

AGNIESZKA SABIK

ANALIZA STATECZNOŚCI
POWŁOK WARSTWOWYCH
OBCIĄŻONYCH TERMICZNIE

POLITECHNIKA GDAŃSKA

monografie

126

POLITECHNIKA GDAŃSKA

AGNIESZKA SABIK

ANALIZA STATECZNOŚCI
POWŁOK WARSTWOWYCH
OBCIĄŻONYCH TERMICZNIE



GDAŃSK 2012

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Romuald Szymkiewicz

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH

Janusz T. Cieśliński

REDAKTOR SERII

Jerzy M. Sawicki

RECENZENCI

Wojciech Pietraszkiewicz

Krzysztof Wiśniewski

PROJEKT OKŁADKI

Jolanta Cieślawska

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
www.pg.gda.pl/wydawnictwo/oferta

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej, Gdańsk 2012

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie
i w jakiegokolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

ISBN 978-83-7348-437-5

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Ark. wyd. 7,8, ark. druku 8,5, 126/711

Druk i oprawa: *EXPOL* P. Rybiński, J. Dąbek, Sp. Jawna
ul. Brzeska 4, 87-800 Włocławek, tel. 54 232 37 23

SPIS TREŚCI

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW	5
PRZEDMOWA	9
1. WSTĘP	11
1.1. Powłoki warstwowe – charakterystyka	11
1.2. Podejścia stosowane w modelowaniu ośrodków warstwowych	13
1.3. Zagadnienie stateczności powłok	16
1.3.1. Problem stateczności w praktyce inżynierskiej	16
1.3.2. Analiza stateczności	17
1.4. Analiza wyężenia kompozytów warstwowych	19
1.5. Powłoki warstwowe obciążone termicznie	21
1.6. Uzasadnienie podjęcia tematyki pracy	24
1.7. Cel i zakres pracy	24
1.8. Układ i zawartość pracy	25
2. MODEL POWŁOKI	26
2.1. Geometria i kinematyka powłoki	26
2.1.1. Podstawy geometrii powierzchni i elementy rachunku tensorowego	26
2.1.2. Opis przemieszczeń w ramach teorii ścinania pierwszego rzędu	31
2.1.3. Odształcenia w ramach opisu 6-parametrowego	32
2.1.4. Kinematyka powłoki w ramach opisu 5-parametrowego	33
2.2. Obciążenie termiczne	36
2.3. Związek konstytutywny w punkcie ośrodka	38
2.3.1. Związek konstytutywny w układzie osi materiałowych	38
2.3.2. Naprężenia w globalnym układzie odniesienia powłoki	42
2.4. Sformułowanie słabe problemu brzegowego	44
2.5. Związek konstytutywny na poziomie przekroju	48
2.6. Kryterium Tsai-Wu w analizie wyężenia materiału	50
3. IMPLEMENTACJA NUMERYCZNA	53
3.1. Elementy skończone stosowane w analizie	53
3.2. Macierzowa reprezentacja zasady przemieszczeń wirtualnych	54
3.3. Ogólne uwagi o równaniu przyrostowym	56
3.4. Metody śledzenia ścieżek równowagi	58
3.4.1. Sterowanie obciążeniowe	59
3.4.2. Sterowanie parametrem łuku	60
3.5. Analiza nieliniowa z uwzględnieniem imperfekcji	66
3.6. Kontrola wyężenia materiału	66
4. PRZYKŁADY NUMERYCZNE	68
4.1. Izotropowe pasmo płytowe	69
4.2. Płyta sandwiczowa	70
4.3. Płyta warstwowa obciążona gradientem temperatury	73
4.4. Płyta warstwowa o różnych schematach uwarstwienia	76
4.5. Ortotropowa powłoka cylindryczna	78
4.6. Powłoka cylindryczna <i>cross-ply</i>	86
4.7. Powłoka cylindryczna <i>angle-ply</i>	92
4.8. Ortotropowa powłoka sferyczna	95
4.9. Powłoka sferyczna o niesymetrycznym uwarstwieniu	100

5. PODSUMOWANIE	104
BIBLIOGRAFIA	107
Streszczenie w języku polskim	116
Streszczenie w języku angielskim	117
Dodatek A: Zależności przemieszczenia-odkształcenia w ramach teorii 6-parametrowej	118
Dodatek B: Wyznaczanie współczynników korekcyjnych ścinania dla powłok warstwowych.....	124
Dodatek C: Transformacja wewnętrznej pracy wirtualnej	130
Dodatek D: Uogólnione miary naprężeń powłoki	132

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ I SKRÓTÓW

Oznaczenia

- A, B, L – wymiary powierzchniowe płyty/powłoki
 a, b, c – lokalne osie materiałowe
 ${}^m \mathbf{a}_i$ – kowariantne wektory bazy lokalnej na powierzchni odniesienia w chwili $t = m$
 ${}^m \mathbf{a}^i$ – kontrawariantne wektory bazy lokalnej na powierzchni odniesienia w chwili $t = m$
 ${}^m \mathbf{a}$ – tensor metryczny bazy lokalnej na powierzchni odniesienia w chwili $t = m$
 ${}^m a_{\alpha\beta}, {}^m a^{\alpha\beta}$ – kowariantne i kontrawariantne składowe tensora metrycznego ${}^m \mathbf{a}$
 ${}^m b_{\alpha\beta}, {}^m b_\beta^\delta$ – składowe tensora krzywizny, odpowiednio, kowariantne i mieszane
 $[C_m]$ – macierz konstytutywna warstwy w układzie osi materiałowych
 $[C]$ – macierz konstytutywna warstwy w układzie osi globalnych
 $\{C_{th,m}\}$ – wektor konstytutywny warstwy związany z temperaturą w osiach materiałowych
 $\{C_{th}\}$ – wektor konstytutywny warstwy związany z temperaturą w osiach globalnych
 ${}^m \mathbf{d}$ – dyrektor w chwili $t = m$
 dS – długość elementarnego odcinka na powierzchni odniesienia powłoki
 ds – długość elementarnego odcinka na dowolnej powierzchni powłoki
 ds^2 – kwadrat długości łuku w technice sterowania parametrem ścieżki
 ${}^0 dV, {}^0 d\Omega, {}^0 dH$ – element objętości, powierzchni i grubości w konfiguracji początkowej
 E_a, E_b – moduły Younga materiału w kierunku równoległym i prostopadłym do włókien zbrojenia
 E – moduł Younga materiału izotropowego
 ${}^m E$ – ogólne oznaczenie odkształceń Lagrange'a-Greena w chwili $t = m$
 ${}^m E^{th}$ – ogólne oznaczenie odkształceń termicznych w chwili $t = m$
 ${}^m E_{mn}^{th}$ – składowe odkształceń termicznych w chwili $t = m$
 ${}^0 E_{mn}$ – przyrosty odkształceń Lagrange'a-Greena
 ${}^m \mathbf{E}, {}^0 E_{mn}$ – tensor odkształcenia Lagrange'a-Greena i jego składowe w konfiguracji $t = m$
 ${}^m \mathbf{e}, {}^m e_{mn}$ – tensor odkształcenia Eulera-Almansi'ego i jego składowe w konfiguracji $t = m$
 ${}^m \mathbf{F}, {}^0 F_{mn}$ – materialny gradient deformacji i jego składowe w konfiguracji $t = m$
 ${}^0 \mathbf{F}, {}^m F_{mn}$ – odwrotność materialnego gradientu deformacji i jej składowe w konfiguracji $t = m$
 \mathbf{F}_{th} – wektor obciążenia termicznego
 \mathbf{F} – wektor sił zrównoważonych
 G_{ab}, G_{ac}, G_{bc} – moduły odkształcalności postaciowej w płaszczyznach a - b , a - c , b - c
 ${}^m \mathbf{g}_i$ – kowariantne wektory bazy lokalnej w dowolnym punkcie w chwili $t = m$
 ${}^m \mathbf{g}^i$ – kontrawariantne wektory bazy lokalnej w dowolnym punkcie w chwili $t = m$
 ${}^m \mathbf{g}$ – tensor metryczny bazy lokalnej w dowolnym punkcie w chwili $t = m$
 ${}^m g_{\alpha\beta}, {}^m g^{\alpha\beta}$ – kowariantne i kontrawariantne składowe tensora metrycznego ${}^m \mathbf{g}$
 H – grubość powłoki
 $[{}^0 \mathcal{H}_{mech}]$ – macierz konstytutywna na poziomie przekroju dla czynnika mechanicznego
 $[{}^0 \mathcal{H}_{th}]$ – macierz konstytutywna na poziomie przekroju dla czynnika termicznego
 i, j, k, m, n – indeksy łacińskie przyjmujące wartości 1, 2, 3
 J – wyznacznik materialnego gradientu deformacji
 k, k_{13}, k_{23} – współczynniki korekcyjne ścinania
 \mathbf{K} – globalna macierz sztywności
 ${}^2 L_{mech}^{mn}$ – uogólnione miary naprężeń mechanicznych w konfiguracji $t = 2$
 ${}^0 L_{mech}, {}^1 L_{mech}^{mn}$ – uogólnione miary naprężeń mechanicznych w konfiguracji $t = 1$ i ich przyrosty

${}^2_0L^{\alpha\beta}_{th}$	– uogólnione miary naprężeń termicznych w konfiguracji $t=2$
m	– oznaczenie dowolnej chwili czasowej ($t=m$)
${}^0\mathbf{n}$	– wektor jednostkowy prostopadły do powierzchni odniesienia w chwili $t=0$
q_M	– przemieszczenie (stopień swobody) w węzle elementu skończonego
$\mathbf{q}, \Delta\mathbf{q}$	– wektor węzłowych przemieszczeń całkowitych i ich przyrostów
$\delta\mathbf{q}$	– wektor poprawki przemieszczeń węzłowych
\mathbf{q}_{imp}	– wektor początkowych imperfekcji geometrycznych
R	– promień powłoki
${}^m\mathbf{r}$	– promień wodzący punktu na powierzchni odniesienia powłoki w konfiguracji $t=m$
${}^m\mathbf{R}$	– promień wodzący dowolnego punktu na grubości powłoki w konfiguracji $t=m$
${}^mS_{ef}$	– oznaczenie ogólne składowych naprężeń efektywnych w konfiguracji $t=m$
${}^mS_{mech}$	– oznaczenie ogólne składowych naprężeń mechanicznych w konfiguracji $t=m$
${}^mS_{th}$	– oznaczenie ogólne składowych naprężeń termicznych w konfiguracji $t=m$
${}_0S^{mn}_{mech}$	– przyrosty składowych naprężeń mechanicznych
${}^2_0S^{mn}_{mech}$	– składowe naprężeń termicznych w konfiguracji $t=m$
S_s	– wytrzymałość materiału warstwy na ścięcie w jej płaszczyźnie
${}^m\mathbf{S}_{ef}, {}^m\mathbf{S}^{mn}_{ef}$	– drugi tensor naprężeń efektywnych Pioli-Kirchhoffa i jego składowe w chwili $t=m$
$\{ {}^0\mathbf{S}_{mech} \}$	– wektor przyrostów uogólnionych miar naprężeń mechanicznych
$\{ {}^2_0\mathbf{S}_{th} \}$	– wektor uogólnionych miar naprężeń termicznych w konfiguracji $t=2$
t	– umowny czas
T_{cr}	– temperatura krytyczna
T_{init}	– temperatura początkowa
T_{TW}	– temperatura zniszczenia
${}^m_0T(\theta^3)$	– przyrost temperatury w dowolnym punkcie na grubości powłoki w chwili $t=m$
${}^m_0T_t, {}^m_0T_b,$	– przyrost temperatury na powierzchni górnej i dolnej powłoki w chwili $t=m$
$[T]$	– macierz transformacji parametrów materiałowych
u_M	– przemieszczenie w dowolnym punkcie elementu skończonego
${}^m\mathbf{V}$	– wektor przemieszczenia w konfiguracji $t=m$
${}^m v_i, {}^m v^i$	– kowariantne i kontrawariantne składowe wektora ${}^m\mathbf{V}$
X, Y, Z	– współrzędne kartezjańskie
X_t, X_c	– wytrzymałość warstwy na rozciąganie i ściskanie w kierunku włókien
Y_t, Y_c	– wytrzymałość warstwy na rozciąganie i ściskanie w poprzek włókien
α, β, δ	– indeksy greckie przyjmujące wartości 1,2
$\alpha^{th}_{aa}, \alpha^{th}_{bb}$	– współczynniki rozszerzalności termicznej materiału wzdłuż i w poprzek włókien
α^{th}	– współczynnik rozszerzalności termicznej materiału izotropowego
α_k	– kąt orientacji zbrojenia warstwy
δ^{α}_{β}	– delta Kroneckera
$\{ {}^0\mathcal{E}_{mech} \}$	– wektor przyrostów uogólnionych miar odkształceń Lagrange’a-Greena
${}^m\lambda_{th}$	– parametr obciążenia temperaturą
$\Delta\lambda^{th}$	– przyrost parametru obciążenia temperaturą
$\delta\lambda^{th}$	– poprawka parametru obciążenia temperaturą
${}^0\Gamma^{\delta}_{\alpha\beta}$	– symbol Christoffela drugiego rodzaju w chwili $t=0$
${}^0\mu^{\alpha}_{\alpha}, {}^0\mu$	– składowe i wyznacznik tensora przesunięcia w chwili $t=0$
v_{ab}	– współczynnik Poissona w płaszczyźnie $a-b$
v	– współczynnik Poissona materiału izotropowego
Π	– całkowita energia potencjalna
${}^2_0\boldsymbol{\sigma}_{ef}, {}^2_0\boldsymbol{\sigma}^{ij}_{ef}$	– tensor naprężeń efektywnych Cauchy’ego i jego składowe

- $\frac{1}{2}\sigma_{mech}^{ij}, \frac{1}{2}\sigma_{th}^{ij}$ – składowe naprężeń Cauchy’ego: mechaniczne i termiczne
 $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ – współrzędne krzywoliniowe

Skróty

- DL (LW) – dyskretny model warstwowy (ang. *Discrete-Layer* lub *Layer-Wise*)
ESL – model pojedynczej warstwy zastępczej (ang. *Equivalent Single Layer*)
FI – indeks zniszczenia (ang. *Failure Index*)
FI – pełne całkowanie sztywności elementu skończonego
FPF – model zniszczenia pierwszej warstwy laminatu (ang. *First-Ply Failure*)
LPF – model zniszczenia ostatniej warstwy laminatu (ang. *Last-Ply Failure*)
LRT5 – 5-parametrowy model teorii powłok z uwzględnieniem dużych obrotów (ang. *Large Rotation Theory*)
MES – Metoda Elementów Skończonych
SRI – selektywnie zredukowane całkowanie sztywności elementu skończonego
URI – jednolicie zredukowane całkowanie sztywności elementu skończonego

PRZEDMOWA

Niniejsza praca powstała na podstawie maszynopisu rozprawy doktorskiej¹⁾ pt. *Numeryczna analiza kompozytowych powłok warstwowych z uwzględnieniem wpływów termicznych*, powstałej pod kierunkiem dr. hab. inż. Ireneusza Krei, prof. nadzw. PG. Rozprawa ta stanowiła podstawę do nadania Autorce tytułu doktora nauk technicznych z wyróżnieniem przez Radę Wydziału Inżynierii Lądowej i Środowiska Politechniki Gdańskiej w dniu 18.01.2012 roku. Uwzględniając uwagi Recenzentów przewodu doktorskiego oraz wnioski z dyskusji podczas publicznej obrony, wprowadzono do niniejszego wydania pewne zmiany, w tym m.in. zmianę tytułu pracy, który w obecnym brzmieniu w większym stopniu odzwierciedla jej zawartość.

Przedmiotem pracy jest analiza stateczności kompozytowych powłok warstwowych poddanych obciążeniu termicznemu. W ramach realizacji tego celu rozbudowane zostało podejście zaproponowane w monografii [79]. Sformułowanie opisane w [79] umożliwia analizę obciążonych mechanicznie kompozytowych powłok warstwowych w zakresie geometrycznie nieliniowym. Dla potrzeb niniejszej pracy powyższy model rozszerzono na zakres obciążeń termicznych, jak również dodano moduł analizy stanu naprężenia i wytężenia w warstwach laminatu, co wzbogaca informację o globalnej nośności badanej konstrukcji.

Wydanie niniejszej monografii uzyskało dofinansowanie z dotacji celowej na prowadzenie w 2011 r. badań naukowych lub prac rozwojowych oraz zadań z nimi związanych, służących rozwojowi młodych naukowców oraz uczestników studiów doktoranckich, finansowanych w wewnętrznym trybie konkursowym.

¹⁾ Sabik A.: Numeryczna analiza kompozytowych powłok warstwowych z uwzględnieniem wpływów termicznych. Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska, 2012.

Praca doktorska zrealizowana w ramach projektu badawczego własnego pt. *Nieliniowa teoria i analiza deformacji i stateczności warstwowych powłok kompozytowych metodą elementów skończonych* w ramach umowy nr 2542/B/T02/2009/37 do wniosku nr N N506 254237 z Ministrem Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Rozdział 1

WSTĘP

Rozdział stanowi wprowadzenie w tematykę pracy. Rozpoczyna go przedstawienie cech charakteryzujących powłoki warstwowe, następnie omówiono podejścia stosowane w ich modelowaniu. W dalszej kolejności uwagę poświęcono zagadnieniu stateczności konstrukcji powłokowych i metodom stosowanym w jej badaniu. Następnie omówiona została analiza wyteżenia materiału. W oddzielnym podpunkcie zawarto przegląd literatury dotyczącej zagadnienia stateczności powłok warstwowych poddanych obciążeniu termicznemu. Na tym tle przedstawiano uzasadnienie podjęcia tematu pracy, sprecyzowano jej cel oraz zakres. Na końcu zaprezentowano układ monografii.

1.1. Powłoki warstwowe – charakterystyka

Powłoką z definicji jest dźwigar powierzchniowy, którego jeden z wymiarów – grubość – jest znacznie mniejszy od dwóch pozostałych [19, 76]. Definicja ta obejmuje zarówno powłoki zakrzywione, jak i także płyty. Dla inżyniera konstruktora powłoka, zwłaszcza zakrzywiona, to najatrakcyjniejszy element konstrukcyjny, którego bezdyskusyjną zaletą jest mały ciężar przy charakterystycznej dużej nośności. Zakrzywienie dźwigara powoduje bowiem uaktywnienie sił membranowych w przenoszeniu obciążenia przy jednoczesnym zmniejszeniu udziału momentów zginających [29, 124]. W przypadku granicznym, gdy zginanie jest całkowicie wyeliminowane, rozkład naprężeń na grubości przekroju jest równomierny, co pozwala konstrukcji na przenoszenie znacznych obciążeń przy stosunkowo małej grubości.

W budownictwie powłoki są często spotykane jako samodzielne konstrukcje budowlane (komin, chłodnie kominowe, rury, zbiorniki) czy jako fragmenty innych obiektów (ściany, kopuły). Są one także powszechne w przemyśle motoryzacyjnym, lotniczym czy stoczniowym. Jak już jednak podkreślono w wielu pracach [29, 76, 79, 124, 177], to nie człowiek odkrył, że powierzchniowy element zakrzywiony może być bardzo wytrzymały mimo swej lekkości. Szereg przykładów konstrukcji powłokowych znaleźć można bowiem w naturze – choćby powłokowe domki ślimaka i żółwia czy też skorupki jaj oraz łupiny niektórych owoców.

Powłokę charakteryzuje znaczna dysproporcja między wymiarami powierzchniowymi a grubością, np. $L/H \gg 100$, gdzie L jest większym wymiarem powierzchniowym, a H grubością powłoki. Jest to zwykle struktura lekka, cienkościenna. Warto podkreślić, że o stopniu jej smukłości w sposób istotny decyduje materiał, z którego powłokę wykonano. Starsze inżynierskie konstrukcje powłokowe, np. kopuły Bazyliki św. Piotra w Rzymie czy Panteonu w Paryżu są bardziej krępe niż na przykład obecnie powszechnie spotykane konstrukcje walcowych zbiorników stalowych. Charakteryzujący obecne czasy intensywny rozwój inżynierii materiałowej dostarcza coraz to nowych tworzyw, dając tym samym nowe narzędzia inżynierom, między innymi do projektowania coraz lżejszych, smuklejszych struktur powłokowych. Jest to naturalny proces, który bardzo trafnie skomentowano

w pracy [84]: *Potrzeba racjonalnego wykorzystania własności materiałów staje się nie tylko koniecznością czy nawet modą obecnych czasów, ale jest również dowodem poziomu technicznego społeczeństwa.*

Rozważane w pracy kompozytowe powłoki warstwowe są właśnie jednym z przykładów, wspomnianego wyżej, racjonalnego wykorzystania właściwości materiałów.

Wyjaśnijmy, że o ile sam laminat, a więc układ kilku połączonych ze sobą warstw jest kompozytem, właściwie kompozytem warstwowym, to także każda z jego warstw może stanowić kompozyt, choć niekoniecznie. Można rozróżnić dwie główne grupy kompozytów warstwowych:

- struktury sandwichowe, z reguły trójwarstwowe, w których dwie zewnętrzne warstwy stanowią sztywne, często jednorodne (np. metalowe) okładki, a warstwa środkowa jest lekkim wypełnieniem (np. piankowym lub strukturalnym) [79, 80, 84] pełniącym rolę izolacyjną oraz dystansową dla okładek; odnosząc się do teorii prętów, układ taki jest analogiczny do przekroju dwuteowego, gdyż podstawowym zadaniem zewnętrznych okładek jest przenoszenie obciążenia, natomiast zadaniem wypełnienia jest utrzymanie okładek w odpowiedniej odległości, ewentualnie przenoszenie naprężeń ścinania (plaster miodu);
- struktury warstwowe, których warstwy wykonane są z kompozytów włóknistych (np. włókna węglowe, szklane w osnowie polimerowej, włókna ceramiczne w osnowie metalowej [57]); dzięki różnemu ukierunkowaniu zbrojenia w poszczególnych warstwach można tu w pożądanym sposobie wpływać na cechy wytrzymałościowe wynikowego kompozytu warstwowego.

Wymienione powyżej dwie grupy nie wyczerpują wszystkich możliwości (por. [48]). Jak zaznaczono, są to dwa najczęściej spotykane warianty kompozytów warstwowych. Podkreśliśmy w tym miejscu, że w niniejszej pracy przyjmuje się makroskopowy opis warstwy, a więc w przypadku materiałów zbrojonych nie wnika się w parametry włókien i matrycy. Posługujemy się charakterystykami materiałowymi określonymi dla wynikowego kompozytu włóknistego [65, 127].

Obok takich cech jak odporność korozyjna, chemiczna, dobre parametry termoizolacyjne, główną zaletą kompozytów warstwowych jest wysoka sztywność i wytrzymałość przy niskim ciężarze własnym [57, 79]. W świetle tej ostatniej zalety, kompozyty można postrzegać jako materiały specjalnie dedykowane lekkim konstrukcjom powłokowym.

Pierwszą dziedziną, w której szczególnie intensywnie wykorzystano kompozyty warstwowe jest aeronautyka. Znalazły tu one szerokie zastosowanie jako poszycia kadłubów pojazdów kosmicznych, łopatki silników odrzutowych itp. Rozszerzenie zastosowania tych materiałów na inne dziedziny opóźniały wysokie koszty ich wytwarzania. Z czasem jednak zaczęły pojawiać się w przemyśle lotniczym, zbrojeniowym [108], a następnie w szutnictwie czy w budownictwie. Wśród licznych przykładów współczesnych zastosowań powłok kompozytowych znajdują się m.in. łopatki turbin wiatrowych, rurociągi, dukty i zbiorniki przemysłowe, okładziny w formie samodzielnych przewodów wewnętrznych w kominach czy konstrukcje kominów [42, 100], itp. Wobec tak szerokiego spektrum zastosowań, powłoki te mogą być poddawane różnego rodzaju oddziaływaniom, tj. obciążeniu mechanicznemu, chemicznemu, ale także termicznemu, któremu uwagę poświęca się w niniejszej pracy.

Ośrodek warstwowy jako materiał posiada zatem wiele atrakcyjnych cech użytkowych uzyskiwanych dzięki połączeniu odpowiednich tworzyw w materiałach pojedynczych warstw, ale także dzięki odpowiedniemu ułożeniu warstw w laminacie. Taka kompozytowa

struktura wymaga właściwego podejścia w modelowaniu, co szerzej omawiane jest w kolejnym podpunkcie rozdziału. W tym miejscu warto jednak wskazać pewne charakterystyczne cechy struktur warstwowych, które w omawianych dalej modelach powinny być uwzględnione.

Przed wszystkim oczywistą, ale generującą trudności w opisie właściwością ośrodków warstwowych jest niejednorodność i skokowa zmienność parametrów materiałowych w przekrojach. Matryca stosowana w kompozytach włóknistych charakteryzuje się znaczną odkształcalnością postaciową, co w konsekwencji powoduje, że moduły odkształcalności postaciowej warstw są od kilku do nawet kilkudziesięciu razy mniejsze od ich modułów sprężystości podłużnej. Wiąże się to ze znaczną podatnością na odkształcenie postaciowe poszczególnych warstw jak i całego laminatu. Co więcej, materiały te charakteryzuje duża dysproporcja między modułami Younga w kierunku i w poprzek włókien [57, 65, 151, 154, 158]. Warstwa taka ma więc cechy materiału poprzecznie izotropowego, natomiast cały laminat, w przypadku zmiennego kąta ułożenia włókien w kolejnych warstwach, jest ośrodkiem ortotropowym. Innym charakterystycznym zjawiskiem dla struktur warstwowych jest tzw. efekt zig-zag, czyli zygzakowa deformacja przekroju wynikająca z różnej odkształcalności poprzecznej (podłużnej i postaciowej) poszczególnych warstw [26, 27]. Kolejną kwestią są warunki równowagi naprężeń na granicach warstw, których spełnienie, ze względu na skokową zmienność charakterystyk materiałowych, w pewnych sformułowaniach trudno jest zapewnić [24, 25, 134]. Istotny problem stanowi także możliwość tzw. delaminacji czyli rozwarstwienia, stanowiącej częsty mechanizm zniszczenia kompozytu. Inicjacja tego zjawiska zachodzi zwykle w miejscach nieciągłości geometrycznej, np. na krawędziach otworów [8] lub też w miejscach ubytków w matrycy warstw [52] wynikających np. z jej degradacji. Analiza delaminacji stanowi dość złożony problem [8, 166], dlatego często przyjmuje się założenie upraszczające o idealnym połączeniu warstw, nieuwzględniające rozwarstwienia.

1.2. Podejścia stosowane w modelowaniu ośrodków warstwowych

W klasyfikacji modeli stosowanych w analizie kompozytów warstwowych rozróżnić można dwa nurty: teorie trójwymiarowe oraz sformułowania dwuwymiarowe.

Przydatność najmniej upraszczających analitycznych sformułowań trójwymiarowych jest ograniczona do analizy bardzo prostych problemów raczej o charakterze czysto teoretycznym [110, 162, 180]. Waga uzyskanych w ten sposób rozwiązań jest jednak nie do przecenienia w ocenie sformułowań bardziej uproszczonych, gdzie wyniki analityczne można przyjąć za rozwiązania odniesienia.

W świetle najczęściej stosowanych obecnie analiz metodą elementów skończonych podejścia trójwymiarowe są także mało praktyczne. Różnice między sztywnością warstw narzucają bowiem konieczność przyjmowania co najmniej jednego elementu bryłowego na grubości każdej z nich. W analizie całych konstrukcji skutkuje to dużą liczbą stopni swobody i w konsekwencji znacznym wydłużeniem procesu obliczeń [131]. Z tego względu modelowanie trójwymiarowe ogranicza się raczej do małych obszarów, zwykle tam, gdzie jest to konieczne, np. strefy znacznej koncentracji naprężeń.

W ramach sformułowań dwuwymiarowych rozróżnić można dwie charakterystyczne grupy: dyskretne modele warstwowe (ang. *Discrete-Layer* (DL) [79, 80, 103] lub *Layer-*

Wise (LW) [25, 127, 131, 172]) oraz zastępcze modele jednowarstwowe (ang. *Equivalent Single Layer* (ESL) [25, 79, 80, 127, 172]).

W dyskretnych modelach warstwowych każdą z warstw opisuje się indywidualnie, najczęściej poprzez zmienne związane z jej powierzchnią odniesienia. Wpływ warstw sąsiadujących uwzględnia się poprzez odpowiednie warunki ciągłości na wspólnych powierzchniach [80]. W ramach tych podejść zapewnienie warunków równowagi na granicach warstw czy też uwzględnienie zygzakowej deformacji przekroju jest stosunkowo łatwe. Sformułowania te mogą być traktowane jako aproksymacja podejść trójwymiarowych, toteż czasem klasyfikowane są jako podgrupa tych ostatnich [127]. Podkreślmy, że liczba zmiennych jest tu bezpośrednio zależna od liczby warstw.

Pewne zagadnienia, jak np. drgania własne, wyboczenie, globalne deformacje, nie wymagają zastosowania tak rozbudowanych podejść [4]. Mogą one być wystarczająco dokładnie aproksymowane przy użyciu podejść ESL, w których cały laminat traktuje się jako pojedynczą jednorodną warstwę o sztywności statycznie równoważnej sztywności ośrodka warstwowego [172]. Warstwę redukuje się do jednej powierzchni odniesienia tak, jak w przypadku powłok jednorodnych. Wszystkie zmienne związane są z tą powierzchnią i ich liczba jest niezależna od liczby warstw.

Dla potrzeb niniejszej pracy, której celem jest analiza stateczności, przyjęto, że wystarczająca w opisie powłoki warstwowej jest koncepcja pojedynczej warstwy zastępczej. Zasadne wydaje się zatem szersze omówienie tego typu podejścia.

Do opisu pojedynczej warstwy zastępczej wykorzystywane są teorie stosowane w idealizacji powłok jednorodnych. Historycznie najstarszą jest tzw. klasyczna teoria laminatów [48] (ang. *Classical Lamination Theory* [65, 127]). Sformułowanie to stanowi odpowiednik klasycznej teorii płyt/powłok Kirchhoffa-Love'a, bazującej na założeniu o nierozciągliwym włóknie normalnym, które pozostaje proste i normalne po odkształceniu [4, 17]. Charakteryzującą tę teorię brak efektu ścinania jest jednak poważnym mankamentem wobec typowej dla materiałów kompozytowych podatności na to zjawisko. W praktyce zakres efektywności tego sformułowania obejmuje tylko bardzo cienkie płyty i powłoki warstwowe [28].

Zdecydowanie bardziej adekwatne w opisie kompozytowych ośrodków warstwowych są teorie uwzględniające ścinanie, przy czym rozróżnia się teorię ścinania pierwszego rzędu (ang. *First Order Shear Theory*) oraz teorie wyższych rzędów (ang. *Higher Order Shear Theory*).

W teorii ścinania pierwszego rzędu zakładany jest liniowy rozkład przemieszczeń na grubości powłoki, co odpowiada hipotezie płaskich przekrojów. Przyjmuje się jednak, że włókna prostopadłe do powierzchni środkowej podczas deformacji pozostają proste, ale niekoniecznie prostopadłe, co odróżnia to podejście od teorii Kirchhoffa. Teoria z tak sformułowaną kinematyką jest dość powszechnie nazywana teorią Reissnera-Mindlina [17]. Termin ten jest jednak dyskusyjny [123], gdyż w pewnym sensie sugeruje współpracę autorów albo niezależne sformułowanie przez nich identycznych teorii. Tymczasem teoria Reissnera wychodzi z zupełnie innych założeń niż ta, którą niezależnie podał Mindlin [4, 63]. Źródłem nieporozumienia jest fakt, że ostatecznie obydwie teorie charakteryzuje podobna kinematyka, która jest jednak obecna także w teorii Hencky'ego czy Bolle'a [17, 34]. Z kolei autorzy [34] podejście wykorzystujące omówioną wyżej hipotezę kinematyczną nazywają teorią Timoszenko-Reissnera. Wszystkie te sformułowania charakteryzuje założenie o płaskim przekroju i w tym sensie wydaje się, że wystarczającym, a zarazem bezdyskusyjnym terminem jest po prostu teoria ścinania pierwszego rzędu [2]. Częstym dodatkowym

założeniem kinematycznym tej teorii jest warunek nierozciągłości włókien powłoki w kierunku poprzecznym. Cechą charakterystyczną sformułowania jest potrzeba stosowania pewnych współczynników korekcyjnych. Konieczność ta wynika ze stałego na grubości rozkładu odkształceń poprzecznych i w konsekwencji braku spełnienia warunków równowagi naprężeń poprzecznych na zewnętrznych powierzchniach dźwigara jak również na granicach warstw [104]. Podkreślimy, że współczynniki korekcyjne wymagane są w klasycznych sformułowaniach przemieszczeniowych. Istnieją jednak podejścia mieszane, w których warunki równowagi narzuca się z góry na zmienne naprężeniowe [24, 25, 136], co eliminuje potrzebę stosowania współczynników. Kwestia korekty ścinania nieco szerzej opisana jest w dalszej części pracy.

Zwróćmy także uwagę, że w modelu sformułowanym na bazie teorii ścinania pierwszego rzędu efekt zig-zag z definicji nie jest ujęty. Istnieje jednak możliwość wzbogacania pola przemieszczeń o dodatkowe stopnie swobody, których rozkład na grubości dany jest funkcją kawałkami ciągłą [21, 27, 30, 135, 136].

W teoriach ścinania wyższych rzędów odchodzi się od hipotezy płaskiego przekroju. Z reguły do opisu pola przemieszczeń stosowane są wielomiany o stopniu wyższym niż pierwszy [28, 127], choć spotykane są także teorie wyższych rzędów, w których rozkład pewnych składowych przemieszczeń dany jest funkcjami trygonometrycznymi [46, 131, 183, 186]. W sformułowaniach tych, przy odpowiednio przyjętym rozkładzie przemieszczeń, uzyskiwany jest rozkład odkształceń i naprężeń poprzecznego ścinania spełniający warunki równowagi na powierzchniach zewnętrznych (np. dla wielomianu trzeciego rzędu naprężenia poprzeczne mają rozkład paraboliczny [89, 104, 127], dzięki czemu nie są potrzebne żadne techniki korekcyjne). W bardziej wyspecjalizowanych podejściach spełnione są również warunki ciągłości naprężeń na stykach warstw [182, 184]. Także w ramach tych teorii istnieją sformułowania, w których wyjściowe pola przemieszczeń wzbogacane są funkcjami klasy C^0 w celu symulacji efektu zig-zag [27, 28, 38, 55, 163]. Modele bazujące na teorii ścinania wyższych rzędów charakteryzuje większa liczba stopni swobody niż sformułowania wychodzące z teorii ścinania pierwszego rzędu. Dodatkowym stopniom często trudno nadać interpretację fizyczną, a poza tym podrażają one koszty obliczeń. Cytując za J.N. Reddym [127]: *podejścia te powinny być stosowane tylko wtedy, kiedy jest to konieczne.*

Jak wcześniej wspomniano, dla potrzeb niniejszej pracy, w której rozważana jest globalna stateczność konstrukcji, zupełnie wystarczające jest sformułowanie pojedynczej warstwy zastępczej (ESL). Do opisu deformacji warstwy przyjęto teorię ścinania pierwszego rzędu. W modelu nie są spełnione warunki równowagi naprężeń poprzecznych, jak również nie jest uwzględniony efekt zig-zag. Brak zrównoważenia naprężeń rekompensowany jest przez przyjęcie odpowiedniej korekty sztywności ścinania. Przyjęcie hipotezy o płaskim przekroju można także uznać za uzasadnione, ponieważ obiektem przeprowadzanej w pracy analizy stateczności są powłoki cienkie. Efekt zig-zag zanika bowiem wraz ze wzrostem smukłości dźwigara. Przy proporcji $A/H = 10$ i większej, gdzie H jest grubością, a A jest wymiarem charakterystycznym powłoki [12], zjawisko jest zazwyczaj praktycznie nieobecne (por. [21, 110]). Warto w tym miejscu dodać, że bardzo podobnie sformułowany jest model kompozytu warstwowego zastosowany w programie komercyjnym NX-Nastran.

1.3. Zagadnienie stateczności powłok

1.3.1. Problem stateczności w praktyce inżynierskiej

W obecnych czasach zauważalne jest powszechne dążenie do zminimalizowania ciężaru konstrukcji; wiąże się ono najczęściej z chęcią obniżenia kosztów realizacji, względami technologicznymi (np. poszycia pojazdów powietrznych), a także nadaniem walorów estetycznych [29]. Działanie to zwiększa jednak ryzyko utraty stateczności, zjawiska, którego wystąpienia nie sygnalizują żadne wcześniejsze symptomy. W pracy [124] powłokę nazwano *primadonną konstrukcji*, trafnie charakteryzując jej *'kapryśny charakter'* i wrażliwość na takie kluczowe parametry, jak geometria i smukłość. W przypadku cienkich powłok o dużej rozpiętości, utrata stateczności może wręcz wyprzedzać degradację materiału i mieć tym samym pierwszorzędne znaczenie w ocenie nośności. Stateczność zależna jest także od takich czynników, jak warunki brzegowe [137], sztywność związana z cechami materiału, w tym także z orientacją włókien w warstwach w przypadku laminatów [51, 137, 138]. Bardzo istotną rolę odgrywają tu również imperfekcje, a więc różnego rodzaju niedoskonałości, które mogą być związane z geometrią [50, 138], sposobem obciążenia, rozkładem sztywności czy warunkami brzegowymi.

Uwzględnienie imperfekcji w analizie stateczności konstrukcji jest bardzo istotne, gdyż wszelkiego rodzaju niedoskonałości mogą znacznie obniżyć poziom obciążenia krytycznego. W przypadku powłok, ze względu na charakteryzującą je znaczną smukłość, najistotniejsze wydają się imperfekcje geometryczne. Powstaje zatem pytanie, jakie imperfekcje uwzględnić, jaka ma być ich postać i amplituda.

Oczywista sytuacja, która może jednak dotyczyć wyłącznie konstrukcji już istniejących, występuje w przypadku, gdy znane są (zostały pomierzone) rzeczywiste odchyłki od geometrii idealnej. W przeciwnym razie, np. w procesie projektowania, możliwe jest jedynie zadawanie narzuconych, sztucznych imperfekcji, przy czym najodpowiedniejsze są te, które wywoływać będą najniższe obciążenie krytyczne. Określenie ich rozkładu nie jest na ogół jednoznaczne.

Można je ustalać metodami ścisłymi, matematycznymi np. [37], co, według klasyfikacji podanej w [141, 174], odpowiada tzw. imperfekcjom *najgorszym z możliwych*. Termin ten dotyczy pól imperfekcji zgodnych np. z wynikającymi z rozwiązania liniowego problemu stateczności postaciami własnymi konstrukcji lub ich liniową kombinacją, ustalonymi na ogół na drodze rozwiązania liniowego problemu własnego, choć w przypadku bardzo smukłych konstrukcji bardziej odpowiedni jest tu nieliniowy problem własny [141]. Warto podkreślić, że zdefiniowane w ten sposób pole imperfekcji wcale nie musi być najbardziej krytyczne dla konstrukcji, gdyż czasem gorsze okazać się może pojedyncze zagłębienie czy wypukłość [141]. Matematyczne poszukiwanie imperfekcji *najgorszych z możliwych* jest z praktycznego punktu widzenia dość złożone i dlatego częściej stosowane są tzw. imperfekcje *stymulujące* [141, 174], przez które rozumie się imperfekcje zbliżone do wyznaczanych matematycznie, ale narzucane niejako intuicyjnie, np. pola imperfekcji tylko podobne do form własnych, ale zadane np. w postaci fal deformacji określonych funkcjami trygonometrycznymi lub pojedynczych czy wielokrotnych zagłębień lub wypukłości.

Nie sposób nie wspomnieć tu o rozwijających się szczególnie w ostatnim czasie podejściach stochastycznych [43, 50], które wydają się najtrafniejsze, gdyż mogą potencjalnie najlepiej ze wszystkich imperfekcji natury sztucznej symulować imperfekcje rzeczywiste [141].

1.3.2. Analiza stateczności

W mechanice konstrukcji tradycyjnie posługujemy się pojęciem stateczności równowagi. Należy jednak zdawać sobie sprawę, że zagadnienie to jest szersze i dotyczy ruchu w sensie ogólnym, a stateczność równowagi jest tu szczególnym przypadkiem. Pierwszą definicję stateczności ruchu podał Lapunov [96, 120, 170, 190], zgodnie z którą ruch stateczny ma tę właściwość, że małe zakłócenia położenia i prędkości w stanie początkowym powodują niewielkie zaburzenia położenia i prędkości w dowolnej chwili t [130, 190]. O równowadze układu natomiast mówimy, że jest stateczna, jeśli będący w danej konfiguracji układ po niewielkim chwilowym zakłóceniu do tej konfiguracji powraca [95, 96]. Definicję tę często ilustruje się na przykładzie kuli sytuowanej na powierzchniach, których zakrzywienie determinuje stateczność jej równowagi [16, 95, 96].

Wykorzystanie definicji i warunków Lapunova [95, 120], które opisują zjawisko poprzez zmienne kinematyczne (przemieszczenia, prędkość) jest w praktyce dość skomplikowane. W mechanice konstrukcji, w odniesieniu do zagadnień statyki, posługujemy się znacznie prostszymi, statycznymi kryteriami stateczności, których spełnienie odpowiada spełnieniu warunków Lapunova [5, 95].

Najczęściej, zwłaszcza w analizie metodą elementów skończonych, stosowanej w niniejszej pracy, wykorzystywane jest statyczne kryterium energetyczne wychodzące z twierdzenia Lagrange'a-Dirichleta o minimum energii potencjalnej, które brzmi: *stan równowagi układu zachowawczego jest stateczny wtedy, gdy energia potencjalna jest w tym stanie dodatnio określona (w stanie równowagi energia osiąga minimum)* [5, 95, 171]. Twierdzenie odnosi się do układów zachowawczych [171], z jakimi mamy do czynienia w niniejszej pracy. Lapunov podał także energetyczne kryterium niestateczności: *jeśli energia potencjalna układu konserwatywnego w stanie równowagi osiąga maksimum, stan tej równowagi jest niestateczny* [120]. W praktyce powyższe twierdzenia opisać można zależnościami [171]:

$$\delta\Pi = 0 \quad \text{i} \quad \delta^2\Pi \begin{cases} > 0 & \text{równowaga stateczna,} \\ < 0 & \text{równowaga niestateczna,} \end{cases} \quad (1.1)$$

gdzie Π jest całkowitą energią potencjalną układu, a $\delta\Pi$ i $\delta^2\Pi$ są, odpowiednio, jej pierwszą i drugą wariacją względem przemieszczeń. Stan krytyczny natomiast określa warunek

$$\delta\Pi = 0 \quad \text{i} \quad \delta^2\Pi = 0, \quad (1.2)$$

który oznacza, że układ zachowawczy osiąga stan krytyczny przy zerowaniu się drugiej wariacji jego energii potencjalnej [171].

W praktyce z warunku zerowania się pierwszej wariacji energii potencjalnej (1.1) wynika równanie równowagi. Znak drugiej wariacji (1.1) związany jest z uwarunkowaniem macierzy sztywności układu: stanom równowagi statecznej odpowiada dodatnio określona, a stanom niestatecznym ujemnie określona macierz sztywności. O dodatniej określoności macierzy \mathbf{K} rozstrzyga kryterium Sylwestera, zgodnie z którym macierz jest dodatnio określona, jeśli jej wszystkie minory są większe od zera [95, 171]. W procesie rozwiązywania (np. metodą Gaussa-Choleskiego) macierz \mathbf{K} jest zazwyczaj rozkładana na iloczyn dwóch macierzy trójkątnych, z których jedna ma jedynki na głównej przekątnej. Wykorzystując właściwości tego rozkładu można dowieść, że warunkiem koniecznym i wystarczającym

dotądniej określoności macierzy \mathbf{K} jest dodatni iloczyn wszystkich wyrazów na głównej przekątnej [95].

W stanie krytycznym natomiast macierz jest osobliwa:

$$\delta^2\Pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\mathbf{K}| = 0, \quad (1.3)$$

gdzie $|\mathbf{K}|$ jest wyznacznikiem macierzy sztywności. Warunek (1.3) jest warunkiem koniecznym osiągnięcia stanu krytycznego [171].

Analiza stateczności układów liniowo-sprężystych może być przeprowadzona jako rozwiązanie zagadnienia dużych przemieszczeń, czyli zadania geometrycznie nieliniowego. Rozwiązanie nieliniowego problemu brzegowego realizowane jest najczęściej na drodze analizy przyrostowej [13, 14, 34, 72, 179], która odpowiada poszukiwaniu konfiguracji równowagi układu w dyskretnych punktach czasowych $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$, gdzie Δt jest przyrostem czasu, przy czym czas jest tu pojęciem umownym. W metodzie tej zakłada się, że rozwiązania dla wszystkich punktów czasowych od chwili 0 do chwili t włącznie są znane i możliwe jest określenie położenia równowagi w chwili $t + \Delta t$. Otrzymany zbiór rozwiązań dla całego zakresu zmienności t wyznacza tzw. ścieżkę równowagi układu. Trzeba podkreślić, że odchodzi się tu od zasady zeszywnienia i związek kinematyczny przemieszczenie-odkształcenie jest nieliniowy.

Zaznaczmy także, że w ramach analizy przyrostowej możliwe są dwa zasadnicze podejścia: stacjonarny opis Lagrange'a, w którym wszystkie zmienne kinematyczne i dynamiczne odnoszone są do konfiguracji początkowej układu; oraz uaktualniony opis Lagrange'a, w którym zmienne te odnoszone są do konfiguracji aktualnej [13, 14]. W niniejszej pracy przyjęto stacjonarny opis Lagrange'a.

Położenia równowagi, dla których zachodzi $\delta^2\Pi > 0$, tworzą stateczne fragmenty ścieżki, natomiast zbiór punktów, w których $\delta^2\Pi < 0$, wyznacza fragmenty niestateczne. Charakterystyczne punkty, w których spełniony jest warunek (1.2) są punktami krytycznymi, z którymi wiążą się odpowiednie formy utraty stateczności danej postaci równowagi. Rozróżnia się dwa typy punktów krytycznych [34, 168, 169, 170]: punkt graniczny obciążenia, w którym obciążenie osiąga lokalne ekstremum oraz punkt bifurkacji (rozgałęzienia), który stanowi przecięcie ścieżki podstawowej z drugorzędną, względnie z kilkoma ścieżkami drugorzędnymi (wielokrotny punkt bifurkacji). Z punktem granicznym obciążenia wiąże się utrata stateczności poprzez przeskok, tzn. przejście, zwykle dynamiczne, z niestatecznego stanu równowagi do stanu statecznego, co określa się terminem lokalnego wyczerpania nośności [170], natomiast w punkcie bifurkacji dochodzi do utraty stateczności przez wyboczenie, co oznacza powstanie nowej, jakościowo różnej postaci równowagi, która może być stateczna lub niestateczna [170].

Należy w tym miejscu nadmienić, że przeprowadzenie analizy przyrostowej wymaga zastosowania odpowiedniej techniki śledzenia ścieżki (tzw. metody sterowania). Istnieją trzy podstawowe metody: metoda sterowania obciążeniowego, metoda sterowania przemieszczeniowego oraz metoda sterowania parametrem ścieżki (zwana też metodą stałej długości łuku) [34, 169]. Nazwa metody nawiązuje do parametru, który w danej technice przyjmowany jest za zmienną sterującą.

Metoda sterowania obciążeniowego ma swoje charakterystyczne ograniczenie, traci mianowicie zbieżność w punkcie granicznym obciążenia, co objawia się charakterystycznym przeskokiem rozwiązania. Podobny efekt przeskoku może wystąpić w przypadku zastosowania sterowania przemieszczeniowego, jeśli na ścieżce wybranego parametru sterującego wystąpi punkt graniczny przemieszczenia, tzw. punkt zwrotny [169], w którym

przemieszczenie zmienia znak na przeciwny. Warto podkreślić, że punkt zwrotny bywa także dość często określany mianem punktu krytycznego. Punkt ten charakteryzuje jednak ścieżki tylko pewnej liczby stopni swobody układu [95], nie ma więc charakteru globalnego, toteż nie wynika on z rozważań energetycznych. W sytuacji problemów ze zbieżnością możliwa jest zatem zmiana parametru sterującego na przemieszczenie zachowujące swój dotychczasowy znak i uniknięcie przeskoku rozwiązania. Zaletą ostatniej z wymienionych technik – metody sterowania parametrem ścieżki – jest fakt, że pozwala ona na efektywne śledzenie położenia równowagi w otoczeniu obydwóch rodzajów punktów granicznych, bez konieczności stałej kontroli znaku przemieszczeń. Warto ponadto podkreślić, że zastosowanie sterowania przemieszczeniowego w pewnych zagadnieniach, np. z obciążeniami termicznymi, jest dość kłopotliwe, bowiem trudno tu ustalić parametr sterujący, jakkolwiek podejście takie znaleźć można w np. [93, 94, 95].

W niniejszej pracy stosowane są techniki sterowania obciążeniem i parametrem ścieżki, które szerzej opisane są w dalszej części monografii.

Opisana powyżej analiza przyrostowa jest obecnie jednym z najczęściej stosowanych podejść w badaniu stateczności konstrukcji. Inną metodą jest liniowa analiza stateczności początkowej polegająca na rozwiązaniu uogólnionego problemu własnego [72, 171]. Obydwa podejścia są dostępne np. w programie NX-Nastran. Należy jednak zauważyć, że liniowa analiza stateczności początkowej daje jedynie możliwość określenia przybliżonej wartości obciążeń krytycznych, a poza tym ma ograniczone zastosowanie w analizie konstrukcji o znacznej smukłości, które charakteryzuje często geometrycznie nieliniowe zachowanie w zakresie przedkrytycznym.

Analiza przyrostowa ma tę zaletę, że pozwala ustalić poziom obciążeń krytycznych, charakter utraty stateczności oraz umożliwia zbadanie pokrytycznego zachowania konstrukcji. Podkreślimy jednak ponownie, że podejście to wymaga zastosowania odpowiedniej techniki śledzenia ścieżki równowagi.

1.4. Analiza wytrzymałości kompozytów warstwowych

Zasadniczym celem pracy jest ocena zachowania przed- i pokrytycznego konstrukcji poddanej obciążeniu termicznemu. Przeprowadzana analiza dostarcza informacji o poziomie obciążenia krytycznego, które przy znacznej smukłości powłoki może być równoważne z obciążeniem granicznym [108]. W takiej sytuacji bowiem utrata stateczności może nastąpić znacznie wcześniej niż przekroczenie naprężeń dopuszczalnych w materiale. W przeciwnym razie, tj. gdy poziom obciążenia krytycznego jest wyższy niż obciążenie niszczące materiał, badanie stateczności nabiera drugorzędного charakteru. Uzasadnione wydaje się zatem rozszerzenie analizy o kontrolę stanu naprężenia.

Podkreślimy, że w rozważanych w pracy kompozytowych powłokach warstwowych, ze względu na możliwość zastosowania różnych materiałów, na ogół ortotropowych, w poszczególnych warstwach lub/i występowania różnych orientacji włókien w układzie warstw, analiza stanu naprężenia jest bardziej skomplikowana niż w przypadku powłok jednorodnych izotropowych. Potrzebna jest tu przede wszystkim wiedza na temat odpowiedniej liczby charakterystyk wytrzymałościowych dla każdego materiału występującego w laminacie. W przypadku warstwy wykonanej z kompozytu włóknistego, wymagana jest znajomość wytrzymałości na rozciąganie i ściskanie w kierunku włókien, w kierunku do nich prostopadłym oraz wytrzymałość warstwy na ścięcie w dwóch płaszczyznach. Należy

przy tym dodać, że często wytrzymałości na ściskanie i rozciąganie materiałów warstw są różne [57], co zwiększa liczbę potrzebnych parametrów [48, 65].

Ponieważ cechy wytrzymałościowe warstwy są określane w lokalnych osiach materiałowych, determinowanych kierunkiem ułożenia włókien, a transformacja tych cech do innego układu odniesienia jest praktycznie niemożliwa [65], ocena stanu wyężenia musi mieć miejsce także w układzie materiałowym. Stan naprężenia w tym układzie z kolei jest zwykle złożony, nawet przy prostych schematach obciążenia [48, 65]. W ocenie wyężenia trzeba się zatem posłużyć odpowiednim kryterium czy hipotezą, które pozwalają na odniesienie złożonego stanu naprężeń do charakterystyk wytrzymałościowych określonych w prostych testach laboratoryjnych.

Podobnie jak w przypadku materiałów izotropowych, istnieje szereg hipotez wytrzymałościowych dla materiałów ortotropowych [1, 57], co więcej, pewne z nich stanowią uogólnienie teorii formułowanych dla ośrodka izotropowego na przypadek ortotropowy. Takimi przykładami są choćby kryterium maksymalnego naprężenia i kryterium maksymalnego odkształcenia. Kryterium Tsai-Hilla [48, 65] jest rozszerzeniem na materiały ortotropowe hipotezy Hubera-Misesa-Hencky'ego [16]. Z kolei kryterium Hoffmana stanowi rozwinięcie teorii Tsai-Hilla na materiały o różnej wytrzymałości przy rozciąganiu i ścisaniu [48, 65]. Nośność warstwy określana na podstawie tych hipotez zwykle jednak znacznie odbiega od wyników uzyskiwanych w doświadczeniach [65]. Satisfakcjonująca zgodność z eksperymentami spośród najbardziej znanych hipotez wytrzymałościowych dla kompozytów charakteryzuje natomiast kryterium Tsai-Wu [48, 65]. Z tego względu w niniejszej pracy zdecydowano się na wybór tego kryterium i zostanie ono przybliżone w rozdziale 2.

Wymienione wyżej hipotezy należą do najbardziej popularnych i ugruntowanych kryteriów dotyczących kompozytów włóknistych. W programie NX-Nastran dostępne są np. kryterium Tsai-Hilla (nazywane tam kryterium Hilla), kryterium Hoffmana, Tsai-Wu oraz kryterium maksymalnego odkształcenia.

Trzeba jednak zwrócić uwagę, że wśród wyżej wymienionych hipotez jedynie kryterium maksymalnego naprężenia i odkształcenia identyfikują mechanizm zniszczenia warstwy, który może być związany ze zniszczeniem włókien, pękaniem matrycy albo ścięciem warstwy. Oceny tego mechanizmu przy zastosowaniu pozostałych kryteriów można dokonać jedynie w sposób przybliżony [128]. Do hipotez, których sformułowania pozwalają na bezpośrednią identyfikację mechanizmów zniszczenia należą np. kryterium Hashina [52, 165, 167] czy kryterium Pucka [57, 121].

Zastosowanie dowolnego z powyższych kryteriów pozwala na ocenę stanu wyężenia materiału pojedynczej warstwy. Przekroczenie stanu bezpiecznego w jednej z warstw nie jest w rzeczywistości równoznaczne ze zniszczeniem całego laminatu. Często jednak poziom obciążenia niszczącego pierwszą warstwę przyjmuje się w analizie za obciążenie niszczące, co odpowiada podejściu *First-Ply Failure* (FPF). Metoda, zgodnie z którą obciążenie niszczące odpowiada zniszczeniu całego laminatu, nazywana jest odpowiednio *Last-Ply Failure* (LPF) [48, 57]. Analiza LPF wymaga uwzględnienia degradacji sztywności i wytrzymałości, zgodnej z postępem zniszczenia w materiałach warstw, co stanowi dość złożony problem [52, 74, 128, 167]. Takiej analizie nie umożliwiają np. program NX-Nastran. W niniejszej pracy posługiwać się będziemy prostszym wariantem i obciążenie niszczące utożsamiane będzie z obciążeniem niszczącym pierwszą warstwę (FPF).

1.5. Powłoki warstwowe obciążone termicznie

Jak wcześniej wspomniano, pierwsze zastosowania kompozytowych powłok warstwowych miały miejsce w aeronautyce. O wyborze tych materiałów decydowały tu przede wszystkim mały ciężar i duża wytrzymałość, ale także wysokie parametry termoizolacyjne. Dzięki tym ostatnim panele kompozytowe mogą odgrywać rolę efektywnych termoizolacyjnych barier ochronnych konstrukcji statku [49, 122] czy elementów silnika [140]. Obciążenie temperaturą może być jednak także istotne w przypadku powłok kompozytowych stosowanych w innych dziedzinach, np. użytych w budowie elementów turbin gazowych [71], kominów przemysłowych [42, 100], czy rur [69].

Wpływ temperatury może być zatem kluczowy w przypadku niektórych konstrukcji i prowadzić do takich efektów, jak [75]: utrata stateczności układu, degradacja materiału (w tym m.in. zwęglanie matrycy [39], degradacja stałych sprężystych, delaminacja [39, 40, 103, 160], poślizg zbrojenia [22]), pęcznienie, termiczne płynięcie, pękanie. Warto też dodać, że już w samym procesie wytwarzania kompozyty warstwowe poddawane są działaniu podwyższonych temperatur [158], a następnie schładzaniu do temperatury otoczenia, co może prowadzić do powstania naprężeń rezydualnych w materiale [51, 103].

Wymienione powyżej zjawiska inicjowane temperaturą wskazują, że wpływ tego czynnika na kompozyt warstwowy jest bardzo złożony. Tematyka niniejszej pracy dotyczy jednakże problemu stateczności, toteż w dalszym ciągu uwagę koncentruje się głównie na tym zagadnieniu i w przedstawionym poniżej przeglądzie literatury uwzględnia się te prace, których głównym celem jest analiza stateczności kompozytowych powłok warstwowych z uwzględnieniem efektu termicznego.

Jedną z najistotniejszych prac przeglądowych poświęconych problemowi wpływu temperatury na kompozytowe konstrukcje warstwowe jest praca Noora i Burtona [103]. W pracy tej stabelaryzowano artykuły poruszające m.in. tematykę stateczności kompozytowych płyt i powłok warstwowych obciążonych termicznie. W tabeli dotyczącej utraty stateczności w formie bifurkacji ujęto około 80 prac, wśród których zdecydowana większość dotyczy płyt. Znacznie mniej, bo około 20 pozycji zestawiono w tabeli zawierającej prace poświęcone analizie dużych przemieszczeń i zachowania pokrytycznego. Tutaj tylko 4 prace dotyczą powłok.

W niniejszej pracy wykorzystano zaproponowany w [103] sposób uporządkowania źródeł i w tabeli 1.1 przedstawione zostały dostępne Autorce prace, usystematyzowane przede wszystkim ze względu na:

- 1) zakrzywienie analizowanych dźwigarów (płyta/powłoka),
- 2) typ analizy, tj. czy w danej pracy określano tylko i wyłącznie poziomych temperatur krytycznych czy przeprowadzano analizę pokrytyczną.

Dodatkowo w tabeli 1.1 zaznaczono, w których z prac wymienionych w punktach 1 i 2 uwzględniane są takie efekty, jak:

- 3) wpływy termo-mechaniczne,
- 4) zależność parametrów materiałowych od temperatury,
- 5) wpływ imperfekcji,
- 6) wyteżenie materiału,
- 7) stateczność dynamiczna (flutter).

Podkreślimy, że prace dostępne Autorce powstały w większości (poza [60]) po opublikowaniu [103]. Można zauważyć, że analiza stateczności powłok stała się częściej porusza-

nym problemem. Również badaniu zachowania pokrytycznego poświęca się więcej uwagi, czego przyczyną jest prawdopodobnie fakt, że w wielu wypadkach kompozytowe panele warstwowe są w stanie efektywnie przenosić obciążenia w zakresie pokrytycznym i często ten zakres pracy jest uwzględniany podczas projektowania [90].

Analizy ograniczone wyłącznie do określenia poziomu temperatur krytycznych polegają zazwyczaj na rozwiązaniu uogólnionego problemu własnego (np. [7, 68, 70, 86, 87]). W pracy [122] temperaturę krytyczną wyznaczono z zamkniętego wzoru, wynikającego – jak podano tamże – z klasycznej teorii płyt cienkich. Otrzymane rezultaty porównano z eksperymentem. W [66] z kolei badano płyty podparte na dwóch krawędziach i wykorzystując analogię do teorii prętów wyprowadzono wzór na temperaturę krytyczną pojedynczej warstwy poprzecznie izotropowej. W pracy [184] temperaturę wyboczeniową określono natomiast przy wykorzystaniu metody szeregów trygonometrycznych.

Tabela 1.1

Zestawienie prac dotyczących zagadnienia stateczności płyt i powłok kompozytowych obciążonych termicznie

Lp.	Element	PŁYTA	POWŁOKA
1	Analiza temperatur krytycznych	[7], [66], [68], [70], [75], [87], [97], [98], [122], [133], [181], [184]	[51], [86], [99], [114], [159]
2	Analiza pokrytyczna	[6], [47], [106], [112], [133], [142], [145], [146], [148], [150], [151], [152], [156], [157], [185]	[9], [56], [60], [67], [85], [88], [90], [91], [92], [105], [107], [115], [116], [143], [144], [147], [149], [153]
3	Wpływy termo-mechaniczne	[6], [47], [112], [145], [150]	[56], [86], [90], [91], [105], [143], [147], [153]
4	Parametry materiału zależne od temperatury	[6], [112], [133], [142], [146], [152], [156]	[153]
5	Imperfekcje	[6], [145], [146], [148], [185]	[56], [90], [91], [143], [144], [147]
6	Wyteżenie materiału	[6], [156]	[60], [153]
7	Stateczność dynamiczna	[106]	

Z kolei badanie zachowania pokrytycznego przeprowadzane jest zwykle na drodze analizy przyrostowej z uwzględnieniem dużych przemieszczeń. Najczęściej zagadnienie jest sformułowane w postaci słabej i w rozwiązaniu stosowana jest metoda elementów skończonych (np. [9, 60, 88, 92, 107]). W pracach [152, 157] ścieżkę pokrytyczną uzyskano metodą sekwencyjnego rozwiązania problemu własnego. W pracach [112, 150] do rozwiązania nieliniowych równań różniczkowych wykorzystano szeregi Chebysheva.

Należy zwrócić uwagę, że w przypadku analiz termo-mechanicznych obciążenia są jednoparametrowe, tj. albo obciążeniem zmiennym jest temperatura, a obciążenie mechaniczne pozostaje ustalone, albo sytuacja jest odwrotna.

Warto podkreślić, że uwzględniana w badaniach zależność modułów materiałowych od temperatury jest zwykle narzucana arbitralnie, np. poprzez funkcję liniową [112, 133, 146] lub funkcje wyższego stopnia [6]. W pracach [142, 152, 153, 156] rozkład ten zadany

jest kawałkami ciągłą funkcją liniową, jednakże trzeba podkreślić, że zależność dotyczy wyłącznie jednego materiału i została podana przez Chena i Chena¹⁾.

Uwzględniane imperfekcje związane są z geometrią konstrukcji i definiowane są np. w postaci fal opisanych funkcjami trygonometrycznymi [6, 143, 145, 146, 147].

Wyteżenie materiału badane jest tylko w czterech znalezionych przez Autorkę pracach, przy czym w [60, 156] inicjację zniszczenia identyfikuje się przy wykorzystaniu kryterium Tsai-Wu, a w [153] kryterium Hashina. W [6] początek zniszczenia ocenia się na podstawie wartości energii zginania.

W [106] przedstawiono analizę dynamiczną płyt poddanych obciążeniu termicznemu, w ramach której badano m.in. wpływ usztywnień na zachowanie konstrukcji.

W większości prac przeprowadzono analizę parametryczną, badając wpływ na stateczność konstrukcji takich czynników, jak:

- warunki podparcia [47, 67, 70, 75, 86, 92, 107, 142, 150, 152, 153, 157],
- proporcje geometryczne dźwigara (np. smukłość, wyniosłość powłoki) [47, 51, 67, 70, 86, 87, 88, 92, 99, 105, 107, 114, 115, 116, 142, 145, 151, 152, 153, 156, 157, 181, 185],
- schemat uwarstwienia, w tym głównie orientacja włókien w warstwach [47, 51, 70, 105, 115, 116, 133, 142, 144, 145, 148, 149, 150, 151, 156, 185],
- liczba warstw [60, 142, 145, 150, 156, 157].

Podobnie jak w przypadku konstrukcji jednorodnych izotropowych, wpływ warunków podparcia oraz geometrii konstrukcji na jej stateczność jest kluczowy. W konstrukcjach warstwowych bardzo istotny jest również schemat uwarstwienia, stąd w tak dużej liczbie prac wpływy te są analizowane.

Spotykane są także szczególne analizy parametryczne, dokonywane ze względu na takie specyficzne kryteria, jak:

- lokalizacja usztywnień [88, 106, 144],
- rozmiar rysy [7],
- losowa zmienność parametrów materiałowych [86],
- wilgotność [85],
- obecność wiskotyczno-sprężystej warstwy tłumiącej [149],
- rozkład temperatury na grubości [51, 144, 150],
- obecność i rozmiar otworu [9, 92, 105].

Zakres niniejszej pracy obejmuje badanie płyt i powłok w stanie przed- i pokrytycznym, do czego wykorzystywana jest analiza przyrostowa z uwzględnieniem dużych deformacji. Tematyka ta, jak wynika z tabeli 1.1, jest już dość dobrze ugruntowana w literaturze. Można jednak zauważyć, że towarzyszące analizie w ww. zakresie badanie wyteżenia materiału, a także wpływu imperfekcji jest znacznie rzadziej przeprowadzane, czemu uwagę poświęca się w niniejszej pracy.

Początkowo cel ten miał być zrealizowany przy użyciu programu NX-Nastran. W trakcie obliczeń przy zastosowaniu sterowania parametrem łuku, napotymano jednak na problemy ze zbieżnością rozwiązania, których nie eliminowały żadne zmiany dostępnych w pre-procesorze ustawień. W celu rozstrzygnięcia, czy problemy te związane są z samą metodą śledzenia, czy jednak tkwią w sformułowaniu teoretycznym, przeprowadzono do-

¹⁾ Chen L.W., Chen L.Y.: Thermal postbuckling behaviors of laminated composite plates with temperature-dependent properties, *Composite Structures*, 19, 1991, s. 267–283. Praca cytowana za [156].

W tym wypadku na ogół żadne problemy, poza charakterystycznym dla tej metody śledzenia przeskokiem lub utratą zbieżności w otoczeniu punktu granicznego obciążenia, nie występowały. Warto podkreślić, że w analizach przykładów z obciążeniem mechanicznym przy użyciu tego programu, niezależnie od zastosowanej metody śledzenia, z takim problemem się nie spotkano, co potwierdzają wyniki własne zaprezentowane m.in. w pracach [137, 138, 139].

Można wysunąć ostrożny wniosek, że program komercyjny NX-Nastran ma niedopracowaną technikę sterowania parametrem łuku dla przypadku obciążenia temperaturą, lub – czego nie można wykluczyć – możliwość prawidłowego ustawienia parametrów dla tej metody jest dla użytkownika niedostępna. W tym zakresie opisywany program pozostaje dla Autorki pracy przysłowiową ‘czarną skrzynką’.

1.6. Uzasadnienie podjęcia tematyki pracy

Na podstawie przedstawionych w punktach 1.1–1.5 rozważań można wysunąć następujące wnioski:

1. Lekkie kompozytowe panele warstwowe stają się coraz popularniejsze, a ich analiza różni się od analizy powłok jednorodnych.
2. Konstrukcje te cechuje duża smukłość, stąd ich duża podatność na utratę stateczności.
3. Warunki eksploatacji takich konstrukcji powinny często uwzględniać także oddziaływania termiczne, co przy narzuconych warunkach podparcia ograniczających swobodę deformacji może prowadzić do utraty stateczności.
4. W ocenie nośności konstrukcji należy uwzględnić stopień wyężenia materiału.
5. Znane Autorce oprogramowanie komercyjne nie pozwala na przeprowadzenie odpowiedniej analizy, dlatego powstało zapotrzebowanie na opracowanie odpowiedniego narzędzia.

1.7. Cel i zakres pracy

Cel pracy

Celem pracy jest opracowanie oraz implementacja komputerowa modelu numerycznego umożliwiającego efektywną analizę stateczności w zakresie przed- i pokrytycznym jednopłatowych kompozytowych powłok warstwowych poddanych obciążeniu termicznemu w postaci równomiernego ogrzania lub gradientu temperatury na grubości. Analizę rozszerza się dodatkowo o kontrolę stanu wyężenia materiału.

Zakres pracy

Badanie stateczności przeprowadzane jest na zasadzie śledzenia nieliniowych ścieżek równowagi realizowanego metodą analizy przyrostowej z uwzględnieniem dużych przemieszczeń i obrotów, lecz przy ograniczeniu do zakresu małych odkształceń. W ocenie stanu wyężenia materiału wykorzystywana jest hipoteza wytrzymałościowa Tsai-Wu.

W modelu teoretycznym przyjęto następujące założenia:

- ruch powłoki opisywany jest zgodnie z koncepcją stacjonarnego opisu Lagrange’a;
- przyrosty temperatury są małe – zjawisko uderzenia ciepła nie jest rozważane;
- rozkład temperatury w układzie w danej konfiguracji jest znany i ustalony, nie rozpatruje się zagadnienia przepływu ciepła;

- pomija się wpływ deformacji na rozkład temperatury w układzie;
- zachowanie materiału podczas analizy mieści się w reżimie małych odkształceń linio-wo-sprężystych i w tym zakresie kontrolowany jest stan jego wyteżenia;
- charakterystyki wytrzymałościowe i moduły sztywności materiału są ustalone i niezależne od temperatury;
- powłoka ma umiarkowaną grubość;
- warstwy powłoki są idealnie połączone i takie pozostają – nie uwzględnia się zjawiska delaminacji;
- warstwowa struktura powłoki idealizowana jest pojedynczą warstwą zastępczą, co odpowiada podejściu ESL;
- kinematyka warstwy zastępczej opisana jest poprzez teorię ścinania pierwszego rzędu z odpowiednią techniką korekty ścinania.

Opisane powyżej podejście stanowi rozszerzenie przedstawionego w pracy [79] sformułowania LRT5 o możliwość zadania obciążenia termicznego oraz moduł analizy wyteżenia materiału. Model ten został zaimplementowany do autorskiego programu napisanego w języku Fortran. Efektywność sformułowania badana jest na podstawie dostępnych w literaturze przykładów.

1.8. Układ i zawartość pracy

Praca składa się z pięciu rozdziałów i czterech dodatków uzupełniających:

1. W rozdziale pierwszym zawarto wprowadzenie w tematykę pracy, uzasadniono podjęcie tematu, przedstawiono cel i zakres pracy.
2. W drugim rozdziale przedstawiono teoretyczne sformułowanie stosowanego w obliczeniach modelu powłoki.
3. Rozdział trzeci zawiera opis elementów implementacji numerycznej.
4. W rozdziale czwartym zawarto przykłady numeryczne.
5. Piąty rozdział stanowi podsumowanie pracy.
6. W bibliografii zawarto spis cytowanej literatury. Przyjęto ogólną zasadę, że w końcowym spisie umieszcza się tylko te źródła, do których Autorka miała bezpośredni dostęp. Prace, do których następuje odwołanie w tekście, a które były niedostępne, podawane są w przypisach dolnych wraz z informacją, za jakim dostępnym źródłem są cytowane.
7. W dodatku A przedstawiono wyprowadzenie zależności przemieszczenia-odkształcenia dla ogólnego przypadku teorii 6-parametrowej.
8. Dodatek B zawiera opis procedury określania wartości współczynników korekcyjnych ścinania.
9. W dodatku C przedstawiono transformację wewnętrznej pracy wirtualnej.
10. W dodatku D zawarto wyprowadzenie uogólnionych miar naprężeń.

Rozdział 2

MODEL POWŁOKI

Niniejszy rozdział zawiera opis stosowanego w obliczeniach modelu powłoki, tym samym wraz z dwoma kolejnymi rozdziałami stanowi zasadniczą część pracy.

Wielowarstwowa powłoka kompozytowa traktowana jest jako pojedyncza warstwa zastępcza, do której opisu przyjęto teorię ścinania pierwszego rzędu. W opisie ruchu powłoki stosowany jest stacjonarny opis Lagrange'a. W rozdziale omówione są kolejno:

- geometria i kinematyka powłoki,
- obciążenie termiczne,
- związek konstytutywny w punkcie ośrodka,
- sformułowanie słabe problemu brzegowego,
- związek konstytutywny na poziomie przekroju,
- kryterium Tsai-Wu w analizie wytrzymałości materiału.

2.1. Geometria i kinematyka powłoki

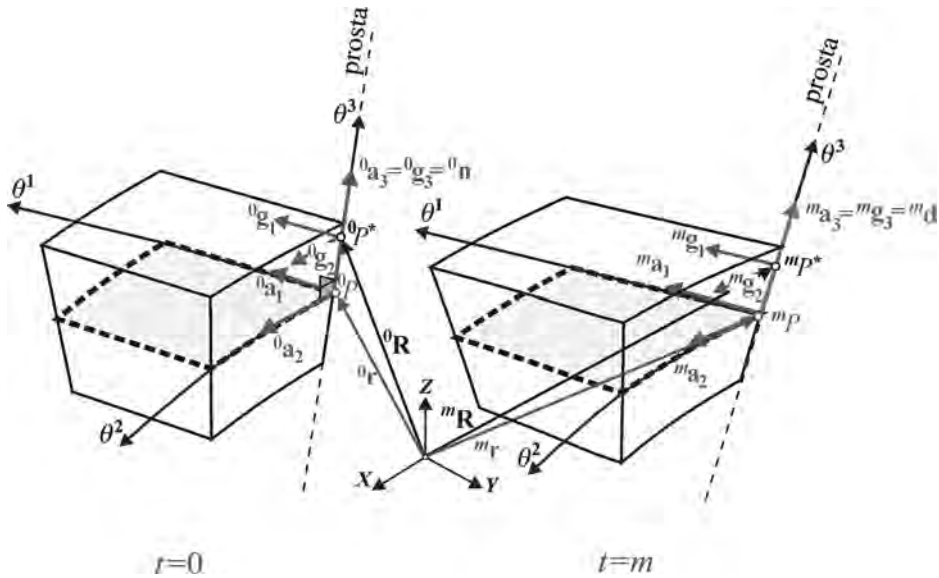
Stosowana w pracy teoria powłok nawiązuje do tzw. podejścia wyprowadzanego [34], w którym ciało trójwymiarowe zredukowane jest przy pomocy pewnych założeń do ośrodka dwuwymiarowego. Kluczową jest tu powierzchnia odniesienia (powierzchnia podstawowa), gdyż przy pomocy zmiennych z nią związanych aproksymowany jest opis deformacji całej powłoki. Najczęściej, także w niniejszej pracy, za powierzchnię odniesienia przyjmuje się geometryczną powierzchnię środkową dźwigara. Nieodzowne staje się zatem odwołanie do podstaw geometrii różniczkowej powierzchni.

2.1.1. Podstawy geometrii powierzchni i elementy rachunku tensorowego

W tym podrozdziale przedstawiono podstawowe zależności geometrii różniczkowej i elementy rachunku tensorowego, niezbędne w opisie kinematyki powłoki. Podpunkt ten opracowano na podstawie następujących źródeł: [12, 29, 59, 77, 79, 102]. Do większości z przedstawionych poniżej zależności wystąpi bezpośrednie odwołanie w dalszej części pracy. Pewne związki, mimo że bezpośredniego odwołania dalej nie znajdują, przytacza się jako elementarne, ułatwiające analizę przekształceń zawartych w rozprawie. Jak wyżej wspomniano, podpunkt ten stanowi wstęp do opisu kinematyki powłoki, dlatego wśród poniższych zależności obok ogólnych, pozostających bez związku z kinematycznymi założeniami upraszczającymi przyjętej teorii powłok, pojawią się takie, które są dla tej właśnie teorii charakterystyczne.

Model powłoki kompozytowej, jak już wcześniej w pracy podkreślono, winien uwzględniać poprzeczną odkształcalność postaciową przekroju, toteż fundamentem modelu bazowego opisanego w [79] jest teoria ścinania pierwszego rzędu, w której – przypomnijmy – przyjmuje się m.in., że prosta prostopadła do powierzchni środkowej pozostaje podczas deformacji prosta (przekroje pozostają płaskie), jednak niekoniecznie prostopadła. Na rysunku 2.1 przedstawiono podstawowe wielkości wykorzystywane w opisie ruchu punktu

materialnego powłoki dla konfiguracji początkowej w chwili $t=0$ oraz konfiguracji w dowolnej chwili $t=m$. Konfigurację oznacza się poprzez lewy górny indeks przy symbolu danej wielkości.



Rys. 2.1. Geometria powłoki

Przyjęto następującą zmienność indeksów greckich i łacińskich:

$$\alpha, \beta, \delta, \gamma \dots = 1, 2 \quad i, j, k, m, n \dots = 1, 2, 3.$$

Położenie dowolnego punktu powłoki P^* określa jego promień wodzący \mathbf{R} , który na mocy założenia o płaskim przekroju w chwili $t=0$ oraz $t=m$ można opisać odpowiednio:

$${}^0\mathbf{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = {}^0\mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 {}^0\mathbf{n}(\theta^1, \theta^2), \quad (2.1)$$

$${}^m\mathbf{R}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = {}^m\mathbf{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 {}^m\mathbf{d}(\theta^1, \theta^2), \quad (2.2)$$

gdzie ${}^0\mathbf{n}$ jest wektorem jednostkowym prostopadłym do powierzchni odniesienia, natomiast ${}^m\mathbf{d}$ to tzw. dyrektor w dowolnej konfiguracji $t=m$, który ww. warunku prostopadłości, zgodnie z hipotezą kinematyczną przyjętej teorii powłok, spełniać nie musi.

W konfiguracji początkowej zachodzi zatem związek:

$${}^0\mathbf{n} = {}^0\mathbf{a}_3 = {}^0\mathbf{g}_3 = \frac{{}^0\mathbf{a}_1 \times {}^0\mathbf{a}_2}{|{}^0\mathbf{a}_1 \times {}^0\mathbf{a}_2|} \quad \Leftrightarrow \quad |{}^0\mathbf{n}| = 1. \quad (2.3)$$

Wektory lokalnej bazy kowariantnej w dowolnym punkcie P na powierzchni odniesienia powłoki są pochodnymi wektora wodzącego tego punktu względem współrzędnych krzywoliniowych:

$${}^m \mathbf{a}_i = \frac{\partial {}^m \mathbf{r}}{\partial \theta^i} = {}^m \mathbf{r}_{,i}. \quad (2.4)$$

Analogicznie definiowane są wektory bazowe w dowolnym punkcie powłoki P^* :

$${}^m \mathbf{g}_i = \frac{\partial {}^m \mathbf{R}}{\partial \theta^i} = {}^m \mathbf{R}_{,i}. \quad (2.5)$$

Wektory **baz kontrawariantnych** można wyznaczyć ze związków:

$${}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad {}^m \mathbf{g}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{g}^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad (2.6)$$

gdzie δ_α^β jest **delta Kroneckera**

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^\beta &= 1, \quad \text{dla } \alpha = \beta, \\ \delta_\alpha^\beta &= 0, \quad \text{dla } \alpha \neq \beta. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Kowariantne składowe tensora metrycznego na powierzchni środkowej ${}^m a_{\alpha\beta}$ oraz w dowolnym punkcie powłoki ${}^m g_{\alpha\beta}$ dane są przez:

$${}^m a_{\alpha\beta} = {}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{a}_\beta, \quad {}^m g_{\alpha\beta} = {}^m \mathbf{g}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{g}_\beta. \quad (2.8)$$

Kontrawariantne składowe ww. tensorów metrycznych obliczamy analogicznie:

$${}^m a^{\alpha\beta} = {}^m \mathbf{a}^\alpha \cdot {}^m \mathbf{a}^\beta, \quad {}^m g^{\alpha\beta} = {}^m \mathbf{g}^\alpha \cdot {}^m \mathbf{g}^\beta. \quad (2.9)$$

Pomiędzy składowymi tensorów metrycznych zachodzą relacje:

$${}^m a_{\alpha\beta} {}^m a^{\beta\lambda} = \delta_\alpha^\lambda, \quad {}^m g_{\alpha\beta} {}^m g^{\beta\lambda} = \delta_\alpha^\lambda. \quad (2.10)$$

Składowe tensorów metrycznych wykorzystywane są często do tzw. podnoszenia lub obniżania indeksów, np.:

$${}^m \mathbf{a}^\alpha = {}^m a^{\alpha\beta} {}^m \mathbf{a}_\beta \quad \text{lub} \quad {}^m \mathbf{g}_\alpha = {}^m g_{\alpha\beta} {}^m \mathbf{g}^\beta. \quad (2.11)$$

Pierwsza forma fundamentalna, czyli kwadrat długości elementarnego odcinka między dowolnymi punktami powłoki ma następującą definicję:

$$({}^m ds)^2 = {}^m d\mathbf{R} \cdot {}^m d\mathbf{R} = {}^m \mathbf{g}_i d\theta^i \cdot {}^m \mathbf{g}_j d\theta^j = {}^m g_{ij} d\theta^i d\theta^j. \quad (2.12)$$

Analogicznie wyprowadza się pierwszą formę fundamentalną dla odcinka zawartego w powierzchni odniesienia:

$$({}^m ds)^2 = {}^m d\mathbf{r} \cdot {}^m d\mathbf{r} = {}^m \mathbf{a}_i d\theta^i \cdot {}^m \mathbf{a}_j d\theta^j = {}^m a_{ij} d\theta^i d\theta^j. \quad (2.13)$$

Składowe **tensora krzywizny** powierzchni odniesienia dane są przez:

$${}^m b_{\alpha\beta} = {}^m b_{\beta\alpha} = -{}^m \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{a}_\beta = -{}^m \mathbf{a}_{3,\beta} \cdot {}^m \mathbf{a}_\alpha = {}^m \mathbf{a}_{\alpha,\beta} \cdot {}^m \mathbf{a}_3 = {}^m \mathbf{a}_{\beta,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{a}_3. \quad (2.14)$$

Zachodzą zależności:

$${}^m b_{\alpha\beta} = {}^m b_{\beta\alpha} = {}^m a_{\alpha\delta} {}^m b_\beta^\delta. \quad (2.15)$$

W tym momencie można wprowadzić pojęcie **drugiej formy fundamentalnej**, jako iloczynu skalarnego ${}^m d\mathbf{a}_3, {}^m d\mathbf{r}$:

$${}^m d\mathbf{a}_3 \cdot {}^m d\mathbf{r} = ({}^m \mathbf{a}_{3,\alpha} d\theta^\alpha) \cdot ({}^m \mathbf{a}_\beta d\theta^\beta) = {}^m \mathbf{a}_{3,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{a}_\beta d\theta^\alpha d\theta^\beta = -{}^m b_{\alpha\beta} d\theta^\alpha d\theta^\beta. \quad (2.16)$$

Aby przedstawić kolejne związki geometrii różniczkowej, potrzebne jest odwołanie się do pojęcia pochodnej kowariantnej wektora. Dowolny wektor ${}^m \mathbf{w}$ w lokalnej bazie kowariantnej i kontrawariantnej można przedstawić, jak poniżej:

$${}^m \mathbf{w} = {}^m w^i {}^0 \mathbf{g}_i = {}^m w_k {}^0 \mathbf{g}^k. \quad (2.17)$$

Podkreślmy, że w (2.17) wektor ${}^m \mathbf{w}$ został przedstawiony w bazie w konfiguracji początkowej, co jest konsekwencją przyjęcia stacjonarnego opisu Lagrange'a.

Różniczkowanie wektora przeprowadzamy następująco:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^m \mathbf{w}}{\partial \theta^i} &= {}^m \mathbf{w}_{,i} = \frac{\partial}{\partial \theta^i} ({}^m w^k {}^0 \mathbf{g}_k) = \frac{\partial {}^m w^k}{\partial \theta^i} {}^0 \mathbf{g}_k + {}^m w^k \frac{\partial {}^0 \mathbf{g}_k}{\partial \theta^i} \\ \text{lub} \\ \frac{\partial {}^m \mathbf{w}}{\partial \theta^i} &= {}^m \mathbf{w}_{,i} = \frac{\partial}{\partial \theta^i} ({}^m w_k {}^0 \mathbf{g}^k) = \frac{\partial {}^m w_k}{\partial \theta^i} {}^0 \mathbf{g}^k + {}^m w_k \frac{\partial {}^0 \mathbf{g}^k}{\partial \theta^i}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Występujące w (2.18) pochodne wektorów bazowych można przedstawić jako:

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^0 \mathbf{g}_i}{\partial \theta^k} &\equiv {}^0 \mathbf{g}_{i,k} = {}^0 \Gamma_{ik}^m \mathbf{g}_m, \\ \frac{\partial {}^0 \mathbf{g}^i}{\partial \theta^k} &\equiv {}^0 \mathbf{g}^i{}_{,k} = -{}^0 \Gamma_{mk}^i \mathbf{g}^m, \end{aligned} \quad (2.19)$$

gdzie ${}^0 \Gamma_{ik}^m = {}^0 \Gamma_{ki}^m$ są tak zwanymi symbolami Christoffela drugiego rodzaju:

$$\begin{aligned} {}^0 \Gamma_{\alpha\beta}^\delta &= {}^0 \Gamma_{\beta\alpha}^\delta = {}^0 \mathbf{g}^\delta \cdot {}^0 \mathbf{g}_{\alpha,\beta} = {}^0 \mathbf{g}^\delta \cdot {}^0 \mathbf{g}_{\beta,\alpha} = -{}^0 \mathbf{g}_\alpha \cdot {}^0 \mathbf{g}^\delta{}_{,\beta}, \\ {}^0 \Gamma_{\alpha\beta}^3 &= {}^0 \mathbf{g}_3 \cdot {}^0 \mathbf{g}_{\alpha,\beta} = {}^0 b_{\alpha\beta}, \\ {}^0 \Gamma_{3\beta}^3 &= {}^0 \mathbf{g}_3 \cdot {}^0 \mathbf{g}_{3,\beta} = 0, \\ {}^0 \Gamma_{3\alpha}^\delta &= -{}^0 b_{\alpha}^\delta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

W konsekwencji związki (2.18) możemy przepisać w postaci:

$$\begin{aligned} {}^m \mathbf{w}_{,i} &= ({}^m w^k{}_{,i} + {}^m w^j {}^0 \Gamma_{ji}^k) \mathbf{g}_k = {}^m w_k |_{i} {}^0 \mathbf{g}_k \\ \text{lub} \\ {}^m \mathbf{w}_{,i} &= ({}^m w_k{}_{,i} - {}^m w_j {}^0 \Gamma_{ik}^j) \mathbf{g}^k = {}^m w_k |_{i} {}^0 \mathbf{g}^k, \end{aligned} \quad (2.21)$$

gdzie pionową linią zaznaczono różniczkowanie kowariantne składowych wektora.

Przedstawmy teraz **pochodne wektorów bazowych** w punktach powierzchni odniesienia w konfiguracji początkowej $t=0$ (reguła **Gaussa-Weingartena**):

$$\begin{aligned}
{}^0\mathbf{a}_{\alpha,\beta} &= {}^0\Gamma_{\alpha\beta}^m {}^0\mathbf{a}_m = {}^0\Gamma_{\alpha\beta}^\delta {}^0\mathbf{a}_\delta + {}^0\Gamma_{\alpha\beta}^3 {}^0\mathbf{a}_3 = {}^0\Gamma_{\alpha\beta}^\delta {}^0\mathbf{a}_\delta + {}^0b_{\alpha\beta} {}^0\mathbf{n}, \\
{}^0\mathbf{a}^\alpha{}_{,\beta} &= -{}^0\Gamma_{\beta m}^\alpha {}^0\mathbf{a}^m = -{}^0\Gamma_{\beta\delta}^\alpha {}^0\mathbf{a}^\delta - {}^0\Gamma_{\beta 3}^\alpha {}^0\mathbf{a}^3 = -{}^0\Gamma_{\beta\delta}^\alpha {}^0\mathbf{a}^\delta + {}^0b_\beta^\alpha {}^0\mathbf{n}, \\
{}^0\mathbf{n}_{,\beta} &= {}^0\mathbf{a}_{3,\beta} = {}^0\Gamma_{3\beta}^m {}^0\mathbf{a}_m = {}^0\Gamma_{3\beta}^\delta {}^0\mathbf{a}_\delta + {}^0\Gamma_{3\beta}^3 {}^0\mathbf{a}_3 = -{}^0b_\beta^\delta {}^0\mathbf{a}_\delta.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Można w tym miejscu wprowadzić pojęcie **tensora przesunięcia** (ang. *shifter*) w konfiguracji początkowej, który wyraża zależność między wektorami bazowymi \mathbf{a}_α powierzchni odniesienia a wektorami bazowymi \mathbf{g}_α w dowolnym punkcie powłoki. Wykorzystując (2.5) i (2.2), możemy zapisać:

$${}^0\mathbf{g}_\alpha = {}^0\mathbf{R}_{,\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} ({}^0\mathbf{r} + \theta^3 {}^0\mathbf{n}) = {}^0\mathbf{a}_\alpha + \theta^3 {}^0\mathbf{n}_{,\alpha}. \tag{2.23}$$

Korzystając następnie z (2.22) zapisujemy:

$${}^0\mathbf{g}_\alpha = (\delta_\alpha^\beta - b_\alpha^\beta \theta^3) {}^0\mathbf{a}_\beta = {}^0\mu_\alpha^\beta {}^0\mathbf{a}_\beta, \tag{2.24}$$

gdzie ${}^0\mu_\alpha^\beta$ są składowymi **tensora przesunięcia** w konfiguracji początkowej.

Z (2.24) i (2.8) wynika, że w konfiguracji początkowej współrzędne tensora metrycznego bazy w dowolnym punkcie na grubości powłoki zależą od współrzędnych tensora metrycznego bazy związanej z powierzchnią podstawową następująco:

$${}^0g_{\alpha\delta} = ({}^0\mu_\alpha^\beta \mathbf{a}_\beta) ({}^0\mu_\delta^\lambda \mathbf{a}_\lambda) = {}^0\mu_\alpha^\beta {}^0\mu_\delta^\lambda a_{\beta\lambda}. \tag{2.25}$$

Element objętości w konfiguracji początkowej wyznaczyć można z interpretacji geometrycznej iloczynu mieszanego wektorów bazowych:

$${}^0dV = ({}^0\mathbf{g}_1 \times {}^0\mathbf{g}_2) \cdot {}^0\mathbf{g}_3 d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \sqrt{{}^0g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3, \tag{2.26}$$

gdzie 0g jest wyznacznikiem tensora metrycznego ${}^0\mathbf{g}$ w konfiguracji początkowej, tj.

$${}^0g = |{}^0g_{\alpha\beta}| = {}^0g_{11} \cdot {}^0g_{22} - {}^0g_{12} \cdot {}^0g_{21}. \tag{2.27}$$

Z interpretacji geometrycznej iloczynu wektorowego wektorów bazy związanej z powierzchnią środkową wynika natomiast formuła określająca **element tej powierzchni** w konfiguracji początkowej:

$${}^0d\Omega = |{}^0\mathbf{a}_1 \times {}^0\mathbf{a}_2| d\theta^1 d\theta^2 = \sqrt{{}^0a} d\theta^1 d\theta^2, \tag{2.28}$$

gdzie 0a jest wyznacznikiem tensora metrycznego ${}^0\mathbf{a}$ w konfiguracji początkowej, tj.:

$${}^0a = |{}^0a_{\alpha\beta}| = {}^0a_{11} \cdot {}^0a_{22} - {}^0a_{12} \cdot {}^0a_{21}. \tag{2.29}$$

Z (2.26) i (2.28) wprowadzić można zależność na element grubości powłoki w konfiguracji początkowej:

$${}^0dH = \frac{{}^0dV}{{}^0d\Omega} = \frac{\sqrt{{}^0g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3}{\sqrt{{}^0a} d\theta^1 d\theta^2} = \frac{\sqrt{{}^0g}}{\sqrt{{}^0a}} d\theta^3. \tag{2.30}$$

Z (2.25) i własności wyznaczników wynika, że:

$$|{}^0g_{\alpha\delta}| = |{}^0\mu_\alpha^\beta| |{}^0\mu_\delta^\lambda| |{}^0a_{\beta\lambda}|. \quad (2.31)$$

Wykorzystując (2.31), wyrażenie (2.30) doprowadzamy do postaci:

$${}^0dH = |{}^0\mu_\alpha^\beta| d\theta^3 = {}^0\mu d\theta^3, \quad (2.32)$$

gdzie ${}^0\mu$ jest wyznacznikiem tensora przesunięcia (2.24) w konfiguracji początkowej:

$${}^0\mu = |{}^0\mu_\alpha^\beta| = {}^0\mu_1^1 \cdot {}^0\mu_2^2 - {}^0\mu_2^1 \cdot {}^0\mu_1^2. \quad (2.33)$$

2.1.2. Opis przemieszczeń w ramach teorii ścinania pierwszego rzędu

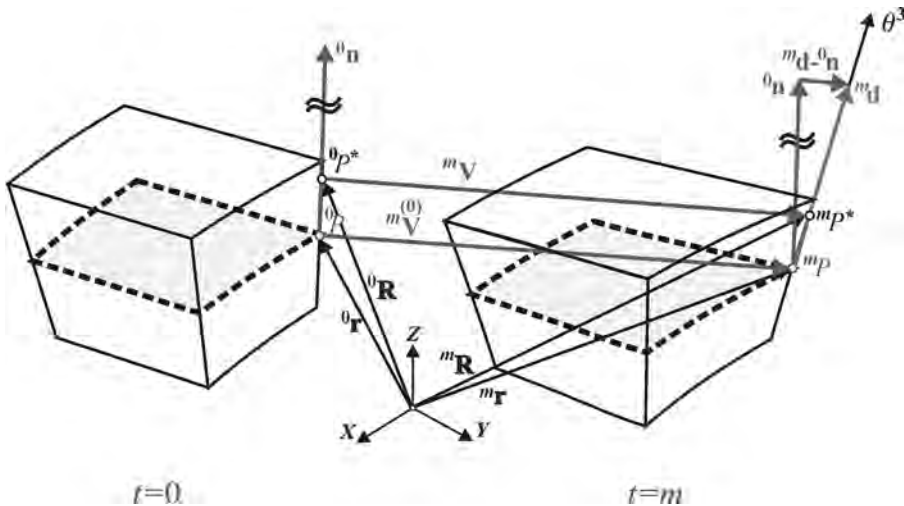
Wektor przemieszczenia punktu P^* można wyznaczyć jako różnicę promieni wodzących w konfiguracji aktualnej $t=m$ oraz konfiguracji początkowej $t=0$:

$${}^m\mathbf{V} = {}^m\mathbf{R} - {}^0\mathbf{R}. \quad (2.34)$$

Podstawiając (2.1) i (2.2) do (2.34) otrzymujemy:

$${}^m\mathbf{V} = ({}^m\mathbf{r} - {}^0\mathbf{r}) + \theta^3 ({}^m\mathbf{d} - {}^0\mathbf{n}) = {}^m\mathbf{V}^{(0)} + \theta^3 {}^m\mathbf{V}^{(1)}. \quad (2.35)$$

Interpretację graficzną (2.35) przedstawia rysunek 2.2.



Rys. 2.2. Kinematyka powłoki

Współrzędne wektora przemieszczenia, wobec przyjętego stacjonarnego opisu Lagrange'a, odnosimy do wektorów bazowych w konfiguracji nieodkształconej i dekomponujemy w bazie kowariantnej lub kontrawariantnej następująco:

$${}^m \mathbf{V} = {}^m \nu^\alpha {}^0 \mathbf{a}_\alpha + {}^m \nu^3 {}^0 \mathbf{n} = {}^m \nu_\alpha {}^0 \mathbf{a}^\alpha + {}^m \nu_3 {}^0 \mathbf{n}. \quad (2.36)$$

W zapisie skalarnym składowe przemieszczeń dane są przez:

$${}^m \nu_i(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = {}^m \nu_i^{(0)}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 {}^m \nu_i^{(1)}(\theta^1, \theta^2). \quad (2.37)$$

Podkreślimy, że w (2.37) występuje łącznie 6 parametrów skalarnych opisujących stan przemieszczenia.

2.1.3. Odształcenia w ramach opisu 6-parametrowego¹⁾

Składowe wykorzystywanego w stacjonarnym opisie Lagrange'a tensora odształcenia Lagrange'a-Greena ${}^m_0 \mathbf{E}$ wyprowadzamy z zależności (por. [53]):

$$2 {}^m_0 E_{ij} d\theta^i d\theta^j = ({}^m dS)^2 - ({}^0 dS)^2, \quad (2.38)$$

gdzie po prawej stronie występuje różnica kwadratów długości łuku w konfiguracji aktualnej, $t=m$ i początkowej $t=0$. Podstawiając do (2.38) związek (2.12) odpowiednio dla każdej z konfiguracji otrzymujemy:

$$2 {}^m_0 E_{ij} = {}^m g_{ij} - {}^0 g_{ij}. \quad (2.39)$$

Podstawiając (2.1) i (2.2) do (2.5) i wykorzystując (2.4), otrzymamy:

$$\begin{aligned} {}^m \mathbf{g}_\alpha &= {}^m \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 {}^m \mathbf{d}_{,\alpha}, \\ {}^m \mathbf{g}_3 &= {}^m \mathbf{d}, \\ {}^0 \mathbf{g}_\alpha &= {}^0 \mathbf{a}_\alpha + \theta^3 {}^0 \mathbf{n}_{,\alpha}, \\ {}^0 \mathbf{g}_3 &= {}^0 \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Korzystając z (2.8b) i (2.40) składniki prawej strony (2.39) możemy zapisać następująco:

¹⁾ Należy zwrócić uwagę, że występujący w niniejszym sformułowaniu szósty stopień swobody można powiązać z opisem rozciągnięcia włókna powłoki w kierunku poprzecznym. Uwaga ta jest istotna, gdyż stopień ten, zależnie od sformułowania teorii powłok, może mieć różną interpretację. Przykładem jest tu teoria opisana m.in. w [31, 32, 33, 34, 36, 176], gdzie parametr ten jest inaczej interpretowany i stanowi tzw. owinięcie (ang. *drilling rotation*) niezbędne w opisie powłok z przecięciami. Tę samą interpretację szóstego stopnia wykorzystują również autorzy w [111, 175]. Zaznaczmy, że szósty stopień związany z opisem rozciągnięcia włókna w poprzek powłoki może być także różnie interpretowany i wprowadzany do sformułowania, patrz np. [11] oraz [17].

$$\begin{aligned}
{}^m g_{\alpha\beta} &= {}^m \mathbf{g}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{g}_\beta = {}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{a}_\beta + \theta^3 ({}^m \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{a}_\beta + {}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{d}_{,\beta}) + (\theta^3)^2 {}^m \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{d}_{,\beta}, \\
{}^0 g_{\alpha\beta} &= {}^0 \mathbf{g}_\alpha \cdot {}^0 \mathbf{g}_\beta = {}^0 \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^0 \mathbf{a}_\beta + \theta^3 ({}^0 \mathbf{n}_{,\alpha} \cdot {}^0 \mathbf{a}_\beta + {}^0 \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^0 \mathbf{n}_{,\beta}) + (\theta^3)^2 {}^0 \mathbf{n}_{,\alpha} \cdot {}^0 \mathbf{n}_{,\beta}, \\
{}^m g_{\alpha 3} &= {}^m \mathbf{g}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{g}_3 = {}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{d} + \theta^3 {}^m \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{d}, \\
{}^0 g_{\alpha 3} &= {}^0 \mathbf{g}_\alpha \cdot {}^0 \mathbf{n} = {}^0 \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^0 \mathbf{n} + \theta^3 {}^0 \mathbf{n}_{,\alpha} \cdot {}^0 \mathbf{n} = 0, \\
{}^m g_{33} &= {}^m \mathbf{g}_3 \cdot {}^m \mathbf{g}_3 = {}^m \mathbf{d} \cdot {}^m \mathbf{d}, \\
{}^0 g_{33} &= {}^0 \mathbf{n} \cdot {}^0 \mathbf{n} = 1.
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Porządkując zapis, składowe tensora odkształcenia można przedstawić jak poniżej [79]:

$$\begin{aligned}
{}^m E_{\alpha\beta}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) &= {}_0^m E_{\alpha\beta}^{(0)}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 {}_0^m E_{\alpha\beta}^{(1)}(\theta^1, \theta^2) + (\theta^3)^2 {}_0^m E_{\alpha\beta}^{(2)}(\theta^1, \theta^2), \\
{}^m E_{\alpha 3}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) &= {}_0^m E_{\alpha 3}^{(0)}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 {}_0^m E_{\alpha 3}^{(1)}(\theta^1, \theta^2), \\
{}^m E_{33}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) &= {}_0^m E_{33}^{(0)}(\theta^1, \theta^2),
\end{aligned} \tag{2.42}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
2 {}_0^m E_{\alpha\beta}^{(0)}(\theta^1, \theta^2) &= {}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{a}_\beta - {}^0 \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^0 \mathbf{a}_\beta, \\
2 {}_0^m E_{\alpha\beta}^{(1)}(\theta^1, \theta^2) &= {}^m \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{a}_\beta + {}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{d}_{,\beta} - {}^0 \mathbf{n}_{,\alpha} \cdot {}^0 \mathbf{a}_\beta - {}^0 \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^0 \mathbf{n}_{,\beta}, \\
2 {}_0^m E_{\alpha\beta}^{(2)}(\theta^1, \theta^2) &= {}^m \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{d}_{,\beta} - {}^0 \mathbf{n}_{,\alpha} \cdot {}^0 \mathbf{n}_{,\beta}, \\
2 {}_0^m E_{\alpha 3}^{(0)}(\theta^1, \theta^2) &= {}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{d}, \\
2 {}_0^m E_{\alpha 3}^{(1)}(\theta^1, \theta^2) &= {}^m \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{d}, \\
2 {}_0^m E_{33}^{(0)}(\theta^1, \theta^2) &= {}^m \mathbf{d} \cdot {}^m \mathbf{d} - 1.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

W dodatku A zaprezentowano szczegóły wyprowadzenia zależności (2.43) w funkcji składowych przemieszczeń w ramach ogólnego przypadku, tj. teorii 6-parameterowej. Poszczególne składowe (2.43) przedstawiają (A.7), (A.14), (A.18), (A.21), (A.23), (A.25).

2.1.4. Kinematyka powłoki w ramach opisu 5-parametrowego

W teorii powłok stosowanej w pracy zakłada się warunek nierozciągliwości włókien powłoki w kierunku poprzecznym, zatem

$${}^m E_{33} = 0. \tag{2.44}$$

Należy zaznaczyć, że założenie (2.44) może być stosowane tylko w zakresie małych odkształceń [179].

Z (2.43f) i (2.44) otrzymujemy, że

$${}^m \mathbf{d} \cdot {}^m \mathbf{d} = 1. \quad (2.45)$$

Różniczkując obustronnie (2.45) można wykazać, iż (por. [10, 11, 76, 101])

$${}^m \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{d} = 0, \quad (2.46)$$

z czego wynika zerowanie się (2.43e):

$$2 \stackrel{(1)}{0} E_{\alpha 3}(\theta^1, \theta^2) = 0. \quad (2.47)$$

Ponadto wyrażenia na pozostałe składowe tensora odkształcenia, tj. (2.43 a-d) ulegają uproszczeniu, gdyż konsekwencją założenia (2.44) jest stały rozkład ugięcia powłoki w kierunku jej grubości, zatem można przyjąć, że w (2.37) [20, 79]:

$$\stackrel{(1)}{m} \nu_3(\theta^1, \theta^2) = 0. \quad (2.48)$$

Wtedy rozkład przemieszczeń na grubości powłoki opisuje 5 parametrów (por. (2.37)):

$$\begin{aligned} \stackrel{(0)}{m} \nu_\alpha(\theta^1, \theta^2, \theta^3) &= \stackrel{(0)}{m} \nu_\alpha(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \stackrel{(1)}{m} \nu_\alpha(\theta^1, \theta^2), \\ \stackrel{(0)}{m} \nu_3(\theta^1, \theta^2, \theta^3) &= \stackrel{(0)}{m} \nu_3(\theta^1, \theta^2) = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

W rezultacie uproszczeniu ulegają wyrażenia (A.3) i (A.6) z indeksem $n = 1$. Dla porządku przedstawia się poniżej te związki dla obydwóch indeksów, tj. $n = 0$ i $n = 1$:

$$\begin{aligned} \stackrel{(0)}{m} \varphi_{\alpha\beta} &= \stackrel{(0)}{m} \nu_\alpha \Big|_\beta - \stackrel{(0)}{m} \nu_3 \stackrel{(0)}{0} b_{\alpha\beta}, \\ \stackrel{(1)}{m} \varphi_{\alpha\beta} &= \stackrel{(1)}{m} \nu_\alpha \Big|_\beta - \stackrel{(1)}{m} \nu_3 \stackrel{(1)}{0} b_{\alpha\beta} = \stackrel{(1)}{m} \nu_\alpha \Big|_\beta, \\ \stackrel{(0)}{m} \varphi_{\alpha 3} &= \stackrel{(0)}{m} \nu_\lambda \stackrel{(0)}{0} b_\alpha^\lambda + \stackrel{(0)}{m} \nu_{3,\alpha}, \\ \stackrel{(1)}{m} \varphi_{\alpha 3} &= \stackrel{(1)}{m} \nu_\lambda \stackrel{(1)}{0} b_\alpha^\lambda + \stackrel{(1)}{m} \nu_{3,\alpha} = \stackrel{(1)}{m} \nu_\lambda \stackrel{(1)}{0} b_\alpha^\lambda, \\ \stackrel{(0)}{m} \varphi_\beta^\delta &= \stackrel{(0)}{m} \varphi_{\beta\lambda} \stackrel{(0)}{0} a^{\delta\lambda} = \stackrel{(0)}{m} \nu^\delta \Big|_\beta - \stackrel{(0)}{m} \nu_3 \stackrel{(0)}{0} b_\beta^\delta, \\ \stackrel{(1)}{m} \varphi_\beta^\delta &= \stackrel{(1)}{m} \varphi_{\beta\lambda} \stackrel{(1)}{0} a^{\delta\lambda} = \stackrel{(1)}{m} \nu^\delta \Big|_\beta - \stackrel{(1)}{m} \nu_3 \stackrel{(1)}{0} b_\beta^\delta = \stackrel{(1)}{m} \nu^\delta \Big|_\beta. \end{aligned} \quad (2.50)$$

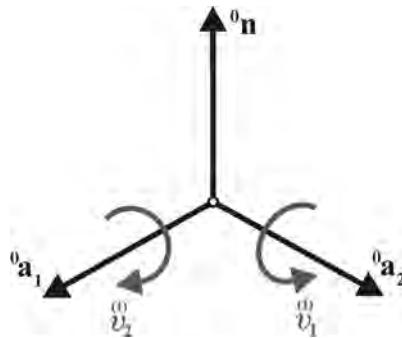
²⁾ W modelach powłok sformułowanych w ramach 5-parametrowej teorii z uwzględnieniem dużych obrotów prezentowanych w pracach [20, 73], a także w modelu LRT5 w pracy [79] z tego uproszczenia nie skorzystano.

Składowe tensora odkształcenia w ramach teorii 5-parametrowej dane są ostatecznie następująco:

$$\begin{aligned}
 2 {}^m_0 E_{\alpha\beta} &= {}^m \varphi_{\beta\alpha} + {}^m \varphi_{\alpha\beta} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} {}^m \varphi_{\beta}^{\delta} + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \varphi_{\beta 3}, \\
 2 {}^m_0 E_{\alpha\beta} &= {}^m \nu_{\beta} |_{\alpha} + {}^m \nu_{\alpha} |_{\beta} - {}^0 b_{\alpha}^{\lambda} {}^m \varphi_{\lambda\beta} - {}^0 b_{\beta}^{\lambda} {}^m \varphi_{\lambda\alpha} + {}^m \nu_{\delta} |_{\alpha} {}^m \varphi_{\beta}^{\delta} + {}^m \nu_{\delta} |_{\beta} {}^m \varphi_{\alpha}^{\delta} + \\
 &\quad + {}^m \varphi_{\beta 3} {}^m \nu_{\lambda} {}^0 b_{\alpha}^{\lambda} + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \nu_{\lambda} {}^0 b_{\beta}^{\lambda}, \\
 2 {}^m_0 E_{\alpha\beta} &= -{}^0 b_{\alpha}^{\lambda} {}^m \nu_{\lambda} |_{\beta} - {}^0 b_{\beta}^{\delta} {}^m \nu_{\delta} |_{\alpha} + {}^m \nu^{\lambda} |_{\alpha} {}^m \nu_{\lambda} |_{\beta} + \left({}^m \nu_{\delta} {}^0 b_{\alpha}^{\delta} \right) \left({}^m \nu_{\lambda} {}^0 b_{\beta}^{\lambda} \right), \\
 2 {}^m_0 E_{\alpha 3} &= {}^m \nu_{\alpha} + {}^m \varphi_{\alpha 3} + {}^m \varphi_{\alpha}^{\lambda} {}^m \nu_{\lambda}.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Bardzo istotny jest fakt, że założenie (2.44) jest formą narzucenia więzów na kierunku prostopadłym do powierzchni odniesienia, zatem naprężenie poprzeczne rozciągania winno być różne od zera. Tymczasem w przyjętym sformułowaniu zakłada się, że naprężenie to również zanika i związki konstytutywne wyprowadza się jak dla płaskiego stanu naprężenia (PSN), o czym szerzej będzie w punkcie 2.3. W tym miejscu warto wspomnieć, że istnieją podejścia bazujące na założeniu teorii ścinania pierwszego rzędu, w których poprzeczne odkształcenie normalne przyjmuje się za niezerowe, a jego wartość wyznacza się właśnie z warunku płaskiego stanu naprężenia [62, 111].

Parametry przemieszczeń ${}^m \nu_{\alpha}$, ${}^m \nu_{\alpha}$ w (2.49) interpretować można jako, odpowiednio, translacje punktów powierzchni odniesienia powłoki oraz obroty³⁾ wokół wektorów bazy tych teje powierzchni, (por. [79]), co przedstawia rysunek 2.3.



Rys. 2.3. Interpretacja parametrów obrotów

Podkreślmy jednak, że taka interpretacja parametrów przemieszczeń ma swoje ograniczenia. Odwołując się do klasyfikacji podanej w [118], przywołanej także w [83], przyjęty tu opis może być stosowany do zakresu dużych obrotów, tj. około 25° [20], traci natomiast słusność w zakresie obrotów skończonych [117, 119]. Inne podejścia stosowane w opisie obrotów znaleźć można w [34, 175, 176], także w [79, 82]. Bogaty przegląd podejść stoso-

³⁾ Wprost jest to różnica ${}^m \mathbf{d} - {}^0 \mathbf{n}$ (por. (2.35)).

wanych w tym zakresie zawiera praca [15]. Podkreślmy także, że tak ujęty opis przemieszczeń może mieć uzasadnienie tylko w zakresie małych odkształceń.

W niniejszej pracy pozostajemy przy pięciu stopniach swobody w opisie przemieszczeń i uproszczonej interpretacji obrotów, zakładając, że w będących przedmiotem analizy zagadnieniach stateczności powłok pod wpływem oddziaływań termicznych odkształcenia są małe i obroty skończone nie występują.

2.2. Obciążenie termiczne

W pracy analizowane są powłoki poddane obciążeniu termicznemu, zarówno w postaci równomiernego ogrzania, jak i gradientu temperatury wzdłuż grubości. W najbardziej ogólnym przypadku obciążenie gradientem temperatury może być obciążeniem dwuparametrowym, tj. temperatury na górnej i dolnej powierzchni mogą zmieniać się wzajemnie niezależnie. W niniejszej pracy nie rozpatruje się obciążeń wieloparametrowych, toteż rozkład temperatury na grubości powłoki jest uzależniany tylko od temperatury na powierzchni dolnej albo górnej (por. [9, 152]).

Przyjmuje się liniowy rozkład temperatury na grubości powłoki. Na wskazanej powierzchni zewnętrznej temperatura (tzw. *temperatura wiodąca*) zmienia się od wartości początkowej T_{init} do wartości końcowej (założonej w analizie) T_{max} . Na drugiej powierzchni zewnętrznej temperatura maksymalna jest funkcją temperatury wiodącej. W warunkach początkowych zakłada się stały rozkład temperatury na grubości powłoki (rozkład równomierny).

Ogólnie rozkład przyrostu temperatury na grubości powłoki ${}^mT(\theta^3)$ opisać można, jak poniżej:

$${}^mT(\theta^3) = \frac{{}^mT_t + {}^mT_b}{2} + \frac{{}^mT_t - {}^mT_b}{H} \cdot \theta^3, \quad (2.52)$$

gdzie: mT_t , mT_b – przyrost temperatury w konfiguracji $t = m$ względem konfiguracji początkowej, odpowiednio na powierzchni górnej i dolnej; H – grubość powłoki.

Podkreślmy, że (2.52) opisuje rozkład temperatury obciążającej, tj. powyżej temperatury początkowej, w której z założenia ośrodek jest w stanie beznapężeniowym. ${}^mT(\theta^3)$ jest więc amplitudą temperatury, jakiej poddawane są poszczególne punkty powłoki.

Rozważyć można dwa warianty obciążenia:

- 1) z temperaturą wiodącą na powierzchni górnej,
- 2) z temperaturą wiodącą na powierzchni dolnej.

Wariant 1 – temperatura wiodąca na powierzchni górnej

W konfiguracji poszukiwanej parametry (por. (2.52)) opisujące rozkład temperatury obciążającej są następujące:

$$\begin{aligned} {}^mT_t &= {}^m\lambda_{th} \cdot (T_{max} - T_{init}), \\ {}^mT_b &= {}^m\lambda_{th} \cdot (p \cdot T_{max} - T_{init}), \\ p &= \frac{T_{b,max}}{T_{t,max}}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

gdzie: ${}^m\lambda_{th}$ – parametr obciążenia temperaturą w konfiguracji $t = m$,

T_{\max} – temperatura maksymalna na powierzchni górnej,
 T_{init} – temperatura początkowa,
 p – stosunek temperatury maksymalnej dolnej do maksymalnej górnej.

Podstawiając (2.53) do (2.52), otrzymujemy:

$${}^m_0T(\theta^3) = {}^m\lambda_{th} \cdot T_{\max} \left(\frac{1+p}{2} \right) - {}^m\lambda_{th} \cdot T_{init} + {}^m\lambda_{th} \cdot T_{\max} \left(\frac{1-p}{H} \right) \theta^3. \quad (2.54)$$

Wariant 2 – temperatura wiodąca na powierzchni dolnej

W tym przypadku parametry opisujące rozkład przyrostu temperatury w konfiguracji poszukiwanej (por. (2.52)) są następujące:

$$\begin{aligned}
 {}^mT_t &= {}^m\lambda_{th} \cdot (p \cdot T_{\max} - T_{init}), \\
 {}^mT_b &= {}^m\lambda_{th} \cdot (T_{\max} - T_{init}), \\
 p &= \frac{T_{t,\max}}{T_{b,\max}},
 \end{aligned} \quad (2.55)$$

gdzie: ${}^m\lambda_{th}, T_{init}$ – jak w (2.53),

T_{\max} – temperatura maksymalna na powierzchni dolnej,
 p – stosunek temperatury maksymalnej górnej do maksymalnej dolnej.

Po podstawieniu (2.55) do (2.52) liniowy rozkład dany jest następującą zależnością:

$${}^m_0T(\theta^3) = {}^m\lambda_{th} \cdot T_{\max} \left(\frac{1+p}{2} \right) - {}^m\lambda_{th} \cdot T_{init} + {}^m\lambda_{th} \cdot T_{\max} \left(\frac{p-1}{H} \right) \theta^3. \quad (2.56)$$

Uogólniony zapis rozkładu temperatury

Powyższe warianty 1 i 2 rozkładu temperatury obciążającej można zapisać jednym uogólnionym wzorem:

$$\begin{aligned}
 {}^m_0T(\theta^3) &= {}^mT^{(0)} + T^{(1)}(\theta^3), \\
 {}^mT^{(0)} &= {}^m\lambda_{th} \cdot T_{\max} \left(\frac{1+p}{2} \right) - {}^m\lambda_{th} \cdot T_{init}, \\
 T^{(1)} &= SIGN \cdot {}^m\lambda_{th} \cdot T_{\max} \left(\frac{1-p}{H} \right),
 \end{aligned} \quad (2.57)$$

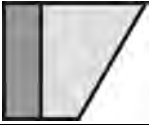
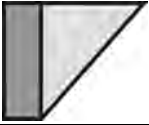
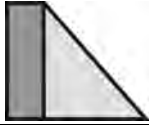
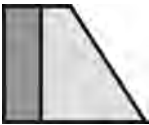

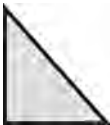
gdzie: T_{\max} – temperatura maksymalna na powierzchni wskazanej parametrem $SIGN$.

- $SIGN = 1$, jeśli wiodącą jest temperatura na górnej powierzchni, wtedy $p = T_{b,\max}/T_{t,\max}$,
- $SIGN = -1$, jeśli wiodącą jest temperatura na powierzchni dolnej, wtedy $p = T_{t,\max}/T_{b,\max}$.

Można zauważyć, że dla $p=1$ rozkład (2.57) opisuje przypadek równomiernego ogrzania. Poza tym przypadkiem przyjęty opis rozkładu temperatury umożliwia analizę obciążeń gradientem tempertaury, których definicje zestawiono w tabeli 2.1.

Tabela 2.1

Przykłady definicji obciążenia gradientem temperatury (pole ciemne – warunki początkowe)

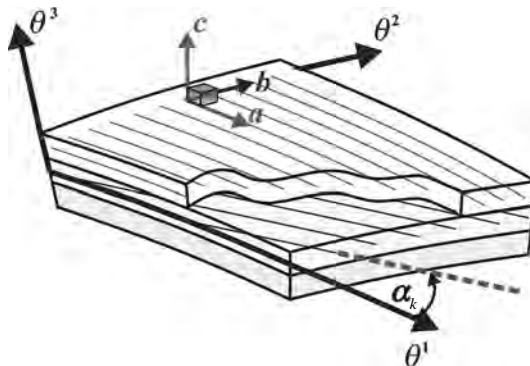
		
$SIGN=1, p < 1$ lub $SIGN=-1, p > 1$	$SIGN=-1, T_{max}=T_{init}, p > 1$	$SIGN=1, T_{max}=T_{init}, p > 1$
		
$SIGN=1, p > 1$ lub $SIGN=-1, p < 1$	$SIGN=1, T_{init}=0, p=0$	$SIGN=-1, T_{init}=0, p=0$

2.3. Związek konstytutywny w punkcie ośrodka

2.3.1. Związek konstytutywny w układzie osi materiałowych

W tym podpunkcie prezentowany jest związek odkształcenie-naprężenie obowiązujący w punkcie ośrodka. Ponieważ warstwy konstrukcji laminowanych są bardzo często wykonane z materiału poprzecznie izotropowego [57, 65], prezentowane prawo konstytutywne dotyczy właśnie takiego przypadku materiału.

Na rysunku 2.4 przedstawiono schematycznie przykład laminatu z zaznaczeniem głównych osi materiałowych ośrodka poprzecznie izotropowego. Kierunek osi a jest zgodny z kierunkiem włókien zbrojenia, natomiast oś b jest prostopadła do osi a . Oś c jest prostopadła do płaszczyzny a - b .



Rys. 2.4. Osie lokalne materiału poprzecznie izotropowego

W punkcie 2.1 nadmieniono, że mimo narzucenia więzów kinematycznych (2.44), poprzeczne naprężenie normalne jest w przyjętym modelu powłoki zakładane jako zerowe, co umożliwia wprowadzanie związków konstytutywnych jak dla płaskiego stanu naprężenia. Warto jednak dodać, że używanie terminu "płaski stan naprężenia" jest w tym wypadku nieściśle, gdyż niezerowe w sformułowaniu pozostają naprężenia poprzecznego ścinania. Jednakże w kontekście samego związku konstytutywnego nieściśłość ta nie ma znaczenia, bowiem zgodnie z prawem Hooke'a, dla materiałów ortotropowego, poprzecznie izotropowego czy izotropowego, stan ścinania i zgięciowo-membranowy są rozprężone [65, 127], a w kompozytach najczęściej do czynienia mamy z dwoma ostatnimi przypadkami ortotropii. Naprężenia poprzecznego ścinania – w przeciwieństwie do ewentualnie niezerowego naprężenia poprzecznego rozciągania – pozostają zatem bez wpływu na naprężenia PSN i odwrotnie.

W rozpatrywanym w pracy zagadnieniu stateczności powłok poddanych obciążeniu termicznemu odkształcenia sprężyste, wskutek sprzężenia termomechanicznego⁴⁾, są zależne od odkształceń termicznych, będących funkcją przyrostu temperatury i współczynników rozszerzalności termicznej, oraz od odkształceń mechanicznych (kinematycznych) (2.51).

Wykorzystując notację macierzową, składowe naprężenia efektywnych w konfiguracji $t = m$ można przy wykorzystaniu liniowego związku konstytutywnego wyrazić następująco [54, 93, 94, 113]:

$$\{ {}^m S_{ef} \} = [C_m] (\{ {}^m E \} - \{ {}^m E^{th} \}) \Leftrightarrow \{ {}^m S_{ef} \} = \{ {}^m S_{mech} \} - \{ {}^m S_{th} \}, \quad (2.58)$$

gdzie $\{ {}^m E \}$, $\{ {}^m E^{th} \}$ są, odpowiednio, wektorami odkształceń mechanicznych i termicznych, $\{ {}^m S_{mech} \}$, $\{ {}^m S_{th} \}$, $\{ {}^m S_{ef} \}$, stanowią, odpowiednio, wektory mechanicznych, termicznych oraz efektywnych naprężeń, a $[C_m]$ jest odpowiednią macierzą konstytutywną.

W analizie geometrycznie nieliniowej odkształcenia mechaniczne i związane z nimi zależności konstytutywnymi naprężenia są nieliniowo zależne od niewiadomych przemieszczeń. Dokonuje się zatem addytywnej dekompozycji przyrostowej tych wielkości na część znaną (aktualną, skumulowaną) oraz przyrost [13, 14]. Związek konstytutywny sformułowany jest tu jedynie dla przyrostu naprężeń/odkształceń, co daje możliwość uwzględnienia np. zmienności stałych materiałowych, czy też nieliniowej zależności naprężenie-odkształcenie. Poniższe prawo materiałowe dla składowych mechanicznych jest zapisane zatem w formie przyrostowej, mimo, że w niniejszej pracy zakłada się liniowo-sprężyste zachowanie materiału. Z drugiej strony, związek konstytutywny dla składowych termicznych, przy założeniu niezmienności parametrów materiałowych (w tym współczynników rozszerzalności termicznej), może być zapisany wprost, tj. dla całkowitych naprężeń i odkształceń, gdyż te nie zależą od przemieszczeń.

Przy założeniu zerowego normalnego naprężenia poprzecznego stan naprężeń mechanicznych opisać można za pomocą pięciu składowych, natomiast stan naprężeń wywołany temperaturą w lokalnych osiach materiałowych określają dwie składowe. Ich związek ze sprzężonymi energetycznie odkształceniami w lokalnych osiach materiału dany jest przez:

⁴⁾ Istotne jest, że rozpatrywane tu sprzężenie termomechaniczne jest niepełne, tj. – jak napisano w założeniach modelu w rozdziale 1 – uwzględniany jest wpływ efektów termicznych na mechanikę (deformację) konstrukcji, natomiast pomijany jest wpływ deformacji na rozkład temperatury w układzie [18].

$$\begin{Bmatrix} {}_0 S_{mech}^{aa} \\ {}_0 S_{mech}^{bb} \\ {}_0 S_{mech}^{ab} \\ {}_0 S_{mech}^{bc} \\ {}_0 S_{mech}^{ac} \end{Bmatrix} = [C_m] \begin{Bmatrix} {}_0 E_{aa} \\ {}_0 E_{bb} \\ 2{}_0 E_{ab} \\ 2{}_0 E_{bc} \\ 2{}_0 E_{ac} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} {}^m S_{th}^{aa} \\ {}^m S_{th}^{bb} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [C_m] \begin{Bmatrix} {}^m E_{aa}^{th} \\ {}^m E_{bb}^{th} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (2.59)$$

gdzie ${}_0 S_{mech}^{ij}$ oznacza przyrosty naprężeń mechanicznych (2. tensor Pioli-Kirchhoffa), ${}^m S_{th}^{ij}$ są składowymi całkowitych naprężeń termicznych; ${}_0 E_{ij}$ są przyrostami składowych odkształceń Lagrange'a-Greena, obliczanych zgodnie z (2.51), a ${}^m E_{ij}^{th}$ składowymi odkształceń wywołanych temperaturą w konfiguracji $t = m$, wyznaczanymi ze związku:

$$\begin{Bmatrix} {}_0 E_{aa}^{th} \\ {}_0 E_{bb}^{th} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{aa}^{th} \\ \alpha_{bb}^{th} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} {}^m T(\theta^3), \quad (2.60)$$

gdzie α_{aa}^{th} , α_{bb}^{th} są współczynnikami rozszerzalności termicznej w kierunkach odpowiednio wzdłuż i w poprzek włókien, ${}^m T(\theta^3)$ jest przyrostem temperatury w danym punkcie w konfiguracji $t = m$ wg (2.57).

Materiał poprzecznie izotropowy w płaskim stanie naprężenia jest opisany przez 5 parametrów [65, 127]. Macierz konstytutywna w (2.59) ma postać:

$$[C_m] = \begin{bmatrix} \frac{E_a}{1 - \nu_{ab}\nu_{ba}} & \frac{\nu_{ab}E_b}{1 - \nu_{ab}\nu_{ba}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{ba}E_a}{1 - \nu_{ab}\nu_{ba}} & \frac{E_b}{1 - \nu_{ab}\nu_{ba}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (k)G_{bc} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (k)G_{ab} \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

gdzie: E_a – moduł Younga materiału wzdłuż włókien⁵⁾,

E_b – moduł Younga materiału w kierunku prostopadłym do włókien,

G_{ab} – moduł odkształcalności postaciowej w płaszczyźnie a - b warstwy ($G_{ab} = G_{ac}$),

G_{bc} – moduł odkształcalności postaciowej w płaszczyźnie b - c warstwy,

ν_{ab} – współczynnik Poissona w płaszczyźnie a - b warstwy; wyraża stosunek skrócenia próbki w kierunku b do jej wydłużenia w kierunku a , przy rozciągnięciu w kierunku a .

Pomiędzy współczynnikami Poissona i modułami Younga zachodzi zależność:

$$E_a \nu_{ba} = E_b \nu_{ab}. \quad (2.62)$$

Związek (2.62) wynika z warunku zgodności przemieszczeń [65].

⁵⁾ Należy odróżniać oznaczenie modułów Younga E_a i E_b od symboli składowych odkształceń E_{aa} i E_{bb} .

Warto w tym miejscu wprowadzić wynikową formułę na naprężenia termiczne w lokalnych osiach materiału w funkcji temperatury. Podstawiając (2.60) i (2.61) do (2.59) możemy zapisać:

$$\begin{Bmatrix} m S_{aa} \\ 0 S_{th} \\ m S_{bb} \\ 0 S_{th} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{C_{th,m}\} \cdot {}^m T(\theta^3), \quad (2.63)$$

gdzie pojawiający się w (2.63) wektor konstytutywny w układzie lokalnym materiału ma następujące składowe:

$$\{C_{th,m}\} = \begin{Bmatrix} E_a \frac{(\alpha_{aa}^{th} + \nu_{ba} \alpha_{bb}^{th})}{1 - \nu_{ab} \nu_{ba}} \\ E_b \frac{(\nu_{ab} \alpha_{aa}^{th} + \alpha_{bb}^{th})}{1 - \nu_{ab} \nu_{ba}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (2.64)$$

W (2.61) pojawił się dodatkowy parametr k . Jest to tzw. współczynnik korekty ścinania, charakterystyczny dla teorii ścinania pierwszego rzędu. Zastosowanie tego współczynnika jest konieczne ze względu na stały rozkład odkształceń postaciowych na grubości powłoki [63], co jest skutkiem założeń kinematycznych (2.35) i (2.44). Konsekwentnie, rozkłady naprężeń poprzecznego ścinania wyznaczone na podstawie związku konstytutywnego (2.59) nie spełniają warunków równowagi na powierzchniach zewnętrznych powłoki, a w przypadku ośrodka warstwowego także na granicach warstw [24, 64]. Skutkiem braku spełnienia warunków równowagi jest „przeszacowanie” energii poprzecznych odkształceń postaciowych. Dlatego też stosuje się tu odpowiednią korektę.

Określenie wartości współczynnika k jest wciąż otwartą kwestią, nawet w przypadku powłok jednorodnych izotropowych [35⁶⁾, 63]. Najczęściej, także dla powłok warstwowych, przyjmuje się tu arbitralnie wartość $k = 5/6$ za Reissnerem i Bollem, ale również $k = 1$ za Hencky’em czy $k = \pi^2/12$ [63].

W (2.61) współczynniki k wprowadzono jednak celowo w nawiasie, aby zasignalizować, że jest to tylko jeden z możliwych wariantów korekty ścinania w modelach konstrukcji warstwowych. Ze względu na swą prostotę, wynikającą z bezpośredniego ‘zapożyczenia’ ze sformułowań dla ośrodków jednorodnych, jest on dość często stosowany (np. [33, 79, 127, 177]). Trafniejsze wydaje się jednakże korzystanie z bardziej wyrafinowanych

⁶⁾ Praca [35] dotyczy 6-parametrowej teorii powłok, z tzw. owinięciem (drillingiem) jako szóstym stopniem. Teorię tę charakteryzuje brak upraszczających założeń kinematycznych, jednakże prawo konstytutywne w niej stosowane jest niejako zapożyczone z teorii 5-parametrowej [31, 32, 33, 177], stąd konieczne jest i tu stosowanie współczynników korekcyjnych ścinania.

metod korekcyjnych, dedykowanych ośrodkom warstwowym (np. [2, 3]) czy ogólnie niejednorodnym (np. [64]).

W niniejszej pracy współczynniki korekcyjne nie są określane arbitralnie i wprowadzane do związku konstytutywnego pojedynczej warstwy, lecz wyznaczane numerycznie dla całego przekroju laminatu, oddzielnie dla dwóch płaszczyzn ścinania. Wykorzystuje się przy tym bezpośrednio podejście podane w artykule [164], choć trzeba podkreślić, że w pracy tej rozwinięto podejście zaproponowane wcześniej w [173]. Punktem wyjścia jest tu porównanie energii poprzecznego ścinania obliczanej z jednej strony na podstawie naprężeń wyznaczonych ze składowych PSN przy założeniu cylindrycznego zginania dźwigara, a z drugiej strony przyjętej jako praca siły tnącej na uśrednionym kącie odkształcenia postaciowego. Podobny sposób znaleźć można w [132], przy czym nie wyprowadzono tam formuł dla samych współczynników korekcyjnych, a zmodyfikowano stałe sprzężyste materiału związane z poprzecznym ścinaniem. Pewną dyskusję efektywności sposobów określania współczynników korekcyjnych dla ośrodków laminowanych zawiera praca [135], gdzie wykazano m.in., iż propozycja podana w [164] łączy w sobie prostotę sformułowania oraz zadowalającą efektywność, którą oceniono poprzez porównanie z innymi metodami. Szczegóły wyznaczenia wartości współczynników korekcyjnych stosowanych w pracy zawiera dodatek B.

2.3.2. Naprężenia w globalnym układzie odniesienia powłoki

Podany w (2.59), a w konsekwencji także w (2.63) związek obowiązuje w lokalnych osiach materiału. Konieczna jest transformacja naprężeń mechanicznych i termicznych do układu $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ (rys. 2.4). Wprowadźmy zatem macierz transformacji jak w [79]:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha_k) & \sin^2(\alpha_k) & \frac{1}{2}\sin(2\alpha_k) & 0 & 0 \\ \sin^2(\alpha_k) & \cos^2(\alpha_k) & -\frac{1}{2}\sin(2\alpha_k) & 0 & 0 \\ -\sin(2\alpha_k) & \sin(2\alpha_k) & \cos(2\alpha_k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_k) & -\sin(\alpha_k) \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha_k) & \cos(\alpha_k) \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

gdzie α_k jest kątem mierzonym od osi θ^1 do osi materialnej a (rys. 2.4) w k -tej warstwie. Macierz ta opisuje transformację naprężeń/odkształceń z układu globalnego do lokalnego, natomiast jej transpozycja opisuje transformację odwrotną naprężeń/odkształceń⁷⁾.

⁷⁾ Wyrażenie (2.65) przedstawia nieco inną postać macierzy transformacji niż często (np. [48]) spotykany w literaturze wariant. Podkreślmy, że zaproponowana tu postać pozwala zapisywać bezpośrednio transformację dla inżynierskich miar odkształceń postaciowych, podczas gdy w transformacji najczęściej spotykanej (por. [48, 65]) wymagane jest użycie macierzy Reutera $[\mathbf{R}_T]$, gdyż zastosowane tam macierze transformacji obowiązują dla tensorowych miar tychże odkształceń. Łatwo można sprawdzić, że transformacja opisana np. w [48], stanowiąca że $[\mathbf{C}] = [\mathbf{T}_-][\mathbf{C}_m][\mathbf{R}_T][\mathbf{T}_+][\mathbf{R}_T]^{-1}$ jest identyczna z (2.68), gdyż $[\mathbf{T}_-] = [\mathbf{T}]^T$, a $[\mathbf{R}_T][\mathbf{T}_+][\mathbf{R}_T]^{-1} = [\mathbf{T}]$.

Transformacje naprężeń i odkształceń z jej wykorzystaniem zapisać można następująco:

$$\begin{Bmatrix} {}_0S_{mech}^{11} \\ {}_0S_{mech}^{22} \\ {}_0S_{mech}^{12} \\ {}_0S_{mech}^{23} \\ {}_0S_{mech}^{13} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}]^T \begin{Bmatrix} {}_0S_{mech}^{aa} \\ {}_0S_{mech}^{bb} \\ {}_0S_{mech}^{ab} \\ {}_0S_{mech}^{bc} \\ {}_0S_{mech}^{ac} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} {}_0E_{aa} \\ {}_0E_{bb} \\ 2{}_0E_{ab} \\ 2{}_0E_{bc} \\ 2{}_0E_{ac} \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{Bmatrix} {}_0E_{11} \\ {}_0E_{22} \\ 2{}_0E_{12} \\ 2{}_0E_{23} \\ 2{}_0E_{13} \end{Bmatrix}, \quad (2.66)$$

$$\begin{Bmatrix} {}^mS_{th}^{11} \\ {}^mS_{th}^{22} \\ {}^mS_{th}^{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}]^T \begin{Bmatrix} {}^mS_{th}^{aa} \\ {}^mS_{th}^{bb} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} {}^mE_{11}^{th} \\ {}^mE_{22}^{th} \\ {}^mE_{12}^{th} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}]^T \begin{Bmatrix} {}^mE_{aa}^{th} \\ {}^mE_{bb}^{th} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Podkreślmy, że w wyniku transformacji, w układzie osi $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ pojawia się trzecia składowa naprężeń/odkształceń termicznych. Ponadto otrzymana składowa ${}^mE_{12}^{th}$ jest miarą tensorową odkształcenia, a miarą inżynierską jest jej podwojona wartość (por. [127]).

Wykorzystując (2.59a) i (2.66a) naprężenia mechaniczne zapisujemy ostatecznie w postaci:

$$\begin{Bmatrix} {}_0S_{mech}^{11} \\ {}_0S_{mech}^{22} \\ {}_0S_{mech}^{12} \\ {}_0S_{mech}^{23} \\ {}_0S_{mech}^{13} \end{Bmatrix} = [\mathbf{C}] \begin{Bmatrix} {}_0E_{11} \\ {}_0E_{22} \\ 2{}_0E_{12} \\ 2{}_0E_{23} \\ 2{}_0E_{13} \end{Bmatrix}, \quad (2.67)$$

gdzie $[\mathbf{C}]$ jest macierzą konstytutywną warstwy wiążącą naprężenia i odkształcenia w układzie osi $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$, daną przez:

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{C}_m] [\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix}. \quad (2.68)$$

Szczegółowo rozpisane elementy macierzy $[\mathbf{C}]$ znaleźć można w wielu pracach, np. w [48, 65, 127], dlatego tutaj tę kwestię się pomija.

Naprężenia termiczne wg (2.63) transformujemy do układu globalnego wykorzystując transformację (2.66b) i ostatecznie otrzymujemy zależność:

$$\begin{Bmatrix} {}^m S_{th}^{11} \\ {}^m S_{th}^{22} \\ {}^m S_{th}^{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{C_{th}\} {}^m T(\theta^3), \quad (2.69)$$

gdzie $\{C_{th}\}$ jest wektorem konstytutywnym związanym z czynnikiem termicznym w układzie globalnym, otrzymanym w wyniku transformacji (2.66b) wektora $\{C_{th,m}\}$ (2.64):

$$\{C_{th}\} = \begin{Bmatrix} C_{th}^1 \\ C_{th}^2 \\ C_{th}^3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

o składowych:

$$\begin{aligned} C_{th}^1 &= \frac{E_a (\alpha_{aa}^{th} + \nu_{ba} \alpha_{bb}^{th}) \cos^2(\alpha_k) + E_b (\nu_{ab} \alpha_{aa}^{th} + \alpha_{bb}^{th}) \sin^2(\alpha_k)}{1 - \nu_{ab} \nu_{ba}}, \\ C_{th}^2 &= \frac{E_a (\alpha_{aa}^{th} + \nu_{ba} \alpha_{bb}^{th}) \sin^2(\alpha_k) + E_b (\nu_{ab} \alpha_{aa}^{th} + \alpha_{bb}^{th}) \cos^2(\alpha_k)}{1 - \nu_{ab} \nu_{ba}}, \\ C_{th}^3 &= \frac{E_a (\alpha_{aa}^{th} + \nu_{ba} \alpha_{bb}^{th}) - E_b (\nu_{ab} \alpha_{aa}^{th} + \alpha_{bb}^{th})}{1 - \nu_{ab} \nu_{ba}} \cdot \frac{1}{2} \sin(2\alpha_k). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Uzyskujemy zatem ostateczną postać związku naprężenie-odkształcenie w punkcie ośrodka w układzie globalnym $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$:

$$\begin{Bmatrix} {}^0 S_{mech}^{11} \\ {}^0 S_{mech}^{22} \\ {}^0 S_{mech}^{12} \\ {}^0 S_{mech}^{23} \\ {}^0 S_{mech}^{13} \end{Bmatrix} = [T]^T [C_m] [T] \begin{Bmatrix} {}^0 E_{11} \\ {}^0 E_{22} \\ 2 {}^0 E_{12} \\ 2 {}^0 E_{23} \\ 2 {}^0 E_{13} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} {}^m S_{th}^{11} \\ {}^m S_{th}^{22} \\ {}^m S_{th}^{12} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \{C_{th}\} {}^m T(\theta^3). \quad (2.72)$$

2.4. Sformułowanie słabe problemu brzegowego

Fundamentalne w mechanice są zasady zachowania: masy, pędu, momentu pędu, energii [34, 41, 77]. W rozważanym zagadnieniu stateczności powłok zasada zachowania masy jest spełniona z założenia, gdyż badane konstrukcje stanowią zamknięte układy mechaniczne [34]. Ponieważ nie rozpatruje się zjawiska przepływu ciepła, obciążenie temperaturą traktowane jest jako *quasi*-statyczne. Zakłada się także, że pomijalny jest wpływ

efektów mechanicznych na rozkład temperatury w ośrodku. W konsekwencji problem sprowadza się do zagadnienia statycznej termosprężystości lub krótko termosprężystości, w ramach którego spełniona jest także zasada zachowania energii (patrz [18]). Przy pominięciu efektów dynamicznych zasada zachowania pędu jest tożsama z równaniem równowagi sił, natomiast zasadzie zachowania momentu pędu odpowiada równanie równowagi momentów [77]. Problem sprowadza się więc do odpowiedniego zapisu ww. równań równowagi. Równania te razem z wcześniej opisanymi związkami przemieszczenie-odkształcenie i odkształcenie-naprężenie wraz z odpowiednio zdefiniowanymi warunkami brzegowymi definiują problem brzegowo-początkowy. Problem ten może być sformułowany w dwóch postaciach: silnej (różniczkowej) i słabej (całkowej).

Stosowana w analizie numerycznej metoda elementów skończonych wychodzi ze słabego sformułowania problemu brzegowego, toteż równania równowagi wprowadza się w postaci tożsamości całkowej, albo wykorzystując warunki stacjonarności funkcjonałów (odpowiednia zasada wariacyjna) [34]. Jednym z podejść może być zastosowanie zasady minimum energii potencjalnej [72, 126]. Jeśli jednak badane układy nie są potencjalne (obciążenia nie są konserwatywne), zasada ta nie może być stosowana. Bardziej uniwersalna jest zasada pracy wirtualnej, w tym wariant zasady przemieszczeń wirtualnych i wariant zasady obciążen wirtualnych [25, 41], przy czym chętniej stosowana jest zasada wirtualnych przemieszczeń ze względu na problemy z opisem warunków brzegowych w wariacie wirtualnych sił.

Zasada przemieszczeń wirtualnych ma fundamentalne znaczenie w mechanice ciał stałych, gdyż nie stawia się w niej żadnych ograniczeń w postaci zakresu wielkości przemieszczeń, obrotów czy też np. sprężystego zachowania materiału [95]. Nadmienmy, że w układach liniowych zasada ta jest tożsama z zasadą minimum energii potencjalnej [19]. Funkcjonał zasady przemieszczeń wirtualnych, w którym jedyną niewiadomą jest pole przemieszczeń, jest podstawą formułowania tzw. przemieszczeniowych elementów skończonych [13, 34, 176]. Poprzez mnożniki Lagrange'a funkcjonał ten może być rozbudowany o dodatkowe zmienne niezależne, jak naprężenia (zasada Hellingera-Reissnera) czy jednocześnie naprężenia i odkształcenia (zasada Hu-Washizu) [25, 36, 54, 72, 176]. Warto podkreślić, że wprowadzone dodatkowo mogą być tylko wybrane składowe pól naprężeń, np. naprężenia poprzecznego ścinania (tzw. *Reissner Mixed Variational Theorem*), co pozwala przyjmując dowolny rozkład tychże składowych, w tym taki, aby spełnione były warunki równowagi na powierzchniach zewnętrznych i granicach warstw [25, 136]. Podejście to nie wymaga stosowania współczynników korekcyjnych ścinania.

W niniejszej pracy stosowane są przemieszczeniowe elementy skończone, formułowane na bazie zasady przemieszczeń wirtualnych. Zasada ta brzmi: *jeśli ciało znajduje się w równowadze, to dla dowolnych, zgodnych, małych, wirtualnych, oddziałujących na ciało przemieszczeń, które spełniają geometryczne warunki brzegowe, całkowita wewnętrzna praca wirtualna równa jest całkowitej zewnętrznej pracy wirtualnej* [13].

Jak odnotowano we Wstępie, celem analizy jest określenie położenia równowagi w dyskretnych punktach czasowych $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$, gdzie Δt jest przyrostem czasu. Rozwiązanie poszukiwane jest na drodze procesu rekurencyjnego, w którym zakłada się, że znane są rozwiązania dla wszystkich punktów czasowych od chwili 0 do chwili t włącznie, co daje podstawę do określenia położenia dla następnego punktu czasowego $t + \Delta t$. Przez powtarzanie tego procesu dla całego zakresu zmienności t otrzymujemy kompletną ścieżkę rozwiązania.

Przyjmijmy w tym miejscu następującą konwencję: konfiguracją odniesienia jest, zgodnie ze stacjonarnym opisem Lagrange'a, chwila początkowa $t = 0$, konfigurację aktualną oznaczmy przez $t = 1$, a konfigurację poszukiwaną przez $t = 2$. Zasadę przemieszczeń wirtualnych w konfiguracji poszukiwanej można zapisać:

$${}^2\delta W_i = {}^2\delta W_e, \quad (2.73)$$

gdzie po lewej stronie (2.73) występuje wewnętrzna, a po prawej stronie zewnętrzna praca wirtualna w konfiguracji poszukiwanej.

Pracę zewnętrzną zapisujemy

$${}^2\delta W_e = \int_{{}^2V} {}^2f^i \delta u_i {}^2dV + \int_{{}^2A} {}^2p^i \delta u_i^A {}^2dA, \quad (2.74)$$

gdzie ${}^2f^i$ są składowymi sił zewnętrznych oddziałujących na jednostkę objętości, a ${}^2p^i$ to składowe sił działających na jednostkę powierzchni ciała; δu_i i δu_i^A to kowariantne współrzędne wektora przemieszczeń wirtualnych, przy czym wyraźnie odróżniono tu przemieszczenia oddziałujące na powierzchni (δu_i^A). Przemieszczenia wirtualne możemy dalej traktować jako wariację przemieszczeń w konfiguracji poszukiwanej [79].

Wirtualną pracę wewnętrzną w konfiguracji poszukiwanej zapisujemy

$${}^2\delta W_i = \int_{{}^2V} {}^2\sigma_{ef}^{ij} \delta_{{}^2e_{ij}} {}^2dV = \int_{{}^2V} \left({}^2\sigma_{mech}^{ij} - {}^2\sigma_{th}^{ij} \right) \delta_{{}^2e_{ij}} {}^2dV, \quad (2.75)$$

gdzie ${}^2\sigma_{ef}^{ij}$ są składowymi tensora naprężeń efektywnych Cauchy'ego obliczanymi w konfiguracji $t = 2$ i odniesionymi do tejże konfiguracji. Lewe indeksy oddają zatem istotę tej miary naprężenia. $\delta_{{}^2e_{ij}}$ to wirtualne odkształcenia, które odpowiadają wariacji małych (infinitesimalnych) odkształceń w konfiguracji poszukiwanej [13,79].

W stacjonarnym opisie Lagrange'a konfiguracją odniesienia jest stan początkowy, $t = 0$, toteż związek (2.75) nie może być w powyższej postaci bezpośrednio w tym opisie wykorzystany. Adekwatną dla tego opisu miarą odkształceń jest tensor Lagrange'a-Greena, natomiast energetycznie sprzężoną z nim miarą naprężeń – drugi tensor Pioli-Kirchhoffa. Należy dokonać odpowiedniej transformacji (2.75), aby wirtualna praca wewnętrzna była wyrażona w adekwatnych dla stacjonarnego opisu Lagrange'a miar naprężeń i odkształceń oraz aby całkowanie odbywało się po objętości początkowej.

Przypomnijmy, że:

- ${}^2_0F_{ij}$ są składowymi materialnego gradientu deformacji,
- ${}^0_2F_{ij}$ są składowymi jego odwrotności,
- J jest wyznacznikiem materialnego gradientu deformacji.

Transformację elementu objętości zapisujemy [77]:

$${}^2dV = J {}^0dV. \quad (2.76)$$

Relacja pomiędzy składowymi tensora naprężeń Cauchy'ego a składowymi drugiego tensora Pioli-Kirchhoffa [77] jest następująca:

$${}^2_0\sigma_{ef}^{ij} = J^{-1} {}^2_0F_{im} {}^0_2F_{nj} {}^0_2S_{ef}^{mn}. \quad (2.77)$$

${}^0_2S_{ef}^{mn}$ są składowymi 2. tensora naprężeń Pioli-Kirchhoffa, obliczanymi w konfiguracji $t = 2$ i odniesionymi do konfiguracji początkowej, $t = 0$.

Stosując tzw. transformację wprzód [59, 77] możemy zapisać związek między składowymi tensora odkształceń Eulera-Almansiego a składowymi tensora odkształceń Lagrange'a-Greena:

$${}^2e_{ij} = {}^0F_{mi} {}^0F_{jn} {}^2E_{mn}, \quad (2.78)$$

gdzie ${}^2e_{ij}$ to składowe tensora odkształceń Eulera-Almansiego, obliczane w konfiguracji $t=2$ i odniesione do tejże konfiguracji, a ${}^2E_{mn}$ oznacza składowe tensora odkształceń Lagrange'a-Greena, obliczane w konfiguracji $t=2$ i odniesione do konfiguracji początkowej, $t=0$.

Wykorzystując (2.76–2.78), (2.75) możemy przedstawić w następującej postaci:

$${}^2\delta W_i = \int_{{}^2V} {}^2\sigma_{ef}^{ij} \delta {}^2e_{ij} {}^2dV = \int_{{}^0V} {}^2S_{ef}^{mn} \delta {}^2E_{mn} {}^0dV, \quad (2.79)$$

co przy wykorzystaniu dekompozycji naprężeń na składowe związane z czynnikami mechanicznym i termicznymi można dalej rozpisać:

$${}^2\delta W_i = \int_{{}^2V} \left({}^2\sigma_{mech}^{ij} - {}^2\sigma_{th}^{ij} \right) \delta {}^2e_{ij} {}^2dV = \int_{{}^0V} \left({}^2S_{mech}^{mn} - {}^2S_{th}^{mn} \right) \delta {}^2E_{mn} {}^0dV. \quad (2.80)$$

Szczegóły transformacji (2.79) zawiera dodatek C.

Odpowiednią transformację należałoby przeprowadzić także dla zewnętrznej pracy wirtualnej (2.74), która wynika z mechanicznych oddziaływań sił powierzchniowych i objętościowych w konfiguracji poszukiwanej, $t=2$, na, odpowiednio, powierzchnię i objętość w tejże konfiguracji. Zauważamy, że tak „dokładny” opis, tj. odnoszenie tych oddziaływań do konfiguracji poszukiwanej byłby dość skomplikowany i w tym miejscu dokonuje się uproszczenia przyjmując, że oddziaływanie ww. sił jest opisane względem konfiguracji początkowej, tj.:

$${}^2\delta W_e = \int_{{}^0V} {}^2f^i \delta u_i {}^0dV + \int_{{}^0A} {}^2p^i \delta u_i^A {}^0dA. \quad (2.81)$$

Przechodząc do zapisu przyrostowego, zapiszmy dekompozycję tensora naprężeń i odkształceń mechanicznych (por. [13]):

$${}^2S_{mech}^{mn} = {}^1S_{mech}^{mn} + {}^0S_{mech}^{mn}, \quad (2.82)$$

$${}^2E_{mn} = {}^1E_{mn} + {}^0E_{mn}. \quad (2.83)$$

Składowych naprężeń związanych z temperaturą, jako niezależnych od przemieszczeń, nie dekomponuje się.

Wariację tensora odkształceń w konfiguracji aktualnej rozpisujemy:

$$\delta {}^2E_{mn} = \delta \left({}^1E_{mn} + {}^0E_{mn} \right) = 0 + \delta {}^0E_{mn} = \delta {}^0E_{mn}. \quad (2.84)$$

Wykorzystując (2.82) i (2.84), wirtualną pracę wewnętrzną (2.80) można zatem zapisać:

$${}^2\delta W_i = \int_{{}^0V} \left(\left({}^1S_{mech}^{mn} + {}^0S_{mech}^{mn} \right) - {}^2S_{th}^{mn} \right) \delta {}^2E_{mn} {}^0dV. \quad (2.85)$$

W podejściu pojedynczej warstwy zastępczej (ESL), czyli w sformułowaniu *stricte* dwuwymiarowym, posługujemy się uogólnionymi miarami naprężeń, toteż wyrażenie (2.85) trzeba zapisać z użyciem tychże miar. Należy w (2.85) oddzielić całkowanie po grubości od całkowania po powierzchni. Wykorzystując (2.32), możemy (2.85) sprowadzić do postaci:

$${}^2\delta W_i = \int_{\Omega} \int_{0H} \left\{ \left({}^1_0 S_{mech}^{mn} + {}^0_0 S_{mech}^{mn} \right) - {}^2_0 S_{th}^{mn} \right\} \delta_0 E_{mn} {}^0\mu^0 dH^0 d\Omega \quad (2.86)$$

W (2.86) pojawia się wyznacznik tensora przesunięcia ${}^0\mu$ (ang. *shifter*) (por. (2.24)). Często przyjmuje się uproszczenie ${}^0\mu \approx 1$, co jest uzasadnione dla powłok mało wyniosłych [12, 31, 32, 33]. W niniejszej pracy nie stosuje się jednak uproszczeń w tym zakresie. Szczegóły całkowania po grubości zawiera dodatek D. Wprowadzono tam powłokowe siły przekrojowe (por. (D.4)) i zapisano związek konstytutywny (2.72) na poziomie całego przekroju (por. (D.18)).

Wykorzystując wyprowadzone w dodatku D uogólnione miary naprężeń (por. (D.5-D.7)), możemy zapisać ich dekompozycję, analogicznie do (2.82):

$${}^2_0 L_{mech}^{mn} = {}^1_0 L_{mech}^{mn} + {}^0_0 L_{mech}^{mn} \quad (2.87)$$

oraz następującą postać wirtualnej pracy wewnętrznej:

$${}^2\delta W_i = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{n=0}^2 \delta_0 E_{\alpha\beta}^{(n)} \left(\left({}^1_0 L_{mech}^{\alpha\beta} + {}^0_0 L_{mech}^{\alpha\beta} \right) - {}^2_0 L_{th}^{\alpha\beta} \right) + 2\delta_0 E_{\alpha 3}^{(0)} \left({}^1_0 L_{mech}^{\alpha 3} + {}^0_0 L_{mech}^{\alpha 3} \right) \right\} {}^0 d\Omega \quad (2.88)$$

2.5. Związek konstytutywny na poziomie przekroju

Jak wcześniej wspomniano, szczegóły wyprowadzenia związku konstytutywnego (2.72) w miarach uogólnionych naprężeń i odkształceń przedstawiono w dodatku D. W tym miejscu przedstawia się jedynie skrótowy zapis, wprowadzając tym samym oznaczenia, które będą wykorzystywane w dalszej części pracy.

Ogólną postać związku naprężenie-odkształcenie dla wielkości mechanicznych można zapisać w postaci (por. (D.18)):

$$\left\{ {}^0 \mathcal{S}_{mech} \right\} = \left[{}^0 \mathcal{H}_{mech} \right] \left\{ {}^0 \mathcal{E}_{mech} \right\}, \quad (2.89)$$

gdzie:

$$\left\{ {}^0 \mathcal{S}_{mech} \right\} = \begin{Bmatrix} \left\{ {}^0 \mathcal{N}_{mech} \right\} \\ \left\{ {}^0 \mathcal{M}_{mech} \right\} \\ \left\{ {}^0 \mathcal{B}_{mech} \right\} \\ \left\{ {}^0 \mathcal{Q}_{mech} \right\} \end{Bmatrix}, \quad \left\{ {}^0 \mathcal{E}_{mech} \right\} = \begin{Bmatrix} \left\{ {}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \right\} \\ \left\{ {}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \right\} \\ \left\{ {}^0 \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \right\} \\ \left\{ {}^0 \boldsymbol{\gamma}^{(0)} \right\} \end{Bmatrix}. \quad (2.90)$$

Składowe wektora przyrostów naprężeń i odkształceń w (2.90) przyjmowane są, odpowiednio, wg (D.6) i (D.9). Macierz konstytutywna $[_0\mathcal{H}_{mech}]$ ma następującą strukturę blokową (por. (D.18)):

$$[_0\mathcal{H}_{mech}] = \begin{bmatrix} [A]_{3 \times 3}^{(0,0)} & [B]_{3 \times 3}^{(0,1)} & [D]_{3 \times 3}^{(0,2)} & [0]_{3 \times 2} \\ [B]_{3 \times 3}^{(1,0)} & [D]_{3 \times 3}^{(1,1)} & [E]_{3 \times 3}^{(1,2)} & [0]_{3 \times 2} \\ [D]_{3 \times 3}^{(2,0)} & [E]_{3 \times 3}^{(2,1)} & [F]_{3 \times 3}^{(2,2)} & [0]_{3 \times 2} \\ [0]_{2 \times 3} & [0]_{2 \times 3} & [0]_{2 \times 3} & [S_A]_{2 \times 2}^{(0,0)} \end{bmatrix}. \quad (2.91)$$

Poszczególne podbloki w (2.91) dane są przez:

$$[A]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad [S_A]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} k_{23} a_{44} & \sqrt{k_{23} k_{13}} a_{45} \\ \sqrt{k_{23} k_{13}} a_{54} & k_{13} a_{55} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} c_{ij}^0 \mu d\theta^3, \quad (2.92)$$

$$[B]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}, \quad b_{ij} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} c_{ij} \theta^3 \mu d\theta^3, \quad (2.93)$$

$$[D]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}, \quad d_{ij} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} c_{ij} (\theta^3)^2 \mu d\theta^3, \quad (2.94)$$

$$[E]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix}, \quad e_{ij} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} c_{ij} (\theta^3)^3 \mu d\theta^3, \quad (2.95)$$

$$[F]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}, \quad f_{ij} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} c_{ij} (\theta^3)^4 \mu d\theta^3, \quad (2.96)$$

gdzie c_{ij} są elementami macierzy (2.68).

W (2.92) wprowadzono opisane w dodatku B globalne dla całego przekroju współczynniki korekcyjne ścinania k_{ij} .

Lewy dolny indeks przy macierzy \mathcal{H} wprowadzono w celu podkreślenia, że parametry materiałowe są traktowane podczas analizy jako stałe, niezależne od poziomu obciążenia, w tym temperatury.

Dla czynnika termicznego natomiast związek konstytutywny na poziomie przekroju w konfiguracji $t = 2$ dany jest przez (por. (D.18)):

$$\left\{ {}^2\mathcal{S}_h \right\} = \left[{}_0\mathcal{H}_h \right] \left\{ {}^2\mathcal{T} \right\}, \quad (2.97)$$

gdzie

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \mathcal{S}_{th} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \mathcal{N}_{th} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \mathcal{M}_{th} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \mathcal{B}_{th} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} 0 \end{matrix} \right\} \end{matrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \mathcal{T} \right\} = \left\{ \begin{matrix} T^{(0)} \\ T^{(1)} \end{matrix} \right\}, \quad (2.98)$$

przy czym $T^{(0)}$ oraz $T^{(1)}$ przyjmuje się zgodnie z (2.57).

Struktura blokowa macierzy konstytutywnej związanej z wpływem temperatury jest następująca:

$$\left[\begin{matrix} 0 \\ \mathcal{H}_{th} \end{matrix} \right] = \begin{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} (0,0) \\ A_{th} \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} & \left\{ \begin{matrix} (0,1) \\ B_{th} \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} \\ \left\{ \begin{matrix} (1,0) \\ B_{th} \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} & \left\{ \begin{matrix} (1,1) \\ D_{th} \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} \\ \left\{ \begin{matrix} (2,0) \\ D_{th} \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} & \left\{ \begin{matrix} (2,1) \\ E_{th} \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} \\ \left\{ \begin{matrix} 0 \end{matrix} \right\}_{2 \times 1} & \left\{ \begin{matrix} 0 \end{matrix} \right\}_{2 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (2.99)$$

Podwektory (2.99) są dane przez:

$$\left\{ \begin{matrix} A_{th} \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} = \left\{ \begin{matrix} a_{th}^1 \\ a_{th}^2 \\ a_{th}^3 \end{matrix} \right\}, \quad a_{th}^i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{th}^i \mu d\theta^3, \quad (2.100)$$

$$\left\{ \begin{matrix} B_{th} \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} = \left\{ \begin{matrix} b_{th}^1 \\ b_{th}^2 \\ b_{th}^3 \end{matrix} \right\}, \quad b_{th}^i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{th}^i \theta^3 \mu d\theta^3, \quad (2.101)$$

$$\left\{ \begin{matrix} D_{th} \end{matrix} \right\}_{3 \times 1} = \left\{ \begin{matrix} d_{th}^1 \\ d_{th}^2 \\ d_{th}^3 \end{matrix} \right\}, \quad d_{th}^i = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} c_{th}^i (\theta^3)^2 \mu d\theta^3, \quad (2.102)$$

gdzie c_{th}^i według (2.70).

2.6. Kryterium Tsai-Wu w analizie wyężenia materiału

Jak wspomniano we Wstępie, analizę stateczności konstrukcji rozszerza się o kontrolę stanu wyężenia materiału warstw, wykorzystując w tym celu kryterium Tsai-Wu.

Obszar bezpieczny dla płaskiego stanu naprężenia w punkcie warstwy poprzecznie izotropowej określa zgodnie z hipotezą Tsai-Wu wielomian [48, 57, 65, 127, 128]:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right)^2 \sigma_{ef}^{aa} \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right)^2 \sigma_{ef}^{bb} + \frac{1}{X_t X_c} \left(2\sigma_{ef}^{aa} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{Y_t Y_c} \left(2\sigma_{ef}^{bb} \right)^2 + 2F_{ab} \frac{2\sigma_{ef}^{aa}}{2\sigma_{ef}^{bb}} + \frac{1}{S_s^2} \left(2\sigma_{ef}^{ab} \right)^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.103)$$

gdzie $\frac{2}{2}\sigma_{ef}^{aa}$, $\frac{2}{2}\sigma_{ef}^{bb}$, $\frac{2}{2}\sigma_{ef}^{ab}$ są składowymi tensora naprężeń efektywnych Cauchy'ego w lokalnych osiach materiałowych warstwy (rys. 2.4). X_t , X_c , są wytrzymałością warstwy w kierunku zgodnym z ułożeniem włókien przy rozciąganiu i ściskaniu; Y_t , Y_c symbolizują wytrzymałości warstwy w kierunku poprzecznym do kierunku włókien przy rozciąganiu i ściskaniu; S_s oznacza wytrzymałość warstwy na ścięcie w jej płaszczyźnie; F_{ab} to współczynnik interakcji naprężeń $\frac{2}{2}\sigma_{ef}^{aa}$ i $\frac{2}{2}\sigma_{ef}^{bb}$. Wszystkie charakterystyki wytrzymałościowe poza współczynnikiem interakcji wyznaczane są w laboratoryjnych próbach jednoosiowych. Ponieważ określenie współczynnika F_{ab} wymagałoby przeprowadzenia skomplikowanego badania dwu-osiowego [57, 65, 161], często wartość tej stałej przyjmowana jest jako równa zero. W niniejszej pracy jednak współczynnik ten jest wyznaczany zgodnie z formułą, którą podali Tsai i Hahn⁸⁾

$$F_{ab} = \frac{-1}{2\sqrt{X_t X_c Y_t Y_c}}. \quad (2.104)$$

Wartość współczynnika interakcji, choć zwykle bardzo mała, ma znaczący wpływ na kształt i zasięg obszaru bezpiecznego kreślonego zgodnie z opisywaną hipotezą w przestrzeni naprężeń [139].

Komentarza wymaga fakt, że kryterium (2.103) zapisane zostało dla płaskiego stanu naprężenia. W zastosowanym modelu powłoki, obok składowych naprężeń występujących w (2.103), występują także składowe poprzecznego ścinania. Podkreślny, że kryterium Tsai-Wu jest w ogólnym przypadku trójwymiarowe [127, 128] i można by je w takiej postaci zastosować w niniejszej pracy. W praktyce jednak, ze względu na dostępne w analizowanych w dalszej części pracy przykładach dane wytrzymałościowe ograniczone do płaskiego stanu naprężenia, kontrolę wyęczenia ogranicza się tylko do składowych PSN i dlatego przytaczane tu kryterium jest dwuwymiarowe. Warto dodać, że takie uproszczone podejście jest zastosowane także w programie NX-Nastran.

Stopień wyęczenia materiału określane będzie tzw. indeksem zniszczenia FI , którego formuła wynika wprost z (2.103):

$$\begin{aligned} FI = & \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right)^2 \sigma_{ef}^{aa} \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right)^2 \sigma_{ef}^{bb} + \frac{1}{X_t X_c} \left(2\sigma_{ef}^{aa} \right)^2 + \\ & + \frac{1}{Y_t Y_c} \left(2\sigma_{ef}^{bb} \right)^2 + 2F_{ab} \frac{2\sigma_{ef}^{aa}}{2\sigma_{ef}^{bb}} + \frac{1}{S_s^2} \left(2\sigma_{ef}^{ab} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.105)$$

Stanom bezpiecznym odpowiadają wartości $FI < 1$, natomiast wartości $FI > 1$ będą określały stan niebezpieczny.

⁸⁾ Tsai S.W., Hahn H.T.: *Introduction to composite materials*. Lancaster: Technomic Publishing Co., 1980. Praca cytowana za [161].

O mechanizmie zniszczenia rozstrzyga się w sposób przybliżony, tj. na podstawie oceny, które ze składników sumy po prawej stronie (2.105) są dominujące [127]. I tak:

$$\text{warunek: } FI_a = \left(\frac{1}{X_t} - \frac{1}{X_c} \right)^2 \sigma_{ef}^{aa} + \frac{1}{X_t X_c} (\sigma_{ef}^{aa})^2 = \max(FI_a, FI_b, FI_{ab})$$

odpowiada zniszczeniu włókien;

$$\text{warunek: } FI_b = \left(\frac{1}{Y_t} - \frac{1}{Y_c} \right)^2 \sigma_{ef}^{bb} + \frac{1}{Y_t Y_c} (\sigma_{ef}^{bb})^2 = \max(FI_a, FI_b, FI_{ab})$$

odpowiada zniszczeniu matrycy;

(2.106)

$$\text{warunek: } FI_{ab} = \frac{1}{S_s^2} (\sigma_{ef}^{ab})^2 = \max(FI_a, FI_b, FI_{ab})$$

odpowiada ściśnięciu warstwy.

Rozdział 3

IMPLEMENTACJA NUMERYCZNA

W tym rozdziale przedstawia się elementy numerycznej implementacji modelu obliczeniowego powłoki opisanego w rozdziale 2. Na początku omówione są krótko elementy skończone stosowane w dyskretyzacji, następnie podana jest macierzowa wersja zasady przemieszczeń wirtualnych, kolejno omówione są: metody śledzenia ścieżek równowagi, analiza z uwzględnieniem imperfekcji oraz analiza wyężenia konstrukcji.

3.1. Elementy skończone stosowane w analizie

Do dyskretyzacji analizowanych konstrukcji używane są elementy izoparametryczne [58, 61, 188]. W stosowanym programie udostępnione są: 8-węzłowy element Serendipity oraz 9- i 16-węzłowe elementy Lagrange'a [34, 58].

Przyjęto następujące oznaczenia:

- NNE – liczba węzłów elementu,
- k – numer węzła w elemencie,
- r, s – naturalne współrzędne lokalne elementu,
- q_M – przemieszczenie (stopień swobody) w węźle k elementu, $M = 1..5$,
- u_M – przemieszczenie w dowolnym punkcie elementu, $M = 1..5$.

Zachodzą następujące relacje między przemieszczeniami punktów elementu, a składowymi wektora przemieszczeń (2.49):

$$\begin{aligned} {}^m u_M &= {}^m v_i^{(0)} & M = i = 1, 2, 3 & \quad (\text{translacje}), \\ {}^m u_M &= {}^m v_j^{(1)} & M - 3 = j = 1, 2 & \quad (\text{obroty}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Przemieszczenia punktów w elemencie w funkcji parametrów węzłowych przedstawia zależność:

$${}^m u_M(r, s) = \sum_{k=1}^{NNE} [N_k(r, s) {}^m q_M^k], \quad M = 1, \dots, 5, \quad (3.2)$$

gdzie $N_k(r, s)$ jest funkcją kształtu naturalnych współrzędnych elementu w węźle k (patrz np. [58, 109]).

Wprowadzając liniowe operatory macierzowe B_{ijM} i G_{ikP} , składowe tensora odkształcenia ${}^m E_{ij}$ (por. (2.51)) możemy zapisać [79, 82]:

$${}^m E_{ij} = B_{ijM} {}^m u_M + \frac{1}{2} G_{ikP} G_{jkQ} {}^m u_P {}^m u_Q. \quad (3.3)$$

Pochodne składowych tensora odkształceń w funkcji przemieszczeń węzłowych w konfiguracji aktualnej wyrażone są przez [79, 82]:

$$\frac{\partial_0^1 E_{ij}}{\partial q_R} = B_{ijM} \frac{\partial^1 u_M}{\partial q_R} + G_{ikP} G_{jkM} u_P \frac{\partial^1 u_M}{\partial q_R}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2_0 E_{ij}}{\partial q_R \partial q_Q} = G_{ikP} G_{jkM} \frac{\partial^1 u_P}{\partial q_Q} \frac{\partial^1 u_M}{\partial q_R}, \quad (3.5)$$

Ze względu na liniową zależność przemieszczeń od parametrów węzłowych drugie pochodne przemieszczeń po parametrach węzłowych w (3.5) zanikają.

Analiza efektywności tych elementów, zwłaszcza pod kątem obecności tzw. efektu blokady (ang. *locking*, [29, 34, 36, 58, 109, 111, 175, 176, 189]), nie jest przedmiotem niniejszej pracy i w tym zakresie bazuje się na doświadczeniach zaprezentowanych m.in. w [79, 83]. W konsekwencji najczęściej w obliczeniach stosowany jest element 8-węzłowy. W celu uniknięcia wpływu blokady na wyniki stosowany jest zaproponowany w [189] schemat równomiernie zredukowanego całkowania na etapie wyznaczania sztywności elementów (ang. *Uniform Reduced Integration* – URI) [58, 81, 175]. Technika ta może być jednak źródłem zero-energetycznych form deformacji, tzw. form pasożytniczych [34, 176, 177]. Z tego względu, w celu weryfikacji otrzymanego rozwiązania, w pracy używany jest także element 16-węzłowy z pełnym całkowaniem (ang. *Full Integration* – FI), który można uznać za zasadniczo wolny od wpływu efektu locking [34].

3.2. Macierzowa reprezentacja zasady przemieszczeń wirtualnych

Przypomnijmy wprowadzoną wcześniej konwencję: konfiguracją odniesienia jest chwila początkowa $t=0$, konfigurację aktualną oznaczmy przez $t=1$, a konfigurację poszukiwaną przez $t=2$. Wewnętrzną pracę wirtualną (2.88) z uwzględnieniem związku konstytutywnego (2.89) i (2.97) można wyrazić, jak poniżej:

$$\begin{aligned} {}^2\delta W_i = & \int_{\Omega} \left[\sum_{n=0}^2 \delta_0 E_{\alpha\beta}^{(n)} \left\{ {}^1_0 L_{mech}^{\alpha\beta} + \sum_{m=0}^2 \left(H^{\alpha\beta\chi\delta}{}^{(n,m)} {}^m_0 E_{\chi\delta} \right) - {}^2_0 L_h^{\alpha\beta} \right\} \right] d\Omega + \\ & + 2 \int_{\Omega} \delta_0 E_{\zeta^3}^{(0)} \left\{ {}^1_0 L_{mech}^{\zeta^3} + 2 \Xi^{\zeta^3\eta^3}{}^{(0,0)} {}^0_0 E_{\eta^3} \right\} d\Omega, \end{aligned} \quad (3.6)$$

gdzie $H^{\alpha\beta\chi\delta}$ i $\Xi^{\zeta^3\eta^3}$ są odpowiednimi współrzędnymi tensora konstytutywnego ${}^0\mathcal{H}_{mech}$ (por. (2.91)).

Wykorzystując dekompozycję przyrostową (2.83), składowe tensora odkształcenia w konfiguracji poszukiwanej możemy zapisać:

$${}^2_0 E_{ij} = {}^1_0 E_{ij} + {}^0_0 E_{ij}. \quad (3.7)$$

Składowe odkształcenia w konfiguracji poszukiwanej można także przybliżyć rozwinięciem w szereg Taylora w otoczeniu konfiguracji aktualnej, z czego wyznacza się nieznaną w (3.7) przyrost odkształceń w funkcji ich aktualnej wartości:

$${}^2_0 E_{ij} \cong {}^1_0 E_{ij} + \frac{\partial_0^1 E_{ij}}{\partial q_S} \Delta q_S \Rightarrow {}^0_0 E_{ij} = \frac{\partial_0^1 E_{ij}}{\partial q_S} \Delta q_S, \quad (3.8)$$

gdzie pochodna składowych tensora odkształcenia w konfiguracji aktualnej, $t = 1$, wg (3.4).

Wariację przyrostów składowych tensora odkształcenia można zapisać następująco [79, 82]:

$$\delta({}_0E_{ij}) = \delta({}_0^2 E_{ij} - {}_0^1 E_{ij}) = \delta({}_0^2 E_{ij}) \Rightarrow \delta({}_0E_{ij}) \cong \frac{\partial {}_0^1 E_{ij}}{\partial q_S} \delta q_S + \frac{\partial^2 {}_0^1 E_{ij}}{\partial q_S \partial q_T} \delta q_S \Delta q_T, \quad (3.9)$$

gdzie pochodne składowych tensora odkształceń w MES wyznaczone są według (3.4) i (3.5).

Podstawiając (3.8) i (3.9) do (3.6) i po uporządkowaniu, otrzymujemy:

$${}^2\delta W_i = \delta q_S \left\{ {}_0^1 F_S - {}_0^2 F_S^{th} + \left({}_0^1 K_{ST}^U + {}_0^1 K_{ST}^G - {}_0^2 K_{ST}^{G,th} \right) \Delta q_T + \underbrace{{}_0^1 K_{STR}^{U(II)} \Delta q_T \Delta q_R}_{J_S({}_0^1 q, \Delta q)} \right\}, \quad (3.10)$$

gdzie: ${}_0^1 F_S$ – składowe wektora sił zrównoważonych ${}_0^1 \mathbf{F}^{(1)}$ w konfiguracji aktualnej, zależne od aktualnych naprężeń i przemieszczeń:

$${}_0^1 F_S = \int_{\Omega} \left[\sum_{n=0}^2 \frac{\partial {}_0^1 E_{\alpha\beta}^{(n)}}{\partial q_S} {}_0^1 L_{mech}^{\alpha\beta(n)} + 2 \frac{\partial {}_0^1 E_{\zeta 3}^{(0)}}{\partial q_S} {}_0^1 L_{mech}^{\zeta 3(0)} \right] d\Omega, \quad (3.11)$$

${}_0^2 F_S^{th}$ – składowe wektora obciążenia termicznego ${}_0^2 \mathbf{F}_{th}$, zależne od temperatury w konfiguracji poszukiwanej i aktualnych przemieszczeń:

$${}_0^2 F_S^{th} = \int_{\Omega} \left[\sum_{n=0}^2 \frac{\partial {}_0^1 E_{\alpha\beta}^{(n)}}{\partial q_S} {}_0^2 L_{th}^{\alpha\beta(n)} \right] d\Omega, \quad (3.12)$$

${}_0^1 K_{ST}^U$ – składowe materiałowej macierzy sztywności ${}_0^1 \mathbf{K}_U$, zależne od aktualnych przemieszczeń:

$${}_0^1 K_{ST}^U = \int_{\Omega} \left[\sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \left(\frac{\partial {}_0^1 E_{\alpha\beta}^{(n)}}{\partial q_S} H^{\alpha\beta\chi\delta(n,m)} \frac{\partial {}_0^1 E_{\chi\delta}^{(m)}}{\partial q_T} \right) + 4 \frac{\partial {}_0^1 E_{\zeta 3}^{(0)}}{\partial q_S} \Xi^{\zeta 3\eta 3} \frac{\partial {}_0^1 E_{\eta 3}^{(0)}}{\partial q_T} \right] d\Omega, \quad (3.13)$$

${}_0^1 K_{ST}^G$ – składowe geometrycznej macierzy sztywności ${}_0^1 \mathbf{K}_G$, zależne od aktualnych naprężeń:

$${}_0^1 K_{ST}^G = \int_{\Omega} \left[\sum_{n=0}^2 \frac{\partial^2 {}_0^1 E_{\alpha\beta}^{(n)}}{\partial q_S \partial q_T} {}_0^1 L_{mech}^{\alpha\beta(n)} + 2 \frac{\partial^2 {}_0^1 E_{\zeta 3}^{(0)}}{\partial q_S \partial q_T} {}_0^1 L_{mech}^{\zeta 3(0)} \right] d\Omega, \quad (3.14)$$

${}_0^2 K_{ST}^{G,th}$ – składowe termicznej geometrycznej macierzy sztywności ${}_0^2 \mathbf{K}_{G,th}$, którą dalej nazywać będziemy w skrócie termiczną macierzą sztywności, zależne od temperatury w konfiguracji poszukiwanej:

¹⁾ Symbolikę wektora sił zrównoważonych ${}_0^1 \mathbf{F}$ i późniejszą \mathbf{F} należy odróżniać od stosowanego w pracy oznaczenia materialnego gradientu deformacji ${}_0^2 \mathbf{F}$ i jego odwrotności ${}_0^2 \mathbf{F}^{-1}$.

$${}^2_0 \mathbf{K}_{ST}^{G,th} = \int_{\Omega} \left[\sum_{n=0}^2 \frac{\partial^2 {}^1_0 E_{\alpha\beta}^{(n)}}{\partial q_S \partial q_T} {}^2_0 L_{th}^{\alpha\beta (n)} \right] d\Omega, \quad (3.15)$$

${}^1_0 \mathbf{K}_{STR}^{U(H)}$ – składowe trójwymiarowego obiektu, który nazywany jest „macierzą” wyższego rzędu [79] ${}^1_0 \mathbf{K}^{U(H)}$, zależne od aktualnych przemieszczeń:

$${}^1_0 \mathbf{K}_{STR}^{U(H)} = \int_{\Omega} \left[\sum_{n=0}^2 \sum_{m=0}^2 \left(\frac{\partial^2 {}^1_0 E_{\alpha\beta}^{(n)}}{\partial q_S \partial q_R} H^{\alpha\beta\gamma\delta (n,m)} \frac{\partial {}^1_0 E_{\gamma\delta}^{(m)}}{\partial q_T} \right) + 4 \frac{\partial^2 {}^1_0 E_{\zeta\zeta}^{(0,0)}}{\partial q_S \partial q_R} \Xi^{\zeta\eta\zeta} \frac{\partial {}^1_0 E_{\eta\eta}^{(0)}}{\partial q_T} \right] d\Omega. \quad (3.16)$$

Macierz wyższego rzędu ${}^1_0 \mathbf{K}^{U(H)}$ (3.16) wraz kwadratem przyrostu wektora parametrów węzłowych w równaniu (3.10) stanowią dodatkowy składnik $\mathbf{J}({}^1\mathbf{q}, \Delta\mathbf{q})$, zależny od aktualnej deformacji i nieliniowy względem przyrostu przemieszczeń.

Równanie (3.10) możemy przepisać wprowadzając notację macierzową:

$${}^2\delta W_i = \delta\mathbf{q}^T \left({}^1_0 \mathbf{F} - {}^2_0 \mathbf{F}_{th} + ({}^1_0 \mathbf{K}_U + {}^1_0 \mathbf{K}_G - {}^2_0 \mathbf{K}_{G,th}) \Delta\mathbf{q} + \mathbf{J}({}^1\mathbf{q}, \Delta\mathbf{q}) \right). \quad (3.17)$$

Pracę wirtualną obciążeń zewnętrznych (por. (2.81)) w notacji macierzowej zapisać można następująco:

$${}^2\delta W_e = \delta\mathbf{q}^T {}^2_0 \mathbf{R}_{mech}, \quad (3.18)$$

gdzie ${}^2_0 \mathbf{R}_{mech}$ reprezentuje wektor zewnętrznych mechanicznych obciążeń węzłowych w konfiguracji poszukiwanej.

Podstawiając (3.17) i (3.18) do (2.73), zapisujemy macierzową wersję zasady przemieszczeń wirtualnych, otrzymując tym samym macierzową postać przyrostowego równania równowagi:

$$\left({}^1_0 \mathbf{K}_U + {}^1_0 \mathbf{K}_G - {}^2_0 \mathbf{K}_{G,th} \right) \Delta\mathbf{q} = {}^2_0 \mathbf{R}_{mech} + {}^2_0 \mathbf{F}_{th} - {}^1_0 \mathbf{F} - \mathbf{J}({}^1\mathbf{q}, \Delta\mathbf{q}), \quad (3.19)$$

gdzie $\left({}^1_0 \mathbf{K}_U + {}^1_0 \mathbf{K}_G - {}^2_0 \mathbf{K}_{G,th} \right)$ jest tzw. styczną macierzą sztywności.

Komentarza w tym miejscu wymaga pojawiająca się po lewej stronie równania (3.19) termiczna macierz sztywności ${}^2_0 \mathbf{K}_{G,th}$, przy której występuje lewy górny indeks $t=2$, w odróżnieniu od pozostałych składowych macierzy sztywności oznaczonych indeksem $t=1$. Oznaczenie to jest bezpośrednią konsekwencją definicji tych składowych, tj. macierze ${}^1_0 \mathbf{K}_U$ i ${}^1_0 \mathbf{K}_G$ zależą, odpowiednio, od aktualnych ($t=1$) przemieszczeń i naprężeń mechanicznych (por. (3.13) i (3.14)), natomiast macierz termiczna ${}^2_0 \mathbf{K}_{G,th}$ jest funkcją temperatury w konfiguracji poszukiwanej ($t=2$) (por. (3.15)). Wartość temperatury uwzględniana w składniku ${}^2_0 \mathbf{K}_{G,th}$ jest jednak zależna od metody śledzenia ścieżki i będzie omówiona w dalszej części pracy.

3.3. Ogólne uwagi o równaniu przyrostowym

Przypomnijmy, że w przyjętej w pracy metodzie analizy stateczności konstrukcji poszukiwane są punkty krytyczne na ścieżce równowagi układu, którą to ścieżkę znajdujemy na drodze rozwiązania przyrostowego. Równanie (3.19) odgrywa tu zatem kluczową rolę,

przy czym w zaprezentowanej powyżej postaci przedstawia ono nieliniową zależność względem poszukiwanego przyrostu przemieszczeń, gdyż uwzględniono w nim związany z macierzą (3.16) wektor wyższego rzędu (por. (3.10)). W celu znalezienia rozwiązania równania, dokonuje się jego linearyzacji, pomijając powyższy człon nieliniowy:

$$\left({}^1_0\mathbf{K}_U + {}^1_0\mathbf{K}_G - {}^2_0\mathbf{K}_{G,th} \right) \Delta \mathbf{q} = {}^2_0\mathbf{R}_{mech} + {}^2_0\mathbf{F}_{th} - {}^1_0\mathbf{F}. \quad (3.20)$$

Podkreślmy teraz, że równanie (3.20) zapisane jest w postaci ujmującej dwa typy obciążeń: obciążenia natury mechanicznej ${}^2_0\mathbf{R}_{mech}$ (obciążenia skupione, ciśnienie itp.) oraz obciążenie temperaturą ${}^2_0\mathbf{F}_{th}$. Uwzględnienie zmienności obydwóch obciążeń jednocześnie wymagałoby analizy tzw. obciążenia wieloparametrowego. Jest to dość skomplikowane zagadnienie [95, 171]. W niniejszej pracy, jak już wcześniej wspomniano, badane są tylko obciążenia jednoparametrowe.

Przyjęto zatem dwa możliwe warianty analizy:

- zmiennego obciążenia mechanicznego przy ustalonym polu temperatury,
- zmiennego obciążenia termicznego przy ustalonym poziomie obciążenia mechanicznego.

Praktycznie jednak w pracy skoncentrowano się na przypadkach powłok obciążonych tylko i wyłącznie zmiennym polem temperatury. Zaznaczmy ponownie, że określenie ‘zmienny’ oznacza tu zmienność w tzw. czasie umownym.

Przepiszmy (3.20) w skróconej formie, uwzględniając jedynie obciążenie termiczne:

$$\left({}^1_0\mathbf{K}_U + {}^1_0\mathbf{K}_G - {}^2_0\mathbf{K}_{G,th} \right) \Delta \mathbf{q} = {}^2_0\mathbf{F}_{th} - {}^1_0\mathbf{F}. \quad (3.21)$$

Zazwyczaj w analizie przyrostowej obciążenie definiowane jest poprzez pewne obciążenie referencyjne pomnożone przez tzw. parametr obciążenia [34, 171]. Obciążenie referencyjne jest definiowane raz i pozostaje ustalone. Zauważmy jednak, że wektor obciążenia termicznego w niniejszym sformułowaniu jest zależny od aktualnych przemieszczeń (por. (3.12) i (3.4)). Wektor ten ma zatem charakter obciążenia śledzącego [95] i ewentualny zapis obciążenia w konfiguracji poszukiwanej w formie ${}^2_0\mathbf{F}_{th} = {}^2\lambda_{th} \mathbf{F}_{th,REF}$, gdzie $\mathbf{F}_{th,REF}$ jest wektorem ustalonym, byłby błędny [113].

W poprzednim rozdziale w punkcie 2.2 wprowadzono opis obciążenia termicznego (3.57), będący uogólnieniem zapisów (3.54) i (3.56). Zgodnie z tym opisem przyrost temperatury w dowolnym punkcie na grubości powłoki jest uzależniony od przyrostu temperatury na wyróżnionej, tj. górnej albo dolnej powierzchni zewnętrznej (tzw. temperatury wiodącej), ustalonego jako iloczyn amplitudy temperatur, której wskazane włókno jest poddane, i parametru obciążenia ${}^m\lambda_{th}$. W niniejszym sformułowaniu obciążeniem referencyjnym jest zatem amplituda temperatur na wskazanej powierzchni zewnętrznej, tj.

$$\Delta T_{REF} = T_{max} - T_{init}, \quad (3.22)$$

gdzie T_{max} i T_{init} wg (2.53) lub (2.55).

W istocie to występujące w (3.12) i (3.15) termiczne siły przekrojowe ${}^m_0L_{th}^{\alpha\beta}$ są bezpośrednio zależne od obciążenia referencyjnego (3.22):

$${}^m_0L_{th}^{\alpha\beta} = L_{th}^{\alpha\beta} \left({}^m\lambda_{th}, \Delta T_{REF} \right). \quad (3.23)$$

²⁾ W celu uproszczenia zapisu nad oznaczeniem sił termicznych pominięto indeks (n).

Parametr obciążenia można wyłączyć na zewnątrz (3.23) (por. (D.7) i (D.10)):

$${}^m_0 L_{th}^{\alpha\beta} = {}^m \lambda_{th} L_{th}^{\alpha\beta} (\Delta T_{REF}). \quad (3.24)$$

Należałoby zatem wprowadzić poniższy zapis dla wektora obciążenia termicznego oraz zależnej także od temperatury termicznej macierzy sztywności w dowolnej konfiguracji $t = m$:

$$\begin{aligned} {}^m_0 \mathbf{F}_{th} &= \mathbf{F}_{th} \left({}^{(m-1)} \mathbf{q}, {}^m \lambda_{th} L_{th}^{\alpha\beta} (\Delta T_{REF}) \right), \\ {}^m_0 \mathbf{K}_{G,th} &= \mathbf{K}_{G,th} \left({}^m \lambda_{th} L_{th}^{\alpha\beta} (\Delta T_{REF}) \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

W (3.25) zaznaczono dodatkowo, że wektor obciążenia termicznego jest zależny od przemieszczeń w znanej konfiguracji. Struktura tego wektora (3.12) i macierzy termicznej sztywności (3.15) pozwalają jednak także na wyprowadzenie parametru obciążenia z wnętrza i zapisanie (3.25) w formie:

$$\begin{aligned} {}^m_0 \mathbf{F}_{th} &= {}^m \lambda_{th} \mathbf{F}_{th} \left({}^{(m-1)} \mathbf{q}, \Delta T_{REF} \right), \\ {}^m_0 \mathbf{K}_{G,th} &= {}^m \lambda_{th} \mathbf{K}_{G,th} (\Delta T_{REF}). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Wykorzystując (3.26), równanie (3.21) można zapisać, jak poniżej:

$$\left({}^1_0 \mathbf{K}_U + {}^1_0 \mathbf{K}_G - {}^2 \lambda_{th} \mathbf{K}_{G,th} (\Delta T_{REF}) \right) \Delta \mathbf{q} = {}^2 \lambda_{th} \mathbf{F}_{th} \left({}^1 \mathbf{q}, \Delta T_{REF} \right) - {}^1_0 \mathbf{F}. \quad (3.27)$$

W celu uproszczenia dalszych rozważań i przekształceń wprowadźmy jeszcze inną postać równania przyrostowego ze ‘skrótowym’ zapisem stycznej macierzy sztywności:

$$\mathbf{K} \left({}^1 \mathbf{q}, {}^2 \lambda_{th}, \Delta T_{REF} \right) \Delta \mathbf{q} = {}^2 \lambda_{th} \mathbf{F}_{th} \left({}^1 \mathbf{q}, \Delta T_{REF} \right) - \mathbf{F} \left({}^1 \mathbf{q} \right), \quad (3.28)$$

gdzie zaznaczono, że macierz $\left({}^1_0 \mathbf{K}_U + {}^1_0 \mathbf{K}_G - {}^2 \lambda_{th} \mathbf{K}_{G,th} (\Delta T_{REF}) \right) = \mathbf{K} \left({}^1 \mathbf{q}, {}^2 \lambda_{th}, \Delta T_{REF} \right)$ i wektor obciążenia termicznego ${}^2 \lambda_{th} \mathbf{F}_{th} \left({}^1 \mathbf{q}, \Delta T_{REF} \right)$ są funkcją aktualnych przemieszczeń i temperatury w konfiguracji poszukiwanej, a wektor sił zrównoważonych $\mathbf{F} \left({}^1 \mathbf{q} \right)$ jest od temperatury niezależny.

3.4. Metody śledzenia ścieżek równowagi

Wskutek pominięcia w (3.20) składnika nieliniowego względem przyrostu przemieszczeń, z bezpośredniego rozwiązania (3.28) otrzymujemy wynik, który może być obarczony dużym błędem, zwłaszcza jeśli zagadnienie jest silnie nieliniowe [179]. Dlatego też konieczne jest poprawienie uzyskanego rozwiązania. To jest dokonywane przy użyciu odpowiedniego algorytmu iteracyjnego, dla którego wynik rozwiązania (3.28) będzie traktowany jako pierwsze (lub zerowe) przybliżenie.

W nieliniowej analizie konstrukcji używany jest najczęściej algorytm Newtona-Raphsona [72, 111, 168, 169, 170, 171].

Jak nadmieniono w punkcie 2.4 pracy, celem analizy nie jest znalezienie tylko jednego rozwiązania w pojedynczym kroku przyrostowym, ale ciągu rozwiązań odpowiadających dyskretnym punktom czasowym, które definiują poszukiwaną ścieżkę równowagi kon-

strukcji. Istotną kwestią jest tu dalej wybór parametru sterującego, względem którego różnić można trzy typowe metody śledzenia ścieżek równowagi [34, 168, 171]:

- sterowanie obciążeniem,
- sterowanie przemieszczeniem,
- sterowanie parametrem łuku (parametrem ścieżki).

Jak już wspomniano w rozdziale 1, w niniejszej pracy w analizach numerycznych stosowane są jedynie: metoda sterowania obciążeniowego i parametrem łuku.

Aby omówić stosowane metody śledzenia ścieżek, przyjmijmy następujące oznaczenia:

- n – numer kroku przyrostowego stosowany w miejscu lewego górnego indeksu,
- i – numer iteracji w n -tym kroku przyrostowym stosowany w miejscu prawego górnego indeksu.

3.4.1. Sterowanie obciążeniowe

W metodzie sterowania obciążeniowego wartość parametru obciążenia ${}^n\lambda_{th}$ w dowolnym kroku przyrostowym n jest określona następująco:

$${}^n\lambda_{th} = {}^{(n-1)}\lambda_{th} + \Delta\lambda_{th}, \quad (3.29)$$

gdzie $\Delta\lambda_{th}$ jest predefiniowanym przyrostem tej wielkości.

Przyjmując, że stan przemieszczenia w chwili $n-1$ oraz temperatura w konfiguracji poszukiwanej są znane, możemy z równania (3.28), wyznaczyć wstępne, tzw. zerowe przybliżenie poszukiwanego przyrostu przemieszczenia:

$$\mathbf{K} \left({}^{(n-1)}\mathbf{q}, {}^n\lambda_{th}, \Delta T_{REF} \right) {}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)} = {}^n\lambda_{th} \mathbf{F}_{th} \left({}^{(n-1)}\mathbf{q}, \Delta T_{REF} \right) - \mathbf{F} \left({}^{(n-1)}\mathbf{q} \right). \quad (3.30)$$

Otrzymany z rozwiązania (3.30) przyrost ${}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)}$ umożliwi obliczenie zerowego przybliżenia poszukiwanych przemieszczeń:

$${}^n\mathbf{q}^{(0)} = {}^{(n-1)}\mathbf{q} + {}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)}. \quad (3.31)$$

Jak wcześniej napisano, wskutek zlinearyzowania równania wyjściowego (3.19), uzyskany na drodze rozwiązania równania (3.30) rezultat ${}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)}$ wymaga poprawienia. W tym celu przeprowadzany jest na danym kroku przyrostowym n ciąg iteracji Newtona $i = 1, 2, 3, \dots, i_{END}$ i z rozwiązania równania

$$\mathbf{K} \left({}^n\mathbf{q}^{(i-1)}, {}^n\lambda_{th}, \Delta T_{REF} \right) {}^n\delta\mathbf{q}^{(i)} = {}^n\lambda_{th} \mathbf{F}_{th} \left({}^n\mathbf{q}^{(i-1)}, \Delta T_{REF} \right) - \mathbf{F} \left({}^n\mathbf{q}^{(i-1)} \right) \quad (3.32)$$

wyznaczana jest poprawka $\delta\mathbf{q}^{(i)}$. Następnie korygowany jest wyznaczony z (3.30) przyrost:

$${}^n\Delta\mathbf{q}^{(i)} = {}^n\Delta\mathbf{q}^{(i-1)} + {}^n\delta\mathbf{q}^{(i)} \quad (3.33)$$

i przemieszczenia węzłowe:

$${}^n\mathbf{q}^{(i)} = {}^n\mathbf{q}^{(i-1)} + {}^n\delta\mathbf{q}^{(i)}. \quad (3.34)$$

Przy czym w (3.33) i (3.34) ${}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)}$ i ${}^n\mathbf{q}^{(0)}$ wyznaczamy z (3.30) i (3.31).

O zakończeniu procesu iteracyjnego decyduje spełnienie warunku:

$$\| {}^n\delta\mathbf{q}^{(i)} \| < \varepsilon \| {}^n\Delta\mathbf{q}^{(i)} \| \Rightarrow i = i_{END}, \quad (3.35)$$

gdzie ε jest zadaną tolerancją, a symbol $\|*\|$ oznacza normę kwadratową wektora. Z praktycznych względów, na wypadek problemów ze zbieżnością, wprowadza się graniczną liczbę iteracji i_{\max} w kroku przyrostowym. Jeśli warunek zbieżności (3.35) w tej liczbie iteracji nie zostanie spełniony, obliczenia są przerywane.

Przy znanej wartości ${}^n\lambda_{th}$ obliczony ostatecznie w ciągu iteracyjnym przyrost ${}^n\Delta\mathbf{q}^{i_{END}}$ i przemieszczenia ${}^n\mathbf{q}^{i_{END}}$ określają położenie nowego punktu na ścieżce równowagi.

Podkreślmy na koniec, że w metodzie sterowania obciążeniowego parametr obciążenia ${}^n\lambda_{th}$ jest zmienną niezależną, w związku z czym jest on w ramach danego kroku przyrostowego n znany i ustalony i może mieć tę samą wartość po obu stronach równania (3.30) czy (3.32). Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, że po lewej stronie tych równań wartość tego parametru, nawiązująca do konfiguracji poszukiwanej, związana jest ze składnikiem sztywności, który odejmowany jest od pozostałych składowych zależnych od aktualnych przemieszczeń i naprężeń. Jeśli więc przyjęty przyrost parametru $\Delta\lambda_{th}$ jest zbyt duży, mogą wystąpić pewne problemy z uwarunkowaniem macierzy. Należy zatem unikać zbyt dużych wartości $\Delta\lambda_{th}$. Nie stanowi to jednak o ograniczeniu praktycznego zastosowania opisanej metody.

Metoda sterowania obciążeniowego cechuje się, wspomnianym wcześniej, charakterystycznym ograniczeniem, mianowicie pozwala śledzić rozwiązanie jedynie do poziomu punktu granicznego obciążenia. Za tym punktem krzywa (ścieżka) przestaje być jednoznacznie określona dla zmiennej niezależnej ${}^n\lambda_{th}$, stąd algorytm w pobliżu tego punktu traci zbieżność. Z tego względu metoda ta jest mało przydatna w przeprowadzanej w pracy analizie stateczności konstrukcji, gdyż nie umożliwia wyznaczenia wielkości obciążenia krytycznego oraz śledzenia ścieżki pokrytycznej.

3.4.2. Sterowanie parametrem łuku

Analizę ścieżki pokrytycznej umożliwia metoda sterowania parametrem łuku. W metodzie tej przyjmuje się mieszany parametr sterujący, wiążący przyrost obciążenia z przyrostem przemieszczenia, tzw. długość łuku lub inaczej długość parametru ścieżki ds . Technika ta pozwala na efektywne poszukiwanie rozwiązań w pobliżu punktów granicznych obciążenia, ale także przemieszczenia (punktów zwrotnych ścieżki) [19, 169].

Etap zerowy w kroku przyrostowym

Podobnie jak w przypadku sterowania obciążeniowego, niezbędne jest określenie zerowego przybliżenia poszukiwanego przyrostu przemieszczeń. Nie jest tu jednak możliwe zastosowanie równania (3.30), gdyż o ile znany jest stan przemieszczenia z przyrostu $(n-1)$, to wartość parametru obciążenia w konfiguracji poszukiwanej ${}^n\lambda_{th}$ pozostaje nieokreślona, gdyż w tej metodzie przyrost parametru obciążenia $\Delta\lambda_{th}$ nie jest (poza pewnym wyjątkiem) predefiniowany. Oprócz zerowego przybliżenia poszukiwanego przyrostu przemieszczeń konieczne jest zatem także określenie zerowego przybliżenia przyrostu parametru obciążenia w każdym kroku przyrostowym.

Długość parametru ścieżki ds , wiąże długość zerowego przybliżenia wektora przyrostu przemieszczeń z zerowym przybliżeniem przyrostu parametru obciążenia w kroku przyrostowym n zgodnie z relacją:

$$\left({}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)}\right)^T \left({}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)}\right) + \left({}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)}\right)^2 = {}^n ds^2, \quad (3.36)$$

gdzie ${}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)}$ i ${}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)}$ są poszukiwanymi w danym kroku przyrostowym zerowymi przybliżeniami. Związek (3.36) odpowiada sferycznemu sterowaniu parametrem łuku, w odróżnieniu od wariantu cylindrycznego, w którym występuje tylko pierwszy składnik sumy po lewej stronie (3.36), [44, 113].

Zerowe przybliżenie poszukiwanego przyrostu wektora przemieszczeń uzależnia się poprzez parametr obciążenia ${}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)}$ od tzw. wektora referencyjnego ${}^n\Delta\mathbf{q}_{REF}$:

$${}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)} = {}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)} {}^n\Delta\mathbf{q}_{REF}. \quad (3.37)$$

Wektor referencyjny wyznaczany jest w każdym kroku przyrostowym z następującego równania:

$$\mathbf{K} \left({}^{(n-1)}\mathbf{q}, {}^{(n-1)}\lambda_{th}, \Delta T_{REF} \right) {}^n\Delta\mathbf{q}_{REF} = \mathbf{F}_{th} \left({}^{(n-1)}\mathbf{q}, \Delta T_{REF} \right). \quad (3.38)$$

Zwróćmy uwagę, że po prawej stronie (3.38) występuje wektor obciążenia termicznego zależny od całkowitej amplitudy temperatur, jakiej poddana jest wskazana powierzchnia zewnętrzna konstrukcji według (3.22), natomiast macierz sztywności jest zależna od przemieszczeń i temperatury wyznaczonych w poprzedzającym kroku przyrostowym ($n-1$). Uzależnienie sztywności od temperatury związanej z całkowitym obciążeniem nie miałoby sensu.

Wykorzystując (3.37), (3.36) można zapisać:

$$\left({}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)} \right)^2 \left[\left({}^n\Delta\mathbf{q}_{REF} \right)^T \left({}^n\Delta\mathbf{q}_{REF} \right) + 1 \right] = {}^n ds^2. \quad (3.39)$$

Przyrost parametru obciążenia ${}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)}$ nie jest w tej metodzie stały podczas analizy. Ponadto jego wartości zasadniczo – jak już wcześniej wspomniano – nie predefiniuje się. Jedynym wyjątkiem jest tu pierwszy krok przyrostowy, w którym:

$${}^1\Delta\lambda_{th}^{(0)} = \Delta\lambda_{th,0}, \quad \Delta\lambda_{th,0} - \text{zadane}. \quad (3.40)$$

Jeśli więc w pierwszym kroku przyrostowym ($n=1$) dla $\mathbf{q}=\mathbf{0}$ i ${}^0\lambda_{th}=0$ z (3.38) wyznaczony zostanie wektor referencyjny ${}^1\Delta\mathbf{q}_{REF}$, to przy zadanej wartości przyrostu parametru obciążenia ${}^1\Delta\lambda_{th}^{(0)}$ (3.40), można z (3.39) ustalić wartość kwadratu długości łuku ${}^1 ds^2$.

W pozostałych krokach przyrostowych, tj. dla $n>1$, gdy ${}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)}$ nie jest już predefiniowane, postępuje się niejako odwrotnie, tj. najpierw wyznaczany jest kwadrat długości łuku z relacji:

$${}^n ds^2 = \sqrt{\frac{NDIT}{NITE}} {}^{(n-1)} ds^2, \quad n > 1, \quad (3.41)$$

gdzie $NDIT$ i $NITE$ są, odpowiednio, zakładaną przez użytkownika liczbą iteracji oraz rzeczywistą liczbą iteracji w poprzednim kroku przyrostowym. Dodatkowo ${}^n ds$ musi spełniać praktyczny warunek:

$$ds_{min} < {}^n ds < ds_{max}, \quad (3.42)$$

gdzie ds_{min} i ds_{max} są zadanymi, odpowiednio, minimalną i maksymalną długością łuku. Związek (3.41) opisuje zatem skalowanie kwadratu długości łuku z kroku poprzedzającego, zgodne z warunkami zbieżności algorytmu w tymże kroku.

Następnie z przekształcenia (3.39) określa się zerowe przybliżenie przyrostu parametru obciążenia:

$${}^n \Delta \lambda_{th}^{(0)} = \sqrt{\frac{{}^n ds^2}{\left({}^n \Delta \mathbf{q}_{REF} \right)^T \left({}^n \Delta \mathbf{q}_{REF} \right) + 1}}, \quad n > 1. \quad (3.43)$$

Postępując, jak wyżej opisano, w każdym kroku przyrostowym n określana jest para ${}^n \Delta \lambda_{th}^{(0)}$ ((3.40) i (3.43)) oraz ${}^n \Delta \mathbf{q}^{(0)}$ (3.37), a więc zerowe przybliżenie poszukiwanych przyrostu wektora przemieszczeń i parametru obciążenia. Na ich podstawie można wyznaczyć zerowe przybliżenie poszukiwanego punktu na ścieżce równowagi:

$$\begin{aligned} {}^n \mathbf{q}^{(0)} &= ({}^{n-1}) \mathbf{q} + {}^n \Delta \mathbf{q}^{(0)}, \\ {}^n \lambda_{th}^{(0)} &= ({}^{n-1}) \lambda_{th} + {}^n \Delta \lambda_{th}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Proces iteracyjny w kroku przyrostowym

Wyznaczone w etapie zerowym ${}^n \Delta \mathbf{q}^{(0)}$ i ${}^n \Delta \lambda_{th}^{(0)}$ interpretujemy jako składowe wektora stycznego do poszukiwanej ścieżki w punkcie odpowiadającym konfiguracji $(n-1)$:

$${}^n \mathbf{t}^{(0)} = \left[{}^n \Delta \mathbf{q}^{(0)}, {}^n \Delta \lambda_{th}^{(0)} \right]. \quad (3.45)$$

Przybliżenia zerowe ${}^n \Delta \mathbf{q}^{(0)}$ i ${}^n \Delta \lambda_{th}^{(0)}$ wymagają poprawienia, które uzyskuje się na drodze procesu iteracyjnego $i = 1, 2, 3, \dots, i_{END}$ Newtona. Nie można w tym miejscu skorzystać jednak z równania identycznego jak (3.32), ponieważ nieznaną jest wartość parametru obciążenia w konfiguracji poszukiwanej ${}^n \lambda_{th}$. Korzystamy tu z relacji:

$${}^n \lambda_{th}^{(i)} = {}^n \lambda_{th}^{(i-1)} + {}^n \delta \lambda_{th}^{(i)}, \quad (3.46)$$

gdzie ${}^n \lambda_{th}^{(i)}$, ${}^n \lambda_{th}^{(i-1)}$ są przybliżeniami wartości parametru obciążenia w konfiguracji poszukiwanej n , odpowiadającymi, odpowiednio i -tej iteracji i iteracji poprzedzającej $(i-1)$; ${}^n \delta \lambda_{th}^{(i)}$ jest poszukiwaną poprawką wartości parametru obciążenia w bieżącej iteracji. Równanie równowagi na etapie iteracji ma więc postać:

$$\mathbf{K} \left({}^n \mathbf{q}^{(i-1)}, {}^n \lambda_{th}^{(i-1)}, \Delta T_{REF} \right) {}^n \delta \mathbf{q}^{(i)} = \left({}^n \lambda_{th}^{(i-1)} + {}^n \delta \lambda_{th}^{(i)} \right) \mathbf{F}_{th} \left({}^n \mathbf{q}^{(i-1)}, \Delta T_{REF} \right) - \mathbf{F} \left({}^n \mathbf{q}^{(i-1)} \right). \quad (3.47)$$

Równanie to można jeszcze przekształcić do postaci:

$$\mathbf{K} \left({}^n \mathbf{q}^{(i-1)}, {}^n \lambda_{th}^{(i-1)}, \Delta T_{REF} \right) {}^n \delta \mathbf{q}^{(i)} = {}^n \delta \lambda_{th}^{(i)} \mathbf{F}_{th} \left({}^n \mathbf{q}^{(i-1)}, \Delta T_{REF} \right) + \mathbf{J}_U \left({}^n \mathbf{q}^{(i-1)}, \Delta T_{REF} \right), \quad (3.48)$$

gdzie:

$$\mathbf{J}_U \left({}^n \mathbf{q}^{(i-1)}, \Delta T_{REF} \right) = {}^n \lambda_{th}^{(i-1)} \mathbf{F}_{th} \left({}^n \mathbf{q}^{(i-1)}, \Delta T_{REF} \right) - \mathbf{F} \left({}^n \mathbf{q}^{(i-1)} \right),$$

w którym wprowadzony wektor \mathbf{J}_U jest wektorem sił niezrównoważonych w bieżącej iteracji i . Podkreślmy, że sztywność w (3.47) uzależniamy od znanej w danej iteracji wartości temperatury, identycznej z temperaturą uwzględnianą w wektorze sił niezrównoważonych (3.48b). Inną możliwą opcją jest obliczanie sztywności w ciągu iteracyjnym dla temperatury z początku kroku przyrostowego. Przeprowadzone eksperymenty numeryczne wykazały jednak, że przy przyjęciu temperatury zaktualizowanej, jak w (3.47) czas obliczeń poje-

dynczego kroku przyrostowego, mierzony liczbą iteracji potrzebnych do spełnienia warunku zbieżności, jest krótszy.

Należy ponadto zaznaczyć, że z identycznych powodów, jak w przypadku sterowania obciążeniowego nie należy stosować zbyt dużych przyrostów parametrów obciążenia, co w sterowaniu parametrem łuku sprowadza się do unikania zbyt dużego $\Delta\lambda_{th,0}$ (3.40).

W procesie iteracyjnym poszukiwana będzie para poprawek, tj. $\delta\mathbf{q}^{(i)}$ i ${}^n\delta\lambda_{th}^{(i)}$ dla obliczonych w zerowym etapie przyrostów ${}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)}$ i ${}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)}$. W tym miejscu należy zastosować odpowiednie kryterium decydujące o kierunku poszukiwań rozwiązania. Do najbardziej znanych kryteriów należą:

- kryterium Crisfielda, zgodnie z którym rozwiązanie poszukiwane jest na okręgu (ściśle sferze) o środku w punkcie ścieżki odpowiadającym konfiguracji aktualnej;
- kryterium Riksa-Wempnera, według którego poszukiwanie rozwiązania odbywa się na kierunku prostopadłym do wektora stycznego (3.45) do ścieżki w aktualnym punkcie [169].

Zaznaczmy tu jednak, że istnieją jeszcze inne kryteria [129, 170], jak również szereg różnych wariantów wymienionych wyżej kryteriów (por. [23]). W niniejszej pracy stosowany jest warunek Riksa-Wempnera-Ramma, który poniżej przybliżymy.

Poszukiwane poprawki zmiennych $\delta\mathbf{q}^{(i)}$ i ${}^n\delta\lambda_{th}^{(i)}$ są interpretowane jako składowe pewnego wektora poprawki:

$${}^n\delta\Delta^{(i)} = \left[{}^n\delta\mathbf{q}^{(i)}, {}^n\delta\lambda_{th}^{(i)} \right]. \quad (3.49)$$

Zgodnie z klasycznym kryterium Riksa-Wempnera, rozwiązania są poszukiwane na kierunku prostopadłym do wektora ${}^n\mathbf{t}^{(0)}$ (3.45). Kierunek poszukiwań jest więc narzucony warunkiem ortogonalności wektorów (3.45) i (3.49), co można zapisać:

$${}^n\mathbf{t}^{(0)} \cdot {}^n\delta\Delta^{(i)} = 0. \quad (3.50)$$

Po podstawieniach (3.45) i (3.49) do (3.50) otrzymujemy:

$$\left({}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)} \right)^T \left({}^n\delta\mathbf{q}^{(i)} \right) + {}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)} {}^n\delta\lambda_{th}^{(i)} = 0. \quad (3.51)$$

W algorytmie Riksa-Wempnera-Ramma warunek (3.50) jest zmodyfikowany, jak poniżej [23]:

$${}^n\mathbf{t}^{(i-1)} \cdot {}^n\delta\Delta^{(i)} = 0, \quad (3.52)$$

co oznacza zachowanie warunku prostopadłości między poszukiwanym wektorem poprawki ${}^n\delta\Delta^{(i)}$ a aktualnym wektorem stycznym do ścieżki, a więc wyznaczonym w iteracji $(i-1)$ (por. [79]). Przyjmując, że składowe aktualnego wektora stycznego są następujące:

$${}^n\mathbf{t}^{(i-1)} = \left[{}^n\Delta\mathbf{q}^{(i-1)}, {}^n\Delta\lambda_{th}^{(i-1)} \right], \quad (3.53)$$

zależność (3.52) można zapisać w postaci:

$$\left({}^n\Delta\mathbf{q}^{(i-1)} \right)^T \left({}^n\delta\mathbf{q}^{(i)} \right) + {}^n\Delta\lambda_{th}^{(i-1)} {}^n\delta\lambda_{th}^{(i)} = 0. \quad (3.54)$$

Warunek (3.52) może być interpretowany jako pewien pośredni wariant między kryteriami Crisfielda a klasycznym warunkiem Riksa-Wempnera. Algorytm z modyfikacją Ramma ma

istotną zaletę z punktu widzenia obliczeń numerycznych, tj. nie wymaga zapamiętywania, obok składowych wektora ${}^n\Delta\mathbf{q}^{(i-1)}$, współrzędnych wektora ${}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)}$ w procesie iteracyjnym [79]; poza tym jest na ogół szybciej zbieżny niż wariant klasyczny.

Kryteria narzucające kierunek poszukiwań rozwiązania stanowią w istocie dodatkowe równania, tzw. równania więzów, które mogą być bezpośrednio wprowadzane do przyrostowego układu równań. Macierz takiego rozszerzonego układu przestaje być jednak symetryczna, co komplikuje algorytm jego rozwiązania [169]. Tego problemu można uniknąć wykorzystując technikę zaproponowaną przez Batoza i Dhatta³⁾ i wykorzystaną także np. w [79], bazującą na założeniu, że poszukiwana poprawka przemieszczeń może być zdekomponowana następująco:

$${}^n\delta\mathbf{q}^{(i)} = {}^n\delta\lambda_{th}^{(i)} {}^n\delta\mathbf{q}_F^{(i)} + {}^n\delta\mathbf{q}_J^{(i)}. \quad (3.55)$$

Składniki poprawki występujące po prawej stronie równania (3.55) wyznaczane są z dwóch układów równań o symetrycznej macierzy:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \left({}^n\mathbf{q}^{(i-1)}, {}^n\lambda_{th}^{(i-1)}, \Delta T_{REF} \right) {}^n\delta\mathbf{q}_F^{(i)} &= \mathbf{F}_{th} \left({}^n\mathbf{q}^{(i-1)}, \Delta T_{REF} \right), \\ \mathbf{K} \left({}^n\mathbf{q}^{(i-1)}, {}^n\lambda_{th}^{(i-1)}, \Delta T_{REF} \right) {}^n\delta\mathbf{q}_J^{(i)} &= \mathbf{J}_U \left({}^n\mathbf{q}^{(i-1)}, \Delta T_{REF} \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Można łatwo sprawdzić, że po pomnożeniu pierwszego równania przez ${}^n\delta\lambda_{th}^{(i)}$ i następnym dodaniu stronami obydwóch równań w (3.56), otrzymamy równanie (3.48) z poszukiwaną poprawką w postaci (3.55).

Po rozwiązaniu (3.56), z (3.54), przy wykorzystaniu (3.55), wyznaczana jest poprawka przyrostu parametru obciążenia:

$${}^n\delta\lambda_{th}^{(i)} = \frac{-\left({}^n\Delta\mathbf{q}^{(i-1)}\right)^T \left({}^n\delta\mathbf{q}_J^{(i)}\right)}{\left({}^n\Delta\mathbf{q}^{(i-1)}\right)^T \left({}^n\delta\mathbf{q}_F^{(i)}\right) + {}^n\Delta\lambda_{th}^{(i-1)}}. \quad (3.57)$$

W tym momencie znane są zatem wszystkie poprawki, tj. ${}^n\delta\mathbf{q}_F^{(i)}$, ${}^n\delta\mathbf{q}_J^{(i)}$ i ${}^n\delta\lambda_{th}^{(i)}$, co przy wykorzystaniu związku (3.55) pozwala wyznaczyć całkowitą poprawkę przyrostu wektora przemieszczeń ${}^n\delta\mathbf{q}^{(i)}$ w iteracji i . Następnie zgodnie z (3.46) aktualizowany jest przyrost parametru obciążenia oraz wektora przyrostów przemieszczeń i wektor przemieszczeń całkowitych, identycznie jak w sterowaniu obciążeniowym, a więc zgodnie z (3.33) i (3.34). Proces iteracyjny kończy spełnienie warunku (3.35). Obliczone wartości przemieszczeń i parametru obciążenia pozwalają na wyznaczenie nowego punktu ścieżki.

Warunek odciążenia

Istotną rolę w algorytmie sterowania parametrem łuku odgrywa warunek decydujący o znaku parametru ${}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)}$ wyznaczanego z (3.43). W początkowej fazie analizy znak ten jest przyjmowany jako dodatni. Za punktem granicznym obciążenia, na ścieżce niestatecznej, konieczna jest jednak jego zmiana na ujemny. Potrzebny jest zatem odpowiedni warunek, którego spełnienie będzie decydowało o zmianie tego znaku. Warunek ten nazywamy

³⁾ Batoz J.L., Dhata G.: Incremental displacements algorithms for non-linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14, 1979, 1262–1266. Praca cytowana za [23] i [113]. Warto jednak nadmienić, że propozycję tę przypisuje się także E. Rammowi [60, 79].

tutaj *warunkiem/kryterium odciażania*. W stosowanym w pracy programie dostępne są dwa kryteria.

Pierwsze kryterium, stosowane bardzo często w wielu programach, także komercyjnych, zakłada, że o zmianie znaku przyrostu parametru obciążenia decyduje zmiana znaku wyznacznika globalnej macierzy sztywności układu, tj.:

$$\operatorname{sgn}\left({}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)}\right) = \operatorname{sgn}\left|\mathbf{K}\left({}^{(n-1)}\mathbf{q}, {}^{(n-1)}\lambda_{th}, \Delta T_{REF}\right)\right|. \quad (3.58)$$

Trzeba jednak podkreślić, że powyższe kryterium ma pewną wadę, mianowicie znak wyznacznika macierzy sztywności zmienia się zarówno w punkcie granicznym obciążenia jak i w punkcie bifurkacji. Kryterium to niejako nie rozróżnia tych dwóch punktów i jeśli na ścieżce wystąpi punkt bifurkacji, to zastosowanie tego warunku może powodować oscylacje rozwiązania w otoczeniu punktu rozgałęzienia [155].

Warunek (3.58) nie jest jedynym możliwym kryterium; istnieją inne, często jednak także o ograniczonej zastosowalności (por. [44, 45, 113, 155]). Z uwagi na fakt, że ścieżki równowagi badanych w pracy powłok poddanych obciążeniu termicznemu charakteryzuje obecność punktów bifurkacji, konieczne stało się zaimplementowanie innego warunku odciażania. Wykorzystano tu kryterium zaproponowane przez Fenga [44], opisane także w [113, 155]. W niniejszej pracy wykorzystuje się bezpośrednio postać tegoż warunku podaną w pracy [113], zgodnie z którą musi zachodzić związek:

$$\left({}^{(n-1)}\Delta\right)^T \cdot \left({}^n\mathbf{t}^{(0)}\right) > 0, \quad (3.59)$$

gdzie

$${}^{(n-1)}\Delta = \left[{}^{(n-1)}\Delta\mathbf{q}, {}^{(n-1)}\Delta\lambda_{th}\right] \quad (3.60)$$

jest wektorem, którego składowe stanowią wyznaczone w poprzednim kroku przyrostowym $(n-1)$ wektor przyrostu przemieszczeń i przyrost parametru obciążenia, a ${}^n\mathbf{t}^{(0)}$ jest wektorem stycznym w przyroście n wg (3.45). Wyrażenie (3.59) można więc zapisać:

$$\left({}^{(n-1)}\Delta\mathbf{q}\right)^T \left({}^n\Delta\mathbf{q}^{(0)}\right) + {}^{(n-1)}\Delta\lambda_{th} {}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)} > 0. \quad (3.61)$$

Wykorzystując (3.37) i rozpisując operację iloczynu skalarnego w (3.61), po elementarnych przekształceniach otrzymujemy warunek:

$${}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)} \left(\left({}^{(n-1)}\Delta\mathbf{q}\right)^T \left({}^n\Delta\mathbf{q}_{REF}\right) + {}^{(n-1)}\Delta\lambda_{th} \right) > 0, \quad (3.62)$$

którego równoważna postać jest następująca:

$$\operatorname{sgn}\left({}^n\Delta\lambda_{th}^{(0)}\right) = \operatorname{sgn}\left(\left({}^{(n-1)}\Delta\mathbf{q}\right)^T \left({}^n\Delta\mathbf{q}_{REF}\right) + {}^{(n-1)}\Delta\lambda_{th}\right). \quad (3.63)$$

W praktyce w programie prawa strona (3.63) jest obliczana na końcu kroku przyrostowego $(n-1)$. Wektor ${}^n\Delta\mathbf{q}_{REF}$, który winien być obliczony w kroku przyrostowym n z równania (3.38), jest przybliżany poprawką ${}^{(n-1)}\delta\mathbf{q}_F^{(i_{END})}$ obliczoną z (3.56a) w ostatniej iteracji kroku przyrostowego $(n-1)$. Jeśli bowiem przyjmując, że dla ostatniej iteracji w kroku $(n-1)$ w (3.56a) ${}^{(n-1)}\mathbf{q}^{(i_{END})} \cong {}^{(n-1)}\mathbf{q}$ i ${}^{(n-1)}\lambda_{th}^{(i_{END})} \cong {}^{(n-1)}\lambda_{th}$, to (3.56a) odpowiada równaniu (3.38) i ${}^{(n-1)}\delta\mathbf{q}_F^{(i_{END})} \cong {}^n\Delta\mathbf{q}_{REF}$. Podkreślny ponadto, że istotny jest właściwie tylko znak (3.63), stąd też opisane przybliżenie wektora ${}^n\Delta\mathbf{q}_{REF}$ jest jak najbardziej uzasadnione.

Spełnienie warunku (3.59) zapewnia, że ścieżka w kroku przyrostowym n zachowa tendencję, albo wznoszącą albo malejącą, zgodną z tendencją charakteryzującą krok przyrostowy $(n-1)$ [155]. Kryterium pozwala efektywnie poszukiwać rozwiązań w otoczeniu punktów krytycznych dowolnego typu, tj. punktu granicznego obciążenia, punktu zwrotnego ścieżki, ale także punktu bifurkacji, przy czym warunkiem, jaki musi być spełniony, aby kierunek wektora ${}^n\mathbf{t}^{(0)}$ był poprawny, jest odpowiednio mały przyrost przemieszczeń w kroku poprzedzającym ${}^{(n-1)}\Delta\mathbf{q}$ [155], co jednak praktycznie w otoczeniu punktów krytycznych zapewnia sam algorytm śledzenia.

3.5. Analiza nieliniowa z uwzględnieniem imperfekcji

W niniejszej pracy uwzględniane są imperfekcje geometryczne i obciążeniowe, przy czym nie stanowią one rzeczywistych zaburzeń, gdyż dla analizowanych zadań, czerpanych z literatury, brakuje odpowiednich danych. Nawiązując do wspomnianej w rozdziale 1 klasyfikacji, stosowane tu imperfekcje mają charakter stymulujący. Wprowadzanie imperfekcji ma z jednej strony na celu ocenę wrażliwości konstrukcji na niedoskonałości; z drugiej strony są one wprowadzane w ramach tzw. techniki zaburzeń stosowanej podczas poszukiwania ścieżek drugorzędnych [34, 78, 95, 171, 177].

Jako imperfekcje obciążeniowe rozumiane są w pracy następujące sytuacje:

- zdefiniowanie równomiernego ogrzania powłoki poprzez gradient temperatury z wartością parametru p (por. (2.57)) bliską jedności,
- wprowadzenie do układu obciążonego temperaturą małego obciążenia skupionego.

Imperfekcje geometryczne natomiast wymagają realizacji obliczeń dwuetapowych:

- etap pierwszy obejmuje rozwiązanie problemu konstrukcji poddanej pewnemu obciążeniu (mechanicznemu lub termicznemu) w zakresie statyki liniowej,
- w etapie drugim przeprowadzana jest geometrycznie nieliniowa analiza konstrukcji poddanej obciążeniu termicznemu (choć zadanie obciążenia mechanicznego także jest możliwe); konstrukcja posiada wstępne imperfekcje geometryczne, które stanowi wyznaczona w pierwszym etapie obliczeń deformacja, która może być odpowiednio skalowana.

Z deformacją wyznaczoną w pierwszym etapie obliczeń związany jest pewien stan naprężenia w konstrukcji. Aby uzyskać model powłoki z zaburzoną geometrią, ale w stanie beznaprężeniowym, konieczna jest odpowiednia modyfikacja równania przyrostowego (4.28), jak poniżej:

$$\mathbf{K}\left(\left({}^1\mathbf{q}+\mathbf{q}_{imp}\right), {}^2\lambda_{th}, \Delta T_{REF}\right)\Delta\mathbf{q} = {}^2\lambda_{th}\mathbf{F}_{th}\left(\left({}^1\mathbf{q}+\mathbf{q}_{imp}\right), \Delta T_{REF}\right) - \left(\mathbf{F}\left({}^1\mathbf{q}+\mathbf{q}_{imp}\right) - \mathbf{F}\left(\mathbf{q}_{imp}\right)\right), \quad (3.64)$$

gdzie, obok zwiększania aktualnych wartości przemieszczeń o wartość imperfekcji, po prawej stronie równania wektor sił zrównoważonych jest skorygowany o składnik odpowiadający stanowi naprężenia w konstrukcji z pierwszego etapu obliczeń.

3.6. Kontrola wyężenia materiału

Kontrola stanu wyężenia materiału odbywa się zgodnie z hipotezą Tsai-Wu w każdym kroku przyrostowym, po spełnieniu warunku zbieżności (3.35) i określeniu aktualnego stanu deformacji. Na podstawie znanych i aktualnych przemieszczeń wyznaczane są składowe uogólnionych odkształceń według (3.3), a następnie, zgodnie z (2.42a) i (2.51 a,b,c)

obliczana jest lokalna wartość odkształceń zgięciowo-membranowych w ęrodku wysokości kaędej z warstw. Ze względu na zakładane liniowo sprężyste zachowanie materiału, można do przyrostowego związku konstytutywnego (2.72a) podstawić wartości odkształceń całkowitych i otrzymać odpowiednio całkowite naprężenia mechaniczne. Z kolei z (2.72b) dla znanej wartości temperatury aktualnej wyznaczane są naprężenia termiczne w ęrodku kaędej z warstw. Tak określone naprężenia mechaniczne i termiczne pozwalają na wyznaczenie składowych naprężeń efektywnych 2. tensora Pioli-Kirchhoffa. Przy wykorzystaniu transformacji (C.3) obliczane są naprężenia efektywne Cauchy'ego, które następnie transformowane są do układu lokalnych osi materiału warstwy zgodnie z relacją:

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_0\sigma_{ef}^{aa} \\ {}_0\sigma_{ef}^{bb} \\ {}_0\sigma_{ef}^{ab} \\ {}_0\sigma_{ef}^{bc} \\ {}_0\sigma_{ef}^{ac} \end{array} \right\} = [T] \left\{ \begin{array}{l} {}_0\sigma_{ef}^{11} \\ {}_0\sigma_{ef}^{22} \\ {}_0\sigma_{ef}^{12} \\ {}_0\sigma_{ef}^{23} \\ {}_0\sigma_{ef}^{13} \end{array} \right\}, \quad (3.65)$$

gdzie [T] jest macierzą transformacji (2.65). Uzyskane w ten sposób wartości naprężeń Cauchy'ego w głównych osiach materiałowych podstawiane są do (2.105) i wyznaczany jest indeks zniszczenia. Kontrola odbywa się w punktach Gaussa odpowiadających zredukowanemu schematowi całkowania, co w przypadku stosowanego elementu 8-węzłowego oznacza 4 punkty kontrolne w kaędym elemencie. Wybór tych punktów podyktowany jest faktem, że charakteryzuje je najlepsza dokładność wyznaczonych wartości naprężeń [187].

Rozdział 4

PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Rozdział zawiera wyniki przeprowadzonych za pomocą programu autorskiego analiz kilku przykładów numerycznych płyt i powłok poddanych oddziaływaniu temperatury. Dodatkowo w dwóch zadaniach zaprezentowano także rezultaty uzyskane programem NX-Nastran (ver. 7.0). Do prezentacji wyników wykorzystano Microsoft Office Excel oraz post-procesor GID (ver. 7.2).

W ramach wstępnego testu poprawności programu własnego rozważany jest „akademicki” problem izotropowego pasma płytowego w równomiernym polu temperatury, dla którego możliwe jest wyznaczenie wartości temperatury krytycznej w sposób analityczny. Pozostałe zadania dotyczą dźwigarów warstwowych. Ich kolejność uszeregowano według geometrii, stąd początkowe zadania dotyczą płyt, kolejne paneli cylindrycznych, a końcowe powłok sferycznych. Wszystkie prezentowane zadania, poza pierwszym, zostały zaczerpnięte z literatury. Wśród nich, aż 3 pochodzą z pracy [60]. Przyjmując, że prezentowane wyniki mają dowodzić poprawności opracowanego programu własnego, konieczne jest, aby wśród analizowanych zadań znalazły się takie, których rozwiązanie cechuje się znaczną nieliniowością. Zadania dotyczące płyt takiego warunku nie spełniają. Wśród dostępnych Autorce prac dedykowanych analizie powłok głównie w trzech znaleźć można oryginalne propozycje przykładów, dla których przyjęte dane zapewniają silnie nieliniowe rozwiązanie. Najwięcej tego typu zadań zawiera właśnie praca [60]. Warto wspomnieć, że przykłady z niej są często wykorzystywane do oceny modeli własnych także przez innych autorów np. [9, 85, 88, 92, 107, 153, 156].

Kontrolę wyężenia materiału przeprowadzono w tych zadaniach, w których oryginalnie stan naprężenia był analizowany i podane zostały charakterystyki wytrzymałościowe materiałów. W niniejszym studium podjęto próbę nieco szerszego niż w pracach, w których przykłady zaproponowano, opisu wyężenia poprzez dodanie informacji o jego mechanizmie i lokalizacji.

W opisie zadań przyjmuje się, że numeracja warstw laminatu przebiega od dołu. Stosowane są oznaczenia, z których część pojawiła się już we wcześniejszej części pracy, ale dla większej czytelności przytacza się je tu ponownie:

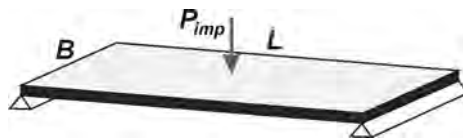
- H – grubość powłoki,
- T_d, T_g – maksymalne temperatury na powierzchni, odpowiednio dolnej i górnej powłoki; w celu uproszczenia zapisu wprowadzono tu ww. oznaczenia zamiast odpowiednio $T_{b,max}$ i $T_{t,max}$ (por. (2.53) i (2.55)).
- T_{init} – temperatura początkowa; jeśli inaczej nie podano przyjmuje się, że $T_{init} = 0$;
- T_{cr} – temperatura krytyczna;
- T_{TW} – temperatura zniszczenia materiału określona zgodnie z kryterium Tsai-Wu;
- FI, SRI, URI – technika, odpowiednio pełnego, selektywnie zredukowanego i jednolicie zredukowanego schematu całkowania sztywności elementu skończonego;
- E_a, E_b – moduły Younga materiału, odpowiednio w kierunku równoległym i prostopadłym do ułożenia włókien zbrojenia (E – dla materiału izotropowego),

- G_{ab} , G_{ac} , G_{bc} – moduły odkształcalności postaciowej w płaszczyznach, odpowiednio $a-b$, $a-c$, $b-c$,
- ν_{ab} – współczynnik Poissona w płaszczyźnie $a-b$ (ν – dla materiału izotropowego),
- α_{aa}^{th} , α_{bb}^{th} – współczynniki rozszerzalności termicznej materiału odpowiednio wzdłuż i w poprzek włókien zbrojenia (α^{th} – dla materiału izotropowego),
- ICRIT = 0 – warunek odciążania w technice sterowania parametrem łuku wg (3.58),
- ICRIT = 1 – warunek odciążania w technice sterowania parametrem łuku wg (3.63).

Stosowane w opisie warunków podparcia sformułowanie *swobodnie nieprzesuwne podparcie* oznacza blokadę wszystkich translacji oraz obrotu wokół normalnej do danej krawędzi.

4.1. Izotropowe pasmo płytowe

Analizowane jest pasmo płytowe, podparte swobodnie nieprzesuwnie na dwóch krawędziach, poddane równomiernemu ogrzaniu. Przyjęto następujące dane (rys. 4.1): długość $L = 1000$ mm, szerokość $B = 100$ mm, grubość $H = 10$ mm. Założono izotropowy materiał o parametrach: $E = 210$ GPa, $\nu = 0$, $\alpha^{th} = 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$.



Rys. 4.1. Geometria pasma płytowego

Traktując rozpatrywane pasmo jako belkę i wykorzystując analogię do prętów, temperaturę krytyczną (wyboczeniową) można wyznaczyć w tym wypadku analitycznie – z porównania w stanie krytycznym naprężeń termicznych z naprężeniami odpowiadającymi pierwszej sile krytycznej Eulera [16]. Konsekwentnie otrzymujemy, że:

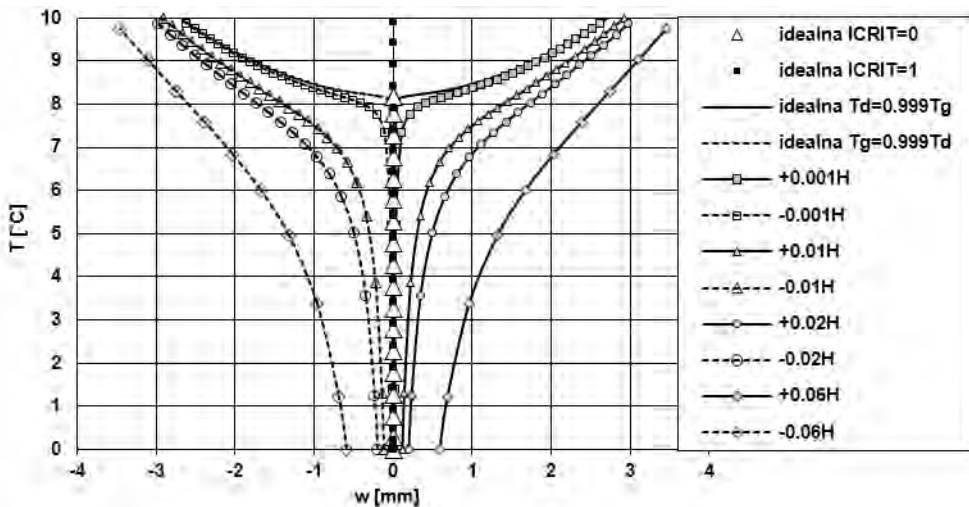
$$T_{cr} = \frac{\pi^2 I}{\alpha^{th} A_F L^2} = 8,2^\circ\text{C},$$

gdzie I , A_F są, odpowiednio momentem bezwładności i polem przekroju poprzecznego belki.

Przyjęto siatkę 10×1 elementów 8URI. Na wstępie obciążono układ idealny równomiernym ogrzaniem. Przy zastosowaniu w trakcie obliczeń kryterium ICRIT = 0, nieco powyżej 8°C , a więc w pobliżu analitycznie wyznaczonego punktu bifurkacji, wystąpiły typowe dla zastosowanego warunku odciążania oscylacje rozwiązania i dalsza analiza była niemożliwa. Zmiana kryterium na ICRIT = 1 spowodowała, że problemy ze zbieżnością nie wystąpiły i obliczenia kontynuowano do zadanego obciążenia 10°C . Na rysunku 4.2 przedstawiono ścieżkę równowagi ugięcia punktu centralnego belki. W układzie idealnym belka nie wygina się i ścieżka równowagi ugięcia analizowanego punktu pokrywa się z osią pionową. Jej fragment powyżej punktu bifurkacji jest oczywiście niestateczny. Aby znaleźć ścieżki pobifurkacyjne do układu wprowadzono imperfekcje. Na początku równomierne ogrzewanie zastąpiono gradientem temperatury takim, że stosunek temperatury na górnej powierzchni (T_g) do temperatury na powierzchni dolnej (T_d) i odwrotnie wynosił, odpowiednio, $T_d/T_g = 0,999$ i $T_g/T_d = 0,999$. Wprowadzenie imperfekcji powoduje, że obliczenia

w badanym zakresie temperatur przebiegają bez żadnych problemów ze zbieżnością bez względu na zastosowany warunek odciążania. Ścieżki otrzymane przy obciążeniu gradientem, jaki wyżej opisano, można traktować jako przybliżenie ścieżek pokrywicznych układu idealnego (rys. 4.2).

Przeanalizowano również wpływ imperfekcji geometrycznych na zachowanie belki. W tym celu w pierwszym etapie obliczeń układ obciążano centralnie usytuowaną siłą skupioną (P_{imp}) i deformację, jaką ona spowodowała, przyjmowano za pole wstępnych imperfekcji geometrycznych w przeprowadzanej w drugim etapie analizie nieliniowej z obciążeniem termicznym. Wykonano serię takich obliczeń, przykładając siły o różnych wartościach i różnym znaku. Wyniki ilustruje rysunek 4.2, na którym w opisie imperfekcji geometrycznych podano znak i wartość początkowego ugięcia punktu centralnego (np. $+0,01H$ oznacza, że na początku punkt centralny wychylony jest w górę o wartość 1% grubości płyty). Można zauważyć, że konstrukcja charakteryzuje się symetrycznym statecznym punktem bifurkacji.



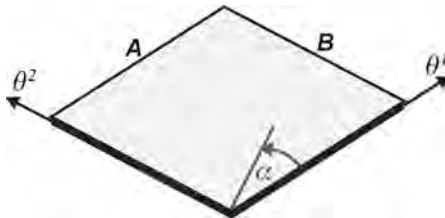
Rys. 4.2. Płytowe pasmo izotropowe; ugięcie punktu centralnego względem temperatury we włóknach środkowych

4.2. Płyta sandwiczowa

Przykład został zaproponowany przez Noora¹⁾ w niedostępny dla autorki pracy źródle i jest tu cytowany za [70].

Analizowana jest kwadratowa płyta sandwiczowa (rys. 4.3) o smukłości $A/H = 20$. Płyta jest swobodnie nieprzesuwnie podparta na wszystkich krawędziach. Jej okładki stanowią laminat typu *cross-ply*, a wypełnieniem jest struktura typu plaster miodu (ang. *honeycomb*).

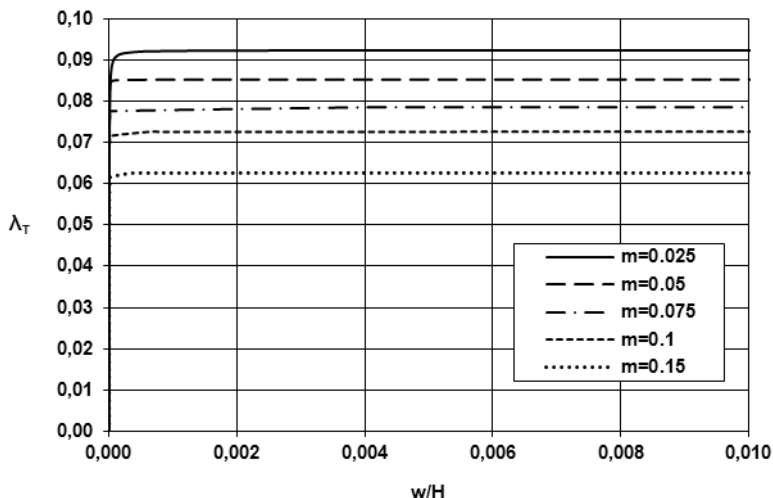
¹⁾ Noor A.K, Peters J.M., Burton W.S.: Three-dimensional solutions for initially stressed structural sandwiches, *Journal of Engineering Mechanics*. 120, 1994, 284–303. Praca cytowana za [70].



Rys. 4.3. Geometria płyty

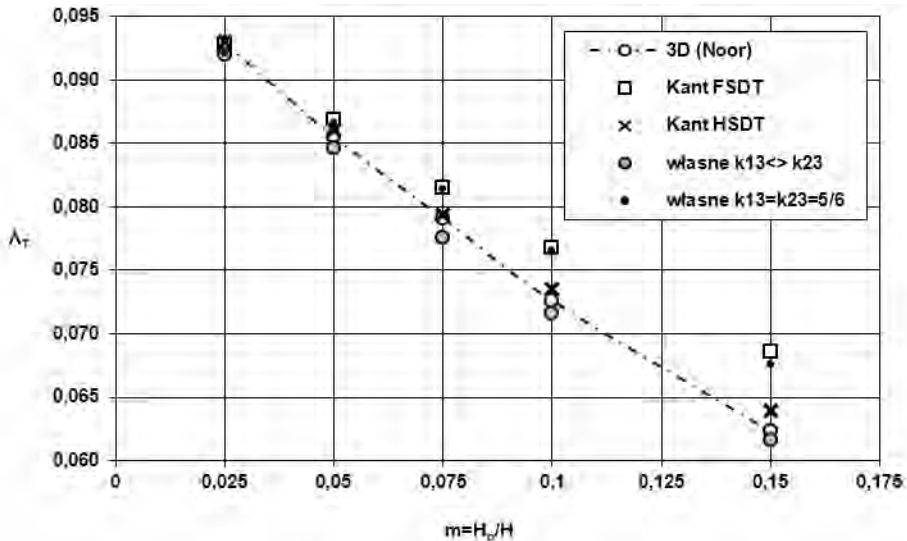
Układ warstw laminatu jest symetryczny $([0^\circ/90^\circ]_5)$, wypełnienie, $[90^\circ/0^\circ]_5$. Właściwości materiału warstw okładek mają następującą parametryzację: $E_a/E_{b^*} = 19$, $G_{ab}/E_{b^*} = 0,52$, $G_{bc}/E_{b^*} = 0,338$, $\nu_{ab} = 0,32$, $\alpha_{aa}^{th}/\alpha_0^{th} = 0,001$, $\alpha_{bb}^{th}/\alpha_0^{th} = 1$; a parametry wypełnienia: $E_a/E_{b^*} = 3,2 \cdot 10^{-5}$, $E_b/E_{b^*} = 2,9 \cdot 10^{-5}$, $G_{ab}/E_{b^*} = 2,4 \cdot 10^{-3}$, $G_{ac}/E_{b^*} = 7,9 \cdot 10^{-2}$, $G_{bc}/E_{b^*} = 6,6 \cdot 10^{-2}$, $\nu_{ab} = 0,99$, $\alpha_{aa}^{th}/\alpha_0^{th} = \alpha_{bb}^{th}/\alpha_0^{th} = 1,36$. Współczynnik α_0^{th} jest miarą normalizacji modułu odkształcalności termicznej, a E_{b^*} jest modułem Younga materiału warstw okładek w kierunku poprzecznym do zbrojenia.

Symetria geometrii, warunków brzegowych i uwarstwienia sprawiają, że konstrukcja zachowuje się podobnie do płyty jednorodnej izotropowej i przy pewnej temperaturze krytycznej (T_{cr}) dochodzi do bifurkacji stanu równowagi. Badany jest wpływ zmiany grubości okładek i wypełnienia na temperaturę krytyczną. Zaletą zadania jest istnienie rozwiązania trójwymiarowego, przy czym wyniki podawane są w formie bezwymiarowego współczynnika λ_T , gdzie $\lambda_T = \alpha_0^{th} T_{cr}$. Zmieniając stosunek grubości okładek do grubości całej płyty $m = H_o/H$ (H_o jest grubością pojedynczej okładki), rozpatrzono 5 wariantów uwarstwienia: $m = 0,025, 0,05, 0,075, 0,1, 0,15$.

Rys. 4.4. Płyta sandwiczowa [70]; zmiana znormalizowanej wartości temperatury krytycznej wraz ze zmianą parametru m , rozwiązanie własne (ścieżki ugięcia punktu centralnego)

W analizie własnej, podczas poszukiwania temperatury krytycznej, równomierne ogrzanie zastąpiono gradientem temperatury. Zastosowano siatkę 10×10 elementów 8URI. Śledząc ścieżkę ugięcia punktu centralnego płyty, punkt wybożenia identyfikowano w momencie, w którym ścieżka ta odchodzi od osi obciążenia. W praktyce wiązało się to ze wzrostem wartości śledzonego przemieszczenia o dwa rzędy. Aby uzyskać możliwie jak największą dokładność wyniku, stosowano najmniejszą z możliwych wartość dysproporcji pomiędzy temperaturą na powierzchni górnej i dolnej, taką jednak, aby ugięcie punktu centralnego stało się aktywnym stopniem swobody. Dla wszystkich wartości m , poza $m = 0,025$, wystarczyło przyjąć, że $T_d/T_g = 0,999999$, a dla $m = 0,025$ konieczne było obranie nieco większej dysproporcji $T_d/T_g = 0,999995$. Wyniki analizy przedstawia rysunek 4.4.

Na rysunku 4.5 przedstawiono porównanie otrzymanych wyników znormalizowanych wartości temperatur krytycznych, zmieniających się zależnie od przyjętej wartości parametru m , z rozwiązaniami zaprezentowanymi w pracy [70].



Rys. 4.5. Płyta sandwiczowa [70]; zmiana znormalizowanej wartości temperatury krytycznej wraz ze zmianą parametru m , porównanie z rozwiązaniami odniesienia

Warto w tym miejscu podkreślić, że rozwiązania autorów pracy [70] uzyskane zostały przy zastosowaniu modelu sformułowanego na bazie teorii ścinania pierwszego rzędu (seria: Kant FSDT), w którym narzucony był stały współczynnik korekcyjny $k = 5/6$, oraz modelem teorii ścinania wyższego rzędu (seria: Kant HSDT). Autorzy zwracają uwagę, że model teorii ścinania pierwszego rzędu wraz ze wzrostem parametru m zawyża wartość temperatury krytycznej w porównaniu z rozwiązaniem Noora, co widać na rysunku 4.5. Przy $m = 0,15$ rozbieżność wyników wynosi około 10%. Wyniki z modelu własnego, wychodzącego z tej samej teorii, w którym stosowane współczynniki korekcyjne jednak nie są narzucone z góry (seria: własne $k_{13} \neq k_{23}$), takiej tendencji nie wykazują i pozostają w bardzo dobrej zgodności z rozwiązaniem trójwymiarowym.

Ze względu na znaczną grubość płyty ($A/H = 20$) istotny wpływ na jej deformację może mieć efekt poprzecznego ścinania, toteż rozwiązanie może tu w istotny sposób zależeć właśnie od przyjętej wartości współczynnika korekcyjnego k . Przeprowadzono zatem do-

datkowe obliczenia programem własnym, stosując narzuconą wartość współczynnika $k = 5/6 = 0,8333$. Wyniki przedstawiono na rysunku 4.5 (seria: własne $k_{13} = k_{23} = 5/6$). Otrzymane w tym wypadku rozwiązania są bliższe wynikom uzyskanym modelem teorii ścinania pierwszego rzędu zaprezentowanym w [70] niż wcześniejsze, uzyskane ze współczynnikami wyznaczanymi numerycznie. Podobnie, jak w [70], wykazują tendencję do zawyżania wartości temperatury krytycznej przy wzrastającej sztywności płyty. Dla porównania w tabeli 4.1 zawarto wartości współczynników wyznaczonych w analizie własnej. Można zauważyć, że wraz ze wzrostem udziału okładek w całkowitej sztywności przekroju płyty wartości współczynników maleją, odbiegając coraz bardziej od wartości $k = 5/6 = 0,8333$. Wykazano zatem, że źródłem nieco zawyżonej sztywności modelu w pracy [70] w przypadku płyt o większej wartości parametru m jest zastosowana tam wartość współczynnika korekcyjnego $k = 5/6$. Rozwiązania otrzymane modelem teorii ścinania wyższego rzędu natomiast są – podobnie jak wyniki własne – zgodne z rozwiązaniem trójwymiarowym. Warto jednak podkreślić, że podwyższenie rzędu teorii ścinania wiąże się ze zwiększeniem liczby stopni swobody układu.

Tabela 4.1

Płyta sandwiczowa [70]; współczynniki korekcyjne w analizie własnej

Współczynnik korekcyjny	$m = 0,025$	$m = 0,050$	$m = 0,075$	$m = 0,100$	$m = 0,150$
k_{13}	0,8200	0,6968	0,6078	0,5412	0,4507
k_{23}	0,7797	0,6387	0,5414	0,4707	0,3770

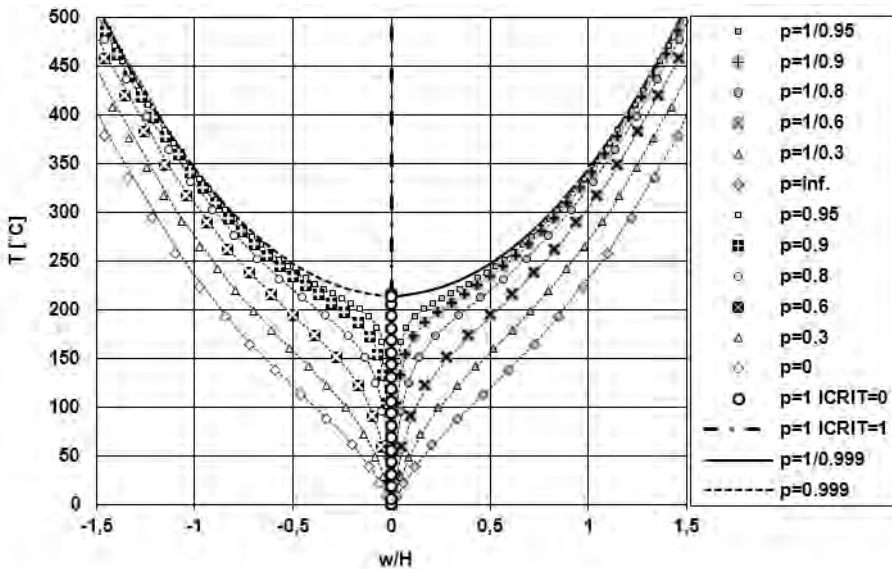
4.3. Płyta warstwowa obciążona gradientem temperatury

Przykład został zaproponowany w pracy [9]. Badana jest płyta kwadratowa $A = B$ (rys. 4.3), obciążana gradientem temperatury. Długość boku kwadratu wynosi 254 mm. Płyta zbudowana jest z 16. warstw o grubości $H_l = 0,127$ mm, których ułożenie opisuje schemat $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_{2s}$. Materiał warstw ma następujące właściwości: $E_a = 130,3$ GPa, $E_b = 9,37$ GPa, $G_{ab} = G_{ac} = G_{bc} = 4,5$ GPa, $\nu_{ab} = 0,33$, $\alpha_{aa}^{th} = 0,139 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$, $\alpha_{bb}^{th} = 9 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$. Krawędzie wzdłuż osi θ^1 (rys. 4.3) są swobodnie nieprzesuwnie podparte, wzdłuż pozostałych natomiast zablokowano ugięcie oraz obrót wokół normalnej do krawędzi.

Współczynniki korekcyjne ścinania dla powyższych danych wynoszą $k_{13} = 0,8102$, $k_{23} = 0,7955$.

Przyjęto dyskretyzację 10×10 elementów 8URI i przeprowadzono obliczenia dla kilku przypadków obciążenia gradientem, które określa parametr $p = T_g/T_d$. W pracy [9] rozpatrzono następujące warianty obciążenia: $p = 0, 0,3, 0,6, 0,8, 0,9, 0,95$ oraz odpowiednio gradienty opisane przez odwrotności p , tj. $1/p$. Na rysunku 4.6 przedstawiono ścieżki równowagi znormalizowanego ugięcia punktu środkowego płyty odniesione do jej grubości względem temperatury we włóknach środkowych. Warto tu podkreślić, że w [9] zmienną na osi przemieszczeń oznaczono jako bezwzględną wartość ugięcia, co należy traktować jako pomyłkę, zwłaszcza, że w jednostce podano metry. Rozwiązania odniesienia zaznaczono na rysunku 4.6 czarnymi przerywanymi liniami. Jak wynika z porównania, wyniki własne są zgodne z rezultatami z [9]. Warto w tym miejscu wspomnieć, że przy obciążeniu gradientem rozwiązanie w żądanym zakresie temperatury uzyskujemy przy dowolnie wybranym kryterium odciążania.

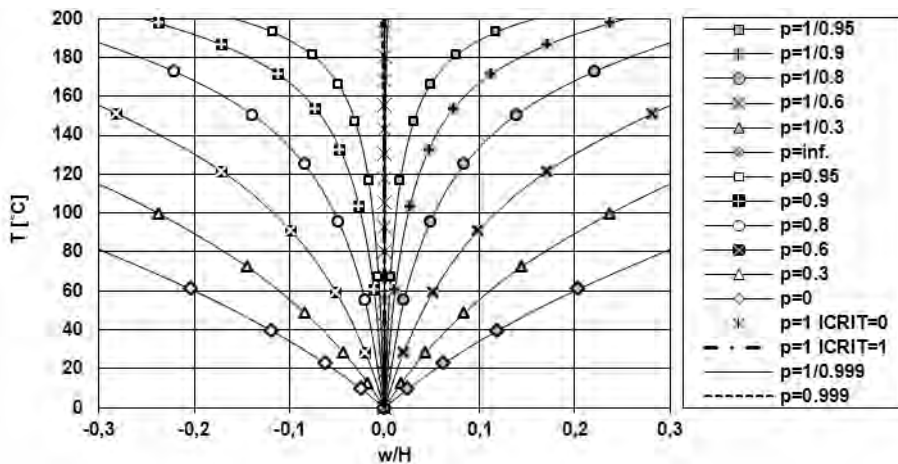
Dodatkowo w ramach analizy własnej rozpatrzono wariant równomiernego ogrzania konstrukcji ($p=1$). Podobnie, jak w przykładzie 1 przy zastosowaniu podczas obliczeń kryterium $ICRIT = 0$ rozwiązanie było możliwe tylko do pewnego poziomu, w tym wypadku do około 220°C . W tym miejscu pojawiły się oscylacje rozwiązania, które nie wystąpiły podczas analizy z zastosowaniem kryterium $ICRIT = 1$. Dodatkowe serie obliczeń dla obciążenia gradientem zbliżonym do równomiernego ogrzania, tj. $p = 0,999$ i $p = 1/0,999$ potwierdziły, że w około 220°C występuje punkt bifurkacji.



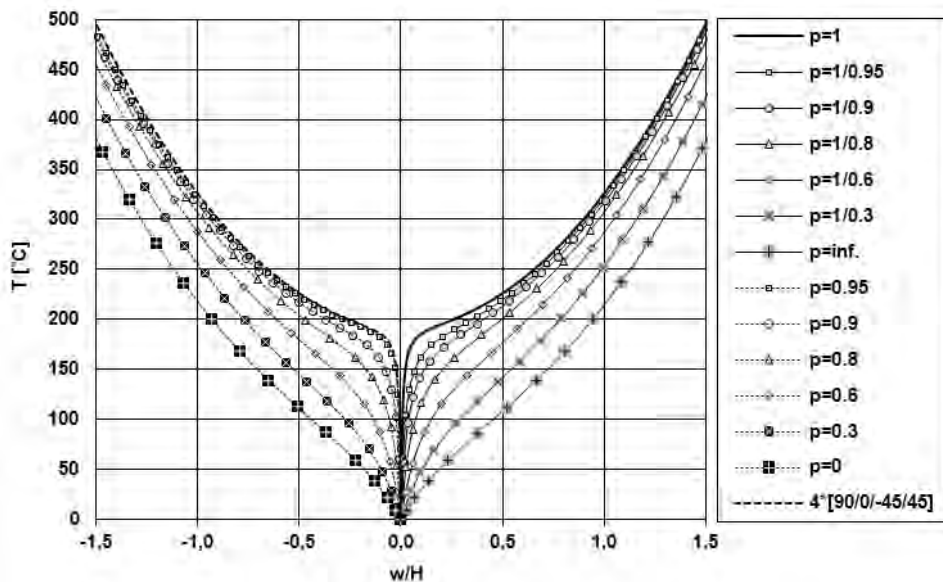
Rys. 4.6. Płyta obciążona gradientem temperatury [9]; ugięcie punktu centralnego względem temperatury we włóknach środkowych

Na rysunku 4.7 przedstawiono powiększenie fragmentu rysunku 4.6, aby pokazać, że ścieżki układają się symetrycznie względem osi obciążenia. Pokazano tutaj tylko rozwiązanie własne, które w przeciwieństwie do rozwiązania odniesienia, nie jest obciążone błędem odczytu. Podobnie jak rozważone w pierwszym przykładzie pasmo izotropowe, analizowana tu płyta charakteryzuje się symetrycznym statecznym punktem bifurkacji.

W analizie własnej przeprowadzono podobną serię analiz dla płyty o identycznych geometrii, warunkach brzegowych i materiale, ale zmienionym uwarstwieniu. W oryginale uwarstwienie laminatu jest symetryczne. Zbadano, jaki wpływ będzie miała zmiana na wariant niesymetryczny, tj. $[45^{\circ}/-45^{\circ}/0^{\circ}/90^{\circ}]_4$. Współczynniki korekcyjne ulegają zmianie i przyjmują wartości $k_{13} = 0,8048$, $k_{23} = 0,8399$. Rezultaty przedstawiono na rysunku 4.8. Przede wszystkim należy zwrócić uwagę, że w przypadku równomiernego ogrzania ($p = 1$) ugięcie środka płyty jest aktywnym stopniem swobody od samego początku obciążania. Konstrukcja nie ma punktu bifurkacji. Wszystkie serie obliczeń dla wariantu niesymetrycznego uwarstwienia można zatem przeprowadzić przy zastosowaniu dowolnego warunku odciążania. Warto również podkreślić, że ścieżki w tym wypadku nie układają się symetrycznie względem osi obciążenia, co można zaobserwować na rysunku 4.9.

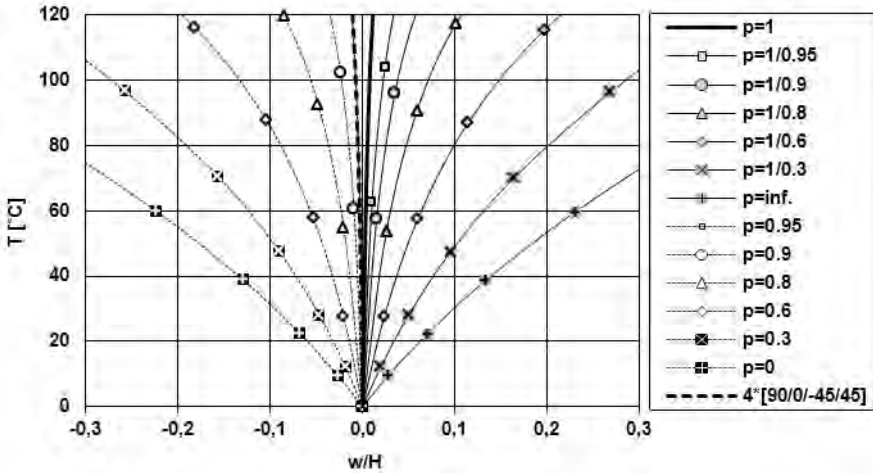


Rys. 4.7. Płyta obciążona gradientem temperatury [9]; symetria rozwiązań

Rys. 4.8. Płyta obciążona gradientem temperatury o uwarstwieniu niesymetrycznym $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_4$, $([90^\circ/0^\circ/-45^\circ/45^\circ]_4)$; ugięcie punktu centralnego względem temperatury we włóknach środkowych

W przypadkach obciążenia gradientem (rys. 4.8) kierunek wygięcia płyty jest determinowany przyjętym rozkładem temperatury na grubości. Przy równomiernym ogrzaniu ($p = 1$) wygięcie wynika z rozkładu sztywności w przekroju płyty – dla przyjętego układu warstw $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_4$ ugięcie środka płyty jest dodatnie. Sprawdzone dodatkowo, że

dla schematu odwróconego, tj. $[90^\circ/0^\circ/-45^\circ/45^\circ]_4$ (odwrócenie schematu nie wpływa na wartości k_{13} i k_{23}) przy równomiernym ogrzaniu znak ten ulega zmianie (rys. 4.8).



Rys. 4.9. Płyta obciążona gradientem temperatury o uwarstwieniu niesymetrycznym; brak symetrii rozwiązania

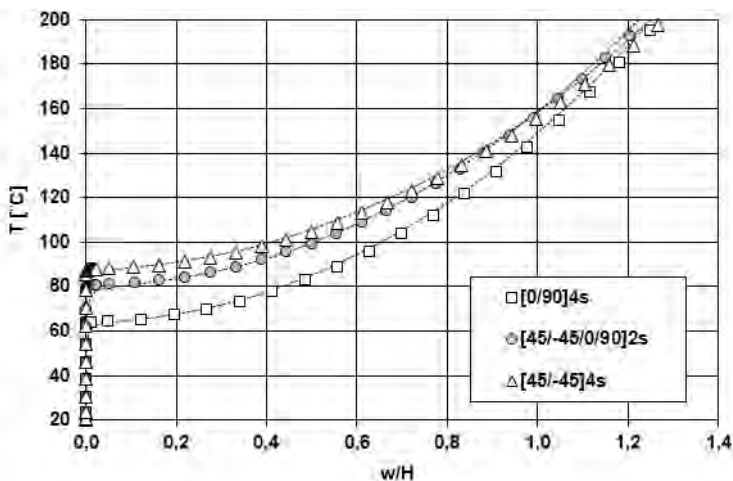
4.4. Płyta warstwowa o różnych schematach uwarstwienia

Za pracą [156] analizie poddano przykład warstwowej płyty kwadratowej (rys. 4.3) o smukłości $A/H = 100$ obciążonej równomiernym polem temperatury. Płyta jest swobodnie nieprzesuwnie podparta wzdłuż wszystkich krawędzi. Zbudowana jest z 16. warstw, których materiał ma następujące parametry: $E_a = 141$ GPa, $E_b = 13,1$ GPa, $G_{ab} = G_{ac} = G_{bc} = 9,31$ GPa, $\nu_{ab} = 0,28$, $\alpha_{aa}^{th} = 0,18 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$, $\alpha_{bb}^{th} = 21,8 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$, $X_t = X_c = 1650$ MPa, $Y_t = 58,9$ MPa, $Y_c = 236$ MPa, $S_s = 106$ MPa. W zadaniu tym analizowany jest wpływ uwarstwienia na stateczność konstrukcji oraz wyczerpanie materiału. Rozpatrywane są trzy schematy uwarstwienia: *cross-ply* $[0^\circ/90^\circ]_{4s}$, uwarstwienie *quasi-izotropowe* $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_{2s}$ i schemat *angle-ply* $[45^\circ/-45^\circ]_{4s}$. Jak w [156] przyjęto, że temperatura początkowa wynosi $T_{init} = 20^\circ\text{C}$.

Wyznaczone numerycznie wartości współczynników korekty ścinania wynoszą: $k_{13} = 0,8668$, $k_{23} = 0,7808$ (płyta *cross-ply*), $k_{13} = 0,8148$, $k_{23} = 0,8025$ (płyta *quasi-izotropowa*), $k_{13} = k_{23} = 0,8333 = 5/6$ (płyta *angle-ply*).

Zastosowano siatkę 8×8 elementów 8URI. W celu znalezienia przybliżonej ścieżki pokrytycznej konstrukcji, w analizie własnej równomierne ogrzanie zastąpiono gradientem temperatury takim, że $T_d/T_g = 0,9999$. Na rysunku 4.10 przedstawiono ścieżki równowagi znormalizowanego ugięcia punktów centralnych płyt względem temperatury na ich powierzchniach środkowych. Liniami przerywanymi zaznaczone zostały wyniki z pracy [156], które otrzymano przy zastosowaniu imperfekcji w postaci małej siły poprzecznej. Drobne różnice ilościowe w wyższym zakresie temperatur między rozwiązaniami własnymi a rezultatami odniesienia Autorka tłumaczy błędami odczytu tych ostatnich.

W rozwiązaniu zauważalna jest zależność temperatury krytycznej od schematu uwarstwienia. Temperatury krytyczne wynoszą: $T_{cr} = 63^\circ\text{C}$ (64°C), $T_{cr} = 81^\circ\text{C}$ (81°C), $T_{cr} = 87^\circ\text{C}$ (81°C) dla uwarstwień, odpowiednio, $[0^\circ/90^\circ]_{4s}$, $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_{2s}$ i $[45^\circ/-45^\circ]_{4s}$. W nawiasach podano wartości temperatur krytycznych stabilaryzowane w pracy [156]. Wartość $T_{cr} = 81^\circ\text{C}$ dla przypadku uwarstwienia $[45^\circ/-45^\circ]_{4s}$ jest tam zapewne podana mylnie (por. rysunek 4.10).



Rys. 4.10. Płyta warstwowa [156]; porównanie z rozwiązaniem odniesienia

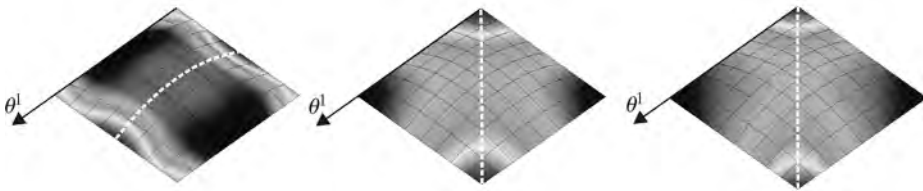
W rozwiązaniu własnym wyteżenie materiału kontrolowano w środku wysokości każdej z warstw laminatu. W przypadku wszystkich schematów uwarstwienia zniszczenie następuje w temperaturze znacznie wyższej niż temperatura wyboczeniowa. Warunek Tsai-Wu przekroczony jest w temperaturze: $T_{TW} = 810^\circ\text{C}$ (794.5°C), $T_{TW} = 738^\circ\text{C}$ (700°C), $T_{TW} = 712^\circ\text{C}$ (691°C) dla schematu, odpowiednio, $[0^\circ/90^\circ]_{4s}$, $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_{2s}$ i $[45^\circ/-45^\circ]_{4s}$. Wartości podane w nawiasach pochodzą z pracy [156]. Warto podkreślić, że spośród przeanalizowanych uwarstwień, schemat typu *cross-ply* decyduje o najlepszych warunkach pracy materiału (najwyższa temperatura niszcząca), warunkuje jednakże największą podatność konstrukcji na wyboczenie (najniższa temperatura krytyczna).

Należy w tym miejscu wyraźnie zaznaczyć, że uzyskane w powyższej analizie wartości temperatur zniszczenia są w rzeczywistości mało prawdopodobne, gdyż w modelu obliczeniowym nie uwzględniono efektu degradacji wartości parametrów materiału wynikającego z oddziaływania nań tak znacznych temperatur. Można mimo wszystko przypuszczać, że zniszczenie nastąpi po wyboczeniu.

Trzeba zaznaczyć, że rezultaty analizy wyteżenia są zależne od takich kwestii jak: podział na elementy, rozkład i liczba punktów kontroli naprężeń w planie elementu skończonego oraz na grubości warstw, także przyrostu obciążenia w poszczególnych krokach analizy. Wpływ może mieć tu również zastosowane kryterium wyteżeniowe. W pracy [156] zastosowano siatkę 5×5 elementów 9-węzłowych Lagrange'a z całkowaniem selektywnie zredukowanym. Wyteżenie kontrolowano wykorzystując kryterium Tsai-Wu w węzłach elementów, w środku wysokości każdej z warstw. Lokalizacje punktów kontrolnych w roz-

wiązaniu odniesienia i analizie własnej, gdzie wyężenie badane jest w punktach Gaussa, nie są więc identyczne. Ponadto w [156] przy sprawdzaniu warunku Tsai-Wu uwzględniono naprężenia poprzecznego ścinania (założono, że wytrzymałości warstwy na ścinanie we wszystkich płaszczyznach są identyczne). Mimo opisanych różnic modeli obliczeniowych, wyniki własne nie różnią się jednak od rozwiązań odniesienia o więcej niż 6%.

Na rysunku 4.11 przedstawiono deformacje płyt w temperaturach zniszczenia z naniesioną mapą rozkładu indeksu zniszczenia FI (2.105) w warstwie dolnej. Białą przerywaną linią oznaczono kierunek ułożenia zbrojenia w tejże warstwie. Niezależnie od schematu uwarstwienia mechanizmem zniszczenia jest pęknięcie matrycy. W płycie o uwarstwieniu $[45^\circ/-45^\circ]_{4s}$ następuje ono w warstwie dolnej w narożnikach leżących na linii zbrojenia; w płytach $[0^\circ/90^\circ]_{4s}$, $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_{2s}$ matryca niszczy się jednocześnie w dwóch warstwach zewnętrznych – w schemacie *cross-ply* wzdłuż krawędzi płyty prostopadłych do kierunku ułożenia włókien w tych warstwach, a w płycie *quasi*-izotropowej w narożnikach na linii zbrojenia.

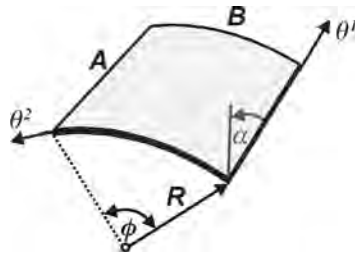


Rys. 4.11. Płyta warstwowa [156]; deformacje w temperaturze zniszczenia z naniesioną mapą rozkładu indeksu zniszczenia FI w warstwie dolnej; a) płyta $[0^\circ/90^\circ]_{4s}$, b) płyta $[45^\circ/-45^\circ/0^\circ/90^\circ]_{2s}$, c) płyta $[45^\circ/-45^\circ]_{4s}$

4.5. Ortotropowa powłoka cylindryczna

Przykład został zaproponowany w pracy [60] i był badany m.in. w pracach [9, 88, 92]. Analizowana jest ortotropowa powłoka cylindryczna (rys. 4.12) poddana równomiernemu ogrzaniu. Geometrię opisują następujące zależności: $A = B = R\phi$, $R/A = 5$, $A/H = 200$. Wszystkie krawędzie są swobodnie nieprzesuwnie podparte. Powłoka jest jednowarstwowa i wykonana z kompozytu o parametrach: $E_a = 138$ GPa, $E_b = 8,28$ GPa, $G_{ab} = G_{ac} = G_{bc} = 6,9$ GPa, $\nu_{ab} = 0,33$, $\alpha_{aa}^{th} = 0,18 \cdot 10^{-6} 1/^\circ C$, $\alpha_{bb}^{th} = 27 \cdot 10^{-6} 1/^\circ C$, $X_t = X_c = 1263$ MPa, $Y_t = 33,7$ MPa, $Y_c = 207$ MPa, $S_s = 57,3$ MPa. Kierunek ułożenia włókien jest równoleżnikowy ($\alpha = 90^\circ$).

Współczynniki korekcyjne wyznaczone numerycznie dla przyjętych danych wynoszą $k_{13} = k_{23} = 0,8333 = 5/6$, co odpowiada klasycznej propozycji Reissnera.



Rys. 4.12. Geometria powłoki cylindrycznej

W pracach [60²⁾, 9, 92] najprawdopodobniej również w [88], wykorzystano warunki podwójnej symetrii zadania i przeanalizowano ćwiartkę powłoki. W bieżącej analizie odstepuje się od tego uproszczenia mając na uwadze, że narzucanie warunków brzegowych odpowiadających warunkom symetrii eliminuje możliwość niesymetrycznych deformacji, które mogą charakteryzować zachowanie całej konstrukcji.

Ze względu na przeprowadzaną kontrolę stanu naprężeń w powłoce, do obliczeń przyjęto siatkę 16×16 elementów, choć dla potrzeb globalnej analizy samej deformacji wystarczająca byłaby rzadsza dyskretyzacja. Rysunek 4.13 przedstawia ścieżkę równowagi znormalizowanego ugięcia punktu centralnego powłoki uzyskaną w analizie własnej wraz z porównaniem z rozwiązaniem odniesienia [60]. W około 84°C następuje utrata stateczności w formie przeskoku. W rozwiązaniu własnym zastosowano dwa kryteria odciążania, tj. ICRIT=0 oraz ICRIT=1. Algorytm rozwiązania przy zastosowaniu warunku ICRIT=0 stracił zbieżność przy obciążeniu wynoszącym około 80°C. Kryterium ICRIT=1 pozwoliło na efektywne rozwiązanie zadania w zakresie temperatur, jaki badano w [60] i uzyskanie identycznego wyniku z rozwiązaniem odniesienia. Problemy ze zbieżnością przy zastosowaniu warunku ICRIT=0 mogą sugerować wystąpienie punktu bifurkacji na ścieżce. Należy w tym miejscu podkreślić, że w dodatkowej analizie z wykorzystaniem warunków po-

²⁾ O zastosowaniu w pracy [60] warunków podwójnej symetrii w tym przykładzie rozstrzyga podana tam uwaga ogólna, cyt.: „For the FE analysis of an angle-ply laminate subject to uniform thermal loading, it is generally necessary to discretize on-half the panel”.

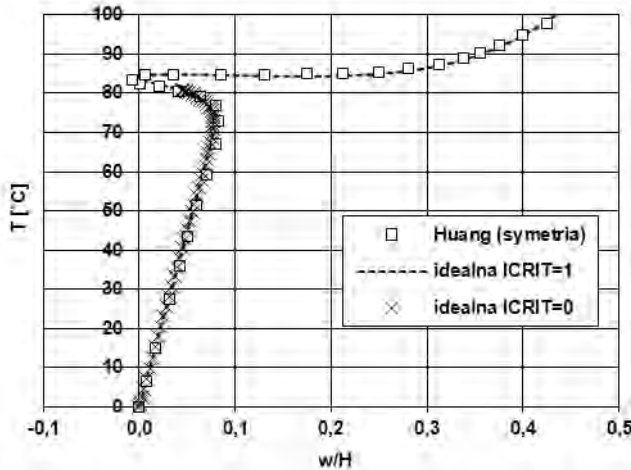
W tym miejscu autorzy odwołują się do niedostępnego Artykułu: Noor A.K., Mathers M.D., Anderson M.S.: Exploiting symmetries for efficient postbuckling analysis of composite plates, *AIAA Journal*. 15, 1977, 24–32. Następnie podają, „However, only a quadrant of the panel needs to be considered in the following two special cases: (i) laminates with fiber angle $\theta = 0^\circ$ or $\theta = 90^\circ$, and (ii) laminates having an infinite number of layers”

Uwagę tę można interpretować jako dopuszczenie zastosowania symetrii dla potrzeb efektywnej analizy stateczności powłok warstwowych w równomiernym polu temperatury. W ogólnym przypadku, tj. dla dowolnego kąta ułożenia włókien (*angle-ply*) układ redukuje się do połowy, w przypadkach szczególnych do ćwiartki.

Trzeba jednak podkreślić, że warunki symetrii w przypadku analizy kompozytowych powłok warstwowych należy stosować szczególnie ostrożnie. W pracy [125], której autorzy powołują się także na ww. artykuł Noora i współautorów, w konkluzjach napisano, że w przypadku konstrukcji o symetrycznej geometrii i warunkach brzegowych, ale niesymetrycznym względem powierzchni środkowej uwarstwieniu, warunków podwójnej symetrii stosować nie wolno.

Bardzo istotny jest jednak fakt, że nawet w problemie izotropowym symetria geometrii i warunków brzegowych nie wyklucza niesymetrycznej formy wyboczenia, stąd Autorka, jak wyżej napisano, warunków symetrii w obliczeniach nie wykorzystuje.

dwójnej symetrii zadania, problemy ze zbieżnością przy zastosowaniu warunku $ICRIT=0$ nie wystąpiły.

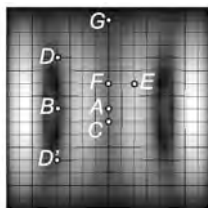


Rys. 4.13. Ortotropowa powłoka cylindryczna [60]; konstrukcja idealna; porównanie kryteriów odciążania

Aby ustalić przebieg możliwej ścieżki drugorzędnej przeprowadzono dodatkową analizę z imperfekcjami w postaci małych sił zaburzających. Lokalizacja tych zaburzeń nie jest oczywista i została ustalona arbitralnie, metodą „prób i błędów”. Na rysunku 4.14 przedstawiono deformację powłoki w temperaturze 80°C z naniesionymi punktami lokalizacji sił zaburzających.

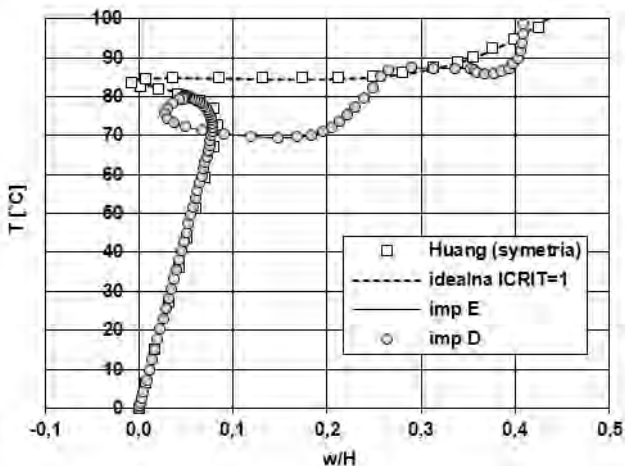
Obliczenia przeprowadzono w dwóch etapach: w pierwszym etapie obciążeniu równomiernym towarzyszyła mała siła skupiona usytuowana w jednym z punktów przedstawionych na rysunku 4.14; analiza przeprowadzana była do momentu, w którym zauważalne było przejście rozwiązania na ścieżkę jakościowo³⁾ inną niż podstawowa (rys. 4.13); drugi etap obliczeń rozpoczynano z punktu leżącego w bliskim położeniu punktu, w którym nastąpiła zmiana jakości rozwiązania, usuwając imperfekcję obciążeniową, przy założeniu, że rozwiązanie „przeskoczy” na ścieżkę drugorzędną konstrukcji idealnej. W obydwóch etapach obliczeń wykorzystano warunek odciążania $ICRIT=1$. Wartość siły zaburzającej była tak przyjmowana, aby w rozwiązaniu liniowym ugięcie punktu, w którym siła jest usytuowana wynosiło $0,001H$ (mniejsza wartość imperfekcji), względnie $0,01H$ (większa wartość imperfekcji).

³⁾ Trzeba podkreślić, że ścieżka równowagi uzyskiwana w pierwszym etapie, a więc z siłą zaburzającą, nie jest już ścieżką podstawową. Przy małym zaburzeniu może ona jednak być bardzo zbliżona do ścieżki fundamentalnej.

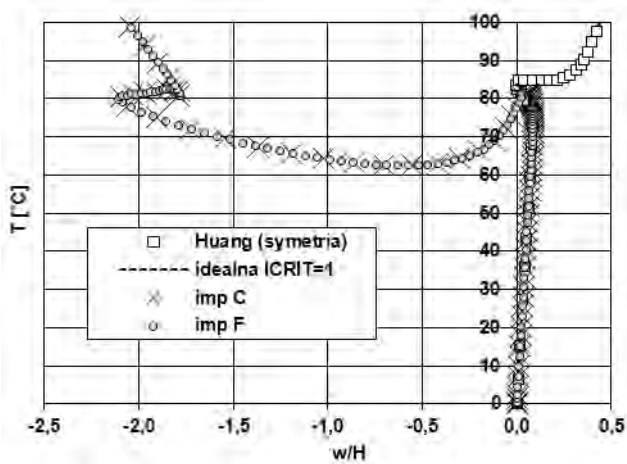


Rys. 4.14. Ortotropowa powłoka cylindryczna [60]; lokalizacje sił zaburzających naniesione na deformację w 80°C

Siły usytuowane na osi symetrii wzdłuż tworzącej walca, a więc w punktach A i B, bez względu na swą wartość, nie zmieniły jakościowo rozwiązania do poziomu temperatury około 90°C. Dalej analizy z tymi imperfekcjami nie prowadzono, gdyż spodziewany punkt bifurkacji oczekiwany był w około 80°C. Siły zlokalizowane poza osiami symetrii, a więc w punktach D i E (także D'), już przy mniejszej wartości, spowodowały identyczną w obu wypadkach zmianę odpowiedzi. Uzyskaną dla tych imperfekcji ścieżkę przedstawiono na rysunku 4.15. Zlokalizowane na równoleżnikowej osi symetrii walca, a więc w punktach C i F, mniejsze wartości imperfekcji nie spowodowały jakościowej zmiany rozwiązania do poziomu 90°C. Zaburzenia o większej wartości wywołały jednak przejście na inną ścieżkę, przy nieco wyższym obciążeniu niż odpowiadające punktowi rozgałęzienia uzyskanemu dla imperfekcji w punktach D i E. Obydwa usytuowania siły, tj. w punkcie C i F wywołały identyczną zmianę odpowiedzi, co przedstawia rysunek 4.16. Rozgałęzienie odpowiadające imperfekcjom w punktach D i E (rys. 4.15) następuje w około 80°C, natomiast siłom w punktach C i F (rys. 4.16) odpowiada rozgałęzienie w około 82°C.



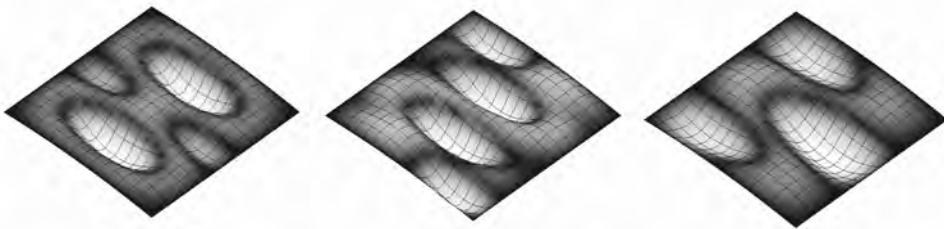
Rys. 4.15. Ortotropowa powłoka cylindryczna [60]; ścieżka drugorzędna dla imperfekcji zlokalizowanych w punktach D, E



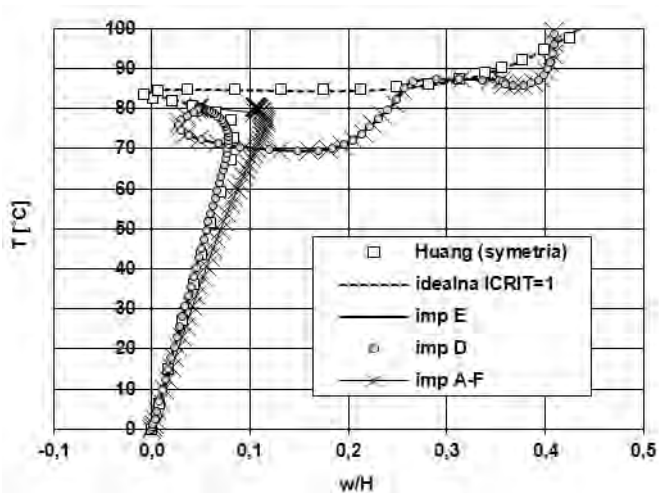
Rys. 4.16. Ortotropowa powłoka cylindryczna [60]; ścieżka drugorzędna dla imperfekcji zlokalizowanych w punktach C, F

Rysunek 4.17 przedstawia deformacje powłoki w 100°C , odpowiadające każdej z otrzymanych ścieżek równowagi. Jak widać, formy deformacji powłoki na ścieżkach drugorzędnych nie są bisymetryczne. Wykorzystanie warunków podwójnej symetrii zadania eliminuje z góry możliwość ich wystąpienia, co tłumaczy brak pojawiania się w takim wypadku punktów bifurkacji na ścieżce i dlatego wtedy przy zastosowaniu warunku odciążania $\text{ICRIT} = 0$ problemy ze zbieżnością nie występują.

Dodatkowo przeprowadzono dwuetapowe obliczenia, przykładając w pierwszym etapie siły zaburzające we wszystkich punktach, tj. A-F. W punktach D i E przyłożono mniejszą wartość imperfekcji, a w pozostałych punktach wartość większą. Rysunek 4.18 przedstawia otrzymane w wyniku tych obliczeń rozwiązanie. Widać, że po usunięciu imperfekcji rozwiązanie „przeskakuje” na ścieżkę drugorzędną otrzymaną dla pojedynczych imperfekcji w punktach D i E, o mniejszych wartościach, mimo, że w tej analizie obecne były imperfekcje o większych wartościach w punktach A, B, C, F.

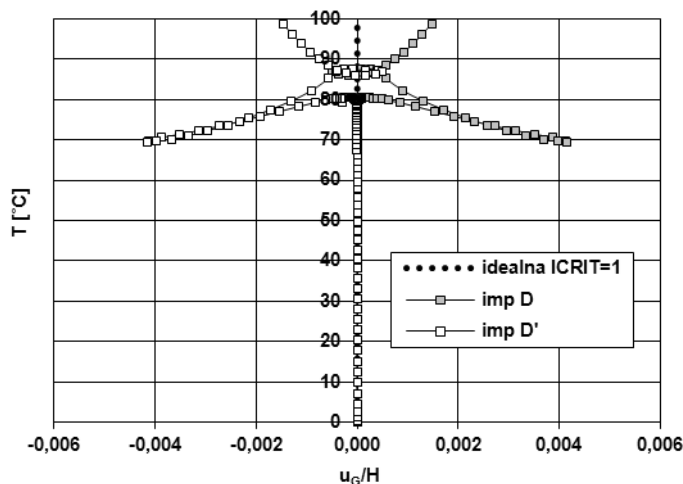


Rys. 4.17. Ortotropowa powłoka cylindryczna [60]; deformacje w 100°C : a) ścieżka podstawowa, b) ścieżka drugorzędna (80°C ; imperfekcje w D i E), c) ścieżka drugorzędna (82°C , imperfekcje w C i F)

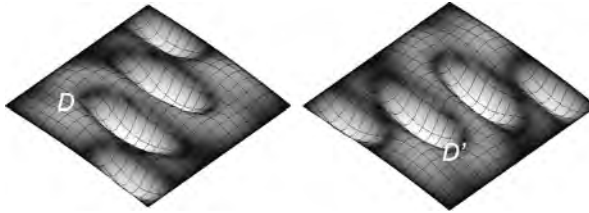


Rys. 4.18. Ortotropowa powłoka cylindryczna [60]; ścieżka drugorzędna dla imperfekcji zlokalizowanych w punktach A-F

Ścieżka drugorzędna, przecinająca ścieżkę podstawową w około 80°C (rys. 4.15), może wiązać się zatem z najbardziej prawdopodobnym zachowaniem konstrukcji, gdyż odpowiada pierwszemu punktowi rozgałęzienia. Jest to symetryczny niestateczny punkt bifurkacji, co ilustruje przedstawiony na rysunku 4.19 przebieg ścieżek równowagi jednego z tzw. stopni pobifurkacyjnych, tj. translacji punktu G (rys. 4.14) wzdłuż tworzącej walca. Imperfekcje przyłożone w symetrycznie ułożonych względem osi symetrii walca punktach D i D' wywołują wzajemnie symetryczne ('bliźniacze') deformacje (rys. 4.20).



Rys. 4.19. Ortotropowa powłoka cylindryczna [60]; ścieżki translacji poziomej punktu G; symetryczny niestateczny punkt bifurkacji



Rys. 4.20. Ortotropowa powłoka cylindryczna [60]; bliźniacze deformacje w 100°C wywołane imperfekcjami w punktach D i D'; symetryczny niestateczny punkt bifurkacji

Analiza wytyżenia wykazała, że na ścieżce podstawowej stan naprężenia w zakresie badanych temperatur 0–100°C jest bezpieczny. Jej wyniki przedstawiono w tabeli 4.2, w której pierwsza kolumna zawiera dodatkowo wyniki analizy zbieżności wyniku temperatury zniszczenia dla różnych siatek elementów 8URI. Pogrubioną czcionką zaznaczono wynik przyjęty za ostateczny w bieżącej analizie, a więc dla dyskretyzacji 16×16 8URI.

Tabela 4.2

Ortotropowa powłoka cylindryczna [60]; wpływ dyskretyzacji i lokalizacji punktów analizy wytyżenia na wartość temperatury zniszczenia T_{TW}

8URI		Huang (symetria) 3×6 9SRI	siatka 6×12		siatka 16×16	
			8URI	8SRI	8URI	8SRI
siatka 12×12	104°C	94°C	>110°C	104°C	102°C	96°C
siatka 16×16	102°C					
siatka 20×20	101°C					

Przypomnijmy, że kontrola naprężeń odbywa się w punktach Gaussa w środku każdej warstwy. W analizowanym przykładzie występuje jedna warstwa fizyczna. Ponieważ po utracie stateczności zdominowana do tego momentu stanem membranowym praca konstrukcji przechodzi w stan zgięciowy, największe wytyżenie spodziewane jest w skrajnych włóknach przekroju powłoki. W obliczeniach rzeczywistą pojedynczą warstwę podzielono zatem na trzy subwarstwy, z których dwie zewnętrzne miały grubość 0,01H. Pierwsze zniszczenie pojawia się dopiero w $T_{TW}=102^\circ\text{C}$ i związane jest z pękaniem matrycy dolnej warstwy w miejscu największego zagłębienia powłoki (rys. 4.17a), podczas gdy na powierzchni środkowej jest jeszcze duży zapas bezpieczeństwa.

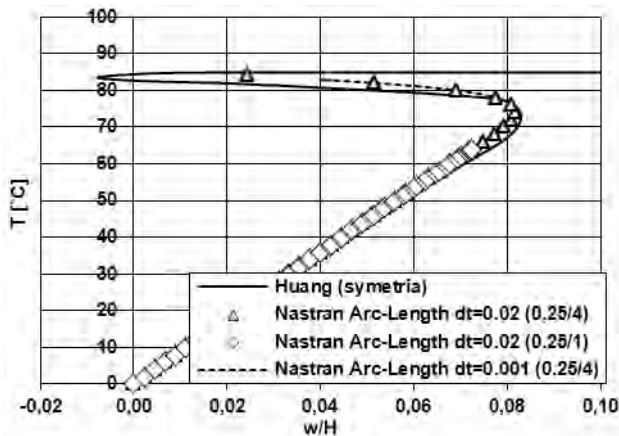
W pracy [60] podano, że warunek Tsai-Wu jest przekroczony w $T_{TW}=94^\circ\text{C}$. Jak wspomniano w poprzednim przykładzie, wynik ten zależy m.in. od gęstości siatki, liczby i lokalizacji punktów kontrolnych naprężeń w elemencie oraz w tym przypadku od podziału na subwarstwy. Z pracy [60] nie wynika, w jakim miejscu na grubości kontrolowano wytyżenie. Wiadomo jedynie, że do dyskretyzacji ćwiartki powłoki zastosowano siatkę 3×6 elementów 9-węzłowych z całkowaniem selektywnie zredukowanym i najprawdopodobniej naprężenia kontrolowano w 9 punktach Gaussa. Dla porównania przeprowadzono dodatkowe analizy wyników naprężeń dla siatki 6×12 (więcej wzdłuż wysokości walca) elementów 8-węzłowych z całkowaniem selektywnie (8SRI) i równomiernie zredukowanym

(8URI) oraz dla siatki 16×16 elementów 8SRI. Siatka 6×12 odpowiada dyskretyzacji przyjętej w [60].

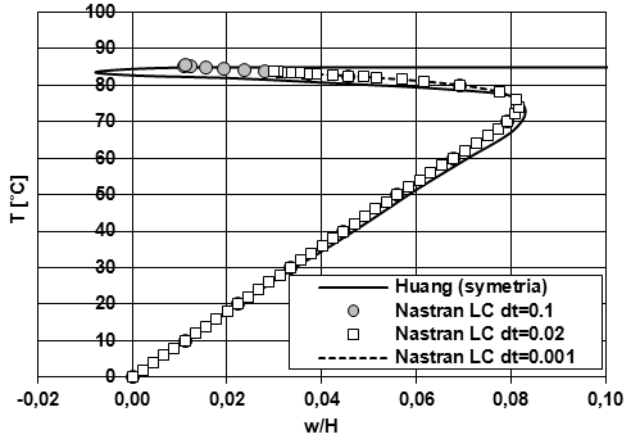
Można zauważyć wyraźny wpływ lokalizacji punktów obliczania naprężeń w elemencie na wynik temperatury zniszczenia. Trzeba jednak podkreślić, że zgodnie z [187] zarówno w elemencie 8- jak i 9-węzłowym najlepszą dokładność wyników naprężeń uzyskuje się w 4. punktach Gaussa.

Na ścieżce drugorzędnej, której odpowiada rozgałęzienie w 80°C, zniszczenie do 100°C nie występuje, natomiast na drugiej ścieżce pobifurkacyjnej w około 100°C następuje pęknięcie matrycy warstwy w największym zagłębieniu powłoki (rys. 4.17c).

Dodatkowo dla tego przykładu przedstawiono wyniki otrzymane programem NX-Nastran (ver. 7.0) (rys. 4.21, 4.22). Przy zastosowaniu sterowania parametrem łuku (Arc-Length) (rys. 4.21) dla początkowej wartości przyrostu obciążenia $\Delta\lambda_{h,0} = dt = 0,02$ oraz standardowego w tym programie skalowania długości łuku, dopuszczającego czterokrotne zmniejszanie lub zwiększanie tej długości (0,25/4), rozwiązanie można uzyskać tylko do poziomu 84°C. W tym miejscu pojawiły się problemy ze zbieżnością i program przerwał obliczenia. Po uniemożliwieniu wydłużania długości łuku (0,25/1) program zakończył obliczenia w około 65°C, komunikując problem zbieżności. Przy standardowym ustawieniu skalowania długości łuku (0,25/4) i bardzo małej wartości początkowego przyrostu parametru obciążenia $\Delta\lambda_{h,0} = dt = 0,001$, w około 83°C wystąpiły oscylacje rozwiązania. Program rozwiązał w tym miejscu kilkadziesiąt przyrostów i obliczenia zostały przerwane wskutek wyczerpania zadanej ich maksymalnej liczby. W tym zadaniu również przy zastosowaniu sterowania obciążeniowego (LC) (rys. 4.22) nie udało się uzyskać przybliżonego rozwiązania w zakresie 0–100°C. Przy mniejszych wartościach przyrostu parametru obciążenia $\Delta\lambda_{h,0} = dt = 0,02$ i $\Delta\lambda_{h,0} = dt = 0,001$ program NX-Nastran przerwał obliczenia w około 83°C, a przy większej wartości $\Delta\lambda_{h,0} = dt = 0,1$ w około 84°C.



Rys. 4.21. Ortotropowa powłoka cylindryczna [60]; rozwiązania z programu NX-Nastran (ver. 7.0), sterowanie parametrem łuku (Arc-Length)



Rys. 4.22. Ortotropowa powłoka cylindryczna [60]; rozwiązania z programu NX-Nastran (ver. 7.0), sterowanie obciążeniowe (LC)

4.6. Powłoka cylindryczna *cross-ply*

Przykład został zaproponowany przez Lee i współautorów w [88, 107]. Analizowany jest panel cylindryczny (rys. 4.12) o wymiarach $A = B = R\phi$, $\phi = 15^\circ$, swobodnie nieprzesuwnie podparty wzdłuż wszystkich krawędzi, poddany równomiernemu ogrzaniu. Powłoka zbudowana jest z czterech warstw ułożonych według schematu *cross-ply* $[0^\circ/90^\circ]_s$. Materiał warstw jest identyczny, jak w zadaniu 4.5.

Współczynniki korekcyjne ścinania dla rozpatrywanego tu przekroju wynoszą: $k_{13} = 0,8670$, $k_{23} = 0,5475$.

W pracach [88, 107], a także [67] badany jest wpływ smukłości powłoki A/H (rys. 4.12) na zachowanie konstrukcji. W niniejszej pracy analizowane są dwa warianty: $A/H = 200$ i $A/H = 800$.

W przypadku powłoki $A/H = 200$ przyjęto dyskretyzację 10×10 elementów 8URI. Na rysunku 4.23 przedstawiono ścieżkę znormalizowanego ugięcia punktu centralnego powłoki.

Przy zastosowaniu kryterium $ICRIT = 1$ uzyskano rozwiązanie bardzo zbliżone do rozwiązania odniesienia [88, 107]. Niezgodności ilościowe mogą tu wynikać z niedokładności odczytu rozwiązania odniesienia, ale również z różnic sformułowań elementów skończonych. W pracy [107] podano, że w analizie zastosowano element typu *layer-wise*, przy czym nie sprecyzowano konkretnie liczby węzłów tego elementu, podając jedynie we wstępie, że może to być element 8- lub 9-węzłowy.

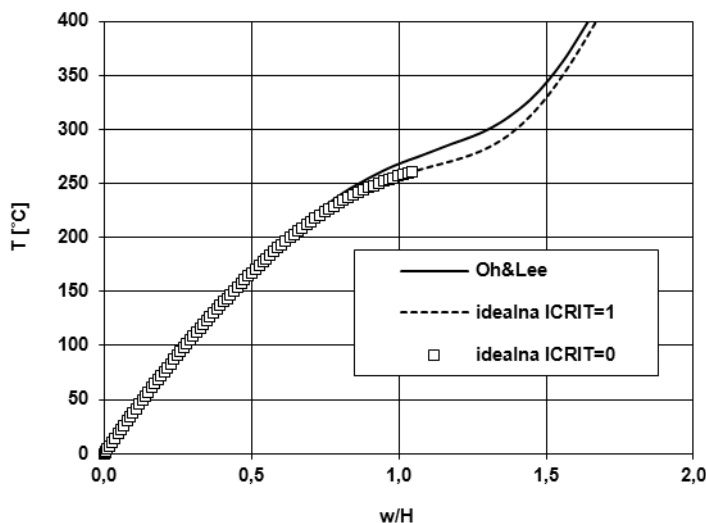
Po przyjęciu w obliczeniach kryterium $ICRIT = 0$ wystąpiły oscylacje rozwiązania w około 260°C . Zakładając, że źródłem tych oscylacji może być obecność punktu bifurkacji, przeprowadzono dodatkowe analizy z małymi siłami zaburzającymi, które usuwano po przejściu rozwiązania na inną jakościowo ścieżkę niż podstawowa. Lokalizację sił zaburzących przyjęto w punktach przedstawionych na rysunku 4.24. Wartości sił były tak dobrane, że ugięcia pod nimi w rozwiązaniu liniowym nie przekraczały $0,001H$.

Siła w punkcie E nie spowodowała jakościowej zmiany odpowiedzi konstrukcji. Przyłożenie pojedynczych zaburzeń w pozostałych punktach oraz wszystkich tych sił jednocześnie (A-D) wywołało zmianę (rys. 4.25).

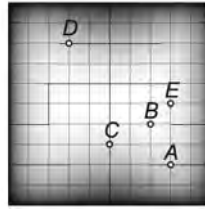
Ścieżki drugorzędne ugięcia punktu środkowego dla wszystkich przypadków zaburzeń pokryły się. Jednakże trzeba tu zaznaczyć, że imperfekcja zlokalizowana w punkcie D, leżącym po innej stronie pionowej osi symetrii walca niż pozostałe punkty, wywołuje odpowiedź w formie lustrzanego odbicia deformacji otrzymanych dla lokalizacji zaburzeń w punktach A, B, C i A-D (rys. 4.26). Konstrukcję charakteryzuje symetryczny niestateczny punkt bifurkacji, co ilustruje pokazany na rysunku 4.27 przebieg ścieżek równowagi translacji w kierunku równoleżnikowym (v) punktu centralnego powłoki. Ścieżce drugorzędnej na rys. 4.27, przebiegającej po lewej stronie osi obciążenia, odpowiada deformacja przedstawiona na rys. 4.26b, a ścieżce po stronie prawej deformacja 4.26c.

W badanym zakresie temperatury nie dochodzi do przekroczenia warunku Tsai-Wu.

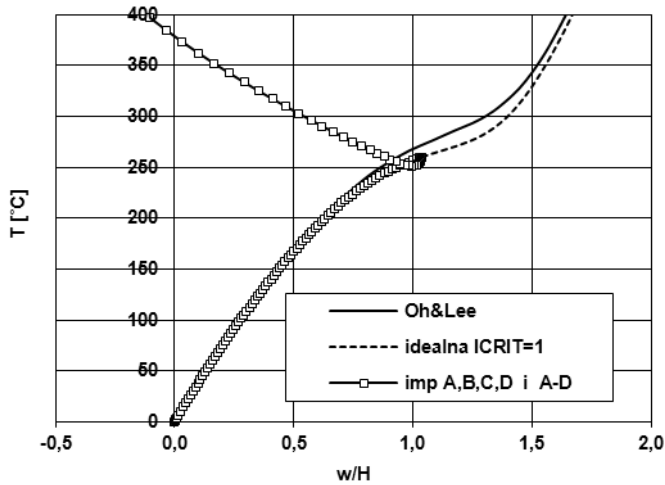
Dodatkowo dla tego przykładu na rysunku 4.28 przedstawiono wyniki otrzymane programem NX-Nastran (ver. 7.0). Na ścieżce układu idealnego w badanym zakresie temperatury nie występują punkty krytyczne, toteż rozwiązanie można uzyskać sterując parametrem obciążenia (LC). Zastosowano przyrost $\Delta\lambda_{h,0} = dt = 0,02$. Można zauważyć, że otrzymana w ten sposób ścieżka pokrywa się idealnie z rozwiązaniem z programu autorskiego dla $ICRIT = 1$. Fakt ten może potwierdzać wcześniejszą uwagę o wpływie sformułowania modelu kompozytu warstwowego na rozwiązanie, bowiem model w Nastranie, podobnie jak podejście stosowane w niniejszej pracy, bazuje na koncepcji pojedynczej warstwy zastępczej. Na rysunku 4.28 pokazano także wynik otrzymany techniką sterowania parametrem łuku (Arc-Length) dla $\Delta\lambda_{h,0} = dt = 0,02$. Jak we wcześniejszym przykładzie, algorytm stracił w pewnym punkcie zbieżność i program przerwał obliczenia.



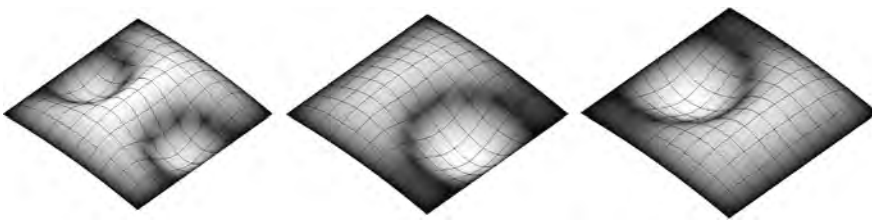
Rys. 4.23. Powłoka cylindryczna [107] $A/H = 200$; porównanie wyników własnych z rozwiązaniem odniesienia



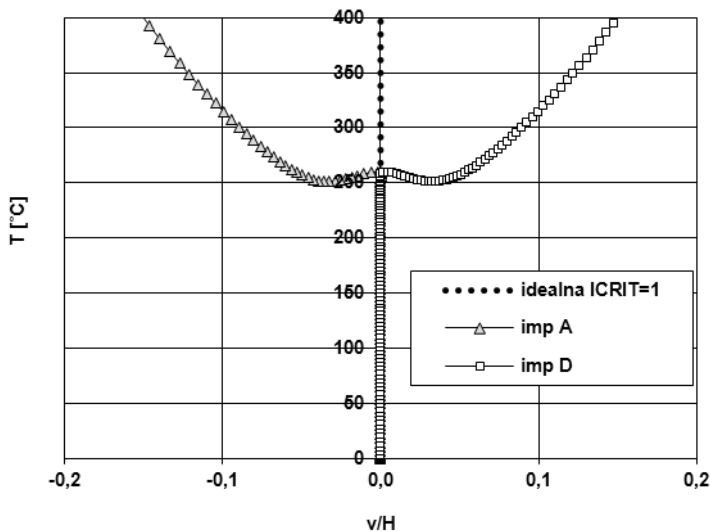
Rys. 4.24. Powłoka cylindryczna [107] $A/H = 200$; lokalizacje sił zaburzających



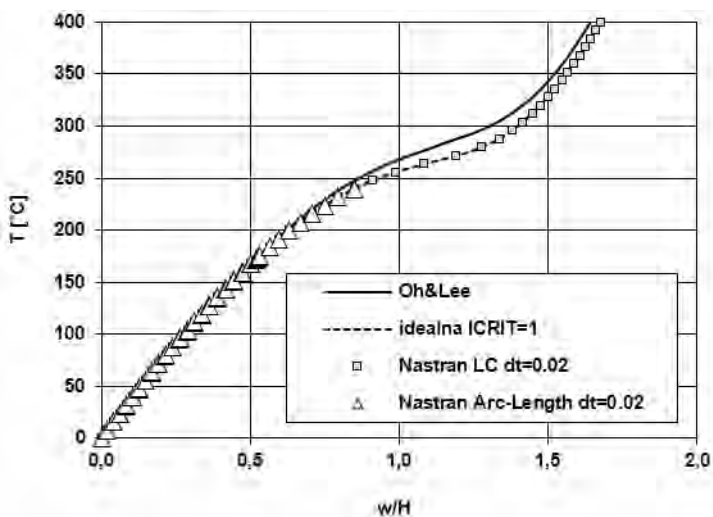
Rys. 4.25. Powłoka cylindryczna [107] $A/H = 200$; ścieżka drugorzędna dla zaburzeń w punktach A, B, C, D oraz A-D



Rys. 4.26. Powłoka cylindryczna [107] $A/H = 200$; deformacje w 400°C : a) ścieżka podstawowa, b) ścieżka drugorzędna dla zaburzeń w punktach A, B, C i A-D, c) ścieżka drugorzędna dla zaburzenia w punkcie D



Rys. 4.27. Powłoka cylindryczna [107] $A/H = 200$; ścieżki równowagi translacji w kierunku równoleżnikowym punktu centralnego powłoki; symetryczny niestateczny punkt bifurkacji



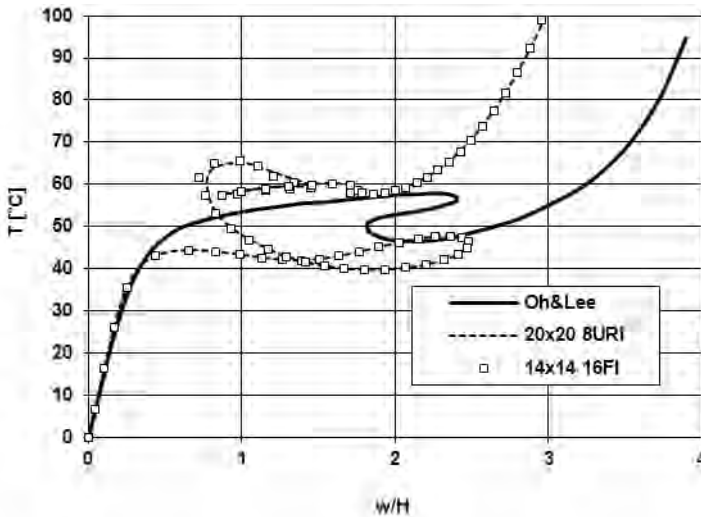
Rys. 4.28. Powłoka cylindryczna [107] $A/H = 200$; porównanie wyników własnych z programem autorskiego i NX-Nastran (ver. 7.0) z rozwiązaniem odniesienia

W analizie zbieżności podziału na elementy skończone w przypadku powłoki o smukłości $A/H = 800$ obserwowano znaczne zmiany jakościowe rozwiązania w zależności od przyjętej dyskretyzacji. Minimalnym zagęszczeniem gwarantującym stabilność odpowiedzi jest 20×20 elementów 8URI i taką siatkę przyjęto ostatecznie w obliczeniach.

Na rysunku 4.29 przedstawiono porównanie rezultatów własnych z rozwiązaniem odniesienia. Obserwujemy wyraźne jakościowe różnice wyników. Z interpretacji rozwiązania

własnego wyniku, że powłoka traci stateczność poprzez przeskok w około 44°C , podczas gdy rozwiązanie odniesienia wskazuje, że efekt ten następuje w około 60°C .

Przy tak małej grubości powłoki jakość i wartość rozwiązania może być fałszowana wpływem blokady ścinania. Aby rozstrzygnąć, czy uzyskana elementem 8URI postać rozwiązania własnego nie wynika z wpływu lockingu czy też form pasożytniczych mogących towarzyszyć technice jednolicie zredukowanego całkowania, przeprowadzono dodatkowe obliczenia, stosując element 16-węzłowy z pełnym całkowaniem (16FI). Aby uzyskać porównywalne zagęszczenie węzłów jak w przypadku dyskretyzacji 20×20 elementów 8URI, przyjęto podział 14×14 elementów. Otrzymane elementem 16-węzłowym rozwiązanie potwierdziło poprzednią odpowiedź (rys. 4.29).

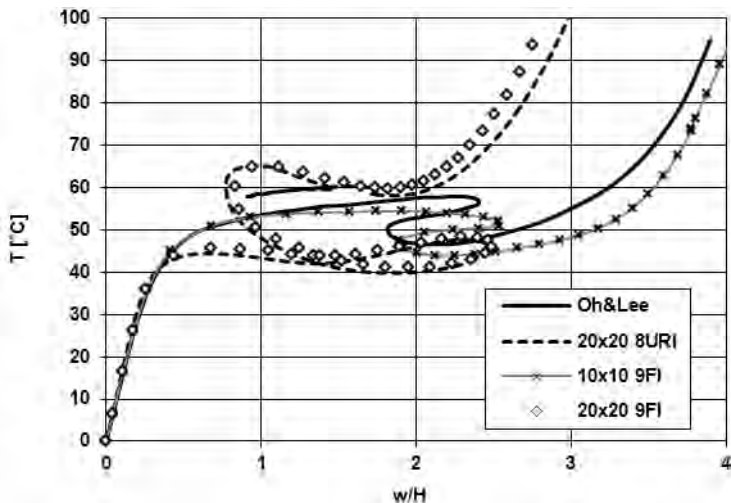


Rys. 4.29. Powłoka cylindryczna [107] $A/H=800$; porównanie wyników własnych z rozwiązaniem odniesienia

W pracach [67, 88] zastosowano siatkę 5×5 elementów wykorzystując podwójną symetrię zadania, w [107] natomiast przyjęto zagęszczenie 10×10 elementów do analizy całego modelu. W artykule [88] zastosowano element 9-węzłowy Hellingera-Reissnera z niezależnym polem odkształceń. Z uwag wstępnych w [107] wynika jedynie, że może to być element 8- lub 9-węzłowy wychodzący z mieszanej zasady wariacyjnej Hellingera-Reissnera. W [67] zastosowano element 8-węzłowy, w którego sformułowaniu, w celu uniknięcia lockingu, przyjęto wygładzone funkcje interpolacyjne.

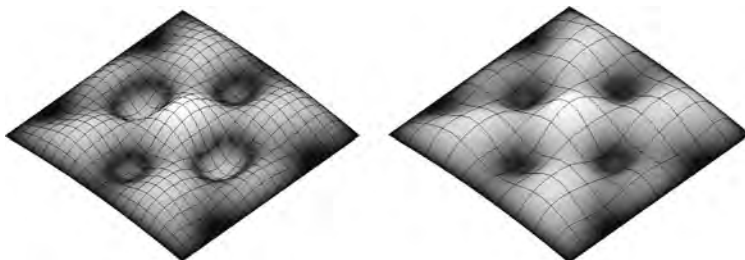
Przeprowadzono dodatkowe obliczenia stosując własny element 9-węzłowy z pełnym całkowaniem (9FI). Wyniki przedstawia rysunek 4.30. Dla siatki 10×10 elementów otrzymano ścieżkę jakościowo zgodną z rozwiązaniem przedstawionym w [67, 88, 107]. Niezgodności ilościowe mogą wynikać, jak w przypadku analizy powłoki $A/H=200$, z różnic sformułowań modeli kompozytu warstwowego. Po zagęszczeniu podziału do 20×20 elementów 9FI otrzymano już jednak rozwiązanie bardzo zbliżone do wyników otrzymanych elementem 8URI i 16FI (rys. 4.30). Fakt ten pozwala założyć, że przedstawiona w [67, 88, 107] postać rozwiązania jest nieprawidłowa i wynika z przyjęcia tam zbyt ubożego podzia-

łu na elementy skończone, który nie może poprawnie aproksymować skomplikowanej deformacji tak cienkiej powłoki.

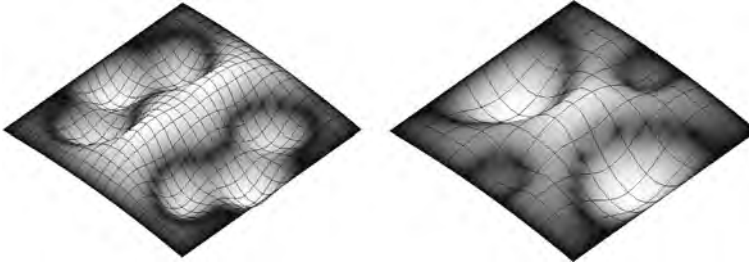


Rys. 4.30. Powłoka cylindryczna [107] $A/H = 800$; wpływ sformułowania elementu i zagęszczenia siatki na rozwiązanie

Na rysunkach 4.31 i 4.32 przedstawiono porównanie deformacji konstrukcji odpowiadających, odpowiednio, poziomowi ugięcia punktu centralnego równemu $w/H = 1$ oraz temperaturze 100°C , uzyskanych w analizie z zastosowaniem siatki 20×20 8URI i 10×10 9FI. Powłoka ze względu na małą grubość doznaje licznych zafalowań na całej powierzchni (20×20 8URI), czego nie oddaje zbyt 'sztywna' siatka 10×10 9FI.



Rys. 4.31. Powłoka cylindryczna [107] $A/H = 800$; porównanie deformacji odpowiadających $w/H = 1$; a) siatka 20×20 elementów 8URI, b) siatka 10×10 elementów 9FI



Rys. 4.32. Powłoka cylindryczna [107] $A/H = 800$; porównanie deformacji w 100°C ;
a) siatka 20×20 elementów 8URI, b) siatka 10×10 elementów 9FI

Wyniki analizy wyteżenia wskazują, że stan naprężenia w badanych temperaturach mieści się w zakresie dopuszczalnym.

Powyższe analizy powłoki $A/H = 800$ przeprowadzono przy wykorzystaniu kryterium $\text{ICRIT} = 1$. Dodatkowe obliczenia z zastosowaniem warunku $\text{ICRIT} = 0$ były możliwe tylko do poziomu 44°C ($w/H = 0,55$). W tym miejscu wystąpiły oscylacje rozwiązania, mogące świadczyć o obecności punktu bifurkacji. Poszukiwania możliwej ścieżki drugorzędnej dla tego zadania nie przeprowadzono.

4.7. Powłoka cylindryczna *angle-ply*

Zadanie zaprezentowano w pracy [60]. Analizowany jest równomiernie ogrzany panel cylindryczny o identycznej geometrii i warunkach podparcia jak w przykładzie 4.5. Różnicę w stosunku do tamtego przykładu stanowi typ uwarstwienia, bowiem tutaj rozpatrywany jest schemat typu *angle-ply* [$67.5^{\circ}/-67.5^{\circ}/\dots$] (rys. 4.12). Badany jest wpływ liczby warstw N na zachowanie konstrukcji. W tym celu przeprowadzono obliczenia dla dwukrotnie zwiększonej ich liczby, tj. $N=2$, $N=4$, $N=8$, itd. Przeprowadzone w ramach analizy własnej obliczenia wykazały, że zwiększanie liczby warstw powyżej $N=8$ nie zmienia odpowiedzi konstrukcji, toteż przypuszczalnie dlatego w [60] podano, że badane są liczby $N=2$, $N=4$ oraz $N=\infty$ ($N=\text{inf.}$). Materiał warstw jest identyczny jak w zadaniu 4.5.

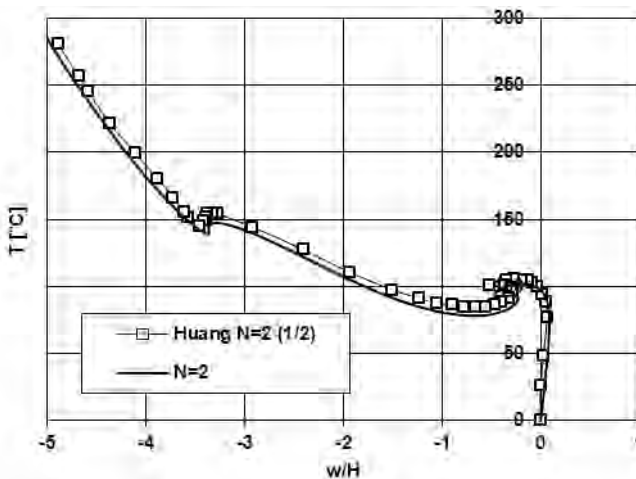
Niezależnie od liczby warstw numerycznie wyznaczone współczynniki korekty ścinania są równe $k_{13} = k_{23} = 0,8333 = 5/6$.

W analizie własnej przyjęto siatkę 12×12 elementów 8URI. Wybór siatki podyktowany jest m.in. koniecznością uzyskania identycznego położenia węzłów, dla których w [60] przedstawiono rozwiązania. Dla potrzeb analizy wyteżenia zewnętrzne warstwy dzielone są na dwie, z których skrajne mają grubość $0,01H$. W tym zadaniu wszystkie obliczenia przeprowadzono przy zastosowaniu kryterium $\text{ICRIT} = 1$.

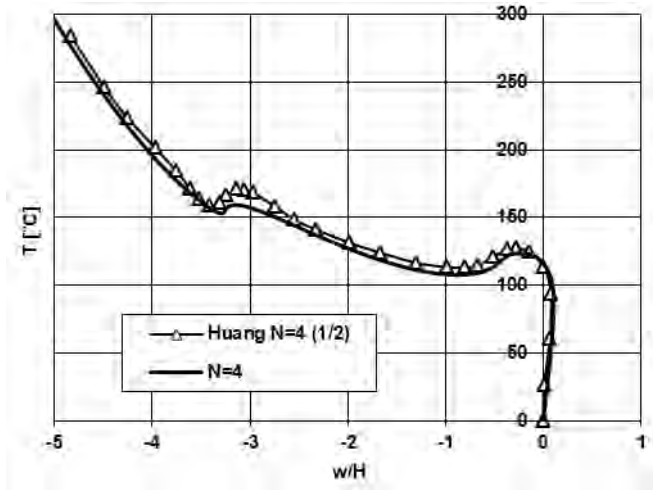
W rozwiązaniu własnym analizowano całą powłokę, podczas gdy w [60] zostały wykorzystane warunki symetrii, o czym wnioskować można z podanej tam uwagi ogólnej (por. zadanie 4.5) oraz z porównania przedstawionej siatki w [60] węzłów. W przypadku powłok $N=2$, $N=4$ rozpatrywano połowę powłoki ($1/2$) (linia podziału konstrukcji w połowie wysokości walca $A/2$, rys. 4.12). Trzeba w tym miejscu ponownie podkreślić, że wykorzystanie warunków symetrii w zagadnieniach dotyczących powłok warstwowych wymaga pewnej ostrożności. O ile bowiem geometria rozpatrywanego tu walca i warunki brzegowe są bisymetryczne, to uwarstwienie typu *angle-ply* ten typ symetrii zaburza i nale-

zy się raczej spodziewać, że deformacja konstrukcji będzie skośnie lub obrotowo symetryczna. Niestety, w [60] nie doprecyzowano, jakie warunki brzegowe na liniach połowicznego podziału konstrukcji zostały przyjęte. Powłokę $N=8=\infty$ w [60] rozwiązano analizując ćwiartkę konstrukcji (1/4), najprawdopodobniej przy wykorzystaniu warunków podwójnej symetrii. Postąpiono zatem zgodnie z uwagą przytoczoną w zadaniu 4.5. Podkreślimy jednak, że rozpatrywane tu uwarstwienie jest niesymetryczne względem powierzchni środkowej, co zgodnie z [125] ma wykluczać możliwość stosowania warunków podwójnej symetrii (patrz uwaga do zadania 4.5).

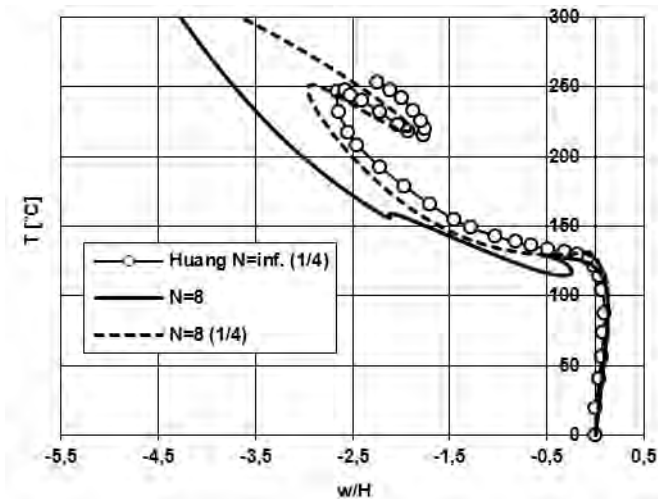
Na rysunkach 4.33–4.35 przedstawiono porównanie otrzymanych wyników z rozwiązaniem odniesienia. Dla powłok $N=2$, $N=4$ przedstawione są ścieżki równowagi znormalizowanych ugięć w punkcie $(A/4; B/3)$, a dla powłoki $N=8=\infty$ w punkcie $(7/24A; B/2)$ (por. rys. 4.12). Zgodność wyników z rozwiązaniem odniesienia w przypadku powłok $N=2$, $N=4$ jest zadowalająca, podczas gdy dla powłoki $N=8=\infty$ uzyskano jakościowo inne rozwiązanie. Aby sprawdzić, czy różnica ta nie wynika z przyjętych w [60] warunków podwójnej symetrii przeprowadzono dodatkowe obliczenia i przeanalizowano ćwiartkę powłoki $N=8=\infty$ z zastosowaniem warunków brzegowych symetrii na liniach podziału, których wynikiem jest przedstawiona na rys. 4.35 ścieżka „ $N=8$ (1/4)”. Można zaobserwować, że wynik ten jest jakościowo zgodny z rozwiązaniem przedstawionym w [60]. Niezgodność rozwiązań uzyskanych przy wykorzystaniu warunków symetrii z rezultatem otrzymanym w analizie całej powłoki potwierdza, że zastosowanie warunków podwójnej symetrii w obliczeniach powłok o niesymetrycznym względem powierzchni środkowej uwarstwieniu nie jest poprawne.



Rys. 4.33. Powłoka cylindryczna *angle-ply* [60]; $N=2$, porównanie z rozwiązaniem odniesienia



Rys. 4.34. Powłoka cylindryczna *angle-ply* [60]; $N=4$, porównanie z rozwiązaniem odniesienia

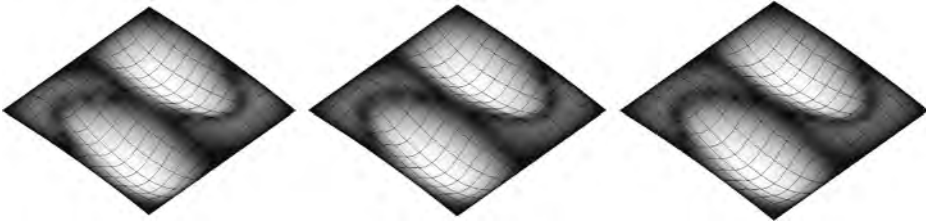


Rys. 4.35. Powłoka cylindryczna *angle-ply* [60]; $N=8=\infty$ (=inf.), porównanie z rozwiązaniem odniesienia

Analiza wyężenia wskazuje, że zniszczenie następuje w każdym przypadku w dolnej warstwie konstrukcji i jest skutkiem ścięcia warstwy. W powłoce $N=2$ zniszczenie następuje w $T_{TW}=247^{\circ}\text{C}$, w powłoce $N=4$ w $T_{TW}=282^{\circ}\text{C}$, a w powłoce $N=8=\infty$ w $T_{TW}=288^{\circ}\text{C}$ (wynik z analizy całej powłoki). W [60] podano, odpowiednio, $T_{TW}=255^{\circ}\text{C}$, $T_{TW}=250^{\circ}\text{C}$, $T_{TW}=230^{\circ}\text{C}$. Różnice pomiędzy wynikami własnymi a przedstawionymi w [60] mogą wynikać z przyczyn opisanych w przykładzie 4.5. W przypadku powłoki $N=8=\infty$ różnica ta jest zdecydowanie konsekwencją ogólnej rozbieżności rozwiązań, wynikającej z zastosowania w [60] warunków podwójnej symetrii. W analizie

własnej przeprowadzonej dla ćwiartki konstrukcji otrzymano bowiem temperaturę niszczącą równą $T_{TW} = 222^\circ\text{C}$.

Rysunek 4.36 przedstawia deformacje powłok w temperaturze zniszczenia materiału. Zniszczenie następuje w zagłębieniach konstrukcji. Jak widać, wszystkie postaci są obrotowo symetryczne, co ponownie potwierdza, że wykorzystanie warunków podwójnej symetrii w tym zadaniu jest błędne.



Rys. 4.36. Powłoka cylindryczna *angle-ply* [60]; deformacje w temperaturze zniszczenia: a) powłoka $N=2$, $T_{TW}=247^\circ\text{C}$, b) powłoka $N=4$, $T_{TW}=282^\circ\text{C}$, c) powłoka $N=8=\infty$, $T_{TW}=288^\circ\text{C}$

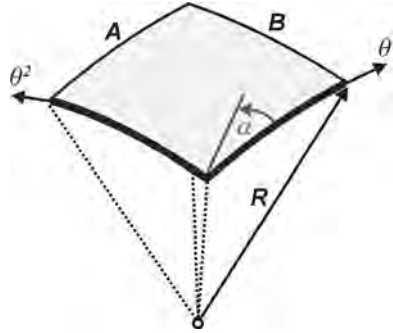
Warto w tym miejscu dodać, że także w pracy [60] przedstawiono deformacje powłok w temperaturze zniszczenia, ostatecznie dla całej konstrukcji. Autorzy komentują, że deformacja dla $N=2$, $N=4$ jest obrotowo symetryczna, a dla $N=8=\infty$ wydaje się symetryczna („*is seen to be symmetric with respect to the center lines*”). Komentarze te wydają się nieco zaskakujące w świetle założenia, że w pracy tej deformacje całej konstrukcji otrzymano przez odpowiednie odbicia deformacji otrzymanej dla połowy powłoki ($N=2$, $N=4$) i ćwiartki ($N=8=\infty$), i że sama analiza wymagała przyjęcia odpowiednich, zgodnych z przewidywanym zachowaniem konstrukcji, warunków brzegowych na liniach podziału.

4.8. Ortotropowa powłoka sferyczna

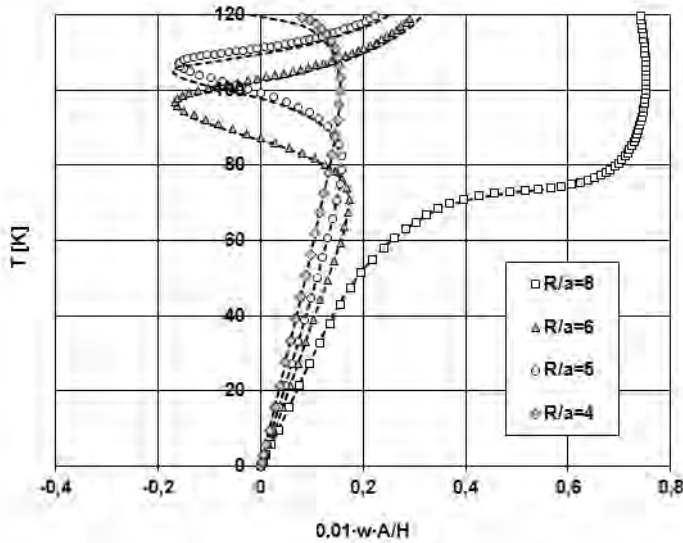
Zadanie zaproponowano w pracy [85]. Badane jest nieliniowe zachowanie równomiernie ogrzanej powłoki sferycznej (rys. 4.37) o wymiarach $A=B$, $A/H=200$ oraz różnych wyniosłościach: $R/A=8$, $R/A=6$, $R/A=5$, $R/A=4$. Krawędzie konstrukcji są swobodnie nieprzesuwnie podparte. Powłoka jest jednokierunkowo zbrojona, co w pracy [85] opisano schematem uwarstwienia $[-90^\circ/90^\circ]_4$. Właściwości materiału są następujące: $E_a = 130$ GPa, $E_b = 7,0$ GPa, $G_{ab} = G_{ac} = 4,75$ GPa, $G_{bc} = 2,375$ GPa, $\nu_{ab} = 0,3$, $\alpha_{aa}^{th} = -0,3 \cdot 10^{-6}$ 1/K, $\alpha_{bb}^{th} = 28,1 \cdot 10^{-6}$ 1/K. Wartości współczynników korekcyjnych w tym zadaniu wynoszą $k_{13} = k_{23} = 0,8333 = 5/6$.

W obliczeniach przyjęto siatkę 12×12 elementów 8URI. Na rysunku 4.38 przedstawiono ścieżki znormalizowanego ugięcia punktu centralnego powłoki dla poszczególnych wyniosłości R/A . Reprezentację rozwiązań odniesienia stanowią na rysunku 4.38 linie przerywane. Należy zaznaczyć, że podana w pracy [85] normalizacja przemieszczeń w formie w/H determinuje inny rząd wartości niż przedstawione tam na wykresach. Ustalono, że najprawdopodobniej do normalizacji wyników zastosowano w [85] mnożnik $0,01 \cdot A/H$.

Rezultaty własne są zgodne z rozwiązaniami odniesienia. Bez względu na wartość parametru R/A uzyskano nieliniową odpowiedź konstrukcji. Wszystkie obliczenia dla tego zadania przeprowadzono stosując kryterium $\text{ICRIT} = 1$. W badanym zakresie temperatur punkty graniczne obciążenia nie występują. Punktów bifurkacji nie badano.



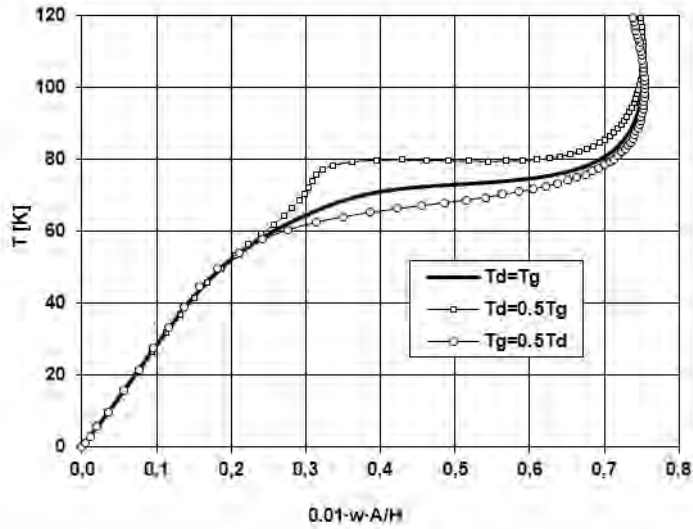
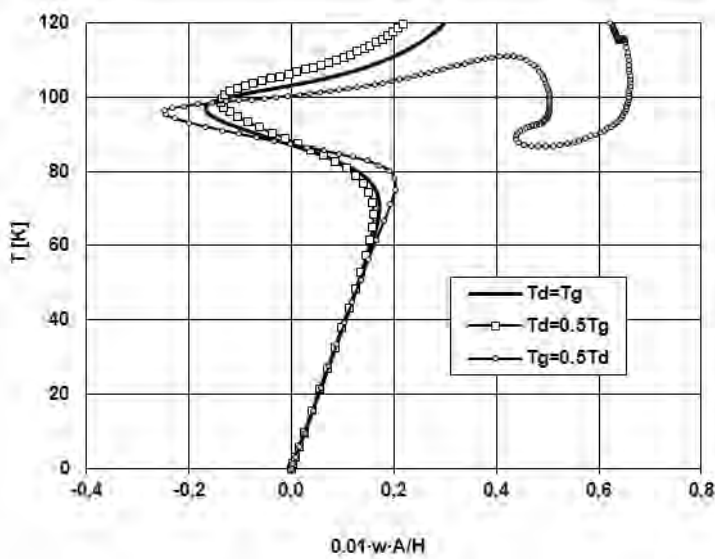
Rys. 4.37. Geometria powłoki sferycznej

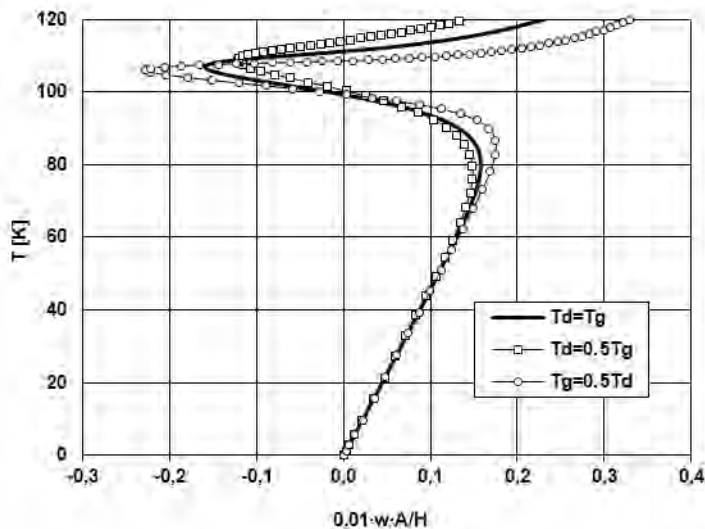


Rys. 4.38. Powłoka sferyczna [85]; porównanie wyników z rozwiązaniami odniesienia

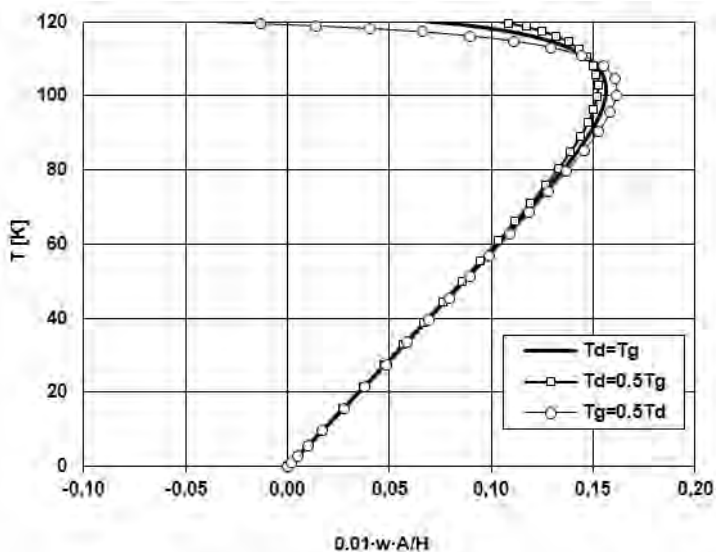
W analizie własnej przeprowadzono serię obliczeń jak powyżej, modyfikując sposób obciążenia powłok, tj. równomierne ogrzanie zastąpiono dwoma wariantami gradientu temperatury: $T_d = 0,5T_g$ oraz $T_g = 0,5T_d$. Wyniki dla poszczególnych wyniosłości przedstawiono na rysunkach 4.39–4.42. Są to ścieżki znormalizowanego ugięcia punktów centralnych powłok względem temperatury na ich powierzchni środkowej.

W przypadku paneli bardziej wyniosłych $R/A = 5$ i $R/A = 4$ sposób obciążenia wywołuje jedynie ilościowe różnice rozwiązań. Powłoki o wyniosłości $R/A = 8$ i $R/A = 6$ reagują silniej na zmianę rozkładu temperatury na grubości i tu widoczne jest jakościowe zróżnicowanie odpowiedzi. Powłoka z geometrią $R/A = 8$ przy obciążeniu $T_d = 0,5T_g$ traci stateczność w formie przeskoku w około 80°C , natomiast powłoka $R/A = 6$ w około 110°C przy obciążeniu $T_g = 0,5T_d$.

Rys. 4.39. Powłoka sferyczna [85]; $R/A = 8$, wpływ sposobu obciążenia na zachowanie konstrukcjiRys. 4.40. Powłoka sferyczna [85]; $R/A = 6$, wpływ sposobu obciążenia na zachowanie konstrukcji

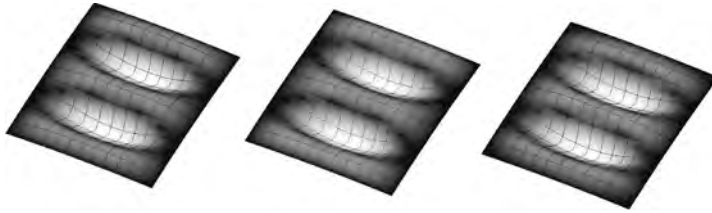


Rys. 4.41. Powłoka sferyczna [85]; $R/A = 5$, wpływ sposobu obciążenia na zachowanie konstrukcji

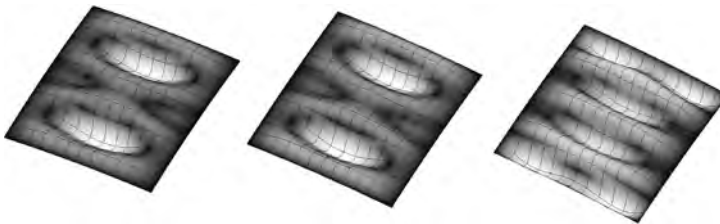


Rys. 4.42. Powłoka sferyczna [85]; $R/A = 4$, wpływ sposobu obciążenia na zachowanie konstrukcji

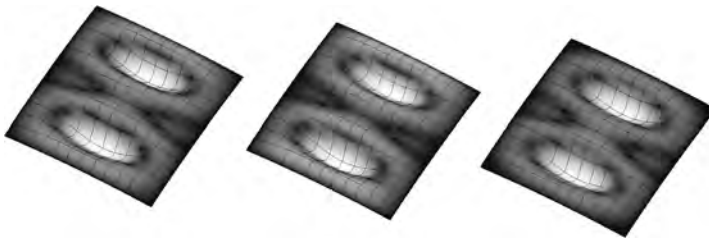
Na rysunkach 4.43–4.46 przedstawiono deformacje powłok w 120°C odpowiadające poszczególnym wariantom obciążenia, tj. równomiernemu ogrzaniu oraz gradientom $T_d = 0,5T_g$ i $T_g = 0,5T_d$. Postać deformacji jest w zdecydowanej większości przypadków bardzo podobna. Zdecydowanie wyróżnia się tu powłoka najbardziej wyniosła $R/A = 4$ oraz mało wyniosła $R/A = 6$ w przypadku obciążenia $T_g = 0,5T_d$.



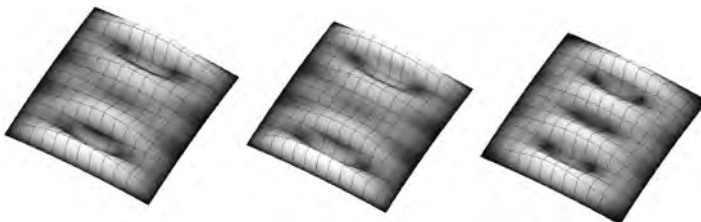
Rys. 4.43. Powłoka sferyczna [85]; $R/A = 8$, deformacje w 120°C ; a) równomierne ogrzanie, b) $T_d = 0,5T_g$, c) $T_g = 0,5T_d$



Rys. 4.44. Powłoka sferyczna [85]; $R/A = 6$, deformacje w 120°C ; a) równomierne ogrzanie, b) $T_d = 0,5T_g$, c) $T_g = 0,5T_d$



Rys. 4.45. Powłoka sferyczna [85]; $R/A = 5$, deformacje w 120°C ; a) równomierne ogrzanie, b) $T_d = 0,5T_g$, c) $T_g = 0,5T_d$



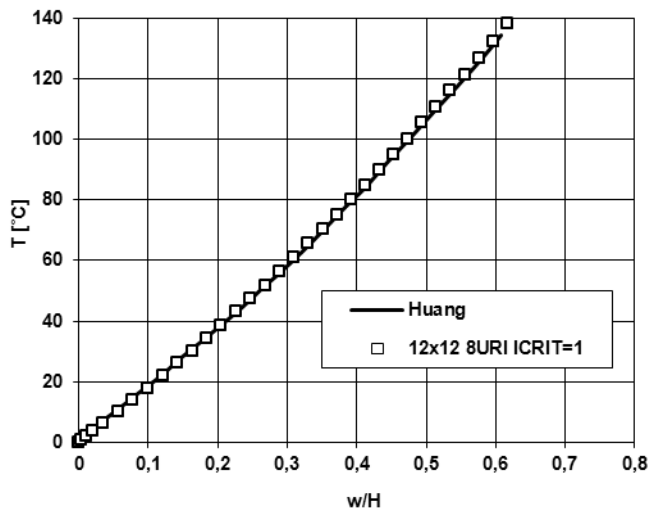
Rys. 4.46. Powłoka sferyczna [85]; $R/A = 4$, deformacje w 120°C ; a) równomierne ogrzanie, b) $T_d = 0,5T_g$, c) $T_g = 0,5T_d$

4.9. Powłoka sferyczna o niesymetrycznym uwarstwieniu

Oryginał tego przykładu pochodzi z pracy [60]. Przedmiotem analizy jest mała wyniosła powłoka sferyczna, swobodnie nieprzesuwnie podparta na krawędziach, poddana równomiernemu ogrzaniu. Geometrię powłoki opisują następujące dane (rys. 4.37): $A = B$, $R/A = 10$, $A/H = 100$. Powłoka wykonana jest z czterech warstw o właściwościach: $E_a = 76$ GPa, $E_b = 5,5$ GPa, $G_{ab} = G_{ac} = 2,3$ GPa, $G_{bc} = 1,5$ GPa, $\nu_{ab} = 0,34$, $\alpha_{aa}^{th} = -4 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$, $\alpha_{bb}^{th} = 79 \cdot 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$, $X_t = 1400$ GPa, $X_c = 235$ MPa, $Y_t = 12$ MPa, $Y_c = 53$ MPa, $S_s = 34$ MPa. Uwarstwienie jest niesymetryczne $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$.

Wartości współczynników dla przyjętych danych wynoszą $k_{13} = k_{23} = 0,6502$.

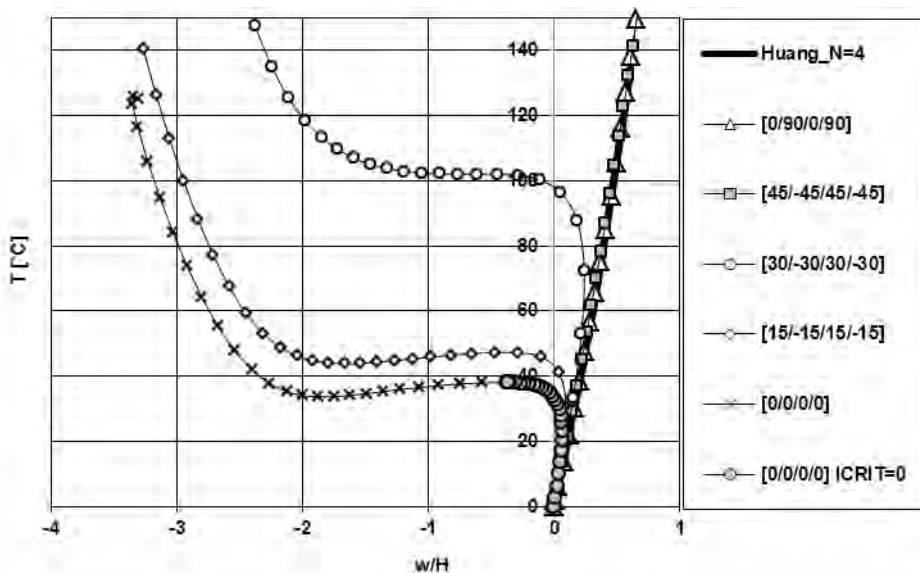
W bieżącej analizie zastosowano siatkę 12×12 elementów 8URI dla całej konstrukcji. Ścieżkę równowagi znormalizowanego ugięcia punktu centralnego wraz z porównaniem z rozwiązaniem odniesienia przedstawiono na rysunku 4.47. Można zauważyć, że dla przyjętych danych powłokę charakteryzuje niemalże liniowa odpowiedź i zjawisko utraty stateczności w badanym zakresie temperatury nie występuje. Zaprezentowaną na rysunku 4.47 ścieżkę uzyskano dla kryterium odciążania $\text{ICRIT} = 1$, jakkolwiek w tym przypadku, ze względu na stabilność konstrukcji, efektywne obliczenia można także przeprowadzić przy zastosowaniu warunku $\text{ICRIT} = 0$.



Rys. 4.47. Powłoka sferyczna [60]; porównanie wyników z rozwiązaniem odniesienia

Przeprowadzono dodatkową analizę parametryczną, badając wpływ ułożenia włókien w warstwach na zachowanie konstrukcji. Sprawdzone, jakim zmianom ulegnie odpowiedź, jeśli oryginalny schemat uwarstwienia *cross-ply* $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ zastąpiony zostanie układem typu *angle-ply*. Przeanalizowano następujące schematy: $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$, $[30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ]$, $[15^\circ/-15^\circ/15^\circ/-15^\circ]$ oraz przypadek szczególny, tj. powłoki ortotropowej $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$. Dla wszystkich dodatkowo analizowanych przypadków układu warstw współczynniki korekcyjne równe są $k_{13} = k_{23} = 0,8333 = 5/6$. Wyniki przedstawiono na rysunku 4.48.

Z rysunku 4.48 wynika, że układ zbrojenia warstw bardzo istotnie wpływa na zachowanie konstrukcji. Ścieżki ugięcia środka powłoki dla uwarstwień $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ i $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ pokrywają się. Jak zostanie dalej wykazane, zachowanie całej konstrukcji nie jest jednak w tych dwóch przypadkach identyczne. Pozostałe typy uwarstwienia charakteryzuje zdecydowanie nierównomierny rozkład sztywności w dwóch kierunkach θ^1 , θ^2 (rys. 4.37) i wraz ze zmniejszaniem kątem α wzrasta sztywność powłoki w kierunku θ^1 . Konstrukcja w miarę wzrostu ortotropii wchodzi w wyraźnie nieliniowy zakres pracy, a w przypadku uwarstwień $[15^\circ/-15^\circ/15^\circ/-15^\circ]$ oraz $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$ traci stateczność w formie przeskoku w temperaturach, odpowiednio, $T_{cr} = 47^\circ\text{C}$ i $T_{cr} = 38^\circ\text{C}$.



Rys. 4.48. Powłoka sferyczna [60]; analiza wpływu uwarstwienia na zachowanie konstrukcji

Ścieżki przedstawione na rysunku 4.48 zbadano przy zastosowaniu dwóch kryteriów odciążania. We wszystkich przypadkach poza $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$ przy zastosowaniu kryterium $\text{ICRIT}=0$ nie pojawiały się żadne problemy ze zbieżnością rozwiązania, co sugeruje brak punktów bifurkacji w badanym zakresie temperatur. W przypadku uwarstwienia $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$ przy wykorzystaniu warunku $\text{ICRIT}=0$ następowały oscylacje rozwiązania w temperaturze około 38°C i dalsze rozwiązanie nie było możliwe. Może to świadczyć o obecności punktu bifurkacji. Wszystkie próby poszukiwania możliwych ścieżek drugorzędnych poprzez technikę zaburzeń nie spowodowały jednakże przejścia na inną jakościowo ścieżkę niż podstawowa. Być może więc problemy oscylacji rozwiązania nie są związane z punktem bifurkacji lub też identyfikację ścieżek pobifurkacyjnych utrudnia tu bliskie sąsiedztwo punktu granicznego obciążenia.

W bieżącej analizie zniszczenie kontrolowano w środku wysokości warstw fizycznych, bez podziału na subwarstwy. W tabeli 4.3 przedstawiono temperatury zniszczenia dla wszystkich przeanalizowanych uwarstwień wraz z informacją o schemacie i lokalizacji zniszczenia. Zniszczenie powłok o uwarstwieniach $[15^\circ/-15^\circ/15^\circ/-15^\circ]$ i $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$ następuje za punktem granicznym obciążenia. Otrzymana temperatura niszcząca dla sche-

matu $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ jest nieco większa od podanej w [60], równej $T_{TW} = 115^\circ\text{C}$. Różnica jednak nie jest znaczna i można ją tłumaczyć podobnie, jak w zadaniu 4.5. Widoczne jest, że wraz ze wzrostem ortotropii powłoki temperatura zniszczenia maleje. Różnica temperatur niszczących dla schematów uwarstwień $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ i $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ jest nieznaczna i mieści się w zakresie błędu numerycznego. Zmiana ułożenia zbrojenia z $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ na układ $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$, jak i na pozostałe schematy uwarstwienia, wpływa jednak na zmianę lokalizacji zniszczenia materiału.

Tabela 4.3

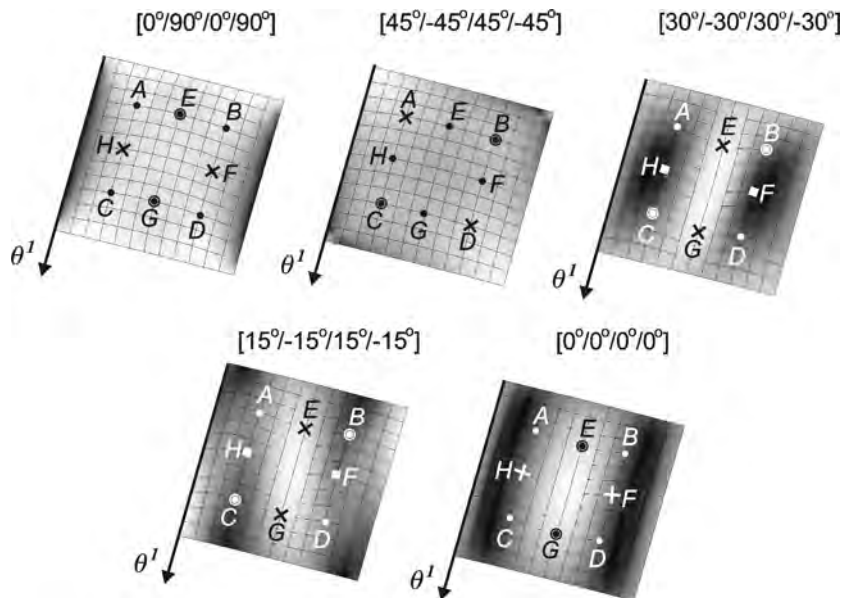
Powłoka sferyczna [60]; temperatury zniszczenia dla poszczególnych schematów uwarstwienia

Uwarstwienie	Temperatura zniszczenia	Mechanizm zniszczenia	Lokalizacja zniszczenia
$[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$	121°C	pękanie matrycy	warstwa dolna, wzdłuż krawędzi prostopadłych do kierunku zbrojenia
$[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$	123°C	pękanie matrycy	warstwa dolna, narożniki na linii zbrojenia
$[30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ]$	102°C	pękanie matrycy	warstwa górna, zagłębienie na środku powłoki (rys. 4.49)
$[15^\circ/-15^\circ/15^\circ/-15^\circ]$	44°C	pękanie matrycy	warstwa dolna, zagłębienie na środku powłoki (rys. 4.49)
$[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$	36°C	pękanie matrycy	warstwa dolna, zagłębienie na środku powłoki (rys. 4.49)

Na rysunku 4.49 przedstawiono deformacje powłoki dla poszczególnych schematów uwarstwienia w temperaturze zniszczenia materiału z naniesieniem map indeksu zniszczenia FI w warstwach najbardziej wyciągniętych (tab. 4.3). Na siatce powłok zaznaczono dodatkowo punkty A-H. Poszczególnymi symbolami zastosowanymi do oznaczeń punktów rozróżniono pary (grupy) punktów o identycznych ścieżkach równowagi ich ugięć. Można zauważyć, że w przypadkach powłok ortotropowej $[0^\circ/0^\circ/0^\circ/0^\circ]$ i *cross-pły* $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$, mimo niesymetrycznego ułożenia warstw w tej ostatniej, ścieżki ugięć w punktach (A, B, C, D) oraz parami (E, G) i (F, H) pokryły się, co świadczy o podwójnej symetrii deformacji względem osi dzielących krawędzie na połowę. W przypadku powłoki $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ zgodność ugięć zachodzi w punktach (E, F, G, H) oraz parami w (A, D) i (B, C), co dowodzi podwójnej symetrii skośnej. Obserwacje te ponownie potwierdzają, że zachowanie powłok $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ i $[45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ]$ nie jest identyczne. W pozostałych przypadkach uwarstwień, tj. $[30^\circ/-30^\circ/30^\circ/-30^\circ]$ i $[15^\circ/-15^\circ/15^\circ/-15^\circ]$, równość ugięć zachodzi parami w punktach (A, D), (B, C), (E, G), (F, H), co potwierdza obrotową symetrię deformacji.

Warto w tym miejscu powrócić do przywołanych w przykładzie 4.5 uwag o wykorzystaniu warunków symetrii w analizie. Zgodnie z [60] przy dowolnej orientacji włókien w warstwach dopuszczalna jest redukcja układu do połowy, a w szczególnych przypadkach, tj. dla kątów 0° i 90° lub nieskończonej liczby warstw, do ćwiartki. W [125] napisano jednak, że niesymetryczne uwarstwienie względem powierzchni środkowej wyklucza możliwość redukcji do ćwiartki. Przeprowadzone w przykładach 4.7 i 4.9 analizy wskazują, że istotnie, niesymetryczne uwarstwienie w ogólnym przypadku warunki podwójnej symetrii zaburza (przykład 4.7, 4.9), jednak rzeczywiście w przypadku kątów ułożenia zbrojenia 0° i 90° (przykład 4.9) warunki te pozostają spełnione. Nie udało się jednak potwierdzić, że

podwójną symetrię deformacji gwarantuje nieskończona liczba warstw (przykład 4.7). Nie można jednak wykluczyć, że wariant nieskończonej liczby warstw w przykładzie 4.7 został przez Autorkę pracy źle zinterpretowany i w analizie własnej przyjęte zostały błędne dane i założenia, prowadzące do uzyskania innej odpowiedzi niż rozwiązanie odniesienia.



Rys. 4.49. Powłoka sferyczna [60]; deformacje w temperaturach zniszczenia z naniesioną mapą indeksu FI warstw najbardziej wyciążonych według tabeli 4.3; oś θ^1 wyznacza kierunek odniesienia dla orientacji zbrojenia warstwy

Rozdział 5

PODSUMOWANIE

Znajdujące coraz szersze zastosowanie w różnych dziedzinach przemysłu kompozytowe płyty i powłoki warstwowe pracują często w warunkach temperatur, które mogą być źródłem znacznych naprężeń i deformacji. Ze względu na charakterystyczną dla tych lekkich struktur smukłość efekt termiczny może prowadzić nawet do utraty stateczności. Zjawisko to musi być więc często uwzględniane w ocenie zachowania konstrukcji np. w trakcie projektowania. Ze stosowanych najczęściej w badaniu stateczności metod najtrafniejszym wyborem w przypadku lekkich konstrukcji kompozytowych, które podlegają niejednokrotnie dużym deformacjom jeszcze w zakresie przedkrytycznym, zdaje się być analiza przyrostowa z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej. Ponadto podejście to pozwala badać zachowanie pokrytyczne powłoki, które coraz częściej dopuszczane jest na etapie założeń projektowych.

Charakterystyczne cechy konstrukcji warstwowych, takie jak niejednorodność przekroju i ortotropia oraz znaczna odkształcalność postaciowa sprawiają, że ich analiza wymaga zastosowania innych podejść niż w przypadku ośrodków jednorodnych izotropowych. Zależnie od natury rozpatrywanego zjawiska, w badaniu kompozytów warstwowych wykorzystuje się modele o mniej lub bardziej złożonym sformułowaniu. Problem stateczności konstrukcji należy do tzw. zjawisk globalnych, do których analizy wystarczające są sformułowania najniższej klasy, tzw. zastępcze modele jednowarstwowe, w których laminat traktowany jest jako pojedyncza warstwa o sztywności równoważnej sztywności przekroju warstwowego. Do opisu tej warstwy mogą być stosowane teorie sformułowane dla płyt i powłok jednorodnych, przy czym preferowane są te, w których uwzględniony jest efekt poprzecznego ścinania. Może to więc być tzw. teoria ścinania pierwszego rzędu z odpowiednią, charakterystyczną dla niej techniką korekcji sztywności związanej z poprzecznym ścinaniem.

Istotnym aspektem w analizie wpływu obciążeń, w tym temperatury, na konstrukcję jest kontrola poziomu wyężenia materiału. Podobnie jak w przypadku ośrodków jednorodnych izotropowych, w ocenie stanu naprężenia w materiałach warstw kompozytów wykorzystuje się odpowiednie kryteria wytrzymałościowe. Z szeregu znanych hipotez dużą zgodnością z wynikami eksperymentalnymi odznacza się kryterium Tsai-Wu. Określony zgodnie z kryterium wytrzymałościowym poziom wyężenia dotyczy materiału warstwy, której ewentualne zniszczenie nie jest, rzecz jasna, równoznaczne z wyczerpaniem nośności całego przekroju. Takie założenie jest jednak często przyjmowane, gdyż dalsza analiza wymaga uwzględnienia postępującej degradacji materiału, tzn. redukcji sztywności i wytrzymałości, co od strony obliczeń numerycznych stanowi dość złożony problem.

Znane Autorce pracy oprogramowanie komercyjne NX-Nastran umożliwia przeprowadzenie analizy stateczności kompozytowych powłok warstwowych w ramach geometrycznie nieliniowej analizy przyrostowej. Laminowana struktura jest tu modelowana zgodnie z koncepcją pojedynczej warstwy zastępczej. Program pozwala także badać poziom wyężenia materiału, m.in. zgodnie z kryterium Tsai-Wu, przy czym informacja z tej analizy pozostaje pasywna, tj. w modelu nie uwzględnia się wpływu procesu degradacji materia-

łu na sztywność i wytrzymałość. Oprogramowanie to zostało przez Autorkę wykorzystane do szeregu analiz dużych deformacji i stateczności kompozytowych powłok warstwowych obciążonych mechanicznie. Obliczenia te przebiegały bez większych trudności. Istotne problemy pojawiają się jednak, gdy obciążeniem jest pole temperatury. W tym wypadku bowiem najistotniejsza z punktu widzenia analizy stateczności technika śledzenia ścieżki równowagi – metoda sterowania parametrem łuku – traci z nieustalonych przyczyn zbieżność i program przerywa obliczenia.

Problem ten wzbudził zainteresowanie Autorki i powstał pomysł opracowania własnego programu, który umożliwiłby przeprowadzenie efektywnych obliczeń w omówionym wyżej zakresie dla przypadku obciążenia temperaturą. Oprogramowanie własne powstało dzięki rozszerzeniu programu udostępnionego przez dr. hab. inż. Ireneusza Kreję, prof. nadzw. PG. Wcześniejszym przeznaczeniem tego oprogramowania była nieliniowa analiza obciążonych mechanicznie kompozytowych powłok warstwowych w zakresie dużych przemieszczeń (i obrotów), lecz ograniczonym do małych odkształceń. Laminat modelowany jest tu pojedynczą warstwą zastępczą, do której opisu, podobnie jak w pakiecie NX-Nastran, zastosowano teorię ścinania pierwszego rzędu z numerycznie wyznaczanymi współczynnikami korekcyjnymi. Zadaniem Autorki było rozszerzenie przypadków obciążenia o wpływ temperatury oraz opracowanie procedury analizy wyężenia materiału według kryterium Tsai-Wu. Przeprowadzone po wstępnym rozbudowaniu programu pierwsze analizy wskazały na konieczność modyfikacji warunku odciążania w algorytmie Riksa-Wempnera-Ramma. Charakterystyczna dla obciążenia temperaturą obecność punktów bifurkacji na ścieżce równowagi sprawia bowiem, że zastosowanie tradycyjnego warunku bazującego na ocenie znaku wyznacznika globalnej macierzy sztywności jest nieefektywne, ponieważ warunek ten w pobliżu punktów rozgałęzienia wywołuje oscylacje rozwiązania, co uniemożliwia dalsze prowadzenie analizy. Wprowadzone nowe kryterium, zgodnie z którym znak przyrostu parametru obciążenia ustalany jest na podstawie kierunku rozwiązania w poprzedzającym kroku przyrostowym, pozwala na uniknięcie opisanego wyżej problemu.

Przedstawione w rozprawie wyniki obliczeń przykładów numerycznych przeprowadzonych za pomocą opracowanego programu świadczą o poprawności i efektywności przyjętego sformułowania. Zmodyfikowany warunek odciążania w algorytmie Riksa-Wempnera-Ramma pozwala śledzić ścieżki podstawowe konstrukcji bez stosowania uproszczenia, jakim jest wykorzystanie warunków symetrii, a którego zastosowanie nie zawsze jest możliwe.

Pewnym mankamentem niniejszej pracy jest brak szerszego odniesienia do wyników badań eksperymentalnych, których Autorce nie udało się zdobyć, a przeprowadzenie własnych badań doświadczalnych nie mieściło się w skromnym budżecie. Zakres pracy ograniczono zatem do analizy numerycznej. Wskazano jednak, że na tym polu mogą pojawiać się problemy, nawet w znanym oprogramowaniu komercyjnym. Pokazano także, że rozwiązania niektórych z dostępnych w literaturze przykładów mogą być błędne.

Wydaje się, że wąski cel pracy, obejmujący jedynie opracowanie modelu numerycznego, został osiągnięty. Należy jednak podkreślić, że zaproponowane i przetestowane w pracy sformułowanie ma dość ograniczony zakres przeznaczenia. Nie uwzględniono w nim bowiem m.in. jednoczesnego działania obciążenia mechanicznego i termicznego, zmienności stałych sprężystych w funkcji temperatury, degradacji sztywności i wytrzymałości związanej z procesem niszczenia materiału, możliwości rozwarstwienia laminatu, a także tak istotnych w analizie stateczności imperfekcji danych rozkładem losowym. Moż-

na zatem przyjąć, że dalsze analizy i związane z nimi odpowiednie modyfikacje modelu powinny wiązać się z takimi kwestiami jak:

- wpływ imperfekcji geometrycznych o rozkładzie losowym,
- zmiana stałych sprężystych w zależności od temperatury,
- jednoczesne oddziaływanie obciążenia termicznego i mechanicznego,
- implementacja kryterium wyężeniowego identyfikującego mechanizm zniszczenia wprost (np. kryterium Hashina),
- aktywna degradacja sztywności i wytrzymałości materiałów warstw odpowiadająca postępowi zniszczenia, ocenianego na podstawie wybranego kryterium wyężeniowego,
- uwzględnienie możliwości delaminacji warstw.

Autorka ma nadzieję, że rozszerzenie modelu o co najmniej część z wymienionych wyżej punktów nastąpi w najbliższej przyszłości. Oczekuje również, że zaistnieje możliwość przeprowadzenia własnych badań doświadczalnych, których wyniki w istotny sposób wspomogą opracowanie modelu zniszczenia kompozytu warstwowego.

PODZIĘKOWANIA

Składam serdeczne podziękowania wszystkim, którzy przyczynili się do powstania niniejszej pracy.

Pragnę szczególnie podziękować dr. hab. inż. Ireneuszowi Krei, prof. nadzw. PG, za wiedzę przekazaną w trakcie naszej kilkuletniej współpracy, udostępnione materiały, w tym program źródłowy, na bazie którego powstał zastosowany w mojej pracy program autorski. Dziękuję również za wnikliwe przeczytanie wszystkich próbnych wersji tekstu monografii i naniesione poprawki.

Słowa podziękowania kieruję również do Recenzentów mojej rozprawy doktorskiej: dr. hab. inż. Jakuba Marcinowskiego, prof. UZ, oraz dr. hab. inż. Tomasza Mikulskiego oraz Recenzentów niniejszej monografii: prof. dr. hab. inż. Wojciecha Pietraszkiewicza i prof. dr. hab. inż. Krzysztofa Wiśniewskiego. Uwagi zawarte w recenzjach były dla mnie niezwykle cenne i w znacznym stopniu wpłynęły na ostateczny kształt niniejszej pracy.

Wdzięczna jestem również prof. dr. hab. inż. Jackowi Chróścielewskiemu, Kierownikowi Katedry Mechaniki Budowli i Mostów, w której pracuję. Dziękuję za stworzenie dobrych warunków i atmosfery pracy, szczególnie za umożliwienie realizacji moich badań w ramach grantu MNiSW.

Dziękuję także mojej Rodzinie za wspieranie mnie w trakcie pracy nad doktoratem oraz tą monografią.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Abouelwafa M.N., Gomaa A., Hamdy A., Morsi E., Nasr M.: A new failure criterion for fibrous composites subjected to tension-compression local plane stresses. *Alexandria Engineering Journal*, 45, 2006, 647–656.
- [2] Altenbach H.: An alternative determination of transverse shear stiffness for sandwich or laminated plates. *International Journal of Solids and Structures*, 37, 2000, 3503–3520.
- [3] Altenbach H.: On the determination of transverse shear stiffness of orthotropic plates. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 51, 2000, 629–649.
- [4] Altenbach J., Altenbach H.: Trends in engineering plate theories. *Eksploracja i Niezawodność*, 4, 2001, 21–30.
- [5] Antman S.S.: *Nonlinear problems of elasticity. Second edition*. Nowy Jork, Springer-Verlag, 2005.
- [6] Argyris J., Tenek R.: Postbuckling of composite laminates under compressive load and temperature. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128, 1995, 49–80.
- [7] Avci A., Sahin Ö.S., Ataberk N.: Thermal buckling behavior of cross-ply hybrid composite laminates with inclined crack. *Composites Science and Technology*, 66, 2006, 2965–2970.
- [8] Balzani C., Wagner W.: An interface element for the simulation of delamination in unidirectional fiber-reinforced composite laminates. *Engineering Fracture Mechanics*, 75, 2008, 2597–2615.
- [9] Barut A., Madenci E., Tessler A.: Nonlinear thermoelastic analysis of composite panels under non-uniform temperature distribution. *International Journal of Solids and Structures*, 37, 2000, 3681–3713.
- [10] Başar Y.: Finite-rotation theories for composite laminates. *Acta Mechanica*, 98, 1993, 159–176.
- [11] Başar Y., Ding Y.: Shear deformation models for large strain shell analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 14, 1997, 1687–1708.
- [12] Başar Y., Krätzig W.: *Theory of shell structures*, 2. Auflage. Düsseldorf, VDI Verlag GmbH, 2001.
- [13] Bathe K.J.: *Finite-Elemente-Methoden, Matrizen und lineare Algebra, die Methode der finiten Elemente, Lösung von Gleichgewichtsbedingungen und Bewegungsgleichungen*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1986.
- [14] Bathe K.J., Ramm E., Wilson E.L.: Finite element formulations for large deformation dynamic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9, 1975, 353–386.
- [15] Betsch P., Menzel A., Stein E.: On the parametrization of finite rotations in computational mechanics. A classification concepts with application to smooth shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155, 1995, 273–305.
- [16] Bielewicz E.: *Wytrzymałość materiałów*. Gdańsk, Wyd. Politechniki Gdańskiej, 1992.
- [17] Bischoff M., Wall W.A., Bletzinger K.-U., Ramm E.: Models and finite elements for thin-walled structures, *Encyclopedia of Computational Mechanics*. Vol. 2. *Solids and Structures*, (Ed. E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes), Londyn, John Wiley&Sons, Ltd., 2004, 59–137.
- [18] Boley B., Weiner J.H.: *Theory of thermal stresses*. Nowy Jork, John Wiley&Sons, 1988, (dostęp z books.google.pl).
- [19] Borkowski A., Cichoń C., Radwańska M., Sawczuk A., Waszczyszyn Z.: *Mechanika budowli, ujęcie komputerowe 3*. Warszawa, Arkady, 1995.
- [20] Bouhafs B., Woźnica K., Kłosowski P.: The large rotations theory of elasto-viscoplastic shells subjected to dynamic and thermal loads. *Engineering Computations*, 20, 2003, 366–389.

- [21] Brank B.: On composite shell models with a piecewise linear warping function. *Composite Structures*, 59, 2003, 163–171.
- [22] Burr A., Hild F., Leckie F.A.: The behavior of ceramic-matrix composites under thermo-mechanical cyclic conditions. *Composites Science and Technology*, 58, 1995, 779–783.
- [23] Carrera E.: A study on arc-length-type methods and their operation failures illustrated by a simple model. *Computers and Structures*, 50, 1994, 217–229.
- [24] Carrera E.: A priori vs. a posteriori evaluation of transverse stresses in multilayered orthotropic plates. *Composite Structures*, 48, 2000, 245–260.
- [25] Carrera E.: Developments, ideas and evaluations based upon Reissner's Mixed Variational Theorem in the modeling of multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 54, 2001, 301–329.
- [26] Carrera E.: Historical review of zig-zag theories for multilayered plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 56, 2003, 287–308.
- [27] Carrera E.: On the use of the Murakami's zig-zag function in the modeling of layered plates and shells. *Computers and Structures*, 82, 2004, 541–554.
- [28] Carrera E., Ciuffreda A.: A unified formulation to assess theories of multilayered plates for various bending problems. *Composite Structures*, 69, 2005, 271–293.
- [29] Chappelle D., Bathe K.J.: *The finite elements analysis of shells – Fundamentals*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2003.
- [30] Cho Y.B., Averill R.C.: First-order zig-zag sublaminar plate theory and finite element model for laminated composite and sandwich panels. *Composite Structures*, 50, 2000, 1–15.
- [31] Chróścielewski J., Kreja I., Sabik A., Witkowski W.: Laminated shells in nonlinear six-parameter shell theory, *Shell Structures: Theory and Applications*. Vol. 2. (Ed. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja), Londyn, CRC Press/Balkema, 2010, 229–232.
- [32] Chróścielewski J., Kreja I., Sabik A., Witkowski W.: Modelowanie warstwowych struktur powłokowych za pomocą sześcioparametrowej teorii powłok. *Inżynieria Morska i Geotechnika*, 2, 2010, 342–346.
- [33] Chróścielewski J., Kreja I., Sabik A., Witkowski W.: Modeling of composite shells in 6-parameter nonlinear theory with drilling degree of freedom. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 18, 2011, 403–419.
- [34] Chróścielewski J., Makowski J., Pietraszkiewicz W.: *Statyka i dynamika powłok wielopłatowych. Nieliniowa teoria i metoda elementów skończonych*. Warszawa, IPPT PAN, 2004.
- [35] Chróścielewski J., Pietraszkiewicz W., Witkowski W.: On shear correction factors in the nonlinear theory of elastic shells. *International Journal of Solids and Structures*, 47, 2010, 3537–3545.
- [36] Chróścielewski J., Witkowski W.: Four-node semi-EAS element in 6-field nonlinear theory of shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68, 2006, 1137–1179.
- [37] Deml M., Wunderlich W.: Direct evaluation of the “worst” imperfection shape in shell buckling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 149, 1997, 201–222.
- [38] Di S., Rothert H.: Solution of laminated cylindrical shell using an unconstrained third-order theory. *Computers and Structures*, 69, 1998, 291–303.
- [39] Dimitrienko Y.I.: Thermomechanical behaviour of composite materials and structures under high temperatures: 1. Materials. *Composites Part A*, 28A, 1997, 453–461.
- [40] Dimitrienko Y.I.: Thermomechanical behaviour of composite materials and structures under high temperatures: 2. Structures. *Composites Part A*, 28A, 1997, 463–471.
- [41] Dvorkin E.N., Goldschmit M.B.: *Nonlinear continua*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2006.
- [42] El Damatty A.A., Awad A.S., Vickery B.J.: Thermal analysis of FRP chimneys using consistent laminated shell element. *Thin Walled Structures*, 37, 2000, 57–76.
- [43] Elishakoff I., Arbocz J.: Stochastic buckling of shells with general imperfections, *Stability in the mechanics of continua*. (Ed. F.H. Schroeder), Berlin-Heidelberg, Springer-Verlag, 1982, 306–318.

- [44] Feng Y.T., Perić D., Owen D.R.J.: Determination of travel directions in path-following methods. *Mathematical and Computer Modelling*, 21, 1995, 43–59.
- [45] Feng Y.T., Perić D., Owen D.R.J.: A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods. *Computers and Structures*, 58, 1996, 479–485.
- [46] Ferreira A.J.M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N.: Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Computers and Structures*, 83, 2005, 2225–2237.
- [47] Ge Y., Yuan W., Dawe D.J.: Thermomechanical postbuckling of composite laminated plates by the spline finite strip method. *Composite Structures*, 71, 2005, 115–129.
- [48] German J.: *Podstawy mechaniki kompozytów włóknistych*. Kraków, Wyd. Politechniki Krakowskiej, 1996.
- [49] Glass D.E.: Ceramic matrix composite (CMC) thermal protection systems (TPS) and hot structures for hypersonic vehicles, *15th AIAA Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference*, Dayton, AIAA, 2008.
- [50] Gołota M., Górski J., Mikulski T., Winkelmann K.: Influence of geometric imperfections on capacities of silo structures loaded with pressure below atmospheric, *Shell Structures: Theory and Applications*. Vol. 2. (Ed. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja), Londyn, CRC Press/Balkema, 2010, 287–290.
- [51] Gotsis P.K., Guptill J.D.: Fiber composite thin shells subjected to thermal buckling loads. *Computers and Structures*, 53, 1994, 1263–1274.
- [52] Goyal V.K., Jaunky N.R., Johnson E.R., Ambur D.R.: Intralaminar and interlaminar progressive failure analyses of composite panels with circular cutouts. *Composite Structures*, 64, 2004, 91–105.
- [53] Green A.E., Zerna W.: *Theoretical elasticity*. Londyn, Oxford Univeristy Press, 1960.
- [54] Habip L.M.: Theory of elastic shells in the reference state. *Ingenieur-Archiv*, 34, 1965, 228–237.
- [55] Hassis H.: A higher order theory for static-dynamic analysis of laminated plates using a warping model. *Journal of Sound and Vibration*, 235, 2000, 247–260.
- [56] Hause T., Librescu T.: Non-linear response of geometrically imperfect sandwich curved panels under thermomechanical loading. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 33, 1998, 1039–1059.
- [57] Hebda M.: Zastosowanie energetycznego kryterium wyężeniowego do analizy wytrzymałościowej kompozytów włóknistych. Rozprawa doktorska, Politechnika Krakowska, Wydział Inżynierii Ładowej 2006.
- [58] Hinton E., Owen D.R.J., Krause G.: *Finite Elemente Programme für Platten und Schalen*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1990.
- [59] Holzapfel G.A.: *Nonlinear Solid Mechanics, a continuum approach for engineering*. Chichester, John Wiley&Sons, 2000.
- [60] Huang N.N., Tauchert T.R.: Large deflections of laminated cylindrical and doubly-curved panels under thermal loading. *Computers and Structures*, 41, 1991, 303–312.
- [61] Hughes T.J.R.: *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*. Mineola, New York, Dover Publications, Inc., 2000.
- [62] Hughes T.J.R., Carnoy E.: Nonlinear finite element shell formulation accounting for large membrane strain. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39, 1983, 69–82.
- [63] Jemielita G.: Meandry teorii płyt i powłok, *Mechanika sprężystych płyt i powłok*. (Ed. Cz. Woźniak), Warszawa, PWN, 2001, 45–146.
- [64] Jemielita G.: Coefficients of shear correction in transversely nonhomogeneous moderately thick plates. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1, 2002, 73–84.
- [65] Jones R.M.: *Mechanics of composite materials*, 2nd ed. Londyn, Taylor&Francis, 1999.
- [66] Jones R.M.: Thermal buckling of uniformly heated unidirectional and symmetric cross-ply laminated fiber-reinforced composite uniaxial in-plane restrained simply supported rectangular plates. *Composites Part A*, 36, 2005, 1355–1367.
- [67] Joshi R.M., Patel B.P.: Nonlinear thermoelastic response of laminated conical panels. *Structural Engineering and Mechanics*, 34, 2010, 97–107.

- [68] Kabir H.R.H., Askar H., Chaudhuri R.A.: Thermal buckling response of shear flexible laminated anisotropic plates using a three-node isoparametric element. *Composite Structures*, 59, 2003, 173–187.
- [69] Kadoli R., Ganesan N.: Free vibration and buckling analysis of composite cylindrical shells conveying hot fluid. *Composite Structures*, 60, 2003, 19–32.
- [70] Kant T., Babu C.S.: Thermal buckling analysis of skew fibre-reinforced composite and sandwich plates using shear deformable finite element models. *Composite Structures*, 49, 2000, 77–85.
- [71] Kaya H.: The application of ceramic-matrix composites to the automotive ceramic gas turbine. *Composites Science and Technology*, 59, 1999, 861–872.
- [72] Kleiber M.: *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*. Warszawa-Poznań, PWN, 1985.
- [73] Kłosowski P., Woźnica K.: Numerical treatment of elasto viscoplastic shells in the range of moderate and large rotations. *Computational Mechanics*, 34, 2004, 194–212.
- [74] Knight N.F., Rankin C.C., Brogan F.A.: STAGS computational procedure for progressive failure analysis of laminated composite structures. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 37, 2002, 833–849.
- [75] Ko L.W.: Predictions of thermal buckling strengths of hypersonic aircraft sandwich panels using minimum potential energy and finite element methods. *NASA Technical Memorandum*, 4643, 1995.
- [76] Krätzig W., Jun D.: On “best” shell models – from classical shells, degenerated and multi-layered concepts to 3D. *Archive of Applied Mechanics*, 73, 2003, 1–25.
- [77] Kreja I.: *Mechanika ośrodków ciągłych: materiały pomocnicze do wykładów dla słuchaczy Środowiskowego Studium Doktoranckiego Inżynierii Lądowej i Architektury Politechniki Gdańskiej*, Gdańsk, CURE, Politechnika Gdańska, 2003.
- [78] Kreja I.: Stability analysis of cylindrical composite shells in MSC/Nastran. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 5, 2005, 31–41.
- [79] Kreja I.: Geometrically non-linear analysis of layered composite plates and shells. Seria Monografie nr 83, Gdańsk, Wyd. Politechniki Gdańskiej, 2007.
- [80] Kreja I.: A literature review on computational models for laminated composite and sandwich panels. *Central European Journal of Engineering*, 1, 2011, 59–80.
- [81] Kreja I., Cywiński Z.: Is reduced integration just a numerical trick. *Computers and Structures*, 29, 1988, 491–496.
- [82] Kreja I., Schmidt R.: Large rotations in first-order shear deformation FE analysis of laminated shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 41, 2006, 101–123.
- [83] Kreja I., Schmidt R., Reddy J.N.: Finite elements based on a first-order shear deformation moderate rotation shell theory with applications to the analysis of composite structures. *International Journal of Non-linear Mechanics*, 36, 1996, 1123–1142.
- [84] Kubik J.: *Mechanika konstrukcji warstwowych*. Opole, Wydawnictwo TiT, 1993.
- [85] Kundu C.K., Han J.H.: Nonlinear buckling analysis of hygrothermoelastic composite shell panels using finite element method. *Composites Part B*, 40, 2009, 313–328.
- [86] Lal A., Singh B.N., Kale S.: Stochastic post buckling analysis of laminated composite cylindrical shell panel subjected to hygrothermomechanical loading. *Composite Structures*, 93, 2011, 1187–1200.
- [87] Lee J.: Thermally induced buckling of laminated composites by a layerwise theory. *Computers and Structures*, 65, 1997, 917–922.
- [88] Lee J.J., Oh I.K., Lee I., Yeom C.H.: Thermal post-buckling behavior of patched laminated panels under uniform and non-uniform temperature distributions. *Composite Structures*, 55, 2002, 137–145.
- [89] Lee S.J., Reddy J.N.: Non-linear response of laminated composite plates under thermomechanical loading. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 40, 2005, 971–985.

- [90] Librescu L., Hause T.: Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey. *Composite Structures*, 48, 2000, 1–17.
- [91] Librescu L., Lin W.: Non-linear response of laminated plates and shells to thermomechanical loading: Implications of violation of interlaminar shear traction continuity requirement, *International Journal of Solids and Structures*, 36, pp. 4111–4147, 1999.
- [92] Madenci E., Barut A.: Thermal postbuckling analysis of cylindrically curved composite laminates with a hole. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, 1994, 2073–2091.
- [93] Marcinowski J.: Nonlinear stability of shells in uniform temperature fields. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1, 1995, 27–43.
- [94] Marcinowski J.: Large deflections of shells subjected to an external load and temperature changes. *International Journal of Solids and Structures*, 34, 1997, 755–768.
- [95] Marcinowski J.: *Nieliniowa stateczność powłok sprężystych*. Wrocław, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 1999.
- [96] Massonet C.: Podstawy ogólnej teorii stateczności, *Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji*. (Ed. Z. Waszczyszyn), Wrocław, Ossolineum, 1981, 193–247.
- [97] Matsunaga H.: Thermal buckling of cross-ply laminated composite and sandwich plates according to a global higher-order deformation theory. *Composite Structures*, 68, 2005, 439–45.
- [98] Matsunaga H.: Thermal buckling of angle-ply laminated composite and sandwich plates according to a global higher-order deformation theory. *Composite Structures*, 72, 2006, 177–192.
- [99] Matsunaga H.: Thermal buckling of cross-ply laminated composite shallow shells according to a global higher-order deformation theory. *Composite Structures*, 81, 2007, 210–221.
- [100] Mikhail A.E., El Damatty A.A.: Non-linear analysis of FRP chimneys under thermal and wind loads. *Thin-Walled Structures*, 35, 1999, 289–309.
- [101] Montag U., Krätzig W., Sorič J.: Increasing solution stability for finite-element modeling of elasto-plastic shell response. *Advances in Engineering Software*, 30, 1999, 607–619.
- [102] Naghdi P.M.: Foundations of elastic shell theory, *Progress in Solid Mechanics*, Vol. 4. (Ed. N. Sneddon, R. Hill), Amsterdam, North-Holland, 1963, 1–90.
- [103] Noor A.K., Burton W.S.: Computational models for high-temperature multilayered composite plates and shells. *Applied Mechanics Reviews*, 45, 1992, 419–445.
- [104] Noor A.K., Malik M.: An assessment of five modeling approaches for thermo-mechanical stress analysis of laminated composite panels. *Computational Mechanics*, 25, 2000, 43–58.
- [105] Noor A.K., Starnes J.H., Peters J.M.: Nonlinear and postbuckling responses of curved composite panels with cutouts. *Composite Structures*, 34, 1996, 213–240.
- [106] Oh I.K., Lee I.: Non-linear transient response of fluttering stiffened composite plates subject to thermal load. *Journal of Sound and Vibration*, 245, 2001, 715–736.
- [107] Oh I.K., Lee I.: Thermal snapping and vibration characteristics of cylindrical composite panels using layerwise theory. *Composite Structures*, 51, 2001, 49–61.
- [108] Öry H., Reimerdes H.-G., Gómez Garcia J.: The design of shells and tanks in the aerospace industry: some practical aspects. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 4, 1998, 404–414.
- [109] Owen D.R.J., Hinton E.: *Finite elements in plasticity, theory and practice*. Swansea, Pineridge Press Limited, 1980.
- [110] Pagano N.J., Hatfield S.J.: Elastic behaviour of multilayered bidirectional composites. *Technical Notes*, 7, 1972, 931–933.
- [111] Panasz P.: Nieliniowe modele powłok z 6 stopniami swobody bazujące na dwustopniowych aproksymacjach. Rozprawa doktorska, IPPT PAN, Warszawa, 2008.
- [112] Pandey R., Shukla K.K., Jain A.: Thermoelastic stability analysis of laminated composite plates: An analytical approach. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 14, 2009, 1679–1699.
- [113] Parente E. Jr, de Holanda A.S., Afonso da Silva S.M.B.: Tracing nonlinear equilibrium paths of structures subjected to thermal loading. *Computational Mechanics*, 38, 2006, 505–520.

- [114] Patel B.P., Shukla K.K., Nath Y.: Thermal buckling of laminated cross-ply oval cylindrical shells. *Composite Structures*, 65, 2004, 217–229.
- [115] Patel B.P., Shukla K.K., Nath Y.: Thermal postbuckling analysis of laminated cross-ply truncated circular conical shells. *Composite Structures*, 71, 2005, 101–114.
- [116] Patel B.P., Shukla K.K., Nath Y.: Nonlinear thermoelastic stability characteristics of cross-ply laminated oval cylindrical/conical shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42, 2006, 1061–1070.
- [117] Pietraszkiewicz W.: Finite rotations in shells, *Theory of shells*. (Ed. W.T. Koiter, G.K. Mikhailov), Amsterdam, North-Holland Publishing Company, 1980, 445–471.
- [118] Pietraszkiewicz W.: Geometrically nonlinear theories of thin elastic shells. *Advances in Mechanics*, 12, 1989, 51–130.
- [119] Pietraszkiewicz W., Badur J.: Finite rotations in the description of continuum deformation. *International Journal of Engineering Science*, 21, 1983, 1097–1115.
- [120] Pignataro M., Rizzi N., Luongo A.: *Stability, bifurcation and postcritical behaviour of elastic structures*. Amsterdam, Elsevier, 1991.
- [121] Puck A., Schürmann H.: Failure analysis of FRP laminates by means of physically based phenomenological models. *Composite Science and Technology*, 58, 1998, 1045–1067.
- [122] Rakow J.F., Waas A.M.: Thermal buckling of metal foam sandwich panels for convective thermal protection systems. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 42, 2005, 832–844.
- [123] Ramm E.: From Reissner plate theory to three dimensions in large deformation shell analysis. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 80, 2000, 61–68.
- [124] Ramm E., Wall W.A.: Shell structures – a sensitive interrelation between physics and numerics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60, 2004, 381–427.
- [125] Reddy J.N.: A note on symmetry considerations in the transient response of unsymmetrically laminated anisotropic plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20, 1984, 175–194.
- [126] Reddy J.N.: *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. New Jersey, John Wiley & Sons, 2001.
- [127] Reddy J.N.: *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*, 2nd ed. Philadelphia, CRC Press, 2004.
- [128] Reddy Y.S.N., Dakshina Moorthy C.M., Reddy J.N.: Non-linear progressive failure analysis of laminated composite plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 30, 1995, 629–649.
- [129] Riks E.: Some computational aspects of the stability analysis of nonlinear structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 47, 1984, 219–259.
- [130] Riks E.: Buckling, *Encyclopedia of Computational Mechanics*. Vol. 2. *Solids and Structures*, (Ed. E. Stein, R. de Borst, T. J. R. Hughes), Londyn, John Wiley & Sons, Ltd., 2004, 139–167.
- [131] Rohwer K., Friedrichs F., Wehmeyer C.: Analyzing laminated structures from fibre-reinforced material – an assessment. *Technische Mechanik*, 25, 2005, 59–79.
- [132] Rolfes R., Rohwer K.: Improved transverse shear stresses in composite finite elements based on first order shear deformation theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40, 1997, 51–60.
- [133] Ruixiang B., Haoran C.: Nonlinear buckling behavior of damaged composite sandwich plates considering the effect of temperature-dependent thermal and mechanical properties. *Acta Mechanica Solida Silica*, 14, 2001, 155–160.
- [134] Sabik A.: O metodach obliczania naprężeń poprzecznego ścinania w analizie płyt warstwowych. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej, Budownictwo*, 112, 2007, 299–307.
- [135] Sabik A., Kreja I.: Analiza płyt laminowanych z zastosowaniem zastępczych modeli jednowarstwowych. *Acta Mechanica et Automatica*, 2, 2008, 63–68.
- [136] Sabik A., Kreja I.: Linear analysis of laminated multilayered plates with the application of zig-zag function. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 8, 2008, 61–72.

- [137] Sabik A., Kreja I.: Numerical analysis of laminated shells under in-plane axial compression. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 9, 2009, 251–252.
- [138] Sabik A., Kreja I.: Imperfection sensitivity of multilayered composite shells, *Shell Structures: Theory and Applications*. Vol. 2. (Ed. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja), Londyn, CRC Press/Balkema, 2010, 137–140.
- [139] Sabik A., Kreja I.: Stability analysis of multilayered composite shells with cut-outs. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 11, 2011, 195–207.
- [140] Sadowski T., Golewski P.: Multidisciplinary analysis of the operational temperature increase of turbine blades in combustion engines by application of the ceramic thermal barrier coatings (TBC). *Computational Materials Science*, 50, 2011, 1326–1335.
- [141] Schmidt H.: Stability of steel shell structures. General report. *Journal of Constructional Steel Research*, 55, 2000, 159–181.
- [142] Shariyat M.: Thermal buckling analysis of rectangular composite plates with temperature-dependent properties based on a layerwise theory. *Thin-Walled Structures*, 45, 2007, 439–452.
- [143] Shariyat M.: Non-linear dynamic thermo-mechanical buckling analysis of the imperfect laminated and sandwich cylindrical shells based on a global-local theory inherently suitable for non-linear analyses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 46, 2011, 253–271.
- [144] Shen H.S.: Thermal postbuckling analysis of imperfect stiffened laminated cylindrical shells. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 32, 1997, 259–275.
- [145] Shen H.S.: Thermomechanical post-buckling analysis of imperfect laminated plates using a higher-order shear-deformation theory. *Computers and Structures*, 66, 1998, 395–409.
- [146] Shen H.S.: Thermal postbuckling behavior of imperfect shear deformable laminated plates with temperature-dependent properties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 2001, 5377–5390.
- [147] Shen H.S., Li Q.S.: Thermomechanical postbuckling of shear deformable laminated cylindrical shells with local geometric imperfections. *International Journal of Solids and Structures*, 39, 2002, 4525–4542.
- [148] Shen H.S., Lin Z.Q.: Thermal post-buckling analysis of imperfect laminated plates. *Computers and Structures*, 57, 1995, 533–540.
- [149] Shin W.H., Lee S.J., Oh I.K., Lee I.: Thermal post-buckled behaviors of cylindrical composite shells with viscoelastic damping treatments. *Journal of Sound and Vibration*, 323, 2009, 93–111.
- [150] Shukla K.K., Nath Y.: Analytical solution for buckling and post-buckling of angle-ply laminated plates under thermomechanical loading. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 36, 2001, 1097–1108.
- [151] Singh G., Venkateswara R., Iyengar N.G.R.: Thermal post buckling behavior of rectangular antisymmetric cross-ply composite plates. *Acta Mechanica*, 98, 1993, 39–50.
- [152] Singha M.K., Ramachandra L.S., Bandyopadhyay J.N.: Thermal postbuckling analysis of laminated composite plates. *Composite Structures*, 54, 2001, 453–458.
- [153] Singha M.K., Ramachandra L.S., Bandyopadhyay J.N.: Nonlinear response of laminated cylindrical shell panels subjected to thermomechanical loads. *Journal of Engineering Mechanics*, 10, 2006, 1088–1095.
- [154] Soden P.D., Hinton M.J., Kaddour A.S.: Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. *Composites Science and Technology*, 58, 1998, 1011–1022.
- [155] Souza Neto E.A., Feng Y.T.: On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and “snap-backs”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179, 1999, 81–89.
- [156] Srikanth G., Kumar A.: Postbuckling response and failure of symmetric laminates under uniform temperature rise. *Composite Structures*, 1, 2003, 109–118.
- [157] Thankam V.S., Singh G., Venkateswara R., Rath A.K.: Thermal post-buckling behaviour of laminated plates using a shear-flexible element based on couple-displacement field. *Composite Structures*, 59, 2003, 351–359.

- [158] Tompkins S.S.: Thermal expansion of selected graphite-reinforced polyamide-, epoxy-, and glass-matrix composites. *International Journal of Thermophysics*, 8, 1987, 119–132.
- [159] Topal U., Uzman Ü.: Thermal buckling load optimization of angle-ply laminated cylindrical shells. *Materials and Design*, 30, 2009, 532–536.
- [160] Uematsu Y., Kitamura T., Ohtani R.: Delamination behavior of a carbon-fibre-reinforced thermoplastic polymer at high temperatures. *Composites Science and Technology*, 53, 1995, 333–341.
- [161] Van Paepegem W., Degrieck J.: Calculation of damage-dependent directional failure indices from the Tsai-Wu failure criterion. *Composites Science and Technology*, 63, 2003, 305–310.
- [162] Vel S.S., Batra R.C.: Analytical solution for rectangular thick laminated plates subjected to arbitrary boundary conditions. *AIAA Journal*, 37, 1999, 1464–1473.
- [163] Vidal P., Polit O.: A sine finite element using zig-zag function for the analysis of composite beams. *Composites Part B*, 42, 2011, 1671–1682.
- [164] Vlachoutsis S.: Shear correction factors for plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33, 1992, 1537–1552.
- [165] Wagner W.: Modeling of failure mechanisms in laminated composite shell structures, *Shell Structures: Theory and Applications*. Vol. 2. (Ed. W. Pietraszkiewicz, I. Kreja), Londyn, CRC Press/Balkema, 2010, 25–34.
- [166] Wagner W., Balzani C.: Simulation of delamination in stringer stiffened fiber-reinforced composite shells. *Computers and Structures*, 86, 2008, 930–939.
- [167] Wagner W., Balzani C.: Prediction of the postbuckling response of composite airframe panels including ply failure. *Engineering Fracture Mechanics*, 77, 2010, 3648–3657.
- [168] Waszczyszyn Z.: Numerical problems of nonlinear stability analysis of elastic structures. *Computers and Structures*, 17, 1983, 13–24.
- [169] Waszczyszyn Z.: Metody rozwiązywania nieliniowych zagadnień statyki i stateczności konstrukcji w ujęciu MES, *Wybrane zagadnienia stateczności konstrukcji*. (Ed. Z. Waszczyszyn), Wrocław, Ossolineum, 1987, 227–266.
- [170] Waszczyszyn Z.: Zagadnienia stateczności i metody rozwiązywania nieliniowych problemów MES, *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*. (Red. M. Kleiber), Warszawa, PWN, 1995, 267–335.
- [171] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M.: *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*. Warszawa, Arkady, 1990.
- [172] Wetzel A., Kärger L., Rolfes R., Rohwer K.: Evaluation of two finite element formulations for a rapid 3D stress analysis of sandwich structures. *Computers and Structures*, 83, 2005, 1537–1545.
- [173] Whitney J.: Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME*, 40, 1973, 302–303.
- [174] Winterstetter T.A., Schmidt H.: Stability of circular cylindrical steel shells under combined loading. *Thin-Walled Structures*, 40, 2002, 893–909.
- [175] Wiśniewski K.: *Finite Rotation Shells. Basic Equations and Finite Elements for Reissner Kinematics. Series: Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences*. Barcelona, CIMNE-Springer, 2010.
- [176] Witkowski W.: Efektywny 4-węzłowy element skończony o wzbogaconym polu odkształceń w nieliniowej 6-parametrowej teorii powłok. Rozprawa doktorska, Politechnika Gdańska, Wydział Inżynierii Lądowej 2004.
- [177] Witkowski W.: Synteza sformułowania nieliniowej mechaniki powłok podlegających skończonym obrotom w ujęciu MES. Seria Monografie nr 111. Gdańsk, Wyd. Politechniki Gdańskiej, 2011.
- [178] Wittrick W.H.: Analytical, three-dimensional elasticity solutions to some plate problems, and some observations on Mindlin's plate theory. *International Journal of Solids and Structures*, 23, 1987, 441–462.
- [179] Woźniak C., Kleiber M.: *Nieliniowa mechanika konstrukcji*. Warszawa–Poznań, PWN, 1982.

- [180] Wu C.P., Tarn J.Q., Chi S.M.: Three-dimensional analysis of doubly curved laminated shells. *Journal of Engineering Mechanics*, 5, 1996, 391–401.
- [181] Wu Z., Chen W.: Thermomechanical buckling of laminated composite and sandwich plates using global-local higher order theory. *International Journal of Mechanical Sciences*, 49, 2007, 712–721.
- [182] Wu Z., Cheung Y.K., Lo S.H., Chen W.: Effects of higher-order global-local shear deformations on bending, vibration and buckling of multilayered plates. *Composite Structures*, 82, 2008, 277–289.
- [183] Xiang S., Wang K.M.: Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by trigonometric shear deformation theory and inverse multiquadric RBF. *Thin-Walled Structures*, 47, 2009, 304–310.
- [184] Xiaoping S., Liangxin S.: Thermomechanical buckling of laminated composite plates with higher-order transverse shear deformation. *Computers and Structures*, 53, 1994, 1–7.
- [185] Zakeri A.A., Alinia M.M.: An analytical study on post-buckling behaviour of imperfect sandwich panels subjected to uniform thermal stresses. *Thin-Walled Structures*, 44, 2006, 344–353.
- [186] Zenkour A.M.: Analytical solution for bending of cross-ply laminated plates under thermo-mechanical loading. *Composite Structures*, 65, 2004, 367–379.
- [187] Zhang X.: Why do Barlow points not coincide with the reduced Gauss quadrature points for higher-order finite elements? *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24, 2008, 1251–1256.
- [188] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.: *The finite element method*, Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [189] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Too J.M.: Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 3, 1971, 275–290.
- [190] Życzkowski M.: Podstawy analizy stateczności prętów sprężystych, *Współczesne metody analizy stateczności konstrukcji*. (Red. Z. Waszczyszyn), Wrocław, Ossolineum, 1981, 7–80.

ANALIZA STATECZNOŚCI POWŁOK WARSTWOWYCH OBCIĄŻONYCH TERMICZNIE

Praca dotyczy numerycznej analizy kompozytowych powłok warstwowych poddanych wpływowi termicznemu w postaci równomiernego ogrzania lub gradientu temperatury. Celem pracy jest opracowanie efektywnego algorytmu numerycznego umożliwiającego analizę stateczności paneli wielowarstwowych. Ponieważ lekkie konstrukcje warstwowe podlegają dość często dużym deformacjom jeszcze w zakresie przedkrytycznym, przeprowadzana jest geometrycznie nieliniowa analiza w ramach stacjonarnego opisu Lagrange'a. W każdym kroku przyrostowym kontrolowany jest stan wyężenia konstrukcji zgodnie z kryterium Tsai-Wu, co poszerza informację o globalnej nośności układu.

Kompozyt warstwowy modelowany jest zgodnie z koncepcją pojedynczej warstwy zastępczej, w ramach której układ warstw zastępowany jest pojedynczą, statycznie równoważną, jednorodną warstwą. W opisie kinematyki tej warstwy zastosowano teorię ścinania pierwszego rzędu. Typowy dla tego podejścia brak równowagi naprężeń na granicach warstw rekompensowany jest odpowiednią techniką korekcyjną ścinania. Współczynniki korekcyjne nie są narzucane arbitralnie, ale obliczane numerycznie przy założeniu cylindrycznej deformacji powłoki.

Zaprezentowane wyniki uzyskano w zdecydowanej większości za pomocą autorskiego programu metody elementów skończonych. W obliczeniach stosowano najczęściej element 8-węzłowy Serendipity z techniką jednolicie zredukowanego całkowania w celu uniknięcia efektu blokady membranowej i ścinania, a także 16-węzłowy element Lagrange'a z pełnym całkowaniem. Podczas śledzenia ścieżek równowagi wykorzystano metodę sterowania obciążeniowego oraz algorytm Riksa-Wempnera-Ramma (RWR). Ze względu na charakterystyczną dla konstrukcji obciążonych termicznie obecność punktów bifurkacji, algorytm RWR z klasycznym kryterium odciążania, bazującym na znaku wyznacznika globalnej macierzy sztywności, traci zbieżność wskutek oscylacji rozwiązania. Aby tego problemu uniknąć zaimplementowano kryterium zaproponowane przez Y.T. Fenga, zgodnie z którym znak przyrostu parametru obciążenia jest zależny od kierunku rozwiązania obliczonego w poprzedzającym kroku analizy.

Efektywność programu zaprezentowano na podstawie kilku reprezentacyjnych dla analizowanego problemu przykładów numerycznych. Pewne z nich przeanalizowano również komercyjnym programem NX-Nastran (ver. 7.0). Pokazano, że zaimplementowane tam algorytmy numeryczne mogą tracić zbieżność, jeśli w obliczeniach zastosowana będzie metoda sterowania parametrem łuku. Z drugiej strony, program autorski pozwala na uzyskanie żądanych rozwiązań i może być traktowany jako efektywne narzędzie do oceny nośności powłok warstwowych obciążonych termicznie.

W większości zadań wyniki uzyskane programem autorskim są zgodne z rozwiązaniami odniesienia zaczerpniętymi z literatury. W przypadkach niezgodności Autorka argumentuje, że rozwiązania literaturowe mogą być obarczone błędami, co potwierdzają przedstawione wyniki analiz dodatkowych.

STABILITY ANALYSIS OF THERMALLY LOADED MULTILAYERED SHELLS

The work concerns the numerical analysis of composite multilayered shells subjected to the influence of a uniform temperature field or a thermal gradient. The main goal of the study is to establish an efficient numerical algorithm capable to perform a comprehensive stability analysis for composite multilayered panels. Since composite panels undergo usually large deformations in the pre-buckling range, the geometrically nonlinear analysis within the framework of Total Lagrangian description is carried out. To study the bearing capacity of the construction, in each step of the analysis the stress state is controlled in the accordance with the Tsai-Wu hypothesis.

In the modelling of the multilayered shell the Equivalent Single Layer (ESL) approach is employed, in which the multilayered medium is treated as a statically equivalent homogeneous material. The kinematics of the resulting single layer corresponds with the First Order Shear Deformation theory's (FOSD) assumptions. In order to compensate the characteristic absence of equilibrium conditions at layer surfaces within this formulation, appropriate shear correction factors have to be used, which are evaluated numerically utilizing the assumption of a cylindrical bending of a shell.

The presented computations were, in general, performed with the use of the author's own finite element program. An 8-node Serendipity element with the uniform reduced integration technique as a remedy for shear and membrane locking phenomena and/or a fully integrated 16-node Lagrange element were applied in the analysis. The equilibrium paths were traced by making use of the load control strategy or Riks-Wempner-Ramm (RWR) algorithm. Owing to the typical presence of bifurcation points on the paths of thermally loaded thin shells, the RWR method with the traditional unloading criterion based on the global stiffness matrix condition usually fails due to characteristic oscillatory problems. As a remedy the criterion proposed by Y.T. Feng was implemented in the author's program. This condition makes the load parameter sign dependent on the direction obtained in the previous step and enables to pass the bifurcation points.

As an examination of the proposed approach several numerical examples are presented. Some of them were also analysed with the use of the commercial code NX-Nastran. It is shown that the numerical algorithms implemented there may fail, if the arc-length strategy has to be employed. On the other hand the author's program resolves the problems successfully and can be treated as an effective tool in the analysis of stability and load capacity of multilayered shells.

The solutions obtained with the author's program in most cases were consistent with the reference results known from the literature. In cases of discrepancies, the author argues, that the solutions given in the literature can be incorrect, what is supported by the results of additional computations.

Dodatek A

ZALEŻNOŚCI PRZEMIESZCZENIA-ODKSZTAŁCENIA W RAMACH TEORII 6-PARAMETROWEJ

Dodatek zawiera szczegółowe wyprowadzenia składowych tensora odkształcenia w funkcji składowych przemieszczeń (por. 2.43) dla przypadku ogólnego, tj. z uwzględnieniem wszystkich 6-składowych przemieszczeń.

Na podstawie (2.35) jak i z rys. 2.2 zapisujemy:

$${}^m \mathbf{r} = {}^0 \mathbf{r} + {}^m \mathbf{V}^{(0)}. \quad (\text{A.1})$$

Można zatem na podstawie (2.4) wyprowadzić następującą zależność:

$$\begin{aligned} {}^m \mathbf{a}_\alpha &= \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \left({}^0 \mathbf{r} + {}^m \mathbf{V}^{(0)} \right) = \\ &= {}^0 \mathbf{r}_{,\alpha} + \left({}^m \mathbf{v}_\delta {}^0 \mathbf{a}^\delta + {}^m \mathbf{v}_3 {}^0 \mathbf{n} \right)_{,\alpha} = \\ &= {}^0 \mathbf{a}_\alpha + {}^m \mathbf{v}_{\delta,\alpha} {}^0 \mathbf{a}^\delta + {}^m \mathbf{v}_{\lambda} {}^0 \mathbf{a}^\lambda_{,\alpha} + {}^m \mathbf{v}_{3,\alpha} {}^0 \mathbf{n} + {}^m \mathbf{v}_3 {}^0 \mathbf{n}_{,\alpha} = \\ &= {}^0 \mathbf{a}_\alpha + {}^m \mathbf{v}_{\delta,\alpha} {}^0 \mathbf{a}^\delta + {}^m \mathbf{v}_\lambda \left(-{}^0 \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda {}^0 \mathbf{a}^\beta + {}^0 b_\alpha^\lambda {}^0 \mathbf{n} \right) + {}^m \mathbf{v}_{3,\alpha} {}^0 \mathbf{n} + {}^m \mathbf{v}_3 \left(-{}^0 b_\alpha^\beta {}^0 \mathbf{a}_\beta \right) = \\ &= \left({}^0 a_{\alpha\delta} + \underbrace{{}^m \mathbf{v}_{\delta|\alpha}}_{\substack{(0) \\ {}^m \mathbf{v}_{\delta|\alpha}}} - {}^m \mathbf{v}_\lambda \underbrace{{}^0 \Gamma_{\alpha\delta}^\lambda}_{(0)} - {}^m \mathbf{v}_3 \underbrace{{}^0 b_{\alpha\delta}}_{(0)} \right) {}^0 \mathbf{a}^\delta + \left({}^m \mathbf{v}_\lambda \underbrace{{}^0 b_\alpha^\lambda + {}^m \mathbf{v}_{3,\alpha}}_{(0)} \right) {}^0 \mathbf{n} = \\ &= \left({}^0 a_{\alpha\delta} + \underbrace{{}^m \mathbf{v}_{\delta|\alpha}}_{\substack{(0) \\ {}^m \mathbf{v}_{\delta|\alpha}}} - {}^m \mathbf{v}_3 \underbrace{{}^0 b_{\delta\alpha}}_{(0)} \right) {}^0 \mathbf{a}^\delta + \left(\underbrace{{}^m \mathbf{v}_\lambda \underbrace{{}^0 b_\alpha^\lambda + {}^m \mathbf{v}_{3,\alpha}}_{(0)}}_{\substack{(0) \\ {}^m \mathbf{v}_{\alpha 3}}} \right) {}^0 \mathbf{n} = \\ &= \left({}^0 a_{\alpha\delta} + {}^m \mathbf{v}_{\delta|\alpha} \right) {}^0 \mathbf{a}^\delta + \left({}^m \mathbf{v}_{\alpha 3} \right) {}^0 \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

gdzie:

$$\begin{aligned} {}^m \mathbf{v}_{\alpha\beta} &= {}^m \mathbf{v}_{\alpha\beta} - {}^m \mathbf{v}_3 \underbrace{{}^0 b_{\alpha\beta}}_{(n)}, \\ {}^m \mathbf{v}_{\alpha 3} &= {}^m \mathbf{v}_\lambda \underbrace{{}^0 b_\alpha^\lambda}_{(n)} + {}^m \mathbf{v}_{3,\alpha}, \\ {}^m \mathbf{v}_{\alpha|\beta} &= {}^m \mathbf{v}_{\alpha,\beta} - {}^m \mathbf{v}_\lambda \underbrace{{}^0 \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda}_{(n)}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Przyjmując następnie reprezentacje wektorów bazowych:

$$\begin{aligned} {}^m \mathbf{a}_\alpha &= \begin{pmatrix} 0 & a_{\alpha\delta} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} \\ & \end{pmatrix} {}^0 \mathbf{a}^\delta + \begin{pmatrix} {}^m \varphi_{\alpha 3} \\ & \end{pmatrix} {}^0 \mathbf{n}, \\ {}^m \mathbf{a}_\beta &= \begin{pmatrix} 0 & a_{\beta\lambda} + {}^m \varphi_{\lambda\beta} \\ & \end{pmatrix} {}^0 \mathbf{a}^\lambda + \begin{pmatrix} {}^m \varphi_{\beta 3} \\ & \end{pmatrix} {}^0 \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

iloczyn ${}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{a}_\beta$ doprowadzamy do postaci:

$$\begin{aligned} {}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{a}_\beta &= \begin{pmatrix} 0 & a_{\alpha\delta} & 0 & a_{\beta\lambda} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} & 0 & a_{\beta\lambda} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} \\ & 0 & a_{\alpha\delta} & {}^m \varphi_{\lambda\beta} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} & {}^m \varphi_{\delta\alpha} & {}^m \varphi_{\lambda\beta} \end{pmatrix} {}^0 \mathbf{a}^\delta \cdot {}^0 \mathbf{a}^\lambda + \\ &+ \begin{pmatrix} {}^m \varphi_{\alpha 3} & {}^m \varphi_{\beta 3} \\ & \end{pmatrix} \underbrace{{}^0 \mathbf{n} \cdot {}^0 \mathbf{n}}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_{\alpha\delta} & 0 & a_{\beta\lambda} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} & 0 & a_{\alpha\delta} & {}^m \varphi_{\lambda\beta} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} & {}^m \varphi_{\delta\alpha} & {}^m \varphi_{\lambda\beta} \end{pmatrix} {}^0 a^{\delta\lambda} + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \varphi_{\beta 3} = (\text{A.5}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_{\alpha\delta} & 0 & \delta_\beta^\delta + {}^m \varphi_{\delta\alpha} & 0 & \delta_\alpha^\lambda & {}^m \varphi_{\lambda\beta} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} & {}^m \varphi_{\delta\alpha} & {}^m \varphi_{\lambda\beta} \end{pmatrix} + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \varphi_{\beta 3} = \\ &= {}^0 a_{\alpha\beta} + {}^m \varphi_{\beta\alpha} + {}^m \varphi_{\alpha\beta} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} {}^m \varphi_{\beta}^\delta + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \varphi_{\beta 3}, \end{aligned}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} {}^m \varphi_\beta^\delta &= {}^m \varphi_{\lambda\beta} {}^0 a^{\delta\lambda} = \begin{pmatrix} {}^m \nu_\lambda |_\beta - {}^m \nu_3 {}^0 b_{\lambda\beta} \end{pmatrix} {}^0 a^{\delta\lambda} = {}^m \nu^\delta |_\beta - {}^m \nu_3 {}^0 b_{\beta}^\delta, \\ {}^m \nu^\delta |_\beta &= {}^m \nu^\delta_{,\beta} + {}^m \nu^{\lambda 0} \Gamma_{\beta\lambda}^\delta. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Zależność (2.43a) dana jest więc przez:

$$\underline{\underline{{}^2 {}^m E_{\alpha\beta} = {}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{a}_\beta - {}^0 \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^0 \mathbf{a}_\beta = {}^m \varphi_{\beta\alpha} + {}^m \varphi_{\alpha\beta} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} {}^m \varphi_{\beta}^\delta + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \varphi_{\beta 3}.}} \quad (\text{A.7})$$

Na podstawie (2.35) jak i rys. 2.2 dyrektor możemy zapisać:

$${}^m \mathbf{d} = {}^0 \mathbf{n} + {}^m \mathbf{V}^{(1)}. \quad (\text{A.8})$$

Jego pochodną ${}^m \mathbf{d}_{,\alpha}$ w funkcji składowych przemieszczeń wyprowadzić można jak poniżej:

$$\begin{aligned}
{}^m \mathbf{d}_{,\alpha} &= \left({}^0 \mathbf{n} + {}^m \mathbf{V}^{(1)} \right)_{,\alpha} = \\
&= \left({}^0 \mathbf{n} + {}^m \mathbf{v}_\delta {}^0 \mathbf{a}^\delta + {}^m \mathbf{v}_3 {}^0 \mathbf{n} \right)_{,\alpha} = \\
&= {}^0 \mathbf{n}_{,\alpha} + {}^m \mathbf{v}_{\delta,\alpha} {}^0 \mathbf{a}^\delta + {}^m \mathbf{v}_{\lambda,\alpha} {}^0 \mathbf{a}^\lambda + {}^m \mathbf{v}_{3,\alpha} {}^0 \mathbf{n} + {}^m \mathbf{v}_3 {}^0 \mathbf{n}_{,\alpha} = \\
&= \left(-{}^0 b_\alpha^\beta {}^0 \mathbf{a}_\beta \right) + {}^m \mathbf{v}_{\delta,\alpha} {}^0 \mathbf{a}^\delta + {}^m \mathbf{v}_\lambda \left(-{}^0 \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda {}^0 \mathbf{a}^\beta + {}^0 b_\alpha^\lambda {}^0 \mathbf{n} \right) + \\
&\quad + {}^m \mathbf{v}_{3,\alpha} {}^0 \mathbf{n} + {}^m \mathbf{v}_3 \left(-{}^0 b_\alpha^\beta {}^0 \mathbf{a}_\beta \right) = \\
&= \left(-{}^0 b_\alpha^\beta a_{\beta\delta} + \underbrace{{}^m \mathbf{v}_{\delta,\alpha} - {}^m \mathbf{v}_\lambda {}^0 \Gamma_{\alpha\delta}^\lambda - {}^m \mathbf{v}_3 {}^0 b_\alpha^\beta a_{\beta\delta}}_{\substack{(1) \\ {}^m \varphi_{\delta\alpha}}} \right) {}^0 \mathbf{a}^\delta + \left({}^m \mathbf{v}_\lambda {}^0 b_\alpha^\lambda + {}^m \mathbf{v}_{3,\alpha} \right) {}^0 \mathbf{n} = \\
&= \left(\underbrace{{}^m \mathbf{v}_\delta |_\alpha - {}^0 b_{\delta\alpha} {}^m \mathbf{v}_3 - {}^0 b_{\delta\alpha}}_{\substack{(1) \\ {}^m \varphi_{\delta\alpha}}} \right) {}^0 \mathbf{a}^\delta + \left(\underbrace{{}^m \mathbf{v}_\lambda {}^0 b_\alpha^\lambda + {}^m \mathbf{v}_{3,\alpha}}_{\substack{(1) \\ {}^m \varphi_{\alpha 3}}} \right) {}^0 \mathbf{n} = \\
&= \left({}^m \varphi_{\delta\alpha} - {}^0 b_{\delta\alpha} \right) {}^0 \mathbf{a}^\delta + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^0 \mathbf{n}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Wykorzystując (A.9) i (A.4.b) obliczamy:

$$\begin{aligned}
{}^m \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{a}_\beta &= \left({}^m \varphi_{\delta\alpha} {}^0 a_{\beta\lambda} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} {}^m \varphi_{\lambda\beta} - {}^0 b_{\delta\alpha} {}^0 a_{\beta\lambda} - {}^0 b_{\delta\alpha} {}^m \varphi_{\lambda\beta} \right) {}^0 \mathbf{a}^\delta {}^0 \mathbf{a}^\lambda + \\
&\quad + {}^m \varphi_{\beta 3} {}^m \varphi_{\alpha 3} \underbrace{{}^0 \mathbf{n} \cdot {}^0 \mathbf{n}}_1 = \\
&= \left({}^m \varphi_{\delta\alpha} {}^0 a_{\beta\lambda} {}^0 a^{\delta\lambda} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} {}^m \varphi_{\lambda\beta} {}^0 a^{\delta\lambda} - {}^0 b_{\delta\alpha} {}^0 a_{\beta\lambda} {}^0 a^{\delta\lambda} - {}^0 b_{\delta\alpha} {}^m \varphi_{\lambda\beta} {}^0 a^{\delta\lambda} \right) + \tag{A.10} \\
&\quad + {}^m \varphi_{\beta 3} {}^m \varphi_{\alpha 3} = \\
&= {}^m \varphi_{\delta\alpha} \delta_\beta^\delta + {}^m \varphi_{\delta\alpha} {}^m \varphi_\beta^\delta - {}^0 b_{\delta\alpha} \delta_\beta^\delta - {}^0 b_\alpha^\lambda {}^m \varphi_{\lambda\beta} + {}^m \varphi_{\beta 3} {}^m \varphi_{\alpha 3} = \\
&= {}^m \varphi_{\beta\alpha} + {}^m \varphi_{\delta\alpha} {}^m \varphi_\beta^\delta - {}^0 b_{\beta\alpha} - {}^0 b_\alpha^\lambda {}^m \varphi_{\lambda\beta} + {}^m \varphi_{\beta 3} {}^m \varphi_{\alpha 3}.
\end{aligned}$$

Analogicznie:

$${}^m \mathbf{d}_{,\beta} \cdot {}^m \mathbf{a}_\alpha = {}^m \varphi_{\alpha\beta} + {}^m \varphi_{\delta\beta} {}^m \varphi_\alpha^\delta - {}^0 b_{\alpha\beta} - {}^0 b_\beta^\lambda {}^m \varphi_{\lambda\alpha} + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \varphi_{\beta 3}. \tag{A.11}$$

Wykorzystując (2.22c) można wykazać, że

$${}^0\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot {}^0\mathbf{a}_\beta = -{}^0b_\alpha^\delta {}^0\mathbf{a}_\delta {}^0\mathbf{a}_\beta = -{}^0b_\alpha^\delta a_{\delta\beta} = -{}^0b_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.12})$$

zatem:

$$\begin{aligned} -{}^0\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot {}^0\mathbf{a}_\beta &= {}^0b_{\alpha\beta}, \\ -{}^0\mathbf{n}_{,\beta} \cdot {}^0\mathbf{a}_\alpha &= {}^0b_{\beta\alpha} = {}^0b_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Zależność (2.43b) sprowadzamy więc do postaci:

$$\begin{aligned} 2 {}^m_0 E_{\alpha\beta} &= {}^m\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m\mathbf{a}_\beta + {}^m\mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m\mathbf{d}_{,\beta} - {}^0\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot {}^0\mathbf{a}_\beta - {}^0\mathbf{a}_\alpha \cdot {}^0\mathbf{n}_{,\beta} = \\ &= {}^m\varphi_{\beta\alpha} + {}^m\varphi_{\alpha\beta} - {}^0b_\alpha^\lambda {}^m\varphi_{\lambda\beta} - {}^0b_\beta^\lambda {}^m\varphi_{\lambda\alpha} + {}^m\varphi_{\delta\alpha} {}^m\varphi_{\beta}^\delta + {}^m\varphi_{\delta\beta} {}^m\varphi_{\alpha}^\delta + \\ &+ {}^m\varphi_{\beta 3} {}^m\varphi_{\alpha 3} + {}^m\varphi_{\alpha 3} {}^m\varphi_{\beta 3}. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Przyjmując kolejno następujące reprezentacje pochodnych dyrektorów przy wykorzystaniu (A.9):

$$\begin{aligned} {}^m\mathbf{d}_{,\alpha} &= \left({}^m\varphi_{\delta\alpha} - {}^0b_{\delta\alpha} \right) {}^0\mathbf{a}^\delta + {}^m\varphi_{\alpha 3} {}^0\mathbf{n}, \\ {}^m\mathbf{d}_{,\beta} &= \left({}^m\varphi_{\lambda\beta} - {}^0b_{\lambda\beta} \right) {}^0\mathbf{a}^\lambda + {}^m\varphi_{\beta 3} {}^0\mathbf{n}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

iloczyn ${}^m\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m\mathbf{d}_{,\beta}$ sprowadzamy do postaci:

$$\begin{aligned} {}^m\mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m\mathbf{d}_{,\beta} &= \left({}^m\varphi_{\delta\alpha} {}^m\varphi_{\lambda\beta} - {}^0b_{\delta\alpha} {}^m\varphi_{\lambda\beta} - {}^0b_{\lambda\beta} {}^m\varphi_{\delta\alpha} + {}^0b_{\delta\alpha} {}^0b_{\lambda\beta} \right) {}^0\mathbf{a}^\delta {}^0\mathbf{a}^\lambda + \\ &+ {}^m\varphi_{\alpha 3} {}^m\varphi_{\beta 3} \underbrace{{}^0\mathbf{n} \cdot {}^0\mathbf{n}}_1 = \\ &= \left({}^m\varphi_{\delta\alpha} {}^m\varphi_{\lambda\beta} {}^0a^{\delta\lambda} - {}^0b_{\delta\alpha} {}^m\varphi_{\lambda\beta} {}^0a^{\delta\lambda} - {}^0b_{\lambda\beta} {}^m\varphi_{\delta\alpha} {}^0a^{\delta\lambda} + {}^0b_{\delta\alpha} {}^0b_{\lambda\beta} {}^0a^{\delta\lambda} \right) + \\ &+ {}^m\varphi_{\alpha 3} {}^m\varphi_{\beta 3} = \\ &= {}^m\varphi_\alpha^\lambda {}^m\varphi_{\lambda\beta} - {}^0b_\alpha^\lambda {}^m\varphi_{\lambda\beta} - {}^0b_\beta^\delta {}^m\varphi_{\delta\alpha} + {}^0b_\alpha^\lambda {}^0b_{\lambda\beta} + {}^m\varphi_{\alpha 3} {}^m\varphi_{\beta 3}. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Jeśli iloczyn ${}^0\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot {}^0\mathbf{n}_{,\beta}$ przy wykorzystaniu (2.22c) ma ostatecznie postać

$${}^0\mathbf{n}_{,\alpha} \cdot {}^0\mathbf{n}_{,\beta} = \left(-{}^0b_\alpha^\delta {}^0\mathbf{a}_\delta \right) \cdot \left(-{}^0b_\beta^\lambda {}^0\mathbf{a}_\lambda \right) = {}^0b_\alpha^\delta {}^0b_\beta^\lambda a_{\delta\lambda} = {}^0b_\alpha^\delta {}^0b_{\beta\delta} = {}^0b_{\alpha\lambda} {}^0b_\beta^\lambda, \quad (\text{A.17})$$

to (2.43c) zapisać można jak poniżej:

$$\begin{aligned}
2 {}^m_0 E_{\alpha\beta} &= {}^m \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{d}_{,\beta} - {}^0 \mathbf{n}_{,\alpha} \cdot {}^0 \mathbf{n}_{,\beta} = \\
&= {}^m \varphi_\alpha^\lambda {}^m \varphi_{\lambda\beta} - {}^0 b_\alpha^\lambda {}^m \varphi_{\lambda\beta} - {}^0 b_\beta^\delta {}^m \varphi_{\delta\alpha} + {}^0 b_\alpha^\lambda {}^0 b_{\lambda\beta} + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \varphi_{\beta 3} - {}^0 b_{\alpha\lambda} {}^0 b_\beta^\lambda = \quad (\text{A.18}) \\
&= -{}^0 b_\alpha^\lambda {}^m \varphi_{\lambda\beta} - {}^0 b_\beta^\delta {}^m \varphi_{\delta\alpha} + {}^m \varphi_\alpha^\lambda {}^m \varphi_{\lambda\beta} + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \varphi_{\beta 3}.
\end{aligned}$$

Zakładając następnie reprezentacje wektora bazowego ${}^m \mathbf{a}_\alpha$ jak w (A.4a) i uzależniając direktor od przemieszczeń zgodnie z (2.35):

$${}^m \mathbf{d} = {}^0 \mathbf{n} + \mathbf{V} = {}^0 \mathbf{n} + {}^m \mathbf{v}_\lambda {}^0 \mathbf{a}^\lambda + {}^m \mathbf{v}_3 {}^0 \mathbf{n} = {}^m \mathbf{v}_\lambda {}^0 \mathbf{a}^\lambda + \left({}^m \mathbf{v}_3 + 1 \right) {}^0 \mathbf{n}, \quad (\text{A.19})$$

iloczyn ${}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{d}$ doprowadzamy do postaci:

$$\begin{aligned}
{}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{d} &= \left({}^0 a_{\alpha\delta} {}^m \mathbf{v}_\lambda + {}^m \varphi_{\alpha\delta} {}^m \mathbf{v}_\lambda \right) {}^0 \mathbf{a}^\delta {}^0 \mathbf{a}^\lambda + {}^m \varphi_{\alpha 3} \left({}^m \mathbf{v}_3 + 1 \right) \underbrace{{}^0 \mathbf{n} \cdot {}^0 \mathbf{n}}_1 = \\
&= {}^0 a_{\alpha\delta} {}^m \mathbf{v}_\lambda {}^0 a^{\delta\lambda} + {}^m \varphi_{\alpha\delta} {}^m \mathbf{v}_\lambda {}^0 a^{\delta\lambda} + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \mathbf{v}_3 + {}^m \varphi_{\alpha 3} = \quad (\text{A.20}) \\
&= {}^m \mathbf{v}_\lambda \delta_\alpha^\lambda + {}^m \varphi_\alpha^\lambda {}^m \mathbf{v}_\lambda + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \mathbf{v}_3 + {}^m \varphi_{\alpha 3} = \\
&= {}^m \mathbf{v}_\alpha + {}^m \varphi_\alpha^\lambda {}^m \mathbf{v}_\lambda + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \mathbf{v}_3 + {}^m \varphi_{\alpha 3}.
\end{aligned}$$

(2.43d) ma zatem następującą reprezentację:

$$\underline{\underline{{}^2 {}^m_0 E_{\alpha 3} = {}^m \mathbf{a}_\alpha \cdot {}^m \mathbf{d} = {}^m \mathbf{v}_\alpha + {}^m \varphi_{\alpha 3} + {}^m \varphi_\alpha^\lambda {}^m \mathbf{v}_\lambda + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \mathbf{v}_3.}} \quad (\text{A.21})$$

Wykorzystując teraz (A.9) i (A.19), iloczyn ${}^m \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{d}$ przedstawiamy w postaci:

$$\begin{aligned}
{}^m \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{d} &= \left({}^m \varphi_{\delta\alpha} {}^m \mathbf{v}_\lambda - {}^0 b_{\delta\alpha} {}^m \mathbf{v}_\lambda \right) {}^0 \mathbf{a}^\delta {}^0 \mathbf{a}^\lambda + {}^m \varphi_{\alpha 3} \left({}^m \mathbf{v}_3 + 1 \right) \underbrace{{}^0 \mathbf{n} \cdot {}^0 \mathbf{n}}_1 = \\
&= {}^m \varphi_{\delta\alpha} {}^m \mathbf{v}_\lambda {}^0 a^{\delta\lambda} - {}^0 b_{\delta\alpha} {}^m \mathbf{v}_\lambda {}^0 a^{\delta\lambda} + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \mathbf{v}_3 + {}^m \varphi_{\alpha 3} = \quad (\text{A.22}) \\
&= {}^m \varphi_\alpha^\lambda {}^m \mathbf{v}_\lambda - {}^0 b_\alpha^\lambda {}^m \mathbf{v}_\lambda + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \mathbf{v}_3 + {}^m \varphi_{\alpha 3}.
\end{aligned}$$

Zależność (2.43e) ma więc postać:

$$\underline{\underline{{}^2 {}^m_0 E_{\alpha 3} = {}^m \mathbf{d}_{,\alpha} \cdot {}^m \mathbf{d} = {}^m \varphi_{\alpha 3} - {}^0 b_\alpha^\lambda {}^m \mathbf{v}_\lambda + {}^m \varphi_\alpha^\lambda {}^m \mathbf{v}_\lambda + {}^m \varphi_{\alpha 3} {}^m \mathbf{v}_3.}} \quad (\text{A.23})$$

Przyjmując teraz ${}^m \mathbf{d}$ jak w (A.19), iloczyn ${}^m \mathbf{d} \cdot {}^m \mathbf{d}$ sprowadzamy do postaci:

$$\begin{aligned}
{}^m \mathbf{d} \cdot {}^m \mathbf{d} &= \left({}^{(1)} v_\lambda \quad {}^{(1)} v_\delta \right) {}^0 \mathbf{a}^\lambda {}^0 \mathbf{a}^\delta + \left({}^{(1)} v_3 + 1 \right) \underbrace{{}^0 \mathbf{n}^0 \mathbf{n}}_1 = \\
&= {}^{(1)} v_\lambda \quad {}^{(1)} v_\delta \quad {}^0 a^{\lambda\delta} + \left({}^{(1)} v_3 + 1 \right)^2 = \\
&= {}^{(1)} v^\delta \quad {}^{(1)} v_\delta + \left({}^{(1)} v_3 + 1 \right)^2 = \tag{A.24} \\
&= {}^{(1)} v^\delta \quad {}^{(1)} v_\delta + {}^{(1)} v_3 \quad {}^{(1)} v_3 + 2 \quad {}^{(1)} v_3 + 1 = \\
&= {}^{(1)} v^k \quad {}^{(1)} v_k + 2 \quad {}^{(1)} v_3 + 1.
\end{aligned}$$

Ostatecznie zatem (2.43f) zapisujemy:

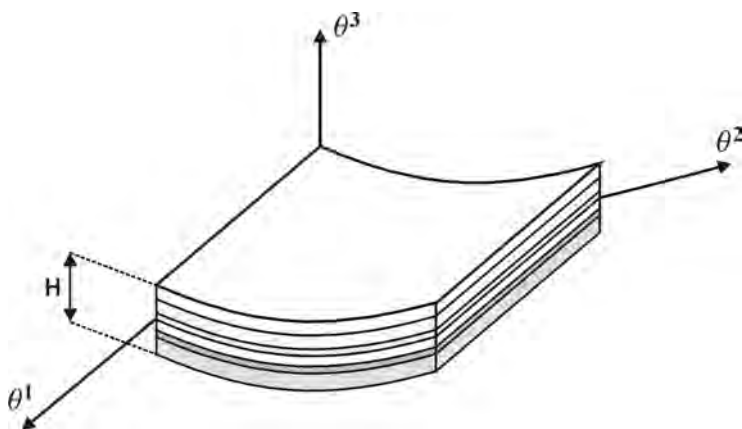
$$\underline{\underline{2 \quad {}^m_0 E_{33}^{(0)}(\theta^1, \theta^2) = {}^m \mathbf{d} \cdot {}^m \mathbf{d} - 1 = {}^{(1)} v^k \quad {}^{(1)} v_k + 2 \quad {}^{(1)} v_3.}} \tag{A.25}$$

Dodatek B

WYZNACZANIE WSPÓŁCZYNNIKÓW KOREKCYJNYCH ŚCINANIA DLA POWŁOK WARSTWOWYCH

W tym dodatku zaprezentowano szczegóły wyprowadzenia współczynników korekcyjnych ścinania przyjętych w zastosowanym modelu powłoki warstwowej za pracą [164]. Jak sugeruje tytuł [164], artykuł ten odnosi się do płyt i powłok. Warto jednak podkreślić, że przyjmuje się tu pewne uproszczenie, pomijając efekt krzywizny dźwigara. Zaznaczmy również, że zaproponowany sposób określania współczynników korekcyjnych w [164] jest uogólnieniem na przekroje warstwowe podejścia stosowanego dla ośrodka jednorodnego przedstawionego np. w pracy [58]. Jakkolwiek, zarys tegoż podejścia znaleźć można już w znacznie wcześniejszej pracy [173].

Zakłada się tzw. cylindryczne zginanie płyty, oddzielnie dla dwóch kierunków, tj. raz tworząca walca jest równoległa do osi θ^1 (rys. B.1), a raz do osi θ^2 , i określa się współczynniki korekcyjne, odpowiednio k_{23} i k_{13} , indywidualnie dla każdej z płaszczyzn ścinania.



Rys. B.1. Cylindryczna deformacja płyty warstwowej

W [178] wykazano, że przy cylindrycznej deformacji płyty można dobrać moduły ścinania poprzecznego tak, że rezultaty otrzymane z dwuwymiarowej teorii płyt z ich zastosowaniem odpowiadają z dużą dokładnością wynikom podejścia trójwymiarowego. Co jest istotne: zgodność ta zachodzi dla przekrojów izo- i ortotropowych oraz dla dowolnych przypadków gładkich obciążeń, tj. np. harmonicznych czy równomiernych. Założenie cylindrycznego zginania można traktować jako redukcję zagadnienia płytowego do problemu belki Timoszenki o szerokim przekroju prostokątnym [178], czego wynikiem jest prostota poniższych wyprowadzeń.

Każdą z warstw charakteryzuje parametr sztywności membranowej określony w globalnych osiach ($\theta^1, \theta^2, \theta^3$):

$$D_\alpha = D_\alpha(\theta^3) = c_{\alpha\alpha}, \quad (\text{B.1})$$

gdzie $c_{\alpha\alpha}$ wg (2.68).

Położenie osi obojętnej przekroju niejednorodnego o jednostkowej szerokości wyznaczamy ze wzoru:

$$\theta_{n\alpha}^3 = \frac{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} D_\alpha(\theta^3) \theta^3 d\theta^3}{\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} D_\alpha(\theta^3) d\theta^3}. \quad (\text{B.2})$$

Licznik wyrażenia (B.2) interpretować można jako uogólniony moment statyczny, zaś mianownik jako uogólnione pole niejednorodnego przekroju o jednostkowej szerokości (przy czym pojęcie niejednorodności wiążemy tu ze sztywnością materiału, a nie jego gęstością). Dla przekroju o symetrycznym rozkładzie sztywności, w tym jednorodnego, powierzchnia obojętna jest powierzchnią środkową.

Z lokalnych równań równowagi oraz zależności różniczkowych wynikających z założenia cylindrycznego zginania płyty/powłoki wynika następująca formuła na naprężenie poprzeczne:

$$S_{\alpha 3} = \frac{Q_{\alpha 3}}{R_\alpha} g_\alpha(\theta^3), \quad (\text{B.3})$$

gdzie $Q_{\alpha 3}$ jest siłą tnącą w płaszczyźnie $\alpha 3$, a pozostałe składniki wzoru (B.3) dane są przez:

$$R_\alpha = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} D_\alpha(\theta^3) (\theta^3 - \theta_{n\alpha}^3)^2 d\theta^3, \quad (\text{B.4})$$

$$g_\alpha(\theta^3) = - \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} D_\alpha(\theta^3) (\theta^3 - \theta_{n\alpha}^3) d\theta^3. \quad (\text{B.5})$$

W [58] wielkości dane wzorami (B.4) i (B.5) nazwano, odpowiednio: sztywnością zginania płyty oraz funkcją naprężeń ścinania.

Energia odkształcenia postaciowego przypadająca na jednostkę powierzchni środkowej wyraża się wzorem:

$$U_\alpha = \frac{1}{2} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} (S_{\alpha 3} \gamma_{\alpha 3} + S_{3\alpha} \gamma_{3\alpha}) d\theta^3 = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} S_{\alpha 3} \gamma_{\alpha 3} d\theta^3, \quad (\text{B.6})$$

gdzie $\gamma_{\alpha 3}$ to odkształcenie postaciowe w dowolnym punkcie przekroju, które z prawa Hooke'a dane jest przez:

$$\gamma_{\alpha 3} = \frac{S_{\alpha 3}}{G_{\alpha 3}}. \quad (\text{B.7})$$

$G_{\alpha 3}$ jest modułem odkształcenia postaciowego materiału przetransformowanym (patrz (2.68)) do układu globalnego płyty/powłoki, zatem $G_{13} = c_{55}$, a $G_{23} = c_{44}$.

Wykorzystując (B.3) i (B.7), energię (B.6) zapisujemy:

$$U_{\alpha} = \left(\frac{Q_{\alpha 3}}{R_{\alpha}} \right)^2 \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{(g_{\alpha}(\theta^3))^2}{G_{\alpha 3}(\theta^3)} d\theta^3. \quad (\text{B.8})$$

Z drugiej strony energię zgromadzoną w odkształceniach poprzecznych całego przekroju o jednostkowej szerokości można również wyrazić jako pracę przekrojowej siły tnącej na uśrednionym odkształceniu:

$$U_{\alpha}^* = \frac{1}{2} Q_{\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}^* + \frac{1}{2} Q_{3\alpha} \gamma_{3\alpha}^* = Q_{\alpha 3} \gamma_{\alpha 3}^*, \quad (\text{B.9})$$

gdzie $\gamma_{\alpha 3}^*$ jest uśrednionym w przekroju kątem odkształcenia postaciowego określonym poprzez:

$$\gamma_{\alpha 3}^* = \frac{Q_{\alpha 3}}{k_{\alpha 3} d_{\alpha 3}}, \quad d_{\alpha 3} = \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} G_{\alpha 3}(\theta^3) d\theta^3. \quad (\text{B.10})$$

W (B.10) pojawia się poszukiwany współczynnik korekcyjny $k_{\alpha 3}$. Stosując (B.10), wyrażenie (B.9) możemy przepisać:

$$U_{\alpha}^* = \frac{(Q_{\alpha 3})^2}{k_{\alpha 3} d_{\alpha 3}}. \quad (\text{B.11})$$

Po wprowadzeniu współczynnika korekcyjnego można zapisać, że:

$$U_{\alpha}^* = U_{\alpha}, \quad (\text{B.12})$$

z czego dalej wyprowadzana jest formuła na współczynniki korekcyjne dla obydwóch płaszczyzn:

$$k_{\alpha 3} = \frac{(R_{\alpha})^2}{d_{\alpha 3} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \frac{(g_{\alpha}(\theta^3))^2}{G_{\alpha 3}(\theta^3)} d\theta^3}. \quad (\text{B.13})$$

Można łatwo sprawdzić, że dla przekroju jednorodnego wartość współczynnika korekcyjnego obliczona zgodnie z (B.13) wynosi $k_{13} = k_{23} = k = 5/6$, co odpowiada powszechnie przyjmowanej wartości za Reissnerem [63].

Zauważmy, że ewentualne uwzględnienie zakrzywienia powłoki polegałoby na wprowadzeniu wyznacznika tensora przesunięcia (por. (2.32) do każdego wyrażenia całkowania

po grubości. Jak wspomina się w zasadniczej części pracy, bardzo często zakładane jest w tym zakresie uproszczenie i stosowana jest przybliżona wartość wyznacznika ${}^0\mu \approx 1$. W świetle takiego uproszczenia powyższe rozważania nie uległyby żadnej zmianie. W porównaniu z podstawowym założeniem upraszczającym opisaną metodą korekcyjną, polegającym na rozprężeniu dwukierunkowej pracy płyty/powłoki, dodatkowe pominięcie wpływu zakrzywienia wydaje się mało istotne, toteż zupełnie uzasadnione.

Wyrażenie (B.13) jest formułą na dwa współczynniki, tj. dla dwóch rozprężonych płaszczyzn ścinania. Umożliwiają one korektę modułów na głównej przekątnej podbloku macierzy konstytutywnej związanego z poprzecznym ścinaniem. Nieznany pozostaje współczynnik przy wyrazie poza główną przekątną, tzw. mieszany współczynnik korekcyjny. Zaprezentujemy zatem sposób jego przyjęcia w niniejszej pracy.

Dla większej czytelności dalszych rozważań przedstawimy tu bezpośrednią relację między modułami odkształcalności postaciowej w lokalnych osiach materiałowych a modułami w układzie osi $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ warstwy, wynikającą z transformacji (2.68):

$$\begin{bmatrix} c_{44} & c_{45} \\ c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{bc} \cos^2(\alpha_k) + G_{ac} \sin^2(\alpha_k) & (G_{ac} - G_{bc}) \sin(\alpha_k) \cos(\alpha_k) \\ (G_{ac} - G_{bc}) \sin(\alpha_k) \cos(\alpha_k) & G_{bc} \sin^2(\alpha_k) + G_{ac} \cos^2(\alpha_k) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

W przypadku, gdy warstwy laminatu wykonane są z materiału izotropowego lub, gdy ich włókna są zgodne z kierunkami układu globalnego θ^1 lub θ^2 , dwa kierunki ścinania pozostają rozprężone, gdyż zająć wtedy może jeden z poniższych wariantów (por. (B.14)):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_k) = 0 \Rightarrow \cos(\alpha_k) = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{44} & c_{45} \\ c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_{bc} & 0 \\ 0 & G_{ac} \end{bmatrix}, \\ \cos(\alpha_k) = 0 \Rightarrow \sin(\alpha_k) = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} c_{44} & c_{45} \\ c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_{ac} & 0 \\ 0 & G_{bc} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Dwa współczynniki korekcyjne według (B.13) są zatem w tym wypadku zupełnie wystarczające i ostateczny podbłok macierzy konstytutywnej związany z poprzecznym ścinaniem dla całego przekroju ma postać (por. (2.92)):

$$[S_A]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} k_{23} a_{44} & 0 \\ 0 & k_{13} a_{55} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

Współczynniki k_{13} i k_{23} wyznaczono przy uwzględnieniu cylindrycznego zginania całego przekroju. Ostatecznie jednak ich obliczona w ten sposób wartość może być wprowadzona do macierzy konstytutywnej pojedynczej warstwy:

$$\begin{bmatrix} c_{44}^* & 0 \\ 0 & c_{55}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{23} c_{44} & 0 \\ 0 & k_{13} c_{55} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.17})$$

gdzie gwiazdką oznaczono moduły skorygowane.

W przypadku materiału, którego włókna są dowolnie zorientowane względem osi globalnych θ^1 i θ^2 , podbłok macierzy konstytutywnej pojedynczej warstwy związany z poprzecznym ścinaniem w układzie $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ ma jednak pełną strukturę (por. (2.68)) i nie wiadomą pozostaje współczynnik, który należy wprowadzić przy modułach poza główną przekątną, tj.:

$$\begin{bmatrix} c_{44}^* & c_{45}^* \\ c_{54}^* & c_{55}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{23}c_{44} & Xc_{45} \\ Xc_{54} & k_{13}c_{55} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.18})$$

gdzie przez X oznaczono poszukiwany, mieszany współczynnik korekcyjny. Ze względu na symetrię macierzy konstytutywnej, tj., $c_{45} = c_{54}$, wprowadzony do (B.18) i poszukiwany jest tylko jeden współczynnik mieszany.

Postępowanie w wyprowadzaniu współczynnika X jest następujące:

— można bardzo łatwo sprawdzić, że między modułami pojedynczej warstwy w układzie $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ zachodzi zależność (por. (B.14)):

$$c_{44} \cdot c_{55} = (G_{ac} - G_{bc})^2 \sin^2(\alpha_k) \cos^2(\alpha_k) + G_{ac} G_{bc} = c_{45}^2 + G_{ac} G_{bc}, \quad (\text{B.19})$$

— skąd otrzymujemy, że:

$$c_{45} = \sqrt{c_{44} \cdot c_{55} - G_{ac} G_{bc}}; \quad (\text{B.20})$$

w (B.19) i (B.20) nie uwzględniono korekty;

— przy uwzględnieniu korekty, mamy:

$$\begin{aligned} c_{44} &\rightarrow c_{44}^* = k_{23} c_{44}, \\ c_{55} &\rightarrow c_{55}^* = k_{13} c_{55}; \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

— iloczyn skorygowanych modułów, zgodnie z (B.19) i (B.21) sprowadza się do postaci:

$$c_{44}^* \cdot c_{55}^* = k_{13} k_{23} \cdot c_{45}^2 + k_{13} k_{23} \cdot G_{ac} G_{bc}; \quad (\text{B.22})$$

— skorygowana wartość modułu poza główną przekątną, zgodnie z (B.20), może być wyrażona przez:

$$c_{45}^* = \sqrt{c_{44}^* \cdot c_{55}^* - G_{ac}^* G_{bc}^*}. \quad (\text{B.23})$$

Przyjmując dalej, że raz ustalone dla całego laminatu współczynniki k_{13} i k_{23} korygują wartości modułów ścinania na głównej przekątnej macierzy każdej z warstw, niezależnie od układu odniesienia, w którym tę macierz wyznaczamy (współczynniki korekcyjne nie podlegają transformacjom), możemy zapisać, że¹⁾:

$$\begin{aligned} G_{bc}^* &= k_{23} G_{bc}, \\ G_{ac}^* &= k_{13} G_{ac}. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

Podstawiając (B.22) i (B.24) do (B.23), otrzymujemy:

$$c_{45}^* = \sqrt{k_{13} k_{23} \cdot c_{45}^2 + k_{13} k_{23} \cdot G_{ac} G_{bc} - k_{13} k_{23} \cdot G_{ac} G_{bc}} = \sqrt{k_{13} k_{23} \cdot c_{45}^2} = \sqrt{k_{13} k_{23}} \cdot c_{45}. \quad (\text{B.25})$$

Poszukiwany mieszany współczynnik korekcyjny ma zatem formułę:

$$X = \sqrt{k_{13} k_{23}}. \quad (\text{B.26})$$

¹⁾ Związek (B.24) zachodzi tylko i wyłącznie w przypadku rozprężenia dwukierunkowej pracy powłoki. Pokreślmy jednak, że to właśnie założenie jest podstawą przyjętej w pracy metody korekcyjnej.

Współczynnik ten został wyprowadzony na poziomie pojedynczej warstwy. Jest on jednakże identyczny dla każdej z warstw, gdyż zależy od globalnych współczynników k_{13} i k_{23} , toteż można go wprowadzać do globalnej macierzy konstytutywnej (2.92) jak k_{13} i k_{23} . Podblok macierzy konstytutywnej pojedynczej warstwy związany z poprzecznym ścinaniem można ostatecznie przedstawić w następującej formie:

$$\begin{bmatrix} c_{44}^* & c_{45}^* \\ c_{54}^* & c_{55}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{23}c_{44} & \sqrt{k_{13}k_{23}}c_{45} \\ \sqrt{k_{13}k_{23}}c_{54} & k_{13}c_{55} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.27})$$

Dodatek C

TRANSFORMACJA WEWNĘTRZNEJ PRACY WIRTUALNEJ

W dodatku przedstawiono transformację wewnętrzną pracy wirtualnej opisaną równaniem (2.75), które tu, dla większej czytelności, przytoczymy:

$${}^2\delta W_i = \int_{{}^2V} {}^2\sigma_{ef}^{ij} \delta_2 e_{ij} {}^2dV. \quad (C.1)$$

Opisywana transformacja dotyczy przejścia w wyrażeniu (C.1) z miar naprężeń i odkształceń, odnoszonych do konfiguracji poszukiwanej, $t = 2$, oraz obszaru całkowania w tejże konfiguracji, na miary adekwatne dla stacjonarnego opisu Lagrange'a, tj. tensora odkształceń Lagrange'a-Greena i drugi tensora naprężenia Pioli-Kirchhoffa oraz obszar całkowania w konfiguracji początkowej, $t = 0$. Przekształcenia związane z transformacją przedstawiono w zapisie absolutnym i wskaźnikowym.

Przypomnijmy, że:

- ${}^2_0\mathbf{F}$ – jest materialnym gradientem deformacji, a ${}^2_0F_{mn}$ są jego składowymi,
- ${}^0_2\mathbf{F}$ – jest odwrotnością materialnego gradientu deformacji, a ${}^0_2F_{mn}$ są jego składowymi,
- J – jest wyznacznikiem materialnego gradientu deformacji,
- ${}^2_2\sigma_{ef}$ – jest tensorem naprężeń efektywnych Cauchy'ego, a ${}^2_2\sigma_{ef}^{mn}$ to jego składowe,
- ${}^2_2\mathbf{e}$ – jest tensorem odkształceń Eulera-Almansi'ego, a ${}^2_2e_{mn}$ to jego składowe,
- ${}^2_0\mathbf{S}_{ef}$ – jest drugim tensorem naprężeń efektywnych Pioli-Kirchhoffa, a ${}^2_0S_{ef}^{mn}$ to jego składowe,
- ${}^2_0\mathbf{E}$ – jest tensorem odkształceń Lagrange'a-Greena, a ${}^2_0E_{mn}$ są jego składowymi.

Wykorzystując, że:

- element objętości transformuje się jak w (2.76):

$${}^2dV = J {}^0dV, \quad (C.2)$$

- związek pomiędzy tensorami naprężeń jest następujący [77]:

$${}^2_2\sigma_{ef} = J^{-1} {}^2_0\mathbf{F} {}^2_0\mathbf{S}_{ef} {}^2_0\mathbf{F}^T \quad \text{lub} \quad {}^2_2\sigma_{ef}^{ij} = J^{-1} {}^2_0F_{im} {}^2_0F_{nj} {}^2_0S_{ef}^{mn}, \quad (C.3)$$

- relacja między tensorami odkształceń zachodzi jak poniżej [77]:

$${}^2_2\mathbf{e} = {}^2_0\mathbf{F}^{-T} {}^2_0\mathbf{E} {}^2_0\mathbf{F}^{-1} \quad \text{lub} \quad {}^2_2e_{ij} = {}^2_0F_{mi} {}^2_0F_{jn} {}^2_0E_{mn}, \quad (C.4)$$

wyrażenie (C.1) możemy zapisać:

$$\int_{{}^2V} {}^2_2\sigma_{ef} \cdot \delta_2 \mathbf{e} {}^2dV = \int_{{}^0V} (J^{-1} {}^2_0\mathbf{F} {}^2_0\mathbf{S}_{ef} {}^2_0\mathbf{F}^T) \cdot \delta ({}^2_0\mathbf{F}^{-T} {}^2_0\mathbf{E} {}^2_0\mathbf{F}^{-1}) {}^2J {}^0dV. \quad (C.5)$$

Wykorzystując następnie własności operacji pełnego nasunięcia [77]:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{BC}) = (\mathbf{AC}^T) \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}, \quad (C.6)$$

sprowadzamy (C.5) do postaci:

$$\begin{aligned}
 & \int_{0V} \left(J^{-1} {}_0^2 \mathbf{F}_0^2 \mathbf{S}_{mech} {}_0^2 \mathbf{F}^T \right) \cdot \delta \left({}_0^2 \mathbf{F}^{-T} {}_0^2 \mathbf{E}_0^2 \mathbf{F}^{-1} \right) J^0 dV = \\
 & = \int_{0V} \left(\underbrace{{}_0^2 \mathbf{F}_0^2 \mathbf{S}_{mech} {}_0^2 \mathbf{F}^T}_{\mathbf{A}} \right) \cdot \delta \left(\underbrace{{}_0^2 \mathbf{F}^{-T}}_{\mathbf{B}} \underbrace{{}_0^2 \mathbf{E}_0^2 \mathbf{F}^{-1}}_{\mathbf{C}} \right) dV = \\
 & = \int_{0V} \left(\underbrace{{}_0^2 \mathbf{F}_0^2 \mathbf{S}_{ef} {}_0^2 \mathbf{F}^T}_{\mathbf{A}} \underbrace{{}_0^2 \mathbf{F}^{-T}}_{\mathbf{C}^T} \right) \cdot \delta \left(\underbrace{{}_0^2 \mathbf{F}^{-T} {}_0^2 \mathbf{E}}_{\mathbf{B}} \right) dV = \int_{0V} \left({}_0^2 \mathbf{F}_0^2 \mathbf{S}_{ef} \right) \cdot \delta \left({}_0^2 \mathbf{F}^{-T} {}_0^2 \mathbf{E} \right) dV = \\
 & = \int_{0V} \left(\underbrace{{}_0^2 \mathbf{F}_0^2 \mathbf{S}_{ef}}_{\mathbf{A}} \right) \cdot \delta \left(\underbrace{{}_0^2 \mathbf{F}^{-T} {}_0^2 \mathbf{E}}_{\mathbf{B} \mathbf{C}} \right) dV = \int_{0V} \left(\underbrace{{}_0^2 \mathbf{F}^{-1} {}_0^2 \mathbf{F}_0^2 \mathbf{S}_{ef}}_{\mathbf{B}^T \mathbf{A}} \right) \cdot \delta \left(\underbrace{{}_0^2 \mathbf{E}}_{\mathbf{C}} \right) dV = \\
 & = \int_{0V} {}_0^2 \mathbf{S}_{ef} \cdot \delta {}_0^2 \mathbf{E}^0 dV
 \end{aligned} \tag{C.7}$$

lub

$$\begin{aligned}
 & \int_{2V} {}_2^2 \sigma_{ef}^{ij} \delta {}_2^2 e_{ij}^2 dV = \int_{0V} \left[J^{-1} {}_0^2 F_{im} {}_0^2 F_{jn} {}_0^2 S_{ef}^{mn} \right] \left[{}_0^2 F_{ki} {}_0^2 F_{lj} \delta {}_0^2 E_{kl} \right] J^0 dV = \\
 & = \int_{0V} \underbrace{\left(J^{-1} J \right)}_1 \underbrace{\left({}_0^2 F_{im} {}_0^2 F_{ki} \right)}_{\delta_{mk}} \underbrace{\left({}_0^2 F_{jn} {}_0^2 F_{lj} \right)}_{\delta_{nl}} {}_0^2 S_{ef}^{mn} \delta {}_0^2 E_{kl}^0 dV = \int_{0V} \delta_{mk} \delta_{nl} {}_0^2 S_{ef}^{mn} \delta {}_0^2 E_{kl}^0 dV = \\
 & = \int_{0V} {}_0^2 S_{ef}^{mn} \delta {}_0^2 E_{mn}^0 dV
 \end{aligned}$$

Wykazaliśmy zatem, że:

$$\begin{aligned}
 & \int_{2V} {}_2^2 \boldsymbol{\sigma}_{ef} \cdot \delta {}_2^2 \mathbf{e}^2 dV = \int_{0V} {}_0^2 \mathbf{S}_{ef} \cdot \delta {}_0^2 \mathbf{E}^0 dV \\
 & \text{lub} \\
 & \int_{2V} {}_2^2 \sigma_{ef}^{ij} \delta {}_2^2 e_{ij}^2 dV = \int_{0V} {}_0^2 S_{ef}^{mn} \delta {}_0^2 E_{mn}^0 dV.
 \end{aligned} \tag{C.8}$$

Dodatek D

UOGÓLNIONE MIARY NAPRĘŻEŃ POWŁOKI

W tym dodatku przedstawione jest wyprowadzenie uogólnionych miar naprężeń w powłoce, tzw. sił przekrojowych.

W dwuwymiarowym opisie powłoki wymagane jest sprowadzenie wszystkich wielkości opisujących jej deformację do powierzchni odniesienia. Konieczne jest więc zastąpienie naprężeń odpowiednimi siłami przekrojowymi. Siły te wynikają wprost ze scałkowania po grubości w wyrażeniu opisującym wariację pracy wewnętrznej (patrz (2.86)), które tu, dla większej czytelności, powtórzymy:

$${}^2\delta W_i = \int_{\Omega} \int_{0H} \left\{ \left({}^1S_{mech}^{mn} + {}_0S_{mech}^{mn} \right) - {}^2S_{th}^{mn} \right\} \delta_0 E_{mn} {}^0\mu {}^0dH {}^0d\Omega. \quad (D.1)$$

Rozdzielając stan poprzecznego ścinania od membranowo-zgięciowego i wykorzystując (2.42) oraz (2.51), (D.1) zapisujemy:

$$\begin{aligned} {}^2\delta W_i = & \int_{\Omega} \int_{0H} \left({}^1S_{mech}^{\alpha\beta} - {}^2S_{th}^{\alpha\beta} \right) \left(\delta_0 E_{\alpha\beta} + \theta^3 \delta_0 E_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 \delta_0 E_{\alpha\beta} \right) {}^0\mu d\theta^3 {}^0d\Omega + \\ & + 2 \int_{\Omega} \int_{0H} {}^1S_{mech}^{\alpha 3} \delta_0 E_{\alpha 3} {}^0\mu d\theta^3 {}^0d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \int_{0H} \left({}^1S_{mech}^{\alpha\beta} \right) \left(\delta_0 E_{\alpha\beta} + \theta^3 \delta_0 E_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 \delta_0 E_{\alpha\beta} \right) {}^0\mu d\theta^3 {}^0d\Omega + \\ & + 2 \int_{\Omega} \int_{0H} {}^1S_{mech}^{\alpha 3} \delta_0 E_{\alpha 3} {}^0\mu d\theta^3 {}^0d\Omega. \end{aligned} \quad (D.2)$$

Należy przeprowadzić następujące całkowanie:

$$\begin{aligned} I_{0H} = & \int_{0H} \left({}^1S_{mech}^{\alpha\beta} - {}^2S_{th}^{\alpha\beta} \right) \left(\delta_0 E_{\alpha\beta} + \theta^3 \delta_0 E_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 \delta_0 E_{\alpha\beta} \right) {}^0\mu d\theta^3 + 2 \int_{0H} {}^1S_{mech}^{\alpha 3} \delta_0 E_{\alpha 3} {}^0\mu d\theta^3 + \\ & + \int_{0H} \left({}^1S_{mech}^{\alpha\beta} \right) \left(\delta_0 E_{\alpha\beta} + \theta^3 \delta_0 E_{\alpha\beta} + (\theta^3)^2 \delta_0 E_{\alpha\beta} \right) {}^0\mu d\theta^3 + 2 \int_{0H} {}^1S_{mech}^{\alpha 3} \delta_0 E_{\alpha 3} {}^0\mu d\theta^3. \end{aligned} \quad (D.3)$$

Wykorzystując fakt, że miary odkształceń w (D.3) są związane z powierzchnią środkową i w konsekwencji można je wyłączyć poza całki, wyrażenie to można rozpisac jak poniżej:

$$\left\{ {}_0 \mathcal{N}_{mech} \right\} = \begin{Bmatrix} {}^{(0)}_0 L_{mech}^{11} \\ {}^{(0)}_0 L_{mech}^{22} \\ {}^{(0)}_0 L_{mech}^{12} \end{Bmatrix}, \quad \left\{ {}_0 \mathcal{M}_{mech} \right\} = \begin{Bmatrix} {}^{(1)}_0 L_{mech}^{11} \\ {}^{(1)}_0 L_{mech}^{22} \\ {}^{(1)}_0 L_{mech}^{12} \end{Bmatrix}, \quad \left\{ {}_0 \mathcal{B}_{mech} \right\} = \begin{Bmatrix} {}^{(2)}_0 L_{mech}^{11} \\ {}^{(2)}_0 L_{mech}^{22} \\ {}^{(2)}_0 L_{mech}^{12} \end{Bmatrix},$$

$$\underline{\underline{{}^{(k)}_0 L_{mech}^{\alpha\beta}, \quad k = 0, 1, 2,}} \quad (D.6)$$

$$\left\{ {}_0 \mathcal{Q}_{mech} \right\} = \begin{Bmatrix} {}^{(0)}_0 L_{mech}^{23} \\ {}^{(0)}_0 L_{mech}^{13} \end{Bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\text{ogólnie } {}^{(0)}_0 L_{mech}^{\alpha\beta};}}$$

oraz sił termicznych:

$$\left\{ {}^2_0 \mathcal{N}_{th} \right\} = \begin{Bmatrix} {}^{(0)}_2 L_{th}^{11} \\ {}^{(0)}_2 L_{th}^{22} \\ {}^{(0)}_2 L_{th}^{12} \end{Bmatrix}, \quad \left\{ {}^2_0 \mathcal{M}_{th} \right\} = \begin{Bmatrix} {}^{(1)}_2 L_{th}^{11} \\ {}^{(1)}_2 L_{th}^{22} \\ {}^{(1)}_2 L_{th}^{12} \end{Bmatrix}, \quad \left\{ {}^2_0 \mathcal{B}_{th} \right\} = \begin{Bmatrix} {}^{(2)}_2 L_{th}^{11} \\ {}^{(2)}_2 L_{th}^{22} \\ {}^{(2)}_2 L_{th}^{12} \end{Bmatrix},$$

$$\underline{\underline{\text{ogólnie } {}^{(k)}_2 L_{th}^{\alpha\beta}, \quad k = 0, 1, 2.}} \quad (D.7)$$

Przyjmując, że zrównoważone siły mechaniczne są znane, zajmiemy się dalej opisem jedynie ich przyrostów oraz sił termicznych, które wyznaczymy ze związku konstytutywnego (2.72).

Przechodząc na notację macierzową, oddzielmy część zgięciowo-membranową od części związanej z poprzecznym ścinaniem w (2.68):

$$[C_B] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad [C_S] = \begin{bmatrix} c_{44} & c_{45} \\ c_{54} & c_{55} \end{bmatrix}. \quad (D.8)$$

Wprowadźmy także zapis wektorowy dla przyrostów odkształceń, jak poniżej:

$$\left\{ {}_0 \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} \right\} = \begin{Bmatrix} {}^{(k)}_0 E_{11} \\ {}^{(k)}_0 E_{22} \\ {}^{(k)}_2 E_{12} \end{Bmatrix}, \quad k = 0, 1, 2 \quad \left\{ {}_0 \boldsymbol{\gamma}^{(0)} \right\} = \begin{Bmatrix} {}^{(0)}_2 E_{23} \\ {}^{(0)}_2 E_{13} \end{Bmatrix}. \quad (D.9)$$

Wykorzystując związki (2.72), (2.57) oraz (D.8) i (D.9), przyrosty mechanicznych sił wewnętrznych i wewnętrzne siły termiczne w notacji macierzowej dane są następująco:

$$\begin{aligned}
 {}_0\mathcal{N}_{mech}^{\alpha\beta} &= \int_{{}_0H} {}_0S_{mech}^{\alpha\beta} {}_0\mu d\theta^3 \Leftrightarrow \{{}_0\mathcal{N}_{mech}\} = \int_{{}_0H} [C_B] \left\{ \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(0)}\} + \theta^3 \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}\} + (\theta^3)^2 \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}\} \right\} {}_0\mu d\theta^3, \\
 {}_0\mathcal{M}_{mech}^{\alpha\beta} &= \int_{{}_0H} {}_0S_{mech}^{\alpha\beta} \theta^3 {}_0\mu d\theta^3 \Leftrightarrow \{{}_0\mathcal{M}_{mech}\} = \int_{{}_0H} [C_B] \left\{ \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(0)}\} + \theta^3 \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}\} + (\theta^3)^2 \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}\} \right\} \theta^3 {}_0\mu d\theta^3, \\
 {}_0\mathcal{B}_{mech}^{\alpha\beta} &= \int_{{}_0H} {}_0S_{mech}^{\alpha\beta} (\theta^3)^2 {}_0\mu d\theta^3 \Leftrightarrow \{{}_0\mathcal{B}_{mech}\} = \int_{{}_0H} [C_B] \left\{ \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(0)}\} + \theta^3 \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}\} + (\theta^3)^2 \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}\} \right\} (\theta^3)^2 {}_0\mu d\theta^3, \\
 {}_0\mathcal{Q}_{mech}^{\alpha\beta} &= \int_{{}_0H} {}_0S_{mech}^{\alpha\beta} {}_0\mathcal{V}^{\alpha\beta} {}_0\mu d\theta^3 \Leftrightarrow \{{}_0\mathcal{Q}_{mech}\} = \int_{{}_0H} [C_s] \left\{ \{{}_0\mathcal{V}^{(0)}\} \right\} {}_0\mu d\theta^3, \\
 {}_0^2\mathcal{N}_{th}^{\alpha\beta} &= \int_{{}_0H} {}_0^2S_{th}^{\alpha\beta} {}_0\mu d\theta^3 \Leftrightarrow \{{}_0^2\mathcal{N}_{th}\} = \int_{{}_0H} [C_{th}] (T^{(0)} + T^{(1)} \cdot \theta^3) {}_0\mu d\theta^3, \\
 {}_0^2\mathcal{M}_{th}^{\alpha\beta} &= \int_{{}_0H} {}_0^2S_{th}^{\alpha\beta} \theta^3 {}_0\mu d\theta^3 \Leftrightarrow \{{}_0^2\mathcal{M}_{th}\} = \int_{{}_0H} [C_{th}] (T^{(0)} + T^{(1)} \cdot \theta^3) \theta^3 {}_0\mu d\theta^3, \\
 {}_0^2\mathcal{B}_{th}^{\alpha\beta} &= \int_{{}_0H} {}_0^2S_{th}^{\alpha\beta} (\theta^3)^2 {}_0\mu d\theta^3 \Leftrightarrow \{{}_0^2\mathcal{B}_{th}\} = \int_{{}_0H} [C_{th}] (T^{(0)} + T^{(1)} \cdot \theta^3) (\theta^3)^2 {}_0\mu d\theta^3.
 \end{aligned} \tag{D.10}^1$$

Rozpisując (D.10) i wyłączając spod całek uogólnione miary odkształceń, otrzymujemy:

$$\{{}_0\mathcal{N}_{mech}\} = \underbrace{\left(\int_{{}_0H} [C_B] {}_0\mu d\theta^3 \right)}_{[A]_{3 \times 3}} \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(0)}\} + \underbrace{\left(\int_{{}_0H} [C_B] \theta^3 {}_0\mu d\theta^3 \right)}_{[B]_{3 \times 3}} \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}\} + \underbrace{\left(\int_{{}_0H} [C_B] (\theta^3)^2 {}_0\mu d\theta^3 \right)}_{[D]_{3 \times 3}} \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}\}, \tag{D.11}$$

$$\{{}_0\mathcal{M}_{mech}\} = \underbrace{\left(\int_{{}_0H} [C_B] \theta^3 {}_0\mu d\theta^3 \right)}_{[B]_{3 \times 3}} \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(0)}\} + \underbrace{\left(\int_{{}_0H} [C_B] (\theta^3)^2 {}_0\mu d\theta^3 \right)}_{[D]_{3 \times 3}} \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}\} + \underbrace{\left(\int_{{}_0H} [C_B] (\theta^3)^3 {}_0\mu d\theta^3 \right)}_{[E]_{3 \times 3}} \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}\}, \tag{D.12}$$

$$\{{}_0\mathcal{B}_{mech}\} = \underbrace{\left(\int_{{}_0H} [C_B] (\theta^3)^2 {}_0\mu d\theta^3 \right)}_{[D]_{3 \times 3}} \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(0)}\} + \underbrace{\left(\int_{{}_0H} [C_B] (\theta^3)^3 {}_0\mu d\theta^3 \right)}_{[E]_{3 \times 3}} \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}\} + \underbrace{\left(\int_{{}_0H} [C_B] (\theta^3)^4 {}_0\mu d\theta^3 \right)}_{[F]_{3 \times 3}} \{{}_0\boldsymbol{\epsilon}^{(2)}\}, \tag{D.13}$$

¹⁾ Należy zwrócić uwagę, że naprężenia poprzecznego ścinania $S_{mech}^{\alpha\beta}$, liczone przy wykorzystaniu macierzy $[C_s]$ podanej w (D.8) (por. (D.10d)), są obarczone błędem wynikającym z upraszczających założeń teorii ścinania pierwszego rzędu, w której odkształcenia ścinania poprzecznego są stałe na wysokości przekroju. Na etapie obliczania sztywności układu błąd ten może być skorygowany poprzez zastosowanie odpowiednich współczynników korekcyjnych (por. (2.92)). Warto jednak podkreślić, że przy określaniu rozkładu naprężeń poprzecznego ścinania mogą być wykorzystywane inne podejścia niż bezpośrednie zastosowanie związku konstytutywnego. Pewne sformułowania mieszane, jak wspomniano w rozdziale 2 pracy, dają możliwość przyjęcia narzuconego rozkładu, np. spełniającego warunki równowagi na granicach warstw [24, 25, 136]. Inną metodą jest obliczanie składowych poprzecznego ścinania na podstawie składowych PSN przy wykorzystaniu lokalnych warunków równowagi – takie podejście prowadzi w modelach ESL do najlepszej zgodności z rozwiązaniem trójwymiarowym, czy też quasi-trójwymiarowym [24, 134].

$$\underbrace{\left\{ {}_0\mathcal{Q}_{mech} \right\}}_{[S_A]_{2 \times 2}} = \underbrace{\left(\int [C_s]^0 \mu d\theta^3 \right)}_{[S_A]_{2 \times 2}} \left\{ {}_0\mathcal{Y}^{(0)} \right\}, \quad (D.14)$$

$$\left\{ {}_0^2\mathcal{N}_{th} \right\} = \underbrace{\left(\int [C_{th}]^0 \mu d\theta^3 \right)}_{\{A_{th}\}_{3 \times 3}} T^{(0)} + \underbrace{\left(\int [C_{th}] \theta^3 \mu d\theta^3 \right)}_{\{B_{th}\}_{3 \times 3}} T^{(1)}, \quad (D.15)$$

$$\left\{ {}_0^2\mathcal{M}_{th} \right\} = \underbrace{\left(\int [C_{th}] \theta^3 \mu d\theta^3 \right)}_{\{B_{th}\}_{3 \times 3}} T^{(0)} + \underbrace{\left(\int [C_{th}] (\theta^3)^2 \mu d\theta^3 \right)}_{\{D_{th}\}_{3 \times 3}} T^{(1)}, \quad (D.16)$$

$$\left\{ {}_0^2\mathcal{B}_{th} \right\} = \underbrace{\left(\int [C_{th}] (\theta^3)^2 \mu d\theta^3 \right)}_{\{D_{th}\}_{3 \times 3}} T^{(0)} + \underbrace{\left(\int [C_{th}] (\theta^3)^3 \mu d\theta^3 \right)}_{\{E_{th}\}_{3 \times 3}} T^{(1)}. \quad (D.17)$$

Ostatecznie można zapisać finalną postać macierzową prawa konstytutywnego na poziomie całego przekroju, odpowiadającą związkowi w punkcie ośrodka (2.72):

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \{ {}_0\mathcal{N}_{mech} \} \\ \{ {}_0\mathcal{M}_{mech} \} \\ \{ {}_0\mathcal{B}_{mech} \} \\ \{ {}_0\mathcal{Q}_{mech} \} \end{array} \right\}}_{\{ {}_0\mathcal{S}_{mech} \}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} \overset{(0,0)}{[A]}_{3 \times 3} & \overset{(0,1)}{[B]}_{3 \times 3} & \overset{(0,2)}{[D]}_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 2} \\ \overset{(1,0)}{[B]}_{3 \times 3} & \overset{(1,1)}{[D]}_{3 \times 3} & \overset{(1,2)}{[E]}_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 2} \\ \overset{(2,0)}{[D]}_{3 \times 3} & \overset{(2,1)}{[E]}_{3 \times 3} & \overset{(2,2)}{[F]}_{3 \times 3} & [0]_{3 \times 2} \\ [0]_{2 \times 3} & [0]_{2 \times 3} & [0]_{2 \times 3} & \overset{(0,0)}{[S_A]}_{2 \times 2} \end{array} \right]}_{\{ {}_0\mathcal{H}_{mech} \}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \{ {}_0\mathcal{E}^{(0)} \} \\ \{ {}_0\mathcal{E}^{(1)} \} \\ \{ {}_0\mathcal{E}^{(2)} \} \\ \{ {}_0\mathcal{Y}^{(0)} \} \end{array} \right\}}_{\{ {}_0\mathcal{E}_{mech} \}}, \quad \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \{ {}_0^2\mathcal{N}_{th} \} \\ \{ {}_0^2\mathcal{M}_{th} \} \\ \{ {}_0^2\mathcal{B}_{th} \} \\ \{ 0 \} \end{array} \right\}}_{\{ {}_0^2\mathcal{S}_{th} \}} = \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \overset{(0,0)}{[A_{th}]}_{3 \times 3} & \overset{(0,1)}{[B_{th}]}_{3 \times 3} \\ \overset{(1,0)}{[B_{th}]}_{3 \times 3} & \overset{(1,1)}{[D_{th}]}_{3 \times 3} \\ \overset{(2,0)}{[D_{th}]}_{3 \times 3} & \overset{(2,1)}{[E_{th}]}_{3 \times 3} \\ [0]_{2 \times 3} & [0]_{2 \times 3} \end{array} \right]}_{\{ {}_0\mathcal{H}_{th} \}} \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} T^{(0)} \\ T^{(1)} \\ \{ {}_0^2\mathcal{T} \} \end{array} \right\}}_{\{ {}_0\mathcal{T} \}}. \quad (D.18)$$