

Wojciech Grązewicz

RÓWNANIA RÓŻNICZKOWE

Materiały pomocnicze do wykładu
z równań różniczkowych
dla studentów Automatyki i Robotyki

Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej
Politechniki Gdańskiej

Gdańsk 2002

Skrypt powstał na bazie wykładów z przedmiotu „Równania różniczkowe”, które prowadzę dla studentów drugiego semestru kierunku Automatyka i Robotyka na Wydziale Elektrotechniki i Automatyki Politechniki Gdańskiej. Program wykładów został dobrany z jednej strony pod kątem przydatności w dalszym toku studiów na tym kierunku, a z drugiej strony tak, aby istniała realna szansa jego realizacji czasie 30 godzin wykładu i takiej samej ilości ćwiczeń. Dodatkowe ograniczenia w możliwości pełnej argumentacji niektórych twierdzeń wynikają z faktu, że studenci drugiego semestru nie odbyli jeszcze całego kursu analizy matematycznej.

Skrypt jest dostępny w formie elektronicznej na mojej stronie domowej (www.mif.pgda.pl/homepages/graz). Na stronie tej zamieszczone są również programy komputerowe ilustrujące niektóre przykłady zawarte w skrypcie. Programy te zostały napisane przez studentów Matematyki Stosowanej w ramach prowadzonego przeze mnie laboratorium z układów dynamicznych.

Wojciech Grażewicz

Spis treści

1	Wiadomości wstępne z równań różniczkowych	5
1.1	Podstawowe definicje	5
1.2	Interpretacja geometryczna równania rzędu pierwszego	13
2	Podstawowe typy równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego	17
2.1	Równanie o zmiennych rozdzielonych	17
2.1.1	Równanie jednorodne	21
2.1.2	Trajektorie ortogonalne	23
2.2	Równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego	26
2.2.1	Równanie Bernoulliego	30
3	Równania różniczkowe wektorowe	34
3.1	Wiadomości wstępne	34
3.2	Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności	38
3.3	Układy liniowe	48
3.3.1	Macierz fundamentalna i jej własności	53
3.3.2	Rezolwenta układu liniowego	57
3.3.3	Układy liniowe o stałych współczynnikach	59
3.3.4	Metody wyznaczania macierzy e^{tA}	62
4	Skalarne równania liniowe rzędu n	75
4.1	Podstawowe definicje i twierdzenia	75
4.2	Skalarne równania liniowe o stałych współczynnikach	79
4.3	Rozwiązywanie niejednorodnych równań liniowych o stałych współczynnikach metodą przewidywań	85
4.4	Drgania liniowe	89
4.5	Równanie Eulera	94
4.6	Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą eliminacji	96

5	Interpretacja dynamiczna układów równań różniczkowych	99
5.1	Trajektorie fazowe	99
5.2	Całki pierwsze	108
6	Elementy teorii stabilności	115
6.1	Stabilność w sensie Lapunowa	115
6.2	Stabilność układów liniowych o stałych współczynnikach	118
6.3	Stabilność rozwiązań równania liniowego rzędu n	124
6.4	Stabilność rozwiązań układów nieliniowych.	126
6.5	Funkcja Lapunowa	134
7	Przekształcenie Laplace'a	139
7.1	Definicja i podstawowe własności przekształcenia Laplace'a	139
7.2	Przekształcenie odwrotne do przekształcenia Laplace'a	145
7.3	Zastosowanie przekształcenia Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych	147
7.4	Splot funkcji i jego własności	150
7.5	Transformata oryginału okresowego	152

1 Wiadomości wstępne z równań różniczkowych

1.1 Podstawowe definicje

Równania różniczkowe są to pewnego rodzaju równania funkcyjne, czyli takie równania, w których niewiadomą jest funkcja. W równaniu różniczkowym niewiadoma funkcja występuje pod znakiem pochodnej. Jeżeli niewiadoma jest funkcją jednej zmiennej, to równanie nazywa się równaniem różniczkowym zwyczajnym. Na przykład równania

$$y' + x^2y = \sin x, \quad y'' + 2yy' - y'^2 = 0$$

są równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Równania te wiążą zmienną niezależną x , niewiadomą funkcję y i jej pochodne y' , $y'' \dots$. Rząd najwyższej pochodnej występującej w równaniu nazywa się rzędem równania. Pierwsze z tych równań jest równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu pierwszego, a drugie równaniem rzędu drugiego. Jeżeli w równaniu występuje funkcja dwóch lub więcej zmiennych oraz jej pochodne cząstkowe pierwszego lub wyższych rzędów, to takie równanie nazywa się równaniem różniczkowym cząstkowym. Równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

w którym niewiadomą funkcją jest funkcja $u = u(x, t)$, jest przykładem równania różniczkowego cząstkowego rzędu drugiego. Tutaj zajmować się będziemy tylko równaniami różniczkowymi zwyczajnymi.

Niech dana będzie funkcja $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Równanie

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n w postaci *ogólnej*. Jeżeli z równania (1) można wyznaczyć $y^{(n)}$ przy pomocy pozostałych zmiennych, to otrzymamy związek

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{2}$$

który nazywamy równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu n w postaci *normalnej*.

Weźmy pod uwagę następujące równanie:

$$y' = x^2.$$

Poszukujemy funkcji $y = y(x)$, której pochodna jest równa x^2 . Takich funkcji jest oczywiście nieskończenie wiele. Każda z funkcji postaci

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

spełnia to równanie różniczkowe w całym \mathbb{R} . Mówimy wówczas, że rodzina funkcji $\{\frac{x^3}{3} + C : C \in \mathbb{R}\}$ stanowi *całkę ogólną* rozpatrywanego równania.

Rozpatrzmy teraz przykład równania różniczkowego rzędu drugiego:

$$y'' = x^2.$$

Całkując to równanie dwukrotnie otrzymamy

$$y(x) = \frac{1}{12}x^4 + C_1x + C_2, \text{ gdzie } C_1, C_2 \text{ są dowolnymi stałymi.}$$

W tym przypadku całka ogólna tego równania jest rodziną funkcji zależną od dwóch parametrów C_1 i C_2 .

Niech teraz D oznacza pewien obszar w \mathbb{R}^2 (przypomnijmy, że obszar jest to zbiór otwarty i spójny). Rozpatrzmy równanie różniczkowe rzędu pierwszego w postaci normalnej

$$y' = f(x, y), \quad (3)$$

gdzie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą.

Definicja 1.1 Rozwiązaniem równania (3) w przedziale $I \subset \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $y = y(x)$ określoną i różniczkowalną w I taką, że:

- 1) $\forall x \in I (x, y(x)) \in D$
- 2) $\forall x \in I y'(x) = f(x, y(x))$.

Pierwszy z tych warunków oznacza, że wykres funkcji $y(\cdot)$ zawarty jest w Obszarze D , a drugi, że funkcja $y(\cdot)$ spełnia równanie (3) na przedziale I . Z warunku 2) wynika ponadto, że rozwiązanie $y(\cdot)$ jest funkcją klasy $C^1(I)$.

Niech $y(\cdot)$ będzie rozwiązaniem równania (3) w przedziale $I \subset \mathbb{R}$. Jeżeli funkcja $\tilde{y}(\cdot)$ jest rozwiązaniem tego samego równania w przedziale $\tilde{I} \supset I$ i

$$\forall x \in I \tilde{y}(x) = y(x),$$

to mówimy, że rozwiązanie $\tilde{y}(\cdot)$ jest *przedłużeniem* rozwiązania $y(\cdot)$ na przedział \tilde{I} . Jeśli $\tilde{I} \neq I$, to przedłużenie \tilde{y} nazywa się *właściwym*. Jeżeli rozwiązanie $y(\cdot)$ równania (3) nie ma właściwego przedłużenia na żaden przedział $\tilde{I} \supset I$, to mówimy, że $y(\cdot)$ jest *rozwiązaniem globalnym*. Na przykład funkcja $y(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x \in \langle -1; 1 \rangle$ jest rozwiązaniem równania $y' = x^2$ na przedziale $\langle -1; 1 \rangle$, natomiast funkcja $y(x) = \frac{1}{3}x^3$, $x \in \mathbb{R}$, jest rozwiązaniem globalnym tego równania. Można udowodnić

Twierdzenie 1.1 Każde rozwiązanie równania (3) albo jest rozwiązaniem globalnym, albo można je przedłużyć do rozwiązania globalnego, które zawsze jest określone na pewnym przedziale otwartym $(\alpha; \beta) \subset \mathbb{R}$.

Definicja 1.2 *Zagadnieniem początkowym Cauchy'ego* dla równania rzędu pierwszego, nazywamy zagadnienie polegające na tym, żeby spośród wszystkich rozwiązań danego równania wyznaczyć to rozwiązanie, którego wykres przechodzi przez dany punkt $(x_0, y_0) \in D$. Zapisujemy to zagadnienie następująco:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in D. \end{cases} \quad (C)$$

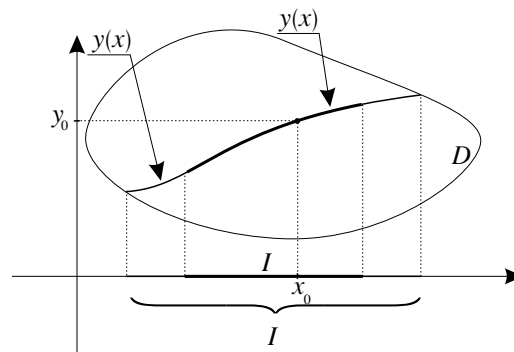
Złożone ono jest z równania różniczkowego

$$y' = f(x, y)$$

i warunku początkowego

$$y(x_0) = y_0.$$

Rozwiązanie zagadnienia (C) nazywamy *całką szczególną* równania $y' = f(x, y)$ spełniającą warunek początkowy $y(x_0) = y_0$. Wykres tego rozwiązania będziemy nazywali *krzywą całkową* danego równania przechodzącą przez punkt (x_0, y_0) . Później podamy ogólniejszą definicję krzywej całkowej równania różniczkowego. Poniższy rysunek ilustruje rozwiązanie zagadnienia początkowego Cauchy'ego i przedłużenie tego rozwiązania.



Rys. 1

Na przykład rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} y' = x^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

otrzymamy wstawiając do wzoru

$$y = \frac{1}{3}x^3 + C$$

na całkę ogólną tego równania, warunek początkowy $y(0) = 1$, stąd $C = 1$. Wówczas

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1$$

jest całką szczególną będącą rozwiązaniem tego zagadnienia. Całka ogólna równania rzędu drugiego jest rodziną funkcji zależną od dwóch parametrów. Dlatego warunek $y(x_0) = y_0$ nie wystarcza do jednoznacznego wyznaczenia całki szczególnej tego równania. W tym przypadku musimy dodać jeszcze jeden warunek.

Niech dane będzie równanie rzędu drugiego $y'' = f(x, y, y')$, gdzie f jest funkcją ciągłą w obszarze $D \subset \mathbb{R}^3$ oraz punkt $(x_0, y_0, y_1) \in D$.

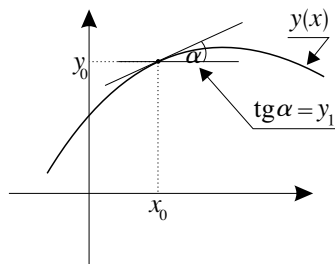
Definicja 1.3 *Zagadnieniem początkowym Cauchy'ego dla równania różniczkowego zwykłego rzędu drugiego* nazywamy zagadnienie polegające na wyznaczeniu takiej całki szczególnej $y(\cdot)$ tego równania, która spełnia warunki początkowe

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad (x_0, y_0, y_1) \in D.$$

Zagadnienie to zapisujemy

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1. \end{cases}$$

Interpretacja geometryczna tego zagadnienia jest następująca: należy znaleźć funkcję spełniającą dane równanie, której wykres przechodzi przez punkt (x_0, y_0) oraz styczna do wykresu w tym punkcie tworzy z osią Ox kąt, którego tangens jest równy y_1 . Zobacz rysunek.



Rys. 2

Podamy jeszcze interpretację fizyczną zagadnienia Cauchy'ego dla równania rzędu drugiego.

Rozpatrzmy ciało o masie m zawieszone na sprężynie i drgające wzdłuż osi Ox pod wpływem siły $f(t)$ zależnej od czasu. Oznaczmy wychylenie tego ciała od punktu 0 (punktu równowagi) przez x . Wychylenie to jest również funkcją czasu. Więc $x = x(t)$. Wtedy $x'(t)$ oznacza prędkość, a $x''(t)$ przyspieszenie ciała w chwili t . Zgodnie z drugą zasadą dynamiki Newtona, w każdej chwili t na ciało to działa siła $mx''(t)$, która jest równoważona przez przeciwnie do niej skierowane siły: $-px'(t)$ (siłę oporu ośrodka proporcjonalną do prędkości), $-kx(t)$ (siłę oporu sprężyny, proporcjonalną do wychylenia) i zgodnie z nią skierowaną siłę $f(t)$ wymuszającą drgania. Z porównania tych sił otrzymujemy równanie $mx''(t) = -p'x(t) - kx(t) + f(t)$, które zwykle zapisujemy w postaci

$$mx'' + px' + kx = f(t). \quad (4)$$

Jest to znane w fizyce równanie oscylatora, w tym przypadku mechanicznego. Równanie (4) jest równaniem różniczkowym zwyczajnym rzędu drugiego, z niewiadomą funkcją $x = x(t)$ opisującą drgania tego układu. Jeżeli obserwację drgań prowadzimy w przedziale czasowym $I = \langle t_0; \infty \rangle$, to na poszukiwaną funkcję możemy nałożyć warunki początkowe:

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0. \quad (5)$$

Zagadnienie Cauchy'ego złożone z równania (4) i warunków początkowych (5) polega na wyznaczeniu takiej funkcji $x(t)$ opisującej drgania układu, dla której wartość wychylenia początkowego ciała od punktu równowagi jest równa x_0 oraz prędkość początkowa tego ciała jest równa v_0 . \square

Podamy teraz definicję rozwiązania oraz definicję zagadnienia początkowego Cauchy'ego dla równania rzędu n -tego. Niech D będzie obszarem w \mathbb{R}^{n+1} i $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ – funkcją ciągłą. Rozpatrujemy równanie

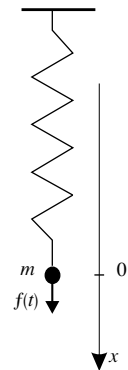
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (6)$$

Definicja 1.4 Rozwiązaniem równania (6) w przedziale $I \subset \mathbb{R}$ nazywamy funkcję $y = y(x)$, n -krotnie różniczkowalną w przedziale I , dla której spełnione są warunki

- 1) $\forall x \in I \quad (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in D$,
- 2) $\forall x \in I \quad y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$.

Zagadnieniem początkowym dla równania (6) nazywamy zagadnienie polegające na wyznaczeniu takiego rozwiązania $y(\cdot)$ tego równania, które spełnia warunki początkowe

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad (7)$$



Rys.3

gdzie $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ jest danym punktem z obszaru D . Zagadnienie to zapisujemy następująco

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases} \quad (C)$$

Powstaje pytanie: czy dla danego punktu $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$ istnieje rozwiązanie równania (6) spełniające warunki początkowe (7). Dodatkowo, jeśli takie rozwiązanie istnieje, to czy jest ono wyznaczone jednoznacznie. Odpowiedź na te pytania dają twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego, którymi zajmiemy się później. Przyjmijmy teraz

Definicja 1.5 Punkt $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in D$ nazywamy *punktem jednoznaczności* równania (6), jeżeli istnieje otoczenie $I_{x_0} \subset \mathbb{R}$ punktu x_0 takie, że zagadnienie (C) ma na tym otoczeniu dokładnie jedno rozwiązanie.

Jeżeli punkt $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ jest punktem jednoznaczności równania (6), to przez ten punkt może przechodzić nawet nieskończenie wiele rozwiązań globalnych, ale lokalnie, na dostatecznie małym otoczeniu punktu x_0 , musi istnieć dokładnie jedno rozwiązanie. Zilustrujemy to następującym przykładem

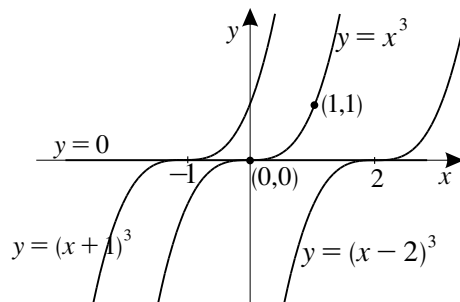
Przykład 1.1 Rozpatrzmy równanie

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \quad (8)$$

które jest równaniem rzędu pierwszego. W tym przypadku funkcja $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ jest określona i ciągła na zbiorze $D = \mathbb{R}^2$. Zauważymy, że każda funkcja postaci $y = (x - C)^3$ spełnia to równanie na $I = \mathbb{R}$. Istotnie

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \left((x - C)^3 \right)' = 3(x - C)^2 = 3 \left((x - C)^3 \right)^{\frac{2}{3}}$$

Poniższy rysunek przedstawia wykresy kilku rozwiązań tego równania.



Rys. 4

Rozpatrzmy punkt $(0, 0) \in D$. Przez ten punkt przechodzi krzywa całkowa o równaniu $y = x^3$. Jednak nie tylko ta krzywa. Zauważymy, że funkcja $y = 0$ też spełnia dane równanie i przechodzi przez punkt $(0, 0)$. Również funkcje

$$y = \begin{cases} x^3 & \text{dla } x \in \langle 0, \infty \rangle \\ 0 & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \end{cases}, \quad y = \begin{cases} (x-2)^3 & \text{dla } x \in (2, \infty) \\ 0 & \text{dla } x \in \langle -1, 2 \rangle \\ (x+1)^3 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \end{cases}$$

są rozwiązaniami globalnymi tego równania, spełniającymi warunek początkowy

$$y(0) = 0. \quad (9)$$

Zachodzi pytanie, czy istnieje takie otoczenie punktu $x_0 = 0$, w którym istniałoby dokładnie jedno rozwiązanie równania (8) spełniające warunek początkowy (9). Oczywiście takiego otoczenia nie ma. W każdym otoczeniu punktu $x_0 = 0$ istnieją co najmniej dwa takie rozwiązania. Punkt $(0, 0)$ nie jest punktem jednoznaczności. Podobnie, każdy punkt krzywej całkowej $y = 0$ równania (8), nie jest punktem jednoznaczności tego równania. Rozwiązanie danego równania, które ma tę własność, że w każdym punkcie jego wykresu naruszona jest jednoznaczność rozwiązań, nazywa się *rozwiązaniem osobliwym*.

Rozpatrzmy teraz punkt $(1, 1) \in D$. Przez ten punkt przechodzi krzywa całkowa o równaniu $y = x^3$. Chociaż przez ten punkt przechodzą również inne krzywe całkowe rozpatrywanego równania, to lokalnie, na dostatecznie małym otoczeniu punktu $x_1 = 1$, krzywa o równaniu $y = x^3$ jest jedynym rozwiązaniem równania (8) spełniającym warunek początkowy $y(1) = 1$. Punkt $(1, 1)$ jest więc punktem jednoznaczności tego równania. Rozwiązanie $y = x^3$ jest *rozwiązaniem regularnym*. Można je otrzymać podstawiając do całki ogólnej $y = (x - C)^3$, $C = 0$. Każda funkcja zawarta w całce ogólnej jest rozwiązaniem regularnym. Całki osobliwe nie można otrzymać z całki ogólnej przez dobór stałej C (włącznie z $C = \pm\infty$). Pełne rozwiązanie równania (8) składa się zatem z rozwiązań regularnych tkwiących w całce ogólnej i z rozwiązania osobliwego $y = 0$. \square

Podamy teraz definicję całki ogólnej równania (6).

Definicja 1.6 *Całką ogólną równania*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (6)$$

nazywamy rodzinę funkcji

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \text{ gdzie } x \in I$$

zależną od n parametrów C_1, C_2, \dots, C_n i mającą tę własność, że dla każdego punktu jednoznaczności $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in D$ istnieje dokładnie jeden układ parametrów

$(C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ taki, że funkcja $y(x) = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ jest rozwiązaniem na I zagadnienia

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Innymi słowy układ równań

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, \dots, C_n) \\ y_1 = \varphi'(x_0, C_1, \dots, C_n) \\ \vdots \\ y_{n-1} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \dots, C_n) \end{cases}$$

z niewiadomymi C_1, \dots, C_n ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Całka ogólna równania (6) może być również zapisana w postaci uwikłanej za pomocą równania

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0.$$

Przykład 1.2 Sprawdzić, że całką ogólną równania

$$y' = \frac{2x + y}{x - 2y} \quad (10)$$

jest rodzina krzywych danych równaniem

$$\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - C = 0. \quad (11)$$

R o z w i ą z a n i e : Różniczkując równanie (11) obustronnie względem x i pamiętając o tym, że y występujące w tym równaniu jest funkcją zmiennej x , otrzymamy

$$\frac{1}{x^2 + y^2}(2x + 2yy') - \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(\frac{xy' - y}{x^2} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} - \frac{xy' - y}{x^2 + y^2} = 0,$$

stąd

$$2x + 2yy' - xy' + y = 0,$$

czyli

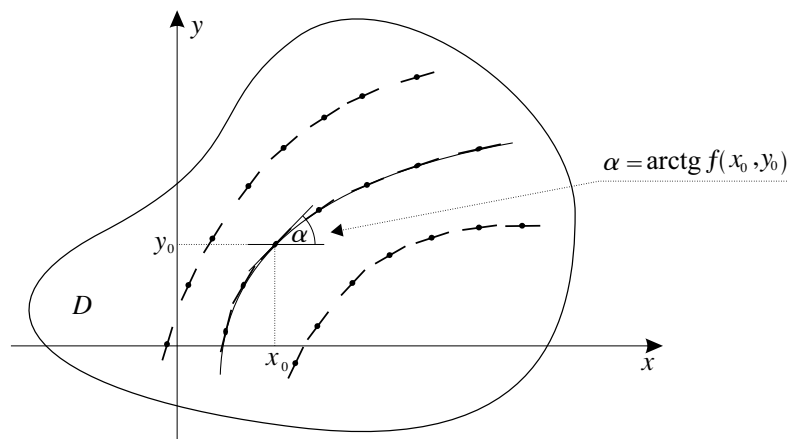
$$y' = \frac{2x + y}{x - 2y}.$$

1.2 Interpretacja geometryczna równania rzędu pierwszego

Weźmy pod uwagę równanie

$$y' = f(x, y),$$

w którym f jest funkcją ciągłą na pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$. Niech (x_0, y_0) będzie dowolnym punktem z obszaru D i niech $y = y(x)$ będzie całką tego równania przechodzącą przez punkt (x_0, y_0) . Wówczas $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. Jednocześnie $y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, gdzie α jest kątem jaki tworzy styczna do wykresu funkcji $y = y(x)$ w punkcie (x_0, y_0) z dodatnim kierunkiem osi Ox . Rozważmy odcinek, którego środkiem jest punkt (x_0, y_0) i który tworzy z dodatnim kierunkiem osi Ox kąt $\alpha = \operatorname{arctg} f(x_0, y_0)$. Odcinek ten nazywamy *elementem liniowym* danego równania. Z każdym punktem $(x, y) \in D$ związany jest zatem element liniowy. Zbiór wszystkich elementów liniowych danego równania nazywa się *polem kierunków* tego równania. Linie, które w każdym swoim punkcie mają kierunek zgodny z kierunkiem pola w tym punkcie, także nazywają się *krzywymi całkowymi* danego równania. Zobacz rysunek 5.



Rys. 5

Izokliną równania $y' = f(x, y)$ nazywamy linię o równaniu $f(x, y) = a$, gdzie a jest pewną stałą należącą do zbioru $f(D)$. W każdym punkcie takiej izokliny jest $y' = a = \operatorname{const}$, więc elementy kierunkowe pola kierunków nachylone są do osi Ox pod stałym kątem $\alpha = \operatorname{arctg} a$. Metoda graficznego, przybliżonego znajdowania krzywych całkowych danego równania w oparciu o jego pole kierunków nazywa się *metodą izoklin*.

Rozpatrzmy teraz równanie

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}, \quad (12)$$

w którym P i Q są funkcjami ciągłymi na obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$. Załóżmy, że w pewnym punkcie $(x_0, y_0) \in D$ jest $P(x_0, y_0) \neq 0$, i $Q(x_0, y_0) = 0$. Wtedy $y'(x_0)$ nie istnieje. W

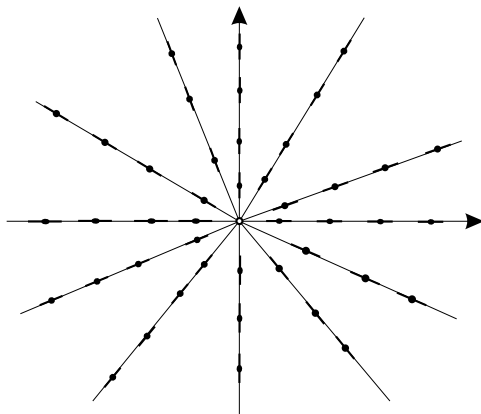
takim przypadku możemy rozpatrzyć równanie

$$\frac{dx}{dy} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (13)$$

w którym niewiadomą jest funkcja x zmiennej niezależnej y . Prawa strona równania (13) w punkcie (x_0, y_0) jest równa zero. Oznacza to, że w tym punkcie styczna do wykresu funkcji $x = x(y)$, będącej rozwiązaniem równania (13), tworzy z dodatnim kierunkiem osi Oy kąt o mierze 0° . Zatem element kierunkowy w tym punkcie jest prostopadły do osi Ox . Jeżeli natomiast w pewnym punkcie (x_0, y_0) jest $P(x_0, y_0) = 0$ i $Q(x_0, y_0) = 0$, to w otoczeniu tego punktu nie można rozpatrywać ani równania (12), ani (13). Taki punkt nazywa się *punktem osobliwym* równań (12) i (13). Przez ten punkt nie przechodzi żadna krzywa całkowa tych równań. Na przykład w równaniu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

izokliny określone są równaniami $\frac{y}{x} = a$, $a \in \mathbb{R}$, czyli są półprostymi $y = ax$, $x \neq 0$. Półproste te są zarazem krzywymi całkowymi rozważanego równania. W punktach $(0, y) \neq (0, 0)$ jest $\frac{dx}{dy} = 0$, więc elementy kierunkowe w tych punktach są prostopadłe do osi Ox . Półproste $x = 0$ dla $y > 0$ oraz $x = 0$ dla $y < 0$ też są krzywymi całkowymi rozpatrywanego równania. Punkt $(0, 0)$ jest jego punktem osobliwym. Zobacz poniższy rysunek.



Rys. 6

Okazuje się, że krzywe całkowe równań (12) i (13) są tymi samymi krzywymi. Uzasadniony jest więc następujący zapis obu tych równań jednocześnie

$$P(x, y) dx = Q(x, y) dy, \quad (14)$$

w którym x i y traktowane są równoprawnie. Od nas zależy, którą z tych zmiennych uznamy za niezależną, a którą za zależną. Taka postać równania rzędu pierwszego nazywa się *postacią symetryczną*.

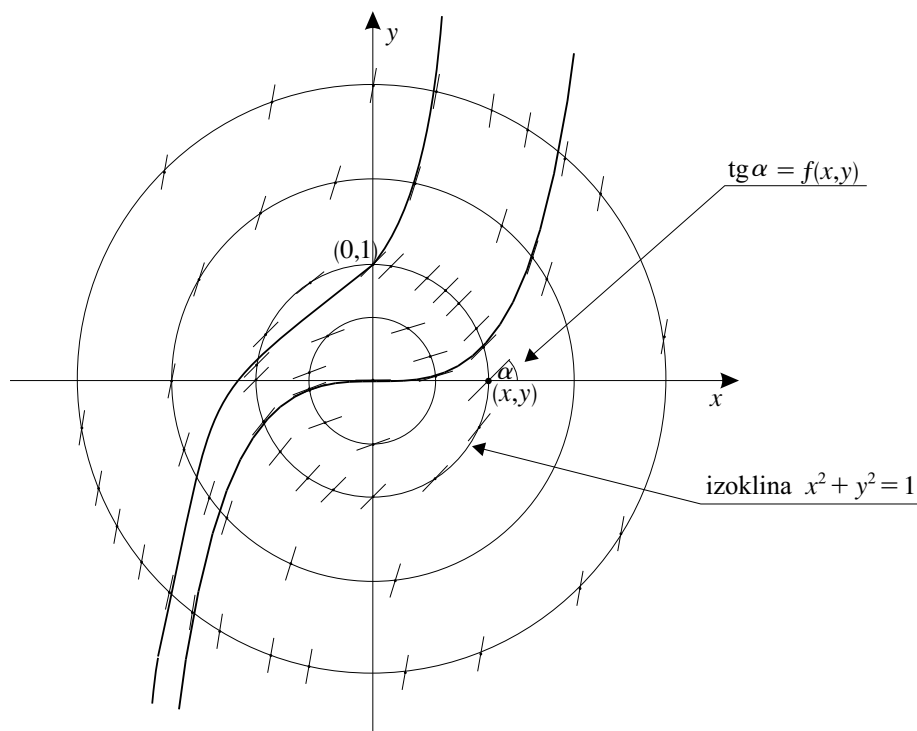
Przykład 1.3 Metodą izoklin wyznaczmy krzywe całkowe równania

$$y' = x^2 + y^2$$

W tym przypadku

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in D = \mathbb{R}^2.$$

Izoklinami są linie o równaniach $x^2 + y^2 = a$, $a \geq 0$. Dla $a = 0$ izoklina składa się wyłącznie z punktu $(0, 0)$ i jest to jedyny punkt płaszczyzny, w którym element kierunkowy ma nachylenie równe 0° . Pozostałe izokliny są okręgami. Przykładowo, na izoklinie $x^2 + y^2 = 1$ nachylenie elementów kierunkowych wynosi 45° . Przykładowe izokliny, pole kierunków i dwie krzywe całkowe równania $y' = x^2 + y^2$ przedstawiono na rys. 7.



Rys. 7

□

Równanie z ostatniego przykładu, choć wygląda na dość proste, nie da się rozwiązać w sposób efektywny. Całki tego równania nie są funkcjami elementarnymi. Można je wyznaczyć w sposób przybliżony graficznie, tak jak to zrobiliśmy wyżej, lub też można wyznaczyć jego przybliżone rozwiązania metodami analitycznymi. Jedną z takich metod omówimy w dalszej części.

Ćwiczenia

1. Wyznaczyć całki ogólne równań:

a) $y' = \sin^3 x$;

Odp. $y = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$.

b) $y'' = e^x + \frac{3}{4} x^{-\frac{5}{2}}$;

Odp. $y = e^x + \frac{1}{\sqrt{x}} + C_1 x + C_2$.

c) $y''' = -\cos x$;

Odp. $y = \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.

2. Znaleźć całkę ogólną, a następnie całkę szczególną równania różniczkowego spełniającego podane warunki początkowe:

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$, $y(0) = 0$

Odp. $y = 2[\sqrt{x} - \ln(\sqrt{x} + 1)]$.

b) $y' = \frac{\ln x}{x}$, $y(e) = 1$

Odp. $y = \frac{1}{2}(\ln^2 x + 1)$.

c) $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Odp. $y = -\ln \cos x$.

d) $y'' = \frac{1}{x}$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -1$

Odp. $y = x(\ln x - 2) + 2$.

3. Wyznaczyć całki ogólne równań:

a) $y' = \sin y$;

b) $y' + y - 1 = 0$;

Odp. $\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}\right) = Ce^x$.

Odp. $y = 1 + Ce^{-x}$.

4. Metodą izoklin naszkicować krzywe całkowe równań:

a) $y' = x^2 - y^2$;

b) $y' = \sin(x + y)$;

c) $y' = \frac{x + 2y}{2x - y}$.

2 Podstawowe typy równań różniczkowych zwyczajnych rzędu pierwszego

2.1 Równanie o zmiennych rozdzielonych

Definicja 2.1 *Równaniem o zmiennych rozdzielonych* nazywamy równanie postaci

$$y' = g(x)h(y), \quad (1)$$

gdzie funkcje $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ i $h : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi.

Twierdzenie 2.1 *Jeżeli funkcje $g = g(x)$ i $h = h(y)$ są ciągłe odpowiednio w przedziałach $(a; b)$ i $(c; d)$ oraz $h(y) \neq 0$ dla każdego $y \in (c; d)$, to dla każdego punktu $(x_0, y_0) \in D = (a; b) \times (c; d)$, zagadnienie początkowe Cauchy'ego*

$$\begin{cases} y' = g(x)h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (C)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

D o w ó d. Załóżmy, że funkcja $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $I \subset (a, b)$ i $x_0 \in I$, jest rozwiązaniem zagadnienia (C) w przedziale I . Wtedy

$$\forall_{x \in I} \quad y'(x) = g(x)h(y(x)) \quad \text{oraz} \quad y(x_0) = y_0.$$

Stąd

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x).$$

Całkując ostatnią równość w przedziale $\langle x_0; x \rangle$, $x \in I$, otrzymamy

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{h(y(t))} dt = \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

W całce po lewej stronie dokonujemy podstawienia $y(t) = u$. Wtedy $y'(t)dt = du$ oraz

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{du}{h(u)} = \int_{x_0}^x g(t) dt,$$

czyli

$$\int_{y_0}^{y(x)} \frac{du}{h(u)} = \int_{x_0}^x g(t) dt. \quad (2)$$

Oznaczmy przez H funkcję pierwotną funkcji $\frac{1}{h}$, a przez G – funkcję pierwotną funkcji g . Wówczas związek (2) możemy zapisać w postaci

$$H(y(x)) - H(y_0) = G(x) - G(x_0),$$

lub

$$H(y(x)) = G(x) - G(x_0) + H(y_0), \quad x \in I. \quad (3)$$

Z założenia funkcja $h(\cdot)$ jest ciągła i różna od 0 na przedziale $(c; d)$. Zatem h jest stałego znaku na $(c; d)$, więc także funkcja $H'(y) = \frac{1}{h(y)}$ jest stałe dodatnia, albo stałe ujemna na przedziale $I \subset (c; d)$. Wynika stąd, że funkcja H , jako ściśle monotoniczna na I , jest różnowartościowa. Stąd posiada ona jednoznacznie określoną funkcję odwrotną H^{-1} . Związek (3) można zatem zapisać w postaci

$$y(x) = H^{-1}[G(x) - G(x_0) + H(y_0)], \quad x \in I. \quad (4)$$

Oznacza to, że jeżeli rozwiązanie zagadnienia (C) istnieje, to wyraża się ono wzorem (4). Sprawdźmy teraz, że funkcja określona wzorem (4) jest faktycznie rozwiązaniem zagadnienia (C). Istotnie, różniczkując obustronnie na przedziale I równanie (4) (lub równoważne równanie (3)) otrzymamy

$$\forall x \in I \quad \frac{1}{h(y(x))} \cdot y'(x) = g(x),$$

czyli

$$y'(x) = h(y(x)) \cdot g(x) \quad \text{dla } x \in I.$$

Funkcja $y(\cdot)$ spełnia więc na I równanie (1). Ponadto z (4) dla $x = x_0$ otrzymujemy

$$y(x_0) = H^{-1}[G(x_0) - G(x_0) + H(y_0)] = y_0,$$

więc funkcja $y(\cdot)$ spełnia zadany warunek początkowy. Ponieważ wszystkie funkcje występujące we wzorze (4) są jednoznacznie wyznaczone przez funkcje występujące w równaniu (1), więc rozwiązanie zagadnienia (C) zostało wyznaczone jednoznacznie.

□

Rozwiązanie zagadnienia (C) tradycyjnie zapisujemy w postaci

$$\int_{y_0}^y \frac{du}{h(u)} = \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad (5)$$

a całkę ogólną równania (1) w postaci

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + C. \quad (6)$$

Na zakończenie zauważymy, że jeśli dla pewnego $y_1 \in (c; d)$ jest $h(y_1) = 0$, to funkcja stała $y(x) = y_1$, $x \in (a; b)$, też jest całką równania (1). Należy ją dołączyć do zbioru całek określonych równaniem (6).

Przykład 2.1 Wyznaczymy rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 1}{xy} \\ y(-2) = 1. \end{cases} \quad (7)$$

Funkcje

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{i} \quad h(y) = \frac{y^2 + 1}{y}$$

są ciągle odpowiednio dla $x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ i $y \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$. Zatem obszarem D istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 1}{xy} \quad (8)$$

jest każdy z czterech obszarów określonych nierównościami: $D_1 = \{(x, y) : x > 0, y > 0\}$, $D_2 = \{(x, y) : x < 0, y > 0\}$, $D_3 = \{(x, y) : x < 0, y < 0\}$, $D_4 = \{(x, y) : x > 0, y < 0\}$. Z uwagi na warunek początkowy $y(-2) = 1$, wybieramy obszar D_2 . Wobec (5) mamy

$$\int_1^y \frac{u \, du}{u^2 + 1} = \int_{-2}^x \frac{1}{t} \, dt.$$

Stąd

$$\frac{1}{2} \ln |u^2 + 1| \Big|_1^y = \ln |t| \Big|_{-2}^x,$$

więc także

$$\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) - \frac{1}{2} \ln 2 = \ln |x| - \ln |-2|.$$

Po przekształceniach otrzymamy

$$y^2 = \frac{1}{2}x^2 - 1 \quad \text{oraz} \quad y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}, \quad |x| \geq \sqrt{2}.$$

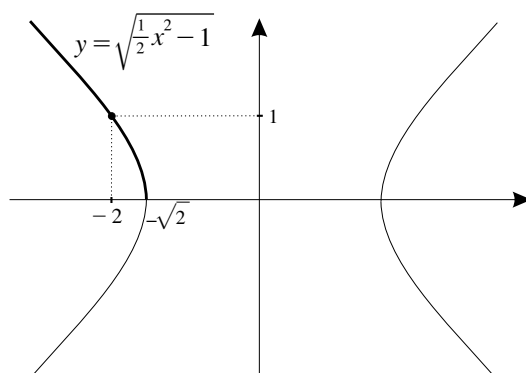
Dla $(x, y) \in D_2$ mamy

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}x^2 - 1}, \quad x \in (-\infty; -\sqrt{2})$$

i jest to rozwiązanie zagadnienia (7). To rozwiązanie na poniższym rysunku zaznaczone jest pogrubioną linią. Jest to część hiperboli

$$\frac{1}{2}x^2 - y^2 = 1.$$

Warto zauważyć, że każda z jej gałęzi jest krzywą całkową równania (8).



Rys. 1

Przykład 2.2 Wyznaczyć całkę ogólną równania

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{\sin x}, \quad (9)$$

a następnie całkę szczególną spełniającą warunek:

$$\text{a) } y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1, \quad \text{b) } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

Rozwiązanie:

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych określone dla $x \neq k\pi$ i $y > 0$. Zakładając, że $y \neq 1$ przedstawiamy równanie powyższe w postaci

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Stąd, zgodnie z wzorem (6), całkę ogólną otrzymamy z zależności

$$\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}.$$

Obliczając całki po obu stronach dostaniemy

$$\ln |\ln y| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

W przypadku, gdy po scałkowaniu otrzymujemy po lewej stronie równania funkcję $y(\cdot)$ pod znakiem logarytmu naturalnego, to wygodnie jest stałą C_1 zapisać w postaci: $C_1 = \ln |C_2|$, gdzie C_2 jest dowolną stałą różną od zera. Mamy zatem

$$\ln |\ln y| = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \ln |C_2|$$

oraz

$$\ln |\ln y| = \ln \left| C_2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

Pozbywając się logarytmów i modułów po obu stronach znaku równości otrzymamy

$$\ln y = \pm C_2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Przyjmijmy teraz $C = \pm C_2$. Zatem

$$\ln y = C \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

a stąd

$$y = e^{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}, \quad C \neq 0. \quad (10)$$

Zauważmy, że funkcja stała $y = 1$, $x \neq k\pi$, też jest całką równania (9). Dołączamy ją więc do zbioru całek zawartych we wzorze (10). Otrzymujemy ostatecznie całkę ogólną równania (9)

$$\underline{y = e^{C \operatorname{tg} \frac{x}{2}}, \quad x \neq k\pi, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Wstawiając teraz warunki początkowe do wzoru na całkę ogólną, obliczamy w przypadku a) $C = 0$ i w przypadku b) $C = 1$. Stąd

O d p: Rozwiązaniem szczególnym spełniającym warunek $y(\frac{3}{2}\pi) = 1$ jest funkcja stała $y = 1$, $x \in (\pi; 2\pi)$, natomiast rozwiązaniem szczególnym, spełniającym warunek $y(\frac{\pi}{2}) = e$, jest funkcja dana wzorem $y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$, $x \in (0; \pi)$.

2.1.1 Równanie jednorodne

Pewne typy równań różniczkowych rzędu pierwszego dają się doprowadzić, przez odpowiednią zamianę zmiennych, do równań o zmiennych rozdzielonych. Jednym z nich jest równanie postaci

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (11)$$

zwane *równaniem jednorodnym*. O występującej w nim funkcji f zakładamy, że jest ciągła w pewnym przedziale $I \subset \mathbb{R}$. Równanie jednorodne doprowadzamy do równania o zmiennych rozdzielonych przez podstawienie

$$u = \frac{y}{x},$$

to znaczy $u(x) = \frac{y(x)}{x}$. Wtedy

$$y = u \cdot x \quad \text{oraz} \quad y' = u'x + u$$

(prawą stronę różniczkowaliśmy tak jak iloczyn dwóch funkcji). Zatem równanie (11) możemy teraz zapisać w postaci

$$u'x + u = f(u),$$

w którym niewiadomą jest funkcja u zmiennej niezależnej x . Ostatnie równanie jest już równaniem o zmiennych rozdzielonych. Przy dodatkowym założeniu, że $f(u) \neq u$, jego całkę ogólną możemy przedstawić w postaci

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Rozpatrzmy następujący przykład.

Przykład 2.3 Wyznaczyć i naszkicować krzywą całkową równania

$$y' = \frac{2x + y}{x - 2y} \quad (12)$$

przechodzącą przez punkt $P(1, 0)$.

R o z w i ą z a n i e : Wyznamy najpierw całkę ogólną równania (12). Równanie to przedstawiamy w postaci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 + \frac{y}{x}}{1 - 2\frac{y}{x}}. \quad (12')$$

Podstawiając

$$u = \frac{y}{x} \quad \text{oraz} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u$$

do (12') otrzymujemy

$$\frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{2 + u}{1 - 2u}$$

i stąd

$$\frac{du}{dx} x = \frac{2(u^2 + 1)}{1 - 2u}.$$

Po rozdzieleniu zmiennych mamy

$$\frac{1 - 2u}{2(u^2 + 1)} du = \frac{dx}{x}$$

oraz kolejno

$$\int \frac{1 - 2u}{2(u^2 + 1)} du = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \left(\frac{1}{u^2 + 1} - \frac{2u}{u^2 + 1} \right) du = 2 \int \frac{dx}{x}$$

i

$$\operatorname{arctg} u - \ln(u^2 + 1) = 2 \ln |x| + C.$$

Wracając do zmiennych x i y dostajemy

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln \left(\frac{y^2}{x^2} + 1 \right) = \ln x^2 + C$$

i ostatecznie

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln(x^2 + y^2) = C. \quad (13)$$

Wzór (13) określa pewną rodzinę krzywych na płaszczyźnie, w których zawarte są wykresy wszystkich rozwiązań równania (12). Krzywe te są więc krzywymi całkowymi badanego równania, a całka ogólna określona wzorem (13) dana jest tym razem w postaci uwikłanej. Znajdziemy teraz krzywą całkową przechodzącą przez punkt $P(1, 0)$. Wstawiając do (13) $x = 1$ i $y = 0$ otrzymamy $C = 0$, stąd poszukiwana krzywa określona jest równaniem

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \ln(x^2 + y^2) = 0.$$

W celu narysowania tej krzywej przejdziemy do współrzędnych biegunowych. Podstawiamy

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Wtedy

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{oraz} \quad \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \varphi.$$

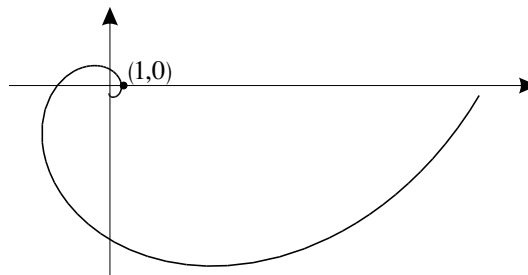
Otrzymamy

$$\varphi - \ln r^2 = 0$$

i ostatecznie poszukiwana krzywa ma równanie biegunowe

$$r = e^{\frac{\varphi}{2}}.$$

Łatwo teraz ją narysować. Dla $\varphi = 0$ jest $r = 1$. Ze wzrostem φ , rośnie długość promienia wodzącego r . Jeśli $\varphi \rightarrow -\infty$, to r maleje do 0. Krzywa ta nazywa się spiralą logarytmiczną i jej szkic przedstawiono na rys. 2.



Rys. 2

2.1.2 Trajektorie ortogonalne

Z danym równaniem różniczkowym związana jest rodzina krzywych stanowiąca całość ogólną tego równania. Można rozpatrzyć zagadnienie odwrotne: mając daną rodzinę

$$F(x, y, a) = 0 \quad (14)$$

krzywych na płaszczyźnie, znaleźć równanie różniczkowe, którego całką ogólną jest rodzina (14). W celu wyznaczenia tego równania, różniczkujemy równanie (14) obustronnie względem x . Otrzymujemy wtedy równanie

$$G(x, y, y', a) = 0, \quad (15)$$

w którym na ogół występuje jeszcze parametr a . Parametr ten musimy z równania wyrugować. Można to zrobić np. przez wyliczenie a z równania (14) i wstawienie go do równania (15). Otrzymamy równanie

$$H(x, y, y') = 0, \quad (16)$$

które jest równaniem różniczkowym rodziny krzywych (14).

Definicja 2.2 *Trajektorią ortogonalną* danej rodziny krzywych nazywamy krzywą, która przecina każdą krzywą danej rodziny pod kątem prostym.

Na przykład rodzina okręgów $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$, jest rodziną trajektorii ortogonalnych rodziny prostych $y - ax = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Krzywe przecinają się pod kątem prostym, jeżeli współczynniki kierunkowe m_1 i m_2 , stycznych do tych krzywych w ich punkcie przecięcia, spełniają warunek $m_1 m_2 = -1$. Zatem równanie różniczkowe trajektorii ortogonalnych otrzymamy wstawiając $-\frac{1}{y'}$ zamiast y' w równaniu (16). Dostaniemy równanie

$$H\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0. \quad (17)$$

Krzywe całkowite równania (17) stanowią rodzinę trajektorii ortogonalnych rodziny (14).

Przykład 2.4 Wyznaczyć trajektorie ortogonalne rodziny linii

$$(y - 2)^2 = 2a(x + 1), \quad a \neq 0. \quad (\star)$$

R o z w i ą z a n i e : Jest to rodzina parabol o wierzchołkach w punkcie $(-1, 2)$, dla których prosta $y = 2$ jest osią symetrii. Różniczkujemy równanie (\star) obustronnie względem x . Otrzymamy

$$2(y - 2)y' = 2a. \quad (\star\star)$$

Po wyrugowaniu z równań (\star) i $(\star\star)$ parametru a dostajemy równanie

$$y' = \frac{y - 2}{2(x + 1)},$$

które jest równaniem różniczkowym rodziny (\star) . Zamieniamy teraz y' na $-\frac{1}{y'}$ i otrzymujemy równanie różniczkowe poszukiwanej rodziny trajektorii ortogonalnych

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y - 2}{2(x + 1)}.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Rozdzielając zmienne, otrzymujemy

$$\int (y - 2) dy = -2 \int (x + 1) dx$$

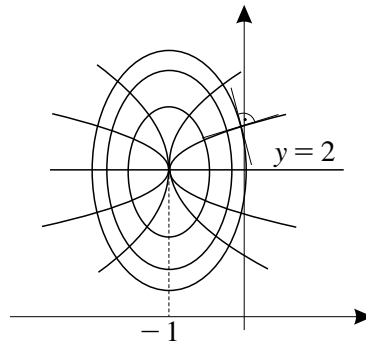
więc całką ogólną jest

$$\frac{1}{2}y^2 - 2y = -x^2 - 2x + C$$

i można ją zapisać w postaci

$$\frac{1}{2}(y - 2)^2 + (x + 1)^2 = C + 3, \quad C > -3.$$

Poszukiwaną rodziną trajektorii ortogonalnych jest więc rodzina elips o środkach w punkcie $(-1, 2)$.



Rys. 3

Ćwiczenia

1. Wyznaczyć całkę ogólną równania:

a) $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$;

Odp. $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cx^2$.

c) $y' = \frac{x + y}{x - y}$;

Odp. $\arctg \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C$.

b) $y' = x^2(y^2 - 1)$

Odp. $\frac{y - 1}{y + 1} = C e^{\frac{2}{3}x^3}$.

d) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$;

Odp. $y = x e^{1+Cx}$.

2. Równania typu $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ przy $ab_1 - a_1b \neq 0$ sprowadza się do równania jednorodnego przez podstawienie $x = \xi + \alpha$, $y = \eta + \beta$, gdzie (α, β) – punkt przecięcia prostych $ax + by + c = 0$, $a_1x + b_1y + c_1 = 0$. Jeśli natomiast $ab_1 - a_1b = 0$, to podstawienie $u = ax + by + c$ pozwala sprowadzić to równanie do równania o

zmiennych rozdzielonych.

Wyznaczyć całkę ogólną równania:

a) $(x + y + 1) dx + (2x + 2y - 1) dy = 0$; b) $(2x - y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0$;

Odp. $x + 2y + 3 \ln(x + y - 2) = C$. Odp. $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$.

3. Znaleźć krzywą całkową równania przechodzącą przez zadany punkt P :

a) $(1 + e^x)yy' = e^x$, $P(1, 1)$;

Odp. $y^2 - 1 = 2 \ln(e^x + 1) - 2 \ln(e + 1)$.

b) $y' = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$, $P(-1, 0)$.

Odp. $x^2 - 2y^2 = 1$, $x \leq -1$.

4. Określić kształt powierzchni obrotowej lustra reflektora przekształcającego wiązkę świetlną wychodzącą z jednego punktu w wiązkę równoległą.

Odp. Paraboloida obrotowa.

5. Znaleźć trajektorie ortogonalne danej rodziny:

a) okręgów $x^2 + y^2 = 2ax$;

Odp. $x^2 + (y - \frac{C}{2})^2 = \frac{C^2}{4}$.

b) parabol $y^2 = 4(x - a)$;

Odp. $y = Ce^{-\frac{x}{2}}$.

c) lemniskat $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Odp. $(x^2 + y^2)^2 - Cxy = 0$.

2.2 Równanie różniczkowe liniowe rzędu pierwszego

Definicja 2.3 *Równaniem różniczkowym liniowym rzędu pierwszego nazywamy równanie*

$$y' + p(x)y = f(x), \quad (18)$$

gdzie funkcje p i f są określone i ciągłe na wspólnym przedziale $I \subset \mathbb{R}$.

Jeżeli $f(x) = 0$ dla każdego $x \in I$, to równanie

$$y' + p(x)y = 0 \quad (19)$$

nazywa się *równaniem liniowym jednorodnym* (RJ), w przeciwnym przypadku równanie (18) nazywa się *równaniem liniowym niejednorodnym* (RN).

Zacznijmy od rozwiązania równania (19), czyli od RJ. Przepisując je w postaci

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y$$

zauważamy, że jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Stąd, po rozdzieleniu zmiennych, otrzymamy

$$\int \frac{dy}{y} = - \int p(x) dx.$$

Zatem całką ogólną równania jednorodnego (oznaczać ją będziemy krótko CORJ) jest rodzina funkcji

$$y = Ce^{-P(x)}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \in I, \quad (\text{CORJ})$$

gdzie $P(x)$, $x \in I$ jest dowolną, ale ustaloną, funkcją pierwotną funkcji $p(\cdot)$.

Przejdziemy teraz do rozwiązania równania niejednorodnego. Metoda, którą tu przedstawiamy, nosi nazwę *metody uzmienniania stałej*. Polega ona na tym, że stałą C występującą we wzorze na CORJ zastępujemy chwilowo nieznaną funkcją $C(x)$ (uzmienniamy stałą C), którą musimy tak dobrać, aby funkcja

$$y = C(x)e^{-P(x)}, \quad x \in I \quad (20)$$

spełniała RN. Ze wzoru (20) dla $x \in I$ obliczamy

$$y' = C'(x)e^{-P(x)} + C(x)e^{-P(x)}(-p(x)). \quad (21)$$

Podstawiamy teraz y i y' do RN (18) i otrzymujemy na przedziale I

$$C'(x)e^{-P(x)} - C(x)e^{-P(x)}p(x) + p(x)C(x)e^{-P(x)} = f(x).$$

Stąd

$$C'(x) = f(x)e^{P(x)}$$

i wobec tego

$$C(x) = \int f(x)e^{P(x)} dx + C,$$

gdzie C jest dowolną stałą. Wstawiamy teraz wyznaczoną funkcję $C(x)$ do wzoru (20). Dostaniemy

$$y = \left(\int f(x)e^{P(x)} dx + C \right) e^{-P(x)}$$

Stąd ostatecznie

$$y = Ce^{-P(x)} + e^{-P(x)} \int f(x)e^{P(x)} dx. \quad (22)$$

Oznaczmy drugi składnik we wzorze (22) przez $y_f(x)$, czyli

$$y_f(x) = e^{-P(x)} \int f(x)e^{P(x)} dx.$$

Mamy zatem

$$y = Ce^{-P(x)} + y_f(x). \quad (23)$$

Okazuje się, że funkcja y_f jest całką szczególną równania liniowego niejednorodnego (18). Istotnie. Obliczając $y'_f(x)$, a następnie wstawiając y'_f i y_f do lewej strony równania (18) otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} y'_f(x) &= \left(e^{-P(x)} \right)' \int f(x)e^{P(x)} dx + e^{-P(x)} \left(\int f(x)e^{P(x)} dx \right)' = \\ &= -p(x)e^{-P(x)} \int f(x)e^{P(x)} dx + e^{-P(x)} f(x)e^{P(x)} = \\ &= -p(x)e^{-P(x)} \int f(x)e^{P(x)} dx + f(x), \\ y'_f(x) + p(x)y_f(x) &= -p(x)e^{-P(x)} \int f(x)e^{P(x)} dx + f(x) + p(x)e^{-P(x)} \int f(x)e^{P(x)} dx \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Rozpatrzmy teraz zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} y' + p(x)y = f(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad (x_0, y_0) \in D = I \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (C)$$

Wstawiając do wzoru (23) warunek początkowy otrzymamy

$$y_0 = Ce^{-P(x_0)} + y_f(x_0).$$

Stąd

$$C = (y_0 - y_f(x_0))e^{P(x_0)}.$$

Zatem przy dowolnych danych początkowych $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, stałą C można tak dobrać, aby funkcja określona wzorem (23) była rozwiązaniem zagadnienia (C). Udowodniliśmy więc

Twierdzenie 2.2 *Jeżeli funkcje p i f są ciągłe w przedziale $I \subset \mathbb{R}$, to dla każdego $x_0 \in I$ i każdego $y_0 \in \mathbb{R}$ równanie*

$$y' + p(x)y = f(x)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie $y = y(x)$ spełniające warunek $y(x_0) = y_0$.

Na koniec zauważymy, że całka ogólna równania liniowego niejednorodnego, dana wzorem (23), jest sumą dwóch składników. Pierwszy z nich, $Ce^{-P(x)}$, który oznaczamy przez $y_0(x)$, jest całką ogólną równania liniowego jednorodnego. Drugi, $y_f(x)$, jest jak już wiemy, pewną całką szczególną równania niejednorodnego. Całka ogólna równania liniowego niejednorodnego jest więc sumą całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego,

$$y(x) = y_0(x) + y_f(x).$$

Fakt ten zapisujemy symbolicznie:

$$\text{CORN} = \text{CORJ} + \text{CSRN}.$$

Ostatni związek można również otrzymać na gruncie algebry. Oznaczmy przez L odwzorowanie, które dowolnej funkcji y , różniczkowalnej w sposób ciągły na przedziale I , przyporządkowuje funkcję $L(y)$ daną wzorem

$$L(y)(x) = y'(x) + p(x)y(x).$$

Zauważymy, że odwzorowanie to spełnia warunki

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \quad \text{oraz} \quad L(\lambda y) = \lambda L(y).$$

Tak zdefiniowane odwzorowanie L jest więc odwzorowaniem liniowym (stąd nazwa równania). Odwzorowuje ono przestrzeń liniową $C^1(I)$, funkcji klasy C^1 na I , w przestrzeń liniową $C(I)$, funkcji ciągłych na I . Odwzorowania liniowe, które odwzorowują przestrzeń funkcyjną w przestrzeń funkcyjną przyjęto nazywać *operatorami liniowymi*. Przy przyjętych oznaczeniach równanie niejednorodne (18) można zapisać w postaci $L(y)(x) = f(x)$ lub krótko $L(y) = f$, a równanie jednorodne (19) w postaci $L(y) = 0$. Zatem cała ogólna równania (18) jest zbiorem tych funkcji $y \in C^1(I)$, które operator liniowy L przeprowadza w funkcję zerową, jest więc ona jądrem operatora L . Ponadto, jak to już wykazaliśmy, równanie niejednorodne $L(y) = f$ ma rozwiązanie dla każdej funkcji ciągłej f , a z algebry wiadomo, że każde rozwiązanie ogólne równania liniowego niejednorodnego jest sumą algebraiczną zbioru złożonego z wektorów spełniających równanie jednorodne i dowolnego wektora y_f spełniającego równanie niejednorodne (RORN=RORJ+RSRN).

Przykład 2.5 Wyznaczyć całkę ogólną równania

$$y' + (\cos x)y = \frac{1}{2} \sin 2x. \quad (24)$$

R o z w i ą z a n i e : Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$y' + (\cos x)y = 0.$$

Rozdzielając zmienne i całkując

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \cos x \, dx$$

otrzymujemy CORJ:

$$y = Ce^{-\sin x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Uzmienniamy stałą:

$$y = C(x)e^{-\sin x}. \quad (\star)$$

Stąd

$$y' = C'(x)e^{-\sin x} + C(x)e^{-\sin x}(-\cos x). \quad (**)$$

Wstawiając (*) i (**) do równania (24) otrzymamy

$$C'(x)e^{-\sin x} + C(x)e^{-\sin x}(-\cos x) + (\cos x)C(x)e^{-\sin x} = \frac{1}{2} \sin 2x$$

i stąd

$$C'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x e^{\sin x}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \frac{1}{2} \sin 2x e^{\sin x} dx = \int \sin x \cos x e^{\sin x} dx \stackrel{\sin x = t}{=} \int t e^t dt = t e^t - e^t + C = \\ &= (\sin x - 1)e^{\sin x} + C. \end{aligned}$$

Wyznaczone $C(x)$ wstawiamy do wzoru (*) i otrzymujemy CORN:

$$\underline{\underline{y = C e^{-\sin x} + \sin x - 1}}$$

2.2.1 Równanie Bernoulliego

Definicja 2.4 Równanie

$$y' + p(x)y = f(x)y^r \quad (25)$$

gdzie $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, a p i f są funkcjami ciągłymi na przedziale I , nazywamy *równaniem Bernoulliego*.

Równanie (25) sprowadzimy do równania liniowego rzędu pierwszego przez podstawienie

$$u = y^{1-r}.$$

Wtedy

$$u' = (1-r)y^{-r}y'$$

Mnożąc obie strony równania (25) przez $(1-r)y^{-r}$ otrzymamy

$$(1-r)y^{-r}y' + p(x)(1-r)y^{1-r} = (1-r)f(x),$$

co po uwzględnieniu podstawienia daje równanie

$$u' + (1-r)p(x)u = (1-r)f(x), \quad x \in I$$

które jest już równaniem liniowym rzędu pierwszego z niewiadomą funkcją u .

Przykład 2.6 Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} xy' + y = y^2 \ln x \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Najpierw wyznaczamy całkę ogólną tego równania $xy' + y = y^2 \ln x$. Przepisujemy je w postaci

$$y' + \frac{1}{x}y = y^2 \frac{\ln x}{x}.$$

Jest to równanie Bernoulliego. Podstawiamy

$$u = y^{-1}.$$

Stąd

$$u' = -y^{-2}y'$$

oraz po pomnożeniu obu stron równania przez $-y^{-2}y'$ i uwzględnieniu podstawienia otrzymamy równanie liniowe

$$u' - \frac{1}{x}u = -\frac{\ln x}{x}.$$

Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$u' - \frac{1}{x}u = 0.$$

Stąd

$$u = Cx$$

jest CORJ. Uzmienniamy stałą:

$$u = C(x)x, \quad u' = C'(x) \cdot x + C(x).$$

Podstawiamy u i u' do równania niejednorodnego i otrzymamy

$$C'(x) \cdot x + C(x) - \frac{1}{x}C(x) \cdot x = -\frac{\ln x}{x}$$

skąd

$$C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

Dlatego

$$\begin{aligned} C(x) &= -\int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad \left| \ln x = t, \frac{1}{x} dx = dt, x = e^t \right| \\ &= -\int te^{-t} dt = te^{-t} + e^{-t} + C = \frac{1}{x}(\ln x + 1) + C. \end{aligned}$$

Zatem

$$u = \left(\frac{1}{x}(\ln x + 1) + C \right) \cdot x = \ln x + 1 + Cx, \quad x > 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Całką ogólną równania Bernoulliego jest więc

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}.$$

Podstawiając teraz do ostatniego wzoru warunek początkowy $y(1) = 1$ otrzymamy

$$1 = \frac{1}{0 + 1 + C} \quad \text{skąd} \quad C = 0.$$

Ostatecznie całką szczególną, będącą rozwiązaniem danego zagadnienia początkowego, jest

$$y(x) = \frac{1}{\ln x + 1}, \quad x \in (e^{-1}; \infty).$$

Dziedzinę tej funkcji ustaliliśmy wybierając z dwóch możliwych przedziałów $(0; e^{-1})$ i $(e^{-1}; \infty)$ ($x > 0 \wedge \ln x + 1 \neq 0$) ten drugi, bo do niego należy $x_0 = 1$.

Ćwiczenia

1. Wyznaczyć całki ogólne równań:

a) $y' + ay = e^{mx}$;

Odp. $y = Ce^{-ax} + \frac{e^{mx}}{m+a}$, jeśli $m \neq -a$, $y = Ce^{mx} + xe^{mx}$, jeśli $m = -a$.

b) $y' \sin x - y = 1 - \cos x$;

Odp. $y = (x + C) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + a \sin 2y}$;

Odp. $x = Ce^{\sin y} - 2a(\sin y + 1)$.

d) $y' + 2xy = 2x^3y^3$;

Odp. $\frac{1}{y^2} = Ce^{2x^2} + x^2 + \frac{1}{2}$.

e) $3y^2y' + y^3 + x = 0$;

Odp. $y^3 = Ce^{-x} - x + 1$.

f) $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$.

Odp. $y = x^4(\ln \sqrt{x} + C)^2$.

2. Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Odp. $y = \left(-\frac{1}{3}(1-x^2) + \frac{4}{3}(1-x^2)^{\frac{1}{4}} \right)^2$, $x \in (-1; 1)$.

3. Znaleźć rodzinę krzywych, dla których pole trójkąta utworzonego przez styczną w dowolnym punkcie, promień wodzący punktu styczności i oś odciętych jest wielkością stałą i równą a^2 .

Odp. $xy = \pm a^2 + Cy^2$.

4. Natężenie prądu w cewce o oporności R , samoindukcji L i sile elektromotorycznej E spełnia równanie różniczkowe

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

Znaleźć zależność natężenia prądu od czasu t przyjmując R i L jako stałe, jeśli siła elektromotoryczna jest równa

- a) $E = u_0$ (jest stała);

Odp. $i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{u_0}{R}$

- b) $E = kt$. (jest wprost proporcjonalna do czasu);

Odp. $i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{k}{R}t - \frac{kL^2}{R^2}$

- c) $E = A \sin \omega t$.

Odp. $i(t) = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{AR}{R^2 + \omega^2 L^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega L}{R} \cos \omega t \right)$.

3 Równania różniczkowe wektorowe

3.1 Wiadomości wstępne

W tym rozdziale zajmujemy się równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, w których niewiadome funkcje przyjmują wartości w przestrzeni wektorowej. Ograniczymy się do przypadku, gdy przestrzenią wektorową jest n -wymiarowa przestrzeń euklidesowa \mathbb{R}^n . Przypominamy, że oprócz pojęć algebraicznych związanych z przestrzenią wektorową, takich jak pojęcie liniowej niezależności układu wektorów, bazy, wymiaru, mamy w \mathbb{R}^n pojęcia topologiczne, związane ze strukturą metryczną tej przestrzeni. Są to takie pojęcia jak norma wektora \mathbf{x} , odległość między punktami z \mathbb{R}^n , otoczenie punktu, zbiór otwarty, zbieżność ciągu punktów, ciągłość odwzorowań o wartościach w \mathbb{R}^n . Jak wiadomo, w przestrzeni \mathbb{R}^n można używać różnych norm i wszystkie normy w \mathbb{R}^n są równoważne, to znaczy zbieżność ciągu punktów w przestrzeni \mathbb{R}^n w dowolnej normie, jest zbieżnością po współrzędnych. W dalszym ciągu używać będziemy normy euklidesowej. Dla $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ przyjmujemy

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} \quad \text{oraz} \quad \|\mathbf{x}\| = |x|, \quad \text{gdy } n = 1.$$

Podamy teraz kilka podstawowych pojęć i faktów związanych z funkcjami wektorowymi.

Funkcją wektorową argumentu rzeczywistego $t \in I$, gdzie I jest przedziałem w \mathbb{R} , nazywamy funkcję

$$\mathbf{x} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$I \ni t \longmapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n.$$

W przypadku $n = 1$, funkcję $\mathbf{x}(\cdot)$ oznaczamy przez $x(\cdot)$ i nazywamy *funkcją skalarną*. Funkcje skalarne $x_i(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{R}$, występujące w definicji funkcji wektorowej $\mathbf{x}(\cdot)$, nazywają się *funkcjami współrzędnymi* funkcji wektorowej.

Funkcja wektorowa $\mathbf{x}(\cdot) = (x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$ jest ciągła, różniczkowalna, całkowalna na I wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej funkcje współrzędne $x_i(\cdot)$ są odpowiednio ciągłe, różniczkowalne, całkowalne na I .

Pochodną $\mathbf{x}'(t_0)$ funkcji wektorowej $\mathbf{x}(\cdot)$ w punkcie t_0 definiujemy jako wektor o współrzędnych $(x'_1(t_0), \dots, x'_n(t_0))$. Podobnie przyjmujemy że,

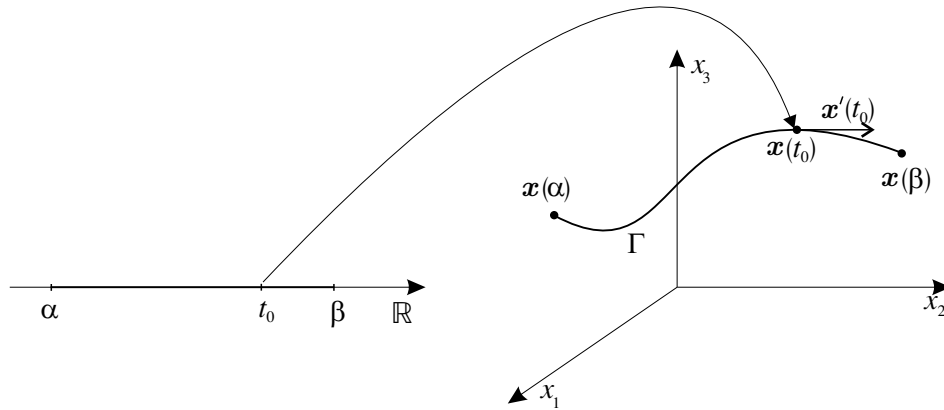
$$\int_a^b \mathbf{x}(t) dt = \left(\int_a^b x_1(t) dt, \dots, \int_a^b x_n(t) dt \right).$$

Funkcja wektorowa

$$\mathbf{x} : \langle \alpha; \beta \rangle = I \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\langle \alpha; \beta \rangle \ni t \longmapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie o funkcjach $x_1(\cdot)$, $x_2(\cdot)$, $x_3(\cdot)$ zakładamy, że są klasy C^1 na $\langle \alpha; \beta \rangle$ i dla każdego $t \in \langle \alpha; \beta \rangle$, jest $(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + (x_3'(t))^2 > 0$, wyznacza w przestrzeni \mathbb{R}^3 krzywą klasy C^1 . Oznaczmy tę krzywą przez Γ . Wtedy punkt $\mathbf{x}(\alpha) = (x_1(\alpha), x_2(\alpha), x_3(\alpha))$ jest początkiem krzywej Γ , a punkt $\mathbf{x}(\beta)$ jej końcem. Dla każdego $t_0 \in \langle \alpha; \beta \rangle$, wektor $\mathbf{x}'(t_0) = (x_1'(t_0), x_2'(t_0), x_3'(t_0))$ jest wektorem stycznym do krzywej Γ w punkcie $\mathbf{x}(t_0)$. Jeżeli zmienną niezależną t interpretować będziemy jako czas, to funkcję wektorową $\mathbf{x}(\cdot)$ możemy interpretować jako ruch w \mathbb{R}^3 . Wraz ze zmieniającym się t , zmienia się położenie punktu $\mathbf{x}(t)$. Krzywa Γ jest wówczas torem, po którym porusza się punkt $\mathbf{x}(t)$. Mówimy, że Γ jest trajektorią tego ruchu. Wektor $\mathbf{x}'(t_0)$ interpretujemy jako wektor prędkości punktu $\mathbf{x}(t)$ w chwili t_0 .



Rys. 1

Oprócz funkcji wektorowych jednej zmiennej rozpatrywać będziemy funkcje wektorowe wielu zmiennych. Przykładowo $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ jest funkcją wektorową n zmiennych. Piszemy wówczas $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$. Funkcja wektorowa \mathbf{f} jest ciągła w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej funkcje współrzędne $f_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, które są funkcjami skalarnymi n zmiennych, są ciągłe.

Rozpatrywać będziemy równania różniczkowe postaci

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$$

z niewiadomą funkcją wektorową $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, argumentu rzeczywistego t . O funkcji wektorowej $\mathbf{f} : I \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ zakładamy zawsze, że jest ciągła zbiorze $D = I \times \Omega$, gdzie I jest przedziałem w \mathbb{R} , a Ω – obszarem w \mathbb{R}^n . Funkcja wektorowa \mathbf{f} jest zatem funkcją $n + 1$ zmiennych. Równanie $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ zapisywać będziemy w dalszym ciągu krótko w postaci

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}). \quad (1)$$

Jeśli $n = 1$, to równanie (1) nazywa się równaniem skalarnym. Wszystkie poprzednio rozpatrywane równania były równaniami skalarnymi. Jeżeli równanie (1) rozpiszemy po współrzędnych, to otrzymamy układ n równań skalarnych

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2)$$

Definicja 3.1 Rozwiązaniem równania (1) nazywamy funkcję wektorową $\mathbf{x}(\cdot)$ określoną i różniczkowalną na pewnym przedziale $I_0 \subset I$ taką, że

$$\forall t \in I_0 \quad (\mathbf{x}(t)) \in \Omega \quad \text{i} \quad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)).$$

Rozwiązaniem układu (2) nazywamy układ funkcji skalarnych $x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)$ określonych i różniczkowalnych na pewnym przedziale $I_0 \subset I$ i spełniających warunki

$$\forall t \in I_0 \quad (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Omega \quad \text{i} \quad x_i'(t) = f_i(t, x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Zagadnienie Cauchy'ego dla równania wektorowego (1) zapisuje się analogicznie jak dla równania skalarnego:

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (C)$$

gdzie $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \Omega$. Dla układu (2) warunki początkowe mają postać

$$x_1(t_0) = x_{01}, \dots, x_n(t_0) = x_{0n},$$

gdzie $t_0 \in I$ i $(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \Omega$ są danymi początkowymi.

Definicja 3.2 *Całką ogólną* układu (2) nazywamy rodzinę rozwiązań

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t, C_1, \dots, C_n) \\ &\vdots \\ x_n &= x_n(t, C_1, \dots, C_n), \quad t \in I_0 \end{aligned}$$

tego układu zależną od n parametrów C_1, \dots, C_n , które można tak dobrać, by otrzymać rozwiązanie zagadnienia (C) dla każdego układu wartości początkowych $t_0, (x_{10}, \dots, x_{n0})$, dla których rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne. Problem istnienia i jednoznaczności rozwiązań układów równań różniczkowych omówiony będzie w następnym paragrafie.

Szczególnym przypadkiem układów równań różniczkowych są układy liniowe. Ogólna postać układu liniowego jest następująca

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases} \quad (3)$$

gdzie $a_{ij}(\cdot)$ oraz $b_j(\cdot)$ są danymi funkcjami ciągłymi w $I \subset \mathbb{R}$. Powyższy układ możemy zapisać w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

lub krótko

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad t \in I, \quad (5)$$

gdzie $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$ jest macierzą współczynników tego układu, $\mathbf{b}(t) = [b_j(t)]_{n \times 1}$ – daną funkcją wektorową. Jeżeli $\mathbf{b}(t) = \mathbf{0}$, to układ liniowy (5) nazywa się *układem jednorodnym*. W przeciwnym wypadku jest to *układ niejednorodny*.

Do równań typu (1) można w szczególności doprowadzić równania skalarne n – tego rzędu. Rozpatrzmy równanie

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}), \quad (6)$$

gdzie funkcja skalarna f jest ciągła na zbiorze $I \times \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Oznaczamy niewiadomą funkcję x przez x_1 i następnie wprowadzamy nowe funkcje x_2, \dots, x_n przyjmując

$$x_2 = x'_1 = x', \quad x_3 = x'_2 = x'', \quad \dots, \quad x_n = x'_{n-1} = x^{(n-1)}.$$

Wtedy

$$x'_n = x^{(n)} = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n).$$

W ten sposób otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (7)$$

Oznaczając teraz przez $\mathbf{x}(\cdot)$ funkcję wektorową o współrzędnych $(x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot))$ oraz przyjmując $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (x_2, x_3, \dots, x_n, f(t, x_1, x_2, \dots, x_n))$ możemy układ (7) zapisać w postaci

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).$$

Pierwsza współrzędna szukanej funkcji wektorowej \mathbf{x} jest szukaną funkcją skalarną z równania (6).

Równania różniczkowe wektorowe rzędu pierwszego postaci (1) obejmują więc dość szeroką klasę równań i układów równań różniczkowych. Wiele twierdzeń dotyczących równań wektorowych można łatwo przenieść na układy równań różniczkowych skalarnych oraz na równania skalarnie wyższych rzędów.

3.2 Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności

W tej części sformułujemy podstawowe twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla równania wektorowego rzędu pierwszego. Dowody tych twierdzeń, z powodu braku odpowiednich narzędzi teoretycznych, pominiemy.

Definicja 3.3 Mówimy, że funkcja wektorowa $\mathbf{f} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, spełnia *warunek Lipschitza* ze względu na zmienną wektorową \mathbf{x} jeżeli

$$\exists L > 0 \quad \forall t \in I \quad \forall \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \Omega \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \bar{\mathbf{x}})\| \leq L \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|. \quad (8)$$

Stała L występująca w tej definicji nazywa się *stałą Lipschitza*.

Łatwo zauważyć, że funkcja wektorowa $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = (f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n))$, spełnia na zbiorze $I \times \Omega$ warunek Lipschitza wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie jej funkcje współrzędne f_i spełniają warunek Lipschitza ze względu na zmienne x_1, \dots, x_n , to znaczy, gdy

$$\exists L_i > 0 \quad \forall t \in I \quad \forall (x_1, \dots, x_n), (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \Omega \quad |f_i(t, x_1, \dots, x_n) - f_i(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)| \leq L_i \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k - \bar{x}_k|^2}.$$

Sprawdzenie na podstawie definicji, że funkcja skalarna f spełnia warunek Lipschitza może być trudne. Dla funkcji, z którymi najczęściej będziemy mieli do czynienia jak na przykład dla funkcji klasy C^1 , możemy skorzystać z następującego faktu:

Jeżeli wszystkie pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, funkcji skalarnej f są ograniczone na zbiorze $I \times \Omega$, to funkcja f na zbiorze $I \times \Omega$ spełnia warunek Lipschitza względem zmiennych x_1, \dots, x_n .

Twierdzenie 3.1 Załóżmy, że $\mathbf{f} : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie I jest przedziałem w \mathbb{R} , jest funkcją ciągłą oraz dla każdego domkniętego i ograniczonego przedziału $I_0 \subset I$, \mathbf{f} spełnia na $I_0 \times \mathbb{R}^n$ warunek Lipschitza względem zmiennej \mathbf{x} . Wtedy dla każdego $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ istnieje dokładnie jedno, określone na całym przedziale I , rozwiązanie $\mathbf{x}(\cdot)$ zagadnienia

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (\text{C})$$

Rozwiązanie to jest granicą ciągu funkcyjnego $(\mathbf{x}_n(\cdot))$ określonego następująco

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}_n(s)) ds, \\ \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0, \quad t \in I, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (9)$$

Ciąg $(\mathbf{x}_n(\cdot))$ jest zbieżny jednostajnie do rozwiązania $\mathbf{x}(\cdot)$ na każdym domkniętym przedziale $I_0 = \langle a; b \rangle \subset I$. Ponadto zachodzi oszacowanie

$$\sup_{t \in \langle a; b \rangle} \|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)\| \leq \frac{(L\lambda)^n}{n!} (e^{L\lambda} - 1) \sup_{t \in \langle a; b \rangle} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0\|, \quad (10)$$

gdzie L jest stałą Lipschitza, a $\lambda = \max\{t_0 - a, b - t_0\}$.

Ciąg $(\mathbf{x}_n(\cdot))$ zdefiniowany wzorem rekurencyjnym (9), nazywa się *ciągami kolejnych przybliżeń Picarda*.

Dla równania skalarne

$$y' = f(x, y), \quad f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

ciąg kolejnych przybliżeń Picarda ma postać

$$\begin{cases} y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y_n(s)) ds, \\ y_0(t) = y_0, \quad x \in I, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (11)$$

a warunek Lipschitza dla funkcji f zapisuje się następująco

$$\exists L > 0 \quad \forall x \in I \quad \forall y, \bar{y} \in \mathbb{R} \quad |f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|. \quad (12)$$

Przykład 3.1 Znajdziemy rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} y' - xy = x^3 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (\star)$$

najpierw metodą kolejnych metodą kolejnych przybliżeń, a później wyznaczmy rozwiązanie dokładne i porównamy oba rozwiązania. Zapisujemy równanie w postaci

$$y' = xy + x^3.$$

Zatem $f(x, y) = xy + x^3$. Oczywiście f jest ciągła na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oraz dla dowolnego przedziału domkniętego $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$ oraz dla dowolnych $x \in \langle a; b \rangle$ i $y, \bar{y} \in \mathbb{R}$ mamy

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = |xy + x^3 - x\bar{y} - x^3| = |x| \cdot |y - \bar{y}| \leq L \cdot |y - \bar{y}|,$$

gdzie $L = \max\{|a|, |b|\}$. Zatem f spełnia założenia twierdzenia 3.1. Wyznamy kilka początkowych wyrazów ciągu kolejnych przybliżeń. Korzystamy z wzorów (11), które w tym przypadku będą miały postać

$$y_0(x) = 1, \quad y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x (s \cdot y_n(s) + s^3) ds.$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1, \\ y_1(x) &= 1 + \int_0^x (s \cdot 1 + s^3) ds = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4, \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x \left(s \cdot \left(1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{4}s^4 \right) + s^3 \right) ds = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{24}x^6, \\ y_3(x) &= 1 + \int_0^x \left(s \cdot \left(1 + \frac{1}{2}s^2 + \frac{3}{8}s^4 + \frac{1}{24}s^6 \right) + s^3 \right) ds = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + \frac{1}{184}x^8, \text{ itd.} \end{aligned}$$

Rozwiązanie $y(\cdot)$ danego zagadnienia jest granicą ciągu $(y_n(\cdot))$, przy czym ciąg ten jest jednostajnie zbieżny do rozwiązania na każdym przedziale domkniętym $\langle a; b \rangle \subset \mathbb{R}$.

Rozwiązaniem dokładnym zagadnienia (\star) jest

$$y(x) = 3e^{\frac{1}{2}x^2} - x^2 - 2.$$

Otrzymamy je rozwiązując równanie liniowe metodą uzmienniania stałej i podstawiając do otrzymanej całki ogólnej warunek początkowy. Przedstawmy rozwiązanie dokładne w postaci szeregu Maclaurina.

$$\begin{aligned} y(x) &= 3 \left(1 + \frac{\frac{1}{2}x^2}{1!} + \frac{(\frac{1}{2}x^2)^2}{2!} + \frac{(\frac{1}{2}x^2)^3}{3!} + \dots \right) - x^2 - 2 = \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + \frac{1}{128}x^8 + \dots \end{aligned} \quad (\star\star)$$

Porównując kolejne przybliżenia z rozwiązaniem dokładnym zapisanym w postaci szeregu $(\star\star)$ zauważamy, że sumy częściowe tego szeregu różnią się od odpowiednich wyrazów ciągu kolejnych przybliżeń tylko ostatnim składnikiem. Oba ciągi: ciąg sum częściowych szeregu $(\star\star)$ i ciąg kolejnych przybliżeń Picarda, są zbieżne do rozwiązania zagadnienia (\star) .

□

Zastosujemy teraz twierdzenie Picarda do wykazania istnienia i jednoznaczności rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego, dla równania liniowego wektorowego (5). Mamy tutaj

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

gdzie $\mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)]_{n \times n}$, $\mathbf{b}(t) = [b_j(t)]_{n \times 1}$, $a_{ij}(\cdot)$, $b_j(\cdot)$ są danymi funkcjami ciągłymi w przedziale $I \subset \mathbb{R}$. Niech $I_0 \subset I$ będzie dowolnym, domkniętym i ograniczonym przedziałem zawartym w I . Pokażemy, że funkcja wektorowa \mathbf{f} spełnia w zbiorze $I_0 \times \mathbb{R}^n$ warunek Lipschitza (8). Istotnie. Niech $t \in I_0$, $\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$. Wtedy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \bar{\mathbf{x}})\| &= \|\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) - \mathbf{A}(t)\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{b}(t)\| = \|\mathbf{A}(t)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\| = \\ &= \left\| \begin{bmatrix} a_{11}(t)(x_1 - \bar{x}_1) + \cdots + a_{1n}(t)(x_n - \bar{x}_n) \\ \vdots \\ a_{n1}(t)(x_1 - \bar{x}_1) + \cdots + a_{nn}(t)(x_n - \bar{x}_n) \end{bmatrix} \right\| = \\ &= \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}(t)(x_j - \bar{x}_j)\right)^2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^n a_{nj}(t)(x_j - \bar{x}_j)\right)^2} \leq \\ &\quad \left| \begin{array}{l} \text{stosujemy nierówność Cauchy'ego} \\ \left(\sum_{j=1}^n u_j v_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n u_j^2\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n v_j^2\right) \end{array} \right| \\ &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n a_{1j}^2(t) \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2 + \cdots + \sum_{j=1}^n a_{nj}^2(t) \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}^2(t) + \cdots + \sum_{j=1}^n a_{nj}^2(t)\right) \cdot \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2(t)} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2} \cdot \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\| = L\|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|, \end{aligned}$$

gdzie

$$a_{ij} = \sup_{t \in I_0} |a_{ij}(t)| \quad \text{oraz} \quad L = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}.$$

Zatem funkcja \mathbf{f} spełnia w zbiorze $I_0 \times \mathbb{R}^n$ warunek Lipschitza ze stałą $L = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$.

Zgodnie z twierdzeniem Picarda zagadnienie

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

ma dla dowolnego $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$, dokładnie jedno rozwiązanie określone na całym przedziale I . W szczególności jedynym rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0} \end{cases}$$

jest rozwiązanie zerowe $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$.

Przykład 3.2 Znaleźć przybliżone rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} x_1' = tx_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + tx_2 \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$$

poprzestając na trzecim przybliżeniu. Oszacować błąd trzeciego przybliżenia w przedziale $I = \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \rangle$.

Rozwiązanie: Oznaczmy:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = [a_{ij}(t)] = \begin{bmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wtedy dane zagadnienie można zapisać w postaci

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Niech $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, gdzie $a_{ij} = \sup_{t \in I} |a_{ij}(t)|$. Wówczas

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad L = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad \lambda = \max\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Konstruujemy ciąg kolejnych przybliżeń. Na podstawie (9) mamy

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}(s)\mathbf{x}_n(s)ds, \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_0(t).$$

Stąd

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2}s^2 \\ s \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2}s^3 \\ 1 + \frac{3}{2}s^2 \end{bmatrix} ds = \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{8}t^4 \\ t + \frac{1}{2}t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{8}t^4 \\ t + \frac{1}{2}t^3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{8}s^4 \\ s + \frac{1}{2}s^3 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{8}t^4 + \frac{1}{48}t^6 \\ t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{8}t^5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

W oszacowaniu błędu trzeciego przybliżenia skorzystamy z nierówności (10).

$$\sup_{t \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \rangle} \|\mathbf{x}_3(t) - \mathbf{x}(t)\| \leq \frac{(\lambda L)^3}{3!} (e^{\lambda L} - 1) \cdot \sup_{t \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \rangle} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)\| =$$

$$\left| \begin{array}{l} \sup_{t \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \rangle} \|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)\| = \sup_{t \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \rangle} \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ t \end{bmatrix} \right\| = \\ = \sup_{t \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{3} \rangle} \sqrt{\frac{1}{4}t^4 + t^2} = \sqrt{\frac{1}{64} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{8} \end{array} \right|$$

$$= \frac{(\frac{1}{4}\sqrt{10})^3}{6} (e^{\frac{1}{4}\sqrt{10}} - 1) \cdot \frac{\sqrt{17}}{8} \leq \underline{\underline{0,06}}.$$

□

Przykład 3.3 Metodą kolejnych przybliżeń znaleźć rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} x'' + tx = t^3 + t + 2 \\ x(0) = 1, x'(0) = 0. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Przyjmując $x = x_1$ i $x' = x_2$, dane zagadnienie Cauchy'ego dla równania skalarnego rzędu drugiego zapisujemy w postaci równoważnego zagadnienia Cauchy'ego dla układu dwóch dwóch równań skalarnych rzędu pierwszego

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = -tx_1 + t^3 + t + 2 \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = 0. \end{cases} \quad (\star)$$

Układ (\star) zapisujemy następnie w postaci wektorowej

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

gdzie

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t^3 + t + 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wyrazy ciągu kolejnych przybliżeń Picarda wyrażać się będą wzorami

$$x_0(t) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_0 + \int_0^t (\mathbf{A}(s)\mathbf{x}_n(s) + \mathbf{b}(s)) ds.$$

Zatem

$$\mathbf{x}_0(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s^3 + s + 2 \end{bmatrix} \right) ds = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t + \frac{1}{4}t^4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -s & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2s + \frac{1}{4}s^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ s^3 + s + 2 \end{bmatrix} \right) ds = \\ &= \begin{bmatrix} 1 + t^2 + \frac{1}{20}t^5 \\ 2t + \frac{1}{4}t^4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Podobnie

$$\mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 1 + t^2 + \frac{1}{20}t^5 \\ 2t - \frac{1}{140}t^7 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}_4(t) = \begin{bmatrix} 1 + t^2 - \frac{1}{1120}t^8 \\ 2t - \frac{1}{140}t^7 \end{bmatrix}, \dots$$

Łatwo zauważyć, że ciąg $(\mathbf{x}_n(t))$ jest zbieżny do funkcji wektorowej

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 + t^2 \\ 2t \end{bmatrix},$$

przy czym zbieżność ta jest jednostajna w każdym przedziale domkniętym $\langle -a; a \rangle \subset \mathbb{R}$. Pierwsza współrzędna funkcji $\mathbf{x}(t)$, czyli funkcja $x_1(t) = 1 + t^2$ jest rozwiązaniem zagadnienia (\star) . Można się o tym przekonać bezpośrednim sprawdzeniem. \square

Założenie, aby funkcja \mathbf{f} spełniała warunek Lipschitza względem \mathbf{x} w całej przestrzeni \mathbb{R}^n jest dużym ograniczeniem stosowalności twierdzenia Picarda. Dlatego formuluje się twierdzenie z nieco słabszymi założeniami odnośnie funkcji \mathbf{f} .

Definicja 3.4 Mówimy, że funkcja \mathbf{f} spełnia w zbiorze $I \times \Omega$ *lokalny warunek Lipschitza* względem $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, jeżeli dla każdego $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \Omega$ istnieją: otoczenie $U = U_{(t_0, \mathbf{x}_0)} \subset I \times \Omega$ punktu (t_0, \mathbf{x}_0) oraz stała $L_U > 0$, takie że

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \bar{\mathbf{x}})\| \leq L_U \|\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}\|$$

dla wszystkich $(t, \mathbf{x}), (t, \bar{\mathbf{x}}) \in U$.

Twierdzenie 3.2 Jeżeli funkcja $\mathbf{f} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie Ω jest obszarem w \mathbb{R}^n , jest ciągła i spełnia lokalny warunek Lipschitza względem \mathbf{x} , to dla każdego $(t_0, \mathbf{x}_0) \in I \times \Omega$ zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (C)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie określone w pewnym przedziale $\langle t_0 - \delta; t_0 + \delta \rangle$.

Z twierdzenia powyższego wynika, że rozwiązanie $\mathbf{x}(\cdot)$ zagadnienia (C) określone jest w przedziale domkniętym $\langle t_0 - \delta; t_0 + \delta \rangle$, gdzie δ jest pewną, dostatecznie małą, dodatnią liczbą rzeczywistą. Z drugiej strony wiadomo (porównaj twierdzenie 1.1, prawdziwe również dla równań wektorowych), że każde rozwiązanie zagadnienia (C) można przedłużyć do rozwiązania globalnego, określonego w pewnym maksymalnym przedziale otwartym $I_{\mathbf{x}_0} = (\alpha; \beta) \subset I$. Przedział $I_{\mathbf{x}_0}$ może, ale nie musi pokrywać się z przedziałem I . zilustrujemy powyższy fakt następującym przykładem

Przykład 3.4 Znaleźć rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} x' = x^2 + 1 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Mamy do czynienia z równaniem skalarnym, w którym funkcja $f(t, x) = x^2 + 1$ jest określona i ciągła w zbiorze $I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Zauważamy, że jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Wyznaczamy całkę ogólną:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int dt \Rightarrow \operatorname{arctg} x = t + C,$$

więc całką ogólną jest rodzina funkcji

$$x = \operatorname{tg}(t + C), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Po podstawieniu danych początkowych otrzymujemy $C = 0$. Rozwiązaniem naszego zagadnienia jest zatem funkcja

$$x(t) = \operatorname{tg} t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) = I_{x_0} \neq I = \mathbb{R}.$$

□

Twierdzenia 3.1 i 3.2 nazywać będziemy odpowiednio : *globalnym i lokalnym twierdzeniem Picarda*.

Przykład 3.5 Rozpatrzmy równanie skalarne

$$y' = x^2 + y^2. \quad (\star)$$

Funkcja $f(x, y) = x^2 + y^2$ jest ciągła w zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ale nie spełnia w tym zbiorze warunku Lipschitza. Mamy bowiem

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| = |x^2 + y^2 - x^2 - \bar{y}^2| = |y + \bar{y}| \cdot |y - \bar{y}|.$$

Zatem nie istnieje stała L taka, by dla wszystkich $y, \bar{y} \in \mathbb{R}$ spełniony był warunek

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leq L|y - \bar{y}|.$$

Jeżeli jednak rozpatrzmy dowolny pas $\mathbb{R} \times \langle -a; a \rangle \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, to f spełnia w tym pasie warunek Lipschitza z dowolną stałą $L \geq 2a$. Zatem każdy punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ma otoczenie, w którym spełniony jest warunek Lipschitza ze względu na zmienną y . Przez każdy punkt płaszczyzny przechodzi zatem dokładnie jedna krzywa całkowa równania (\star) . Znajdziemy przybliżone rozwiązanie równania (\star) przy warunku początkowym $y(0) = 0$. Kolejne przybliżenia wyrażają się wzorami

$$y_{n+1}(x) = 0 + \int_0^x (s^2 + y_n^2(s)) ds.$$

Zatem

$$y_0(x) = y_0 = 0$$

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x s^2 ds = \frac{1}{3}x^3,$$

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x \left(s^2 + \left(\frac{1}{3}s^3 \right)^2 \right) ds = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7,$$

$$y_3(x) = 0 + \int_0^x \left(s^2 + \left(\frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{63}s^7 \right)^2 \right) ds = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59532}x^{15},$$

⋮

Można wykazać, że rozwiązanie globalne równania (\star) , spełniające warunek $y(0) = 0$ jest określone na pewnym przedziale $(-a; a)$, podczas gdy kolejne wyrazy ciągu kolejnych przybliżeń tego rozwiązania są wielomianami, a więc funkcjami określonymi w całym \mathbb{R} . Ciąg $(y_n(\cdot))$ jest zbieżny jednostajnie do rozwiązania $y(\cdot)$ tylko w pewnym otoczeniu punktu $x_0 = 0$. Przybliżone krzywe całkowe tego równania rysowaliśmy w rozdziale 1 metodą izoklin (Przykład 1.3, str. 15).

Ćwiczenia

1. Wykazać, że jeżeli funkcja wektorowa $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1 , to dla każdego $(t_0, \mathbf{x}_0) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ zagadnienie Cauchy'ego

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Wskazówka: Wykazać, że \mathbf{f} spełnia w \mathbb{R}^n lokalny warunek Lipschitza.

2. Uzasadnić, że funkcja skalarna $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ nie spełnia warunku Lipschitza względem y w żadnym otoczeniu dowolnego punktu leżącego na osi OX .
3. Układ równań

$$\text{a) } \begin{cases} x_1'' - 3x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_2'' + x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1'' + 3x_2'' - x_1 = 0 \\ x_1' + 3x_2' - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

zapisać w postaci jednego równania wektorowego rzędu pierwszego.

4. Wyznaczyć przybliżone i dokładne rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} x' - x = t^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

5. Wyznaczyć trzecie przybliżenie rozwiązania zagadnienia

$$\begin{cases} x_1' = 2x_2 - x_1 + 1 \\ x_2' = 3x_2 - 2x_1 \\ x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Który wyraz ciągu kolejnych przybliżeń spełnia warunek

$$\sup_{t \in (-1; 1)} \|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)\| \leq 0,01 ?$$

Odp. $\mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} t - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 \\ -\frac{5}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 \end{bmatrix}$. Dziesiąty.

6. Wyznaczyć przybliżone rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} x'' + e^t x = t \\ x(0) = 1, x'(0) = 1. \end{cases}$$

Poprzestać na drugim przybliżeniu.

Odp. $x(t) \approx e^t + \frac{1}{6}t^3$.

3.3 Układy liniowe

Będziemy teraz rozważać zdefiniowane wcześniej układy liniowe

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \quad t \in I, \end{cases}$$

które w zapisie wektorowym przyjmują postać

$$(5) \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad t \in I.$$

O funkcjach, $\mathbf{A}(\cdot) = [a_{ij}(\cdot)]_{n \times n}$, $\mathbf{b}(\cdot) = [b_j(\cdot)]_{n \times 1}$, zakładając będziemy w dalszym ciągu, że są ciągłe w pewnym przedziale $I \subset \mathbb{R}$, który w szczególności może być całą prostą. Jak to było wykazane, równanie (5) ma przy dowolnym $t_0 \in I$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, dokładnie jedno rozwiązanie $\mathbf{x}(\cdot)$ określone na I , spełniające warunek $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. W szczególności jedynym rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0} \end{cases}$$

jest funkcja wektorowa zerowa $\mathbf{0}(\cdot)$ tzn. taka, że $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ dla każdego $t \in I$.

Zajmiemy się wyznaczeniem ogólnej postaci rozwiązania równania (5). Podamy na początek kilka definicji i faktów potrzebnych w dalszej części.

Definicja 3.5 Układ $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_k(\cdot)\}$ dowolnych funkcji wektorowych $\mathbf{x}_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazywamy *liniowo zależnym na I* , jeżeli istnieją skalary $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ nie wszystkie równe zero takie, że

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1(\cdot) + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k(\cdot) = \mathbf{0}(\cdot),$$

gdzie symbolem $\mathbf{0}(\cdot)$ oznaczyliśmy funkcję wektorową zerową.

Zapis

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1(\cdot) + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k(\cdot) = \mathbf{0}(\cdot)$$

należy rozumieć następująco:

$$\forall t \in I \quad \lambda_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k(t) = \mathbf{0}.$$

Z powyższej definicji wynika, że *jeśli układ funkcji wektorowych $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_k(\cdot)\}$ jest liniowo zależny na I , to układ wektorów $\{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t)\}$ jest liniowo zależny w \mathbb{R}^n dla każdego $t \in I$.*

Układ funkcji wektorowych $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_k(\cdot)\}$ nazywa się *liniowo niezależnym na I* jeżeli nie jest liniowo zależny na I .

Wniosek 3.1 Jeżeli dla pewnego $t_0 \in I$ układ wektorów $\{\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_k(t_0)\}$ jest liniowo niezależny w \mathbb{R}^n , to układ funkcji wektorowych $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_k(\cdot)\}$ jest liniowo niezależny na przedziale I .

Definicja 3.6 Wrońskianem układu n funkcji wektorowych

$$\mathbf{x}_1(\cdot) = \begin{bmatrix} x_{11}(\cdot) \\ \vdots \\ x_{n1}(\cdot) \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{x}_n(\cdot) = \begin{bmatrix} x_{1n}(\cdot) \\ \vdots \\ x_{nn}(\cdot) \end{bmatrix}$$

w punkcie $t \in I$ nazywamy wyznacznik

$$W[t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Twierdzenie 3.3 Jeżeli $W[t_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \neq 0$, dla pewnego $t_0 \in I$ to układ funkcji wektorowych $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ jest liniowo niezależny na I .

D o w ó d: Rozpatrzmy związek

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1(t_0) + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n(t_0) = \mathbf{0}$$

równoważny jednorodnemu układowi równań liniowych

$$\begin{cases} \lambda_1 x_{11}(t_0) + \dots + \lambda_n x_{1n}(t_0) = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 x_{n1}(t_0) + \dots + \lambda_n x_{nn}(t_0) = 0 \end{cases}$$

z niewiadomymi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Jego wyznacznik główny W jest wrońskianem układu funkcji wektorowych $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ w punkcie t_0 . Z założenia jest on różny od zera. Stąd jedynym rozwiązaniem powyższego układu równań jest rozwiązanie zerowe $\lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$. Zatem wektory $\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)$ są liniowo niezależne w \mathbb{R}^n a stąd na podstawie Wniosku 3.1 wynika liniowa niezależność układu funkcji wektorowych $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_n(\cdot)\}$. \square

Rozważmy teraz równanie liniowe jednorodne

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} - \mathbf{A}(t)\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (13)$$

Oznaczmy przez $L(\mathbf{x})$ lewą stronę tego równania, to znaczy

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' - \mathbf{A}(t)\mathbf{x}.$$

Operator

$$L : C^1(I, \mathbb{R}^n) \longrightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n)$$

przyporządkowuje każdej funkcji wektorowej \mathbf{x} , klasy C^1 na I , funkcję wektorową $L(\mathbf{x})$, ciągłą na I . Operator L jest oczywiście operatorem liniowym. Zatem całka ogólna równania (13), to znaczy zbiór rozwiązań równania

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{0},$$

jest jądrem operatora L , a więc jest podprzestrzenią przestrzeni $C^1(I, \mathbb{R}^n)$. Wynika stąd w szczególności, że jeśli funkcje wektorowe $\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_k(\cdot)$ są całkami równania (13), to każda funkcja postaci $\mathbf{x}(\cdot) = \lambda_1 \mathbf{x}_1(\cdot) + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k(\cdot)$, gdzie $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ są dowolnymi stałymi, jest też całką tego równania. Oznaczmy przez $\mathcal{M} = \ker L$ zbiór wszystkich rozwiązań równania jednorodnego (13).

Twierdzenie 3.4 *Zbiór \mathcal{M} , rozwiązań równania liniowego jednorodnego $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, jest n -wymiarową podprzestrzenią przestrzeni $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.*

D o w ó d: Wprowadźmy zapis $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \in (\text{LN})_I$ na oznaczenie faktu, że układ funkcji wektorowych $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_k(\cdot)\}$ jest liniowo niezależny na I . Analogicznie zapis $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \in (\text{LZ})_I$ oznacza, że układ jest liniowo zależny na I . Podobnie przez $\{\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_k(t_0)\} \in (\text{LN})_{\mathbb{R}^n}$, $(\{\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_k(t_0)\} \in (\text{LZ})_{\mathbb{R}^n})$ będziemy oznaczać układy wektorów liniowo niezależnych (liniowo zależnych) w \mathbb{R}^n . Niech $\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_k(\cdot) \in \mathcal{M}$. Uzasadnimy najpierw implikację

$$\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \in (\text{LN})_I \Rightarrow \forall t \in I \{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t)\} \in (\text{LN})_{\mathbb{R}^n} \quad (\star)$$

Przypuśćmy, że dla pewnego $t_0 \in I$ jest $\{\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_k(t_0)\} \in (\text{LZ})_{\mathbb{R}^n}$. Wówczas istnieją stałe $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, nie wszystkie równe zero, takie że $\lambda_1 \mathbf{x}_1(t_0) + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k(t_0) = \mathbf{0}$. Rozważmy funkcję $\mathbf{x}(\cdot)$ daną wzorem $\mathbf{x}(t) = \lambda_1 \mathbf{x}_1(t) + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k(t)$, $t \in I$. Oczywiście $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{M}$ oraz $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$. Zatem funkcja $\mathbf{x}(\cdot)$ jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Ale jedynym rozwiązaniem tego zagadnienia jest funkcja zerowa, więc $\mathbf{x}(\cdot) = \mathbf{0}(\cdot)$. Wynika stąd, że $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} \in (\text{LZ})_I$.

Udowodnimy teraz, że $\dim \mathcal{M} = n$. Pokazujemy najpierw, że $\dim \mathcal{M} \leq n$. Istotnie, gdyby istniał liniowo niezależny układ $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_k(\cdot)\} \subset \mathcal{M}$, gdzie $k > n$, to na mocy implikacji (\star) , wektory $\{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t)\}$ byłyby liniowo niezależne w \mathbb{R}^n , a to jest niemożliwe, bo $\dim \mathbb{R}^n = n$. Z drugiej strony weźmy dowolny układ wektorów $\{\mathbf{x}_{10}, \dots, \mathbf{x}_{n0}\} \in (\text{LN})_{\mathbb{R}^n}$

oraz rozpatrzmy układ funkcji wektorowych $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_n(\cdot)\} \subset \mathcal{M}$, będących rozwiązaniami kolejnych zagadnień

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

przy pewnym $t_0 \in I$. Wówczas $\mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{x}_{i0}$, a więc układ wektorów $\{\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)\}$ jest liniowo niezależny w \mathbb{R}^n . Stąd, na mocy Wniosku 3.1 wynika, że $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_n(\cdot)\} \in (\text{LN})_I$. Zatem $\dim \mathcal{M} \geq n$. Ostatecznie $\dim \mathcal{M} = n$. □

Z liniowej niezależności układu funkcji wektorowych $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_k(\cdot)\}$ nie wynika liniowa niezależność układu wektorów $\{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t)\}$ w \mathbb{R}^n dla każdego $t \in I$ jak pokazuje to

Przykład 3.6 Funkcje wektorowe $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, zdefiniowane następująco

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne na \mathbb{R} , a wektory $\mathbf{x}_1(1), \mathbf{x}_2(1)$ są liniowo zależne w \mathbb{R}^2 .

Zachodzi natomiast

Twierdzenie 3.5 *Jeżeli funkcje wektorowe $\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_k(\cdot)$ są całkami równania liniowego $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ oraz układ wektorów $\{\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_k(t_0)\}$ jest liniowo niezależny w \mathbb{R}^n dla pewnego $t_0 \in I$, to układ wektorów $\{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t)\}$ jest liniowo niezależny w \mathbb{R}^n dla każdego $t \in I$.*

D o w ó d: Załóżmy, że $\{\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_k(t_0)\} \in (\text{LN})_{\mathbb{R}^n}$ dla pewnego $t_0 \in I$. Niech \bar{t} będzie dowolnym punktem z przedziału I oraz $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ niech będą takimi skalarami, że $\lambda_1 \mathbf{x}_1(\bar{t}) + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k(\bar{t}) = \mathbf{0}$. Weźmy pod uwagę funkcję $\mathbf{x}(\cdot) = \lambda_1 \mathbf{x}_1(\cdot) + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k(\cdot)$. Funkcja ta jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(\bar{t}) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Zatem $\forall t \in I \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$, a więc w szczególności $\mathbf{x}(t_0) = \lambda_1 \mathbf{x}_1(t_0) + \dots + \lambda_k \mathbf{x}_k(t_0) = \mathbf{0}$. Stąd, na mocy założenia, $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Dowodzi to tego, że $\{\mathbf{x}_1(\bar{t}), \dots, \mathbf{x}_k(\bar{t})\} \in (\text{LN})_{\mathbb{R}^n}$. Z dowolności \bar{t} mamy $\{\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_k(t)\} \in (\text{LN})_{\mathbb{R}^n}$ dla każdego $t \in I$. □

Definicja 3.7 Dowolny układ $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_n(\cdot)\}$ n liniowo niezależnych całek równania $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, nazywamy *układem fundamentalnym (bazowym układem całek)* tego równania.

Układem fundamentalnym jest więc dowolna baza algebraiczna przestrzeni \mathcal{M} . Z twierdzeń 3.3, 3.4 i 3.5 wynikają następujące ważne twierdzenia

Twierdzenie 3.6 *Niech układ*

$$\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_n(\cdot)\} \quad (\bullet)$$

będzie układem n całek równania jednorodnego $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$. Wówczas następujące warunki są równoważne

- (a) *Układ (\bullet) jest układem fundamentalnym.*
- (b) *Dla każdego $t \in I$, wrońskian $W[t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \neq 0$.*
- (c) *$W[t_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \neq 0$ dla pewnego $t_0 \in I$.*

Twierdzenie 3.7 *Jeżeli układ (\bullet) jest układem fundamentalnym całek równania $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, to całka ogólna tego równania wyraża się wzorem*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i(t), \quad t \in I, \quad (14)$$

gdzie C_1, \dots, C_n są dowolnymi stałymi.

Wyznamy teraz całkę ogólną układu niejednorodnego

$$(5) \quad \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t).$$

Zastosujemy *metodę zmienniania stałych*. W tym celu, we wzorze (14) na całkę ogólną układu jednorodnego, zastąpimy stałe C_i funkcjami $C_i(t)$. Otrzymamy przewidywaną postać całki ogólnej równania niejednorodnego

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \mathbf{x}_i(t), \quad (15)$$

gdzie $C_i(\cdot)$ są chwilowo nieznanymi funkcjami skalarnymi, które dobierzemy tak, aby funkcja określona wzorem (15) spełniała równanie niejednorodne. Różniczkujemy związek (15) i otrzymujemy

$$\mathbf{x}'(t) = \sum_{i=1}^n C_i'(t) \mathbf{x}_i(t) + \sum_{i=1}^n C_i(t) \mathbf{x}_i'(t). \quad (16)$$

Wstawiamy teraz (15) i (16) do równania niejednorodnego (5). Otrzymamy

$$\sum_{i=1}^n C_i'(t) \mathbf{x}_i(t) + \sum_{i=1}^n C_i(t) \mathbf{x}_i'(t) = \mathbf{A}(t) \sum_{i=1}^n C_i(t) \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{b}(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \mathbf{A}(t) \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{b}(t).$$

Ale $\mathbf{x}'_i(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_i(t)$. Otrzymujemy zatem związek

$$\sum_{i=1}^n C'_i(t)\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{b}(t),$$

który rozpisany po współrzędnych przyjmuje postać układu równań liniowych

$$\begin{cases} C'_1(t)x_{11}(t) + \dots + C'_n(t)x_{1n}(t) = b_1(t) \\ \vdots \\ C'_1(t)x_{n1}(t) + \dots + C'_n(t)x_{nn}(t) = b_n(t) \end{cases} \quad (17)$$

z niewiadomymi $C'_1(t), \dots, C'_n(t)$. Wyznacznik $W(t)$ układu (17) jest wrońskianem układu bazowego $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_n(\cdot)\}$ całek równania jednorodnego, więc $W(t) \neq 0$ dla każdego $t \in I$. Układ (17) ma zatem dokładnie jedno rozwiązanie $C'_1(t), \dots, C'_n(t)$, gdzie

$$C'_i(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Stąd

$$C_i(t) = \int \frac{W_i(t)}{W(t)} dt + C_i.$$

Ostatecznie rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego jest postaci

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{x}_i(t) + \sum_{i=1}^n \left(\int \frac{W_i(t)}{W(t)} dt \right) \mathbf{x}_i(t). \quad (18)$$

Zauważamy, że pierwszy składnik po prawej stronie wzoru (18) jest całką ogólną równania jednorodnego, drugi jest więc pewną całką szczególną równania niejednorodnego. Stąd, zgodnie z ogólną teorią równań liniowych, wzór (18) zapisujemy tradycyjnie w postaci

$$\text{CORN} = \text{CORJ} + \text{CSRN}. \quad (18')$$

3.3.1 Macierz fundamentalna i jej własności

Rozpatrzmy jeszcze raz układ jednorodny

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \quad (19)$$

Definicja 3.8 *Macierzą fundamentalną* układu (19) nazywamy macierz

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

której kolumny

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{x}_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

tworzą układ fundamentalny całek tego układu.

Wniosek 3.2 Wzór (14) na całkę ogólną równania jednorodnego, można teraz zapisać w postaci

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}, \quad (20)$$

gdzie $\Phi(t)$ jest dowolną macierzą fundamentalną, a $\mathbf{c} = [C_1, \dots, C_n]^T$ – dowolnym wektorem z \mathbb{R}^n .

Zauważymy, że:

- (a) macierz fundamentalna jest nieosobliwa dla każdego $t \in I$,
- (b) macierz fundamentalna $\Phi(t)$ spełnia równanie różniczkowe

$$\Phi' = \mathbf{A}(t)\Phi. \quad (21)$$

Istotnie.

Ad (a): $\det \Phi(t) = W[t, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] \neq 0$ dla każdego $t \in I$,

Ad (b): równanie (21) jest zapisem macierzowym faktu, że dla każdej kolumny \mathbf{x}_i macierzy $\Phi(t)$, zachodzi związek

$$\mathbf{x}'_i(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_i(t).$$

Uwaga. Jeżeli $\Phi(t)$ jest macierzą fundamentalną układu (19), a \mathbf{P} – dowolną nieosobliwą macierzą wymiaru $n \times n$, to macierz $\Psi(t) = \Phi(t) \cdot \mathbf{P}$ jest też macierzą fundamentalną tego układu. Wynika to stąd, że kolumny macierzy $\Psi(t)$ są kombinacjami liniowymi kolumn macierzy $\Phi(t)$, a więc są też liniowo niezależnymi całkami układu (19). Zbiór macierzy postaci $\Phi(t) \cdot \mathbf{P}$, gdzie $\Phi(t)$ jest dowolną, ustaloną macierzą fundamentalną, a \mathbf{P} przebiega zbiór nieosobliwych macierzy wymiaru $n \times n$, jest zbiorem wszystkich macierzy fundamentalnych układu (19).

Rozpatrzmy zagadnienie początkowe.

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (22)$$

Wyznamy rozwiązanie tego zagadnienia. Posłużymy się, podobnie jak poprzednio, metodą uzmienniania stałej. Wtym celu, we wzorze (20) na całkę ogólną równania jednorodnego, przyjmijmy zamiast stałego wektora \mathbf{c} , funkcję wektorową $\mathbf{c}(t)$. Otrzymamy

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{c}(t). \quad (23)$$

Stąd

$$\mathbf{x}'(t) = \Phi'(t)\mathbf{c}(t) + \Phi(t)\mathbf{c}'(t).$$

Podstawiając $\mathbf{x}(t)$ i $\mathbf{x}'(t)$ do równania niejednorodnego otrzymamy

$$\Phi'(t)\mathbf{c}(t) + \Phi(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t)\mathbf{c}(t) + \mathbf{b}(t).$$

Ale $\Phi'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t)$ (własność (b) macierzy fundamentalnej), stąd

$$\Phi(t)\mathbf{c}'(t) = \mathbf{b}(t).$$

Korzystając z tego, że macierz $\Phi(t)$ jest nieosobliwa otrzymujemy

$$\mathbf{c}'(t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t).$$

Całkujemy ostatni związek w przedziale od t_0 do t . Dostajemy

$$\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}(t_0) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau.$$

Z wzoru (23), wykorzystując warunek początkowy, dostaniemy

$$\mathbf{x}_0 = \Phi(t_0)\mathbf{c}(t_0) \Rightarrow \mathbf{c}(t_0) = \Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0,$$

zatem

$$\mathbf{c}(t) = \Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau.$$

Podstawiamy wyznaczone $\mathbf{c}(t)$ do wzoru (23) i otrzymujemy ostateczną postać rozwiązania zagadnienia (22)

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau. \quad (24)$$

Przy okazji odnotujemy wzór

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 \quad (25)$$

na rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (26)$$

dla układu jednorodnego.

Przykład 3.7 Pokazać, że

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix}$$

jest macierzą fundamentalną układu liniowego jednorodnego

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{t^2} & \frac{3}{t} \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

a następnie rozwiązać zagadnienie niejednorodne

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{t^2} & \frac{3}{t} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Mamy tutaj:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{t^2} & \frac{3}{t} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t_0 = 1, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Funkcja macierzowa $\mathbf{A}(\cdot)$ jest ciągła w każdym z przedziałów: $(-\infty; 0)$, $(0; \infty)$. Warunek początkowy postawiony jest w punkcie $t_0 = 1$, więc wybieramy przedział $I = (0; \infty)$. Wykażemy, że $\Phi(t)$ jest macierzą fundamentalną układu jednorodnego. Wystarczy pokazać, że macierz $\Phi(t)$ jest nieosobliwa i spełnia równanie (21). Istotnie

$$\Phi'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3t^2 \\ 0 & 6t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(t)\Phi(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{t^2} & \frac{3}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3t^2 \\ 0 & 6t \end{bmatrix},$$

a więc

$$\Phi'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t) \quad \text{oraz dla każdego } t \in I, \quad \det \Phi(t) = 2t^3 \neq 0.$$

Zatem kolumny macierzy $\Phi(t)$ są liniowo niezależnymi całkami układu jednorodnego. Rozwiązanie zagadnienia początkowego wyznaczymy z wzoru (24). Mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)\mathbf{b}(\tau)d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix} \int_1^t \begin{bmatrix} \tau & \tau^3 \\ 1 & 3\tau^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix} \int_1^t \begin{bmatrix} \frac{3}{2\tau} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\tau^3} & \frac{1}{2\tau^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^3 & -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^3 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t^2 & -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix} \int_1^t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^3 \\ -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t-1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^3 + t^2 - \frac{3}{2}t \\ \frac{3}{2}t^2 + t - \frac{3}{2} \end{bmatrix}}}. \end{aligned}$$

3.3.2 Rezolwenta układu liniowego

Wyznamy teraz pewien specjalny układ bazowy całek układu jednorodnego (19). Oznaczmy przez \mathbf{I} macierz jednostkową wymiaru $n \times n$. Wektory kolumnowe

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tej macierzy stanowią bazę kanoniczną w \mathbb{R}^n . Rozpatrzmy n zagadnień początkowych

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (27)$$

Każde z zagadnień (27) ma dokładnie jedno rozwiązanie. Oznaczmy rozwiązanie i -tego zagadnienia przez $\mathbf{x}_i(\cdot)$ i niech

$$\mathbf{x}_i(t) = \begin{bmatrix} x_{i1}(t) \\ \vdots \\ x_{in}(t) \end{bmatrix}.$$

Oczywiście $\mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{e}_i$, więc wektory $\{\mathbf{x}_1(t_0), \dots, \mathbf{x}_n(t_0)\} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ tworzą bazę w \mathbb{R}^n . Funkcje wektorowe $\{\mathbf{x}_1(\cdot), \dots, \mathbf{x}_n(\cdot)\}$ tworzą zatem fundamentalny układ rozwiązań równania (21).

Definicja 3.9 *Rezolwentą* układu $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, w punkcie $t_0 \in I$, nazywamy macierz fundamentalną $\Phi(t)$, której kolumnami są funkcje wektorowe $\mathbf{x}_i(t)$ będące rozwiązaniami kolejnych zagadnień (27). Tę szczególną macierz fundamentalną oznaczamy będziemy $\mathbf{R}(t, t_0)$.

Z definicji rezolwenty $\mathbf{R}(t, t_0)$ wynika następująca jej własność, która może być przyjęta również za jej definicję.

Wniosek 3.3 *Rezolwenta $\mathbf{R}(t, t_0)$ jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia początkowego*

$$\begin{cases} \Phi' = \mathbf{A}(t)\Phi \\ \Phi(t_0) = \mathbf{I}. \end{cases}$$

Wynika stąd w szczególności, że

$$\mathbf{R}(t_0, t_0) = \mathbf{I}.$$

Jeśli we wzorach (24) i (25) w miejsce dowolnej macierzy fundamentalnej $\Phi(t)$ wstawimy rezolwentę $\mathbf{R}(t, t_0)$, to otrzymamy wzór

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t, t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{R}(t, t_0) \int_{t_0}^t \mathbf{R}^{-1}(\tau, t_0)\mathbf{b}(\tau)d\tau \quad (28)$$

na rozwiązanie zagadnienia początkowego (22) oraz wzór

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t, t_0)\mathbf{x}_0 \quad (29)$$

na rozwiązanie zagadnienia początkowego (25).

Wzory (28) i (29) możemy zinterpretować następująco. Jeżeli znamy rezolwentę $\mathbf{R}(t, t_0)$ układu $\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ oraz znamy stan \mathbf{x}_0 tego układu w chwili $t_0 \in I$, to wzory (28) i (29) określają stan $\mathbf{x}(t)$ układu w dowolnej chwili $t \in I$. Dlatego też macierz fundamentalną $\mathbf{R}(t, t_0)$ nazywamy *macierzą przejścia stanu*.

Przy ustalonych $t, t_0 \in I$ możemy rozpatrzyć odwzorowanie

$$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{x}_0 \longmapsto \mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t, t_0)\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (\star)$$

które stanowi \mathbf{x}_0 układu (19) w chwili t_0 , przyporządkowuje jego stan $\mathbf{x}(t)$ w chwili t . Zachodzi oczywisty

Fakt *Odwzorowanie (\star) jest izomorfizmem przestrzeni \mathbb{R}^n .*

Porównanie wzorów (25) i (29) daje nam wzór

$$\mathbf{R}(t, t_0) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0) \quad (30)$$

pozwalający na wyznaczenie rezolwenty $\mathbf{R}(t, t_0)$, jeżeli znamy dowolną macierz fundamentalną $\mathbf{\Phi}(t)$.

Uzasadnimy jeszcze jedną własność macierzy $\mathbf{R}(t, t_0)$.

Fakt *Dla dowolnych $t_0, t_1, t_2 \in I$ zachodzi związek*

$$\mathbf{R}(t_2, t_1) \cdot \mathbf{R}(t_1, t_0) = \mathbf{R}(t_2, t_0). \quad (31)$$

Istotnie. Weźmy dowolne $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ oraz niech $\mathbf{x}_1 = \mathbf{R}(t_1, t_0)\mathbf{x}_0$ i $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}(t_2, t_1)\mathbf{x}_1$. Wtedy $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}(t_2, t_1) \cdot \mathbf{R}(t_1, t_0)\mathbf{x}_0$. Z drugiej strony, startując w chwili t_0 ze stanu \mathbf{x}_0 , otrzymamy w chwili t_2 (na mocy jednoznaczności rozwiązań) ten sam stan $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}(t_2, t_0)\mathbf{x}_0$. Zatem dla każdego $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ mamy $\mathbf{R}(t_2, t_1) \cdot \mathbf{R}(t_1, t_0)\mathbf{x}_0 = \mathbf{R}(t_2, t_0)\mathbf{x}_0$, co dowodzi wzoru (31).

Z wzoru (31) wynika również, że

$$\mathbf{R}^{-1}(t, t_0) = \mathbf{R}(t_0, t).$$

Przykład 3.8 Wyznaczyć rezolwentę układu liniowego

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{3}{t^2} & \frac{3}{t} \end{bmatrix} \mathbf{x},$$

w punkcie $t_0 = 1$.

R o z w i ą z a n i e : Wiemy już (porównaj przykład 3.1), że macierz

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix}$$

jest macierzą fundamentalną tego układu. Rezolwentę wyznaczymy ze wzoru (30).

$$\mathbf{R}(t, 1) = \Phi(t)\Phi^{-1}(1) = \begin{bmatrix} t & t^3 \\ 1 & 3t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}t^3 & -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^3 \\ \frac{3}{2} - \frac{3}{2}t^2 & -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}t^2 \end{bmatrix}}}.$$

3.3.3 Układy liniowe o stałych współczynnikach

Zajmiemy się teraz wyznaczeniem rezolwenty układu liniowego o stałych współczynnikach

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n, \end{cases} \quad (32)$$

zapisanego krótko

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (33)$$

Układ (32), w którym prawa strona nie zależy od t , nazywać będziemy *liniowym układem autonomicznym*.

Z twierdzenia globalnego Picarda wynika, że zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (34)$$

ma dla dowolnego $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ dokładnie jedno rozwiązanie określone na $I = (-\infty; \infty)$. Warunek początkowy w zagadnieniu (34) postawiliśmy w punkcie $t_0 = 0$. Uczyniliśmy tak, ponieważ $I = \mathbb{R}$ i mogliśmy przyjąć $t_0 = 0$. Ponadto jak później pokażemy, znając rozwiązanie zagadnienia (34), łatwo można otrzymać rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (35)$$

dla dowolnego $t_0 \neq 0$.

Rozwiązaniem zagadnienia (34) jest zgodnie z wzorem (29), funkcja wektorowa $\mathbf{x}(\cdot)$ określona wzorem

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t, 0)\mathbf{x}_0, \quad (36)$$

gdzie $\mathbf{R}(t, 0)$ rezolwentą równania $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ w punkcie $t_0 = 0$. Przypomnijmy, że macierz $\mathbf{R}(t, 0)$ nazwaliśmy też macierzą przejścia stanu. Przeprowadza ona układ ze stanu $\mathbf{x}(0)$ w chwili 0, w stan $\mathbf{x}(t)$ w chwili t . Z drugiej strony, rozwiązanie zagadnienia (34) można otrzymać jako granicę ciągu kolejnych przybliżeń Picarda

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_n(\tau) d\tau, \quad \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0.$$

Obliczymy kilka początkowych wyrazów tego ciągu.

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_0 d\tau = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{A}\mathbf{x}_0 = (\mathbf{I} + t\mathbf{A})\mathbf{x}_0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{x}_1(\tau) d\tau = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{I} + \tau\mathbf{A})\mathbf{x}_0 d\tau = \mathbf{x}_0 + \int_0^t (\mathbf{A} + \tau\mathbf{A}^2)\mathbf{x}_0 d\tau = \\ &= \mathbf{x}_0 + \left(t\mathbf{A} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{A}^2\right)\mathbf{x}_0 = \left(\mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{A}^2\right)\mathbf{x}_0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{x}_3(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{A} \left(\mathbf{I} + \tau\mathbf{A} + \frac{1}{2}\tau^2\mathbf{A}^2\right)\mathbf{x}_0 d\tau = \left(\mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{1}{2}t^2\mathbf{A}^2 + \frac{1}{3!}t^3\mathbf{A}^3\right)\mathbf{x}_0, \quad \text{itd.}$$

Rozwiązanie $\mathbf{x}(t)$, jako granica ciągu kolejnych przybliżeń, jest zatem sumą szeregu

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{t^3\mathbf{A}^3}{3!} + \dots\right)\mathbf{x}_0. \quad (37)$$

Szereg

$$\mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{t^3\mathbf{A}^3}{3!} + \dots$$

jest szeregiem macierzowym. Jego sumy częściowe są macierzami. Powstaje pytanie, jak należy rozumieć zbieżność szeregu macierzowego. Przez analogię do zbieżności ciągów wektorów w przestrzeni \mathbb{R}^n (macierz $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ możemy utożsamić z wektorem w przestrzeni \mathbb{R}^{n^2}), zbieżność szeregu macierzowego $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}_k$ do sumy \mathbf{A} , gdzie $\mathbf{A}_k = [a_{ij}^k]_{n \times n}$ i $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ są macierzami kwadratowymi tego samego stopnia, definiujemy poprzez zbieżność wyrazów ciągu macierzy $\mathbf{S}_m = \sum_{k=1}^m \mathbf{A}_k$, do odpowiednich wyrazów sumy \mathbf{A} . To znaczy

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{A}_k = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{ij}^k] = [a_{ij}] = \mathbf{A} \iff \forall_{i,j} \sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^k = a_{ij}.$$

Szereg w nawiasie we wzorze (37), ma postać analogiczną do rozwinięcia funkcji wykładniczej w szereg Maclaurina. Przyjmijmy zatem

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{t^3\mathbf{A}^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\mathbf{A}^k}{k!} \quad \text{dla } t \in \mathbb{R}, \quad \text{gdzie } \mathbf{A}^0 = \mathbf{I}. \quad (38)$$

Wzór (37) możemy zatem przepisać w postaci

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0. \quad (39)$$

Porównując wzory (39) i (36) otrzymujemy

Wniosek 3.4 *Rezolwentą układu liniowego o stałych współczynnikach jest macierz $\mathbf{R}(t, 0) = e^{t\mathbf{A}}$ wyrażona wzorem (38).*

Pokażemy teraz związek pomiędzy rezolwentą $\mathbf{R}(t, t_0)$ równania $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ w punkcie t_0 , a rezolwentą $\mathbf{R}(t, 0)$ tego równania w punkcie 0. Jak wiemy, rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (35)$$

jest funkcja wektorowa określona wzorem

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t, t_0)\mathbf{x}_0.$$

Podstawmy w równaniu (35) $s = t - t_0$. Wtedy

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(s + t_0) = \mathbf{y}(s) \quad \text{oraz} \quad \mathbf{x}'(t) = \mathbf{y}'(s).$$

Zagadnienie (35) z niewiadomą funkcją $\mathbf{x}(t)$ przejdzie w równoważne zagadnienie

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

z niewiadomą funkcją $\mathbf{y}(s)$. Jego rozwiązaniem jest

$$\mathbf{y}(s) = \mathbf{R}(s, 0)\mathbf{x}_0.$$

Wracając do zmiennej t , otrzymamy rozwiązanie zagadnienia (35) tym razem w postaci

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{R}(t - t_0, 0)\mathbf{x}_0.$$

Porównując oba rozwiązania, otrzymujemy dla układu o stałych współczynnikach związek

$$\mathbf{R}(t, t_0) = \mathbf{R}(t - t_0, 0). \quad (40)$$

Wniosek 3.5 *Rozwiązanie zagadnienia (35) dane jest wzorem*

$$\mathbf{x}(t) = e^{(t-t_0)\mathbf{A}}\mathbf{x}_0. \quad (41)$$

Odnotujmy jeszcze ważną własność rezolwenty $\mathbf{R}(t, 0)$ równania $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Fakt *Dla dowolnych $t, s \in \mathbb{R}$ zachodzi związek*

$$\mathbf{R}(s, 0) \cdot \mathbf{R}(t, 0) = \mathbf{R}(t + s, 0). \quad (42)$$

Istotnie. Weźmy dowolny punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ i oznaczmy przez $\mathbf{x}_1 = \mathbf{R}(t, 0)\mathbf{x}_0$ a przez $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}(s, 0)\mathbf{x}_1$. Wtedy $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}(s, 0) \cdot \mathbf{R}(t, 0)\mathbf{x}_0$. Ale jednocześnie $\mathbf{x}_2 = \mathbf{R}(t + s, 0)\mathbf{x}_0$. Stąd, na mocy jednoznaczności rozwiązań, mamy zależność (42). Zależność tę można było również otrzymać ze związku (31) przyjmując $t_0 = 0$, $t_1 = t$, $t_2 - t_1 = s$.

Wniosek 3.6 *Macierz $e^{t\mathbf{A}}$ ma własności*

- (a) $\frac{d}{dt}(e^{t\mathbf{A}}) = \mathbf{A}e^{t\mathbf{A}},$
- (b) $e^{0\cdot\mathbf{A}} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I},$
- (c) $e^{(t+s)\mathbf{A}} = e^{s\mathbf{A}} \cdot e^{t\mathbf{A}} = e^{t\mathbf{A}} \cdot e^{s\mathbf{A}},$
- (d) $(e^{t\mathbf{A}})^{-1} = e^{-t\mathbf{A}}.$

Własności (a) i (b) wynikają z Wniosku 3.2, własność (c) jest innym zapisem związku (42), własność (d) wynika z (c) i (b).

Wniosek 3.7 *Rozwiązanie zagadnienia niejednorodnego*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

dane jest wzorem

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}}\mathbf{b}(\tau) d\tau. \quad (43)$$

Wzór (43) wynika wprost ze wzoru (28) na str. 57 oraz z własności (c) i (d).

3.3.4 Metody wyznaczania macierzy $e^{t\mathbf{A}}$

Rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$(34) \quad \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

dane wzorem

$$(39) \quad \mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} + \frac{t\mathbf{A}}{1!} + \frac{t^2\mathbf{A}^2}{2!} + \dots \right) \cdot \mathbf{x}_0 = e^{t\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}_0,$$

określone jest przy pomocy szeregu macierzowego. Pokażemy, że rozwiązanie to można przedstawić w postaci skończonej sumy. Przedtem podamy pewne, potrzebne w dalszym ciągu, fakty z algebry liniowej.

Rozważmy przestrzeń $\text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ macierzy kwadratowych stopnia $n \times n$ o wyrazach zespolonych. Niech $\mathbf{A} \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$. Macierz \mathbf{A} możemy oczywiście utożsamić (przy ustalonej bazie przestrzeni \mathbb{C}^n) z odwzorowaniem liniowym $\mathbf{A} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$. Pierwiastki równania charakterystycznego $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$ są wartościami własnymi macierzy \mathbf{A} . Oznaczmy je przez $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, a ich krotności odpowiednio przez n_1, \dots, n_k . Oczywiście suma krotności jest równa n . Oznaczmy przez \mathbb{V}_i zbiór zdefiniowany następująco:

$$\mathbb{V}_i = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n : (\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})^{n_i}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}.$$

Zbiór \mathbb{V}_i , jest jądrem odwzorowania liniowego o macierzy $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^{n_i}$, jest zatem podprzestrzenią przestrzeni \mathbb{C}^n . Jest k takich podprzestrzeni. Zachodzi, znane z algebry

Twierdzenie 3.8 (spektralne) *Podprzestrzenie \mathbb{V}_i mają następujące własności:*

1° $\mathbf{A}\mathbb{V}_i \subset \mathbb{V}_i$, tzn. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}_i \mathbf{A}\mathbf{v} \in \mathbb{V}_i$ - własność niezmienniczości,

2° $\mathbb{V}_i \cap \mathbb{V}_j = \{\mathbf{0}\}$ dla $i \neq j$,

3° $\dim \mathbb{V}_i = n_i$,

4° dla dowolnego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, zachodzi jednoznaczna reprezentacja:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2 + \dots + \mathbf{v}^k, \text{ gdzie } \mathbf{v}^i \in \mathbb{V}_i. \quad (\star)$$

Podprzestrzenie \mathbb{V}_i nazywają się podprzestrzeniami niezmienniczymi względem odwzorowania \mathbf{A} . Własność 4° formułujemy też następująco:

Przestrzeń \mathbb{C}^n jest sumą prostą podprzestrzeni niezmienniczych względem operatora liniowego $\mathbf{A} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, co zapisujemy następująco

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathbb{V}_k.$$

Rozkład (\star) wektora \mathbf{v} , na składowe z podprzestrzeni niezmienniczych, nazywamy *rozkładem spektralnym* wektora \mathbf{v} .

Przystępujemy teraz do rozwiązania zagadnienia początkowego (34). Rozkładamy wektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ na sumę wektorów z podprzestrzeni niezmienniczych:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0^1 + \mathbf{x}_0^2 + \dots + \mathbf{x}_0^k, \text{ gdzie } \mathbf{x}_0^i \in \mathbb{V}_i$$

oraz skorzystamy z tożsamości $e^{t\mathbf{A}} = e^{t\lambda_i \mathbf{I}} \cdot e^{t(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})}$. Otrzymamy

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}_0 = e^{t\mathbf{A}} \cdot \sum_{i=1}^k \mathbf{x}_0^i = \sum_{i=1}^k e^{t\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}_0^i = \sum_{i=1}^k e^{t\lambda_i \mathbf{I}} \cdot e^{t(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})} \cdot \mathbf{x}_0^i =$$

$$\left| \text{rozwijamy teraz macierz } e^{t(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})} \text{ w szereg potęgowy (38)} \right|$$

$$= \sum_{i=1}^k e^{t\lambda_i \mathbf{I}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j \right) \mathbf{x}_0^i = \sum_{i=1}^k e^{t\lambda_i \mathbf{I}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j \mathbf{x}_0^i \right) =$$

$$\left| \text{ale } (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j \mathbf{x}_0^i = \mathbf{0} \text{ dla } j \geq n_i \text{ (bo } \mathbf{x}_0^i \in \mathbb{V}_i) \right|$$

$$= \sum_{i=1}^k e^{t\lambda_i \mathbf{I}} \left(\sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{t^j}{j!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j \mathbf{x}_0^i \right) =$$

$$\left| e^{t\lambda_i \mathbf{I}} = \mathbf{I} + \frac{t\lambda_i \mathbf{I}}{1!} + \frac{t^2 \lambda_i^2 \mathbf{I}^2}{2!} + \dots = \left(1 + \frac{t\lambda_i}{1!} + \frac{t^2 \lambda_i^2}{2!} + \dots \right) \cdot \mathbf{I} = e^{t\lambda_i} \cdot \mathbf{I} \right|$$

$$= \sum_{i=1}^k e^{t\lambda_i} \mathbf{I} \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{t^j}{j!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j \mathbf{x}_0^i = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{n_i-1} e^{t\lambda_i} \frac{t^j}{j!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j \mathbf{x}_0^i.$$

Oznaczmy jeszcze przez \mathbf{E}_{λ_i} macierz odwzorowania liniowego, przyporządkowującego wektorowi $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, jego i -tą składową \mathbf{v}^i z rozkładu spektralnego. Zatem macierz \mathbf{E}_{λ_i} określona jest następująco: $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \quad \mathbf{E}_{\lambda_i} \mathbf{v} = \mathbf{v}^i$. Rozwiązanie $\mathbf{x}(t)$ możemy teraz zapisać następująco

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{n_i-1} e^{t\lambda_i} \frac{t^j}{j!} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j \mathbf{E}_{\lambda_i} \cdot \mathbf{x}_0. \quad (44)$$

Porównując ostatni wzór z wzorem (39), otrzymujemy wzór na macierz $e^{t\mathbf{A}}$ w postaci skończonej sumy

$$e^{t\mathbf{A}} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{t^j}{j!} e^{t\lambda_i} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j \mathbf{E}_{\lambda_i} \quad (45)$$

Przykład 3.9 Wyznaczyć macierz $e^{t\mathbf{A}}$, gdy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

R o z w i ą z a n i e : Wyznaczamy wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie niezmiennicze.

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 & -1 \\ 3 & -2 - \lambda & -3 \\ -1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Stąd

$$\lambda_1 = 0, \quad n_1 = 1; \quad \lambda_2 = 1, \quad n_2 = 2.$$

$$\mathbb{V}_1 = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 : (\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I})^1 \mathbf{v} = \mathbf{0} \} = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Rząd macierzy \mathbf{A} jest równy 2, stąd mamy układ równań

$$\begin{cases} 2v_1 - v_2 - v_3 = 0 \\ -v_1 + v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_3 = -v_1 \\ v_2 = 3v_1, \quad v_1 \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

Zatem

$$\mathbb{V}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 3\alpha_1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_1 \in \mathbb{C} \right\}$$

jest podprzestrzenią niezmienniczą odpowiadającą wartości własnej $\lambda_1 = 0$.

Podobnie dla $\lambda_2 = 1$ mamy

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_2 &= \{ \mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 : (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 \mathbf{v} = \mathbf{0} \} = \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = v_2 + v_3 \\ v_2, v_3 \in \mathbb{C}. \end{cases} \end{aligned}$$

Więc

$$\mathbb{V}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C} \right\}.$$

Wyznaczamy teraz rozkład spektralny dowolnego wektora $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3$ na sumę jego składowych z podprzestrzeni niezmienniczych \mathbb{V}_1 i \mathbb{V}_2 .

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 + \mathbf{v}^2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 3\alpha_1 \\ -\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 + \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (\star)$$

Stąd mamy układ równań

$$\begin{cases} v_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ v_2 = 3\alpha_1 + \alpha_2 \\ v_3 = -\alpha_1 + \alpha_3. \end{cases}$$

Rozwiązujemy ten układ względem $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i otrzymujemy

$$\begin{cases} \alpha_1 = -v_1 + v_2 + v_3 \\ \alpha_2 = 3v_1 - 2v_2 - 3v_3 \\ \alpha_3 = -v_1 + v_2 + 2v_3. \end{cases}$$

Zatem wektory składowe wektora \mathbf{v} , w rozkładzie spektralnym (\star) są równe

$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} -v_1 + v_2 + v_3 \\ -3v_1 + 3v_2 + 3v_3 \\ v_1 - v_2 - v_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix} 2v_1 - v_2 - v_3 \\ 3v_1 - 2v_2 - 3v_3 \\ -v_1 + v_2 + 2v_3. \end{bmatrix}$$

Wektory \mathbf{v}^1 i \mathbf{v}^2 można przedstawić w postaci

$$\mathbf{v}^1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{\lambda_1} \mathbf{v}$$

oraz

$$\mathbf{v}^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{\lambda_2} \mathbf{v}.$$

Wyznaczyliśmy w ten sposób macierze

$$\mathbf{E}_{\lambda_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{E}_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

występujące we wzorze (45). Możemy teraz korzystając z tego wzoru obliczyć macierz $e^{t\mathbf{A}}$.

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^{n_i-1} \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_i t} (\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})^j \mathbf{E}_{\lambda_i} = \\ &= \frac{t^0}{0!} e^{\lambda_1 t} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})^0 \mathbf{E}_{\lambda_1} + \frac{t^0}{0!} e^{\lambda_2 t} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})^0 \mathbf{E}_{\lambda_2} + \frac{t^1}{1!} e^{\lambda_2 t} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})^1 \mathbf{E}_{\lambda_2} = \\ &= \mathbf{E}_{\lambda_1} + e^t \mathbf{E}_{\lambda_2} + te^t (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \mathbf{E}_{\lambda_2} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + e^t \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + te^t \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1+2e^t & 1-e^t & 1-e^t \\ -3+3e^t & 3-2e^t & 3-3e^t \\ 1-e^t & -1+e^t & -1+2e^t \end{bmatrix}}}. \end{aligned}$$

Przykład 3.10 Wyznaczyć rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} x' = y - z \\ y' = x - z \\ z' = 2x + 2y - 3z \\ x(1) = 0, y(1) = 1, z(1) = 1. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Przy oznaczeniach

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad t_0 = 1, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

dane zagadnienie przyjmuje postać

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases}$$

Rozwiązanie otrzymamy ze wzoru (41). Potrzebna jest więc macierz $e^{t\mathbf{A}}$. Wyznaczamy wartości własne i podprzestrzenie niezmiennicze macierzy \mathbf{A} .

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & 2 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)^3 = 0.$$

Stąd $\lambda_1 = -1$, $n_1 = 3$. Macierzy \mathbf{A} odpowiada jedna, trójwymiarowa podprzestrzeń niezmiennicza \mathbb{V}_1 . Musi nią więc być cała przestrzeń \mathbb{C}^3 . Przekonajmy się o tym jeszcze bezpośrednim rachunkiem.

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ więc również } (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stąd

$$\mathbb{V}_1 = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^3 : (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^3\mathbf{v} = \mathbf{0}\} = \mathbb{C}^3.$$

Jedyną składową w rozkładzie spektralnym wektora \mathbf{v} , jest sam wektor \mathbf{v} .

Wobec tego mamy

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^1 \text{ oraz } \mathbf{v}^1 = \mathbf{I}\mathbf{v}.$$

Więc

$$\mathbf{E}_{\lambda_1} = \mathbf{I}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= \sum_{j=0}^2 \frac{t^j}{j!} e^{\lambda_1 t} (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})^j \mathbf{E}_{\lambda_1} = \frac{t^0}{0!} e^{-t} (\mathbf{A} + \mathbf{I})^0 \mathbf{I} + \frac{t^1}{1!} e^{-t} (\mathbf{A} + \mathbf{I})^1 \mathbf{I} + \frac{t^2}{2!} e^{-t} (\mathbf{A} + \mathbf{I})^2 \mathbf{I} = \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{-t} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} t^2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} + te^{-t} & te^{-t} & -te^{-t} \\ te^{-t} & e^{-t} + te^{-t} & -te^{-t} \\ 2te^{-t} & 2te^{-t} & e^{-t} - 2te^{-t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem danego zagadnienia początkowego jest

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{(t-t_0)\mathbf{A}} \mathbf{x}_0 = \\ &= \begin{bmatrix} e^{-(t-1)} + (t-1)e^{-(t-1)} & (t-1)e^{-(t-1)} & -(t-1)e^{-(t-1)} \\ (t-1)e^{-(t-1)} & e^{-(t-1)} + (t-1)e^{-(t-1)} & -(t-1)e^{-(t-1)} \\ 2(t-1)e^{-(t-1)} & 2(t-1)e^{-(t-1)} & e^{-(t-1)} - 2(t-1)e^{-(t-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{= \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-(t-1)} \\ e^{-(t-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}}}$$

Przypadek pojedynczych wartości własnych

Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy \mathbf{A} są pojedyncze, to podprzestrzenie \mathbb{V}_i są jednowymiarowymi przestrzeniami rozpiętymi na wektorach własnych macierzy \mathbf{A} . Oznaczmy przez

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{bmatrix}$$

wektory własne macierzy \mathbf{A} . Wiadomo z algebry, że wektory własne odpowiadające różnym wartościom własnym są liniowo niezależne, więc układ wektorów $\mathcal{B}_v = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ jest bazą przestrzeni \mathbb{C}^n . Wektor \mathbf{x}_0 , którego współrzędne w bazie kanonicznej $\mathcal{B}_e = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ oznaczyliśmy przez x_{01}, \dots, x_{0n} ma w bazie \mathcal{B}_v nowe współrzędne. Oznaczmy je przez $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Zatem wektor \mathbf{x}_0 można przedstawić w postaci

$$\mathbf{x}_0 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

i przedstawienie to jest jednoznaczne. Ponieważ $\alpha_i \mathbf{v}_i \in \mathbb{V}_i$, więc powyższe przedstawienie wektora \mathbf{x}_0 jest jego rozkładem spektralnym oraz $\alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{x}_0^i$.

Niech $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n]$ będzie macierzą, której wektory kolumnowe są wektorami własnymi macierzy \mathbf{A} . Pomiedzy współrzędnymi x_{01}, \dots, x_{0n} wektora \mathbf{x}_0 w bazie \mathcal{B}_0 , a jego współrzędnymi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ w bazie \mathcal{B}_v zachodzą związki

$$\begin{bmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_{01} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix}.$$

Wzór (44) przyjmuje teraz postać

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{i=1}^n e^{\lambda_i t} \alpha_i \mathbf{v}_i = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} \begin{bmatrix} v_{1n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_{11} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_{n1} + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} v_{11} & \dots & v_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \mathbf{P} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}}_{e^{t\mathbf{A}}} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x}_0.$$

Otrzymaliśmy więc wzór

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \quad (46)$$

na macierz $e^{t\mathbf{A}}$ w przypadku, gdy macierz \mathbf{A} ma n wartości własnych, każda krotności 1.

Wzór (46) można otrzymać również na podstawie innego rozumowania, bez wykorzystania wzoru (44). Jeżeli macierz \mathbf{A} ma same jednokrotne wartości własne, to przy pomocy przekształcenia liniowego o macierzy \mathbf{P} , gdzie kolumny macierzy \mathbf{P} , tak jak poprzednio są wektorami własnymi macierzy \mathbf{A} , można macierz \mathbf{A} przekształcić do postaci diagonalnej

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

gdzie na głównej przekątnej są wartości własne macierzy \mathbf{A} . Mianowicie

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$$

Ponieważ

$$\mathbf{A}^2 = (\mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P}\mathbf{J}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P})\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{J}^2\mathbf{P}^{-1}$$

i analogicznie

$$\mathbf{A}^m = \mathbf{P}\mathbf{J}^m\mathbf{P}^{-1},$$

więc

$$\begin{aligned} e^{t\mathbf{A}} &= e^{t\mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}} = \mathbf{I} + t\mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1} + \frac{1}{2!}t^2\mathbf{P}\mathbf{J}^2\mathbf{P}^{-1} + \dots = \mathbf{P} \left(\mathbf{I} + t\mathbf{J} + \frac{1}{2!}t^2\mathbf{J}^2 + \dots \right) \mathbf{P}^{-1} = \\ &= \mathbf{P} e^{t\mathbf{J}} \mathbf{P}^{-1}. \end{aligned}$$

Obliczymy jeszcze $e^{t\mathbf{J}}$. Mamy

$$\mathbf{J}^m = \begin{bmatrix} \lambda_1^m & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n^m \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$e^{t\mathbf{J}} = \mathbf{I} + t\mathbf{J} + \frac{1}{2!}t^2\mathbf{J}^2 + \dots = \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{1}{2!}\lambda_1^2 t^2 + \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 + \lambda_n t + \frac{1}{2!}\lambda_n^2 t^2 + \dots \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

A więc uzyskaliśmy ponownie wzór (46).

Przykład 3.11 Wyznaczyć macierz $e^{t\mathbf{A}}$, gdy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

R o z w i ą z a n i e : Wyznaczamy wartości własne:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0.$$

Stąd $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 2$.

Wyznaczamy wektory własne, odpowiadające poszczególnym wartościom własnym:

Dla $\lambda_1 = 1$ mamy

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_2 + v_3 = 0 \\ v_1 - v_3 = 0 \\ 2v_1 - v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} v_1 = v_3 \\ v_2 = v_3 \\ v_3 = \alpha_1 \in \mathbb{C} \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{C}.$$

Przyjmijmy zatem $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ – wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda_1 = 1$.

Analogicznie: dla $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ i dla $\lambda_3 = 2$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Macierze \mathbf{P} , \mathbf{P}^{-1} , \mathbf{J} są równe:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}
 e^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{P}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 3e^t + e^{-t} + 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{-2t} & -e^t - e^{-t} + 4e^{2t} \\ 3e^t - 3e^{-t} & 6e^t & -3e^t + 3e^{-t} \\ 3e^t - 5e^{-t} + 2e^{2t} & 6e^t - 6e^{-2t} & -3e^t + 5e^{-t} + 4e^{2t} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Przykład 3.12 Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y + 2 \\ x(0) = 1, y(0) = 0. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Jest to układ niejednorodny. Przyjmujemy

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie powyższego zagadnienia otrzymamy z wzoru (43). Wyznamy najpierw macierz $e^{t\mathbf{A}}$. Równanie charakterystyczne i wartości własne macierzy \mathbf{A} :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i.$$

Wyznamy wektory własne. Dla $\lambda_1 = 1 + i$ mamy

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = iv_1 \\ v_1 = \alpha_1 \in \mathbb{C} \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ i\alpha_1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}. &\text{Stąd } \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Podobnie, wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej $\lambda_2 = 1 - i$, jest wektor $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$. Zatem

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad e^{t\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix}. \\
 e^{t\mathbf{A}} &= \mathbf{P}e^{t\mathbf{J}}\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t} & i(e^{(1-i)t} - e^{(1+i)t}) \\ -i(e^{(1-i)t} - e^{(1+i)t}) & e^{(1+i)t} + e^{(1-i)t} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Macierz $e^{t\mathbf{A}}$ ma wyrazy zespolone, chociaż macierz \mathbf{A} miała wyrazy rzeczywiste. Przedstawimy macierz $e^{t\mathbf{A}}$ w postaci rzeczywistej. Jest to zawsze możliwe, bowiem wielomian charakterystyczny o współczynnikach rzeczywistych, jeśli ma pierwiastek zespolony $\lambda = \alpha + i\beta$, to ma również pierwiastek $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$. Dlatego, dzięki wzorom Eulera

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \quad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}),$$

można macierz $e^{t\mathbf{A}}$ z postaci zespolonej przekształcić do postaci rzeczywistej. W naszym przypadku, przekształcając $e^{t\mathbf{A}}$ otrzymamy

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^t(e^{it} + e^{-it}) & \frac{1}{2i}e^t(e^{it} - e^{-it}) \\ -\frac{1}{2i}e^t(e^{it} - e^{-it}) & \frac{1}{2}e^t(e^{it} + e^{-it}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \cos t & e^t \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix}.$$

Wyznaczamy na koniec rozwiązanie danego zagadnienia niejednorodnego (wzór (43)). Mamy

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)\mathbf{A}}\mathbf{b}(\tau) d\tau.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^t \cos t & \sin t \\ -e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \\ &+ \int_0^t \begin{bmatrix} e^{t-\tau} \cos(t-\tau) & e^{t-\tau} \sin(t-\tau) \\ -e^{t-\tau} \sin(t-\tau) & e^{t-\tau} \cos(t-\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ -e^t \sin t \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{t-\tau} \sin(t-\tau) \\ 2e^{t-\tau} \cos(t-\tau) \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} e^t \cos t \\ -e^t \sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - e^t \cos t + e^t \sin t \\ -1 + e^t \cos t + e^t \sin t \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 + e^t \sin t \\ -1 + e^t \cos t \end{bmatrix}}}. \end{aligned}$$

Wyznaczanie macierzy fundamentalnej metodą przekształcenia Laplace'a

Macierz fundamentalną $e^{t\mathbf{A}}$ można wyznaczyć przy pomocy przekształcenia Laplace'a. W tym celu obie strony równania różniczkowego z zagadnienia

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

przekształcamy przez transformację Laplace'a (zakładamy, że składowe funkcji wektorowych $\mathbf{x}(t)$ oraz $\mathbf{x}'(t)$ są oryginałami). Otrzymamy

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) \Leftrightarrow (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{x}_0 \Leftrightarrow \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0.$$

Stąd

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right] \mathbf{x}_0.$$

Porównując rozwiązanie otrzymane przy pomocy przekształcenia Laplace'a, z rozwiązaniem danym wzorem

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}} \mathbf{x}_0$$

otrzymujemy wzór

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathcal{L}^{-1} \left[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \right]. \quad (47)$$

Przykład 3.13 Wyznaczyć metodą przekształcenia Laplace'a macierz $e^{t\mathbf{A}}$, gdy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

R o z w i ą z a n i e : Korzystamy ze wzoru (47). Mamy kolejno

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s - \alpha & -\beta \\ \beta & s - \alpha \end{bmatrix}, \quad \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s - \alpha)^2 + \beta^2,$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} & \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \\ \frac{-\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} & \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \end{bmatrix},$$

$$e^{t\mathbf{A}} = \mathcal{L}^{-1} \left(\begin{bmatrix} \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} & \frac{\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \\ \frac{-\beta}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} & \frac{s - \alpha}{(s - \alpha)^2 + \beta^2} \end{bmatrix} \right) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \sin \beta t \\ -e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t \end{bmatrix}}}.$$

Ćwiczenia

1. Pokazać, że

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \cos t & -\sin t \\ e^{-2t} \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

jest macierzą fundamentalną nieautonomicznego układu liniowego

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x},$$

gdzie

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} -2 \cos^2 t & -1 - \sin 2t \\ 1 - \sin 2t & -2 \sin^2 t \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć rozwiązanie zagadnienia niejednorodnego

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

przyjmując $\mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5e^{-2t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}(t)$ – jak wyżej.

$$\text{Odp. } \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2 \cos^2 t - 2 \sin 2t + e^{-2t}(\sin 2t - 4 \cos^2 t - 1) \\ 4 \cos^2 t + \sin 2t + 1 - 2e^{-2t}(\sin 2t + \cos^2 t) \end{bmatrix}.$$

2. Wyznaczyć macierz $e^{t\mathbf{A}}$, jeżeli

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{d) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{e) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{f) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{g) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{h) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{j) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyniki zweryfikować przez odpowiednie sprawdzenie. Obliczenia wykonać w dowolnych komputerowych systemach obliczeń symbolicznych.

3. Rozwiązać następujące zagadnienia początkowe

$$\text{a) } \begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 \\ x'_2 = 4x_2 - 2x_1 \\ x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = -1, \end{cases}$$

Odp.

$$\text{a) } x_1 = e^{2t} - e^{3t}, \quad x_2 = e^{2t} - 2e^{3t},$$

$$\text{b) } \begin{cases} x'_1 = x_1 + x_2 - \cos t \\ x'_2 = -2x_1 - x_2 + \sin t + \cos t \\ x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -2. \end{cases}$$

Odp.

$$\text{b) } x_1 = (-t + 1) \cos t - \sin t, \\ x_2 = (t - 2) \cos t + t \sin t.$$

4. Znaleźć rozwiązanie zagadnienia

$$\begin{cases} x'' + x = \cos t \\ x(0) = 1, \quad x'(0) = -1. \end{cases}$$

Wsk. Sprowadzić dane zagadnienie do układu równań liniowych rzędu pierwszego.

$$\text{Odp. } x(t) = \frac{1}{2}t \sin t + \cos t - \sin t.$$

4 Skalarne równania liniowe rzędu n

4.1 Podstawowe definicje i twierdzenia

W rozdziale tym będziemy rozpatrywać równania postaci

$$x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + a_{n-2}(t)x^{(n-2)} + \dots + a_1(t)x' + a_0(t)x = f(t), \quad (1)$$

gdzie $a_0(\cdot), \dots, a_{n-1}(\cdot), f(\cdot)$ są danymi funkcjami ciągłymi w przedziale $I \subset \mathbb{R}$. Niewiadomą w tym równaniu jest funkcja skalarna $x(\cdot)$. Równanie (1) nazywa się *równaniem liniowym skalarnym rzędu n , niejednorodnym*. Jeżeli $f(t) = 0$, to równanie (1) nazywamy *równaniem liniowym jednorodnym*.

Oznaczmy przez $L_n(x)(t)$ lewą stronę równania (1). Wówczas równanie to zapiszemy krótko w postaci

$$L_n(x)(t) = f(t). \quad (1')$$

natomiast równanie jednorodne w postaci

$$L_n(x)(t) = 0. \quad (2)$$

Operator L_n przyporządkowuje funkcji $x(\cdot)$ klasy C^n na I , funkcję $L_n(x)(\cdot)$, ciągłą na I . Zatem

$$L_n : C^n(I) \longrightarrow C^0(I).$$

Oczywiście L_n jest operatorem liniowym. Zbiór \mathcal{M} , rozwiązań równania jednorodnego, (jądro operatora L_n), jest podprzestrzenią przestrzeni $C^n(I)$. Każdą bazę przestrzeni \mathcal{M} nazywać będziemy *fundamentalnym układem rozwiązań*, (*bazowym układem całek*), *równania* (2). Jak się niebawem okaże, $\dim \mathcal{M} = \dim \ker L_n = n$.

Równanie skalarne rzędu n można jak wiemy, (zobacz str. 37 – 38), przedstawić w postaci układu n równań rzędu pierwszego. W tym przypadku będzie to układ liniowy. Istotnie, oznaczając

$$x = x_1, \quad x_2 = x_1' = x_1', \quad x_3 = x_2' = x_1'', \quad \dots, \quad x_n = x_{n-1}' = x_1^{(n-1)},$$

otrzymamy układ równań

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = -a_0(t)x_1 - a_1(t)x_2 - \dots - a_{n-1}(t)x_n + f(t) \end{cases} \quad (3)$$

równoważny równaniu (1). W zapisie macierzowym będzie to równanie

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (4)$$

z niewiadomą funkcją wektorową

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix},$$

gdzie

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Równanie jednorodne (2) przekształca się w układ jednorodny

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \quad (5)$$

Zauważamy, że jeśli funkcja wektorowa $\mathbf{x}(t)$ jest całką równania (4), (lub (5)), to jej pierwsza współrzędna $x_1(t)$, jest całką równania skalarnego (1), (lub (2)), a następne współrzędne są kolejnymi pochodnymi funkcji $x_1(t)$.

Niech

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_1'(t) \\ \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{x}_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n(t) \\ x_n'(t) \\ \vdots \\ x_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

będzie układem fundamentalnym rozwiązań układu jednorodnego (5). Wówczas układ funkcji skalarnych

$$\{x_{11}(t), \dots, x_{1n}(t)\} = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$$

stanowi układ fundamentalny rozwiązań równania jednorodnego (2). Naturalną jest więc

Definicja 4.1 Wrońskianem układu $\{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ n całek skalarnego równania liniowego jednorodnego rzędu n , nazywamy wyznacznik

$$W[t; x_1, \dots, x_n] = \begin{vmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Z twierdzeń 3.6 i 3.7 na str. 52 wynika następujące

Twierdzenie 4.1 Układ $\{x_1(\cdot), \dots, x_n(\cdot)\}$ złożony z n całek równania (2) jest układem fundamentalnym wtedy i tylko wtedy, gdy $W[t; x_1, \dots, x_n] \neq 0$ dla pewnego $t \in I$. Wówczas całka ogólna tego równania wyraża się wzorem

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(t), \quad t \in I, \quad (6)$$

gdzie C_i są dowolnymi stałymi.

Uwaga. Funkcje $a_i(t)$, występujące w równaniu (1) i (2), mogą mieć wartości zespolone, wówczas stałe C_i we wzorze (6) są liczbami zespolonymi. Jeżeli wszystkie funkcje $a_i(t)$ w równaniu (2) są rzeczywiste i całki $x_i(t)$ są też rzeczywiste, to stałe C_i są stałymi rzeczywistymi.

Całkę ogólną równania niejednorodnego (1) wyznaczmy podobnie jak całkę ogólną niejednorodnego układu równań liniowych rzędu pierwszego, metodą uziemienniania stałych (zobacz str. 52). Stałe C_i we wzorze (6) na całkę ogólną równania jednorodnego, zastąpimy chwilowo nieznanymi funkcjami $C_i(t)$. Zatem rozwiązanie równania (1) przyjmie postać

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) x_i(t).$$

Układ równań (17) ze str. 52, zastosowany do układu niejednorodnego (4), daje nam układ liniowy

$$\begin{cases} C_1'(t)x_1(t) + \dots + C_n'(t)x_n(t) = 0 \\ C_1'(t)x_1'(t) + \dots + C_n'(t)x_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ C_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) + \dots + C_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) = f(t) \end{cases} \quad (7)$$

z niewiadomymi $C_1'(t), \dots, C_n'(t)$. Wyznacznik $W(t) = W[t; x_1, \dots, x_n]$ tego układu jest różny od zera, więc układ (7) ma jednoznaczne rozwiązanie dane wzorami Cramera

$$C_i(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Stąd

$$C_i(t) = \int \frac{W_i(t)}{W(t)} dt + C_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Ostatecznie całka ogólna równania niejednorodnego (1) dana jest wzorem

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(t) + \sum_{i=1}^n \left(\int \frac{W_i(t)}{W(t)} dt \right) x_i(t), \quad t \in I. \quad (8)$$

Pierwszy składnik po prawej stronie wzoru (8), jest oczywiście całką ogólną równania jednorodnego. Oznaczmy go przez $x_0(t)$. Drugi, który oznaczmy przez $x_f(t)$ jest dowolną,

ale ustaloną całką szczególną równania niejednorodnego. Wzór (8) można teraz zapisać krótko

$$x(t) = x_0(t) + x_f(t) \text{ lub } CORN = CORJ + CSRN. \quad (9)$$

Wyznaczanie układu bazowego równania liniowego o współczynnikach funkcyjnych, jest na ogół zadaniem trudnym. W szczególnych przypadkach udaje się odgadnąć dla równania jednorodnego rzędu drugiego

$$x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = 0$$

jedną jego całkę szczególną $x_1 = \varphi(t)$. Wtedy całkę ogólną tego równania znajdujemy przez podstawienie $x = \varphi(t) \cdot z(t)$, a następnie $z'(t) = u(t)$. Metodę tą zilustrujemy przykładem.

Przykład 4.1 Wyznaczyć całkę ogólną równania

$$(t^2 + 1)x'' - 2tx' + 2x = 0,$$

jeżeli znana jest jego jedna całka szczególna $x_1 = t$.

R o z w i ą z a n i e : Łatwo widać, że funkcja $x_1 = t$ jest całką szczególną danego równania. Stosujemy podstawienie $x = t \cdot z(t)$. Wtedy $x' = z + tz'$ oraz $x'' = 2z' + tz''$. Podstawiamy x , x' , x'' do danego równania i otrzymujemy

$$(t^2 + 1)(2z' + tz'') - 2t(z + tz') + 2tz = 0.$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$t(t^2 + 1)z'' + 2z' = 0,$$

w którym niewiadoma funkcja $z(t)$ występuje tylko z pierwszą i drugą pochodną. W takim przypadku możemy obniżyć rząd równania przez podstawienie $z' = u$. Dostaniemy równanie rzędu pierwszego

$$t(t^2 + 1)u' + tu = 0.$$

Zauważamy, że jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Rozdzielamy zatem zmienne i otrzymujemy

$$\int \frac{du}{u} = - \int \frac{2}{t(t^2 + 1)} dt \iff \int \frac{du}{u} = -2 \int \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{t^2 + 1} \right) dt.$$

Stąd

$$\ln |u| = -2(\ln |t| - \frac{1}{2} \ln |t^2 + 1|) + \ln |C_1|$$

oraz

$$u = C_1 \frac{t^2 + 1}{t^2}.$$

Wracamy do podstawienia $z' = u$.

$$z' = C_1 \frac{t^2 + 1}{t^2} \Leftrightarrow z' = C_1 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \Rightarrow z = C_1 \left(t - \frac{1}{t}\right) + C_2.$$

Ostatecznie całka ogólna danego równania jest postaci

$$\underline{\underline{x = C_1(t^2 - 1) + C_2t.}}$$

Z rozwiązania widać, że drugą całką układu bazowego jest funkcja $x_2 = t^2 - 1$.

4.2 Skalarne równania liniowe o stałych współczynnikach

Rozpatrujemy równanie jednorodne

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0 \quad (10)$$

zapisane krótko

$$L_n(x) = 0$$

i równoważny mu układ równań

$$\begin{cases} x'_1 = x_2 & (x = x_1) \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_n = -a_0x_1 - a_1x_2 - \dots - a_{n-1}x_n \end{cases} \quad (11)$$

o macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie współczynniki a_0, \dots, a_{n-1} są stałe (mogą to być nawet współczynniki zespolone). Wyznamy układ bazowy całek równania (10). Zaczniemy od równania charakterystycznego układu jednorodnego (11).

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Po obliczeniu wyznacznika dostajemy równanie

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (12)$$

Równanie (12) nazywa się *równaniem charakterystycznym* równania (10). Zauważymy, że równanie charakterystyczne można napisać bezpośrednio na podstawie samego równania różniczkowego (10), bez potrzeby przekształcania go do układu równań rzędu pierwszego. Równanie (12) ma na ogół pierwiastki zespolone, pojedyncze lub wielokrotne. W przypadku układów liniowych o stałych współczynnikach, układ fundamentalny wyznaczaliśmy w oparciu o wektory własne i podprzestrzenie niezmiennicze macierzy \mathbf{A} . W przypadku równań typu (10), wyznaczanie układu fundamentalnego jest znacznie prostsze. Zauważymy najpierw, że jeśli λ_0 jest pierwiastkiem równania charakterystycznego (12), to funkcja $x(t) = e^{\lambda_0 t}$ jest całką równania jednorodnego (10).

Istotnie. Niech

$$x(t) = e^{\lambda_0 t}. \quad \text{Wtedy} \quad x'(t) = \lambda_0 e^{\lambda_0 t}, \dots, x^{(n)}(t) = \lambda_0^n e^{\lambda_0 t}$$

oraz

$$\begin{aligned} x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x &= \lambda_0^n e^{\lambda_0 t} + \lambda_0^{n-1} e^{\lambda_0 t} + \dots + a_1 \lambda_0 e^{\lambda_0 t} + a_0 e^{\lambda_0 t} = \\ &= e^{\lambda_0 t} \underbrace{\left(\lambda_0^n + a_{n-1} \lambda_0^{n-1} + \dots + a_1 \lambda_0 + a_0 \right)}_0 = 0. \end{aligned}$$

Gdyby równanie charakterystyczne miało n różnych wartości własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, to mielibyśmy układ $\{x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \dots, x_n(t) = e^{\lambda_n t}\}$ złożony z n różnych całek równania (10). Okazuje się, że wrońskian tego układu jest różny od zera. Byłby to więc układ bazy całek tego równania. Jeżeli natomiast λ_0 jest k -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to funkcje

$$x_1(t) = e^{\lambda_0 t}, \quad x_2(t) = te^{\lambda_0 t}, \quad \dots, \quad x_k(t) = t^{k-1} e^{\lambda_0 t}$$

są liniowo niezależnymi całkami równania (10). Sprawdźmy ten fakt na przykładzie równania rzędu drugiego

$$x'' + a_1x' + a_0x = 0 \quad (L_2(x) = 0). \quad (13)$$

Niech wyróżnik równania charakterystycznego

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

będzie równy zero. Wtedy $\lambda_0 = -a_1/2$ jest jego podwójnym pierwiastkiem. Sprawdźmy, że funkcje

$$x_1(t) = e^{\lambda_0 t} \quad \text{oraz} \quad x_2(t) = te^{\lambda_0 t}$$

są całkami równania (13). Wystarczy sprawdzić, że druga z tych funkcji jest całką tego równania. Obliczamy jej kolejne pochodne:

$$x_2'(t) = e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 t e^{\lambda_0 t}, \quad x_2''(t) = \lambda_0 e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 e^{\lambda_0 t} + \lambda_0^2 t e^{\lambda_0 t} = (2\lambda_0 + \lambda_0^2 t) e^{\lambda_0 t}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} L_2(x_2)(t) &= 2(\lambda_0 + \lambda_0^2 t)e^{\lambda_0 t} + a_1(1 + \lambda_0 t)e^{\lambda_0 t} + a_0 t e^{\lambda_0 t} = \\ &= \left[\underbrace{(\lambda_0^2 + a_1 \lambda_0 + a_0)}_0 t + \underbrace{(2\lambda_0 + a_1)}_0 \right] e^{\lambda_0 t} = 0. \end{aligned}$$

Ponadto wrońskian układu funkcji $x_1(t) = e^{\lambda_0 t}$, $x_2(t) = t e^{\lambda_0 t}$ równy

$$W[t; x_1, x_2] = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 t} & t e^{\lambda_0 t} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 t} & (1 + \lambda_0 t) e^{\lambda_0 t} \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 t} \neq 0.$$

Więc funkcje $x_1(t) = e^{\lambda_0 t}$ i $x_2(t) = t e^{\lambda_0 t}$ są liniowo niezależnymi całkami równania (13). Możemy sformułować teraz

Wniosek 4.1 *Jeżeli $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ są pierwiastkami równania charakterystycznego (12), krotności odpowiednio n_1, n_2, \dots, n_k , to układ funkcji*

$$\left\{ e^{\lambda_1 t}, t e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{n_1-1} e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{n_2-1} e^{\lambda_2 t}, \dots, t^{n_k-1} e^{\lambda_k t} \right\}$$

jest układem bazowym całek równania $L_n(x) = 0$.

Przykład 4.2 Wyznaczyć całkę ogólną równania

$$x^{(4)} + (2+i)x''' + (3+2i)x'' + (4+i)x' + 2x = 0.$$

R o z w i ą z a n i e : Piszemy równanie charakterystyczne

$$\lambda^4 + (2+i)\lambda^3 + (3+2i)\lambda^2 + (4+i)\lambda + 2 = 0.$$

Jego pierwiastkami są

$$\lambda_{1,2} = -1, \quad \lambda_3 = i, \quad \lambda_4 = -2i.$$

Zatem układem bazowym całek jest układ

$$\left\{ e^{-t}, t e^{-t}, e^{it}, e^{-2it} \right\}.$$

Całka ogólna danego równania wyraża się więc wzorem

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + C_3 e^{it} + C_4 e^{-2it}, \quad C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{C}.$$

Najtrudniejszym momentem w rozwiązaniu tego zadania jest znalezienie pierwiastków równania charakterystycznego. Stosujemy tutaj metody poznane na algebrze. Poszukujemy pierwiastków pośród dzielników wyrażu wolnego. Obniżamy stopień równania dzieląc wielomian po jego lewej stronie przez odpowiedni dwumian. Dochodzimy w ten sposób do równania kwadratowego, którego pierwiastki potrafimy wyznaczyć przy pomocy znanych wzorów.

Równanie liniowe o współczynnikach rzeczywistych

Jeżeli w równaniu (10) wszystkie współczynniki a_i są rzeczywiste, to naturalną rzeczą jest poszukiwać rozwiązania w postaci rzeczywistej. W przypadku, gdy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego są rzeczywiste, to układ bazowy składa się z samych funkcji rzeczywistych. Jeżeli natomiast równanie charakterystyczne ma pierwiastek zespolony $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, to występuje on w parze z pierwiastkiem $\bar{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$, z nim sprzężonym. Wtedy tej parze pierwiastków zespolonych odpowiada para rzeczywistych całek

$$x_1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad x_2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

równania $L_n(x) = 0$. Uzasadnimy ten fakt.

Zauważymy najpierw, że jeśli funkcja zespolona $x(t) = x_1(t) + ix_2(t)$ jest całką równania $L_n(x) = 0$, o współczynnikach rzeczywistych, to $\operatorname{Re} x(t) = x_1(t)$, oraz $\operatorname{Im} x(t) = x_2(t)$ też są całkami tego równania. Istotnie

$$L_n(x) = 0 \Leftrightarrow L_n(x_1 + ix_2) = 0 \Leftrightarrow L_n(x_1) + iL_n(x_2) = 0 \Leftrightarrow L_n(x_1) = 0 \text{ i } L_n(x_2) = 0.$$

Zatem jeśli $x(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$ jest całką równania $L_n(x) = 0$, to $x_1(t) = \operatorname{Re} x(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t$ oraz $x_2(t) = \operatorname{Im} x(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t$ są też całkami tego równania. Ponadto wrońskian

$$W[t; x_1, x_2] = \begin{vmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & e^{\alpha t} \sin \beta t \\ (e^{\alpha t} \cos \beta t)' & (e^{\alpha t} \sin \beta t)' \end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha t} \neq 0,$$

więc całki $x_1(\cdot)$ i $x_2(\cdot)$ są liniowo niezależne.

Ogólnie, jeśli $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ jest k -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, to $\bar{\lambda}_0 = \alpha - i\beta$ jest też k -krotnym pierwiastkiem i parze tych pierwiastków odpowiada układ

$$\{e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t, t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t\}$$

$2k$ liniowo niezależnych całek układu bazowego.

Zestawmy na koniec całki układu bazowego równania $L_n(x) = 0$ o współczynnikach rzeczywistych, w zależności od rodzaju pierwiastka równania charakterystycznego, w tabeli:

Rodzaj pierwiastka równania charakterystycznego	Całki układu bazowego odpowiadające temu pierwiastkowi
λ_0 – pojed. pierw. rzeczywisty	$e^{\lambda_0 t}$
λ_0 – k -krotny pierw. rzeczywisty	$e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}, \dots, t^{k-1} e^{\lambda_0 t}$
$\lambda_0 = \alpha \pm i\beta$ – poj. pierw. zespolony	$e^{\alpha t} \cos \beta t, e^{\alpha t} \sin \beta t$
$\lambda_0 = \alpha \pm i\beta$ – k -krotny pierw. zespolony	$e^{\alpha t} \cos \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \cos \beta t$ $e^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \sin \beta t, \dots, t^{k-1} e^{\alpha t} \sin \beta t$

Przykład 4.3 Wyznaczyć całkę ogólną równania jednorodnego:

a) $x''' + 2x'' + x' = 0$, b) $x^{(4)} + 2x'' + x = 0$.

R o z w i ą z a n i e :

a) Równanie charakterystyczne: $\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda + 1)^2 = 0$. Stąd

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = -1 \Rightarrow \text{układ bazowy} = \{1, e^{-t}, te^{-t}\}.$$

$$\text{Całka ogólna: } \underline{\underline{x(t) = C_1 + C_2e^{-t} + C_3te^{-t}}}.$$

b) $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - i)^2(\lambda + i)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = i, \quad \lambda_{3,4} = -i$.

Stąd układ bazowy = $\{\cos t, t \cos t, \sin t, t \sin t\}$ i całka ogólna:

$$\underline{\underline{x(t) = (C_1 + C_2t) \cos t + (C_3 + C_4t) \sin t}}.$$

Przykład 4.4 Wyznaczyć całkę ogólną równania niejednorodnego:

a) $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$, b) $x''' + x' = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$.

R o z w i ą z a n i e :

a) Znajdujemy najpierw całkę ogólną równania jednorodnego $y'' - 4y = 0$.

$$\lambda^2 - 4 = 0, \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2 \Rightarrow \text{układ bazowy} = \{e^{2x}, e^{-2x}\} \text{ oraz}$$

$$\text{CORJ} - y_0(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

Całkę ogólną równania niejednorodnego wyznaczymy metodą uzmienniania stałych.

Niech

$$y(x) = C_1(x)e^{2x} + C_2(x)e^{-2x}. \quad (\star)$$

Niewiadome funkcje $C_1(x)$ i $C_2(x)$ wyznaczamy z układu równań (zobacz (7), str. 77)

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{2x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ C_1'(x) \cdot 2e^{2x} + C_2'(x)(-2e^{-2x}) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}, \end{cases}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-2x} \\ 2e^{2x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -4,$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{e^{2x} + 1}, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \end{vmatrix} = \frac{e^{4x}}{e^{2x} + 1}.$$

Zatem

$$C_1'(x) = \frac{1}{4(e^{2x} + 1)}, \quad C_2'(x) = -\frac{e^{4x}}{4(e^{2x} + 1)}.$$

Stąd

$$C_1(x) = \frac{1}{4} \int \frac{1}{e^{2x} + 1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{e^{2x} + 1 - e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx = \frac{1}{4} \int \left(1 - \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right) dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\ln(e^{2x} + 1) + C_1. \\
C_2(x) &= -\frac{1}{4}\int \frac{e^{4x}}{e^{2x} + 1} dx \stackrel{t=e^{2x}}{=} -\frac{1}{8}\int \frac{t}{t+1} dt = -\frac{1}{8}(t - \ln|t+1|) + C_2 = \\
&= -\frac{1}{8}(e^{2x} - \ln(e^{2x} + 1)) + C_2.
\end{aligned}$$

Wstawiamy wyznaczone funkcje $C_1(x)$ i $C_2(x)$ do wzoru (\star) i otrzymujemy

$$y(x) = \underbrace{C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\ln(e^{2x} + 1)\right) e^{2x} - \frac{1}{8}(1 - e^{-2x}\ln(e^{2x} + 1))}.$$

$$\text{CORN} = \quad \text{CORJ} \quad + \quad \text{CSRN}$$

b) Równanie charakterystyczne i jego pierwiastki:

$$\lambda^3 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - i)(\lambda + i) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i.$$

$$\text{Układ bazowy: } \{1, \cos t, \sin t\}; \quad \text{CORJ: } x_0(t) = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$$

Uzmienniamy stałe:

$$x(t) = C_1(t) + C_2(t) \cos t + C_3(t) \sin t. \quad (\star\star)$$

Rozwiązujemy układ równań, z którego wyznaczymy C'_1, C'_2, C'_3 :

$$\begin{cases} C'_1(t) + C'_2(t) \cos t + C'_3(t) \sin t = 0 \\ -C'_2(t) \sin t + C'_3(t) \cos t = 0 \\ -C'_2(t) \cos t - C'_3(t) \sin t = \frac{\sin t}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

Dodając stronami równanie pierwsze do trzeciego otrzymamy

$$C'_1(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t}.$$

Z drugiego i trzeciego równania mamy

$$C'_2(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}, \quad C'_3(t) = -\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}.$$

Stąd, całkując dostaniemy

$$C_1(t) = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt \stackrel{u=\cos t}{=} -\int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{u} + C_1 = \frac{1}{\cos t} + C_1;$$

$$C_2(t) = \int \frac{-\sin t}{\cos t} dt = \ln|\cos t| + C_2;$$

$$C_3(t) = \int \frac{-\sin^2 t}{\cos^2 t} dt = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 t}\right) dt = t - \text{tg } t + C_3.$$

Ostatecznie podstawiając $C_1(t), C_2(t), C_3(t)$ do wzoru $(\star\star)$ otrzymujemy

$$\text{O d p: } \underline{\underline{x(t) = C_1 + C_2 \cos t + C_3 \sin t + \frac{1}{\cos t} + \cos t \ln|\cos t| + \sin t(t - \text{tg } t).}}$$

4.3 Rozwiązywanie niejednorodnych równań liniowych o stałych współczynnikach metodą przewidywań

Wiadomo, że całka ogólna równania $L_n(x) = f(t)$ wyraża się wzorem

$$x(t) = x_0(t) + x_f(t),$$

gdzie $x_0(t)$ jest całką ogólną równania jednorodnego, a $x_f(t)$ jest dowolną całką szczególną równania niejednorodnego. W pewnych przypadkach można odgadnąć CSRN. Ma to miejsce wtedy, gdy funkcja $f(t)$ jest wielomianem, funkcją wykładniczą, funkcją trygonometryczną, lub kombinacją tych funkcji. Zachodzi

Twierdzenie 4.2 *Jeżeli funkcja $f(t)$ ma postać:*

$$f(t) = e^{\alpha t} [M_m(t) \cos \beta t + N_n(t) \sin \beta t], \quad (14)$$

gdzie $M_m(t)$ i $N_n(t)$ są wielomianami stopni odpowiednio m i n , to całka szczególna $x_f(t)$, równania niejednorodnego $L_n(x) = f(t)$, jest funkcją postaci

$$x_f(t) = e^{\alpha t} [P_p(t) \cos \beta t + Q_p(t) \sin \beta t] \quad (15)$$

gdy $\alpha + i\beta$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, oraz

$$x_f(t) = t^k e^{\alpha t} [P_p(t) \cos \beta t + Q_p(t) \sin \beta t] \quad (16)$$

gdy $\alpha + i\beta$ jest k -krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego. $P_p(t)$ i $Q_p(t)$ są wielomianami tego samego stopnia $p = \max\{m, n\}$, których współczynniki wyznaczamy w oparciu o równość $L_n x_f = f$ na przedziale $I \subset \mathbb{R}$.

Zilustrujemy to twierdzenie przykładami.

Przykład 4.5 Wyznaczyć całkę ogólną równania niejednorodnego:

a) $x'' - x = t^2 - t + 1$.

R o z w i ą z a n i e : Rozwiążujemy najpierw równanie jednorodne

$$x'' - x = 0.$$

Równanie charakterystyczne:

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

Zatem CORJ dana jest wzorem

$$x_0(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}.$$

Całkę szczególną równania niejednorodnego wyznaczmy metodą przewidywań. Funkcję $f(t) = t^2 - t + 1$ porównujemy z funkcją wzorcową (14). Mamy tutaj:

$$\alpha = 0, \beta = 0, M(t) = t^2 - t + 1, N(t) = 0, p = 2.$$

Sprawdzamy teraz czy $\alpha + i\beta$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. W naszym przypadku $\alpha + i\beta = 0$, a 0 nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc korzystając z wzoru (15) CSRN przewidujemy w postaci

$$x_f(t) = At^2 + Bt + C,$$

gdzie współczynniki A, B, C dobierzemy tak, aby funkcja $x_f(t)$ spełniała równanie niejednorodne. Przedtem obliczamy

$$x'_f(t) = 2At + B, \quad x''_f(t) = 2A.$$

Podstawiając x_f i x''_f do równania niejednorodnego, otrzymamy

$$2A - At^2 - Bt - C = t^2 - t + 1.$$

Porównujemy współczynniki przy tych samych potęgach po obu stronach równości otrzymując

$$-A = 1, \quad -B = -1, \quad 2A - C = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -1, \quad B = 1, \quad C = -3.$$

Więc

$$x_f(t) = -t^2 + t - 3$$

oraz

$$x(t) = x_0(t) + x_f(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t^2 + t - 3 \quad - \text{ CORN.}$$

O d p: $x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t} - t^2 + t - 3.$

b) $y'' + y = 4e^x.$

R o z w i ą z a n i e :

$$\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i,$$

stąd

$$y_0(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad - \text{ CORJ.}$$

$$f(x) = 4e^x \Rightarrow \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad M(x) = 4, \quad N(x) = 0, \quad p = 0.$$

$\alpha + i\beta = 1$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Zatem

$$y_f(x) = Ae^x \quad \text{oraz} \quad y'_f(x) = y''_f(x) = Ae^x.$$

Podstawiamy y''_f i y_f do równania niejednorodnego i otrzymujemy

$$Ae^x + Ae^x = 4e^x \Rightarrow A = 2.$$

Więc

$$y_f(x) = 2e^x.$$

O d p: $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x.$

c) $y^{(4)} + 2y'' = 2x + 4$.

R o z w i ą z a n i e :

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda^2 + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = \sqrt{2}i, \lambda_4 = -\sqrt{2}i$$

Układ bazowy = $\{1, x, \cos \sqrt{2}x, \sin \sqrt{2}x\}$.

CORJ: $y_0(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sin \sqrt{2}x$.

$$f(x) = 2x + 4 \Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0, M(x) = 2x + 4, N(x) = 0, p = 1.$$

Zauważamy, że $\alpha + i\beta = 0$ jest 2-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc CSRN wyznaczamy na podstawie wzoru (16).

$$y_f(x) = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2.$$

Stąd

$$y'_f(x) = 3Ax^2 + 2Bx, \quad y''_f(x) = 6Ax + 2B, \quad y'''_f(x) = 6A, \quad y^{(4)}_f(x) = 0.$$

Podstawiamy $y^{(4)}_f$ i y''_f do równania niejednorodnego i otrzymujemy

$$12Ax + 4B = 2x + 4 \Rightarrow A = \frac{1}{6}, B = 1.$$

Zatem

$$y_f(x) = \frac{1}{6}x^3 + x^2.$$

Ostatecznie

O d p: $\underline{\underline{y(x) = C_1 + C_2x + C_3 \cos \sqrt{2}x + C_4 \sin \sqrt{2}x + \frac{1}{6}x^3 + x^2}}$.

Uwaga. Jeżeli $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, to $x_f(t) = x_{f_1}(t) + x_{f_2}(t)$, gdzie $x_{f_1}(t)$ i $x_{f_2}(t)$ są całkami szczególnymi równań odpowiednio $L_n(x) = f_1(t)$ i $L_n(x) = f_2(t)$.

Istotnie. Jeśli

$$L_n(x_{f_1}) = f_1(t) \quad \text{i} \quad L_n(x_{f_2}) = f_2(t),$$

to

$$L_n(x_{f_1} + x_{f_2}) = L_n(x_{f_1}) + L_n(x_{f_2}) = f_1(t) + f_2(t) = f(t).$$

Zatem

$$x_f = x_{f_1} + x_{f_2}.$$

Przykład 4.6 Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x'' + x' = 4 \sin^2 t \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Korzystając z wzoru

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t),$$

zapisujemy dane równanie w równanie w postaci

$$x'' + x' = 2 - 2 \cos 2t.$$

Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne

$$x'' + x' = 0, \quad \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -1,$$

więc

$$x_0(t) = C_1 + C_2 e^{-t} - \text{CORJ}$$

Funkcja $f(t) = 2 - 2 \cos 2t$ nie jest funkcją postaci (14), jest natomiast sumą funkcji

$$f_1(t) = 2 \quad \text{i} \quad f_2(t) = -2 \cos 2t,$$

które są postaci (14). Więc zgodnie z powyższą uwagą,

$$x_f(t) = x_{f_1}(t) + x_{f_2}(t).$$

Wyznaczamy całki szczególne. Dla funkcji f_1 mamy:

$$f_1(t) = 2 \Rightarrow \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad M(t) = 2, \quad N(t) = 0, \quad p = 0.$$

$\alpha + i\beta = 0$ jest 1-krotnym pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc

$$x_{f_1}(t) = t \cdot A, \quad x'_{f_1} = A, \quad x''_{f_1} = 0.$$

Podstawiając x'_{f_1} i x''_{f_1} do równania $x'' + x' = 2$ otrzymamy $A = 2$. Zatem

$$x_{f_1} = 2t.$$

Podobnie dla funkcji f_2 :

$$f_2(t) = -2 \cos 2t \Rightarrow \alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad M(t) = -2, \quad N(t) = 0, \quad p = 0$$

$\alpha + i\beta = 2i$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, więc

$$x_{f_2}(t) = A \cos 2t + B \sin 2t.$$

Stąd

$$x'_{f_2} = -2A \sin 2t + 2B \cos 2t, \quad x''_{f_2} = -4A \cos 2t - 4B \sin 2t.$$

Po wstawieniu x'_{f_2} i x''_{f_2} do równania

$$x'' + x' = -2 \cos 2t$$

otrzymamy

$$-4A \cos 2t - 4B \sin 2t - 2A \sin 2t + 2B \cos 2t = -2 \cos 2t.$$

Porównujemy odpowiednie współczynniki po obu stronach równości i otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 2B - 4A = -2 \\ -4B - 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{2}{5}, \quad B = -\frac{1}{5}.$$

Więc

$$x_{f_2}(t) = \frac{2}{5} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t.$$

Zatem

$$x_f(t) = 2t + \frac{2}{5} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t.$$

Całka ogólna danego równania niejednorodnego jest równa

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + 2t + \frac{2}{5} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t.$$

Do całki ogólnej podstawiamy teraz warunki początkowe.

$$x(0) = C_1 + C_2 + \frac{2}{5} = 0, \quad x'(t) = -C_2 e^{-t} + 2 - \frac{4}{5} \sin 2t - \frac{2}{5} \cos 2t,$$

$$x'(0) = -C_2 + 2 - \frac{2}{5} = 1.$$

Stąd

$$C_2 = \frac{3}{5} \text{ oraz } C_1 = -1.$$

Odp: Rozwiązaniem danego zagadnienia początkowego jest

$$\underline{\underline{x(t) = -1 + \frac{3}{5} e^{-t} + 2t + \frac{2}{5} \cos 2t - \frac{1}{5} \sin 2t.}}$$

4.4 Drgania liniowe

Rozpatrujemy **równanie oscylatora**

$$mx'' + px' + kx = f(t), \quad (17)$$

opisującego drgania ciała o masie m , wymuszone siłą $f(t)$ (zobacz 1.1, str. 9). Przypomnijmy, że parametr p oznaczał współczynnik oporu ośrodka, a parametr k – współczynnik sprężystości sprężyny. Rozpatrzmy na początek przypadek drgań wymuszonych, bez tłumienia.

$$mx'' + kx = f(t), \quad m, k - \text{ stałe dodatnie.}$$

Po podzieleniu przez m i oznaczeniu $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, powyższe równanie przyjmie postać

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}.$$

Równanie jednorodne, odpowiadające drganiom swobodnym tego oscylatora, ma postać

$$x'' + \omega_0^2 x = 0.$$

Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = i\omega_0, \lambda_2 = -i\omega_0$, stąd rozwiązanie równania jednorodnego wyrażone jest wzorem

$$x_0(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t, \quad (18)$$

gdzie stałe C_1 i C_2 wyznacza się z warunków początkowych:

$$x(0) = x_0 - \text{wychylenie początkowe oraz}$$

$$x'(0) = v_0 - \text{prędkość początkowa.}$$

Przekształćmy jeszcze rozwiązanie (18) w następujący sposób:

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega_0 t + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega_0 t \right) = \\ &= M(\cos \varphi \cos \omega_0 t + \sin \varphi \sin \omega_0 t), \end{aligned}$$

gdzie

$$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = M, \quad \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \sin \varphi.$$

Ostatecznie, przy powyższych oznaczeniach, wzór (18) przyjmie postać

$$x_0(t) = M \cos(\omega_0 t - \varphi).$$

Wynika z niego, że funkcja $x_0(t)$, opisująca drgania swobodne, jest funkcją okresową o okresie $2\pi/\omega_0$ i częstotliwości ω_0 . Amplituda M i przesunięcie fazowe φ zależą od warunków początkowych. Częstotliwość ω_0 drgań własnych zależy tylko od masy m i współczynnika sprężystości k .

Rozważmy teraz przypadek, gdy oscylator bez tłumienia jest wzbudzany harmonicznie siłą $f(t) = P \sin \omega t$. To znaczy rozważmy równanie

$$mx'' + kx = P \sin \omega t.$$

Po podzieleniu obu stron równania przez m otrzymamy równanie niejednorodne

$$x'' + \omega_0^2 x = A \sin \omega t, \quad (19)$$

gdzie $A = P/m$. Rozwiązanie ogólne tego równania dane jest wzorem

$$x(t) = x_0(t) + x_f(t),$$

gdzie $x_0(t)$ określone jest wzorem (18), a $x_f(t)$ jest dowolną całką szczególną równania niejednorodnego (19), którą wyznaczymy metodą przewidywań. Rozpatrzmy dwa przypadki.

1° Przypadek podstawowy, gdy $\omega \neq \omega_0$.

$f(t) = A \sin \omega t \Rightarrow \alpha = 0, \beta = \omega; \alpha + i\beta = i\omega$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego, stąd

$$x_f(t) = B \cos \omega t + D \sin \omega t$$

$$x'_f(t) = -B\omega \sin \omega t + D\omega \cos \omega t$$

$$x''_f(t) = -B\omega^2 \cos \omega t - D\omega^2 \sin \omega t.$$

Wstawiamy x''_f i x_f do równania (19) i otrzymujemy

$$-B\omega^2 \cos \omega t - D\omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2(B \cos \omega t + D \sin \omega t) = A \sin \omega t, \quad \text{stad}$$

$$B = 0, \quad D = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{oraz} \quad x_f(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

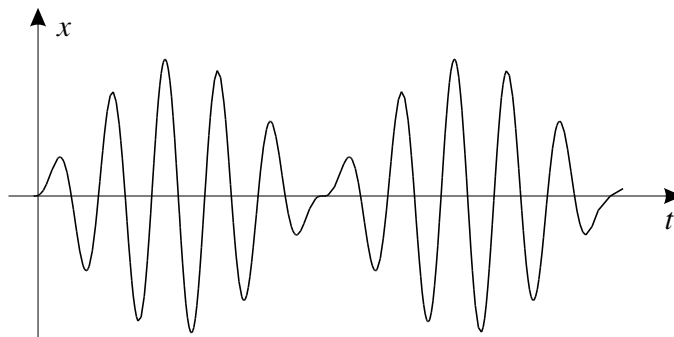
Równanie ruchu (drgań) oscylatora ma w tym przypadku postać

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t.$$

Zatem na ruch składają się dwa drgania harmoniczne: jedno z częstotliwością ω_0 drgań własnych, drugie z częstotliwością ω wymuszenia. W szczególności, przy zerowych warunkach początkowych, otrzymamy rozwiązanie dane wzorem

$$x(t) = -\frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \sin \omega t \right).$$

Otrzymane rozwiązanie jest szczególnie interesujące, gdy ω jest bliskie ω_0 . Na wykresie przedstawione są drgania bez tłumienia dla $A = 1$, $\omega_0 = 1$, $\omega = 1, 2$.



Rys. 1

Takie drgania nazywają się *biciem*.

2° Przypadek osobliwy, gdy $\omega = \omega_0$. Wtedy $\alpha + i\beta = i\omega_0$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego i całkę szczególną równania niejednorodnego poszukujemy w postaci

$$x_f(t) = t(B \cos \omega_0 t + D \sin \omega_0 t).$$

Obliczamy x'_f , x''_f , podstawiamy do równania niejednorodnego i otrzymujemy

$$B = -\frac{A}{2\omega_0}, \quad D = 0 \quad \Rightarrow \quad x_f(t) = -\frac{A}{2\omega_0} t \cos t.$$

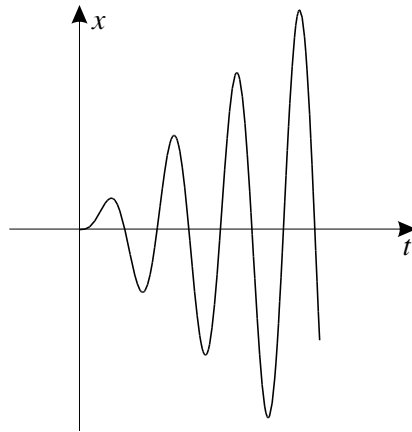
Zatem

$$x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t - \frac{A}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t.$$

Pierwszą część rozwiązania, odpowiadającą całce ogólnej równania jednorodnego, jest funkcją okresową, ograniczoną. Odpowiada ona drganiom swobodnym. Druga część jest funkcją nieograniczoną, jej amplituda dąży do nieskończoności. Zachodzi w tym przypadku zjawisko *rezonansu* występujące wtedy, gdy częstotliwość siły wymuszającej jest równa częstotliwości własnej układu. W szczególności, przy zerowych warunkach początkowych otrzymamy rozwiązanie dane wzorem

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_0^2} \sin \omega_0 t - \frac{A}{2\omega_0} t \cos \omega_0 t,$$

którego wykres przedstawiono na poniższym rysunku.



Rys.2

Niech teraz współczynnik p oporu ośrodka w równaniu (17) będzie większy od zera. Oznaczmy dodatkowo $h = p/2m$. Wtedy równanie (17) przyjmie postać

$$x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = \frac{f(t)}{m}. \quad (20)$$

Rozwiążemy najpierw równanie jednorodne

$$x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = 0. \quad (21)$$

Piszemy równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 + 2h\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

$\Delta = 4(h^2 - \omega_0^2)$. Rozpatrzmy przypadki:

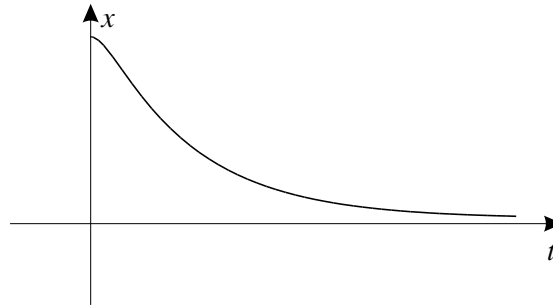
1° $\Delta > 0$, tzn. $h > \omega_0$ (opór stosunkowo duży). Wtedy

$$\lambda_1 = -h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2}, \quad \lambda_2 = -h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2} - \text{oba pierwiastki są rzeczywiste, ujemne.}$$

Rozwiązanie wyraża się wzorem

$$x_0(t) = C_1 e^{(-h + \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-h - \sqrt{h^2 - \omega_0^2})t}.$$

Przy $t \rightarrow \infty$, jest $x_0(t) \rightarrow 0$. W tym przypadku mamy do czynienia z zanikaniem ruchu, bez drgań. Wykres tego typu rozwiązania przedstawiony jest na poniższym rysunku.



Rys. 3

2° $\Delta < 0$, tzn. $h < \omega_0$ (opór ośrodka jest mały).

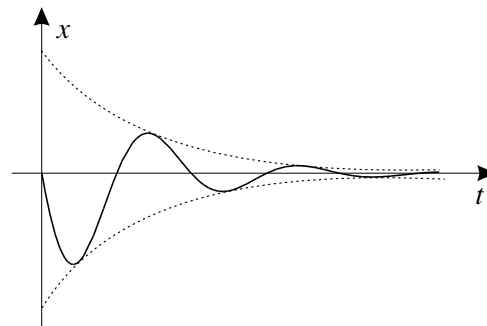
Pierwiastkami równania charakterystycznego są

$$\lambda_1 = -h + i\sqrt{\omega_0^2 - h^2}, \quad \lambda_2 = -h - i\sqrt{\omega_0^2 - h^2},$$

zatem całka ogólna równania jednorodnego ma postać

$$x_0(t) = e^{-ht} \left(C_1 \cos \sqrt{\omega_0^2 - h^2} t + C_2 \sin \sqrt{\omega_0^2 - h^2} t \right).$$

Czynnik w nawiasie odpowiada za drgania układu. Czynniki e^{-ht} tłumi amplitudę tych drgań, które zanikają w sposób wykładniczy. Wykres drgań tego typu przedstawiony jest na poniższym rysunku.



Rys. 4

3° $\Delta = 0$, tzn. $h = \omega_0$, $\lambda_{1,2} = -h$. Rozwiązanie

$$x_0(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-ht}$$

dąży do zera przy $t \rightarrow \infty$. Ruch zanika bez drgań.

Załóżmy teraz, że na oscylator działa siła zewnętrzna $f(t) = P \sin \omega t$. Równanie (20) przyjmie teraz postać

$$x'' + 2hx' + \omega_0^2 x = A \sin \omega t, \quad (22)$$

gdzie $A = P/m$. Rozwiązanie tego równania jest sumą całki ogólnej $x_0(t)$ równania jednorodnego i całki szczególnej $x_f(t)$ równania niejednorodnego. Tę ostatnią wyznaczymy metodą przewidywań. Zauważymy, że $\alpha + i\beta = i\omega$ nie jest pierwiastkiem równania charakterystycznego przy dowolnych ω_0 i h , więc x_f jest funkcją postaci

$$x_f(t) = B \cos \omega t + D \sin \omega t, \quad (23)$$

gdzie B i D są stałymi tak dobranymi, by funkcja (23) spełniała równanie (22) (nie będziemy wyznaczać tych stałych). Rozwiązanie $x_0(t)$ równania jednorodnego dąży do zera, więc rozwiązanie

$$x(t) = x_0(t) + B \cos \omega t + D \sin \omega t$$

równania niejednorodnego dąży, przy $t \rightarrow \infty$, do funkcji $x_f(t)$, danej wzorem (23). Oznacza to, że po dostatecznie długim okresie czasu t , rozwiązania równania (22) niewiele różnią się od rozwiązań równania (21) i drgania, można powiedzieć, odbywają się okresowo z częstotliwością wymuszenia.

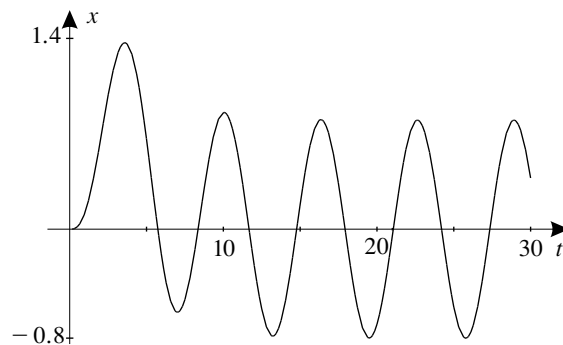
Na przykład rozwiązaniem zagadnienia

$$\begin{cases} x'' + x' + 0,25x = \sin t \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

jest funkcja

$$x(t) = 0,64e^{-0,5t} + 0,8te^{-0,5t} - 0,64 \cos t - 0,48 \sin t,$$

której wykres przedstawiony jest na rysunku.



Rys. 5

4.5 Równanie Eulera

Definicja 4.2 Równaniem Eulera rzędu n nazywamy równanie

$$t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 t x' + a_0 x = f(t). \quad (24)$$

Jest to więc równanie liniowe o współczynnikach funkcyjnych postaci $a_i t^i$. Równanie Eulera doprowadzamy do równania liniowego o stałych współczynnikach przez podstawienie

$$t = e^u,$$

gdzie u traktujemy jako nową zmienną niezależną. Wówczas $x(t) = x(t(u))$ jest funkcją złożoną zmiennej u . Różniczkując funkcję x względem u otrzymamy

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{du} = \frac{dx}{dt} e^u.$$

Stąd

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{du} e^{-u}.$$

Obliczając kolejne pochodne dostaniemy

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{du} e^{-u} \right) = \left(\frac{d^2x}{du^2} e^{-u} + \frac{dx}{du} (-e^{-u}) \right) e^{-u} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{du^2} - \frac{dx}{du} \right) e^{-2u}.$$

Analogicznie

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \left(\frac{d^3x}{du^3} - 3 \frac{d^2x}{du^2} + 2 \frac{dx}{du} \right) e^{-3u} \quad \text{itd.}$$

Wstawiamy obliczone pochodne do równania (24) i otrzymujemy równanie liniowe o stałych współczynnikach z niewiadomą funkcją $x = x(u)$.

Przykład 4.7 Wyznaczyć całkę ogólną równania $t^2 x'' + tx' + x = \sin(\ln t)$.

R o z w i ą z a n i e : Podstawiamy

$$t = e^u, \quad u = \ln t, \quad x' = \frac{dx}{du} e^{-u}, \quad x'' = \left(\frac{d^2x}{du^2} - \frac{dx}{du} \right) e^{-2u}$$

do danego równania i otrzymujemy

$$e^{2u} \left(\frac{d^2x}{du^2} - \frac{dx}{du} \right) e^{-2u} + e^u \frac{dx}{du} e^{-u} + x = \sin u.$$

Stąd po przekształceniu otrzymujemy równanie

$$\frac{d^2x}{du^2} + x = \sin u,$$

które jest równaniem liniowym o stałych współczynnikach, z niewiadomą funkcją x zmiennej niezależnej u . Rozwiązujemy najpierw równanie jednorodne. Równanie charakterystyczne $\lambda^2 + 1 = 0$ ma pierwiastki $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, stąd CORJ:

$$x_0(u) = C_1 \cos u + C_2 \sin u.$$

Rozwiązanie równania niejednorodnego wyznaczamy metodą przewidywań.

$f(u) = \sin u$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$; $\alpha + i\beta = i$ jest pierwiastkiem równania charakterystycznego. Stąd

$$\begin{aligned}x_f(u) &= u(A \cos u + B \sin u), \\x'_f(u) &= (A + Bu) \cos u + (B - Au) \sin u, \\x''_f(u) &= (2B - Au) \cos u - (2A + Bu) \sin u.\end{aligned}$$

Podstawiając x''_f i x_f do równania niejednorodnego dostaniemy

$$\begin{aligned}(2B - Au) \cos u - (2A + Bu) \sin u + u(A \cos u + B \sin u) &= \sin u \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2B \cos u - 2A \sin u = \sin u &\Rightarrow A = -\frac{1}{2}, B = 0.\end{aligned}$$

Zatem

$$x_f(u) = -\frac{1}{2}u \cos u.$$

Całka ogólna równania jednorodnego wyraża się wzorem

$$x(u) = C_1 \cos u + C_2 \sin u - \frac{1}{2}u \sin u.$$

Wracając do zmiennej x dostajemy

$$\text{O d p: } \underline{\underline{x(t) = C_1 \cos(\ln t) + C_2 \sin(\ln t) - \frac{1}{2} \ln t \cos(\ln t).}}$$

4.6 Rozwiązywanie układów równań liniowych metodą eliminacji

Równanie liniowe n -tego rzędu można, jak wiemy, przekształcić do układu n równań liniowych rzędu pierwszego. Możliwa jest również operacja odwrotna. Układ n równań liniowych rzędu pierwszego można doprowadzić do równania liniowego rzędu n . Wyjaśnimy to na przykładzie.

Przykład 4.8 Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x' = x + y + e^t \\ y' = 3x - y \\ x(0) = 0, y(0) = 1. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Pierwsze z tych równań różniczkujemy obustronnie względem t .¹ Otrzymamy równanie

$$x'' = x' + y' + e^t,$$

do którego za y' , na podstawie drugiego równania, podstawiamy $3x - y$. Dostaniemy

$$x'' = x' + 3x - y + e^t.$$

¹Rozwiązania $x(\cdot)$ i $y(\cdot)$ powyższego układu są funkcjami różniczkowalnymi, stąd zarówno x' jak i y' , jako suma funkcji różniczkowalnych, są też różniczkowalne i w kosekwencji x i y są dwukrotnie różniczkowalne.

Z pierwszego równania mamy

$$y = x' - x - e^t. \quad (\star)$$

Stąd

$$x'' = x' + 3x - x' + x + e^t + e^t,$$

co po uporządkowaniu daje równanie

$$x'' - 4x = 2e^t,$$

w którym nie występuje już niewiadoma funkcja y . Rozwiązujemy to równanie. Jego całka ogólna wyraża się wzorem

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \frac{2}{3} e^t.$$

Funkcję y otrzymujemy ze związku (\star) .

$$y(t) = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t} - \frac{2}{3} e^t - C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t} + \frac{2}{3} e^t - e^t = C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t} - e^t$$

Zatem całką ogólną danego układu równań jest

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - \frac{2}{3} e^t \\ y(t) = C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t} - e^t. \end{cases}$$

Podstawiamy warunki początkowe

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 - \frac{2}{3} \\ 0 = C_1 - 3C_2 - 1 \end{cases}$$

i stąd

$$C_1 = \frac{3}{4}, \quad C_2 = -\frac{1}{12}.$$

Ostatecznie rozwiązaniem danego zagadnienia początkowego jest

O d p:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{3}{4} e^{2t} - \frac{1}{12} e^{-2t} - \frac{2}{3} e^t \\ y(t) = \frac{3}{4} e^{2t} + \frac{1}{4} e^{-2t} - e^t. \end{cases}$$

Ćwiczenia

- Funkcje e^t i t^2e^t są całkami pewnego różniczkowego równania liniowego jednorodnego rzędu drugiego. Wykazać, że tworzą one układ bazowy i znaleźć to równanie.
- Wyznaczyć całkę ogólną równania znając jego jedną całkę szczególną:
 - $(1 - t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$ $x_1(t) = t$;
 - $x'' + \frac{2}{t}x' + x = 0$, $x_1(t) = \frac{\sin t}{t}$.
- Pewnym rozwiązaniem szczególnym równania $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 4x^2 + 2$ jest funkcja $y = x^2$. Znaleźć rozwiązanie szczególne tego równania spełniające warunki początkowe $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$.
- Wyznaczyć układ bazowy oraz całkę ogólną równania:
 - $x'' - 2x' + 5x = 0$;
 - $x''' + 8x = 0$;
 - $x^{(4)} - 4x'' + 4y = 0$;
 - $x^{(5)} + 2x''' + x' = 0$.
- Metodą uzmienniania stałych rozwiązać równania:
 - $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{\cos x}$;
 - $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$;
 - $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{4x^3 + x}$;
 - $y''' + y' = \operatorname{tg}^2 x$.
- Stosując metodę przewidywań, wyznaczyć całki ogólne równań:
 - $x'' - x = e^t \sin 2t$;
 - $x'' + x = -2 \sin t + 4t \cos t$;
 - $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{\frac{x}{2}}$;
 - $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$.
- Znaleźć całkę ogólną równania $x'' + 4x = 2 \cos \omega t$. Uwzględnić dwa przypadki:
 - podstawowy, b) rezonansowy. Wyznaczyć i narysować rozwiązanie szczególne przy zerowych warunkach początkowych, dla: $\omega = 4$; $\omega = 2, 1$; $\omega = 2$.
- Wyznaczyć rozwiązanie równania Eulera:
 - $x^2y'' - 3xy' + 4y = \frac{x^2}{\ln x}$;
 - $t^2x'' - 3tx' + 3x = 4t^3 \sin(\ln t)$.
- Metodą eliminacji rozwiązać układy równań:
 - $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + 32te^{-t}; \end{cases}$$
 - $$\begin{cases} 2\frac{dx}{dt} - 5x + \frac{dy}{dt} = e^t \\ \frac{dx}{dt} - x + \frac{dy}{dt} = 5e^t. \end{cases}$$

5 Interpretacja dynamiczna układów równań różniczkowych

5.1 Trajektorie fazowe

Równania i układy równań różniczkowych opisują najczęściej pewne zjawiska fizyczne zmieniające się w czasie. Dlatego zmienną niezależną występującą w tych równaniach oznaczać będziemy przez t i interpretować jako czas. Rozpatrywać będziemy równania

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \quad (1)$$

w zapisie wektorowym, lub układy równań

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

w zapisie skalarnym. O funkcji wektorowej

$$\mathbf{f} : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

zakładać będziemy zawsze, że jest funkcją ciągłą i spełnia co najmniej lokalny warunek Lipschitza względem \mathbf{x} w zbiorze $I \times \mathbb{R}^n$.

Funkcję wektorową

$$I_0 \ni t \longmapsto \mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n,$$

będącą rozwiązaniem równania (1) na pewnym przedziale $I_0 \subset I$, będziemy interpretować jako ruch punktu $\mathbf{x}(t)$ w przestrzeni \mathbb{R}^n . Przestrzeń zmiennych położenia punktu $\mathbf{x}(t)$, w tym przypadku przestrzeń \mathbb{R}^n , nazywać będziemy *przestrzenią fazową*, (*plaszczyzną fazową*, gdy $n = 2$) lub *przestrzenią stanów*. Wartość funkcji \mathbf{x} w punkcie t nazywać będziemy położeniem punktu w chwili t , lub stanem układu w chwili t .

Funkcja wektorowa \mathbf{f} , występująca po prawej stronie równania (1), przyporządkowuje każdemu punktowi $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ wektor $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, zależny na ogół jeszcze od czasu t . Mówimy, że funkcja \mathbf{f} określa w \mathbb{R}^n ciągle pole wektorowe. Ponieważ z drugiej strony, wektor $\mathbf{x}'(t)$ interpretujemy jako wektor prędkości poruszającego się punktu $\mathbf{x}(t)$, więc funkcję wektorową \mathbf{f} będziemy też nazywali *polem wektorowym prędkości (polem przepływowym)*. Równanie (1) opisuje zatem pewien ruch w przestrzeni \mathbb{R}^n , odbywający się pod wpływem pola \mathbf{f} . Jest to równanie różniczkowe tego ruchu. Każde rozwiązanie tego równania nazywać będziemy *ruchem* odbywającym się pod wpływem pola \mathbf{f} .

Zbiór $\Gamma = \{\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I_0\}$, gdzie I_0 jest maksymalnym przedziałem, w którym określone jest rozwiązanie $\mathbf{x}(\cdot)$, nazywać będziemy *trajektorią fazową* ruchu. Trajektoria

fazowa jest więc krzywą położoną w przestrzeni fazowej \mathbb{R}^n . Wykres ruchu, czyli krzywa całkowa równania (1), jest krzywą zawartą w \mathbb{R}^{n+1} . Jej rzut na przestrzeń fazową jest trajektorią fazową ruchu.

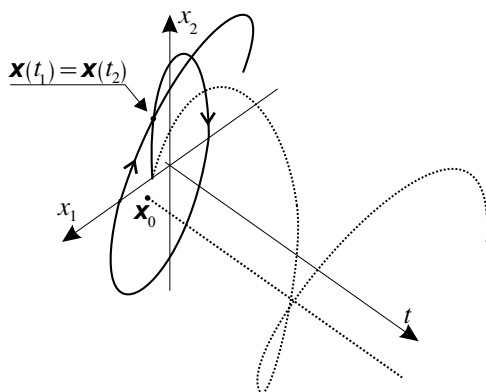
Po dodaniu do równania (1) warunku początkowego $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, otrzymamy zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (\text{C})$$

polegające na tym, żeby wyznaczyć taki ruch opisywany równaniem (1), który w chwili t_0 zajmuje położenie \mathbf{x}_0 .

Może się zdarzyć, że dla pewnego $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ i każdego $t \in I$ będzie $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$. Wówczas wektor prędkości w punkcie \mathbf{x}_0 w dowolnej chwili t jest wektorem zerowym. W takim przypadku rozwiązaniem zagadnienia (C) jest funkcja stała $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$. Trajektoria fazowa jest zbiorem jednoelementowym $\{\mathbf{x}_0\}$. W przestrzeni fazowej punkt nie porusza się. Taki punkt nazywa się *punktem stacjonarnym* (*punktem równowagi*).

Na poniższym rysunku przedstawiono trajektorię fazową ruchu na płaszczyźnie, z zaznaczonym kierunkiem ruchu oraz sam ruch (linia kropkowana), którego rzutem na płaszczyznę fazową jest trajektoria fazowa. Zaznaczono też punkt stacjonarny \mathbf{x}_0 i krzywą całkową przechodzącą przez ten punkt.



Rys.1

Zajmiemy się teraz badaniem ruchu odbywającego się pod wpływem pola wektorowego $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ niezależnego od czasu t . Wektor prędkości w każdym punkcie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jest stały. Tego typu pole wektorowe nazywać będziemy *polem stacjonarnym*. Układ

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (2)$$

odpowiadający stacjonarnemu polu wektorowemu, nazywamy *układem autonomicznym*. O odwzorowaniu \mathbf{f} zakładamy w dalszym ciągu, że jest klasy C^1 w \mathbb{R}^n . Założenie to gwarantuje, że dla każdego $t_0 \in \mathbb{R}$ i każdego punktu $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ istnieje jednoznacznie określone rozwiązanie $\mathbf{x}(\cdot)$ układu $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, spełniające warunek początkowy $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Założymy dodatkowo, że rozwiązanie to można przedłużyć do rozwiązania globalnego, określonego na całej prostej $(-\infty, \infty)$. Oznacza to, że położenie punktu $\mathbf{x}(t)$ w dowolnej chwili t , zdeterminowane jest jego położeniem \mathbf{x}_0 w chwili t_0 , dla pewnego $t_0 \in \mathbb{R}$, lub w innej terminologii – stan układu w dowolnej chwili t zależy wyłącznie od jego stanu w chwili t_0 . Jeżeli znamy więc stan układu w chwili t_0 , to równanie (2) w pełni opisuje zmianę tego stanu przy zmieniającym się t (opisuje dynamikę tego układu).

Uwaga. Bez zmniejszenia ogólności rozważań możemy przyjąć, że $t_0 = 0$. Istotnie, mając zagadnienie

$$(a) \quad \begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

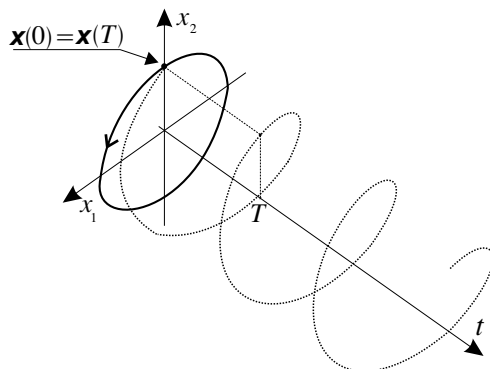
możemy, wprowadzając nową zmienną niezależną $s = t - t_0$ i postępując analogicznie jak w przypadku układu liniowego o stałych współczynnikach (patrz str. 61), przekształcić je do zagadnienia

$$(b) \quad \begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

z niewiadomą funkcją \mathbf{y} zmiennej niezależnej s . Wówczas, jeżeli $\mathbf{y}(s)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (b), to funkcja $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t - t_0)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (a).

Przy powyższych założeniach, układy autonomiczne (2) nazywać będziemy *układami dynamicznymi*, dokładniej – *układami dynamicznymi generowanymi przez stacjonarne pole wektorowe \mathbf{f}* . Jako przykład można tu podać jednorodny układ liniowy o stałych współczynnikach $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. W układzie tym pole wektorowe prędkości \mathbf{f} jest polem liniowym określonym wzorem $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, a stan układu w dowolnej chwili $t \in \mathbb{R}$ wyrażony jest wzorem $\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0$, gdzie \mathbf{x}_0 jest stanem układu w chwili $t_0 = 0$.

Trajektorie fazowe ruchu w układzie autonomicznym nie mogą wyglądać tak jak na rysunku 1, bowiem nie mogą mieć samoprzecięć. W przypadku układu nieautonomicznego, jeżeli w chwili t_1 poruszający się punkt był w miejscu \mathbf{x}_1 przestrzeni fazowej i znalazł się tam ponownie w chwili t_2 , to ponieważ $\mathbf{f}(t_2, \mathbf{x}_1)$ jest na ogół różne od $\mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}_1)$, więc tor ruchu od chwili t_2 będzie inny niż tor po którym punkt się poruszał w czasie od t_1 do t_2 . W układzie autonomicznym wektor prędkości w danym punkcie przestrzeni fazowej jest stały, więc jeśli w chwili $t_0 + T$, poruszający się punkt znajdzie się w tym samym miejscu co w chwili t_0 , to trajektoria fazowa takiego ruchu od chwili t_0 będzie krzywą zamkniętą, a sam ruch będzie okresowy o okresie T . Przykład takiego ruchu ilustruje poniższy rysunek 2.



Rys.2

Znajomość trajektorii fazowych (tak zwanego *portretu fazowego*) danego układu daje wiele informacji o charakterze samych rozwiązań, w szczególności pozwala stwierdzić czy rozwiązania są ograniczone, czy są okresowe. Można, w oparciu o trajektorie fazowe, wyciągnąć wnioski dotyczące stabilności rozwiązań (pojęcie stabilności rozwiązań omówione będzie w następnym paragrafie)

Pokażemy teraz jak wyznaczać trajektorie fazowe układów autonomicznych. Zaczniemy od układu dwóch równań. Ruch odbywa się teraz na płaszczyźnie. Oznaczmy współrzędne poruszającego się punktu przez x i y , a współrzędne pola prędkości \mathbf{f} przez $P(x, y)$ i $Q(x, y)$. Zatem $\mathbf{f}(x, y) = [P(x, y), Q(x, y)]$, gdzie P i Q są danymi funkcjami klasy C^1 w \mathbb{R}^2 , jest polem wektorowym stacjonarnym. Układ równań różniczkowych ruchu odbywającego się pod wpływem tego pola ma postać

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (3)$$

Każde rozwiązanie

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2) \\ y = y(t, C_1, C_2) \end{cases} \quad (4)$$

tego układu, gdzie stałe C_1, C_2 zależą od warunków początkowych, interpretujemy jako ruch na płaszczyźnie. Jeżeli w rozwiązaniu tym wyrugujemy zmienną niezależną t , to otrzymamy związek postaci

$$F(x, y, C_1, C_2) = 0, \quad (5)$$

który jest równaniem trajektorii fazowej ruchu (4). Ten sposób wyznaczania trajektorii fazowej wymaga znalezienia najpierw rozwiązania układu (3).

Zmienną niezależną t można wyrugować z układu (3) bez jego rozwiązywania. W tym celu dzieląc w układzie (3), stronami drugie równanie przez pierwsze, otrzymamy związek

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (6)$$

który jest równaniem różniczkowym z niewiadomą funkcją y zmiennej niezależnej x .¹ Równanie (6) jest równaniem różniczkowym trajektorii fazowych (5). Oba sposoby zilustrujemy następującym przykładem.

Przykład 5.1 Ruch punktu odbywa się pod wpływem stacjonarnego pola wektorowego $\mathbf{f}(x, y) = [-0,2x - y, x - 0,2y]$. Wyznaczyć położenie punktu w chwili t , jeśli w chwili 0 miał on położenie $(1, 0)$. Wyznaczyć trajektorię fazową tego ruchu.

R o z w i ą z a n i e : Piszemy równanie różniczkowe poszukiwanego ruchu.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0,2x - y \\ \frac{dy}{dt} = x - 0,2y \\ x(0) = 1, y(0) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

w zapisie skalarnym, lub

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,2 & -1 \\ 1 & -0,2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

w zapisie wektorowym. Jest to układ liniowy o stałych współczynnikach, więc rozwiązanie dane jest wzorem

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{A}}\mathbf{x}_0.$$

Macierz $e^{t\mathbf{A}}$ można wyznaczyć na przykład tak, jak w przykładzie 3.7 na str. 73. Mamy więc

$$e^{t\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{-0,2t} \cos t & -e^{-0,2t} \sin t \\ e^{-0,2t} \sin t & e^{-0,2t} \cos t \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-0,2t} \cos t & -e^{-0,2t} \sin t \\ e^{-0,2t} \sin t & e^{-0,2t} \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-0,2t} \cos t \\ e^{-0,2t} \sin t \end{bmatrix}.$$

Współrzędne poruszającego się punktu w dowolnej chwili t wyrażają się wzorami

$$\begin{cases} x = e^{-0,2t} \cos t \\ y = e^{-0,2t} \sin t \end{cases} \quad (8)$$

Równania (8) są zarazem równaniami parametrycznymi trajektorii fazowej tego ruchu. Wyznamy równanie tej trajektorii w postaci (5). W tym celu z układu (8) wyrugujemy

¹W związku (5), y można potraktować jako funkcję zmiennej niezależnej x . Wówczas równania (4) są równaniami parametrycznymi tej funkcji. Zgodnie z regułą różniczkowania funkcji danej równaniami parametrycznymi, mamy

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

parametr t . Zrobimy to w następujący sposób: Podnosimy oba równania (8) do kwadratu i dodajemy stronami. Otrzymamy

$$x^2 + y^2 = e^{-0,4t}. \quad (\star)$$

Następnie dzieląc stronami drugie równanie przez pierwsze otrzymamy

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} t \Leftrightarrow t = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \quad (\star\star)$$

Łącząc teraz (\star) i $(\star\star)$ otrzymamy równanie trajektorii fazowej w postaci uwikłanej

$$x^2 + y^2 = e^{-0,4 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}}. \quad (9)$$

To samo rozwiązanie uzyskamy rozwiązując równanie (6), które w tym przypadku przyjmie postać

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 0,2y}{-0,2x - y}.$$

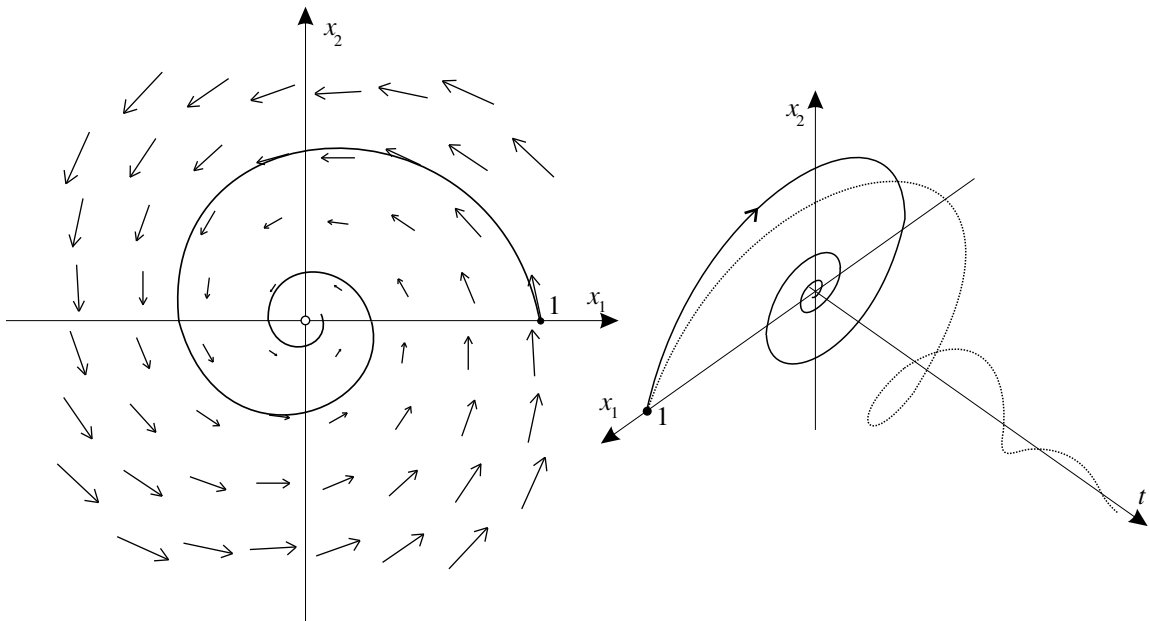
Jest to równanie rzędu pierwszego, które po przekształceniu do postaci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 0,2 \frac{y}{x}}{-0,2 - \frac{y}{x}}$$

rozwiązujemy przez podstawienie $u = \frac{y}{x}$ (porównaj przykład 2.3 na str. 22). Równanie trajektorii fazowej wygodnie jest przedstawić w postaci biegunowej. Podstawiając $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ do równania (9) otrzymamy postać biegunową poszukiwanej trajektorii

$$r = e^{-0,2\varphi}.$$

Krzywa przedstawiona powyższym równaniem jest spiralą logarytmiczną. Na rysunku 3 przedstawione są: pole wektorowe \mathbf{f} , trajektoria fazowa ruchu startującego w chwili 0 z punktu $(1, 0)$ oraz w układzie przestrzennym, ta sama trajektoria fazowa i krzywa całkowita będąca rozwiązaniem zagadnienia (7).



Rys. 3

Przykład 5.2 Wyznaczyć trajektorię fazową układu

$$\begin{cases} x' = (y - 2)x \\ y' = (3 - x)y, \end{cases}$$

przechodzącą przez punkt $(1, 1)$.

R o z w i ą z a n i e :

Piszemy równanie różniczkowe poszukiwanej trajektorii fazowej:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3-x)y}{(y-2)x}, \quad y(1) = 1.$$

Jest to równanie skalarne, rzędu pierwszego, o zmiennych rozdzielonych. Wyznaczamy całkę ogólną tego równania:

$$\int \frac{y-2}{y} dy = \int \frac{3-x}{x} dx \quad \Rightarrow \quad y - 2 \ln |y| = 3 \ln |x| - x - \ln |C|.$$

Ostatecznie całka ogólna dana jest w postaci uwikłanej

$$x^3 e^{-x} y^2 e^{-y} = C.$$

Wstawiając do wzoru na całkę ogólną warunek początkowy dostajemy $C = e^{-2}$.

O d p: Poszukiwaną trajektorią fazową jest krzywa dana równaniem $x^3 e^{-x} y^2 e^{-y} = e^{-2}$.

□

Trajektorie fazowe ruchu odbywającego się pod wpływem pola wektorowego prędkości są krzywymi, które w każdym swoim punkcie mają kierunek zgodny z kierunkiem pola, są to więc linie jakby prowadzone przez to pole. Dlatego nazywamy je też *liniami pola wektorowego* \mathbf{f} .

Jeżeli ruch w przestrzeni \mathbb{R}^3 odbywa się pod wpływem pola wektorowego

$$\mathbf{f}(x, y, z) = [P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)],$$

to równanie różniczkowe trajektorii fazowych tego ruchu uzyskamy rugując z równania różniczkowego ruchu

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = R(x, y, z) \end{cases} \quad (10)$$

zmienną niezależną t . Otrzymamy układ (przy założeniu, że $P(x, y, z) \neq 0$)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y, z)}{P(x, y, z)} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{R(x, y, z)}{P(x, y, z)} \end{cases} \quad (11)$$

z niewiadomymi funkcjami y i z , zmiennej niezależnej x . Układ (11) zapisujemy też w postaci symetrycznej

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \quad (12)$$

Równania (11) i (12) są równaniami różniczkowymi trajektorii fazowych ruchu, a zarazem równaniami różniczkowymi linii pola wektorowego \mathbf{f} . Całka ogólna układu (11) może być dana w postaci jawnej

$$\begin{cases} y = \varphi_1(x, C_1, C_2) \\ z = \varphi_2(x, C_1, C_2). \end{cases}$$

W interpretacji geometrycznej są to równania dwóch rodzin powierzchni walcowych, których linie przenikania są poszukiwanymi trajektoriami fazowymi. Całkę ogólną układu (11) lub (12) można otrzymać też w postaci uwikłanej

$$\begin{cases} \Phi_1(x, y, z) = C_1 \\ \Phi_2(x, y, z) = C_2. \end{cases} \quad (13)$$

Równania te przedstawiają dwie rodziny powierzchni (niekoniecznie walcowych). Układ (13) jest równaniem trajektorii fazowych (linii pola wektorowego \mathbf{f}) w *postaci krawędziowej*.

W rozwiązywaniu układów typu (13) wykorzystujemy własności podwójnych proporcji.

Mianowicie jeśli $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = k$, to również $\frac{m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3}{m_1B_1 + m_2B_2 + m_3B_3} = k$.

Jeżeli natomiast $m_1B_1 + m_2B_2 + m_3B_3 = 0$, to również $m_1A_1 + m_2A_2 + m_3A_3 = 0$.

Przypomnijmy ponadto poznaną na analizie definicję różniczki zupełnej funkcji trzech zmiennych. Jeśli $u = u(x, y, z)$, to różniczka zupełna funkcji u wyraża się wzorem

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Wynika z tej definicji, że jeśli $du = 0$, to $u(x, y, z) = C$.

Na przykład $d(x^2y + z^3) = 2xy dx + x^2 dy + 3z^2 dz$. Związek $2xy dx + x^2 dy + 3z^2 dz = 0$ implikuje $x^2y + z^3 = C$.

Przykład 5.3 Niech $\mathbf{f}(x, y, z) = [2(y - z), z - x, x - y]$ będzie stacjonarnym polem przepływowym. Wyznaczyć trajektorie fazowe ruchu pod wpływem pola \mathbf{f} .

R o z w i ą z a n i e : Piszemy równanie różniczkowe trajektorii fazowych w postaci symetrycznej

$$\frac{dx}{2(y - z)} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y}. \quad (\star)$$

Rozszerzając drugi ułamek w tej podwójnej proporcji przez 2, trzeci ułamek również przez 2 i korzystając z własności podwójnych proporcji, otrzymamy

$$\frac{dx}{2(y - z)} = \frac{2dy}{2(z - x)} = \frac{2dz}{2(x - y)} = \frac{dx + 2dy + 2dz}{0}.$$

Zatem $dx + 2dy + 2dz = 0$. Ale $dx + 2dy + 2dz = d(x + 2y + 2z)$. Stąd

$$x + 2y + 2z = C_1.$$

Otrzymaliśmy pierwsze z równań układu (13). Drugie z tych równań otrzymamy w podobny sposób. Pierwszy z ułamków w zależności (\star) rozszerzamy przez x , drugi przez $2y$, trzeci przez $2z$ i „dodajemy do siebie oddzielnie liczniki i oddzielnie mianowniki”. Otrzymamy związek

$$\frac{xdx}{2x(y - z)} = \frac{2ydy}{2y(z - x)} = \frac{2zdz}{2z(x - y)} = \frac{xdx + 2ydy + 2zdz}{0}.$$

Stąd $xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \Leftrightarrow d\left(\frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2\right) = 0$. Zatem $\frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

Ostatecznie układ równań

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = C_1 \\ \frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2 = C_2 \end{cases}$$

jest równaniem krawędziowym poszukiwanych trajektorii fazowych. Są one w tym przypadku elipsami powstałymi z przecięcia płaszczyzn o równaniach $x + 2y + 2z = C_1$ z elipsoidami obrotowymi $\frac{1}{2}x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. \square

5.2 Całki pierwsze

Powróćmy teraz do sytuacji ogólnej. Rozpatrujemy układ

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \quad (14)$$

w którym prawe strony są funkcjami skalarnymi określonymi i ciągłymi w $I \times \Omega$.

Definicja 5.1 Niech $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ będzie dowolnym rozwiązaniem układu (14) w przedziale $I_0 \subset I$. Funkcję skalarną $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$, klasy C^1 w zbiorze $I_0 \times \Omega$, nie równą tożsamościowo stałej, nazywamy *całką pierwszą* układu (14) jeżeli

$$\forall t \in I_0 \quad \Phi(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) = C = \text{const.}$$

Mówimy też, że całka pierwsza to taka funkcja $\Phi(t, x_1, \dots, x_n)$, która przyjmuje wzdłuż krzywych całkowych wartość stałą.

Definicja 5.2 Układ $\Phi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \Phi_n(t, x_1, \dots, x_n)$ n całek pierwszych układu (14) nazywamy *niezależnym*, jeżeli jakobian

$$\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\Phi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{w } I_0 \times \Omega.$$

Znalezienie n niezależnych całek pierwszych układu (14), równoważne jest wyznaczeniu całki ogólnej tego układu. Zachodzi bowiem

Twierdzenie 5.1 *Jeżeli $\Phi_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, \Phi_n(t, x_1, \dots, x_n)$ są niezależnymi całkami pierwszymi układu (14), to układ zależności*

$$\begin{cases} \Phi_1(t, x_1, \dots, x_n) = C_1 \\ \vdots \\ \Phi_n(t, x_1, \dots, x_n) = C_n \end{cases} \quad (15)$$

jest jego całką ogólną.

Niewiadome funkcje x_1, \dots, x_n określone równaniami (15), są dane w postaci uwikłanej. Warunek $\frac{\partial(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$ gwarantuje możliwość rozwiązywania układu równań (15) względem

x_1, \dots, x_n i otrzymania całki ogólnej w postaci jawnej

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t, C_1, \dots, C_n) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t, C_1, \dots, C_n). \end{cases} \quad (16)$$

Wystarczy jednakże podać rozwiązanie układu (14) w postaci związków (15). Metoda wyznaczania całki ogólnej układu równań różniczkowych, poprzez wyznaczenie n niezależnych całek pierwszych nazywa się *metodą całek pierwszych*.

Przykład 5.4 Znaleźć linie pola wektorowego $\mathbf{f}(x, y, z) = [x^2 - y^2 - z^2, 2xy, 2xz]$.

R o z w i ą z a n i e : Piszemy układ równań różniczkowych linii pola wektorowego \mathbf{f} w postaci symetrycznej

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}. \quad (\star)$$

Znajdziemy dwie niezależne całki pierwsze. Pierwszą z nich wyznaczymy rozpatrując drugie równanie z podwójnej proporcji.

$$\frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Po scałkowaniu otrzymamy

$$\ln |y| = \ln |C_1 z| \quad \text{czyli} \quad \frac{y}{z} = C_1.$$

Zatem

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{y}{z}.$$

Drugą całkę pierwszą znajdziemy rozszerzając poszczególne ułamki w podwójnej proporcji (\star) przez x, y i z . Otrzymamy

$$\frac{x dx}{x(x^2 - y^2 - z^2)} = \frac{y dy}{2xy^2} = \frac{z dz}{2xz^2}.$$

Stąd, korzystając z własności podwójnych proporcji, dostaniemy na przykład

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{y dy}{2xy^2}.$$

Mnożąc obie strony ostatniego związku przez $2x$ dostajemy

$$\frac{2x dx + 2y dy + 2z dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y}.$$

Zauważamy, że licznik ułamka po lewej stronie jest różniczką zupełną mianownika, zatem ostatnie równanie można przepisać w postaci

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y}.$$

Stąd

$$\ln|x^2 + y^2 + z^2| = \ln|C_2 y| \quad \text{oraz} \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2.$$

Więc

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}.$$

Ostatecznie dostajemy całkę ogólną układu (*) w postaci krawędziowej

$$\begin{cases} \frac{y}{z} = C_1 \\ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = C_1 z \\ x^2 + y^2 + z^2 = C_2 y. \end{cases}$$

Pierwsze z równań przedstawia rodzinę płaszczyzn, drugie – rodzinę sfer. Liniami danego pola wektorowego są zatem linie przecięcia tych dwóch rodzin powierzchni, a więc są to okręgi leżące w płaszczyznach zawierających oś Ox i styczne do osi Ox w punkcie $(0, 0, 0)$, bez punktu $(0, 0, 0)$.

□

Załóżmy, że funkcja $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ jest całką pierwszą układu autonomicznego

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (17)$$

Wówczas zgodnie z definicją całki pierwszej, jeśli $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ jest rozwiązaniem równania (17) w przedziale $I \subset \mathbb{R}$, to dla każdego $t \in I$ zachodzi tożsamość

$$\Phi(\mathbf{x}(t)) = \Phi(x_1(t), \dots, x_n(t)) = C.$$

Oznacza to, że trajektoria fazowa odpowiadająca temu rozwiązaniu leży na poziomicy funkcji Φ .¹ Zróżniczkujemy tę tożsamość obustronnie względem t . Otrzymamy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} = 0.$$

Ale $(x'_1(t), \dots, x'_n(t)) = \mathbf{x}'(t)$ jest rozwiązaniem równania (17), więc dla $t \in I$ zachodzi $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$. Stąd ostatnią równość zapisujemy w postaci

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \cdot f_1(\mathbf{x}) + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \cdot f_n(\mathbf{x}) = 0,$$

lub krótko

$$(\nabla \Phi(\mathbf{x}) | \mathbf{f}(\mathbf{x})) = 0, \quad (18)$$

Symbolem $\nabla \Phi$ (czytaj *nabla* Φ) oznaczyliśmy gradient funkcji Φ , czyli pole wektorowe $\nabla \Phi = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \right]$. Przypominamy, że wyrażenie $(\mathbf{u} | \mathbf{v})$ oznacza iloczyn skalarny wektorów \mathbf{u} i \mathbf{v} w \mathbb{R}^n .

Zachodzi następujące

¹Poziomicami funkcji $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy zbiory $\Gamma_C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \Phi(\mathbf{x}) = C\}$, $C \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 5.2 *Funkcja Φ , klasy C^1 w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, nie równa tożsamościowo stałej, jest całką pierwszą układu (17) wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek (18).*

Twierdzenie powyższe można sformułować też następująco:

Funkcja Φ jest całką pierwszą układu (17) wtedy i tylko wtedy gdy pola wektorowe $\nabla\Phi$ i \mathbf{f} są wzajemnie ortogonalne.

W teorii układów dynamicznych i w mechanice, skąd ta teoria się wywodzi, pochodne $x'(t)$, $x''(t)$ oznacza się \dot{x} , \ddot{x} i w dalszym ciągu takich oznaczeń zamiennie będziemy używać.

Przykład 5.5 Rozpatrzmy nieliniowy układ autonomiczny na płaszczyźnie

$$\begin{cases} \dot{x} = (by - a)x \\ \dot{y} = (c - dx)y. \end{cases}$$

Równania te są znane w literaturze pod nazwą równań Lotki-Volterry. Opisują one rozwój populacji dwóch gatunków zwierząt: drapieżników (o liczebności x) i ofiar (y) współistniejących w pewnym odizolowanym od otoczenia środowisku. Nie umiemy znaleźć rozwiązań takiego układu metodą analityczną. Jednakże wiele o tych rozwiązaniach można powiedzieć po analizie portretu fazowego układu. Układ równań Lotki - Volterry rozpatrywaliśmy już w przykładzie 5.2. Przeanalizujmy go jeszcze raz.

$$\begin{cases} x' = (y - 2)x \\ y' = (3 - x)y. \end{cases}$$

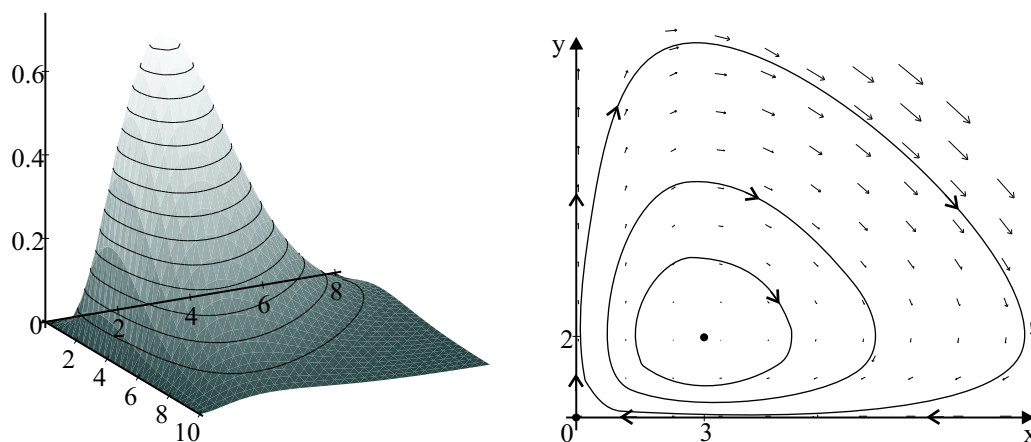
Pole wektorowe \mathbf{f} ma współrzędne $\mathbf{f}(x, y) = [(y - 2)x, (3 - x)y]$. Sporządzimy portret fazowy powyższego układu. Przypomnijmy, że trajektorie fazowe określone były wzorami $x^3 e^{-x} y^2 e^{-y} = C$. Wobec tego funkcja $\Phi(x, y) = x^3 e^{-x} y^2 e^{-y}$ jest jego całką pierwszą. Uzasadnimy to jeszcze na podstawie wzoru (18).

$$\nabla\Phi(x, y) = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right] = [(3x^2 - x^3)e^{-x} y^2 e^{-y}, x^3 e^{-x} (2y - y^2) e^{-y}].$$

Stąd

$$(\nabla\Phi(x, y) | \mathbf{f}(x, y)) = (3x^2 - x^3)e^{-x} y^2 e^{-y} \cdot (y - 2)x + x^3 e^{-x} (2y - y^2) e^{-y} \cdot (3 - x)y = 0.$$

Aby przekonać się jaki kształt mają trajektorie fazowe, przeanalizujmy powierzchnię o równaniu $z = \Phi(x, y) = x^3 e^{-x} y^2 e^{-y}$, ograniczając się, z uwagi na interpretację biologiczną układu, do pierwszej ćwiartki. Jest to powierzchnia regularna, mająca jedno maximum w punkcie o współrzędnych $(3, 2)$. Punkt ten jak widać jest zarazem punktem stacjonarnym pola \mathbf{f} . Przy x i y dążących do nieskończoności, wartości funkcji Φ dążą do zera, przyjmując wartość zero na osiach układu współrzędnych. Wynika stąd, że poziomice funkcji Φ , czyli trajektorie danego układu, są krzywymi zamkniętymi. Na rysunkach poniżej przedstawione są: badana powierzchnia, pole wektorowe \mathbf{f} oraz trajektorie fazowe.



Rys.4

Analiza portretu fazowego daje następującą interpretację badanego układu. Prawie wszystkie rozwiązania są rozwiązaniami okresowymi. Jedyne rozwiązania nieokresowe dane są wzorami :

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = 3 \\ y(t) = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = y_0 e^{3t}; \end{cases} \quad \begin{cases} x(t) = x_0 e^{-2t} \\ y(t) = 0. \end{cases}$$

Pierwsze dwa rozwiązania są rozwiązaniami stałymi, o jednoelementowych trajektoriach fazowych $\{(0, 0)\}$; $\{(3, 2)\}$, odpowiadających jedynym punktom stacjonarnym pola \mathbf{f} . Trajektorie fazowe odpowiadające dwóm ostatnim, nieokresowym rozwiązaniom pokrywają się z dodatnimi półosią Oy i Ox . Ruch na nich odbywa się w kierunku pokazanym strzałkami. Jeżeli początkowa wielkość populacji drapieżników $x_0 = 0$ i populacji ofiar $y_0 \neq 0$, to wielkość $y(t)$ rośnie do nieskończoności wraz ze wzrostem t . Jeżeli $y_0 = 0$ i $x_0 \neq 0$, to wielkość $x(t)$ maleje do zera (drapieżniki wymierają z braku pokarmu jakim są ich ofiary). Pozostałe rozwiązania są okresowe. Wynika stąd, że jeśli początkowa wielkość populacji (x_0, y_0) była różna od $(0, 0)$, $(3, 2)$, $(0, y_0)$, $(x_0, 0)$, to rozwój populacji obu gatunków odbywał się będzie w sposób cykliczny, powracając co pewien okres T do stanu początkowego.

Trajektorie fazowe równania skalarnego rzędu n definiujemy przez redukcję tego równania do równoważnego mu układu równań różniczkowych rzędu pierwszego. Szczególnie łatwo wyznaczyć trajektorie fazowe równania liniowego $\ddot{x} + p\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (równanie ruchu harmonicznego o jednym stopniu swobody z tłumieniem, bez wymuszenia zewnętrznego). Równoważny układ równań różniczkowych ma postać

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x - py. \end{cases}$$

Stąd otrzymujemy równanie różniczkowe trajektorii fazowych

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\omega_0^2 x - py}{y}.$$

Płaszczyzna fazowa, w której położone są trajektorie fazowe, jest płaszczyzną Oxy , gdzie odcięta x jest wychyleniem poruszającego się punktu od stanu równowagi, a rzędna $y = \dot{x}$ jest jego prędkością. Portrety fazowe układów liniowych na płaszczyźnie omówimy szczegółowo w rozdziale dotyczącym stabilności rozwiązań.

Podamy jeszcze jedną interpretację całki pierwszej. Rozpatrzmy równanie skalarnie rzędu drugiego

$$\ddot{x} = F(x), \quad (19)$$

gdzie funkcja F jest daną funkcją klasy C^1 na \mathbb{R} . Będziemy interpretować funkcję F jako siłę, pod wpływem której punkt o masie jednostkowej porusza się bez oporu ośrodka po osi Ox . $x(t)$ oznacza jak zwykle położenie punktu w chwili t , $\dot{x}(t)$ i $\ddot{x}(t)$ - jego prędkość i przyspieszenie. Równanie (19) nazywa się *równaniem Newtona*. Przekształcamy je do równoważnego układu równań rzędu pierwszego.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = F(x). \end{cases} \quad (20)$$

Jest to nieliniowy układ autonomiczny, generowany przez pole wektorowe

$$\mathbf{f}(x, y) = [y, F(x)].$$

Trajektorie wyznaczamy z równania

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x)}{y}.$$

Stąd

$$\frac{1}{2}y^2 + U(x) = E, \quad (21)$$

gdzie $U(x) = -\int_0^x F(s)ds$ jest funkcją pierwotną funkcji $-F(x)$, a E jest stałą, którą wyznaczamy z warunków początkowych

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = y(0) = v_0.$$

Funkcja $\Phi(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x)$ jest całką pierwszą układu (20). Istotnie:

$$(\nabla\Phi|\mathbf{f}) = -F(x) \cdot y + y \cdot F(x) = 0.$$

Pierwszy składnik funkcji Φ , równy $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}\dot{x}^2$, jest energią kinetyczną poruszającego się ciała, drugi, $U(x)$, zależy tylko od położenia ciała - jego energią potencjalną. Całka pierwsza $\Phi(x, y)$ jest zatem całkowitą energią układu. Wzór (21) przepisujemy w postaci

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + U(x) = E.$$

Wzór ten jest matematycznym zapisem prawa orzekającego o tym, że całkowita energia opisywanego układu jest w każdej chwili stała.

Ćwiczenia

1. Punkt porusza się na płaszczyźnie Oxy pod wpływem pola prędkości $\mathbf{f} = [x + 2y, 2x - y]$. Wyznaczyć położenie punktu w dowolnej chwili t jeżeli wiadomo, że w chwili $t = 0$ znajdował się on w punkcie $P(1, 0)$. Naszkicować trajektorię fazową tego ruchu.
2. Ruch na płaszczyźnie odbywa się pod wpływem potencjalnego pola prędkości \mathbf{f} o potencjale $u = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + xy$.
 - a) napisać równanie ruchu,
 - b) metodą transformacji Laplace'a wyznaczyć rozwiązanie przechodzące w chwili $t = 0$ przez punkt $(-1, 0)$.
3. Ruch odbywa się pod wpływem stacjonarnego pola prędkości $\mathbf{f}(x, y) = [2xy, x^2 - y^2]$. Napisać równanie ruchu oraz wyznaczyć równanie trajektorii fazowych tego ruchu.
4. Wyznaczyć i narysować trajektorie fazowe ruchu harmonicznego zadanego równaniem
 - a) $x'' + 4x' + 8x = 0$,
 - b) $x'' + 4x' + 4x = 0$,
 - c) $x'' + 3x' + 2x = 0$.
5. Metodą całek pierwszych wyznaczyć linie pola wektorowego:
 - a) $\mathbf{w} = [y - z, z - x, x - y]$,
 - b) $\mathbf{w} = [x(y - z), y(z - x), z(x - y)]$.

6 Elementy teorii stabilności

6.1 Stabilność w sensie Lapunowa

Badania nad jakościową teorią równań różniczkowych, której częścią jest teoria stabilności, zapoczątkowane zostały przez Poincarégo i Lapunowa pod koniec dziewiętnastego wieku.

Zajmować się będziemy układami

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad (1)$$

w których funkcja wektorowa $\mathbf{f} : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, gdzie Ω - otwarty podzbiór \mathbb{R}^n , spełnia założenia, przy których dla każdego $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2)$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie określone na przedziale $I_{\mathbf{x}_0} \supset \langle 0; \infty \rangle$. Przez $I_{\mathbf{x}_0}$ oznaczyliśmy maksymalny przedział, w którym określone jest rozwiązanie zagadnienia (2). Przypomnijmy, że rozwiązanie to umówiliśmy się nazywać ruchem przechodzącym w chwili $t_0 = 0$ przez punkt \mathbf{x}_0 . Oznaczmy to rozwiązanie przez $\varphi(\mathbf{x}_0, \cdot)$. Zatem $\mathbf{x}(t) = \varphi(\mathbf{x}_0, t)$ oznacza położenie punktu w chwili t , jeśli w chwili 0 zajmował on położenie \mathbf{x}_0 . Zbiór $\Gamma_{\mathbf{x}_0} = \{\varphi(\mathbf{x}_0, t) \in \mathbb{R}^n : t \in I_{\mathbf{x}_0}\}$ nazywamy, tak jak poprzednio, trajektorią przechodzącą przez punkt \mathbf{x}_0 . Założenie, że $\langle 0; \infty \rangle \subset I_{\mathbf{x}_0}$ pozwala badać stan układu w dowolnej chwili $t \geq 0$. Podamy teraz definicję stabilności rozwiązania układu (1).

Definicja 6.1 Rozwiązanie $\varphi(\mathbf{x}_0, \cdot)$ układu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ nazywamy *stabilnym*, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{\mathbf{x}}_0 \in \Omega \forall t \geq 0 (\|\mathbf{x}_0 - \bar{\mathbf{x}}_0\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(\mathbf{x}_0, t) - \varphi(\bar{\mathbf{x}}_0, t)\| < \varepsilon)$$

Definicję tę należy rozumieć następująco:

Rozwiązanie (ruch) $\varphi(\mathbf{x}_0, \cdot)$ nazywamy stabilnym jeśli przy dowolnym $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli tylko odległość punktu startowego $\bar{\mathbf{x}}_0$ od punktu startowego \mathbf{x}_0 jest mniejsza od δ , to w każdej chwili $t \geq 0$, odległość punktu $\varphi(\bar{\mathbf{x}}_0, t)$ od punktu $\varphi(\mathbf{x}_0, t)$ jest mniejsza od ε .

Rozwiązanie, które nie jest stabilne, nazywa się *rozwiązaniem niestabilnym*.

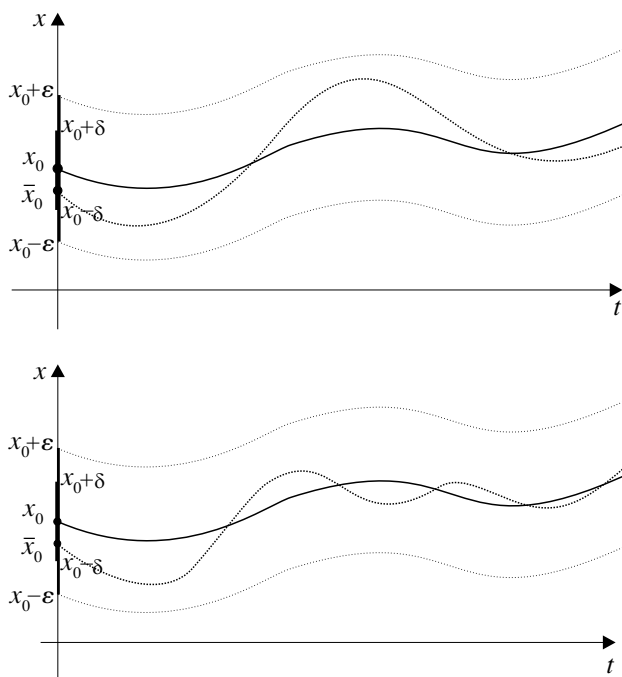
Definicja 6.2 Rozwiązanie $\varphi(\mathbf{x}_0, \cdot)$ równania (1) nazywamy *stabilnym asymptotycznie*, jeśli jest ono stabilne oraz dodatkowo spełniony jest warunek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(\mathbf{x}_0, t) - \varphi(\bar{\mathbf{x}}_0, t)\| = 0.$$

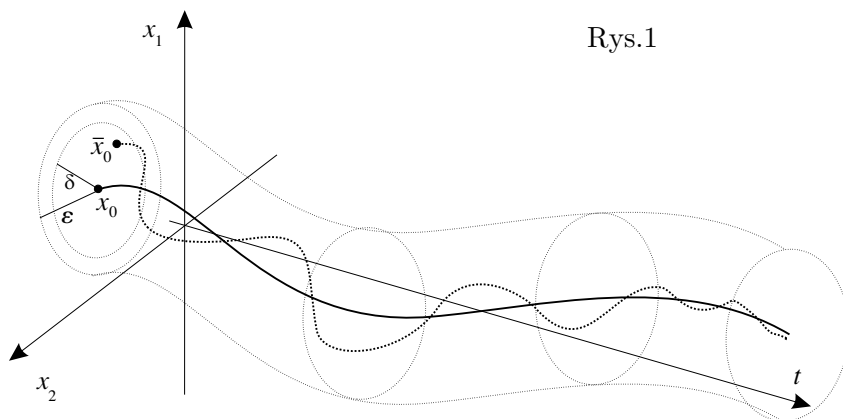
Zatem rozwiązanie stabilne $\varphi(\mathbf{x}_0, \cdot)$ jest stabilne asymptotycznie, jeśli odległość punktów $\varphi(\mathbf{x}_0, t)$ i $\varphi(\bar{\mathbf{x}}_0, t)$ dąży do zera przy t dążącym do nieskończoności.

Na rysunkach obok przedstawiona jest interpretacja geometryczna stabilności i stabilności asymptotycznej rozwiązania w przypadku $n = 1$. Przestrzenią fazową jest prosta, krzywe całkowe zawarte są w \mathbb{R}^2 .

Na rysunku poniżej przedstawiona jest interpretacja stabilności asymptotycznej ruchu na płaszczyźnie. Krzywe całkowe zawarte są w tym przypadku w \mathbb{R}^3 . Linia ciągłą zaznaczono rozwiązanie $\varphi(\mathbf{x}_0, \cdot)$ którego stabilność jest definiowana, a linią przerywaną - rozwiązanie $\varphi(\bar{\mathbf{x}}_0, \cdot)$.



Rys.1



Rys.2

Założmy teraz, że funkcja \mathbf{f} z układu (1) spełnia dodatkowy warunek: $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ dla $t \geq 0$. Wówczas punkt $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ jest punktem równowagi tego układu. Funkcja $\varphi(\mathbf{0}, \cdot)$, będąca rozwiązaniem zagadnienia (2) przy $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ jest tożsamościowo równa zero. Rozwiązanie takie nazywać będziemy *rozwiązaniem trywialnym*. Krzywa całkowa rozwiązania trywialnego pokrywa się z osią czasu. Trajektoria fazowa składa się tylko z punktu $\{\mathbf{0}\}$.

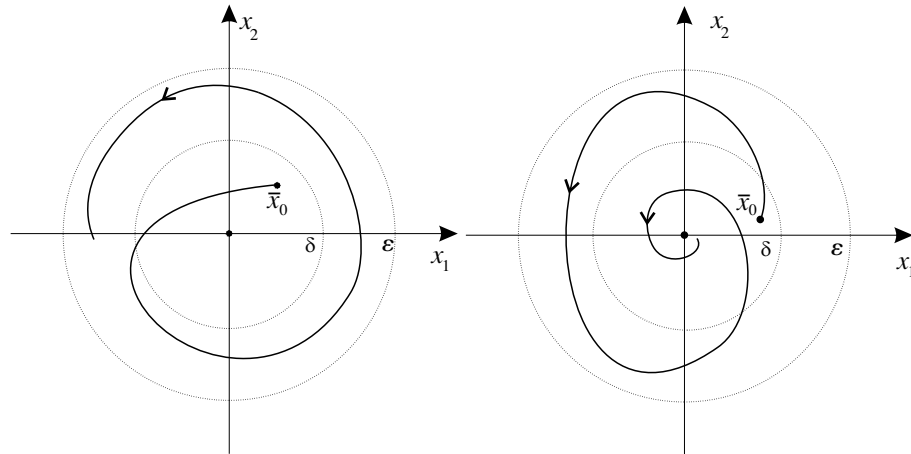
Rozwiązanie trywialne układu (1) jest stabilne, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \bar{\mathbf{x}}_0 \in \Omega \forall t \geq 0 (\|\bar{\mathbf{x}}_0\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(\bar{\mathbf{x}}_0, t)\| < \varepsilon),$$

a stabilne asymptotycznie jeśli dodatkowo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(\bar{\mathbf{x}}_0, t)\| = 0.$$

W interpretacji geometrycznej oznacza to, że każda trajektoria startująca z punktu \bar{x}_0 odległego od punktu równowagi o mniej niż δ , pozostanie w kuli o środku w punkcie $\mathbf{0}$ i promieniu ε . W przypadku stabilności asymptotycznej, punkty tej trajektorii dążą do punktu równowagi przy $t \rightarrow \infty$ (patrz rysunek poniżej)



Rys.3

W dalszym ciągu zajmiemy się badaniem stabilności rozwiązań trywialnych. Nie zmniejsza to ogólności rozważań, bowiem pokażemy, że badanie stabilności dowolnego rozwiązania danego układu można sprowadzić do badania stabilności rozwiązania trywialnego pewnego przekształconego układu. Istotnie:

Niech układ (1) ma rozwiązanie $\varphi(\mathbf{x}_0, \cdot)$, czyli $\dot{\varphi}_t(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{f}(t, \varphi(\mathbf{x}_0, t))$. Wprowadzamy nową funkcję $\mathbf{y}(\cdot)$ wzorem:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \varphi(\mathbf{x}_0, t). \quad (3)$$

Stąd $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) + \varphi(\mathbf{x}_0, t)$. Wówczas

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\varphi}_t(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) - \dot{\varphi}_t(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t) + \varphi(\mathbf{x}_0, t)) - \dot{\varphi}_t(\mathbf{x}_0, t).$$

Zatem dzięki podstawieniu (3), układ (1) z niewiadomą funkcją \mathbf{x} został przekształcony w układ

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y} + \varphi(\mathbf{x}_0, t)) - \dot{\varphi}_t(\mathbf{x}_0, t),$$

z niewiadomą funkcją \mathbf{y} , a rozwiązaniem $\varphi(\mathbf{x}_0, \cdot)$ w rozwiązanie trywialne $\mathbf{y}(t) \equiv \mathbf{0}$.

Prześledźmy jeszcze raz powyższe przekształcenie na przykładzie układu liniowego

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}(t). \quad (4)$$

Założmy, że $\varphi(\mathbf{x}_0, \cdot)$ jest rozwiązaniem szczególnym układu (4). Podstawiamy

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \varphi(\mathbf{x}_0, t).$$

Wtedy

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \dot{\varphi}_t(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{A}(t)[\mathbf{y}(t) + \varphi(\mathbf{x}_0, t)] + \mathbf{b}(t) - \dot{\varphi}_t(\mathbf{x}_0, t) = \\ &= \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \underbrace{\mathbf{A}(t)\varphi(\mathbf{x}_0, t) + \mathbf{b}(t) - \dot{\varphi}_t(\mathbf{x}_0, t)}_{\dot{\varphi}_t(\mathbf{x}_0, t)} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t). \end{aligned}$$

Zatem układ liniowy niejednorodny (4) został przekształcony w układ jednorodny

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}$$

z taką samą macierzą $\mathbf{A}(t)$ jak układ (4). Wynika stąd

Twierdzenie 6.1 *Rozwiązanie $\varphi(\mathbf{x}_0, \cdot)$ układu*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t),$$

spełniające warunek początkowy $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ jest stabilne (stabilne asymptotycznie), wtedy i tylko wtedy, gdy stabilne (stabilne asymptotycznie) jest rozwiązanie trywialne układu jednorodnego

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}.$$

Wynika stąd w szczególności, że *własność stabilności rozwiązania układu liniowego nie zależy od wymuszenia zewnętrznego $\mathbf{b}(t)$ ani od warunków początkowych. Stabilność rozwiązań takich układów zależy wyłącznie od macierzy $\mathbf{A}(t)$.*

6.2 Stabilność układów liniowych o stałych współczynnikach

Zajmiemy się teraz analizą stabilności rozwiązań trywialnych jednorodnych układów liniowych o stałych współczynnikach. Rozpatrzmy na początek układ dwóch równań

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \end{cases} \quad (5)$$

gdzie $\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq 0$.

Wtedy punkt $(0, 0)$ jest jedynym punktem równowagi układu (5). Postać rozwiązania rozpatrywanego układu zależy od pierwiastków równania charakterystycznego

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

czyli od wartości własnych macierzy \mathbf{A} . Możliwe są trzy przypadki.

1° $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Wtedy rozwiązania wyrażone są wzorami

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \\ x_2(t) = \tilde{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases} \quad (6)$$

2° $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$. Rozwiązania dane są wzorami

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \\ x_2(t) = e^{\alpha t}(\tilde{C}_1 \cos \beta t + \tilde{C}_2 \sin \beta t) \end{cases} \quad (7)$$

3° $\lambda_{1,2} = \lambda_0 \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\begin{cases} x_1(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\lambda_0 t} \\ x_2(t) = (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 t)e^{\lambda_0 t} \end{cases} \quad (8)$$

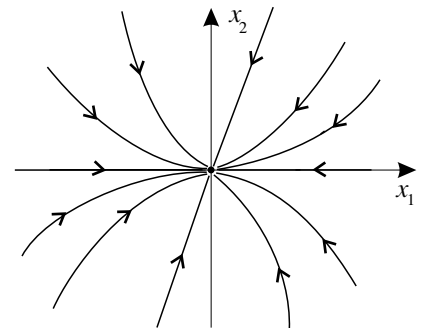
Stałe C_1, C_2 są dowolne, a \tilde{C}_1 i \tilde{C}_2 - pewnymi kombinacjami C_1 i C_2 . Stałe te zależą od warunków początkowych. Rozwiązania (6), (7), (8), będące całkami ogólnymi układu (5), są zarazem równaniami parametrycznymi jego trajektorii fazowych. Kształt tych trajektorii, ich skierowanie decyduje o stabilności lub niestabilności punktu równowagi.

Klasyfikacja punktu równowagi

Podamy obecnie klasyfikację punktu równowagi $(0,0)$ układu liniowego (5). Przeanalizujemy rozwiązania w zależności od pierwiastków równania charakterystycznego.

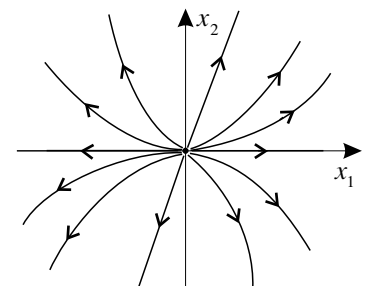
1. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$

Analizując rozwiązanie (6), widzimy, że przy $t \rightarrow \infty$, obie współrzędne $x(t)$ i $y(t)$ dążą do zera przy dowolnych stałych, a więc punkty trajektorii dążą do punktu $(0,0)$ przy dowolnych warunkach początkowych. Punkt równowagi jest stabilny asymptotycznie. Nazywamy go w tym przypadku *węzłem stabilnym asymptotycznym*. Portret fazowy układu przedstawiony jest na rysunku obok.



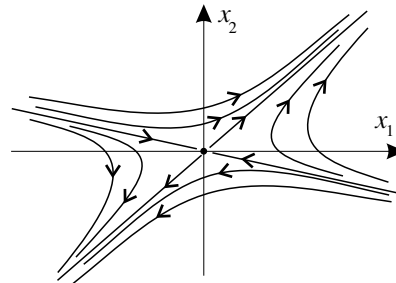
2. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Zarówno $x(t)$ jak i $y(t)$ w rozwiązaniu (6) dążą tym razem do nieskończoności. Kształt trajektorii fazowych będzie taki jak w poprzednim przypadku, tylko kierunek ruchu na trajektoriach będzie przeciwny. Punkt równowagi jest niestabilny. Nazywa się on teraz *węzłem niestabilnym*.



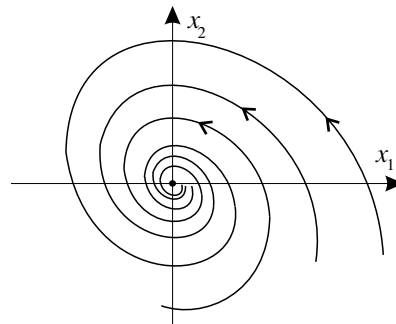
3. $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$.

Jeden pierwiastek równania charakterystycznego jest ujemny, a drugi dodatni. W rozwiązaniu (6), zarówno we współrzędnej $x_1(t)$ jak i $x_2(t)$ punktu trajektorii, jeden składnik (odpowiadający ujemnej wartości własnej) dąży do zera, a drugi dąży do nieskończoności. Zatem $x_1(t)$ i $x_2(t)$ dążą do nieskończoności. Rozwiązanie trywialne jest niestabilne. Punkt równowagi nazywamy w tym przypadku *siodłem niestabilnym*.



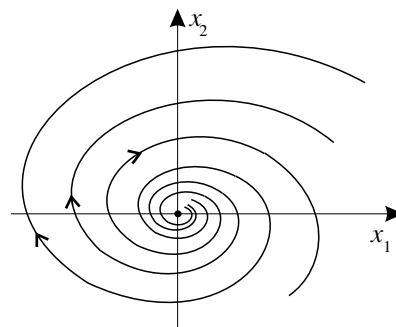
4. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha = \text{Re}(\lambda_i) < 0$.

Rozwiązanie dane jest wzorami (7). Czynniki $(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)$ i $(\tilde{C}_1 \cos \beta t + \tilde{C}_2 \sin \beta t)$, występujące w tych wzorach powodują, że punkty trajektorii krążą wokół punktu równowagi, natomiast czynnik $e^{\alpha t}$ powoduje to, że ten punkt jest ściągany do punktu $(0, 0)$. Rozwiązanie trywialne jest stabilne asymptotycznie. Punkt równowagi nazywamy *ogniskiem stabilnym asymptotycznie*.



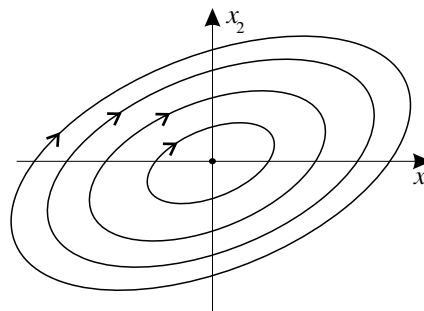
5. $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha = \text{Re}(\lambda_i) > 0$.

Sytuacja jest dualna do sytuacji opisanej w punkcie 4. Punkt krąży wokół punktu równowagi, jednakże czynnik $e^{\alpha t}$, przy $\alpha > 0$, powoduje oddalanie się punktów na trajektorii od punktu $(0, 0)$. Punkt równowagi nazywa się *ogniskiem niestabilnym*.



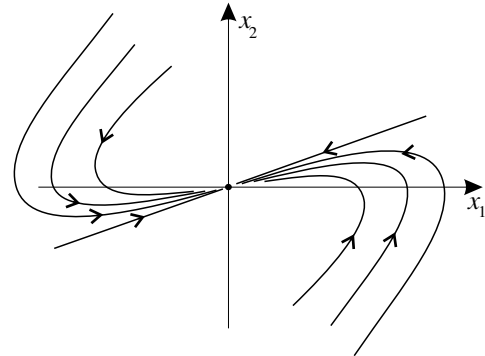
6. $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$.

Jeżeli $\text{Re}(\lambda_i) = 0$, to w rozwiązaniach (7) nie występuje czynnik $e^{\alpha t}$. Rozwiązania są okresowe. Trajektorie fazy są krzywymi zamkniętymi. Rozwiązanie trywialne jest stabilne, ale nie asymptotycznie. Punkt równowagi nazywa się *centrum stabilnym*.

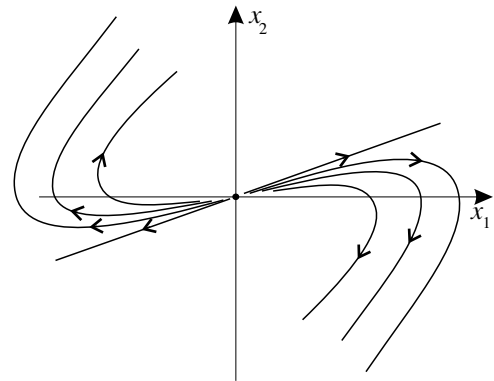


7. $\lambda_{1,2} = \lambda_0 < 0$

Jeżeli równanie charakterystyczne ma pierwiastek podwójny $\lambda_0 < 0$, to analizując rozwiązanie, dane w takim przypadku wzorami (8) widzimy, że obie współrzędne $x_1(t)$ i $x_2(t)$ dążą do zera przy $t \rightarrow \infty$. Rozwiązanie trywialne jest stabilne asymptotycznie. Punkt równowagi nazywa się *zwyródniałym węzłem stabilnym asymptotycznie*

8. $\lambda_{1,2} = \lambda_0 > 0$

Trajektorie fazowe układu mają kształt analogiczny do poprzedniego przypadku, tylko są przeciwnie skierowane. Punkt równowagi nazywa się *zwyródniałym węzłem niestabilnym*.



Jeśli w rozwiązaniu (8) jest $C_2 = \tilde{C}_2 = 0$, to trajektorie fazowe są półprostymi skierowanymi do punktu $(0,0)$, lub od tego punktu, w zależności od znaku λ_0 .

Uwaga. Trajektorie fazowe układu (5), są zarazem krzywymi całkowymi równania

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a_{11}x_1 + a_{12}x_2}{a_{21}x_1 + a_{22}x_2}. \quad (9)$$

Punkt $(0,0)$, który jest punktem równowagi układu, jest punktem osobliwym równania (9). Przez ten punkt nie przechodzi żadna krzywa całkowita równania. Kształt krzywych całkowitych w otoczeniu punktu osobliwego określa charakter osobliwości tego punktu. Mówimy na przykład, że punkt osobliwy równania (9) jest węzłem, ogniskiem lub siodłem.

Powróćmy teraz do układu n równań liniowych

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1(t) + \dots + a_{in}x_n(t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Rozwiązania układu (10) zależą od pierwiastków równania charakterystycznego

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Sformułujemy twierdzenie pozwalające badać stabilność rozwiązań układu (10).

Twierdzenie 6.2 *Jeżeli wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego mają ujemne części rzeczywiste, to każde rozwiązanie układu (10) jest stabilne asymptotycznie. Jeżeli istnieje choćby jeden pierwiastek równania charakterystycznego o dodatniej części rzeczywistej, to wszystkie rozwiązania układu (10) są niestabilne. Jeżeli równanie charakterystyczne ma jednokrotne pierwiastki z zerową częścią rzeczywistą (są równe zero lub są urojone), a pozostałe, jeśli istnieją, mają ujemną część rzeczywistą, to wszystkie rozwiązania układu (10) są stabilne, przy czym nie jest to stabilność asymptotyczna.*

Istotnie, funkcje $x_i(t)$ składające się na rozwiązanie $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ układu (10) wyrażają się wzorami

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^m e^{\lambda_k t} P_k(t), \quad (11)$$

gdzie m oznacza liczbę różnych pierwiastków równania charakterystycznego, $P_k(t)$ - wielomian stopnia równego krotności pierwiastka $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$. Jeżeli $\alpha_k = \operatorname{Re}(\lambda_k) < 0$ dla każdego k , to wszystkie składniki funkcji $x_i(t)$ dążą do zera, zatem rozwiązanie trywialne, a wraz z nim wszystkie rozwiązania układu (10) są stabilne asymptotycznie. Jeśli istnieje pierwiastek λ_k o dodatniej części rzeczywistej, to moduł tego składnika funkcji $x_i(t)$, w którym ten pierwiastek występuje, będzie dążył do nieskończoności. Odległość punktu $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ od punktu $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ będzie dążyła do nieskończoności. Rozwiązanie trywialne jest wówczas niestabilne. Pierwiastkom o ujemnych częściach rzeczywistych odpowiadają w rozwiązaniu (11) składniki dążące do zera, natomiast pierwiastkom jednokrotnym, o zerowej części rzeczywistej odpowiadają składniki postaci $C_1 \cos \beta_k t + C_2 \sin \beta_k t$, jeśli $\lambda_k = \pm i\beta_k$, lub po prostu stałe C_k , jeśli $\lambda_k = 0$. Funkcje $x_i(t)$ będą ograniczone w przedziale $\langle 0; \infty \rangle$, lecz nie będą dążyć do zera. Rozwiązanie trywialne będzie stabilne, nie będzie to jednak stabilność asymptotyczna. Jeżeli wielokrotny pierwiastek równania charakterystycznego będzie miał zerową część rzeczywistą, to nawet jeśli pozostałe będą miały ujemne części rzeczywiste, to rozwiązania będą na ogół niestabilne.

Przykład 6.1 Rozpatrzmy układ liniowy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ o macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

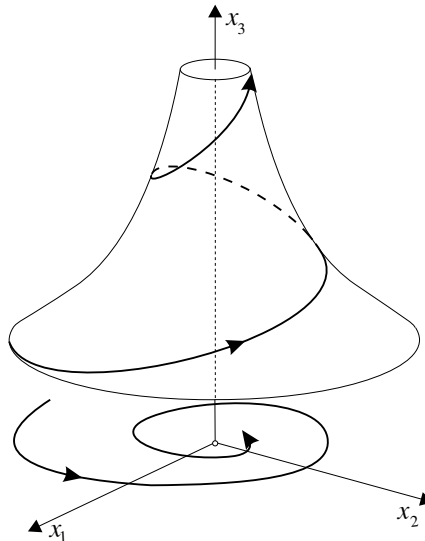
Mamy tu dwie zespolone wartości własne $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ i jedną rzeczywistą λ_3 . Układ powyższy rozpada się w zasadzie na dwa niezależne układy

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2 \end{cases} \\ \begin{cases} \dot{x}_3 = \lambda_3 x_3, \end{cases} \end{array} \right.$$

z których pierwszy ma rozwiązanie

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) \\ x_2(t) = e^{\alpha t}(C_2 \cos \beta t - C_1 \sin \beta t), \\ x_3(t) = C_3 e^{\lambda_3 t}. \end{cases}$$

a drugi



Rys. 4

Na rysunku pokazano portret fazowy układu dla $\alpha < 0$ i $\lambda_3 > 0$. Na płaszczyźnie $x_3 = 0$ punkt $(0, 0)$ jest ogniskiem stabilnym asymptotycznie, w przestrzeni \mathbb{R}^3 punkt równowagi $(0, 0, 0)$ jest niestabilny.

Przykład 6.2 Dla jakich $\mu \in \mathbb{R}$, stan równowagi układu

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y \\ \dot{y} = \mu y - z \\ \dot{z} = \mu z - x \end{cases}$$

jest stabilny, stabilny asymptotycznie, niestabilny?

R o z w i ą z a n i e :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu & -1 & 0 \\ 0 & \mu & -1 \\ -1 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} \mu - \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \mu - \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \mu - \lambda \end{vmatrix} = (\mu - \lambda)^3 - 1.$$

Równanie charakterystyczne: $(\mu - \lambda)^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\mu - \lambda)^3 = 1$. Korzystając z wzorów na pierwiastki trzeciego stopnia z jedyinki dostaniemy.

$$\mu - \lambda = 1 \quad \vee \quad \mu - \lambda = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad \mu - \lambda = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem

$$\lambda_1 = \mu - 1, \quad \lambda_2 = \mu + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_3 = \mu + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dla $\mu < -\frac{1}{2}$, części rzeczywiste wszystkich pierwiastków równania charakterystycznego są ujemne – stan równowagi układu jest stabilny asymptotycznie.

Dla $\mu = -\frac{1}{2}$ mamy $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_2) = \operatorname{Re}(\lambda_3) = 0$ – stan równowagi jest stabilny, przy czym stabilność nie jest stabilnością asymptotyczną.

Dla $\mu > -\frac{1}{2}$ stan równowagi jest niestabilny.

6.3 Stabilność rozwiązań równania liniowego rzędu n

Rozpatrzmy jednorodne równanie liniowe, rzędu n , o stałych współczynnikach

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0. \quad (12)$$

Równanie to ma rozwiązanie trywialne $x(t) \equiv 0$. Jak wiadomo, równanie (12) można przez podstawienie $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$, \dots , $x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$, sprowadzić do równoważnego układu równań rzędu pierwszego

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = -\frac{a_n}{a_0}x_1 - \frac{a_{n-1}}{a_0}x_2 - \dots - \frac{a_1}{a_0}x_n \end{cases} \quad (13)$$

o macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_n}{a_0} & -\frac{a_{n-1}}{a_0} & \dots & \dots & -\frac{a_1}{a_0} \end{bmatrix}$$

i równaniu charakterystycznym

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \Leftrightarrow a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (14)$$

Definicja 6.3 Rozwiązanie trywialne równania (12) nazywamy stabilnym, stabilnym asymptotycznie, niestabilnym, jeżeli punkt równowagi $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ układu (13) jest odpowiednio stabilny, stabilny asymptotycznie, niestabilny.

O stabilności rozwiązań decyduje zatem lokalizacja miejsc zerowych równania charakterystycznego (widma $\sigma(\mathbf{A})$ macierzy \mathbf{A}) na płaszczyźnie zespolonej. Poniższe twierdzenie pozwala badać stabilność układów liniowych, których wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego mają niezerowe części rzeczywiste (widmo macierzy \mathbf{A} jest rozłączne z osią urojoną). Układy takie nazywają się *układami hiperbolicznymi*.

Twierdzenie 6.3 (Hurwitza) *Na to, by każdy pierwiastek równania*

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \quad (a_0 > 0),$$

o współczynnikach rzeczywistych miał część rzeczywistą ujemną, potrzeba i wystarcza aby macierz

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

była dodatnio określona, to znaczy aby jej wszystkie minory główne były dodatnie.

Powyższą macierz, zwaną *macierzą Hurwitza*, konstruujemy następująco: Na głównej przekątnej wypisujemy współczynniki wielomianu charakterystycznego zaczynając od a_1 i kończąc na a_n . Po czym w każdym wierszu wypisujemy współczynniki w kolejności malejących numerów, przy czym współczynniki o numerach mniejszych od zera lub większych od n zastępujemy zerami. Następnie obliczamy kolejne minory główne

$$M_1 = a_1, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad M_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

Jeśli wszystkie są dodatnie, to stan równowagi układu jest stabilny asymptotycznie. Jeśli, obliczając kolejne minory, po drodze natrafimy na minor ujemny, to punkt równowagi jest niestabilny.

Zauważymy, że jeśli równanie charakterystyczne ma ujemny współczynnik, powiedzmy a_k , to minor $M_k = a_k \cdot M_{k-1}$ ma znak przeciwny do minora M_{k-1} . Zatem albo M_k , albo M_{k-1} jest ujemne, czyli punkt równowagi jest niestabilny. *Dodatniość wszystkich współczynników wielomianu charakterystycznego jest warunkiem koniecznym, (lecz nie wystarczającym), stabilności rozwiązania trywialnego.*

Przykład 6.3 Zbadać stabilność rozwiązania trywialnego równania

$$x^{(5)} + x^{(4)} + 7x^{(3)} + 4x'' + 10x' + 3x = 0.$$

Rozwiązanie: $a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 7, a_3 = 4, a_4 = 10, a_5 = 3$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$M_1 = 1 > 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$M_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 8 > 0, \quad M_5 = \det \mathbf{H} = 3 \cdot M_4 = 24 > 0.$$

Wszystkie minory główne macierzy Hurwitza są dodatnie. Rozwiązanie trywialne jest stabilne asymptotycznie.

6.4 Stabilność rozwiązań układów nieliniowych.

Zajmiemy się badaniem stabilności punktów równowagi układów nieliniowych. Ograniczmy się do układów autonomicznych. Rozważmy układ

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}, \quad (15)$$

gdzie odwzorowanie $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1 w zbiorze otwartym $\Omega \in \mathbb{R}^n$ zawierającym punkt $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$. Załóżmy ponadto, że $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Wtedy $\mathbf{0}$ jest punktem równowagi układu (15). Założenia nałożone na odwzorowanie \mathbf{f} pozwalają każdą z jego funkcji składowych f_i przedstawić w otoczeniu $\mathbf{0}$ w postaci

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{(0, \dots, 0)} x_j + r_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Pierwszy, liniowy składnik sumy po prawej stronie, jest różniczką zupełną funkcji f_i , a drugi, nieliniowy $r_i(x_1, \dots, x_n) = r_i(\mathbf{x})$ jest funkcją skalarną, klasy C^1 w otoczeniu zera i taką, że

$$r_i(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{|r_i(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (17)$$

Wzór (16) zapisujemy krótko

$$f_i(\mathbf{x}) = (\nabla f_i(\mathbf{0})|\mathbf{x}) + r_i(\mathbf{x}). \quad (18)$$

Warunek (17) orzeka, że w otoczeniu zera funkcja f_i jest ze względu na przejście graniczne $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ nieskończenie małą rzędu wyższego niż $\|\mathbf{x}\|$. Wzór (18) w połączeniu z (17) odczytujemy następująco: w otoczeniu $\mathbf{0}$ wartości funkcji f_i są w przybliżeniu równe różniczce zupełnej tej funkcji w punkcie $\mathbf{0}$.

Oznaczmy teraz przez

$$\mathbf{A} = \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{0}} \right]_{i,j=1,\dots,n} \quad (19)$$

macierz liczbową wymiaru $n \times n$, która w i -tym wierszu ma pochodne cząstkowe funkcji f_i względem kolejnych zmiennych x_j , obliczane w punkcie $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Macierz tą nazywamy *macierzą Jacobiego* odwzorowania \mathbf{f} w punkcie $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

Oznaczmy przez $\mathbf{Df}(\mathbf{0}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ odwzorowanie liniowe przestrzeni \mathbb{R}^n w siebie, którego macierzą, przy ustalonej bazie przestrzeni \mathbb{R}^n , jest macierz Jacobiego (19). Odwzorowanie liniowe $\mathbf{Df}(\mathbf{0})$ nazywamy *pochodną odwzorowania* \mathbf{f} w punkcie $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$. Wzory (16) możemy teraz zapisać krótko

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Df}(\mathbf{0})(\mathbf{x}) + \mathbf{r}(\mathbf{x}) \quad \text{lub} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x}). \quad (20)$$

Funkcja wektorowa \mathbf{r} jest w otoczeniu $\mathbf{0}$ funkcją klasy C^1 taką, że

$$\mathbf{r}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad \lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{r}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0. \quad (21)$$

Powróćmy do układu nieliniowego (15). Przedstawimy funkcję wektorową \mathbf{f} w postaci (20). Układ (15) przyjmuje teraz postać

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x}). \quad (22)$$

Z układem tym związany jest układ liniowy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}. \quad (23)$$

Równanie (23) nazywamy *linearizacją* nieliniowego równania (15). Oba równania są w otoczeniu $\mathbf{0}$, w pewnym sensie, sobie bliskie. W wielu przypadkach o stabilności punktu równowagi układu (15), możemy wnioskować na podstawie układu zlinearyzowanego (23). Przyjmijmy jeszcze definicje

Definicja 6.4 Układ (15) nazywamy *hiperbolicznym*, jeżeli układ (23) jest hiperboliczny, tzn. widmo macierzy \mathbf{A} , która jest macierzą Jacobiego odwzorowania \mathbf{f} w punkcie $\mathbf{0}$, jest rozłączne z osią urojona.

Definicja 6.5 Wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie (bijekcję) $\mathbf{h} : U \rightarrow V$, gdzie $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ nazywamy *homeomorfizmem*, jeżeli jest ciągłe oraz odwzorowanie do niego odwrotne $\mathbf{h}^{-1} : V \rightarrow U$ też jest ciągłe. Zbiory U i V nazywamy *homeomorficznymi*, jeżeli istnieje homeomorfizm odwzorowujący jeden zbiór na drugi. Zbiory homeomorficzne nazywamy też *topologicznie równoważnymi*.

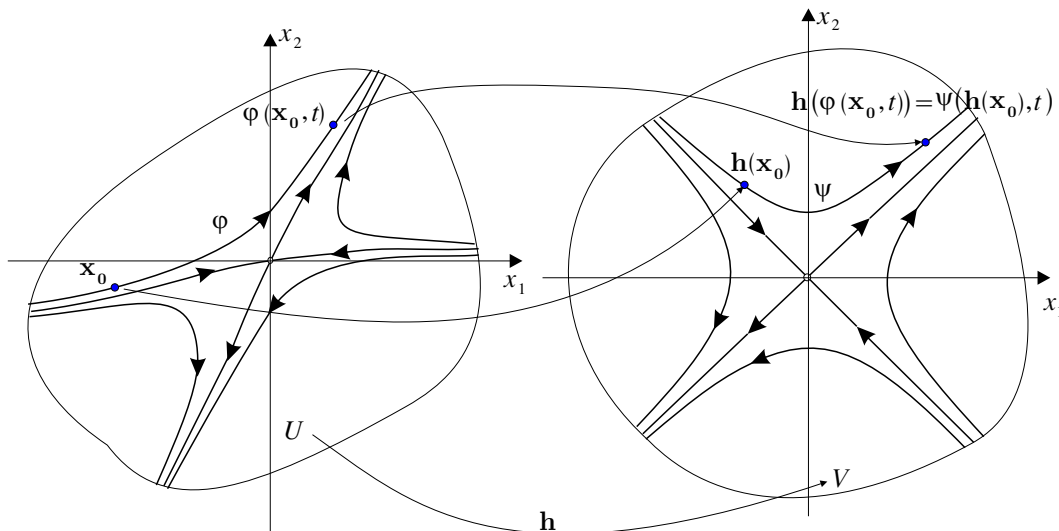
Niech dane będą dwa układy dynamiczne $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ i $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, gdzie pola wektorowe $\mathbf{f} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{g} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ są klasy C^1 na U i V odpowiednio zaś U i V to otwarte podzbiory \mathbb{R}^n . Niech $\varphi(\mathbf{x}_0, \cdot)$ będzie rozwiązaniem równania $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ z warunkiem początkowym $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0 \in U$, a $\psi(\mathbf{y}_0, \cdot)$ – rozwiązaniem równania $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ z warunkiem $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{y}_0 \in V$.

Definicja 6.6 Pola wektorowe \mathbf{f} i \mathbf{g} nazywamy *sprzężonymi* jeżeli istnieje homeomorfizm $\mathbf{h} : U \rightarrow V$ taki, że

$$\mathbf{h}(\varphi(\mathbf{x}_0, t)) = \psi(\mathbf{h}(\mathbf{x}_0), t), \quad (24)$$

dla każdego $\mathbf{x}_0 \in U$ i $t \in \mathbb{R}$. Mówimy wówczas, że odpowiadające im układy dynamiczne są sprzężone.

Oznacza to w szczególności, że trajektorie fazowe jednego układu są, poprzez homeomorfizm \mathbf{h} , odwzorowane na trajektorie fazowe drugiego układu z zachowaniem kierunku ruchu po tych trajektoriach. Dynamika obu układów jest identyczna.



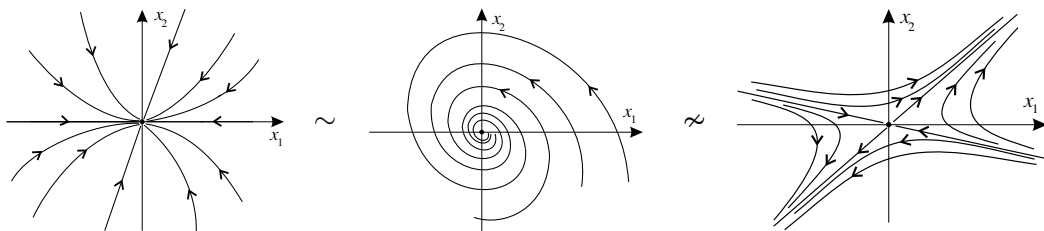
Rys. 4

Oznaczmy jak poprzednio przez $\varphi(\mathbf{x}_0, \cdot)$ rozwiązanie równania (15) spełniające warunek początkowy $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, a przez $\psi(\mathbf{y}_0, \cdot)$ – rozwiązanie równania liniowego (23), spełniające warunek $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}_0$. Podamy teraz następujące

Twierdzenie 6.4 [Grobman, Hartman] *Jeżeli układ (23) jest linearyzacją hiperbolicznego układu (15), to istnieją otoczenia U i V punktu $\mathbf{0}$, oraz homeomorfizm $\mathbf{h} : U \rightarrow V$ taki, że spełniony jest warunek (24) dla każdego $\mathbf{x}_0 \in U$ i każdego t takiego, że $\varphi(\mathbf{x}_0, t) \in U$.*

Z twierdzenia tego wynika, że portrety fazowe układów (15) i (23) są, lokalnie w otoczeniu punktu $\mathbf{0}$, topologicznie równoważne. Rysunek 4 jest ilustracją zarówno do definicji 6.6 jak i do twierdzenia 6.4.

Uwaga. Topologiczna równoważność portretów fazowych, w przypadku układów dwuwymiarowych, nie musi oznaczać zachowania rodzaju punktu równowagi, ze względu na klasyfikację przeprowadzoną uprzednio dla układów liniowych. Na przykład pierwsze dwa portrety fazowe na poniższym rysunku są topologicznie równoważne, ale żaden z nich nie jest topologicznie równoważny trzeciemu.



Rys. 5

W pierwszych dwóch punkt równowagi jest stabilny asymptotycznie, wszystkie trajektorie dążą do punktu równowagi. W trzecim punkt równowagi jest niestabilny.

Sformułujmy na koniec twierdzenie, które jest w zasadzie wnioskiem z twierdzeń 6.2 i 6.4

Twierdzenie 6.5 *Jeżeli wszystkie wartości własne macierzy \mathbf{A} , mają ujemne części rzeczywiste, to punkt równowagi układu (22), gdzie funkcja wektorowa \mathbf{r} spełnia warunek (21), jest asymptotycznie stabilny. Jeżeli choćby jeden pierwiastek równania charakterystycznego miał dodatnią część rzeczywistą, to punkt równowagi tego układu jest niestabilny.*

Przykład 6.4 Zbadać stabilność stanu równowagi $(0,0)$ układu

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8 \sin y \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Mamy w naszym przypadku $\mathbf{f}(x, y) = [f_1(x, y), f_2(x, y)]$, gdzie

$$f_1(x, y) = 2x + 8 \sin y, \quad f_2(x, y) = 2 - e^x - 3y - \cos y.$$

Sprawdzamy, że $f_1(0, 0) = 0$, $f_2(0, 0) = 0$, czyli faktycznie punkt $(0, 0)$ jest punktem równowagi tego układu. Linearyzujemy układ. Korzystamy z faktu, że odwzorowanie \mathbf{f} jest klasy C^1 i możemy je przedstawić w postaci (20). Obliczamy kolejno

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \cos y \\ -e^x & -3 + \sin y \end{bmatrix} \Rightarrow D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Po zlinearyzowaniu mamy układ

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8y \\ \dot{y} = -x - 3y \end{cases} \quad \text{o macierzy } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Obliczamy pierwiastki równania charakterystycznego macierzy \mathbf{A} :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 8 \\ -1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm j \frac{\sqrt{7}}{2},$$

Części rzeczywiste, $\operatorname{Re}(\lambda_1) = \operatorname{Re}(\lambda_2) = -\frac{1}{2}$, pierwiastków równania charakterystycznego są ujemne, stąd

O d p. Punkt równowagi $(0, 0)$ jest stabilny asymptotycznie.

Można byłoby postawić pytanie, czy układ powyższy nie ma innych punktów równowagi. Aby odpowiedzieć na to pytanie należałoby rozwiązać układ równań $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$, którego rozwiązanie w przypadku nieliniowym jest zadaniem na ogół bardzo trudnym. Można posłużyć się pakietem Maple. Narysować w nim krzywe o równaniach $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ i zobaczyć, czy się jeszcze gdzieś nie przetną. Gdyby okazało się, że pole \mathbf{f} ma punkt równowagi $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, to badanie stabilności takiego punktu przeprowadzalibyśmy analogicznie jak dla punktu $(0, 0)$ z tym, że linearyzację przeprowadzalibyśmy w otoczeniu punktu (x_0, y_0) zastępując macierz $D\mathbf{f}(0, 0)$, macierzą $D\mathbf{f}(x_0, y_0)$.

Przykład 6.5 Zbadamy stabilność punktów równowagi układu

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = 2x - x^2 - y^2. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Pole wektorowe $\mathbf{f}(x, y) = [f_1(x, y), f_2(x, y)]$ ma współrzędne

$$f_1(x, y) = 2y - x^2 - y^2, \quad f_2(x, y) = 2x - x^2 - y^2.$$

Wyznaczamy punkty równowagi. W tym celu rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} 2y - x^2 - y^2 = 0 \\ 2x - x^2 - y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Są to równania dwóch okręgów, które przecinają się w punktach $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ i $\mathbf{x}_1 = (1, 1)$.

$$D\mathbf{f}(x, y) = \begin{bmatrix} -2x & 2 - 2y \\ 2 - 2x & -2y \end{bmatrix}. \text{ Stąd}$$

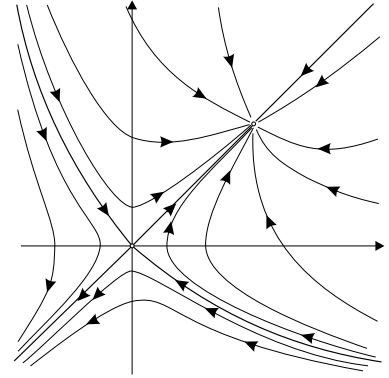
$$D\mathbf{f}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 2, \quad \operatorname{Re}(\lambda_2) > 0$$

– punkt równowagi $(0, 0)$ jest niestabilny (siodło).

$$D\mathbf{f}(1, 1) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \lambda_{1,2} = -2, \quad \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$$

– punkt równowagi $(1, 1)$ jest stabilny asymptotycznie (węzeł).

Na rysunku obok przedstawiony jest przybliżony portret fazowy badanego układu.



□

Kolejny przykład pokazuje, że założenie hiperboliczności punktu równowagi w układzie zlinearyzowanym jest istotne.

Przykład 6.6 Rozpatrzmy układ

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (25)$$

Zbadamy jego portet fazowy. Punkt $(0, 0)$ jest jedynym punktem równowagi. Często, przy rozwiązywaniu tego typu układów, stosujemy zamianę zmiennych. W tym przypadku wygodnie jest zastosować współrzędne biegunowe

$$x = x(r, \varphi) = r \cos \varphi, \quad y = y(r, \varphi) = r \sin \varphi.$$

Każdy punkt $(x(t), y(t))$ w układzie Oxy będzie miał nowe współrzędne $(r(t), \varphi(t))$, gdzie

$$x(t) = x(r(t), \varphi(t)), \quad y(t) = y(r(t), \varphi(t)).$$

Różniczkując względem t powyższe związki otrzymamy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \cos \varphi \cdot \dot{r} - r \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} + \frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \sin \varphi \cdot \dot{r} + r \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Podstawiając obliczone pochodne do naszego układu otrzymamy

$$\begin{cases} \dot{r} \cos \varphi - \dot{\varphi} r \sin \varphi = -r \sin \varphi - r^3 \cos \varphi \\ \dot{r} \sin \varphi + \dot{\varphi} r \cos \varphi = r \cos \varphi - r^3 \sin \varphi. \end{cases}$$

Mnożąc teraz pierwsze równanie przez $\cos \varphi$, a drugie przez $\sin \varphi$ i dodając stronami otrzymujemy równanie:

$$\dot{r} = -r^3.$$

Jeśli natomiast pomnożymy pierwsze równanie przez $-\sin \varphi$, a drugie przez $\cos \varphi$ i dodamy oba równania stronami, to otrzymamy równanie:

$$\dot{\varphi}r = r.$$

Wobec tego wyjściowy układ równań we współrzędnych biegunowych przyjmie postać

$$\begin{cases} \dot{r} = -r^3 \\ \dot{\varphi} = 1. \end{cases}$$

Jest to prosty układ dwóch wzajemnie niezależnych równań, który ma całkę ogólną

$$\begin{cases} r^2 = \frac{1}{2t + C_1} \\ \varphi = t + C_2. \end{cases}$$

Przyjmijmy warunki początkowe $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, które we współrzędnych biegunowych przyjmą postać:

$$r(0) = r_0, \varphi(0) = \varphi_0, \text{ gdzie } r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \varphi_0 = \arctg \frac{y_0}{x_0}.$$

Wstawiając warunki początkowe do całki ogólnej dostaniemy $C_1 = \frac{1}{r_0^2}$, $C_2 = \varphi_0$. Stąd otrzymujemy, we współrzędnych (r, φ) , równania parametryczne trajektorii fazowej przechodzącej przez punkt (r_0, φ_0)

$$\begin{cases} r = \sqrt{\frac{1}{2t + \frac{1}{r_0^2}}} \\ \varphi = t + \varphi_0. \end{cases} \quad (26)$$

Widać z tych równań, że gdy $t \rightarrow \infty$, to $r(t) \rightarrow 0$. Zatem punkt $(r(t), \varphi(t))$, startując w chwili 0 z dowolnego punktu (r_0, φ_0) , dąży przy $t \rightarrow \infty$ do punktu równowagi $r = 0$ po trajektorii danej równaniami parametrycznymi (26). Rugując z równań (26) zmienną t , otrzymamy równanie trajektorii w postaci biegunowej $r = r(\varphi)$:

$$r = \sqrt{\frac{1}{2\varphi - 2\varphi_0 + \frac{1}{r_0^2}}}.$$

Wraz ze wzrostem φ , r maleje dążąc do zera przy φ dążącym do nieskończoności. W układzie Oxy trajektorie są spiralami, po których ruch odbywa się do punktu $(0, 0)$.

Punkt równowagi jest stabilny asymptotycznie. Odpowiada on, w klasyfikacji dla układów liniowych na płaszczyźnie, ognisku stabilnemu. Rozpatrzmy natomiast układ

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x, \end{cases}$$

który jest linearyzacją układu (25). Mamy tutaj

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i.$$

Wartości własne macierzy \mathbf{A} leżą na osi urojonej, układ nie jest hiperboliczny. Punkt równowagi $(0, 0)$ jest w tym przypadku centrum, trajektorie są okręgami. Portrety fazowe układu (25) i jego linearyzacji (26) nie są topologicznie równoważne.

Przykład 6.7 Zbadać stabilność punktów równowagi równania

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b \sin x = 0, \quad a, b > 0.$$

R o z w i ą z a n i e : Powyższe równanie jest równaniem różniczkowym wahadła. Mamy na myśli tutaj ciało o masie jednostkowej zawieszona na sztywnym ramieniu, wahające się w jednej płaszczyźnie, przy czym $x(t)$ oznacza w tym równaniu kąt w chwili t , jaki tworzy ramię wahadła z osią pionową. Na wahadło nie działa żadna siła zewnętrzna a ruch odbywa się tylko na skutek nadania wychylenia początkowego $x(0) = x_0$ i prędkości początkowej $\dot{x}(0) = v_0$. Zapiszmy dane równanie w postaci równoważnego układu

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -b \sin x - ay. \end{cases} \quad (27)$$

Zauważamy, że punktami równowagi są punkty o współrzędnych $(k\pi, 0)$. Wystarczy zbadać ich stabilność tylko dla $k = 0$ i $k = 1$. Linearyzujemy układ. Zrobimy to inaczej niż w poprzednich przykładach. Otóż rozwinie my nieliniowe składniki występujące w tym układzie w szereg potęgowy, a następnie odrzucimy wszystkie wyrazy tego rozwinięcia, które występują w potęgach wyższych niż pierwsza. Otrzymamy

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -b(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots) - ay \end{cases}$$

oraz układ zlinearyzowany

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -bx - ay. \end{cases}$$

Zbadamy najpierw stabilność punktu $(0, 0)$. Macierzą układu jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}.$$

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ ma pierwiastki $\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, które są rzeczywiste ujemne gdy $\Delta = a^2 - 4b \geq 0$, oraz zespolone o ujemnej części rzeczywistej gdy $\Delta < 0$. Punkt równowagi $(0, 0)$ jest zatem stabilny asymptotycznie.

Zbadamy teraz stabilność punktu równowagi $(\pi, 0)$. Postąpimy tym razem następująco: wprowadzimy nowe zmienne u i v , tak aby punkt równowagi $(x_0, y_0) = (\pi, 0)$ układu (27) został przekształcony w punkt równowagi $(u_0, v_0) = (0, 0)$ układu przekształconego. Skorzystajmy najpierw z tożsamości $\sin x = -\sin(x - \pi)$ i zapiszmy układ (27) w postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = b \sin(x - \pi) - ay. \end{cases}$$

Niech teraz $u = x - \pi$, $v = y$. Wówczas w nowych zmiennych u i v otrzymamy układ

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = b \sin u - av. \end{cases} \quad (28)$$

Po linearyzacji dostaniemy układ liniowy

$$\begin{cases} \dot{u} = v \\ \dot{v} = bu - av \end{cases} \quad \text{o macierzy } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & -a \end{bmatrix}.$$

Równanie charakterystyczne $\lambda^2 + a\lambda - b = 0$ ma wyróżnik $\Delta = a^2 + 4b$ dodatni przy dowolnych dodatnich a i b . Ponieważ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -b < 0$, zatem jeden pierwiastek równania charakterystycznego jest ujemny a drugi dodatni. Punkt równowagi $(0, 0)$ układu (28), a więc i punkt równowagi $(\pi, 0)$ układu (27), jest niestabilny.

6.5 Funkcja Lapunowa

Metoda badania stabilności punktu równowagi układu (15) na podstawie układu zlinearyzowanego zawodzi, jak to było pokazane w przykładzie (6.6), w przypadku gdy macierz $D\mathbf{f}(0)$ ma wartości własne leżące na osi urojonej. W przykładzie (6.6) udało się zbadać stabilność punktu równowagi, ponieważ potrafiliśmy znaleźć rozwiązanie układu. Taka możliwość zdarza się jednak w wyjątkowych przypadkach. Metoda zaproponowana przez Lapunowa (1892), pozwala w niektórych przypadkach zbadać stabilność punktu równowagi, nawet wtedy gdy nie jest on punktem hiperbolicznym. W metodzie tej korzysta się z pewnej funkcji pomocniczej, dzięki której możemy zbadać zachowanie się trajektorii układu w otoczeniu punktu równowagi. Sformułujemy twierdzenie.

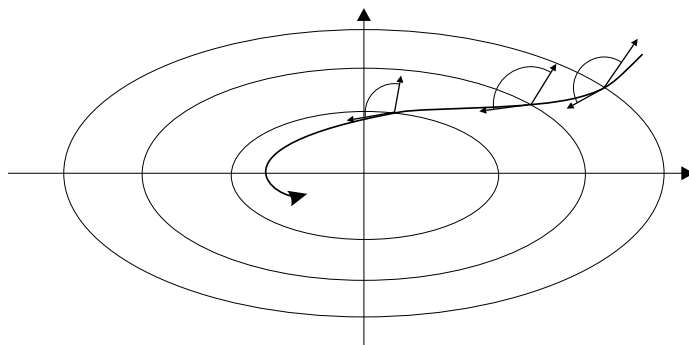
Twierdzenie 6.6 *Niech Ω będzie otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n zawierającym punkt $\mathbf{0}$. Załóżmy, że $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest klasy C^1 na Ω i że $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Załóżmy dalej, że istnieje funkcja*

$V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, klasy C^1 spełniająca warunki: $V(\mathbf{0}) = 0$ i $V(\mathbf{x}) > 0$ dla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Wtedy

- a) jeśli $(\nabla V(\mathbf{x})|\mathbf{f}(x)) \leq 0$ dla $\mathbf{x} \in \Omega$, to punkt równowagi $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ jest stabilny,
- b) jeśli $(\nabla V(\mathbf{x})|\mathbf{f}(x)) < 0$ dla $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}$, to punkt równowagi $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ jest stabilny asymptotycznie,
- c) jeśli $(\nabla V(\mathbf{x})|\mathbf{f}(x)) > 0$ dla $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{0}\}$, to punkt równowagi $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ jest niestabilny.

Funkcja V , spełniająca założenia powyższego twierdzenia nazywa się *funkcją Lapunowa*.

Wyjaśnimy sens geometryczny tego twierdzenia. Ograniczmy się do przypadku dwuwymiarowego. Funkcja $V(\mathbf{x}) = V(x, y)$ jest wówczas funkcją dwóch zmiennych, mającą w punkcie $(0, 0)$ minimum lokalne równe 0. Wykres funkcji V jest zatem powierzchnią w \mathbb{R}^3 , której poziomice są krzywymi zamkniętymi, otaczającymi punkt $(0, 0)$. Przykładem takich funkcji mogą być funkcje typu $V(x, y) = ax^2 + by^2$, $a, b > 0$, których wykresami są paraboloidy eliptyczne. Gradient $\nabla V(x_0, y_0)$ funkcji V w punkcie (x_0, y_0) jest wektorem ortogonalnym do poziomicy $V(x, y) = V(x_0, y_0)$ i skierowanym na zewnątrz. Wektor $\mathbf{f}(x, y) = [f_1(x, y), f_2(x, y)]$ jest w każdym punkcie $(x, y) \in \Omega$ styczny do trajektorii układu, przechodzącej przez ten punkt i jest skierowany zgodnie z kierunkiem ruchu punktu po tej trajektorii. Jeżeli iloczyn skalarny $(\nabla V(x, y)|\mathbf{f}(x, y))$, wektora gradientu funkcji V przez wektor pola \mathbf{f} , w dowolnym punkcie $(x, y) \in \Omega$ jest na przykład ujemny, jak to jest w podpunkcie b) twierdzenia 6.6, czyli jeżeli kąt pomiędzy tymi wektorami jest rozwarty, to trajektoria układu przechodząc przez ten punkt, musi przeciąć poziomice w kierunku od zewnątrz do wewnątrz. Jest oczywiste, że jeśli raz weszła w obszar ograniczony daną poziomicią, to już z niego nie wyjdzie. Co więcej, przy nierówności ostrej punkty trajektorii muszą dążyć do punktu $(0, 0)$. Punkt równowagi jest stabilny asymptotycznie. Sytuację tę ilustruje poniższy rysunek.



Rys. 5

Przy nierówności nieostrej nie mamy gwarancji, że trajektoria przechodząca przez punkt (x_0, y_0) będzie przecinała poziomice. Trajektorie mogą być, w szczególnym przypadku poziomice funkcji V . Taka sytuacja ma miejsce na przykład wtedy, gdy funkcja V jest całką pierwszą układu (patrz str. 110). Jeżeli zachodzi przypadek c) twierdzenia, to

trajektorie przecinają poziomice w kierunku od wewnątrz na zewnątrz i dlatego punkt równowagi jest niestabilny.

Przykład 6.8 Zbadajmy jeszcze raz stabilność punktu równowagi układu

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

z przykładu 6.6. Przyjmijmy $V(x, y) = x^2 + y^2$. Oczywiście $V(x, y) > 0$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$ oraz $V(0, 0) = 0$. Obliczamy iloczyn skalarny wektora gradientu V przez wektor \mathbf{f} :

$(\nabla V(x, y) | \mathbf{f}(x, y)) = 2x(-y - x(x^2 + y^2)) + 2y(x - y(x^2 + y^2)) = -2(x^2 + y^2)^2 < 0$ dla $(x, y) \neq (0, 0)$. Zatem punkt $(0, 0)$ jest stabilny asymptotycznie.

Przykład 6.9 Rozważmy układ

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^3 \\ \dot{y} = x^3. \end{cases}$$

Niech $V(x, y) = x^4 + y^4$. Wtedy

$$(\nabla V | \mathbf{f}) = 4x^3(-y^3) + 4y^3(x^3) = 0.$$

Zatem punkt $(0, 0)$ jest stabilny. Funkcja V jest w tym przypadku całką pierwszą układu. Trajektorie leżą na poziomicach funkcji V – brak stabilności asymptotycznej.

Przykład 6.10 Zbadać stabilność punktu równowagi $(0, 0, 0)$ układu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 + x_2x_3 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_1x_3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - x_3^3. \end{cases}$$

Rozwiązanie: Macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ układu zlinearyzowanego ma wartości

własne: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$, zatem o stabilności punktu równowagi układu nieliniowego nie możemy rozstrzygać w oparciu o układ zlinearyzowany. Zastosujemy odpowiednio dobraną funkcję Lapunowa. Wypróbujmy funkcję

$$V(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2, \quad \text{gdzie } a, b, c > 0.$$

Zobaczmy czy uda się tak dobrać współczynniki a, b i c , aby była spełniona jedna z nierówności w twierdzeniu 6.6.

$$\nabla V(x_1, x_2, x_3) = [2ax_1, 2bx_2, 2cx_3]$$

stąd

$$\begin{aligned} (\nabla V|\mathbf{f}) &= 2ax_1(-2x_2 + x_2x_3 - x_1^3) + 2bx_2(x_1 - x_1x_3 - x_2^3) + 2cx_3(x_1x_2 - x_3^2) = \\ &= (-4a + 2b)x_1x_2 + (2a - 2b + 2c)x_1x_2x_3 - 2ax_1^4 - 2bx_2^4 - 2cx_3^4. \end{aligned}$$

Jeżeli teraz na przykład przyjmujemy $a = c = 1$ i $b = 2$, czyli

$$V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2,$$

to

$$(\nabla V|\mathbf{f}) = -2(x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4) < 0 \quad \text{dla } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0),$$

więc na mocy twierdzenia 6.6, punkt równowagi $(0, 0, 0)$ jest stabilny asymptotycznie.

Ćwiczenia

1. Zbadać stabilność punktu równowagi układu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ gdy macierz \mathbf{A} jest równa:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{b) } \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$$

2. Wyznaczyć wartości $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, przy których rozwiązanie zerowe równania $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = 0$ jest stabilne asymptotycznie, stabilne nieasymptotycznie, niestabilne.
3. Wyznaczyć wartości parametru α , przy których stabilne jest rozwiązanie zerowe układu:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 5\alpha x - \alpha^2 y; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x} = \alpha^2 x - 3y \\ \dot{y} = \alpha x + 4y. \end{cases}$$

4. Udowodnić, że wszystkie pierwiastki wielomianu 3-go stopnia o współczynnikach rzeczywistych

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$$

mają ujemne części rzeczywiste wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$ oraz $a_1a_2 > a_3$.

5. Zbadać stabilność rozwiązania trywialnego równania:

$$\begin{aligned} \text{a) } & x^{(3)} + 5x'' + 9x' + 5x = 0; \\ \text{b) } & x^{(4)} + 3x^{(3)} + \alpha x'' + 2x' + x = 0; \\ \text{c) } & x^{(5)} + 2x^{(4)} + 3y^{(3)} + 2x'' + x' + x = 0. \end{aligned}$$

6. Zbadać stabilność punktu równowagi $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ układów:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2 \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4 \\ \dot{y} = x + 6 \cos y - 6 - y^2; \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} \dot{x}_1 = \sin(x_3 - x_1) \\ \dot{x}_2 = \sin^2(x_1 - x_2) - \sin x_3 \\ \dot{x}_3 = \operatorname{tg}(x_2 - x_3). \end{cases}$$

7. Dobierając odpowiednią funkcję Lapunowa zbadać charakter punktu równowagi układów:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3 \\ \dot{y} = 3x - y^3; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x} = y - xy^2 \\ \dot{y} = -x^3 \end{cases} \quad (\text{wsk. } V(x, y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2);$$

$$\text{c) } \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_1x_2^2 + x_3^2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_3^3 - x_2^3 \\ \dot{x}_3 = -x_1x_3 - x_3x_1^2 - x_2x_3^2 - x_3^5 \end{cases} \quad (\text{wsk. } V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

8. Zbadać stabilność rozwiązania trywialnego równania van der Pola

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

w zależności od ε .

9. Znaleźć punkty równowagi, zbadać ich charakter oraz naszkicować portrety fazowe następujących układów:

$$\text{a) } \begin{cases} \dot{x} = 2x - x^2 \\ \dot{y} = -y + xy; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y) \\ \dot{y} = y(3 - 2x - y). \end{cases}$$

7 Przekształcenie Laplace'a

7.1 Definicja i podstawowe własności przekształcenia Laplace'a

Rozpatrzmy funkcję zespoloną $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ argumentu rzeczywistego t . Zatem

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) = f_1(t) + if_2(t) \in \mathcal{C}.$$

Założmy, że f jest całkowna na każdym przedziale $\langle t_1; t_2 \rangle$, $0 \leq t_1 < t_2$, to znaczy obie funkcje f_1 i f_2 są całkowne na tym przedziale. Wówczas możemy zdefiniować

$$\int_0^\infty f(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f(t) dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f_1(t) dt + i \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r f_2(t) dt.$$

Jeżeli obie granice po prawej stronie istnieją i są właściwe to całkę $\int_0^\infty f(t) dt$ nazywamy zbieżną. Jeżeli zbieżna jest całka $\int_0^\infty |f(t)| dt = \int_0^\infty \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)} dt$, to całkę $\int_0^\infty f(t) dt$ nazywamy zbieżną bezwzględnie. Zachodzi przy tym nierówność

$$\left| \int_0^\infty f(t) dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)| dt.$$

Definicja 7.1 Niech $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}$ będzie funkcją całkowną na każdym przedziale $\langle t_1; t_2 \rangle$, $0 \leq t_1 < t_2$. Transformata Laplace'a funkcji $f(t)$ nazywamy funkcję zespoloną $F(s)$ argumentu zespolonego s , określoną wzorem

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt. \quad (1)$$

Piszemy wówczas

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)].$$

Mamy zatem

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Całka występująca we wzorze (1) (zwana całką Laplace'a) jest całką zależną od parametru zespolonego s . Dla pewnych wartości s może ona być zbieżna, zbieżna bezwzględnie lub rozbieżna.

Ważną klasą funkcji, dla których całka Laplace'a jest zbieżna, jest klasa funkcji zwanych *oryginałami*. Ograniczymy się tutaj do oryginałów, które są funkcjami rzeczywistymi choć w ogólnym przypadku mogą to być funkcje zespolone.

Definicja 7.2 Oryginałem nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniającą następujące warunki:

$$1^\circ f(t) = 0 \text{ dla każdego } t < 0,$$

2° w każdym przedziale $\langle t_1; t_2 \rangle$, $0 \leq t_1 < t_2$ funkcja f ma skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju,

3° funkcja f jest rzędu wykładniczego, to znaczy

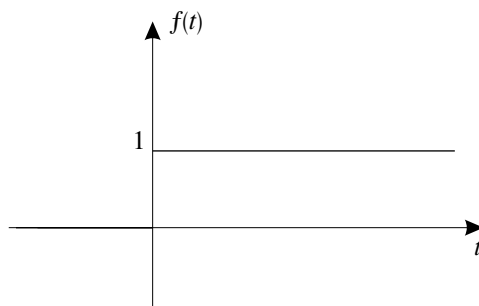
$$\exists M > 0 \exists \lambda \geq 0 \forall t \in (0; \infty) |f(t)| \leq M e^{\lambda t}.$$

Najmniejszą stałą λ spełniającą warunek 3° będziemy oznaczać przez λ_0 i nazywać współczynnikiem wzrostu wykładniczego oryginału f .

Przykłady oryginałów:

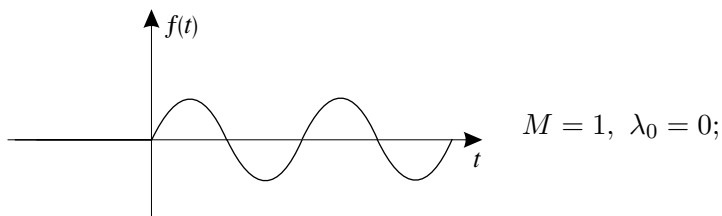
a) Funkcja Heviside'a (funkcja jednostkowa)

$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t > 0, \end{cases}$$

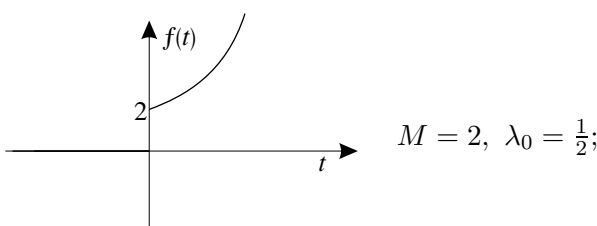


Dla tej funkcji warunek 3° jest spełniony ze stałymi $M = 1$ i $\lambda_0 = 0$. Funkcję Heviside'a oznacza się też $\mathbf{1}(t)$;

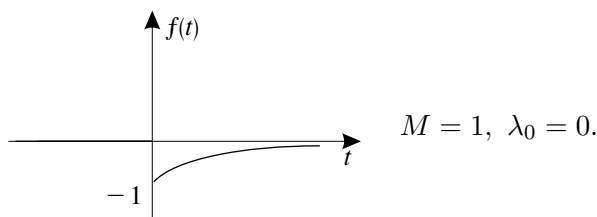
b) $f(t) = \eta(t) \cdot \sin t$



c) $f(t) = 2\eta(t)e^{\frac{1}{2}t}$



d) $f(t) = -\eta(t)e^{-2t}$



Zauważymy, że na przykład funkcje $g(t) = \sin t$, $h(t) = 2e^{\frac{1}{2}t}$ nie są oryginałami ponieważ nie spełniają warunku 1°. Jeżeli jednak funkcja $g(t)$ spełnia warunki 2° i 3°,

to funkcja $f(t) = \eta(t) \cdot g(t)$ jest już oryginałem. W dalszym ciągu, jeżeli to nie będzie prowadziło do nieporozumień, będziemy w zapisie oryginału pomijali czynnik $\eta(t)$ traktując na przykład funkcję $f(t) = \sin t$ jako oryginał $f(t) = \eta(t) \sin t$. W szczególności każda funkcja ograniczona spełniająca warunek 2°, jest oryginałem ze stałą $\lambda_0 = 0$.

Latwo wykazać, że jeśli $f(t)$ i $g(t)$ są oryginałami, to funkcja $h(t) = af(t) + bg(t)$, $a, b \in \mathbb{R}$ jest też oryginałem (zbiór oryginałów stanowi przestrzeń liniową nad ciałem liczb rzeczywistych).

Uzasadnimy teraz podstawowy

Fakt. *Jeżeli $f(t)$ jest oryginałem, to całka Laplace'a jest zbieżna dla $s \in D$, gdzie $D = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \lambda_0\}$ a λ_0 jest współczynnikiem wzrostu wykładniczego oryginału $f(t)$.*

D o w ó d: Pokażemy, że całka $\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ jest zbieżna bezwzględnie. Istotnie, niech

$|f(t)| \leq Me^{\lambda_0 t}$ i niech $s = \lambda + j\omega$. Wtedy

$$|f(t)e^{-st}| = |f(t)| \cdot |e^{-st}| \leq Me^{\lambda_0 t} |e^{-\lambda t - j\omega t}| = Me^{\lambda_0 t} e^{-\lambda t} = Me^{(\lambda_0 - \lambda)t}.$$

Ponieważ całka niewłaściwa $\int_0^\infty e^{at} dt$ jest zbieżna wtedy i tylko wtedy gdy $a < 0$, więc całka $\int_0^\infty Me^{(\lambda_0 - \lambda)t} dt$ jest zbieżna dla $\lambda > \lambda_0$. Stąd, na mocy kryterium porównawczego, całka $\int_0^\infty |f(t)e^{-st}| dt$ jest zbieżna, a co za tym idzie całka $\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt$ jest zbieżna bezwzględnie dla $\operatorname{Re}(s) = \lambda > \lambda_0$. \square

Z powyższego faktu wynika, że transformata $F(s)$ oryginału $f(t)$ jest określona dla każdego $s \in D$. Obszar D jest więc dziedziną funkcji F . Okazuje się, że transformata $F(s)$ ma w obszarze D dodatkowe własności. Zachodzi bowiem

Twierdzenie 7.1 *Jeżeli $f(t)$ jest oryginałem, a $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, to F jest funkcją holomorficzną w obszarze $D = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) = \lambda > \lambda_0\}$. Ponadto $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} F(s) = 0$.*

Podamy teraz kilka przykładów wyznaczania transformaty.

Przykład 7.1 Wyznaczyć transformatę funkcji jednostkowej.

R o z w i ą z a n i e :

$$\mathcal{L}[\eta(t)] = \int_0^\infty e^{-st} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-st} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^r = \frac{1}{s} \lim_{r \rightarrow \infty} e^{-sr} + \frac{1}{s}.$$

Pokażemy, że $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-sr} = 0$. Wystarczy pokazać, że $\lim_{r \rightarrow \infty} |e^{-sr}| = 0$. Istotnie

$|e^{-sr}| = |e^{-(\lambda + j\omega)r}| = e^{-r\lambda}$. Ponieważ dla oryginału $\eta(t)$ jest $\lambda_0 = 0$, więc dla $\lambda > \lambda_0 = 0$ mamy $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{-r\lambda} = 0$.

Ostatecznie

$$\boxed{\mathcal{L}[\eta(t)] = \frac{1}{s}}$$

Dopuszczalny jest również skrócony zapis dla powyższych obliczeń:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}.$$

Przykład 7.2 Wyznaczyć transformatę oryginału $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$.

R o z w i ą z a n i e :

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}.$$

Pominęliśmy uzasadnienie faktu, że dla $\operatorname{Re}(s) > \lambda_0 = a$ jest $\lim_{r \rightarrow \infty} e^{(a-s)r} = 0$. Argumentacja jest analogiczna jak w poprzednim przykładzie.

Otrzymaliśmy wzór

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}}$$

Przykład 7.3 Obliczyć transformatę funkcji $f(t) = \sin t$.

R o z w i ą z a n i e : Mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin t] &= \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt = \left| \begin{array}{ll} u = e^{-st} & v' = \sin t \\ u' = -s e^{-st} & v = -\cos t \end{array} \right| = \\ &= -\cos t e^{-st} \Big|_0^{\infty} - s \int_0^{\infty} \cos t e^{-st} dt = \left| \begin{array}{ll} u = e^{-st} & v' = \cos t \\ u' = -s e^{-st} & v = \sin t \end{array} \right| = \\ &= -\cos t e^{-st} \Big|_0^{\infty} - s \left[\sin t e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt \right] = \\ &= -\cos t e^{-st} \Big|_0^{\infty} - s \sin t e^{-st} \Big|_0^{\infty} - s^2 \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Stąd

$$(1+s^2) \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt = e^{-st} (-s \sin t - \cos t) \Big|_0^{\infty} = \underbrace{\lim_{r \rightarrow \infty} [e^{-sr} (-s \sin r - \cos r)]}_{0 \text{ (Re}(s) > 0)} + 1.$$

Zatem

$$\boxed{\mathcal{L}[\sin t] = \int_0^{\infty} \sin t e^{-st} dt = \frac{1}{s^2+1}}$$

Własności transformaty Laplace'a

Podamy teraz podstawowe własności transformaty Laplace'a. Łatwe dowody tych własności pominiemy. Zilustrujemy tylko każdą z nich prostymi przykładami. W dalszym ciągu zakładamy, że $f(t)$ jest oryginałem, a $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, – jego transformata.

1. Liniowość transformaty.

Dla dowolnych oryginałów f i g i dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ mamy

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

Przykład: $\mathcal{L}[2 - \sin t + 3e^{-t}] = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{3}{s + 1}$.

2. Twierdzenie o podobieństwie.

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

Przykład: $\mathcal{L}[\sin at] = \frac{1}{a} \frac{1}{(\frac{s}{a})^2 + 1}$, stąd

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

3. Różniczkowanie oryginału.

Jeżeli $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ są oryginałami, to

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0+) - s^{n-2}f'(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$$

w szczególności

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0+)$$

oraz

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0+) - f'(0+)$$

Przykład: $\mathcal{L}[\cos at] = \mathcal{L}\left[\left(\frac{1}{a} \sin at\right)'\right] = \frac{1}{a}\mathcal{L}[(\sin at)'] = \frac{1}{a}s \frac{a}{s^2 + a^2} - \sin(0+)$.

Więc

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

4. Różniczkowanie transformaty.

$$\mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] = F^{(n)}(s)$$

w szczególności

$$\mathcal{L}[-tf(t)] = F'(s)$$

Przykład: $\mathcal{L}[t \sin 2t] = -\left(\frac{2}{s^2 + 4}\right)' = \frac{4s}{(s^2 + 4)^2}$.

Przykład: $\mathcal{L}[t^2 e^{3t}] = \left(\frac{1}{s-3}\right)'' = \frac{2}{(s-3)^3}$.

Przykład: $\mathcal{L}[t] = \mathcal{L}[t\eta(t)] = -\left(\frac{1}{s}\right)' = \frac{1}{s^2}$.

Przykład: $\mathcal{L}[t^2] = \mathcal{L}[t \cdot t] = -\left(\frac{1}{s^2}\right)' = \frac{2}{s^3}$.

Ogólnie:

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{(n)!}{s^{n+1}}$$

5. Przesunięcie w argumencie oryginału.

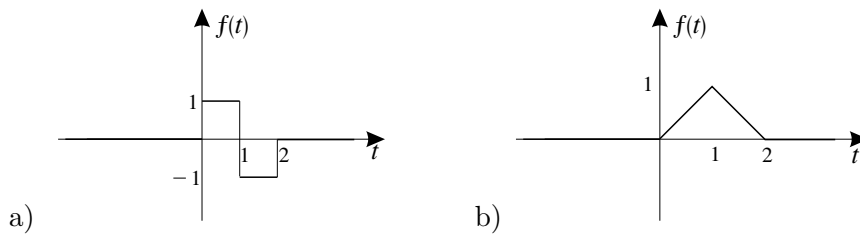
$$\mathcal{L}[f(t-a)\eta(t-a)] = F(s)e^{-as}, \quad a > 0$$

Przykład: $\mathcal{L}[(t-1)^2\eta(t-1)] = \frac{2}{s^3}e^{-s}$.

Przykład: $\mathcal{L}[\cos 3(t-2)\eta(t-2)] = \frac{s}{s^2+9}e^{-2s}$.

Przykład: $\mathcal{L}[t\eta(t-3)] = \mathcal{L}[(t-3)\eta(t-3)] + 3\mathcal{L}[\eta(t-3)] = \frac{1}{s^2}e^{-3s} + \frac{3}{s}e^{-3s}$.

Przykład 7.4 Wyznaczyć transformaty Laplace'a funkcji przedstawionych na wykresach



R o z w i ą z a n i e :

a) Funkcję f zapiszemy przy pomocy funkcji Heviside'a:

$$f(t) = \eta(t) - 2\eta(t-1) + \eta(t-2).$$

Stąd

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s}.$$

b) Postępujemy podobnie jak w podpunkcie a)

$$\begin{aligned} f(t) &= t\eta(t) - t\eta(t-1) + (-t+2)\eta(t-1) - (-t+2)\eta(t-2) = \\ &= t\eta(t) - 2(t-1)\eta(t-1) + (t-2)\eta(t-2). \end{aligned}$$

Stąd na podstawie własności 5 oraz pamiętając, że $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$, mamy

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-2s}.$$

6. Przesunięcie w argumencie transformaty.

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a), \quad a \in \mathcal{C}$$

Przykład: $\mathcal{L}[e^{-t}t^2] = \frac{2}{(s+1)^3}$.

Przykład: $\mathcal{L}[e^{\alpha t} \sin \beta t] = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$.

Przykład: $\mathcal{L}[e^{-3t} \sin^2 t] = \mathcal{L}[e^{-3t} \cdot \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)] = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-3t}] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-3t} \cos 2t] =$
 $= \frac{1}{2(s+3)} - \frac{s+3}{2[(s+3)^2 + 4]}$.

Podamy teraz zestawienie najczęściej stosowanych wzorów

Tablica transformat Laplace'a

Lp.	$f(t)$	$F(s)$	Lp.	$f(t)$	$F(s)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{s}$	8	$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
2	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	9	$f'(t)$	$sF(s) - f(0+)$
3	$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$	10	$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0+) - f'(0+)$
4	$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	11	$tf(t)$	$-F'(s)$
5	$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$	12	$t^2f(t)$	$F''(s)$
6	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	13	$f(t-a)\eta(t-a), a > 0$	$F(s)e^{-as}$
7	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	14	$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$

7.2 Przekształcenie odwrotne do przekształcenia Laplace'a

Transformacja Laplace'a jest przekształceniem, które pewnym funkcjom f zmiennej rzeczywistej t przyporządkowuje funkcje F zmiennej zespolonej s . Zapisujemy to wówczas $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Powstaje pytanie, czy istnieje odwzorowanie odwrotne do przekształcenia

Laplace'a. Z definicji transformaty $F(s)$ wynika, że jeśli dwa oryginały $f(t)$ i $g(t)$ różnią się w skończonej liczbie punktów, to ich transformaty $F(s)$ i $G(s)$ będą identyczne. Podamy następujące

Twierdzenie 7.2 *Jeżeli $f(t)$ jest oryginałem, a funkcja $F(s)$ zmiennej zespolonej $s = \lambda + i\omega$ jest transformatą Laplace'a funkcji f , to w każdym punkcie t zachodzi wzór*

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\lambda - i\omega}^{\lambda + i\omega} F(s) e^{st} ds, \quad (2)$$

gdzie $\lambda > \lambda_0$ a λ_0 jest współczynnikiem wzrostu wykładniczego oryginału f .

Z twierdzenia tego wynika, że w każdym punkcie t , w którym oryginał f jest ciągły, prawa strona wzoru (2) jest równa $f(t)$, natomiast w punktach nieciągłości funkcji f , prawa strona tego wzoru jest równa średniej arytmetycznej skoku funkcji f w tym punkcie.

Definicja 7.3 Przekształceniem odrotnym do przekształcenia Laplace'a nazywamy przekształcenie określone wzorem

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\lambda - i\omega}^{\lambda + i\omega} F(s) e^{st} ds$$

Jeżeli oryginał $f(t)$ w swoich punktach nieciągłości ma wartość równą średniej arytmetycznej skoku w tym punkcie, to zachodzi

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \iff \mathcal{L}[f(t)] = F(s).$$

Przy wyznaczaniu oryginału, gdy znana jest jego transformata, korzystamy z wzorów z tablicy transformat. Na przykład $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 - 2}\right) = \cosh \sqrt{2}t$, bo na podstawie wzoru 6 jest $\mathcal{L}(\cosh \sqrt{2}t) = \frac{s}{s^2 - 2}$.

Przekształcenie \mathcal{L}^{-1} , podobnie jak przekształcenie \mathcal{L} jest przekształceniem liniowym. Mamy więc

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)] = a\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + b\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = af(t) + bg(t)}$$

Przykład 7.5 Obliczyć $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, jeśli $F(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + s}$.

R o z w i ą z a n i e :

Funkcję F rozkładamy na ułamki proste.

$$\frac{s^2 + s + 1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Stąd

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = 1 + \sin t.$$

Zatem $f(t) = 1 + \sin t$. W zasadzie powinniśmy napisać $f(t) = (1 + \sin t)\eta(t)$, jednak zgodnie z wcześniejszą umową czynnik $\eta(t)$ będziemy pomijali.

Przykład 7.6 Wiedząc, że $F(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 5}$, znaleźć oryginał $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

R o z w i ą z a n i e :

Trójmian kwadratowy w mianowniku doprowadzamy do postaci kanonicznej. Otrzymamy

$$F(s) = \frac{s}{(s + 2)^2 + 1}.$$

Następnie otrzymaną funkcję przekształcamy tak, aby można było skorzystać z wzoru 14 w połączeniu z wzorami 3 i 4.

$$F(s) = \frac{s + 2 - 2}{(s + 2)^2 + 1} = \frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 1} + \frac{2}{(s + 2)^2 + 1}.$$

Stąd na podstawie wspomnianych wzorów mamy

$$\text{O d p: } f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s + 2}{(s + 2)^2 + 1} + \frac{2}{(s + 2)^2 + 1}\right) = e^{-2t} \cos t + 2e^{-2t} \sin t.$$

7.3 Zastosowanie przekształcenia Laplace'a do rozwiązywania równań różniczkowych

Zacniemy od przykładu

Przykład 7.7 Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x' + x = e^{-t} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Jest to równanie liniowe rzędu pierwszego z niewiadomą funkcją funkcją x zmiennej niezależnej t . Założymy, że funkcja $x(t)$ jest oryginałem. Niech $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$. Wtedy $x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)]$. Zgodnie z wzorem 5 mamy

$$\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s) - x(0+) = sX(s) - 1$$

Stosujemy transformatę Laplace'a do obu stron danego równania (transformujemy obie strony równania). Otrzymamy

$$sX(s) - 1 + X(s) = \frac{1}{s + 1}.$$

Stąd

$$(s + 1)X(s) = 1 + \frac{1}{s + 1}$$

oraz

$$X(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{(s + 1)^2}.$$

Zatem

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) = e^{-t} + te^{-t}$$

O d p: Rozwiązaniem danego zagadnienia jest funkcja $x(t) = (1+t)e^{-t}$. \square

Stosując transformatę Laplace'a do obu stron równania, przekształciliśmy dane równanie różniczkowe z niewiadomą funkcją $x(t)$, w równanie algebraiczne z niewiadomą funkcją $X(s)$. Wyznaczyliśmy z tego przekształconego równania funkcję $X(s)$, a następnie stosując transformatę odwrotną \mathcal{L}^{-1} do funkcji $X(s)$, otrzymaliśmy oryginał $x(t)$, który jest rozwiązaniem danego zagadnienia.

Przykład 7.8 Znaleźć rozwiązanie zagadnienia początkowego

$$\begin{cases} x'' - 2x' = e^{2t} \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e : Korzystając z wzorów 10, 9 i 2 mamy

$$\mathcal{L}[x''] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s),$$

$$\mathcal{L}[x'] = sX(s) - x(0) = sX(s),$$

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{1}{s-2}.$$

Transformujemy obie strony danego równania:

$$\mathcal{L}[x'' - 2x'] = \mathcal{L}[e^{2t}]$$

$$s^2X(s) - 2sX(s) = \frac{1}{s-2}.$$

Stąd

$$X(s) = \frac{1}{s(s-2)^2}.$$

Zatem

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s-2)^2}\right).$$

Rozkładamy funkcję $X(s)$ na ułamki proste i otrzymujemy

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{4s} - \frac{1}{4(s-2)} + \frac{1}{2(s-2)^2}\right).$$

O d p: $x(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{2t} + \frac{1}{2}te^{2t}$.

Przy wyznaczaniu transformaty odwrotnej skorzystaliśmy z wzorów: 1, 2 i 14 w połączeniu z 7.

Przykład 7.9 Rozwiązać zagadnienie

$$\begin{cases} x'' + x = t\eta(t-1) \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = 1. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Prawą stronę równania przekształcamy do postaci

$$t\eta(t-1) = [1 + (t-1)]\eta(t-1) = \eta(t-1) + (t-1)\eta(t-1).$$

Transformujemy obie strony równania:

$$\mathcal{L}[x'' + x] = \mathcal{L}[\eta(t-1) + (t-1)\eta(t-1)].$$

Zatem

$$s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) + X(s) = \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-s}.$$

Uwzględniając warunki początkowe, mamy

$$s^2 X(s) - 1 + X(s) = \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s^2}e^{-s}.$$

Stąd

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s(s^2 + 1)}e^{-s} + \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}e^{-s}.$$

Zatem

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s(s^2 + 1)}e^{-s} + \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}e^{-s}\right).$$

Korzystamy teraz z liniowości transformaty odwrotnej i dostajemy

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 + 1)}e^{-s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2 + 1)}e^{-s}\right).$$

Wyznaczamy poszczególne składniki funkcji $x(t)$. Otrzymujemy kolejno:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 1}\right) = \sin t \eta(t).$$

Funkcję wymierną $\frac{1}{s(s^2 + 1)}$ rozkładamy na ułamki proste:

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1},$$

stąd mamy

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 + 1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}\right) = 1 - \cos t$$

oraz na podstawie wzoru 13

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 + 1)}e^{-s}\right) = [1 - \cos(t-1)]\eta(t-1).$$

Analogicznie

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s^2 + 1)}e^{-s}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left[\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1}\right)e^{-s}\right] = [(t-1)^2 - \sin(t-1)]\eta(t-1).$$

Zatem rozwiązaniem danego zagadnienia jest

$$\text{O d p: } x(t) = \sin t \eta(t) + [1 - \cos(t-1)]\eta(t-1) + [(t-1)^2 - \sin(t-1)]\eta(t-1).$$

Przykład 7.10 Rozwiązać, metodą transformacji Laplace'a, układ równań z zadanymi

warunkami początkowymi

$$\begin{cases} x' + y' + y = e^t \\ 2x' + y' + 2y = \cos t \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Zakładamy, że niewiadome funkcje $x(t)$ i $y(t)$ są oryginałami o transformatach odpowiednio $X(s)$ i $Y(s)$. Transformujemy oba równania:

$$\begin{cases} sX(s) + sY(s) + Y(s) = \frac{1}{s-1} \\ 2sX(s) + sY(s) + 2Y(s) = \frac{s}{s^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX(s) + (s+1)Y(s) = \frac{1}{s-1} \\ 2sX(s) + (s+2)Y(s) = \frac{s}{s^2+1}. \end{cases}$$

Otrzymałmy układ równań algebraicznych z niewiadomymi $X(s)$ i $Y(s)$. Rozwiązując ten liniowy układ otrzymamy

$$\begin{cases} X(s) = -\frac{s+2}{s^2(s-1)} + \frac{s+1}{s(s^2+1)} = \frac{4}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s-1} + \frac{1}{s^2+1} - \frac{s}{s^2+1} \\ Y(s) = -\frac{1}{s^2+1} + \frac{2}{s(s-1)} = -\frac{2}{s} + \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s^2+1}. \end{cases}$$

Stąd

$$\text{O d p: } \begin{cases} x(t) = 4 + 2t - 3e^t + \sin t - \cos t \\ y(t) = -2 + 2e^t - \sin t \end{cases}$$

7.4 Splot funkcji i jego własności

Definicja 7.4 Jeżeli funkcje f i g są funkcjami rzeczywistymi określonymi i całkowalnymi w przedziale $\langle 0; t \rangle$, $t \in (0; \infty)$, to splotem funkcji f i g nazywamy funkcję $h(t)$ określoną następująco

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau.$$

Splot funkcji f i g oznaczamy $f(t) * g(t)$. Mamy zatem

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau. \quad (3)$$

Własności splotu:

1° Splot jest operacją przemienną, łączną i rozdzielną względem dodawania.

2° Splot dwóch oryginałów jest oryginałem.

Twierdzenie 7.3 Jeżeli f i g są oryginałami to

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)] = F(s) \cdot G(s).$$

Twierdzenie powyższe nazywa się twierdzeniem Borela o splocie. Mówi ono, że:

Transformata splotu jest równa iloczynowi transformat.

Zilustrujemy to twierdzenie przykładem

Przykład 7.11 Obliczymy splot funkcji $f(t) = t$ i $g(t) = e^t$. Mamy

$$\begin{aligned} t * e^t &= \int_0^t \tau e^{t-\tau} d\tau = e^t \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau = e^t \left(-\tau e^{-\tau} \Big|_0^t - e^{-\tau} \Big|_0^t \right) = \\ &= e^t \left(-te^{-t} - e^{-t} + 1 \right) = e^t - t - 1. \end{aligned}$$

Zatem

$$\mathcal{L}[t * e^t] = \mathcal{L}[e^t - t - 1] = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} = \frac{s^2 - s + 1 - s(s-1)}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s^2(s-1)}.$$

Z drugiej strony, na podstawie twierdzenia Borela mamy:

$$\mathcal{L}[t * e^t] = \mathcal{L}[t] \cdot \mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s-1}.$$

□

Twierdzenie Borela stosujemy przede wszystkim do wyznaczania transformaty odwrotnej. Korzystamy wówczas z zależności

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] * \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = f(t) * g(t). \quad (4)$$

Przykład 7.12 Wyznaczyć oryginał $f(t)$, gdy znana jest transformata

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{5s}{(s^2+1)(s-1)}.$$

R o z w i ą z a n i e :

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{5s}{(s^2+1)(s-1)} \right) = 5 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s-1} \cdot \frac{s}{s^2+1} \right) = \\ &= 5 \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s-1} \right) * \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{s}{s^2+1} \right) = 5 e^t * \cos t = 5 \int_0^t e^{t-\tau} \cos \tau d\tau = \\ &= 5 e^t \int_0^t e^{-\tau} \cos \tau d\tau = 5 e^t \left[\frac{1}{2} (e^{-\tau} \sin \tau - \cos \tau) \Big|_0^t \right] = \underline{\underline{\frac{5}{2} (\sin t - \cos t + e^t)}}. \end{aligned}$$

Przykład 7.13 Rozwiązać zagadnienie początkowe

$$\begin{cases} x(t) + \int_0^t x'(\tau) \cos(t-\tau) d\tau = \sin t \eta(t-\pi) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Równanie powyższe jest równaniem różniczkowo-całkowym typu splotowego. Zauważymy, że równanie można przepisać w postaci

$$x(t) + x'(t) * \cos t = -\sin(t - \pi) \eta(t - \pi).$$

Transformujemy obie strony równania stosując do lewej strony wzór na transformatę splotu (twierdzenie Borela) i wzór na transformatę pierwszej pochodnej, a do prawej strony wzór 13 z tabeli transformat. Otrzymamy kolejno

$$\begin{aligned} X(s) + sX(s) \cdot \frac{s}{s^2 + 1} &= -\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}, \\ X(s) \left(1 + \frac{s^2}{s^2 + 1}\right) &= -\frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1}, \\ X(s) &= \frac{-e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \cdot \frac{s^2 + 1}{2s^2 + 1} = \frac{-e^{-\pi s}}{2s^2 + 1}. \end{aligned}$$

Stąd

$$x(t) = -\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{2s^2 + 1} \cdot e^{-\pi s} \right).$$

Ponieważ

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{2s^2 + 1} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} t,$$

więc korzystając znowu z wzoru 13 na przesunięcie w dziedzinie argumentu, otrzymamy

$$\text{O d p: } x(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} (t - \pi) \right) \eta(t - \pi).$$

7.5 Transformata oryginału okresowego

Założmy, że oryginał $f(t)$ jest funkcją okresową dla $t > 0$, tzn. istnieje $T > 0$ takie, że $f(t) = f(t+T)$ dla każdego $t > 0$. Uzasadnimy wzór na transformatę oryginału okresowego:

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt}$$

Istotnie:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_T^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

W drugiej całce zastosujemy podstawienie $t = u + T$, $dt = du$. Zatem

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + \int_0^\infty f(u + T) e^{-s(u+T)} du = \\ &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + e^{-sT} \int_0^\infty f(u) e^{-su} du = \\ &= \int_0^T f(t) e^{-st} dt + e^{-sT} F(s). \end{aligned}$$

Stąd

$$F(s) (1 - e^{-sT}) = \int_0^T f(t) e^{-st} dt.$$

Ostatecznie

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Przykład 7.14 Rozwiązać zagadnienie

$$\begin{cases} x'' + x = f(t), \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$$

gdzie f jest oryginałem okresowym określonym wzorem

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in (0, 1) \\ 0 & \text{dla } t \in (\pi, 2\pi), \quad f(t + 2\pi) = f(t). \end{cases}$$

R o z w i ą z a n i e :

Wyznamy najpierw transformatę oryginału $f(t)$. Korzystamy z wzoru na transformatę oryginału okresowego o okresie $T = 2\pi$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-st} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^\pi e^{-st} \cdot 1 dt + \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_\pi^{2\pi} e^{-st} \cdot 0 dt = \\ &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^\pi e^{-st} dt = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \left[-\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right]_0^\pi = \\ &= -\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} (e^{-\pi s} - 1) = \\ &= \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(1 - e^{-\pi s}) \cdot (1 + e^{-\pi s})} = \frac{1}{s(1 + e^{-\pi s})}. \end{aligned}$$

Transformując teraz obie strony równania i uwzględniając warunki początkowe otrzymamy:

$$s^2 X(s) + X(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-\pi s})}.$$

Stąd

$$X(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-\pi s})(s^2 + 1)}.$$

Zatem

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(1 + e^{-\pi s})(s^2 + 1)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(1 + e^{-\pi s})} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} \right]$$

Zauważymy, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest iloczynem transformaty naszego oryginału okresowego $f(t)$ i funkcji $\sin t$. Korzystając z twierdzenia Borela (zależność (4) na stronie 151), otrzymamy:

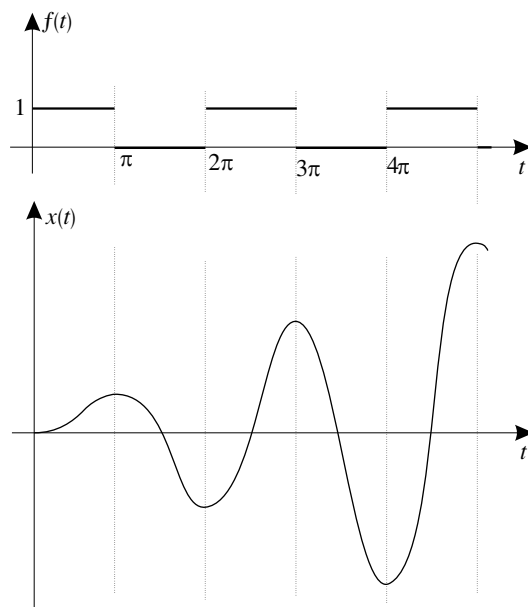
$$x(t) = f(t) \star \sin t = \int_0^t f(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

Aby obliczyć całkę po prawej stronie ostatniego wzoru, musimy rozpatrzyć przypadki dla

t należących do kolejnych przedziałów $(0; \pi)$, $(\pi; 2\pi)$ itd. Mamy zatem

$$x(t) = \begin{cases} \int_0^t 1 \cdot \sin(t - \tau) d\tau = \cos(t - \tau) \Big|_0^t = 1 - \cos t, & t \in (0; \pi), \\ \int_0^\pi 1 \cdot \sin(t - \tau) d\tau + \int_\pi^t 0 \cdot \sin(t - \tau) d\tau = \cos(t - \tau) \Big|_0^\pi = -2 \cos t, & t \in (\pi; 2\pi), \\ \int_0^\pi \sin(t - \tau) d\tau + \int_{2\pi}^t \sin(t - \tau) d\tau = -2 \cos t + 1 - \cos t = 1 - 3 \cos t, & t \in (2\pi; 3\pi), \\ \int_0^\pi \sin(t - \tau) d\tau + \int_{2\pi}^{3\pi} \sin(t - \tau) d\tau + \int_{3\pi}^t 0 \cdot \sin(t - \tau) d\tau = -4 \cos t, & t \in (3\pi; 4\pi), \\ \vdots & \end{cases}$$

Interpretacja fizyczna rozwiązania naszego zagadnienia jest następująca. Dane równanie jest równaniem różniczkowym oscylatora bez tłumienia z okresowo działającą siłą $f(t)$, wymuszającą drgania. Całka ogólna równania jednorodnego ma postać $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, a zatem jest funkcją okresową o okresie 2π . Ponieważ siła $f(t)$ ma też okres 2π , więc następuje zjawisko rezonansu. Wykres oryginału $f(t)$ i wykres rozwiązania $x(t)$ przedstawiono na rysunku poniżej.



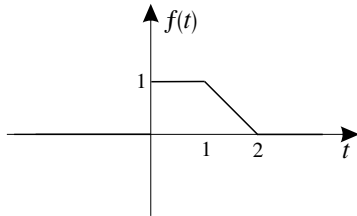
Rys. 1

Ćwiczenia

1. Uzasadnić wzory 8 – 14 z tabeli transformat.

Rozwiązać następujące zagadnienia początkowe:

2. $x'' + 2x' + x = t^2 e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = 0$.
3. $x'' + 4x = t\eta(t - \pi)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.
4. $x''' + x' = e^{-t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = x''(0) = 0$.
5. $x'' + 9x = f(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$,
gdzie f dana jest wykresem



6. $x'' + x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$,
gdzie f jest oryginałem okresowym danym wzorem
 $f(t) = t - n$ dla $n \leq t < n + 1$, $n = 0, 1, \dots$.
7.
$$\begin{cases} 2x' + y' = \sin t \\ x' + y' = \cos t \end{cases} \quad x(0) = 0, y(0) = 0.$$
8. $x(t) = \sin t + 2 \int_0^t \cos(t - \tau)x(\tau)d\tau.$
9. $x(t) = 2 + \int_0^t \sin \tau x'(t - \tau) d\tau$, $x(0) = 0.$

Spis literatury

Podręczniki i monografie, z których korzystałem:

- [1] Palczewski A. *Równania różniczkowe zwyczajne*, WNT, Warszawa, 1999.
- [2] Ombach J. *Wykłady z równań różniczkowych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, 1999.
- [3] Muszyński J., Myszkiś A.D. *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa, 1984.
- [4] Perko L. *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, 1991.
- [5] Ogata K. *Metody przestrzeni stanów w teorii sterowania*, WNT, Warszawa, 1974.
- [6] Kołodziej W. *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa, 1986.
- [7] Krasnow M., Kisielew A., Makarenko G. *Funkcje zmiennej zespolonej. Rachunek operatorowy. Teoria stabilności.*, Nauka, Moskwa, 1971 (po rosyjsku).
- [8] Wojtowicz S. *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych, cz. II*, PWN, Warszawa, 1971.