LUCJAN ZARZECKI

NAUCZANIE
MATEMATYKI POCZĄTKOWEJ

Agendo discimus...

CZĘŚĆ II.

NAUKA O LICZBIE WYMIERNEJ.

WYDANIE 3-ie UZUPEŁNIONE i POWIĘKSZONE

WYDAWNICTWO M. ARCTA W WARSZAWIE
POZNAŃ, PLAC WOLNOŚCI 7. – LUBLIN, NAMIESTNIKOWSKA 23.
WILNO, KSIĘGARNIA STOWARZYSZENIA NAUCZYCIELSTWA POLSKIEGO.
1919

DRUKARNIA M. ARCTA W WARSZAWIE, NOWY-ŚWIAT 41.

PRZEDMOWA.

W niniejszej książeczce obok niektórych rozdziałów znajdujących się w 2-iem wydaniu „Nauczania rachunku początwego” wchodzą pierwsze rozdziały algebry. Dotyczą one głównie nauki o liczbie względnej i równania pierwszego stopnia. Proponowany rozkład materjału odpowiada poniekąd pierwszym zarysom budowy szkoły średniej jakie spopularyzowane zostały przez odpowiednie wydawnictwo Min. W. R. i O. P. Książka obchodzić powinna zarówno nauczycieli szkół elementarnych jak średnich. Jeżeli spotka się z tem samem uznaniem, co jej wydanie poprzednie, w przyszłości może być rozszerzona. Obecnie wystarczy następujące treściwe przedstawienie metody, którą autor uważa za słuszną, tembardziej, że w tej dziedzinie niema w literaturze naszej większych opracowań.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ I.

Nauka ułamków stanowi nowy i odrębny pod względem swego charakteru dział arytmetyki początkowej. Ułamek jest nową formą liczby, powstaje na tle procesu dalszego uogólnienia. Ścisła teorja wprowadza ułamek zapomocą definicji, daje szereg potrzebnych i wystarczających określeń, z których wypływa cała dalsza nauka. Czy można w nauczaniu początkowem wychodzić z definicji abstrakcyjnej chociażby w roku piątym? Odpowiedź jasna: nie można. Kto potrafi zrozumieć i przetrawić definicję ścisłą, ten ma już główne niemal dane do tego, by mógł rozumować dedukcyjnie. Dziecko tego jeszcze nie potrafi, dla niego przedmiot nauki musi być dany przez definicję bliżej związaną z konkretem. Chwila zastanowienia wystarczy, aby sobie przypomnieć, jak my starsi dziwiliśmy się w pierwszych latach nauki uniwersyteckiej, gdy nam podawano nowe formy liczb lub też wprowadzano w nowe dziedziny nauki przez definicję. Pomimo dojrzałości umysłowej wielu ludzi tak trudno się godzi z myślą, że działania, dajmy na to z liczbami ujemnemi, dane są lub wypływają z definicji, nie są niczem „objektywnem", co można pokazać, „dowieść".

Poglądowe przedstawienie rzeczy, indukcyjne rozumowanie przygotowuje grunt do definicji, tem bardziej, że definicji w tym dziale uniknąć nie można. Wymaga to trochę wyjaśnień. Samo przedstawienie, wyrobienie pojęcia ułamka może być zdobyte na drodze konkretnej. Tak możemy robić już znacznie wcześniej, np. o połówce i ćwiartce można mówić jeszcze w pierwszym roku, a później w miarę potrzeby rozszerzać ten zakres, nie przesadzając ani wprowadzając zbyt drobnych cząstek, jeżeli niema dobranego unaocznienia. Np. można mówić, że centymetr jest setną częścią metra, bo to się da łatwo unaocznić.

Zaczynając systematyczną naukę, zbieramy i porządkujemy wiadomości zdobyte poprzednio. Nie trudno również konkretnie przedstawić dodawanie i odejmowanie ułamków, porównywanie i zmianę ich wielkości, jakkolwiek rzecz tu jest już znacznie więcej skomplikowana. Duże natomiast trudności nasuwa mnożenie i dzielenie. Zwyczajny sposób wyjaśniania, polegający na tem, że się tłumaczy, dajmy na to, mnożenie przez $\frac{3}{5}$ w ten sposób, iż liczbę $\frac{3}{5}$ uważamy za 5 razy mniejszą, niż 3, a ponieważ mnożenie przez 3 jest nam znane i zmiany iloczynu skutkiem zmian czynników również, więc przez to objaśnienie jest gotowe, — nie wytrzymuje krytyki naukowej. W ten sposób się zakłada, że mnożenie ułamków istnieje i te same własności posiada, co mnożenie liczb całkowitych. Byłby to nowy postulat, którego przyjęcie możnaby było wyjaśnić tylko względami natury pedagogicznej albo brakiem innego sposobu, lepszego. Ale bliższe zastanowienie wykaże nam, że jakkolwiek zachowane tu są pozory jasności, uczeń nie widzi i nie może widzieć zgodności tego objaśnienia z tem pojęciem o mnożeniu, które podane było w nauce liczb całkowitych. Wszak mnożenie, dajmy na to przez 5, jest czemś innem, niż przez $\frac{2}{5}$, co wynika z samego pojęcia o mnożeniu przez liczbę całkowitą. Do tego pojęcia trzeba się odwołać, wysunąć analogje i potem wprost n a z w a ć mnożeniem przez ułamek operację, składającą się z 2 działań. Definicja tu jest potrzebna; unikanie jej nie byłoby racjonalne już ze względów pedagogicznych. Ale ta definicja musi być przygotowana.

Zwrócę tu uwagę na dwa rodzaje definicji: analityczny i syntetyczny. Jeżeli najpierw na przykładach pokazuję dany przedmiot (może to być nie konkret, lecz operacja arytmetyczna), porównywam z innemi, wskazuję na różnice i podobieństwa, szukam nici wiążących ten przedmiot z innemi jednorodnemi, a potem dopiero przyczepiam do tego przedmiotu nazwę, charakteryzuję w krótkiem, zwięzłem zdaniu jego cechy istotne: to mam przed sobą definicję analityczną. W nauce często podaje się definicje odrazu, gotowe, przyczem wspomniany proces przygotowawczy omija się, jako zbyteczny: definicję usprawiedliwiają jej ustosunkowanie z innemi ogniwami rozumowania oraz płynące z niej wnioski. Taka definicja jest syntetyczna. Otóż w nauczaniu zarówno średniem, a tem bardziej niższem, podobne definicje nie mają racji bytu. Omijanie tych procesów myślowych, które wywołują definicję, byłoby szkodliwe, bo sama definicja stałaby się słowem, dźwiękiem pustym. Wszak my nie tylko podajemy wiedzę katalogową, ale uczymy myśleć. Nie samych definicyj obawiać się trzeba, ale ich podawania nieodpowiedniego, co jest dość częstym grzechem. W poprzednim rozdziale o tem już nadmieniałem.

W ten sposób nauczanie ułamków rozpada się na dwa wyraźne działy: 1-o pojęcie ułamka, prawo niezmiennika ułamkowego, porównanie 2-ch definicyj, porównywanie wielkości ułamków, dodawanie i odejmowanie; 2-o mnożenie i dzielenie ułamków.

Jeszcze jedno pytanie, które się na wstępie nastręcza, dotyczy jakości środków poglądowych. Połówki, ćwiartki i t. d. różnych przedmiotów mogą być wyzyskiwane w pierwszych latach nauki, ale przy systematyczniejszem przechodzeniu są prawie zawsze niewygodne, gdyż trudno się dają nagiąć do ilustracji różnych pytań, które się tu nasuwają. Potrzebny jest taki środek poglądowy, aby np. skracanie ułamka, dodawanie, porównywanie wielkości mogło być łatwiej unaocznione. Różne przyrządy mechaniczne często są bardzo skomplikowane i rzadko mogą służyć do większej liczby ułamków, a przytem nieraz bywają dość kosztowne przy fikcyjnej wartości. Środek poglądowy musi być prosty i, że tak powiem, giętki, aby uczeń mógł się sam nim posługiwać, nawet na zawołanie. Takim środkiem jest odcinek prostej, narysowany na papierze kratkowanym. Można mu zarzucić, że jest jednostronny, ale gdy zwrócimy uwagę, iż np. pojęcie połowy i t. d. wyodrębniło się już, że połowa tu nie zależy od danego konkretu, uczeń zda sobie z łatwością sprawę z tego, o co tu chodzi. Porządkując poprzednie wiadomości, nauczyciel powinien dawać szereg przykładów konkretnych, gdzie wchodzą części całości, aby tak samo, jak na początku, przy pierwszych liczbach, uczniowie jasno zdawali sobie sprawę, że tu mają do czynienia z czemś, co nie zależy od tego lub innego przedmiotu.

Początek systematyczniejszy nauki o ułamku wymaga wyjaśnienia przedewszystkiem pewnego pojęcia, które ma duże znaczenie w tej nauce. Jest niem pojęcie całości. Każdy przedmiot otoczenia jest całością, ale nie każda całość jest podzielna, jak np. pies, zwierzę wogóle, kryształ, drzewo i t. p. są całościami niepodzielnemi. Trzeba na to zwrócić uwagę przed tem, nim się będzie mówiło o częściach całości. Te całości muszą być całościami podzielnemi.

Po omówieniu i zastosowaniu tego do znanych przykładów ułamka nauczyciel systematyzuje wiadomości o ułamku, znane z poprzedniej nauki, wprowadza znany sposób zapisywania, nazwy: licznik i mianownik oraz rolę i znaczenie tych ostatnich. Przy zapisywaniu należy dla porządku używać kreski tylko poziomej a nie pochyłej, gdyż uczniowie później nieraz dzięki niewłaściwemu zapisywaniu popełniają błędy rachunkowe.

Definicja początkowa ułamka brzmi: ułamkiem nazywamy jedną lub więcej równych części całości.

O ułamkach właściwych i niewłaściwych narazie niema mowy. Po definicji wprowadzamy natychmiast poglądowe przedstawienie ułamka zapomocą odcinka, dzieląc którykolwiek dany na określoną liczbę części i następnie biorąc tych części określoną liczbę, co jest ważnem przygotowaniem do następnej kwestji, mającej zasadnicze znaczenie w nauce ułamków. Tą kwestją jest — prawo niezmiennika ułamkowego, zwykle wyrażane opisowo.

Prawo niezmiennika dotyczy własności ułamka, dzięki której można licznik jego i mianownik przez jedną i tę samą liczbę mnożyć i dzielić, a wielkość ułamka przytem się nie zmienia. Tę rzecz należy wyjaśnić na szeregu ułamków przy pomocy odcinka. Np. równość $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{6}$ wykazujemy, dzieląc odcinek na 3 części, a potem na 6 i przekonywając się naocznie o równości w obu przypadkach otrzymanego ułamka. Po szeregu takich przykładów może wystąpić rozumowanie, polegające np. na omówieniu faktu zmniejszenia każdej części pewną liczbę razy i zwiększenia tyleż razy liczby tych części, t. j. na odwołaniu się do definicji. Na tej rzeczy należy dłużej się zatrzymać i uważniej ją rozpatrzeć, tem bardziej, że wiąże się ona ze skracaniem ułamka, które zaraz po niej nastąpić winno.

Skracanie zaczynamy od prostszych przykładów, w których znajomość podzielności liczb i zwykłe cechy przy kolejnem stosowaniu ich wystarczają. Trzeba narazie unikać takich przykładów, w których potrzebne jest badanie, czy licznik i mianownik mają wspólny dzielnik, czy też nie. Zwiększając coraz bardziej liczby stanowiące licznik i mianownik ułamka, ale nie zmieniając sposobu skracania, możemy po dłuższej procedurze takiego skracania zadać pytanie, czy nie można tego zrobić prościej. Nauczyciel wskazuje na kilku przykładach, jak można skrócić odrazu przez większą liczbę złożoną. Np. $\frac{84}{144}$ skraca się przez 12. Przytem dzieci wprawiają się w takie prędkie skracanie. Przykłady większe nastręczają już trudności i dlatego potrzebna jest specjalna metoda.

Tu właśnie jest miejsce do nauki o największym wspólnym dzielniku.

Jeżeli o rzeczy tej mówimy przy nauce o liczbie całkowitej, nie ma ona realnego zastosowania, jest czemś za bardzo dla umysłu dziecinnego teoretycznem i z tego powodu nie nadaje się tam do nauczania. Natomiast przy realnej potrzebie skrócenia ułamka zagadnienie występuje celowo, zmusza tem samem do myślenia i dlatego jest na miejscu. Najpierw dajemy pojęcie o największym wspólnym dzielniku małych liczb i znajdujemy go pamięciowo, stosując bezpośrednio do skracania jednorazowego ułamków. Pierwszy więc stopień polega na inwencji uczniów, inwencji, która wobec łatwości przykładów nie jest trudna, ale budzi myśl i tem samem ma wartość dydaktyczną. Ta inwencja w miarę wzrastania przykładów napotyka coraz większe trudności: staje się oczywistą potrzeba pomocy ze strony nauczyciela, który wprowadza teraz (to właśnie jest drugi stopień nauki o największym dzielniku) sposób rozkładania na czynniki, t. j. stosowanie rzeczy poprzednio znanej, ale to rozkładanie odbywa się dla 2 liczb jednocześnie. Większej liczby liczb nie trzeba, przynajmniej narazie, stosować, gdyż nie ma to znaczenia praktycznego. Np. dla liczb 432 i 720 rozkładamy tak:

432	720	2
216	360	2
108	180	2
54	90	2
27	45	3
9	15	3
3	5	

Stąd największy wspólny dzielnik równy jest: $2^4\,3^2=144$. Oddzielne rozkładanie jest niepraktyczne pod tym względem, że dzieci często plączą sposób układania ze znalezionych czynników największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wielokrotnej, o której później będzie mowa.

Doszedłszy do tego ze skracaniem, narazie zatrzymujemy się i nie wprowadzamy znajdywania największego wspólnego dzielnika zapomocą kolejnego dzielenia, odkładając to na później.

Całą powyższą część nauki o ułamkach, t. j. do dodawania i odejmowania włącznie, przechodzić należy dwustopniowo. Najpierw przerabiamy, nie śpiesząc się, omawiany przed chwilą dział kursu z ułamkami prostszemi, takiemi, przy których zarówno rachunek pamięciowy i inwencja, jak proste sposoby wynajdywania największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wielokrotnej są stosowane, a drugi raz powtarzamy to samo, ale z ułamkami trudniejszemi i metodami zawilszemi. Każdy doświadczony nauczyciel, który w ten sposób naukę prowadził, mógł się przekonać, że daje ona lepsze rezultaty, niż przy jednoczesnem pakowaniu wszystkiego. Jasne to jest również à priori, jeżeli zważymy że: 1-o rzeczy omawiane odgrywają zasadniczą rolę w nauce o ułamku, 2-o opanowanie ich właściwe wymaga przedewszystkiem większej wprawy w pamięciowem operowaniu z mniejszemi ułamkami i 3-o nie należą one do kwestyj prostych, bo takie np. kolejne dzielenie musi zabrać sporo czasu, aby było należycie uświadomione. Jednorazowe długie zatrzymanie się przeszkadzałoby wobec tego naturalnemu rozwojowi nauki o ułamku w zasadniczych jego rysach. Z drugiej strony, celowość kolejnego dzielenia wystąpi przy przykładach trudniejszych, gdzie nie wystarczają poprzednie metody, a takie przykłady nie mogą być podawane odrazu. Nie zapominajmy również o tyle razy przez nas nadmienianej już właściwości naszego umysłu, dzięki której nowe rzeczy muszą się w nim niejako odleżeć, muszą być nawiązane i utrwalone pewne związki skojarzeniowe, które odbywają się, jak się zdaje, nieświadomie i wymagają czasu dla swego rozrastania się. Dwustopniowość nie zabierze więcej czasu, niż zwykłe nauczanie w jednym toku, ale poważnie pomoże pogłębieniu, wprawie i rozumieniu rzeczy.

Od skracania bezpośrednio przechodzimy do zwiększania lub zmniejszania ułamka pewną liczbę razy. Tutaj znowu pomoże nam odcinek i odnośne rozumowanie. Rzecz ta nie przedstawia trudności.

Dotąd stosowaliśmy jedną definicję ułamka, podaną wyżej. Wiadomo jednakże, że często nieświadomie nauczający używają drugiej definicji, nie wykazawszy, że jest identyczna z pierwszą. Ta druga definicja wyznacza ułamek, jako iloraz od podzielenia dwóch liczb. Rzecz jasna dla każdego, że jest ona czemś innem, niż poprzednia i że tem samem, wnioski robione z niej nie wypływają z poprzedniej, a jeżeli nauczyciel wyraźnie jej nie podał i nie wykazał identyczności z poprzednią, wnioski te wiszą w powietrzu. Bardzo to ważny błąd dydaktyczny.

Wprowadzenie tej nowej definicji opiera się na następujących rozważaniach. Przedewszystkiem zwracamy uwagę, iż podzielić np. przez 3 znaczy znaleźć trzecią część danej liczby i naodwrót, żeby znaleźć trzecią część, trzeba podzielić liczbę przez 3. Gdy ta liczba, którą dzielimy, dzieli się przez 3 — nic nie budzi wątpliwości, ale w razie niedzielenia się, mamy trudność z wyrażeniem ilorazu. Żeby to wyrażenie znaleźć, np. w przykładzie, gdzie trzeba 2 podzielić przez 3, nauczyciel poglądowo zapomocą odcinka wykazuje, że $\frac{2}{3}$ jednej całości jest tem samem, co $\frac{1}{3}$ dwóch całości. Dlatego w pierwszym przypadku w odpowiedni sposób dzielimy pewien odcinek na 3 części równe, a w drugim inny, dwa razy większy również dzielimy na 3 części, ale takich części bierzemy 1, a nie 2. Okazuje się, że otrzymane odcinki w obu przypadkach są równe. Stąd wniosek, że iloraz od podzielenia 2 przez 3 można napisać tak, jak ułamek $\frac{2}{3}$.

Po przerobieniu jeszcze kilku podobnych przykładów możemy podać nową definicję i uważać ją za identyczną z poprzednią. W ten sposób osiągamy ostateczne uogólnienie dzielenia, gdyż wobec tego zawsze otrzymać możemy iloraz. Należy tu podkreślić, że to uogólnienie otrzymaliśmy, że do tego nam pomógł ułamek i że liczbę całkowitą można rozpatrywać, jako ułamek, np. $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2}$ i t. d. Nie godzi się tych rzeczy omijać, gdyż będą nam potrzebne później, a z drugiej strony stanowią dobry pokarm umysłowy.

Po wprowadzeniu nowej definicji możemy przystąpić do wprowadzenia obok ułamków właściwych—także niewłaściwych i wyrażania tych ostatnich w 2 postaciach, przyczem wskazujemy na rolę reszty przy dzieleniu w razie przedstawienia ułamka w postaci liczby mieszanej. Z określenia dzielenia, t. j. z formuły: $D = d. i + r$, wynika natychmiast sposób zamiany liczby mieszanej na ułamek niewłaściwy.

Zaznajomienie się z temi rzeczami pozwoli nam przejść do ostatniej przed dodawaniem i odejmowaniem kwestji, mianowicie porównania wielkości dwóch ułamków. To porównanie, jak zwykle, powinniśmy zaczynać od przypadków, gdzie uczniowie mogą własnem rozumowaniem dochodzić do rezultatu. Dotyczy to przedewszystkiem takich ułamków, które posiadają równe liczniki lub równe mianowniki. Potem takich, które bez trudności dadzą się porównać przez dopełnianie do jedności lub odejmowanie jednej lub więcej jedności. Np. $\frac{5}{6}$ i $\frac{6}{7}$ oraz $\frac{7}{6}$ i $\frac{6}{5}$. Odejmowanie jedności odbywa się oczywiście przez zamianę ułamków niewłaściwych na liczbę mieszaną, a w pierwszym przypadku przez porównanie: $\frac{6}{6} = \frac{7}{7}$ i obliczenie potrzebnego dopełnienia. Widzimy tu już początkowe fazy dodawania i odejmowania ułamków. Dalej porównanie prowadzimy przez sprowadzenie ułamków do postaci, z której bezpośrednio możemy sądzić o rezultacie, t. j. do równości liczników albo mianowników. Należy jednakże starać się, aby ta rzecz nie była powiedziana przez nauczyciela dogmatycznie, lecz żeby uczniowie do tego wniosku zostali przez niego doprowadzeni. Należy zaczynać od bardzo prostych przykładów, które z łatwością rozwiązują się pamięciowo. Np. $\frac{5}{6}$ i $\frac{2}{3}$. Nauczyciel podkreśla, że mianowniki są niejednakowe, że gdyby były jednakowe, możnaby odrazu sprawę rozwiązać. Jak to zrobić? Na pomoc przychodzi prawo niezmiennika ułamkowego i sprowadzenie ułamków do postaci: $\frac{5}{6}$ i $\frac{4}{6}$. Cały szereg tego rodzaju stopniowo zwiększających się ułamków prowadzi do tego, że uczniowie powoli zaczną sprowadzać do wspólnego mianownika (ew. licznika, jeżeli wygodniej). Po mianownikach, z których jeden nie dzieli się przez drugi, powinny wystąpić względem siebie pierwsze, potem posiadające czynniki wspólne. Z mianownikami względem siebie pierwszemi trudność nie jest wielka, bo zgadnięcie wielokrotnej nie jest żmudne. Należy jednakże na tem trochę się zatrzymać dłużej. Weźmy przykład. Dajmy na to mamy do porównania dwa ułamki: $\frac{5}{7}$ i $\frac{8}{11}$. Jak zrobić, żeby mianowniki (albo liczniki) były jednakowe? Jeżeli mianownik w obu ułamkach ma być jednakowy, to musi się dzielić przez mianowniki danych ułamków, a więc przez 7 i 11. Ten fakt nauczyciel wydobywa przez pytanie z uczniów. Jakaż to ma być liczba, która się dzieli jednoczeście przez 7 i 11? Uczniowie podadzą prawie zawsze w takim przykładzie liczbę dobrą, ale może się zdarzyć, że wskażą na większą, wtedy oczywiście nauczyciel stara się zwrócić uwagę, czy niema mniejszej liczby, która dzieliłaby się i przez 7, i przez 11. Szereg podobnych przykładów znowu rzecz należycie wyjaśni i da wprawę uczniom. Po zwróceniu kilkakrotnem uwagi, że najwygodniejszą jest najmniejsza liczba, która spełnia warunek dzielenia się przez obydwa mianowniki, nauczyciel powinien wprowadzić nazwy: *wielokrotność* i *najmniejsza wielokrotność*. Dalej przechodzi do trzeciego stopnia, przy którym uczniowie nieraz złapią się z początku na poznanym automatycznie sposobie znajdywania tej wielokrotności z poprzedniego stopnia, t. j. na mnożeniu obu mianowników przez siebie. Zastosują ten sposób tutaj, a nauczyciel powinien podać natychmiast mniejszą liczbę, która dzieli się przez obydwa mianowniki. Teraz właśnie pora podkreślić różnicę obu przypadków i zaznaczyć, że poprzednio mianowniki były względem siebie pierwsze, a obecnie nie są. Znajdywanie wspólnego mianownika odbywa się najpierw bez jakiegoś prawidła: dzieci same muszą szukać odpowiedniej liczby, opierając się jedynie na własnem doświadczeniu i inwencji.

Potem nauczyciel może podać pierwsze prawidło, które skróci wysiłek i dlatego stanie się czemś pożytecznem, rozumianem i ważnem. To pierwsze prawidło opiera się na pewnej własności największego wspólnego dzielnika, polegającej na tem, że ilorazy otrzymane od podzielenia przez największy wspólny dzielnik każdej z dwu liczb są względem siebie pierwsze. Więc, jeżeli liczby dane są a i b, a największy ich wspólny dzielnik d, ilorazy zaś od podzielenia każdej z nich przez ten dzielnik: i_1 i i_2, to najmniejszą ich wielokrotną W, jak łatwo widzieć, można wyrazić w tej postaci:

$$W = d i_1 i_2$$

Pokazanie tego dzieciom nie wymaga zwalczenia jakichś specjalnych trudności, a natomiast przy pamięciowem znajdywaniu najmniejszej wielokrotności jest bardzo pomocne i ważne.

Gdy przechodzimy do liczb większych w liczniku i mianowniku, pamięciowe rozwiązanie już nie wystarcza i wobec tego należy stosować rozkładanie na czynniki, szukanie w ten sposób największego wspólnego dzielnika i następnie najmniejszej wielokrotności. Np., z powyżej przytoczonego przykładu odrazu znajdujemy, że najmniejsza wielokrotność liczb 432 i 720 jest:

$$W = 2^4 . 3^2 . 3 . 5 .$$

W ten sposób przy porównaniu wielkości ułamków zapoznają się uczniowie z samem pojęciem najmniejszej wielokrotności i nauczą się na łatwiejszych przykładach, nie wymagających kolejnego dzielenia, wynajdywać ją dla 2 liczb. Stanowi to przygotowanie i zarazem przejście do dodawania i odejmowania ułamków.

Dwa te działania w istocie swej nie zawierają nic osobliwego, a konkretne ich pojmowanie nie odbiega od takiegoż przy liczbach całkowitych. Dlatego nie trzeba tu żadnej definicji osobliwej ani specjalnych wyjaśnień dotyczących istoty działania. Potrzebne jest natomiast stopniowanie trudności i genetyczne uporządkowanie nauczania.

Principium divisionis (zasada podziału) powinno polegać na dwóch rzeczach: 1-o na stopniowaniu opartem o różne gatunki ułamków: właściwe, niewłaściwe i liczby mieszane oraz 2-o na stopniowaniu trudności znajdywania najmniejszej wielokrotności. Połączenie tych dwóch stopniowań da się osiągnąć w ten sposób, że każdy stopień 2-go rodzaju będzie zawierał w odpowiedniej kolei wszystkie stopnie pierwszego.

Dodawanie i odejmowanie nie oddzielamy od siebie, gdyż niema po temu żadnego poważnego powodu, jest natomiast duża korzyść płynąca z połączenia i wyrażająca się zarówno w oszczędności czasu, jak lepszem rozumieniu obu działań przez porównanie. Zaczynamy obydwa działania od najprostszego przypadku, t. j. równości obu mianowników i przerabiamy wszelkie przykłady zarówno z ułamkami właściwemi, jak niewłaściwemi i liczbami mieszanemi, przyczem najważniejszą rzeczą jest tu podkreślenie i szczególne zwrócenie uwagi na takie przykłady, w których trzeba albo „wyciągać" całość albo też „pożyczać" od całości. To musi być dobrze zrozumiane i ugruntowane. Dalej z kolei występują mianowniki takie, w których jeden dzieli się przez drugi z temi samemi szczegółami, jak powyżej. Potem mianowniki względem siebie pierwsze i nakoniec zawierające czynniki wspólne. Mamy zawsze do dodania przytem dwa tylko ułamki i znajdujemy wspólny mianownik zapomocą tych samych metod, które były wyjaśnione poprzednio i oczywiście w tej samej ich kolei. Zapisywanie odbywać się powinno tak, jak wskazują następujące przykłady:

$$3\frac{5}{12} + 2\frac{7}{15} = 5\frac{25 + 28}{60} = 5\frac{53}{60}$$

$$\text{lub } 3\frac{5}{12} - 2\frac{7}{15} = \frac{85 - 28}{60} = \frac{57}{60},$$

przyczem uczeń na boku przed zapisywaniem wspólnej kreski powinien zobaczyć, co się dostanie z każdego ułamka po sprowadzeniu go do wspólnego mianownika, żeby nie otrzymać niemożliwego odejmowania. Na porządek zapisywania, równość kresek, odpowiednie stawianie znaku równości należy zwracać niesłabnącą uwagę.

Po przerobieniu tych rzeczy, oczywiście w związku z rozmaitemi zadaniami, przechodzimy do dodawania trzech i więcej składników, najpierw stosując kolejno powyższe stopniowanie i robiąc wszystko w pamięci, a później przy liczbach większych, wprowadzając nowy sposób znajdywania wspólnego mianownika czyli najmniejszej wspólnej wielokrotnej. Znajdywanie tej wielokrotnej również, jak przy największym wspólnym dzielniku, opieramy na jednoczesnem rozkładaniu na czynniki danych liczb. Np., jeżeli są dane mianowniki następujące: 84, 150, 144, postępujemy tak:

84	150	144	2
42	75	72	2
21	75	36	2
21	75	18	2
21	75	9	3
7	25	3	3
7	25	1	5
7	5	1	5
7	1	1	7
1	1	1	

Stąd najmniejsza wspólna wielokrotnośc $W = 2^4\ 3^2\ 5^2\ 7$. Nauczyciel najpierw stosuje tę metodę do liczb mniejszych, gdzie najmniejszą wielokrotność dzieci umieją znaleźć inaczej; wskazuje, że w ten sposób każdy czynnik bierzemy możliwie największą liczbę razy, aby wielokrotność istotnie mogła się podzielić przez liczbę, gdzie ten czynnik tyle razy wchodzi. Porównanie ze znajdywaniem największego wspólnego dzielnika i wykazanie różnic jeśt tu konieczne. Nie trzeba jednakże dzieci przyzwyczajać do używania tego sposobu odrazu, gdyż nieraz w pamięci łatwiej jest znaleźć najmniejszą wielokrotność bez uciekania się do żmudnej metody, a takie pamięciowe radzenie sobie jest jednym z głównych celów nauczania, które powinno dać odpowiednią wprawę i łatwość w wykonaniu rachunku.

Po wprawieniu się w tych rzeczach możemy przejść do jednoczesnego wykonywania w zadaniach i przykładach dodawania i odejmowania razem, zapisując znowu tak, jak było powiedziane powyżej.

Na tem kończy się pierwszy stopień pierwszego rozdziału nauki o ułamkach.

Drugi stopień wymaga wprowadzenia kolejnego dzielenia i już całkowitego opanowania wszystkich działań w tym zakresie. Zaczynamy od tego, że przy pewnym przykładzie na dodawanie ułamków, umyślnie dobranym, dostajemy sumę w postaci ułamka dość dużego, który trzeba skrócić, przyczem znane dotąd sposoby skracania nie wystarczają. Przy tej sposobności nauczyciel przypomina prawo rozdzielności przy dzieleniu, z którego wynikało objaśnienie cech podzielności, jak również znaną formułę: $D = di + r$ oraz własności reszty przy dzieleniu. Chodzi o znalezienie wspólnego czynnika pomiędzy licznikiem i mianownikiem.

Uważajmy jedną z tych liczb za dzielną, drugą za dzielnik, wtedy reszta, którą się otrzyma od podzielenia obu tych liczb, będzie się dzieliła przez wspólny ich dzielnik, a przytem będzie mniejsza i łatwiej będzie ten dzielnik odkryć. Np. weźmy ułamek: $\frac{1980}{2057}$. Reszta od podzielenia mianownika przez dzielnik wynosi 77. Reszta oczywiście dzieli się przez 7 i przez 11. Próbujemy przez 7; nasze liczby się nie dzielą, ale przez 11— dzielą. Odkryliśmy więc wspólny czynnik. Po skróceniu dostajemy: $\frac{180}{187}$. Widoczną jest rzeczą, że teraz licznik i mianownik są względem siebie liczbami pierwszemi, gdyż 180 można z łatwością rozłożyć na czynniki, ale przez żaden z tych czynników 187 się nie dzieli. Dajemy szereg podobnych przykładów i każdorazowo dzieci się przekonywają, że poza czynnikami zawartemi w reszcie licznik i mianownik wspólnych czynników nie posiadają. Później powinniśmy usiłować wyprowadzić to z samej formuły: $D = d\,i + r$. To jest najprostszy przypadek.

Gdy reszta otrzymana jest jeszcze za duża, musimy tę samą operację powtórzyć jeszcze raz, ale przytem trzeba postępować ostrożnie, aby nie zostawić w głowie uczniów samego tylko pustego szablonu działania. Dlatego zwracamy uwagę na fakt, że np. skrócenie ułamka: $\frac{1001}{1980}$ niczem się nie różni od skrócenia ułamka odwróconego: $\frac{1980}{1001}$, a ten ostatni da się przedstawić w formie: $1\frac{979}{1001}$. Otóż, jeżeli będziemy umieli skrócić ułamek: $\frac{979}{1001}$, skrócimy również i pierwszy. Tego rodzaju mała zamiana jest bardzo pomocna, a rozumowanie zupełnie dla dzieci dostępne. Dzielenie 1001 przez 979 daje resztę 22, z której wnioskujemy, że ułamek można skrócić przez 11.

Wprowadziliśmy w ten sposób już dwa ogniwa dzielenia kolejnego.

Tak samo można iść dalej, a gdy dzieci należycie się wprawią w podobne operacje, można później, jakkolwiek nie jest to konieczne, cały zespół działań przedstawić, jak to było przy dzieleniu lub mnożeniu, w postaci skoncentrowanego algorytmu, którego zwykle używamy przy kolejnem dzieleniu. Dobrze jest przytem przebiegać najpierw w jedną stronę, rozumując, że każda nowa reszta podzieli się przez największy wspólny dzielnik obu początkowych liczb, a potem proces odwrócić, znowu stosując powyższą formułę dzielenia. Powiadam, że nie jest to koniecznem, bo rzecz cała może być zostawiona na później, np. przy powtarzaniu arytmetyki w klasie 3 ej, ale przynajmniej tam musi to być zrobione, gdyż algorytm znajdywania największego wspólnego dzielnika zapomocą kolejnego dzielenia odgrywa dużą rolę później w nauce geometrji. W szkole elementarnej 7 lub 8 klasowej to nie jest potrzebne i dlatego cały ten algorytm można opuścić, poprzestając na powyższem rozumowaniu, ale w szkole średniej należy go zalecić.

Dalsze rozważanie szczegółów należących do tego drugiego stopnia pierwszej części nauki o ułamkach nie przedstawia już trudności; nie będę tedy ich tu omawiał. Rzecz jasna, że nauczyciel winien się starać zastosować metodę kolejnego dzielenia nie tylko do skracania ułamków, ale również przy dodawaniu i odejmowaniu. Występuje wyraźnie natomiast inna kwestja, którą należy tu bliżej omówić, mianowicie nauka ułamków dziesiętnych.

Zwykle nauka tych ułamków u nas poprzedza lub następuje (co bywa najczęściej) po ułamkach „zwyczajnych". Zarówno jedna, jak i druga metoda ma swoje wady i zalety. Jeżeli ułamki dziesiętne poprzedzają zwyczajne, napotykamy szereg trudności nie dających się przezwyciężyć. Trudności te dotyczą świadomego wykonywania działań. Czy można przypuścić, że uczeń, który przedtem nie miał pojęcia o ułamku, potrafi świadomie wykonywać algorytmy mnożenia i dzielenia ułamków dziesiętnych? Oczywiście — wykonywać on może, jak również rozwiązywać szablonowe zadania, ale rozumieć tych działań nie będzie. Pomijając już inne trudności, przy dzieleniu ułamków dziesiętnych spotka się z dziwnem, niepojętem dla niego zjawiskiem ułamków okresowych, z któremi nie może wykonywać działań ani ich stosować bez nauki o działaniach przybliżonych, które wymagają większej sprawności umysłowej i rozwoju, bo inaczej mogą być tylko papuziem wykonywaniem przepisów, dobrem, jeżeli chodzi tylko o praktyczne zastosowanie, ale nie mającem jakiejkolwiek wartości dydaktycznej na tym poziomie nauczania i w tak szerokim zakresie. Przypuszczenie łatwości działań, nasunięte przez jednakowość budowy ułamka dziesiętnego i liczby całkowitej, jest zwykłem powierzchownem złudzeniem, którego nie można brać na serjo wtedy, gdy cokolwiek bliżej wejrzymy w istotny mechanizm tych działań i w zadania nauczania rozwijającego umysł, a nie dającego tylko powierzchowną sprawność. Dalsze nasze rozważania o mnożeniu i dzieleniu ułamków rzecz tę jeszcze lepiej wyjaśnią.

Zwolennicy wcześniejszego przechodzenia ułamków dziesiętnych wysuwają jednakże pewne ważne zalety takiego przechodzenia w postaci praktycznego zastosowania i istotnej łatwości pewnych działań. Tych zalet nie można ominąć milczeniem ani zaniedbać całkowicie i dlatego opóźnienie nauczania ułamków dziesiętnych jest rzeczą wadliwą, o czem nie może być dwóch zdań. W takim razie, jakże wyjść z sytuacji? Tutaj znowu historja wiedzy, t. j. naturalny bieg jej rozwoju daje nam ważną wskazówkę. Ułamki dziesiętne zjawiły się na tle potrzeby praktycznej i stosowane były tam, gdzie rachunek z ułamkami zwyczajnemi był zbyt żmudny i mało przejrzysty. Obliczenia wartości funkcyj trygonometrycznych i logarytmów—oto właściwie pobudki i teren zastosowania ułamków dziesiętnych, gdzie odegrały one wybitną rolę. Jeżeli uświadomimy sobie, że ułamek dziesiętny jest szczególnym przypadkiem zwyczajnego i że działania z nim, interpretowane na tle tego ostatniego, nie budzą żadnych wątpliwości (prócz ułamków okresowych, o czem później), to wprowadzenie ułamka dziesiętnego zaraz po nauce dodawania i odejmowania ułamków zwyczajnych i zapoznanie dzieci z zapisywaniem i czytaniem ułamków dziesiętnych, z dodawaniem i odejmowaniem oraz zamianą ułamka zwyczajnego w wypadkach możliwych bez dzielenia na dziesiętny i odwrotnie, nie przedstawia żadnych trudności, a jest nawet pożądane, gdyż nie tylko da nową wiedzę praktyczną, ale pogłębi znajomość ułamka zwyczajnego. Takie przeplatanie programu, przeczące przeciętnemu szufladkowemu formalizmowi, jest ze stanowiska dydaktycznego pożyteczne i dlatego bronimy go w tej książce. Doświadczenie każdego pouczy, że zrobić tę rzecz można, i przytem z bardzo dobrym rezultatem.

Przy zapisywaniu ułamków dziesiętnych zwrócić należy uwagę nie tylko na to, na jakiem miejscu „stoją" dziesiąte, setne i t. p., ale też na zasadniczy fakt, że mianownik tego ułamka posiada zawsze tyle zer, ile miejsc jest zajętych po przecinku. Ta nauka zapisywania i czytania ułamków dziesiętnych może zajmować z początku część zwykłej lekcji arytmetyki, poświęcanej wprawie w działaniu z ułamkami zwyczajnemi. Gdy uczniowie osiągną pewną wprawę w tej rzeczy, dalsze nauczanie ułamków dziesiętnych nie powinno być oddzielane, ale wplatane w każdą lekcję przy sposobności każdego ułamka zwyczajnego, który da się zamienić na dziesiętny. Z tego powodu pierwszem zagadnieniem następnem jest zamiana zwyczajnego ułamka na dziesiętny.

Rozważanie tu potrzebne pozwoli każdą liczbę postaci 10^n przedstawić w formie $2^n \cdot 5^n$ i odkryć, że tylko te dwa czynniki wchodzą do tej liczby. To proste odkrycie jest podstawą wszystkiego. Poczynając od najprostszych ułamków, nauczyciel stopniowo wskazuje, jak przez odpowiednie pomnożenie licznika i mianownika przez jedną i tę samą liczbę można, nie zmieniając wielkości ułamka, zamienić go na ułamek dziesiętny. Potem odrazu przechodzi do dodawania i odejmowania tych ułamków wspólnie ze zwyczajnemi; przy tych też działaniach uczniowie mogą poznać znaczenie zera na końcu ułamka dziesiętnego. Największą trudność oczywiście może sprawiać kwestja decydowania, kiedy ułamek zwyczajny zamieni się na dziesiętny, a kiedy nie. Tutaj przedewszystkiem należy zwrócić uwagę na 2 fakty: 1-o żadna liczba wyrażona jednostką z zerami nie dzieli się przez żaden inny czynnik pierwszy prócz 2 i 5 oraz 2-o należy zawsze przed zamianą ułamek zwyczajny należycie skrócić, bo np. $\frac{21}{15}$ pozornie nie można zamienić na ułamek dziesiętny, ale tylko pozornie, gdyż dany ułamek może być skrócony przez 3 i ten czynnik z mianownika zniknie. Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych po tem wszystkiem nie zawiera żadnych osobliwych zagadnień.

Tyle z ułamków dziesiętnych. Łatwo się przekonamy, że ten dodatek nie może budzić żadnych trudności, a jeżeli zdamy sobie sprawę, iż uczniowie zwykle ułamki dziesiętne przechodzą w końcu roku i przytem nieraz bardzo pośpiesznie, z czego nie wynika dobra tych ułamków znajomość, odbijająca się później w klasach wyższych, nic chyba nie stanie na przeszkodzie do uznania projektu takiego traktowania rzeczy. Przy niem na naukę ułamków dziesiętnych poświęcimy więcej czasu, raczej, lepiej powiedziawszy, dłużej będą dzieci miały z niemi do czynienia, a tem samem bliżej z niemi się oswoją i trwalszą zdobędą wiedzę.

Przejdziemy teraz do następnej, drugiej części nauki o ułamku, części najtrudniejszej, która z naszej strony wymaga dłuższego nieco omówienia.

Już powiedzieliśmy wyżej, że mnożenie i dzielenie liczb ułamkowych nie jest w istocie tem samem, co podobne działania z liczbami całkowitemi, nie da się ująć tak konkretnie jak dodawanie i odejmowanie, a dlatego poprzednie, stosowne dla liczb całkowitych definicje, nie nadają się do ułamków, z czego wynika, że muszą być podane nowe definicje i tem samem wytworzone nowe pojęcie tych działań. Taka definicja może się rozwinąć tylko na pewnej podstawie konkretnej, bo inaczej będzie dla dzieci niedostępna i pusta. Pierwszem więc zagadnieniem jest obranie określonej podstawy konkretnej. Tą podstawą może być tylko określone zagadnienie, jasne samo przez się i na tyle ogólne, by mogło tę rolę spełnić.

Takiem zagadnieniem dla definicji mnożenia jest znajdywanie określonej części całości, a dla dzielenia znajdywanie całości na zasadzie danej jej części.

Lecz to nie wyczerpuje jeszcze całego charakteru podstawy konkretnej. Należy wykazać na szeregu przykładów, że w zadaniach tej samej treści, ale raz z liczbami całkowitemi, drugi raz z liczbami ułamkowemi, mamy odpowiedniość, t. j. tam gdzie przy liczbach całkowitych jest mnożenie, przy ułamkach będzie znajdywanie części od całości i odwrotnie. Ta ostatnia uwaga porusza jedną z zasadniczych cech definicji działań, mianowicie: nowa definicja w ten sposób zawiera w sobie dawną, jako szczególny przypadek. Przejdziemy teraz do samej rzeczy.

Nauczyciel, rozpoczynając naukę mnożenia, zgodnie z powyższem, przedewszystkiem zwraca uwagę na zagadnienie znajdywania części danej całości. Zadanie uczniowie z początku rozwiązują dwoma oddzielnemi działaniami z wiadomem ich objaśnieniem. Np. mając znaleźć $\frac{3}{7}$ liczby 35 znajdują najpierw $\frac{1}{7}$ przez dzielenie przez 7, a potem $\frac{3}{7}$, mnożąc rezultat otrzymany przez 3. Później, po wykonaniu szeregu takich przykładów w pamięci i ustnem opowiadaniu rozwiązania, należy zwracać uwagę na to, że dzielimy najpierw przez mianownik, potem mnożymy przez licznik. Przechodząc do piśmiennego wykonania działania, nauczyciel wskazać winien że 2 działania, z początku oddzielnie zapisywane, można połączyć razem i zapisywać tem samem krócej. W ten sposób mianownik będzie zawsze pod kreską, a licznik nad nią. Przykłady i zadania dawane tutaj powinny uwzględniać zarówno ułamki właściwe, jak niewłaściwe. Np. paczka cukru zawiera 10 f. wzięto $2\frac{3}{5}$ paczki; ile funtów wzięto? Zamieniamy $2\frac{3}{5}$ na ułamek niewłaściwy i znajdujemy $\frac{13}{5}$ całości. Oczywiście można też najpierw dowiedzieć się, ile jest funtów w 2 paczkach, a potem w $\frac{3}{5}$ paczki i dodać otrzymane rezultaty. Nie należy jednakże pierwszego sposobu omijać. Widoczną jest rzeczą, że wykonywamy właściwie mnożenie przez ułamek, ale nie nazywając narazie rzeczy po imieniu. Na tem trzeba pewien czas się zatrzymać, żeby cała sprawa nabrała należytej jasności i żeby uczniowie z większą łatwością do rozwiązania takich zagadnień się zabierali. Takie dłuższe zatrzymanie się da mianowicie potrzebną wprawę w stosowaniu wspomnianej podwójnej operacji, niezależną od pojęcia mnożenia. Jeżeli zrobimy to zbyt prędko i wprowadzimy nazwę mnożenia, suggestja liczby całkowitej zamąci samo to pojęcie i uczeń będzie, jak to często bywa, na chybił trafił wykonywał samo działanie, a później z łatwością poplącze go z dzieleniem. Im więcej będziemy podawali rozmaitych przykładów, tem lepiej. Rzecz jasna, że dana liczba, której części szukamy, może być też ułamkiem.

W dalszym ciągu przechodzimy do przygotowania definicji. Dlatego obieramy szereg zadań zupełnie tej samej treści, dobranych w 2 egzemplarzach tak, że w jednym wchodzą liczby całkowite. a w drugim ułamki (w mnożniku). Np.:

Łokieć sukna kosztuje 3 rb. 60 k. Ile kosztuje 3 łokcie?	Łokieć sakna kosztuje 3 rb. 60 k. Ile kosztuje $\frac{5}{11}$ ł.?
Na godzinę parowiec przepływa 20 Km. Ile Km. przepływa w 12 g?	Na godzinę parowiec przepływa 20 Km. Ile Km. przepłynie w 2$\frac{1}{4}$ g.?
W beczce jest 30$\frac{1}{2}$ w. wina. Ile jest w 4 beczkach?	W beczce jest 30$\frac{1}{2}$ w. wina. Ile jest w 3$\frac{2}{5}$ beczkach?
Długość prostokąta 4 m., a szerokość — 3 m. Jakie jest pole?	Długość prostokąta 4 m., a szerokość — 2$\frac{3}{5}$ m. Jakie jest pole? i t. p.

Przy robieniu tych zadań nauczyciel podkreśla, że w pierwszej grupie zawsze mnożymy dwie dane liczby przez siebie, a w drugiej rzecz zawsze sie sprowadza do mnożenia przez licznik drugiej liczby, która jest ułamkiem, i dzielenia przez jej mianownik. Najtrudniejszym do wykazania tego jest przykład ostatni, ale tutaj najpierw radzimy sobie w ten sposób że zamieniamy wszystko na decymetry, potem mnożymy i nakoniec dowiadujemy się, ile w znalezionej liczbie decymetrów kwadratowych jest metrów kwadratowych, wiedząc, że na jeden metr^2 przypada 100 dm.^{2}. Następnie wykonywamy działanie powtórne, ale tak, że 4 mnożymy przez 13 (2$\frac{3}{5}$ = $\frac{13}{5}$) a następnie dzielimy przez 5. Otrzymane rezultaty są identyczne. Stąd wniosek, że i tu można było zrobić tak samo, jak poprzednio, jakkolwiek wysłowienie zadania jest odmienne

Z tego nauczyciel wyprowadza spostrzeżenie, przeczuwane już zresztą poprzednio przez zdolniejszych uczniów, a mianowicie, że tam, gdzie przy liczbach całkowitych, raczej przy całkowitym mnożniku mamy mnożenie, przy ułamkowym — wszędzie występuje mnożenie przez licznik i dzielenie przez mianownik. Przy tem wszystkiem nauczyciel może wskazać na fakt znany uczniom z poprzednich rozważań, że każdą liczbę całkowitą można przedstawić w postaci ułamka i że mnożenie przez tę liczbę prowadzi do znajdywania części całości, co oczywiście sprawdza na szeregu przykładów. Teraz mamy już grunt przygotowany do definicji.

Powiadamy: *pomnożyć przez liczbę ułamkową znaczy to samo, co pomnożyć przez jej licznik a podzielić przez mianownik.*

Z poprzedniego przedstawienia przebiegu nauczania wynika, że mnożenie a także dzielenie przez liczbę całkowitą uważamy za rzecz znaną, o której nauczyciel nie powinien zapomnieć przed rozpoczęciem mnożenia przez ułamek. Zwykle przy mnożeniu ułamków rozpatrywane są 3 przypadki: mnożenie ułamka przez liczbę całkowitą, mnożenie liczby całkowitej przez ułamek i mnożenie ułamków. Pierwszy przypadek nie nastręcza kłopotu. Ten ostatni zaczyna się od 2-go przypadku. Przy tej sposobności zwrócimy tu uwagę jeszcze na jedną okoliczność. Jeżeli podane określenie mnożenia ma być pożytecznem i używanem zawsze tam, gdzie zachodzi mnożenie przez liczbę całkowitą, powinno ono posiadać prawa charakteryzujące mnożenie liczb całkowitych, a więc prawo przemienności i łączności oraz prawo rozdzielności. Właśnie na drugim przypadku mnożenia możemy odrazu prawo przemienności sprawdzić. Istotnie, gdy np. mamy do pomnożenia 3 przez $1\frac{2}{3}$, piszemy $3 \times 1\frac{2}{3} = 3 \times \frac{5}{3} = \frac{3 \times 5}{3} = 5$. Naodwrót, gdybyśmy mieli do pomnożenia $1\frac{2}{3}$ przez 3 otrzymalibyśmy $\frac{5}{3} \times 3 = \frac{5 \times 3}{3} = 5$, t. j. to samo, a więc prawo przemienności zachodzi. Tak samo można sprawdzić prawo łączności i rozdzielności posługując się znanemi działaniami: dodawaniem i odejmowaniem.

Zgodnie z powyższym podziałem na trzy przypadki w praktyce podawane są 3 różne prawidła, co niepotrzebnie rozstrzela myśl i mąci jasność pojmowania działania. Jest tylko jedno prawidło: żeby pomnożyć przez ułamek, należy pomnożyć przez jego licznik i podzielić przez mianownik. To prawidło stosuje się we wszelkich przypadkach i dlatego nowych określeń nie potrzeba. Zapisywanie należy zawsze prowadzić w ten sposób, żeby najpierw wypisać nad i pod wspólną kreską odpowiednie elementy działania, a potem skracać. Np. $3\frac{5}{18} \times 2\frac{4}{7} = \frac{59}{18} \times \frac{18}{7} = \frac{59 \cdot 18}{18 \cdot 7} = \frac{59}{7}$. Przytem nie należy robić żadnych przekreślań, które przy popełnieniu błędu przeszkadzają w odkryciu, gdzie popełniono ten błąd, a przytem brudzą całe zapisywanie. Lepiej jest kilka razy z rzędu przepisywać, jeżeli odrazu nie można skrócić, niż gmatwać w ten sposób obliczenia. Uczeń, który chce mniej pisać, musi więcej w pamięci rachować, co mu na dobre wyjdzie.

Nie zaszkodzą nigdy ćwiczenia z prawem rozdzielnościowem bez zamiany liczb mieszanych na ułamki niewłaściwe. Należy przytem zaczynać od przykładów, gdzie prawo rozdzielności stosujemy raz, a potem przejść do podwójnego stosowania, a więc od przykładów np. takich:

$$2\frac{3}{5} \times \frac{5}{8} = 2 \times \frac{5}{8} + \frac{3}{5} \times \frac{5}{8} = \frac{10}{8} + \frac{5}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$$

do takich: $2\frac{3}{5} \times 1\frac{5}{8} = (2 + \frac{3}{5})\,1 + (2 + \frac{3}{5})\,\frac{5}{8} = 2\frac{3}{5} + 1\frac{7}{8} = 4\frac{9}{40}$.

Takie ćwiczenia ugruntowują prawo rozdzielności i są tem samem więcej celowe, niż zwykle podawane przykłady, a z drugiej strony usuną błąd nieraz przez uczniów uprawiany, polegający na dodaniu iloczynu liczb całkowitych do iloczynu ułamków, co wyraźnie wskazuje, że uczeń o prawie rozdzielności niema pojęcia.

Teraz w dalszym ciągu możemy wprowadzić mnożenie ułamków dziesiętnych, opierając go na mnożeniu zwyczajnych. Zaczynamy od mnożenia i dzielenia ułamka dziesiętnego najpierw przez 10^n, a potem przez dowolną liczbę całkowitą. W obu przypadkach opieramy się na sprowadzeniu samego ułamka dziesiętnego do postaci zwyczajnego. Np.:

$$0,315 \times 10 = \frac{315}{1000} \times 10 = \frac{315 \times 10}{1000} = \frac{315}{100} = 3,15.$$

W ten sposób robimy szereg przykładów, gdzie mnożnik jest 100, 1000 i t. d. Te przykłady wypisywane są na tablicy i nie ścierane. Po przerobieniu trzech — czterech takich przykładów nauczyciel zwraca uwagę na przesuwanie się przecinka i wyprowadza razem z uczniami prawidło, które potem jest stosowane w różnych innych przykładach i od czasu do czasu znowu sprawdzane. Przy dzieleniu przez 10^n robimy to samo, przyczem uczniom należy przypomnieć własność zapisywania ułamka dziesiętnego, według której tyle w nim jest po przecinku miejsc zajętych, ile jest zer w mianowniku. Oczywiście formułujemy przytem dla mnożenia i dzielenia przez 10^n odpowiednie prawidła.

Mnożenie przez dowolną liczbę całkowitą wykonywa się tak samo, np.:

$$3,25 \times 12 = \frac{325}{100} \times 12 = \frac{325 \times 12}{100} = \frac{3900}{100} = 39.$$

Tutaj trzeba ostrzegać przed skracaniem, żeby rezultat dostać w postaci ułamka dziesiętnego. Z dzieleniem natomiast jest już kłopot wtedy, gdy się nie skraca, ale radzimy sobie z łatwością przez wyrażenie rezultatu w postaci ułamka zwyczajnego, a w innym przypadku przez znany sposób zamiany na ułamek dziesiętny.

Mnożenie ułamków dziesiętnych również trudności nie nastręcza przy oparciu się na mnożeniu ułamków zwyczajnych. Weźmy przykład.

$$2,35 \times 3,8 = \frac{235}{100} \times \frac{38}{10} = \frac{235 \times 88}{1000} = \frac{8930}{1000} = 8,930 = 8,93.$$

Kilka takich przykładów z różnemi odmianami wypisujemy na tablicy, przyczem przez obserwację dochodzimy do wniosku, iż mianownik iloczynu posiada tyle zer, ile jest ich razem w mianownikach obu ułamków, a stąd na zasadzie znanej własności ułamka dziesiętnego i prawidła dzielenia przez liczbę wyrażoną jednostką z zerami musimy oddzielić w iloczynie tyle znaków dziesiętnych, ile jest ich razem w mnożnej i mnożniku.

Dalej w zadaniach możemy już wykonywać działania wspólne z ułamkami zwyczajnemi i dziesiętnemi, co jest pożyteczne i przemawia za fuzją tych rzeczy (czyli przeplataniem).

Dzielenie ułamków należy prowadzić w tej samej kolei i w tenże sposób, co mnożenie i dlatego nie będę się szczegółowo nad tem rozwodził. Jest jednakże w dzieleniu pewna różnica, o której trzeba wspomnieć. Nasze traktowanie rzeczy ma charakter konkretny i dlatego pewne różnice konkretne zadań odgrywać muszą ważną rolę, tem bardziej, gdy te różnice nie posiadają cech przypadkowości, ale występują ogólnie. Do takich różnic należy różnica pomiędzy właściwem dzieleniem i mieszczeniem, o której już tyle razy mówiliśmy. Zadanie znalezienia całości z danej części odpowiada właściwie samemu dzieleniu, gdy tymczasem w niektórych przykładach, mających charakter wyraźny zadania na mieszczenie, niema mowy o znalezieniu całości z danej części i dlatego określenie dzielenia, oparte, analogicznie do mnożenia, na wspomnianem zadaniu, nie będzie obejmowało tych przypadków, gdzie występuje mieszczenie. Łatwo zrozumieć, że takie np. zadanie: $\frac{3}{4}$ łokcia materjału kosztuje 6 rb.; ile kosztuje łokieć? — jest czemś innem na pierwszy rzut oka, niż takie: za cały materjał zapłacono $18\frac{3}{4}$ rb.; ile kupiono łokci, jeżeli jeden łokieć kosztuje $3\frac{3}{4}$ rb.? Pierwsze zadanie odrazu można sprowadzić do znajdywania całości z danej części, ale drugie nie tak łatwo. Wobec tego należy albo tę różnicę usunąć, albo wykazać, że drugie zadanie rozwiąże się w ten sam sposób jak pierwsze. Ten drugi sposób jest praktyczniejszy, bo zrozumialszy, i dlatego tutaj go zastosujemy. Rozumujemy tak: jeden łokieć kosztuje $\frac{15}{4}$ rb., więc $\frac{1}{15}$ ł. będzie kosztowała $\frac{1}{4}$ rb., a $\frac{4}{15}$ ł.— 1 rb. Ponieważ cały towar kosztował $18\frac{3}{4}$ rb., więc będzie zawierał tyle razy więcej łokci, ile razy $18\frac{3}{4}$ rb. jest większe niż 1 rb., t. j. ($\frac{4}{15} \times 18\frac{3}{4}$) łok., lecz na zasadzie prawa przemienności przy mnożeniu możemy napisać, iż

$$\frac{4}{15} \times 18\frac{3}{4} = 18\frac{3}{4} \times \frac{4}{15} = \frac{75 \cdot 4}{4 \cdot 15} = 5.$$

Cośmy ostatecznie zrobili? Oto $18\frac{3}{4}$ mnożyliśmy przez 4 czyli mianownik ułamka $\frac{15}{4}$, a dzieliliśmy przez licznik, więc postępowaliśmy tak samo, jak przy znajdywaniu całości z danej części, ergo w obu przypadkach działanie jest identyczne. Nie należy więc ich odróżniać. Jeżeli w pierwszym przypadku dzieliliśmy zgodnie z definicją przez ułamek, to samo robiliśmy w drugim.

Definicja dzielenia jest następująca: podzielić przez ułamek znaczy—podzielić przez jego licznik a pomnożyć przez mianownik. Można jeszcze powiedzieć z pożytkiem tak: podzielić przez ułamek, znaczy — pomnożyć przez ułamek odwrócony.

Prawidło wyprowadzone z tej definicji stosujemy we wszystkich przypadkach dzielenia przez ułamek i nie odróżniamy tego, czy dzielić trzeba liczbę całkowitą czy też ułamek. Drugi rodzaj definicji podkreśla przy ułamkach istniejącą tutaj odwrotność dzielenia i mnożenia tak, jak przy liczbach całkowitych.

Sposób zapisywania przy dzieleniu stosujemu oczywiście ten sam, co przy mnożeniu, nie nadmieniając wcale o różnych skracaniach „wzdłuż" i „na ukos", które powinny należeć do dawnych dobrych lat.

Łatwo na zasadzie drugiego rodzaju definicji bezpośrednio wykazać, że przy dzieleniu przez ułamek tak samo się stosuje prawo rozdzielności.

Po dzieleniu ułamków zwyczajnych następuje z kolei dzielenie dziesiętnych, jako szczególny przypadek, który tak samo, jak wszystkie własności i działania z ułamkami dziesiętnemi, wyprowadzamy i opieramy na odpowiednich własnościach i działaniach z ułamkami zwyczajnemi.

Zaczynamy od nowego sposobu zamiany ułamka zwyczajnego na dziesiętny przez dzielenie. Objaśnienie tej rzeczy jest łatwe, ale należy tu jeszcze raz wyraźnie podkreślić i wyjaśnić sprawę możliwości takiej zamiany, odwołując się do rozważań w tej materji poprzednio zaznaczonych. Jest to szczególnie ważne z tego powodu, że używanie ułamków okresowych z różnych względów musi być ominięte.

W nauce ułamków dziesiętnych dotąd jeszcze po podręcznikach i w praktyce nauczania duże znaczenie przypisuje się ułamkom okresowym. Zamiana ułamku okresowego na zwyczajny jest sumowaniem postępu geometrycznego nieskończenie malejącego, o którym mowa w klasie 6-ej szkoły średniej. Nawet tam spotykamy niejedną trudność przy ścisłem przedstawieniu i definicji sumy takiego postępu. W arytmetyce początkowej ten dział roi się wprost od błędów naukowych. Weźmy np. takie przedstawienie tej rzeczy. Konstatujemy przez dzielenie, że:

$$\frac{1}{9} = 0,111\ldots$$

$$\frac{1}{99} = 0,0101\ldots$$

$$\frac{1}{999} = 0,001001\ldots$$

Naturalnie natychmiast uogólniamy, że:

$$\frac{1}{10^n - 1} = \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \ldots$$

Następnie, zwróciwszy uwagę, że mnożąc obydwie strony każdej z poprzednich równości przez pewną liczbę całkowitą, możemy otrzymać np.:

$$\frac{5}{9} = 0{,}555\ldots$$

$$\frac{7}{99} = 0{,}0707\ldots$$

$$\frac{34}{99} = 0{,}3434\ldots \text{ i t. d.,}$$

wyprowadzamy stąd prawidło zamiany ułamku okresowego prostego na zwyczajny. Później, dzięki niewielkiej modyfikacji, możemy to samo zrobić dla mieszanego. Powyższe uogólnienie zgadza się z zasadą indukcyjnego rozumowania, nie nasuwa więc zarzutów; ale mnożenie obu stron przez liczbę tę samą nie może być dopuszczane. Mamy tu do czynienia z szeregiem nieskończonym i trzeba wykazać najpierw możliwość takiego mnożenia. Można rozumować inaczej, stosując dalej dzielenie, np. przekonać się, że powyższa równość słuszna będzie dla ilorazu $\frac{5}{9}$ i t. d., a później znowu uogólnienie. Byłoby to rozumowanie poprawniejsze, ale również nie wolne od zarzutów, nigdy bowiem nie można być pewnym odwrotnego twierdzenia, a tem samem wykazać, czy suma tego samego szeregu nieskończonego nie może się „równać” różnym ułamkom zwyczajnym. Z drugiej strony, czem jest suma nieskończenie wielu składników, również nie wiemy bez specjalnej na pewnych rozważaniach opartej definicji. Taką definicję trzeba dać zanim będziemy mogli mowić o „sumie”.

Jeżeli zechcemy zadać sobie teraz pytanie, jaki może być cel wprowadzenia nauki ułamków okresowych w klasie drugiej (albo w piątym roku nauczania), nie możemy znaleźć żadną miarą innego, prócz zwyczaju utartego i rutyny. Ta rutyna uważa to za rzecz dostępną w szkole, a natomiast inne rzeczy o wiele prostsze, ale nie używane, nie uświęcone jej inercją i przyzwyczajeniem, za trudne i niedostępne.

Widzieliśmy, że nauka ułamków okresowych nie może być przeprowadzona ściśle pod względem naukowym, ale nie trudno się przekonać, że niema ona też żadnej wartości w praktyce. Nikt i nigdzie w działalności praktycznej nie rachuje przy pomocy ułamków okresowych. Z tego wynika, że istotnie w szkole zatrzymywać tego balastu nie trzeba, że należy zwrócić uwagę uczących się dzieci na dwie rzeczy: 1° na to, kiedy dzielenie doprowadzi do rezultatu, t. j. otrzyma się ułamek dziesiętny, a kiedy to jest niemożliwe i 2° w przypadkach, kiedy ilorazu nie można otrzymać w postaci ułamka dziesiętnego, wyrazić go w postaci — zwyczajnego. Można też, gdy chodzi o ostatnia odpowiedź na pytanie, nauczyć dzieci obliczania tej odpowiedzi z przybliżeniem, co w tym przypadku nie przedstawia zbytnich trudności. Ale wróćmy do dzielenia.

Po przypomnieniu, kiedy dany ułamek zamienia się na dziesiętny, a kiedy nie, możemy pokazać, że w pierwszym przypadku dzielenie się napewno skończy, a w drugim napotykamy rzecz bardzo dziwną. Oto, dzielić można, ale to dzielenie się nie skończy, bo gdyby się skończyło dostalibyśmy iloraz w postaci ułamka dziesiętnego, co jak wiemy jest niemożliwe. Takie rozumowanie będzie tem bardziej przekonywające, jeżeli dzieciom jasno na przykładach wykażemy, że pierwszy i drugi sposób zamiany ułamka zwyczajnego na dziesiętny zawsze prowadzi do tego samego rezultatu. Ta jasność jest potrzebna, gdyż inaczej nieraz się zdarza, że mali rachmistrze zapisują całe kajety, żeby koniecznie dojść do końca w dzieleniu.

Wykażemy teraz, jak prowadzić naukę dzielenia ułamków dziesiętnych w przypadku możliwości otrzymania skończonego rezultatu. Najpierw badamy dzielnik, czy nie zawiera innych czynników prócz 2 i 5. Jeżeli tak, to zwracamy uwagę, czy dzielna przez te i owe czynniki się dzieli. Wrazie przeciwnym dzielenie nie da rezultatu skończonego i odrazu przechodzimy do ułumków zwyczajnych. W innym przypadku możemy przystąpić do dzielenia. Weźmy przykład.

$$3{,}51 : 2{,}4 = \tfrac{351}{100} : \tfrac{24}{10} = \frac{351 \cdot 10}{100 \cdot 24} = \tfrac{351}{240}$$

W ten sposób sprowadziliśmy dzielenie do dzielenia liczb całkowitych i możemy na zasadzie kilku takich przykładów wyprowadzić prawidło: należy przez dopisywanie zer zrównać liczbę dziesiętnych znaków w dzielnej i dzielniku, odrzucić przecinki i dzielić jak liczby całkowite. Ale zbytnie zwiększenie dzielnika nie jest wygodne, dlatego lepiej jest zacząć dzielenie od przypadku dzielenia ułamka przez liczbę całkowitą, co się wykonywa prosto, i następnie starać się przedewszystkiem zrobić dzielnik liczbą całkowitą. Np. w poprzednim przypadku możemy napisać:

$$\frac{351}{100} : \frac{24}{10} = \frac{351 \,.\, 10}{100 \,.\, 24} = \frac{35{,}1}{24}$$

Stąd wyprowadzamy nowe prawidło: należy dzielną i dzielnik pomnożyć jednocześnie przez 10^n tak, żeby dzielnik stał się liczbą całkowitą, a potem wykonać dzielenie.

Po przejściu ułamków dziesiętnych trzeba szczególną uwagę zwrócić na działania wspólne z ułamkami dziesiętnemi i zwyczajnemi, do czego mieliśmy już nieraz poprzednio sposobność, a co często bywa w nauczaniu zaniedbywane. Nauka ułamków daje możność przerobienia wszystkich zadań z liczbami wielorakiemi w postaci prostszej i łatwiejszej, a dlatego można tutaj przenieść cały szereg zadań z poprzedniego roku z pożytkiem praktycznym i teoretycznym. Oczywiście, system metryczny znajduje w roku piątym swoje ostateczne zakończenie i szczególnie nadaje się do nauki ułamków dziesiętnych.

Rok piąty zawiera całość zamkniętą w sobie, bogatą w treść i w zasadzie nie łatwą do nauczania, co szczególniej wtedy się przytrafia, jeżeli poprzednia nauka o liczbie całkowitej nie była należycie prowadzona.

W roku tym kończy się właściwie nauka o rachunku liczbą wymiernej i powstaje nowa metoda traktowania rzeczy, dzięki wprowadzeniu definjowania liczby i działań. W klasie 3 ej czyli 6-ym roku nauczania ten ostatni fakt przejawi się znowu w innej postaci, zarówno w rachunku, jak i w t. zw. algebrze.

ROZDZIAŁ II.

Przez naukę ułamków dokonano jednego z pierwszych uogólnień, — rozszerzenia pojęcia liczby, dzięki czemu zakres stosowania staje się szerszym i mogą się rozwinąć takie zagadnienia, które z samą liczbą całkowitą nie mogły być należycie rozpatrywane.

Zjawiska w świecie otaczającym nigdy nie występują same, oddzielnie, niezależnie od innych, zawsze natomiast są w związku ze sobą. Zarówno ze stanowiska dydaktycznego, jak praktycznego ważną jest rzeczą, by nauka matematyki mogła lepiej pómóc człowiekowi do ujmowania, wyrażania i oceny wielkościowej zjawisk otaczających. Otóż wpomniane rozszerzenie pomaga w tym względzie niemało. Liczba całkowita przedstawiona w biegnącym w nieskończoność ciągu naturalnym, zjawia się w postaci zbioru, którego elementy są oddzielne, posiadają stałą różnicę w swej kolejności i nadają się do odwzorowania takich samych zbiorów realnych przedmiotów, ale nie mogą wyrazić przebiegu zjawiska, nie mogą odzwierciedlić związku między faktami. Zjawiska przyrody tak, jak one się nam przedstawiają dzisiaj, jak ujmuje je przeciętnie myśl człowieka, przebiegają w sposób ciągły, przechodzą przez szereg stopni rozwojowych, rodzą się i nikną, zostawiając po sobie, jak iskra lecąca w powietrzu, pewien ślad ciągły, który jest nieuchwytny dla takiego grubego jeszcze narzędzia, jakiem jest liczba całkowita. Dlatego to rozszerzenie pojęcia liczby, wypełnienie luk pomiędzy oddzielnemi elementami ciągu naturalnego, jest nieodzownem dążeniem naturalnem umysłu ludzkiego, jest terenem jego twórczości, jego wysiłku szlachetnego, poza którym stoi realna potrzeba. Tem ci bardziej jest on cenny i wielki.

Nauka przez związek z rzeczywistością służyć może i służy celom moralnym, głębokim tendencjom ducha ludzkiego, wszystko jedno jak je nazwiemy, czy językiem religji, czy też mową suchą filozofji. Nauka jest tym językiem wytrawionym przez ogień doświadczeń dawnych pokoleń i przez ich pracę, językiem mówiącym o tem, co jest, odwzorowaniem świata, systemem pojęć o rzeczywistości. Dążenie do poznania, do zrozumienia życia i rzeczy wogóle jest jej duchem w istocie swej moralnym i dlatego cześć dla nauki, miłość dla niej, to niezbędna cecha Nauczyciela. Ten duch przejawia sie w każdej nauce, jest on żywy i tętniący tem samem wiecznem pragnieniem prawdy i w naszej skromnej nauce zwykłego rachunku. Czem jest rozszerzenie pojęcia liczby, jak nie jednym z wyrazów tego wiecznego dążenia? Jeżeli nawet w najzapadlejszej wiosce, najdalej od źródeł kultury, w najtrudniejszych warunkech dusza Twoja czuje to i rozumie, Nauczycielu, jeżeli nauka nie jest dla Ciebie tylko środkiem zarobku, lecz wieczną dźwignią, wiecznym wyrazem najgłębszych tendencji duszy ludzkiej, nie jesteś zostawiony sam, dano Ci coś z tego, co człowiek ma najświętszego. Dlatego mówię tu o tem, bo małą i mizerną jest wszelka metoda, martwym jest mechanizmem, jeżeli jej nie ożywia rozumienie, że ona dąży do rozbudzenia i rozwoju w młodocianej duszy tych wielkich pragnień człowieka. Nie masz tak małego przedmiotu nauczania, gdzieby poza skromną szatą nie można było odkryć sił, które te pragnienia budzą. To jest największa sztuka nauczania i dlatego tutaj właśnie na wstępie rozdziału niniejszego pragnę trochę pogłębić kwestję rozszerzenia pojęcia liczby.

Powiedzieliśmy, że zjawiska otaczające nas przebiegają w sposób ciągły, że dlatego liczba naturalna nie wystarcza, by tę ciągłość odwzorować. Ułamki zapełniają luki pomiędzy liczbami całkowitemi i tem samem ciąg naturalny zaczyna przybierać postać zjawiska ciągłego. Ale na tem nie koniec. Nauka wykazuje, że ułamki nie zapełniają jeszcze kompletnie, nieprzerwanie tych luk. Dzięki temu pojęcie liczby rozszerza się dalej, przychodzą liczby niewymierne, np. $\sqrt{2}$, który jest większy niż 1, a mniejszy nie 2 i niema ułamka równego jemu. Przychodzą liczby t. zw. przestępne, których przedstawicielem jest taka liczba, jak π, wyrażająca stosunek długości obwodu dowolnego koła do jego średnicy. Liczby π nie można wyrazić żadnym pierwiastkiem z liczby całkowitej lub ułamka. W ten sposób proces rozszerzenia liczby posuwa się dalej poza liczbę znaną w szkole elementarnej i niższych klasach średniej i jest, jak wspomnieliśmy, wyrazem dążenia do odwzorowania rzeczywistości. Każdą z nowych liczb wprowadzamy przez jej zdefinjowanie. Nie będę tu mówił o tem, jakie to są definicje, bo zadaleko to by nas zaprowadziło, wskazuję na nie jedynie dlatego aby wykazać, że ułamek jest tylko pierwszym w tym procesie.

Rzeczywistość ujmujemy nie tylko w postaci oddzielnych zjawisk, ale przedewszystkiem staramy się o poznanie związków między zjawiskami. Te związki, jeżeli dadzą się sformułować w jakikolwiek sposób, nazywają się prawami. W każdym takim związku zachodzą przynajmniej dwa oddzielne zjawiska i, jeżeli w jakiś sposób potrafimy te zjawiska ocenić liczbowo czyli mierzyć, jeżeli możemy zaliczyć je do kategorji wielkości i w znany nam powyżej sposób podporządkować im liczbę, to prawa wyrażają się wtedy w formie ilościowej, która przybiera czasem tak dokładną postać, że możemy przebieg zjawiska nie tylko dokładnie ocenić w danej chwili, zarówno należącej do tego, co nazywamy przeszłością, jak i do przyszłości czyli możemy dokładnie przewidywać. Np. astronom używa formuły Newtona:

$$F = C \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2},$$

która wyraża wielkość siły (F) przyciągania wzajemnego dwóch mas (m_1 i m_2), znajdujących się na odległości R od siebie w przestrzeni niebieskiej. Liczba C — czyli spółczynnik proporcjonalności — potrzebna tu jest dlatego, że wszystkie te wielkości mierzymy w różnych jednostkach i przejście od miary siły do innych miar wymaga pewnego czynnika, obliczanego uprzednio, jeśli weźmiemy pod uwagę pewne szczególne położenie rozważanych mas.

Ta formuła wyraża t. zw. prawo ciążenia powszechnego. Jeżeli w niej nie tylko spółczynnikowi C, ale masom m_1 i m_2 nadamy wartości stałe, natychmiast dostrzeżemy, że F zmienia się ze zmianą R i że dla każdej danej wartości R—dostaniemy zupełnie określoną wartość na F. Gdybyśmy utworzyli z wartości na R pewien ciąg o dowolnie wielkiej liczbie wyrazów, otrzymalibyśmy z wartości odpowiednich na F drugi ciąg równoległy, posiadający tę własność, że każdemu elementowi w nim odpowiada jedna i tylko jedna wartość w drugim. Ciągi nadmienione przedstawiają wartości wielkości F i R, przedstawiają zbiory, jak mówiliśmy wyżej, które charakteryzują wielkości siły zależnie od wielkości odległości. Dwie wielkości F i R są zależne od siebie i ta zależność wyrażona jest przez powyższą formułę. Każde prawo, które umiemy obecnie ująć w formułę matematyczną przedstawia taką zależność przynajmniej 2-ch wielkości. Chcąc wyrazić krócej istnienie tej zależności w formie dokładnej, powiadamy, że np. wielkość F jest f u n k c j ą wielkości R. Zjawiska przyrody, stanowiące elementy praw, są względem siebie w zależności funkcjonalnej. Wierzymy, że tak jest ze wszystkiemi zjawiskami otaczającej nas rzeczywistości i dążymy do tego, żeby ich związki wyrazić zapomocą oczywistych zależności w postaci matematycznej, w postaci pewnej funkcji, jak mówią matematycy. Jeszcze dość rzadko nam się to udaje, ale umysł ludzki nieprzeparcie dąży do jasnego poznania i rozwój wiedzy stwierdza niezbite w tym kierunku postępy. Matematyka niezależnie bada różnego rodzaju możliwe zależności, możliwe funkcje, wzbogacając w ten sposób zasób naszej umiejętności opanowania i wyrażania praw otaczającego nas świata. Ta cecha nauki matematycznej przejawia się wszędzie, w każdej niemal dziedzinie jej dociekań. Znajdziemy ją niebawem i w arytmetyce początkowej, a stąd wynika, że ucząc matematyki nie możemy tej kwestji ominąć, że obowiązkiem jest naszym zarówno dla pogłębienia naszego osobistego zainteresowania, jak dla pożytku umysłowego uczniów, te rzeczy jaśniej rozumieć, gdyż takie jasne rozumienie nadać może naszemu nauczaniu cechę zgodną z właściwą tendencją nauki, która, jak mówiliśmy już, jest wyrazem ogólnego dążenia umysłu ludzkiego do opanowania rzeczywistości.

W arytmetyce początkowej zależność funkcjonalna przejawia się w postaci z a l e ż n o ś c i w p r o s t i o d w r o t n i e p r o p o r c j o n a l n e j. Badania tej zależności w różnych zagadnieniach życia praktycznego i stosowanie jej właściwości jest właśnie głównym przedmiotem nauczania w roku szóstym.

Zwykle zaczynają nauczanie w tym roku od nauki o stosunku i propocji, nauki abstrakcyjnej, z niczem realnem nie związanej, nic nie mówiącej umysłowi dzieci i nie pociągającej tego umysłu do wysiłku i badania. Zwykłemu nauczaniu brakuje podstawy konkretnej i związanej z nią myśli głębszej o celu nauczania tego przedmiotu, o jego istotnej wartości, dlatego też niema działu matematyki bardziej nudnego i odpychającego dla uczniów, jak właśnie ten szósty rok. Wszystko tu jest sztuczne: i początek, i metody rozwiązania zadań w postaci różnych reguł, i treść tych zadań, nawet sama ich celowość. Jeżeli wszystkie działy nauczania wymagają gruntownego opracowania metodycznego, to tem bardziej ten, tak skądinąd bogaty w treść wewnętrzną, tak pouczający dla nauczyciela, a jednocześnie tak licho i nieudolnie prowadzony w nauczaniu faktycznem. Każda reforma wymaga jednakże nie tylko dobrej chęci i pożądania nowości, co jest tak często szkodliwe, bo powierzchowne, ale głębszej myśli, podstawy dydaktycznej. Taką podstawę znajdujemy w pojęciu zależności funkcjonalnej i potrzebie odpowiedniego kształcenia myślenia dzieci. Zastanówmy się teraz, jak tę rzecz zrealizować, w jaki sposób przekształcić nauczanie, żeby odpowiadało poprzednio zaznaczonym zasadom dydaktycznym i naturze samego przedmiotu.

Przedewszystkiem należy na pierwszem miejscu postawić to, co ma być podstawą konkretną całego nauczania, t. j. bezpośrednie na danych parach wielkości proporcjonalnych badanie tej ich zależności. Z tego badania wyłoni się pojęcie o stosunku, jego określenie, proporcja i jej własności, jednem słowem cała główna treść tego działu nauczania. Czy w ten sposób ulepszymy to nauczanie? Nie może być wątpliwości, że tak będzie, gdyż w ten sposób stworzymy teorję rowiązywania zadań nie à priori, lecz à posteriori, zgodnie z zasadami dydaktyki.

Najpierw nauczyciel powinien wskazać na fakt zależności dwóch pewnych wielkości od siebie i podać przykłady wielkości niezależnych, jednem słowem uwypuklić pojęcie zależności. Towar i suma zań zapłacona, czas i droga przebyta i t. p. — są przykładami wielkości zależnych, a np. szerokość stołu i waga książki, która na nim leży, cena obsadki i długość ulicy i t. d. są to wielkości niezależne, nie znajdujące się ze sobą w żadnym wyraźnym związku.

Dalej wyjaśnić trzeba, że dana wielkość może przybierać szereg różnych **w a r t o ś c i** liczebnych, np. liczba funtów towaru może być rozmaita, droga, którą przechodzimy, również może posiadać rozmaitą liczbę metrów i t. d. Następnie bierzemy dwie jakiekolwiek znajdujące się w zależności wprost proporcjonalnej wielkości i wypisujemy obok siebie całe szeregi ich wartości. Oczywiście robimy to przy pomocy uczniów. Weźmy np. drogę i czas:

1-sza wielkość. Wartości liczebne drogi:	2-ga wielkość. Wartości liczebne czasu:
10 km.	2 godz.
15 „	3 „
$17\frac{1}{2}$ „	$3\frac{1}{2}$ „
25 „	5 „
32 „	$6\frac{2}{5}$ „
36 „	7,2 „
43 „	8,6 „
49,75 „	9,95 „
$61\frac{2}{3}$ „	$12\frac{1}{3}$ „

Takie wypisywanie musi być na razie dość długie, żeby dać czas dzieciom na przyjrzenie się bliższe pisanym ciągom i żeby większa ich liczba wzięła udział w ich tworzeniu. Potem zaczynamy badać te ciągi.

Przedewszystkiem nauczyciel zwraca uwagę na jedną rzecz zasadniczą, mianowicie, stałą szybkość poruszania się, którą zawsze dostaniemy, jeżeli odpowiednią wartość liczebną przebieżonej drogi podzielimy przez wartość liczebną czasu przytem zużytego. Z tego wynika następujący szereg:

$$\frac{10}{2}=\frac{15}{3}=\frac{17{,}5}{3{,}5}=\frac{25}{5}=\frac{32}{6{,}4}=\frac{36}{7{,}2}\;\frac{43}{8{,}6}=\frac{49{,}75}{9{,}95}=\frac{61\frac{2}{3}}{12\frac{1}{3}}= ..5,$$

t. j. ta sama wartość liczebna przedstawiona jest tu przez szereg ilorazów oddzielnych, różniących się od siebie elementami liczbowemi. Takich ilorazów można wytworzyć tyle, ile zechcemy, ale wszystkie są **r ó w n e**. Każdy iloraz tworzy dwie liczby przedstawiające odpowiednie wartości liczebne.

Stała wartość liczebna tych ilorazów jest 5 i nazywa się ich **w y k ł a d n i k i e m**, jest **n a j p r o s t s z ą p o s t a c i ą** omaw i a n y c h i l o r a z ó w. Wykładnik przedstawia zbiór wszystkich możliwych równych ilorazów, z których każdy jest elementem tego zbioru, i nazywa się s t o s u n k i e m.

Dzieciom można mówić o tym zbiorze i o jego elementach, jeżeli przedtem mówiliśmy im o różnych elementach na przykładach różnych zbiorów. Nie jest to rzecz trudna, lecz niezaprzeczenie pożyteczna, gdyż wtedy tylko występuje właściwe znaczenie wykładnika i stosunku.

Każdy stosunek ma tutaj ten sam wykładnik. Ponieważ elementy stosunku, które teraz możemy nazwać jako p o p r z e d n i k i n a s t ę p n i k oraz pisać stosunek w postaci: 17,5 : 3,5, są poza stałym ilorazem dowolne, gdyż możemy wybrać jakąkolwiek liczbę, dobrać drugą 5 razy mniejszą, a stosunek będzie miał ten sam wykładnik. Stąd wyprowadzamy najpierw taką równość: $5a : a = 5$.

Omówione rzeczy należy jeszcze raz albo kilka razy przerobić na innych przykładach i zawsze wyprowadzić odpowiednią formułę. Np. $\frac{3}{4}b : b = \frac{3}{4}$ i t. p.

Po takiem omówieniu możemy dać ogólne określenie stosunku, ale przedtem powinniśmy przypomnieć i podkreślić, że dzielna równa się dzielnikowi pomnożonemu przez iloraz. O reszcie ze zrozumiałych powodów niema mowy.

S t o s u n k i e m d w ó c h l i c z b a i b n a z y w a s i ę t a k a t r z e c i a l i c z b a c, ż e i l o c z y n $bc = a$.

Jeżeli c jest przedstawione w najprostszej postaci, nazywa się wtedy w y k ł a d n i k i e m stosunku, liczby zaś a i b z a w s z e nazywają się p o p r z e d n i k i e m i n a s t ę p n i k i e m. Z tego wynika, że poprzednik równa się następnikowi pomnożonemu przez wykładnik, a następnik — poprzednikowi podzielonemu przez wykładnik.

Czytelnik zechce wniknąć w pewne subtelności, które tutaj zachodzą. Przeciętna nauka szkolna określa stosunek jako „porównanie 2 liczb zapomocą dzielenia". Takie określenie wykracza poza granicę arytmetyki, zawiera coś mistycznego w tem słowie „porównanie". Jeżeli nadamy mu treść arytmetyczną, to musi ono oznaczać albo liczbę, albo działanie. Tertium non datur (trzeciego wniosku niema).

Działania „porównanie" oznaczać nie może, gdyż mielibyśmy przed sobą albo nonsens, albo też powiedzenie: „dzielenie 2 liczb zapomocą dzielenia". Oznacza więc liczbę, a w takim razie, po co to ukrywać w dziwne, nieścisłe obsłonki.

Dalej, stosunek tem się różni od ułamka, że w nim ukryta jest dowolność formy, t. j. niejedna poszczególna postać, ale nieskończona ich mnogość. To między innemi miało na celu prowizoryczne określenie stosunku, jako każdego elementu zbioru ilorazów równych. Ilustracja tego określenia szczególnie jasno występuje w geometrji, w nauce o podobieństwie, gdzie stosunek dwóch np. boków danego trójkąta równa się stosunkowi dwóch odpowiednich boków w innych podobnych do poprzedniego. Pojęcie stosunku w geometrji przybrało charakter czegoś, co niema odpowiednika ani śród liczb, ani też działań i jest jakby nowem pojęciem, które wprowadza się do nauki zapomocą całego szeregu odpowiednich rozumowań i określeń, jak to np. zrobione jest u Euklidesa. Jedną z przyczyn takiego postępowania jest możliwość stosunku niewymiernego, z którym Grek nie umiał sobie na drodze liczbowej dać rady. Dzięki temu do tego pojęcia przyrosły pewne osobliwe cechy, które np. u Galileusza przybrały postać specjalnej formalnej (nikomu niepotrzebnej) nauki. Cała trygonometrja jest właściwem rozwinięciem tego pojęcia w geometrji. W arytmetyce początkowej nie możemy stanąć na stanowisku Euklidesa, a stąd musimy powyższe nasze stanowisko utrzymać.

Przed podaniem określenia ogólnego, dobrze jest na zasadzie wspomnianej własności dzielenia, nadając danemu stosunkowi szereg różnych postaci, wykazywać każdorazowo, że poprzednik, t. j. pierwsza początkowo wzięta liczba równa się następnikowi ,to jest drugiej początkowo wziętej, liczbie pomnożonemu przez daną obraną postać ilorazu.

Cała nauka o stosunku w ten sposób jest skończona. Idziemy teraz dalej w kierunku badania dwóch ciągów wartości liczebnych. Dobrze jest, gdy nauczyciel znowu zastosuje poprzednio rozważane ciągi. Po wypisaniu ich niech weźmie dwie jakiekolwiek wartości pierwszego ciągu i każe uczniowi znaleźć ich stosunek w najprostszej postaci — wykładnika. Następnie to samo zrobi dla odpowiednich wartości drugiego ciągu. Okazuje się, że wykładniki są równe. Sprawdzamy to samo dla 2 par innych wartości i jednocześnie przekonywamy się, że jakkolwiek wykładniki są równe, to jednakże inne niż w poprzednim przypadku. To samo zrobimy w każdym przypadku dwóch ciągów wartości wielkości wprost proporcjonalnych.

Odkryliśmy więc pewne prawo łączące wartości obu ciągów. Jak wyrazić to prawo ogólnie. Nauczyciel podpowiada, że można oznaczyć dwie wartości pierwszego ciągu dajmy na to przez A i a, a dwie odpowiednie drugiego — przez B i b, a wtedy pomiędzy temi liczbami musi istnieć pewna zależność. Jak ją wyrazić? Mówiliśmy, że stosunki odpowiednich par wartości są równe. Jak przedstawić stosunek pierwszej pary wartości? $A : a$ albo $\frac{A}{a}$. Jak przedstawić stosunek drugiej pary wartości? $B : b$ albo $\frac{B}{b}$. Stosunki te są równe, więc:

$$A : a = B : b.$$

To samo można napisać: $a : A = b : B$, co bez trudności można wyprowadzić.

Widzieliśmy dalej, że zachodziła pewna stałość stosunku pomiędzy odpowiedniemi wartościami obu ciągów. Jak ją wyrazić? Piszemy $A : B$ oraz $a : b$, a stąd znowu:

$$A : B = a : b.$$

Nie wprowadzamy na razie pojęcia proporcji, ale uważny czytelnik widzi, żeśmy już do niego doszli i że nawet badanie ciągów doprowadziło nas do pewnej własności proporcji, polegającej na możliwości przestawiania wyrazów.

Teraz należy wyprowadzić określenie zależności wprost proporcjonalnej. Takich określeń może być dwa. Pierwsze opiera się na stałości stosunku dwóch odpowiednich wartości.

Przyjęcie pierwszego albo drugiego określenia wpłynie na przebieg całego dalszego postępowania. Jeżeli chodzi o pewną jednolitość tego postępowania, to cokolwiek lepsze jest drugie i z niego właśnie wyprowadzona została sama nazwa omawianej zależności funkcjonalnej, a zarazem utarte jej stosowanie. Nie chcę jednakże odbierać, jeżeli tak można się wyrazić, nauczycielowi możności obrania za podstawę pierwszego określenia tembardziej, że, jak się później okaże, ma ono zastosowanie i w dzisiejszej praktyce w ukrytej formie oraz mieć może pewne wygodniejsze ze stanowiska dydaktycznego cechy. Dlatego podam obydwa określenia i będę wskazywał później, gdzie i kiedy każde z nich jest stosowne i wygodniejsze.

Wielkościami wprost proporcjonalnemi nazywamy takie, w których stosunek odpowiednich wartości jest zawsze stałą liczbą.

Drugie określenie brzmi:

Dwie wielkości nazywamy wprost proporcjonalnemi, jeżeli stosunek pary wartości jednej z nich zawsze się równa stosunkowi pary odpowiednich wartości drugiej.

Rzecz jasna, że te definicje logicznie są równoważne.

Nauczyciel winien o owej równoważności uczniów przekonać, co nie jest trudne.

Jeżeli bowiem $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = m$, to $A = am$ i $B = bm$.

stąd $\frac{A}{B}$ musi być równe $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$, t. j. druga definicja jest spełniona. Jeżeli naodwrót, $\frac{A}{B} = \frac{a}{b} = n$, to $A = Bn$, $a = bn$, stąd zaś $\frac{A}{a}$ musi być równe $\frac{Bn}{bn} = \frac{B}{b}$ czyli spełniona jest pierwsza definicja.

Jeżeli czytelnik dobrze się przyjrzy tokowi wykładu nauki o stosunku i pojęciu o zależności wprost proporcjonalnej, zauważy, że idziemy w kolei t. zw. stopni formalnych. Zostało się nam jeszcze zastosowanie, ale przedtem parę słów o „odkrywaniu zależności wprost proporcjonalnej". W praktycznem zastosowaniu ważne jest szybkie skonstatowanie, czy istnieje tu zależność wprost proporcjonalna, czy też nie. Oczywiście nie byłoby wygodną rzeczą wypisywanie ciągów całych i zresztą jest to niepotrzebne.

Odkrywanie faktyczne może się odbywać albo zapomocą prostego stosowania pierwszej definicji, albo też drugiej. Np. mamy kapitał i pieniądze procentowe za rok przy danej stopie. Jeżeli staniemy na gruncie pierwszej definicji, powinniśmy odrazu powiedzieć, że stosunek pieniędzy procentowych do kapitału musi być wielkością stałą na zasadzie samego określenia stopy procentowej, a więc te dwie wielkości są wprost proporcjonalne. Jeżeli staniemy na gruncie drugiej definicji, możemy wprost powiedzieć, że gdyby kapitał był 2 razy większy, byłyby dwa razy większe pieniądze procentowe, bo z rubla w ciągu roku dostajemy zawsze tę samą sumę.

Dla dzieci jest dostępniejsze to drugie rozumowanie, przynajmniej tak pouczyła mię praktyka, ale nie chcę sprawy przesądzać, gdyż różnice doprawdy nie są tak wielkie.

Wrazie, gdyby przy jakich dwóch wielkościach tego rodzaju „odkrywanie" praktyczne zależności było trudne, trzeba wypisać ciągi. Nie należy na te rzeczy żałować czasu, gdyż stanowią one podstawę tego całego działu nauczania.

W zastosowaniu do zadań, o których zaraz będzie mowa, przekonamy się, że 2 wspomniane definicje mają znaczenie w praktyce, ale pierwsza w postaci ukrytej t. zw. sprowadzenia do jedności, którego używamy jeszcze w pierwszej klasie. Ciekawa rzecz, że metoda nieraz prostsza w rozwiązaniu zadań jest jakby trudniejsza przy odkrywaniu samej zależności, co szczególnie jasno wystąpi przy zależności odwrotnie proporcjonalnej.

Weźmy teraz parę przykładów.

$15\frac{3}{4}$ f. cukru kosztuje 2 rb. 52 kop. Ile kosztuje $1\frac{1}{2}$ f.?

Wypiszmy dane w postaci tabliczki:

$$\begin{array}{c} 15\frac{3}{4} - 252 \\ \underline{1\frac{1}{2} - \ x\ } \end{array}$$

jak to zwykle się robi i jest naturalnem następstwem rozważania 2 ciągów.

Mamy 2 wielkości: liczba funtów cukru i cena tych funtów. Zależność wprost proporcjonalna: cena jednostki (funta) stała, albo: jeżeli liczba funtów kilka razy się zwiększy, to tyleż razy zwiększyć się musi cena. Stosunek $252 : 15\frac{3}{4}$ wskazuje cenę jednostki towaru i ma wykładnik $= 16$, a więc

$$x = 16 \cdot 1\tfrac{1}{2} = 24.$$

Sposób tu zastosowany jest właściwie sprowadzeniem do jedności, a zarazem da się przedstawić w takiej postaci:

$$x : 1\tfrac{1}{2} = 252 : 15\tfrac{3}{4},$$

czyli opiera się na 1-ej definicji.

Stosując drugą definicję, możemy napisać:

$$\frac{x}{252} = \frac{1\frac{1}{2}}{15\frac{3}{4}} = \frac{2}{21}, \text{ a więc } x = 252 \cdot \frac{2}{21} = 24.$$

Znaleźliśmy najpierw wykładnik stosunku nie zawierającego niewiadomej, a potem ten wykładnik na zasadzie definicji stosunku pomnożyliśmy przez następnik.

W pierwszym przypadku rozkład działań może być taki:

$15\frac{3}{4}$ — 252
1 — 16
$1\frac{1}{2}$ — 24

Tak właśnie zwykle się robi. Weźmy jeszcze jedno zadanie.

Lotnik w 1,5 g. przelatuje $157\frac{1}{2}$ km. W ile godzin przeleci 210 km?

Mamy dwie wielkości: liczbę km. i liczbę godzin. Zale ność jest wprost proporcjonalna, bo szybkość lotnika jest stała, albo: jeżeli liczba kilometrów kilka razy się zmniejszy, musi tyleż razy zmniejszyć się liczba godzin.

Stosunek żądanej liczby godzin do 1,5 g. jest taki sam, jak stosunek $210 : 157\frac{1}{2}$, więc $x : 1\frac{1}{2} = 210 : 157\frac{1}{2} = \frac{4}{3}$, a więc $x = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2$ (g).

Przy każdem zadaniu należy najpierw zapytać, jakie wielkości mamy, czy są zależne, czy nie, a potem jaka jest między niemi zależność i dlaczego taka a nie inna. Można używa zarówno obu sposobów rozwiązania, gdyż czasem jeden jest prostszy od drugiego.

Z tych przykładów wynika, że możemy za podstawowe określenie prostej proporcjonalnej zależności wziąć drugie, ale pierwsze uważać jako ważną jej własność lub, jeżeli nauczyciel uzna to z tych lub innych względów za stosowne, może zmienić ten porządek. Zwykle na tę sprawę nie zwraca się należytej uwagi przy nauczaniu. Jakże może dobrze rozumować uczeń, który nie wie dokładnie, o czem ma myśleć, z czem ma do czynienia?

W ten sam sposób, co poprzednio, rozważamy zależność odwrotnie proporcjonalną. Wyjść można np. z takiej pary wielkości: liczba robotników i czas trwania roboty.

1-a wielkość. Wartości liczebne:	2-a wielkość. Wartości liczebne:
12 rob.	5 dni
16 „	$3\frac{3}{4}$ „
20 „	3 „
24 „	$2\frac{1}{2}$ „
30 „	2 „
36 „	$1\frac{2}{3}$ „
40 „	$1\frac{1}{2}$ „ i t. d.

Układanie tej tablicy odbywać się winno w ten sposób: na zasadzie pierwszej pary danych możemy wywnioskować, że jeden robotnik przez jeden dzień wykonywa $\frac{1}{60}$ część całej roboty, więc np. 16 rob. przez jeden dzień zrobi $\frac{4}{15}$ całej roboty: z czego wnioskujemy, że całość wykonają w ciągu $3\frac{3}{4}$ dni i t. d. Zarówno przy układaniu tej tabliczki, jak poprzednich, stosujemy właściwie metodę rozumowania potrzebną, do rozwiązania zadań na regułę trzech prostą—metodę sprowadzenia do jedności. Stąd widocznem jest, że sama tabliczka służy tylko do uwypuklenia pojęcia zależności proporcjonalnej oraz jej własności. Ściśle mówiąc należałoby wyjść odrazu z równości: $x = ay$ i $xy = m^2$, co w nauczaniu na tem stopniu byłoby niezupełnie odpowiednie. Do równości tych należy jednakże całe rozważanie ostatecznie sprowadzić i same równości można z pożytkiem geometrycznie interpretować za pomocą wykresów.

Łatwiej można układać tabliczkę, jeżeli weźmiemy przykład, w którym wchodzą jako wielkości długość i szerokość prostokąta, którego pole jest dane.

Następnie przystępujemy do badania tabliczki. Przedewszystkiem zwracamy uwagę na to, że iloczyny odpowiednich wartości są równe, t. j. np.:

$$12 \times 5 = 16 \cdot 3\frac{3}{4} = 20 \cdot 3 = 24 \cdot 2\frac{1}{2} \text{ i t. d.}$$

Można to sformułować po rozpatrzeniu kilku takich tabliczek w postaci równości:

$$AB = ab.$$

Dalej, po skonstatowaniu i sformułowaniu tej własności, posuwamy badanie do rozpatrzenia, jak poprzednio, stosunków par odpowiednich wartości. Weźmy, dajmy na to, stosunek: $24 : 40 = 3 : 5$ oraz odpowiedni mu $2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{2} = 5 : 3$.

Widzimy, że ten drugi stosunek jest odwrotnością pierwszego i że tak będzie dla wszelkiej pary odpowiednich stosunków.

Na innych przykładach wielkości odwrotnie proporcjonalnych przekonywamy się o tem samem, wobec czego możemy ostatecznie sformułować to spostrzeżenie tak:

$$A : a = b : B.$$

Z tej własności i poprzedniej wynikają dwie definicje.

Pierwsza: d w i e w i e l k o ś c i n a z y w a m y o d w r o t n i e p r o p o r c j o n a l n e m i, j e ż e l i i l o c z y n o d p o w i e d n i c h w a r t o ś c i l i c z e b n y c h o b u w i e l k o ś c i j e s t s t a ł y.

Druga: d w i e w i e l k o ś c i n a z y w a m y o d w r o t n i e p r o p o r c j o n a l n e m i, j e ż e l i s t o s u n e k p a r y w a r t o ś c i l i c z e b n y c h j e d n e j, r ó w n y j e s t o d w r o t n e m u s t o s u n k o w i p a r y o d p o w i e d n i c h w a r t o ś c i d r u g i e j.

Druga definicja jest analogiczna do drugiej w 1-ym przypadku i na tem, między innemi polega dodatnia jej strona.

Jeżeli liczby A, B, a i b są znane, to definicje są równoważne, gdyż skoro $AB = ab$, to na zasadzie definicji stosunki:

$$\frac{AB}{b} = a \text{ oraz } \frac{ab}{B} = A, \text{ a więc } \frac{A}{a} = \frac{ab}{B} : \frac{AB}{b} = \frac{ab \, . \, b}{AB \, . \, B} = \frac{b}{B}$$

i naodwrót, co łatwo sprawdzić, zakładając $A : a = b : B = m$,

$$\text{stąd } A = am \quad \text{i} \quad B = \frac{b}{m}.$$

Teraz możemy zastosować poznane własności zależności odwrotnie proporcjonalnej do zadań. Weźmy przykład.

P o c i ą g o s o b o w y b i e g n i e o d j e d n e j s t a c j i d o d r u g i e j z s z y b k o ś c i ą 45 km. n a g o d z i n ę i p r z e b i e g a o d l e g ł o ś ć p o m i ę d z y s t a c j a m i w c i ą g u $\frac{2}{3}$ g. W j a k i m c z a s i e t ę s a m ą o d l e g ł o ś ć p r z e b i e g n i e p o c i ą g t o w a r o w y, k t ó r y p o r u s z a s i ę z s z y b k o ś c i ą 30 km. n a g o d z i n ę?

Mamy dane wielkości: szybkość poruszania się pociągu i czas na przejście danej odległości. Wielkości te są odwrotnie proporcjonalne, gdyż iloczyn odpowiednich wartości liczebnych pierwszej i drugiej wielkości jest stały. Albo jeżeli szybkość kilka razy się zwiększy, to na przebieżenie tej samej odległości trzeba tyleż razy mniej czasu.

Sposób sprowadzenia do jedności (pierwsza definicja).

$$45 \text{ km.} - \tfrac{2}{3} \text{ g.}$$
$$1 \ \text{„} - \tfrac{2}{3} \,.\, 45 \text{ g.} = 30 \text{ g.}$$
$$30 \ \text{„} - \tfrac{30}{30} = 1 \text{ g.}$$

Sposób stosunków (def. druga).

$$45 \text{ km.} - \tfrac{2}{3} \text{ g.}$$
$$30 \text{ km.} - \text{x.}$$

Na zasadzie drugiej definicji piszemy:

$$x : \tfrac{2}{3} = 45 : 30 = \tfrac{3}{2}$$
$$x = \tfrac{3}{2} \times \tfrac{2}{3} = 1 \text{ (g.).}$$

Tego jednego przykładu wystarczy do wyjaśnienia sposobu postępowania przy rozwiązywaniu zadań.

Dość często do rozwiązywania tych prostych zadań stosowane są proporcje. Ponieważ nauka o proporcji, prowadzona przed wyjaśnieniem pojęcia o zależności wprost i odwrotnie proporcjonalnej, jest suchą i abstrakcyjną, a stosowane sposoby rozwiązania sztuczne i mało rozumiane, więc słusznie sądzono, że sposób proporcji w tej formie, jak dotąd był podawany, jest nieodpowiedni i niepedagogiczny. Ale, jeżeli wyjdziemy z rozpatrywania i badania wspomnianych zależności na przykładach konkretnych i jeżeli z poznania tych zależności wyłoni się nauka o proporcji, to nie można uważać jej samej w sobie za szkodliwą i niepedagogiczną. Każdej rzeczy można źle uczyć, ale z tego nie wynika, że sama ta rzecz jest zła.

Zbierzemy razem powyżej zanotowane w postaci formuł własności zależności wprost i odwrotnie proporcjonalnej.

Z badania pierwszej dostaliśmy:

$$A : a = B : b,$$
$$\text{oraz } A : B = a : b.$$

Z badania drugiej:

$$AB = ab,$$
$$\text{oraz } A : a = b : B.$$

Jeżeli teraz wprowadzimy określenie proporcji, jako równości dwóch stosunków, możemy, rozważając dwie pierwsze proporcje wywnioskować, że w każdej proporcji można przedstawić wyrazy średnie. Z drugiej strony, napisanie tych proporcji zależy od sposobu wzięcia stosunku (a więc np. albo A : B albo B : A). Możemy więc napisać jeszcze takie proporcje:

$$b : B = a : A$$

$$b : a = B : A.$$

Można więc przedstawiać również wyrazy skrajne i wyrazy w każdym stosunku jednocześnie. Jednem słowem mamy pierwszą własność proporcji.

Druga własność zasadnicza widoczna jest z porównania dwóch następnych równości. Własność tę formułujemy: iloczyn średnich równa się w każdej proporcji iloczynowi skrajnych wyrazów. Przez rozpatrywanie ciągów możemy własność tę sprawdzić dla każdej oddzielnej wypisanej przez nas proporcji i nawet wyrozumować ją przez mnożenie obu części proporcji przez iloczyn następników.

Opierając się na tej własności, moglibyśmy w poprzedniem zadaniu odrazu napisać:

$$x \times 30 = \tfrac{2}{3} \,.\, 45 \quad \text{czyli} \quad x = \frac{2 \,.\, 45}{3 \,.\, 30} = 1.$$

Nic osobliwego, oczywiście, taki sposób nam nie daje, ale, jeżeli kto stosuje proporcje, należy mu w takim razie polecić stosowanie tej rzeczy właśnie w ten sposób.

Powyżej przerobione przykłady należą do zadań na t. zw. regułę trzech prostą. Trzeba dość dużo przerobić tego rodzaju zadań, żeby uczniowie przedewszystkiem opanowali jasno sprawę badania zależności między danemi wielkościami i nauczyli się porządnie, dokładnie i wprawnie rozumować, t. j. wskazywać dane wielkości, odkrywać ich zależność i wykonywać stopniowo każdy szczegół rozwiązania. Bardzo ważny jest ten tok rozumowania, a dlatego, co nastąpi, ważna jest jasna świadomość każdego szczegółu rozwiązania.

Zwykle przy rozwiązywaniu zadań na regułę trzech złożoną, o której teraz wypada nam mówić, wprowadzamy więcej niż 3 wielkości do zadania. Z różnych względów nie jest to słuszne. Zadania praktyczne, w których byłoby to potrzebne, są bardzo rzadkie, a rzecz sama jest tylko żmudna, ale nie pouczająca. Dlatego godnem jest zalecenia z początku, t. j. przed powtórzeniem całego kursu 6-go działu, nie dawać więcej niż trzy wielkości w zadaniach. Do wyjaśnienia istoty rzeczy to wystarczy, jak również dla późniejszego zastosowania czy to przy rachunku procentów, czy mieszaniny lub dyskonta. Po przejściu całego kursu można sobie pozwolić na podobne zadania, w których wchodzi więcej niż 3 wielkości, gdyż wtedy uczniowie będą mieli taką wprawę w robieniu odnośnych zadań, że nie uczyni to im żadnej trudności, a nawet może wywołać pewne zainteresowanie.

Zadania na regułę trzech złożoną będziemy robili również dwoma sposobami, jeżeli nie liczyć proporcji. Trzeci, skrócony sposób zjawić się winien dopiero przy końcu, gdy nauczyciel będzie miał pewność, że całość przedmiotu jest dobrze opanowana.

Weźmy dla przykładu zadanie.

Czterech zecerów wciągu 3 dni składa 50 stron książki. W ile dni 6 zecerów jest w stanie złożyć 40 stron tejże książki?

Mamy trzy wielkości: liczba zecerów, liczba dni i liczba stron książki. Stałemi są wydajność pracy dziennej każdego zecera i, oczywiście, wielkość strony. Niewiadomą, liczba dni w drugim przypadku.

Wypiszmy zadanie w zwykłej postaci:

$$\begin{array}{llll} 3\text{ d.} & — 4\text{ z.} & — 50\text{ str.} \\ x & — 6 & — 40 \end{array}$$

Pomiędzy liczbą dni, a liczbą zecerów (przy stałej liczbie stron złożonych) jest zależność odwrotnie proporcjonalna. Wykrycie jej odbywa się tak, jak było powyżej. Pomiędzy liczbą dni, a liczbą stron (przy stałej liczbie zecerów) jest zależność wprost proporcjonalna.

Oczywiście, gdyby znowu liczba dni nie zmieniała się, to pomiędzy liczbą zecerów, a liczbą stron byłaby zależność wprost proporcjonalna.

Sposób sprowadzenia do jedności:

$$50 - 4 - 3$$

$$1 - 4 - \frac{3}{50}$$

$$1 - 1 - \frac{3 \, . \, 4}{50}$$

$$40 - 1 - \frac{3 \, . \, 4 \, . \, 40}{50}$$

$$40 - 6 - \frac{3 \, . \, 4 \, . \, 40}{50 \, . \, 6} = \frac{1 \, . \, 1 \, . \, 40}{25 \, . \, 1} = \frac{8}{5} = 1\tfrac{3}{5} \text{ (d.)}.$$

Umyślnie nie skracamy w poszczególnych rezultatach, żeby później można było przy przejściu do skróconego sposobu wyprowadzić odpowiednie wnioski. Nauczyciel winien tak samo postępować bezpośrednio przed wprowadzeniem tego sposobu.

Dalej, jak to mówliśmy już poprzednio przy ułamkach, nie przekreślamy przy skracaniu żadnej liczby, a to dlatego, że po takiem przekreśleniu trudno odkryć możliwą zawsze omyłkę.

Sposób stosunków.

Jeżeliby liczba stron wynosiła, jak poprzednio 50, to mielibyśmy zadanie na prostą regułę trzech i w takim razie moglibyśmy znaleźć odpowiednią wartość na liczbę dni, którą oznaczymy w tym przypadku przez y. Ponieważ pomiędzy liczbą dni, a liczbą zecerów jest zależność odwrotnie proporcjonalna, więc możemy napisać:

$$y : 3 = 4 : 6$$

czyli $y : 3 = \tfrac{2}{3}$,

a stąd $y = 2$ (d.).

Lecz otrzymana liczba dni odpowiadałaby potrzebie złożenia 50, nie zaś 40 stron druku, stąd nie jest ona liczbą żądaną. Ponieważ pomiędzy liczbą dni, a liczbą stron przy danej stałej liczbie zecerów (6) zależność jest wprost proporcjonalna, więc:

$$x : 2 = 40 : 50 = \tfrac{4}{5},$$

a stąd $x = \tfrac{8}{5} = 1\tfrac{3}{5}$ (d.).

Przykład powyższy może dać jasne pojęcie o tem, jak należy sobie radzić z podobnemi zadaniami i dlatego nie będziemy już więcej przykładów przytaczać, powiemy natomiast parę słów o skróconej metodzie rozwiązania. Polega ona na tem, że postawiwszy kreskę, piszemy nad nią i pod nią odpowiednie liczby z danych w zadaniu, a następnie skracamy i otrzymujemy rezultat. Zbyt pośpieszne wprowadzenie tego skróconego sposobu bez schematów podanych wyżej jest szkodliwe, gdyż wobec niejasności jeszcze całego procesu rozwiązania, zbyt prędkie przejście do skrócenia przyzwyczaja dzieci tylko do zapamiętywania sposobu, a nie do spokojnego i logicznego myślenia. Wobec tego najpierw należy kolejno wypisywać w sposobie sprowadzenia do jedności wszystkie momenty rozwiązania tak, jak to podano powyżej; potem, gdy nauczyciel przekona się, że dzieci bez omyłki, wprawnie i świadomie rozwiązują zadania, można zwrócić uwagę na ostateczny rezultat i wskazać, iż może on być otrzymany krócej, bez długiego zapisywania. Stawiamy wtedy kreskę i powtarzamy rozwiązanie po raz drugi, zapisując odpowiednie liczby kolejno nad i pod kreską. Kilka tak zrobionych przykładów wystarczy, żeby dzieci nabrały odpowiedniej wprawy i mogły przejść do skróconego sposobu. Nie należy jednakże zapominać o rozumowaniu przy takiem rozwiązaniu i o sposobie stosunków, który w tem ćwiczeniu rozumowania nie jest do pogardzenia.

Po skończeniu z regułą trzech złożoną mamy przed sobą cały szereg innych „reguł", o których najpierw w ogólności należy kilka słów powiedzieć. Reguły powstały na tle zadań wysuwanych przez praktykę kupiecką, zgodnie też z duchem dawnej matematyki, która szukała wszędzie prawideł na rozwiązanie, nazywanych regułami, oraz stosowała te prawidła we wszystkich jednakowych przypadkach. Wobec tego, oczywiście, sposób dochodzenia do rozwiązania, teorja i te pojęcia, które potrzebne były, aby rozwiązać dane zadanie, nie były potrzebne: podawano prawidło, regułę i nauczanie na tem się ograniczało. Dzisiaj nie rozumiemy tak schematycznie nauczania, staramy się wyjaśnić samo powstanie sposobu rozwiązania, potrzebne do tego pojęcia, dać teorję rzeczy, aby umysł drogą logiczną doszedł do zrozumienia potrzeby i celowości danej reguły. Pomimo to nazwa pozostała, a z nią często kołacze się sam duch starej metody.

Wszystkie zadania na t. zw. reguły opierają się na pojęciu zależności wprost i odwrotnie proporcjonalnej. Jeżeli to pojęcie jest jasno wyklarowane, jeżeli t. zw. zadania na regułę trzech nie budzą już trudności, rozwiązywanie zadań na inne reguły jest sprawą prostą i wymaga tylko dokładnych wyjaśnień rzeczowych, dotyczących tych zagadnień życia praktycznego, które zadania te poruszają oraz pewnych uzupełnień i pogłębienia samej metody zawartej w regule trzech.

Zwykle natychmiast po ogólnej wprawie w rozwiązywaniu zadań na regułę trzech występują zadania na rachunek procentów. Tutaj należy zwrócić uwagę na szereg wadliwości w przeciętnym wykładzie. Przedewszystkiem samo określenie procentu często jest mylne. To określenie w postaci: „procentem nazywamy zysk lub stratę wciągu roku z setki kapitału" jest słuszne, ale niewystarczające. Należy dać najpierw ogólne: Procentem nazywamy określoną liczbę setnych części danej liczby lub wielkości jej odpowiadającej.

Najpierw pamięciowo przerabiamy szereg przykładów w rodzaju: znaleźć 5% liczby, 3, 7% liczby uczniów w klasie i t. p. Potem, gdy uczniowie zrozumieją i wprawią się w używaniu tego, można w odniesieniu do praktyki handlowej dać określenie procentu w powyższej formie.

Drugim często robionym błędem jest przeładowanie tego działu sztucznemi zadaniami, nie używanemi w praktyce handlowej i mającemi charakter czysto teoretyczny. Takie zadania, których segregacja występuje na tle brania za niewiadomą albo pieniędzy procentowych, albo czasu, albo stopy procentowej, albo kapitału początkowego, są dowodem, jak z rzeczy nieodpowiednich robi się sztucznie quasi-teorję. Jeżeli uczeń jasno sobie zdaje sprawę z wielkości wchodzących do każdego zadania oraz z ich zależności, jest kwestją zupełnie obojętną, która z wielkości będzie niewiadomą, a segregacja powierzchowna na t. zw. „typy" przyzwyczaja go tylko do zapamiętywania reguł rozwiązania, a nie uczy myśleć.

Jednym z jaskrawych przykładów jest wypadek, gdy mamy dany kapitał z procentami, których oddzielić bezpośrednio nie możemy. Podaje się tutaj sposób rozwiązania odmienny, nie wyjaśniając należycie dlaczego ten właśnie sposób jest tu potrzebny, a uczeń stara się zapamiętać zarówno ten sposób, jak i okoliczności, w których go się używa. Najczęściej właśnie tylko tyle. Z takiej nauki wypada ten wynik, że uczniowie klas wyższych z trudnością sobie dają radę z zadaniem arytmetycznem, bo zapomnieli sposoby, a istota rzeczy nigdy nie była dla nich jasna, co nieraz również usilnie podkreślają nauczyciele fizyki, zaznaczając, iż uczniowie tych klas często wcale nie pojmują zależności proporcjonalnej. W tym przypadku widzimy właśnie pozostałość dawnych reguł, dawnego powierzchownego schematyzmu.

Powyżej zaznaczone zadanie, jeżeli uczeń odrazu został przyzwyczajony do sumiennego badania zależności między wielkościami, nie może przedstawić czegoś osobliwego, należy tylko dokładnie wyjaśnić, że zależność pomiędzy kapitałem razem z procentami a czasem nie jest zależnością proporcjonalną, t. j. nie spełnia żadnej z definicji tej zależności. Żeby o tem przekonać uczniów, najlepiej jest wziąć konkretny przykład i poddać go badaniu. Weźmy taki przykład. Niech będzie kapitał 200 rb. i stopa procentowa 5.

Po	1 r.	kapitał ten	zmieni	się na	210	
„	2 l.	„	„	„	220	
„	3 l.	„	„	„	230	
„	4 l.	„	„	„	250	
„	$4\frac{1}{2}$ l.	„	„	„	256	i. t. d.

Jeżeli weźmiemy stosunek dwóch jakichkolwiek elementów pierwszego ciągu, nie równa się on ani prostemu, ani odwrotnemu stosunkowi dwóch odpowiednich elementów drugiego. Stąd wnioskujemy, że pomiędzy wielkościami: kapitał z procentami i czas nie istnieje zależność proporcjonalna, a dlatego zadanie, w które te wielkości wchodzą nie może być rozwiązane zapomocą reguły trzech. Z drugiej strony, jeżeli weźmiemy dwa kapitały z procentami przy danym jednakowym czasie, to pomiędzy niemi zależność proporcjonalna istnieje. Np., niech będą 2 kapitały: 200 rb. i 300 rb., a stopa procentowa 5.

	200 rb.		300 rb.
Po 1 roku I-y kapitał zamieni się na	210 „	— II-gi na	315 „
Po 2 latach „ „ „ „ „	220 „	„	330 „
Po 3 „ „ „ „ „ „	230 „	„	345 „

i t. d.

Stosunek dwóch elementów, np. 210 i 230 pierwszego ciągu wynosi: 210 : 230 = $\frac{21}{23}$, a dwóch odpowiednich elementów drugiego: 315 : 345 = $\frac{21}{23}$. To samo będzie z każdą parą stosunków elementów odpowiednich. Z tego wynika, że te dwie wielkości są wprost proporcjonalne.

Można tutaj zastosować również prawo rozdzielności i na jego zasadzie dojść do wniosku o proporcjonalności.

Z tego rozważania wynika, że, jeżeli za jeden kapitał z procentami weźmiemy dany w zadaniu, a za drugi np. 100 z procentami też otrzymanemi w tym samym czasie, to proporcjonalność będzie istniała i na tem możemy oprzeć rozwiązanie. Tym drugim kapitałem może być tak samo dobrze 1, jak każdy inny kapitał, ale 100 jest wygodniejsze, bo łatwiej obliczać procenty.

Po przerobieniu szeregu zadań na procenty, dobrze jest wprowadzić formułę i zapomocą niej prowadzić obliczenia. Taka formuła ze względu na krótkość i łatwość rachunku używana jest w praktyce handlowej, z czem nauczanie z różnych względów liczyć się winno. Z jednej strony taka formuła ma wartość dydaktyczną, jako wyraz skondensowany poznanych rzeczy, z drugiej — zbliża naukę do życia praktycznego.

Taką formułę można podać w kilku postaciach zależnie od tego, czy weźmiemy za jednostkę czasu rok, czy też miesiąc lub dzień. Podamy tu formułę uzależnioną od ostatniej jednostki i przytem tak, jak to się używa na kontynencie, gdyż w Anglji rok liczą dokładniej — 365 dni, a na kontynencie 360.

Mamy: $$p = \frac{K \, . \, d \, . \, s}{36000},$$

gdzie p — są pieniądze procentowe, K — kapitał, d — liczba dni, s — stopa procentowa.

Formułę tę można przedstawić w takiej formie:

$$p = K \, . \, d \, . \, \frac{s}{36000}$$

wobec czego obliczenia w praktyce prowadzą się nieraz tak, że są ułożone tabelki, w których podana jest wartość spółczynnika $\frac{s}{36000}$, i wartość tę mnożymy potem przez Kd.

Np. dla 2% ten spółczynnik jest równy $\frac{1}{18000}$

„ $2\frac{1}{4}$% „ „ „ „ $\frac{1}{16000}$

„ $3\frac{1}{3}$% „ „ „ „ $\frac{1}{10800}$

„ 4% „ „ „ „ $\frac{1}{9000}$ i t. d.

Przy obliczaniu formuł wygodnie jest stosować nieraz tak zwaną „praktykę welficką", polegającą na rozkładaniu danego ułamka na ułamki t. zw. pierwotne, t. j. mające w liczniku 1. Weźmy przykład:

Trzeba obliczyć 5% od kapitału 7624,65 rb. za 43 dni.

Z formuły dostajemy:

$$p = \frac{7624{,}65 \, . \, 43 \, . \, 5}{36000} = \frac{7624{,}65 \, . \, 43}{7200} = 76{,}2465 \, . \, \tfrac{43}{72} =$$

$$= 76{,}2465 \, . \, (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{72});$$

$$76{,}2465 \, . \, \tfrac{1}{2} = 38{,}1232,$$

$$\text{„} \quad \tfrac{1}{12} = 6{,}3539,$$

$$\text{„} \quad \tfrac{1}{72} = 1{,}0589,$$

$$\overline{45{,}54}$$

czyli $p = 45{,}54$ rb.

Oczywiście cały rachunek jest wykonany z przybliżeniem, jak to się robi w handlowych obliczeniach. Więc np. w pierwszej i ostatniej z otrzymanych liczb opuściliśmy pewną cząstkę, w drugiej wzięliśmy z nadmiarem oraz rezultat jest obliczony też z nadmiarem, ale tak, że przez to omyłka jest mniejsza. Te rzeczy mogą być tutaj w takich elementarnych przykładach uczniom wytłumaczone.

Rzecz jasna, że z powyższej formuły można nie tylko obliczać pieniądze procentowe, ale również kapitał, liczbę dni i t. p.

Z obliczeniami procentowemi blisko się wiąże tak zwane dyskonto weksli.

Sprawa to czysto praktyczna, handlowa i wymaga też praktycznego traktowania. Nauczyciel przedewszystkiem powinien całą sprawę dokładnie przedstawić, a dlatego powinien opowiedzieć jaką rolę odgrywa weksel, jakie ma znaczenie w handlu, przedewszystkiem zaś powinien uczniom pokazać blankiet wekslowy naklejony na tekturce, wyjaśniając znaczenie każdego szczegółu i podając odpowiednie nazwy. Takie wyjaśnienia mają wielkie znaczenia dydaktyczne, zapoznają dzieci z pewnemi ważnemi sprawami życia rzeczywistego i stosunków ludzkich, a z zadań robią nie sztuczne przeróbki, a realne zagadnienia.

Można się oczywiście sprzeczać, czy umysł ucznia 3-ej klasy jest przygotowany do zrozumienia tych rzeczy, ale jedno jest pewne, że brak wyjaśnień zawsze czyni ten dział nauki pustym i nudnym.

Doświadczenie uczy, że dobrze zrobione objaśnienie, pobudzanie uczniów do pytań, wskazanie im na pewne fakty życiowe znane ze słyszenia, ale nie rozumiane jasno lub wcale nie uświadamiane, pobudza na tyle ich zainteresowanie, że można na niem się oprzeć i wypędzić zmorę nudy z klasy, gdzie pracujemy. Z drugiej strony nie zapominajmy nigdy, że szczególnie dla naszego kraju jest rzeczą ważną dokładniejsze poznanie stosunków handlowych nie tylko śród przedstawicieli handlu, ale śród szerokich mas. Jest to ważna dźwignia ekonomicznego odrodzenia naszej Ojczyzny, podźwignięcia różnych koniecznych funkcyj życia materjalnego, a tem samem zbudowania trwałego fundamentu narodowej kultury i niezależności.

Dyskonto zwykle zjawia się w szkole w dwóch postaciach: jako dyskonto handlowe i matematyczne, przyczem nieraz spotykamy się z mylnym poglądem, że dyskonto matematyczne jest sprawiedliwe, a handlowe nie. Każdy z tych sposobów dyskontowania jest oparty na pewnej umowie, która ma za sobą realne warunki życia odnośnego, opiera się o potrzeby praktyki. Jest niewłaściwością ocenianie tych spraw, które płyną z potrzeb realnego życia terminem: sprawiedliwy lub niesprawiedliwy. Dyskonto handlowe jest nawet sprawiedliwsze z różnych względów, niż matematyczne, bo stawia płacącego przed terminem w wygodniejsze warunki, a tem samem ożywia obrót pieniężny i wzrastanie bogactwa.

O tych rzeczach nauczyciel powinien powiedzieć uczniom, powinien podkreślić, że dyskontowanie nie jest czemś wypływającem z natury rachunku, lecz sposobem, *umową*. Przytem można nazywać dyskonto handlowe, dyskontem *od 100*, co podkreśla jego istotną właściwość, a dyskonto matematyczne — dyskontem *na sto*.

Określenie dyskonta matematycznego może być podane jeszcze inaczej, a mianowicie: „zdyskontować weksel matematycznie, znaczy, znaleźć taki kapitał, który za czas pozostały do terminu zamieni się na walutę weksla”. W ten sposób dyskonto matematyczne będzie zwykłem, znanem zadaniem na procenty.

Poza tem dyskontowanie nie wysuwa jakichś szczególnych zagadnień. Jedno jeszcze nadmienimy, że dyskontowanie, szczególnie handlowe, może się nieraz praktyczniej odbywać przy innym sposobie rachowania, niż się to zwykle odbywa. Ten sposób pedagogicznie i praktycznie jest słuszniejszy. Weźmy np. zadanie: *weksel o walucie 4600 rb., którego termin przypada 16 lipca był zdyskontowany 1 czerwca przy stopie 6; ile zapłacono?*

Od 1-go czerwca do 16 lipca mamy 45 dni (a);

6% odnośnie do 45 wynosi $\frac{6 \cdot 45}{360}\% = \frac{3}{4}\%$ kapitału (b);

$\frac{3}{4}\%$ od 4600 rb. wynosi $\frac{4600 \cdot 3}{400} = 34{,}50$ rb. dyskonta (c);

4600 rb. — 34,50 = 4565,50 rb. (d).

Dyskonto handlowe robione w ten sposób jest ze względu na praktyczność i jasność wygodniejsze. Przy dyskoncie segregacja utarta zadań z przenoszeniem niewiadomej jest jeszcze więcej teoretyczna, niż przy procentach, gdyż w praktyce żądania tego rodzaju, jak poszukiwanie stopy dyskonta lub czasu zdarzają się bardzo rzadko. Należy najpierw dyskonto handlowe przerobić wskazanym tu sposobem, potem można przejść do „szkolnego" sposobu, a za nim do dyskonta matematycznego.

Przy tym „szkolnym" sposobie można oczywiście uwzględnić jako ćwiczenie i wspomniane zadania teoretyczne, nie kładąc na nie zbytniego nacisku.

Jednym z najbardziej związanych z pojęciem zależności proporcjonalnej rodzai zadań w ostatnim dziale arytmetyki są tak zwane zadania na podział proporcjonalny prosty i złożony. Zwykłe traktowanie tego działu jest jednakże znowu schematyczne i sztuczne, co szczególniej odbija się w zadaniach, gdzie liczb, do których należy podzielić proporcjonalnie, jest więcej niż 2. Muszę tej sprawie parę słów poświęcić.

Przypuśćmy, że mamy zadanie: liczbę 3570 podzielić proporcjonalnie do liczb 3 i 4.

Określamy: podzielić proporcjonalnie do danych 2 liczb znaczy podzielić na takie 2 części, żeby stosunek tych części równał się stosunkowi danych liczb prostemu lub odwrotnemu, zależnie od jakości proporcjonalności. To określenie później można rozszerzyć na większą liczbę części.

Niech, jak to się zwykle robi, szukane części danej liczby będą I i II, w takim razie:

$$\mathrm{I} : \mathrm{II} = 3 : 4.$$

Mamy więc przed sobą proporcję, a w proporcji można wyrazy średnie przestawić, więc:

$$\mathrm{I} : 3 = \mathrm{II} : 4 \quad \text{czyli} \quad \frac{\mathrm{I}}{3} = \frac{\mathrm{II}}{4}$$

t. j. trzecia część pierwszej części danej liczby równa się $\frac{1}{4}$ — drugiej. Oznaczmy każdą z tych równych sobie części szukanych liczb przez *a*, wtedy:

$$\begin{array}{r} \mathrm{I} = 3\,\mathrm{a} \\ \mathrm{II} = 4\,\mathrm{a} \\ \hline \mathrm{I} + \mathrm{II} = 7\,\mathrm{a}, \end{array}$$

$$\text{a więc } 3570 = 7\,\mathrm{a}, \text{ skąd } \mathrm{a} = 510$$

$$\text{i } \mathrm{I} = 1530, \text{ a } \mathrm{II} = 2040.$$

Rozumowanie tu przedstawione jest zupełnie naturalne i nie może budzić u ucznia, którego dobrze uczono poprzednio, żadnych wątpliwości. Oczywiście robimy z niego wniosek w postaci zwykłego rozwiązania tych zadań. Wobec zależności odwrotnie proporcjonalnej rozumujemy tak samo.

Przy podziale na dwie części można już zwrócić uwagę na pewien ważny poźniej fakt.

Mianowicie równość: $\frac{I}{3} = \frac{II}{4}$ można przedstawić jak następuje:

$$I \times \tfrac{1}{3} = II \times \tfrac{1}{4}.$$

i rozpatrywać te dwa iloczyny, jako iloczyny odpowiednich wyrazów proporcji, a stąd tę proporcję ułożyć, biorąc np. jeden iloczyn za wyrazy średnie, a drugi za skrajne. Dostaniemy przytem:

$$II : I = \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4} \quad \text{albo} \quad I : II = \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{3}.$$

Rzecz zrozumiała, że proporcji można ułożyć więcej, ale wszystkie one zapomocą przestawienia wyrazów sprowadzić się dadzą do drugiej lub pierwszej z napisanych postaci, o czem można się przekonać wykonywając wszelkie możliwe przestawienia.

Z tego wypływa, że jeżeli dwie szukane liczby są proporcjonalne wprost do 3 i 4, to są odwrotnie proporcjonalne do $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ i naodwrót. Z tego korzystamy później przy podziale odwrotnie proporcjonalnym do szeregu liczb.

Dalej występuje podział wprost proporcjonalny do 3 liczb, np. do 3, 4 i 5. Piszemy:

$$I : II = 3 : 4$$
$$II : III = 4 : 5.$$

U m ó w i o n o s i ę z a p i s y w a ć t o k r ó c e j t a k:

$$I : II : III = 3 : 4 : 5.$$

Tutaj, rzecz jasna, w ten sam sposób, co poprzednio dojdziemy z 2 proporcji do szeregu równości:

$$\frac{I}{3} = \frac{II}{4} = \frac{III}{5} = a \text{ i t. d.}$$

Wprowadzenie przy odwrotnej proporjonalności szeregu:

$$I : II : III = \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{5}$$

nie przedstawia już wobec poprzedniego trudności.

Należy jednakże podać jeszcze inny sposób rozwiązania, mianowicie:

$$\text{I} : \text{II} = 4 : 3$$
$$\text{II} : \text{III} = 5 : 4$$

Stosunek się nie zmieni, jeżeli poprzednik i następnik jednocześnie zwiększymy lub zmniejszymy przez jedną i tę samą liczbę. Podzielimy wyrazy pierwszego stosunku przez 12 (4 × 3), a drugiego przez 20 (4 × 5), wtedy dostaniemy:

$$\text{I} : \text{II} = \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4}$$
$$\text{II} : \text{III} = \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{5},$$

czyli w skróceniu, bo można już tak zrobić, jak poprzednio:

$$\text{I} : \text{II} : \text{III} = \tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{4} : \tfrac{1}{5}.$$

Teraz należy liczby te sprowadzić do wspólnego mianownika:

$$\text{I} : \text{II} : \text{III} = \tfrac{20}{60} : \tfrac{15}{60} : \tfrac{12}{60},$$

a stąd $\text{I} : \text{II} : \text{III} = 20 : 15 : 12.$

Oczywiście, że to samo można było zrobić na początku, szukając najmniejszej wielokrotności dla liczb 5 i 3, co bezpośrednio wypływa z równości

$$\frac{\text{I}}{4} = \frac{\text{II}}{3}$$

$$\frac{\text{II}}{5} = \frac{\text{III}}{4},$$

gdzie po sprowadzeniu do wspólnego mianownika ułamków $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{5}$ rozumujemy, jak następuje:

jeżeli $\frac{\text{II}}{5} = \frac{\text{III}}{4}$, to $\frac{\text{II}}{15} = \frac{\text{III}}{12}$ i tak samo $\frac{\text{II}}{15} = \frac{\text{I}}{20}$,

a więc $\frac{\text{I}}{20} = \frac{\text{II}}{15} = \frac{\text{III}}{12}$, czyli $\text{I} : \text{II} : \text{III} = 20 : 15 : 12.$

Ostatnią równość można zastąpić za pośrednictwem takiej:

$$\text{I} : \text{II} : \text{III} = 20a : 15a : 12a \text{ i t. d.}$$

Te rzeczy należy gruntownie przerobić, a dlatego zajmą one sporo czasu. Praktyka dowodzi, że uczniowie przyuczają się wykonywać je mechanicznie, bardzo rzadko rozumiejąc ich istotę. Dlatego trzeba podać taką metodę, którąby pozwoliła jasno i prosto rozumować. Powyżej zaznaczona, pomimo pozorów, posiada tę zaletę, że każdy krok w niej jest odwołaniem się do rzeczy znanych, a więc może być wysłowiony i jasno rozumiany.

Po tem wszystkiem mogą nastąpić przykłady, w których dane są już nie szeregi liczb, a stosunki. Przytem, oczywiście, ostatnie ćwiczenia z odwrotną proporcjonalnością są przejściem do nich i przygotowaniem. Podział proporcjonalny złożony przy użyciu metody sprowadzenia do jedności nie posiada żadnych osobliwych cech, budzących zastanowienie i trudności. Dlatego nie będę się o nim rozpisywał.

Prócz podziału proporcjonalnego robią w szkole zwykle jeszcze zadania na mieszaninę, gdzie, szczególniej t. zw. zadania 2-go rodzaju, budzą pewne trudności u uczniów. Weźmy dla przykładu zadanie: kupiono, płacąc za każdy funt po 1 rb. 40 k., 30 f. herbaty dwóch gatunków zmieszanych razem: po 1 rb. 20 k. i po 1 rb. 50 k. Ile funtów było każdego gatunku w mieszaninie, jeżeli sprzedaż odbyła się bez straty i zysku?

Ponieważ na każdym funcie pierwszego gatunku zarobiono 20 k., więc na $\frac{1}{20}$ f. zarobiono 1 k.; tak samo na $\frac{1}{10}$ f. drugiego — tracono 1 k. Niech liczba funtów pierwszego będzie x, a liczba funtów drugiego — y. Wobec tego, że nie było ani straty, ani zysku, na pierwszym gatunku zarobiono tyleż kopiejek, co stracono na drugim, inaczej mówiąc $\frac{1}{20}$ tyle razy mieści się w x, ile $\frac{1}{10}$ w y,

$$\text{a stąd } x : \tfrac{1}{20} = y : \tfrac{1}{10},$$

$$\text{czyli } x : y = \tfrac{1}{20} : \tfrac{1}{10} = 1 : 2.$$

Takie rozumowanie prędzej trafia do głowy, jakkolwiek nie zawsze jest używane.

Co się tyczy sposobu zamiany monet należy się ograniczyć na prostych przykładach, nie starając się, jak to często bywa w podręcznikach, używać w zadaniu możliwie wielkiej ilości różnych monet. W praktyce to się nie zdarza, a robienie w szkole zadań trudniejszych, niż wymaga praktyka, nie jest słuszne, tem bardziej, że sama rzecz niczego pouczającego dla myślenia nie zawiera.

Cały ten ostatni dział arytmetyki początkowej stanowi jedną całość przesiąkniętą jednem pojęciem zasadniczem: prostej i odwrotnej zależności proporcjonalnej. Na wyjaśnienie tego pojęcia, jasność rozumowania, umiejętność i sprawność rachunku należy przedewszystkiem główną zwrócić uwagę.

W szkole średniej, gdzie zakończenie arytmetyki wymaga przejścia do następnego działu matematyki, t. zw, algebry, konieczne jest szersze stosowanie różnych formuł, które w sposób zwięzły przedstawiają treść odnośnych zagadnień. Te formuły dla szkoły elementarnej wyższej są również pożyteczne, jak to w tej książce nieraz mówiliśmy, bo stanowią koronę, właściwe zakończenie długiego procesu indukcyjnego. Można je układać i dla dyskonta, i dla mieszaniny, i dla podziału proporcjonalnego, a także nie należy zapominać o poprzednich, dotyczących własności głównych działań arytmetycznych. Arytmetyka dla wielu ludzi jest całą ich wiedzą matematyczną, a dla innych — podstawą dalszej nauki. W obu przypadkach tylko pomyślane głębiej, z nauką i umysłowością dziecka liczące się nauczanie jest stosowne i pożyteczne.

Dodam tu jeszcze kilka uwag. W dziale szóstym pojęcia geometryczne mogą dużo wyjaśnić i duże oddać usługi. Np. używanie papieru milimetrowego i wykreślanie na nim prostych linij odpowiadających prostej zależności proporcjonalnej i hiperboli — dla odwrotnej zależności byłoby rzeczą bardzo pożyteczną. Można wszystko odnieść tylko do pierwszego kąta Descartes'owego układu spółrzędnych, a później w miarę rozszerzania pojęcia liczby na liczby względne i do następnych kątów. Nie zajmuje się tem tutaj dłużej z dwóch powodów: 1-o dlatego, że w szkole elementarnej z różnych ubocznych względów metoda narazie spotkałaby trudności, a 2-o — że w trzeciej części traktującej o nauczaniu geometrji będziemy mówili o tych sprawach gruntowniej i obszerniej.

W rozdziale niniejszym kończy się omawianie poszczególnych lat nauczania arytmetyki. Nie poświęciłem temu omawianiu zbyt dużo miejsca, bo uważam, że nie jest to potrzebne. Szczegółowe i drobiazgowe rozpatrywanie każdej poszczególnej kwestji nauczania jest rzeczą nieraz niepraktyczną. Drobne szczegóły zbyt zależą od warunków nauczania, których przewidzieć niepodobna. Niezmiennemi natomiast pozostają główne linje wytyczne, główne zasady dydaktyczne. Jeżeli nauczyciel jest dobrze przygotowany do swego zawodu (a to jest rzecz najważniejsza), t. j. jeżeli jest człowiekiem myślącym i spostrzegawczym, dla niego te główne linje wystarczą, a nieprzygotowanemu drobiazgi nie pomogą.

W następnych rozdziałach zajmiemy się sprawą nauczania początków algebry.

ROZDZIAŁ III.

W roku szóstym nauczania obok powyżej nadmienionego kursu arytmetyki wprowadzają naukę algebry, która rozpoczyna się albo odrazu przy 2-ch godzinach tygodniowo, albo w półroczu drugiem lub też wtedy, gdy to uzna za możliwe nauczyciel. To ostatnie rozwiązanie uważać należy za najodpowiedniejsze z tego względu, że przejście od arytmetyki do algebry jest i musi być o tyle stopniowo przeprowadzone, by uczeń nie czuł, że ma do czynienia, jak, niestety, zbyt często bywa, z czemś zgoła odmiennem, lecz dalszym, konsekwentnym rozwojem znanych mu już pojęć.

Nauczanie początków algebry przedstawia w praktyce nie mniejsze trudności, niż nauczanie rachunku. Jakkolwiek młodzież jest już starsza i więcej rozwinięta umysłowo, przedmiot sam wysuwa zagadnienia o wiele zawilsze, które nieraz nie są jasne nawet dla samego nauczyciela. Do takich zagadnień należy np. nauka o liczbach względnych. Stanowi ona prawdziwą piętę Achillesową każdego podręcznika i jest poniekąd miarą nie tylko wyrobienia dydaktycznego autora, lecz i jego obznajmienia mniej lub więcej gruntownego z nauką.

Zwykle zaczynają naukę algebry od szablonowego określenia, że algebra odróżnia się od arytmetyki tem, że używa liter zamiast liczb. Wiadomo każdemu, że arytmetyka teoretyczna też używa symboli literowych, a algebra znowu posiada całe działy, jak np. rozwiązywanie równań liczbowych, gdzie rachunek wysuwa się na czoło. Powyższe określenie jest błędne, a gdybyśmy chcieli dać właściwe, musielibyśmy używać takich pojęć, które dla rozumu ucznia w każdym razie nie byłyby przystępne. Takie określenie jest trudne zresztą nie tylko dla uczniów. Zupełnie tak samo jak wiele zagadnień chemji wkracza w dziedzinę fizyki i odwrotnie, tak też wiele pojęć arytmetyki i analizy wchodzi do algebry i naodwrót. Ścisłe rozgraniczenie tych rzeczy jest trudne, a przytem bezpłodne*).

Wobec tego wskazanem jest zamiast określenia nauki nowej podawać te zagadnienia, która zjawiają się w polu widzenia myśli i do których konsekwentnie prowadzi rozwój znanych pojęć.

Pierwszą rzeczą, na którą należy zwrócić uwagę, jest wykazanie znaczenia formuły i odpowiednie przygotowanie pojęcia o niej.

W poprzedniej nauce przyzwyczailiśmy ucznia do stosowania oznaczeń literowych przy formułowaniu własności działań. Własności te należy zebrać razem, przedstawić w formie ogólniejszej i nawiązać do nich stopniowo niektóre nowe pojęcia. Rozpatrzmy je po kolei. .

Prawo przemienności przy dodawaniu. Wyraziliśmy to prawo poprzednio w ten sposób:

$$a + b = b + a.$$

Prawo to można rozszerzyć na większą liczbę składników:

$$a + b + c = a + c + b = b + a + c = c + a + b = c + b + a = \\ = b + c + a \text{ i t. d.}$$

Może się zdarzyć, że niektóre składniki są równe, np. $b = c$, w takim razie zamiast c możemy napisać b, a więc:

$$a + b + c = a + b + b.$$

Stąd wynika, że przy stosowaniu prawa przemienności zamiast sześciu różnych postaci otrzymamy tylko trzy:

$$a + b + b = b + a + b = b + b + a.$$

Skrócenie można jeszcze dalej rozciągnąć skoro umówimy się zawsze zamiast $b + b$ pisać $2b$, zamiast $b + b + b$ tak samo $3b$ i t. p., t. j. skoro zaczniemy używać spółczynnika.

*) W Niemczech ustalił się zwyczaj nazywania arytmetyką całego szeregu działów należących do algebry w utartem u nas znaczeniu. Za przykładem tym idzie znaczna część nowszych autorów galicyjskich, jakkolwiek np. we Francji lub Anglji wyraz algebra używany jest podobnie jak w podręcznikach i szkołach w Królestwie.

Spółczynnik narazie określimy jako liczbę równych składników w sumie.

Wprowadzenie spółczynnika ogranicza jeszcze więcej prawo przemienności:

$$a + 2b = 2b + a.$$

Jeżeli wszystkie czynniki są równe, rzecz uprości się jeszcze więcej.

Tutaj odrazu byłoby na miejscu pytanie, ile różnych co do kolei składników sum można utworzyć z *n* składników. Zagadnienie rozwiązać można, stosując rozumowanie przez indukcję matematyczną, ale już w formie kompletnej. Otrzymamy wzór:

$$\Pi_n = 1.\ 2.\ 3. \ldots n$$

Naczyciel, rzecz jasna, może sprawę tę pominąć, dlaczego jednakże nie mógłby się skusić o rozwiązanie takiego zagadnienia, tem bardziej, że doświadczenie poucza o możliwości tego.

Prawo łączności przy dodawaniu. Tutaj uczeń uczy się używania nawiasów, a więc bardzo ważnej spraw dla późniejszych przeróbek algebraicznych. Sumę: a + b + c należyrozumieć w ten sposób, że do a dodajemy najpierw b, a potem c. Toż samo można oznaczyć inaczej:

$$a + b + c = (a + b) + c,$$

co znaczy, że c dodajemy do sumy: a + b.

Tak samo będziemy interpretowali, gdy mamy równość:

$$a + b + c = a + (b + c),$$

co znaczy, że do a dodajemy sumę: b + c.

Przy większej liczbie składników zjawia się potrzeba używania różnych rodzai nawiasów. Np.:

$$a + b + c + d = [(a + b) + c] + d,$$

co znaczy, że do sumy: a + b dodaliśmy składnik c, a następnie do nowej sumy: (a + b) + c dodaliśmy znowu jeden składnik i t. d.

Widzimy więc, że z prawem łączności przy dodawaniu wiąże się stosowanie nawiasów, jako specjalnego umówionego sposobu oznaczania kolejności wykonywanych działań.

Dodawanie do sumy i dodawanie sumy wynika bezpośrednio jako odwrócenie.

Nie trzeba przeoczyć jednoczesnego używania symboli literowych i liczb. Np. liczba o 2 większa niż a jest $a + 2$, a liczba dwa razy większa niż a jest $2a$.

Wprowadzając systematyczniejszą symbolikę matematyczną, należy uczyć zamiany wyrażeń słownych na wyrażenia przedstawione zapomocą tej symboliki i jednocześnie, co jest z tem związane, uczyć układania formuł rozwiązujących dane zadanie. Powyższe wystarcza tylko do tych zadań, gdzie wchodzi samo dodawanie lub mnożenie przez liczbę całkowitą, po rozpatrzeniu zaś własności wszystkich działań rzecz ta należycie się zbogaci.

Przy odejmowaniu zatrzymujemy się narazie na sprawie odejmowania sumy i odejmowania od sumy z odpowiedniem używaniem nawiasów.

Dalej nastąpić powinno rozszerzenie używania nawiasów w tych przypadkach, gdy nie tylko sumy bierzemy na uwagę, lecz i różnice. Należy zwrócić uwagę na odpowiednią interpretację takich wyrażeń, jak:

$$a + b - c = a + (b - c) = (a + b) - c.$$

Na szczególną uwagę zasługuje odejmowanie różnicy i wyjaśnienie wzoru:

$$a - (b - c) = a - b + c = (a - b) + c.$$

Wzór ten należy otrzymać przez rozumowanie odpowiednie dotyczące odejmowania różnicy, gdzie można zacząć od wzoru:

$$a - (b - c) = a - b + c \quad \text{i t. d.}$$

Rozumowanie można poprzeć konkretnemi przykładami.

Jako uogólnienie wystąpi dodawanie i odejmowanie wyrażeń mieszanych postaci:

$$a + (b - c + d) \quad \text{lub} \quad a - (b - c + d).$$

Przy rozwiązaniu ich nastąpi spostrzeżenie, że w wyrażeniach mieszanych może być zastosowane prawo przemienności nawet wtedy, gdy mamy odejmowanie, np.

$$a - b + c = (a + c) - b = a + c - b.$$

W ten sposób rodzi się pierwsze pojęcie o sumie t. zw. algebraicznej oraz o ogólnych własnościach usuwania nawiasów przy dodawaniu i odejmowaniu.

Rzecz to bardzo wielkiej wagi i musi być starannie wykonana. Uczeń tu pierwszy raz spostrzec może, że w wyrażeniu liczba odzielna związana jest ze swoim znakiem, który nie zależy poniekąd od zajmowanego przez liczbę miejsca.

Oczywistem jest, że nic narazie nie mówimy ani o wielomianach, ani o jednomianach, gdyż nazwy te nie mają dla nas w tej chwili żadnej wartości, tkwi w tych nazwach przytem pewna względność, która zdolna jest uczynić mętnemi pierwsze pojęcia nauki, które przedewszystkiem muszą być jasne.

Prawo przemienności przy mnożeniu. Wyrażone było początkowo w ten sposób:

$$ab = ba$$

o ile nie używano tylko formy słownej. Tak samo jak przy dodawaniu można rzecz rozciągnąć na większą liczbę czynników, np.:

$$abc = acb = cab = cba = bca = bac.$$

Tutaj tak samo, jak przy dodawaniu może, się zdarzyć, że niektóre czynniki są sobie równe a nawet wszystkie. Np. $b = c$,

$$\text{wtedy} \quad abc = ab \,.\, b$$

i zamiast 6 postaci iloczynu otrzymamy tylko 3:

$$abb = bba = bab.$$

Dla uproszczenia umówiono się $b \,.\, b$ oznaczać przez b^2, $b \,.\, b \,.\, b$ — przez b^3 i t. d., iloczyn równych czynników nazywać potęgą, a liczbę tych czynników wykładnikiem potęgi. W takim razie iloczyn przedstawić można tylko w dwóch postaciach:

$$ab^2 = b^2a.$$

Należy teraz zająć się bliżej potęgą, jej wykładnikiem, oraz potęgowaniem liczb. W danym przypadku tak samo, jak przy dodawaniu, można zapytać, ile może być różnych co do formy iloczynów przy n czynnikach. Zagadnienie to w przypadku, gdy niektóre czynniki są równe może dać powód do całego szeregu zadań dla uczniów, które, nie należąc do urzędowego kursu, pomimo to mogą być przez ciekawsze i żywsze umysłowo jednostki rozwiązywane. Wprowadzenie iloczynu pozwala nam uogólnić pojęcie spółczynnika, które powyżej przy dodawaniu było zrozumiane zbyt wąsko.

Obok czynników oznaczonych symbolami literowemi mogą zachodzić liczby, np.:

$$a \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\, a$$

Umówiono się w takich przypadkach zawsze czynnik liczebny pisać na początku i nazywać go spółczynnikiem. Nauczyciel wskaże, że pierwsze pojęcie o spółczynniku jest szczególnym przypadkiem obecnego, które jest ogólniejsze.

P r a w o ł ą c z n o ś c i p r z y m n o ż e n i u nie nasuwa osobliwych uwag, należy jednakże podkreślić, że przy obliczaniu iloczynu łączenie czynników w odpowiedni sposób może bardzo ułatwić otrzymanie rezultatu. Z drugiej strony prawo łączności pomoże później do wyznaczenia i sformułowania prawa znaku iloczynu.

Ważne natomiast ma znaczenie p r a w o r o z d z i e l n o ś c i p r z y m n o ż e n i u.

Formułowaliśmy to prawo w ten sposób:

$$(a + b)\, c = ac + bc.$$

Rzecz jasna, że można zaraz rozszerzyć to samo na większą liczbę składników w sumie i co ważniejsze dojść do znalezienia formy iloczynu w przypadku:

$$(a + b)(c + d)$$

Piszemy najpierw:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d),$$

a potem $$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Po otrzymaniu takiego rezultatu należy zwrócić uwagę, że iloczyn tworzy się jako suma iloczynów cząstkowych powstających od pomnożenia każdego składnika mnożnej przez każdy składnik mnożnika.

Przy tej sposobności na miejscu jest zwrócenie uwagi na poprzednio znane przypadki mnożenia, np.: $5\frac{3}{4} \times 3\frac{2}{3}$. Uczniowie, jak wiadomo, chętnie mnożą oddzielnie całości i oddzielnie ułamki a następnie dodają.

Prawo rozdzielności rozszerzamy zaraz na ten przypadek, gdy mamy do czynienia z różnicami. Najpierw bierzemy na

uwagę tylko jedną różnicę, a potem dwie. W pierwszym przypadku mamy: $(a - b)(c + d) = ac - bc + ad - bd$,
a w drugim: $(a - b)(c - d) = ac - bc - ad + bd$.

Otrzymanie rezultatu wymaga zastosowania poprzednio zaznaczonych praw odejmowania sumy i różnicy.

Należy tu podkreślić sposób tworzenia iloczynu z iloczynów cząstkowych oraz wskazać, że w rezultacie iloczyny odjemnych i odjemników są zawsze składnikami, gdy tymczasem iloczyny odjemnych przez odjemniki występują jako odjemniki.

Tu po raz drugi zjawia się w myśli ucznia fakt osobliwy: zależności rezultatu od charakteru liczby, inaczej mówiąc, od znaku z którym ona występuje.

Rzecz jasna, że otrzymane rezultaty można zaraz uogólnić na iloczyny, gdzie wchodzą czynniki więcej złożone, dzięki czemu otrzymamy ogólny schemat t. zw. mnożenia wielomianów. Należy przytem zatrzymać się nad sprawą liczby iloczynów cząstkowych w iloczynie. Jeżeli w pierwszym czynniku jest m elementów, a w drugim n, to w iloczynie mn elementów.

Opierając się na powyższych własnościach iloczynu, niektórzy autorowie francuscy osnuli teorję mnożenia liczb względnych.

Dalej z łatwością przechodzimy do znanych wzorów na

$$(a \pm b)^2,\ (a \pm b)^3,\ (a + b)(a - b)$$

oraz ich zastosowań np. *przy wyciąganiu pierwiastku kwadratowego, które będzie tu zupełnie na miejscu.*

Powyższego wystarcza do tego, by przejść do więcej skomplikowanych wyrażeń literowych, a więc rozpatrywać formy np. postaci:

$$3\,a^2bc - 2\,ab^2c + 5\,abc^2.$$

Rzecz jasna, że redukcja wyrazów podobnych i mnożenie potęg muszą tu być wzięte na uwagę.

Czytelnik odrazu zauważy, że powyższy sposób wykładu różni się od zwykle używanego tem, iż wprowadza działania z wyrażeniami algebraicznemi więcej złożonemi przed zaznajomieniem się z liczbami względnemi. Tak istotnie jest, a postępowanie podobne wydaje się słusznem dlatego, że wszystkie te działania wyprowadza w sposób naturalny ze zwykłych i dawno poznanych własności działań arytmetycznych. Zrozumiałą jest rzeczą, iż przytem nie należy uganiać się za działaniami skomplikowanemi, które zresztą przytrafiają się rzadko, a uczniom dają błędne pojęcie o istocie samej nauki. W świadomości ucznia dzięki zwykłemu wprowadzeniu liczb względnych nieraz powstaje błędne pojęcie, że działania algebraiczne są wynikiem tego wprowadzenia, a nie zwyczajnem uogólnieniem znanych sposobów na liczby względne. Te ostatnie z tego powodu występują w fałszywem świetle, a znajomość własności działań i organiczny rozwój myśli arytmetycznej cierpią na tem. Zdaniem autora wprowadzenie liczb względnych w klasie 3-ej, jak to się dzieje obecnie, jest wielkim błędem dydaktycznym, którego naturalną konsekwencją jest czysto formalne zapamiętywanie sposobów działań i reguł oraz zupełny prawie brak rozumienia istoty rzeczy. Sprawdzić to można dowoli na pierwszym lepszym uczniu każdej z naszych szkół. Nie trzeba sądzić, że przyczyną zjawiska jest nieudolność nauczających. Rzecz sama jest tak trudna, wymaga o wiele większego obycia się nie tyle z rachunkiem, ile z formalnemi własnościami działań arytmetycznych, że od ucznia w tym wieku tego wymagać nie można.

Stąd wynika, że nauka t. zw. algebry w klasie 3-ej winna się ograniczyć do wyprowadzenia w zakresie liczby bezwzględnej wszystkich wniosków, wynikających z podstawowych własności działań, do wytworzenia pojęcia o wielomianie, ułamku algebraicznym i wogóle budowy prostej formuły algebraicznej.

W ten sposób poprzednia nauka rachunku znajdzie swoje naturalne uogólnienie oraz umocnienie w rzeczach zasadniczych, nad któremi niebacznie przechodzimy zbyt pośpiesznie do porządku dziennego.

Jednym z ważnych postulatów przy wprowadzeniu nowego rodzaju liczby, przy rozszerzeniu jej pojęcia jest t. zw. prawo zachowania własności formalnych działań czyli, inaczej mówiąc, prawo ekonomji myślenia w sferze matematycznej. Gdyby wprowadzenie nowego rodzaju liczb wymagało od nas coraz to innych sposobów działań, które posiadałyby coraz to inne własności, nie mielibyśmy jednego systemu myślenia, a cały szereg różnych, dzięki czemu ogromnie utrudniłoby się zastosowanie oraz bardzo zmniejszyła wartość teorji matematycznej. Wiadomo, że w dalszych oddziałach matematyki elementarnej, np. w teorji liczb zespolonych, już spotykamy się z pewnemi odstępstwami, które jednakże nie przeszkadzają dzięki swej naturze do wypełnienia tego celu, jaki stawia sobie dążąca do coraz większego uogólnienia nauka.

Samo wyjaśnienie charakteru działań z liczbami względnemi wymaga oparcia tegoż na dokładnej znajomości formalnych własności działań arytmetycznych, bez której zastosowanie prawa zachowania jest niemożliwe. Z tej przyczyny należy uczniów dłużej nad poznaniem tych własności w formie ogólniejszej zatrzymać i wszelkie dostępne wnioski z nich wyprowadzić. Z drugiej strony, ileż kwestyj w dziedzinie samego rachunku wymagałoby nieco poważniejszego potraktowania? W klasie 3-ej jest właśnie miejsce po temu, by pogłębić, uzupełnić oraz ostatecznie ugruntować wiedzę elementarną ucznia w dziedzinie rachunku, stosując symbole ogólne oraz korzystając z nich w celu ogólnego formułowania praw. Weźmy np. dziedzinę podzielności. Ileż zagadnień w niej tkwi, jak mało nieraz uczniowie zdają sobie tutaj sprawę z elementarnych rzeczy, gdyż na to w programie szkolnym ani czasu, ani miejsca niema. Oczywiście nie może być mowy o rozważaniu odnośnych kwestyj z dziedziny arytmetyki teoretycznej lub t. zw. niższej teorji liczb, w każdym jednakże razie uporządkowanie pewne tej sprawy w sposób dokładniejszy może być na miejscu. Osiągnąć się to da przez poznanie gruntowniejsze rachunku formalnego na symbolach literowych.

Poprzednio nieraz korzystaliśmy z formuły:

$$D = dq + r.$$

Formuła ta nasuwa właśnie cały szereg zagadnień z podzielności. Np. twierdzenie tego rodzaju: jeżeli składniki się dzielą przez pewną liczbę, to dzieli się też suma, jeżeli suma się dzieli i jeden ze składników, to dzieli się drugi i t. p.

Jedną z bardzo ważnych rzeczy jest np. podkreślenie tego, co się nazywa p r a w e m m o n o t o n j i przy działaniach.

Przy dodawaniu wyraża się ono w formie następującej:

jeżeli $a > b$,

to $a + d > b + d$

Inaczej mówiąc, gdy jeden ze składników **stale** rośnie, suma też **stale** rośnie i odwrotnie. Przy mnożeniu możemy wyrazić to prawo w tenże sposób, mianowicie tak:

$$\text{jeżeli} \quad a > b,$$
$$\text{to} \quad ac > bc,$$

czyli, gdy jeden z czynników iloczynu wzrasta, rośnie też iloczyn. Przy dzieleniu może być naodwót.

O tej rzeczy uczeń wiedział w nauce rachunku, tutaj jednakże można mu to specjalnie podkreślić i, jak niebawem zobaczymy, nawet graficznie uzmysłowić. Drobna to pozornie sprawa ma wielkie znaczenie w teorji liczb względnych.

Dalej, w tejże klasie 3-ej przy nauce arytmetyki uczniowie zapoznają się po raz pierwszy wyraźnie z zależnością funkcjonalną. Zależność tę należy możliwie dokładnie wyjaśnić, a do tego bardzo przydatnym jest sposób graficzny, o którym będzie poniżej i który również do programu tej klasy zaliczonym być winien.

Zjawienie się formuły algebraicznej, która bezpośrednio wynika z głębszego poznania własności działań, daje szerokie pole do zastosowaniu w zadaniach, jak również do pierwszych początków dyskusji.

Nakoniec, jak zobaczymy niżej, pierwsze początki teorji równania 1-go stopnia i układania równań też mogą tutaj być zaliczone. Wszystko to bezpośrednio wynika z własności działań arytmetycznych, a uproszczenia w rozwiązaniu oraz uogólnienia pojęcia równania wiąże się z przyjęciem liczb względnych.

Z poprzedniego można wywnioskować, że dość będzie roboty w klasie 3-ej, jakkolwiek liczby względne w programie nie będą umieszczone.

Wróćmy teraz do naszych poprzednich rozważań.

Pozostało nam jeszcze dzielenie. Tu należy zwrócić uwagę na **prawo rozdzielności przy dzieleniu**. Prawo to można przedstawić tak:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$$

Z niego, jako zastosowanie wynika dzielenie wielomianu przez jednomian. To ostatnie, jak również dzielenie jednomianów możemy uczniom zupełnie dokładnie przedstawić.

Trudniejsza jest sprawa z dzieleniem wielomianów. Tutaj nauczyciel winien się ograniczyć do przypadków prostych. Przy tej sposobności należy zwrócić uwagę na analogję z dzieleniem liczb całkowitych oraz na różnicę. Z dzieleniem wiąże się pojęcie ułamka. Proste przypadki działań z ułamkami, gdzie nie spotykamy trudności przy sprowadzeniu do wspólnego mianownika albo potrzeby zawiłego skracania, mogą być z łatwością wprowadzane do programu.

Na tem kończy się pierwsza część kursu algebry. Rezultatem jego jest: 1° zaznajomienie uczniów z symboliką oraz konstrukcją formuły algebraicznej, 2° przygotowanie do nowej metody rozwiązywania zadań zapomocą równań oraz 3° pogłębienie znajomości własności formalnych działań w celu ułatwienia nauki o liczbach względnych.

W zwykle używanych do nauki algebry zbiorach zadań jeden z pierwszych rozdziałów zawiera jako jedno z zadań obliczanie formuł. Formuły te zjawiają się jak Deus ex machina. Uczeń mało zdaje sobie sprawę z ich budowy, pochodzenia i znaczenia, samo zaś podstawianie liczb i obliczanie jest zajęciem rachunkowem, które ma znaczenie małe, ograniczające się tylko do zastosowania właściwego pojęć spółczynnika, potęgi oraz określonej kolejności działań. Czasami oprócz tego podawane są zadania wymagające układania prostych formuł. Takie zadania mają już większą wartość dydaktyczną, jakkolwiek zwykle używa się na to bardzo mało czasu, za mało, aby uczeń jasno uświadomił sobie znaczenie i pochodzenie formuły algebraicznej.

Jeżeli chcemy ze stanowiska rozwijania myślenia funkcjonalnego ocenić cały program algebry, musimy wyraźnie zaznaczyć, że głównem jego zadaniem jest wynajdywanie, dyskutowanie i stosowanie formuły algebraicznej. Każde zadanie do niej prowadzi, każde zagadnienie jest z nią związane. Stąd zasługuje ona na większą uwagę, niż to się zwykle widzi. Na każdym stopniu nauczania algebry badanie formuły musi mieć swoje miejsce. To samo dotyczy klasy 3-ej.

Obliczanie formuł jako też wyprowadzenie ich z prostych zadań (np. wziętych z kursu arytmetyki, który biegnie równolegle) musi mieć zastosowanie, do tego jednakże należy dołączyć początki dyskusji.

Tematem dyskusji muszą być następujące formuły:

$$y = x + a,$$
$$y = ax,$$
$$y = ax^2,$$
$$y = \frac{a^2}{x}.$$

Do badania ich potrzebne jest graficzne przedstawieni Używać do tego należy t y l k o pierwszej ćwiartki zwykłe układu spółrzędnych. W ten sposób parabola przedstawio przez formułę trzecią jako też i hyperbola przez czwartą n będą zupełne. To samo dotyczy innych formuł. Nie powinn to jednakże być przeszkadzającym szkopułem. Uzupełnieni nastąpi później i stanie się jednym z motywów wartości wpro wadzenia liczb względnych. Nauczyciel może, rzecz jasna, liczb formuł powiększyć, może np. wprowadzić taką:

$$y^2 = a^2 - x^2 \quad \text{lub} \quad y = ax^3.$$

Rzecz nie polega jednakże na liczbie różnych formuł, lecz n porządnem, systematycznem ich przedyskutowaniu. Przy te badaniu należy zwrócić uwagę na parametr a i zależność od niego graficznego obrazu.

Tu właśnie można poglądowo zilustrować prawo mono tonji zarówno na przykładzie prostej, jak hyperboli.

Formuły należy również przedyskutowywać w odniesieni do pewnych konkretnych zadań, np. zadania na ruch jedno stajny, obliczanie procentów, liczby dni robocizny i t. p. Rów nanie pierwsze należy brać w dwóch postaciach:

$$y = x + a \quad \text{i} \quad x = y + a,$$

które zastępuje sobą równanie:

$$y = x - a.$$

Przy przedstawieniu graficznem, rzecz jasna, x i y od grywać mogą tę samą rolę, a zachowanie formy pociągnie z sobą wprowadzenie liczb względnych. Powyżej powiedzianem zrobić można ten zarzut, że stosujemy właściwie na tak ni skim stopniu równanie pierwszego i drugiego stopnia z 2-m niewiadomemi. Rzecz nie przedstawi się tak groźnie skor wyjdziemy z konkretnych i znanych przykładów, wtedy bowiem forma równości zjawi się sama przez się, nie będzie niezrozumiałą, a że reprezentuje równanie aż z dwoma niewiadomemi, to trudna rada. Nie należy się w nauczaniu rządzić ustalonemi przez rutynę formami, lecz przedewszystkiem liczyć się z pożytkiem umysłowym uczniów. Pożytek ten jest zupełnie widoczny. Jest on rzeczą niewątpliwą również w odniesieniu do innej sprawy, którą tu zamierzamy przedstawić.

W literaturze dydaktycznej, dotyczącej początków algebry istnieją dwa główne poglądy.

Jeden utarty, który zwykle jest w użyciu i zaleca naukę działań z wielomianami i jednomianami, teorję liczb względnych oraz naukę o ułamkach wysunąć na czoło, a potem dopiero rozpocząć naukę o równaniu.

Drugi pragnie ten porządek odwrócić, wysunąć na czoło rzecz główną: równanie i zależnie od niego, w ścisłym związku z potrzebą rozwiązania wprowadzać coraz więcej skomplikowane działania oraz przeróbki, które, gdy się je traktuje niezależnie, są czemś sztucznem i dla ucznia mało interesującem.

W każdym z tych poglądów jest pewna doza słuszności. Opanowanie działań umożliwia rozwiązanie należyte równania, a przytem przy odpowiedniem nauczaniu umocnić może te pojęcia o działaniach, jakie uczeń zdobył w nauce rachunku. Z drugiej strony niewątpliwie przesuwanie liter bez wyraźnej treści konkretnej, bez jasnego celu, wykonywanie zawiłych nieraz działań według określonych szablonów przypomina raczej naukę scholastyczną, niż rozwijające umysł nauczanie.

Droga, po której idziemy, jest drogą pośrednią. Staramy się w niej, by użycie symbolów ogólnych z jednej strony wykorzystać w celu dokładnego opanowania własności działań arytmetycznych, z drugiej — utrzymując ścisły kontakt z rzeczami znanemi s t o p n i o w o p r z y g o t o w a ć g r u n t do rzeczy głównej: nauki o równaniu. Nie koniecznie mamy odrazu równanie rozwiązywać według reguł skróconych, nie wskazanem jest odrazu podawać sposób rozwiązania zagadnień. Niech uczeń stopniowo uczy się odkrywać ułatwienia, niech sposób skrócony zjawi się jako nagroda i zadowolenie umysłowe po zastosowaniu żmudnego. Historja nauki wykazuje, że zanim al Chwarizmi doszedł do owej metody głównej przenoszenia wyrazów z jednej strony równości na drugą, Diophantos i inni matematycy rozwiązywali równania metodami płynącemi bezpośrednio z zastosowania elementarnych własności działań arytmetycznych.

Jedną z wad nauczania, która się nie liczy z rozwijaniem umysłu, jest podawanie, jak w podręczniku, gotowych sposobów rozwiązania zagadnień. Jeżeli w rzeczach drobniejszych uniknąć tego nie można, to w sprawach zasadniczych nauczanie związane więcej z naturalna genezą pojęć w danej sferze jest lepsze i więcej odpowiada wymaganiom dydaktycznym. Równanie należy w algebrze do rzeczy zasadniczych, a w zwykłem nauczaniu robi się często z nauki o niem zbiór wskazań praktycznych rozwiązania, gdzie wszystko sprowadza się ostatecznie do mechanicznej sprawności. Na to właśnie zwraca uwagę drugi ze wspomnianych poglądów. Trudno odmówić mu słuszności.

Równanie daje bogatą ogólną i płodną metodę rozwiązywania zadań. Uczeń, w nauce rachunku szczególniej, ucząc się przy pomocy naszych zbiorów zadań, mógł się przekonać, jak rozmaite są i nieraz nieoczekiwane „sposoby" rozwiązywania tych zadań. Pozostawia to w umyśle przeciętnego ucznia niewątpliwie ślad, powoduje pewne przygnębienie umysłowe, które nie licuje z nauką takiego przedmiotu, jak matematyka. Stąd wyprowadzenie naturalnej, ogólnej metody rozwiązania oddziała na umysł jego ożywczo, może odrodzić zainteresowanie, pobudzić uśpione siły umysłowe. Do tego celu zmierzać właśnie powinna początkowa nauka o równaniu. Nie powinna ona zaczynać się od quasi teoretycznych rozważań o równaniu i jego rozwiązaniu, lecz wprost od układania równań. W podręczniku do zadań te ostatnie należy tak ułożyć, by równania rozwiązujące były coraz bardziej skomplikowane, z uwzględnieniem należytego stopniowania. To ostatnie ma bardzo ważne znaczenie.

Nie będziemy opisywali sposobu układania równania. Rzecz ta nie powinna budzić wątpliwości i trudności u uczącego. Zajmiemy się natomiast przedstawieniem na przykładach zarówno metody rozwiązania, jak odpowiedniego stopniowania trudności. Zaczniemy od równania typu:

$$x + a = b.$$

Właściwie najprostszym typem jest: $x = a$. Do tego typu sprowadzamy wszystkie inne postacie równań, a proces tego sprowadzania nazywamy rozwiązaniem równania.

Rozwiązanie nadmienionego typu: $x + a = b$ odbywa się bardzo prosto. Mamy sumę złożoną z dwóch składników. Żeby otrzymać jeden z nich, odejmujemy drugi od sumy, przyczem otrzymamy rozwiązanie $x = b - a$. Można jednakże posługiwać się ogólniejszą metodą, która z tego powodu jest więcej racjonalną. Mamy dwie równe liczby: $x + a$ i b, jeżeli od każdej z nich odejmiemy albo dodamy do nich liczby równe, otrzymamy rezultaty równe. Np. równanie: $x - 5 = 7$ rozwiązujemy przez dodanie do obu stron (jak będziemy dalej mówili) po 5. W ten sposób posługujemy się tutaj tożsamością

$$a - a = 0,$$

przyczem, opierając się na konkretnej treści samego postępowania, stosujemy ją również w formie:

$$-a + a = 0.$$

Nie popełniamy przez to błędu logicznego, gdyż ta ostatnia forma jest tylko formalnym wyrazem wspomnianej konkretnej treści.

Następną, więcej skomplikowaną postacią równania będzie taka, gdzie niewiadoma wchodzi po obu stronach np.:

$$x + 2 = 2x.$$

Tutaj z niewiadomą robimy to samo, co robiliśmy powyżej z wiadomemi liczbami: odejmujemy od obu stron po x; otrzymamy: $x = 2$.

Więcej skomplikowanym przypadkiem tegoż typu będzie już równanie:

$$x + 3 = 2x - 1,$$

które zamieniamy na następujące:

$$x + 4 = 2x,$$

a potem:

$$4 = x.$$

W podobny sposób możemy postępować w takim przypadku:

$$12 - x = 2x + 3$$

Dodajemy do obu stron po x, otrzymamy:

$$12 = 3x + 3,$$

a następnie:

$$9 = 3x \qquad \text{czyli } 3 = x.$$

Tutaj możnaby odrazu zwrócić uwagę na możliwość t. zw. skrócenia równania przez 3.

Z tych przykładów czytelnik z łatwością zrozumie meto- postępowania. Dobra komplikacja polegać może na wprowa- dzeniu ułamków zarówno jako liczb oddzielnych i spółczynni- ków przy niewiadomej.

W pierwszem stadjum rozwiązywania nie używamy wcal- oznaczeń literowych, które jednakże później wystąpić muszą. Celem głównym wprowadzenia tych oznaczeń literowych jes- wyprowadzenie sposobu przenoszenia liczb z jednej strony równania na drugą metodą indukcyjną.

Nauczyciel podaje kilka przykładów, stosuje powyższ- metodę rozwiązania przy pomocy uczniów, przyczem nie po- zwala ścierać z tablicy. Naturalnem jest postawienie pytania co się dzieję z każdą liczbą, gdy przechodzi z jednej strony równania na drugą. Odpowiedź otrzymuje się bez trudności: składnik zamienia się na odjemnik, a odjemnik na składnik.

Dalszy krok polega na tem, by to samo wyrazić w inny sposób. Rezultatem jest twierdzenie: każda liczba po przejściu na drugą stronę zmienia swój znak. Oczywiście do tego po- trzebnem jest, żeby zamiast słowa składnik a stosować $+a$ i t. d.

Ponieważ przenoszenie wyrazów może się odbywać w róż- nej kolei, liczby znajdujące na jednej stronie mogą być w do- wolny sposób przestawiane.

Weźmy przykład. Mamy równanie:

$$2x - a + b = x + c + 2b.$$

Otrzymujemy kolejno:

$$x - a + b = c + 2b,$$

następnie $\quad x + b = c + 2b + a,$

oraz $\quad x = c + 2b + a - b = c + b + a.$

Tak samo możnaby napisać:

$$x - a = c + 2b - b \quad \text{i} \quad x = c + 2b - b + a.$$

Przy przenoszeniu wyrazów może się okazać, że na jednej stronie na pierwszem miejscu znajdować się będzie odjemnik. Jeżeli uczniowie obyli się z faktem zmiany miejsc wyrazów w sumie oraz połączenia znaku z liczbą, rzecz ta nie powinna ich dziwić. W ten sposób powoli wprowadzana jest na razie bez pojęcia o liczbach względnych metoda działań formalnych w algebrze. Obecnie potrzebny jest jeszcze jeden krok do wprowadzenia liczb względnych, które stają się już niezbędnym i głównym celem dobrej nauki.

Powyżej powiedzieliśmy, że nauka o liczbach względnych traktowana w ten sposób, jak to się robi zwykle, jest dla uczniów klasy 3-ej zatrudna. Nie będziemy kruszyli kopij co do konieczności wykluczenia tej nanki z klasy 3-ej, wszak chodzi nam głównie o metodę wykładu. Jeżeli komu może się zdawać, że ten materjał nauki, który został powyżej przedstawiony jest zamały na klasę trzecią, niech wprowadza liczby ujemne.

Ze swej strony uważamy, że przerobienie jego gruntowne wystarczyć może a nawet powinno.

ROZDZIAŁ IV.

W rozdziale poprzednim przygotowaliśmy wszystko do należytego wyjaśnienia i wprowadzenia pojęcia liczby względnej. Niema chyba przedmiotu w nauczaniu matematyki początkowej, który wymagałby tyle ostrożności i rozwagi. Niewątpliwie można uczniów nauczyć działań z liczbami ujemnemi, wprawić w zastosowanie, ale nauczyć i nauczyć — to różnica. Jeden z wybitnych pedagogów angielskich Todhunter powiedział raz o nauczaniu rachunku różniczkowego, że, dopóki uczeń nie zapozna się z szeregiem Taylora, cała maszynerja rozumowania poprzedzającego jest dla niego niezrozumiała. Szereg Taylora niewątpliwie przyczynia się do tego już chociażby dlatego, że obok pochodnych wchodzi w nim sama funkcja, nie można jednakże w nauczaniu tak łatwo się zgodzić z tą niezrozumiałością. Tego samego zdania jest o liczbach względnych spory nawet zastęp wybitnych nauczycieli matematyki. Należy dać mechanizm działań, możliwie jasno przedstawić go, a zrozumienie istoty rzeczy odłożyć na później. W ten sposób uczyliśmy się wszyscy. Iluż to młodych nauczycieli dopiero w szkole zaczyna się głębiej zastanawiać nad istotą rozwoju pojęcia liczby. Dzisiejsza nauka matematyczna na uniwersytetach owiana jest duchem krytycyzmu i stąd słuchacze prędzej dochodzą do uświadomienia sobie zasadniczych pojęć nauki. Dawniej, jeszcze nawet przed 20 laty, panował przeważnie pewien dogmatyzm, który nie potrafił rozbudzić w studentach ducha krytycyzmu. Dzięki temu ogromnie cierpiała metodyka nauczania. Nie umiano zwrócić uwagi na rzeczy istotne i często sprawy uboczne brano za wyjaśnienie. Czyż to samo nie powtarza się jeszcze dziś przy nauce ułamków i wielu, bardzo wielu działów matematyki elementarnej?

Powiedzieliśmy powyżej, że w poprzednim rozdziale uczyniono wszelkie przygotowania. Należy sobie zdać teraz sprawę, jakież to były przygotowania. Żeby odpowiedzieć na to pytanie, musimy zrobić dygresję w stronę rozszerzenia pojęcia liczby wogóle.

Wyobraźmy sobie pewną klasę K przedmiotów: a_1, a_2, a_3, ... , a_n, . . .

Klasa ta może być skończona lub nieskończona,—na rezultat rozumowania dalszego to nie wpłynie. Przedmioty należące do tej klasy K czyli elementy jej nie są zbiorem luźnych przedmiotów. Pomiędzy niemi możemy ustalić pewne związki. Związki te mogą być różnego rodzaju zależnie od charakteru przedmiotów i od punktu, z którego są przez nas rozważane. W każdym jednakże razie związki te są precyzyjnie ustalone, a liczba ich może być większa lub mniejsza.

Klasą K, która w odniesieniu do zagadnienia nas obchodzącego jest przez nas rozważana, jest zbiór wszystkich liczb wymiernych dodatnich (z włączeniem 0), a więc ułamków i liczb naturalnych. Związki, które pomiędzy temi liczbami ustalić można i które dotąd są nam znane, są i wyrazić się dadzą zawsze przy pomocy 4 działań arytmetycznych. Każdy taki związek wskazuje nam, że określone, zapomocą tych działań dokonane, połączenie kilku liczb daje w rezultacie liczbę tej samej klasy. Jeżeli tak jest, klasa omawiana jest z a m k n i ę t a w s o b i e. Gdyby połączenia liczb spełniały jeszcze inne warunki klasę omawianą możnaby zaliczyć do tych, które w matematyce noszą nazwę g r u p y. Nie chodzi jednakże o nazwy, dla nas najważniejszą rzeczą jest to, czy dana klasa K jest zamkniętą w sobie, czy też nie. Pytanie to ma bardzo ważne znaczenie wtedy, gdy chodzi o rozumowanie ogólne, t. j. gdy operujemy symbolami reprezentującemi dowolny element klasy. W takim przypadku wtedy, gdy połączenie dwóch elementów klasy nie daje nam innego jej elementu, musimy z konieczności ograniczać ogólność naszego rozwiązania, wprowadzać stałe zastrzeżenia, co ogromnie utrudnia poruszanie się myśli, hamuje wyprowadzenie wniosków a nawet komplikuje bardzo system nauki. Z tego względu każda klasa K elementów wtedy najlepiej nadaje się do rozumowania, gdy jest w sobie zamknięta. Rzecz jasna, że sposoby połączenia jej elementów ze sobą odgrywać tu muszą rolę bardzo ważną. Np. klasa liczb całkowitych i ułamków jest zamkniętą w sobie skoro rzecz dotyczy dodawania, mnożenia i dzielenia, a odejmowanie tego warunku nie spełnia, gdyż z łatwością możemy wskazać przypadki, gdy połączenie dwóch liczb zapomocą odejmowania nie daje liczby żadnej należącej do danej klasy, np. 2 — 5 i t. d. Stąd wynika, że znana nam dotąd klasa liczb całkowitych i ułamków wobec istnienia 4-ch działań nie jest klasą zamkniętą w sobie. Z tego wynika konieczność ograniczenia ogólności naszego myślenia albo zaradzenie złemu w taki sposób, by klasa nasza stała się zamkniętą w sobie. Jak to można uczynić? Jeżeli na pewne połączenia w klasie niema odpowiedzi w postaci odpowiedniego elementu, rzecz jasna, że tych elementów jest „za mało". Stąd byłoby bardzo pożądanem uzupełnienie naszej klasy K przez taki zbiór K' elementów nowych, któreby mogły zadośćczynić wspomnianej potrzebie i tak uzupełnić K, by każde połączenie dawało określoną odpowiedź w postaci pewnego elementu należącego do danej klasy uzupełnionej. R o z s z e r z e n i e p o j ę c i a l i c z b y j e s t n i c z e m i n n e m j a k p o d o b n e m u z u p e ł n i e n i e m.

Tego uzupełnienia nie można jednakże robić dowolnie. Musi ono spełniać pewne warunki, które odpowiadają samemu celowi uzupełnienia. Jakież to są warunki?

Rzecz jasna, że, gdybyśmy naszą pierwotną klasę K uzupełnili takiemi elementami, dla których niemożliwe byłyby wszystkie te same połączenia, które miały miejsce w klasie pierwotnej, byłoby to dla nas wątpliwą wygodą. Wygralibyśmy na jednem, a stracili na drugiem. Np., gdybyśmy uzupełnili naszą klasę liczb całkowitych i ułamków w ten sposób, że odejmowanie byłoby zawsze możliwe, mnożenie natomiast-nie lub ściślej mówiąc, gdybyśmy nie mogli określić takiego połączenia elementów klasy uzupełnionej, które posiadałoby cechy główne analogiczne do cech mnożenia, klasa nasza znowu nie byłaby zamkniętą w sobie.

Z tego wynika, że rozszerzenia należy dokonać w ten sposób, by w nowej klasie były możliwe wszelkie połączenia elementów, które posiadałyby pod względnem formalnym wszystkie cechy główne przynależne znanym nam 4 działaniom arytmetycznym. Fakt podobny jest nam znany z poprzedniego. Najpierwotniejszą przez nas rozważaną klasą była klasa liczb całkowitych. Mieliśmy w niej zdefinjowane 4 określone działania arytmetyczne. Uzupełniając tę klasę przez dołączenie ułamka, skonstatowaliśmy przedewszystkiem, że w nowej uzupełnionej klasie mogą istnieć odpowiednie 4 typy połączeń, które posiadają te same cechy główne formalne, jakie widzieliśmy w 4 działaniach arytmetycznych. Czytelnik wie z poprzedniego, w jaki sposób zostało to dokonane i jakie połączenia ułamków nazwaliśmy dodawaniem, odejmowaniem, mnożeniem i dzieleniem. Zbiór nie był uzupełnieniem zupełnie dowolnem.

Stąd jako wniosek wynika, że uzupełniona klasa winna spełniać ten zasadniczy warunek, iż wszystkie 4 działania arytmetyczne w postaci pewnych określonych sposobów połączenia liczb znajdą swoje miejsce w uzupełnionej klasie i przytem tak, że główne cechy formalne wspomnianych 4-ch działań zostaną zachowane.

Warunek ten został przez Hankela wyrażony w postaci zasady zachowania działań formalnych.

Możliwem jest, że warunek wspomniany nie będzie całkowicie spełniony. Dla krótkości powiedzieliśmy o 4.ch działaniach, starając się rzecz przedstawić jaśniej. Sprawa jednakże sięga głębiej. Połączenie liczb może być też ich porównaniem według kategorji: mniejszy, większy, równy. Otóż możliwem jest, że zachowane zostaną działania, nie zachowanem całkowicie porównanie. Taki przypadek znajdujemy np. przy liczbach urojonych, gdzie $a + bi = c + di$

znaczy to samo, co $a = c$ i $b = d$,

nie wiemy natomiast, co znaczy:

$$a + bi \gtreqless c + di.$$

Stąd porównanie w tej formie, jak poprzednio, nie istnieje. Możliwem jest również, że określone działania nie będą posiadały wszystkich cech, jakie posiadają w klasie pierwotnej. Wtedy przyjęcie lub odrzucenie uzupełnienia zależy od okoliczności ubocznych (wskazać tu należy na przykład iloczynu wewnętrznego i zewnętrznego u H. Grassmana w jego Ausdehnungslehre, gdzie mnożenie nie posiada cechy przemienności).

Sama jednakże zasada zachowania nie wystarcza. Należy bliżej sprecyzować ogólną własność nowych postaci połączenia elementów.

Powiedzieliśmy wyżej, że sposoby połączenia powinny zachować wszystkie główne cechy formalne t. j. muszą być zachowane w naszym przypadku wszystkie główne własności działań, o których mowa była w rozdziałach poprzednich. Tego jednakże mało. Jaka powinna być treść samego działania, jaki sposób jego wykonania?

Żeby zdać sobie z tego sprawę, należy zastanowić się nad tem, czy klasa uzupełniona będzie tylko zlepkiem mechanicznym pierwotnej i nowego zbioru elementów, czy też jednocześnie wszystkie elementy w odpowiedni sposób pojęciowo się modyfikują albo zmodyfikować winny.

Weźmy znowu przykład dobrze nam znany: liczby całkowite i ułamki. Każdy ułamek jest sui generis wytworem 2-ch liczb całkowitych i przy danej jednostce na liczbę całkowitą zamieniony być nie może, gdy tymczasem każda liczba całkowita może być w rozmaity sposób przedstawiona w postaci ułamka. Stąd wnioskujemy, że ułamek jest ogólniejszą postacią liczby, niż liczba całkowita. Każdego działania z ułamkami nie można wyrazić jako odpowiedniego działania z liczbami całkowitemi, ale to ostatnie można przedstawić w postaci odpowiedniego działania z ułamkami. Stąd określone przez nas działania z ułamkami są również ogólniejszą formą odnośnych działań z liczbami całkowitemi.

Wobec tego wydać się musi naturalnem, że działania odpowiednio określone dla klasy uzupełnionej muszą mieć charakter ogólniejszy, niż te, które miały miejsce w klasie pierwotnej. Zjawisko to wydaje się istotnie naturalnem, jakkolwiek całkowicie słusznem nie jest. Np., liczba niewymierna i działania z nią nie mogą być uważane za coś więcej ogólnego, niż działania z liczbami wymiernemi, bo np. liczba przestępna nie może być pierwiastkiem równania algebraicznego ze spółczynnikami całkowitemi. Gdyby była czemś ogólniejszem, ten warunek również spełniać by musiała. Nie możemy również liczby względnej uważać za coś ogólniejszego w odniesieniu do liczb bezwzględnych, owszem każda z nich posiada cechę dodatkową, której nie posiada liczba bezwzględna, natomiast para dwóch liczb względnych o tej samej wartości bezwzględnej jest czemś, co jest zdolne odpowiedzieć na większą liczbę zapytań, niż sama pojedyncza ich wartość bezwzględna.

Rozwiązanie równań: $y = ax^{\pm 1}$, które są wykładnikiem całego szeregu zagadnień zupełnie określonego typu wcale nie wymaga rozszerzenia pojęcia liczby. Mając tylko ułamki można zagadnienia te zawsze rozwiązywać. Inaczej się rzecz przedstawia z równaniem: $y = ax + b$. W tym przypadku istnieje mnóstwo zagadnień, dla których odpowiedzi nie znajdziemy, jeżeli nie weźmiemy na uwagę liczb względnych.

Z tego powodu nie każdą pojedyńczą liczbę uzupełnionej klasy należy uważać za symbol ogólniejszy, lecz cały układ liczb tej klasy. To samo dotyczy działań. Działania te mają też charakter podwójny, że tak powiem. Przy liczbach względnych niema właściwie różnicy pomiędzy dodawaniem i odejmowaniem; każde dodawanie można zastąpić przez odejmowanie i naodwrót. Dwa działania przy liczbach bezwzględnych zastąpione tu są przez jedno o charakterze podwójnym. To samo było z dzieleniem i mnożeniem przy ułamkach. Stąd powstaje pojęcie sumy algebraicznej przy liczbach względnych. Co się tyczy mnożenia i dzielenia, to ono, skoro ma mieć zastosowanie, musi zadość uczynić równaniu: $y = ax^{\pm 1}$ i przy liczbach względnych. Stąd wynika charakter specyficzny tych działań w tym przypadku. Rzecz to bardzo ważna.

Z tych uwag wynika, że utarte zdanie, iż działania z liczbami wyższego rzędu są ogólniejsze i zawierają, jako szczególny przypadek działania z liczbami niższego, jest niesłuszne. Klasa uzupełniona niekoniecznie ma działania, które należy uważać za ogólniejsze, niż działania klasy pierwotnej.

W jaki sposób jednakże odkryć treść tych działań? Nawet, gdyby utrzymany był wniosek o ich ogólniejszym charakterze sprawa nie poruszyłaby się wiele naprzód. Zwykła, dzisiaj stosowana metoda t. zw. ścisłego wykładu o tych działaniach podaje je przez definicję. Skąd się jednakże wzięła ta definicja? Musiały być wszak pewne powody, które ją w ten lub inny sposób podpowiedziały. Niewątpliwie podpowiedziały ją pewne spostrzeżenia zdobyte na oddzielnych przykładach.

Własności pierwiastków rzeczywistych równania algebraicznego podpowiedziały sposoby działań z liczbami zespolonemi.

Jednem z ważnych spostrzeżeń, które spowodowały możliwość wprowadzenia liczb względnych był fakt możliwości rozszerzenia prawa przemienności na wszelkie wyrazy wielomianu. Fakt ten został właśnie skonstruowany w rozdziale poprzednim przy rozwiązywaniu równania oraz rozważania własności działań! W ten sposób naturalnem mogło się stać przedstawienie różnicy:

$$a - b \text{ w postaci } (-b) + (+a).$$

Z drugiej strony rozumowanie proste, które stosowane jest przy fakcie odejmowania różnicy, mogło podpowiedzieć samo pojęcie odejmowania liczby ujemnej. Oczywiście fakty rzeczywistości konkretnej również mogły podsuwać możliwość uwzględnienia i wprowadzenia podwójnego charakteru danej liczby bezwzględnej. Dotyczyć to mogło nie tylko powstania samego pojęcia tych liczb, lecz nawet działań z niemi. Takie zjawiska, jak zmiejszenie długu, jak jednoczesne zwiększenie i zmniejszenie o tę samą wielkość i t. p. niewątpliwie mogły podsunąć myśl nie tylko samego wprowadzenia liczb względnych, lecz również działań z niemi. Jedną z zasadniczych własności tych działań stanowią równości:

$$(+a) + (-a) = 0 \; \ldots\ldots \; (1)$$

$$+(+a) = -(-a) \; \ldots\ldots \; (2)$$

$$-(+a) = +(-a) \; \ldots\ldots \; (3)$$

Równości te zupełnie dokładnie można interpretować poglądowo. Może być wiele różnych sposobów, tutaj przytoczymy jeden z nich.

Wyobraźmy sobie rezerwuar, zawierający, dajmy na to, pewną ilość wody, do którego tę wodę można wlewać przez jedną rurę opatrzoną kranem, a wylewać przez drugą też z kranem. Rury są zupełnie jednakowe: tyle ile jedna wlewa, druga w tymże czasie wylewa. Skoro obydwie rury działają jednocześnie, poziom wody w rezerwuarze pozostaje niezmienny. Jest to interpretacja równości (1).

Jeżeli zamkniemy rurę napełniającą, t. j., inaczej mówiąc, usuniemy dopływ wody, poziom zacznie się obniżać. W ten sposób interpretować można równość (3).

Jeżeli zamkniemy drugą opróżniającą rurę—poziom zacznie się podnosić. Mamy interpretację równości (2).

Równości wspomniane zawierają istotę dodawania i odejmowania liczb względnych.

To samo dotyczy mnożenia i dzielenia. Przy mnożeniu dwumianów (a + b) (c — d) i (a — b) (c — d) oraz wyprowadzaniu rezultatu mnożenia skonstatowaliśmy, że iloczyn odjemnych i odjemników zawsze jest składnikiem, w razie zaś, gdy mnożymy odjemną przez odjemnik lub odwrotnie, otrzymujemy odjemnik. Uogólnienie prawa przemienności na wszelkie wyrazy wielomianu, złączenie liczby ze znakiem powoduje, że powyższe spostrzeżenia mogą podpowiedzić sposób mnożenia liczb względnych, To samo dotyczy rozważania równania:

$$y = ax,$$

które ma wielkie znaczenie przy nauce początkowej liczb względnych, a jego interpretacja graficzna może być bardzo w tym względzie pomocną, jak zobaczymy zaraz.

Niewątpliwie definicje działań opierają się na dwóch faktach:

1° wymagamy od nich zachowania własności działań w klasie pierwotnej skonstruowanych, a

2° opieramy się na pewnych spostrzeżeniach zarówno dotyczących pewnych wniosków, płynących z zastosowania tych własności w klasie pierwotnej, jak pewnych doświadczeń konkretnych.

Niewątpliwie w wykładzie ścisłym źródła psychologiczne znikają, nie są potrzebne, nie należy jednakże sądzić, że źródła te przestają być ważnemi dla nauki. W rozprawach spółczesnych matematyków nieraz wyczuć się daje owo zapoznanie tych źródeł, stąd często rozprawy te mają charakter luźnych fragmentów — ciekawostek; jak słusznie jeden z matematyków powiedział, wiele z tych rzeczy można przyrównać do przestawiania krzeseł w tym samym pokoju. Nauka doświadczalna i rozumowanie oderwane są ze sobą w związku bardzo bliskim, czego najlepiej dowodzi historja nauk ścisłych. Rozumienie tej rzeczy szczególnie jest ważne dla pedagoga. Wszak jego zadanie właściwe, to nie wykład systematyczny, lecz stwarzanie odkryć, powtarzanie ich w coraz to innym gronie młodzieży, a odkrycia zawsze zjawiają się nie w mózgu systematyków, lecz w potężnym umyśle twórców. Jeden z największych twórców ostatniej doby H. Poincaré ilustruje ten fakt na swej osobie znakomicie. Należy odróżniać takie zjawiska w dziedzinie systematyzacji nauki, mające charakter przygotowawczy, jak np. teorja mnogości, od odkryć prawdziwych w rodzaju np. teorji względności w fizyce i t. zw. nowej mechaniki.

Czytelnik, który obecnie rozważy to wszystko, zda sobie sprawę z celu, jaki postawiliśmy sobie w rozdziale poprzednim oraz środków tam zastosowanych.

Możemy teraz po tych rozważaniach wstępnych zająć się bliżej wyjaśnieniem samego sposobu postępowania w nauczaniu.

Należy przedewszystkiem wyjść z rzeczy konkretnych. Do tego znajdziemy wiele przykładów w otoczeniu ucznia. Zarówno zjawiska temperatury, jak czasu, kierunków drogi, położenia punktu na prostej, przysłowiowego długu i kapitału i t. p. Wskazujemy, że byłoby pożytecznem i praktycznem, gdybyśmy dla odróżnienia dwóch wielkości o charakterze przeciwnym zastosowali dwa znaki $+$ i $-$. Wskazywałoby to nam w krótki i wyraźny sposób z jakim przypadkiem mamy do czynienia i byłoby krótszem od omówienia słownego. Te same znaki możemy zaraz zastosować do wyznaczenia punktu na płaszczyźnie zapomocą spółrzędnych Descartesa. Tu uczeń widzi dokładnie, że zapomocą znaków można wyrazić, w jakim kącie punkt jest dany.

Następnie przypominamy wszystkie te spostrzeżenia, jakie zostały zrobione przy rozważaniu własności działań i wniosków z nich płynących oraz przy rozwiązywaniu początkowem równania. Okazało się tam, że złączenie znaku z liczbą jest rzeczą praktyczną i pożyteczną. Czy nie możnaby było w takim razie rozszerzyć zakresu znanych nam liczb i obok poprzednich, które będziemy uważali za dodatnie, wprowadzić ujemnych? W takim razie ciąg naturalny rozwijałby się w obydwie strony od 0.

Ciąg naturalny jest uporządkowany dokładnie: każda następna liczba jest większa od poprzedniej. Gdyby ta własność zachowaną nie była, gdyby ciąg liczb ujemnych tego warunku nie spełniał, należałoby go inaczej uporządkować, a w takim razie powstałoby dużo zamieszania. Należy rozważyć, w jakim przyprzypadku jedną z liczb ujemnych uważać można za większą od innej. Przy rozważaniu tego pytania należy zwrócić uwagę na różnicę, np.: $2 - x$.

Ta różnica jest możliwa, skoro $x \leq 2$, później staje się dla nas niemożliwą, gdy x wzrasta. Czy nie można również zapomocą znaku umówić się co do oznaczania tej różnicy wtedy, gdy $x > 2$?

Tutaj nauczyciel musi porównać powyższe oznaczenia przy przykładach konkretnych z tym ostatnim i w odpowiedni sposób interpretować. Jeżeli posunąłem się 2 kroki naprzód oraz x kroków wstecz, o ile x jest mniejsze niż 2, jestem oddalony od poprzedniego położenia w kierunku, który uważam za dodatni, jeżeli zaś większe, — odsunąłem się w stronę ujemną. Rezultat jest ujemny. To samo w innych przypadkach.

W ten sposób wykazujemy, że oznaczenie biegunowości dwóch wielkości jest równoważne z oznaczeniem odpowiedniem różnicy.

Poznaliśmy poprzednio prawo monotonji przy działaniach arytmetycznych. Jest pożytecznem, żeby ono zachowanem zostało, t. j. by nap. przy różnicy, gdy odjemnik rośnie — różnica zmniejszała się. Z tego wyprowadzamy wniosek, że w takim razie liczby ujemne należałoby co do wielkości uporządkować w ten sposób, by liczba, która ma wartość bezwzględną, większą, — była mniejsza od tej, która ma tęż wartość mniejszą. Wskazujemy dalej na to, że takie uporządkowanie ma sens konkretny, że np. tem mniej posiadamy, im większy dług mamy, że tem mniej jest „ciepła", im niższa jest temperatura i t. p.

W ten sposób zdobywamy uporządkowanie elementów klasy liczb uzupełnionej. Jest to pierwsza ważna zdobycz.

Drugą zdobyczą będzie dojście do równości, które powyżej oznaczyliśmy: (1), (2), i (3).

Można zacząć np., wziąwszy na uwagę odcinek i dwa jego zwroty. Niech będzie a — długość odcinka AB, porządek liter (A i B) niech wyznacza kierunek dodatni. W takim razie przesunięcie od A do B wyrazimy liczebnie: $+a$, a odwrotne $-a$. Gdybyśmy najpierw przeszli od A do B, potem wrócili od B do A, nie przesunęlibyśmy się wcale z punktu A. Formalnie możemy to wyrazić:

$$(+a) + (-a) = 0.$$

Najgłówniejszą rzeczą jest tu wprowadzenie znaku dodawania, co nie powinno u uczniów wbudzić trudności ani wątpliwości. To samo można przerobić na innych przykładach konkretnych. Z łatwością następnie otrzymać możemy następujące równości:

$$(+a) + (+b) = +(a+b)$$

$$(-a) + (-b) = -(a+b)$$

Można te równości skomplikować rozciągając je na większą liczbę składników oraz sprawdzić zastosowanie w nich prawa łączności i przemienności. Wyjaśnienie równości (2) i (3) również nie powinno spotykać większych przeszkód. Można posługiwać się różnemi środkami uzmysłowienia, nie wyłączając powyżej podanego przykładu z rezerwuarem. Np. zmniejszyć dług znaczy to samo, co zwiększyć stan posiadania, zwiększenie liczby stopni poniżej zera jest tem samem, co obniżenie (zmniejszenie) temperatury i t. p.

Następnie zajmujemy się zmianą postaci dowolnych wielomianów np.:

$$2a^2 - 3ab - b^2 = (+2a^2) + (-3ab) + (-b^2) = -(-2a^2) + (-3ab) - (+b^2) \text{ i t. d.}$$

Sformułowanie dodawania i odejmowania nie nastręcza już trudności. Powiadamy:

Dodać liczbę względną znaczy to samo, co dodać lub odjąć jej wartość bezwzględną zależnie od tego czy jest dodatnia, czy ujemna.

Przy odejmowaniu z wartościami bezwzględnemi postępujemy naodwrót.

Jeżeli cała praca powyższa została przerobiona w szczegółach dokładnie i umiejętnie, uczeń może mieć to przeświadczenie, że sam poniekąd odkrywa nowe liczby i zajmuje się określeniem działań z niemi.

Nauczyciel winien się starać, by wszystko powyżej wyprowadzone poparte było znaczną liczbą ćwiczeń w celu ugruntowania i zmechanizowania działań. Nadają się tu przykłady liczebne oraz niezbyt skomplikowane działania z wielomiennemi wyrażeniami. Te ostatnie wymagają jeszcze pewnego uzupełnienia, które polega na wprowadzeniu pojęcia sumy algebraicznej oraz zastosowania do niej własności dodawania i odejmowania sumy, które zostały gruntowniej opracowane w kursie wstępnym. Rzeczy te nie mogą nasuwać osobliwych trudności.

Obecnie wysuwa się na czoło mnożenie i dzielenie liczb względnych.

Nauczyciel przypomina te spostrzeżenia, które zostały zrobione przy mnożeniu dwumianów w kursie wstępnym. Niektórzy autorowie uważają, że tych spostrzeżeń wystarczy, żeby wyprowadzić sam sposób mnożenia. Rzecz jasna, że zastosowanie zasady zachowania działań formalnych mogłoby podpowiedzieć definicję mnożeniu. Nie należy jednakże nigdy zapominać, że dla umusłu niewyrobionego należy zużytkować możliwie największą liczbę środków, które mogłyby przekonać o potrzebie przyjęcia pewnego prawa, nie wyłączając najbardziej konkretnych, które człowiek wyrobiony będzie uważał za zbyt grube narzędzie.

Jednym z takich środków jest odwołanie się do znanego równania:

$$y = ax.$$

Równanie to, jak zaznaczyliśmy daje dla każdego x w klasie liczb bezwzględnych wymiernych odpowiednią wartość na y i odwrotnie. Nie nasuwa ono pozornie samo przez się potrzeby rozszerzenia zakresu liczbowego. Skoro jednakże udamy się do jego graficznego przedstawienia, skoro prosta otrzymana będzie właściwie jednym tylko promieniem, powstaje pytanie, jakie równanie będzie odpowiadało drugiemu promieniowi. Powyżej uzupełniliśmy do całości układ spółrzędnych, wobec tego, przy oznaczeniach tam przyjętych ze względu na symetrję możemy przyjąć, że równanie drugiego promienia przedstawi się, jak następuje:

$$-y = a\,.\,(-x)\,.\,.\,.\,.\,.\,(C)$$

Stąd widocznem jest, że skoro a jest liczbą dodatnią potrzeba byłoby przyjąć, że iloczyn dodatniej liczby przez ujemną jest liczbą ujemną.

Może się zrodzić teraz pytanie, jak należałoby napisać równanie dla promienia przebiegającego w kącie drugim. Bezwzględne wartości a, y, x muszą ze względu na symetryczne położenie promienia *). Gdybyśmy pragnęli zachować tę samą, co poprzednio, postać równania, musielibyśmy napisać:

$$+ y = (- a) . (- x), \ldots\ldots (A)$$

a dla promienia przebiegającego w kącie czwartym:

$$- y = (- a) . (+ x) \ldots\ldots (B)$$

W pierwszym przypadku (A) wobec tożsamości liczb y, a, x, nie możemy przyjąć, że a jest dodatnie, bo inaczej byłaby sprzeczność pomiędzy równaniem (A), a równaniem (C), wynikałoby, że dla punktów w kącie 3-im i 2-im, które mają tę samą wartość na odciętą, rzędne są też równe, t. j. $- y = + y$. Tego przyjąć nie możemy, a jeżeli tak, to musimy się zgodzić z tem, że iloczyn dwóch liczb ujemnych (poprzednio odjemników) jest dodatni. W równaniu B również z tego powodu nie możemy założyć a — jako dodatnie, wynikałoby wtedy, że $- x = + x$, co przeczy poprzednio ustalonej kolejności liczb co do ich wielkości. Stąd winniśmy przyjąć, że iloczyn ujemnej liczby, przez dodatnią jest ujemny, co znowu zgadza się z poprzedniem spostrzeżeniem.

Jeżelibyśmy przyjęli zaznaczone prawidło mnożenia liczb względnych i oznaczyli symbolami a, x i y zarówno liczby dodatnie, jak ujemne, dostalibyśmy bardzo wygodne uogólnienie, gdyż moglibyśmy pisać zawsze $y = ax$.

Idźmy teraz jeszcze dalej, weźmy na uwagę samo poprzednio znane pojęcia mnożenia liczb całkowitych. Mamy do pomnożenia np.: (— 3) przez (+ 4). Zachowując dawne pojęcie o mnożeniu, możemy napisać, że $(- 3) \times (+ 4)$ mogłoby być tem samem samem, co: $(- 3) + (- 3) + (- 3) + (- 3) = - 12$, t. j. iloczyn ma znak ujemny i równa się co do wartości bezwzględnej iloczynowi wartości bezwzględnych czynników.

Skoro takiem mogłoby być mnożenie ujemnej liczby przez dodatnią, byłoby wskazanem, aby to mnożenie posiadało prawo przemienności, t. j. aby:

$$(- 3) \times (+ 4) = (+ 4) \times (- 3) = - 12.$$

Wniosek ten zgadza się z poprzedniemi spostrzeżeniami.

*) Przypuszczamy, że pojęcie symetrji, jak również elementarne, początkowe pojęcia geometryczne są uczniom znane z propodeutyki geometrycznej (patrz Część III niniejszej książki).

Ażeby uzupełnić mnożenie, należy się teraz zastanowić, jakim należałoby przyjąć iloczyn w przypadku mnożenia liczb ujemnych.

Weźmy przykład. Mamy do pomnożenia np. $(-3)\times(-4)$, jakim będzie iloczyn?

Jeżeli mnożenie liczb względnych ma zachować te same własności, co mnożenie liczb bezwzględnych, musi być zastowane prawo monotonji. Zgodnie z powyższem możemy napisać:

$$(-3)\times(+4) = -12,$$
$$(-3)\times(+3) = -9,$$
$$(-3)\times(+2) = -6,$$
$$(-3)\times(+1) = -3,$$

Widzimy, że iloczyny stale rosną, gdy mnożnik maleje.

Jeżeli weźmiemy taki przykład:

$$(+3)\times(-1) = -3,$$
$$(+3)\times(-2) = -6,$$
$$(+3)\times(-3) = -9,$$

widzimy, że iloczyn stale maleje, gdy mnożnik maleje. Stąd widocznem jest, że prawo zmiany iloczynu nie zgadza się dokładnie z tem, co widzieliśmy przy liczbach bezwzględnych, zachowana jest tylko stałość zmniejszania się albo zwiększania. Rzecz ta musi pozostać w odniesieniu do wszystkich liczb klasy uzupełnionej, a więc, jeżeli w pierwszym z rozważanych przypadków mnożnik dalej się będzie zmniejszał i stanie się liczbą ujemną, iloczyn musi być liczbą dodatnią, inaczej mówiąc, należałoby przyjąć, że np.:

$$(-3)\times(-2) = +6,$$

gdyż z dwóch możliwych znaków jest wobec prawa monotonji do przyjęcia tylko albo znak $+$ przy zachowaniu iloczynu bezwzględnych wartości, albo też bezwzględna wartość iloczynu ma nie być iloczynem bezwzględnych wartości. To ostatnie jest nie do przyjęcia, gdyż wobec poprzednich przypadków mnożenia, wypadałby rażący wyjątek. Stąd, skoro mamy starać się o zachowanie największej liczby podobieństw do znanego nam sposobu mnożenia, możemy przyjąć, że iloczyn liczb ujemnych jest liczbą dodatnią.

Prawo monotonji może nasunąć pewne trudności. Weźmy np. klasyczny przykład, a mianowicie równość:

$$\frac{+1}{-1} = \frac{-1}{+1},$$

W tej proporcji zachowane są wszystkie jej własności, jedna tylko rzecz uderza odrazu, mianowicie w pierwszym stosunku $+1 > -1$, a w drugim $-1 < +1$. Gdybyśmy wobec tego zastosowali znane i zwykle używane pojęcie o stosunku, pierwszy stosunek należałoby uważać za większy od drugiego. Tego rodzaju jednakże rozumowanie tu nie może mieć zastosowania, gdyż przy liczbach względnych pojęcie „zawierania się" jednej liczby w drugiej związane z liczbami bezwzględnemi traci swoje znaczenie, a określenie stosunku, podane przez nas w rozdziale II-im, tę sprzeczność zupełnie usuwa.

Przy liczbach względnych zupełnie jest możliwa każda taka proporcja, jak np. $\frac{-2}{+3} = \frac{+2}{-3}$ lub taki iloczyn, jak: $(+2) \times (-3) = (-3) \times (+2)$, gdyż nie tylko pojęcie dzielenia jako mieszczenia się, ale i iloczynu jako pewnej sumy równych składników tu miejsca nie ma. Zachowane są tylko własności formalne działań, umożliwiające wobec braku wyjątków wprowadzenie symboli ogólnych nie zaś zachowanie pewnych zbyt konkretnych pojęć związanych z działaniami.

Dzielenie traktujemy jako odwrotność mnożenia. Po tych rozważaniach można zdefinjować w znany sposób mnożenie i dzielenie liczb względnych. Związane z tem potęgowanie trudności już nie przedstawia. Uogólnienie powyższego na ułamki, na co uwagę zwrócić należy, również trudności nie przedstawia.

Z poprzednich rozważań i przedstawienia rzeczy, wypróbowanego w praktyce, czytelnik widzi, jak, nie używając bynajmniej metod zwykłych t. zw. ścisłego wykładu, można w sposób przystępny a jednakże zgodny z duchem samej nauki rzecz całą uczniom nie tyle wyłożyć, ile przy pomocy ich własnej obserwacji i myślenia przedstawić.

Jednem z najbliższych zastosowań po odpowiednich wprawach w mnożeniu i dzieleniu będzie niedługie powtórne zajęcie się rozwiązywaniem równań 1-go stopnia z jedną niewiadomą oraz ich układaniem. Należy tu zwrócić uwagę, że wobec wprowadzenia liczb względnych każde dane nam równanie 1-go stopnia możemy rozwiązać, t. j. sprowadzić do postaci najprostszej: $x = a$. Technika rozwiązania dzięki wprowadzeniu liczb względnych uprości się znakomicie, co również należy podkreślić. Jest rzeczą jasną, że równania, które rozwiązujemy, należyć muszą do kategoryj równań prostych ze spółczynnikami liczbowemi, oczywiście bez niewiadomej w mianowniku. Zanim w dalszym ciągu zwrócimy uwagę ucznia na sprawy teoretyczne związane z rozwiązywaniem i właściwościami równania, ten ostatni będzie posiadał technikę jego rozwiązywania oraz wartość w zastosowaniu. Stąd rozprawa teoretyczna nabierze charakteru omawiania rzeczy ważnej.

Drugim zastosowaniem będzie powrót ponowny do przedstawień graficznych. Hiperbolę równoboczną można uzupełnić, dodając drugą gałąź, parabolę również, a równanie prostej traktować już kompletnie w postaci: $y = ax + b$. Mówiąc o przedstawieniach graficznych poprzednio, sądziliśmy, że uczniowie z propedeutyki geometrycznej mają już pewne dostateczne wiadomości. Przy odpowiedniem wykonaniu tej rzeczy wiadomości te mogą być nawet niepotrzebne, jakkolwiek byłyby bardzo na miejscu. Nie należy ominąć sposobności zaznaczenia, że rozwiązanie równania $3x = 4$ jest równoważne z rozwiązaniem równania $3x - 4 = 0$, które dostaje się z równania

prostej: $\qquad y = 3x - 4$

przez założenie: $\qquad y = o$.

Należy wytłumaczyć treść geometryczną samego rozwiązania.

Obecnie można już postawić kropkę nad i przez przejście do wprowadzenia symboli ogólnych. Potrzebne jest do tego pewne przygotowanie. Jeżeli a ma oznaczać dowolną liczbę względną, w takim razie symbole: $-a$ i $+a$,

zawierają już w sobie znaki podwójne, a symbole naprzykład:

$$-(+a), \qquad -(-a) \text{ i t. p.}$$

znaki potrójne. Otóż przygotowaniem wspomnianem będzie zastosowanie do liczb znaku potrójnego i przeróbki w postaci następującej: $\quad -[-(-3)] = +(-3)$ i t. d.,

t. j. wskazując, że wyprowadzone poprzednio reguły znaków nie zależą od tego, czy mamy do czynienia z wartością bezwzględną czy też nie. Wprowadzenie symboli ogólnych wymaga więc czysto formalnego uogólnienia reguły znaków.

Obecnie można przystąpić do znanych w zwykłym kursie algebry przeróbek i działań z wielomianami i jednomianami. Rzeczy te w nauczaniu nie będą już zajmowały tyle czasu i nie będą tak, jak to bywa zwykle, podobne do żmudnej mechanicznej pracy, lecz nabiorą więcej znaczenia płynącego z jaśniejszej świadomości u ucznia ich celu, który tem bardziej stanie się wyraźnym, jeżeli obok przeróbek od czasu do czasu będziemy powracali do równania i wykazywali, że rozwiązanie jego wymaga nieraz wykonania tej żmudnej rachunkowej roboty. Zwykle za dużo czasu poświęcamy na te przeróbki i przytem tak często ginącego bezpłodnie. Jedną z przyczyn tego faktu jest mało ugruntowana śród uczni znajomość własności działań arytmetycznych. Uczeń, który przerabiał ogromne przykłady, nieraz nie potrafi sobie dać radę albo waha się w przypadkach bardzo prostych. Zjawisko to jest zbyt powszechnem, żeby nie mogło zwrócić na się uwagi. W poprzednim rozdziale przedstawiony kurs wstępny jako jedno z zadań głównych ma owo ugruntowanie pojęć o własnościach 4-ch działań. Jeżeli rzecz ta jest zrobiona dobrze, ani rozwiązywanie równania, ani działania z wielomianami i jednomianami nie będą dla uczniów rzeczą trudną. W kursie wstępnym, tak samo jak później, staraliśmy się podkreślać takie metody rozumowania, które opierałyby się na czynnym udziale ucznia w pracy i usuwały podawanie gotowych norm postępowania.

Należy tu jeszcze dodać kilka myśli dotyczących wykonania głównych działań. Na szczególną uwagę zasługuje dzielenie wielomianów. Rozumienie algorytmu dzielenia śród uczniów należy do przypadków bardzo rzadkich. Niezbędnem jest lepsze, gruntowniejsze wyjaśnienie tej rzeczy.

Jeszcze przy mnożeniu wielomianów należy podkreślić fakt otrzymywania niższego i wyższego wyrazu iloczynu, wskazać na to, że to są wyrazy, które nie mogą być zredukowane i, że każdy iloczyn dwóch wielomianów nie może posiadać mniej niż dwa wyrazy. O faktach tych się wspomina, często jednakże dość luźnie, i dzięki temu nie występują one w świadomości ucznia wyraźnie, co do zrozumienia algorytmu dzielenia wielomianów jest rzeczą niezbędną.

Najgłówniejszą rzeczą w rozumieniu tego algorytmu jest właśnie otrzymanie pierwszego wyrazu ilorazu. Przy następnych wyrazach proces tylko powtarza się. Należy podkreślić analogję ze zwykłem dzieleniem liczb całkowitych oraz wskazaną jest ostrożność przy rozpoczynaniu dzielenia od wyrazów najniższych. Przy tem potrzebne jest wyjaśnienie, że własności reszty przy dzieleniu wielomianów pozostają te same, co przy liczbach całkowitych w rachunku.

W klasie więcej rozwiniętej można dać bardzo prosty dowód o reszcie wielomianu przy dzieleniu przez dwumian postaci $x - a$. Reszta ta, jak wiadomo, równa jest zawsze liczbie otrzymanej po podstawieniu do danego wielomianu wszędzie zamiast x liczby a. Chodzi nam tu głównie o wielomiany postaci: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots a_{n-1}x + a_n$.

Zastosujemy do wykazania słuszności twierdzenia o tej reszcie rozumowanie przez indukcję matematyczną. Oznaczmy powyższy wielomian symbolem $F_n(x)$. Dla $n = 1$ twierdzenie sprawdza się odrazu. Przypuśćmy, że jest słuszne dla $n = m$, t. j.:

$$F_m(x) = (x - a)F_{m-1}(x) + F_m(a).$$

Wykażmy teraz, że twierdzenie słuszne będzie dla $F_{m+1}(x)$. Jeżeli $F_m(x)$ jest zupełnie dowolną funkcją powyżej zaznaczonej postaci, gdzie współczynnikami są zupełnie dowolne liczby, to, nie zmniejszając ogólności, możemy przyjąć, że:

$$F_{m+1}(x) = xF_m(x) + C,$$

gdzie C jest liczba od x niezależna. W takim razie:

$$F_{m+1}(x) = (x-a)F_m(x) + aF_m(x) + C,$$

lecz $$aF_m(x) = a(x - a)F_{m-1}(x) + aF_m(a),$$

więc $$F_{m+1}(x) = (x - a)F_m(x) + a(x - a)F_{m-1}(x) + aF_m(a) + C =$$

$$= (x - a)[F_m(x) + aF_{m-1}(x)] + [aF_m(a) + C],$$

t. j. resztą przy dzieleniu $F_{m+1}(x)$ przez $x - a$ będzie wyrażenie:

$$aF_m(a) + C,$$

które otrzymuje się z $F_{m+1}(x)$ przez podstawienie zamiast x liczby a. Twierdzenie jest więc słuszne ogólnie. Będzie ono słuszne również w tym przypadku, gdy spółczynniki a_0, a_1, a_2... i t. d. będą wyrażeniami dowolnemi nie zawierającemi x.

Dowód ten jest ważny z tego powodu, że usuwa wszelkie wątpliwości, jakie powstawać mogą nap. przy dowodzie zwykle używanym, gdzie w równości: $F_n(x) = (x - a)F_{n-1}(x) + r$ podstawiamy zamiast x liczbę a.

Przypadek podzielności wielomianu przez $x-a$ wynika sam przez się a zarazem ważna własność przydatna przy rozkładzie wielomianów na czynniki: np. wielomian: $2x^2y-xy^2-y^3$ dzieli się przez $x-y$ i t. p.

Rzecz jasna, że dowód tu przytoczony dotyczy głównie nauczyciela, który może jednakże w warunkach odpowiednich, zmieniwszy sam sposób oznaczania, zastosować go, jak powiedzieliśmy, w klasie więcej rozwiniętej.

Rozkładanie na czynniki jest jednym z działów, w którym uczeń może się spotkać poraz pierwszy z potrzebą inwencji ze swej strony. Nie należy przesadzić w dobieraniu trudnych przykładów, wskazanem jest jednakże wyzyskanie tego działu w celu zainteresowania uczni przedmiotem. Może to się udać znakomicie. W podręcznikach u nas używanych dział ten jest pod względem metodycznym przedstawiony na ogół nieźle. Przy odnajdywaniu największego wspólnego dzielnika należy pominąć metodę kolejnego dzielenia i odłożyć ją do powtórzenia kursu. Dla uczniów początkujących może ona nieraz wywoływać niemałe trudności.

Nauka o ułamkach nie przedstawia niczego osobliwego, o czem należałoby obszerniej pomówić. Należy jednakże zwrócić uwagę *na potrzebę większej liczby prostych przykładów*, niż to się zwykle w podręcznikach widzi, gdzie autorowie zbyt pośpiesznie przechodzą do przykładów złożonych i tem samem nie udzielają uczniom pola do właściwego, samodzielnego ćwiczenia.

W niektórych podręcznikach wprowadza się pośpiesznie również pojęcie o wykładniku względnym, co należy zaliczyć do grubych błędów dydaktycznych. Nauka o rozszerzeniu pojęcia o wykładniku musi stanowić odrębny rozdział wstępny przy przejściu do nauki o logarytmie. Tam ona znajdzie swe właściwe zastosowanie i znaczenie, a w pierwszych początkach nauki jest tylko jeszcze jednym powodem uczynienia z nauki matematyki zbioru nieprzemyślanych reguł. Wprowadzenie wykładnika ujemnego musi być zrobione porządnie, t. j. powinniśmy dać genezę definicji, samą definicję, wykazać, że wszystkie działania, które miały miejsce przy wykładniku dodatnim, tu też swoje zastosowanie znajdują. Zajęłoby to wszystko, tembardziej wobec wobec małego wyrobienia matematycznego uczniów, zbyt dużo czasu i przytem zgoła nieprodukcyjnie, bo bez właściwego, potrzebnego zastosowania i przytem tak często z błędnem, zgoła niewłaściwem rozumieniem rzeczy. Wszak dotąd jeszcze często można ze zdziwieniem odkryć, że równość $a^0 = 1$ jest czemś dowiedzionem.

W ten sposób kończy się drugi dział początkowego nauczania algebry, dział bodaj najtrudniejszy i wymagający od nauczyciela najwięcej troskliwości i cierpliwości. W następnym rozdziale zajmiemy się już obszerniej nauką o równaniu i układach równań oraz kwestjami związanemi z tem tak ważnem dla algebry zagadnieniem. Znajomość i wprawa w działaniach pozwolą zastosować je do rozwiązywania równań 1-go stopnia z jedną niewiadomą w całej pełni. Będzie to tylko jednakże umiejętność rozwiązania nie zaś znajomość tego, czem równanie w istocie swej jest jako jeden z przypadków równości wogóle. Dlatego też rozdział następny poświęcimy głównie tej sprawie.

ROZDZIAŁ V.

W rozdziałach poprzednich uczeń nauczył się rozwiązywać równanie 1-go stopnia z jedną niewiadomą, zrozumiał też wartość równania przez zastosowania do rozwiązywania zadań. Teraz jest czas i możność po temu, żeby zaznajomić go z podstawowemi własnościami równania i jego pierwiastków.

Równanie jest jednym z przypadków równości. Te ostatnie dzielimy zwykle na dwie kategorje: tożsamości i równania.

Najprostszą formą tożsamości jest $a = a$, a najprostszą formą równania jest: $x = a$. Zanim sprobujemy odróżniać tożsamość od równania, należy najpierw dać szereg przykładów tożsamości.

Jedne z nich są oczywiste, jak np. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, gdzie prawa i lewa strona strony równości różnią się tylko postacią i natychmiast przez pomnożenie możemy zamiast $(a + b)(a - b)$ otrzymać: $a^2 - b^2$. W drugich tego rodzaju przeróbki są o wiele więcej zawiłe np.

$$ax^2 + bx = a^3 + ab + (x - a)(2a^2 + b) + a(x - a)^2,$$

która jest wynikiem zastosowania rozwinięcia Maclaurina do funkcji: $ax^2 + bx$. W późniejszych rozdziałach algebry uczeń może spotkać tożsamości, gdzie sprowadzenie do formy: $a = a$ jest nieraz bardzo trudne. Ta trudność może być powodem tego, że następujące określenie tożsamości: t o ż s a m o ś c i ą n a z y w a m y r ó w n o ś ć, k t ó r a a l b o p o s i a d a p o s t a ć: $a = a$ a l b o d o t e j p o s t a c i s p r o w a d z i ć s i ę d a p o w y k o n a n i u o d p o w i e d n i c h d z i a ł a ń, nie byłoby zupełnie właściwe. Przypominamy np. casus irreducibilis przy zastosowaniu formuły Cardana do rozwiązania równania 3-go stopnia. Przeróbki tożsamościowe głęboko sięgają w dziedzinę myśli matematycznej i nieraz ta lub inna postać tożsamości odkrywa ukryte dotąd związki. Dało to powód, jak już wspomnieliśmy, jednemu z matematyków do twierdzenia, że właściwie całe myślenie matematyczne jest przekształcaniem tożsamości. Te przekształcenia czasem są łatwe, czasem zaś wymagają rozszerzenia naszej wiedzy. Stąd powyższe określenie zawiera w sobie postulat możliwości przekształcenia danej postaci, a ponieważ tego nie zawsze umiemy dokonać, należy określenie zastąpić przez inne, które nie tyle dotyczyć będzie postaci, ile liczebnej wartości.

O ile w tożsamości wchodzi jeden lub więcej ogólnych symboli liczbowych, sprawdzianem dla niej jest dowolność zupełna ich wartości liczebnych. Stąd używanem jest zwykle następujące drugie określenie tożsamości:

Tożsamością nazywamy równość, która zawsze jest spełnioną, niezależnie od wartości liczebnych poszczególnych, zawartych w niej symboli ogólnych (liter).

Rzecz jasna, że przytem należy uczniom powiedzieć, iż podstawianie wartości liczebnych jest niczem nie skrępowane, że można to robić w sposób zupełnie dowolny ze wszystkiemi symbolami jednocześnie. Odpowiednie przykłady są potrzebne.

Określenie tożsamości prowadzi natychmiast do odpowiedniego określenia równania, a następnie pierwiastku. Potem następuje podział równań co do stopnia. Podział ten jest oczywiście prowizoryczny i może dotyczyć tylko niektórych przypadków równań algebraicznych. Na przykładach nauczyciel winien wykazać, że równanie może mieć nie tylko jeden, lecz dwa i więcej pierwiastków, że te same i tylko te pierwiastki mogą zadość czynić równaniom różnej postaci, które dostają się jedne z drugich przez przeróbki tożsamościowe. Tu właśnie należy się zastanowić nad samym procesem rozwiązania równania. Proces ten sprowadza się do dodania lub odjęcia od obu stron tej samej liczby lub nawet całego wyrażenia zawierającego niewiadome i do pomnożenia lub podzielenia obu stron przez jedną i tę samą liczbę wiadomą. Należy wykazać, że operacje te nie zmieniają ani liczby, ani jakości pierwiastków równania, jakkolwiek mogą zmienić jego postać.

Żeby to wykazać należy wziąć pod uwagę dowolne równanie. Każde równanie możemy w najogólniejszej formie przedstawić w postaci równości:

$$L = P,$$

gdzie L przedstawia jego lewą stronę, a P — prawą.

Jeżeli dodamy do obu stron po Z, gdzie Z może być wyrażeniem zawierającem niewiadomą lub zwykłą liczbą, to otrzymamy równanie: $L + Z = P + Z$.

Wszystkie pierwiastki, które zadośćczynią pierwszemu równaniu, będą zadośćczyniły drugiemu i odwrotnie, gdyż, jeżeli pierwiastek pewien po podstawieniu zamienia $L+Z$ i $P+Z$ na tożsamościowo równe liczby, to niewątpliwie zamieni też na takież liczby L i P.

Przy pomnożeniu przez liczbę a otrzymamy rezultat ten sam.

Tu już można wyjaśnić na przykładach, że skracanie równania przez wyrażenie, zawierające niewiadomą oraz mnożenie przez takież wyrażenie nie daje równania równoważnego. Np. równaniu:

$2x^2 = x$ zadośćczynią 2 pierwiastki: $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{1}{2}$,

a równaniu: $2x = 1$ tylko jeden: $x = \frac{1}{2}$.

Jeden z pierwiastków zginął.

Rzeczy te wymagają jak najwcześniejszego i najstaranniejszego wyjaśnienia. Na tym stopniu nauczania nie powinno się dawać równań z niewiadomą w mianowniku, gdyż sprowadzenie do wspólnego mianownika wywołuje kwestję odrzucenia tegoż, co oczywiście jest w kolizji z powyższem. O tem musi być mowa po raz pierwszy przy nauce o równaniu kwadratowem. W podręcznikach często znajdujemy zaprzeczenie temu, a stąd uczeń przyzwyczaja się do zupełnie swobodnego obchodzenia się z mianownikiem, tembardziej, że często nawet w dobrych podręcznikach tej sprawy nie porusza się wcale.

Po sprowadzeniu do wspólnego mianownika w danym przypadku równanie przedstawić można w postaci:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{F(x)}{\varphi(x)} \text{ albo } \frac{f(x) - F(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Jeżeli chodzi o równanie linjowe, to $f(x) - F(x) = ax + b$. W ogólnym przypadku przed „odrzuceniem" mianownika należy zbadać funkcję:

$$\frac{F(x) - F(x)}{\varphi(x)},$$

t. j. należy się zastanowić przy jakich wartościach na x funkcja ta może przybierać wartość równą 0. Mamy więc tu przed sobą zadanie, znane z elementów rachunku różniczkowego o znajdywaniu właściwych wartości funkcji postaci:

$$\frac{\omega(x)}{\tau(x)}.$$

Oczywiście bez rozważań związanych czy to z pojęciem pochodnej, czy też granicy rzecz ta porządnie zrobić się nie da. Dlatego też w podręcznikach przy nauce o pochodnej to zadanie musi być rozpatrywane. W szkole na niższym stopniu nauczania o tem oczywiście nie może być mowy, stąd należy dać metodę dostępną, lecz przyuczającą do uważnego zachowania się w tych przypadkach. Należy à priori wyrzec się ścisłości rozpatrywania. Nauczyciel może takie odstępstwa robić, o ile to robi świadomie i stara się o minimum odchylenia oraz pamięta, że obowiązuje go... poprawa. Należy zbadać, czy czynniki postaci: $x - a$ lub $(x - c)^2 + d^2$, *) wchodzące do mianownika dzielą licznik: $f(x) - F(x)$ czy też nie. Jeżeli dzielą, należy zwyczajnie skrócić, a następnie mianownik można „odrzucić". Wynika to stąd, że wartości na x zadość czyniące równaniu $\varphi(x) = 0$, o ile nie zadość czynią równaniu $f(x) - F(x) = 0$, nie mogą być pierwiastkami danego do rozwiązania równania. Wyjaśnienie tej rzeczy wymaga pewnych omówień i dlatego rozważanie powyższej kwestji musi być poprzedzone przez wprowadzenie pewnych pojęć, które wynikają z dyskusji równania 1-go stopnia.

Dyskusja ta musi być poglądowa. Inaczej na tym poziomie traktować jej nie można i byłaby zresztą zgoła bezużyteczna tak, jak ongi, w dawniejszych czasach szkolnych sławetne zadanie o kurjerach, które było plagą dla wielu uczni.

*) O tych ostatnich oczywiście przy równaniu linjowem niema co mówić.

Każde równanie pierwszego stopnia można sprowadzić do postaci:

$$a_1x + b_1 = a_2x + b_2 \ldots\ldots (1)$$

Zastosowanie graficznej metody wymaga przejścia do dwóch równań:

$$y = a_1x + b_1$$

$$y = a_2x + b_2,$$

związanych warunkiem, że y przybiera w obu jednocześnie wartości równe. Przedstawiając graficznie te dwa równania, dostajemy dwie proste, które mogą się przeciąć tylko w jednym punkcie. Stąd wnioskujemy, że równanie 1-go stopnia może mieć tylko jedno rozwiązanie i popieramy to natychmiast rozumowaniem następującem.

Załóżmy, że istnieje dla równania (1) obok pierwiastka a drugi pierwiastek: α. W takim razie mamy dwie tożsamości:

$$a_1 a + b_1 = a_2 a + b_2$$

$$a_1 \alpha + b_1 = a_2 \alpha + b_2$$

Z tych tożsamości natychmiast wynika:

$$a_1 (a - \alpha) = a_2 (a - \alpha).$$

Równość ta, skoro $a_1 \neq a_2$ jest możliwa tylko w tym przypadku, gdy $a = \alpha$.

Jeżeli $a_1 = a_2$, to dwie proste wspomniane są równoległe *), a więc nie spotykają się, co wskazuje, że równanie wcale nie powinno mieć pierwiastka. Fakt to dla uczniów zgoła nieoczekiwany. Spotykają się z podobnem zjawiskiem po raz pierwszy. Rozwiązanie równania pierwszego daje nam:

$$x = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}.$$

Stąd, ponieważ $a_1 - a_2 = 0$, dzielenie jest niemożliwe i nie możemy wskazać odpowiedniej wartości na x. Tu po raz pierwszy należy jednakże zastosować pewne zaczątkowe rozumo-

*) O tem uczniowie przekonać się winni drogą doświadczalną zapomocą rozważań natury geometrycznej związanych ze znaczeniem współczynnika kątowego. O tych rzeczach w części III-ej niniejszej książki jeszcze parę słów nadmienimy. Wszystko to wykazuje znaczenie propedeutyki geometrycznej.

wanie, w którem bierzemy na uwagę już nie fakty statyczne oddzielnych liczb, lecz pewne zjawisko dynamiczne. Wyobraźmy sobie, że przy danem stałem a_1 współczynnik a_2, który nierówny jest a_1, np. mniejszy stale rośnie. W takim razie prosta druga będzie się obracała dokoła stałego punktu, a ułamek $\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$ będzie co do wartości bezwzględnej stale wzrastał i, jeżeli różnica $a_1 - a_2$ będzie odpowiednio mała, może przybrać wartości dowolnie duże, stać się większym od wszelkiej naprzód zadanej dowolnie wielkiej liczby. Jeżeli np. zadano nam liczbę: 10^{1000}, możemy uczynić różnicę pomiędzy a_1 i $a_2 = \frac{1}{10^{1000}}$ i ułamek wspomniany będzie co do wartości bezwzględnej (liczby b^1 i b_2 — całkowite) większy, niż zadana liczba. Zjawisko to przyjęto wyrażać symbolicznie znakiem: ∞, który wskazuje, że w danym przypadku możemy mieć do czynienia z dowolnie dużą liczbą, ściśle jednakże zupełnie niewyznaczoną. Stąd pojęcie nieskończoności, które wprowadzamy, ma charakter nie zjawiska statycznego, nie liczby kardynalnej, lecz — procesu nieograniczonego niczem zwiększania się. Żadna, jakkolwiek duża liczba, nie odpowiada na pytanie, — oto rozwiązanie. Nie można używać słowa: nieskończoność tak jak się używa nazw liczb, nie można też odrazu używać znaku równości np. w ten sposób:

$$\left[\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}\right]_{a_1 = a_2}^{b_2 \neq b_1} = \infty$$

Znaku równości używamy przy liczbach znanych dotychczas, nie możemy go rozciągać na zakresy, wykraczające poza te liczby. Należy wyraźnie co do tego się umówić.

Gdy w równaniu (1) oprócz równości między a_1 i a_2 istnieje równość pomiędzy b_1 i b_2, otzymujemy dwie identyczne linje proste, ktore spotykają się w każdym punkcie. Stąd równanie, które w tym przypadku jest tożsamością, ma zupełnie nieograniczoną liczbę pierwiastków, wzór zaś ogólny na rozwiązanie równania w tym przypadku zamienia się na wyrażenie: $\frac{0}{0}$. Otóż tu mamy znowuż sposobność odpowiedniego wyjaśnienia sensu tego wyrażenia i zastosowania przy odpowiedniem omówieniu znaku równości.

W ten sposób uczniowie zapoznają się z głównemi momentami dyskusji równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą bez osobliwych trudności. Wyniki tej dyskusji można zastosować do rozważania rozwiązania równania:

$$\frac{f(x) - F(x)}{\varphi(x)} = 0,$$

o którem powyżej była mowa.

Równanie pierwszego stopnia nie zajmuje w nauczaniu tyle miejsca i czasu, na ile zasługuje. Uczeń przy równaniu pierwszego stopnia zapoznaje się pierwszy raz z równaniem, układaniem równań, głównemi własnościami pierwiastków. Jeżeli ten dział jest przerobiony dokładnie i gruntownie, następne rozdziały teorji równań nie sprawią zbytniej trudności. Najważniejsze są zawsze pierwsze kroki. Jakże po macoszemu nieraz traktują wykładający naukę o równaniu pierwszego stopnia! Podaje się sposób rozwiązania, zastosowuje się do kilkudziesięciu w najlepszym przypadku zadań i koniec na tem. Już krótki przegląd powyższy głównych zagadnień może wykazać, ile tu jest kwestyj, które należy porządnie rozwiązać, na które warto poświęcić więcej czasu i zachodu. W celu lepszego ugruntowania rozciągnęliśmy naukę o równaniu i zastosowaliśmy do sposobu wykładu metodę genetyczną. Metoda ta wymaga, by myśl ucznia przebiegła naturalną ewolucję wzrostu i dojrzewania pojęć, by rezultat w postaci lepszych sposobów rozwiązania był otrzymany drogą zbliżającą się do mozolnej nieraz ścieżki odkryć matematycznych, o której tak często fałszywie sądzimy, że zjawiają się na podobieństwo wytworów poezji odrazu w gotowej formie. Zarówno stara dydaktyka, która dogmatycznie podawała prawdy wiedzy, jak nieraz nowe próby, usiłujące głównie podkreślać ścisłość nie mogą mieć racji ze stanowiska nauczania. Ścisłość jest rezultatem opracowania zdobytych faktów, a dogmatyczne ich podawanie nie uczy myśleć. Należy starać się zawsze o pewne rusztowanie, które okaże się zbędnem wtedy, gdy gmach będzie gotowy.

Po zaznajomieniu się gruntowniejszem z równaniem pierwszego stopnia z jedną niewiadomą przechodzi się zwykle do układów równań. Powstaje tu odrazu zagadnienie, czy nie byłoby lepiej układy równań przechodzić jednocześnie w oddzielnym rozdziale po przejściu teorji równania stopnia 2-go i wyższych z niem związanych. W pewnych programach szkolnych ta ostatnia metoda znajduje swoje zastosowanie.

Układ równań jest czemś odrębnem, czemś zawierającem nowy moment myślowy i wymagającem specjalnego potraktowania. Stąd rzecznicy drugiego zapatrywania uważają, że należałoby układy równań z całym szeregiem związanych z nimi kwestyj ze względu na trudność większą zagadnienia odsunąć dalej. Zwykły wykład ogranicza się przeciętnie do podania sposobów rozwiązania (3-ch lub 4-ch) głównych oraz niektórych przypadków osobliwych. Uczeń zupełnie nie zdaje sobie sprawy z istoty rzeczy, z głównych cech pojęciowych układu, wykonywa wszystko mechanicznie. Czyż nie byłaby lepszą metoda, która pozwoli na wcześniejsze wprowadzenie równania kwadratowego z jego nowem bogatem polem zastosowań i przeniesienie układów wyżej, do dalszych rozdziałów kursu? Niewątpliwie w tem rozumowaniu jest wiele słuszności, wadliwa jednakże metoda nauczania nie może decydować o kolejności następujących po sobie momentów tegoż. Niewątpliwie układy równań zawierają nowe momenty pojęciowe, momenty te jednakże nie są tak trudne, by powstać mogła konieczność ich przesunięcia. Z drugiej strony zastosowanie metody genetycznej wymaga, by daną nową rzecz poznawać najpierw na przykładach prostych, takich, które umożliwiają zastosowanie większe własnych sił umysłowych ucznia oraz rozkładać na dłuższy okres czasu, pozwalający na stopniowe dojrzewanie pojęć. Z tych powodów uważać należy, że wprowadzenie układów równań 1-go stopnia odrazu po nauce o równaniu tegoż stopnia będzie rzeczą zupełnie właściwą.

Naukę rozpoczynamy od rozważania jednego równania 1-go stopnia z 2-ma niewiadomemi. Zadajemy je w postaci:

$$a_1x + b_1y = c_1.$$

Postać tę natychmiast możemy sprowadzić do następującej:

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1},$$

która daje nam równanie pewnej prostej.

Konstatujemy fakt, że dla każdej dowolnej wartości na x możemy natychmiast znaleźć odpowiednią wartość na y. Każda para takich wartości zadość czyni równaniu i stanowi jedną z par jego pierwiastków. Równanie ma nieskończoną liczbę rozwiązań, które graficznie przedstawić można jako spółrzędne punktów na danej prostej.

Można przeprowadzić pewną dyskusję równania na tle graficznem, rozpatrując przypadki, gdy $a_1 = 0$, $b_1 = 0$ i $c_1 = 0$. Używanie ogólnego wzoru na rozwiązanie byłoby niewskazane, gdyż interpretacja dla uczniów stałaby się zbyt trudna. O ile chodzi o grafikę należałoby tu wziąć trójkąt odniesienia, w którym jeden z boków jest prosta w nieskończoności na płaszczyźnie.

Skoro równanie ma zupełnie dowolną liczbę par rozwiązań, u ucznia może powstać wątpliwość, czem różni się ono od tożsamości. Należy tu tę różnicę natychmiast zaznaczyć, wskazując na to, że zmienne x i y są zależne od siebie, że można nadawać dowolną wartość tylko jednej z nich nie zaś obu jednocześnie.

Następnie powstaje pytanie o wartości praktycznej takiego równania. Jakie zadania można przy jego pomocy rozwiązywać?

Nauczyciel wyjaśnia, że, o ile z warunków zadania wypada podobne równanie, wskazuje ono tylko na określoną zależność pomiędzy x i y, nic natomiast nie może nam powiedzieć o poszczególnych określonych wartościach na x i y.

Aby takie określone wartości na x i y otrzymać potrzebne są jeszcze pewne dodatkowe o tych wartościach wiadomości, wyrażone w postaci określonych warunków. Np. możemy skądinąd wiedzieć, że x i y mogą przybierać tylko wartości całkowite i dodatnie. W takim razie możliwem jest wyznaczenie jednej lub więcej wartości na x i y, w każdym razie dowolność będzie ograniczona. Nauczyciel podaje przykłady podobnych zadań, które rozwiązywane są zwykle przy t. zw. równaniach niewyznaczonych.

Następnie rozwija teorję rozwiązania równania danego w tym przypadku, gdy x i y mają być liczbami całkowitemi. Teorja ta ograniczyć się winna do zwykłego rozpatrzenia warunków, przy których x i y mogą mieć wartości całkowite i dodatnie, udowodnieniu twierdzenia o możliwości wyznaczenia wszystkich pierwiastków, skoro dana jest jedna ich para *).

Tutaj uczeń pierwszy raz ma sposobność zapoznania się z nierównościami. Na tę rzecz należy uwagę zwrócić, gdyż w przyszłości żadna porządna dyskusja nie może być wykonana bez odpowiedniego zastosowania nierówności. Teorja nierówności zjawia się zbyt późno, co przystosowane jest do tego, że moment dyskusyjny bywał zwykle prawie zupełnie wyeliminowany.

Potem następuje zwykła metoda rozwiązania równania i zastosowanie tegoż do zadań. Warunek może być rozszerzony na liczby całkowite względne, a całą rzecz można interpretować graficznie przez uwzględnienie na płaszczyźnie współrzędnych sieci prostych równoległych do osi x-ów i y-ów oraz rozpatrywanie punktów węzłowych tej sieci. Proste te mają równanie odpowiednio:

$$x = a$$

$$y = b,$$

gdzie a i b są liczbami całkowitemi. Punkty węzłowe będą miały spółrzędne zawsze całkowite. Pary pierwiastków całkowitych otrzymamy wtedy, gdy prosta reprezentująca równanie przechodzi przez punkty węzłowe.

Nieraz zdarza się słyszeć zdanie, że równanie niewyznaczone 1-go stopnia jest czemś niepotrzebnem w programie szkolnym. Zdanie to wydaje mi się błędnem. Wadą jest nieumiejętne jego umieszczenie nie zaś brak istotnej wartości. Dla pogłębienia nauki o liczbie wymiernej, równanie to ma i może mieć wielką wartość, należy tylko umiejętnie ją wyzyskać, co tem bardziej nie jest trudne z tego powodu, że cały

*) Można stosować znaną metodę przez rozpatrywanie ilorazu: $\frac{c_1 - a_1 x}{b_1}$ Metoda bardzo pouczająca.

szereg bardzo konkretnych zadań możemy mieć do rozporządzenia. Przypomnijmy sobie, ileż to od wieków znanych zadań — łamigłówek opiera się właśnie na rozwiązaniu równania niewyznaczonego. Dużo ich znaleźć można u matematyków hinduskich, egipskich i u Diophantesa. Wskazuje to nam na fakt oczywisty, że myśl ludzka temi drogami biegła w swym rozwoju historycznym i że między innemi z tego względu nie należy tych dróg zaniedbywać.

Po wykonaniu tego pierwszego kroku przejścia do układu równań, przy którym uczniowie uświadomią sobie i ugruntują pewne zależności arytmetyczne oraz pojęcie o nierówności, można zakończyć kurs klasy 4-ej. Nie chcę usilnie przy tem obstawać, wolno mi jednakże uważać powyższy drugi stopień nauczania algebry za całość pod pewnym względem zamkniętą głównie z powodu rozporządzalnego przy nauczaniu czasu. Całość ta zawiera treść bogatą, dotyczy podstawowych działań i podstawowych pojęć. Z drugiej strony wskazanem jest w klasie 5-ej powtórzenie i ugruntowanie większe wiadomości zdobytych, a więc dokończenie działu o rozwiązywaniu układów równań pierwszego stopnia, tembardziej, że pewne momenty dyskusyjne będą wymagały znaczniejszej dojrzałości umysłowej.

* * *

Warunek dotyczący x i y może być podany w innej formie. Można go wyrazić zapomocą określonej równości, np.:

$$ax = y \dots (x).$$

W takim razie w równaniu: $a_1 x + b_1 y = c_1$ można będzie ten warunek uwzględnić w ten sposób, że zamiast y podstawimy ax, t. j. wielkość równą. Takie podstawienie zamieni równanie powyższe, w którem mamy dwie niewiadome na równanie z jedną niewiadomą. Z niego otrzymamy wartość na x, a potem na y z równości (x).

Dowiedliśmy powyżej, że z równania pierwszego stopnia po wykluczeniu warunków wyjątkowych otrzymać możemy tylko jedną wartość na x. Jeżeli tak, to równość (x) wskazuje nam, że na y otrzymamy również tylko jedną wartość. W tym więc przypadku równanie dane ma tylko jedną parę rozwiązań.

Czem jest równość (x)? Nie jest ona tożsamością, jest więc równaniem, które może być napisane w postaci: $x - ay = 0$ i otrzymuje się z ogólnego równania z dwiema niewiadomemi. jeżeli założymy: $a_1 = a$, $b_1 = -1$, a $c = 0$.

Czy nie byłoby możliwe zadać wspomniany warunek również w postaci zupełnego równania 1-go stopnia z dwiema niewiadomemi? Np. zadać możemy w postaci równania:

$$a_2 x + b_2 y = c_2.$$

Z równania tego otrzymujemy:

$$y = \frac{c_2 - a_2 x}{b_2} \ldots (xx)$$

Jeżeli tę wartość podstawimy zamiast y w równaniu:

$$a_1 x + b_1 y = c_1,$$

otrzymamy równanie 1-go stopnia z jedną niewiadomą, z którego znajdziemy odpowiednią wartość na x, a potem z równości (xx) wartość na y.

Tutaj również widocznem jest, że tylko jedna para takich wartości istnieć może, która obu równaniom jednocześnie zadość czyni. Równania:

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

stanowią, jak mówimy, układ równań 1-go stopnia z 2-ma niewiadomemi.

Rodzi się teraz pytanie, czy zawsze jest możliwe otrzymanie powyższego rezultatu, czy zawsze dołączenie nowego równania pozwoli nam znaleźć jedną i tylko jedną parę rozwiązań. Należy sprawę tę rozpatrzyć czyli układ powyższy równań przedyskutować, zbadać go we wszelkich możliwych przypadkach zależnych od tych wartości jakie mogą przybierać współczynniki równań.

Po rozwiązaniu układu otrzymamy na x i y następujące wartości:

$$x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1},$$

$$y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$x = \frac{L_1}{M}$$

$$y = \frac{L_2}{M},$$

gdzie oczywiście: $L_1 = c_1 b_2 - c_2 b_1$, $L_2 = a_1 c_2 - a_2 c_1$, a $M = a_1 b_2 - a_2 b_1$.

Możliwe są następujące przypadki i tylko te:

1) $L_1 \neq 0, \quad L_2 \neq 0, \quad M \neq 0;$
2) $L_1 = 0, \quad L_2 \neq 0, \quad M \neq 0;$
3) $L_1 \neq 0, \quad L_2 = 0, \quad M \neq 0;$
4) $L_1 \neq 0, \quad L_2 \neq 0, \quad M = 0;$
5) $L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad M \neq 0;$
6) $L_1 = 0, \quad L_2 \neq 0, \quad M = 0;$
7) $L_1 \neq 0, \quad L_2 = 0, \quad M = 0;$
8) $L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad M = 0.$

W pierwszym przypadku niema żadnych wątpliwości, gdyż otrzymujemy jedno i tylko jedno rozwiązanie. Grafika wskazuje, że proste przecinają się na płaszczyźnie spółrzędnych poza osiami x-ów i y-ów.

Jeżeli $L_1 = 0$, t. j. $c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0$, to możliwe są przypuszczenia następujące: 1° albo którakolwiek z par spółczynników, np. c_1 i c_2 jest jednocześnie równa 0 albo 2° żaden ze współczynników zeru się nierówna i wtedy mamy proporcję:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

Jeżeli chodzi o pierwsze przypuszczenie, nie możemy założyć, że albo $c_1 = c_2 = 0$, albo $b_1 = b_2 = 0$, gdyż w takim razie albo $L_2 = 0$, albo $M = 0$, to zaś nie jest nam dane. W takim razie zostaje się możliwem, że albo $c_1 = b_1 = 0$ albo $b_2 = c_2 = 0$. W tym przypadku otrzymamy odpowiednie różne wartości na L_2 i M i jedną tylko parę rozwiązań.

Jeżeli weźmiemy na uwagę drugie przypuszczenie, otrzymamy znowu określoną parę rozwiązań.

Graficznie dwie proste przecinają się na osi y-ów.

W przypadku 3) — proste przecinają się na osi x-ów.

W przypadku 4) przypuszczenie $a_1 = b_1 = 0$ oraz $a_2 = b_2 = 0$ jest dla uczniów niemożliwe, gdyż trudno im dać pojęcie o prostej w nieskończoności i dlatego pozostaje tylko

jedno: $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

Grafika wskazuje, że proste są równoległe. Otrzymujemy rozwiązania t. zw. nieskończone czyli w danym przypadku niemasz określonych odpowiedzi na pytanie co dó wartości liczebnej na x i y.

Równość: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ wskazuje, że spółczynniki są proporcjonalne.

Otrzymujemy tutaj pierwszy ważny warunek: spółczynniki przy niewiadomych w równaniach danych, skoro chcemy otrzymać określone wartości na x i y nie mogą być proporcjonalne.

W przypadku 5-ym mamy: $L_1 = c_1 b_2 - c_2 b_1 = 0$ i $L_2 = a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0$. Możliwe są przypuszczenia następujące: albo 1° $c_1 = c_2 = 0$ albo 2° b_2, c_2 i a_2 lub c_1, b_1 i a_1 są równe zeru jednocześnie. Przypadek równości:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2} \quad \text{oraz} \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

jest nie możliwy, gdyż z niego natychmiast wynikałoby, że:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \quad \text{a więc} \quad M = 0.$$

Mamy rozwiązanie zerowe, a proste graficznie przecinają się w początku układu i mogą w szczególnym przypadku zlewać się z osiami spółrzędnych.

Przypadki 6) i 7) dają proste równoległe do osi x-ów i y-ów. Jeżeli będziemy rozpatrywali układ Descartesa jako zwyrodniony trójkąt odniesienia, proste w tych przypadkach przechodzą przez dwa inne jego wierzchołki, o czem oczywiście uczniom niema co mówić.

Przypadek ostatni daje nam rozwiązania postaci $\frac{0}{0}$.

Tutaj, jak poprzednio, na grafice skonstatować możemy, że zamiast dwóch prostych posiadamy właściwie tylko jedną. Inaczej mówiąc dwa równania:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$\lambda a_1x + \lambda b_1y = \lambda c_1$$

są identyczne. Wynika to stąd, że zadając w obu równaniach jedną i tę samą wartość np. na x, otrzymamy z obu tę samą wartość na y.

Mamy tu drugi fakt ważny: jeżeli równania dane różnią się od siebie tylko tem, że współczynniki jednego są odpowiedniemi iloczynami współczynników drugiego od pomnożenia przez jedną i tę samą stałą liczbę, to równania te układu nie stanowią i nie mogą dać oznaczonego rozwiązania.

W pierwszym przypadku rozwiązań t. zw. nieskończonych mamy równania sobie przeczące, w drugim identyczne.

Na te rzeczy w nauczaniu szkolnem... nie było czasu. Czyż jednakże nie są konieczne tam, gdzie chodzi o wiedzę dokładną? Czyż nie potrzeba podkreślać takich momentów chociażby dlatego, by uczniowie więcej myśleć się uczyli. Do tego żeby ulepszyć program szkolny nie trzeba rzeczy nadzwyczajnych, trzeba tylko umieć uczyć rzeczy prostych. Wszak z tych prostych wyrastają później „wysokie teorje", które różnią się od nich tylko... odległością od początku. Rozwijanie funkcjonalnego myślenia, dziś już u nas popularne, i używane w tym celu metody nie pomogą sprawie, jeżeli zapomnimy o dokładności nauczania. Matematyka stać się musi nauką jasnego i prostego rozumowania, ścisłego i jędrnego wyrażania się.

W ten sposób uczniowie otrzymują pojęcie układu równań. Teraz pora na zaznajomienie ich z różnemi metodami rozwiązania. Metody te, gdy się zjawią w tem miejscu, nie będą czemś sztucznem, lecz naturalnem uproszczeniem zadania.

W szkole średniej trudno przeprowadzać dyskusję układu 3-ch równań 1-go stopnia (graficznie czworościan odniesienia) a tem bardziej n równań, które w odpowiedni sposób można interpretować w przestrzeni n wymiarowej albo, jak zwykle, na tle teorji wyznaczników. Równania te uczymy tylko rozwiązywać. Z tego wynika, że tembardziej jest ważne tam, gdzie to zrobić można, nauczenie dokładnego i możliwie ścisłego myślenia.

Należy jednakże wykazać, że np. dwa równania 1-go stopnia z trzema niewiadomemi sprowadzają się do jednego równania z dwoma i że nie dają określonego rozwiązania. To samo należy uczynić z większą liczbą niewiadomych oraz przyjść indukcyjnie do wniosku, że określone rozwiązanie może dać układ n równań z n niewiadomemi, skoro nie zawiera równań sprzecznych oraz identycznych. Następnie należy dać dowód od n do n+1, którego przebieg jest bardzo prosty. Jeżeli twierdzenie jest słuszne dla układu U_n z n niewiadomemi, będzie słuszne dla układu U_{n+1} z n+1 niewiadomemi. Określmy w tym celu jedną z niewiadomych w zależności od innych z jednego z tych równań i otrzymaną wartość podstawmy w pozostałe, dostaniemy nowy układ U'_n z n niewiadomemi, z którego otrzymamy dla każdej z niewiadomych określoną wartość, a potem wyznaczamy wartość n + 1 niewiadomej z łatwością.

Zastosowanie układów do zadań nie budzi osobliwych trudności.

Po tem wszystkiem należy uczynić przegląd i powtórzenie całego kursu poprzedniego, uzupełniając go przez momenty opuszczone, np. przez wprowadzenie znajdywania największego wspólnego dzielnika i najmniejszej wielokrotności. Każdy nauczyciel znajdzie tu te rzeczy, które w danym środowisku uczniów są osobliwie z tego lub innego względu ważne. Można np. wskazać uczniom, że funkcja postaci:

$$y_n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

może być w określonych warunkach przedstawiona w postaci iloczynu dwumianów w ten sposób:

$$y_n = (x - \alpha_1)\, y_{n-1}$$
$$y_{n-1} = (x - \alpha_2)\, y_{n-2}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$y_{n-k+1} = (x - \alpha_k)\, y_{n-k}$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$y_2 = (x - \alpha_{n-1})\, y_1$$
$$y_1 = (x - \alpha_n)\, a_0.$$

Stąd $y_n = a_0\,(x - \alpha_1)\,(x - \alpha_2) \ldots . (x - \alpha_n)$.

Można rzecz tę zastosować do kilku przykładów oraz zwrócić uwagę na budowę spółczynników funkcji przy n = 2 lub n = 3.

Na tem kończy się kurs algebry przed równaniem 2-go stopnia.

Przedstawiona powyżej treść nauczania oraz kolejność jego momentów nie odbiega zbytnio od tego, co się dzieje w praktyce, nie powinna więc natrafić na przeszkody. Autorowi nie chodzi tyle o ten lub ów program. Programy są rzeczą formalną, a nauczanie nie jest przechodzeniem programów. Główną rzeczą jest zwrócenie uwagi na to, co warte jest tego i należyte rozwijanie władz myślenia u uczniów. Krótkie przedstawienie powyższe zdaniem mojem wystarczą do tego, by każdy nauczyciel zdać sobie mógł sprawę z istoty proponowanej metody.

ROZDZIAŁ VI.

Dotąd nie rozpatrywaliśmy bliżej spraw związanych z samem prowadzeniem każdej lekcji, t. j. ogólnej techniki nauczania. Jakkolwiek rzecz ta nie należy do naszych specjalnych zadań, uważamy za wskazane w końcu poświęcić jej słów kilka już chociażby z tego względu, że specjalna natura naszego przedmiotu wymaga specjalnych w tym względzie wskazań. Lekcja musi mieć pewne ogólne cechy, żeby była dobrą, pouczającą. Przedewszystkiem musi mieć wyraźny cel, konsekwentne przeprowadzenie tego celu i żywość wolną od nudy i pedanterji. Z tego stanowiska np. stopnie formalne, o których mówiliśmy wyżej, mają wielką doniosłość, ale trzeba tam, gdzie naturalniejszą i prostszą jest inna droga, umieć iść po niej. Powyżej podawaliśmy przykłady, gdzie stopnie formalne nie mają całkowitego zastosowania i nie zgadzają się z procesem powstawania danych pojęć. Zawsze jednakże przygotowanie lekcji powinno się z niemi liczyć, gdyż tylko w ten sposób można osiągnąć należyty porządek i celowość w prowadzeniu wykładu. Lekcje matematyki mogą być, jeżeli chodzi o ryczałtowe ale wygodne praktycznie, odróżnienie — „ćwiczące" i „objaśniające".

Lekcje ćwiczące przeważnie oczywiście dotyczą zadań z rachunku wogóle. Takie lekcje nie powinny być jednakże zupełnie nieuporządkowane, nie powinno się dawać byle jakich zadań, byle dzieci robiły, byle przeszła godzina... Nauczyciel winien obserwować dzieci, notować to, co budzi trudności, co prowadzi do omyłek, winien stopniować materjał zadaniowy zgodnie ze wzrastaniem jego trudności: każda lekcja powinna być dalszym ciągiem poprzedniej, przygotowywać następną. Przecież i dni naszego życia, nawet te szare dni pracy bezustannej nad sobą lub nad innymi, dni swoje, nasze, dni nieznane nikomu są tylko jednym łańcuchem, jednym żywym ciągiem życia. Przygotowują one dni wielkie i słoneczne, dni jasne i w tej swojej szarości, w tej prostocie swej dają treść naszemu życiu, a ogółowi pożytek największy, bo one tworzą naród o tyle, o ile wola i praca jednostki może dalej go tworzyć. Tak samo one tworzą samego człowieka pracującego nad sobą, są też istotą i treścią pracy nauczycielskiej. Wznieść się do tego, żeby je cenić, żeby znaleźć w nich radość i siłę,— oto zadania pedagoga, człowieka, który chce prowadzić innych. Do ziemi obiecanej zawsze się idzie przez pustynię trudu i cierpliwości. Trudne są te szare dni pracy nad powolnem urabianiem duszy dziecięcej, ale jeżeli im przyświeca celowość, ta matka radości głębszej, jeżeli rozjaśniają je dostrzegane zdobycze, małe triumfy, niemasz nic większego nad nie. Nie skarżmy się na przepracowanie, na zmęczenie, bo największem na nie lekarstwem jest właśnie świadomość swej pracy, jej wewnętrzna spójność i porządek. Umiejętności pedagogiczne są nie tylko dla tych potrzebne, co mniej pracują, ale przedewszystkiem dla tych, którzy pracują ciężko, bo one nie tylko wiedzę dają, lecz i świadomość czynu, dają człowiekowi radość i poczucie własnej siły. Każda lekcja musi być czemś organicznie splecionem z całością nauczania, a dlatego musi być przygotowana, nawet ta, którą poświęcamy tylko ćwiczeniom.

Każda lekcja ćwicząca powinna być celowo opracowana. Takie opracowanie dla młodego nauczyciela musi być przedmiotem namysłu poważnego, który będzie tem mniejszy, im doświadczenie jego i wprawa będą większe. Dlatego to nauczyciel młody, szanujący siebie i swój zawód, nigdy nie powinien brać dużo godzin pracy, gdyż w ten sposób najlepiej uczy się bezmyślności pedagogicznej i zdobywa tylko rutynę, staje się, jak mówią, „rutynowanym pedagogiem". Na lekcję trzeba iść, jak na odczyt dobrze opracowany i przemyślany.

Lekcje ćwiczące dzielą się na dwie kategorje: 1-o takie, na których nauczyciel pracuje razem z klasą i 2-o takie, gdzie pozostawia dzieci samym sobie. Te dwa typy lekcyj uzupełniają się wzajemnie, muszą stanowić jedną organiczną całość.

Nauczyciele u nas często zapominają o tem, że muszą pracować z całą klasą, że uczeń, nie pobudzany do pracy przez zapytania, nie może, szczególnie gdy jest małem dzieckiem, utrzymać w napięciu należytem swej mało rozwiniętej uwagi dowolnej, a przez to dużo traci; praca zaś nauczyciela idzie na marne. Ucząc — kształcimy uwagę, kształcimy wolę człowieka, bo bez rozwoju woli niemasz pożytku z intelektu, który chyżo schodzi bez niej na manowce leniwego doktrynerstwa, próżnego rozumowania. Tylko silna, skoncentrowana wola odkrywa nam głębie życia i głębie myśli.

Gdy pytano wielkich ludzi, jakim sposobem doszli do swych wielkich zdobyczy w dziedzinie nauki lub pracy wogóle, przecie zawsze ze skromnością odpowiadali, że ciągle o tych rzeczach myśleli. Innemi słowy, siła woli podtrzymywała ciągle stałe napięcie ich pracy w danym kierunku. Ta siła woli prawie zawsze, co prawda, miała za sobą wyraźny kierunek zainteresowania, miała określoną wewnętrzną predyspozycję, zabarwioną uczuciowo, a tem samem sporo czynników uwagi mimowolnej.

Nie zapominajmy o dwóch rzeczach. Każdy wysiłek w określonym kierunku z biegiem wprawy i czasu słabnie, rzecz staje się łatwą, wykonywać się zaczyna prosto, a wysiłek, ulatniający się z niej stopniowo, przenosi się dalej po nowe zdobycze, przenosi się na inne pole pracy. Następnie, nawet rzeczy trudne i suche może ożywić nastrój, w którym je podajemy, związek ich z życiem. Ten nastrój płynie od nauczyciela, z jego zapału i oddania się sprawie, a związek z życiem z jego mądrości pedagogicznej.

Lekcja pierwszego typu powinna być żywa, pełna werwy, zdrowej radości, t. j. taka, która posiada zasadniczą cechę języka, którym się mówi do młodości.

Nauczyciel, rozwiązując z uczniami zadanie, nie powinien wałkować je z jednym, ale opracowywać z całą klasą, rzucając pytania, wymagając szybkich jędrnych odpowiedzi. Te odpowiedzi muszą być dane językiem dzieci, a nie podpowiedziane słowo za słowem przez nauczyciela, który później powinien odpowiedź skorygować i dać ją w formie językowo poprawniejszej i myślowo treściwszej.

Najpierw w krótkości opracowuje się plan rozwiązania, potem następuje rozwiązanie, w którem również w zapisywaniu na tablicy może brać udział szereg dzieci. Po rozwiązaniu następuje streszczenie i zastanowienie się nad tem, czy ni można rozwiązać inaczej lub prościej. Jest to konieczne, b budzi myśl i samodzielność uczniów. Nauczyciel powinien czasem celowo zgodzić się na dłuższe rozwiązanie, żeby pokazać później znaczenie prostszego.

Wspólne opracowanie planu ma na celu nie tylko przyuczanie do metodycznego traktowania zagadnień nam stawianych, ale i do jasnego, zwięzłego formułowania swych procesów myślowych. Przyzwyczajanie do takiego formułowania odwrotnie oddziaływa na jasność i dokładność myślenia.

Wszyscy uczniowie powinni mieć specjalne kajety do ćwiczeń w klasie, gdzie zapisują zarówno rozwiązanie zadań, jak również te uwagi, które nauczyciel im poleci zapisać lub (co jest lepsze) przepisać z tablicy. Na początku każdej lekcji powinna być postawiona data, a wkońcu zapisane to, co zostało do domu zadane.

Lekcja drugiego typu jest samodzielnem rozwiązywaniem zadań przez uczniów. Zwykle przejawia się ona w postaci t. zw. klasówki, która zjawia się rzadko, niema stąd znaczenia większego w nauczaniu i staje się wobec tego tylko środkiem do wystawienia stopni i „sprawdzenia postępów". Ta stosunkowa rzadkość klasówki wprowadza wobec powyższego pewien moment psychologiczny strachu, niepokoju i nerwowości, który niema nic wspólnego z powagą nauczania, wymagającego wysiłku, ale celowego, planowego i stałego. Z drugiej strony nie ulega wątpliwości, że praca wspólna nauczyciela z uczniami jest jeszcze jednostronna. Uczeń nie może się skupić, nie ma czasu na samodzielne i całkowite rozwiązanie zagadnienia, musi iść za biegnącą nieraz prędzej myślą kolegów i stąd nie ćwiczy należycie swych własnych sił i sprawności matematycznej. Dlatego potrzebne są częste lekcje, na których ma on pozostawioną sobie swobodę w rozwiązywaniu zadań, jest sam z sobą i ze swojemi myślami. Ta praca jego nie może jednakże odbywać się w atmosferze dzisiejszej klasówki, atmosferze tak często niezdrowej, powodującej „ściąganie", jako jedną z plag szkolnych, z któremi należy najuporczywiej i umiejętnie walczyć.

Żeby wytworzyć warunki, odpowiadające wymaganiom dydaktyki, należy przedewszystkiem ćwiczenia piśmienne samodzielne uczynić częstemi, przyzwyczaić do nich dzieci od możliwie najmłodszego wieku. Każdy uczeń powinien posiadać osobny kajet do ćwiczeń samodzielnych, który stale znajduje się u nauczyciela i jest przez niego przynoszony do klasy w celu korekty lub nowego ćwiczenia. Takie ćwiczenia odbywa się w ten sposób, że nauczyciel wybiera dwie oddzielne grupy zadań z podręcznika, raczej wskazuje 2 początkowe zadania obu grup i każe dzieciom zaczynać rozwiązywanie od tych zadań, przy tem tak, że z sąsiadów na tej samej ławce jeden rozwiązuje zadania z jednej grupy, a drugi z drugiej. Można oczywiście, co jest nawet pedagogicznie lepsze, dawać tylko jedną grupę zadań, ale trzeba mieć pewność, że dzieci potrafią już naprawdę cenić swą samodzielność. Stopnie za oddzielne ćwiczenia nie są stawiane, ale nauczyciel co parę tygodni po korekcie przegląda kajety i ocenia wypracowania ryczałtowo. Oczywiście byłoby lepsze przeglądanie każdorazowe i nawet należałoby zalecać je szczególnie młodszym nauczycielom. W ten sposób można w ciągu tygodnia zrobić 1, 2 lub 3 podobne ćwiczenia zależnie od okoliczności i potrzeby. Rzecz jasna, że do tego potrzebne są dobre podręczniki, w których zadania występują parami, t. j. tak, że każde zadanie jako ogniwo pewnego metodycznie opracowanego ciągu zadań zjawia się dwa razy, przyczem druga postać tego samego zadania różni się albo fabułą tylko, albo też zmianą głównego zapytania, albo zmianą pewnych działań na odwrotne lub kolejnością zapytań. Ćwiczenia samodzielne nie koniecznie muszą zajmować całą godzinę — wystarczy 20 — 25 minut, ale często powtarzanych, żeby taka praca dała swój rezultat.

Głównie charakter ćwiczenia i ugruntowywania powinny mieć też zadania dawane do domu. Takie zadania muszą być nietrudne, żeby uczeń przeciętny mógł je sam rozwiązywać. Nie powinno ich być za wiele. Lepiej dać mniej zadań i łatwych, które uczeń sam zrobi, niż trudne lub w większej liczbie, gdyż wtedy uczeń udaje się do obcej pomocy, tak często przeszkadzającej normalnemu biegowi nauczania.

W pierwszych 2, a nawet 3 latach nauczania można z pożytkiem wcale nie zadawać do domu, jeżeli lekcja arytmetyki jest codzień i jeżeli program nie jest przepełniony przedmiotami i nie zawiera 2 języków. Szczególnie można to zalecać przy nauczaniu dzieci biednych, które nie mają warunków odpowiednich w domu do należytego opracowania lekcji. W takich warunkach praca domowa nieraz przyucza do nieporządku i niespełniania swych obowiązków, zwłaszcza, gdy jest obfita. Czem innem jest nauczenie się małego wierszyka, przeczytanie opracowanej w klasie powiastki lub czytanie danej w szkole książki, a co innego praca piśmienna, która wymaga spokoju, czystości i wogóle warunków lepszych do dobrego jej wykonania. Zresztą lepiej jest dzieci dłużej zatrzymać w szkole, niż puszczać je wcześniej i obarczać pracą z trudnością dającą się wykonać. Plan szkolny, dobrze ułożony, przeplatany umiejętnie prowadzoną zabawą, zajęciami ręcznemi, śpiewem i t. p. ma dostateczne lekarstwo w sobie samym na przeciążenie.

Im młodzież jest starsza, tem większe znaczenie posiadać zaczyna praca domowa, a dlatego potrzebne tu jest rozumne stopniowanie. To samo się stosuje do samodzielnych, klasowych ćwiczeń piśmiennych, których częstość jest ważniejsza wobec stosunku naszego do zadawania w latach młodszych, niż starszych. Tak jak w fizycznem wychowaniu, im dziecko jest młodsze, tem więcej opieki wymaga, tak też i w umysłowem — nauczanie odbywające się z nauczycielem ma większe znaczenie dla małych dzieci, niż dla starszych, których powoli powinniśmy przyzwyczajać do samodzielnego ujmowania zagadnień nauki.

Prócz lekcyj ćwiczących istnieć muszą „objaśniające", t. j. takie, na których nauczyciel wprowadza jakieś nowe, nieznane dotąd pojęcie, podkreśla jakąś nową własność. Takie lekcje powinny mieć charakter pracy wspólnej z całą klasą i posługiwać się t. zw. metodą erotematyczną, do której stopnie formalne dobrze nauczyciela przygotować mogą. Przez szereg dobrze postawionych i obmyślanych zapytań nauczyciel konsekwentnie prowadzi dzieci do odkrycia danej rzeczy, do wyjaśnienia danej trudności. Jak najmniej gotowych odpowiedzi! Jak najmniej odpowiadania za uczniów, do czego szczególnie są skłonni młodzi niecierpliwi nauczyciele! Prawda szukana musi się urodzić i wyjść od samych dzieci, ale do tego trzeba doprowadzić umiejętnie i wytrwale. T. zw. stopnie formalne powstały właśnie na tle potrzeby pracy wspólnej nauczyciela z klasą i w nich streszcza się w pewien sposób główna idea metody erotematycznej. Metoda ta w przeciętnem zastosowaniu ma jednakże wady, które udzielają się tem samem stopniom formalnym. Jedną z głównych jej wad jest krępowanie samodzielności myślenia, często wtłaczanego w pewne karby nie zawsze odpowiednie dla danej indywidualności. Stąd trzeba ją stosować ostrożnie, o czem już nieraz mówiliśmy. Z drugiej strony metoda erotematyczna nieraz nie nadaje się w dużym stopniu do całego szeregu przedmiotów, jak np. do historji lub nauk przyrodniczych, a nawet do całego szeregu zagadnień z gramatyki i rachunku. Powyżej wykazaliśmy na tle pracy prof. Deweya właściwą zgodność stopni formalnych z zasadniczemi prawami zwykłego metodycznego myślenia o rzeczach.

Dla nauczyciela jest sprawą ważną ogólne rozstrzygnięcie kwestji, kiedy stopnie formalne mogą być wskazówką do prowadzenia lekcyj, a kiedy nie. Tutaj musimy podkreślić zasadę: wszędzie tam, gdzie dany przedmiot może być opracowany indukcyjnie, t. j. gdzie chodzi o wyprowadzenie z danych spostrzeżeń wniosku ogólnego, tam stopnie formalne mogą mieć swe miejsce. W nauczaniu historji, zwłaszcza przeciętnem, niema tylu spostrzeżeń, niema tylu obserwacyj. To jest trudność zasadnicza w tym przedmiocie, która musi być ominięta tylko przez odpowiednie sztuczne przedmioty: obrazy, ilustracje, zwiedzenia muzeów, pozostałości historycznych i t. p. Swoją drogą i w nauce historji można i należy przyuczać do myślenia indukcyjnego, a tem samem przeprowadzać wiele rzeczy przez stopnie formalne. W naukach przyrodniczych w przeciwieństwie do historji jedyną słuszną i jedynie możliwą podstawą jest bezpośrednia obserwacja i eksperyment. Nauka przyrody z książki niema żadnej wartości, szczególniej na niższym stopniu nauczania. Nie zdajemy sobie sprawy ze szkodliwości takiego nauczania. Bezpośrednie zetknięcie się z przedmiotem, brak ściślejszych określeń, potrzeba na razie tylko segregacji głównych przedmiotów — nie nastręcza wiele sposobności do używania stopni formalnych. To samo jest w nauce rachunku, gdy chodzi o podanie pewnych umów, pewnych określonych sposobów rachowania, jak naprzykład przy dyskoncie lub rachunku prób metali. Są one jednakże tutaj w wielu przypadkach bardzo pożyteczne, szczególniej ze względu na opracowanie wykładu. O tem nie powinien zapominać żaden nauczyciel, jak również kierownik ćwiczeń praktycznych przy seminarjach nauczycielskich.

Przy tych ćwiczeniach należy wskazywać wyraźnie, kiedy opracowanie lekcji jest dobrze zrobione, kiedy jest tylko w porządku formalnym. Należy tu zaznaczyć jeden ważny szczegół, dotyczący zakresu tematu lekcji. Temat ten musi być niewielki, tem mniejszy, im mniejsze są dzieci. To jedno. Po drugie temat, nie może być luźny, ale zawsze związany z wykonaniem i prowadzeniem poprzedniej lekcji, gdyż taki związek to jedna z zasadniczych cech dobrego wykładu, to spełnienie zasady ciągłości. Po trzecie, temat każdy musi być wszechstronnie obrobiony i, jeżeli stosują się w nim stopnie formalne, to jasno powinno być zaznaczone, czy całość tych stopni będzie wzięta pod uwagę, czy też kilka z nich. Początkującym seminarzystom należy dawać takie tematy, w których całość stopni formalnych występuje i musi być wykonana, starszym wolno i trzeba dawać fragmenty, przyczem młodsi winni się częściej wykonaniu przysłuchiwać.

Przed każdą lekcją seminarzysta powinien prowadzącemu zajęcia praktyczne przedstawić szczegółowy jej plan z przykładami, z kierunkiem i jakością pytań oraz uzyskać aprobatę albo odnośne uwagi. Tego samego zwyczaju powinien się narazie trzymać młody nauczyciel i prowadzić dziennik (konspekt) swej pracy z adnotacjami, uwagami, z myślami nasuwającemi się po wykładzie. W ten sposób będzie kapitalizował swe doświadczenie i później umiejętnie korzystał z niego.

Przejdziemy teraz do przykładów podobnych skrótów.

Przykład 1. Temat lekcji: wprowadzenie 8; $5 + 3 = 3 + 5 = 8$; $8 - 5 = 3$; $8 - 3 = 5$. Przerobienie na konkretach znajdujących się w klasie.

Pierwsza lekcja.

Przypomnienie na przykładach i zadaniach z różnemi formami konkretu formułek: $5 + 1 = 6$; $5 + 2 = 7$; $6 - 1 = 5$; $7 - 2 = 5$; $6 - 5 = 1$; $7 - 5 = 2$.

Te formułki są głównym materjałem przeplatania, ale obok nich może być parę zadań na inny temat. np. $3 + 4 = 7$ i temu podobne.

Unaocznienie na przykładach konkretnych, przyrządzie i palcach formułki: 5 + 3 = 8 oraz odczytywanie liczby zapomocą liczenia.

Przejście natychmiastowe do formułki: 8 — 3 = 5 również z przedmiotami otoczenia, przyrządem i palcami.

Przestawienie składników i formułka 3 + 5 = 8 z unaocznieniem, oraz przejście bezpośrednie do formułki: 8 — 5 = 3.

Druga lekcja.

Zadania na konkrety nie znajdujące się w klasie, ale znane dobrze w tym samym przypadku, lecz przeplatane zadaniami na powyżej zaznaczone formułki. W razach trudności uciekać się do konkretów obecnych.

Zadania z konkretami mało znanemi i przeplatanie ich jak poprzednio. W razie trudności szukamy pomocy w drugim stopniu. Zadania z konkretami mieszanemi i przeplatanie takiemiż przykładami z poprzedniego.

Temat do fabuły zadań przygodny.

Czy tego materjału nie wystarczy na dwie lekcje? Każdy doświadczony nauczyciel zgodzi się z tem, że jest go dosyć, nawet nieraz zadużo. Wszak lekcja arytmetyki w pierwszym roku nie może trwać dłużej nad 30 minut, gdyż inaczej za bardzo męczy dzieci. Wobec tego nauczyciel zdąży, co najwyżej, przerobić na jednej lekcji pierwszy stopień, a resztę musi zostawić na później, przyczem pożądaną jest rzeczą, by na następnej lekcji ten stopień znowu powtórzył i później prowadził w daszym ciągu.

Jeżeli chcemy wprawić należycie seminarzystów, trzeba przyzwyczajać ich do podwójnej lekcji, t. j. do zakończenia pozostałych 25 minut przez zajęcie dzieci czemś innem. Może to być śpiew, rysunek lub opowiadanie, w każdym razie rzecz łatwiejsza, niż poprzednia lekcja arytmetyki. W tych szkołach, gdzie są dwa lub więcej oddziałów razem, nauczyciel może albo pracować z następnym oddziałem, sprawdzając jego robotę, wykonaną w czasie lekcji arytmetyki z poprzednim, albo też urządzić ze wzystkimi jakieś wspólne ćwiczenie w rodzaju śpiewu z towarzyszeniem wstawania z ławek lub jedno i drugie razem. Oczywiście są to warunki nienormalne, ale z niemi liczyć się trzeba nawet w seminarjum i dlatego należy przygotowywać i do takiego trudnego rodzaju pracy nauczania.

W powyższym przykładzie temat obejmuje 2 lekcje, gdyż nigdy nie wiadomo, na czem w praktyce uda się nauczycielowi zatrzymać.

P r z y k ł a d 2-g i. Temat lekcji: mnożenie niewielkich liczb dwucyfrowych przez 2 (bez przekroczenia 100). Powtórzenie tabliczki mnożenia przez 2 na przykładach oderwanych i zadaniach. Przypomnienie prawa rozdzielności na jakimś przykładzie mnożenia liczby jednocyfrowej przez 2. Rozkład liczby dwucyfrowej na dwa składniki. Pierwszy stopień.

Mnożenie 12 przez 2. Rozkład 12. Stosowanie prawa rozdzielności. Mnożenie 11, 13 i 14 przez 2. Zadania. Drugi stopień.

Mnożenie 21, 22, 23, 24, 31, 32 i t. d. przez 2. Zadania. Trzeci stopień.

Mnożenie 15, 16, 17, 18, 19, 25. 26 i t. d. przez 2. Czwarty stopień.

Ostatni stopień musi mieć przygotowanie w postaci dodawania takich liczb: 30 + 18, 20 + 16 i t. d. Zadania.

Mamy tu przed sobą lekcję z drugiego roku nauczania. W tym roku lekcje można podzielić na ćwiczące pierwszego typu i objaśniające i przytem trzymać się zasady, że l e k c j a o b j a ś n i a j ą c a n i e p o w i n n a t r w a ć d ł u ż e j n i ż 30 m i n u t. Materjał podany wyżej również może być rozłożony na dwie lekcje, przyczem na pierwszej mogą być przerobione 3 pierwsze stopnie. Pozostałe 15 minut można zająć na dalsze ćwiczenia, ale lepiej zmienić temat, tak jak powyżej. Muszę tu jeszcze nadmienić, że wobec tego, iż arytmetyka musi być codzień w pierwszych 3 latach nauki, nie trzeba koniecznie śpieszyć się z wtłaczaniem danego materjału na jednej lekcji: lepiej go później powtórzyć i uzupełnić. Jak widzimy, piątego stopnia niema w przykładach, bo jest on rozproszony pomiędzy 3 stopnie ostatnie. To w nauce rachunku często się zdarza i musi być wzięte przy opracowaniu planu lekcji pod uwagę. Gdybyśmy wspomnieli o zadaniach, a przenieśli je do 5-go stopnia, nauczanie byłoby więcej formalne i teoretyczne, a tem samem dla danego wieku nieodpowiednie. Stopień drugi może być w całości lub w niektórych przykładach znany dzieciom z poprzedniego, a wtedy ta znana jego część przechodzi do stopnia pierwszego.

P r z y k ł a d 3-ci. Temat lekcji: dzielenie liczb z zakresu 100 — 200 przez 2 przy podziale pozycyjnym.

Przypominamy dzielenie liczb dwucyfrowych przez 2 przy podziale pozycyjnym we wszystkich możliwych przypadkach. Pierwszy stopień.

Dzielenie liczb o parzystej liczbie dziesiątków i jedności przez 2. Najpierw oddzielne, potem skrócone zapisywanie. Drugi stopień.

Dzielenie liczb o nieparzystej liczbie jedności, ale parzystej liczbie dziesiątków, potem o nieparzystej liczbie dziesiątków i parzystej liczbie jedności. Zwrócenie uwagi na przenoszenie reszty. Najpierw oddzielne, potem skrócone zapisywanie. Trzeci stopień.

Dzielenie dowolnych liczb danego zakresu. Czwarty stopień.

Rzecz jasna, że wszystkie odnośne przykłady mogą wypływać i być związane z zadaniami. Tak samo, jak powyżej rzecz tu da się przedstawić w 4-ch stopniach, jakkolwiek 2-gi stopień może być podzielony na dwa. Nie trudno jednakże widzieć, że tu nie mamy do czynienia z właściwemi stopniami formalnemi, a przynajmniej jesteśmy w dość luźnym z niemi związku. Niewątpliwie, że w ogólnych zarysach jest zgoda, ale więcej się liczymy z samą naturą rzeczy, niż z ogólną formą i czasem może się zdarzyć, że takich stopni będzie więcej, niż 5. Jednem słowem układanie planu lekcji nie jest niewolniczem posługiwaniem się stopniami formalnemi, ale umiejętnem wyzyskaniem pewnej ogólnej kolejności w rozkładzie materjału. Ta ogólna kolejność jest spełniona w każdym z poprzednich przykładów. Materjał powyższy może być przerobiony na jednej 45 minutowej lekcji.

Rzecz zrozumiała, że powyżej podane skróty można uzupełnić dla pamięci konkretnemi przykładami zadań i różnemi uwagami, które tu zostały pominięte dla zrozumiałych powodów.

Jako przykład z dziedziny nauczania algebry przytoczyć możemy przygotowanie się do lekcji, w czasie której chcemy wyjaśnić pierwsze pojęcie mnożenia liczb względnych.

Nauczyciel po wstępie, gdzie wchodzi w grę w postaci kilku przykładów. dodawanie i odejmowanie liczb względnych, zwraca się do uczniów z zapytaniem dotyczącem możliwości i sposobu wykonania mnożenia tychże liczb. Zaczyna od przykładu w rodzaju następującego: $(-5) + (-5) + (-5) = -15$. Można to oznaczyć inaczej: $(-5) \times (+3) = -15$. Przykłady konkretne. Konstantuje fakt, że możnaby w ten sposób pojąć mnożenie liczby ujemnej przez dodatnią, potrzebnem jest jednakże, by to mnożenie posiadało te same główne własności i stosowało się również do ułamków.

A więc najpierw: $\left(-\frac{2}{3}\right) \times (+3) = -2,$

potem $\left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(+\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$

Jakaż jest jedna głównych własności mnożenia? Prawo przemienności, z którego wypada że: $(-5) \times (+3)$ równać się musiałoby $(+3) \times (-5)$. W takim razie wynikałby odpowiedni sposób mnożenia. Formułuje prawo znaku i mnożenia wartości bezwzględnych. Ćwiczenia.

Dalej na drugiej lekcji przypominamy mnożenie dwumianów postaci: $(a - b)(c - d)$, przypominamy prawo monotonji i t. p. oraz zastanawiamy się nad mnożeniem w tym przypadku, gdy obydwie liczby będą ujemne. Wyprowadzamy wniosek o znaku i formułujemy ogólne prawidło znaków przy mnożeniu. Następuje zastosowanie przy rachunku, grafice i t. p.

Następnie wyprowadzamy konsekwencje z przyjętego prawidła mnożenia, zastosowujemy je w tych przypadkach, gdzie iloczyn można było otrzymać na innej drodze, np. przy mnożeniu tychże dwumianów lub w zastosowaniu do wzoru: $[a + (-b)]^2$ i t. p., wskazujemy na praktyczność prawidła i jego wartość ogólną.

Kończąc uwagi o prowadzeniu lekcji, musimy jeszcze nadmienić, iż tam, gdzie są zadawane do domu zadania, nauczyciel powinien kazać uczniom sprawić sobie nowy kajet trzeci, albo też rozwiązywać te zadania w kajecie do zajęć w klasie z odpowiednią każdorazową adnotacją. Prace domowe uczniów należy przeglądać na każdej lekcji. Od czasu do czasu dobrze jest zabrać kajety wspomniane do siebie i przejrzeć, gdyż nieraz się zdarza, iż uczniowie notują źle, nawet z tablicy przepisują mylnie. Pilnowania tych rzeczy nigdy nie jest dosyć, jak również zwracania uwagi na porządek i czystość w kajetach.

Powyżej mówiliśmy o erotematycznej metodzie przy wykładzie. Taka nazwa jest dość nieokreślona, gdyż przy tej metodzie zwykle uczeń odpowiada właściwie tylko „tak" lub „nie" na szereg umiejętnie postawionych zapytań nauczyciela. Użyliśmy tej nazwy, bo jest najogólniejszą i bezwątpienia w niej się zawierają inne nazwy, jak i odpowiadające im metody. Np. metody: heurystyczna, sokratyczna, katechetyczna, dysputacyjna, genetyczna i t. p. Wszystkie one mają dużo wspólnego z metodą sokratyczną, właściwą swą rodzicielką, znaną jeszcze w starożytności. Nie miejsce tu na wyjaśnianie treści każdej z nich, bo to należy do ogólnej dydaktyki, ale uważaliśmy za potrzebne tych kilka słów o tem powiedzieć, żeby zwrócić uwagę uczących na świadome stosowanie pewnej metody. Może najlepiej byłoby, gdybyśmy, używając znowu cudzoziemskiego (greckiego) wyrazu, nazwali metodę lekcji objaśniającej i pierwszego typu ćwiczącej, metodą djalogiczną, t. j. metodą celowej rozmowy, djalogu, w którym nauczyciel, stawia pytania i jest duchem prowadzącym całą rzecz, a uczniowie, którym zawsze należy zostawiać dużo swobody wypowiadania się, odpowiadają na pytanie, a w lepszym razie sami je zadają. To ostatnie jest bardzo ważną rzeczą i wskazuje na dobre nauczanie.

Metoda wykładowa czyli akroamatyczna, przy której nauczyciel stara się jasno i przystępnie wyłożyć przedmiot, należy też do lekcji objaśniającej, ale powinna być używana rzadko, tylko w przypadkach koniecznych, nawet w wyższych klasach, gdzie znacznie skraca czas i jest daleko częściej niezbędna i możliwa, niż w niższych.

Używając powyżej nazwy „metoda erotematyczna", staraliśmy się głównie tylko podkreślić wyrażonego w niej ducha wszystkich (prócz akroamatycznej) powyżej wspomnianych metod, który polega na tem, że prawdy nauki należy wydobywać z umysłu dzieci, doprowadzać je spokojnie i konsekwentnie do uznania tych prawd tak, aby się im zdawało, że one same rzecz tę zdobyły. Takie przekonanie budzi wiarę w swoje siły i jest pedagogicznie bardziej wartościowe, niż wiedza wyuczona a nawet obszerna. Ta wiara będzie pobudką do pracy i późniejszego cierpliwego uczenia się z własnej woli, z własnego popędu. Czyż spełnienie takiego celu nie jest dążeniem racjonalnej dydaktyki?

Nadmieniłem wyżej, że bardzo pożądaną jest rzeczą, aby uczniowie sami stawiali rozumne pytania i że umiejętne doprowadzenie do tego klasy wskazuje, że nauczanie było dobrze prowadzone. Zgodnie z zasadą samodzielności, o której znaczeniu tyle poprzednio mówiłem, zadanie nauczyciela polega na tem, żeby postawić uczni w takie warunki, przy których własnemi siłami mogliby dochodzić do pożądanej prawdy naukowej. W dzisiejszej szkole całkowite wypełnienie wymagań tej zasady jest często ideałem bardzo trudnym do urzeczywistnienia. Pomimo to każdy nauczyciel, zależnie od swej dobrej woli, umiejętności i talentu, może się więcej lub mniej do tego ideału zbliżyć. Na przeszkodzie (poza brakiem umiejętności u nauczyciela) w dzisiejszych warunkach stoją następujące przyczyny: 1-o bardzo liczne nieraz klasy, które uniemożliwiają zarówno większe przystosowanie się do umysłu każdego dziecka, jak i należytą kontrolę wiedzy; 2-o obfite programy, w którym główną rolę odgrywa ilość wiadomości, a nie ich jakość; 3-o brak odpowiednich środków pomocniczych przy nauczaniu.

Nie każdy przedmiot może mieć program zakreślony ilościowo według szablonu. Np. w naukach przyrodniczych najważniejszą rzeczą jest umiejętność obserwowania zjawisk, próby samodzielnego eksperymentu, jednem słowem główna treść indukcyjnego myślenia. Nie powinno tu chodzić o szerokość wiedzy, która jest wprost nie do objęcia, ale o istotę poznawania przyrodniczego. Nie mogę tu bliżej wchodzić w istotę i zasady konstruowania programów szkolnych, jedno tylko nadmienię, że program powinien być w daleko większej łączności i zgodzie z metodą uczenia, a tem samem uczenia się, niż dotąd się dzieje. „Co możemy przejść, a czego nie"— oto główny niemal probierz, używany dotąd przy opracowywaniu programu.

Środki pomocnicze, któremi rozporządza szkoła, odgrywają też ważną rolę. Np., jeżeli szkoła posiada laboratorja do ćwiczeń odręcznych, więcej się tem samem zbliża do wspomnianego ideału. Rozumne zapytanie ucznia wyrasta z żywotnych pobudek jego myśli, a żeby takie pobudki istniały, przedmiot musi głębiej się łączyć z osobistem życiem duchowem ucznia i sferą jego zainteresowań. Dlatego cała szkoła musi spełniać ten warunek. Przed nami tu całe morze zagadnień. Stałe, konsekwentne, z pokolenia na pokolenie dziedzicznie idące rozwiązywanie tych zagadnień jest jednem z zadań narodowej pedagogiki, pedagogiki, która chce budzić i dźwignąć geniusz narodowy, ten talent przekazany przez wieki, i, niestety, tak długo zagrzebany pod mułem niewoli i prostracji duchowej.

ROZDZIAŁ VII.

Ponieważ dobre nauczanie w bardzo dużym stopniu zależy od należytego przygotowania fachowego nauczyciela, więc w niniejszym rozdziale zajmiemy się chociażby krótko tą sprawą. Przygotowanie fachowe nauczyciela zależy: 1° od należytej nauki w seminarjum i 2° od samokształcenia. Z tego powodu nad temi sprawami po kolei się zastanowimy.

Program nauki matematyki w seminarjach koncentruje się głównie dokoła arytmetyki i początkowej geometrji. Tak zwana algebra występuje tu w bardzo nieraz nikłej postaci i traktowana jest często w sposób nieodpowiedni do potrzeb i zadań nauczania w seminarjum. Pomówimy jednakże najpierw o nauce arytmetyki.

Przedewszystkiem nauczanie tego przedmiotu powinno być prowadzone tak, żeby było wzorem dla samego przyszłego nauczyciela, gdyż, jak to zresztą nietrudno zrozumieć, najbardziej zostają nam w pamięci te drogi, któreśmy sami przeszli przy zdobywaniu prawdy naukowej i każdej innej. Nauczyciel, zastanawiając się w przyszłości nad sposobem wyjścia z danej trudności dydaktycznej, przypomni sobie swoje własne doświadczenie szkolne i pójdzie za niem, ono zdecyduje nieraz o jego postępowaniu, ono będzie dla niego bardzo często wskazówką i pomocą. Nauka metodyki nigdy nie może w całości objąć wszystkich przypadków, które przecież zależą od tak rozmaitej tkaniny warunków szkolnych. Nie może objąć nawet wtedy, gdy była postawiona praktycznie, związana z samodzielnem doświadczeniem seminarzysty w szkole wzorowej. Już nieraz powyżej zaznaczyliśmy, że największe znaczenie w metodzie nauczania ma żywy, inteligentny człowiek, który potrafi stosować w odpowiedni sposób ogólne zasady dydaktyczne i modyfikować swe postępowanie zależnie od okoliczności.

Z powyżej postawionego pierwszego warunku wynika natychmiast drugi: nauczyciel matematyki musi być jednocześnie nauczycielem metodyki. Jego własne nauczanie, zgodne z zasadami metodyki, jest najlepszym dowodem słuszności tych zasad, najlepszym przykładem prowadzenia nauki. Dlatego to nauczyciel seminarjum musi być sam dobrym nauczycielem i powinien umieć metodę nauczania zracjonalizować, czyli sprowadzić ją do pewnych ogólnych zasad dobrze przetrawionych i umotywowanych, żeby w ten sposób mogło to nauczanie jego stać się pożytecznym przykładem i wiedzą dla innych.

W toku nauczania, szczególniej na kursach wyższych, gdzie seminarzyści już zaprawiają się pod względem pedagogicznym, nauczyciel matematyki winien nieraz, w czasie wykładu na przykładach wziętych z samego nauczania, ilustrować celowość swego postępowania i jego zgodność z zasadami dydaktyki.

Gdyby tak nie było, istniałaby rozbieżność ogromna pomiędzy żywem nauczaniem w seminarjum na lekcjach matematyki i na lekcjach metodyki. Inaczejby się robiło w praktyce, a znowu inaczej radziło postępować seminarzystom.

Z drugiej strony, zasady dydaktyki, jak wszelkie wogóle zasady ogólne, zbyt często płyną ponad życiem i postępowaniem, a dzieje się to dlatego, że zapominamy prawie stale o tem, że zasady uczymy się stosować nie przez formułujące je słowa, lecz przez ich praktykowanie, przez własne doświadczenie i przykład.

Prawda ta, tak widoczna w dziedzinie zjawisk moralnych, dotyczy też dziedzin czysto intelektualnych. Np. zasada przyczynowości, którą umiemy stosować w jednych, bardziej obojętnych dziedzinach życia, jak dajmy na to w nauce, jest ignorowana w innych, bliżej nas obchodzących. Nie rozumiemy np. tak często, że każde nasze postępowanie w ten lub inny sposób wpływa na nas samych, kształci nas w kierunku dodatnim lub też poniża, krzepi nasze siły lub je osłabia, że każdy moment życia i każda praca idzie in minus lub in plus w jego buchalterji.

Najściślejsza łączność wykładu metodyki z nauczaniem samego przedmiotu jest jeszcze z tego względu konieczna, że metodyka rachunku, jak wogóle wszelka metodyka, nie wspiera się jeszcze na trwałych naukowych podstawach, że dużo w niej rzeczy wątpliwych, dużo różnic w poglądach. To powoduje, że wykład teoretyczny metodyki bardziej pożyteczny jest dla ludzi daleko więcej przygotowanych, niż dla seminarzystów. Człowiek przygotowany, posiadający wyrobienie naukowe, które dają poważne studja i szersza wiedza, łatwiej pozna się na różnych subtelnościach metodycznych i ich znaczeniu, a tem samem ostrożniej i umiejętniej będzie stosował wskazania metodyki. Dla seminarzysty najważniejsze znaczenie ma przykład i praktyka. Pierwsze powinien mu dać nauczyciel matematyki, drugie — szkoła wzorowa. Wykład matematyki, połączony z samem nauczaniem przez jedną osobę, nie uprawiający żmudnej teorji, ale owiany wysokim duchem nauki i ożywiony praktycznem wykonaniem jest dla seminarjów najwłaściwszy. Każde seminarjum do każdego przedmiotu powinno mieć dobrego i przytem świadomie dobrego nauczyciela. Jest to trudne, ale konieczne.

Nauka arytmetyki czy to w postaci samego nauczania tego przedmiotu, czy też w formie systematycznego wykładu metodyki, powinna być na wszystkich kursach seminarjum oraz ćwiczeń praktycznych. Tylko w ten sposób można osiągnąć należyte wyniki w przygotowaniu seminarzystów. Przytem, ponieważ na pierwszy kurs przyjmowani są kandydaci (tak bywa przeciętnie), którzy posiadają już znajomość 4 działań z liczbą całkowitą oraz związanych z niemi kwestyj, ważną jest rzeczą, by przy wykładzie metodyki dział liczby całkowitej był znowu gruntownie przerobiony z dwóch stanowisk: 1° ze stanowiska logicznego i 2° ze stanowiska psychologicznego. Pierwsze ugruntowuje i wyklarowuje zasadnicze pojęcia (jak np. własności działań), ich związek logiczny ze sobą, ich stopniowe uogólnianie się i wewnętrzną spójnię; drugie wskazuje, jak uczynić te związki przystępnemi dla umysłu dziecka, nie grzesząc przeciwko nauce, ale przystosowując się do właściwości tego umysłu.

Liczba całkowita jest najważniejszą dla niższej szkoły elementarnej, a więc na nią szczególną należy zwrócić uwagę. Metodyka nauczania liczby całkowitej musi narazie stanowić główną treść wykładu tego przedmiotu w seminarjum. Inne działy przechodzić trzeba z konieczności powierzchowniej i prędzej, a dlatego tak ważny jest dobry wykład nauczyciela seminarjum w odniesieniu szczególniej do tych działów. Z natury rzeczy każdy seminarzysta musi mieć dostateczną praktykę w szkole wzorowej, co wobec obfitości tematów z dziedziny liczby całkowitej, wobec 4-ro lub 5-cioletniego jej nauczania musi być rozciągnięte na dłuższy okres czasu, musi pochłonąć tyle miejsca, że na co innego mało się zostanie, nawet wtedy, gdy przy seminarjum jest szkoła o kursie więcej niż 4-letnim. Zresztą najważniejszą rzeczą są właśnie początki nauczania, bo w nich jest najwięcej trudności i potrzebna największa wprawa. Nauczyciel, posiadający tę wprawę w początkach, łatwiej da sobie radę z innemi rzeczami na podstawie lektury osobistej lub wykładów odpowiednich.

Dalej, nauczanie arytmetyki w seminarjum powinno być praktyczne nie tylko z powyżej wyłuszczonego stanowiska, ale i z punktu widzenia samej treści, t. j. zadania arytmetyczne muszą być istotnie żywe i praktyczne, poruszać różne strony życia otaczającego i nauki, gdyż to będzie najlepszym przykładem dla przyszłego nauczyciela i da mu materjał do własnej pracy w tym kierunku, gdy będzie zmuszony siłą rzeczy dawać zagadnienia dzieciom. Żaden zbiór zadań w tej mierze go nie wyręczy, on sam musi tworzyć zadania, brać je z życia dzieci i otoczenia.

Często nie zdajemy sobie sprawy, jak wielkie ma to znaczenie pedagogiczne, a winna temu rutyna, przyzwyczajenie szkolne, idące z pokolenia na pokolenie i nie natrafiające na przeszkody w postaci poważniejszego zastanowienia.

Z drugiej strony, sama misja nauczyciela ludowego poza szkołą zmusza do tego, by nauka arytmetyki uwzględniała więcej praktyczną stronę życia. Zarówno ruch spółdzielczy, jak samo świadome prowadzenie bodaj drobnego gospodarstwa rolnego, wymaga umiejętności przystosowania do siebie nauki arytmetyki, uwzględnienia pewnych potrzeb realnych. Nauka, która liczy się z realnością życia, nie traci swojej wielkości, nie przestaje kształcić umysłu, owszem, daje mu tężyznę, a człowiekowi mądrość. Bo mądrość nie jest operowaniem wytworami abstrakcji i uczonemi terminami, lecz umiejętnością metodycznego sądzenia o rzeczach nas otaczających, o rzeczach blizkich, codziennych.

Nauczanie arytmetyki w seminarjum musi dążyć do tego, by seminarzysta panował nad przedmiotem w postaci łatwości rachunku nie tylko piśmiennego, ale i pamięciowego, bo to właśnie jest warunkiem koniecznym, żeby w przyszłości mógł dobrze nauczyć rachunku dzieci. Należy zwracać uwagę na różne ułatwienia w rachowaniu, na proste skrócone sposoby, należy pobudzać do inwencji w tym kierunku, do umiejętności przystosowywania się do danych liczb i innych okoliczności.

Tylko ten, kto sam myśli, może nauczyć myśleć innych. Każda jednostka ludzka przynosi ze sobą pewną atmosferę, wyrażającą się w całym szeregu nie tyle może wyraźnych przejawów w postaci mowy lub czynu, ile w formie drobnych nieuchwytnych reakcyj, które oddziaływają na duszę innych ludzi i w sumie dają ową atmosferę. Samodzielność myśli, intensywną pracę duchową czujemy przez skórę, oddziaływa ona na nas pobudzająco, jeżeli drobne nasze uczucia egoistyczne nie przeszkadają temu. Tak często nie uświadamiamy sobie praw imitacji, które np. w postaci zjawiska mimicry taką rolę odgrywają w przyrodzie. Silna i zwarta duchowo postać nauczyciela, jego skoncentrowana wola oddziaływa na dusze młode, budzi imitację. Dzieje się to zarówno w nauczaniu, jak w wychowaniu.

Kształcenie nauczycieli w seminarjum na tę stronę powinno szczególną zwrócić uwagę. Nie pakować dużo do głowy różnych rozmaitości, ale dać wiedzę mocną, przetrawioną, przesiąkniętą wysiłkiem własnej myśli, — to jest ważne wymaganie, które decyduje zarówno o powodzeniu nauczania, jak i o osobistem zadowoleniu nauczyciela.

Czynnik osobistego zadowolenia, to pierwszorzędna sprawa w pracy nauczycielskiej. Nie chodzi tu o zadowolenie głupoty, o płaskie samochwalstwo rutynisty, tresującego dzieci, ale o zadowolenie człowieka, który budzi myśl z uśpienia, który ciągnie celowo ciężki kamień zawodowej pracy ze świadomością wielkiego celu, wielkiego zadania swego. Komu ten cel przyświeca, może mieć to zadowolenie. Tylko zwracając uwagę na gruntowność, samodzielność i przetrawienie wiedzy, możemy rozpoznać w przyszłym nauczycielu talent pedagogiczny, tę iskrę Bożą, co pali się w duszy wybranych i gdy świeci jaśniej, gdy rozpłomienia całość duchowego życia człowieka, czyni go wielkim pedagogiem. Wielkość nie żyje tylko w wielkich miastach ani w samych pałacach, nie chodzi tylko w smokingu i nie ma głośnego nazwiska; wielkość może być w siermiędze wieśniaczej i skromnem ubraniu ludowego nauczyciela. Jego talent pedagogiczny, jego zapał dla pracy swojej, jego dusza wczuwająca się i zwrócona ku dobru narodu, czyni go wielkim, pomimo całej skromności położenia. Nie dowiedzą się może o nim organy prasy ani fama stugębna nie rozejdzie się śród tłumu, ale praca jego wrośnie w jedno pokolenie narodu, uczyni je sprawniejszem, silniejszem, lepszem...

Seminarjum nauczycielskie niech szuka talentów ostrożnie i krytycznie, dając pole samodzielności myśli, dając wiedzę mocną i pewną. Nie brak ich na polskiej ziemi, ale brak poważnej troski i opieki, brak wielki...

Nie można nigdy oddzielać tendencyj wychowawczych ogólnych, które ma dana szkoła, od poszczególnych programów lub metod nauczania. Już sama niezgodność tych dwóch rzeczy wskazywałaby na słabość szkoły, na wielką wewnętrzną jej wadę. Puste są piękne i nawet słuszne wielkie słowa o zadaniach szkoły, o jej znaczeniu, jeżeli niemasz w niej wewnętrznej jednolitości, jeżeli idea jej główna niema mocy wykonawczej w każdym oddzielnym organie jej życia, jeżeli nie jest „moving idea" (ideą czynną), jak mówi pedagogika angielska. W innem miejscu, gdzie była mowa o określeniu i tworzeniu się charakteru człowieka, t. j. o jednem z najważniejszych zagadnień wychowawczych (patrz: Charakter jako cel wychowania, wyd. M. Arcta) wskazywałem, że istotą rzeczy jest tu ciągłe uzgadnianie w ogniu doświadczenia życiowego wytworów myśli i pragnień serca ze zdolnością wykonawczą, ciągłe tworzenie, ciągła walka, stałe przerabianie wartości duchowych na obiegową monetę życia. Dotyczy to nietylko charakteru, lecz każdej emanacji duszy ludzkiej, każdego wytworu pracy człowieka. Dotyczy też szkoły, która wyrasta z głębin życia narodowego przez pracę pokoleń. Na to, aby każdy szczegół jej działalności był przesycony ogólną ideą jej życia, trzeba pracy długiej, cierpliwej, pracy pokoleń. Wtedy będzie ona miała swój charakter, który wychowuje, oddziaływa na życie społeczne. Wtedy będzie ona wszechstronna nie przez przeładowanie programu, nie przez tępą łapczywość wiedzy ani przez powierzchowną praktyczność, której tak ulegał niebacznie nawet Czacki, ale przez wewnętrzne swe, bogate, zróżniczkowane i zespolone życie. Agendo discimus... Szkoły ani człowieka nie można pojmować tylko przyrodniczo i mechanicznie, lecz trzeba koniecznie stanąć na stanowisku historyi, która nie jest tylko magistra, ale i artifex vitae.

Jeżeli każdy program oddzielnego przedmiotu ma spełniać powyżej zaznaczony warunek, stosuje się to oczywiście i do programu matematyki. Z jednej strony tutaj należy uwzględnić interesy czystej myśli, której wyrazem jest ta wielka nauka, a z drugiej łączność programu z ogólną ideą i zadaniami szkoły przygotowującej nauczycieli. Trzeba więc dać naukę, wykazać jej wewnętrzną budowę, zaświecić przed wzrokiem duchowym seminarzysty potęgą dowodu matematycznego; trzeba też wziąć z tej nauki to, co odpowiada celom szkoły i tyle, by te cele zostały wypełnione.

Jedną z najgłówniejszych rzeczy, które odpowiadają zadaniu seminarjum, jest wykazanie stopniowego wzrostu pojęcia liczby. Wszak jasną jest sprawą dla każdego, że pewne cechy charakterystyczne czy to pojęć, czy odpowiadających im przez konkretyzowanie rzeczy, występują jaśniej tylko w tym razie, gdy zdołamy zapoznać się z niemi na pewnym szerszym terenie ich rozwoju, zastosowania i przejawów wogóle. Dlatego koniecznością jest zaznajomienie seminarzysty nietylko z liczbą całkowitą i ułamkiem, ale ujemną i niewymierną, a nawet rzucenie światła na znaczenie liczby urojonej. Dokoła tej osi powinien się krystalizować program matematyki. Materjału naukowego wystarczy do tego, by wszystkim postawionym wyżej wymaganiom sprostać. Potrzebna jest jednakże umiejętność pewna i metodyczne wyrobienie, by rzecz sama nie stała się mało pouczającą i nudną. Do tego dla ludzi zainteresowanych wystarczą na razie następujące poniżej wskazówki.

Nauka arytmetyki znajduje swe uwieńczenie w nauce algebry, gdzie przedewszystkiem nie trzeba imitować przeciętnej metody szkoły średniej, nie trzeba wałkować dzielenia i mnożenia różnych wielomianów, lecz należy zwrócić uwagę: 1° na uogólnienie własności działań arytmetycznych i ich pogłębienie przez wprowadzenie liczb ujemnych i pojęcie o niewymiernych, 2° na nową, płodną metodę rozwiązywania zadań za pomocą układania i rozwiązywania równań pierwszego i drugiego stopnia.

Równania należy wprowadzić odrazu po sformułowaniu własności działań arytmetycznych i po zastosowaniu do rozwiązywania zadań. Własności 4-ch działań arytmetycznych wystarczą do rozwiązania równania, a skrócenie tego rozwiązania w postaci zwyczajnie używanych metod przyjdzie drogą indukcyjną niepostrzeżenie i naturalnie. Również naturalnie wypłynie potrzeba lepszej umiejętności operowania niektóremi przeróbkami algebraicznemi. Trzeba to robić bez przesady, nie bawiąc się w przesuwanie liter, bo główna treść nauki jednakże opierać się winna na przykładach liczbowych.

Odnośne wskazówki dotyczące tych rzeczy podane były w rozdziałach poprzednich.

Wyciąganie pierwiastka kwadratowego doprowadzi do definicji nowej liczby; należy to zrobić, stosując pojęcia geometryczne, używając twierdzeń o średniej proporcjonalnej. Obraz geometryczny wskaże przez konstrukcję istnienie pewnego odcinka, którego długość da nam określenie pierwiastka. Twierdzenie Pitagorasa rzecz tę może jeszcze pogłębić i uogólnić. Zapewne nie będzie to teorja ściśle arytmetyczna, ale zrozumiała i posługująca się w szacie geometrycznej potrzebnemi pewnikami ciągłości. Takie określenie ze stanowiska ścisłej teorji naukowej jest przedewszystkiem zbędne, ale może być tak przygotowane, że wytrzyma nawet ostrą krytykę, tem bardziej, że w poprzedzającej nauce geometrji należy pozostać najpierw przy proporcjonalności odcinków tylko w dziedzinie odcinków wymiernych. Ogólne stosowanie praw podobieństwa doprowadzi do odcinków niewymiernych, a wtedy trzeba będzie, albo te prawa odrzucić, albo nowe pojęcie wprowadzić.

Równanie kwadratowe musi być stosowane również głównie w przypadkach liczbowych, jakkolwiek wyprowadzenie ogólnego wzoru w końcu będzie pożyteczne i możliwe.

W geometrji należy zwrócić główną uwagę na praktyczną stronę rzeczy. Tutaj również, jak przy arytmetyce, pożądane jest takie ukształtowanie kursu, przy którem wystąpiłaby wyraźnie przewodnia myśl metodyczna, odpowiednia dla nauczania elementarnego. O tem jednakże pomówimy w części III-ej niniejszej książki.

Żadne atoli seminarjum nie może dać całości wykształcenia potrzebnego: nauczyciel musi się sam ciągle uczyć. Seminarjum dać mu winno to minimum wiedzy, które potrzebne jest do rozwoju i rozbudzenia samodzielnego myślenia i praktyki szkolnej. Reszta to rzecz nauczyciela samego, który dla pogłębienia swej wiedzy i odświeżenia swej umysłowości winien zapoznawać się coraz bliżej z nauką wykładaną w szkole. Do tego potrzebne mu jest żywe słowo w postaci różnego rodzaju kursów i książka, potrzebna jest cała literatura odpowiednia, która, niestety, u nas jest dopiero w zaczątku. Stworzenie jej jest najpilniejszą potrzebą, niemniejszą, niż stworzenie dobrych podręczników, np. zbioru zadań do nauki elementarnej.

Treść rozdziału niniejszego nie należy do głównych zadań książki i wobec tego muszę się ograniczyć do krótkich wiadomości bibljograficznych, dotyczących lepszych podręczników, w których przejawia się pewna wyraźniejsza i poważniejsza myśl metodyczna oraz książek przeważnie w języku polskim, pożytecznych dla nauczyciela.

Nie jest moim zamiarem uwzględnienie strony historycznej rzeczy, pragnę tylko podać źródła, które mogą być, zdaniem mojem, pożyteczne przy nauczaniu. Na czele muszę postawić artykuł p. t. „Arytmetyka" W. Trybulskiego, znajdujący się w zeszytach 5-ym i 6-ym pierwszego tomu „Encyklopedji Wychowawczej". W artykule tym, gruntownym i stanowiącym jedną z najwybitniejszych naszych prac w tej dziedzinie, czytelnik może znaleźć dokładniejszy rys historyczny rozwoju arytmetyki wogóle, jak również w Polsce (wyliczono do roku 1879, t. j. do daty, w której był napisany artykuł, wszystkie dzieła z tej dziedziny, zasługujące na uwagę, które u nas wyszły). Poza tem autor zajmuje się zagadnieniami nauczania, a jakkolwiek nie zawsze można się z jego poglądami zgodzić (np. pogląd na metodę Pestalozziego, która obecnie w odmiennem przedstawia się świetle), artykuł ma znaczenie zasadnicze i żaden nauczyciel arytmetyki ominąć go nie powinien.

Pokrótce uzupełnia dane historyczne, w poprzednim artykule umieszczone, artykuł S. Dicksteina p. t. „Matematyka" (Encyklopedja Wychowawcza, t. VII, zesz. IV). Autor wspomina tu o niektórych nowszych pracach z dziedziny metodyki arytmetyki, które ukazały się w Niemczech po znanej u nas z przeróbek polskich książce Grubego.

Sprawą nauczania arytmetyki po r. 1879 zajmowały się u nas czasopisma pedagogiczne. Nie będę tu wyliczał wszelkich przyczynków, wspomnę tylko o niektórych. W „Przeglądzie Pedagogicznym" ukazał się w r. 1882 szereg artykulików A. Jurgielewicza (str. 379, 441, 478, 601, 625, 714). Praca obejmuje pewną całość pierwszych początków w formie praktycznych lekcyj. W temże piśmie ukazała się w roku 1886 cytowana wyżej wartościowa praca p. t. „Lekcja o stosunkach i proporcjonalności" S. Dicksteina, a w r. 1885 p. t. „Uwagi nad programem matematyki w szkole średniej" (Nr. 14 — 15, str. 189 — 193) znajduje się streszczenie narad członków nowopowstałego „Koła matematyczno-fizycznego" w Warszawie. Mamy tu krótki program i ogólne bardzo wskazówki metodyczne. Rzecz dotyczy głównie szkoły średniej.

W czasopiśmie matematycznem p. t. „Wektor" ukazała się również praca autora p. t. „Metoda monograficzna Grubego w świetle krytyki" *) (r. 1912 Nr. 4) i artykuł p. t. „O indukji na niższym stopniu nauczania" (r. 1911, Nr. 1).

W czasopiśmie lwowskiem „Szkoła", w dodatku p. t. „Praktyka szkolna" często ukazywały się przyczynki do nauczania pierwszych początków, które nas tu najwięcej obchodzą, jak również znaleźć tam można streszczenie nowszych prac niemieckich (kierunek eksperymentalny).

Prócz wpomnianych w tekście „Krótkich wskazówek" St. Jankowskiego i „Metodyki" Traczyńskiego w ostatnich latach literatura nasza zbogaciła się gruntowniejszą pracą p. Wiktora Krzanowskiego p. t. „Przewodnik metodyczny do nauki

*) Weszła ona częściowo do I ej części niniejszej książki.

rachunków", doprowadzony, w znanych mi częściach, do początkowej nauki ułamków. Książkę tę możemy polecić nauczycielom, jakkolwiek nie zawsze się z nią zgadzamy.

Po roku 1879-ym ukazała się u nas, szczególniej w ostatnich latach, znaczna liczba zbiorów zadań i podręczników, przeważnie pisanych tylko przez praktyków i grzeszących nieraz nietylko przeciw ustalonym już zasadom metodyki, ale i nauki.

Do wybitniejszych podręczników należą: M. Berkmana „Początki arytmetyki", S. Dicksteina „Arytmetyka w zadaniach", H. Stattlerówny „Początkowa nauka arytmetyki", A. Rudnickiej „Zbiór zadań arytmetycznych" (z krótkiemi wskazówkami metodycznemi).

„Arytmetyka w zadaniach" S. Dicksteina jest oparta na tej zasadzie metodycznej, że zadanie powinno zajmować centralne miejsce w wykładzie, a metodyczny układ zadań jest w stanie zastąpić niepotrzebną „teorję". W podręczniku uwzględniono głębiej stronę logiczną przedmiotu.

W książkach H. Stattlerówny i A. Rudnickiej (2 pierwsze lata nauczania) wprowadzono świadomie i obszerniej pojęcia geometryczne, jakkolwiek w zasadniczych momentach podręczniki te nie odbiegają od poziomu Jeskego.

Ze zbiorów zadań dotyczących działu 6-go wyróżnia się świeżością ujęcia i stanowi pewien postęp w nauczaniu książeczka Sosnkowskiego: „Rachunek arytmetyczny wielkości proporcjonalnych" (Warszawa, 1913).

Z dzieł traktujących o całości zwykłej arytmetyki praktycznej i pożytecznych dla uczącego wymienić należy: „Arytmetykę" (większą) M. Baranieckiego, podręcznik Strutyńskiego p. t.: „Arytmetyka", Stopień niższy. (Lwów. 1912; bardzo dobry), oraz przekład polski „Arytmetyki" Tannerego dokonany przez Z. Czubalskiego.

Do zapoznania się z metodami arytmetyki handlowej można polecić „Arytmetykę handlową" S. Kramsztyka, a do zapoznania się z głębszem ujęciem podstaw nauki, dzieło prof. S. Zaremby: „Zarys pierwszych zasad teorji liczb całkowitych". (Kraków 1907) oraz jego Wstęp do analizy. W czasie druku niniejszej części ukazał się najlepszy z istniejących zbiór zadań arytmetycznych prof. Sierzputowskiego, w 3-ch częściach (klasy wstępna, 1 i 2).

Oprócz podanych powyżej książek można polecić z dziedziny arytmetyki następujące opracowania z literatury polskiej i cudzoziemskiej:

M. Stuyvaert. Les nombres positifs. Wyd. 2-e. Gandawa.

Encyklopedie de sciences mathematiques. T. I. Vol. I. Fasc. 1. Arithmetique.

C. Bourlet. Elements d'algebre. Wyd. 8-me. W Paryżu u Hachetteet C-ie.

— Lecons d'algebre elementaire. Paryż. Colin.

E. Borel. Arithmetique. 1 i 2 cykle. A. Colin. Paryż

— Algébre. 1 i 2 cykle. A. Colin. Paryż.

Whithead. Wstęp do matematyki. Przekład W. Wojtowicza. W Warszawie, Wende i S-ka.

J. W. Young. Dwanaście wykładów o zasadniczych pojęciach algebry i geometrji. Przekład L. Silbersteina. Wende i S-ka, w Warszawie.

Jules Fannery. Przekład niemiecki pod tyt.: Elemente der Mathematik (Teubner).

T. Bonnesen. Aritmetik for Mellemskolen. W Kopenhadze.

W. Frank. Początki arytmetyki ogólnej i algebry. We Lwowie. Nakł. T. N. S. W.

— Arytmetyka i Algebra. Lwów. Nak. Tow. Naucz. Szkół wyższych.

J. Mihułowicz. Podręcznik arytmetyki. We Lwowie. Nak. Tow. Naucz. Szkół wyższych.

Böttcher. Algebra. Wyd. M. Arcta w Warszawie.

Następnie podręczniki do nauki Algebry: Dziwińskiego, Gutkowskiego, Feldbluma i Sianożęckiego.

Z opracowań specjalnych zasługują na uwagę:

H. Weber. Encyklopädie der Elementar-Mathematik. T. I. Elementare algebra und analysis. Wyd. Teubnera.

Z dziedziny historji matematyki wskazać należy:

Dzieje myśli. T. I. Zeszyt II (historja rozwoju pojęć matematycznych).

H. G. Zeuthen. Przekł. franc. p. t.: Histoire de Mathematiques dans l'antiquité et au moyen age. W Paryżu. Gauthier—Villars.

— Oryginał niemiecki p. t. Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. W Kopenhadze u A. F. Höst & Sön.

J. Tropfke. Geschichte der Elementar-Mathematik. Cz. I. Lipsk u Veigt & Comp.

F. Pahl. Geschichte des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichte. Lipsk, u Quelle und Meyer.

Z opracowań metodycznych polecić można:

F. Reidt. Anleitung zum mathematischen Unterricht. W Berlinie, G. Grote.

W. Lietzmann. Methodik des Mathematischen Unterrichts. W Lipsku, Quelle & Meyer.

F. Unger. Der Rechenunterricht auf allen Stufen. W Lipsku, J. Klinkhardt.

E. Pouthier. Pour qu'on apprenne les Mathematiques. W Paryżu u H. Didiera.

Nie ubiegałem się o liczbę poleconych książek. Wskazane są, za nielicznemi wyjątkami, najwięcej dostępne oraz do potrzeb nauczyciela najbardziej przydatne. Nauczyciel, który pragnie poważniej z przedmiotem swoim się zapoznać z łatwością uzupełni sobie spis przytoczony.