III Hydrologische Konferenz der Baltischen Staaten
Warszawa, Mai 1930.

Über Geschwindigkeitsformeln

von

Dr. Ing. ehr. h. **W. SOLDAN** (Deutschland).

WARSZAWA
Herausgegeben vom Ministerium für öffentliche Arbeiten
1930

III Hydrologische Konferenz der Baltischen Staaten
Warszawa, Mai 1930.

Über Geschwindigkeitsformeln

von Dr. Ing. ehr. h. W. Soldan (Deutschland).

Die Strömungsgeschwindigkeiten in Flussläufen und offenen Kanälen werden in der Regel nach einer der Formeln:

1) $$v = c\sqrt{R \cdot J}$$

oder:

2) $$v = k \cdot R^{\mu} \cdot J^{\nu}$$

berechnet, wobei

v — die mittlere Geschwindigkeit im Querschnitt,

$R = \frac{F}{U}$ = hydraulischer Radius das Verhältnis zwischen der Querschnitsgrösse und dem benetzten Umfang,

$J = \frac{h}{l}$ das Gefälle,

c, μ und ν durch Erfahrung zu bestimmende Beiwerte bedeuten.

Man hat schon lange erkannt, dass der Beiwert c in der Formel 1) keine konstante Grösse ist, sondern von den besonderen Bedingungen des einzelnen Falles abhängt. Verschiedene Forscher haben versucht, den Wert c auf empirischem Wege als Funktion der oben angegeben Elemente und der Wandrauhigkeit zu bestimmen. Es ist aber bisher noch nicht gelungen, eine allgemein brauchbare Formel zu finden. Neuerdings hat man erkannt, dass für zylindrische Rinnen mit fester Wandung der Beiwert c eine Funktion der Reynolds'schen Zahl $\frac{v \cdot R}{\nu}$ sein muss, wobei der „kinematische Reibungskoeffizient'' ν eine von der Natur der Flüssigkeit und der Temperatur abhängige Materialkonstante ist, die für Wasser folgende Werte besitzt:

Temperatur ^{0}	0	10	20
ν cm^2/s	0·018	0·015	0·010

Auch der Beiwert λ der Formel:

3) $$h = \lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

die den Druckhöhenverbrauch in einem kreisförmigen Rohr vom Durchmesser d und der Länge l darstellt, kann als Funktion der Reynolds'schen Zahl $\frac{v \cdot d}{\nu}$ ausge drückt werden. Blasius[1]) hat für glatte Messingrohre zwischen den Grenzen:

$$\frac{v \cdot d}{\nu} = 3000 \text{ und } 100\,000$$

gefunden:

$$\lambda = 0{\cdot}3164 \sqrt[4]{\frac{\nu}{v \cdot d}}$$

Dieser Ausdruck entspricht der allgemeinen Form:

$$\lambda = \alpha \cdot \sqrt[n]{\frac{\nu}{v \cdot d}}$$

Man kann die Gleichung 3) auch in die Form von 1) bringen. Berücksichtigt man, dass für Kreisrohre $R = \frac{d}{4}$ wird, so findet man:

$$c = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$$

oder:

$$c = \sqrt{\frac{8g}{\alpha} \sqrt[n]{4}} \cdot \sqrt[2n]{\frac{v \cdot R}{\nu}}$$

Der Beiwert c hat demnach die Form:

4) $$c = k \left(\frac{v \cdot R}{\nu} \right)^m,$$

es handelt sich also um eine Exponentialfunktion, die auf logarithmisch geteiltem Papier die Gestalt einer geraden Linie annimmt.

Führt man diesen Wert von c in Gleichung 1) ein, so erhält man nach einfacher Umformung:

5) $$v = k^{\frac{1}{1-m}} \cdot R^{\frac{0{\cdot}5 + m}{1-m}} \cdot J^{\frac{0{\cdot}5}{1-m}}$$

---

[1]) Mitteilungen über Forschungsarbeiten aus dem Gebiete des Ingenieurwesens, Heft 131.

Dieser Ausdruck entspricht der Gleichung 2), nur besteht zwischen den Exponenten von R und J eine ganz bestimmte Beziehung. Setzt man

$$\mu = \frac{0{\cdot}5 + m}{1 - m} \quad \text{und}$$

$$\nu = \frac{0{\cdot}5}{1 - m}$$

und entfernt m aus diesen beiden Gleichungen, so findet man:

$$\nu = \frac{1 + \mu}{3} \; .$$

Blasius hat die Beziehungen zwischen c und $\frac{v \, . \, R}{\nu}$ auch für Rohre mit rauhen Wandungen untersucht. Der gesetzmässige Zusammenhang besteht auch in diesem Falle, nur nehmen die festen Beiwerte k und m andere Werte an, weil die Wandrauhigkeit als eine veränderliche Grösse hinzukommt. Schon bei dem einfachen Falle der Rohrleitung, die ein zylindrisches Gerinne mit festen Wandungen darstellt, wird also die Gleichung 4) nicht durch einen Linienzug, sondern durch eine Schar von Linien erfüllt.

Die Betten der natürlichen Flüsse sind weder genau zylindrische Gerinne, noch haben sie feste Wandungen. Die Form und Grösse der Querschnitte wechselt oft auf kurze Entfernungen recht stark. Infolgedessen wechselt der Strömungszustand fortwährend zwischen Beschleunigung und Verzögerung, während die Geschwindigkeitsformel 1) streng genommen nur für gleichförmige Bewegung gilt. Da es praktisch unmöglich ist, in der Rechnung diesen örtlichen Wechsel der Querschnitte genau zu verfolgen, wird der Beiwert c bei Flüssen nicht nur von v, k und der Wandrauhigkeit, sondern auch noch von dem Ungleichförmigkeitsgrade der zu untersuchenden Flusstrecke abhängen. Die Aufgabe wird ausserdem noch dadurch verwickelt, dass ein Teil der lebendigen Kraft des fliessenden Wassers zur Fortbewegung des Geschiebes verbraucht wird. Endlich wird durch die Geschiebebewegung auch die Form und Grösse der Querschnitte oft in kurzer Zeit geändert. Es ist deshalb von vornherein sehr unwahrscheinlich, dass jemals eine Geschwindigkeitsformel gefunden werden kann, die für alle Flüsse oder auch nur für alle Strecken eines und desselben Flusses brauchbar ist. Der Ungleichförmigkeitsgrad des Flussbettes und die Geschiebebewegungg sind ausserdem bei Niedrigwasser in der Regel anders als bei Hochwasser, und man muss deshalb auch darauf gefasst sein, dass der Beiwert c der Formel 1) in einer und derselben Flussstrecke bei niedrigen Wasserständen einem ganz anderen Gesetze folgt als bei höheren Wasserständen, auch wenn man die Untersuchung auf die nicht ausufernden Wasserstände beschränkt.

Da die Unregelmässigkeiten der Querschnitte bei der Berechnung nicht im einzelnen verfolgt werden können, sondern in die Beiwerte der Geschwindigkeitsformel eingehen müssen, kann man aus der Form und den Abmessungen des Querschnittes, in dem die Abflussmengen gemessen worden sind. und dem ihm zugeordneten Gefälle keine brauchbare Geschwindigkeitsformel ableiten. Man muss vielmehr mit den mittleren Abmessungen und dem Gefälle einer längeren Flusstrecke rechnen.

Vor ungefähr 25 Jahren war mir die Aufgabe gestellt worden, für die Weser einheitliche Ausbauquerschnitte für Niedrigwasser zu entwerfen. Zu diesem Zwecke wurden 13 sorgfältig ausgewählte Strecken von ungefähr einem bis drei Kilometern Länge mehrmals bei verschiedenen Wasserständen aufgenommen. Für jede Aufnahme wurden die mittlere Querschnittsgrösse F, die mittlere Spiegelbreite B, der mittlere hydraulische Radius $R = \frac{F}{B}$ und das Gefälle J bestimmt. Ausserdem wurden die Abflussmengen Q und die mittleren Geschwindigkeiten für die ganze Strecke $v = \frac{Q}{F}$ ermittelt. Mit diesen Werten wurde eine Geschwindigkeitsformel abgeleitet, die die Form hat:

$$v = 0{\cdot}400 \,.\, R^{0{\cdot}744} \,.\, (10000\ J)^{0{\cdot}450}$$ [1])

Diese Formel entspricht nicht den oben angegebenen theoretischen Bedingungen, die damals noch unbekannt waren. Die einzelnen gemessenen Werte weichen auch zum Teil ziemlich erheblich von ihr ab. Für die Aufgabe, die damals vorlag, genügte aber die Formel.

Später habe ich sämtliche Messungen aus den Versuchsstrecken der Weser nochmals genau geprüft und den gesetzmässigen Zusammenhang zwischen dem Beiwert c und der Reynolds-schen Zahl ermittelt. Allerdings war die Wassertemperatur bei den Messungen nicht ermittelt worden. Ich musste deshalb die Veränderlichkeit des kinematischen Reibungskoeffizienten ν mit der Temperatur vernachlässigen und habe c als Funktion von $v \,.\, R$ dargestellt. Diese Vernachlässigung, die im übrigen allgemein gemacht wird, ist unbedenklich, weil ν innerhalb der in Frage kommenden Temperaturen sich nur wenig ändert.

Das Ergebnis ist in Abb. 1 dargestellt. Obgleich die Weser auf ihrem Laufe von Münden bis zur Allermündung einheitlicher gestaltet ist, als die anderen norddeutschen Flüsse und erst unterhalb der Aller, die ihr feinen Sand zuführt, ein etwas anderes Gepräge annimt, streuen die Punkte sehr stark. Für $v \,.\, R = 1{\cdot}0\ m^2/s$ schwankt c zum Beispiel zwischen 33 und 45, also um $\pm$ 15% des Mittelwertes 39.

Man überzeugt sich leicht, dass die Grösse des Geschiebekorns keinen bemerkbaren Einfluss hat. Die Punkte der oberen Weser, wo die gröberen Geschiebekörner bis ungefähr zur Faustgrösse reichen, liegen zum Teil am oberen Rande des Bildes, dagegen die Punkte der unteren Weser, die nur feinen Sand führt, am unteren Rande.

Das Bild wird sofort klarer, wenn man die Punkte nach Strecken gruppiert, wie es in Abb. 2 geschehen ist. Unten sind die Strecken 1a, 3, 6, 9 und 10 aufgetragen, die verhältnismässig unregelmässig ausgebaut sind, während oben die regelmässigeren Strecken 1b, 2 und 8 dargestellt sind. In den regelmässigen Strecken ist c erheblich grösser, als in den unregelmässigen Strecken. In beiden Darstellungen scharen sich die Punkte bis ungefähr zum Werte $v \,.\, R = 1{\cdot}5\ m^2/s$ aufwärts gut um eine gerade Ausgleichslinie. Hier ist also die vermutete Gesetzmässigkeit erfüllt. Dann tritt eine auffallende Unstetigkeit ein, und über $v \,.\, R = 1{\cdot}5\ m^2/s$

[1]) Zeitschrift für Bauwesen 1919, Heft 1 bis 6.

folgen die c einem anderen Gesetz, das noch nicht genügend erforscht ist, weil vorläufig zu wenig Messungen vorliegen.

Ein ganz anderes Bild liefert die Strecke 11, die in Abb. 3 dargestellt ist. Hier schmiegen sich alle Punkte vom Niedrigwasser bis zum Hochwasser um eine gerade Linie, die flacher geneigt ist, als in Abb. 2.

Dieses verschiedene Verhalten der Versuchsstrecken 1 bis 10 einerseits und 11 andererseits ist vermutlich durch die Geschiebebewegung zu erklären. Die obere Weser und der obere Teil der mittleren Weser führen recht grobes Geschiebe. Erst der untere Teil der mittleren Weser führt feinen Kies. Das mittlere Korn in der Strecke 10, die noch zur oberen Gruppe gehört, ist 15 *mm*, auf der oberen Weser ist es noch viel gröber. In der Strecke 11 hat es dagegen nur einen Durchmesser von 8 *mm*. Auf der oberen Weser und auf der mittleren Weser bis in die Gegend der Strecke 10 ruht das Geschiebe bei kleiner Wasserführung fast vollkommen. Nach einem Hochwasser bleiben die gröbsten Teile des Geschiebes zuerst liegen und bedecken die Sohle mit einem sehr widerstandsfähigen Panzer. Wenn das Wasser erneut wächst, bietet dieser Panzer zunächst einen sehr grossen Widerstand. Sobald ihn aber die wachsende Strömung zerstört, wird das unter ihm liegende feinere Geschiebe freigelegt, und der Geschiebegang nimmt plötzlich zu. Derjenige Anteil der lebendigen Kraft des fliessenden Wassers, der zur Bewegung des Geschiebes aufgewandt wird, wächst also plötzlich, und das wird sich durch eine Unstetigkeit im Gesetz des Beiwertes c ausdrücken. Vermutlich ist der Knick der c-Linien in Abb. 2 hierauf zurückzuführen.

In der Versuchsstrecke 11 ist auch bei niedrigem Wasser noch verhältnismässig viel Geschiebe in Bewegung, und der Panzer ist viel weniger widerstandsfähig als weiter stromaufwärts. Die Geschiebebewegung wird daher bei steigendem Wasser nicht sprungweise, sondern allmählich zunehmen. Infolgedessen verläuft auch die c-Linie stetig.

Die Geschwindigkeitsformeln für die einzelnen Strecken der Weser können auf folgende Form gebracht werden.

Obere und mittlere Weser bis Nienburg.

Regelmässige Strecken:

$$v = 186{\cdot}6 \,.\, R^{1{\cdot}091} \,.\, J^{0{\cdot}697}$$

(gültig bis $v \,.\, R = 1{\cdot}4\ m^2/s$).

Unregelmässige Strecken:

$$v = 165{\cdot}5 \,.\, R^{1{\cdot}128} \,.\, J^{0{\cdot}710}$$

(gültig bis $v \,.\, R = 1{\cdot}6\ m^2/s$).

Mittlere Weser unterhalb Nienburg.

$$v = 62{\cdot}2 \cdot R^{0{\cdot}657} \,.\, J^{0{\cdot}552}$$

Aus den Erfahrungen an der Weser können folgende Schlüsse gezogen werden:

1). Brauchbare Geschwindigkeitsformeln für Flüsse können nur gefunden werden, wenn man Mittelwerte von genügend langen Strecken zur Ableitung benutzt.

2). Viel wichtiger als die durch das Geschiebekorn ausgedrückte Wandrauhigkeit ist der Ungleichförmigkeitsgrad des Flussbettes, der von der natürlichen Grundrissform und von der Art des Ausbaues abhängt.

3). Die Geschiebebewegung kann Unstetigkeiten im Verlauf der c-Linie hervorrufen.

4). Die theoretische Forderung, dass der Beiwert c eine Funktion der Reynolds'schen Zahl $\frac{v \cdot R}{\nu}$ ist, wird im allgemeinen bestätigt. Neben der Wandrauhigkeit treten aber der Ungleichförmigkeitsgrad des Flussbettes und die Geschiebebewegung als neue unabhändige Veränderliche hinzu.

5). Die Geschwindigkeitsformeln können auf die Form:

$$v = k \cdot R^{\mu} \cdot J^{\nu}$$

gebracht werden. Unter Umständen erhält man aber für Hochwasser andere Formeln als für kleine Wasserführungen.

6). Eine einheitliche Geschwindigkeitsformel, die für alle Flussläufe brauchbar ist, gibt es nicht.

Die Untersuchungen von der Weser werden demnächst mit allen Einzelheiten in den Besonderen Mitteilungen zum Jahrbuch für die Gewässerkunde Norddeutschlands veröffentlicht werden.

Drukarnia Państwowa. 50761.

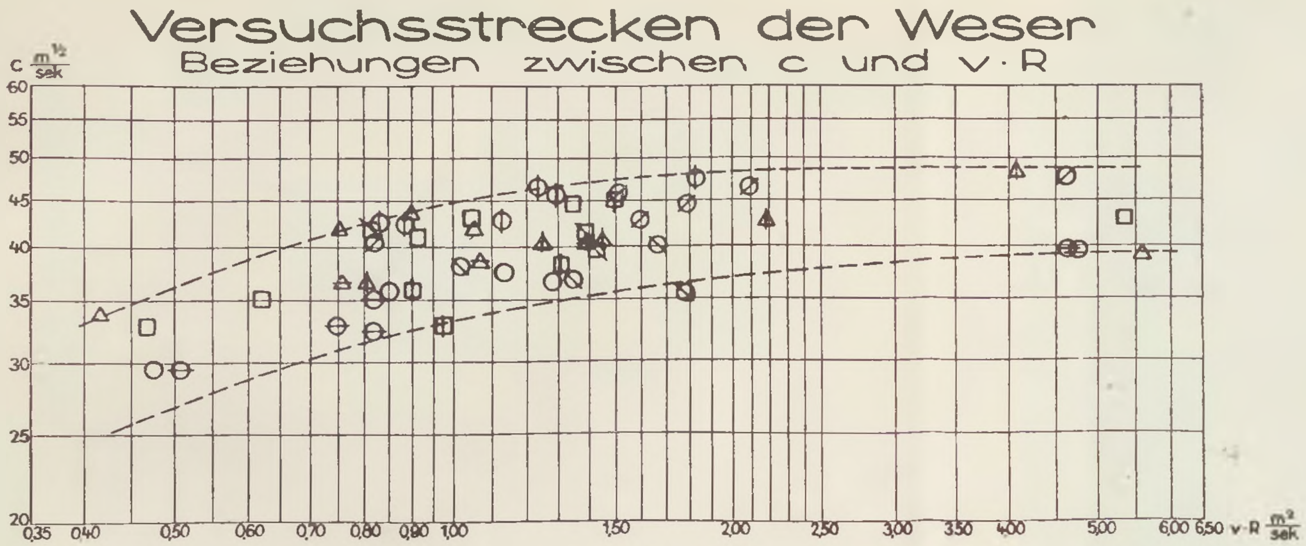

Abb. 1.

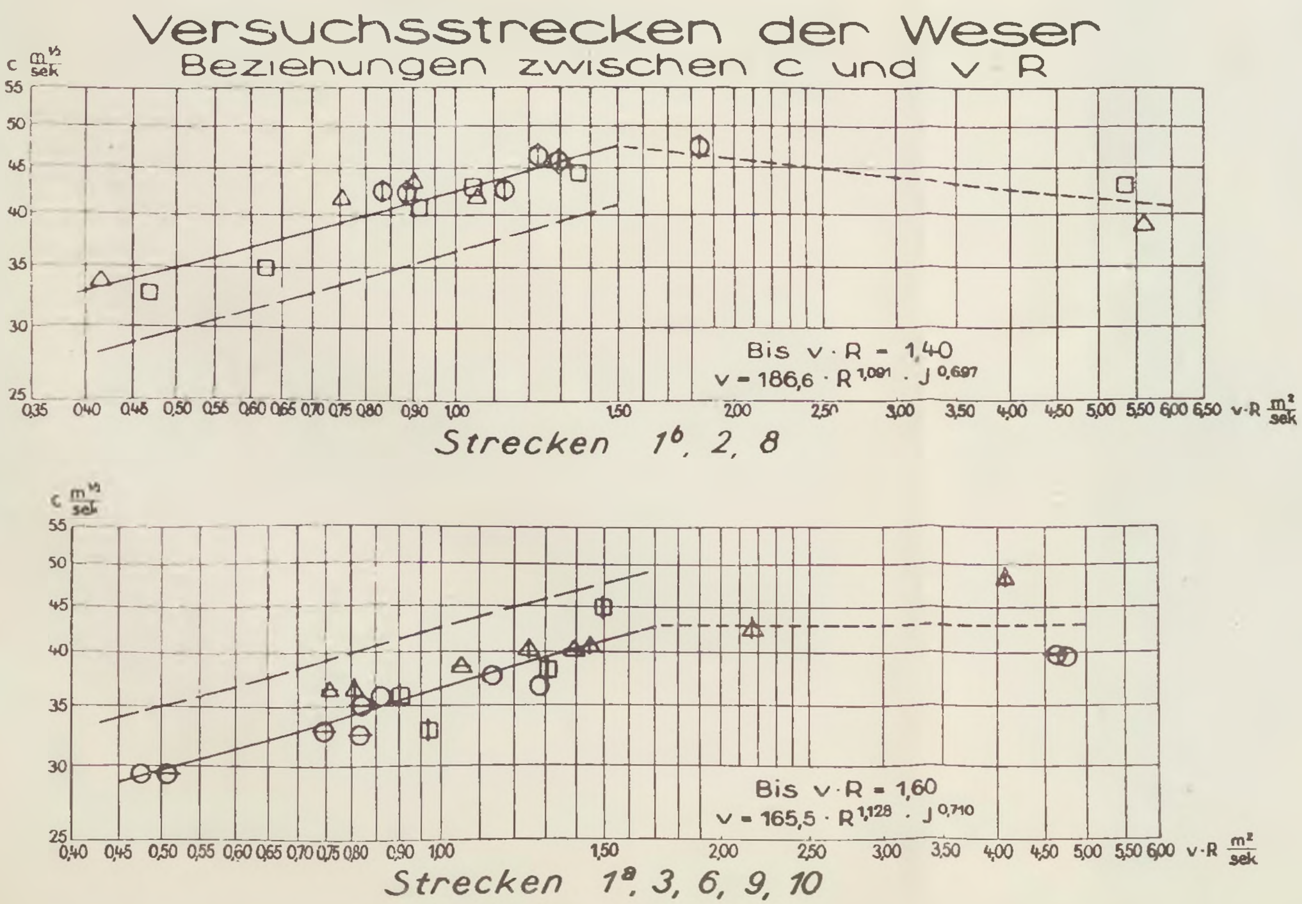

Abb. 2.

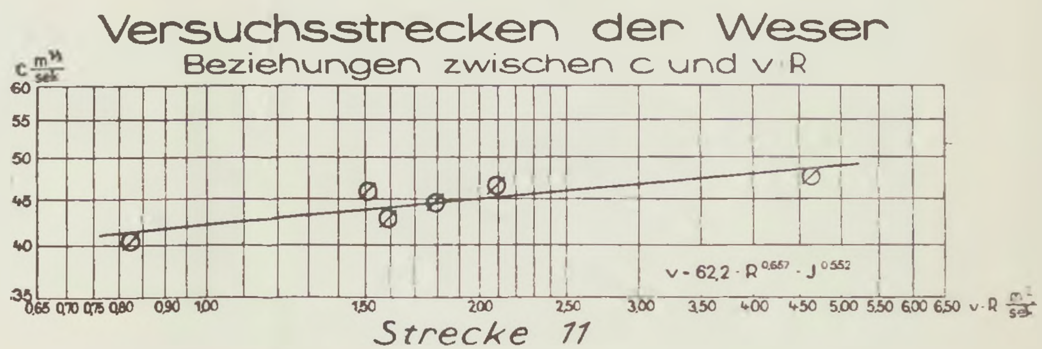

Abb. 3.

Zeichenerklärung zu Abb. 1 bis 3

Hauptstrecken	*Nummern u Zeichen der Versuchsstrecken*		
Oberhalb der Diemel	1^a ○	1^b △	2 □
Diemel - Minden	3 ⊖	6 △	–
Minden - Aue	8 ⏀	9 △	10 ⏀
Aue - Aller	11 ∅	–	–
Unterhalb der Aller	12 ⦸	–	13 ⧄