MUZEUM TECHNIKI
STOWARZYSZENIE GEODETÓW POLSKICH

GEODEZJA TO TEŻ OBLICZENIA

ANDRZEJ M. ŻÓŁTOWSKI

GEODEZJA TO TEŻ OBLICZENIA

Opracowane z okazji ekspozycji pt.: „Geodezja to też obliczenia" zorganizowanej w Muzeum Techniki w/g programu przygotowanego przez Główną Komisję d/s Muzeum i Wystaw Stowarzyszenia Geodetów Polskich

Warszawa, maj 1977 r.

WYDAWNICTWA CZASOPISM TECHNICZNYCH NOT
Warszawa, Czackiego 3/5
na zlecenie Stowarzyszenia Geodetów Polskich

Druk. Zakład Poligraficzny WCT NOT — Warszawa
Zam. 121/77 Nakład 500+25 egz. F-113

W społeczeństwie polskim znajomość zagadnień geodezyjnych nie jest ogólnie biorąc zbyt wysoka. Praca geodety kojarzy się zwykle z postacią, pochyloną w charakterystyczny sposób i obserwującą coś bliżej nieokreślonego przez lunetę instrumentu. Czasem pozostaje w pamięci obraz dwóch ludzi, ciągnących z metalicznym szelestem taśmę wzdłuż ulicy albo trzymających ustawione pionowo na ziemi deski z kolorowym podziałem tzw. łaty. Jeśli dodać do tego, że niemal każdy widzi związek wieży triangulacyjnej oraz mapy z geodezją, to niewiele już zostanie elementów, które można by dodać do zasobu społecznej wiedzy o geodezji. Jest rzeczą ciekawą, że usunięty z urzędowego języka termin "miernictwo" i jego pochodna "mierniczy" znacznie bardziej prawidłowo tkwią w świadomości społecznej, zwłaszcza wśród starszego pokolenia, niż "geodezja" i "geodeta" nadspodziewanie często mieszane z zagadnieniami geologicznymi. Miernictwo jest pojęciem węższym od geodezji, co w swoim czasie wywołało nieuzasadnioną ambicję sztucznego podniesienia rangi zawodu mierniczego poprzez zmianę nazwy. Jak widać jednak, świadomość społeczna nie przyswaja szybko takich zabiegów.

Wieloletnia seria wystaw w Muzeum Techniki, poświęconych zagadnieniom geodezji z punktu widzenia problemowego, historycznego lub biograficznego ma za zadanie zbliżenie tych zagadnień do społeczeństwa, przyczyniając się do podnoszenia poziomu jego kultury technicznej. Skromna ekspozycja, obrazująca w jakże uproszczony sposób rolę obliczeń w geodezji, z okazji której prezentowany jest niniejszy folder, ma również w swoich założeniach ten prosty a jednocześnie tak trudny do osiągnięcia cel.

Właściwie trudno wyobrazić sobie jakąkolwiek dziedzinę techniki nie wymagającą obliczeń. Mecha-

nika, budownictwo, elektrotechnika, transport posiadają własne, nieraz znacznie lepiej wyposażone od geodezji ośrodki obliczeniowe. Potrzeba rozwiązywania zagadnień geodezyjnych wywarła jednak znaczny wpływ na rozwój metod rachunkowych. Wystarczy tu wspomnieć nazwisko Carla Friedricha Gaussa /1777-1855/, niemieckiego uczonego, o którego mogliby spierać się geodeci i kartografowie z matematykami. Pracował m.in. nad rozwinięciem logarytmicznych metod obliczeń, zestawił specjalne tablice logarytmów /nazwanych potem jego imieniem/ pozwalających obliczać logarytm sumy bez konieczności odlogarytmowania wyrazów tej sumy. Słynny algorytm Gaussa, to jest sposób rozwiązywania liniowych układów równań z wieloma niewiadomymi, leży u podstaw rachunków geodezyjnych. Dostosowany do możliwości arytmometrów mechanicznych był powszechnie stosowany przez całe ostatnie stulecie.

W okresie tym mechaniczna technika obliczeniowa rozwijała się w wielu kierunkach przynosząc bardzo nieraz interesujące rozwiązania w postaci urządzeń rachujących typu zegarowego, suwakowego lub bębnowego. Te ostatnie zwłaszcza podlegały stopniowo coraz wydatniejszym udoskonaleniom w stósunku do ich pierwowzorów konstruowanych przez B.Pascala /1623-1662/, G.W.Leibniza /1646-1716/, a w Polsce przez Abrahama Sterna /1769-1842/ i Abrahama Staffela.

Zastosowanie napędu elektrycznego zamiast ręcznego dało początek całej rodzinie arytmometrów elektromechanicznych. Arytmometry te we współczesnej formie stanowiły szczyt techniczny możliwości rachunkowych przed pojawieniem się elektronicznych maszyn cyfrowych. Do elektronicznej techniki obliczeniowej jeszcze powrócimy, natomiast w tym miejs-

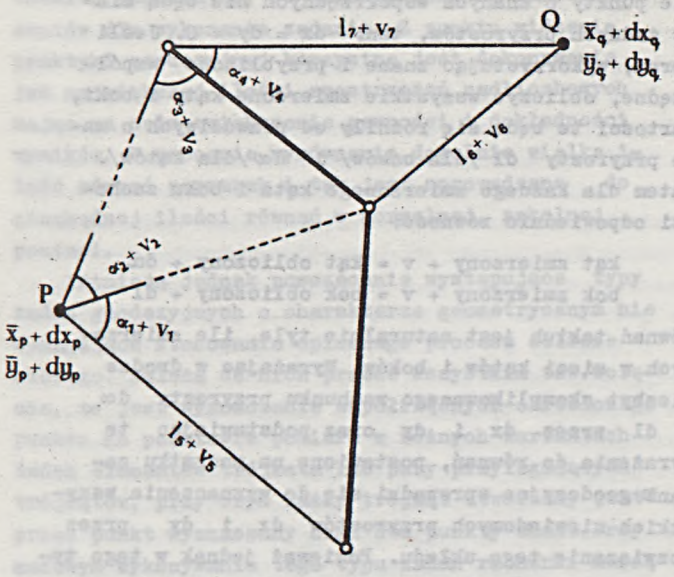
cu warto może jeszcze podać ciekawostkę, że suwak logarytmiczny, który w pierwszej połowie naszego stulecia urósł niemal do symbolu rachunków technicznych, w geodezji nigdy nie znajdował zastosowania. Spieszymy dodać, że nie wynikało to z irracjonalnych uprzedzeń, ale po prostu żadne rachunki geodezyjne nie mogą poprzestać na dokładności, którą zapewniają suwaki.

Mówiąc o rozwiązywaniu układów równań nie sposób pominąć znacznego wkładu polskiej szkoły obliczeniowej w tym zakresie. Krakowski astronom i matematyk profesor Tadeusz Banachiewicz /1882-1954/ wynalazł i opracował cały system rachunku zwanego krakowianowym, operującego nie pojedyńczymi liczbami, ale całymi tabelami liczb, składającymi się z kolumn i wierszy. Jeśli tabele te, nazwane przez Banachiewicza krakowianami, zestawić ze współczynników przy niewiadomych, wówczas obliczenie tych niewiadomych, a nawet ich błędów jest tylko kwestią kilku prostych działań rachunku krakowianowego. Oczywiście działania te są proste w sensie pojęciowym, natomiast praktyczne rozwiązywanie układów równań tym sposobem wymaga od obliczeniowca wykonania dużej ilości zwykłych rachunków. Łatwo przy tym zauważyć, że mimo uporządkowania wykonywania działań, umożliwiającego rachmistrzowi całkowite oderwanie się od merytorycznej strony zagadnienia geodezyjnego, istnieje wielkie ryzyko zmarnowania całego rozwiązania układu przez popełnienie choćby jednego błędu w trakcie obliczeń. Dlatego wielcy twórcy wspomnianych metod, nie tracąc nigdy z oczu praktycznego zastosowania, wprowadzili od razu system kontroli w pośrednich stadiach rachunku, polegający na wprowadzaniu i jednoczesnym przekształcaniu wyrazów lub kolumn stanowiących sumę określonych współczynników układu. Pojawiające się stopniowo, odpowiednio przekształcone grupy

wyrazów /w krakowianach wiersze/ muszą też w sumie dawać przekształcony wyraz sumowy. Jeśli ta kontrola nie zostanie spełniona, powtarza się jedynie obliczenie odpowiedniego wiersza.

Spróbujemy teraz w uproszczony sposób pokazać związek pomiędzy układami równań a zadaniami geodezyjnymi. Różnią się one od szkolnych zadań geometrycznych tym, że w praktyce geodezyjnej kąty i boki figur geometrycznych mierzy się z pewnym błędem w stosunku do wartości prawdziwych /w znaczeniu najprawdopodobniejszych/ i fakt ten musi być uwzględniony w rachunkach. Wartości pomierzone mają więc małe, z początku nieznane poprawki oznaczone literą v z odpowiednim indeksem, aby było wiadomo do którego kąta lub boku się odnoszą. Druga różnica polega na tym, że w geodezji dla podniesienia dokładności rezultatów mierzy się zwykle więcej elementów, niż jest to potrzebne do jednokrotnego wyznaczenia szukanych wielkości, wykonując w ten sposób tzw. obserwacje nadliczbowe. Jeśli np. wyznaczając trójkąt zmierzymy wszystkie boki i jeden kąt, będziemy dysponowali jedną obserwacją nadliczbową.

Najbardziej typowym problemem geodezyjnym jest wyznaczenie współrzędnych geograficznych φ, λ /szerokości i długości geograficznej/ lub współrzędnych płaskich x, y /rzędnej i odciętej w przyjętym prostokątnym układzie osi liczbowych/ poprzez pomiar elementów figur geometrycznych. W sieci, składającej się z określonej ilości punktów o znanych /wyznaczonych już wcześniej/ oraz szukanych współrzędnych, mierzy się odpowiednią ilość kątów i boków pamiętając o spostrzeżeniach nadliczbowych /patrz szkic/.



Szkic sieci geodezyjnej

○ - punkty o znanych współrzędnych x, y
● - punkty wyznaczane

Kątów ani boków zawartych wyłącznie między punktami o znanych współrzędnych nie mierzy się, ponieważ ich prawdziwe wartości można w każdej chwili za pomocą tych współrzędnych obliczyń. Rozwiązanie zadania rozpoczyna się od obliczenia lub odczytania z mapy przybliżonych współrzędnych wyznaczanych punktów /$\bar{x}$, $\bar{y}$/, które będą się różniły od prawdziwych o małe przyrosty oznaczone symbolami dx i dy również opatrzone indeksami i począt -

kowo nieznane, podobnie jak poprawki v. Oczywiście punkty o znanych współrzędnych nie będą miały żadnych przyrostów, tzn. dx = dy = 0. Jeśli teraz, wykorzystując znane i przybliżone współrzędne, obliczyć wszystkie zmierzone kąty i boki, wartości te będą się różniły od prawdziwych o małe przyrosty dl /dla boków/ i $d\alpha$ /dla kątów/. Zatem dla każdego zmierzonego kąta i boku zachodzi odpowiednio równość:

kąt zmierzony + v = kąt obliczony + $d\alpha$

bok zmierzony + v = bok obliczony + dl

Równań takich jest naturalnie tyle, ile zmierzonych w sieci kątów i boków. Wyrażając w drodze niezbyt skomplikowanego rachunku przyrosty $d\alpha$ i dl przez dx i dy oraz podstawiając te wyrażenia do równań, postawione na początku zadanie geodezyjne sprowadzi się do wyznaczenia wszystkich niewiadomych przyrostów dx i dy przez rozwiązanie tego układu. Ponieważ jednak w tego typu układzie równań poprawki v też nie są znane, konieczne jest do rozwiązania wprowadzenie dodatkowego warunku. Wychodząc z teorii prawdopodobieństwa wyznaczone wartości dx i dy /tym samym $d\alpha$ i dl/ muszą być takie, aby suma kwadratów poprawek v była jak najmniejsza:

$$\sum v^2 = \text{minimum}.$$

Tego rodzaju proces obliczeniowy nosi nazwę rachunku wyrównawczego metodą najmniejszych kwadratów i chociaż wywodzi się z zagadnień geodezyjnych może znaleźć zastosowanie w wielu innych dziedzinach, jeśli tylko występują jakiekolwiek obserwacje nadliczbowe. Warto zwrócić uwagę, że każda obserwacja nadliczbowa dostarcza jedno równanie ponad ilość konieczną /minimalną/ do wyznaczenia niewiadomych przyrostów. Jeśli zaś rozwiązując jakąś sieć otrzymamy mniej równań niż jest przyrostów do wyzna -

czenia, oznacza to, że zmierzyliśmy za mało elementów dla wykonania zadania. Z punktu widzenia praktyki geodezyjnej korzystne jest dokonywanie jak największej ilości spostrzeżeń nadliczbowych mając na celu zwiększenie pewności i dokładności wyników. W procesie wyrównania dowolnie wielka ilość równań poprawek i tak jest sprowadzana do niezbędnej ilości równań w normalnej, szkolnej postaci.

Istnieją jednak powszechnie występujące typy zadań geodezyjnych o charakterze geometrycznym nie wymagające stosowania opisanego procesu obliczeniowego. Należą do nich przede wszystkim tzw.wcięcia, to jest wyznaczanie współrzędnych określonego punktu na podstawie pomiaru w różnych wariantach dwóch elementów trójkąta lub pary przylegających trójkątów, przy czym każdy trójkąt utworzony jest przez punkt wyznaczany oraz dwa punkty znane. Przy masowym wykonywaniu tego typu zadań rachunki muszą być w jakiś logiczny sposób uporządkowane i zorganizowane, aby rachmistrz mógł niejako automatycznie operować danymi liczbowymi. Podnosi to wydajność pracy i zmniejsza ryzyko popełnienia omyłki. I w tym zakresie polska szkoła obliczeniowa może poszczycić się znacznymi osiągnięciami. Zawdzięczać je należy przede wszystkim profesorowi Politechniki Warszawskiej Stefanowi Hausbrandtowi /1896-1971/, którego formy obliczeniowe stanowią powszechnie stosowaną w Polsce metodę rozwiązywania liczbowego zagadnień geometrycznych. Można powiedzieć, że całe pokolenia geodetów wykształconych w naszym kraju opierają swoją wiedzę obliczeniową na dorobku obu wspomnianych tu polskich uczonych.

Najbardziej skomplikowane rachunki pojawiają się wtedy, kiedy rozwiązując zadania geodezyjne na dużych obszarach musimy robić to na powierzchni ku-

li lub elipsoidy obrotowej, jako przybliżonej powierzchni mórz i oceanów. Związki geometryczne i trygonometryczne są bardziej złożone, równania poprawek zawierające nie dx i dy ale $d\varphi$ i $d\lambda$ są znacznie trudniejsze do ułożenia, a ponadto występuje zagadnienie redukcji wielkości mierzonych z fizycznej powierzchni ziemi na jedną z wymienionych powierzchni matematycznych. Nie koniec na tym, ponieważ do sporządzenia mapy konieczne jest zastosowanie specjalnego procesu obliczeniowego pozwalającego przedstawić na płaszczyźnie to, co istnieje na powierzchni kuli lub elipsoidy, czyli przeliczyć φ i λ na x i y. Jest to kolejne zagadnienie geodezyjno-kartograficzne, które legło u podstaw działu matematyki zwanego teorią odwzorowań. Można je rozwiązywać w różny sposób przyjmując różne kryteria wynikające przede wszystkim z przeznaczenia mapy. Ogólnie znane są np. mapy w odwzorowaniach Merkatora czy Mollweidego, lecz my wrócimy w tym miejscu znów do Gaussa tym razem jako twórcy odwzorowania rozwiniętego następnie przez geodetę niemieckiego Louisa Krügera /1857-1923/, odwzorowania stosowanego w Polsce i wielu innych krajach. Dzięki jego właściwościom możliwe jest wykonanie operacji obliczeniowej, polegającej na przeniesieniu całych problemów geodezyjnych z elipsoidy na płaszczyznę, rozwiązanie ich na płaszczyźnie, a następnie przeniesienie uzyskanego rozwiązania, jeśli to jest potrzebne, z powrotem na elipsoidę. Nie trzeba chyba uzasadniać, jak upraszczają się przy tym rachunki mimo konieczności dokonywania dodatkowych przeliczeń odwzorowawczych. Widać też, że zagadnienie odwzorowania nie jest nierozerwalnie związane tylko z kartografią.

Na przykładach niektórych zadań geodezyjnych staraliśmy się pokazać, jak potrzeba ich rozwiązania wpłynęła na rozwój metod i procesów obliczeniowych.

Pominęliśmy rzadko już obecnie stosowane metody nomograficzne, zaś powszechnie znane metody logarytmiczne zaledwie zaznaczyliśmy, choć w swoim czasie dużo rachunków geodezyjnych /zwłaszcza astronomicznych/ na nich się opierało. Nie poruszyliśmy zagadnień obliczeniowych związanych z niwelacją, pomiarem różnego typu instrumentami geodezyjnymi, czy też wprowadzaniem do wyników pomiarów wielu różnych poprawek. Sprawy te miały jednak stosunkowo mniejszy wpływ na rozwój metod rachunkowych.

Dla podkreślenia związku geodezji z obliczeniami należy jeszcze podkreślić, że rozwój techniki obliczeniowej wpłynął wydatnie na postęp w geodezji. Jest to widoczne z dotychczasowych rozważań. Wzrastające możliwości rozwiązywania układów równań pozwalały na zakładanie coraz większych sieci i wyrównywanie ich w całości, a tylko takie postępowanie można uznać za ścisłe. Ciągle jednak istniały w tym zakresie ograniczenia wywoływane czasochłonnością obliczeń i możliwościami zatrudnienia ludzi. Doprowadziło to zresztą do rozwoju bardzo wielu interesujących metod polegających na dzieleniu sieci na części, wyrównywaniu tych sieci cząstkowych i w końcu ponownemu łączeniu ich w całość. Dopiero jednak rozwój elektronicznej techniki obliczeniowej okazał się dla geodezji prawdziwą rewolucją. Znikły praktycznie ograniczenia rachunkowe; droga do szerokiej współpracy międzynarodowej, na niespotykaną dotąd skalę, nad badaniami figury Ziemi stanęła otworem. Nowoczesne metody geodezyjne, obejmujące zasięgiem wielkie obszary Ziemi, oparte na obserwacjach sztucznych satelitów, wymagają precyzyjnego obliczania aktualnego położenia satelity na sferze niebieskiej. Kto, patrząc na pogodne niebo, obserwował ruch sztucznych satelitów

wśród gwiazd może sobie łatwo wyobrazić, jak wielka musi być szybkość takich obliczeń wobec szybkości poruszania się satelity. Oczywiście położenie satelitów obliczane jest z góry, czyli jak mówimy ekstrapolowane na pewien okres czasu, jednak okres ekstrapolacji nie może być zbyt długi przy trudnościach przewidywania i obliczania wszystkich czynników zakłócających ruch satelity.

Krótko mówiąc elektroniczna technika obliczeniowa i metody satelitarne - to przyszłość geodezji.