

TOMASZ MIKULSKI

RAMY CIENKOŚCIENNE  
MODELOWANIE  
I ANALIZA WRAŻLIWOŚCI

POLITECHNIKA GDAŃSKA

*monografie*

*100*

POLITECHNIKA GDAŃSKA

TOMASZ MIKULSKI

RAMY CIENKOŚCIENNE  
MODELOWANIE  
I ANALIZA WRAŻLIWOŚCI



GDAŃSK 2010

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO  
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

*Romuald Szymkiewicz*

REDAKTOR PUBLIKACJI NAUKOWYCH

*Janusz T. Cieśliński*

REDAKTOR SERII

*Jerzy M. Sawicki*

RECENZENCI

*Czesław Cichoń*

*Czesław Szymczak*

PROJEKT OKŁADKI

*Jolanta Cieślawska*

Wydano za zgodą  
Rektora Politechniki Gdańskiej

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej  
Gdańsk 2010

Utwór nie może być powielany i rozpowszechniany, w jakiegokolwiek formie  
i w jakiegokolwiek sposób, bez pisemnej zgody wydawcy

ISBN 978–83–7348–293–7

# SPIS TREŚCI

Wykaz ważniejszych oznaczeń .....	5
1. WSTĘP .....	7
1.1. Modele numeryczne ram cienkościennych .....	7
1.2. Analiza wrażliwości .....	12
1.3. Cel i zakres pracy .....	15
2. MODELOWANIE RAM CIENKOŚCIENNYCH .....	17
2.1. Prętowy element cienkościenny .....	20
2.2. Superelement węzła .....	23
2.3. Rola stężeń wewnętrznych węzła .....	28
2.4. Dobór rozmiarów superelementu węzła ramy .....	31
2.5. Przykłady numeryczne .....	32
2.5.1. Statyka – analiza porównawcza trzech modeli numerycznych .....	32
2.5.2. Statyka – dobór rozmiarów superelementu węzła .....	35
2.5.3. Statyka – rama płaska ze stężeniami .....	37
2.5.4. Statyka – rama hali .....	42
2.5.5. Dynamika – analiza porównawcza trzech modeli numerycznych .....	45
2.5.6. Dynamika – wpływ stężeń węzła .....	50
3. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI .....	54
3.1. Statyka .....	56
3.1.1. Układy prętowe – opis ciągły .....	56
3.1.2. Układy dyskretne .....	61
3.2. Dynamika .....	63
3.2.1. Analiza wrażliwości wartości własnych .....	63
3.2.2. Analiza wrażliwości postaci własnych .....	65
3.3. Przykłady numeryczne .....	67
3.3.1. Statyka – rama ze stężeniami poprzecznymi .....	68
3.3.2. Statyka – rama ze stężeniami na poziomie półki górnej .....	72
3.3.3. Statyka – rama – zmiana grubości półek .....	74
3.3.4. Analiza wrażliwości częstości drgań skrętnych belki cienkościennej .....	83
3.3.5. Analiza wrażliwości postaci drgań skrętnych belki cienkościennej .....	87
4. WRAŻLIWOŚĆ W UJĘCIU PROBABILISTYCZNYM .....	91
4.1. Probabilistyczna wrażliwość konstrukcji prętowych w stanie regularnym .....	92
4.1.1. Linearyzacja funkcji $\mathcal{S}$ .....	92
4.1.2. Zastosowanie metody Monte Carlo .....	94
4.2. Probabilistyczna wrażliwość stanów granicznych konstrukcji .....	94
4.2.1. System fundamentalny .....	94
4.2.1.1. Wrażliwość probabilistyczna stanów granicznych systemu w odniesieniu do efektu obciążenia ( $S$ ) .....	95
4.2.1.2. Wrażliwość probabilistyczna stanów granicznych systemu w odniesieniu do wytrzymałości ( $R$ ) .....	96
4.2.2. Metoda Monte Carlo – konstrukcje prętowe .....	96
4.3. Przykłady probabilistycznej wrażliwości konstrukcji .....	97
4.3.1. Belka dwuteowa – probabilistyczna analiza wrażliwości stanu regularnego .....	97

---

4.3.2. Rama cienkościenna – probabilistyczna analiza wrażliwości stanu granicznego .....	100
5. ZASTOSOWANIA ANALIZY WRAŻLIWOŚCI .....	104
5.1. Projektowanie .....	104
5.1.1. Weryfikacja projektu konstrukcji wieży obserwacyjnej .....	106
5.2. Diagnostyka .....	111
5.3. Identyfikacja parametryczna .....	111
5.3.1. Identyfikacja sztywności przepon w dwuteowym pręcie cienkościennym .....	113
5.4. Optymalizacja .....	117
6. WNIOSKI .....	119
BIBLIOGRAFIA .....	123
Streszczenie w języku polskim .....	128
Streszczenie w języku angielskim .....	130

## WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- $A$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta  
 $a$  – długość współpracująca superelementu  
 $\mathbf{B}$  – macierz kształtu superelementu  
 $B$  – bimoment  
 $\mathbf{b}$  – wektor zmiennych projektowych  
 $b$  – zmienna projektowa, szerokość półki  
 $C$  – macierz kowariancyjna  
 $E$  – moduł sprężystości, operacja wartości oczekiwanej  
 $F$  – podcałkowa funkcja wrażliwości  
 $\mathbf{f}$  – wektor funkcji kształtu elementu  
 $G$  – moduł ścinania, funkcja stanu granicznego  
 $J_0$  – biegunowy moment bezwładności przekroju  
 $J_d$  – moment bezwładności skręcania czystego Saint-Venanta  
 $J_\omega$  – wycinkowy moment bezwładności przekroju  
 $\mathbf{K}$  – macierz sztywności
- $k$  – współczynnik zanikania  $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$
- $\mathbf{K}_G$  – macierz geometryczna  
 $l$  – długość belki  
 $m$  – obciążenie równomiernie rozłożonym momentem skręcającym  
 $m_i$  – wartość oczekiwana (średnia)  
 $\mathbf{m}$  – wektor wartości oczekiwanych  
 $\mathbf{M}$  – macierz mas  
 $\bar{\mathbf{M}}$  – diagonalna macierz mas  
 $n$  – częstotliwość drgań własnych  
 $\mathbf{P}$  – wektor obciążenia  
 $P$  – ściskająca siła osiowa  
 $\mathbf{q}$  – wektor amplitud przemieszczeń
- $r_0$  – biegunowy promień bezwładności  $r_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$
- $R$  – zmienna losowa – nośność, wytrzymałość przekroju  
 $\mathcal{S}$  – zmienna stanu  
 $S$  – zmienna losowa – efekt obciążenia  
 $T$  – energia kinetyczna  
 $U$  – energia potencjalna  
 $\mathbf{u}$  – wektor przemieszczeń  
 $\mathbf{w}_s$  – wektor wrażliwości pierwszego rzędu zmiennej stanu  $\mathcal{S}$   
 $\alpha$  – współczynnik wagowy zmiennej stanu w zagadnieniu identyfikacji  
 $\beta$  – współczynnik korekcyjny modułu sprężystości  
 $\chi$  – spaczenie  $\chi = -\theta'$   
 $\varepsilon$  – dokładność obliczeń  
 $\kappa$  – stała ścinania przekroju poprzecznego  
 $\delta(\cdot)$  – delta Diraca

- $\eta$  – wektor przemieszczeń układu sprzężonego
- $\lambda$  – wartość własna  $\lambda = \omega^2$
- $\lambda_s$  – mnożnik – bezwymiarowa zmienna losowa w odniesieniu do efektu obciążenia
- $\lambda_r$  – mnożnik – bezwymiarowa zmienna losowa w odniesieniu do wytrzymałości
- $\lambda_p$  – mnożnik obciążenia – bezwymiarowa zmienna losowa
- $\nu$  – współczynnik Poissona
- $\theta$  – kąt skręcenia
- $\rho$  – masa właściwa
- $\sigma_s$  – odchylenie standardowe zmiennej  $\mathcal{S}$
- $\omega$  – częstość drgań własnych
- $\zeta$  – wskaźnik przekazywania się bimomentów w węźle

## Rozdział 1

# WSTĘP

Szkieletowe konstrukcje stalowe zaczęto wznosić dopiero pod koniec XVIII wieku. Były to głównie szkielety nośne budynków. Od połowy XIX wieku zaczęto stosować stal również w mostownictwie i przekryciach budynków o dużych rozpiętościach np. hal dworców kolejowych. Obecnie udział konstrukcji stalowych w rynku materiałów budowlanych szacuje się na około 20%, wobec 70-procentowego udziału wyrobów z betonu i 10-procentowego udziału drewna i innych materiałów.

Ramy zbudowane z prętów cienkościennych są często stosowane w różnego typu obiektach budowlanych takich jak :

- hale produkcyjne, sportowe, widowiskowe, centra handlowe,
- mosty, wiadukty i kładki dla pieszych,
- budynki o konstrukcji szkieletowej z reguły dużej wysokości (biurowce, hotele, apartamentowce),
- hale terminali lotniczych, morskich, dworce kolejowe oraz hangary lotnicze,
- wieże i maszty,
- platformy wydobywcze off-shore.

Można także zaobserwować dynamiczny wzrost udziału lekkich konstrukcji stalowych w budownictwie mała kubaturowym, a w szczególności mieszkaniowym w USA, Kanadzie, Australii i Wielkiej Brytanii.

Oprócz stalowych elementów prętowych, w znacznej większości o profilu cienkościennym otwartym, stosuje się także jako materiał aluminium i także ostatnio kompozytowe elementy cienkościenne na bazie włókna węglowego i żywic. Aluminiowe elementy cienkościenne mają coraz szersze zastosowanie jako konstrukcje nośne wielkopowierzchniowych elewacji obiektów budowlanych, zaś profile kompozytowe z włókna węglowego i żywic stosowane są przykładowo w budowie regatowych jachtów (tak zwanej wysokiej technologii), gdzie najważniejszym kryterium (oprócz kształtu łodzi) jest lekkość i sztywność konstrukcji kadłuba.

### 1.1. Modele numeryczne ram cienkościennych

Powszechnie stosowane szkieletowe konstrukcje prętowe składają się z wielu elementów belkowych, rygli, słupów, stężeń poprzecznych i wiatrowych połączonych ze sobą w węzłach. Poszczególne elementy opisane są przez określenie osi pręta i zbioru przekrojów poprzecznych. Stan przemieszczenia dotyczy osi pręta (lub linii środków skręcania), a stan naprężenia i odkształcenia wyznaczany jest w przekrojach poprzecznych. W przypadku cienkościennych elementów prętowych deplanacja poszczególnych przekroi poprzecznych konstrukcji wpływa zasadniczo na deformację oraz poziom naprężeń w konstrukcji (Dąbrowski 1956, Rutecki 1966).

Komercyjne programy komputerowe używane także do analizy układów ramowych zbudowanych z prętów cienkościennych oparte są na klasycznym założeniu Kirchhoffa –



płaskich przekroji, a efekt skręcania skrępowanego bardzo ważny dla prętów cienkościennych jest pominięty. Wówczas sztywność skrętna pręta opisana jest jedynie zgodnie z teorią skręcania czystego Saint-Venanta. W takim przypadku otrzymany stan odkształceń i naprężeń jest daleki od wyników uzyskanych dla powłokowego modelu MES oraz badań eksperymentalnych. Te różnice są szczególnie duże w przypadku ram cienkościennych poddanych obciążeniu wywołującemu skręcanie. Podczas gdy translacje i obroty mogą opisać kinematykę układu ramowego, zbudowanego z przyrzutowych prętów o pełnym przekroju poprzecznym, to w przypadku elementów cienkościennych wymagany jest dodatkowy stopień swobody opisujący spaczenie przekroju poprzecznego.

Efekt spaczenia przekroju poprzecznego prętów cienkościennych był przedmiotem wielu prac: Bleicha 1952, Timoshenko 1957, Timoshenko i Gere 1961 oraz Własowa 1959, który sformułował klasyczną teorię prętów cienkościennych o nieodkształcalnym przekroju poprzecznym. Najwięcej prac na ten temat było skupionych na opisie zachowania się wydzielonych elementów prętowych, gdzie spaczenie było albo całkowicie zablokowane, albo występowała jego swoboda w punktach podparcia belki (Krajcinovic 1969, Kollbrunner i in. 1969, Barsoum i Gallagher 1970, Mottershead 1988, Waszczyszyn i in. 1996, Musat i Epureanu 1999, Kim i Kim 2005).

Badania teoretyczne cienkościennych układów ramowych napotkały na trudności związane ze sformułowaniem warunków kinematycznych i statycznych w węzłach ramy. Zatem w niektórych pracach pojawiły się pewne uproszczenia. Kilku badaczy rozpatrywało, na przykład, giętno-skrętne zachowanie się ram, przyjmując dwa skrajne przypadki warunków brzegowych w węzłach – albo pełna swoboda deplanacji lub jej pełna blokada (Renton 1962; 1967, Hartmann i Munse 1966, Vacharajittiphan i Trahair 1973; 1975). Cywiński w 1962 roku przedstawił analizę statyczną ram opartą na założeniu dystrybucji bimomentów w węzle ramy, proporcjonalnie do sztywności skręcania skrępowanego elementów połączonych w węzle.

W przypadku ram o ortogonalnej siatce elementów i dwuteowym lub zamkniętym przekroju pewne uproszczone warunki równowagi bimomentów w węzle w zagadnieniach statycznych przedstawiono w pracach: Gorbunow i Streblickaja 1948, Urban 1955, Rutecki 1966, Byczkow 1962, Kollbrunner i in. 1969, Czapliński 1970, Czapliński i Dąbrowski 1972, Szmidt 1975<sup>b</sup>). Dalsze uproszczenia są możliwe w przypadku płaskich układów ramowych, przy obciążeniu działającym jedynie w płaszczyźnie ramy. W takim przypadku Urban 1955 stwierdził, że zginanie ramy oraz efekty skręcania ich elementów stają się problemami rozłącznymi.

We wszystkich wymienionych publikacjach mało uwagi poświęcono istotnym wpływom konstrukcji węzła na jego deformacje i dystrybucje bimomentów w przekrojach przywęzłowych. Szmidt w 1975 roku jako pierwszy zauważył i zbadał te ważne efekty. Przedstawił nie tylko analizę statyczną ram zbudowanych z dwuteowych prętów cienkościennych, stosując metodę elementów skończonych, ale także wykonał badania doświadczalne. Potwierdził ważny wpływ konstrukcji węzła na rozkład sił wewnętrznych, a w szczególności bimomentów (Szmidt 1975<sup>a</sup>).

Vacharajittiphan i Trahair 1984 zbadali problem sprężystych więzów podporowych belek cienkościennych i wprowadził wskaźnik siły sprężystej podpory. Uogólnienie tej koncepcji, dotyczącej ciągłej i częściowej blokady spaczenia, wprowadzili Ettouney i Kirby 1981. Yang i McGuire 1984 zastosowali koncepcję wskaźnika paczenia przekroju poprzecznego pręta do analizy ram przestrzennych z częściowym ograniczeniem paczenia. Później ta koncepcja została wykorzystana w zagadnieniach stateczności ram (Abdalla i Chen 1995). Model sprężystego stężenia paczenia jest bardzo podobny do koncepcji

podatnych węzłów (semi-rigid connections) szeroko stosowanych w zagadnieniach zginania układów ramowych (Toader 1992, Cichoń i Pluciński 2000, Cichoń i in. 2000, Tews i Rachowicz 2005, Szymczak i in. 2006).

Krenk w 1990 oraz Krenk i Damkilde 1991 uwzględnili deformacje przekroju poprzecznego pręta dwuteowego w zagadnieniach statyki i stateczności ram. Oprócz typowych dla cienkościennego elementu prętowego stopni swobody wprowadzili dodatkowy stopień opisujący deplanację przekroju przywęzłowego. Zbadano cztery typy węzłów, a otrzymane wyniki były zbieżne z bardziej ogólnym, powłokowym modelem MES.

Obszerne badania, dotyczące zachowania się szkieletowych konstrukcji stalowych z uwzględnieniem wpływu rzeczywistej charakterystyki węzłów na siły przekrojowe, przemieszczenia i stany graniczne zapoczątkowano w latach pięćdziesiątych XX wieku. Zrealizowano szeroki program badań doświadczalnych węzłów podatnych, wyizolowanych z konstrukcji poddanych zginaniu, określając charakterystykę moment-obrót badanych węzłów. Rozpatrywano obciążenia monotonicznie, a także zmienne cyklicznie. W Europie i Stanach Zjednoczonych utworzono banki danych, gromadzące wyniki z badań, które wykorzystano do praktycznego modelowania i weryfikacji modeli teoretycznych (Chen i Kishi 1989, Kishi i Chen 1987, Goverdham 1983, Weynand 1992). Przeprowadzone badania umożliwiły zrozumienie szeregu zjawisk zachodzących w węzłach pod wpływem obciążenia i doprowadziły do powstania nowej dziedziny wiedzy inżynierskiej, jaką jest **mechanika węzłów**. Zachowanie się węzłów zależy od wielu czynników, takich jak gatunek zastosowanej stali, parametry wymiarowe elementów połączenia, różnego typu stężenia, przekrój zastosowanych spoin, klasa i średnica łączników śrubowych, a także ich liczb i rozmieszczenia w połączeniu.



Rys. 1.1. Nitowany węzeł stalowej konstrukcji prętowej

Do połowy dwudziestego wieku w większości przypadków ramowych konstrukcji stalowych do łączenia elementów w węzłach stosowano połączenia nitowane (rys. 1.1). Wraz z rozwojem techniki połączenia nitowane zostały wyparte przez połączenia spawane oraz po-

łączenia na śruby (rys. 1.2) (połączenia zwykłe i na śruby sprężające). Prawidłowa konstrukcja węzłów ma decydujący wpływ na nośność i wielkość deformacji układów ramowych.



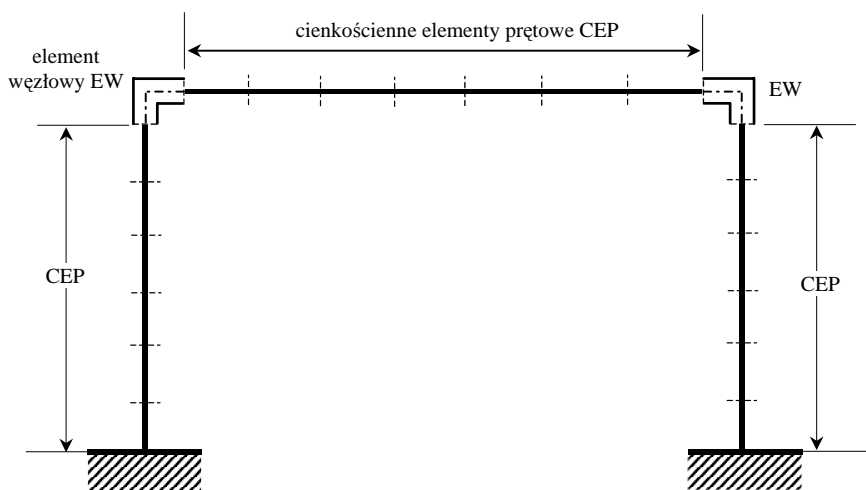
Rys. 1.2. Spawany i skręcany śrubami węzeł stalowej konstrukcji prętowej

W Polsce prace badawcze z zakresu węzłów podatnych w stalowych konstrukcjach ramowych podjęto przed ponad dwudziestu laty z inicjatywy prof. Jana Bródki w byłym Centralnym Ośrodku Badawczo-Projektowym Konstrukcji Metalowych „Mostostal”. Obecnie są one kontynuowane głównie w Politechnice Warszawskiej, Politechnice Rzeszowskiej, Politechnice Białostockiej i Politechnice Wrocławskiej (Bródka i Kozłowski 1996, Bródka i Cwalina 1998, Bródka i in. 2004, Gosowski 2004). Uzyskano wyniki stanowiące znaczący wkład do światowego dorobku badawczego w omawianej dziedzinie. Opracowano teoretyczne podstawy uwzględnienia podatności węzłów w statyce i stateczności ram stalowych, a także uogólniono zasady stopniowej degradacji sztywności na pręty o różnej klasie przekroju oraz na układy wrażliwe na przestrzenną utratę stateczności.

Istniejące komercyjne programy komputerowe oraz możliwości obliczeniowe komputerów pozwalają obecnie na potraktowanie ramy cienkościennej jako bardzo licznego zbioru małych elementów powłokowych. Jest to tzw. powłokowy model ramy cienkościennej, który ujmuje skręcanie skrępowane i umożliwia poprawny opis zachowania się węzłów ramy. Wadą takiego modelu jest ograniczenie analizy, ze względu na rozmiar numerycznego zadania, jedynie do niedużych układów prętowych, oraz konieczność wyznaczania sił przekrojowych poszczególnych elementów prętowych na drodze całkowania naprężeń w określonych przekrojach. Siły wewnętrzne są bowiem potrzebne w projektowaniu takich konstrukcji, zgodnie z przepisami normowymi. Modelem pośrednim w stosunku do modelu powłokowego jest model mieszany prętowo-powłokowy. Do modelowania elementów ramy, gdzie założenie nieodkształcalności przekroju poprzecznego jest spełnione, stosowane są cienkościenne elementy prętowe, zaś elementy powłokowe wykorzystane są do modelowania tych fragmentów ramy, gdzie mogą wystąpić lokalnie efekty znacznej deformacji przekroju poprzecznego elementów konstrukcji ramy. Są to miejsca połączenia prętów w węzłach, miejsca występowania stężeń, miejsca przyłożenia skupionych obciążeń czy

podpór. W celu uzyskania konsystentnego połączenia elementów powłokowych z elementami prętowymi konieczne stało się wprowadzenie tzw. elementów przejściowych. Wykorzystano równania więzów, które umożliwiły połączenie prętowych i powłokowych elementów skończonych o różnej liczbie stopni swobody w węzłach (Chavan i Wriggers 2004, Cichoń i Koczubiej 2008, Koczubiej i Cichoń 2009).

Głównym problemem modelowania ram cienkościennych jest określenie dystrybucji bimomentów w węźle. Bimomenty w przekrojach przywęzłowym jako samozrównoważone siły wewnętrzne spełniają wszystkie warunki równowagi sił w węźle. Nie ma zatem statycznych równań równowagi, które by umożliwiły określenie rozdziału bimomentów w narożu ramy. W rozprawie podjęto temat modelowania prętowego, cienkościennego układu ramowego w zagadnieniach statyki i dynamiki. Do wyznaczenia dystrybucji wszystkich sił wewnętrznych w przywęzłowych przekrojach poprzecznych naroża ramy zastosowano technikę superelementu, uzyskując w ten sposób macierz sztywności oraz macierz mas elementu węzłowego ramy. Stworzono dyskretny, prętowy model ramy cienkościennych, gdzie słupy i rygle modelowane są za pomocą cienkościennych elementów prętowych (CEP), zaś naroża ramy są modelowane poprzez zastosowanie elementów węzłowych (EW) (rys. 1.3).



Rys. 1.3. Model dyskretny ramy – elementy cienkościenne z elementami węzłowymi

W analizie zastosowano metodę elementów skończonych (Zienkiewicz 1977, Zienkiewicz i Taylor 2005). Do wyznaczenia macierzy sztywności elementu węzła użyto systemu komputerowego MSC/Nastran 2002, a analizę ramowego układu prętowego wykonano, stosując autorski program, także będący aplikacją metody elementów skończonych (MES).

Należy podkreślić, że prętowy model ramy daje zgodny, z bardziej ogólnym modelem powłokowym, opis zachowania się układu przy znacznie mniejszych rozmiarach problemu numerycznego w stosunku do modelu powłokowego (Piechnik 2000<sup>a</sup>, 2000<sup>b</sup>). Dodatkową zaletą proponowanego modelu jest to, że jako odpowiedź układu oprócz przemieszczeń otrzymujemy siły wewnętrzne, co jest bardzo istotne z punktu widzenia projektanta, gdzie warunki normowe nośności układu opisane są z uwzględnieniem sił przekrojowych (Bródka i Kozłowski 2009, Pałkowski 2009). Przy zastosowaniu modelu powłokowego koniecz-

ne byłoby określenie sił wewnętrznych przez całkowanie naprężeń w zadanym przekroju, co z pewnością nie jest efektywne w procesie projektowania. Ponadto proponowany model jest daleko bardziej efektywny w analizie wrażliwości sił wewnętrznych, przemieszczeń, czy częstości drgań własnych układów ramowych.

## 1.2. Analiza wrażliwości

Projektowanie konstrukcji budowlanych polega na przyjęciu teoretycznego modelu konstrukcji i na wykonaniu obliczeń określających szczegółowe wymiary elementów konstrukcji, aby spełnione były odpowiednie warunki normowe dotyczące określonego obiektu budowlanego. Obecnie projektanci korzystają z profesjonalnych programów komputerowych i mają do dyspozycji komputery szybko realizujące obliczenia. Uwzględniając parametry projektowe (obciążenia, własności fizyczne materiałów, cechy strukturalne konstrukcji), projektanci prowadzą pewne rozważania optymalizacyjne, poszukując oszczędnych rozwiązań. Ma to z reguły postać tworzenia pewnego zbioru ostatecznych wariantów rozwiązań konstrukcyjnych, które podlegają ocenie. Analiza wrażliwości jest nowoczesnym narzędziem teoretycznym pozwalającym na ocenę, które parametry projektowe są najbardziej istotne, oraz umożliwia takie działanie, aby rozważany zbiór wariantów modeli konstrukcji był uporządkowany i nie miał charakteru chaotycznego. Jest to szczególnie istotne w przypadku skomplikowanych obiektów budowlanych. W niektórych przypadkach stosowane jest także sformułowanie problemu optymalizacji, w celu otrzymania najbardziej korzystnego rozwiązania.

Częstym, praktycznym zagadnieniem budownictwa jest wzmacnianie istniejących konstrukcji. W tym przypadku analiza wrażliwości pozwala na wskazanie, które fragmenty konstrukcji mają decydujący wpływ na wytrzymałość całej konstrukcji. Stanowi ona także cenną pomoc w analizach stanu awarii konstrukcji budowlanych (Szymczak i Mikulski 1997).

Analiza wrażliwości zajmuje się oceną wpływu wariacji (zmian) zmiennych projektowych, opisujących analizowany układ na zmiany jego odpowiedzi. Jeżeli małym zmianom określonej zmiennej projektowej odpowiada duża zmiana odpowiedzi układu, to mówimy, że układ jest wrażliwy na wariacje tej zmiennej. W przeciwnym przypadku, gdy nawet dużym wariacjom zmiennej projektowej odpowiada nieznaczna zmiana odpowiedzi układu, to taki układ określamy jako niewrażliwy na tę zmienną. Analiza wrażliwości umożliwia przybliżone określenie zmian zachowania się konstrukcji (jego odpowiedzi), w której dokonano zmian wartości pewnych parametrów, bez konieczności wielokrotnego powtarzania jej analizy. Umożliwia to racjonalne podejście do kształtowania konstrukcji nie tylko projektowanych, ale także identyfikacji, diagnostyki i wzmacniania konstrukcji istniejących (Mróz i Garstecki 2004, Szymczak 1998, Szymczak i Mikulski 1994<sup>a</sup>, 1994<sup>b</sup>).

Początki analizy wrażliwości wywodzą się z zagadnień dynamicznych systemów badanych przez elektroników (Tomovic 1963, Radanovic 1966). Później powstały prace poświęcone analizie wrażliwości w zagadnieniach inżynierskich (Frank 1978, Brayton i Spence 1980, Haug i Cea 1981, Haug i in. 1986, Bojczuk 1987, Mróz i Haftka 1994).

W mechanice konstrukcji analiza wrażliwości polega na badaniu zmian zachowania się konstrukcji w wyniku wariacji zmiennych projektowych. Jako zmienne projektowe przyjmuje się obciążenie, parametry geometryczne układu (np. wymiary przekroju poprzecznego), właściwości fizyczne materiału (np. moduł sprężystości, gęstość materiału), czy wielkości opisujące sztywność elementów (np. stała sprężystości podpory). Analiza

wrażliwości jest obecnie rozwiniętym działem mechaniki konstrukcji silnie związanym z metodą elementów skończonych (Kleiber 1997).

Istotny jest związek analizy wrażliwości z projektowaniem konstrukcji. Głównym zadaniem mechaniki konstrukcji w projektowaniu jest określenie niezawodności, tzn. oceny zapasu bezpieczeństwa w stosunku do stanu granicznego konstrukcji. Podstawą rozważań projektanta są parametry projektowe (własności materiałowe, obciążenia, geometria i inne cechy modelu konstrukcji). W problemach optymalizacyjnych konieczne jest badanie wpływu zmienności parametrów projektowych na nośność i stan użytkowania, oceniany na podstawie występujących w układzie ekstremalnych przemieszczeń.

Istnieją przypadki silnej wrażliwości zachowania się obiektów budowlanych na określone parametry projektowe. Dotyczy to zarówno konstrukcji w fazie projektowania, jak i obiektów rzeczywistych, gdzie może być konieczna diagnostyka i ewentualne wzmocnienie lub zmiana struktury układu konstrukcyjnego.



Rys. 1.4. Wieża obserwacyjna w trakcie budowy

Autor monografii zetknął się z zagadnieniem wrażliwości wartości własnych drgań giętno-skrętnych wieży obserwacyjnej od wariacji sztywności cienkościennych słupów podpierających żelbetowy stropodach wieży (rys. 1.4 i 1.5). Zaobserwowano także znaczne deformacje węzłów słupów. Szerszy opis przedstawionego problemu przedstawiono w piątym rozdziale niniejszej pracy.



Rys. 1.5. Stalowa konstrukcja prętowa podtrzymująca stropodach wieży

W książkach poświęconych zagadnieniom bezpieczeństwa i niezawodności konstrukcji budowlanych głównym założeniem jest traktowanie parametrów projektowych jako wielkości losowych (Murzewski 1970, Murzewski 1989, Melchers 1999). Założenie to stosowane jest również w analizie wrażliwości. Przyjmując, że parametry projektowe są funkcjami zmiennych przestrzennych lub czasowych, używane jest określenie stochastyczna analiza wrażliwości. Założenie, że zmienne projektowe są zmiennymi losowymi, prowadzi do probabilistycznej analizy wrażliwości.

W tej monografii rozważana jest jedynie probabilistyczna analiza wrażliwości. Istotny jest związek stochastycznej analizy wrażliwości ze stochastyczną metodą elementów skończonych. W takim ujęciu przy zastosowaniu metody perturbacyjnej analiza wrażliwości została przedstawiona w publikacji Hiena i Kleibera 1991 oraz książce Kleibera i Hiena 1992.

Drugim skutecznym narzędziem obliczeniowym w probabilistycznej analizie wrażliwości jest metoda Monte Carlo (Melchers 1999, Melchers i Ahammed 2004).

Możliwe jest badanie wrażliwości pewnej funkcji stanu konstrukcji, co określone jest jako analiza wrażliwości konstrukcji w stanie regularnym lub badanie wrażliwości konstrukcji w stanie krytycznym lub granicznym (Mróz i Haftka 1994).

W zagadnieniach losowych konstrukcji budowlanych interesujące jest badanie wrażliwości niezawodności konstrukcji. W tym przypadku losowość tkwi również w postaci funkcji (funkcjonału). Z uwagi na fakt, że jest to trudne zagadnienie z obliczeniowego punktu widzenia, preferowana jest metoda Monte Carlo. Badaniu wrażliwości niezawodności konstrukcji w takim ujęciu poświęcone są prace: Melchers i Ahammed 2004, Au 2005, Lu i in. 2008.

W probabilistycznej analizie wrażliwości funkcja opisująca zachowanie się konstrukcji staje się również zmienną losową. Poszukiwany jest zatem rozkład prawdopodobieństwa tej funkcji w zależności od zmian parametrów projektowych. Przy zastosowaniu stochastycznej metody elementów skończonych otrzymuje się podstawowe charakterystyki poszukiwanego rozkładu prawdopodobieństwa. Wykorzystanie metody Monte Carlo pozwala na wyznaczenie histogramu, tzn. numerycznego odpowiednika gęstości rozkładu prawdopodobieństwa.

Analizie wrażliwości w ujęciu probabilistycznym poświęcony jest rozdział czwarty. Omówiony został przypadek stanów regularnych konstrukcji oraz przypadek stanów granicznych konstrukcji. W obu przypadkach zastosowana została metoda Monte Carlo. Histogram wrażliwości stanów granicznych konstrukcji wyznaczony jest według nowatorskiej wersji metody Monte Carlo. Wersja ta, niestosowana przez innych autorów, pozwala na ocenę zmian niezawodności konstrukcji, gdy parametry projektowe przekraczają wartości normowe lub przyjęte w projekcie.

### 1.3. Cel i zakres pracy

Rozprawa zajmuje się teorią, modelowaniem i metodami obliczeń ram z elementów cienkościennych. Celem pracy jest :

- rozszerzenie stanu wiedzy na temat modeli numerycznych, opisujących zachowanie się konstrukcji ramowych zbudowanych z prętów cienkościennych,
- wskazanie i uwypuklenie roli analizy wrażliwości w szeroko rozumianych zagadnieniach inżynierskich, takich jak projektowanie, diagnostyka, identyfikacja parametryczna czy optymalizacja konstrukcji.

Praca dotyczy modelowania ram cienkościennych zbudowanych z najczęściej stosowanych, bisymetrycznych, dwuteowych prętów cienkościennych. Szczególną uwagę poświęcono modelowaniu węzłów ram, gdzie nie obowiązują klasyczne założenia prętów cienkościennych mówiące o nieodkształcalności przekroju poprzecznego. Brak jest także równań równowagi bimomentów w węźle ramy, co stwarza problem opisu przekazywania się tych specyficznych dla prętów cienkościennych sił przekrojowych w węźle ramy. Przedstawione w pracy zagadnienia dotyczą analizy statycznej, jak i dynamicznej układu. Podjęta w niniejszej pracy problematyka modelowania ram cienkościennych stanowi także nowe ujęcie w stosunku do bardzo istotnego kierunku badań rozwiniętego w ostatnim dwudziestolecu na świecie i w Polsce, tzw. analizy węzłów podatnych.

Na przestrzeni ostatnich lat można zaobserwować coraz większe zainteresowanie analizą wrażliwości, która pozwala w sposób naukowy wesprzeć intuicję projektanta zarówno



w procesie projektowania, jak i w przypadkach diagnostyki, czy wzmacniania istniejących obiektów inżynierskich. Szczególnie ma ona zastosowanie w złożonych układach konstrukcyjnych, gdzie zmiana wybranego parametru analizowanego układu może powodować trudne do przewidzenia przez projektanta zmiany zachowania się konstrukcji. Analiza wrażliwości daje zarówno jakościowy, jak i ilościowy opis zmiany odpowiedzi konstrukcji wywołanej zmianą zmiennej projektowej.

Metody analityczne stosowane w zagadnieniach statycznych ram cienkościennych, w których w sposób uproszczony wyznaczano dystrybucje sił wewnętrznych, przedstawiono w rozdziale drugim. Zaproponowano prętowy model ramy cienkościennej składającej się z klasycznych prętów cienkościennych (Barsoum i Gallagher 1970) oraz elementów węzłowych. Wyznaczono macierz sztywności i macierz mas elementu węzła, stosując technikę jednostkowych stanów wymuszeń. Przedstawiono zarówno analizę statyczną, jak i dynamiczną ram cienkościennych. Wyniki analiz porównano z bardziej ogólnym, powłokowym modelem konstrukcji, gdzie nie obowiązują klasyczne założenia o nieodkształcalności przekroju poprzecznego elementu cienkościennego.

W rozdziale trzecim przedstawiono analizę wrażliwości zastosowaną do ram cienkościennych. Z uwagi na przyjęty prętowy model dyskretny ramy zbudowanej z klasycznych elementów cienkościennych i elementów węzłowych zastosowano bardzo ogólny aparat analizy wrażliwości w opisie dyskretnym. Przedstawiono analizę wrażliwości wybranych zmiennych stanu w zagadnieniach statycznych, zaś w przypadku problemów dynamicznych możliwości analizy wrażliwości zilustrowano na prostych przykładach bisymetrycznych belek poddanych skręcaniu. Przedstawiono zarówno analizę wrażliwości częstości drgań własnych, jak i postaci. Zbadano także zakres poprawności aproksymacji wariacji zmiennych stanu przy zadanych wariacjach zmiennych projektowych. Porównano rozwiązania otrzymane z wykorzystaniem analizy wrażliwości z rozwiązaniami ścisłymi, otrzymanymi na drodze analizy parametrycznej.

Rozdział czwarty poświęcony jest analizie wrażliwości w ujęciu probabilistycznym. W tego typu zagadnieniach zmienne projektowe są wielkościami losowymi o określonym rozkładzie prawdopodobieństwa. W wyniku analizy otrzymujemy histogram zmiennej stanu. Przedstawiono analizę wrażliwości w przypadku tzw. stanów regularnych, jak i w stanie granicznym. Zastosowano najbardziej ogólną metodę Monte Carlo.

W rozdziale piątym opisano możliwości stosowania analizy wrażliwości w praktycznych zagadnieniach inżynierskiej, takich jak projektowanie, diagnostyka, identyfikacja czy optymalizacja. Jest to silne narzędzie pozwalające w naukowy sposób wspierać intuicję i doświadczenie inżyniera.

W końcowym, szóstym rozdziale, przedstawiono wnioski i możliwe kierunki dalszych badań. Analizowane układy ramowe zbudowane były z bisymetrycznych prętów dwuteowych, jednakże przedstawiona w pracy koncepcja modelowania układów prętowych, jako zbiór klasycznych elementów cienkościennych i elementów węzłowych, może być rozszerzona na zagadnienia ramowych układów cienkościennych o dowolnym przekroju poprzecznym.

## Rozdział 2

# MODELOWANIE RAM CIENKOŚCIENNYCH

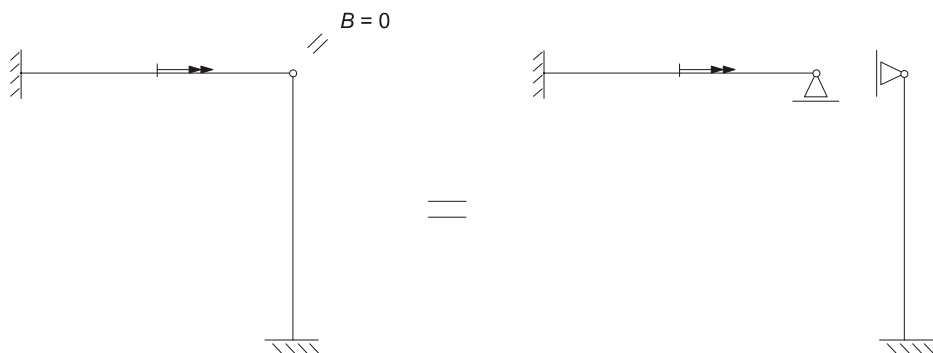
Istnieją dwie ogólne koncepcje modeli teoretycznych (numerycznych) opisujących zachowanie się ram cienkościennych. Historycznie starsza koncepcja polega na traktowaniu ram jako konstrukcji złożonej z elementów cienkościennych, połączonych ze sobą w węzłach. Poszczególne elementy opisane są poprzez określenie osi pręta i zbioru przekrojów poprzecznych. Stan przemieszczenia dotyczy osi pręta, a stan naprężenia i odkształcenia wyznaczany jest w przekrojach poprzecznych. W tym przypadku można otrzymać rozwiązanie analityczne, stosując opis ciągły, jak i można sprowadzić zadanie do układu dyskretnego, stosując metodę elementów skończonych MES. Druga koncepcja, możliwa tylko w wersji komputerowej MES, traktuje rami cienkościennie jako bardzo liczny zbiór małych elementów powłokowych. Jest to bardziej ogólny model, gdzie nie ma konieczności stosowania założeń występujących w prętowych układach ramowych (między innymi nie obowiązuje założenie o nieodkształcalności przekroju poprzecznego elementu prętowego konstrukcji).

Ramy zbudowane z prętów cienkościennych o przekroju otwartym charakteryzują się małą sztywnością w kierunku poprzecznym oraz na obciążenia powodujące skręcanie. W takich konstrukcjach istnieje problem przekazywania się bimomentów w narożach rami, gdzie występuje:

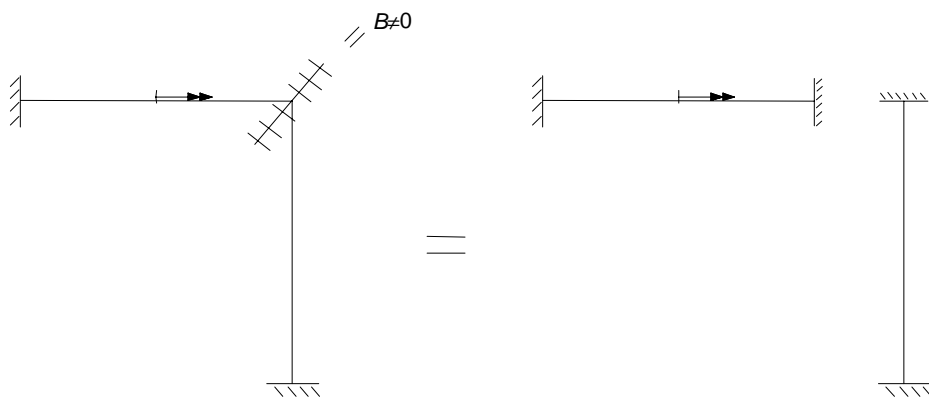
- brak warunków równowagi bimomentów w węźle,
- duże znaczenie konstrukcji węzła na dystrybucję bimomentów,
- silne deformacje w pobliżu węzła – niespełnienie założeń teorii prętów cienkościennych o przekroju nieodkształcalnym.

W praktyce inżynierskiej statyczna czy dynamiczna analiza ram zbudowanych z elementów cienkościennych wykonywana jest przy użyciu komercyjnych programów komputerowych, stosując do modelowania układu elementy prętowe. W tego typu programach jest uwzględniane jedynie skręcanie czyste Saint-Venanta i nie ma możliwości uwzględnienia efektów skręcania skrzepowanego. Jeśli rozważania ograniczymy do ram zbudowanych z bismetrycznych prętów cienkościennych, można wymienić kilka uproszczonych metod określenia rozkładu sił wewnętrznych w przekrojach przywęzłowych naroża rami.

W pierwszej metodzie analiza statyczna składa się z dwóch etapów. W pierwszym etapie siły normalne, momenty zginające i siły tnące oraz odpowiadające im przemieszczenia są wyznaczane przy użyciu programu komputerowego bazującego na klasycznej teorii belek, opartej na założeniu Kirchhoffa płaskich przekroi. W takim modelu jest uwzględniane jedynie skręcanie czyste Saint-Venanta. W drugim kroku efekt skręcania skrzepowanego ważny, gdy w układzie występuje skręcanie, jest analizowany w uproszczony sposób, dla każdego elementu układu osobno (Szymczak i Kujawa 2001). Zatem każdy z elementów jest poddany skręcaniu z przyjęciem kątów skręcenia na końcach elementu otrzymanych w pierwszym etapie analizy. W przekroju przywęzłowym przyjmuje się wówczas warunki pełnej swobody spaczenia (rys. 2.1) lub pełną blokadę (rys. 2.2).



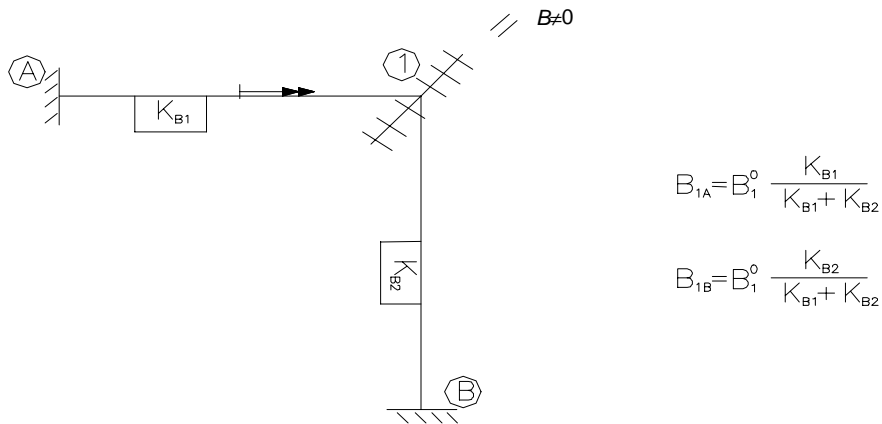
Rys. 2.1. Przegubowe połączenie elementów prętowych w węźle – klasyczna teoria prętowa



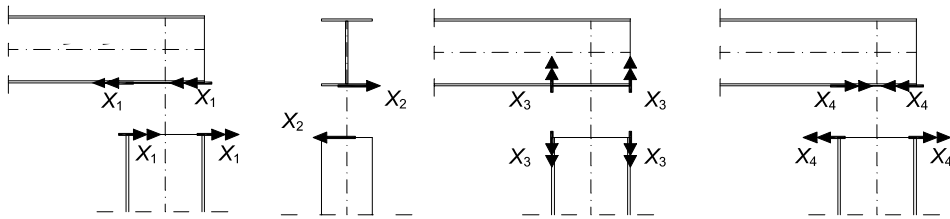
Rys. 2.2. Utwierdzenie w miejscu węzła ramy

W drugiej metodzie pierwszy etap jest taki sam jak w poprzedniej. Natomiast w drugim etapie wyznaczana jest dystrybucja bimomentów w narożu ramy za pomocą metody Crossa (Cywiński 1962, Błaszkwiaik i Kączkowski 1959, 1966). W tej metodzie ważną rolę odgrywa sztywność skręcania skrępowanego poszczególnych elementów (rys. 2.3). Rozkład bimomentów w przekrojach przywęzłowych naroża ramy określany jest na podstawie stosunku sztywności skręcania skrępowanego do całkowitej sztywności wszystkich elementów połączonych w węźle (Kujawa i in. 2002, Szymczak i Kujawa 2001).

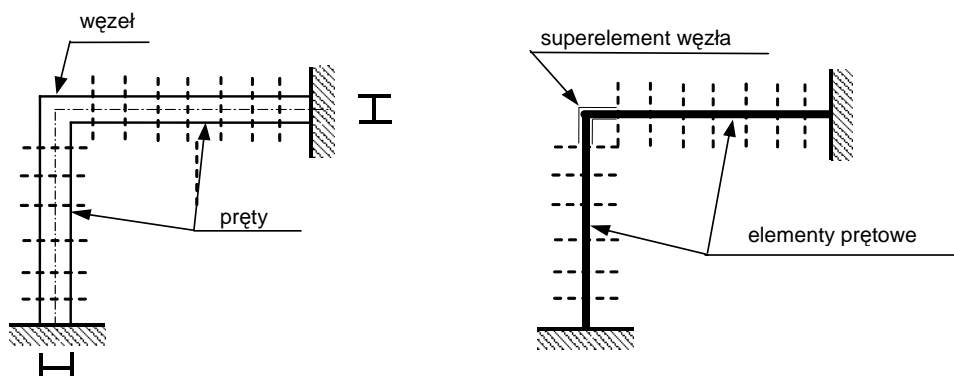
Trzecia metoda polega na połączeniu występujących w poprzednich metodach, dwóch etapów w jedną analizę uwzględniającą efekty rozciągania/ściskania, zginania i skręcania skrępowanego w narożu ramy (Szymczak i Kujawa 2001). Rozważania ograniczono do bismetrycznego przekroju dwuteowego. Wówczas bimoment oraz moment zginający w przekroju przywęzłowym może być przedstawiony jako para momentów działających na poziomie pólek przekroju (rys. 2.4). Do wyznaczenia dystrybucji sił wewnętrznych w węźle zastosowano klasyczną metodę sił.



Rys. 2.3. Rozdział bimomentów proporcjonalnie do sztywności bimomentowej prętów schodzących się w węzle



Rys. 2.4. Niewiadome – nadliczbowe momenty w przekroju przywęzłowym



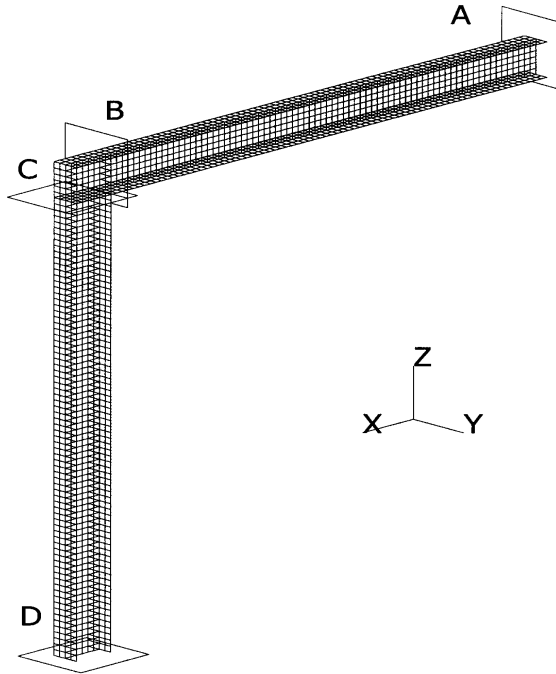
Rys. 2.5. Proponowany pętowy model MES: cienkościenne elementy prętowe + superelement węzła

Wszystkie trzy wymienione metody zakładają nieodkształcalność przekroju poprzecznego, zgodnie z klasycznymi założeniami teorii prętów cienkościennych (Własow 1959,

Byczkow 1962). Jednakże aby spełnić warunki zgodności przemieszczeń w przekrojach przywęzłowych naroża ramy, musi być uwzględniona deformacja przekroju poprzecznego prętów połączonych w węźle (Krenk 1990, Krenk i Damkilde 1991).

W pracy zaproponowano zastosowanie superelementu naroża węzłowego ramy, co umożliwi uwzględnienie przenoszenia się spaczenia i tym samym bimomentów przez taki węzeł. Zaproponowany schemat modelu ramy cienkościennej przedstawia rys. 2.5.

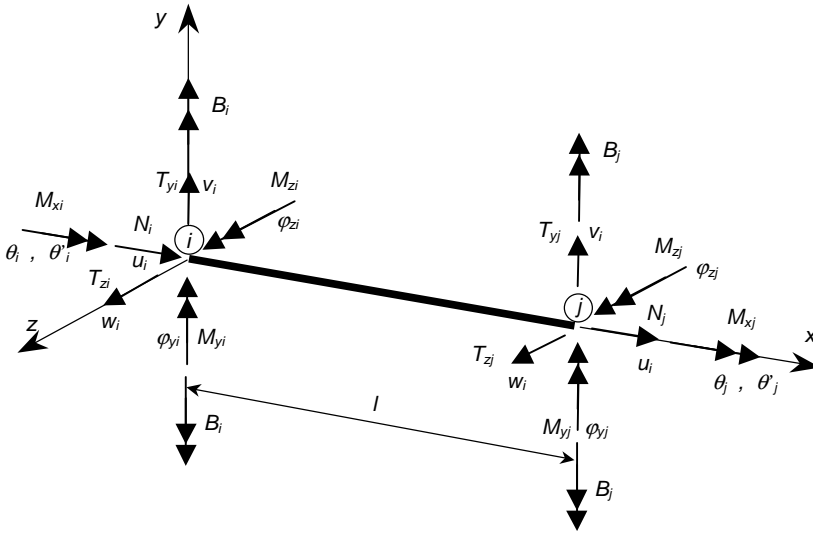
Weryfikację proponowanego modelu prętowego z superelementem węzłowym przeprowadzono poprzez porównanie odpowiedzi analizowanego układu z modelem powłokowym MES (rys. 2.6). Wykorzystano program MSC/Nastran 2002 – model powłokowy, element typu QUAD4.



Rys. 2.6. Model powłokowy MES

## 2.1. Prętowy element cienkościenny

W przyjętym modelu ramy cienkościennej prostoliniowe elementy układu będą modelowane jako prętowe elementy cienkościenne o 14 stopniach swobody (rys. 2.7). W przypadku stosowanych bisymetrycznych prętów cienkościennych zagadnienie rozciągania/ściskania, zginania w płaszczyźnie  $xy$  i  $xz$  oraz skręcania są rozłączne, co uwidocznione jest w zapisie macierzy sztywności (2.1).



Rys. 2.7. Cienkościenny element prętowy – 14 stopni swobody

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ T_{yi} \\ T_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{zi} \\ B_i \\ N_j \\ T_{yj} \\ T_{zj} \\ M_{xj} \\ M_{yj} \\ M_{zj} \\ B_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{1,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & K_{2,2} & 0 & 0 & 0 & K_{2,6} & 0 & 0 & K_{2,9} & 0 & 0 & 0 & K_{2,13} & 0 \\ & & K_{3,3} & 0 & K_{3,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{3,10} & 0 & K_{3,12} & 0 & 0 \\ & & & K_{4,4} & 0 & 0 & K_{4,7} & 0 & 0 & 0 & K_{4,11} & 0 & 0 & K_{4,14} \\ & & & & K_{5,5} & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{5,10} & 0 & K_{5,12} & 0 & 0 \\ & S & & & & K_{6,6} & 0 & 0 & K_{6,9} & 0 & 0 & 0 & K_{6,13} & 0 \\ & & Y & & & & K_{7,7} & 0 & 0 & 0 & K_{7,11} & 0 & 0 & K_{7,14} \\ & & & M & & & & K_{8,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & E & & & & K_{9,9} & 0 & 0 & 0 & K_{9,13} & 0 \\ & & & & & T & & & & K_{10,10} & 0 & K_{10,12} & 0 & 0 \\ & & & & & & R & & & & K_{11,11} & 0 & 0 & K_{11,14} \\ & & & & & & & I & & & & K_{12,12} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & A & & & & K_{13,13} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & K_{14,14} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_i \\ \phi_{yi} \\ \phi_{zi} \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_j \\ \phi_{yj} \\ \phi_{zj} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Pogrubioną czcionką zaznaczono elementy różniące powyższą macierz sztywności od znanej powszechnie macierzy sztywności klasycznego elementu prętowego. Przedstawiony zatem zostanie opis jedynie macierzy sztywności skręcania skrępowanego bisymetrycznego pręta cienkościennego.

Energia potencjalna bisymetrycznego pręta cienkościennego  $U$ , z uwzględnieniem działającej siły ściskającej (efekt II rzędu), dana jest funkcją (Szymczak 1980):

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EJ_{\omega} (\theta'')^2 + GJ_d (\theta')^2 - P \cdot r_0^2 (\theta')^2 \right] dx, \quad (2.2)$$

gdzie  $E$  oznacza moduł sprężystości,  $J_\omega$  wycinkowy moment bezwładności przekroju w odniesieniu do początku układu współrzędnych,  $G$  moduł odkształcenia postaciowego,  $J_d$  moment bezwładności skręcania czystego Saint-Venanta,  $P$  osiową siłę ściskającą pręt,

$r_0 = \sqrt{\frac{J_0}{A}}$  oznacza biegunowy promień bezwładności przekroju,  $J_0$  jest biegunowym momentem bezwładności przekroju poprzecznego, a  $A$  oznacza jego pole powierzchni.

Wprowadzono przybliżony opis kąta skręcenia  $\theta(x)$  na długości elementu :

$$\theta(x) = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{u} \quad (2.3)$$

gdzie :

$$\mathbf{f}^T = \left\{ 1 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 ; x\left(\frac{x}{l} - 1\right) ; 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 ; x\left[\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \left(\frac{x}{l}\right)\right] \right\} \quad (2.4)$$

jest transponowanym wektorem funkcji kształtu, a

$$\mathbf{u}^T = \{ \theta_i, \theta'_i, \theta_j, \theta'_j \}$$

oznacza transponowany wektor przemieszczeń węzłowych elementu  $ij$ .

Wstawiając zależności (2.3) do (2.2) na energię potencjalną elementu  $ij$ , otrzymamy, po wykonaniu całkowania, dyskretną wersję energii potencjalnej

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \frac{1}{2} P \mathbf{u}^T \mathbf{K}_G \mathbf{u} \quad (2.5)$$

Występująca we wzorze (2.5) macierz sztywności  $\mathbf{K}$  przybiera postać (Szymczak 1978<sup>a</sup>, Szymczak 1980) :

$$\mathbf{K} = EJ_\omega \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} + \frac{6k^2}{5l} & \frac{12}{l^2} + \frac{6k^2}{10} & -12 - \frac{6k^2}{5} & \frac{6}{l^2} + \frac{k^2}{10} \\ & \frac{4}{l} + \frac{2k^2l}{15} & -\frac{6}{l^2} - \frac{k^2}{10} & \frac{2}{l} + \frac{k^2l}{30} \\ \text{symetria} & & \frac{12}{l^3} + \frac{6k^2}{5l} & -\frac{6}{l^2} - \frac{k^2}{10} \\ & & & \frac{4}{l} + \frac{2k^2l}{15} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

gdzie  $k = \sqrt{\frac{GJ_d}{EJ_\omega}}$  jest tzw. współczynnikiem zanikania.

$\mathbf{K}_G$  oznacza macierz geometryczną:

$$\mathbf{K}_G = \frac{r_0^2}{l} \begin{bmatrix} 1,2 & 0,1l & -1,2 & 0,1l \\ & \frac{2}{15}l^2 & -0,1l & -\frac{1}{30}l^2 \\ \text{symetria} & & 1,2 & -0,1l \\ & & & \frac{2}{15}l^2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Całkowita energia kinetyczna skręcanego, cienkościennego, bisymetrycznego elementu o masie właściwej  $\rho$  wynosi:

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ \rho J_0 \dot{\theta}^2 + \rho J_\omega \dot{\theta}'^2 \right] dz \quad (2.8)$$

gdzie „kropki”  $\dot{(\dots)} = (\dots)/dt$  oznaczają pochodne względem czasu  $t$ .

Wstawiając zależności (2.3) do (2.8) na energię kinetyczną skręcanego elementu  $ij$  otrzymamy, po wykonaniu całkowania, dyskretną wersję zapisu energii kinetycznej:

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}} \quad (2.9)$$

gdzie  $\mathbf{M}$  oznacza macierz mas (Szymczak 1978<sup>b</sup>):

$$\mathbf{M} = \rho J_0 l \begin{matrix} \left[ \begin{array}{cccc} \frac{13}{35} + 1,2\mu & \frac{11}{210} + 0,1\mu & \frac{9}{70} - 1,2\mu & -\frac{13}{420} + 0,1\mu \\ & \frac{1}{105} + \frac{2}{15}\mu & \frac{13}{420} - 0,1\mu & -\frac{3}{420} - \frac{1}{30}\mu \\ & & \frac{13}{35} + 1,2\mu & -\frac{11}{210} - 0,1\mu \\ & & & \frac{1}{105} + \frac{2}{15}\mu \end{array} \right] \\ \text{symetria} \end{matrix} \quad (2.10)$$

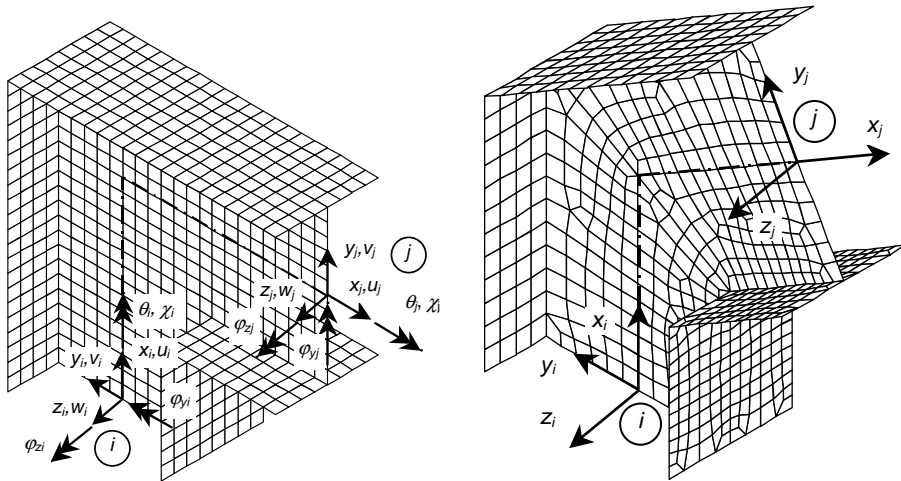
gdzie  $\mu = \frac{J_\omega}{J_0 l^2}$ .

## 2.2. Superelement węzła

Zastosowanie klasycznych elementów belkowych, zgodnych z teorią belek cienkościennych (Własow 1959), nie daje możliwości modelowania przekazywania się bimomentów w węzłach ramy. Zatem nie można modelować konstrukcji innej niż belka lub belka ciągła. Konieczne zatem stało się zastosowanie superelementu węzła ramy (rys. 2.8).

Wyznaczono macierz sztywności takiego elementu metodą jednostkowych stanów wymuszeń w poszczególnych węzłach. Pomimo że analiza dotyczy zakresu sprężystego zachowania się elementu, małych przemieszczeń i odkształceń (liniowa teoria), do jednostkowych stanów wymuszeń należy zastosować wymuszenia przeskalowane, a w przypadku obrotów, wykorzystać wzory na obroty skończone. W przeciwnym razie wprowadzone zostaną samozrównoważone stany naprężeń w rejonie aktywnego wymuszeniem przekroju poprzecznego węzła. Zatem wymuszenia węzłów superelementu (model powłokowy) w przekrojach  $i$  oraz  $j$  zrealizowano stosując zależności podane w tablicy 2.1 (osie  $xyz$  są odpowiednio lokalnymi osiami w węzle  $i$  lub  $j$ ).





Rys. 2.8. Dwa typy superelementu węzła

Tablica 2.1

Wymuszenia jednostkowe w przekroju węzłowym  $i$  lub  $j$ 

Lp.	Rodzaj wymuszenia	Wymuszenia węzłowe w modelu powłokowym
1	rozciąganie w kierunku $x$ (rys. 2.9)	$u = 1$
2	ściananie w kierunku $y$ (rys. 2.10)	$v = 1$
3	ściananie w kierunku $z$ (rys. 2.11)	$w = 1$
4	skręcanie wokół osi $x$ (rys. 2.12)	$\theta = 1 \text{ rad}$ $v = y(\cos \theta - 1) - z \sin \theta$ $w = z(\cos \theta - 1) + y \sin \theta$
5	zginanie wokół osi $y$ (rys. 2.13)	$\varphi_y = 1 \text{ rad}$ $u = z \sin \varphi_y$ $w = z(\cos \varphi_y - 1)$
6	zginanie wokół osi $z$ (rys. 2.14)	$\varphi_z = 1 \text{ rad}$ $u = -y \sin \varphi_z$ $v = y(\cos \varphi_z - 1)$
7	deplanacja (rys. 2.15)	$\theta' = 1 \text{ rad}$ $u = y \cdot z \cdot \theta'$ $w = z(\cos(y \cdot \theta') - 1)$ $\varphi_y = y \cdot \theta'$

Wymuszenia zostały przeskalowane przez  $1/100$  z uwagi na zapewnienie warunków małych przemieszczeń.

Macierz sztywności superelementu została wyznaczona zgodnie z techniką jednostkowych stanów wymuszeń, a poszczególne kolumny oznaczają reakcje węzłowe od poszczególnych jednostkowych stanów wymuszeń.

Do wyznaczenia macierzy sztywności superelementu użyto systemu MSC/Nastran 2002, który jest aplikacją metody elementów skończonych. Zastosowano czterowęzłowy element powłokowy QUAD4 o 24 stopniach swobody. W wyniku otrzymano 144 współczynniki macierzy sztywności superelementu.

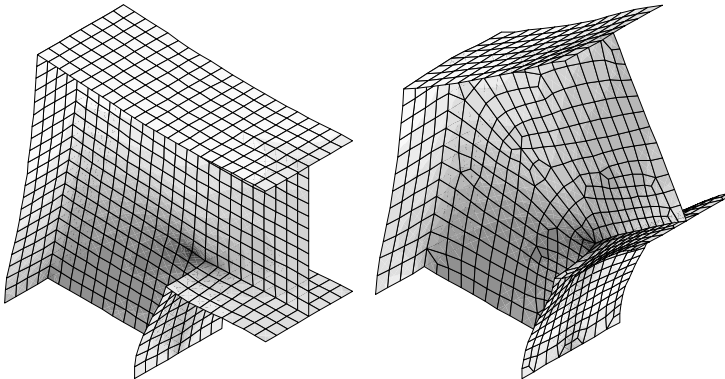
$$\begin{pmatrix} N_i \\ T_{y_i} \\ T_{z_i} \\ M_{x_i} \\ M_{y_i} \\ M_{z_i} \\ B_i \\ N_j \\ T_{y_j} \\ T_{z_j} \\ M_{x_j} \\ M_{y_j} \\ M_{z_j} \\ B_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & 0 & K_{1,4} & 0 & K_{1,6} & 0 & K_{1,8} & K_{1,9} & 0 & 0 & 0 & K_{1,13} & 0 \\ & K_{2,2} & 0 & K_{2,4} & 0 & K_{2,6} & 0 & K_{2,8} & K_{2,9} & 0 & 0 & 0 & K_{2,13} & 0 \\ & & K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,5} & 0 & K_{3,7} & 0 & 0 & K_{3,10} & K_{3,11} & K_{3,12} & 0 & K_{3,14} \\ & & & K_{4,4} & K_{4,5} & 0 & K_{4,7} & K_{4,8} & K_{4,9} & K_{4,10} & K_{4,11} & K_{4,12} & 0 & K_{4,14} \\ & & & & K_{5,5} & 0 & K_{5,7} & 0 & 0 & K_{5,10} & K_{5,11} & K_{5,12} & 0 & K_{5,14} \\ & S & & & & K_{6,6} & 0 & K_{6,8} & K_{6,9} & 0 & 0 & 0 & K_{6,13} & 0 \\ & & Y & & & & K_{7,7} & 0 & 0 & K_{7,10} & K_{7,11} & K_{7,12} & 0 & K_{7,14} \\ & & & M & & & & K_{8,8} & K_{8,9} & 0 & 0 & 0 & K_{8,13} & 0 \\ & & & & E & & & & K_{9,9} & 0 & 0 & 0 & K_{9,13} & 0 \\ & & & & & T & & & & K_{10,10} & K_{10,11} & K_{10,12} & 0 & K_{10,14} \\ & & & & & & R & & & & K_{11,11} & K_{11,12} & 0 & K_{11,14} \\ & & & & & & & I & & & & K_{12,12} & 0 & K_{12,14} \\ & & & & & & & & A & & & & K_{13,13} & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & K_{14,14} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta \\ \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \\ \chi_i \\ u_j \\ v_j \\ w_j \\ \theta_j \\ \varphi_{x_j} \\ \varphi_{y_j} \\ \chi_j \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

gdzie  $\chi_i$  i  $\chi_j$  oznaczają odpowiednio spaczenie przekroju poprzecznego  $i$  oraz  $j$ :

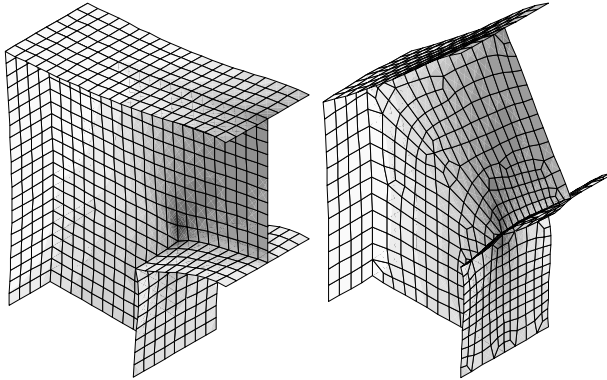
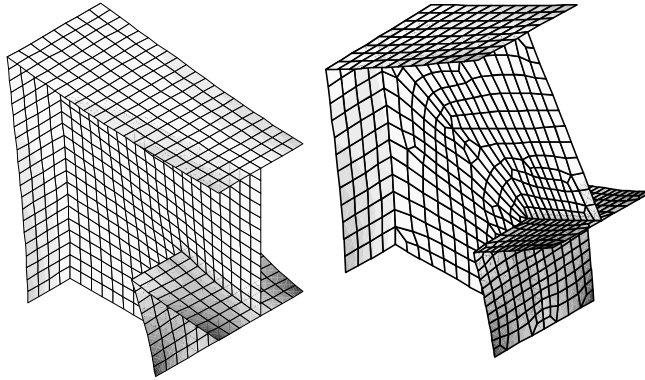
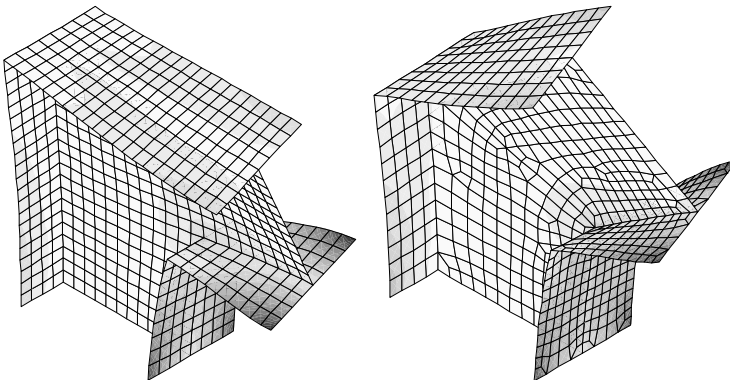
$$\chi = -\theta' \quad (2.12)$$

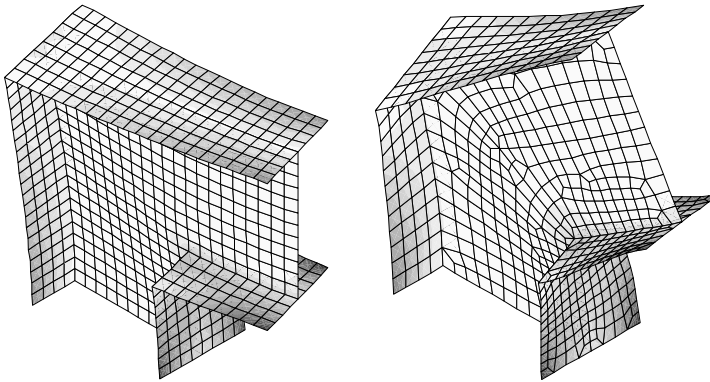
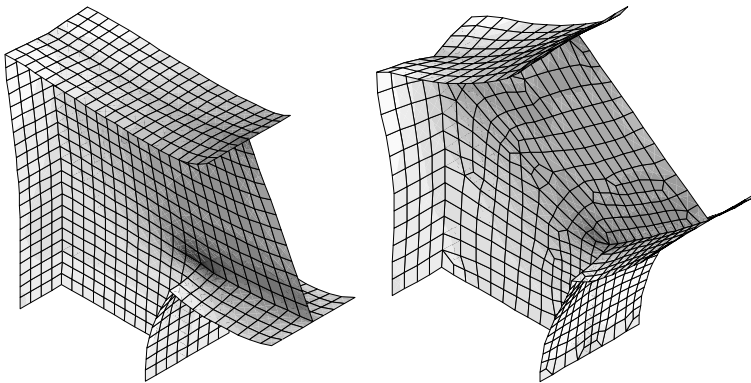
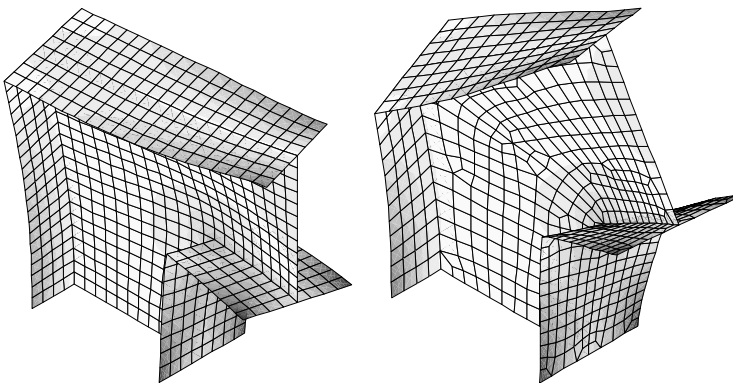
Warto zauważyć, że w przypadku superelementu węzła ramy występuje sprzężenie efektów skręcania ze zginaniem, ścinaniem, a także rozciąganiem/ściskaniem, co nie zachodzi w przypadku prętowego bisymetrycznego elementu cienkościennego.

Dalej na kolejnych rysunkach przedstawiono siedem jednostkowych stanów wymuszeń zadanych w węźle  $j$ .



Rys. 2.9. Jednostkowy stan wymuszenia  $u_j = 1$

Rys. 2.10. Jednostkowy stan wymuszenia  $v_j = 1$ Rys. 2.11. Jednostkowy stan wymuszenia  $w_j = 1$ Rys. 2.12. Jednostkowy stan wymuszenia  $\theta_j = 1$

Rys. 2.13. Jednostkowy stan wymuszenia  $\varphi_j = 1$ Rys. 2.14. Jednostkowy stan wymuszenia  $\varphi_j = 1$ Rys. 2.15. Jednostkowy stan wymuszenia  $\chi_j = 1$ 

Jednostkowe stany wymuszeń superelementu są odpowiednikami funkcji kształtu elementu (np. jak (2.4) przyjęte dla cienkościennego elementu prętowego). Zatem dyskretne

pole przemieszczeń wewnątrz superelementu  $\mathbf{u}_n$  (poszczególne węzły w modelu powłokowym) można zapisać w postaci:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \quad (2.13)$$

gdzie kolumny macierzy  $\mathbf{B}$  stanowią wektory globalnych przemieszczeń węzłów superelementu odpowiednio od 14 jednostkowych stanów wymuszeń opisanych w niniejszym rozdziale (patrz rys. 2.9 ÷ 2.15). Wektor  $\mathbf{u}$  jest wektorem przemieszczeń węzłowych superelementu (14 składowych – równanie (2.11)). Macierz  $\mathbf{B}$  pełni rolę funkcji kształtu superelementu, a prędkości przemieszczeń można zapisać w postaci:

$$\dot{\mathbf{u}}_n = \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (2.14)$$

Energia kinetyczna może być zatem zapisana również w postaci dyskretnej funkcji – formy kwadratowej – z wykorzystaniem znanych wartości przemieszczeń wewnątrz superelementu od 14 stanów jednostkowych wymuszeń:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \dot{\mathbf{u}}^T [\mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{B}] \cdot \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \cdot \dot{\mathbf{u}}^T \cdot \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (2.15)$$

gdzie  $\mathbf{M}$  jest macierzą mas superelementu,  $\bar{\mathbf{M}}$  – diagonalna macierz mas skupionych w węzłach wewnętrznych superelementu. Uwzględniając jako istotne jedynie siły bezwładności związane z translacjami wszystkich  $n$  elementów powłokowych, wchodzących w skład superelementu, otrzymamy poszczególne składniki macierzy mas stosując formułę:

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^n \{u_{ki}, v_{ki}, w_{ki}\} \cdot (\rho_k \cdot A_k \cdot t_k) \cdot \begin{Bmatrix} u_{kj} \\ v_{kj} \\ w_{kj} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

gdzie  $M_{ij}$  jest elementem macierzy mas,  $u_{ki}$   $v_{ki}$   $w_{ki}$  są przemieszczeniami środka ciężkości  $k$ -tego elementu od jednostkowego stanu wymuszenia  $i$ -tego stopnia swobody superelementu,  $u_{kj}$   $v_{kj}$   $w_{kj}$  są przemieszczeniami środka ciężkości  $k$ -tego elementu od jednostkowego stanu wymuszenia  $j$ -tego stopnia swobody superelementu,  $\rho_k$  jest masą właściwą,  $A_k$  polem powierzchni, a  $t_k$  grubością  $k$ -tego elementu powłokowego.

W następnych podrozdziałach przedstawiono numeryczną weryfikację przyjętego modelu węzła, zarówno w zagadnieniach statyki, jak i dynamiki cienkościennych układów ramowych.

### 2.3. Rola stężeń wewnętrznych węzła

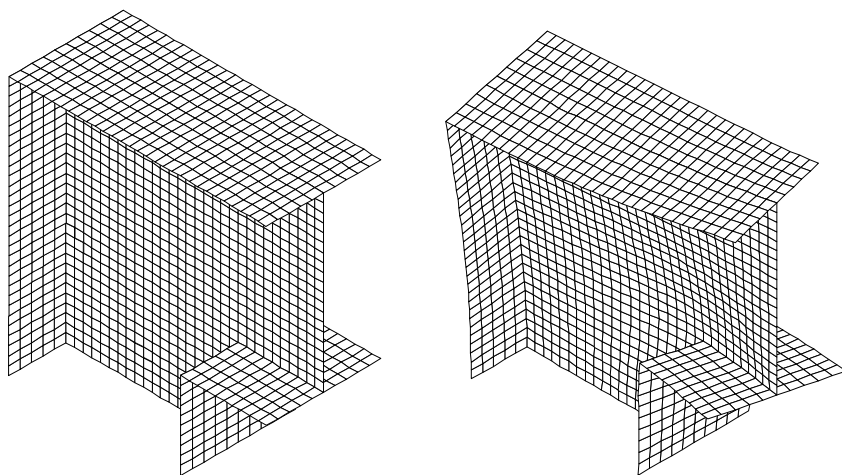
Konstrukcja węzła ma zasadniczy wpływ na przenoszenie się efektów spaczenia między elementami połączonymi w węzle. Stosowanie stężeń (usztywnień) węzła może zasadniczo zmienić warunki przekazywania się sił wewnętrznych. Wszystkie efekty prętowej pracy elementów (rozciąganie/ściskanie, zginanie, ścinanie, skręcanie) połączonych ze sobą w węzle są ze sobą sprzężone (2.11).

Analizie poddano cztery różne typy węzłów różniące się występowaniem (lub nie) trzech wariantów stosowanych powszechnie stężeń. Przyjęto przekrój poprzeczny dwuteowych elementów tworzących węzeł o wymiarach: wysokość średnika  $h = 300$  mm, szerokości półek  $b = 200$  mm, grubość ścianki półek, średnika oraz blach stężeń wewnętrznych przyjęto o wartości  $t = 10$  mm.

Zaobserwowano duży wpływ stężeń na przenoszenie się bimomentów między przekrojami węzłowymi superelementu. Jako wskaźnik przyjęto stosunek elementów macierzy sztywności (2.11), odpowiadających deplanacji przekroji przywęzłowych:

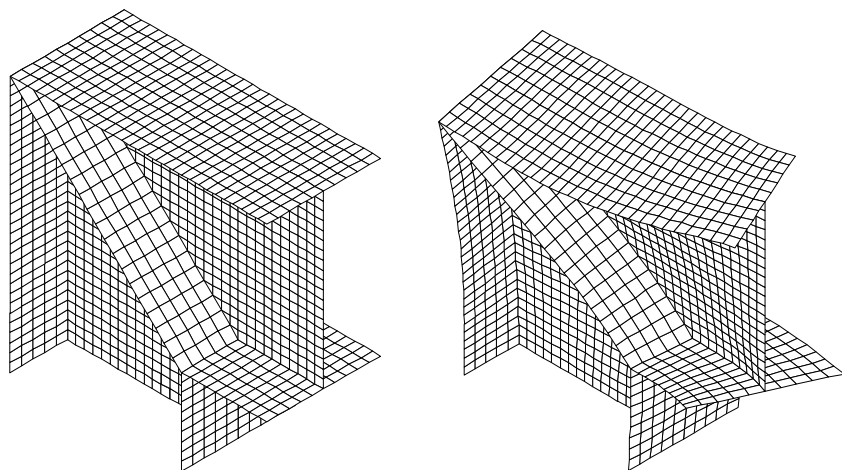
$$\zeta = \frac{K_{14,7}}{K_{7,7}} \times 100\% = \frac{K_{7,14}}{K_{14,14}} \times 100\% \quad (2.17)$$

W zależności od konstrukcji węzła występują różnice w przekazywaniu bimomentów. Na poniższych rysunkach przedstawiono analizowane cztery typy węzłów i podano procentowo przekazywanie bimomentów.



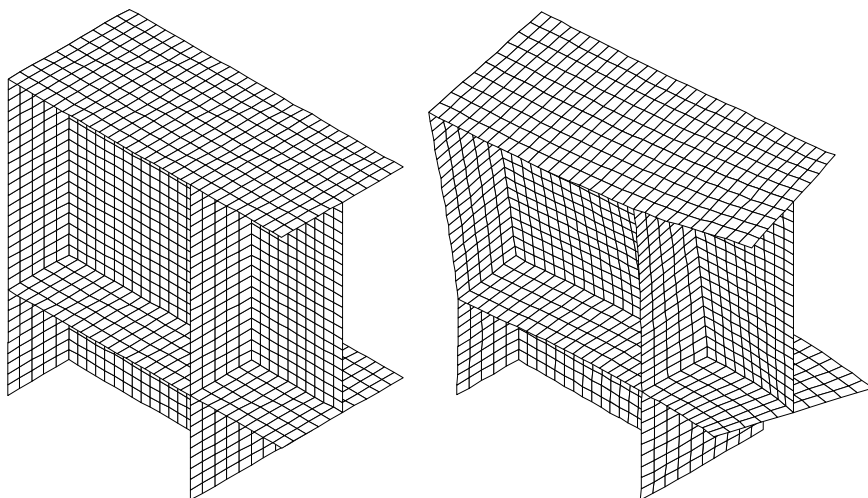
przekaz  $\zeta = 96,28\%$

Rys. 2.16. Węzeł typ W-90°A



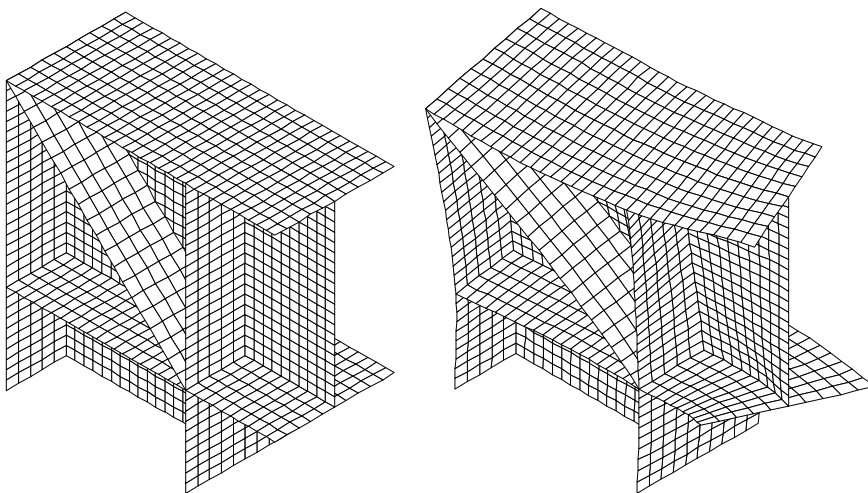
przekaz  $\zeta = 21,84\%$

Rys. 2.17. Węzeł typ W-90°B



*przekaz  $\zeta = 20,38\%$*

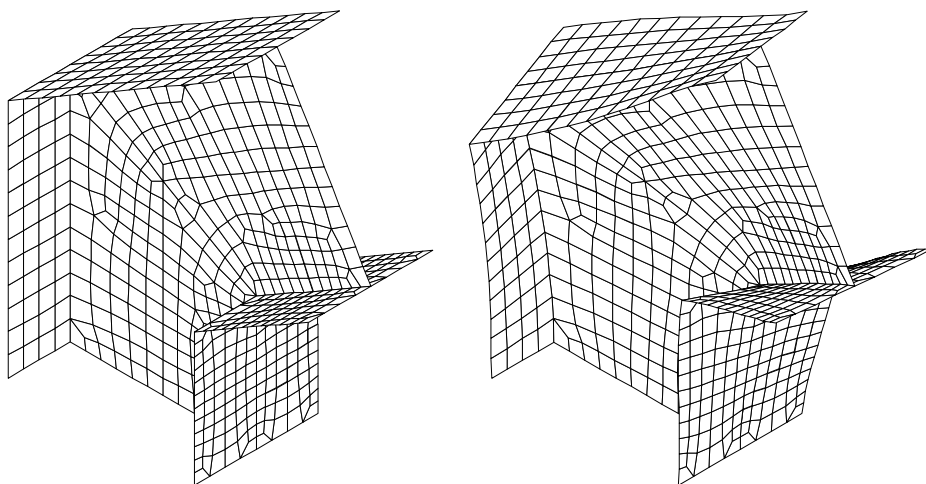
Rys. 2.18. Węzeł typ W-90°C



*przekaz  $\zeta = 10,93\%$*

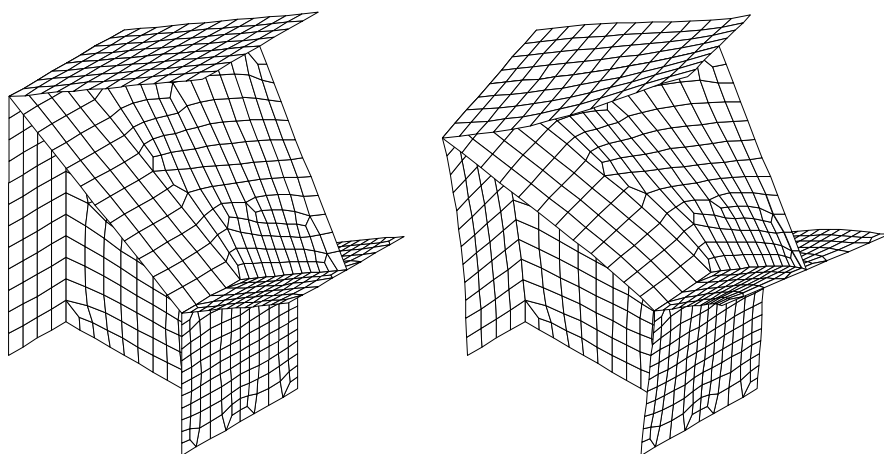
Rys. 2.19. Węzeł typ W-90°D

Na przedstawionych rysunkach 2.16÷2.21 wyraźnie widać decydujący wpływ zastosowania przepon usztywniających węzeł na blokadę przekazywania się paczenia przekroji przywęzłowych, a co za tym idzie i bimomentów w narożu ramy.



przekaz  $\zeta = 94,16\%$

Rys. 2.20. Węzeł typ W-120°A



przekaz  $\zeta = 27,32\%$

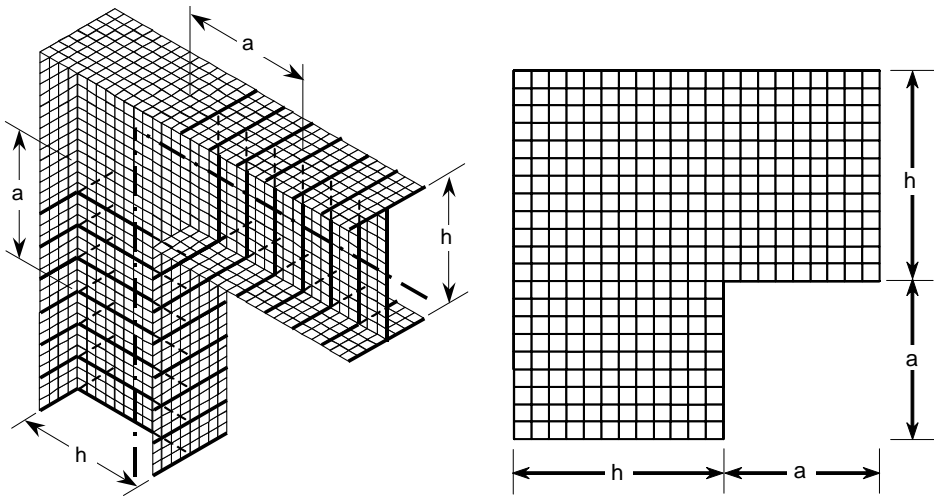
Rys. 2.21. Węzeł typ W-120°B

## 2.4. Dobór rozmiarów superelementu węzła ramy

Przy budowie macierzy sztywności superelementu ważnym problemem jest odpowiednie przyjęcie wymiarów węzła – parametru  $a$  określającego długość współpracującą, pokazaną na rys. 2.22. Zbyt mały odcinek  $a$  powoduje przesztynwienie superelementu węzła. Przyjęcie zbyt dużej wartości parametru  $a$  może spowodować, że taki model nie będzie odpowiedni dla każdego rodzaju obciążenia, szczególnie działającego w pobliżu węzła. W przypadku zagadnień dynamiki układu może to mieć duży wpływ szczególnie na wyższe częstotliwości i postacie drgań własnych. Zatem prawidłowy dobór wymiaru  $a$  ma decydujące



znaczenie dla jakości modelowania cienkościennej ramy przy zastosowaniu elementów prętowych. Problem ten zilustrowano w zamieszczonych w niniejszej pracy przykładach, zarówno w zagadnieniu statyki, jak i dynamiki układu. Numeryczne analizy pozwalają zalecać przyjęcie długości współpracującej  $\frac{1}{2} h < a < h$ , gdzie  $h$  określa wysokość dwuteowej belki.



Rys. 2.22. Super element naroża ramy – długość współpracująca  $a$

## 2.5. Przykłady numeryczne

Zaproponowany prętowy model ramy cienkościennej z zastosowaniem superelementu węzła został poddany weryfikacji. Jako odniesienie przyjęto powłokowy model konstrukcji, gdzie zarówno węzeł jak i cienkościennie elementy prętowe układu modelowano czterowęzłowymi elementami powłokowymi typu QUAD4 – system MSC/Nastran 2002. Obliczenia dla zaproponowanego w niniejszej pracy modelu prętowego wykonano przy użyciu autorskiego programu CIENRAM, napisanego w języku Fortran.

### 2.5.1. Statyka – analiza porównawcza trzech modeli numerycznych

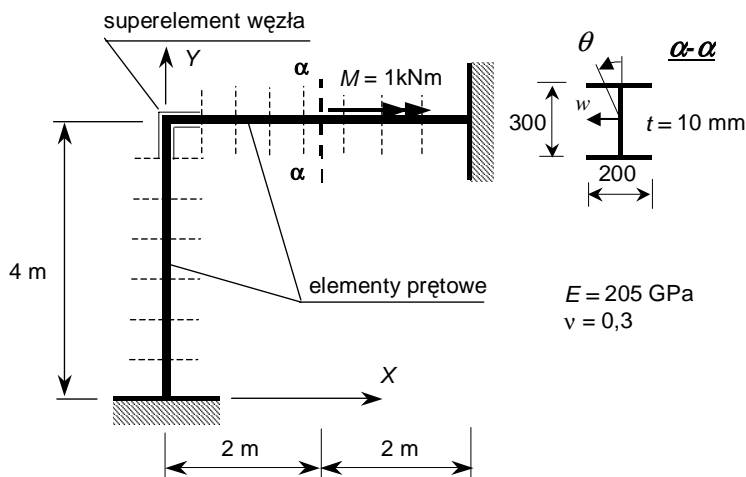
Rozważmy prostą ramę zbudowaną z prętów cienkościennych pokazaną na rys. 2.23 i 2.24. Rama poddana jest działaniu jednostkowego momentu skręcającego  $M = 1$  kNm, działającego na ryglu ramy. W układzie nie występują żadne stężenia, zarówno słupa i ryglu, jak i węzła.

Przeprowadzono analizę statyczną układu, stosując trzy różne modele matematyczne :

- A) model prętowy z zastosowaniem klasycznych elementów belkowych o 12 stopniach swobody (po 6 stopni w każdym węźle: trzy translacje i trzy obroty); pominięto efekt skręcania skrępowanego (system MSC/Nastran 2002);

- B) model prętowy z zastosowaniem klasycznych prętowych elementów cienkościennych o 14 stopniach swobody (po 7 stopni w każdym węźle: trzy translacje, trzy obroty i deplanacja); uwzględniono zatem efekt skręcania skrępowanego. Użyto superelementu węzła do modelowania połączenia słupa z rygłem (rys. 2.23);
- C) model powłokowy – zbudowano model ramy z wykorzystaniem systemu MSC/Nastran 2002. Wykorzystano czterowęzłowy element powłokowy typu QUAD4 o 24 stopniach swobody (po 6 stopni w każdym węźle: trzy translacje i trzy obroty) (rys. 2.24).

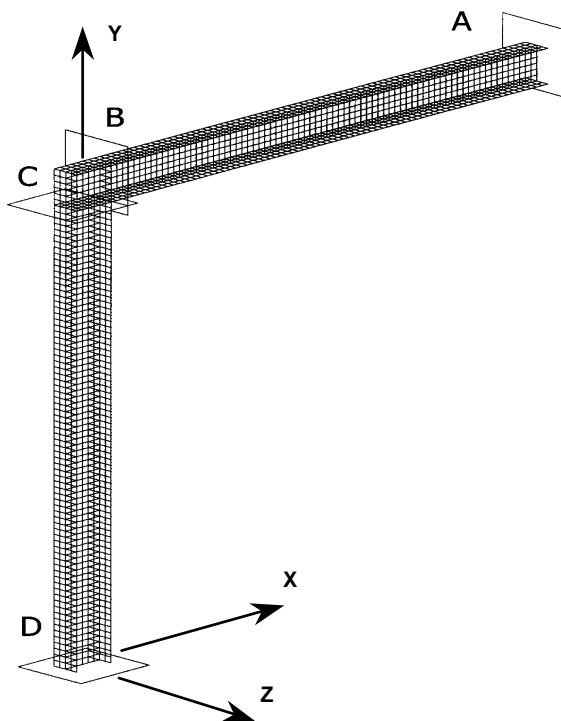
Należy podkreślić, że jeśli zastosować komercyjne oprogramowanie dostępne na polskim rynku, jedynie model A i C z wymienionych są możliwe do wykorzystania.



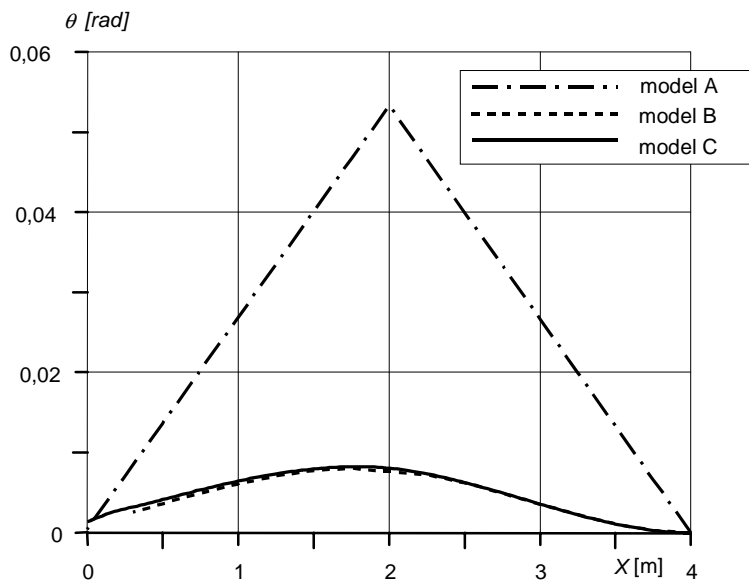
Rys. 2.23. Płaska rama modelowana prętowymi elementami cienkościennymi z wykorzystaniem superelementu węzła

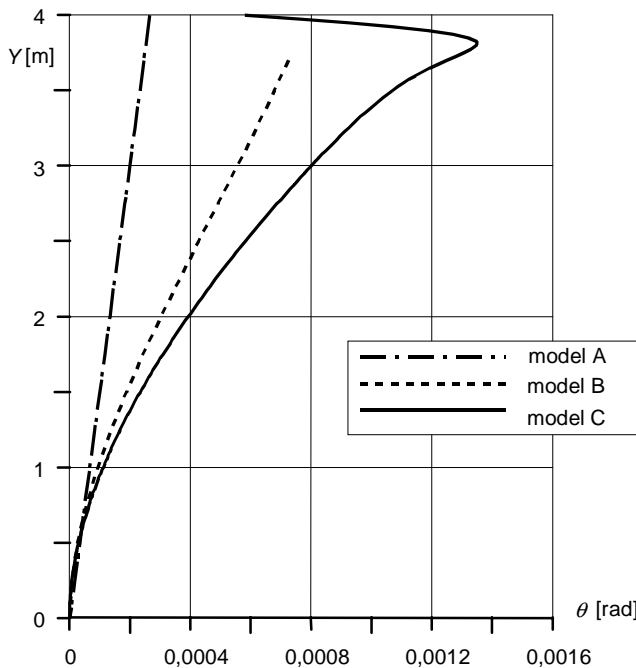
Na rysunkach 2.25 i 2.26 przedstawiono przebieg zmienności kąta skręcenia odpowiednio dla rygla i słupa przy zastosowaniu powyżej opisanych trzech różnych modeli obliczeniowych. Za najbardziej dokładny należy uznać model C, wykorzystujący jedynie powłokowe elementy skończone. Nie są tu narzucone z góry klasyczne założenia nieodkształcalności przekroju poprzecznego pręta cienkościennego, jak i jest także możliwa dowolna deformacja węzła ramy. Uznano zatem ten model jako najbardziej zbliżony do rzeczywistego układu, a wyniki przyjęto jako wzorzec porównawczy.

Zastosowanie klasycznych elementów belkowych w analizie daje zupełnie inne wyniki niż w przypadku modelu powłokowego. Szczególnie jest to widoczne na rygłu (rys. 2.25). Świadczy to o dużym wpływie efektów skręcania skrępowanego i braku możliwości przekazywania się bimomentów w węźle ramy. Zastosowany w drugim modelu B superelement węzła pozwala uwzględnić zarówno przekazywanie się efektów spaczenia przekroju poprzecznego w węźle ramy, jak i jego odkształcalność nie tylko przy skręcaniu, ale także przy zginaniu czy ścinaniu. Jest to zatem węzeł podatny. Wyraźnie widać zbieżność rozwiązania otrzymanego dla drugiego, prętowego modelu B, z modelem C – powłokowym.



Rys. 2.24. Model powłokowy, MSC/NASTRAN 2002

Rys. 2.25. Przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż rygła

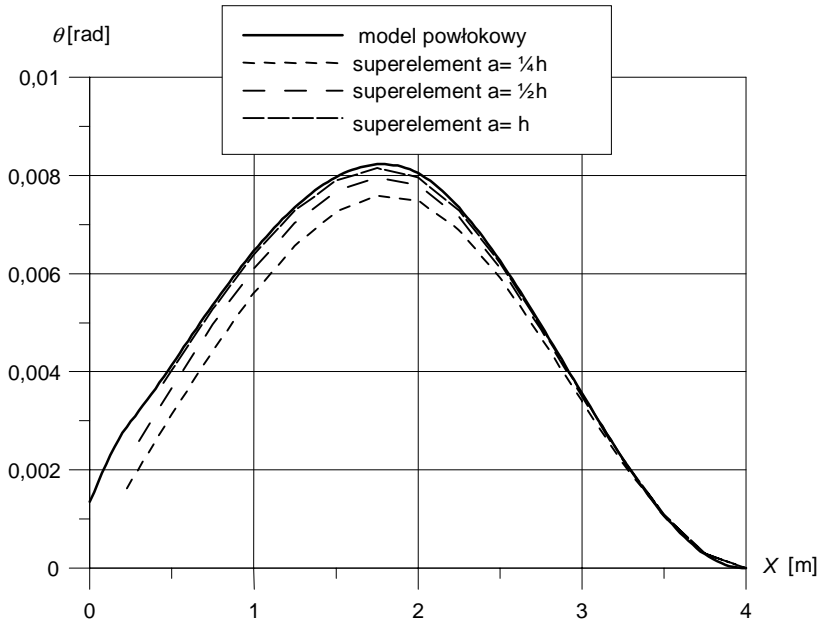
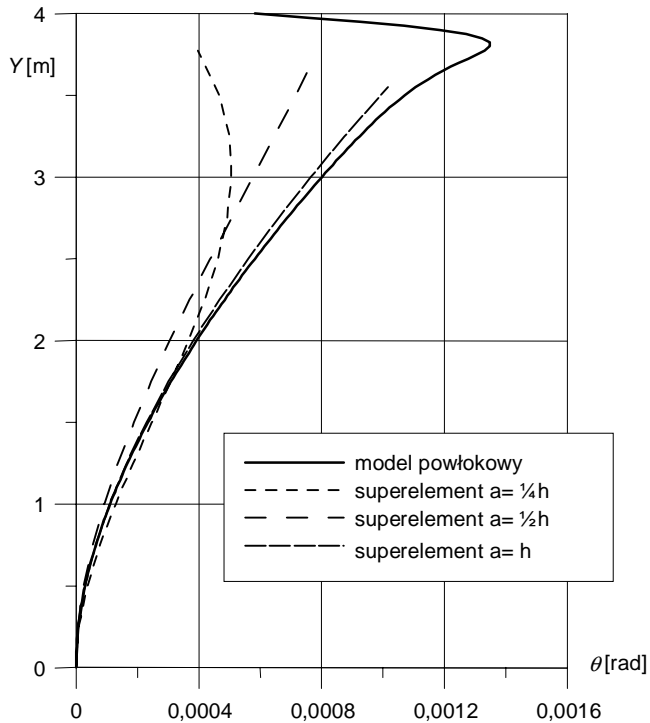
Rys. 2.26. Przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  po wysokości słupa

### 2.5.2. Statyka – dobór rozmiarów superelementu węzła

Wyniki analiz numerycznych wskazują, że współczynniki macierzy sztywności elementu węzłowego zależą w znacznym stopniu od prawidłowego przyjęcia długości współpracującej  $a$  zdefiniowanej w rozdziale 2.4 (rys. 2.22). W celu ilustracji poruszonego zagadnienia wyznaczono macierze sztywności superelementu węzłowego typu W-90°A (rys. 2.16) dla trzech długości współpracujących  $a$ :  $\frac{1}{4}h$ ,  $\frac{1}{2}h$  i  $h$ .

Rozpatrzono ten sam schemat cienkościennej ramy i obciążenia jak w poprzednim przykładzie (rys. 2.23). Porównano wyniki analizy statycznej, uzyskanej dla prętowego modelu cienkościennej ramy z superelementem (model B) z modelem powłokowym (model C).

Różnice wyników analizy statycznej modelu powłokowego i modelu prętowego przy różnych wartościach parametru  $a$  pokazano na rys. 2.27 i 2.28, gdzie przedstawiono przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  odpowiednio wzdłuż rygla i słupa. Przyjęcie bardzo krótkiej długości współpracującej  $a$ , na przykład  $\frac{1}{4}h$ , daje większe rozbieżności wyników analizy statycznej z modelem powłokowym niż w przypadku większej wartości parametru  $a$ . Wynika to z problemu silnych deformacji przekroju poprzecznego w najbliższym sąsiedztwie węzła ramy. Superelement powinien kończyć się w rejonie, gdzie założenie nieodkształcalności przekroju poprzecznego pręta jest spełnione. Z analizy wynika, że parametr  $a$  powinno się przyjmować bliski wysokości schodzących się belek dwuteowych  $h$ .

Fig. 2.27. Przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż rygłaRys. 2.28. Przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż słupa

### 2.5.3. Statyka – rama płaska ze stężeniami

Różnego typu stężenia są często stosowane w ramach zbudowanych z prętów cienkościennych. Są to głównie przepony i przewiązki. Rzadziej stosuje się innego typu stężenia takie jak na przykład połączenie przepon z przewiązkami, a w efekcie otrzymuje się zamknięty przekrój zarówno w kierunku osi elementu, jak i prostopadłym do niej – tworzy się zamknięta skrzynka (Dąbrowski 1958).

Stężenia stosuje się głównie w miejscach, gdzie występują obciążenia skupione i raczej traktuje się je jedynie jako elementy konstrukcyjne. Natomiast mogą być one stosowane, przy zadanym obciążeniu, w celu modyfikacji odpowiedzi konstrukcji, gdyż ich wpływ na zachowanie się konstrukcji może być znaczący.

Podobnie jak w przypadku węzłów ramy, w najbliższym otoczeniu stężeń można zaobserwować lokalne deformacje przekroju poprzecznego pręta. Zatem zastosowanie techniki superelementu wydaje się najbardziej odpowiednim narzędziem do modelowania elementu prętowego ze stężeniami.

Rozpatrzmy płaską ramę ze stężeniami w postaci przewiązek równomiernie rozmieszczonych wzdłuż rygła pokazaną na rys. 2.29. W modelu prętowym zastosowano superelement do modelowania zarówno węzła ramy, jak i stref rygła, gdzie znajdują się przewiązki (Kreja i Szymczak 2002, Kreja i in. 2004). Pozostałe odcinki rygła, a także słup modelowano cienkościennymi elementami prętowymi (rys. 2.30). Każdy z elementów skończonych ma 14 stopni swobody: trzy translacje, trzy rotacje oraz spaczenie w każdym węźle elementu.

Zaproponowany prętowy model ramy został porównany z bardziej ogólnym modelem powłokowym (MSC/Nastran 2002, elementy powłokowe typu QUAD4), gdzie nie obowiązuje założenie nieodkształcalności przekroju poprzecznego prętów układu.

Rozpatrzono dwa typy obciążenia :

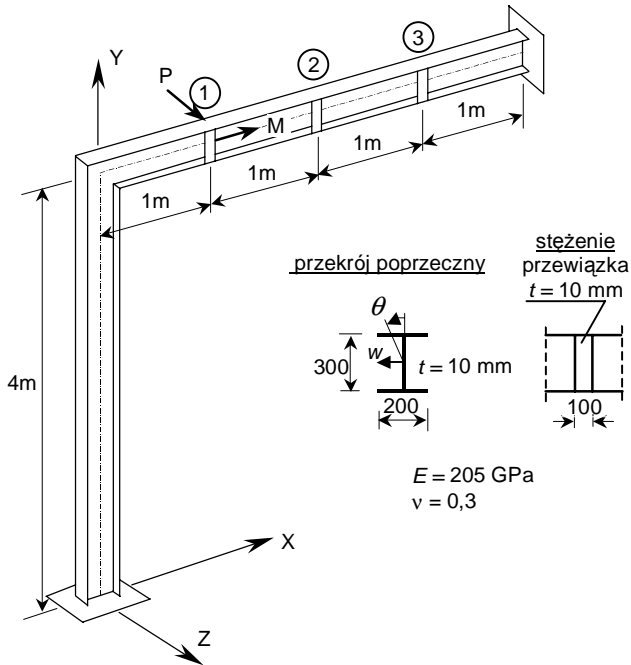
- 1) moment skręcający  $M = 1$  kNm działający kolejno w punkcie 1, 2 i 3 (trzy przypadki obciążenia jednostkowym momentem skręcającym),
- 2) jednostkowa siła  $P = 1$  kN działająca na kierunku prostopadłym do płaszczyzny ramy w punkcie 1 na poziomie górnej półki rygła.

Obydwa typy obciążenia przedstawiono graficznie na rys. 2.29 i 2.30.

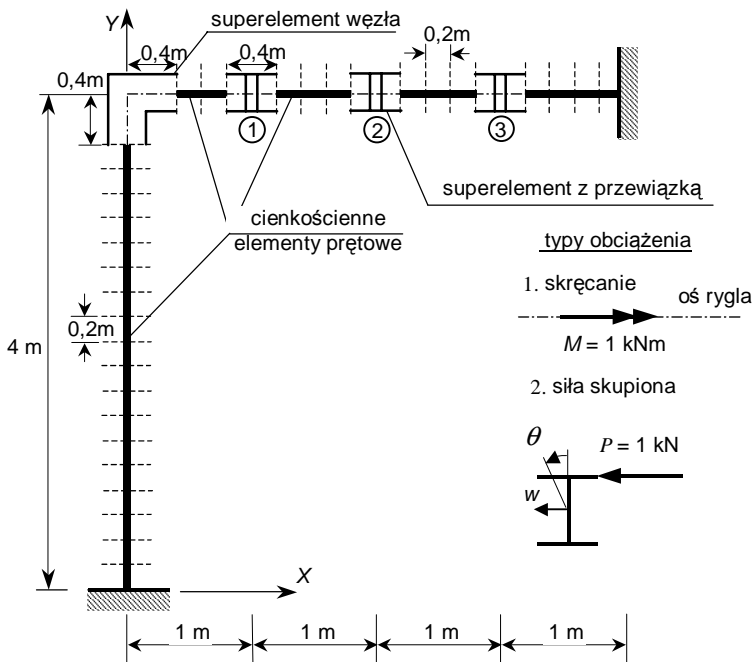
Na rysunkach 2.31÷2.33 przedstawiono przebiegi zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż osi rygła, przy uwzględnieniu obciążenia jednostkowym momentem skręcającym (obciążenie typu 1) działającym w trzech różnie oddalonych od węzła ramy punktach (rys. 2.29). Widoczny jest znaczny wpływ przewiązek na redukcję kąta skręcenia  $\theta$ , mimo że ich szerokość wynosi jedynie 10 cm ( $1/3 h$ ). Analiza statyczna ramy modelowanej prętowymi elementami cienkościennymi z zastosowaniem superelementów węzła i przewiązek daje rezultaty zbliżone do wyników otrzymanych dla modelu powłokowego.

Na następnych czterech rysunkach 2.34÷2.37 przedstawiono wyniki analizy porównawczej dwóch modeli przy zastosowaniu drugiego typu obciążenia – poziomej siły działającej na poziomie półki górnej rygła w punkcie 1. Taki typ obciążenia oprócz zginania wprowadza także silne efekty skręcania.

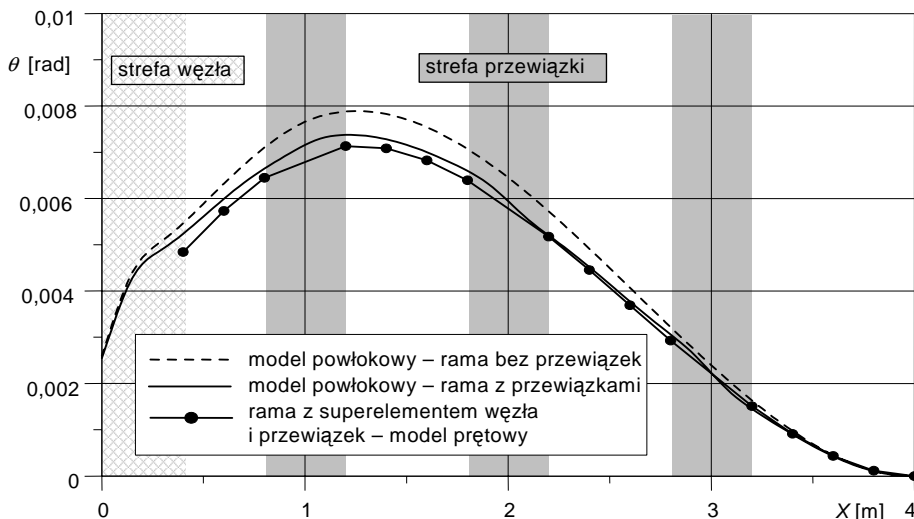
Analiza potwierdziła występowanie dużych deformacji w rejonie węzła ramy, jak i sąsiedztwie stężeń – przewiązek. Można to zaobserwować, analizując deformację modelu powłokowego, gdzie założenia nieodkształcalności przekroju poprzecznego elementów ramy nie są realizowane.



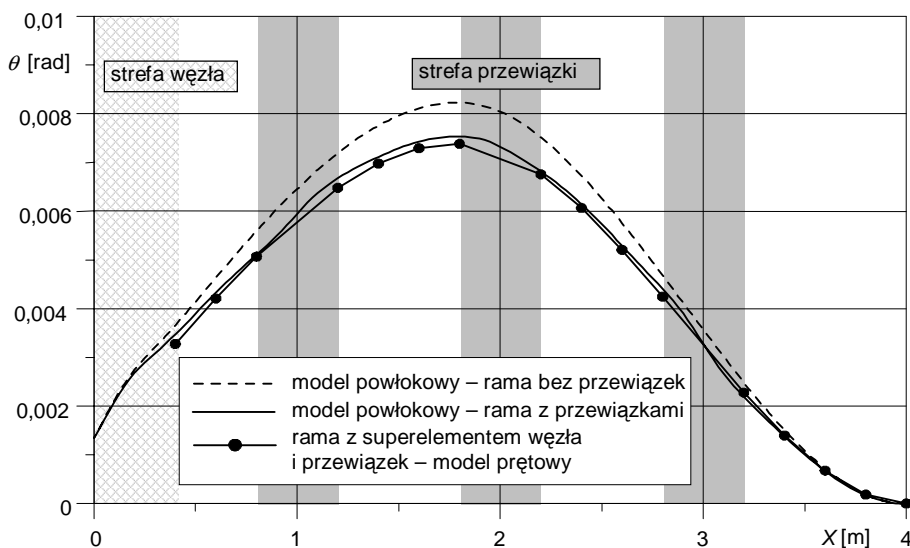
Rys. 2.29. Rama cienkościenna z przewiązkami



Rys. 2.30. Prętowy model ramy z zastosowaniem superelementów



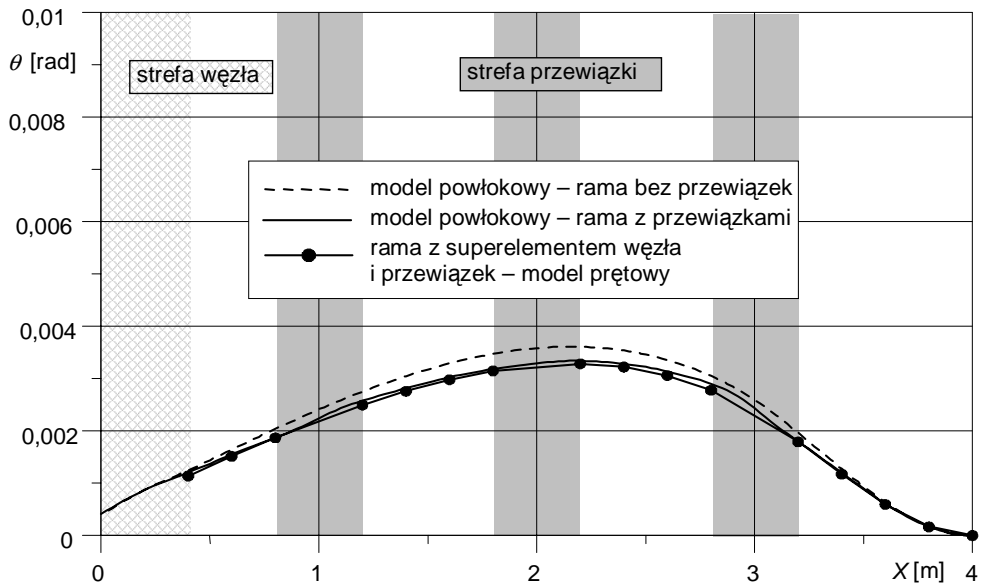
Rys. 2.31. Przebieg zmienności kąta skręcenia wzdłuż rygła, typ obciążenia 1, jednostkowy moment  $M = 1$  kNm działa w punkcie 1



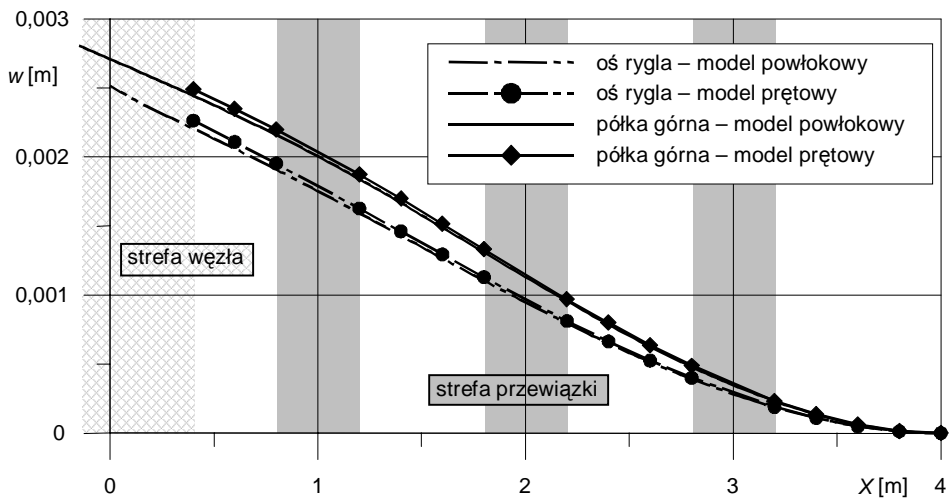
Rys. 2.32. Przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż rygła, typ obciążenia 1, jednostkowy moment  $M = 1$  kNm działa w punkcie 2

Nieznaczne rozbieżności wyników otrzymanych dla modelu prętowego i powłokowego potwierdzają poprawność modelowania węzłów, jak i elementów prętowych ze stężeniami przy użyciu superelementów.

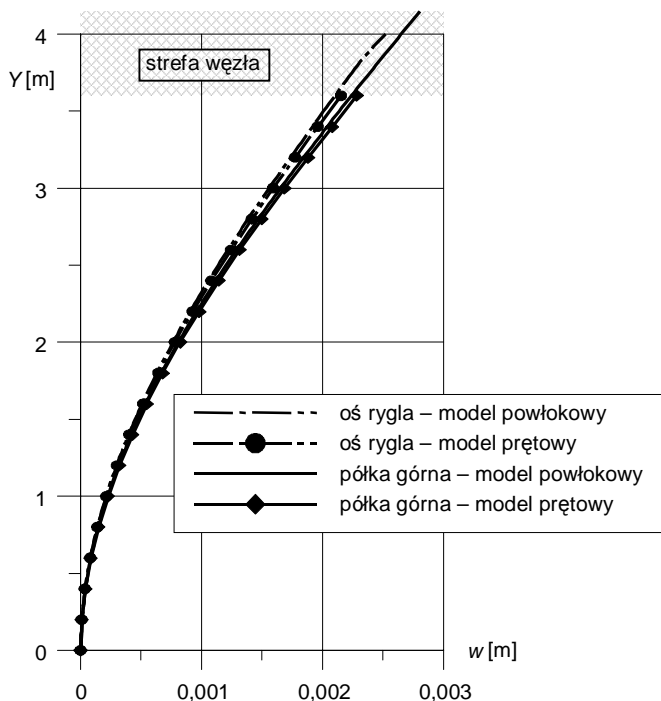




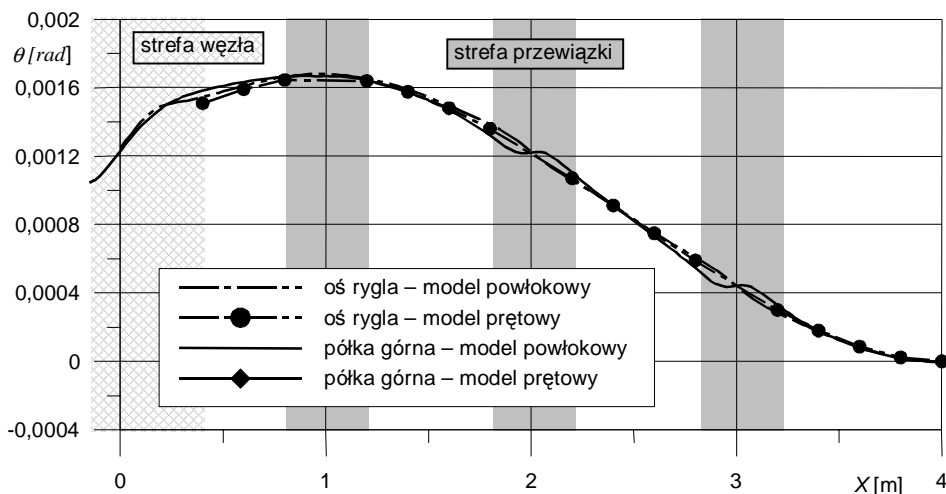
Rys. 2.33. Przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż rygła, typ obciążenia 1, jednostkowy moment  $M = 1$  kNm działa w punkcie 3



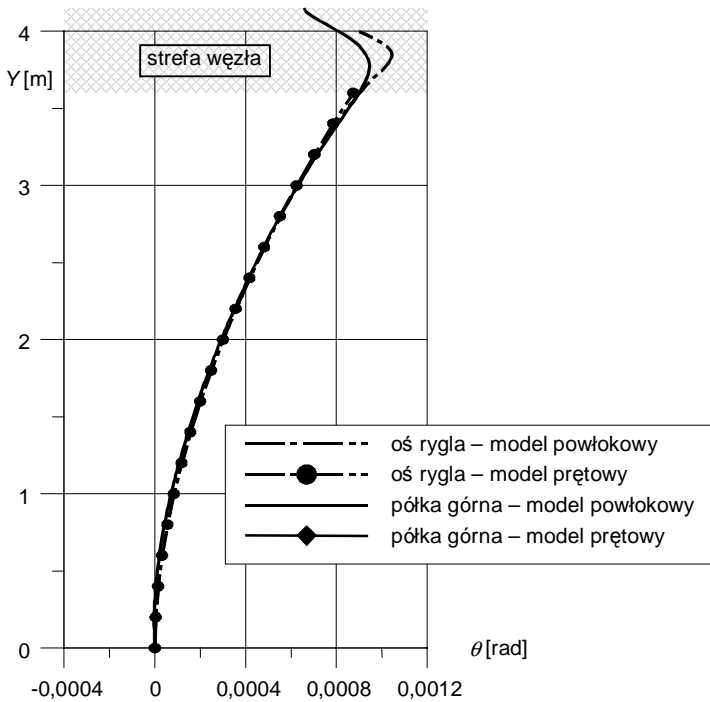
Rys. 2.34. Przebieg zmienności przemieszczenia poziomego  $w$  wzdłuż osi rygła i na poziomie półki górnej, typ obciążenia 2, jednostkowa siła skupiona  $P = 1$  kN działa w punkcie 1



Rys. 2.35. Przebieg zmienności przemieszczenia poziomego  $w$  wzdłuż osi słupa i na poziomie półki lewej, typ obciążenia 2, jednostkowa siła skupiona  $P = 1$  kN działa w punkcie 1



Rys. 2.36. Przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż osi rygła i na poziomie półki górnej, typ obciążenia 2, jednostkowa siła skupiona  $P = 1$  kN działa w punkcie 1



Rys. 2.37. Przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż osi słupa i na poziomie półki lewej, typ obciążenia 2, jednostkowa siła skupiona  $P = 1$  kN działa w punkcie 1

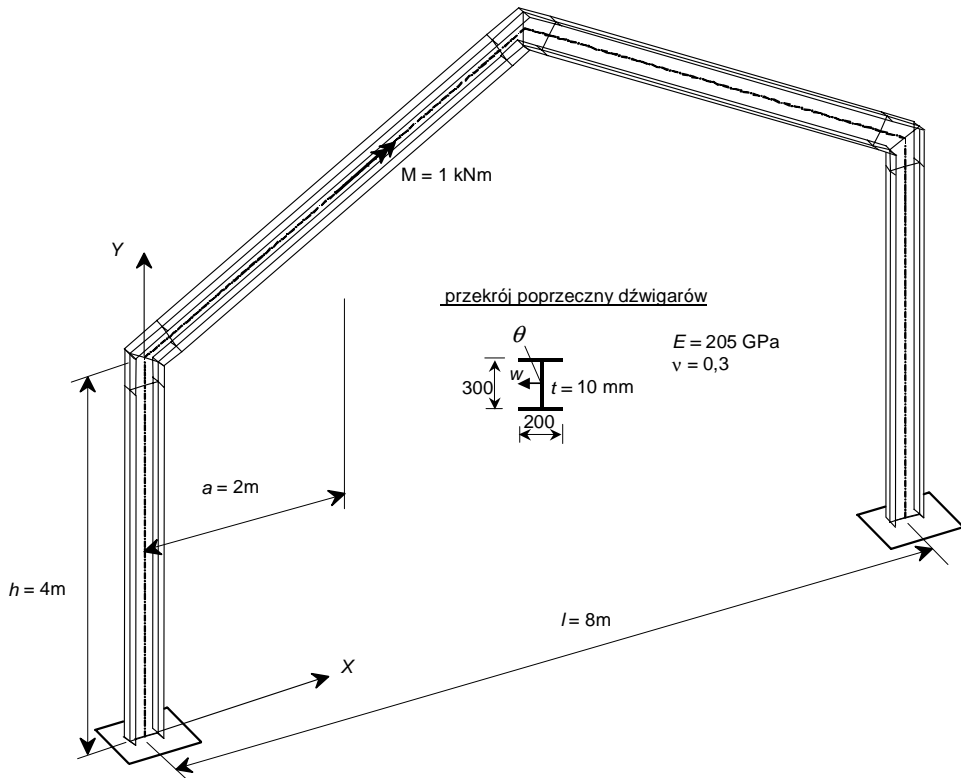
#### 2.5.4. Statyka – rama hali

Rozważmy typową ramę hali stalowej zbudowaną z prętów cienkościennych pokazaną na rys. 2.38. Rama poddana jest działaniu jednostkowego momentu skręcającego  $M = 1$  kNm działającego na ryglu rami. W układzie nie występują żadne stężenia zarówno słupa i rygla jak i węzła.

Podobnie jak w przykładzie 2.5.1, przeprowadzono analizę statyczną układu, stosując trzy różne modele matematyczne:

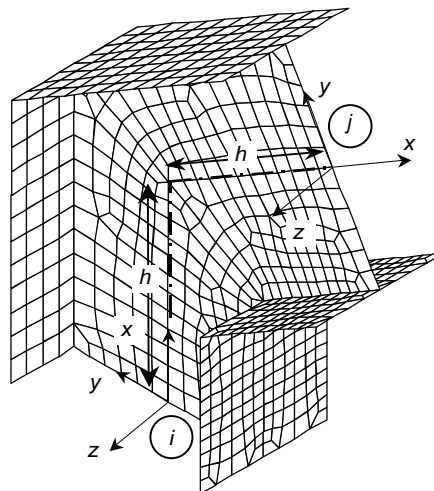
- model prętowy z zastosowaniem klasycznych elementów belkowych (zgodny z opisem w przykładzie 2.5.1),
- model prętowy (zgodny z opisem w przykładzie 2.5.1) z zastosowaniem superelementu węzła typu W-120°A (rys. 2.20 i 2.39) do modelowania połączenia słupa z rygłem oraz rygli w kalenicy (rys. 2.38),
- model powłokowy (zgodny z opisem w przykładzie 2.5.1).

Na rysunkach 2.40 i 2.41 przedstawiono przebieg zmienności kąta skręcenia wzdłuż rygla i lewego słupa. Analiza porównawcza trzech ww. modeli wykazała duże rozbieżności odpowiedzi konstrukcji klasycznego modelu prętowego (model A) z modelem odniesienia, jakim jest układ powłokowy (model C).

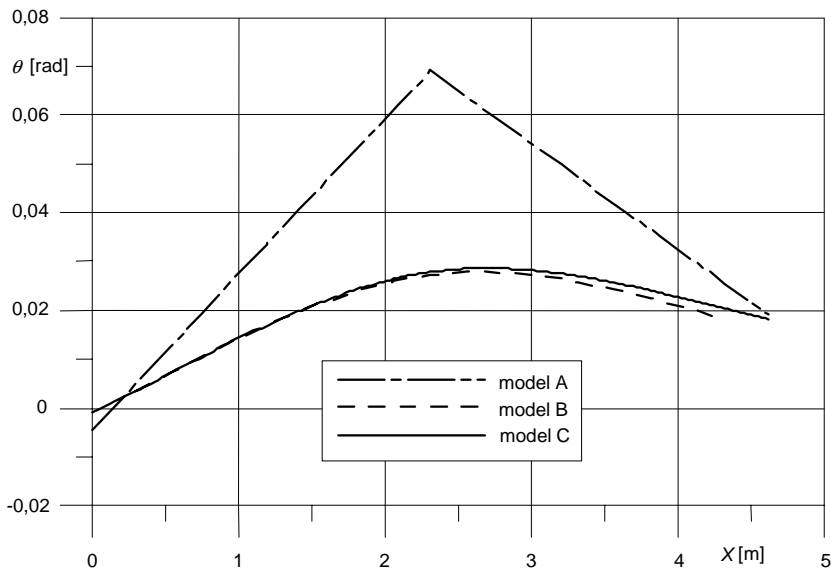
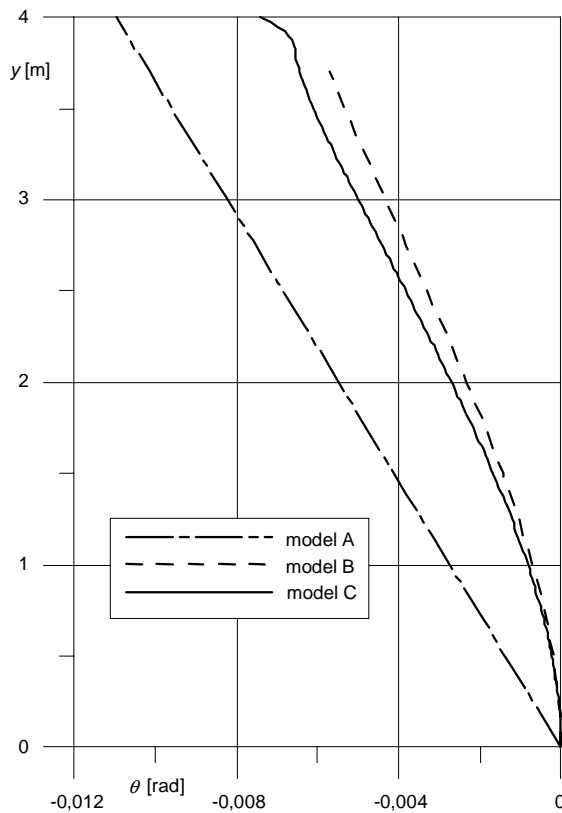


prętowy model B : węzłów : 65 (**455** DOF)  
 powłokowy model C : węzłów : 20251 (**121506** DOF)

Rys. 2.38. Rama hali stalowej



Rys. 2.39. Zastosowany superelement węzła W-120°A –  $h = 300\text{ mm}$

Rys. 2.40. Przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż osi rygłaRys. 2.41. Przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż słupa lewego ramy

Można stwierdzić, że i w tym przypadku konstrukcji model B wykorzystujący cienkościenne elementy prętowe do modelowania słupów i rygli oraz superelementy do modelowania naroży ram, jak i połączenia rygli w kalenicy, daje wyniki analizy zbliżone do modelu C (model powłokowy). Zastosowany w tym przykładzie superelement ma małe rozmiary w stosunku do wysokości zastosowanego dźwigara dwuteowego ( $h = 300$  mm), co pokazano na rys. 2.39. Celowe zatem by było także i w tym przypadku przeprowadzić analizę parametryczną, podobną do przykładu 2.5.2, w celu oceny wpływu przyjęcia tak zwanej długości współpracującej węzła na zbieżność wyników prętowego modelu B z powłokowym modelem odniesienia C.

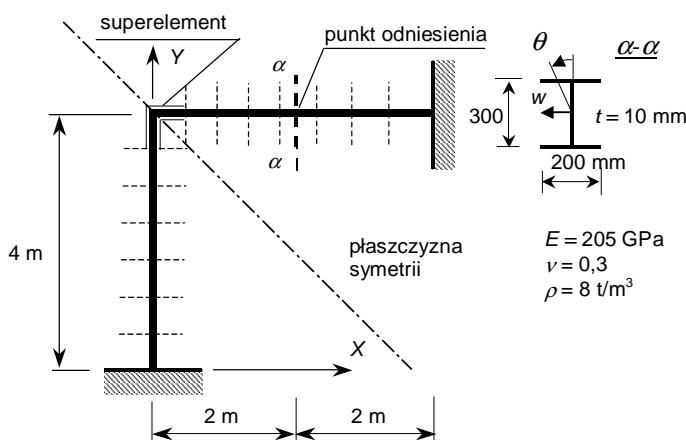
### 2.5.5. Dynamika – analiza porównawcza trzech modeli numerycznych

Rozważmy tę samą jak w przykładzie 2.5.1, ramę zbudowaną z prętów cienkościennych pokazaną na rys. 2.42 (Mikulski i Szymczak 2009).

Analizę drgań własnych układu wykonano z uwzględnieniem trzech różnych modeli matematycznych (opisanych w przykładzie 2.5.1):

- A) model prętowy z zastosowaniem klasycznych elementów belkowych,
- B) model prętowy z zastosowaniem superelementu węzła,
- C) model powłokowy (patrz rys. 2.24).

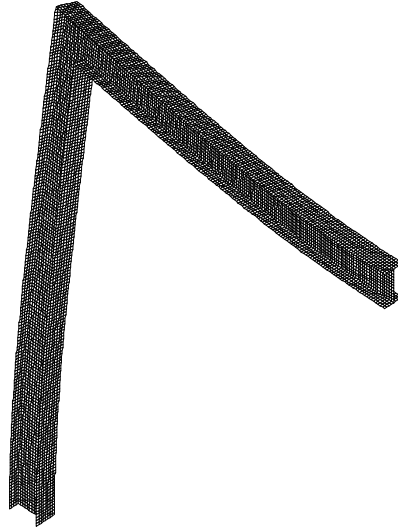
W modelu B wykorzystano oprócz macierzy sztywności superelementu węzła, macierz mas wyznaczoną zgodnie z opisem zawartym w rozdziale 2.2. Dla trzech wymienionych powyżej modeli wyznaczono częstotliwości i postacie drgań własnych. Aby można było porównywać ze sobą postacie drgań własnych, odpowiednie wektory własne znormalizowano w taki sposób, aby w przekroju  $\alpha-\alpha$  (rys. 2.42) poziome przemieszczenie na kierunku normalnym do płaszczyzny środniczka  $w_\alpha = 1$  (jest to punkt w środku rozpiętości rygla). Ponieważ układ jest symetryczny względem płaszczyzny nachylonej pod kątem  $45^\circ$ , to postacie drgań będą symetryczne lub antysymetryczne względem tej płaszczyzny. Wystarczy zatem przedstawić składowe wektora własnego jedynie dla rygla.



Rys. 2.42. Rama cienkościenna – podstawowe dane

Jako model odniesienia przyjęto, jak w poprzednich przykładach, model C – powłokowy. Na poniższych trzech rysunkach przedstawiono postacie drgań własnych ramy.

W pierwszej, podstawowej postaci drgań, dominuje efekt zgięciowy w kierunku prostopadłym do płaszczyzny układu (rys. 2.43). Następne postaci pokazują silne sprzężenie zginania ze skręcaniem elementów układu (rys. 2.44 i 2.45).

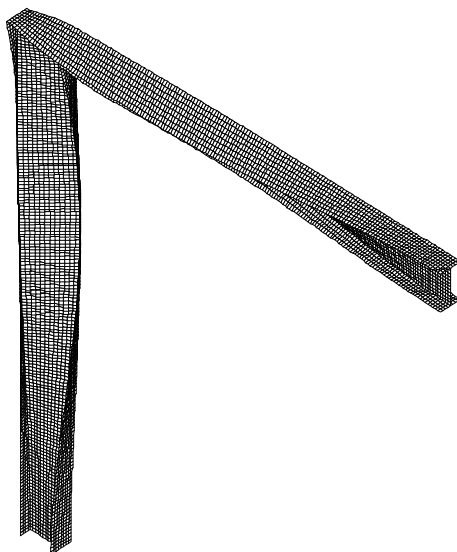


Rys. 2.43. Pierwsza postać drgań własnych,  $n_1 = 7,68$  Hz

W tabelicy 2.2 przedstawiono porównanie częstotliwości drgań własnych modelu A (klasyczny układ prętowy) z modelem C (model powłokowy). Wyraźnie widać silny wpływ skręcania szczególnie dla postaci 2 i 3. Z kolei model B (prętowe elementy cienkościenne z superelementem węzła) porównano z modelem C na rys. 2.46, gdzie wartości częstotliwości drgań własnych modelu B zestawiono graficznie, w zależności od przyjętej długości współpracującej superelementu  $a$  (rys. 2.22).



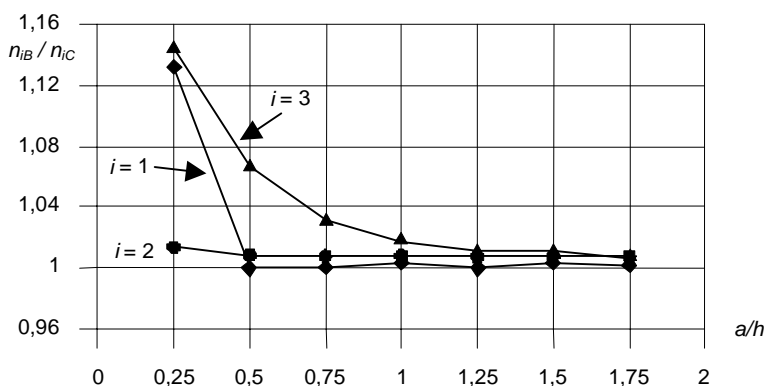
Rys. 2.44. Druga postać drgań własnych,  $n_2 = 32,88$  Hz

Rys. 2.45. Trzecia postać drgań własnych,  $n_3 = 35,79$  Hz

Tablica 2.2

Pierwsze trzy częstotliwości drgań własnych – porównanie modelu A z modelem C

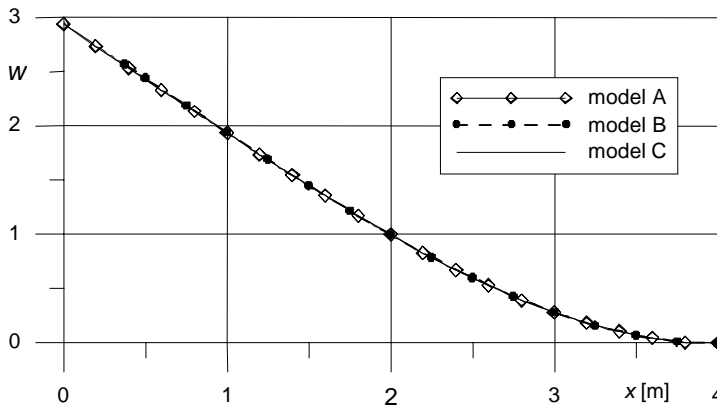
Model A	Model C
$n_{1A} = 7,77$ Hz	$n_{1C} = 7,68$ Hz
$n_{2A} = 17,13$ Hz	$n_{2C} = 32,88$ Hz
$n_{3A} = 17,14$ Hz	$n_{3C} = 35,79$ Hz



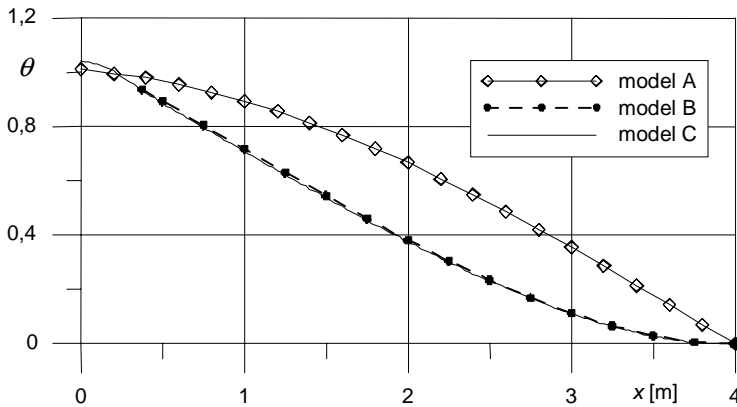
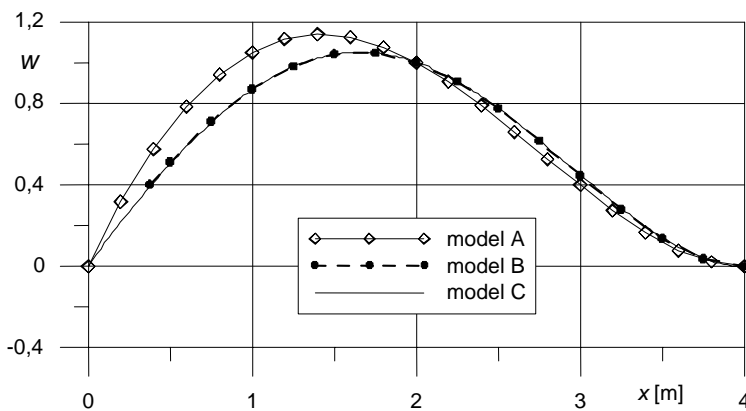
Rys. 2.46. Pierwsze trzy względne wartości częstotliwości drgań własnych  $n_{iB}/n_{iC}$  w zależności od przyjętej względnej długości współpracującej superelementu węzła  $a/h$  – porównanie modelu B z modelem C

Następne rysunki przedstawiają różnice pomiędzy postaciami drgań własnych trzech analizowanych modeli ramy cienkościennej.

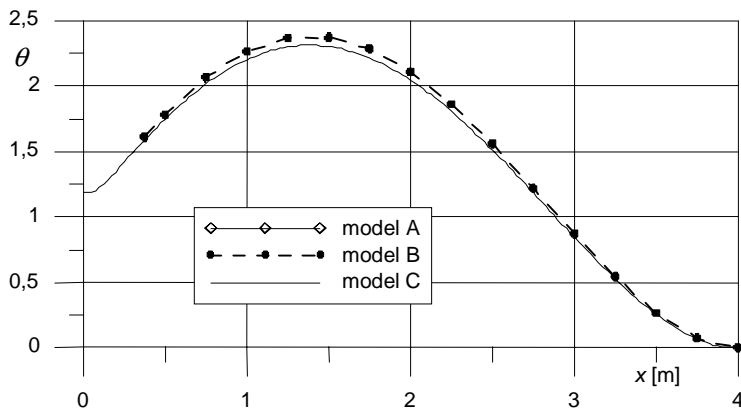




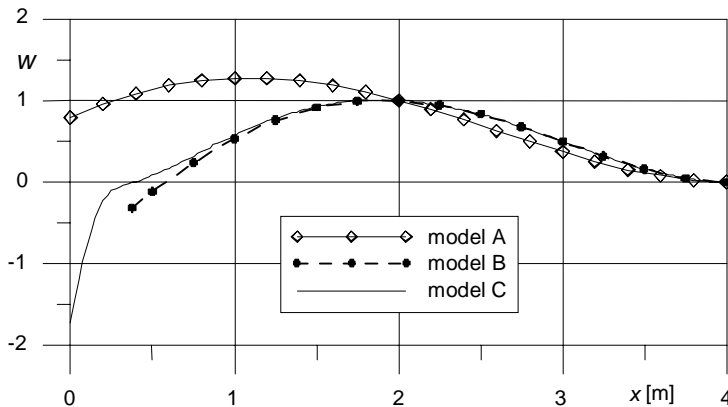
Rys. 2.47. Pierwsza postać drgań – przebieg zmienności przemieszczenia w wzdłuż osi rygla ramy

Rys. 2.48. Pierwsza postać drgań – przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż osi rygla ramy

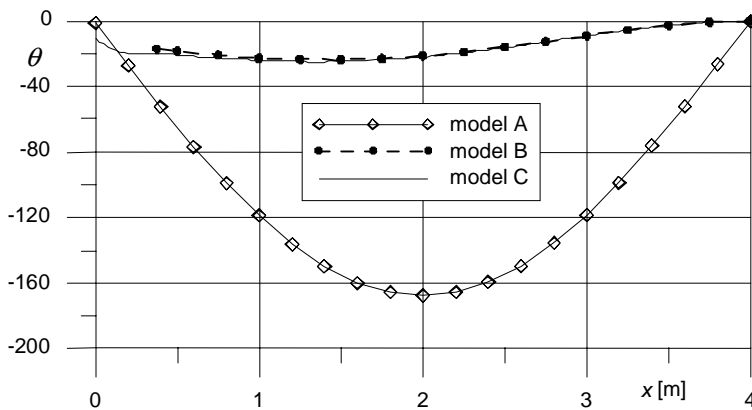
Rys. 2.49. Druga postać drgań – przebieg zmienności przemieszczenia w wzdłuż osi rygla ramy



Rys. 2.50. Druga postać drgań – przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż osi rygła ramy (niewidoczny przebieg krzywej modelu A – znacznie wykracza poza zakres osi  $\theta$ )



Rys. 2.51. Trzecia postać drgań – przebieg zmienności przemieszczenia  $w$  wzdłuż osi rygła ramy



Rys. 2.52. Trzecia postać drgań – przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż osi rygła ramy

Analiza numeryczna drgań własnych ramy cienkościennej pozwala stwierdzić, że model ramy zbudowanej z elementów cienkościennych i superelementu węzła daje wyniki zgodne z rozwiązaniem dla bardziej dokładnego modelu powłokowego. Należy nadmienić, że rozmiar zadania numerycznego w przypadku pierwszym jest jedynie małą częścią w stosunku do modelu powłokowego. Można zauważyć bardzo silny wpływ spaczenia przekroi poprzecznych na częstotliwości drgań własnych i na ich postaci.

Następny przykład będzie dotyczył wpływu różnego typu stężeń węzła na dynamiczne zachowanie się ramy.

### 2.5.6. Dynamika – wpływ stężeń węzła

Zastosowanie stężeń węzła w postaci różnego typu przepon powoduje radykalną zmianę dystrybucji bimomentów w węźle (patrz rozdział 2.3). Aby zbadać ten wpływ na dynamiczne zachowanie się ramy cienkościennej, przeprowadzono analizę numeryczną, stosując model powłokowy z uwzględnieniem czterech możliwych konstrukcji węzła:

typ I – W-90°A – węzeł bez stężeń (rys. 2.16),

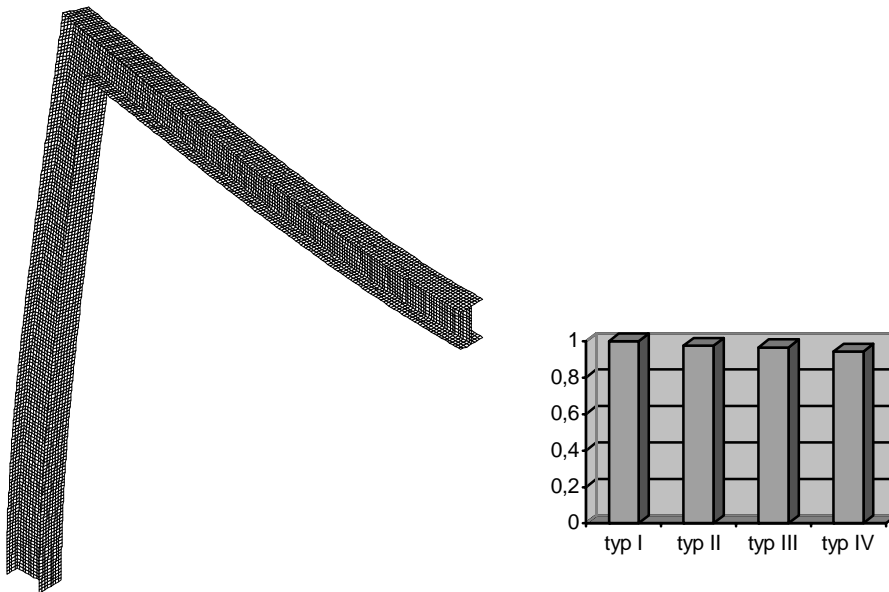
typ II – W-90°B – węzeł z przeponą ukośną (rys. 2.17),

typ III – W-90°C – węzeł z dwiema przeponami pionową i poziomą (rys. 2.18),

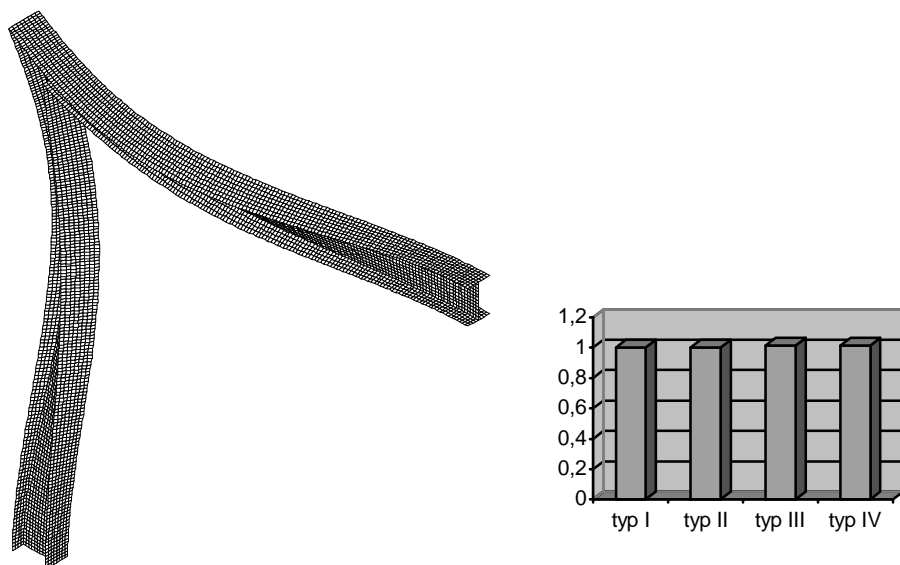
typ IV – W-90°D – węzeł z trzema ww. przeponami (rys. 2.19).

Model powłokowy ramy przyjęto jak w poprzednim przykładzie 2.5.5.

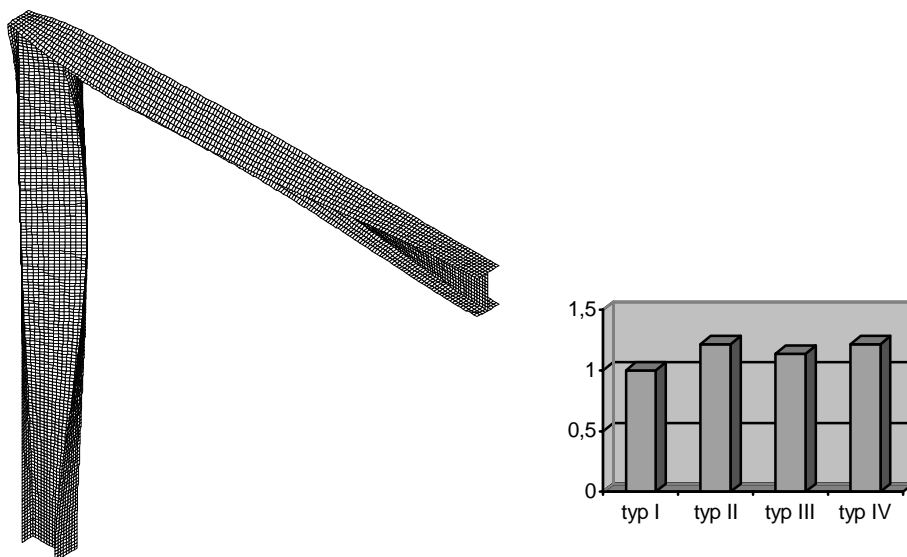
Przedstawiono względne zmiany częstotliwości drgań własnych ramy w stosunku do przypadku ramy z węzłem typu I (bez stężeń). Przedstawiono wyniki w formie graficznej na poniższych pięciu rysunkach.



Rys. 2.53. Pierwsza postać i częstotliwość drgań własnych – węzeł typ I  $n_1 = 7,68$  Hz

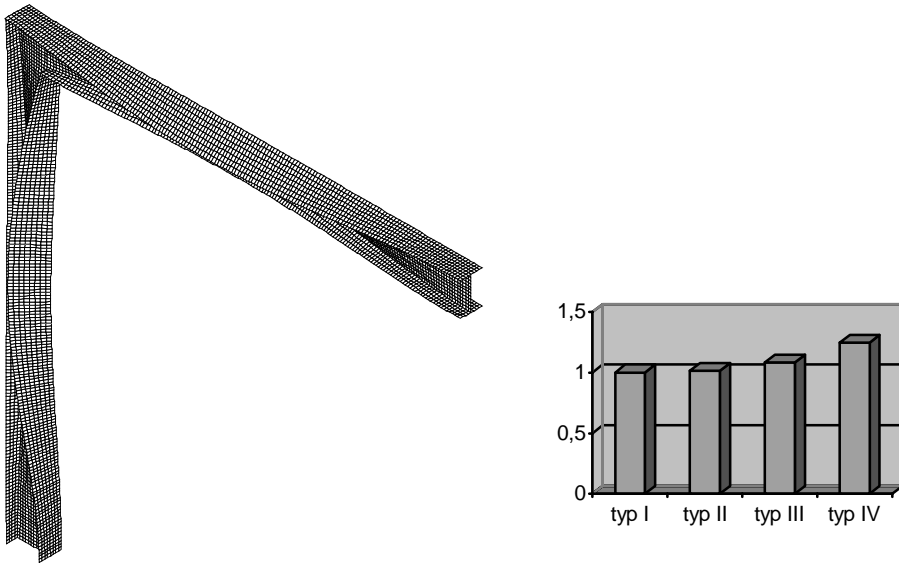


Rys. 2.54. Druga postać i częstotliwość drgań własnych – węzeł typ I  $n_2 = 32,88$  Hz

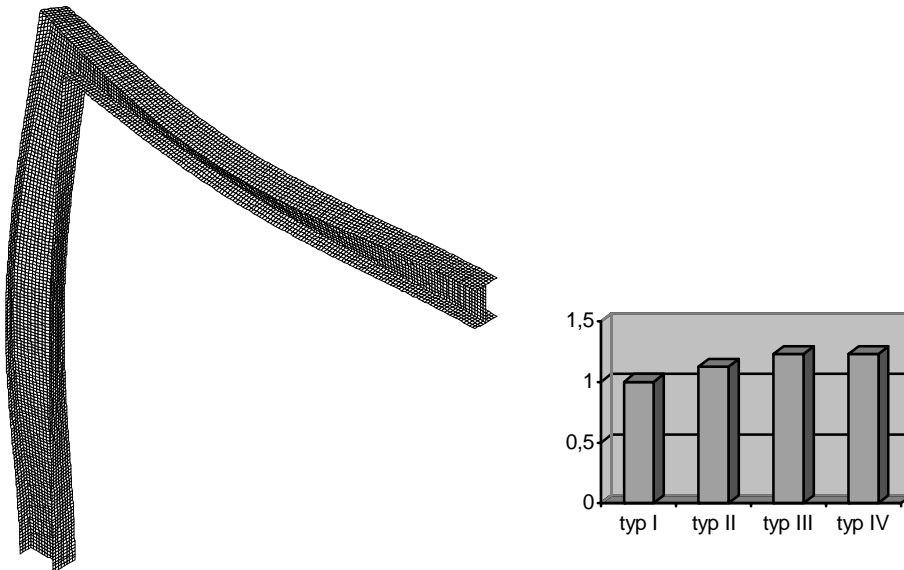


Rys. 2.55. Trzecia postać i częstotliwość drgań własnych – węzeł typ I  $n_3 = 35,79$  Hz

Na powyższych diagramach można zauważyć zmianę wartości częstotliwości drgań własnych nawet o 25%, w zależności od przyjętego w analizie typu węzła. Ma to również wpływ na postacię drgań, co przedstawiono przykładowo na dwóch rysunkach (2.58 i 2.59) dla trzeciej postaci drgań własnych, porównując wyniki ramy z węzłem typu I z rezultatami dla ramy z węzłem typu II.

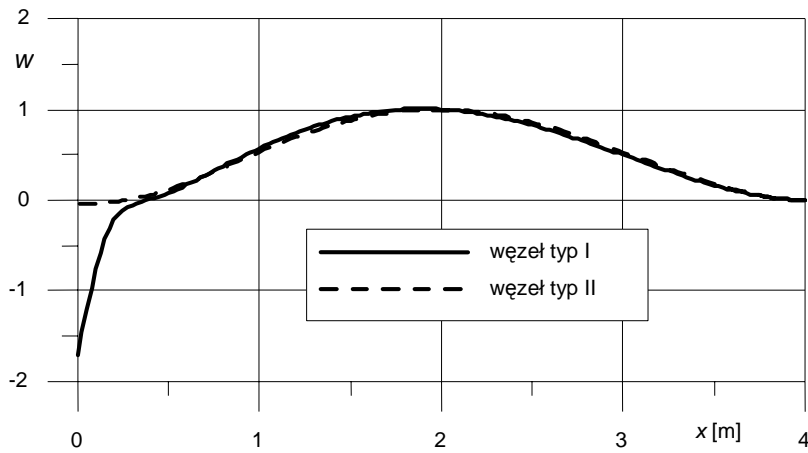
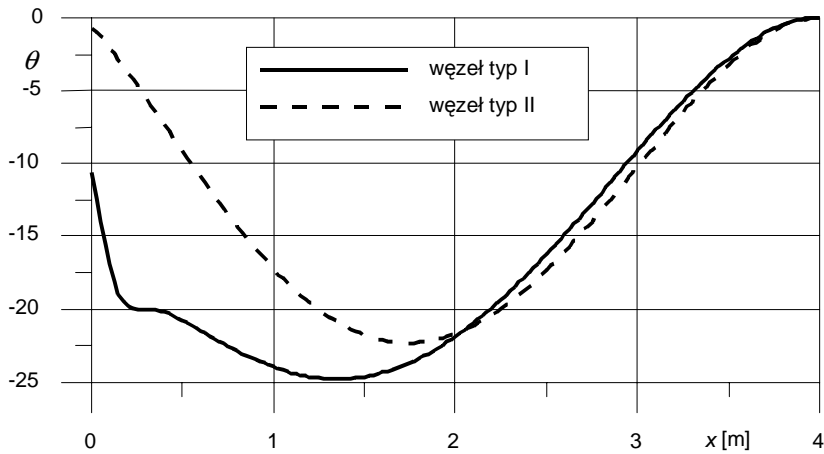


Rys. 2.56. Czwarta postać i częstotliwość drgań własnych – węzeł typ I  $n_4 = 42,98$  Hz



Rys. 2.57. Piąta postać i częstotliwość drgań własnych – węzeł typ I  $n_5 = 47,23$  Hz

W następnym rozdziale przedstawiona zostanie analiza wrażliwości, obecnie szeroko stosowana zarówno w analizie statycznej, jak i dynamicznej układów konstrukcyjnych. Ważna jest bowiem ocena zależności możliwych zmian zmiennych projektowych, opisujących model numeryczny, na otrzymane wyniki, opisane zmiennymi stanu.

Rys. 2.58. Trzecia postać drgań – przebieg zmienności przemieszczenia  $w$  wzdłuż osi rygła ramyRys. 2.59. Trzecia postać drgań – przebieg zmienności kąta skręcenia  $\theta$  wzdłuż osi rygła ramy

## Rozdział 3

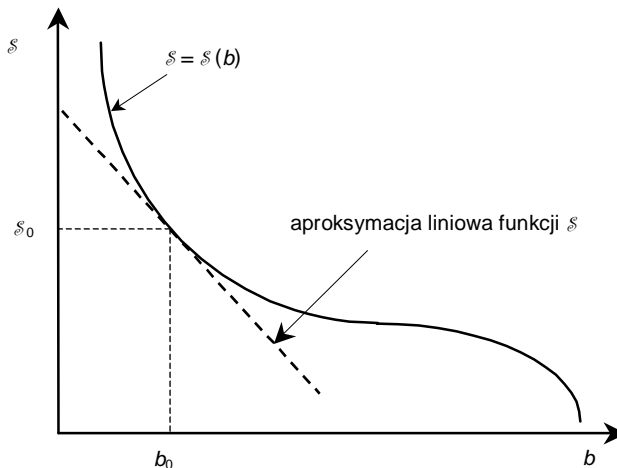
# ANALIZA WRAŻLIWOŚCI

W mechanice konstrukcji analiza wrażliwości polega na badaniu zachowania się konstrukcji w wyniku zmian zmiennych projektowych. Jeżeli zmienne projektowe są funkcjami, zachowanie się konstrukcji prętowych opisuje funkcjonal stanu  $\mathcal{S}(\mathbf{b}(x))$  (stan przemieszczenia, stan naprężenia, stan graniczny), gdzie  $\mathbf{b}(x)$  jest wektorem funkcji zmiennych projektowych. W przypadku, gdy zmienne projektowe tworzą zbiór liczb, zmienna stanu opisana jest funkcją charakterystyczną  $\mathcal{S}(\mathbf{b})$ , gdzie  $\mathbf{b}$  jest wówczas wektorem zmiennych projektowych. Ten drugi przypadek jest częściej stosowany w praktyce inżynierskiej.

Analiza wrażliwości bazuje na rozwinięciu funkcji charakterystycznej  $\mathcal{S}$  (zmiennej stanu) w szereg Taylora wokół rozwiązania początkowego określonego początkową wartością zmiennych projektowych  $b_0$

$$\mathcal{S}(b_0 + \delta b) \cong \mathcal{S}(b_0) + \delta \mathcal{S}(b_0) + \delta^2 \mathcal{S}(b_0) + \dots \quad (3.1)$$

W przypadku uwzględnienia tylko przyrostu liniowego, zachowanie konstrukcji opisane zmienną stanu  $\mathcal{S}$  będzie aproksymowane funkcją liniową (rys. 3.1) wokół rozwiązania początkowego dla zmiennych projektowych  $b_0$  – jest to analiza wrażliwości pierwszego rzędu, zaś przy uwzględnieniu członu nieliniowego funkcja  $\mathcal{S}$  będzie aproksymowana parabolą drugiego stopnia (rys. 3.2) – jest to analiza wrażliwości drugiego rzędu (Haftka i Mróz 1986).

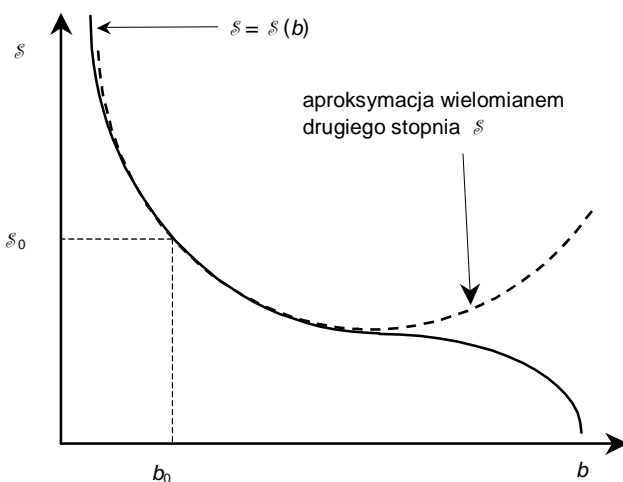


Rys. 3.1. Analiza wrażliwości pierwszego rzędu

W niniejszej pracy rozpatruje się analizę wrażliwości pierwszego rzędu, która w wielu praktycznych problemach inżynierskich daje dostatecznie dużo informacji niezbędnych w projektowaniu, optymalizacji, czy wzmacnianiu realnej konstrukcji. Wyprowadzone zo-

staną podstawowe wzory do wyznaczania wrażliwości z góry ustalonej zmiennej stanu (przemieszczenie, siła wewnętrzna, reakcja w zadanym punkcie) ze względu na wariacje zmiennych projektowych takich, jak moduł sprężystości materiału, sztywność sprężystego podparcia, wysokość lub szerokość elementów przekroju poprzecznego itd. Przedstawione zostaną rozważania z uwzględnieniem dwóch opisów matematycznych rzeczywistej konstrukcji:

- opis ciągły – geometrię, obciążenie i zachowanie konstrukcji opisują funkcje ciągłe w przedziałach (Washizu 1968), wariacja zadanej zmiennej stanu będzie funkcjonalem zależnym od funkcji wariacji zmiennych projektowych,
- opis dyskretny – szeroko stosowany w zastosowaniu metoda elementów skończonych (Zienkiewicz 1977). Wrażliwość zadanej zmiennej stanu będzie opisana wektorem wrażliwości pierwszego rzędu zgodnym z wektorem wariacji zmiennych projektowych.



Rys. 3.2. Analiza wrażliwości drugiego rzędu

Pierwsza z wymienionych metod ma głównie zastosowanie w przypadku mało skomplikowanych konstrukcji z prostym schematem obciążenia, natomiast opis dyskretny ma zastosowanie w większości przypadków praktyki inżynierskiej, gdzie powszechnie wykorzystywana jest metoda elementów skończonych, która umożliwia analizę złożonych układów konstrukcyjnych.

W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione różnego typu problemy analizy wrażliwości w odniesieniu do statyki i dynamiki cienkościennych układów prętowych. Uzyskane bezpośrednio zależności wiążące wariacje zmiennych stanu, opisujących zachowanie się konstrukcji, z wariacjami zmiennych projektowych, opisującymi model matematyczny konstrukcji, dają inżynierowi możliwości świadomego modyfikowania cech geometrycznych czy fizycznych konstrukcji, w celu uzyskania zamierzonego efektu (np. redukcji siły wewnętrznej w najbardziej wyężonym przekroju poprzecznym układu). Jest to zatem naukowe wsparcie szeroko rozumianej intuicji i doświadczenia inżynierskiego. Możliwości wykorzystania przedstawionej w tym rozdziale analizy wrażliwości w praktycznych zagadnieniach inżynierskich zostały opisane w rozdziale piątym.



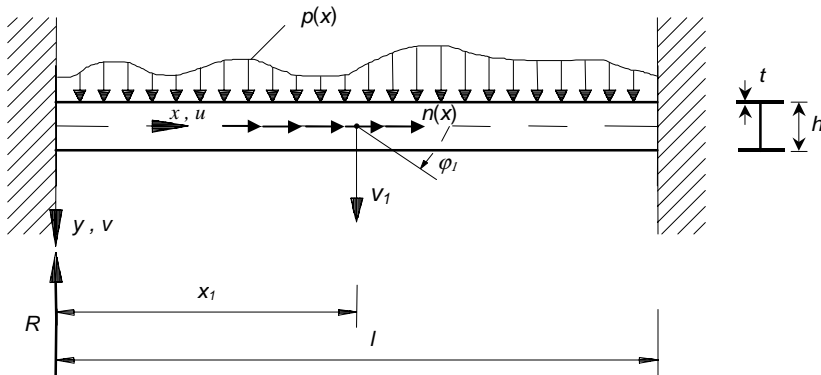
### 3.1. Statyka

#### 3.1.1. Układy prętowe – opis ciągły

Analityczne rozwiązanie problemu statyki układu ramowego zbudowanego z cienkościennych, bisymetrycznych prętów można uzyskać jedynie dla płaskiego zagadnienia, gdzie układ ramowy oraz poszukiwany stan deformacji leży w jednej i tej samej płaszczyźnie. Każdy przestrzenny przypadek analizy układu pociąga za sobą konieczność uwzględnienia efektów skręcania, a co za tym idzie, określenia dystrybucji sił wewnętrznych w węzle. Przy braku warunków równowagi bimomentów przywęzłowych niemożliwe jest otrzymanie analitycznego rozwiązania tego problemu. W przypadku płaskiego zagadnienia nie występują efekty skręcania elementów rami. Z kolei efekt skręcania może być analitycznie opisany dla belek prostych lub belek ciągłych (Cywiński 1978, Obrębski 1991). Dla belek cienkościennych o bisymetrycznym przekroju poprzecznym problemy zginania i skręcania są rozłączne. Zatem opis ciągły układu w zagadnieniach wrażliwości zostanie przedstawiony dla dwóch przypadków:

- płaski układ prętowy – stan deformacji leży w płaszczyźnie układu, powstają w układzie momenty zginające, siły tnące i siły normalne,
- belka prosta lub ciągła – analizowane będzie zagadnienie skręcania skrupowanego układu, powstają wówczas jedynie momenty skręcające i bimomenty.

W pierwszej kolejności zostanie przedstawiona analiza wrażliwości płaskiego układu ramowego, zbudowanego z bisymetrycznych prętów cienkościennych. Rozważania przedstawimy na przykładzie prostej belki obustronnie utwierdzonej pokazanej na rys. 3.3. Choć analizowany jest prosty układ prętowy, to wyprowadzone zależności mają charakter ogólny i będą także ważne w przypadku dowolnej płaskiej konstrukcji ramowej.



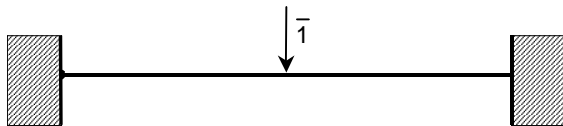
Rys. 3.3. Płaski układ prętowy – układ rzeczywisty

Przykładowo wyznaczona zostanie wrażliwość przemieszczenia  $v_1$  w zadanym przekroju poprzecznym belki  $x = x_1$  ze względu na wariacje przyjętych zmiennych projektowych  $b$ , takich jak na przykład wysokość  $h$  lub grubość półki  $t$  przekroju poprzecznego belki, moduł sprężystości  $E$  itd.

Przemieszczenia  $v_1$  w zadanym przekroju poprzecznym belki  $x = x_1$  wyznaczmy, korzystając z zasady pracy wirtualnej

$$\bar{\mathbf{I}} \cdot v_1 = \int_0^l \left[ -\bar{M} \cdot \varphi' + \bar{T} (v' - \varphi) + \bar{N} \cdot u' \right] dx \quad (3.2)$$

gdzie obciążenie wirtualną siłą skupioną  $\bar{\mathbf{I}}$  należy przyłożyć w punkcie i kierunku szukanego przemieszczenia  $v_1$  (rys. 3.4),  $\bar{M}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{N}$  są odpowiednio wewnętrznymi momentami zginającymi, siłami tnącymi oraz siłami normalnymi wyznaczonymi dla danego układu statycznego obciążonego jedynie wirtualną siłą jednostkową  $\bar{\mathbf{I}}$ .



Rys. 3.4. Wrażliwość przemieszczenia  $v_1$  – układ sprężony

Na skutek nieskończenie małych zmian zmiennych projektowych  $\delta b$  wystąpi nieskończenie mała kinematycznie dopuszczalna wariacja przemieszczeń

$$\bar{\mathbf{I}} \cdot (v_1 + \delta v_1) = \int_0^l \left\{ -\bar{M} \cdot (\varphi' + \delta\varphi') + \bar{T} [(v' - \varphi) + \delta(v' - \varphi)] + \bar{N} \cdot (u' + \delta u') \right\} dx \quad (3.3)$$

Odejmując od równania (3.3) równanie (3.2) otrzymamy

$$\delta v_1 = \int_0^l \left\{ -\bar{M} \delta\varphi' + \bar{T} \delta(v' - \varphi) + \bar{N} \delta u' \right\} dx \quad (3.4)$$

Wykorzystując znane zależności

$$\begin{aligned} \varphi' &= -\frac{M}{EJ} \\ (v' - \varphi) &= \kappa \frac{T}{GA} \\ u' &= \frac{N}{EA} \end{aligned} \quad (3.5)$$

można potrzebne zmiany przemieszczeń (3.5) względem wariacji zmiennych projektowych  $\delta b$  zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \delta\varphi' &= \delta\left(-\frac{M}{EJ}\right) = -\frac{\delta M}{EJ} + \frac{M}{(EJ)^2} (EJ)_{,b} \delta b \\ \delta(v' - \varphi) &= \delta\left(\frac{T\kappa}{GA}\right) = \frac{\delta T\kappa}{GA} - \frac{T}{\left(\frac{GA}{\kappa}\right)^2} \left(\frac{GA}{\kappa}\right)_{,b} \delta b \\ \delta u' &= \delta\left(\frac{N}{EA}\right) = \frac{\delta N}{EA} - \frac{N}{(EA)^2} (EA)_{,b} \delta b \end{aligned} \quad (3.6)$$

Podstawiając zależności (3.6) do równania (3.4) otrzymamy

$$\delta v_1 = \int_l \left[ -\frac{\bar{M}M}{(EJ)^2} (EJ)_{,b} - \frac{\bar{T}T}{\left(\frac{GA}{\kappa}\right)^2} \left(\frac{GA}{\kappa}\right)_{,b} - \frac{\bar{N}N}{(EA)^2} (EA)_{,b} \right] \delta b dx + \int_l \left[ \frac{\bar{M} \delta M}{EJ} + \kappa \frac{\bar{T} \delta T}{GA} + \frac{\bar{N} \delta N}{EA} \right] dx \quad (3.7)$$

Drugą całkę wzoru (3.7) można, wykorzystując zależności (3.5), przedstawić w postaci

$$\int_l \left[ \frac{\bar{M} \delta M}{EJ} + \kappa \frac{\bar{T} \delta T}{GA} + \frac{\bar{N} \delta N}{EA} \right] dx = \int_l \left[ -\bar{\varphi}' \delta M + (\bar{v}' - \bar{\varphi}) \delta T + \bar{u}' \delta N \right] dx = \int_l (\delta p \bar{v} + \delta n \bar{u}) dx \quad (3.8)$$

Jeżeli nie będziemy brali pod uwagę zmian obciążenia zewnętrznego  $\delta p$  i  $\delta n$  (czyli obciążenia nie zaliczymy do zmiennych projektowych), powyższe równanie będzie równe zero. Zatem wariację przemieszczenia  $v_1$  można wyrazić za pomocą wariacji zmiennych projektowych  $\delta b$ , a wzór (3.7) po uwzględnieniu (3.8) przyjmie postać

$$\delta v_1 = \int_l \left[ -\frac{\bar{M}M}{(EJ)^2} (EJ)_{,b} - \frac{\bar{T}T}{\left(\frac{GA}{\kappa}\right)^2} \left(\frac{GA}{\kappa}\right)_{,b} - \frac{\bar{N}N}{(EA)^2} (EA)_{,b} \right] \delta b dx \quad (3.9)$$

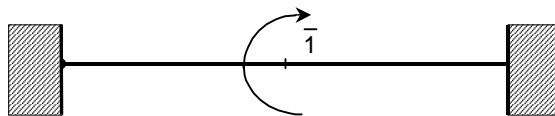
Powyższy wzór jest funkcjonalem zależnym od wariacji zmiennych projektowych  $\delta b$ , a wyrażenie w nawiasie jest podcałkową funkcją wrażliwości pierwszego rzędu  $F$  zmian przemieszczenia  $\delta v_1$  względem wariacji zmiennych projektowych  $\delta b$ .

$$\delta v_1 = \int_l F \delta b dx \quad (3.10)$$

Jest to pełna analogia do klasycznej linii wpływu zadanej wielkości statycznej – zmiennej stanu. Jedyną różnicą polega na tym, że wyznaczamy wariację zadanej zmiennej stanu (tutaj  $\delta v_1$ ) wokół rozwiązania początkowego  $v_1$ .

Podobnie, żeby wyznaczyć wrażliwość kąta obrotu  $\varphi_1$ , wykorzystujemy zasadę pracy wirtualnej:

$$\bar{1} \cdot \varphi_1 = \int_0^l \left[ -\bar{M} \cdot \varphi' + \bar{T} (v' - \varphi) + \bar{N} \cdot u' \right] dx \quad (3.11)$$



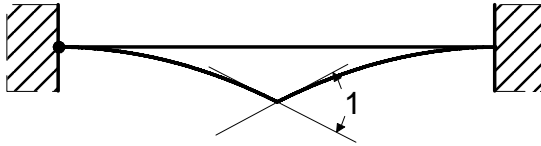
Rys. 3.5. Wrażliwość kąta obrotu  $\varphi_1$  – układ sprężony

Wówczas układ sprzężony będzie obciążony momentem skupionym  $\bar{M} = \bar{1}$  w punkcie  $x = x_1$  (rys. 3.5), a wyznaczenie wariacji kąta obrotu  $\delta\varphi_1$  względem wariacji zmiennych projektowych  $\mathcal{B}$  będzie podobne do wyżej przedstawionego.

W przypadku wyznaczania wrażliwości dowolnej siły wewnętrznej powyższe rozważania nie tracą ważności, zmienia się jedynie układ sprzężony. Na przykład chcąc wyznaczyć wrażliwość momentu zginającego  $M_1$  wzór (3.2) przyjmie postać:

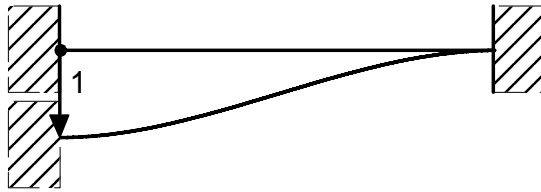
$$\bar{1} \cdot M_1 = \int_0^l [-\bar{M} \varphi' + \bar{T} (v' - \varphi) + \bar{N} \cdot u'] dx \quad (3.12)$$

Odpowiadający problemowi układ sprzężony przedstawiono na rys. 3.6.



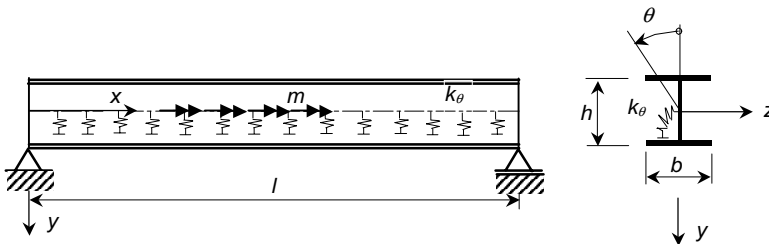
Rys. 3.6. Wrażliwość momentu zginającego  $M_1$  – układ sprzężony

Podobnie, chcąc wyznaczyć wrażliwość reakcji podporowej  $R$ , układ sprzężony należy przyjąć jak na rys. 3.7.



Rys. 3.7. Wrażliwość reakcji podporowej  $R$  – układ sprzężony

Jako drugi przypadek zostanie przedstawiona analiza wrażliwości, dotycząca zagadnienia skręcania skrępowanej cienkościennej, bisymetrycznej belki prostej z uwzględnieniem stężenia na skręcanie (rys. 3.8).



Rys. 3.8. Bisymetryczna belka cienkościenna o przekroju otwartym

Jak już wcześniej wspomniano, w przypadku bisymetrycznych prętów cienkościennych zginanie i skręcanie są zagadnieniami rozłącznymi. Całkowita energia potencjalna belki o długości  $l$  z pręponami poddanej skręcaniu wynosi (Trahair 1993):

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l [EJ_\omega \theta''^2 + GJ_d \theta'^2 + k_\theta \theta^2 - m\theta] dx \quad (3.13)$$

gdzie  $m$  oznacza obciążenie momentem skręcającym rozłożonym wzdłuż długości pręta,  $E$  moduł sprężystości,  $J_\omega$  wycinkowy moment bezwładności,  $\theta$  jest kątem skręcenia,  $G$  oznacza moduł ścinania,  $J_d$  jest momentem bezwładności czystego skręcenia,  $k_\theta$  jest sztywnością sprężystego podparcia na skręcenie (steżenie zewnętrzne). Znaki „prim” (...)’ = (...)/ $dx$  oznaczają pochodną względem współrzędnej  $x$ .

Zmienną stanu  $\mathcal{S}$  w danym punkcie układu wyznaczymy, korzystając z zasady pracy wirtualnej:

$$\bar{1} \cdot \mathcal{S} = \int_0^l [EJ_\omega \theta'' \cdot \bar{\theta}'' + GJ_d \theta' \cdot \bar{\theta}' + k_\theta \theta \cdot \bar{\theta}] dx \quad (3.14)$$

Obciążenie wirtualne, zwane tutaj układem sprzężonym, przyjmujemy zgodnie z podanymi powyżej zasadami dla układów ramowych.

Na skutek nieskończenie małych zmian zmiennych projektowych  $\mathcal{B}$  wystąpi nieskończenie mała kinematycznie dopuszczalna wariacja przemieszczeń, wywołująca wariację  $\delta \mathcal{S}$ :

$$\bar{1} \cdot (\mathcal{S} + \delta \mathcal{S}) = \int_0^l [EJ_\omega (\theta'' + \delta \theta'') \cdot \bar{\theta}'' + GJ_d (\theta' + \delta \theta') \cdot \bar{\theta}' + k_\theta (\theta + \delta \theta) \cdot \bar{\theta}] dx \quad (3.15)$$

Odejmując od równania (3.15) równanie (3.14), otrzymamy:

$$\bar{1} \cdot \delta \mathcal{S} = \int_0^l [EJ_\omega \delta \theta'' \cdot \bar{\theta}'' + GJ_d \delta \theta' \cdot \bar{\theta}' + k_\theta \delta \theta \cdot \bar{\theta}] dx \quad (3.16)$$

Wykorzystując znane zależności:

$$\begin{aligned} B &= -EJ_\omega \theta'' \quad , \quad \theta'' = -\frac{B}{EJ_\omega} \\ M_x &= GJ_s \theta' \quad , \quad \theta' = \frac{M_x}{GJ_s} \\ m_k &= -k_\theta \theta \quad , \quad \theta = -\frac{m_k}{k_\theta} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Potrzebne zmiany przemieszczeń (3.17) względem wariacji zmiennych projektowych  $\mathcal{B}$  można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \delta \theta'' &= \delta \left( -\frac{B}{EJ_\omega} \right) = -\frac{\delta B}{EJ_\omega} + \frac{B}{(EJ_\omega)^2} (EJ_\omega)_{,b} \delta b \\ \delta \theta' &= \delta \left( \frac{M_x}{GJ_s} \right) = \frac{\delta M_x}{GJ_s} - \frac{M_x}{(GJ_s)^2} (GJ_s)_{,b} \delta b \\ \delta \theta &= \delta \left( -\frac{m_k}{k_\theta} \right) = -\frac{\delta m_k}{k_\theta} + \frac{m_k}{k_\theta^2} (k_\theta)_{,b} \delta b \end{aligned} \quad (3.18)$$

Uwzględnienie zależności (3.18) w równaniu (3.16) spowoduje:

$$\delta \mathcal{S} = \int_l \left[ -(EJ_\omega)_{,b} \theta'' \bar{\theta}'' - (GJ_d)_{,b} \theta' \bar{\theta}' + k_{\theta,b} \theta \bar{\theta} \right] \delta b dx + \int_l \left( \delta B \bar{\theta}'' + \delta M_x \bar{\theta}' - \delta m_k \bar{\theta} \right) dx \quad (3.19)$$

Zakładając, że jedynie zmienne projektowe opisujące układ konstrukcyjny będą podlegać zmianom, przy stałej wartości obciążenia ( $\delta m = 0$ ), drugi składnik wzoru (3.19) będzie równy zeru:

$$\int_l \left( \delta B \bar{\theta}'' + \delta M_x \bar{\theta}' - \delta m_k \bar{\theta} \right) dx = \int_l \delta m \bar{\theta} dx = 0 \quad (3.20)$$

co w rezultacie uprości wzór (3.19) do postaci:

$$\delta \mathcal{S} = \int_l \left[ -(EJ_\omega)_{,b} \theta'' \bar{\theta}'' - (GJ_d)_{,b} \theta' \bar{\theta}' + k_{\theta,b} \theta \bar{\theta} \right] \delta b dx \quad (3.21)$$

W przypadku, gdy znana jest funkcja przebiegu zmienności bimomentów  $B$ , momentów skręcających  $M_x$  i kąta skręcenia  $\theta$ , wzór (3.21), po uwzględnieniu zależności (3.17), przyjmie alternatywną postać:

$$\delta \mathcal{S} = \int_l \left[ -\frac{\bar{B} \bar{B}}{(EJ_\omega)^2} (EJ_\omega)_{,b} - \frac{\bar{M}_x \bar{M}_x}{(GJ_d)^2} (GJ_d)_{,b} + k_{\theta,b} \theta \bar{\theta} \right] \delta b dx \quad (3.22)$$

Jako zmienne stanu można w tym przypadku przyjąć siłę wewnętrzną lub przemieszczenie w zadanym przekroju czy reakcję podporową. Jako zmienne projektowe, które mogą podlegać zmianom, można przyjąć wymiary przekroju poprzecznego pręta (szerokość półki, wysokość środnika, grubość półki czy środnika), moduł sprężystości materiału czy stałą sprężystości sprężystego podparcia.

Przedstawiona analiza wrażliwości dotyczy prostej bisymetrycznej belki cienkościennej poddanej skręcaniu skrupowanemu z uwzględnieniem tzw. stężeń zewnętrznych na skręcanie. Bardziej ogólny przypadek skręcania monosymetrycznego pręta cienkościennego z uwzględnieniem sprzężenia skręcania ze zginaniem oraz różnego typu stężeń zewnętrznych i wewnętrznych pręta (przepony, przewiązki) przedstawione zostało w pracy (Szymczak 2001).

### 3.1.2. Układy dyskretne

Metoda elementów skończonych jest obecnie szeroko stosowana do analizy różnego typu układów konstrukcyjnych. Rzeczywista konstrukcja modelowana jest elementami skończonymi połączonymi ze sobą w punktach węzłowych. Tworzony jest zatem dyskretny model matematyczny układu. Zachowanie konstrukcji opisane jest wektorem stanu o skończonej liczbie elementów składowych.

Założmy, że chcemy wyznaczyć wrażliwość pewnej wielkości statycznej wyrażonej przez funkcję  $\mathcal{S}$  opisującej zachowanie konstrukcji (przemieszczenie uogólnione, siła wewnętrzna lub reakcja), która zależy zarówno od wektora zmiennych projektowych  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n\}^T$ , jak i od odpowiedzi układu  $\mathbf{u}$ , czyli  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{b}, \mathbf{u}(\mathbf{b}))$ . Wektor przemieszczeń węzłowych  $\mathbf{u}$  będzie także zależał od wariacji zmiennych projektowych  $\delta \mathbf{b}$ . Zatem

zmiany określonej przez projektanta zmiennej stanu  $\mathcal{S}$  można określić poprzez wariacje zmiennych projektowych  $\delta \mathbf{b} = \{\delta b_1, \delta b_2, \dots, \delta b_i, \dots, \delta b_n\}^T$ . Dla zmiennej projektowej  $b_i$  zachodzi związek

$$\delta \mathcal{S} = \frac{d\mathcal{S}}{db_i} \delta b_i = \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}}{db_i} \right) \delta b_i \quad (3.23)$$

gdzie  $\mathbf{u}$  oznacza globalny wektor przemieszczeń.

Układ równań MES w zagadnieniach liniowych przyjmuje postać (Zienkiewicz 1977):

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P}(\mathbf{b}) \quad (3.24)$$

gdzie globalna macierz sztywności  $\mathbf{K}(\mathbf{b})$  i globalny wektor obciążenia  $\mathbf{P}(\mathbf{b})$  zależą w sposób jawny od zmiennych projektowych  $\mathbf{b}$ . Różniczkując równanie (3.24), otrzymamy

$$\frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{b})}{\partial b_i} \mathbf{u} + \mathbf{K}(\mathbf{b}) \cdot \frac{d\mathbf{u}}{db_i} = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{b})}{\partial b_i} \quad (3.25)$$

z którego można wyznaczyć występującą w równaniu (3.23) różniczkę  $\frac{d\mathbf{u}}{db_i}$

$$\frac{d\mathbf{u}}{db_i} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{b}) \left[ \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{b})}{\partial b_i} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{b})}{\partial b_i} \mathbf{u} \right] \quad (3.26)$$

a zatem ostatecznie wzór (3.23) przyjmie postać

$$\delta \mathcal{S} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{b}) \left[ \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{b})}{\partial b_i} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{b})}{\partial b_i} \mathbf{u} \right] \right\} \delta b_i \quad (3.27)$$

Powyższy wzór jest końcowym rozwiązaniem w **metodzie bezpośredniej** (Haug i in. 1986). Należy podkreślić tutaj konieczność wyznaczenia odwrotności globalnej macierzy sztywności  $\mathbf{K}^{-1}(\mathbf{b})$ , co przy dużej liczbie stopni swobody może być zadaniem kłopotliwym. Można jednak ten problem wyeliminować, stosując **metodę wykorzystującą układ sprzężony** (Haug i in. 1986).

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$\boldsymbol{\eta}^T = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{b}) \quad (3.28)$$

równanie (3.27) przyjmie postać

$$\delta \mathcal{S} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} + \boldsymbol{\eta}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{b})}{\partial b_i} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{b})}{\partial b_i} \mathbf{u} \right] \right\} \delta b_i \quad (3.29)$$

Wektor  $\boldsymbol{\eta}$  należy wyznaczyć, rozwiązując sprzężony do równania (3.24) układ równań:

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{u}} \quad (3.30)$$

Zatem wyznaczenie wrażliwości danej wielkości opisującej statyczne zachowanie konstrukcji wymaga rozwiązania układu rzeczywistego oraz układu sprzężonego. Wektor

obciążeń w powyższym równaniu  $\partial \mathcal{S} / \partial \mathbf{u}$ , w przypadku wyznaczania wrażliwości przemieszczenia, stanowi obciążenie układu siłą jednostkową w miejscu i kierunku tego przemieszczenia. W przypadku wyznaczania wrażliwości siły wewnętrznej czy reakcji podporowej wektor obciążenia układu sprzężonego otrzymuje się poprzez jednostkowe wymuszenie w miejscu i na kierunku tej siły, o zwrocie przeciwnym do jej założonego dodatniego zwrotu.

Równania (3.27) i (3.29) zawierają w nawiasie wielkość skalarną

$$W_{s,i} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{b}) \left[ \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{b})}{\partial b_i} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{b})}{\partial b_i} \mathbf{u} \right] = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} + \boldsymbol{\eta}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{b})}{\partial b_i} - \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{b})}{\partial b_i} \mathbf{u} \right] \quad (3.31)$$

którą nazywamy współczynnikiem wrażliwości pierwszego rzędu zmiennej stanu  $\mathcal{S}$  względem wariacji  $i$ -tej zmiennej projektowej  $b_i$ . Otrzymano zatem bezpośrednią, liniową zależność opisującą wariację zmiennej stanu  $\mathcal{S}$ , zależną w sposób jawny od wariacji  $i$ -tej zmiennej projektowej  $b_i$  w otoczeniu rozwiązania początkowego

$$\delta \mathcal{S} = W_{s,i} \cdot \delta b_i \quad (3.32)$$

W przypadku wariacji  $n$  zmiennych projektowych wariację zmiennej stanu  $\mathcal{S}$  otrzymamy z zależności

$$\delta \mathcal{S} = \mathbf{w}_s^T \cdot \delta \mathbf{b} \quad (3.33)$$

gdzie  $\mathbf{w}_s = \{W_{s,1}, W_{s,2}, \dots, W_{s,i}, \dots, W_{s,n}\}^T$  jest wektorem wrażliwości pierwszego rzędu, a  $\delta \mathbf{b} = \{\delta b_1, \delta b_2, \dots, \delta b_i, \dots, \delta b_n\}^T$  oznacza wektor wariacji zmiennych projektowych.

W ten sposób otrzymaliśmy prostą zależność określającą wpływ wariacji zmiennych projektowych  $\delta \mathbf{b}$  na zmiany odpowiedzi układu opisaną zmienną stanu  $\delta \mathcal{S}$ .

## 3.2. Dynamika

### 3.2.1. Analiza wrażliwości wartości własnych

Zagadnienie drgań swobodnych bez uwzględnienia tłumienia opisuje równanie MES

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

gdzie  $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{b})$  i  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_s(\mathbf{b}) - P \cdot \mathbf{K}_g(\mathbf{b})$  jest odpowiednio globalną macierzą mas i sztywności, z uwzględnieniem wpływu sił osiowych, zależną od zmiennych projektowych  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{u}$  jest globalnym wektorem przemieszczeń węzłowych,  $\mathbf{K}_s(\mathbf{b})$  macierzą sztywności sprężystej,  $\mathbf{K}_g(\mathbf{b})$  jest macierzą geometryczną, zaś  $P$  siłą ściskającą element. Rozdzielenie zmiennych przestrzennych i czasu wyrażone znanymi zależnościami (Clough i Penzien 1975)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{q}(x, y, z) \cdot \sin \omega t \\ \ddot{\mathbf{u}} &= -\omega^2 \mathbf{q}(x, y, z) \cdot \sin \omega t \end{aligned} \quad (3.35)$$

pozwala na wyeliminowanie czasu  $t$  i operowanie amplitudami przemieszczeń  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^k$ , gdzie  $k$  oznacza liczbę stopni swobody systemu. Zagadnienie wyznaczania częstości harmonicznym drgań własnych bez uwzględnienia tłumienia jest zadaniem poszukiwania war-



tości własnych  $\lambda = \omega^2$  i odpowiadających im wektorów własnych  $\mathbf{q}$ . Po uwzględnieniu zależności (3.35), równanie (3.34) przyjmie postać

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \lambda\mathbf{M}\mathbf{q} \quad (3.36)$$

gdzie zakładamy normalizację wektora własnego  $\mathbf{q}$  względem globalnej macierzy mas

$$\mathbf{q}^T \mathbf{M}(\mathbf{b})\mathbf{q} = 1 \quad (3.37)$$

Przyjmując, że globalne macierze sztywności  $\mathbf{K}$  i mas  $\mathbf{M}$  są dodatnio określone i różniczkowalne względem zmiennych projektowych  $\mathbf{b}$ , oraz że rozpatrujemy jedynie problem pojedynczych wartości własnych (nie wielokrotnych), to wówczas zarówno poszczególna wartość własna  $\lambda$ , jak i odpowiadający jej wektor własny  $\mathbf{q}$  są różniczkowalne względem zmiennych projektowych  $\mathbf{b}$  (Haug i in. 1986).

Przemnażając lewostronnie równanie (3.36) przez transponowany, dowolnie wybrany wektor  $\bar{\mathbf{q}}$ , otrzymamy

$$\bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}\mathbf{q} = \lambda \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\mathbf{q} . \quad (3.38)$$

Jeżeli obliczymy wariację obu stron (3.38) na skutek perturbacji  $\delta b_k$  zadanej zmiennej projektowej  $b_{k0}$

$$b_k = b_{k0} + \delta b_k \quad (3.39)$$

to otrzymamy

$$\bar{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_k} \mathbf{q} \delta b_k + \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial b_k} \delta b_k = \frac{d\lambda}{db_k} \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}\mathbf{q} \delta b_k + \lambda \bar{\mathbf{q}}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_k} \mathbf{q} \delta b_k + \lambda \bar{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial b_k} \delta b_k \quad (3.40)$$

Równanie to musi być spełnione także w przypadku  $\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q}$ . Uwzględniając normalizację wektora własnego  $\mathbf{q}$  określoną zależnością (3.37) otrzymamy związek określający poszukiwaną wariację częstości drgań własnych  $\delta\lambda$  w zależności od zmian zmiennej projektowej  $\delta b_k$

$$\delta\lambda = \frac{d\lambda}{db_k} \delta b_k = \left[ \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_k} \mathbf{q} - \lambda \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_k} \mathbf{q} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial b_k}^T (\mathbf{K}\mathbf{q} - \lambda\mathbf{M}\mathbf{q}) \right] \delta b_k \quad (3.41)$$

Ostatnie wyrażenie w powyższym równaniu będzie równe zeru ponieważ  $\mathbf{q}$  jest wektorem własnym równania (3.36). Zatem ostatecznie otrzymamy zależność

$$\delta\lambda = \frac{d\lambda}{db_k} \delta b_k = \left[ \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_k} \mathbf{q} - \lambda \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_k} \mathbf{q} \right] \delta b_k \quad (3.42)$$

W przypadku wielu zmiennych projektowych  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_k, \dots, b_n\}^T$ , powyższe rozważania sprowadzają się do wyznaczenia poszczególnych składowych wektora wrażliwości pierwszego rzędu

$$\mathbf{w}_\lambda = \left\{ \frac{d\lambda}{db_1}, \frac{d\lambda}{db_2}, \dots, \frac{d\lambda}{db_i}, \dots, \frac{d\lambda}{db_n} \right\}^T \quad (3.43)$$

Zgodnie z zależnością (3.32), wariację wartości własnej  $\delta\lambda$  wyznaczmy jako iloczyn dwóch wektorów

$$\delta\lambda = \mathbf{w}_\lambda^T \delta\mathbf{b} \quad (3.44)$$

gdzie  $\delta \mathbf{b} = \{\delta b_1, \delta b_2, \dots, \delta b_k, \dots, \delta b_n\}^T$  jest wektorem wariacji zmiennych projektowych.

### 3.2.2. Analiza wrażliwości postaci własnych

Przedstawimy dwie metody wyznaczenia wrażliwości wektora własnego (Haug i in. 1986). Pierwsza z nich wymaga tylko znajomości interesującego nas  $i$ -tego wektora własnego  $\mathbf{q}_i \in R^k$ . W celu uproszczenia zapisu, wprowadzimy oznaczenie

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(\lambda_i, \mathbf{b}) = \mathbf{K} - \lambda_i \mathbf{M} \quad (3.45)$$

zatem problem własny przyjmie postać

$$\mathbf{F}_i \mathbf{q}_i = \mathbf{0} \quad (3.46)$$

Różniczkując powyższe równanie względem zmiennej projektowej  $b_j$ , otrzymamy

$$\mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial b_j} = -\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial b_j} \mathbf{q}_i \quad (3.47)$$

gdzie  $\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial b_j} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} - \frac{\partial \lambda_i}{\partial b_j} \mathbf{M}$ .

Wykorzystamy  $\mathbf{M}$ -ortonormalność wektorów własnych  $\mathbf{q}_i$

$$\mathbf{q}_i^T \mathbf{M} \mathbf{q}_i = 1 \quad (3.48)$$

Powyższa zależność po zróżniczkowaniu względem zmiennej projektowej  $b_j$  przyjmie postać

$$2\mathbf{q}_i^T \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial b_j} = -\mathbf{q}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \mathbf{q}_i \quad (3.49)$$

Należy zwrócić uwagę, że  $\mathbf{F}_i$  jest macierzą osobliwą rzędu  $(k-1)$  układu równań (3.46), gdzie  $k$  jest liczbą stopni swobody układu. Ponadto można wykazać, że równania (3.49) są liniowo zależne od równań reprezentowanych przez (3.47). Łącząc (3.47) z (3.49), otrzymamy nadokreślony układ równań względem  $\partial \mathbf{q}_i / \partial b_j$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ 2\mathbf{q}_i^T \mathbf{M} \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial b_j} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial b_j} \\ \mathbf{q}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \end{bmatrix} \mathbf{q}_i \quad (3.50)$$

Mnożąc lewostronnie przez transpozycję macierzy  $\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \\ \mathbf{q}_i^T \mathbf{M} \end{bmatrix}$ , otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \mathbf{F}_i + 2\mathbf{M} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{M} \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial b_j} = - \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial b_j} + \mathbf{M} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \end{bmatrix} \mathbf{q}_i \quad (3.51)$$

skąd uzyskamy poszukiwany wektor wrażliwości

$$\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial b_j} = -[\mathbf{F}_i \mathbf{F}_i + 2\mathbf{M} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{M}]^{-1} \left[ \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial b_j} + \mathbf{M} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \right] \mathbf{q}_i \quad (3.52)$$

Istnieje trudność numeryczna w wyznaczaniu odwrotności macierzy  $[\mathbf{F}_i \mathbf{F}_i + 2\mathbf{M} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{M}]$ , ponieważ rząd wielkości obu elementów sumy może być inny i w związku z tym macierz teoretycznie odwracalna może nią nie być w sensie numerycznym (Haug i in. 1986). Aby usunąć tę niedogodność, należy wprowadzić do równania (3.48) mnożnik  $\mu$

$$\mu \mathbf{q}_i^T \mathbf{M} \mathbf{q}_i = \mu \quad (3.53)$$

co spowoduje zmianę w zależności (3.52)

$$\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial b_j} = -[\mathbf{F}_i \mathbf{F}_i + 2\mu \mathbf{M} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{M}]^{-1} \left[ \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial b_j} + \mu \mathbf{M} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \right] \mathbf{q}_i \quad (3.54)$$

Stałą  $\mu$  można tak dobrać, aby obie części składowe macierzy odwrotnej były porównywalne. Można także wyznaczyć wektor wrażliwości zmian wektora własnego, rozwiązując układ równań:

$$[\mathbf{F}_i \mathbf{F}_i + 2\mu \mathbf{M} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \mathbf{M}] \frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial b_j} = - \left[ \mathbf{F}_i \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial b_j} + \mu \mathbf{M} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \right] \mathbf{q}_i \quad (3.55)$$

bez konieczności wyznaczania macierzy odwrotnej.

Druga metoda wymaga wyznaczenia wszystkich wartości i wektorów własnych, ale operacje i wzory są prostsze. Ponieważ wektory własne tworzą zupełny zbiór wektorów przestrzeni  $R^k$  (Clough i Penzien 1975), zatem dowolny wektor o  $k$  składowych może być reprezentowany przez ich liniową kombinację, zatem

$$\frac{\partial \mathbf{q}_i}{\partial b_j} = \sum_{m=1}^{m=k} a_{ijm} \mathbf{q}_m \quad (3.56)$$

Podstawiając powyższą zależność do (3.47) otrzymamy

$$\mathbf{F}_i \sum_{m=1}^{m=k} a_{ijm} \mathbf{q}_m = - \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial b_j} \mathbf{q}_i \quad (3.57)$$

następnie przemnażając lewostronnie przez  $\mathbf{q}_l^T$ ,  $l \neq i$  otrzymamy

$$\sum_{m=1}^k a_{ijm} \mathbf{q}_l^T \mathbf{F}_i \mathbf{q}_m = - \mathbf{q}_l^T \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial b_j} \mathbf{q}_i \quad (3.58)$$

Ponieważ wektory własne  $\mathbf{q}_i$  są ortogonalne względem macierzy mas  $\mathbf{M}$  i macierzy sztywności  $\mathbf{K}$ , zatem spełniają równania

$$\mathbf{q}_l^T \mathbf{M} \mathbf{q}_m = \delta_{lm} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{q}_l^T \mathbf{K} \mathbf{q}_m = \lambda_l \delta_{lm} \Rightarrow \mathbf{q}_l^T \mathbf{F}_i \mathbf{q}_m = (\lambda_l - \lambda_i) \delta_{lm} \quad (3.59)$$

gdzie  $\delta_{lm} = \begin{cases} 1, l = m \\ 0, l \neq m \end{cases}$ .

Wykorzystanie powyższych związków pozwoli wyznaczyć współczynniki  $a_{ijl}$  dla  $i \neq l$

$$a_{ijl} = \frac{\mathbf{q}_i^T \left[ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_j} - \lambda_l \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \right] \mathbf{q}_i}{(\lambda_i - \lambda_l)} \quad (3.60)$$

Powyższy wzór jest ważny dla przypadku  $\lambda_i \neq \lambda_l$ , a więc pojedynczych wartości własnych.

Aby otrzymać brakujące wyrazy  $a_{iji}$  należy podstawić związek (3.56) do zależności (3.49)

$$2\mathbf{q}_i^T \mathbf{M} \sum_{m=1}^k a_{ijm} \mathbf{q}_m = -\mathbf{q}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \mathbf{q}_i. \quad (3.61)$$

Korzystając z  $\mathbf{M}$ -ortogonalności wektorów własnych (3.59) wyznaczmy brakujący współczynnik

$$a_{iji} = -\frac{1}{2} \mathbf{q}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b_j} \mathbf{q}_i. \quad (3.62)$$

Przedstawione metody mają swoje wady, jak i też zalety. Pierwsza z nich preferowana będzie w przypadku układów o wielu stopniach swobody, gdzie wyznaczenie wszystkich postaci drgań własnych może być niecelowe ze względu na czas obliczeń, jak i na konieczność zapamiętania wszystkich wektorów własnych. Jak już wspomniano, algorytm obliczeń drugiej metody jest zdecydowanie prostszy. Konieczność wyznaczenia i zapamiętania wszystkich wektorów i wartości własnych będzie preferować układy o niedużej liczbie stopni swobody. Także samo rozwiązanie będzie zawierać  $n$  wektorów wrażliwości po  $k$  składowych każdy, czyli  $n \cdot k$  liczb, gdzie  $n$  jest liczbą zmiennych projektowych, zaś  $k$  liczbą stopni swobody układu.

### 3.3. Przykłady numeryczne

Przykłady numeryczne mają na celu zilustrowanie aplikacji przedstawionych procedur analizy wrażliwości w konkretnych przypadkach konstrukcji, zarówno w zagadnieniach statycznych, jak i dynamicznych. Z uwagi na przyjęty prętowy model ramy zbudowanej z klasycznych elementów cienkościennych, jak i elementów węzłowych, zastosowano bardzo ogólny aparat analizy wrażliwości w opisie dyskretnym MES. W zagadnieniach statycznych przeprowadzono analizę wrażliwości różnego typu zmiennych stanu układu ramowego, przy określonych wariacjach zmiennych projektowych. W przypadku problemów dynamicznych możliwości analizy wrażliwości zilustrowano na prostych przykładach bismetrycznych belek poddanych skręcaniu. Przedstawiono zarówno analizę wrażliwości częstości drgań własnych, jak i postaci. W każdym przypadku przedstawiono także zakres poprawności aproksymacji wariacji zmiennych stanu przy zadanych wariacjach zmiennych projektowych. Porównano rozwiązanie otrzymane z wykorzystaniem analizy wrażliwości z rozwiązaniami tzw. ścisłymi, otrzymanymi na drodze analizy parametrycznej.

Z uwagi na zróżnicowany rząd bezwzględnych wartości zmiennych stanu i zmiennych projektowych, w zagadnieniach wrażliwości bardzo wygodne jest stosowanie relacji względnych:

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\mathcal{S}} = \bar{\mathbf{w}}_s \cdot \delta \bar{\mathbf{b}} \quad (3.63)$$

wówczas

$$\bar{\mathbf{w}}_s = \left\{ \frac{d\mathcal{S}}{db_1} \cdot \frac{b_1}{\mathcal{S}}, \frac{d\mathcal{S}}{db_2} \cdot \frac{b_2}{\mathcal{S}}, \dots, \frac{d\mathcal{S}}{db_i} \cdot \frac{b_i}{\mathcal{S}}, \dots, \frac{d\mathcal{S}}{db_n} \cdot \frac{b_n}{\mathcal{S}} \right\}^T$$

oraz

$$\delta \bar{\mathbf{b}} = \left\{ \frac{\delta b_1}{b_1}, \frac{\delta b_2}{b_2}, \dots, \frac{\delta b_k}{b_k}, \dots, \frac{\delta b_n}{b_n} \right\}.$$

W większości przykładów, jeśli było to tylko możliwe, stosowano względne wariacje wybranych zmiennych stanu w zależności od względnych wariacji zmiennych projektowych (3.63). Taki zapis ułatwia ocenę otrzymanego rozwiązania.

### 3.3.1. Statyka – rama ze stężeniami poprzecznymi

Stężenia poprzeczne są często stosowane w przypadku ram cienkościennych. Głównie mają one za zadanie zmniejszenie długości wybożeniowej elementów.

Rozważmy prostą ramę cienkościenną pokazaną na rys. 3.9. Obciążenie przyjęto w postaci jednostkowego momentu skupionego  $M$ , działającego w środku rozpiętości rygla – punkt 2. Uwzględniono możliwość stężenia rygla ramy parą sprężystych więzów na poziomie półki górnej i dolnej w dowolnym przekroju poprzecznym rygla. Takie stężenie może być modelowane jako sprężyste podparcie na kierunku przemieszczenia poziomego w oraz jako więź sprężysta na obrót przekroju

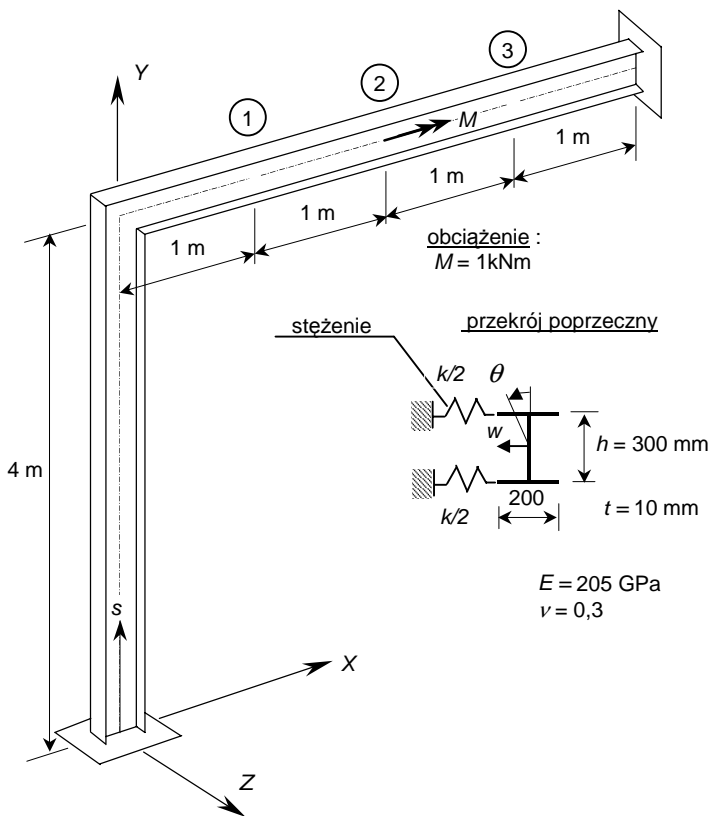
$$k_\theta = h \cdot k/2 \quad (3.64)$$

gdzie  $h$  oznacza wysokość belki dwuteowej (rys. 3.10).

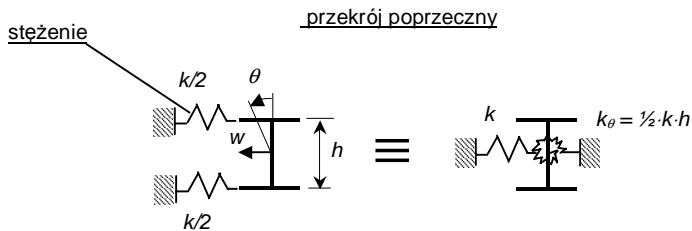
Analiza wrażliwości dotyczyć będzie dwóch modeli numerycznych ramy:

- A) model prętowy z zastosowaniem klasycznych elementów o 12 stopniach swobody (po 6 stopni w każdym węźle: trzy translacje i trzy obroty); pominięto efekt skręcania skrępowanego,
- B) model prętowy z zastosowaniem elementów cienkościennych o 14 stopniach swobody (po 7 stopni w każdym węźle: trzy translacje, trzy obroty i deplanacja); uwzględniono zatem efekt skręcania skrępowanego. Użyto superelementu węzła do modelowania połączenia słupa z rygłem.

Zmienną stanu w niniejszym przykładzie jest kąt skręcenia  $\theta_2$  w punkcie 2 rygla. Zastosowano metodę układów sprężonych (Dems i Mróz 1983, Haug i in. 1986) – patrz rozdział 3.2.1. W tym przypadku układ sprężony obciążony będzie jednostkowym momentem skręcającym w punkcie 2 o zwrocie zgodnym ze zwrotem kąta skręcenia  $\theta_2$ .



Rys. 3.9. Rama cienkościenna ze stężeniami



Rys. 3.10. Numeryczny model stężenia

Zastosowanie analizy wrażliwości pozwala określić wariacje kąta skręcenia  $\delta\theta_2$  wywołane zmianami sztywności stężeń  $\delta k$

$$\delta\theta_2 = \int_L \frac{1}{2} (w_l \bar{w}_l + w_h \bar{w}_h) \delta k ds = \int_L F_{\theta k}(s) \delta k ds \tag{3.65}$$

gdzie  $w_l, w_h$  oznaczają przemieszczenia na poziomie półki dolnej i górnej w układzie podstawowym, a  $\bar{w}_l, \bar{w}_h$  odpowiednio w układzie sprzężonym. Podcałkowa funkcja wrażliwości  $F_{\theta k}(s)$  jest linią wpływu wariacji kąta skręcenia  $\delta\theta_2$  w odniesieniu do wariacji sztywności stę-

żeń  $\delta k$ . Ponieważ translacja i obrót przekroju nie są sprzężone ze sobą przy zastosowaniu tego typu stężenia (patrz rys. 3.10 i równanie (3.64)) równanie (3.65) można zapisać w postaci :

$$\delta\theta_2 = \int_L \left( w\bar{w}\delta k + \theta\bar{\theta}\delta k_\theta \right) ds = \int_L \left( w\bar{w} + \theta\bar{\theta} \frac{h}{2} \right) \delta k ds = \int_L F_{\theta k}(s) \delta k ds \quad (3.66)$$

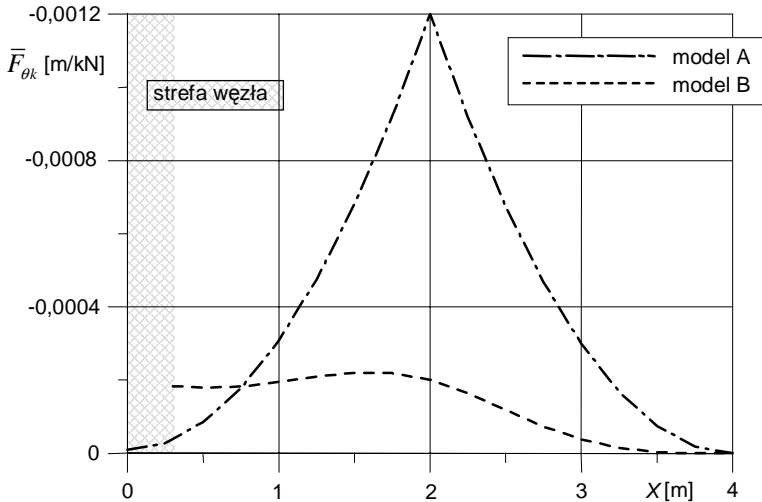
gdzie  $w$  i  $\bar{w}$  oznaczają przemieszczenie poziome prostopadłe do osi pręta,  $\theta$  i  $\bar{\theta}$  kąt skręcenia odpowiednio w układzie podstawowym i układzie sprzężonym (rys. 3.10).

Wygodne jest stosowanie względnych wariacji zmiennej stanu

$$\frac{\delta\theta_2}{\theta_2} = \int_L \frac{F_{\theta k}(s)}{\theta_2} \delta k ds = \int_L \bar{F}_{\theta k}(s) \delta k ds \quad (3.67)$$

Podcałkowa funkcja wrażliwości względnych wariacji zmiennej stanu  $\delta\theta_2/\theta_2$  w odniesieniu do wariacji zmiennej projektowej  $\delta k$  została przedstawiona na rys. 3.11 i 3.12.

Wykonano także analizę statyczną ramy pokazanej na rys. 3.9 przy zastosowaniu trzech identycznych stężeń w trzech punktach rygła – punkt 1, 2 i 3 – w celu określenia dokładności analizy wrażliwości. Jest to sprawdzenie poprawności wyznaczonych podcałkowych funkcji wrażliwości. W analizie parametrycznej przyjęto pięć wartości sztywności punktowych stężeń  $K = 200, 400, 600, 800, 1000$  kN/m.

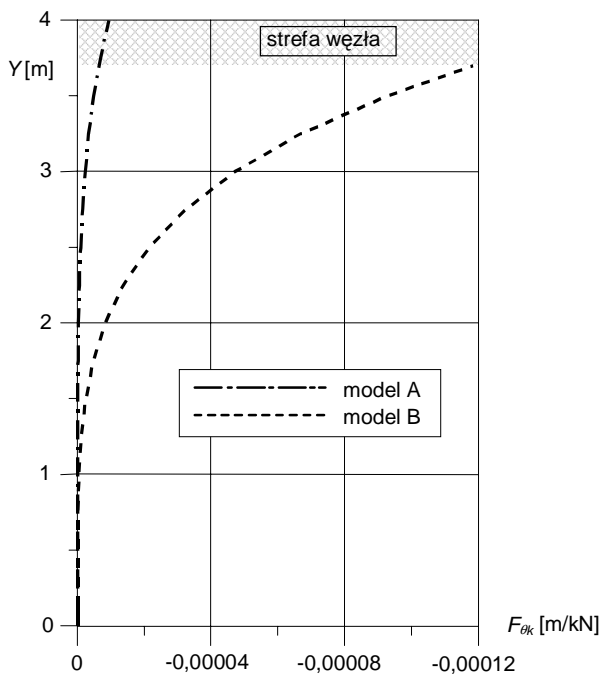
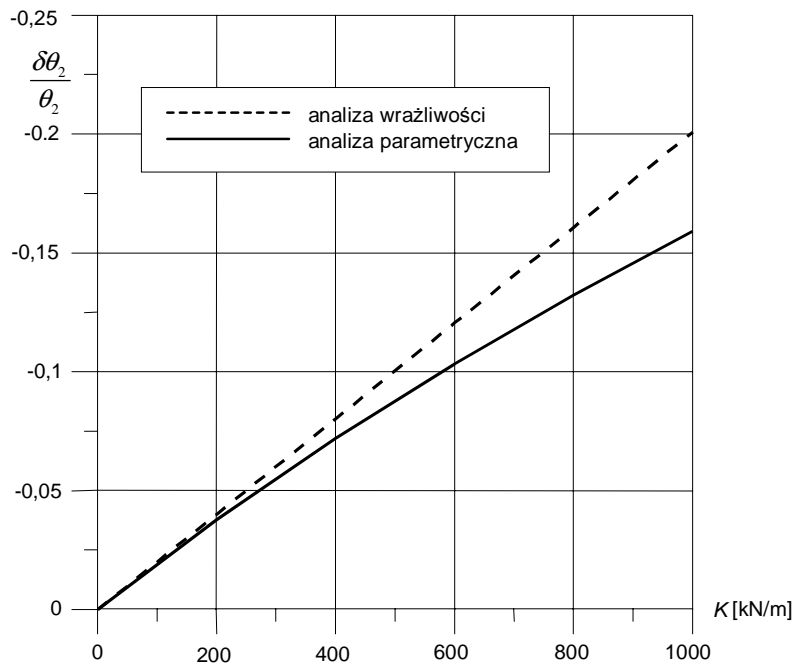


Rys. 3.11. Podcałkowa funkcja wrażliwości wariacji kąta skręcenia  $\delta\theta_2/\theta_2$  wzdłuż rygła ramy

Względna wariacja kąta skręcenia może być wyznaczona przy zastosowaniu równania (3.67). Dla dyskretnych wartości sprężystości stężeń odpowiednia zależność przybiera postać

$$\frac{\delta\theta_2}{\theta_2} = \sum_{i=1}^{i=3} \bar{F}_{\theta k_i} \delta K_i \quad (3.68)$$

gdzie  $\bar{F}_{\theta k_i}$  oznacza wartość podcałkowej funkcji wrażliwości w przekroju poprzecznym (punkcie)  $i$  w odniesieniu do punktowej zmiany sztywności stężenia  $\delta K_i$ .

Rys. 3.12. Podcałkowa funkcja wrażliwości wariacji kąta skręcenia  $\delta\theta_2/\theta_2$  wzdłuż słupa ramyRys. 3.13 Porównanie analizy wrażliwości z analizą parametryczną (trzy identyczne stężenia  $K$  w punktach 1, 2 i 3)



Rysunek 3.13 potwierdza poprawność otrzymanego rozwiązania i przedstawia także zakres dokładności aproksymacji z zastosowaniem analizy wrażliwości w odniesieniu do rozwiązania ścisłego, otrzymanego na drodze analizy parametrycznej rama ze stężeniami. W przypadku zmiany sztywności stężenia  $\delta K_i$  w granicach od 0 do 400 kN/m błąd aproksymacji względnej wariacji analizowanej zmiennej stanu nie przekracza 10% w odniesieniu do analizy parametrycznej.

### 3.3.2. Statyka – rama ze stężeniami na poziomie półki górnej

Rozważmy taką samą ramę, jak w poprzednim przykładzie, lecz ze stężeniami na poziomie górnej półki (rys. 3.14). Obciążenie stanowi moment skręcający  $M = 1$  kNm przyłożony w środku rozpiętości rygła w punkcie 2. Zakładamy, że rama może być usztywniona stężeniami poprzecznymi na poziomie górnej półki rygła w dowolnym jego punkcie. Przykładem stężenia mogą być płatwie dachowe, często stosowane w układach ramowych. Takie stężenie nie może być modelowane, jak w poprzednim przykładzie, jako złożenie translacyjnego i obrotowego sprężystego podparcia, ponieważ w tym przypadku występuje sprzężenie pomiędzy translacją i rotacją.

Dwa różne modele numeryczne rama zostaną porównane ze sobą:

- A) model powłokowy – wykorzystano program MSC/Nastran 2002,
- B) model prętowy – elementy cienkościenne z superelementem węzłowym (elementy prętowe, jak i superelement węzła mają 14 stopni swobody z uwzględnieniem efektu paczenia).

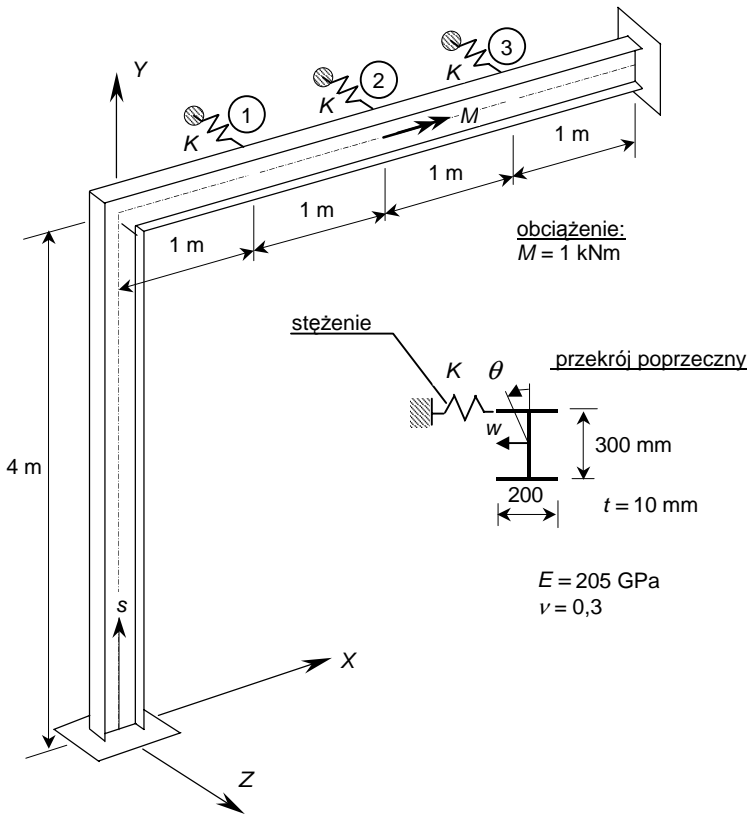
Zmienną stanu przyjęto podobnie jak w poprzednim przykładzie – kąt skręcenia  $\theta_2$  w punkcie 2. W tym przypadku układ sprzężony obciążony jest jednostkowym momentem skręcającym w punkcie 2 o zwrocie zgodnym ze zwrotem kąta skręcenia  $\theta_2$ .

Zastosowanie analizy wrażliwości pozwala określić wariacje kąta skręcenia  $\delta\theta_2$  wywołane zmianami sztywności stężeń  $\delta k$

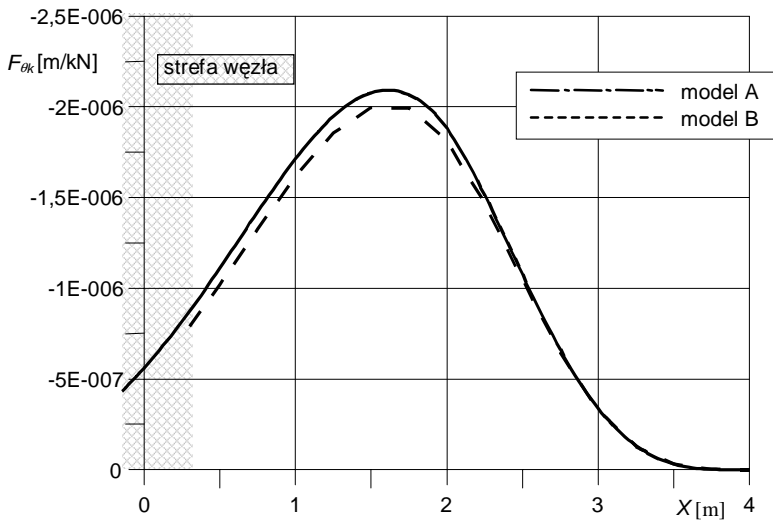
$$\delta\theta_2 = \int_L (w_h \bar{w}_h) \delta k ds = \int_L F_{\theta k}(s) \delta k ds \quad (3.69)$$

gdzie  $w_h$  i  $\bar{w}_h$  oznaczają przemieszczenia na poziomie półki górnej odpowiednio w układzie podstawowym i układzie sprzężonym. Podcałkowa funkcja wrażliwości  $F_{\theta k}(s)$  jest linią wpływu wariacji kąta skręcenia  $\delta\theta_2$  w odniesieniu do wariacji sztywności stężeń  $\delta k$ . Została ona przedstawiona na rys. 3.15.

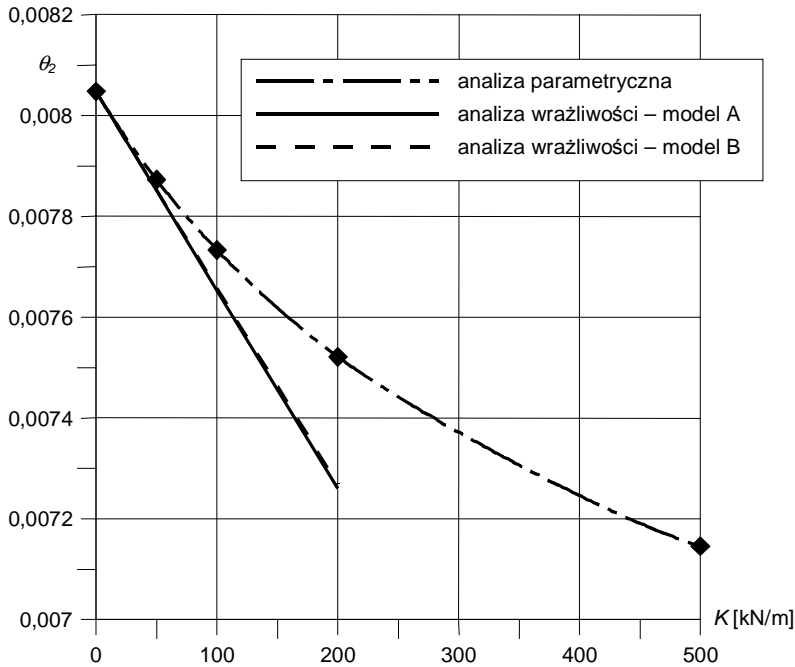
Wykonano także analizę statyczną rama pokazanej na rys. 3.14, przy zastosowaniu trzech identycznych stężeń w trzech punktach rygła (punkt 1, 2 i 3), w celu określenia dokładności analizy wrażliwości. W analizie parametrycznej przyjęto cztery wartości sztywności punktowych stężeń  $K = 50, 100, 200, 500$  kN/m. Rysunek 3.16 potwierdza poprawność rozwiązania analizy wrażliwości zarówno dla modelu powłokowego A, jak i prętowego B, oraz umożliwia ocenę dokładności aproksymacji z zastosowaniem analizy wrażliwości w odniesieniu do rozwiązania ścisłego, otrzymanego na drodze analizy parametrycznej rama ze stężeniami.



Rys. 3.14. Rama cienkościenna ze stężeniami na poziomie półki górnej rygla



Rys. 3.15. Podcałkowa funkcja wrażliwości  $F_{\theta k}(s)$  wariacji kąta skręcenia  $\delta\theta_2$  wzdłuż rygla ramy



Rys. 3.16. Porównanie analizy wrażliwości z analizą parametryczną (trzy identyczne stężenia  $K$  w punktach 1, 2 i 3)

### 3.3.3. Statyka – rama – zmiana grubości półek

Rozpatrzmy ramę cienkościenną pokazaną na rysunku 3.17. Podobnie jak w poprzednich przykładach, rama obciążona jest jednostkowym momentem skręcającym  $M = 1$  kNm, zaczepionym w punkcie 0 rygla. Grubość półki  $t$  przekroju dwuteowego została przyjęta jako zmienna projektowa.

Rozpatrzona zostanie analiza wrażliwości dwóch zmiennych stanu:

- 1) kąta skręcenia w przekroju 0 –  $\theta_0$ ,
- 2) bimomentu na podporze –  $B_B$ .

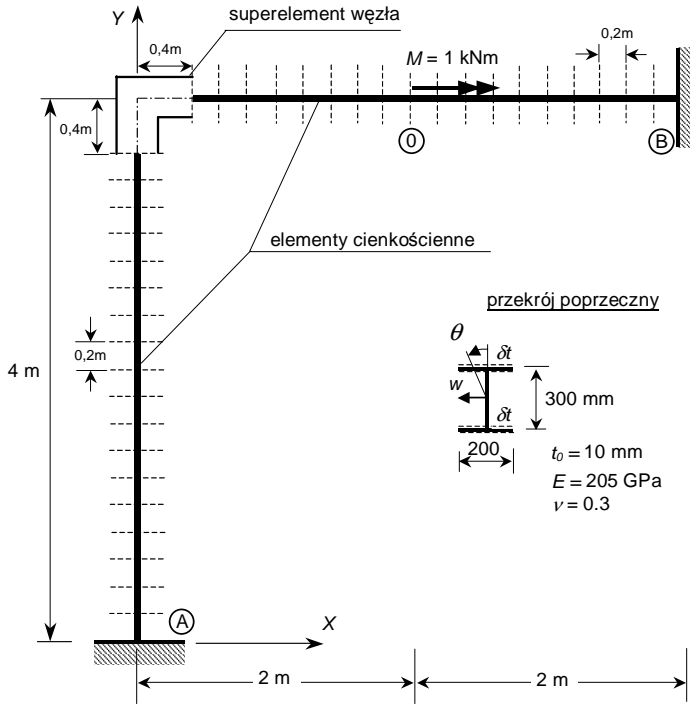
Zastosowany został dyskretny model obliczeniowy ramy, składający się z cienkościennych elementów prętowych i superelementu węzła. Dyskretyzacja została pokazana na rys. 3.17.

W tym przypadku wektor obciążenia  $\mathbf{P}$  oraz zmienna stanu  $\mathcal{S}$  nie zależy od zmiennej projektowej  $t_i$ , zatem pochodne  $\partial \mathcal{S} / \partial t_i$  i  $d\mathbf{P} / dt_i$  znikają, a równanie (3.29) przyjmie postać:

$$\delta \mathcal{S} = \boldsymbol{\eta}^T \frac{d\mathbf{K}}{dt_i} \mathbf{u} \delta t_i \quad (3.70)$$

gdzie  $\mathcal{S}$  oznacza zmienną stanu ( $\mathcal{S} = \theta_0$  lub  $\mathcal{S} = B_B$ ),  $\mathbf{K}$  jest globalną macierzą sztywności układu,  $\mathbf{u}$  jest globalnym wektorem przemieszczeń,  $\boldsymbol{\eta}$  oznacza globalny wektor przemiesz-

czeń układu sprzężonego,  $t_i$  jest zmienną projektową – grubość półki przekroju dwuteowego  $i$ -tego elementu.



Rys. 3.17. Rama cienkościenna – grubość półki dwuteownika  $t$  jest zmienną projektową

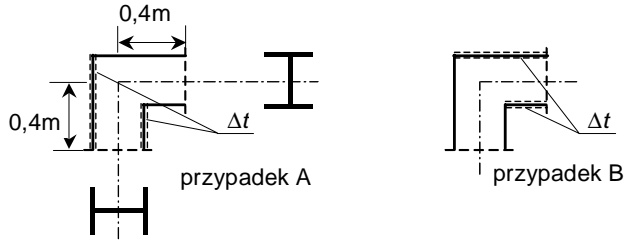
Dla zmiennej stanu  $\theta_0$  obciążenie układu sprzężonego stanowi jednostkowy moment w punkcie 0 działający zgodnie z dodatnim zwrotem kąta skręcenia  $\theta_0$ . Natomiast dla zmiennej stanu  $B_B$  obciążenie układu sprzężonego stanowi jednostkowe wymuszenie spazieniem w przekroju podporowym B.

Pochodne macierzy sztywności cienkościennych elementów prętowych zostały wyznaczone w sposób analityczny, poprzez różniczkowanie poszczególnych elementów macierzy sztywności. W przypadku macierzy sztywności superelementu węzła konieczne stało się zastosowanie różnic skończonych:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt_i} \cong \frac{\mathbf{K}(t_i + \Delta t_i) - \mathbf{K}(t_i)}{\Delta t_i} \quad (3.71)$$

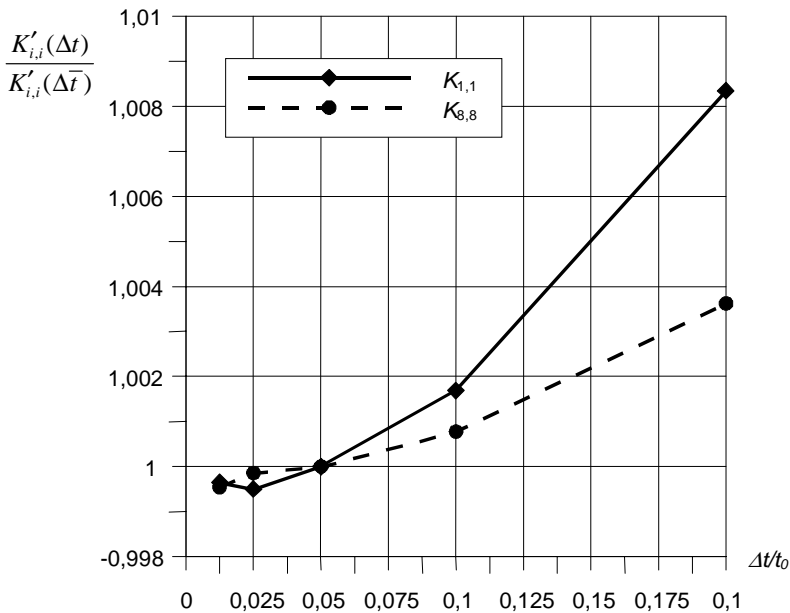
Rozpatrzono dwa przypadki zmian grubości półek  $\Delta t$  wewnątrz superelementu węzła (rys. 3.18):

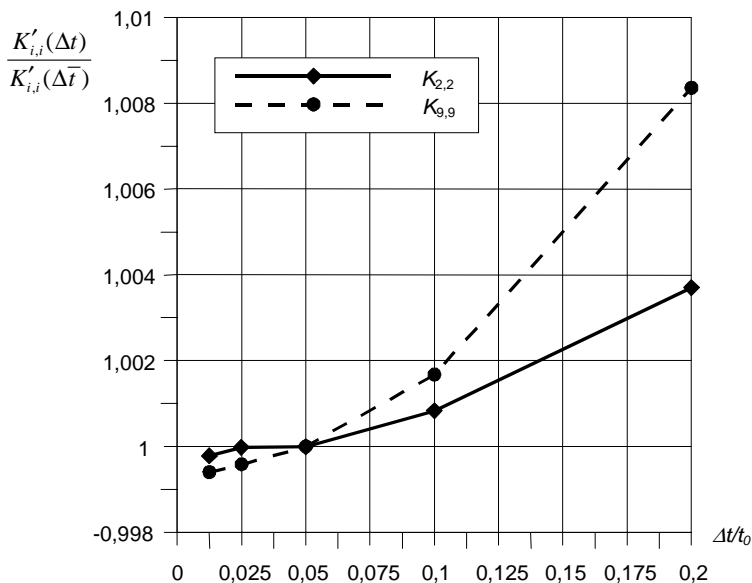
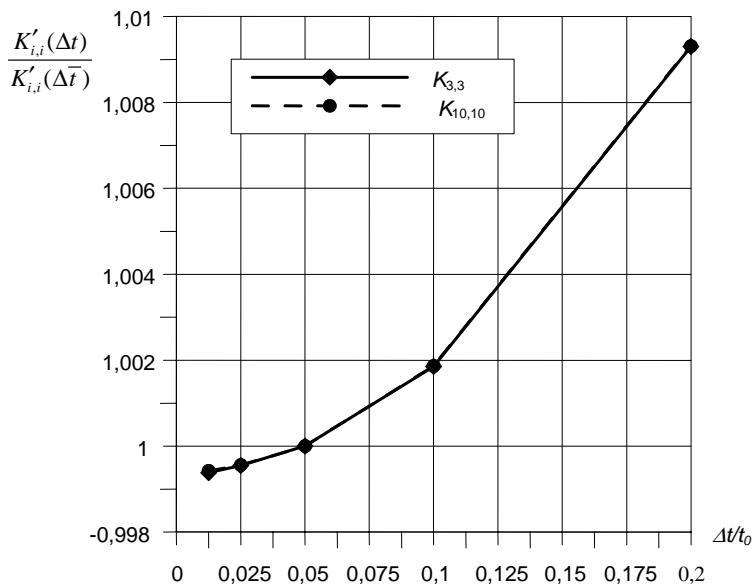
- przypadek A – zmiany grubości jedynie w części będącej elementem słupa ramy,
- przypadek B – zmiany grubości jedynie w części będącej elementem rygła ramy.



Rys. 3.18. Dwa przypadki zmian grubości półek węzła ramy

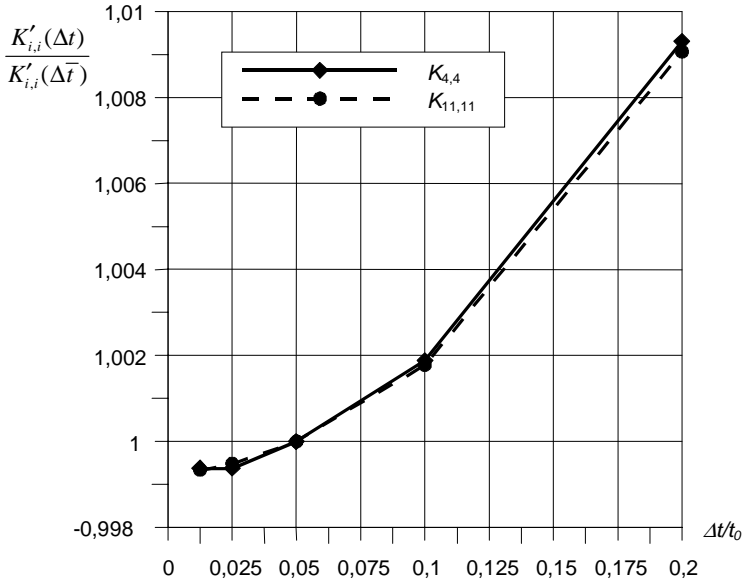
Odpowiednie przyjęcie przyrostu zmiany grubości półek elementu  $\Delta t$  ma decydujące znaczenie w prawidłowym wyznaczeniu pochodnej macierzy sztywności superelementu względem zmiennej projektowej. Przyjęcie zbyt małej wartości przyrostu zmiennej projektowej powoduje błędy spowodowane dokładnością obliczeń numerycznych. Zbyt duża wartość przyrostu powoduje, że wyznaczamy wartość zmian na kierunku siecznej ścisłej krzywej. Ten problem zaprezentowano na rys. 3.19÷3.25, gdzie pokazano relatywne zmiany pochodnej poszczególnych elementów macierzy sztywności. Jako wartości odniesienia przyjęto elementy pochodnej macierzy sztywności dla przyrostu zmiennej projektowej  $\Delta \bar{t} = 0,05t_0$ .

Rys. 3.19. Względne zmiany pochodnych elementów  $K_{1,1}$  i  $K_{8,8}$  macierzy sztywności superelementu

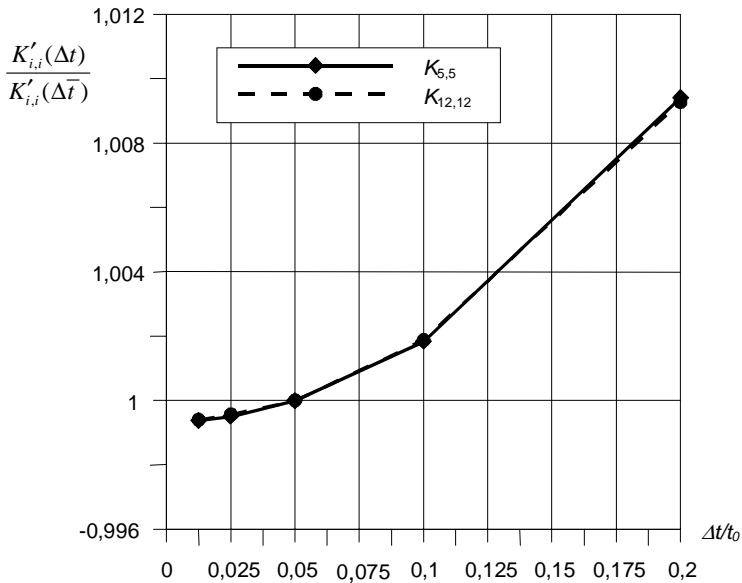
Rys. 3.20. Względne zmiany pochodnych elementów  $K_{2,2}$  i  $K_{9,9}$  macierzy sztywności superelementuRys. 3.21. Względne zmiany pochodnych elementów  $K_{3,3}$  i  $K_{10,10}$  macierzy sztywności superelementu

Rezultaty analizy wrażliwości przedstawiono na rys. 3.26÷3.31. Podcałkowe funkcje wrażliwości relatywnych zmian kąta skręcenia  $\delta\theta_0/\theta_0$  w odniesieniu do relatywnych zmian grubości półek przekroju dwuteowego  $\delta t/t_0$  wzdłuż rygla i słupa przedstawiono na rys. 3.26 i 3.27. Na rysunku 3.28 porównano dokładność aproksymacji zmian kąta skręcenia  $\theta_0$ , uzy-

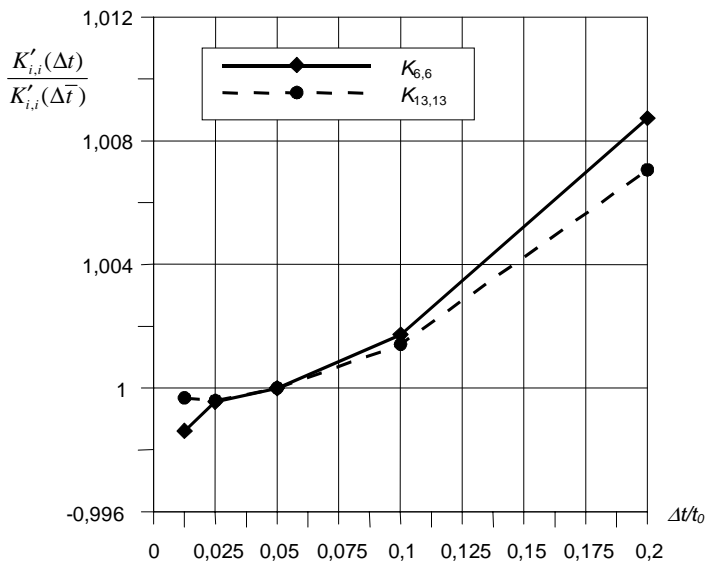
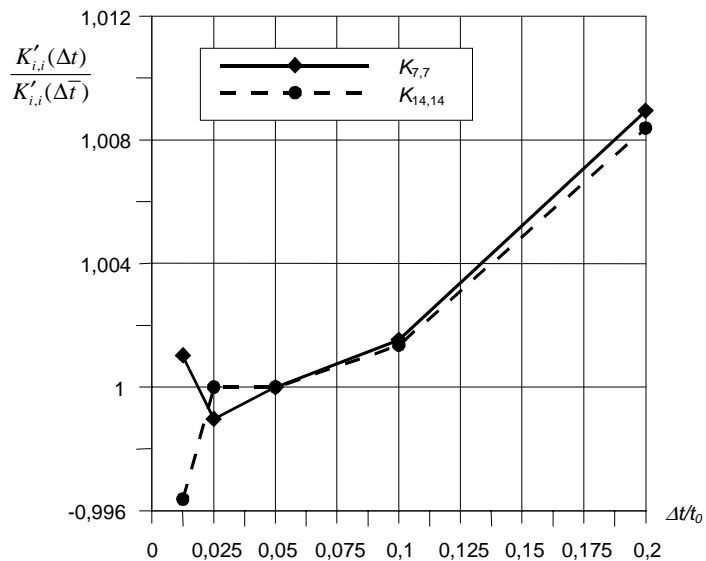
skaną za pomocą analizy wrażliwości z rozwiązaniem ścisłym uzyskanym na drodze analizy parametrycznej. Grubości pólki przekroju dwuteowego zmieniano jedynie na ryglu ramy.



Rys. 3.22. Względne zmiany pochodnych elementów  $K_{4,4}$  i  $K_{11,11}$  macierzy sztywności superelementu



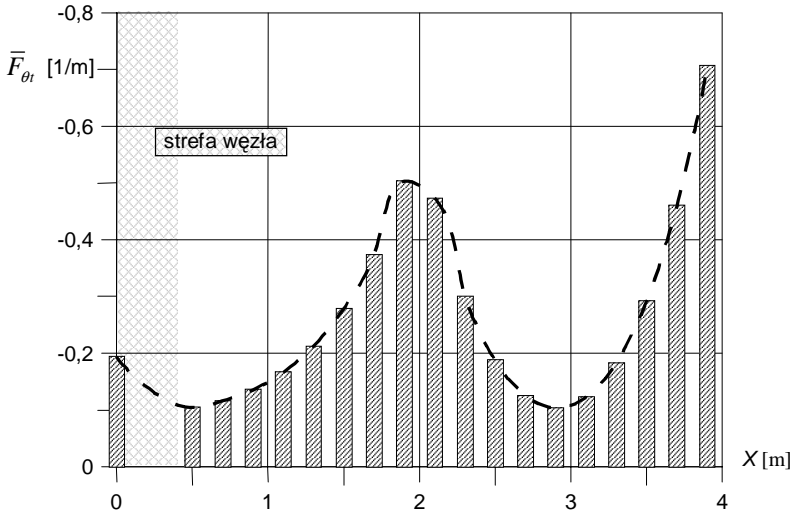
Rys. 3.23. Względne zmiany pochodnych elementów  $K_{5,5}$  i  $K_{12,12}$  macierzy sztywności superelementu

Rys. 3.24. Względne zmiany pochodnych elementów  $K_{6,6}$  i  $K_{13,13}$  macierzy sztywności superelementuRys. 3.25. Względne zmiany pochodnych elementów  $K_{7,7}$  i  $K_{14,14}$  macierzy sztywności superelementu

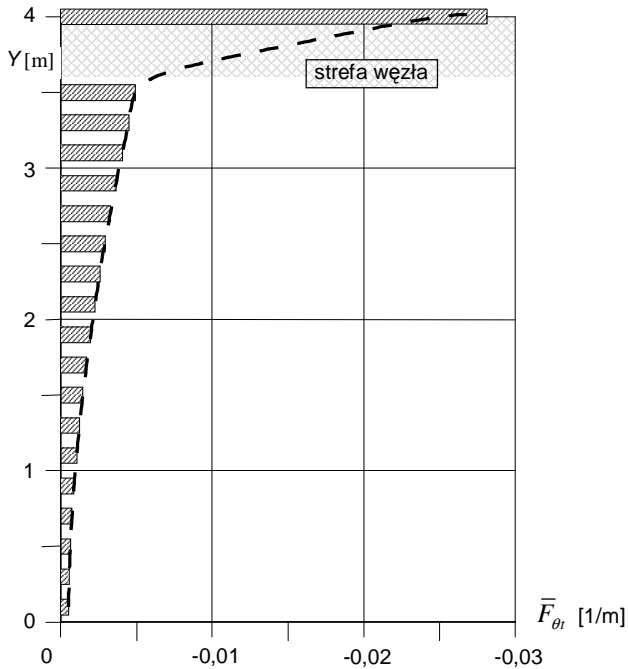
Podobnie podcałkowe funkcje wrażliwości relatywnych wariacji drugiej zmiennej stanu  $\delta B_B/B_B$  – bimomentu podporowego w odniesieniu do relatywnych zmian grubości pólki przekroju dwuteowego  $\delta t/t_0$  wzdłuż rygla i słupa przedstawiono na rys. 3.29 i 3.30. Na rysunku 3.31. porównano dokładność aproksymacji zmian bimomentu  $B_B$  z rozwiązaniem ścisłym. W tym przypadku zmiana grubości pólki przekroju dwuteowego objęła jedynie odcinek o długości 1 m od podpory B, tam gdzie rzędne podcałkowej funkcji wrażliwości są dodatnie.



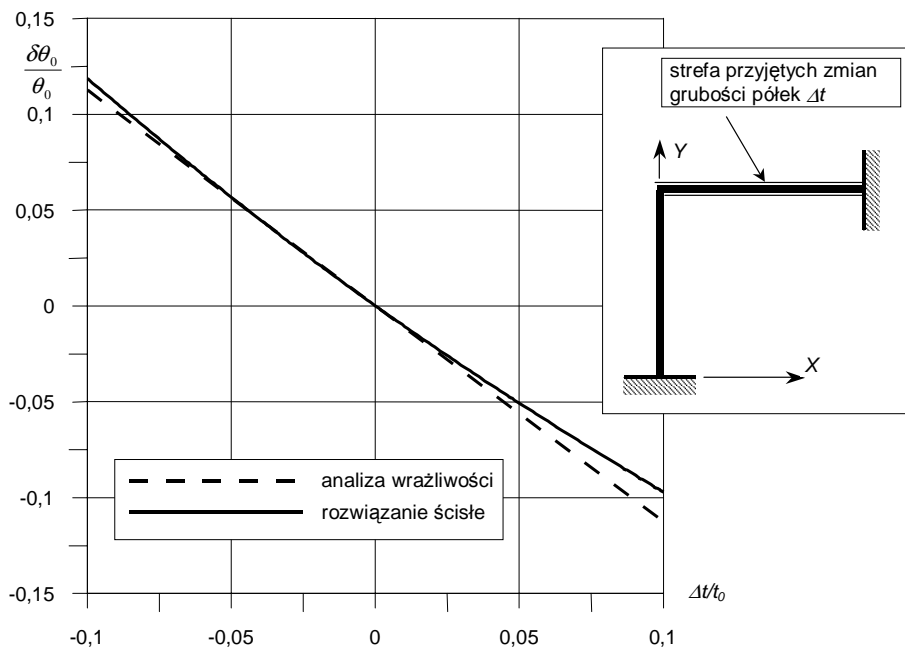
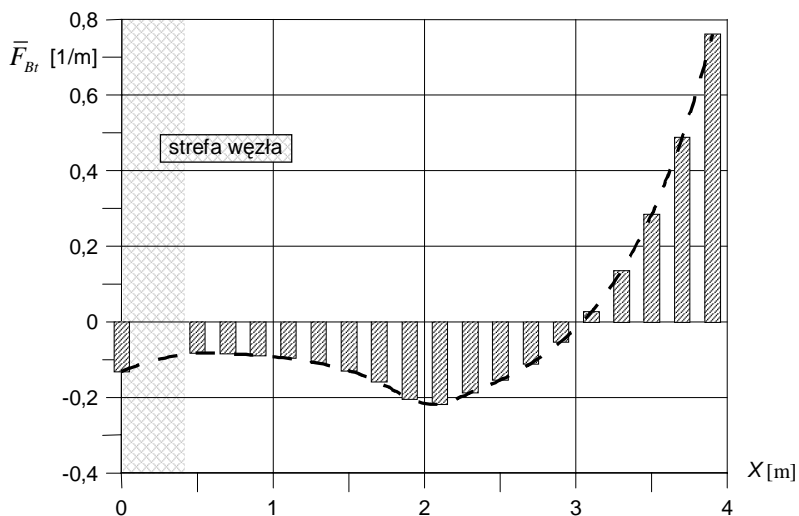
Analiza wrażliwości daje jakościową i ilościową ocenę wariacji zmiennej stanu w odniesieniu do wariacji zmiennych projektowych, co potwierdzają rysunki 3.28 i 3.31.

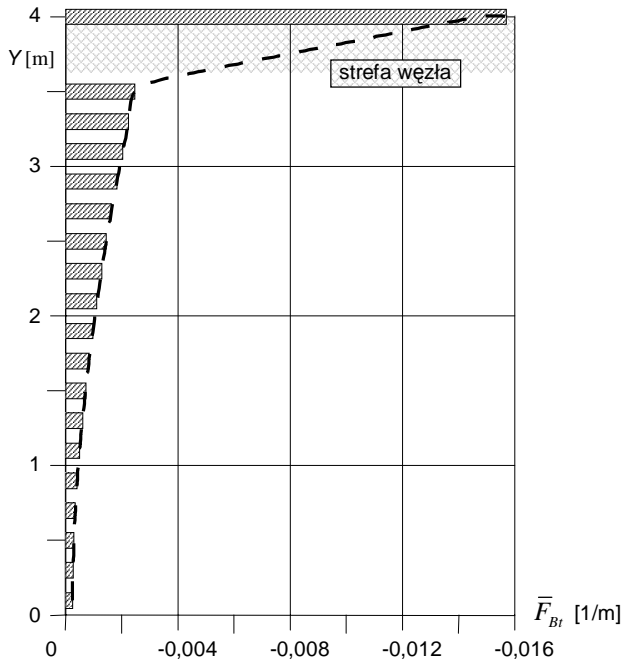


Rys. 3.26. Funkcja wrażliwości względnych zmian  $\delta\theta_0/\theta_0$  względem względnych wariacji zmiennej projektowej  $\delta t/t_0$  – rygiel ramy

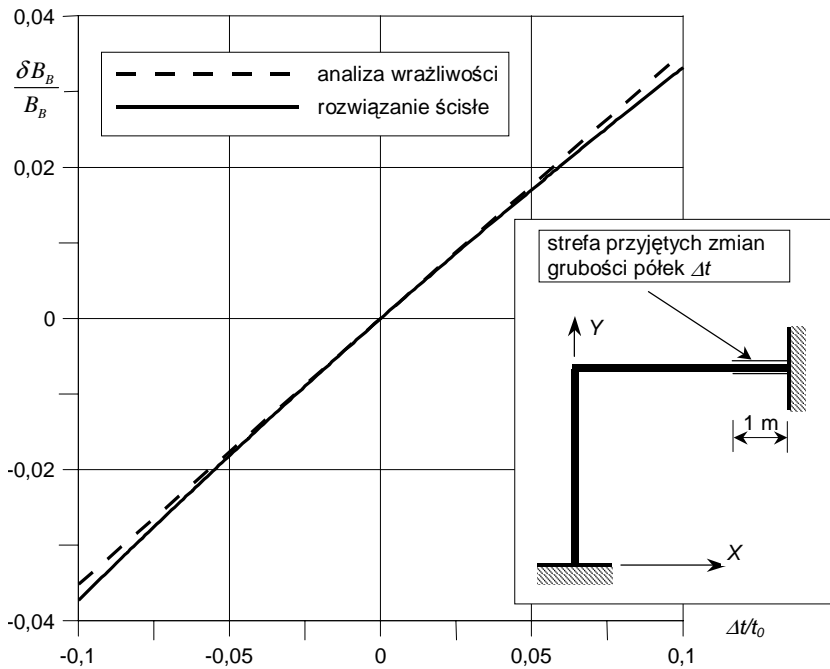


Rys. 3.27. Funkcja wrażliwości względnych zmian  $\delta\theta_0/\theta_0$  względem względnych wariacji zmiennej projektowej  $\delta t/t_0$  – słup ramy

Rys. 3.28. Ocena dokładności analizy wrażliwości kąta skręcenia  $\theta_0$ Rys. 3.29. Funkcja wrażliwości względnych zmian  $\delta B_B / B_B$  względem względnych wariacji zmiennej projektowej  $\delta t / t_0$  – rygiel ramy



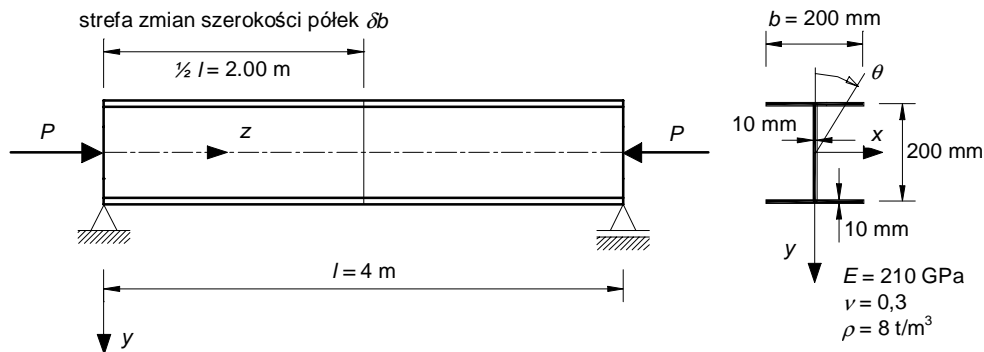
Rys. 3.30. Funkcja wrażliwości względnych zmian  $\delta B_B/B_B$  względem względnych wariacji zmiennej projektowej  $\delta t/t_0$  – słup ramy



Rys. 3.31. Ocena dokładności analizy wrażliwości bimomentu na podporze  $B_B$

### 3.3.4. Analiza wrażliwości częstości drgań skrętnych belki cienkościennej

Aby zilustrować rozważania zawarte w rozdziale 3.2.1 dotyczące analizy wrażliwości wartości własnych, rozpatrzmy wolnopodpartą belkę dwuteową o stałym przekroju poprzecznym poddaną osiowemu ścisnaniu siłą  $P$  pokazaną na rys. 3.32 (Mikulski 2003).



Rys. 3.32. Dwuteowa belka cienkościenna

Jako zmienną projektową przyjęto szerokość pólki belki  $b$ . Rozważono wariacje pierwszego rzędu pierwszych trzech częstości drgań własnych belki bez wpływu siły osiowej. Pierwsze trzy wartości własne drgań skrętnych  $\lambda_i = \omega_i^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) oraz odpowiadające im postacie pokazane na rys. 3.33 mogą być wyznaczone przy zastosowaniu metody elementów skończonych (Zienkiewicz 1977).

Wariacje pierwszego rzędu kwadratu częstości drgań własnych  $\lambda$  w zależności od wariacji zmiennej projektowej  $\delta b$  dla układu ciągłego można zapisać w postaci:

$$\delta\lambda = \int_0^l F_{\lambda b}(z) \delta b dz \quad (3.72)$$

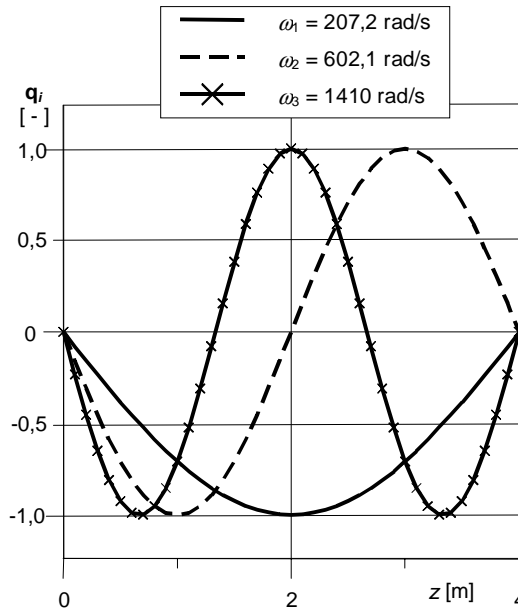
gdzie  $F_{\lambda b}(z)$  nazywana jest podcałkową funkcją wrażliwości. Wygodne jest stosowanie względnych wariacji zmiennej stanu i zmiennej projektowej

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \int_0^l \bar{F}_{\lambda b}(z) \frac{\delta b}{b} dz \quad (3.73)$$

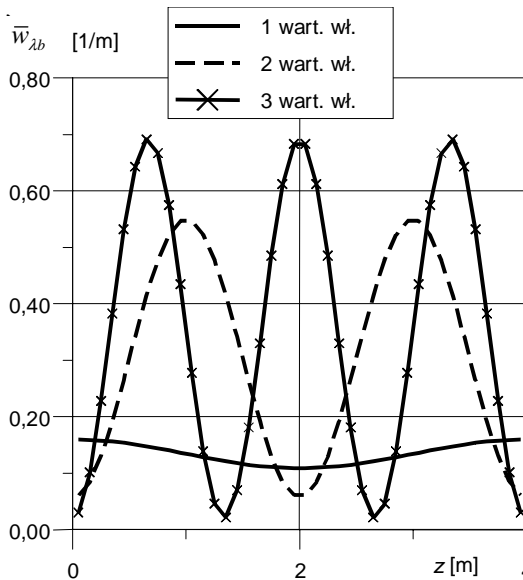
Dla układów dyskretnych powyższa zależność przybierze formę

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \sum_{i=1}^n (\bar{w}_{\lambda b})_i l_i \frac{\delta b_i}{b_i} \quad (3.74)$$

gdzie  $n$  oznacza liczbę elementów skończonych układu,  $l_i$  jest długością  $i$ -tego elementu,  $\delta b_i$  określa wariację zmiennej projektowej  $i$ -tego elementu. Podcałkowe funkcje wrażliwości  $\bar{w}_{\lambda b}$  odpowiadające pierwszym trzem wartościom własnym bez efektu działania siły osiowej  $P$  pokazano na rys. 3.34.



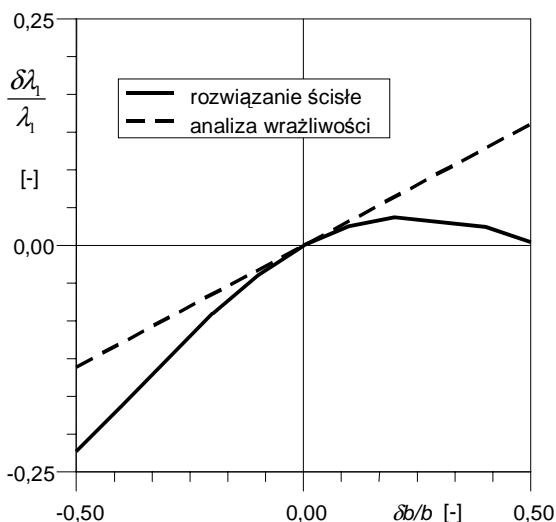
Rys. 3.33. Postacie skrętnych drgań własnych pręta przy sile osiowej  $P = 0$



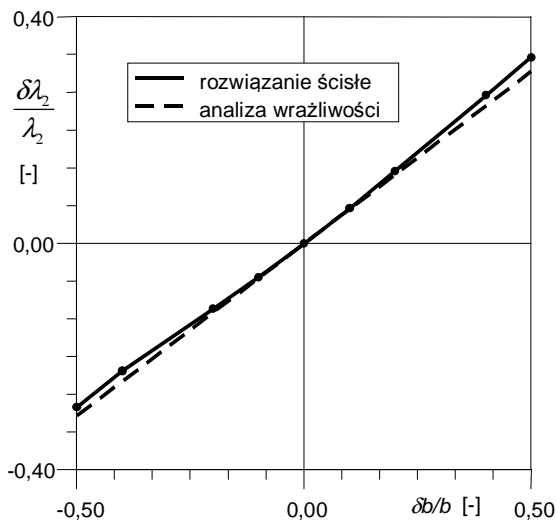
Rys. 3.34. Podcałkowe funkcje wrażliwości wariacji kwadratu częstości skrętnych drgań własnych w zależności od względnych zmian szerokości pótek  $\delta b/b$  wolnopodpartej belki dwuteowej

Dokładność aproksymacji względnych zmian kwadratów rozważanych częstości  $\delta \lambda_i / \lambda_i$  odniesionych do ich wartości wyjściowych  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) przy względnych zmianach szerokości pótek  $\delta b/b$  na połowie długości belki pokazano, dla kolejnych częstości drgań, na

rys. 3.35÷3.37. Rozwiązanie ściśle otrzymano poprzez analizę parametryczną, zmieniając szerokość pólki na połowie długości pręta (rys. 3.32).



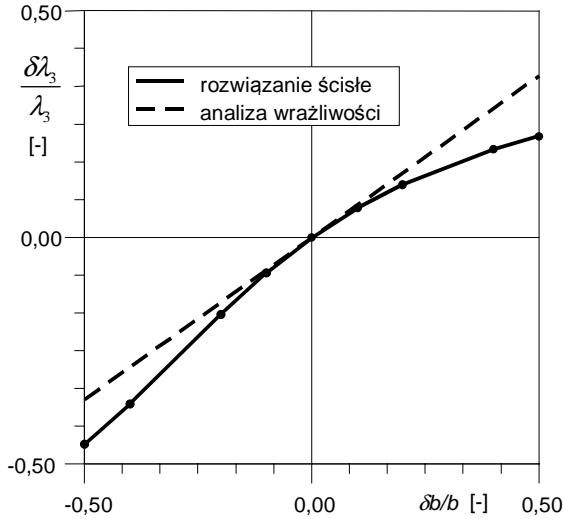
Rys. 3.35. Dokładność aproksymacji zmian kwadratu pierwszej częstości skrętnych drgań własnych w zależności od wariacji szerokości pólki na połowie rozpiętości belki



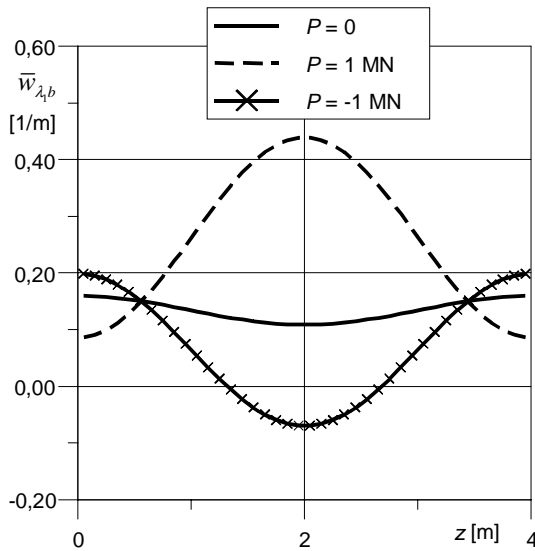
Rys. 3.36. Dokładność aproksymacji zmian kwadratu drugiej częstości skrętnych drgań własnych w zależności od wariacji szerokości pólki na połowie rozpiętości belki

Ponadto zbadano efekt działania siły osiowej  $P$  na rozkład podcałkowej funkcji wrażliwości pierwszej wartości własnej  $\lambda_1$ . Wyniki przedstawiono na rys. 3.38 dla trzech wartości siły osiowej  $P = -1; 0; 1$  MN. Sprawdzono dodatkowo, czy pręt nie ulegnie wyboczeniu w przypadku przyjętej osiowej siły ściskającej. Siła krytyczna wyboczenia giętnego anali-

zowanej belki wynosi  $P_b^{cr} = 1,69 \text{ MN}$ , a wyoboczenia skrętnego  $P_t^{cr} = 3,79 \text{ MN}$ . Są to wartości większe od przyjętej siły ściskającej.



Rys. 3.37. Dokładność aproksymacji zmian kwadratu trzeciej częstoty skrętnych drgań własnych w zależności od wariacji szerokości półek na połowie rozpiętości belki

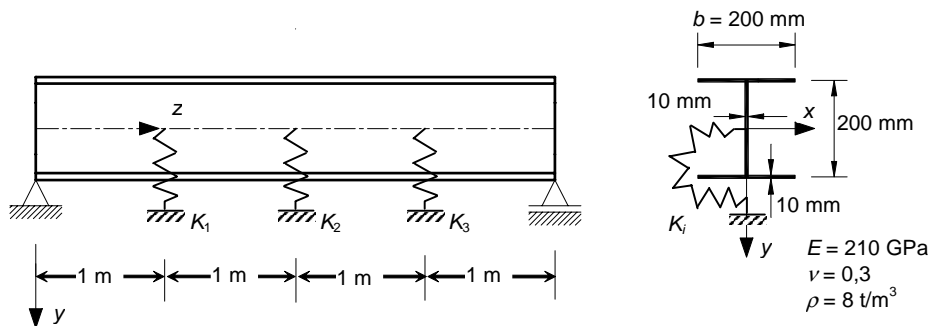


Rys. 3.38. Wpływ działania siły osiowej na podcałkowe funkcje wrażliwości pierwszej wartości własnej

Przedstawione wyniki analizy wrażliwości drgań własnych pręta dwuteowego otrzymane dla dyskretnego układu są zgodne z rezultatami otrzymanymi dla opisu ciągłego przyjętego w pracach (Budkowska i Szymczak 1992<sup>a</sup>, 1992<sup>b</sup>), co potwierdza poprawność przedstawionej analizy.

### 3.3.5. Analiza wrażliwości postaci drgań skrętnych belki cienkościennej

Rozważmy tę samą wolno podpartą belkę dwuteową, jak w poprzednim przykładzie, o stałym przekroju poprzecznym, lecz stężoną trzema rotacyjnymi sprężystymi podporami o sztywności  $K_1 = K_2 = K_3 = 1000$  kNm/rad pokazaną na rys. 3.39. (Mikulski 2003).



Rys. 3.39. Schemat wolnopodpartej belki dwuteowej ze sprężystymi podporami

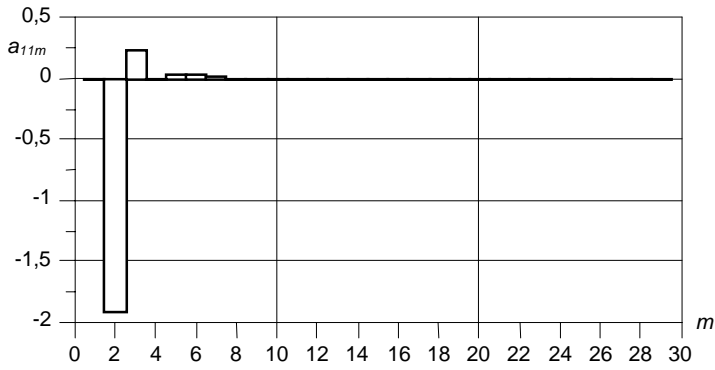
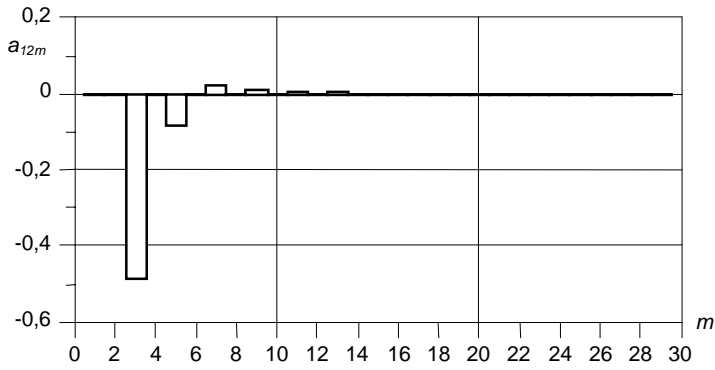
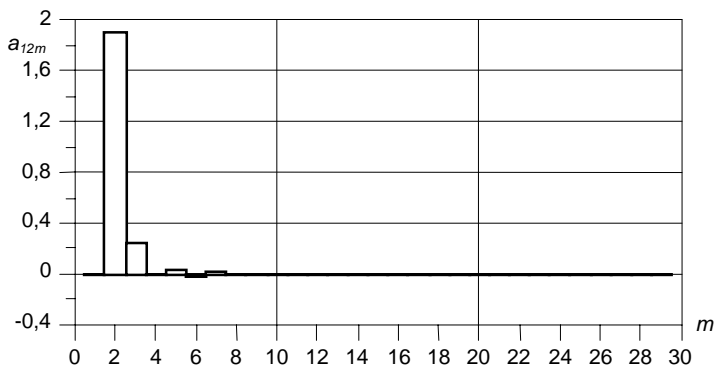
Do analizy zastosowano drugą z metod przedstawionych w rozdziale 3.2.2, umożliwiającą wyznaczenie wariacji wektora własnego  $\delta \mathbf{q}_i$  w bazie wektorów własnych tworzących zupełny zbiór wektorów przestrzeni  $R^n$  (wzór 3.56). Analizę wrażliwości wektora drgań własnych przedstawiono dla pierwszej, podstawowej postaci drgań skrętnych belki dwuteowej  $\mathbf{q}_1$ . Wyznaczono wariacje pierwszej postaci drgań własnych względem względnych wariacji stałych sprężystości trzech podpór sprężystych:

$$\mathbf{q}_{1,K_i} = \frac{\delta \mathbf{q}_1}{\delta K_i} = \sum_{m=1}^n a_{1im} \mathbf{q}_m \quad (3.75)$$

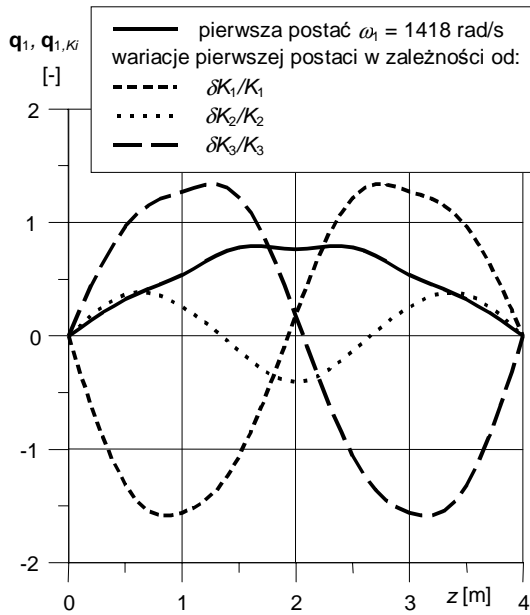
gdzie  $\delta \bar{K}_i = \frac{\delta K_i}{K_i}$  jest względną wariacją stałej sprężystości podpory sprężystej,  $a_{1im}$  ozna-

cza współczynniki wagi udziału poszczególnych  $m$ -tych wektorów własnych przestrzeni  $R^n$  w tworzeniu wektora wrażliwości 1-szej postaci drgań własnych od wariacji  $i$ -tej zmiennej projektowej. Wartości tych współczynników przedstawiono na rys. 3.40÷3.42, z których wynika, że jedynie wektory własne najbliższe analizowanemu wektorowi mają decydujący udział w tworzeniu wektora wariacji tegoż wektora własnego. Można zatem zredukować bazę wektorów własnych, w której opisana jest wariacja analizowanego wektora własnego. W przedstawionym przykładzie model MES składa się z 40 elementów skończonych, a liczba stopni swobody wynosi 80. Analizę przeprowadzono przy redukcji bazy wektorów własnych do pierwszych 30.

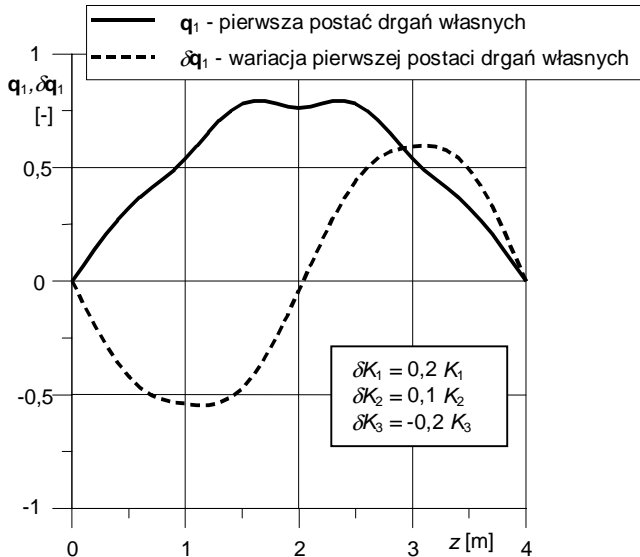


Rys. 3.40. Współczynniki wagowe  $a_{11m}$  odpowiadające względnej wariacji  $\delta K_1/K_1$ Rys. 3.41. Współczynniki wagowe  $a_{12m}$  odpowiadające względnej wariacji  $\delta K_2/K_2$ Rys. 3.42. Współczynniki wagowe  $a_{13m}$  odpowiadające względnej wariacji  $\delta K_3/K_3$ 

Wariacje pierwszej postaci własnej  $\mathbf{q}_{1,K_i}$  w zależności od względnych zmian punktowych stałych sprężystości  $\delta K_i/K_i$  zostały pokazane na rys. 3.43.



Rys. 3.43. Pierwsza postać skrętnych drgań własnych  $q_1$  i jej wektory wrażliwości  $q_{1,Ki}$  w zależności od względnych zmian sztywności sprężystych podpór  $\delta K_i/K_i$



Rys. 3.44. Pierwsza postać skrętnych drgań własnych  $q_1$  i jej wariacja  $\delta q_1$  odpowiadająca przyjętym zmianom sztywności sprężystych podpór – analiza wrażliwości

W celu zbadania poprawności uzyskanych wyników przyjęto wariacje zmiennych projektowych:  $\delta K_1 = 0,2 K_1$ ,  $\delta K_2 = 0,1 K_2$ ,  $\delta K_3 = -0,2 K_3$ , i wyznaczono wariację pierwszej postaci własnej (rys. 3.44):

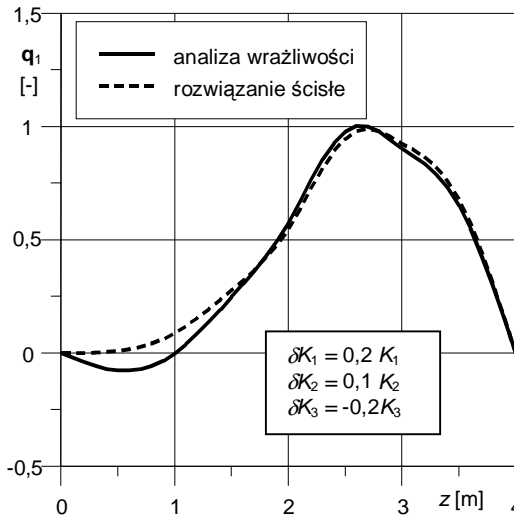
$$\delta \mathbf{q}_1 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{q}_{1,K_i} \frac{\delta K_i}{K_i} \quad (3.76)$$

Rysunek 3.45 przedstawia porównanie pierwszej postaci drgań własnych przy zmienionych wartościach stałych sprężystości podpór, otrzymanej wprost poprzez analizę dynamiczną układu o zmienionych parametrach, z postacią uzyskaną drogą analizy wrażliwości  $\tilde{\mathbf{q}}$  przy zastosowaniu zależności:

$$\tilde{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{q}_1 + \delta \mathbf{q}_1 \quad (3.77)$$

gdzie  $\mathbf{q}_1$  jest wyjściową postacią drgań własnych.

Porównanie tych dwóch rozwiązań dowodzi poprawności zastosowanej analizy wrażliwości postaci drgań własnych.



Rys. 3.45. Aproxymacja pierwszej postaci drgań własnych za pomocą analizy wrażliwości i porównanie z rozwiązaniem ścisłym

W niniejszym rozdziale przedstawiono różnego typu przykłady numeryczne dotyczące analizy wrażliwości w zagadnieniach statyki i dynamiki układów prętowych. Głównym walorem analizy wrażliwości jest uzyskanie bezpośredniej zależności wiążącej wariacje zmiennej stanu z wariacjami przyjętych zmiennych projektowych. Takie związki umożliwiają zarówno ocenę jakościową, jak i oszacowanie ilościowe wariacji zmiennej stanu bez konieczności wykonywania analizy parametrycznej. Daje to duże możliwości zastosowań analizy wrażliwości w realnych zagadnieniach inżynierskich, co zostało przedstawione w rozdziale 5.

Oprócz analizy wrażliwości w ujęciu deterministycznym, istnieje pojęcie analizy wrażliwości w ujęciu probabilistycznym. Wówczas dla przyjętych funkcji rozkładu gęstości zmiennych projektowych wyznacza się funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej stanu. Analiza wrażliwości w ujęciu probabilistycznym wraz z przykładami została przedstawiona w następnym rozdziale.

## Rozdział 4

# WRAŻLIWOŚĆ W UJĘCIU PROBABILISTYCZNYM

Bliższym rzeczywistości niż opis deterministyczny jest probabilistyczny punkt widzenia na projektowanie konstrukcji, z uwagi na fakt, że wartości zmiennych projektowych, takich jak cechy fizyczne materiału, cechy geometryczne elementów konstrukcyjnych, obciążenia mogą w pewnych granicach odbiegać od wartości (deterministycznych) przyjętych w projekcie. Obecnie obowiązujące normy budowlane traktują problem niezawodności konstrukcji i wyznaczania zapasu bezpieczeństwa jako zagadnienia losowe. Dobrym wprowadzeniem w tę tematykę jest książka Melchersa 1999.

Zakładając, że parametry projektowe są funkcjami losowymi (lub zmiennymi losowymi) stosowane jest określenie stochastyczna (lub probabilistyczna) analiza wrażliwości. W tym rozdziale rozważane są zagadnienia analizy statycznej konstrukcji prętowych, z uwzględnieniem takiego probabilistycznego punktu widzenia. Zamieszczona probabilistyczna analiza wrażliwości ma na celu przedstawić inne niż w ujęciu klasycznej, deterministycznej analizy wrażliwości, sformułowanie problemu, oraz inne jakościowo rozwiązanie. W przykładowych obliczeniach numerycznych zastosowano metodę Monte Carlo.

Metoda symulacyjna Monte Carlo, zwana także metodą prób statystycznych, stanowi proste i uniwersalne narzędzie obliczeniowe o dużych możliwościach aplikacji. Metoda ta została opracowana w połowie XX wieku. Pierwsze jej zastosowanie dotyczyło problemów mechaniki statycznej cząstek elementarnych (Metropolis i Ulam 1949, Hammersley i Handscomb 1964). Obecnie metoda Monte Carlo stała się powszechnie stosowaną w wielu dziedzinach nauki metodą analiz probabilistycznych (Rubinstain 1981, Melchers 1999).

Metoda Monte Carlo nie nakłada żadnych ograniczeń na rozwiązywany problem. Za jej pomocą można poszukiwać rozwiązań problemów opisanych przez zmienne o dowolnie dużych odchyleniach standardowych. W obliczeniach można zastosować komercyjne lub własne programy deterministyczne. Jedynym ograniczeniem jest często znaczna liczba próbek (realizacji), którą należy wykonać, aby uzyskać miarodajne wyniki. Zostało to również potwierdzone w zamieszczonych w niniejszym rozdziale przykładach numerycznych, gdzie liczba próbek decyduje o jakości poszukiwanego rozwiązania.

W niniejszej pracy rozpatrzono przypadki konstrukcji w stanach regularnych oraz badana jest wrażliwość probabilistyczna w stanach granicznych konstrukcji.

W analizie wrażliwości, w stanach regularnych, jako wstęp do zastosowania metody Monte Carlo wprowadzono operację linearyzacji funkcji stanu konstrukcji. W porównaniu do działania metody perturbacyjnej operacja linearyzacji funkcji stanu konstrukcji jest postępowaniem mniej dokładnym.

Przedstawiona w punkcie 4.2 probabilistyczna analiza wrażliwości stanów granicznych konstrukcji jest propozycją badania układu, gdy parametry projektowe mogą przekraczać zakres przewidziany w projektowaniu, doprowadzając konstrukcję do stanu granicznego.

### 4.1. Probabilistyczna wrażliwość konstrukcji prętowych w stanie regularnym

Rozważać będziemy konstrukcje prętowe jako dyskretny system opisany przez wektor przemieszczenia  $\mathbf{u}$  i wektor obciążenia  $\mathbf{P}$ . W systemie tym występują parametry projektowe  $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ .

Zakładamy, że parametry projektowe są zmiennymi losowymi. Rozważamy funkcję, która opisuje pewien stan systemu w postaci

$$\mathcal{S}[\mathbf{u}(\mathbf{b}), \mathbf{b}]. \quad (4.1)$$

Przy przyjętych założeniach funkcja ta jest zmienną losową, zależną od parametrów projektowych (zmiennych losowych).

Wrażliwość probabilistyczną funkcji  $\mathcal{S}$  określamy jako rozkład prawdopodobieństwa tej funkcji przy założeniu, że znane są rozkłady prawdopodobieństwa parametrów projektowych.

Parametry projektowe (zmiennne losowe) występują w funkcji  $\mathcal{S}[\mathbf{u}(\mathbf{b}), \mathbf{b}]$  w sposób niejawni, gdyż wektor przemieszczenia  $\mathbf{u}$  związany jest z parametrami projektowymi w zagadnieniach liniowych statyki równaniem

$$\mathbf{K}(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{b}) = \mathbf{P}(\mathbf{b}) \quad (4.2)$$

gdzie macierz sztywności  $\mathbf{K}$  jest w ogólnym przypadku również funkcją parametrów projektowych  $\mathbf{b}$ .

Możliwe są dwa sposoby rozwiązania problemu.

Pierwszy sposób polega na linearyzacji funkcji  $\mathcal{S}[\mathbf{u}(\mathbf{b}), \mathbf{b}]$  i na wyznaczeniu wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego zlinearyzowanej funkcji, co jest przybliżonym opisem rozkładu prawdopodobieństwa funkcji  $\mathcal{S}$ .

Drugi sposób (bardziej dokładny) przyjmuje za podstawę metodę Monte Carlo.

#### 4.1.1. Linearyzacja funkcji $\mathcal{S}$

Funkcja  $\mathcal{S}$  jest zmienną losową i jest funkcją pewnej liczby zmiennych losowych (parametrów projektowych). Zakładamy, że parametry projektowe  $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n\}^T$  opisane są przez wartość oczekiwaną (średnią)

$$\mathbf{m} = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}^T \quad (4.3)$$

i przez macierz kowariancyjną

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ & \sigma_2^2 & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ & & \sigma_3^2 & \dots & C_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Funkcję  $\mathcal{S}$  linearyzujemy w otoczeniu wartości oczekiwanej parametrów projektowych

$$\mathcal{S}_L = m_s + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} \Big|_m (b_i - m_i) \quad (4.5)$$

Zgodnie z przyjętą postacią funkcji  $\mathcal{S}$

$$m_s = \mathcal{S}[\mathbf{u}(\mathbf{m}), \mathbf{m}] \quad (4.6)$$

a

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} \Big|_m = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_i} \Big|_m + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} \Big|_m. \quad (4.7)$$

Odchylenie standardowe funkcji  $\mathcal{S}$  ma postać

$$\sigma_s^2 = E[\mathcal{S}_L - m_s]^2 = E\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} \Big|_m (h_i - m_i)\right]^2 \quad (4.8)$$

gdzie  $E$  oznacza operację wartości oczekiwanej.

Realizując tę operację, otrzymamy

$$\sigma_s^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} \Big|_m\right)^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_j} C_{ij}. \quad (4.9)$$

W większości praktycznych przypadków parametry projektowe traktujemy jako zmienne losowe niezależne. Wówczas

$$\sigma_s^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} \Big|_m\right)^2 \cdot \sigma_i^2. \quad (4.10)$$

W rozwiązywaniu zadań podstawową rolę odgrywa pochodna funkcji  $\mathcal{S}$  określona wzorem (4.7). Tak jak w zagadnieniach wrażliwości deterministycznej, różniczkujemy równanie (4.2)

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_i} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_i} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial b_i} \quad (4.11)$$

skąd

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial b_i} = \mathbf{K}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial b_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_i} \mathbf{u} \right] \quad (4.12)$$

i podstawiamy do równania (4.7)

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial b_i} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{K}^{-1} \left[ \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial b_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b_i} \mathbf{u} \right]. \quad (4.13)$$

Podobnie jak w zagadnieniach wrażliwości deterministycznej równanie (4.13) jest podstawą metody bezpośredniej. W obliczeniach numerycznych powszechnie stosowana jest metoda układów sprzężonych, która zostało przedstawiona w rozdziale 3.1.2.

### 4.1.2. Zastosowanie metody Monte Carlo

Rozważmy równania (4.1) i (4.2). Zakładamy, że znane są rozkłady prawdopodobieństwa parametrów projektowych  $b_i$ .

Wrażliwość probabilistyczną funkcji  $\mathcal{S}$  określamy jako rozkład prawdopodobieństwa tej funkcji w zależności od rozkładów prawdopodobieństwa parametrów  $b_i$ .

Rozważać będziemy wpływ rozkładu prawdopodobieństwa tylko jednego parametru projektowego  $b = b_i$ , zakładając jednocześnie, że pozostałe parametry są stałe i równe ich wartościom oczekiwanym. Wydaje się to celowe z praktycznego punktu widzenia. Istotna jest rola parametrów projektowych w równaniu (4.2). Rozpatrzmy dwa przypadki :

a) Badany parametr występuje tylko w wektorze obciążenia. Równanie (4.2) ma postać

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(b) = \mathbf{P}(b) \quad (4.14)$$

Rozwiązując to równanie, otrzymamy  $\mathbf{u}(b)$  i podstawiamy do równania (4.1)

$$\mathcal{S}[\mathbf{u}(b), b] \quad (4.15)$$

W metodzie Monte Carlo generujemy wartości parametru  $b$ , zgodnie z jego rozkładem prawdopodobieństwa, i otrzymujemy wartości funkcji  $\mathcal{S}$ , które tworzą histogram częstości tej funkcji, czyli numeryczny odpowiednik funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa. W rozważanym przypadku celowe jest wyznaczenie macierzy odwrotnej  $\mathbf{K}^{-1}$  i jej wielokrotne wykorzystanie przy obliczaniu wektora  $\mathbf{u}(b)$ .

b) Badany parametr występuje tylko w macierzy sztywności  $\mathbf{K}$ . Równanie (4.2) ma postać

$$\mathbf{K}(b) \cdot \mathbf{u}(b) = \mathbf{P} \quad (4.16)$$

W metodzie Monte Carlo równanie to należy rozwiązywać wielokrotnie, gdyż przy każdej generacji parametru  $b$  jest ono inne.

Postępowanie metody Monte Carlo w przypadku, gdy parametr  $b$  występuje jednocześnie w macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  i w wektorze obciążenia  $\mathbf{P}$  nie różni się od przypadku b).

## 4.2. Probabilistyczna wrażliwość stanów granicznych konstrukcji

Zgodnie z zasadami projektowania konstrukcji budowlanych, prawdopodobieństwo awarii jest małą wielkością rzędu  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  lub mniejszą (Murzewski 1989).

Można uznać jednak za interesujące bardziej szczegółowe rozważania na temat stanów granicznych konstrukcji. Polega to na przyjęciu, że obciążenia przekraczają wielkości występujące w projektowaniu, lub że wytrzymałości elementów konstrukcji zostają silnie obniżone.

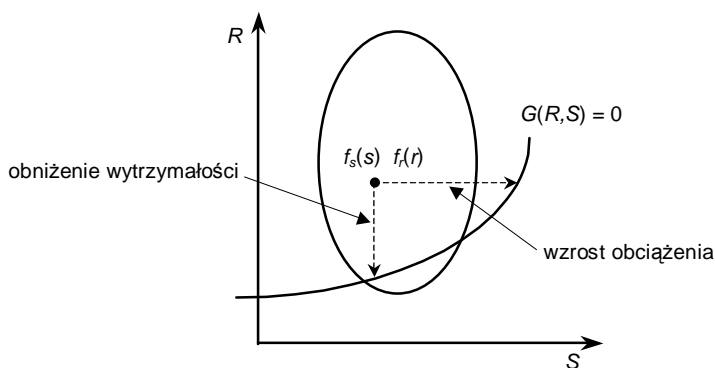
Zgodnie z przyjętym ogólnym założeniem analiza stanów granicznych prowadzona jest w ujęciu losowym. Na takiej podstawie można zdefiniować wrażliwość probabilistyczną stanu granicznego konstrukcji i wprowadzić miarę tej wrażliwości.

### 4.2.1. System fundamentalny

Rozważmy system konstrukcji, w której występują tylko dwie zmienne losowe  $S$  i  $R$ . Zmienna losowa  $S$  wynika z działania obciążenia – jest to tak zwany efekt obciążenia.

W konstrukcjach prętowych jest to określona siła przekrojowa. Zmienna losowa  $R$  opisuje wytrzymałość przekroju.

Założmy, że zmienne losowe  $S$  i  $R$  są niezależne i opisane przez funkcje gęstości  $f_s(s)$  i  $f_r(r)$  oraz dana jest funkcja stanu granicznego  $G(R,S)$ . W projekcie systemu określony jest obszar zmienności zmiennych losowych  $S$  i  $R$  oraz krzywa  $G(R,S) = 0$  rozdzielająca ten obszar na część bezpieczną i niebezpieczną (rys. 4.1).



Rys. 4.1. Dwuwymiarowy rozkład prawdopodobieństwa

Prawdopodobieństwo zdarzeń losowych położonych nad linią  $G(R,S) = 0$  określa niezawodność systemu, a prawdopodobieństwo zdarzeń losowych położonych pod tą linią jest prawdopodobieństwem awarii.

Wrażliwość probabilistyczna stanów granicznych systemu jest koncepcją wykraczającą poza normalne zachowanie się systemu. Jest to eksperyment myślowy, który każde zdarzenie losowe doprowadza do stanu granicznego. Można to osiągnąć przez zwiększenie (wyjątkowo zmniejszenie) zmiennej losowej  $S$  (efekt obciążenia), lub też zmniejszenie (wyjątkowo zwiększenie) zmiennej losowej  $R$ .

#### 4.2.1.1. Wrażliwość probabilistyczna stanów granicznych systemu w odniesieniu do efektu obciążenia ( $S$ )

Każde zdarzenie losowe doprowadzamy do stanu granicznego systemu przez wprowadzenie mnożnika  $\lambda_s$  w równaniu  $G(R, \lambda_s S) = 0$ . Mnożnik  $\lambda_s$  zależy od zmiennych losowych  $R$  i  $S$ , jest zatem bezwymiarową zmienną losową. Łatwo można zauważyć, że w obszarze nad linią  $G(R,S) = 0$   $\lambda_s$  przyjmuje wartości większe od 1, na tej linii równy jest 1, a pod tą linią ma wartości mniejsze od 1.

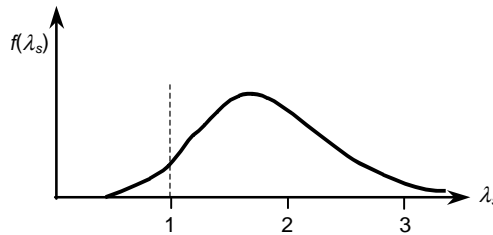
Celowe jest przyjąć, że miarą wrażliwości probabilistycznej stanów granicznych jest funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa mnożnika  $\lambda_s$  (rys. 4.2).

Na rysunku 4.2. pole obszaru ograniczonego krzywą funkcji gęstości powyżej liczby 1 określa niezawodność systemu, a pole obszaru poniżej 1 jest prawdopodobieństwem awarii systemu.

Jeżeli równanie stanu granicznego ma postać  $R-S = 0$ , to

$$\lambda_s = \frac{R}{S} \quad (4.17)$$





Rys. 4.2. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa mnożnika  $\lambda_s$

#### 4.2.1.2. Wrażliwość probabilistyczna stanów granicznych systemu w odniesieniu do wytrzymałości ( $R$ )

Postępując podobnie jak w przypadku 4.2.1.1, wprowadzamy do każdego zdarzenia losowego mnożnik  $\lambda_r$  w równaniu stanu granicznego  $G(\lambda_r, R, S) = 0$ .

Bezwymiarowa zmienna losowa  $\lambda_r$  przyjmuje w obszarze pod linią  $G(R, S) = 0$  wartości mniejsze od 1, a w obszarze powyżej tej linii wartości większe od 1.

Gdy równanie stanu granicznego ma postać  $R - S = 0$  to

$$\lambda_r = \frac{S}{R} \quad (4.18)$$

W bardzo prostych zadaniach (np. zmienne losowe  $R$  i  $S$  mają rozkład równomierny w obszarze prostokątnym i równanie stanu granicznego jest postaci  $R - S = 0$ ) można analitycznie wyznaczyć ścisłą postać funkcji gęstości  $f(\lambda_s)$  i  $f(\lambda_r)$ . W innych przypadkach postępowanie analityczne jest trudne i na ogół nie prowadzi do rozwiązania zadania. Skutecznym narzędziem numerycznym jest metoda Monte Carlo.

#### 4.2.2. Metoda Monte Carlo – konstrukcje prętowe

Ujęcie probabilistyczne problemów statyki konstrukcji prętowych polega na założeniu, że parametry projektowe (obciążenia, charakterystyki materiałowe, imperfekcje geometryczne) są zmiennymi losowymi (w ogólnym przypadku funkcjami losowymi).

Bezpośrednie przeniesienie rozważań dotyczących systemu fundamentalnego na systemy opisujące zachowanie się prętowych konstrukcji jest niemożliwe przede wszystkim dlatego, że nie istnieje równanie analityczne opisujące stany graniczne tych systemów. Stan graniczny może również mieć postać utraty stateczności systemu.

Jeśli ograniczyć się do rozwiązań numerycznych, bazujących na opisie dyskretnym systemów, zdefiniowanie wrażliwości probabilistycznej stanów granicznych sprawia trudności. Wydaje się, że jedynie metoda Monte Carlo pozwala na pokonanie tych trudności przez zaproponowanie specjalnej procedury, która jednocześnie definiuje i określa algorytm obliczenia wrażliwości probabilistycznej stanów granicznych systemów, które można rozwiązywać w zakresie deterministycznym. Specjalna procedura metody Monte Carlo jest następująca.

Jeśli w danym zadaniu występuje kilka parametrów projektowych w postaci zmiennych losowych, należy określić parametr (zmienną losową), względem którego obliczona będzie wrażliwość probabilistyczna stanu granicznego systemu. Ten parametr odgrywa w dalszych operacjach rolę dominującą (parametr dominujący).

Zgodnie z zasadami metody Monte Carlo, wykonywane są następujące operacje:

- 1) Jednokrotna generacja wszystkich zmiennych losowych. Wszystkie zmienne losowe stają się liczbami (mianowanymi). Zatem w tym kroku operacyjnym wszystkie obciążenia, stałe materiałowe i geometria są deterministyczne. Do parametru dominującego wprowadzamy mnożnik  $\lambda$ , tak aby doprowadzić system do stanu granicznego. Pozostałe parametry pozostają niezmienione. W zależności od założeń dotyczących wytrzymałości elementów systemu i stopnia statycznej niewyznaczalności systemu, jest to zadanie mniej lub bardziej pracochłonne. Z reguły stosować należy postępowanie przyrostowe, aż system przekształci się w układ geometrycznie zmienny. W ten sposób otrzymujemy wartość mnożnika  $\lambda_1$ .
- 2) Powyższą operację stosujemy  $N$ -krotnie w zależności od typu zadania i wymaganej dokładności, otrzymując w wyniku zbiór mnożników  $\lambda_n, n = 1, 2, \dots, N$ .

Wprowadzony mnożnik jest zmienną losową, zatem otrzymany zbiór jest histogramem częstości tej zmiennej losowej, to znaczy numerycznym odpowiednikiem funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa i miarą wrażliwości probabilistycznej stanu granicznego systemu względem wybranego parametru projektowego. W taki sam sposób można obliczyć wrażliwość probabilistyczną stanu granicznego systemu względem dowolnych parametrów projektowych.

Otrzymane histogramy pozwalają na ocenę, jak zmienia się niezawodność (lub prawdopodobieństwo awarii) systemu, gdy określony parametr projektowy przekracza zakres przewidziany w projekcie. Taki punkt widzenia jest praktycznie ważny w przypadku obiektów budowlanych, w których awaria konstrukcji jest niebezpieczna dla dużej liczby ludzi lub prowadzi do dużych strat materialnych.

### 4.3. Przykłady probabilistycznej wrażliwości konstrukcji

Przedstawione przykłady dotyczą układów konstrukcyjnych będących tematem rozważań niniejszej pracy, czyli belek i ram cienkościennych. W obliczeniach przyjęto prętowy model układu z zastosowaniem cienkościennych elementów skończonych o 14 stopniach swobody, zaś węzły ramy modelowane są elementami MES wygenerowanymi z zastosowaniem techniki superelementu, opisaną w rozdziale 2.

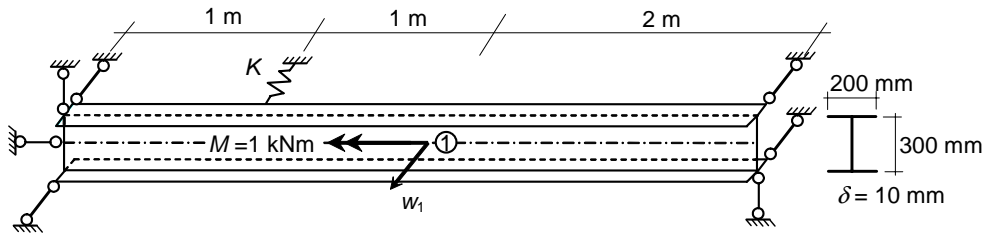
Zamieszczone w niniejszym rozdziale przykłady mają na celu przedstawienie probabilistycznej analizy wrażliwości, a mianowicie pokazać inne niż w przypadku klasycznej analizy wrażliwości sformułowanie problemu oraz także jakościowo inne, w stosunku do przykładów zamieszczonych w rozdziale 3, wyniki.

#### 4.3.1. Belka dwuteowa – probabilistyczna analiza wrażliwości stanu regularnego

Rozważono zagadnienie skręcania pręta cienkościennego o przekroju dwuteowym stężonego sprężystą podporą w poziomie górnej półki (rys. 4.3).

W analizie przyjęto jako:

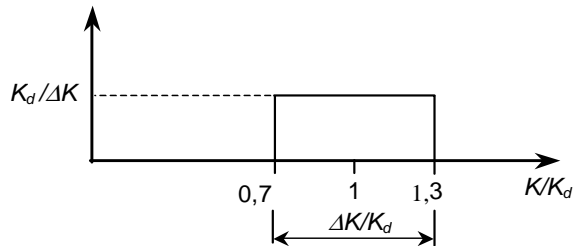
- zmienną projektową stałą sprężystości stężenia – sprężystej podpory  $K$ ,
- zmienną stanu (wybraną odpowiedź układu)  $w_1$  – przemieszczenie poziome w połowie rozpiętości belki (punkt 1).



Rys. 4.3. Belka dwuteowa poddana skręcaniu

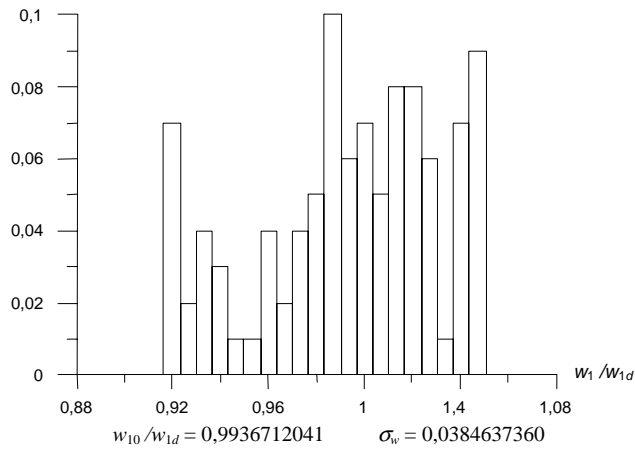
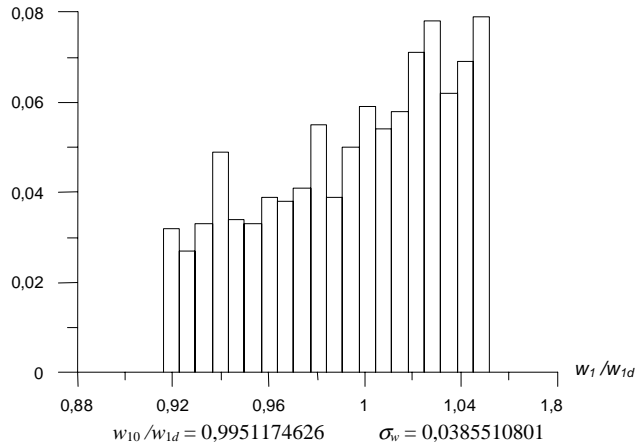
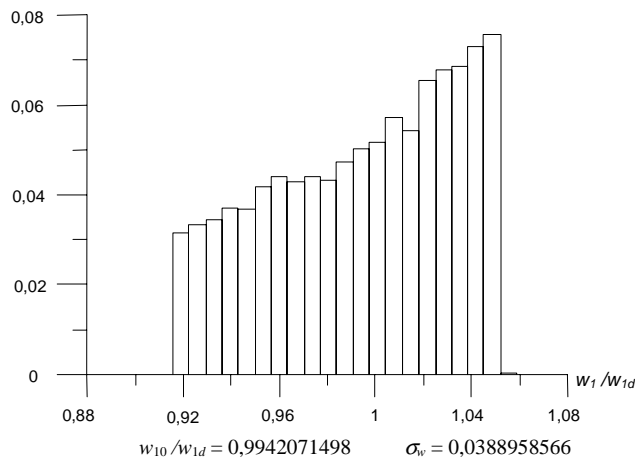
Do analizy zastosowano prętowy model belki cienkościennej. Z uwagi na fakt, że stężenie poprzeczne belki jest na poziomie górnej półki, konieczne było zastosowanie sztywnego elementu skończonego. Umożliwiło to uzależnienie poziomego przemieszczenia belki na poziomie półki górnej od translacji i kąta skręcenia węzła leżącego w środku ciężkości analizowanego przekroju poprzecznego pręta (w miejscu stężenia). Zgodne jest to z przyjętym w pracy podstawowym założeniem nieodkształcalności przekroju poprzecznego pręta cienkościennego (Własow 1959).

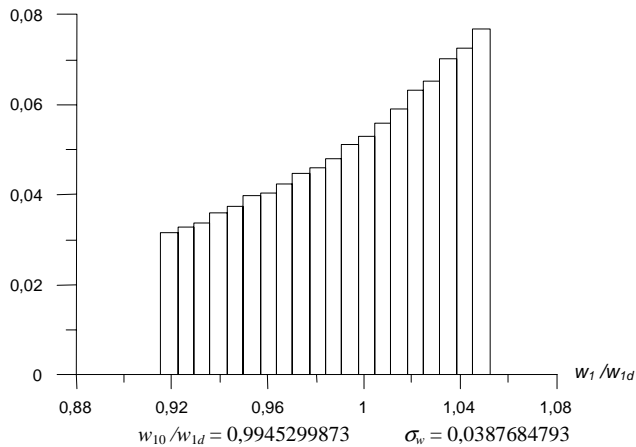
Przyjęto równomierny rozkład prawdopodobieństwa zmian sztywności sprężystej podpory  $K$  (rys. 4.4). Jako deterministyczną wartość projektową sztywności sprężyny przyjęto  $K_d = 10 \text{ MN/m}$ . Wówczas zmienna stanu – przemieszczenie poziome wynosi  $w_{1d} = 0,000771 \text{ m}$ .

Rys. 4.4. Funkcja rozkładu gęstości zmiennej projektowej – stałej sprężystości stężenia  $K$ 

Wyznaczono funkcję gęstości przemieszczenia poziomego  $w_1$ . Zastosowano metodę Monte Carlo. Na rysunkach 4.5÷4.8 przedstawiono otrzymane funkcje gęstości zmiennej stanu  $w_1$ , w zależności od przyjętej liczby losowań: 100, 1000, 10 000 i 100 000 losowań.

Na przedstawionych rysunkach wyraźnie widać, że dokładność rozwiązania zależy od przyjętej liczby losowań. Jako wynik analizy wrażliwości w ujęciu probabilistycznym otrzymujemy funkcję gęstości prawdopodobieństwa analizowanej zmiennej stanu przy określonej, zadanej z góry funkcji rozkładu gęstości zmiennej projektowej. Można także ocenić zakres zmienności odpowiedzi układu. W odróżnieniu od klasycznej analizy wrażliwości w ujęciu deterministycznym, związek pomiędzy wariacjami zmiennej stanu i zmiennych projektowych nie jest określony.

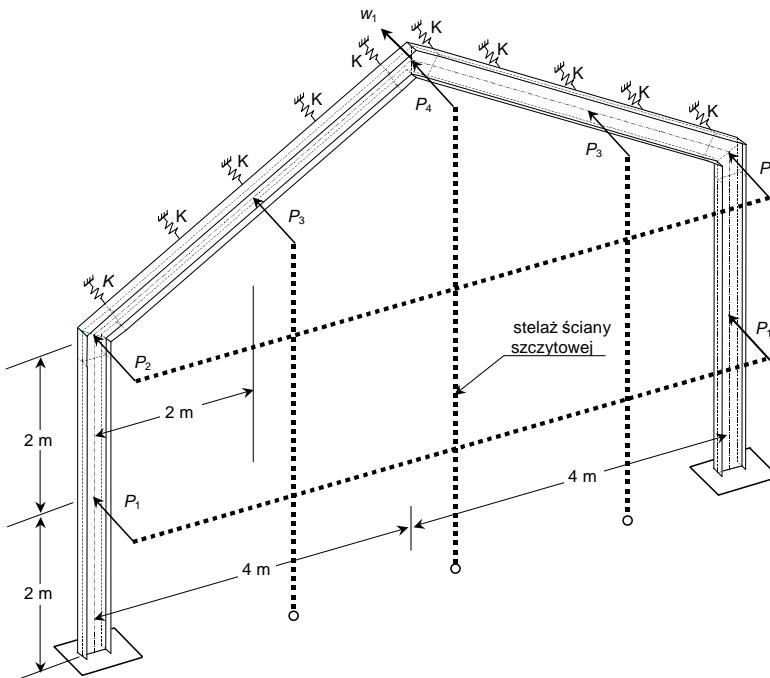
Rys. 4.5. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia poziomego  $w_1$  – 100 losowańRys. 4.6. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia poziomego  $w_1$  – 1000 losowańRys. 4.7. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia poziomego  $w_1$  – 10 000 losowań



Rys. 4.8. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa przemieszczenia poziomego  $w_1$  – 100 000 losowań

#### 4.3.2. Rama cienkościenna – probabilistyczna analiza wrażliwości stanu granicznego

Rozważono zagadnienie parcia wiatru na typową ramę hali stalowej zbudowaną z prętów dwuteowych (wysokość przekroju  $h = 300$  mm, szerokość półek  $b = 200$  mm, stała grubość środnika i półek  $\delta = 10$  mm), pokazaną na rys. 4.9. Do analizy przyjęto prętowy model ramy zbudowany z klasycznych elementów cienkościennych, zaś węzły modelowane są z zastosowaniem superelementu, co zostało przedstawione w rozdziale 2.



Rys. 4.9. Rama hali stalowej

Podstawowym obciążeniem jest parcie wiatru działające na obudowę szczytu hali. W górnej płaszczyźnie ukośne rygle stężone są płatwiami.

Przyjęto następujące dane oddziaływania wiatru :

$p_k = q_k \cdot C_e \cdot C \cdot \beta$  – charakterystyczna wartość parcia wiatru,

$q_k = 0,350$  kPa – II strefa, co odpowiada prędkości wiatru  $v = 24$  m/s,

$C_e = 1,0$  – współczynnik ekspozycji,

$C = 0,7$  – współczynnik kształtu przeszkody,

$\beta = 1,8$  – współczynnik porywów wiatru (konstrukcja niepodatna na dynamiczne działanie wiatru).

Po uwzględnieniu powyższych danych otrzymano charakterystyczną wartość parcia wiatru na konstrukcję:

$p_k = 0,350 \cdot 1,0 \cdot 0,7 \cdot 1,8 = 0,441$  kPa.

Siły z obudowy przekazywane są na ramę w siedmiu punktach, gdzie mocowany jest stelaż ściany osłonowej (rys. 4.9). Analiza takiego układu pozwoliła określić siły:

$P_1 = 1,597$  kN,

$P_2 = 0,644$  kN,

$P_3 = 2,661$  kN,

$P_4 = 1,376$  kN.

Dopuszczalne maksymalne przemieszczenie poziome szczytowej ściany hali stalowej przyjęto zgodnie z warunkiem normowym dla obudowy wrażliwej na pęknięcie :

$$w_{\max} = \frac{H}{250} = \frac{6300}{250} = 25,2 \approx 25 \text{ mm} \quad (4.19)$$

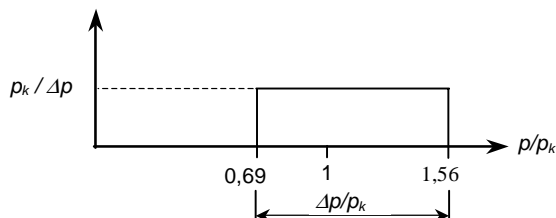
Przeprowadzono probabilistyczną analizę wrażliwości stanu granicznego określonego funkcją:

$$w_{\max} - w_1 = 0 \quad (4.20)$$

Obciążenie stanowi parcie wiatru przyjęte zgodnie z polską normą. Przyjęto II strefę obciążenia wiatrem. Szczytowa ściana osłonowa wykonana jest z paneli warstwowych mocowanych do sztywnego stelażu, który przekazuje obciążenie na ramę nośną w postaci sił skupionych  $P_1 \div P_4$ .

Przedmiotem analizy jest stan graniczny użytkowania określony normowym, dopuszczalnym przemieszczeniem poziomym konstrukcji hali opisany funkcją (4.20).

Przyjęto równomierny rozkład prawdopodobieństwa zmian sztywności stężeń dachowych  $K$ , taki sam jak w poprzednim przykładzie (rys. 4.4). Przyjęto projektową wartość stałej sprężystości sprężystego podparcia  $K_d = 80$  kN/m. Przyjęto także równomierny rozkład prawdopodobieństwa parcia wiatru  $p$  pokazany na rys. 4.10. Jako wartość odniesienia parcia wiatru przyjęto  $p_k = 0,441$  kPa, co odpowiada prędkości wiatru  $v = 24$  m/s.

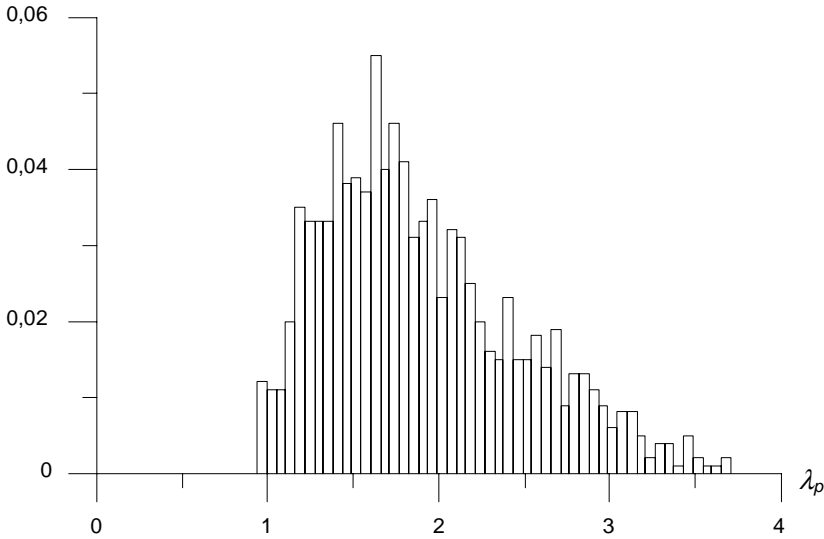


Rys. 4.10. Funkcja gęstości zmiennej projektowej – parcia wiatru  $p$

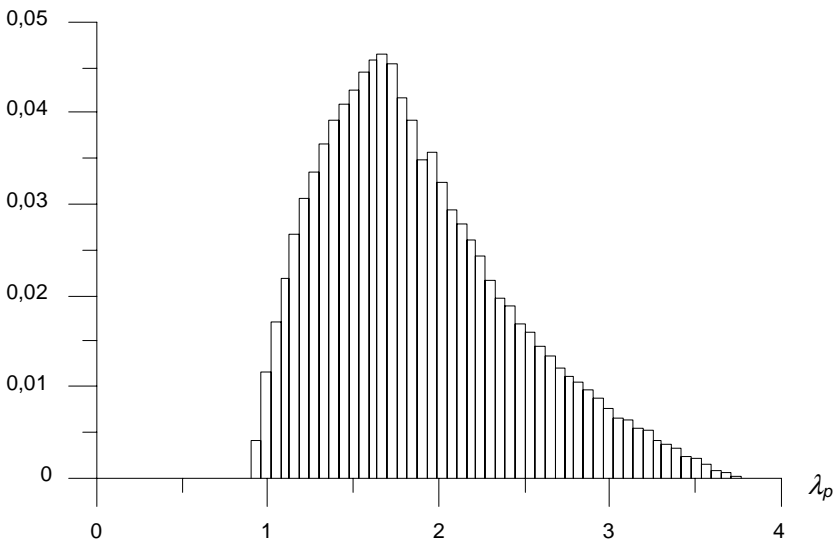
Minimalna wartość parcia wiatru odpowiada prędkości  $v = 20$  m/s, zaś maksymalna –  $v = 30$  m/s.

Zarówno wartość stałej sprężystości stężeń  $K$ , jak i wartość parcia wiatru  $p$  są zmiennymi niezależnymi. Jako zmienną wiodącą przyjęto obciążenie parciem wiatru  $p$ .

Wrażliwość stanu granicznego przedstawiono na rys. 4.11 (1000 losowań) i rys.4.12 (100 000 losowań).



Rys. 4.11. Histogram stanu granicznego konstrukcji – mnożnik obciążenia  $\lambda_p$  – 1000 losowań



Rys. 4.12. Histogram stanu granicznego konstrukcji – mnożnik obciążenia  $\lambda_p$  – 100 000 losowań

Z powyższych histogramów można wyznaczyć prawdopodobieństwo awarii konstrukcji. Taki stan występuje w przypadku wartości mnożnika obciążenia  $\lambda_p < 1$ . Podobnie, jak w poprzednim przykładzie, nie można określić zależności wiążącej stan awarii z wariacjami zmiennych projektowych (stałej sprężystości stężeń i obciążenia wiatrem).

W tym przykładzie widać także, że w metodzie Monte Carlo liczba losowań (realizacji) powinna być bardzo duża, aby uzyskać satysfakcjonującą dokładność rozwiązania. Zastosowanie zatem prętowego modelu ramy pozwoliło znacznie zredukować czas obliczeń układu w stosunku do bardziej złożonego modelu powłokowego.

W przypadku złożonych modeli numerycznych układów konstrukcyjnych, a szczególnie w zagadnieniach nieliniowych, duża liczba realizacji wymaga znacznego nakładu czasu obliczeń, co może stać się zadaniem praktycznie niewykonalnym. Powstały zatem metody umożliwiające redukcję liczby losowań, takie jak :

- Losowanie wg funkcji ważności (Melchers 1999). Każda z liczb ze zbioru losowań ma przypisaną tzw. wagę, która ma wpływ na losowanie danej liczby.
- Losowanie warstwowe (Hurtado i Barbat 1998). W tej metodzie każdy ze zbiorów liczb losowych, symbolizujący daną zmienną podstawową, dzielony jest na obszary (podzbiory) o jednakowym prawdopodobieństwie. Symulacja wykonywana jest dla każdego z podzbiorów osobno, a następnie odpowiednie zbiory wyników poddawane są analizie statystycznej.
- Losowanie kierunkowe (Bjæger 1988). W przestrzeni zmiennych podstawowych, sprowadzonych do postaci standaryzowanej gaussowskiej, rozpatrywane są poszczególne kierunki poprowadzone z początku układu. Dla każdego kierunku obliczane są warunkowe wartości prawdopodobieństwa wylosowania danej liczby. W wyniku modyfikacji procedury otrzymuje się losowanie kierunkowe z zastosowaniem funkcji wagi.

Zastosowanie redukcji liczby realizacji pociąga za sobą modyfikację klasycznego algorytmu metody Monte Carlo i jest możliwe w przypadku większej liczby informacji o analizowanym układzie. Metody redukcji liczby realizacji są tematem wielu badań naukowych, wykraczających jednak poza zakres niniejszej pracy.

Tak jak wcześniej wspomniano, tylko w analizie wrażliwości w ujęciu deterministycznym uzyskujemy bezpośrednio zależności wiążące wariacje zmiennych stanu z wariacjami zmiennych projektowych. Takie relacje stwarzają szerokie możliwości zastosowania analizy wrażliwości w praktycznych zagadnieniach inżynierskich, co zostało przedstawione w następnym, piątym rozdziale.



## Rozdział 5

# ZASTOSOWANIA ANALIZY WRAŻLIWOŚCI

Analiza wrażliwości w ujęciu deterministycznym może być szeroko stosowana do rozwiązywania praktycznych zagadnień inżynierskich, takich jak:

- 1) projektowanie – podcałkowe funkcje wrażliwości są liniami wpływu analizowanej zmiennej stanu względem wariacji zmiennych projektowych,
- 2) diagnostyka – do określenia punktów pomiarowych lub miejsc badania właściwości fizycznych materiału,
- 3) identyfikacja parametrów konstrukcji,
- 4) optymalizacja konstrukcji.

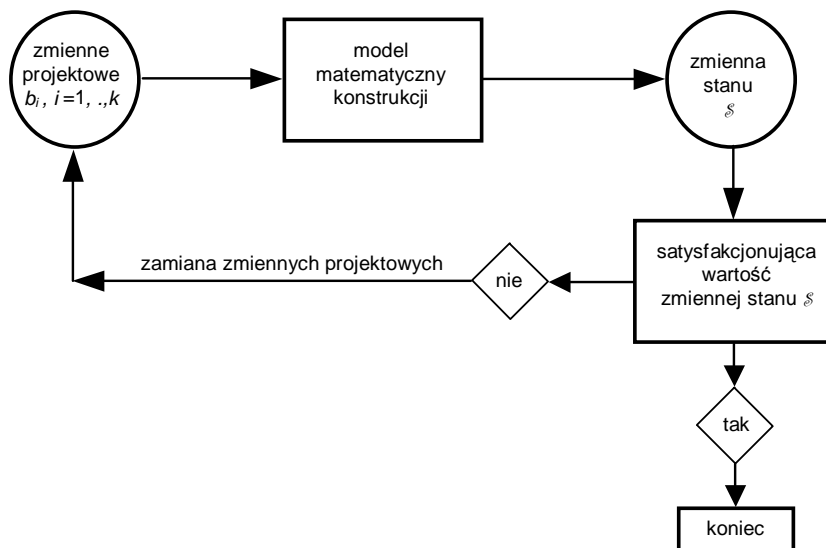
W każdym z wyżej wymienionych zastosowań wykorzystywany jest fakt, że analiza wrażliwości umożliwia wyznaczenie bezpośredniej relacji pomiędzy wariacją wybranej zmiennej stanu (np. przemieszczenie, siła wewnętrzna, częstość drgań własnych itd.) a wariacjami zmiennych projektowych (np. moduł sprężystości materiału, wymiary przekroju poprzecznego elementu, sztywność sprężystej podpory itd.). Taka zależność pozwala na ocenę jakościową oraz oszacowanie ilościowe zmiany zachowania się konstrukcji wywołanej możliwymi wariacjami zmiennych projektowych, bez konieczności analizy parametrycznej, która jest czasochłonna oraz jest działaniem opartym na intuicji i doświadczeniu projektanta czy rzeczoznawcy budowlanego. Można zatem stwierdzić, że analiza wrażliwości jest nowoczesnym narzędziem numerycznym wspierającym różne dziedziny działalności inżynierskiej, co zostało w niniejszym rozdziale zilustrowane dwoma przykładami numerycznymi.

### 5.1. Projektowanie

Projektowanie konstrukcji inżynierskich wymaga przyjęcia odpowiedniego modelu matematycznego konstrukcji, który jest opisany wieloma parametrami, zwanymi także zmiennymi projektowymi. Jest to najważniejsze zadanie, bowiem zastosowanie nieodpowiedniego modelu matematycznego może skutkować wynikami symulacji zachowania układu, dalekimi od zachowania się rzeczywistej konstrukcji. Przyczyną nie musi być zły schemat statyczny. Często odpowiedź układu w postaci ugięcia, siły wewnętrznej, siły krytycznej itd., zwana zmienną stanu  $\mathcal{S}$ , może być bardzo wrażliwa na przyjęcie niektórych parametrów konstrukcji  $b_i$ , zwanych zmiennymi projektowymi. W większości przypadków procesu projektowania, zależność wpływu przyjęcia wartości zmiennych projektowych na odpowiedź konstrukcji nie jest określona bezpośrednio zależnością, lecz jest ukryta w zastosowanym odpowiednim typie analizy konstrukcji (rys. 5.1).

Projektant, kierując się głównie doświadczeniem, wprowadza zmiany zmiennych projektowych  $\mathcal{D}_i$  z nadzieją uzyskania oczekiwanej, korzystnej zmiany zachowania konstrukcji opisanej zmienną stanu  $\mathcal{S}$ . W przypadku prostych konstrukcji intuicja i doświadczenie mogą prowadzić do szybkiej korekty projektu, dającej satysfakcjonujące zmiany zachowania konstrukcji. Każdy wariant, każda zmiana wymaga ponownej analizy skorygowanego

modelu matematycznego. W przypadku wielu parametrów – zmiennych projektowych – taki proces może być czasochłonny i nie musi prowadzić do satysfakcjonującego rozwiązania.



Rys. 5.1. Proces projektowania

Analiza wrażliwości konstrukcji może być wykorzystana jako wsparcie procesu projektowego, a w szczególności intuicji i nabytego doświadczenia inżyniera. Przy projektowaniu konstrukcji cenna jest znajomość **bezpośredniej relacji** pomiędzy wariacją zmiennej stanu  $\delta s$  a wariacjami zmiennych projektowych  $\delta b_i$ .



Rys. 5.2. Analiza wrażliwości

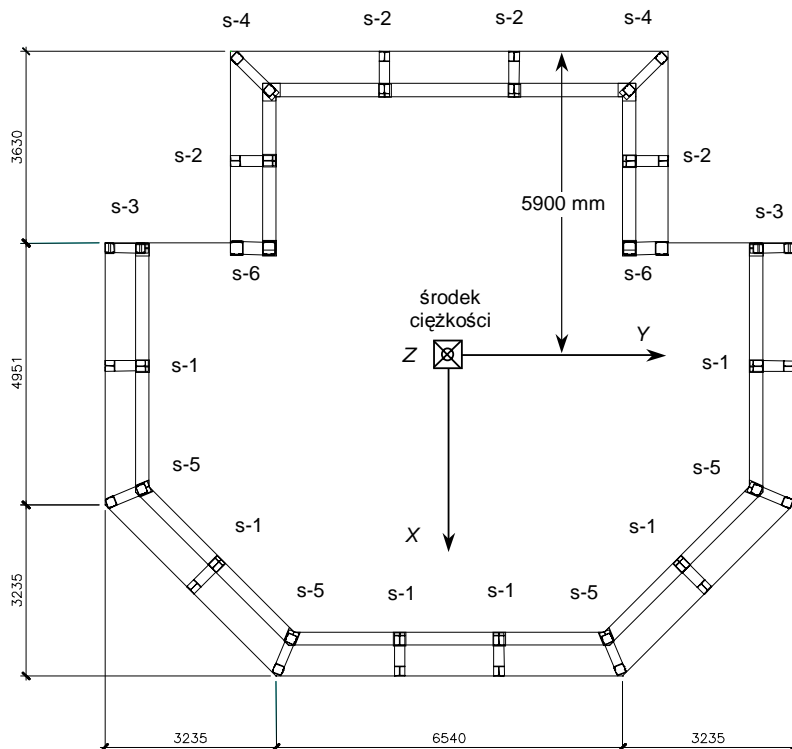
Właśnie analiza wrażliwości daje możliwość wyznaczania takich bezpośrednich związków (rys. 5.2), co daje projektantowi silne narzędzie modyfikacji projektowanej konstrukcji w celu osiągnięcia zamierzonego efektu określonego odpowiedzią konstrukcji – zmienną stanu. Jest to szczególnie przydatne w przypadku analizowania złożonych układów konstrukcyjnych, gdzie intuicja i doświadczenie inżynierskie mogą zawodzić.

### 5.1.1. Weryfikacja projektu konstrukcji więzy obserwacyjnej

Autor niniejszej monografii zetknął się z problemem wzbudzonych przez wiatr drgań wymuszonych płyty stropodachu wieży obserwacyjnej, pokazanej na zamieszczonych we wstępie rys. 1.4 i 1.5. Zaobserwowane przez pracowników i kierownictwo budowy znaczne

amplitudy drgań konstrukcji skłoniły nadzór budowlany do wstrzymania prac, w celu wyjaśnienia przyczyn tego niepokojącego zjawiska. Konieczna stała się zatem weryfikacja założeń projektowych i ewentualne wprowadzenie zmian.

Konstrukcja nośna, podtrzymująca żelbetową płytę dachową wieży obserwacyjnej, składała się z 20 cienkościennych, stalowych słupów rozmieszczonych po jej obwodzie. Wymiary płyty i układ słupów wraz z oznaczeniami ich typu pokazano na rys. 5.3.



Rys. 5.3. Rozmieszczenie słupów i wymiary płyty dachowej (stropodachu)

Poniżej zestawiono podstawowe charakterystyki techniczne analizowanego układu konstrukcyjnego. Można wyróżnić sześć typów słupów o zróżnicowanym przekroju poprzecznym i geometrii :

- słup s-1 HEA-200,
- słup s-2 HEA-200,
- słup s-3 2 × C180 tworzące przekrój dwugąteziowy 180 × 180 mm,
- słup s-4 2 × C180 tworzące przekrój dwugąteziowy 180 × 180 mm,
- słup s-5 2 × C180 tworzące przekrój dwugąteziowy 180 × 180 mm,
- słup s-6 2 × C240 tworzące przekrój dwugąteziowy 240 × 240 mm,
- materiał konstrukcyjny: stal S235JR,  $E = 205$  GPa,  $R = 235$  MPa,  $f_d = 215$  MPa.

Żelbetowa płyta stropodachu z uwagi na dużą sztywność modelowana była jako bryła sztywna o następujących parametrach:

- środek ciężkości wyznaczono analitycznie na wysokości  $z_c = 4,00$  m (rys. 5.3.);

- parametry masy stropodachu:

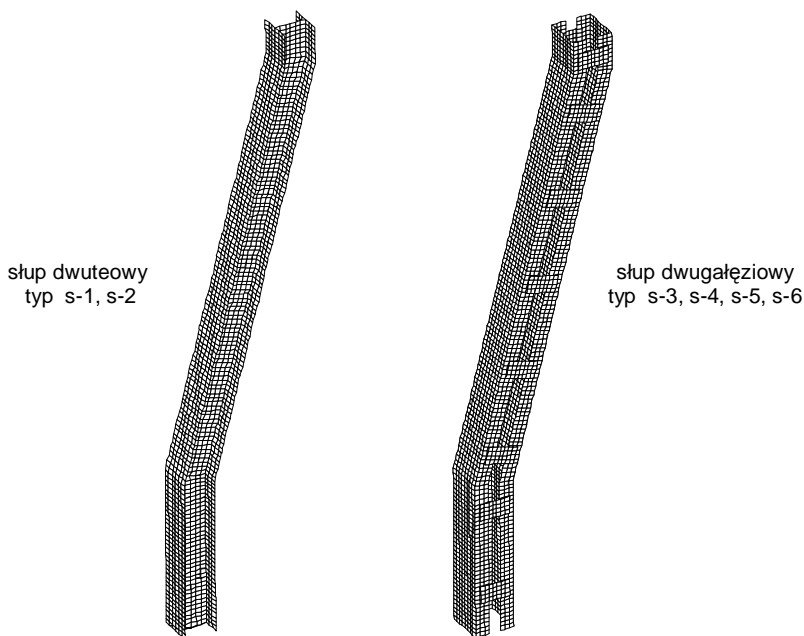
$$M_x = M_y = M_z = 76,4 \text{ t,}$$

$$J_{xx} = 893,7 \text{ tm}^2,$$

$$J_{yy} = 858,6 \text{ tm}^2,$$

$$J_{zz} = 1751,3 \text{ tm}^2.$$

Na rysunku 5.4 przedstawiono model numeryczny dwóch rodzajów słupów: dwuteowego (typ s-1 i s-2) i dwugałęziowego, złożonego z dwóch ceowników połączonych przewiązkami (typ s-3, s-4, s-5, s-6). Osie słupów stanowią linię łamaną, a ich wysokość wynosi  $H = 3,60 \text{ m}$ .



Rys. 5.4. Słup dwuteowy oraz dwugałęziowy złożony z dwóch ceowników – model powłokowy

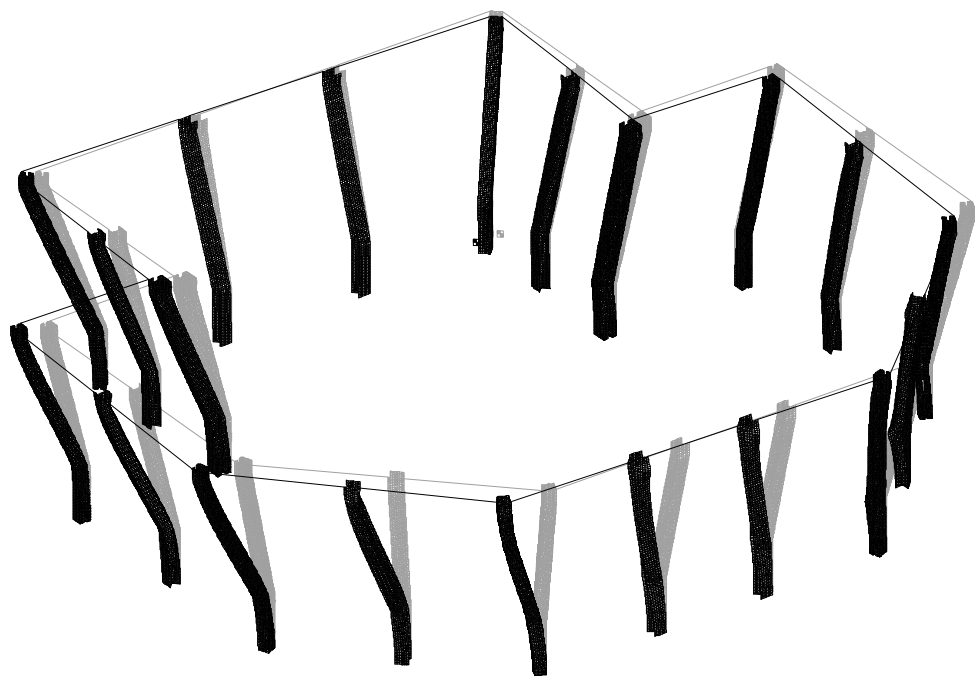
Analizę numeryczną przeprowadzono, wykorzystując komercyjny program MSC/Nastran 2002, który jest aplikacją metody elementów skończonych. Przyjęty powłokowy model numeryczny słupów pozwolił na prawidłowe modelowanie efektów skręcania skrępowanego, co w przypadku modelu prętowego, bez zastosowania superelementów węzłów, byłoby niemożliwe. Było to również bardzo ważne z uwagi na możliwość oceny ewentualnych koncentracji naprężeń w rejonie węzłów, gdyż w rzeczywistej konstrukcji wykryto w tych miejscach lokalne pęknięcia spoin. Przyjęto warunki pełnego utwierdzenia słupów w masywnej, dolnej płycie stropowej, jak i w płycie stropodachu.

Wyznaczone częstotliwości drgań własnych wykazały, że konstrukcja jest podatna na dynamiczne działanie wiatru. Podstawowa częstotliwość drgań własnych układu (stan istniejący w trakcie budowy) wyniosła  $n_1 = 2,82 \text{ Hz}$ , a po dodatkowym uwzględnieniu warstw izolacji przeciwwodnej, termicznej, instalacji podwieszonych po stropodachu oraz śniegu, podstawowa częstotliwość drgań własnych spadła do wartości  $n_1 = 2,32 \text{ Hz}$ . Na rysunku 5.5 przedstawiono podstawową postać drgań własnych. Można zauważyć, że wszystkie słupy są zarówno zginane w dwóch kierunkach, jak i skręcane. Aby poprawić odpowiedź anali-

zwanego układu, czyli radykalnie zwiększyć podstawową częstotliwość drgań własnych, konieczne stało się zwiększenie sztywności układu. Zastosowano analizę wrażliwości do oceny wpływu zmian sztywności słupów na zmianę podstawowej częstotliwości drgań własnych  $n_1$ . Jako zmienną projektową przyjęto parametr  $\beta$ , który opisuje względną zmianę sztywności wszystkich słupów na zginanie w dwóch płaszczyznach, skręcanie i rozciąganie/ściskanie :

$$(1 + \beta)EJ_x, (1 + \beta)EJ_y, (1 + \beta)EJ_\omega, (1 + \beta)GJ_d, (1 + \beta)EA \quad (5.1)$$

gdzie  $E$  i  $G$  oznacza moduł sprężystości i moduł ścinania,  $J_x$  i  $J_y$  odpowiednio moment bezwładności przekroju na zginanie w płaszczyznach  $y-z$  i  $x-z$ ,  $J_\omega$  oznacza wycinkowy moment bezwładności,  $J_d$  moment bezwładności skręcania czystego, zaś  $A$  oznacza pole przekroju poprzecznego słupa.



szara linia – układ niezdeformowany

Rys. 5.5. Podstawowa – pierwsza postać drgań własnych układu

Takie przyjęcie zmiennej projektowej pozwoliło w prosty sposób ocenić wpływ zmian sztywności słupów na odpowiedź układu. Wystarczyło jedynie zmienić jedną zmienną projektową – moduł sprężystości. Realne z inżynierskiego punktu widzenia zwiększenie sztywności słupów poprzez modyfikację przekrojów poprzecznych wiązałoby się ze znacznym nakładem pracy.

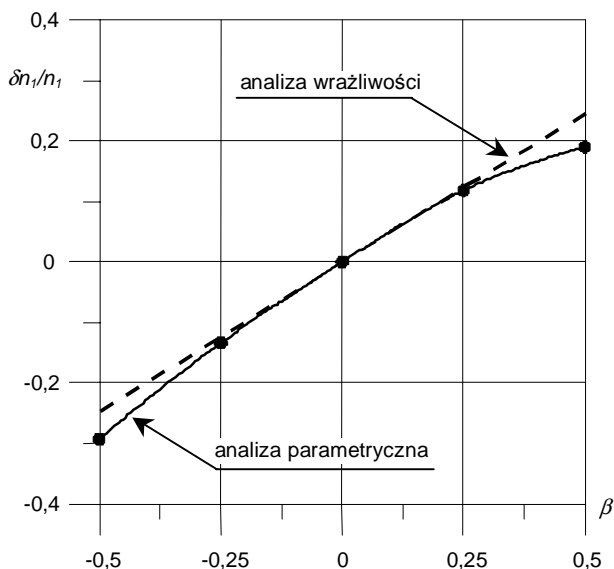
Wrażliwość pierwszej częstotliwości drgań własnych  $n_1$  układu konstrukcyjnego wieży obserwacyjnej w zależności od wariacji parametru  $\delta\beta$  wyznaczono, stosując metodę różnic skończonych:

$$\delta n_1 \cong \frac{n_1(\Delta\beta) - n_1(-\Delta\beta)}{2 \cdot \Delta\beta} \cdot \delta\beta \quad (5.2)$$

W analizowanym przypadku, przyjmując  $\Delta\beta = 0,05$  i dzieląc obie strony równania (5.2) przez  $n_1$ , otrzymano zależność wiążącą względną zmianę podstawowej częstotliwości drgań własnych w zależności od wariacji zmiennej  $\beta$ :

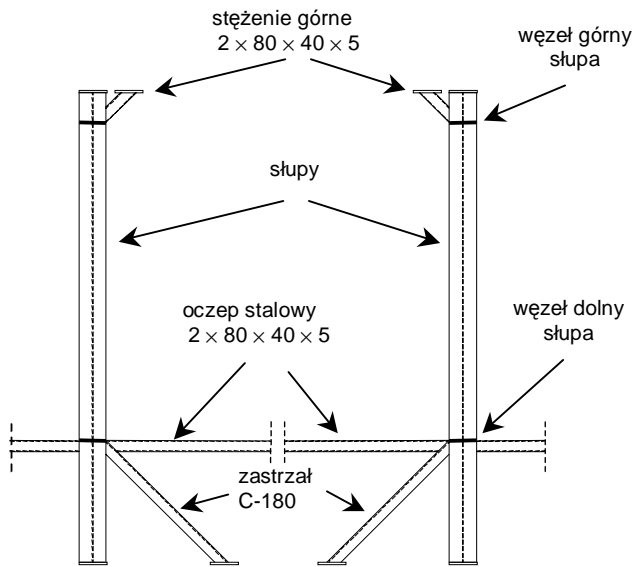
$$\frac{\delta n_1}{n_1} \cong 0,493 \cdot \delta\beta \quad (5.3)$$

Powyższa zależność została przedstawiona w sposób graficzny na rys. 5.6. W celu potwierdzenia poprawności rozwiązania przedstawiono na nim także krzywą względnych zmian podstawowej częstotliwości, w zależności od zmian parametru  $\beta$  wyznaczoną z zastosowaniem analizy parametrycznej.

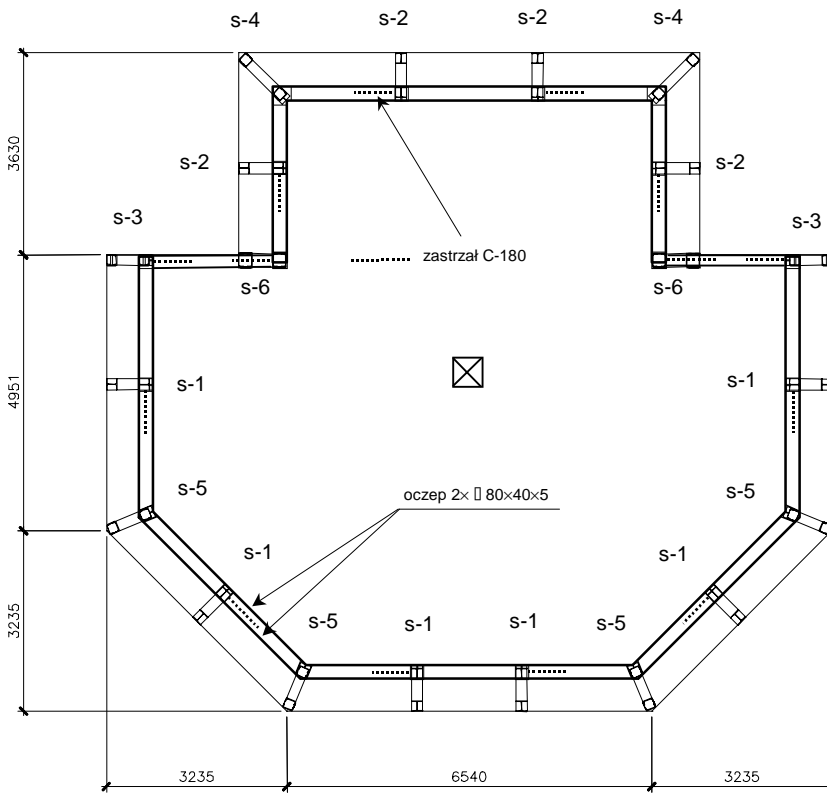


Rys. 5.6. Wpływ zmiany sztywności słupów na względną zmianę wartości pierwszej częstotliwości drgań własnych  $\delta n_1/n_1$

Z rysunku 5.6 oraz zależności (5.3) wynika, że nawet 50% jednoczesne zwiększenie wszystkich charakterystyk sztywności słupów (5.1) skutkuje tylko 20% wzrostem odpowiedzi konstrukcji – podstawowej częstotliwości drgań własnych. Oczywiście jest, że przyjęcie w analizie wrażliwości parametru  $\beta$  w rzeczywistości oznaczałoby zwiększenie modułu sprężystości stalowych słupów, co byłoby nierealne. Dało to jednak pogląd na skuteczność modernizacji konstrukcji poprzez wzrost sztywności słupów na oczekiwane zmiany dynamicznego zachowanie się układu. Jeśli ten test wypadłby pozytywnie, dalsze działania związane byłyby ze zwiększeniem sztywności słupów poprzez wprowadzenie zmian ich przekroji poprzecznych. Wiązałoby się to z budową nowego modelu numerycznego MES.



Rys. 5.7. Przyjęty schemat stężenia konstrukcji



Rys. 5.8. Rozmieszczenie zastrzałów dolnych

Ponieważ możliwa modyfikacja układu, zakładająca wzrost sztywności słupów, okazała się nieskuteczna, wprowadzono zmiany struktury konstrukcji. Zaprojektowano dodatkowe stężenia (zastrzały) górne i dolne słupów (rys. 5.7 i 5.8). Ponowna analiza tak zmienionego układu potwierdziła celowość zastosowania tego rozwiązania. Podstawowa częstotliwość drgań własnych, w przypadku uwzględnienia samej płyty stropodachu, wzrosła do  $n_1 = 4,73$  Hz, oraz do  $n_1 = 3,89$  Hz, przy dodatkowym uwzględnieniu ciężaru izolacji (termiczna i przeciwwodna), instalacji oraz śniegu. W tym przypadku, zgodnie z obowiązującą normą dotycząca obciążenia wiatrem, konstrukcję wieży obserwacyjnej należało zaliczyć do niepodatnych na dynamiczne działanie wiatru. Eliminacja możliwości wzbudzenia drgań wymuszonych konstrukcji o znacznych amplitudach miała kluczowe znaczenie z uwagi na fakt, że między słupami miały być instalowane wielkopowierzchniowe szyby, a na stropodachu – precyzyjna aparatura wspomagająca obserwacje oraz anteny łączności bezprzewodowej.

Analiza wrażliwości pozwoliła na jakościową i ilościową ocenę zakładanych zmian konstrukcji na odpowiedź dynamiczną układu i skutecznie wspomogła proces decyzyjny.

## 5.2. Diagnostyka

Badanie przyczyn powstania stanu awaryjnego lub awarii konstrukcji jest podstawowym elementem ekspertyz technicznych (Łempicki 1969). Stan awaryjny może wiązać się z różnymi zjawiskami: przekroczeniem pewnych granicznych przemieszczeń, utratą stateczności całej konstrukcji lub jej elementów i poważnym zarysowaniem, zniszczeniem całej konstrukcji lub poważnej jej części. Powstaje wówczas problem wyboru miejsca badania materiału konstrukcji lub podłoża, na którym konstrukcja jest posadowiona, oraz weryfikacji jej wymiarów geometrycznych, w celu ustalenia najważniejszych przyczyn tego zdarzenia. Oczywiście w tej sytuacji pomocne jest doświadczenie i wiedza wykonującego ekspertyzę inżyniera. Jednakże w przypadku złożonych konstrukcji inżynierskich coraz trudniej jest kierować się tylko doświadczeniem. Celowe jest zatem zastosowanie analizy wrażliwości (Haug i in. 1986) jako pomocniczego narzędzia w znajdowaniu odpowiedzi na postawione wyżej pytania. Pozwala ona na wyznaczenie wariacji zmiennych stanu, opisujących zachowanie się konstrukcji przy zmianach zmiennych projektowych. Umożliwia to wykonanie linii wpływowych zmian wielkości opisujących stan konstrukcji, na podstawie których można określić optymalne miejsca przeprowadzania badań eksperymentalnych (Szymczak i Mikulski 1997). Ponadto jest możliwe oszacowanie przyrostu zmiennych stanu konstrukcji, a tym samym ustalenie, czy i jakie imperfekcje prowadzą do stanu awaryjnego. Informacje uzyskane dzięki wykorzystaniu analizy wrażliwości mogą być także przydatne przy ustalaniu sposobu i miejsca ewentualnego wzmocnienia konstrukcji.

## 5.3. Identyfikacja parametryczna

Do symulacji zachowania się konstrukcji stosuje się odpowiednio dobrane modele matematyczne, poddane różnorodnym oddziaływaniom imitującym różne typy realnych obciążeń konstrukcji. Modele matematyczne są scharakteryzowane parametrami (geometria konstrukcji, cechy mechaniczne materiałów, przekroje poprzeczne itp.) ustalonymi przez inżyniera na podstawie przepisów normatywnych lub innych informacji. Oczywiście dobiera się je tak, aby konstrukcja spełniała pewne warunki wytrzymałościowe, technologiczne, użytkowe oraz ograniczenia nakładane na przemieszczenia. W procesie realizacji konstrukcji mogą wystąpić pewne odchyłki tych parametrów, które powodują odmienne zachowanie



się konstrukcji niż założone w projekcie. Zatem model realnej konstrukcji, wiernie symulujący jej zachowanie, może być inny niż zakładany w procesie projektowania. Aby ustalić rzeczywiste parametry tego modelu, stosujemy metody identyfikacji parametrycznej (Giergiel i Uhl 1990).

Aby określić wariacje wektora parametrów modelu  $\delta \mathbf{b}$  w stosunku do wartości przyjętych w projekcie  $\mathbf{b}$ , trzeba dokonać pomiaru pewnych wybranych zmiennych stanu (Szymczak i Mikulski 1997). Jeżeli będziemy w procesie identyfikacji parametrów modelu wykorzystywać pomiary pewnych zmiennych stanu  $\hat{s}_i$ , to możemy do tego celu sformułować proces identyfikacji jako minimalizację funkcji celu w postaci

$$\min_{\delta \mathbf{b}} F(\delta \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i (s_i + \delta s_i - \hat{s}_i)^2 \quad (5.4)$$

przy założeniu warunków ograniczających na wariację parametrów  $\delta \mathbf{b}$

$$\delta \mathbf{b}_{\min} \leq \delta \mathbf{b} \leq \delta \mathbf{b}_{\max} \quad (5.5)$$

gdzie  $\alpha_i$  są współczynnikami wagowymi poszczególnych zmiennych stanu, a  $s_i$  i  $\delta s_i$  oznaczają odpowiednio  $i$ -tą wartość zmiennej stanu i jej wariację wyznaczoną dla przyjętego modelu numerycznego układu. Ograniczenia typu (5.5) mogą wynikać z różnych przesłanek, przykładowo określonej wartości pewnych stałych materiałowych.

Za pomocą metod analizy wrażliwości możemy wyrazić wariacje zmiennych stanu  $\delta s_i$ , jako liniowe funkcjonały wariacji parametrów  $\delta \mathbf{b}$ . Przykładowo dla konstrukcji jednowymiarowej, zajmującej wzdłuż osi  $z$  odcinek  $l$  funkcjonał taki ma postać

$$\delta s_i = \int_l F_{s_i, b}(z) \delta b dz \quad (5.6)$$

gdzie  $F_{s_i, b}(z) dx$  jest funkcją podcałkową, odpowiadającą linii wpływowej wariacji zmiennej stanu  $s_i$  dla jednostkowych punktowych wariacji parametru  $\delta b$ . Aby to wykazać, wystarczy podstawić do (5.6) taką właśnie punktową jednostkową wariację w dowolnym punkcie  $z = z_0$ , którą matematycznie zapisujemy za pomocą delty Diraca

$$\delta b = \delta(z_0 - z) \quad (5.7)$$

Wówczas zachodzi  $\delta s_i = F_{s_i, b}(z_0)$ , co oznacza, że wartość zmiany zmiennej  $s_i$  w punkcie  $z_0$  odpowiada wartości funkcji podcałkowej w tym punkcie. Aby lepiej ocenić wpływ odchyłek tych parametrów na wariacje rozważanych zmiennych stanu, podzielmy obie strony wzoru (5.6) przez wyjściową wartość zmiennej stanu  $s_i$ , obliczoną dla przyjętych wartości parametrów

$$\frac{\delta s_i}{s_i} = \int_l \bar{F}_{s_i, b}(z) \frac{\delta b}{b} dz \quad (5.8)$$

gdzie  $b$  jest przyjętą w analizie zmienną projektową, a funkcja podcałkowa jest określona jako

$$\bar{F}_{s_i, b}(z) = F_{s_i, b}(z) \frac{b}{s_i} \quad (5.9)$$

Rozważania te są ważne dla ciągłego opisu modelu konstrukcji (Szymczak 1998). W przypadku szeroko stosowanego opisu dyskretnego (metoda elementów skończonych),

analogiczny do (5.8) wzór na względną wariację wektora zmiennych stanu  $\delta \bar{\mathbf{s}}$  na skutek względnej wariacji wektora zmiennych projektowych  $\delta \bar{\mathbf{b}}$  ma postać

$$\delta \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{w}_{sb} \delta \bar{\mathbf{b}} \quad (5.10)$$

gdzie  $\mathbf{w}_{sb}$  jest macierzą współczynników wrażliwości pierwszego rzędu,  $\delta \bar{\mathbf{s}} = \left\{ \frac{\delta s_1}{s_1}, \dots, \frac{\delta s_i}{s_i}, \dots, \frac{\delta s_n}{s_n} \right\}$ ,  $\delta \bar{\mathbf{b}} = \left\{ \frac{\delta b_1}{b_1}, \dots, \frac{\delta b_i}{b_i}, \dots, \frac{\delta b_m}{b_m} \right\}$ ,  $n$  określa liczbę zmiennych stanu, a  $m$  – liczbę zmiennych projektowych.

Korzystając z zależności (5.10) w funkcji celu (5.4), tak sformułowany problem optymalizacji względem wariacji wektora zmiennych projektowych rozwiązano za pomocą metody funkcji kary (Szymczak 1998). Iteracyjna procedura identyfikacji składa się z następujących etapów:

- 1) wyznaczenie macierzy wrażliwości  $\mathbf{w}_{sb}$  dla początkowych wartości wektora zmiennych projektowych,
- 2) rozwiązanie problemu optymalizacji (5.4), (5.5) i obliczenie wariacji zmiennych projektowych  $\delta \mathbf{b}$ ,
- 3) sprawdzenie kryteriów zakończenia procesu iteracji, przykładowo porównanie długości wariacji wektora zmiennych projektowych  $\delta \mathbf{b}$  z dokładnością obliczeń  $\varepsilon$ . Jeżeli warunki zakończenia są spełnione, to kończymy iterację, przyjmując jako ostateczny wektor zmiennych projektowych  $\mathbf{b} + \delta \mathbf{b}$ , w przeciwnym przypadku powracamy z tym nowym wektorem do etapu 1.

### 5.3.1. Identyfikacja sztywności przepon w dwuteowym pręcie cienkościennym

W niniejszym przykładzie zostanie przedstawione zastosowanie analizy wrażliwości (Haug i in. 1986, Szymczak i Mikulski 1994, 1999, Szymczak i in. 2003) do identyfikacji sztywności przepon cienkościennej belki dwuteowej. Rozważono problem drgań własnych utwierdzonej belki o rozpiętości  $l = 4$  m (rys. 5.9).

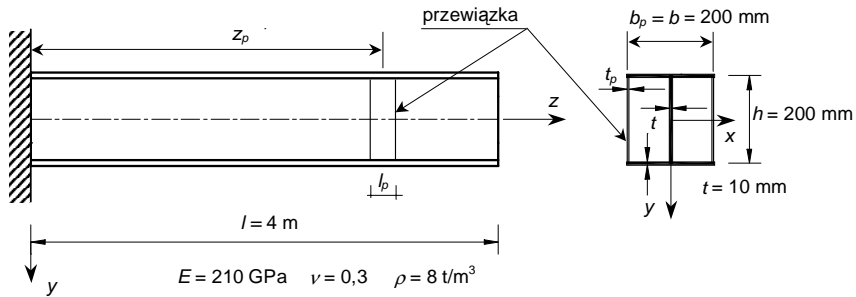
Jako zmienne stanu przyjęto dwie pierwsze wartości własne  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  nietłumionych, skrętnych drgań własnych. Wariacja wartości własnej drgań  $\delta \lambda_i$  dla układu dyskretnego modelowanego zgodnie z metodą elementów skończonych na skutek wariacji zmiennej projektowej  $\delta b$  przybiera postać (3.42):

$$\delta \lambda_i = \frac{d \lambda_i}{db} \delta b = \left[ \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial b} \mathbf{q} - \lambda_i \mathbf{q}^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial b} \mathbf{q} \right] \delta b \quad (5.11)$$

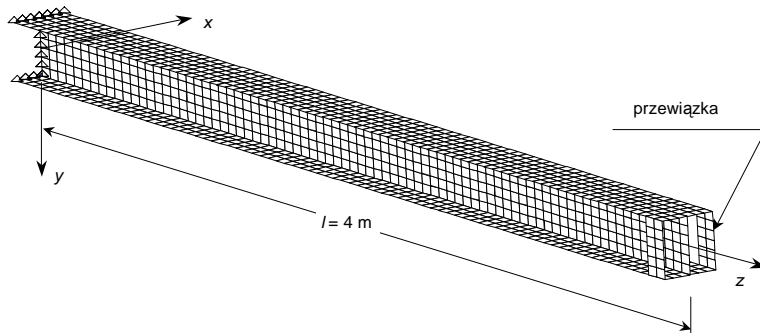
Identyfikacja sztywności przewiązek będzie dotyczyła prętowego modelu belki, przy wykorzystaniu autorskiego programu MES – CIENRAM. Jako rozwiązanie odniesienia przyjęto wartości własne drgań skrętnych  $\hat{\lambda}_1 = \lambda_{1N}$  i  $\hat{\lambda}_2 = \lambda_{2N}$  utwierdzonego pręta dwuteowego, otrzymane dla modelu powłokowego (rys. 5.10), przy zastosowaniu program MSC/Nastran 2002.

Ponieważ analiza drgań własnych pręta bez stężeń przy zastosowaniu modelu powłokowego i modelu prętowego ujawniła różnice wartości własnych skrętnych drgań belki, zażąda konieczność wprowadzenia współczynnika korekcyjnego macierzy sztywności  $\beta$  pręta cienkościennego. Wiąże się to z faktem występowania różnicy pomiędzy modułem spręży-

stości  $E$ , wyznaczanego dla jednowymiarowego pręta, a modułem sprężystości płytowej. W ten sposób skorygowana macierz sztywności wyrażać się będzie wzorem  $\mathbf{K} = \beta \mathbf{K}_0$ , gdzie  $\mathbf{K}_0$  jest klasyczną macierzą sztywności pręta cienkościennego (2.6). Dodatkowo przyjęto, że macierz mas elementu cienkościennego (2.10) nie podlegała modyfikacji.



Rys. 5.9. Dwuteowy pręt cienkościenny



Rys. 5.10. Dwuteowy pręt cienkościenny – model powłokowy

W celu ustalenia poprawnej wartości bimomentowej sztywności przewiązki  $K_p = \beta_p K_\theta$ , będziemy poszukiwali współczynnika korekcyjnego  $\beta_p$ . Bimomentowa sztywność przewiązki  $K_\theta$ , opisana jest w literaturze (Svensson i Plum 1983, Szewczak i in. 1983, Gosowski 1992) wzorem:

$$K_\theta = \frac{El_p^3 t_p b_p^2}{2h} \quad (5.12)$$

Dodatkowe masy skupione, w miejscu występowania przewiązek, związane z efektem skręcania  $M_\theta$  i paczenia przekroju poprzecznego  $M_\theta$ , zostały wyznaczone zgodnie z klasycznym założeniem (Własow 1959) mówiącym o nieodkształcalności przekroju poprzecznego pręta:

$$M_\theta = \rho t_p J_{0p} = \rho l_p t_p \left( \frac{h^3}{6} + \frac{hb_p^2}{2} \right) \quad (5.13)$$

$$M_{\theta'} = \rho t_p J_{\omega p} = \frac{\rho l_p t_p b_p^2 h^3}{24}$$

gdzie  $\rho$  jest masą właściwą materiału przewiązek,  $J_{0p}$  określa biegunowy moment bezwładności przewiązek związany z obrotem przekroju poprzecznego, zaś  $J_{op}$  określa wycinkowy moment bezwładności przewiązek związany ze spaczeniem przekroju poprzecznego w miejscu jej umieszczenia. Pozostałe zmienne opisujące geometrię układu zostały określone na rys. 5.9.

Przyjęto jednakowe moduły sprężystości materiału dla pręta i przewiązek  $E = 210$  GPa (stal) oraz parametry geometryczne przewiązek: szerokość  $l_p = 100$  mm, rozstaw  $b_p = 200$  mm, grubość  $t_p = 10$  mm (rys. 5.9). Podstawą identyfikacji współczynników korekcyjnych  $\beta$  i  $\beta_p$  były wyniki analizy skrętnych drgań własnych pręta jednostronnie utwierdzonego, modelowanego elementami powłokowymi (rys. 5.10). Analiza dotyczyła dwóch pierwszych wartości własnych drgań dla czterech wariantów modeli pręta (rys. 5.9):

**A** – pręt bez przewiązek

**B** – pręt z przewiązkami w punkcie  $z_p = 3,95$  m

**C** – pręt z przewiązkami w punktach  $z_p = 2,00$  i  $3,95$  m

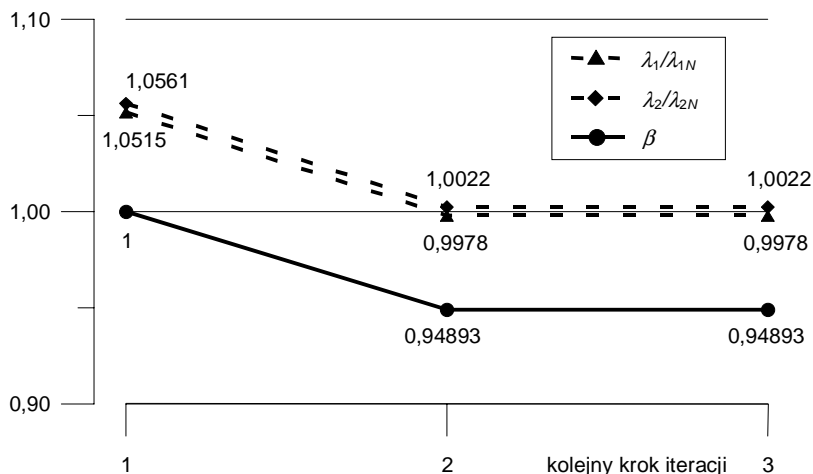
**D** – pręt z przewiązkami w punktach  $z_p = 1,00$ ,  $2,00$ ,  $3,00$  i  $3,95$  m

gdzie współrzędna  $z_p$  określa położenie środka przewiązki (rys. 5.9).

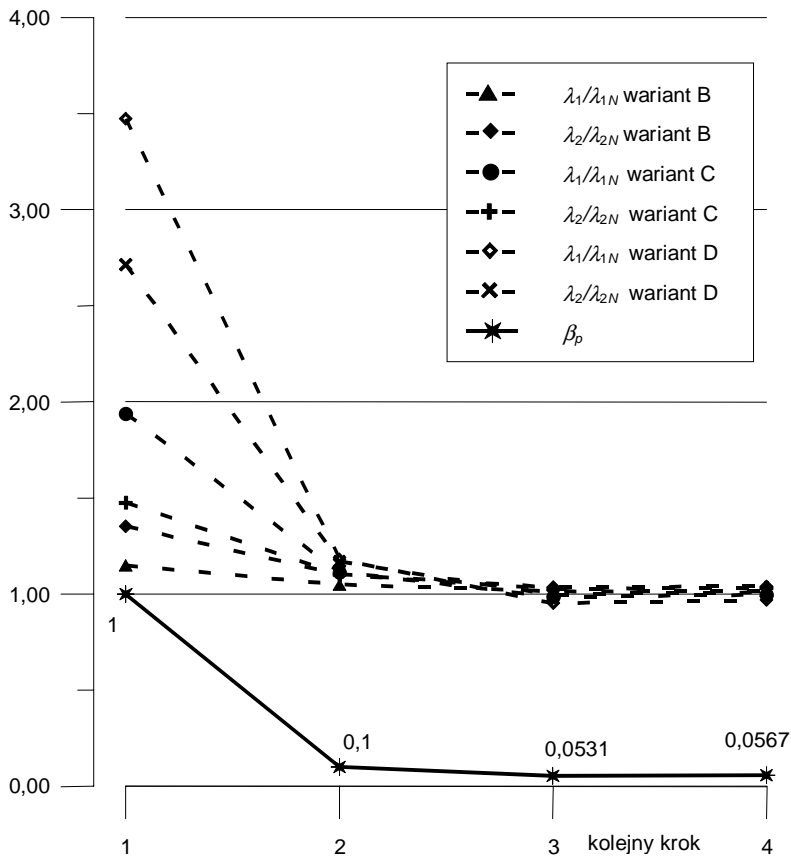
Proces identyfikacji współczynnika korekcyjnego  $\beta$  przedstawiono na rys. 5.11. Wyznaczony w ten sposób współczynnik korekcyjny macierzy sztywności skrętnego pręta  $\beta = 0,94893$  uwzględniono w procesie identyfikacji współczynnika korekcyjnego sztywności skrętnego przewiązek  $\beta_w$ . Dzięki takiemu postępowaniu wyeliminowano wpływ błędu określenia sztywności pręta na dokładność identyfikacji parametru sztywności przewiązek. Ilustrację graficzną procesu identyfikacji współczynnika  $\beta_w$  przedstawiono na rys. 5.12.

Dodatkowo w tablicy 5.1 porównano, dla modelu powłokowego i prętowego, początkowe wartości przyjętych zmiennych stanu w przypadku:

- wariant A – brak korekty macierzy sztywności elementu prętowego  $\beta = 1$ ,
- wariant B, C, D – zastosowano w modelu prętowym współczynnik korekcyjny  $\beta = 0,94893$  przy braku korekty sztywności bimomentowej przewiązek  $\beta_p = 1$ .



Rys. 5.11. Identyfikacja współczynnika korekcyjnego macierzy sztywności  $\beta$

Rys. 5.12. Identyfikacja współczynnika korekcyjnego bimomentowej sztywności przewiązki  $\beta_p$ 

Tablica 5.1

## Zestawienie początkowych wartości własnych drgań

Model:	powłokowy	prętowy	błąd	powłokowy	prętowy	błąd
3	$\lambda_{1N}$	$\lambda_1$	$(\lambda_1 - \lambda_{1N})/\lambda_{1N}$	$\lambda_{2N}$	$\lambda_2$	$(\lambda_2 - \lambda_{2N})/\lambda_{2N}$
wariant A <sup>)</sup>	10545,8	11089,2	0,052	166894,9	176259,9	0,056
wariant B <sup>*)</sup>	10414,9	11971,3	0,149	168932,4	228597,3	0,353
wariant C <sup>**</sup>	12175,4	23587,1	0,937	164727,4	242891,2	0,475
wariant D <sup>**</sup>	14467,5	50242,0	2,473	192347,5	522146,8	1,715

<sup>)</sup> model powłokowy  $E = 210$  GPa, model prętowy:  $\beta = 1$ .

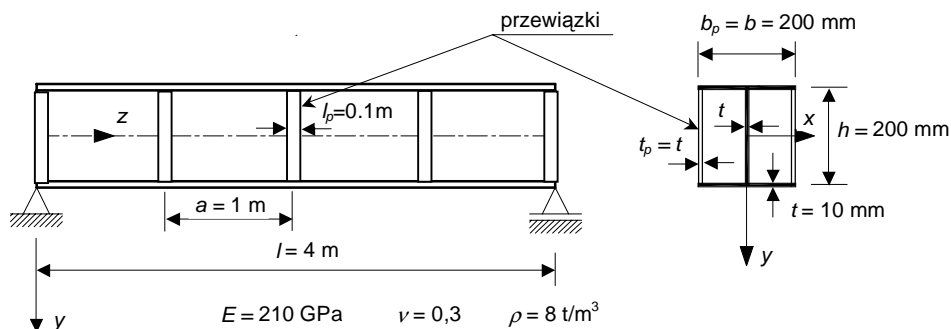
<sup>\*)</sup> model powłokowy  $E = 210$  GPa; model prętowy:  $\beta = 0,94893$ ,  $\beta_p = 1$ .

Jako weryfikację otrzymanych współczynników korekcyjnych  $\beta = 0,94893$  i  $\beta_p = 0,0567$  wyznaczono z ich uwzględnieniem wartości własne drgań skrętnych pręta pokazanego na rys. 5.13. Otrzymano następujące wyniki:

- model powłokowy:  $\lambda_1 = 56932,6$   $1/s^2$ , model prętowy:  $\lambda_1 = 54223,1$   $1/s^2$ , błąd:  $\varepsilon_1 = 2,4\%$

- model powłokowy:  $\lambda_2 = 451928,9 \text{ 1/s}^2$ , model prętowy:  $\lambda_2 = 456965,8 \text{ 1/s}^2$ , błąd:  $\varepsilon_2 = 0,6\%$

Nieuwzględnienie współczynników korekcyjnych daje odpowiednio błąd  $\varepsilon_1 = 101,28\%$  i  $\varepsilon_2 = 55,40\%$ .



Rys. 5.13. Dwuteowy pręt cienkościenny – przewiązki rozmieszczone równomiernie

W przykładzie przedstawiono zastosowanie analizy wrażliwości do identyfikacji sztywności cienkościennego pręta i przewiązek. Wykorzystano do tego celu wyniki analizy drgań własnych pręta z przewiązkami, otrzymane przy użyciu programu komputerowego MSC/Nastran 2002. Celem identyfikacji był taki dobór współczynników korekcyjnych sztywności pręta i przewiązek modelu prętowego, aby otrzymać najlepszą zgodność wyników analizy drgań własnych z modelem powłokowym.

Współczynniki korekcyjne, wyznaczone na podstawie podanej metody identyfikacji, poprawiły znacznie dokładność obliczenia częstości drgań własnych, także w przypadku innych schematów budowy pręta niż uwzględnione w procesie identyfikacji. Wskazuje to na celowość stosowania identyfikacji parametrycznej modelu obliczeniowego konstrukcji, zwłaszcza opartej na wynikach eksperymentalnych.

Wyniki identyfikacji wskazują na znacznie mniejszą sztywność bimomentową przewiązek, niż wynika to ze wzorów zamieszczonych w literaturze (Szewczak i in. 1983, Gosowski 1992). Wynika to z faktu, że w najbliższym otoczeniu stężeń pręta cienkościennego występują znaczne deformacje przekroju poprzecznego, czyli nie jest spełnione klasyczne założenie Własowa o nieodkształcalności przekroju poprzecznego pręta, przy którym bimomentowa sztywność przewiązki (5.12) została wyznaczona. Innym, rekomendowanym przez autora, modelem numerycznym jest superelement pręta z dowolnymi stężeniami (Szymczak i in. 2003), co zostało zastosowane w przykładzie przedstawionym w rozdziale 2 niniejszej pracy.

## 5.4. Optymalizacja

Analiza wrażliwości może być wykorzystana w problemach bardziej ogólnych niż identyfikacja – w optymalizacji konstrukcji (Brandt 1977, Szymczak 1998, Haug i Cea 1981). Sformułowanie problemu optymalizacji polega na określeniu funkcji celu oraz ograniczeń dotyczących zmiennych projektowych lub zmiennych stanu, często podanych w formie niejawnej (np. Szymczak 1980, Mikulski i Szymczak 1986). W opisie dyskretnym systemu wektor wrażliwości pierwszego rzędu stanowi gradient wariacji zmiennej sta-

nu  $\mathcal{S}$  w odniesieniu do określonych zmiennych projektowych  $b_i$ . Można zatem wykorzystać te bezpośrednie relacje w zagadnieniach optymalizacji, szczególnie przy zastosowaniu metod gradientowych.

Zadanie optymalizacji polega na znalezieniu optimum (minimum lub maksimum) funkcji  $f: R^N \rightarrow R$ , zwanej funkcją celu. Funkcja celu jest zależna od wektora zmiennych projektowych (zmiennych decyzyjnych)  $\mathbf{b}$ . W przypadku zagadnienia optymalizacji wielokryterialnej, funkcja celu ma postać  $f: R^N \rightarrow R^M$ ,  $M \geq 2$ , a taki problem na ogół sprowadzany jest do optymalizacji jednokryterialnej, przyjmując jako wartość optymalizowanej funkcji ważoną sumę kryteriów. Z reguły w zagadnieniach optymalizacji konstrukcji dziedzina funkcji celu, zwana także obszarem dopuszczalnym, jest ograniczona, tzn. że zmienne projektowe nie mogą przyjmować dowolnych wartości. Mamy wówczas problem optymalizacji funkcji celu z ograniczeniami. Możliwe jest sprowadzenie problemu optymalizacji funkcji celu z ograniczeniami do problemu poszukiwania minimum funkcji bez ograniczeń, poprzez zastosowanie funkcji kary. W tej metodzie zastępcza funkcja celu zależy już od wszelkich zakładanych na zmienne projektowe ograniczeń, jak przykładowo przemieszczeń sił wewnętrznych i reakcji.

Wspomniane metody gradientowe bazują na wyznaczaniu kolejnego kierunku poszukiwań na podstawie znajomości gradientu funkcji celu, w punkcie osiągniętym w poprzednim kroku.

Najbardziej znane i powszechnie stosowane metody gradientowe, to:

- **metoda gradientu prostego** – jest podstawową, choć nie najbardziej efektywną metodą poszukiwania minimum funkcji celu. W każdym punkcie wyznacza się kierunek zmian przeciwny do wyznaczonego gradientu funkcji celu i przy zadanym kroku przechodzi się do następnego punktu, modyfikując także długość kroku;
- **metoda najszybszego spadku** – jest modyfikacją metody gradientu prostego. Modyfikacja polega na tym, że w metodzie najszybszego spadku po wyznaczeniu kierunku poszukiwań wyznaczane jest minimum funkcji w tym kierunku, a nie przesunięcie z określonym krokiem;
- **metoda gradientu sprzężonego** – jest modyfikacją metody najszybszego spadku. Modyfikacja polega na tym, że w metodzie gradientu sprzężonego kolejne kierunki poszukiwań są sprzężone do poprzednich względem hesjanu funkcji celu. Z każdego punktu jest wyznaczane minimum funkcji w zadanym kierunku.

Pierwsze dwie z wymienionych metod wymagają znajomości jedynie gradientu funkcji celu.

Ponieważ, jak wspomniano wyżej, w przypadku stosowania funkcji kary zastępcza funkcja celu jest zależna nie tylko od przyjętej funkcji celu, ale także od zmiennych opisujących zachowanie się konstrukcji (przemieszczeń, częstości drgań własnych, sił wewnętrznych), to jej gradient także zależy od gradientów tych zmiennych względem wariacji zmiennych projektowych. W tych przypadkach gradient zastępczej funkcji celu może być wyznaczony za pomocą analizy wrażliwości pierwszego rzędu opisanej w rozdziale 3.

Oprócz metod gradientowych, także w metodach bezpośrednich optymalizacji konstrukcji, takich jak metoda kierunków dopuszczalnych (Szymczak 1998), w których zakłada się, że punkt optymalny leży na ograniczeniach, celowe jest zastosowanie analizy wrażliwości. W tym przypadku bowiem, ograniczenia są związane ze zmiennymi stanu konstrukcji, takimi jak: przemieszczenia, siły wewnętrzne czy reakcje, a kierunki poszukiwań punktu optymalnego buduje się na bazie gradientów ograniczeń. Gradienty te otrzymujemy jako wynik zastosowania analizy wrażliwości.

## Rozdział 6

### WNIOSKI

W rozprawie zajęto się teorią, modelowaniem i metodami obliczeń ram z elementów cienkościennych, gdzie spaczenie przekroji poprzecznych poszczególnych cienkościennych elementów konstrukcji wpływa zasadniczo na deformację oraz poziom naprężeń w konstrukcji. Rozważania teoretyczne, jak i przykłady numeryczne zawarte w niniejszej rozprawie, pozwalają sformułować wnioski oraz wskazać dalsze możliwości badań.

Ramy zbudowane z prętów cienkościennych są modelowane elementami skończonymi o 7 stopniach swobody w węźle: 3 translacje, 3 rotacje i spaczenie przekroju poprzecznego. Ten siódmy stopień swobody jest określony jedynie w lokalnym układzie współrzędnych i nie podlega żadnym regułom transformacji, np. do układu globalnego. Użycie zatem jedynie tego typu elementów pozwala na analizę belek prostych lub belek ciągłych. W przypadku ram, gdzie pręty cienkościenne połączone są w węzłach brakuje warunków równowagi bimomentów. Wewnątrz węzła, jak i w jego najbliższym otoczeniu można zaobserwować znaczne deformacje, nie tylko w płaszczyźnie przekroju poprzecznego, ale także w płaszczyźnie do niej prostopadłej. Zatem klasyczne założenie teorii prętów cienkościennych o nieodkształcalności przekroju poprzecznego nie jest spełnione.

Zastosowanie superelementy węzła ramy pozwala uwzględnić wszystkie ww. efekty. W takim razie analiza układów ramowych, zbudowanych z prętów cienkościennych o 7 stopniach swobody w każdym węźle, jest możliwa. Agregowane macierze sztywności czy mas nie są poddane transformacji do globalnego układu współrzędnych, ponieważ te macierze wyznaczone są w tym układzie. Superelement węzła określa sposób, w jaki elementy prętowe są w tym węźle połączone.

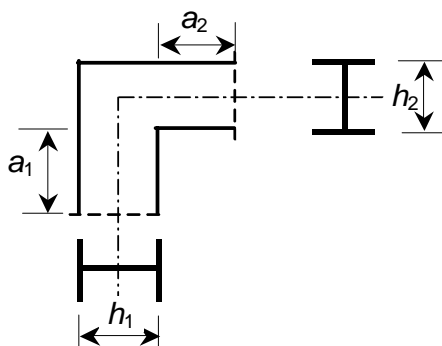
Wyznaczając macierz sztywności, a co za tym idzie – macierz mas, należy zwrócić szczególną uwagę na odpowiedni dobór tak zwanej długości współpracującej superelementu (rys. 2.22). Przyjęcie zbyt małej wartości długości współpracującej skutkuje przeszywnieniem superelementu. Zbyt duża wartość tego parametru spowoduje, że ograniczymy stan deformacji na zbyt długim odcinku do funkcji kształtu superelementu otrzymanych dla 14 jednostkowych stanów wymuszeń. Spowoduje to zatem ograniczenie możliwych deformacji w przypadku obciążeń działających w pobliżu węzła lub, w przypadku zagadnień dynamicznych, przy wyznaczaniu wyższych wartości i odpowiadającym im postaci drgań własnych. Z przeprowadzonych analiz numerycznych można określić zalecaną wartość długości współpracującej jako (rys. 6.1):

$$\frac{1}{2} h_i \leq a_i \leq h_i \quad (6.1)$$

gdzie  $h_i$  i  $a_i$  określają wysokość i długość współpracującą  $i$ -tego elementu cienkościennego, dochodzącego do analizowanego węzła (rys. 6.1).

Przykłady numeryczne wykazały bardzo dobrą zbieżność rozwiązania problemu analizy statycznej oraz dynamicznej prętowego modelu ramy, modelowanej klasycznymi elementami cienkościennymi z superelementem węzła z bardziej ogólnym (przyjętym za porównawczy) modelem powłokowym. W tym ostatnim przypadku nie obowiązuje założenie nieodkształcalności przekroju poprzecznego elementów cienkościennych ramy.





Rys. 6.1. Długości współpracujące elementów cienkościennych zbiegających się w węzle

Numeryczna analiza ramy, przy zastosowaniu modelu powłokowego, potwierdziła słuszność klasycznego założenia nieodkształcalności przekroju poprzecznego pręta cienkościennego. To założenie nie jest spełnione jedynie w najbliższym otoczeniu naroża ramy, w miejscach występowania stężeń oraz w pobliżu działania obciążeń skupionych.

W przypadku analizy wrażliwości ram cienkościennych jedynie model dyskretny ma zastosowanie, z uwagi na brak równań równowagi sił wewnętrznych w węzle ramy. W przypadku klasycznych układów prętowych, gdzie efekt paczenia jest pomijany, możliwa jest analiza wrażliwości w ujęciu analitycznym, co zostało w niniejszej pracy przedstawione. Można zatem w tym przypadku wyznaczyć tak zwane podcałkowe funkcje wrażliwości, które są odpowiednikiem linii wpływu wariacji zmiennych stanu względem wariacji zmiennych projektowych. Otrzymana zależność ma wówczas formę funkcjonału.

Dla układów dyskretnych odpowiednikiem podcałkowych funkcji wrażliwości jest wektor wrażliwości pierwszego rzędu. W zagadnieniu analizy wrażliwości konieczne jest wyznaczenie pochodnej macierzy sztywności oraz macierzy mas względem zmiennej projektowej. W przypadku elementów cienkościennych można takie macierze wyznaczyć w sposób analityczny. W przypadku superelementu konieczne staje się wyznaczenie pochodnej macierzy przy użyciu różnych skończonych. Ważne staje się wówczas prawidłowe przyjęcie przyrostu zmiennej projektowej. Zbyt małe przyjęcie tego parametru może skutkować powstaniem dużych błędów numerycznych, spowodowanych faktem, że licznik i mianownik są wartościami bliskimi zeru (złe uwarunkowanie numeryczne problemu, zależne w dużej mierze od precyzji zapisu liczb).

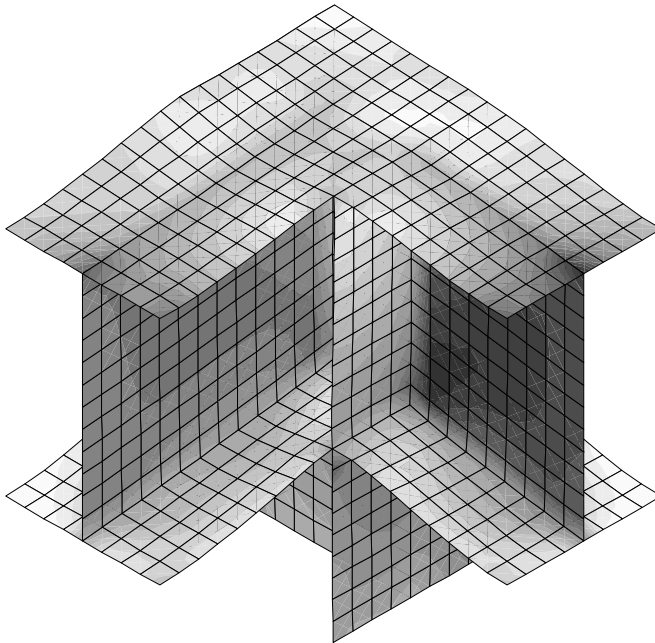
Analiza wrażliwości pierwszego rzędu daje aproksymację liniową wariacji zmiennej stanu względem wariacji zadanej zmiennej projektowej. Zatem rozbieżność takiej aproksymacji względem tzw. rozwiązania ścisłego, otrzymanego na drodze analizy parametrycznej, pozwala ocenić zakres jej stosowalności. W zagadnieniach statycznych wyraźnie widać, że wyznaczenie wariacji zmiennych stanu względem wariacji zmiennych projektowych w granicach  $10 \div 20\%$  ich wartości początkowych powoduje błąd względem rozwiązania ścisłego rzędu  $1 \div 2\%$ . Jest to całkowicie wystarczające w przypadku realizacji zagadnień inżynierskich. Skutkuje to także większą zbieżnością procedur identyfikacji parametrów konstrukcji wykorzystujących aparat analizy wrażliwości, przedstawionych w niniejszej pracy. Ta dokładność aproksymacji zależy w decydującym stopniu od przyjętej zmiennej stanu, zmiennych projektowych i rodzaju analizy. W przypadku zagadnień dynamicznych wyraźnie widać potwierdzenie tego faktu.

Zastosowanie prętowego modelu ramy cienkościennej pozwala na znaczne skrócenie czasu obliczeń konstrukcji w stosunku do modelu powłokowego. Ma to znaczenie szczególnie w analizie wrażliwości w ujęciu probabilistycznym. Zastosowana metoda Monte Carlo wymusza wykonanie dużej liczby realizacji, aby odpowiedź w postaci histogramu częstości zmiennej stanu była poprawna. Stosowanie modelu powłokowego wiązałoby się z radykalnym wzrostem czasu obliczeń.

Stosowanie modeli prętowych do analizy konstrukcji ramowych daje nie tylko małe rozmiary numeryczne zadania, ale pozwala na operowanie siłami przekrojowymi poszczególnych elementów. W przypadku projektowania konstrukcji prętowych jest to bardzo korzystne, gdyż warunki normowe opisane są z uwzględnieniem sił przekrojowych. W przypadku stosowania modelu powłokowego konieczne byłoby wyznaczanie sił przekrojowych na drodze całkowania naprężeń w zadanym przekroju.

Stosowanie superelementu węzła pozwala na przestrzenną analizę układu. Nie ograniczono tu stanu deformacji do płaskiej postaci, co w przypadku dynamiki czy stateczności ma zasadnicze znaczenie. Dodatkowo na drodze numerycznego eksperymentu można badać różne elementy składowe węzła, np. stężenia wewnętrzne oraz ocenić ich wpływ na rozkład deformacji i sił przywęzłowych. W większości przypadków analiz ram z podatnymi węzłami rozważania zawężone są do płaskiej deformacji układu. Superelement jest zatem uogólnieniem stosowanego podatnego modelu węzła ramy opisanego zależnością  $M-\phi$ .

Analizując elementy składowe macierzy sztywności superelementu, można ocenić efekt sprzężenia pomiędzy siłami przekrojowymi. W przypadku analizowanych superelementów węzła stwierdzono, że efekt spaczenia przekrojów przywęzłowych, wyrażony powstaniem bimomentów, jest sprzężony z rozciąganiem/ściskaniem, zginaniem i ścinaniem w dwóch kierunkach.



Rys. 6.2 Węzeł przestrzenny

Problem analizy ram zbudowanych z elementów cienkościennych jest nadal otwarty. Autor widzi celowość dalszych badań, ukierunkowanych na :

- analizę ram cienkościennych z węzłami przestrzennymi łączącymi ze sobą więcej niż dwa pręty (rys. 6.2),
- zastosowanie superelementu do modelowania rzeczywistych warunków brzegowych, gdzie nie ma całkowitej blokady spaczenia przekroju poprzecznego (lub nie ma całkowitej swobody spaczenia),
- rozszerzenie analizy na zagadnienia stateczności,
- przeprowadzenie badań eksperymentalnych cienkościennych układów ramowych w zagadnieniach statycznych i dynamicznych.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Abdalla K. M., Chen W. F.: Expanded database of semi-rigid steel connections. *Comput. Struct.*, **56**, 1995, s. 553–564.
- [2] Au S. K.: Reliability-based design sensitivity by efficient simulation. *Comput. Struct.*, **83**, 2005, s. 1048–1061.
- [3] Barsoum R. S., Gallagher R. H.: Finite element analysis of torsional and torsional flexural stability problems. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **2**, 1970, s. 335–352.
- [4] Bjerager P.: Probability integration by directional simulation. *Journal of the Structural Division, ASCE*, **114**, 8, 1988, s. 1285–1302.
- [5] Bleich F.: *The Buckling Strength of Metal Structures*. New York: McGraw-Hill 1952.
- [6] Błaszkwski S., Kączkowski Z.: *Metoda Crossa*. Warszawa: PWN 1959.
- [7] Błaszkwski S., Kączkowski Z.: *Iterative Methods in Structural Analysis*. PWN – Pergamon Press 1966.
- [8] Bojczuk D.: Analiza wrażliwości sprężystych konstrukcji prętowych i belkowych. *Rozprawy Inżynierskie*, **35**, 2, 1987, s. 171–204.
- [9] Brandt A. M.: *Kryteria i metody optymalizacji konstrukcji*. Warszawa: PWN 1977.
- [10] Brayton R.K., Spence R.: *Sensitivity and Optimization*. New York: Elsevier 1980.
- [11] Bródka J., Kozłowski A.: *Sztywność i nośność węzłów podatnych*. Rzeszów: Wyd. Politechniki Rzeszowskiej 1996.
- [12] Bródka J., Cwalina W.: *Sztywność i nośność ram stężonych o węzłach podatnych*. Białystok: Wyd. Politechniki Białostockiej 1998.
- [13] Bródka J., Barszcz A., Gizejowski M., Kozłowski A.: *Sztywność i nośność stalowych ram przechyłowych o węzłach podatnych*. Rzeszów: Wyd. Politechniki Rzeszowskiej 2004.
- [14] Bródka J., Kozłowski A. (red): *Projektowanie i obliczanie połączeń i węzłów konstrukcji stalowych*. Polskie Wyd. Techniczne, t. 1, Rzeszów 2009.
- [15] Budkowska B. B., Szymczak C.: Sensitivity analysis of thin-walled I-beams resting on elastic foundation. *J. Engng. Mech.*, **118**, 1992<sup>a</sup>, s. 1239–48.
- [16] Budkowska B. B., Szymczak C.: Sensitivity analysis of free torsional vibration frequencies of thin-walled I-beam resting on elastic foundation, *Thin-Walled Structures*, **13**, 1992<sup>b</sup>, s. 399–408.
- [17] Byczkow D. W.: *Mechanika budowy cienkościennych konstrukcji prętowych*. Moscow: Gosizdatlit 1962 (rosyjski).
- [18] Chen W. F., Kishi N.: Semirigid steel beam-to-column connections. *Data base and modeling. J. Strct. Eng. ASCE*, **115**, 1, 1989.
- [19] Chavan K. S., Wriggers P.: Consistent coupling of beam and shell models for thermo-elastic analysis. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **59**, 2004, s. 1861–1976.
- [20] Cichoń C., Koczubiej S.: Konsystentny model MES dla ram przestrzennych o prętach cienkościennych. *Czasopismo Techniczne z. 21, Budownictwo z. 1-B*, Wyd. Politechniki Krakowskiej 2008, s. 3–20.
- [21] Cichoń C., Pluciński P.: Analiza statyki i wyboczenia ram cienkościennych o dowolnym otwartym przekroju poprzecznym z mieszanym 1D/3D sformułowaniem metody elementów skończonych. *IX Symp. Stateczności Konstrukcji, Zakopane, 2000*, s. 29–36.
- [22] Cichoń C., Pluciński P., Waszczuk S.: Buckling of thin-walled frames with partial warping restraints. *Arch. Civil Engng.*, **46**, 2000, s. 243–254.
- [23] Clough R. W., Penzien J.: *Dynamics of Structures*. McGraw-Hill 1975.
- [24] Cywiński Z.: Metoda iteracyjna Crossa w zastosowaniu do rozwiązywania skręcanych, płaskich, cienkościennych układów prętowych o przekroju otwartym. *Zesz. Nauk. Polit. Gdańskie* 1962, nr **32**, *Budownictwo Lądowe* 5, s. 89–107.

- [25] Cywiński Z.: Bimoment distribution method for thin-walled beams. *Der Stahlbau*, **47**, 1978, 4, pp. 106–113, 5, s. 152–157.
- [26] Czapliński K.: Kąt spazzenia i równowaga bimomentów w węźle sztywnym pewnego typu. *Arch. Inż. Łąd.*, **16**, 2, 1970, s. 301–313.
- [27] Czapliński K., Dąbrowski W.: O równowadze węzłów w cienkościennych konstrukcjach przestrzennych. *Zesz. Nauk. Polit. Gdańskiej*, **187**, *Budownictwo Lądowe* 23, 1972, s. 163–179.
- [28] Dąbrowski R.: Praktycznie ważne przypadki wybożenia skręcanych prętów cienkościennych. *Archiwum Inżynierii Lądowej*, **1**, 1956, s. 45–108.
- [29] Dąbrowski R.: Skręcanie mostowych i hydrotechnicznych konstrukcji cienkościennych o przekroju zamkniętym. *Engng. Trans.*, **101**, 1958, s. 283–346.
- [30] Dems K., Mróz Z.: Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis – variation of material parameters within fixed domain. *Int. J. Solids Struct.*, **19**, 1983, s. 677–692.
- [31] Ettouney M. M., Kirby J. B.: Warping restraint in three-dimensional frames. *J. Struct. Div. ASCE*, **107**, 1981, s. 1643–1656.
- [32] Frank P. M.: *Introduction to Sensitivity Theory*. Orlando, Florida: Academic Press 1978.
- [33] Giergiel J., Uhl T.: *Identyfikacja układów mechanicznych*. Warszawa: PWN 1990.
- [34] Gorbunow B. N., Streblickaja A. I.: *Teoria ram o prętach cienkościennych*. Moskwa: Ogiz. 1948 (rosyjski).
- [35] Gosowski B.: *Stateczność przestrzenna stężonych podłużnie i poprzecznie pełnościennych konstrukcji metalowych*. Nr 66, *Monografie* 29, *Prace Nauk. Inst. Budownictwa Polit. Wrocławskiej* 1992.
- [36] Gosowski B.: *Skręcanie i zginanie elementów konstrukcji metalowych*. Wrocław: Oficyna Wyd. Politechniki Wrocławskiej 2004.
- [37] Goverdham A. V.: *A collection of experimental moment relation curves and evaluation of prediction equations for semi-rigid connections*. Vanderbilt University 1983.
- [38] Hammersley J. M., Handscomb D. C.: *Monte Carlo Methods*. London: Methuen 1964.
- [39] Hartmann A. J., Munse W. H.: Flexural-torsional buckling of plane frames. *J. Engng. Mech. Div. ASCE*, **92**, 1966, s. 37–59.
- [40] Haug E. J., Cea J.: *Optimization of Distributed Parameter Structures*. NATO Advances Study Inst., Sijthoff & Noordhoff 1981.
- [41] Haug E. J., Choi K. K., Komkov V.: *Design Sensitivity of Structural Systems*. Orlando: Academic Press Fl 1986.
- [42] Haftka R. T., Mróz Z.: First and second – order sensitivity analysis of linear and nonlinear structures, *AIAA J.*, **24**, 1986, s. 1187–1192.
- [43] Hien T. D., Kleiber M.: Stochastic structural design sensitivity of static response. *Computers & Structures*, **38**, 1991, s. 659–667.
- [44] Hurtado J. E., Barbat A. H.: Monte Carlo techniques in computational stochastic mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering*, **5**, 1, 1998, s. 3–30
- [45] Kim N. I., Kim M. Y.: Exact dynamic/static stiffness matrices of non-symmetric thin-walled beams considering coupled shear deformation effects. *Thin-Walled Structures*, **43**, 2005, s. 701–734.
- [46] Kishi N., Chen W. F.: Data base of steel beam-to-column connections. *Engineering Journal, AISC*, Vol. 24, 1987.
- [47] Kleiber M., Hien T. D.: *The Stochastic Finite Element Method*. Chichester: John Wiley & Sons 1992.
- [48] Kleiber M.: *Parameter Sensitivity in Nonlinear Mechanics*. Chichester: John Wiley & Sons 1997.
- [49] Kocubiej S., Cichoń C.: Konsystentne połączenie modeli 1D i 3D w analizie MES wybożenia ram o prętach cienkościennych. XII Symp. Stateczności Konstrukcji, Zakopane, 2009, s. 183–190.
- [50] Kollbrunner C. F., Hajdin N., Krajcinovic D.: *Matrix analysis of thin-walled structures*. Institute for Engineering Research, No 10, Zurich: V. Leemann 1969.

- [51] Krajcinovic D.: A consistent discrete element technique for thin-walled assemblages. *Int. J. Solids Struct.*, **5**, 1969, s. 639–62.
- [52] Kreja I., Mikulski T., Szymczak C.: Application of superelements in static analysis of thin-walled structures. *J. Civil Eng. and Management*, **10**, 2, 2004, s. 113–122.
- [53] Kreja I., Szymczak C.: Numerical simulation of a thin-walled beam with warping stiffeners undergoing torsion. *TASK Quarterly*, **6**, 2002, s. 453–60.
- [54] Krenk S.: Constrained lateral buckling of I-beam gable frames. *J. Struct. Engng. ASCE*, **116**, 1990, s. 3268–3284.
- [55] Krenk S., Damkilde L.: Warping of joints in I-beam assemblages. *J. Engng. Mech. ASCE*, **117**, 1991, s. 2457–2474.
- [56] Kujawa M., Mikulski T., Szymczak C.: Numerical simulation of behaviour of thin-walled frames subjected to static loads. *TASK Quarterly*, **6**, 2002, s. 447–452.
- [57] Lu Z., Song S., Yue Z., Wang J.: Reliability sensitivity method by line sampling. *Structural Safety*, **30**, 2008, s. 517–532.
- [58] Łempicki J.: *Eksperytyzy konstrukcji budowlanych*. Warszawa: Arkady 1969.
- [59] Melchers R.: *Structural Reliability. Analysis and Prediction*. Chichester: John Wiley & Sons 1999.
- [60] Melchers R., Ahammed M.: A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability. *Comput. Struct.*, **82**, 2004, s. 55–61.
- [61] Metropolis N., Ulam S.: The Monte Carlo method. *Journal of American Statistical Association*, **44**, 247, 1949, s. 335–341.
- [62] Mikulski T.: Free torsional vibration sensitivity analysis of thin-walled beams. *Archives of Civil Engineering*, **49**, 4, 2003, s. 473–489.
- [63] Mikulski T., Szymczak C.: Optymalne kształtowanie ściskanych prętów cienkościennych o przekroju otwartym. *Inż. i Bud.*, **44**, 1986, s.454–457.
- [64] Mikulski T., Szymczak C.: Dynamic response of frames made of thin-walled members. *Computer Methods in Mechanics*, Zielona Góra, 2009, s. 311–312
- [65] Mottershead J. E.: Warping torsion in thin-walled open-cross section beams using the semi-loof beam element. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **28**, 1988, s. 231–43.
- [66] Mróz Z., Garstecki A.: Optimal loading conditions in the design and identification of structures. Part 1. Discrete formulation, *Structural Optimization*, Sept., 2004, s. 1–18.
- [67] Mróz Z., Haftka R. T.: Design sensitivity analysis of non-linear structures in regular and critical states. *Int. J. Solids & Structures* 1994.
- [68] MSC/Nastran 2002 for Windows: Installation and application manual. Mac Neal-Schwendler Corporation.
- [69] Musat S. D., Epureanu B. I.: Study of warping torsion of thin-walled beams with open cross-section using macro-elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **44**, 1999, s. 853–68.
- [70] Murzewski J.: *Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych*. Warszawa: Arkady 1970.
- [71] Murzewski J.: *Niezawodność konstrukcji inżynierskich*. Warszawa: Arkady 1989.
- [72] Obrębski J. B.: *Cienkościenne sprężyste pręty proste*. Warszawa: Wyd. Politechniki Warszawskiej 1991.
- [73] Pałkowski S.: *Konstrukcje stalowe. Wybrane zagadnienia obliczania i projektowania*. Warszawa: PWN 2009.
- [74] Piechnik S.: CAD in practical cases of designing thin-walled structures. *Arch. Civil Engng.*, **46**, 2000<sup>a</sup>.
- [75] Piechnik S.: Thin-walled beam subjected to „warping constraints”. *J. Theor. Appl. Mech.*, **38**, 2000<sup>b</sup>.
- [76] Plum C. M., Svensson S. E.: Simple method to stabilize I-beams against lateral buckling. *J. Struct. Engng. ASCE*, **109**, 1983, s. 2855–2870.
- [77] Radonovic L.: *Sensitivity Method in Control Theory*. Oxford: Pergamon Press 1966.
- [78] Renton J. D.: Stability of space frames by computer analysis. *J. Struct. Div. ASCE*, **88**, 1962, s. 81–103.
- [79] Renton J. D.: Buckling of frames composed of thin-walled members. W: *Thin-walled Structures*. (Ed. A. H. Chilver). London: Chatto and Windus 1967.

- [80] Rubinstain R. Y.: *Simulation and the Monte Carlo Method*. New York: J. Wiley & Sons 1981.
- [81] Rutecki J.: *Cienkościenne konstrukcje nośne. Obliczenia wytrzymałościowe*. Warszawa: PWN 1966.
- [82] Svensson S. E., Plum C. M.: Stiffener effects on torsional buckling of columns. *J. Struct. Engng. ASCE*, **109**, 1983, s. 758–772.
- [83] Szewczak R. M., Smith E. A., DeWolf J. T.: Beams with torsional stiffeners. *J. Struct. Engng. ASCE*, **109**, 1983, s. 1635–1647.
- [84] Szmidt J. K.: Analiza ram z elementów cienkościennych. *Rozprawy Inżynierskie – Engng. Trans.*, **23**, 1975<sup>a</sup>, s. 447–472.
- [85] Szmidt J. K.: O równowadze sił momentowych w narożu cienkościennej ramy. *Rozprawy Inżynierskie – Engng. Trans.*, **23**, 1975<sup>b</sup>, s. 317–324.
- [86] Szymczak C.: Wyboczenie skrętne prętów cienkościennych o bisymetrycznym przekroju otwartym. *Rozprawy Inżynierskie – Engng. Trans.*, **26**, 1978<sup>a</sup>, s. 323–330.
- [87] Szymczak C.: Drgania skrętne prętów cienkościennych o bisymetrycznych przekrojach poprzecznych. *Rozprawy Inżynierskie – Engng. Trans.*, **26**, 1978<sup>b</sup>, s. 267–274.
- [88] Szymczak C.: Optymalne kształtowanie prętów cienkościennych o bisymetrycznym przekroju dwuteowym z uwagi na wartości własne. *Zesz. Nauk. Polit. Gdańskiej*, **322**, Budownictwo Lądowe 35, 1980.
- [89] Szymczak C.: *Elementy teorii projektowania*. Warszawa: PWN 1998.
- [90] Szymczak C.: *Analiza wrażliwości cienkościennego pręta o przekroju monosymetrycznym. Zastosowania mechaniki w budownictwie lądowym i wodnym*, Wyd. IBW PAN, Gdańsk, 2001, s. 329–337.
- [91] Szymczak C.: Sensitivity analysis of thin-walled members, problems and applications. *Thin-Walled Struct.*, **41**, 2003, s. 53–68.
- [92] Szymczak C., Mikulski T.: Zastosowania analizy wrażliwości do konstrukcji budowlanych. *Inżynieria i Budownictwo*, **12**, 1994<sup>a</sup>, s. 544–546.
- [93] Szymczak C., Mikulski T.: O określaniu miejsc badania materiału konstrukcji. *XL Konferencja Naukowa KILiW PAN I Komitetu Nauki PZITB, Krynica*, **1**, 1994<sup>b</sup>, s. 199–204.
- [94] Szymczak C., Mikulski T.: Analiza wrażliwości jako podstawa badania stanu awaryjnego konstrukcji. *Szczecin – Międzyzdroje. XVIII Konferencja Naukowo-Techniczna „Awarie Budowlane” 1997*, s. 341–348.
- [95] Szymczak C., Mikulski T.: Zastosowanie identyfikacji parametrycznej w konstrukcjach budowlanych. *Inżynieria i Budownictwo*, **12**, 1999, s. 20–25.
- [96] Szymczak C., Mikulski T.: Identyfikacja modelu przepon w pręcie cienkościnnym o przekroju otwartym. *XLVI Konferencja Naukowa KILiW PAN I Komitetu Nauki PZITB, Krynica*, **1**, 2000, s. 167–174.
- [97] Szymczak C., Kujawa M.: Analiza wpływu naprężeń bimomentowych w ramie z prętów cienkościennych. *Inż. Bud.*, **10**, 2001, s. 598–599.
- [98] Szymczak C., Mikulski T.: Modelowanie węzłów ram zbudowanych z prętów cienkościennych. *Konstr. Stalowe\*2003*, nr **5(63)**, materiały konferencyjne. VIII Konferencja Naukowa Połączenia i Węzły w Konstrukcjach Metalowych, Olsztyn – Łańsk, 2003, s. 58–59
- [99] Szymczak C., Kreja I., Mikulski T., Kujawa M.: Sensitivity analysis of beams and frames made of thin-walled members. *Gdańsk: Wyd. Politechniki Gdańskiej* 2003.
- [100] Szymczak C., Kreja I., Mikulski T., Kujawa M.: Discussion. Numerical analysis of thin-walled frames with flexible joints. *Archives of Civil Engineering*, **52**, 1, 2006, s. 189–190.
- [101] Tews R., Rachowicz W.: Numerical analysis of thin-walled frames with flexible joints. *Archives of Civil Engineering*, **51**, 3, 2005, s. 344–365.
- [102] Timoshenko S. P.: *Strength of Materials*. New York: D. Van Nostrand 1957.
- [103] Timoshenko S. P., Gere J. M.: *Theory of Elastic Stability*. New York: Mc Graw Hill 1961.
- [104] Toader I. H. I.: Stability functions for members with semirigid joint connections. *J. Struct. Engng.*, **119**, 1992, s. 505–521.
- [105] Tomovic R.: *Sensitivity Analysis of Dynamic Systems*. New York: McGraw-Hill 1963.
- [106] Trahair N. S.: *Flexural-torsional Buckling of Structures*. London: Spon 1993.

- 
- [107] Urban I. W.: Teoria prętowych konstrukcji cienkościennych. Moskwa: Transizdat 1955 (rosyjski).
- [108] Vacharajittiphon P., Trahair N. S.: Elastic lateral buckling in plane frames. *J. Struct. Div. ASCE*, **99**, 1973, s. 821–835.
- [109] Vacharajittiphon P., Trahair N. S.: Warping and distortion of I-section joints. *J. Struct. Div. ASCE*, **100**, 1974, s. 547–564.
- [110] Vacharajittiphon P., Trahair N. S.: Analysis of lateral buckling in plane frames. *J. Struct. Div. ASCE*, **101**, 1975, s. 1497–1516.
- [111] Washizu K.: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Oxford: Pergamon Press 1968.
- [112] Waszczyszyn Z., Cichoń C., Radwańska M.: *Stability of Structures by Finite Element Methods*. Amsterdam: Elsevier 1996.
- [113] Weynand K.: SERICON – databank on joints in building frames. COST Project C1, First State of the Art Worksho, Strassbourg 1992.
- [114] Własow W. Z.: *Cienkościenne sprężyste pręty*. Moskwa: Gosizdatfizmatlit 1959 (rosyjski).
- [115] Yang Y-B., McGuire W.: A procedure for analysing space frames with partial warping constraints. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **20**, 1984, s. 1377–1398.
- [116] Zienkiewicz O. C.: *The Finite Element Method*. Mc Graw Hill Comp 1977.
- [117] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*. 6<sup>th</sup> ed. Oxford: Elsevier, Butterworth-Heinemann 2005.



## RAMY CIENKOŚCIENNE MODELOWANIE I ANALIZA WRAŻLIWOŚCI

Ramy cienkościenne są powszechnie stosowane do budowy hal przemysłowych, centrów handlowych, zadaszeń peronów dworcowych czy wysokich budynków. Takie konstrukcje składają się z wielu elementów belkowych, słupów, stężeń przekrojowych lub wiatrowych, połączonych ze sobą w węzłach. Spaczenie przekroi poprzecznych poszczególnych elementów ma w tym przypadku duży wpływ na deformację układu i dystrybucję naprężeń. Zależy to głównie od konstrukcji węzłów i rodzaju stężeń występujących wzdłuż elementów prętowych. Autor skupił swoją uwagę na analizie powszechnie stosowanych ram cienkościennych zbudowanych z bisymetrycznych elementów cienkościennych – dwuteowych.

W pracy przedstawiono statyczną i dynamiczną analizę ram cienkościennych przy zastosowaniu prętowego modelu układu. Ważnymi elementami takich konstrukcji są węzły, gdzie łączą się ze sobą pręty cienkościenne. W ramach klasycznej teorii układów prętowych nie ma możliwości określenia spaczenia przekroi przywęzłowych, jak i dystrybucji bimomentów w węzłach. Wynika to z braku warunków równowagi bimomentów w węzłach oraz faktu występowania w tych miejscach, a także w pobliżu stężeń, znacznych deformacji przekroju poprzecznego, co jest sprzeczne z podstawowym założeniem teorii prętów cienkościennych – nieodkształcalności przekroju poprzecznego. Ponadto konstrukcja węzła ma znaczący wpływ na spaczenie przekroi przywęzłowych. Do modelowania węzłów ram i miejsc lokalizacji stężeń zewnętrznych i wewnętrznych (zeber) użyto superelementu, co pozwoliło, w ramach jednowymiarowej teorii, uwzględnić wszystkie wymienione efekty pracy połączenia prętów cienkościennych.

Zastosowanie superelementu węzłowego pozwoliło na określenie dystrybucji wszystkich sił wewnętrznych, występujących w przekroju poprzecznym pręta cienkościennego łącznie z bimomentami. W przypadku superelementu węzła występuje sprzężenie osiowego rozciągania/ściskania, zginania i ścinania ze skręcaniem skrępowanym. Macierze sztywności i mas zostały wyznaczone na drodze jednostkowych stanów wymuszeń kinematycznych poszczególnych przekroi przywęzłowych. Zauważono także istotny wpływ przyjęcia tzw. długości współpracującej poszczególnych prętów, zbiegających się w danym węźle, na wyznaczenie macierzy sztywności i macierzy mas. Przyjęcie zbyt krótkich długości współpracujących generuje zawyżone wartości składników macierzy sztywności (przesztywnienie). Zbyt duża długość współpracująca wprowadza ograniczenie możliwych deformacji w przypadku obciążeń działających w pobliżu węzła lub, w przypadku zagadnień dynamicznych, przy wyznaczaniu wyższych wartości i odpowiadającym im postaci drgań własnych.

Przy zastosowaniu modelu ramy składającego się z klasycznych cienkościennych elementów, superelementów węzłów i superelementów pręta ze stężeniem otrzymujemy rezultaty analizy statycznej i dynamicznej, zbliżone do bardziej ogólnego modelu powłokowego. Tę tezę potwierdziły zamieszczone w niniejszej pracy przykłady numeryczne.

Uwzględnienie konstrukcji węzła ma także decydujący wpływ na stan przemieszczeń i rozkład sił wewnętrznych w ramie. Zastosowanie stężeń węzła zdecydowanie redukuje efekt przekazywania się spaczenia i bimomentu z jednego elementu cienkościennego na drugi, połączony z nim w węźle.

W pracy przedstawiono także analizę wrażliwości zadanego przemieszczenia, siły wewnętrznej, reakcji w zagadnieniach statycznych oraz wartości lub wektorów własnych w problemach drgań własnych ram, w zależności od wariacji zmiennych projektowych. Jako zmienne projektowe przyjęto wymiary przekroju poprzecznego, stałe materiałowe oraz sztywności stężeń. Przedstawiono problem analizy wrażliwości, zarówno w ujęciu analitycznym, jak i numerycznym, stosowanym do układów dyskretnych. Analityczne rozwiązanie jest możliwe jedynie dla prostych układów, takich jak belki. Sprawdzono także poprawność otrzymanych rozwiązań przy wykorzystaniu analizy wrażliwości poprzez porównanie z wynikami analizy parametrycznej.

Jako uzupełnienie zagadnień wrażliwości przedstawiono w niniejszej monografii także analizę wrażliwości w ujęciu probabilistycznym. Rozważono dwa różne typy zagadnienia statyki układu: stan regularny oraz stan graniczny. Probabilistyczne zmienne projektowe zostały określone poprzez funkcje gęstości. Do analizy wrażliwości dwóch różnego typu przykładów zastosowano metodę Monte Carlo. Jako wynik otrzymano histogram częstości zmiennej stanu, który może być traktowany jako wynik analizy wrażliwości w ujęciu probabilistycznym.

Przedstawiona w pracy analiza wrażliwości może być wykorzystana w projektowaniu konstrukcji, optymalizacji i diagnostyce istniejących obiektów czy w identyfikacji parametrów systemu. Uzyskane bezpośrednie zależności wariacji zmiennych stanu względem wariacji zmiennych projektowych w otoczeniu rozwiązania początkowego daje możliwość oceny zachowania się konstrukcji przy pewnych odchyłkach od założonych wartości zmiennych projektowych. Podcałkowe funkcje wrażliwości są zatem liniami wpływu wariacji zmiennych stanu od wariacji zmiennych projektowych. Zamieszczono dwa przykłady numeryczne (jeden z nich dotyczy rzeczywistej konstrukcji) zastosowania analizy wrażliwości w procesie projektowania i identyfikacji parametrycznej konstrukcji cienkościennych.

## THIN-WALLED FRAMES MODELLING AND SENSITIVITY ANALYSIS

Thin-walled frames are common steel constructions in various civil engineering objects, like industrial or shopping halls, island station (umbrella) roofs or high buildings. Such constructions consist of many beams, columns, lateral or wind bracings connected in nodes. Warping of the member cross-section plays a significant role in stress and deformation distribution. It depends on the frame node construction or the different kind of stiffeners located along the beam span. The author's attention is confined to widely used for practical applications thin-walled frames, consist of open bisymmetric I cross-sections members.

The monograph presents static and dynamic analysis of thin-walled frames according to the one-dimensional theory. Nodes of frames are the most significant elements, where the thin-walled beams are connected. Within one-dimensional classic beam theory, it is impossible to determine in the node's nearest neighbourhood the warping of cross-sections and bimoment distribution. There are no equilibrium conditions of bimoments in nodes and occurrence of significant deformations of cross section is noted, which is in inconsistency with the assumptions of the thin walled beam theory – non-deformable cross section. Also the node construction plays an important role in the warping distribution phenomena. The node superelement is thus a suitable model to take all the effects mentioned into account.

The superelement model is applied to simulate the warping effects in frame nodes, where the assumption of classical thin-walled theory concerning non-deformability of cross section is not satisfied. The stiffness and mass matrices of the superelements have been determined according to the common procedure of the unit enforced displacements. In the superelement of the thin-walled node, the axial stretching, bending and shearing behaviour is coupled with torsional performance. The collaboration length has been considered to describe the dimension of the node superelement. An appropriate assumption concerning this parameter is of great significance for the node superelement stiffness and mass matrix generating process. Its too small value generates over-stiffened matrix coefficients, whereas a very long collaboration length prevents from appropriate modelling of deformations under specific load, especially located close to node.

The applied model of frame consisting of classical thin-walled elements, node superelements and superelements of thin-walled beams with stiffeners provides the results of static and dynamic analyses, which are close to the more general shell model. The numerical examples presented in the monograph have confirmed this fact.

The consideration of the type of the node has also a significant influence on the distribution of displacements and the internal forces of the frame system. The use of stiffening ribs can evidently reduce the transfer of warping and bimoment from one thin-walled element to another one.

The sensitivity analysis of arbitrary displacements, internal forces, reactions for static problems and the eigenvalue or eigenvectors of free vibrations, due to certain variations of the design variables, is also presented in the work. The cross-section geometric dimensions, the material constants and the restraint modulus have been assumed to be the design variables. Analytical and numerical methods of the sensitivity analysis are presented. The former one can be used only in simple cases of one-dimensional models. On the other hand, the numerical method can be used for the discrete models taking advantage of superele-

ments. The accuracy of approximations concerning changes in the structural behaviour due to certain modifications of the design variables has been investigated. The comparison between the results from the sensitivity analysis and the results from the parametric static analysis for different values of the design variables has been investigated.

In order to supplement the sensitivity issues, the probabilistic sensitivity analysis has also been considered in the study. Two different types of static problems have been analysed: regular case and the limit state case. The probabilistic design variables have been defined by the density functions. The Monte Carlo method has been applied for the two different types of probabilistic cases so as to obtain the histograms of stage variables frequency, which can be treated as the results of the probabilistic sensitivity analysis.

The deterministic sensitivity analysis presented in the monograph can be a useful tool for the structural design, optimisation and diagnostics of existing objects or for identification of parameters of the system. A direct integral dependence of the variation of the state variables with relation to the variation of the design variables, in the neighbourhood of the initial solution, creates conditions for the assessment of the structure with some possible deviations from the design variables. Thus, the underintegral sensitivity functions are the influence lines of the variation of the state variables due to variation of the design variables. Two numerical examples (one of them concerns real structure) of the application of the sensitivity analysis in the process of the design and parametric identification of the thin-walled structures are presented.

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

---

Wydanie I. Ark. wyd. 5,8, ark. druku 8,25, 100/567

---

Druk i oprawa: *EXPOL* P. Rybiński, J. Dąbek, Sp. Jawna  
ul. Brzeska 4, 87-800 Włocławek, tel. 054 232 37 23