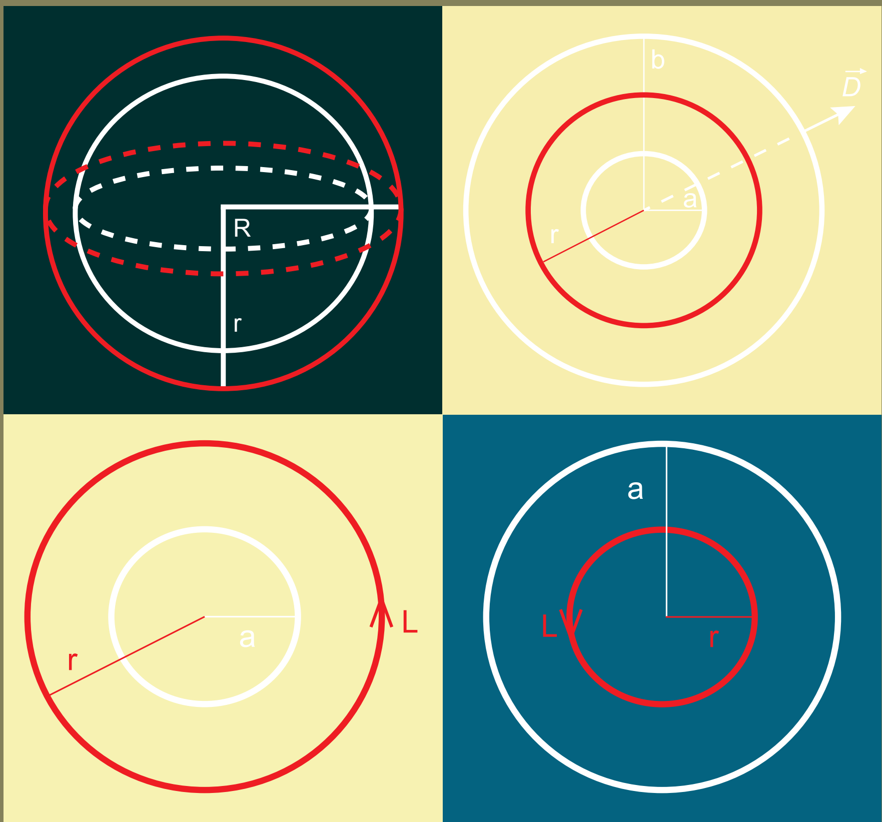
Antonina Orlicz-Swiłło

Wybrane elementy analizy wektorowej, teorii pola, teorii potencjału i ich zastosowania w elektrodynamice



Wydawnictwo Politechniki Gdańskiej

PRZEWODNICZĄCY KOMITETU REDAKCYJNEGO
WYDAWNICTWA POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ
Janusz T. Cieśliński

RECENZENT
Kazimierz Jakubiuk

REDAKCJA JĘZYKOWA
Agnieszka Frankiewicz

PROJEKT OKŁADKI
Wioleta Lipska-Kamińska

SKŁAD KOMPUTEROWY
Piotr Jędrzejewski

Wydano za zgodą
Rektora Politechniki Gdańskiej

Publikacja dostępna tylko w wersji elektronicznej –
Pomorska Biblioteka Cyfrowa http://pbc.gda.pl

Oferta wydawnicza Politechniki Gdańskiej jest dostępna pod adresem
http://www.pg.edu.pl/wydawnictwo/katalog
zamówienia prosimy kierować na adres wydaw@pg.gda.pl

ISBN 978-83-7348-692-8

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI GDAŃSKIEJ

Wydanie I. Ark. wyd. 3,1, ark. druku 10,0, 1151/961

Spis treści

Rozdział 1

Analiza wektorowa w różnych układach współrzędnych

1.1. Pole skalarne i wektorowe. Pochodna funkcji wektorowej

Definicja 1.1.1

Polem skalarnym nazywamy odwzorowanie $f: D \to V$ przyporządkowujące każdemu punktowi M zbioru $D \subset R^n$ dokładnie jeden element $u = f(M) \in V \subset R^n$.

Funkcję $f(M)$ nazywamy też funkcją skalarną. Polami skalarnymi są przykładowo: pole potencjału elektrostatycznego, pole potencjału grawitacyjnego.

Definicja 1.1.2

Polem wektorowym nazywamy odwzorowanie $\vec{w}: D \to X$ przyporządkowujące każdemu elementowi $t \in D \subset R^n$ dokładnie jeden element $\vec{w}\,(t)$ przestrzeni wektorowej X. Polami wektorowymi są przykładowo: natężenie pola elektrostatycznego, natężenie pola magnetycznego, natężenie pola grawitacyjnego.

Jeżeli $\vec{w}\,(t) \in R^3$, to funkcję wektorową przedstawiamy w postaci:

$$\vec{w} = \left[w_x(t); w_y(t); w_z(t)\right]$$

Własności operacji na funkcjach wektorowych zestawiono w tablicy 1.1.

Definicja 1.1.3

Pochodną $\frac{d\vec{w}(t)}{dt}$ funkcji wektorowej względem zmiennej t nazywamy granicę:

$$\lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta \vec{w}(t)}{\Delta t}\right] = \frac{d\vec{w}(t)}{dt}$$

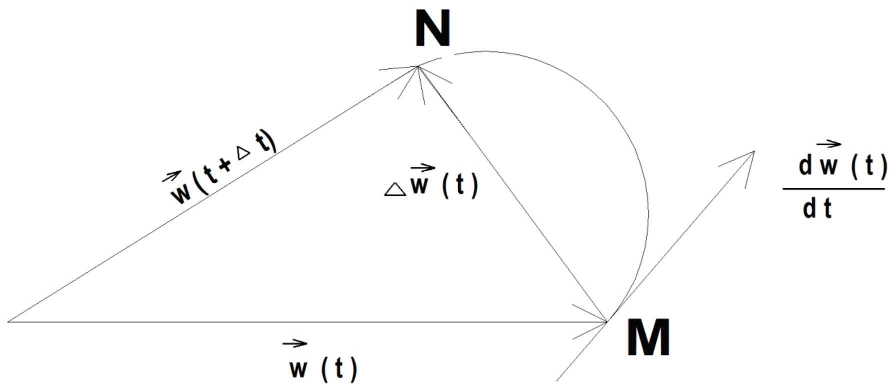
Jeżeli pochodna $\frac{d\vec{w}(t)}{dt}$ istnieje w każdym punkcie $t \in D$ i jest funkcją ciągłą, to $\vec{w}\,(t)$ jest funkcją klasy C^1 na D, co zapisujemy w skrócie:

$$\vec{w}\,(t) \in C^1(D)$$

Interpretację geometryczną pochodnej $\frac{d\vec{w}(t)}{dt}$ ilustruje rys. 1.1.

Tablica 1.1. Własności iloczynów

	Iloczyn skalarny	Iloczyn wektorowy	Iloczyn mieszany	Podwójny iloczyn wektorowy
DEFINICJA	Skalar $\vec{a} \circ \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert cos(\vec{a};\vec{b}) =$ $= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$	Wektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \perp$ do płaszczyzny równoległoboku zbudowanego z wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ $\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ $\lvert\vec{c}\rvert = \lvert\vec{a}\rvert\,\lvert\vec{b}\rvert \sin(\vec{a};\vec{b})$	Skalar $(\vec{a};\vec{b};\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$	Wektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$
WŁASNOŚCI	$\vec{a} \circ \vec{b} = \vec{b} \circ \vec{a}$ $\vec{a} \circ (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{c}$ $\lambda(\vec{a} \circ \vec{b}) = (\lambda\vec{a} \circ \vec{b}) = \vec{a} \circ (\lambda\vec{b})$ $\lambda \epsilon R$ $\vec{a} \circ (\vec{b} \circ \vec{c}) \neq (\vec{a} \circ \vec{b}) \circ \vec{c}$	$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$	$(\vec{a};\vec{b};\vec{c}) = \vec{a} \circ (\vec{b} \times \vec{c}) =$ $= (\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c} = (\vec{b};\vec{c};\vec{a}) =$ $= (\vec{c};\vec{a};\vec{b})$	$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \circ \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \circ \vec{b})\vec{c}$ Ale: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$



Rys. 1.1. Interpretacja geometryczna pochodnej funkcji wektorowej

Wektor $\frac{\Delta\vec{w}(t)}{\Delta t}$ określa wektor prędkości chwilowej $\vec{v}\,(t)$ w chwili t, stosunek $\frac{\Delta\vec{w}(t)}{\Delta t}$ oznacza zaś średnią prędkość przemieszczenia punktu w czasie Δt. Pochodna funkcji wektorowej przyjmie postać:

$$\frac{d\vec{w}(t)}{dt} = \left[\frac{dw_x}{dt}; \frac{dw_y}{dt}; \frac{dw_z}{dt}\right]$$

Podstawowe własności pochodnych funkcji wektorowych są analogiczne do własności pochodnych funkcji skalarnych:

1. $\frac{d[\vec{w}(t)\pm\vec{v}(t)]}{dt} = \frac{d\vec{w}(t)}{dt} \pm \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$
2. $\frac{d[\alpha\vec{w}(t)]}{dt} = \alpha\frac{d\vec{w}(t)}{dt}$
3. $\frac{d[f(t)\vec{w}(t)]}{dt} = f(t)\frac{d\vec{w}(t)}{dt} + \vec{W}(t)\frac{df(t)}{dt}$
4. $\frac{d[\vec{w}(t)\circ\vec{v}(t)]}{dt} = \vec{v}(t)\circ\frac{d\vec{w}(t)}{dt} + \vec{w}(t)\circ\frac{d\vec{v}(t)}{dt}$
5. $\frac{d[\vec{w}(t)\times\vec{v}(t)]}{dt} = \vec{w}(t)\times\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{d\vec{w}(t)}{dt}\times\vec{v}(t)$
6. $\frac{d[\vec{w}(t)\circ(\vec{v}(t)\times\vec{u}(t))]}{dt} = \frac{d\vec{w}(t)}{dt}\circ[\vec{v}(t)\times\vec{u}(t)] + \vec{w}(t)\circ\left[\frac{d\vec{v}(t)}{dt}\times\vec{u}(t)\right] +$
   $+\vec{w}(t)\circ\left[\vec{v}(t)\times\frac{d\vec{u}(t)}{dt}\right]$

1.2. Układ współrzędnych kartezjańskich

W układzie kartezjańskim (prostokątnym) wektor $\vec{w}$ przedstawiamy za pomocą rzutów prostokątnych w_x, w_y, w_z tego wektora na osie układu, tzn.:

$$\vec{w} = w_x\vec{\imath} + w_y\vec{\jmath} + w_z\vec{k}$$

gdzie: $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ – wersory osi Ox, Oy, Oz.

Długość wektora:

$$|\vec{w}| = \sqrt{{w_x}^2 + {w_y}^2 + {w_z}^2}$$

Kosinusy kierunkowe wektora:

$$\cos \sphericalangle(\vec{w}, Ox) = \frac{w_x}{|\vec{w}|} \qquad \cos \sphericalangle(\vec{w}, Oy) = \frac{w_y}{|\vec{w}|} \qquad \cos \sphericalangle(\vec{w}, Oz) = \frac{w_z}{|\vec{w}|}$$

Definicja 1.2.1

Wektorem wodzącym punktu $P = (x, y, z)$ nazywamy wektor:

$$\vec{R} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

Definicja 1.2.2

W układzie kartezjańskim element liniowy zapisujemy jako:

$$d\vec{L} = \vec{\imath}dx + \vec{\jmath}dy + \vec{k}dz$$

Element powierzchniowy:

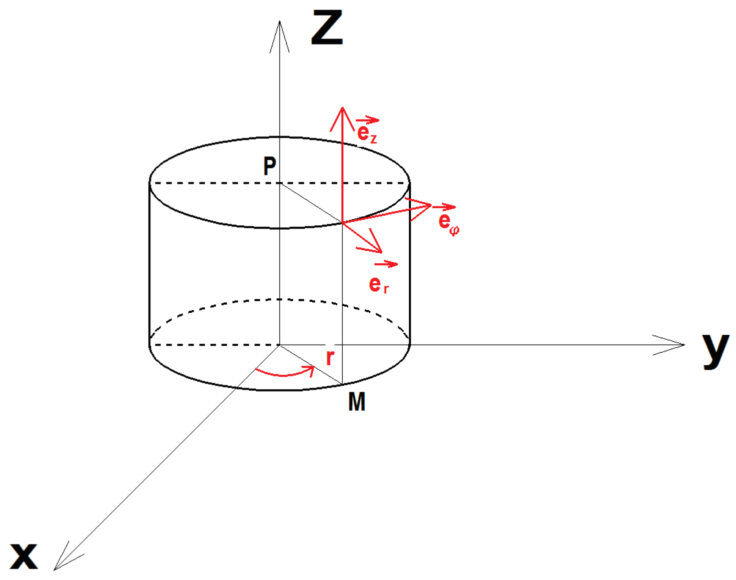
$$d\vec{S} = \vec{\imath}dydz + \vec{\jmath}dxdz + \vec{k}dxdy$$

Element objętościowy:

$$dV = dxdydz$$

1.3. Układ współrzędnych walcowych

Niech M będzie rzutem punktu $P(x, y, z)$ na płaszczyznę Oxy, natomiast (r, φ) są współrzędnymi biegunowymi punktu M.



Rys. 1.2. Układ współrzędnych walcowych

Wówczas:

Definicja 1.3.1

Zmienne $r = |OM|$, φ, z nazywamy współrzędnymi walcowymi punktu P, czyli $P = (r, \varphi, z)$ przy czym:
$r = const$ – wyznacza walce obrotowe (oś Oz jest osią obrotu);
$\varphi = const$ – półpłaszczyzny przechodzące przez oś Oz, gdzie $0 \leq \varphi \leq 2\pi$;
$z = const$ – płaszczyzny prostopadłe do osi Oz.

Związek między współrzędnymi kartezjańskimi a walcowymi określają wzory:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Wektor wodzący punktu P ma więc współrzędne:

$$\vec{R} = r\cos\varphi\,\vec{\imath} + r\sin\varphi\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

skąd otrzymujemy:

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial r} = [\cos\varphi, \sin\varphi, 0]$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial\varphi} = [-r\sin\varphi, r\cos\varphi, 0]$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial z} = [0, 0, 1]$$

Macierz A przekształcenia wektorów bazy, przy przejściu od współrzędnych kartezjańskich do walcowych:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Czyli dowolny wektor $\vec{W} = W_x\vec{\imath} + W_y\vec{\jmath} + W_z\vec{k}$ we współrzędnych walcowych przyjmie postać:

$$\vec{W} = W_r\vec{e}_r + W_\varphi\vec{e}_\varphi + W_z\vec{e}_z$$

gdzie: $\vec{e}_r$,$\vec{e}_\varphi$,$\vec{e}_z$ – wersory osi; W_r, W_φ, W_z – miary rzutów wektora $\vec{W}$ na osie.

Zależność między współrzędnymi walcowymi a kartezjańskimi wyznaczamy z równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} W_r \\ W_\varphi \\ W_z \end{bmatrix} = \mathbb{A} \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}$$

i odwrotnie, mając dany wektor $\vec{W}$ we współrzędnych walcowych, można podać jego współrzędne kartezjańskie, wyliczając je z równania:

$$\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = \mathbb{A}^T \begin{bmatrix} W_r \\ W_\varphi \\ W_z \end{bmatrix}$$

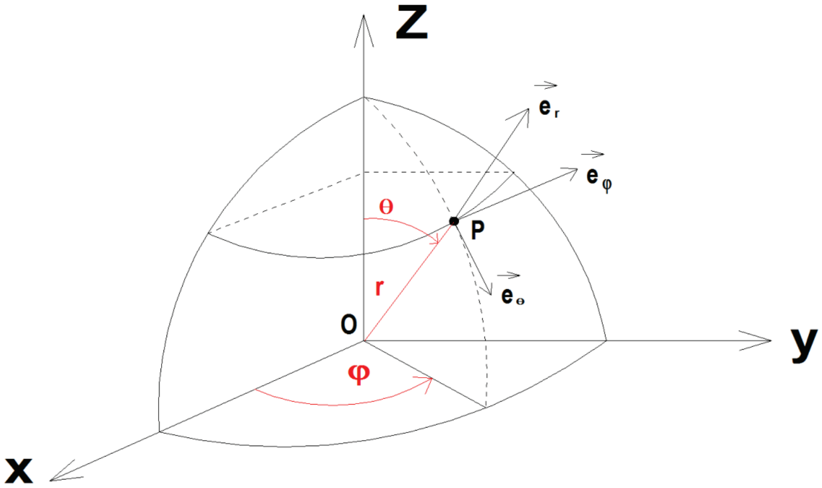
gdyż $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^T$.

We współrzędnych walcowych zapisujemy:
1. element liniowy jako: $d\vec{L} = dr\vec{e}_r + rdr\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z$
2. element powierzchniowy jako: $d\vec{S} = rd\varphi dz\vec{e}_r + drdz\vec{e}_\varphi + rdrd\varphi\vec{e}_z$
3. element objętościowy jako: $dV = rdrd\varphi dz$

1.4. Układ współrzędnych sferycznych

Współrzędnymi sferycznymi punktu $P(x, y, z)$ nazywamy zmienne r (odległość OP), θ (kąt, jaki tworzy wektor $\vec{R}$ z osią Oz; $(0 \le \theta \le \pi)$), φ (kąt, jaki tworzy rzut r na płaszczyznę OXY z osią OX_+).

Powierzchnie:
$r = const$ – kule o środku w początku układu;
$\theta = const$ – stożki obrotowe (osią obrotu jest oś Oz);
$\varphi = const$ – płaszczyzny przechodzące przez Oz.



Rys. 1.3. Układ współrzędnych sferycznych

Zależność między współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi wyrażają wzory:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\}$$

przy czym:

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

natomiast przekształcenie odwrotne opisują związki:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = arc\ tg\dfrac{y}{x} \\ \theta = arc\cos\dfrac{z}{r} \end{cases}$$

Macierz przekształcenia wektorów bazy kartezjańskiej przy przejściu do współrzędnych sferycznych otrzymamy z następujących zależności:

$$\vec{R} = r\cos\varphi\sin\theta\,\vec{\imath} + r\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + r\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial\theta} = [r\cos\varphi\cos\theta\,, r\sin\varphi\cos\theta\,, -r\sin\theta]$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial\varphi} = [-r\cos\varphi\cos\theta\,, r\cos\varphi\sin\theta\,, 0]$$

$$\frac{\partial\vec{R}}{\partial r} = [\cos\varphi\sin\theta\,, \sin\varphi\sin\theta\,, \cos\theta]$$

stąd, uwzględniając dodatkowo położenie kąta φ, mamy:

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$$

Czyli dowolny wektor $\vec{W} = W_x\vec{\imath} + W_y\vec{\jmath} + W_z\vec{k}$ we współrzędnych sferycznych przyjmie postać:

$$\vec{W} = W_r\vec{e}_r + W_\theta\vec{e}_\theta + W_\varphi\vec{e}_\varphi$$

gdzie: $\vec{e}_r$,$\vec{e}_\theta$,$\vec{e}_\varphi$ – wersory osi; W_r, W_θ, W_φ – miary rzutów wektora $\vec{W}$ na osie.

Wektor $\vec{W}$ wyrażony we współrzędnych sferycznych ma współrzędne kartezjańskie obliczone z równania:

$$\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = \mathbb{A}^T \begin{bmatrix} W_r \\ W_\theta \\ W_\varphi \end{bmatrix}$$

przekształcenie odwrotne określa zaś równanie:

$$\begin{bmatrix} W_r \\ W_\theta \\ W_\varphi \end{bmatrix} = \mathbb{A} \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix}$$

We współrzędnych sferycznych zapisujemy:

1. element liniowy jako: $d\vec{L} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,d\varphi\vec{e}_\varphi$
2. element powierzchniowy jako: $d\vec{S} = r^2\sin\theta\,d\varphi d\theta\vec{e}_r + r\sin\theta\,drd\varphi\vec{e}_\theta + rdrd\theta\vec{e}_\varphi$
3. element objętościowy jako: $dV = r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$

1.5. Nabla. Operator Laplace'a

Definicja 1.5.1

Operator wektorowo-różniczkowy określony w R^3 jako:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

nazywamy **operatorem nabla (Hamiltona)**.

W zastosowaniu do funkcji skalarnej:

$$\nabla \mathrm{f} = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Dla funkcji wektorowej:

$$\nabla \vec{\mathrm{w}} = \frac{\partial \vec{\mathrm{w}}}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \vec{\mathrm{w}}}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \vec{\mathrm{w}}}{\partial z}\vec{k}$$

Definicja 1.5.2

Operatorem Laplace'a (laplasjanem) nazywamy operator skalarny $\nabla \circ \nabla = \nabla^2$ oznaczony symbolem:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dla funkcji skalarnej ma on postać:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Dla funkcji wektorowej:

$$\Delta \vec{\mathrm{w}} = \frac{\partial^2 \vec{\mathrm{w}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathrm{w}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{\mathrm{w}}}{\partial z^2}$$

Przy operacjach wykonywanych za pomocą nabli należy korzystać z podstawowych własności różniczkowania funkcji skalarnych i wektorowych oraz z własności iloczynów funkcji wektorowych zestawionych w tablicy 1.1, przy czym należy pamiętać, że:

1. działa ona tylko na wielkości znajdujące się bezpośrednio po niej;
2. odnosi się ona tylko do jednej wielkości zmiennej (skalarnej lub wektorowej).

W związku z tym każde rozpatrywane wyrażenie należy doprowadzić do takiej postaci, aby za operatorem ∇ znajdowała się tylko jedna wielkość zmienna.

Rozpatrzmy jeden z bardziej kłopotliwych przypadków:
$\nabla(\mathrm{U}\,\mathrm{V})$, gdzie U, V są dowolnymi funkcjami skalarnymi lub wektorowymi. Dla każdego rodzaju mnożenia $\nabla\,(U\,V) = \nabla\big(\underline{U}\,V\big) + \nabla\big(U\,\underline{V}\big)$, przy czym różniczkowanie dotyczy funkcji podkreślonej.

W szczególnych przypadkach należy zmienić porządek czynników, tak aby połączyć ∇ z funkcją, którą należy różniczkować, pamiętając jednocześnie o własnościach iloczynów w polu wektorowym (tabl. 1.1).

1.6. Pochodna w kierunku wektora. Gradient

Definicja 1.6.1

Dana jest funkcja skalarna $f$klasy C^1 w obszarze $D \subset R^3$. Punkty, w których funkcja f ma stałą wartość, tworzą **powierzchnię ekwiskalarną** o równaniu $f(x, y, z) = const$.

Wartość funkcji f przy przemieszczaniu się po powierzchni ekwiskalarnej nie zmienia się, zatem jej przyrost $df = 0$.

Weźmy pod uwagę dowolną linię L leżącą w obszarze D i zbadajmy wartość przyrostu funkcji $f$na linii L. Niech punkty leżące na L mają współrzędne $P(x, y, z)$, $M(x + dx, y + dy, z+dz$.

Definicja 1.6.2

Pochodną funkcji f w punkcie P **w kierunku wektora** $\vec{S}$, stycznego do linii L w punkcie P, nazywamy wielkość skalarną:

$$\frac{df(P)}{ds} = \lim_{M \to P} \frac{f(M) - f(P)}{|MP|}$$

gdzie S oznacza półoś o kierunku wektora $\vec{S}$ wychodzącą z punktu P.

Pochodna kierunkowa określa prędkość zmian funkcji w danym punkcie w kierunku osi S. Oznaczając wektor wodzący punktu P przez:

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

oraz punktu M jako:

$$\vec{r_1} = \vec{r} + d\vec{r} = (x + dx)\vec{\imath} + (y + dy)\vec{\jmath} + (z + dz)\vec{k}$$

otrzymamy przyrost funkcji f przy przejściu od punktu P do M, równy:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

co można zapisać w postaci:

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\right) \circ \left(\vec{\imath}dx + \vec{\jmath}dy + \vec{k}dz\right)$$

Pierwszy czynnik tego iloczynu nazywamy **gradientem pola skalarnego** f, zatem:

Definicja 1.6.3

$$grad\ f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \nabla f$$

a drugi czynnik – **różniczką wektora wodzącego**, stąd:

Definicja 1.6.4

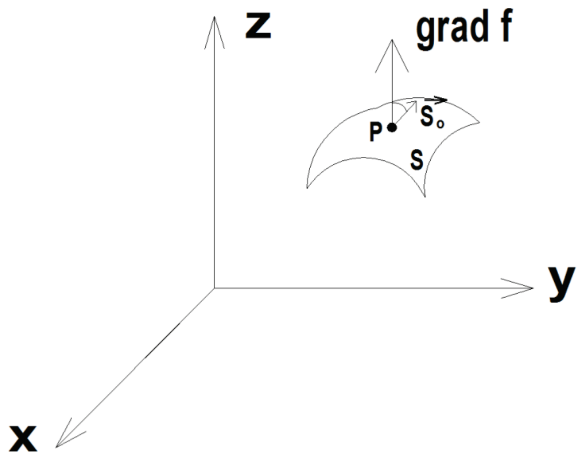
$$d\vec{r} = \vec{\imath}dx + \vec{\jmath}dy + \vec{k}dz$$

Wielkość df, zwaną **różniczką pola skalarnego**, definiujemy następująco:

Definicja 1.6.5

$$df = grad\ f \circ d\vec{r}$$

Na powierzchni ekwiskalarnej przyrost pola skalarnego $df = 0$. Stąd wynika, że wektor $grad\ f$ jest prostopadły do tej powierzchni (rys. 1.4).



Rys. 1.4. Interpretacja geometryczna gradientu funkcji

Linie prostopadłe do powierzchni ekwiskalarnych nazywamy **liniami pola**.

Jeżeli wyrazimy wektor $d\vec{r}$ przez wektor jednostkowy $\overrightarrow{S_o}$:

$$\overrightarrow{S_o} = \vec{\imath}\cos\alpha + \vec{\jmath}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$$

gdzie: $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ są kosinusami kierunkowymi wektora $\vec{r}$,
to:

$$d\vec{r} = \overrightarrow{S_o}ds$$

i wówczas:

$$\frac{df}{ds} = grad\ f \circ \overrightarrow{S_o}$$

Uwzględniając definicję iloczynu skalarnego, poprzedni związek można zapisać w postaci:

$$\frac{df}{ds} = |grad\ f| \cdot 1 \cdot \cos\varphi$$

gdzie φ to kąt między wektorami $grad\ f$ i $\overrightarrow{S_o}$ w punkcie P (rys. 1.4).

Pochodna $\frac{df(P)}{ds}$ osiąga największą wartość, jeżeli $\cos\varphi = 1$, tzn. $\varphi = 0$, czyli kierunek wektora $grad\ f(P)$ jest zgodny z kierunkiem najszybszego wzrostu funkcji f w punkcie P, długość $|grad\ f(P)|$ jest zaś równa największemu przyrostowi tej funkcji w punkcie P.

Definicja 1.6.6

Niech S będzie dowolną powierzchnią leżącą w obszarze $\Omega \subset R^3$, f – dowolną funkcją skalarną różniczkowalną w Ω, $\overrightarrow{n_o}$ – wersorem normalnej do S.

Pochodną normalną funkcji f względem powierzchni S nazywamy pochodną f w kierunku wektora $\vec{n}$ normalnego do tej powierzchni i oznaczamy symbolem $\frac{df}{dn}$.
Ponieważ:

$$\frac{df}{dn} = grad\ f \circ \overrightarrow{n_o}$$

w przypadku, gdy S będzie powierzchnią ekwiskalarną (rys. 1.4), $grad\ f$ mający kierunek normalnej do tej powierzchni w punkcie P ma długość równą:

$$|grad\ f(P)| = \left|\frac{df(P)}{dn}\right|$$

Uwaga 1

W przypadku pola skalarnego określonego w R^3 funkcją $f(r)$, gdzie $r = |\vec{r}|$, powierzchnie ekwiskalarne są sferami współśrodkowymi o środku leżącym w biegunie, gdyż $f(x^2 + y^2 + z^2) = const$ jest równoważne związkowi $x^2 + y^2 + z^2 = const$ lub krócej $r = const.$ Pole $f(r)$ nosi nazwę pola centralnego lub środkowo-symetrycznego.

Przykład 1

Znaleźć gradient funkcji $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z$ w punkcie $P_0(1,1,2)$.
Rozwiązanie:

$$grad\ f = 2x\vec{\imath} + 3y^2\vec{\jmath} + \vec{k}$$

$$(grad\ f)_{P_0} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + \vec{k}$$

Przykład 2

Wyznaczyć $grad\ R$, gdzie: $R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Rozwiązanie:

$$grad\ R = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{\imath} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{\jmath} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{k} = \frac{\vec{R}}{R}$$

Przykład 3

$$grad\ f(R) = \nabla f(R) = f'(R)\nabla R = f'(R)\frac{\vec{R}}{R}$$

Przykład 4

Niech $\vec{a}$ oznacza wektor stały, to znaczy wektor o współrzędnych liczbowych.
Wówczas:

$$grad\ (\vec{a} \circ \vec{R}) = \nabla(\vec{a} \circ \vec{R}) = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k} = \vec{a}$$

Przykład 5

Wykazać słuszność wzorów:

a) $grad\ (fg) = g\ grad\ f + f\ grad\ g$

Dowód:

$$grad\ (fg) = \nabla\ (f\ g) = \nabla\left(\underline{f}\ g\right) + \nabla\left(f\ \underline{g}\right) = g(\nabla f) + f(\nabla g) = g\ grad\ f + f\ grad\ g$$

b) $grad\ \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\ grad\ f - f\ grad\ g}{g^2}$

Dowód:

$$grad\ \left(\frac{f}{g}\right) = \nabla\ \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2} = \frac{g\ grad\ f - f\ grad\ g}{g^2}$$

Przykład 6

Znaleźć pochodną funkcji $u = u(x, y, z)$ w kierunku $grad\ v(x, y, z)$, przy czym u i v są dowolnymi funkcjami różniczkowalnymi w R^3.

Rozwiązanie:

Zgodnie z definicją 1.6.3 mamy:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

i podobnie:

$$grad\ v = \frac{\partial v}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}$$

stąd kosinusy kierunkowe wektora $grad\ v$ są równe, odpowiednio:

$$\cos(grad\ v, x) = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{|grad\ v|}$$

$$\cos(grad\ v, y) = \frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{|grad\ v|}$$

$$\cos(grad\ v, z) = \frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{|grad\ v|}$$

Pochodna funkcji u w kierunku wektora $\vec{S} = grad\ v$

$$\frac{du}{ds} = grad\ u \circ \overrightarrow{S_o} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}}{|grad\ v|} = \frac{grad\ u \circ grad\ v}{|grad\ v|}$$

Znaleziona pochodna $\frac{du}{ds}$ będzie równa zeru, jeżeli:

$$grad\ u \circ grad\ v = 0$$

a to oznacza, że wektory $grad\ u$ i $grad\ v$ są ortogonalne (prostopadłe).

Ćwiczenia

Wykazać słuszność wzorów:

1. $grad\ (f \pm g) = grad\ f \pm grad\ g$

2. $grad\ (\alpha f) = \alpha\ grad\ f$
3. $grad\ c = 0$, gdzie c – liczba rzeczywista

1.7. Dywergencja

Dane jest pole wektorowe $\vec{w} = W_x(x,y,z)\vec{\imath} + W_y(x,y,z)\vec{\jmath} + W_z(x,y,z)\vec{k}$ klasy C^1 w obszarze $\Omega \subset R^3$.

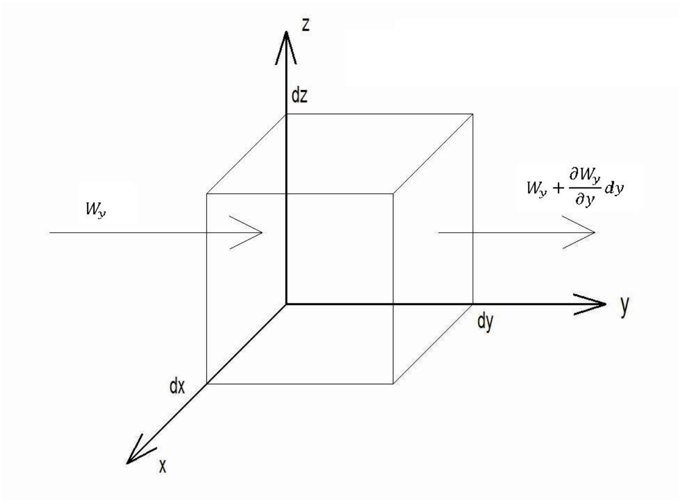
Definicja 1.7.1

Dywergencją (wydajnością źródła) nazywamy funkcję skalarną określoną w danym polu wektorowym wzorem:

$$div\ \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \nabla \circ \vec{w}$$

Hydromechaniczna interpretacja dywergencji

Całkowitą wydajnością danej objętości zawierającej źródła nazywamy różnicę między ilością płynu, która z prędkością $\vec{w}$ wypływa z tej objętości w jednostce czasu, a ilością, która do niej wpływa (rys. 1.5).



Rys. 1.5. Ilustracja hydromechanicznej interpretacji dywergencji

W przypadku, gdy $div\ \vec{w}(P) > 0$, w punkcie P występuje źródło o wydajności równej $div\ \vec{w}$, jeżeli $div\ \vec{w}(P) < 0$, to w punkcie P występuje spływ o wydajności równej $|div\ \vec{w}(P)|$. Gdy $div\ \vec{w}(P) = 0$, to w punkcie P nie ma spływów ani źródeł.

Interpretacja elektrostatyczna dywergencji

W polu elektrostatycznym $\vec{E}$ dywergencja jest proporcjonalna do gęstości ρ rozkładu ładunków (porównaj z podrozdziałem 3.1 i z definicją 3.1.2), przy czym za źródła przyjęto punkty pola, w których znajdują się ładunki dodatnie, za spływy zaś – punkty pola z ładunkami ujemnymi.

Definicja 1.7.2

Pole skalarne $\varphi = div\, \vec{w}$ nazywamy **polem źródłowym**, gdy $div\, \vec{w} \neq 0$.

Definicja 1.7.3

Jeżeli $div\, \vec{w} = 0$ w każdym punkcie obszaru $\Omega \subset R^3$, to pole $\vec{w}$ nazywamy **polem bezźródłowym**.

Przykład 1

Znaleźć dywergencję wektora $\vec{w} = [2xy, y^2z, xz^3]$ w punkcie $P_0(1,-1,1)$.
Rozwiązanie:

$$div\, \vec{w} = 2y + 2yz + 3xz^2$$
$$(div\, \vec{w})_{P_0} = -1$$

Przykład 2

Wyznaczyć $div\, \vec{R}$, gdzie $\vec{R} = [x, y, z]$.
Rozwiązanie:

$$div\, \vec{R} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Przykład 3

$$div\left[f(R)\vec{R}\right] = \nabla \circ \left[\underline{f(R)}\vec{R}\right] + \nabla \circ \left[f(R)\underline{\vec{R}}\right] = \vec{R} \circ \nabla f(R) + f(R)\left(\nabla \circ \vec{R}\right) =$$
$$= \vec{R} \circ f'(R)\frac{\vec{R}}{R} + f(R)\, div\, \vec{R} = Rf'(R) + 3f(R)$$

Przykład 4

$$div\left(grad\ \frac{1}{R}\right) = div\left(-\frac{1}{R^2}\frac{\vec{R}}{R}\right) = -div\left(\frac{\vec{R}}{R^3}\right) = -\vec{R} \circ grad\left(\frac{1}{R^3}\right) - \frac{1}{R^3} div\, \vec{R} =$$
$$= -\vec{R} \circ \left(-\frac{3\vec{R}}{R^5}\right) - \frac{3}{R^3} = 0$$

Przykład 5

Wykazać słuszność wzorów:

a) $div\,(grad\, f) = \Delta f$
Dowód:

$\nabla \circ \nabla \mathrm{f} = \nabla^2 \mathrm{f} = \Delta \mathrm{f}$

b) $div\,(f\vec{w}) = \vec{w} \circ grad\, f + f\ div\, \vec{w}$
Dowód:

$div\,(f\vec{w}) = \vec{w} \circ \nabla \mathrm{f} + \mathrm{f}(\nabla \circ \vec{w}) = \vec{w} \circ grad\, f + f\ div\, \vec{w}$

c) $div\,(u\ grad\, u) = (grad\, u)^2 + u\Delta u$
Dowód:

$$div\,(u\ grad\, u) = \nabla \circ (u\nabla u) = \nabla \mathrm{u} \circ \nabla \mathrm{u} + \mathrm{u}(\nabla \circ \nabla \mathrm{u}) = (\nabla \mathrm{u})^2 + u\Delta u =$$
$$= (grad\, u)^2 + u\Delta u$$

Ćwiczenia

Wykazać słuszność wzorów:

1. $div\,(f \pm g) = div\,f \pm div\,g$
2. $div\,(\alpha f) = \alpha\, div\,f$
3. $div\,\vec{c} = 0$, gdzie $\vec{c}$ – wektor stały, czyli o współrzędnych liczbowych

1.8. Rotacja

Definicja 1.8.1

Rotacją (wirem) pola $\vec{w}$ nazywamy funkcję wektorową $rot\,\vec{w}$ określoną w przestrzeni wektorowej $X \subset R^3$, zdefiniowaną wzorem:

$$rot\,\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{w}$$

Interpretacja fizyczna rotacji

W polu wektorowym prędkości $\vec{v}$ o nieznikającej rotacji występują wiry (zamknięte linie). Przedmiot unoszący się w takim polu na pewnej powierzchni (np. cieczy) będzie się poruszał ruchem obrotowym z prędkością $\vec{\omega}$.

Definicja 1.8.2

Pole wektorowe $\vec{w}$ nazywamy **bezwirowym** w obszarze Ω, jeżeli $rot\,\vec{w}(P) = \vec{0}$ w każdym punkcie $P \in \Omega$.

Zgodnie z interpretacją hydromechaniczną poruszająca się cząsteczka płynu, nieposiadająca prędkości kątowej, ma prędkość liniową bezwirową, czyli nie zachodzi ruch obrotowy cząsteczki.

Przykład 1

Znaleźć rotację pola wektorowego $\vec{w} = [2xy, y^2z, xz^3]$ w punkcie $P_0(1,-1,1)$.
Rozwiązanie:
Zgodnie z definicją 1.8.1 mamy:

$$rot\,\vec{w} = \vec{\imath}(0 - y^2) + \vec{\jmath}(0 - z^3) + \vec{k}(0 - 2)$$

stąd ostatecznie:

$$rot\,\vec{w}(P_0) = -\vec{\imath} - \vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

Przykład 2

Znaleźć rotację wektora wodzącego $\vec{R}$.
Rozwiązanie:

$$rot\,\vec{R} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \vec{0}$$

Przykład 3

$$rot\,[\vec{R}(\vec{a}\circ\vec{R})] = \nabla\times[\underline{\vec{R}}(\vec{a}\circ\vec{R})] + \nabla\times[\vec{R}(\underline{\vec{a}\circ\vec{R}})] = (\vec{a}\circ\vec{R})(\nabla\times\vec{R}) - \vec{R}\times\nabla(\vec{a}\circ\vec{R}) =$$
$$= (\vec{a}\circ\vec{R})\,rot\,\vec{R} - \vec{R}\times grad\,(\vec{a}\circ\vec{R}) = \vec{0} - \vec{R}\times\vec{a} = \vec{a}\times\vec{R}$$

Przykład 4

Wykazać słuszność wzorów:

a) $rot\,(f\,\vec{w}) = f\,rot\,\vec{w} - \vec{w}\times grad\,f$
Dowód:

$$rot\,(f\,\vec{w}) = \nabla\times f\vec{w} = \nabla \mathrm{f}\times\vec{w} + f(\nabla\times\vec{w}) = f\,rot\,\vec{w} - \vec{w}\times grad\,f$$

b) $rot\,(grad\,f) = \vec{0}$
Dowód:

$$rot\,(grad\,f) = (\nabla\times\nabla)f = \vec{0}$$

c) $div\,(rot\,\vec{w}) = 0$
Dowód:

$$div\,(rot\,\vec{w}) = \nabla\circ(\nabla\times\vec{w}) = (\nabla\times\nabla)\circ\vec{w} = 0$$

d) $rot\,(rot\,\vec{w}) = grad\,\,(div\,\vec{w}) - \Delta\vec{w}$
Dowód:

$$rot\,(rot\,\vec{w}) = \nabla\times(\nabla\times\vec{w}) = \nabla(\nabla\circ\vec{w}) - (\nabla\circ\nabla)\vec{w} = grad\,\,(div\,\vec{w}) - \Delta\vec{w}$$

e) $div\,(\vec{w}\times\vec{v}) = \vec{v}\circ rot\,\vec{w} - \vec{w}\circ rot\,\vec{v}$
Dowód:

$$div\,(\vec{w}\times\vec{v}) = \nabla\circ(\vec{w}\times\vec{v}) = \nabla\circ(\underline{\vec{w}}\times\vec{v}) + \nabla\circ(\vec{w}\times\underline{\vec{v}}) =$$
$$= \vec{v}\circ(\nabla\times\vec{w}) - \vec{w}\circ(\nabla\times\vec{v}) = \vec{v}\circ rot\,\vec{w} - \vec{w}\circ rot\,\vec{v}$$

Ćwiczenia

Wykazać słuszność wzorów:

1. $rot\,(\vec{w}\pm\vec{v}) = rot\,\vec{w} \pm rot\,\vec{v}$
2. $rot\,(\alpha\vec{w}) = \alpha\,rot\,\vec{w}$
3. $rot\,\vec{c} = 0$, gdzie $\vec{c}$ – wektor stały, czyli o współrzędnych liczbowych

1.9. Funkcje pola we współrzędnych walcowych

a) Funkcje pola

Podstawowe funkcje pola we współrzędnych walcowych wyrażają się wzorami:

$$\left.\begin{aligned} grad\ f &= \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z \\ div\ \overrightarrow{W} &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rW_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial W_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial W_z}{\partial z} \\ rot\ \overrightarrow{W} &= \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ W_r & rW_\varphi & W_z \end{vmatrix} \\ \Delta f &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}\right\}$$

b) Funkcje pola dla wektora wodzącego

Wektor wodzący $\vec{R}$, dany we współrzędnych kartezjańskich jako $\vec{R} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = r\cos\varphi\,\vec{\imath} + r\sin\varphi\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$, będzie miał współrzędne walcowe:

$$\begin{cases} R_r = x\cos\varphi + y\sin\varphi = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r \\ R_\varphi = -x\sin\varphi + y\cos\varphi = -r\sin\varphi\cos\varphi + r\cos\varphi\sin\varphi = 0 \\ R_z = z \end{cases}$$

Wobec tego $\vec{R} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$; $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ i stąd mamy:

$$grad\ R = \frac{r}{R}\vec{e}_r + \frac{z}{R}\vec{e}_z = \frac{\vec{R}}{R}$$

$$div\ \vec{R} = \frac{1}{r}\frac{\partial(r^2)}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\Delta R = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{r^2+z^2}} = \frac{2}{R}$$

$$rot\ \vec{R} = \vec{0}$$

Przykład 1

Obliczyć dywergencję i rotację wersorów osi we współrzędnych walcowych.

Rozwiązanie:

Ponieważ wersory mają współrzędne walcowe:

$$\vec{e}_r = [1,0,0], \vec{e}_\varphi = [0,1,0], , \vec{e}_z = [0,0,1]$$

więc:

$$div\ \vec{e}_r = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial r} = \frac{1}{r} \qquad rot\ \vec{e}_r = \vec{0}$$
$$div\ \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial(1)}{\partial \varphi} = 0 \qquad rot\ \vec{e}_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial r}\vec{e}_z = \frac{1}{r}\vec{e}_z$$
$$div\ \vec{e}_z = 0 \qquad rot\ \vec{e}_z = 0$$

Przykład 2

Obliczyć dywergencję i rotację pola:

$$\vec{W} = \frac{1}{r}\vec{e}_r + r\cos\varphi\,\vec{e}_\varphi + z\sin\varphi\,\vec{e}_z$$

Rozwiązanie:

$$div\ \vec{W} = \frac{1}{r}\frac{\partial(1)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{\partial(z\sin\varphi)}{\partial z} = 0$$

$$rot\ \vec{W} = \frac{1}{r}\frac{\partial(z\sin\varphi)}{\partial\varphi}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r}\vec{e}_z = \frac{1}{r}z\cos\varphi\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\cos\varphi\,\vec{e}_z$$

1.10. Funkcje pola we współrzędnych sferycznych

a) Funkcje pola

Funkcje pola wyrażone we współrzędnych sferycznych mają postać:

$$\begin{cases} grad\ f = \dfrac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi \\ div\ \vec{W} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 W_r) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(W_\theta\sin\theta) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial W_\varphi}{\partial\varphi} \\ rot\ \vec{W} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta} & \dfrac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ W_r & rW_\theta & r\sin\theta\,W_\varphi \end{vmatrix} \\ \Delta f = \dfrac{1}{r^2}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial f}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}\right] \end{cases}$$

b) Funkcje pola dla wektora wodzącego

Uwzględniając równanie macierzowe:

$$\begin{bmatrix} R_r \\ R_\theta \\ R_\varphi \end{bmatrix} = \mathbb{A}\begin{bmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{bmatrix}$$

otrzymuje się zależności:

$$R_r = r\cos^2\varphi\sin^2\theta + r\sin^2\varphi\sin^2\theta + r\cos^2\theta = r$$

$$R_\theta = r\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta + r\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta - r\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$R_\varphi = -r\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta + r\cos\varphi\sin\varphi\sin\theta = 0$$

czyli wektor wodzący wyrażony we współrzędnych sferycznych przyjmie postać:

$$\vec{R} = r\vec{e}_r;\, R = r$$

natomiast funkcje pola:

$$grad\ R = \frac{\partial r}{\partial r}\vec{e}_r = \vec{e}_r$$

$$div\ \vec{R} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^3}{\partial r} = 3$$

$$\Delta R = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2}{\partial r} = \frac{2}{r}$$

Przykład 1

Obliczyć dywergencję i rotację wersorów osi we współrzędnych sferycznych:
Rozwiązanie:

$$div\ \vec{e}_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2}{\partial r} = \frac{2}{r} \qquad rot\ \vec{e}_r = \vec{0}$$

$$div\ \vec{e}_\theta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{r}ctg\ \theta \qquad rot\ \vec{e}_\theta = \frac{1}{r}\vec{e}_\varphi$$

$$div\ \vec{e}_\varphi = 0 \qquad rot\ \vec{e}_\varphi = \frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta)\frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta} - \frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}\frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} = \frac{1}{r}ctg\ \theta\vec{e}_r - \frac{1}{r}\vec{e}_\theta$$

Przykład 2

Obliczyć dywergencję i rotację pola:

$$\vec{w} = 2r\vec{e}_r + \frac{1}{\sin\theta}\vec{e}_\theta + r\vec{e}_\varphi$$

Rozwiązanie:

$$div\ \vec{w} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(2r^3)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(1)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial r}{\partial\varphi} = 6$$

$$rot\ \vec{w} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta} & \frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} & \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 2r & \frac{r}{\sin\theta} & r^2\sin\theta \end{vmatrix} = \frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}(r^2\cos\theta) - \frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta}(2r\sin\theta) + \frac{\vec{e}_\varphi}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)$$

więc ostatecznie:

$$rot\ \vec{w} = \vec{e}_r\,\mathrm{ctg}\,\theta - 2\vec{e}_\theta + \frac{\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}$$

Rozdział 2

Twierdzenia całkowe

2.1. Strumień wektora. Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

Dane są pole wektorowe $\overrightarrow{W}$ klasy C^1 w obszarze $\Omega \subset R^3$ oraz powierzchnia S leżąca w Ω.

Definicja 2.1.1

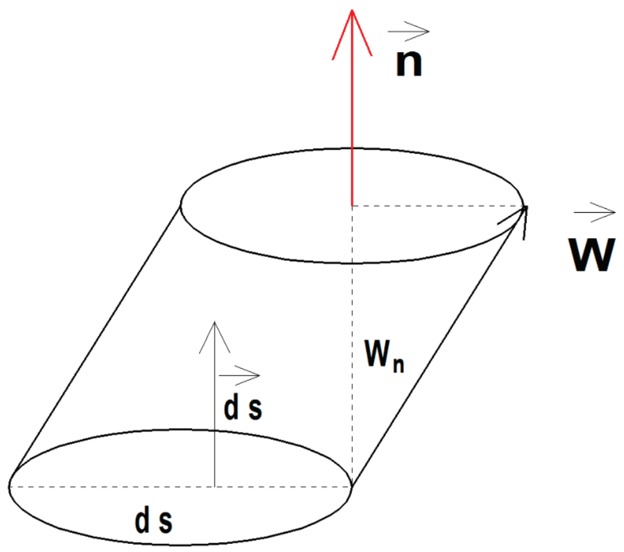
Strumieniem wektora $\overrightarrow{W}$ przez element powierzchniowy dS nazywamy wielkość skalarną:

$$\Phi = \iint_S \overrightarrow{W} \circ d\vec{S} = \iint_S \overrightarrow{W} \circ \vec{n}\, dS = \iint_S W_n\, dS$$

gdzie: $\vec{n}$ – wektor normalnej do powierzchni S; W_n – składowa normalna wektora $\overrightarrow{W}$.

Hydromechaniczna interpretacja strumienia

Jeżeli wektor $\overrightarrow{W}$ określa prędkość cząsteczek rozważanej cieczy, to wielkość $W_n\, dS$ wyznacza objętość cieczy przepływającej w jednostce czasu przez element powierzchniowy dS. Objętość ta jest równa objętości walca pokazanego na rys. 2.1.



Rys. 2.1. Ilustracja hydromechanicznej interpretacji strumienia

Jeżeli powierzchnia S jest zamknięta, to Φ przedstawia różnicę między ilością cieczy wpływającej i wypływającej z badanego obszaru, czyli całkowitą wydajność źródeł znajdujących się w tym obszarze.

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

Jeżeli S jest powierzchnią regularną, zamkniętą, zorientowaną dodatnio (czyli normalna do powierzchni S jest skierowana na zewnątrz), ograniczającą obszar V, pole $\overrightarrow{W}$ jest klasy $C^1(S \cup V)$, to:

$$\iint_S \overrightarrow{W} \circ d\vec{S} = \iiint_V div\, \overrightarrow{W} dV$$

Dowód pomijamy.

Przykład 1

Wykazać, że $\iint_{(S^+)} rot\, \overrightarrow{W} \circ d\vec{S} = 0$ dla dowolnej powierzchni zamkniętej S ograniczającej obszar V i pola $\vec{w} \in C^1(S \cup V)$.

Rozwiązanie:
Ponieważ:

$$div\left(rot\, \overrightarrow{W}\right) = 0$$

więc z twierdzenia Gaussa:

$$\iint_{(S^+)} rot\, \overrightarrow{W} \circ d\vec{S} = \iiint_V div\left(rot\, \overrightarrow{W}\right) dV = 0$$

Przykład 2

Wykazać, że dla dowolnej zamkniętej powierzchni S i ograniczonego przez nią obszaru V zachodzą równości:

a)

$$\iint_{(S^+)} \vec{r} \circ d\vec{S} = 3|V|$$

b)

$$\iint_{(S^+)} \frac{\vec{r} \circ d\vec{S}}{r^2} = \iiint_V \frac{dV}{r^2}$$

Rozwiązanie:

a) Z twierdzenia Gaussa mamy kolejno:

$$\iint_{(S^+)} \vec{r} \circ d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \circ \vec{r})\, dV = 3 \iiint_V dV = 3|V|$$

b) Ponieważ:

$$div\left(\frac{\vec{r}}{r^2}\right) = \nabla \circ \frac{\vec{r}}{r^2} = \frac{1}{r^2}(\nabla \circ \vec{r}) + \vec{r} \circ \nabla\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{3}{r^2} - \vec{r} \circ \frac{2\vec{r}}{r^4} = \frac{3}{r^2} - \frac{2}{r^2} = \frac{1}{r^2}$$

więc:

$$\iint\limits_{(S^+)} \frac{\vec{r} \circ d\vec{S}}{r^2} = \iiint\limits_V \frac{1}{r^2} dV$$

Przykład 3

Obliczyć strumień wektora $\vec{W} = r^2\vec{r}$ przez powierzchnię kuli jednostkowej $K(0,1)$.

Rozwiązanie:
Ponieważ powierzchnia S jest zamknięta oraz $\vec{W} \in C^1(K)$, więc stosując twierdzenie Gaussa, mamy:

$$\Phi = \iint\limits_{(S^+)} r^2\vec{r} \circ \mathrm{d}\vec{\mathrm{S}} = \iiint\limits_V \mathrm{div}\,(r^2\vec{r})\, dV$$

ale:

$$div\,(r^2\vec{r}) = \nabla \circ (r^2\vec{r}) = \vec{r} \circ (\nabla r^2) + r^2(\nabla \circ \vec{r}) = \vec{r} \circ 2r\frac{\vec{r}}{r} + 3r^2 = 2r^2 + 3r^2 = 5r^2$$

więc wprowadzając współrzędne sferyczne:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \\ jakobian = r^2\sin\theta \end{cases}$$

otrzymamy:

$$\Phi = 5 \iiint\limits_{K(0,1)} r^2 dV = 40\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int_0^1 r^4 dr = 4\pi$$

Przykład 4

Znaleźć strumień wektora $\vec{W} = \frac{2\sin\theta}{r^3}\vec{e}_r + \frac{1}{r^3}\left[\frac{\theta}{\sin\theta} - \cos\theta\right]\vec{e}_\theta$ przez powierzchnię sfery $r = a$.

Rozwiązanie:
Wektor $\vec{W}$nie jest klasy C^1 w punkcie $r = 0$ będącym środkiem kuli o promieniu a, więc nie można zastosować twierdzenia Gaussa.

Korzystając z definicji strumienia i uwzględniając fakt równoległości wektorów $\vec{n}$ i $\vec{e}_r$ oraz to, że:

$$S\colon \begin{cases} r = a \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

i jakobian:

$$J = r^2\sin\theta = a^2\sin\theta$$

otrzymamy:

$$\Phi = \iint\limits_{(S^+)} \vec{W} \circ d\vec{S} = \iint\limits_S \vec{W} \circ \vec{e}_r\, dS = \iint\limits_S \frac{2\sin\theta}{r^3} dS = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\theta}{a} d\theta = \frac{2\pi^2}{a}$$

Ćwiczenia

1. Przekształcić na całki objętościowe:
   a)
$$\iint\limits_{(S^+)} (\vec{R} \times \vec{a}) \circ d\vec{S}$$
   b)
$$\iint\limits_{(S^+)} [\vec{R} \times (\vec{a} \times \vec{R})] d\vec{S}$$
   gdzie: $\vec{a}$ – wektor stały; $\vec{R}$ – wektor wodzący.

   Odpowiedź: a) $\Phi = 0$ b) $\Phi = 0$

2. Znaleźć strumień pola $\vec{W} = \vec{r} \times \vec{a}$ przez powierzchnię sfery $r = R$.

   Odpowiedź: $\Phi = 0$

2.2. Cyrkulacja. Twierdzenie Stokesa

Dane są pole wektorowe $\vec{W}$ określone w obszarze $\Omega \subset R^3$ oraz linia zamknięta L leżąca w tym obszarze.

Definicja 2.2.1

Cyrkulacją (krążeniem) wektora $\vec{W}$ po linii L nazywamy całkę:

$$\int\limits_{(L)} \vec{W} \circ d\vec{L}$$

Twierdzenie Stokesa

Jeżeli S jest powierzchnią regularną leżącą w obszarze Ω, zorientowaną dodatnio i rozpiętą na skierowanej dodatnio (czyli przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) linii L, i pole wektorowe $\vec{W} \in C^1(S \cup L)$, to:

$$\int\limits_{(L^+)} \vec{W} \circ d\vec{L} = \iint\limits_{(S^+)} rot\, \vec{W} \circ d\vec{S}$$

Dowód pomijamy.

Uwaga

$rot\, \vec{W} \circ d\vec{S}$ można przedstawić jako $\left(rot\, \vec{W} \circ \vec{n}\right) dS$, gdzie $\vec{n}$ to wektor normalny do powierzchni S.

Interpretację geometryczną twierdzenia Stokesa ilustruje rys. 2.2.

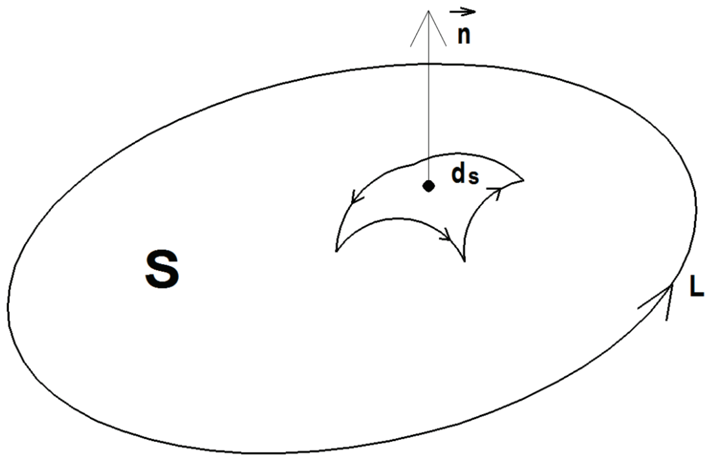
Z twierdzenia Stokesa wypływają oczywiste wnioski.

Wniosek 1

Cyrkulacja pola $\vec{W}$ po linii zamkniętej jest równa strumieniowi rotacji tego pola przez powierzchnię ograniczoną linią L.

Wniosek 2

Jeżeli pole $\vec{W}$ jest bezwirowe w obszarze Ω, to cyrkulacja tego pola po dowolnej linii zamkniętej leżącej w Ω jest równa zeru.



Rys. 2.2. Interpretacja geometryczna twierdzenia Stokesa

Przykład 1

Wykazać, że dla dowolnej krzywej zamkniętej spełnione są równości:

$$\int_{(L)} \vec{R} \circ \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} = 0 \qquad\qquad \int_{(L)} \vec{c} \circ \mathrm{d}\vec{\mathrm{L}} = 0$$

gdzie $\vec{c}$ oznacza stałe pole wektorowe.

Dowód:
Ponieważ:

$$rot\,\vec{R} = 0 \qquad\qquad rot\,\vec{c} = 0$$

więc na mocy twierdzenia Stokesa otrzymujemy podane równości.

Przykład 2

Obliczyć cyrkulację pola: $\vec{W} = r\vec{e}_r + (a+r)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$
po okręgu: $r = a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Rozwiązanie:

I metoda

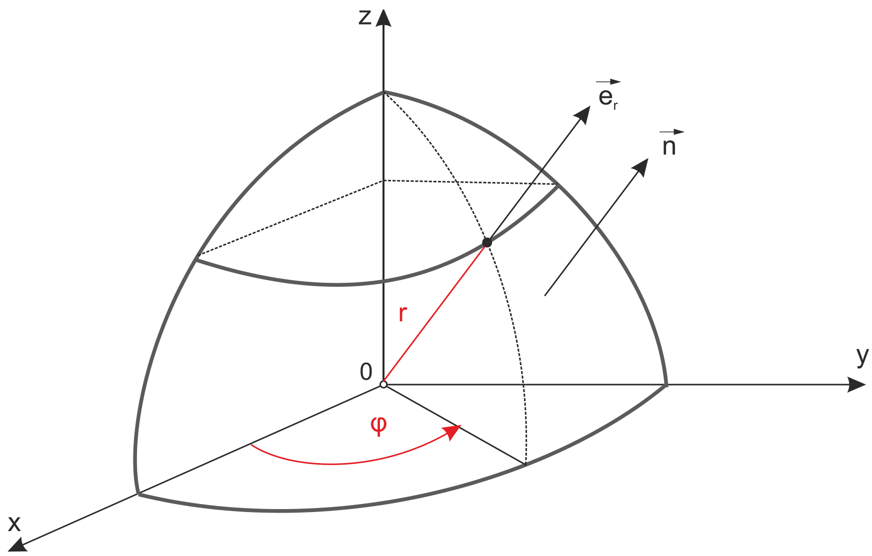
Wyznaczamy rotację pola $\vec{W}$:

$$rot\,\vec{W} = \frac{\vec{e}_r}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[r(a+r)\sin^2\theta] + \frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial r}[-r(a+r)\sin^2\theta] =$$
$$= 2\cos\theta\frac{a+r}{r}\vec{e}_r - \sin\theta\frac{a+2r}{r}\vec{e}_\theta$$

Aby skorzystać z twierdzenia Stokesa, przyjmijmy jako powierzchnię S półsferę o promieniu a (koła $0 \le r \le a$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ nie można traktować jako S, gdyż obejmuje ono punkt $r = 0$ nieciągłości rotacji $\vec{W}$). Ponieważ wektory $\vec{e}_r$ i $\vec{n}$ są równoległe (rys. 2.3), więc na mocy twierdzenia Stokesa otrzymamy cyrkulację równą:

$$\iint_S \left(rot\,\vec{W} \circ \vec{n}\right) dS = \iint_S 2\frac{a+r}{r}\cos\theta\, dS = 4\iint_S \cos\theta\, dS =$$

$$= 8a^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos\theta\, d\theta = 4\pi a^2$$



Rys. 2.3. Ilustracja do obliczania cyrkulacji wektora $\vec{W}$ przy użyciu twierdzenia Stokesa

II metoda

$$\text{Linia } L: \begin{cases} r = a \\ \theta = \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\text{stąd} \quad \begin{aligned} dr &= 0 \\ d\theta &= 0 \end{aligned}$$

We współrzędnych sferycznych:

$$d\vec{L} = dr\vec{e}_r + \mathrm{r}d\theta\vec{e}_\theta + \mathrm{r}\sin\theta\, d\varphi\vec{e}_\varphi$$

więc cyrkulacja jest równa:

$$\int_L \vec{W} \circ d\vec{L} = \int_L rdr + (a+r)r\sin^2\theta\, d\varphi = 2a^2\int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi a^2$$

Przykład 3

Znaleźć cyrkulację cieczy wirującej z prędkością kątową $\vec{\omega}$ po linii L.
Rozwiązanie:
Prędkość liniowa wirującej cieczy jest równa:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\mathrm{r}}$$

gdzie: $\vec{\omega} = [\omega, \omega, \omega]$.
Wobec tego:

$$rot\ \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \omega & \omega & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = \omega(z-y)\vec{\imath} + \omega(x-z)\vec{\jmath} + \omega(y-x)\vec{k}$$

Przyjmując, że krążenie odbywa się po okręgu o środku leżącym na osi Oz (rys. 2.4), ponieważ:

$$rot\ \vec{v} = 2\omega\vec{\imath} + 2\omega\vec{\jmath} + 2\omega\vec{k}$$

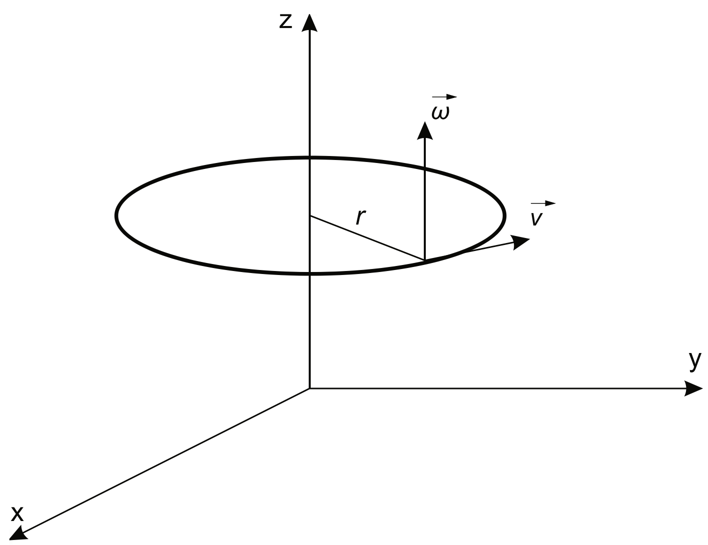
oraz:

$$\vec{n} \parallel \vec{k}$$

na mocy twierdzenia Stokesa otrzymamy cyrkulację równą:

$$\int_{(L)} \vec{v} \circ d\vec{L} = \iint_S \left(rot\ \vec{W} \circ \vec{n}\right) dS = 2\omega \iint_S dS = 2\omega|S| = 2\pi\omega r^2$$

czyli cyrkulacja $= 2S\omega$, gdzie S oznacza pole koła ograniczonego linią L. Wynik jest zgodny z interpretacją hydromechaniczną rotacji, tzn. że krążenie wokół jednostkowej powierzchni prostopadłej do wektora $rot\ \vec{v}$ dla nieskończenie małej pętli jest równe $rot\ \vec{v}$, czyli tzw. gęstości wirów.



Rys. 2.4. Ilustracja do obliczania cyrkulacji wirującej cieczy

2.3. Potencjał skalarny

Dane są bezwirowe pole wektorowe $\vec{W} \in C^1\ (\Omega)$ oraz obszar jednospójny $D \subset R^n$.

Definicja 2.3.1

Potencjałem skalarnym pola $\vec{W}$ nazywamy funkcję skalarną f spełniającą związek $\vec{W} = grad\ f$ w obszarze Ω.

Zależność $\vec{W}$ = grad f wyrażona we współrzędnych kartezjańskich przyjmuje postać układu równań:

$$W_x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad W_y = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad W_z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Definicja 2.3.2

Pole wektorowe mające potencjał skalarny nazywa się **polem potencjalnym**.

Definicja 2.3.3

Powierzchnią ekwipotencjalną nazywamy zbiór punktów równego potencjału, czyli $f(P) = const$ dla $P \in R^n$.

Uwaga

Ze względu na interpretację fizyczną w przypadku niektórych pól wektorowych przyjmuje się:

$$\vec{W} = -grad\ f$$

(porównaj podrozdział 3.3).

Twierdzenie 1

Bezwirowość pola $\vec{W}$ jest warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby pole $\vec{W}$ było potencjalne.

Z twierdzenia 1 oraz z twierdzenia Stokesa wynika następujący wniosek:

Wniosek

W polu potencjalnym całka krzywoliniowa **nie zależy** od drogi całkowania, a jedynie od punktu początkowego i końcowego drogi. W przypadku linii zamkniętej całka ta jest równa zeru.

Dowód:

Niech L będzie drogą od punktu A do B zawartą w $D \subset R^3$.

Ponieważ:

$$df = grad\ f \circ d\vec{r}$$

stąd:

$$\int\limits_L \vec{W} \circ d\vec{r} = \int\limits_L grad\ f \circ d\vec{r} = \int\limits_L df = f(B) - f(A)$$

W przypadku linii zamkniętej $f(B) = f(A)$, a zatem całka równa jest zeru.

Przykład 1

Znaleźć potencjał skalarny pola $\vec{W}$ (o ile istnieje).

a) $\vec{W} = [xy^2, x^2y]$, określić linie tego pola
b) $\vec{r} = [x, y, z]$, znaleźć powierzchnię ekwipotencjalną
c) $\vec{W} = [y^2, xy, 1]$

Rozwiązanie:

a) Ponieważ $rot\, \vec{W} = \vec{0}$, więc to pole jest potencjalne.
Ze związku $\vec{W} = grad\, \varphi$ otrzymamy układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = xy^2 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2y \end{cases}$$

Z pierwszego z tych równań otrzymamy (całkując po x):

$$\varphi = \frac{x^2y^2}{2} + g(y)$$

Uwzględniając drugie z tych równań, otrzymamy:

$$g'(y) = 0 \qquad\qquad g(y) = C$$

Ostatecznie:

$$\varphi = \frac{x^2y^2}{2} + C$$

Linie pola $\vec{W}$ znajdziemy z równania różniczkowego:

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y}$$

Po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu otrzymujemy:

$$x^2 = y^2 + C$$

czyli liniami pola $\vec{W}$ są hiperbole:

$$x^2 - y^2 = C$$

b) Ponieważ $rot\, \vec{r} = \vec{0}$, więc to pole jest potencjalne. Potencjał znajdziemy z układu równań:

$$x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad\qquad y = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad\qquad z = \frac{\partial f}{\partial z}$$

skąd po rozwiązaniu tego układu otrzymamy ostatecznie:

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + C$$

Powierzchniami ekwipotencjalnymi są sfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

c) $rot\, \vec{W} = [0,0, -y]$, więc to pole nie jest potencjalne.

Przykład 2

Sprawdzić, czy pole $\overrightarrow{W} = \frac{\vec{R}}{R}$ jest potencjalne w R^3. Znaleźć jego potencjał, o ile istnieje.

Rozwiązanie:

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, by pole $\overrightarrow{W}$ było potencjalne, jest jego bezwirowość w obszarze jednospójnym D.

Ponieważ $rot\,\frac{\vec{R}}{R} = -\frac{1}{R}(\nabla\times\vec{R}) - \vec{R}\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\vec{R}\times\left(-\frac{1}{\mathrm{R}^2}\right)\frac{\vec{R}}{R} = \vec{0}$, więc $\overrightarrow{W}$ jest polem potencjalnym w obszarze D z wyłączeniem punktów osi biegunowej (ze względu na jednospójność D nie wystarczy wyłączyć punktu $R = 0$).

Znajdźmy potencjał pola $\overrightarrow{W}$.

Ponieważ $grad\, f(R) = f'(R)\frac{\vec{R}}{R} = \frac{\vec{R}}{R}$, więc $f'(R) = 1$ i tym samym $f(R) = R + C$ jest potencjałem danego pola $\overrightarrow{W}$.

Przykład 3

Wykazać, że pole $\overrightarrow{W} = \frac{2\cos\varphi}{r^3}\vec{e}_r + \frac{\sin\varphi}{r^3}\vec{e}_\varphi$ jest potencjalne. Znaleźć jego potencjał.

Rozwiązanie:

Rotacja we współrzędnych walcowych ma postać:

$$rot\,\overrightarrow{W} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{2\cos\varphi}{r^3} & \dfrac{\sin\varphi}{r^3} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\vec{e}_z\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin\varphi}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{2\cos\varphi}{r^3}\right)\right] = \vec{0}$$

więc pole $\overrightarrow{W}$ jest potencjalne w obszarze jednospójnym D, niezawierającym punktu $r = 0$.

Związek $\overrightarrow{W} = grad\, f$ zapisany we współrzędnych biegunowych przyjmuje postać układu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{2\cos\varphi}{r^3} \\ \dfrac{\partial f}{\partial\varphi} = \dfrac{\sin\varphi}{r^2} \end{cases}$$

Z drugiego z tych równań mamy:

$$f(r,\varphi) = \int \frac{\sin\varphi}{r^2}\,d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{r^2} + C(r)$$

Ale:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{2\cos\varphi}{r^3} + C'(r) = \frac{2\cos\varphi}{r^3}$$

skąd wynika, że:

$$C'(r) = 0$$

czyli:

$$C(r) = C = const$$

Ostatecznie:

$$f(r,\varphi) = -\frac{\cos\varphi}{r^2} + C$$

Ćwiczenia

1. Zbadać, czy pole $\overrightarrow{W} \in R^3$ jest potencjalne. Znaleźć jego potencjał (o ile istnieje).
   a) $\overrightarrow{W} = f(r)\vec{e}_r$, gdzie: $f \epsilon C^1(D)$, $D \subset R^3$
   b) $\overrightarrow{W} = -\frac{k}{r}\, grad\, r$
   c) $\overrightarrow{W} = (\vec{r} \circ \vec{b})\vec{b}$, gdzie $\vec{b}$ – wektor stały
   d) $\overrightarrow{W} = (2r + \sin\varphi)\vec{e}_r + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi + \frac{1}{3} z^{-\frac{2}{3}} \vec{e}_z$

Odp.
   a) $\varphi(r) = \int f(r)\, dr + C = F(r) + C$
   b) $f(r) = -k \ln r + C$
   c) $f(r) = \frac{1}{2}(\vec{b} \circ \vec{r})^2$
   d) $f = r^2 + r\sin\varphi + \sqrt[3]{z} + C$

2.4. Potencjał wektorowy

Definicja 2.4.1

Potencjałem wektorowym pola $\overrightarrow{W}$ nazywamy funkcję wektorową $\vec{A}$ spełniającą związek $\overrightarrow{W} = \operatorname{rot} \vec{A}$ w obszarze $D \subset R^n$.

Twierdzenie 1

Jeżeli pole $\overrightarrow{W}$ klasy $C^1(D)$ jest bezźródłowe w obszarze D, to posiada potencjał wektorowy.
Dowód:

$$div\, \overrightarrow{W} = div\left(rot\, \vec{A}\right) = 0$$

Wniosek 1

Strumień pola $\overrightarrow{W}$ mającego potencjał wektorowy w obszarze D przez dowolną powierzchnię zamkniętą i regularną leżącą w tym obszarze jest równy zeru. Wynika to z twierdzenia Gaussa, gdyż:

$$\iint_{(S^+)} \overrightarrow{W} \circ d\vec{S} = \iiint_V div\left(rot\, \vec{A}\right) dV = 0$$

Wniosek 2

Jeżeli dane jest pole $\overrightarrow{W}$ o potencjale wektorowym $\vec{A}$, to $\vec{A} + grad\, f$, gdzie f jest dowolną funkcją skalarną klasy $C^1(R^n)$, jest również potencjałem wektorowym pola $\overrightarrow{W}$.
Dowód:
Z definicji 2.4.1 mamy:

$$\overrightarrow{W} = \nabla \times \vec{A}$$

Ponieważ:

$$\nabla \times \left(\vec{A} + \nabla \mathrm{f}\right) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \nabla \mathrm{f} = \overrightarrow{W}$$

więc $\vec{A} + \nabla \mathrm{f}$ jest potencjałem wektorowym pola $\overrightarrow{W}$.

Przykład 1

Wykazać, że pole $grad\ f\ \times$ grad g, gdzie f i g są funkcjami skalarnymi klasy $C^1\ (R^n)$, posiada potencjał wektorowy.
Dowód:

Ponieważ $div\ (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \circ rot\ \vec{a} - \vec{a} \circ rot\ \vec{b}$ oraz $rot\ (grad\ f) = \vec{0}$, więc:

$$div\ (grad\ f \times grad\ g) = grad\ g \circ rot\ (grad\ f) - grad\ f \circ rot\ (grad\ g) = 0$$

Stąd pole $grad\ f \times grad\ g$ posiada potencjał wektorowy.

Przykład 2

Sprawdzić, czy pole $\vec{W} = [2xy, -y^2, 0]$ posiada potencjał wektorowy.
Ponieważ:

$$div\ \vec{W} = 0$$

więc istnieje potencjał wektorowy $\vec{A}$, który znajdujemy ze związku $rot\ \vec{A} = \vec{W}$.

Ćwiczenia

1. Sprawdzić, czy istnieją potencjały wektorowe podanych pól:
   a) $\vec{W} = [xy, yz, xz]$
   b) $\vec{W} = [xz, -yz, y]$
   c) $\vec{W} = [x, y, z]$

Odp.:
   a) Nie istnieje
   b) Na przykład: $\vec{A} = [x, xy, xyz] + grad\ f$
   c) Nie istnieje

Rozdział 3

Pole elektrostatyczne

3.1. Wiadomości wstępne

Ciało znajdujące się w stanie naelektryzowania zawiera ładunek będący miarą tego naelektryzowania.

W przypadku, gdy ładunek jest rozłożony w przestrzeni w sposób:

1. dyskretny – ładunek wypadkowy Q jest sumą ładunków elementarnych, czyli:

$$Q = \sum_i q_i$$

2. liniowy:

$$Q = \int_L \rho_L \, dL$$

   gdzie: ρ_L – gęstość liniowa ładunku
3. powierzchniowy:

$$Q = \iint_S \rho_S \, dS$$

   gdzie: ρ_S – gęstość powierzchniowa ładunku
4. objętościowy:

$$Q = \iiint_V \rho_V \, dV$$

   gdzie: ρ_V – gęstość objętościowa ładunku

Przykład 1

Znaleźć ładunek zgromadzony w kuli o promieniu R z równomiernie rozłożonym ładunkiem objętościowym.

Rozwiązanie:

Ze wzoru 4 i dlatego, że $\rho_V = const$, otrzymamy:

$$Q = \rho_V \iiint_V dV = \rho_V |V| = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_V$$

Definicja 3.1.1

Dielektryk (izolator) to zły przewodnik elektryczności. Do tej grupy zaliczają się np. /powietrze, szkło, ebonit.

Przewodnik – jak sama nazwa wskazuje – przewodzi prąd, a więc posiada swobodne ładunki elektryczne. Przewodnikami są np. metale i elektrolity.

Definicja 3.1.2

Pole pochodzące od nieruchomych ładunków elektrycznych nazywamy **polem elektrostatycznym**. Wielkością charakteryzującą to pole jest **natężenie pola elektrycznego** $\vec{E}$. Pole to jest bezwirowe, gdyż:

$$rot\,\vec{E} = \vec{0}$$

co wynika z symetrii i kierunku sił elektrycznych.

Nie jest bezźródłowe, bo

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

gdzie ε to stała dielektryczna. Może być bezźródłowe, np. wewnątrz naładowanego przewodzącego ciała.

Pole wokół dielektryka charakteryzuje **wektor indukcji elektrycznej** $\vec{D}$ powiązany z wektorem natężenia zależnością $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$.
Stąd:

$$rot\,\vec{D} = \vec{0} \qquad\qquad div\,\vec{D} = \rho$$

3.2. Strumień. Cyrkulacja

Definicja 3.2.1

Strumień wektora $\vec{E}$ przez powierzchnię S jest zdefiniowany jako:

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \iint\limits_S \vec{E} \circ d\vec{S}$$

Twierdzenie

Strumień pola $\vec{E}$ przez dowolną zamkniętą powierzchnię S, ograniczającą obszar V i zawierającą ładunek Q, jest równy:

$$\Phi_{\mathrm{E}} = \iint\limits_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \iiint\limits_V \frac{\rho}{\varepsilon} dV = \frac{Q}{\varepsilon}$$

W przypadku dielektryka:

$$\Phi_{\mathrm{D}} = \iint\limits_S \vec{D} \circ d\vec{S} = Q$$

Stąd **prawo Gaussa** można sformułować następująco:

Strumień indukcji $\vec{D}$ przez dowolną zamkniętą powierzchnię S jest równy całkowitemu ładunkowi znajdującemu się wewnątrz powierzchni. Jest on niezależny od wielkości i kształtu tej powierzchni, co pozwala na dowolny jej wybór (tzw. **powierzchni Gaussa**).

Prawo Gaussa jest użyteczne w przypadku symetrii:

a) sferycznej
b) osiowej (walec nieskończenie długi)
c) względem płaszczyzny.

Definicja 3.2.2

Cyrkulacja wektora $\vec{E}$ po dowolnej linii L jest równa:

$$C_E = \int_L \vec{E} \circ d\vec{L}$$

Z twierdzenia Stokesa i bezwirowości pola $\vec{E}$ wynika poniższy wniosek.

Wniosek

Cyrkulacja wektora $\vec{E}$ po dowolnej linii zamkniętej L jest równa zeru.
Dowód:

$$\oint_L \vec{E} \circ d\vec{L} = \iint_S rot\, \vec{E} \circ d\vec{S} = 0$$

gdzie S to dowolna powierzchnia rozpięta na linii L.

Równania Maxwella dla elektrostatyki

Postać różniczkowa:

$$rot\, \vec{E} = \vec{0}$$

$$div\, \vec{D} = \rho$$

Postać całkowa:

$$\oint_L \vec{E} \circ d\vec{L} = 0$$

$$\oiint_S \vec{D} \circ d\vec{S} = Q$$

3.3. Potencjał elektryczny

Definicja 3.3.1

Pole elektryczne jest bezwirowe, jest zatem potencjalne.

Jego potencjał znajdujemy ze związku $\vec{E} = -grad\ \varphi$, przy czym znak „minus" ma uzasadnienie w tym, że wektor $\vec{E}$ jest skierowany w stronę malejącego potencjału.
Ponieważ:

$$div\, \vec{E} = div\, (grad\ \varphi) = -\Delta\varphi$$

więc można go wyznaczyć z **równania Poissona**:

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Wewnątrz przewodnika, czyli w obszarze pozbawionym ładunków ($\rho = 0$), natężenie $\vec{E} = 0$, więc strumień $\Phi_E = 0$, potencjał $\varphi = const$.

Podobnie jest w wydrążeniu przewodnika.

Napięcie elektryczne między punktami A i B jest równe różnicy potencjałów:

$$U_{AB} = \varphi(A) - \varphi(B)$$

Rozdział 4

Pole magnetostatyczne

4.1. Wiadomości wstępne

Definicja 4.1.1

Pole magnetostatyczne powstaje w przestrzeni otaczającej stałe prądy elektryczne lub w przestrzeni, w której występują magnesy trwałe.

Charakteryzują je: **wektor natężenia magnetycznego** $\vec{H}$ i **wektor indukcji magnetycznej** $\vec{B}$, przy czym:

$$\vec{B} = \mu\vec{H}$$

gdzie μ to współczynnik przenikalności magnetycznej ośrodka.

Pole magnetostatyczne jest bezźródłowe, gdyż:

$$div\,\vec{B} = 0$$

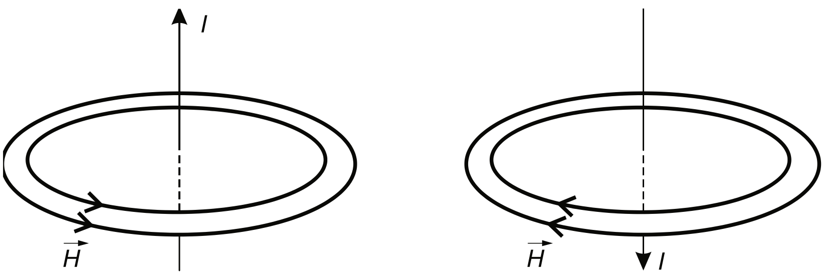
co jest uzasadnione tym, że nie stwierdzono istnienia ładunków magnetycznych analogicznych do elektrycznych

Nie jest bezwirowe (pojawia się w ośrodku przewodzącym prąd), gdyż:

$$rot\,\vec{H} = \vec{J} \qquad\qquad rot\,\vec{B} = \mu\vec{J}$$

gdzie $\vec{J}$ to wektor gęstości prądów swobodnych (skierowany w kierunku ruchu ładunków dodatnich).

Linie pola magnetycznego są liniami zamkniętymi, np. w przypadku prostoliniowego przewodu z prądem są one okręgami leżącymi w płaszczyznach prostopadłych do kierunku prądu (rys. 4.1).



Rys. 4.1. Ilustracja do wyznaczania kierunku wektora $\vec{H}$ przy użyciu reguły „korkociągu”

Natężenie pola magnetycznego wokół przewodnika z prądem I dla zamkniętego obwodu dowolnego kształtu obejmującego ten przewodnik jest równe $H = \frac{I}{2\pi r}$, gdzie r jest odległością punktów pola od przewodnika (porównaj z ćwiczeniami z części zadaniowej – magnetostatyka). W przypadku, gdy obwód nie obejmuje przewodnika, natężenie pola równe jest 0.

4.2. Cyrkulacja. Strumień magnetyczny

Definicja 4.2.1

Cyrkulacja wektora natężenia magnetycznego po dowolnej linii zamkniętej L (tzw. **konturze Ampere'a**) obejmującej prąd I jest równa:

$$C_H = \oint_L \vec{H} \circ d\vec{L}$$

Na mocy twierdzenia Stokesa i związku $rot\ \vec{H} = \vec{J}$ otrzymamy **prawo przepływu (Ampere'a)**:

$$C_H = \iint_S \vec{J} \circ d\vec{S} = I_C$$

gdyż w przypadku jednorodnego środowiska przewodzącego uzyskamy:

$$|\vec{J}||S| = I$$

Czyli cyrkulacja wektora $\vec{H}$ po dowolnej linii zamkniętej L jest równa całkowitemu prądowi płynącemu przez powierzchnię S ograniczoną linią L, czyli konturem Ampere'a.

Prawo to ma zastosowanie w przypadku symetrii osiowej, np. w nieskończenie długim, prostoliniowym przewodzie z prądem, długim walcu, toroidalnej cewce i kablu koncentrycznym. W innych przypadkach należy zastosować prawo Biota-Savarta.

Definicja 4.2.2

Cyrkulacja wektora indukcji magnetycznej:

$$C_B = \oint_L \vec{B} \circ d\vec{L} = \mu I_C$$

Wniosek 1

Cyrkulacja po dowolnej linii zamkniętej nieobejmującej prądu jest równa zeru.

Definicja 4.2.3

Strumień magnetyczny przez dowolną powierzchnię S jest równy:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \circ d\vec{S}$$

Wniosek 2

Dla dowolnej powierzchni zamkniętej S ograniczającej obszar V strumień magnetyczny jest równy zeru.

Dowód:

Z twierdzenia Gaussa i z bezźródłowości pola $\vec{B}$ otrzymamy:

$$\Phi_B = \iiint_V div\, \vec{B}\, dV = 0$$

4.3. Magnetyczny potencjał skalarny i wektorowy

W obszarze, w którym brak jest przepływu prądu ($\vec{J} = 0$, $rot\, \vec{H} = 0$), wprowadzimy skalarny potencjał magnetyczny.

Definicja 4.3.1

Skalarny potencjał magnetyczny wyznaczamy ze związku:

$$\vec{H} = -grad\, \varphi_H$$

Ponieważ:

$$div\, \vec{H} = -div\, (grad\, \varphi_H) = \Delta\varphi$$

więc z bezźródłowości pola $\vec{H}$ wynika, że skalarny potencjał magnetyczny spełnia równanie Laplace'a $\Delta\varphi = 0$.

Wektor gęstości prądów swobodnych $\vec{J} \neq \vec{0}$, zatem istnieje potencjał wektorowy $\vec{A}$, zdefiniowany (jak podano w definicji 2.4.1) jako $\vec{B} = rot\, \vec{A}$.
Ze związku:

$$rot\, \vec{B} = rot\, \left(rot\, \vec{A}\right) = grad\, \left(div\, \vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$$

uwzględniając, że $rot\, \vec{B} = \mu\vec{J}$, i przyjmując dla uproszczenia, że $div\, \vec{A} = 0$, otrzymamy definicję 4.3.2.

Definicja 4.3.2

Magnetyczny potencjał wektorowy $\vec{A}$ w dowolnym punkcie obszaru V spełnia równanie Poissona:

$$\Delta\vec{A} = -\mu\vec{J}$$

Na zewnątrz tego obszaru (gdzie $\vec{J} = 0$) potencjał ten spełnia **równanie Laplace'a**.

$$\Delta\vec{A} = 0$$

Równania Maxwella dla pola magnetostatycznego

Postać różniczkowa:	Postać całkowa:
$rot\, \vec{H} = \vec{J}$	$\oint_L \vec{H} \circ d\vec{L} = I_C$
$div\, \vec{B} = 0$	$\oiint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = 0$

Rozdział 5

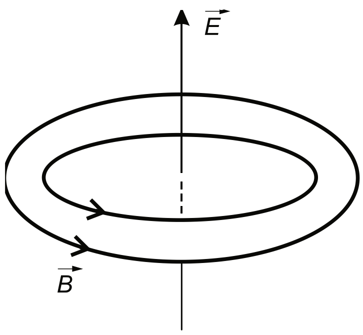
Pole elektrodynamiczne (elektromagnetyczne)

5.1. Równania Maxwella

W przypadku, gdy ładunki i prądy są stałe ($\rho = const$, $I = const$), elektryczność i magnetyzm można rozpatrywać oddzielnie, co zostało podane w rozdziałach 3 i 4.

Ścisła zależność między $\vec{E}$ i $\vec{B}$ występuje wówczas, gdy pojawiają się zmiany w czasie ładunków i prądów.

Zależność tę w interpretacji geometrycznej przedstawia rys. 5.1.



Rys. 5.1. Linie pola magnetycznego powstałe wokół pola elektrycznego

Definicja 5.1.1

Równania Maxwella dla pola elektromagnetycznego

Zmienne w czasie pole elektryczne powoduje powstanie wirowego i bezźródłowego pola magnetycznego.

Stąd:

postać różniczkowa:

$$rot\,\vec{B} = \mu\vec{j} + \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$div\,\vec{B} = 0$$

postać całkowa:

$$\oiint_S \vec{D} \circ d\vec{S} = Q$$

Definicja 5.1.2

Zmienne w czasie pole magnetyczne indukuje wirowe i źródłowe pole elektryczne. Stąd:

postać różniczkowa:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

postać całkowa:

$$\oint_L \vec{E} \circ d\vec{L} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \circ d\vec{S}$$

$$\oint_L \vec{B} \circ d\vec{L} = \iint_S \left(\mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \circ d\vec{S}$$

Z twierdzenia Gaussa wynika, że:

$$\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \circ d\vec{S} = \iiint_V div\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) dV = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t}\left(div\,\vec{B}\right) dV = 0$$

Przykład

Zapisać równania Maxwella we współrzędnych:

a) kartezjańskich b) walcowych c) sferycznych

Rozwiązanie:
Rozpatrzmy przykładowo związek:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ponieważ:

$$rot\,\vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) \times \left(E_x\vec{\imath} + E_y\vec{\jmath} + E_z\vec{k}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

zaś:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}\right) = \frac{\partial B_x}{\partial t}\vec{\imath} + \frac{\partial B_y}{\partial t}\vec{\jmath} + \frac{\partial B_z}{\partial t}\vec{k}$$

więc ostatecznie otrzymuje się układ:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

We współrzędnych walcowych mamy:

$$rot\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{e}_r}{r} & \vec{e}_\varphi & \dfrac{\vec{e}_z}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_r & rE_\varphi & E_z \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[B_r\vec{e}_r + B_\varphi\vec{e}_\varphi + B_z\vec{e}_z\right]$$

stąd:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial z} &= -\frac{\partial B_r}{\partial t} \\ \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= -\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} \\ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(rE_\varphi\right)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \varphi}\right] &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{aligned}\right\}$$

Rotacja we współrzędnych sferycznych:

$$rot\,\vec{E} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{e}_r}{r^2 \sin\theta} & \dfrac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ E_r & rE_\theta & rE_\varphi \sin\theta \end{vmatrix} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[B_r\vec{e}_r + B_\theta\vec{e}_\theta + B_\varphi\vec{e}_\varphi\right]$$

stąd:

$$\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(\sin\theta\, E_\varphi\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial\varphi}\right] = -\frac{\partial B_r}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial E_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial rE_\varphi}{\partial r}\right] = -\frac{\partial B_\theta}{\partial t}$$

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial\theta}\right] = -\frac{\partial B_\varphi}{\partial t}$$

Czytelnikowi zaleca się przekształcenie pozostałych równań Maxwella.

5.2. Potencjał skalarny i wektorowy

Definicja 5.2.1

Pole elektromagnetyczne posiada magnetyczny potencjał wektorowy $\vec{A}$ (gdyż $div\,\vec{B} = 0$), spełniający związek $\vec{B} = rot\,\vec{A}$ (def. 2.4.1), co wynika z faktu, że:

$$div\,\vec{B} = div\left(rot\,\vec{A}\right) = 0$$

Z równania Maxwella (definicja 5.1.2) mamy $rot\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$, a uwzględniając, że $\vec{B} = rot\,\vec{A}$, otrzymamy:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\,\vec{A}\right) = -rot\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

stąd:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Definicja 5.2.2

W polach elektromagnetycznych wytwarzanych przez dowolne źródło $(\rho, \vec{J})$ mamy z definicji 5.2.1:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$$

stąd:

$$rot\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}$$

więc istnieje potencjał skalarny φ pola elektromagnetycznego, który wyznaczamy ze związku:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = grad\ \varphi$$

5.3. Prąd przewodzenia. Prąd przesunięcia

Pole przepływowe jest związane z przepływem stałego w czasie prądu elektrycznego.

Definicja 5.3.1

Przewodnikiem nazywamy ciało, w którym ładunki elektryczne mogą się swobodnie poruszać, a ruch ten powoduje powstanie tzw. **prądu przewodzenia**. Kierunek przenoszenia ładunku elektrycznego uwzględnia **wektor gęstości prądu przewodzenia** $\vec{J}$.

a) Związek między wektorem $\vec{J}$ a wektorem natężenia $\vec{E}$ wyraża **prawo Ohma**:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

gdzie σ to przewodność właściwa przewodu.

b) W przypadku stałego w czasie prądu stacjonarnego o gęstości J (dla dowolnego punktu w przestrzeni) musi być spełnione **równanie ciągłości prądu**, czyli **prawo Kirchhoffa**:

$$div\,\vec{J} = 0$$

co oznacza, że pole przepływowe jest bezźródłowe i linie pola są liniami zamkniętymi. Natężenie prądu płynącego przez przewodnik o przekroju S:

$$I = \iint_S \vec{J} \circ d\vec{S}$$

Jeżeli prąd wypływa z dowolnej powierzchni zamkniętej S, to z twierdzenia Gaussa i z równania ciągłości prądu wynika, że:

$$\oint\!\!\oint_S \vec{J} \circ d\vec{S} = 0$$

czyli całkowity prąd wypływający z dowolnej zamkniętej powierzchni S jest równy zeru.

c) Przepływ prądu w dielektryku zachodzi wtedy, gdy pole elektryczne jest zmienne w czasie.
Wektor **gęstości prądu przesunięcia** jest wyrażony wzorem:

$$\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

d) **Wektor całkowitej gęstości prądu** jest sumą gęstości prądu przewodzenia i przesunięcia, czyli:

$$\vec{J}_C = \vec{J} + \vec{J}_P$$

W polu przepływowym $rot\,\vec{E} = 0$ (II prawo Kirchhoffa), więc pole to jest potencjalne (co stwierdzono w podrozdziale 3.1).
Jeżeli prąd nie jest stacjonarny (J zależy od czasu), to:

$$div\,\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

(rozkład ładunku zależy od czasu).

Przykład

Znaleźć gęstość prądu przesunięcia i przewodzenia, wiedząc, że natężenie pola $\vec{E}$ jest zmienne w czasie i wyraża się wzorem $E = E_0 \sin \omega t$.

Rozwiązanie:
Gęstość prądu przesunięcia:

$$J_P = \frac{\mathrm{d}D}{dt} = \varepsilon \frac{\mathrm{d}E}{dt} = \varepsilon \omega E_0 \cos \omega t$$

Gęstość prądu przewodzenia:

$$J = \sigma E = \sigma E_0 \sin \omega t$$

5.4. Siła elektromotoryczna

Zmienne pole magnetyczne indukuje w uzwojeniu siłę elektromotoryczną (SEM) w części zadaniowej oznaczonej jako *e*(*t*).

Prawo indukcji elektromagnetycznej Faradaya

Siła elektromotoryczna indukcji powstaje wskutek zmian strumienia magnetycznego, czyli strumień przenikający uzwojenie zależy od położenia i orientacji tego uzwojenia w przestrzeni, zatem:

$$\Psi = \mathrm{f}(t, \theta, x, y, z)$$

gdzie θ to kąt między $\vec{B}$ a osią obrotu uzwojenia.

Stąd:

$$\mathrm{SEM} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \omega \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - v \nabla \Psi = \mathrm{SEM_T} + \mathrm{SEM}_{rot} + \mathrm{SEM}_P$$

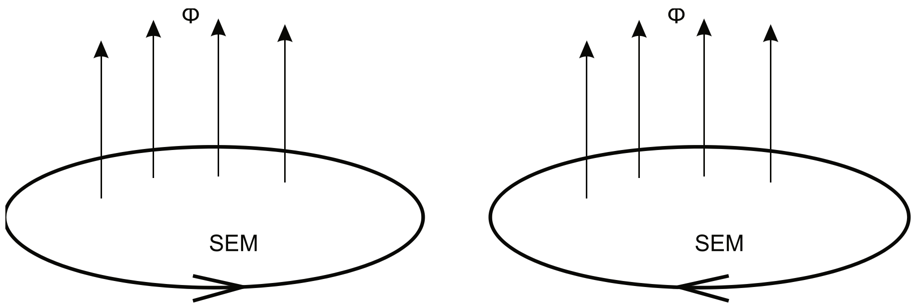
gdzie: SEM_T – siła elektromotoryczna transformacji, SEM_{rot} – siła elektromotoryczna rotacji, SEM_P – siła elektromotoryczna translacji (przesunięcia).

Definicja 5.4.1

SEM transformacji jest związana ze zmianą strumienia magnetycznego przepływającego w czasie t przez nieruchome uzwojenie. Wówczas:

$$\mathrm{SEM}_T = -\frac{d\Phi}{dt}$$

czyli siła elektromotoryczna jest proporcjonalna do prędkości zmian strumienia magnetycznego w czasie. Znak „minus” oznacza, że wzrost strumienia magnetycznego powoduje powstanie SEM działającej w kierunku ujemnego obiegu obwodu i zmniejszenie SEM działającej w kierunku obiegu dodatniego, co zostało zinterpretowane na rys. 5.2.



$\mathrm{SEM} = -\frac{d\Phi}{dt}$ $\qquad$ $\mathrm{SEM} = +\frac{d\Phi}{dt}$

Rys. 5.2. Zależność kierunku SEM od szybkości zmian strumienia magnetycznego

Jeżeli uzwojenie zawiera n zwojów i przez każdy zwój przenika ten sam strumień $\Phi(t)$, to **strumień skojarzony** $\Psi = n\Phi$, czyli:

$$\mathrm{SEM} = -\frac{d\Psi}{dt}$$

Uwaga 1

Definicja ta jest słuszna niezależnie od tego, co powoduje zmianę strumienia przechodzącego przez obwód: zmiana kształtu obwodu, obrót lub przesunięcie ramki w niejednorodnym polu bądź zmiana w czasie indukcji magnetycznej.

Definicja 5.4.2

SEM rotacji jest związana z ruchem obrotowym (z prędkością ω) uzwojenia wokół osi l.

$$\mathrm{SEM}_{rot} = -\omega\frac{d\Psi}{d\theta}$$

Definicja 5.4.3

SEM translacji – jest związana z przesuwaniem się uzwojenia (np. cewki) z prędkością liniową v względem pola magnetycznego $\vec{B}$.

$$\mathrm{SEM}_P = -v\ grad\ \Psi$$

Całkowita siła elektromotoryczna indukowana w obwodzie jest – w zależności od rodzaju indukowania – sumą wyżej wymienionych sił.

Jeżeli przewód przesuwa się w polu magnetycznym $\vec{B}$ z prędkością $\vec{v}$, to powstaje pole:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$$

Wówczas SEM przesunięcia można obliczyć ze **wzoru Lorentza**:

$$\mathrm{SEM}_P = \int_L \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \circ d\vec{L}$$

W uzwojeniach o bokach prostopadłych do wektora $\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$ SEM nie indukuje się, gdyż:

$$\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \circ d\vec{L} = \left|\vec{v} \times \vec{B}\right|\left|d\vec{L}\right| \cos \sphericalangle\left(\vec{v} \times \vec{B}, d\vec{L}\right) = 0$$

Definicja 5.4.4

Zmiana natężenia prądu w uzwojeniu indukuje w nim **SEM samoindukcji**:

$$SEM = -L\frac{dI}{dt}$$

gdzie L jest współczynnikiem samoindukcji obwodu.

Znak „minus" oznacza, że SEM przeciwdziała zmianom prądu.

Zjawisko to nazywamy zjawiskiem indukcji własnej (samoindukcji).

Definicja 5.4.5

Współczynnik indukcji własnej obwodu wyraża się wzorem:

$$L = \frac{\Psi}{I}$$

gdzie Ψ to strumień magnetyczny skojarzony z obwodem.

Definicja 5.4.6

Indukcyjność wzajemna przewodnika z prądem i ramki (cewki) znajdującej się w jednej płaszczyźnie z przewodnikiem wyraża się wzorem:

$$M = \frac{\Psi}{I}$$

Wniosek

Jeżeli w przewodzie płynie prąd zmienny $I = I(t)$, to ponieważ strumień magnetyczny $\Phi = LI$:

$$\frac{d\Phi}{dt} = L\frac{dI}{dt}$$

Ale:

$$\Phi_{\mathrm{B}} = \iint_S \vec{B} \circ d\vec{S}$$

$$\frac{d\Phi_{\mathrm{B}}}{dt} = \iint\limits_{S} \frac{d\vec{B}}{dt} \circ d\vec{S}$$

Uwzględniając postać całkową równania Maxwella, otrzymamy:

$$SEM = \frac{d\Phi_{\mathrm{B}}}{dt} = -\oint\limits_{L} \vec{E} \circ d\vec{L}$$

gdzie L jest krzywą zamkniętą, znajdującą się w zmiennym polu $\vec{E}$.

Czyli SEM można obliczać jako cyrkulację pola $\vec{E}$ po linii L.

Rozdział 6

Zadania

6.1. Zadania dotyczące współrzędnych wektora

Zadanie 1. Dany jest punkt we współrzędnych sferycznych:

$$r = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \varphi = \frac{\pi}{4} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Wyznaczyć:
a) współrzędne prostokątne;
b) współrzędne walcowe

tego punktu.

Rozwiązanie:
a) Wychodząc ze współrzędnych sferycznych, otrzymamy:

$$x = r\cos\varphi\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

$$y = r\sin\varphi\sin\theta = \frac{1}{3}$$

$$z = r\cos\theta = \frac{1}{3}$$

Czyli we współrzędnych prostokątnych: $P' = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$

b) $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3} \qquad \varphi = \frac{\pi}{4} \qquad z = \frac{1}{3}$

Zadanie 2. Punkt P ma współrzędne walcowe:

$$r = 4 \qquad \varphi = \frac{\pi}{4} \qquad z = 3$$

Podać:
a) współrzędne prostokątne; b) współrzędne sferyczne

tego punktu.

Rozwiązanie:

a) $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \\ \frac{x}{y} = \operatorname{tg}\varphi = 1 \end{cases}$

Z otrzymanego układu równań $x = y = 2\sqrt{2}$

Stąd: $P' = \left(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}; 3\right)$

b) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 5$

$\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{3}{5}$ czyli: $\theta = arc\cos\frac{3}{5}$

$\cos\varphi = \frac{x}{r\sin\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ stąd: $\varphi = \frac{\pi}{4}$

Zatem:

$$P'' = (5; \frac{\pi}{4}; arc\cos\frac{3}{5})$$

Zadanie 3. Wyznaczyć współrzędne walcowe wektora:

$$\overrightarrow{W} = (x - z)\vec{e}_y$$

Rozwiązanie:
Zapisujemy w postaci równania macierzowego:

$$\begin{bmatrix} W_r \\ W_\varphi \\ W_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ r\cos\varphi - z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\varphi\,(r\cos\varphi - z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stąd:

$$\overrightarrow{W} = \sin\varphi\,(r\cos\varphi - z)\vec{e}_\varphi$$

Zadanie 4. Podać współrzędne walcowe wektora:

$$\overrightarrow{W} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\vec{e}_x + \frac{y\vec{e}_y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + z\vec{e}_z$$

Rozwiązanie:

$$\{\vec{w} = \vec{e}_r + z\vec{e}_z\}$$

Zadanie 5. Wyznaczyć współrzędne sferyczne wektora:

$$\overrightarrow{W} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

Rozwiązanie:

$$\begin{bmatrix} W_r \\ W_\theta \\ W_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cos\varphi\sin\theta \\ r\sin\varphi\sin\theta \\ r\cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

czyli: $\overrightarrow{W} = r\vec{e}_r$

Zadanie 6. Wyznaczyć współrzędne sferyczne wektora $\overrightarrow{W} = \frac{\vec{r}}{r}$, gdzie $\vec{r}$ jest wektorem wodzącym, a r – jego długością.

Odpowiedź: $\{\overrightarrow{W} = \vec{e}_r\}$

Zadanie 7. Podać wektor $\vec{W} = -r\ cos\theta\ \vec{e}_r + r\ sin\theta cos\theta\ \vec{e}_\theta$ we współrzędnych prostokątnych.

$$\begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r^2\cos^2\theta \\ r\sin\theta\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -r\cos\theta \end{bmatrix}$$

Czyli $\vec{W} = -z\vec{e}_z$

6.2. Zadania dotyczące cyrkulacji

Zadanie 1. Obliczyć cyrkulację wektora $\vec{W} = [2y, x]$ po linii $x^2 + y^2 = 4$.

Rozwiązanie:

Linia L w postaci parametrycznej:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle \quad dx = -2\sin t\, dt$$

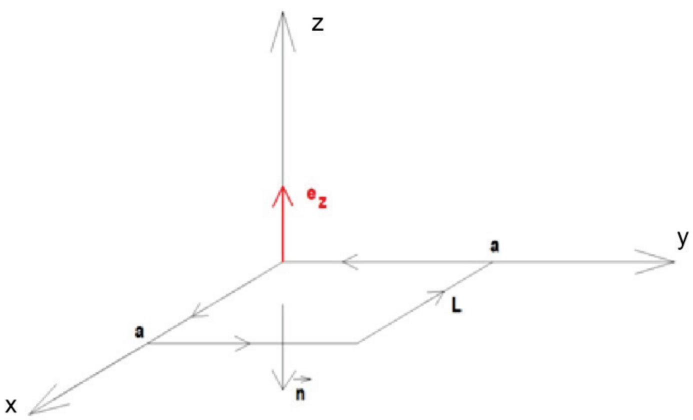
$$dy = 2\cos t\, dt$$

Stąd cyrkulacja jest równa:

$$C_{\vec{W}} = \oint_L 2ydx + xdy = \int_0^{2\pi} (-8\sin^2 t + 4\cos^2 t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2 + 6\cos 2t)dt = -4\pi$$

Zadanie 2. Wyznaczyć cyrkulację wektora $\vec{W} = (1 + y)\ \vec{e}_x$ po linii wyznaczonej prostymi $x = a,\ \ y = a$ i osiami układu.



Rys. 6.1. Ilustracja do wyznaczania cyrkulacji wektora po linii L

Rozwiązanie:
Na podstawie twierdzenia Stokesa cyrkulacja:

$$C_{\vec{W}} = \iint_S rot\ \vec{W} \circ d\vec{s}$$

Ponieważ:

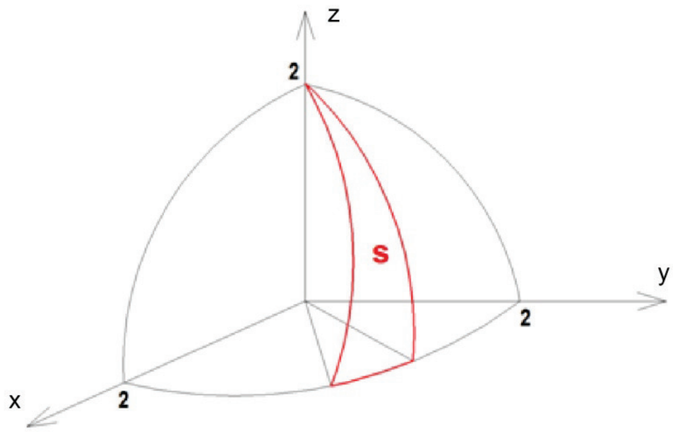
$$rot\ \vec{W} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial_x} & \dfrac{\partial}{\partial_y} & \dfrac{\partial}{\partial_z} \\ 1+y & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_z$$

więc cyrkulacja równa jest:

$$C_{\vec{W}} = \iint_S [0,0,-1] \cdot [dydz, dxdz, dxdy] = -\iint_D dxdy = -a^2$$

Zadanie 3. Znaleźć cyrkulację wektora $\vec{W} = r\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\varphi$ po krzywej powstałej z przecięcia powierzchni $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ płaszczyznami $y - x = 0,\ y - x\sqrt{3} = 0,$ $z = 0\ (z \geq 0)$

Rozwiązanie:
I metoda



Rys. 6.2. Ilustracja do wyznaczania cyrkulacji przy zastosowaniu twierdzenia Stokesa

Z twierdzenia Stokesa cyrkulacja jest równa: $\iint_S rot\ \vec{W} \circ d\vec{s}$
Wyznaczamy rotację we współrzędnych sferycznych:

$$rot\ \vec{W} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{e}_r}{r^2 \sin\theta} & \dfrac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ r & 0 & r\sin^2\theta \end{vmatrix} = \frac{2\cos\theta}{r}\,\vec{e}_r - \frac{\sin\theta}{r}\vec{e}_\theta$$

Element powierzchniowy we współrzędnych sferycznych:

$$d\vec{S} = r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta \, \vec{e}_r + r \sin\theta \, d\varphi dr \, \vec{e}_\theta + r dr d\theta \, \vec{e}_\varphi$$

Stąd cyrkulacja jest równa:

$$C_{\vec{W}} = \iint_S (2r \sin\theta \cos\theta \, d\varphi d\theta - \sin^2\theta \, dr d\varphi)$$

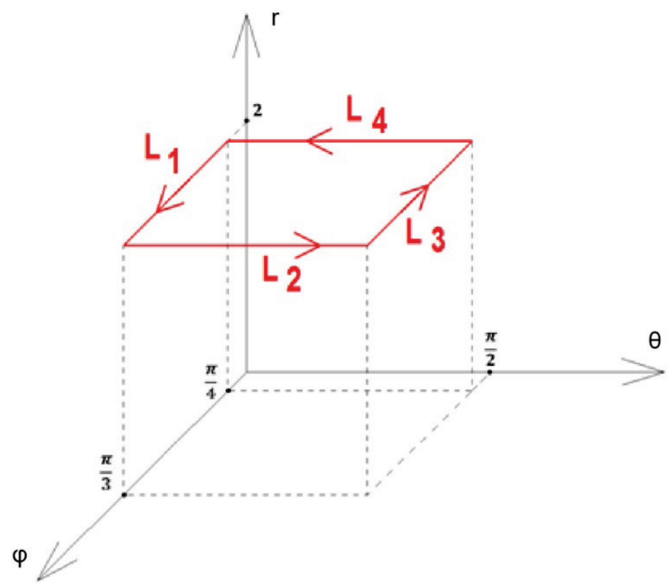
Powierzchnia S we współrzędnych sferycznych:

$$S: \begin{cases} r - 2 = 0 \;\; dr = 0 \\ \dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3} \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Stąd cyrkulacja jest równa:

$$C_{\vec{W}} = 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, d\theta = \frac{\pi}{6}$$

II metoda



Rys. 6.3. Ilustracja do wyznaczania cyrkulacji w układzie sferycznym

Element liniowy we współrzędnych sferycznych:

$$d\vec{L} = dr \, \vec{e}_r + r d\theta \, \vec{e}_\theta + r \sin\theta \, d\varphi \, \vec{e}_\varphi$$

Cyrkulacja jest równa:

$$C_{\vec{W}} = \oint_L \vec{W} \circ d\vec{L} = \oint_L r \, dr + r \sin\theta \, d\varphi$$

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$$

gdzie:

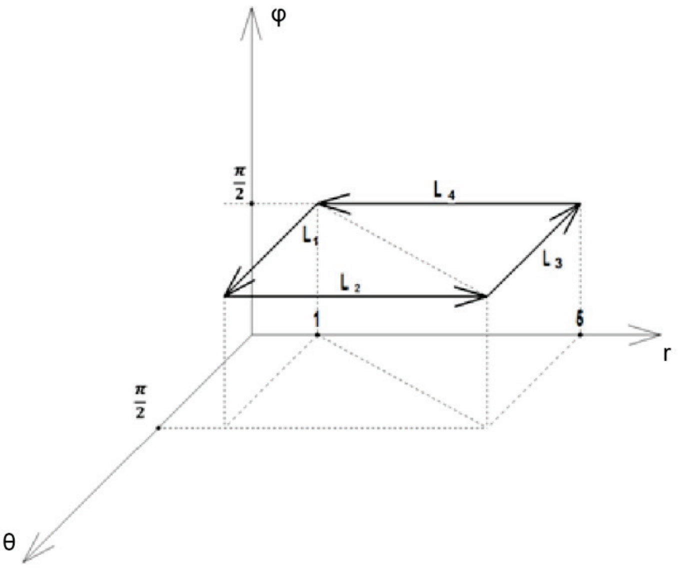
$$L_1 = \begin{cases} r-2=0, & dr=0 \\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3} & \\ \theta = \frac{\pi}{2}, & d\theta = 0 \end{cases} \quad L_2 = \begin{cases} r-2=0, & dr=0 \\ \varphi = \frac{\pi}{3}, & d\varphi = 0 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} & \end{cases}$$

$$L_3 = \begin{cases} r-2=0, & dr=0 \\ \frac{\pi}{4} \leq -\varphi \leq \frac{\pi}{3} & \\ \theta = \frac{\pi}{2}, & d\theta = 0 \end{cases} \quad L_4 = \begin{cases} r-2=0, & dr=0 \\ 0 \leq -\theta \leq \frac{\pi}{2} & \\ \varphi = \frac{\pi}{4}, & d\varphi = 0 \end{cases}$$

Stąd cyrkulacja:

$$C_{\overrightarrow{W}} = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2 \sin\frac{\pi}{2}\, d\varphi = \frac{\pi}{6}$$

Zadanie 4. Obliczyć cyrkulację wektora $\overrightarrow{W} = -r\,\vec{e}_r + \sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi$ po linii leżącej na płaszczyźnie $\varphi = \frac{\pi}{2}$, utworzonej z przecięcia powierzchni $r = 1,\ r = 5$ płaszczyznami $\theta = 0,\ \theta = \frac{\pi}{2}$. Sprawdzić, czy pole $\overrightarrow{W}$ jest bezwirowe.



Rys. 6.4. Ilustracja do wyznaczania cyrkulacji w układzie sferycznym

Rozwiązanie:

Zgodnie z definicją cyrkulacji:

$$C_{\overrightarrow{W}} = \int\limits_L \overrightarrow{W} \circ d\vec{L}$$

Ponieważ element liniowy we współrzędnych sferycznych ma postać:

$$d\vec{L} = dr\vec{e}_r + r\, d\theta\vec{e}_\theta + r\sin\theta\ d\varphi\vec{e}_\varphi$$

stąd:

$$C_{\vec{W}} = \int_L -rdr + r\sin\theta\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi$$

Uwzględniając, że $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$, gdzie:

$$L_1 = \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2}, & d\varphi = 0 \\ r = 1, & dr = 0 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2}, & d\varphi = 0 \\ 1 \le r \le 5 \\ \theta = \frac{\pi}{2}, & d\theta = 0 \end{cases}$$

$$L_3 = \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2}, & d\varphi = 0 \\ r = 5, & dr = 0 \\ \theta \epsilon < \frac{\pi}{2}; 0 > \end{cases} \qquad L_4 = \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2}, & d\varphi = 0 \\ r\epsilon < 5; 1 > \\ \theta = 0, & d\theta = 0 \end{cases}$$

otrzymamy:

$$C_{\vec{W}} = \int_1^5 -rdr + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta + \int_5^1 -rdr + \int_{\frac{\pi}{2}}^0 5\sin\theta\, d\theta = -4$$

Pole $\vec{w}$ nie jest bezwirowe, gdyż cyrkulacja tego wektora po linii zamkniętej L jest różna od zera.

Zadanie 5. Znaleźć cyrkulację wektora $\vec{w} = 5\cos\varphi\ \vec{e}_r + \sin\theta\ \vec{e}_\theta$ po linii leżącej na powierzchni $\theta = \frac{\pi}{4}$, utworzonej z przecięcia sfery $r = 3$ płaszczyznami $\varphi = 0,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Rozwiązanie:
Ponieważ $rot\ \vec{w} = \frac{-5\sin\varphi}{r\sin\theta}\vec{e}_\theta$ (co pozostawiamy do sprawdzenia czytelnikowi), więc zgodnie z twierdzeniem Stokesa:

$$C_{\vec{w}} = \iint_S rot\ \vec{w} \circ d\vec{s}$$

Uwzględniając, że $d\vec{s} = rsin\theta drd\varphi\vec{e}_\theta$:

$$C_{\vec{W}} = -5\iint_S \sin\varphi\, drd\varphi = 5\int_0^3 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\, d\varphi = -15$$

Zadanie 6. Obliczyć cyrkulację wektora $\vec{W} = 3r\ \vec{e}_r + r\ \cos\theta\ \vec{e}_\theta - \sin\varphi\ \vec{e}_\varphi$ po linii powstałej z przecięcia się powierzchni $r = 1,\ r = 2,\ \varphi = \frac{\pi}{3},\ \varphi = \frac{\pi}{2},\ \theta = \frac{\pi}{3}$.

Rozwiązanie:
Linia $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$, gdzie:

$$L_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{2} & \\ r = 2, & dr = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{3}, & d\theta = 0 \end{cases} \qquad L_2 = \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{3}, & d\varphi = 0 \\ 1 \le r \le 2 & \\ \theta = \frac{\pi}{3}, & d\theta = 0 \end{cases}$$

$$L_3 = \begin{cases} 2 \le r \le 1 & \\ \theta = \frac{\pi}{3}, & d\theta = 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2}, & d\varphi = 0 \end{cases} \qquad L_4 = \begin{cases} r = 1, & dr = 0 \\ \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} & \\ \theta = \frac{\pi}{3}, & d\theta = 0 \end{cases}$$

Stąd:

$$C_{\vec{W}} = \int_L \vec{w} \circ d\vec{L} = \int_L 3r\,dr + r^2 \cos\theta\, d\theta - r \sin\varphi \sin\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} -2\sin\varphi \sin\frac{\pi}{3} d\varphi + \int_1^2 3rdr + + \int_2^1 3rdr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -\sin\varphi \sin\frac{\pi}{3} d\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Zadanie 7. Znaleźć cyrkulację wektora $\vec{W} = r^3\,\vec{e}_r + \cos 2\theta \vec{e}_\theta + \sin 2\varphi\,\vec{e}_\varphi$ po linii powstałej z przecięcia sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ płaszczyznami $z = 0,\ y = 0$.

Rozwiązanie:
Ponieważ:

$$rot\,\vec{w} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_r}{r^2 \sin\theta} & \frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} & \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ r^3 & \cos 2\theta & \sin 2\varphi \end{vmatrix} = 0$$

Cyrkulacja na mocy twierdzenia Stokesa równa się zeru.

6.3. Zadania dotyczące strumienia

Zadanie 1. Znaleźć strumień wektora wodzącego $\vec{r} = [x, y, z]$ przez powierzchnię kuli o promieniu R.

Rozwiązanie:
Z twierdzenia Gaussa:

$$\Phi = \iint_S \vec{r} \circ d\vec{S} = \iiint_V div\,\vec{r} dV$$

Ponieważ $div\,\vec{r} = 3$, więc:

$$\Phi = 3 \iiint_V dV = 3\,|v| = 4\pi R^3$$

Zadanie 2. Znaleźć strumień wektora $\vec{W} = x^2\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$ przez powierzchnię sfery:

$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ x \ge 0;\ z \ge 0 \end{cases}$$

Rozwiązanie:
Ponieważ $div\,\vec{w} = 2x + 2$, więc z twierdzenia Gaussa i po wprowadzeniu współrzędnych sferycznych:

$$\Phi = \iiint\limits_V 2(x+1)dV = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^2 (r\cos\varphi\sin\theta + 1)r^2 dr = \frac{28}{3}\pi$$

Zadanie 3. Znaleźć strumień wektora $\vec{W} = r^2 \sin\varphi\, \vec{e}_r + 2r^2 \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi + z^2\, \vec{e}_z$ przez powierzchnię walca $x^2 + y^2 = 1$ ograniczoną płaszczyznami $z = 0$, $z = H$, $(z \geq 0)$.

Rozwiązanie:
Dywergencja wektora $\vec{W}$ we współrzędnych walcowych:

$$div\ \vec{W} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^3 \sin\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}(2r^2 \cos\varphi) + \frac{\partial(z^2)}{\partial z} = 3r\sin\varphi - 2r\sin\varphi + 2z =$$
$$= r\sin\varphi + 2z$$

Z twierdzenia Gaussa:

$$\Phi = \iiint\limits_V (r\sin\varphi + 2z)dV = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_0^H (r\sin\varphi + 2z)dz = \pi H^2$$

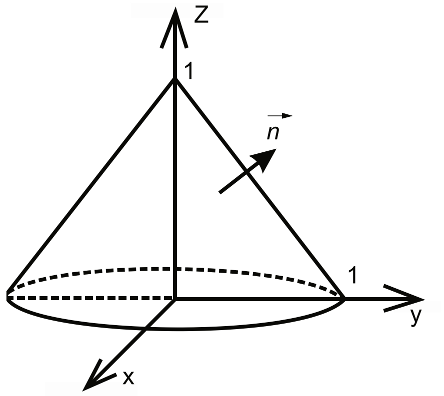
Zadanie 4. Znaleźć strumień wektora $\vec{w} = \frac{1}{r}\,\vec{e}_r + r\cos\varphi\,\vec{e}_\varphi + z\sin\varphi\,\vec{e}_z$ przez dowolną powierzchnię zamkniętą S.

Rozwiązanie:
Ponieważ $div\,\vec{w} = 0$, więc $\Phi_{\vec{w}} = 0$.

Zadanie 5. Znaleźć strumień wektora $\vec{W} = r\sin^2\theta\,\vec{e}_r - \frac{r\cos^3\theta}{\sin\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\vec{e}_\varphi$:

a) przez powierzchnię stożka:

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (z \geq 0)$$



Rys. 6.5. Wyznaczanie strumienia wektora $\vec{W}$ przez powierzchnię stożka

Rozwiązanie:
Dywergencja wektora $\vec{W}$ we współrzędnych sferycznych:

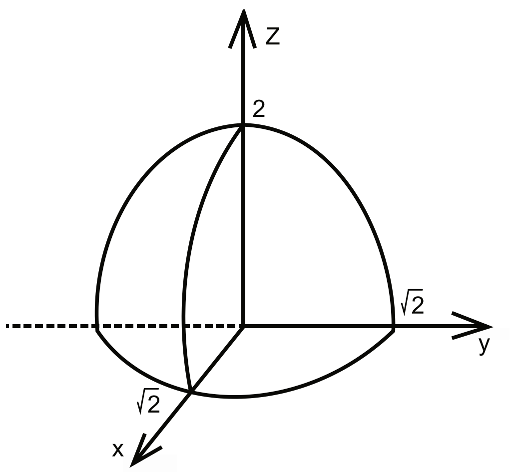
$$div\ \vec{W} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 \sin^2\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(-r\cos^3\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial r}{\partial\varphi} = 3$$

więc na mocy twierdzenia Gaussa:

$$\Phi = 3\iiint\limits_V dV = 3\pi$$

b) przez powierzchnię S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$
Odpowiedź: $\Phi = 32\pi R^3$

Zadanie 6. Znaleźć strumień wektora $\vec{W} = r^2\ \vec{e}_r + \frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\ \vec{e}_\theta + r\cos\theta\ \vec{e}_\varphi$ przez powierzchnię paraboloidy $z = 2 - x^2 - y^2\ \ (z \geq 0)$.



Rys. 6.6. Wyznaczanie strumienia wektora $\vec{W}$ przez powierzchnię paraboloidy

Rozwiązanie:
Dywergencja wektora:

$$div\ \vec{w} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^4) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin\varphi}{r}\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}(r\cos\theta) = 4r$$

Stąd strumień:

$$\Phi = \iiint\limits_V 4r dV = 4\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r^2 \int\limits_0^{2-r^2} dz = \frac{64}{15}\pi\sqrt{2}$$

6.4. Zadania z elektrostatyki

Zadanie 1. Sprawdzić, czy pole wytworzone przez ładunek punktowy q znajdujący się w początku układu jest potencjalne. Znaleźć potencjał na zewnątrz kuli o promieniu R równomiernie naładowanej ładunkiem q oraz strumień pola $\vec{E}$ przez powierzchnię tej kuli:

Rozwiązanie:

Wektor indukcji elektrycznej $\vec{D}$ ma kierunek radialny, czyli jest prostopadły do powierzchni koncentrycznych kul, w których środku znajduje się ładunek q.

Ze względu na symetrię, przy uwzględnieniu, że $\vec{D} = \vec{E}\varepsilon$, i z prawa Gaussa wynika, że:

$$\iint_S \vec{D} \circ d\vec{S} = q$$

czyli:

$$\varepsilon E_r \iint_S ds = q \qquad \varepsilon E_r 4\pi r^2 = q$$

stąd:

$$E_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2} \qquad \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$$

Dla punktów na zewnątrz kuli pole $\vec{E}$ jest identyczne jak pole ładunku punktowego umieszczonego w środku kuli. Czyli pole wewnątrz kuli jest równe zeru, na zewnątrz zaś $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r$. Ponieważ rotacja we współrzędnych sferycznych:

$$rot\,\vec{w} = \begin{vmatrix} \frac{\vec{e}_r}{r^2 \sin\theta} & \frac{\vec{e}_\theta}{r\sin\theta} & \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

więc pole $\vec{E}$ jest potencjalne, co stanowi oczywisty fakt (gdyż pole elektrostatyczne jest bezwirowe). Potencjał φ znajdujemy ze związku $\vec{E} = -grad\,\varphi$, więc dla $r > R$:

$$\varphi(r) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon r}$$

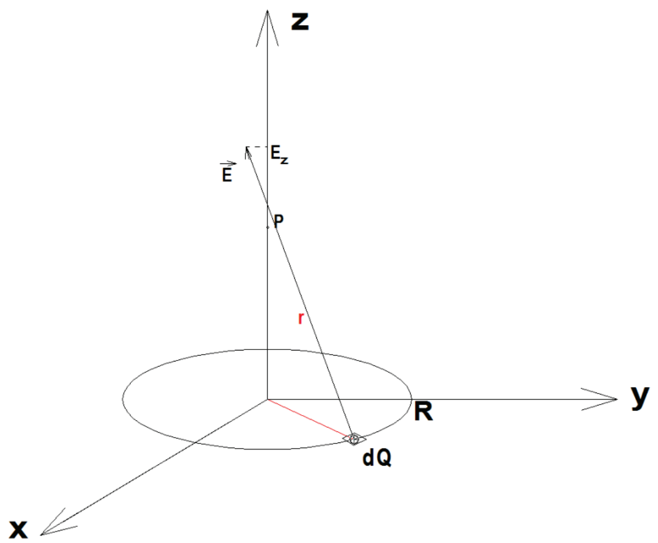
Strumień pola $\vec{E}$ przez zamkniętą powierzchnię kuli S, obejmującą ładunek q:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \iint_D \frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{e}_r \circ r^2 \sin\theta\, d\varphi d\theta \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = \frac{q}{\varepsilon}$$

Zadanie 2

a) Ładunek Q jest równomiernie rozłożony na okręgu o promieniu R z gęstością liniową ρ_L. Znaleźć potencjał i natężenie pola elektrostatycznego w punktach leżących na osi Oz.

$$P = (0, 0, z)$$



Rys. 6.7. Ilustracja do obliczania natężenia pola $\vec{E}$ naładowanego okręgu

Rozwiązanie:

$$dQ = \rho_L dL = \frac{Q}{2\pi R} dL \qquad \text{bo:} \qquad \rho_L = \frac{Q}{|L|} = \frac{Q}{2\pi R}$$

Ponieważ:

$$r = \sqrt{z^2 + R^2}$$

stąd:

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{2\pi R}\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} dL$$

czyli:

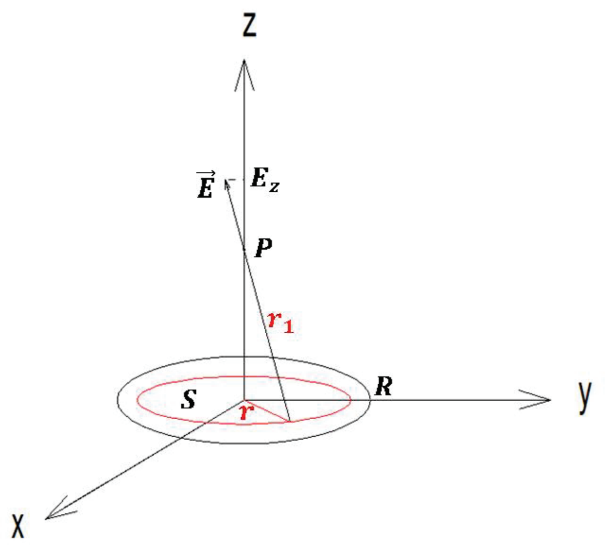
$$\varphi = \frac{Q}{8\pi^2 \varepsilon R\sqrt{z^2 + R^2}} \int_L dL = \frac{Q}{8\pi^2 \varepsilon R\sqrt{z^2 + R^2}} |L| = \frac{Q}{8\pi^2 \varepsilon R\sqrt{z^2 + R^2}} 2\pi R =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon\sqrt{z^2 + R^2}}$$

Ponieważ $\vec{E} = -grad\ \varphi(z)$, więc:

$$\vec{E} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon(\sqrt{z^2 + R^2})^3} \vec{e}_z$$

b) Znaleźć potencjał i natężenie pola elektrostatycznego w punktach leżących na osi Oz_+, wiedząc, że ładunek powierzchniowy ρ_S jest rozłożony równomiernie na kole o promieniu R.



Rys. 6.8. Ilustracja do obliczania potencjału na osi symetrii naładowanego koła

Rozwiązanie:
Ponieważ:

$$r_1 = \sqrt{z^2 + r^2}$$

więc:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iint\limits_S \frac{\rho_S dS}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon} \iint\limits_D \frac{dxdy}{\sqrt{z^2 + r^2}}$$

Obszar D jest kołem spełniającym nierówność:

$$x^2 + y^2 \leq R^2$$

Po wprowadzeniu współrzędnych biegunowych, czyli:

$$\begin{cases} x = r\cos\beta \\ y = r\sin\beta \\ Jakobian = r \end{cases}$$

otrzymamy potencjał:

$$\varphi = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{2\pi} d\beta \int_0^R \frac{rdr}{\sqrt{z^2 + r^2}} = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0} \sqrt{z^2 + r^2}\Big|_0^R = \frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{z^2 + R^2} - z\right)$$

i natężenie pola:

$$E_Z = -\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1\right)$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho_S}{2\varepsilon_0}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1\right)\vec{e}_z$$

Zadanie 3. Podać wzory na natężenie pola elektrostatycznego, korzystając ze związków I–III.

I. Jeżeli ładunek jest rozmieszczony w obszarze skończonym z gęstością ρ_L, to w punkcie P odległym o r od punktu obszaru potencjał wyraża się wzorem:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_L \frac{\rho_L}{r}\,dL$$

II. W przypadku, gdy potencjał jest wytworzony przez ładunek powierzchniowy znajdujący się na powierzchni S (co ma miejsce w przypadku naładowanych ciał metalowych), wyraża się wzorem:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iint_S \frac{\rho_S ds}{r}$$

III. Potencjał wytworzony przez ładunek objętościowy o gęstości ρ_V:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho_V}{r}dV$$

Ponieważ:

$$\vec{E} = -grad\ \varphi(r) = -\varphi'(r)\frac{\vec{r}}{r} = -\varphi'(r)\vec{r}_0$$

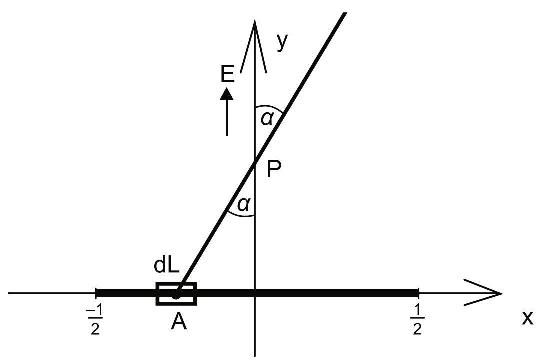
gdzie $\vec{r}_0$to wektor wodzący jednostkowy,
otrzymamy odpowiednio:

I. $\vec{E}(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\int_L \frac{\rho_L}{r^2}\vec{r}_0\,dL$

II. $\vec{E}(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\iint_S \frac{\rho_S}{r^2}\vec{r}_0\,dS$

III. $\vec{E}(r) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\displaystyle\iiint_V \frac{\rho_V}{r^2}\vec{r}_0\,dV$

Zadanie 4. Cienki, nieprzewodzący pręt o długości l posiada ładunek q rozłożony równomiernie z gęstością liniową ρ_L. Znaleźć pole $\vec{E}$ w punkcie P leżącym na symetralnej pręta.



Rys. 6.9. Ilustracja do obliczania pola $\vec{E}$ naładowanego pręta

Rozwiązanie:
Uwzględniając, że $P(0; y)$ $A(x; 0)$, mamy:

$$r = |AP| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dodatkowo, współrzędna y-kowa wektora $\vec{r}_0$ to cosinus kierunkowy z osią Oy, czyli $cos \propto = \frac{y}{r}$ otrzymamy na mocy wzoru I:

$$E(y) = \frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{y}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} dx = \frac{\rho_L y}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{\rho_L l}{2\pi\varepsilon_0 y\sqrt{l^2 + 4y^2}}$$

czyli:

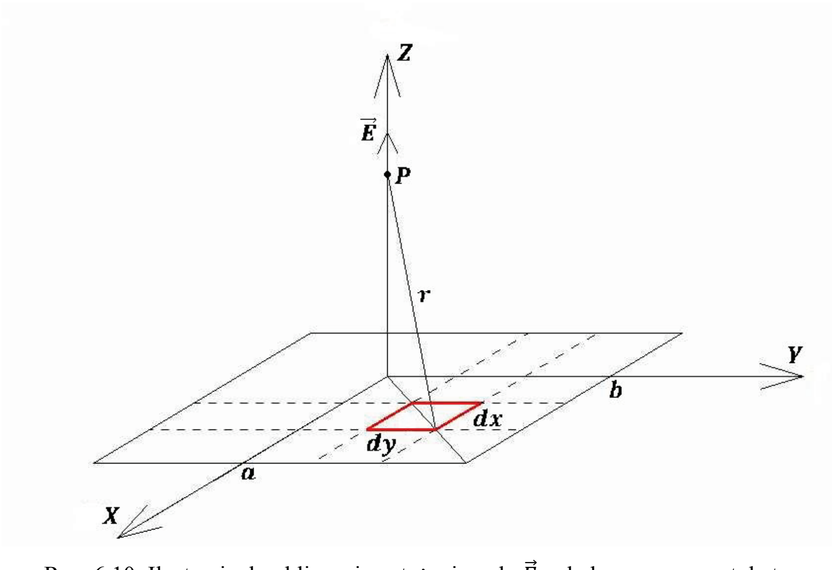
$$\vec{E} = \frac{\rho_L l}{2\pi\varepsilon_0 y\sqrt{l^2 + 4y^2}} \vec{e}_y$$

Ponieważ $\rho_L = \frac{q}{l}$, więc:

$$\vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 y\sqrt{l^2 + 4y^2}} \vec{e}_y$$

Zadanie 5. Znaleźć potencjał i natężenie pola elektrostatycznego:
a) prostokąta,
b) kwadratu

umieszczonego w próżni na płaszczyźnie Oxy z równomiernie rozłożonym ładunkiem powierzchniowym w punktach leżących na osi Oz.



Rys. 6.10. Ilustracja do obliczania natężenia pola $\vec{E}$ naładowanego prostokąta

a) Rozwiązanie:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint\limits_S \frac{\rho_S dS}{r} = \frac{\rho_S}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-b}^{b} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Ostatnia całka powyższego związku, odczytana z tablic całek, ma postać:

$$\int\limits_{-b}^{b} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \ln \frac{\sqrt{x^2 + b^2 + z^2} + b}{\sqrt{x^2 + b^2 + z^2} - b}$$

Kolejna całka, czyli $\int_{-a}^{a} \ln \frac{\sqrt{x^2+b^2+z^2}+b}{\sqrt{x^2+b^2+z^2}-b} dx$, obliczona metodą całkowania przez części, a następnie podstawiania jest równa:

$$2a \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + z^2} + b}{\sqrt{a^2 + b^2 + z^2} - b}$$

stąd ostatecznie potencjał:

$$\varphi(z) = \frac{\rho_S a}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + z^2} + b}{\sqrt{a^2 + b^2 + z^2} - b}$$

Natężenie pola elektrostatycznego w punktach leżących na osi Oz:

$$E(z) = -\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\rho_S abz}{2\pi\varepsilon_0 (a^2 + z^2)\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}}$$

Uwzględniając, że:

$$\rho_S = \frac{Q}{4ab}$$

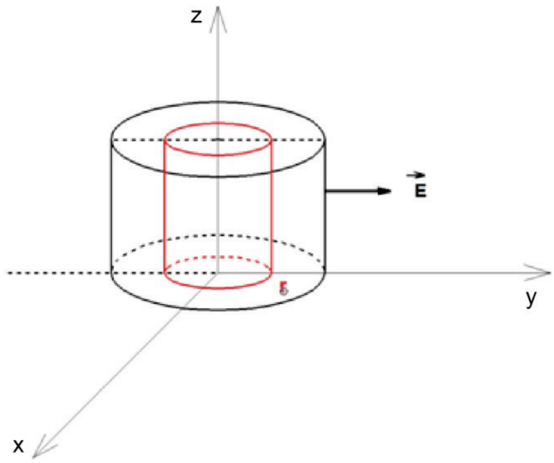
otrzymamy ostatecznie:

$$\vec{E} = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + z^2)\sqrt{a^2 + b^2 + z^2}} \vec{e}_z$$

b) Rozwiązanie:
Korzystając z podpunktu a):

$$E(z) = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (a^2 + z^2)\sqrt{2a^2 + z^2}}$$

Zadanie 6. Długi walec jest naładowany z gęstością proporcjonalną do odległości od osi walca (potencjał jest równy zeru na osi Oz). Znaleźć natężenie pola i potencjał wewnątrz walca.



Rys. 6.11. Ilustracja do wyznaczania natężenia pola $\vec{E}$ naładowanego walca

Rozwiązanie:
Jako powierzchnię Gaussa (S) przyjmujemy walec o promieniu r i tworzącej l oraz osi pokrywającej się z osią naładowanego walca.
Gęstość:

$$\rho = k\,r$$

Ze względu na symetrię:

$$\iint_S \vec{E} \circ d\vec{s} = \varepsilon E_r \iint_S ds = \varepsilon E_r\, 2\pi r l$$

$$\iiint_V \frac{\rho}{\varepsilon} dV = \frac{k}{\varepsilon}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^r r^2\, dr \int_0^l dz = \frac{2}{3\varepsilon}\pi r^3 l$$

zatem z twierdzenia Gaussa otrzymamy:

$$\varepsilon E_r 2\pi r l = \frac{2}{3\varepsilon}\pi r^3 l$$

stąd:

$$E_r = \frac{kr^2}{3\varepsilon}$$

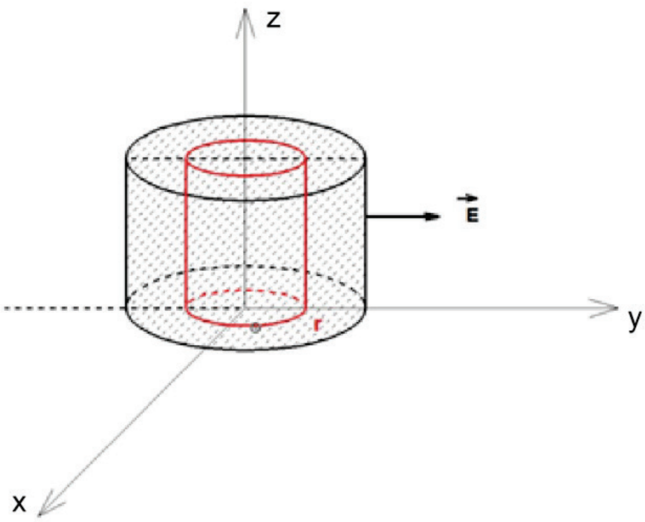
czyli wektor pola:

$$\vec{E} = \frac{kr^2}{3\varepsilon}\vec{e}_r$$

Potencjał:

$$\varphi = -\int_0^r \frac{kr^2}{3\varepsilon} dr = -\frac{kr^3}{9\varepsilon}$$

Zadanie 7. Nieskończenie długi walec o promieniu R, wypełniony gazem o względnej przenikalności ε_w, naładowano ładunkiem o gęstości ρ_V. Znaleźć rozkład natężenia pola elektrycznego i potencjału wewnątrz i na zewnątrz walca.



Rys. 6.12. Ilustracja do wyznaczania natężenia pola $\vec{E}$ walca naładowanego ładunkiem objętościowym (z uwzględnieniem powierzchni Gaussa)

Rozwiązanie:
Ponieważ gaz jest dobrym izolatorem, więc zachowuje się jak dielektryk. Dlatego w prawie Gaussa uwzględnimy indukcję $\vec{D}$. Ponadto symetria jest jednakowa w punktach równoodległych od osi z, linie pola są zaś prostopadłe do powierzchni bocznej walca. Stąd:

1) dla $r < R$ i z twierdzenia Gaussa:

$$\iint_S \vec{D} \circ d\vec{s} = \iint_S \varepsilon\, \vec{E} \circ d\vec{s} = \iiint_V \rho_V \, dV$$

otrzymujemy:

$$\varepsilon E_r 2\pi r l = \rho_V \pi r^2 l$$

czyli:

$$E_r = \frac{\rho_V r}{2\varepsilon} \qquad \vec{E}_r = \frac{\rho_V r \vec{e}_r}{2\varepsilon}$$

stąd wyznaczamy potencjał:

$$\varphi_1(r) = -\int_0^r E(r)dr = -\int \frac{\rho_V}{2\varepsilon} r dr = -\frac{\rho_V r^2}{4\varepsilon} + C_1$$

2) dla $r > R$:

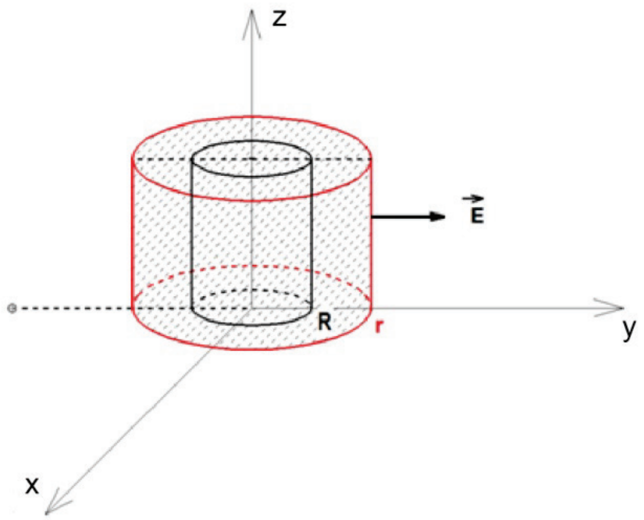
$$\varepsilon E_r 2\pi r l = \rho_V \pi R^2 l$$

czyli:

$$E_r = \frac{\rho_V R^2}{2\varepsilon r}$$

stąd potencjał:

$$\varphi_2(r) = -\int \frac{\rho_V R^2}{2\varepsilon r} dr = -\frac{\rho_v R^2 \ln r}{2\varepsilon} + C_2$$



Rys. 6.13. Ilustracja do wyznaczania natężenia pola $\vec{E}$ walca naładowanego ładunkiem objętościowym (z uwzględnieniem powierzchni Gaussa)

Uwzględniając warunek ciągłości potencjału na powierzchni walca $\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$ oraz warunek brzegowy $\varphi(R) = U$, otrzymamy:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_V (R^2 - r^2)}{4\varepsilon} + U & dla \quad r < R \\ \dfrac{\rho_V R^2}{2\varepsilon} \ln\dfrac{R}{r} + U & dla \quad r > R \end{cases}$$

Zadanie 8. Znaleźć pojemność kondensatora walcowego o długości l, składającego się z dwóch współśrodkowych walców o promieniach a, b (przy czym: $b \ll l$). Przestrzeń między okładkami jest wypełniona dielektrykiem o przenikalności dielektrycznej ε. Ładunki Q i $-Q$ są równomiernie rozłożone na okładkach.

Rozwiązanie:
W celu obliczenia pojemności należy znaleźć różnicę potencjałów między okładkami. Natężenie pola elektrostatycznego między nimi pochodzi wyłącznie od ładunku znajdującego się na wewnętrznej powierzchni okładek (strumień pola przenika tylko przez powierzchnię boczną walca).

Stąd dla $a < r < b$ z prawa Gaussa:

$$E_r\, 2\pi r l = \frac{Q}{\varepsilon}$$

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\varepsilon r l}$$

więc:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\int_a^b \frac{dr}{r} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon l}\ln\frac{b}{a}$$

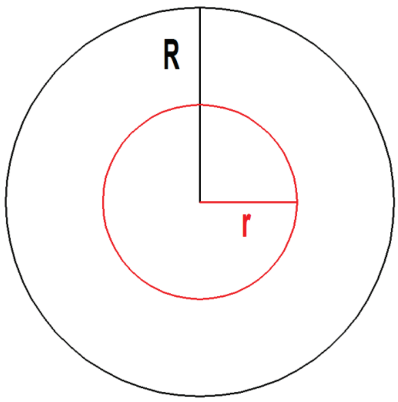
Pojemność kondensatora:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\varepsilon l}{\ln\frac{b}{a}}$$

Zadanie 9. Znaleźć rozkład indukcji $\vec{D}$ samotnej kuli wypełnionej gazem z równomiernie rozłożonym ładunkiem objętościowym ρ_V o względnej przenikalności dielektrycznej ε, umieszczonej w powietrzu. Znaleźć potencjał elektryczny, stosując:
a) prawo Gaussa,
b) rozwiązując równanie Laplace'a lub Poissona.

Rozwiązanie:
Ze względu na symetrię indukcja $\vec{D}$ jest jednakowa we wszystkich punktach równoodległych od środka kuli. Jest ona skierowana wzdłuż promienia, linie pola są zaś prostopadłe do powierzchni kuli.

Rozkład indukcji:
1) dla $r < R$:



Rys. 6.14. Przekrój naładowanej kuli (wraz z powierzchnią Gaussa)

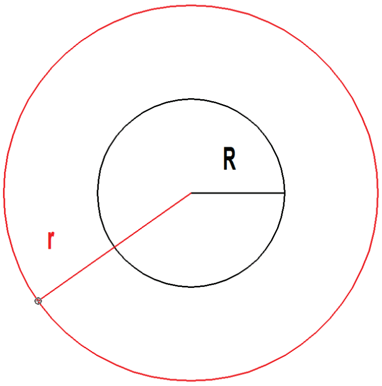
Korzystając z prawa Gaussa i ze względu na symetrię kuli otrzymamy:

$$D_r 4\pi r^2 = \rho_V\,|v| = \rho_V \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$D_r = \frac{\rho_V\, r}{3};\quad E_r = \frac{\rho_V\, r}{3\varepsilon_p \varepsilon}$$

gdzie ε_p to współczynnik przenikalności dielektrycznej powietrza równy 1.

2) dla $r > R$:



Rys. 6.15. Przekrój naładowanej kuli (wraz z powierzchnią Gaussa)

$$D_r 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi R^3\, \rho_V$$

więc:

$$D_r = \frac{\rho_V R^3}{3r^2} \quad \text{i} \quad E_r = \frac{\rho_V R^3}{3\varepsilon r^2}$$

Ostatecznie:

$$E_r = \begin{cases} \frac{\rho_V r}{3\varepsilon} & dla\ \ r < R \\ \frac{\rho_V R^3}{3\varepsilon r^2} & dla\ \ r > R \end{cases}$$

a) Ponieważ $\vec{E} = -grad\ \varphi$, więc:

$$\varphi_1(r) = -\int \frac{\rho_V r}{3\varepsilon} dr = -\frac{\rho_V r^2}{6\varepsilon} + C_1 \text{ dla } r < R$$

$$\varphi_2(r) = -\int \frac{\rho_V R^3}{3\varepsilon r^2} dr = \frac{\rho_V R^3}{3\varepsilon r} + C_2 \text{ dla } r > R$$

Uwzględniając warunek ciągłości potencjału na brzegu obszaru $\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$, otrzymamy:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\rho_V}{6\varepsilon}(3R^2 - r^2) & dla\ \ r < R \\ \frac{\rho_V R^3}{3\varepsilon r} & dla\ \ r > R \end{cases}$$

b) Potencjał na zewnątrz kuli spełnia równanie Laplace'a (brak ładunków), więc:

1) Dla $r > R$: $\Delta\varphi = 0$

Zapisując laplasjan we współrzędnych sferycznych oraz uwzględniając, że $\varphi = \varphi(r)$, otrzymamy:

$$\Delta\varphi = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0$$

stąd:

$$r\frac{d^2\varphi}{dr^2} + 2\frac{d\varphi}{dr} = 0$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe jednorodne. Podstawiając $\frac{d\varphi}{dr} = f(r)$ i po rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy:

$$\frac{df}{f} = -2\frac{dr}{r}$$

więc:

$$f = \frac{C}{r^2}$$

czyli:

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{C}{r^2}$$

stąd:

$$\varphi_1 = \frac{C_1}{r} + C_2$$

Ponieważ w nieskończoności potencjał równy jest zeru, więc $C_2 = 0$ i ostatecznie:

$$\varphi_1(r) = \frac{C_1}{r}$$

2) Dla $r < R$ potencjał spełnia równanie Poissona: $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$. Podobnie jak w punkcie 1) równanie to przyjmie postać:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Podstawiając $\frac{d\varphi}{dr} = f(r)$, otrzymamy równanie(*):

$$\frac{df}{dr} + \frac{2}{r}f = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

Jest to równanie różniczkowe liniowe niejednorodne. Rozwiązanie ogólne równania jednorodnego otrzymaliśmy w punkcie 1). Uzmienniając stałą, uzyskamy:

$$f(r) = \frac{C(r)}{r^2}$$

stąd:

$$f'(r) = \frac{C'(r)}{r^2} - \frac{2C(r)}{r^3}$$

Podstawiając do równania(*), otrzymamy:

$$C'(r) = -\frac{\rho r^2}{\varepsilon}$$

czyli:

$$C(r) = -\frac{\rho r^3}{3\varepsilon}$$

ostatecznie:

$$\varphi_2(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon} - \frac{C_3}{r} + C_4$$

Ponieważ dla $r = 0$ potencjał byłby nieokreślony, więc $C_3 = 0$, czyli:

$$\varphi_2(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon} + C_4$$

Uwzględniając warunki brzegowe istnienia potencjału, czyli:

$$\begin{cases} \varphi_1(R) = \varphi_2(R) \\ \varphi_1{}'(R) = \varphi_2{}'(R) \end{cases}$$

otrzymamy:

$$C_1 = \frac{\rho R^3}{6\varepsilon}$$

$$C_4 = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon}$$

skąd ostatecznie:

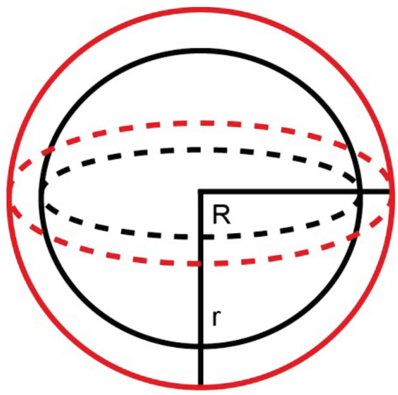
$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{\rho_V}{6\varepsilon}(3R^2 - r^2) \quad dla\ r < R \\ \frac{\rho_V R^3}{3\varepsilon r} \quad dla\ r > R \end{cases}$$

Zadanie 10. Znaleźć wektor indukcji $\vec{D}$ i potencjał:

a) metalowej powierzchni sferycznej o promieniu R, naładowanej ładunkiem Q z równomiernie rozłożoną gęstością powierzchniową ρ_S (umieszczonej w próżni)

Rozwiązanie:

1) dla $r < R$: $\vec{D} = 0$, gdyż kula metalowa jest przewodnikiem
2) dla $r > R$:



Rys. 6.16. Naładowana kula (z uwzględnieniem powierzchni Gaussa)

Ze względu na symetrię i z prawa Gaussa otrzymamy:

$$4\pi r^2\, D_r = 4\pi R^2 \rho_S$$

więc:

$$D_r = \frac{\rho_s\, R^2}{r^2}$$

Natężenie pola:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}$$

dlatego:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & dla \;\; r < R \\ \dfrac{\rho_s\, R^2}{\varepsilon_0 r^2} & dla\, r > R \end{cases}$$

Potencjał:

$$\varphi = -\int E(r) dr$$

więc dla $r < R$:

$$\varphi_1(r) = C_1$$

Dla $r > R$:

$$\varphi_2(r) = -\frac{\rho_s R^2}{\varepsilon_0} \int \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho_s R^2}{\varepsilon_0 r} + C_2$$

Uwzględniając warunek ciągłości potencjału na powierzchni kuli, czyli:

$$\varphi_1(R) = \varphi_2(R)$$

mamy:

$$C_1 = \frac{\rho_s\, R}{\varepsilon_0} \qquad\qquad C_2 = 0$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_s\, R}{\varepsilon_0} & dla \;\; r < R \\ \dfrac{\rho_s\, R^2}{\varepsilon_0\, r} & dla \;\; r > R \end{cases}$$

b) kuli metalowej o promieniu R naładowanej ładunkiem Q i umieszczonej w powietrzu $(\varepsilon_w = 1)$

Rozwiązanie:
Wykorzystując obliczenia z punktu a) dla $Q = \rho_s\, |S|$, czyli $\rho_s = \frac{Q}{|S|} = \frac{Q}{4\pi R^2}$,
otrzymujemy:

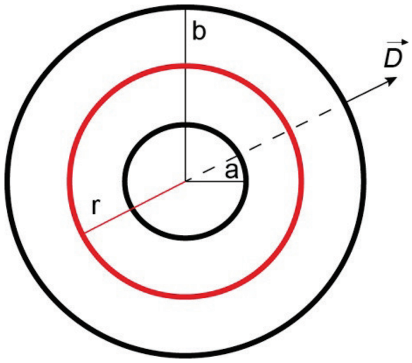
$$E(r) = \begin{cases} 0 & dla \;\; r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2} & dla \;\; r > R \end{cases}$$

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi R} & dla \;\; r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi r} & dla \;\; r > R \end{cases}$$

Zadanie 11. Kondensator kulisty składa się z dwóch koncentrycznych okładek o promieniach a i b. Przestrzeń między okładkami jest wypełniona dielektrykiem o przenikalności dielektrycznej ε. Znaleźć pojemność kondensatora.

Rozwiązanie:

1) dla $r < a$: $\vec{E} = 0$
2) dla $a < r < b$:



Rys. 6.17. Ilustracja do wyznaczania indukcji $\vec{D}$ dla kuli otoczonej sferą

Ze względu na symetrię i z prawa Gaussa otrzymamy:

$$4\pi r^2 D_r = Q$$

stąd:

$$D_r = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

Ponieważ:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

to:

$$E_r = \frac{Q}{4\pi \varepsilon r^2}$$

I ostatecznie:

$$E_r = \frac{Q}{4\pi \varepsilon r^2}$$

Różnica potencjałów:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

Pojemność kondensatora:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon ab}{b - a}$$

Zadanie 12. Znaleźć wektor natężenia pola oraz potencjał kuli o promieniu R_1 naładowanej równomiernie ładunkiem Q_1 (z gęstością ρ_V) i otoczonej współśrodkową cienką powierzchnią kulistą o promieniu R_2 i ładunku Q_2 (z gęstością ρ_S).

Rozwiązanie:
Pole wewnątrz naładowanego ciała jest równe zeru, a na zewnątrz – sumie ładunków, przy czym wektor natężenia jest skierowany do środka obu kul.
Z zadania 11 wynika, że:

$$\vec{E}=\begin{cases} 0\ dla\ r < R_1 \\ \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\ dla\ r\epsilon(R_1;R_2) \\ \dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\ dla\ \ r > R_2 \end{cases}$$

Stąd potencjał:

$$\varphi = -\int_L \vec{E}\circ d\vec{L}$$

będzie równy:

$$\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_2}^{\infty}\frac{Q_1+Q_2}{r^2}\,dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{Q_1}{R_1}+\frac{Q_2}{R_2})$$

Zadanie 13. W kuli dielektrycznej o promieniu R z ładunkiem rozłożonym równomiernie z gęstością ρ_V umieszczono wzdłuż średnicy nić metalową o ładunku liniowym o gęstości ρ_L. Znaleźć strumień wektora $\vec{D}$ wypływający z kuli.

Rozwiązanie:

Całkowity strumień pochodzący od wszystkich ładunków jest równy sumie strumieni od poszczególnych ładunków.

Wobec tego: $\Phi = \Phi_{\text{kuli}} + \Phi_{\text{nici}}$

Z twierdzenia Gaussa:

$$\Phi_{\text{kuli}} = \iiint_V \rho_V dV = \rho_V|V| = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_V$$

$$\Phi_{\text{nici}} = \int_L \rho_L dL = \rho_L\int_L dL = 2R\rho_L$$

więc:

$$\Phi = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_V + 2R\rho_L$$

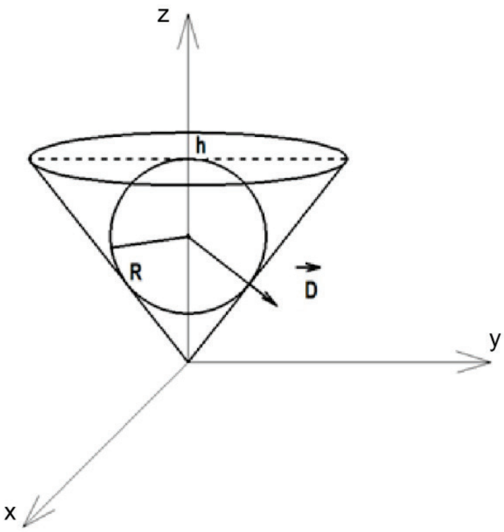
Zadanie 14. Na osi walca dielektrycznego o promieniu R i długości l (naładowanego ładunkiem Q z gęstością ρ_V) znajduje się nić metalowa o tej samej długości, naładowana równomiernie ładunkiem liniowym (o gęstości ρ_L). Znaleźć strumień wektora $\vec{D}$ wypływający z walca na jednostkę długości.

Rozwiązanie:

Podobnie jak w zadaniu poprzednim, strumień:

$$\Phi = \Phi_{\text{walca}} + \Phi_{\text{nici}} = \pi r^2 l\rho_V + \rho_L l$$

Zadanie 15. Znaleźć strumień indukcji pola elektrostatycznego przez powierzchnię stożka $\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = h \end{cases}$, jeżeli kula wpisana w ten stożek posiada ładunek objętościowy ρ_V.



Rys. 6.18. Obliczanie strumienia indukcji przez powierzchnię stożka z wpisaną naładowaną kulą

Rozwiązanie:

Zgodnie z prawem Gaussa:

$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon}$$

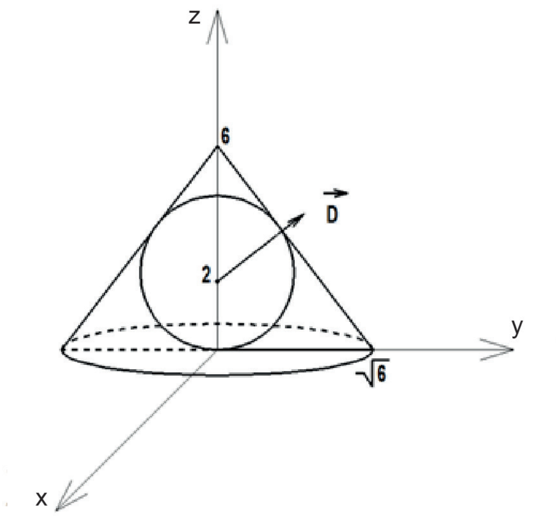
gdzie Q to całkowity ładunek w obszarze ograniczonym przez powierzchnię S.
stąd:

$$\Phi_D = \iint_S \vec{D} \circ d\vec{S} = \iiint_V \rho_V dV = \rho_V |V_{kuli}| = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_V$$

Zadanie 16. W stożku $z - 6 = \sqrt{x^2 + y^2}$ znajduje się kula dielektryczna $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$.

Znaleźć strumień indukcji $\vec{D}$ wypływający:

a) ze stożka (jeśli stożek i kula są naładowane ładunkiem o gęstości ρ_V),
b) z kuli naładowanej ładunkiem o gęstości ρ_V.



Rys. 6.19. Ilustracja do wyznaczania strumienia indukcji naładowanej kuli wpisanej w stożek

Rozwiązanie:

a) Ponieważ w dielektryku $div\,\vec{D} = \rho$, więc zgodnie z twierdzeniem Gaussa:

$$\Phi_{st} = \iiint\limits_V \rho_V dV = \rho_V |V| = 36\pi\rho_V$$

b)

$$\Phi_k = \iiint\limits_V \rho_V dV = \frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{32}{3}\pi\,\rho_V$$

6.5. Zadania z magnetostatyki

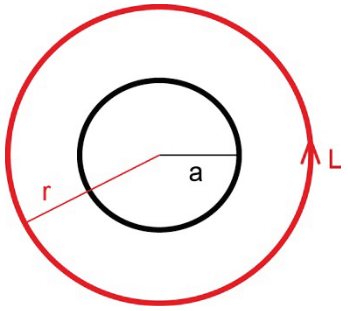
Zadanie 1. Znaleźć rozkład indukcji magnetycznej wewnątrz i na zewnątrz długiego, prostoliniowego przewodnika o przekroju kołowym i promieniu a, przez który płynie prąd stały I. Znaleźć cyrkulację wektora $\vec{B}$ po dowolnym okręgu otaczającym przewodnik:

Rozwiązanie:
Linie pola magnetycznego są koncentrycznymi okręgami położonymi w płaszczyźnie prostopadłej do przewodu:
1) Z prawa Ampere'a:

$$\oint\limits_L \vec{B} \circ d\vec{L} = \mu_0\, I_c$$

gdzie I_c to całkowity prąd otoczony konturem Ampere'a.

Dla $r > a$:



Rys. 6.20. Ilustracja do wyznaczania indukcji pola magnetycznego przewodnika kołowego (z konturem Ampere'a zaznaczonym kolorem czerwonym)

Ze względu na symetrię linii pola:

$$\oint_L B_r\, dL = B_r \int_L dL = B_r|L| = 2\pi r B_r = \mu_0 I$$

stąd:

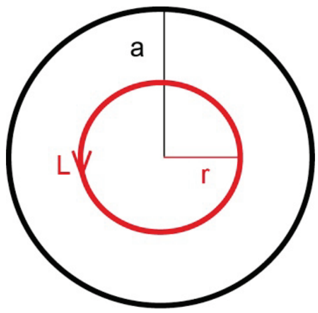
$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

więc cyrkulacja:

$$\oint_L \vec{B} \circ d\vec{L} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\oint_L \frac{\vec{e}_\varphi}{r} \circ \left(dr\vec{e}_r + rd\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I$$

2) Dla $r < a$:



Rys. 6.21. Obliczanie indukcji pola magnetycznego przewodnika kołowego (z uwzględnieniem konturu Ampere'a)

W tym przypadku kontur Ampere'a nie obejmuje całego prądu I, więc korzystamy z twierdzenia Stokesa:

$$\oint_L \vec{B} \circ d\vec{L} = \iint_S rot\,\vec{B} \circ d\vec{S} = \iint_S \mu_0 \vec{J} \circ d\vec{S}$$

gdzie S to powierzchnia, której brzegiem jest linia L.

Ponieważ:

$$\vec{j} = \frac{I}{|S|} = \frac{I}{\pi a^2}$$

oraz:

$$\oint_L \vec{B} \circ d\vec{L} = \int_L B_r dL$$

więc:

$$\int_L B_r dL = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \iint_S dS$$

$$B_r 2\pi r = \frac{\mu_0 I \pi r^2}{\pi a^2}$$

stąd:

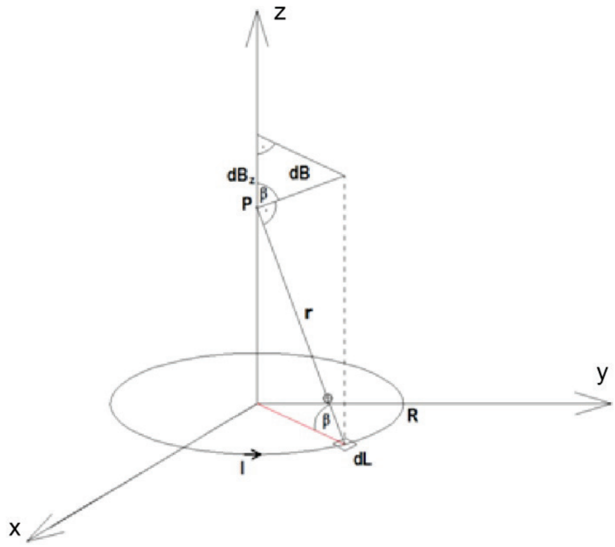
$$B_r = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

$$\text{Cyrkulacja} = \frac{\mu_0 I r^2}{a^2}$$

Po linii zamkniętej L nieotaczającej przewodnika cyrkulacja jest równa zeru.

Zadanie 2. Znaleźć indukcję pola magnetycznego zwoju kołowego o promieniu R z prądem I:

a) w punktach położonych na osi symetrii przewodnika (oś Oz),
b) w punkcie $O(0,0,0)$.



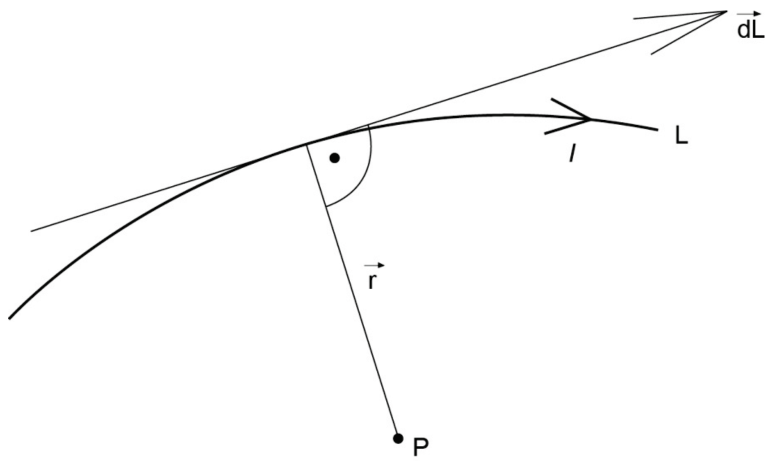
Rys. 6.22. Ilustracja do wyznaczania natężenia pola magnetycznego $\vec{B}$ prądu kołowego

Rozwiązanie:

a) Zgodnie z prawem Biota-Savarta:

$$d\vec{B} = \frac{I\mu}{4\pi}\frac{\left(d\vec{L} \times \vec{r}\right)}{r^3}$$

gdzie: $d\vec{L}$ – wektor styczny do elementu dL przewodu, przez który płynie prąd I; $\vec{r}$ – wektor łączący dL z punktem obserwacji P (rys. 6.23).



Rys. 6.23. Interpretacja geometryczna prawa Biota-Savarta

Ponieważ długość wektora $d\vec{L} \times \vec{r}$ jest równa:

$$\left|d\vec{L} \times \vec{r}\right| = rdL \sin \sphericalangle\left(d\vec{L}, \vec{r}\right)$$

zatem prawo Biota-Savarta można zapisać w postaci:

$$dB = \frac{I\mu dL \sin \alpha}{4\pi r^2}$$

gdzie $\alpha = \sphericalangle\left(d\vec{L}, \vec{r}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Stąd:

$$dB = \frac{I\mu dL}{4\pi r^2}$$

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że $d\vec{B} \perp \vec{r}$ (rys. 6.22), wobec tego:

$$dB_z = dB \cos \beta$$

Ponieważ:

$$\cos \beta = \frac{R}{r}$$

więc:

$$dB_z = \frac{I\mu R dL}{4\pi r^3}$$

gdzie $r = \sqrt{z^2 + R^2}$ (rys. 6.22).

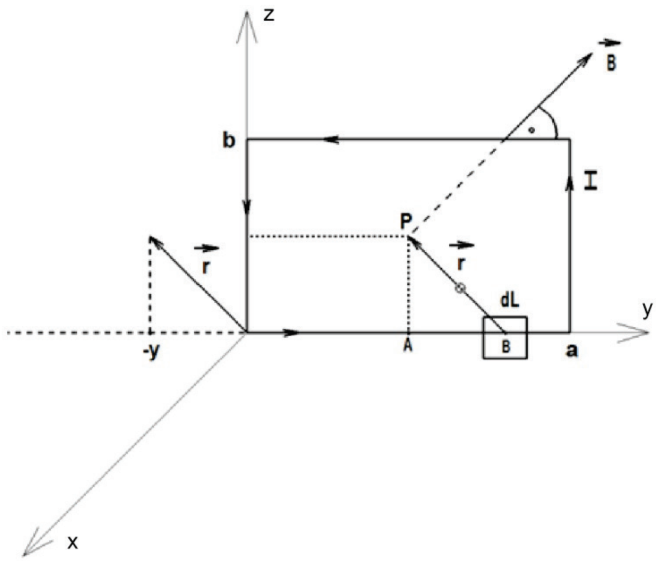
$$B_z = \frac{I\mu R}{4\pi\left(\sqrt{z^2 + R^2}\right)^3} \int_L dL = \frac{I\mu R}{4\pi\left(\sqrt{z^2 + R^2}\right)^3} 2\pi R = \frac{I\mu R^2}{2\left(\sqrt{z^2 + R^2}\right)^3}$$

b) W środku obwodu kołowego $z = 0$, więc korzystając z wyniku uzyskanego w podpunkcie a):

$$B = \frac{I\mu}{2R}$$

Zadanie 3. Przez długi przewód w kształcie prostokąta płynie prąd stały I. Znaleźć wektor indukcji magnetycznej w środku prostokąta.

Rozwiązanie:
Załóżmy, że prostokąt w układzie Oxyz jest położony zgodnie z rysunkiem:



Rys. 6.24. Ilustracja do wyznaczania pola $\vec{B}$ prostokątnego przewodu z prądem

$$A = \left(0; \frac{a}{2}; 0\right) \qquad B = (0; y; 0)$$

$$P = \left(0; \frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right) \qquad |AP| = \frac{b}{2}$$

$$d\vec{L} = [0; dy; 0]$$

$$\vec{r} = \left[0; -y; \frac{b}{2}\right]$$

$$d\vec{L} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & dy & 0 \\ 0 & -y & \frac{b}{2} \end{vmatrix} = \frac{b}{2} dy \vec{e}_x$$

Z prawa Biota-Savarta wynika, że indukcja magnetyczna po odcinku OA (o długości $\frac{a}{2}$):

$$B_{\frac{a}{2}} = \frac{I\mu}{4\pi}\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{\frac{b}{2}dy}{\left(\sqrt{y^2+\frac{b^2}{4}}\right)^3} = -\frac{I\mu}{4\pi}\frac{b}{2}\left[\frac{4}{b^2}\frac{y}{\sqrt{y^2+\frac{b^2}{4}}}\right]_0^{\frac{a}{2}} = \frac{\mu I a}{2\pi b\sqrt{a^2+b^2}}$$

Stąd po całym boku o długości a:

$$B_a = \frac{\mu I a}{\pi b\sqrt{a^2+b^2}}$$

Analogicznie rozumując, po boku o długości b otrzymamy:

$$B_b = \frac{\mu I b}{\pi a\sqrt{a^2+b^2}}$$

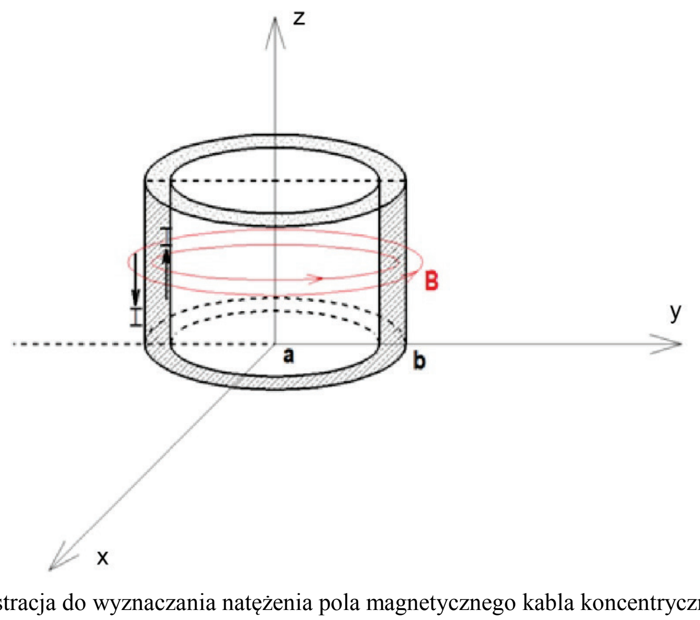
Uwzględniając przepływ prądu po całym obwodzie prostokąta, otrzymamy ostatecznie:

$$B = \frac{\mu I}{\pi\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\right) = \frac{2\mu I\sqrt{a^2+b^2}}{\pi ab}$$

Przy czym:

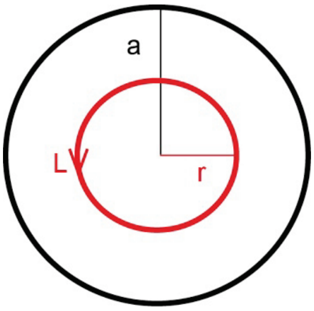
$$\vec{B} = B\vec{e}_x$$

Zadanie 4. Przez długi kabel koncentryczny z cienkościennym ekranem wewnątrz żyły o promieniu a (o przekroju kołowym) płynie prąd I i wraca po powierzchni ekranu o promieniu b ($b \ll a$). Znaleźć rozkład natężenia pola magnetycznego (i indukcji magnetycznej) w kablu oraz strumień przepływający przez wnętrze kabla na jednostkę długości.



Rys. 6.25. Ilustracja do wyznaczania natężenia pola magnetycznego kabla koncentrycznego z prądem

Rozwiązanie:
1) Dla $r < a$:



Rys. 6.26. Przekrój poprzeczny drutu (z uwzględnieniem konturu Ampere'a)

Ze względu na symetrię walcową możemy zastosować prawo przepływu:

$$\oint_L \vec{H} \circ d\vec{L} = \iint_S \vec{J} \circ d\vec{S} = I_c$$

$$H_r|L| = J|S| = \frac{I|S|}{|S_1|}$$

gdzie: $|S|$ – pole powierzchni ograniczonej linią L; $|S_1|$ – pole powierzchni, przez którą przepływa prąd I.

Stąd:

$$H_r 2\pi r = \frac{I\pi r^2}{\pi a^2} = \frac{I r^2}{a^2}$$

$$H_r = \frac{Ir}{2\pi a^2}$$

2) Dla $r \in (a, b)$:

$H_r 2\pi r = I$ stąd: $H_r = \frac{I}{2\pi r}$

Ponieważ $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, więc:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$$

3) Dla $r > b$:
$H = 0$, gdyż $I_c = I_{wewn} - I_{zewn} = 0$

Strumień wektora $\vec{B}$ przez wnętrze kabla o długości l na mocy definicji jest równy:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \circ d\vec{S}$$

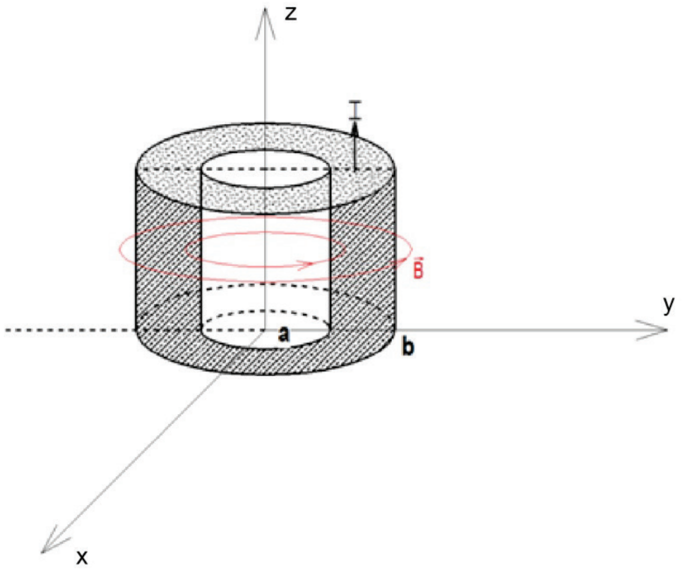
Ponieważ we współrzędnych walcowych:

$$d\vec{S} = r d\varphi dz \vec{e}_r + dr dz \vec{e}_\varphi + r dr d\varphi \vec{e}_z$$

więc:

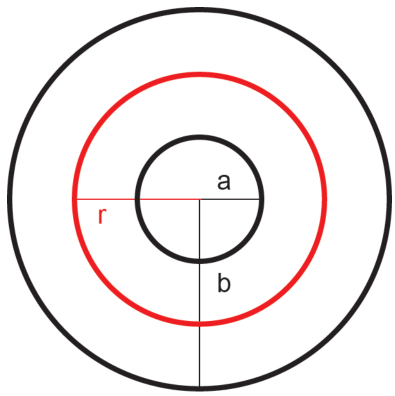
$$\Phi_B = \iint_S \frac{\mu_0 I}{2\pi r} drdz = \int_0^l dz \int_a^b \frac{\mu_0 Il}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} ln\frac{b}{a}$$

Zadanie 5. Znaleźć rozkład natężenia pola magnetycznego w długim kablu w kształcie rury o promieniu wewnętrznym a i zewnętrznym b, w którym płynie prąd stały I.



Rys. 6.27. Ilustracja do wyznaczania pola magnetycznego rury z prądem

Rozwiązanie:
1) Dla $r < a$:
   $H = 0$, gdyż brak jest przepływu prądu (wydrążenie)
2) Dla $a < r < b$:



Rys. 6.28. Przekrój poprzeczny rury (z uwzględnieniem konturu Ampere'a)

Zgodnie z prawem przepływu:

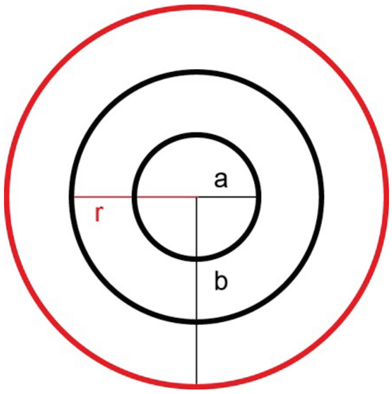
$$H_r 2\pi r = J(\pi r^2 - \pi a^2)$$

$$J = \frac{I}{\pi(b^2 - a^2)}$$

(gdyż linia L obejmuje część prądu)
więc:

$$H_r = \frac{I(r^2 - a^2)}{2\pi r(b^2 - a^2)}$$

3) Dla $r > b$:



Rys. 6.29. Przekrój poprzeczny rury (z uwzględnieniem konturu Ampere'a)

$$H_r 2\pi r = I$$

(gdyż linia L obejmuje cały prąd)
stąd: $H_r = \frac{I}{2\pi r}$

Zadanie 6. Wykazać, że indukcja pola magnetycznego wewnątrz jednorodnie naładowanej sfery o promieniu $R = 1$, obracającej się wokół osi Oz ze stałą prędkością kątową ω, jest równa:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi}\vec{e}_z$$

wiedząc, że potencjał wektorowy:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 Q}{12\pi}(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Rozwiązanie:
Ponieważ:

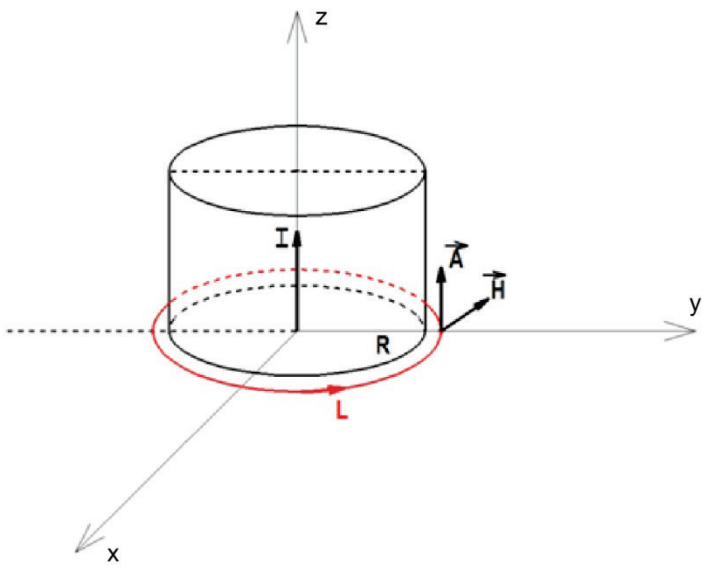
$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\vec{e}_x + x\omega\vec{e}_y$$

więc:

$rot\,(\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\omega\vec{e}_z$ $\qquad$ $\vec{B} = rot\,\vec{A} = \frac{\mu_0 Q\omega}{6\pi}\vec{e}_z$

Zadanie 7. Prąd stały I płynący przez nieskończony, prostoliniowy przewodnik walcowy o promieniu R i osi pokrywającej się z osią Oz wytwarza pole magnetyczne $\vec{H}$.

a) Podać rozkład tego pola, jeżeli prąd płynie równomiernie w całym przewodniku.
b) Podać rozkład tego pola, jeżeli prąd płynie tylko po powierzchni przewodnika.
c) Znaleźć potencjał wektorowy, jeżeli prąd płynie równomiernie w całym przewodniku.

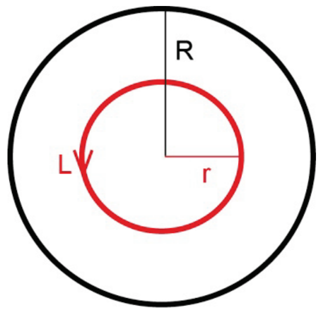


Rys. 6.30. Ilustracja do wyznaczania pola $\vec{H}$ przewodnika walcowego z prądem

Rozwiązanie:

a)

1) Dla $r < R$:



Rys. 6.31. Przekrój poprzeczny walca (z uwzględnieniem konturu Ampere'a)

Z twierdzenia Stokesa:

$$\oint_L \vec{H} \circ d\vec{L} = \iint_S rot\, \vec{H} \circ d\vec{S} = \iint_S \vec{J} \circ d\vec{S}$$

$$H2\pi r = J\pi r^2$$

stąd:

$$H = \frac{rJ}{2}$$

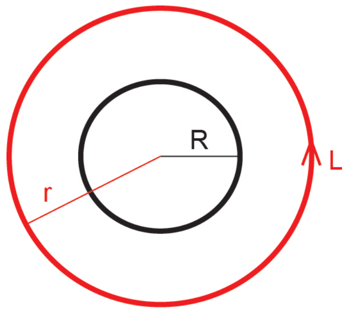
Ponieważ:

$$J = \frac{I}{|S|} = \frac{I}{\pi R^2}$$

więc:

$$H = \frac{Ir}{2\pi R^2}$$

2) Dla $r > R$:



Rys. 6.32. Przekrój poprzeczny walca (z uwzględnieniem konturu Ampere'a)

$$H2\pi r = J\pi R^2$$

stąd:

$$H = \frac{R^2 J}{2r} = \frac{I}{2\pi r}$$

ale: $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$
więc:

$$\vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}\vec{e}_\varphi \; dla \; r < R \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi \; dla \; r > R \end{cases}$$

b) Jeżeli prąd płynie tylko po powierzchni walca, to pole dla $r > R$ jest identyczne jak w punkcie a), podpunkt 2), natomiast dla $r < R$ $H = 0$, gdyż linia L nie obejmuje prądu I.
c) Ponieważ $rot\ \vec{A} = \vec{B}$ we współrzędnych walcowych ma postać:

$$rot\ \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\varphi & A_z \end{vmatrix}$$

oraz:

$$A_r = A_\varphi = 0$$

więc:

$$rot\ A = \frac{\partial A_z}{\partial \varphi}\vec{e}_r - \frac{\partial A_z}{\partial r}\vec{e}_\varphi$$

Ponadto:

$$\vec{B} = B(r)\vec{e}_\varphi$$

stąd:

$$-\frac{\partial A_r}{\partial r} = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \; dla \; r < R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \; dla \; r > R \end{cases}$$

Po scałkowaniu otrzymamy:

$$A_z = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + C_1 \; dla \; r < R \\ -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + C_2 \; dla \; r > R \end{cases}$$

Z ciągłości potencjału (dla $r = R$) wynika, że obierając np. $C_1 = 0$:

$$C_2 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} - \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln R$$

więc ostatecznie:

$$A_z = \begin{cases} -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \; dla \; r \le R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln\frac{r}{R} - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \; dla \; r > R \end{cases}$$

6.6. Zadania z elektromagnetyzmu

Zadanie 1. Wyprowadzić równania falowe dla fal elektromagnetycznych w próżni, czyli równania postaci:

$$\left.\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \Delta \vec{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned}\right\}$$

gdzie $C = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ jest prędkością rozchodzenia się fal elektromagnetycznych w próżni.

Rozwiązanie:
Z równań Maxwella mamy:

$$div \, \vec{E} = 0 \qquad\qquad div \, \vec{B} = 0$$

$$rot \, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad rot \, \vec{B} = \mu_0 \, \varepsilon_0 \, \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ponieważ:

1) $rot\left(rot \, \vec{E}\right) = \nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \nabla\left(\nabla \circ \vec{E}\right) - (\nabla \times \nabla)\vec{E} = grad\left(div \, \vec{E}\right) - \Delta\vec{E} = -\Delta\vec{E}$

2) $rot\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(rot \, \vec{B}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$

więc z równań 1) i 2) otrzymujemy równanie falowe pola $\vec{E}$:

$$\Delta\,\vec{E} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\,\vec{E}}{\partial t^2}$$

Podobnie:

$$rot\,\left(rot\,\vec{B}\right) = grad\,\left(div\,\vec{B}\right) - \Delta\vec{B} = -\Delta\vec{B}$$

oraz:

$$rot\,\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\,\vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\,\vec{E}\right) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial\,t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = -\,\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

stąd równanie falowe pola $\vec{B}$:

$$\Delta\,\vec{B} = \mu_0\,\varepsilon_0\,\frac{\partial^2\,\vec{B}}{\partial\,t^2}$$

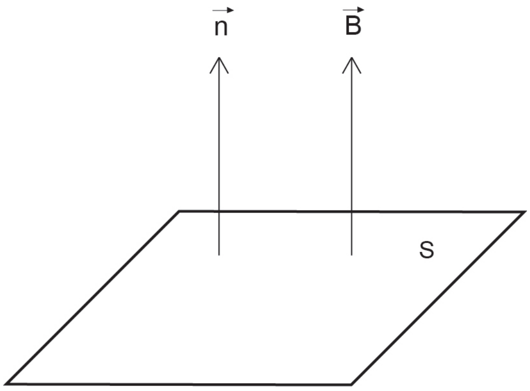
Uwaga

Nie każde rozwiązanie równań falowych spełnia automatycznie równania Maxwella.

Zadanie 2. Płaska ramka o powierzchni S znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym. W chwili początkowej ramka jest położona prostopadle do linii pola.

a) Znaleźć strumień magnetyczny przenikający ramkę, jeżeli:

$$\vec{B} = B = const$$



Rys. 6.33. Położenie wektora normalnego i wektora indukcji magnetycznej $\vec{B}$

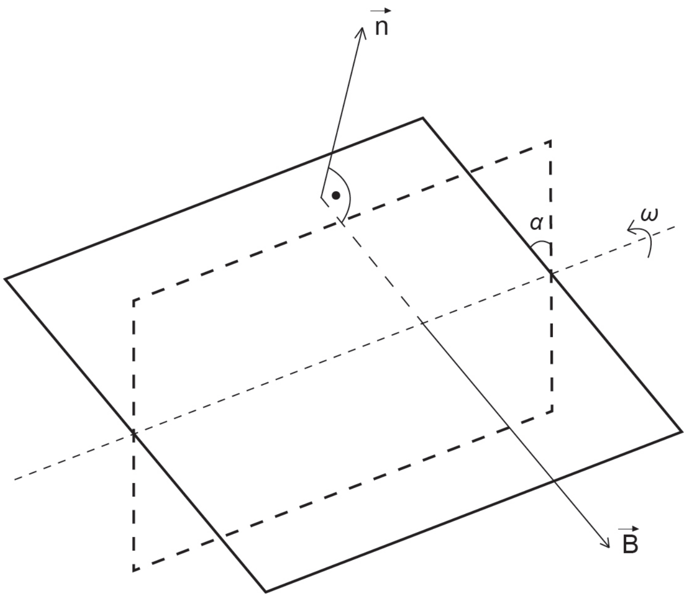
Rozwiązanie:

Strumień indukcji magnetycznej przechodzący przez powierzchnię S jest równy:

$$\Phi_0 = \iint_S \vec{B}\circ d\vec{S} = \iint_S B\vec{e}_B\circ\vec{e}_n dS = B\iint_S dS = BS$$

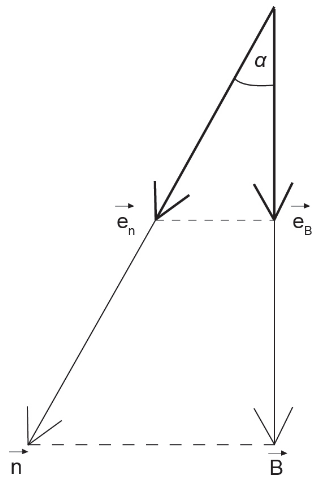
gdzie S to pole powierzchni ograniczonej ramką.

b) Znaleźć siłę elektromotoryczną zaindukowaną w ramce, jeżeli ramka obraca się jednostajnie z prędkością kątową ω wokół osi symetrii, prostopadłej do linii pola:



Rys. 6.34. Obrót ramki wokół osi symetrii

Rozwiązanie:



Rys. 6.35. Kąt między wektorami $\vec{n}$ oraz $\vec{B}$ po obrocie ramki

$$\vec{e}_B \circ \vec{e}_n = \cos\alpha$$

stąd:

$$\Phi = \iint_S B(\vec{e}_B \circ \vec{e}_n)dS = B\iint_S B|\vec{e}_B||\vec{e}_n|\cos\alpha\, dS = \iint_S B\cos\alpha\, dS = B|S|\cos\alpha$$

Ponieważ $\alpha = \omega t$, więc:

$$\Phi = BS\cos\omega t = \Phi_0\cos\omega t$$

Na mocy prawa Faradaya siła elektromotoryczna zaindukowana w ramce jest równa prędkości zmian strumienia magnetycznego, czyli:

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t = \Phi_0 \omega \sin \omega t$$

Największa wartość SEM (dla $\omega t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$) wynosi:

$$\mathrm{e}_m(t) = \omega \Phi_0$$

wartość skuteczna $\mathrm{e}_{sk}(t)$ dla $\omega t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ wynosi zaś:

$$\mathrm{e}_{sk}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \omega \Phi_0$$

c) Obliczyć siłę elektromotoryczną zaindukowaną w ramce, jeżeli pole $\vec{B}$ jest zmienne (zależne od czasu), np. $\vec{B} = B_0 \vec{e}_B \sin \omega t$.
Rozwiązanie:
ponieważ:

$$e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

oraz:

$$\Phi = B_0 S \sin \omega t \cos \omega t$$

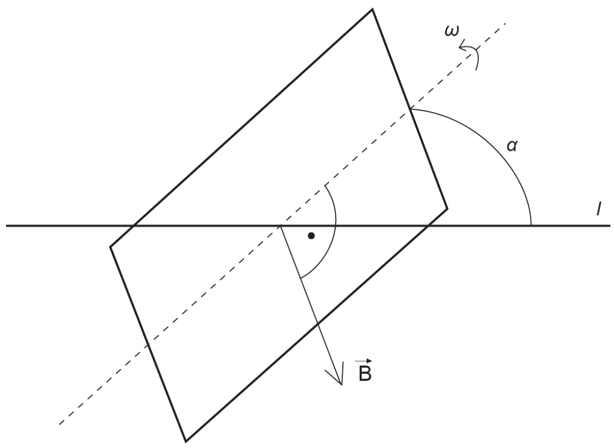
więc:

$$e(t) = -\frac{d}{dt}[B_0 S \sin \omega t \cos \omega t] = -\omega BS \cos 2\omega t$$

d) Obliczyć $e(t)$ zaindukowaną w ramce, jeżeli w chwili $t = 0$ ramka tworzy z prostą l kąt α (rys. 6.36) i wiruje z prędkością n obrotów w jednostce czasu, czyli w chwili $t = 0$ tworzy kąt $\omega t + \alpha$ (gdzie $\omega = 2\pi n$).
Rozwiązanie:

$$\Phi = BS \cos(\omega t + \alpha)$$

$$e(t) = BS\omega \sin(\omega t + \alpha)$$



Rys. 6.36. Ilustracja do wyznaczania strumienia magnetycznego przenikającego ramkę nachyloną do poziomu pod kątem α

Uwaga
Siła elektromotoryczna zaindukowana w ramce jest niezależna od położenia osi obrotu, którą może być np. symetralna ramki, jeden z boków lub prosta równoległa do boku, pod warunkiem jednak, że oś obrotu jest prostopadła do linii pola. SEM jest zaindukowana w bokach, które podczas obrotu przecinają linie pola.

Zadanie 3. Ramka o z zwojach i powierzchni S wiruje z prędkością kątową ω w zmiennym polu magnetycznym o indukcji $B = B_0 \sin \beta t$. Znaleźć SEM zaindukowaną w ramce.

Rozwiązanie:
Z zadania 2 wynika, że $\Phi = BS \cos \alpha$, czyli $\Phi = B_0 S \cos \alpha \sin \beta t$. Siła elektromotoryczna jest równa sumie SEM rotacji i SEM transformacji. SEM transformacji jest wywołana zmianą strumienia magnetycznego przepływającego przez nieruchomą ramkę i wynika ze zmian czasowych pola:

$$\mathrm{SEM}_T = -z\frac{d\Phi}{dt} = -zB_0\beta \cos \alpha \sin \beta t$$

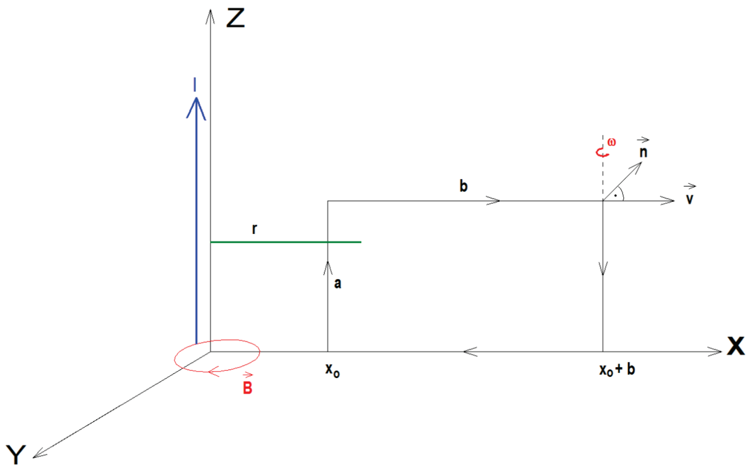
SEM rotacji wynika z obrotu ramki w polu magnetycznym (przy czym $\alpha = \omega t$):

$$\mathrm{SEM}_{rot} = -z\frac{d\Phi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = z\omega B_0 S \sin \omega t \sin \beta t$$

Ostatecznie:

$$e(t) = -zB_0 S[\beta \cos \omega t \cos \beta t - \omega \sin \omega t \sin \beta t]$$

Zadanie 4. W odległości x_0 od długiego przewodu z prądem I znajduje się prostokątna ramka (rysunek 6.37).



Rys. 6.37. Ilustracja do wyznaczania pola $\vec{B}$ prostokątnej ramki

Znaleźć:
a) strumień magnetyczny przenikający ramkę, jeżeli prąd I jest stały

Rozwiązanie:
Wokół przewodu z prądem w punktach odległych o r od przewodu pole $\vec{B}$ ma postać:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r}\vec{e}_\varphi$$

Ponieważ we współrzędnych walcowych:

$$d\vec{S} = rd\varphi dz\vec{e}_r + drdz\vec{e}_\varphi + rdrd\varphi\vec{e}_z$$

więc:

$$\vec{B} \circ d\vec{S} = \frac{\mu I}{2\pi r}drdz$$

stąd:

$$\Phi = \frac{\mu I}{2\pi}\int_0^a dz \int_{x_0}^{x_0+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu I a}{2\pi}\ln\frac{x_0+b}{x_0}$$

b) SEM zaindukowaną w ramce, jeżeli ramka porusza się z prędkością liniową v w kierunku O_{x_+}

Rozwiązanie:
W chwili $t = 0$ ramka jest odległa od przewodu o x_0, w $t \neq 0$ odległość wynosi $x = x_0 + vt$. W punktach odległych o x od przewodu pole magnetyczne ma postać:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi x}$$

I metoda

$$\Phi = \int_0^a dz \int_{x_0+vt}^{x_0+b+vt} \frac{\mu I}{2\pi x}dx = \frac{\mu I a}{2\pi}\ln\frac{x_0+b+vt}{x_0+vt}$$

stąd:

$$\mathrm{SEM} = -\frac{\mu I a}{2\pi}\frac{d}{dt}\left[\ln\frac{x_0+b+vt}{x_0+vt}\right] =$$

$$= \frac{\mu I a b v}{2\pi(x_0+vt)(x_0+b+vt)}$$

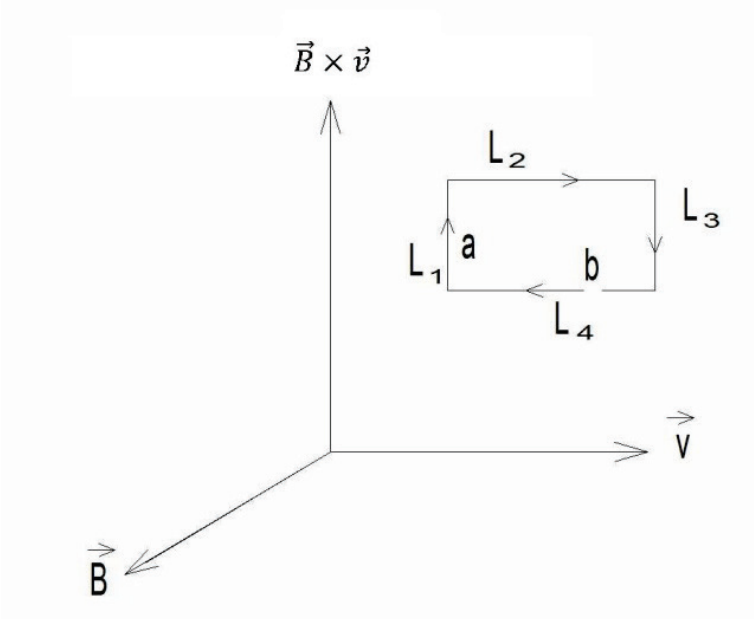
II metoda
Zgodnie ze wzorem Lorentza:

$$\mathrm{SEM} = -\int_L \left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\circ d\vec{L} = -\int_L vB\,dL$$

gdyż:

$$\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\circ d\vec{L} = \left|\vec{v}\times\vec{B}\right|\left|d\vec{L}\right|\cos\sphericalangle\left(\vec{v}\times\vec{B}, d\vec{L}\right) =$$

$$= \left|\vec{B}\right|\left|\vec{v}\right|dL\sin\sphericalangle\left(\vec{B},\vec{v}\right)\cos\sphericalangle\left(\vec{v}\times\vec{B}, d\vec{L}\right) = BvdL$$



Rys. 6.38. Ilustracja do wyznaczania SEM zaindukowanej w ramce (ze wzoru Lorentza)

Całki po L_2 i L_4 są równe zeru, gdyż boki L_2 i L_4 są prostopadłe do wektora $\vec{v} \times \vec{B}$.

$$L_1 \colon \begin{cases} x = x_0 + vt \\ z = \tau \\ dL = d\tau \end{cases}$$

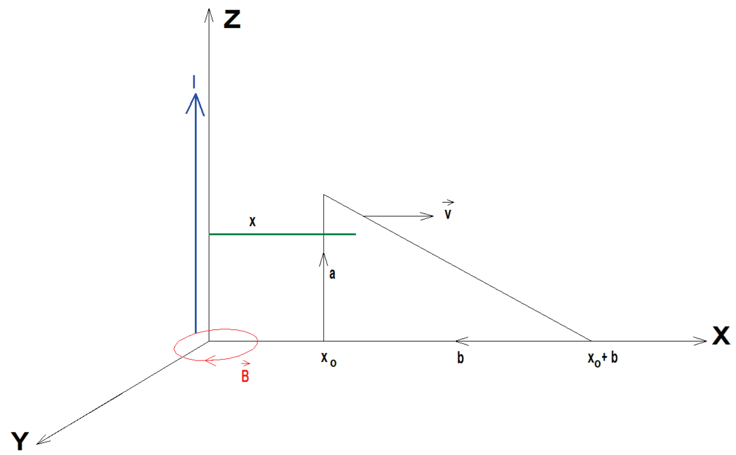
$$L_2 \colon \begin{cases} x = x_0 + b + vt \\ z = \tau \end{cases}$$

$$\int\limits_{L_1} Bv\,dL = \frac{\mu I v}{2\pi} \int\limits_0^a \frac{d\tau}{x_0 + vt} = \frac{\mu I v a}{2\pi(x_0 + vt)}$$

$$\int\limits_{L_3} Bv\,dL = \frac{\mu I v}{2\pi} \int\limits_a^0 \frac{d\tau}{x_0 + b + vt} = \frac{-\mu I v a}{2\pi(x_0 + b + vt)}$$

$$\text{SEM} = -\left[\int\limits_{L_1} Bv\,dL + \int\limits_{L_3} Bv\,dL\right] = \frac{\mu I a b v}{2\pi(x_0 + vt)(x_0 + b + vt)}$$

Zadanie 5. Ramka w kształcie trójkąta znajduje się w odległości x_0 od długiego przewodu z prądem I (jak na rys. 6.39) i leży w płaszczyźnie przewodu.



Rys. 6.39. Ilustracja do wyznaczania pola $\vec{B}$ trójkątnej ramki

Znaleźć:

a) strumień przenikający ramkę, jeżeli prąd jest stały, a ramka się nie obraca

Rozwiązanie:
W punktach odległych o x od przewodu pole magnetyczne ma postać:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi x}$$

$$\vec{B} \circ d\vec{S} = \frac{\mu I}{2\pi x} dxdz$$

Ponieważ powierzchnię S można przedstawić w postaci:

$$S: \begin{cases} z = -\frac{a}{b}(x - x_0 - b) \\ y = 0 \end{cases}$$

więc:

$$\Phi = \frac{\mu I}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+b} \frac{dx}{x} \int_0^{-\frac{a}{b}(x-x_0-b)} dz = \frac{\mu I a}{2\pi b} \int_{x_0}^{x_0+b} \frac{x_0 + b - x}{x} dx = \frac{\mu I a}{2\pi b}\left[(x_0 + b)\ln\frac{x_0 + b}{x_0} - b\right]$$

b) indukcyjność wzajemną między ramką a przewodem

Rozwiązanie:
Ponieważ:

$$M = \frac{\psi}{I}$$

gdzie strumień skojarzony:

$$\psi = \Phi$$

stąd na mocy podpunktu a):

$$M = \frac{\mu a}{2\pi b}\left[(x_0 + b)\ln\frac{x_0 + b}{x_0} - b\right]$$

Zadanie 6. Ramka z poprzedniego zadania porusza się z prędkością v w kierunku osi Ox_+. Znaleźć SEM zaindukowaną w ramce o z zwojach na skutek zmian prądu $I = I_0 \sin \omega t$.

Rozwiązanie:
Strumień:

$$\Phi = \frac{\mu I_0 z a}{2\pi b}\left[(x_0 + b)\ln\frac{x_0 + b}{x_0} - b\right]\sin \omega t$$

SEM jest sumą SEM transformacji i SEM translacji:

$$\mathrm{SEM}_T = \frac{\mu I_0 z a}{2\pi b}\left[(x_0 + b)\ln\frac{x_0 + b}{x_0} - b\right]\omega \cos \omega t$$

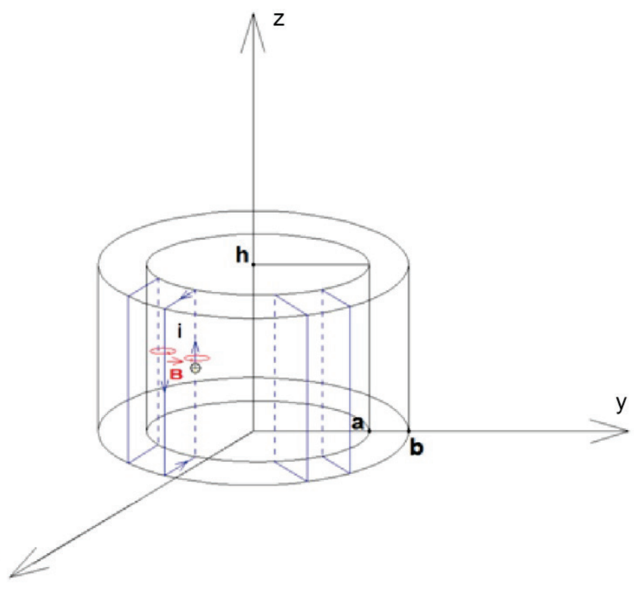
Uwzględniając, że $x_0 = vt$, SEM translacji (przesunięcia):

$$\mathrm{SEM}_P = -\frac{d\Phi}{dx_0}\frac{dx_0}{dv} = \frac{\mu I_0 z v}{2\pi}\left(\frac{a}{x_0} - \ln\frac{x_0 + b}{x_0}\right)\sin \omega t$$

ostatecznie:

$$e(t) = \mathrm{SEM}_T + \mathrm{SEM}_P$$

Zadanie 7. Znaleźć indukcyjność własną cewki toroidalnej o n zwojach (przez które płynie prąd stały) o promieniu wewnętrznym a, zewnętrznym b i wysokości h.



Rys. 6.40. Ilustracja do wyznaczania strumienia skojarzonego cewki toroidalnej

Rozwiązanie:
Prąd na powierzchniach górnej i dolnej cewki płynie wzdłuż promienia, a na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni bocznej płynie południkowo. Wektor indukcji pola magnetycznego leży w płaszczyźnie prostopadłej do przepływu prądu (linie pola są okręgami o środkach leżących na osi przewodu tworzącego zwój), jego kierunek wyznacza zaś reguła korkociągu.

Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami prąd I płynący w pojedynczym zwoju wytwarza pole $\vec{B}$ wyznaczone z prawa przepływu:

$$B 2\pi r = \mu I \; dla \; r \in \langle a, b \rangle$$

stąd:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

$\mu = \mu_0 \mu_r$, gdzie μ_r jest współczynnikiem przenikalności magnetycznej rdzenia cewki. Uwzględniając fakt przepływu prądu przez n zwojów:

$$\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu I n}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \text{ wewnątrz cewki} \\ 0 \text{ na zewnątrz cewki} \end{cases}$$

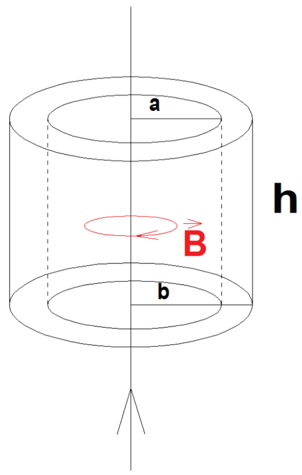
Strumień indukcji przenikający przez jeden zwój:

$$\Phi = \iint_D \frac{\mu I n}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu I n}{2\pi} \int_0^h dz \int_a^b \frac{1}{r} dr = \frac{\mu I n}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Strumień sprzężony $\psi = n\Phi$, więc indukcyjność własna cewki:

$$L = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu n^2 h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Zadanie 8. Znaleźć indukcyjność wzajemną cewki toroidalnej o n zwojów z prostoliniowym przewodem z prądem I przechodzącym przez oś cewki.



Rys. 6.41. Ilustracja do wyznaczania strumienia skojarzonego cewki toroidalnej

Rozwiązanie:
Pole $\vec{B}$ na zewnątrz prostoliniowego przewodu ma postać:

$$\vec{B} = \frac{\mu I}{2\pi r}\vec{e}_{\varphi}$$

Strumień przenikający cewkę (na mocy poprzedniego zadania):

$$\Phi = \frac{\mu I h n}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

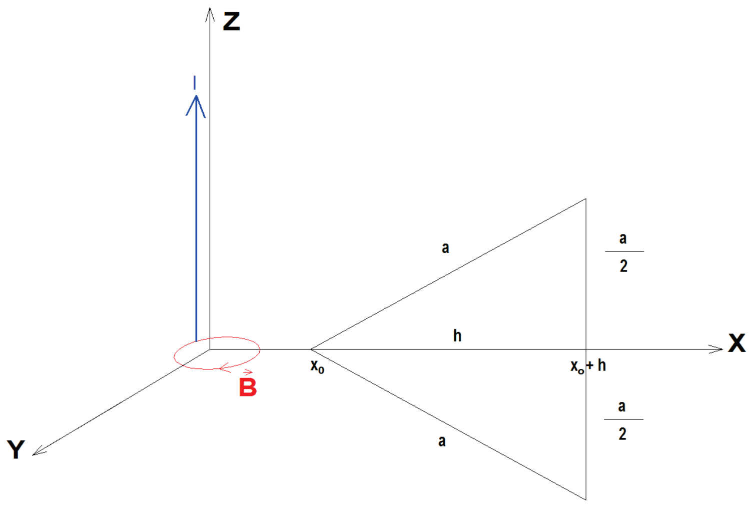
Strumień sprzężony:

$$\psi = n\Phi$$

stąd indukcyjność wzajemna:

$$M = \frac{\psi}{I} = \frac{\mu n^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

Zadanie 9. Ramka o n zwojach i kształcie jak na rys. 6.42 znajduje się w odległości x_0 od długiego przewodnika z prądem I. Znaleźć:
a) strumień przenikający ramkę,
b) indukcyjność wzajemną ramki i przewodu z prądem.



Rys. 6.42. Ilustracja do wyznaczania strumienia magnetycznego ramki trójkątnej

Rozwiązanie:
a)

I metoda

Strumień magnetyczny przenikający przez elementarną powierzchnię dS jest równy:

$$d\Phi = BdS$$

Ponieważ:

$$dS = \frac{2}{\sqrt{3}}(x - x_0)dx$$

oraz wokół przewodnika z prądem pole B jest równe:

$$B = \frac{\mu I}{2\pi x}$$

więc:

$$\Phi = \frac{\mu I}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+\frac{a\sqrt{3}}{2}} \frac{x - x_0}{x} dx = \frac{\mu I}{\pi\sqrt{3}} \left[\frac{a\sqrt{3}}{2} - x_0 \ln \frac{x_0 + \frac{a\sqrt{3}}{2}}{x_0} \right]$$

II metoda
Obszar D jest dany równaniem:

$$D: \begin{cases} z = \dfrac{x - x_0}{\sqrt{3}} \\ y = 0 \end{cases}$$

stąd:

$$\Phi = \frac{\mu I}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{dx}{x} \int_{-\frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{3}}}^{\frac{x-\frac{a}{2}}{\sqrt{3}}} dz = \frac{\mu I}{\pi} \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{x - x_0}{x} dx = \frac{\mu I}{\pi\sqrt{3}} \left[\frac{a\sqrt{3}}{2} - x_0 \ln \frac{x_0 + \frac{a\sqrt{3}}{2}}{x_0} \right]$$

b)

$$\psi = n\Phi$$

stąd:

$$M = \frac{\mu n}{\pi\sqrt{3}} \left[\frac{a\sqrt{3}}{2} - x_0 \ln \frac{x_0 + \frac{a\sqrt{3}}{2}}{x_0} \right]$$

Zadanie 10. Uzasadnić słuszność równania ciągłości przepływu prądu $div\, \vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$.

Rozwiązanie:
Z twierdzenia Gaussa wynika, że całkowity prąd wypływający z powierzchni zamkniętej S otaczającej obszar V jest równy:

$$I = \iint_S \vec{J} \circ d\vec{S} = \iiint_V div\, \vec{J} dV$$

Prąd I jest równy prędkości wypływu ładunku ρ_V z obszaru V, czyli:

$$I = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$$

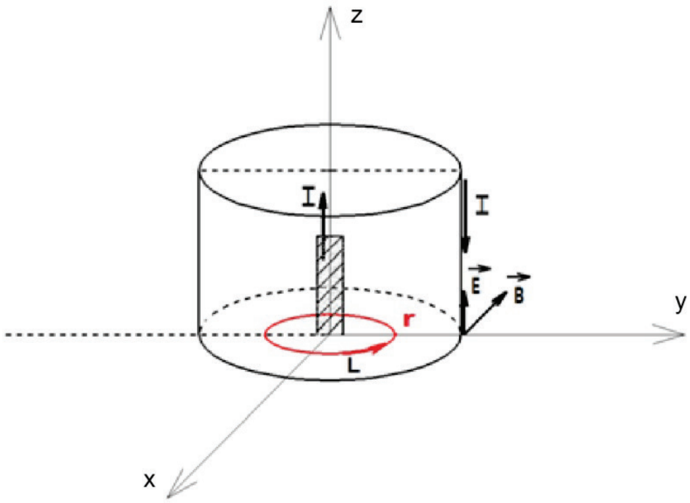
stąd:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\iiint_V \rho_V dV \right) = \iiint_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV = \iiint_V div\, \vec{J} dV$$

więc:

$$div\, \vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$$

Zadanie 11. Prąd zmienny $I(t) = I_0 cos\omega t$ płynie wzdłuż długiego, prostoliniowego przewodnika i zawraca po powierzchni współosiowego walca o promieniu a. Znaleźć całkowity prąd przesunięcia.



Rys. 6.43. Ilustracja do wyznaczania prądu przesunięcia w przewodniku walcowym

Rozwiązanie:
Ponieważ prąd zawraca po powierzchni walca, więc pole elektromagnetyczne istnieje wewnątrz walca. Z prawa Ampere'a cyrkulacja wektora $\vec{B}$ po linii L jest równa:

$$\oint_L \vec{B} \circ d\vec{L} = 2B\pi r = \mu_0 I = \mu_0 I_0 \cos\omega t$$

stąd:

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I_0 \cos\omega t}{2\pi r}\ dla\ r < a \\ 0\ dla\ r > a \end{cases}$$

$$\vec{B} = -B\vec{e}_\varphi$$

Strumień wektora $\vec{B}$ przez powierzchnię:

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \circ d\vec{S} = \iint_S \frac{\mu_0 I_0 \cos\omega t}{2\pi r}\vec{e}_\varphi \circ d\varphi dr\vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0 I_0 \cos\omega t}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^a \frac{dr}{r} =$$
$$= \mu_0 I \cos\omega t\, ln\frac{a}{r}$$

Ponieważ:

$$\oint_L \vec{E} \circ d\vec{L} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

więc:

$$E\int_{0}^{2\pi} d\varphi = \mu_0 I_0 \omega \sin\omega t\, ln\frac{a}{r}$$

stąd:

$$E = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi}\sin\omega t\, ln\frac{a}{r}$$

Gęstość prądu przesunięcia:

$$\vec{J}_{przes} = \varepsilon_0\frac{d\vec{E}}{dt} = \frac{\varepsilon_0\mu_0 I_0\omega^2}{2\pi}\cos\omega t\, ln\frac{a}{r}$$

Całkowity prąd przesunięcia wewnątrz walca:

$$I_{przes} = \iint_S \vec{J}_P \circ d\vec{S} = \frac{\varepsilon_0\mu_0 I_0\omega^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \cos\omega tr\, ln\frac{a}{r}dr = = \varepsilon_0\mu_0 I_0\omega^2\cos\omega t\int_0^a r\, ln\frac{a}{r}dr$$

Obliczając całkę metodą całkowania przez części i uwzględniając, że:

$$\lim_{r\to 0} r^2 \ln\frac{a}{r} = 0$$

(na mocy twierdzenia de l'Hospitala) otrzymamy:

$$\int_0^a r\, ln\frac{a}{r}dr = \frac{a^2}{4}$$

więc ostatecznie:

$$I_{przes} = \frac{\varepsilon_0\mu_0 I_0\omega^2 a^2}{4}\cos\omega t$$

przy czym:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 3\cdot 10^8\, {}^{m}/_{s}$$

oznacza prędkość światła (falową).

Zadanie 12. Znaleźć pole elektryczne w punktach na okręgu o promieniu R, indukowane przez pole magnetyczne $\vec{B}(t)$ zmienne w czasie t, skierowane prostopadle do powierzchni ograniczonej okręgiem.

Rozwiązanie:

$$\int_L \vec{E}\circ d\vec{L} = E2\pi R = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}[\pi R^2 B(t)] = -\pi R^2\frac{dB}{dt}$$

$$E2\pi R = -\pi R^2\frac{dB}{dt}$$

$$\vec{E} = -\frac{R}{2}\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Zestawienie podstawowych wzorów

I. Elektrostatyka (ładunki są stacjonarne)

$\vec{E}$	–	natężenie pola elektrycznego
φ_E	–	potencjał pola $\vec{E}$
Q	–	ładunek (źródło)
ρ	–	gęstość ładunku
$\vec{D}$	–	indukcja pola elektrycznego
$\Phi_{\vec{D}}$	–	strumień indukcji
C_E	–	cyrkulacja pola $\vec{E}$
$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \left[\frac{F}{m}\right]$	–	przenikalność dielektryczna próżni
ε_r	–	względna przenikalność dielektryczna ośrodka

Równania Maxwella dla elektrostatyki

1. Postać różniczkowa

w próżni:

$$div\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ (prawo Gaussa)}$$

$$rot\ \vec{E} = 0$$

w dielektryku:

$$div\ \vec{D} = \rho$$

$$rot\ \vec{D} = 0$$

2. Postać całkowa (z twierdzenia Stokesa)

$$C_E = \oint_L \vec{E} \circ d\vec{L} = \iint_S rot\ \vec{E} \circ d\vec{S} = 0$$

gdzie krzywa L jest brzegiem powierzchni S

$$\Phi_D = \iint_S \vec{D} \circ d\vec{S} = \sum_i q_i = Q$$

(całkowity ładunek swobodny wewnątrz powierzchni S)

Przy czym:
$dQ = \rho_L dL$ (ρ_L – gęstość liniowa)
$dQ = \rho_S dS$ (ρ_S – gęstość powierzchniowa)
$dQ = \rho_V dV$ (ρ_V – gęstość objętościowa)

3. Potencjał skalarny

Potencjał skalarny φ znajdujemy ze związku:

$$\vec{E} = -grad\ \varphi$$

lub z równania Poissona

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Twierdzenie Gaussa:

$$\iint_S \vec{E} \circ d\vec{S} = \iiint_V div\ \vec{E} dV$$

gdzie S jest powierzchnią Gaussa ograniczającą obszar V

II. Magnetostatyka

$\vec{H}$	–	wektor natężenia pola magnetycznego
$\vec{B}$	–	wektor indukcji magnetycznej
Φ	–	strumień magnetyczny
φ	–	strumień sprzężony (skojarzony)
$\vec{J}$	–	wektor gęstości prądu
$\vec{A}$	–	potencjał wektorowy
$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{A}{m}$	–	przenikalność magnetyczna próżni
μ_r	–	względna przenikalność magnetyczna ośrodka

Równania Maxwella dla magnetostatyki

1. Postać różniczkowa

w próżni:

$$div\ \vec{B} = 0$$

(prawo źródeł = prawo Gaussa)

$$rot\ \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

(prawo Ampere’a)

w materii:

$$rot\ \vec{H} = \vec{J}_{swobodny}$$

2. Postać całkowa

w próżni:

$$\int_L \vec{B} \circ d\vec{L} = \mu_0 I_C$$

I_C – całkowity prąd otoczony konturem L (Ampere'a)

w materii:

$$\int_L \vec{H} \circ d\vec{L} = I_C$$

I_C – całkowity prąd swobodny, płynący przez kontur Ampere'a

3. Potencjał wektorowy

$$div\,\vec{A} = 0 \qquad rot\,\vec{A} = \vec{B}$$

4. Strumień magnetyczny przez powierzchnię S

$$\Phi_B = \iint_S \vec{B} \circ d\vec{S} \qquad \Phi_H = \iint_S \vec{H} \circ d\vec{S}$$

Z twierdzenia Gaussa

$$\Phi_B = \iiint_V div\,\vec{B}\,dV = 0$$

przez dowolną powierzchnię zamkniętą S otaczającą obszar V

5. Równania materiałowe

w próżni:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

w materii:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

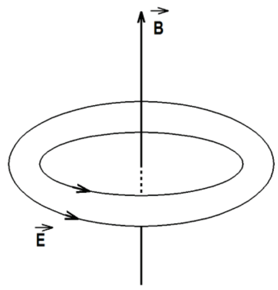
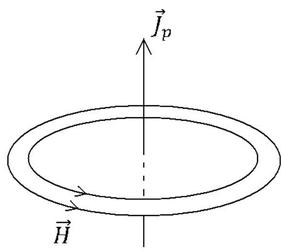
$\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (prawo Ohma)

gdzie σ to przewodność elektryczna

III. Pola elektrodynamiczne (zmienne w czasie)

Równania Maxwella

Tablica 1. Postać różniczkowa

W próżni		W materii
$div\,\vec{E} = 0$ $rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $div\,\vec{B} = 0$ $rot\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ 	$div\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ (prawo Gaussa) $rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (prawo Faradaya) $div\,\vec{B} = 0$ $rot\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (prawo Ampere'a) $\vec{J}$ – gęstość prądu przewodzenia $\vec{J}_P = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ – gęstość prądu przesunięcia 	Występują prądy swobodne i ładunki $div\,\vec{D} = \rho$ $rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $div\,\vec{B} = 0$ $rot\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Tablica 2. Postać całkowa

$\oint_L \vec{E} \circ d\vec{L} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \circ d\vec{S}$	$\oint_L \vec{H} \circ d\vec{L} = \iint_S (\vec{J} + \vec{J}_P) \circ d\vec{S}$	$\oint_L \vec{B} \circ d\vec{L} = \mu_0 \iint_S \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \circ d\vec{S}$

Literatura

1. Frisz S., Timoriewa A., *Fizyka*, t. II, Warszawa, PWN 1965.
2. Griffiths D., *Podstawy elektrodynamiki*, Warszawa, PWN 2001.
3. Jackson J.D., *Elektrodynamika klasyczna*, Warszawa, PWN 1982.
4. Karaśkiewicz E., *Zarys teorii wektorów i tensorów*, Warszawa, PWN 1976.
5. Krakowski M., *Elektrotechnika teoretyczna*, t. II, Warszawa, PWN 1983.
6. Kurdziel R., *Podstawy elektrotechniki*, Warszawa, WNT 1971.
7. Pczelin B.K., Analiza wektorowa dla inżynierów, Warszawa, PWN 1971.
8. Piątek Z., Jabłoński P., *Podstawy teorii pola elektromagnetycznego*, Warszawa, WNT 2010.
9. Purcell E.M., *Elektryczność i magnetyzm*, Warszawa, PWN 1971.
10. Wierzbicki M., *Elektrodynamika klasyczna*, Warszawa, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej 2008.