LUCJAN ZARZECKI

NAUCZANIE
MATEMATYKI POCZĄTKOWEJ

Agendo discimus...

CZĘŚĆ III.

NAUCZANIE GEOMETRJI POCZĄTKOWEJ

WYDANIE III UZUPEŁNIONE i POWIĘKSZONE

1920

WYDAWNICTWO M. ARCTA W WARSZAWIE

POZNAŃ, PLAC WOLNOŚCI 7. — LUBLIN, NAMIESTNIKOWSKA 23.

WILNO, KSIĘGARNIA STOW. NAUCZYCIELSTWA POLSKIEGO.

DRUKARNIA M. ARCTA W WARSZAWIE, NOWY-ŚWIAT 41.

PRZEDMOWA.

Część niniejsza poświęcona jest specjalnie geometrji i jako taka po raz pierwszy wychodzi w druku. W planie pierwotnym autor zamierzał napisanie książki niemal dwa razy większej, pewna ostrożność jednakże nie zezwoliła na wykonanie tego zamiaru. Jeżeli myśli wyrażone w książce będą praktyczne, rozszerzenie nie każe na siebie długo czekać, a wobec drożyzny książek w czasach obecnych nie wskazanem jest zbytnio zwiększać liczby stron druku. Ze względów tej materjalnej przystępności autor starał się podać jak najmniej rysunków, uważając, że rzecz ta niczem nie przeszkodzi do należytego zrozumienia tekstu. Z drugiej strony historja tej książki wskazuje wyraźnie, że metoda oszczędności miejsca ma swoje znaczenie. Dzisiejsza z 3-ch części składająca się 25 arkuszowa książka wyrosła z małej 5 arkuszowej broszurki, w której już były zawarte te wszystkie myśli, jakie stanowią jej osnowę. Książka mała łatwiej jest czytana, więcej przystępna, a stąd bardziej może być pożyteczna.

Z powodu zwięzłości, wiele rzeczy zostało tylko naszkicowane, autor bowiem miał na celu raczej ilustrację głównych myśli metodycznych, nie zaś praktyczne, szczegółowe ich przeprowadzenie. Pomimo to wolno mu sądzić, że zasady metody przedstawione są o tyle wypukle, by nauczyciel myślący mógł z nich skorzystać a ludzie kompetentni poddać należytemu rozpatrzeniu i krytyce.

DRUKARNIA M. ARCTA W WARSZAWIE, NOWY-ŚWIAT 41.

SPIS RZECZY.

ROZDZIAŁ I.

Tłumacz wiekopomnego dzieła Euklidesa na język polski, Józef Czech, w przedmowie swej do przekładu podaje następujące „prawidła" przy nauczaniu geometrji: *)

„Że w tej nauce najpierwszy jest zamiar wydobycia i doskonalenia siły rozumu; trzeba zatem prowadzić ucznia samą tylko drogą mocnego przekonania, i starać się o najgruntowniejszą i najporządniejszą ścisłość w rozumowaniu, nic nie przepuszczając, co nie jest dowiedzionem.

Że należy w niczem nie folgować iego sile rozumu i ciągłemu tej władzy działaniu; ani z początku drobnemi przystosowaniami do wymiarów, iego uwagi przerywać.

Że cała pomoc zmysłowa—zasadzać się i kończyć powinna na wykreśleniu figury, w wykładaniu zaś nauki nie godzi się używać tylko języka pospolitego i właściwych nazwisk rzeczy, a zatem, że znaki symboliczne algebry, miejsca tu mieć nie powinny.

Że dla wsparcia pojęcia w początkowych definicjach i opisach można czasem użyć obiaśnienia, byleby na niem nie przestać tam, gdzie potrzeba dowodzić, i byleby te obiaśnienia nie kaziły czystości wyobrażeń Jeometrycznych.

Że rozsądnie należy rozróżniać to, co bydź tylko powinno opisane, od tego co bydź powinno dowiedzione; bo są prawdy niektóre tak proste, tak wzruszające przekonanie, iż chcieć ie dowodzić, iest to ie zaćmić.

---

*) J. Czech. Euklidesa początków jeometryi Xiąg ośmioro. W Wilnie. 1807. Str. XVI — VIII.

Że nic nie szkodzi, iż początkowe czasem prawdy, nie są w całej swej czystości pojęte, bo to pojęcie wyrobi się potem ciągłem innych prawd i rzeczy rozważaniem: i tak próżno byłoby mordować z początku młody umysł gruntownem pojęciem linji, punktu lub powierzchni „jeometrycznej”, pojmie on potem, że jeden wymiar jest granicą, to jest zaczęciem lub zakończeniem drugiego, to jest: powierzchnia bryły, linja powierzchni, a punkt linji; i sam sobie wypracuje własną uwagą czyste tych rzeczy pojęcie”...

Prawidła powyższe dokładnie charakteryzują stanowisko w dydaktyce matematycznej, które nazwać można klasycznem. Stanowisko to znajduje swoich obrońców jeszcze dziś i najwięcej typowym przykładem jego są podręczniki do nauki geometrji używane we Włoszech *). Te ostatnie podręczniki, zachowując czystość Euklidesowej formy, wprowadzają elementy spółczesnej dojrzalszej i krytycznej myśli matematycznej i nie stoją już na stanowisku Czecha w odniesieniu do prawd „wzruszających przekonanie” czyli pewników i postulatów. Przekonano się, że Euklidesowi dużo brakowało do ścisłości, że wielki geometra grecki pomimo wszystko nie tylko przyjmował pewne prawdy wyraźnie „bez dowodu”, lecz niejedną opuścił, nie wziął jej na uwagę. Np. Podanie XVI, pierwszej księgi Elementów dotyczące własności kąta zewnętrznego w trójkącie zakłada nieskończoność prostej i postulaty dotyczące pojęć: wewnątrz, nazewnątrz; dowody równości trójkątów operują własnością płaszczyzny, dzięki której figury na niej mogą być bez zmiany „przesuwane”; przy rozważaniu równoważności figur Euklides nie brał pod uwagę sprawy t. zw. postulatu de Zolta i t. p. Z tego wynika, że jakkolwiek wielkim jest utwór matematyka greckiego, nie zadośćczyni on dziś wymogom ścisłości. Pozostaje otwartem nadal pytanie, czy wogóle ideał ścisłości da się kompletnie osiągnąć i czy przyszłość nie wykaże, że nasze dzisiejsze pojęcia już nie są wystarczające.

Metoda nauczania wypływająca z tego dążenia przedewszystkiem do precyzji i jasności znalazła w szkolnictwie wieku

---

*) F. Enriquesa i H. Amaldiego. Geometrja elementarna w przekładzie W. Wojtowicza może służyć jako typowy przykład. Podręcznik Badowskiego, wzorujący się na opracowaniach włoskich, również w ten sposób jest napisany.

XIX-go bardzo szerokie zastosowanie. Praktyka wykazała, że nie prowadzi ona do rezultatów dobrych. Większość uczniów nie osiąga zamierzonego rozwoju umysłowego, uczy się matematyki bez zainteresowania i wewnętrznej pobudki, a zamiast myślenia nadrabia pamięcią. Metoda wydawała się tak jasną i prostą, że u wiele ludzi wyrobił się fałszywy pogląd na uzdolnienie do matematyki. Podzielono uczniów na nieliczną grupę zdolnych i szarą masę niezdolnych. Pierwsi mogli objawiać zainteresowanie, zdradzać inicjatywę poznawczą,— drudzy szli na pasku niewolniczego uczenia się ex libro lub in verba magistri, tracili wiarę we własne siły i czas przeznaczony do wyrobienia zdolności umysłowych.

Dzięki temu zaczęły się zjawiać coraz częściej odstępstwa od wzoru Euklidesowego, zaczęto czynić wszelakie ułatwienia i zjawiła się powódź podręczników, w których kołatał się uwięziony duch Euklidesowy, zginęła natomiast harmonja i ścisłość myśli, zjawiła się bezplanowa łatanina prawd coraz więcej zbliżająca się do układu przeciętnej... gramatyki. Uczono się matematyki jak kodeksu prawnego. Elementy Euklidesa, który nie znał osobnych dróg dla królów, nie były pisane dla masy uczniów, dla dzieci, a przeróbki ich w rękach pedagogów, po wzięciu rozbratu z ich budową, bynajmniej nie przyczyniały się do spopularyzowania samego ducha nauki. Podawały tylko jej fakty. Cały ustrój szkoły sprzyjał temu, a egzaminy z matematyki stały się jaskrawym tego dowodem. Brano na uwagę „program", „ilość wiedzy" nie zaś sposób jej przetrawienia.

Metoda kłasyczna nie osiągnęła swego celu, a przyczyną tego zjawiska są następujące powody: 1⁰ euklidesowe elementy wymagają dojrzałego umysłu, 2⁰ pisane były poniekąd dla wybrańców tak, jak dzisiejsze traktaty matematyczne o charakterze akademickim, 3⁰ były wyrazem dłuższego procesu rozumowania i systematyki naukowej, nie zaś żywem odbiciem genetycznego rozwoju myśli Jeżeli z tej drogi dotąd jeszcze nie wszyscy chcą zejść, przyczyną jest trudność zagadnienia, mała znajomość psychologji myślenia oraz brak konkretnej postaci nowej, płodniejszej i odpowiedniejszej metody.

Krytycy metody klasycznej słusznie jej zarzucają, że zaczyna od końca, że pragnie uczyć myślenia na gotowych rezultatach wiedzy, nie zaś doprowadzać do ich osiągnięcia.

Twierdzenie to niewątpliwie jest słuszne, najważniejszą jednak że rzeczą jest wynalezienie tej właściwej drogi postępowania, którąby umożliwiała należyty wpływ nauczania matematyki na rozwój umysłu i charakteru młodzieży.

W tej mierze istnieje kilka próbnych dróg, które rozpadają się na dwa główne typy:

Pierwszy typ, zachowując ducha metody klasycznej, szuka reformy na drodze wewnętrznej, t. j. przez odpowiednie ukształtowanie samego przedmiotu nauczania, bez związku, a tembardziej zależności od przedmiotów i zagadnień innych, a także całości procesów umysłowych rozwijającego się człowieka.

Drugi typ usiłuje nauczanie matematyki prowadzić na tle rozwoju zagadnień myśli wogóle w ścisłym związku z przedmiotami nie należącemi do sfery istotnych zagadnień matematycznych.

Matematyka, z samej natury swojej, jest jedną z najwięcej izolowanych nauk. Nie wymaga ona specjalnych środków pomocniczych, odwołuje się przeważnie do doświadczenia zewnętrznego, niepotrzebne są dla niej laboratorja, narzędzia i t. p. Umysł ludzki wobec postawionego zagadnienia matematycznego szuka prawdy w samym sobie, odkrywa ją w wewnętrznej swej spójni. Twierdza matematyczna jest odosobniona, baszty jej dumnie kryją się w chmurach, a fundamenty i arsenały głęboko pogrążone są w ziemi. Dostęp do niej możliwy jest tylko dla tych, u których duch „stoi na własnych nogach", a nikt inny, chyba ciurowie tylko, nie wejdzie do niej, jak do akademji platońskiej. To odosobnienie, tak z istotą myślenia matematycznego związane, wpłynęło w bardzo znacznym stopniu na trudności związane z nauczaniem matematyki. Umysł dziecka i nierozwiniętego człowieka jest jak indigesta moles, nie zna segregacji i podziałów dojrzałej myśli, nie posiada zainteresowań wtórnych wyrobionych na tle pewnych zagadnień. Dla niego świat jest organicznie powiązaną całością, w ośrodku której stoją siły rozpędowe życia całej istoty ludzkiej. Nauczanie, które się z tem nie liczy, które zaczyna odrazu prosto od podziałów i specjalnych zainteresowań dojrzalszej myśli, nie może być nazwane dobrem. Takie nauczanie jest grzechem pierworodnym szkoły, jako takiej, szkoły, której początki kryją się w średniowieczu i epoce odrodzenia. Ogólna ta wada nauczania, która nie umie postępować w zgodzie z rozwojem naturalnym umysłu człowieka i nie potrafi zaczynać od mgławicy, aby dojść do wyrobionego systemu planetarnego drogą stopniowej ewolucji, wada ta kardynalna szczególnie odbiła się w nauczaniu matematyki. Jeżeli każdy przedmiot w szkole dzisiejszej (nawet elementarnej) jest czemś oddzielnem, specjalnem, jeżeli nawet w oddzielnych gałęziach wiedzy ta specjalizacja dochodzi do rozmiarów wprost jaskrawych, to matematyka i jej nauczanie narażone tu są na największe niebezpieczeństwo.

Jednem z wielkich haseł współczesnej pedagogiki w dziedzinie nauczania jest dążenie do t. zw. korelacji przedmiotów szkolnych, do ich wzajemnego powiązania i uzgodnienia dążeń. Ogólnym tłem jest uczeń, jako żywy człowiek i jego świeży umysł, a spójnią główną nauczyciel, który winien przystosować się nie tyle może do metody owego przedmiotu, ile do metody poznawania wogóle, nie tyle brać na uwagę umiejętność podawania prawd, ile wychowywać umiejętnie skłonności badawcze swych uczniów.

Niewątpliwie odpowiednie modyfikowanie, układ i przedstawienie prawd danej nauki zgodnie z zasadami dydaktyki jest rzeczą bardzo ważną. W tym kierunku zrobiono dużo, a cała pedagogika niemiecka jest najjaskrawszym przykładem tego, co może w tej mierze zrobić pracowitość i umiejętność. W niejednej gałęzi nauczania powstały metody i zjawiły się podręczniki, jako ich wyraz, które w sposób bardzo dobry umieją stopniować nauczanie i przystosowywać do umysłu rozwijającego się człowieka. W całości jednakże jak i w oddzielnych częściach brakuje życia, sztuka przemawia z każdej stronicy podręcznika, z każdej godziny umiejętnej lekcji.

Pierwszy typ przystosowania nauczania matematyki do potrzeb szkoły i umysłu młodego jest właśnie wyrazem tej sztuki metodycznej.

W każdym przedmiocie w tej mierze powstają specjalne zagadnienia, wymagana jest osobliwa fachowa umiejętność! Każdy specjalista, pozostając w obrębie własnego przedmiotu, stara się przystosować doń ogólne wskazania dydaktyczne i odpowiednio do nich swoją naukę traktować. To samo przypada w udziale nauczycielowi matematyki. W celu rozwiązania zagadnienia musi on, poza znajomością prawd dydaktycznych, głębiej zastanowić się nad właściwościami swej nauki. Ścisłość jest główną cechą myślenia matematycznego. Jeżeli ta ścisłość, jak uczy doświadczenie i dydaktyka, nie da się w szkole osiągnąć ze względu na rozwój umysłowy dzieci, należy się starać tak naukę przedstawić, by można było, czyniąc świadome odstępstwa od ścisłości, przystosować przedmiot do poziomu umysłowego uczących się. Jakże te odstępstwa uczynić?

Aby na to pytanie odpowiedzić, trzeba zdać sobie sprawę z tego, czem jest ścisłość matematyczna, jaka jest jej istota, a następnie wyprowadzić z tego odpowiednie wnioski kwoli wymaganiom dydaktycznym.

Matematyka, jak każda nauka, jest systematycznym układem pojęć. Pojęcia te nie są luźne, lecz stanowią zespół powiązany. Jedne wynikają z drugich. Ta wynikliwość opiera się na prawach logiki, musi je nieodwołalnie spełniać, o ile system cały ma posiadać ścisłość naukową. Ciąg logicznie powiązanych ze sobą twierdzeń i wniosków może się posuwać w nieskończoność, musi jednakże od czegoś się zacząć, muszą być prawdy w każdym takim systemie, które nie są wyprowadzone z innych. Prawdy te matematyk nazywa pewnikami lub postulatami. Ścisłość matematyczna wymaga by: 1° wszystkie te prawdy były jasno wypowiedziane, 2° liczba ich była wystarczająca dla zbudowania całokształtu nauki, ani za mała, ani za duża. System nie będzie ścisłym, jeżeli niebacznie będziemy w toku rozumowania stosowali prawdy nie zaliczone wyraźnie do pewników, ani przez nas uprzednio dowiedzione.

Badanie pod tym względem elementów Euklidesa wykazało w ostatnich czasach, jak wspomnieliśmy, braki ścisłości w budowie matematyka greckiego. Podstawową wartość też ma przy budowie ścilego wykładu matematycznego definicja. Euklides wychodził z 3-ch zespołów zdań: pewników, postulatów i definicyj. Definjował on podstawowe elementy: punkt, prostą i płaszczyznę. Poszły za nim wszystkie podręczniki, dla których był wzorem, a definicje podawane grzeszyły ogromnie wobec ścisłości, zawierały bowiem wiele sprzeczności i podlegały wielu zarzutom. Jakie nadzwyczajne rzeczy można odczytywać w naszych podręcznikach (nie wszystkich) o przestrzeni, linji i t. p. Wszak powyżej przytoczony wyjątek z przedmowy Czecha też w tym kierunku grzeszy. Ścisły wykład musi opierać się na ścisłych definicjach. W takim wykładzie nie powinniśmy spotkać określenia rzeczy, której określić nie można. Już chwilka zastanowienia nauczy nas, że takie pojęcia, jak linja, płaszczyzna i t. p. są czemś płynącem z intuicji, która w każdym przypadku może wkładać w nie treść bardzo rozmaitą, która nie da się ująć w karby ścisłego rozumowania. Ulepszenia definicyj Euklidesowych, zresztą tak często niezrozumiałych, jak np. definicja prostej ze swem sławnem wyrażeniem: ἐξ ἴσου κεῖται, które ma swoją literaturę, nie doprowadziło do rezultatu. To było powodem, że definicje wspomnianych rzeczy oraz głównych zależności elementów geometrycznych od siebie (t. j. np. takich pojęć, jak wewnątrz, zewnątrz, przedłużenie, znajdywanie się w czemś i t. p.) nie są dziś podawane w wykładzie ścisłym, sposobem Euklidesa, lecz połączone niejako z pewnikami, przyczem określona grupa pewników podaje nietylko prawdy podstawowe, lecz i charakterystyczne własności przedmiotów matematycznych. Taka metoda nazywa się aksjomatyczną i jest przeprowadzona systematycznie po raz pierwszy przez Hilberta w jego podstawach geometrji (Grundlagen der Geometrie). I. B. Halsted (New-York 1907), biorąc za podstawę dzieło Hilberta na pisał piękną książkę p. t. Rational Geometry*), która daje wykład elementów geometrji w sposób przedziwnie zwięzły i prosty Obecnie jest ona wzorem ścisłości i jasności w tej dziedzinie i pod tym względem przewyższa dzieła autorów włoskich i francuskich jako więcej skomplikowane i mniej przejrzyste. Zwolennicy metody klasycznej mogą znaleźć w tej książce prawdziwe ucieleśnienie swych ideałów, a każdy, kto chce się zapoznać z tem, czem jest ścisłość w dziedzinie matematyki, może tu zadośćuczynić swemu pragnieniu. Każdy nauczyciel winien z tą książką się zapoznać.

Halsted za wyjątkiem t. zw. pewnika zupełności (Vollständigkeit-Axiome)**) Hilberta przytacza wszystkie potrzebne

*) Istnieje francuski przekład dokonany przez P. Barbarina p. t. Géometrie rationnelle (Paryż, Gauthier - Villars, 1911).

**) Z tego pewn ka w wykładzie nie korzysta, nie wprowadza pojęcia wielkości; posługuje się pewnikiem Cava ieriego przy twierdzeniach o objętości brył okrągłych.

pewniki. Wykład ten pomimo swej jasności i piękna nie może jednakże być uważany za odpowiedni do szkoły. Uczeń dzisiejszej klasy 4-ej nie przełknie pigułki pomimo że jest kunsztownie spreparowana. Rozumowanie nie jest dla niego dostępne, owe ciekawe konstrukcje, wykonywane ze specjalnym teoretycznym przyrządem do przenoszenia odcinków, nie mają dla jego konkretnej myśli żadnego powabu. Co innego człowiek dojrzały, co innego student uczelni wyższych, a tembardziej przyszły nauczyciel... Dla nich ta książka jest czemś, czego ominąć wprost nie godzi się.

Zwolennicy pierwszego typu przystosowania podręczników geometrji do potrzeb szkoły w większości wypadków godzą się na jedno: nie należy podawać na początku wykładu wszystkich pewników, wybrać trzeba natomiast śród tych ostatnich najgłówniejsze, a resztę pozostawić intuicji i doświadczeniu, które muszą znaleźć szersze pole zastosowania.

W realizowaniu tego poglądu mamy cały szereg stopniowań. Jedne podręczniki, jak np. znana książka Borela lub istniejąca w przekładzie polskim Suppantschitscha wyraźnie wypowiadają niewiele pewników, nie krępują się w używaniu pojęcia ruchu i metod rozumowania nieraz bardzo konkretnych. Inne, jak np. u nas podręcznik Łomnickiego lub Badowskiego, a we Francji Bourleta lub Hadamarda robią redukcję pewników o wiele mniejszą i więcej zbliżają się do ideału ścisłości. Istnieje tu wiele odmian zależnych od zapatrywań autorów.

Czy można taki kompromisowy typ podręcznika nazwać dobrym? Czy można rozumieć zastosowanie pedagogiczne ilościowo? W tak ścisłej nauce, jak matematyka brak jednego pewnika nie jest mniejszym brakiem, niż 10. Ścisłości nie można odmierzać tak jak lekarstw w aptece, a geometrja nie jest wodą, która w realnych swych przejawach niema cechy „czysta”, bo może być tylko „bardzo czysta”. Każdy taki podręcznik paczy naukę, bo ją fałszuje, a wymagając rozumowania od ucznia, nie daje żadnej gwarancji, dlaczego to lub inne odstępstwo od ścisłości ma być istotnem ułatwieniem, czemś, czego wymaga naturalny rozwój myśli. Brak zupełny należytego kryterjum, a ogólnikowe twierdzenie, że należy się wspierać na odsuniętej do podświadomości intuicji, jest twierdzeniem zgoła dowolnem. Czyż można iść po tej drodze dalej, czy można się spodziewać, że próby ciągłe coraz bardziej potrafią zbliżyć nas do ideału wymaganego przez dydaktykę? Trudno rzecz tę stanowczo osądzić. Czują to zwolennicy poglądu pierwszego typu i starają się znaleźć punkt wyjścia.

Jednym z takich środków jest wprowadzenie do dydaktyki pojęcia t. zw. propedeutyki geometrycznej. Zadaniem jej jest przygotowanie ucznia do nauki geometrji w formie ścisłej. Nauczanie geometrji propedeutycznej ma się zacząć w klasach niższych i tak być prowadzone, by uczeń, rozporządzając dostateczną wprawą, wiadomościami oraz wykonanym już wysiłkiem umysłowym, mógł łatwiej pojąć ściślejszy wykład. Nauczanie propedeutyczne geometrji znalazło swe miejsce zarówno w szkole elementarnej, jak niższych klasach średniej. Niewątpliwie jest to środek bardzo pożądany i dobry już chociażby z tego względu, że geometrja w porównaniu z arytmetyką została pokrzywdzona i, o ile dawniej zajmowała w szkolnictwie (nawet w średniowiecznem quadrivium poczesne miejsce), o tyle później nauka jej rozpoczynała się zbyt późno.

Pogląd pierwszego typu jest najwięcej rozpowszechnionym; jemu właściwie dzisiaj należy zawdzięczać te rezultaty stosunkowo bardzo skromne, jakie osiąga nauczanie w szkolnictwie obecnem. Niektóre podręczniki wykazują wysoką umiejętność w przedstawieniu rzeczy w wykładzie książkowym i dowodzą, że tak charakterystyczna dla wieku XIX-go pedagogika Herbarta wywarła swój niemały wpływ. Sztuka reprodukowania nauki przed uczniami, a nawet pozornie z uczniami, doprowadzona została do wysokiej perfekcji. Czyż może to jednakże zadowolić pedagoga? Czyż mniej lub więcej umiejętne, mniej lub więcej za pomocą metody erotematycznej upozorowane reprodukowania nauki przez nauczyciela, jest istotnem nauczaniem? Czy spełniona jest przez to zasada samodzielności, ten nervus rerum we spółczesnej myśli pedagogicznej? Czy można w tak szerokiej mierze zastosować do nauczania znaną z teorji biologicznej Grossa gier i zabaw metodę „jak gdyby"? Czy upozorowanie odkryć jest samem odkryciem?

Takie zapytania stawiają sobie zwolennicy drugiego poglądu i usiłują stworzyć metodę, gdzie naturalne siły umysłu młodego znalazłyby szersze pole zastosowania. Nie można geometrji uczyć oddzielnie od innych przedmiotów, nie można odrazu czynić z niej osobliwej nauki i to splendid isolation podtrzymywać systematycznie w ciągu całego toku nauczania. Cały świat otaczający dziecko jest terenem poznania, które płynie nietylko z biernego rozmyślania, lecz tak samo z czynu, próby i doświadczenia. Elementy Euklidesa nie przestały być utworem akademickim, jakkolwiek 23 wieki oddziela nas od nich, przestały natomiast być „elementami" geometrji. Dziś geometrja jest pojęciem szerszem, a przypuszczalny cel euklidesowy — stworzenie teorji wielościanów, jakkolwiek dziś jeszcze nie jest osiągnięty, nie jest jedynym celem nauki geometrji. Mamy wszak geometrję rzutową, geometrję konfiguracji, analysis situs... Wszystko to wchodzi do „elementów" geometrji. Najgłówniejszą jednakże rzeczą jest, że nie można nauczyć geometrji bez mocnego jej oparcia na związku z całym zakresem doświadczenia oraz bez doprowadzenia do konieczności rozważania tych abstrakcyjnych przedmiotów, jakie stanowią jej istotę.

Zwolennicy tego poglądu nie uważają za możliwe stosowania dwóch cyklów nauczania: niższego i wyższego. Dla nich proces jest jednolity i rozwija się w ścisłym związku z takiemi naukami i sprawnościami, jak: fizyka, chemja, przyrodoznawstwo wogóle, geografja i miernictwo, z robotami ręcznemi, zajęciami praktycznemi i rysunkiem.

O ile poprzedni pogląd w znacznym stopniu wyrobił sobie metodę, o tyle ten ostatni szuka ciągle właściwej drogi i jest dotąd pieśnią przyszłości, jakkolwiek coraz bardziej rozlegającą się w rzeczywistości. Idea dydaktyczna, tkwiąca na dnie tego poglądu jest słuszna. Streścić ją można pokrótce w ten sposób: każdy człowiek uczy się sam, a poznawanie rozpoczyna się od postrzegania oraz obcowania z przedmiotami konkretnemi. Pojęcia geometryczne są pojęciami wtórnemi, pierwotnym jest fakt fizyczny, później dopiero zaczyna się rozpatrywanie tegoż, zastanawianie się, ocena co do formy i liczby. Stąd w nauczaniu należy zawsze wychodzić z rzeczy konkretnych, nawiązywać rozważania matematyczne do zagadnień żywszych. W jaskrawej formie pogląd ten wyraża się w t. zw. „laboratory method" (metodzie laboratoryjnej), kwoli której dzisiejsze klasy miałyby się przekształcić na laboratorja. Niewątpliwie wiele godzin spędzonych w klasach obecnych na lekcjach teoretycznych przejdzie w przyszłości do pracowni, będzie zużyte na pracę więcej praktyczną, klasa jednakże pozostanie klasą i w przyszłości. Przemiana powyższa nasuwa wiele trudności, wymaga dłuższego rozwoju szkoły, wzmożenia się środków materjalnych i bardzo wyrobionego zespołu nauczycieli. Ideał uzasadniony, jeżeli ma stać się realnością, musi wchodzić w życie stopniowo, musi być wprowadzany umiejętnie.

W każdym z powyżej zaznaczonych poglądów tkwi złote ziarno prawdy. Matematyka nie jest służebnicą innych nauk, ma ona swoje własne cele, ktore mają doniosłe znaczenie pedagogiczne, stąd nie można nauczania matematyki całkowicie uzależniać od interesów innych nauk, należy natomiast uzależnić od interesów rozwijającej się myśli człowieka. Nie osiągniemy celu przez skierowywanie uwagi ucznia wyłącznie do zagadnień matematycznych niezależnych od wszelkiego zastosowania i związku z innemi dziedzinami wiedzy, nie rozwiniemy też myśli ucznia ani nie nauczymy matematyki, skoro zrobimy z niej li tylko pomocnicze narzędzie.

Pogląd taki, który pragnie pogodzić dwie tendencje, jest zawsze narażony na zarzuty i nieraz może grzeszyć słabością. Niestety, jednakże we wszystkich zagadnieniach życia i pracy tego rodzaju pogodzenie jest konieczne. Każde ulepszenie w życiu powstaje z odpowiedniego kompromisu pomiędzy ideałem a rzeczywistością. Ideałem jest nauczenie jasnego, ścisłego rozumowania matematycznego, rzeczywistością przywiązanie naturalne rozwijającej się myśli do konkretnej rzeczywistości, koniecznością wskazanie namacalnych rezultatów wysiłku umysłowego.

Nie możemy dotąd wskazać podręcznika, któryby został opracowany w duchu wspomnianego kompromisu, syntetyzowałby dwie wspomniane tendencje w odpowiedni sposób. Trudnem jest napisanie podręcznika w duchu pierwszego poglądu, o ileż trudniejszem takiego, któryby zadośćczynił w odpowiedni sposób wymogom syntezy. Należy jasno zdać sobie sprawę, że podręcznik jest tylko środkiem pomocniczym i to jednym z wielu, że główną rzeczą jest nauczyciel. Nauczyciel ten obok wykształcenia gruntownego powinien posiadać duże wyrobienie pedagogiczne. Daleko łatwiej jest wykładać matematykę, niż uczyć matematyki. Wszelka racjonalna metoda nauczania zawsze znajdzie swe istotne korzenie w duszy nauczycielskiej, jak to słusznie zauważył ongi, wielki matematyk Abel, który powiedział, że „jeżeli chcecie, aby nauczanie zrobiło postęp, musicie przedewszystkiem przygotować nauczycieli”. W dalszych naszych rozważaniach zajmiemy się sprawą przedstawienia, w jaki sposób w nauczaniu można pogodzić wspomniane tendencje. Nie kusimy się o wyczerpanie kwestji, pragniemy tylko wskazać tę drogę, która, zdaniem autora książki, już dzisiaj może w naszych warunkach zbliżyć nas do ideału matematycznego wykształcenia. Przedtem jednakże sprawy powyżej poruszone należy nieco pogłębić.

ROZDZIAŁ II.

Zagadnienia pedagogiczne, jakkolwiek w istocie swej praktyczne, łączą się nawet w swych pomniejszych przejawach zawsze ze sprawami natury szerszej, z zagadnieniami głębszemi filozofji. Nie można ominąć tych ostatnich zagadnień i chociaż często napróżno kołaczemy do świątyni Prawdy, chociaż myśl ludzka nie znalazła jeszcze właściwej odpowiedzi i nie umie podać drogi odpowiedniej, ważnem jest bodaj wskazanie na konieczność i potrzebę tej odpowiedzi, na znaczenie i kierunek drogi właściwej. Jeżeli pragniemy wybrać należytą drogę przy nauczaniu geometrji, musimy tak samo, jak w innych przypadkach analogicznych, zastanowić się nad istotą podawanych prawd i naturą człowieka, który ma je poznawać. Najpilniejszem jest dla nas obecnie to pierwsze zagadnienie.

Już zaznaczyliśmy poprzednio, że matematyka należy do typu nauk najwięcej pozornie izolowanych, jest systemem pojęć i sądów rozwijających się jakby niezależnie od świata zewnętrznego, samym wewnętrznym rozpędem naszego ducha. Fakt ten oddawna zajmuje myśl ludzką, oddawna powstało zagadnienie: w jaki sposób prawa matematyczne, fakty zdobyte w świecie geometrji lub liczby, mogą mieć zastosowanie w rzeczywistości, mogą formułować, odwzorowywać prawa przyrody i życia. W jaki sposób możliwe jest zastosowanie niezależnie rozwijającej się myśli matematycznej w świecie rzeczywistości poznawanym i jedynie dostępnym dla nas dzięki umiejętnemu doświadczeniu i obserwacji?

Odpowiedź na to pytanie ma nie tylko znaczenie dla ogólnych zagadnień filozofji, lecz również wpływa i wpływać musi na ukształtowanie naszego pojmowania i postępowania przy nauczaniu naszej wielkiej nauki. Nie można pominąć tej sprawy wtedy, gdy pragniemy świadomie odpowiedzieć sobie na pytanie o właściwych drogach popularyzacji prawd matematycznych.

Myśl ludzka w ciągu wieków, zależnie od swego rozwoju, różne znajdywała odpowiedzi. Grek, czy to w utworach Platona, czy też w dziełach wybitnych matematyków helleńskich, skłonny był do myślenia, że myśl matematyczna dotyczy samej rzeczywistości, że świat poznawany zmysłowo jest tylko złudą i zewnętrznością, po za którą kryje się istota rzeczy dostępna nam li tylko na drodze myślenia matematycznego. Ten, kto nie zna geometrji, nie mógł być uczniem Platona, nie mógł wejść do akademji, nie posiadał bowiem tych podstawowych metod, które są potrzebne, by poznawać boskie idee. Matematyka jest nauką o tem, co trwa wiecznie, co nie przemija, co nie jest złudą zmysłową. Pitagorejczycy, z ich ubóstwianiem liczb, rozwijali swoje poglądy w tej samej płaszczyźnie, a nawet „najmędrszy z Greków" Arystoteles, jakkolwiek sprowadził idee na ziemię, nie był skłonny do rozumienia względności prawd matematycznych. Jego kategorje mają taki sam absolutny charakter, jak idee platońskie. Średniowiecze zasadniczo nic w tym poglądzie nie zmieniło, odsunęło tylko wbrew tradycjom greckim miarę i liczbę ze sfery swych zainteresowań. Racjonalizm Descartesa, Malebrancha lub Spinozy przywrócił matematyce jej stanowisko śród dociekań ludzkich i pragnął nawet „modo geometrico" rozstrzygać najszersze zagadnienia myśli i poznawania. Matematyka stała się wzorem umiejętności, a celem każdej nauki miało być dążenie do upodobnienia się do niej. Im więcej jednakże umiejętności oparte na doświadczeniu rozwijały się, im bardziej przykazania Bacona realizowały się w praktyce, tem silniej zaczęło występować zagadnienie stosunku matematyki do wiedzy ściśle doświadczalnej. Z jednej strony konstatowano jej niezależność od doświadczenia i zewnętrznych środków pomocniczych, z drugiej znaczenie i wartość jaką miała w dziedzinie nauk doświadczalnych. Postępy fizyki. astronomji, miernictwa wykazały tę ostatnią w sposób oczywisty. W jaki sposób możliwem jest, że umiejętność wyrastająca z samej myśli człowieka mogła stać się prawodawczynią w świecie zjawisk poznawanych doświadczalnie? Czyżby pomiędzy myślą a faktami konkretnemi rzeczywistości istniała „harmonja przedustawna" Leibnitza? Zagadnienie to było zupełnie równorzędnem do zagadnienia stosunku ciała i ducha i możliwości wzajemnego ich oddziaływania. Im bardziej przekonywano się, że wiedza ludzka wspiera się na podłożu doświadczalnem, tembardziej palącem było to zagadnienie. Zjawiły się i dotąd właściwie trwają dwa rozwiązania klasyczne tego zagadnienia. Jedno z nich posuwało się w linji Berckeleya i jego idealizmu oraz znalazło swój wyraz w teorji Kanta, drugie — rozwijało się po drogach myśli wskazanych przez sensualizm, empiryzm i t. p. kierunki filozoficzne.

Kant i jego naśladowcy sądzili, że przestrzeń jest jedną z tych a priori narzucających się nam form poznawania, które umożliwiają samo doświadczenie. Pewniki geometrji są t. zw. sądami syntetycznemi à priori i w ten sposób reprezentują „czystą poglądowość". Dzięki temu matematyka stanowi jeden z kamieni węgielnych poznawania doświadczalnego i jest o tyle prawodawczynią przyrody, o ile bez form wspomnianych niemożliwem byłoby samo doświadczenie. Kant walczył z metafizyką racjonalizmu, ale w istocie rzeczy to jego zapatrywanie nie odbiegało zasadniczo od tej linji, po której szła myśl grecka, jakkolwiek filozof królewiecki odbiega daleko od tej myśli dzięki rozumieniu znaczenia i wartości doświadczenia. Wpływ poglądu Kanta na dydaktykę był wielki. Skoro prawdy matematyczne są wyrazem samorzutnej czynności naszej umysłowości, skoro płyną z czystego poglądu i na nim się opierają, nie można paczyć ich przez domieszkę obcych pierwiastków, gdyż to nietylko nie ułatwi, lecz utrudni ich ujmowanie. Schopenhauer, który w tej dziedzinie doprowadził do krańcowości pogląd Kanta, uważał, że dowody Euklidesa są sztuczne, bo wprowadzają prawdę matematyczną przez... drzwi kuchenne. Poco dowodzić to, co jest jasne, poco mozolić się tam, gdzie trzeba tylko jasnego wejrzenia w istotę rzeczy? Taki pogląd pociechą był dla dydaktyki, która mając do czynienia z umysłem nierozwiniętym, napotykała na opór Euklidesowego braku dróg nie tylko królewskich, ale i dziecięcych. W tym kierunku rozwinęła się zasada poglądowości w nauczaniu geometrji i, poczynając od Pestalozziego przez Herbarta aż do ostatnich czasów ciągnie się długa linja pomysłów poglądowego, prostego przedstawienia prawd geometrycznych. Na tem tle zrodziła się myśl

„figury zasadniczej", którą miał być prostokąt u Pestalozziego, a trójkąt u Herbarta. W tym kierunku zrobiono dużo w przeciągu ubiegłego stulecia, ale fałszywy punkt wyjścia nie pozwolił na znalezienie drogi właściwej. Geometrję traktowano obok rzeczy konkretnych, bo, skoro prawdy jej płyną z czystego poglądu, skoro mają wartość podstawową dla poznania innych, nie trzeba środków pomocniczych, nie trzeba głębszego ustosunkowania. Zmieniono formę euklidesową, nie zdradzono jednakże ducha wielkiego geometry, jakkolwiek ta zdrada byłaby pożyteczna dla rozwoju myśli. To, cośmy nazwali w rozdziale poprzednim pierwszym typem poglądu na nauczanie geometrji jest związane bezpośrednio z tym prądem umysłowym w tej dziedzinie, jaki reprezentowany jest przez teorję Kanta. Konserwatyzm połączył się z filozoficzną spekulacją i dał w dydaktyce jeden z jaskrawych przykładów, jak trudnem jest stosowanie w praktyce tak pozornie prostych rzeczy, jak zwykła zasada poglądowości.

Czy jednakże pogląd Kanta nie zawiera ziarna prawdy? Czy słusznem jest całkowicie zapatrywanie empiryków, którzy twierdzą, że prawdy matematyczne są wyłącznie doświadczalnego pochodzenia? Nie wydaje się to prawdziwem. Łatwiej jest, powołując się na liczne przykłady, zdobyć się na sąd ogólny o pochodzeniu tego lub innego pierwiastka naszej umysłowości, niż faktycznie przeprowadzić jasną genezę. Tego empirycy dotąd nie zrobili i nawet, gdyby na tle dzisiejszych badań psychofizjologicznych potrafili każdy fakt geometryczny przełożyć na język czuć, mielibyśmy przed sobą jeszcze jeden przykład odwzorowania, nie posiadalibyśmy jednakże wyjaśnienia, gdyż zespół czuć nie daje nam syntetycznego ujęcia przestrzeni jako sui generis faktu. Zapewne z podobnemi rzeczami spotykamy się ciągle w nauce. Formuła chemiczna H_2O i jej zwykłe znaczenie na tle hipotezy atomistycznej nie potrafi nam dać wszystkich cech tego, co zowiemy wodą. Niezależnie od formuły poznajemy fizyczne własności wody, jej bezbarwność, zachowanie się jej wobec ciepła i t. p. Rzeczy te doczepiamy do formuły. Gdybyśmy wzięli na uwagę wszystkie dane wrażeń optycznych, wszelkie czucia dotykowe i ruchowe a nawet słuchowe, mielibyśmy tylko formułę chemiczną przestrzeni, którą nazwać można przestrzenią fizjologiczną, niejednorodną w budowie, pełną złudzeń... A gdzie przestrzeń geometryczna? Gdzie jej nieskończoność, jednorodność wymiarowość tak zależna od pewnika, który doświadczalnie nigdy nie może być sprawdzony, jak np. znany pewnik o linjach równoległych w geometrji Euklidesowej. Doświadczenie umiejętne również nie daje nam przestrzeni geometrycznej. Przestrzeń fizyka lub astronoma napełniona materją, przestrzeń poruszających się brył podlegających prawom mechaniki Newtona lub Einsteina, nie jest przestrzenią geometryczną. Dotąd nie udało się, ani udowodnić, ani obalić zapomocą obserwacji i doświadczenia, żadnego twierdzenia Euklidesa, sama myśl nawet takiego udowodnienia zawierałaby w sobie sprzeczność, gdyż pomiary nasze i przyrządy posłuszne są i zbudowane na tle praw podyktowanych przez wielkiego Greka. Przestrzeń fizyczna jest przestrzenią, gdzie panuje rachunek przybliżeń, gdzie niema bezwzględnej równości. Gdybyśmy raz na zawsze ustalili, że dwa odcinki, teoretycznie nierówne, nazywamy przy danych określonych warunkach równemi, mielibyśmy obraz pierwszego przybliżenia do przestrzeni fizycznej. Jest ona jednakże jeszcze więcej złożoną, bo przybliżenie zależy do okoliczności w jakich występuje pomiar, zależy też od wielkości mierzonych rzeczy. Gdybyśmy stanęli li tylko na doświadczalnym gruncie, liczby niewymierne, pewnik Eudoxusa (lub przekrój Dedekinda) byłby czemś niepotrzebnem, nigdy bowiem w doświadczeniu liczb niewymiernych nie spotkamy, zawsze znajdziemy kres, przy którym pomiar dalszy jest niemożliwy. A pomimo to, czyż można twierdzić, że nasze pojęcia geometryczne są niezależne od doświadczenia?

Tego twierdzić nie można. Historja nauki wskazuje, że niejedna dziedzina badań matematycznych rozwinęła się pod wpływem nauk doświadczalnych, a metody matematyczne wykazują nieraz dobitnie ich zależność od bezpośrednich celów praktycznych. Widocznem to jest z pierwszych początków geometrji Hindusów, Egipcjan, Greków i innych, łatwo też może być zaobserwowane dzisiaj, śród ludzi nieobeznanych z geometrją szkolną. Geometrja zmysłowa, związana bezpośrednio z postrzeganiem przedmiotów konkretnych oraz praktyką życia poprzedzała geometrję precyzyjną. Zjawienie się tej ostatniej wynika z samej natury rzeczy.

Aby ocenić błąd przy obliczaniu przybliżonem, trzeba ująć go w formy pojęciowe, ścisłe, w przeciwnym bowiem razie spotkamy się z zupełnie nieokreślonym, rozciągającym się do nieskończoności, procesem. Jeżeli, nap., obliczamy pewną wielkość a w ten sposób, że zamiast niej bierzemy jedną z wartości przybliżonych: $a - \varepsilon$ lub $a + \varepsilon$, to musimy zdawać sobie sprawę z wartości popełnionego błędu, musimy pojęciowo tę wartość ujmować. Gdybyśmy tego nie potrafili, należałoby błąd znowu podać z przybliżeniem i t. d. Stąd w każdem przybliżeniu tkwi już potrzeba dokładności i ścisłości, wysuwana przez samą istotę rzeczy. Z drugiej strony błędy nagromadzałyby się stopniowo i z konieczności musiałyby w praktyce wystąpić takie różnice, które zaważyłyby na samem obliczeniu przy pomiarach. Częstsze obcowanie z miarą i formą, potrzeba zastosowania ich w życiu praktycznem zmusiły myśl ludzką do uważniejszego zajęcia się niemi oraz wystrzegania nadmiernych błędów. Stąd rozwój precyzyjnych pojęć matematycznych zarówno w dziedzinie liczby jak formy tkwił w samej czynności ich używania. Długie lata obserwacji lub obcowania z danemi zagadnieniami praktycznemi, związanemi w ten lub inny sposób, czy to przy pomiarach na ziemi, czy też w budownictwie z formą geometryczną, musiały ostatecznie doprowadzić do wynalezienia pewnej reguły praktycznej, wyrażonej w sposób odpowiedni i stale w praktyce stosowanej. Reguła ta nie mogła być odrazu wieczną. Pod wpływem doświadczenia musiała się dalej zmieniać, a z drugiej strony myśl badawcza, przyrodzone dążenia umysłu ludzkiego do poznania i prawdy skłaniało człowieka do zapytania: dlaczego? Geometrja rozwijać się jako nauka zaczęła wtedy, gdy umysł ludzki zapragnął zrozumienia tych reguł, których używała praktyka. Czyż tak nie jest w różnych dziedzinach życia, czyż najpierw nie zjawia się fakt mowy, a potem dopiero jego analiza lingwistyczna? Czyż dzisiejsi nasi rzemieślnicy nie posiadają nieraz tajemnic zawodowych, których nie mogą sobie wytłumaczyć ściśle, rozumowo, a pomimo to sprawnie je stosują? Czyż przy zwyczajnem kryciu dachu blachą lub wierceniu dziury w rurze dla przepuszczenia innej rury nie tkwią nieraz zawilsze zagadnienia geometryczne? W Fauście, gdzieś powiedziano, że na początku był czyn, a później przyszła teorja.

Czyż nie jest to prawdą? Umysł wyrobiony, praktyka umiejętna uczą się oceniać teorję i wtedy nieraz ona kieruje praktyką, ale grunt poznania tkwi i tkwić będzie zawsze w doświadczeniu. W niem też głęboko osnute być muszą fundamenty nauczania, które pragnie iść drogą naturalnego rozwoju sił poznawczych człowieka. Dzisiaj również pomimo wyrobionego rozwoju pojęć naukowych, pomimo istnienia w niejednej dziedzinie wysoko rozwiniętej teorji, ciągle jeszcze spotykamy rzeczy znane z doświadczenia, a pomimo to niedostępne dla teorji. Czy znany płatek Möbiusa, ilustrujący powierzchnię jednostronną, nie jest faktem z tej dziedziny tak samo jak sławne zagadnienie o 4 barwach? Takie zagadnienia są dziś tem samem, czem dla starożytnego geometry było twierdzenie Pitagorasa, o którem wiedział z doświadczenia w szczególnych przypadkach, nie umiał jednakże wyrozumować i wyprowadzić ogólnie. Trójkąt o bokach 3, 4 i 5 znalazł szerokie zastosowanie w praktyce zanim teoretycy „sporządzili" ogólny dowód twierdzenia. Jeżeli słusznym jest sąd, że wiedza nasza opiera się na danych spostrzeżeniach i później wzrasta do pojęć coraz ogólniejszych, musi on mieć zastosowanie w odniesieniu do geometrji, jako do jednej z najbardziej praktycznych umiejętności ludzkich.

W każdej nauce spotykamy się z faktem spółdziałania czynnego umysłu ludzkiego i danych doświadczenia: w każdem „prawie przyrody" znajduje swój wyraz to współdziałanie, a tembardziej w dynamice poznawania. Samo bierne doświadczenie nie uczy. Miljony ludzi mogą dostrzegać pewne zjawiska i przechodzić nad niemi do porządku dziennego... Trzeba umysłu badawczego, potrzebny jest cel wyraźny, potrzebna jest umiejętność zapytania przyrody, która odpowiada tylko tym, którzy ją badać umieją, którzy potrafią wyrwać się z biernej atmosfery przeżyć subjektywnych. W dziedzinie poznawania często nie tyle rolę odgrywa metoda, ile życie badawcze, cała suma cech charakterystycznych i odróżniających badacza od reszty śmiertelnych. Nauka nie jest wytworem techniki badawczej, która ma tylko wtórne znaczenie, ona przedewszystkiem jest dziełem ducha ludzkiego, niezmordowanego, nieśmiertelnego dążenia do prawdy. Sama istota badania wymaga teorji. Człowiek musi rozumnie zapytywać przyrodę, badacz musi stawiać hipotezy, które nadają kierunek jego doświadczeniom. W naukach ściśle doświadczalnych hipotezy te żyją i umierają zależnie od tego, czy doświadczenie potwierdza płynące z nich wnioski, czy też nie, czy potrafią dać „objaśnienie" bez sprzeczności wewnętrznej tej kategorji faktów, których dotyczą. Niektóre z nich mają specjalnie stały charakter. Do takich np. należy hipoteza atomistyczna, która, zrodzona jeszcze w świecie antycznym u Demokryta i Epikura, dotąd trwa w nauce, jakkolwiek w dobie obecnej podlega prawdziwym przemianom, stwierdzającym, że pojęcie atomów jest zjawiskiem złożonem. Doświadczenie dzisiaj rozkłada wytwory myśli starożytnych filozofów greckich. Na dnie geometrji też tkwią takie same hipotezy, jak to słusznie nazwane zostało przez genjalnego matematyka – Riemanna. Pewnik geometryczny, jako hipoteza naukowa, tem się odróżnia od innych, że nie może być obalony doświadczeniem, stąd niewątpliwie tkwi w nim więcej pierwiastków pozadoświadczalnych, aprjorycznych. Występuje on zawsze w pewnym układzie sobie podobnych i stanowi razem z niemi określoną całość, zespół hipotez podstawowych danego systemu geometrji. Tych układów może być wiele, jak stwierdza dzisiejsza nauka, a śród nich ten ma największe rozpowszechnienie, który najłatwiej da się zastosować do rzeczywistości. Zdanie Poincarego, że euklidesowa geometrja nie tyle jest absolutnie słuszna, ile najwygodniejsza, posiada głębokie znamię prawdy. Niesłusznem jest zdanie Kanta o bezwzględnej aprjoryczności pewników zupełnie tak samo, jak nieprawdziwym jest sąd empiryków o wyłącznie doświadczalnem pochodzeniu geometrji. W obu przypadkach nie byłyby możliwe różne systematy geometryczne, nie mogłaby istnieć ani geometrja Łobaczewskiego, ani geometrja Riemanna, ani cały szereg innych systemów geometrycznych. Już dziś zjawiają się zagadnienia, które wygodniej jest badać zapomocą innego systemu geometrycznego, jak widzimy np. w teorji względności Einsteina. Doświadczenie nie może obalić systemu geometrycznego, może jednakże wpływać na wybór tego lub innego. Stąd wniosek: system geometryczny zawiera pierwiastki aprjoryczne, niezależne od doświadczenia, ale wartość jego uzależnioną jest od zastosowania w doświadczeniu.

Wszystkim nam znany jest fakt nazywany w nauce pewnikiem Archimedesa (właśc. Eudoxusa). Jeżeli A i B są dwie jednorodne wielkości i jeżeli $A > B$, to zawsze istnieje takie naturalne n, że:

$$n B \geqslant A.$$

Wszyscy wiemy, że kubkiem danym możemy opróżnić nielada beczkę, co ojcowie nasi, w odniesieniu do węgrzyna, sumiennie wykonywali... Czyż możemy jednakże powiedzieć, że to fakt doświadczalny, że przez doświadczenie jest ogólnie stwierdzony? Już nie moglibyśmy opróżnić Atlantyku, bo nie byłoby odpowiedniego wgłębienia w skorupie ziemskiej, a cóż dopiero mówić o pokrewnych faktach w przestrzeni niebieskiej. Codzienne doświadczenie było tą trampoliną, która pozwoliła nam zrobić taki skok myślowy, z tego jednakże nie wypływa, że pewnik umotywowany jest przez doświadczenie. To ostatnie dało tylko pobudkę do stworzenia tej hipotezy. Czy jej zaprzeczy kiedy doświadczenie? Możemy być spokojni: jesteśmy śmiertelni i żyjemy w czasie, a zaprzeczenie wymaga nieskończoności czasu i przestrzeni. Taką samą naturę posiadają wszystkie pewniki geometrji. Mają one charakter hipotetyczny i zespół ich daje określony układ geometryczny, skierowany ku zastosowaniu i praktyce.

Dla teorji i praktyki jest rzeczą ważną, czy dany układ nie zawiera sprzeczności. Myśl ta jeszcze nie przychodziła do głowy Euklidesowi tak samo, jak nie przyszło mu do głowy, że trzeba dowieść przecinania się kół, na których opiera swą początkową konstrukcję trójkąta równobocznego. Dzisiejsza matematyka wymaga już dowodu dla tego braku sprzeczności. Gdyby pewniki powstawały à priori, nie byłyby prawdami podpowiedzianemi przez doświadczenie, dowód ten powinienby z większą łatwością, na pierwszy rzut oka, wynikać z samej wewnętrznej ich treści i powiązania. Tak jednakże nie jest; żeby taki dowód dać, trzeba się uciec do świata liczb, jak to zrobił Hilbert, idąc za myślą Riemanna. Dzięki temu dopiero dziś geometrja Euklidesowa znalazła w swych podstawach wykończenie teoretyczne. Odwołanie się do continuum liczb i ich praw wewnętrznych wymaga oczywiście dokładnej znajomości tych praw i pewności, że pomiędzy pewnikami, na których one ze swej strony są oparte, niemasz sprzeczności. Dowód tego ostatniego twierdzenia wymaga, jak się zdaje, pomocy ze strony logiki formalnej, która dziś, niestety, sama podlega ewolucji i bada z wytężeniem swoje podstawy. Układ pewników Hilberta stanowi dziś ten zespół podstawowych założeń, na których opiera się geometrja euklidesowa. Układ ten nie jest jedynym, bo mogą istnieć inne, spełniające wszystkie warunki w zakresie systematu Euklidesa. Weźmy np. układ Schura wyłożony w jego „Podstawach Geometrji" (Grundlagen der Geometrie, 1909). Układ ten różni się od Hilbertowskiego daje pewien postulat, który ma odwzorować w sposób pojęciowy, ścisły tak zawiłe zjawisko, jak ruch. Na str. 28 powiada Schur: „9 postulat. Istnieje takie podporządkowanie dwóch figur, dzięki któremu każdemu odcinkowi i każdemu na nim położonemu punktowi w jednej figurze, odpowiadają jedno-jednoznacznie odcinek i należący doń punkt drugiej figury. Takie podporządkowanie, jak również jego odwrotność, nazywają się ruchem". Hilbert zupełnie nie wprowadza pojęcia ruchu, a każdy z łatwością zauważy, że powyższy postulat zupełnie niczem nie przypomina konkretnego zjawiska ruchu. Inne układy pewników mamy u Peano (I principii di geometria logicamente esposti. 1889. Torino), Veronesego (sławne Fondamenti di Geometria) i całego szeregu innych autorów nowszych jak: Veblen *) Russel **) i inni. Niema więc jednolitości, która istniećby musiała, gdyby pewniki, jak to zwykle się określa w podręcznikach, były prawdami oczywistemi „nie wymagającemi dowodu".

Czy można mieć pewność, że przyszłość nie przyniesie nam układu, który spełni zarówno wymagania ścisłości, jak da minimum założeń? Idąc dalej, czy można być pewnym, że geometrja, której używać będą nasi potomkowie, będzie, w ścisłem tego słowa znaczeniu, geometrją euklidesową? Czy można, à priori twierdzić, że dzisiejsze układy geometryczne, mające maximum a nawet wyłączność zastosowania, będą ją miały zawsze? Teorja materji, poglądy nasze na nią dziś podlegają ewolucji widocznej, a pojęcie ciała stałego modyfikuje się w porównaniu z przeszłością, czas zaś i przestrzeń nabierają cech względności. Jeszcze kilka dziesiątków lat wytężonej pracy

*) W sprawozdaniach Amer. Tow. Mat 1904 V. 5.

**) W The Principlesof Mathematics, Cambridge, 1903 Rodział XLIV.

i być może fizyk i technik będą zmuszeni stosować prostą naukę o formie, wygodniejszą i więcej przystosowaną do pojęć nowych o świecie materjalnym. Z tego nie wynika, że geometrja euklidesowa jest „nieprawdziwa", wynika tylko, że nie ma tej absolutnej wartości, jaką przypisywała jej myśl grecka i kantyzm z racjonalizmem. Mówiąc słowami Riemanna, Helmholtza i Poincarego na dnie geometrji tkwią hipotezy, które mają o wiele więcej stały charakter, niż hipotezy nauk ściśle doświadczalnych, ale są hipotezami, założeniami podstawowemi, w których tkwi zarówno pomoc doświadczenia, jak praca rozumu ludzkiego. Absolut istnieje tylko w świecie moralnym, Ileż to lat istniał przedkopernikowski sposób pojmowania świata. ileż to pojęć absolutnych doń zostało niesłusznie przyczepionych i rozwiało się jak dym, po odkryciu zawartem w epokowem dziele: de revolutionibus orbium celestium... Myśl ludzka powoli posuwa się po drodze prawdy i im większa jest nasza wiedza, tem głębiej czujemy, że absolutnem jest tylko Dobro. Pojęcia naukowe tak samo są funkcją epoki, jak wiele innych rzeczy. Zależą one od całej praktyki życia, od umiejętności korzystania z jego dóbr, od siły i intensywności z jaką duch opanowywa materję. Podróżnicy i misjonarze pouczają nas, że bardzo często system pojęć, który udzielony jest ludom pierwotnym, przyczepia się tylko powierzchownie do ich umysłowości, nie wpływając na praktykę życia. Dziki uczy się naszej metody rachowania, ale stosuje w praktyce swoją, która jest w organicznej łączności z całością przejawów i potrzeb jego życia i odpowiada temu stopniowi kultury, jaka jest jemu właściwa. Nie można sztucznie z wyższej formy kulturalnej wyrwać coś i odrazu przeflancować na niższą. Rzeczy takie wymagają czasu i organicznego wzrostu. Pojęcia geometryczne stosowane ściśle się łączą z całem życiem praktycznem i odpowiadają jego potrzebom tak samo, jak i inne przejawy umysłowości ludzkiej.

W sposób powyższy staraliśmy się, nie absorbując dużo miejsca i czasu, zdać sobie sprawę z istoty podstawowych pojęć geometrycznych. Zrobiliśmy to w formie najogólniejszej i usiłowaliśmy zająć odpowiednie stanowisko wobec istniejących głównych poglądów. Z tego stanowiska wynikają pewne wnioski natury dydaktycznej. Wnioski te są również ogólne. Miejsce jest teraz na to, by je tu wyłuszczyć.

W rozdziale poprzednim przedstawiliśmy 3 główne używane metody. Jedną z nich nazwaliśmy metodą klasyczną, a dwie drugie nazwiemy: metodą wyłączności i metodą korelacji. Metoda klasyczna jest ugruntowana na tradycji i nie wykazuje liczenia się z genezą i rozwojem myśli. Dwie inne uwzględniają to, każda po swojemu: pierwsza biorąc na uwagę tylko sam dany przedmiot (geometrja); druga — przez styczność i powiązanie z innemi przedmiotami nauczania szkolnego. Podstawy tych metod tkwią w takiem lub innem pojmowaniu pochodzenia i rozwoju pojęć geometrycznych. Pierwsza wspiera się na poglądach pokrewnych do kantowskiego, druga hołduje empiryzmowi.

Z powyższego wynika, że nie możemy stanąć na żadnem z powyżej nadmienionych stanowisk. Nie możemy nauczać geometrji wzorem Euklidesa i jakkolwiek nie brak ludzi, którzy sądzą, iż ścisły i tem samem jasny wykład geometrji jest najlepszym pod względem pedagogicznym, uważamy, że nawet najłatwiejsze przyswajanie gotowych pojęć nigdy nie zastąpi ich zdobywania. Jeżeli geometrja jest nauką żywą, związaną z naszem poznawaniem konkretnej rzeczywistości, nie można nauczać jej jako gotowego narzędzia dla niej samej, gdyż w ten sposób: 1° znaczna większość uczniów nie będzie miała należytego w tym kierunku zainteresowania, 2° popadniemy w sprzeczność z zasadą samodzielności w dydaktyce i 3° nie nauczymy myśleć. Zwykle bardzo pośpiesznie sądzimy, że nauka matematyki jest dobrą szkołą myślenia. Psychologja dotąd nie zdecydowała (a zdecydować można tylko doświadczalnie) czy wprawa w myśleniu w jednej dziedzinie zagadnień, oddziaływa na takąż wprawę w innych. Jest to rzecz bardzo wątpliwa. Z drugiej strony pożądamy ludzi, którzy przedewszystkiem umieją myśleć o tych zjawiskach i faktach, jakie nastręcza nam otaczająca nas rzeczywistość. Myślenia nie można nauczyć na terenie abstrakcyjnym, przez operowanie gotowemi, wyrobionemi pojęciami, tak samo jak nie można nikogo nauczyć pisać przez oprowadzanie liter, ładnem pismem kaligraficznem wystylizowanych. Jeżeli chcemy, żeby geometrja w wielkiej pracy nad rozwojem umysłu człowieka odegrała rolę swą w masie ludzkiej, musimy metody badania wysunąć na plan pierwszy, wziąć stopniową genezę, genezę za prawidło, a system nauki zostawić na koniec nie zaś umieścić go na początku. Dobry, zdolny i zamiłowany nauczyciel może przez sugestję osobistą uczyć nawet bardzo trudnych rzeczy, a więc i geometrji według Hilberta, ale ileż w tem wszystkiem jest złudzenia. Każdy fach ma swoje złudzenia, ma je też fach nauczycielski. Jednem z takich złudzeń, które jest tem łatwiejsze, im trudniejszą bywa praca nauczyciela, jest złudzenie, że „uczniowie umieją". Umieją powtarzać in verba magistri, umieją reprodukować cudze myślenie tak, jak uczennica często reprodukuje w swych wypracowaniach myśli swego nauczyciela i tem zachwyca niewybrednego profesora.

Metoda wyłączności, która pragnie, poprzestając na gruncie danego przedmiotu, nagiąć go do potrzeb rozwijającej się myśli, nie bierze w rachubę faktu, iż takie przystosowanie może się odbyć tylko na terenie genetycznego rozwoju pojęć nauki, którego, bez związku z innemi przedmiotami poznania, osiągnąć się nie da. Z abstrakcją nie można igrać tak samo, jak z ogniem, nie znosi ona żadnych, najmniejszych bodaj niedomówień i nieścisłości.

Kto chce pozostać na terenie właściwym geometrji, winien być zwolennikiem metody klasycznej, jedynie w tej mierze konsekwentnej, a wszelkie przeróbki, ułatwienia, wszelkie naginania do umysłowości zostawić na boku, gdyż jest to fałszowanie nauki, a tego żadna dydaktyka wymagać nie może. Dowód musi być ścisły, albo nie jest dowodem, pojęcia jasne i precyzyjny—albo nie mamy do czynienia z nauką. Metodyka niemiecka, która tak często na wzór scholastyki biedzi się nad podziałem końca szpilki na dziesięć równych części, wykazuje olbrzymią, ale jakże mało produkcyjną pracę w dziedzinie należytego postawienia i wyrobienia metody wyłączności. Spopularyzowano dzięki temu śród twardej braci matematycznej kunszt dydaktyczny, rzucono wiele pomysłów i podtrzymywano istnienie wielu czasopism, a metoda nauczania ulepszyła się o tyle, o ile, pomimo wszystko, skorzystano z pomocy zewnętrznej przez wprowadzenie do matematyki zagadnień i przedmiotów należących do innej sfery badania. Metoda wyłączności ma tę zasługę, że zmodernizowała co do formy i co do treści wykład euklidesowy; nie można jednakże bronić tych odstępstw od naukowego traktowania rzeczy jakie dzięki niej spopularyzowane zostały i były przyczyną powodzi podręczników, o których można tylko jedno często powiedzieć, że nie są podręcznikami geometrji, lecz jakiejś osobliwej nauki, która niema zobowiązań wobec logiki. Praktycy przekonywali teoretyków, że ich metoda rozumowania jest niedostępna dla uczniów, ci zaś ostatni zżymali się na widok książek, gdzie kwoli owemu przystosowaniu do potrzeb praktycznych koszlawiono pojęcia nauki, zaprzeczano wszystkim niemal jej postulatom dotyczącym harmonji wewnętrznej, ścisłości i jednolitości budowy. U nas z łatwością można wskazać szereg podręczników, które nietylko są wynikiem owego przystosowania na tle metody wyłączności, lecz często jaskrawego nieuctwa. Czyż w szkole nie mogą być utrzymane główne tendencje nauki? Czyż istotnie niemożliwem jest takie nauczanie, które byłoby w zgodzie z tem, co dla wiedzy jest najważniejsze: dokładnością i ścisłością. Dla każdego pedagoga jest jasnem, że nauczanie w duchu metody klasycznej nie jest możliwe, a dla nauczyciela matematyki, który szanuje swoją wiedzę, przedewszystkiem zaś interesy myśli człowieka, jest niewątpliwe, że fałszowanie nauki również jest niemożliwe. Jakież wyjście znajdziemy?

Jednym z błędów zasadniczych, utrudniających rozwiązanie tego problemu, jest oparcie się o wykład systematyczny. Ten wykład jest wynikiem dłuższego procesu doświadczeń, został poprzedzony przez geometrję konkretną, geometrję spostrzeżeń. M e t o d a w y k ł a d u j e s t c z e m ś i n n e m, n i ż m e t o d a b a d a n i a. Przerabianie ad usum scholae systematu geometrycznego z opuszczeniem pewników, z nieodpowiedniemi definicjami, ale z pozostawieniem formy jest czemś zgoła innem, niż świadome na drodze genetycznej urabianie pojęć nauki. Takie urabianie musi się odbywać na tle konkretnych spostrzeżeń, w związku ze realnemi przedmiotami otoczenia. Tego właśnie chce metoda korelacji.

Czyż przez to nie staniemy w sprzeczności z wymaganiami nauki? Nie, bo wymagania nauki nie mogą być w sprzeczności z potrzebami rozwijającego się myślenia. Nie książki tworzą naukę, a człowiek; nie wykłady stanowią jej treść, a samodzielne myślenie. Nauka zawsze rodzi się w tyglu indywidualnego mózgu. Stąd nauczanie, które przystosowuje się do możliwości wewnętrznych człowieka i posuwa się w kierunku genetycznego rozwoju pojęć, najlepiej, najdokładniej odpowiada wymaganiom nauki. Dla każdego okresu rozwoju człowieka istnieje odpowiednia sfera pojęć geometrycznych, taksamo, jak istnieje określony pogląd na świat. Rozumiemy dobrze, że niemowląt nie można karmić potrawami dla dorosłych; nie zdajemy sobie sprawy, że myśl tak samo wymaga w danej fazie swego rozwoju odpowiedniego pokarmu. Zrobić nauczanie psychologicznem jest tem samem zrobić go naukowem. Nie znajomość faktów tworzy naukę, lecz zdolność ich opanowania. Jeżeli damy człowiekowi wiarę w siły jego rozumu, jeżeli potrafimy rozbudzić w nim dążenie do badania, żywą myśl, która umie obserwować, wyprowadzać wnioski, stawiać hipotezy, zrobimy dla nauki więcej, niż wtedy, gdy będziemy pragnęli tylko samej wiedzy materjalnej.

Podstawy geometrji tkwią głęboko w doświadczeniu, wyseparowała się ona po długich wiekach pracy duchowej człowieka w oddzielną, dumną umiejętność, zamiast służebnicy stała się poniekąd prawodawczynią, a pomimo to nie straciła swego związku z rzeczami naturalnemi i żyje w ich świecie jako symbol czystej nauki. Czyż można w nauczaniu pominąć ten okres początkowy jej istnienia? Czyż w ten sposób nie zaniedbamy dla kwiatów i owoców, które widzimy na wierzchu, pielęgnacji korzeni, mocno zagłębionych w ziemi? Czyż nie spowodujemy tego, że to zaniedbanie wywoła uschnięcie drzewa umiejętności, ulotnienie się tego vis vitalis nauki—żywego ducha badania i stopniowego rozwoju. On jeden nada życia naszemu nauczaniu, on jeden zrobi to, że geometrja przestanie być suchą umiejętnością, a stanie się, jak to odpowiada istocie rzeczy, duchem badania materjalnej rzeczywistości. Tego wymaga metoda korelacji czyli związku nauczania geometrji z resztą przedmiotów, z obserwacją i reakcjami czynnemi.

Nie sądzimy jednakże, że sama metoda korelacji uratuje sytuację. W każdej z powyżej zaznaczonych metod jest jądro prawdy, a nauczanie winno brać na uwagę każdą z nich. W jaki sposób ma być to zrobione, jak należy ukształtować przebieg nauki, jest zadaniem następnego rozdziału.

ROZDZIAŁ III.

Jedną z najważniejszych kwestyj, na które w rodziale niniejszym zwrócimy przedewszystkiem uwagę jest sprawa wspomnianej poprzednio propedeutyki geometrji. Oddawna już w dydaktyce matematycznej rozważano zagadnienie początkowego nauczania geometrji. Arytmetyka w szkole elementarnej ma miejsce ugruntowane. Nie można tegoż powiedzieć o geometrji. Jeszcze dzisiaj nie można twierdzić, że przedmiot ten ma u nas powszechne uznanie i zasłużoną, ze względu na swoją wartość, uwagę w programie szkolnym. Kształcąca wartość geometrji nie jest bynajmniej mniejsza, niż arytmetyki, teren zastosowania również nie jest węższy, a praktyczne znaczenie nie mniej poważne. Stąd jednem z bardzo pilnych zadań reformy szkoły elementarnej jest należyte wprowadzenie nauczania geometrji do planu szkolnego. W krajach innych rzecz ta oddawna już istnieje, a najwybitniejsi pedagogowie zastanawiali się nad tem, jak ukształtować naukę tego ważnego przedmiotu, który w tak wybitny sposób łączy się organicznie z całym szeregiem innych zajęć i przedmiotów nauczania. Coraz częściej wprowadzamy do szkoły pracę ręczną, uczymy rysunków, początków geografi i przyrody, a nie zwracamy uwagi na przedmiot, który jest organicznie z temi przedmiotami związany. Jedną z największych przeszkód jest sama metoda i sposób nauczania. Przyzwyczailiśmy się do konieczności uczenia rachunku i jakoś sobie z tem radzimy, co wynika poniekąd z tego, że arytmetyka początkowa nigdy nie była dawniej w tej formie przedstawiona, jak geometrja Euklidesa i stąd wpływ tradycji nie oddziaływał tak silnie i nie przeszkadzał w ukształtowaniu metody. Kwoli właśnie potrzebie nauczania geometrji na stopniu niższym stworzono pojęcie propedeutyki geometrycznej. Ta ostatnia ma jeszcze inne znaczenie, uwarunkowane tem, że wobec wczesnego rozpoczynania nauki geometrji i trudności z tem związanych, propedeutyka ma przygotować ucznia do korzystania z wykładu systematycznego. Zarówno jedna jak i druga przyczyny są zupełnie słuszne, cała trudność jednakże zagadnienia polega na tem, jak ukształtować nauczanie samo, jaką mu dać treść i formę. Istnieje mnóstwo rozwiązań, o których, przy właściwem omawianiu nauczania na odnośnych stopniach, w swoim czasie powiemy, obecnie zastanowimy się nad sprawami rozciągłości kursu nauczania propedeutycznego oraz ogólnego charakteru tego wykładu.

Czy potrzebna jest nazwa propedeutyki? Zapewne, o ile chodzi o odróżnienie ścisłego, systematycznego wykładu od wstępnych, na postrzeżeniach, pracy ręcznej i doświadczeniu opartych rozważań, jest to zupełnie zrozumiałe. Inaczej się rzecz przedstawia, o ile będziemy uwzględniali jedynie słuszną zasadę dydaktyczną, głoszącą, że nauczanie przystosowywać się winno do umysłowości i być w zgodzie z zasobem pojęciowem ucznia. Wtedy, rzecz jasna, geometrja ucznia szkoły elementarnej i geometrja ośmioklasisty będą rzeczami różnemi, ale tym samym przedmiotem rozpatrywanym ze stanowiska genetycznego. Uczeń początkowej szkoły, skoro uczy się czynić indukcyjne spostrzeżenia nad mową, uczy się gramatyki; nie jest to jednakże „kurs gramatyki języka polskiego". Geometrja jest dla uczniów, nie uczniowie dla geometrji. Mniejsza zresztą o nazwę, ważniejszą kwestją jest, jak długo ma się rozciągać kurs propedeutyczny. W naszych szkołach średnich kurs ten trwa czasem lat 2, czasem 3, a nieraz i 4. W klasie 3-ej, a przeważnie w 4-ej rozpoczyna się kurs systematyczny. Odrazu rodzi się pytanie, czy słusznem jest takie postawienie sprawy, czy możliwem jest już w klasie 4-ej systematyczny wykład geometrji?

Mówiąc o wykładzie systematycznym, rozumiem taki, gdzie przedmiot jest traktowany zupełnie ściśle, np. według istniejącego w przekładzie polskim podręcznika Enriquesa lub wspomnianego powyżej Halsteda. Poprzednio już zaznaczyliśmy, że wszelkie kompromisy z geometrją uważać należy za rzecz nieodpowiednią. Uczeń, który wychodzi ze szkoły średniej, winien, o ile chce nie tylko uczyć się logiki w klasie 8-ej, a naprawdę czuć i zdawać sobie sprawę z potrzeby ścisłego rozumowania, przejść krótki, zwięzły ale ścisły kurs elementów geometrji. Pojęcie ogólnego wykształcenia polega między innemi na tem, że formalne, metodologiczne elementy studjowanych nauk uwzględniane są w nauczaniu niezależnie od praktycznej wartości zastosowania tej lub innej nauki. W szkole specjalnej, zawodowej taki zwięzły, skondensowany kurs geometrji jest zbędny, ale w tak zwanej ogólnokształcącej stanowić winien ważną część programu. Kiedyż taki kurs może być uczniom dostępny?

W literaturze podręczników i w wynurzeniach osób zajmujących się dydaktyką matematyczną nie brak głosów stwierdzających, że wogóle w szkole średniej ścisły wykład matematyki jest niemożliwy. Pogląd ten wydaje się niesłusznym. Prostota, jasność i ścisłość myślenia matematycznego nie są bynajmniej mniej dostępne, niż wiele rzeczy, do których przyzwyczailiśmy się. Żądamy nieraz od uczniów krytycznej oceny utworów literackich, lub całych epok historycznych, a boimy się przedmiotu w istocie swojej bardzo prostego, wymagającego tylko zżycia się z jego objektami i poczucia ich realnej wartości. Kto tego nie da uczniom poprzednio, ten nie może wymagać ścisłości, gdyż w umysłowości ucznia niema istotnych sprężyn wysiłku, a z drugiej strony niema całego zasobu, przez doświadczenie popartych, w zastosowaniu pogłębionych i przemyślanych samodzielnie, jakkolwiek jeszcze nie powiązanych, pojęć. Matematyka wymaga myślenia nad objektami własnej myśli człowieka. Te objekty muszą być, musi być materjał, nad którym będziemy się zastanawiali. Niewłaściwe stosowanie metody klasycznej wyrobiło śród ludzi popularne zdanie o małej dostępności matematyki. Tak źle nie jest i nie można nazwać dojrzałym umysłowo, przeciętnie wykształconym, człowieka, który nie przemyślał zwięzłego podręcznika geometrji. Twierdzenie nieraz się zapomni, ale duch pozostanie, ale poczucie harmonji i konsekwencji myśli wpłynie na uświadomienie i pojmowanie logicznego, konsekwentnego rozumowania. Najtrudniejszemi zagadnieniami myśli ludzkiej są zagadnienia życia. Rozstrzyganie ich wymaga nie tylko formalno-logicznego wyrobienia, ale, i to jest rzecz najważniejsza, pewnej dojrzałości wewnętrznej, rozwoju samowiedzy i na doświadczeniu opartego stosunku „ja” do „nie ja”. Zagadnienia typu matematycznego są o wiele prostsze. Nie są one pociągające dla masy ludzkiej, stąd pedagog musi to wziąć na uwagę i rozbudzić odpowiednie zainteresowanie. Ludzkość w swym rozwoju wcześniej stworzyła metafizykę i myślenie oderwane, niż naukę i w tem miejscu spostrzeżenie Comte'a o fazach rozwoju umysłowości, wskazuje tylko na fakt względnej łatwości zagadnień. Chłopiec, po przejściu okresu dojrzewania, ma pęd w kierunku abstrakcji, pęd zupełnie naturalny, który w wypadkach nienormalnych (jak to wskazuje Lemaitre w swej La vie mentale de l'adolescence) zwyradnia się w jaskrawych formach pustego verbalizmu, który szkoła podtrzymuje sztucznie nietylko nieumiejętnemi metodami, lecz również niebacznem ładowaniem abstrakcyj do głowy młodej. Wszystko powinno przyjść w porę. Abstrakcji nie należy nadużywać, nie należy sądzić, że poznanie jest tylko funkją myślenia oderwanego. W poznaniu udział bierze cały człowiek, a to nauczanie jest dobre, które potrafi wziąć to na uwagę. System nauki nie może być narzucony, musi przyjść wtedy, gdy mamy coś do systematyzowania. W geometrji przyjść on winien właśnie w czasie po przejściu fali głównej okresu dojrzewania. Weźmie to odrazu myśl człowieka w karby, wskaże mu, że z abstrakcją nie można się bawić, że jest ona realnością i immanentną myśli ludzkiej, do której dochodzi się przez cierpliwą pracę i badanie rzeczy.

Sądzę, że miejscem najwłaściwszem dla ścisłego, zwięzłego kursu geometrji jest klasa 6-ta dzisiejszej szkoły średniej.

Cały kurs poprzedzający jest i musi być nazwany propedeutycznym. Obejmować on winien całość elementów geometrji, włączając do tego i stereometrję.

Powyżej wyrażony zasadniczy postulat nauczania geometrji wymaga jeszcze omówienia, sprawa bowiem może się niejednemu wydawać niejasną.

Postulat ten wynika, po pierwsze, bezpośrednio z tego, co powiedziane było w poprzednich rozdziałach. Jest on wnioskiem bezpośrednim z zastosowania metody korelacji. Geometrja, jeżeli ma dać umysłowi ludzkiemu zawartą w niej moc wewnętrzną, winna być poznawaną w związku bezpośred nim z rzeczami otaczającego świata. Gdy odkrywanie stopniowe jej praw da należyty zespół faktów, gdy myśl zżyje się z poczuciem wartości tych faktów, staną się one czemś realnem, czemś posiadającem wewnętrzną siłę skupienia uwagi. Wtedy systematyzujcie te fakty.

Po drugie, wszystkie podstawowe zasady dydaktyki przemawiają za tem. Czyż poglądowość w geometrji polega tylko na zewnętrznem unaocznieniu prawd geometrycznych? Czyż tylko modele i tablice wyrażają właściwą jej tendencję? Poglądowość, to bezpośrednie poznawanie zmysłowe, gdzie biorą udział wszelkie czucia, nie wyłączając w żadnym razie mięśniowo-ruchowych, które wszak dla geometrji, szczególnie metrycznej, tak ważne mają znaczenie. Zasada indukcji, której rola wielka w nauczaniu arytmetyki początkowej była przez nas poprzednio uwypuklona, wymaga powolnego, cierpliwego zbierania kapitału spostrzeżeń przedtem, zanim przystąpimy do formułowania, a tembardziej wiązania wzajemnego, prawd poznawanych. Zwięzły, krótki ale jędrny i ścisły kurs geometrji w klasie 6-ej będzie naturalnem uwieńczeniem całego gmachu rozwijającej się stopniowo myśli, będzie rozumniejszem i celowem, a tak dla należytego wyrobienia myślenia potrzebnem zbilansowaniem zdobytej wiedzy. Wymaga tegoż zasada ciągłości. Jednym z najbardziej zasadniczych grzechów w nauczaniu geometrji są, niewiadomo dlaczego postępujące po sobie rozdziały nauki, zupełnie jak Deus ex machina zjawiające się dowody. Któryż uczeń, oprócz „pilnych osłów", dobrze wydających lekcje, nie będzie poruszony nienaturalnością naszych dowodów geometrycznych? Weźmy np. twierdzenie o kącie zewnętrznym w trójkącie. Trzeba w niem podzielić bok trójkąta na dwie części równe, poprowadzić pewną prostą, odciąć równy pewnemu odcinkowi odcinek i t. d. Jakim sposobem uczeń potrafi ocenić ten dowód, ten uczeń, który nie wie, skąd to się wszystko wzięło i który na dnie duszy niema pewności, czy inna konstrukcja nie dałaby czego innego? Uczy się on in verba magistri... Uczy się, jak powiadamy, nauki, która wprawiać ma go do myślenia. Czyż to istotnie jest wprawianie? Czyż przyjęcie a priori podanej konstrukcji nie może budzić na tym stopniu wątpliwości co do dowodów wogóle i inaczej być asymilowane jak przez pamięć? Kształcenie w reprodukowaniu cudzych myśli nie jest kształceniem myślenia, a jego zabijaniem. Jest to pierworodny grzech dawnej dydaktyki, płynący z materjalistycznego poglądu na wykształcenie i brak psychologicznego ujęcia zagadnień nauczania. Prawda geometryczna musi być prawdą dla ucznia, a więc wynikać z jego zdolności poznawczych, być wynikiem jego własnego wysiłku, jasnym wnioskiem z elementarnych procesów początkującego myślenia. Takich dowodów podawać nie można, a przecież od nich się roi w podręcznikach geometrji. Jedna z najżywszych nauk, regulator naturalny naszych postrzeżeń nad światem zewnętrznym, tak interesującym dzieci, przeradza się w coś gorszego, niż zwykła zawczesna gramatyka, a pedagog na to ma tylko bezradne, uparte twierdzenie o... niezdolności uczniów do matematyki, twierdzenie, które zwyradnia się często u ludzi małej inteligencji w sui generis głupią, zawodową dumę. Duma ta i cała atmosfera takiego nauczania odbiera dzieciom najdroższą rzecz szkoły — szacunek dla nauki, co ze stanowiska wychowawczego jest jednym z najgorszych braków, rozkładających należyte wychowanie moralne. Ciągłość nauczania wymaga oparcia faktów poznawanych na takiem tle, któreby umożliwiło poczucie i rozumienie ich genetycznej łączności. Tego żaden podręcznik geometrji nie da i dać nie może. Czyż trzeba nadmieniać, że postulat powyższy jest w zgodzie z zasadą samodzielności? Wszak cała matoda korelacji przepojona jest jej duchem.

Po trzecie, nauczanie geometrji, o czem nie trzeba nigdy zapominać, ma wartość praktyczną. Przy dzisiejszej metodzie nauczania uczniowie w t. zw. niższem gimnazjum zapoznawaliby się bardzo mało z elementami geometrji, co wobec zasadniczo słusznego projektu Ministerstwa Oświaty, dotyczącego zwężenia ram właściwej szkoły średniej i ograniczenia jej tylko do klas wyższych, byłoby brakiem bardzo ważnym. Poniżej będzie mowa o tem, jak ukształtować cały 8-ioletni kurs geometrji propedeutycznej, obecnie jedno tylko należy podnieść, że uwzględnienie metody korelacji przy przechodzeniu tego kursu ma wartość ze względu na podniesienie zawodowej wogóle, a szczególnie technicznej, produkcyjności naszego kraju. Zagadnienie to, szczególnie w czasach obecnych, ma niezmiernie doniosłe znaczenie, a dawne metody nauczania geometrji dostatecznie wykazały swoją w tym względzie bezsilność! Z drugiej strony odpowiednie nauczanie naszego przedmiotu niewątpliwie wpłynie na sam charakter umysłowości polskiej, której tak często brak odżywczego oparcia o realne spostrzeżenia, o grunt doświadczalny. Nasz naród naprawdę powinien zacząć się uczyć. Tego ostatniego celu zaś, bez szerszego uwzględnienia metod indukcyjnych, osiągnąć nie potrafimy. Jeszcze Jan Śniadecki narzekał na zbytni wpływ filozofji niemieckiej w naszem społeczeństwie. Uwagi jego pod tym względem nie straciły dziś na wartości i szczególnie wzięte muszą być mocno do serca przez tych, których obchodzą losy naszego postępu kulturalnego. Od najmłodszych lat dzieci nasze muszą być zaprawiane do umiejętnego i dokładnego spostrzegania. W ten sposób naród zdobędzie poważny kapitał duchowy, a skarby duszy polskiej nie będą tracone na marne w próżnem i bezpłodnem żonglerowaniu ideami. Nauka geometrji w tym względzie, zawierając w sobie potęgę rozumu ludzkiego i łącząc się bezpośrednio z danemi doświadczenia, odegrać powinna rolę wybitną. Im wcześniej umysł człowieka przyzwyczai się do posługiwania się miarą, liczbą i formą w odniesieniu do własnych spostrzeżeń i wogóle faktów obserwacji i doświadczenia, tem umiejętniej, tem intensywniej będzie się starał metodę zdobytą stosować w życiu praktycznem. Człowiek ma dwa światy do poznania, dwa światy, w których żyje: świat wewnętrzny i zewnętrzny. Fakt ten uzewnętrznia się w humanistycznym i realnym kierunku kształcenia. Kierunek realny wtedy istotnie nabiera swej wartości, jeżeli taki przedmiot, jak matematyka, nie tylko będzie miał większą liczbę godzin w planie szkolnym, lecz zrośnie się integralnie, jako jeden z zasadniczych przedmiotów, z resztą tychże. Stąd kurs proponowany propedeutyczny idzie na spotkanie potrzebom realistycznego kształcenia, które odegrać swoją rolę winno również o tendencji w szkole humanistycznej.

Postulat powyższy ma znaczenie dla każdego typu szkolnego, jako idea przewodnia. Różnice polegać mogą raczej na treści i ilości, niż na ogólnej formie układu materjału i metodzie.

Po tych uwagach staje obecnie przed nami w całej rozciągłości zapytanie, dotyczące charakteru omawianego kursu propedeutycznego. Potrącamy tu o rzecz najważniejszą, a ta lub inna odpowiedź na postawione zagadnienie może zadecydować o wartości samej myśli. Jaka ma być wewnętrzna budowa kursu propedeutycznego? Czy ma on być jednolitym, czy też składać się z oddzielnych momentów? Czy treść jego będzie taka sama, jak w zwykłym kursie geometrji, czy też muszą wystąpić różnice? Jak metodycznie ma być ukształtowane nauczanie, żeby spełniało powyżej postawione wymagania? Najpierw zajmiemy się zagadnieniem budowy kursu propedeutycznego.

Jeżeli chodzi o celowość nauczania i przystosowanie się do rozwoju umysłowego dzieci, kurs propedeutyczny musi być jednolitem, stopniowem zaznajomieniem z faktami geometrji. Ponieważ jednakże w kursie tym mogą występować rozmaite oddzielne grupy zagadnień oraz zmieniać się środki ich rozwiązania, praktycznem jest podzielenie go na kilka oddzielnych części. Takich części, sądzę, można uwzględnić 4. Pierwsza z nich obejmuje pierwsze 2 lata nauczania, druga rok 3-ci i 4-ty, trzecia 5-ty i 6-ty i czwarta 7-my i 8-my.

Odróżnianie tych 4-ch okresów nauczania musi się opierać nie tylko na tem, że w każdym wyższym proces rozumowania będzie wyższy, lecz również w zależności od tego, z jakiemi czynnościami, przedmiotami oraz zastosowaniem, nauczanie będzie związane. Nauczanie (osobliwie propedeutyczne) musi być związane z czynnościami. Pedagogika dzisiejsza, opierając się zarówno na większej znajomości różnego rodzaju czuć w procesie poznawania, jak na historji rozwoju człowieka i cywilizacji, usiłuje w każdej dziedzinie nauczania wykorzystać nie tylko zdolność uważnego słuchania, patrzenia i zapamiętywania, lecz również czynnego wytwarzania objektów myśli, czynnego udziału przez pracę, nie tylko umysłową, lecz również fizyczną. W nauczaniu geometrji jedyną dotąd uprawianą czynnością było wykreślanie figur, używanych przy udawadnianiu twierdzeń, oraz zrzadka zjawiające się zadania konstrukcyjne. T. zw. kreślenie, które odgrywało przy nauce geometrji większą rolę przed kilku laty, w szkołach realnych, i było traktowane jako osobny przedmiot, należało też do tej czynności dziś, niestety, z powodów niezrozumiałych zaniedbanej. Było wielkim błędem, że kreślenie zostało oddzielone od nauki geometrji; większym jest jednakże jego zaniedbanie. Nie wyczerpuje ono atoli wszystkich czynności.

Należy do nich w pierwszym rzędzie wszelkiego rodzaju praca ręczna, nie wyłączając nawet pracy na roli, w ogrodzie i t. p., a także gier i zabaw. Jeżeli praca ta nie jest wyłącznie robotą niewolnika, lub czynnością zarobkową, lecz ważnym elementem nauczania, musi być wszechstronnie wyzyskana. To wyzyskanie polega nie tylko na zdobyciu określonych, pewnych koordynacyj ruchów, wyrobieniu pewnych cennych przyzwyczajeń i zalet charakteru moralnego, lecz również na podaniu bardzo wygodnego i odpowiedniego terenu do ćwiczeń i spostrzeżeń geometrycznych. Rzeczą świadomego swych zadań nauczyciela jest wyzyskanie każdej sposobności oraz wytwarzanie tychże w sposób naturalny, w celu zbogacenia spostrzeżeń, pojęć i sądów geometrycznych dzieci. Dlatego też pożądanem jest, by w przyszłości, na niższym stopniu nauczania, nauczyciel pracy ręcznej był jednocześnie nauczycielem geometrji. Kumulowanie różnych przedmiotów w rękach jednego nauczyciela jest prostym wynikiem korelacji, wynikiem bardzo ważnym. Praca ręczna w szkole, zjawiająca się dziś w postaci t. zw. slöjdu, jeszcze nie wybrnęła z objęć nauczania rzemiosła, jeszcze nosi piętno warsztatu majstra cechowego. Tak jak język ojczysty w sferze duchowej i moralnej, musi ona stać się ośrodkiem wszelkiego nauczania, związanego ze światem zewnętrznym.

Drugą ważną czynnością jest rysunek i modelowanie. U nas zwykle pracy ręcznej dotąd jeszcze nie wiążą z rysunkiem i kreśleniem, jakkolwiek dwie te rzeczy muszą być ze sobą ściśle zjednoczone. Postępy w rysunku i stosowanie metody właściwej byłyby bardzo ułatwione, gdyby dzieci nie tylko rysowały to, co widzą lub widziały, lecz i to, co zrobiły lub mają zrobić. Rysunek nastręcza również pole do badania formy, wszak jest on połączeniem dokładności z pięknem. Odrzucenie dokładności i podkreślenie li tylko estetyzmu nie wychodzi na zdrowie nawet temu ostatniemu. W rysunku kompozycyjnym przejawia się nie tylko wrażliwość estetyczna, lecz w stopniu niemniejszym rozwój i dokładność wyobraźni geometrycznej. Na rzecz tę należy zwrócić uwagę.

Trzecią czynnością jest mierzenie i ważenie. Wprost podziwiać należy, jak szkoła dzisiejsza zaniedbuje te tak praktycznie ważne rzeczy. Wszak w nich życie codzienne stosuje matematykę, wszak te niejasne i zupełnie nijakie pojęcia o miernictwie, jakie posiada przeciętny, inteligentny człowiek, wskazują, że on nie uczył się geometrji, lecz wykuwał książkę o geometrji. Szkoły powinny posiadać przynajmniej elementarne przyrządy do mierzenia i ważenia, a uczeń, który wychodzi z murów szkolnych po ich ukończeniu, powinien być obznajmiony z początkami miernictwa. Wszak liczbą i miarą nie tylko Bóg stworzył wszechświat, ale i człowiek napełnia całe swoje otoczenie, wytwarza wszystkie dzieła techniki, przemysłu, handlu i... nauki. Uczyć geometrji bez tego jest podobnem do nauki gramatyki nieznanego języka, co również znakomicie często się przytrafia. Mierzenie i ważenie łączy się z pojęciami z mechaniki. Jeżeli chemja znalazła swoje prawa obywatelstwa śród przedmiotów realnych w szkole w objętości odpowiadającej jej znaczeniu, jeżeli początki jej znajdujemy już na niższym stopniu nauczania, dlaczego poddana jest ostracyzmowi mechanika, dlaczego umiejętność, stosowana na każdym kroku w życiu, dumna i wielka nauka Newtona, nie może mieć prawa obywatelstwa wtedy, gdy tylko co wspomniany nieśmiertelny matematyk twierdził: fundatur igitur geometria in praxi mechanica et nihil aliud (geometrja wspiera się tylko na mechanice praktycznej). Kurs mechaniki, podawany w szkołach jako wstęp do fizyki, przechodzi często bez śladu większego, jest bardzo zwężony, i wobec braku zżycia się i zastosowania przeciętnie b. mało rozumiany. Dość przekonać się o tem chociażby na egzaminach, tych prawdziwych „oślich mostach" nie uczniów, lecz dzisiejszej szkoły. Rzecz jasna, że nie chodzi tu w pierwszych początkach o wzory matematyczne, o ścisłe ujmowanie zależności, lecz o obznajmienie z prostemi, codziennemi zjawiskami, które mogą nastręczyć mnóstwo spostrzeżeń i zastosowań geometrycznych. Od czasu do czasu można spotkać w naszych szkołach uproszczone modele mechanizmu zegarowego. Trzeba tylko chwilkę się zastanowić, aby przekonać się, jak wiele pojęć geometrycznych jest związanych z tym wdzięcznym mechanizmem. Dla nauczania, które chce geometrję sprowadzić z platońskiego nieba i podręczników do życia i żywej myśli uczniów, zjawiska mechaniczne mają ogromne znaczenie. Newton mógł się mylić co do podstaw mechanicznych geometrji, ale słowa jego, powyżej przytoczone, muszą być jedną z poważnych a płodnych wskazówek dla nauczania.

Czwartym rodzajem czynności jest kreślenie właściwe, które powinno połączyć się z rysunkiem technicznym i stopniowo wchłonąć podstawowe pojęcia geometrji wykreślnej. Kreślenie winno być tym środkiem, który spostrzeżenia poczynione na przedmiotach realnych, spostrzeżenia grube i mało sprecyzowane przekłada na język więcej subtelny, podatniejszy do rozumowania. Kreślenie winno służyć nie tylko do celów syntezy, jak to dawniej widzieliśmy w szkole realnej przy wykreślaniu rozwiązań zadań konstrukcyjnych, lecz również do analitycznego rozpatrywania ciał realnych w rysunku technicznym.

Z powyższego wynika, że posiadamy dość rozmaitych czynności, aby ożywić i uczynić przystępnem, oraz naprawdę pożytecznem, nauczanie geometrji. Racjonalna metodyka winna umiejętnie i stopniowo wprowadzać te czynności do nauczania. O tem będzie mowa w następnych rozdziałach przy szczegółowem omawianiu każdego stopnia.

Śród przedmiotów, z któremi nauka geometrji musi być w ścisłem zespoleniu, wymienić należy: geografję, fizykę i kosmografję. O faktycznym ich związku nie trzeba się rozwodzić; jest on jasny dla każdego i tylko nieodpowiednie układanie planu szkolnego, oraz wadliwa specjalizacja wśród nauczycieli mogła uczynić, że fizyk nie współdziała matematykowi, a ten ostatni nic nie może pomóc geografowi. Doprawdy, gdy się cokolwiek bliżej nad tem zastanowimy, podziwiać należy płytkość myśli, jaka tkwiła na dnie takiego nieskoordynowanego programu. Dziś rzecz tę należy poprawić, wszak możemy tworzyć szkołę dla siebie, trzeba nam tylko dobrej woli i trochę... dobrej myśli. Zalecając związek pomiędzy wspomnianemi przedmiotami a geometrją, nie można przepomnieć wewnętrznej spójni nauczania matematyki samej wogóle. Często się zdarza, że nauczanie arytmetyki (i t. zw. algebry) nie łączy się z nauką geometrji. Wszak w praktyce szkolnej tylko obliczanie powierzchni i objętości, traktowane „arytmetycznie", przypominało cokolwiek, że obok arytmetyki istnieje geometrja, ta nauka, która nakazywała ongi nazywać matematyków geometrami. W części II niniejszej książki, omawiając zagadnienia związane z nauczaniem początków algebry, wspomnieliśmy o pewnych pojęciach geometrycznych, o wykresach przedstawień graficznych funkcyj związanych z temi pojęciami. Był to jeden tylko szczegół, których powinno być więcej, a nauczanie matematyki musi przyjąć jako zasadę: łączność najściślejszą oddzielnych gałęzi nauczania. W arytmetyce stale powinniśmy spotykać zadania treści geometrycznej, co tylko ożywić potrafi tak niezawsze wesołą naukę rachunku i początków algebry.

Tyle co do pierwszego z powyżej postawionych pytań. Drugie pytanie dotyczy treści samego nauczania propedeutycznego. Pytanie to częściowo rozwiązaliśmy powyżej, omawiając czynności związane z nauczaniem geometrji, musimy jednakże sprawie tej poświęcić jeszcze kilka uwag.

Co zawierają przeciętne podręczniki propedeutyki geometrycznej? Podręczniki te, występujące pod nazwą geometrji konkretnej, doświadczalnej lub początkowej bardzo często mają treść mało różniącą się od zwykłego podręcznika geometrji szkolnej, a różnią się tylko tem, że opuszczają „dowodzenia", nie wymieniają twierdzeń i pewników, traktując rzecz metodą mniej lub więcej nudnego opowiadania. Są jednakże wyjątki. Do nich należy u nas Geometrja poglądowa Jamrógiewicza, która w znacznym stopniu posuwa się w linji bronionych w tej książce poglądów. Zdradza konsekwencje postępowania przesiąknięty metodyką niemiecką i na tle metody wyłączności opracowany podręcznik Suppantschitscha na klasy niższe (3 części). Poza tem kilka książeczek już wyczerpanych (jak Geometrja w zadaniach Dicksteina, Berta geometrja doświadczalna). Na Zachodzie istnieje mnóstwo podręczników tego typu. Śród nich wyróżnia się książka małżeństwa Youngów (Mały geometra — The little geometer), bardzo świeża i pomysłowa, ale również używająca niewielkiego zasobu czynności pomocniczych i przytem dość jednostronna w doborze materjału i zagadnień. Literatura angielska posiada dość dużo podręczników do geometrji propedeutycznej, w których autorowie usiłują iść w kierunku powyżej omawianym.

Dobrego szkolnego podręcznika dotąd niema i można nawet postawić sobie pytanie, czy będzie? Niekażdy przedmiot wymaga podręcznika, niekażdy może wymagać. Konieczność podręcznika jako podstawy nauczania jest związana z pewnym poglądem dydaktycznym, który sądzi, że nauczanie jest uczeniem z książki, że wiedzę należy opanować pamięcią. Propedeutyka geometrji z samego ducha swego, z samej istoty przedmiotu, nie może być wykładana z podręcznika Każdy uważny obserwator życia dzisiejszej szkoły, każdy człowiek obznajmiony z literaturą pedagogiczą wie, że dziś postęp szkoły i wychowania wchodzi pod znakiem nauczyciela. Nauczanie jest zjawiskiem psychicznem, uwarunkowanem przez odpowiednie właściwości żywej duszy nauczycielskiej, jest wspólną pracą duchową tego, który uczy i tych, co się uczą. Są przedmioty, a zjawia się ich coraz więcej (rysunek, praca ręczna, wszelkiego typu pogadanki i ćwiczenia), które nie mogą być uczone z podręcznika, a cały ciężar spoczywa na barkach nauczyciela. Osoba jego wysuwa się na czoło spraw wychowania, a parjas i zapoznany „belfer" staje się dziś głównym ośrodkiem, w którym koncentrują się wszystkie siły wychowawcze, schodzą się wszelkie nici. Nauczanie propedeutyki gometrycznej jest żywem dziełem żywego człowieka, który dobrze, gruntownie zna swój przedmiot i ma odpowiednie przygotowanie pedagogiczne, pozwalające mu przystosowywać się umiejętnie do danych warunków i okoliczności, aby wyciągnąć z nich maksimum pożytku dla dzieci. Te warunki mają ogromne znaczenie i żaden podręcznik nie potrafi zastąpić umiejętności ich wyzyskania.

Dla nauczyciela potrzebne są wskazówki metodyczne, wyjaśnienie zasad postępowania i wskazanie na materjał możliwy do wyzyskania, ale uczniom nie można dać podręcznika propedeutyki. Próby odnośne są cenne o tyle, o ile każda z nich przynosi dla metody nauczania pewną nową wskazówkę.

Materjał propedeutyczny, zawarty w większości podręczników propedeutyki. jest ten sam, jak wspomnieliśmy, co w zwykłym podręczniku geometrji. Może powstać pytanie, czy nie należałoby tego materjału nieco odświeżyć. Wszak od 23-ch wieków geometrja rozwinęła się bardzo, powstało wiele nowych zagadnień, nowych metod i dróg. Szkoła nie bierze tych rzeczy na uwagę. a program jej zastygł w formach dawnych. Bardzo często podnoszony jest argument, że szkoła nie posiada miejsca wolnego w swym programie, który jest bez tych dodatków przeładowany. Sądzę, że tak źle nie jest, że owe dodatki nie tyle dotyczą zwiększenia materjału, ile zmiany sposobu nauczania. Geometrja propedeutyczna musi, będąc w ścisłej styczności z doświadczeniem, na tle wspomnianych powyżej czynności, potrącić o podstawowe zagadnienia geometrji. Nie może ona ograniczyć się do treści samych elementów Euklidesa. Już w tych Elementach znajdujemy w formie niezróżniczkowanej trzy rodzaje zagadnień, które dziś grupują się w 3-ch głównych odmianach geometrji: metrycznej, rzutowej i analysis situs.

Geometrja metryczna znajdzie najszersze zastosowanie z natury rzeczy. Związana jest ona z rachunkiem oraz z bardzo wielu zagadnieniami życia praktycznego. Aby tym zagadnieniom podołać, geometrja propedeutyczna musi uwzględnić pojęcia trygonometrji, posługując się tablicami wielkości naturalnych funkcyj trygonometrycznych. Myślę, że już w roku 7-ym nauczania byłoby to możliwe zupełnie.

Geometrja rzutowa znajdzie swe zastosowanie zarówno przy pewnych ćwiczeniach rysunkowych w klasach młodszych, jak przy rysunku technicznym i geometrji wykreślnej w 4-ej i 5 ej klasie dzisiejszej szkoły średniej. Nie chodzi o wykład całkowity jakiegoś działu, wystarczyłoby twierdzenie Desargues'a i wnioski z niego. W klasie 6-ej pozwoliłoby to podać ściśle geometryczną teorję stosunku i proporcyj geometrycznych, rzecz bardzo pouczającą i ładną. Można to zrobić kilkoma sposobami. W tejże klasie należałoby potem podzielić pewniki geometrji na grupę pewników rzutowych i metrycznych, co byłoby możliwe.

Analysis situs może mieć najmniej zastosowania, a pomimo to mieć musi. Wspomnimy tu o takiej pouczającej rzeczy, jak równość figur przez rozkład.

Geometrja propedeutyczna, obejmując cały zakres zwykłego kursu geometrji metrycznej, nie uwzględni, oczywiście, w pierwszych 7-u latach odcinków niewspółmiernych, a w roku 8-ym to uzupełnienie zostanie zrobione. Obliczenia w latach poprzednich wcale nie wymagają liczb niewymiernych. Można obliczać długość obwodu koła, powierzchnie i objętości brył obrotowych, zwykle używanych, wcale nie uwzględniając pojęcia liczby niewymiernej. To samo dotyczy funkcyj trygonometrycznych.

Prócz wskazówek metodycznych dla nauczyciela i przyrządów potrzebny jest odpowiednio dobrany zbiór zadań, którego można używać wtedy, gdy kwestje analogiczne do treści zadań były doświadczalnie rozpatrywane.

Z powyższego można już zdać sobie sprawę z głównych cech kursu propedeutycznego.

Szczegóły metodyczne będą przedmiotem rozważań w następnych rozdziałach. Trzeba jedną rzecz jasno rozumieć, że tam, gdzie nie można prowadzić nauki w sposób ścisły, według pojęć spółczesnych, jedynie odpowiadających godności matematyki czystej, należy z geometrji, tak samo jak z arytmetyki, uczynić naukę stosowaną we właściwem tego słowa znaczeniu. Wszelkie pośrednie drogi nie mogą być drogami dydaktycznie uzasadnionemi, bo przedewszystkiem fałszują naukę, a tego dydaktyka nigdy wymagać nie może. Dydaktyka jest umiejętnością popularyzowania nauki, nie zaś jej paczenia. Można być popularnym, ale w ramach sobie postawionych, postępować zgodnie z duchem nauki.

ROZDZIAŁ IV.

Gdyśmy w części pierwszej omawiali naukę rachunku początkowego, na każdy rok przeznaczyliśmy określony program. Ze względu na charakter przedmiotu program można było podać według pewnej przeciętnej normy. W praktyce, w zależności od tych lub innych powodów, zawsze będą odstępstwa i różnice. Te odstępstwa i różnice nie będą jednakże zbyt wielkie. Stąd możliwem jest wyznaczenie programu przeciętnego. Inaczej rzecz się ma w geometrji. Przedmiot ten nie ma tak określonej formy, jak arytmetyka, a samo jego nauczanie nie osiągnęło jeszcze pod względem metodycznym tego stopnia rozwoju, jak nauczanie rachunku. Wobec tego praktyczniejszem jest obejmowanie za jednostkę programową nie jednego roku, lecz lat dwóch. Oczywiście, muszą istnieć różnice pomiędzy rokiem pierwszym a drugim w każdym takim cyklu, różnice te jednakże więcej będą polegały na charakterze wykonania przez ucznia, niż na materjalnej odrębności danych podawanej nauki. Z drugiej strony, nauczanie, właściwie postawione, tak jest zależne od otoczenia i warunków, że o wiele trudniej jest otrzymać określone następstwo oddzielnych momentów programu.

Jakiż ma być program pierwszych dwóch lat nauczania?

Odpowiedź na to pytanie pociąga za sobą zastanowienie się nad temi przewodniemi myślami, jakie tkwić winny w całym kursie propedeutycznym.

Wyobrażenia przestrzenne tworzą się w człowieku od pierwszych dni życia, wyseparowują się one powoli z całokształtu przeżyć, z tego prawdziwego chaosu, jaki stanowić musi treść życia niemowlęcia. Jak można na zasadzie obserwacyj i faktów stopniowego rozwoju dziecka przypuszczać, pojęcia zasadnicze: „wewnątrz" i „zewnątrz", które tak późno znalazły swe uwzględnienie w matematyce precyzyjnej, tkwią już w pierwszych fazach rozwoju. Życie niemowlęcia jest jakby jednem pasmem przeżyć, w których niema oddzielenia tego, co jest subjektywne od świata objektywnego. Dziecko chwyta członki swego ciała, jak każdą rzecz otoczenia, nie odróżniając narazie ich związku z jego „ja". Ciało to staje się głównym czynnikiem wyróżnienia świata zewnętrznego i powstawania pierwszych wyobrażeń przestrzennych. Tak samo, jak w arytmetyce przed powstaniem pojęcia liczby jako takiej istniało pojęcie wielkości, które się stopniowo zaczęło różniczkować, tak też w geometrji na dnie tkwi fakt jeszcze pierwotniejszy: odróżnianie, że coś jest na zewnątrz lub wewnątrz czegoś. Russel*) w swych podstawach geometrji wysuwa położenia na zewnątrz (extraposition) jako jeden z pewników pochodzenia aprjorycznego. Niezależnie od tego lub innego pochodzenia tego pewnika, jest faktem, że wyraża on jeden z podstawowych faktów powstawania pojęć i wyobrażeń przestrzennych.

Oddzielenie się świata zewnętrznego prowadzi dalej do jego uporządkowania. Przedmioty muszą być ustosunkowane względem siebie. Tu pomaga dziecku ruch, tak samo jak poprzednio. Czucia wzrokowe wspólnie z dotykiem i czuciami mięśniowo ruchowemi oraz słuchem wprowadzają porządek do obserwowanego świata, który przedstawia się narazie jako szereg plam, jakby powiedział malarz. Człowiek wytwarza sobie pojęcia przestrzenne własną pracą, często przy współudziale wielkiego nauczyciela, jakim jest ból. W wieku szkolnym dzieci przychodzą już z całym kapitałem doświadczeń przestrzennych i, o ile pojęcia kształtu samego i uzależnienia oraz skoordynowania kształtów są mało rozwinięte, o tyle pojęcia wielkościowe, w odniesieniu do długości, są już wyrobione, jak to stwierdzają doświadczenia (np. Bineta). Rozpoznawanie podobieństw kształtów na rysunkach jest też rozwinięte. Dzieci rozpoznają kształt znany, np. szkic rysunkowy znanego przedmiotu, niezależnie od położenia, przyczem często przy swych rysunkach podają położenie w przestrzeni w sposób nieodpo-

*) Patrz przekł. franc. Essai sur les fondements de geometrie.

wiedni, nie odróżniając dołu od góry, prawej strony od lewej. Tu przytrafia się zupełnie to samo, co przy uczeniu się języka metodą gramatyczną: uczeń rozumie czasem czytane, nie umie jednakże związać zdania. Ustosunkowanie i skoordynowanie różnych kształtów ze sobą wymaga dłuższej nauki. Charakterystyczny błąd, popełniany przez dzieci przy rysunkach np. twarzy ludzkiej, gdzie w owalu przedstawiającym tę twarz, umieszczone są oczy i usta, a nos przyczepiony z boku, powtarza się też w rysunkach ludów pierwotnych i wykazuje, że ustosunkowanie wzajemne różnych elementów kształtu nie jest zjawiskiem prostem i nie pokrywa się łatwością rozpoznawania. Jaskrawe nieraz błędy w obserwacji popełniane przez dzieci, co również można sprawdzić, poza innemi przykładami, na rysunkach, zmuszają nas do zastanowienia się nad ich przyczyną. Odgrywa tu rolę zapewne nie tylko niedokładność postrzegania zmysłowego, płynąca z niewyrobienia odnośnych organów odbiorczych, lecz również podstawianie żywego, fałszywie nieraz ujętego albo zgoła dowolnie wyprodukowanego, wyobrażenia. Subjektywne przeżycia ciągle jeszcze pokrywają objektywne dostrzeżenia, zabarwiają je obficie pierwiastkami uczuciowemi oraz wyobrażeniami, o zgoła odmiennej treści. Dziecko często nazywa daną formę, np. literę, wesołą lub smutną, dobrą lub złą i t. p. Zainteresowania, które grają w duszy dziecka, skierowują jego uwagę na różne strony rzeczywistości. Okres rozwoju, w którym rozpoczyna się szkoła elementarna, jest okresem, jak się na to zgadza wielu autorów, zainteresowań objektywnych. To też okres ten nadaje się bardzo do tego, by wprowadzić ład i porządek w spostrzeżenia i wyobrażenia przestrzenne dzieci. Zainteresowanie u dziecka wyraża się przeważnie w postaci ruchu, czynności. Z tego wynika, że kształcenie wyobrażeń przestrzennych musi być przeważnie prowadzone na tle odnośnych ruchów i czynności. Wrażenia wzrokowe nie są jeszcze całkowicie skoordynowane przy ujmowaniu zwykłych rzeczy otoczenia z wrażeniami dotyku i zmysłem mięśniowo-ruchowym. Koordynacji tej należy dopomóc przez odpowiednie kształcenie wyobrażeń przestrzennych.

Jakkolwiek odróżnienie wielkości jest rozwinięte w znacznym stopniu u dziecka wstępującego do szkoły, wymaga ono jednakże sprecyzowania w postaci dokładniejszego mierzenia i zastosowania liczby.

Stąd głównem zadaniem pierwszych dwóch lat nauczania jest uporządkowanie tego kapitału doświadczeń i wyobrażeń przestrzennych, jakie dziecko już posiadało przed wstąpieniem do szkoły, przez dokładniejsze skoordynowanie faktów postrzegania przestrzennego, sprecyzowanie ujmowania kształtu i jego elementarnych stosunków położenia względem innych oraz wprowadzenie mierzenia.

W doświadczeniu przenikają się wzajemnie dwie formy przestrzeni: przestrzeń fizjologiczna i przestrzeń fizyczna.

Przestrzeń fizjologiczna, w której panuje nie tylko t. zw. prawo perspektywy, lecz również tysiące złudzeń, jest najniższą formą ujmowania przestrzennego, formą całkowicie zależną od naszych środków organicznych dostrzegania, podległą najrozmaitszym warunkom i okolicznościom tego dostrzegania, zależną od wad naszych zmysłów i od opanowania ich przez obce organiczne pobudki. Jest sprawą zupełnie zbędną dla szkoły elementarnej zastanawianie się nad psychologiczną budową przestrzeni fizjologicznej. Pytanie, czy powstaje ona genetycznie, czy też odgrywają w niej rolę pierwiastki natywistyczne, ma ważne znaczenie dla należytego wychowania dziecka i konstrukcji jego zajęć w pierwszych latach dzieciństwa. W szkole elementarnej stajemy wobec faktu gotowego, wobec zbudowanej już przestrzeni fizjologicznej. Większe dla nas ma znaczenie formowanie się przestrzeni fizycznej. Przenikanie się obu przestrzeni odbywa się w ten sposób, jak nasze pojęcia powoli przenikają w zbitą masę przeżyć — wyobrażeń, uczuć, emocyj i afektów. Jednym z zasadniczych błędów dawnej dydaktyki geometrycznej było usiłowanie, na tle przestrzeni fizjologicznej i niejasnych kształtów fizycznej, budowaniu, jak, dei ex machina, przestrzeni geometrycznej.

Przestrzeń fizyczna posługuje się liczbą, przyrządem do mierzenia, dokładnie określa kształty, stara się ująć pojęciowo ich wzajemną zależność. Tworzenie się jej jest niemożliwe bez doświadczalnego badania, którego objektem są bryły materjalne. Pojęcia przestrzenne, które są tu wynikiem tego badania, ściśle się łączą z pojęciami mechaniki. Kinematyka i kinetyka—oto idealne formy tej przestrzeni. Niewątpliwie formy te powstały drogą zastosowania pojęć geometrycznych, właściwych przestrzeni geometrycznej, lecz zanim to nastąpiło, długi czas w kuźnicy myśli ludzkiej wykuwały się te pojęcia pod wpływem doświadczenia i badania ciał materjalnych. Ten okres rozwoju myśli ludzkiej jest właśnie w nauczaniu głównie reprezentowany przez kurs propedeutyczny.

Już w pierwszej części niniejszej książki mieliśmy sposobność zaznaczyć, że jednym z kardynalnych błędów dydaktyki dzisiejszej jest stosowanie pojęć abstrakcyjnych do praktyki i doświadczenia po teoretycznem ich „przygotowaniu". Pojęcia powstają z praktyki i doświadczenia, a zastosowanie pozwala na dalsze ich kształcenie i rozumienie zakresu oraz wydajność doświadczenia. To ostatnie niemożliwe jest bez czynnych reakcyj ze strony człowieka. Powyżej wskazaliśmy na szereg czynności, które mogą nam być pomocne przy nauczaniu. Obecnie zajmiemy się zbadaniem, jakie z tych czynności mogą mieć zastosowanie w pierwszych dwóch latach nauczania.

Jedną z bardzo ważnych czynności jest rysunek, który, obok modelowania, stanowi fundament kształcenia dokładniejszych wyobrażeń przestrzennych u dzieci. Należyte postawienie w szkole elementarnej tych przedmiotów ma nie tylko ogromne znaczenie praktyczne, lecz wkracza też w dziedzinę zasadniczych zagadnień formalnego kształcenia. Nie darmo nowa dydaktyka, jako na jedno ze swych kapitalnych zastosowań, zwróciła uwagę na naukę rysunku i modelowania. Zarówno badania etnograficzne, jak dociekania w dziedzine psychologji dziecka, wskazują na ważne i symptomatyczne znaczenie rysunku w rozwoju człowieka. Dla nas tutaj ma on wartość razem z modelowaniem, jako środek pierwszego systematycznego kształcenia przestrzennego. Byłoby błędem, gdybyśmy zaczęli odrazu od form geometrycznych utartych. Zajmują one w świecie formy stanowisko nikłe, a przyczepienie do nich nazwiska nie uczy więcej geometrji, niż nazywanie kolejne liczebników rachunku. Zaznaczyliśmy w części pierwszej, że nazwa przedwczesna nie jest pożyteczna. W nauce geometrji, wobec konkretnych kształtów, nie byłaby to nazwa przedwczesna; błąd polega na tem, że odrazu zwężamy pole rozważań geometrycznych do konwencjonalnych objektów dociekania zwykłych, tradycyjnych elementów geometrji. Uważamy zwykle, że, zaczynając pouczać o prostopadłościanach, walcach, stożkach i t. p., zaczynamy właściwą geometrję. Nieco głębsze wejrzenie w przedmiot potrafi przekonać nas, że bryły te są poniekąd wynikiem tych elementów geometrycznych (punkt, prosta, płaszczyzna), które wprowadzone zostały jako szereg konwencjonalnych pojęć właściwych geometrji Euklidesa i poniekąd związanych z pewnemi faktami doświadczenia. Elementy mogą być rozmaite *), a stąd bryły również mogą powstawać różne. Matematyk wykształcony stoi dziś wobec zagadnienia obliczenia objętości lub powierzchni dowolnej bryły z gliny tak samo bezradnie, jak jego poprzednicy. Bryły geometryczne, elementarne wychwytują z rzeczywistości tylko niektóre kształty, a geometrja nie potrafi ująć pojęciowo ogromnej, przeważającej liczby kształtów rzeczywistych. Być może, w przyszłości, myśl matematyczna wzniesie się na takie wyżyny, które pozwolą z większą łatwością obejmować przemijające formy przedmiotów świata zewnętrznego. Dziś, przez odwzorowanie w rysunku i modelowaniu, przez zdjęcia fotograficzne, potrafi to zrobić sztuka. Skoro zadaniem propedeutyki geometrycznej ma być na tym stopniu przedewszystkiem wprowadzenie większego porządku i jasności w dziedzinę wyobrażeń przestrzennych, nie możemy się ograniczyć li tylko do form konwencjonalnych geometrji, lecz pojąć zagadnienia szerzej i stosować metody odpowiednie.

Rysunek i modelowanie winny się posługiwać metodami wskazanemi przez nowsze prądy w metodyce przedmiotu i opierać się na odwzorowaniu realnych przedmiotów otoczenia. Nauczyciel propedeutyki geometrycznej powinien żądać, aby przy nauczaniu rysunku i modelowania zwracano uwagę na dokładność obserwacji, aby estetyka nie pochłonęła całkowicie zadań tego nauczania. Jedną z ważnych bardzo rzeczy jest rysunek i modelowanie z pamięci. Termin niemiecki: Kopfgeometrie, używany w początkowych fazach nauczania tego przedmiotu, właściwie nie jest niczem innem, jak tylko kształceniem wyobraźni geometrycznej. Otóż w tej

---

*) Patrz np. M. Pieri. Geometrja elementarna, oparta na pojęciach punktu i kuli. Bibljoteka Wektora. Warszawa, 1915.

Weber i Wellstein. Encyklopädie der Elementermathematik. T. II Geometrja.

dziedzinie rysunek pamięciowy jest rzeczą niezmiernej wagi. Historja kultury wskazuje, o ile o tem sądzić można z tego, co wiemy, że rysunek z pamięci poprzedzał rysowanie z modelu. Wydaje się to psychologicznie uzasadnionem. Wyładowanie i uzewnętrznienie treści psychicznej oraz odruchowa potrzeba jej uzewnętrznienia i jakby utrwalenia i skontrolowania wywierają swój wpływ niemały. Rysowanie z pamięci jest tak często ulubionem zajęciem dzieci, zupełnie tak samo żywiołowo potrzebnem, jak np. dziwny dla nas fakt stale powtarzającego się stukania jednym przedmiotem o drugi. Rysunek pamięciowy, umiejętnie prowadzony i dyskretnie korygowany, jest bardzo wpływowym środkiem kształcenia dokładności wyobrażeń przestrzennych. To samo, rzecz jasna, dotyczy modelowania.

Czynności te ze względu na potrzeby nauczania geometrji winny być ze sobą w pewnym określonym związku. Przypuśćmy, dzieci mają rysować gruszkę. Pożądanem jest, by najpierw gruszka była wymodelowana, ulepiona z gliny lub plasteliny, a następnie rysowana. Rysunek na tym poziomie jest rysunkiem szkicowym. Jeżeli przyzwyczaimy dzieci do tego rodzaju korelacji, możemy zdobyć dla nauczania geometrji bardzo ważne rzeczy.

Po pierwsze, forma w ten sposób traktowana jest głębiej psychologicznie ugruntowana, t. j. wyobrażenie jej jest jędrniejsze i mocniejsze. Wszystkie niemal zmysły biorą udział w jej tworzeniu.

Po drugie, łączenie przestrzennej figury z odwzorowaniem jej na płaszczyźnie ma dla przyszłego nauczania geometrji bardzo wielkie znaczenie. Zrozumiałą jest sprawą, że porządek: rysunek-model można i należy później odwrócić, t. j z początku dawać szkic, a później przyjść do bryły. Nauka odczytywania kształtu przestrzennego z danego szkicu zaczyna się i powinna być zaczęta w ten sposób w pierwszych latach nauczania elementarnego. Wszak w nauczaniu np. geografji posługujemy się mapą, która dla początkującego ucznia jest rzeczą poniekąd nową i trudną. Odpowiednie w tym kierunku przygotowanie jest, jak z tego wynika, bardzo pożądane. Z drugiej strony, przy dobrym rozwoju pracy ręcznej, o ile chcemy nadać jej poważne formy i przypisujemy, jak na to zasługuje, duże znaczenie, wykreślanie w rzutach odpowiednich szkicu danego przedmiotu jest rzeczą pożyteczną i ma wpływ nie tylko na pewne wyrobienie techniczne, lecz i na kształcenie geometryczne. Można się spierać, czy kolejność: model-rysunek jest słuszną na początku, czy nie należy zaczynać naodwrót. Sądzę, że ze względu na większą konkretność modelowania porządek ten jest słuszny. Odwrócenie tegoż musi nastąpić w każdym razie nie w odniesieniu do nowych przedmiotów, lecz do takiego przedmiotu, który był już najpierw modelowany, a potem rysowany. Np., jeżeli modelowano gruszkę, a potem ją rysowano, dobrze jest z pamięci narysować gruszkę i później, licząc się w przybliżeniu z wymiarami przedmiotu, ją wymodelować. To łączenie rysunku i modelowania pozwoli później oddzielić od rysunku właściwego wykreślanie przedmiotu w rzutach. O tem jednakże mowa będzie później. W dwóch pierwszych latach nie będzie nam zbytnio chodziło ani o ścisłość, ani o dokładność precyzyjną. Porządkowanie wyobrażeń przestrzennych musi też zaczynać się od form grubszych.

Po trzecie, połączenie odpowiednie modelowania i rysunku da nam możność przyzwyczajenia ucznia do badania form płaskich jako jednego z potrzebnych środków badania brył. Niejeden autor piszący o nauczaniu geometrji, niejeden nauczyciel poważniej myślący o swych zadaniach, rozumie, że rozpoczynanie nauki geometrji od figur płaskich jest rzeczą niewłaściwą. W otoczeniu widzimy przeważnie bryły; skoro więc mamy rozpoczynać naukę na tle doświadczalnem, w związku z bezpośredniem ujmowaniem rzeczywistości, ważnem jest wziąć jako punkt wyjścia bryłę. Nawet tacy wielcy pedagogowie, jak Pestalozzi lub Herbart, popełniali w tym względzie błąd zasadniczy, wychodząc z rozważań planimetrycznych. Samo pojęcie geometrji było tak związane z układem Euklidesa, że nawet ci tak krytyczni reformatorowie nauczania nie potrafili wyzbyć się sugestji wielkiego Greka. Dziś, jak wiemy, czynione są próby t. zw. fuzjonistycznego nauczania, a śród odnośnych podręczników można wskazać na podręcznik włoski Lazzeriego i Bassaniego *). Pod wpływem prądu fuzjonistycznego Badow-

*) G. Lazzeri A. Bassani. Elementi di geometria Seconda edicione migliovata. Livorno 1898. Podręczników takich jest więcej, jak np.: Adrianiego, Meraya i innych.

ski przerobił w drugiem wydaniu swój podręcznik geometrji i wprowadził fuzję, jakkolwiek rzecz została zrobiona dość mechanicznie i sztucznie, czego nie można powiedzieć o przemyślanej książce włoskich autorów. Jeżeli w wykładzie ścisłym, przynajmniej w postaci dotąd znanej, fuzjonistyczne traktowanie wygląda dość ciężko, a podręczniki odnośne mało się nadają do wykładu szkolnego, to nie trzeba stąd wnioskować, że po pierwsze, niemożliwe jest zjawienie się odpowiedniego podręcznika ścisłego, a po drugie, co jest szczególnie ważne, że propedeutyczne nauczanie geometrji musi się posługiwać schematem Euklidesa. W ł a ś n i e w p o j ę c i u f u z j i t k w i j e d n a z n a j z d r o w s z y c h m y ś l i p r o p e d e u t y c z n e g o n a u c z a n i a, a konsekwentne i stopniowe przeprowadzenie tej rzeczy należy do poważnych spraw, związanych z tem nauczaniem. W pierwszych latach nauki wyraża się myśl ta w umiejętnem łączeniu modelowania i rysunku. W pewnem znaczeniu rysunek jest analizą bryły rysowanej i powoli przyzwyczaja do pojęcia elementów bryły, co, oczywiście, wystąpi zupełnie jasno przy kreśleniu technicznem, które, jak powiedzieliśmy powyżej, powoli wyrugowane być winno z rysunku.

Jakkolwiek ze względów szerszej natury psychologiczne powiedzieliśmy poprzednio, że konwencjonalne bryły geometryczne i zapoznanie z niemi, opisanie, nie jest głównem zadaniem początków kursu propedeutycznego, opis ten nie należy uważać za rzecz zbędną i godną pominięcia. Bryły geometryczne, uwarunkowane poniekąd samą budową euklidesowego systemu, m a j ą z n a c z e n i e p r a k t y c z n e. W technice, w praktyce życia codziennego spotykają się one stale Są one nie tylko formami, które wypływają bezpośrednio z konstrukcji euklidesowego systemu, lecz jednocześnie takiemi kształtami, k t ó r e n a j ł a t w i e j z r o b i ć m o ż e m y i k t ó r e c i ą g l e s t o s u j e m y. Ogromną rolę odgrywają tu potrzeby mechaniczne. Łatwo rysujemy koło, które razem z walcem jest związane z ruchem obrotowym. Prostokąt spotykamy w wytworach ręki ludzkiej na każdym kroku, jak również związane z nim bryły. Stąd opis, nazywanie, rysowanie i modelowanie tych prostych brył ma znaczenie w początkach kursu propedeutycznego, nie może jednakże stanowić wszystkiego, jak to gotowi są sądzić metodycy niemieccy i wogóle bardzo wielu ludzi zajmujących się nauczaniem początków geometrji.

Opis bryły, który w szerszym stopniu położony jest w podstawie wskazań metodycznych przy nauce geometrji np. w podręczniku Dicksteina —„Geometrja w zadaniach", nie powinien polegać na liczeniu krawędzi, wierzchołków i t. p., oraz charakterystyce elementów powierzchni, lecz organicznie złączony z jej wytwarzaniem. Modelowanie oddać tu winno usługi duże. Obok niego należy jednakże używać innych sposobów. Klejenie z papieru nie nadaje się na tym stopniu, jako czynność zbyt jeszcze skomplikowana. Oczywiście, można nauczyć dziecko, jak się skleja, dajmy na to, sześcian, byłoby to jednakże za pośpieszne posunięcie na naszej drodze. Rozwijanie powierzchni bryły na płaszczyźnie jest jeszcze dla dzieci tego wieku rzeczą mało dostępną. Wygodniejszem jest używanie patyczków i gotowanego grochu lub gliny. Bryła w ten sposób wytwarzana zbliża się z jednej strony do szkicu rysunkowego, a z drugiej do idealnej formy geometrycznej. Bryły, które mogą na tym stopniu podlegać opisowi, są następujące: prostopadłościan, graniastosłup i ostrosłup. Różne kombinacje tych brył w postaci prostszej: domków, wieżyczek i t. p., mogą być również stosowane.

Tworzenie na tle pracy ręcznej brył geometrycznych będzie powodem wprowadzenia do myśli ucznia pierwszych zaczątków myślenia funkcyjnego. Uczeń przez praktykę dostrzeże, jak się będzie zmieniał kształt w zależności od jego elementów, zmuszony będzie nieraz dobierać odpowiednie elementy w celu ustosunkowania ich z innemi oraz osiągnięcia określonego celu. Rozwijanie myślenia funkcyjnego było nieraz pustym postulatem. W myśli człowieka zajmującego się zagadnieniami dydaktyki matematycznej było ono odruchowo związane z t. zw. przedstawieniami graficznemi. Każda myśl nowa musi sobie wyżłobić koryto zastosowania. Myśl o rozwijaniu myślenia funkcyjnego ma w sobie o wiele więcej szerokości i głębi, niż posiada dziś popularności. Może ona przejść jako jedna z nici przewodnich przez cały ciąg kursu propedeutycznego. Braki zastosowania jej albo nikłość wogóle tego zastosowania w nauczaniu elementów geometrji polegały głównie na charakterze tych elementów, gdzie każde twierdzenie było jakby formą krystaliczną, nie poddającą się zmiękczeniu. Postawienie geometrji na szerszym gruncie doświadczalnym w kursie propedeutycznym oraz związanie jej z innemi przedmiotami nauczania może i powinno się stać areną, na której rozwijanie myślenia funkcyjnego w geometrji będzie czynnikiem realnym o bardzo szerokiem i płodnem podłożu. Geometrja do tego więcej się nadaje ze względu na swoją większą konkretność, niż algebra, jakkolwiek funkcje ze względu na swoją historję zjawiły się pierwotnie w świecie liczb. U Euklidesa już (przypomnę dzieło zagubione p. t. δεδόμενα), u Apolonjusza i Pappusa, nie mówiąc już o Archimedesie lub Heronie z Aleksandrji, pojęcie zależności funkcjonalnej rozwijane było głównie na tle geometrji, nie tylko dlatego, że Grecy nie posiadali środków ekspresji właściwych dzisiejszej analizie, że posługiwali się, jak mówi Zeuthen, t. zw. algebrą geometryczną, lecz i z tej ważnej przyczyny, że geometrja jest właściwszym terenem do rozwijania myślenia funkcyjnego w pierwszych fazach rozwoju matematycznego, niż analiza. Myślenie funkcyjne nietylko występuje na tle mierzenia i wogóle zastosowania liczby, ma ono znaczenie ogromne w świecie geometrji rzutowej, gdzie nawet jedno z dzieł klasycznych zatytułowane jest jako rozpatrywanie zależności kształtów geometrycznych od siebie (patrz Steiner *), Gesammelte Werke, T. I, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander). Zależność kształtów od siebie, od ich wzajemnego położenia wyraźnie występuje też w rysunku, gdzie uczeń spostrzega zmiany w przedmiocie rysowanym zależnie od miejsca, z którego nań patrzymy, gdzie zjawiają się różne skrócenia i t. p. Słusznem jest i historycznie oraz psychologicznie uzasadnionem zdanie H. Timerdinga: „Przedmiotem teoretycznej geometrji nie jest w żadnym razie rysunek, lecz abstrakcja na tle rysunku powstała" (Die Erziehung der Anschauung, 1912, str. 112). Dziecko zadowala się takim rysunkiem, który nie zadowoli starszego. Różnica polega na tem, że pomiędzy wrażeniem odbieranem z danego odwzorowania formy a poczuciem

---

*) Jedna ze znakomitych prac Steinera przełożona jest na język polski p. t.: Konstrukcje geometryczne wykonane zapomocą linji prostej i stałego koła. Warszawa, 1915. Bibljoteka Wektora.

zarówno jej prawdziwości i piękna zawarta jest suma pojęciowo ujętych w mniej lub więcej jasny sposób doświadczeń. W tych doświadczeniach jedną z bardzo ważnych roli odgrywa wzajemne ustosunkowanie kształtów od siebie, poczucie miary i proporcji, jak mówią artyści. To poczucie kształci się nie tylko przez obserwację, lecz w bardzo wielkiej dozie przez praktyczne zajęcia, związane z wytwarzaniem formy. Oko dziecka i jego ręka przyzwyczajają się do oceny nie tylko odcieni wielkościowych, lecz i do innych subtelniejszych przejawów wzajemnej zależności kształtów od siebie. Znane są fakty z praktyki życia, jak wielką rolę odgrywa to przy różnego rodzaju zajęciach rzemieślniczych, budownictwie i t. p. Dla nauczania geometrji jest to rzecz godna pilnej uwagi, jeżeli chcemy uczyć tej umiejętności, nietylko dawać o niej pojęcia.

Obok powyżej zaznaczonych kwestyj, należących do pierwszych dwóch lat nauczania, można teraz podkreślić jeszcze jedną: mierzenie. Będzie to operowanie temi miarami, o których mówiliśmy w części pierwszej. Przez mierzenie geometrja wstępuje w ściślejszy związek z rachunkiem. Nie można jednakże wprowadzać wszystkich rodzajów zwykłego, w praktyce używanego mierzenia. Główną treścią musi być mierzenie odcinków oraz proste przypadki mierzenia objętości i wagi, jak również czasu.

Mierzenie długości winno znaleźć zastosowanie szersze. Nietylko przedmioty najbliższego otoczenia powinny podlegać mierzeniu. Musi być ono przeniesione na podwórko szkolne, a nawet w pola i łąki. Przy tej sposobności uczniów należy zapoznać ze sposobem wyznaczania na powierzchni ziemi linji prostej przez zwykłe używanie do tego trzech tyczek z chorągiewkami. Zadania: zmierzyć długość pola obsianego owsem, zmierzyć szerokość łąki i t. p., winny być na porządku dziennym. Przeniesienie pomiarów na szerszy teren należy uważać za środek bardzo potrzebny, zarówno ze względu na tworzenie się pojęć geometrycznych, jak związek z zastosowaniem geometrji w innych naukach, np. geografji.

Uczeń przekona się, że każde mierzenie jest przybliżonem. Przytem powinniśmy się starać już od początku zwracać uwagę na ten fakt przybliżenia. Powyżej nadmieniliśmy, że matematyka przybliżona jest w ścisłym związku z precyzyjną.

Jedna drugą wspiera i jedna bez drugiej istnieć, jako żywa, w badaniu ludzkiem czynna umiejętność, nie może. Zastanowienie się nad tą sprawą jest bardzo ważne dla nauczania. Niewątpliwie na tle dostrzeżonej konieczności przybliżenia tworzyły się pojęcia geometryczne. Przybliżenie jest rzeczą bardzo czułą i zależy od danego indywidualnego przypadku oraz stosowanych przy mierzeniu narzędzi. Nikt nie będzie mierzył odcinka narysowanego na papierze łańcuchem mierniczym, jak również długości danych, dajmy na to, w polu przy pomocy linijki ze skalą. Są to rzeczy rzucające się w oczy i bardzo proste. Z drugiej strony, jeżeli popełnimy przy mierzeniu powyższego odcinka błąd o jeden milimetr, jest on już dostrzegalnym wtedy, gdy podobny błąd na powierzchni pola jest znikomym. Fakty te mogą być dostępne dzieciom i o nich należy pouczać. Pouczanie będzie tem jaśniejsze, tem większy wpływ wywrze, im więcej będzie miało charakter praktyczny, im więcej nauczyciel będzie się starał o dobór zajęć i odpowiednich zagadnień.

Uświadomienie sobie konieczności przybliżeń i ważnego faktu przystosowania tych przybliżeń do natury zagadnienia prowadzi drogą prostą do pojęcia elementów geometrycznych: punkt, linja, powierzchnia. Definicje tych rzeczy nie są możliwe zwykłą drogą, w każdym razie dzisiaj nawet ścisłe pojęciowe odróżnianie linji od powierzchni jest rzeczą nieznaną. Nowe fakty, płynące z płodnego zastosowania t. zw. teorji mnogości do podstawowych pojęć geometrycznych, wykryły nam całą „nieścisłość” tych danych intuicyjnych, jaka jest zawarta w naszych pojęciach o elementach geometrycznych. Wskażę tu na pracę matematyków polskich, jak: Janiszewski i Mazurkiewicz. Koncepcje elementów geometrycznych powstały drogą twórczej konstrukcji myślowej z pierwotnych faktów spostrzegania i zastosowania wyobrażeń przestrzennych do praktycznych zagadnień życia. Teorja ścisła wprowadza je drogą aksjomatyczną przez opis podstawowych własności elementów, które wystarczają do budowy danego systemu geometrycznego, nic jednakże nie przesądzając o ich intuicyjnej treści, jakkolwiek niewątpliwem jest, że intuicja była i jest przewodnikiem w tej dziedzinie i że wspomniane własności podpowiedziane zostały przez intuicyjne właściwości elementów geometrycznych euklidesowych. Nawet w najwięcej abstrakcyjnej swej formie geometrja dziś jeszcze wygląda jako prawa córa intuicji. Czy powstanie kiedy system pewników, któryby składał się z orzeczeń nie zawierających opisu własności euklidesowych elementów, jest rzeczą trudną do przesądzenia, jakkolwiek wydawać się może zupełnie możliwą.

Skoro przy różnych zagadnieniach musimy brać na uwagę różne „grubości" realnych linij, różne wielkości punktu, różną grubość powierzchni, powstaje i powstać musi myśl abstrahowania od tych własności. Myśl ta wywołana jest potrzebą ogólnych twierdzeń. Widzimy tu ten sam fakt, co w uogólnieniu pojęcia liczby, co w przyjęciu symbolu literowego zamiast oddzielnych liczb. Jest w myśli ludzkiej niezmierzona dążność do absolutnego, do sądów bezwzględnych, do tego, co nie przemija, co jest „τὸ ἀεὶ ὄν". Dzięki tej tendencji, dużo grzechów poznawczych popełnił człowiek, budował dowolne systemy myśli, ale jednocześnie przenosił się w sfery wyższe, jednocześnie ulatywał duchem ku Dobru. Bo w tym prostym fakcie tkwi nietylko potrzeba praktyczna, jest w nim, i to przedewszystkiem, dobro moralne; niema moralności, gdzie niema absolutu. Stąd nauczyciel, który świadomie i celowo kieruje pracą naturalnej twórczości dziecka, który wywołuje konstrukcje myśli na tle danych doświadczeniu pod kontrolą praktyki i jej potrzeb, jest nie tylko nauczycielem geometrji, ale i wychowawcą.

Rzecz jasna, że w pierwszych dwóch latach nie przejdziemy odrazu do pojęć owych elementów, nie będziemy mówili o geometrycznych punktach, linjach i powierzchniach. Musimy wiedzieć, że to jest niemożliwe, bo niepotrzebne, musimy czuć, że wtedy tylko zasługujemy na miano nauczycieli, gdy potrafimy razem z dzieckiem pracować i iść w kierunku i tempie naturalnego rozwoju myśli. Musimy też jednakże uświadamiać sobie, że kładziemy fundamenty pod przyszłą budowę.

Rozszerzenie przestrzenne terenu zajęć geometrycznych jest niezbędnym, kardynalnym warunkiem nauczania geometrji. Bez tego jest ono ślepe.

Obok mierzenia odcinków wspomnieliśmy o mierzeniu objętości i wagi. Chodzi tu o zwyczajne pomiary zawartości naczyń, ciał sproszkowanych (jak piasek np.) i t. p. oraz o zapoznanie się elementarne z wagą, jako jednym z przyrządów, który w nauczaniu propedeutycznem geometrji, obok zegara, winien odegrać ogromną rolę, jak o tem będziemy mówili później. Przy mierzeniu objętości np. zwykłą kwartą należy u uczniów wzbudzić pojęcie o tem, że kształt przedmiotu w danym przypadku roli nie odgrywa. Możemy np. usypać z piasku kopiec stożkowy, możemy też wsypać piasek do beczki, a liczba kwart się nie zmienia. Przy takich operacjach mamy do czynienia z jednym z najbardziej wybitnych faktów metrycznej geometrji. Obserwowanie takiego faktu, jaki jest zilustrowany w budowie klepsydry, nastręcza cały szereg zagadnień arytmetyczno-geometrycznych, a konstrukcja przez uczniów odpowiednich klepsydr jest doskonałą nauką liczenia się z czasem. W pierwszych dwóch latach nauczania może to jednakże nasunąć pewne trudności (nie sprawdziłem tego doświadczalnie!) i dlatego rozważanie spraw związanych z klepsydrą odłożone być może na później.

Materjał powyżej przedstawiony jest obfity, zawiera się w nim nie tylko bogata treść, lecz i możliwość pewnego stopniowania. To stopniowanie narzuca się samo przez się według prostej, utartej zasady: od prostego do więcej złożonego. Momenty trudniejsze omówiliśmy powyżej.

Ważniejszem jest inne zapytanie. Czy należy wyznaczyć w programie specjalne godziny do zajęć z propedeutyki geometrji? Odpowiedź na to pytanie zależy w znacznym stopniu od pojęcia o budowie rozkładu zajęć w szkole elementarnej. Nie można uważać stałego, określonego planu na tym poziomie za rzecz tak odpowiednią, jak w szkole średniej. Nawet tutaj dzisiejszy plan szkolny ze swoją pstrokacizną zajęć nasuwa szereg uwag krytycznych. W szkole elementarnej produkcyjność nauki daleko więcej zależy od żywego zainteresowania uczniów, niż w szkole średniej. Stąd stałość planu nie może być tak szeroko pojęta, jak w tej ostatniej. Każdą rzecz nową nauczyciel zaczyna w chwili najodpowiedniejszej, t. j. wtedy, gdy narzucające się lub celowo stworzone warunki najlepiej danej rzeczy sprzyjają. Nie tu miejsce na rozważanie teorji planu wogóle i w szkole elementarnej specjalnie. Nauczyciel szkoły elementarnej, to jedno wypada powiedzieć, musi mieć w każdym dniu „godziny wolne", t. j. takie, gdzie wybór zajęcia od niego zależy. Te godziny wolne muszą być w sposób odpowiedni wyzyskiwane, a wszelkie zajęcia muszą być ruchome i przytem przepisy odnośne winny wskazywać, które z nich muszą się powtarzać codzień, na które należy zwracać uwagę większą. W pierwszych początkach nauczania nie jest wskazanem udzielanie godzin na geometrję, nauczyciel zaś winien zacząć ten przedmiot, dajmy na to, nie później, niż w końcu 1-go półrocza i później kontynuować, udzielając mu t. zw. wolnych godzin nie mniej, niż 2 godziny tygodniowo.

Jeżeli dziś spojrzymy na przygotowanie naszych nauczycieli elementarnych, z łatwością spostrzeżemy ogromne braki, które narazie uniemożliwiają należyte prowadzenie tak subtelnego przedmiotu. W seminarjach nauczycielskich o tej rzeczy również głucho, a plany szkoły elementarnej zdradzają zbyt formalistyczny utylitaryzm. Pomimo to, w tym kierunku dążyć należy, a dzisiejsi nasi więcej świadomi swych zadań zawodowych nauczyciele winni rozpocząć systematyczniejszą pracę nad sobą. Praca ta wyda owoce, wymaga jednakże nie tylko dobrej woli, lecz i rozumnej pomocy ze strony sfer miarodajnych. Budowa szkoły elementarnej jest naczelnem odzwierciadleniem kultury społeczeństwa, wymaga bardzo solidnej znajomości rzeczy i dokładnego przemyślenia zagadnień wysuwanych przez naturę samego jej zadania. Jak subtelne są te zagadnienia, widocznem jest chociażby z krótkiego zarysu powyższego, w odniesieniu do jednego tylko przedmiotu.

ROZDZIAŁ V.

Obecnie zajmiemy się drugim cyklem nauczania, obejmującym w dzisiejszej szkole średniej klasy: wstępną i pierwszą. Pierwsze pytanie, jakie musimy sobie postawić, dotyczy różnic zasadniczych pomiędzy nowym cyklem a poprzednim.

Zasadniczą różnicą jest większe wyodrębnienie propedeutyki geometrycznej, jako specjalnego przedmiotu nauczania. W cyklu poprzednim, jak to było zaznaczone powyżej, nauczanie geometrji łączyło się ściśle z modelowaniem, rysunkiem i pracą ręczną, przyczem chodziło nam nie tyle o specjalne zagadnienia geometryczne, ile o ogólne kształcenie i porządkowanie wyobrażeń przestrzennych u dzieci. Obecnie łączność ta nie będzie zerwana, wysuną się natomiast na czoło zagadnienia o więcej zdecydowanym charakterze geometrycznym.

Program zasadniczy tego cyklu jest następujący: kąt i jego mierzenie, przystawanie trójkątów, proste równoległe, pierwsze pojęcie o kole, mierzenie powierzchni i objętości, dokończenie analizy brył: prostopadłościan, graniastosłup, ostrosłup.

Wymienione tu elementy tego programu wysuwają zaraz w myśli czytelnika przypomnienie kursu geometrji w klasie 3-ej lub 4-ej. Same te elementy nie mówią niczego tak samo, jak nie może niczego powiedzieć żaden program. Dopóki jasno nie zrozumiemy, że program sam i metoda jego wykonania muszą być ze sobą w ścisłej łączności, że dane programu są tylko suchemi symbolami, dotąd ulepszenie nauczania nie stanie się faktem. Główną rzeczą jest samo wykonanie.

To ostatnie zaczynać się winno od powtórnego opisu brył powyżej wspomnianych oraz zatrzymaniu uwagi w pierwszej linji na prostopadłościanie. Pierwszem zadaniem jest przeprowadzenie nie tylko opisu, lecz pewnej konkretnej analizy prostopadłościanu. Do tego posługiwać się można zarówno linijką z podziałkami jak i metodą konturów. Metoda konturów polega na oprowadzeniu kształtu danego kredą na tablicy ew. ołówkiem na papierze. Przykładamy prostopadłościan do tablicy, oprowadzamy tę ścianę, która do niej przylega, i otrzymujemy na tablicy jej kontur *). To samo, odpowiednio numerując, możemy zrobić z innemi ścianami prostopadłościanu. Zapomocą przykładania odpowiedniego porównywamy różne ściany prostopadłościanu i wyprowadzamy odpowiednie wnioski. Wnioski te dotyczą równości różnych ścian i równości krawędzi. Jako rezultat takiego rozważania występuje sklejanie prostopadłościanu z szeregu odpowiednio wyciętych tekturek. To sklejanie nie jest rzeczą łatwą i nasuwa konieczność pojęcia o kącie, kątach równych i kącie prostym. Nauczyciel może podać sposób wytwarzania prostokąta, gdzie pomocnem jest zwykłe składanie papieru, przyczem kąt prosty wytwarza się przez podwójne zagięcie kawałka papieru. Oczywiście, do pomocy musi być używana linijka z podziałkami. Pojęcia kwadratu, sześcianu, własności boków prostokąta wystąpią przytem wyraźnie i będą poznane praktycznie dzięki trudnościom związanym z samem wykonaniem.

Pojęcie kąta, które już mogło się zrodzić przy robieniu modelów brył, w czasie pierwszego cyklu nauczania, tu powinno być pogłębione i wprowadzone. Zwiążemy to pojęcie bezpośrednio z modelowaniem ostrosłupa. Mając dany ostrosłup, np. czworokątny, badamy go zapomocą metody konturów. Jeżeli ostrosłup jest foremny (wskazanem jest od takiego zaczynać), to otrzymamy kwadrat i 4 trójkąty równoramienne. Trójkąt równoramienny odegrał wielką rolę w historji geometrji, a w nauczaniu jest bardzo zaniedbany. Przekonamy się mierzeniem i przykładaniem krawędzi ostrosłupa, że dwa boki trójkąta są równe. Teraz powstaje zadanie wymodelowania ostrosłupa z papieru.

Zadanie to znowu wymaga prób i namysłu. Tak samo, jak przy prostokącie przy pomocy nauczyciela uczniowie nau-

*) Kreda musi być zaostrzona i oprowadzanie wykonane starannie.

czyli się wycinania prostokąta z tektury za pomocą papieru, tak też, aby zmodelować trójkąt równoramienny, potrzebna jest pomoc nauczyciela. Najpierw znaną metodą należy ułożyć z papieru kąt prosty, a potem, mówiąc językiem zwykłej geometrji na jednym z ramion jego odciąć wysokość. Składanie papieru prowadzi właściwie do dwóch kątów prostych przyległych. Stąd oczywistem jest, jak utworzymy trójkąt równoramienny. Jest to sui generis wynalazek, do którego stopniowo należy uczniów prowadzić, opierając się na poczuciu symetrji, które tutaj poza rysunkiem pierwszy raz znajduje swe geometryczne zastosowanie. Po tem odkryciu sklejenie ostrosłupa nie przedstawia żadnych trudności. Rzecz jasna, że można nie ograniczać się na jednym ostrosłupie tak samo, jak na jednym prostopadłościanie. Muszą to być jednakże ostrosłupy narazie czworokątne, ponieważ konstrukcja ostrosłupa foremnego trójkątnego nasuwa jeszcze trudności.

Aby te trudności zwalczyć, należy się zabrać do studjowania trójkąta równoramiennego. Robimy model z trzech pałeczek. Następnie, nie zmieniając dwóch równych pałeczek, sczepionych ze sobą za pomocą odpowiednio zagiętego druciku i przytem tak, że umożliwiony jest ruch tych pałeczek, zwracamy uwagę, że można utworzyć bardzo wiele różnych trójkątów równoramiennych zależnie od trzeciej pałeczki. Jeżeli ta trzecia jest większa, należy, rozchylenie pałeczek poprzednich wziąć większe. Wielkość tego rozchylenia będziemy nazywali kątem. Mamy tu pierwszy przykład zależności funkcjonalnej, która trygonometrycznie wyraża się wzorem:

$$a = b \quad \mathrm{Sin}\, \frac{\alpha}{2},$$

gdzie a — trzeci bok, α — przeciwległy mu kąt, a b jeden z dwóch pozostałych równych boków. Pojęcie kąta należy odrazu ujmować funkcjonalnie w związku z pojęciem obrotu. Wprowadzając pewną wielkość, należy nauczyć zaraz mierzenia jej. Bez tego jest on czemś oderwanem i zależność funkcjonalna nie uwypukla się należycie. Jakże mierzyć kąt? Umawiamy się co do długości pałeczek reprezentujących równe boki trójkąta równoramiennego. Niech długość ta będzie równa jednemu decymetrowi. W takim razie za miarę kąta przyjmiemy trzeci bok trójkąta równoramiennego. Mówimy o kącie któremu odpowiada długość równa 8 cm., 12 cm., 15 cm. Oczywiście, długość 20 cm. narazie wyłączamy. Pojęcie kąta łączy się bezpośrednio również z pojęciem proporcjonalności. Jeżeli weźmiemy dwa patyczki po 2 cm., to bezpośredniem mierzeniem możemy się przekonać, że temu samemu kątowi (równość przez nakładanie bezpośrednie) odpowiadają nierówne odcinki: jeden jest dwa razy większy od drugiego. To samo można zrobić z patyczkami o długości równej 3 cm. i t. d. Czyż te rzeczy są trudne? Czy wstępniak nie potrafi ich zrozumieć? Każdy, kto spróbuje konsekwentnie to przeprowadzić, przekona się, że rzeczy te nie tylko są zrozumiałe, ale i interesują dzieci. Lecz idźmy dalej:

Zdobyliśmy pewną wiedzę, trzeba teraz ją pogłębić. Zwyczajne szpilki i trójkąt z patyczków ułatwią nam wycinanie z tekturek trójkątów równoramiennych. Możemy teraz poznać bliżej te trójkąty. Metodą konturów obrysowujemy model trójkąta równoramiennego na tablicy i przez odwrócenie modelu oraz powtórne przykładanie przekonywamy się o równości kątów przeciwległych do boków równych. Mając trzy równe pałeczki po 1 dm. długości, tworzymy trójkąt równoboczny, w którym wszystkie boki są równe i przekonywamy się metodą konturów, że w tym trójkącie wszystkie kąty są też równe. Tu znowu nastręcza się pojęcie proporcjonalności. Robimy trójkąt równoboczny z trzech pałeczek po 2 dm. długości i przekonywamy się, że on nie tylko ma wszystkie kąty równe, lecz, że kąty te są takie same, jak w poprzednim trójkącie, o czem przekonywamy się przez pomiar polegający na bezpośredniem nakładaniu kątów jednego trójkąta na drugi.

Teraz możemy modelować ostrosłup foremny o trójkątnej podstawie. To modelowanie poniekąd kończy pierwszy cykl nauki geometrji we wstępnej klasie.

Należy potem z wiedzą zdobytą wyruszyć na szerszą przestrzeń, aby tem zbogacić ją jeszcze więcej.

Uczniowie nauczyli się już prowadzić na powierzchni ziemi linję prostą. Trzeba teraz nauczyć ich jak znajdywać miejsce spotkania się dwóch linij prostych. Rzecz jasna, że to się robi zapomocą tych samych środków, o których było powiedziane w poprzednim rozdziale. Do znalezienia spotkania się dwóch prostych potrzebni są jednocześnie trzej malcy: dwóch obserwatorów i jeden z tyczką, którą ustawia zgodnie ze wskazówkami poprzednich.

To proste zadanie jest uzupełnieniem poprzedniego. Pojęcie o rozciągającej się dowolnie daleko linji prostej nie można osiągnąć na kawałku papieru lub tablicy: do tego potrzeba większego przestworza. Różne rzeczy w geometrji w ten sposób zdobywamy pierwotnie różnemi drogami. Tak samo jak własności poznane przy badaniu figur w klasie przeniesiemy w zastosowaniu na pole, tak też to, co zdobędziemy w polu w odpowiedniej formie odwzorujemy na kawałku papieru lub tablicy. Takie postępowanie jest jedynie wskazanem. Rozmaitość metod podtrzymuje uwagę, a wiązanie ich pogłębia wiedzę, nadaje jędrność i żywotność pojęciom.

Teraz nauczyciel winien dać uczniom szereg zadań praktycznych. Jednem z takich zadań jest np. odmierzenie ogródka lub placyku do gry dajmy na to w krokieta, które posiada wiele właściwości wymagających zastosowania jaśniejszych pojęć geometrycznych. W jaki sposób na powierzchni ziemi odmierzyć prostokąt? Trzeba, oczywiście, poprowadzić linje proste jako boki prostokąta. Do tego potrzebny jest odpowiedni przyrząd, który polega na odpowiedniem przeniesieniu operacji wykonanej przy wycinaniu prostokąta na powierzchnię ziemi. Przyrząd ten jest stolikiem, na którym przylepiono papier w odpowiedni sposób przegięty w celu wytwarzania dwóch prostopadłych prostych. Kierunki tych prostych wyznaczone są na stoliku zapomocą dużych szpilek weń wetkniętych. Przyrząd ten jest właściwie tym samym, który u geometrów rzymskich nazywał się słowem „groma" i składał się z dwóch równych deseczek, przymocowanych do siebie pod kątem prostym. Na każdej z tych deseczek było po dwa ostrza do wyznaczenia kierunku odpowiedniej prostej. Dalsza operacja polegać będzie na poprowadzeniu na powierzchni ziemi dwóch prostych wyznaczonych już co do kierunku przez proste na stoliku. Wykonanie tego, jak również odmierzenie odpowiednich długości, nie jest rzeczą trudną.

Występuje obecnie jeden z najważniejszych momentów z przygotowania do pojęcia planu i rysowania tegoż. Jednocześnie z tem potrzebne jest prowadzenie na powierzchni ziemi prostych nachylonych do siebie pod danym kątem.

Zagadnienie to rozwiązujemy bardzo prosto. Potrzebne są do tego 3 zwyczajne kołki i sznurek. Mając określony kąt, któremu przy długości ramion 1 dm. odpowiada odcinek dajmy na to 8 cm., wbijamy w ziemię w wierzchołku pożądanego kąta jeden kołek. Drugi skierowujemy po linji tej, która ma być ramieniem tworzonego kąta, odmierzając odległość jego od pierwszego równą 1 m. Następnie przywiązujemy do tego drugiego sznurek, przerzucamy go przez pierwszy kołek, odmierzamy na nim długość 2 m. 80 cm. i ustawiamy trzeci tak, by odległości jego od pierwszego wynosiły 1 ml., a od drugiego 80 cm. Manipulacja ta nie jest zbyt długa ani zbyt trudna. Można ją zastosować i do kąta prostego. Nie byłoby nawet nic dziwnego, gdybyśmy odrazu wprowadzili trójkąt egipski, który taką rolę odegrał w historji budownictwa i geometrji. Oczywiście, należałoby to zrobić dogmatycznie i tylko sprawdzać na innej drodze, że kąt jest prosty, przyczem powyższa metoda ze sznurkiem i przy trójkącie egipskim znalazłaby swe zastosowanie. Rzecz jasna, że prowadzenie prostych pod danym kątem na powierzchni ziemi może być połączone z wyznaczaniem takich samych kątów na powierzchni papieru.

Nie będzie teraz trudnem przejść do rysowania planu klasy i innych prostokątnych figur na powierzchni ziemi. Zwykle pojęcie planu w krótkości poprzedza naukę geografji w klasie pierwszej. Jeżeli uczniowie rzeczy te w najprostszej formie poznają jeszcze we wstępnej, jeżeli nauczyciel geometrji w ten sposób pomoże nauczycielowi geografji, nauczanie wogóle tylko wygra na tem.

Dalszym krokiem w nauczaniu jest zapoznanie się z trójkątem i nawet wielokątem wogóle. Już z trójkąta równoramiennego mogli się uczniowie przekonać, że suma dwóch równych boków jest zawsze mniejsza od trzeciego. W celu wprowadzenia trójkąta ogólnego nie trzeba już odwoływać się do bryły, wystarczy robienie z trzech pałeczek różnych trójkątów. Tu odkrywa się całe szerokie pole do badania. Badanie to dotyczy zależności między bokami trójkąta, między bokami a kątami oraz przystawania trójkątów. Wszystko to się wykonywa na trójkątach tekturowych lub sporządzonych z pałeczek.

Mierzeniem boków trójkąta przekonywają się dzieci, że każdy bok jest mniejszy od sumy dwóch pozostałych, a większy od ich różnicy, a mierzeniem kątów dowiadują się o fakcie zależności między bokami a kątami trójkąta: zawsze naprzeciwko większego boku leży większy kąt i odwrotnie.

Zjawisko przystawania trójkątów, gdy są równe boki rzuca się bezpośrednio w oczy z samego procesu poznawania praw, a inne przypadki przystawania wymagają tylko troszkę więcej skomplikowanych doświadczeń. Każde takie doświadczenie musi być, jak to łatwo zrozumieć, poprzedzone rozmową z uczniami, w której nauczyciel umiejętnie winien skierować myśl na pewne tory, wykorzystywać zdobyte doświadczenia.

Jeżeli, np., chodzi o przekonanie się co do istnienia faktu przystawania, gdy dane są dwa boki i kąt pomiędzy niemi, to rzecz ta nie budzi trudności żadnych i sprawdza się bezpośrednio mierzeniem odległości końców patyczków, reprezentujących dwa dane boki. Należy ją prowadzić w ten sposób, że mamy dany gotowy trójkąt, mierzymy dwa jego boki, bierzemy dwa patyczki o tej samej długości, łączymy ze sobą i nachylamy je pod kątem danym; pomiar odległości końców patyczków wykaże, że trójkąt będzie w razie uzupełnienia ten sam, co uprzednio przygotowany. Gdy dany jest bok i dwa kąty, przekonywamy się, że dwa patyczki nachylone do trzeciego o danej długości przetną się zawsze tak, iż długości odcinków będą równe długościom boków danego trójkąta.

Od trójkąta możemy przejść do sporządzania różnego rodzaju wypukłych wielokątów, a jednocześnie uzupełnić rysowanie planu przez wykreślenie wielokąta w planie odpowiadającego wielokątowi na powierzchni ziemi. Nie powinny to być złożone figury o wielkiej liczbie boków, wystarczy 4 lub 5, gdyż chodzi głównie o samo pojęcie planu. Rzecz jasna, że jednocześnie możemy rysować określone trójkąty i wielokąty na papierze, wszelkie jednakże badania prowadzimy jeszcze na figurach materjalnych, sporządzonych z pałeczek, tektury i t. p. Cel takiego postępowania jest widoczny: stopniowo przygotowujemy przejście od przedmiotów więcej konkretnych do abstrakcyjnych. Jeżeli tego nie uwzględnimy, samo badanie, samo myślenie nad kształtem nie będzie miało naturalnej podstawy doświadczalnej, a myśl ucznia zostanie przedwcześnie skrępowana niezrozumiałem dla niego ograniczeniem jego spostrzegawczości i zaufania do danych zmysłowych.

Wykreślanie odbywa się bez cyrkla. Narzędziami pomocniczemi są: linjał, szpilki, wycięty z tektury lub drzewa kąt prosty oraz powyżej zaznaczony przyrząd składający się z dwóch równych pałeczek o długości 1 dm., złączonych ze sobą. Grube te przyrządy wymagają oczywiście sporo zachodu, który pomimo to opłaci się sowicie. Dzięki niemu pewne własności geometryczne wrażać się będą trwalej w umysł dzieci, a przyrządy odpowiedniejsze staną się czemś istotnie posiadającem realną wartość.

Powyżej przedstawiony „program" zajęć w klasie wstępnej nie jest obfity, zająć może jednakże przy odpowiedniem nauczaniu sporo czasu i wymaga ze strony nauczyciela sporego namysłu i dużej cierpliwości. Żadnego momentu w nim opuścić nie można, jeżeli chcemy, aby metoda wskazana dała odpowiednie rezultaty. Zrozumiałą jest rzeczą, że nauczyciel niejeden szczegół może dodać od siebie, że wymaganą jest właśnie taka pomysłowość płynąca poniekąd z przystosowania się do warunków.

Następnym ważnym momentem programu będzie wprowadzenie pojęcia linij równoległych. Wyjaśnienie tego pojęcia wymaga związania go: z jednej strony z ruchem postępowym, z drugiej z pojęciem kąta i prowadzeniem linij prostych na powierzchni ziemi.

Pierwsze wymaga wprowadzenia nowego przyrządu, używanego zwykle przy kreśleniu czyli t. zw. rajszyny. Przesuwanie rajszyny daje pojęcie o tworzeniu się linij, które spotkać się nie mogą. Zastosowujemy przytem natychmiast pojęcie prostokąta i przekonywamy się, zapomocą rajszyny, że przeciwległe boki jego są równoległe. Należy teraz z równoległością związać jakieś znane dotychczas pojęcie, które umożliwi bliższe wniknięcie w rzecz. Do tego posłuży nam trójkąt równoramienny. Jeżeli na bokach jego (równych) odłożymy od wierzchołka równe odcinki i połączymy ich końce, otrzymamy nowy odcinek równoległy do trzeciego boku trójkąta. Spostrzegamy przytem, że kąty t. zw. odpowiadające są równe. Kreślimy teraz przy danej prostej znanym sposobem kąty odpowiadające równe i natychmiast przekonywamy się zapomocą przesuwania rajszyny, że proste są równoległe. Stąd powstaje myśl kreślenia prostych równoległych, którą zaraz przenosimy na powierzchnię ziemi.

Na powierzchni ziemi należy nauczyć najpierw przedłużania danego odcinka prostej, co wykonywa się przy pomocy tych samych środków, jakie wskazane były powyżej.

Zadanie poprowadzenia dwóch prostych równoległych wykonywa się prosto przez znaną konstrukcję prostych tworzących kąt dany. Nie stosujemy do prowadzenia równoległych pojęcia odległości, jakkolwiek nic, zdawałoby się, nie stoi temu na przeszkodzie: Należałoby przytem dać pojęcie o odległości punktu od prostej. Pojęcie to związane jest z prowadzeniem prostopadłej, a tego właśnie chcielibyśmy uniknąć i nie posługiwać się zbyt wielką liczbą przyrządów oraz nie wprowadzać zbyt wielu pojęć, ciągle licząc się z zasadą: festina lente.

Nauczyciel winien wskazać na cały szereg przykładów w przyrodzie i otoczeniu, gdzie spotykamy proste równoległe, np. na promienie słoneczne, szyny kolejowe i t. p. Przy tej sposobności wyjaśnia się zagadnienie schodzenia się pozornego szyn kolejowych, zmniejszania przedmiotów przy oddalaniu się ich i t. p. Będzie to przygotowaniem do pojęcia perspektywy.

Można teraz wprowadzić do rysunku trójkąty używane przy kreśleniu i przy ich pomocy wykreślać figury potrzebne oraz linje równoległe, a jednocześnie zastosować pewne ułatwienie w wykreślaniu planów.

Przy stosowaniu linij równoległych uczniowie mogą dostrzec jeszcze jedną własność tych linij, dotyczącą kątów naprzemianległych. Takie samo spostrzeżenie mogli jeszcze wcześniej zrobić w odniesieniu do kątów wierzchołkiem przeciwległych. Stopniowe przyzwyczajanie się do rysowania planu w danej skali pozwala również stopniowo przenosić badanie figur z przedmiotów konkretnych na rysunek.

Jedną z pierwszych rzeczy, które tu dalej należy zbadać, jest zjawisko kątów przyległych. Obok rysunku należy używać jeszcze materjalnego modelu złożonego z dwóch złączonych ze sobą i dość swobodnie poruszających się patyczków. Nauczyciel zwraca uwagę na model podaje odpowiednie nazwy: kąty przyległe, kąty wierzchołkowe. Wskazuje na fakt, że przy obrocie jednego z patyczków jeden z kątów rośnie—drugi maleje. Naturalnem wydaje się nastąpienie takiego momentu, gdy kąty przyległe będą równe. Przypominamy sobie tworzenie kąta prostego zapomocą przeginania papieru, wskazujemy na fakt równości kątów przyległych w tym przypadku. Z tego wyprowadzamy definicję: kąt prosty, to jeden z równych przyległych.

Następnie tworzymy pojęcie sumy kątów i ew. ich różnicy. Pojęcie to tworzy się za pośrednictwem bezpośredniego przykładania (ew. nakładania) kątów z tektury, zwykłego papieru lub jakkolwiek inaczej sporządzonych.

Obok modelu używamy jednocześnie rysunku. Rysujemy kąty przyległe, proste (przez oprowadzenie śladów zagięcia papieru), wierzchołkowe, linje równoległe. Dodawanie kątów na rysunku odwzorowujemy zapomocą metody konturów, oprowadzając kąty z tektury ołówkiem i t. p.

Własności dodawania kątów należy zbadać, a więc prawa przemienności i łączności, a poznany sposób dodawania natychmiast zastosować do badania trójkąta. Obcinamy wierzchołki danej pary kątów przyległych podanych na rysunku. Okazuje się, że suma tych kątów jest równa sumie kątów przyległych. Proste rozumowanie wykaże, że równa się ona sumie dwóch kątów prostych. Doszliśmy więc do faktu bardzo ważnego.

Wprowadzamy teraz odróżnienie: kąt ostry, prosty, rozwarty i zastosowujemy to natychmiast do trójkąta. Z tego zastosowania dzięki bardzo prostemu rozumowaniu przekonywamy się, że trójkąty dzielą się na ostrokątne, prostokątne i rozwartokątne, że nie może być w trójkącie więcej, niż jeden kąt prosty lub rozwarty.

Zamiast obcinania wszystkich wierzchołków trójkąta możemy obciąć tylko dwa i otrzymane kąty przyłożyć do trzeciego. Jeżeli obok modelu trójkąta z papieru mamy na rysunku jego odwzorowanie, możemy przyłożyć do odpowiedniego kąta na odwzorowaniu i przekonać się, że dostaniemy linję prostą i przytem równoległą do jednego z boków trójkąta. Sprawdzić to należy doświadczalnie.

Wprowadzenie pojęcia: trójkąt prostokątny pociąga za sobą nazwy utarte jego boków. Należy teraz zwrócić uwagę na otrzymywanie trójkąta prostokątnego z równoramiennego. Dla zilustrowania i przekonania o tem, dość trójkąt równoramienny wycięty z papieru zgiąć według osi symetrji. To samo otrzymamy, jeżeli wprowadzimy pojęcie przekątnej prostokąta. Poprowadzenie jednej przekątnej pociąga zaraz możliwość drugiej. Z rozważania obu przekątnych można dojść do wniosku, że się dzielą na pół. Przekonać się o tem można również na prostokącie wyciętym z papieru, na którym ołówkiem wyznaczymy przekątne i następnie jedną parę trójkątów równoramiennych nożyczkami usuniemy. Wtedy przez nakładanie wystąpi jasno, że trójkąty drugiej pary są sobie równe. Można tu też zastosować rozumowanie dotyczące kątów naprzemianległych i przystawania trójkątów, gdy dane są: bok i dwa kąty przyległe. Rozumowanie to pomimo całej swojej jasności nie udaje się dzieciom, jak uczy doświadczenie. W każdym razie rezygnować zeń nie można. Badanie prostokąta wiąże się z badaniem kwadratu. Tutaj możemy się nawet przekonać, że przekątne tworzą kąty proste. To ostatnie można robić przez obrót danego kwadratu z papieru dokoła szpilki wetkniętej w punkcie spotkania się jego przekątnych, przyczem metodą konturów na papierze mamy narysowany kontur danego kwadratu. Przy prostokącie też tę samą metodę stosować można, z tą różnicą, że przy kwadracie wystarczy obrót o 90^0 a przy prostokącie potrzeba 180^0.

Gdybyśmy teraz w wierzchołku prostokąta umocowali przez przekłucie ołówek, utworzyłoby się przy obrocie półkole, które oczywiście można uzupełnić do całego koła. W ten sposób wprowadzamy do naszych rozważań pierwszą linję krzywą, a jednocześnie z nią kreślący ją najprościej przyrząd— cyrkiel.

Wprowadzenie cyrkla upraszcza cały szereg poprzednio wykonanych operacyj i przenosi stanowczo grunt naszych rozważań na papier.

Jedno z zadań, które może być rozwiązane jeszcze w tym cyklu jest konstrukcja kąta równego danemu. Oczywistem jest dla każdego, że konstrukcja odnośna jest przygotowana przez poprzednie rozważania. To samo dotyczy innych podstawowych konstrukcyj, które jednakże lepiej jest odłożyć na później. Tem samem umiemy zbudować trójkąt równoramienny.

Wprowadzenie koła pozwoli nam dać wyjaśnienia dotyczące mierzenia kątów, a więc wprowadzić pojęcie stopnia. Pojęcie to nie nasuwa osobliwych trudności. Należy rzecz związać z zegarem, jako konkretnym przykładem okręgu podzielonego na 60 równych części. Nie będzie trudnem wykazać jak zapomocą obrotu koła tworzy się kula. Do tego można użyć maszyny, którą posługują się zwykle przy nauce fizyki, gdy chodzi czy to o wykazanie znanego prawa Newtona o barwach lub też zjawisk spłaszczenia i wogóle działania sił odśrodkowych. Czarny globus i wyznaczone na nim linje wielkich kół pozwolą dać niektóre tak ważne w nauce geografji pojęcie.

Opisany powyżej kurs geometrji nie byłby jeszcze zupełnym, gdybyśmy nie wspomnieli o mierzeniu powierzchni i objętości. Tę część geometrji oddawna po macoszemu traktują w klasie pierwszej. Powyżej, w części I-ej niniejszej książki wskazaliśmy, jak zdaniem naszem należałoby przedmiot powyższy traktować tam, gdzie propedeutyczny kurs geometrji jeszcze nie przeniknął. Obecnie nie będziemy przypominali szczegółów tam nadmienionych. Sprawa wobec przygotowania geometrycznego uczniów jest obecnie o wiele łatwiejsza. Uczniowie posiadają już wyrobione pojęcie o prostokącie i o wiele konkretniejsze o prostopadłościanie, mierzenie więc powierzchni prostokąta i objętości prostopadłościanu nie jest rzeczą tak trudną, jak bywa bez jasnych wyobrażeń o tych figurach. Wobec istnienia pewnych wiadomości geometrycznych można rozszerzyć zwykły kurs.

Natychmiast bez wielkiego trudu możemy obliczyć pole trójkąta prostokątnego i równoramiennego. To samo dotyczy powierzchni prostopadłościanu, graniastosłupa i ostrosłupa foremnego. Powierzchnie te można rozwinąć na płaszczyźnie, co nie będzie dla uczniów przedstawiało zbytnich trudności, i następnie obliczać kolejno elementy otrzymywanych figur skomplikowanych. Można też jako jedno z więcej zawiłych zadań obliczyć (oczywiście z grubem przybliżeniem) pole sześciokąta foremnego, którego konstrukcja, jak wiadomo, jest bardzo łatwa. Rzecz jasna, że wszystkie obliczenia odbywają się na zasadzie bezpośrednich pomiarów.

Otrzymane wiadomości należy zastosować przy obliczeniu powierzchni kawałka gruntu, odmierzonego placyka i t. p.

Obliczanie objętości brył więcej złożonych, niż prostopadłościan może być wykonywane zapomocą różnych doświadczalnych metod, nie wyłączając ważenia.

Do obliczenia potrzebne są modele szklane odnośnych brył, np. ostrosłup bez szklanej podstawy, to samo graniastosłup, a nawet stożek i walec. Obliczanie odbywa się zapomocą ważenia wody napełniającej daną bryłę, przyczem pomiar może być dokonany albo odrazu w gramach (z przybliżeniem) albo też po uprzedniem zważeniu cala sześciennego wody. Można też używać prostopadłościanu pomocniczego, do którego przelewamy wodę napełniającą daną bryłę i następnie obliczamy objętość. Pojęcie o stożku i walcu damy zapomocą obrotu przy pośrednictwie wspomnianej maszyny. Można też do podobnych obliczeń używać piasku (np. w klepsydrze).

Nauka geometrji o powyższym programie nasuwa cały szereg zadań o treści arytmetycznej. Zarówno przy obliczaniu kątów, jak długości odcinków, mierzeniu pól i objętości mamy bogaty materjał zastosowawczy. Przyczepienie rachunku i bliski związek z nauką arytmetyki tylko wzmocnić może należyte wiadomości geometryczne. Propedeutyczna nauka przyrody też winna być związaną z nauką geometrji. Taki związek da się ustalić w niejednym przypadku. Po wyszczególnieniu głównych elementów programu możemy się zająć teraz ogólniejszemi kwestjami dotyczącemi nauczania na tym poziomie.

Program powyższy przedstawia pewien cykl zakończony. Zawarte są w nim te elementy geometrji, które mają najbardziej praktyczną, życiową wartość, co odpowiadać musi najbardziej potrzebom czteroodziałowej szkoły elementarnej, która jeszcze przez długi czas będzie zajmowała najliczniej reprezentowane stanowisko śród szkolnictwa elementarnego. Zapewne ten lub inny szczegół może uzupełnić ten program, ta lub inna modyfikacja metodyczna poprawić go, ale zasadnicza linja zarówno treści jak sposobu nauczania zdaniem naszem utrzymać się musi i, jeżeli nie wszystko ze zrozumiałych powodów da się odrazu zrealizować, to w każdym razie przez dłuższy jeszcze czas mogą wskazania powyższe kierować nauczaniem.

Elementy metodyczne podkreślone w poprzednim rozdziale nie uległy w niniejszem jakiejś radykalnej zmianie. Jeżeli nie odwoływaliśmy się bezpośrednio do rysunku jako przedmiotu odrębnego, nie wypada z tego, by współdziałanie nie istniało. Rysunek w dalszym ciągu spełnia swą rolę pomocniczą w kształceniu dokładności obserwacji i wyobraźni przestrzennej. Tematami rysunkowemi nie tylko mogą być rzeczy z bezpośredniego otoczenia dzieci, lecz i modele zbliżające się do form przez geometrję uprawianych. To samo dotyczy kompozycji, która może posługiwać się i, jak praktyka dowodzi, tam, gdzie prowadzona jest propedeutyka geometrji, posługuje się motywami natury geometrycznej zarówno w ornamentyce, jak w innych działach twórczości artystycznej. Rysunek zawsze być musi w ścisłej z geometrją przyjaźni. On i geometrja, jak rodzeni bracia wyrośli z tego samego pnia, idą innemi drogami: pierwszy chce i przepuszcza wizję świata i rzeczy przez całość duszy ludzkiej, druga chce ująć zmienne, nieuchwytne kształty przedmiotów w formy rozumowo-jasne, krystaliczne, a każde z nich przedstawia pewien ideał po przerobieniu danych zmysłowego ujęcia.

Pojęcie przybliżenia kształci się dalej, co widocznem jest z samego sposobu rozwiązywania zagadnień powstających przed myślą ucznia i stopniowego wprowadzania coraz doskonalszych metod w postaci czy to większego udziału rozumowania, czy też więcej precyzyjnych przyrządów. Obok rozwijania myślenia funkcyjnego, które z taką siłą zostało podkreślone w dydaktyce matematycznej spółczesnej, kształcenie pojęcia przybliżenia jest jedną z podstawowych myśli tej dydaktyki. Nie zostało ono jeszcze dzisiaj konsekwentnie w nauczaniu przeprowadzone, ale wszystko przemawia za tem, że tak będzie, że stosunek matematyki przybliżeń i matematyki precyzyjnej decydujący wpływ wywrze na nasze metody nauczania. Gdy z tego stanowiska spojrzymy na wiele dziś spornych i niejasnych zagadnień, wiele, bardzo wiele się wyjaśni i stanie się widoczną właściwa droga rozwiązania. Dotyczy to np. takiego działu matematyki, jak t. zw. rachunki wyższe, co do których matematycy fachowi mają tyle wątpliwości w odniesieniu do ich zastosowania w szkole średniej. Matematyka stosowana i matematyka t. zw. czysta są rzeczami różnemi i, jeżeli mówimy o matematyce w szkole, trzeba zawsze zdać sobie sprawę, o jakiej mówimy.

Zajęcia geometryczne na powierzchni ziemi mogą być utrudnione przez położenie szkoły w mieście. Trudność ta nie może jednakże być przeszkodą i wycieczka za miasto nie powinna mieć charakteru rekreacji lub wyłącznie przyrodniczego. Ona tak samo niezbędnie jest potrzebna dla geometrji. Jedna chwilka zastanowienia wystarczy, by rzecz tę zrozumieć, a to, co jest celowe i rozumne, trzeba robić.

Jeżeli w szkole jest porządnie prowadzona praca ręczna, ułatwi to ogromnie nauczanie geometrji. Nauczyciel pracy ręcznej winien skorzystać z wiadomości geometrycznych uczniów i pomagać nauczycielowi geometrji. Z powyższego widocznem jest jaką rolę wykonanie modelu odgrywa w nauczaniu geometrji. Wszystkie przyrządy winny być możliwie przez samych uczniów wykonywane. Nie są one tak skomplikowane, by w tej sprawie napotkać można było na nieprzezwyciężone trudności. Slöjd t. zw. drzewny i tekturowy znajdą tu swoje szerokie zastosowanie.

W następnym rozdziale, idąc z ogólnym rozwojem metody, zajmiemy się 3-im cyklem nauczania, w którym element geometryczny jeszcze wyraźniej się zarysuje i wejdą w grę nowe czynniki myśli.

ROZDZIAŁ VI.

Jednem z najpierwszych zadań na początku trzeciego cyklu nauczania jest skorzystanie z zastosowania cyrkla i tem samem linji kołowej.

Pierwszą rzeczą jest konstrukcja trójkątów według danych zawartych w przypadkach przystawania. Należy przedtem jednakże praktycznie się przekonać, że dwa okręgi mogą albo przecinać się w 2-ch punktach, albo dotykać się lub też nie spotykać się wcale. O dowodzie nie może być mowy. Konstrukcja trójkątów danych odpowiadających tym przypadkom jest stopniem drugim przekonania się o słuszności odnośnych twierdzeń. Tak samo przez wprowadzenie cyrkla udoskonalamy konstrukcję kąta równego danemu i prowadzenia równoległej do danej prostej. Obok tych zadań wprowadzenie koła *) pozwala rozwiązywać zadania konstrukcyjne podstawowe jak: dzielenie odcinka na pół, konstrukcja prostopadłej, dzielenie kąta napół oraz zadania związane z konstrukcją trójkątów prostokątnych, prostokątów, równoległoboków i t. p. Rzeczy te są niezbędne do tego, by 1° zastosować obszerniej rysunek techniczny, a 2° znaleźć odpowiednią metodę do zdobywania nowych prawd nauki.

Zadania wspomniane są bardzo proste w samej istocie rzeczy, zwykłe jednakże sposoby ich rozwiązywania w szkole są bardzo trudne dla początkujących uczniów. Nie znam podręcznika, którybv zatroszczył się o genetyczne przedstawienie tej rzeczy. Wiąże się ona ściśle z pojęciem symetrji, które też w szkole nie znalazło należytego uznania.

---

*) Pojęcie o promieniu, średnicy, łuku i t. p. można już dać przy pierwszem zaznajomieniu się z kołem w poprzednim cyklu.

Jeżeli weźmiemy trójkąt równoramienny (narysowany na papierze) i przechylimy go przez zgięcie papieru wzdłuż podstawy przy pomocy zwykłego nakłucia szpilką, otrzymamy symetryczny obraz jego, czyli razem figurę, którą nazywamy zwykle rombem. Figura ta jest macierzą wszelkich elementarnych konstrukcyj geometrycznych wykonywanych zapomocą cyrkla i linjału zupełnie tak samo, jak w konstrukcjach Mascheroniego (wykonywanych tylko zapomocą samego cyrkla) sześciokąt foremny i następnie przekształcenie zapomocą promieni odwrotnych. W konstrukcjach Steinera, o których już wspomnieliśmy, podobną rolę odgrywa zwyrodniony czworobok zupełny.

Otrzymany romb możemy wykroić z papieru i następnie poddać go znowu przegięciu wzdłuż linji łączącej wierzchołki trójkątów równoramiennych. W ten sposób z łatwością się przekonamy, że zarówno odcinek te wierzchołki łączący, jak podstawa trójkąta są prostopadłe i dzielą się na pół.

Po tem spostrzeżeniu możemy wykazać, że figura otrzymana (romb) może być wyrysowana bezpośrednio, jeżeli uwzględnimy drugie przecięcie się kół potrzebnych do wykreślenia trójkąta równoramiennego. Z tego natychmiast wynika zależność pomiędzy cięciwą wspólną dwóch równych przecinających się kół, a linją ich środków. Nasuwa się tu całe pole do badania.

Najpierw rozpatrujemy wszystkie możliwe położenia kół równych i, pomagając sobie przeginaniem papieru, przekonywamy się, że przy wszystkich możliwych położeniach środków cięciwa wspólna jest prostopadła do linji tych środków. Następnie, badając koła, gdy środek jednego leży nazewnątrz drugiego, przy stopniowem odsuwaniu tych środków dochodzimy do pojęcia stycznej, którą konstruujemy w ten sposób, że jednocześnie rozważamy dwa równe koła o promieniach większych, niż połowa linji środków. Wspólna ich cięciwa będzie styczną do kół, dla których linja środków jest równą ich średnicy. W celu zbudowania stycznej w danym punkcie należy przedłużyć promień, odciąć na przedłużeniu odcinek równy jemu i następnie ze środka koła danego i końca otrzymanego przedłużenia zakreślić dwa równe koła, o promieniach większych, niż promień rozważanego. Rzecz jasna, że przy badaniach, powyżej naszkicowanych, należy zwrócić uwagę na zależność pomiędzy faktem przecinania się kół lub styczności a długością linji środków.

Obecnie możemy już przystąpić do rozwiązywania powyżej zaznaczonych podstawowych zadań. Podział danego odcinka napół nie przedstawia już trudności. Podział kąta napół wymaga tylko niewielkich uprzednich przygotowań, gdzie wspomniany romb i przeginanie papieru znowu jest pomocnem. Konstrukcja stycznej powyżej nadmieniona pomoże do wystawienia prostopadłej w danym punkcie. Opuszczenie prostopadłej z danego punktu na prostą też da się łatwo wykonać, jeżeli przegniemy rysunek wzdłuż danej prostej i znajdziemy punkt symetryczny do danego. Pierwszy etap tej konstrukcji: zakreślenie koła dowolnym promieniem przecinającego daną prostą, należy odkryć przez rozważanie powolne, jako skrócenie, a przedtem posługiwać się metodą przejściową przez dobór odpowiednich punktów na prostej i zakreślenie z nich równemi promieniami kół przecinających się w danym punkcie i symetrycznym do niego.

Widocznem jest z powyższego, że mamy tu przed sobą szerokie pole do badań, że umiejętne jego wyzyskanie będzie rzeczą bardzo pożyteczną przy nauczaniu. Jednocześnie z temi badaniami nauczyciel na modelu uproszczonego zegara pokazuje konstrukcję tego przyrządu. Chodzi może tylko o główne momenty konstrukcji nie zaś o mechaniczne funkcjonowanie związane z wahadłem tego lub innego typu. Wprawa i wiadomości zdobyte mogą być obecnie z łatwością przeniesione w dziedzinę konstrukcji trójkątów prostokątnych na tle przypadków ich przystawania, a odpowiednia dyskusja może być uważana za moment dowodzący słuszności tych przypadków. Konstrukcja prostokątów i równoległoboków wogóle należy do tego momentu. W ten sposób uczniowie przerobią powtórnie i uporządkują sobie zwykły pierwszy dział nauczania geometrji z dodatkiem własności koła. Własności te mogą być poznane dokładnie, głównie w odniesieniu do cięciw i łuków.

Wiedza w ten sposób zdobyta jest i może być dość dokładną, wymaga jednakże pogłębienia przez odpowiednie zastosowanie praktyczne. . Jednem z takich zastosowań jest dalsze udoskonalenie w kreśleniu planów zarówno kawałków gruntu jak pokoju z rozmieszczeniem dokładnem znajdujących się tam przedmiotów. O ile rzecz dotyczy powierzchni ziemi, można już zastosować przyrząd najprostszy z kołem podzielonem i igłą magnesową. Koło niekoniecznie ma być zrobione z metalu, a igła magnesowa niekoniecznie precyzyjna. Pamiętam, że w młodości czyniłem podobne pomiary z przyrządem własnej konstrukcji, a pomimo to pomiary te bardzo niewiele się różniły od tych jakie wykonywał przysięgły geometra, jakkolwiek wszystko było zrobione z drzewa, na którem naklejone było koło z papieru podzielone na stopnie. Wewnątrz umieszczono pudełko z niewielką igłą magnesową, która, pomimo to, złych rezultatów nie dawała i przy kreśleniu błąd otrzymany można była zreparować z łatwością, czy to dzięki powtórzeniu pomiaru kilkakrotnie, czy też zapomocą zwykłej, przez geometrów używanej. przybliżonej konstrukcji. Trzeba mieć w tych rzeczach, jak zresztą wszędzie przy badaniu przyrody, tylko trochę prawdziwego zamiłowania. Rzecz jasna, że nauczyciel stara się wybierać mniej więcej równy kawałek gruntu posiadający figurę niezbyt skomplikowaną. Po narysowaniu ważnem jest pomalowanie, które wymaga wejrzenia do wnętrza figury i pomiarów specjalnych dotyczących rozmieszczenia różnych wewnętrznych przedmiotów oraz części pola figury. Stolik mierniczy bez igły magnesowej również z powodzeniem może być używany, wymaga on jednakże pewnego pogłębienia pojęcia proporcjonalności i dlatego lepiej go jest odsunąć do klasy 3-ej.

Obok rysowania planów wejść muszą na porządek dzienny rysunki techniczne. Należy zastosować metodę rysunku w 2-ch lub 3-ch przekrojach do prostych przedmiotów otoczenia: kosz drewniany do śmieci, pudełko z przedziałkami, prosty kubek i t. p. Przybliżone wykreślenie linij krzywych wejdzie tu samo przez się. Należy się starać, by uczniowie wykreślenia robili ołówkiem i przytem możliwie dokładnie. Do tego pomocnym być może zwykły dość wąski płatek wosku (lub plasteliny), za pośrednictwem którego można przez odpowiednio ścisłe przykładanie właściwą krzywiznę uchwycić. Aby to zrobić, potrzeba dla małego geometry sporo sprytu i umiejętności takiego przyłożenia. Z drugiej strony nie trzeba zaniedbywać odręcznego wykreślania na tle więcej drobiazgowych pomiarów. Od przedmiotów małych można przejść do większych i sporządzić np. rysunek klasy z przekrojami ścian i t. p. Rzeczy te bardzo kształcą wyobraźnię geometryczną, a uzależnienie od siebie różnych przekrojów zawiera cały szereg bardzo ważnych elementów geometrycznych, które mogą wzbogacić wiedzę uczni i pogłębić posiadaną.

Ćwiczenia powyższe są bardzo dobrym środkiem do zdobycia większej wprawy w kreśleniu, a tem samem większej precyzji, dzięki której wyobrażenia geometryczne nabierają coraz bardziej idealnych cech. Jako jeden ze środków kształcenia dokładności rysunku są specjalnie obmyślone przykłady, zaczerpnięte z geometrji rzutowej. Obok kształcenia wspomnianej dokładności i wprawy przykłady wspomniane będą budziły poczucie prawa w świecie form geometrycznych. Uczeń dotąd nie miał możności wyraźnego przekonania się, że zespoły linij mogą podlegać pewnej określenej prawidłowości wewnętrznej. Figury natury materjalnej nie dają sposobności do jaśniejszego ujęcia tej rzeczy bez większego wgłębienia się w treść przedmiotu; natomiast geometrja rzutowa, gdzie kształt odgrywa rolę ważniejszą, pozwala stykać się z podobnemi zjawiskami na każdym kroku. Póki uczeń nie posiada w umyśle jasnego poczucia istnienia podobnej prawidłowości, geometrja dla niego jest zbiorem oddzielnych wiadomości nieraz dziwnych, bo ze sobą głębiej nie powiązanych. Takie powiązanie usiłuje dać metoda genetyczna zastosowana do nauczania, nie potrafi ona jednakże dokonać tego wielkiego dzieła dydaktycznego z taką jasnością, jaką uczeń znajdzie przerabiając przykłady z geometrji rzutowej. Zrodzenie się pytania: dlaczego? — jest matką odkryć i wysiłku umysłowego. Stąd słusznem jest, jeżeli nauczyciel potrafi to pytanie rozbudzić, dać przytem należytą treść i pokarm umysłowy oraz środki badania.

Jednym z takich przykładów jest zastosowanie własności czworoboku zupełnego. Niech będą dwie proste przecinające się: MN i PQ *). Weźmiemy zewnątrz nich punkt A i poprowadzimy z tego punktu trzy proste: AB, AC, AD, przecinające MN i PQ odpowiednio w punktach B, C, D i B_1, C_1, D_1. Prowadzimy proste: BC_1 i CB_1 oraz CD_1 i DC_1. Proste te niech

*) Czytelnik zechce wykreślić sobie odpowiedni rysunek.

przetną się w punktach R i S. Prosta RS przechodzi przez punkt spotkania prostych MN i PQ a wrazie ich równoległości jest do nich równoległa.

Konstrukcja tego typu uczy umiejętności dokładnego obchodzenia się z linjałem, podkreśla fakt wyznaczenia prostej przez 2 punkty oraz niewątpliwie wzbudzić może zapytanie, dlaczego tak jest? Geometrja rzutowa ożywiła geometrję grecką, wprowadzając ruch i życie do formy geometrycznej.

Jako drugi przykład weźmiemy znane twierdzenie Brianchona. Na danem kole wykreślamy w sześciu punktach dowolnie obranych styczne. Można to robić przez zwykłe przykładanie linijki bez odpowiedniej konstrukcji, wszak chodzi tu o wprawę ręki i oka. Utworzy się w ten sposób sześciobok opisany, w którym łączymy przeciwległe wierzchołki. Trzy otrzymane w ten sposób proste muszą się przeciąć w jednym punkcie. Zależnie od tego przecięcia uczeń widzi namacalnie dokładność własnej konstrukcji, a nauczyciel wymaga, by ta dokładność była możliwie wielka. Tę samą konstrukcję możnaby wykonać, wykreślając uprzednio elipsę zapomocą 2-ch szpilek i nici, jak również jako jeden z przykładów można wziąć twierdzenie Pascala o sześciokącie wpisanym i przecinaniu się jego przeciwległych boków w punktach leżących na jednej prostej.

Dobrzeby było, gdyby nauczyciel zechciał również zastosować przy wykreślaniu przekroje brył geometrycznych, np. przekroje pochyłe prostopadłościanu i graniastosłupa, równolegle do podstawy stożka i walca. Badanie przekroju jest jednem ze źródeł poznania geometrycznego, podstawą podziału na planimetrję i stereometrję.

Zarówno rysunek techniczny, jak wykreślanie planów i przekrojów brył rozwija wyobraźnię geometryczną i przyucza do tak zwanych doświadczeń wewnętrznych *). Doświadczenie wewnętrzne, jak to niezbicie podkreślają matematycy tacy, jak np. Poincaré, odgrywa przy badaniu i poznawaniu geometrycznem rolę zasadniczą. Czy źródłem jego jest t. zw. przez psychologa niemieckiego Maiera „kognitive Phantasietätigkeit" **), czy też istota tego zjawiska polega na innych prze-

---

*) Patrz Hölder. Anschaung und Denken in der Geometrie. 1900.

**) H. Maier. Psychologie des emotionalen Denkens. 1908.

jawach życia psychicznego, jest zagadnieniem bardzo interesującem dla psychologa i ważnem dla pedagoga. W każdym razie dzisiaj stoimy wobec faktu ogromnego znaczenia tego zjawiska dla nauczania. Jedną z wad grubego empiryzmu w zastosowaniu do zagadnień nauczania jest, jak to się niejednokrotnie widzi, zupełne pomijanie faktu wspomnianego. Dzięki temu metoda empiryczna, tak płodna sama w sobie, nie znajduje należytego oparcia wewnątrz myśli ucznia, a przynajmniej nie jest świadomie w tym kierunku przez uczącego stosowana.

Zarówno rysunek techniczny, jak wykreślanie planów i przekroi brył ma na celu pobudzenie tej działalności wewnętrznej myśli ucznia. Rzecz jasna, że, aby ta działalność mogła być żywotną i płodną, należy dać pokarm wyobraźni, należy przesunąć w doświadczeniu i zajęciu czynnem wiele form geometrycznych, gdyż dopiero wtedy z tego materjału czerpać będzie myśl swój naturalny pokarm. Najlepszym dowodem nieudolności w tym kierunku jest bezradność przeciętnego ucznia wobec zadania konstrukcyjnego. Winna tu jest metoda nauczania, która podawała z góry sposoby rozwiązania, nie usiłowała ich umiejętnie podpowiedzieć. Istnieje cały szereg zadań, które mogą być w tej ważnej dziedzinie bardzo pożytecznemi. Zadania te wymagają, poza konieczną w każdem zadaniu konstrukcyjnem analizą figury, jeszcze uprzedniego wysiłku wyobraźni dotyczącego samego, że tak powiem, wyglądu figury. Weźmy dla przykładu np. zadanie o wpisaniu trójkątu równobocznego w kwadrat. Zanim przystąpimy do jego rozwiązania należy zdać sobie sprawę, jak ten trójkąt ma być w kwadracie umieszczony, t. j. trzeba najpierw wyobrazić sobie dokładnie wygląd dość skomplikowanej figury, gdzie wierzchołek trójkąta jest umieszczony w wierzchołku kwadratu. Zadanie to, które sprowadza się do podzielenia kąta prostego na 6 równych części, nie należy do omawianego kursu, wzięte zostało tylko jako przykład. Natomiast cały szereg zadań z t. zw. łatwiejszych łamigłówek, gier i zabaw geometrycznych należy do tej kategorji. Weźmy np. zadanie tego rodzaju: 5 równych kwadratów ułożono w postaci gnomona w dwa szeregi tak, że w jednym mamy 3 kwadraty, a w drugim dwa; należy dwoma cięciami podzielić figurę na części, z których ułożyć można nowy kwadrat. Rozwiązanie tego zadania wymaga sporego wysiłku wyobraźni, który nakazuje przerabiać w myśli cały szereg różnych możliwych kombinacyj. To samo dotyczy wielu innych przykładów z tej dziedziny. Prostsze z nich nadają się bardzo do nauki geometrji już na tym stopniu.

Weźmy np. takie zadanie: przez zwyczajne przeginanie papieru z danego kwadratu papierowego utworzyć kwadrat 4 razy mniejszy, a potem 2 razy mniejszy; z danego trójkąta równobocznego ułożyć ostrosłup trójkątny foremny; z danego trójkąta ułożyć trójkąt 4 razy mniejszy i t. p. Niejedno zadanie z zapałkami, które uważane jest za zwykłą „łamigłówkę", do tego bardzo się nadaje. Pomysłowość nauczyciela musi tu przyjść z pomocą, jak również jego oczytanie. Bardzo pożytecznemi w tym względzie mogą być książki: Ahrensa (Mathematische Unterhaltungen und Spiele), R. Balla i innych. Każdy z młodości swojej pamięta, że urzędowe zadanie geometryczne zawsze mniej go interesowało, niż podobne łamigłówki, z któremi spotykał się w towarzystwie i które dzięki swej popularności i atmosferze zjawienia się pobudzały uwagę i skłaniały do wysiłku myśli. Historja matematyki wskazuje że podobne zagadnienia zawsze zaprzątały umysły. Nauczanie tego faktu pomijać nie powinno.

Druga część programu klasy drugiej składa się z szeregu uzupełnień. Do nich w pierwszej linji należy nauka o kącie. A więc kąty z prostopadłemi i równoległemi ramionami, kąty w czworokącie, wielokącie, w kole (t. zw. wpisane), w czworokącie wpisanym i t. p. Twierdzenie o kątach z prostopadłemi ramionami nauczyciel przy pierwszej sposobności może podać przy ważeniu na zwykłej wadze, a z równoległemi, opierając się na własnościach przesuwania równoległego. O sumie kątów w czworokącie i wielokącie (oczywiście bez formuły ogólnej) uczniowie przekonają się przez prowadzenie przekątnych. Nauka o kącie wpisanym w kole wymaga specjalnych badań. Byłoby pożądanem zastosowanie dwóch metod przy wykryciu prawdy o zależności pomiędzy kątem wpisanym a środkowym. Najpierw należy przez wykrawanie przekonać się, że wszystkie kąty wpisane wspierające się na tym samym łuku są sobie równe, a następnie dwa z nich złożone razem przyłożyć do środkowego. Później można to samo sobie wyrozumować, stosując znaną własność kąta zewnętrznego. W twierdzeniu o kącie wspierającym się na średnicy należy dać osobny dowód, ominęliśmy bowiem pojęcie kąta półpełnego, raczej przemilczeliśmy o nim. Na tym stopniu nie należy jeszcze uczniów zbytnio obciążać uogólnieniami. Dowód ten można poprowadzić z łatwością drogą rozważania 2-ch trójkątów równoramiennych, jakie się utworzą przez połączenie środka koła z wierzchołkiem kąta. Suma kątów w trójkącie dokładnie podzieli się napół. Twierdzenie o czworokącie wpisanym należy zacząć od przypadku, gdy są 2 kąty proste, a potem sprawdzić, wykazując, zapomocą konstrukcji przez przystawanie trójkątów, że kąt przyległy do jednego z kątów przeciwległych czworokąta jest równy drugiemu.

Dalszem uzupełnieniem będzie rozszerzenie zastosowania mierzenia pól na trójkąty i równoległoboki wogóle, przyczem wejść powinno pojęcie wysokości trójkąta i równoległoboku. Bardzo praktycznem jest zastosowanie wykrawania z papieru w celu zamiany danego trójkąta lub równoległoboku na prostokąt. W obu przypadkach mamy do czynienia z rzeczą ogólnie znaną. Z trójkątem można postępować w sposób dwojaki. Można wziąć na uwagę, jak zwykle, prostokąt opisany lub też utworzyć nowy przez poprowadzenie równoległej do podstawy przez środek wysokości. Ta druga konstrukcja wynika z rozważań związanych z pierwszą. Przy tej sposobności uczniowie pierwszy raz zapoznają się z figurami równemi przez rozkład. Metodę tę obliczania pól należy prowadzić dotąd, póki nauka o podobieństwie nie da środka analitycznego obliczania pola trójkąta zapomocą wzoru Herona i pola koła.

W takim zakresie przedstawia się mniej więcej program klasy drugiej. Widzimy, że charakterystyczną jego cechą jest wprowadzenie nauki o kole i związanych z tem konstrukcyj, które stanowią nową, lepszą już metodę wyprowadzania prawd nauki i dają większą swobodę twórczości geometrycznej.

Kolejność przechodzenia różnych momentów powyższego programu winna być taka, jak wskazano w powyższem przedstawieniu. Czytelnik z łatwością zauważy, że program ten jest raczej pogłębieniem tego, co było w klasie pierwszej, niż czemś zupełnie nowem. Podobne podwójne przerobienie działów nauki ma swoje wielkie znaczenie i wypływa z zastosowania metody genetycznej. Zrobiliśmy przytem duży krok naprzód w kierunku dokładności i „idealizacji” rozpatrywanych objektów geometrycznych. Czy uczeń, który w ten sposób poznaje prawdy geometryczne, nie zdobywa porządnej wiedzy? Czy wiedza ta nie jest istotnie żywszą, niż przy nauce z podręcznika? O tem, niech sądzi ten, kto rzeczy te należycie wypróbował. Nie podajemy wskazań niemożliwych do wykonania i staramy się zawsze mieć na widoku warunki dzisiejszej szkoły.

Jedną z ważnych rzeczy, na którą należy już teraz zwrócić uwagę, jest podawanie uczniom, bez specjalnych dłuższych rozważań, pewnych określonych obserwacyj, które później stać stę mogą materjałem doświadczalnym do szerszych wniosków. Jedną z takich obserwacyj jest przypatrywanie się cieniom rzucanym przez bryły z drutów lub patyczków zrobione i oświetlone światłem słonecznem. Cienie te są bardzo charakterystyczne i pozwolą nam później w określony sposób rysować na płaszczyźnie te bryły. Drugą obserwacją jest zegar słoneczny, w naszych szkołach zupełnie zaniedbany. Z niego może wypłynąć cały szereg bardzo ciekawych zadań geometrycznych. Nie mówię tu już o pewnych zjawiskach przyrody, jak budowa komórek pszczelnych lub pajęczyny. Pająk jest bardzo dobrym znawcą określonych prawd związanych z t. zw. wielokątami sznurowemi w mechanice i podobieństwem figur. Każdy nauczyciel geometrji winien hodować pająka, jak to robiono ongi na Wschodzie w kulcie religijnym. Przyroda nastręcza wiele spostrzeżeń geometrycznych nieraz bardzo subtelnych. Omijać ich nie godzi się, a nawet jest szkodliwem dla nauczania. To samo dotyczy zjawisk techniki.

Można również z łatwością zauważyć, że charakter kursu klasy 2 ej jest przeważnie planimetryczny. Wynika to z samej natury rzeczy. Nie pomijamy brył, staramy się tylko przygotować do dalszego, lepszego ich pojmowania, tak samo, jak Euklides w swych Elementach dążył bezskutecznie, o ile wiemy, jednakże do teorji wielościanów. Po uprzednich przygotowaniach w klasie drugiej można było sobie na to pozwolić. Wprowadzenie, w celu dogodzenia idei fuzji, elementów stereometrji, komplikowałoby niepotrzebnie program i dzięki nawałowi pojęć nie pozwoliłoby na jasne przedstawienie takich rzeczy, które mają zasadnicze znaczenie. Niewątpliwie, że reforma nauczania, dzięki wzmożonej umiejętności nauczyciela oraz zbogaceniu środków i urządzeń szkoły, pozwoli na więcej konsekwentne przeprowadzenie idei fuzjonistycznego programu. Obecnie, sądzę, byłoby to trudne do przeprowadzenia. Należy najpierw zwalczyć elementarne trudności, do których np. należy zaciśnienie nauki do klasy szkolnej oraz brak żywego związku z innemi przedmiotami.

Jednym z najciekawszych może i najwięcej podstawowych momentów nauczania geometrji propedeutycznej jest program dzisiejszej klasy 3-ej. W klasie tej, która, jak to widzieliśmy, z jednej strony załatwia się z formalną stroną działań z liczbą wymierną, z drugiej, przy nauce geometrji, podkreśla, jak zobaczymy niebawem, elementy podstawowe całego dalszego kursu matematyki elementarnej. Ze względu na rozwój psycho-fizjologiczny młodzi uczącej się w tej klasie, jak sądzi dzisiejsza pedagogika eksperymentalna, występuje najbujniejszy rozkwit pamięci (o ile nie była zmanierowana i zmęczona poprzednio), fantazja przybiera charakter więcej objektywny (objawy krytycyzmu śród dzieci w odniesieniu do osób nauczycieli i t. p.), a myśl w ramach dziecięcej gry i zabawy oraz obserwacji nosi piętno większej dojrzałości, więcej wolnej od subjektywizmu. Jest to okres dojrzałego dzieciństwa, który może ongi odpowiadał okresowi dojrzałości wogóle, jeżeli myśli Stanleya Halla i wielu zwolenników teorji biogenetycznej są słuszne.

Głównemi momentami programu tej klasy są: wprowadzenie elementów stereometrji, pogłębienie pojęcia proporcjonalności i wprowadzenie pojęcia funkcji, szersze związanie nauki geometrji ze zjawiskami mechanicznemi, pomiar powierzchni i pola koła oraz objętości brył obrotowych w szkole zwykle używanych, dalsze udoskonalenie kreślenia i rysunku technicznego.

Materjał przerobiony w klasie 2-ej daje możność do wprowadzenia elementarnych pojęć ze stereometrji. Powyżej zaznaczyliśmy już niektóre powody zmuszające nas do przeniesienia tego materjału do klasy 3-ej. Może się niejednemu wydawać niesłusznem takie postępowanie. Motywem tego sądu mogłaby być jasność większa przestrzennych form, ich większa namacalność. Niewątpliwie kąt dwuścienny może się wydawać czemś konkretniejszem, niż kąt płaski, jeżeli jednakże zwrócimy uwagę na samą metodę przedstawienia rzeczy, argument ten wiele straci na swej sile. Operowaliśmy bynajmniej nie wytworami pojęciowemi w ścisłem tego słowa znaczeniu, lecz przedmiotami konkretnemi, które zupełnie mogą stanąć na tym poziomie jasności, jako konkretne przedmioty ilustrujące utwory przestrzenne. Z drugiej atoli strony teren zastosowania przez rozważanie utworów planimetrycznych zarówno w dziedzinie faktycznych pomiarów jak kreślenia i pracy ręcznej był o wiele szerszy. Ten wzgląd przemówił za rozważaniem początkowem tych utworów w tej formie, jak to zrobione było powyżej.

Pierwszą rzeczą, na którą zwracamy obecnie uwagę uczniów, jest pojęcie płaszczyzny. Pojęcie to związane jest z pojęciem prostej i, jakkolwiek można sobie dokładnie przedstawić taki wykład, w którym prosta zjawi się jako rezultat rozważań płaszczyzny, praktycznie lepiej jest posuwać się drogą odwrotną. Wskazujemy na cały szereg przedmiotów płaskich: powierzchnia wody w jeziorze, powierzchnia stołu i t. p. Wyjaśniamy znaczenie słowa: płaski — w ten sposób, że wskazujemy, iż przykładanie linjału we wszelkich kierunkach wykazuje całkowite jego przyleganie do rozważanej powierzchni. Wskazujemy na fakt obrotu płaszczyzny dokoła prostej i na zatrzymanie tego obrotu w razie spotkanej przeszkody. Z tego wyprowadzamy po omówieniu wniosek, że płaszczyzna, która przechodzi przez 3 stałe, nie leżące na prostej punkty nie może już obracać się dokoła żadnej prostej, ani przesuwać się w przestrzeni, może tylko „ślizgać się w sobie". Fakt ten formułujemy w postaci zdania: trzy punkty wyznaczają płaszczyznę. Jednocześnie podkreślamy, że dwa punkty wyznaczają prostą. O tem uczniowie mieli pojęcie z poprzedniego, nic jednakże nie wspomnieliśmy o formułowaniu rzeczy. Następnie zjawia się sprawa dwóch różnych płaszczyzn, ich spotkania i t p., występuje pojęcie kąta dwuściennego. Z tym ostatnim przerabiamy cały szereg konkretnych manipulacyj dotyczących porównania wielkości, kątów wierzchołkowych, przyległych i kąta dwuściennego prostego. Z temi pojęciami wiążemy pierwsze pojęcie o płaszczyznach prostopadłych i równoległych, wskazując na cały szereg przykładów konkretnych z życia codziennego i otoczenia. Nauczyciel z łatwością zrozumie, jak te rzeczy dzieciom przedstawić.

Po kącie dwuściennym występuje kąt wielościenny, przyczem, przez rozwijanie go na płaszczyźnie, przekonywamy się o słuszności znanego twierdzenia dotyczącego sumy kątów płaskich. W ten sposób główne elementy bryły wielościennej są poznane, nie jest ona już modelem do rysunku lub lepienia, lecz pewnym faktem geometrycznym. Możemy się dłużej zatrzymać na kącie bryłowym trójściennym, badać jego kąty płaskie i dwuścienne, skonstatować doświadczalnie fakt o sumie dwóch kątów płaskich, zależności pomiędzy kątami płaskiemi a dwuściennemi, zbadać sumę kątów dwuściennych i tu skonstatować brak analogji pomiędzy własnością tej sumy, a sumy kątów w trójkącie płaskim. Sumę kątów dwuściennych należy badać przez zwyczajne ich składanie razem. Należy przytem najpierw skleić kąt trójścienny a potem powycinać kąty dwuścienne. Przy tej sposobności należy porównać kąty dwuścienne w graniastosłupie trójkątnym i kącie trójściennym oraz doświadczalnie wykazać, że suma kątów dwuściennych w tym pierwszym spełnia ten sam warunek, co w trójkącie płaskim.

Wiadomości ze stereometrji można uzupełnić jeszcze pewnemi próbami doświadczalnemi dotyczącemi przekroi płaskich, np. przekroi walca, stożka i kuli. Jeżeli chodzi o przekroje walca należy z tekturką nieprzezroczystą badać snop promieni słonecznych przepuszczany przez otwór okrągły np. w okiennicy. W celu zbadania przekroi stożka można zastosować lampę, która, podobnie jak w latarni czarnoksięskiej, rzuca stożkowaty słup światła. Do tego również można zastosować nieprzezroczystą tekturkę. Otrzymane rezultaty należy pokazać na szklannych modelach i zademonstrować sklejenie brył przeciętych płaszczyzną. Oczywiście płaszczyzna ta w postaci tekturki lub deseczki winna być nadzianą na odpowiednią bryłę i przyklejoną. Chodzić może narazie tylko o przekrój eliptyczny, a rzecz cała da się wykonać w ten sposób. Zrobimy najpierw 2 równe walce lub stożki z grubego papieru. Następnie jeden z nich spłaszczymy dokładnie i przetniemy na ukos, a potem przez nałożenie na taki sam drewniany lub z mocnej tektury zrobiony (może to być wspomniany drugi stożek) stożek znowu utworzymy stożek ścięty. Po zdjęciu i przyłożeniu do papieru metodą konturów ostrożnie obrysujemy otrzymany przekrój, a następnie wytniemy w tekturze odpowiadający mu otwór. Przekrój taki, jak elipsa, może być znaną metodą najpierw wykreślony, potem wycięty, później zaś uczniowie przez nakładanie mogą się przekonać, że przekrój ten w odpowiedniej pozycji do stożka przylega. To samo, wycinając koła, można zrobić z kulą.

W ten sposób posunęliśmy cokolwiek dalej naszą wiedzę o bryłach uprzednio już rozważanych. Wobec znaczenia tych pierwszych początków nie należy podawać więcej wiadomości, uczniowie natomiast mogą zapomocą znanej i w podręcznikach zwykle stosowanej metody rysowania brył te ostatnie wykreślać, opierając się na obrazach cieniów rzucanych przez modele z drutu, oświetlane promieniami słonecznemi. Są to rzuty ukośne, równoległe. Zwykle nie zdajemy sobie z tego sprawy i, gdy nauczyciel później w klasach wyższych zaznajamia uczniów z takiemi bryłami, jak np. dwunastościan, najczęściej nie umie sam narysować odpowiednika tej bryły w sposób stosowany do brył innych.

Powyżej przedstawiony początkowy kurs stereometrji nie tylko ma na celu podanie pewnych wiadomości, lecz poniekąd pogłębienie i uwypuklenie tych rzeczy zasadniczych jakie były przedmiotem nauczania w latach poprzednich. Główną atoli rzeczą w programie klasy 3-ej jest nauka o podobieństwie. Łączyć się dział ten winien z nauką o proporcjonalności w arytmetyce.

Jedną z bardzo ważnych wad nauczania tego działu geometrji jest ściśle planimetryczne jego traktowanie. Wiadomo jaką rolę odgrywa twierdzenie Desarguesa w teorji proporcjonalności, wiadome również są trudności związane z dowodem tego twierdzenia na płaszczyźnie. Jeden to tylko ze względów. Podobieństwo figur jest rzeczą mającą tak duże zastosowanie w praktyce, tak często spotykającą się w życiu praktycznem, tak związaną z samą istotą geometrji Euklidesowej i konkretnem ujmowaniem rzeczy otaczających, że raczej należałoby pojęcie to klarować, wychodząc z rozważań przestrzennych nie zaś planimetrycznych. Modelem zasadniczym na początku jest kąt trójścienny, na którym oznaczono cały szereg przekrojów płaskich, równoległych. Model ten może być szklanny lub też sporządzony z drutu. Mamy na nim: 1° szereg prostych przeciętych równoległemi, 2° szereg trójkątów podobnych, 3° t. zw. twierdzenie Thalesa. Należy teraz model poddać gruntownemu zbadaniu. Rzecz jasna, że wykonanie jego winno być możliwie dokładne.

Bezpośredniem mierzeniem przekonywamy się o głównych zależnościach odcinków. Tworzymy szeregi liczb odpowiadających długościom tych odcinków, konstatujemy istnienie proprocjonalności. Zrozumiałem być winno dla nauczyciela, że dowody twierdzeń o proporcjonalności nie mogą być tu inaczej podane jak tylko drogą doświadczenia i bezpośredniego pomiaru. Następnie zwracamy uwagę na kąty odnośnych figur. Jeżeli model druciany oświetlimy promieniami słonecznemi, to cień przedstawi nam szereg trójkątów w położeniu jednokładnem, przyczem, zależnie od położenia, środek jednokładności może być albo wewnątrz, albo zewnątrz rozważanych trójkątów. Trójkąty te mają boki równoległe na oko. Zbadamy dwa trójkąty z równoległemi bokami. Przekonamy się, że kąty ich są równe. Mierzymy boki. Boki są proporcjonalne.

Narysujemy dwa trójkąty o bokach proporcjonalnych. Przekonamy się, że kąty są równe. Narysujemy dwa trójkąty o kątach równych. Przekonamy się, że boki są proporcjonalne. Te dwie rzeczy są ze sobą związane. Trójkąty, które posiadają te własności, nazywają się podobnemi. Równe trójkąty są też podobne, ale nie naodwrót. Przypominamy przypadki przystawania i próbujemy wyrazić odpowiednie twierdzenie o podobieństwie. Możemy nawet podać zwykły sposób dowodu tych twierdzeń.

Badamy teraz różne przypadki trójkątów: trójkąty prostokątne, równoramienne, równoboczne. Formułujemy odpowiednie twierdzenia.

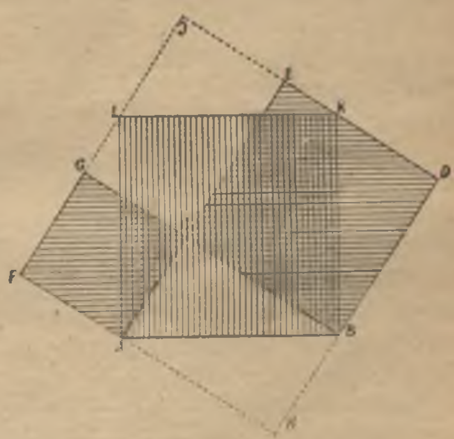
Wykonywamy następnie jedną z zasadniczych konstrukcyj. Dane dwa trójkąty podobne sprowadzić do położenia jednokładnego.

Następnie zajmujemy się wielokątami podobnemi. Na przykładzie dwóch czworokątów o równych kątach przekonamy się, że równość kątów nie pociąga za sobą proporcjonalności boków, niema więc tutaj tego, co było przy trójkątach. Formułujemy określenie wielokątów podobnych i wykreślamy takie wielokąty, a także sprowadzamy dwa dane wielokąty do położenia jednokładnego. Badamy bliżej dwa wielokąty podobne przez prowadzenie przekątnych.

Zdobytą wiedzę należy zaraz zastosować do praktyki. Wprowadzić należy stolik mierniczy i rysować na nim plan kawałka pola bez igły magnesowej. Mierzymy wysokości różnych przedmiotów, rozwiązujemy na powierzchni ziemi cały szereg praktycznych zagadnień związanych z proporcjonalnością.

Badamy bliżej wagę, formułujemy prawo momentów i wprowadzamy sposób sprawdzenia ważenia *), jeżeli przypuszczamy że waga jest niedokładna. Rozważamy wogóle dźwignię obu rodzai i zdobytą wiedzę ilustrujemy na przykładach praktycznych. Pogłębiamy pojęcie skali oraz podajemy praktyczne sposoby jej zastosowania przy kreśleniu planów i w rysunku technicznym, w którym wprowadzamy przykłady odwzorowania większych budowli np. całej szkoły na wsi.

Wprowadzamy na przykładach pojęcie podobieństwa brył wielościennych, stożka i walca. Następnie przechodzimy do trójkąta prostokątnego i wyprowadzamy najpierw z rozważań związanych z rozpatrywaniem pól twierdzenie Pitagorasa, a potem to samo robimy z zastosowaniem pojęć o podobieństwie. Istnieje bardzo wiele sposobów rozkładu na jednakową liczbę części równych kwadratów zbudowanych na przyprostokątnych i przeciwprostokątnej. Zacząć należy od trójkąta równoramiennego, gdzie rozkład jest odrazu widoczny. Jak widocznem jest na rys. 1-m, jeżeli od



Rys. 1.

*) Pierwiastek kwadratowy i jego wyciąganie dokładnie i z przybliżeniem winno być znane uczniom.

kwadratu HFID, sposób otrzymania którego na zasadzie danego trójkąta ABC jest oczywisty, odejmiemy 2 prostokąty GCEI i ACBH, otrzymamy dwa kwadraty zbudowane na przyprostokątnych; jeżeli zaś odejmiemy 4 trójkąty: FAL, LIK, KDB i AHB, otrzymamy kwadrat zbudowany na przeciwprostokątnej. Najtrudniejszą rzeczą jest umieszczenie punktów K i L. Uczniowie, którzy nauczyli się konstrukcji trójkąta prostokątnego z danych 2 boków, oraz znają własności główne kątów w trójkącie prostokątnym bez wielkich trudności zrozumieją położenie kwadratu ALKB.

Czy rzecz ta nie może być dostępna uczniom klasy 3-ej? Doświadczenie moje stwierdza, że uczniowie tej klasy nie tylko całą rzecz zrozumieją, ale ogromnie się tem interesują.

O wiele trudniejszym jest dowód na zasadzie podobieństwa dzięki niezwykłemu położeniu trójkątów. Należy jednakże rzecz tę przemóc.

Twierdzenie Pitagorasa otwiera odrazu okno na szerszy świat. Zjawia się wiele zadań na obliczanie, nasuwa się też dobra sposobność ugruntowania rachunku. Gdyby nauczyciel arytmetyki poza głównemi rzeczami kursu tego przedmiotu w klasie 3-ej zechciał gruntownie wprawić uczniów w rachunek, geometrja mogłaby mu dostarczyć masę odpowiedniego materjału.

Twierdzenie Pitagorasa daje powód do zwrócenia się znowu w stronę mierzenia pól. Nauczyciel przy tej sposobności winien dać kilka przykładów na rozkładanie figur, np. pola trapezu, a nawet zająć się obliczaniem pola koła.

Pomiar długości obwodu i pola koła należy prowadzić drogą doświadczalną. Bardzo przydatnym do tego byłby pewien przyrząd, sporządzenie którego nie jest rzeczą trudną.

Przyrząd ten składa się z 2 części. Pierwsza część jest linijką w postaci grubego, dobrze odrobionego prostopadłościanu, na jednej ze ścian którego wyznaczona jest dokładna podziałka w centymetrach i milimetrach. Długość linijki może być dowolna (np. pół metra). W jednej ze ścian tej linijki przyległej do podziałki zrobione jest wyżłobienie w postaci litery: T, w które dołkadnie wchodzi inna linijka, posiadająca oczywiście też formę tej litery. Do tej drugiej linijki mocno przyczepiony jest słupek z szeregiem otworów o określonej odległości od podziałki na pierwszej linijce. Otwory są okrągłe i do nich wsadza się dość szczelnie oś koła zrobionego z drzewa. Obwód tego koła przylega z tarciem do podziałki na pierwszej linijce. Skoro drugą zaczniemy przesuwać wzdłuż otworu T, koło wobec tarcia obraca się i możemy zmierzyć długość jego obwodu. Pole otrzymamy przez rozkład koła na małe trójkąty (oczywiście z przybliżeniem) i dodanie ich podstaw, których suma równa jest obwodowi koła. Należy doświadczalnie wyprowadzić wartość na liczbie π, którą można wziąć równą 3 lub 3,1. Takie przybliżenie przyrząd dać może. Rzecz jasna, że te same obliczenie można robić jeszcze grubszemi metodami, nie posługując się wcale przyrządem wspomnianym. Może być przytem pomocną zwyczajna nitka. Pożądanem jest jednakże, by rzeczom tym poświęcić więcej zachodu. Wszak nie możemy mieć tutaj głównie na celu samej wiedzy tylko, ważną rolę odgrywa ta sama zasada, którą stosujemy ciągle: uczeń nie dorośnie nigdy do precyzyjnych metod, jeżeli nie pozna grubych. Metody precyzyjne można poznać, nauczyć się ich, ale przy nauczaniu wielką rzeczą jest prowadzić ucznia drogą stopniowania właściwego jego umysłowi, bo wtedy tylko ten umysł rozwija się i uczy się najważniejszej rzeczy: myślenia.

Pozostaje nam jeszcze jedna kwestja, której nie chcemy traktować jako osobny szczegół programowy. Dotykamy tu sprawy myślenia funkcyjnego.

Przy zadaniach konstrukcyjnych uczeń miał już nieraz sposobność spotkania się z pojęciem miejsca geometrycznego. Na rzecz tę należy zwrócić uwagę i wskazać szereg znanych miejsc geometrycznych: linja kołowa, oś odcinka, dwusieczna kąta, elipsa i t. p. Jednocześnie należy postarać się o interpretację pojęcia proporcjonalności nie tylko w formie podobieństwa, lecz w postaci odpowiednich grafik. Zapoznanie się z jednym kątem układu spółrzędnych Descartesa wykreślenie prostej i hyperboli równobocznej powinno znaleźć tu swe miejsce, jak to zresztą, mówiliśmy już w części 2-ej. Obserwacje temperatury, ciśnienia, wzrostu roślin i t. p., też powinny prowadzić do pewnych przedstawień graficznych. To samo dotyczy wykreślenia krzywych jako miejsc geometrycznych, np. hyperboli, jako miejsca geometrycznego punktów, w których różnica odległości od dwóch danych jest wielkością stałą. Miejsce wykreślamy punktowo, budując trójkąty z 3-ch danych boków. Jeżeli podstawa jest a, a różnica v, dwa inne boki będą: z i z + v, gdzie z jest dowolny odcinek. Analiza konstrukcji wykazuje, że otrzymamy zawsze 4 takie trójkąty.

Należy urozmaicić zakres zadań. Wprowadzenie pojęć środka ciężkości i równoległoboku sił jest rzeczą zupełnie na miejscu w tym kursie. Znajdywanie środka ciężkości powinno polegać na doświadczalnych rozważaniach, gdzie zastosowanie pionu musi być wzięte na uwagę. Możemy znaleźć środek ciężkości trójkąta, równoległoboku i prostopadłościanu. Równoległobok sił winien być badany i stosowany tam, gdzie ruch nie odbywa się w kierunku siły działającej, przyczem należy brać przypadki, gdzie kierunek siły nie przechodzi przez środek ciężkości, np.: gdy szpilką wetkniętą w środku ciężkości przymocuję do stołu trójkąt i będziemy pociągali za nitkę przyczepioną do wierzchołka, przyczem kierunek nitki nie przechodzi przez środek ciężkości. Po rozpatrzeniu kilku podobnych przypadków można wprowadzić zasadę równoległoboku. Można też posługiwać się znanemi doświadczeniami stosowanemi w fizyce, gdzie pod działaniem dwóch sił ciało posuwa się wzdłuż tak zwanej wypadkowej. Przytem występuje namacalniej znaczenie środka ciężkości.

Jak wspomnieliśmy, rysunek techniczny i wykreślanie planów zasadniczo nie różni się od poprzedniego; wchodzą tylko w szerszym zakresie pojęcia związane z podobieństwem. Nie trzeba sądzić, że zarówno rysunek techniczny jak kreślenie planów zajmą dużo czasu. Nie tyle potrzeba rysunków licznych, ile dokładnego wykonania niewielu dobrze obranych zadań. Programu powyżej nakreślonego nie można uważać za przeładowany, nie chodzi zresztą o całkowite tylko i skrupulatne jego wykonanie. Wszak uczymy uczniów, nie zaś przechodzimy programy. Najważniejszą rzeczą jest duch programu, jego główna tendencja.

Czytelnik uważny z łatwością przekonać się może, że 3-ci opisany powyżej cykl nauczania zamyka w sobie pewną całość, która daje ludziom kończącym szkołę na klasie trzeciej, czyli abiturjentom, proponowanej przez Ministerstwo Oświecenia, szkoły powszechnej, pewien zasób wiadomości z dziedziny naszego przedmiotu ważnych praktycznie i przygotowujących tych abiturjentów do dalszych studjów zawodowych, rzemiosł i t. p. a jednocześnie do życia praktycznego na wszelkich polach. To samo widzieliśmy w części drugiej z programem algebry. Program szkolny nie tylko ma pewną wewnętrzną tendencję, płynącą z oddzielnych przedmiotów i wymagań dydaktyki, lecz również liczyć się winien z głównem społecznem zadaniem szkoły: przysposobienia ludzi do pracy produkcyjnej i budzenia ich uzdolnień indywidualnych.

Nie trzeba chyba tu rozwodzić się wielce nad tem jeszcze, że wszystkie tyle razy poprzednio podnoszone momenty nauczania, jak stopniowe kształcenie pojęcia przybliżenia, poczucie prawa w świecie form, wyobraźnia geometryczna, zdolność „doświadczenia wewnętrznego" i t. p. muszą znaleźć tu swe miejsce i dalszą drogę rozwoju. Materjał programu do tego wszystkiego się nadaje i nauczyciel, który jasno te rzeczy rozumie, potrafi go należycie wyzyskać.

ROZDZIAŁ VII.

Czwarty i ostatni cykl nauczania propedeutycznego ma przed sobą dwa główne zadania. Pierwszem zadaniem jest ponowne uzupełnienie zdobytych wiadomości, drugiem uporządkowanie ich i rozbudzenie w umyśle ucznia poczucia potrzeby gruntownego powiązania faktów nauki. Program tego cyklu podzielimy tak samo, jak poprzednio na dwie części. Zajmiemy się najpierw częścią pierwszą, czyli kursem dzisiejszej klasy czwartej.

W tej klasie obecnie rozpoczynają w szkołach średnich systematyczną naukę geometrji. Mówiliśmy już poprzednio o wadach tej pozornie systematycznej nauki. Nie chcemy fałszowania wiedzy, chcemy, by uczniowie nasi poznawali rzeczy w sposób wymagający od nich wysiłku możliwego, wysiłku żywego władz umysłowych, prawdziwego poznania, na dnie którego jest jedna z wysokich radości duszy ludzkiej. Stąd nie zaczniemy nauczania w ten sposób, jak to się zwykle robi, nie będziemy dzieciom nic mówili o układach pewników, ani dawali pozornych, nawet formalnie słusznych dowodów. Pójdziemy tą samą drogą, którąśmy szli dotąd, a czytelnik osądzi jakie zmiany w niej naturalną koleją rzeczy zachodzić będą, o ile szersze otworzą się perspektywy.

Program tego roku będzie polegał: na uzupełnieniu wiadomości ze stereometrji, pogłębieniu nauki o propocjonalności i wprowadzeniu pojęcia funcyj trygonometrycznych.

Pierwszem zagadnieniem ze stereometrji, jakie, po powtórzeniu poprzedniego kursu, wysuwa się na czoło, jest względne położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni.

Zaczynamy od pojęcia prostej prostopadłej do płaszczyzny. Wypowiadamy zasadniczą własność w postaci twierdzenia, któremu dajemy natychmiast zwykle używany dowód. Zanim jednakże do tego twierdzenia dojdziemy, musimy je przygotować. Przygotowanie to polegać winno na rozpatrzeniu wogóle prostej przecinającej płaszczyznę. Należy skonstatować fakt, że na płaszczyźnie możliwem jest zawsze poprowadzenie prostej prostopadłej do danej przecinającej. Fakt ten wynika stąd, że mając dwie prostopadłe proste złączone, możemy jedną z nich przeciąć płaszczyznę tak, aby druga na niej leżała i to w bardzo wiele sposobów. Do prostej w danym punkcie można poprowadzić wiele prostych prostopadłych. Jeżeli weźmiemy dwie z nich, będzie przez nie przechodziła tylko jedna płaszczyzna, jak to wiemy z poprzedniego, a trzecia prosta będzie prostopadła do dwóch prostych, leżących w danej płaszczyźnie. Teraz udowodnimy, że jeżeli jest prostopadła do dwóch, będzie prostopadła do każdej innej. Dowód ten można przeprowadzić metodą zwykłą, od której nie różni się właściwie sposób Veronesego, podany w jego Elementi di geometria, a polegający na konstrukcji wykonywanej tylko z jednej strony płaszczyzny. Podajemy następnie określenie prostej prostopadłej. Oczywiście uczniowie wykonywują model konstrukcji potrzebnej do dowodu. Jest to jedna z tych konstrukcyj, które u uczniów nie napotykają trudności zapewne z tego powodu, że jest całkiem naturalna. Należy gruntownie przerobić ciąg rozumowania. Potem następują zwykłe twierdzenia dotyczące stosunku prostej do płaszczyzny. Zatrzymujemy się nieco dłużej na rzucie prostej, podając szereg przykładów oraz rekomendując uczniom wykreślenie rzutów trójkąta i innych figur.

Pojęcie o prostych równoległych do płaszczyzny i do siebie prowadzi do twierdzenia o kątach z równoległemi bokami i następnie do pojęcia o prostych skośnych. Wszystkie prawdy przerobione są nie tylko na rysunku, lecz koniecznie na modelach przez nauczyciela pokazywanych i przez uczniów wykonywanych.

Jednym z takich modelów, który posiadać winna każda szkoła jest model twierdzenia Desarguesa w przestrzeni z rzutem prostokątnym na jedną z płaszczyzn. Model ten musi zrobić sam nauczyciel. Twierdzenie to nie jest popularne w szkołach, jakkolwiek należy do podstawowych twierdzeń geometrji. Wyjaśnione na modelu, jest ono czemś tak przejrzystem, tak oczywistem, że podziwiać należy, dlaczego dotąd programy szkolne omijają rzecz, która rzucić może tyle światła i dać tak potężne metody. Należy też mieć na uwadze taki model, w którym 3 rozważane podstawowe proste są równoległe. Model może być wykonany częściowo z drutu, częściowo z nici różnego koloru i należy właściwie do roku następnego.

Krótka nauka o płaszczyznach równoległych, o których właściwie dzieci mają już pojęcie, kończy uzupełnienie kursu stereometrji w tej klasie. Przy płaszczyznach równoległych zjawia się znowu pojęcie o proporcjonalności, które stanowi przejście do ponownych rozważań w tej dziedzinie.

Rzecz jasna, że nauczającemu należy zostawić swobodę zależną od warunków nauczania co do sposobu traktowania rzeczy i stosowania utartych dowodów. Wiele rzeczy należy pozostawić wprost poglądowemu pokazaniu, a zakres takiego pokazania zależy od tego, z jaką klasą, z jakim zespołem uczniów mamy do czynienia. Tendencją główną winno być wprowadzenie maximum rozumowania, oparcia się na doświadczeniu wewnętrznem i wysuwaniu wniosków ze znanych faktów. Jest to najtrudniejsza sprawa w metodyce nauczania w tym roku. Przy rozważaniu jej widzimy ponownie, że dla nauczyciela przepisy metodyczne mają li tylko względną wartość. Powinien on przedewszystkiem mieć na widoku całość nauczania danego przedmiotu nie tylko w tej klasie w której uczy, lecz na całym przebiegu uczenia się danej gałęzi wiedzy. Z tego stanowiska ocenia stan swej klasy, z tego też stanowiska usiłuje pchać dalej ciężki bądź co bądź wóz uczenia innych. Nie szczędząc środków poglądowych, nie zaniedbując ani na chwilę każdorazowego podkreślenia wartości praktycznej i zastosowania danej prawdy, winien on starać się z całą usilnością, nigdy zaś przez nakaz z góry lub samo zmuszanie, wydobyć z uczniów możliwie największy zasób energji umysłowej.

Uzupełnienie powyższe wiadomości z dziedziny stereometrji winno być najściślej związane z zastosowaniem. Uczniowie zapoznać się winni z elementami niwelacji i przyrządami przytem stosowanemi jako to: pion, libella, sposobem ustawiania danego kawałka powierzchni płaskiej poziomo, regulowaniem katetometru, przyrządów mierniczych i t. p. Rzeczy te mają ogromne znaczenie w dziedzinie miernictwa i budownictwa. Równia pochyła i prawa spadku ciał też mogą być dobrym terenem zastosowania. Jednym z najpłodniejszych jest optyka geometryczna, która w całości winna być przeniesiona do geometrji. Fizyk dzięki temu będzie miał czas na szersze doświadczalne pogłębienie tych rzeczy oraz wiadomości z dziedziny optyki fizycznej, która z konieczności jest w podręcznikach więcej zaniedbana, szczególniej w szkołach realnych, gdzie elementy rachunków wyższych mogą dać sposobność do głębszego ujęcia rzeczy, a z drugiej strony znaleźć dobre zastosowanie.

Ze zjawisk należących do optyki geometrycznej należy wziąć na uwagę w tej klasie zjawiska odbijania i załamania światła, przyczem przejście promieni przez pryzmat oraz zupełne odbicie wewnętrzne nastręczą cały szereg zagadnień bardzo ciekawych z dziedziny zastosowania pojęć geometrycznych. Zagadnienia te należy połączyć ze zjawiskami ściśle mechanicznemi, jakie np. spotykamy w grze bilardowej, wahadle zegarowem, zwykłej śrubie i t. p.

Zwolennicy teoretycznego oddzielenia matematyki od innych przedmiotów, ludzie bojący się, by matematyka nie stała się służebnicą innych gałęzi wiedzy, zapominają, że, łącząc ją z innemi przedmiotami w szkole średniej, największą przysługę oddają przedewszystkiem matematyce, która dzięki temu zrasta się głębiej z życiem psychicznem człowieka i tam zajmie miejsce wybitne, a nietylko w akademjach wśród innych specjalności. Staje się ona nie martwą doktryną, a żywem narzędziem badania przyrody. Ogromnej większości uczniów niedostępne jest jej piękno wewnętrzne, stanie się natomiast jasną potęga jej oddziaływania na faktyczne myślenie o zjawiskach otaczającego świata. Z drugiej strony samo rozwijanie myślenia funkcjonalnego będzie też martwą teorją, jeżeli nie złączy się z badaniem zależności zjawisk rzeczywistych. Przez matematykę stosowaną idzie się do czystej, a nie naodwrót. Jeżeli to zrozumiemy, upadnie cały szereg nieporozumień natury dydaktycznej.

Drugiem zadaniem programowem tego roku jest zakończenie właściwe planimetrji. Metoda proponowana tutaj, daleka jest od myśli, że można „skończyć planimetrję", jak to się zwykle w słownictwie programowem i praktyce utarło. Rozważania planimetryczne, zarówno uzupełniające jak pogłębiające dotychczasową wiedzę, będą miały i muszą mieć miejsce również w klasie 5-ej oraz później przy nauczaniu matematyki. Chodzi w danym razie o to, że w klasie 4-ej zakończymy z tej dziedziny główne rzeczy, należące do zwykłego kursu.

Rozszerzenie nauki o podobieństwie i proporcjonalności przedewszystkiem polega na uogólnieniu twierdzenia Pitagorasa, a więc wyprowadzenia wzoru: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$ oczywiście z początku w dwóch postaciach bez zastosowania funkcyj trygonometrycznych. Za nim następuje zaraz cały szereg wniosków dotyczących twierdzeń pokrewnych, a między innemi znany wzór Herona na pole trójkąta.

Przy zastosowaniu do zadań posługujemy się metodą geometryczną rozwiązania równania kwadratowego. Nie robimy tego ze względu li tylko na kurs algebry, gdzie równanie kwadratowe występuje dopiero w klasie 5-ej. Geometryczne rozwiązywanie równania kwadratowego, które poprzedza formułę analityczną jest ważnem ze względu metodycznego. Jest to metoda, która ma za sobą cały szereg poważnych argumentów. Z jednej strony wiemy z historji, iż matematycy greccy posługiwali się nią przy zagadnieniach drugiego stopnia, była więc ona czemś poprzedzającem w historji rozwoju myśli w tej dziedzinie. Z drugiej strony, dać ona może bardzo konkretne pojęcie o istocie równania kwadratowego, o własnościach pierwiastków, o jego znaczeniu. Wzór analityczny podany odrazu, jak to się zwykle dzieje, po pewnym szeregu przekształceń dla ucznia narazie niezrozumiałych, jest dobry, gdy chodzi o nauczenie rozwiązywania równań 2-go stopnia, nie zaś o odkrycie tego rozwiązania, o naturalny bieg ludzkiej myśli. Metoda geometryczna, stosowana uprzednio, pomoże do wyklarowania pewnych zasadniczych pojęć i przygotuje należyty grunt do rozwiązania zwykłego. Wszak wiemy dobrze, że formuły na rozwiązania nie są regułą w algebrze, lecz wyjątkami; czyż nie lepiej iść odrazu drogą może mniej uproszczoną, ale zato więcej pouczającą? Z drugiej strony każde dane liczebne równanie kwadratowe można usiłować rozwiązać bezpośrednio, do czego geometrja będzie bardzo pomocną. Będziemy mieli tu przykład pożytecznego spółdziałania dwóch dyscyplin matematycznych.

Rozwiązanie geometryczne można prowadzić różnemi drogami. Pierwszą drogą jest konstrukcja paraboli z równania:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Parabolę tę konstruujemy, jak zwykle, jako najpierw ciąg punktów, a następnie, przechodzącą przez te punkty, przybliżoną do kształtu jej, linję ciągłą. Linja ta przecina lub nie oś x ów i zależnie od tego otrzymujemy: dwa, jedno lub żadnego rozwiązania. To jest bezpośrednia, graficzna metoda. Rzecz jasna, że przekształcenie równania nie może tu mieć miejsca, gdyż rzecz sprowadziłaby się odrazu do sposobu analitycznego.

Druga droga polega na rozkładzie na czynniki i przedstawieniu równania w formie:

$$a(x - m)(x - n) = 0.$$

Droga ta jest dobrą dla równań prostych. Wiąże się ona bezpośrednio z kursem algebry w tej klasie.

Trzecią drogą jest konstrukcja geometryczna związana ze współczynnikami równania. Istnieje wiele sposobów tego rodzaju konstrukcyj.

Jedną z takich konstrukcyj, o ile wiem, dotąd nieużywanych, jest uprzednie przedstawienie danego równania w formie:

$$y = ax^2 + bx + c = u + v,$$

gdzie $u = ax^2 \ldots\ldots. (1)$

a $v = bx + c \ldots. (2).$

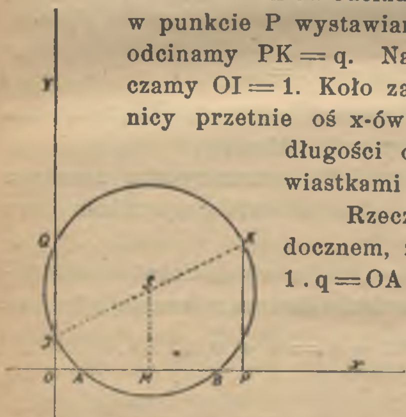
Jeżeli graficznie przedstawimy równania (1) i (2), to otrzymaną parabolę i prostą, która, jak wiadomo, jest styczną do paraboli rozwiązującej, o której tutaj nic nie mówimy, dzięki temu, że potrzebne jest do tego sztuczne przekształcenie.

Skoro $y = u + v = 0$

musi być $u = -v,$

t. j. rzędne punktów na danych linjach przy danem x muszą mieć znaki odwrotne. Należy więc znaleźć symetryczną dla prostej: $v = bx + c$ i odszukać jej przecięcia z parabolą. Odcięte przecięć tych punktów będą pierwiastkami równania, jak to natychmiast jest widocznem. Rzecz jasna, że przy tem rozwiązaniu, a dlatego właśnie jest ono wygodnem, wystarczy mieć szablon paraboli z celuloidy: $y = x^2$. Skoro to posiadamy, metodą konturów szukamy przecięcia prostej z parabolą symetryczną do danej. Czytelnik widzi, że niespodziewanie metodą graficzną, nawet bez potrzeby wykreślania linij krzywych, znajdziemy żądane rozwiązanie. Przy tym sposobie uczeń spotyka się z faktem, mówiącym mu, że postać: $x^2 + px + q = 0$ jest wygodniejszą do rozwiązania.

Następnym elementem programu będą odcinki proporcjonalne w kole, a więc własności stycznej i siecznych, twierdzenie Plotomeusza. Rzeczy te odrazu można zastosować do nowego sposobu rozwiązywania równania kwadratowego.


Rys. 2.

Na osi x-ów odcinamy (Rys. 2) odcinek $OP = -p$, w punkcie P wystawiamy prostopadłą PK, na której odcinamy $PK = q$. Następnie na osi y-ów odznaczamy $OI = 1$. Koło zakreślone na IK jak na średnicy przetnie oś x-ów w punktach A i B tak, że długości odcinków OA i OB są pierwiastkami równania: $x^2 + px + q = 0$.

Rzeczywiście, natychmiast jest widocznem, że: $OI \cdot OQ = OA \cdot OB$, więc $1 \cdot q = OA \cdot (OP - BP) = OA(-p - OA)$, a stąd $-OAp - OA^2 = q$ czyli $OA^2 + OAp + q = 0$, t. j.: OA jest pierwiastkiem równania. To samo zrobimy względem OB. Jest to sposób d'Ocagne'a. Rzecz jasna, że zarówno w tym przypadku, jak w poprzednim, można geometrycznie prowadzić dyskusję rozwiązania w zależności od danych p i q. Z drugiej strony, jeżeli poprowadzimy prostopadłą SM, z łatwością zauważymy, że:

$$OA \cdot OB = q = \left(-\frac{p}{2} - AM\right)\left(-\frac{p}{2} + AM\right) = \frac{p^2}{4} - AM^2.$$

$$\text{Stąd } AM^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

$$\text{Lecz } AM = -\frac{p}{2} - x, \text{ więc } \left(\frac{p}{2} + x\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q.$$

W jaki sposób otrzymana została ta równość z danego równania? Oczywiście po podniesieniu do kwadratu uczniowie spostrzegą sposób przekształcenia i mogą dalej stosować go w przykładach liczebnych.

Z tego wynika, że zadania, w których spotykamy się z liczebnem równaniem kwadratowem nie są dla nas straszne. Damy sobie z niemi radę różnemi metodami, później zaś w klasie 5-ej damy d o b r ą teorję równania kwadratowego, teorję ścisłą, matematyczną. Teraz przed nami staje inne zadanie, powiedzmy odrazu, niezwykłe, bo dotąd nieuprawiane. Uważamy, mianowicie, za potrzebne wprowadzenie funkcyj trygonometrycznych w klasie 4-ej. Nie chodzi nam znowu o potrzeby teoretyczne wyłącznie, mamy na względzie podtrzymywanie uwagi ucznia w napięciu, oraz ciągłe budzenie jego zainteresowania przez zastosowanie praktyczne i coraz nowe zakresy zagadnień, dzięki którym naprawdę może rozszerzyć się jego horyzont myślowy. Funkcje trygonometryczne natychmiast znajdą zastosowanie w optyce, przy obliczaniu obwodu i pola koła, oraz w szeregu zadań praktycznych. Nie mamy zamiaru wprowadzać tu wykładu trygonometrji, jak to zwykle ludzie poczciwi rozumieją. Trygonometrja jest jedną z części geometrji, a zasadnicze jej pojęcia niekoniecznie mają przywilej na klasy wyższe, według utartego szufladkowania. Nauka jest rzeczą żywą i nie lubi ani też zależy od naszych programowych zwyczajów. Gdyby rzeczy te przekraczały zasoby sił umysłowych uczni, gdyby były tak trudne, że uczeń klasy 4-ej, któremu mówimy o pewnikach i twierdzeniach, któremu dajemy niby to ścisłe, w próżnię idące, dowody, nie mógł tego zrozumieć, rzecz jasna, nie byłoby o czem mówić. On jednakże to zrozumie i przy pomocy tablic wielkości naturalnych będzie rozwiązywał cały szereg żywych, pouczających zadań, które go wprowadzą do nowej sfery badania, dadzą mu czyste, głębokie tchnienie nauki, t. j. tej rzeczy, której naszym uczniom ogromnie skąpimy.

Zaczynamy od rozważania trójkąta prostokątnego, wskazujemy na zależność między bokami a kątami, bierzemy na uwagę różne trójkąty prostokątne podobne sobie i konstatujemy, że dla nich zawsze stosunek przyprostokątnej do odpowiedniej przeciwprostokątnej jest wielkością stałą. Wprowadzamy nazwy: sinus i cosinus. Badamy te stosunki przy różnych wielkościach kątów. Ponieważ lepiej jest badać pewną wielkość, gdy ona zależy od mniejszej liczby zmiennych, umawiamy się, że mianowniki stosunków będziemy brali zawsze te same. Od tego istota rzeczy się nie zmieni. Przechodzimy w ten sposób do koła. Badanie odbywa się w pierwszej ćwiartce. Z łatwością spostrzegamy, że sinnus przy wzrastaniu kąta rośnie, cosinus — maleje. Wzrost ten jednakże nie jest wzrostem proporcjonalnym; wskazujemy to na przypadkach, gdzie kąt zmierzymy przenośnikiem a sinus i cosinus mierzeniem. Z drugiej strony z łatwością udowodnimy, że zawsze $\sin 2\alpha < 2 \sin \alpha$. Dowód zapomocą prostej konstrukcji geometrycznej. Wprowadzamy tablice wielkości naturalnych i wykreślamy łuk sinusoidy oraz cosinusoidy, co jeszcze raz nas przekonywa, że nie mamy tu do czynienia ze zmiennością proporcjonalną.

Prostą, bezpośrednią drogą dochodzimy do głównych zależności w trójkącie prostokątnym, potem do twierdzenia sinusów w trójkącie ostrokątnym. Można się na tem zatrzymać, gdyż już teraz otwarte jest szerokie pole zastosowania, można jednakże, wobec znajomości budowy układu spółrzędnych Descartesa, pójść dalej i przebiec całe 4 ćwiartki. Przytem rozszerzeniu należy mieć na widoku to, że określenia funkcyj dla każdej ćwiartki są pewnemi umowami, które czynimy ze względu na potrzebę praktyczną i znaczenie funkcji. Tu pierwszy raz uczeń poznaje uogólnienie kąta zarówno w przypadku kąta równego 0, jak 180^0 lub 360^0. Najważniejszą rzeczą jednakże jest ćwiartka pierwsza. Prawa załamania światła, zadania z miernictwa, równia pochyła, wahadło zegara — wszystko to są rzeczy, gdzie znajdą swe zastosowanie funkje trygonometryczne. Wahadło zegara, przy odpowiednim, znanym sposobie doświadczenia z przesuwającą się białą kartką, może dać przykład sinusoidy.

Jednem z ważniejszych wewnętrznych zastosowań jest obliczanie obwodów i pól wielokątów foremnych, obliczenie π z większą dokładnością, a tem samem obwodu i pola koła. Tutaj uczniowie pierwszy raz mogą się spotkać z dwoma ciągami cantorowskiemi liczb, pierwszy raz w umyśle ich może powstać pojęcie granicy, jakkolwiek nauczyciel nie może i nie powinien w te rzeczy głębiej wchodzić.

Oto mamy przed sobą w krótkości cały obraz kursu klasy 4-ej. Możemy go uzupełnić jeszcze kilkoma uwagami.

Czy rysunek techniczny przestaje istnieć? Żadną miarą. Nauczyciel daje uczniom od czasu do czasu do wykreślenia pewne modele, na co poświęcić trzeba miesiąc w ciągu jednego półrocza. To samo dotyczy planów zdjęć, z tą tylko różnicą, że rzeczy te wykonywane są w domu. Rzecz jasna, że można to samo robić z rysunkiem technicznym, o ile szkoła posiada bogatszy zasób modeli. Nie chodzi o wielkość wykreśleń, jak to już nadmieniliśmy, lecz o ich jakość. Dwa dobre rysunki w ciągu roku wystarczą. To samo z planami. Po wymierzeniu danego kawałka gruntu i otrzymaniu odnośnych danych, uczniowie wykończają pracę w domu. Rzeczy te tracą jednakże swoją wartość, gdyż wyobraźnia geometryczna uczniów, wprawa w kreśleniu, umiejętność obchodzenia się z narzędziami, a zarazem zasób wiedzy, są już tak znaczne, przynajmniej powinny być tak znaczne, że dalsze ćwiczenia mają wartość li tylko dla specjalistów.

Wykreślanie krzywych nie powinno się ograniczyć tylko do paraboli i sinusoidy. Jedną z bardzo ważnych krzywych jest cykloida. Wykreślanie jej może być robione zapomocą odkładania odpowiednich długości łuków obliczonych przy pośrednictwie wzoru:

$$S = \frac{\pi \, . \, r \, . \, \alpha}{180}$$

Kurs powyższy, skoro w nim nauczyciel będzie się starał możliwie często odwoływać się już nie do doświadczenia bezpośredniego, lecz do rozsądku uczniów, niewątpliwie potrafi wzbudzić w nich przekonanie, że prawdy geometrji mogą być badane rozumowo. Uczeń tej klasy może już sobie zdawać sprawę z tego, że linja geometryczna jest czemś innem, niż znak pozostawiony przez ołówek lub kredę, że znak ten może być cieńszym lub grubszym, że im więcej jest znikomy, tem dokładniejsze jest wykonanie. Przychodzi on powoli do uświadomienia sobie idealnej budowy właściwych utworów geometrji. Na te rzeczy nauczyciel od czasu do czasu winien uwagę uczniów zwracać, a nawet przy sposobności potrącić sprawę różnicy pojęć i wyobrażeń w psychologji. Oczywiście wyzwolenie się z objęć konkretu i tu jest jeszcze niemożliwe, jak nie będzie możliwe również w klasie 5-ej, ale uczniowie posunęli się już daleko naprzód i zbliża się ta chwila, kiedy można będzie przedstawić im ścisły kurs nauki.

Pozostała nam z kursu propedeutycznego jeszcze klasa 5-ta. Właściwie nie należy ona do tego kursu nauczania, któremu poświęcona jest książka niniejsza. Wobec tego jednakże, że wypada z samego toku naszego rozumowania dać mu naturalne zakończenie, poświęcimy nauczaniu w klasie 5-ej kilka uwag.

Głównym przedmiotem programu tej klasy jest zakończenie stereometrji, wprowadzenia elementów geometrji wykreślnej, pewne uzupełnienia z planimetrji oraz dodatkowe wiadomości z geometrji rzutowej.

W stereometrji występuje nauka o wielościanach. Nic nie stoi na przeszkodzie do traktowania tej rzeczy metodą zwykle w podręcznikach używaną. Rzecz jasna jednakże, że używanie modelów odpowiednich jest nietylko pożyteczne, lecz niezbędne. Przy obliczaniu objętości ostrosłupa uczniowie spotykają się z procesem podobnym do wyznaczenia liczby niewymiernej. Należy to potraktować już z odpowiednią precyzją. To samo dotyczy objętości innych brył. Przed rozpoczęciem nauki o bryłach obrotowych, zwykle w szkole używanych, należy powrócić do rozważań planimetrycznych i wyprowadzić zapomocą tej metody (u nas spopularyzowanej dzięki przekładowi książki Enriquesa i Amaldiego), objętość ostrosłupa, długość obwodu i powierzchnię koła. Po takim wstępie, obliczenia objętości tych brył nie są trudne. Weźmy jeden z podobnych przykładów i obliczmy, dajmy na to, objętość stożka o wysokości h a podstawie πR^2.

Wpisujemy i opisujemy na stożku ostrosłupy foremne. Będziemy podwajali stale liczbę boków ich podstaw. Niech objętości tych ostrosłupów tworzą dwa ciągi:

$$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \ldots$$

$$V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n \ldots$$

Wskazujemy, że pierwszy ciąg jest rosnący, gdyż:

$$v_k = \frac{p_k \cdot h}{3},$$

a p_k, t. j. pole podstawy ostrosłupa opisanego stale wzrasta.

Drugi ciąg jest malejący, bo:

$$V_k = \frac{P_k \cdot h}{3},$$

a P_k, t. j. pole podstawy ostrosłupa opisanego stale maleje.

Przekonywamy się dalej, że zawsze każde $V_k > v_k$, a następnie, że różnica:

$$V_k - v_k = \frac{h}{3}(P_k - p_k)$$

może być tak małą, jak tylko zechcemy. Wiemy, że słuszne to jest względem różnicy: $P_k - p_k$, która może być mniejszą od dowolnie małej naprzód zadanej liczby, czyli:

$$P_k - p_k < \frac{3\varepsilon}{h},$$

gdzie ε jest ową liczbą. W takim razie $V_k - v_k < \varepsilon$.

Stąd wnioskujemy, że ciągi powyższe wyznaczają pewną objętość, która jest większą od wszystkich objętości pierwszego ciągu, a mniejszą — od objętości drugiego. Oznaczmy tę objętość przez V.

Mamy więc:

$$\frac{p_k \cdot h}{3} < V < \frac{P_k \cdot h}{3}$$

Z drugiej strony z rozważań o kole wiemy, że:

$$p_k < \pi R^2 < P_k,$$

stąd $$\frac{p_k \cdot h}{3} < \frac{\pi R^2 \cdot h}{3} < \frac{P_k \cdot h}{3}.$$

Liczby V i $\frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$ są wyznaczone przez te same ciągi. Z tego wynika, że są sobie równe.

Nieco więcej skomplikowaną rzeczą jest obliczanie powierzchni i objętości kuli, nie przedstawia jednakże wielkich trudności. Nie można nauczycielowi zakazać wyprowadzania tych rzeczy sposobem więcej konkretnym, należy jednakże sądzić, że w klasie 5-ej można już sobie pozwolić na rozumowanie więcej zbliżone do ścisłego dowodu matematycznego.

Nauka o bryłach daje szerokie pole do zadań. Jednym z takich zakresów bardzo odpowiednich jest dział optyki w odbijaniu się światła od luster wypukłych i wklęsłych, o soczewkach i przyrządach optycznych. Przy sposobności nauczyciel tu może znowu uzupełnić wiadomości z planimetrji przez wprowadzenie pojęcia o podziale harmonicznym czyli o 4-ch punktach harmonicznych.

Naukę stereometrji winniśmy złączyć z geometrją wykreślną. Potrzebne jest z tego bardzo niewiele. Chodzi głównie o wykreślenie rzutów w najważniejszych przypadkach wzajemnego położenia prostych i płaszczyzn, a następnie prostych przecięć znanych brył. Rzecz ta wymaga sporo czasu, a dlatego można ją rekomendować tylko w oddziale realnym szkoły średniej, tak samo jak w klasie czwartej w tejże szkole polecić większą dozę rysunku technicznego i wykreślania planów. Udzielenie 3-ch godzin na geometrję w klasie 4-ej i 5-ej w szkole realnej jest rzeczą niezbędną.

Przy geometrji wykreślnej, szczególniej w przypadku rysowania przecięć brył, nastręcza się sposobność zastosowania twierdzenia Desarguesa, przyczem wspomniany powyżej model jest potrzebny. Z tego twierdzenia, które jest podstawą kolineacji, można wprowadzić znaczne uproszczenia przy wykreślaniu.

W ten sposób przedstawia się ze strony materjalnej zakres kursu klasy piątej. Uczniowie przeszli cały urzędowy kurs geometrji, pozostaje tylko wprowadzić w posiadane wiadomości więcej wewnętrznego ładu i porządku. Jest to przeznaczeniem klasy 6-ej, o której w końcu kilka słów powiemy. Cały kurs powyższy jest kursem propedeutycznym. Jakie z takiego kursu osiągnęliśmy korzyści?

Nie będziemy mówili o wiedzy zdobytej. Jest ona niewątpliwie większa, niż zwykle, co najważniejsza jednakże, jest ona więcej realna. Ta jej realność, to jasne uświadomienie sobie wartości praktycznej tej wiedzy, stanowi nabytek niezmiernie cenny. Z drugiej strony uczeń otrzymał należyte przygotowanie do tego, by pojęcia geometryczne przestały być dla niego w wykładzie ścisłym pustym dźwiękiem, albo rzeczą zgoła nieprzystępną.

W klasie 6-ej zjawia się możność skorzystania z tego przygotowania. Tutaj należy, obok przerobienia zadań, i w szkole realnej obok kontynuowania geometrji wykreślnej, dać uczniom ścisły wykład nauki, przegląd całego kursu, systematyczne ujęcie rzeczy. Ponieważ celem głównym nie są prawdy wiedzy, lecz jej duch, więc w wykładzie tym nie powinno chodzić o obfitość materjału. Trzeba dać rzeczy najgłówniejsze, pominąć wszelkie szczegóły, a natomiast zwrócić uwagę na to, by samo przedstawienie nie pozostawiało nic do życzenia pod względem ścisłości. Doświadczenie poucza, że to jest możliwe. Najlepszą formą takiego wykładu wydaje mi się być skrócona i nieco zmodyfikowana książka Halsteda, o której poprzednio wspominaliśmy. System pewników Hilberta należy podać, w miarę ich potrzeby w całości, należy dać również wyjaśnienie co do metody aksjomatycznej. Wyjaśnienia te nie będą zbyt niedostępne i trudne. Wszak tak łatwo wykazać całą nieścisłość naszych początkowych określeń w nauce geometrji. Podobny kurs geometrji, poza swoją wartością dla tej nauki, da nam dobre przygotowanie do wprowadzenia rachunków wyższych, które dotąd stanowią przedmiot namysłu dla ludzi zajmujących się dydaktyką. Niewątpliwie wykład tych rachunków nie może być podany inaczej, jak w formie propedeutycznej. Swoją drogą, nawet w tej postaci, wymaga on sporego rozwoju umysłowego, którego nasi uczniowie dzięki bezładnemu i nieplanowemu nauczaniu nie posiadają. Porządny kurs geometrji ułatwi też wprowadzenie należyte geometrji analitycznej, jednym słowem stać się winien podstawą dalszego nauczania matematyki.

Przeglądając jednym rzutem oka całość powyżej zakreślonej drogi, musimy tu nadmienić, że przedstawia się ona w postaci szkicu. Chodziło nam o rzeczy główne, o narysowanie w głównych linjach tego programu nauczania, jaki autorowi książeczki niniejszej wydaje się słusznym. Brakujące rzeczy nauczyciel uzupełni sam, wszak tworzymy rzecz nową, a taka twórczość niemożliwą jest dla jednego człowieka, wymaga całego zespołu pracowników i czasu. Wolno jednakże myśleć, że obrana droga narysowana jest dość jasno, by kroczenie po niej, wyrównanie jej i udoskonalenie stało się rzeczą możliwą.

Na tych uwagach musimy zakończyć opis metody nauczania. Czytelnik z łatwością spostrzeże, że najgłówniejszą rolę odgrywa u nas wspomniana powyżej metoda korelacji, że jednakże udzieliliśmy każdej ze wspomnianych metod miejsce jej właściwe, a cały sposób przedstawienia wynika konsekwentnie z zasad rozwiniętych w pierwszych rozdziałach.

Pozostaje nam jeszcze kilka słów powiedzieć o samem prowadzeniu lekcyj geometrji. Jest to treścią następnego rozdziału.

ROZDZIAŁ VIII.

W rozdziale niniejszym zajmiemy się jeszcze kilkoma kwestjami związanemi zarówno z samą techniką prowadzenia nauczania, jak z przygotowaniem nauczycieli.

Poza ogólnemi właściwościami wykładu dalszego, wykład geometrji posiada jeszcze specjalne cechy, które zasługują na uwagę.

Nauczyciel geometrji musi być dobrym rysownikiem, dobrze kreślić zarówno na papierze, jak na tablicy. Jest to *conditio sine qua non*. Nauczyciel przemawia do uczniów żywem słowem na każdym wykładzie, ale na wykładzie geometrji niewolno mówić tylko słowami. Każda rzecz musi być w odpowiedni sposób ilustrowana. Dla klas początkowych osobliwie ogromną rolę odgrywa możliwa dokładność rysowanych form, bo w tej dokładności tkwi siła przekonywania uczniów. Każda nazwa jakiejkolwiek formy geometrycznej u nauczyciela winna wywołać zaraz odruch rysunkowy. Pod tym względem bardzo szwankujemy wszyscy, niewątpliwie jednakże ćwiczenia i praca nad sobą mogą ogromnie pomóc. Autor niniejszej książki poświęcił setki godzin na ćwiczenia domowe (na tablicy). Przed każdym wykładem stereometrji szczególniej geometrji wykreślnej wykonywał szereg prób doboru odpowiedniego rozkładu stosowanych form geometrycznych, aby osiągnąć maksimum jasności. Uczniowie później nie chcieli ścierać rysunków wykonanych na tablicy w czasie niedługim, w toku omawiania kwestji, szczególniej takich, w których zastosowane były kredki różnokolorowe. Rysunek musi się wrazić w pamięć nie jako niewolniczy schemat do przyczepienia myślenia, lecz jako jasny, wyrazisty kształt wyobrażeniowy.

Wyobraźnia pracuje tak jak myśl. Najpierw przyczepia się do określonego przypadku z danej dziedziny, a później dzięki jasności ujęcia rzeczy, dzięki zbogacaniu się w różnych kierunkach może modyfikować wewnętrznie kształt, może tworzyć. Twórczość musi być zapłodniona i przytem im lepiej, tem więcej jest intensywna. Nie bójmy się niewolniczego naśladowania. Ci co nie będą zdolni do twórczości, otrzymają przynajmniej jedno jasne wyobrażenie, dla innych będzie ono podstawą do dalszej wewnętrznej pracy wyobrażeniowej. Każdy otrzyma coś, gdy nauczyciel da podstawę.

Ważną rzeczą jest przy rysowaniu należyte uwypuklenie charakterystycznych, głównych momentów. Dobry rysownik—nauczyciel potrafi przez odpowiednie modyfikacje szybko wykonywanych, ale pomimo to dokładnych rysunków, podpowiedzieć konstrukcję pomocniczą, która nieraz tyle trudności uczniom sprawia. Dobry rysunek nietylko zależy od wprawy, w bardzo znacznym stopniu odgrywa w nim rolę umiejętność. Wogóle mało zdajemy sobie sprawę, na jakiej zasadzie to lub inne odwzorowanie bryły ma tę właśnie bryłę przedstawiać. Zwykle w podręcznikach używane metody opierają się na t. zw. rysunku w rzutach równoległych ukośnych, inaczej mówiąc, są to jakby cienie przedmiotów, wytwarzane pod wpływem promieni słońca. Uczniowie winni być wcześniej w tych rzeczach uświadomieni. Dlatego to przy każdej sposobności na tę sprawę zwracaliśmy powyżej uwagę. Przedewszystkiem jednakże musi być uświadomiony nauczyciel, który winien w tym kierunku odbyć, wprawdzie niedługie i nietrudne, studja. Niewolno mu, jak się często zdarza, rysować w podstawie walca dwóch przecinających się łuków. W podstawie jest elipsa (o której zwykły program milczy) i elipsę trzeba rysować. Wskazane jest przytem używanie umiejętne linij ciągłych i kropkowanych, skoro rysunek wykonywany jest jedną barwą. Uwypukla to płaskie odwzorowanie i czyni je więcej podobnem do odwzorowania bryły, a z drugiej strony pomaga do orjentacji w rysunku. Dość przypatrzyć się na egzaminach, jak rysują nasi uczniowie, aby stąd wywnioskować, jak mało nauczyciele zwracają na te rzeczy uwagi. A przecież tu chodzi o język geometrji, o najważniejszy środek porozumiewawczy. Proces myślenia u dziecka i u ucznia szkoły średniej nie jest jeszcze na tyle samodzielnym, aby mógł się odbywać niezależnie od rysunku, albo przyczepić się do byle jakiego odwzorowania. Gdy się zajrzy do klas wykładowych w czasie lekcji geometrji, podziwiać można przeraźliwe koszlony, które mają reprezentować idealne formy geometryczne. Póki w tej dziedzinie nie będzie porządku i ładu, próżno będziemy mówili o nauczaniu geometrji.

Drugą rzeczą wielkiej wagi jest umiejętność obchodzenia się nauczyciela z przyrządami mierniczemi, oraz osobista jego wprawa w dziedzinie robót ręcznych. Gdybyśmy dzisiaj zechcieli przeegzaminować naszych nauczycieli geometrji w tym kierunku, otrzymalibyśmy jako rezultat smutny—zupełne w tej dziedzinie zaniedbanie. Często uczą geometrji ludzie, którzy wyobrażenia nie mają o jej zastosowaniu. Dlatego też przy kształceniu nauczycieli matematyki zwracać należy uwagę nie tylko na modną dziś teorję mnogości i jej zastosowania, lecz, i to przedewszystkiem, na zastosowaniu nauki w miernictwie i technice. W szkole ogólno kształcącej uczymy podziwiać wytwory ducha ludzkiego w literaturze pięknej, nie zwracamy natomiast uwagi na takież wytwory w dziedzinie technicznej. Zdobycze te są dziś znamieniem epoki, są czemś tak ważnem dla zrozumienia dziejów wieku XIX-go i początków XX-go, że musi to być integralną częścią ogólnego wykształcenia. Dziś widzimy, że myśl Leonarda de Vinci realizuje się w dziedzinie lotnictwa, dziś wszystkie główne żywioły przyrody podporządkowują się woli człowieka w bardzo znacznym stopniu. Gdzież to może być uczniom wskazane, jeżeli nie przy wykładzie takiej nauki, jak geometrja. Nauczyciel musi być obznajmiony z miernictwem i techniką. Gdybyśmy zaczęli badać modele techniczne, np. tkackie, znaleźlibyśmy tam ogromne pole do rozważań geometrycznych.

Wprawa w pracy ręcznej, umiejętność obchodzenia się z narzędziami zwykłemi nie powinna być obcą nauczycielowi geometrji. Wynika to z samej istoty bronionej tu metody. Nauczyciel geometrji musi zostawić scholastyce swą wyłączność matematyczną, swe splendid isolation, musi on rozumieć, że jest nauczycielem umiejętności stosowanej, że dzięki niej podniesie umysł ucznia do tych wyżyn, na których zjawia się czysta nauka. Na tych wyżynach za rzadkie jest powietrze dla młodocianych płuc, nie można tam dzieci prowadzić ze względu na samą higjenę wartości duchowych. Umysł wyrobiony wymaga silnej woli, a wola dziecka tak samo jak i wola ludzkości ćwiczy się przez zetknięcie ze światem zewnętrznym. Z tej wyprawy po złote runo wraca dopiero człowiek do siebie, wraca powoli, stopniowo aż do ostatniej godziny życia.

Trzecią rzeczą, na którą trzeba zwrócić uwagę jest samo urządzenie klasy. U nas klasy niższe i wyższe niczem się prawie nie różnią prócz wielkości ławek szkolnych, a przecież otoczenie jest odbiciem sposobu pracy. Zacisze książnicy jest czemś innem, niż hałas warsztatu. Człowiek pracuje w każdem z tych miejsc, ale pracuje inaczej i dlatego otoczenie jest odmienne. Czyż uczeń klasy niższej pracuje tak samo, jak siódmoklasista? Czyż jakość tej pracy jest ta sama? Chyba każdy cokolwiek z psychologją dzieciństwa obeznany, każdy kto zdaje sobie sprawę z różnic poznawania, zależnych od stopnia rozwoju człowieka, zrozumie, że szkoła grzeszy w tym kierunku, stosując szablon ogólny. Głośną jest t. zw. laboratory method, metoda laboratyjna, którą nowatorzy pragną zastąpić suche książkowe nauczanie. Rozumiana jako przeciwstawienie zwykłemu sposobowi nauczania, może być ona jednostronną, tak samo, jak t. zw. metoda książkowa lub nawet w lepszym razie „tall and show method", jak mówią Anglicy. Uczenie się z książki jest dziełem dojrzalszego umysłu i zadaniem szkoły jest nauczyć, jak można się uczyć z książki, naturalną jednakże drogą w tym kierunku jest uczenie się z poznawania rzeczy. Im młodsza jest klasa, tem więcej jej wygląd powinien się zbliżać do laboratorjum. Nauczanie geometrji bez takiego otoczenia, z samą kredą i tablicą jest bezcelowem wałkowaniem pustych frazesów o formie. Słusznem jest zdanie p. T. P. Nunna *), który powiada: „Najważniejszą zdobyczą bohaterów wiedzy dla kultury ludzkości nie jest metoda naukowa, lecz żywot człowieka nauki". Zadaniem naszem zgodnie z tym celem jest nie tyle uczenie metody naukowej, ile metody życia naukowego. Wszak „życie naukowe" jest podstawą naukowej metody. Badacz stwarza dokoła siebie atmosferę specjalną, odpowiednie

*) The New Teaching. Ed. by J. Adams. Stron. 160. 1919. W książce tej czytelnik znajdzie dobre rozprawy o nauczaniu matematyki, nauk przyrodniczych, pracy ręcznej i rysunku.

otoczenie, stwarza siłą swojej miłości do prawdy, oraz pragnienia jej poznania. Szkoła jako świątynia nauki musi owo życie naukowe kultywować, musi dzieci wprowadzać w atmosferę i otoczenie, które sprzyjałoby siłą rzeczy, siłą wpływu zewnętrznego tworzeniu się duszy, która szczerze szuka prawdy. Takie nauczanie będzie wielką dźwignią wychowawczą. Stąd ważnem jest, by konstrukcja otoczenia odpowiadała charakterowi pracy duchowej człowieka, stąd klasa wstępna musi mieć odmienne piętno, pewne określone znamiona właściwe i odpowiadające zasadniczej metodzie uczenia. Tam, gdzie geometrja jest w ciągłej styczności z rzeczami, muszą być pod ręką wszelkie potrzebne rzeczy, inaczej winny być urządzone ławki, w klasie na pogotowiu winny być potrzebne modele, jednem słowem klasa musi mieć wygląd więcej zbliżony do pracowni. Dotyczy to w całej rozciągłości szkoły elementarnej.

Czwartą kwestją, o której nadmienić tu trzeba, jest zaopatrzenie szkół w odpowiednie modele. Stereotypowe bryły ciągle spotykamy w szafach szkolnych. Bryły te często są zrobione przez samych uczniów, a tak rzadko widzimy modele wykonane przez nauczyciela. Jest to brak poważny. Nauczyciel, który pragnie ożywić i uprzystępnić swoje nauczanie, winien się starać o odpowiedni dobór środków pomocniczych i sam w tym kierunku pracować. Dobre pomysły modeli powinny wychodzić właśnie ze szkół, od nauczycieli, a rzeczy osobliwie dobre, wybitne, muszą się stać własnością ogółu szkolnictwa dzięki temu, że odpowiednie firmy przemysłowe podejmą się masowej ich produkcji. Jeżeli widzimy w tej dziedzinie duży zastój, niewątpliwie przyczyną jest brak inicjatywy ze strony nauczycielstwa. Ministerstwo Oświecenia napewno poprze pracę i starania w tym kierunku, a dobry model, tak samo jak dobra książka, stać się może źródłem podtrzymania materjalnego dla nauczyciela. Koledzy nasi na Zachodzie tę rzecz umieją wyzyskać zarówno dla dobra szkoły, jak własnego zadowolenia moralnego i korzyści. Nauczycielstwo tworzy dziś naszą literaturę podręcznikową, niechże zajmie się również twórczością w tej dziedzinie, która dotąd jest zupełnie zaniedbana.

Już nadmienialiśmy wyżej, że wycieczki szkolne nie tylko poświęcone być muszą grom i zabawom, zwiedzaniu oraz celom przyrodniczym, lecz w równym stopniu celom nauczania geometrji. Wrócimy w ten sposób do naszych dawnych tradycyj. Zarówno w szkołach Komisji Edukacyjnej, jak w okresie późniejszym za czasów Izby Edukacyjnej miernictwo przy wykładzie geometrji wielkie miało znaczenie. Jeden z bardzo popularnych podręczników francuskich z pierwszej połowy wieku XIX go, a mianowicie Geometrja Clairaut, oparty był cały na zasadzie mierniczej. Podręcznik ten był znany w Polsce w przekładzie i oryginale. Później nauczanie zaniedbało tej drogi z powodów zmniejszania się wpływów polskich w nauce i szkolnictwie. Dziś wpływ decydujący mamy, a więc wróćmy do dawnej tradycji. Temu chyba nic nie stoi na przeszkodzie prócz rutyny.

W wielu szkołach prowadzimy już pracę ręczną. Praca ta ma często charakter rzemiosła, gdy tymczasem musi ona mieć cechę pedagogiczną. Wprawa rzemieślnicza przyjdzie sama, nie należy natomiast nigdy opuszczać z pola widzenia głównego celu, który polega na systematycznem zastosowaniu zasady poglądowości do różnych działów nauczania oraz zbogaceniu odpowiedniem doświadczeniem uczniów. Nauczanie geometrji początkowej może i powinno osiągnąć wielki rezultat, jeżeli zrozumiemy, że celem zrobienia pudełka nie jest pudełko samo, lecz cały szereg spostrzeżeń, sprawności, elementów pojęciowych i psycho-fizjologicznych, które temu zrobieniu towarzyszą i są przezeń wymagane. Gabinet fizyczny szkoły średniej winien być gabinetem fizyko-matematycznym, miejscem, gdzie uczniowie mogą stwierdzać nie tylko prawa fizyczne-materjalnej przyrody, lecz również zależności geometryczne i matematyczne wogóle. Nauczanie fizyki, mineralogji i matematyki winny przenikać się wzajemnie. Jest to warunek sine qua non dobrego postępu nauczania w szkole. Matematyk, izolujący się od tych przedmiotów, przedewszystkiem nie jest pedagogiem, a następnie nie rozumie związku organicznego umiejętności jako podstawy wiecznej, jako wyrazu ducha nauki, który chcemy upostaciować w formie takich instytucyj jak uniwersytet lub akademja umiejętności.

Nauczyciel geometrji, który chce przygotować się należycie do swej pracy, winien główną uwagę zwrócić na podstawy tej nauki. Nie należy tego rozumieć w tem znaczeniu, że winien on poznać, przestudjować gruntownie jeden system geometrji, który uważany jest w danej chwili za wyraz ostatni naukowej myśli. Podstawy geometrji należy studjować zarówno ze stanowiska historycznego, jak filozoficznego. Takie rzeczy, jak same Elementy Euklidesa, rozprawy Tartaglji, Cavalieriego, Saccheriego, Gaussa, Łobaczewskiego, Riemanna, Helmholza i t. p. nie powinny mu być żadną miarą obce, tak samo jak dzieła filozoficzne Poincarego, Enriquesa, Kanta i innych. Nauczanie wiąże się bezpośrednio z faktycznym procesem poznawania, a tem samem ze znajomością i uświadomieniem tegoż, więc z jednem z głównych zagadnień filozofji. Z drugiej strony nie powinna mu być obca psychologja genetyczna, psychologja dziecka i wogóle rozwijającego się człowieka.

W tym celu należy w odpowiedni sposób ukształtować nauczanie w szkołach przygotowujących nauczycieli. Gruntowna wiedza każdemu jest potrzebna, ważna jest ona dla nauczyciela tak samo jak dla specjalisty, musimy jednakże zawsze mieć na widoku specjalne zadanie naszego fachu: nam nie tylko umieć potrzeba, lecz być zdolnymi nauczyć innych, zapalić w nich święty ogień dążenia do prawdy i poznania. Drugą zasadniczą rzeczą dla nauczyciela jest w dziedzinie przygotowania naukowego znajomość możliwie gruntowna nauk pokrewnych. Musimy dążyć do tego, by w szkole możliwie skupiać w rękach jednego człowieka pokrewne dziedziny nauczania. Dziś pleni się w szkolnictwie średniem szkodliwa specjalizacja, z którą należy rozpocząć systematyczną walkę, przedewszystkiem przygotowując nową generację nauczycieli, którzy tej wady posiadać nie będą. Rzecz jasna, że uświadomienie tej sprawy śród obecnie nauczających i pobudzenie do samokształcenia również nie powinno być zaniedbane. Nauczyciel matematyki dobrze powinien wykładać fizykę i kosmografję, jak i naodwrót. Póki rzecz ta nie stanie się faktem, nie osiągniemy pożądanego celu: dobrego nauczania przedmiotów matematycznych w szkole.

Niejednemu może się zdawać, że przedstawiony powyżej rozkład materjału naukowego posługuje się metodą koncentryczną. Byłby to błąd wielki. Jest to metoda genetyczna, oparta na zasadzie indukcji. Tak samo jak każdy proces indukcyjny wtedy tylko ma wartość, gdy posiada naturalne zakończenie, tak też nauczanie geometrji ostatecznie prowadzi do kursu zwartego, ścisłego, gdzie w formie systematycznej ujęte są główne prawdy nauki. Geometrja jest może jedynym przedmiotem w nauczaniu szkolnem, gdzie ten proces może być rozwinięty w całości. Stąd jej ogromne znaczenie dydaktyczne, stąd też potrzeba dobrego zrozumienia tej rzeczy przez nauczyciela. Ani w nauce języka, ani historji, a tem bardziej nauk przyrodniczych do tego zwykle nie dochodzimy. Wypływa to albo z natury samych przedmiotów albo też z niemożliwości wykonania na terenie szkoły średniej. Języki klasyczne są w szczęśliwszem położeniu, jakkolwiek i tutaj dalecy jesteśmy i być musimy od tej zupełności procesu myślowego, jaka jest i być winna w geometrji. Matematyka, słusznie królową ścisłych zwana umiejętności, ma w geometrji tę gałąź, ktora w bilansie ogólnego wykształcenia z natury rzeczy posiada doniosłe znaczenie. Aby taki kurs przeprowadzić, trzeba nielada rozumienia metod i właściwości przedmiotu, trzeba bardzo gruntownego opanowania zakresu zastosowania oraz tych nauk, gdzie to zastosowanie jest możliwe. Tak samo jak w zastosowaniu niema różnicy pomiędzy liczbą wymierną a niewymierną, nie może być też odróżnienia pomiędzy pewnikiem a twierdzeniem. Sztuka nauczania kursu propedeutycznego wymaga od nauczyciela wyzbycia się szablonywych podziałów, szerszego poglądu na naukę i jej podstawy. Rzecz jasna, że tylko człowiek gruntownie ze swym przedmiotem obeznany może tej „sztuki" dokonać.

Żadne jednakże wykształcenie nie wystarczy, skoro nauczyciel straci żywość myśli i pragnienie doskonalenia się. To pragnienie jest istotną sprężyną zarówno dobrego nauczania, jak i osobistego zadowolenia nauczyciela. Do samokształcenia potrzebne są książki i pisma perjodyczne. Nasze przekłady z literatur obcych były dotąd dość przygodne. W ostatnich dopiero czasach zaczęły się zjawiać rzeczy więcej zasadnicze i potrzebne. Do takich rzeczy np. należą przekłady rozprawy Gaussa, Zagadnienia Geometrji Euriquesa i jego geometrja rzutowa, książki Hardy'ego, Pieri'ego, rozprawa Steinera o konstrukcjach, rozprawa Dedekinda o ciągłości i liczbach niewymiernych i inne. Jednem z najpilniejszych zadań jest utworzenie dobrej bibljoteki pomocniczej dla nauczyciela. W przekładzie polskim musi się ukazać wiele dziełek klasycznych zawartych w niemieckiem wydawnictwie Ostwald's Klassiker, należy przełożyć typowe podręczniki szkolne, wydać całą monografję dotyczącą programów szkół w różnych krajach, oraz cały szereg rozpraw takich, jak Hilberta podstawy geometrji, artykuły z Encyklopedji matematycznej i t. p. Rzecz bardzo ważna i godna namysłu a przedewszystkiem wykonania.

Pismo perjodyczne winno nauczycielowi być przewodnikiem metodycznym i obok nowych faktów i pojęć nauki, które mogą mieć wpływ na nauczanie podawać szeregi materjałów praktycznych do prowadzenia zajęć w szkole. Dotychczasowe nasze pisma miały charakter zbyt teoretyczny, akademicki. Co prawda mało jest wzorów odpowiednich, należy jednakże ująć stanowisko pośrednie pomiędzy L'enseiguement mathematique a niemieckiem Zeitschrif für mathematischen und natur wissenschaftlichen Unterricht. Nie chodzi o propagowanie t. zw. Gymnasiallehrergeometrie, jak to nazywa Klein wszelkie geometrje trójkąta i różne drobne ciekawostki. Chodzić winno o materjał bezpośrednio do praktyki zastosowany. Wszak niekoniecznie ma być on szablonowym i nudnym. Tak było dawniej, nie powinno być teraz, gdy chcemy geometrję zbratać z innemi wiadomościami, ożywić, zrobić prawdziwą siłę rozwijającą umysł i duch poznawczy.

Spis książek podany w książce niniejszej można częściowo uzupełnić przez podanie następujących poniżej dzieł, które mogą być pożyteczne albo same przez się, albo też dla zorjentowania się bibljograficznego.

DZIEŁA ZASADNICZE.

Encyklopedie de Sciences mathematique. T. III. Vol. I, II.

H. Weber i Wellstein. Encyklopädie der Elementar-Mathematik T. II i III.

Enriques. Zagadnienia dotyczące geometrji elementarnej, przekł. W. Wojtowicza.

F. Klein. Elementar-mathematik vom höheren Standpunkte aus, wyd. litogr.

— Einführung in die neuere Geometrie, wyd. litogr.

E. Duporcq. Premiers principes de geometrie moderne. Paryż. Gauthier-Villars.

Y. Hadamard. Lecons de Geometrie. Paryż. A. Colin.

Adler. Geometrische Konstruktionen. Lipsk. Sam. Schubert.

K. Volk. Die Elemente der neueren Geometrie. Lipsk. Książka elementarna, praktyczna, może być pomocną obok przekładu polskiego Enriquesa Geometrji rzutowej.

Obok tych książek wspomnieć należy Geometrję Niewęgłowskiego.

PODRĘCZNIKI SZKOLNE ELEMENTARNE.

Carlo Bourlet. Elements de geometrie. Paryż. Hachette et C-ie.

T. Bonnesen. Geometria for Mellemskolen. Kopenhaga.

J. Henrici und F. Treutlein. Lehrbuch der Elementar-Geometrie. Lipsk. Teubner. Podręcznik całkowity, utrzymany w tonie bardzo elementarnym.

Obok tych książek dla orjentacji w języku polskim podręczniki: Silbersteina, Macznika, Faifofera, Tokarskiego, Borowieckiej i Stattlerówny, Hornbrooka, J. Grabowskiego, Dal Trozza i inne.

KSIĄŻKI POMOCNICZE.

Majewski. Geometrja praktyczna.

Malanowicza. Rzuty geometryczne i geometrja wykreślna oraz kreślenie i zdobienie geometryczne. Książka słaba, ale posiadająca sporo materjału potrzebnego.

Pomocnem może być dzieło:

G. Holzmüllera. Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik.

Wskazać dalej możemy na geometrję wykreślną: Bartela, Łazowskiego i Feldbluma.

KSIĄŻKI DYDAKTYCZNE.

Oprócz podanych w częściach poprzednich wskażemy na monografje: Treutleina i Lietzmana. Pierwsza zawiera historję ruchu elementarnego nauczania geometrji. W literaturze niemieckiej istnieje bardzo wiele przewodników dla nauczycieli w dziedzinie elementarnego nauczania geometrji. Nie wyróżniają się te książki niczem osobliwem. Wskażemy dla przykładu na prace Wilka: Formenkunde (anleitung für Lehrer), Geometrie der Volksschule; E. Engela. Schaffender Unterricht. Raumlehre. Ta ostatnia książka ze względu na zupełność wykładu może być pożyteczną jako przewodnik praktyczny w niejednej rzeczy.

W literaturze polskiej wskażemy na artykuł S. Dicksteina p. t. Geometrja w Encyklopedji Wychowawczej, artykuły w Wektorze i Muzeum lwowskiem oraz krótką pracę A. Pichóra i A. Hoborskiego p. t.: Metoda matematyki (wyd. Polskiego Instytutu Pedagogicznego w Krakowie). Na element geometryczny zwrócono uwagę w książce C. Oderfeldowej: Metoda rachunku elementarnego.

Dzieła powyżej podane stanowią pewne minimum potrzebne dla nauczyciela. Takie minimum posiadać winna każda bibljoteka szkolna, w której nie należy zapomnieć o książkach dotyczących gier i zabaw matematycznych, a także o odpowiednich podręcznikach z miernictwa.

Zakończenie.

Głównym celem książki powyższej było przedstawienie t. zw. niższego kursu matematyki w szkole elementarnej i niższych klasach szkół średnich. Jeżeli czasem ramy te, szczególnie w części III ej zostały rozszerzone, to przyczyną była konieczność pewnej perspektywy, bez której niemożliwą jest należyta ocena zarówno metody jak proponowanego programu. Pomiędzy nauczaniem arytmetyki i geometrji, jak to czytelnik bez trudności osądzi, utrzymana jest pewna współzależność. Rachunek i geometrja w szkole winny być w ręku jednego człowieka, przyczem wskazanem jest bardzo powiększenie liczby godzin poświęcanych tym przedmiotom o dwie tygodniowo. Stanie się to zupełnie możliwem, skoro zważymy, że obecnie zjawiła się zupełnie słuszna tendencja do usunięcia nauczania dwóch języków cudzoziemskich w szkole. Z drugiej strony nie powinniśmy na matematykę żałować czasu, skoro potrafimy porządnie jej uczyć. Wymagają tego potrzeby naszego życia, które woła o przemysł, handel, o twórczość gospodarczą, a przytem o dużo rozwagi i umiejętności realnej oceny faktów. Z tego powodu przedmioty matematyczne muszą w szkolnictwie naszem zająć miejsce wybitniejsze, niż nawet gdzieindziej, a metoda ich nauczania stać się winna troską bardzo poważną wszystkich, zarówno nauczycieli, jak kierowników szkół i szczególnie osób w dziedzinie oświaty miarodajnych. Musimy nawiązać nić pracy naszej do tradycji braci Śniadeckich, musimy naprawdę zacząć się uczyć.

Rozpatrzenie zagadnień wysuwanych przez nauczanie w klasach wyższych szkoły średniej jest rzeczą również pilną, potrzebna jest do tego jednakże specjalna monografja, którą można opracować dopiero wtedy, gdy fundament nauczania zostanie ustalony w swych głównych rysach. Tym fundamentem zajmowała się książka niniejsza.