POLITECHNIKA GDAŃSKA
Wydział Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej

Imię i nazwisko autora rozprawy: Robert Krawczyk
Dyscyplina naukowa: Matematyka

ROZPRAWA DOKTORSKA

Tytuł rozprawy w języku polskim: Rozwiązania homokliniczne prawie okresowych układów Newtonowskich w R^3 z osobliwościami typu Gordona.

Tytuł rozprawy w języku angielskim: Homoclinic orbits for almost periodically forced Newtonian systems in R^3 with singularities of Gordon's type.

Promotor   *podpis*
dr hab. Joanna Janczewska

Gdańsk, 2016 rok

Spis treści

Wstęp

Tematyka moich badań dotyczy problemu istnienia i krotności rozwiązań w układach Hamiltonowskich drugiego rzędu, w szczególności w układach z prawie okresowym potencjałem i punktami osobliwymi typu Gordona. W moich badaniach stosuję metody wariacyjne i metody topologiczne.

Głównym problemem, jaki rozpatrujemy w pracy, jest istnienie rozwiązań homoklinicznych dla układu Newtonowskiego postaci

$$\ddot{q}(t) + a(t)\nabla W(q(t)) = 0, \tag{1}$$

gdzie funkcja $a(t)$ oraz potencjał $W(q)$ spełniają następujące założenia:

(a1) $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją prawie okresową taką, że $a(t) \geq a_0 > 0$ dla $t \in \mathbb{R}$.

(H1) Istnieje prosta l taka, że $l \cap \{0\} = \emptyset$, $W \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus l, \mathbb{R})$ oraz l składa się z punktów osobliwych potencjału W, tzn. $\lim_{x \to l} W(x) = -\infty$.

(H2) $W \colon \mathbb{R}^3 \setminus l \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Gordona w otoczeniu prostej l, tzn. istnieją otoczenie $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^3$ prostej l oraz funkcja $U \in C^2(\mathcal{N} \setminus l, \mathbb{R})$ takie, że $|U(x)| \to \infty$, gdy $x \to l$ i

$$|\nabla U(x)|^2 \leq -W(x) \qquad \text{dla } x \in \mathcal{N} \setminus l.$$

(H3) $W(x) < W(0) = 0$ dla $x \neq 0$ oraz $W''(0)$ jest ujemnie określona.

(H4) Istnieje stała $W_0 < 0$ taka, że $\limsup_{|x| \to \infty} W(x) \leq W_0$.

Teraz kilka zdań o genezie problemów z osobliwościami oraz o pracach, jakie powstały w tej tematyce i zainspirowały mnie do napisania doktoratu.

W 1975 roku William B. Gordon w pracy [7] rozważał układ autonomiczny

$$\ddot{q}(t) + \nabla W(q(t)) = 0, \tag{2}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n \setminus S$, z potencjałem $W \colon \mathbb{R}^n \setminus S \to \mathbb{R}$ spełniającym warunek Gordona w otoczeniu niepustego i domkniętego zbioru punktów osobliwych $S \subset \mathbb{R}^n$. Warunek ten został nazwany "strong-force condition". Precyzyjniej, jeżeli potencjał W spełnia warunek Gordona, to mówimy, że ∇W jest strong-force, czyli oddziaływaniem silnym[1].

Przykładem potencjału spełniającego warunek Gordona jest

$$W(q) = -\frac{1}{|q|^2},$$

[1] wg Tłumacz Google

z punktem osobliwym 0, a funkcja U ma wzór $U(q) = \ln|q|$. Zwróćmy uwagę, że potencjał grawitacyjny

$$W(q) = -\frac{1}{|q|}$$

nie spełnia warunku Gordona, ponieważ jeżeli istniałaby funkcja U taka, że $|\nabla U(q)|^2 \leq -W(q)$, to musiałaby w otoczeniu 0 być postaci $U(q) = |q|^\alpha$, gdzie $\alpha \geq \frac{1}{2}$, ale wówczas $\lim_{q\to 0} U(q) = 0$ i otrzymujemy sprzeczność. Gordona interesowały rozwiązania okresowe układu (2) omijające $S \subset \mathbb{R}^n$ oraz rozwiązania łączące w skończonym czasie dwa ustalone punkty $p, q \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Udowodnił, że pod pewnymi warunkami istnieje nieskończenie wiele takich rozwiązań (patrz Twierdzenie 1.1 i Twierdzenie 1.2 w [7]).

Od ukazania się pracy Gordona wielu matematyków zajmowało się problemami z osobliwościami typu "strong-force". Badanie rozwiązań homo- i heteroklinicznych w układach Hamiltonowskich wymaga nieco subtelniejszych technik wariacyjnych niż badanie rozwiązań okresowych. Zaczęto je rozwijać w latach 90-tych ubiegłego stulecia. Jednym z prekursorów na tym polu był Paul H. Rabinowitz.

W 1996 r. P.H. Rabinowitz w [24] badał układ nieautonomiczny

$$\ddot{q}(t) + V_q(t, q(t)) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Zakładał, że $V\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{\xi\}) \to \mathbb{R}$ ma globalne maksimum w 0 oraz osobliwość typu "strong-force" w punkcie ξ. Ponadto, potencjał V jest okresowy względem zmiennej t. Udowodnił istnienie co najmniej dwóch orbit homoklinicznych: Q^+, Q^- nawijających się dookoła punktu ξ odpowiednio z dodatnią i ujemną rotacją. Rabinowitz pokazał też, że jeżeli wokół punktu osobliwego ξ mamy minimalną orbitę okresową[2], to istnieje $k_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $k > k_0$ układ Newtonowski (3) posiada orbitę homokliniczną wokół ξ z rotacją dokładnie $\pm k$. Podobne wyniki otrzymali P. Caldiroli, L. Jeanjean, M. Nolasco w pracach [3] oraz [4]. Natomiast M. Izydorek i J. Janczewska w [8], [9] i [10] uogólnili niektóre rezultaty z pracy [24] na przypadek układów Newtonowskich w $\mathbb{R}^2$ z punktem osobliwym ξ typu Gordona i dwoma punktami stacjonarnymi $a, b \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\xi\}$ (twierdzenia o orbitach heteroklinicznych z a do b omijających ξ).

W 1996 r. E. Serra, M. Tarallo oraz S. Terracini w pracy [28] rozważali układ bez osobliwości postaci

$$\ddot{u}(t) - u(t) + \alpha(t)\nabla G(u(t)) = 0, \tag{4}$$

gdzie α jest funkcją prawie okresową w sensie Bohra, a $G \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ spełnia warunek Ambrosettiego-Rabinowitza, t.j.:

$$\exists_{\theta>2}\forall_{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \quad 0 < \theta G(x) \leq \nabla G(x)\cdot x.$$

Udowodnili, że powyższy układ posiada co najmniej jedno nietrywialne rozwiązanie homokliniczne. Mianowicie, w artykule [23][3] P. H. Rabinowitz badał układ (1), gdzie $\mathbb{R}^3$ zastąpione jest przez $\mathbb{R}^2$, a prosta osobliwa l przez punkt osobliwy $\xi \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Stosując metody wprowadzone przez matematyków z Włoch pokazał, że istnieją co najmniej dwie orbity homokliniczne: Q^+, Q^- nawijające się dookoła punktu ξ.

Badanie orbit homoklinicznych dla układów Newtonowskich w $\mathbb{R}^n$, gdzie $n \geq 3$, z osobliwościami typu Gordona zostało zapoczątkowane przez K. Tanakę. W pracy [29]

[2]Mowa tu o pewnym geometrycznym warunku wprowadzonym przez S. Bolotina, który można wyrazić za pomocą nierówności: $\int_0^T \left(\frac{1}{2}|\dot{p}(t)|^2 - V(t,p(t))\right) dt < \lambda_1$, gdzie $p\colon [0,T] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{\xi\}$ wspomniana orbita okresowa, a λ_1 to kres dolny całek $\int_0^T \left(\frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 - V(t,q(t))\right) dt$ po pętlach o rotacji 1.

[3]Artykuł [23] został wydrukowany wcześniej niż artykuł [28]. Rabinowitz korzystał z niego w formie preprintu.

zakładając, że oprócz warunku Gordona w otoczeniu punktu osobliwego ξ, potencjał $V\colon \mathbb{R}^n \setminus \{\xi\} \to \mathbb{R}$ spełnia w otoczeniu zera warunek:

$$\exists_{\delta \in \left(0, \frac{1}{2}|\xi|\right)} \forall_{q \in B_\delta(0)} \qquad V(q) + \frac{1}{2}(\nabla V(q), q) \leq 0, \tag{5}$$

Tanaka udowodnił, że istnieje co najmniej jedna orbita homokliniczna układu

$$\ddot{q}(t) + \nabla V(q(t)) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

omijająca punkt ξ. Japończyk zastosował metodę aproksymacyjną. Pokazał, że dla każdego $T > 0$ istnieje rozwiązanie T-okresowe, $q_T(t)$ układu (6), a następnie, że istnieją ciągi $T_k \to \infty$ i $\{\tau_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ o tych własnościach, że

$$q_{T_k}(t + \tau_k) \to q(t) \qquad \text{w } C^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n),$$

a funkcja graniczna $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jest poszukiwaną orbitą homokliniczną.

W 2012 r. J. Janczewska i J. Maksymiuk w pracy [15] rozważali układ (1) w wersji autonomicznej, czyli $a(t) \equiv 1$ z warunkami (H1)-(H4). Uzyskali istnienie co najmniej dwóch orbit homoklinicznych: Q^+, Q^- nawijających się dookoła prostej l.

W tym miejscu chwilę czasu poświęcimy na opisanie różnicy pomiędzy problemem z potencjałem okresowym, a problemem z potencjałem prawie okresowym. Bez straty ogólności załóżmy, że rozpatrujemy równanie (1), gdzie $a(t)$ jest funkcją okresową lub prawie okresową. Stosując metody wariacyjne, chcemy pokazać, że funkcjonał $I\colon E \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$I(q) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 - a(t)W(q(t)) \right) dt,$$

określony na odpowiednio dobranej przestrzeni Sobolewa E, posiada punkty krytyczne, które są nietrywialnymi rozwiązaniami układu (1). Żeby otrzymać punkty krytyczne badamy zachowanie się ciągów Palais-Smale'a i zachowanie się funkcjonału I na tych ciągach.

Kiedy $a(t)$ jest funkcją okresową o okresie T, to funkcjonał I posiada następującą symetrię

$$I(q) = I(q(\cdot - kT)),$$

dla każdego $q \in E$, $t \in \mathbb{R}$ oraz $k \in \mathbb{N}$. Dlatego mając ciąg Palais-Smale'a $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ dla funkcjonału I na poziomie c, możemy wybrać ciąg czasów $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ - wielokrotności okresu T i wówczas $\{p_m(\cdot + t_m)\}_{m=1}^{\infty}$ też jest ciągiem Palais-Smale'a dla funkcjonału I na poziomie c. Wykorzystując tę własność dowodzi się nietrywialności orbit homoklinicznych.

Kiedy $a(t)$ jest prawie okresowa (ale nie jest okresowa), to sytuacja się komplikuje, bo ciąg $\{p_m(\cdot + t_m)\}_{m=1}^{\infty}$ nie jest ciągiem Palais-Smale'a dla funkcjonału I. Jednak wykorzystując prawie okresowość funkcji $a(t)$ oraz nakładając dodatkowy warunek na ciąg Palais-Smale'a:

$$\|p_m - p_{m-1}\| \to 0 \qquad \text{dla} \qquad m \to \infty,$$

wprowadzony przez E. Séré w [26], można pokazać, że istnieje ciąg czasów $\{t_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ ε_m-okresów funkcji $a(t)$ taki, że z ciągu $\{p_m(\cdot + t_m)\}_{m=1}^{\infty}$ da się wybrać podciąg zbieżny do $Q \not\equiv 0$, które jest punktem krytycznym funkcjonału I, a co za tym idzie nietrywialnym rozwiązaniem układu (1). Żeby jednak ten ciąg otrzymać, badamy nie tyle sam funkcjonał $I(q)$, co całą rodzinę funkcjonałów $I(\beta, q)$, gdzie $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną przez kres dolny i górny funkcji $a(t)$. Widać zatem na pierwszy rzut oka, że sytuacja prawie okresowa jest znacznie trudniejsza i ciekawsza.

Centralne twierdzenie mojej rozprawy doktorskiej: Twierdzenie 2.9 mówi, że układ (1) posiada przynajmniej dwa rozwiązania homokliniczne: Q^+, Q^- nawijające się dookoła prostej l odpowiednio z dodatnią i ujemną rotacją.

Wynik ten ukazał się w pracy [16]. W artykule tym udowodnione jest tylko zasadnicze twierdzenie. Natomiast wiele bardzo ważnych stwierdzeń i lematów technicznych podanych jest bez dowodu. W niniejszej rozprawie dowodzimy wszystkie istotne fakty, które wykorzystujemy w dowodzie głównego twierdzenia.

Dodatkowym wynikiem rozprawy jest Twierdzenie 3.3 o schemacie aproksymacyjnym dla zaburzonego układu Newtonowskiego

$$\ddot{q}(t) + \nabla_q V(t, q(t)) = f(t), \tag{7}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n$ oraz spełnione są następujące warunki:

(C2) Zaburzenie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jest nietrywialne, ograniczone, ciągłe i całkowalne z kwadratem.

(C3) V jest klasy C^1 oraz $\nabla_q V$ jest ograniczony względem zmiennej t, tzn.:

$$\forall_{M>0}\exists_{K>0}\forall_{t\in\mathbb{R}}\forall_{q\in\mathbb{R}^n} \quad |q| \le M \Rightarrow |\nabla_q V(t,q)| \le K.$$

Z układem (7) stowarzyszamy ciąg $2k$-okresowych problemów brzegowych

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) + \nabla_q V_k(t, q(t)) = f_k(t), \\ q(-k) - q(k) = \dot{q}(-k) - \dot{q}(k) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

gdzie dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jest $2k$-okresowym przedłużeniem na prostą funkcji $f|_{[-k,k)}$ oraz $V_k\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest $2k$-okresowym przedłużeniem $V\colon [-k,k) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Pokażemy, że jeżeli dla każdego $k \in \mathbb{N}$ problem (8) posiada rozwiązanie okresowe q_k i ciąg norm $\{\|q_k\|_{W^{1,2}_{2k}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)}\}_{k=1}^{\infty}$ jest ograniczony, to z ciągu $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ możemy wybrać podciąg zbieżny w $C^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ do rozwiązania prawie homoklinicznego układu (7). Wynik ten ukazał się w [17]. Jest to uogólnienie schematu aproksymacyjnego J. Janczewkiej, która w pracy [12] uzyskała analogiczny rezultat, z tym, że zamiast ograniczoności $\nabla_q V(t,q)$ zakładała okresowość potencjału V względem zmiennej t.

Niniejsza rozprawa podzielona została na trzy rozdziały. Pierwszy z nich zapoznaje Czytelnika z pojęciem funkcji prawie okresowej. Większa jego część poświęcona jest funkcjom prawie okresowym w sensie Bohra. To najważniejsza klasa z naszego punktu widzenia, ponieważ funkcja $a(t)$ w układzie (1) jest prawie okresowa w sensie Bohra. W podrozdziale dotyczącym funkcji prawie okresowych w sensie Bohra znalazły się dowody najważniejszych faktów dotyczących tej klasy funkcji, ze szczególnym uwzględnieniem kryterium Bochnera. W dalszej części tego rozdziału omówiliśmy krótko pozostałe klasy funkcji prawie okresowych. Jednak żadna z tych klas nie jest wykorzystywana w kolejnych rozdziałach. Stąd Czytelnik może traktować ten fragment jako ciekawostkę.

W rozdziale drugim udowodniliśmy główne twierdzenie rozprawy: Twierdzenie 2.9 o tym, że układ (1) posiada co najmniej dwa rozwiązania homokliniczne obiegające prostą l. Ze względu na wygodę i przejrzystość dowód Twierdzenia 2.9 podzieliliśmy na serię lematów, stwierdzeń i pomocniczych twierdzeń, których dowody przebiegają podobnie jak w [28]. Słowo "podobnie" odnosi się tutaj do idei. Natomiast w szczegółach technicznych dowody mocno się różnią. Pracujemy bowiem przy zupełnie innych założeniach niż Serra, Tarallo i Terracini.

W ostatnim rozdziale opisaliśmy schemat aproksymacyjny dla zaburzonego układu Newtonowskiego (patrz Twierdzenie 3.3). Podaliśmy też przykład jego zastosowania dla konkretnego potencjału (patrz Twierdzenie 3.7).

***

Pracę jako asystent w Katedrze Analizy Nieliniowej (wówczas Katedrze Algebry) rozpocząłem w 2005 r. Jednak przez długi okres czasu, z różnych powodów, zajmowałem się prawie wyłącznie pracą dydaktyczną i organizacyjną, a moja działalność naukowa sprowadzała się do aktywnego uczestnictwa w seminarium Katedry Analizy Nieliniowej pod przewodnictwem prof. Kazimierza Gęby i prof. Marka Izydorka oraz udziału w kilku konferencjach.

Sytuacja zmieniła się w 2012 r. wraz z uzykaniem stopnia dr hab. przez panią Joannę Janczewką, która została moim opiekunem naukowym i tchnęła nowego ducha w pracę badawczą.

Pragnę gorąco podziękować mojej pani promotor, prof. Joannie Janczewskiej, za to, że zmotywowała mnie do napisania tej rozprawy, ogrom wiedzy, którą mi przekazała, nieocenione rady i spostrzeżenia, a przede wszystkim za życzliwość, wsparcie i wyrozumiałość. Jej doświadczenie bardzo mi pomogło, a komentarze i sugestie wywarły bardzo duży wpływ na ostateczny kształt niniejszej pracy.

Dziękuję panu prof. Markowi Izydorkowi za to, że dał mi szansę pracy naukowo-dydaktycznej na Politechnice Gdańskiej i nigdy nie zwątpił, że ten doktorat powstanie.

Serdecznie dziękuję DAAD - Deutscher Akademischer Austauschdienst oraz MNiSW - Ministerstwu Nauki i Szkolnictwa Wyższego za przyznanie naszej niemiecko-polskiej grupie badawczej pod kierunkiem prof. Alberto Abbondandolo z Ruhr-Universität Bochum i prof. Joanny Janczewskiej z Politechniki Gdańskiej grantu PPP-PL nr 57217076 na realizację projektu badawczego *Teoria punktów krytycznych i jej zastosowania do układów Lagrange'a* (*Critical Point Theory for Lagrangian Systems*), którego jednym z celów było dokończenie niniejszej pracy.

Na koniec dziękuję moim rodzicom Krystynie i Jerzemu, za miłość i troskę, którą mi okazali, a także za to, że akceptowali każdą moją decyzję życiową. Dzięki temu podjąłem studia matematyczne, co w końcu zaowocowało napisaniem rozprawy doktorskiej.

Robert Krawczyk

Oznaczenia

ZBIORY

$x \in X$	x jest elementem zbioru X
$X \subset Y$	X zawiera się w zbiorze Y
$\overline{X}$	domknięcie zbioru X
$X \cup Y$	suma zbiorów X i Y
$X \cap Y$	przekrój (iloczyn) zbiorów X i Y
X^n	iloczyn kartezjański $\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n \text{ kopii}}$
$B_R(x_0)$	kula otwarta o środku w punkcie x_0 i promieniu R
$\partial B_R(x_0)$	brzeg kuli
$E\{\varepsilon; f\}$	zbiór ε-prawie okresów funkcji f
$E\{S_l^p; f\}$	zbiór S_l^p-prawie okresów funkcji f
$\mu(X)$	miara Lebesque'a zbioru $X \subset R^n$
$d(x, X)$	odległość punktu x od zbioru X
$\#X$	moc zbioru X

ZBIORY LICZBOWE

$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$	zbiór liczb całkowitych
$\sup X$	kres górny zbioru X
$\inf X$	kres dolny zbioru X

CIĄGI

$\{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$	ciąg o wyrazach w E
$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	granica ciągu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$
$\liminf\limits_{n\to\infty} u_n$	granica dolna ciągu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$
$\limsup\limits_{n\to\infty} u_n$	granica górna ciągu $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$
$u_n \to u$ w E	ciąg zbieżny w E
$u_n \not\to u$ w E	ciąg $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ nie jest zbieżny do u w E

$u_n \rightharpoonup u$ w E	ciąg słabo zbieżny w E
$u_n \rightrightarrows u$ na X	ciąg jednostajnie zbieżny na zbiorze X
$dist(\lvert p_m\rvert^2, Q_\infty)$	odległość ciągu $\lvert p_m\rvert^2$ od zbioru Q_∞
(PS)-ciąg	ciąg Palais-Smale'a
$(PS)_b$-ciąg	ciąg Palais-Smale'a na poziomie b

PRZESTRZENIE

X^*	przestrzeń sprzężona do przestrzeni X
$C_B(\mathbb{R},\mathbb{R})$	przetrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, z normą $\\|f\\| = \sup_{t\in B}\lvert f(t)\rvert$
$L^p(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$	przestrzeń funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^n$, całkowalnych z p-tą potęgą, z normą $\\|f\\|_{L^p(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} = (\int_{\mathbb{R}}\lvert f(t)\rvert^p dt)^{1/p}$
$L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$	przestrzeń funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^n$, całkowalnych z p-tą potęgą na każdym zwartym podzbiorze $\mathbb{R}$
$L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$	przestrzeń funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^n$, mierzalnych, ograniczonych prawie wszędzie, z normą $\\|f\\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} = \inf\{M \geq 0;\ \mu\{t \in \mathbb{R};\ \lvert f(t)\rvert > M\} = 0\}$
$L^\infty_{2k}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$	przestrzeń $2k$-okresowych, istotnie ograniczonych, mierzalnych funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^n$, z normą $\\|f\\|_{L^\infty_{2k}} = \operatorname{ess\,sup}\{\lvert q(t)\rvert\colon\ t \in [-k,k]\}$
$L^p_\omega(\mathbb{R},\mathbb{R})$	przestrzeń funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}$, ω-okresowych, p-całkowalnych na przedziale długości ω
$C^\infty_0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$	przestrzeń funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^n$ o zwartym nośniku
$W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$	przestrzeń Sobolewa $W^{1,2}$-funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^n$, z normą $\\|f\\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}}(\lvert q(t)\rvert^2 + \lvert\dot q(t)\rvert^2)dt}$
$W^{1,2}_{2k}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$	przetrzeń Sobolewa $2k$-okresowych $W^{1,2}$-funkcji, z normą $\\|f\\|_{W^{1,2}_{2k}} = \sqrt{\int_{-k}^{k}(\lvert q(t)\rvert^2 + \lvert\dot q(t)\rvert^2)dt}$
$C(\Omega,\mathbb{R}^n)$	przestrzeń funkcji ciągłych z Ω w $\mathbb{R}^n$
$C^m(\Omega,\mathbb{R}^n)$	przestrzeń funkcji ciągłych z Ω w $\mathbb{R}^n$, mających ciągłe pochodne cząstkowe do rzędu m włącznie

OPERATORY i ODWZOROWANIA

$\lvert\cdot\rvert$	moduł w $\mathbb{R}^n$
$g \circ f$	superpozycja (złożenie) odwzorowań
$\operatorname{sgn} x$	znak $x \in \mathbb{R}$
$[x]$	część całkowita z liczby x
∇f	gradient funkcji f
$DJ(q)$	pochodna funkcjonału J w punkcie q

$J'(q)$	pochodna funkcjonału J w punkcie q
J'	pochodna funkcjonału J
$f \cdot g$	iloczyn skalarny wektorów (funkcji f i g)
$q\|_{[}T,\infty)$	obcięcie funkcji $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ do przedziału $[T,\infty)$
$q([T,\infty))$	obraz przedziału $[T,\infty)$ przy odwzorowaniu q
$WN(q)$	"winding number" (liczba nawinięć) orbity q dookoła prostej l
$f_\alpha(x) = f(x+\alpha)$	
$\tau_\theta f(x) = f(x+\theta)$	

INNE

$\vec{AB}$	wektor o początku w punkcie A i końcu w punkcie B
$o(\|x\|)$	rząd wzrostu o-małe, t.j.: $f(x) = o(\|x\|) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\|x\|} \to 0$, gdy $\|x\| \to 0$
$O(x)$	rząd wzrostu O-duże, t.j.: $f(x) = O(\|x\|) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{\|x\|} \to \text{const} \neq 0$, gdy $\|x\| \to 0$

$\operatorname{ess\,sup}\{|f(t)| : t \in [-k,k]\} = \inf\{M \geq 0;\ \mu\{t \in [-k,k];\ |f(t)| > M\} = 0\}$

Rozdział 1

Funkcje prawie okresowe

Teoria funkcji prawie okresowych zapoczątkowana została w ostatnich latach XIX wieku przez P. Bohla, a nieco później w pierwszej dekadzie wieku XX podobne rezultaty uzyskał E. Esclangon. Jednak za twórcę teorii ciągłych funkcji prawie okresowych uznaje się H. Bohra, który w latach dwudziestych ubiegłego stulecia podał definicję oraz udowodnił podstawowe własności ciągłych funkcji prawie okresowych względem metryki jednostajnej.

Funkcje prawie okresowe w metrykach całkowych badali m.in. W.W. Stiepanow, H. Weyl oraz A.S. Besicovitch

Pewną klasę ciągłych funkcji prawie okresowych, większą niż klasa funkcji jednostajnie prawie okresowych Bohra, badał B.M. Lewitan. Są to tzw. funkcje N-prawie okresowe.

Dla nas najistotniejsze są funkcje prawie okresowe Bohra i dlatego im poświęcimy najwięcej uwagi.

Następnie omówimy krótko kilka pozostałych klas funkcji prawie okresowych. Jednak żadna z nich nie będzie wykorzystywana w dalszych rozdziałach rozprawy doktorskiej.

1.1 Funkcje jednostajnie prawie okresowe Bohra

Weźmy dwie ciągłe funkcje okresowe f, g o okresach podstawowych T_1, $T_2 > 0$ odpowiednio. Jeżeli liczby T_1, T_2 są współmierne, tzn. istnieją liczby naturalne m, n takie, że $mT_1 = nT_2$, to suma $h = f + g$ także jest funkcją okresową o okresie $T = mT_1 = nT_2$. W przeciwnym przypadku, h nie jest funkcją okresową. Jakkolwiek, jeżeli okresy obu funkcji przybliżymy liczbami wymiernymi $\widetilde{T}_1$, $\widetilde{T}_2$ i rozpatrzymy funkcje $\widetilde{f}$ oraz $\widetilde{g}$ o tych okresach, to suma $\widetilde{h} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$ jest funkcją okresową.

Bardziej precyzyjnie, z ogólnej teorii liczb rzeczywistych wynika następująca własność. Niech p, q będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Dla każdej liczby $\delta > 0$ istnieje liczba $\lambda > 0$ taka, że w każdym otwartym przedziale długości λ istnieje co najmniej jedna liczba τ spełniająca nierówności

$$|\tau - s_1 p| < \delta, \qquad |\tau - s_2 q| < \delta, \tag{1.1}$$

gdzie s_1, s_2 są liczbami całkowitymi.

Niech $\varepsilon > 0$. Ponieważ funkcje f, g są jednostajnie ciągłe, więc istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$, spełniającego nierówność $|t| < \delta$, zachodzą nierówności

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |g(x+t) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Przyjmijmy $p = T_1$, $q = T_2$. Istnieje $\lambda > 0$ taka, że w każdym otwartym przedziale długości λ istnieje liczba τ spełniająca układ (1.1). Stąd $\tau = s_1 p + t_1$, $\tau = s_2 q + t_2$, gdzie s_1, s_2 są liczbami całkowitymi oraz $|t_1| < \delta$, $|t_2| < \delta$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} |h(x+\tau) - h(x)| &\leq |f(x + s_1 T_1 + t_1) - f(x)| + |g(x + s_2 T_2 + t_2) - g(x)| = \\ &= |f(x+t_1) - f(x)| + |g(x+t_2) - g(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ostatecznie dla każdgo $\varepsilon > 0$ istnieje $\lambda > 0$ taka, że w każdym przedziale otwartym o długości λ istnieje co najmniej jedna liczba τ spełniająca nierówność

$$|h(x+\tau) - h(x)| < \varepsilon$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. O funkcji h mówimy wówczas, że jest *jednostajnie prawie okresowa.*

Definicja 1.1. Mówimy, że zbiór $D \subset \mathbb{R}$ jest relatywnie (względnie) gęsty w $\mathbb{R}$, jeżeli istnieje $\lambda > 0$ taka, że każdy otwarty przedział długości λ zawiera przynajmniej jedną liczbę ze zbioru D.

Nietrudno zauważyć, że zbiory np. $\mathbb{Z}$, $\{\pm\sqrt{n} : \ n \in \mathbb{N}\}$ są relatywnie gęste w $\mathbb{R}$, ale zbiór $\{\pm n^2 : \ n \in \mathbb{N}\}$ nie jest względnie gęsty w $\mathbb{R}$.

Definicja 1.2. Niech $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Liczbę τ nazywamy ε-okresem funkcji f, jeżeli

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon.$$

Ciągłą funkcję $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy prawie okresową, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje relatywnie gęsty zbiór, $D_\varepsilon \subset \mathbb{R}$, ε-okresów funkcji f.

Tak zdefiniowane funkcje nazywamy funkcjami prawie okresowymi Bohra, który zapoczątkował i rozwinął badanie funkcji prawie okresowych w sensie powyższej definicji. My od tego momentu będziemy skrótowo nazywać je funkcjami p.o.

Przykład 1.3. Weźmy funkcję $f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$ (patrz Rysunek 1.1 str. 31). Ponieważ liczby 1 i $\sqrt{2}$ są niewspółmierne, to funkcja f nie jest okresowa. Uzasadnimy, że jest ona p.o. Mamy

$$\begin{aligned} |f(x+\tau) - f(x)| &= |\sin(x+\tau) + \sin(\sqrt{2}(x+\tau)) - \sin x - \sin(\sqrt{2}x)| \\ = |\sin x \cos\tau &+ \cos x \sin\tau + \sin(\sqrt{2}x)\cos(\sqrt{2}\tau) + \cos(\sqrt{2}x)\sin(\sqrt{2}\tau) - \sin x - \sin(\sqrt{2}x)| \\ \leq |1 - \cos\tau| &+ |1 - \cos(\sqrt{2}\tau)| + |\sin\tau| + |\sin(\sqrt{2}\tau)|. \end{aligned}$$

Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolne i niech m, $n \in \mathbb{Z}$ będą takie, że

$$|m - \sqrt{2}n| < \frac{\varepsilon}{4\pi}.$$

Stąd dostajemy, że

$$\sqrt{2}n = m + \alpha, \qquad \text{gdzie} \qquad |\alpha| < \frac{\varepsilon}{4\pi}.$$

Kładąc $\tau = 2n\pi$ otrzymujemy $\cos\tau = 1$, $\sin\tau = 0$, $\cos(\sqrt{2}\tau) = \cos(2\pi\alpha)$ oraz $\sin(\sqrt{2}\tau) = \sin(2\pi\alpha)$. Ostatecznie dostajemy

$$|f(x+\tau) - f(x)| \leq |1 - \cos(\sqrt{2}\tau)| + |\sin(\sqrt{2}\tau)| \leq |2\pi\alpha| + |2\pi\alpha| = 4\pi|\alpha| < \varepsilon.$$

Funkcje p.o. posiadają wiele własności analogicznych do ciągłych funkcji okresowych. W następnych twierdzeniach przytoczymy i udowodnimy kilka z nich.

Od teraz zbiór ε-prawie okresów funkcji f będziemy oznaczać przez $E\{\varepsilon; f\}$.

Łatwo zauważyć, że jeżeli liczby $\lambda(\varepsilon) > 0$, które charakteryzują relatywną gęstość zbiorów $E\{\varepsilon; f\}$, tworzą zbiór ograniczony, to f jest funkcją okresową.

W istocie załóżmy, że istnieje $\lambda_0 > 0$ takie, że dla każdego $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ mamy $0 < \lambda(\varepsilon) \leq \lambda_0$. Niech $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $\varepsilon_n \in (0, \varepsilon_0]$ i $\varepsilon_n \to 0$ dla $n \to \infty$. W przedziale $(\lambda_0, 2\lambda_0)$ dla każdego $n = 1, 2, \ldots$ istnieje ε_n-prawie okres $\tau_n = \tau_n(\varepsilon_n)$ funkcji f. Ciąg $\{\tau_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest więc ograniczony i z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa posiada podciąg $\{\tau_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do $T \in [\lambda_0, 2\lambda_0]$. Stąd, przechodząc w nierówności

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \tau_{n_k}) - f(x)| < \varepsilon_{n_k}$$

z $k \to \infty$, otrzymujemy $f(x + T) = f(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, czyli T jest okresem funkcji f.

Twierdzenie 1.4 (Patrz Twierdzenie 1.1 w [27]). *Każda funkcja p.o. jest ograniczona i jednostajnie ciągła.*

Dowód. Niech f będzie funkcją p.o. Ustalmy $\varepsilon_0 = 1$ oraz niech λ_0 będzie liczbą charakteryzującą relatywną gęstość zbioru $E\{1; f\}$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą, więc osiąga swoje kresy na zbiorze $[0, \lambda_0]$. Oznaczmy $M = \max\limits_{x \in [0, \lambda_0]} |f(x)|$. Z prawie okresowości funkcji f otrzymujemy, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ istnieje $\tau \in E\{1; f\} \cap (-x_0, -x_0 + \lambda_0)$ takie, że

$$|f(x_0)| \leq |f(x_0) - f(x_0 + \tau)| + |f(x_0 + \tau)| \leq 1 + M,$$

ponieważ $x_0 + \tau \in (0, \lambda_0)$. Stąd f jest ograniczona na $\mathbb{R}$.

Ponadto, oznaczmy przez $\lambda = \lambda\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$ liczbę charakteryzującą względną gęstość zbioru $E\left\{\frac{\varepsilon}{3}; f\right\}$. Funkcja f jako ciągła jest jednostajnie ciągła na każdym zbiorze zwartym, a więc w szczególności na przedziale $I = [-1, \lambda + 1]$. Istnieje więc $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, 1]$ taka, że dla każdych x', $x'' \in I$ takich, że $|x' - x''| < \delta$ mamy $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{3}$. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2 takich, że $|x_1 - x_2| < \delta$ oraz dla $\tau \in E\left\{\frac{\varepsilon}{3}; f\right\} \cap (-x_1, -x_1 + \lambda)$ dostajemy $x_1 + \tau \in (0, \lambda)$, $x_2 + \tau \in (-1, \lambda + 1)$, czyli $x_1 + \tau$, $x_2 + \tau \in I$. Stąd

$$\begin{aligned} |f(x_2) - f(x_1)| \quad &\leq \quad |f(x_2) - f(x_2 + \tau)| + |f(x_2 + \tau) - f(x_1 + \tau)| \\ &\quad\; + |f(x_1 + \tau) - f(x_1)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

czyli f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.

□

Lemat 1.5 (Patrz Twierdzenie 6. w [2]). *Jeżeli funkcja* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest p.o. to funkcja* f^2 *też jest p.o.*

Dowód. Niech τ będzie ε-prawie okresem fnkcji f. Wówczas otrzymujemy oszacowanie

$$|f^2(x + \tau) - f^2(x)| = |f(x + \tau) - f(x)||f(x + \tau) + f(x)| < 2M\varepsilon,$$

gdzie

$$M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Wówczas $E(\varepsilon; f) \subset E(2M\varepsilon; f^2)$ i funkcja f^2 jest p.o.

□

Twierdzenie 1.6 (Patrz Twierdzenie 2.1 w [27]). *Niech $f\colon \mathbb{R} \to Y_f$ będzie p.o. oraz niech $g\colon Y_f \to \mathbb{R}$ będzie funkcją jednostajnie ciągłą. Wówczas złożenie funkcji $h = g \circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją p.o.*

Dowód. Ponieważ g jest jednostajnie ciągła na zbiorze Y_f, więc dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ taka, że dla dowolnych y', $y'' \in Y_f$ spełniających $|y' - y''| < \delta$ mamy $|g(y') - g(y'')| < \varepsilon$. Ponadto dla $\tau \in E\{\delta; f\}$ oraz dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$|h(x+\tau) - h(x)| = |g(f(x+\tau)) - g(f(x))| < \varepsilon,$$

czyli τ jest ε-prawie okresem funkcji h, więc h jest p.o. oraz $E\{\delta; f\} \subset E\{\varepsilon; h\}$.

□

Wniosek 1.7. *Jeżeli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest p.o., to funkcje cf, gdzie $c \in \mathbb{R}$, $|f|$, $\operatorname{arctg} f$ są p.o.*

Zauważmy, że w Twierdzeniu 1.6 nie możemy warunku jednostajnej ciągłości funkcji g zastąpić ciągłością. W tym celu rozważmy funkcję $f(x) = 2+\sin x+\sin(\sqrt{2}x)$. Oczywiście f jest funkcją p.o. oraz $f(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, ponieważ nie istnieje x takie, że $\sin x = \sin(\sqrt{2}x) = -1$. Jakkolwiek z faktu, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje rozwiązanie układu nierówności

$$\left| x - \frac{3\pi}{2} \right| < \varepsilon \,(\bmod 2\pi), \qquad \left| \sqrt{2}x - \frac{3\pi}{2} \right| < \varepsilon \,(\bmod 2\pi),$$

a stąd wynika, że $\inf\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = 0$. Jeżeli weźmiemy funkcję $g(y) = \dfrac{1}{y}$ dla $y \in (0,4)$, to funkcja złożona $h(x) = 1/f(x)$ nie jest funkcją p.o., ponieważ nie jest funkcją ograniczoną. Co więcej, zauważmy, że nawet jeżeli funkcja g będzie ciągła i ograniczona, to nie mamy gwarancji, że złożenie $g \circ f$ będzie funkcją p.o. Jako kontrprzykład możemy podać funkcję $g(x) = \sin \dfrac{1}{x}$. Niewątpliwie g jest ograniczona, ale funkcja (patrz Rysunek 1.2 str. 31) $p = g \circ f$ dana wzorem

$$p(x) = \sin \frac{1}{2 + \sin x + \sin(\sqrt{2}x)}$$

nie jest jednostajnie ciągła, co pokażemy w następnym podrozdziale. Na mocy Twierdzenia 1.4 nie jest więc p.o.

Kolejne twierdzenie mówi o jednostajnej granicy ciągu funkcji p.o.

Twierdzenie 1.8 (Patrz Twierdzenie 1.3 w [27]). *Jeżeli ciąg $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcji p.o. jest jednostajnie zbieżny do funkcji f, to f jest p.o.*

Dowód. Ponieważ ciąg $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do f, więc f jest funkcją ciągłą i ograniczoną. Ponadto dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dla $\tau \in E\left\{\frac{\varepsilon}{3}; f_{n_0}\right\}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} |f(x+\tau) - f(x)| \;&\le\; |f(x+\tau) - f_{n_0}(x+\tau)| + |f_{n_0}(x+\tau) - f_{n_0}(x)| + \\ &\quad\; |f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Stąd $E\left\{\frac{\varepsilon}{3}; f_{n_0}\right\} \subset E\{\varepsilon; f\}$, więc f jest p.o.

□

Z powyższego twierdzenia wynika, że zbiór funkcji p.o. jest domknięty w przestrzeni funkcji ciągłych i ograniczonych $C_B(\mathbb{R},\mathbb{R})$ z metryką

$$d(f,g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|,$$

a co za tym idzie jest przestrzenią zupełną.

Bardzo ważną charakteryzację funkcji p.o. sformułował S. Bochner. Definicje funkcji prawie okresowej według Bora i Bochnera są równoważne.

Definicja 1.9. Niech $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ będzie ciągła i ograniczona. Mówimy, że funkcja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest normalna, jeżeli dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ istnieje podciąg $\{\sigma_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\{f(\cdot+\sigma_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny w $\mathbb{R}$, tzn. istnieje funkcja $g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ taka, że

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x+\sigma_{n_k}) - g(x)| \to 0,$$

gdy $k\to\infty$.

Od tej pory będziemy oznaczać $f_\alpha(x) := f(x+\alpha)$.

Twierdzenie 1.10 (Warunek Bochnera, patrz Twierdzenie 1.4 w [27])**.** *Funkcja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest p.o. wtedy i tylko wtedy, gdy jest normalna.*

Dowód. Najpierw załóżmy, że f jest funkcją p.o. Uzasadnimy, że jest ona funkcją normalną. Niech $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie dowolnym ciągiem liczb rzeczywistych. Pokażemy, że z ciągu funkcyjnego $\{f_{\sigma_n}\}_{n=1}^{\infty}$ możemy wybrać podciąg jednostajnie zbieżny do pewnego $g\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Rozważmy przeliczalny i gęsty podzbiór liczb rzeczywistych

$$A = \{x_1, x_2, \ldots x_k, \ldots\}.$$

Ponieważ f jest funkcją ograniczoną, więc z ciągu $\{f_{\sigma_n}(x_1)\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ możemy wybrać podciąg $\{f_{\sigma_{1n}}(x_1)\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny w $\mathbb{R}$. Następnie z ciągu $\{f_{\sigma_{1n}}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ możemy wybrać podciąg $\{f_{\sigma_{2n}}(x_2)\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny w $\mathbb{R}$. Powtarzając ten proces k-krotnie otrzymamy ciąg $\{f_{\sigma_{kn}}(x_k)\}_{n=1}^{\infty}$ zbieżny w $\mathbb{R}$. Ponadto zwróćmy uwagę, że $f_{\sigma_{nn}}(x_k)$ dla $n>k$ są wyrazami ciągu $\{f_{\sigma_{kn}}(x_k)\}_{n=1}^{\infty}$. Stąd otrzymujemy, że ciąg $\{f_{\sigma_{nn}}(x_i)\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny dla $i=1,2,\ldots$, a więc w każdym punkcie zbioru A. Pokażemy, że ciąg $\{f_{\sigma_{nn}}\}_{n=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$. Niech $x_0\in\mathbb{R}$ oraz dla dowolnego $\varepsilon>0$ niech $\lambda=\lambda(\varepsilon)$ oznacza liczbę charakteryzującą relatywną gęstość zbioru $E\left\{\frac{\varepsilon}{5}, f\right\}$. Z jednostajnej ciągłości f na $\mathbb{R}$ dostajemy, że istnieje $\delta=\delta(\varepsilon)$ taka, że dla wszystkich x', $x''\in\mathbb{R}$ spełniających $|x'-x''|\le\delta$ mamy $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{5}$. Rozważmy przedział $[0,\lambda]$. Podzielmy go na p przedziałów o długości nie większej niż δ. Z gęstości zbioru A w $\mathbb{R}$ możemy w tych przedziałach wybrać liczby $x_1', x_2', \ldots, x_p'\in A$. Ze zbieżności ciągu $\{f_{\sigma_{nn}}\}_{n=1}^{\infty}$ w punktach zbioru A wiemy, że istnieje $N=N(\varepsilon)>0$ takie, że dla r, $s>N$ zachodzą nierówności

$$|f(x_i'+\sigma_{rr}) - f(x_i'+\sigma_{ss})| < \frac{\varepsilon}{5} \qquad \text{dla} \qquad i=1,2,\ldots,p. \tag{1.2}$$

Z prawie okresowości funkcji f wiemy, że istnieje $\tau\in E\left\{\frac{\varepsilon}{5}, f\right\}\cap(-x_0,-x_0+\lambda)$. Wówczas $x_0'=x_0+\tau\in(0,\lambda)$ i stąd dla pewnego $i\in\{1,2,\ldots,p\}$ mamy $|x_i'-x_0'|\le\delta$, co pociąga

$$|f(x_i'+\sigma_{kk}) - f(x_0'+\sigma_{kk})| < \frac{\varepsilon}{5} \qquad \text{dla} \qquad k=1,2,\ldots \tag{1.3}$$

Z oszacowań (1.2), (1.3) oraz prawie okresowości funkcji f dostajemy, że dla $r, s > N$

$$\begin{aligned}|f(x_0+\sigma_{rr}) - f(x_0+\sigma_{ss})| &\leq |f(x_0+\sigma_{rr}) - f(x_0'+\sigma_{rr})| + \\ &+ |f(x_0'+\sigma_{rr}) - f(x_i'+\sigma_{rr})| + |f(x_i'+\sigma_{rr}) - f(x_i'+\sigma_{ss})| + \\ &+ |f(x_i'+\sigma_{ss}) - f(x_0'+\sigma_{ss})| + |f(x_0'+\sigma_{ss}) - f(x_0+\sigma_{ss})| \\ &< \frac{3}{5}\varepsilon + |f(x_0+\sigma_{rr}) - f(x_0+\sigma_{rr}+\tau)| + |f(x_0+\sigma_{ss}+\tau) - f(x_0+\sigma_{ss})| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Ponieważ N nie zależy od x_0, więc ciąg $\{f_{\sigma_{nn}}\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni $C_B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zatem ciąg $\{f_{\sigma_{nn}}\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny jednostajnie do pewnej funkcji $g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Stąd f jest funkcją normalną.

Dowód w drugą stronę poprowadzimy nie wprost. Załóżmy, że f jest ciągłą i ograniczoną funkcją normalną. Przypuśćmy, że f nie jest funkcją p.o. Gdyby tak było, to dla pewnego $\varepsilon_0 > 0$ istniałby ciąg przedziałów $\{I_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ o długościach odpowiednio $d_1, d_2, \ldots$, przy czym $d_n \to \infty$ dla $n \to \infty$, oraz w żadnym z przedziałów I_n, $n = 1, 2, \ldots$, nie byłoby ε_0-prawie okresu funkcji f. Niech σ_1 będzie dowolną liczbą rzeczywistą. Liczbę σ_2 dobieramy tak, aby $\sigma_2 - \sigma_1 \in I_1 = I_{\nu_1}$. Niech I_{ν_2} będzie przedziałem długości $d_{\nu_2} > |\sigma_2 - \sigma_1|$. Liczbę σ_3 dobieramy tak, aby $\sigma_3 - \sigma_1$, $\sigma_3 - \sigma_2 \in I_{\nu_2}$. Przedział I_{ν_3} ma długość $d_{\nu_3} > \max\{|\sigma_2 - \sigma_1|, |\sigma_3 - \sigma_1|, |\sigma_3 - \sigma_2|\}$, a liczbę σ_4 dobieramy tak, by $\sigma_4 - \sigma_1$, $\sigma_4 - \sigma_2$, $\sigma_4 - \sigma_3 \in I_{\nu_3}$. Postępując tak dalej otrzymujemy ciąg przedziałów $\{I_{\nu_n}\}_{n=1}^{\infty}$ o długości $d_{\nu_n} > \max\{|\sigma_\nu - \sigma_\mu| : 1 \leq \mu < \nu \leq n\}$, a liczba σ_{n+1} jest dobrana tak, aby $\sigma_{n+1} - \sigma_m \in I_{\nu_n}$ dla $m = 1, 2, \ldots n$. Dla tak skonstruowanego ciągu otrzymujemy

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \sigma_{n_1}) - f(x + \sigma_{n_2})| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x + \sigma_{n_2} - \sigma_{n_1}) - f(x)| > \varepsilon_0,$$

ponieważ liczby $\sigma_{n_2} - \sigma_{n_1}$ dla $n_2 > n_1$, należą do przedziału $I_{\nu_{n_2 - 1}}$, a w tym przedziale nie ma ε_0-prawie okresów funkcji f. Stąd ciąg $\{f_{\sigma_n}\}_{n=1}^{\infty}$ nie spełnia warunku Cauchy'ego w $C_B(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, a zatem nie zawiera podciągu zbieżnego. Sprzeczność. Ostatecznie f jest funkcją p.o.

□

Z powyższego błyskawicznie wynika następujący fakt.

Twierdzenie 1.11 (Patrz Twierdzenie 1.5 w [27]). *Suma, różnica i iloczyn funkcji p.o. są funkcjami p.o.*

Dowód. Niech f, $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami p.o. Z Twierdzenia 1.10 wynika, że z każdego z ciągów $\{f(\cdot + \sigma_n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{g(\cdot + \sigma_n)\}_{n=1}^{\infty}$ możemy wybrać podciąg zbieżny. Rozważmy ciąg $\{(f+g)(\cdot + \sigma_n)\}_{n=1}^{\infty}$. Wybierzmy z niego podciąg $\{(f+g)(\cdot + \sigma_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\{f(\cdot + \sigma_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do $\widetilde{f}$, a następnie z ciągu $\{(f+g)(\cdot + \sigma_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ wybierzmy podciąg $\{(f+g)(\cdot + \sigma_{n_{k_l}})\}_{l=1}^{\infty}$ taki, że $\{g(\cdot + \sigma_{n_{k_l}})\}_{l=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do $\widetilde{g}$. Stąd ciąg $\{(f+g)(\cdot + \sigma_{n_{k_l}})\}_{l=1}^{\infty}$ jest jednostajnie zbieżny do $\widetilde{f} + \widetilde{g}$ na $\mathbb{R}$. Ostatecznie $f + g$ jest p.o.

Na mocy Wnioku 1.7 funkcja $-g$ jest p.o. Stąd $f - g = f + (-g)$ jest p.o.

Prawie okresowoś funkcji $f \cdot g$ natychmiast dostajemy z równości

$$f \cdot g = \frac{1}{4}\left((f+g)^2 - (f-g)^2\right)$$

i Lematu 1.5.

□

Oczywiście iloraz $\frac{f}{g}$ funkcji p.o. jest funkcją p.o pod warunkiem, że $\inf_{x \in \mathbb{R}} |g(x)| > 0$.

Kolejne dwa fakty dotyczą prawie okresowości pochodnej oraz pierwotnej funkcji p.o.

Twierdzenie 1.12 (Patrz Twierdzenie 1.6 w [27]). *Pochodna $f' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcji p.o. $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją p.o. wtedy i tylko wtedy, gdy $f' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła.*

Dowód. Warunek konieczny twierdzenia wynika wprost z Twierdzenia 1.4.

Z drugiej strony, załóżmy, że f' jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$. Dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ różnych od zera oraz $h_n \to 0$ dla $n \to \infty$ i dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$\frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} = \frac{1}{h_n} \int_x^{x+h_n} f'(t)dt = \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} f'(t+x)dt.$$

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja $(f(\cdot + h_n) - f)/h_n$ jest p.o. Niech $\varepsilon > 0$. Z jednostajnej ciągłości f' wynika, że istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdych x', $x'' \in \mathbb{R}$ mamy

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f'(x') - f'(x'')| < \varepsilon.$$

Ponieważ $\lim_{n \to \infty} h_n = 0$, więc istnieje $N \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $n > N$, $|h_n| < \delta$. Stąd dla każdego $n > N$, dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i dla każdego $|t| < |h_n|$

$$|f'(t+x) - f'(x)| < \varepsilon,$$

a w konsekwencji, dla każdego $n > N$ i każdego $x \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} - f'(x) \right| \leq \frac{1}{h_n} \int_0^{h_n} |f'(t+x) - f'(x)|dt < \varepsilon,$$

czyli

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n} - f'(x) \right| \to 0,$$

gdy $n \to \infty$. Na mocy Twierdzenia 1.8, f' jest funkcją p.o.

□

Twierdzenie 1.13 (Patrz Twierdzenie 1.7 w [27]). *Funkcja pierwotna $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcji p.o. $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest p.o wtedy i tylko wtedy, gdy F jest ograniczona.*

Dowód. Warunek konieczny twierdzenia wynika wprost z Twierdzenia 1.4.

Dowodzimy zatem warunku dostatecznego. Niech funkcja pierwotna

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

będzie ograniczona. Pokażemy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon)$ takie, że każdy ε_1-prawie okres funkcji f jest ε-prawie okresem funkcji F. Z ograniczoności F wiemy, że istnieją G, $g \in \mathbb{R}$ takie, że

$$G = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x), \qquad g = \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x).$$

Niech $\varepsilon > 0$. Ustalmy x_1, x_2 tak, by

$$F(x_1) < g + \frac{\varepsilon}{6}, \qquad F(x_2) > G - \frac{\varepsilon}{6}$$

oraz $|x_1 - x_2| = d > 0$. Oznaczmy $\xi = \min\{x_1, x_2\}$. Istnieje $\lambda_0 > 0$ taka, że w każdym przedziale długości λ_0 istnieje co najmniej jeden $\frac{\varepsilon}{6d}$-prawie okres τ funkcji f. Niech $L_0 = \lambda_0 + d$. Weźmy $\alpha \in \mathbb{R}$. Istnieje $\frac{\varepsilon}{6d}$-prawie okres $\tau \in (\alpha - \xi, \alpha - \xi + \lambda_0)$ funkcji f. Wówczas mamy $\xi + \tau \in (\alpha, \alpha + \lambda_0)$ oraz $y_1 = x_1 + \tau$, $y_2 = x_2 + \tau \in (\alpha, \alpha + L_0)$. Otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned} F(y_2) - F(y_1) &= F(x_2) - F(x_1) + \int_{y_1}^{y_2} f(t)dt - \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \\ &= F(x_2) - F(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} (f(t+\tau) - f(t))dt \\ &\geq F(x_2) - F(x_1) - d \cdot \frac{\varepsilon}{6d} > G - g - \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned} F(y_2) &> G - \frac{\varepsilon}{2} + F(y_1) - g > G - \frac{\varepsilon}{2}, \\ F(y_1) &< g + \frac{\varepsilon}{2} + F(y_2) - G < g + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Niech $\tau \in E\{\varepsilon_1, f\}$, gdzie $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4L_0}$. Wobec powyższego dla $x \in \mathbb{R}$ w przedziale $(x, x + L_0)$ dobieramy y_1 tak, aby $F(y_1) < g + \frac{\varepsilon}{2}$. Wówczas

$$\begin{aligned} F(x+\tau) - F(x) &= F(y_1 + \tau) - F(y_1) + \int_{x}^{x+\tau} f(t)dt - \int_{y_1}^{y_1+\tau} f(t)dt \\ &= F(y_1 + \tau) - F(y_1) + \int_{x}^{y_1} f(t)dt - \int_{x+\tau}^{y_1+\tau} f(t)dt \\ &> g - \left(g + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \int_{x}^{y_1} |f(t+\tau) - f(t)|dt \\ &\geq -\frac{\varepsilon}{2} - L_0 \frac{\varepsilon}{4L_0} = -\frac{3}{4}\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Podobnie wybierzmy w przedziale $(x, x + L_0)$ liczbę y_2 tak, aby $F(y_2) > G - \frac{\varepsilon}{2}$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} F(x+\tau) - F(x) &= F(y_2 + \tau) - F(y_2) + \int_{x}^{x+\tau} f(t)dt - \int_{y_2}^{y_2+\tau} f(t)dt \\ &= F(y_2 + \tau) - F(y_2) + \int_{x}^{y_2} f(t)dt - \int_{x+\tau}^{y_2+\tau} f(t)dt \\ &< G - \left(G - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \int_{x}^{y_2} |f(t+\tau) - f(t)|dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + L_0 \frac{\varepsilon}{4L_0} = \frac{3}{4}\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Z nierówności (1.4) oraz (1.5) dostajemy, że

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x+\tau) - F(x)| \leq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon.$$

Stąd $E\{\varepsilon_1, f\} \subset E\{\varepsilon, F\}$. W rezultacie F jest p.o.

$\square$

Definicja 1.14. Wartością średnią funkcji $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nazywamy wielkość

$$M(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

przy założeniu, że granica ta istnieje w sensie właściwym lub niewłaściwym.

Wartość średnia służy do zbudowania szeregu Fouriera funkcji f.

Twierdzenie 1.15 (Patrz Twierdzenie 1.8 w [27]). *Jeżeli funkcja f jest p.o., to istnieje skończona wartość średnia $M(f)$.*

Dowód. Z ograniczoności funkcji f wiemy, że istnieje stała $A = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$. Niech $\lambda > 0$ będzie liczbą charakteryzującą względną gęstość zbioru $E\left\{\frac{\varepsilon}{4}; f\right\}$. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $T > 0$ będą dowolne. Dla $\tau \in E\left\{\frac{\varepsilon}{4}; f\right\} \cap (\alpha, \alpha+\lambda)$ mamy

$$\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx = \int_\alpha^\tau f(x)dx + \int_\tau^{\tau+T} f(x)dx + \int_{\tau+T}^{\alpha+T} f(x)dx.$$

Stąd

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx - \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)dx\right| \\
\le\ & \left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx - \frac{1}{T}\int_\tau^{\tau+T} f(x)dx\right| + \left|\frac{1}{T}\int_\alpha^\tau f(x)dx\right| + \left|\frac{1}{T}\int_{\tau+T}^{\alpha+T} f(x)dx\right| \\
\le\ & \frac{1}{T}\int_0^T |f(x)-f(x+\tau)|dx + \frac{1}{T}\int_\alpha^\tau |f(x)|dx + \frac{1}{T}\int_{\alpha+T}^{\tau+T} |f(x)|dx \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2A\lambda}{T}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Stosując n krotnie nierówność (1.6) dostaniemy

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx - \frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(x)dx\right| \le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{2A\lambda}{T}. \tag{1.7}$$

Załóżmy, że liczby T_1, T_2 są dowolnymi współmiernymi liczbami dodatnimi, tzn. istnieją liczby naturalne m_1, m_2 takie, że $m_1T_1 = m_2T_2$. Z nierównośći (1.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(x)dx - \frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(x)dx\right| &\le \left|\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} f(x)dx - \frac{1}{m_1T_1}\int_0^{m_1T_1} f(x)dx\right| \\
&+ \left|\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2} f(x)dx - \frac{1}{m_2T_2}\int_0^{m_2T_2} f(x)dx\right| \le \frac{\varepsilon}{2} + 2A\lambda\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}\right).
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Z (1.8) wynika, że dla dowolnych liczb naturalnych $m, n > \frac{8A\lambda}{\varepsilon}$ spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^m f(x)dx - \frac{1}{n}\int_0^n f(x)dx\right| < \varepsilon.$$

Stąd wynika, że ciąg liczbowy

$$\left\{\frac{1}{n}\int_0^n f(x)dx\right\}_{n=1}^\infty$$

jest ciągiem Cauchy'ego, a zatem jest zbieżny. Niech $T = n + r$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, a $r \in [0, 1)$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx - \frac{1}{n}\int_0^n f(x)dx\right| &= \left|\frac{1}{T}\int_0^r f(x+n)dx - \frac{r}{nT}\int_0^n f(x)dx\right| \\ \leq \frac{1}{T}\int_0^r |f(x+n)|dx &+ \frac{r}{nT}\int_0^n |f(x)|dx \leq \frac{2rA}{T} < \frac{2A}{T} \to 0 \end{aligned} \tag{1.9}$$

dla $T \to \infty$, czyli

$$M(f) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(x)dx,$$

a wcześniej stwierdziliśmy, że granica ta istnieje.

□

1.2 Funkcje S_l^p-prawie okresowe Stiepanowa

Niech funkcje $f, g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dla $1 \leq p < \infty$. Przyjmujemy, że

$$D_{S_l^p}(f, g) = \sup_{u\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{l}\int_u^{u+l}|f(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

gdzie $l > 0$. $D_{S_l^p}(f, g)$ może przyjmować wartość $+\infty$. Jeżeli ograniczymy się do zbioru

$$\left\{f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \sup_{u\in\mathbb{R}}\frac{1}{l}\int_u^{u+l}|f(x)|^p < \infty\right\},$$

to nietrudno zauważyć, że $D_{S_l^p}$ jest metryką na tym zbiorze. Ponadto, dla każdego $a \in \mathbb{R}$,

$$D_{S_l^p}(f, g) = \sup_{u\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{l}\int_{u-a}^{u-a+l}|f(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lemat 1.16. *Dla dowolnych $f, g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ oraz $0 < l_1 < l_2$ zachodzą nierówności:*

$$D_{S_{l_1}^p}(f, g) \leq \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{\frac{1}{p}} D_{S_{l_2}^p}(f, g) \tag{1.10}$$

oraz

$$D_{S_{l_2}^p}(f, g) \leq 2^{\frac{1}{p}} D_{S_{l_1}^p}(f, g). \tag{1.11}$$

Dowód. Nierówność (1.10) natychmiast dostajemy z oszacowania

$$\sup_{u\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{l_1}\int_u^{u+l_1}|f(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{l_2}{l_1}\right)^{\frac{1}{p}}\sup_{u\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{l_2}\int_u^{u+l_2}|f(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Z drugiej strony mamy natomiast

$$\begin{aligned} D_{S_{l_2}^p}(f, g) &= \sup_{u\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{l_2}\int_u^{u+l_2}|f(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{u\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{l_2}\int_u^{u+l_1}|f(x) - g(x)|^p dx + \frac{1}{l_2}\int_{u+l_1}^{u+l_2}|f(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\frac{1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{u\in\mathbb{R}}\int_u^{u+l_1}|f(x) - g(x)|^p dx + \sup_{u\in\mathbb{R}}\int_{u+l_1}^{u+l_2}|f(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \\ &\leq \left(\frac{1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{u\in\mathbb{R}}\int_u^{u+l_1}|f(x) - g(x)|^p dx + \sup_{u\in\mathbb{R}}\int_u^{u+l_2-l_1}|f(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Rozpatrzmy dwa przypadki $l_2 \leq 2l_1$ oraz $l_2 > 2l_1$.

W pierwszym z nich zachodzi

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+l_2-l_1} |f(x)-g(x)|^p dx \leq \sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+l_1} |f(x)-g(x)|^p dx,$$

co po wstawieniu do (1.12) daje

$$\begin{aligned} D_{S^p_{l_2}}(f,g) &\leq \left(\frac{1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+l_1} |f(x)-g(x)|^p dx + \sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+l_1} |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2^{\frac{1}{p}} D_{S^p_{l_1}}(f,g). \end{aligned}$$

W przypadku $l_2 > 2l_1$ wiemy, że istnieją $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ oraz $0 \leq r_1 < l_1$ takie, że

$$l_2 = nl_1 + r_1. \tag{1.13}$$

Stąd

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+l_2-l_1} |f(x)-g(x)|^p dx \leq n \sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+l_1} |f(x)-g(x)|^p dx,$$

co po wstawieniu do (1.12) daje

$$D_{S^p_{l_2}}(f,g) \leq \left(\frac{n+1}{l_2}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+l_1} |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.14}$$

Z równości (1.13) otrzymujemy

$$n+1 = \frac{l_2+l_1-r_1}{l_1} \leq \frac{2l_2}{l_1}. \tag{1.15}$$

Wstawiając (1.15) do (1.14) dostajemy

$$D_{S^p_{l_2}}(f,g) \leq \left(\frac{2}{l_1}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sup_{u\in\mathbb{R}} \int_u^{u+l_1} |f(x)-g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}} D_{S^p_{l_1}}(f,g),$$

co daje nam oczekiwaną nierówność.

□

W oparciu o nierówności (1.10) oraz (1.11) stwierdzamy, że przy ustalonym $p \in [1,\infty)$ bez straty ogólności możemy ograniczyć się do przypadku $l=1$, przyjmując $S^p_1 = S^p$.

Definicja 1.17. Liczbę τ nazywamy (S^p, ε)-prawie okresem funkcji $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, jeżeli

$$D_{S^p}(f, f_\tau) \leq \varepsilon,$$

gdzie $f_\tau(x) = f(x+\tau)$.

Funkcję $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nazywamy S^p-prawie okresową, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje relatywnie gęsty zbiór (S^p,ε)-prawie okresów funkcji f.

Przez $E_{S^p}\{\varepsilon; f\}$ oznaczamy zbiór (S^p,ε)-prawie okresów funkcji f. Każda funkcja p.o. jest S^p-p.o. dla każdego $p \geq 1$.

Zauważmy, że jeżeli rozpatrzymy funkcję $g(x) = \mathrm{sgn} f(x)$, gdzie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją okresową o okresie podstawowym T i f nie jest stałego znaku, to g nie jest p.o., ponieważ nie jest ciągła.

Z drugiej strony otrzymujemy, że

$$D_{S^p}(g, g_T) = 0.$$

Stąd dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje relatywnie gęsty zbiór $\{\pm nT\}_{n=1}^{\infty}$ jej (S^p, ε)-prawie okresów. Otrzymujemy więc, że funkcja g jest $S^p - p.o.$

Poniżej podamy dwa nietrywialne przykłady funkcji, które są S^p-p.o., ale nie są p.o.

Przykład 1.18 (Patrz Przykład 2.1 w [27]). Niech $F = F(z)$, gdzie $z \in \mathbb{C}$ będzie funkcją ograniczoną i holomorficzną w paśmie $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ y \in \mathbb{R}\}$, przy czym $a < 0 < b$. Jeżeli przy $x = 0$ funkcja $F(z) = F(iy) = f(y) \not\equiv 0$ przyjmuje wartości rzeczywiste, f nie jest stałego znaku oraz f jest p.o., to funkcja $g(y) = \mathrm{sgn} f(y)$ jest S^p-p.o.

Oczywiście g, jako funkcja nieciągła, nie jest p.o. Dla uproszczenia przyjmijmy, że $p = 1$. Wówczas S^p będziemy oznaczać krótko S. Dla dowolnego $\alpha > 0$ definiujemy

$$E_\alpha = \{y \in \mathbb{R} : |f(y)| > \alpha\}.$$

Zauważmy, że jeżeli $\tau \in E\{\alpha; f\}$, to dla $y \in E_\alpha$ mamy

$$\mathrm{sgn}\, f(y + \tau) = \mathrm{sgn}\, f(y).$$

W przeciwnym wypadku otrzymalibyśmy

$$|f(y + \tau) - f(y)| = |f(y + \tau)| + |f(y)| > \alpha,$$

więc $\tau \notin E\{\alpha; f\}$. Niech

$$F_\alpha(u, u + 1) = \{y \in [u, u + 1] : |f(y)| \leq \alpha\}.$$

Dla każdego $u \in \mathbb{R}$ oraz $\tau \in E\{\alpha; f\}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_u^{u+1} |g(y + \tau) - g(y)|dy \ &= \int\limits_{E_\alpha \cap [u,u+1]} |g(y + \tau) - g(y)|dy + \int\limits_{F_\alpha(u,u+1)} |g(y + \tau) - g(y)|dy \\ = \int\limits_{F_\alpha(u,u+1)} |g(y + \tau) - g(y)|dy &\leq \int\limits_{F_\alpha(u,u+1)} |g(y + \tau)|dy + \int\limits_{F_\alpha(u,u+1)} |g(y)|dy \leq 2\mu(F_\alpha(u, u + 1)).\end{aligned}$$

Pokażemy, że $\mu(F_\alpha(u, u + 1)) \to 0$ przy $\alpha \to 0$ jednostajnie względem u. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istnieją liczba $m_0 > 0$ oraz ciągi $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ malejący do zera, $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ rosnący do $+\infty$ takie, że

$$\mu(F_{\alpha_n}(u_n, u_n + 1)) \geq m_0$$

dla każdego $n = 1, 2 \ldots$ Rozważmy ciąg $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ dany wzorem $\varphi_n(y) = f(y + u_n)$. Dla każdej funkcji φ_n w przedziale $[0, 1]$ istnieje zbiór U_n taki, że $\mu(U_n) \geq m_0$ oraz w każdym punkcie zbioru U_n zachodzi nierówność $|\varphi_n(y)| \leq \alpha_n$. Z kryterium Bochnera wiemy, że istnieje jednostajnie zbieżny podciąg $\{\varphi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Oznaczmy $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(y) = \varphi(y)$.

Zdefiniujmy zbiory

$$S_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} U_n, \qquad U = \bigcap_{k=1}^{\infty} S_k.$$

Ciąg $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ jest zstępujący oraz $\mu(S_1) \le 1$. Zachodzi więc

$$\mu(U) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(S_k) \ge m_0,$$

co wynika z faktu, że $\mu(S_k) \ge m_0$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Dla $y \in U$ istnieje ciąg $\{n_{k_l}\}_{l=1}^{\infty}$ taki, że $y \in U_{n_{k_l}}$ dla każdego $l \in \mathbb{N}$ oraz $|\varphi_{n_{k_l}}(y)| \le \alpha_{n_{k_l}}$. Oznacza to, że dla $y \in U$ otrzymujemy

$$\lim_{l\to\infty} \varphi_{n_{k_l}}(y) = 0,$$

ale z drugiej strony

$$\lim_{l\to\infty} \varphi_{n_{k_l}}(y) = \varphi(y)$$

jednostajnie na U. Stąd $\varphi(y) \equiv 0$ na U. Niech $c = \min\{-a, b\}$ oraz $r \in (0, c)$. Stąd $\overline{B}((0, y_0), r) \subset P$ dla dowolnego $y_0 \in \mathbb{R}$. Ciąg funkcyjny $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $F_n(z) = F(z+iu_n)$ dla $z \in P$, jest wspólnie ograniczony. Z twierdzenia Montela (patrz str. 149 w [25]) istnieje podciąg $\{F_{n_s}\}_{s=1}^{\infty}$ jednostajnie zbieżny na $\overline{B}((0, y_0), r)$. Jest więc także zbieżny na $B((0, y_0), r)$. Stąd funkcja graniczna $F_{y_0}(z) = \lim_{s\to\infty} F_{n_s}(z)$ jest funkcją analityczną na $B((0, y_0), r)$. Ponadto przy $x = 0$, dla $y \in (y_0 - r, y_0 - r)$ zachodzi $F_{n_s}(iy) = \varphi_{n_s}(y)$, więc $F_{y_0}(iy) = \varphi(y)$ dla $y \in (y_0 - r, y_0 - r)$, ponieważ $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ na $\mathbb{R}$ przy $n \to \infty$ oraz $F_{n_s} \rightrightarrows F_{y_0}$ na $(y_0 - r, y_0 - r)$. Stąd φ jest funkcją analityczną na $(y_0 - r, y_0 - r)$. Z dowolności y_0 otrzymujemy, że φ jest funkcją analityczną na $\mathbb{R}$.

Wiemy, że funkcja φ zeruje się na zbiorze $U \subset [0,1]$ miary dodatniej. Stąd U posiada punkt skupienia w $[0,1]$. Niech tym punktem będzie $y^* \in [0,1]$. Funkcja graniczna F_{y^*} zeruje się na zbiorze, który ma punkt skupienia w $B((0, y^*), r)$. Stąd $F_{y^*}(z) = 0$ dla $B((0, y^*), r)$. W szczególności, $\varphi(y) = 0$ dla $y \in (y^* - r, y^* + r)$. Postępując analogicznie dla funkcji F_{y^*+r} otrzymujemy, że φ zeruje się na odcinku $(y^*, y^* + 2r)$. Przez indukcję otrzymamy, że φ zeruje się na każdym odcinku postaci $(y^*+nr, y^*+(n+2)r)$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$. Stąd wnioskujemy, że φ zeruje się na $\mathbb{R}$. Sprzeczność, ponieważ f nie jest tożsamościowo równa zero, a $\varphi_n \rightrightarrows \varphi$ przy $n \to \infty$. Ostatecznie otrzymujemy, że $\mu(F_\alpha(u, u+1)) \to 0$ przy $\alpha \to 0$ jednostajnie względem u. Stąd dla $\tau \in E\{\alpha; f\}$ zachodzi

$$\int_u^{u+1} |g(y+\tau) - g(y)| dy \to 0,$$

przy $\alpha \to 0$ jednostajnie względem u. Stąd τ jest (S, α)-prawie okresem funkcji g, czyli g jest S-p.o.

Przykład 1.19. Wróćmy teraz do funkcji[1]

$$p(x) = \sin \frac{1}{2 + \sin x + \sin(\sqrt{2}x)}.$$

Pokażemy, że jest ona S-p.o. Niech

$$\varphi(x) = 2 + \sin x + \sin(\sqrt{2}x).$$

[1]Patrz str. 14

Oczywiście $\varphi(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ oraz $\inf \varphi(x) = 0$. Ustalmy dowolnie $\alpha > \delta > 0$. Dla $\tau \in E\{\delta; \varphi\}$ oraz $x \in E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) > \alpha\}$ zachodzi oszacowanie

$$\begin{aligned} |p(x+\tau) - p(x)| &= \left| \sin \frac{1}{\varphi(x+\tau)} - \sin \frac{1}{\varphi(x)} \right| \\ &= 2 \left| \sin \frac{\varphi(x+\tau) - \varphi(x)}{2\varphi(x+\tau)\varphi(x)} \right| \left| \cos \frac{\varphi(x+\tau) + \varphi(x)}{2\varphi(x+\tau)\varphi(x)} \right| \\ &\leq 2 \left| \frac{\varphi(x+\tau) - \varphi(x)}{2\varphi(x+\tau)\varphi(x)} \right| < \frac{\delta}{\alpha(\alpha - \delta)}. \end{aligned}$$

Stąd dla każdego $u \in \mathbb{R}$ dostajemy

$$\begin{aligned} \int_u^{u+1} |p(x+\tau) - p(x)| dx &= \int\limits_{E_\alpha \cap [u,u+1]} |p(x+\tau) - p(x)| dx + \int\limits_{F_\alpha(u,u+1)} |p(x+\tau) - p(x)| dx \\ < \frac{\delta}{\alpha(\alpha-\delta)} &+ \int\limits_{F_\alpha(u,u+1)} (|p(x+\tau)| + |p(x)|) dx \leq \frac{\delta}{\alpha(\alpha-\delta)} + 2\mu(F_\alpha(u,u+1)), \end{aligned}$$

gdzie $F_\alpha(u, u+1) = \{x \in [u, u+1] : |\varphi(x)| \leq \alpha\}$. Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, jak w poprzednim przykładzie, dostajemy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\alpha > 0$ odpowiednio mała, aby zachodziła nierówność

$$\mu(F_\alpha(u, u+1)) < \frac{\varepsilon}{4}$$

jednostajnie względem u. Przy ustalonym α dobieramy $\delta < \alpha$ taką, że

$$\frac{\delta}{\alpha(\alpha-\delta)} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Wówczas

$$\sup_{u \in \mathbb{R}} \int_u^{u+1} |p(x+\tau) - p(x)| dx < \varepsilon,$$

więc $E\{\delta; \varphi\} \subset E_S\{\varepsilon; p\}$. Stąd p jest S-p.o.

Uzasadnimy, że funkcja p nie jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$, a co za tym idzie nie jest p.o. Z ciągłości funkcji φ oraz z tego, że $\inf \varphi(x) = 0$ wiemy, że istnieją ciągi $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, $\{x'_n\}_{n=1}^\infty$ takie, że $x_n, x'_n > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, dla których zachodzi

$$\varphi(x_n) = \frac{1}{(n - \frac{1}{2})\pi}, \qquad \varphi(x'_n) = \frac{1}{n\pi}.$$

Wykażemy, że $|x_n - x'_n| \to 0$ dla $n \to \infty$. Przypuśćmy, że $|x_n - x'_n| \not\to 0$. Wtedy istnieje podciąg $\{x'_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ taki, że $x'_{n_k} \to \infty$ dla $k \to \infty$ o tej własności, że $\varphi(x'_{n_k}) = \frac{1}{n_k \pi}$ oraz istnieje $\overline{\varepsilon} > 0$ takie, że każdy punkt x'_{n_k} posiada $\overline{\varepsilon}$-otoczenie, w którym zachodzi

$$\varphi(x) < \frac{1}{(n_k - \frac{1}{2})\pi}.$$

Jednak uzasadniliśmy, że

$$\mu\left(F_{\frac{1}{(n_k - \frac{1}{2})\pi}}(u, u+1)\right) \to 0$$

dla $k \to \infty$ jednostajnie względem u. Sprzeczność. Ostatecznie otrzymujemy $|x_n - x'_n| \to 0$ oraz

$$|p(x_n) - p(x'_n)| = \left| \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi - \sin n\pi \right| = 1,$$

co dowodzi, że p nie jest jednostajnie ciągła. Na mocy Twierdzenia 1.4 funkcja p nie jest p.o.

1.3 Funkcje W^p-prawie okresowe Weyla

Niech funkcje $f,g \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dla $1 \le p < \infty$. Definiujemy wielkość

$$D_{W^p}(f,g) = \lim_{l\to\infty} \sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l} \int_u^{u+l} |f(x) - g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.16}$$

co możemy zapisać

$$D_{W^p}(f,g) = \lim_{l\to\infty} D_{S^p_l}(f,g). \tag{1.17}$$

Twierdzenie 1.20 (Patrz str. 72 w [2])**.** *Granica po prawej stronie wzoru (1.16) istnieje.*

Dowód. Bez straty ogólności wystarczy rozpatrzyć przypadek $p = 1$ oraz $g(x) \equiv 0$. Oznaczmy $D_{S_l} = D_{S_l}(f,0)$. Zauważmy, że z Lematu 1.16 otrzymujemy, że jeżeli wartość D_{S_l} jest nieskończona dla jakiegoś $l > 0$, to jest nieskończona dla każdego $l > 0$. Pozostaje rozważyć przypadek, że $D_{S_l} < \infty$ dla każdego $l > 0$. Niech $l \neq l_0$, gdzie $l, l_0 > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$ będzie taka, że

$$(n-1)l_0 < l \le nl_0. \tag{1.18}$$

Z (1.18) mamy

$$\frac{1}{l}\int_u^{u+l} |f(x)|dx = \frac{nl_0}{l}\frac{1}{nl_0}\int_u^{u+l} |f(x)|dx \le \frac{nl_0}{l}\frac{1}{nl_0}\int_u^{u+nl_0} |f(x)|dx.$$

Stąd

$$D_{S_l} \le \frac{nl_0}{l} D_{S_{nl_0}} \le \frac{l+l_0}{l} D_{S_{nl_0}}. \tag{1.19}$$

Ponadto zachodzi oszacowanie,

$$\frac{1}{nl_0}\int_u^{u+nl_0} |f(x)|dx = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{l_0}\int_u^{u+l_0} |f(x)|dx + \ldots + \frac{1}{l_0}\int_{u+(n-1)l_0}^{u+nl_0} |f(x)|dx \right) \le D_{S_{l_0}},$$

więc

$$D_{S_{nl_0}} \le D_{S_{l_0}} \tag{1.20}$$

Łącząc (1.19) oraz (1.20) otrzymujemy ostatecznie

$$D_{S_l} \le \left(1 + \frac{l_0}{l}\right) D_{S_{l_0}}.$$

Stąd

$$\limsup_{l\to\infty} D_{S_l} \le D_{S_{l_0}}. \tag{1.21}$$

Ponieważ nierówność (1.21) zachodzi dla dowolnych $l_0 > 0$ otrzymujemy, że

$$\limsup_{l\to\infty} D_{S_l} \le \liminf_{l_0\to\infty} D_{S_{l_0}} = \liminf_{l\to\infty} D_{S_l}.$$

Otrzymaliśmy więc istnienie granicy we wzorze (1.16).

□

Definicja 1.21. Funkcję $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, gdzie $p \ge 1$, nazywamy W^p-prawie okresową (W^p-p.o), jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $L_0 = L_0(\varepsilon) > 0$ takie, że dla każdego $L \ge L_0$ zbiór $E_{S^p_L}\{\varepsilon; f\}$ jest relatywnie gęsty. Dla uproszczenia, gdy $p = 1$ będziemy oznaczać $W := W^1$.

Zauważmy, że różnica pomiędzy funkcjami S^p-p.o., a W^p-p.o. jest taka, że w drugim przypadku L zależy od ε. Oczywiście każda funkcja S^p-p.o. jest W^p-p.o. Poniżej podamy przykłady dwóch funkcji, które są W^p-p.o., ale nie są S^p-p.o.

Przykład 1.22 (Patrz Przykład 4.27 w [1]). Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases} \tag{1.22}$$

Dla $l = 1$ i $\varepsilon < \frac{1}{2}$ dostajemy, że istnieje $u \in \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $\tau > \varepsilon$

$$\int_u^{u+1} |f(x+\tau) - f(x)| dx > \varepsilon.$$

Stąd wnioskujemy, że dla $\varepsilon < \frac{1}{2}$ nie istnieje relatywnie gęsty zbiór (S, ε)-prawie okresów funkcji f, a co za tym idzie f nie jest S-p.o.

Z drugiej strony dla każdego $L, \tau \in \mathbb{R}$, $L \geq 1$ mamy

$$\int_u^{u+L} |f(x+\tau) - f(x)| dx \leq 1,$$

a w konsekwencji

$$D_{S_L}(f, f_\tau) = \sup_{u \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{L} \int_u^{u+L} |f(x) - f(x+\tau)| dx \right) \leq \frac{1}{L}.$$

Stąd dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $L \geq 1$ takie, że $D_{S_L}(f, f_\tau) \leq \varepsilon$. Zatem f jest W-p.o.

Przykład 1.23. Rozpatrzmy funkcję

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0,1) \cup (2,3) \cup (5,6) \cup (9,10) \cup (14,15) \cup \ldots, \\ 0 & \text{poza tym w } [0, \infty) \end{cases} \tag{1.23}$$

oraz $f(-x) = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, którą inaczej możemy zapisać

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1, \frac{n(n+1)}{2} \right), \\ 0 & \text{poza tym w } [0, \infty) \end{cases}$$

oraz $f(-x) = f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Pokażemy, że jest ona W-p.o, ale nie jest S-p.o.

Weźmy pod uwagę wyrażenie

$$D_{S(u)}(f_\tau, f) = \int_u^{u+1} |f(x+\tau) - f(x)| dx. \tag{1.24}$$

Oczywiście zachodzi

$$D_S(f_\tau, f) = \sup_{u \in \mathbb{R}} D_{S(u)}(f_\tau, f) \geq D_{S(u)}(f_\tau, f)$$

dla każdego $u \in \mathbb{R}$. Przyjmijmy $u = 0$. Wówczas

$$F(\tau) = D_{S(0)}(f_\tau, f) = \int_0^1 |f(x+\tau) - f(x)| dx = 1 - \int_0^1 f(x+\tau) dx = 1 - \int_\tau^{\tau+1} f(x) dx.$$

Po scałkowaniu dla $\tau \geq 0$ dostajemy

$$F(\tau) = \begin{cases} \tau & \text{dla } \tau \in [0,1), \\ 2-\tau & \text{dla } \tau \in [1,2), \\ \tau-2 & \text{dla } \tau \in [2,3), \\ 1 & \text{dla } \tau \in [3,4), \\ 5-\tau & \text{dla } \tau \in [4,5), \\ \tau-5 & \text{dla } \tau \in [5,6), \\ 1 & \text{dla } \tau \in [6,8), \\ 9-\tau & \text{dla } \tau \in [8,9), \\ \tau-9 & \text{dla } \tau \in [9,10), \\ 1 & \text{dla } \tau \in [10,13), \\ 14-\tau & \text{dla } \tau \in [13,14), \\ \tau-14 & \text{dla } \tau \in [14,15), \\ 1 & \text{dla } \tau \in [15,19), \\ \dots \end{cases}$$

Widzimy, że dla coraz większych τ funkcja F przyjmuje wartość 1 na coraz dłuższych przedziałach. Stąd jeżeli weźmiemy $\varepsilon = \frac{1}{2}$ i rozpatrzymy nierówność

$$D_S(f_\tau, f) \leq \varepsilon,$$

to nie znajdziemy relatywnie gęstego zbioru (S, ε)-prawie okresów funkcji f. Wnioskujemy więc, że funkcja f nie jest S-p.o.

Z drugiej strony rozpatrzmy wyrażenie

$$D_{S_l}(f_\tau, f) = \sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l} \int_u^{u+l} |f(x+\tau) - f(x)| dx \right),$$

dla którego mamy oszacowanie

$$\begin{aligned} \sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l} \int_u^{u+l} |f(x+\tau) - f(x)| dx \right) &\leq \sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l} \int_u^{u+l} (f(x+\tau) + f(x)) dx \right) \\ &\leq \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} f(x)dx = \frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} f(x)dx. \end{aligned}$$

W szacowaniu tym wykorzystaliśmy fakt, że funkcja f zdefiniowana przy pomocy wzoru (1.23) przyjmuje wartość 1 najwięcej razy dla x bliskich zeru. Stąd supremum z całek po przedziale długości l będzie osiągnięte, jeżeli będziemy całkować po przedziale $[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$. Zauważmy, że wartość wyrażenia

$$\frac{4}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} f(x)dx$$

będzie możliwie największa, jeżeli przyjmiemy

$$l = n(n+1). \tag{1.25}$$

Wówczas zoptymalizujemy przedział całkowania tak, aby kończył się on w miejscu, gdzie $f(x) = 1$. Ostatecznie otrzymujemy

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l} \int_u^{u+l} |f(x+\tau) - f(x)| dx \right) \leq \frac{4}{n(n+1)} \int_0^{\frac{n(n+1)}{2}} f(x)dx, \tag{1.26}$$

gdzie n jest zdefiniowane przy pomocy wzoru (1.25). Zauważmy, że całka we wzorze (1.26) to miara zbioru $\left\{x \in \left[0, \frac{n(n+1)}{2}\right];\ f(x) = 1\right\}$. Stąd dostajemy

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{l}\int_u^{u+l} |f(x+\tau) - f(x)|dx\right) \leq \frac{4}{n(n+1)} \cdot n = \frac{4}{n+1} < \frac{4}{n}. \tag{1.27}$$

W rezultacie otrzymujemy, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $L(\varepsilon) = \left(\left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{4}{\varepsilon}\right] + 2\right)$ takie, że

$$\sup_{u\in\mathbb{R}} \left(\frac{1}{L(\varepsilon)}\int_u^{u+L(\varepsilon)} |f(x+\tau) - f(x)|dx\right) \leq \varepsilon.$$

Ostatecznie $E_{S_{L(\varepsilon)}}\{\varepsilon; f\}$ jest relatywnie gęsty, zatem f jest W-p.o.

1.4 Funkcje B^p-prawie okresowe Besicovitcha

Dla $f, g \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, gdzie $1 \leq p < \infty$ określamy wielkość

$$D_{B^p}(f, g) = \left(\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x) - g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\overline{M}(|f-g|^p)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definicja 1.24. Funkcję $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, gdzie $p \geq 1$ nazywamy B^p-prawie okresową, jeżeli istnieje ciąg uogólnionych wielomianów trygonometrycznych $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} D_{B^p}(f, W_n) = 0.$$

W odróżnieniu od poprzednich klas funkcji prawie okresowych, w których występuje pojęcie prawie okresu, funkcje B^p-p.o. są określone jako granice ciągów uogólnionych wielomianów trygonometrycznych. Jakkolwiek można podać równoważną definicję funkcji B^p-p.o., którą zaproponował R. Doss w [6].

Twierdzenie 1.25 (Patrz str. 77 w [27]). *Funkcja $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ jest B^p-p.o. wtedy i tylko wtedy, gdy*

a) $\lim_{h\to 0} \overline{M}(|f_h - f|^p) = 0.$

b) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje relatywnie gęsty zbiór

$$\{\tau \in \mathbb{R} : \overline{M}(|f_\tau - f|^p) < \varepsilon\}.$$

c) Dla każdego $\omega > 0$ istnieje funkcja okresowa $g \in L^p_\omega(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, o okresie ω, taka, że

$$\lim_{n\to\infty} \overline{M}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f_{k\omega} - g\right|^p\right) = 0,$$

gdzie $f_{k\omega}(x) = f(x + k\omega)$.

Dla $p = 1$ zamiast $B^1 - p.o$ piszemy $B - p.o$

Definicja 1.26. Funkcję $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ nazywamy B^p-zerową, jeżeli $D_{B^p}(f, 0) = 0$.

Stwierdzenie 1.27 (Patrz Twierdzenie 5.34, 5.36, Stwierdzenie 6.8 w [1]). Każda funkcja B^p-zerowa jest B^p-p.o.

Wprost z Definicji 1.24 wynika, że

$$D_{B^p}(f,g) \leq \lim_{l\to\infty} D_{S_l^p}(f,g).$$

Stąd dostajemy, że funkcje W^p-p.o. są funkcjami B^p-p.o. Poniżej podajemy przykład funkcji B-p.o., która nie jest W-p.o.

Przykład 1.28 (Patrz Przykład 6.24 w [1]). Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{n} & \text{dla} \quad n^2 \leq x \leq n^2 + \sqrt{n}, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Istnieje $M > 0$ takie, że dla dowolnych T, τ takich, że $\sqrt{M} > T > \tau > 0$ zachodzi oszacowanie

$$\begin{aligned} \sup_{u\in\mathbb{R}} \frac{1}{T}\int_u^{u+T} |f(x+\tau)-f(x)|dx \quad &\geq \quad \sup_{u\in\mathbb{R}} \frac{1}{T}\int_u^{u+\tau} |f(x+\tau)-f(x)|dx \\ \geq \quad \frac{1}{T}\int_{N^2+\sqrt{N}-\tau}^{N^2+\sqrt{N}} |f(x+\tau)-f(x)|dx &= \frac{1}{T}\int_{N^2+\sqrt{N}-\tau}^{N^2+\sqrt{N}} \sqrt[4]{N}dx = \frac{\tau}{T}\sqrt[4]{N} \end{aligned}$$

dla każdego $N \geq M$, $N \in \mathbb{N}$. Ponieważ ostatnie wyrażenie dąży do ∞ dla $N \to \infty$, więc funkcja f nie jest W-p.o.

Z drugiej strony dla funkcji f mamy

$$\begin{aligned} D_B(f,0) &= \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |f(x)|dx = \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{2(N^2+\sqrt{N})}\int_0^{N^2+\sqrt{N}} |f(x)|dx \\ &= \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{2(N^2+\sqrt{N})}\sum_{k=1}^{N} \sqrt[4]{k}\sqrt{k} = \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{2(N^2+\sqrt{N})}\sum_{k=1}^{N} k^{\frac{3}{4}} \\ &\leq \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{2(N^2+\sqrt{N})}\int_0^{N+1} x^{\frac{3}{4}}dx \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{2(N+1)^{\frac{5}{4}}}{5(N^2+\sqrt{N})} = 0. \end{aligned}$$

Stąd funkcja f jest B-zerowa, a co za tym idzie B-p.o.

1.5 Funkcje N-prawie okresowe

B.M. Lewitan w pracy [19] (Definicje 3.1.2, 3.1.2’, 3.1.2”, Twierdzenie 3.1.1) zaproponował trzy równoważne definicje funkcji N-p.o.

Liczbę $\tau \in \mathbb{R}$ nazywamy (N,ε)-prawie okresem ciągłej funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gdzie $\varepsilon > 0$, $N > 0$, jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ takiego, że $|x| < N$ spełniona jest nierówność

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon.$$

Definicja 1.29.

(D1) Mówimy, że funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest N-prawie okresowa jeżeli dla dowolnych $\varepsilon > 0$ oraz $N > 0$ istenieją liczby rzeczywiste $\mu_1, \ldots, \mu_p$ oraz $\delta > 0$ takie, że każda liczba τ, spełniająca układ nierówności

$$|\mu_k \tau| < \delta \pmod{2\pi}, \qquad k = 1, 2, \ldots, p,$$

jest (N,ε)-prawie okresem funkcji f.

(D2) Mówimy, że funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest N-prawie okresowa, jeżeli istnieje przeliczalny podzbiór liczb rzeczywistych $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots$, mający następującą własność: dla dowolnych $\varepsilon > 0$, $N > 0$ istnieją liczby $n \in \mathbb{N}$ oraz $\delta > 0$ takie, że każda liczba rzeczywista τ, spełniająca układ nierówności

$$|\Lambda_k \tau| < \delta \pmod{2\pi}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

jest (N, ε)-prawie okresem funkcji f.

(D3) Mówimy, że funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest N-prawie okresowa, jeżeli istnieje funkcja p.o. $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tzw. majoranta funkcji f, taka, że dla dowolnych $\varepsilon > 0$, $N > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że każdy δ-p.o. τ funkcji φ jest (N, ε)-p.o. funkcji f.

Twierdzenie 1.30 (Patrz Twierdzenie 5.1 w [27])**.** *Niech $f\colon \mathbb{R} \to Y_f$ będzie funkcją p.o. oraz $g\colon Y_f \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wówczas złożenie $g \circ f$ jest funkcją N-p.o.*

Dowód. Na mocy Twierdzenia 1.4 wiemy, że f jest funkcją ograniczoną na $\mathbb{R}$, więc istnieją $m = \inf\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ oraz $M = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$, $N > 0$. Niech $m_N = \min\{f(x);\, -N \le x \le N\}$, $M_N = \max\{f(x);\, -N \le x \le N\}$ oraz I_N będzie przedziałem następującej postaci

$$I_N = \begin{cases} [m_N - a_N, M_N + a_N], & \text{gdzie } 0 < a_N = \frac{1}{2}\min\{m_N - m, M - M_N\}, \\ & \text{dla } m_N > m, M_N < M, \\ [m_N, M_N + a_N], & \text{gdzie } 0 < a_N = \frac{1}{2}(M - M_N), \\ & \text{dla } m_N = m, M_N < M, \\ [m_N - a_N, M_N], & \text{gdzie } 0 < a_N = \frac{1}{2}(m_N - m), \\ & \text{dla } m_N > m, M_N = M. \end{cases}$$

Z jednostajnej ciągłości g na I_N wiemy, że istnieje $\delta = \delta(\varepsilon, N) \in (0, a_N)$ takie, że dla $y, \overline{y} \in I_N$, $|g(y) - g(\overline{y})| < \varepsilon$, o ile $|y - \overline{y}| < \delta$. Niech $\tau \in E\{\delta; f\}$. Dla każdego $x \in [-N, N]$ otrzymujemy

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \delta \qquad \text{oraz} \qquad f(x),\ f(x+\tau) \in I_N.$$

Stąd

$$|g(f(x+\tau)) - g(f(x))| < \varepsilon.$$

Zatem z (D3), funkcja f jest majorantą funkcji $g \circ f$, czyli $g \circ f$ jest funkcją N-p.o.

□

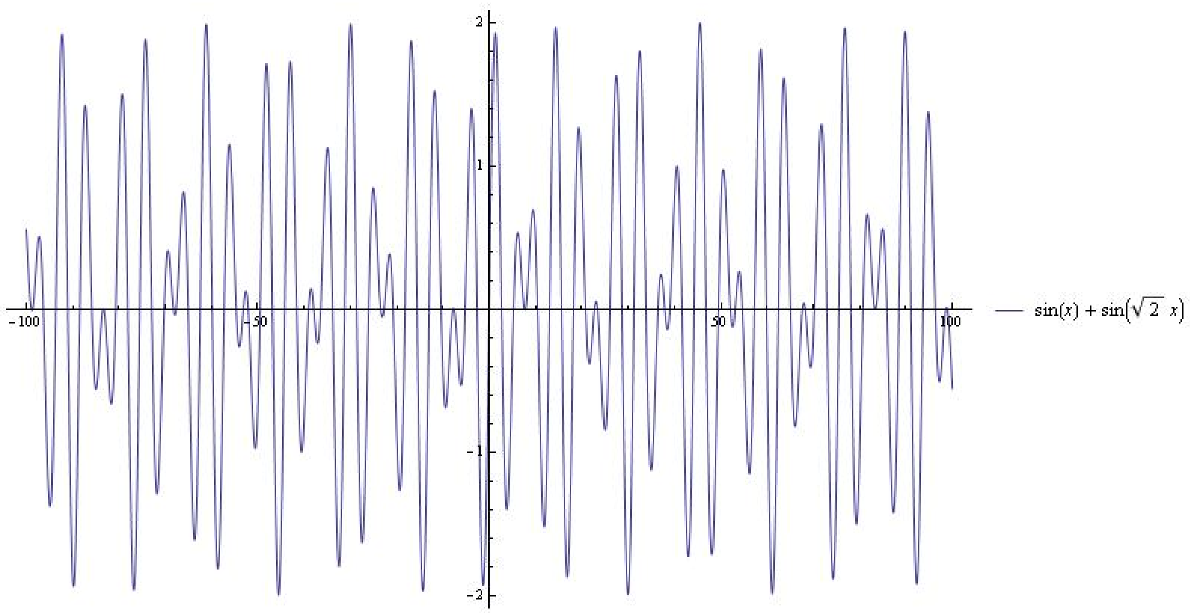
Na mocy powyższego twierdzenia wiemy, że funkcją N-p.o. jest

$$f(x) = \frac{1}{2 + \sin x + \sin(\sqrt{2}x)}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

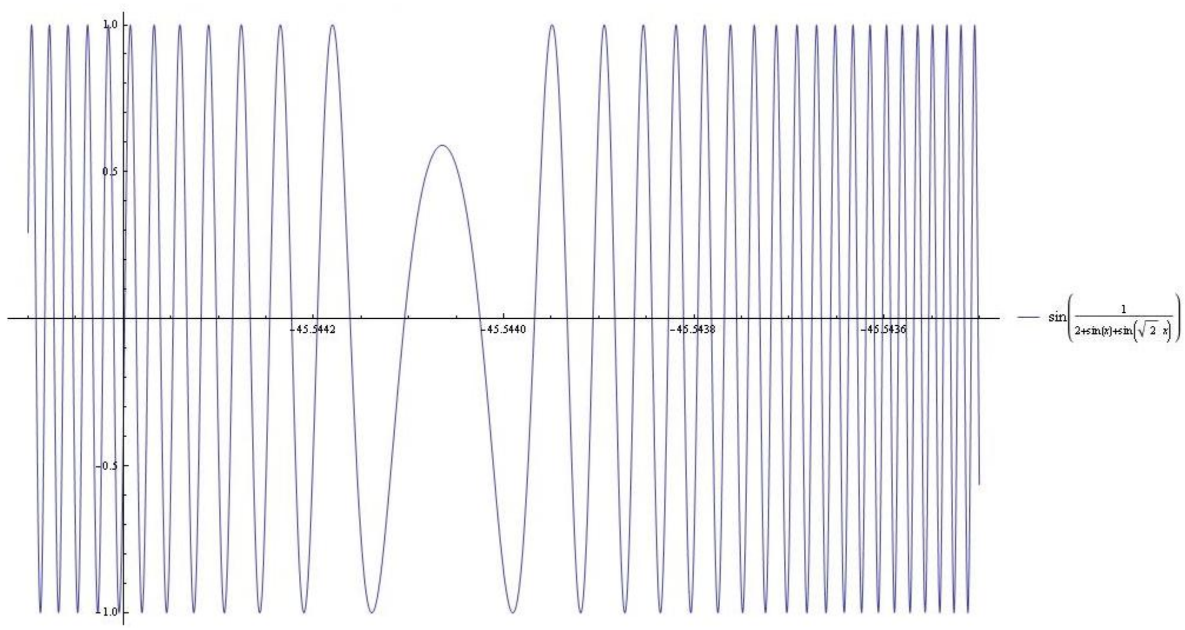
która jako funkcja nieograniczona nie jest funkcją p.o. Kolejnymi przykładami funkcji N-p.o są funkcje:

$$f(x) = \ln(2 + \cos x + \cos(\sqrt{2}x)),$$

$$f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}(\sin x + \sin(\sqrt{2}x))\right).$$



Rysunek 1.1: Funkcja $f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$ na przedziale [-100,100].
Rysunek wykonany w programie Mathematica



Rysunek 1.2: Funkcja $p(x) = \sin \frac{1}{2+\sin x+\sin(\sqrt{2}x)}$ na przedziale [-45.5445,-45.5435].
Rysunek wykonany w programie Mathematica

Rozdział 2

Orbity homokliniczne w układach Newtonowskich z potencjałem prawie okresowym spełniającym warunek Gordona

2.1 Wprowadzenie

Rozważamy układ Newtonowski w $\mathbb{R}^3$,

$$\ddot{q}(t) + a(t)\nabla W(q(t)) = 0, \tag{2.1}$$

gdzie $a(t)$ oraz $W(q)$ spełniają następujące założenia:

(a1) $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągłą funkcją prawie okresową taką, że $a(t) \geq a_0 > 0$ dla $t \in \mathbb{R}$.

(H1) Istnieje prosta l taka, że $l \cap \{0\} = \emptyset$, $W \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus l, \mathbb{R})$ oraz l składa się z punktów osobliwych W, tzn. $\lim_{x\to l} W(x) = -\infty$.

(H2) $W\colon \mathbb{R}^3 \setminus l \to \mathbb{R}$ spełnia warunek Gordona w otoczeniu prostej l, tzn. istnieją otoczenie $\mathcal{N}$ prostej l oraz funkcja $U \in C^2(\mathcal{N} \setminus l, \mathbb{R})$ takie, że $|U(x)| \to \infty$, gdy $x \to l$ i

$$|\nabla U(x)|^2 \leq -W(x) \qquad \text{dla } x \in \mathcal{N} \setminus l.$$

(H3) $W(x) < W(0) = 0$ dla $x \neq 0$ oraz $W''(0)$ jest ujemnie określona.

(H4) Istnieje stała $W_0 < 0$ taka, że $\limsup_{|x|\to\infty} W(x) \leq W_0$.

Od teraz $x \to l$ oznacza $d(x,l) = \inf\{|x-y| : \ y \in l\} \to 0$ oraz $|\cdot|\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest normą Euklidesową w $\mathbb{R}^3$. Warunek (H2) został wprowadzony przez W.B. Gordona w [7]. Jeżeli potencjał $W\colon \mathbb{R}^3 \setminus l \to \mathbb{R}$ spełnia (H2), wówczas jego gradient $\nabla W\colon \mathbb{R}^3 \setminus l \to \mathbb{R}^3$ jest w języku angielskim nazywany strong force. Warunek (H3) implikuje, że zero jest niezdegenerowanym punktem krytycznym W. Natomiast warunek (H4) gwarantuje, że W nie zbiega asymptotycznie do swojego maksimum globalnego 0.

Uwaga 2.1. Łatwo sprawdzić, że z warunków (H1)-(H4) wynika, że

$$\forall_{M>0}\forall_{\rho>0}\exists_{K>0}\forall_{x\in\overline{B}_M(0)\setminus\{y\in\mathbb{R}^3\colon d(y,l)<\rho\}} \quad |W(x)| \leq K|x|^2 \ \wedge\ |\nabla W(x)| \leq K|x|.$$

Definicja 2.2. Rozwiązanie $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ układu (2.1) nazywamy homoklinicznym (do 0), jeżeli

$$q(\pm\infty) = \lim_{t\to\pm\infty} q(t) = 0$$

oraz $\dot{q}(\pm\infty) = 0$.

Niech E oznacza przestrzeń Sobolewa $W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ ze standardową normą

$$\|q\|_E^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(|q(t)|^2 + |\dot{q}(t)|^2\right) dt.$$

Lemat 2.3. *Niech $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ będą ciągami ograniczonymi w E oraz $\|u_n - v_n\|_E \to 0$ dla $n \to \infty$. Wówczas*

$$|u_n|^2 - |v_n|^2 \to 0$$

dla $n \to \infty$ w $W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Dowód. Z założenia $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ i $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ są ograniczone w E, a co za tym idzie w $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Stąd

$$\begin{aligned} \left\||u_n|^2 - |v_n|^2\right\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}^2 &\le \sup_{n\in\mathbb{N}}(\|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} + \|v_n\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})})^2 \int\limits_{\mathbb{R}} ||u_n(t)| - |v_n(t)||^2 dt \\ &\le C\|u_n - v_n\|_E^2. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ponadto,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{d}{dt}(|u_n|^2 - |v_n|^2)\right\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}^2 &\le 8\|u_n(\dot{u}_n - \dot{v}_n)\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}^2 + 8\|\dot{v}_n(u_n - v_n)\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}^2 \\ \le 8\sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}^2 \int\limits_{\mathbb{R}} |\dot{u}_n(t) - \dot{v}_n(t)|^2 dt &+ 8\|u_n - v_n\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}^2 \int\limits_{\mathbb{R}} |\dot{v}_n(t)|^2 dt. \end{aligned} \tag{2.3}$$

W oszacowaniach (2.2) oraz (2.3) przechodząc z $n \to \infty$ otrzymujemy tezę.

□

Wprowadzamy

$$\mathcal{L}(q) = \frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 - a(t)W(q(t)).$$

Będziemy rozważać rodzinę krzywych, które omijają prostą l,

$$\Lambda = \{q \in E : \, q(t) \notin l \text{ dla } t \in \mathbb{R}\}.$$

Dla $q \in \Lambda$, definiujemy

$$I(q) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(q) dt. \tag{2.4}$$

Stwierdzenie 2.4. Jeżeli spełnione są warunki (a1), (H1)-(H4), to $I \in C^1(\Lambda, \mathbb{R})$.

Dowód. Rozpatrzmy

$$J(q) = \int\limits_{\mathbb{R}} a(t)W(q(t))dt, \qquad q \in \Lambda.$$

Wtedy

$$I(q) = \frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} - J(q).$$

Zatem wystarczy udowodnić, że $J \in C^1(\Lambda, \mathbb{R})$. Zauważmy, że pochodna Frecheta funkcjonału J w punkcie $q \in \Lambda$ wyraża się wzorem:

$$DJ(q)\varphi = J'(q)\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}} a(t)\nabla W(q(t)) \cdot \varphi(t)dt,$$

dla $\varphi \in E$. Chcemy pokazać, że

$$\forall_{q\in\Lambda}\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\eta>0}\forall_{\varphi\in E}\ 0 < \|\varphi\|_E < \eta \Rightarrow |J(q+\varphi) - J(q) - DJ(q)\varphi| < \varepsilon\|\varphi\|_E.$$

Mamy

$$\begin{aligned}
|J(q+\varphi) - J(q) - DJ(q)\varphi| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}} a(t)(W(q(t)+\varphi(t)) - W(q(t)) - \nabla W(q(t)) \cdot \varphi(t))dt\right| \\
&\leq a_1 \int\limits_{\mathbb{R}} |W(q(t)+\varphi(t)) - W(q(t)) - \nabla W(q(t)) \cdot \varphi(t)|dt, \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

gdzie $a_1 = \sup_{t\in\mathbb{R}} a(t)$. Z twierdzenia Lagrange'a otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}} |W(q(t)+\varphi(t)) - W(q(t)) - \nabla W(q(t)) \cdot \varphi(t)|dt \\
&\qquad = \int\limits_{\mathbb{R}} |\nabla W(q(t)+\theta(t)\varphi(t)) \cdot \varphi(t) - \nabla W(q(t)) \cdot \varphi(t)|dt \\
&\qquad = \int\limits_{\mathbb{R}} |(\nabla W(q(t)+\theta(t)\varphi(t)) - \nabla W(q(t))) \cdot \varphi(t)|dt,
\end{aligned}$$

gdzie $\theta(t) \in (0,1)$. Ponieważ $q(\pm\infty) = 0$, więc

$$\forall_{\delta>0}\exists_{r>0}\forall_{t\in\mathbb{R}} \quad |t| > r \Rightarrow |q(t)| < \delta.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}} |(\nabla W(q(t)+\theta(t)\varphi(t)) - \nabla W(q(t))) \cdot \varphi(t)|dt \\
&\qquad = \int\limits_{|t|\leq r} |(\nabla W(q(t)+\theta(t)\varphi(t)) - \nabla W(q(t))) \cdot \varphi(t)|dt \\
&\qquad + \int\limits_{|t|>r} |(\nabla W(q(t)+\theta(t)\varphi(t)) - \nabla W(q(t))) \cdot \varphi(t)|dt.
\end{aligned}$$

Rozpatrzmy najpierw drugą całkę.

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{|t|>r} |(\nabla W(q(t)) + \theta(t)\varphi(t)) - \nabla W(q(t))) \cdot \varphi(t)|dt \\
&\qquad \leq \int\limits_{|t|>r} |\nabla W(q(t)+\theta(t)\varphi(t)) - \nabla W(q(t))||\varphi(t)|dt. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Dla $\varphi \in E$, $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} \leq \sqrt{2}\|\varphi\|_E$[1]. Dlatego jeśli $\|\varphi\|_E < \frac{\sqrt{2}}{2}\delta$, to $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} < \delta$. Ponieważ $W \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus l, \mathbb{R})$, więc ∇W lokalnie wokół $0 \in \mathbb{R}^3$ spełnia warunek Lipschitza, tzn.

$$\exists_{L>0}\forall_{q_1,q_2\in\overline{B_{2\delta}(0)}} \quad |\nabla W(q_1) - \nabla W(q_2)| \leq L|q_1 - q_2|.$$

Stąd, jeśli $\|\varphi\|_E < \frac{\sqrt{2}}{2}\delta$, mamy

$$\int\limits_{|t|>r} |(\nabla W(q(t) + \theta(t)\varphi(t)) - \nabla W(q(t))) \cdot \varphi(t)|dt \leq \int\limits_{|t|>r} L|\theta(t)\varphi(t)||\varphi(t)|dt \leq L\|\varphi\|_E^2.$$

Niech $\varepsilon > 0$. Przyjmując $\delta := \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\varepsilon}{a_1 L}$ otrzymujemy

$$a_1 \int\limits_{|t|>r} |(\nabla W(q(t) + \theta(t)\varphi(t)) - \nabla W(q(t))) \cdot \varphi(t)|dt \leq a_1 L\|\varphi\|_E^2 < \frac{\varepsilon}{2}\|\varphi\|_E. \tag{2.7}$$

Dla pierwszej całki mamy $t \in [-r, r]$, czyli

$$|q(t) + \theta(t)\varphi(t)| \leq |q(t)| + |\varphi(t)| \leq \|q\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} + \delta =: R.$$

Funkcja ciągła na zbiorze zwartym jest jednostajnie ciągła. Zatem

$$\exists_{\overline{\delta}>0}\forall_{q_1,q_2\in\overline{B_R(0)}} \quad |q_1 - q_2| < \overline{\delta} \Rightarrow |\nabla W(q_1) - \nabla W(q_2)| < \frac{\varepsilon\sqrt{2r}}{4a_1 r}.$$

Stąd, jeżeli $\|\varphi\|_E < \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{\delta}$, czyli $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} < \overline{\delta}$, to

$$\int\limits_{|t|\leq r} |(\nabla W(q(t) + \theta(t)\varphi(t)) - \nabla W(q(t))) \cdot \varphi(t)|dt \leq \int\limits_{|t|\leq r} \frac{\varepsilon\sqrt{2r}}{4a_1 r}|\varphi(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2a_1}\|\varphi\|_E. \tag{2.8}$$

Ostatecznie, z (2.7) i (2.8) dostajemy

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} a(t)(W(q(t) + \varphi(t)) - W(q(t)) - \nabla W(q(t)) \cdot \varphi(t))dt\right| \leq \varepsilon\|\varphi\|_E, \tag{2.9}$$

o ile $\|\varphi\|_E < \eta$ dla $\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}\min\{\delta, \overline{\delta}\}$.

Pozostaje nam pokazać, że J' jest ciągły. Załóżmy, że $q_m \to q$ w E dla $m \to \infty$. Mamy

$$\begin{aligned}
\sup_{\|\varphi\|_E=1} \left|\int_{\mathbb{R}} (\nabla W(q_m(t)) - \nabla W(q(t))) \cdot \varphi(t)dt\right| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla W(q_m(t)) - \nabla W(q(t))|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{-r}^{r} |\nabla W(q_m(t)) - \nabla W(q(t))|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{|t|>r} |\nabla W(q_m(t)) - \nabla W(q(t))|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{-r}^{r} |\nabla W(q_m(t)) - \nabla W(q(t))|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{|t|>r} L^2|q_m(t) - q(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{-r}^{r} |\nabla W(q_m(t)) - \nabla W(q(t))|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + L\|q_m - q\|_E,
\end{aligned}$$

[1] Nierówność ta wynika z nierówności (3.4) udowodnionej w Rozdziale 3 na str. 66

gdzie r oraz L są jak wcześniej. Przechodząc do granicy z $m \to \infty$, w pierwszym składniku możemy wejść z granicą pod znak całki korzystając z twierdzenia Lebesque'a o zbieżności ograniczonej i z ciągłości ∇W, otrzymujemy tezę.

□

Stwierdzenie 2.5. Niech $\{p_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Lambda$ będzie ciągiem takim, że $\{I(p_m)\}_{m=1}^{\infty}$ jest ograniczony oraz $p_m \rightharpoonup p_0$ w E przy $m \to \infty$. Wówczas

$$\nabla I(p_m) \rightharpoonup \nabla I(p_0) \quad \text{w } E,$$

gdy $m \to \infty$.

Dowód. Ponieważ

$$\begin{aligned}
\nabla I(p) \cdot \varphi &= \int_{\mathbb{R}} \dot{\varphi}(t) \cdot \dot{p}(t)dt - \int_{\mathbb{R}} a(t)\nabla W(p(t)) \cdot \varphi(t)dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \dot{\varphi}(t) \cdot \dot{p}(t)dt - \nabla J(p) \cdot \varphi,
\end{aligned}$$

więc wystarczy udowodnić, że

$$\nabla J(p_m) \rightharpoonup \nabla J(p_0)$$

w E. Niech $\varphi \in E$. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Niech R_ε będzie dostatecznie duże, aby

$$\int_{|t|>R_\varepsilon} |\varphi(t)|^2 dt < \varepsilon^2.$$

Wówczas

$$\begin{aligned}
|(\nabla J(p_m) - \nabla J(p)) \cdot \varphi| &= \left| \int_{\mathbb{R}} a(t)(\nabla W(p_m(t)) - \nabla W(p_0(t))) \cdot \varphi(t)dt \right| \\
&\leq a_1 \int_{|t|\leq R_\varepsilon} |\nabla W(p_m(t)) - \nabla W(p_0(t))| \cdot |\varphi(t)|dt \\
&+ a_1\varepsilon \left(\int_{|t|>R_\varepsilon} |\nabla W(p_m(t)) - \nabla W(p_0(t))|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Przy $m \to \infty$ pierwsza całka dąży do 0 z twierdzenia Lebesque'a o zbieżności ograniczonej. Natomiast z Uwagi 2.1 wynika, że druga całka jest ograniczona. Ponieważ ε jest dowolnie małe otrzymujemy tezę.

□

Stwierdzenie 2.6. Jeżeli (a1) i (H1)-(H4) zachodzą, $q \in \Lambda$ oraz $I'(q) = 0$, tzn. q jest punktem krytycznym I na Λ, wówczas q jest klasycznym rozwiązaniem układu (2.1) z warunkami $|q(t)|$, $|\dot{q}(t)| \to 0$ dla $|t| \to \infty$.

Dowód. Jeżeli $q \in E$, to z Lematu 3.4 wynika, że $q(t) \to 0$ dla $|t| \to \infty$. Jeżeli q jest punktem krytycznym funkcjonału I, to jest słabym rozwiązaniem (2.1). Argumentując jak w [21] otrzymujemy, że jest ono klasycznym rozwiązaniem układu (2.1). Ostatecznie z (2.1), (a1), (H1) oraz (H3) tak jak w [15] możemy pokazać, że $\dot{q} \in E$ i stąd $|\dot{q}(t)| \to 0$ dla $|t| \to \infty$.

□

Niech Π będzie płaszczyzną prostopadłą do l i zawierającą 0. Dla potrzeb pracy wprowadzimy współrzędne walcowe w $\mathbb{R}^3$ z osią wysokości l i płaszczyzną odniesienia Π. Niech P będzie punktem przecięcia płaszczyzny Π i prostej l. Wówczas P jest biegunem oraz $P0$ jest osią biegunową. W tym układzie współrzędnych, dla każdego $q \in \Lambda$ mamy

$$q(t) = (r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t), z(t)),$$

gdzie $r(t)$ jest odległością $q(t)$ od l, $\varphi(t)$ jest kątem biegunowym oraz $z(t)$ jest odległością $q(t)$ od płaszczyzny Π. Wybieramy dodatnio zorientowaną bazę $\{\vec{P0}, \vec{PR}\}$ w płaszczyźnie Π. Dodatnia orientacja l jest wyznaczona przez $\vec{P0} \times \vec{PR}$. Nie ma jednoznaczności funkcji φ. Jakkolwiek, jeżeli q jest ciągła, to możemy założyć, że r, φ oraz z są także ciągłe.

Definicja 2.7. Dla $q \in \Lambda$ możemy wyznaczyć liczbę nawinięć wokół prostej l jako:

$$\mathrm{WN}(q) = \frac{\varphi(\infty) - \varphi(-\infty)}{2\pi}.$$

Wprowadziliśmy definicję liczby nawinięć wokół prostej l jak J. Janczewska i J. Maksymiuk w [15].

Ustalmy $\hat{\varepsilon} = |P|/3$. Od teraz, $B_\varepsilon(x)$ oznacza kulę otwartą w $\mathbb{R}^3$ o promieniu $\varepsilon > 0$ i środku $x \in \mathbb{R}^3$.

Uwaga 2.8. Niech $0 < \varepsilon \leq \hat{\varepsilon}$. Jeżeli $q \in \Lambda$, to istnieje $T \in \mathbb{R}$ takie, że $q(T) \in B_\varepsilon(0)$. Wówczas przez $\mathrm{WN}(q|_{-\infty}^{T})$ oraz $\mathrm{WN}(q|_{T}^{\infty})$ rozumiemy liczby nawinięć dróg w Λ, które biorą się z $q|_{(-\infty,T]}$ i $q|_{[T,\infty)}$ odpowiednio, z połączenia $q(T)$ z 0 odcinkiem. Z teorii homotopii wiemy, że

$$\mathrm{WN}(q) = \mathrm{WN}(q|_{-\infty}^{T}) + \mathrm{WN}(q|_{T}^{\infty}).$$

Ponadto, jeżeli $q([T,\infty)) \subset B_\varepsilon(0)$, to

$$\mathrm{WN}(q) = \mathrm{WN}(q|_{-\infty}^{T}).$$

Niech

$$\Gamma = \{q \in \Lambda : \ \mathrm{WN}(q) \neq 0\} = \Gamma^+ \cup \Gamma^-, \tag{2.10}$$

gdzie

$$\Gamma^\pm = \{q \in \Gamma : \ \pm\mathrm{WN}(q) > 0\}.$$

Możemy sformułować główny wynik rozprawy doktorskiej.

Twierdzenie 2.9. *Jeżeli (a1) oraz (H1)-(H4) zachodzą, wówczas układ (2.1) posiada co najmniej dwa homokliniczne rozwiązania* $Q^\pm \in \Gamma^\pm$.

2.2 Dowód Twierdzenia 2.9

W przedstawionym dowodzie można wyróżnić cztery główne etapy.

Etap 1., od Lematu 2.10 do Lematu 2.14, zapoznaje Czytelnika z podstawowymi własnościami funkcjonału działania $I\colon \Lambda \to \mathbb{R}$.

Etap 2. - najdłuższy, obejmujący materiał od Lematu 2.15 do Lematu 2.26, dotyczy rodziny funkcjonałów $I(\beta,\cdot)\colon \Lambda \to \mathbb{R}$, gdzie $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją ciągłą, której wartości znajdują się pomiędzy kresem dolnym i kresem górnym funkcji prawie okresowej $a(t)$.

Etap 3. rozpoczynamy od przypomnienia definicji ciągów Palais-Smale'a. Ten fragment Rozdziału 2. zaczyna się Lematem 2.29, a kończy Twierdzeniem 2.35. Kluczowe są Lemat 2.32 - Lemat Reprezentacyjny oraz Twierdzenie 2.35 o ciągach Palais-Smale'a funkcjonału działania I posiadających tzw. własność Séré:

$$\|p_{m+1} - p_m\|_E \to 0, \text{ gdy } m \to \infty.$$

Etap 2. i Etap 3. pokazują, o ile bardziej złożony jest problem badania istnienia rozwiązań homoklinicznych układu (2.1) w sytuacji, gdy $a(t)$ jest prawie okresową funkcją Bohra od sytuacji, gdy $a(t)$ jest zwykłą funkcją T-okresową i wówczas można skorzystać z własności $I(q) = I(q + kT)$ dla każdego $q \in \Lambda$ i $k \in \mathbb{Z}$.

Etap 4. poprzedza fragment, w którym dla wygody Czytelnika przypominamy kilka znanych faktów z metod wariacyjnych. Etap ten obejmuje Twierdzenie 2.41, Lemat 2.42 i Twierdzenie 2.43. Oba wymienione twierdzenia rozstrzygają o istnieniu rozwiązań homoklinicznych dla układu (2.1).

W całym Podrozdziale 2.2 zakładamy, że warunki (a1) oraz (H1)-(H4) są spełnione.

Etap 1. *Podstawowe własności funkcjonału działania I*

Niech

$$\alpha_\varepsilon = a_0 \inf\{-W(x) : \ x \notin B_\varepsilon(0)\},$$

gdzie $0 < \varepsilon \leq \hat{\varepsilon}$.

Lemat 2.10. *Załóżmy, że $q \in \Lambda$ oraz $q(t) \notin B_\varepsilon(0)$ dla każdego $t \in \bigcup_{i=1}^{k}[r_i, s_i]$, gdzie $[r_i, s_i] \cap [r_j, s_j] = \emptyset$ dla $i \neq j$. Wówczas*

$$I(q) \geq \sqrt{2\alpha_\varepsilon} \sum_{i=1}^{k} |q(s_i) - q(r_i)|.$$

Dowód. Niech

$$l = \sum_{i=1}^{k} |q(s_i) - q(r_i)| \qquad \text{oraz} \qquad \tau = \sum_{i=1}^{k} (s_i - r_i).$$

Wówczas

$$\begin{aligned} l &= \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{r_i}^{s_i} \dot{q}(t)dt \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{r_i}^{s_i} |\dot{q}(t)|dt \\ &= \int_{\bigcup_{i=1}^{k}[r_i,s_i]} |\dot{q}(t)|dt \leq \sqrt{\tau} \left(\int_{\bigcup_{i=1}^{k}[r_i,s_i]} |\dot{q}(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Stąd

$$I(q) \geq \frac{1}{2} \int_{\bigcup_{i=1}^{k}[r_i,s_i]} |\dot{q}(t)|^2 dt + \int_{\bigcup_{i=1}^{k}[r_i,s_i]} -a(t)W(q(t))dt \geq \frac{l^2}{2\tau} + \alpha_\varepsilon \tau.$$

Z faktu, że funkcja $f(t) = \frac{l^2}{2t} + \alpha_\varepsilon t$, dla $t > 0$ osiąga minimum w punkcie $t_0 = \frac{l}{\sqrt{2\alpha_\varepsilon}}$ i wynosi ono $f(t_0) = l\sqrt{2\alpha_\varepsilon}$ otrzymujemy tezę.

□

Lemat 2.11. *Jeżeli $q \in \Lambda$ oraz $q(t) \in \mathcal{N}$ dla każdego $t \in [\sigma, \mu]$, to*

$$|U(q(\mu))| \leq |U(q(\sigma))| + \left(\int_\sigma^\mu -W(q)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\sigma^\mu |\dot{q}(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dowód. Dla $q \in \Lambda$ oraz $q(t) \in \mathcal{N}$, korzystając z warunku Gordona otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|U(q(\mu))| &\leq |U(q(\sigma))| + \left|\int_\sigma^\mu \frac{d}{dt}U(q(t))dt\right| \\
&\leq |U(q(\sigma))| + \left(\int_\sigma^\mu |\nabla U(q(t))|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\sigma^\mu |\dot{q}(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq |U(q(\sigma))| + \left(\int_\sigma^\mu -W(q(t))dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\sigma^\mu |\dot{q}(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Z Lematu 2.11 i wzoru (2.4) otrzymujemy, że jeżeli $q \in \Lambda$ oraz $q(t) \in \mathcal{N}$ dla każdego $t \in [\sigma, \mu]$, to

$$|U(q(\mu))| \leq |U(q(\sigma))| + \sqrt{\frac{2}{a_0}} I(q). \tag{2.11}$$

Lemat 2.12. *Niech $\{q_m\}_{m=1}^\infty \subset \Lambda$ będzie taki, że $\{I(q_m)\}_{m=1}^\infty$ jest ograniczony w $\mathbb{R}$. Wówczas istnieje $K > 0$ takie, że*

$$d(q_m(t), l) \geq K$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz $m \in \mathbb{N}$.

Dowód. Z Lematu 3.4 otrzymujemy, że $\{q_m\}_{m=1}^\infty$ jest ograniczony w $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. Stąd istnieje stała $r_0 > 0$ taka, że $q_m(t) \in B_{r_0}(0)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz $m \in N$. Jeżeli $B_{r_0}(0) \cap \mathcal{N} = \emptyset$, to $K = d(B_{r_0}(0), l)$.

Rozpatrzmy przypadek $B_{r_0}(0) \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$. Przypuśćmy, że istnieje ciąg $\{q_m(\mu_m)\}_{m=1}^\infty$ taki, że $q_m(\mu_m) \to l$ dla $m \to \infty$. Ustalamy δ, $r_0 > 0$ takie, że

$$\{S \in \Pi;\ |S - P| \leq \delta\} \times \{Z \in l;\ |Z - P| \leq r_0\} \subset \mathcal{N}.$$

Istnieje $m_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla $m \geq m_0$, $d(q_m(\mu_m), l) < \delta$. Dla każdego $m \geq m_0$ istnieje $\sigma_m < \mu_m$ takie, że

$$q_m(\sigma_m) \in \{S \in \Pi;\ |S - P| = \delta\} \times \{Z \in l;\ |Z - P| \leq r_0\}$$

oraz

$$q_m(t) \in \{S \in \Pi;\ |S - P| < \delta\} \times \{Z \in l;\ |Z - P| < r_0\}$$

dla wszytkich $t \in (\sigma_m, \mu_m)$. Wówczas z (2.11) dostajemy

$$|U(q_m(\mu_m))| \leq |U(q_m(\sigma_m))| + \sqrt{\frac{2}{a_0}} I(q_m).$$

Z ograniczoności $\{U(q_m(\sigma_m))\}_{m=1}^\infty$ oraz $\{I(q_m)\}_{m=1}^\infty$ otrzymujemy, że $\{U(q_m(\mu_m))\}_{m=1}^\infty$ jest ograniczony. Z drugiej strony z warunku (H2) wiemy, że $|U(q_m(\mu_m))| \to \infty$ dla $m \to \infty$. Sprzeczność.

□

Niech

$$c^{\pm} = \inf_{q \in \Gamma^{\pm}} I(q). \tag{2.12}$$

Stwierdzenie 2.13. Istnieje $c > 0$ takie, że

$$c^{\pm} \geq c. \tag{2.13}$$

Dowód. Udowodnimy przypadek c^+. Drugi jest analogiczny. Niech $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ będzie ciągiem minimalizującym dla I na Γ^+. Ustalmy $0 < \varepsilon \leq \hat{\varepsilon}$. Jeżeli $q_m \in \Gamma^+$, to $\mathrm{WN}(q_m) > 0$. Ponieważ $B_\varepsilon(0) \cap l = \emptyset$, to istnieją T_1^m, $T_2^m \in \mathbb{R}$ takie, że q_m opuszcza kulę $B_\varepsilon(0)$ w czasie T_1^m, nawija się dookoła prostej l i wraca do kuli $B_\varepsilon(0)$ w czasie T_2^m. Istnieje $T_3^m \in (T_1^m, T_2^m)$ taki, że $|q_m(T_3^m)| > |P|$. Stąd z Lematu 2.10,

$$I(q_m) \geq \sqrt{2\alpha_\varepsilon}|q_m(T_1^m) - q_m(T_3^m)| \geq \sqrt{2\alpha_\varepsilon}\frac{|P|}{2}.$$

Ostatecznie,

$$c^+ = \lim_{m \to \infty} I(q_m) \geq \frac{|P|}{2}\sqrt{2\alpha_\varepsilon} = c.$$

□

Lemat 2.14. *Jeżeli $M > 0$ oraz $q \in \Lambda$, $I(q) \leq M$, to istnieje stała $\omega(M) > 0$ taka, że*

$$\|q\|_E \leq \omega(M).$$

Dowód. Weźmy $q \in \Lambda$ takie, że $I(q) \leq M$. Wówczas

$$M \geq I(q) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 - a(t)W(q(t))\right) dt,$$

a stąd

$$\|\dot{q}\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} \leq 2M$$

oraz

$$M \geq \int_{\mathbb{R}} -a(t)W(q(t))dt. \tag{2.14}$$

Z (H3) wynika, że istnieje $\gamma > 0$ takie, że

$$-W''(0)(y,y) \geq 2\gamma|y|^2 \tag{2.15}$$

dla $y \in \mathbb{R}$. Z ciągłości W'' dostajemy, że istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $|y| < \delta$, to

$$-W(y) \geq \gamma|y|^2.$$

Niech

$$S(\delta) := \{t \in \mathbb{R} : \ |q(t)| > \delta\}, \qquad \hat{S}(\delta) := \{t \in \mathbb{R} : \ |q(t)| \leq \delta\}.$$

Wtedy z (2.14) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
M &\geq \int\limits_{S(\delta)} -a(t)W(q(t))dt + \int\limits_{\hat{S}(\delta)} -a(t)W(q(t))dt \\
&\geq \int\limits_{S(\delta)} -a(t)W(q(t))dt + a_0\gamma \int\limits_{\hat{S}(\delta)} |q(t)|^2 dt \\
&\geq \alpha_\delta \cdot \mu(S(\delta)) + a_0\gamma \int\limits_{\hat{S}(\delta)} |q(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

Zatem

$$M \geq \alpha_\delta \cdot \mu(S(\delta))$$

oraz

$$M \geq a_0\gamma \int\limits_{\hat{S}(\delta)} |q(t)|^2 dt.$$

Z Lematu 2.10 wynika, że

$$I(q) \geq \sqrt{2\alpha_\delta}(\|q\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} - \delta),$$

czyli

$$\|q\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} \leq \frac{M + \delta\sqrt{2\alpha_\delta}}{\sqrt{2\alpha_\delta}}.$$

W konsekwencji,

$$\begin{aligned}
\|q\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} &= \int\limits_{\mathbb{R}} |q(t)|^2 dt = \int\limits_{S(\delta)} |q(t)|^2 dt + \int\limits_{\hat{S}(\delta)} |q(t)|^2 dt \\
&\leq \frac{M}{\alpha_\delta}\left(\frac{M + \delta\sqrt{2\alpha_\delta}}{\sqrt{2\alpha_\delta}}\right)^2 + \frac{M}{a_0\gamma},
\end{aligned}$$

co kończy dowód.

□

Etap 2. *Rodzina funkcjonałów* $I(\beta,\cdot)\colon \Lambda \to \mathbb{R}$

Oznaczmy przez $\mathcal{A}_a$ zbiór

$$\mathcal{A}_a = \{\beta \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) :\ a_0 \leq \beta(t) \leq a_1 \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R}\}.$$

Dla każdego $\beta \in \mathcal{A}_a$ zdefiniujmy funkcjonał $I(\beta,\cdot) : \Lambda \to \mathbb{R}$ wzorem

$$I(\beta, q) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 - \beta(t)W(q(t))\right) dt. \tag{2.16}$$

Niech

$$K_\infty = \{v \in \Lambda :\ v \not\equiv 0,\ \exists \beta \in \mathcal{A}_a,\ I'(\beta, v) = 0\}$$

oraz

$$Q_\infty = \{\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \ \varphi(t) = \sum_{i\in N(\varphi)} |\tau_{\theta_i} v_i(t)|^2, \ v_i \in K_\infty, \ \theta_i \in \mathbb{R}, \#N(\varphi) < \infty\},$$

gdzie $\tau_{\theta_i} v_i(t) = v_i(t+\theta_i)$.

Lemat 2.15. *Zachodzą następujące nierówności:*

(i) $\inf_{\beta\in\mathcal{A}_a} \inf_{p\in K_\infty} ||p||_E > 0$*,*

(ii) $\inf_{\beta\in\mathcal{A}_a} \inf_{p\in K_\infty} I(\beta,p) > 0$*.*

Dowód. Z warunku (H3) otrzymujemy, że istnieją stałe ρ, $\beta_0 > 0$ takie, że jeżeli $0 < |x| < \rho$, to $-\nabla W(x)\cdot x > \beta_0|x|^2$. Niech $p \in \Lambda$ spełnia $0 < \|p\|_E < \frac{\sqrt{2}}{2}\rho$. Stąd mamy

$$\begin{aligned} \nabla I(\beta,p)\cdot p &= \int_{\mathbb{R}} \big(|\dot p(t)|^2 - \beta(t)\nabla W(p(t))\cdot p(t)\big)\, dt \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} (|\dot p(t)|^2 + a_0\beta_0|p(t)|^2)dt \geq \min\{1, a_0\beta_0\}\|p\|_E^2 > 0, \end{aligned}$$

co pokazuje, że p nie może być punktem krytycznym żadnego $I(\beta,\cdot)$. Zatem zachodzi (i).

Niech

$$c_\infty := \inf_{\beta\in\mathcal{A}_a} \inf_{p\in K_\infty} \|p\|_E.$$

Pokazaliśmy, że $c_\infty > 0$. Weźmy $\beta \in \mathcal{A}_a$ i $p \in K_\infty$. Warunek (H3) implikuje, że istnieją stałe $\rho_1, \beta_1 > 0$ takie, że jeżeli $0 < |x| < \rho_1$, to $-W(x) > \beta_1|x|^2$. Załóżmy, że $0 < \|p\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} < \rho_1$. Wówczas otrzymujemy

$$I(\beta,p) \geq \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}|\dot p(t)|^2 + a_0\beta_1|p(t)|^2\right) dt \geq \min\left\{\frac{1}{2}, a_0\beta_1\right\} \|p\|_E^2 \geq \min\left\{\frac{1}{2}, a_0\beta_1\right\} c_\infty^2. \tag{2.17}$$

Załóżmy teraz, że $\|p\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} \geq \rho_1$. Ustalmy $0 < \varepsilon \leq \{\hat\varepsilon, \rho_1\}$. Z Lematu 2.10 wynika, że

$$I(\beta,p) \geq \sqrt{2\alpha_{\frac{\varepsilon}{2}}}\cdot\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.18}$$

Z nierówności (2.17) i (2.18) wnioskujemy, że

$$\inf_{\beta\in\mathcal{A}_a} \inf_{p\in K_\infty} I(\beta,p) \geq \min\left\{\min\left\{\frac{1}{2}, a_0\beta_1\right\} c_\infty^2, \sqrt{2\alpha_{\frac{\varepsilon}{2}}}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\right\} > 0.$$

□

Lemat 2.16. *Niech* $q_0 \in \Lambda$ *oraz* $\{p_m\}_{m=1}^\infty \subset \Lambda$ *będzie ciągiem takim, że* $p_m \rightharpoonup 0$ *w* E*. Załóżmy, że*

$$\exists_{C>0}\forall_{m\in\mathbb{N}} \quad I(p_m) \leq C \ \wedge I(q_0) \leq C.$$

Wówczas

(i) $\sup_{\beta\in\mathcal{A}_a}\left|\int_{\mathbb{R}} \beta(t)(W(p_m(t)+q_0(t)) - W(p_m(t)) - W(q_0(t)))dt\right| \to 0$ *dla* $m\to\infty$*,*

(ii) $\sup\limits_{\beta\in\mathcal{A}_a}\sup\limits_{\|\varphi\|_E=1}\left|\int\limits_{\mathbb{R}}\beta(t)(\nabla W(p_m(t)+q_0(t))-\nabla W(p_m(t))-\nabla W(q_0(t)))\cdot\varphi(t)dt\right|\to 0$ *dla* $m\to\infty$.

Dowód. Zauważmy, że na mocy Lematu 2.12 istnieje $\rho=\rho(C)$ takie, że

$$d(p_m(t),l)\geq\rho \tag{2.19}$$

oraz

$$d(q_0(t),l)\geq\rho \tag{2.20}$$

dla każdego $m\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}$. Niech $R>0$ będzie takie, że

$$|q_0(t)|<\frac{\rho}{2} \tag{2.21}$$

dla $|t|>R$. Z faktu, że $p_m\rightharpoonup 0$ w E wiemy, że $p_m\to 0$ w $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$. Stąd

$$\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{m\geq N}\forall_{|t|\leq R}\quad |p_m(t)|<\frac{\rho}{2}. \tag{2.22}$$

Podzielmy całkę z (i) na dwie całki

$$\int\limits_{|t|\leq R}\beta(t)(W(p_m(t)+q_0(t))-W(p_m(t))-W(q_0(t)))dt$$
$$+\int\limits_{|t|>R}\beta(t)(W(p_m(t)+q_0(t))-W(p_m(t))-W(q_0(t)))dt.$$

Dla $|t|\leq R$ i $m\geq N$ z nierówności (2.20) i (2.21) mamy

$$d(p_m(t)+q_0(t),l)\geq d(q_0(t),l)-|p_m(t)|>\rho-\frac{\rho}{2}=\frac{\rho}{2}.$$

Z kolei dla $|t|>R$ i $m\in\mathbb{N}$ z nierówności (2.19) i (2.22) otrzymujemy

$$d(p_m(t)+q_0(t),l)\geq d(p_m(t),l)-|q_0(t)|>\rho-\frac{\rho}{2}=\frac{\rho}{2}.$$

Stąd $p_m+q_0\in\Lambda$ dla $m>N$. Zauważmy, że pierwsza z całek zbiega do zera przy $m\to\infty$, co wynika z faktu, że $p_m\to 0$ w $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$. Wystarczy zatem pokazać, że dla dowolnego $\varepsilon>0$ znajdziemy $R_\varepsilon>0$ takie, że dla dostatecznie dużych $m\in\mathbb{N}$ zachodzi nierówność

$$\int\limits_{|t|>R_\varepsilon}\beta(t)(W(p_m(t)+q_0(t))-W(p_m(t))-W(q_0(t)))dt<\varepsilon. \tag{2.23}$$

Z twierdzenia o wartości średniej wiemy, że istnieją liczby $\xi^t_m\in(0,1)$ takie, że

$$\left|\int\limits_{|t|>R}\beta(t)(W(p_m(t)+q_0(t))-W(p_m(t))-W(q_0(t)))dt\right|$$
$$\leq a_1\int\limits_{|t|>R}|\nabla W(p_m(t)+\xi^t_m q_0(t))\cdot q_0(t)|dt+a_1\int\limits_{|t|>R}|W(q_0(t))|dt$$

dla wszystkich $\beta \in \mathcal{A}_a$.

Wybierzmy $M > 0$ tak, żeby

$$q_0(t), p_m(t) + \xi_m^t q_0(t) \in \overline{B}_M(0) \setminus \left\{ y \in \mathbb{R}^3 : \ d(y,l) < \frac{\rho}{2} \right\}$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz dostatecznie dużych $m \in \mathbb{N}$. Możemy tak zrobić, ponieważ ciąg $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ jest ograniczony w E. Z Uwagi 2.1

$$\exists_{K>0} \forall_{x \in \overline{B}_M(0) \setminus \left\{y \in \mathbb{R}^3 : \, d(y,l) < \frac{\rho}{2}\right\}} \quad |W(x)| \leq K|x|^2 \ \wedge \ |\nabla W(x)| \leq K|x|.$$

Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
a_1 \int\limits_{|t|>R} & |\nabla W(p_m(t) + \xi_m^t q_0(t)) \cdot q_0(t)| dt + a_1 \int\limits_{|t|>R} |W(q_0(t))| dt \\
&\leq \ a_1 K \int\limits_{|t|>R} |p_m(t) + \xi_m^t q_0(t)||q_0(t)| dt + a_1 K \int\limits_{|t|>R} |q_0(t)|^2 dt \\
&\leq \ a_1 K \left(\int\limits_{|t|>R} |p_m(t)||q_0(t)| dt + 2 \int\limits_{|t|>R} |q_0(t)|^2 dt \right) \\
&\leq \ a_1 K \left(\left(\int\limits_{|t|>R} |p_m(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_{|t|>R} |q_0(t)|^2 dt \right)^{1/2} + 2 \int\limits_{|t|>R} |q_0(t)|^2 dt \right) \\
&\leq \ a_1 K \left(\sup_{m \in \mathbb{N}} \|p_m\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} \left(\int\limits_{|t|>R} |q_0(t)|^2 dt \right)^{1/2} + 2 \int\limits_{|t|>R} |q_0(t)|^2 dt \right). \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

Ponieważ $\int_{|t|>R} |q_0(t)|^2 dt \to 0$ przy $R \to \infty$, więc zachodzi (2.23).

Postępując analogicznie, żeby dowieść nierówności (ii) musimy pokazać, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $R_\varepsilon > 0$ takie, że

$$\int\limits_{|t|>R_\varepsilon} |\beta(t)(\nabla W(p_m(t) + q_0(t)) - \nabla W(p_m(t)) - \nabla W(q_0(t))) \cdot \varphi(t)| dt \leq \varepsilon \qquad (2.25)$$

dla każdego $\|\varphi\|_E = 1$ oraz dla każdego $\beta \in \mathcal{A}_a$. Ponieważ $W \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus l, \mathbb{R})$, więc ∇W jest lokalnie Lipschitzowski ze stałą Lipschitza $L > 0$ na zbiorze zwartym $|x| \leq M$. Stąd

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|t|>R} & |\beta(t)(\nabla W(p_m(t) + q_0(t)) - \nabla W(p_m(t)) - \nabla W(q_0(t))) \cdot \varphi(t)| dt \\
\leq \ & a_1 \int\limits_{|t|>R} |\nabla W(p_m(t) + q_0(t)) - \nabla W(p_m(t))||\varphi(t)| dt + a_1 \int\limits_{|t|>R} |\nabla W(q_0(t)))||\varphi(t)| dt \\
\leq \ & a_1 L \int\limits_{|t|>R} |q_0(t)||\varphi(t)| dt + a_1 K \int\limits_{|t|>R} |q_0(t)||\varphi(t)| dt \\
\leq \ & a_1 (L+K) \left(\int\limits_{|t|>R} |\varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int\limits_{|t|>R} |q_0(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq a_1 (L+K) \left(\int\limits_{|t|>R} |q_0(t)|^2 dt \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

Wnioskując tak samo jak w dowodzie nierówności (2.23) otrzymujemy (2.25).

□

Stwierdzenie 2.17. Niech $\{p_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Lambda$ będzie ciągiem takim, że $p_m \rightharpoonup p_0$ w E. Załóżmy, że

$$\exists_{C>0} \forall_{m \in \mathbb{N}} \quad I(p_m) \leq C \ \wedge I(p_0) \leq C.$$

Wówczas

(i) $\sup\limits_{\beta \in \mathcal{A}_a} |I(\beta, p_m - p_0) - I(\beta, p_m) + I(\beta, p_0)| \to 0$ dla $m \to \infty$,

(ii) $\sup\limits_{\beta \in \mathcal{A}_a} \|\nabla I(\beta, p_m - p_0) - \nabla I(\beta, p_m) + \nabla I(\beta, p_0)\|_E \to 0$ dla $m \to \infty$.

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}
& I(\beta, p_m - p_0) - I(\beta, p_m) + I(\beta, p_0) \\
= & \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{1}{2}(|\dot{p}_m(t) - \dot{p}_0(t)|^2 - |\dot{p}_m(t)|^2 + |\dot{p}_0(t)|^2)dt \\
+ & \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(t)(W(p_m(t) - p_0(t)) - W(p_m(t)) + W(p_0(t)))dt \\
= & \ o(1) + \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(t)(W(p_m(t) - p_0(t)) - W(p_m(t)) + W(p_0(t)))dt,
\end{aligned} \tag{2.26}$$

gdy $m \to \infty$. Podstawiając $p_m - p_0 = z_m$ otrzymujemy, że $z_m \rightharpoonup 0$ w E, a zatem

$$\begin{aligned}
& \sup_{\beta \in \mathcal{A}_a} |I(\beta, p_m - p_0) - I(\beta, p_m) + I(\beta, p_0)| \\
\leq & \ o(1) + \sup_{\beta \in \mathcal{A}_a} \int\limits_{\mathbb{R}} |\beta(t)(W(z_m(t) + p_0(t)) - W(z_m(t)) - W(p_0(t)))dt \to 0,
\end{aligned}$$

gdy $m \to \infty$ na mocy (i) z Lematu 2.16.

Postępując analogicznie jak wyżej otrzymujemy, że dla każdego $\varphi \in E$ zachodzi równość

$$\begin{aligned}
& |\nabla I(\beta, p_m - p_0) \cdot \varphi - \nabla I(\beta, p_m) \cdot \varphi + \nabla I(\beta, p_0) \cdot \varphi| \\
= & \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(t)(\nabla W(p_m(t) - p_0(t)) - \nabla W(p_m(t)) + \nabla W(p_0(t))) \cdot \varphi(t)dt \right|.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Ponownie podstawiając $p_m - p_0 = z_m$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
& \sup_{\beta \in \mathcal{A}_a} \|\nabla I(\beta, p_m - p_0) - \nabla I(\beta, p_m) + \nabla I(\beta, p_0)\|_E \\
\leq & \sup_{\beta \in \mathcal{A}_a} \sup_{\|\varphi\|=1} \left| \int\limits_{\mathbb{R}} \beta(t)(\nabla W(z_m(t) + p_0(t)) - \nabla W(z_m(t)) - \nabla W(p_0(t))) \cdot \varphi(t)dt \right| \to 0,
\end{aligned}$$

gdy $m \to \infty$ na mocy (ii) z Lematu 2.16.

□

Lemat 2.18. *Istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $\varphi \in Q_\infty$,*

$$0 < \varphi(t) < 2\delta \Longrightarrow \varphi''(t) > 0.$$

Dowód. Niech $\varphi \in Q_\infty$. Wówczas

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{p} |\tau_{\theta_i} v_i(t)|^2,$$

gdzie $\theta_i \in \mathbb{R}$, $v_i \in K_\infty$ dla $i = 1, 2, \ldots, p$. Dla każdego $i = 1, 2, \ldots, p$ istnieje $\beta_i \in \mathcal{A}_a$ takie, że $I'(\beta_i, v_i) = 0$. Różniczkując φ dwukrotnie dostajemy

$$\varphi'(t) \;=\; 2\sum_{i=1}^{p} \tau_{\theta_i} v_i(t) \cdot \tau_{\theta_i} \dot{v}_i(t)$$

oraz

$$\varphi''(t) \;=\; 2\sum_{i=1}^{p} |\tau_{\theta_i} \dot{v}_i(t)|^2 + 2\sum_{i=1}^{p} \tau_{\theta_i} v_i(t) \cdot \tau_{\theta_i} \ddot{v}_i(t).$$

Ponieważ $I'(\beta_i, v_i) = I'(\tau_{\theta_i}\beta_i, \tau_{\theta_i} v_i)$ dla $i = 1, 2, \ldots, p$, więc

$$\begin{aligned} \varphi''(t) \;&=\; 2\sum_{i=1}^{p} |\tau_{\theta_i} \dot{v}_i(t)|^2 - 2\sum_{i=1}^{p} \tau_{\theta_i}\beta_i(t)\nabla W(\tau_{\theta_i} v_i(t)) \cdot \tau_{\theta_i} v_i(t) \\ &\geq\; 2\sum_{i=1}^{p} |\tau_{\theta_i} \dot{v}_i(t)|^2 - 2a_1\sum_{i=1}^{p} \nabla W(\tau_{\theta_i} v_i(t)) \cdot \tau_{\theta_i} v_i(t). \end{aligned}$$

Niech $\gamma > 0$ będzie stałą jak w nierówności (2.15). Istnieje $\delta > 0$ taka, że jeżeli $0 < |x| < \sqrt{2\delta}$, to $\nabla W(x) \cdot x < -\gamma |x|^2$. Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ takiego, że $0 < \varphi(t) < 2\delta$ otrzymujemy, że $|\tau_{\theta_i} v_i(t)| < \sqrt{2\delta}$ dla $i = 1, 2, \ldots, p$, a stąd $\nabla W(\tau_{\theta_i} v_i(t)) \cdot \tau_{\theta_i} v_i(t) < -\gamma |\tau_{\theta_i} v_i(t)|^2$. W konsekwencji,

$$\varphi''(t) > 2\sum_{i=1}^{p} |\tau_{\theta_i} \dot{v}_i(t)|^2 + 2a_1\gamma \sum_{i=1}^{p} |\tau_{\theta_i} v_i(t)|^2 > 0, . \tag{2.28}$$

co kończy dowód.

□

Dla każdego $\varphi \in Q_\infty$, niech

$$Z(\varphi) = \{t \in \mathbb{R} : \; \varphi(t) = \delta\},$$

gdzie δ jest liczbą zdefiniowaną w Lemacie 2.18. Zauważmy, że na mocy Lematu 2.15 możemy bez straty ogólności założyć, że $Z(\varphi) \neq \emptyset$. Niech $\mathcal{T} \colon Q_\infty \to \mathbb{R}$ będzie określone wzorem

$$\mathcal{T}(\varphi) = \max Z(\varphi).$$

Zauważmy, że ponieważ $\varphi \in Q_\infty$, to $\mathcal{T}$ jest poprawnie określona.

Stwierdzenie 2.19. Dla każdego $\varphi \in Q_\infty$ zbiór $Z(\varphi)$ jest zbiorem punktów izolowanych.

Dowód. Niech $t^* \in Z(\varphi)$ oraz $\mathcal{N}_{t^*}$ będzie sąsiedztwem punktu t^* takim, że

$$\forall_{t\in\mathcal{N}_{t^*}} \qquad \varphi(t) < 2\delta.$$

Takie sąsiedztwo istnieje z ciągłości funkcji φ. Z Lematu 2.18 dla $t \in \mathcal{N}_{t^*}$ mamy $\varphi''(t) > 0$, więc φ' jest ściśle rosnąca. Gdyby t^* nie był punktem izolowanym, to istniałby monotoniczny ciąg $\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Z(\varphi)$, bez straty ogólności załóżmy, że rosnący taki, że $t_n \to t^*$ dla $n \to \infty$. Wówczas na mocy twierdzenia Rolle'a dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istniałaby $\eta_n \in (t_n, t_{n+1})$ taka, że $\varphi'(\eta_n) = 0$, co przeczy ściśłemu wzrostowi funkcji φ'.

$\square$

Niech funkcja $\mathcal{T}_1 \colon Q_\infty \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$\mathcal{T}_1(\varphi) = \max\{Z(\varphi) \setminus \{\mathcal{T}(\varphi)\}\}.$$

Innymi słowy, $\mathcal{T}_1(\varphi)$ jest przedostatnim czasem, dla którego $\varphi(t) = \delta$.

Stwierdzenie 2.20. Dla każdego $\varphi \in Q_\infty$ istnieje $\xi \in (\mathcal{T}_1(\varphi), \mathcal{T}(\varphi))$ takie, że $\varphi(\xi) \geq 2\delta$.

Dowód. Niech ξ będzie punktem takim, że

$$\varphi(\xi) = \max_{t\geq\mathcal{T}_1(\varphi)} \varphi(t).$$

Oczywiście $\xi > \mathcal{T}_1(\varphi)$. W przeciwnym razie w punkcie $\mathcal{T}_1(\varphi)$ byłoby lokalne maksimum, co jest sprzeczne z Lematem 2.18. Stąd $\varphi(\xi) \geq 2\delta$. Z definicji funkcji $\mathcal{T}$ wiemy, że $\varphi(t) < \delta$ dla $t > \mathcal{T}(\varphi)$. Zatem $\xi \in (\mathcal{T}_1(\varphi), \mathcal{T}(\varphi))$.

$\square$

Stwierdzenie 2.21. Niech B będzie ograniczonym podzbiorem Q_∞ w $W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Wówczas

$$\inf_{\varphi\in B}(\mathcal{T}(\varphi) - \mathcal{T}_1(\varphi)) = \mu > 0.$$

Dowód. Na mocy Stwierdzenia 2.20 wiemy, że dla każdego $\varphi \in Q_\infty$ możemy znaleźć $\xi \in (\mathcal{T}_1(\varphi), \mathcal{T}(\varphi))$ takie, że $\varphi(\xi) \geq 2\delta$. Wówczas

$$\delta \leq |\varphi(\xi) - \varphi(\mathcal{T}_1(\varphi))| \leq \int\limits_{\mathcal{T}_1(\varphi)}^{\xi} |\varphi'(t)|dt \leq \sqrt{\xi - \mathcal{T}_1(\varphi)}\|\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

Stąd

$$\mathcal{T}(\varphi) - \mathcal{T}_1(\varphi) \geq \xi - \mathcal{T}_1(\varphi) \geq \frac{\delta^2}{(\sup_{\varphi\in B}\|\varphi'\|_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R})})^2} > 0.$$

$\square$

Uwaga 2.22. Analogicznie można pokazać, że

$$\inf_{\varphi\in B}\{|t-s|;\ \varphi(t) = \delta, \varphi(s) = 2\delta\} = \nu > 0.$$

Stwierdzenie 2.23. Niech B będzie ograniczonym podzbiorem Q_∞. Wówczas istnieją $\rho > 0$ oraz $\gamma > 0$ takie, że

$$\varphi'(t) \le -\gamma \quad \forall_{t\in[\mathfrak{T}(\varphi)-\rho,\mathfrak{T}(\varphi)+\rho]}\forall_{\varphi\in B}. \tag{2.29}$$

Dowód. Z dowodu Lematu 2.18 (porównaj nierówność (2.28)) istnieje stała $b > 0$ taka, że

$$0 < \varphi(t) < 2\delta \Rightarrow \varphi''(t) > b\varphi(t) \quad \forall_{\varphi\in Q_\infty}.$$

Niech $\eta = \eta(\varphi) = \max\{t \in \mathbb{R};\, \varphi(t) = 2\delta\}$. Pokażemy, że dla każdego $t > \eta$ zachodzi $\varphi'(t) < 0$.

Przypuśćmy nie wprost, że istnieje $t_1 > \eta$ takie, że $\varphi'(t_1) \ge 0$. Ponieważ $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = 0$, więc musi istnieć $t^* > \eta$ takie, że $\varphi'(t^*) = 0$ i $\varphi''(t^*) < 0$ (t.j. musi istnieć maksimum lokalne właściwe). Z Lematu 2.18 wynika, że $\varphi(t^*) \ge 2\delta$. Zatem istnieje $t_2 \in [t^*, \infty)$ takie, że $\varphi(t_2) = 2\delta$. Sprzeczność.

Z powyższego oraz z Uwagi 2.22 otrzymujemy, że istnieje $\nu > 0$ takie, że

$$\varphi'(t) < 0 \quad \forall_{t\in[\mathfrak{T}(\varphi)-\nu,\infty)}\forall_{\varphi\in B}. \tag{2.30}$$

Rozważmy funkcję $E_\varphi\colon [\mathfrak{T}(\varphi) - \nu, \infty) \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$E_\varphi(t) = \frac{1}{2}|\varphi'(t)|^2 - \frac{b}{2}|\varphi(t)|^2.$$

Widzimy, że $E'_\varphi(t) = \varphi'(t)(\varphi''(t) - b\varphi(t)) < 0$ dla każdego $t \in [\mathfrak{T}(\varphi) - \nu, \infty)$. Stąd E_φ jest malejąca. Ponieważ $\lim\limits_{t\to\infty} E_\varphi(t) \ge 0$, otrzymujemy, że $E_\varphi(t) \ge 0$ dla każdego $t \in [\mathfrak{T}(\varphi) - \nu, \infty)$.

Niech $\rho > 0$ będzie odpowiednio małe, tak aby

$$\frac{\delta}{2} < \varphi(t) < \frac{3}{2}\delta \quad \forall_{t\in[\mathfrak{T}(\varphi)-\rho,\mathfrak{T}(\varphi)+\rho]}\forall_{\varphi\in B}.$$

Takie ρ istnieje na mocy Uwagi 2.22. W szczególności w przedziale $[\mathfrak{T}(\varphi) - \rho, \mathfrak{T}(\varphi) + \rho]$ mamy $E_\varphi(t) \ge 0$ dla każdego $\varphi \in B$. Stąd

$$|\varphi'(t)|^2 \ge b|\varphi(t)|^2 \ge b\frac{\delta^2}{4},$$

a ponieważ $\varphi'(t) < 0$ otrzymujemy, że

$$\varphi'(t) \le -\sqrt{b}\frac{\delta}{2} := -\gamma,$$

dla każdego $t \in [\mathfrak{T}(\varphi) - \rho, \mathfrak{T}(\varphi) + \rho]$ oraz $\varphi \in B$.

□

Stwierdzenie 2.24. Funkcja $\mathfrak{T}\colon Q_\infty \to \mathbb{R}$ jest lokalnie Lipschitzowska na ograniczonych podzbiorach Q_∞.

Dowód. Będziemy chcieli pokazać, że dla ograniczonego $B \subset Q_\infty$ istnieje stała $\sigma > 0$ taka, że

$$|\mathfrak{T}(\varphi) - \mathfrak{T}(\psi)| \le \frac{1}{\gamma}\|\varphi - \psi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \quad \forall_{\varphi,\psi\in B}\ \|\varphi - \psi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \le \sigma,$$

gdzie $\gamma = \gamma(B)$ jest stałą zdefiniowaną w Stwierdzeniu 2.23.

Niech $\nu > 0$ będzie stałą taką jak w Uwadze 2.22 oraz niech $\rho > 0$ będzie jak w Stwierdzeniu 2.23. Bez straty ogólności możemy założyć, że $\rho < \nu$. Niech $\varphi \in B$. Na mocy Stwierdzenia 2.23

$$\varphi(\mathcal{T}(\varphi) + \rho) - \varphi(\mathcal{T}(\varphi)) = \int\limits_{\mathcal{T}(\varphi)}^{\mathcal{T}(\varphi)+\rho} \varphi'(t)dt \leq -\gamma\rho$$

oraz

$$\varphi(\mathcal{T}(\varphi)) - \varphi(\mathcal{T}(\varphi) - \rho) = \int\limits_{\mathcal{T}(\varphi)-\rho}^{\mathcal{T}(\varphi)} \varphi'(t)dt \leq -\gamma\rho.$$

Stąd

$$\varphi(\mathcal{T}(\varphi) + \rho) \leq \delta - \gamma\rho \quad \text{oraz} \quad \varphi(\mathcal{T}(\varphi) - \rho) \geq \delta + \gamma\rho.$$

Niech $0 < \sigma < \min\{\gamma\rho, \delta\}$ oraz niech $\psi \in B$ spełnia $\|\varphi - \psi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq \sigma$. Wówczas

$$\psi(\mathcal{T}(\varphi) - \rho) = \psi(\mathcal{T}(\varphi) - \rho) - \varphi(\mathcal{T}(\varphi) - \rho) + \varphi(\mathcal{T}(\varphi) - \rho) \geq -\sigma + \delta + \gamma\rho > \delta.$$

Podobnie otrzymujemy

$$\psi(\mathcal{T}(\varphi) + \rho) < \delta.$$

Z własności Darboux otrzymujemy, że istnieje $t^* \in (\mathcal{T}(\varphi) - \rho, \mathcal{T}(\varphi) + \rho)$ takie, że $\psi(t^*) = \delta$.

Pokażemy, że $t^* = \mathcal{T}(\psi)$. W przeciwnym wypadku byłoby $t^* \leq \mathcal{T}_1(\psi)$. Ze Stwierdzenia 2.20 wiemy, że istnieje $\xi \in (\mathcal{T}_1(\psi), \mathcal{T}(\psi))$ takie, że $\psi(\xi) = 2\delta$. Z faktu, że $\xi - t^* \geq \nu$ (patrz Uwaga 2.22) otrzymujemy, że

$$\xi \geq \nu + t^* > \rho + \mathcal{T}(\varphi) - \rho = \mathcal{T}(\varphi).$$

Ponieważ φ jest malejąca dla $t > \mathcal{T}(\varphi) - \rho$ (patrz nierówność (2.30)), więc $\varphi(\xi) < \varphi(\mathcal{T}(\varphi)) = \delta$. Stąd

$$\delta \leq \psi(\xi) - \varphi(\xi) \leq \|\psi - \varphi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq \sigma < \delta.$$

Sprzeczność. Stąd $t^* = \mathcal{T}(\psi)$.

Dla $\mathcal{T}(\psi) \geq \mathcal{T}(\varphi)$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(\mathcal{T}(\psi)) - \varphi(\mathcal{T}(\varphi)) = \psi(\mathcal{T}(\psi)) - \varphi(\mathcal{T}(\psi)) + \varphi(\mathcal{T}(\psi)) - \varphi(\mathcal{T}(\varphi)) \\ &\leq \|\varphi - \psi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} + \int\limits_{\mathcal{T}(\varphi)}^{\mathcal{T}(\psi)} \varphi'(t)dt \leq \|\varphi - \psi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} - \gamma(\mathcal{T}(\psi) - \mathcal{T}(\varphi)). \end{aligned}$$

Analogicznie dla $\mathcal{T}(\psi) < \mathcal{T}(\varphi)$ otrzymujemy

$$0 \leq \|\varphi - \psi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} - \gamma(\mathcal{T}(\varphi) - \mathcal{T}(\psi)).$$

Z powyższych nierówności otrzymujemy ostatecznie

$$|\mathcal{T}(\varphi) - \mathcal{T}(\psi)| \leq \frac{1}{\gamma}\|\varphi - \psi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \quad \forall_{\varphi,\psi \in B}\ \|\varphi - \psi\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq \sigma,$$

co kończy dowód.

$\square$

Lemat 2.25. *Niech β_1, $\beta_2 \in L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ oraz $B \subset \Lambda$. Załóżmy, że $I(B)$ jest zbiorem ograniczonym.*

$$\exists_{C>0}\forall_{q\in B} I(q) \leq C.$$

Wówczas istnieje stała M taka, że dla każdego $q \in B$,

$$|I(\beta_1, q) - I(\beta_2, q)| \leq M\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} \tag{2.31}$$

oraz

$$\|\nabla I(\beta_1, q) - \nabla I(\beta_2, q)\|_E \leq M\|\beta_1 - \beta_2\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}. \tag{2.32}$$

Dowód. Z założenia istnieje stała $M_1 > 0$ taka, że $I(q) \leq M_1$ dla każdego $q \in B$. Z Lematu 2.12 wynika, że istnieje $\rho > 0$ takie, że $d(q(t), l) \geq \rho$ dla $t \in \mathbb{R}$ i $q \in B$. Z kolei z Lematu 2.14 istnieje $\omega(M_1) > 0$ takie, że $\|q\|_E \leq \omega(M_1)$ dla $q \in B$. Natomiast z Uwagi 2.1 otrzymujemy, że istnieje $M_2 > 0$ takie, że

$$|W(x)| \leq M_2|x|^2 \wedge |\nabla W(x)| \leq M_2|x|$$

dla każdego $x \in \overline{B}_{\sqrt{2}\omega(M_1)}(0) \setminus \{y \in \mathbb{R}^3 : \ d(y, l) < \rho\}$. Wobec powyższego, dla $q \in B$ mamy

$$\begin{aligned}
|I(\beta_1, q) - I(\beta_2, q)| &= \left|\int_{\mathbb{R}} (\beta_2(t) - \beta_1(t))W(q(t))dt\right| \\
&\leq \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} |W(q(t))|dt \leq \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} \cdot M_2 \int_{\mathbb{R}} |q(t)|^2 dt \\
&\leq \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} M_2 \cdot \|q\|_E^2 \leq M_2 \cdot \omega(M_1)^2 \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

Ostatecznie,

$$|I(\beta_1, q) - I(\beta_2, q)| \leq M_2 \cdot \omega(M_1)^2 \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

Analogicznie, nierówność (2.32) wynika z oszacowania

$$\|\nabla I(\beta_1, q) - \nabla I(\beta_2, q)\|_E \leq \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla W(q(t))|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Jako prostą konsekwencję Lematu 2.25 dostajemy.

Lemat 2.26. *Niech $\{q_n\}_{n=1}^\infty \subset \Lambda$ oraz $\{\beta_n\}_{n=1}^\infty \subset L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ będą ciągami takimi, że $\{I(q_n)\}_{n=1}^\infty$ jest ograniczony i $\beta_n \to \beta$ w $L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Wówczas*

$$|I(\beta_n, q_n) - I(\beta, q_n)| \to 0 \qquad \text{oraz} \qquad \|\nabla I(\beta_n, q_n) - \nabla I(\beta, q_n)\|_E \to 0 \tag{2.33}$$

dla $n \to \infty$.

Etap 3. *Ciągi Palais-Smale'a funkcjonału działania I*

Następnych kilka lematów poświęcimy własnościom ciągów Palais-Smale'a funkcjonału I. Zacznijmy od przypomnienia następujących definicji.

Definicja 2.27. Mówimy, że $\{p_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Lambda$ jest ciągiem Palais-Smale'a dla funkcjonału $I\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ ((PS)-ciągiem), jeżeli $\{I(p_m)\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony oraz $I'(p_m) \to 0$ w E^*, gdy $m \to \infty$.

Definicja 2.28. Mówimy, że $\{p_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Lambda$ jest ciągiem Palais-Smale'a dla funkcjonału $I\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ na poziomie b ($(PS)_b$-ciągiem), jeżeli $I(p_m) \to b$ w $\mathbb{R}$ oraz $I'(p_m) \to 0$ w E^*, gdy $m \to \infty$.

Lemat 2.29. *Niech $\{p_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Lambda$ będzie ciągiem Palais-Smale'a dla funkcjonału I na poziomie $b > 0$. Wtedy istnieje $e > 0$ takie, że*

$$\liminf_{m\to\infty} \|p_m\|_{L^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} \geq e.$$

Dowód. Przypuśćmy nie wprost, że $\liminf\limits_{m\to\infty} \|p_m\|_{L^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} = 0$. Wówczas istnieje podciąg $\{p_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taki, że $\lim\limits_{k\to\infty} \|p_{m_k}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} = 0$. Wykorzystując (H3), wiemy, że istnieją stałe ρ, $\beta_0 > 0$ takie, że jeżeli $|x| < \rho$, to $-\nabla W(x) \cdot x > \beta_0 |x|^2$. Dla k dostatecznie dużych $\|p_{m_k}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} < \rho$. Mamy wówczas

$$\begin{aligned}
\nabla I(p_{m_k}) \cdot p_{m_k} &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(|\dot{p}_{m_k}(t)|^2 - a(t)\nabla W(p_{m_k}(t)) \cdot p_{m_k}(t) \right) dt \\
&\geq \int_{\mathbb{R}} (|\dot{p}_{m_k}(t)|^2 + a_0\beta_0 |p_{m_k}(t)|^2) dt \geq \min\{1, a_0\beta_0\} \|p_{m_k}\|_E^2.
\end{aligned}$$

Przechodząc z $k \to \infty$ w powyższej nierówności, dostajemy, że $p_{m_k} \to 0$ w E, a stąd

$$\lim_{k\to\infty} I(p_{m_k}) = 0.$$

Sprzeczność, bo $\lim\limits_{k\to\infty} I(p_{m_k}) = b > 0$.

□

Wniosek 2.30. *Niech $\{p_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Lambda$ będzie ciągiem Palais-Smale'a dla funkcjonału I na poziomie $b > 0$ takim, że $p_m \rightharpoonup 0$ w E. Wówczas istnieje ciąg $\{\theta_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ taki, że:*

(i) żaden podciąg $\{p_m(\cdot + \theta_m)\}_{m=1}^{\infty}$ nie zbiega słabo do zera w E,

(ii) $\{\theta_m\}_{m=1}^{\infty}$ nie posiada podciągu ograniczonego, to znaczy $|\theta_m| \to \infty$ dla $m \to \infty$.

Dowód. Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ niech θ_m będzie taka, że $|p_m(\theta_m)| = \|p_m\|_{L^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)}$ i niech $v_m(t) = p_m(t + \theta_m)$. Pokażemy, że $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ nie ma podciągu słabo zbieżnego do zera w E.

Nie wprost. Jeżeli istnieje podciąg $\{v_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taki, że $v_{m_k} \rightharpoonup 0$ w E dla $k \to \infty$, to $v_{m_k} \to 0$ w $L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, więc $v_{m_k}(0) \to 0$ w $\mathbb{R}^3$. Wtedy

$$\|p_{m_k}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} = |p_{m_k}(\theta_{m_k})| = |v_{m_k}(0)| \to 0 \quad \text{dla} \quad k \to \infty,$$

co jest sprzeczne z Lematem 2.29.

(ii) także udowodnimy nie wprost. Załóżmy, że istnieje podciąg $\{\theta_{m_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{\theta_m\}_{m=1}^{\infty}$, który jest ograniczony. Z niemal jednostajnej zbieżności $\{p_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ do 0, otrzymujemy, że

$$\|p_{m_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} = |p_{m_k}(\theta_{m_k})| \to 0,$$

gdy $k \to \infty$, co jest sprzeczne z Lematem 2.29.

$\square$

Zanim przejdziemy do następnych lematów technicznych, zauważmy kilka prostych tożsamości dla funkcjonałów $I(\beta, \cdot)$, które wynikają z zamiany zmiennej całkowania.

$$\begin{aligned} &I(\beta, \tau_\theta p) = I(\tau_{-\theta}\beta, p), \\ &I(\tau_\theta\beta, \tau_\theta p) = I(\beta, p), \\ &\nabla I(\beta, \tau_\theta p) \cdot \varphi = \nabla I(\tau_{-\theta}\beta, p) \cdot \tau_{-\theta}\varphi, \\ &\nabla I(\tau_\theta\beta, \tau_\theta p) \cdot \tau_\theta\varphi = \nabla I(\beta, p) \cdot \varphi. \end{aligned}$$

Sprawdzenie powyższych tożsamości pozostawiamy Czytelnikowi. Wykorzystamy je w dowodach następnych lematów.

Lemat 2.31. *Niech $\{p_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Lambda$ będzie ciągiem Palais-Smale'a dla funkcjonału I na poziomie $b > 0$ takim, że $p_m \rightharpoonup 0$ w E. Wówczas istnieją funkcja $\beta_1 \in \mathcal{A}_a$, funkcja $v_1 \in E$ ($v_1 \not\equiv 0$) oraz ciąg liczb rzeczywistych $\{\theta_m\}_{m=1}^{\infty}$ taki, że dla pewnego podciągu $\{\tau_{\theta_m} p_m\}_{m=1}^{\infty}$, cały czas oznaczanego $\{\tau_{\theta_m} p_m\}_{m=1}^{\infty}$, spełnione są następujące warunki:*

(i) $\tau_{\theta_m} p_m \rightharpoonup v_1$ *w* E,

(ii) $\nabla I(\beta_1, v_1) = 0$,

(iii) $|\theta_m| \to \infty$ *dla* $m \to \infty$,

(iv) $\{p_m - \tau_{-\theta_m} v_1\}_{m=1}^{\infty}$ *jest ciągiem Palais-Smale'a dla funkcjonału I na poziomie* $b - I(\beta_1, v_1)$.

Dowód. Niech $\{\theta_m\}_{m=1}^{\infty}$ będzie ciągiem danym przez Wniosek 2.30. Wówczas (iii) otrzymujemy natychmiast. Na mocy Lematu 2.14 ciąg $\{\tau_{\theta_m} p_m\}_{m=1}^{\infty}$ jest ograniczony w E, więc zawiera podciąg $\{\tau_{\theta_m} p_m\}_{m=1}^{\infty}$ słabo zbieżny do pewnego v_1 w E ($v_1 \not\equiv 0$). Stąd zachodzi (i).

Rozważmy teraz $\{\tau_{\theta_m} a\}_{m=1}^{\infty}$. Z kryterium Bochnera wiemy, że istnieją podciąg, oznaczany $\{\tau_{\theta_m} a\}_{m=1}^{\infty}$, oraz funkcja $\beta_1 \in \mathcal{A}_a$ takie, że

$$\tau_{\theta_m} a \to \beta_1 \quad \text{jednostajnie na } \mathbb{R}.$$

Niech $q_m = \tau_{\theta_m} p_m$. Mamy $q_m \rightharpoonup v_1$ w E. Na mocy Stwierdzenia 2.5 dla każdego $\varphi \in E$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \nabla I(\beta_1, v_1) \cdot \varphi &= \lim_{m\to\infty} \nabla I(\beta_1, q_m) \cdot \varphi \\ = \lim_{m\to\infty} (\nabla I(\beta_1, q_m) \cdot \varphi &- \nabla I(\tau_{\theta_m} a, q_m) \cdot \varphi) + \lim_{m\to\infty} \nabla I(\tau_{\theta_m} a, q_m) \cdot \varphi = 0, \end{aligned}$$

ponieważ pierwszy składnik dąży do zera z Lematu 2.26 oraz

$$\lim_{m\to\infty} \nabla I(\tau_{\theta_m} a, q_m) \cdot \varphi = \lim_{m\to\infty} \nabla I(\tau_{\theta_m} a, \tau_{\theta_m} p_m) \cdot \varphi = \lim_{m\to\infty} \nabla I(p_m) \cdot \tau_{-\theta_m} \varphi = 0.$$

Stąd warunek (ii) zachodzi i pozostaje udowodnić (iv).

Mamy

$$
\begin{aligned}
&I(p_m - \tau_{-\theta_m} v_1) - I(p_m) + I(\beta_1, v_1) \\
&\qquad = (I(p_m - \tau_{-\theta_m} v_1) - I(\tau_{\theta_m} a, q_m) + I(\tau_{\theta_m} a, v_1)) - (I(\tau_{\theta_m} a, v_1) - I(\beta_1, v_1)) = o(1),
\end{aligned}
$$

co wynika ze Stwierdzenia 2.17 oraz Lematu 2.26. Otrzymujemy więc, że

$$\lim_{m\to\infty} I(p_m - \tau_{-\theta_m} v_1) = b - I(\beta_1, v_1).$$

Ponadto, dla każdego $\varphi \in E$,

$$
\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} \nabla I(p_m - \tau_{-\theta_m} v_1)\cdot\varphi &= \lim_{n\to\infty} (\nabla I(p_m - \tau_{-\theta_m} v_1)\cdot\varphi - \nabla I(p_m)\cdot\varphi + \nabla I(\tau_{\theta_m} a, v_1)\cdot\tau_{\theta_m}\varphi) \\
&= \lim_{m\to\infty} (\nabla I(\tau_{\theta_m} a, q_m - v_1)\cdot\tau_{\theta_m}\varphi - \nabla I(\tau_{\theta_m} a, q_m)\cdot\tau_{\theta_m}\varphi + \nabla I(\tau_{\theta_m} a, v_1)\cdot\tau_{\theta_m}\varphi) = 0,
\end{aligned}
$$

na mocy Stwierdzenia 2.17, co kończy dowód.

□

Lemat 2.32. *(Lemat Reprezentacyjny) Niech $\{p_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Lambda$ będzie ciągiem Palais-Smale'a dla funkcjonału I na poziomie $b > 0$. Wówczas istnieje liczba naturalna $k \in \mathbb{N}$, zależna od b, k funkcji $\beta_i \in \mathcal{A}_a$, k funkcji $v_i \in E$, $v_i \not\equiv 0$, podciąg wciąż oznaczany $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ oraz k ciągów $\{\theta_m^1\}_{m=1}^{\infty}$, $\{\theta_m^2\}_{m=1}^{\infty}$, ..., $\{\theta_m^k\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ o następujących własnościach:*

(i) $\|p_m - \sum_{i=1}^{k} \tau_{\theta_m^i} v_i\|_E \to 0$ *dla* $m \to \infty$,

(ii) $\nabla I(\beta_i, v_i) = 0$ *dla każdego* $i = 1, 2, \ldots, k$,

(iii) $b = \sum_{i=1}^{k} I(\beta_i, v_i)$,

(iv) $|\theta_m^i - \theta_m^j| \to \infty$ *dla* $m \to \infty$ *dla każdego* $i \neq j$.

Dowód. Na mocy Lematu 2.14 ciąg $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ jest ograniczony w E. Ponieważ E jest refleksywna, więc istnieje $v \in E$ takie, że $p_m \rightharpoonup v$ wzdłuż pewnego podciągu. Z Lematu 2.12 wynika, że $v \in \Lambda$.

Załóżmy, że $v \equiv 0$. Wtedy $p_m \rightharpoonup 0$ w E. Stosując Lemat 2.31 znajdziemy funkcję $\beta_1 \in \mathcal{A}_a$, funkcję $v_1 \in E$ ($v_1 \not\equiv 0$) oraz ciąg liczbowy $\{\theta_m^1\}_{m=1}^{\infty}$ takie, że:

$$
\begin{aligned}
&\tau_{-\theta_m^1} p_m \rightharpoonup v_1 \text{ w } E, \\
&\nabla I(\beta_1, v_1) = 0, \\
&|\theta_m^1| \to \infty, \\
&I(p_m - \tau_{\theta_m^1} v_1) \to b - I(\beta_1, v_1) \quad \text{w } \mathbb{R}, \\
&\nabla I(p_m - \tau_{\theta_m^1} v_1) \to 0 \text{ w } E,
\end{aligned}
$$

gdy $m \to \infty$, dla pewnego podciągu $\{\tau_{-\theta_m^1} p_m\}_{m=1}^{\infty}$. Stąd $I(\beta_1, v_1) \leq b$. Może zajść jeden z dwóch przypadków: $I(\beta_1, v_1) < b$ lub $I(\beta_1, v_1) = b$.

Przypadek 1. Załóżmy, że $I(\beta_1, v_1) = b$. Wówczas $I(p_m - \tau_{\theta_m^1} v_1) \to 0$, co implikuje $\|p_m - \tau_{\theta_m^1} v_1\|_E \to 0$ dla $m \to \infty$, więc twierdzenie jest prawdziwe dla $k = 1$.

Przypadek 2. Załóżmy, że $I(\beta_1, v_1) = b_1 < b$. Wówczas ciąg $p_m^1 = p_m - \tau_{\theta_m^1} v_1$ jest ciągiem Palais-Smale'a dla I na poziomie $b - b_1 > 0$. Z Lematu 2.31 znajdziemy funkcję

$\beta_2 \in \mathcal{A}_a$, funkcję $v_2 \in E$ ($v_2 \not\equiv 0$) oraz ciąg liczbowy $\{\theta_m^2\}_{m=1}^\infty$ takie, że:

$$\begin{aligned}
&\tau_{-\theta_m^2} p_m^1 \rightharpoonup v_2 \text{ w } E,\\
&\nabla I(\beta_2, v_2) = 0,\\
&|\theta_m^2| \to \infty,\\
&I(p_m^1 - \tau_{\theta_m^2} v_2) \to b - b_1 - I(\beta_2, v_2) \quad \text{w } \mathbb{R},\\
&\nabla I(p_m^1 - \tau_{\theta_m^2} v_2) \to 0 \text{ w } E,
\end{aligned}$$

gdy $m \to \infty$, dla pewnego podciągu $\{\tau_{-\theta_m^2} p_m^1\}_{m=1}^\infty$. Jeżeli $I(\beta_2, v_2) = b - b_1$, to twierdzenie jest prawdziwe dla $k = 2$. W przeciwnym wypadku, gdy $I(\beta_2, v_2) < b - b_1$, Lemat 2.31 stosujemy do ciągu Palais-Smale'a $p_m^2 = p_m^1 - \tau_{\theta_m^2} v_2$.

Zauważmy, że nasza procedura ma skończoną liczbę kroków. Z Lematu 2.15 dla każdego $i = 1, 2, \ldots$ mamy

$$b_i = I(\beta_i, v_i) \geq \inf_{\beta \in \mathcal{A}_a} \inf_{p \in K_\infty} I(\beta, p) := d > 0,$$

więc po co najwyżej $k := \left[\frac{b}{d}\right]$ krokach otrzymamy $I(\beta_k, v_k) = b - b_1 - b_2 - \ldots - b_{k-1}$. Wówczas $p_m^k = p_m^{k-1} - \tau_{\theta_m^k} v_k$ jest ciągiem Palais-Smale'a dla funkcjonału I na poziomie zerowym, czyli

$$I(p_m^k) \to 0 \quad \text{w } \mathbb{R},$$
$$\nabla I(p_m^k) \to 0 \quad \text{w } E,$$

gdy $m \to \infty$. Stąd

$$\|p_m^k\|_E = \|p_m^{k-1} - \tau_{\theta_m^k} v_k\|_E = \left\| p_m - \sum_{i=1}^k \tau_{\theta_m^i} v_i \right\|_E \to 0,$$

gdy $m \to \infty$.

Pozostaje pokazać (iv). Zauważmy, że $|\theta_m^1| \to \infty$ dla $m \to \infty$, więc twierdzenie jest spełnione dla $k = 1$. Dla $k = 2$ mamy $\tau_{-\theta_m^2} p_m^1 \rightharpoonup v_2$ w E, gdzie $v_2 \not\equiv 0$. Stąd

$$\tau_{-\theta_m^2} p_m^1 = \tau_{-\theta_m^2 + \theta_m^1 - \theta_m^1}(p_m - \tau_{\theta_m^1} v_1) = \tau_{-\theta_m^2 + \theta_m^1}(\tau_{-\theta_m^1} p_m - v_1) \rightharpoonup v_2$$

dla $m \to \infty$. Ponieważ $\tau_{-\theta_m^1} p_m - v_1 \rightharpoonup 0$ dla $m \to \infty$, więc ciąg $\{-\theta_m^2 + \theta_m^1\}_{m=1}^\infty$ nie może mieć ograniczonego podciągu, bo wówczas $\tau_{-\theta_m^2 + \theta_m^1}(\tau_{-\theta_m^1} p_m - v_1) \rightharpoonup 0$ wzdłuż takiego podciągu, co jest sprzeczne. Ostatecznie $|\theta_m^2 - \theta_m^1| \to \infty$ dla $m \to \infty$, więc twierdzenie jest prawdziwe dla $k = 2$. Dla $k = 3$ mamy $\tau_{-\theta_m^3} p_m^2 \rightharpoonup v_3$ w E, gdzie $v_3 \not\equiv 0$. Stąd

$$\tau_{-\theta_m^3} p_m^2 = \tau_{-\theta_m^3 + \theta_m^2 - \theta_m^2}(p_m^1 - \tau_{\theta_m^2} v_2) = \tau_{-\theta_m^3 + \theta_m^2}(\tau_{-\theta_m^2} p_m^1 - v_2) \rightharpoonup v_3$$

dla $m \to \infty$. Ponieważ $\tau_{-\theta_m^2} p_m^1 - v_2 \rightharpoonup 0$ dla $m \to \infty$, więc ciąg $\{-\theta_m^3 + \theta_m^2\}_{m=1}^\infty$ nie może mieć ograniczonego podciągu, bo wówczas $\tau_{-\theta_m^3 + \theta_m^2}(\tau_{-\theta_m^2} p_m^1 - v_2) \rightharpoonup 0$ wzdłuż takiego podciągu, co jest sprzeczne. Ponadto

$$\begin{aligned}
\tau_{-\theta_m^3} p_m^2 &= \tau_{-\theta_m^3 + \theta_m^1 - \theta_m^1}(p_m - \tau_{\theta_m^1} v_1 - \tau_{\theta_m^2} v_2)\\
&= \tau_{-\theta_m^3 + \theta_m^1}(\tau_{-\theta_m^1} p_m - v_1) - \tau_{-\theta_m^3 + \theta_m^2} v_2 \rightharpoonup v_3
\end{aligned}$$

dla $m \to \infty$. Ponieważ $v_2 \in E$ oraz $|-\theta_m^3 + \theta_m^2| \to \infty$ dla $m \to \infty$, to $\tau_{-\theta_m^3 + \theta_m^2} v_2 \rightharpoonup 0$. Gdyby ciąg $\{-\theta_m^3 + \theta_m^1\}_{m=1}^\infty$ miał podciąg ograniczony, to $\tau_{-\theta_m^3 + \theta_m^1}(\tau_{-\theta_m^1} p_m - v_1) \rightharpoonup 0$ i w konsekwencji $\tau_{-\theta_m^3} p_m^2 \rightharpoonup 0$. Sprzeczność. Ostatecznie $|\theta_m^3 - \theta_m^1| \to \infty$, więc twierdzenie jest prawdziwe dla $k = 3$. Postępując analogicznie przyjmując, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k = k_0$, jesteśmy w stanie dowieść, że twierdzenie jest prawdziwe dla $k = k_0 + 1$ pokazując kolejno, że $|\theta_m^{k_0+1} - \theta_m^{k_0}| \to \infty$, $|\theta_m^{k_0+1} - \theta_m^{k_0-1}| \to \infty$, ..., $|\theta_m^{k_0+1} - \theta_m^1| \to \infty$.

Załóżmy teraz, że $p_m \rightharpoonup v$ w E i $v \not\equiv 0$. Ze Stwierdzenia 2.5, $\nabla I(p_m) \rightharpoonup \nabla I(v)$ w E. Zatem dla każdego $\varphi \in E$ mamy

$$\nabla I(v) \cdot \varphi = \lim_{m\to\infty} \nabla I(p_m) \cdot \varphi = 0,$$

a stąd $\nabla I(v) = 0$. Ponadto, ze Stwierdzenia 2.17 wynika, że $\nabla I(p_m - v) \to 0$ w E oraz $I(p_m - v) \to b - I(v)$ w $\mathbb{R}$. Przyjmujemy $\theta_m^1 \equiv 0$ dla $m \in \mathbb{N}$ oraz $v_1 \equiv v$. Jeżeli $\|p_m - v\|_E \to 0$, to $I(v) = b$. Jeżeli natomiast $\|p_m - v\|_E \not\to 0$, to stosujemy Lemat 2.31 do ciągu $p_m^1 := p_m - v \rightharpoonup 0$ w E.

□

Lemat 2.33. *Niech $\{p_m\}_{m=1}^\infty \subset \Lambda$ będzie ciągiem Palais-Smale'a funkcjonału I na poziomie $b > 0$ takim jak w Lemacie Reprezentacyjnym, czyli $p_m - \sum_{i=1}^k \tau_{\theta_m^i} v_i \to 0$ w E dla pewnych $v_i \in K_\infty$ oraz $\theta_m^i \in \mathbb{R}$. Wówczas*

$$|p_m|^2 - \sum_{i=1}^k |\tau_{\theta_m^i} v_i|^2 \to 0 \tag{2.34}$$

dla $m \to \infty$ w $W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Dowód. Na początek pokażemy, że jeżeli u, $v \in E$ oraz $\{\theta_m^1\}_{m=1}^\infty$, $\{\theta_m^2\}_{m=1}^\infty$ są ciągami liczb rzeczywistych takimi, że $|\theta_m^1 - \theta_m^2| \to \infty$ dla $m \to \infty$, to

$$\tau_{\theta_m^1} u \cdot \tau_{\theta_m^2} v \to 0 \quad \text{w} \quad W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}). \tag{2.35}$$

Niech $r > 0$ będzie ustalone oraz niech $\Delta_m = \theta_m^2 - \theta_m^1$. Poprzez zamianę zmiennych w całce mamy

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |\tau_{\theta_m^1} u(t) \cdot \tau_{\theta_m^2} v(t)|^2 dt &= \int_{\mathbb{R}} |u(t) \cdot \tau_{\Delta_m} v(t)|^2 dt \\ &= \int_{|u(t)|<r} |u(t) \cdot \tau_{\Delta_m} v(t)|^2 dt + \int_{|u(t)|\geq r} |u(t) \cdot \tau_{\Delta_m} v(t)|^2 dt \leq r^2 \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} + o(1),\end{aligned}$$

co wynika z faktu, że $u \in E$ oraz $v(\cdot - \Delta_m) \to 0$ w $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$. Stąd otrzymujemy, że

$$\tau_{\theta_m^1} u \cdot \tau_{\theta_m^2} v \to 0 \quad \text{w} \quad L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Podobnie, stosując zamianę zmiennych dla całki otrzymamy

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{d}{dt} (\tau_{\theta_m^1} u(t) \cdot \tau_{\theta_m^2} v(t)) \right|^2 dt \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |\dot{u}(t) \cdot \tau_{\Delta_m} v(t)|^2 dt + 2 \int_{\mathbb{R}} |\tau_{-\Delta_m} u(t) \cdot \dot{v}(t)|^2 dt. \tag{2.36}$$

Wybierzmy $r > 0$ takie, że dla zwartego zbioru K_r całka $\int_{\mathbb{R}\setminus K_r} |\dot{u}(t)|^2 dt \leq r$. Wówczas dla pierwszej całki po prawej stronie w nierówności (2.36) otrzymujemy

$$\int_{\mathbb{R}} |\dot{u}(t) \cdot \tau_{\Delta_m} v(t)|^2 dt = \int_{K_r} |\dot{u}(t) \cdot \tau_{\Delta_m} v(t)|^2 dt + \int_{\mathbb{R}\setminus K_r} |\dot{u}(t) \cdot \tau_{\Delta_m} v(t)|^2 dt \leq o(1) + r \|v\|^2_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)},$$

ponieważ $v(\cdot - \Delta_m) \to 0$ w $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$. Drugą całkę po prawej stronie nierówności (2.36) szacujemy analogicznie. Stąd otrzymujemy warunek (2.35).

Mamy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}\left\| |p_m|^2 - \sum_{i=1}^k |\tau_{\theta^i_m} v_i|^2 \right\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} &\leq \left\| |p_m|^2 - \left| \sum_{i=1}^k \tau_{\theta^i_m} v_i \right|^2 \right\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \\ &+ \left\| \left| \sum_{i=1}^k \tau_{\theta^i_m} v_i \right|^2 - \sum_{i=1}^k |\tau_{\theta^i_m} v_i|^2 \right\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Pierwszy składnik w powyższej nierówności dąży do zera dla $m \to \infty$ na mocy Lematu 2.3. Natomiast dla drugiego zachodzi

$$\left\| \left| \sum_{i=1}^k \tau_{\theta^i_m} v_i \right|^2 - \sum_{i=1}^k |\tau_{\theta^i_m} v_i|^2 \right\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} = \left\| \sum_{i\neq j} \tau_{\theta^i_m} v_i \cdot \tau_{\theta^j_m} v_j \right\| \to 0,$$

gdy $m \to \infty$, z (2.35). Ostatecznie

$$\left\| |p_m|^2 - \sum_{i=1}^k |\tau_{\theta^i_m} v_i|^2 \right\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \to 0,$$

gdy $m \to \infty$, co kończy dowód.

□

Stwierdzenie 2.34. Niech $\{p_m\}_{m=1}^\infty \subset \Lambda$ będzie ciągiem Palais-Smale'a funkcjonału I na poziomie $b > 0$. Wówczas

$$dist(|p_m|^2, Q_\infty) \to 0 \tag{2.37}$$

dla $m \to \infty$ w $W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Dowód. Przypuśćmy, że (2.37) nie zachodzi. Wówczas istnieje podciąg, cały czas oznaczony $\{p_m\}_{m=1}^\infty$ taki, że

$$\lim_{m\to\infty} dist(|p_m|^2, Q_\infty) > 0. \tag{2.38}$$

Z Lematu 2.32 dostajemy, że

$$\|p_m - \sum_{i=1}^k \tau_{\theta^i_m} v_i\|_E \to 0, \tag{2.39}$$

gdy $m \to \infty$ dla pewnych $v_i \in K_\infty$ oraz $\theta^i_m \in \mathbb{R}$. W konsekwencji, z Lematu 2.33,

$$|p_m|^2 - \sum_{i=1}^k |\tau_{\theta^i_m} v_i|^2 \to 0, \tag{2.40}$$

gdy $m \to \infty$ w $W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, co przeczy (2.38).

□

Twierdzenie 2.35. *Niech* $\{p_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \Lambda$ *będzie ciągiem Palais-Smale'a funkcjonału* I *na poziomie* $b > 0$*. Ponadto,*

$$\|p_m - p_{m-1}\|_E \to 0 \tag{2.41}$$

dla $m \to \infty$*. Wówczas istnieje ciąg* $\{\theta_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ *i liczba* $r > 0$ *takie, że*

$$\liminf_{m\to\infty} |\tau_{\theta_m} p_m(0)| \geq r \tag{2.42}$$

oraz

$$|\theta_m - \theta_{m-1}| \to 0 \tag{2.43}$$

dla $m \to \infty$*.*

Dowód. Ponieważ $dist(|p_m|^2, Q_\infty) \to 0$, gdy $m \to \infty$ na mocy Stwierdzenia 2.34, to istnieje $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty} \subset Q_\infty$ taki, że $\||p_m|^2 - \varphi_m\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \to 0$ dla $m \to \infty$ w $W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Niech $\theta_m = \mathcal{T}(\varphi_m)$. Z Lematu 2.3 mamy, że

$$\||p_m|^2 - |p_{m-1}|^2\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \to 0,$$

a stąd

$$\begin{aligned} \|\varphi_m - \varphi_{m-1}\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} &\leq \|\varphi_m - |p_m|^2\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} + \||p_m|^2 - |p_{m-1}|^2\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \\ &+ \|\varphi_{m-1} - |p_{m-1}|^2\|_{W^{1,2}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \to 0, \end{aligned}$$

gdy $m \to \infty$. Z jednostajnej ciągłości $\mathcal{T}$ na zbiorach ograniczonych (patrz Stwierdzenie 2.24), otrzymujemy

$$|\theta_m - \theta_{m-1}| = |\mathcal{T}(\varphi_m) - \mathcal{T}(\varphi_{m-1})| \to 0,$$

gdy $m \to \infty$. Ponadto,

$$\begin{aligned} |\tau_{\theta_m} p_m(0)|^2 &= |p_m(\theta_m)|^2 - \varphi_m(\theta_m) + \varphi_m(\theta_m) = o(1) + \varphi_m(\mathcal{T}(\varphi_m)) \\ &= o(1) + \delta > 0, \end{aligned}$$

gdy $m \to \infty$, gdzie δ z Lematu 2.18.

□

Etap 4. *Istnienie orbit homoklinicznych układu* (2.1)

Podamy teraz dwa znane twierdzenia z metod wariacyjnych. Wykorzystamy je w dowodzie Twierdzenia 3.3

Twierdzenie 2.36 (Wariacyjna Zasada Ekelanda, patrz Twierdzenie 4.1 w [18]). *Niech* (X, d) *będzie przestrzenią metryczną zupełną oraz niech* $f\colon X \to (-\infty, \infty]$ *będzie funkcjonałem lsc*[2]*, ograniczonym z dołu i* $f \not\equiv +\infty$*. Ustalmy* $\varepsilon > 0$ *oraz* $u \in X$ *takie, że*

$$f(u) \leq \varepsilon + \inf_{x\in X} f(x).$$

[2]Niech X będzie przestrzenią unormowaną. Mówimy, że funkcjonał $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jest półciągły z dołu, jeżeli dla każdego $x \in X$ i każdego ciągu $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X$ spełniony jest warunek:

$$x_m \to x \quad \text{w} \quad X \Rightarrow \liminf_{m\to\infty} f(x_m) \geq f(x).$$

Wówczas istnieje punkt $v \in X$ taki, że

$$\begin{aligned} f(v) &\leq f(u), \\ d(u,v) &\leq 1 \end{aligned}$$

oraz dla wszystkich $w \neq v$ zachodzi

$$f(w) \geq f(v) - \varepsilon d(v,w).$$

Wniosek 2.37 (patrz Wniosek 4.1 w [18]). *Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalnym funkcjonałem ograniczonym z dołu. Wówczas dla każdego ciągu minimalizującego $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \subset X$ istnieje ciąg minimalizujący $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ funkcjonału f taki, że*

$$f(v_m) \leq f(u_m),$$

$$\|u_m - v_m\|_X \to 0 \quad dla \quad m \to \infty,$$

$$\|f'(v_m)\|_{X^*} \to 0 \quad dla \quad m \to \infty.$$

Definicja 2.38. Niech E będzie przestrzenią Banacha, $U \subset E$ zbiorem otwartym oraz $f \in C^1(U,\mathbb{R})$. Wówczas v nazywamy pseudogradientem funkcjonału f jeżeli dla każdego $u \in U$:

$$\|v\|_E \leq 2\|f'(u)\|_{E^*}, \tag{2.44}$$

$$f'(u) \cdot v \geq \|f'(u)\|_{E^*}^2. \tag{2.45}$$

Definicja 2.39. Niech $f \in C^1(E,\mathbb{R})$ oraz niech $\hat{E} = \{u \in E:\ f'(u) \neq 0\}$. Wówczas $\mathcal{V}\colon \hat{E} \to E$ nazywamy polem pseudogradientowym, jeżeli $\mathcal{V}$ jest lokalnie Lipschitzowskie oraz $\mathcal{V}(x)$ jest pseudogradientem dla funkcjonału f dla każdego $x \in \hat{E}$.

Twierdzenie 2.40 (Patrz Lemat A.2 w [20]). *Jeżeli $f \in C^1(E,\mathbb{R})$, to istnieje pole pseudogradientowe dla f na $\hat{E}$.*

Twierdzenie 2.41. *Niech $q \in \Gamma$. Wówczas istnieje rozwiązanie homokliniczne $Q \in \Lambda$ układu (2.1) takie, że $I(Q) \in (0, I(q)]$.*

Dowód. Jeżeli $\nabla I(q) = 0$, to teza zachodzi dla $Q = q$.

Załóżmy, że $\nabla I(q) \neq 0$. Niech $\mathcal{V}(x)$ będzie lokalnie Lipschitzowskim pseudogradientowym polem wektorowym dla I, tzn. $\mathcal{V}\colon \hat{E} \to E$ jest lokalnie Lipschitzowskie na $\hat{E} = \{x \in E:\ \nabla I(x) \neq 0\}$ oraz spełnia

$$\|\mathcal{V}(x)\|_E \leq 2\|\nabla I(x)\|_E, \tag{2.46}$$

$$\nabla I(x) \cdot \mathcal{V}(x) \geq \|\nabla I(x)\|_E^2. \tag{2.47}$$

Rozważmy problem Cauchy'ego

$$\frac{d\eta}{ds} = -\frac{\mathcal{V}(\eta)}{1 + \|\mathcal{V}(\eta)\|_E} \equiv -\mathcal{W}(\eta) \tag{2.48}$$

z warunkiem początkowym

$$\eta(0) = q.$$

Wtedy $\mathcal{W}$ jest lokalnie Lipschitzowska na $\hat{E}$ oraz $\|\mathcal{W}(x)\|_E \leq 1$ dla każdego $x \in \hat{E}$. Stąd rozwiązanie problemu (2.48) istnieje dla wszystkich $s \geq 0$.

Z (2.47), otrzymujemy

$$\frac{dI(\eta(s))}{ds} = \nabla I(\eta(s)) \cdot \frac{d\eta(s)}{ds} = -\nabla I(\eta(s)) \cdot \mathcal{W}(\eta(s)) < 0. \tag{2.49}$$

Ponieważ $\eta(0) \in \Gamma$, z Lematu 2.12 i (2.49) wnioskujemy, że $\eta(s) \in \Gamma$ dla wszystkich $s \geq 0$. Ponadto, z (2.49), (2.12) oraz Stwierdzenia 2.13,

$$\inf_{s \geq 0} I(\eta(s)) = \lim_{s \to \infty} I(\eta(s)) \geq c^{\pm} > 0,$$

zależnie od tego, czy $q \in \Gamma^+$ czy Γ^-. Niech $\{s_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ będzie ciągiem takim, że $s_m \to \infty$ dla $m \to \infty$ oraz

$$|s_m - s_{m-1}| \to 0$$

dla $m \to \infty$. Z Wniosku 2.37 istnieje ciąg $\{t_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ taki, że $t_m \to \infty$ dla $m \to \infty$,

$$|t_m - s_m| \to 0,$$

$$I(\eta(t_m)) \leq I(\eta(s_m))$$

oraz

$$\frac{d}{ds} I(\eta(t_m)) \to 0 \tag{2.50}$$

dla $m \to \infty$. Połóżmy $q_m = \eta(t_m)$. Z (2.50) oraz (2.49) otrzymujemy

$$\nabla I(q_m) \to 0 \tag{2.51}$$

dla $m \to \infty$. Ponadto,

$$\begin{aligned} \|q_m - q_{m-1}\|_E &= \left\| \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{d\eta(s)}{ds} ds \right\|_E \leq \int_{t_{m-1}}^{t_m} \left\| \frac{d\eta}{ds} \right\|_E ds \leq |t_m - t_{m-1}| \\ &\leq |t_m - s_m| + |s_m - s_{m-1}| + |s_{m-1} - t_{m-1}| \to 0 \end{aligned}$$

dla $m \to \infty$. Zatem $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ spełnia założenia Twierdzenia 2.35. Stąd istnieją ciąg liczbowy $\{\theta_m\}_{m=1}^{\infty}$ oraz stała $r > 0$ takie, że

$$\liminf_{m \to \infty} |\tau_{\theta_m} q_m(0)| \geq r \tag{2.52}$$

oraz

$$|\theta_m - \theta_{m-1}| \to 0 \tag{2.53}$$

dla $m \to \infty$.

Rozważymy dwa przypadki.

Przypadek 1. $\{\theta_m\}_{m=1}^{\infty}$ ma podciąg ograniczony. Na mocy twierdzenia Bolzano-Weierstrassa ciąg $\{\theta_m\}_{m=1}^{\infty}$ zawiera podciąg zbieżny. Bez straty ogólności załóżmy, że $\theta_m \to \theta$, gdy $m \to \infty$. Ponieważ funkcjonał I maleje wzdłuż potoku η, mamy $I(q_m) < I(q)$. Z Lematu 2.14, $\{q_m\}_{m=1}^{\infty}$ jest ograniczony, a co za tym idzie istnieje $Q \in \Lambda$ takie, że $q_m \rightharpoonup Q$ w E oraz $q_m \to Q$ w $L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ wzdłuż podciągu. Stąd

$$\nabla I(q_m) \cdot f \to \nabla I(Q) \cdot f \tag{2.54}$$

dla każdego $f \in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$. Ostatecznie, z (2.51), $\nabla I(Q)\cdot f = 0$ oraz z (2.52), $\tau_\theta Q(0) \neq 0$. Stąd Q jest nietrywialnym, homoklinicznym rozwiązaniem układu (2.1). Ponadto, dla każdych N_1, N_2 takich, że $N_1 < N_2$, funkcjonał dany wzorem

$$\Lambda \ni u \to \int\limits_{N_1}^{N_2} \left(\frac{1}{2}|\dot{u}(t)|^2 - a(t)W(u(t))\right) dt$$

jest słabo półciągły z dołu[3]. Stąd dla każdego $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int\limits_{-j}^{j} \left(\frac{1}{2}|\dot{Q}(t)|^2 - a(t)W(Q(t))\right) dt &\leq \liminf_{m\to\infty} \int\limits_{-j}^{j} \left(\frac{1}{2}|\dot{q}_m(t)|^2 - a(t)W(q_m(t))\right) dt \\ &\leq \lim_{m\to\infty} I(q_m) = c^\pm \leq I(q). \qquad (2.55)\end{aligned}$$

Biorąc $j \to \infty$, dostajemy

$$I(Q) \leq I(q). \qquad (2.56)$$

Przypadek 2. $\{\theta_m\}_{m=1}^\infty$ nie ma podciągu ograniczonego. Niech $v_m = \tau_{\theta_m} q_m$. Z prawie okresowości funkcji $a(t)$, istnieje ciąg nieograniczony $\{\sigma_m\}_{m=1}^\infty$ (w tym samym kierunku co $\{\theta_m\}_{m=1}^\infty$) taki, że

$$\|\tau_{-\sigma_m} a - a\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} \to 0 \qquad (2.57)$$

dla $m \to \infty$. Niech $\{\theta_{m_k}\}_{k=1}^\infty$ będzie ciągiem spełniającym

$$|\theta_{m_k} - \sigma_k| \to 0 \qquad (2.58)$$

dla $k \to \infty$. Jest to możliwe dzięki (2.53). Z ograniczoności $\{v_m\}_{m=1}^\infty$ istnieje $Q \in \Lambda$ takie, że $v_m \rightharpoonup Q$ w E oraz $v_m \to Q$ w $L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$ wzdłuż podciągu. Korzystając z (2.57), (2.58) oraz z jednostajnej ciągłości funkcji $a(t)$, otrzymujemy

$$\|\tau_{-\theta_{m_k}} a - a\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} \leq \|\tau_{-\theta_{m_k}} a - \tau_{-\sigma_k} a\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} + \|\tau_{-\sigma_k} a - a\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})} \to 0 \qquad (2.59)$$

dla $k \to \infty$. W konsekwencji, dla każdego $f \in C_0^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned}\nabla I(Q)\cdot f &= \lim_{k\to\infty} \nabla I(v_{m_k})\cdot f = \lim_{k\to\infty} \nabla I(\tau_{\theta_{m_k}} a, v_{m_k})\cdot f \\ &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} (\dot{v}_{m_k}(t)\cdot \dot{f}(t) - \tau_{\theta_{m_k}} a(t)\nabla W(v_{m_k}(t))\cdot f(t))dt \\ &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} (\dot{q}_{m_k}(t-\theta_{m_k})\cdot \dot{f}(t) - a(t-\theta_{m_k})\nabla W(q_{m_k}(t-\theta_{m_k}))\cdot f(t))dt \\ &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} (\dot{q}_{m_k}(t)\cdot \dot{f}(t+\theta_{m_k}) - a(t)\nabla W(q_{m_k}(t))\cdot f(t+\theta_{m_k}))dt \\ &= \lim_{k\to\infty} \nabla I(q_{m_k})\cdot \tau_{-\theta_{m_k}} f = 0\end{aligned}$$

z (2.59), Lematu 2.26 oraz (2.51). Analogicznie jak w Przypadku 1. pokazujemy, że $I(Q) \leq I(q)$.

□

[3]Niech E będzie przestrzenią unormowaną. Mówimy, że funkcjonał $I\colon E \to \mathbb{R}$ jest słabo półciągły z dołu, jeżeli dla każdego $u \in E$ i każdego ciągu $\{u_m\}_{m=1}^\infty \subset E$ spełniony jest warunek:

$$(u_m \rightharpoonup u \text{ w } E \Rightarrow \liminf_{m\to\infty} I(u_m) \geq I(u)).$$

Lemat 2.42. *Istnieje stała $\rho > 0$ taka, że jeżeli $w \in \Lambda \setminus \{0\}$ jest rozwiązaniem układu (2.1), to $\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} > \rho$.*

Dowód. Z (H3), istnieją ρ, $\beta > 0$ takie, że jeżeli $|x| \leq \rho$, to

$$-\nabla W(x) \cdot x \geq \beta |x|^2. \tag{2.60}$$

Załóżmy, że $w \in \Lambda \setminus \{0\}$ jest rozwiązaniem układu (2.1) oraz $\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^3)} \leq \rho$. Wówczas

$$\begin{aligned} 0 = \nabla I(w) \cdot w &= \int_{\mathbb{R}} (|\dot{w}(t)|^2 - a(t)\nabla W(w(t)) \cdot w(t))dt \geq \int_{\mathbb{R}} (|\dot{w}(t)|^2 + \beta a(t)|w(t)|^2)dt \\ &\geq \int_{\mathbb{R}} (|\dot{w}(t)|^2 + \beta a_0 |w(t)|^2)dt > 0, \end{aligned} \tag{2.61}$$

sprzeczność.

□

Twierdzenie 2.43. *Istnieje $\varepsilon_0 > 0$ takie, że jeżeli $q \in \Gamma^\pm$ oraz*

$$I(q) < c^\pm + \varepsilon_0, \tag{2.62}$$

to rozwiązanie Q układu (2.1) dane przez Twierdzenie 2.41 należy do $\Gamma^\pm$ oraz $I(Q) \in [c^\pm, I(q)]$.

Dowód. Rozważymy przypadek $q \in \Gamma^+$. Przypuśćmy, że $Q \notin \Gamma^+$. Wówczas $\mathrm{WN}(Q) \leq 0$. Niech $\delta \in (0, \rho/2)$ z ρ takim jak w Lemacie 2.42. Ponieważ $Q \in E$, to istnieje czas $T = T(\delta) > 0$ taki, że

$$Q(t) \in \overline{B}_\delta(0) \tag{2.63}$$

dla każdego $|t| \geq T$. Bierzemy $\delta > 0$ odpowiednio małą, taką, że $\mathrm{WN}(Q) = \mathrm{WN}(Q|_{-T}^{T})$.

Niech $\{q_m\}_{m=1}^\infty$ oraz $\{\theta_m\}_{m=1}^\infty$ będą zdefiniowane jak w dowodzie Twierdzenia 2.41.

Przypadek 1. $\{\theta_m\}_{m=1}^\infty$ ma podciąg ograniczony. Niech $Q_m(t) = q_m(t)$. Ponieważ $Q_m \rightharpoonup Q$ w E, więc $Q_m \to Q$ jednostajnie dla $|t| \leq T+1$, gdy $m \to \infty$. Mamy

$$0 < \mathrm{WN}(Q_m) = \mathrm{WN}(Q_m|_{-\infty}^{-T-1}) + \mathrm{WN}(Q_m|_{-T-1}^{T+1}) + \mathrm{WN}(Q_m|_{T+1}^{\infty}) \tag{2.64}$$

oraz

$$\mathrm{WN}(Q_m|_{-T-1}^{T+1}) = \mathrm{WN}(Q|_{-T-1}^{T+1}) = \mathrm{WN}(Q) < 0 \tag{2.65}$$

dla m wystarczająco dużych. Jako, że $\mathrm{WN}(Q) < 0$, to z (2.64) oraz (2.65) $\mathrm{WN}(Q_m|_{-\infty}^{-T-1}) > 0$ lub $\mathrm{WN}(Q_m|_{T+1}^{\infty}) > 0$. Bez straty ogólności załóżmy, że $\mathrm{WN}(Q_m|_{-\infty}^{-T-1}) > 0$. Zdefiniujmy funkcję

$$\hat{q}_m(t) = \begin{cases} Q_m(t) & \text{dla} \quad t \leq -T-1, \\ -(t+T)Q_m(-T-1) & \text{dla} \quad -T-1 < t \leq -T, \\ 0 & \text{dla} \quad t \geq -T. \end{cases} \tag{2.66}$$

Mamy $\mathrm{WN}(\hat{q}_m) > 0$ i stąd $\hat{q}_m \in \Gamma^+$. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} I(\hat{q}_m) &= \int_{-\infty}^{-T-1} \mathcal{L}(\hat{q}_m(t))dt + \int_{-T-1}^{-T} \mathcal{L}(\hat{q}_m(t))dt + \int_{-T}^{\infty} \mathcal{L}(\hat{q}_m(t))dt \\ &= I(Q_m) + \int_{-T-1}^{-T} \mathcal{L}(\hat{q}_m(t))dt - \int_{-T-1}^{\infty} \mathcal{L}(Q_m(t))dt \\ &< c^+ + \varepsilon_0 + \int_{-T-1}^{-T} \mathcal{L}(\hat{q}_m(t))dt - \int_{-T-1}^{T+1} \mathcal{L}(Q_m(t))dt. \end{aligned} \tag{2.67}$$

Dla $t \in [-T-1, -T]$ mamy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\hat{q}_m) &= \frac{1}{2}\left|\frac{d}{dt}\left[(t+T)Q_m(-T-1)\right]\right|^2 \\ &\quad -a(t)W(-(t+T)Q_m(-T-1)) \end{aligned} \tag{2.68}$$

oraz

$$-(t+T)Q_m(-T-1) \in \overline{B}_\delta(0), \tag{2.69}$$

dla m wystarczająco dużych. Wykorzystując (2.69) dostajemy

$$\begin{aligned} \int_{-T-1}^{-T} \mathcal{L}(\hat{q}_m)dt &= \frac{1}{2}|Q_m(-T-1)|^2 - \int_{-T-1}^{-T} a(t)W(-(t+T)Q_m(-T-1))dt \\ &\leq \frac{1}{2}\delta^2 - a_1 \int_{-T-1}^{-T} W(-(t+T)Q_m(-T-1))dt. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Stosując (H3) oraz wzór Mac Laurina dla W otrzymujemy

$$W(x) = W(0) + W'(0)(x) + \frac{1}{2}W''(\xi)(x,x) = O(|x|^2), \tag{2.71}$$

gdzie $x \in \overline{B}_\delta(0)$, a ξ jest punktem pośrednim pomiędzy 0 i x. Z (2.69), (2.70) oraz (2.71) mamy

$$\int_{-T-1}^{-T} \mathcal{L}(\hat{q}_m(t))dt = O(\delta^2). \tag{2.72}$$

Stąd

$$I(\hat{q}_m) < c^+ + \varepsilon_0 - \int_{-T-1}^{T+1} \mathcal{L}(Q_m(t))dt + O(\delta^2) \tag{2.73}$$

dla $\delta \to 0$. Ponieważ $Q_m \to Q \in \Lambda$ jednostajnie dla $t \in [-T-1, T+1]$, z Lematu 2.42 wnioskujemy, że w tym przypadku krzywa Q_m opuści kule $B_\delta(0)$ i $B_\rho(0)$, ale ostatecznie wróci do $B_\delta(0)$, gdyż $Q_m(\pm\infty) = 0$. Z Lematu 2.10,

$$\int_{-T-1}^{T+1} \mathcal{L}(Q_m(t))dt \geq \frac{\rho}{2}\sqrt{2a_0\gamma\left(\frac{\rho}{2}\right)} \equiv \varepsilon_1, \tag{2.74}$$

gdzie $\gamma\left(\frac{\rho}{2}\right) := \inf_{|x|>\rho/2}(-W(x))$. W rezultacie z (2.73) oraz (2.74) dostajemy

$$I(\hat{q}_m) < c^+ + \varepsilon_0 - \varepsilon_1 + O(\delta^2) \tag{2.75}$$

dla $\delta \to 0$. Wybierając $\varepsilon_0 := \varepsilon_1/2$ oraz δ odpowiednio małą, otrzymujemy

$$I(\hat{q}_m) < c^+, \tag{2.76}$$

co przeczy $\hat{q}_m \in \Gamma^+$. Stąd $Q \in \Gamma^+$ i ostatecznie $I(Q) \geq c^+$.

Przypadek 2. $\{\theta_m\}_{m=1}^{\infty}$ nie ma podciągu ograniczonego. Zdefiniujmy $Q_k = v_{m_k} = \tau_{\theta_{m_k}} q_{m_k}$, gdzie $\{\theta_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ jest podciągiem wprowadzonym w Twierdzeniu 2.41, Przypadek 2. Wtedy, z Lematu 2.14, (H3) i (2.59) wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} I(Q_k) &= I(\tau_{\theta_{m_k}} q_{m_k}) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} |\tau_{\theta_{m_k}} \dot{q}_{m_k}(t)|^2 - a(t) W(\tau_{\theta_{m_k}} q_{m_k}(t)) \right) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} |\dot{q}_{m_k}(t)|^2 - \tau_{-\theta_{m_k}} a(t) W(q_{m_k}(t)) \right) dt \\ &= I(q_{m_k}) + \int_{\mathbb{R}} \big(a(t) - \tau_{-\theta_{m_k}} a(t) \big) W(q_{m_k}(t)) dt < c^+ + \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{2.77}$$

dla dużych k. Reszta dowodu przebiega podobnie jak w pierwszym przypadku.

$\square$

Rozdział 3

Schemat aproksymacyjny znajdowania rozwiązań prawie homoklinicznych dla układów Newtonowskich

3.1 Wprowadzenie

W tym rozdziale będziemy badać problem istnienia rozwiązań prawie homoklinicznych dla zaburzonego układu Newtonowskiego

$$\ddot{q}(t) + \nabla_q V(t, q(t)) = f(t), \tag{3.1}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$. Zacznijmy od wprowadzenia pojęcia rozwiązania prawie homoklinicznego jak w [12].

Definicja 3.1. Rozwiązanie $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ układu (3.1) nazywamy *prawie homoklinicznym*, jeżeli

$$q(\pm\infty) = \lim_{t\to\pm\infty} q(t) = 0.$$

Porównując Definicje 2.2 i 3.1 widzimy, że różnica pomiędzy rozwiązaniem homoklinicznym, a prawie homoklinicznym jest taka, że w rozwiązaniu homoklinicznym wymagamy, aby $\dot{q}(\pm\infty) = 0$.

W pracy [12], J. Janczewska badała istnienie rozwiązań prawie homoklinicznych układu (3.1) z następującymi założeniami:

(C1) potencjał $V\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest klasy C^1 oraz T-okresowy ze względu na zmienną t, $T > 0$,

(C2) zaburzenie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jest nietrywialne, ograniczone, ciągłe i całkowalne z kwadratem.

W celu przedstawienia metody aproksymacyjnej zaproponowanej przez J. Janczewską wprowadzimy kilka oznaczeń. Dla uproszczenia przyjmijmy $T = 1$. Niech $E = W^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ oznacza przestrzeń Sobolewa $W^{1,2}$-funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^n$ z normą

$$\|q\|_E = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(|q(t)|^2 + |\dot{q}(t)|^2\right) dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$, niech $E_k = W^{1,2}_{2k}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ oznacza przestrzeń Sobolewa $2k$-okresowych $W^{1,2}$ funkcji z normą

$$\|q\|_{E_k} = \left(\int_{-k}^{k} \left(|q(t)|^2 + |\dot{q}(t)|^2\right) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Niech $C^m_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, gdzie $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, oznacza przestrzeń funkcji klasy C^m z topologią zbieżności niemal jednostajnej funkcji i pochodnych do rzędu m włącznie.

Rozważamy ciąg okresowych zagadnień brzegowych

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) + \nabla_q V(t, q(t)) = f_k(t), \\ q(-k) - q(k) = \dot{q}(-k) - \dot{q}(k) = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

gdzie dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ jest $2k$-okresowym przedłużeniem na prostą rzeczywistą obcięcia funkcji f do przedziału $[-k, k)$.

Twierdzenie 3.2 ([12])**.** *Niech V oraz f spełniają warunki* (C1) *i* (C2)*. Załóżmy ponadto, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ problem brzegowy* (3.2) *posiada rozwiązanie $q_k \in E_k$ oraz ciąg $\{\|q_k\|_{E_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony w $\mathbb{R}$. Wówczas istnieje podciąg $\{q_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ ciągu $\{q_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ zbieżny w topologii $C^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ do funkcji $q \in E$, która jest prawie homoklinicznym rozwiązaniem układu Newtonowskiego* (3.1)*.*

Twierdzenie 3.2 stanowi metodę aproksymacyjną znajdowania rozwiązań prawie homoklinicznych dla (3.1). Pierwotny układ (3.1) jest przybliżany przez układy okresowe (3.2), z coraz większym okresem. Dowód w znacznej mierze opiera się o twierdzenie Arzeli-Ascolego. Pomysł, żeby rozwiązanie homokliniczne otrzymać jako granicę rozwiązań okresowych wziął się z [22], gdzie Paul H. Rabinowitz rozpatrywał układ niezaburzony

$$\ddot{q}(t) + \nabla_q V(t, q(t)) = 0,$$

$t \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^n$, z potencjałem okresowym postaci

$$V(t, q) = -\frac{1}{2} L(t) q \cdot q + W(t, q).$$

Oprócz założenia okresowości L oraz W, Rabinowitz zakładał, że L jest ciągłą funkcją macierzową taką, że $L(t)$ jest dodatnio określona i symetryczna dla każdego $t \in \mathbb{R}$, natomiast W jest klasy C^1, spełnia warunek nadkwadratowego wzrostu Ambrosettiego-Rabinowitza, t.j.: istnieje $\mu > 2$ takie, że

$$0 < \mu W(t, q) \leq q \cdot \nabla_q W(t, q) \quad \text{dla każdego } q \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

oraz $\nabla_q W(t, q) = o(|q|)$ dla $|q| \to 0$ jednostajnie w t. W [8], M. Izydorek i J. Janczewska rozszerzyli jego wynik na klasę zaburzonych układów Newtonowskich z nieokresową i ograniczoną funkcją f i potencjałem V postaci

$$V(t, q) = -K(t, q) + W(t, q),$$

gdzie W jest jak powyżej, a K jest potencjałem klasy C^1, który jest okresowy w t i spełnia tzw. warunek "pinching", tzn.:
istnieją stałe $b_1, b_2 > 0$ takie, że dla każdego $(t, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$b_1 |q|^2 \leq K(t, q) \leq b_2 |q|^2.$$

Naszym celem jest rozszerzyć Twierdzenie 3.2 do większej klasy potencjałów. Pokażemy, że warunek (C1) możemy zastąpić przez słabszy, tj.:

(C3) V jest klasy C^1 oraz $\nabla_q V$ jest ograniczony względem t, tzn.:

$$\forall_{M>0}\exists_{K>0}\forall_{t\in\mathbb{R}}\forall_{q\in\mathbb{R}^n} \quad |q| \leq M \Rightarrow |\nabla_q V(t,q)| \leq K.$$

Będziemy rozważać ciąg okresowych problemów brzegowych postaci

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) + \nabla_q V_k(t, q(t)) = f_k(t) \\ q(-k) - q(k) = \dot{q}(-k) - \dot{q}(k) = 0, \end{cases} \tag{3.3}$$

gdzie dla każdego $k \in \mathbb{N}$, f_k jest jak powyżej oraz $V_k\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest $2k$-okresowym rozszerzeniem $V\colon [-k,k)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$.

Udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.3. *Niech f oraz V spełniają* (C2) *i* (C3). *Załóżmy ponadto, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ problem brzegowy* (3.3) *posiada rozwiązanie okresowe $q_k \in E_k$ oraz ciąg $\{\|q_k\|_{E_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ jest ograniczony w $\mathbb{R}$. Wówczas istnieje podciąg $\{q_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ ciągu $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ zbieżny w topologii $C^2_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ do funkcji $q \in E$, która jest prawie homoklinicznym rozwiązaniem układu Newtonowskiego* (3.1).

3.2 Dowód Twierdzenia 3.3

Lemat 3.4 (Patrz Fakt 2.8 w [8])**.** *Niech $q\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ będzie funkcją ciągłą taką, że $\dot{q} \in L^2_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Wówczas dla każdego $t \in \mathbb{R}$,*

$$|q(t)| \leq \sqrt{2}\left(\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \left(|q(s)|^2 + |\dot{q}(s)|^2\right) ds\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.4}$$

Dowód. Ustalmy $t \in \mathbb{R}$. Dla każdego $\tau \in \mathbb{R}$,

$$|q(t)| \leq |q(\tau)| + \left|\int_\tau^t \dot{q}(s)ds\right|. \tag{3.5}$$

Całkując (3.5) na przedziale $[t-\frac{1}{2}, t+\frac{1}{2}]$ oraz stosując nierówność Höldera otrzymujemy

$$\begin{aligned} |q(t)| &\leq \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \left(|q(\tau)| + \left|\int_\tau^t \dot{q}(s)ds\right|\right) d\tau \\ &\leq \left(\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \left(|q(\tau)| + \left|\int_\tau^t \dot{q}(s)ds\right|\right)^2 d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(2\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} \left(|q(\tau)|^2 + \left|\int_\tau^t \dot{q}(s)ds\right|^2\right) d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{2}\left(\int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} |q(\tau)|^2 d\tau + \int_{t-\frac{1}{2}}^{t+\frac{1}{2}} |\dot{q}(s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

Niech $L^\infty_{2k}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ będzie przestrzenią $2k$-okresowych, istotnie ograniczonych, mierzalnych funkcji z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^n$ z normą

$$\|q\|_{L^\infty_{2k}} = \operatorname{ess\,sup}\{|q(t)|: \ t \in [-k,k]\}.$$

Z oszacowania (3.4) otrzymujemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $q \in E_k$ zachodzi nierówność:

$$\|q\|_{L^\infty_{2k}} \leq \sqrt{2}\|q\|_{E_k} \tag{3.6}$$

patrz ([8, Proposition 1.1]).

Podzielimy dowód Twierdzenia 3.3 na dwa lematy.

Lemat 3.5. *Niech f oraz V spełniają* (C2) *i* (C3). *Załóżmy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ problem brzegowy* (3.3) *ma rozwiązanie $q_k \in E_k$. Jeżeli $\{\|q_k\|_{E_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem ograniczonym w $\mathbb{R}$, to istnieją podciąg $\{q_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ oraz funkcja $q \in E$ takie, że*

$$q_{k_j} \to q \quad dla \quad j \to \infty$$

w $C^1_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

Dowód. W pierwszej kolejności pokażemy, że ciągi $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{\dot{q}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ oraz $\{\ddot{q}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ są ciągami ograniczonymi w $L^\infty_{2k}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$. Z założenia, istnieje $M > 0$ takie, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$\|q_k\|_{E_k} \leq M. \tag{3.7}$$

Z (3.6) i (3.7) otrzymujemy

$$\|q_k\|_{L^\infty_{2k}} \leq \sqrt{2}M \equiv M_1. \tag{3.8}$$

Natomiast z (C2) i (C3), możemy wywnioskować, że istnieje $M_2 > 0$ takie, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $t \in [-k,k)$,

$$|\ddot{q}_k(t)| \leq |\nabla_q V_k(t,q_k(t))| + |f_k(t)| = |\nabla_q V(t,q_k(t))| + |f(t)| \leq M_2,$$

a w konsekwencji dla każdego $k \in \mathbb{N}$,

$$\|\ddot{q}_k\|_{L^\infty_{2k}} \leq M_2. \tag{3.9}$$

Niech q^l_k $(l = 1,2,\ldots,n)$ oznacza l-tą współrzędną funkcji q_k. Stosując twierdzenie o wartości średniej, dla każdego $k \in \mathbb{N}$, $l = 1,2,\ldots,n$ i $t \in \mathbb{R}$ istnieje $t^l_k \in [t-1,t]$ takie, że

$$\dot{q}^l_k(t^l_k) = \int_{t-1}^{t} \dot{q}^l_k(s)ds = q^l_k(t) - q^l_k(t-1).$$

Ponadto, mamy

$$\dot{q}^l_k(t) = \int_{t^l_k}^{t} \ddot{q}^l_k(s)ds + \dot{q}^l_k(t^l_k).$$

Stosując (3.8) oraz (3.9), otrzymujemy

$$|\dot{q}^l_k(t)| \leq \int_{t-1}^{t} |\ddot{q}^l_k(s)|ds + |q^l_k(t) - q^l_k(t-1)| \leq M_2 + 2M_1,$$

i ostatecznie,

$$\|\dot{q}_k\|_{L^\infty_{2k}} \leq \sqrt{n}(M_2 + 2M_1) \equiv M_3. \tag{3.10}$$

Do zakończenia dowodu potrzebujemy pokazać, że $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ oraz $\{\dot{q}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ są jednakowo ciągłe.

Ustalmy $k \in N$ oraz $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Oszacowania (3.10) i (3.9) prowadzą do nierówności

$$|q_k(t_2) - q_k(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{q}_k(s)ds \right| \leq M_3|t_2 - t_1|$$

oraz

$$|\dot{q}_k(t_2) - \dot{q}_k(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \ddot{q}_k(s)ds \right| \leq M_2|t_2 - t_1|.$$

Udowodniliśmy więc, że $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ i $\{\dot{q}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ spełniają warunek Lipschitza ze stałą niezależną od k. Stąd są jednakowo ciągłe. Stosując twierdzenie Arzeli-Ascolego otrzymujemy tezę.

□

Lemat 3.6. *Niech f oraz V speniają warunki* (C2) *i* (C3)*. Wówczas funkcja $q \in E$ z Lematu 3.5 jest rozwiązaniem prawie homoklinicznym układu Newtonowskiego* (3.1) *oraz $q_{k_j} \to q$ w topologii $C^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, gdy $j \to \infty$.*

Dowód. Na początku pokażemy, że q spełnia układ Newtonowski (3.1). Mamy

$$\ddot{q}_{k_j}(t) + \nabla_q V_{k_j}(t, q_{k_j}(t)) = f_{k_j}(t),$$

dla każdego $j \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}$. Z niemal jednostajnej zbieżności $q_{k_j} \to q$ oraz $f_{k_j} \to f$ na $\mathbb{R}$, dostajemy niemal jednostajną zbieżność $\ddot{q}_{k_j} \to w$ na $\mathbb{R}$, gdzie $w(t) = f(t) - \nabla_q V(t, q(t))$. Ustalmy $a, b \in \mathbb{R}$ i załóżmy, że $a < b$. Istnieje $j_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $j > j_0$, $[a, b] \subset [-k_j, k_j)$. Stąd dla każdego $j > j_0$ oraz $t \in [a, b]$ otrzymujemy

$$\ddot{q}_{k_j}(t) + \nabla_q V(t, q_{k_j}(t)) = f(t).$$

Z powyższego dostajemy, że $\ddot{q}_{k_j}$ jest ciągła w $[a, b]$ dla $j > j_0$. Stąd wnioskujemy, że $\ddot{q}_{k_j}(t)$ jest pochodną $\dot{q}_{k_j}$ w (a, b) dla każdego $j > j_0$. Ponieważ $\dot{q}_{k_j} \to \dot{q}$ oraz $\ddot{q}_{k_j} \to w$ jednostajnie na $[a, b]$, dostajemy, że $\ddot{q} = w$ w (a, b). W konsekwencji, $\ddot{q} = w$ na $\mathbb{R}$ oraz q jest rozwiązaniem problemu (3.1). Ponadto, $\{q_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ zbiega do q w $C^2_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Pozostaje udowodnić, że q jest prawie homokliniczne. Mamy

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} (|q(t)|^2 + |\dot{q}(t)|^2)dt &= \lim_{m\to\infty} \int_{-m}^{m} (|q(t)|^2 + |\dot{q}(t)|^2)dt \\
&= \lim_{m\to\infty} \lim_{j\to\infty} \int_{-m}^{m} (|q_{k_j}(t)|^2 + |\dot{q}_{k_j}(t)|^2)dt.
\end{aligned}$$

Z (3.7), dla każdego $m \in \mathbb{N}$ istnieje $j(m) \in \mathbb{N}$ takie, że dla każdego $j > j(m)$,

$$\int_{-m}^{m} (|q_{k_j}(t)|^2 + |\dot{q}_{k_j}(t)|^2)dt \leq M^2.$$

Stąd

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|q(t)|^2 + |\dot{q}(t)|^2)dt \leq M^2,$$

a w konsekwencji,

$$\int_{|t|\geq r} (|q(t)|^2 + |\dot{q}(t)|^2)dt \to 0, \tag{3.11}$$

gdy $r \to \infty$. Z (3.11) i (3.4), otrzymujemy, że $q(t) \to 0$ dla $t \to \pm\infty$, co kończy dowód.

□

3.3 Zastosowania

Rozważamy układ Newtonowski w $\mathbb{R}^n$,

$$\ddot{q}(t) - \nabla_q V(t, q(t)) = f(t), \tag{3.12}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$, a $V \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ oraz $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ spełniają założenia (C2) i (C3). Ponadto,

(C4) $V(t,q) \geq b(t)|q|^2$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$ oraz $q \in \mathbb{R}^n$, gdzie $b \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ jest funkcją ciągłą, która osiąga minimum na $\mathbb{R}$,

(C5) $V(t, 0) = 0$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie 3.7. *Niech V i f spełniają* (C2)-(C5). *Wówczas układ* (3.12) *posiada rozwiązanie prawie homokliniczne.*

Twierdzenie 3.7 udowodnimy w oparciu o Twierdzenie 3.3. Ciąg aproksymujący Newtonowskich problemów brzegowych dla układu (3.12) przybiera formę

$$\begin{cases} \ddot{q}(t) - \nabla_q V_k(t, q(t)) = f_k(t), \\ q(-k) - q(k) = \dot{q}(-k) - \dot{q}(k) = 0, \end{cases} \tag{3.13}$$

gdzie dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$, $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ oraz $V_k \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ są $2k$-okresowymi przedłużeniami na prostą rzeczywistą funkcji $f \colon [-k, k) \to \mathbb{R}^n$ i $V \colon [-k,k) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, odpowiednio.

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$, niech funkcjonał $I_k \colon E_k \to \mathbb{R}$ będzie dany wzorem

$$I_k(q) = \int_{-k}^{k} \left(\frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 + V_k(t, q(t)) + f_k(t) \cdot q(t) \right) dt.$$

Wiadomo, że dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ punkty krytyczne funkcjonału działania I_k są $2k$-okresowymi rozwiązaniami układu (3.13). Żeby udowodnić, że I_k osiąga minimum na E_k zastosujemy znane twierdzenie z rachunku wariacyjnego.

Twierdzenie 3.8. (patrz Twierdzenie 1.1 w [18]) *Jeżeli $\varphi \colon X \to \mathbb{R}$ jest słabo półciągły z dołu na refleksywnej przestrzeni Banacha X i posiada ciąg minimalizujący, to φ posiada minimum na X.*

Dowód (Twierdzenia 3.7)**.** Niech $B = \min_{t \in \mathbb{R}} b(t)$, $A = \min\{\frac{1}{2}, B\}$ oraz $L = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)}$. Stosując (C4) i nierówność Schwarza otrzymujemy,

$$I_k(q) \geq \int_{-k}^{k} \left(\frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 + b(t)|q(t)|^2 + f_k(t) \cdot q(t) \right) dt \geq A\|q\|_{E_k}^2 - L\|q\|_{E_k}.$$

Stąd I_k jest ograniczony z dołu i koercytywny.

Niech $L^2_{2k}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ będzie przestrzenią $2k$-okresowych, całkowalnych z kwadratem funkcji z $\mathbb{R}$ w $\mathbb{R}^n$ z normą

$$\|q\|_{L^2_{2k}} = \left(\int_{-k}^{k} |q(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Załóżmy, że $u_m \rightharpoonup q$ w E_k i w konsekwencji, $\dot{u}_m \rightharpoonup \dot{q}$ w $L^2_{2k}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Ponieważ kwadrat normy w przestrzeni Hilberta jest słabo półciągły z dołu, wnioskujemy, że funkcjonał $\varphi_k \colon E_k \to \mathbb{R}$ określony wzorem

$$\varphi_k(q) = \int_{-k}^{k} \frac{1}{2}|\dot{q}(t)|^2 dt = \frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2_{L^2_{2k}}$$

jest także słabo półciągły z dołu. Ponadto, $q_m \to q$ niemal jednostajnie na $\mathbb{R}$, więc

$$\int_{-k}^{k} (V_k(t, q_m(t)) + f_k(t) \cdot q_m(t)))\, dt \to \int_{-k}^{k} (V_k(t, q(t)) + f_k(t) \cdot q(t))\, dt,$$

gdy $m \to \infty$, co oznacza, że funkcjonał $\psi_k \colon E_k \to \mathbb{R}$ określony wzorem

$$\psi_k(q) = \int_{-k}^{k} (V_k(t, q(t)) + f_k(t) \cdot q(t))\, dt$$

jest słabo ciągły. Z powyższego, I_k jest słabo półciągły z dołu, więc z Twierdzenia 3.8, I_k osiąga minimum na E_k, tzn. dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje $q_k \in E_k$ taki, że

$$I_k(q_k) = \min_{q \in E_k} I_k(q) \qquad \text{i} \qquad I_k'(q_k) = 0.$$

Z warunku (C5), dla każdego $k \in \mathbb{N}$, mamy $I_k(0) = 0$. Wybierając $\delta = L/A$, otrzymujemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$, jeżeli $\|q\|_{E_k} > \delta$, to $I_k(q) > 0$. Stąd $\|q_k\|_{E_k} \leq \delta$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Z Twierdzenia 3.3 otrzymujemy tezę.

□

Przykład 3.9. Niech $V\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą dane przez $V(t, q) = (2-e^{-t^2})q^2$ i $f(t) = e^{-t^2}$. Wówczas układ Newtonowski wygląda następująco

$$\ddot{q}(t) - 2(2 - e^{-t^2})q(t) = e^{-t^2}.$$

Zauważmy, że $V(t, 0) = 0$, $V(t, q) \geq q^2$ oraz $|\nabla_q V(t, q)| = |2(2 - e^{-t^2})q| \leq 4|q|$, a zaburzenie f jest całkowalne z kwadratem na $\mathbb{R}$, więc spełnione są założenia (C2)-(C5) i powyższy układ posiada rozwiązanie prawie homokliniczne.

Bibliografia

[1] J. Andres, A.M. Bersani, R. F. Grande, *Hierarchy of almost-periodic function spaces*, Rendiconti di Matematica, Serie VII, Volume 26, Roma (2006), 121-188.

[2] A.S. Besicovitch, *Almost Periodic Functions*, Dover, 1954.

[3] P. Caldiroli, L. Jeanjean, *Homoclinics and heteroclinics for a class of conservative singular Hamiltonian systems*, J. Differential Equations 136 (1997), 76-114.

[4] P. Caldiroli, M. Nolasco, *Multiple homoclinic solutions for a class of autonomous singular systems in* $\mathbb{R}^2$, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 15 (1998), 113-125.

[5] V. Coti Zelati, P.H. Rabinowitz, *Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems possessing superquadratic potentials*, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 693-727.

[6] R. Doss, *On generalized almost periodic functions*, Annals of Math. 59 (1954), no. 3, 477-489.

[7] W.B. Gordon, *Conservative dynamical systems involving strong forces*, Trans. Amer. Math. Soc. 204 (1975), 113-135.

[8] M. Izydorek, J. Janczewska, *Homoclinic solutions for a class of the second order Hamiltonian systems*, J. Differential Equations 219 (2005), no. 2, 375-389.

[9] M. Izydorek, J. Janczewska, *Homoclinic solutions for nonautonomous second order Hamiltonian systems with a coercive potential*, J. Math. Anal. Appl. 335 (2007), no. 2, 1119-1127.

[10] M. Izydorek, J. Janczewska, *Connecting orbits for a periodically forced singular planar Newtonian system*, J. Fixed Point Theory Appl. 12 (2012), 59-67.

[11] M. Izydorek, J. Janczewska, *The shadowing chain lemma for singular Hamiltonian systems involving strong forces*, Cent. Eur. J. Math. 10 (2012), 1928-1939.

[12] J. Janczewska, *An approximative scheme of finding almost homoclinic solutions for a class of Newtonian systems*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 33 (2009), no. 1, 169-177.

[13] J. Janczewska, *The existence and multiplicity of heteroclinic and homoclinic orbits for a class of singular Hamiltonian systems in* $\mathbb{R}^2$, Boll. Unione Mat. Ital. (9) 3 (2010), 471-491.

[14] J. Janczewska, Minimization of integral functionals in Sobolev spaces, *Topological methods in nonlinear analysis*, 61-91, Lect. Notes Nonlinear Anal., 12, Juliusz Schauder Cent. Nonlinear Stud., Toruń 2011.

[15] J. Janczewska, J. Maksymiuk, *Homoclinic orbits for a class of singular second order Hamiltonian systems in* $\mathbb{R}^3$, Cent. Eur. J. Math. 10 (2012), 1920-1927.

[16] R. Krawczyk, *A note on an approximative scheme of finding almost homoclinic solutions for Newtonian systems*, Banach Center Publications 101 (2014), 107-113.

[17] R. Krawczyk, *Homoclinic orbits for an almost periodically forced singular Newtonian system in* $\mathbb{R}^3$, Annales Polonici Mathematici 114 (2015), no. 1 29-43.

[18] J. Mawhin, M. Willem, *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems*, Springer-Verlag, New York, 1989.

[19] B.M. Lewitan, *Funkcje prawie-okresowe*, Moskwa, 1953.

[20] P.H. Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics AMS, Providence, RI., 1986

[21] P.H. Rabinowitz, *Periodic and heteroclinic orbits for a periodic Hamiltonian system*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 6 (1989), no. 5, 331-346.

[22] P.H. Rabinowitz, *Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems*, Proc. Roy. Soc. Edinrburgh Sect. A 114 (1990), 33-38.

[23] P.H. Rabinowitz, *Homoclinics for an almost periodically forced singular Hamiltonian system*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 6 (1995), 49-66.

[24] P.H. Rabinowitz, Homoclinic orbits for a singular Hamiltonian system, *Geometric Analysis and the Calculus of Variations* (ed. J. Jost), Int. Press, Cambridge, MA (1996).

[25] R. Remmert, *Classical Topics in Complex Function Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[26] E. Séré, *Existence of infinitely many homoclinic orbits in Hamiltonian systems*, Math. Zeit. 209 (1991), 27-42.

[27] S. Stoiński, Funkcje Prawie Okresowe, Wydawnictwo UAM, Poznań, 2008.

[28] E. Serra, M. Tarallo, S. Terracini, *On the existence of homoclinic solutions for almost periodic second order systems*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 13 (1996), 783-812.

[29] K. Tanaka, *Homoclinic orbits for a singular second order Hamiltonian system*, Ann. Ins. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 7 (1990), 427-438.