii.

#### 4.4.2. Sformułowanie na poziomie warstwy

W podejściu równoważnej jednej warstwy typowa powłoka warstwowa jest zbudowana z  $N_L$  warstw o zróżnicowanych charakterystykach materiałowych. Poprzez wprowadzenie układu osi materiałowych, modyfikuje się rys 3.4 do postaci przedstawionej na rys. 4.2, gdzie indeks  $k$  oznacza kolejną warstwę powłoki warstwowej, a zaznaczony kąt określa obrót osi materiałowych  $a_{(k)}$  i  $b_{(k)}$  typowej warstwy  $k$ .

W formułowaniu równań fizycznych na poziomie warstwy zakłada się, że w pojedynczej warstwie, w osiach materiałowych panuje płaski (niesymetryczny) stan naprężenia (PSN) oraz przyjmuje się (tylko w tym miejscu) założenie kinematyczne teorii FOSD. Elementarne uogólnienie równań konstytutywnych ośrodka ortotropowego w PSN z pominięciem symetrii prowadzi do równań

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_{aa} \\ \sigma_{bb} \\ \sigma_{ab} \\ \sigma_{ba} \\ \sigma_a \\ \sigma_b \end{array} \right\}_k = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} E_a & \nu_{ab} E_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \nu_{ab} \nu_{ba} & 1 - \nu_{ab} \nu_{ba} & & & & \\ \nu_{ba} E_a & E_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \nu_{ab} \nu_{ba} & 1 - \nu_{ab} \nu_{ba} & & & & \\ 0 & 0 & 2G_{ab} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{ab} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{ac} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{bc} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon^{aa} \\ \varepsilon^{bb} \\ \varepsilon^{ab} \\ \varepsilon^{ba} \\ \varepsilon^a \\ \varepsilon^b \end{array} \right\}_k \quad (4.82)$$

W równaniu (4.82),  $(E_a)_k$  i  $(E_b)_k$  oznaczają odpowiednio moduły Younga w kierunku wzmocnienia i prostopadłym do niego,  $(G_{ab})_k$  oznacza moduł ścinania w płaszczyźnie  $ab$  warstwy  $k$ , natomiast  $(\nu_{ab})_k$ ,  $(\nu_{ba})_k$  są współczynnikami Poissona, których wartości spełniają równanie

$$E_a \nu_{ba} = E_b \nu_{ab} \quad (\text{bez sumowania}) \quad (4.83)$$

Na potrzeby dalszych przekształceń równaniu (4.82) nadaje się postać zwartą, tzn.

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_m^{mat} \\ \sigma_s^{mat} \end{array} \right\}_k = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{C}}_m & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 4} & \tilde{\mathbf{C}}_s \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_m^{mat} \\ \varepsilon_s^{mat} \end{array} \right\}_k = \tilde{\mathbf{C}}_k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_m^{mat} \\ \varepsilon_s^{mat} \end{array} \right\}_k \quad (4.84)$$

Etykiety dolne  $m$  i  $s$  w równaniu (4.84) określają, odpowiednio, niesymetryczne naprężenia membranowe i naprężenia ścinania poprzecznego.

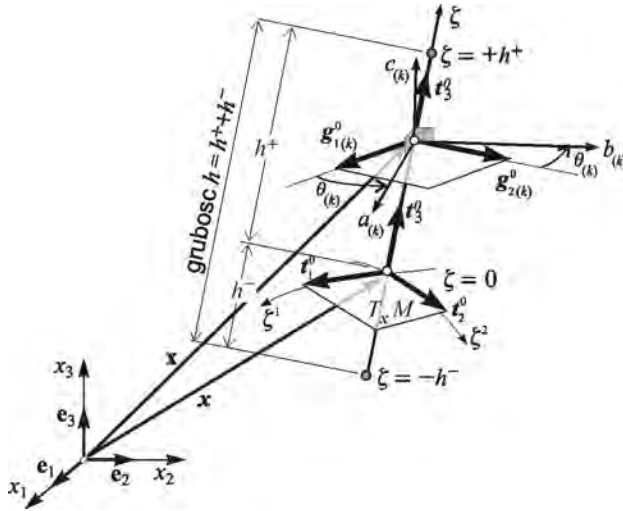
Transformację naprężeń i odkształceń w warstwie  $k$  między układem osi materiałowych, a układem wektorów  $\{\mathbf{g}_\alpha^0\}_k$  opisują odpowiednie zależności

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_m^{mat} \\ \sigma_s^{mat} \end{array} \right\}_k = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{T}}_m & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 4} & \tilde{\mathbf{T}}_s \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \sigma_m \\ \sigma_s \end{array} \right\}_k = \tilde{\mathbf{T}}_k \left\{ \begin{array}{c} \sigma_m \\ \sigma_s \end{array} \right\}_k \quad (4.85)$$

oraz

$$\left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_m^{mat} \\ \varepsilon_s^{mat} \end{array} \right\}_k = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{T}}_m & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 4} & \tilde{\mathbf{T}}_s \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_m \\ \varepsilon_s \end{array} \right\}_k = \tilde{\mathbf{T}}_k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_m \\ \varepsilon_s \end{array} \right\}_k \quad (4.86)$$

Tutaj etykieta górna  $mat$  określa wielkości odniesione do układu osi materiałowych.



Rys. 4.2. Wektory bazowe powierzchni podstawowej i w dowolnym punkcie  $\mathbf{x}$  w bazie ortonormalnej, definicja osi materiałowych

Występująca we wzorach (4.85) i (4.86) macierz transformacji  $\tilde{\mathbf{T}}_k$  opisana jest przez

$$\tilde{\mathbf{T}}_k = \left[ \begin{array}{cccc|cc} C^2 & S^2 & SC & SC & 0 & 0 \\ S^2 & C^2 & -SC & -SC & 0 & 0 \\ -SC & SC & C^2 & -S^2 & 0 & 0 \\ -SC & SC & -S^2 & C^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S & C \end{array} \right]_k = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{T}}_m & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 4} & \tilde{\mathbf{T}}_s \end{array} \right]_k \quad (4.87)$$

Tutaj  $\theta_{(k)}$  jest wartością kąta między osią  $a_{(k)}$  i  $\{g_\alpha^0\}_k$ , a  $C = \cos(\theta_{(k)})$  i  $S = \sin(\theta_{(k)})$  są funkcjami trygonometrycznymi tego kąta.

Wymagane w dalszych obliczeniach wartości naprężeń w warstwie  $k$  w bazie  $\{g_\alpha^0\}_k$  otrzymuje się następująco (por. na przykład German 1996): w pierwszej kolejności przekształca się równanie (4.85) względem naprężeń  $\{\sigma_m \sigma_s\}_k^T$ , a następnie wyraża naprężenia w układzie osi materiałowych, wykorzystując równanie konstytutywne (4.84). W kolejnym kroku, do otrzymanego równania podstawia się zależność (4.86), co w konsekwencji prowadzi do wzoru

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma_m \\ \sigma_s \end{array} \right\}_k = \left[ \begin{array}{c|c} \tilde{\mathbf{T}}_m^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_m \tilde{\mathbf{T}}_m & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} & \tilde{\mathbf{T}}_s^{-1} \tilde{\mathbf{C}}_s \tilde{\mathbf{T}}_s \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_m \\ \varepsilon_s \end{array} \right\}_k = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{C}_m & \mathbf{0}_{4 \times 2} \\ \mathbf{0}_{4 \times 2} & \mathbf{C}_s \end{array} \right]_k \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon_m \\ \varepsilon_s \end{array} \right\}_k \quad (4.88)$$

Równanie to jest odpowiednikiem równania konstytutywnego danego przez (4.82), ale już w układzie osi  $\{g_\alpha^0\}_k$ , i stanowi podstawę do dalszej dyskusji równań fizycznych wyrażonych przez wielkości przekrojowe.

### 4.4.3. Sformułowanie w wielkościach przekrojowych

Dalsza dyskusja podzielona jest na dwa etapy. W pierwszej części wyprowadzone są równania wyrażające wypadkowe naprężeń normalnych  $\mathbf{s}_m$ , stycznych  $\mathbf{s}_s$  i zgięciowych  $\mathbf{s}_b$  (zob. równanie (4.53)) w terminach odpowiednich odkształceń wyrażonych przez (4.52). Zakłada się na tym etapie (i tylko tutaj), że obowiązuje hipoteza kinematyczna typu FOSD. W drugiej części rozpatrywane będą wypadkowe naprężeń związanych z momentami owinięcia  $M^1$  i  $M^2$ .

Wypadkowe naprężeń  $\mathbf{s}_m$ ,  $\mathbf{s}_s$  i  $\mathbf{s}_b$  otrzymuje się poprzez całkowanie po grubości odpowiednich naprężeń. Formalnie, całkowanie takie wymaga zastosowania wzoru (3.16). Zakładając, że laminat składa się z  $N_L$  warstw o grubości pojedynczej warstwy  $h_k = \zeta_k^+ - \zeta_k^-$ , całkowanie naprężeń zapisuje się przy pomocy wzorów

$$\mathbf{s}_m = \int_{-h^-}^{+h^+} \boldsymbol{\sigma}_m \mu d\zeta = \sum_{k=1}^{N_L} \left( \int_{\zeta_k^-}^{\zeta_k^+} \{\boldsymbol{\sigma}_m\}_k \mu d\zeta \right), \quad \zeta \in [\zeta_k^-; \zeta_k^+] \quad (4.89)$$

$$\mathbf{s}_s = \int_{-h^-}^{+h^+} \boldsymbol{\sigma}_s \mu d\zeta = \sum_{k=1}^{N_L} \left( \int_{\zeta_k^-}^{\zeta_k^+} \{\boldsymbol{\sigma}_s\}_k \mu d\zeta \right) \quad (4.90)$$

$$\mathbf{s}_b = \int_{-h^-}^{+h^+} \boldsymbol{\sigma}_m \zeta \mu d\zeta = \sum_{k=1}^{N_L} \left( \int_{\zeta_k^-}^{\zeta_k^+} \{\boldsymbol{\sigma}_m\}_k \zeta \mu d\zeta \right) \quad (4.91)$$

W powyższych wzorach stosowne naprężenia wyliczane są za pomocą związków (4.88),  $\zeta_k^+$  oraz  $\zeta_k^-$  określają, odpowiednio, odległość od powierzchni odniesienia do stropu i spągu warstwy. Przyjmując w tym miejscu założenia kinematyczne teorii FOSD (zob. na przykład Lewiński i Telega 2000, Kreja 2007, Radwańska 2009), równania (4.89)-(4.91) mogą zostać zapisane w postaci

$$\mathbf{s}_m = \sum_{k=1}^{N_L} \left( \int_{\zeta_k^-}^{\zeta_k^+} \{\mathbf{C}_m\}_k (\boldsymbol{\varepsilon}_m + \zeta \boldsymbol{\varepsilon}_b) \mu d\zeta \right) = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (4.92)$$

$$\mathbf{s}_s = \sum_{k=1}^{N_L} \left( \int_{\zeta_k^-}^{\zeta_k^+} (\alpha_s)_k \{\mathbf{C}_s\}_k \boldsymbol{\varepsilon}_s \mu d\zeta \right) = \mathbf{S} \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (4.93)$$

$$\mathbf{s}_b = \sum_{k=1}^{N_L} \left( \int_{\zeta_k^-}^{\zeta_k^+} \{\mathbf{C}_m\}_k (\zeta \boldsymbol{\varepsilon}_m + (\zeta)^2 \boldsymbol{\varepsilon}_b) \mu d\zeta \right) = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (4.94)$$

We wzorze (4.93)  $(\alpha_s)_k$  jest współczynnikiem korekty ścinania w warstwie  $k$ . W dalszym ciągu rozważań przyjmuje się, że powłoka jest wystarczająco cienka, tzn. prawdziwa jest implikacja

$$\frac{h_0}{L} \ll 1 \Rightarrow \mu \approx 1 \quad (4.95)$$

Relacja (4.95) oznacza, że metryka pewnej powierzchni równoległej do powierzchni podstawowej  $M$  może być aproksymowana przez wielkości z powierzchni podstawowej, por. na przykład Bašar i Krätzig (2001).



Wykorzystując (4.95), zdefiniowane we wzorach (4.92)-(4.94) macierze przyjmują następujące postaci

$$\mathbf{A} = \sum_{k=1}^{N_L} \{\mathbf{C}_m\}_k (\zeta_k^+ - \zeta_k^-), \quad \mathbf{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_L} \{\mathbf{C}_m\}_k ((\zeta_k^+)^2 - (\zeta_k^-)^2) \quad (4.96)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_L} \{\mathbf{C}_m\}_k ((\zeta_k^+)^3 - (\zeta_k^-)^3), \quad \mathbf{S} = \sum_{k=1}^{N_L} (\alpha_s)_k \{\mathbf{C}_s\}_k (\zeta_k^+ - \zeta_k^-) \quad (4.97)$$

W przypadku naprężeń wywołanych momentami owinięcia stosowne wypadkowe formalnie oblicza się na podstawie zależności

$$\mathbf{s}_d = \int_{-h^-}^{+h^+} \sigma_d \mu d\zeta = \sum_{k=1}^{N_L} \left( \int_{\zeta_k^-}^{\zeta_k^+} \{\sigma_d\}_k \mu d\zeta \right) \quad (4.98)$$

W podejściu zaproponowanym w pracy Chróścielewski i inni (2011b) i wykorzystywanym tutaj, zaproponowano by przekrojowe siły od momentów owinięcia obliczać na podstawie odkształceń owinięcia  $\boldsymbol{\varepsilon}_d$

$$\mathbf{s}_d = \alpha_t \sum_{k=1}^{N_L} \left( \int_{\zeta_k^-}^{\zeta_k^+} (\alpha_t)_k \{\mathbf{C}_d\}_k \boldsymbol{\varepsilon}_d \mu d\zeta \right) = \mathbf{G} \boldsymbol{\varepsilon}_d, \quad \mathbf{C}_d = \zeta^2 \mathbf{C}_s, \quad (4.99)$$

$$\mathbf{G} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_L} (\alpha_t)_k \{\mathbf{C}_s\}_k ((\zeta_k^+)^3 - (\zeta_k^-)^3). \quad (4.100)$$

Tutaj macierz  $\mathbf{C}_s$  określona jest wzorem (4.88). Czynniki  $\zeta^2$  w związku (4.99) zapewnia zgodność jednostek i w przejściu granicznym do powłoki izotropowej jednorodnej pozwala na otrzymanie równań konstytutywnych (4.61) i (4.62). Występujące w równaniu (4.99) współczynniki  $\alpha_t$  oraz  $(\alpha_t)_k$  są odpowiednio współczynnikiem korekcyjnym owinięcia dla całego przekroju oraz dla warstwy. W obliczeniach numerycznych w tej pracy przyjmuje się ich następujące wartości

$$\alpha_t = 0.7 \text{ (zgodnie z (4.80)) oraz } (\alpha_t)_k = 1.0 \quad (4.101)$$

Podsumowując, równanie konstytutywne powłoki warstwowej w ujęciu równoważnej jednej warstwy

$$\mathbf{s} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.102)$$

przyjmuje postać

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{s}_m \\ \mathbf{s}_s \\ \mathbf{s}_b \\ \mathbf{s}_d \end{Bmatrix}_{12 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G} \end{bmatrix}_{12 \times 12} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_s \\ \boldsymbol{\varepsilon}_b \\ \boldsymbol{\varepsilon}_d \end{Bmatrix}_{12 \times 1} \quad (4.103)$$

We wzorze (4.103) wszystkie podmacierze są wyrażone przez materiałowe stałe inżynierskie materiału ortotropowego poprzez zależności (4.96) i (4.97).

## Rozdział 5

# ELEMENTY SKOŃCZONE

### 5.1. Przegląd podstaw MES

#### 5.1.1. Aproksymacja i interpolacja, zagadnienia ogólne

Celem zasadniczym aproksymacji skończenie wymiarowej jest zastąpienie układu typu ciągłego (nieskończenie wymiarowego) odpowiednim układem dyskretnym o skończonej liczbie stopni swobody. Jednym z najpopularniejszych podejść jest metoda elementów skończonych (MES). Jest ona jedną z metod poszukiwania punktów stacjonarnych funkcjonału, na przykład funkcjonału zasady wirtualnych przemieszczeń czy funkcjonału Hu-Washizu. Rozważania niniejszego podrozdziału dzielą się na dwie części. W pierwszej z nich omawiane są wybrane ogólne kwestie aproksymacji skończenie wymiarowej na przykładzie zagadnień płaskich. W części drugiej przedstawione zostaną zagadnienia ściśle powiązane z rozpatrywaną w niniejszej monografii teorią powłok.

W metodach aproksymacyjnych (zob. na przykład Finlayson i Scriven 1966, Bathe 1982, Kleiber 1989, Hughes 2000, Belytschko i inni 2003, Rakowski i Kacprzyk 2005, Braess 2007), jak na przykład metoda Rayleigha-Ritza, metoda Galerkina czy metoda Petrova-Galerkina, minimalizację funkcjonału przeprowadza się na pewnej, stosownie dobranej podprzestrzeni skończenie wymiarowej  $S_h \subset S$ , gdzie  $S$  jest przestrzenią rozwiązań zupełną. Tutaj etykieta  $h$  jest parametrem charakterystycznym dyskretyzacji i oznacza ona, że rozwiązanie przybliżone zdąży do rozwiązania aproksymowanego przy  $h \rightarrow 0$  (lub odpowiednio  $h \rightarrow \infty$ , w zależności od przyjętego znaczenia  $h$ ). W podprzestrzeni  $S_h$  określa się bazę w postaci funkcji zlokalizowanych (zob. Kleiber 1985, str. 68), tzn. obowiązują jedynie lokalnie wewnątrz podobszaru dziedziny i znikają poza tym obszarem.

W MES podprzestrzeń skończenie wymiarowa  $S_h$  wynika z siatki dyskretyzacyjnej elementów skończonych, oznaczanych przez  $\Pi_{(e)}$ . Zakłada się, iż elementy  $\Pi_{(e)}$  łączą się w pewnych punktach zwanych węzłami, a ich obszar poza brzegami  $\partial\Pi_{(e)}$  sąsiadującymi nie może pokrywać się nawzajem. Węzły mogą być rozłożone całkowicie na brzegach elementów i w jego narożach,  $\partial\Pi_{(e)}$ , lub znajdować się częściowo wewnątrz danego elementu. Zbiór węzłów i elementów nosi nazwę siatki dyskretyzacyjnej zadania. Przykładową siatkę MES w przypadku 2D, przedstawia rys. 5.1. Na rysunku tym widoczne jest, że podział dziedziny  $B$  pewnego zadania na elementy skończone w liczbie  $N_e$  odbywać się może z aproksymacją dziedziny i jej brzegu  $\partial B$ . Stąd dla dowolnej dziedziny  $B$  zachodzi

$$\bigcup_{e=1}^{N_e} (\Pi_{(e)} \cup \partial\Pi_{(e)}) = \begin{cases} B \cup \partial B \\ B_h \cup \partial B_h \rightarrow B \cup \partial B \text{ przy } h \rightarrow \infty \end{cases} \quad (5.1)$$

Tutaj etykieta  $h$  podkreśla, że dana wielkość otrzymana jest w wyniku aproksymacji.

Formalny, matematyczny zbiór warunków, jakie musi spełniać siatka dyskretyzacyjna przedstawił Braess (2007). Niech  $B$  oznacza dziedzinę problemu, która dla wygodę jest

ograniczona wielobokiem. Zakłada się, że dziedzina taka (tu płaska) może być podzielona na elementy trójkątne lub/i czworokątne. Wtedy podział

$$\mathcal{B} = \{\Pi_{(1)}, \Pi_{(2)}, \dots, \Pi_{N_e}\} \quad (5.2)$$

dziedziny  $B$  na odpowiednie elementy jest dopuszczalny pod warunkiem że:

- 1)  $B = \bigcup_{e \in N_e} \Pi_{(e)}$ ,
- 2) jeśli  $\Pi_{(i)} \cap \Pi_{(j)}$  zawiera tylko jeden punkt, to jest on wspólnym wierzchołkiem (węzłem)  $\Pi_{(i)}$  i  $\Pi_{(j)}$ ,
- 3) jeśli  $i \neq j$ , a  $\Pi_{(i)} \cap \Pi_{(j)}$  zawiera więcej niż jeden punkt, wtedy  $\Pi_{(i)} \cap \Pi_{(j)}$  jest wspólną krawędzią  $\Pi_{(i)}$  i  $\Pi_{(j)}$ .

Występujące w powyższych rozważaniach pojęcie elementu skończonego formalnie składa się z następujących poziomów (Demkowicz 1995):

- element  $\Pi_{(e)}$  rozumiany jako figura geometryczna,
- przestrzeń funkcji kształtu  $\mathcal{P}_{(e)}$  tzn. funkcji o określonych własnościach najczęściej wielomianów lub funkcji „bliskich” wielomianom, określenie przestrzeni  $\mathcal{P}_{(e)}$  zostanie podane w dalszej części,
- zbiór węzłów  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_w}$  w liczbie  $N_w$ .

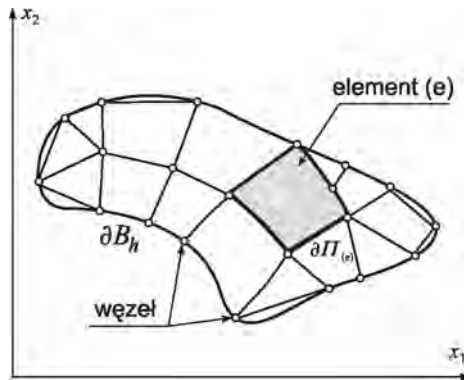
Pod pojęciem węzłów rozumie się tutaj specyficzne wybrane punkty z obszaru elementu  $\Pi_{(e)}$ . Zbiorowi węzłów  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N_w}$  stawia się dodatkowo żądanie, by był jednoznacznie rozwiązywalny tzn. by dla każdego ciągu liczb  $q_1, \dots, q_{N_e}$  istniała dokładnie jedna funkcja  $L_i$  z przestrzeni  $\mathcal{P}_{(e)}$  spełniająca warunek

$$L_i(\mathbf{a}_j) = q_j, \quad i, j = 1, \dots, N_w \quad (5.3)$$

W szczególnym przypadku, gdy

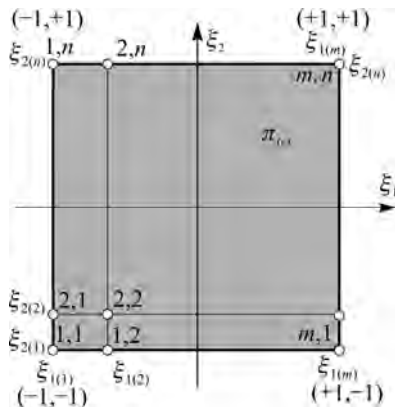
$$q_i = \delta_{ij} \quad (5.4)$$

otrzymuje się funkcję interpolacyjną, tzw. funkcję kształtu  $L_j$  (z przestrzeni  $\mathcal{P}_{(e)}$ ) węzła  $\mathbf{a}_j$ , która znika we wszystkich węzłach elementu oprócz węzła  $\mathbf{a}_j$ , w którym funkcja ta przybiera wartość 1.



Rys. 5.1. Przykładowa siatka MES, przypadek 2D

W podejściu izoparametrycznym, każdy element  $\Pi_{(e)}$  jest obrazem tzw. elementu wzorcowego (macierzystego)  $\pi_{(e)} = [-1, +1] \times [-1, +1]$  w przekształceniu afinicznym<sup>64</sup>. Jest to zwarty i ograniczony obszar w  $R^2$ , określony w bazie naturalnej  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ . W  $N_w = m \cdot n$  węzłowym elemencie liczba węzłów  $m$  w kierunku osi  $\xi_1$  oraz liczba węzłów  $n$  w kierunku osi  $\xi_2$  mogą być dowolne oraz  $m \neq n$ , zob. rys. 5.2.



Rys. 5.2. Interpolacja Lagrange'a w wielowęzłowym elemencie skończonym w 2D, element wzorcowy (macierzysty)  $\pi_{(e)}$

Ze względu na rząd ciągłości wymagany przez rozpatrywaną w niniejszej monografii teorię powłok, dalsze rozważania będą ograniczone do elementów skończonych klasy  $C^0$  typu Lagrange'a<sup>65</sup>. Niech

$$L_i^m(\xi) = \prod_{k=1, k \neq i}^m \frac{\xi - \xi_k}{\xi_i - \xi_k} \quad (5.5)$$

oznacza wielomian interpolacyjny rzędu  $n = m - 1$ . Funkcja kształtu  $L_i(\xi)$  węzła  $\mathbf{a}_i$  elementu  $\Pi_{(e)}$  powstaje w wyniku odpowiedniej kombinacji iloczynów jednowymiarowych wielomianów (5.5), tzn.

$$L_i(\xi) = L_r^m(\xi_1) L_s^n(\xi_2), \quad i \leftrightarrow (r, s) \quad (5.6)$$

Wobec tego przestrzeń funkcji interpolacyjnych  $\mathcal{P}_{(e)}$ , zawierająca w tym wypadku wielomiany Lagrange'a (5.5) może być określona jako

$$\mathcal{P}_{(e)} = \left\{ L_i(\xi) : L_i(\xi_j) = \delta_{ij}, \sum_{i=1}^{N_w} L_i(\xi) = 1, \forall \xi \in \pi_{(e)} \right\} \quad (5.7)$$

Interpolacja klasy  $C^0$  dowolnej węzłowej wielkości wektorowej opisana jest wzorem

$$\tilde{z}(\xi) = \sum_{i=1}^{N_w} L_i(\xi) z_i \quad (5.8)$$

<sup>64</sup> Jest to złożenie odwzorowania liniowego i translacji, odwzorowanie to zachowuje proste, ale nie zachowuje kątów, zob. na przykład Demkowicz (1995), Braess (2007).

<sup>65</sup> Możliwe są także inne typy interpolacji, na przykład interpolacja Hermite'a, która zapewnia także ciągłość pochodnych wielkości węzłowych.

Tutaj falka oznacza wartość interpolowaną danej wielkości. W dalszych rozważaniach oznaczenie to będzie pominięte.

### 5.1.2. Istnienie rozwiązania

Od strony matematycznej, teoria MES bazuje na współczesnej teorii równań różniczkowych cząstkowych. Szczegółowe rozważania można odnaleźć, na przykład w pracach Bernadou (1996), Hughes (2000), Lewiński i Telega (2000), Braess (2007). Zwarte ujęcie tego zagadnienia przedstawił Demkowicz (1995).

W analizie matematycznej MES wymaga się określenia odpowiednich własności funkcji, tzn. posiadania przez nie pewnych pochodnych oraz całkowalności. W tym celu wykorzystuje się przestrzeń Sobolewa  $H^k(B)$  rzędu  $k$

$$H^k = H^k(B) = \left\{ z_i : z_i \in L^2; z_{,i} \in L^2; \dots; z_{, \underbrace{i \dots i}_k \text{ razy}} \in L^2, i = 1, 2, 3 \right\} \quad (5.9)$$

Tutaj  $L^2$  oznacza przestrzeń funkcji całkowalnych z kwadratem, tzn. takich że

$$L^2(B) = \left\{ z_i : \int_B z_i^2 dx < \infty \right\}. \quad (5.10)$$

W przypadku wykorzystania elementów dostosowanych (zob. punkt 1.5.6 niniejszej monografii), stosując taki podział dziedziny  $B$  zadania na elementy skończone, w którym punkty „graniczne” (o zadanych przemieszczeniowych warunkach brzegowych)  $\partial B_u$  są jednocześnie węzłami elementu, otrzymuje się tak zwaną aproksymację wewnętrzną ( $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ ). W zagadnieniach liniowej teorii sprężystości sformułowano i udowodniono pewne twierdzenia dotyczące istnienia, jednoznaczności i regularności rozwiązania, zob. np. Demkowicz (1995), Braess (2007).

Podstawowym wynikiem dotyczącym istnienia i jednoznaczności jest lemat Laxa-Miligrama. Zapewnia on, że zagadnienie brzegowe liniowej teorii sprężystości (postawione w formie słabej) posiada dokładnie jedno rozwiązanie. Przy spełnieniu warunków aproksymacji wewnętrznej, jako konsekwencja tego lematu, aproksymowany problem brzegowy także posiada dokładnie jedno rozwiązanie.

Do wykazania zbieżności MES wykorzystywany jest lemat Cea. Jego konsekwencją jest fakt, że błąd aproksymacji wewnętrznej jest zawsze ograniczony przez błąd interpolacji. Zatem zmniejszając błąd interpolacji, jednocześnie zmniejsza się błąd aproksymacji. Więcej na temat formalnych i praktycznych aspektów oceny błędu piszą między innymi Demkowicz (1995), Zienkiewicz i Taylor (2002), Rakowski i Kacprzyk (2005), Braess (2007).

### 5.1.3. Typowy 4-węzłowy powłokowy element skończony

Powracając na grunt rozważań rozpatrywanej tu teorii powłok i zgodnie z poprzednimi określeniami (por. punkt 5.1.1), przez  $\Pi_{(e)} \subset M$  oznacza się obszar geometryczny określający typowy element skończony. Stąd aproksymacja powierzchni odniesienia powłoki opisana jest zależnością

$$M \approx M_h = \sum_{e=1}^{N_e} \Pi_{(e)}. \quad (5.11)$$

Położenie węzłów elementu czterowęzłowego opisane jest wektorami wodzącymi  $\mathbf{x}_a$ , gdzie  $a = 1, \dots, 4$ . Ponadto w każdym węźle elementu określa się ortonormalną trójkę tzw. wektorów najeżenia (zob. Woźniak 1966)

$$\{\mathbf{t}_i^0\}_a \equiv \{\mathbf{t}_i^0(\mathbf{x}_a)\}, \mathbf{t}_i^0(\mathbf{x}_a) = (\mathbf{T}_0)_a \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.12)$$

zgodnie ze wzorami (3.29) i (3.30). W ten sposób węzeł typowego elementu skończonego określony jest parą  $(\mathbf{x}, \mathbf{T}_0)_a$ . Wektor wodzący powierzchni podstawowej w konfiguracji odniesienia  $\mathbf{x}(\boldsymbol{\zeta})$  i tensor struktury w konfiguracji odniesienia  $\mathbf{T}_0(\boldsymbol{\zeta})$  w obszarze elementu skończonego otrzymuje się poprzez interpolację stosownych wielkości węzłowych. Wymagane w sformułowaniu wielkości podlegają interpolacji wewnątrz typowego elementu skończonego. Omówienie interpolacji zmiennych rozpatrywanego podejścia jest przedmiotem rozważań w rozdziale 5.3.

#### 5.1.4. Zamiana współrzędnych

W określeniach miar odkształceń (zob. wzór (3.132)) występują pochodne względem współrzędnych krzywoliniowych  $\zeta^\beta$ . W świetle relacji (3.3) i stosując regułę różniczkowania funkcji złożonej zapisuje się relację

$$\mathbf{t}_\beta^0(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial \zeta^\beta} = \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial \zeta^\alpha}{\partial \zeta^\beta} \quad (5.13)$$

Wykorzystując teraz wzór (3.31) i obliczając iloczyn skalarny  $\mathbf{t}_\alpha^0(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \mathbf{t}_\beta^0(\boldsymbol{\zeta})$ , otrzymuje się wzór

$$\mathbf{t}_\alpha^0(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \mathbf{t}_\beta^0(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial \zeta^\lambda} \cdot \mathbf{t}_\beta^0(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{\partial \zeta^\lambda}{\partial \zeta^\alpha} \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\zeta})}{\partial \zeta^\lambda} \cdot \mathbf{T}_0(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} \quad (5.14)$$

W postaci macierzowej równanie (5.14) przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} \zeta_{1,1}^{\zeta} & \zeta_{2,1}^{\zeta} \\ \zeta_{1,2}^{\zeta} & \zeta_{2,2}^{\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\partial \mathbf{x} / \partial \zeta_1^{\zeta}) \cdot \mathbf{t}_1^0 & (\partial \mathbf{x} / \partial \zeta_1^{\zeta}) \cdot \mathbf{t}_2^0 \\ (\partial \mathbf{x} / \partial \zeta_2^{\zeta}) \cdot \mathbf{t}_1^0 & (\partial \mathbf{x} / \partial \zeta_2^{\zeta}) \cdot \mathbf{t}_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

Na potrzeby dalszych przekształceń wprowadza się wyznacznik  $j(\boldsymbol{\zeta})$  określony równaniem

$$j(\boldsymbol{\zeta}) = \det \begin{bmatrix} (\partial \mathbf{x} / \partial \zeta_1^{\zeta}) \cdot \mathbf{t}_1^0 & (\partial \mathbf{x} / \partial \zeta_1^{\zeta}) \cdot \mathbf{t}_2^0 \\ (\partial \mathbf{x} / \partial \zeta_2^{\zeta}) \cdot \mathbf{t}_1^0 & (\partial \mathbf{x} / \partial \zeta_2^{\zeta}) \cdot \mathbf{t}_2^0 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Zgodnie z punktem 3.1.1 danymi zadania w MES są współrzędne wektora wodzącego  $\mathbf{x}$  oraz współrzędne wektorów bazy stycznej  $\mathbf{t}_\beta^0$ . Stąd obliczenie wyrażeń typu

$$(\partial \mathbf{x} / \partial \zeta_\beta^{\zeta}) \cdot \mathbf{t}_\alpha^0 = \zeta_{\alpha,\beta} \quad (5.17)$$

występujących w (5.16) nie następuje trudności. Wymagane w obliczeniach pochodne funkcji kształtu po współrzędnych  $\zeta^\beta$  oblicza się zatem ze wzoru

$$(L_\alpha)_{,\beta} = \frac{\partial L_\alpha(\boldsymbol{\zeta})}{\partial \zeta^\beta} = \frac{\partial L_\alpha(\boldsymbol{\zeta})}{\partial \zeta_1^{\zeta}} \zeta_{1,\beta} + \frac{\partial L_\alpha(\boldsymbol{\zeta})}{\partial \zeta_2^{\zeta}} \zeta_{2,\beta}. \quad (5.18)$$

Różniczkowy element powierzchni określony jest wzorem (3.15). Wobec założenia o ortonormalności bazy  $\mathbf{t}_i^0$  (zob. punkt 3.1.1) wzór (3.15) przyjmuje postać

$$da = \sqrt{a} d\zeta^1 d\zeta^2 = d\zeta^1 d\zeta^2 = j(\boldsymbol{\xi}) d\xi_1 d\xi_2. \quad (5.19)$$

## 5.2. Linearyzacja

W analizie pewnej klasy konstrukcji inżynierskich pojawia się zagadnienie nieliniowości. Może ona wynikać z kinematyki ciała (na przykład ciągną), opisu relacji konstytutywnej (na przykład plastyczność) czy warunków brzegowych (na przykład zagadnienia kontaktu). W zagadnieniach tego typu uzyskanie zamkniętego rozwiązania analitycznego jest zwykle niemożliwe i zachodzi potrzeba poszukiwania rozwiązań przybliżonych. Popularną metodą rozwiązywania zagadnień nieliniowych jest iteracyjno-przyrostowa metoda Newtona. Metoda ta wymaga sukcesywnej linearyzacji wszystkich równań opisujących dany problem oraz aktualizacji występujących tam parametrów. W ten sposób zagadnienie nieliniowe zastępowane jest ciągiem zlinearyzowanych równań, które są standardowo rozwiązywalne w każdej iteracji.

W rozważanej tu teorii powłok, przestrzeń konfiguracyjna  $C(M, G)$  (zbiór wszystkich możliwych konfiguracji) powierzchni typu Cosseratów określona jest następująco

$$\mathcal{U} = C(M, G) = \{ \mathbf{u} = (\mathbf{u}, \mathbf{Q}) : M \rightarrow G = E^3 \times SO(3) \}. \quad (5.20)$$

Tutaj  $M$  jest powierzchnią geometryczną zanurzoną w  $E^3$  o własnościach omawianych w rozdziale 3. niniejszej monografii. Przestrzeń styczną  $T_u \mathcal{U}$  do przestrzeni rozwiązań  $\mathcal{U}$  w punkcie  $\mathbf{u}$  do (5.20) określa się następująco

$$\mathcal{W} = T_u \mathcal{U} \simeq C(M, \mathcal{G}) = \{ \mathbf{w} : M \rightarrow \mathcal{G} = E^3 \times so(3) \} \quad (5.21)$$

Wobec istniejącego izomorfizmu  $so(3) \simeq E^3$ , wynikającego z odwzorowania  $\text{ad} : E \rightarrow so(3)$  (3.37), relację (5.21) można zapisać

$$T_u \mathcal{U} \simeq C(M, E) = \{ \mathbf{w} : M \rightarrow E = E^3 \times E^3 \}. \quad (5.22)$$

Zależność (5.22) pozwala traktować uogólnione przemieszczenie wirtualne  $\mathbf{w} \in T_u \mathcal{U}$  jako uporządkowaną parę wektorów. Należy pamiętać, że są to obiekty o różnych miarach fizycznych, a także podlegające innym zasadom akumulacji.

Zlinearyzowane równanie (3.143) ma postać

$$\delta^2 W[\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \hat{\boldsymbol{\xi}}, \delta \mathbf{s}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \hat{\boldsymbol{\xi}}, \Delta \mathbf{s}] + \delta W[\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\xi}}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \hat{\boldsymbol{\xi}}, \delta \mathbf{s}] = 0. \quad (5.23)$$

Z równania (5.20) wynika, że  $C(M, G)$  zawiera w definicji grupę obrotów  $SO(3)$ . Dlatego wyniki rozważań dotyczące przestrzeni liniowych nie mogą być tu bezpośrednio zastosowane. Z tego względu, w pracy Chróścielewski (1996) zaproponowano, by iteracyjną technikę rozwiązania (5.23) określać jako metodę typu Newtona rozumianą w sensie ogólniejszym od pierwowzoru.

Wykonanie działań przepisanych wzorem (5.23) i wykorzystanie wzoru (3.141) prowadzi do zależności (por. Witkowski 2005, Chróścielewski i Witkowski 2006)

$$\begin{aligned}
& \delta^2 W[\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\epsilon}, \delta \mathbf{s}, \Delta \mathbf{w}, \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \Delta \mathbf{s}] + \delta W[\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta \boldsymbol{\epsilon}, \delta \mathbf{s}] \\
& = \iint_M \left( (\Delta \delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}))^T \partial_{\boldsymbol{\epsilon}} \Phi + (\delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}))^T \partial_{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}}^2 \Phi \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) + (\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^T \partial_{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}}^2 \Phi \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) \right. \\
& \quad \left. + (\delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}))^T \partial_{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}}^2 \Phi \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + (\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^T \partial_{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}}^2 \Phi \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \underline{\delta \hat{\mathbf{s}}^T \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}} - \underline{(\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^T \Delta \hat{\mathbf{s}}} \right) da \\
& \quad + \delta^2 V[\mathbf{u}; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{u}] + \iint_M \left( (\mathbf{B}\mathbf{w})^T \partial_{\boldsymbol{\epsilon}} \Phi + \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \partial_{\boldsymbol{\epsilon}} \Phi - \underline{\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \hat{\mathbf{s}}} - \underline{\delta \hat{\mathbf{s}}^T \hat{\boldsymbol{\epsilon}}} \right) da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = 0
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Wyróżnione podkreśleniem składniki równania (5.24) będą omówione w dalszej części rozdziału, w miejscu poświęconym interpolacji zmiennych sformułowania wzbogaconego (elementu EANS4).

W kolejnych przekształceniach wykorzystuje się notację macierzowo-operatorową. Stąd w dalszym ciągu operacji z (5.24) wprowadza się następujące oznaczenia:

$$\delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) = \mathbf{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w}, \quad \delta \boldsymbol{\epsilon} = \delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} + \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{B}(\mathbf{u}) \mathbf{w} + \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \quad \delta \mathbf{d} = \mathbf{D} \mathbf{w} \tag{5.25}$$

$$(\delta^2 \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}))^T \mathbf{s} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{G} \delta \mathbf{d}, \quad \delta \mathbf{d} = \{v_{,1}, v_{,2}, w_{,1}, w_{,2}, \mathbf{w}\}^T \tag{5.26}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}(\cdot)_{,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1}(\cdot)_{,2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}(\cdot)_{,2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{n}^1 \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{n}^2 \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{m}^1 \times (\cdot) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{m}^2 \times (\cdot) \\ \mathbf{n}^1 \times (\cdot) & \mathbf{n}^2 \times (\cdot) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \tag{5.27}$$

Występująca we wzorze (5.27) macierz  $\mathbf{H}(\mathbf{u})$  jest określona następująco

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{n}^\beta \otimes (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\epsilon}_\beta) - (\mathbf{n}^\beta \cdot (\mathbf{t}_\beta + \boldsymbol{\epsilon}_\beta)) \mathbf{1} \tag{5.28}$$

Relacje konstytutywną przyjmuje się na mocy wzorów (4.14) i (4.17) jako

$$\mathbf{s}(\boldsymbol{\epsilon}) = \partial_{\boldsymbol{\epsilon}} \Phi = \mathbf{C}(\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}), \quad \partial_{\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\epsilon}}^2 \Phi = \mathbf{C} \tag{5.29}$$

W konsekwencji równanie (5.24) zapisuje się w zwartej postaci

$$\begin{aligned}
& \iint_M \left( \mathbf{w}^T (\mathbf{D}^T \mathbf{G} \mathbf{D} + \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{B}) \Delta \mathbf{w} + (\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^T \mathbf{C} \mathbf{B} \Delta \mathbf{w} + (\mathbf{B} \mathbf{w})^T \mathbf{C} \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \right. \\
& \quad \left. + (\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^T \mathbf{C} \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}} - \underline{\delta \hat{\mathbf{s}}^T \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}} - \underline{(\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^T \Delta \hat{\mathbf{s}}} \right) da \\
& \quad + \delta^2 V[\mathbf{u}; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{u}] + \iint_M \left( (\mathbf{B} \mathbf{w} + \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^T \mathbf{s}(\boldsymbol{\epsilon}) - \underline{\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \hat{\mathbf{s}}} - \underline{\delta \hat{\mathbf{s}}^T \hat{\boldsymbol{\epsilon}}} \right) da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = 0
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Aby uniknąć konieczności odnoszenia się do szczególnych wariantów wymuszeń, dalsze rozważania ograniczone są do tzw. obciążeń „martwych”, w tym konserwatywnych, tzn. takich, dla których zachodzi

$$\delta^2 V[\mathbf{u}; \mathbf{w}, \Delta \mathbf{u}] = 0. \tag{5.31}$$

Nawiązując do formalnego podziału wektora odkształcenia i naprężenia na składowe (zob. (4.52) i (4.53)) wprowadza się, na potrzeby sformułowania elementu EANS4, następującą dekompozycję operatora przemieszczenie-odkształcenie (3.132)



$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{matrix} 4 \times 2 & \mathbf{B}_m & | & 2 \times 2 & \mathbf{B}_s & || & 6 \times 2 & \mathbf{B}_m \end{matrix} \right\}^T \quad (5.32)$$

Wzory (5.30) i (5.32) są podstawą formułowania elementu skończonego EANS4, co jest przedmiotem dyskusji dalszych rozdziałów.

Z postaci równania (3.143) wynika, że wymagany przez teorię rząd ciągłości funkcji wynosi  $C^0$ . Z twierdzenia Sobolewa (zob. Hughes 2000, Braess 2007) wynika, że prawdziwa jest zależność

$$H^{k+1} \subset C^k. \quad (5.33)$$

Zatem, mając dany funkcjonał zmodyfikowanej zasady wariacyjnej Hu-Washizu, w postaci

$$W(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{s}) = \iint_M \left( \Phi(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) + \mathbf{s}^T (-\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right) da + V(\mathbf{u}) \quad (5.34)$$

można sformułować podstawowe zadanie aproksymacji skończenie wymiarowej (por. Chróścielewski 1996): zastąpienie układu nieskończenie wymiarowego typu ciągłego  $C$  odpowiednim układem dyskretnym  $D$  o skończonej liczbie stopni swobody. Odpowiednio określa się *Problem C*: Znajdź kinematycznie dopuszczalne  $\mathbf{u}$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}$  i  $\mathbf{s}$ , takie że  $W(\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{s})$  osiąga punkt stacjonarny dla  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ ,  $\delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{E}$ ,  $\delta\mathbf{s} \in \mathcal{S}$ . Tutaj określono: przestrzeń kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń spełniających kinematyczne warunki brzegowe

$$\mathcal{U} \equiv C(M, G) = \left\{ \mathbf{u} : \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \partial M_d \right\} \quad (5.35)$$

przestrzeń kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń wirtualnych spełniających jednorodne warunki brzegowe

$$\mathcal{V} \equiv C(M, E^3 \times E^3) = \left\{ \mathbf{w} : w_i \in H^1; \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}; \mathbf{x} \in \partial M_d \right\} \quad (5.36)$$

przestrzeń wirtualnych odkształceń nazywanych odkształceniami zgodnymi

$$\mathcal{E} \equiv C(M, (E^3)^4) = \left\{ \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \in L^2 \right\}, \quad (5.37)$$

oraz przestrzeń naprężeń

$$\mathcal{S} \equiv C(M, (E^3)^4) = \left\{ \mathbf{s} \in L^2 \right\}. \quad (5.38)$$

Określenie przestrzeni  $\mathcal{E} \ni \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  odkształceń wzbogacających będzie podane w dalszej części pracy.

Aproksymację skończenie wymiarową *Problemu C* czyli *Problem D* formuluje się następująco: Znajdź kinematycznie dopuszczalne  $\mathbf{u}_h$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}_h$  i  $\mathbf{s}_h$ , takie że  $W(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\varepsilon}_h, \mathbf{s}_h)$  osiąga punkt stacjonarny dla  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}_h$ ,  $\delta\boldsymbol{\varepsilon}_h \in \mathcal{E}_h$ ,  $\delta\mathbf{s}_h \in \mathcal{S}_h$ . Tutaj przestrzenie są skończenie wymiarowymi aproksymacjami odpowiednich przestrzeni ciągłych tzn.  $\mathcal{U}_h \subset \mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{E}_h \subset \mathcal{E}$ ,  $\mathcal{S}_h \subset \mathcal{S}$ .

Jeśli założy się, że przyjęty schemat interpolacji wzdłuż międzyelementowych brzegów zapewnia wymaganą przez rozważaną tu teorię powłok ciągłość klasy  $C^0$  pól podcałkowych w (5.30), to ten zlinearyzowany funkcjonał (5.30) można zapisać w formie następującej sumy po elementach

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left( \delta^2 W^{(e)}[\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta\mathbf{s}, \Delta\mathbf{w}, \Delta\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \Delta\mathbf{s}] + \delta W^{(e)}[\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{s}; \mathbf{w}, \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \delta\mathbf{s}] \right) = 0 \quad (5.39)$$

Zatem wobec rozbicia (5.30) na podobszary  $\Pi_{(e)}$  i sumowania poszczególnych udziałów w postaci zależności (5.39) dalsze rozważania można ograniczyć do typowego pojedynczego elementu skończonego  $\Pi_{(e)}$ .

## 5.3. Interpolacja

### 5.3.1. Uwagi ogólne

W ramach rozpatrywanego tu podejścia, zasadniczy problem z doбором funkcji interpolacyjnych wynika z faktu, że wielkości podlegające interpolacji należą do różnych abstrakcyjnych modeli matematycznych, (Korn i Korn 2000 i por. np. Chróścielewski 1996). Wynika to z faktu, że przestrzeń konfiguracyjna  $C(M, G)$  nie posiada struktury przestrzeni liniowej. Ze względu jednak na określenie  $G = E^3 \times SO(3)$  jako iloczynu prostego, interpolacje  $x(\xi) \in E^3$  i  $T_0(\xi) \in SO(3)$  stanowią dwa oddzielne zagadnienia. Dodatkowo, ze względu na zastosowane sformułowanie wzbogacone (podejście EAS) oraz dwustopniową interpolację odkształceń ścinania poprzecznego (podejście ANS), pojawia się zagadnienie interpolacji tychże odkształceń, jako elementów z przestrzeni  $E^3$ . Ostatnim składnikiem omawianego tu sformułowania, jaki podlega interpolacji, jest wektor wirtualnego obrotu  $w(\xi) \in E^3$  ( $w(\xi) = ad^{-1}(W(\xi))$ ,  $W \in so(3)$ ). W następnych podrozdziałach przedstawia się schematy interpolacyjne dla każdego typu zmiennej. Z tego też względu należy postrzegać omawiane tu podejście w szerszym kontekście, a więc jako sformułowanie typu izoparametrycznego.

### 5.3.2. Interpolacja wielkości wektorowych

Interpolacja funkcji wektorowych problemu: wektora wodzącego powierzchni podstawowej  $x(\xi)$ , wektora wodzącego powierzchni odniesienia w konfiguracji aktualnej  $y(\xi)$ , wektora przemieszczeń translacyjnych  $u(\xi)$  oraz wektora wirtualnego przemieszczenia  $v(\xi)$  podlega standardowej dla MES procedurze, zob. wzór (5.8). W rozpatrywanym tutaj elemencie czterowzłowym etykiety we wzorze (5.6) przebiegają wartości

$$m = n = 1, \quad r, s = 1, 2. \quad (5.40)$$

### 5.3.3. Interpolacja na grupie obrotów $SO(3)$

Zastosowanie standardowej interpolacji wyrażonej wzorem (5.8) do elementów grupy obrotów  $SO(3)$ , tzn.

$$Q(\xi), T_0(\xi) \Rightarrow \{t_i^0(\xi)\}, T(\xi) = Q(\xi)T_0(\xi) \Rightarrow \{t_i(\xi)\} \quad (5.41)$$

jest działaniem zewnętrznym względem tej grupy. W stosowanym w niniejszej pracy podejściu wykorzystuje się algorytm interpolacji pośredniej. Schemat ten został zaprezentowany w pracach Chróścielewski i inni (1992, 1993) i dalej oryginalnie rozwinięty przez Chróścielewskiego (1996)<sup>66</sup>. Kluczową ideą omawianego podejścia jest

<sup>66</sup> Podobną procedurę można odnaleźć w pracy Jelenić i Crisfield (1999). Zestawione tutaj prace wskazują, że palmę pierwszeństwa należy jednak bezwzględnie przypisywać prof. Chróścielewskiemu.

transport dziedziny aproksymacji w otoczenie elementu neutralnego grupy obrotów  $\mathbf{1} \in SO(3)$ , gdzie błąd narasta najwolniej, zob. Chróścielewski i inni (1993). Schemat interpolacyjny jest niezależny od wyboru parametryzacji grupy obrotów  $SO(3)$ .

Poszczególne kroki omawianego algorytmu opisano między innymi w pracach: Chróścielewski i inni (2002, 2011b). Poniżej dla kompletności rozważań niniejszej monografii przedstawiono w skrócie zasadnicze kroki schematu interpolacji (por. Witkowski 2005):

1. Ustalenie pewnego typowego reprezentanta  $\bar{Q} \in SO(3)$  zbioru dyskretnych wartości  $Q_a = Q(\xi_a)$ ,  $Q_a \in U \subset SO(3)$ , ( $a = 1, \dots, n_w$ ) funkcji  $Q(\xi)$  w węzłach  $\pi_{(e)} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ . Tutaj  $n_w = 4$  oznacza liczbę węzłów elementu skończonego.
2. Transport przy pomocy  $\bar{Q}^T \in SO(3)$  wartości dyskretnych  $Q_a$  z węzłów w otoczenie elementu neutralnego  $\mathbf{1} \in W \subset SO(3)$

$$R_a = \bar{Q}^T Q_a \quad (5.42)$$

3. Obliczenie w każdym węźle  $\xi_a$  ( $a = 1, \dots, n_w$ ) parametrów wektora obrotu  $w_a$  na podstawie (5.42). W rozpatrywanej tutaj parametryzacji kanonicznej wykorzystuje się równania (3.155).
4. Interpolacja współrzędnych wektora  $w_a(\xi_a)$  na podstawie wzoru (5.8).
5. Obliczenie funkcji  $\tilde{R}_a(\xi_a)$  przy pomocy  $w_a(\xi_a)$ . W parametryzacji kanonicznej korzysta się ze wzoru (3.154).
6. Transport funkcji z powrotem do położenia wyjściowego  $U \subset SO(3)$  przy pomocy  $\bar{Q} : W \rightarrow U \subset SO(3)$

$$\tilde{Q}(\xi) = \bar{Q} \tilde{R}(\xi). \quad (5.43)$$

W opisanym algorytmie funkcja  $\tilde{Q}(\xi)$  interpoluje funkcję  $Q(\xi) \in C(\pi_{(e)}, SO(3))$  w zbiorze węzłów  $\xi_a \in \pi_{(e)}$ . Z relacji  $\tilde{Q}(\xi) = \bar{Q} \tilde{R}(\xi)$  wynika, że funkcja  $Q(\xi)$  zawsze przybiera wartości w  $SO(3)$ . Zapewnia to, że przedstawiona procedura jest działaniem wewnętrznym w grupie  $SO(3)$  i praktycznie usuwa osobliwości, jakie mogą być związane ze stosowaniem parametryzacji lokalnej. W ramach omawianego tu podejścia procedurze interpolacji przedstawionej powyżej podlegają także wielkości  $Q(\xi)$ ,  $T_0(\xi)$  i  $T(\xi)$ .

### 5.3.4. Interpolacja wektora obrotu

Wektor wirtualnych obrotów  $w(\xi)$  podlega interpolacji w ustalonej bazie  $e_i$ . Jest tak dlatego, że w przypadku powłok gładkich, jak i strukturalnych baza  $t_i(x)$  podlega zmianom przy przejściu z pewnego punktu  $x_p \in M$  do punktu  $x_q \in M$ ,  $q \neq p$ . Powoduje to, że bezpośrednia interpolacja składowych  $w(\xi)$  w bazie lokalnej  $t_i(x)$  nie jest do końca poprawna (zob. na przykład Cardona i Geradin 1988). Rozpisanie wektora w bazach  $e_i$  i  $t_i(x)$  prowadzi do relacji

$$w(\xi) = w_i(\xi) t_i(\xi) = \bar{w}_j(\xi) e_j \quad (5.44)$$

Wykorzystując teraz równanie (3.31) w (5.44)<sub>3</sub>, otrzymuje się

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\zeta}) = \bar{w}_j(\boldsymbol{\zeta}) \mathbf{T}^T(\mathbf{x}) \mathbf{t}_i(\mathbf{x}), \quad (5.45)$$

gdzie  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  wynika z prawa składania obrotów (5.41)<sub>2</sub>. W konsekwencji otrzymuje się następujący schemat interpolacyjny

$$\mathbf{w}(\boldsymbol{\zeta}) = \begin{Bmatrix} w_1(\boldsymbol{\zeta}) \\ w_2(\boldsymbol{\zeta}) \\ w_3(\boldsymbol{\zeta}) \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^T(\boldsymbol{\zeta}) \bar{\mathbf{w}}(\boldsymbol{\zeta}), \quad \mathbf{T}(\boldsymbol{\zeta}) = [T_{ij}], \quad (5.46)$$

w którym pole  $\bar{\mathbf{w}}(\boldsymbol{\zeta})$  w stałej bazie  $\mathbf{e}_i$  wyznaczone są za pomocą relacji (5.8) tzn.

$$\bar{\mathbf{w}}(\boldsymbol{\zeta}) = \begin{Bmatrix} \bar{w}_1(\boldsymbol{\zeta}) \\ \bar{w}_2(\boldsymbol{\zeta}) \\ \bar{w}_3(\boldsymbol{\zeta}) \end{Bmatrix} = \sum_{a=1}^N L_a(\boldsymbol{\zeta}) \begin{Bmatrix} \bar{w}_{1a} \\ \bar{w}_{2a} \\ \bar{w}_{3a} \end{Bmatrix}. \quad (5.47)$$

Należy mieć tu jednak na uwadze, że aby wyznaczyć elementy (pola)  $\mathbf{T}^T(\boldsymbol{\zeta})$  należy posłużyć się schematem interpolacyjnym opisanym w paragrafie 5.3.3.

### 5.3.5. Interpolacja niezależnych pól odkształceń

W podejściu EAS przestrzeń  $\hat{\mathcal{C}}_h^e$  odkształceń wzbogacających określa się (por. np. Simo i Rifai 1990, Witkowski 2005, Braess 2007) jako:

$$\hat{\mathcal{C}}_h^e = \left\{ \delta(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m)_h \in \hat{\mathcal{C}}_h^e : \delta(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m)_h = \sum_{e=1}^{N_e} \delta(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m)_h^{(e)}(\boldsymbol{\zeta}) \chi^{(e)} \right\}, \quad \text{gdzie } \delta(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m)_h^{(e)}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\zeta}) \delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} \quad (5.48)$$

Tutaj  $\chi^{(e)}(\mathbf{x})$  (por. Simo i Rifai 1990) jest funkcją określoną na obszarze elementu  $\Pi_{(e)}$  taką że

$$\chi^{(e)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow \mathbf{x} \in \Pi_{(e)}, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases} \quad (5.49)$$

Tak określona funkcja, działając na dowolną funkcję, ogranicza ją do obszaru pojedynczego elementu skończonego ( $e$ ). Elementowy wektor  $\boldsymbol{\beta}_{(e)}$  w (5.48) ujmuje wartości swobodnych parametrów odkształcenia w bazie naturalnej  $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2)$ . Określenie macierzy  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\zeta})$  zostanie podane w dalszej części rozdziału. Dla zapewnienia stabilności rozwiązań w podejściu EAS wprowadza się pewne dodatkowe warunki<sup>67)</sup>, zob. prace Simo i Rifai (1990), Reddy i Simo (1995). Jednym z żądań jest, by wariacje zgodnych odkształceń (5.37) nie były zawarte w przestrzeni wariacji odkształceń wzbogacających (5.48)<sub>1</sub>, a dokładniej

$$\hat{\mathcal{C}}_h \cap \hat{\mathcal{C}}_h^e = \emptyset \quad (5.50)$$

Ponadto wymaga się, by kolumny macierzy  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\zeta})$  z równania (5.48)<sub>2</sub> były liniowo niezależne. Pole założonych naprężeń elementowych przyjmuje się także jako nieciągłe na granicach elementów i złożone z funkcji przynajmniej kawałkami stałych, tj.

<sup>67)</sup> Wymagane dla stabilności rozwiązania postulatory, w przypadku symetrycznych tensorów odkształcenia, omawiał także Braess (1998).

$$\delta(\mathbf{s}_m)_h = \sum_{e=1}^{N_e} \delta(\mathbf{s}_m)_h^{(e)}(\boldsymbol{\zeta}) \chi^{(e)}, \quad \delta(\mathbf{s}_m)_h^{(e)} = \text{const} \quad (5.51)$$

Dla uproszczenia zapisu w dalszym ciągu pomija się etykietę  $h$  oznaczającą aproksymację skończenie wymiarową, zgadzając się, że omawiane wielkości odnoszą się do pojedynczego elementu skończonego zgodnie ze wzorem (5.39). Jednym z ostatnich założeń jest założenie o  $L^2$ -ortogonalności na poziomie elementu tzn.

$$\iint_{H(e)} \delta \mathbf{s}_m^T \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m da = 0. \quad (5.52)$$

Implikacjami zależności (5.52) są następujące równości

$$\iint_M \delta \hat{\mathbf{s}}_m^T \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m da = 0, \quad \iint_M \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m^T \hat{\mathbf{s}}_m da = 0, \quad \iint_M (\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m^T \Delta \hat{\mathbf{s}}_m + \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m^T \delta \hat{\mathbf{s}}_m) da = 0 \quad (5.53)$$

W konsekwencji podkreślone w (5.30) wyrazy znikają na poziome budowy elementu w aproksymacji skończenie elementowej (5.30) określonej równaniem (5.39). Prowadzi to do funkcjonału, w którym jako zmienne niezależne występują jedynie uogólnione przemieszczenia i odkształcenia wzbogacające tzn.

$$\begin{aligned} & \delta^2 W[\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}; \mathbf{w}, \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}, \Delta \mathbf{u}, \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}] + \delta W[\mathbf{u}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}; \mathbf{w}, \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}] \equiv \\ & \equiv \iint_M \left( (\delta \mathbf{d}^T \mathbf{G} \delta \mathbf{d} + (\delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}))^T \mathbf{C} \Delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) + (\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^T \mathbf{C} \Delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}) \right. \\ & \quad \left. + (\delta \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{u}))^T \mathbf{C} \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}} + (\delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}})^T \mathbf{C} \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \right) da + \iint_M (\mathbf{B} \mathbf{w})^T \mathbf{s} + \delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{s} da + \delta V[\mathbf{u}; \mathbf{w}] = 0 \end{aligned} \quad (5.54)$$

Zgodnie ze wzorem (5.48)<sub>2</sub> niezależne składowe membranowe wektora odkształceń  $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m$  i ich rzeczywiste przyrosty interpoluje się wg schematu

$$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\zeta}) \boldsymbol{\beta}_{(e)}, \quad \Delta \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_m(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\zeta}) \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} \quad (5.55)$$

Występująca we wzorach (5.48)<sub>2</sub> i (5.55) macierz  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\zeta})$  jest definiowana jako

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\zeta}) = \frac{j_0}{j(\boldsymbol{\zeta})} \mathbf{M}(\boldsymbol{\zeta})^{-T} \Big|_{\boldsymbol{\zeta}=0} \mathbf{H}(\boldsymbol{\zeta}) \quad (5.56)$$

Do określenia (5.56) dochodzi się w kilku krokach. Zasadniczym założeniem (zob. na przykład Simo i Rifai 1990, Chróścielewski i Witkowski 2006), jest określenie funkcji wchodzących w skład macierzy  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\zeta})$  określonej we współrzędnych  $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \zeta_2)$ . Dane w ten sposób wartości przenosi się następnie do przestrzeni fizycznej, stosując regułę transformacji w przód (ang. *push-forward*, zob. np. Marsden i Hughes 1994, Hozlapfel 2001). Z tą różnicą, że rolę gradientu deformacji przejmuje jacobian przekształcenia  $\boldsymbol{\phi}: \pi_{(e)} \rightarrow H_{(e)}$ .

Macierz  $\mathbf{M}$  we wzorze (5.56) określona jest przez

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \zeta_{1,1} & \zeta_{1,1} & \zeta_{1,2} & \zeta_{1,2} & \zeta_{1,2} & \zeta_{1,1} & \zeta_{1,1} & \zeta_{1,2} \\ \zeta_{2,1} & \zeta_{2,1} & \zeta_{2,2} & \zeta_{2,2} & \zeta_{2,2} & \zeta_{2,1} & \zeta_{2,1} & \zeta_{2,2} \\ \zeta_{1,1} & \zeta_{2,1} & \zeta_{1,2} & \zeta_{2,2} & \zeta_{1,1} & \zeta_{2,2} & \zeta_{1,2} & \zeta_{2,1} \\ \zeta_{1,1} & \zeta_{2,1} & \zeta_{1,2} & \zeta_{2,2} & \zeta_{1,2} & \zeta_{2,1} & \zeta_{1,1} & \zeta_{2,2} \end{bmatrix}_{\boldsymbol{\zeta}=0} \quad (5.57)$$

i opisuje formalnie transformację niesymetrycznych składowych tensora naprężeń do układu lokalnego elementu, por. np. Pian i Sumihara (1984), wzór (34) tamże dla symetrycznych tensorów. Dolny indeks  $\xi = \mathbf{0}$  podkreśla, że obliczenie wyrażenia (5.57)<sub>1</sub> ograniczone jest do środka elementu wzorcowego, dla którego  $\xi = \mathbf{0}$ . Rozmiar macierzy  $\mathbf{M}$  tzn.  $4 \times 4$  bierze się z faktu, że wzbogaceniu podlegają tu tylko składowe membranowe odkształceń w liczbie czterech.

Operacja odwrócenia macierzy  $\mathbf{M}$  we wzorze (5.56) wynika z faktu, że w elementach typu EAS rozpatruje się transformację odkształceń, por. praca źródłowa Simo i Rifai (1990), Andelfinger i Ramm (1993) lub rozważania w pracy Witkowski (2005). W ramach dyskutowanej tutaj teorii powłok macierz transformacji (5.57) używana była w elementach skończonych przedstawionych, między innymi, w pracach Chróścielewski i Witkowski (2006) i Witkowski (2009).

Kolejne wielkości w równaniu (5.56) zdefiniowane są wzorem (5.16), przy czym  $j_0$  oznacza

$$j_0 = j(\xi) \Big|_{\xi=\mathbf{0}} \quad (5.58)$$

Wprowadzenie obliczenia w zakresie ograniczonym do  $\xi = \mathbf{0}$  stosowane przy obliczeniu wyznacznika (5.58) zostało zaproponowane w pracy Taylor i inni (1976) dla czterowęzłowych elementów skończonych w płaskim stanie naprężenia. Simo i Rifai (1990) wskazali, że warunkiem spełnienia testu łąty jest między innymi, by spełniona była zależność

$$\int_{\pi(e)} \mathbf{P}(\xi) j(\xi) d\xi = \mathbf{0} \quad (5.59)$$

Wykorzystanie we wzorze (5.59) określenia (5.56) prowadzi do związku

$$\int_{\pi(e)} \frac{j_0}{j(\xi)} \mathbf{M}(\xi)^{-T} \Big|_{\xi=\mathbf{0}} \mathbf{H}(\xi) j(\xi) d\xi = \mathbf{0} \quad (5.60)$$

Ponieważ  $j_0$  i  $\mathbf{M}(\xi)^{-T} \Big|_{\xi=\mathbf{0}}$  są stałe to w konsekwencji uzyskuje się warunek, jaki muszą spełniać funkcje wzbogacające odkształcenia

$$\int_{\pi(e)} \mathbf{H}(\xi) d\xi = \mathbf{0} \quad (5.61)$$

Macierz  $\mathbf{H}(\xi)$  ze wzoru (5.56) w rozpatrywanym tu podejściu jest wymiaru  $4 \times N_\beta$ , co wynika z postaci macierzy (5.57) i opisuje funkcje wzbogacające odkształcenia we współrzędnych naturalnych  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ . Etykieta  $N_\beta$  określa liczbę funkcji wzbogacających. Dobór funkcji zawartych w  $\mathbf{H}(\xi)$  decyduje o sukcesie bądź niepowodzeniu formułowanego w ramach techniki EAS elementu. Poza warunkiem (5.61), nie stawia się innych ograniczeń<sup>68)</sup> wobec  $\mathbf{H}(\xi)$ . Jednak należy mieć na uwadze, że duża liczba  $N_\beta$  funkcji wzbogacających niekoniecznie przekłada się na lepsze własności tak udoskonalanego elementu skończonego, a dodatkowo zwiększa wymiar macierzy elementowych, które podlegają kondensacji statycznej.

---

<sup>68)</sup> Wiśniewski (2010) weryfikuje poprawność pól wzbogacających, sprawdzając warunek zgodności odkształceń postawiony dla ośrodka Cauchy'ego.

W literaturze przedmiotu, poświęconej głównie ośrodkowi Cauchy'ego (z symetrycznymi miarami odkształceń), zaproponowano kilka postaci macierzy  $\mathbf{H}(\xi)$ . Pewien przegląd można odnaleźć w rozprawie doktorskiej Autora (Witkowski 2005).

Andelfinger i Ramm (1993), analizując elementy EAS i hybrydowe (HR) wg koncepcji z pracy Pian i Sumihara (1984), zauważyli, że przy odpowiednim doborze funkcji wzbogacających odkształcenia w elemencie EAS i interpolujących niezależne naprężenia w elemencie hybrydowym uzyskuje się równoważność wyników. Zagadnienie to było przedmiotem późniejszych studiów, zob. na przykład Bischoff i Ramm (1997), Bischoff i inni (1999), Sansour i Kollmann (2000). W swej istocie, koncepcja równoważności mówi, że wielomiany użyte do interpolacji naprężeń w elemencie HR wraz z wielomianami wykorzystanymi do interpolacji odkształceń w elemencie EAS dopełniają się wzajemnie do kompletnego biliniowego wielomianu. Innymi słowy, wielomian użyty do interpolacji  $n$ -tej składowej wektora naprężeń nie może być użyty do interpolacji  $n$ -tej składowej wektora odkształceń. Wykorzystanie koncepcji równoważności pozwala na pewne uproszczenia macierzy elementowych w elementach hybrydowo-mieszanych, zob. np. praca Gruttmann i Wagner (2006) i cytowana tam literatura. Elementy te, choć nie są bezpośrednio przedmiotem tej pracy, ze względu na opisywane w literaturze doskonałe własności, są w skrócie omówione w sekcji 5.3.7.

Na podstawie literatury (zob. np. Simo i Rifai 1990, Andelfinger i Ramm 1993, Bischoff i Ramm 1997) i własnych badań (zob. np. Witkowski 2005, Chróścielewski i Witkowski 2006, Witkowski 2009) w niniejszej pracy przyjmuje się następującą postać macierzy  $\mathbf{H}(\xi)$

$$\mathbf{H}_{4 \times 8} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_1 \xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 & \xi_1 \xi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_1 & \xi_1 \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi_2 & \xi_1 \xi_2 \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Propozycja wykorzystania we wzorze (5.56) macierzy (5.57) i (5.62) jest oryginalnym, autorskim rozwinięciem i adaptacją na potrzeby rozważanej tu sześcioparametrowej teorii powłok pierwotnego podejścia zaproponowanego w pracy Simo i Rifai (1990).

Ograniczenie transformacji (5.58) do środka elementu wzorcowego ( $\xi = \mathbf{0}$ ) nie jest jedyną możliwością. Przykładowo, w pracach Kasper i Taylor (1997, 2000) i w cytowanej tam literaturze wykorzystuje się podejście, w którym używa się jacobianu uśrednionego po obszarze elementu, por. wzór (3.6) w pracy Kasper i Taylor (2000). W płaskich zagadnieniach dwuwymiarowych podejście z jacobianem obliczanym w środku elementu i jacobianem uśrednionym są równoważne, por. Kasper i Taylor (1997). W pracach tych odnaleźć można uwagi o korzyściach, jakie uzyskuje się, stosując alternatywne reguły transformacji, powstałe w wyniku, na przykład, zamiany jacobianu na jego transponowaną odwrotność. Praca Kasper i Taylor (1997) zawiera wzmiankę o zastosowaniu modyfikacji obliczenia uśrednionego jacobianu poprzez obrócenie elementu fizycznego, aby „dopasować” go do izoparametrycznego układu współrzędnych, z zachowaniem proporcji Co ciekawe, późniejsza praca tychże autorów (Kasper i Taylor 2000) nie zawiera jawnie tej wzmianki.

Nieco inne podejście do transformacji typu (5.56) można odnaleźć w pracach Wiśniewski i Turska (2008, 2009). Pierwsza z tych prac dotyczy elementów HR, a druga elementów mieszanych. W obu pracach autorzy zaproponowali wykorzystanie skośnych współrzędnych stowarzyszonych ze środkiem elementu skończonego. W pracach

przeanalizowano dokładnie różne warianty interpolacji zmiennych niezależnych, badano wartości własne macierzy sztywności, jak i spełnianie testów łaty. W pracy Wiśniewski i Turska (2009) przeanalizowano także istotny dla procesu obliczeń problem uwarunkowania macierzy sztywności elementu. W tym celu zbadano spełnienie warunku inf-sup wg Chapelle i Bathe (1993) (zob. także np. Bathe 2001, Sitek 2007). Analizowano zadania liniowe, jak i geometrycznie nieliniowe, a także dotyczące materiałów hipersprężystych.

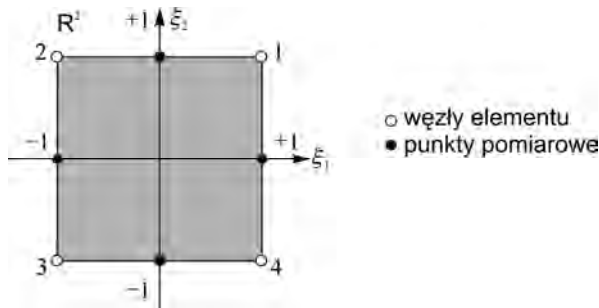
### 5.3.6. Interpolacja odkształceń w podejściu ANS

Koncepcję dwustopniowej interpolacji odkształceń ścinania poprzecznego można zapisać w następujących krokach:

1. W każdym z punktów pomiarowych  $A(0,1)$ ,  $B(-1,0)$ ,  $C(0,-1)$ ,  $D(1,0)$  w układzie współrzędnych wzorcowych  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  (zob. rys. 5.3) oblicza się wartości odpowiednio odkształceń i macierzy  $\mathbf{B}_s$  (5.32) tzn.

$$\{\varepsilon_\beta|_{(p_\beta, q_\beta)}^{BI}\}, \{\mathbf{B}_s|_{(p_\beta, q_\beta)}^{BI}\}, \beta = 1, 2 \quad (5.63)$$

Indeks *BI* (*Bezpośrednia Interpolacja*) oznacza (por. Chróścielewski 1996), że stosowne wielkości obliczane są bezpośrednio z przemieszczeń, a  $(p_\beta, q_\beta)$  określają współrzędne punktów pomiarowych.



Rys. 5.3. Położenie punktów pomiarowych metody ANS we wzorcowym elemencie 4-węzłowym

2. Otrzymane dyskretne zbiory wartości  $\{\varepsilon_\beta|_{(p_\beta, q_\beta)}^{BI}\}$  i  $\{\mathbf{B}_s|_{(p_\beta, q_\beta)}^{BI}\}$  są transformowane z układu aktualnego („fizycznego”) reprezentacji przestrzennej  $\{t_i\}$  do układu elementu wzorcowego  $\{\xi, t^0\}$ . W ten sposób otrzymuje się wartości  $\{\bar{\varepsilon}_\beta|_{(p_\beta, q_\beta)}^{BI}\}, \{\bar{\mathbf{B}}_s|_{(p_\beta, q_\beta)}^{BI}\}$ .
3. W kolejnym kroku przeprowadza się interpolację wartości z punktu 2 tzn.:

$$\check{\varepsilon}_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_2)\bar{\varepsilon}_1|_A^{BI} + \frac{1}{2}(1 - \xi_2)\bar{\varepsilon}_1|_C^{BI} \quad (5.64)$$

$$\check{\varepsilon}_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1)\bar{\varepsilon}_2|_D^{BI} + \frac{1}{2}(1 - \xi_1)\bar{\varepsilon}_2|_B^{BI} \quad (5.65)$$

$$\check{\mathbf{B}}_{e_1}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_2)\bar{\mathbf{B}}_{e_1}|_A^{DI} + \frac{1}{2}(1 - \xi_2)\bar{\mathbf{B}}_{e_1}|_C^{DI} \quad (5.66)$$

$$\check{\mathbf{B}}_{e_2}(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi_1)\bar{\mathbf{B}}_{e_2}|_D^{DI} + \frac{1}{2}(1 - \xi_1)\bar{\mathbf{B}}_{e_2}|_B^{DI} \quad (5.67)$$



4. Obliczone zgodnie ze wzorami (5.64) i (5.65) wielkości są transformowane z powrotem do bazy aktualnej w reprezentacji przestrzennej (układu „fizycznego”). Określone równaniami (5.66) i (5.67) podmacierze podstawiane są na stosowne miejsca macierzy (5.32).

### 5.3.7. Uwagi o elementach hybrydowo-mieszanych

W pracy Gruttmann i Wagner (2006) opracowano powłokowe elementy 4-węzłowe. W ich sformułowaniu łączy się technikę wzbogacania odkształceń, niezależną interpolację naprężeń i technikę ANS. Przedstawione w cytowanej pracy wyniki numeryczne pozwalają uznać omawiane elementy za bardzo efektywne pod względem minimalizacji efektu blokady.

W omawianej tam koncepcji odkształcenia ścinania poprzecznego obliczane są zgodnie z techniką ANS. Dla przekrojowych sił powłokowych w teorii ścinania pierwszego rzędu zapisuje się

$$\mathbf{s}_{RM} = \{N^{11} N^{22} N^{12} M^{11} M^{22} M^{12} q^1 q^2\}^T \quad (5.68)$$

Do wielkości (5.68) stosuje się schematy interpolacyjne

$$\mathbf{s}_{RM}(\xi) = \mathbf{S}_{RM}(\xi)\boldsymbol{\beta}_{(e)}, \quad \delta\mathbf{s}_{RM}(\xi) = \mathbf{S}_{RM}(\xi)\delta\boldsymbol{\beta}_{(e)}, \quad \Delta\mathbf{s}_{RM}(\xi) = \mathbf{S}_{RM}(\xi)\Delta\boldsymbol{\beta}_{(e)} \quad (5.69)$$

W niniejszym podrozdziale w celu odróżnienia wielkości obowiązujących dla teorii 5-parametrowej, wyrażenia właściwe dla tej teorii opatruje się dolnym indeksem  $RM$ . Schemat interpolacji naprężeń niezależnych zapisuje się w postaci

$$\mathbf{S}_{RM}(\xi) = [\mathbf{I}, \mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_s^m & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_s^s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}_{2 \times 2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_s^b \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

Wykorzystując podejście z prac Simo i inni (1989), Wagner i Gruttmann (2005) poszczególne podmacierze z (5.70) dla części membranowej  $m$  i dla części zgięciowej  $b$  przyjmuje jako

$$\mathbf{N}_s^m = \mathbf{N}_s^b = \mathbf{M}_s^m \begin{bmatrix} \bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_2 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.71)$$

gdzie przyjęto oznaczenia

$$\bar{\xi}_\alpha = \frac{1}{A_e} \iint_{\Pi(e)} \xi^\alpha da, \quad \alpha = 1, 2, \quad A_e = \iint_{\Pi(e)} da \quad (5.72)$$

Opisany wzorami (5.70) i (5.71) sposób interpolacji dla symetrycznych tensorów naprężeń stosowany np. w pracach Simo i inni (1989), Wagner i Gruttmann (2005) jest równoważny oryginalnej koncepcji z pracy Pian i Sumihara (1984) przy założeniu, że  $\bar{\xi}^\alpha = 0$ . Występująca w (5.71) macierz  $\mathbf{M}_s^m = \mathbf{M}_\varepsilon^m$  ma budowę typową dla symetrycznego płaskiego stanu naprężenia, por. Gruttmann i Wagner (2006), Sitarski (2008)

$$\mathbf{M}_s^m = \mathbf{M}_\epsilon^m = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,1} & | & s_{1,2} & s_{1,2} & | & 2s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,1} & | & s_{2,2} & s_{2,2} & | & 2s_{2,1} & s_{2,2} \\ \hline s_{1,1} & s_{2,1} & | & s_{1,2} & s_{2,2} & | & s_{1,1} & s_{2,2} + s_{1,2} & s_{2,1} \end{pmatrix}_{\xi=0}, \quad s_{\alpha,\beta} = (\partial \mathbf{x} / \partial \xi_\beta) \cdot \mathbf{t}_\alpha^0 \quad (5.73)$$

Transformację naprężeń ścinania poprzecznego opisuje się zależnością

$$\mathbf{N}_s = \mathbf{M}_s \begin{bmatrix} \xi_2 - \bar{\xi}_2 & 0 \\ 0 & \xi_1 - \bar{\xi}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_s = \begin{bmatrix} s_{1,1} & s_{1,2} \\ s_{2,1} & s_{2,2} \end{bmatrix}_{\xi=0} \quad (5.74)$$

W pracy Gruttmann i Wagner (2006) niezależne składowe wektora odkształceń  $\boldsymbol{\epsilon}$  interpoluje się wg schematu

$$\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\alpha}_{(e)}, \quad \delta\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})\delta\boldsymbol{\alpha}_{(e)}, \quad \Delta\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})\Delta\boldsymbol{\alpha}_{(e)} \quad (5.75)$$

Macierz  $\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi})$  ze wzoru (5.75) jest definiowana jako

$$\mathbf{P}(\boldsymbol{\xi}) = [\mathbf{1}, \mathbf{N}_1(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{N}_2(\boldsymbol{\xi})], \quad (5.76)$$

gdzie macierz  $\mathbf{N}_1(\boldsymbol{\xi})$  jest określona przez

$$\mathbf{N}_1(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\epsilon^{m1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\epsilon^{s1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\epsilon^{b1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_\epsilon^{m1} = \mathbf{N}_\epsilon^{b1} = \mathbf{T}_\epsilon^0 \begin{bmatrix} \xi_2 - \bar{\xi}_2 & 0 \\ 0 & \xi_1 - \bar{\xi}_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_\epsilon^{s1} = \mathbf{N}_s^{s1} \quad (5.77)$$

Tutaj macierz  $\mathbf{T}_\epsilon^0$  określona jest wzorem

$$\mathbf{T}_\epsilon^0 = \begin{pmatrix} s_{1,1} & s_{1,1} & | & s_{1,2} & s_{1,2} & | & s_{1,1} & s_{2,1} \\ s_{2,1} & s_{2,1} & | & s_{2,2} & s_{2,2} & | & s_{1,2} & s_{2,2} \\ \hline 2s_{1,1} & s_{1,2} & | & 2s_{2,1} & s_{2,2} & | & s_{1,1} & s_{2,2} + s_{1,2} & s_{2,1} \end{pmatrix}_{\xi=0}, \quad s_{\alpha,\beta} = (\partial \mathbf{x} / \partial \xi_\beta) \cdot \mathbf{t}_\alpha^0 \quad (5.78)$$

Struktura blokowa macierzy  $\mathbf{N}_2(\boldsymbol{\xi})$  jest identyczna ze strukturą macierzy  $\mathbf{N}_1(\boldsymbol{\xi})$  z równania (5.77)

$$\mathbf{N}_2(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_\epsilon^{m2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_\epsilon^{s2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_\epsilon^{b2} \end{bmatrix} \quad (5.79)$$

Kolejne podmacierze (5.79) rozpisuje się w sposób typowy dla podejścia EAS, por. na przykład Simo i Rifai (1990), Chróścielewski i Witkowski (2006) i cytowana tam literatura:

$$\mathbf{N}_\epsilon^{m2}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{N}_\epsilon^{b2}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\alpha_0}{\alpha(\boldsymbol{\xi})} (\mathbf{M}_\epsilon^m)^{-T} \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi})_\alpha, \quad \alpha = 2, 4 \quad (5.80)$$

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\xi})_2 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi})_2 \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}(\boldsymbol{\xi})_4 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\xi})_4 \\ \mathbf{0}_{1 \times 4} \end{bmatrix}, \quad (5.81)$$

gdzie macierze

$$\tilde{\mathbf{H}}(\xi)_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}}(\xi)_4 = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_1 \xi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_2 & \xi_1 \xi_2 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

wynikają z rozważań z pracy Andelfinger i Ramm (1993). Widoczne jest, że spełniają one warunek stawiany równaniem (5.61). W koncepcji z pracy Gruttmann i Wagner (2006) interpolacja odkształceń ścinania poprzecznego odbywa się wg formuły

$$\mathbf{N}_\varepsilon^{\alpha 2}(\xi) = \frac{\alpha_0}{\alpha(\xi)} (\mathbf{M}_\varepsilon^m)^{-T} \tilde{\mathbf{H}}(\xi)_\alpha, \quad \alpha = 1, 2. \quad (5.83)$$

Tutaj macierz  $\tilde{\mathbf{H}}(\xi)_\alpha$  dana jest przez (5.82). W omawianym podejściu Gruttmanna i Wagnera odkształcenia wzbogacone reprezentowane przez (5.79) przy (5.82) są  $L^2$ -ortogonalne (por. wzór (5.52) do naprężeń niezależnych reprezentowanych macierzą (5.71). Wykorzystując ten fakt, Gruttmann i Wagner (2006) uzyskali znaczne uproszczenia wzorów opisujących pewne macierze elementowe.

### 5.3.8. Macierze elementowe

Powracając do głównych rozważań niniejszej monografii, w pojedynczym węźle elementu skończonego określone są trzy wirtualne przesunięcia i trzy wirtualne obroty, wszystkie odniesione do globalnego układu współrzędnych. Wymienione stopnie swobody mają klarowną interpretację techniczną i nazywane są tutaj inżynierskimi stopniami swobody.

Odpowiednie węzłowy i elementowy wektory stopni swobody przyjmują postaci

$$\delta \mathbf{q}_a = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_a \\ \bar{\mathbf{w}}_a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{w}_3 \end{Bmatrix}, \quad \delta \mathbf{q}_{(e)} = \begin{Bmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \delta q_3 \\ \delta q_4 \end{Bmatrix} \quad (5.84)$$

Elementowa macierz funkcji kształtu przyjmuje postać

$$\mathbf{L}_{(e)}(\xi) = [\mathbf{L}_1(\xi) | \mathbf{L}_2(\xi) | \mathbf{L}_3(\xi) | \mathbf{L}_4(\xi)] \quad (5.85)$$

Tutaj  $\mathbf{L}_a(\xi)$  jest podmacierzą funkcji kształtu węzła  $a$ , zob. podrozdział 5.1.1. W obrębie typowego elementu skończonego otrzymuje się następujący wzór służący do interpolacji wielkości węzłowych

$$\mathbf{w}(\xi) = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}(\xi) \\ \bar{\mathbf{w}}(\xi) \end{Bmatrix} = \mathbf{L}(\xi) \delta \mathbf{q}_{(e)}. \quad (5.86)$$

W świetle reguły opisującej interpolację współrzędnych wektora wirtualnego obrotu (zob. punkt 5.3.4) wzór (5.86) zapisuje się jako

$$\mathbf{w}(\xi) = \bar{\mathbf{L}}(\xi) \delta \mathbf{q}_{(e)} \quad (5.87)$$

Występująca we wzorze (5.87) macierz  $\bar{\mathbf{L}}(\xi)$  określona jest przez:

$$\bar{\mathbf{L}}(\xi) = \mathbf{Y}(\xi) \mathbf{L}_{(e)}(\xi), \quad \mathbf{Y}_a(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}^T(\xi) \end{bmatrix}. \quad (5.88)$$

Dany równaniem (5.87) schemat interpolacyjny stosuje się także do rzeczywistych przyrostów uogólnionych przemieszczeń tzn.

$$\Delta \mathbf{u}(\xi) = \bar{\mathbf{L}}(\xi) \Delta \mathbf{q}_{(e)}. \quad (5.89)$$

Wykorzystanie relacji (5.25), (5.26), (5.87), (5.89) w równaniu (5.54) prowadzi do układu równań na poziomie elementu w postaci

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_G^{(e)} + \mathbf{K}_M^{(e)}) \Delta \mathbf{q}_{(e)} + (\mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{q}}^{(e)})^T \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} &= \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}_d^{(e)} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{q}}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{B}}^{(e)} \Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} &= -\mathbf{r}_{\mathbf{B}}^{(e)} \end{aligned} \quad (5.90)$$

Tutaj

$$\mathbf{K}_M^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} da, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{L}} \quad (5.91)$$

oznacza część materiałową stycznej macierzy sztywności  $\mathbf{K}_T^{(e)}$ , a macierz

$$\mathbf{K}_G^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{D}}^T \mathbf{G} \bar{\mathbf{D}} da, \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} \bar{\mathbf{L}} \quad (5.92)$$

jest częścią geometryczną macierzy  $\mathbf{K}_T^{(e)}$ . W omawianym tutaj sformułowaniu macierz  $\mathbf{K}_G^{(e)}$  nie jest symetryczna. Ten efekt pojawił się w pracy Simo (1993) czy Simo i inni (1995). Podobnie jak w pracy Simo (1993), tak w niniejszym podejściu niesymetryczne wyrazy podlegają symetryzacji. Pozostałe wielkości z układu równań (5.90) określone są następująco:

$$\mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{B}}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}^T \mathbf{C} \mathbf{P} da, \quad \mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{q}}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}}_m da \quad (5.93)$$

$$\mathbf{r}_d^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{s}(\mathbf{u}) da, \quad \mathbf{r}_{\mathbf{B}}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{P}^T \mathbf{s}_m da, \quad \mathbf{p}^{(e)} = \iint_{\Pi_{(e)}} \mathbf{L}^T \mathbf{p}(q) da \quad (5.94)$$

Macierze (5.91), (5.92), (5.93) i wektory (5.94) obliczane są na drodze pełnego ( $2 \times 2$  punkty) całkowania numerycznego przy pomocy kwadratury Gaussa. Pewne wiadomości na temat całkowania numerycznego zawarto w Dodatku B niniejszej monografii.

Ze względu na założoną nieciągłość międzyelementową parametrów  $\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}$  ze wzoru (5.55), kondensuje się je statycznie na poziomie elementu tj.

$$\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)} = -(\mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{B}}^{(e)})^{-1} (\mathbf{K}_{\mathbf{B}\mathbf{q}}^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} + \mathbf{r}_{\mathbf{B}}^{(e)}). \quad (5.95)$$

W rezultacie typowy element skończony ma w każdym węźle sześć inżynierskich stopni swobody zgodnie ze wzorem (5.84)<sub>1</sub>. W wyniku kondensacji statycznej parametrów  $\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}$  układ równań (5.90) przekształca się do typowej dla procedury przyrostowo-iteracyjnej postaci

$$\mathbf{K}_T^{(e)} \Delta \mathbf{q}_{(e)} = \Delta \mathbf{p}^{(e)} + \mathbf{j}^{(e)}, \quad \mathbf{j}^{(e)} = \mathbf{p}^{(e)} - \mathbf{r}^{(e)} \quad (5.96)$$

Macierz styczna ze wzoru (5.96)

$$\mathbf{K}_T^{(e)} = \mathbf{K}_G^{(e)} + \mathbf{K}_M^{(e)} - (\mathbf{K}_{Bq}^{(e)})^T (\mathbf{K}_{B\beta}^{(e)})^{-1} \mathbf{K}_{Bq}^{(e)} \quad (5.97)$$

oraz elementowy wektor sił wewnętrznych  $\mathbf{r}^{(e)}$

$$\mathbf{r}^{(e)} = \mathbf{r}_d^{(e)} - (\mathbf{K}_{Bq}^{(e)})^T (\mathbf{K}_{B\beta}^{(e)})^{-1} \mathbf{r}_\beta^{(e)} \quad (5.98)$$

mają tutaj typową dla elementów mieszanych postać (por. na przykład Chróścielewski 1996, Wiśniewski i Turska 2006).

Przeprowadzenie procedury standardowej agregacji, z jednoczesnym uwzględnieniem warunków brzegowych, prowadzi do macierzowej (algebraicznej) wersji równania (5.30) w postaci

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{p} + \mathbf{j} \quad (5.99)$$

Iteracyjno-przyrostowe rozwiązanie równania (5.99) i zagadnienie aktualizacji zmiennych, jest przedmiotem rozważań zawartych w dodatku C niniejszej monografii.

## Rozdział 6

# PRZYKŁADY NUMERYCZNE

### 6.1. Wprowadzenie

Niniejszy rozdział przedstawia wyniki numeryczne rozwiązań pewnej reprezentatywnej grupy przykładów, testujące opracowany element skończony oraz zaproponowane związki konstytutywne.

Przykłady dotyczą zagadnień statyki geometrycznie liniowej i nieliniowej w zakresie małych odkształceń sprężystych oraz nieliniowej stateczności. Znakomitą większość zadań stanowią typowe i dobrze udokumentowane w literaturze przykłady testujące (ang. *benchmark problems*). Jako rozwiązania odniesienia przyjmuje się zatem wyniki znane z literatury. Biorąc pod uwagę fakt, że w większości przypadków rezultaty literaturowe są dane w postaci krzywych (ścieżek równowagi), odniesienie takie zwykle jest obarczone błędem odczytu z rysunku. Dlatego, w celu porównania, wykorzystuje się także inne elementy skończone rozwinięte w ramach rozpatrywanej tu teorii powłok. Są to elementy 4- i 16-węzłowe odpowiednio oznaczane jako CAME4 i CAME16 z pełnym całkowaniem (FI) oraz jednolicie zredukowanym całkowaniem (URI).

Rozważania niniejszego rozdziału podzielone są na dwie zasadnicze części. Część pierwsza dotyczy zagadnień geometrycznie liniowych i koncentruje się przede wszystkim na ocenie własności dyskutowanego elementu skończonego EANS4. Za pracami Bathe i inni (2000b) Auricchio i inni (2004) oraz Wiśniewski (2010) badanie elementu przeprowadza się za pomocą testu łąty oraz poprzez dyskusję warunku inf-sup i spektrum macierzy sztywności. Ponadto rozpatruje się jeden przykład obliczeniowy dotyczący zginania belki dwuteowej.

W części drugiej rozdziału przedstawiono wyniki otrzymane w zakresie nieliniowym. Ta część pracy jest znacznie bardziej obszerna w porównaniu z częścią pierwszą. Zamieszczono w niej między innymi szczegółowe wyniki badań dotyczące pojawiania się ewentualnych form pasożytniczych oraz wyniki badań nad zbieżnością rozwiązań w zakresie nieliniowym. Ze względu na fakt, że rozważana tutaj teoria powłok w sposób naturalny ujmuje powłoki o ortogonalnym połączeniu płatów, w obu częściach tego rozdziału zamieszczono stosowne przykłady.

W przykładach dotyczących powłok warstwowych kierunku, nawiązując do rys. 4.2 kąt laminacji  $\theta_{(k)}$ , odmierzany jest zawsze od wektora stycznego  $t_1^0$  rozważanej powłoki.

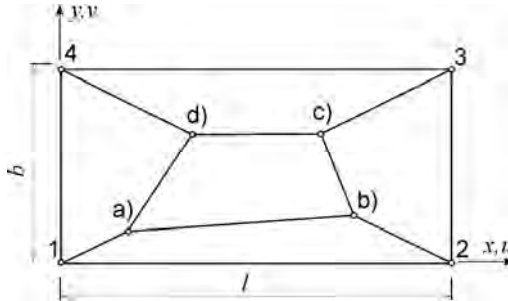
### 6.2. Przykłady analizy liniowej

#### 6.2.1. Test łąty

W niniejszym paragrafie przedstawione zostaną wyniki dwóch wersji testu łąty: w wersji przemieszczeniowej i naprężeniowej, por. Witkowski (2009), Sitek (2010). W literaturze, zob. prace cytowane niżej, zadanie to zwykle rozwiązuje się bez odniesienia do konkretnego układu jednostek.

### Wersja przemieszczeniowa

Test łąty w tej wersji, zob. rys. 6.1, zwykle wiąże się z pracą MacNeal i Harder (1985), choć Panas i Wiśniewski (2008) wskazują jako właściwe odniesienie do pracy Robinsona i Blackhama<sup>69)</sup>. W zadaniu rozpatruje się siatkę elementów skończonych o wymiarach w rzucie  $l = 0.24$  i  $b = 0.12$ . Wszystkie elementy są wykonane z tego samego sprężystego materiału o stałych  $E = 10^6$ ,  $\nu = 0.25$  o stałej grubości  $h_0 = 0.001$ . W obliczeniach przyjęto tutaj następujące współrzędne węzłów wewnętrznych siatki: węzeł a) (0.04,0.02), węzeł b) (0.18,0.03), węzeł c) (0.16,0.08), węzeł d) (0.08,0.08).



Rys. 6.1. Test łąty, wersja przemieszczeniowa

W części membranowej testu, na węzły zewnętrzne siatki nakłada się pole wymuszeń kinematycznych opisane wzorami

$$u = 10^{-3}(x + y/2), \quad v = 10^{-3}(y + x/2) \quad (6.1)$$

Pole to generuje rozkład naprężeń normalnych i stycznych w płaszczyźnie siatki o wartościach

$$\sigma_x = \sigma_y = 1333, \quad \tau_{xy} = 400 \quad (6.2)$$

Rozwiązanie zadania przy pomocy elementu EANS4 daje wyniki przemieszczeń punktów wewnętrznych siatki zgodne ze wzorem (6.1), a obliczone naprężenia w punktach całkowania mają wartości identyczne z podanymi we wzorze (6.2).

W części zgięciowej testu zadane na węzły zewnętrzne pole przemieszczeń opisują wzory

$$w = 10^{-3}(x^2 + xy + y^2)/2, \quad \theta_x = 10^{-3}(y + x/2), \quad \theta_y = 10^{-3}(-x - y/2) \quad (6.3)$$

Rozwiązania analityczne dla momentów zginających i momentu skręcającego mają wartości

$$m_x = m_y = 1.111 \cdot 10^{-7}, \quad m_{xy} = 10^{-7} \quad (6.4)$$

Wyniki przemieszczeń (ugięć) z analizy MES w punktach wewnętrznych siatki wynoszą

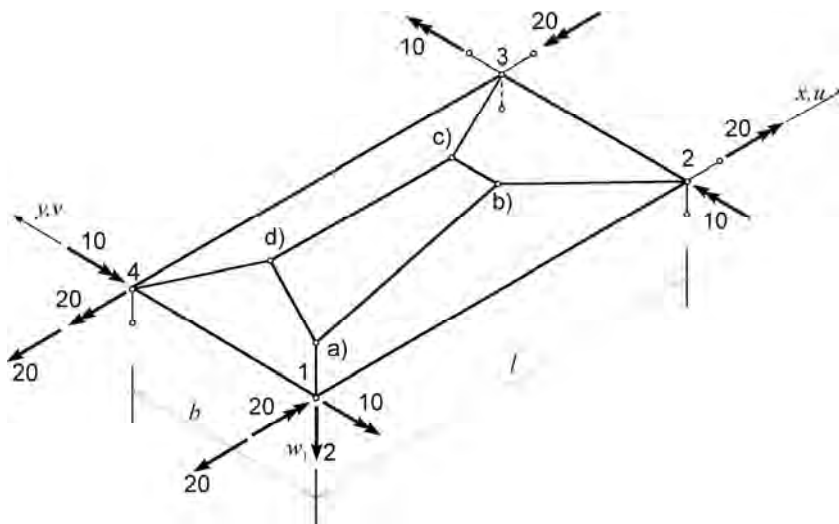
$$w_5 = 1.4 \cdot 10^{-6}, \quad w_6 = 1.935 \cdot 10^{-5}, \quad w_7 = 2.24 \cdot 10^{-5}, \quad w_8 = 9.6 \cdot 10^{-6} \quad (6.5)$$

<sup>69)</sup> Robinson J., Blackham S.: An Evaluation of Lower Order Membranes as Contained in MSC/NASTRAN, ASA and PAFEC FEM Systems, Robinson and Associates, Dorset, England 1979.

Są one zgodne z wartościami otrzymanymi ze wzorów (6.3). Obliczone siły wewnętrzne także zgadzają się z rozwiązaniami odniesienia (6.4).

### Wersja naprężeniowa

Wersja ta pochodzi z pracy Wagner i Gruttmann (2005). W przykładzie rozpatruje się, (rys. 6.2) siatkę elementów skończonych pod działaniem układu skupionych sił i momentów. Stałe materiałowe w zadaniu wynoszą  $E = 10^6$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $h_0 = 0.1$ , a wymiary w rzucie  $l = 40$  i  $b = 20$ . W obliczeniach założono następujące współrzędne węzłów wewnętrznych siatki: węzeł a (6.6667,3.3333), węzeł b (30,5), węzeł c (26.667,13.333), węzeł d (13.333,13.333).



Rys. 6.2. Test łaty, wersja naprężeniowa

W części membranowej testu siatka elementów skończonych obciążona jest dwoma siłami skupionymi, generującymi stan stałego naprężenia. W tym wypadku jedyną niezerową (przekrojową) siłą wewnętrzną jest  $n_x = 2.0$ . Obliczenia z wykorzystaniem EANS4 prowadzą do takiej samej wartości siły.

W części zgięciowej testu siatka elementów skończonych podlega zginaniu wywołanemu przez skupione momenty przyłożone w narożnikach zewnętrznych siatki. W rozwiązaniu śledzi się wartości przekrojowych momentów i przemieszczenia pionowego węzła 1, których wartości analityczne (zob. Wagner i Gruttmann 2005) wynoszą, odpowiednio,

$$m_x = m_y = m_{xy} = 1.0, \quad w_1 = 12.481 \quad (6.6)$$

Własne rezultaty numeryczne uzyskane na podstawie elementu EANS4 są zgodne z (6.6). Reasumując, rozpatrywany tutaj powłokowy element skończony EANS4 spełnia test łaty. Oznacza to, że można oczekiwać poprawnego reprezentowania stałych stanów odkształcenia także w innych przypadkach.



### 6.2.2. Test inf-sup

W mechanice istnieje pewna grupa zagadnień, zob. na przykład Auricchio i inni (2004) lub Sitek (2010), dla których układ równań MES może być zapisany w postaci

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{Bmatrix}, \text{ wraz z warunkami brzegowymi} \quad (6.7)$$

W szczególności zapis (6.7) dotyczy formułowania elementów mieszanych, zob. na przykład Wiśniewski (2010). Wchodzące do układu (6.7) macierze  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  mają odpowiednio rozmiary  $n \times n$  i  $m \times n$ . Wektory  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ , (także  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$ ) mają odpowiednio wymiary  $n \times 1$  i  $m \times 1$ . Jak zaznaczono we wstępie, w przypadku sformułowań MES wynikających z zasad wielopolowych, istotne jest zapewnienie, by z układu równań (6.7) wynikało rozwiązanie stabilne. Kryterium stabilności formułuje się następująco: dana metoda numeryczna opisana równaniem (6.7) jest stabilna, jeśli istnieje stała  $c$  niezależna od siatki, taka, że dla wszystkich wektorów  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{g}$  spełniających równanie (6.7) zachodzi warunek

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} + \|\delta \mathbf{y}\|_{\mathcal{Y}}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} + \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{Y}}} \leq c \frac{\|\delta \mathbf{f}\|_{\mathcal{F}} + \|\delta \mathbf{g}\|_{\mathcal{G}}}{\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{F}} + \|\mathbf{g}\|_{\mathcal{G}}} \quad (6.8)$$

Precyzyjne określenie norm występujących we wzorze (6.8) można odnaleźć przykładowo w pracach Auricchio i inni (2004) lub Sitek (2010). W pracach tych pokazano, że aby układ równań (6.7) dawał stabilne rozwiązanie, macierz  $\mathbf{A}$  powinna spełniać warunek eliptyczności, a macierz  $\mathbf{B}$  warunek inf-sup.

Kryterium eliptyczności oznacza, że istnieje stała  $R \ni \alpha > 0$ , niezależna od parametru dyskretyzacji  $h$ , taka, że spełniony jest warunek

$$\alpha \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} \leq \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \quad (6.9)$$

Warunek (6.9) stanowi, że w spektrum macierzy  $\mathbf{A}$  liczba zerowych wartości własnych wynika z charakteru fizycznego zadania, na przykład sześć w elemencie powłokowym.

Warunek inf-sup formułuje się następująco. Istnieje dodatnia stała  $\beta$ , niezależna od wymiaru charakterystycznego siatki  $h$ , taka że

$$\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Y}, \exists \mathbf{x} \in \mathcal{X} \setminus \{\mathbf{0}\}, \text{ taki, że } \mathbf{x}^T \mathbf{B}^T \mathbf{y} \geq \beta \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{Y}} \quad (6.10)$$

Warunkowi (6.10) odpowiada warunek

$$\inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus \{\mathbf{0}\}} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{B}^T \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{Y}}} \geq \beta > 0 \quad (6.11)$$

Sprawdzenie warunku postawionego we wzorze (6.11) jest trudne. Zwykle (zob. na przykład Bathe i inni 2000b, Sitek 2010, Wiśniewski 2010) sprawdza się go, badając najmniejszą wartość własną zagadnienia

$$\mathbf{K} \mathbf{y} = \gamma \mathbf{S}^y \mathbf{y}, \mathbf{K} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}^T, \|\mathbf{y}\|_{\mathcal{X}}^2 = \mathbf{y}^T \mathbf{S}^y \mathbf{y} \quad (6.12)$$

rozpatrując sekwencję siatek elementów skończonych, której rozmiar dąży do zera. Jeśli ta wartość własna pozostaje większa od zera, to znaczy, że dany element skończony spełnia kryterium inf-sup.

W przypadku trójpolowej zasady wariacyjnej Hu-Washizu układ równań (6.7) może zostać zapisany w następującej formie (por. Auricchio i inni 2004)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad (6.13)$$

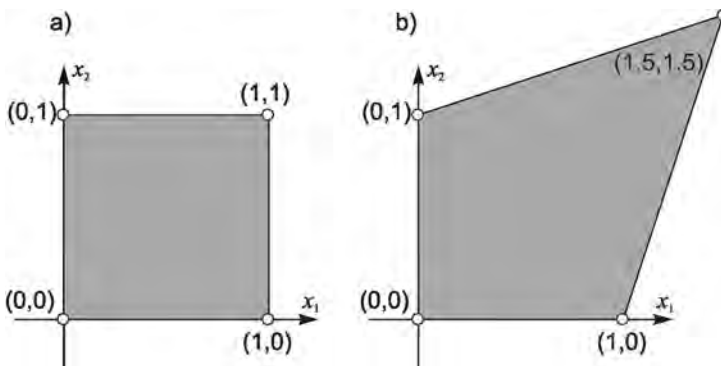
Rozważając dalej zagadnienie liniowe na podstawie wzoru (5.90), poszczególne macierze na poziomie elementu określone są następująco

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_M^{(e)} & \mathbf{K}_{\beta\mathbf{q}}^{(e)T} \\ \mathbf{K}_{\beta\mathbf{q}}^{(e)} & \mathbf{K}_{\beta\beta}^{(e)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{D}\}, \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{(e)} \\ \beta^{(e)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}^{(e)} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \hat{\mathbf{s}} \quad (6.14)$$

Występująca we wzorze (6.14) macierz  $\mathbf{D}$  jest zależna od funkcji interpolujących niezależne naprężenia oraz niezależne odkształcenia, por. macierz  $\mathbf{F}$  w równaniu 42 z pracy Wagner i Gruttmann (2005). W omawianym w niniejszej monografii elemencie EANS4 macierz  $\mathbf{D}$  znika ze względu na warunek  $L^2$ - ortogonalności, por. równania (5.52) i (5.53). W konsekwencji poprzez związek (6.14)<sub>2</sub> ze sformułowania znika macierz  $\mathbf{B}$ , dla której należy zbadać warunek inf-sup i otrzymuje się sformułowanie podobne do klasycznego sformułowania przemieszczeniowego, zob. także Auricchio i inni (2004) komentarz pod wzorem (94). Z tego względu, w rozpatrywanym w niniejszej monografii podejściu EANS sprawdzeniu warunku inf-sup odpowiada zbadanie spektrum macierzy sztywności  $\mathbf{K}_r^{(e)}$ , por. na przykład Sitek (2010), Wiśniewski (2010).

### 6.2.3. Test wartości własnych

Bazując na pracy Wiśniewski i Turska (2009), do analizy wartości własnych macierzy  $\mathbf{K}_r^{(e)}$  (zob. wzór 5.97) przyjmuje się pojedynczy element skończony pozbawiony całkowicie warunków brzegowych. W ten sposób unika się ewentualnego „zamaskowania” dodatkowych postaci zeroenergetycznych przez więzi, por. Wiśniewski (2010). Przyjmuje się następujące stałe materiałowe:  $E=1$ ,  $\nu=0.3$ ,  $h_0=1.0$ . Rozpatruje się element o kształcie kwadratu i trapezu, zob. odpowiednio rys. 6.3a i rys. 6.3b. Obliczone dla obu geometrii wartości własne macierzy  $\mathbf{K}_r^{(e)}$  przedstawia tabela 6.1. W obu analizowanych przypadkach otrzymano prawidłową liczbę zerowych wartości własnych, to jest sześć, z dokładnością do zera numerycznego.



Rys. 6.3. Pojedynczy element skończony stosowany w badaniu wartości własnych

Tabela 6.1

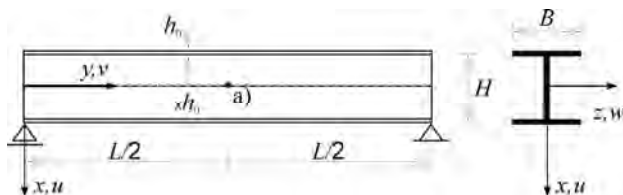
Wartości własne macierzy sztywności  $\mathbf{K}_7^{(e)}$  pojedynczego elementu EANS4

Element kwadratowy	Element nieregularny
-0.0000000000000641	-0.0000000000003950
-0.0000000000000640	-0.0000000000002940
0.0000000000000000	0.0000000000001580
0.0000000000001000	0.0000000000001976
0.0000000000006998	0.0000000000004865
0.0000000000007000	0.0000000000008500
0.0149572649569002	0.0165494051896250
0.0518925518925299	0.0374876812127330
0.0518925518925300	0.0438764081742717
0.0552911148194962	0.0443152397976891
0.0557575892266424	0.0598973106416647
0.0557575892266426	0.0713993944135204
0.0641025641025499	0.1003528029861704
0.0961538461538298	0.1413456523406295
0.1190476190475899	0.1435019327112527
0.2972729877443341	0.3318924967598128
0.4807692307688340	0.4359016234122836
0.4807692307688341	0.4969404883103631
0.6205244620547565	0.5414331372039753
0.6205244620547573	0.7432665221225701
0.7692307692303001	0.7651760990103139
0.7692307692313007	0.7678839657516445
1.1538461538461000	1.5570579072320738
1.4285714285710993	1.7594869716052026

#### 6.2.4. Swobodnie podparta zginana belka warstwowa o przekroju dwuteowym

Przykład ten można odnaleźć w pracy Back i Will (2008) oraz także w cytowanej tamże literaturze. Rozpatruje się swobodnie podpartą belkę o bisymetrycznym przekroju dwuteowym, zob. rys. 6.4, obciążoną równomiernie. Wymiary belki są następujące:  $L = 2.5$  m,  $B = 0.05$  m,  $h_0 = 0.00208$  m, a dane materiałowe przyjęto jako:  $E_a = 53.78$  GPa,  $E_b = 17.93$  GPa,  $G_{ab} = G_{ac} = 8.96$  GPa,  $G_{bc} = 3.45$  GPa,  $\nu_{ab} = 0.25$ . Oryginalnie przykład był analizowany przy pomocy elementów jednowymiarowych, opracowanych w ramach teorii belek cienkościennych z uwzględnieniem warstwowej struktury materiału. W rozwiązaniu śledzi się przemieszczenie pionowe punktu w środku rozpiętości belki w zależności od sekwencji uwarstwienia. W modelu powłokowym punktowi osi belki odpowiada punkt a przekroju poprzecznego powłoki strukturalnej (rys. 6.4). Do obliczeń przyjęto siatkę  $(6+6+6) \times 30$  elementów skończonych<sup>70)</sup> EANS4, podział wzdłuż długości dotyczy połowy długości belki. Tabela 6.2 przedstawia porównanie otrzymanych wyników z rozwiązaniami odniesienia z pracy Back i Will (2008).

<sup>70)</sup> Oznaczenie to należy rozumieć w następujący sposób: 6 elementów na półce górnej, 6 elementów na środku, 6 elementów na półce dolnej oraz 30 elementów wzdłuż długości belki. Przyjęta tak konwencja będzie konsekwentnie stosowana w dalszej części pracy.



Rys. 6.4. Swobodnie podparta belka o przekroju dwuteowym

Tabela 6.2

Swobodnie podparta belka warstwowa o przekroju dwuteowym, wartości przemieszczeń pionowych punktu (a) [cm], dane z pracy Back i Will (2008) uzupełnione o rozwiązania własne

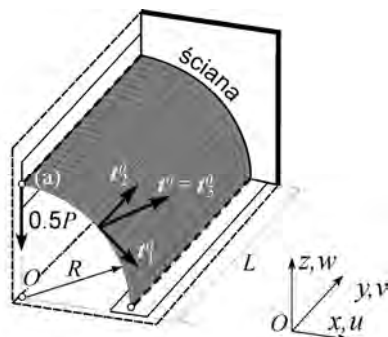
Uwarstwienie	Back i Will (2008)	Abaqus	EANS4
[0] <sub>16</sub>	6.261	6.340	6.27667
[15/-15] <sub>4S</sub>	6.926	6.989	6.98047
[30/-30] <sub>4S</sub>	9.317	9.360	9.35436
[45/-45] <sub>4S</sub>	13.450	13.479	13.4796
[60/-60] <sub>4S</sub>	17.000	17.023	17.0277
[75/-75] <sub>4S</sub>	18.460	18.490	18.4960
[0/90] <sub>4S</sub>	9.384	9.400	9.39548

### 6.3. Przykłady analizy nieliniowej

#### 6.3.1. Utwierdzona powłoka walcowa obciążona siłą skupioną

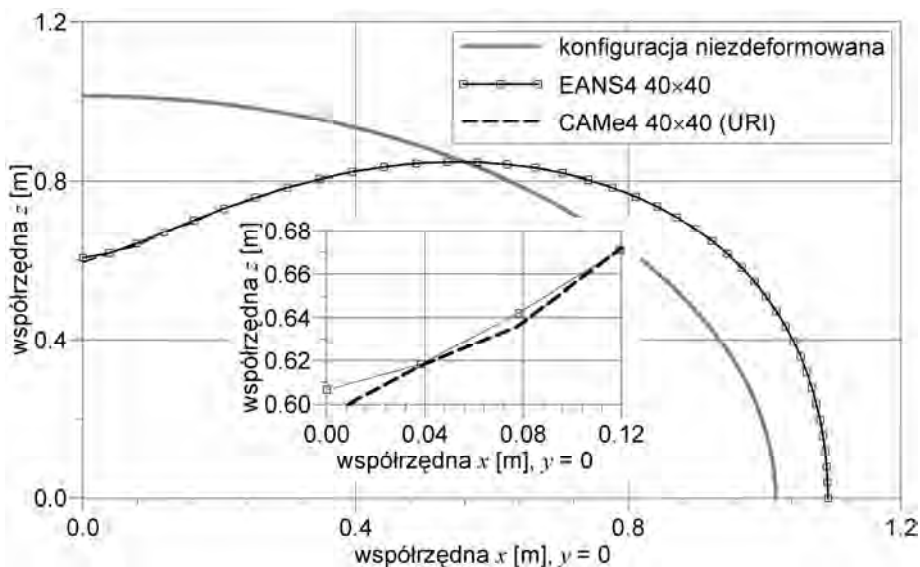
Zadanie to, oryginalnie sformułowane jako izotropowe, zaproponowano w pracy Stander i inni (1989). Jest to znany testujący przykład powłoki o dużej wiotkości strukturalnej. Przypadek powłoki kompozytowej analizowano, między innymi, w pracach Klinkel i inni (1999), Balah i Al-Ghamedy (2002), Sze i inni (2004), Arciniega i Reddy (2007). W przykładzie rozważa się połowę powłoki cylindrycznej utwierdzoną na jednym końcu i obciążoną siłą skupioną przyłożoną w punkcie (a) (rys. 6.5). W zadaniu wykorzystuje się symetrię układu i obciążenia. Wymiary konstrukcji są następujące:  $L = 304.8$  mm,  $R = 101.6$  mm,  $h = 3$  mm. Stałe materiałowe w przypadku materiału jednorodnego i izotropowego przyjęto jako  $E = 20.685$  kN/mm<sup>2</sup>,  $\nu = 0.25$ , a w przypadku materiału kompozytowego jako  $E_a = 20.685$  kN/mm<sup>2</sup>,  $E_b = 5.17125$  kN/mm<sup>2</sup>,  $G_{ab} = G_{ac} = 7.956$  kN/mm<sup>2</sup>,  $G_{bc} = 1.989$  kN/mm<sup>2</sup>,  $\nu_{ab} = 0.25$ . W analizie nieliniowej obciążenie w punkcie (a) przyjmuje się jako proporcjonalne  $P(\lambda) = \lambda P_{ref}$ , gdzie  $P_{ref} = 500$  kN. W obliczeniach przyjmuje się tutaj siatkę 40×40 elementów dla powłoki przedstawionej na rys. 6.5.

W pierwszej kolejności badano możliwość pojawienia się form pasożytniczych. Rys. 6.6 przedstawia porównanie rozwiązań w zakresie liniowym uzyskanych przy pomocy elementów EANS4 i CAME4 (URI) dla powłoki jednorodnej izotropowej. Na wykresie przedstawiono zdeformowane krawędzie powłoki w płaszczyźnie  $Oxz$  dla  $y = 0$ . Widoczna jest tu łamana postać odkształconej postaci powierzchni podstawowej. Efekt ten nie występuje w rozwiązaniu otrzymanym za pomocą elementu EANS4.

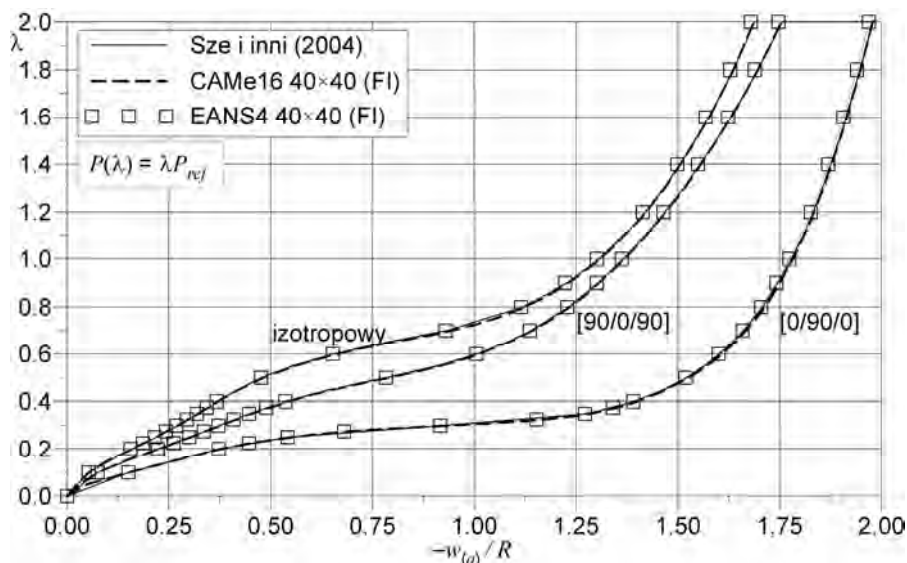


Rys. 6.5. Utwardzona powłoka walcowa, geometria

W dalszym ciągu badań własnych, porównano wyniki autorskie z rozwiązaniami odniesienia: z pracy Sze i inni (2004) oraz uzyskanym, wykorzystując element CAME16. Porównanie wartości przemieszczeń pionowych punktu (a) w zakresie geometrycznie nieliniowym, dla różnych wariantów uwarstwienia, przedstawia rys. 6.7. Uzyskane przy pomocy elementu EANS4 wyniki są zgodne z rozwiązaniami porównawczymi, nawet dla znacznych wartości przemieszczeń (rzędu dwóch wartości promienia powłoki w konfiguracji odniesienia). Widoczne jest też, że w całym zbadanym zakresie obciążenia, najmniejsze wartości przemieszczenia punktu a powstają w przypadku powłoki izotropowej.



Rys. 6.6. Utwardzona powłoka walcowa, rozwiązanie liniowe, widoczne formy pasożytnicze w rozwiązaniu CAME4 40x40 (URI)



Rys. 6.7. Utwierdzona powłoka walcowa, wyniki w zakresie geometrycznie nieliniowym

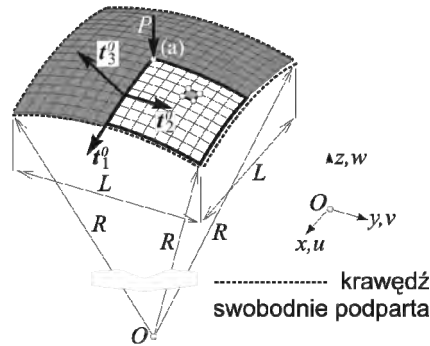
### 6.3.2. Czasza oparta na rzucie kwadratu

Zagadnienie deformacji wycinka czaszy kołowej, rozpiętej na rzucie kwadratu, pod obciążeniem skupionym bądź normalnym do powłoki, jest popularnym zadaniem, zob. prace Noor i Hartley (1977), Palmerio i inni (1990), Kreja i inni (1997), To i Liu (2001), Kłosowski i Woźnica (2004), Chróścielewski i inni (2004, 2011b) i cytowaną tam literaturę. W niniejszym paragrafie do analizy przyjmuje się powłokę wyciętą ze sfery o promieniu  $R = 2.54$  m czterema płaszczyznami, zob. rys. 6.8. Rzut czaszy na płaszczyznę  $xy$  tworzy kwadrat  $2L \times 2L$ , gdzie  $L = 0.7849$  m. Powłoka, o grubości  $h_0 = 0.01$  m zbudowana jest z czterech warstw tego samego materiału o równej grubości  $h = 0.25h_0 = 0.0025$  m. Warstwy laminatu ułożone są w stos o uwarstwieniu  $[\theta / -\theta / -\theta / \theta]$ , gdzie kąt  $\theta = \{0, 10, 30, 45, 60, 90\}$  stopni. Stałe materiałowe przyjmuje się jak dla materiału AS4/3501-6 Carbon/Epoxy Unidirectional Prepreg<sup>71)</sup> zob. pracę Piovan i Cortínez (2007):  $E_1 = 141.96$  GPa,  $E_2 = 9.79$  GPa,  $G_{12} = G_{13} = 6.01$  GPa,  $G_{23} = 4.83$  GPa,  $\nu_{12} = 0.241$ . W zadaniu wykorzystuje się dodatkowo podwójną symetrię powłoki. Obciążenie przyjmuje się jako proporcjonalne  $P(\lambda) = \lambda P_{ref}$ , gdzie  $P_{ref} = 1000$  kN.

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, ze względu na warunki brzegowe oraz wykorzystanie symetrii, bada się występowanie form pasożytniczych. Rys. 6.9 przedstawia porównanie zdeformowanej postaci powłoki w płaszczyźnie  $Oyz$  zawierającej punkt (a), otrzymanych w rozwiązaniu liniowym bez uwzględnienia laminacji. Na krzywej z rozwiązania CAME4 24x24 (URI) widoczne są charakterystyczne załamania.

W zakresie nieliniowym bada się wpływ uwarstwienia na wartość ugięcia powłoki w punkcie a oraz kształt zdeformowanych krawędzi powłoki w płaszczyznach  $Oyz$  i  $Oxz$  zawierających punkt a. W obliczeniach obciążenie przykładane jest w równych krokach  $\Delta\lambda = 0.2$  aż do osiągnięcia wartości  $\lambda = 1$ .

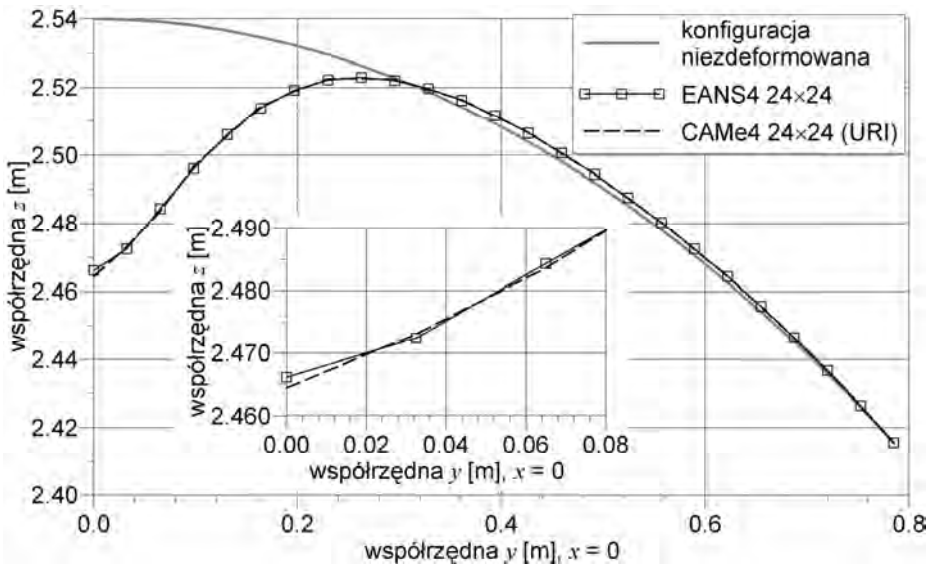
<sup>71)</sup> <http://composite.about.com/library/data/blc-as4-3501-6.htm>



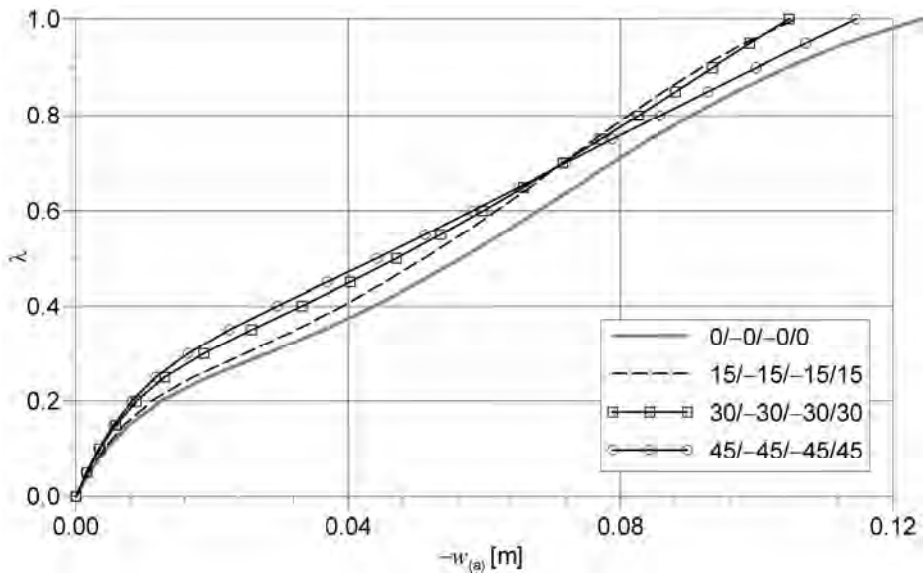
Rys. 6.8. Czasza oparta na rzucie kwadratu, geometria

Porównanie nieliniowych ścieżek deformacji w zależności od założonej laminacji przedstawia rys. 6.10. Ze względu na symetrię układu, na rysunku tym podano tylko ścieżki dla uwarstwienia do wartości bezwzględnej kąta  $\theta = 45^\circ$ . Widoczne jest, że w zakresie analizowanego obciążenia najbardziej wiotka jest powłoka o uwarstwieniu  $[0/-0/-0/0]$ . Wartości przemieszczenia punktu (a) dla  $\lambda=1$  przedstawia rys. 6.11. Jak należało się spodziewać, dla punktu leżącego na przecięciu płaszczyzn symetrii powłoki wykres rys. 6.11 ma symetryczny kształt względem rozważanego kąta laminacji.

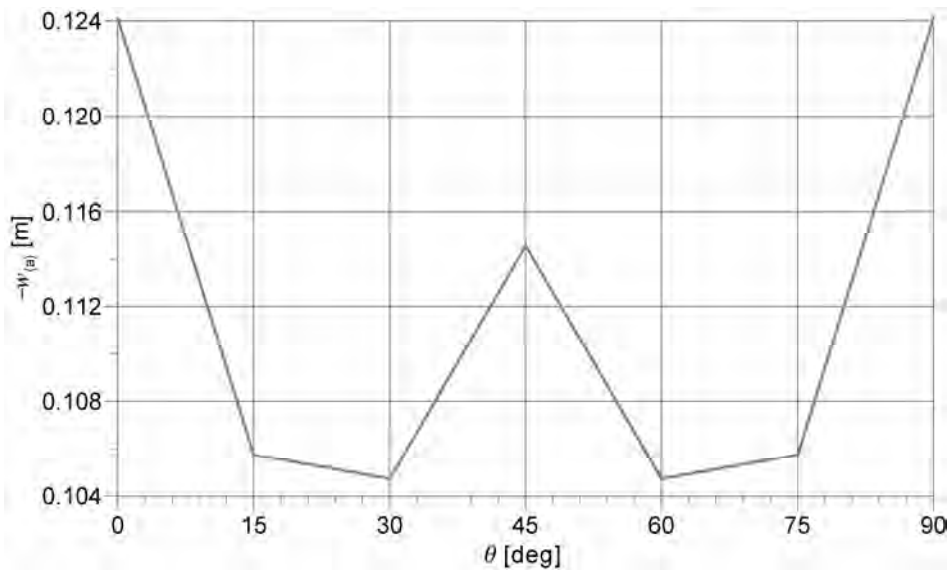
Inaczej sytuacja przedstawia się dla punktów powłoki innych niż (a), leżących na krawędziach symetrii. Rys. 6.12 przedstawia wykresy zdeformowanych krawędzi leżących w płaszczyznach  $Oyz$  i  $Oxz$  dla  $\lambda=1$ . Porównanie lewej i prawej strony rysunku wskazuje na różnicę kształtów krawędzi w zależności od przyjętej laminacji. Wyjątkiem jest symetryczny kształt krzywych otrzymany przy uwarstwieniu o wartości bezwzględnej kąta  $\theta = 45^\circ$ .



Rys. 6.9. Czasza oparta na rzucie kwadratu, rozwiązanie liniowe, widoczne formy pasożytnicze w rozwiązaniu CAME4 24x24 (URI)

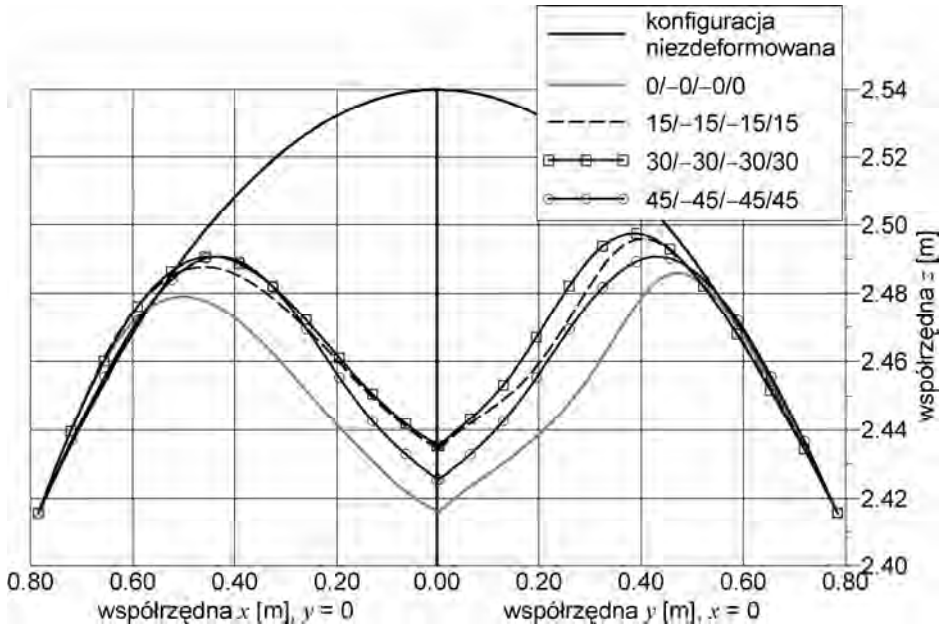


Rys. 6.10. Czasza oparta na rzucie kwadratu, rozwiązanie nieliniowe EANS4 24×24



Rys. 6.11. Czasza oparta na rzucie kwadratu, wartości ugięcia punktu a w zależności od laminacji





Rys. 6.12. Czasza oparta na rzucie kwadratu, deformacja krawędzi symetrii powłoki w zależności od laminacji

### 6.3.3. Swobodna paraboloidalno-hiperboliczna powłoka trójwarstwowa

Pierwotnie przykład powłoki paraboloidalno-hiperbolicznej o budowie jednorodnej i izotropowej sformułowano w pracy Bařar i Ding (1990) jako test oceny elementów skończonych w zakresie dużych obrotów. Ważność tego zadania wynika dodatkowo z faktu, że występuje tutaj nieregularna siatka elementów skończonych. Dodatkowo, co będzie pokazane dalej, dochodzi do przemieszczania znacznych obszarów powłoki w niemalże sztywnym ruchu. W wariacie jednorodnym i izotropowym omawiane tu zadanie było także analizowane, na przykład, w pracach Stander i inni (1989), Wriggers i Gruttmann (1993), Chróścielewski i inni (1997), por. też dyskusja w pracy Chróścielewski i inni (2004). Inny przykład analizy paraboloidy hiperbolicznej można odnaleźć w pracach zespołu badawczego skupionego wokół Bathego, zob. na przykład Bathe i inni (2000a), Lee i Bathe (2002, 2005). W wariacie jednorodnym i izotropowym powłoka ta służy do badania własności elementów rodziny MIT, zob. także Sitek (2010). Jednym z wniosków z pracy Lee i Bathe (2002) jest stwierdzenie, że paraboloida hiperboliczna jest dobrym przykładem testowym dla powłokowych elementów skończonych w zagadnieniach zgięciowych. W niniejszej pracy, wykorzystując uwagi z pracy Chróścielewski i inni (2004) dotyczące warunków podparcia rozpatrywanej struktury, analizuje się powłokę swobodną (podpartą w punkcie (c), zob. rys. 6.13). Dodatkowo wykorzystuje się podwójną symetrię powłoki. Powierzchnię odniesienia powłoki opisuje równanie

$$z = \frac{c}{2a^2}(y^2 - x^2), \quad x \in [-(\sqrt{2}a - d/2), (\sqrt{2}a - d/2)], \quad y \in [-\sqrt{2}a, \sqrt{2}a]. \quad (6.15)$$

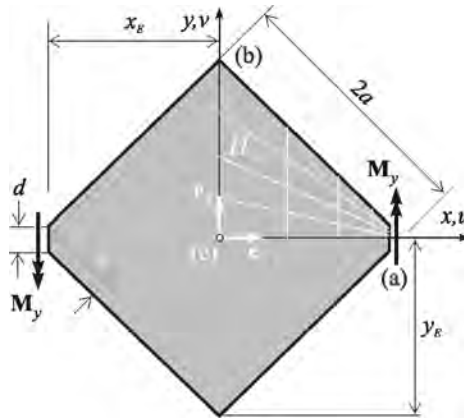
W zadaniu przyjęto  $a = 10$ ,  $c = 5$ ,  $\sqrt{2}d = 1.25$ . Pozostałe wielkości z rys. 6.13 określone są przez relacje

$$y_E = a\sqrt{2}, \quad x_E = y_E - \frac{1}{2}d, \quad e = \frac{1}{2}d\sqrt{2}. \quad (6.16)$$

Przestrzeń styczną do powierzchni odniesienia powłoki w dowolnym punkcie o współrzędnych  $(x, y)$  wyznaczają wektory

$$\mathbf{t}_1^0 = \frac{(1 + \alpha^2 y^2)\mathbf{e}_1 + \alpha^2 x y \mathbf{e}_2 - \alpha x \mathbf{e}_3}{\sqrt{(1 + \alpha^2 y^2)(1 + \alpha^2(x^2 + y^2))}}, \quad \mathbf{t}_2^0 = \frac{\mathbf{e}_2 + \alpha y \mathbf{e}_3}{\sqrt{1 + \alpha^2 y^2}}, \quad \alpha = \frac{c}{a^2}. \quad (6.17)$$

Opisane wzorami (6.17) pole dyrektorów oraz typowe najeżenie przedstawiono na rys. 6.14, wygenerowanym w programie GiD, wersja 7.2<sup>72)</sup>. Warto zwrócić uwagę, że ze wzoru (6.17)<sub>2</sub> wynika, iż wektor  $\mathbf{t}_2^0$  należy zawsze do płaszczyzny  $Oyz$ .



Rys. 6.13. Paraboloida hiperboliczna, geometria zadania

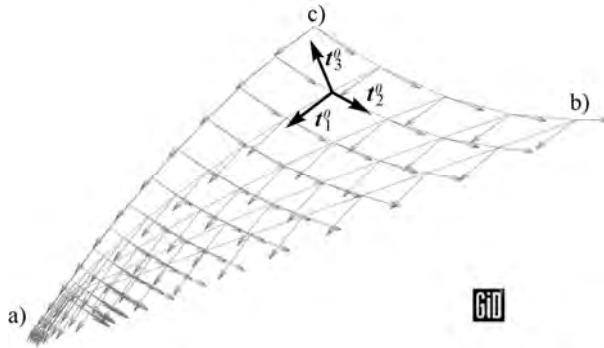
Za pracą Chróścielewski i inni (2011b) stałe materiałowe przyjęto dwojako. W wersji z materiałem kompozytowym rozpatruje się dwa uwarstwienia powłoki [90/0/90] i [0/90/0], a stosowne stałe materiałowe mają wartości  $E_1 = 10^5$  kN/m<sup>2</sup>,  $E_2 = 5 \times 10^4$  kN/m<sup>2</sup>,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 4 \times 10^4$  kN/m<sup>2</sup>,  $\nu_{12} = 0.25$ . W wariancie jednorodnym i izotropowym przyjęto  $E = E_1 = 10^5$  kN/m<sup>2</sup>,  $\nu = \nu_{12} = 0.25$ . W obu przypadkach grubość powłoki założono jako  $h = 3 \cdot 0.06 = 0.18$  m. Obciążenie jest realizowane jako samorównoważące się i proporcjonalne  $\mathbf{M}_y(\lambda) = \lambda \mathbf{M}_{ref}$  względem obciążenia odniesienia przyjętego jako ciągły moment wzdłuż obciążonej krawędzi o długości  $d$ .

$$\mathbf{M}_{ref} = m_0 \int_0^d ds_0(y) \mathbf{e}_2, \quad m_0 = 5 \quad (6.18)$$

Ze względu na warunki podparcia zadania, w pierwszej kolejności badano ewentualność wystąpienia form pasożytniczych. Do analizy przyjęto elementy EANS4 i CAME4 (URI) dla powłoki jednorodnej izotropowej. W badaniach założono taką samą siatkę dyskretyzacyjną  $72 \times 24$  elementów, gdzie większa wartość oznacza liczbę elementów na kierunku zwijania powłoki, tzn. wzdłuż osi  $x$ . Na rys. 6.15 przedstawiono porównanie rozwiązań. Podobnie jak w poprzednich przypadkach, rozwiązania uzyskane przy pomocy elementu EANS4 nie

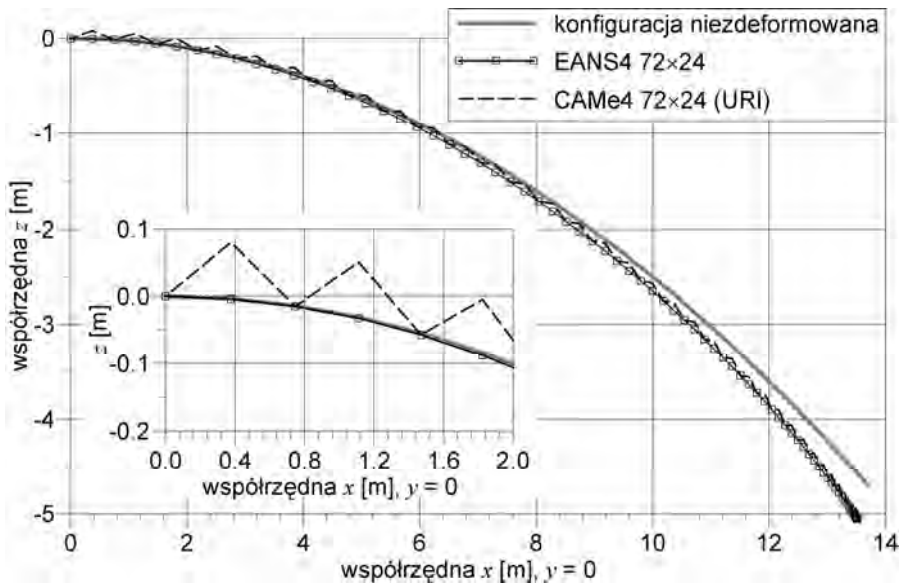
<sup>72)</sup> <http://gid.cimne.upc.es>, jest to pre- i postprocesor danych o strukturze umożliwiającej wyrowadzanie i wprowadzanie danych z autorskich programów.

wykazują charakterystycznego dla całkowania zredukowanego efektu przeskakiwania zdeformowanej powierzchni powłoki między węzłami siatki MES.

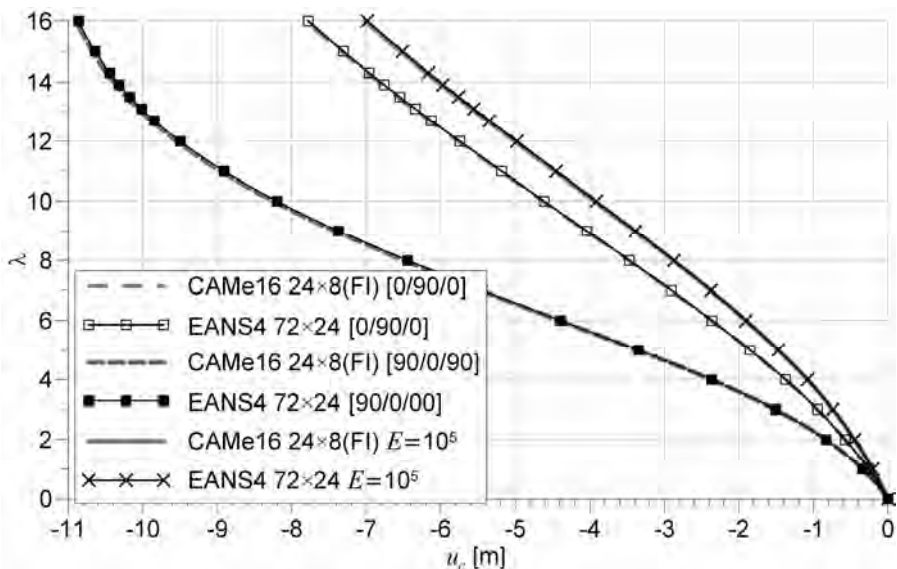


Rys. 6.14. Paraboloida hiperboliczna, pole dyrektorów na powierzchni podstawowej powłoki

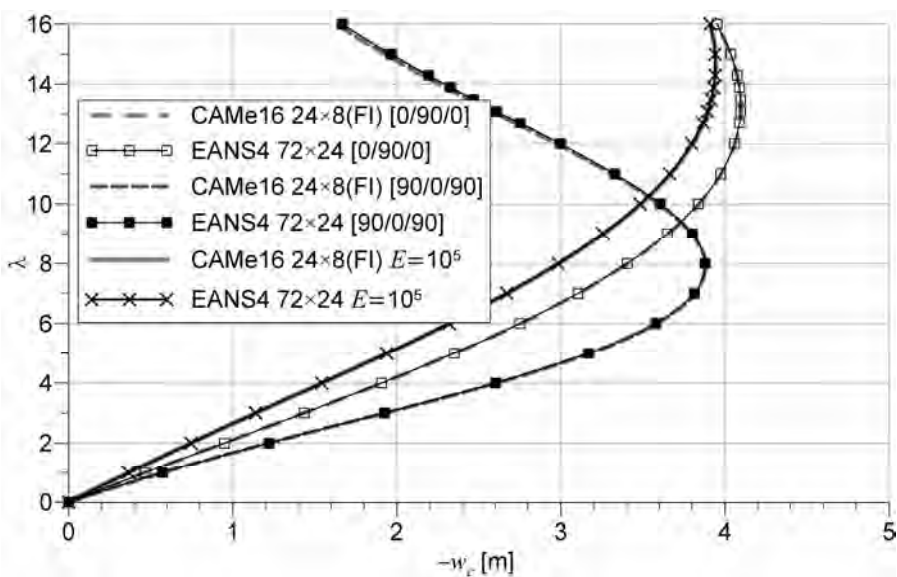
Wartości przemieszczeń: poziomego  $u$  i pionowego  $w$  w punkcie (c) w zakresie nieliniowym przedstawiono odpowiednio na rys. 6.16 i rys. 6.17. Jako odniesienie dla rezultatów własnych zaprezentowano wyniki z pracy Chróścielewski i inni (2011b) uzyskane przy pomocy elementów CAME16 (FI). Widoczna jest dobra zgodność obu omawianych rozwiązań. Z rys. 6.16 i rys. 6.17 wynika, że przy założonym obciążeniu i warunkach brzegowych powłoka doznaje mniejszych przemieszczeń w wariancie uwarstwienia  $[0/90/0]$  w porównaniu do laminacji  $[90/0/90]$ .



Rys. 6.15. Paraboloida hiperboliczna, rozwiązanie liniowe, widoczne formy pasożytne w rozwiązaniu CAME4 72x24 (URI)



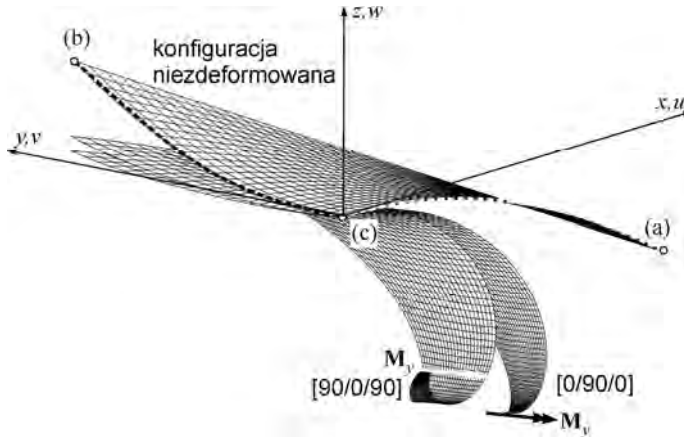
Rys. 6.16. Paraboloida hiperboliczna, rozwiązanie nieliniowe, przemieszczenie poziome punktu c



Rys. 6.17. Paraboloida hiperboliczna, rozwiązanie nieliniowe, przemieszczenie pionowe punktu c

Przykładowe, zdeformowane konfiguracje powłoki przedstawia rys. 6.18. Rysunek uwidacznia, że znaczne partie powłoki doznają prawie sztywnego ruchu, a do znacznych deformacji lokalnych dochodzi w sąsiedztwie krawędzi przyłożenia obciążenia.

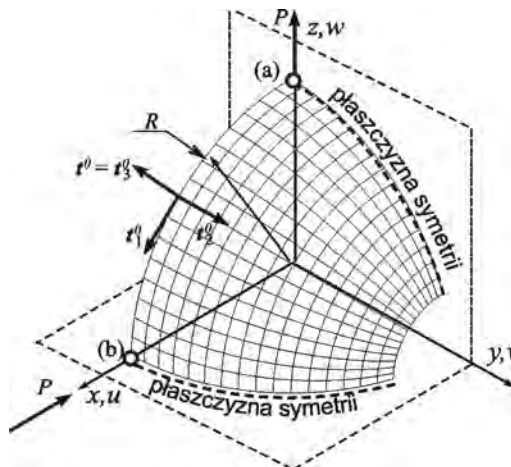
W kolejnych zadaniach pomija się sprawdzanie obecności form pasożytniczych w rozwiązaniach otrzymanych za pomocą elementu EANS4.



Rys. 6.18. Paraboloïda hiperboliczna, konfiguracje zdeformowane powłoki dla  $\lambda = 16$ , element EANS4

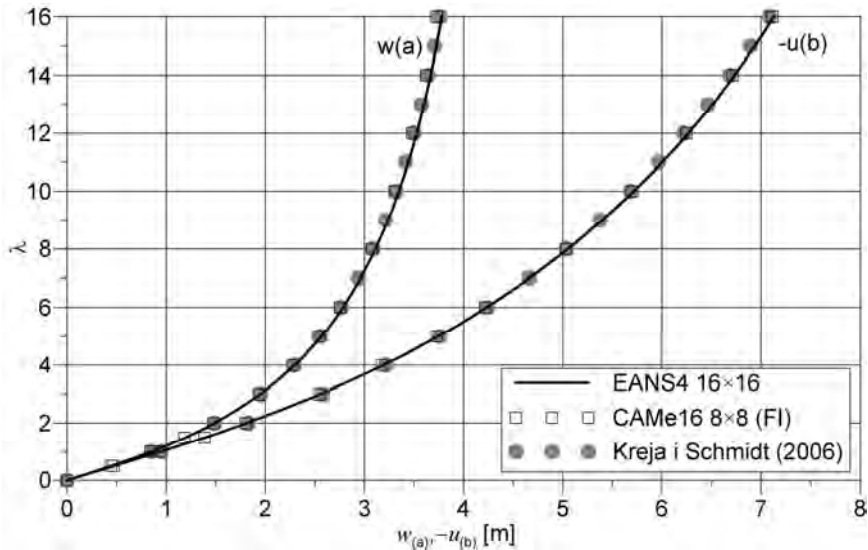
#### 6.3.4. Półsfera z otworem obciążona siłami samorównoważącymi się

W pracy MacNeal i Harder (1985) zaproponowano zagadnienie półsfery z otworem obciążonej w płaszczyźnie równika siłami samorównoważącymi się. Przykład ten przyjął się w literaturze jako popularny test powłokowych elementów skończonych, zob. na przykład Kreja i Schmidt (2006), Kreja (2007), Panasz (2008), Witkowski (2009), Wiśniewski (2010) i cytowaną tam literaturę. W oryginalnym sformułowaniu rozpatruje się powłokę jednorodną i izotropową o własnościach  $R = 10$  in,  $h_0 = 0.04$  in,  $\alpha = 18^\circ$ ,  $E = 6.825 \times 10^7$  psi,  $\nu = 0.3$ ,  $P_{ref} = 10$  lb,  $P(\lambda) = \lambda P_{ref}$ . W rozwiązaniu wykorzystuje się symetrie powłoki zob. rys. 6.19. W analizie śledzi się przemieszczenia punktów (a) i (b).



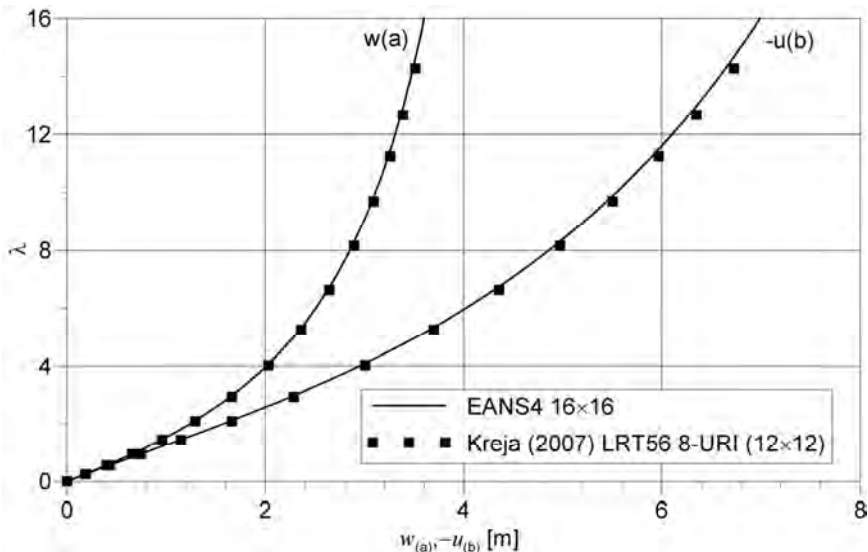
Rys. 6.19. Półsfera z otworem, geometria zadania

Rys. 6.20 przedstawia porównanie otrzymanych w tym wypadku wyników z wybranymi rozwiązaniami odniesienia. Widoczna jest zgodność przedstawionych wyników.



Rys. 6.20. Półsfera z otworem, porównanie rozwiązań dla wariantu jednorodnego i izotropowego

Kreja (2007) zaproponował i przeanalizował wariant powłoki kompozytowej wykonanej z jednej warstwy, który przyjęto do badań w niniejszej monografii. Stałe materiałowe wynoszą:  $E_1 = 20.46 \cdot 10^6$  psi,  $E_2 = 4.092 \cdot 10^6$  psi,  $G_{12} = G_{13} = 2.53704 \cdot 10^6$  psi,  $G_{23} = 1.26852 \cdot 10^6$  psi,  $\nu_{12} = 0.313$ . Wymiary geometryczne przyjęto jako  $R = 10$  in,  $h_0 = 0.08$  in. Otrzymane rozwiązania własne porównano z rozwiązaniami przedstawionymi w pracy Kreja (2007) otrzymanymi za pomocą elementów LRT56 8-URI w siatce  $12 \times 12$ , zob. rys. 6.21. Uzyskano dobrą zgodność rozwiązania własnego z wynikami z pracy Kreja (2007).



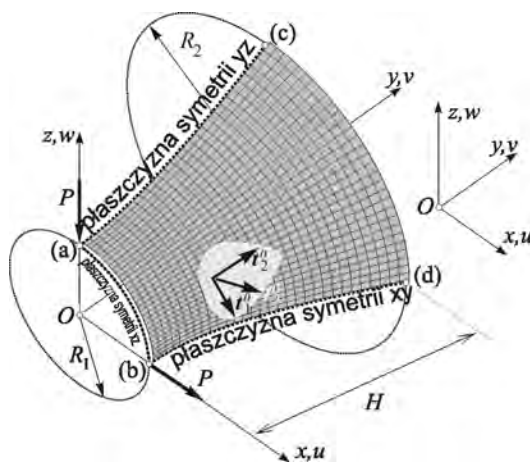
Rys. 6.21. Półsfera z otworem, porównanie rozwiązań dla przypadku warstwowego

### 6.3.5. Chłodnia kominowa (hiperboloida) warstwowa

Przykład powłoki w kształcie chłodni kominowej (hiperboloidy) pochodzi z pracy Başar i inni (1993). Ze względu na wartości przemieszczeń i obrotów, jakich doznaje powłoka w trakcie deformacji, jest to wymagający test sformułowania powłokowych elementów skończonych. W pracy Krätzig (1993) można odnaleźć stwierdzenie „...one of the most crucial benchmarks for large rotation shell problems in our institute” oddające charakterystykę zadania. Z kolei w artykule Arciniega i Reddy (2007) autorzy piszą o tym przykładzie: „This challenging example demonstrates the robustness of the present finite element model and its applicability to arbitrary<sup>73)</sup> shell geometries and very strong geometric nonlinearity”. Bathe i współautorzy (na przykład Bathe i inni (2003), Chappelle i Bathe (2003), Lee i Bathe (2005) i cytowana tam literatura) również studiowali hiperboloidę, przyjmując materiał jednorodny i izotropowy w zakresie liniowym.

Rozważany tutaj przykład chłodni kominowej podjęło wielu autorów, zob. na przykład Balach i Al-Ghamedy (2002), Vu-Quoc i Tan (2003), Gruttmann i Wagner (2006), Wiśniewski (2010), Chróścielewski i inni (2011b). Geometrię zadania przedstawia rys. 6.22. Dane zadania są następujące:  $h = 0.04$  m,  $R_1 = 7.5$  m,  $R_2 = 15$  m,  $H = 20.0$  m,  $P(\lambda) = \lambda P_{ref}$ ,  $P_{ref} = 5$  kN,  $E_1 = 40 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>,  $E_2 = 10^6$  kN/m<sup>2</sup>,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.6 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>,  $\nu_{12} = 0.25$ . Zmianę promienia wzdłuż osi obrotu hiperboloidy  $y$  opisuje równanie

$$R(y) = R_1 \sqrt{1 + (y/C)^2}, \quad C = 20/\sqrt{3} \quad (6.19)$$



Rys. 6.22. Hiperboloida, geometria zadania

W rozwiązaniu poszukuje się wartości przemieszczeń punktów (a), (b), (c) i (d). W obliczeniach wykorzystuje się trzy płaszczyzny symetrii konstrukcji, dyskretyzując jedną ósmą powłoki. W pierwszej kolejności przyjęto siatkę  $30 \times 30$  elementów EANS4. Wyniki otrzymane dla uwarstwienia [0/90/0] oraz [90/0/90] przedstawiają odpowiednio rys. 6.23 i rys. 6.24. Jako odniesienie dla rozwiązań własnych przyjmuje się wyniki z pracy Başar i

<sup>73)</sup> Arciniega i Reddy (2007) nie rozpatrują w swojej pracy powłok z ortogonalnymi przecięciami płatów, jak ma to miejsce w niniejszej monografii. Wydaje się więc, że w tym wypadku pojęcie *arbitrary shell geometries* użyte jest trochę „na wyrost”.

inni (1993) oraz rozwiązania uzyskane przy pomocy elementów CAME16(FI) w siatce  $30 \times 30$ . Porównanie przedstawionych wyników wskazuje, że w przypadku uwarstwienia [90/0/90] wartości uzyskane przy pomocy elementów EANS4 są zgodne z rozwiązaniem pracy Başar i inni (1993). W przypadku laminacji [0/90/0] zaznacza się różnica między wartościami przemieszczenia  $u_d$ , otrzymanymi za pomocą elementów EANS4, a rozwiązaniem odniesienia Başar i inni (1993). Widoczne jest też, że w przypadku laminacji [90/0/90] rozwiązania z pracy Başar i inni (1993) oraz EANS4 są różne od wartości uzyskanych przy pomocy elementów CAME16<sup>74)</sup>. Rys. 6.25 pokazuje porównanie wartości przemieszczeń uogólnionych uzyskanych przy pomocy elementów CAM i EANS4 w płaszczyźnie  $y = 0$  symetrii powłoki dla uwarstwienia [90/0/90] przy  $\lambda = 23$ . Na rysunku zaznacza się łamany kształt krzywej EANS4  $30 \times 30$ , opisującej zmiany wartości kąta obrotu  $\varphi_2$  węzłów wokół osi  $Oy$  globalnego układu współrzędnych. Efekt ten nie występuje na odpowiadającej krzywej z rozwiązania uzyskanego przy pomocy elementów CAM.

Wobec powyższych faktów przeprowadzono analizę zbieżności energii sprężystej ze względu na gęstość siatki przy uwarstwieniu [90/0/90]. Wyniki przedstawione na rys. 6.26 wskazują na pogarszanie się zbieżności rozwiązań EANS4 w rzadkich siatkach elementów skończonych wraz ze wzrostem nieliniowości zadania wyrażanej tutaj parametrem proporcjonalności obciążenia  $\lambda$ . Podobny efekt dla innych niż rozpatrywane tu elementy skończone obserwowano w pracy Chróścielewski i inni (2004), zob. analiza zadania 6.7.2 tamże. Z krzywych przedstawionych na rys. 6.26 wynika, że w przypadku stosowania elementu EANS4 wymagana do uzyskania rozwiązania bliskiego rozwiązaniu CAME16  $50 \times 50$  siatka elementów EANS4 winna mieć gęstość  $60 \times 60$  bądź  $120 \times 120$  elementów skończonych. Do dalszych obliczeń wybrano podział  $60 \times 60$  elementów EANS4

W nawiązaniu do rys. 6.25, rys. 6.27 przedstawia wartości przemieszczeń uogólnionych w płaszczyźnie  $y = 0$  uzyskane z podziału  $60 \times 60$ . Widoczna jest poprawa uzyskanych wyników. Zakres, w którym manifestują się skokowe zmiany wartości kąta  $\varphi_2$ , zawężił się do bliskiego sąsiedztwa punktu (a). Efekt ten można wytłumaczyć na podstawie artykułu Crisfield i Peng (1996), którego autorzy wykazali, że zgrubna siatka podziału na elementy skończone może prowadzić do fałszywych punktów granicznych na ścieżkach deformacji. Jest to związane z faktem, że uboga siatka nie jest w stanie poprawnie odwzorować występującej fali deformacyjnej.

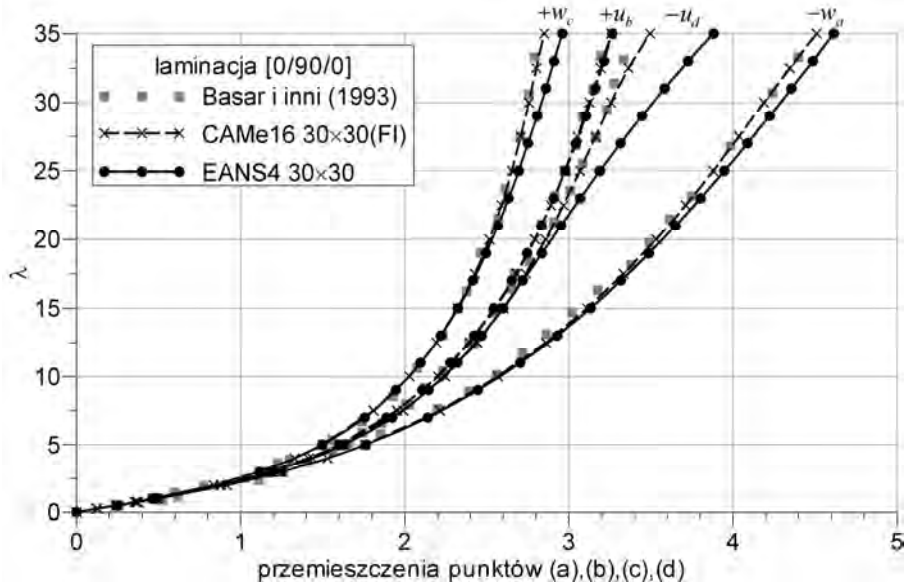
Wyniki uzyskane dla siatki  $60 \times 60$  przedstawiono na rys. 6.28 oraz na rys. 6.29. Na ostatnim rysunku widoczna jest już pewna poprawa wartości rozwiązania EANS4  $60 \times 60$  względem rozwiązania odniesienia CAME16  $30 \times 30$ . Jednak w przypadku tego uwarstwienia nadal pozostają pewne różnice w wartościach. Pewne wytłumaczenie tego stanu rzeczy może dać analiza deformacji powłoki dla różnych laminacji, ale przy tej samej wartości parametru sterującego  $\lambda = 23$ . Zdefiniowane siatki elementów skończonych w różnych widokach przedstawia rys. 6.30 oraz rys. 6.31. Widoczne jest, że w przypadku laminacji [0/90/0] powłoka deformuje się „gładko”, to znaczy nie występują silne lokalne deformacje siatki. Inaczej jest w przypadku uwarstwienia [90/0/90]. Tutaj zaznaczają się wyraźnie silnie zlokalizowane fale deformacji, zwłaszcza w punktach (a) i (b) siatki. Odwzorowanie tych fal wymaga odpowiednio gęstych siatek podziału, takich jak rozpatrywana w tym wypadku siatka CAME16  $50 \times 50$ .

Konkludując, można stwierdzić, że przykład ten potwierdził swą renomę, wyrażoną we wstępie tej sekcji.

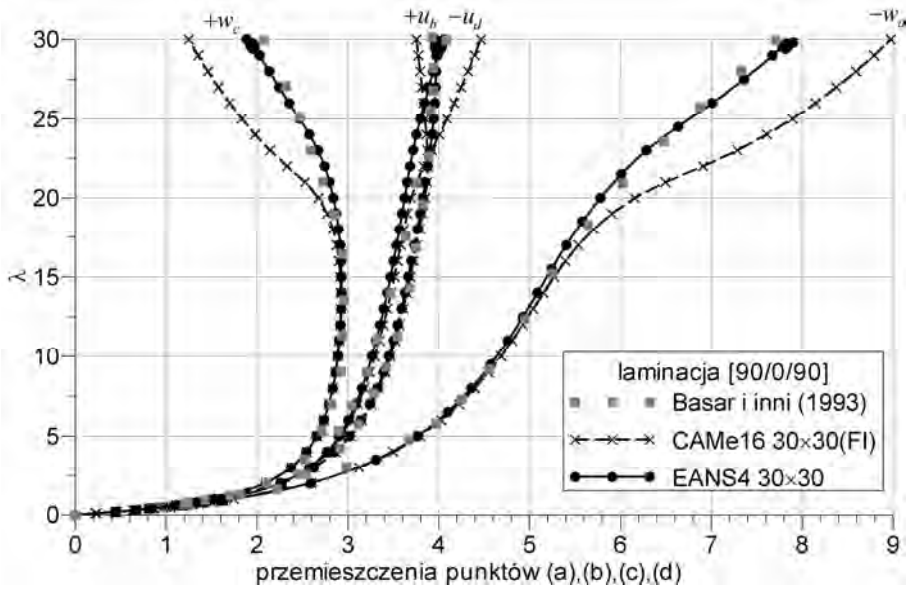
---

<sup>74)</sup> Szersze studium zbieżności podziału rozwiązań rozpatrywanej w tej sekcji powłoki przedstawiono w pracy Chróścielewski i inni (2011b).

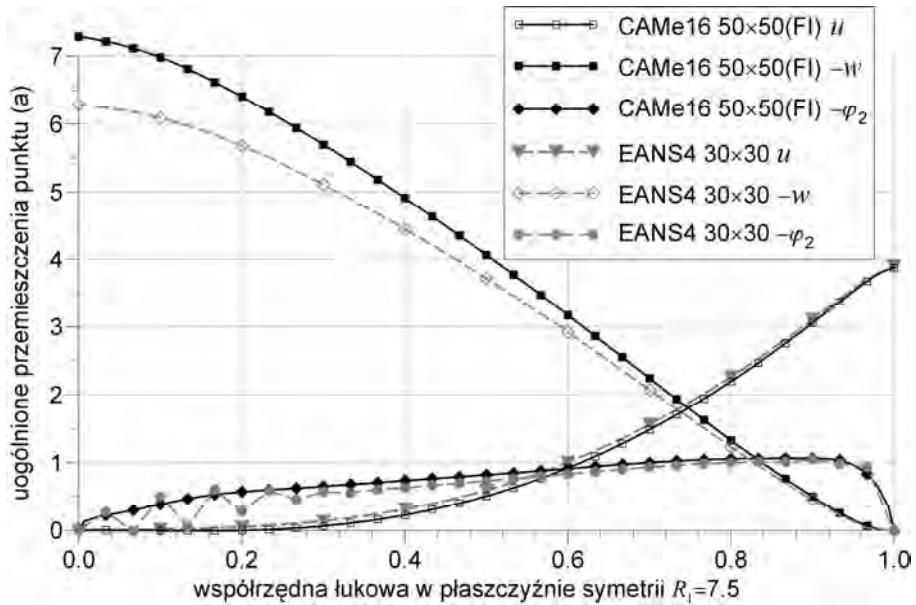




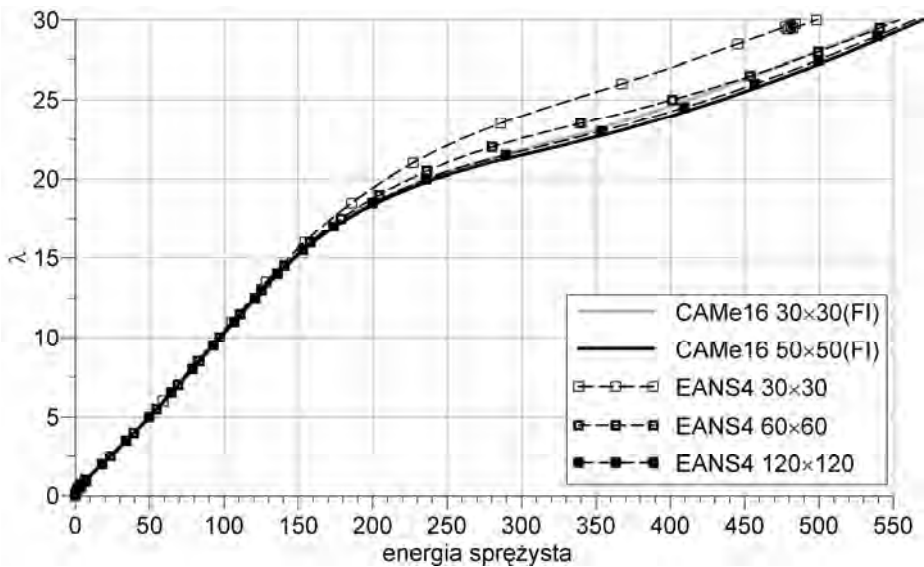
Rys. 6.23. Hiperboloida, rozwiązania nieliniowe, uwarstwienie [0/90/0]



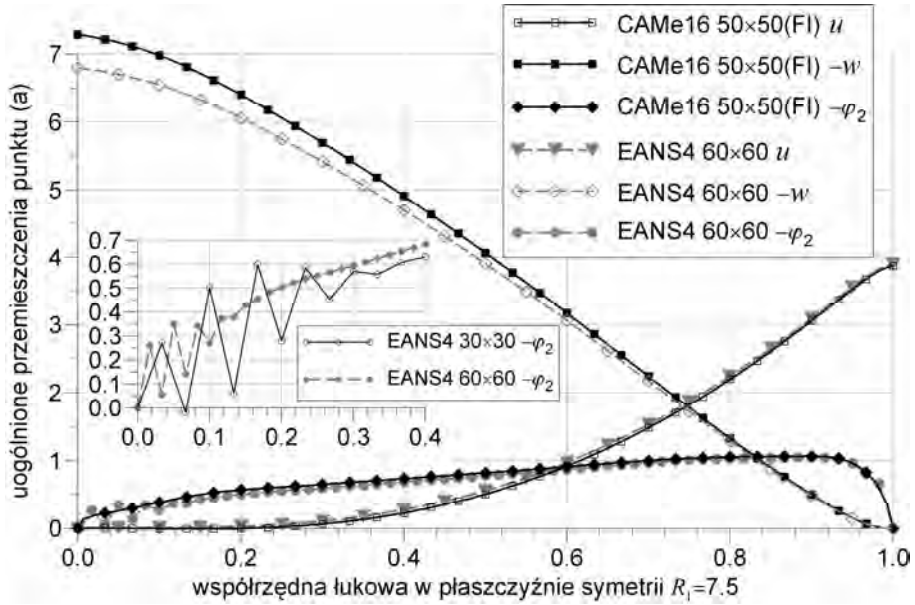
Rys. 6.24. Hiperboloida, rozwiązania nieliniowe, uwarstwienie [90/0/90]



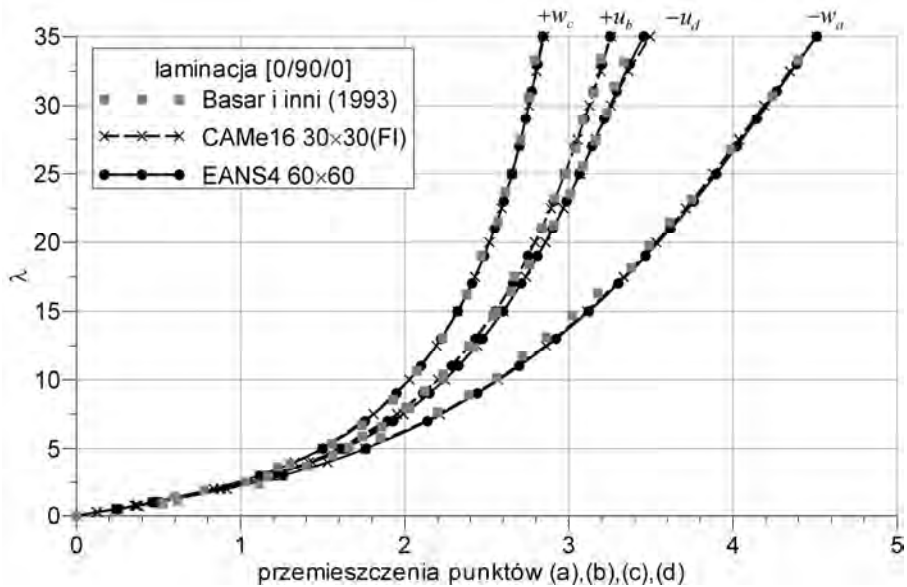
Rys. 6.25. Hiperboloida, rozwiązania nieliniowe  $\lambda = 23$ , uwarstwienie [90/0/90], siatka EANS4 30x30, wartości przemieszczeń uogólnionych w płaszczyźnie symetrii  $y = 0$



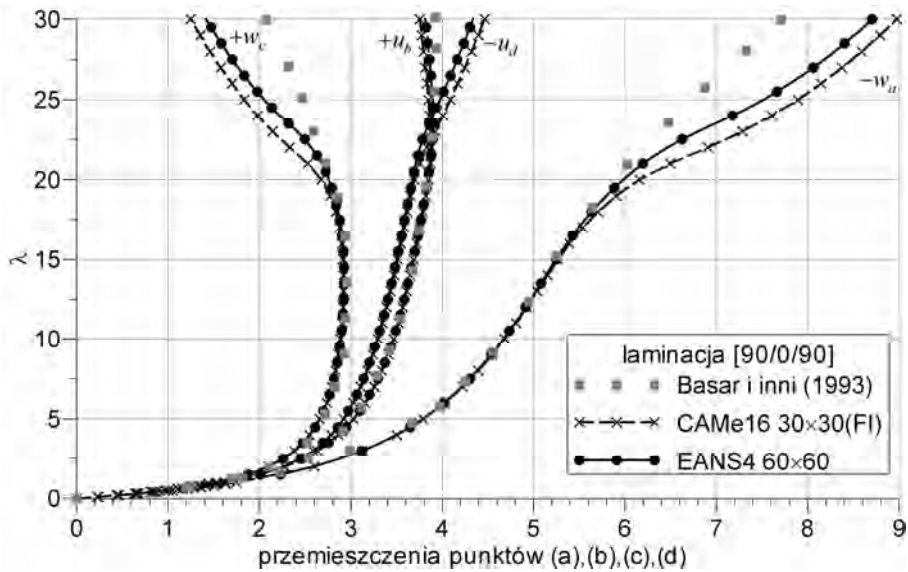
Rys. 6.26. Hiperboloida, zbieżność energii sprężystej w zależności od podziału, uwarstwienie [90/0/90]



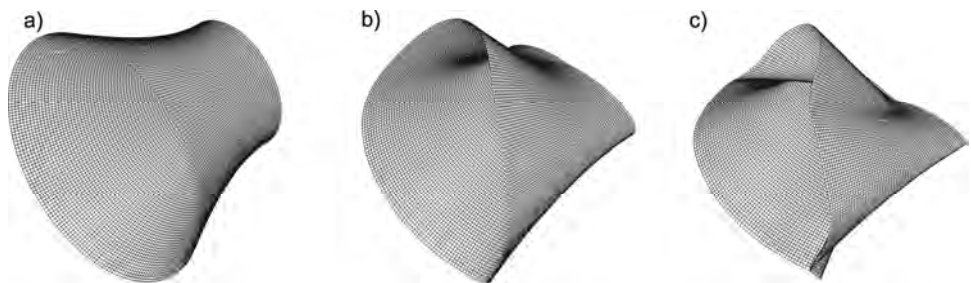
Rys. 6.27. Hiperboloida, rozwiązania nieliniowe  $\lambda = 23$ , uwarstwienie [90/0/90], siatka EANS4 60×60, wartości przemieszczeń uogólnionych w płaszczyźnie symetrii  $y = 0$



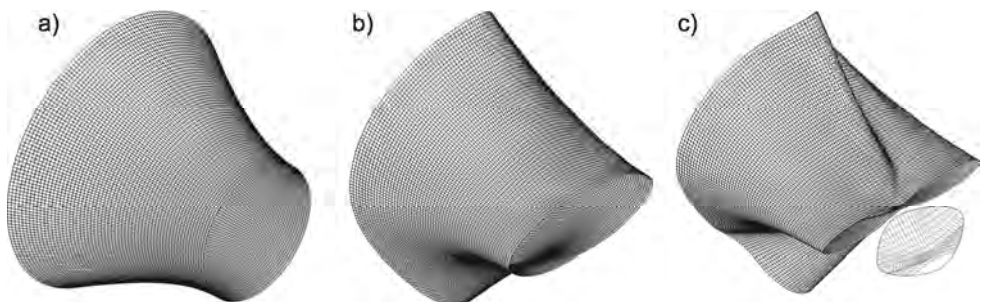
Rys. 6.28. Hiperboloida, rozwiązania nieliniowe, siatka EANS4 60×60, uwarstwienie [0/90/0]



Rys. 6.29. Hiperboloida, rozwiązania nieliniowe, siatka EANS4 60×60, uwarstwienie [90/0/90]



Rys. 6.30. Hiperboloida, konfiguracje zdeformowane powłoki dla  $\lambda = 24$ , element EANS4 60×60: a) konfiguracja niezdeformowana, b) laminacja [0/90/0], c) laminacja [90/0/90]



Rys. 6.31. Hiperboloida, konfiguracje zdeformowane powłoki dla  $\lambda = 24$ , element EANS4 60×60: a) konfiguracja niezdeformowana, b) laminacja [0/90/0], c) laminacja [90/0/90] – pokazano w powiększeniu lokalne deformacje

### 6.3.6. Wspornik o przekroju ceowym

Kolejny przykład dotyczy cienkościennego ceownika. Inżynierskie konstrukcje tego typu, dzięki swym charakterystykom geometrycznym, posiadają dużą sztywność. W trakcie deformacji takich konstrukcji może pojawić się efekt interakcji między sztywnościami: membranową, giętną i skrętną. To z kolei prowadzi do oddziaływania między lokalnymi i globalnymi formami utraty stateczności. Problem ten był dyskutowany, na przykład, w pracy Chróścielewski i inni (2004) oraz w cytowanej tam literaturze. Dodatkowo, jak w poprzednich zadaniach, w analizie powłok o geometrii ujmującej ortogonalne połączenia płatów mogą także pojawić się deformacje, w których dochodzi do sztywnego przemieszczania się całych fragmentów konstrukcji.

W pracy Lee i Harris (1979) rozpatrywano zagadnienie belki swobodnie podparte, obciążonej równomiernie na górnej krawędzi. Na bazie rozpatrywanej tutaj sześcioparametrowej teorii powłok, geometrycznie nieliniową analizę tak postawionego zadania przeprowadzono między innymi w pracy Chróścielewski (1996). Przedstawione tam wyniki ukazują złożoną pracę rozpatrywanej struktury powłokowej. Strukturę tą wykorzystano w pracach Chróścielewski i Witkowski (2010a, 2011) w ramach badania modelu konstytutywnego płyt Cosseratów według Altenbacha i Eremeyeva (Altenbach i Eremeyev 2009).

Analizowany tutaj przykład wspornika ceowego, obciążonego siłą skupioną, pochodzi z pracy Chróścielewski i inni (1992). W takim ujęciu zadanie to przyjęło się w literaturze przedmiotu jako przykład testujący w różnych sformułowaniach, zob. na przykład prace Ibrahimbegović i Frey (1994), Betsch i inni (1996), Eberlein i Wriggers (1999), Tan i Vu-Quoc (2005), Chróścielewski i Witkowski (2006), Reese (2007), Klinkel i inni (2008), Panasz (2008), Wiśniewski (2010), Lindgaard i Lund (2010)<sup>75</sup>.

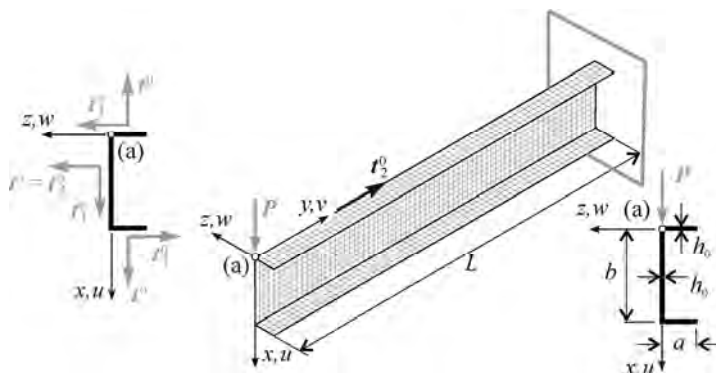
W literaturze można także odnaleźć sformułowanie omawianego zadania, zob. na przykład Sauer (1998), Wagner i Gruttmann (2005), Witkowski (2009), Wiśniewski (2010), różniące się od rozpatrywanego tutaj przykładu charakterystykami geometrycznymi. W pracach Chróścielewski i Witkowski (2006) oraz Wiśniewski (2010) porównano oba te przypadki.

Geometrię rozpatrywanego w niniejszej pracy przykładu wraz z orientacją osi przedstawił rys. 6.32. W przyjętym tu podejściu nie uwzględnia się charakterystycznych dla walcowanych przekrojów cienkościennych zaokrągłeń bądź fazowań narożników oraz zmian grubości póltek. W praktycznym bowiem formowaniu struktur zawierających ortogonalne połączenia płatów z materiałów kompozytowych stosuje się fazowania narożników, zob. na przykład badania eksperymentalne i numeryczne w pracy Kesavan i inni (2006) oraz zestaw przekrojów na rysunku 2 w pracy Lindgaard i Lund (2010).

W pierwszym etapie analizy zadania porównano wyniki otrzymane za pomocą elementu EANS4 z rozwiązaniami odniesienia dla materiału jednorodnego i izotropowego. Przyjęto następujące dane:  $L = 36$  in,  $a = 2$  in,  $b = 6$  in,  $h_0 = 0.05$  in,  $E = 10^7$  lb/in<sup>2</sup>,  $\nu = 0.333$ . Obciążenie zmienia się proporcjonalnie, przyjmując  $P(\lambda) = \lambda P_{ref}$  lb,  $P_{ref} = 100$  lb. Nieliniowe ścieżki deformacji przemieszczenia pionowego w punkcie (a) przedstawia rys. 6.33. Zaprezentowane w tym wypadku wyniki są w dobrej zgodności z rozwiązaniami odniesienia. Warto odnotować, że rozwiązanie uzyskane przy pomocy

<sup>75</sup> W tej pracy, w opisie zadania mylnie podano cytowanie artykułu [45] jako źródła danych. Prawidłowym odniesieniem jest tutaj praca: Klinkel S., Gruttmann F., Wagner W.: A mixed shell formulation accounting for thickness strains and finite strain 3D material models. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 74, 2008, 945–970.

programu Abaqus<sup>76)</sup> z wykorzystaniem elementu S9R5 jest zgodne z rozwiązaniami odniesienia tylko do punktu granicznego. Po przejściu poza punkt graniczny zaznaczają się wyraźne różnice.



Rys. 6.32. Wspornik o przekroju ceowym, geometria zadania

W analizie zadania z materiałem kompozytowym przyjęto, że powłoka wykonana jest z trzech warstw o jednakowej grubości  $h_I = h_{II} = h_{III} = \frac{1}{3}h_0$ . W odróżnieniu od przypadku jednorodnego i izotropowego, przyjmuje się tutaj całkowitą grubość powłoki równą<sup>77)</sup>  $h_0 = 0.06$  in. Rozważono dwa modele uwarstwienia [90/0/90] i [0/90/0]. Wartości stałych materiałowych przyjęto jako:  $E_1 = 10^7$  lb/in<sup>2</sup>,  $E_2 = 4 \times 10^5$  lb/in<sup>2</sup>,  $G_{12} = G_{13} = 2 \times 10^5$  lb/in<sup>2</sup>,  $G_{23} = 8 \times 10^4$  lb/in<sup>2</sup>,  $\nu_{12} = 0.333$ . Zestawienie otrzymanych wyników i porównanie z rozwiązaniami uzyskanymi przy pomocy elementów CAME16 (FI) przedstawia rys. 6.34.

Na rysunku tym wyraźnie zaznacza się różnica między wartościami z rozwiązania EANS4 (4+12+4)×72 oraz CAME16 (4+6+4)×72 dla uwarstwienia kompozytu [0/90/0]. W związku z tym w kolejnym etapie studium przeprowadzono obliczenia przy pomocy elementu EANS4, zagęszczając siatkę elementów skończonych tak, by liczba węzłów odpowiadała liczbie węzłów rozwiązania CAME16 (4+6+4)×72 tzn. przyjęto podział EANS4 (12+18+12)×216. Wyniki uzyskane dla takiego podziału przedstawia rys. 6.35. Widoczne jest, że różnica rozwiązań jest teraz praktycznie niezauważalna. Pozwala to na wyciągnięcie wniosku, że dyskretyzacja EANS4 (4+12+4)×72 jest zbyt rzadka, by odwzorować złożoną deformację belki wykonanej z materiału kompozytowego. Z rys. 6.35 wynika, że do poziomu obciążenia  $\lambda \approx 0.35$  odpowiedź ceownika jest bliska liniowej dla obu przypadków uwarstwienia. W dalszej fazie deformacji na ścieżce równowagi przy laminacji [0/90/0] wyraźnie zaznacza się punkt graniczny, a sam kształt ścieżki jest podobny do ścieżki z rozwiązania w przypadku materiału jednorodnego i izotropowego. W przypadku laminacji [90/0/90] także pojawia się punkt graniczny, jednak nie jest on tak wyraźnie zarysowany. Nadto na ścieżce tej pojawiają się punktu zwrotne.

Rys. 6.36 przedstawia zdeformowane siatki elementów skończonych wraz z powiększeniem obszaru konstrukcji przy utwierdzeniu otrzymane przy pomocy podziałów EANS4 (4+12+4)×72 i EANS4 (12+18+12)×216. Na tym rysunku oba rozwiązania

<sup>76)</sup> Wyniki z 9AS, 9SRI oraz S9R5 z rys. 6.33 otrzymano dzięki uprzejmości doktora Przemysława Panasza.

<sup>77)</sup> W ten sposób unika się błędu zaokrąglania w ułamku dziesiętnym wartości grubości pojedynczej warstwy na etapie wprowadzania danych.

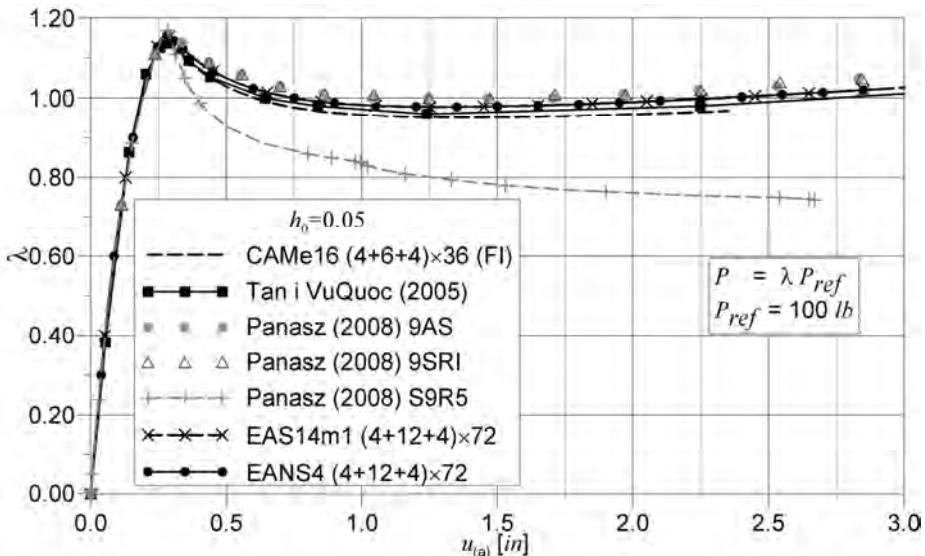
porównywane są dla tej samej wartości przemieszczenia kontrolnego  $u_{(a)} = 5$  [in]. Na powiększonym fragmencie rysunku rys. 6.36b widoczna jest fala deformacyjna na środku belki, której nie widać na odpowiadającym fragmencie zdeformowanej siatki w przypadku rzadszego podziału.

W kolejnym etapie studium zbadano wpływ uwarstwienia materiału na deformację belki przy ustalonej gęstości podziału EANS4 (12+18+12)×216. Rys. 6.37 pokazuje zdeformowane siatki elementów skończonych uzyskane dla tej samej wartości przemieszczenia kontrolnego  $u_{(a)} = 5$  [in]. W przypadku uwarstwienia [90/0/90] przekrój poprzeczny belki praktycznie nie zmienia kształtu, zaś w przypadku laminacji [0/90/0] dochodzi do deformacji przekroju poprzecznego na skutek wyboczenia środka belki.

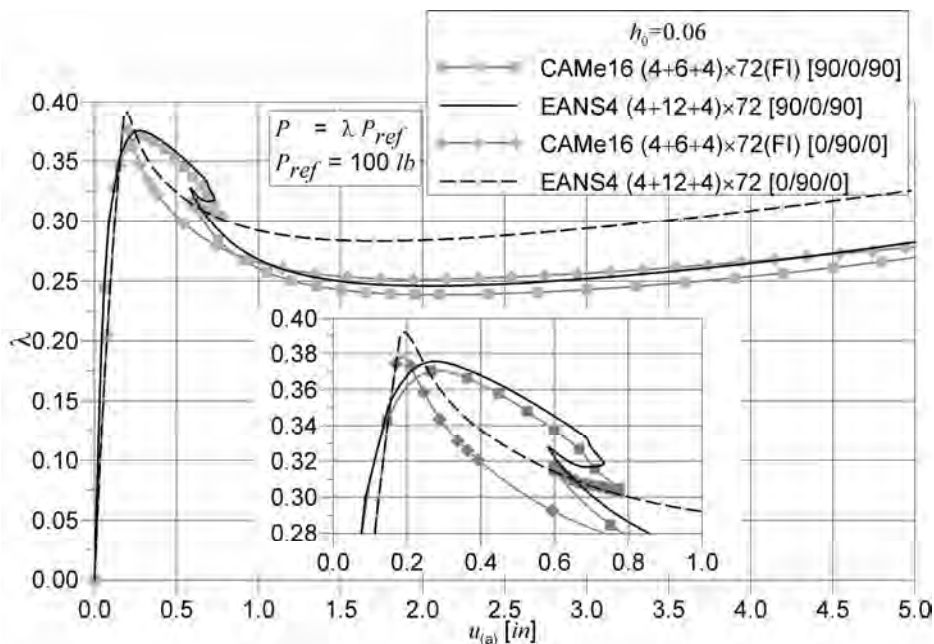
### 6.3.7. Stateczność giętna swobodnie podpartego słupa o przekroju dwuteowym

W pracy Back i Will (2008) analizowano zagadnienie stateczności giętej słupa cienkościennego o bisymetrycznym przekroju dwuteowym, rys. 6.38. Oryginalnie zadanie to rozważane jest przy pomocy elementów prętowych sformułowanych do analizy prętów cienkościennych, wykonanych z materiałów kompozytowych.

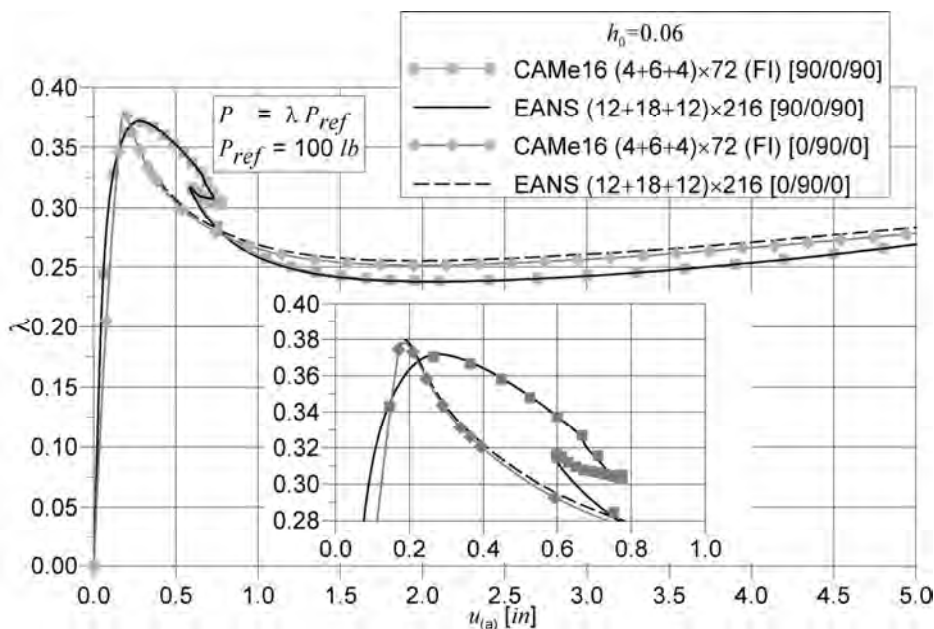
Zainteresowanie Autora niniejszej monografii tym przykładem wzbudziły wartości oszacowanego mnożnika obciążenia krytycznego. Tabela 6.3 przedstawia wyniki z artykułu Back i Will (2008). W przypadku uwarstwienia  $[0]_4$  autorzy podają wartość 28.85 MN w obliczeniach programem własnym i 30.78 MN w obliczeniach przy pomocy programu Abaqus, określając ten fakt dalej jako *acceptable accuracy*.



Rys. 6.33. Wspornik o przekroju ceowym, porównanie rozwiązań w przypadku jednorodnym i izotropowym

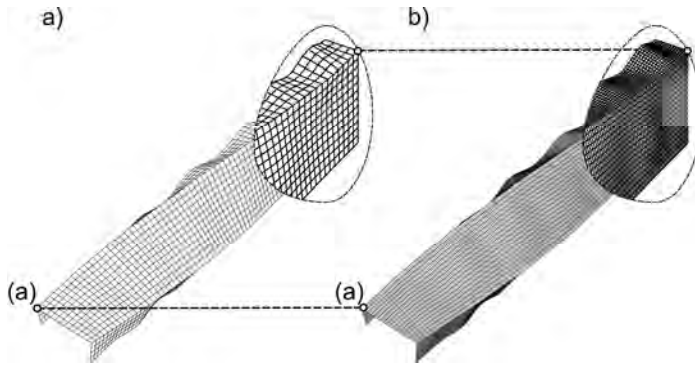


Rys. 6.34. Wspornik o przekroju ceowym, porównanie rozwiązań w przypadku materiału kompozytowego

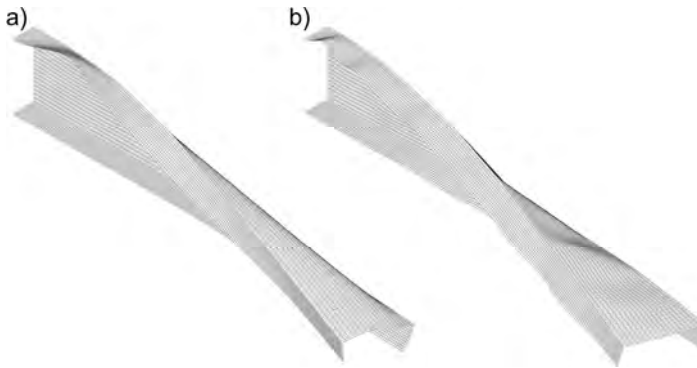


Rys. 6.35. Wspornik o przekroju ceowym, porównanie rozwiązań w przypadku materiału kompozytowego, wariant z zagęszczoną siatką podziału na elementy skończone

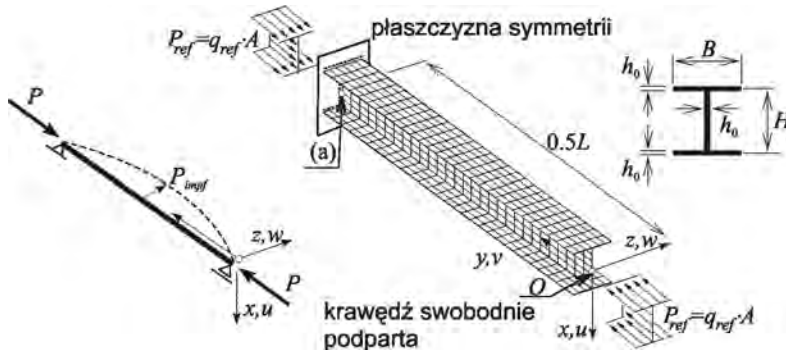




Rys. 6.36. Wspornik o przekroju ceowym, uwarstwienie [0/90/0], porównanie zdeformowanych siatek przy tej samej wartości przemieszczenia kontrolnego  $u_{(a)} = 5$  in:  
a) EANS4 (4+12+4)×72, b) EANS4 (12+18+12)×216



Rys. 6.37. Wspornik o przekroju ceowym, porównanie deformacji belki, dyskretyzacja EANS4 (12+18+12)×216, porównanie zdeformowanych siatek przy tej samej wartości przemieszczenia kontrolnego  $u_{(a)} = 5$  in: a) [90/0/90], b) [0/90/0]



Rys. 6.38. Swobodnie podparty słup o przekroju dwuteowym, geometria i schemat realizacji obciążenia

W pierwszej kolejności, w badaniach własnych rozważano belkę wykonaną z materiału jednorodnego i izotropowego celem sprawdzenia poprawności przygotowania danych. Do obliczeń przyjęto materiał sprężysty o własnościach  $E_1=144$  GPa oraz  $\nu=0.3$ . W zadaniu zastosowano siatkę elementów skończonych EANS4 (12+12+12)×60 dla połowy długości belki. Elementarne obliczenie siły krytycznej dla tych danych materiałowych prowadzi do wartości  $P_{kr}=42.636$  MN. W toku własnej nieliniowej analizy stateczności<sup>78)</sup> wyznaczono wartość  $P_{kr}=41.8168$  MN. Sprawdzone w ten sposób zestaw danych wykorzystano w dalszych badaniach.

Tabela 6.3 przedstawia wyznaczone wartości siły krytycznej dla poszczególnych uwarstwień. Back i Will (2008) podają, że w badaniach przy pomocy programu Abaqus wykorzystano element S9R5. Jest to dziewięciowęzłowy powłokowy element skończony o pięciu stopniach swobody w węźle. W przypadku laminacji [45/-45]<sub>s</sub>, [30/-30]<sub>s</sub> oraz [60/-60]<sub>s</sub>, wartości mnożnika obciążenia krytycznego obliczone przy pomocy programu EANS4 są w dobrej zgodności z pozostałymi wynikami odniesienia. Dla uwarstwienia [0]<sub>4</sub> zaznaczają się różnice między rozwiązaniami własnymi a rozwiązaniami z pracy Back i Will (2008). Mając na uwadze doświadczenia z poprzedniego przykładu, w badaniu własnym przy pomocy elementu EANS4 przeprowadzono kontrolne obliczenia, zagęszczając siatkę elementów podwójnie, tj. do podziału EANS4 (24+24+24)×120. Nieliniowe ścieżki deformacji  $w_{(a)}$  przedstawia rys. 6.39. Obliczone wartości mnożnika w przypadku siatki podstawowej i zagęszczonej wynoszą odpowiednio  $P_{kr}=2.81452$  MN oraz  $P_{kr}=2.81358$  MN. Oba rozwiązania własne nie zgadzają się z rezultatami z pracy Back i Will (2008).

**Tabela 6.3**

Swobodnie podparta belka o przekroju dwuteowym, siła krytyczna wyboczenia giętego [MN]  
wyniki z pracy Back i Will (2008) uzupełnione o rozwiązania własne

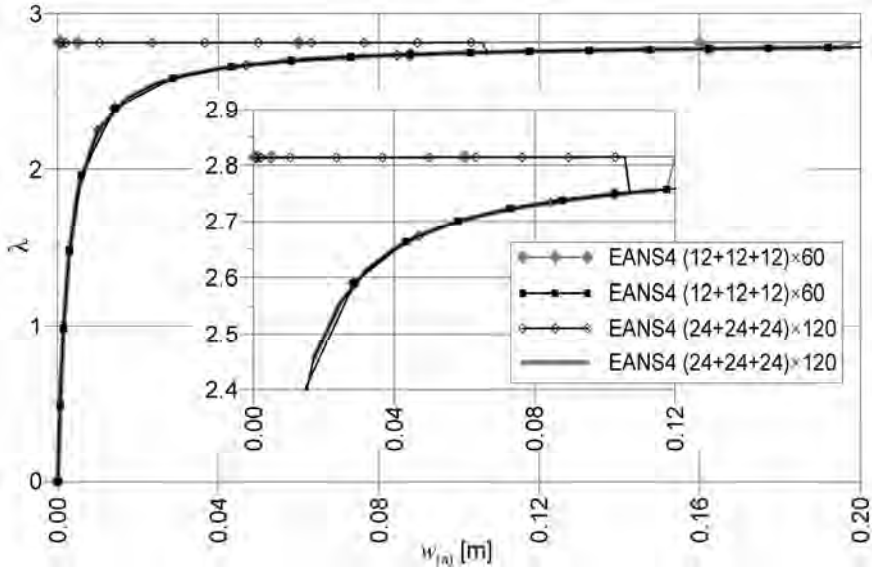
Uwarstwienie	EANS4	Back i Will (2008)	
		Abaqus S9R5	prętowe
[0] <sub>4</sub>	2.81452	30.78	28.85
[0/90] <sub>s</sub>	7.94135	20.41	20.63
[45/-45] <sub>s</sub>	4.47033	4.40	4.41
[30/-30] <sub>s</sub>	12.3342	13.06	13.17
[60/-60] <sub>s</sub>	2.90548	2.89	2.89

W kolejnym wariancie uwarstwienia, tj. [0/90]<sub>s</sub>, także zaznaczają się znaczne różnice między wynikami Autora uzyskanymi przy pomocy elementu EANS4, a rozwiązaniami z literatury. Ścieżkę deformacji przedstawia rys. 6.40. Na tym rysunku, w odróżnieniu od rys. 6.39, zaznaczają się punkty graniczne zarówno na ścieżce podstawowej z imperfekcją, jak i wtórnej. W przypadku tego uwarstwienia także przeprowadzono obliczenia w siatce zagęszczonej, tj. EANS4 (24+24+24)×120 oraz sprawdzono otrzymany wynik, stosując element CAME16(FI) w siatce (6+6+6)×60. Otrzymane wyniki przedstawia tabela 6.4. Widoczne jest, że rozwiązania własne są zbieżne.

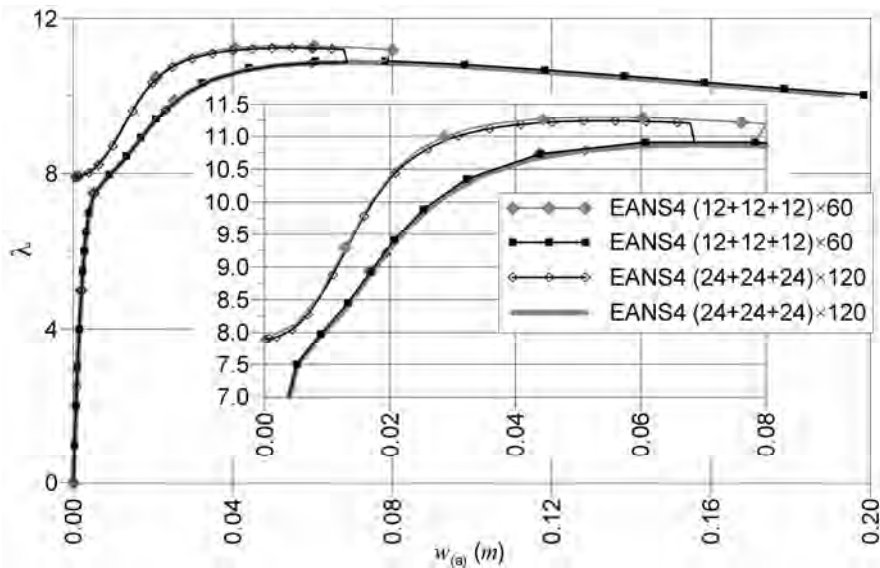
Trudno jest wyjaśnić tak duże różnice między rozwiązaniami własnymi, a wynikami z pracy Back i Will (2008), tym bardziej, że pojawiają się one wyłącznie dla uwarstwień typu *cross-ply*. Back i Will piszą, że traktują rozwiązanie [0]<sub>4</sub> jako warstwowe. Jednak ich wynik jest zbliżony do rozwiązania otrzymanego w przypadku jednorodnym i izotropowym omawianym wyżej. Być może tu należy upatrywać źródeł niezgodności. Rys. 9 w pracy

<sup>78)</sup> Metodologia poszukiwania punktów bifurkacji jest omówiona w Dodatku C.

Back i Will (2008), przedstawia prawidłową postać wybożenia, otrzymaną w programie Abaqus w przypadku uwarstwienia  $[45/-45]_s$ . Jednak Back i Will wykorzystali powłokowy element skończony S9R5. Jak pokazano na rys. 6.33 uzyskanie poprawnego rezultatu przy użyciu tego elementu w zadaniu, w którym występują ortogonalne przecięcia powłok, nie zawsze jest możliwe.



Rys. 6.39. Swobodnie podparty słup o przekroju dwuteowym, uwarstwienie  $[0]_a$   
nieliniowa ścieżka  $w_{(a)}$



Rys. 6.40. Swobodnie podparty słup o przekroju dwuteowym, uwarstwienie  $[0/90]_a$   
nieliniowa ścieżka  $w_{(a)}$

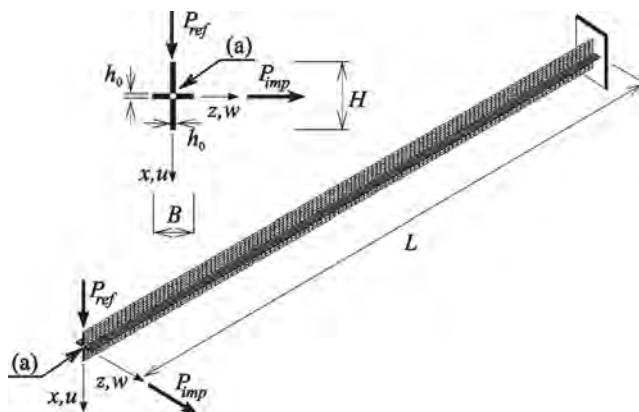
Tabela 6.4

Swobodnie podparta belka o przekroju dwuteowym, siła krytyczna wyoboczenia giętnego [MN]  
uwarstwienie [0/90]<sub>s</sub>, rozwiązania własne

Element, podział	Liczba równań	Siła krytyczna
EANS4 (12+12+12)×60	13355	7.94135
EANS4 (24+24+24)×120	52631	7.88854
CAMe16(FI) (12+12+12)×60	59453	7.88448

### 6.3.8. Stateczność giętno-skrętna słupa o przekroju krzyżowym

W tym zadaniu analizuje się stateczność giętno-skrętną słupa wspornikowego o przekroju w kształcie krzyża, zob. rys. 6.41. Przykład ten inspirowany jest pracą Cardoso i inni (2009), gdzie analizowano niezależnie stateczność giętną i skrętną słupa wspornikowego w ramach sformułowania prętowego. Za tą pracą przyjęto tutaj następujące wymiary  $L = 2$  m,  $B = 0.06$  m,  $H = 0.1$  m. W pracy Cardoso i inni (2009) podano charakterystyki materiałowe wymagane w sformułowaniu prętowym, ale ich komplet danych nie jest wystarczający dla opisu materiału stosowanego tutaj. W związku z tym, przyjęto takie same dane materiałowe, jak w poprzednim przykładzie, tj.  $E_1 = 144$  GPa,  $E_2 = 9.65$  GPa,  $G_{12} = G_{13} = 4.14$  GPa,  $G_{23} = 3.45$  GPa,  $\nu_{12} = 0.3$ . Grubości ścianki poziomej i pionowej przyjęto jako równe  $h_0 = 0.004$  m, zakładając cztery warstwy o równej grubości  $h_I = h_{II} = h_{III} = h_{IV} = 0.25h_0$ . W zadaniu bada się uwarstwienia typu *cross-ply*. Obciążenie przyjęto jako proporcjonalne  $P(\lambda) = \lambda P_{ref}$ , gdzie  $P_{ref} = 1000$  kN, a  $P_{imp} = 1$  kN. Do obliczeń przy pomocy elementów EANS4 przyjęto siatkę (6+10)×200, a wyniki porównano z rezultatami uzyskanymi przy pomocy elementów CAMe16(FI) w siatce (2+4)×100. Otrzymane wartości siły krytycznej wyoboczenia giętno-skrętnego przedstawia tabela 6.5.



Rys. 6.41. Słup wspornikowy o przekroju krzyżowym, geometria

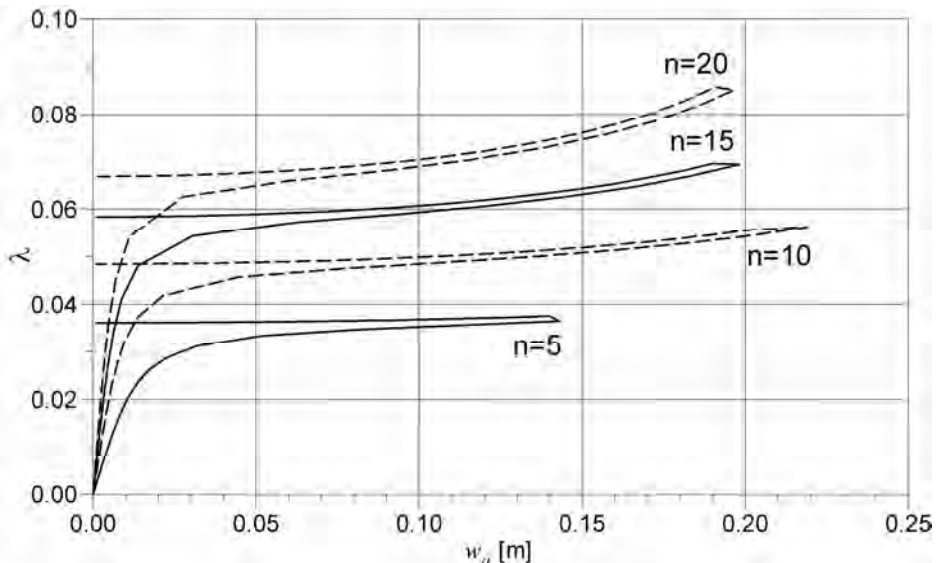
W drugiej części studium założono, że półki przekroju słupa wykonane są z jednej warstwy materiału ortotropowego  $h_I = h_0 = 0.04$ , a oś materiałowa  $a$  biegnie wzdłuż osi słupa co przy przyjętym układzie dyrektorów odpowiada kierunkowi  $90^\circ$ . Wzorując się na

metodologii z przykładu 5.8 pracy Kreja (2007), gdzie badano wpływ współczynnika ortotropii materiału na ugięcia półsfery z otworem, w niniejszej monografii bada się wpływ ortotropii materiału na wartość siły krytycznej wyoboczenia giętno-skrętnego. Przyjęto następujące dane materiałowe:  $E_2 = 9.65$  GPa,  $G_{12} = G_{13} = 4.14$  GPa,  $G_{23} = 3.45$  GPa,  $\nu_{12} = 0.3$ ,  $E_1 = nE_2$ , gdzie współczynnik ortotropii  $n$  przyjmuje wartości od 5 do 20. Praktycznie więc zwiększanie wartości  $n$  oznacza zwiększanie wartości modułu sprężystości wzdłuż osi ustroju. Nieliniowe ścieżki równowagi przemieszczenia  $w$  w punktu a przedstawia rys. 6.42. Przedstawione ścieżki mają charakter stabilny. Otrzymane wartości siły krytycznej wyoboczenia giętno-skrętnego przedstawia tabela 6.6. Wartości liczbowe wskazują na stały wzrost siły krytycznej wraz ze wzrostem modułu Younga wzdłuż długości słupa. Na rys. 6.43 przedstawiono przykładowe zdeformowane konfiguracje powłoki wyznaczone dla  $n = 20$  w układzie z imperfekcją. Widoczne jest, że w tym przypadku przekrój poprzeczny doznaje znacznych przesunięć i obrotów.

Tabela 6.5

Utwardzony słup o przekroju krzyżowym, siła krytyczna wyoboczenia giętno-skrętnego [kN] w zależności od przyjętego uwarstwienia

Uwarstwienie	EANS4	CAM
[0/0/0/0]	0.114743	0.114415
[0/90/90/0]	0.322273	0.321279
[90/0/0/90]	0.337003	0.336015
[90/90/90/90]	0.450564	0.449048

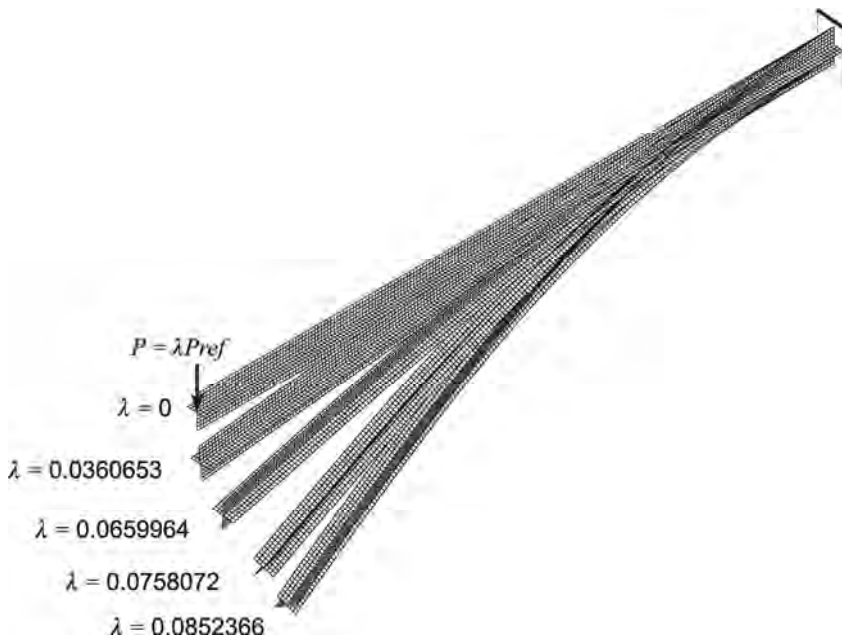


Rys. 6.42. Słup wspornikowy o przekroju krzyżowym, nieliniowe ścieżki deformacji punktu a w zależności od współczynnika ortotropii

**Tabela 6.6**

Utwardzony słup o przekroju krzyżowym, siła krytyczna wybożenia giętnego-skrętnego [kN]  
w zależności od współczynnika ortotropii  $n$

$n$	Siła krytyczna
5	36.1506
10	48.4415
15	58.4032
20	66.9538



Rys. 6.43. Słup wspornikowy o przekroju krzyżowym, sekwencja zdeformowanych konfiguracji dla  $n = 20$

## Rozdział 7

# UWAGI KOŃCOWE

### 7.1. Podsumowanie

Materiały kompozytowe są obecnie powszechnie wykorzystywane w wielu dziedzinach inżynierii. W niniejszej pracy prowadzono numeryczne symulacje zachowania się powłok wykonanych między innymi z takich materiałów w zakresie geometrycznie nieliniowym. Użyte w pracy pojęcie powłoki, poza klasycznymi ustrojami regularnymi, w sposób formalny matematycznie i spójny od strony teorii obejmuje również struktury przestrzenne, których powierzchnia odniesienia może zawierać niegładkie przecięcia płatów w tym wzajemnie ortogonalne. Tego typu przecięcia płatów o zróżnicowanym kształcie geometrycznym występują jako forma usztywnienia strukturalnego, na przykład w powszechnie używanych elementach konstrukcyjnych o przekrojach cienkościennych.

Celem pracy było stworzenie autorskiego, niezależnego do systemów komercyjnych środowiska MES do analizy deformacji i stateczności powłok laminowanych. Podstawową zaletą rozwijanego od wielu lat w zespole autora własnego systemu obliczeniowego jest możliwość jego wszelkich modyfikacji w zależności od potrzeb. Co ważniejsze, autorski program daje, na każdym etapie analizy zagadnienia, możliwość pełnej kontroli nad otrzymywanymi wynikami. Nie występuje tu problemu tzw. „czarnej skrzynki” znamiennej dla pośredniego wykorzystywania programów komercyjnych jako narzędzia, tzw. „solvera”. W analizie numerycznej jako narzędzie użyto głównie własnego czterowęzłowego powłokowego elementu skończonego klasy  $C^0$  nazwanego EANS4. W tym bazującym na teorii sześcioparametrowej teorii powłok elemencie skończonym połączono w sposób oryginalny dla tej teorii dwie techniki minimalizacji efektu blokady (zakleszczenia, ang. *locking*): technikę odkształceń wzbogaconych i koncepcję podwójnej interpolacji odkształceń. Postawiony cel osiągnięto w opisanych poniżej punktach:

- omówiono zasadnicze kroki formułowania nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok, w której szóstym parametrem jest obrót prostopadły do powierzchni podstawowej, tzw. obrót owinięcia,
- wyeksponowano wynikający w naturalny sposób opis kinematyczny powłoki, mający charakter modelu ośrodka typu Cosseratów, którego cechą szczególną są niesymetryczne miary odkształceń i naprężeń, typowe dla ośrodków z mikrostrukturą,
- zapisano wymaganą dla sformułowania wzbogaconych odkształceń, zmodyfikowaną zasadę wariacyjną Hu-Washizu,
- przedstawiono techniki interpolacji klasy  $C^0$  zmiennych wektorowych oraz zmiennych należących do grupy tensorów ortogonalnych właściwych  $SO(3)$ ,
- wprowadzono w ramach sześcioparametrowej teorii powłok oryginalne pola wzbogacające niesymetryczne odkształcenia membranowe i omówiono także oryginalną koncepcję podwójnej interpolacji niesymetrycznych odkształceń,
- zbadano własności zaproponowanego w pracy autorskiego elementu skończonego EANS4, który pozytywnie spełnił znane z literatury przedmiotu testy,
- w ramach wybranych, reprezentatywnych dla tego zagadnienia przykładów oceniono, jak zmiany laminacji i gęstości siatki podziału wpływają na ogólną i lokalną deformację powłok,

— w zagadnieniach stateczności powłok badano wpływ gęstości siatki podziału na zbieżność wartości szacowanych sił krytycznych.

## 7.2. Wnioski

Najważniejszym efektem monografii jest pomyślne połączenie podejścia równoważnej jednej warstwy kompozytu z nieliniową sześcioparametrową teorią powłok i rozwiniętym na jej bazie autorskim elementem skończonym EANS4. Połączenie to stanowi oryginalny pierwiastek monografii, bowiem w literaturze dotyczącej ogólnie rozumianych laminatów powierzchniowych rozwijane jest ono głównie w ramach teorii pięcioparametrowych.

Przedstawiony autorski element skończony EANS4 jest rozwinięciem elementu EAS, opracowanego w ramach rozprawy doktorskiej Autora (Witkowski 2005). Podejście to zasygnalizowano w pracy Chróścielewski i Witkowski (2006), a wstępne wyniki przedstawiono w pracy Chróścielewski i inni (2006). Dalsze rozwinięcie sformułowania, badanie własności elementu i analizy numeryczne przeprowadził Autor w pracy Witkowski (2009). Sformułowanie elementu skończonego EANS4 w sposób oryginalny w obrębie sześcioparametrowej teorii powłok łączy dwie techniki: podejścia wzbogaconych odkształceń dla niesymetrycznych odkształceń membranowych oraz techniki podwójnej interpolacji dla odkształceń ścinania poprzecznego. Należy tu dodać, że efektywność stosowanego tu sposobu minimalizowaniu wpływu zjawiska numerycznej blokady (zakleszczenia) na rozwiązania jest cechą doskonale znaną z literatury jednak w odniesieniu do teorii powłok pięcioparametrowych, tzw. elementów zdegenerowanych i elementów bryłowych.

Zastosowane w niniejszej pracy prawo materiałowe zostało sformułowane w terminach inżynierskich stałych materiałowych ortotropowego ośrodka Cauchy'ego. Dzięki temu uniknięto trudności związanych z identyfikacją i właściwym doбором wartości stałych materiałowych właściwych dla ośrodka Cosseratów. Ten dość prosty zabieg daje bezpośrednią możliwość porównania rezultatów własnych z wynikami znanymi w literaturze, a omawianymi w znakomitej większości przypadków w ramach podejść wykorzystujących równania konstytutywne ośrodka Cauchy'ego. Jednocześnie przedstawione tu sformułowanie, w połączeniu z naturalną obecnością szóstego stopnia swobody (obrotu owinięcia), w sposób formalny matematycznie i spójny od strony teorii pozwala na analizę powłok strukturalnych wykonanych z laminatów. Uzyskane w pracy wyniki numeryczne potwierdzają poprawność zastosowanego podejścia.

Przedstawiony w pracy autorski powłokowy element skończony EANS4 posiada prawidłową liczbę zerowych wartości własnych oraz spełnia tzw. test łąty. Na reprezentatywnych, dla badań tego typu zagadnienia, przykładach analizy liniowej pokazano, że rozwiązania uzyskane przy pomocy tego elementu wolne są od postaci pasożytniczych.

Zaprezentowane symulacje numeryczne wskazują, że nie tylko w eksponowanym w literaturze kontekście zagadnień związanych z nieliniowością materiałową (lokalizacją np. plastyczną), ale także w zagadnieniach o silniej nieliniowości geometrycznej istotnym staje się odpowiednio gęsty podział na elementy skończone. Tutaj wynika on ze skracania się (lokalizacją) fali deformacyjnej wraz z narastaniem deformacji powłoki. W rozważanych tutaj zadaniach dotyczących hiperboloidy i ceownika zauważono lokalizacje fal deformacyjnych, których właściwe odwzorowanie w znaczący sposób wpływa na przebieg ścieżek równowagi rozwiązań.



Sposób uwarstwienia powłoki ma też istotne znaczenie na charakter ścieżek deformacji otrzymywanych w nieliniowej analizie stateczności. W przykładzie dotyczącym wybożenia giętnego słupa o przekroju dwuteowym, w zależności od kierunków laminacji warstw, obserwowano pojawianie się punktów granicznych na ścieżce z podstawowej z imperfekcją jak i na ścieżce wtórnej II.

### 7.3. Kierunki dalszych badań

Przedstawione w niniejszej monografii rezultaty mają w pewnym sensie charakter pilotażowy do dalszych znacznie szerszych badań. Między innymi zakres tych badań w bliższym terminie na bazie przedstawionego tutaj sformułowania prowadzony jest/będzie w następujących kierunkach:

- rozwinięcie powłokowego elementu skończonego bazującego na sformułowaniu hybrydowo-mieszanym,
- rozwinięcie prawa materiałowego dla powłoki warstwowej z równań fizycznych właściwych dla ośrodka Cosseratów,
- wprowadzenie nieliniowości materiałowej typu plastycznego,
- wprowadzenie kryteriów zniszczenia materiałów warstwowych,
- uzależnienie powyższych własności materiału powłoki od temperatury w ramach wolno zmiennych obciążeń termicznych.

### PODZIĘKOWANIA

W tym miejscu pragnę podziękować wszystkim osobom dzięki którym niniejsza monografia powstała i otrzymała swoją końcową formę.

Profesorowi Jackowi Chróścielewskiemu za przekazane przez lata naszej współpracy wiedzę i wsparcie.

Recenzentom, Profesorom Wojciechowi Pietraszkiewiczowi i Ireneuszowi Krei za ich ważne i konstruktywne uwagi krytyczne wprowadzone do maszynopisu pracy.

Mojej Rodzinie za pomoc i wsparcie w trakcie przygotowań, redakcji i poprawy monografii.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Abramovitz M., Stegun I.A.: *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. United States Department Of Commerce, National Bureau Of Standards, 1970.
- [2] Adhikary D.P., Guo H.: An orthotropic Cosserat elasto-plastic model for layered rocks. *Rock Mech. Rock Engng.*, 35, 2002, 161–170.
- [3] Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C.: Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2, 1970, 419–451.
- [4] Altenbach H.: Theories for laminated and sandwich plates. *Mechanics of Composite Materials*, 34, 1998, 243–252.
- [5] Altenbach H.: On the determination of transverse shear stiffnesses of orthotropic plates. *ZAMP*, 51, 2000, 629–649.
- [6] Altenbach H., Eremeyev V.: On the linear theory of micropolar plates. *ZAMM*, 89, 2009, 242–256.
- [7] Altenbach H., Altenbach J. Nast E.: Modelling and analysis of multilayered shells based on a Timoshenko-type theory with six degrees of freedom shells. *Mekhanika Kompozitnykh Materialov*, 29, 1994, 500–511.
- [8] Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V.: On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography. *Arch. Appl. Mech.*, 80, 2010, 73–92.
- [9] Ambroziak A.: Geometrycznie nieliniowa analiza membran stosowanych do konstrukcji przekryć wiszących z uwzględnieniem różnych typów związków konstytutywnych. Rozprawa doktorska, Polit. Gdańska, Wydz. Inżynierii Ładowej i Środowiska 2006.
- [10] Andelfinger U., Ramm E.: EAS elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 1993, 1311–1337.
- [11] Andrade L.G., Awruch A.M., Morsch I.B.: Geometrically nonlinear analysis of laminate composite plates and shells using the eight-node hexahedral element with one-point integration. *Composite Structures*, 79, 2007, 571–580.
- [12] Antman S.S.: *The Theory of Rods*, Flugge's Handbuch der Physik, Vol. VI a/2, ed. C. Truesdell, Springer, 1972.
- [13] Antman S.S.: *Nonlinear problems in elasticity*. New York, Springer-Verlag, 1995.
- [14] Arciniega R.A., Reddy J.M.: Shear deformation plate and shell theories: from Stavsky to present. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 11, 2004, 535–582.
- [15] Arciniega R.A., Reddy J.M.: Tensor-based finite element formulation for geometrically nonlinear analysis of shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, 2007, 1048–1073.
- [16] Argyris J.: An excursion into large rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32, 1982, 85–155.
- [17] Armero F.: On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems. *Computers & Structures*, 75, 2000, 261–290.
- [18] Auricchio F., Brezzi F., Lovadina C.: Mixed Finite Element Method, w *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Stein E., de Borst R., Hughes T.J.R. (edytorzy), tom 1, rozdział 9, John Wiley & Sons, 2004.
- [19] Auricchio F., Sacco E.: Refined first-order shear deformation theory models for composite laminates. *Journal of Applied Mechanics*, 70, 2003, 381–390.
- [20] Back S.Y., Will K. M.: Shear-flexible thin-walled element for composite I-beams. *Engineering Structures*, 30, 2008, 1447–1458.

- [21] Badur J.: Nieliniowa analiza powłok sprężystych według teorii drugiego przybliżenia do energii odkształcenia. Rozprawa doktorska, Gdańsk, IMP PAN, 1984.
- [22] Badur J.: Quasi-Abelian gauge theory of axisymmetric deformation of shells of revolution. *International Journal of Engineering Science*, 28, 1990, 563–572.
- [23] Badur J.: Pure gauge theory of the Cosserat surface. *International Journal of Engineering Science*, 31, 1993, 41–59.
- [24] Badur J., Stumpf H.: On the influence of E. and F. Cosserat on modern continuum mechanics and field theory. *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum*, 72, 1989.
- [25] Badur J.: Rozwój pojęcia energii. Gdańsk, Wydawnictwo IMP PAN, 2009.
- [26] Balah M., Al-Ghamedy H.N.: Finite element formulation of a third order laminated finite rotation shell element. *Computers & Structures*, 80, 2002, 1975–1990.
- [27] Barański W., Wilmański K., Woźniak Cz.: Mechanika ośrodków ciągłych typu Cosseratów. *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 2(5), 1967, 215–258.
- [28] Başar Y., Ding Y.: Finite rotation elements for the non-linear analysis of thin shell structures, *International Journal of Solids and Structures*, 26, 1990, 83–97.
- [29] Başar Y., Ding Y., Schultz R.: Refined shear deformation models for composite laminates with finite rotations. *International Journal of Solids and Structures*, 30, 1993, 2611–38
- [30] Başar Y., Krätzig W.B.: *Theory of Shell Structures. 2. Auflage*. Düsseldorf, VDI-Verlag GmbH, 2001.
- [31] Bathe K.J.: *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1982.
- [32] Bathe K.J.: The inf-sup condition and its evaluation for mixed finite element methods. *Computers & Structures*, 79, 2001, 243–52.
- [33] Bathe K.J., Dvorkin E.: A formulation of general shell elements – the use of mixed interpolation of tensorial components. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22, 1986, 697–722.
- [34] Bathe K.J., Iosilevich A., Chapelle D.: An evaluation of the MITC shell elements. *Computers & Structures*, 2000a, 75, 1–30.
- [35] Bathe K.J., Iosilevich A., Chapelle D.: An inf-sup test for shell finite elements. *Computers & Structures*, 2000b, 75, 439–456.
- [36] Bathe K.J., Lee P.S., Hiller J.F.: Towards improving the MITC9 shell element. *Computers & Structures*, 81, 2003, 477–489.
- [37] Bathe K.J., Ramm E., Wilson E.L.: Finite element formulations for large deformation dynamics analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9, 1975, 353–386.
- [38] Batra G.: Saint-Venant's principle in linear elasticity with microstructure. *Journal of Elasticity*, 13, 1983, 165–173.
- [39] Batra G.: On a principle of virtual work for thermo-elastic bodies with couple stresses. *Journal of Elasticity*, 36, 1994, 27–58.
- [40] Bednarski T.: *Mechanika plastycznego płynięcia w zarysie*. Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 1995.
- [41] Belytschko T., Liu N.-W., Moran B.: *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, Ltd, 2003.
- [42] Berglund K.: Generalization of Saint-Venant's principle to micropolar continua. *Arch. Rational Mech. Anal.* 64, 1977, 317–326.
- [43] Bernadou M.: *Finite element methods for thin shell problems*. John Wiley & Sons, 1996.
- [44] Betsh P., Gruttmann F., Stein E.: A 4-node shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 130, 1996, 57–79.
- [45] Bhargava R.D., Ghosh S. K.: On the stress concentration problem around a circular hole in plane asymmetric elasticity. *Acta Mechanica*, 21, 1975, 127–140.
- [46] Bielewicz E., Górski J., Schmidt R., Walukiewicz H.: Random fields in the limit analysis of elasti-plastic shell structures. *Computers & Structures*, 51, 1994, 267–275.

- [47] Bigoni D., Drugan W.J.: Analytical derivation of cosserat moduli via homogenization of heterogeneous elastic materials. *Journal of Applied Mechanics*, 74, 2007, 741–753.
- [48] Birsan M.: On Saint-Venant's principle in the theory of Cosserat elastic shells. *International Journal of Engineering Science*, 45, 2007, 187–198.
- [49] Birsan M.: On Saint-Venant's problem for anisotropic, inhomogeneous, cylindrical Cosserat elastic shells. *International Journal of Engineering Science*, 47, 2009, 21–38.
- [50] Bischoff M., Ramm E.: Shear deformable shell elements for large strains and rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1997, 4427–4449.
- [51] Bishoff M., Ramm E., Braess D.: A class of equivalent enhanced assumed strain and hybrid stress finite elements. *Computational Mechanics*, 22, 1999, 443–449.
- [52] Bishoff M., Romero I.: A generalization of the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69, 2007, 1851–1868.
- [53] Bisgani Ch., Cordisco P.: An experimental investigation into the buckling and post-buckling of CFRP shells under combined axial and torsion loading. *Composite Structures*, 60, 2003, 391–402.
- [54] Bisgani Ch., Cordisco P.: Post-buckling and collapse experiments of stiffened composite cylindrical shells subjected to axial loading and torque. *Composite Structures*, 73, 2006, 138–149.
- [55] Błachut J.: Developments in strength and stability of shell components used in submersibles, W: Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja, London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010.
- [56] Błachut J., Magnucki K.: Strength, stability and optimization of pressure vessels: review of selected problems. *Applied Mechanics Reviews*, 61, 2008, 060801-1–060801-33.
- [57] Bobiński J.: Implementacja i przykłady zastosowań nieliniowych modeli betonu z nielokalnym osłabieniem. Rozprawa doktorska, Polit. Gdańska, Wyd. Inżynierii Lądowej i Środowiska, 2006.
- [58] Borkowski Sz.: Teorie powłok sprężystych. Teorie liniowe powłok. W: Seria *Mechanika techniczna*, tom VIII. *Mechanika sprężystych płyt i powłok*, Cz. Woźniak. Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 2001.
- [59] Borner E.F.I., Loehnert S., Wriggers P.: A new finite element based on the theory of a Cosserat point - extension to initially distorted elements for 2D plane strain. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 71, 2007, 454–472.
- [60] de Borst R.: Simulation of strain localisation: A reappraisal of the Cosserat continuum. *Engineering Computations*, 8, 1991, 317–332.
- [61] Braess D.: Enhanced assumed strain elements and locking in membrane problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 165, 1998, 155–174.
- [62] Braess D.: *Finite elements. Theory, fast solvers, and applications in solid mechanics. Third edition*. Cambridge University Press, 2007.
- [63] Brank B.: Assessment of 4-node EAS-ANS shell elements for large deformation analysis. *Computational Mechanics*, 42, 2008, 39–51.
- [64] Brank B., Ibrahimbegovic A.: On the relation between different parametrizations of finite rotations for shells. *Engineering Computations*, 18, 2001, 950–973.
- [65] Bucalem M.L., Bathe K.J.: Higher-order MITC general shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22, 1993, 3729–3754.
- [66] Büchter N., Ramm E.: Shell theory versus degeneration – a comparison in large rotation finite elements analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34, 1992, 39–59.
- [67] Bychawski Z.: *Mechanika ośrodków ciągłych*. Rzeszów, Wyd. Uczelniane Polit. Rzeszowskiej im. Ignacego Łukasiewicza, 1979.
- [68] Capriz G.: *Continua with microstructure*. New York, Springer, 1989.
- [69] Cardona A., Geradin M.: A beam finite element non-linear theory with finite rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26, 1988, 2403–2438.
- [70] Cardona A., Geradin M.: *Flexible Multibody Dynamics. A Finite Element Approach*. John Wiley & Sons, Ltd, 2001.

- [71] Cardoso J.E.B., Benedito N.M.B., Valido A.J.J.: Finite element analysis of thin-walled composite laminated beams with geometrically nonlinear behavior including warping deformation. *Thin-Walled Structures*, 47, 2009, 1363–1372.
- [72] Cardoso R.P.R., Yoon J-W.: One point quadrature shell elements: a study on convergence and patch tests. *Computational Mechanics*, 40, 2007, 871–883.
- [73] Cardoso, R.P.R., Yoon J-W., Dick R.E.: A new axi-symmetric element for thin walled structures. *Computational Mechanics*, 45, 2010, 281–296.
- [74] Cardoso, R.P.R., Yoon J-W., Mahardika M., Choudry S., Alves de Sousa R.J., Valente R.A.F.: Enhanced assumed strain (EAS) and assumed natural strain (ANS) methods for one-point quadrature solid-shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75, 2008, 156–187.
- [75] Cardoso, R.P.R., Yoon J-W., Valente R.A.F.: Enhanced one-point quadrature shell element for nonlinear applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69, 2007, 627–663.
- [76] Carrera E.: Developments, ideas, and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 54, 2001, 301–329.
- [77] Carrera E.: Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Arch. Comput. Meth. Engng.*, 9, 2002, 87–140.
- [78] Carrera E.: Historical review of Zig-Zag theories for multilayered plates and shells. *Appl. Mech. Rev.*, 56, 2003a, 287–308.
- [79] Carrera E.: Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarking. *Arch. Comput. Meth. Engng.*, 10, 2003b, 215–296.
- [80] Carrera E., Brischetto S.: A survey with numerical assessment of classical and refined theories for the analysis of sandwich plates. *Appl. Mech. Rev.*, 2009, 62, 010803-1–010803-17.
- [81] Carrera E., Brischetto S. Nali P.: Variational statements and computational models for multi-field problems and multilayered structures. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 15, 2008, 182–198.
- [82] Carrera E., Ciuffreda A.: A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Composite Structures*, 69, 2005, 271–293.
- [83] Casolo S.: Macroscopic modelling of structured materials. Relationship between orthotropic Cosserat continuum and rigid elements. *International Journal of Solids and Structures*, 43, 2006, 475–496.
- [84] César de Sá J.M.A, Jorge R.M.N, Valente R.A.F., Areias P.M.A. Development of shear locking-free shell elements using an enhanced assumed strain formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53, 2002, 1721–1750.
- [85] Chadwick P.: *Continuum Mechanics. Concise Theory and Problems*. Dover Publications, Inc., 1999.
- [86] Chambon R., Caillerie D., Matsushima T.: Plastic continuum with microstructure, local second gradient theories for geomaterials: localization studies. *International Journal of Solids and Structures*, 38, 2001, 8503–8527.
- [87] Chapelle D., Bathe K.J.: The inf-sup test. *Computers & Structures*, 47, 1993, 537–545.
- [88] Chapelle D., Bathe K.J.: *The Finite Element Analysis of Shells – Fundamentals*. Springer 2003.
- [89] Cheverson K.J., Beatty M.F.: On the mathematical theory of the mechanical behaviour of some non-simple materials. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 60, 1976, 1–16.
- [90] Chróścielewski J.: Rodzina elementów skończonych klasy  $C^0$  w nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok. *Polit. Gdańskiej*, Nr 540, Bud. Łądowe, 53, 1996, 1–291.
- [91] Chróścielewski J., Gilewski W., Kreja I.: Fifty years of Finite Element Analysis of plates and shells (1960–2010). *Short Papers, Proc. 19 International Conf. on Computer Methods in Mechanics*, Warszawa 2011a, 49–50.
- [92] Chróścielewski J., Kreja I., Sabik A., Witkowski W.: Laminated shells in nonlinear six-parameter shell theory. W: *Shell Structures: Theory and Applications*, Vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja. London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010a.

- [93] Chróścielewski J., Kreja I., Sabik A., Witkowski W.: Modeling of composite shells in 6-parameter nonlinear theory with drilling degree of freedom, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, w druku, 2011b
- [94] Chróścielewski J., Lubowiecka I., Szymczak Cz., Witkowski W.: Torsional buckling paradox – extended studies. *Biuletyn WAT*, 53, 2004, 89–97.
- [95] Chróścielewski J., Lubowiecka I., Witkowski W.: 4-node EAS-ANS strain element in 6-field nonlinear theory of shells W.: *Shell Structures: Theory and Applications*, red. W. Pietraszkiewicz, Cz. Szymczak. London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2006.
- [96] Chróścielewski J., Lubowiecka I., Szymczak Cz., Witkowski W.: On some aspects of torsional buckling of thin-walled I-beam columns. *Computers & Structures*, 84, 2006, 1946–1957.
- [97] Chróścielewski J., Makowski J., Pietraszkiewicz W.: Non-linear dynamics of flexible shell structures. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Science*, 9, 2002 341–357.
- [98] Chróścielewski J., Makowski J., Pietraszkiewicz W.: *Statyka i dynamika powłok wielopłatowych: Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych*. „Biblioteka Mechaniki Stosowanej”, Warszawa, IPPT PAN, 2004.
- [99] Chróścielewski J., Makowski J., Smoleński W.M.: On the interpolation in the  $SO(3)$  group. *Proc. XI Polish Conf. on Computer Methods in Mechanics*, Vol. I, Kielce 1993, 187–194.
- [100] Chróścielewski J., Makowski J., Stumpf H.: Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35, 1992, 63–94.
- [101] Chróścielewski J., Makowski J., Stumpf H.: Finite element analysis of smooth, folded and multi-shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 141, 1997, 1–46.
- [102] Chróścielewski J., Nolte L.P.: *Strategien zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik und ihre modulare Aufbereitung im Konzept MESY*. Mitt. Institut für Mechanik. Ruhr-Universität, Bochum, 48, 1985.
- [103] Chróścielewski J., Pietraszkiewicz W., Witkowski W.: On shear correction factors in the nonlinear theory of elastic shells. *International Journal of Solids and Structures*, 47, 2010b, 3537–3545.
- [104] Chróścielewski J., Rucka M., Wilde K., Witkowski W.: Formulation of spectral truss element for guided waves damage detection in spatial steel trusses. *Archives of Civil Engineering*, 55, 2009, 43–63.
- [105] Chróścielewski J., Witkowski W.: Four-node semi-EAS element in six-field nonlinear theory of shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68, 2006, 1137–1179.
- [106] Chróścielewski J., Witkowski W.: Discrepancies of energy values in dynamics of three intersecting plates. *International Journal For Numerical Methods In Biomedical Engineering*, 26, 2010a, 1188–1202.
- [107] Chróścielewski J., Witkowski W.: On some constitutive equations for micropolar plates. *ZAMM*, 90, 2010b, 53–64.
- [108] Chróścielewski J., Witkowski W.: FEM analysis of Cosserat plates and shells based on some constitutive relations. *ZAMM*, 91, 2011, 400–412.
- [109] Ciarletta M.: On the bending of microstretch elastic plates. *International Journal of Engineering Science*, 37, 1999, 1309–1318.
- [110] Cohen H.: Wave propagation in elastic plates. *Journal of Elasticity*, 6, 1976, 245–259.
- [111] Cohen H., DeSilva C.N.: Nonlinear theory of elastic directed surfaces. *Journal of Mathematical Physics*, 7, 1966, 960–966.
- [112] Coleman B.D.: Thermodynamics of materials with memory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1, 1964, 1–46.
- [113] Coleman B.D., Noll W.: An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 6, 1960, 355–370.
- [114] Coleman B.D., Noll W.: The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 13, 1963, 167–178.
- [115] Cosserat E. i F: *Theorie des Corps Deformable*. Hermann, Paris 1909.

- [116] Cowin S.: Singular stress concentrations in plane Cosserat elasticity. *ZAMP*, 20, 1969, 979–982.
- [117] Cowin S.: An incorrect inequality in micropolar elasticity theory. *ZAMP*, 21, 1970a, 494–497.
- [118] Cowin S.: Stress functions for Cosserat elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 6, 1970b, 389–398.
- [119] Craine R.E., Newman M.G.: Modelling the creep in a welded plate using a three-director Cosserat model. *Acta Mechanica*, 117, 1996, 11–21.
- [120] Crisfield M.A., Peng X. Instabilities induced by coarse meshes for a nonlinear shell problem. *Engineering Computations*, 13, 1996, 110–114.
- [121] Czarnecki S., Kurza M., Lewiński T.: Sandwich plates of minimal compliance. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197, 2008, 4866–4881.
- [122] Davalos J.F., Qiao P., Xu X.F., Robinson J., Barth K.E.: Modeling and characterization of fiber-reinforced plastic honeycomb sandwich panels for highway bridge applications. *Composite Structures*, 52, 2001, 441–452.
- [123] Demkowicz L.: Wybrane zagadnienia matematycznych podstaw MES. W: Seria *Mechanika techniczna*, tom XI. *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, M. Kleiber. Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 1995.
- [124] Dłużewski P.: *Kontynualna teoria dyslokacji jako teoria konstytutywnego modelowania skończonych, sprężysto-plastycznych deformacji*. Warszawa, IPPT PAN, 1996.
- [125] Dong S.B., Alpdogan C., Taciroglu E.: Much ado about shear correction factors in Timoshenko beam theory. *International Journal of Solids and Structures*, 47, 2010, 1651–1665.
- [126] Dvorkin E.N., Bathe K.J.: A continuum mechanics based four-node element for general nonlinear analysis. *Engineering Computations*, 1, 1984, 77–88.
- [127] Eberlein R., Wriggers P.: Finite element concepts for finite elastoplastic strain and isotropic stress response in shells: theoretical and computational analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171, 1999, 243–279.
- [128] Edelman W.S.: A uniqueness theorem in the linear theory of elasticity with microstructure. *Acta Mechanica*, 8, 1969, 183–187.
- [129] Eisenhart L.P.: *A treatise on the differential geometry of curves and surfaces*. Digital Publisher: World Public Library Association, www.worldlibrary.net, 2010.
- [130] Engelking R.: *Topologia ogólna*. Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 2007.
- [131] Epstein M., De León M.: Homogeneity conditions for generalized Cosserat media. *Journal of Elasticity*, 43, 1996, 189–201.
- [132] Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W.: The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions. *Journal of Elasticity*, 74, 2004, 67–86.
- [133] Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W.: Local symmetry group in the general theory of elastic shells. *Journal of Elasticity*, 85, 2006, 125–152.
- [134] Eremeyev V.A., Pietraszkiewicz W.: Phase transitions in thermelastical and thermoviscoelastic shells. *Arch. Mech.* 61, 41–67, 2009.
- [135] Ericksen J.L., Truesdell C.A.: Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1, 1958, 295–308.
- [136] Eringen A.C.: Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 15, 1966, 909–923.
- [137] Eringen A.C.: Theory of micropolar plates, *ZAMP*, 18, 1967, 12–30.
- [138] Eringen A.C.: *Theory of micropolar elasticity*. W: *Fracture. An advanced treatise*, red. H. Leibowitz, Academic Press, 1968.
- [139] Eringen A.C.: *Microcontinuum Field Theories I, Foundations and Solids*. Springer, 1999.
- [140] Eringen A.C., Suhubi E.S.: Non linear theory of microelastic solids I & II. *International Journal of Engineering Science*, 2, 1964, 189–203, 389–404.
- [141] Felippa C.A.: On the original publication of the general canonical functional of linear elasticity. *J. Appl. Mech.* 67, 2000, 217–219.
- [142] Finlayson B.A., Scriven L.E.: The method of weighted residuals – a review. *Appl. Mech. Rev.*, 19, 1966, 735–748.

- [143] Fontes Valente R.A., Natal Jorge R.M., Cardoso R.P.R., César de Sá J.M.A., Grácio J.J.A.: On the use of an enhanced transverse shear strain shell element for problems involving large rotations. *Computational Mechanics*, 30, 2003, 286–296.
- [144] Fontes Valente R.A., Palente M.P.L., Natal Jorge R.M., César de Sá J.M.A., Grácio J.J.A.: Enhanced transverse shear strain shell formulation applied to large elasto-plastic deformation problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62, 2005, 1360–1398.
- [145] Forest S., Barbe F., Cailletaud G.: Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials. *International Journal of Solids and Structures*, 37, 2000, 7105–7126.
- [146] Forest S., Sievert R.: Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua. *Acta Mechanica*, 160, 2003, 71–111.
- [147] Fung Y.C., Tong P.: *Classical and computational solid mechanics*. World Scientific, 2001.
- [148] Garstecki A., Glema A., Łodygowski T.: Sensitivity of plastic strain localization zones to boundary and initial conditions. *Computational Mechanics*, 30, 2003, 164–169.
- [149] Gauthier R.D., Jahsman W.E.: A quest for micropolar elastic constants. *J. Applied Mechanics*, 42, 1975, 369–374.
- [150] Gauthier R.D., Jahsman W.E.: A quest for micropolar elastic constants, part II. *Arch. Mech.*, 33, 1981, 717–737.
- [151] Gharzeddine F., Ibrahimbegovic A.: Incompatible mode method for finite deformation quasi-incompressible elasticity. *Computational Mechanics*, 24, 2000, 419–425.
- [152] German J.: *Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych*. Kraków, Wyd. Polit. Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki, 1996.
- [153] Gilewski W.: *O kryteriach oceny elementów skończonych. Od belki Timoshenki do płyty o średniej grubości*. Prace Naukowe, Budownictwo z. 144, Warszawa, Oficyna Wyd. Polit. Warszawskiej, 2005.
- [154] Gołota M., Górski J., Mikulski T., Winkelmann K.: Influence of geometric imperfections on capacities of silo structures loaded with pressure below atmospheric. W: *Shell Structures: Theory and Applications*, Vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja. London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010
- [155] Górski J.: *Non-linear models of structures with random geometric and material imperfections. Simulation-based approach*. Seria Monografie nr 68. Gdańsk, Wyd. Polit. Gdańskiej, 2006.
- [156] Górski J., Mikulski T.: Identification and simulations of initial geometrical imperfection of steel cylindrical tanks. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 46, 2008, 413–434.
- [157] Grammenoudis P., Tsakmakis C.: Micropolar plasticity theories and their classical limits. Part I: Resulting model. *Acta Mechanica*, 189, 2007, 151–175.
- [158] Grammenoudis C., Sator C., Tsakmakis C.: Micropolar plasticity theories and their classical limits. Part II: Comparison of responses predicted by the limiting and a standard classical model. *Acta Mechanica*, 189, 2007, 177–191.
- [159] Green A.E., Laws N.: A general theory of rods. *Proc. R. Soc. Lond.*, A, 293, 1966, 145–155.
- [160] Green A.E., Laws N., Naghdi P.M.: A linear theory of straight elastic rods. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 25, 1967, 285–298.
- [161] Green A.E., Naghdi P.M.: A note on invariance under superposed rigid body motions. *Journal of Elasticity*, 9, 1979, 1–8.
- [162] Green A.E., Naghdi P.M.: A theory of laminated composite plates. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 29, 1982, 1–23.
- [163] Green A.E., Naghdi P.M., Wainwright W.: Theory of Cosserat surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 20, 1965, 287–308.
- [164] Gruttmann F., Wagner W.: A stabilized one-point integrated quadrilateral Reissner–Mindlin plate element. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 61, 2004, 2273–2295.
- [165] Gruttmann F., Wagner W.: Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. *Computational Mechanics*, 2006, 37, 479–497.
- [166] Gurtin M.: *An introduction to continuum mechanics*. New York, Academic Press, 1981.



- [167] Gurtin M., Martins L.C.: Cauchy's Theorem in Classical Physics. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 60, 1976, 305–324.
- [168] Gurtin M., Murdoch A.I.: A continuum theory of elastic material surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 57, 1975, 291–323.
- [169] Haupt P.: *Continuum mechanics and theory of materials*. Berlin, Springer, 2000.
- [170] Hauptmann R., Schweizerhof K.: A systematic development of 'solid-shell' element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 42, 1998, 49–69.
- [171] Hebda M.: Zastosowanie energetycznego kryterium wyężeniowego do analizy wytrzymałościowej kompozytów włóknistych. Rozprawa doktorska, Polit. Krakowska, Wyd. Inżynierii Ładowej, 2006.
- [172] Hildebrandt F.B.: *Introduction to numerical analysis*. McGraw-Hill Book Company Inc., 1956.
- [173] Hiller J.F., Bathe K.J.: Measuring convergence of mixed finite element discretizations: an application to shell structures. *Computers & Structures*, 81, 2003, 639–654.
- [174] Himpel G., Menzel A., Kuhl E., Steinmann P.: Time-dependent fibre reorientation of transversely isotropic continua—finite element formulation and consistent linearization. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 73, 2008, 1413–1433.
- [175] Holzapfel G.: *Nonlinear Solid Mechanics*. Chichester, John Wiley & Sons, Ltd, 2001.
- [176] Holzapfel G., Eberlein R., Wriggers P., Weizsäcker H.W.: Large strain analysis of soft biological membranes: formulation and finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 132, 1996, 45–61.
- [177] Hommel J.-H., Meschke G.: EAS concept for higher-order finite shell elements to eliminate volumetric locking. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 75, 2008, 1416–1434.
- [178] Hsiao K.-M., Chen Y.-R.: Nonlinear analysis of shell structures by degenerated isoparametric shell element. *Computers & Structures*, 31, 1989, 427–438.
- [179] Huang H.C.: Membrane locking and assumed strain shell elements, membrane and shear interpolation. *Computers & Structures*, 27, 1987, 671–677.
- [180] Huang H.C., Hinton E.: New nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 22, 1986, 73–92.
- [181] Hughes T.J.R.: *The Finite Element Method: linear static and dynamics finite element analysis*. Mineola, New York, Dover Publications, Inc., 2000.
- [182] Hughes T.J.R., Tezduyar T.E.: Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element. *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, 48, 1981, 587–596.
- [183] Ibrahimbegović A.: On the choice of finite rotation parameters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149, 1997, 49–71.
- [184] Ibrahimbegović A., Frey F.: Stress resultant geometrically nonlinear shell theory with drilling rotations - Part II: Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 118, 1994, 285–308.
- [185] Ibrahimbegović A., Taylor. R.L.: On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 2002, 5159–5176.
- [186] Ieşan D., Pompei A.: On the equilibrium theory of microstretch elastic solids. *International Journal of Engineering Science*, 3, 1995, 399–410.
- [187] Ieşan D., Quintanilla R.: Some theorems in the theory of microstretch thermopiezoelectricity. *International Journal of Engineering Science*, 45, 2007, 1–16.
- [188] Iwicki P.: Sensitivity analysis of critical forces of trusses with side bracing. *Journal of Constructional Steel Research*, 66, 2010, 923–930.
- [189] Jabareen M., Rubin M.B.: An improved 3-D brick Cosserat point element for irregular shaped elements. *Computational Mechanics*, 40, 2007, 979–1004.

- [190] Jelenić G., Crisfield M.A.: Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 171, 1999, 141–171.
- [191] Jemielita G.: Meandry teorii płyt i powłok. W: Seria *Mechanika techniczna*, tom VIII. *Mechanika sprężystych płyt i powłok*, Cz. Woźniak. Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 2001a.
- [192] Jemielita G.: Teorie płyt sprężystych. W: Seria *Mechanika techniczna*, tom VIII. *Mechanika sprężystych płyt i powłok*, Cz. Woźniak. Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 2001b.
- [193] Jędrzyak J., Woźniak Cz.: On the propagation of elastic waves in a multiperiodically reinforced medium. *Meccanica*, 41, 2006, 553–569.
- [194] Jędrzyak J.: Higher order vibrations of thin periodic plates. *Thin-Walled Structures*, 47, 2009, 890–901.
- [195] Jones R.M.: *Mechanics of composite materials. Second edition*. Philadelphia, Taylor and Francis, 1999.
- [196] Juhre D., Reese S.: A reduced integration finite element technology based on a thermomechanically consistent stabilisation for 3D problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, 2010, 2050–2058.
- [197] Kafadar C.B., Eringen A.C.: Micropolar media – I, The classical theory. *International Journal of Engineering Science*, 9, 1971, 271–305.
- [198] Kaplunov J.D., Lippmann H.: Elastic-plastic torsion of a Cosserat-type rod. *Acta Mechanica*, 113, 1995, 53–62.
- [199] Kasper E.P., Taylor R.L.: A mixed-enhanced strain method: linear problems. Report No. UCB/SEMM 97-02, University of California, Berkeley.
- [200] Kasper E.P., Taylor R.L.: A mixed-enhanced strain method. Part I: Geometrically linear problems. *Computers & Structures*, 75, 2000, 237–250.
- [201] Kasprzak T., Konderla P., Waśniewski G.: Safety of defected cooling tower shell. W: *Shell Structures: Theory and Applications*, Vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja. London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010.
- [202] Kesavan A., Deivasigamani M., John S., Herszberg I.: Damage detection in T-joint composite structures. *Composite Structures*, 75, 2006, 313–320.
- [203] Kinomura T., Shimizu S.: Strength of stiffened hybrid steel girders under shear. W: *Shell Structures: Theory and Applications*, Vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja. London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010.
- [204] Kim K-D., Han S-Ch., Suthasupradit S.: Geometrically non-linear analysis of laminated composite structures using a 4-node co-rotational shell element with enhanced strains. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42, 2007, 864 – 881.
- [205] Kleiber M.: *Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych*. Biblioteka Mechaniki Stosowanej m. Warszawa, IPPT PAN, Warszawa – Poznań, PWN, 1989.
- [206] Kleiber M.: *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*. Warszawa, IPPT PAN, 1985.
- [207] Kleiber M.: *Mechanika techniczna tom XI. Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*. Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 1995.
- [208] Klinkel S., Gruttmann F., Wagner W.: A continuum based three-dimensional shell element for laminated structures. *Computers & Structures*, 71, 1999, 43–62.
- [209] Klinkel S., Gruttmann F., Wagner W.: A mixed shell formulation accounting for thickness strains and finite strain 3D material models. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 74, 2008, 945–970.
- [210] Kłosowski P.: Nieliniowa analiza numeryczna i badania doświadczalne drgań sprężysto-lepkoplastycznych płyt i powłok. Seria Monografie nr 8, Gdańsk, Wyd. Polit. Gdańskiej, 1999.
- [211] Kłosowski P., Woznica K.: Nieliniowe lepkoplastyczne prawa konstytutywne w wybranych zastosowaniach analizy konstrukcji. Gdańsk, Wyd. Polit. Gdańskiej, 2007.
- [212] Kłosowski P.: Form-finding of textile hanging roof of Opera Lesna open-air theatre in Sopot. W: *Shell Structures: Theory and Applications*, Vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja. London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010.

- [213] Kłosowski P., Komar W., Woźnica K.: Finite element description of nonlinear viscoelastic behaviour of technical fabric. *Construction and Building Materials*, 23, 2009, 1133–1140.
- [214] Kłosowski P., Woźnica K.: Numerical treatment of elasto viscoplastic shells in the range of moderate and large rotations. *Computational Mechanics*, 34, 2004, 194–212.
- [215] Koay C.G.: On the six-dimensional orthogonal tensor representation of the rotation in three dimensions: a simplified approach. *Mechanics of Materials*, 41, 2009, 951–953.
- [216] Kołakowski Z.: Podstawowe równania dynamicznej stateczności cienkościennych płyt kompozytowych. W: *Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych*, K. Kowal-Michalska. Warszawa, WNT, Fundacja Książka Naukowo-Techniczna, 2007a.
- [217] Kołakowski Z., Kowal-Michalska K., Kubiak T., Mania R.J.: Wyniki badań własnych. W: *Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych*. Warszawa, WNT, Fundacja Książka Naukowo-Techniczna, 2007b.
- [218] Kołakowski Z., Kubiak T.: Load-carrying capacity of thin-walled composite structures. *Composite Structures*, 67, 2005, 417–426.
- [219] Konopińska V., Pietraszkiewicz W.: Exact resultant equilibrium conditions in the non-linear theory of branching and self-intersecting shells. *International Journal of Solids and Structures*, 44, 2007, 352–369.
- [220] Kopczyński W., Trautmann A.: *Czasoprzestrzeń i grawitacja*. Warszawa, PWN, 1981.
- [221] Korn G.A., Korn T.M.: *Mathematical handbook for scientists and engineers. Definitions, theorems and formulas for reference and review*. Mineola, New York, Dover Publications, Inc., 2000.
- [222] Kowal-Michalska K. (red): *Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych*. Warszawa, Wyd. Naukowo-Techniczne, Fundacja Książka Naukowo-Techniczna, 2007.
- [223] Kowalski D.: Wpływ imperfekcji wykonawczych na stan naprężeń w płaszczu stalowego zbiornika rowcowego o osi pionowej. Rozprawa doktorska, Polit. Gdańska, Wydz. Inżynierii Łądowej i Środowiska, 2004.
- [224] Krätzig W.B.: ‘Best’ transverse shearing and stretching shell theory for nonlinear finite elements simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 103, 1993, 135–160.
- [225] Krätzig W.B., Könke C., Mancevski D., Gruber K.P.: Design for durability of natural draught cooling towers by life-cycle simulations. *Engineering Structures*, 20, 1998, 899–908.
- [226] Kreja I.: *Geometrically Non-Linear Analysis of Layered Composite Plates and Shells*. Seria Monografie nr 83, Gdańsk, Wyd. Polit. Gdańskiej, 2007.
- [227] Kreja I.: A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. *Central European Journal of Engineering*, 1, 2011, 59–80.
- [228] Kreja I., Cywiński Z.: Is reduced integration just a numerical trick. *Computers & Structures*, 29, 1988, 491–496.
- [229] Kreja I., Schmidt R.: Large rotations in first-order shear deformation FE analysis of laminated shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41, 2006, 101–123.
- [230] Kreja I., Schmidt R., Reddy J.N.: Finite elements based on a first-order shear deformation moderate rotation shell theory with applications to the analysis of composite structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32, 1997, 1123–1142.
- [231] Krishnaswamy S.: A Cosserat-type model for the red blood cell walls. *International Journal of Engineering Science*, 34, 1996, 873–899.
- [232] Kubiak T.: *Interakcyjne wyoboczenie dynamiczne cienkościennych słupów*. Zesz. Nauk. Polit. Łódzkiej, 998, 2007a.
- [233] Kubiak T.: Kryteria stosowane w analizie stateczności dynamicznej. W: *Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych*, K. Kowal-Michalska. Warszawa, WNT, Fundacja Książka Naukowo-Techniczna, 2007b.
- [234] Kujawa M.: Statyka i analiza wrażliwości rusztów zbudowanych z prętów cienkościennych. Analiza teoretyczna i badania doświadczalne. Rozprawa doktorska, Polit. Gdańska, Wydz. Inżynierii Łądowej i Środowiska 2007.

- [235] Kulesh M.A., Matveenkov V.P., Shardakov I. N.: Construction and analysis of an analytical solution for the surface Rayleigh wave within the framework of the Cosserat continuum. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 46, 2005, 556–563.
- [236] Kulikov G.M., Plotnikova S.V.: A family of ANS four-node exact geometry shell elements in general convected curvilinear coordinates. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 83, 2010, 1376–1406.
- [237] Kulkarni S.D., Kapuria S.: A new discrete Kirchhoff quadrilateral element based on the third-order theory for composite plates. *Computational Mechanics*, 39, 2007, 237–246.
- [238] Lee H.P., Harris P.J. Post-buckling strength of thin-walled members. *Computers & Structures*, 10, 1979, 689–702.
- [239] Lee P.S., Bathe K.J.: On the asymptotic behavior of shell structures and the evaluation in finite element solutions. *Computers & Structures*, 80, 2002, 235–255.
- [240] Lee P.S., Bathe K.J.: Development of MITC isotropic triangular shell finite elements. *Computers & Structures*, 82, 2004, 945–962.
- [241] Lee P.S., Bathe K.J.: Insight into finite element shell discretizations by use of the basic shell mathematical model. *Computers & Structures*, 83, 2005, 69–90.
- [242] Lee J.D., Chen Y.: Constitutive relations of micromorphic thermoplasticity. *International Journal of Engineering Science*, 41, 2003, 387–399.
- [243] Lee W-H., Han S-C.: Free and forced vibration analysis of laminated composite plates and shells using a 9-node assumed strain shell element. *Computational Mechanics*, 39, 2006, 41–58.
- [244] Lewiński T.: On refined plate models based on kinematical assumptions. *Ingenieur-Archiv*, 57, 1987, 133–146.
- [245] Lewiński T., Telega J.J.: Stiffness reduction and stress analysis in cracked [0m/90n0]s laminates. *Acta Mechanica*, 131, 1998, 177–201
- [246] Lewiński T., Telega J.J.: *Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization*. World Scientific Publishing 2000.
- [247] Libai A., Simmonds J.G.: *The Nonlinear Theory of Elastic Shells*. Cambridge University Press, 1998.
- [248] Li Xikui, Tang Hongxiang: A consistent return mapping algorithm for pressure-dependent elastoplastic Cosserat continua and modeling of strain localization. *Computers & Structures* 83, 2005, 1–10.
- [249] Lindgaard E., Lund E.: Nonlinear buckling optimization of composite structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199, 2010, 2319–2330.
- [250] Lippmann H.: Eine Cosserat-Theorie des plastischen Fließens. *Acta Mechanica*, 8, 1969, 255–284.
- [251] Liu Y., Soh Ch-K.: Shear correction for Mindlin type plate and shell elements. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 69, 2007, 2789–2806.
- [252] Love A.E.H.: The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Phil. Trans. Roy. Soc. London (A)* for the year 1888, 1889, 179, 491–546.
- [253] Lubowiecka I.: Całkowanie nieliniowych równań dynamiki ciała sztywnego i powłok sprężystych. Politechnika Gdańska, Monografie 48, 2004.
- [254] Lubowiecka I., Chróścielewski J.: On dynamics of flexible branched shell structures undergoing large overall motion using finite elements. *Computers & Structures*, 80, 2002, 891–898.
- [255] Lubowiecka I., Cz. Szymczak, Tomaszewska A., Śmietański M.: A FEM membrane model of human fascia – Synthetic implant system of in a case of a stiff ventral hernia orifice. W: *Shell Structures: Theory and Applications*, Vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja. London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010.
- [256] Machado S.: Non-linear stability analysis of imperfect thin-walled composite beams. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45, 2010, 100–110.
- [257] MacNeal R.H.: Perspective on finite elements for shell analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 30, 1998, 175–186.
- [258] MacNeal R.H., Harder R.L.: A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite Elements in Analysis and Design*, 1, 1985, 3–20.

- [259] Makowski J.: Liniowa i nieliniowa analiza stateczności sprężystej cienkich powłok. Rozprawa doktorska, Instytut Budownictwa Lądowego Polit. Gdańskiej, 1981.
- [260] Makowski J., Pietraszkiewicz W., Stumpf H.: Jump conditions in the non-linear theory of thin irregular shells. *Journal of Elasticity*, 54, 1999, 1–26.
- [261] Makowski J., Stumpf H.: Mechanics of Irregular Shell Structures. Mitt. Institut für Mechanik. 95, Ruhr-Universität, Bochum, 1994.
- [262] Makowski J., Stumpf H.: Thermodynamically based concept for the modeling of continua with microstructure and evolving defects. *International Journal of Solids and Structures*, 32, 2001, 1943–1961.
- [263] Małachowski J.: Modelowanie i badania interakcji ciało stałe-gaz przy oddziaływaniu impulsu ciśnienia na elementy konstrukcji rurociągu. Warszawa, BEL Studio, 2010.
- [264] Marcinowski J.: Nieliniowa stateczność powłok sprężystych. Wrocław, Oficyna Wyd. Polit. Wrocławskiej, 1999.
- [265] Marsden J.E., Hughes T.J.R.: Mathematical foundations of elasticity. New York, Dover Publications, Inc., 1994.
- [266] Mäkinen J.: Rotation manifold  $SO(3)$  and its tangential vectors. *Computational Mechanics*, 42, 2008, 907–919.
- [267] Mehrabadi M.M., Cowin S.C., Jaric J.: Six-dimensional orthogonal tensor representation of the rotation about an axis in three dimensions. *International Journal of Solids and Structures*, 32, 1995, 439–449.
- [268] Merlini T., Morandini M.: The helicoidal modeling in the approximation of shell structures mechanics. W: Shell Structures: Theory and Applications, Vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja. London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010.
- [269] Meyer-Piening H.-R.: Application of the elasticity solution to linear sandwich beam, plate and shell analyses. *Journal of Sandwich Structures and Materials*, 6, 2004, 295–312.
- [270] Mikulski T.: *Ramy cienkościenne. Modelowanie i analiza wrażliwości*. Seria Monografie nr 100, Gdańsk, Wyd. Polit. Gdańskiej, 2010.
- [271] Mindlin R. D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 18, 1951, 31–38.
- [272] Mindlin R.D.: Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 16, 1964, 51–78.
- [273] Mindlin R.D.: Stress functions for a Cosserat continuum. *International Journal of Solids and Structures*, 1, 1965, 265–271.
- [274] Mindlin R.D., Tiersten H.F.: Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 11, 1962, 415–448.
- [275] Miśkiewicz M.: Nieliniowa analiza stanów przedawaryjnych konstrukcji prętowo – ciągnowych w ujęciu metody elementów skończonych. Rozprawa doktorska, Polit. Gdańska, Wydz. Inżynierii Lądowej i Środowiska 2011.
- [276] Mora R. J., Waas A. M.: Evaluation of the Micropolar elasticity constants for honeycombs. *Acta Mechanica*, 192, 2007, 1–16.
- [277] Muc A.: Optimal design of composite multilayered plated and shell structures. *Thin-Walled Structures*, 45, 2007, 816–820.
- [278] Muc A., Gurba W.: Genetic algorithms and finite element analysis in optimization of composite structures. *Composite Structures*, 54, 2001, 275–281.
- [279] Muc A., Ulatowska A.: Design of plates with curved fibre format. *Composite Structures*, 92, 2010, 1728–1733.
- [280] Mühlhaus, H.B.: Application of Cosserat theory in numerical solutions of limit load problems. *Ingenieur-Archiv*, 59, 1989, 124–137.
- [281] Naghdi P.M.: Foundations of elastic shell theory. W: Progress in Solid Mechanics 4, 1–90. Amsterdam, North-Holland, 1963.
- [282] Naghdi P.M.: The Theory of Shells and Plates, Flugge’s Handbuch der Physik, Vol. VI a/2, ed. C. Truesdell, Springer, 1972.
- [283] Naghdi P.M., Rubin M.B.: Restrictions on nonlinear constitutive equations for elastic shells. *Journal of Elasticity*, 39, 1995, 133–163.

- [284] Nagórski R.T., Szcześniak W.E.: *Mechanika teoretyczna*, tom 1. Warszawa, Oficyna Wyd. Pol. Lit. Warszawskiej, 1993.
- [285] Nakamura S., Benedict R., Lakes R.S.: Finite element method for orthotropic micropolar elasticity. *International Journal of Engineering Science*, 22, 1984, 319–330.
- [286] Nakamura S., Lakes R.S.: Finite element analysis of Saint-Venant end effects in micropolar elastic solids. *Engineering Computations*, 12, 1995, 571–587.
- [287] Neff P.: Geometrically exact Cosserat theory for bulk behaviour and thin structures. *Modelling and mathematical analysis*. Technische Universität Darmstadt, 2004.
- [288] Neff P.: The Cosserat couple modulus for continuous solids is zero viz the linearized Cauchy-stress tensor is symmetric. *ZAMM*, 86, 2006, 892–912.
- [289] Neff P., Hong K.-I., Jeong J.: The Reissner-Mindlin plate is the  $\Gamma$ -limit of Cosserat elasticity. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 20, 2010a, 1553–1590.
- [290] Neff P., Jeong J., Fischle A.: Stable identification of linear isotropic Cosserat parameters: bounded stiffness in bending and torsion implies conformal invariance of curvature. *Acta Mechanica*, 211, 2010b, 237–249.
- [291] Neuber H.: Über Probleme der Spannungskonzentration im Cosserat-Körper. *Acta Mechanica*, 2, 1966, 48–69.
- [292] Noll W.: A mathematical theory of the mechanical behaviour of continuous media. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 2, 1958, 197–226.
- [293] Noor A.K.: Bibliography of monographs and surveys of shells. *Appl. Mech. Rev.*, 43, 1990, 223–234.
- [294] Noor A.K., Hartley S.J.: Nonlinear shell analysis via mixed isoparametric elements, *Computers & Structures*, 7, 1977, 615–626.
- [295] Nowacki W.: Couple-stresses in the theory of thermoelasticity. W: Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of physical characteristics in moving fluids. IUTAM Symposia Vienna 1966. Ed. H. Parkus; L. I. Sedov. Wien: Springer-Verlag, 1968, s. 259–278.
- [296] Nowacki W.: *Teoria niesymetrycznej sprężystości*. IPPT PAN, Warszawa, 1971.
- [297] Nowiński J.L.: On the surface waves in an elastic micropolar and microstretch medium with nonlocal cohesion. *Acta Mechanica*, 96, 1993, 97–108.
- [298] Ogden R.W.: *Non-linear elastic deformations*. New York, Dover Publications, Inc., 1997.
- [299] Öry H., Reimerdes H.G., Gómez Garcia J.: The design of shells and tanks in the aerospace industry: some practical aspects. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 1, 1998, 404–414.
- [300] Palmerio A.F., Reddy J.N., Schmidt R.: On moderate rotation theory of laminated anisotropic shells – part 2. Finite element analysis. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 25, 1990, 701–714.
- [301] Panasz P.: Nieliniowe modele powłok z 6 stopniami swobody bazujące na dwustopniowych aproksymacjach. Rozprawa doktorska, IPPT, Warszawa, 2008.
- [302] Panasz P., Wiśniewski K.: Nine-node shell elements with 6 dofs/node based on two-level approximations. Part I Theory and linear tests. *Finite Elements in Analysis and Design*, 44, 2008, 784–796.
- [303] Pamin J., de Borst R.: Simulation of crack spacing using a reinforced concrete model with an internal length parameter. *Archive of Applied Mechanics*, 68, 1998, 613–625.
- [304] Pawsey S.F., Clough R.W.: Improved numerical integration of thick shell finite elements. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 3, 1971, 575–586.
- [305] Perzyna P.: *Termodynamika materiałów niesprężystych*. Warszawa, IPPT PAN, 1978.
- [306] Pian T.H.H.: Some notes on the early history of hybrid stress finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, 2000, 419–425.
- [307] Pian T.H.H., Sumihara K.: Rational approach for assumed stress finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20, 1984, 1685–1695.
- [308] Pica A., Wood R.D., Hinton E.: Finite element analysis of geometrically nonlinear plate behaviour using a Mindlin formulation. *Computers & Structures*, 11, 1980, 203–215.
- [309] Pietraszkiewicz W.: Introduction to the Nonlinear Theory of Shells. *Mitteilungen aus dem Institut für Mechanik, Ruhr-Universität Bochum*, 1977.

- [310] Pietraszkiewicz W.: *Obroty skończone i opis Lagrange'a w nieliniowej teorii powłok*. IMP PAN, 172/880, Gdańsk, 1976.
- [311] Pietraszkiewicz W.: Consistent second approximation to the elastic strain energy of a shell. *ZAMM*, 59, 1979, 206–208.
- [312] Pietraszkiewicz W.: Geometrically non-linear theories of thin elastic shells. *Advances in Mechanics*, 1989, 12, 51–130.
- [313] Pietraszkiewicz W.: Addendum to: Bibliography of monographs and surveys of shells. *Appl. Mech. Revs.*, 45, 1992, 249–250.
- [314] Pietraszkiewicz W.: Teorie powłok sprężystych. Teorie nieliniowe powłok. W: Woźniak Cz.: *Mechanika techniczna*, tom VIII. *Mechanika Sprężystych Płyt i Powłok*. Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 2001.
- [315] Pietraszkiewicz W., Badur J.: Finite rotations in the description of continuum deformation. I *International Journal of Engineering Science*, 21, 1983, 1097–1115.
- [316] Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A.: On natural strain measures of the non-linear micropolar continuum. *International Journal of Solids and Structures*, 46, 2009a, 774–787.
- [317] Pietraszkiewicz W., Eremeyev V.A.: On vectorially parameterized natural strain measures of the non-linear Cosserat continuum. *International Journal of Solids and Structures*, 46, 2009b, 2477–2480.
- [318] Pietraszkiewicz W., Eremeyev V. A., Konopińska V.: Extended non-linear relations of elastic shells undergoing phase transitions. *ZAMM*, 87, 2007, 150–159.
- [319] Pietraszkiewicz W., Szwabowicz M.L.: Determination of the midsurface of a deformed shell from prescribed fields of surface strains and bendings. *International Journal of Solids and Structures*, 4, 2007, 6163–6172.
- [320] Piovan M.T., Cortínez V.H.: Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability. *Thin-Walled Structures*, 45, 2007, 759–789.
- [321] Piskunov V.G., Rasskazov A.O.: Evolution of the theory of laminated plates and shells. *International Applied Mechanics*, 38, 2002, 135–166.
- [322] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.: *Numerical Recipes in Fortran 90*, Vol. 2. Cambridge University Press, 2 edition, 1996.
- [323] Providas E., Kattis MA.: Finite element method in plane Cosserat elasticity. *Computers & Structures*, 80, 2002, 2059–2069.
- [324] Pyrzowski Ł.: Viscoplastic damage analysis of plate-shell structures subjected to impact loading. Rozprawa doktorska, Polit. Gdańska, Wyd. Inżynierii Lądowej i Środowiska, 2010.
- [325] Qiao P., Zou G., Davalos J.F.: Flexural-torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite open channel beams. *Composite Structures*, 60, 2003, 205–217.
- [326] Radwańska M.: *Ustroje powierzchniowe. Podstawy teoretyczne oraz rozwiązania analityczne i numeryczne*. Kraków, Wyd. Polit. Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki, 2009.
- [327] Rakowski G., Kacprzyk Z.: *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Warszawa, Oficyna Wyd. Polit. Warszawskiej, 2005.
- [328] Ralston A.: *Wstęp do analizy numerycznej*, wyd. 2. Warszawa, PWN, 1975.
- [329] Ralston A., Rabinowitz P.: *A first course in numerical analysis*. Second edition. Mineola, New York, Dover Publications, Inc., 2001.
- [330] Ramezani S., Naghdabadi R.: Energy pairs in the micropolar continuum. *International Journal of Solids and Structures*, 44, 2007, 4810–4818.
- [331] Ramezani S., Naghdabadi R.: Micropolar hypo-elasticity. *Archive of Applied Mechanics*, 80, 2010, 1449–1461.
- [332] Ramezani S., Naghdabadi R., Sohrabpour S.: Constitutive equations for micropolar hyper-elastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 46, 2009, 2765–2773.
- [333] Ramm E.: From Reissner plate theory to three dimensions in large deformation shell analysis. *ZAMM*, 80, 2000, 61–68.
- [334] Reddy J.N.: *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. Boca Raton, FL, CRC Press, 1997.
- [335] Reddy J.N.: *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells. Second Edition*. Boca Raton, FL, CRC Press, 2007.

- [336] Reddy B.D., Simo J.C.: Stability and convergence of a class of enhanced strain methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35, 1995, 1705–1728.
- [337] Reese S.: A large deformation solid-shell concept based on reduced integration with hourglass stabilization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69, 2007, 1671–1716.
- [338] Reissner E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, 1945, A69–A77.
- [339] Reissner E.: On sandwich-type plates with cores capable of supporting moment stresses. *Acta Mechanica*, 1972, 14, 43–51.
- [340] Richter H.: Das isotrope Elastizitätsgesetz. *ZAMM*, 28, 1948, 205–209.
- [341] Rivlin R.S., Ericksen J.L.: Stress-deformation relations for isotropic materials. *Indiana Univ. Math. J.* 4(2), 1955, 323–425.
- [342] Rohwer K., Friedrichs S., Wehmeyer C.: Analyzing laminated structures from fibre-reinforced composite material – an assessment. *Technische Mechanik*, 25, 2005, 59–79.
- [343] Rubin M.B.: *Cosserat Theories: Shells, Rods, and Points*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [344] Rucka M.: *Guided Wave Propagation in Structures. Modelling, Experimental Studies and Application to Damage Detection*. Seria Monografie nr 106, Gdańsk, Wyd. Polit. Gdańskiej, 2011.
- [345] Rudin W.: *Analiza funkcjonalna*. Warszawa, Wyd. Naukowe, PWN, 2009.
- [346] Rychter Z.: On the shear coefficient in beam bending. *Mech. Res. Comm.*, 14, 1987, 379–385.
- [347] Rymarz Cz.: *Mechanika ośrodków ciągłych*. Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 1993.
- [348] Rządkowski R., Kwapisz L., Szczepanik R.: Free vibrations of shell rotor blades in a compressor. W: *Shell Structures: Theory and Applications*, Vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja. London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010.
- [349] Sabik A.: Numeryczny model płyty warstwowej z zastosowaniem funkcji zig-zag. Praca dyplomowa magisterska, Polit. Gdańska, Wydz. Inżynierii Lądowej i Środowiska, 2006.
- [350] Sabik A., Kreja I.: Linear analysis of laminated multilayered plates with the application of zig-zag function. *Archives Of Civil And Mechanical Engineering*, 8, 2008, 61–72.
- [351] Sadłowski P.: Parametryzacje rotacji i algorytmy rozwiązywania równań dynamiki z rotacyjnymi stopniami swobody. Rozprawa doktorska, IPPT PAN, Warszawa, 2007.
- [352] Samuelsson A., Zienkiewicz O.C.: History of the stiffness method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67, 2006, 149–157.
- [353] Sander O.: Geodesic finite elements for Cosserat rods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 82, 2009, 1645–1670.
- [354] Sansour C.: A Theory and finite element formulation of shells at finite deformations involving thickness change: circumventing the use of a rotation tensor. *Archive of Applied Mechanics*, 65, 1995, 194–216.
- [355] Sansour C.: Large strain deformations of elastic shells. Constitutive modelling and finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 161, 1998, 1–18.
- [356] Sansour C., Bednarczyk H.: The Cosserat surface as a shell model, theory and finite-element formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 120, 1995, 1–32.
- [357] Sansour C., Kollmann F.G.: Families of 4-node and 9-node finite elements for a finite deformation shell theory. An assessment of hybrid stress, hybrid strain and enhanced strain elements. *Computational Mechanics*, 24, 2000, 435–447.
- [358] Santiuste C., Sánchez-Sáez S., Barbero E.: A comparison of progressive-failure criteria in the prediction of the dynamic bending failure of composite laminated beams. *Composite Structures*, 92, 2010, 2406–2414.
- [359] Sauer R.: Eine einheitliche Finite-Element-Formulierung für Stab- und Schalentragwerke mit endlichen Rotationen. Bericht Nr. 4, Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe, 1998
- [360] Schweizerhof K.: Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik. Institut für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe, 1989.



- [361] Selcuk S.A., Akan E.A., Unay A.I.: Exploration of structural chaos and anarchy in Sinan's domed structures. W.: *Shell Structures: Theory and Applications*, red. W. Pietraszkiewicz, Cz. Szymczak. London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2006.
- [362] Shan L., Qiao P.: Flexural-torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite open channel beams. *Composite Structures*, 68, 2005, 211–224.
- [363] Simo J.C.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part VII: Shell intersections with 5/6-DOF finite element formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 108, 1993, 319–339.
- [364] Simo J.C., Armero F.: Geometrically non-linear enhanced strain mixed methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1992, 1413–1449.
- [365] Simo J.C., Fox D.D.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 72, 1989, 267–304.
- [366] Simo J.C., Fox D.D., Hughes T.J.R.: Formulations of finite elasticity with independent rotations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95, 1992a, 277–288.
- [367] Simo J.C., Fox D.D., Rifai M.S.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73, 1989, 53–92.
- [368] Simo J.C., Fox D.D., Rifai M.S.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79, 1990a, 21–70.
- [369] Simo J.C., Hughes T.J.R.: On the variational foundations of assumed strain methods. *Journal of Applied Mechanics*, 53, 1986, 51–54.
- [370] Simo J.C., Kennedy J.G.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part V: Non-linear plasticity: formulation and integration algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 96, 1992, 133–171.
- [371] Simo J.C., Rifai M.S.: A class of mixed assumed strain methods and the methods of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29, 1990, 1595–1638.
- [372] Simo J.C., Rifai M.S., Fox D.D.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part IV: Variable thickness shells with through-the-thickness stretching. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 81, 1990b, 91–126.
- [373] Simo J.C., Rifai M.S., Fox D.D.: On a stress resultant geometrically exact shell model. Part VI: Conserving algorithms for non-linear dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 34, 1992b, 117–164.
- [374] Sitarski A.: Ocena nośności betonowych dźwigarów wzmocnionych płaskownikiem stalowym na podstawie badań modelowych i numerycznych. Rozprawa doktorska, Polit. Gdańska, Wydz. Inżynierii Lądowej i Środowiska, 2008.
- [375] Sitek M.: *Warunek inf-sup dla elementów belki Timoszenki*. Zesz. Nauk. Polit. Śląskiej, Budownictwo, 112, 2007, 337–344.
- [376] Sitek M.: Ocena poprawności prętowych, płytowych i powłokowych elementów skończonych. Rozprawa doktorska, Polit. Warszawska, Wydz. Inżynierii Lądowej, 2010.
- [377] Skwarczyński M.: *Geometria różności Riemanna z dodatkiem „Geometryczne idee Riemanna i ich rola w matematyce i fizyce”*, Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 1993.
- [378] Smoleński M.W.: Statically and kinematically exact nonlinear theory of rods and its numerical verification. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178, 1999, 89–113.
- [379] Sokołowski M.: *O teorii naprężeń momentowych w ośrodkach ze związanymi obrotami*. Warszawa, IPPT PAN, 1972.
- [380] Spivak M.: *Analiza na różnościach*. wyd. 2, Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 2006.
- [381] Stander N., Matzenmiller A., Ramm E.: An assessment of assumed strain methods in finite rotation shell analysis. *Engineering Computations*, 6, 1989, 58–66.
- [382] Stanuszek M.: *Modelowanie deformacji ustrojów wiotkich z uwzględnieniem więzów jednostronnych*. Monografia 303, seria Mechanika, Polit. Krakowska, 2004.

- [383] Steigmann D.: On the relationship between the Cosserat and Kirchhoff-Love theories of elastic shells. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 4, 1999, 275–288.
- [384] Steinmann P., Stein E.: A unifying treatise of variational principles for two types of micropolar continua. *Acta Mechanica*, 1997, 121, 215–232.
- [385] Studziński R., Pozorski Z., Garstecki A.: Optimal design of sandwich panels with a soft core. *Journal Of Theoretical And Applied Mechanics*, 47, 2009, 685–699.
- [386] Stuelpnagel J.: On the parameterization of the three-dimensional rotation group. *SIAM Review*, 1964, 6, 422–430
- [387] Stojanović R.: On the mechanics of materials with microstructure. *Acta Mechanica*, 15, 1972 261–273.
- [388] Svendsen B., Bertram A.: On frame-indifference and form-invariance in constitutive theory. *Acta Mechanica*, 132, 1999, 195–207.
- [389] Sze K. Y., Liu X. H., Lo S. H.: Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40, 2004, 1151–1569.
- [390] Szymczak Cz., Chróścielewski J., Lubowiecka I.: On the paradox of torsional buckling of thin-walled I columns. *Archives of Civil Engineering*, XLIX, 2003, 3–13.
- [391] Szymczak Cz., Kreja I., Mikulski T., Kujawa M.: *Sensitivity Analysis of Beams and Frames Made of Thin-walled Members*. Gdańsk, Wyd. Polit. Gdańskiej, 2003.
- [392] Szmelter J.: *Metody komputerowe w mechanice*. Warszawa, PWN, 1980.
- [393] Taczała M.: A method for response of stiffened panel subject to combined loading. W: *Shell Structures: Theory and Applications*, Vol. 2, red. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja. London, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2010.
- [394] Tan X.G., Vu-Quoc L.G.: Efficient and accurate multilayer solid-shell element: Non-linear materials at finite strain. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*, 63, 2005, 2124–2170.
- [395] Tauchert T.R.: Thermal stresses in micropolar elastic solids. *Acta Mechanica*, 11, 1971, 155–169.
- [396] Taylor R.L., Beresford P.J., Wilson E.L.: A non-conforming element for stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10, 1976, 1211–1219.
- [397] Tejchman J., Gudehus G.: Shearing of a narrow granular layer with polar quantities. *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 25, 2001, 1–28.
- [398] Tejchman J., Wu W.: Numerical study on patterning of shear bands in a Cosserat continuum. *Acta Mechanica*, 99, 1993, 61–74.
- [399] To C.W.S., Liu M.L.: Geometrically nonlinear analysis of layerwise anisotropic shell structures by hybrid strain based lower order elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 37, 2001, 1–34.
- [400] Toupin R.A.: Elastic materials with couple stresses. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 11, 1962, 385–414.
- [401] Toupin R.A.: Theories of elasticity with couple-stresses. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 17, 1964, 85–112.
- [402] Toupin R.A.: Saint-Venant's Principle. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 18, 1965, 83–96.
- [403] Trajdos T.: *Matematyka dla inżynierów*. Warszawa, Wyd. Naukowo-Techniczne, 1974.
- [404] Truesdell C.A.: The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics. *Indiana Univ. Math. J.* 1(1), 1952, 125–300.
- [405] Valente R.A.F., Parente M.P.L., Jorge R.M.N., César de Sa J.M.A., Grácio J.J.A.: Enhanced transverse shear strain shell formulation applied to large elasto-plastic deformation problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62, 2005, 1360–1398.
- [406] Vu-Quoc L., Deng H., Tan X.G.: Geometrically-exact sandwich shells: The static case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189, 2000, 167–203.
- [407] Vu-Quoc L., Tan X.G.: Optimal solid shells for nonlinear analyses of multilayer composites. Part I: Statics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 2003, 975–1016.
- [408] Wagner W., Gruttmann F.: A robust non-linear mixed hybrid quadrilateral shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64, 2005, 635–666.
- [409] Waszczyszyn Z.: *Zagadnienia stateczności i ich rozwiązywanie MES*. W: *Seria Mechanika techniczna*, tom XI. *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, M. Kleiber. Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 1995.

- [410] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M.: Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji. Warszawa, Arkady, 1990.
- [411] Walsh S.D.C., Tordesillas A.: A thermomechanical approach to the development of micropolar constitutive models of granular media. *Acta Mechanica* 167, 2004, 145–169
- [412] Wang C-C., Truesdell C.A.: Introduction to rational elasticity. Leyden, Noordhoff International Publishing, 1973.
- [413] Waliszewski W. (red.): Encyklopedia szkolna. Matematyka. Warszawa, Wyd. Szkolne i Pedagogiczne, 1990.
- [414] Wempner G.: Mechanics and finite elements of shells. *Appl. Mech. Rev.*, 42, 1989, 129–142.
- [415] Whitman A.B., DeSilva C.N.: A dynamical theory of elastic directed curves. *ZAMP*, 20, 1969, 200–212.
- [416] Wiśniewski K.: Finite rotations shells. Finite elements for Reissner kinematics. Barcelona, International Center for Numerical Methods in Engineering, 2010.
- [417] Wiśniewski K., Turska E.: Improved four-node Hellinger–Reissner elements based on skew coordinates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76, 2008, 798–836.
- [418] Wiśniewski K., Turska E.: Improved 4-node Hu–Washizu elements based on skew coordinates. *Computers & Structures*, 87, 2009, 407–424.
- [419] Witkowski W.: Ocena efektywności 4-węzłowych elementów powłokowych. Zesz. Nauk. Pol. Śląskiej. Budownictwo z. 120, 2004, 569–576
- [420] Witkowski W.: Efektywny 4-węzłowy element skończony o wzbogaconym polu odkształceń w nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok. Rozprawa doktorska, Pol. Gdańska, Wydz. Inżynierii Lądowej i Środowiska, 2005.
- [421] Witkowski W.: 4-Node combined shell element with semi-EAS-ANS strain interpolations in 6-parameter shell theories with drilling degrees of freedom. *Computational Mechanics*, 43, 2009, 307–319.
- [422] Witkowski W., Rucka M., Wilde K., Chróścielewski J.: Wave propagation analysis in spatial frames using spectral Timoshenko beam elements in the context of damage detection. *Archives of Civil Engineering*, 55, 2009, 367–402.
- [423] Woźniak Cz.: Nieliniowa teoria powłok. Warszawa, IPPT PAN, 1966.
- [424] Woźniak Cz.: Podstawy nieliniowej mechaniki powłok. Konstrukcje powłokowe, teoria i zastosowania. Warszawa, PWN, 1978.
- [425] Woźniak Cz.: Seria *Mechanika techniczna*, tom VIII. *Mechanika sprężystych płyt i powłok*. Warszawa, Wyd. Naukowe PWN, 2001.
- [426] Wriggers P., Gruttmann F.: Thin shells with finite rotations formulated in Biot stresses: Theory and finite element formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 1993, 2049–2071.
- [427] Wriggers P., Reese S.: A note on enhanced strain methods for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 135, 1996, 201–210.
- [428] Yang H.T.Y., Saigal S., Liaw D.G.: Advances of thin shell finite elements and some applications – version I. *Computers & Structures*, 35, 1990, 481–504.
- [429] Yang H.T.Y., Saigal S., Masud A., Kapania R.K.: A survey of recent shell finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47, 2000, 101–127.
- [430] Yeh J-T., Chen W-H.: Shell elements with drilling degrees of freedom based on micropolar elasticity theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36, 1993, 1145–1159.
- [431] Zielnica J.: Non-linear stability of elastic-plastic conical shell under combined load. *Journal Of Theoretical And Applied Mechanics*, 41, 2003, 693–709.
- [432] Zienkiewicz O.C. Taylor R. L.: The finite element patch-test revisited. A computer test for convergence, validation and error estimations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149, 1997, 223–254.
- [433] Zienkiewicz O.C. Taylor R. L.: *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann Oxford, 2002, England.
- [434] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Too J.M.: Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3, 1971, 275–290.

# SYNTEZA SFORMUŁOWANIA NIELINIOWEJ MECHANIKI POWŁOK PODLEGAJĄCYCH SKOŃCZONYM OBROTOM W UJĘCIU MES

W pracy podsumowano doświadczenia Autora dotyczące wybranych aspektów nieliniowej analizy numerycznej powłok, ze szczególnym uwzględnieniem powłok warstwowych. Studium rozwinięto w ramach nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok, w której szóstym parametrem jest obrót prostopadły do powierzchni odniesienia powłoki.

W części poświęconej formułowaniu teorii powłok omówiono wybrane zagadnienia opisu powierzchni odniesienia powłoki. Zapisano zasady zachowania dla ciała typu powłoka i omówiono przejście do lokalnych równań równowagi. Następnie przedstawiono, jak z równań postawionych w postaci klasycznej otrzymuje się tożsamość całkową, interpretowaną jako zasada prac wirtualnych. Z funkcjonału tej zasady wynikają wprost wirtualne miary odkształceń, które konstytuują jednoznaczny model kinematyczny powłoki jako model ośrodka Cosseratów. Koncentrując dalsze rozważania w kierunku aproksymacji po przestrzeni, omówiono wybrane zasady wariacyjne, z których rozwijany jest w dalszej części pracy oryginalny element skończony EANS. Uzupełnieniem rozważań dotyczących teorii powłok jest rozdział pracy traktujący wyłącznie o ośrodku typu Cosseratów. W rozdziale tym omówiono koncepcję tego ośrodka i jego możliwe warianty. Dokonano także przeglądu literatury i zagadnień, w których koncepcja ośrodka Cosseratów znalazła zastosowanie.

W części pracy poświęconej równaniom konstytutywnym omówiono postulaty, jakie powinny spełniać równania konstytutywne ośrodka Cauchy'ego. Szczególną uwagę poświęcono materiałowi hipersprężystemu. Omówiono także równania konstytutywne dla liniowego ośrodka Cosseratów i dyskutowano znane w literaturze pewne kontrowersje, dotyczące oznaczeń i wartości stałych materiałowych. Przedstawiono równania konstytutywne cienkiej powłoki jednorodnej i izotropowej stosowane w ramach niniejszej monografii oraz porównano je z równaniami konstytutywnymi jakie wyprowadzili Altenbach i Eremeyev (2009) dla płyt Cosseratów. Przeprowadzono także dyskusję oszacowań współczynnika korekcyjnego owinięcia  $\alpha$ , charakterystycznego dla rozpatrywanej tu teorii powłok. Przedstawiono szczegóły wyprowadzenia w ramach podejścia równoważnej jednej warstwy równania konstytutywnego ujmującego warstwową strukturę materiału powłoki wobec braku symetrii miar odkształceń. Na tym etapie pracy (i jedynie tutaj) przyjęto hipotezę kinematyczną FOSD.

W części pracy poświęconej formalizmowi MES przedstawiono zlinearyzowaną zmodyfikowaną zasadę wariacyjną Hu-Washizu, będącą podstawą formułowania elementu EANS. Omówione zostały także zasadnicze aspekty teoretyczne aproksymacji skończenie wymiarowej oraz przedstawiono pewne wybrane wiadomości dotyczące matematycznych podstaw MES. Przedstawiono schematy interpolacyjne zmiennych występujących w sformułowaniu oraz zapisano równania macierzy i wektorów elementowych właściwych dla elementu EANS.

W końcowej części pracy zebrano reprezentatywne, zdaniem Autora, przykłady. W pierwszej kolejności przedstawiono zadania testujące, pozwalające zweryfikować sam element skończony jako narzędzie analizy. W kolejnym kroku badano w zakresie geometrycznie nieliniowym powłoki o jednej bądź dwóch krzywiznach, a także powłoki strukturalne. W wybranych zadaniach badano możliwości pojawiania się fałszywych postaci zeroenergetycznych. Realizując zasadniczy cel pracy, na bazie znanych w literaturze przedmiotu przykładów, badano wpływ uwarstwienia materiału na odpowiedź konstrukcji zarówno w zakresie deformacji jak i stateczności. W większości zadań uzyskano wyniki zgodne z rozwiązaniami odniesienia. Tam, gdzie pojawiły się rozbieżności, Autor podjął próbę wyjaśnienia zaistniałych różnic.

# SYNTHESIS OF FORMULATION OF NONLINEAR MECHANICS OF SHELLS UNDERGOING FINITE ROTATIONS IN THE CONTEXT OF FEM

This report summarises Author's experience with some aspects of nonlinear analysis of shell structures. Particular attention is put on laminated shells. The present study is elaborated within the framework of nonlinear six-field shell theory, in which the sixth parameter is the rotation about the normal to the reference surface.

In the part of the report devoted to formulation of the shell theory some selected issues concerned with geometry of the reference surface are presented. Conservation laws of shell-like body are stated and the transition to local static equilibrium equations is shown. Next it is shown how the integral identity, interpreted as the principle of virtual work, follows from the statement of the problem posed in the strong form. From the obtained functional follow naturally the virtual strain measures that constitute the kinematical model of the shell as the Cosserat-type continuum. Concentrating the subsequent developments on spatial approximation, there are discussed some selected variational principles from which the original EANS finite element is formulated.

The above study on shell theory is supplemented with chapter solely concerned with Cosserat continuum. The concept of this medium and its variants are discussed. A state-of-the-art review of literature and topics, where Cosserat concept is applied, is presented.

In the part of the report concerned with constitutive relations, the postulates formulated for constitutive relations are presented. Particular attention is devoted to the hyperelastic material. The constitutive relations for the linear elastic Cosserat continuum are studied and some known controversies concerned with notation and values used for material constants are presented. The material law of a thin linear elastic, homogenous, isotropic shell is presented and compared with the relation for Cosserat plates recently derived by Altenbach and Eremeyev (2009). A discussion about estimations of the correction factor  $\alpha$ , specific for the considered shell theory is carried out. Within the ESL approach details of formulation of the constitutive relation accounting for asymmetric membrane strain are presented. At this stage of the whole formulation presented in this report the kinematic assumption of the FOSD theory is employed.

In the part of the study devoted to the FEM formalism, the modified Hu-Washizu variational principle in its linearized version is shown. Some basic theoretical aspects of a spatial approximation and selected topics in mathematical foundation of FEM are discussed. Interpolation schemes of problem variables are presented and the element matrices and vectors pertaining to the EANS formulation are given.

Some representative, in Author's opinion, examples are collected in the final part of the report. Firstly, the examples verifying the EANS element are presented. Then curved shells and structural shells are studied. In the selected examples a possible presence of spurious zero-energy modes is investigated. Concentrating on the main objectives of the manuscript, by solving the examples known from the literature, the influence of lamination sequence on the deformation and critical loads is assessed. In the majority of examples a good agreement between own and the reference results is obtained. Wherever the discrepancies appeared, the Author endeavours to provide explanation.

## Dodatek A

### OBLICZANIE POCHODNEJ KOROTACYJNEJ ODKSZTAŁCEŃ

Niniejszy dodatek przedstawia w szczegółach obliczenia pochodnych korotacyjnych wektorów odkształceń  $\boldsymbol{\varepsilon}_\beta$  i  $\boldsymbol{\kappa}_\beta$  z rozdziału 3.

Pochodną korotacyjną  $d\boldsymbol{\varepsilon}_\beta$  oblicza się w następujący sposób

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\varepsilon}_\beta &\equiv \mathbf{Q}(\delta(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\varepsilon}_\beta)) = \mathbf{Q}(\delta\mathbf{Q}^T \mathbf{y}_{,\beta} + \mathbf{Q}^T \delta\mathbf{y}_{,\beta} - \delta\mathbf{Q}^T \mathbf{t}_\beta - \mathbf{Q}^T \delta\mathbf{t}_\beta) \\ &= -ad\mathbf{w}_{\mathbf{y}_{,\beta}} + \delta\mathbf{y}_{,\beta} + ad\mathbf{w}_{\mathbf{t}_\beta} - \delta\mathbf{t}_\beta = \delta\mathbf{y}_{,\beta} - ad\mathbf{w}_{\mathbf{y}_{,\beta}} = \mathbf{v}_{,\beta} + \mathbf{y}_{,\beta} \times \mathbf{w} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Pochodną korotacyjną

$$d\boldsymbol{\kappa}_\beta \equiv \mathbf{Q}(\delta(\mathbf{Q}^T \boldsymbol{\kappa}_\beta)) \quad (\text{A.2})$$

oblicza się w kilku krokach. Punktem wyjścia jest obliczenie wariacji

$$\delta\mathbf{K}_\beta = \delta(\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T) = \delta\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}_{,\beta} \delta\mathbf{Q}^T \quad (\text{A.3})$$

Wykorzystując zależność

$$\delta(\mathbf{1}) = \delta(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T) = \delta\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\delta\mathbf{Q}^T = \mathbf{0} \quad (\text{A.4})$$

zapisuje się

$$\delta\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = -\mathbf{Q}\delta\mathbf{Q}^T \equiv ad\mathbf{w} \quad (\text{A.5})$$

Na podstawie wzoru (A.5) pochodna  $(ad\mathbf{w})_{,\beta}$  ma postać

$$\begin{aligned} (ad\mathbf{w})_{,\beta} &= ad\mathbf{w}_{,\beta} = (\delta\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T)_{,\beta} = \delta\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T + \delta\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^T)_{,\beta} = \\ &= \delta\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T + \underbrace{\delta\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T}_{ad\mathbf{w}} \underbrace{\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^T)_{,\beta}}_{-\mathbf{K}_\beta} = \delta\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T - ad\mathbf{w} \mathbf{K}_\beta \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Z relacji (A.6) wyznacza się

$$\delta\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T = ad\mathbf{w}_{,\beta} + ad\mathbf{w} \mathbf{K}_\beta \quad (\text{A.7})$$

Podstawienie (A.7) do (A.3) prowadzi do wyrażenia

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{K}_\beta &= \delta(\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T) = \underbrace{\delta\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T}_{ad\mathbf{w}_{,\beta} + ad\mathbf{w} \mathbf{K}_\beta} + \mathbf{Q}_{,\beta} \delta\mathbf{Q}^T = ad\mathbf{w}_{,\beta} + ad\mathbf{w} \mathbf{K}_\beta + \mathbf{Q}_{,\beta} \delta\mathbf{Q}^T = \\ &= ad\mathbf{w}_{,\beta} + ad\mathbf{w} \mathbf{K}_\beta + \underbrace{\mathbf{Q}_{,\beta} \mathbf{Q}^T}_{\mathbf{K}_\beta} \underbrace{\mathbf{Q}\delta\mathbf{Q}^T}_{-ad\mathbf{w}} = ad\mathbf{w}_{,\beta} + ad\mathbf{w} \mathbf{K}_\beta - \mathbf{K}_\beta ad\mathbf{w} = \\ &= ad\mathbf{w}_{,\beta} + \underbrace{[ad\mathbf{w}, \mathbf{K}_\beta]}_{\text{navias Liego}} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Zgodnie ze związkiem

$$\kappa_\beta = \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^T) = \text{ad}^{-1}(\mathbf{K}_\beta) \quad (\text{A.9})$$

oraz wykorzystując własność nawiasu Liego (por. Makowski i Stumpf 1994, wzór B.8<sub>2</sub>)

$$\text{ad}(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = [\mathbf{V}, \mathbf{W}] \quad (\text{A.10})$$

oblicza się wariację

$$\begin{aligned} \delta \kappa_\beta &= \text{ad}^{-1}(\delta \mathbf{K}_\beta) = \text{ad}^{-1} \{ \text{ad} \mathbf{w}_{,\beta} + [\text{ad} \mathbf{w}, \mathbf{K}_\beta] \} = \\ &= \mathbf{w}_{,\beta} + (\text{ad} \mathbf{w}) \kappa_\beta = \mathbf{w}_{,\beta} + \mathbf{w} \times \kappa_\beta = \mathbf{w}_{,\beta} - \kappa_\beta \times \mathbf{w} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Rozpisanie (A.2) z wykorzystaniem (A.11) prowadzi do poszukiwanego wzoru

$$\begin{aligned} d\kappa_\beta &\equiv \mathbf{Q}(\delta(\mathbf{Q}^T \kappa_\beta)) = \mathbf{Q}(\delta \mathbf{Q}^T \kappa_\beta + \mathbf{Q}^T \delta \kappa_\beta) = \mathbf{Q}(\delta \mathbf{Q}^T \kappa_\beta + \mathbf{Q}^T (\mathbf{w}_{,\beta} + (\text{ad} \mathbf{w}) \kappa_\beta)) \\ &= \cancel{\mathbf{Q} \delta \mathbf{Q}^T} \kappa_\beta + \mathbf{w}_{,\beta} + \cancel{(\text{ad} \mathbf{w})} \kappa_\beta = \mathbf{w}_{,\beta} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

## Dodatek B

### WYBRANE ZAGADNIENIA CAŁKOWANIA NUMERYCZNEGO

Problem całkowania numerycznego jest szeroko omawiany w klasycznych podręcznikach, takich jak na przykład Hildebrandt (1956), Abramovitz i Stegun (1970), Szmelter (1980), Korn i Korn (2000), Ralston (1975), Ralston i Rabinowitz (2001).

Ogólnie, zob. na przykład Ralston i Rabinowitz (2001), problem całkowania funkcji jednej zmiennej  $f(x)$  w pewnym przedziale  $[a, b]$  może być przedstawiony jako

$$\int_a^b h(x)f(x)dx \approx \sum_{j=1}^n w_j f(x_j) + e. \quad (\text{B.1})$$

We wzorze (B.1)  $h(x)$  jest funkcją wagową,  $w_j$  są wagami kwadratury,  $x_j$  są węzłami (zerami) kwadratury, a  $e$  oznacza błąd. Poprzez specyfikację  $h(x)$  uzyskuje się różne schematy całkowania, ważne w określonych przedziałach, zob. na przykład Ralston i Rabinowitz (2001).

W niniejszej pracy do całkowania macierzy elementowych wykorzystywana jest kwadratura Gaussa-Legendre'a. Powstaje ona poprzez położenie w  $h(x)=1$  (B.1) i unormowaniu dziedziny do przedziału  $[-1, 1]$ , co uzyskuje się poprzez zamianę zmiennej  $x$  na

$$y = \frac{1}{b-a}(2x - a - b). \quad (\text{B.2})$$

Węzły kwadratury  $x_j$  uzyskuje się poprzez poszukiwanie pierwiastków (zer) wielomianów Legendre'a  $P_n(x)$ , zaś stowarzyszone wagi uzyskuje się z równania

$$w_j = \frac{-2}{(n+1)P_{n+1}(x_j)P'_n(x_j)}. \quad (\text{B.3})$$

Występujące powyżej wielomiany Legendre'a  $P_n(x)$  są rozwiązaniami równania różniczkowego Legendre'a (Korn i Korn 2000)

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0. \quad (\text{B.4})$$

Jedną z metod generowania wielomianów  $P_n(x)$  jest formuła Rodriguesa (Korn i Korn 2000) w postaci

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (\text{B.5})$$

Wynikające z równania (B.5) pierwsze trzy wielomiany, odpowiednio dla  $n=0, 1, 2$  mają postać

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1). \quad (\text{B.6})$$

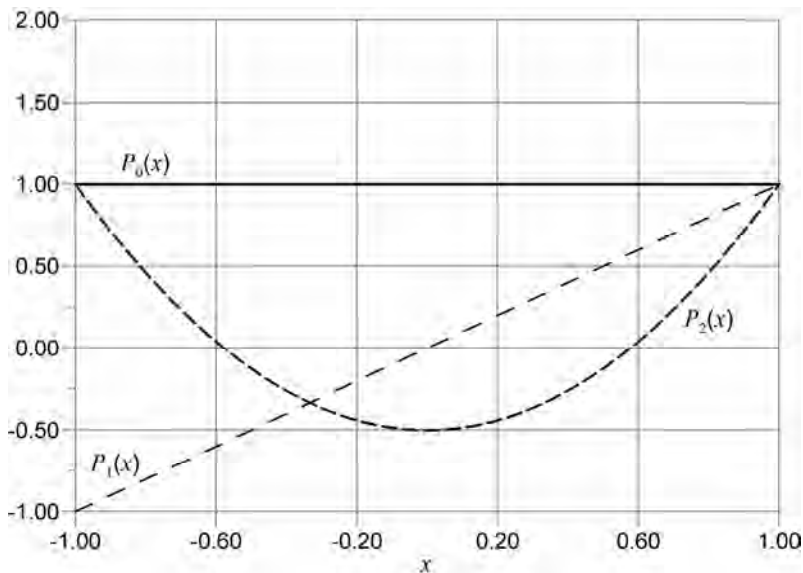


Wielomiany te przedstawia rys. B.1. Elementarne obliczenia pierwiastków (gdzie istnieją) wielomianów (B.6) prowadzą do wyznaczenia współrzędnych węzłów kwadratury Gaussa-Legendre'a, odpowiednio, pierwszego i drugiego rzędu tzn.

$$n = 1 \Rightarrow x = 0, \quad n = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (\text{B.7})$$

Podstawienie współrzędnych (B.7) do równania na wagi (B.3) daje odpowiednio wartości

$$n = 1 \Rightarrow w_j = 2, \quad n = 2 \Rightarrow w_j = 1 \quad (\text{B.8})$$



Rys. B.1. Pierwsze trzy wielomiany Legendre'a

Wzór na całkowanie w kilku wymiarach, na przykład po powierzchni, uzyskuje się, wykorzystując kwadraturę Gaussa-Legendre'a dla każdej współrzędnej osobno, zob. na przykład Hughes (2000).

Efektywną procedurę numeryczną (w języku Fortran) do generowania zer i wag reguły Gaussa-Legendre'a można znaleźć, na przykład, w książce Press i inni (1996).

Zera kwadratury Gaussa-Legendre'a nie ujmują skrajnych węzłów elementu, a rozkład węzłów na odcinku  $[-1, 1]$  jest równoodległy. Inną grupę kwadratur stanowią te z nałożonymi warunkami na węzły lub współczynniki, zob. na przykład Ralston (1975). Jedną z nich jest kwadratura Gaussa-Lobatto-Legendre'a, w której węzłami są także skrajne węzły przedziału całkowania. Tutaj węzły całkowania nie są rozmieszczone równoodległe. Kwadratura ta, w połączeniu z odpowiednią dystrybucją węzłów w elemencie skończonym w przestrzeni fizycznej, pozwala na uzyskanie (pseudo)diagonalnej macierzy mas. Ma to fundamentalne znaczenie w zagadnieniach dynamiki, zob. na przykład Chróścielewski i inni (2009), Witkowski i inni (2009), Rucka (2011) i cytowana tam literatura.

## Dodatek C

### C.1. Śledzenie ścieżek równowagi

W metodach numerycznych, do rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych, jak na przykład równanie (5.99) z niniejszej monografii, opracowano różne metody. Klasyfikację tychże metod i ich omówienie można odnaleźć, na przykład w pracy Waszczyszyn (1995). Ogólnie metody można podzielić na:

- przyrostowe, powiązane z algorytmami iteracyjnymi,
- iteracyjne nieprzyrostowe,
- metody przybliżone,
- metody asymptotyczne,
- metody specjalne.

Najczęściej stosowanymi metodami są metody przyrostowe. Można je dalej podzielić na następujące grupy:

- metody newtonowskie,
- metody quasi-newtonowskie,
- metody kierunków sprzężonych,
- metody sieczno-newtonowskie.

W niniejszej pracy do rozwiązania układu równań (5.99) przyjmuje się metodę newtonowską. Zakłada się, że obciążenie rozważanej struktury powłokowej da się scharakteryzować pojedynczym parametrem skalarnym  $\lambda \in R$ . W przypadku dynamiki parametr ten oznacza czas. Możliwe jest także szersze parametryzowanie obciążeń działających na ciało, zob. na przykład wzór 7.2 w pracy Waszczyszyn (1995).

W dalszym ciągu rozważań istotne jest pojęcie ścieżki równowagi układu.

#### *Definicja*

Ścieżką równowagi (por. na przykład Belytschko i inni 2003, str. 318) układu opisanego algebraicznym układem równań w postaci (5.99) nazywamy zbiór wszystkich rozwiązań zbieżnych tego równania, tzn. krzywą

$$\mathbf{q}(\lambda) = (\mathbf{u}(\lambda), \mathbf{Q}(\lambda)) \quad (\text{C.1})$$

Metody poszukiwania i śledzenia ścieżek równowagi nazywane są metodami kontynuacyjnymi (ang. *continuation methods*), zob. na przykład Belytschko i inni (2003). Warto zauważyć, że gładkim zmianom parametru kontrolnego  $\lambda \in R$  niekoniecznie odpowiadać muszą gładkie zmiany na ścieżce równowagi. Możliwe są bowiem punkty rozgałęzień. Dlatego też, zwykle proces śledzenia ścieżki równowagi jest zagadnieniem złożonym, często wymagającym doświadczenia użytkownika programu. W książce Belytschko i inni (2003) na str. 358 można odnaleźć uwagę, że wydajne i automatyczne procedury śledzenia ścieżek nie są jeszcze dostępne.

W pracy Belytschko i inni (2003) wyróżniono trzy zasadnicze typy rozgałęzień na ścieżkach równowagi:

- punkty graniczne, w których styczna do ścieżki równowagi zmienia znak;
- stacjonarne punkty bifurkacji, w których dochodzi do przecięcia dwóch ścieżek równowagi,

— punkty bifurkacji Hopfa, w których ścieżka równowagi przecina się ze ścieżką opisującą ruch okresowy.

Dalszą klasyfikację punktów osobliwych można odnaleźć na przykład w pracach Waszczyszyn i inni (1990) czy Waszczyszyn (1995).

W omawianej tutaj analizie przyrostowo-iteracyjnej zakłada się, że znana jest ścieżka rozwiązania układu równań określona w dyskretnej liczbie  $n$  kroków obciążenia  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  i iteracji równowagi  $i$ . Równaniu (5.99) nadaje się formę przyrostowo-iteracyjną

$$\mathbf{K}_T^{(l)} \Delta \mathbf{q}^{(i+1)} = \Delta \lambda^{(i+1)} \mathbf{p}_{ref}^{(i)} + \mathbf{j}(\mathbf{u})^{(i)} \quad (\text{C.2})$$

Górny indeks  $l$  oznacza numer ostatniej aktualizacji macierzy stycznej  $\mathbf{K}_T$ . W przyjętej tutaj standardowej wersji metody iteracyjno-przyrostowej, przyjmuje się że  $i = l$ . Oznacza to, że aktualizacja macierzy stycznej odbywa się w każdej iteracji. Powoduje to wydłużenie czasu rozwiązania zadania MES z tytułu agregacji i dekompozycji macierzy sztywności w każdej iteracji. Z tego też względu w literaturze przedmiotu znane są pewne uproszczenia. Na przykład zakłada się, że na przyroście parametru obciążenia sztywność styczna ma stałą wartość. Takie podejście prowadzić może jednak w pewnych przypadkach, zwłaszcza w zadaniach o silnej nieliniowości, do pogarszania zbieżności rozwiązania zadania.

Występujące w równaniu (C.2) wyrażenia

$$\Delta \lambda^{(i+1)} \mathbf{p}_{ref}^{(i)} = (\lambda^{(i+1)} - \lambda^{(i)}) \mathbf{p}_{ref}^{(i)}, \quad \Delta \lambda = \sum_{n=1}^i \Delta \lambda^{(n)} \quad (\text{C.3})$$

opisują odpowiednio zmianę wektora obciążenia oraz sumaryczny przyrost parametru kontrolnego (sterującego)  $\lambda \in R$ . Ostatni składnik sumy po prawej stronie równania (C.2)

$$\mathbf{j}^{(i)} = \lambda^{(i)} \mathbf{p}_{ref}^{(i)} - \mathbf{r}^{(i)} \quad (\text{C.4})$$

określa wektor sił niezrównoważonych. Dalsza procedura poszukiwanego przybliżonego rozwiązania obejmuje następujące kroki (por. na przykład klasyczną pracę Bathe i inni 1975, Bathe 1982, Belytschko i inni 2003):

#### Faza predykcji

podstawienie:  $i = 0$  (C.5)

rozwiązanie układu równań:  $\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{q} = \Delta \mathbf{p} + \mathbf{j}_{(n)}$ ,  $\Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_{(n+1)} - \mathbf{p}_{(n)}$  (C.6)

uaktualnienie zmiennych:  $\Delta \mathbf{q}_n^{(1)} \equiv \Delta \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{q}_{n+1}^{(1)} = \mathbf{q}_n + \Delta \mathbf{q}$  (C.7)

podstawienie  $i = 1$

#### Faza korekcji (iteracji)

obliczenie wektora sił niezrównoważonych z poprzedniej iteracji:

$$\mathbf{j}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{p}_{n+1} - \mathbf{r}_{n+1}^{(i)}(\mathbf{q}_{n+1}^{(i)}) \quad (\text{C.8})$$

agregacja stycznej macierzy sztywności:

$$\mathbf{K}_T^{(i)} \equiv \mathbf{K}_T^{(i)}(\mathbf{q}_{n+1}^{(i)}) \quad (\text{C.9})$$

wyznaczenie nowej poprawki do wektora przyrostu przemieszczeń ( $i+1$ )

$$\Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)} = (\mathbf{K}_T^{(i)})^{-1} \mathbf{j}_{n+1}^{(i)} \quad (\text{C.10})$$

obliczenie kolejnego przybliżenia wektora całkowitego przyrostu przemieszczeń

$$\Delta \mathbf{q}_n^{(i+1)} = \Delta \mathbf{q}_n^{(i)} + \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)} \quad (\text{przyrost liczony jest od konfiguracji } n) \quad (\text{C.11})$$

obliczenie wektora przemieszczenia z iteracji poprzedniej

$$\mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{q}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)} \quad (\text{C.12})$$

sprawdzenie warunku zbieżności procesu iteracyjnego na przykład w postaci

$$U1 > \frac{\|\mathbf{S} \delta(\Delta \mathbf{q})\|}{\|\mathbf{S} \Delta \mathbf{q}\|} \quad (\text{C.13})$$

W przypadku, gdy warunek zbieżności (C.13) nie został spełniony, kontynuuje się proces iteracji, kładąc  $i = i + 1$  w (C.8), przy czym  $i \leq i_{\max}$  o ile wcześniej ustalono maksymalną liczbę iteracji równowagi  $i_{\max}$ . W sytuacji kiedy  $i > i_{\max}$ , a kryterium (C.13) nie jest dalej spełnione, obliczenia przerywa się i konieczna jest interwencja użytkownika, na przykład w formie zmiany wielkości przyrostu  $\Delta \lambda$ . Jeśli zaś spełnione jest kryterium (C.13) wykonuje się podstawienie

$$\mathbf{q}_n (\equiv \mathbf{q}_{n+1}^{(0)}) \leftarrow \mathbf{q}_{n+1}^{(i+1)} \quad (\text{C.14})$$

i powraca do fazy predykcji (C.5).

Oznaczone wzorem (C.12) przybliżenie, ze względu na strukturę przestrzeni konfiguracyjnej  $C(M, G)$ , zob. wzór (5.20), obejmuje następujące kroki: sumowania dla pola translacji

$$\mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} = \mathbf{u}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{u}_{n+1}^{(i+1)} \quad (\text{C.15})$$

akumulacji multiplikatywnej rotacji w reprezentacji przestrzennej

$$\mathbf{Q}_{n+1}^{(i+1)} = \Delta \mathbf{Q}_{n+1}^{(i+1)} \mathbf{Q}_{n+1}^{(i)} \quad (\text{C.16})$$

Poprawkę  $\Delta \mathbf{Q}_{n+1}^{(i+1)}$  określa się na podstawie przyjętej parametryzacji grupy obrotów  $SO(3)$ . W przypadku stosowanej tutaj parametryzacji kanonicznej, poprawkę wylicza się na podstawie zależności

$$\Delta \mathbf{Q}_{n+1}^{(i+1)} = \exp(\text{ad}(\Delta \mathbf{w}_{n+1}^{(i+1)})) \quad (\text{C.17})$$

gdzie funkcja  $\exp(\dots)$  została określona wzorem (3.153). Ponadto, występujące w sformułowaniu wzbogaconym zmienne  $\Delta \boldsymbol{\beta}_{(e)}$ , jako elementy przestrzeni wektorowej podlegają aktualizacji w każdej iteracji równowagi, tzn.

$$\boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(i+1)} = \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(i)} + \Delta \boldsymbol{\beta}_{n+1}^{(i+1)} \quad (\text{C.18})$$

Zadaniem występującej we wzorze (C.13) macierzy  $\mathbf{S}$  jest selektywna eliminacja (względnie skalowanie) elementów wektora  $\Delta \mathbf{q}$ . Technika ta została zaproponowana w pracy Chróścielewski i Nolte (1985) (zob. także Schweizerhof 1989). Określenie macierzy  $\mathbf{S}$  jest następujące. Niech  $N_{\text{dof}}$  oznacza całkowitą liczbę węzłów. Wtedy

$$\mathbf{S} = \text{diag}[s_1, s_2, \dots, s_{N_{\text{dof}}}] \quad (\text{C.19})$$

Wartości elementów  $s_p \in R$  spełniają warunek  $0 \leq s_p \leq 1$ , gdzie  $p = 1, 2, \dots, N_{\text{dof}}$ . Eliminacja, czy też skalowanie wobec określenia (C.19), zapisywana jest jako

$$\Delta \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{q} \quad (\text{C.20})$$

W rozpatrywanym tu podejściu przyjęto określać zbieżność (C.13) poprzez eliminację rotacyjnych składowych wektora  $\Delta \mathbf{q}$ .

## C.2. Wyznaczanie punktów bifurkacji metodą zaburzeń

Do poszukiwania punktów bifurkacji w niniejszej pracy wykorzystuje się technikę zaburzeń. Podejście to bazuje (por. na przykład Marcinowski 1999, Chróścielewski i inni 2004) na obserwacji, że śledzenie metodami kontynuacyjnymi ścieżki deformacji układu z wprowadzoną imperfekcją jest w większości przypadków łatwiejsze. Ścieżka taka ma bowiem łagodniejszy przebieg i układa się pod ścieżką idealną, zob. rys. C.1.

Algorytm poszukiwania punktów bifurkacji zilustrowany przez rys. C.1 można zapisać następująco:

- przyjęcie imperfekcji w układzie, imperfekcja może mieć charakter pola przemieszczeń wygenerowanego numerycznie, bądź też zidentyfikowanego na podstawie badań polowych rzeczywistych konstrukcji, zob. na przykład Kowalski (2004), lub zadana w postaci obciążenia,
- podążanie ścieżką zaburzoną do momentu, w którym obliczane rozwiązanie znajdzie się w pobliżu ścieżki wtórnej,
- przeskok z punktu  $P$  do  $P'$  na ścieżce wtórnej układu idealnego,
- powrót po ścieżce pobifurkacyjnej do punktu bifurkacji.

Do niedogodności opisanego postępowania zaliczyć można brak przesłanek co do przyjęcia wartości imperfekcji. Także nie jest jasne, w jaki sposób ocenić, czy aktualne rozwiązanie na ścieżce z imperfekcją znajduje się dostatecznie blisko punktu na ścieżce pobifurkacyjnej, by można było usunąć zaburzenie. Zbyt wczesne usunięcie imperfekcji może prowadzić do przeskoku parametru obciążenia o znacznej wartości, co może powodować problemy ze spełnieniem żądanych kryteriów zbieżności. Wreszcie, samo zbliżenie się do punktu bifurkacji może być zrealizowane tylko z pewną numeryczną dokładnością. W omawianej metodzie bowiem zbliżanie się z wartością przemieszczenia kontrolnego do zera może spowodować gwałtowny spadek wartości mnożnika obciążenia.



Rys. C.1. Śledzenie ścieżki deformacji metodą zaburzeń

## Dodatek D

### WYBRANE WIADOMOŚCI MATEMATYCZNE

W niniejszym podrozdziale zestawiono w sposób syntetyczny zasadnicze dla niniejszej monografii pojęcia matematyczne.

#### Grupa

Grupą (Trajdos 1974) nazywamy parę  $(G, *)$ , gdzie  $G$  jest zbiorem, zaś  $*$  jest w nim działaniem wewnętrznym, spełniającym następujące warunki:

— działanie to jest półgrupowe (łączone)

$$(\forall a, b, c \in G)((a * b) * c = a * (b * c)) \quad (\text{D.1})$$

— istnieje element neutralny  $e$  względem tego działania

$$(\exists e \in G)(\forall a \in G)(a * e = e * a = a) \quad (\text{D.2})$$

— dla każdego elementu istnieje element do niego symetryczny

$$(\forall a \in G)(\exists a' \in G)(a * a' = a' * a = e) \quad (\text{D.3})$$

Grupę nazywa się przemienną (abelową), gdy działanie grupowe jest przemienne.

Występująca w pracy grupa obrotów  $SO(3)$  jest grupą multiplikatywną. Elementem neutralnym jest w tym przypadku tensor jednostkowy  $\mathbf{1}$ , a elementem symetrycznym jest tensor  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$  nazywany tensorem odwrotnym do  $\mathbf{A}$ . Grupa ta, w ogólności<sup>79</sup>, nie jest grupą abelową ze względu na działanie wewnętrzne nasunięcia prostego tensorów (zob. na przykład Holzapfel 2001), tzn. składania obrotów.

#### Dyfeomorfizm

Dyfeomorfizmem nazywa się odwzorowanie  $f$  przestrzeni  $A$  na przestrzeń  $B$ , które jest wzajemnie jednoznaczne i obydwa odwzorowania  $f : A \rightarrow B$  i  $f^{-1} : B \rightarrow A$  są gładkie. Tutaj gładkość oznacza przynależność rozwiązania do klasy  $C^\infty$ .

#### Homeomorfizm

Homeomorfizmem nazywa się odwzorowanie  $f$  przestrzeni  $A$  na przestrzeń  $B$ , które jest wzajemnie jednoznaczne i obydwa odwzorowania  $f : A \rightarrow B$  i  $f^{-1} : B \rightarrow A$  są ciągłe.

#### Homomorfizm, izomorfizm

Niech  $H$  będzie jednym modelem matematycznym zawierającym obiekty  $a, b, \dots$  i operacje  $O, P, \dots$ , których wyniki  $O(a, b, \dots)$  i  $P(a, b, \dots)$  należą do  $H$ . Model  $H'$  nazywa się obrazem homorficznym  $H$ , względem przekształcenia  $O$ , gdy:

- istnieje odpowiedniość jednoznaczna  $a \rightarrow a', b \rightarrow b', \dots$  przypisująca każdemu elementowi modelu  $H$  dokładnie jeden element modelu  $H'$ ,
- określona jest operacja  $O'$  na elementach modelu  $H'$ , taka że  $O(a, b, \dots) \rightarrow O'(a', b', \dots)$ .

---

<sup>79</sup> Szczególnym przypadkiem składania obrotów zachowującego własność przemienności jest obrót wokół ustalonej osi (Rymarz 1993).

Izomorfizm, jest to homomorfizm z odpowiedniością wzajemnie jednoznaczna na (Korn i Korn 2000).

### *Przestrzeń topologiczna*

Przestrzenią topologiczną nazywa się parę  $(X, \tau)$  złożoną ze zbioru  $X$  i rodziny  $\tau$  jego podzbiorów spełniających warunki (aksjomaty):

- $\emptyset \in \tau$  oraz  $X \in \tau$ ,
- jeśli  $U_1 \in \tau$  i  $U_2 \in \tau$ , to  $U_1 \cap U_2 \in \tau$ ,
- jeśli  $A \in \tau$ , to  $\bigcup A \in \tau$ .

Zbiór  $X$  nazywa się przestrzenią, jego elementy punktami przestrzeni, a podzbiory należące do rodziny  $\tau$  zbiorami otwartymi. Rodzinę  $\tau$  nazywa się również topologią w zbiorze  $X$ . Wymienione wyżej warunki można wysłowić następująco:

- zbiór pusty i cała przestrzeń są zbiorami otwartymi,
- iloczyn dwóch zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym,
- suma dowolnie wielu zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym (Engelking 2007).

### *Baza przestrzeni topologicznej*

Rodzinę  $\mathcal{B} \in \tau$  nazywamy bazą (przeliczalną) przestrzeni topologicznej  $(X, \tau)$  jeśli każdy niepusty zbiór otwarty w przestrzeni  $X$  jest sumą pewnej (przeliczalnej) liczby zbiorów rodziny  $\mathcal{B}$  (Engelking 2007, Wang i Truesdell 1973).

### *Zbiór otwarty*

Jeśli dla pewnego  $x \in X$  i zbioru otwartego  $U \subset X$  mamy  $x \in U$ , to mówi się, że  $U$  jest otoczeniem punktu  $x$ . Zbiór  $V \subset X$  jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy każdy punkt  $x \in V$  ma otoczenie  $U_x$  zawarte w  $V$  (Engelking 2007).

### *Przestrzeń Hausdorffa*

Przestrzeń topologiczną  $X$  nazywamy przestrzenią Hausdorffa, jeśli dla każdej pary różnych punktów  $x, y \in X$  istnieją takie otoczenia  $U_x$  i  $U_y$  odpowiednio punktów  $x$  i  $y$ , że  $U_x \cap U_y = \emptyset$  (Engelking 2007).

### *Pokrycie otwarte*

Rodzinę  $\{A_s\}_{s \in S}$  podzbiorów zbioru  $X$  nazywa się pokryciem  $X$ , jeśli  $\bigcup A_s = X$ . Jeśli  $X$  jest przestrzenią topologiczną i wszystkie zbiory  $A_s$  są otwarte, to  $\{A_s\}_{s \in S}$  pokrycie nazywane jest pokryciem otwartym (Engelking 2007).

### *Przestrzeń metryczna*

Przestrzenią metryczną nazywa się parę  $(X, d)$  złożoną ze zbioru  $X$  i funkcji  $d$  określonej na iloczynie kartezjańskim  $X \times X$ , przyjmującej wartości rzeczywiste i nieujemne i spełniającej następujące warunki:

- $d(x, y) = 0$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $x = y$ ,
- $d(x, y) = d(y, x)$  dla wszelkich  $x, y \in X$ ,
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$  dla wszelkich  $x, y, z \in X$ .

Zbiór  $X$  nazywa się przestrzenią, jego elementy punktami, funkcję  $d$  metryką w zbiorze  $X$ , a liczbę  $d(x, y)$  odległością punktów  $x$  i  $y$  (Engelking 2007).

Niech dana będzie przestrzeń metryczna  $(X, d)$ , punkt  $x_0 \in X$  oraz liczba  $r > 0$ ; *kulą otwartą* nazywa się zbiór  $K(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$ . Można pokazać że każda przestrzeń metryczna  $(X, d)$  wyznacza pewną przestrzeń topologiczną  $(X, \tau)$ . Rodzinę  $\tau$  stanowią sumy kul otwartych, a rodzina wszystkich kul otwartych jest bazą przestrzeni  $(X, \tau)$  (Engelking 2007).

*Przestrzeń liniowa*

Przestrzeń wektorowa (liniowa) (Rudin 2009, por. też na przykład Nagórski i Szcześniak 1993) nad ciałem liczb rzeczywistych  $R$  jest to zbiór  $V$ , którego elementy nazywamy wektorami wraz z dwoma operacjami dodawania i mnożenia przez skalary spełniającymi warunki algebraiczne:

- działania grupowego abelowego addytywnego, z elementem neutralnym jako wektorem zerowym  $\mathbf{0}$  tzn. i elementem symetrycznym jako wektorem przeciwnym  $-\mathbf{x}$  do wektora  $\mathbf{x}$ ,
- każdej parze  $(\alpha, \mathbf{x})$ , gdzie  $\alpha \in R$ , a  $\mathbf{x} \in V$ , odpowiada wektor  $\alpha\mathbf{x}$  przy czym

$$\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x} \quad (\text{D.4})$$

oraz zachodzą dwa prawa rozdzielności

$$\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x} \quad (\text{D.5})$$

*Przestrzeń unormowana*

Przestrzeń wektorowa (Nagórski i Szcześniak 1993)  $V$  jest unormowana, jeśli określona jest funkcja  $V \ni \mathbf{x} \rightarrow \|\mathbf{x}\| \in R$ , zwana normą ( $\|\mathbf{x}\|$  oznacza tutaj normę lub długość wektora  $\mathbf{x}$ ) o własnościach:

- $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ,  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ,
- $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ ,
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ .

Ostatnia własność znana jest jako nierówność Minkowskiego (Trajdos 1974). Liniowa przestrzeń unormowana staje się przestrzenią metryczną w wyniku przyjęcia metryki (Trajdos 1974)

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \quad (\text{D.6})$$

*Iloczyn skalarny*

Iloczynem skalarnym (Nagórski i Szcześniak 1993) na przestrzeni wektorowej  $V$  nazywa się funkcję

$$V \times V \ni (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in R \quad (\text{D.7})$$

o własnościach:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq 0, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{dodatnia określoność}) \quad (\text{D.8})$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \quad (\text{przemienność}) \quad (\text{D.9})$$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}, \quad \alpha(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \alpha\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (\text{liniowość}) \quad (\text{D.10})$$

Ważnymi właściwościami iloczynu skalarnego (Nagórski i Szcześniak 1993) są:

- nierówność Cauchy'ego

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \quad (\text{D.11})$$

- generowanie normy zdefiniowanej następująco

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}, \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (\text{D.12})$$

*Euklidesowa przestrzeń wektorowa  $E^n$* 

Skończenie wymiarową  $E^n$  z iloczynem skalarnym (D.7) i normą (D.12) nazywa się euklidesową przestrzenią wektorową. Baza ortonormalna w  $E^n$  określona jest przez

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (\text{D.13})$$



Szczególnym przypadkiem wektorowej przestrzeni euklidesowej jest przestrzeń arytmetyczna rzeczywista.

#### *Przestrzeń arytmetyczna rzeczywista*

Przestrzenią arytmetyczną rzeczywistą ( $n$ -wymiarową)  $R^n$  (por. na przykład Trajdos 1974, Waliszewski i inni 1990, Nagórski i Szcześniak 1993) nazywa się zbiór wszystkich ciągów rzeczywistych  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  z dodawaniem i mnożeniem przez liczbę rzeczywistą określonymi w sposób następujący:

- jeśli  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  i  $[y_1, y_2, \dots, y_n]$  są wektorami przestrzeni  $R^n$ , to dodawanie wektorów polega na dodawaniu odpowiednich współrzędnych,
- jeśli  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  jest wektorem, to mnożenie wektora przez skalar polega na pomnożeniu wszystkich składowych.

W przestrzeni tej iloczyn skalarny (D.7) w bazie ortonormalnej zapisuje się w postaci

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \rightarrow (x_i \mathbf{e}_i) \cdot (y_j \mathbf{e}_j) = x_i y_j \delta_{ij} = x_i y_i \quad (\text{D.14})$$

Przestrzeń  $R^n$  jest przestrzenią unormowaną z normą

$$\|\mathbf{x}\| \equiv \sqrt{x_i x_i} \quad (\text{D.15})$$

i przestrzenią metryczną z metryką

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \quad (\text{D.16})$$

Najważniejszym z inżynierskiego punktu widzenia przykładem<sup>80</sup> metryki (D.16) jest tzw. uogólnione twierdzenie Pitagorasa w postaci

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (\text{D.17})$$

Dowolna przestrzeń  $E^n$  jest izomorficzna (por. na przykład Nagórski i Szcześniak 1993) z przestrzenią arytmetyczną  $R^n$  tzn.  $R^n \sim E^n$ , bowiem ustalając bazę jako ortonormalną otrzymuje się odwzorowanie

$$E^n \ni \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i \rightarrow x_i \in R^n \quad (\text{D.18})$$

przyporządkowujące każdemu wektorowi z  $\mathbf{x}$  jego współrzędne  $x_i$ .

#### *Przestrzeń afiniczna*

Przestrzenią afiniczną (Waliszewski i inni 1990) nazywa się zbiór  $A$  wraz z przestrzenią wektorową skończenie wymiarową  $V$  i funkcją  $A \times A \rightarrow V$  przyporządkowującą każdej parze  $(p, q) \in A \times A$  wektor  $\underline{pq} \in V$  z zachowaniem warunków:

- dla dowolnych  $p \in A$  i  $\mathbf{v} \in V$  istnieje dokładnie jeden element  $q \in A$  taki, że  $\underline{pq} = \mathbf{v}$ ,
- $\underline{pq} + \underline{qr} = \underline{pr}$ .

#### *Afiniczna przestrzeń euklidesowa*

Afiniczną przestrzenią euklidesową (Nagórski i Szcześniak 1993)  $E^n$  nazywa się metryczną przestrzenią afiniczną, której przestrzenią stowarzyszoną jest euklidesowa przestrzeń

<sup>80</sup> Z matematycznego punktu widzenia możliwe jest określenie różnych metryk, por. na przykład Waliszewski i inni (1990).

wektorowa  $E^n$ , a metryka<sup>81</sup> jest generowana przez normę przestrzeni  $E^n$ , tzn. wzorem (D.12). Dalej, za (Nagórski i Szcześniak 1993), nazywa się tą przestrzeń przestrzenią euklidesową. Przestrzeń ta jest przestrzenią topologiczną z topologią indukowaną przez metrykę przestrzeni euklidesowej (D.17).

### Układ współrzędnych

Niech  $\mathcal{D}$  jest zbiorem otwartym w  $R^n$ . Układem współrzędnych zbioru  $\mathcal{D}$  nazywa się homeomorfizm  $\mathcal{D}$  w  $R^n$

$$\kappa : \mathcal{D} \rightarrow R^n \quad (\text{D.19})$$

Dla dowolnego  $\mathbf{v} \in \mathcal{D}$  układ liczb rzeczywistych  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$

$$\kappa(\mathbf{v}) = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in R^n \quad (\text{D.20})$$

nazywany jest współrzędnymi  $\mathbf{v}$  względem  $\kappa$ .

### Mapa

Mapą nazywa się parę  $\{\mathcal{D}, \kappa\}$  złożoną ze zbioru otwartego  $\mathcal{D} \subset E^n$  (dziedziny mapy) i homeomorfizmu  $\kappa$  (układu współrzędnych).

### Rozmaitość różniczkowalna

Zbiór  $M$  nazywany jest rozmaitością różniczkowalną, jeśli posiada topologię Hausdorffa z przeliczalną bazą i atlasem

$$\mathcal{D} = \{\{\mathcal{D}_A, \kappa_A\}, A \in I\} \quad (\text{D.21})$$

taki, że spełnione są następujące warunki

- $\{\mathcal{D}_A, A \in I\}$  jest pokryciem otwartym  $M$ ,
- $\kappa_A$  jest homeomorfizmem z  $\mathcal{D}_A$  w  $R^n$ , gdzie dodatnia liczba całkowita  $n$ , ta sama dla wszystkich  $A$ , jest zwana wymiarem  $M$ ,
- dla dowolnych dwóch indeksów  $A, \Gamma \in I$  transformacja współrzędnych

$$\kappa_A(\mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_\Gamma) \rightarrow \kappa_\Gamma(\mathcal{D}_A \cap \mathcal{D}_\Gamma) \quad (\text{D.22})$$

jest dyfeomorfizmem  $R^k$ . O mapach  $\kappa_A$  i  $\kappa_\Gamma$  mówi się, że są  $C^k$ -zgodne. W języku geografii zgodność map oznacza, że miasta położone blisko siebie na jednej mapie muszą być także blisko położone na drugiej oraz rzeki o gładkich brzegach na jednej mapie muszą być gładkie na drugiej (Kopczyński i Trautmann 1981).

- atlas  $\mathcal{D}$  (D.21) jest atlasem maksymalnym, tzn. takim, do którego nie można dodać nowych map bez naruszenia zgodności.

### Krzywa Jordana

Krzywą Jordana na powierzchni nazywa się brzeg podzbioru tej powierzchni, homeomorficznego z kołem domkniętym (Waliszewski i inni 1990).

### Powierzchnia

Powierzchnią (Nagórski i Szcześniak 1993) nazywa się dwuwymiarową rozmaitość klasy  $C^1$  (co najmniej) w przestrzeni  $E^3$ .

---

<sup>81</sup> Określając w przestrzeni unormowanej odległość punktów  $x, y$  wzorem (D.16), otrzymuje się metrykę. Tak więc każda przestrzeń unormowana jest automatycznie przestrzenią metryczną (Waliszewski i inni 1990).

## Dodatek E

### WYBRANE WIADOMOŚCI O OBROTACH

#### E.1. Grupa $SO(3)$ i $so(3)$

Tensor  $Q \in E^3 \otimes E^3$ , gdzie  $E^3$  jest euklidesową przestrzenią wektorową, o własności

$$(Qa) \cdot (Qb) = a \cdot b = b \cdot a \quad (E.1)$$

jest nazywany tensorem ortogonalnym. W ustalonej bazie tensor ten ma dziewięć składowych. Składowe te muszą jednak spełniać sześć zależności

$$Q^T Q = 1 \quad (E.2)$$

Związek (E.2) wynika z własności (E.1) oraz z faktu, że z dowolnym tensorem  $A$  stowarzyszony jest tensor transponowany  $A^T$ , taki że dla dowolnych  $p, q \in E^3$  zachodzi

$$p \cdot (A^T q) = q \cdot Ap \quad (E.3)$$

Stąd można zapisać

$$a \cdot b = (Qa) \cdot (Qb) = b \cdot (Q^T(Qa)) = b \cdot ((Q^T Q)a) \quad (E.4)$$

Widoczne jest, że aby równanie (E.4) było prawdziwe, musi zachodzić związek (E.2).

Przekształcenie o postaci

$$x = Qx \quad (E.5)$$

dla dowolnych wektorów  $x \in E^3$  oraz  $x \in E^3$  nazywane jest obrotem właściwym (ang. *proper rotation*). Obroty właściwe tworzą grupę  $SO(3)$  zdefiniowaną jako

$$SO(3) = \{Q : E^3 \rightarrow E^3 : Q^T Q = Q Q^T = 1, \det(Q) = 1\} \quad (E.6)$$

Przestrzenią styczną do grupy  $SO(3)$  w punkcie  $Q = 1$  jest przestrzeń  $so(3)$  tensorów skośnie symetrycznych

$$so(3) = \{W : W^T = -W\}. \quad (E.7)$$

#### E.2. Parametryzacja grupy obrotów

Pod pojęciem  $N$ -wymiarowej parametryzacji grupy obrotów rozumie się odwzorowanie

$$SO(3) \rightarrow R^N, \quad Q = Q(q_i). \quad (E.8)$$

Tutaj  $Q \in SO(3)$ , a  $q_i \in R^N$  oznaczają parametry obrotu. Jedną z możliwości klasyfikacji parametryzacji jest rozróżnienie parametryzacji wewnętrznej lub parametryzacji zewnętrznej. W drugim przypadku do wprowadzenia parametryzacji wymagane jest podanie układu współrzędnych (np. kąty Eulera). Inna klasyfikacja określa, czy dana parametryzacja jest globalna (tzn. czy obejmuje całą grupę obrotów w sposób nieosobliwy) lub czy jest lokalna (tzn. ważna tylko w pewnym otoczeniu  $Q$ ). Zagadnieniu grupy obrotów  $SO(3)$  i jej para-

metryzacji poświęcono wiele prac, zob. np. Stuelpnagel (1964), Argyris (1982) Pietraszkiewicz i Badur (1983), Mehrabadi i inni (1995), Ibrahimbegović (1997), Brank i Ibrahimbegović (2001), Cardona i Geradin (1988, 2001), Ibrahimbegović i Taylor (2002), Witkowski (2005), Sadłowski (2007), Mäkinen (2008), Koay (2009), Pietraszkiewicz i Eremeyev (2009b).

W rozpatrywanym w pracy podejściu wykorzystywana jest parametryzacja kanoniczna. W jej określeniu wykorzystuje się absolutnie zbieżny szereg potęgowy

$$\mathbf{Q} = \exp \mathbf{W} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{W}^n}{n!} = \mathbf{1} + \mathbf{W} + \frac{1}{2} \mathbf{W}^2 + \dots, \quad \mathbf{W} = \text{ad}(\mathbf{w}) \in \mathfrak{so}(3) \quad (\text{E.9})$$

Tutaj  $\mathbf{w}$  jest wektorem obrotu. Wykorzystanie rozwinięć funkcji trygonometrycznych  $\sin(\dots)$  i  $\cos(\dots)$  prowadzi do wzoru

$$\mathbf{Q} = \mathbf{1} + a\mathbf{W} + b\mathbf{W}^2, \quad a = \frac{\sin w}{w}, \quad b = \frac{1 - \cos w}{w^2}. \quad (\text{E.10})$$

Wykorzystując określenie śladu tensora  $\mathbf{Q}$  oraz różnicę  $\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T$  w równaniu (E.10)<sub>1</sub>, można otrzymać wzory na kąt obrotu  $w$  i wektor obrotu  $\mathbf{w}$  w funkcji tensora  $\mathbf{Q}$ , tzn.

$$w = \arccos\left(\frac{1}{2}(\text{tr}\mathbf{Q} - 1)\right), \quad \mathbf{w} = \frac{1}{2 \sin w} \text{ad}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T) \quad (\text{E.11})$$

### E.3. Akumulacja obrotów, pochodna kierunkowa

Niech  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , jest ustaloną w czasie bazą ortonormalną. Działając na  $\mathbf{e}_i$  tensorem obrotu  $\mathbf{Q}$ , otrzymuje się nową bazę  $\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i \quad (\text{E.12})$$

Rozważa się teraz pewien przyrost obrotu przeprowadzający bazę  $\mathbf{e}_i$  w pewną, uaktualnioną bazę  ${}^A\mathbf{e}_i$ . Możliwe są dwa opisy tego przyrostu.

#### Transformacja przestrzenna

W reprezentacji tej całkowity obrót bazy  $\mathbf{e}_i$  do bazy uaktualnionej  ${}^A\mathbf{e}_i$  opisany jest przez lewostronne nałożenie przyrostu tensora obrotu

$$\Delta\mathbf{Q}^L \in \mathfrak{SO}(3) \quad (\text{E.13})$$

na aktualny tensor obrotu  $\mathbf{Q}$ , tzn.

$${}^A\mathbf{e}_i = \Delta\mathbf{Q}^L \mathbf{e}_i = \Delta\mathbf{Q}^L \mathbf{Q} \mathbf{e}_i, \quad {}^A\mathbf{Q} = \Delta\mathbf{Q}^L \mathbf{Q} \quad (\text{E.14})$$

#### Transformacja materialna

W reprezentacji materialnej całkowity obrót bazy  $\mathbf{e}_i$  do bazy uaktualnionej  ${}^A\mathbf{e}_i$  opisany jest przez prawostronne nałożenie przyrostu tensora obrotu

$$\Delta\mathbf{Q}^P \in \mathfrak{SO}(3) \quad (\text{E.15})$$

na aktualny tensor obrotu  $\mathbf{Q}$  tzn.

$${}^A\mathbf{e}_i = \mathbf{Q} \Delta\mathbf{Q}^P \mathbf{e}_i, \quad {}^A\mathbf{e}_i = \mathbf{Q} \Delta\mathbf{Q}^P \mathbf{e}_i \quad (\text{E.16})$$

W przypadku transformacji przestrzennej przyrost obrotu rozumiany jest jako rotacja bazy aktualnej, zaś w przypadku transformacji materialnej jako rotacja bazy początkowej.

### Pochodna kierunkowa na grupie obrotów $SO(3)$ , wariacja obrotu

Niech  $\mathbf{a}$  i  $\mathbf{a}$  oznaczają wirtualne przyrosty wektora obrotu odpowiednio w reprezentacji przestrzennej i materialnej i niech

$$\mathbf{Q}(\eta) \in SO(3) \quad (\text{E.17})$$

oznacza pewną krzywą na grupie obrotów, parametryzowaną rzeczywistym parametrem skalarnym  $\eta$ . Krzywa ta przechodzi, w szczególności, przez punkt regularny  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(0)$  i ma dwie równoważne reprezentacje:

$$\text{przestrzenną } \mathbf{Q}(\eta) = [\exp(\text{ad}\eta\mathbf{a})]\mathbf{Q}, \quad (\text{E.18})$$

$$\text{materialną } \mathbf{Q}(\eta) = \mathbf{Q}[\exp(\text{ad}\eta\mathbf{a})]. \quad (\text{E.19})$$

Wariację tensora obrotu uzyskuje się w wyniku obliczania pochodnej kierunkowej. W reprezentacji przestrzennej otrzymuje się

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{Q}[\mathbf{Q}; \text{ad}(\mathbf{a})] &\equiv \frac{d}{d\eta}\mathbf{Q}(\eta)|_{\eta=0} = \frac{d}{d\eta}\exp(\text{ad}\eta\mathbf{a})|_{\eta=0}\mathbf{Q} \\ &= \left( \text{ad}\left(\frac{d}{d\eta}\eta\mathbf{a}\right) \right) \Big|_{\eta=0} (\exp(\text{ad}\eta\mathbf{a}))|_{\eta=0}\mathbf{Q} = \text{ada}\mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

a w reprezentacji materialnej

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{Q}[\mathbf{Q}; \text{ad}(\mathbf{a})] &\equiv \frac{d}{d\eta}\mathbf{Q}(\eta)|_{\eta=0} = \mathbf{Q}\frac{d}{d\eta}\exp(\text{ad}\eta\mathbf{a})|_{\eta=0} = \\ &= \mathbf{Q}\left( \text{ad}\left(\frac{d}{d\eta}\eta\mathbf{a}\right) \right) \Big|_{\eta=0} (\exp(\text{ad}\eta\mathbf{a}))|_{\eta=0} = \mathbf{Q}\text{ada} \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Zapisane tu wzory (E.20) i (E.21) są równoważne. Wynika z nich, że obliczenie pochodnej kierunkowej na grupie obrotów  $SO(3)$  wymaga lewo- bądź prawostronnego nałożenia nałożeniu skośnie symetrycznego tensora  $\text{ada}$  bądź  $\text{ada}$  na aktualny tensor obrotu  $\mathbf{Q}$ .