III-ème Conférence hydrologique des États baltiques
Warszawa, mai 1930.

Condition essentielle à suivre pour s'assurer des valeurs les plus exactes du coefficient de rugosité

par
Prof. Dr. ALFREDS VITOLS (Lettonie).

WARSZAWA
Édité par le Ministère des Travaux publics
1930

III-ème Conférence hydrologique des Etats baltiques
Warszawa, mai 1930.

Condition essentielle à suivre pour s'assurer des valeurs les plus exactes du coefficient de rugosité

par Prof. Dr. Alfreds Vītols (Lettonie).

On sait que le fonctionnement convenable des ouvrages hydrotechnique est dû en grande partie au juste choix du coefficient de rugosité qui, suivant la nasture des parois du lit, subit des changements considérables. Par exemple, le coefficient de Bazin varie de 0·06 jusqu'aux valeurs dépassant 1·75, d'après le tableau dressé par l'auteur. En se servant, pour la formule de Chézy $v = c\sqrt{Ri}$, de l'expression de c d'après la formule de Bazin, on aura

$$v = c\sqrt{Ri} = \frac{87 \cdot \sqrt{Ri}}{1 + \frac{\gamma}{\sqrt{R}}} = \frac{87\, R \sqrt{i}}{\sqrt{R} + \gamma}.$$

Le rapport des vitesses moyennes pour deux valeurs voisines de γ, par exemple, pour $\gamma_1 = 0{\cdot}85$ (parois de nature mixte; sections en terre très regulières; rigoles revêtues de perrés) et pour $\gamma_2 = 1{,}30$ (canaux en terre dans des conditions ordinaires) serait:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{R} + \gamma_2}{\sqrt{R} + \gamma_1} = \frac{\sqrt{R} + 1{\cdot}30}{\sqrt{R} + 0{\cdot}85}$$

Comme l'on voit, ce rapport est la fonction de R, et plus la grandeur de R sera petite, plus le rapport deviendra grand. Si l'on posait $R = 0{\cdot}5\ m$, valeur assez réelle dans la pratique hydrotechnique, on aurait:

$$\frac{v_1}{v_2} = \left(\frac{\sqrt{R} + 1{\cdot}30}{\sqrt{R} + 0{\cdot}85}\right)_{R=0\cdot5\,m} = \frac{0{\cdot}70 + 1{\cdot}30}{0{\cdot}70 + 0{\cdot}85} = \frac{2{\cdot}00}{1{\cdot}55} = 1{\cdot}3,$$

c'est-à-dire une erreur environ de 30% est possible.

Si l'on a affaire à un courant déjà existant (fleuve, rivière) on peut trouver par l'expérience les valeurs correspondantes des γ sur lesquelles on base ensuite un projet d'amélioration de régime, abaissement de niveau etc.). Toutefois, les points de vue sur cette question diffèrent: les Estoniens, dans leur projet de l'abaissement du niveau du lac Peipus, ont accepté des valeurs des coefficients de rugosité sur le fleuve Narova réduites par rapport à celles qu'on a trouvées par l'évaluation immédiate, malgré une sensibilité considérable de ces coefficients à la cubature des masses à enlever. (Voir le rapport de l'ing. Tilzen au II. Congrès d'hydrologie à Tallinn 1928: „Die hydraulischen Grundlagen der Senkung des Peipussees um 0·3 mtr."). Le projet de la régulation du niveau du lac Boden est basé sur les coefficients trouvés par l'expérience, sans aucune réduction. Il parait que, par raisons de réserve, pour assurer les résultats prévus par le projet, en pleine mesure, il serait préférable de renoncer à n'importe quelle réduction desdits coefficients, d'autant plus que l'enlèvement des rochers, en les faisant sauter, ne pourrait aucunement influencer la réduction des coefficients de rugosité. En effet, dans quelle mesure un seuil léché et uni par le courant pendant des siècles, pourrait-il activer une résistance plus considérable que celle qui s'établirait après l'enlèvement du seuil quand le fond du fleuve deviendra accidenté et rude? Animés par les mêmes raisons, les auteurs du projet de l'abaissement du niveau du lac Luban en Lettonie ont profité des valeurs des coefficients de rugosité immédiatemment trouvées par l'expérience.

Or, pour trouver cette valeur caractéristique du coefficient de rugosité, on est amené à opérer des mesurages des éléments hydrauliques du courant parmi lesquels il y en a de très délicats—c'est la chute du niveau du courant qui d'ordinaire est une petite valeur susceptible aux erreurs de mesurage.

C'est une raison de plus pour faire reproche à la formule connue de Ganguillet et de Kutter, qui se sont servi en grande partie des données qui ressortaient du nivellement de la partie inférieure, à faible pente, du Mississipi, où l'erreur relative de nivellement devait être considérable. Les mesurages des débits Q également y laissent beaucoup à desirer: on les a calculés d'après les données sur les vitesses mesurées à l'aide des flotteurs jetés à l'eau aux différents points du courant.

Enfin, comment expliquer la surprenante multitude des formules empiriques pour le coefficient de Chézy dont abondent les cours d'hydraulique et qui ne cessent apparaître; n'est-ce pas en partie au moins — une conséquence de la négligence des erreurs du mesurage?

Passons en revue quelques méthodes d'évaluation du coefficient de rugosité pratiquées jusqu'ici. C'est à la Conférence hydrologique des États baltiques à Tallinn, 17—22 juin 1928, qu'à l'ordre du jour y figurait la question de l'évaluation de ce coefficient. Les voix s'y laissaient entendre (le rapport de Tilzen) que les méthodes jusqu'alors employées amenaient à de faux résultats. La proposition de Tilzen vise à appliquer à un espace de fleuve assez considérable la pleine formule de Bernoulli, établie pour le courant découvert, pour que la chute absolue n'atteigne pas une valeur moindre de $H = 25$ *cm* (Voir „Verhandlungen und Beschlüsse der II. Baltischen hydrologischen und hydrometrischen Konferenz, Tallin, 1928," page 17). Cette proposition mérite d'être remarquée, comme la première démarche pour parer aux erreurs relatives du nivellement.

Nous tâcherons ici de montrer que la proposition de Tilzen doit être corrigée et mise en plein accord avec la théorie générale des erreurs.

Pour traiter la question dans toute son ampleur, il faut faire une observation préalable historique, sur l'équation de Bernoulli, qui est la base de l'hydraulique contemporaine.

L'équation de Bernoulli s'ecrit sous la forme générale:

$$y_n - y_o = \frac{v_n^2}{2g} - \frac{v_o^2}{2g} + \int_{S_o}^{S_n} \frac{v^2}{C^2 R} ds \quad \text{où signifient:}$$

y_n et y_o — les ordonnées du niveau du courant aux deux sections transversales limitant l'espace choici du courant;
v_n et v_o — les vitesses moyennes de ces sections;
g — l'accélération de la pesanteur;
C — le coefficient de Chézy;
$R = F/\chi$, le rayon hydraulique (le rayon moyen) où F est l'aire de la section transversale et χ — le périmètre mouillé;
ds — l'espace du courant entre deux sections transversales du courant, infiniment proches l'une de l'autre.

L'équation ci-dessus est basée sur l'hypothèse des sections plaines du père de l'hydraulique (D. Bernoulli), c'est-à-dire que tous les points d'une section quelconque sont animés par la même vitesse, de sorte que tous les points d'une section parcourent les mêmes distances et que les sections se déplacent en demeurant plaines. C'est le point de départ des anciens hydrauliciens: Belanger, Poncelet, Navier et de quelques autres. L'idée des sections plaines ne correspondant pas à la réalité, le coefficient de rugosité, contenu dans l'expression du coefficient de Chézy C, avait la double mission: de rendre compte de la rugosité du lit et, d'autre part, de corriger l'hypothèse peu réelle. Et voilà que se trouvèrent des savants qui se mirent à corriger l'équation établie.

Coriolis (voir An. P. et Ch. 1836, I. Sem. page 314) fut le premier, qui rendit compte des vitesses locales des points d'une section. Il laissa à l'écart la question suivante: pouvait on conserver, dans des conditions du mouvement varié, l'expression de la perte d'énergie, établie pour le mouvement uniforme? Ces recherches amenèrent Coriolis à introduire un coefficient correctif α pour l'expression de l'énergie cinétique du courrant, de sorte qu'on écrivait $\alpha\left(\frac{v_n^2}{2g} - \frac{v_o^2}{2g}\right)$.
Ce coefficient α, dépendant de la loi de changement des vitesses locales dans une section, en réalité varie d'une section à l'autre; par conséquent, il n'est pas constant. Or, sa valeur, dans des conditions ordinaires, variant entre 8·5% et 15% (voir Dr. R. von Mises, Elemente der Technischen Hydromechanik, 1914, S. 155 et Б. Бахметевъ, О неравномѣрномъ движенiи въ открытомъ руслѣ, 1912, page 11 et 12), on néglige non seulement cette variation, mais aussi très souvent sa petite valeur en comptant $\alpha = 1$.

Coriolis n'avait attribué aucune attention au terme de l'équation de Bernoulli représentant la perte de l'énergie par la résistance aux parois du lit, en égalant ces termes dans le mouvement uniforme et varié. C'est Boussinesq, qui fait encore une demarche en avant en étudiant le problème de résistance (voir sa Théorie des Eaux Courantes). Boussinesq parvient à obtenir une expression complémentaire pour le terme de résistance, qui étant fonction de $\frac{d}{ds}\left(\frac{v^2}{2g}\right)$, s'additionne au terme d'énergie cinétique de sorte que celui-ci est multiplié par un nouveau coefficient α' dont la valeur numérique, ce qui est surtout remarquable, diffère peu de celle du coefficient de Coriolis α. Le résultat numérique des recherches de Coriolis et de celles de Boussinesq différant peu, une grande différence en principe discerne les deux équations: le terme de résistance dans l'équation de Boussinesq est celui du mouvement uniforme.

Nous passons à la suivante perfection de l'équation de Bernoulli qui est d'assez fraîche date (elle date de la Conférence Mondiale de l'Énergie à Bâle en 1926) et qui est due à l'ingénieur suisse Dr. Strickler.

Il y a longtemps qu'on avait constaté le fait que l'énergie cinétique ne se restitue pas complètement en énergie potentielle, quand l'accroissement d'énergie est négatif, une certaine partie en étant consommée par le procès de restitution. Cette partie étant inconnue, par raisons de réserve du calcul, on supposait la perte complète, ce qui équivalait à égaler l'accroissement négatif d'énergie cinétique à O.

Dr. Strickler tenait à trouver des moyens sûrs pour fixer les points d'installation des usines hydro-électriques assurant la profondeur navigable sur la longueur de tout le bief limité par deux usines voisines. Ses observations l'ont amené à poser le coefficient réstitutoire $\beta = 2,3$ environ

$$\text{si} \quad \frac{v_i^2}{2g} - \frac{v_{i-1}^2}{2g} < 0 \qquad \text{et} \quad \beta = 1, \quad \text{si} \quad \frac{v_i^2}{2g} - \frac{v_{i-1}^2}{2g} > 0.$$

C'est de cette manière que les coefficients de Coriolis et de Boussinesq sont remplacés par celui de Strickler β. En même temps Strickler préconise la formule de Manning pour le coefficient de Chézy C qui est $C = kR^{1/n}$.

L'équation de Bernoulli corrigée par Strickler s'écrit sous la forme:

$$y_n - y_o = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\beta}{2g}\left(v_i^2 - v_{i-1}^2\right) + \sum_{i=1}^{i=n} \int_{Si-1}^{Si} \frac{v^2}{K^2 R^{4/3}}\, ds$$

ou bien, v remplacée par $v = \frac{Q}{F}$:

$$y_n - y_o = \frac{Q^2}{2g} \sum_{i=1}^{i=n} \beta \left(\frac{1}{F_i^2} - \frac{1}{F_{i-1}^2}\right) + \frac{Q^2}{K^2} \sum_{i=1}^{i=n} \int_{Si-1}^{Si} \frac{\chi^{4/3}}{F^{10/3}}\, ds.$$

Pour les courants naturels, il n'y a pas de moyen de calculer $\int_{Si-1}^{Si} \frac{\chi^{4/3}}{F^{10/3}}\, ds$ autrement que par la loi de trapèze, c'est-à-dire on pose:

$$\int_{Si-1}^{Si} \frac{\chi^{4/3}}{F^{10/3}}\, ds = \left(\frac{\chi_i^{4/3}}{F_i^{10/3}} + \frac{\chi_{i-1}^{4/3}}{F_{i-1}}\right) \cdot \frac{S_i - S_{i-1}}{2}$$

où $S_i - S_{i-1}$ est l'espace entre deux sections voisines assez proches. En tenant compte de ces transformations, on peut transcrire l'équation de Bernoulli-Strickler:

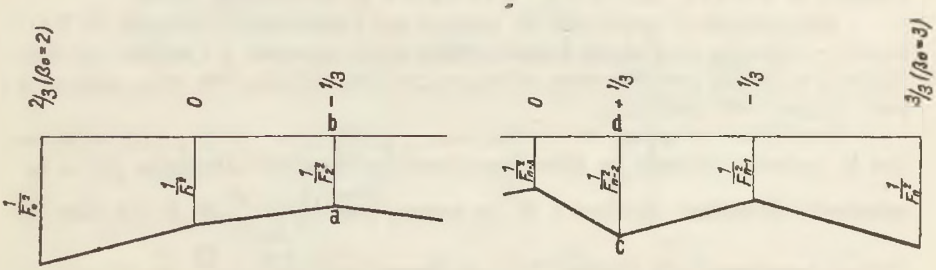
$$\frac{y_n - y_o}{Q^2} = \frac{1}{2g} \sum_{i=1}^{i=n} \beta \left(\frac{1}{F_i^2} - \frac{1}{F_{i-1}^2}\right) + \frac{1}{2K^2} \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{Z_i^{4/3}}{F_i^{10/3}} + \frac{Z_{i-1}^{4/3}}{F_{i-1}^{10/3}}\right)(S_i - S_{i-1})$$

dont il faut se servir pour calculer le coefficient de rugosité K, qui est une valeur inconnue. Le terme

$$\sum_{i=1}^{i=n} \beta \left(\frac{1}{F_i^2} - \frac{1}{F_{i-1}^2}\right)$$

admet une simplification.

En effet, traçons du niveau du courant, vers le bas, en forme d'ordonnées les valeurs correspondantes de $\frac{1}{F_i^2}$, alors on aura le croquis ci-dessous:



Si l'on développe l'expression

$$\sum_{i=1}^{i=n} \beta \left(\frac{1}{F_i^2} - \frac{1}{F_{i-1}^2}\right),$$

on trouve que d'après Strickler

$$\sum_{i=1}^{i=n} \beta \left(\frac{1}{F_i^2} - \frac{1}{F_{i-1}^2}\right) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{F_i^2} + \frac{\beta_n}{3}\frac{1}{F_n^2} + \frac{\beta_0}{3}\frac{1}{F_0^2}$$

où les ordonnées qui unissent les cimes au niveau (p. a, b), se multiplient avec $-^1/_3$, mais celles qui unissent les creux (c, d), avec $+^1/_3$. En ce qui concerne les ordonnées extrêmes, quatre combinaisons sont possibles (voir le croquis). Il serait intéressant d'étudier l'expression

$$\frac{(1-\beta_n)\dfrac{1}{F^2}-(1-\beta_0)\dfrac{1}{F_0}-{}^1/_3\displaystyle\sum_{i-1}^{i=n-1}\dfrac{1}{F_i^2}}{1000\alpha}=i_e$$

qui représente la perte d'énergie spécifique et qui peut-être aurait la qualité de varier entre des limites assez étroites.

En parlant des efforts des hydrauliciens qui ont beaucoup attribué a l'établissement des coefficients de rugosité, il est juste qu'on fasse mention du savant polonais Matakiewicz, qui a publié un mémoire sur le coefficient de Chézy dont fait partie le coefficient de rugosité.

D'aprés Matakiewicz, $v = 34\ i^m\ 1{\cdot}04\ f\ (T)$ pour les courants naturels et $v = 34\ i^m\ 1{\cdot}04\ f\ (R)$ pour les canaux et les conduites d'eau (T est la profondeur moyenne). Il est remarquable et engageant que, d'aprés Matakiewicz, les courants naturels ne se discernent par aucun coefficient de rugosité ou bien celui-ci est le même pour tous les courants et $v = 35{\cdot}4\ i^{0\,493+10\,i}\ T^{0\,7}$. Pour manipuler avec cette formule, les tableaux correspondants sont dressés par l'auteur. On voit que la formule de Matakiewicz fait partie du groupe de formules de Siedek, Lindboe, Hermanek et de quelques autres.

Pour calculer le coefficient de rugosité par l'expérience, l'équation de Bernoulli-Strickler est la plus adaptée. Mais, avant de passer à l'analyse des conditions d'emploi de cette équation, effleurons une des méthodes les plus employées pour calculer ledit coefficient.

On choisit un espace de courant assez régulier pour qu'on puisse admettre que le courant y ait pris un mouvement assez uniforme; on détermine par le nivellement l'inclination moyenne i de cet espace, puis $h_m = \dfrac{F}{B}$ où F est l'aire de section transversale du courant, B — sa largeur, puis $v_m = \dfrac{Q}{F}$ et on calcule

$$C = \frac{v_m}{\sqrt{h_m \cdot i}} = KR^{1/6} = Kh_m^{1/6},$$

$$K = \frac{v_m}{h_m^{1/2} \cdot i^{1/2} \cdot h_m^{1/6}} = \frac{v_m}{h_m^{2/3} \cdot i^{1/2}}.$$

Transformons cette formule pour pouvoir la comparer à l'équation de Bernoulli - Strickler.

Alors
$$K^2 = \frac{v_m^2}{h_m^{4/3} i} = \frac{Q^2\,(S_2 - S_0)}{F^2 h_m^{4/3}\,(y_2 - y_0)},$$

$$\frac{y_2 - y_0}{Q^2} = \frac{2}{2K^2}\ \frac{(S_2 - S_0)}{F^2 h_m^{4/3}}.$$

On voit que l'énergie cinétique est négligée et qu'on a accepté, sur un espace assez court:

$$\frac{2(S_2 - S_0)}{F_1^2 h_{1m}^{4/3}} = \sum_{i=1}^{i=3} \left(\frac{\chi_i^{4/3}}{F_i^{10/3}} + \frac{\chi_{i-1}^{4/3}}{F_{i-1}^{10/3}} \right) (S_i - S_{i-1}).$$

Pour $n = 3$ et $S_i - S_{i-1} =$ constans $= \triangle S$ comme d'habitude,

$$\frac{4 \triangle S}{F_1^2 h_{1m}^{4/3}} = \left(\frac{\chi_0^{4/3}}{F_0^{10/3}} + \frac{2\chi_1^{4/3}}{F_1^{10/3}} + \frac{\chi_2^{4/3}}{F_2^{10/3}} \right) \cdot \triangle S \text{ où :}$$

$$\frac{1}{F_1^2 h_{1m}^{4/3}} = {}^1/_4 \left(\frac{\chi_0^{4/3}}{F_0^{10/3}} + \frac{2\chi_1^{4/3}}{F_1^{10/3}} + \frac{\chi_2^{4/3}}{F_2^{10/3}} \right).$$

Cette analyse montre, qu'abstraction faite des erreurs de nivellement qui, sur un espace de quelques centaines de mtr., doivent être assez considérables, la méthode d'ordinaire employée est assez conventionnelle pour qu'on puisse accepter que le coefficient calculé d'après celle-là caractérise la vraie rugosité de lit.

Dans ce qui suit nous montrerons, comment réagit K contre les erreurs de mesurage parce que nous comptons que le centre de gravité se trouve ici. Par raisons d'abréviation posons provisoirement :

$$H = \sum_{i=1}^{i=2n} y_i - y_{i-1} \qquad E = {}^1/_{2g} \sum_{i=1}^{i=n} \beta \cdot \left(\frac{1}{F_i^2} - \frac{1}{F_{i-1}^2} \right) =$$

$$= {}^1/_3 \left\{ \left(\sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{1}{F_i^2} \right) + \beta_n \cdot \frac{1}{F_n^2} - \beta_o \frac{1}{F_o^2} \right\} \text{ et}$$

$$S = \sum_{i-1}^{i=n} \left(\frac{\chi_{i-1}^{4/3}}{F_{i-1}^{10/3}} + \frac{\chi_i^{4/3}}{F_i^{10/3}} \right) \cdot \frac{S_i - S_{i-1}}{2} = \sum_{i=1}^{i=n} \omega_i \quad \text{où désignent :}$$

H — la chute absolue du niveau;
$y_i - y_{i-1}$ — la différence de hauteur de deux points i et $i-1$;
F_i — la section transversale du courant;
χ — le périmètre mouillé du courant (longueur);
S_i — la distance de la section i d'une section initiale.

$$\omega_i = \left(\frac{\chi_{i-1}^{4/3}}{F_{i-1}^{10/3}} + \frac{\chi_i^{4/3}}{F_i^{10/3}} \right) \left(\frac{S_i - S_{i-1}}{2} \right).$$

Alors $$\frac{H}{Q^2} = E + \frac{S}{K^2}, \quad K^2 = \frac{S}{\dfrac{H}{Q^2} - E}$$

Toutes les valeurs contenues dans cette expression de K^2 diffèrent de leurs vraies valeurs par les erreurs d'observation, de sorte que les erreurs sont liées par une relation qui ressort de la différentiation de l'expression, en employant au lieu du symbole d celui de signification de l'erreur $\triangle$.

Alors
$$2K\triangle K = \triangle \cdot \frac{S}{\frac{H}{Q^2} - \varepsilon}$$

Ce qui nous intéresse c'est la valeur relative de l'erreur de K à laquelle on parvient en divisant les deux parties de l'expression (1) par K^2 ce qui donne lieu à:

$$2\frac{\triangle K}{K} = \frac{1}{K^2} \cdot \triangle \cdot \frac{S}{\left(\frac{H}{Q^2} - \varepsilon\right)} = \frac{\frac{H}{Q^2} - \varepsilon}{S} \cdot \triangle \cdot \frac{S}{\frac{H}{Q^2} - \varepsilon} = \triangle l_n \frac{S}{\frac{H}{Q^2} - \varepsilon} =$$

$$= \frac{\left(\frac{H}{Q^2} - \varepsilon\right)}{S} \cdot \frac{\left(\frac{H}{Q^2} - \varepsilon\right)\triangle S - S\triangle\left(\frac{H}{Q^2} - \varepsilon\right)}{\left(\frac{H}{Q^2} - \varepsilon\right)^2} = \frac{\triangle S}{S} - \frac{\triangle\left(\frac{H}{Q^2} - \varepsilon\right)}{\frac{H}{Q^2} - \varepsilon};$$

ε ne fait d'ordinaire qu'une petite partie de $\frac{H}{Q^2}$, ne dépassant pas quelques %. Alors

$$\frac{1}{\frac{H}{Q^2} - \varepsilon} = \frac{1}{\frac{H}{Q^2}\left(1 - \frac{\varepsilon}{H/Q^2}\right)} = \frac{1}{H/Q^2}(1 - \alpha)^{-1} \quad \text{où } (\alpha) = \frac{\varepsilon}{H/Q^2} < 1.$$

Après avoir introduit le coefficient correctif $(1 - \alpha)^{-1}$ on aura:

$$\frac{\triangle\left(\frac{H}{Q^2} - \varepsilon\right)}{\frac{H}{Q^2} - \varepsilon} = \left(\frac{\triangle \cdot \frac{H}{Q^2}}{\frac{H}{Q^2}} - \frac{\triangle\varepsilon}{\frac{H}{Q^2}}\right)(1 - \alpha)^{-1}$$

H/Q^2 à son tour donne lieu à

$$\triangle H/Q^2 = \frac{Q^2 \cdot \triangle H - 2Q\triangle QH}{Q^4},$$

$$\frac{\triangle\frac{H}{Q^2}}{\frac{H}{Q^2}} = \frac{Q^2}{H}\left(\frac{Q^2\triangle H - 2Q\triangle QH}{Q^4}\right) = \frac{\triangle H}{H} - \frac{2\triangle Q}{Q}$$

et finalement:

$$2(1-\alpha)\frac{\triangle K}{K} = \frac{\triangle S}{S}(1-\alpha) + \frac{\triangle \varepsilon}{\frac{H}{Q^2}} + \frac{2\triangle Q}{Q} - \frac{\triangle H}{H};$$

Désignons par:
δ_K — l'erreur moyenne de détermination de K,
M_S — l'erreur moyenne de détermination de S,
M_E —l'erreur moyenne de détermination de E,
δ_Q — l'erreur moyenne de détermination de Q,
M_H — l'erreur moyenne de détermination de H.

Alors, comme l'on sait, ces erreurs possèdent la qualité d'être reliées par:

$$4(1-\alpha)^2\left(\frac{\delta_K}{K}\right)^2 = (1-\alpha)^2\left(\frac{M_S}{S}\right)^2 + \left(\frac{M_E}{\frac{H}{Q^2}}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta_Q}{Q}\right)^2 + \left(\frac{M_H}{H}\right)^2$$

Chacune des erreurs désignées par M est à son tour fonction des erreurs moyennes des valeurs composant la fonction correspondante. C'est pour cela que:

$$M_S^2 = \sum_{i=1}^{i=n} \triangle^2\omega_i = n\delta_\omega^2$$

où δ_ω est l'erreur moyenne de détermination de ω_i;

$$M_E^2 = \frac{1}{q}\left\{\frac{1}{4g^2}\sum_{i=1}^{i=n-1}\left(\frac{\triangle F_i}{F_i^3}\right)^2 + \beta_n^2\left(\frac{\triangle F_n}{F_n^3}\right)^2 + \beta_o^2\left(\frac{\triangle F_o}{F_o^3}\right)^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{3460}\cdot(n-1+\beta_n^2+\beta_o^2)\frac{\delta_F^2}{F_m^6} \qquad \text{où}$$

$$\frac{n-1+\beta_n^2+\beta_o^2}{F_m^6} = \left(\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1}{F_i^6}\right) + \frac{\beta_n^2}{F_n^6} + \frac{\beta_o^2}{F_o^6}$$

Les erreurs δ_ω et δ_F sont dépendantes l'une de l'autre, toutes deux étant fonctions des erreurs de mesurage de quelques longueurs au moyen desquelles on calcule les expressions de ω_i et de F_i.

Passons à l'erreur la plus étudiée et à laquelle on attribue le plus d'attention. C'est l'erreur de nivellement. L'erreur moyenne de cette opération est:

$$M_H^2 = \sum_{i=1}^{i=2n} \triangle^2(y_i - y_{i-1}) = 4n\delta_m^2,$$

où δ_m est l'erreur moyenne commise en lisant les chiffres indiquant la hauteur.

Il est aussi avantageux de remplacer Q par $Q = F_m \cdot v_m$, où v_m varie pour les courants d'eau entre des limites plus étroites que Q.

Le nombre n est relié à celui de kilomètres par $100\, n = L\, 1000$, d'où il suit que $n = 10\, L$ et c'est pour cela que:

$$4\,(1-\alpha)^2 \cdot \left(\frac{\delta_K}{K}\right)^2 = \frac{(1-\alpha)^2 \cdot 10L\delta_\omega^2}{S^2} +$$

$$+ \frac{10L - 1 + \beta_n^2 + \beta_o^2}{3460F_m^4 \left(\frac{H}{Q^2}\right)^2} \cdot \left(\frac{\delta_F}{F_m}\right)^2 + \frac{40L\delta_m^2}{H^2} + 4\left(\frac{\delta_Q}{Q}\right)^2 \tag{1}$$

On peut représenter S et H comme fonctions de L en introduisant i, l'inclinaison moyenne de niveau; Alors:

$$S = \frac{\chi^{1/3}}{F^{5/3}}\, L \cdot 1000, \qquad H = L \cdot 10^6 \cdot i \ \ (\text{en } mm),$$

$$4_n\delta_m^2 = 40\delta_m^2 \cdot L = (2\sqrt{10} \cdot \delta_m)^2 \cdot L = \delta^2 L, \quad \text{où } \delta = 2\sqrt{10}\,\delta_m$$

est l'erreur moyenne de nivellement par kilomètre, normalisée souvent par les instructions. Alors (1) prend la forme:

$$4\,(1-\alpha)^2\left(\frac{\delta_K}{K}\right)^2 = \frac{(1-\alpha)^2 \cdot 10L\delta_\omega^2}{\left(\frac{\chi^2}{F^5}\right)^{1/3} \cdot 10^6 L^2} + \frac{10L - 1 + \beta_n^2 + \beta_o^2}{3460L^2 \cdot 10^6 \cdot i^2}\left(\frac{\delta_F}{F_m}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\delta^2 \cdot L}{L^2 \cdot 10^{12} \cdot i^2} + 4\left(\frac{\delta_Q}{Q}\right)^2 = \frac{(1-\alpha)^2 \cdot 10\delta_\omega^2}{\left(\frac{\chi^2}{F^5}\right)^{1/3} 10^6 L} +$$

$$+ \frac{\left(10 + \frac{\beta_n^2 + \beta_o^2 - 1}{L}\right) v_m^4}{3460L \cdot 10^6 \cdot i^2} \cdot \left(\frac{\delta_F}{F_m}\right)^2 + \frac{\delta^2}{L \cdot 10^{12} \cdot i^2} + 4\left(\frac{\delta_Q}{Q}\right)^2 \tag{2}$$

La conclusion générale qu'on peut aisément faire, c'est:

1) que $$(1-\alpha)\left(\frac{\delta_K}{K}\right)_{\sim} = \frac{\delta_Q}{Q}$$

c'est-à-dire que plus grand est le nombre de kilomètres L, plus précise est la valeur de K;

2) qu'il est impossible d'exiger l'exactitude de détermination de K dépassant celle de Q.

Il parait que dans des circonstances ordinaires on pourrait négliger

$$\left(\frac{M_S}{S}\right)^2 \quad \text{et} \quad \frac{M_E^2}{(H/Q)^2}$$

vis-àvis des erreurs de H et de Q, S et E étant fonctions de longueurs assez importantes pour qu'on puisse négliger les erreurs de leur mesurage, mais qu'une généralisation de la proposition enoncée pourrait être risquante et qu'une étude des erreurs de détermination de S et de E mériterait d'être entreprise.

Passons maintenant à un exemple numérique devant illustrer la théorie établie. On trouve sur le fleuve letton Daugawa près de Krustpils (voir „Resultate der Wassermengenmessungen und die Abflusseinheiten in den Flussgebieten Lettlands" page 14—15 N⁰ 72) l'inclinaison $i = 0{\cdot}000025 = 2{\cdot}5\ cm/km$.

Si l'on néglige M_S et M_E, on a d'après (2):

$$4\,(1-\alpha)^2\left(\frac{\delta_K}{K}\right)^2 = \frac{\delta^2}{L\cdot 10^{12}\cdot i^2} + 4\left(\frac{\delta_Q}{Q}\right)^2 \tag{3}$$

Admettons que $\frac{\delta_Q}{Q} = 5\%$ et que $\delta = 7\ mm$.

Si l'on se borne, comme d'habitude, pour conserver les avantages du mouvement uniforme, à $L = {}^1/_5\ (200\ m)$, on aura:

$$4\left(\frac{\delta_K}{K}\right)^2(1-\alpha)^2 = \left[\frac{50\cdot 5\cdot 10^{12}}{10^{12}\cdot 625} + \frac{4\cdot 25}{10^4}\right]\frac{1}{(1-\alpha)^2} =$$

$$= \frac{0{\cdot}4 + 0{\cdot}01}{(1-\alpha)^2} > 0{\cdot}50;$$

$$\frac{\delta_K}{K} > \sqrt{0{,}10275} = 0{,}32 \qquad \frac{\delta_K\%}{K} > 32\%,$$

c'est-à-dire on ne peut trouver aucune valeur convenable de K.

Il est remarquable que la réduction de la norme de δ aurait peu valu. En effet, si l'on avait accepté la valeur $\delta = 5\ mm$ que les normes prussiennes reconnaissent comme admissible, on aurait:

$$\frac{\delta_K\%}{K} > \frac{\sqrt{0.21}}{2}\cdot 100 = 23\%;$$

et si l'on avait même passé à la norme $\delta = 3\ mm$ bonne norme, on aurait peu gagné, puisqu'alors on aurait:

$$\left(\frac{\delta_K}{K}\right)\% > \frac{\sqrt{0{\cdot}11}}{2}\cdot 100\% = 16\%.$$

On voit que le seul moyen d'obtenir une valeur de K plus précise, ce serait de passer à un espace de courant plus considérable.

Si l'on admet pour K une erreur dépassant considérablement celle de détermination de Q ou que Q soit déterminé avec une exactitude parfaite, alors (3) prend la forme simple:

$$4\left(\frac{\delta_K}{K}\right)^2 (1-\alpha)^2 = \frac{\delta^2}{Li^2 \cdot 10^{12}} \tag{4}$$

ou bien

$$L \geqq \frac{\delta^2}{4\left(\frac{\delta_K}{K}\right)^2 (1-\alpha)^2 \cdot 10^{12} \cdot i^2} \tag{4 bis}$$

Tirons de cette expression le criterium de Tilzen $H > 25cm = 250\,mm$. Puisque $H = 10^6 \cdot Li$, l'expression (4 bis) donne

$$Li10^6 = H \geqq \frac{\delta^2}{4\left(\frac{\delta_K}{K}\right)^2 \cdot (1-\alpha)^2 \cdot 10^6 \cdot i}$$

On voit qu'en réalité H est fonction de δ, $\frac{\delta_K}{K_1}$, α et de i.

Il est aussi plausible que L ne doit pas être très considérable et qu'il ne faut pas l'étendre au-delà d'un espace de courant où les qualités physiques du lit restent invariables, parce que K varie pour différents espaces du fleuve suivant les qualités physiques du lit. Pour pouvoir tenir compte de cette circonstance, il faudra réduire δ et augmenter L, c'est-à-dire il faudra passer au nivellement plus précis que ne l'est le nivellement technique ordinaire et aux espaces de courants plus considérables.

Drukarnia Państwowa Nr. 50220.